



HAL
open science

La trajectographie du point de vue de la théorie des observateurs

Guchuan Zhu

► **To cite this version:**

Guchuan Zhu. La trajectographie du point de vue de la théorie des observateurs. Automatique / Robotique. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1992. Français. NNT : 1992ENMP0375 . pastel-00838264

HAL Id: pastel-00838264

<https://pastel.hal.science/pastel-00838264>

Submitted on 25 Jun 2013

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS

par

Guchuan ZHU

en vue de l'obtention du titre de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

Spécialité

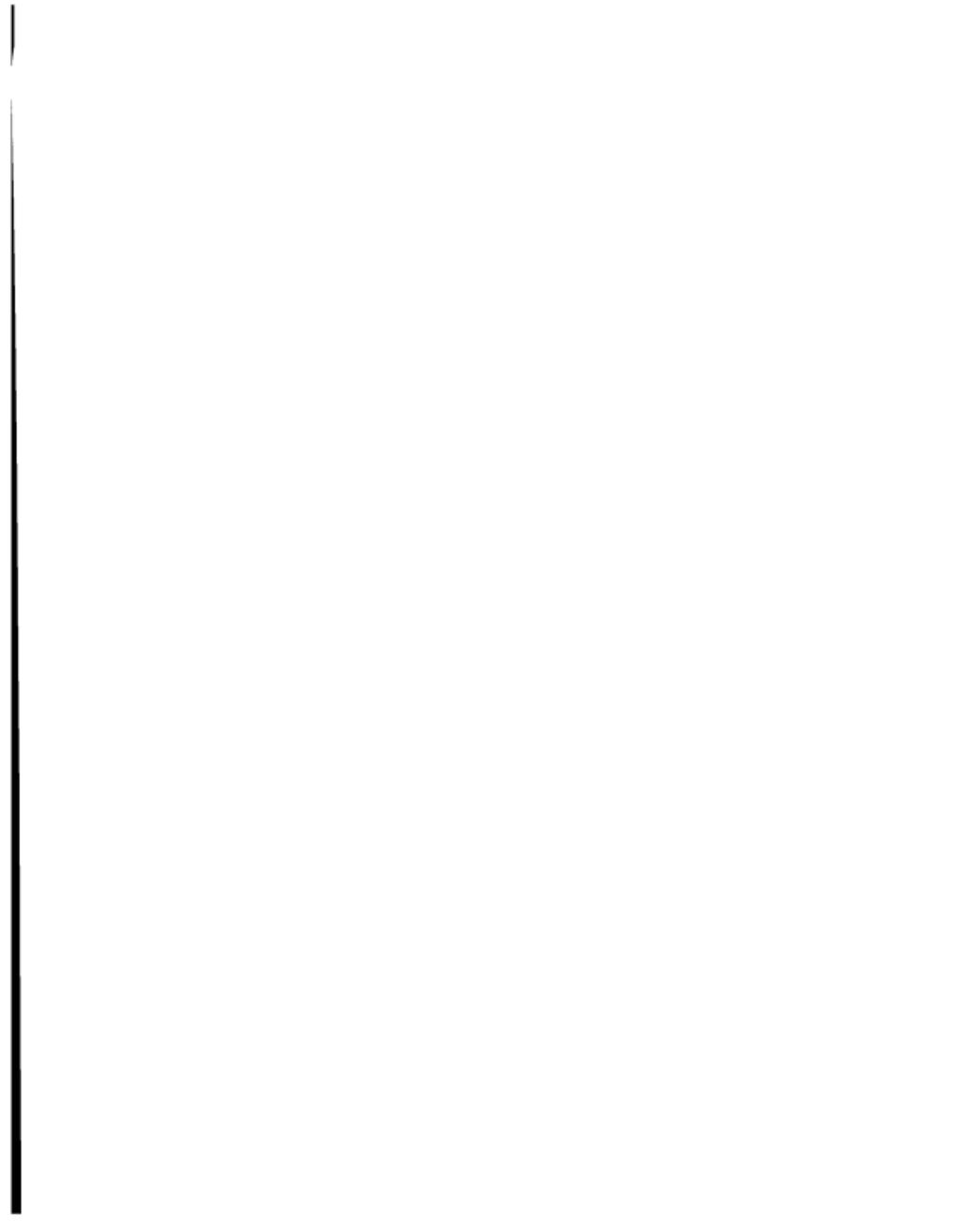
MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE

Sujet de la thèse

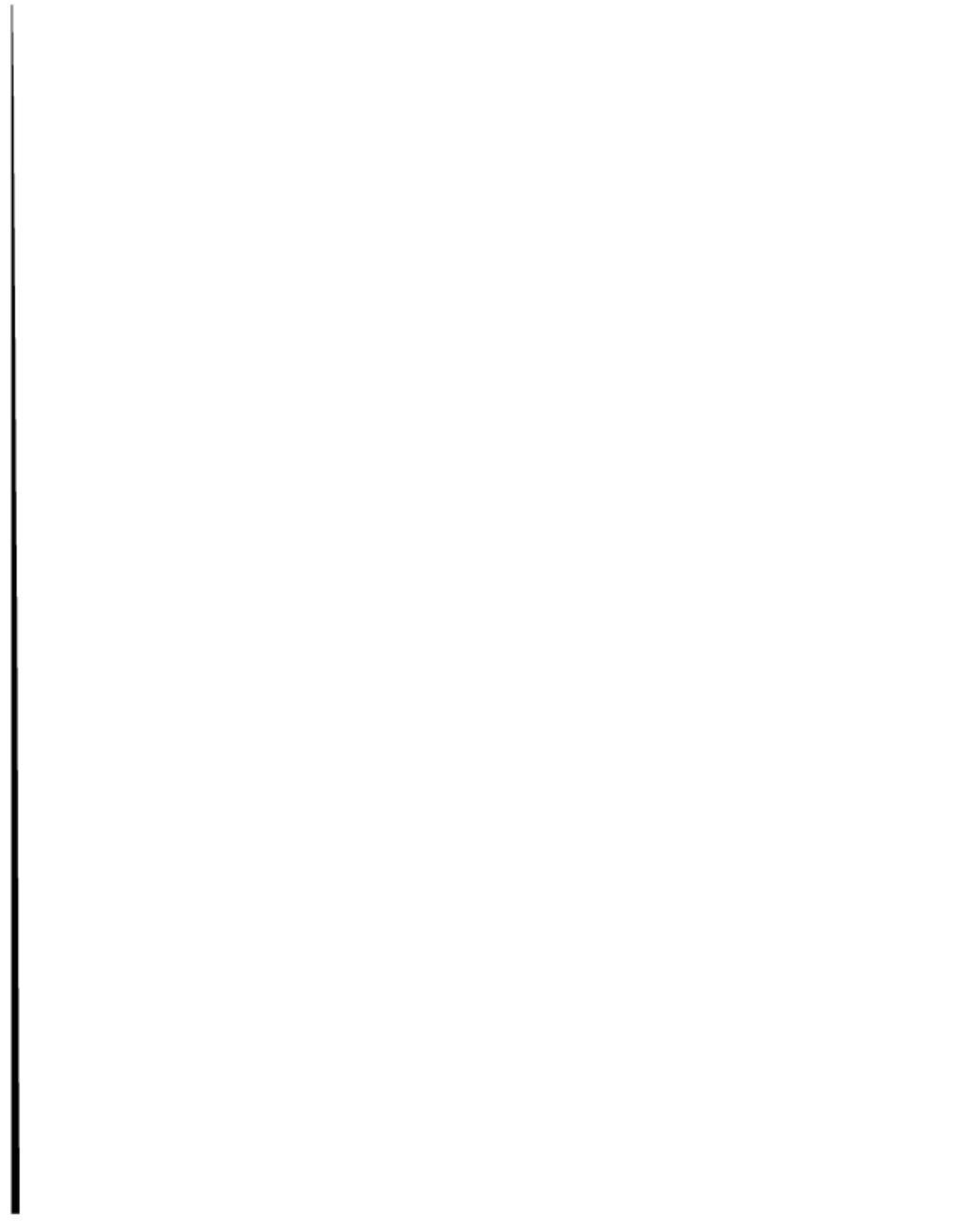
**LA TRAJECTOGRAPHIE DU POINT DE VUE DE
LA THEORIE DES OBSERVATEURS**

soutenue le 7 Décembre 1992 devant le jury composé de

MM. Ivan KUPKA	Président
Georges BASTIN	Rapporteur
Michel FLIESS	Rapporteur
Riccardo MARINO	Rapporteur
Jean LÉVINE	Examineur
Hector SUSSMANN	Examineur



à Hongye et Simon-Bo



REMERCIEMENTS

Je remercie Ivan Kupka de me faire l'honneur de présider ce jury.

Je remercie Georges Bastin, Michel Fliess et Riccardo Marino pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en acceptant d'être rapporteurs de cette thèse. Je suis particulièrement reconnaissant à Michel Fliess pour ses remarques sur ce travail.

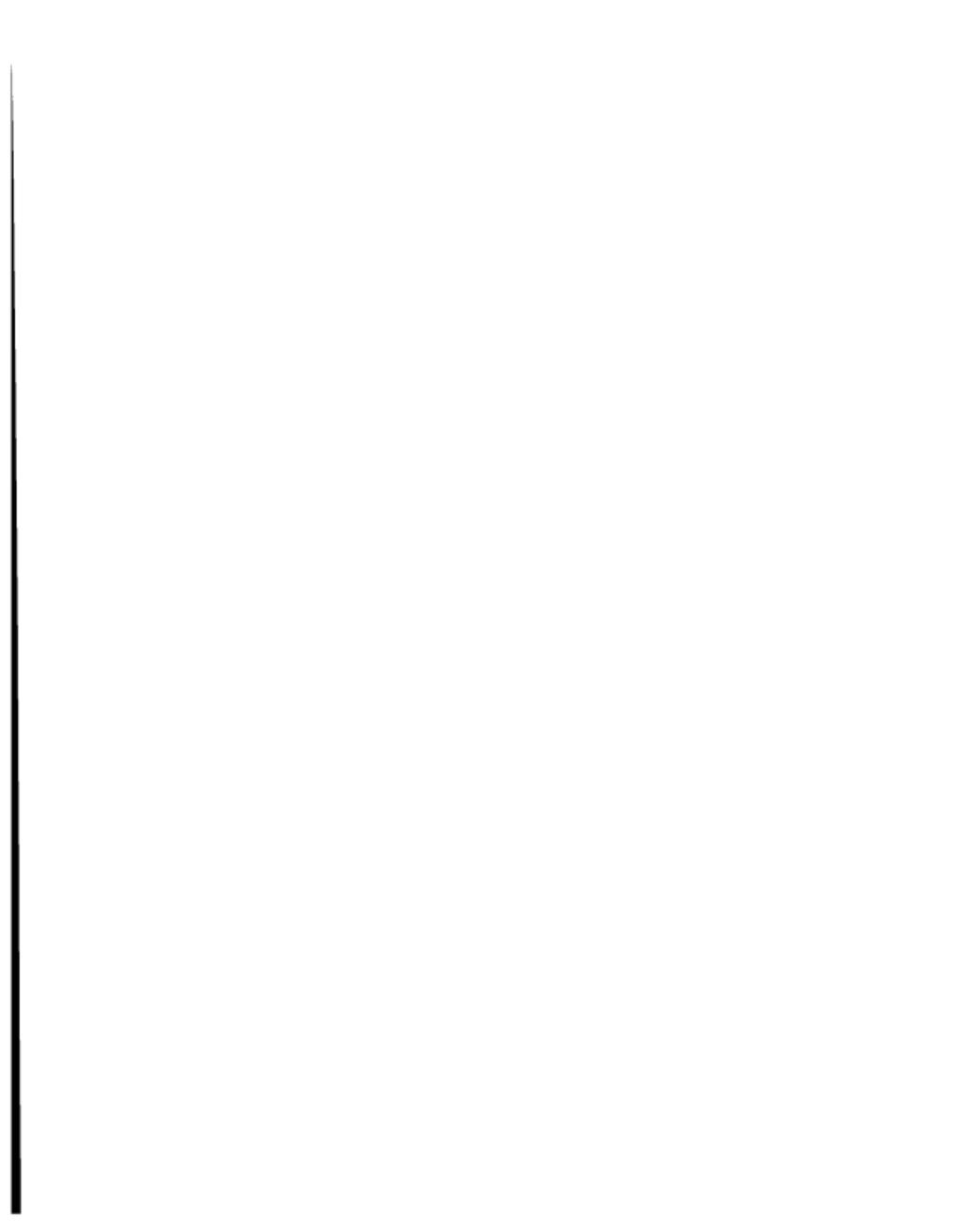
Je remercie Hécator Sussman de me faire l'honneur d'être membre du jury.

Je remercie Jean Lévine, mon directeur de thèse, de m'avoir accueilli il y a plus de trois ans au CAS et d'avoir accepté de diriger ma thèse. Il m'a orienté dans mes travaux et aidé par ses conseils précieux. Ses solides connaissances scientifiques m'ont permis de travailler sur de nouvelles voies de recherche. Je tiens aussi à le remercier d'avoir consacré de nombreuses heures à l'amélioration tant sur le fond que sur la forme de ce document. Sans son aide, ce travail n'aurait pas vu le jour. Pour les perspectives qu'il m'a ouvertes en Automatique, sa disponibilité et sa gentillesse, je lui suis infiniment reconnaissant.

Je remercie l'ensemble des membres du Centre Automatique et Systèmes, les permanents et les thésards, pour l'ambiance détendue qui y régnait, notamment Guy Cohen avec qui j'ai eu mes premiers contacts dans cette équipe, et Pierre Carpentier pour la patience avec laquelle il endure mes nombreuses interrogations sur l'informatique. Je suis en particulier reconnaissant à Madame Le Gallic pour sa gentillesse et sa disponibilité constante.

Je n'oublierai pas la personne qui a suivi de très près mes premiers pas en automatique et traitement du signal. A Shi-yi Mao, Professeur à l'Université Aérospatiale et Astronautique de Pékin, je veux exprimer ma gratitude de m'avoir ouvert le chemin de cette "aventure" et de m'avoir encouragé depuis toujours.

Finalement, je remercie de nombreux thésards dont les remerciements m'ont servi à rédiger ce paragraphe.



RÉSUMÉ

Cette thèse est consacrée à l'étude de la trajectographie du point de vue de la théorie des observateurs.

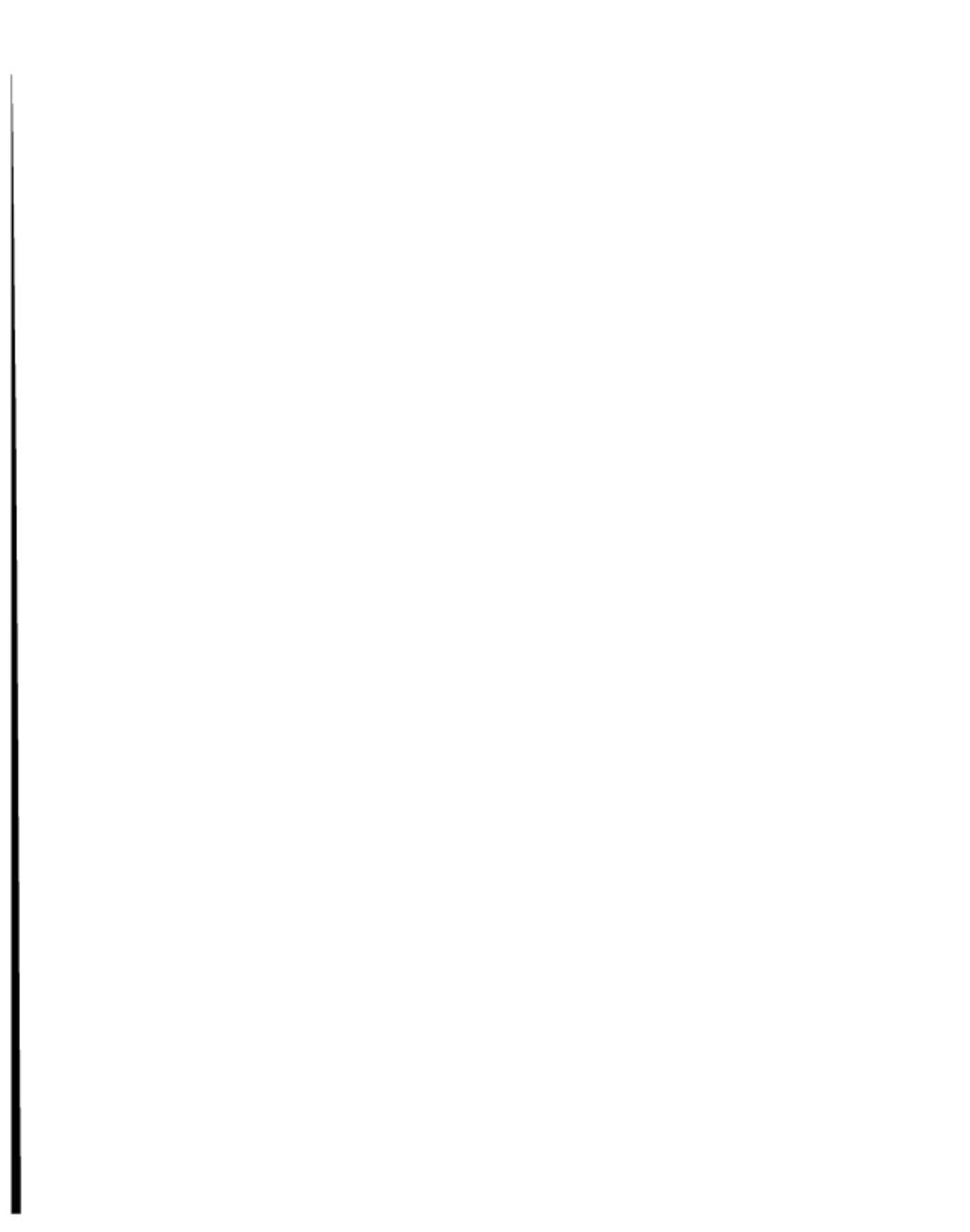
On présente d'abord le problème de trajectographie et les modèles des systèmes utilisés pour la poursuite active et passive. On étudie ensuite l'observabilité de ces systèmes après avoir rappelé les critères d'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires. On présente également les principaux résultats de la théorie de l'observateur et des méthodes de construction d'observateurs dans les cas linéaire stationnaire, instationnaire et non linéaire.

On se concentre ensuite sur le problème de construction d'observateur pour les systèmes linéaires instationnaires avec singularité polynomiale à l'infini. On introduit les notions originales d'observabilité asymptotique et d'observateur à gain asymptotique. De tels observateurs dont la construction est basée sur la théorie des formes normales de Poincaré-Dulac sont particulièrement faciles à mettre en œuvre, puisque le gain est constant dans l'échelle de temps la plus rapide. On donne des conditions suffisantes de convergence d'observateur construit à partir de la forme canonique observateur d'un système à coefficients dans un corps de Hardy. Ces résultats sont appliqués à la poursuite en ligne droite.

Comme la trajectographie est un problème intrinsèquement non linéaire, diverses constructions d'observateurs non linéaires sont étudiées. Après avoir rappelé des résultats négatifs : non existence d'observateur par les méthodes d'immersion et de linéarisation de l'équation d'erreur par injection de sortie dans le cas passif, nous analysons les conditions de convergence d'un observateur par immersion approchée. Une autre approche est aussi proposée, basée sur la transformation sous forme canonique observateur du linéarisé tangent du système. On montre dans des cas de trajectographie la convergence locale de cet observateur. Des simulations numériques sont présentées pour chaque méthode.

Mots-clefs :

Trajectographie active et passive. Systèmes de poursuite. Observabilité. Observateurs, Équivalence de Poincaré-Dulac. Corps de Hardy.



ABSTRACT

In this thesis, the tracking problem is studied by means of Observer Theory.

Firstly we present the active and passive tracking problems and the associated models. The observability of these systems is studied after recalling observability criteria for linear and nonlinear systems. We outline the main results of observer theory and propose several approaches to construct an observer in the linear stationary and time-varying case and in the nonlinear case.

We then focus on the problem of construction of observers for a class of linear time-varying systems with polynomial singularity at infinity. The original concepts of asymptotic observability and observers with asymptotic gain are introduced. Such observers, whose construction is based on the Poincaré-Dulac theory of normal forms, are particularly easy to implement since the gain can be chosen constant with respect to the fastest time-scale. We present also sufficient conditions for the convergence of observers using the observer canonical form for linear systems with coefficients in a Hardy field. These approaches are applied to the one dimensional tracking problem.

Tracking problems being intrinsically nonlinear, the problem of nonlinear observers is studied. We first present two negative results: nonexistence of observers by means of immersion and linearization by output injection for passive tracking. We then analyze the convergence of observers obtained by approximate immersion. Another approach is also proposed, based on transforming the tangent linearization of the system into observer canonical form. We show the convergence of this observer in several tracking examples. Numerical simulations are presented for every methods.

Key words:

Active and passive tracking, Tracking systems, Observability, Observers, Poincaré-Dulac equivalence, Hardy fields.

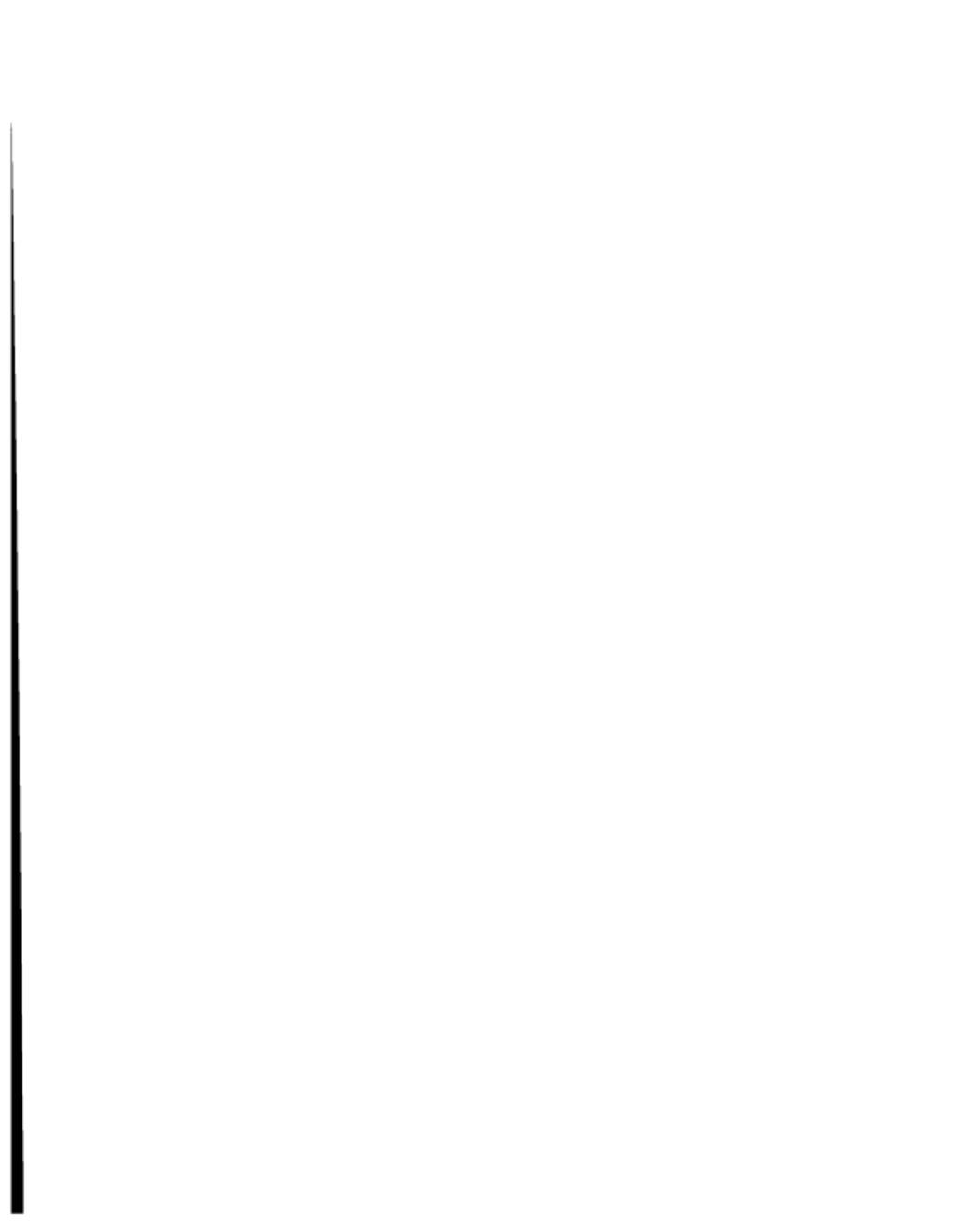


Table des matières

1	Introduction	1
2	Présentation du problème de trajectographie	5
2.1	Introduction	5
2.2	Poursuite en ligne droite	7
2.3	Modèle de trajectographie en coordonnées cartésiennes	7
2.4	Modèle de trajectographie en coordonnées polaires	9
2.5	Modèle de trajectographie en coordonnées polaires modifiées	9
3	Rappels sur l'observabilité	13
3.1	Présentation générale	13
3.2	Observabilité des systèmes non linéaires	13
3.3	Observabilité des systèmes linéaires instationnaires	17
3.3.1	Observabilité des systèmes linéaires à temps variable non singuliers	17
3.3.2	Observabilité du linéarisé tangent des systèmes non linéaires	19
3.3.3	Formes canoniques	21
3.4	Analyse de l'observabilité des problèmes de trajectographie	29
3.4.1	Trajectographie en repère fixe	29
3.4.1.1	Cas actif	29
3.4.1.2	Cas passif	30
3.4.2	Trajectographie passive en repère mobile	31
3.4.2.1	Poursuite dans le plan	32
3.4.2.2	Poursuite dans l'espace	32
3.4.2.3	Cas dégénérés	34
4	Rappels sur les observateurs	37
4.1	Observateurs asymptotiques	37
4.2	Observateurs linéaires	38
4.2.1	Observateur de Luenberger	38
4.2.2	Observateurs de systèmes à temps variable non singuliers	41
4.3	Observateurs non linéaires	44
4.3.1	Linéarisation exacte de la dynamique d'erreur	44
4.3.2	Immersion	47
4.3.3	Méthodes du type de Lyapunov	50

5	Aspects asymptotiques d'observabilité et des observateurs pour les systèmes linéaires instationnaires	53
5.1	Observabilité asymptotique	53
5.2	Observateurs à gain asymptotique	57
5.3	Observateurs dans le cas non asymptotiquement observable	58
5.4	Systèmes à coefficients dans un corps de Hardy	64
6	Observateurs non linéaires pour le problème de trajectographie	73
6.1	Résultats négatifs	73
6.2	Immersion approchée	74
6.3	Approximation linéaire	78
6.3.1	Approche de l'approximation linéaire	78
6.3.2	Poursuite en coordonnées cartésiennes	96
6.3.2.1	Le cas actif	96
6.3.2.2	Le cas passif	97
6.3.3	Poursuite passive en coordonnées polaires modifiées	103
6.3.3.1	Le cas sans commande	103
6.3.3.2	Le cas avec commande	105
6.4	Annexe Preuve de la proposition 6.2	112
7	Conclusion	117
A	Rappels sur la théorie de formes normales	119
A.1	Formes normales des systèmes non linéaires	119
A.2	Formes normales des systèmes linéaires instationnaires	121
A.2.1	Points singuliers, équivalences formelles et formes normales	122
A.2.2	Convergences de séries formelles	125
A.3	Stabilité de systèmes instationnaires au point singulier	126
B	Rappels sur les corps de Hardy	129

Chapitre 1

Introduction

Le problème de trajectographie a été étudié depuis longtemps. Beaucoup d’algorithmes sont proposés sur ce problème, les techniques les plus classiques étant par exemple la régression des données, les moindres carrés, etc. La plupart des travaux dans ce domaine sont étroitement liés à la théorie des systèmes, et par conséquent leur développement est une des sources des progrès réalisés sur ce sujet.

Nous nous intéressons dans ce travail aux méthodes permettant de traiter en temps réel les signaux donnant des indications sur l’état d’un ou plusieurs mobiles reçus par un capteur, par exemple un radar, un sonar, un instrument optique ou laser, etc. Ce problème est connu sous le nom plus populaire de poursuite.

La poursuite contient en effet deux catégories de problèmes. Le premier consiste à garder matériellement dans le champ du capteur la cible. L’autre type de problème consiste plus simplement à surveiller les cibles, la poursuite étant effectuée par un programme numérique. Le but est ainsi d’arriver à tracer la “trajectoire” de la cible, indépendamment du fonctionnement de l’antenne. C’est le cas que nous allons étudier. La poursuite est formulée comme un système dynamique représentant la cible mobile dont le capteur peut observer les caractéristiques. Lorsqu’on considère le fait que le système dynamique et l’observation sont perturbés par des signaux inconnus, on pose le problème en termes de systèmes stochastiques et la technique la plus souvent utilisée dans cette approche est le filtrage.

Les premières tentatives relatives à l’application de la technique du filtrage au problème de trajectographie remontent aux travaux de Wiener [90] qui portent sur le traitement des données issu d’un radar. La technique de Wiener a apporté une amélioration considérable sur les performances des systèmes traditionnels.

Depuis le début des années 60, la naissance de la théorie du filtrage de Kalman–Bucy (une généralisation du filtrage de Wiener) [18, 46, 48] a donné une impulsion considérable aux études dans ce domaine. Grâce à une structure récurrente, les algorithmes de poursuite basés sur le filtrage de Kalman sont faciles à mettre en œuvre sur ordinateur. Il y a une abondante littérature sur les applications de cette technique au problème de trajectographie. Citons, par exemple, les livres de Bar-Shalom et Fortmann [4] et de Jazwinski [46], et l’article de Chang et Tabaczynski [21].

Le problème de trajectographie est modélisé la plupart du temps par un système non linéaire. En ce qui concerne les algorithmes mis en œuvre sur les systèmes actuels, ils sont

basés sur une forme modifiée du filtrage de Kalman appelée filtrage de Kalman étendu. Bien que ces algorithmes aient été appliqués avec succès (on citera le célèbre plan "Apollo" aux Etats-Unis), la convergence est très difficile à vérifier. Pour un problème pratique, la convergence du filtrage est déterminée souvent de manière empirique, par exemple par la simulation dans les conditions prévues sous lesquelles fonctionnera le système. Même si cette approche est peu convaincante, elle peut donner en pratique de bons résultats.

La méthode du filtrage non linéaire qui consiste à rechercher une loi conditionnelle de l'état sachant toute l'histoire de l'observation est rarement utilisable dans le problème de trajectographie (voir par exemple [69]). En effet, le calcul de la densité d'une loi conditionnelle se ramène à une équation aux dérivées partielles stochastique appelée équation de Zakai, et par suite est un problème de dimension infinie. Bien que des méthodes approchées ou numériques aient été proposées pour résoudre l'équation de Zakai, leur complexité rend la mise en œuvre très difficile.

Le cas où la solution d'une équation de Zakai s'exprime à l'aide d'un système de dimension finie, cas appelé filtre de dimension finie, bien que favorable au calcul, s'avère très rare en pratique : la condition garantissant l'existence d'un tel filtre est rarement vérifiée (voir par exemple [53, 69]). Tout cela explique pourquoi le filtrage exact est si peu utilisé, et le filtrage de Kalman étendu si populaire.

Dans ce travail, nous étudions le problème de trajectographie du point de vue de la théorie de l'observateur. On adopte une démarche déterministe, en ce sens qu'on ne considère que des systèmes non perturbés. Cela nous permet d'utiliser les progrès récents de la théorie des systèmes non linéaires. Un observateur est un système dynamique servant à reproduire correctement l'état du système original à partir de la sortie de ce dernier. La vérification de la convergence d'observateur est indispensable, et une étude empirique est largement insuffisante. En revanche, l'analyse de la convergence de l'algorithme nous permet de garantir les performances du système.

Bien que les systèmes déterministes soient des modèles idéaux en pratique, les études basées sur de tels systèmes nous permettent de mieux comprendre les phénomènes qui apparaissent dans le problème de trajectographie.

Une contribution principale de ce travail concerne la construction d'observateur pour les systèmes linéaires instationnaires. Dans le cas où les coefficients du système dépendent du temps de manière continue et bornée, une des méthodes les plus souvent utilisées est basée sur le filtrage de Kalman. En outre, pour éviter de recalculer le gain du filtre ou de l'observateur à tout instant, une méthode classique consiste à utiliser à la place du gain variable sa limite lorsque le temps tend vers l'infini [4]. Cette méthode induit des simplifications de mise en œuvre notoires. On sait qu'une telle limite existe sous certaines hypothèses restrictives et il nous a semblé important de déterminer jusqu'où cette méthode pouvait être étendue. Plus exactement, si l'on considère un système linéaire instationnaire à coefficients polynômiaux en temps au voisinage de l'infini, on montre qu'un observateur peut être synthétisé avec un gain constant, si l'on se place dans l'échelle de temps la plus rapide, si le système est asymptotiquement observable. Lorsque cette dernière propriété n'est pas vérifiée, on montre qu'il n'existe pas en général d'observateur à gain constant au sens ci-dessus et que l'on est obligé de choisir un gain instationnaire. La croissance en temps d'un tel gain peut être alors caractérisée dans le cas des systèmes à coefficients dans un corps de Hardy. En effet, on montre que le gain peut être choisi dans la plus

grande classe de comparabilité du corps si le système est H-observable (voir la définition dans le chapitre 5). Une construction explicite de l'observateur est ainsi proposée. Ces méthodes peuvent être étendues au cas non linéaire par linéarisé tangent.

Nous remarquons par ailleurs que dans beaucoup d'applications, les observateurs conçus par la méthode du filtrage de Kalman convergent en horizon fini, mais explosent au bout d'un certain moment. La notion d'observabilité asymptotique peut donner une explication à ce phénomène. On montre en effet sur un exemple de trajectographie, l'impossibilité de construire un observateur à gain constant exponentiellement stable, alors que le système admet un observateur à gain constant dont l'erreur d'estimation est exponentiellement décroissante sur tout horizon fini mais ayant une singularité à l'infini, ce qui provoque la divergence. L'utilisation des observateurs à gain instationnaire synthétisés par la méthode des corps de Hardy permet ainsi d'éviter ce type de phénomène. Notons que la convergence de l'observateur se fait au prix d'une croissance du gain au moins aussi rapide que les fonctions du temps les plus rapides engendrées par les coefficients du système.

La formulation du problème de trajectographie est présentée au chapitre 2. Nous divisons ce problème en plusieurs catégories selon la dimension de l'espace dans lequel évoluent les trajectoires, ou selon la disponibilité de certaines observations. Nous présentons les modèles les plus souvent utilisés.

Au chapitre 3 nous parlons de l'observabilité, un concept fondamental en théorie des systèmes ainsi que pour la construction d'observateur. Nous rappelons des critères d'observabilité pour les systèmes linéaires et non linéaires. Ensuite, nous appliquons ces critères à l'analyse de l'observabilité des différents modèles de trajectographie. Dans ce chapitre, nous rappelons également une méthode systématique pour ramener un système linéaire instationnaire sous forme canonique, une forme convenable pour concevoir un observateur.

Le chapitre 4 donne une présentation générale de la théorie de l'observateur. Nous rappelons d'abord la définition des observateurs, puis présentons des méthodes de construction d'observateurs dans le cas linéaire stationnaire, instationnaire et non linéaire. Nous nous intéressons plus particulièrement aux algorithmes susceptibles de s'appliquer au problème de trajectographie.

Dans le chapitre 5 nous nous intéressons à une classe particulière de systèmes linéaires instationnaires : les systèmes avec singularité polynomiale à l'infini. Nous introduisons les notions originales d'observabilité asymptotique et d'observateur à gain asymptotique. On montre que ces observateurs existent sous la condition d'observabilité asymptotique, et leur construction est basée sur la théorie des formes normales de Poincaré-Dulac. Nous étudions également les systèmes linéaires instationnaires à coefficients dans un corps de Hardy. On propose une construction de l'observateur à partir de la forme canonique et donne des conditions suffisantes de convergence de cette dernière méthode. Ces résultats sont appliqués à la poursuite en ligne droite.

Au chapitre 6, nous considérons le problème de poursuite dans le plan et dans l'espace. Comme les systèmes correspondant à ce cas sont a priori non linéaires, le problème de construction de l'observateur non linéaire est étudié. Après avoir rappelé des résultats négatifs dans le cas passif non existence d'observateur par les méthodes d'immersion et de linéarisation de l'équation d'erreur par injection de sortie, nous analysons les condi

tions de convergence d'un observateur par immersion approchée. Une autre approche est aussi proposée, basée sur la transformation sous forme canonique observateur du linéarisé tangent du système. On montre dans des cas de trajectographie la convergence locale de cet observateur. Des simulations numériques sont présentées pour chaque méthode.

À l'annexe A, nous résumons la théorie des formes normales qui constitue la base mathématique pour l'étude de l'observateur à gain asymptotique.

Finalement, quelques éléments essentiels de la théorie des corps de Hardy sont rappelés dans l'annexe B.

Chapitre 2

Présentation du problème de trajectographie

2.1 Introduction

Le problème de trajectographie se divise grossièrement en trois catégories : poursuite en ligne droite, poursuite dans le plan et poursuite dans l'espace. Les deux derniers sont présentés dans les figures 2.1 et 2.2 respectivement. Dans ces figures, le capteur (antenne, radar, système optique, laser, etc.) se trouve à l'origine, et M représente la position de la cible.

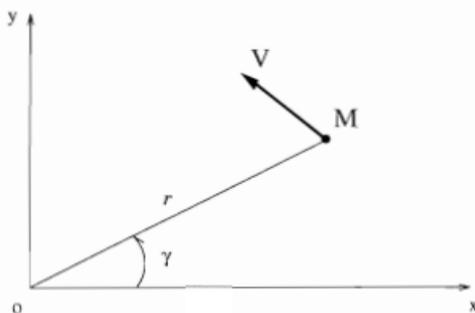


Figure 2.1: Problème de poursuite dans le plan.

Le problème de trajectographie est modélisé en général comme un système non linéaire:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + g(x)u \\ y = h(x) \end{cases} \quad (2.1)$$

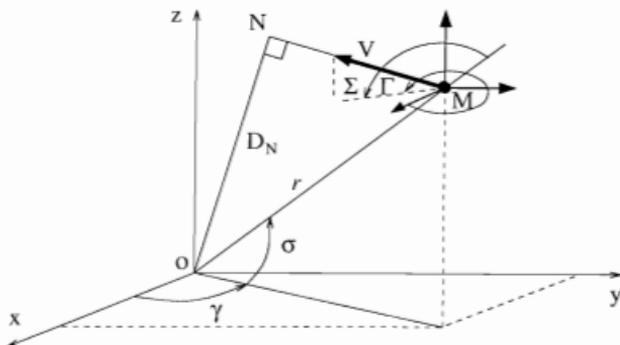


Figure 2.2: Problème de poursuite dans l'espace.

où x est le vecteur d'état, u est une entrée connue représentant les manoeuvres du porteur du capteur, et y est l'observation dont les composantes sont (r, σ, γ) représentant la distance, l'angle de site et de gisement ou azimut respectivement pour les capteurs à trois dimensions, et (r, γ) pour les capteurs à deux dimensions. Les champs de vecteurs $f(x)$ et $g(x)$ et la fonction vectorielle $h(x)$ décrivent l'évolution de la cible dans le repère (fixe ou non) du capteur. Ils sont généralement exprimés dans divers systèmes de coordonnées, plus ou moins commodes, même s'ils n'en dépendent pas. Les représentations les plus naturelles et les plus couramment utilisées sont sans doute les coordonnées cartésiennes, polaires, et leurs formes modifiées.

Nous distinguons particulièrement deux cas – la trajectographie active et la trajectographie passive – qui diffèrent uniquement par la disponibilité de l'observation sur la distance. Si l'observation concernant la distance entre le capteur et la cible est disponible, il s'agit du problème de trajectographie active, et de trajectographie passive sinon.

La poursuite passive désigne la situation où ne sont utilisés que des capteurs passifs, par exemple le sonar, le suivi optique et le radar passif. Il se peut qu'il y ait dans ce cas deux catégories d'objectifs. Le premier but est de poursuivre la cible dans le domaine angulaire et de se contenter de n'acquérir que des informations partielles. Dans ce cas, nous considérons un système en dimension réduite qui est observable en un sens convenable. Le deuxième but est de reconstruire l'état entier à partir de l'observation passive. Cette tâche n'est pas toujours possible, parce que le problème de trajectographie passive conduit souvent à un système inobservable. Par exemple, le système correspondant au cas où le porteur est immobile et où la cible est à vitesse constante est toujours inobservable, ce qui est intuitif du point de vue physique. Une solution géométrique est de localiser le mobile par un réseau contenant plusieurs capteurs passifs. Cependant, si l'on veut résoudre ce problème avec un seul capteur, il faut que le porteur de ce capteur

fasse une manoeuvre (accélération relative non nulle). Tout cela signifie que l'analyse de l'observabilité joue un rôle important pour le problème de la trajectographie passive.

Dans les sections suivantes, nous allons présenter les modèles les plus souvent utilisés dans les systèmes de poursuite. Parmi eux, il y a des modèles qui sont mathématiquement équivalents, donc leurs propriétés fondamentales (par exemple l'observabilité) ne dépendent pas des coordonnées choisies, mais les performances des observateurs correspondants peuvent en dépendre. C'est ce qui nous a amené à rappeler les représentations des modèles en dimensions 2 et 3, dans les cas actif et passif, dans les différentes coordonnées.

2.2 Poursuite en ligne droite

Le problème de poursuite en ligne droite est formulé en général par [4] :

$$\begin{cases} x_t^{(n)} = 0 \\ y_t = x_t \end{cases} \quad n \geq 1 \quad (2.2)$$

où x_t représente la position de la cible. L'évolution de x_t est donc polynômiale en fonction du temps

$$x_t = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{2} \ddot{x}_0 t^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!} x_0^{(n-1)} t^{n-1} \quad (2.3)$$

où $(x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)})^T$ est un vecteur constant représentant l'état initial. En prenant $z = (x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \dots, x_0^{(n-1)})^T$ comme vecteur d'état, et en posant

$$C(t) = \left(1 \quad t \quad \frac{1}{2}t^2 \quad \dots \quad \frac{1}{(n-1)!}t^{n-1} \right)$$

le système (2.2) s'écrit de manière équivalente comme un système instationnaire

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ y = C(t)z \end{cases} \quad (2.4)$$

Il est clair que le problème de poursuite dans l'espace ou dans le plan peut se réduire à celui en ligne droite si dans certaines coordonnées le système se divise en des chaînes indépendantes. C'est précisément ce qui se passe dans les systèmes classiques de poursuite.

2.3 Modèle de trajectographie en coordonnées cartésiennes

Pour modéliser la dynamique de la cible, il nous faut acquérir une information complète sur les caractéristiques de la trajectoire de la cible, ce qui est généralement impossible. Il est alors nécessaire d'ajouter des contraintes sur la manoeuvrabilité de la cible. Ici nous nous restreignons au problème de poursuite d'une cible se déplaçant à vitesse constante. Sous

cette contrainte, l'évolution du mobile dans l'espace est donnée, en coordonnées cartésiennes, par

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_r &= a_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= a_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_z &= a_z \end{cases} \quad (2.5)$$

où a_x , a_y et a_z sont les composantes de l'accélération du porteur du capteur dans la direction des trois axes. Si le capteur est immobile, l'évolution de ce problème peut s'écrire, de manière équivalente, par

$$\begin{cases} \dot{x} &= v \cos \Sigma \cos \Gamma \\ \dot{y} &= v \cos \Sigma \sin \Gamma \\ \dot{z} &= v \sin \Sigma \\ \dot{\Sigma} &= 0 \\ \dot{\Gamma} &= 0 \\ \dot{v} &= 0 \end{cases} \quad (2.6)$$

où (v_x, v_y, v_z) et (v, Σ, Γ) sont liés par

$$\begin{cases} v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ \Sigma &= \arcsin\left(\frac{v_z}{v}\right) \\ \Gamma &= \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right) \end{cases} \quad (2.7)$$

L'observation est donnée physiquement en coordonnées polaires. Elle s'exprime en fonction de l'état en coordonnées cartésiennes :

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sigma &= \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.8)$$

Un mobile à vitesse non constante peut se représenter par un système dynamique de dimension plus élevée. Par exemple, dans le cas d'une cible se déplaçant à accélération constante, on obtient un modèle d'état en dimension 9.

Pour la poursuite dans le plan, le système (2.5) se réduit à

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= a_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= a_y \end{cases} \quad (2.9)$$

et l'observation est donnée par

$$\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \gamma = \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases} \quad (2.10)$$

L'avantage des coordonnées cartésiennes est la simplicité de la représentation d'état - (2.5) est un système linéaire stationnaire. Elle nous permet de plus d'écrire l'équation dynamique de manière analogue dans le cas général. Quant au système équivalent (2.6), nous verrons plus loin qu'une forme modifiée convient à la poursuite passive.

2.4 Modèle de trajectographie en coordonnées polaires

L'évolution d'un mobile à vitesse constante se présente en coordonnées polaires par

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\dot{\sigma}^2 + \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma) + (u_x \cos \sigma \cos \gamma + u_y \cos \sigma \sin \gamma + u_z \sin \sigma) \\ \dot{\sigma} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\sigma} - \frac{1}{2}\dot{\gamma}^2 \sin 2\gamma + \frac{1}{r_{xy}}(-u_x \cos \sigma \sin \sigma \cos \gamma - u_y \cos \sigma \sin \sigma \sin \gamma + \frac{r_{xy}^2}{r^2}u_z) \\ \dot{\gamma} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\gamma} + 2\dot{\sigma}\dot{\gamma} \tan \gamma - \frac{r}{r_{xy}^2}(u_x \cos \sigma \cos \gamma - u_y \cos \sigma \sin \gamma) \end{cases} \quad (2.11)$$

où $r_{xy} = \sqrt{x^2 + y^2}$ est la projection de la distance r dans le plan (O, x, y) . On se ramène à un système dynamique de dimension 6.

Le système (2.11) se réduit dans le plan à

$$\begin{cases} \dot{r} = r\dot{\gamma}^2 + (u_y \sin \gamma + u_x \cos \gamma) \\ \dot{\gamma} = -2\frac{\dot{r}}{r}\dot{\gamma} + \frac{1}{r}(u_y \cos \gamma - u_x \sin \gamma) \end{cases} \quad (2.12)$$

Dans ces coordonnées, l'observation est linéaire. Ce système est utilisé par certains auteurs pour obtenir une estimation d'état plus précise [21]. Mais la prise en compte de la dynamique de la cible est beaucoup plus compliquée qu'en coordonnées cartésiennes, sauf dans des cas particuliers.

2.5 Modèle de trajectographie en coordonnées polaires modifiées

Les coordonnées polaires modifiées (en abrégé CPM) sont introduites par [1]. Dans ces coordonnées, la linéarité de l'observation est conservée et, lorsque le système n'est pas complètement observable, les composantes observables et inobservables sont découplées, donnant lieu ainsi à un observateur tolérant aux pannes [1, 56]. Ces coordonnées sont

utiles dans le problème de trajectographie passive pour récupérer l'information concernant la distance.

Pour la poursuite dans le plan, on introduit la transformation suivante :

$$x_{pm1} = \gamma, \quad x_{pm2} = \dot{\gamma}, \quad x_{pm3} = \frac{\dot{r}}{r}, \quad x_{pm4} = \frac{1}{r},$$

x_{pm1} , x_{pm2} , x_{pm3} , x_{pm4} étant les variables en coordonnées polaires modifiées. Le système (2.12) devient :

$$\begin{cases} \dot{x}_{pm} = \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm2}x_{pm3} + x_{pm4}(u_y \cos x_{pm1} - u_x \sin x_{pm1}) \\ x_{pm2}^2 - x_{pm3}^2 + x_{pm4}(u_y \sin x_{pm1} + u_x \cos x_{pm1}) \\ -x_{pm3}x_{pm4} \end{pmatrix} = f(x_{pm}) + g(x_{pm})u \\ y = x_{pm1} \end{cases} \quad (2.13)$$

Le passage de la représentation en coordonnées cartésiennes à celle en CPM s'effectue par le difféomorphisme local suivant

$$\begin{aligned} x_{pm1} &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x &= \frac{\cos x_{pm1}}{x_{pm4}} \\ x_{pm2} &= \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{x^2 + y^2} & \dot{x} &= \frac{x_{pm3} \cos x_{pm1} - x_{pm2} \sin x_{pm1}}{x_{pm4}}, \\ x_{pm3} &= \frac{x\dot{x} + y\dot{y}}{x^2 + y^2} & y &= \frac{\sin x_{pm1}}{x_{pm4}} \\ x_{pm4} &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} & \dot{y} &= \frac{x_{pm3} \cos x_{pm1} - x_{pm2} \sin x_{pm1}}{x_{pm4}} \end{aligned} \quad (2.14)$$

Donc, (2.13) est équivalent au modèle en coordonnées cartésiennes (2.9) avec observation passive.

Pour la poursuite dans l'espace, le vecteur d'état est de dimension 8, donné par

$$x_{pm} = \begin{pmatrix} x_{pm1} \\ x_{pm2} \\ x_{pm3} \\ x_{pm4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{r} \\ \dot{\bar{r}} \\ \frac{1}{r} \\ \dot{r} \\ -\frac{1}{r} \end{pmatrix}$$

où \bar{r}

$$\bar{r} = \begin{pmatrix} \frac{x}{r} \\ \frac{y}{r} \\ \frac{z}{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \\ \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

est le vecteur unitaire le long de la direction de la ligne de visée (LDV).

En dérivant x_{pm} par rapport au temps, nous obtenons l'évolution de la dynamique [38, 39]

$$\begin{aligned} \dot{x}_{pm} &= \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm3}x_{pm2} - x_{pm1}x_{pm2}^T x_{pm2} \\ x_{pm2}^T x_{pm2} - x_{pm3}^2 \\ -x_{pm3}x_{pm4} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} \\ x_{pm4}(I - x_{pm1}x_1^T) \\ x_{pm4}x_{pm1}^T \\ 0_{1 \times 3} \end{pmatrix} u \\ &= f(x_{pm}) + g(x_{pm})u \end{aligned} \quad (2.16)$$

où $u = (u_x, u_y, u_z)^T$ est l'accélération du porteur dans la direction des trois axes.

Choisissons le vecteur d'observation obtenu à partir de (σ, γ, r) par :

$$\begin{cases} y_1 = \cos \sigma \cos \gamma \\ y_2 = \cos \sigma \sin \gamma \\ y_3 = \sin \sigma \end{cases} \quad (2.17)$$

l'application de sortie est alors linéaire:

$$y = C x_{pm} \quad (2.18)$$

avec

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La relation entre les variables en coordonnées cartésiennes x_c et celles en CPM x_{pm} est donnée par:

$$x_c = \begin{pmatrix} r\dot{r} \\ r\dot{\gamma} + \dot{r}\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{x_{pm1}}{x_{pm4}} \\ \frac{x_{pm3}}{x_{pm4}}x_{pm1} + \frac{1}{x_{pm4}}x_{pm2} \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Notons que le système (2.16) n'est pas équivalent au système (2.5) en coordonnées cartésiennes car la transformation (2.15) est une injection locale et (2.19) une surjection locale.

Dans le cas où l'accélération du capteur est nulle, les systèmes (2.13) et (2.16) se réduisent à

$$\dot{x}_{pm} = \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm2}x_{pm3} \\ x_{pm2}^2 - x_{pm3}^2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

et

$$\dot{x}_{pm} = \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm2}x_{pm3} - x_{pm1}x_{pm2}^T x_{pm2} \\ x_{pm2}^T x_{pm2} - x_{pm3}^2 \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

respectivement.

Chapitre 3

Rappels sur l'observabilité

3.1 Présentation générale

Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.1)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^m$ sont l'état et l'entrée du système dynamique respectivement, et $y \in \mathbb{R}^p$ est l'observation d'état. Nous supposons en général que $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ sont des applications de classe C^∞ . Pour toute entrée constante, $f(x, \cdot)$ est un champ de vecteurs de classe C^∞ sur \mathbb{R}^n .

La dynamique du système (3.1) peut être définie plus abstraitement sur une variété X infiniment différentiable de dimension n , et l'observation sur une variété Y infiniment différentiable de dimension p . Alors x et y sont des coordonnées locales de X et de Y respectivement, et (3.1) est une expression du système dans ces coordonnées locales.

On considère souvent le cas particulier des systèmes affines, qui s'expriment en coordonnées locales sous la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(x) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (3.2)$$

où f et g_1, \dots, g_m sont des champs de vecteurs sur une variété X de classe C^∞ et $h(\cdot) : X \rightarrow Y$ est une application de classe C^∞ .

3.2 Observabilité des systèmes non linéaires

Pour les systèmes non linéaires, diverses notions d'observabilité peuvent être définies et étudiées (voir [26, 33, 44, 45, 79, 91]), suivant qu'on s'intéresse au problèmes de la réalisation minimale ou de la construction d'un observateur. Nous résumons ici les principales approches.

Définition 3.1 [80] *Considérons le système (3.1). Deux états $x_1, x_2 \in X$ sont indistinguables si, pour toute entrée admissible $u \in \mathcal{U}$, \mathcal{U} un sous ensemble de \mathbb{R}^p les trajectoires*

du système à partir des états initiaux $x_1(t_0) = x_1$ et $x_2(t_0) = x_2$ donnent la même sortie $y(t)$ pour tout $t \geq t_0$. L'ensemble des points indistinguables d'un x_0 de X est noté $ID(x_0)$.

Définition 3.2 Le système (3.1) est observable en x_0 si $ID(x_0)$ est réduit à x_0 lui-même, soit

$$ID(x_0) = \{x_0\}$$

Le système (3.1) est observable si, pour tout $x \in X$, $ID(x) = \{x\}$

Soit $x(x_0, u(t))$ la courbe intégrale du système passant par x_0 pour l'entrée admissible $u(t)$. Soit U un sous ensemble de X . Deux points $x_1, x_2 \in U$ sont U -indistinguables, si pour tout $T > 0$ et toute entrée admissible u telle que les trajectoires $x(t)$ dans l'intervalle $[0, T]$ restent dans U .

$$x(x_1, u(t)) \in U \quad t = 1, 2, \quad t \in [0, T]$$

les sorties $y(t)$ sont identiques. L'ensemble des points U -indistinguables de x_0 est noté par $ID_U(x_0)$.

Définition 3.3 Soit $x_0 \in X$ un point de l'espace d'état. On dit que le système (3.1) est localement observable en x_0 s'il existe un voisinage ouvert U de x_0 tel que pour tout voisinage V de x_0 contenu dans U , $ID_V(x_0) = \{x_0\}$. On dit qu'un système est localement observable, si, pour tout $x \in X$ le système est localement observable en x .

La propriété d'observabilité locale que l'on a défini plus haut est souvent appelée observabilité faible par comparaison à l'observabilité dite forte [44] qui ne sera pas utilisée ici. Nous omettons donc dans la suite le qualificatif "faible"

Notons $V(X)$ l'ensemble des champs de vecteurs de X . Soit

$$\mathcal{F}^0 \triangleq \{f(x, u) \mid u = \text{const}\}$$

On note \mathcal{F} l'algèbre de Lie engendrée par \mathcal{F}^0 , c'est-à-dire la plus petite sous-algèbre de $V(X)$ contenant \mathcal{F}^0 . \mathcal{F} est appelée l'algèbre de Lie de commandabilité. En tout point $x \in X$ les éléments de $\mathcal{F}(x)$ sont des combinaisons linéaires finies des crochets de Lie itérés¹ des éléments de \mathcal{F}^0 soit

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(x) &\triangleq \{\mathcal{F}^0\}_{\mathcal{L}_A} & (3.3) \\ &= \left\{ \sum_{i=1}^l r_i [f_i^s \quad [f_{s_{i-1}}^s, f_{s_i}^s]] \mid r_i \in \mathbb{R}^1, f_j^s \in \mathcal{F}^0, j = 1, \dots, s_i; s_i \geq 1, l \geq 1 \right\} \end{aligned}$$

Soit \mathcal{H} le plus petit sous-espace linéaire de $C^\infty(X)$ contenant les fonctions $h_1(x), \dots, h_p(x)$, qui est fermé par rapport à la dérivée de Lie par rapport aux éléments de \mathcal{F}^0

$$\mathcal{H} = \left\{ \sum_{i=1}^l \lambda_i L_{f_i^s} L_{f_j^s} \quad L_{f_i^s}(h_j) \mid \lambda_i \in \mathbb{R}^1, f_i^s, f_j^s \in \mathcal{F}^0, s_i \geq 1, l \geq 1, 1 \leq j \leq p \right\} \quad (3.4)$$

¹Sur les notations du crochet de Lie et de la dérivée de Lie, nous nous référons par exemple à [45, 68].

\mathcal{H} est appelé l'espace d'observation.

On définit la codistribution $d\mathcal{H}$ associée à \mathcal{H} , appelée codistribution d'observabilité, comme l'application qui à tout point $x \in X$ fait correspondre le sous-espace vectoriel $d\mathcal{H}(x) = \{dh(x) \mid h \in \mathcal{H}\}$ de l'espace cotangent Γ_x^*X

Théorème 3.1 (condition suffisante) [44] Si

$$\dim\{d\mathcal{H}(x_0)\} = n, \quad (3.5)$$

alors le système (3.1) est localement observable en x_0 . De plus, si (3.5) est vérifié en tout point $x \in X$ alors le système est localement observable.

Théorème 3.2 (Condition nécessaire) [44] Si le système (3.1) est localement observable, alors il existe un ouvert dense $D \subset X$ tel que la condition (3.5) soit vérifiée pour tout x_0 dans D .

Théorème 3.3 [44] Si (3.1) est un système analytique et vérifie

$$\dim\{\mathcal{F}\}|_x = n, \quad \forall x \in X$$

alors (3.5) est une condition nécessaire et suffisante pour que le système soit localement observable.

Pour le problème d'observateur, les entrées du système sont généralement des fonctions du temps. Ce qui nous intéresse dans ce cas est de pouvoir distinguer des trajectoires engendrées par chaque entrée u donnée, dépendant du temps, alors que dans les définitions précédentes, on se contente de distinguer les trajectoires pour au moins une entrée. C'est pourquoi la notion d'entrée universelle est introduite.

Définition 3.4 Une entrée $u : [t_0, T] \rightarrow \mathcal{U}$ est dite universelle si pour tout couple d'états x_1 et x_2 , on a $h(x_u(t, x_1)) \neq h(x_u(t, x_2))$ pour au moins un $t \in [t_0, T]$

L'existence de telles entrées a été étudiée par Grasselli et Isidori [36] pour les systèmes bilinéaires, par Sontag [78] pour les systèmes échantillonnés décrits par des relations polynômiales entrée-état-sortie, et par Sussmann [81] pour les systèmes en temps continu. Un des principaux résultats est que l'ensemble de ces entrées est dense dans l'espace des entrées admissibles pour une topologie convenable.

Lorsqu'on analyse l'observabilité pour une entrée $u(t)$, il nous faut adapter la définition de la dérivée de Lie. En prenant t comme une variable supplémentaire, la dynamique du système (3.1) peut se réécrire de manière équivalente sous forme autonome :

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx}{d\tau} = f(x, u(t)) \end{cases} \quad (3.6)$$

Nous donc pouvons définir un champ de vecteurs associé à (3.6) par

$$f_u = f(x, u) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t}$$

et la dérivée de Lie de h par rapport au champ de vecteurs f_u est donnée par

$$L_{f_u} h = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial t}$$

Introduisons la définition de la codistribution d'observabilité [45, 68] par la récurrence suivante

$$S^0 = \text{sp}\{dh_1, \dots, dh_p\}, \quad S^i = \text{sp}\{S^{i-1} L_{f_u} S^{i-1}\}, \quad i \geq 1$$

En notant les dimensions de S^i par n_i , nous pouvons définir pour tout i , $\eta_0 = n_0$, $\eta_i = n_i - n_{i-1}$. On montre facilement que la suite $\{\eta_0, \dots, \eta_i, \dots\}$ est non croissante. Nous pouvons donc définir:

$$k_i = \text{card}\{s, j \geq 0 \mid \eta_s \geq \eta_j\} \quad i \geq 1$$

qui vérifient $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$, et $\sum_{i=1}^p k_i \leq n$. Les k_i sont appelés indices d'observabilité.

Nous pouvons maintenant donner la définition d'uniforme observabilité.

Définition 3.5 On dit que le système (3.1) est uniformément localement observable en x pour l'entrée régulière $u: [t_0, T] \rightarrow \mathcal{U}$, s'il existe des entiers $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p \geq 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^p k_i = n$ et un voisinage U de x tel que

$$\dim\{L_{f_u}^i(dh_i) \mid i = 1, \dots, p; j = 0, \dots, k_i - 1\}(x) = n \quad (3.7)$$

pour tout $x \in U$ et pour tout $t \in [t_0, T]$

De plus, on dit que le système (3.1) est complètement uniformément localement observable en x si (3.7) est vérifiée pour une famille d'entrées admissibles.

Un critère pour vérifier l'uniforme observabilité, introduit par Williamson [91] pour les systèmes bilinéaires et généralisée par Gauthier et Bornard [33] pour les systèmes non linéaires, correspond à l'existence de coordonnées dans lesquelles le système s'exprime sous une forme dite canonique, pour laquelle la construction d'observateur est considérablement simplifiée. Notamment, dans le cas mono-sortie, les champs de vecteurs de la forme canonique d'observabilité associée au système (3.2) sont triangulaires et affines en l'entrée u .

Théorème 3.4 [33, 35] *Le système mono-sortie (3.2) est difféomorphe à un système de la forme:*

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x) \end{pmatrix} + \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \psi_{i,1}(x_1) \\ \vdots \\ \psi_{i,n-1}(x_1, x_2, \dots, x_{n-1}) \\ \psi_{i,n}(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{pmatrix} u_i \\ y = x_1 \end{cases} \quad (3.8)$$

si et seulement si (3.2) est uniformément observable pour toute entrée.

Dans le problème de trajectographie, le porteur peut manœuvrer dans la limite des contraintes d'accélération imposées par la nature du porteur (bateau traînant une antenne, radar embarqué sur un avion, etc.), ce qui permet d'utiliser sur des durées, bien que relativement courtes en général, des entrées universelles. C'est pourquoi nous nous intéressons particulièrement à la notion d'uniforme observabilité.

3.3 Observabilité des systèmes linéaires instationnaires

3.3.1 Observabilité des systèmes linéaires à temps variable non singuliers

Considérons un système linéaire à temps variable non singulier

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x \\ y &= C(t)x \end{cases} \quad (3.9)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$ et $A \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}$ et $C \in \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}$ sont des matrices dont tous les éléments sont des fonctions réelles bornées pour $t \in I \subset \mathbb{R}$. La définition classique d'observabilité pour un tel système est qu'on est capable de déterminer de manière unique l'état initial $x_0 = x(t_0)$ à partir d'observations dans un intervalle fini y_i , $t \in I \subset \mathbb{R}$, I un intervalle de temps contenant t_0 . Si cette condition n'est pas vérifiée, le système est dit inobservable.

Nous pouvons écrire explicitement la sortie du système (3.9)

$$y_t = C(t)\Phi(t, t_0)x_0, \quad t \geq t_0 \quad (3.10)$$

où $\Phi(t, t_0)$ est la matrice de transition liée à $A(t)$. À l'aide de la notion de *Grammien d'observabilité* défini par [47]

$$G_0(t, t_0) = \left(\int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)^T C(\tau)^T C(\tau) \Phi(\tau, t_0) d\tau \right) \quad (3.11)$$

ce qui donne, si ce dernier est inversible pour $t \in I$

$$x_0 = G_0^{-1}(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)^T C(\tau)^T y(\tau) d\tau \quad (3.12)$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que le système (3.9) soit observable est donc que le Grammien d'observabilité soit inversible pour tout $t \in I$

Clairement, les notions d'observabilité introduites dans le paragraphe précédent en non linéaire coïncident dans le cas linéaire où l'observabilité est indépendante des entrées. En effet, la sortie d'un système commandé

$$\begin{cases} \dot{x} &= A(t)x + B(t)u \\ y &= C(t)x \end{cases}$$

est donnée par

$$y(t) = C(t)\Phi(t, t_0)x_0 + C(t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)B(\tau)u(\tau) d\tau$$

donc

$$x_{01} - x_{02} = G_0^{-1}(t_0, t) \int_{t_0}^t \Phi(\tau, t_0)^T C(\tau)^T (y_1(\tau) - y_2(\tau)) d\tau$$

D'où notre remarque.

On conclut que pour étudier l'observabilité d'un système linéaire, il suffit de considérer le cas sans commande (3.9).

Un autre critère classique pour l'observabilité de systèmes linéaires non singuliers est donné par le théorème suivant

Théorème 3.5 [47, 76] *Introduisons l'opérateur suivant*

$$\begin{aligned}\Delta_o^0 C(t) &= C(t) \\ \Delta_o^1 C(t) &= \frac{d}{dt} C(t) + C(t)A(t) \\ \Delta_o^k C(t) &= \frac{d}{dt} \Delta_o^{k-1} C(t) + (\Delta_o^{k-1} C(t))A(t), \quad k \geq 2\end{aligned}\tag{3.13}$$

Alors le système (3.9) est observable à l'instant initial t_0 si et seulement si

$$\dim\{\Delta_o^k C(t_0) \mid k \geq 0\} = n\tag{3.14}$$

Définition 3.6 *Le système (3.9) est dit totalement observable si et seulement si la condition de rang (3.14) est vérifiée pour presque tout $t \in I$*

Il se peut que la condition de rang d'observabilité soit vérifiée pour un $l > n$, autrement dit qu'il faut plus de n dérivations des sorties par rapport au temps pour obtenir toute l'information sur l'état, phénomène qui n'existe pas dans le cas linéaire stationnaire. En particulier l'identification de l'état initial peut être réalisée par un système de dimension plus élevée que celle du système initial. Dans le cas $l = n$, la relation entre la condition de rang et le Grammien d'observabilité est établie par le théorème suivant

Théorème 3.6 [16, 76]

- (i) Si $\dim\{\Delta_o^k C(t) \mid k = 0, 1, \dots, n-1\} = n$ pour un $t \in I$ alors le Grammien d'observabilité $G_o(t, t_0)$ est une matrice non singulière.
- (ii) $\dim\{\Delta_o^k C(t) \mid k = 0, 1, \dots, n-1\} = n$ pour presque tout $t \in I$, si et seulement si $G_o(t, t_0)$ est non singulière pour tout intervalle $(t_1, t_2) \subset I$

Dans le cas stationnaire, l'observabilité définie par la condition de rang de Kalman et par le Grammien d'observabilité sont évidemment équivalentes.

Rappelons aussi que le critère d'observabilité des systèmes linéaires instationnaires est un cas particulier de la condition de rang d'observabilité locale des systèmes non linéaires. En effet, en écrivant (3.9) de manière équivalente sous forme autonome

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = 1 \\ \frac{dx}{d\tau} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases}\tag{3.15}$$

et en écrivant

$$f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + A(t)x \frac{\partial}{\partial x}$$

le champ de vecteurs associé à (3.15), et

$$h_j(t, x) = c_j(t)x, \quad j = 1, \dots, p$$

les applications de sortie, la condition de rang d'observabilité locale que nous avons présentée plus haut est équivalente à

$$\dim\{dL_j^k h_j(t, x) \mid j = 1, \dots, p; k \geq 0\} = n \quad \forall (t, x) \in I \times X \quad (3.16)$$

Par un calcul direct, nous pouvons vérifier

$$\Delta_o^k c_j(t) = dL_j^k h_j(t, x), \quad j = 1, \dots, p; k \geq 0$$

la codistribution d'observabilité donnée par (3.16) étant indépendante de x .

3.3.2 Observabilité du linéarisé tangent des systèmes non linéaires

Dans ce paragraphe, nous étudions l'observabilité d'un type particulier de systèmes linéaires instationnaires obtenus par linéarisation tangente de systèmes non linéaires de la forme (3.1).

Soit $\bar{x}(t)$ une trajectoire nominale à partir de l'état initial $\bar{x}(t_0)$ et de l'entrée $\bar{u}(t)$. En notant

$$\begin{aligned} x_\delta &= x - \bar{x}, \\ y_\delta &= y - \bar{y}, \end{aligned}$$

le linéarisé tangent de (3.1) le long de la trajectoire $\bar{x}(\cdot)$ est donné par

$$\begin{cases} \dot{x}_\delta = f_{\bar{x}, u} x_\delta \\ y_\delta = h_{\bar{x}} x_\delta \end{cases} \quad (3.17)$$

où

$$f_{\bar{x}, u} = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, u), \quad h_{\bar{x}} = \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x})$$

sont les Jacobiens de $f(x, u)$ et de $h(x)$ par rapport à x .

Puisque (3.17) est un système linéaire instationnaire, les critères d'observabilité que nous avons présentés dans le paragraphe précédent s'appliquent.

Proposition 3.7 *Si (3.1) est localement uniformément observable, et que la trajectoire nominale reste toujours dans le domaine observable à partir de l'état initial et l'entrée u de classe C^∞ dans $[t_0, T]$, alors le linéarisé tangent le long de cette trajectoire est observable dans l'intervalle $[t_0, T]$ avec les mêmes indices d'observabilité.*

Preuve Montrons que la codistribution d'uniforme observabilité du système original est identique à celle du linéarisé tangent dans un domaine convenable.

La codistribution d'observabilité uniforme est définie par

$$\mathcal{O} = \{L_{f_u}^j dh_i \mid i = 1, \dots, p; j = 0, \dots, k_i - 1\}$$

avec

$$L_{f_u} h = \frac{\partial h}{\partial x} f + \frac{\partial h}{\partial t}$$

Si u est de classe C^n définissons

$$\dot{u} = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

les dérivées $L_{f_u}^{j-1} dh_i$ s'expriment explicitement comme

$$\begin{aligned} L_{f_u}^0 dh_i &= \frac{\partial h_i}{\partial x} \\ L_{f_u}^1 dh_i &= \frac{\partial h_i}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + f^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} \right)^T \\ L_{f_u}^2 dh_i &= \frac{\partial (L_{f_u} dh_i)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + f^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (L_{f_u} dh_i)}{\partial x} \right)^T \\ &\quad + \dot{u}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(\frac{\partial (L_{f_u} dh_i)}{\partial x} \right)^T \right)^T \\ L_{f_u}^k dh_i &= \frac{\partial (L_{f_u}^{k-1} dh_i)}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x} + f^T \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (L_{f_u}^{k-1} dh_i)}{\partial x} \right)^T \\ &\quad + \dot{u}^T \left(\frac{\partial}{\partial \dot{u}} \left(\frac{\partial (L_{f_u}^{k-1} dh_i)}{\partial x} \right)^T \right)^T \quad i = 1, \dots, p; k = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

D'autre part, en substituant $\partial f / \partial x$ à $A(t)$ et $\partial h_i / \partial x$ à $c_i(t)$, nous obtenons

$$L_{f_u}^k dh_i = \Delta_o^k \left(\frac{\partial h_i}{\partial x} \right) \quad i = 1, \dots, p; k \geq 0$$

d'où le résultat. ■

Remarque 3.1 L'inverse de cette proposition est vrai en un certain sens (voir [79, 26]). Précisément, si le linéarisé tangent d'un système non linéaire le long de la trajectoire x_t est totalement observable dans l'intervalle du temps $[t_0, T]$, alors le système original (non linéaire) est localement observable en x_{t_0} .

3.3.3 Formes canoniques

Comme dans le cas stationnaire (linéaire ou non linéaire), on peut définir des formes dites canoniques par abus de langage, en vue d'étendre les techniques linéaires associées à de telles formes. Notamment, ces formes jouent un rôle important dans l'étude des systèmes instationnaires et dans la construction des observateurs. Nous présenterons d'abord les formes canoniques pour les systèmes mono-sortie [9, 75, 76], et nous étendrons ensuite ces résultats au cas multivariable, présenté dans le cas stationnaire par exemple par Kailath [47]. Nous donnerons un procédé récurrent pour déterminer le changement de coordonnées permettant de transformer le système sous forme désirée qui sera très utile pour concevoir les observateurs.

Un système mono-sortie:

$$\begin{cases} \dot{z} = A(t)z \\ y = Cz \end{cases} \quad (3.18)$$

est dit sous forme canonique d'observabilité si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & 0 \\ a_1(t) & & & a_{n-1}(t) & a_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\tilde{C} = (1 \quad \cdot \quad 0 \quad 0)$$

et sous forme canonique observateur si

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_1(t) \\ 1 & & & \\ 0 & & & \\ & & 0 & a_{n-1}(t) \\ 0 & 0 & 1 & a_n(t) \end{pmatrix}$$

$$C = (0 \quad \cdot \quad 0 \quad 1)$$

où $a_i(t)$, $i = 1, \dots, n$ sont localement des fonctions analytiques.

Rappelons que la matrice d'observabilité du système (3.9) est définie par :

$$Q_l = \begin{pmatrix} C \\ \Delta_o C \\ \vdots \\ \Delta_o^{l-1} C \end{pmatrix} \quad l \geq n$$

Sous forme canonique observateur, nous pouvons déduire par un calcul direct que la

matrice d'observabilité est de la forme suivante [75]

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_n &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & q_{1,1} \\ 0 & 1 & \cdot & q_{n-2,2} & q_{n-2,1} \\ 1 & q_{n-1,n-1} & \cdot & q_{n-1,2} & q_{n-1,1} \end{pmatrix} \\ \Delta_o^n \tilde{C} &= \begin{pmatrix} q_{n,n} & q_{n,n-1} & q_{n,2} & q_{n,1} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (3.19)$$

où

$$\begin{aligned} q_{i,k} &= a_{n-i+1} + \sum_{j=0}^{i-k+1} a_{n-j} q_{i-k,j+1} + \sum_{j=1}^k \dot{q}_{i-j,k-j+1} \quad 1 \leq k < i \leq n \\ q_{i,i} &= a_n \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (3.20)$$

La matrice d'observabilité de la forme canonique d'observabilité est donc tout simplement la matrice identité.

Théorème 3.8 [9, 75] *Le système (3.9) dans le cas mono-sortie admet la forme canonique observateur si et seulement si*

$$\text{rang } Q_n(t) = n$$

pour tout $t \in [t_0, T]$.

Preuve: Nécessité. Supposons que le système (3.9) admette la forme canonique observateur. Alors il existe une transformation inversible $z = H(t)x$, les éléments de la matrice inversible $H(t)$ étant de classe C^1 dans $[t_0, T]$, de sorte que (3.9) est mis sous forme canonique observateur (3.18) avec

$$\begin{aligned} \tilde{A}(t) &= H(t)A(t)H^{-1}(t) + \dot{H}(t)H^{-1}(t) \\ \tilde{C}(t) &= C(t)H^{-1}(t) \end{aligned}$$

Étant donné que

$$|\det \tilde{Q}_n| = 1$$

et que

$$\begin{aligned} \Delta_o \tilde{C} &= \frac{d}{dt} \tilde{C} + \tilde{C} \tilde{A} \\ &= \frac{d}{dt} (CH^{-1}) + CH^{-1} (HAH^{-1} + \dot{H}H^{-1}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} C + CA \right) H^{-1} \\ &= \Delta_o CH^{-1} \\ \Delta_o^k \tilde{C} &= \Delta_o^k CH^{-1} \quad k \geq 1 \end{aligned} \quad (3.21)$$

il vient

$$Q_n(t) = \tilde{Q}_n H(t) \quad \forall t \in [t_0, T]$$

Puisque \tilde{Q}_n et $H(t)$ sont inversibles pour $t \in [t_0, T]$, Q_n l'est.

Suffisance. La démonstration de la partie suffisante est faite de manière constructive. Si (3.9) est totalement observable pour $t \in [t_0, T]$, et que Q_n est la matrice d'observabilité de (3.18), la matrice définie par

$$H(t) = \tilde{Q}_n^{-1} Q_n \quad (3.22)$$

est inversible pour $t \in [t_0, T]$ et n'est rien d'autre que la transformation recherchée. Pour prouver que l'observabilité est une condition suffisante, il suffit de vérifier qu'il existe un ensemble unique de coefficients a , vérifiant

$$\tilde{A} = HAH^{-1} + \dot{H}H^{-1} \quad (3.23)$$

et

$$\tilde{C} = CH^{-1} \quad (3.24)$$

L'unicité de (3.24) est évidente. En posant $W(t) = H^{-1}(t)$, (3.23) devient

$$W\tilde{A} = -\dot{W} + AW \quad (3.25)$$

Soient W_i la i^{me} colonne de W et $a = (a_1, \dots, a_n)^T$ (3.25) peut se réécrire comme

$$\begin{pmatrix} W_2 & W_3 & \dots & W_n & Wa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dot{W}_1 & -\dot{W}_2 & \dots & -\dot{W}_{n-1} & -\dot{W}_n \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} AW_1 & AW_2 & \dots & AW_{n-1} & AW_n \end{pmatrix}$$

En comparant les deux membres de l'équation ci-dessus, nous obtenons

$$W_{k+1} = -\dot{W}_k + AW_k, \quad k = 1, \dots, n-1 \quad (3.26)$$

et

$$a(t) = W^{-1}(-\dot{W}_n + AW_n) \quad (3.27)$$

La première colonne de W est donnée par

$$W_1 = Q_n^{-1}(0 \quad 0 \quad 1)^T \quad (3.28)$$

puisque

$$\begin{aligned} W &= Q_n^{-1} \tilde{Q}_n \\ &= \left(Q_n^{-1}(0 \quad 0 \quad 1)^T \quad W_2 \quad \dots \quad W_n \right) \end{aligned}$$

Alors, W se détermine par récurrence par (3.26) à partir du vecteur W_1 donné par (3.28), et les coefficients a , sont déterminés uniquement par (3.27).

Finalement, on peut vérifier directement que les éléments de $Q_n^{-1}(t)$, et donc de $W(t)$, ainsi que son inverse $H(t)$, sont bien définis localement. ■

Dans le cas multi-sorties, si le système est observable, nous avons $\text{rang} Q_o = n$. Il se peut alors qu'il existe plusieurs sous-matrices de rang plein. Donc la matrice d'observabilité ne peut pas déterminer une forme canonique observateur de manière unique. Pour trouver la condition d'existence d'une telle forme canonique observateur ainsi que la transformation de coordonnées, nous devons ajouter des contraintes supplémentaires à la condition d'observabilité. Il est évident que l'observabilité est une condition nécessaire pour qu'une forme canonique existe. Reste donc à trouver le changement de coordonnées.

Supposons qu'il existe une suite d'entiers $\{k_1, \dots, k_p\}$ satisfaisant $\sum_{i=1}^p k_i = n$ telle que la sous-matrice d'observabilité

$$Q_p = \begin{pmatrix} c_1 \\ \Delta_o c_1 \\ \vdots \\ \Delta_o^{k_1-1} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ \Delta_o c_p \\ \vdots \\ \Delta_o^{k_p-1} c_p \end{pmatrix}$$

soit de rang plein

$$\text{rang } Q_p = n \quad (3.29)$$

Supposons que $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p > 0$, et définissons:

$$m_i = \sum_{j=1}^i k_j \quad m_0 = 0 \quad m_p = n \quad j = 1, \dots, p$$

La matrice d'observabilité du système sous forme canonique observateur s'écrit

$$\tilde{Q}_o = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_{2,m_1} & 0 & q_{k_p, m_{p-1}+1} & q_{2,m_p} \\ 0 & 1 & q_{m_1-1, m_2} & q_{k_p+1, m_{p-1}+1} & \cdot & \cdot \\ 1 & q_{m_1, 2} & q_{m_1, m_1} & \cdot & \cdot & q_{m_1, m_p} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & q_{m_{p-1}+2, m_2} & 0 & 0 & q_{m_1+2, m_p} \\ & & q_{m_{p-1}+3, m_1} & & & \cdot \\ & & & 0 & 1 & q_{m_p-1, m_p} \\ 0 & q_{m_p, k_1-k_p+1} & & 1 & q_{m_p, m_{p-1}+2} & q_{m_p, m_p} \end{pmatrix}$$

où les $q_{i,j}$ représentent des éléments éventuellement non nuls. Alors \bar{Q}_s est de rang plein, quelles que soient les valeurs de $q_{i,j}$.

Parmi tous les choix qui restent à notre disposition pour obtenir une forme canonique, nous allons présenter deux schémas pour déterminer la sous-matrice d'observabilité à l'aide d'un tableau appelé diagramme d'Young qu'on utilise pour les systèmes stationnaires [47]. Ce tableau est composé par p colonnes représentant les lignes de la matrice de sortie $C(t)$ et n lignes représentant les opérateurs Δ_o^k que nous avons définis au début de ce chapitre. La (i, j) ème cellule représente donc l'opération $\Delta_o^{i-1}c_j$.

Schéma I. Le premier schéma choisit les lignes de la sous-matrice d'observabilité par la construction du tableau suivant. Nous commençons par $\Delta_o^0 c_1 = c_1$ et l'indiquons en mettant une croix dans la cellule (1,1). Ensuite, si $\Delta_o c_1$ est linéairement indépendant de c_1 , nous mettons une croix dans cette cellule, et nous continuons ce processus jusqu'au moment où nous trouvons un $\Delta_o^{k_1} c_1$ qui est linéairement dépendant des lignes que nous avons déjà remplies. Dans ce cas, on met un 0 dans la cellule $(k_1, 1)$. Si $k_1 < n$, nous continuons le même procédé pour la deuxième colonne et nous arrêtons au moment où nous trouvons $\sum_{i=1}^p k_i = n$ lignes indépendantes. Ce procédé est présenté dans la figure 3.1.

	C_1	C_2	C_p		
	×	×	×	0	I
	×	×	×		Δ_o
	⋮	⋮	⋮		⋮
	×	×	×		$\Delta_o^{k_p-1}$
	×	×	0		$\Delta_o^{k_p}$
	⋮	⋮			⋮
	×	×			$\Delta_o^{k_2-1}$
	×	0			$\Delta_o^{k_2}$
	⋮				⋮
	×				$\Delta_o^{k_1-1}$
	0				$\Delta_o^{k_1}$

Figure 3.1: Diagramme d'Young du schéma I.

Dans ce schéma, la sélection des lignes indépendantes est effectuée de haut en bas sur

la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} c_1 \\ \Delta_o c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ \Delta_o c_p \end{pmatrix}$$

Schéma II. Ce schéma sélectionne les vecteurs par ligne, c'est-à-dire que nous gardons les p premières lignes de la matrice d'observabilité et mettons un 0 dans la cellule correspondant à la ligne qui dépend linéairement des lignes précédentes. Nous cherchons ensuite les nouvelles lignes indépendantes jusqu'au moment où nous trouvons $\sum_{i=1}^p = n$ lignes indépendantes. Ce procédé est présenté dans la figure 3.2.

	C_1	C_2	\dots	C_p		
\times	\times			\times	0	I
\times	\times			\times		Δ_o
\vdots	\vdots			\vdots		\vdots
\times	\times			\times		$\Delta_o^{k_p-1}$
\times	0			\times		$\Delta_o^{k_p}$
\vdots				\vdots		\vdots
\times				\times		$\Delta_o^{k_2-1}$
\times				0		$\Delta_o^{k_2}$
\vdots						\vdots
\times						$\Delta_o^{k_1-1}$
0						$\Delta_o^{k_1}$

Figure 3.2: Diagramme d'Young du schéma II.

Dans ce second schéma, la sélection des lignes indépendantes est effectuée dans l'ordre de haut en bas sur la matrice

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ \Delta_o C \\ \Delta_o^2 C \end{pmatrix}$$

Dans le cas où $k_1 = k_2 = \dots = k_p$, les deux schémas précédents se ramènent à la même sous-matrice d'observabilité.

Comme dans le cas mono-sortie, la transformation de coordonnées est donnée par

$$T = \bar{Q}_s^{-1} Q_s, \quad \text{ou} \quad W = Q_s^{-1} \bar{Q}_s,$$

et

$$W\bar{A} = -\dot{W} + AW$$

Alors, si nous notons W_j la j^{me} colonne de W , nous avons

$$W_{m_{i-1}+i, i+1} = -\dot{W}_{m_{i-1}+i, i} + AW_{m_{i-1}+i, i}, \quad i = 1, \dots, p; \quad i_1 = 1, \dots, k_1 - 1, \quad (3.30)$$

$$\begin{pmatrix} a_1^i(t) \\ \vdots \\ a_n^i(t) \end{pmatrix} = W^{-1} (-\dot{W}_{m_i, i} + AW_{m_i, i}) \quad i = 1, \dots, p \quad (3.31)$$

Il nous reste à choisir les vecteurs initiaux $W_{m_i, i} = 0, \dots, p-1$, pour achever le calcul. Comme W est déterminé uniquement par \bar{A} , nous pouvons en particulier choisir \bar{A} de telle sorte que la matrice d'observabilité vérifie

$$\bar{Q}_s e_{m_{i-1}} = e_{m_i}, \quad i = 1, \dots, p$$

où e_j représente le vecteur unité avec 1 dans la position j . La m_{i-1} -ème colonne de la matrice d'observabilité est donc un vecteur unité avec 1 dans la position m_i . Les éléments restants de cette colonne ainsi que ceux correspondant à \bar{A} sont nuls. L'initialisation de l'algorithme (3.30) est donc donnée par

$$W_{m_{i-1}+1, i} = Q_s^{-1} e_{m_i}, \quad i = 1, \dots, p \quad (3.32)$$

Notons que dans le cas multi-sorties, la matrice de sortie $\bar{C} = CW$ n'est pas forcément sous forme définie dans (3.18). Cependant, par un choix convenable de base, on peut toujours mettre la matrice de sortie dans les nouvelles coordonnées sous forme suivante [47]

$$\bar{C} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & & & & & & \\ & & c_{k_1 2} & 0 & 0 & 1 & & & \mathbf{0} \\ & & & & & c_{k_2 3} & & & \\ & & & & & & & & \\ 0 & 0 & c_{k_1 p} & 0 & 0 & c_{k_2 p} & 0 & & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Faisons un changement de sortie

$$\dot{y} = Gy$$

alors, comme \bar{C} est triangulaire supérieure, on peut trouver une matrice G inversible telle que, dans les nouvelles coordonnées, la matrice de sortie

$$\hat{C} = G\bar{C}$$

est sous forme souhaitée.

3.4 Analyse de l'observabilité des problèmes de trajectographie

3.4.1 Trajectographie en repère fixe

3.4.1.1 Cas actif

Considérons d'abord le système composé de (2.5) et (2.8).

Pour vérifier l'observabilité (uniforme) d'un tel système nous déterminons la dimension de la codistribution

$$\mathcal{O} = \text{sp}\{dL'_j h_j(x) \mid i \geq 0, j = 1, \dots, p\}$$

Par un calcul direct nous obtenons

$$\begin{aligned} dh_1(x) &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, 0 \right) \\ dL_j h_1(x) &= \left(\frac{v_x y^2 + v_z z^2 - x y v_y - x z v_z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{v_x x^2 + v_y z^2 - y x v_x - y z v_z}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{v_z x^2 + v_x y^2 - z x v_x - z y v_y}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \\ dh_2(x) &= \left(\frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, 0, \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, 0, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)}, 0 \right) \\ dL_j h_2(x) &= \left(\frac{v_x(2zx^4 + zx^2y^2 - zy^4 - z^3y^2) + v_y(3zyx^3 + 3zxzy^3 + xyz^3)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \right. \\ &\quad + \frac{v_z(x^3z^2 + xy^2z^2 - x^5 - 2z^3y^2 - xy^4)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot \frac{-xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \\ &\quad \frac{v_x(3yzx^3 + 3zxzy^3 + xyz^3) + v_y(-zx^4 + zx^2y^2 + 2zy^4 - x^3z^3)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \\ &\quad + \frac{v_z(yx^2z^2 + y^3z^2 - yx^4 - 2x^2y^3 - y^5)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}} \cdot \frac{-yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}}, \\ &\quad \left. \frac{v_x(x^3 + xy^2 - xz^2) + v_y(yx^2 + y^3 - yz^2) + 2zv_x(x^2 + y^2)}{(x^2+y^2+z^2)^2\sqrt{(x^2+y^2)^3}}, \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^2+z^2} \right) \\ dh_3(x) &= \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, 0, \frac{x}{x^2+y^2}, 0, 0, 0 \right) \\ dL_j h_3(x) &= \left(\frac{-v_y(x^2 - y^2) + 2xyv_x}{(x^2+y^2)^2}, \frac{-y}{x^2+y^2}, \frac{-v_x(x^2 - y^2) - 2xyv_y}{(x^2+y^2)^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, 0, 0 \right) \end{aligned}$$

Clairement, $(dh, dL_j h)$ est de rang plein alors que l'accélération a apparaît une dérivation plus tard. La commande ne peut donc pas faire chuter le rang, c'est-à-dire que

l'observabilité de ce système ne dépend pas de l'entrée. Il en résulte que le système (2.5) est localement uniformément observable ainsi que localement complètement uniformément observable, avec les indices d'observabilité $k_1 = k_2 = k_3 = 2$, sous l'observation (2.8), partout à l'exception de l'axe des z en entier, y compris l'origine où la matrice d'observabilité n'est pas définie.

L'observabilité de (2.5) peut être vérifiée directement par le fait qu'il existe un difféomorphisme local

$$\begin{cases} x &= r \cos \sigma \cos \gamma \\ y &= r \cos \sigma \sin \gamma \\ z &= r \sin \sigma \\ v_x &= \dot{r} \cos \sigma \cos \gamma - r \dot{\sigma} \sin \sigma \cos \gamma - r \dot{\gamma} \cos \sigma \sin \gamma \\ v_y &= \dot{r} \cos \sigma \sin \gamma - r \dot{\sigma} \sin \sigma \sin \gamma + r \dot{\gamma} \cos \sigma \cos \gamma \\ v_z &= \dot{r} \sin \sigma + r \dot{\sigma} \cos \sigma \end{cases} \quad (3.33)$$

permettant de reconstruire l'état à partir des observations (r, γ, σ) et leurs dérivées de Lie par rapport aux champs de vecteurs définis par (2.5) [57].

3.4.1.2 Cas passif

Considérons le système (2.6). Si $(x(\cdot), y(\cdot), z(\cdot), \Sigma(\cdot), \Gamma(\cdot), v(\cdot))$ est une courbe intégrale de (2.6), on vérifie aisément que pour tout nombre réel λ , $(\lambda x(\cdot), \lambda y(\cdot), \lambda z(\cdot), \Sigma(\cdot), \Gamma(\cdot), \lambda v(\cdot))$ l'est aussi et l'observation des angles (σ, γ) ne change pas quel que soit λ . Ceci implique que la droite

$$I = \{(\lambda x(\cdot), \lambda y(\cdot), \lambda z(\cdot), \Sigma(\cdot), \Gamma(\cdot), \lambda v(\cdot)) \mid \lambda \in \mathbf{R}\} \quad (3.34)$$

est contenue dans une sous-variété inobservable passant par $(x, y, z, \Sigma, \Gamma, v)$. L'ensemble I peut aussi s'exprimer

$$I = \left\{ \left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}, \Sigma, \Gamma, \lambda v \right) \mid \lambda \in \mathbf{R} \right\} \quad (3.35)$$

On montre en fait que la droite I est égale à la sous-variété inobservable grâce au fait que $\left(\frac{x}{v}, \frac{y}{v}, \frac{z}{v}, \Sigma, \Gamma \right)$ peut être reconstruit par $(\sigma, \dot{\sigma}, \bar{\sigma}, \gamma, \dot{\gamma}, \bar{\gamma})$.

Théorème 3.9 [57] *Notons*

$$\begin{cases} \xi_1 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) \cos \sigma \cos \gamma \\ \xi_2 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) \cos \sigma \sin \gamma \\ \xi_3 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) \sin \sigma \\ \xi_4 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) (b(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) \cos \sigma \cos \gamma - \dot{\sigma} \sin \sigma \cos \gamma - \dot{\gamma} \cos \sigma \sin \gamma) \\ \xi_5 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) (b(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) \cos \sigma \cos \gamma - \dot{\sigma} \sin \sigma \sin \gamma + \dot{\gamma} \cos \sigma \cos \gamma) \\ \xi_6 &= a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) (b(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) \sin \sigma + \dot{\sigma} \cos \sigma) \end{cases} \quad (3.36)$$

avec

$$\begin{aligned} a(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) &= \frac{1}{\sqrt{\dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma + \dot{\sigma}^2}} \\ b(\gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}) &= -\frac{1}{2} a^4(\dot{\gamma}, \sigma, \dot{\sigma}) (\dot{\gamma} \ddot{\gamma} \cos^2 \sigma - \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin \sigma + \dot{\sigma} \ddot{\sigma}) \end{aligned} \quad (3.37)$$

alors nous avons

$$\frac{x}{v} = \frac{\xi_1}{\sqrt{\xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2}} \quad (3.38)$$

$$\frac{y}{v} = \frac{\xi_2}{\sqrt{\xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2}} \quad (3.39)$$

$$\frac{z}{v} = \frac{\xi_3}{\sqrt{\xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2}} \quad (3.40)$$

$$\Sigma = \arcsin \left(\frac{\xi_6}{\sqrt{\xi_4^2 + \xi_5^2 + \xi_6^2}} \right) \quad (3.41)$$

$$\Gamma = \arctan \left(\frac{\xi_5}{\xi_6} \right) \quad (3.42)$$

et la sous-variété inobservable passant par tout point est donnée par (3.34).

Notons:

$$\zeta_1 = \frac{x}{v} \quad \zeta_2 = \frac{y}{v} \quad \zeta_3 = \frac{z}{v} \quad \zeta_4 = \Sigma \quad \zeta_5 = \Gamma$$

et rappelons que comme v est constante, nous déduisons de (2.6)

$$\begin{cases} \dot{\zeta}_1 = \cos \zeta_4 \cos \zeta_5 \\ \dot{\zeta}_2 = \cos \zeta_4 \sin \zeta_5 \\ \dot{\zeta}_3 = \sin \zeta_4 \\ \dot{\zeta}_4 = 0 \\ \dot{\zeta}_5 = 0 \end{cases} \quad (3.43)$$

et l'observation s'exprime en fonction des nouvelles variables

$$\begin{cases} \sigma = \arcsin \left(\frac{\zeta_2}{\sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2}} \right) \\ \gamma = \arctan \left(\frac{\zeta_2}{\zeta_1} \right) \end{cases} \quad (3.44)$$

D'après le théorème 3.9, le système (3.43) est localement observable à partir de l'observation (3.44) sauf aux points correspondant à l'axe des z .

Nous remarquons finalement que comme l'observabilité ne dépend pas des coordonnées, la propriété d'observabilité ne change pas pour les autres modèles qui sont localement difféomorphes à celui exprimé en coordonnées cartésiennes.

3.4.2 Trajectographie passive en repère mobile

Nous considérons le cas où le capteur passif est traîné par (ou embarqué sur) un porteur mobile. Nous faisons en plus les hypothèses suivantes

- L'ensemble "capteur plus porteur" est un objet rigide dont le centre de gravité est soumis à une accélération connue.
- Le porteur est capable de faire des manœuvres arbitraires.

Notons qu'en pratique la seconde hypothèse n'est vérifiée que pendant des durées limitées pour des raisons énergétiques évidentes. L'analyse qui suit sera donc naturellement restreinte aux intervalles de temps correspondants.

Nous étudions le système en coordonnées polaires modifiées.

3.4.2.1 Poursuite dans le plan

Un critère algébrique pour l'observabilité du système de poursuite en dimension 2 est donné dans le théorème suivant

Théorème 3.10 [1, 58] *Le système de poursuite passive en dimension 2 (2.13) est uniformément observable pour la commande $u : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ si et seulement si*

$$2\dot{\gamma}\gamma^{(3)} - 3\dot{\gamma}^2 + 4\dot{\gamma}^2 \neq 0 \quad \forall t \in [t_0, t_1] \quad (3.45)$$

où γ est l'observation de l'azimut.

Corollaire 3.11 *Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) $2\dot{\gamma}\gamma^{(3)} - 3\dot{\gamma}^2 + 4\dot{\gamma}^2 = 0$

(ii) *L'état et les entrées du système vérifient*

$$3(u_{xy} - u_yx)^2 + 2(xy - yx)(\dot{u}_{xy} - \dot{u}_yx) + 6(xy - yx)(u_x\dot{y} - u_y\dot{x}) \equiv 0, \quad (3.46)$$

ou de manière équivalente en coordonnées polaires modifiées

$$6x_{pm2}^2(u_x \cos x_{pm1} + u_y \sin x_{pm1}) + 6x_{pm2}x_{pm3}(u_x \sin x_{pm1} - u_y \cos x_{pm1}) + 3x_{pm4}(u_x \sin x_{pm1} - u_y \cos x_{pm1})^2 + 2x_{pm2}(\dot{u}_x \sin x_{pm1} - \dot{u}_y \cos x_{pm1}) \equiv 0 \quad (3.47)$$

3.4.2.2 Poursuite dans l'espace

Pour vérifier la propriété d'observabilité correspondant au problème de poursuite passive dans l'espace, nous présentons les principales propriétés du vecteur unité de LDV

Lemme 3.12 [39] *Le vecteur unité de LDV \bar{r} vérifie les relations suivantes*

$$(\bar{r}\bar{r}^T)\bar{r} = \bar{r} \quad (3.48)$$

$$(I - \bar{r}\bar{r}^T)\bar{r} = 0 \quad (3.49)$$

$$\dot{\bar{r}}^T \bar{r} = \bar{r}^T \dot{\bar{r}} = \langle \dot{\bar{r}}, \bar{r} \rangle = 0 \quad (3.50)$$

Remarque 3.2 (3.50) implique que le vecteur $\dot{\hat{r}}$ est toujours orthogonal à \hat{r} . Nous en déduisons immédiatement

$$(\bar{r}\bar{r}^T)\dot{\hat{r}} = 0 \quad (3.51)$$

$$(I - \bar{r}\bar{r}^T)\dot{\hat{r}} = \dot{\hat{r}} \quad (3.52)$$

Remarque 3.3 La matrice $\bar{r}\bar{r}^T$ projette tous les vecteurs sur la droite LDV , par contre la matrice $(I - \bar{r}\bar{r}^T)$ projette tous les vecteurs sur l'espace orthogonal à la droite LDV . L'action de $\bar{r}\bar{r}^T$ et $(I - \bar{r}\bar{r}^T)$ sur un vecteur v est représentée sur la figure 3.3

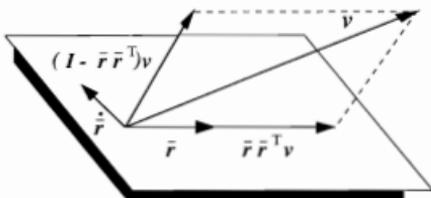


Figure 3.3: Interprétation géométrique de $\bar{r}\bar{r}^T$ et de $(I - \bar{r}\bar{r}^T)$.

La matrice d'observabilité Q_o associée au système (2.16)

$$F(x_{pm}, u) = f(x_{pm}) + g(x_{pm})u$$

avec l'observation (2.17) est donnée par:

$$Q_o = \Psi(x_{pm}) + \Omega(x_{pm}, u) \quad (3.53)$$

où

$$\Psi(x_{pm}) = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ \Psi_{31} & \Psi_{32} & \Psi_{33} & 0_{3 \times 1} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_{31} &= -(x_{pm2}^T x_{pm2}) I_{3 \times 3} \\ \Psi_{32} &= -2x_{pm3} I_{3 \times 3} - 2x_{pm1} x_{pm2}^T \\ \Psi_{33} &= -2x_{pm2} \end{aligned}$$

et

$$\Omega(x_{pm}, u) = \begin{pmatrix} 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & 0_{3 \times 1} \\ \Omega_{31} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} & \Omega_{34} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}\Omega_{31} &= x_{pm4}(x_{pm1}^T u I_{3 \times 3} + x_{pm1} u^T) \\ \Omega_{34} &= -(I - x_{pm1} x_{pm1}^T) u\end{aligned}$$

Proposition 3.13 *Considérons le système (2.16) avec observation passive, alors*

- (i) *ce système est inobservable si $u = 0$, ou si u est dans la direction de LDV*
 (ii) *si $u \neq 0$, ce système est localement uniformément observable si l'accélération du porteur n'est pas dans le plan engendré par les vecteurs \bar{r} et $\dot{\bar{r}}$.*

Preuve: (i) Le système est clairement inobservable pour $u = 0$, puisqu'alors $\Omega(x, u)$ est nulle, et la matrice d'observabilité définie par (3.53) ne peut donc pas être de rang plein. D'autre part, si u est dans la direction de LDV, alors $(I - \bar{r}\bar{r}^T)u = 0$, donc $\Omega_{34} = 0$. De plus, $\dot{\bar{r}} = 0$, c'est-à-dire $x_{pm2} = 0$, d'où $\Psi_{31} = 0$, $\Psi_{33} = 0$, $\Psi_{32} = -2x_{pm3}I$ et Q_o n'est pas de plein rang.

(ii) Si u n'est pas dans le plan engendré par les vecteurs \bar{r} et $\dot{\bar{r}}$, alors $\dot{\bar{r}}$ et $(I - \bar{r}\bar{r}^T)u$ ne sont pas parallèles et la sous-matrice (Ψ_{33}, Ω_{34}) est de rang plein ainsi que Q_o . ■

D'après ce qui précède, les manœuvres admissibles du porteur consistent, pour ne pas détruire l'observabilité, à ne jamais maintenir la trajectoire du porteur dans la direction de la ligne de visée.

3.4.2.3 Cas dégénérés

Lorsque l'accélération du porteur est nulle, c'est-à-dire $u = 0$, le système (2.16) peut être réduit en éliminant la variable x_{pm4}

$$\dot{x}_{pm} = \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm3}x_{pm2} - x_{pm1}x_{pm2}^T x_{pm2} \\ x_{pm2}^T x_{pm2} - x_{pm3}^2 \end{pmatrix} = f(x_{pm}) \quad (3.54)$$

Proposition 3.14 *Le système (3.54) avec observation passive est localement observable si et seulement si $x_{pm2} \neq 0$.*

Preuve: Par un calcul direct nous obtenons la matrice d'observabilité:

$$Q_o = \begin{pmatrix} I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ 0_{3 \times 3} & I_{3 \times 3} & 0_{3 \times 1} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}Q_{31} &= -(x_{pm2}^T x_{pm2}) I_{3 \times 3} \\ Q_{32} &= -2x_{pm3} I_{3 \times 3} - 2x_{pm1} x_{pm2}^T \\ Q_{33} &= -2x_{pm2}\end{aligned}$$

Alors $x_{pm2} \neq 0$ est une condition suffisante pour que Q_o soit de rang plein. Dans ce cas, la liste des indices d'observabilité est (3, 2, 2). Sinon, si $x_{pm2} = 0$, le système (3.54) dégénère en

$$\dot{x}_{pm1} = 0 \tag{3.55}$$

donc la condition est nécessaire. ■

Remarque 3.4 *Compte-tenu du fait que dans le système (2.16) la composante x_{pm4} n'intervient pas dans les équations des autres variables, il n'y a pas lieu de distinguer, lorsque $u = 0$, entre le cas où le capteur se déplace à vitesse constante et celui où le capteur est immobile. Notons aussi que $x_{pm2} \neq 0$ implique que la droite joignant le porteur et la cible ne passe pas par l'origine.*

Chapitre 4

Rappels sur les observateurs

4.1 Observateurs asymptotiques

Un observateur du système (3.1) est un système dynamique qui sert à reconstituer l'état $x(t)$ étant données les observations $y(s)$, $s \leq t$. Précisément

Définition 4.1 (Observateur asymptotique) *Le système dynamique*

$$\dot{\hat{x}} = \psi(\hat{x}, u, y) \quad (4.1)$$

avec $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\psi : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est appelé observateur asymptotique local, si les conditions suivantes sont vérifiées

- (i) si pour un t_0 , $\hat{x}(t_0) = x(t_0)$, alors $\hat{x}(t) = x(t)$ pour tout $t \geq t_0$ et u admissible.
- (ii) s'il existe un voisinage ouvert de l'origine $U \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour l'erreur initiale $x_{t_0} - \hat{x}_{t_0} \in U$ on ait $x_t - \hat{x}_t \in U \quad \forall t \geq t_0$, et $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x_t - \hat{x}_t\| = 0$.

Le système (4.1) est un observateur asymptotique global, si dans la condition (ii) on remplace U par \mathbb{R}^n .

Des définitions d'observateurs plus générales ont été introduites, en particulier, dans le cas où l'estimée n'est pas directement l'état du système (4.1) mais une sortie d'un système dynamique comparable à (4.1). La définition 4.1 est suffisamment générale pour nos besoins.

Pour préciser la vitesse de convergence d'un observateur, nous introduisons la définition suivante

Définition 4.2 *Le système (4.1) est appelé un observateur exponentiel local si la condition (i) est vérifiée, et*

- (iii) s'il existe des constantes positives M et α telles que

$$\|x_t - \hat{x}_t\| \leq M \exp(-\alpha t)$$

pour $x_{t_0} - \hat{x}_{t_0} \in U$, U un voisinage ouvert de l'origine.

L'observateur exponentiel global est défini de même façon en remplaçant U par l'espace entier.

Nous pouvons apporter quelques précisions à la structure générale d'un observateur non linéaire, en particulier à partir de la condition (i).

Théorème 4.1 [50, 92] *Supposons que (4.1) est un observateur du système (3.1), \mathcal{U} l'ensemble des entrées admissibles. Alors la condition (i) est vérifiée si et seulement si ψ vérifie*

$$\psi(\hat{x}, u, y) = f(\hat{x}, u) + k(\hat{x}, y, u) \quad (4.2)$$

où $k : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ est tel que

$$k(\hat{x}, h(\hat{x}), u) = 0 \quad \forall \hat{x} \in \mathbb{R}^n \quad \forall u \in \mathcal{U} \quad (4.3)$$

Le théorème 4.1 nous permet de décrire la forme générale de l'observateur non linéaire :

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + k(\hat{x}, u, h(x)) \quad \hat{x}(t_0) = \hat{x}_0 \quad (4.4)$$

Une expression approximative de $k(\hat{x}, u, y)$ s'écrit localement $k(\hat{x}, u)(y - h(\hat{x}))$. Dans ce cas, on appelle $k(\hat{x}, u)$ le gain de l'observateur et $(y - h(\hat{x}))$ l'innovation.

On appelle erreur d'estimation la différence entre l'état et son estimation donnée par un observateur $e = x - \hat{x}$. En appliquant (3.1) et (4.4), nous avons

$$\dot{e} = f(\hat{x} + e, u) - f(\hat{x}, u) - k(\hat{x}, u, y) \quad (4.5)$$

Nous appelons (4.5) la dynamique d'erreur. La condition de convergence asymptotique de l'observateur implique donc $\lim_{t \rightarrow \infty} e_t = 0$. L'existence d'un observateur est donc équivalente à la stabilisabilité de la dynamique d'erreur par retour de sortie, et la construction de l'observateur revient à calculer le bouclage de sortie stabilisant $k(\hat{x}, u, y)$. On mesure ainsi la difficulté du problème puisqu'il n'existe pas actuellement de condition générale d'existence d'une telle commande stabilisante.

4.2 Observateurs linéaires

4.2.1 Observateur de Luenberger

Le problème de construction d'un observateur pour le système linéaire stationnaire

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{cases} \quad (4.6)$$

est complètement résolu par Luenberger [32, 47, 61, 62, 63]. L'observateur de Luenberger est donné par

$$\dot{\hat{x}} = A\hat{x} + Bu + K(y - C\hat{x}) \quad (4.7)$$

d'où la dynamique d'erreur

$$\dot{e} = (A - KC)e \quad (4.8)$$

La construction d'un observateur revient donc à trouver un gain K tel que $(A - KC)$ soit une matrice stable. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un tel gain existe est que le système (4.6) soit complètement observable.

Dans la méthode de Luenberger, le placement des pôles de l'équation est, en général, arbitraire. Mais en pratique, leur choix correspond souvent à des considérations physiques ou expérimentales ou à défaut à l'utilisation d'une méthode standard telle que les méthodes LQ ou par analogie avec le filtre de Kalman.

Exemple 4.1 [32] Considérons le système

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.9)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

pour le cas de dimension 2 et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pour le cas de dimension 3.

L'observateur de (4.9) est de la forme de (4.7). Déterminons le gain de l'observateur par la technique du filtrage de Kalman stationnaire, réputé produire un observateur "optimal" robuste aux perturbations sur la dynamique et l'observation. En posant $G = (0 \ 1)^T$ la solution de l'équation de Riccati algébrique

$$AP + PA^T - PC^T V^{-1} CP + GWG^T = 0 \quad (4.10)$$

est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W^{1/2} V^{1/2} & \sqrt{2} W^{3/4} V^{1/4} \\ \sqrt{2} W^{3/4} V^{1/4} & \sqrt{2} W^{1/4} V^{3/4} \end{pmatrix}$$

où W et V sont des constantes strictement positives représentant les variances des bruits blancs gaussiens stationnaires dans la dynamique et l'observation. Le gain de l'observateur est donc donné par

$$K = PC^T V^{-1} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}(W/V)^{1/4} \\ (W/V)^{1/2} \end{pmatrix}$$

En posant $\Omega = (W/V)^{1/4}$ alors les pôles de l'équation d'erreur se trouvent à

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\Omega(1 \pm i)$$

Avec ce choix de valeurs propres correspondant au rapport signal/bruit, la dynamique d'erreur est toujours exponentiellement stable.

Pour le système (4.9) de dimension 3, la solution de (4.10) est donnée par

$$P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2W^{1/6}V^{5/6} & 2W^{1/3}V^{2/3} & W^{1/2}V^{1/2} \\ 2W^{1/3}V^{2/3} & 3W^{1/2}V^{1/2} & 2W^{2/3}V^{1/3} \\ W^{1/2}V^{1/2} & 2W^{2/3}V^{1/3} & 2W^{5/6}V^{1/6} \end{pmatrix}$$

et le gain de l'observateur est donné par

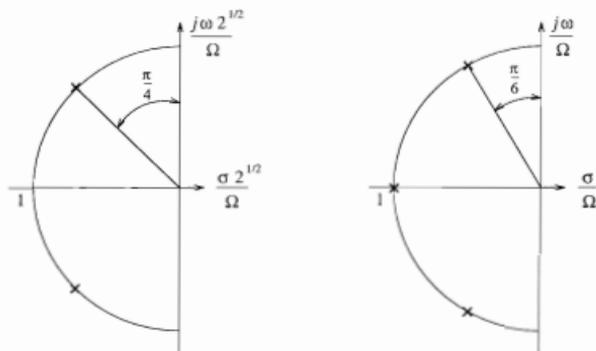
$$K = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(W/V)^{1/6} \\ 2(W/V)^{1/3} \\ (W/V)^{1/2} \end{pmatrix}$$

En posant $\Omega = (W/V)^{1/6}$ les pôles de l'équation d'erreur associée se trouvent à

$$\lambda_1 = -\Omega \quad \lambda_{2,3} = -\Omega \left(\frac{1}{2} \pm i\sqrt{\frac{3}{2}} \right)$$

On arrive donc à la même conclusion que dans le cas précédent.

Les dynamiques d'erreur associées au filtre de degré 2 et 3 dont la répartition des pôles est représentée sur la figure 4.1 correspondent à des polynômes de Butterworth [32].



(a) Polynôme de Butterworth de degré 2.

(b) Polynôme de Butterworth de degré 3.

Figure 4.1: Pôles des dynamiques d'erreur associées aux filtres de degré 2 et 3.

Dans le cas général, nous ne pouvons pas toujours trouver une solution explicite de (4.10). Mais, grâce à la propriété d'observabilité de la paire (A, C) et de commandabilité de la paire (A, G) , l'existence d'une solution définie positive de (4.10) est garantie. Nous pouvons donc construire un observateur en calculant numériquement la solution de l'équation de Riccati. ■

4.2.2 Observateurs de systèmes à temps variable non singuliers

L'approche de Luenberger ne peut pas s'appliquer directement aux systèmes linéaires instationnaires, parce que la notion de pôle d'un système instationnaire n'est plus simplement reliée à sa stabilité (voir par ex. [54]). On peut alors avoir recours au filtrage de Kalman dont la stabilité en instationnaire n'est garantie que pour des cas particuliers [24, 27, 46].

Nous allons présenter la méthode utilisant des formes canoniques, proposée par Williamson [91], et Bestle et Zeitz [9], permettant de se ramener à l'observateur de Luenberger. Cette approche s'applique également à certains cas non linéaires, par exemple bilinéaires.

Nous nous restreignons aux systèmes sans commande (3.9) sans nuire à la généralité, et considérons d'abord le cas mono-sortie.

Si le système (3.9) est totalement observable dans un intervalle $I \subset (0, \infty)$, en vertu du théorème 3.8 nous pouvons le mettre, par un changement de coordonnées $z = H(t)x$, sous forme canonique observateur

$$\begin{cases} \dot{z} = \bar{A}(t)z \\ y = \bar{C}z \end{cases} \quad (4.11)$$

où

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & & 0 & a_1(t) \\ 1 & & & \\ & & & \\ 0 & & 0 & a_{n-1}(t) \\ 0 & & 0 & 1 & a_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\bar{C} = (0 \quad 0 \quad 1)$$

et les paires (\bar{A}, \bar{C}) et (A, C) sont liées par

$$\bar{A}(t) = H(t)A(t)H^{-1}(t) + \dot{H}(t)H^{-1}(t) \quad \bar{C}(t) = C(t)H^{-1}(t) \quad (4.12)$$

Introduisons l'opérateur

$$\mathcal{L}q(t) = -\dot{q}(t) + A(t)q(t) \quad \mathcal{L}^k q(t) = \mathcal{L}(\mathcal{L}^{k-1}q(t)) \quad (4.13)$$

alors d'après le chapitre précédent, le changement de coordonnées est donné par

$$H^{-1}(t) = (\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^{n-1}) q(t) \quad (4.14)$$

avec $q(t)$ la dernière colonne de l'inverse de la matrice d'observabilité du système (3.9).

$$q(t) = Q_n^{-1}(t)e_n$$

Dans les coordonnées canoniques, l'observateur est donc de la forme

$$\dot{z} = \bar{A}(t)z + \bar{K}(t)(y - \bar{C}z) \quad (4.15)$$

En choisissant le gain

$$\tilde{K}(t) = a(t) + \alpha$$

où

$$a(t) = (a_1(t), \dots, a_n(t))^T$$

et

$$\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})^T$$

un vecteur constant, la dynamique d'erreur se ramène à

$$\dot{\varepsilon} = (E_n - \alpha\tilde{C})\varepsilon \quad (4.16)$$

où

$$E_n = \begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ 1 & & & \\ & \ddots & & \\ 0 & & & \\ & & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $(E_n - \alpha\tilde{C})$ est une matrice stable si et seulement si α est tel que le polynôme $s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \dots + \alpha_1s + \alpha_0$ est Hurwitzien.

Dans les coordonnées originales, l'observateur est de la forme

$$\dot{\tilde{x}} = A(t)\tilde{x} + K(t)(y - C\tilde{x}) \quad (4.17)$$

Le gain est donné par

$$\begin{aligned} K(t) &= H(t)^{-1}\tilde{K}(t) \\ &= H(t)^{-1}(\alpha + a(t)) \\ &= (\alpha_0 + \alpha_1\mathcal{L} + \dots + \alpha_{n-1}\mathcal{L}^{n-1} + \mathcal{L}^n)q(t), \end{aligned} \quad (4.18)$$

la dynamique d'erreur est donnée par

$$\dot{\varepsilon} = (A(t) - K(t)C(t))\varepsilon. \quad (4.19)$$

Le comportement asymptotique de l'observateur n'est déterminé par la dynamique de l'erreur dans les coordonnées canoniques que sous des hypothèses supplémentaires sur le changement de coordonnées. En effet,

$$\varepsilon(t) = H(t)e(t) \quad (4.20)$$

et si $H(t)$ est une matrice dont tous les éléments sont continus et bornés dans un voisinage de $t = +\infty$, $\varepsilon(t)$ et $e(t)$ sont localement équivalentes ce qui prouve notre assertion.

Notons ainsi que la condition d'observabilité n'est plus suffisante dans le cas instationnaire pour assurer l'existence d'un observateur à cause de la dépendance par rapport au temps du changement de coordonnées.

Nous donnerons plus loin une condition suffisante pour déterminer le comportement asymptotique de l'observateur (4.17) à partir des coefficients du système original (3.9).

La construction de l'observateur pour les systèmes multi-sorties se déduit directement de ce qui précède grâce à la forme canonique observateur. Dans les coordonnées canoniques, la dynamique d'erreur est donnée par

$$\dot{\varepsilon} = (\bar{A}(t) - \bar{K}(t)G(t)\bar{C}(t))\varepsilon \quad (4.21)$$

où $\bar{A}(t)$ et $\bar{C}(t)$ sont données par (4.12) et $G(t)$ représente le changement inversible de sorties. En choisissant

$$\bar{K}_i = a^i(t) + \alpha^i \quad i = 1, \dots, p$$

où

$$\alpha^i = (\alpha_{i_1}^i, \dots, \alpha_{i_n}^i)^T \quad i = 1, \dots, p$$

sont des vecteurs constants, et $a^i(t)$ est la m_i -ème colonne de $\bar{A}(t)$, la dynamique de l'erreur est donnée par le système stationnaire

$$\dot{\varepsilon} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & -\alpha_1^1 & & & -\alpha_1^p \\ 1 & & & & \mathbf{O} & \\ 0 & & & & & \\ & 0 & -\alpha_{k_2-1}^1 & & & -\alpha_{k_2-1}^p \\ 0 & 0 & 1 & -\alpha_{k_1}^1 & & -\alpha_{k_1}^p \\ \hline & & -\alpha_{n-k_p+1}^1 & & 0 & 0 & -\alpha_{n-k_p+1}^1 \\ & & & & 1 & & \\ & \mathbf{O} & & & 0 & & \\ & & -\alpha_{n-1}^1 & & & 0 & -\alpha_{n-1}^p \\ & & -\alpha_n^1 & & 0 & 0 & 1 & -\alpha_n^p \end{array} \right) \varepsilon$$

Un choix possible de α^i est donc

$$\alpha_j^i = 0 \quad j < m_{i-1} \quad j > m_i \quad i = 1, \dots, p$$

et

$$(\alpha_{m_{i-1}}^i, \dots, \alpha_{m_i}^i) \quad i = 1, \dots, p$$

sont les coefficients de polynômes Hurwitziens. La dynamique de ε est alors découplée et l'étude de la stabilité de ε est ramenée à l'étude de la stabilité de p sous-systèmes mono-sortie indépendants. Dans les coordonnées originales, l'observateur est de la forme (4.17), le gain étant donné par

$$K(t) = [(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 \mathcal{L} + \alpha_{k_1}^1 \mathcal{L}^{k_1-1} + \mathcal{L}^{k_1})W_1, (\alpha_{n-k_p+1}^p + \alpha_{n-k_p+2}^p \mathcal{L} + \alpha_n^p \mathcal{L}^{k_p-1} + \mathcal{L}^{k_p})W_p]G^{-1}(t), \quad (4.22)$$

les vecteurs W_i étant choisis comme au chapitre 3 (3.32)

$$W_i = Q_s^{-1} e_{m_i}, \quad i = 1, \dots, p$$

4.3 Observateurs non linéaires

L'étude des observateurs non linéaires a commencé par le travail de Thau [82] au début des années 70. Il existe une abondante littérature sur ce sujet (voir la bibliographie). Les méthodes proposées sont grossièrement divisées en deux grandes classes : la méthode de Lyapunov et la méthode de linéarisation.

La méthode de Lyapunov est une idée intuitive. Son principe repose sur la construction d'une fonction injective dont la dérivée le long de la dynamique d'erreur est strictement négative au voisinage de 0, ou, ce qui revient au même, qui décroît le long des trajectoires de l'erreur. Une telle fonction de Lyapunov permet donc de conclure à la stabilité de la dynamique d'erreur. L'application des méthodes de Lyapunov à la construction d'observateurs semble être un problème très compliqué, en particulier parce que l'état de système apparaît dans la dynamique d'erreur. Jusqu'à présent, seuls des cas particuliers ont été résolus sous des conditions peu explicites et difficiles à vérifier [43, 50, 82, 84, 85].

La méthode de linéarisation est un prolongement de l'idée de Luenberger. Cette méthode est basée sur la notion d'équivalence à une équation d'erreur linéaire. Peu de classes de systèmes admettent cependant une équation d'erreur équivalente à un système linéaire par immersion ou par difféomorphisme d'état et injection de sortie [9, 11, 49, 51, 52, 55, 64, 65, 91, 93, 94]. Dans le même ordre d'idées, d'autres auteurs ont proposé des observateurs réduits permettant de ne linéariser qu'un sous-système tout en rejetant l'autre partie comme s'il s'agissait de perturbations ([5, 6, 7, 25]).

On cherche souvent des solutions approchées ou qui mélangent les deux idées ci-dessus : la méthode des observateurs à grand gain [35, 83], la technique de SSV (système à structure variable) [77, 88, 89], la linéarisation tangente en un point d'équilibre [8, 11, 19, 87, 92]. La construction de l'observateur basée sur la linéarisation tangente le long de l'état estimé reste toujours ouverte. C'est un de nos principaux sujets d'étude dans la suite.

Nous allons rappeler d'abord deux approches concernant la linéarisation exacte de l'équation d'erreur, que l'on tentera d'appliquer au problème de trajectographie au chapitre 6, et quelques éléments de l'approche Lyapunov.

4.3.1 Linéarisation exacte de la dynamique d'erreur

Considérons le problème de construire un observateur pour le système (3.1). Supposons que l'entrée u est de classe C^n et notons

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} u \\ \dot{u} \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

Alors, s'il existe un difféomorphisme d'état

$$\xi = W(x, \bar{u}), \quad (\text{ou } x = W^{-1}(\xi, \bar{u}))$$

et une injection non linéaire de sortie $\alpha(y, \bar{u})$ tels que nous pouvons mettre le système (3.1) sous forme canonique observateur avec injection de sortie

$$\begin{cases} \dot{\xi} &= A\xi + \alpha(y, \bar{u}) \\ y &= C\xi \end{cases} \quad (4.23)$$

l'observateur dans les nouvelles coordonnées est donné par

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + \alpha(y, \bar{u}) + K(y - C\hat{\xi}) \quad (4.24)$$

La dynamique d'erreur (4.8) lui est associée, comme dans le cas linéaire.

Le difféomorphisme et l'injection de sortie qui transforment le système (3.1) en sa forme canonique observateur sont les solutions des équations aux dérivées partielles suivantes :

$$\frac{\partial W^{-1}}{\partial \xi_{i,j+1}} = ad_{-f_i}^p \frac{\partial W^{-1}}{\partial \xi_{i,1}}, \quad i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, k_i - 1 \quad (4.25)$$

$$\frac{\partial W^{-1}}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \xi_{i,k}} = ad_{-f_i}^{k_i} \frac{\partial W^{-1}}{\partial \xi_{i,1}} \quad i = 1, \dots, p \quad (4.26)$$

$$\left\langle L_{f_i}^{j-1}(dh_i), \frac{\partial W^{-1}}{\partial \xi_{i,1}} \right\rangle = \delta_{i,l} \cdot \delta_{i,k}, \quad i, l = 1, \dots, p; j = 1, \dots, k_i \quad (4.27)$$

$ad_{-f_i}^p g$ est définie, en coordonnées locales, par

$$ad_{-f_i}^p g = \frac{\partial f}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial g}{\partial t}, \quad g \in V(X \times \mathbb{R})$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un observateur sous forme canonique observateur avec injection de sortie, autrement dit obtenu à partir de la solution de (4.25), (4.26) et (4.27), est la suivante.

Théorème 4.2 [51, 52] *Une condition nécessaire pour que le problème de linéarisation exacte de la dynamique d'erreur admette des solutions est que le système (3.1) soit uniformément observable.*

Supposons que le système (3.1) admet, par un difféomorphisme $x = \chi(z)$, la forme canonique d'observabilité

$$\begin{cases} \dot{z}_{11} &= z_{12} \\ \dot{z}_{12} &= z_{13} \\ \vdots & \\ \dot{z}_{1k_1} &= l_1(z, \bar{u}) \\ \vdots & \\ \dot{z}_{p1} &= z_{p1} \\ \dot{z}_{p2} &= z_{p3} \\ \vdots & \\ \dot{z}_{pk_p} &= l_p(z, \bar{u}) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 &= z_{11} \\ \vdots & \\ y_p &= z_{p1} \end{cases} \quad (4.28)$$

avec $l_i(z, \bar{u}) = L_{f_u}^{k_i} h_i$, $i = 1, \dots, p$, et k_1, \dots, k_p les indices d'observabilité. On note $\mathcal{P}(z)$ l'anneau des polynômes en z à coefficients C^∞ en la sortie et les dérivées de u . Le degré de z_{ij} est défini par $j-1$ et le degré d'un monôme $z_{i_1 j_1} \dots z_{i_r j_r}$ est défini par la somme des degrés de ses facteurs, $(j_1 - 1) + \dots + (j_r - 1)$. $\mathcal{P}^k(z)$ désigne donc les polynômes de degré inférieur ou égal à k . Enfin, $\mathcal{P}_0^k(z)$ désigne les polynômes de $\mathcal{P}^k(z)$ qui sont engendrés par les éléments de $\mathcal{P}^{k-1}(z)$. Par convention, $z_{i(k+1)}$ est dans $\mathcal{P}^k(z)$, mais pas dans $\mathcal{P}_0^k(z)$.

Définition 4.3 Le système (3.1) admet une représentation sous forme observable si la forme canonique (4.28) associée vérifie $l_i(z, \bar{u}) \in \mathcal{P}^{k_i}(z)$ pour $i = 1, \dots, p$.

Proposition 4.3 Une condition nécessaire pour qu'il existe un changement de sorties tel que dans les nouvelles coordonnées la représentation d'observabilité soit sous forme observable spéciale est qu'en coordonnée originale de sorties le système admette la forme observable spéciale.

Preuve Supposons qu'il existe un changement de sorties $y = \psi(\bar{y})$ et une transformation d'état $z = \varphi(\zeta)$ tels que dans les nouvelles coordonnées (ζ, \hat{y}) le système (4.28) est mis sous forme observable spéciale

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\zeta}_{11} = \zeta_{12} \\ \dot{\zeta}_{12} = \zeta_{13} \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{1k_1} = \hat{l}_1(\zeta, \bar{u}) \\ \dot{\zeta}_{p1} = \zeta_{p2} \\ \dot{\zeta}_{p2} = \zeta_{p3} \\ \vdots \\ \dot{\zeta}_{pk_p} = \hat{l}_p(\zeta, \bar{u}) \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \hat{y}_1 = \zeta_{11} \\ \hat{y}_p = \zeta_{p1} \end{array} \right. \quad (4.29)$$

avec $\hat{l}_i(\zeta, \bar{u}) \in \mathcal{P}^{k_i}(\zeta, \bar{u})$ pour $i = 1, \dots, p$. Il est facile de vérifier que $L_{f_u} \mathcal{P}^{k-1}(\zeta) \subset L_{f_u} \mathcal{P}^k(\zeta)$ et $L_{f_u} \mathcal{P}_0^{k-1}(\zeta) \subset L_{f_u} \mathcal{P}_0^k(\zeta)$ pour $k \geq 1$.

Notons que le changement de coordonnées transforme $\mathcal{P}^0(z)$ en $\mathcal{P}^0(\zeta)$, c'est-à-dire que $\mathcal{P}^0(z) = \mathcal{P}^0(\varphi(\zeta))$ et $\mathcal{P}^0(\zeta) = \mathcal{P}^0(\varphi^{-1}(z))$. De plus $\mathcal{P}_0^1(z) = \mathcal{P}^0(z)$ et $\mathcal{P}_0^1(\zeta) = \mathcal{P}^0(\zeta)$, donc $\mathcal{P}_0^1(z)$ est transformé en $\mathcal{P}_0^1(\zeta)$.

Nous allons démontrer par l'induction que $\mathcal{P}^k(z)$ est transformé en $\mathcal{P}^k(\zeta)$ et $\mathcal{P}_0^{k+1}(z)$ est transformé en $\mathcal{P}_0^{k+1}(\zeta)$ pour tout k . Si $k_1 \geq 2$, alors

$$z_{i2} = \hat{y} = \sum_{j=1}^p \frac{\partial \psi_j}{\partial \hat{y}_j} \hat{y}_j,$$

nous avons donc

$$z_{i2} = \sum_{k_j \geq 2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \hat{y}_j} \zeta_{j2} + P_{i2}(\zeta) \quad (4.30)$$

avec

$$P_{i2} = \sum_{k_j < 2} \frac{\partial \psi_j}{\partial \hat{y}_j} \hat{l}_j \in \mathcal{P}^0(\zeta) = \mathcal{P}_0^1(\zeta)$$

On a vérifié la relation pour $k = 1$.

Supposons que cela est vrai pour $k - 1$ et que (4.30) existe, c'est-à-dire que si $k_i \geq k$, nous avons

$$z_{ik} = \sum_{k_j \geq k} \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}_j} \zeta_{jk} + P_{ik}(\zeta) \quad (4.31)$$

avec $P_{ik}(\zeta) \in \mathcal{P}_0^{k-1}(\zeta)$. Si $k_i \geq k + 1$, alors

$$z_{i(k+1)} = L_{f_u} z_{ik} = \sum_{k_j \geq k+1} \frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}_j} \zeta_{j(k+1)} + P_{i(k+1)}(\zeta) \quad (4.32)$$

où

$$P_{i(k+1)}(\zeta) = L_{f_u} P_{ik}(\zeta) + \sum_{k_j \geq k} L_{f_u} \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \bar{y}_j} \right) \zeta_{jk}$$

donc $P_{i(k+1)}(\zeta) \in \mathcal{P}_0^k(\zeta)$. Il résulte de (4.32) que la récurrence est vraie pour tout k . ■

Théorème 4.4 [52] *Une condition nécessaire pour que le problème de linéarisation exacte de la dynamique d'erreur ait une solution est que le système (3.1) admette une représentation sous forme observable spéciale.*

Théorème 4.5 [94] *Supposons que le système (3.1) est globalement uniformément observable. Alors le problème de linéarisation exacte de la dynamique d'erreur admet une solution s'il existe des champs de vecteurs g^1, \dots, g^p vérifiant*

$$L_{g^l} L_{f_u}^{l-1} (h_j) = \delta_{i,j} \cdot \delta_{l,k}, \quad l = 1, \dots, p, \quad k_i; i, j = 1, \dots, p \quad (4.33)$$

tel que

$$\left[a d_{-f_u}^k g^i, a d_{-f_u}^l g^j \right] = 0 \quad (4.34)$$

pour $i, j = 1, \dots, p; k = 0, \dots, k_i - 1; l = 0, \dots, k_j - 1$

La résolution de (4.25), (4.26) et (4.27) est particulièrement difficile dans le cas général. Phelps [71] a développé un algorithme simplifié qui permet le recours au calcul formel. Ding, Frank et Guo ont étendu ces conditions en ajoutant comme contraintes le rejet de certaines nonlinéarités [25]. Hammouri, Gauthier et Morales [41, 42] ont par ailleurs étudié le problème de transformer un système non linéaire en un système bilinéaire par injection de sortie, se ramenant ainsi à la construction d'un observateur pour un système bilinéaire.

4.3.2 Immersion

Lévine et Marino [55] ont présenté une méthode de construction d'observateur à l'aide de la notion d'immersion. Ils ont démontré que si un système non linéaire observable peut s'immerger dans un système linéaire observable de dimension N ($N \geq n$), alors il admet un observateur asymptotique.

Considérons un système affine analytique

$$\begin{cases} \dot{x} &= f(x) + \sum_{i=1}^m g_i(x)u_i \\ y &= h(x) \end{cases} \quad (4.35)$$

où, $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^m$ une application Lebesgue mesurable, $f, g_1, \dots, g_m \in C^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, et $h \in C^\omega(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Définition 4.4 Soit U_0 un voisinage d'un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$. On dit que le système (4.35) est immergeable, dans U_0 , dans un système linéaire

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= F\hat{x} + \sum_{i=1}^m G_i u_i \\ y &= H\hat{x} \end{cases} \quad (4.36)$$

où $\hat{x} \in \mathbb{R}^N$, $N \geq n$, $F, G_i, i = 1, \dots, m$, et H sont des matrices constantes de tailles respectives $(N \times N)$, $(1 \times N)$ et $(p \times N)$, s'il existe une application de classe C^ω $\theta: U_0 \rightarrow \theta(U_0) \subset \mathbb{R}^N$ telle que pour tout $x(t_0)$ et tout $\hat{x}(t_0)$ tels que

$$\theta(x(t_0)) = \hat{x}(t_0) \quad (4.37)$$

on a

$$h(x(x(t_0), u)) = H\hat{x}(\hat{x}(t_0), u) \quad (4.38)$$

où $x(x(t_0), u)$ est la courbe intégrale de (4.35) à partir de $x(t_0)$ pour l'entrée u et de même pour $\hat{x}(t_0), u$ solution de (4.36).

Les conditions d'immersion dans un système linéaire sont énoncées par le théorème suivant

Théorème 4.6 [23, 31, 55] Le système (4.35) est immergeable dans (4.36) dans U_0 si et seulement si dans U_0

- (i) $\mathcal{H}_0 = \text{sp}\{L_j^k h, |1 \leq i \leq p, k \geq 0\}$ est un espace vectoriel réel de dimension finie.
 (ii) $L_{g_j}^k \lambda = \text{constante}$ pour tout $\lambda \in \mathcal{H}_0$ et tout $j = 1, \dots, m$.

Lemme 4.7 [55] Si le système (4.35) est localement observable en x_0 et les conditions (i) et (ii) de théorème 4.6 sont vérifiées, alors il existe deux suites d'entiers (k_1, \dots, k_p) et $(k_1^{(e)}, \dots, k_p^{(e)})$ vérifiant

$$k_1 \geq \dots \geq k_p, \quad k_1^{(e)} \geq \dots \geq k_p^{(e)} \quad k_i \leq k_i^{(e)}$$

tels que

$$\sum_{i=1}^p k_i = n, \quad \sum_{i=1}^p k_i^{(e)} = R - \dim(\mathcal{H}_0)$$

$\sum_{i=1}^p k_i = n$ implique que, après avoir réordonné les sorties si nécessaire, la codistribution suivante

$$\text{sp}\{dh_1, \quad , d(L_f^{k_1-1} h_1), dh_2, \quad , d(L_f^{k_2-1} h_2), \quad , dh_p, \quad , d(L_f^{k_p-1} h_p)\}$$

est de dimension n dans U_0 . En particulier,

$$\theta_0 = \{h_1, \quad , L_f^{k_1-1} h_1, h_2, \quad , L_f^{k_2-1} h_2, \quad , h_p, \quad , L_f^{k_p-1} h_p\}$$

est un difféomorphisme d'état local. D'autre part, $\sum_{i=1}^p k_i^{(e)} = R - \dim(\mathcal{H}_0)$ implique,

$$\theta = \{h_1, \quad , L_f^{k_1^{(e)}-1} h_1, h_2, \quad , L_f^{k_2^{(e)}-1} h_2, \dots, h_p, \quad , L_f^{k_p^{(e)}-1} h_p\}$$

est une base de l'espace \mathcal{H}_0 , et que le système original s'immerge par θ dans un système observable dont l'état est de dimension égale à celle de \mathcal{H}_0 . L'immersion $\hat{x} = \theta(x)$ contient donc θ_0 et $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une injection, son inverse $\theta^{-1} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^n$ une surjection. Ceci nous donne

Théorème 4.8 [55] *Si le système (4.35) est localement observable en x_0 et qu'il est immergeable dans un système (4.36) de dimension finie dans U_0 , alors il existe un observateur exponentiel pour toute condition initiale $x(t_0)$ tel que $x(t) \in U_0$ pour tout $t \geq t_0$.*

En effet l'observateur associé au système (4.36) est donné par

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}} &= F\hat{x} + K(y - H\hat{x}) + \sum_{i=1}^m G_i u_i \\ \hat{x} &= \theta_0^{-1}(\xi) \end{cases} \quad (4.39)$$

La dynamique d'erreur est linéaire stationnaire

$$\dot{e} = (F - KH)e \quad (4.40)$$

Considérons un système dont la dynamique est linéaire et l'observation un polynôme de degré r

$$\begin{cases} \dot{x} &= Fx \\ y &= h_0 + \sum_{i=1}^n h_{1,i} x_i + \quad + \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n h_{r,i_1, \dots, i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r} \end{cases} \quad (4.41)$$

Par un calcul direct, nous obtenons

$$L_f^k h = \sum_{i=1}^n \lambda_{1,i} x_i + \quad + \sum_{i_1, \dots, i_r=1}^n \lambda_{r,i_1, \dots, i_r} x_{i_1} \cdots x_{i_r}$$

avec $\lambda_{1,i}^k, \quad , \lambda_{r,i_1, \dots, i_r}^k \in \mathbb{R}^p$ pour tout $i, \quad , i_1, \quad , i_r$. Ainsi \mathcal{H}_0 est engendré par les combinaisons linéaires à coefficients constants des monômes de degré inférieur ou égal à r , et est donc de dimension finie. En conclusion, on a

Théorème 4.9 [57] *Si le système (4.41) est localement observable, il admet un observateur par immersion.*

Remarque 4.1 *En termes d'algèbre différentielle, Fliess [28] a donné une condition nécessaire et suffisante similaire à celles du théorème 4.6, pour que le système (4.35) puisse s'immerger dans un système bilinéaire. La construction d'un observateur non linéaire se réduit alors à la construction d'un observateur pour le système bilinéaire associé.*

Si le système n'est pas immergeable dans un système linéaire, le théorème précédent nous permet de trouver un observateur approché en approximant la sortie par un développement polynômial de degré souhaité.

4.3.3 Méthodes du type de Lyapunov

Dans cette section, nous rappelons rapidement comment construire des observateurs non linéaires par la méthode de Lyapunov.

La première méthode de construction d'un observateur a été proposée par Thau [82]. Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + \varphi(x) + Bu \\ y = Cx \end{cases} \quad (4.42)$$

où A , B et C sont des matrices constantes de tailles appropriées et (A, C) est une paire complètement observable. Si la fonction non linéaire φ est localement Lipschitzienne, on peut construire un observateur asymptotique à gain constant.

Kou, Elliott et Tarn [50] ont généralisé cette technique et montré les liens entre l'existence d'une fonction de Lyapunov et d'un observateur exponentiel. La principale contrainte sur la nonlinéarité de la dynamique est qu'elle soit globalement Lipschitzienne.

Une autre méthode a été proposée par Tsiniias [84, 84] où l'on travaille sur le linéarisé tangent plutôt que sur le système lui-même.

L'approche de Thau a été largement modifiée récemment par Tornambè [83] et Gau thier et ses collègues [34, 35, 24] pour les systèmes mono-entrée et mono-sortie de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \varphi(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \psi_1(x_1) \\ \vdots \\ \psi_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \\ \psi_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} u = Ax + \Phi(x) + \Psi(x)u \\ y = x_1 = Cx \end{cases} \quad (4.43)$$

Si les composantes non linéaires $\varphi(\cdot)$, $\psi_1(\cdot)$, ..., $\psi_n(\cdot)$ sont globalement Lipschiziennes, un observateur asymptotique à grand gain est construit par des techniques de perturbations singulières. Cette approche s'applique bien entendu aux systèmes équivalents à (4.43) par difféomorphisme.

Ces résultats ont été étendus par Bornard et Hammouri [12] dans le cas multi-entrées et multi-sorties.

La technique des Systèmes à Structure Variable (SSV) a été introduite par Slotine, Hedrick et Misawa [77] et Walcott et Żak [89] en ce qui concerne les observateurs. Les non linéarités et les perturbations du système sont supposées bornées. L'observateur obtenu est à structure variable.

Chapitre 5

Aspects asymptotiques d'observabilité et des observateurs pour les systèmes linéaires instationnaires

5.1 Observabilité asymptotique

Considérons dans cette section l'observabilité de systèmes linéaires instationnaires de la forme

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (5.1)$$

avec une singularité polynômiale en $t = \infty$. Précisément il existe des entiers $\mu \geq 0$ et $\nu \geq 0$ tels que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(t)}{t^\mu} = A_0 \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{C(t)}{t^\nu} = C_0$$

où A_0 et C_0 sont des matrices constantes non nulles. Autrement dit, $t^{-\mu}A(t)$ et $t^{-\nu}C(t)$ peuvent être représentées par des séries convergentes en $t = +\infty$

$$\begin{aligned} t^{-\mu}A(t) &= \dot{A}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} A_i t^{-i} \\ t^{-\nu}C(t) &= \dot{C}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} C_i t^{-i} \end{aligned}$$

Notons que $x = 0$ est un point stationnaire de (5.1) pour tout t . Lorsque $t = \infty$, le second membre de (5.1) n'est pas défini, ou plus précisément admet une singularité, ce qui justifie la terminologie.

Le système (3.9) se réécrit

$$\begin{cases} t^{-\mu} \dot{x} = \dot{A}(t)x \\ t^{-\nu} y = \dot{C}(t)x \end{cases} \quad (5.2)$$

ou de manière équivalente sous forme autonome

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} &= t^{-\mu} \\ \frac{dx}{d\tau} &= \dot{A}(t)x \\ t^{-\nu}y &= \dot{C}(t)x \end{cases} \quad (5.3)$$

Les critères d'observabilité dans le chapitre 3 s'appliquent également au cas singulier. En effet, en faisant un changement d'échelle de temps :

$$t = ((\mu + 1)\tau)^{\frac{1}{\mu+1}}$$

l'image du champ de vecteurs $f(t, x) = \frac{\partial}{\partial t} + A(t)x \frac{\partial}{\partial x}$ par l'application $\theta(t, x) = (t(\tau), x)$ est donnée par

$$\theta_* f(t, x) = t^{-\mu} \frac{\partial}{\partial t} + t^{-\mu} A(t)x \frac{\partial}{\partial x} = t^{-\mu} \frac{\partial}{\partial t} + \dot{A}(t)x \frac{\partial}{\partial x}$$

En définissant

$$\dot{h}_j(t, x) = t^{-\nu} h_j(t, x) = \dot{c}_j(t)x \quad j = 1, \dots, p$$

la codistribution d'observabilité associée à (5.3) est donnée par

$$\mathcal{O} = \text{sp}\{dL_{\theta_* f}^k \dot{h}_j \mid j = 1, \dots, p; k \geq 0\}$$

Dans les nouvelles coordonnées, l'opérateur défini par (3.13), appliqué à la sortie, devient

$$\begin{aligned} \Delta_0^0 \dot{c}_j(t) &= \dot{c}_j(t) \\ \Delta_0^1 \dot{c}_j(t) &= t^{-\mu} \frac{d}{dt} \dot{c}_j(t) + \dot{c}_j(t) A(t) \\ \Delta_0^k \dot{c}_j(t) &= t^{-\mu} \frac{d}{dt} \Delta_0^{k-1} \dot{c}_j(t) + \Delta_0^{k-1} \dot{c}_j(t) A(t) \quad k \geq 2 \end{aligned}$$

pour $j = 1, \dots, p$, et nous pouvons vérifier par un calcul direct

$$dL_{\theta_* f}^k \dot{h}_j = \Delta_0^k \dot{c}_j(t), \quad j = 1, \dots, p; k \geq 0$$

Corollaire 5.1 *Le système (5.2) est observable pour un $t \in I \in (0, \infty)$ si et seulement si*

$$\dim \mathcal{O}(t) = n \quad (5.4)$$

Corollaire 5.2 *Le système (5.2) est totalement observable dans un intervalle I si et seulement si la condition de rang (5.4) est vérifiée pour presque tout $t \in I$*

Pour caractériser l'observabilité du système (5.2) à l'infini, c'est-à-dire au point singulier, nous introduisons la définition suivante.

Définition 5.1 Soit

$$\omega_{i,j} = \lim_{t \rightarrow \infty} dL_{\theta_t, j}^i \hat{h}_j, \quad i \geq 0; j = 1, \dots, p$$

et

$$\mathcal{O}_\infty = \text{sp}\{\omega_{i,j} \mid i \geq 0; j = 1, \dots, p\}$$

la codistribution engendrée par $\omega_{i,j}$. Alors le système (5.2) est dit asymptotiquement observable si

$$\dim \mathcal{O}_\infty = n$$

Proposition 5.3 Les codistributions \mathcal{O} et \mathcal{O}_∞ satisfont la relation suivante

$$\dim \mathcal{O} \geq \dim \mathcal{O}_\infty$$

dans un voisinage de $t = \infty$.

Preuve Nous écrivons

$$\begin{aligned} d\hat{h}_j &= \sum_{i_1=0}^{\infty} c_{j,i_1} t^{-i_1} \\ L_{\theta_t, j} d\hat{h}_j &= \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} c_{j,i_1} A_{i_2} t^{-(i_1+i_2)} - \sum_{i_1=0}^{\infty} i_1 c_{j,i_1} t^{-(i_1+\mu+1)} \\ L_{\theta_t, j}^2 d\hat{h}_j &= \sum_{i_1, i_2, i_3=0}^{\infty} c_{j,i_1} A_{i_2} A_{i_3} t^{-(i_1+i_2+i_3)} - \sum_{i_1, i_2=0}^{\infty} (2i_1 + i_2) c_{j,i_1} A_{i_2} t^{-(i_1+i_2+\mu+1)} \\ &\quad + \sum_{i_1=0}^{\infty} i_1(i_1 + \mu + 1) c_{j,i_1} t^{-(i_1+2\mu+2)} \end{aligned}$$

$$j = 1, \dots, p$$

Lorsque $t \rightarrow \infty$, nous obtenons

$$\omega_{i,j} = c_{j,0} A_0^{i-1} \quad i \geq 0; j = 1, \dots, p$$

Nous pouvons écrire alors $dL_{\theta_t, j}^i \hat{h}_j$ sous la forme

$$dL_{\theta_t, j}^i \hat{h}_j = \omega_{i,j} + \omega_{i,j}^t, \quad i \geq 0; j = 1, \dots, p$$

où $\omega_{i,j}^t$ sont des covecteurs dépendant de t satisfaisant

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \omega_{i,j}^t = 0, \quad i \geq 0 \quad j = 1, \dots, p$$

Supposons d'abord que

$$\dim \mathcal{O}_\infty = n$$

Il existe alors une suite d'entiers k_1, k_2, \dots, k_p vérifiant $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$, après une éventuelle permutation des sorties, avec $\sum_{j=1}^p k_j = n$ telle que

$$(c_{1,0}, c_{1,0} A_0, \dots, c_{1,0} A_0^{k_1-1}, c_{2,0}, c_{2,0} A_0, \dots, c_{p,0} A_0^{k_p-1})$$

est une base de \mathcal{O}_a . Comme

$$\det \begin{pmatrix} c_{1,0} \\ c_{1,0}A_0 \\ \vdots \\ c_{1,0}A_0^{k_1-1} \\ c_{2,0} \\ c_{2,0}A_0 \\ \vdots \\ c_{p,0}A_0^{k_p-1} \end{pmatrix} = \lim_{t \rightarrow \infty} \det \begin{pmatrix} d\dot{h}_1 \\ L_{\theta,f}d\dot{h}_1 \\ \vdots \\ L_{\theta,f}^{k_1-1}d\dot{h}_1 \\ d\dot{h}_2 \\ L_{\theta,f}d\dot{h}_2 \\ \vdots \\ L_{\theta,f}^{k_p-1}d\dot{h}_p \end{pmatrix} \neq 0$$

soit

$$\dim \text{sp}\{d\dot{h}_1, L_{\theta,f}^{k_1-1}d\dot{h}_1, d\dot{h}_2, L_{\theta,f}^{k_2-1}d\dot{h}_2, \dots, d\dot{h}_p, L_{\theta,f}^{k_p-1}d\dot{h}_p\} = n$$

dans un voisinage de l'infini.

Considérons ensuite le cas

$$\dim \mathcal{O}_a = m < n$$

Pour la même raison, il existe une suite d'entier k_1, k_2, \dots, k_p vérifiant $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_p$, à une permutation près sur les indices des sorties, avec $\sum_{j=1}^p k_j = m$ telle que

$$\begin{aligned} & \dim \text{sp}\{d\dot{h}_1, L_{\theta,f}^{k_1-1}d\dot{h}_1, d\dot{h}_2, L_{\theta,f}^{k_2-1}d\dot{h}_2, \dots, d\dot{h}_p, L_{\theta,f}^{k_p-1}d\dot{h}_p\} \\ &= \dim \text{sp}\{c_{1,0}, c_{1,0}A_0^{k_1-1}, c_{2,0}, c_{2,0}A_0^{k_2-1}, \dots, c_{p,0}, c_{p,0}A_0^{k_p-1}\} \\ &= m \end{aligned}$$

dans un voisinage de l'infini. Comme par ailleurs

$$\mathcal{O} \supseteq \text{sp}\{d\dot{h}_1, L_{\theta,f}^{k_1-1}d\dot{h}_1, d\dot{h}_2, L_{\theta,f}^{k_2-1}d\dot{h}_2, \dots, d\dot{h}_p, L_{\theta,f}^{k_p-1}d\dot{h}_p\}$$

donc

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{O} &\geq \dim \text{sp}\{d\dot{h}_1, L_{\theta,f}^{k_1-1}d\dot{h}_1, d\dot{h}_2, L_{\theta,f}^{k_2-1}d\dot{h}_2, \dots, d\dot{h}_p, L_{\theta,f}^{k_p-1}d\dot{h}_p\} \\ &= \dim \mathcal{O}_a \end{aligned}$$

au voisinage de l'infini. \blacksquare

Proposition 5.4 *Le système (5.2) est asymptotiquement observable si et seulement si*

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0A_0 \\ \vdots \\ C_0A_0^{n-1} \end{pmatrix} = n$$

Preuve D'après le théorème de Cayley-Hamilton, la condition de rang d'observabilité est équivalente à

$$\text{rang} \mathcal{O}_a = \text{rang} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0A_0 \\ C_0A_0^2 \\ \vdots \\ C_0A_0^{n-1} \end{pmatrix}$$

d'où le résultat cherché. ■

L'observabilité asymptotique est déterminée par A_0 et C_0 , les premiers termes de $\tilde{A}(t)$ et de $\tilde{C}(t)$ respectivement. Nous pouvons donc définir de manière équivalente un système (5.2) observable au premier ordre si (A_0, C_0) est une paire observable. Nous remarquons de plus que cette notion d'observabilité asymptotique ne s'applique pas aux systèmes dont les limites de $\tilde{A}(t)$ et/ou $\tilde{C}(t)$ n'existent pas, notamment les systèmes périodiques.

5.2 Observateurs à gain asymptotique

Sans nuire à la généralité, nous considérons le système sans commande (5.1).

Définition 5.2 *Le système dynamique*

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = t^{-\nu} \\ \frac{d\hat{x}}{d\tau} = \tilde{A}(t)\hat{x} + K(t)(t^{-\nu}y - \tilde{C}(t)\hat{x}) \end{cases} \quad (5.5)$$

est appelé un observateur à gain asymptotique de (5.3) si le gain K est une matrice constante, et (5.5) est un observateur asymptotique à partir d'un t_0 suffisamment grand.

Théorème 5.5 *Si le système (5.1) est asymptotiquement observable, c'est-à-dire (A_0, C_0) est une paire complètement observable, alors il existe une matrice constante K telle que la matrice constante $A_0 - KC_0$ est stable et non résonnante (à toutes ses valeurs propres distinctes, voir annexe A), autrement dit telle que (5.5) est un observateur asymptotique.*

Preuve En posant $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ l'erreur d'estimation de l'observateur (5.5), alors la dynamique d'erreur est donnée par

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = t^{-\nu} \\ \frac{de}{d\tau} = (\tilde{A}(t) - K\tilde{C}(t))e \end{cases} \quad (5.6)$$

ou de manière équivalente par

$$\dot{e} = t^\nu(\tilde{A}(t) - K\tilde{C}(t))e \quad (5.7)$$

Si le spectre de $A_0 - KC_0$ n'a pas de résonance, il existe une transformation $\varepsilon = H(t)e$ avec $H(t)$ donnée par une série convergente, qui met la dynamique d'erreur (5.7) sous forme normale

$$\dot{\varepsilon} = (t^\nu\Lambda_0 + t^{\mu-1}\Lambda_1 + \dots + \Lambda_\nu + Gt^{-1})\varepsilon \quad (5.8)$$

où $\Lambda_i, i = 0, \dots, \nu$, μ , et G sont des matrices constantes diagonales, Λ_0 étant en particulier la forme de Jordan de la matrice $A_0 - KC_0$. Pour la stabilité du système sous forme normale, il suffit que le spectre de Λ_0 soit à partie réelle négative et la stabilité de l'observateur en coordonnées originales se déduit du fait que $H(t)$ est bornée à l'infini (voir Annexe A). Rappelons que l'observabilité de (A_0, C_0) implique l'existence d'un K tel que toutes les valeurs propres de $(A_0 - KC_0)$ sont distinctes et à partie réelle strictement négative, d'où le résultat. ■

Remarque 5.1 Le comportement asymptotique de la dynamique d'erreur sous forme normale est dominé par le terme $t^\mu \Lambda_0$ à partir d'un t_0 suffisamment grand. Alors, si l'observateur donné par (5.5) n'a pas explosé jusqu'à ce moment, le théorème 5.5 garantit l'existence d'un observateur asymptotique. De plus le gain de cet observateur est constant par rapport au temps le plus rapide τ . C'est pourquoi nous l'appelons observateur à gain asymptotique [59].

Remarque 5.2 Cette approche est robuste au sens où le fait de négliger la dynamique du second ordre par rapport à l'échelle de temps la plus élevée rend le comportement asymptotique de l'observateur insensible à des perturbations sur ces dynamiques.

Les systèmes linéaires stationnaires correspondent au cas où $\mu = \nu = 0$, $A_0 = A$ et $C_0 = C$. Dans ce cas, notre approche utilisant la forme normale redonne celle de Luenberger. En effet, du point de vue de la forme normale, le système linéaire stationnaire possède un point singulier non Fuchsien de degré 2 à l'infini (voir annexe A). Puisque la dynamique d'erreur d'un système linéaire stationnaire est automatiquement sous forme normale, la condition de non résonance n'est pas nécessaire.

5.3 Observateurs dans le cas non asymptotiquement observable

Supposons que le système n'est pas asymptotiquement observable, c'est-à-dire

$$\text{rang} \begin{pmatrix} C_0 \\ C_0 A_0 \\ \vdots \\ C_0 A_0^{n-1} \end{pmatrix} = m < n$$

alors il y existe un sous-espace asymptotiquement inobservable de dimension $n - m$. Nous pouvons donc décomposer A_0 et C_0 comme suit

$$A_0 = \begin{pmatrix} A_0^{11} & 0 \\ A_0^{21} & A_0^{22} \end{pmatrix} \quad C_0 = \begin{pmatrix} C_0^1 & 0 \end{pmatrix}$$

de telle sorte que (A_0^{11}, C_0^1) soit une paire observable de rang d'observabilité égal à m . On notera de même la décomposition des matrices A_i et C_i pour $i \geq 1$ dans la même base. Faisons le choix de gain suivant

$$K(t) = t^{\mu-\nu} K_0 = t^{\mu-\nu} \begin{pmatrix} K_0^1 \\ K_0^2 \end{pmatrix}$$

la dynamique d'erreur est alors donnée par

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \left(t^\mu \begin{pmatrix} A_0^{11} - K_0^1 C_0^1 & 0 \\ A_0^{21} - K_0^2 C_0^1 & A_0^{22} \end{pmatrix} + t^{\mu-1} \begin{pmatrix} A_1^{11} - K_0^1 C_1^1 & A_1^{12} - K_0^1 C_1^2 \\ A_1^{21} - K_0^2 C_1^1 & A_1^{22} - K_0^2 C_1^2 \end{pmatrix} + \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

avec $e_1 \in \mathbb{R}^m$ et $e_2 \in \mathbb{R}^{n-m}$

La matrice correspondant à t^μ est clairement triangulaire inférieure. Comme le bloc diagonal inférieur A_0^{22} n'est pas modifié par le gain K , on ne pourra stabiliser que la composante observable e_1 de l'erreur. Il en résulte que le système n'admet un observateur asymptotique que si A_0^{22} a toutes ses valeurs propres à partie réelle négative ou nulle. En particulier, si A_0^{22} a au moins une valeur propre à partie réelle positive, il n'existe pas d'observateur à gain asymptotique.

Le seul cas non trivial est celui où A_0^{22} a des valeurs propres à partie réelle nulle. Sans perte de généralité, on peut supposer que toutes les valeurs propres de A_0^{22} sont à partie réelle nulle (on peut toujours se ramener à ce cas en décomposant A_0^{22} en sous-espaces stable et centre, sachant que l'on n'a pas à modifier la partie stable) et nous ne considérerons plus désormais que cette situation.

Remarque 5.3 Pour stabiliser la partie inobservable à l'infini, il faut que l'ordre μ de la singularité soit positif ou nul. Si $\mu = 0$, le changement d'échelle de temps est sans objet puisque le système est alors naturellement exprimé dans l'échelle de temps adaptée et les résultats se transposent de manière évidente. La vérification en est laissée au lecteur (voir aussi le traitement de l'exemple 5.1).

Le système autonome associé à (5.9) est donné par

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} &= t^{-\mu} \\ \frac{de_1}{d\tau} &= (A_0^{11} - K_0^1 C_0^1) e_1 + t^{-1} (A_1^{11} - K_0^1 C_1^1) e_1 + t^{-1} (A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) e_2 + O(t^{-2}) \\ \frac{de_2}{d\tau} &= (A_0^{21} - K_0^2 C_0^1) e_1 + A_0^{22} e_2 + t^{-1} (A_1^{21} - K_0^2 C_1^1) e_1 + t^{-1} (A_1^{22} - K_0^2 C_1^2) e_2 + O(t^{-2}) \end{cases} \quad (5.10)$$

Puisque (A_0^{11}, C_0^1) est observable, e_1 est localement stabilisable. La stabilité de e_2 est déterminée par celle du sous système central. Pour cela, nous cherchons la sous-variété centrale

$$e_1 = \phi(e_2, t^{-1})$$

qui est la solution de l'équation différentielle

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial e_2} (e_2, t^{-1}) & ((A_0^{21} - K_0^2 C_0^1) \phi + A_0^{22} e_2 + t^{-1} (A_1^{21} - K_0^2 C_1^1) \phi + t^{-1} (A_1^{22} - K_0^2 C_1^2) e_2 + O(t^{-2})) \\ & - ((A_0^{11} - K_0^1 C_0^1) \phi + t^{-1} (A_1^{11} - K_0^1 C_1^1) \phi + t^{-1} (A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) e_2 + O(t^{-2})) = 0 \end{aligned} \quad (5.11)$$

avec comme conditions $\phi(0) = 0$ et $\frac{\partial \phi}{\partial e_2}(0) = 0$. Une solution approchée de (5.11) est donnée par

$$\phi(e_2, t^{-1}) = Dt^{-1} e_2 + O(e_2, t^{-2})$$

ce qui implique

$$t^{-1} D A_0^{22} e_2 = t^{-1} (A_0^{11} - K_0^1 C_0^1) D e_2 + t^{-1} (A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) e_2$$

et donc que D est la solution de l'équation algébrique

$$DA_0^{22} - (A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)D = A_1^{12} - K_0^1 C_1^2 \quad (5.12)$$

Le sous-système central est alors donné par

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = t^{-\mu} \\ \frac{de_2}{d\tau} = A_0^{22}e_2 + t^{-1}((A_0^{21}D + A_1^{22}) - K_0^2(C_0^1D + C_1^2))e_2 + O(t^{-2}) \end{cases} \quad (5.13)$$

La stabilité de (5.10) est donc déterminée par le système réduit (5.13).

Nous allons approfondir cette étude dans le cas particulier où le sous-espace inobservable est de dimension 1, soit $A_0^{22} = 0$. La solution de (5.12) est alors donnée par

$$D = -(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2)$$

L'existence de $(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}$ est garantie par l'observabilité partielle. Le sous système central s'écrit ici

$$\begin{cases} \frac{dt}{d\tau} = t^{-\mu} \\ \frac{de_2}{d\tau} = (A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) - K_0^2(C_1^2 - C_0^1(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2)))t^{-1}e_2 + O(t^{-2}) \end{cases} \quad (5.14)$$

Supposons que

$$C_0^1(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) - C_1^2 \neq 0$$

alors e_2 est stable asymptotiquement si

$$K_0^2 > \frac{A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2)}{C_1^2 - C_0^1(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2)} \quad (5.15)$$

Par contre, si

$$C_0^1(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) - C_1^2 = 0$$

alors e_2 est asymptotiquement stable si K_0^1 peut être choisi tel que

$$A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) < 0$$

si par contre

$$A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) > 0$$

alors e_2 est instable.

Si enfin

$$A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2) = 0$$

on est dans un cas critique et nous devons étudier les termes d'ordre supérieur en répétant le même raisonnement.

Cette idée peut bien sûr être étendue au cas où $A_0^{22} = 0$ quelle que soit la dimension de A_0^{22} . Le sous-système central s'exprime alors de manière analogue à (5.14), et nous obtenons immédiatement qu'une condition suffisante pour que le système central soit stabilisable est que la paire

$$(A_1^{22} - A_0^{21}(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2), C_1^2 - C_0^1(A_0^{11} - K_0^1 C_0^1)^{-1}(A_1^{12} - K_0^1 C_1^2))$$

soit observable. Évidemment cette propriété n'est pas une propriété naturelle du système original, mais elle doit être comprise comme une contrainte supplémentaire sur le choix de K_0^1 , qui s'interprète comme le fait que le gain K_0^1 ne doit pas rendre inobservable les dynamiques correspondant aux échelles de temps plus lentes.

Exemple 5.1 (poursuite en ligne droite) Considérons le problème de poursuite en ligne droite. Supposons

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{\ddot{x}_0 t^2}{2} + \frac{x_0^{(n)} t^n}{n!} \quad (5.16)$$

En posant

$$z = \begin{pmatrix} x_0 & \dot{x}_0 & \ddot{x}_0 & x_0^{(n)} \end{pmatrix}^T$$

et

$$C(t) = \begin{pmatrix} t^{-n} & t^{-n+1} & \frac{1}{(n-1)!} t^{-1} & \frac{1}{n!} \end{pmatrix}$$

ce problème admet la représentation suivante

$$\begin{cases} \dot{z} = 0 \\ t^{-n} y = C(t)z \end{cases} \quad (5.17)$$

La matrice d'observabilité par rapport au temps le plus rapide est donnée par

$$Q_o = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^n} & \frac{1}{t^{n-1}} & \frac{1}{(n-1)!t} & \frac{1}{n!} \\ -\frac{n}{t^{n+1}} & -\frac{n-1}{t^n} & -\frac{1}{(n-1)!t^2} & 0 \\ \frac{(-1)^n n}{t^{2n-1}} & \frac{(2n-2)}{t^{2n-2}} & \frac{(-1)^n (n-1)}{t^{2n-2}} & \frac{(2n-3)}{t^{2n-2}} \\ \frac{(-1)^n}{t^{n+1}} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il en résulte que système (5.17) n'est pas asymptotiquement observable puisque le sous-espace asymptotiquement observable est de dimension 1 (correspondant à la dernière colonne de Q_o), et le sous-espace asymptotiquement inobservable est de dimension n . L'observateur à gain constant pour (5.17) est de la forme

$$\dot{z} = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_n \\ k_{n+1} \end{pmatrix} (t^{-n} y - C(t)z) \quad (5.18)$$

et la dynamique d'erreur est donnée par

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= -k_1(t^{-n}e_1 + t^{-n+1}e_2 + \frac{1}{(n-1)!}t^{-1}e_n + \frac{1}{n!}e_{n+1}) \\ \dot{e}_n &= -k_n(t^{-n}e_1 + t^{-n+1}e_2 + \frac{1}{(n-1)!}t^{-1}e_n + \frac{1}{n!}e_{n+1}) \\ \dot{e}_{n+1} &= -k_{n+1}(t^{-n}e_1 + t^{-n+1}e_2 + \frac{1}{(n-1)!}t^{-1}e_n + \frac{1}{n!}e_{n+1}) \end{cases} \quad (5.19)$$

En réécrivant (5.18) comme

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_n \\ \dot{e}_{n+1} \end{pmatrix} = - \left(\frac{1}{n!} \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_n \\ 0 & 0 & k_{n+1} \end{pmatrix} + \frac{t^{-1}}{(n-1)!} \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & k_{n+1} & 0 \end{pmatrix} + t^{-n+1} \begin{pmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ 0 & k_n & 0 \\ 0 & k_{n+1} & 0 \end{pmatrix} + t^{-n} \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ k_n & 0 & 0 \\ k_{n+1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} e_1 \\ \cdot \\ e_n \\ \cdot \\ e_{n+1} \end{pmatrix}$$

et en choisissant $k_{n+1} > 0$, e_{n+1} est rendu exponentiellement stable et (e_1, \dots, e_n) correspond à un sous-système central. On est ici dans le cas $\mu = 0$, un changement d'échelle de temps n'est donc pas nécessaire (voir remarque 5.3). Cependant, pour ramener le point d'équilibre à l'origine, on pose $\theta = 1/t$ et le système devient

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} &= -\theta^2 \\ \frac{de_1}{dt} &= -k_1 \left(\sum_{j=0}^n \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} \right) \\ \frac{de_n}{dt} &= -k_n \left(\sum_{j=0}^n \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} \right) \\ \frac{de_{n+1}}{dt} &= -k_{n+1} \left(\sum_{j=0}^n \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} \right) \end{cases} \quad (5.20)$$

Alors $(\theta = 0, e_1 = 0, \dots, e_n = 0)$ est un point d'équilibre de (5.20). La sous-variété centrale est donnée par

$$e_{n+1} = \phi(e_1, \dots, e_n, \theta) \quad (5.21)$$

où ϕ vérifie l'équation différentielle

$$\begin{aligned}
 D\phi(e_1, \dots, e_n, \theta) \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} & \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} + \frac{1}{n!} \phi(e_1, \dots, e_n, \theta) \right) \\
 -k_{n+1} & \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} + \frac{1}{n!} \phi(e_1, \dots, e_n, \theta) \right) = 0
 \end{aligned} \tag{5.22}$$

avec les conditions $\phi(0) = 0$ et $D\phi(0) = 0$, où l'on a noté $D\phi(e_1, \dots, e_n, \theta)$ le Jacobien de $\phi(e_1, \dots, e_n, \theta)$ par rapport au vecteur (e_1, \dots, e_n) .

Une solution explicite de (5.22) s'obtient immédiatement

$$\phi(e_1, \dots, e_n, \theta) = -n! \left(\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\theta^{n-j}}{j!} e_{j+1} \right)$$

Le sous-système central est donc donné par

$$\begin{cases} \frac{d\theta}{dt} = \theta^2 \\ \frac{de_1}{dt} = 0 \\ \vdots \\ \frac{de_n}{dt} = 0 \end{cases}$$

Nous en déduisons donc la stabilité sans convergence asymptotique pour e_1, \dots, e_n quels que soient les gains k_1, \dots, k_n . Autrement dit, il n'existe pas d'observateur à gain asymptotique pour le système (5.17).

Montrons que ce phénomène est intrinsèque en ce sens qu'il existe indépendamment du choix d'un observateur. Dans ce but, remarquons tout d'abord que la matrice d'observabilité par rapport au temps original

$$Q_o = \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^n}{n!} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \\ & & & \vdots \\ 0 & & 0 & t \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

est de rang plein pour tout $t \in \mathbb{R}$, mais n'est pas bornée lorsque $t \rightarrow \infty$. Ceci implique qu'il existe un changement de coordonnées sur un intervalle de temps fini

$$\zeta = H(t)z$$

où $H(t)$ est donné par le procédé présenté en 4.2.2

$$H(t) = \begin{pmatrix} \frac{(-1)^n t^n}{n!} & \frac{(-1)^n t^{n-1}}{(n-1)!} & (-1)^n \\ \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} & \frac{(-1)^{n-1} t^{n-2}}{(n-2)!} & 0 \\ -t & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

$$H^{-1}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -t \\ 0 & \frac{(-1)^{n-1} t^{n-2}}{(n-2)!} & \frac{(-1)^{n-1} t^{n-1}}{(n-1)!} \\ (-1)^n & \frac{(-1)^n t^n}{(n-1)!} & \frac{(-1)^n t^n}{n!} \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

tel que dans les nouvelles coordonnées, le système est sous forme canonique observateur

$$\begin{cases} \dot{\zeta} = E_{n+1} \zeta \\ y = \zeta_{n+1} \end{cases} \quad (5.25)$$

avec

$$E_{n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Puisque (5.25) est un système linéaire stationnaire qui est complètement observable, il admet un observateur exponentiel

$$\dot{\hat{\zeta}} = E_{n+1} \hat{\zeta} + K(y - \hat{\zeta}_{n+1}) \quad (5.26)$$

le gain \hat{K} étant choisi de sorte que l'erreur d'estimation $\varepsilon = \zeta - \hat{\zeta}$ converge exponentiellement vite vers 0. Il en résulte que l'observateur (5.26) défini pour un horizon fini a un comportement qualitativement différent de l'observateur (5.18) lorsque $t \rightarrow \infty$. Plus précisément, si l'on veut que l'observateur (5.18) soit équivalent à (5.26), on doit avoir $\hat{\zeta} = H(t)\hat{\varepsilon}$ ce qui implique que $H(t)Kt^{-n} = K$. On vérifie facilement que $H(t)Kt^{-n}$ n'est une matrice constante pour aucun choix de K et l'égalité ne peut donc pas avoir lieu, ce qui achève de prouver la non équivalence. ■

5.4 Systèmes à coefficients dans un corps de Hardy

Dans cette section, nous allons étendre la construction d'un observateur en utilisant la forme canonique observateur au cas où le changement de coordonnées n'est pas nécessairement borné. Cette étude est basée sur la notion de corps de Hardy dont nous présentons des éléments nécessaires dans l'annexe B.

Considérons le système suivant

$$\begin{cases} \dot{x} = A(t)x \\ y = C(t)x \end{cases} \quad (5.27)$$

Supposons que tous les coefficients de $A(t)$ et de $C(t)$ appartiennent à un corps de Hardy, et notons K_H le plus petit corps contenant \mathbb{R} et ces coefficients. Rappelons que la matrice d'observabilité du système (5.27) est définie par :

$$Q_o = \begin{pmatrix} C \\ \Delta_o C \\ \Delta_o^2 C \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

où, l'opérateur Δ_o est défini au paragraphe 4.2.

Lemme 5.6 *Si tous les coefficients de $A(t)$ et de $C(t)$ appartiennent à un corps de Hardy, alors il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que le rang de la matrice d'observabilité Q_o reste constant pour tout $t \geq t_0$.*

Preuve Les coefficients de (5.27) appartiennent à K_H , ainsi que tous les déterminants déduits de (5.28). En vertu de la propriété de corps de Hardy, il existe un $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que tous les déterminants obtenus sont bien définis et prennent une valeur soit nulle soit non nulle pour tout $t \geq t_0$. Donc le rang de Q_o reste constant pour tout $t \geq t_0$. ■

Le lemme 5.6 est un résultat dual de celui présenté dans [30] sur la commandabilité de systèmes linéaires instationnaires.

Définition 5.3 *Le système (5.27) est dit observable au sens de Hardy ou H-observable s'il existe une suite d'entiers k_1, \dots, k_p satisfaisant $\sum_{i=1}^p k_i = n$ et un $t_0 \in \mathbb{R}$ tels que la sous-matrice d'observabilité*

$$Q_s = \begin{pmatrix} c_1 \\ \Delta_o c_1 \\ \vdots \\ \Delta_o^{k_1-1} c_1 \\ \vdots \\ c_p \\ \Delta_o c_p \\ \vdots \\ \Delta_o^{k_p-1} c_p \end{pmatrix}$$

est de rang plein pour tout $t \geq t_0$.

Proposition 5.7 *Supposons que tous les coefficients du système (5.27) sont dans un corps de Hardy contenant les polynômes en temps et les exponentielles. Alors le problème de l'observateur asymptotique admet une solution si ce système est H-observable.*

Preuve Supposons que le système (5.27) est H -observable et que

$$\dot{\hat{x}} = A(t)\hat{x} + K(t)(y - C(t)\hat{x}) \quad (5.29)$$

est candidat à être un observateur asymptotique. Il existe un changement de coordonnées

$$z = H(t)x$$

qui met le système (5.27) sous forme canonique observateur

$$\begin{cases} \dot{z} &= \bar{A}(t)z \\ y &= \bar{C}(t)z \end{cases}$$

Or, par construction, tous les éléments de $H(t)$ ainsi que ceux de $H^{-1}(t)$ et de $\bar{A}(t)$ appartiennent à K_H . En coordonnées canoniques, l'observateur est de la forme

$$\dot{\hat{z}} = \bar{A}(t)\hat{z} + \bar{K}(t)G(t)(y - \bar{C}(t)\hat{z})$$

avec $G(t)$ une matrice inversible représentant le changement de sorties, qui conduit à l'équation d'erreur

$$\dot{\varepsilon} = (\bar{A} - \bar{K}G(t)\bar{C}(t))\varepsilon \quad (5.30)$$

En remarquant qu'en coordonnées canoniques, l'équation d'erreur est sous forme découpée par un choix convenable du gain $\bar{K}(t)$ et du changement de sorties $G(t)$, il suffit de considérer le cas mono-sortie. Dans ce cas, l'équation d'erreur se réécrit comme :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 &= \beta_1(t)\varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_2 &= \varepsilon_1 + \beta_2(t)\varepsilon_n \\ &\vdots \\ \dot{\varepsilon}_{n-1} &= \varepsilon_{n-2} + \beta_{n-1}(t)\varepsilon_n \\ \dot{\varepsilon}_n &= \varepsilon_{n-1} + \beta_n(t)\varepsilon_n \end{cases} \quad (5.31)$$

où $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ sont des fonctions arbitraires correspondant à un choix convenable de gain $\bar{K}(t)$. On obtient donc une l'équation différentielle de degré n pour ε_n

$$\varepsilon_n^{(n)} - \gamma_n(t)\varepsilon_n^{(n-1)} - \dots - \gamma_2(t)\varepsilon_n' - \gamma_1(t)\varepsilon_n = 0 \quad (5.32)$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_1(t) &= \sum_{i=1}^n \beta_i^{(i-1)}(t) \\ \gamma_j(t) &= \beta_j + \sum_{i=j+1}^n l_i \beta_i^{(i-j)}(t) \quad j = 2, \dots, n, \end{aligned} \quad (5.33)$$

où $l_i, i = j+1, \dots, n$ sont des entiers positifs. Montrons que la solution générale de (5.32) est donnée par

$$\varepsilon_n = (c_0 + c_1 t + \dots + c_{n-1} t^{n-1}) \exp\left(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau\right) \quad c_0, c_1, \dots, c_{n-1} \in \mathbb{R} \quad (5.34)$$

avec $\varphi(t) < 0$ pour tout $t \geq t_0$, $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varphi(t) = -\infty$, un élément dans la plus grande classe de comparabilité, notée par μ . En effet par le calcul direct, on peut vérifier

$$\begin{aligned} \gamma_n(t) &= \dot{\gamma}_n(\varphi(t)) \\ \gamma_{n-1}(t) &= \dot{\gamma}_{n-1}(\varphi(t), \dot{\varphi}(t)) \\ \gamma_2(t) &= \dot{\gamma}_2(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \varphi^{(n-1)}(t)), \\ \gamma_1(t) &= \dot{\gamma}_1(\varphi(t), \dot{\varphi}(t), \varphi^{(n-1)}(t), \varphi^{(n)}(t)) \end{aligned} \tag{5.35}$$

avec $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \dots, \gamma_1$ sont des fonctions polynômiales de tous leurs arguments. En remarquant particulièrement que

$$\beta_n(t) = \dot{\gamma}_n(\varphi(t))$$

$\beta_{n-1}(t), \dots, \beta_1(t)$ peuvent être déterminés de manière récurrente par (5.33). Clairement, $\beta_1(t), \dots, \beta_n(t)$ sont dans μ

La solution de (5.31) est donnée par

$$\varepsilon_{n-k} = \varepsilon_n^{(k)} - \sum_{j=1}^k \sigma_{jk}(t) \varepsilon_n^{(j-1)} \quad k = 1, \dots, n-1 \tag{5.36}$$

où

$$\begin{aligned} \sigma_{1k}(t) &= \sum_{i=1}^k \beta_{n-i+k}^{(i-1)}(t) \\ \sigma_{jk}(t) &= \beta_{n-j} + \sum_{i=j+1}^k l_i \beta_{n-i+k}^{(i-j)}(t) \quad j = 2, \dots, k \end{aligned} \tag{5.37}$$

avec $l_i, i = j+1, \dots, n$ sont des entiers positifs.

Comme tous les $\varepsilon_n^{(j)}$ sont dominés par $\exp(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau)$, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_n^{(j)} = 0$, pour $j = 0, 1, \dots, n-1$. Comme $\exp(\int_{t_0}^t \varphi(\tau) d\tau)$ est dans une classe de comparabilité supérieure à μ , ceci implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon_i = 0, i = 1, \dots, n$, et $\lim_{t \rightarrow +\infty} (x(t) - \hat{x}(t)) = 0$. ■

Corollaire 5.8 *Supposons que les conditions dans la proposition 5.7 sont vérifiées et que l'exponentielle e^t est la plus grande classe de comparabilité de K_H . Alors (5.29) est un observateur asymptotique si $K(t)$ est choisi de telle sorte qu'en coordonnées canoniques la dynamique d'erreur (5.30) soit un système stationnaire exponentiellement stable.*

Preuve Soit $H(t)$ la transformation de coordonnées mettant le système sous forme canonique observateur, alors l'erreur d'estimation en coordonnées originales e et celle en coordonnées canoniques ε sont reliées par

$$e = H^{-1}(t)\varepsilon$$

Le fait que l'exponentielle est la plus grande classe de comparabilité dans K_H garantit que, par un choix judicieux de $\bar{K}(t)$, on peut régler la vitesse de convergence de ε pour que e tende bien vers zéro lorsque $t \rightarrow \infty$. Ceci implique que (5.29) est un observateur

asymptotique du système (5.27). ■

Exemple 5.1 (suite) Nous revenons au problème de poursuite en ligne droite. Dans ce système, tous les éléments de $C(t)$ sont des polynômes de degré inférieur ou égal à n à coefficients réels. Ils appartiennent donc évidemment à un corps de Hardy, et tous les polynômes de degré inférieur ou égal à n appartiennent à la même classe de comparabilité. En ajoutant l'exponentielle e^t à ce corps, nous obtenons un corps de Hardy $K_H = \mathbf{R}(t, e^t)$ de rang 2 avec t, e^t pour classes de comparabilité. Puisque l'hypothèse d'H-observabilité est vérifiée et que l'exponentielle est la plus grande classe de comparabilité, le problème de l'observateur asymptotique admet une solution. En effet, l'erreur d'estimation en coordonnées $e = x - \hat{x}$ est donnée par

$$e = H^{-1}(t)\varepsilon$$

où $H^{-1}(t)$ est défini par (5.24). Il est clair que e est asymptotiquement stable si ε l'est.

Par exemple, pour le problème de l'estimation des coefficients d'un polynôme de degré 3, nous avons

$$H(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & t \\ 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix} \quad H^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}t^2 & -t & 1 \\ -t & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le gain d'observateur est donné par

$$K(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\alpha_0 t^2 - \alpha_1 t + \alpha_2 \\ -\alpha_0 t + \alpha_1 \\ \alpha_0 \end{pmatrix}$$

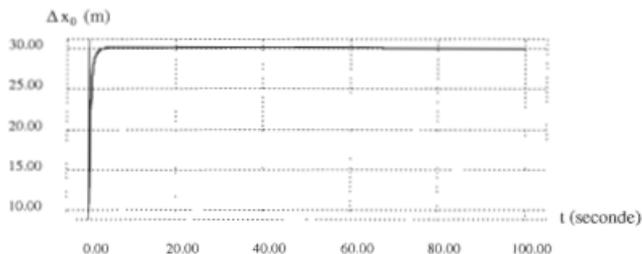
où $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ sont les coefficients du polynôme Hurwitzien

$$s^3 + \alpha_2 s^2 + \alpha_1 s + \alpha_0 = 0$$

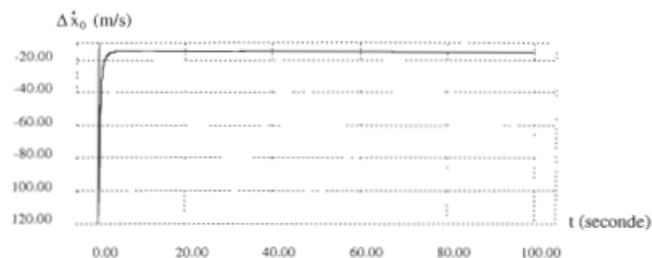
Les résultats de simulation pour ce problème sont présentés figure 5.1 pour l'observateur à gain asymptotique et figure 5.2 pour l'observateur utilisant la forme canonique et les corps de Hardy. Les paramètres initiaux de la cible sont $x_0 = 21000(m)$, $\dot{x}_0 = -200(m/s)$, $\ddot{x}_0 = 1(m/s^2)$.

Avec la première méthode, l'observateur à gain asymptotique produit des estimées biaisées de la position et de la vitesse, comme annoncé au paragraphe précédent, seule l'erreur d'accélération converge. Notons que le comportement de l'observateur en présence d'un bruit blanc Gaussien de covariance $\sigma = 10(m)$ sur l'observation, est peu perturbé (voir la figure 5.3).

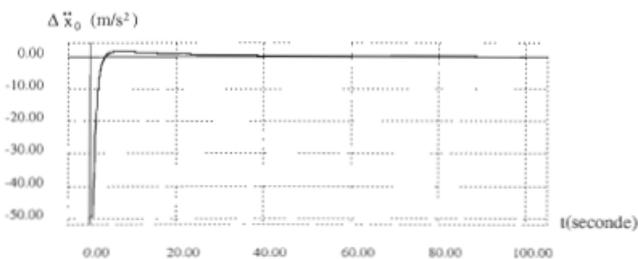
Le second observateur à gain stationnaire converge de manière satisfaisante dans le cas non perturbé. Cependant, cet observateur est sensible aux perturbations. Ceci est dû au fait que la croissance du gain est au moins aussi rapide que les fonctions du temps les plus rapides engendrées par les coefficients du système. Les résultats de simulation pour le cas avec observation perturbée sont donnés à la figure 5.4. La perturbation d'observation est supposée être le bruit blanc Gaussien à covariance $\sigma = 10(m)$. ■



(a) Erreur d'estimation de la position.

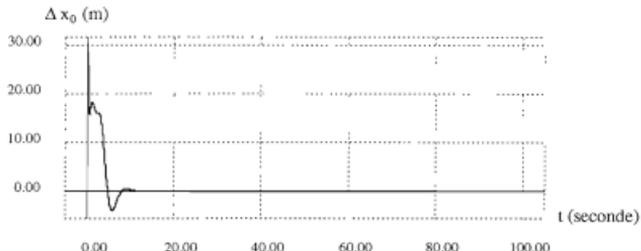


(b) Erreur d'estimation de la vitesse.

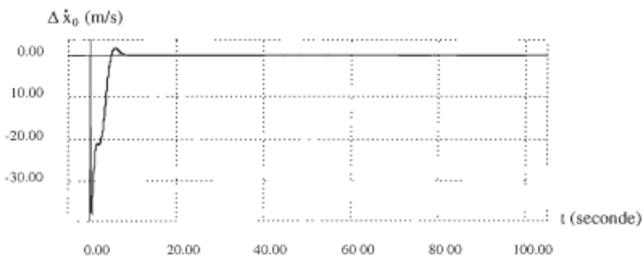


(c) Erreur d'estimation de l'accélération.

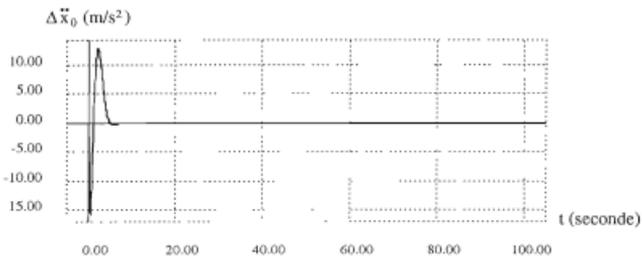
Figure 5.1: Erreurs d'estimation de l'observateur à gain asymptotique. $x_0 = 21000(m)$, $\dot{x}_0 = -200(m/s)$, $\ddot{x}_0 = 1(m/s^2)$.



(a) Erreur d'estimation de la position.

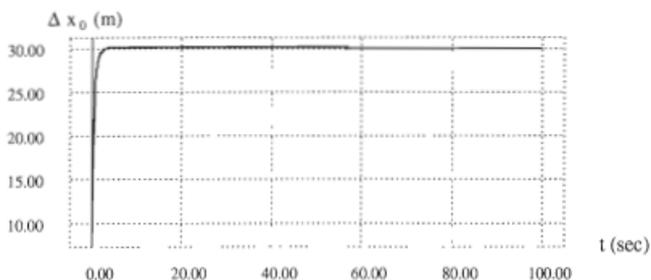


(b) Erreur d'estimation de la vitesse.

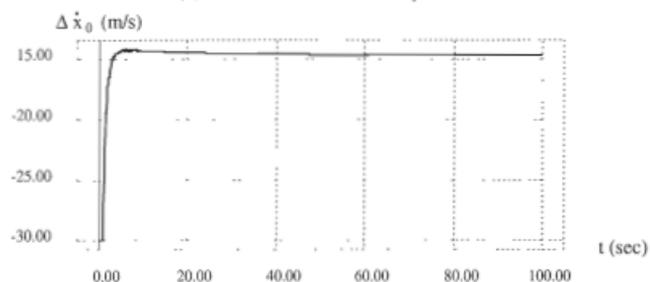


(c) Erreur d'estimation de l'accélération.

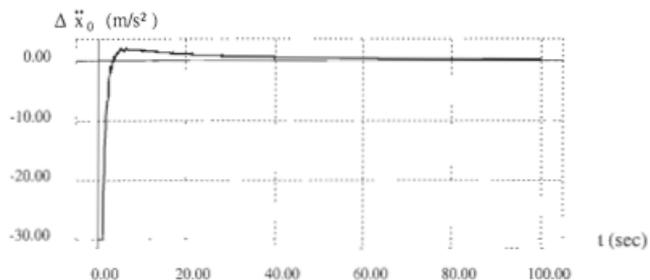
Figure 5.2: Erreurs d'estimation de l'observateur utilisant la forme canonique. $x_0 = 21000(m)$, $\dot{x}_0 = -200(m/s)$, $\ddot{x}_0 = 1(m/s^2)$.



(a) Erreur d'estimation de la position.

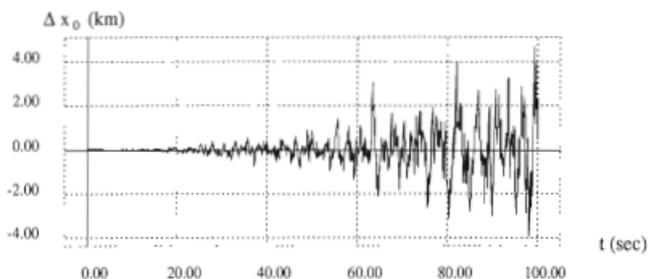


(b) Erreur d'estimation de la vitesse.

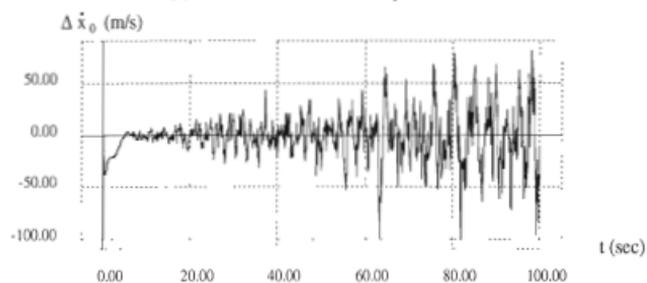


(c) Erreur d'estimation de l'accélération.

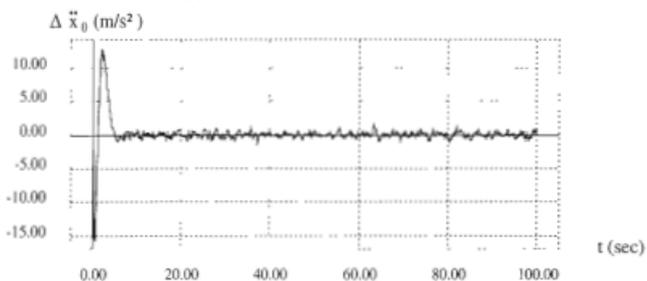
Figure 5.3: Erreurs d'estimation de l'observateur à gain asymptotique, le cas avec perturbation. $x_0 = 21000$ (m), $\dot{x}_0 = -200$ (m/s), $\ddot{x}_0 = 1$ (m/s²), $\sigma = 10$ (m).



(a) Erreur d'estimation de la position.



(b) Erreur d'estimation de la vitesse.



(c) Erreur d'estimation de l'accélération.

Figure 5.4: Erreurs d'estimation de l'observateur utilisant la forme canonique, le cas avec perturbation. $x_0 = 21000(m)$, $\dot{x}_0 = -200(m/s)$, $\ddot{x}_0 = 1(m/s^2)$, $\sigma = 10(m)$.

Chapitre 6

Observateurs non linéaires pour le problème de trajectographie

Ce chapitre concerne la construction d'observateurs pour la trajectographie dans le plan et dans l'espace. Les systèmes correspondants sont généralement non linéaires et nous sommes donc confrontés au problème de la construction d'observateurs non linéaires. Dans un premier temps, nous allons montrer que, malheureusement, dans le cas passif, les systèmes de poursuite ne peuvent pas être transformés sous forme canonique observateur ni s'immerger dans un système linéaire de dimension fini, les cas idéaux, à partir d'observations physiques. Nous cherchons donc des solutions approchées, par exemple l'immersion approchée et l'approximation linéaire tangente, et étudions les conditions de convergence de ces approches. Les mêmes études sont envisageables pour l'approche par filtrage de Kalman étendu.

6.1 Résultats négatifs

Considérons le problème de la construction d'un observateur pour le système (2.5) :

$$\begin{cases} \dot{x} &= v_x \\ \dot{v}_x &= a_x \\ \dot{y} &= v_y \\ \dot{v}_y &= a_y \\ \dot{z} &= v_z \\ \dot{v}_z &= a_z \end{cases}$$

avec l'observation (2.8)

$$\begin{cases} r &= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \\ \sigma &= \arcsin\left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right) \\ \gamma &= \arctan\left(\frac{y}{x}\right) \end{cases}$$

À cette fin, nous désirons d'abord savoir si les techniques d'immersion et d'injection de sortie permettent de transformer ce système en un système observable admettant un observateur avec une dynamique d'erreur linéarisable. Les réponses sont les suivantes.

Théorème 6.1 [57] *Le système (2.5) avec observation (2.8) n'est pas immergeable dans un système linéaire de dimension finie.*

La démonstration de ce théorème consiste à prouver que l'espace d'observation de ce problème n'est pas de dimension finie et, partant, que la condition du théorème 4.9 n'est pas vérifiée. Pour plus de détails, nous renvoyons à [57].

Proposition 6.2 *Considérons le système (2.5) avec observation passive (2.8). Sa partie observable, donnée par (3.43), (3.44), n'est pas linéarisable par injection de sortie.*

Preuve La démonstration, relativement calculatoire, est rejetée en annexe. ■

Compte-tenu de ces résultats négatifs, nous allons nous intéresser dans la suite de ce chapitre aux méthodes de construction d'observateurs approchés.

6.2 Immersion approchée

Puisque le système (2.5) avec observation donnée par (2.8) ne peut pas s'immerger dans un système linéaire de dimension finie, nous allons introduire la notion d'immersion approchée. Soit, par exemple, R, s, g des approximations d'ordre 2 du développement de Taylor de r, σ, γ en un point quelconque

$$\begin{cases} R = R_0 + R_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (x, y, z)R_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ s = s_0 + s_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (x, y, z)s_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ g = g_0 + g_1 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + (x, y, z)g_2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.1)$$

En appliquant le théorème 4.9, le système (2.5) avec observation (6.1) peut s'immerger, par le changement de variables $\theta(X) = (R, L_f R, L_f^2 R s, L_f s, L_f^2 s, g, L_f g, L_f^2 g)$, en le système linéaire

$$\begin{cases} \dot{\theta} = A\theta \\ y = C\theta \end{cases} \quad (6.2)$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.3)$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

D'autre part, en prenant $\beta = (r, L_f r, L_f^2 r, \sigma, L_f \sigma, L_f^2 \sigma, \gamma, L_f \gamma, L_f^2 \gamma)^T$ nous pouvons transformer le système (2.5) et (2.8) dans le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\beta} = A\beta + \varphi(t, p) \\ y = C\beta \end{cases} \quad (6.5)$$

où A et C sont données par (6.3) et (6.4) respectivement, et

$$\varphi(t, p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \varphi_r(t, p) & 0 & 0 & \varphi_\sigma(t, p) & 0 & 0 & \varphi_\gamma(t, p) \end{pmatrix}^T$$

avec $\varphi_r(t, p) = L_f^3 r = r^{(3)}$, $\varphi_\sigma(t, p) = L_f^3 \sigma = \sigma^{(3)}$, et $\varphi_\gamma(t, p) = L_f^3 \gamma = \gamma^{(3)}$, et p étant un vecteur de paramètres inconnus. Dans le cas à vitesse constante, le vecteur de paramètres $p = (x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0)$ est l'état initial.

Nous construisons un observateur pour le système linéaire (6.2)

$$\dot{\hat{\theta}} = A\hat{\theta} + K(y - \hat{y}) \quad (6.6)$$

Alors, en posant $e = \beta - \hat{\theta}$, la dynamique d'erreur est donnée par

$$\dot{e} = (A - KC)e + \varphi(t, p) \quad (6.7)$$

Proposition 6.3 Soit \mathcal{P} l'ensemble des paramètres pour lesquels les trajectoires correspondantes de la cible ne passent pas par l'axe des z

$$\mathcal{P} = \{(x_0, \dot{x}_0, y_0, \dot{y}_0, z_0, \dot{z}_0) \mid x_0 \dot{y}_0 - \dot{x}_0 y_0 \neq 0\} \quad (6.8)$$

Alors il existe un gain K qui stabilise la dynamique d'erreur (6.7) pour tout $p \in \mathcal{P}$

Pour démontrer cette proposition, nous avons besoin du résultat suivant :

Lemme 6.4 [40] Considérons le système

$$\dot{x} = Fx + \varphi(t, p), \quad x(t_0) = x_0 \quad (6.9)$$

avec F une matrice de taille $n \times n$ ayant toutes ses valeurs propres à partie réelle négative. Supposons en outre que $\varphi(t, p)$ est pour tout $p \in \mathcal{P}$ une fonction vectorielle bornée sur $[t_0, +\infty]$, et que pour tout $p \in \mathcal{P}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = 0$$

Alors pour tout $p \in \mathcal{P}$ (6.9) est asymptotiquement stable.

Preuve de la Proposition 6.3 Écrivons les observations en fonction du temps et de l'état initial

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2 + (z_0 + t\dot{z}_0)^2} \\ \sigma &= \arcsin \left(\frac{z_0 + t\dot{z}_0}{\sqrt{(x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2 + (z_0 + t\dot{z}_0)^2}} \right) \\ \gamma &= \arctan \left(\frac{y_0 + t\dot{y}_0}{x_0 + t\dot{x}_0} \right) \end{aligned}$$

Les dérivées de r , σ et γ sont données par

$$\begin{aligned} L_f r &= \frac{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2 + \dot{z}_0^2}{((x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2 + (z_0 + t\dot{z}_0)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &\quad - \frac{(x_0\dot{x}_0 + t\dot{x}_0^2 + y_0\dot{y}_0 + t\dot{y}_0^2 + z_0\dot{z}_0 + t\dot{z}_0^2)^2}{((x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2 + (z_0 + t\dot{z}_0)^2)^{\frac{5}{2}}} \\ L_f \sigma &= -\frac{-\dot{z}_0(x_0^2 + y_0^2) + (z_0 - t\dot{z}_0)(x_0\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0) + t z_0(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2)}{((x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2 + (z_0 + t\dot{z}_0)^2)((x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2)^{1/2}} \\ L_f \gamma &= \frac{\dot{y}_0 x_0 - \dot{x}_0 y_0}{(x_0 + t\dot{x}_0)^2 + (y_0 + t\dot{y}_0)^2} \end{aligned}$$

On peut alors vérifier que

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} r^{(n)} = 0 & \forall n \geq 2 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma^{(n)} = 0 & \forall n \geq 1 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \gamma^{(n)} = 0 & \forall n \geq 1 \end{cases} \quad \forall p \in \mathcal{P}, \quad (6.10)$$

donc $\varphi(t, p)$ est uniformément bornée pour tout $t \geq 0$, et $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, p) = 0$ pour tout $p \in \mathcal{P}$. De plus, (A, C) est une paire complètement observable, donc il existe un gain K tel que la matrice $(A - KC)$ soit stable. Alors le lemme 6.4 implique que (6.7) est asymptotiquement stable. ■

Remarque 6.1 (6.10) donne un critère de taille minimale de l'immersion approchée permettant d'assurer la convergence d'un observateur. Cependant, pour suivre précisément la trajectoire d'un mobile, notamment quand il s'approche du capteur, une immersion de degré élevé est souvent nécessaire.

Ce résultat peut être étendu au cas général, c'est-à-dire lorsque la cible est sujette à des accélérations. C'est l'objet du corollaire ci-dessous.

Corollaire 6.5 *Supposons qu'il existe des entiers positifs i, j et k tels que l'état initial de la trajectoire d'un mobile satisfait*

$$\begin{cases} x_0^{(i+1)} = 0 \\ y_0^{(j+1)} = 0 \\ z_0^{(k+1)} = 0 \end{cases}$$

Alors on peut construire un observateur asymptotique par immersion approchée si la trajectoire considérée à partir de l'état initial $(x_0, \dot{x}_0^{(i)}, y_0, \dot{y}_0^{(j)}, z_0, \dot{z}_0^{(k)})$ ne passe pas par l'axe des z .

Remarque 6.2 *La notion d'immersion approchée permet d'expliquer la convergence et la robustesse de l'observateur à gain constant (appelé souvent filtre $\alpha - \beta$, ou filtre $\alpha - \beta - \gamma$, ect.) par rapport aux conditions initiales.*

Remarque 6.3 *L'immersion approchée conduit à un observateur dont les chaînes d'intégrateurs à partir des observations sont découplées, de sorte qu'une panne au niveau d'une chaîne n'empêche pas les autres de fonctionner. Un tel observateur est dit tolérant aux pannes [56].*

Comme l'immersion permet de se ramener à un système linéaire stationnaire, l'observateur de Luenberger s'applique. On peut aussi utiliser l'analogie avec le filtre de Kalman stationnaire que nous avons présentée dans la Section 4.2.1 pour calculer les gains des observateurs.

Nous allons présenter des résultats de simulation numérique pour la poursuite d'une cible se déplaçant à vitesse constante. Nous prenons $\Omega_r = 3.25$, $\Omega_{r,v} = 4.89$ pour l'observateur de dimension 2, et $\Omega_r = 1.8$, $\Omega_{r,v} = 2.6$ pour l'observateur de dimension 3. La condition de convergence de la dynamique d'erreur est donc bien vérifiée dans les deux cas.

Dans la première simulation, les paramètres de la cible sont $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 2000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$. La distance minimale (ou distance nodale) $r_{min} = 1536.74(m)$ est atteinte à $t = 10.4(secondes)$. Les figures 6.1-6.4 présentent les erreurs d'estimation de la position et de la vitesse dans les coordonnées polaires et cartésiennes respectivement pour l'observateur de dimension 2 et celui de dimension 3. Des biais d'estimation apparaissent quand la cible s'approche de la position du capteur (origine).

Dans le deuxième cas, la position initiale de la cible est identique à celle du premier cas, mais $\dot{x}_0 = 240(m/s)$, $\dot{y}_0 = 200(m/s)$, $\dot{z}_0 = 50(m/s)$, autrement dit, la cible s'éloigne de la position d'observation. Dans ce cas, il n'y a pas de biais d'estimation (voir les figure 6.5 et 6.6).

Pour le premier cas de poursuite, les perturbations sur la dynamique et sur l'observation sont également considérées. On suppose que les perturbations sont des bruits blancs Gaussiens. Pour étudier l'influence de la perturbation sur l'observateur, on fait des simulations correspondant à trois situations le cas avec dynamique perturbée, le cas avec observation perturbée et le cas avec dynamique et observation perturbées. Dans le premier cas, les covariances d'accélération sont $\sigma_a = \sigma_{a_y} = \sigma_a = 9.8(m/s^2)$. Dans le

second cas, les covariances de bruits d'observation sont $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\sigma = \sigma_\gamma = 1(deg)$. Les résultats de simulation pour un observateur de dimension 3 sont présentés aux figure 6.7 – figure 6.15.

On voit clairement que les estimations d'accélération subissent l'influence la plus forte de la perturbation de la dynamique. Par exemple, l'écart moyen de l'erreur d'estimation de l'accélération de distance est environ $20(m/s^2)$ (voir figure 6.9-a). Par contre, même si les estimées sur l'accélération sont de qualité médiocre, les estimées sur la position et la vitesse sont bien meilleures. Ce qui montre en particulier la robustesse de l'estimée de la position par rapport aux perturbations.

On indique que dans ce scénario de poursuite, c'est la dynamique de la cinématique du système qui apporte du retard à l'état estimé.

6.3 Approximation linéaire

6.3.1 Approche de l'approximation linéaire

Dans ce paragraphe, nous allons étendre à certains systèmes non linéaires la méthode de construction d'observateurs sous forme canonique présentée au chapitre 3 pour les systèmes linéaires instationnaires. Considérons le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, u) \\ y = h(x) \end{cases} \quad (6.11)$$

Un observateur peut être choisi de la forme

$$\dot{\hat{x}} = f(\hat{x}, u) + k(\hat{x}, u)(y - h(\hat{x})) \quad (6.12)$$

et la dynamique d'erreur est alors donnée par

$$\dot{\epsilon} = f(x, u) - f(\hat{x}, u) - k(\hat{x}, \bar{u})(y - h(\hat{x})) \quad (6.13)$$

En développant (6.13) autour du point d'équilibre $\epsilon = 0$, nous obtenons

$$\dot{\epsilon} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u) - k(\hat{x}, \bar{u}) \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}) \right) \epsilon + O(\|\epsilon\|^2) \quad (6.14)$$

La partie linéaire de la dynamique d'erreur est donc un système linéaire instationnaire.

En posant le changement de variable

$$\epsilon = H(\hat{x}, \bar{u})e$$

où \bar{u} représente le vecteur engendré par u et ses dérivées jusqu'à un ordre approprié. $H(\hat{x}, \bar{u})$ transforme (6.14) en

$$\begin{aligned} \dot{e} &= \left(H(\hat{x}, \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, u) + \dot{H}(\hat{x}, \bar{u}) - H(\hat{x}, \bar{u}) k(\hat{x}, u) \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}) \right) H^{-1}(\hat{x}, \bar{u}) e + O(\|e\|^2) \\ &= \left(H(\hat{x}, \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \bar{u}) + \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} \quad u \right] + \left[\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \quad f(\hat{x}, u) \right] + \left[\frac{\partial H}{\partial \hat{x}} \quad k(\hat{x}, \bar{u})(y - h(\hat{x})) \right] \right. \\ &\quad \left. - H(\hat{x}, \bar{u}) k(\hat{x}, \bar{u}) \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}) \right) H^{-1}(\hat{x}, \bar{u}) e + O(\|e\|^2) \end{aligned}$$

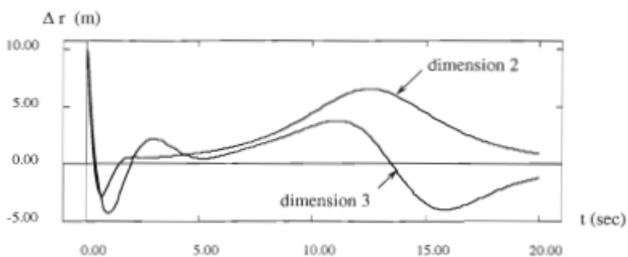
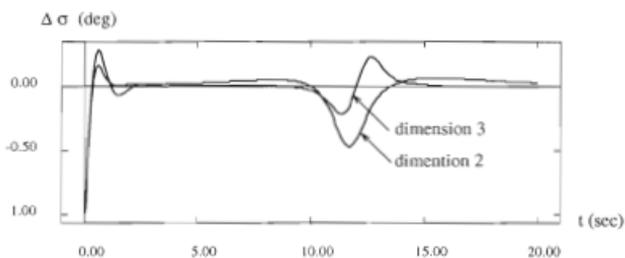
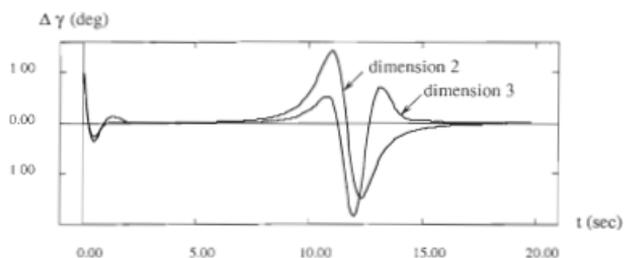
(a) Erreur d'estimation de r .(b) Erreur d'estimation de σ .(c) Erreur d'estimation de γ .

Figure 6.1: Erreurs d'estimation de la position en coordonnée polaire. 1er cas $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

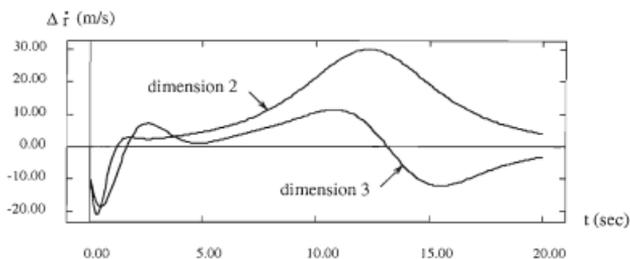
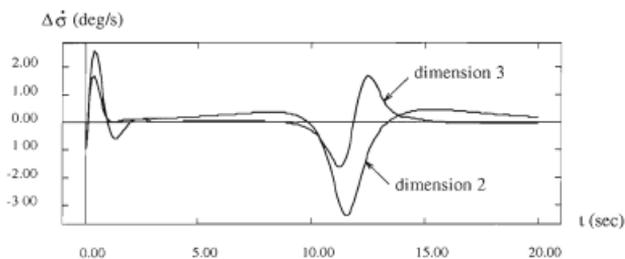
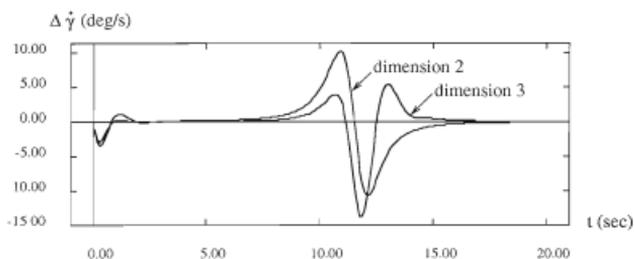
(a) Erreur d'estimation de \dot{r} .(b) Erreur d'estimation de $\dot{\sigma}$.(c) Erreur d'estimation de $\dot{\gamma}$.

Figure 6.2: Erreurs d'estimation de la vitesse en coordonnées polaires. 1er cas $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

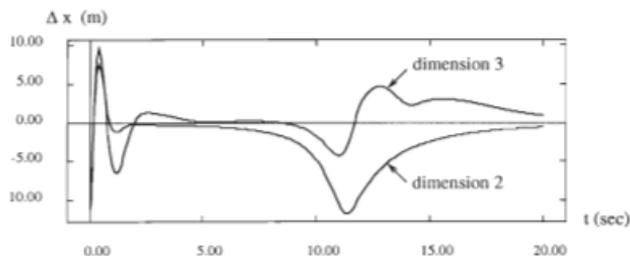
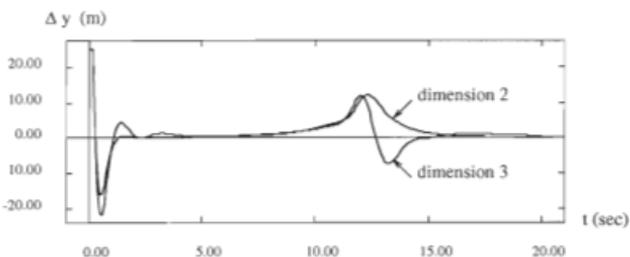
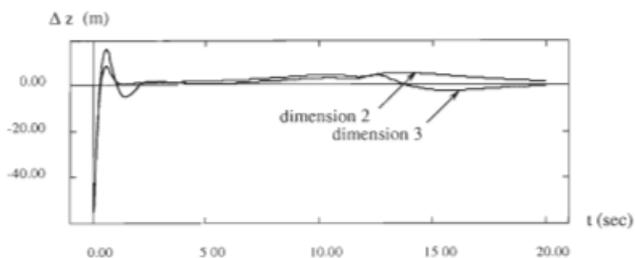
(a) Erreur d'estimation de x .(b) Erreur d'estimation de y .(c) Erreur d'estimation de z .

Figure 6.3: Erreurs d'estimation de la position en coordonnées cartésiennes. ler cas $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

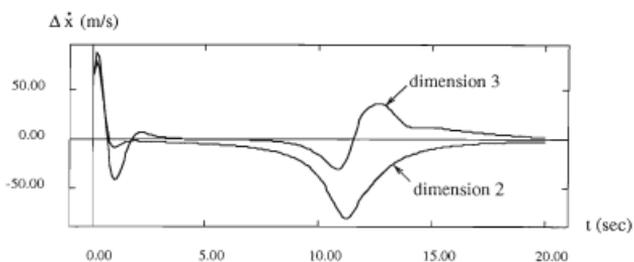
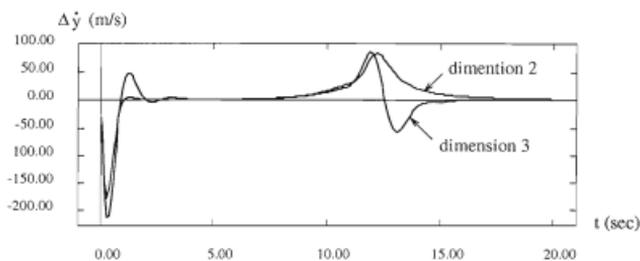
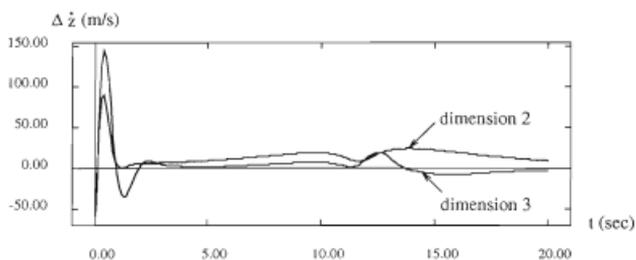
(a) Erreur d'estimation de \dot{x} .(b) Erreur d'estimation de \dot{y} .(f) Erreur d'estimation de \dot{z} .

Figure 6.4: Erreurs d'estimation de la vitesse en coordonnées cartésiennes. 1er cas : $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

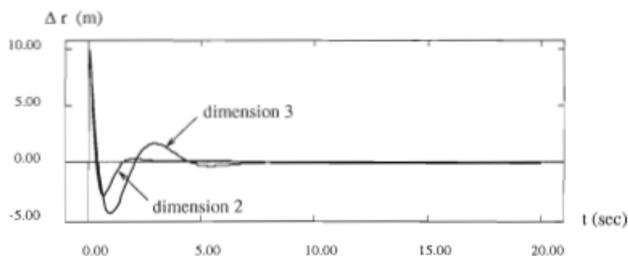
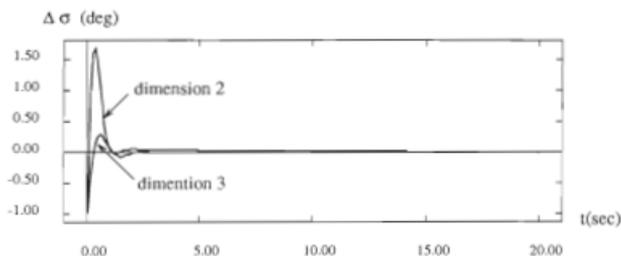
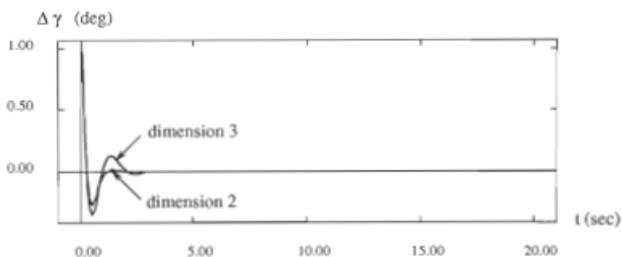
(a) Erreur d'estimation de r .(b) Erreur d'estimation de σ .(c) Erreur d'estimation de γ .

Figure 6.5: Erreurs d'estimation de la position en coordonnées polaires. Second cas $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = 240(m/s)$, $\dot{y}_0 = 200(m/s)$, $\dot{z}_0 = 50(m/s)$.

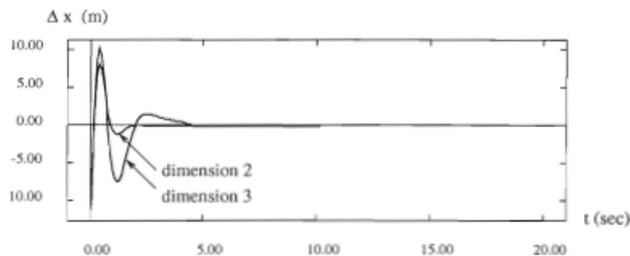
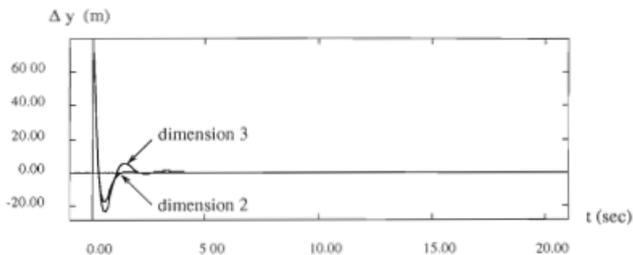
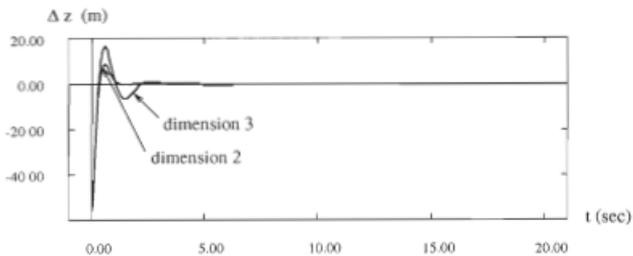
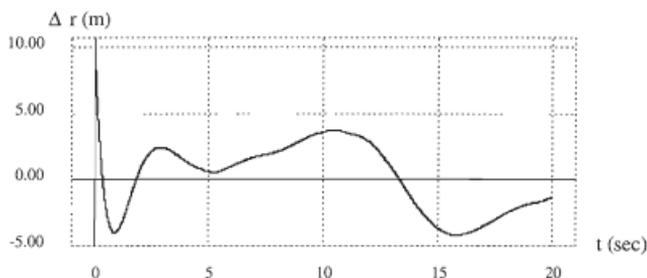
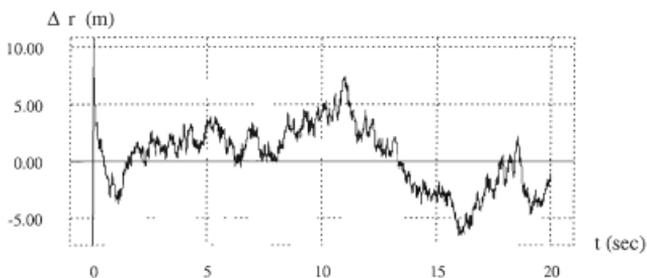
(a) Erreur d'estimation de x .(b) Erreur d'estimation de y .(c) Erreur d'estimation de z .

Figure 6.6: Erreurs d'estimation de la position en coordonnées cartésiennes. Second cas $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = 240(m/s)$, $\dot{y}_0 = 200(m/s)$, $\dot{z}_0 = 50(m/s)$.



(a) La cas avec dynamique perturbée.

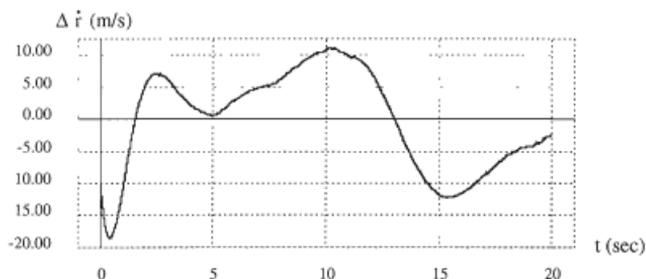


(b) Le cas avec observation perturbée.



(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

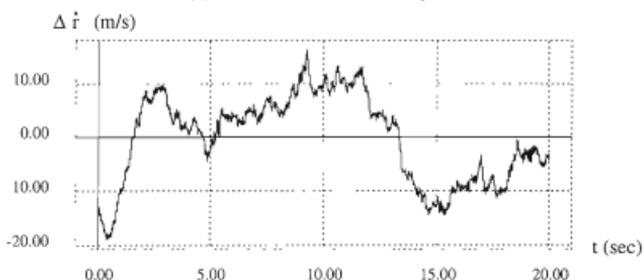
Figure 6.7: Erreurs d'estimation de r $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\sigma = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

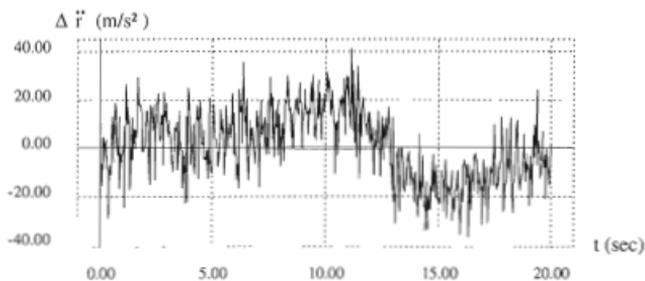


(b) Le cas avec observation perturbée.

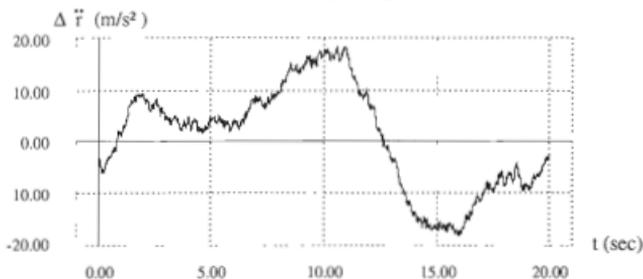


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

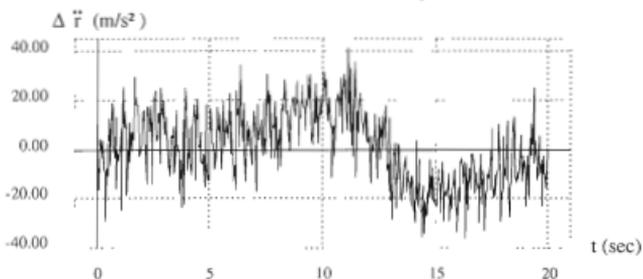
Figure 6.8: Erreurs d'estimation de \dot{r} $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\sigma = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

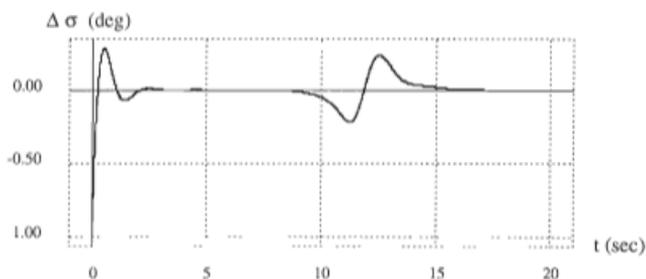


(b) Le cas avec observation perturbée.

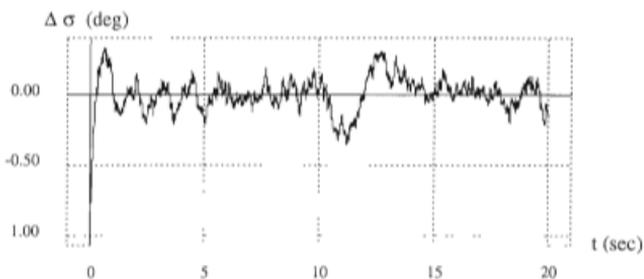


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

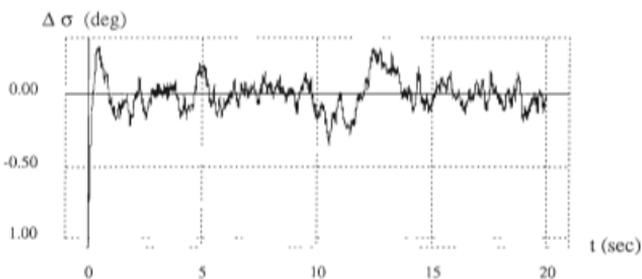
Figure 6.9: Erreurs d'estimation de \ddot{r} $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\theta = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

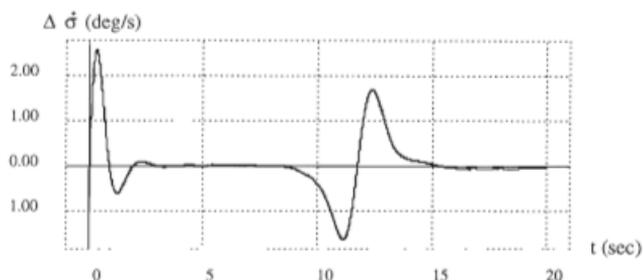


(b) Le cas avec observation perturbée.

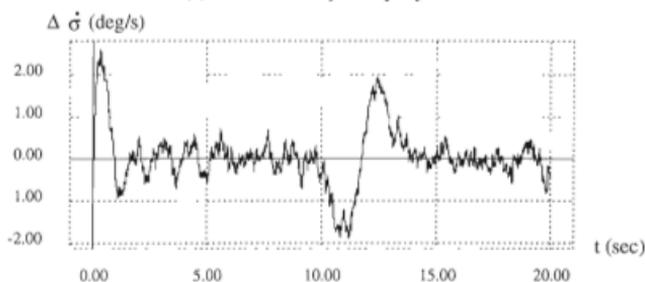


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

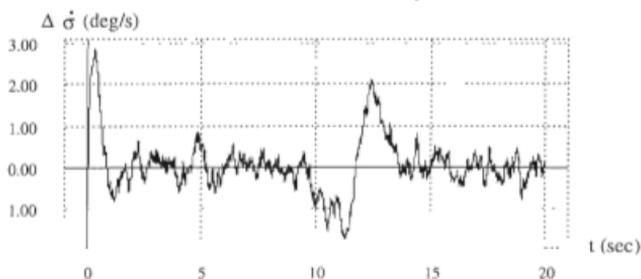
Figure 6.10: Erreurs d'estimation de σ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_v = 30(m)$, $\sigma_\sigma = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

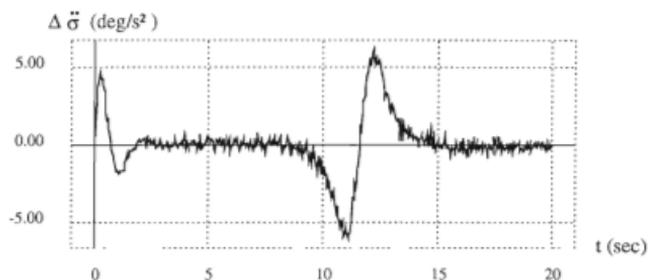


(b) Le cas avec observation perturbée.

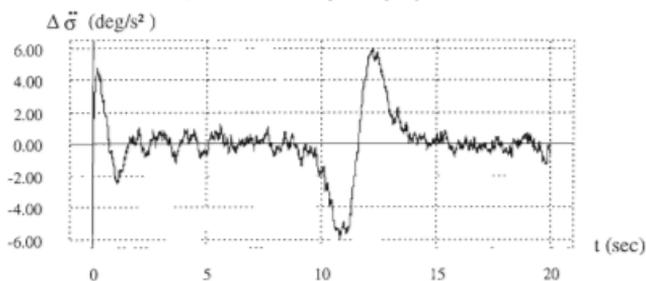


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

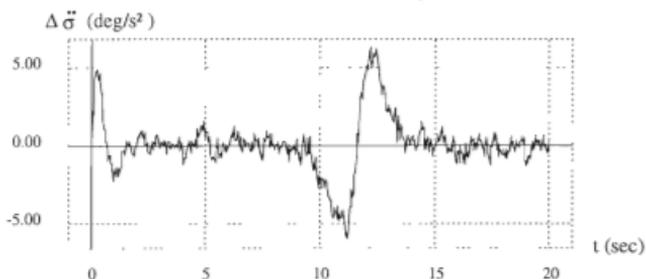
Figure 6.11: Erreurs d'estimation de $\dot{\sigma}$ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{ax} = \sigma_{ay} = \sigma_{az} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\theta = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

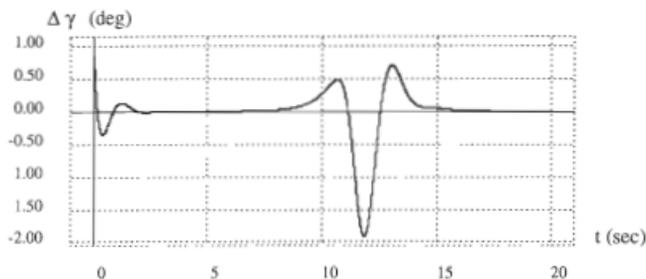


(b) Le cas avec observation perturbée.

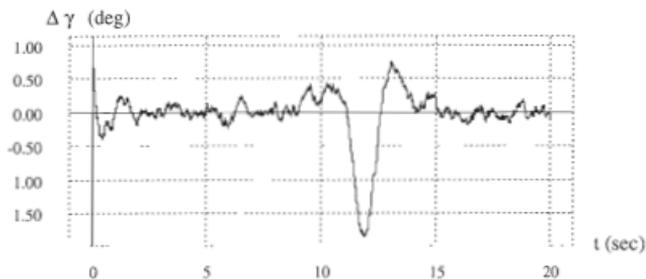


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

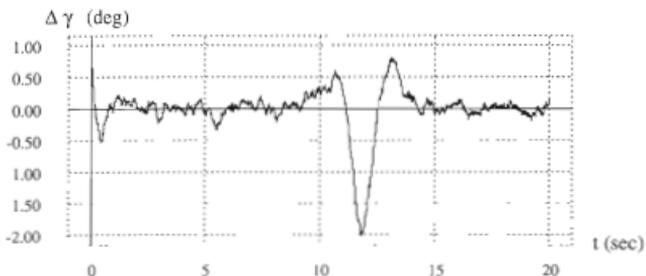
Figure 6.12: Erreurs d'estimation de $\ddot{\sigma}$ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\alpha = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

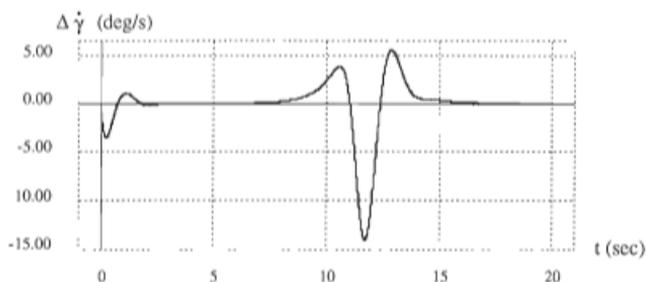


(b) Le cas avec observation perturbée.

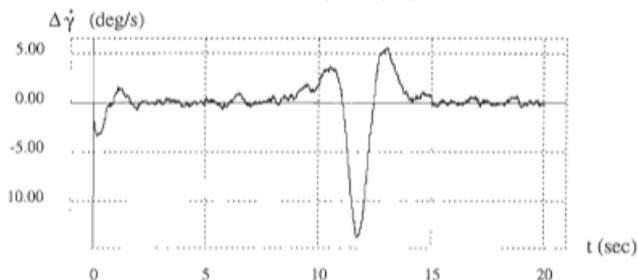


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

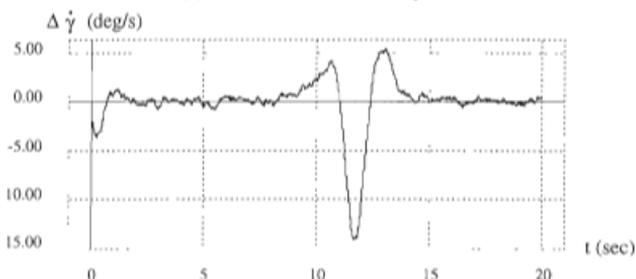
Figure 6.13: Erreurs d'estimation de γ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_x = 30(m)$, $\sigma_o = \sigma_\gamma = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.

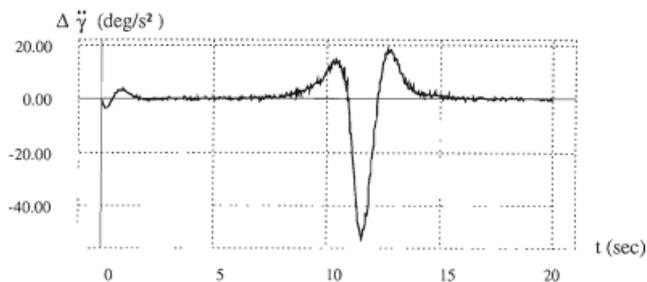


(b) Le cas avec observation perturbée.

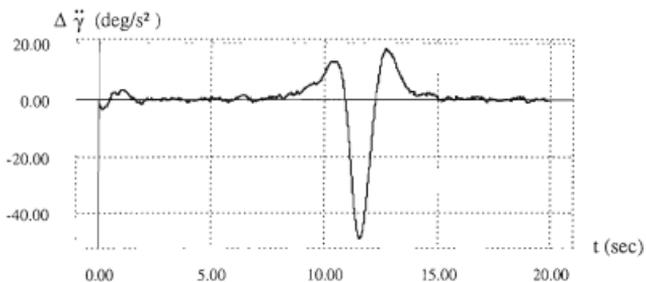


(c) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

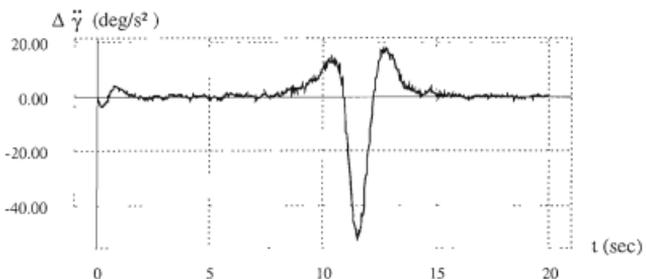
Figure 6.14: Erreurs d'estimation de $\dot{\gamma}$ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_o = \sigma_v = 1(deg)$.



(a) Le cas avec dynamique perturbée.



(b) Le cas avec observation perturbée.



(b) Le cas avec dynamique et observation perturbées.

Figure 6.15: Erreurs d'estimation de $\dot{\gamma}$ $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\alpha = \sigma_\beta = 1(deg)$.

où $\left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} : v \right]$ dénote la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H_{11}}{\partial \bar{x}} v & \frac{\partial H_{1n}}{\partial \bar{x}} v \\ \frac{\partial H_{n1}}{\partial \bar{x}} v & \frac{\partial H_{nn}}{\partial \bar{x}} v \end{pmatrix}$$

Remarquons que

$$\left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} k(\hat{x}, \bar{u})(y - h(\hat{x})) \right]_{e=He} \sim O(\|e\|)$$

de sorte que l'équation ci-dessus peut s'écrire comme

$$\dot{e} = (A(\hat{x}, \bar{u}) - \hat{k}(\hat{x}, \bar{u})C(\hat{x}, \bar{u}))e + O(\|e\|^2) \quad (6.15)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{A}(\hat{x}, \bar{u}) &= H(\hat{x}, \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial x}(\hat{x}, \bar{u}) H^{-1}(\hat{x}, \bar{u}) + \left(\left[\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} : \dot{\bar{u}} \right] + \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} f(\hat{x}, u) \right] \right) H^{-1}(\hat{x}, \bar{u}), \\ C(\hat{x}, \bar{u}) &= \frac{\partial h}{\partial x}(\hat{x}) H^{-1}(\hat{x}, \bar{u}) \quad \hat{k}(\hat{x}, \bar{u}) = H(\hat{x}, \bar{u}) k(\hat{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

Si maintenant nous choisissons une trajectoire arbitraire du système (6.11), il est facile de remarquer que la transformation qui met le linéarisé tangent à cette trajectoire sous forme canonique observateur est formellement la même que celle servant à construire l'observateur correspondant, mis à part le fait que le point de fonctionnement est différent. On se propose donc d'utiliser cette remarque pour concevoir un observateur mettant le système tangent sous forme observateur en chaque point, le gain étant choisi comme au chapitre 4 dans le cas linéaire instationnaire. Nous présentons ici l'idée de la méthode de manière formelle et des résultats de convergence seront présentés dans la suite sur des cas particuliers.

Choisissons donc une trajectoire nominale observable arbitraire \bar{x} , correspondant à l'entrée u et notons

$$\Sigma = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_t, u_t), \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}_t) \right)$$

le linéarisé tangent correspondant. Comme dans le cas linéaire instationnaire, sous des conditions d'observabilité, il existe des changements de coordonnées $H(\bar{x}, \bar{u})$ et de sorties $G(\bar{x}, \bar{u})$ permettant de mettre le système Σ sous forme canonique observateur étendue

$\tilde{\Sigma} = (\tilde{A}(\bar{x}, \bar{u}), \tilde{C})$ avec

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & a_1^1(\bar{x}, \bar{u}) & & & a_1^p(\bar{x}, \bar{u}) \\ 1 & & & & \mathbf{O} & \vdots \\ 0 & & & & & \\ \vdots & 0 & a_{k_1-1}^1(\bar{x}, \bar{u}) & & & a_{k_1-1}^p(\bar{x}, \bar{u}) \\ 0 & 0 & 1 & a_{k_1}^1(\bar{x}, \bar{u}) & & a_{k_1}^p(\bar{x}, \bar{u}) \\ \hline & & & \vdots & & \vdots \\ \hline & & & a_{n-k_p+1}^1(\bar{x}, \bar{u}) & 0 & \dots & 0 & a_{n-k_p+1}^p(\bar{x}, \bar{u}) \\ & & & & 1 & & & \vdots \\ & & \mathbf{O} & & 0 & & & \\ & & & a_{n-1}^1(\bar{x}, \bar{u}) & & & 0 & a_{n-1}^p(\bar{x}, \bar{u}) \\ & & & a_n^1(\bar{x}, \bar{u}) & & & 0 & 0 & 1 & a_n^p(\bar{x}, \bar{u}) \end{array} \right),$$

$$\tilde{C} = GC = \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \tilde{C}_p \end{pmatrix}, \quad \tilde{C}_i = (0 \quad 0 \quad 1)_{1 \times k_i}, \quad i = 1, \dots, p$$

où la suite d'indices d'observabilité $\{k_1, \dots, k_p\}$ vérifie $\sum_{i=1}^p k_i = n$. Le passage de Σ à $\tilde{\Sigma}$ est donné par

$$\begin{aligned} \tilde{A}(\bar{x}, \bar{u}) &= H(x, \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, u) H^{-1}(\bar{x}, \bar{u}) + \dot{H}(\bar{x}, u) H^{-1}(\bar{x}, \bar{u}) \\ &= H(x, \bar{u}) \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, u) H^{-1}(\bar{x}, \bar{u}) + \left(\left[\frac{\partial H}{\partial \bar{x}} f(x, u) \right] + \left[\frac{\partial H}{\partial \bar{u}} : \dot{\bar{u}} \right] \right) H^{-1}(\bar{x}, \bar{u}), \\ \tilde{C} &= \frac{\partial h}{\partial x}(\bar{x}) H^{-1}(\bar{x}, \bar{u}) \end{aligned}$$

Le changement de coordonnées est ainsi déterminé explicitement par

$$H^{-1}(\bar{x}_t, \bar{u}_t) = ((\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^{k_1-1})W_1(\bar{x}, \bar{u}), (\mathcal{L}^0, \mathcal{L}^1, \dots, \mathcal{L}^{k_p-1})W_p(\bar{x}, \bar{u})),$$

où $W_1(\bar{x}, \bar{u}), \dots, W_p(\bar{x}, \bar{u})$ sont des colonnes spécifiques de l'inverse de la matrice d'observabilité (voir la section 3.3.3), et l'opérateur \mathcal{L} est définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W_i(\bar{x}, \bar{u}) &= -W_i(\bar{x}, \bar{u}) + \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, u)W_i(\bar{x}, \bar{u}) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}W_i - \frac{\partial W_i}{\partial x}f - \frac{\partial W_i}{\partial \bar{u}}\dot{\bar{u}} \quad i = 1, \dots, p \end{aligned} \quad (6.16)$$

Dans le cas non commandé, cet opérateur est réduit à

$$\mathcal{L}'W_i(\bar{x}, u) = \text{ad}'_{-j}W_i(\bar{x}, \bar{u}), \quad i = 1, \dots, p, \quad j \geq 0 \quad (6.17)$$

Il suffit alors de remplacer la trajectoire arbitraire (\bar{x}, \bar{u}) par la trajectoire estimée (\hat{x}, u) et de calculer le gain $\hat{k}(\hat{x}, \bar{u})$ comme dans le cas linéaire instationnaire, de sorte que la

dynamique d'erreur dans les coordonnées transformées, soit linéaire stationnaire stable. Un tel choix de gain est donné explicitement par

$$k(\hat{x}, \bar{u}) = [(\alpha_1^1 + \alpha_2^1 \mathcal{L} + \dots + \alpha_{k_1}^1 \mathcal{L}^{k_1-1} + \mathcal{L}^{k_1})W_1, \\ (\alpha_{n-k_p+1}^p + \alpha_{n-k_p+2}^p \mathcal{L} + \dots + \alpha_n^p \mathcal{L}^{k_p-1} + \mathcal{L}^{k_p})W_p]G^{-1}(\hat{x}, \bar{u}),$$

avec $(\alpha_i^1, \dots, \alpha_{k_i-1}^i)$, $i = 1, \dots, p$ des vecteurs Hurwitziens.

Clairement, l'observabilité est une condition nécessaire pour effectuer la transformation ci-dessus, mais elle n'est pas suffisante pour garantir la convergence de l'observateur obtenu, pour la même raison que dans le cas linéaire instationnaire. En effet, dans le cas non linéaire, il sera plus difficile d'évaluer en général le comportement de la transformation ainsi que celui du gain de l'observateur. Cependant, grâce à l'expression explicite du changement de coordonnées et du gain de l'observateur, l'étude de la convergence est rendue possible pour des systèmes spécifiques. C'est ce que nous allons faire dans les paragraphes suivants.

Remarque 6.4 *La méthode de la forme canonique observateur étendu s'apparente à celle de Zeitz [95] dans le cas mono-sortie et de Birk et Zeitz [11] dans le cas multi-sortie. Dans les travaux de Zeitz et Birk, le système est supposé linéarisable par injection non linéaire de sortie. Mais les contraintes principales de notre approche résident dans l'observabilité d'une part et dans la difficulté de garantir des transformations bornées dans le cas général.*

6.3.2 Poursuite en coordonnées cartésiennes

6.3.2.1 Le cas actif

En employant la technique de l'approximation linéaire, nous pouvons concevoir un observateur asymptotique. Considérons le problème de poursuite d'une cible se déplaçant à vitesse constante. En posant $\xi = (x, v_x, y, v_y, z, v_z)^T$ l'état du système, alors l'observateur asymptotique s'exprime comme

$$\dot{\hat{\xi}} = A\hat{\xi} + k(\hat{\xi})(y - h(\hat{\xi})), \quad \hat{\xi}(t_0) = \hat{\xi}_0 \quad (6.18)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h(\hat{\xi}) = \begin{pmatrix} \sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2} \\ \arcsin\left(\frac{\hat{z}}{\sqrt{\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2}}\right) \\ \arctan\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right) \end{pmatrix}$$

En utilisant le schéma I, le gain est donné par

$$k(\hat{\xi}) = ((\alpha_1^1 + \alpha_2^1 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_1, (\alpha_2^1 + \alpha_2^2 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_2, (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_3)$$

avec

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^1 \\ \alpha_2^1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^2 \\ \alpha_2^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1^3 \\ \alpha_2^3 \end{pmatrix}$$

des vecteurs Hurwitziens et

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ 0 \\ \frac{\dot{y}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \\ 0 \\ \frac{\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}} \end{pmatrix}, \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\dot{z}\dot{x}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ 0 \\ -\frac{\dot{y}\dot{z}}{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}} \\ 0 \\ \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \end{pmatrix}, \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dot{y} \\ 0 \\ \dot{x} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pour étudier la convergence de l'observateur obtenu nous remarquons d'abord que le champ de vecteurs associé à ce système est complet, et que pour l'approximation linéaire l'erreur d'estimation de l'état est supposée bornée. Par une inspection directe, nous vérifions immédiatement que le seul point singulier de la transformation de coordonnées est précisément le point inobservable. Comme la trajectoire d'une cible se déplaçant à vitesse constante franchit au plus une fois le point inobservable, il existe donc un t_0 à partir duquel la transformation de coordonnées est bien définie. Par suite l'observateur sous forme canonique observateur étendue converge asymptotiquement.

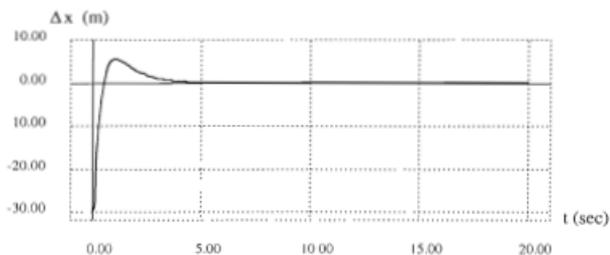
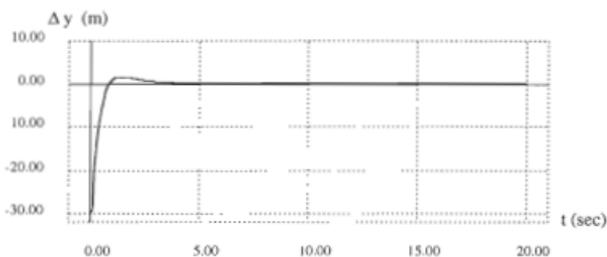
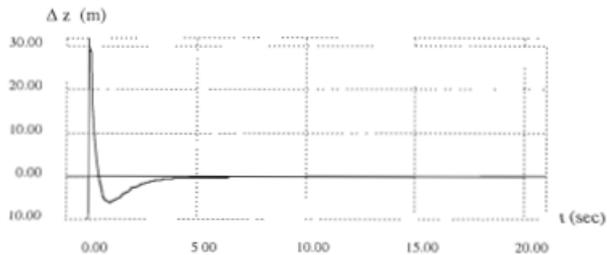
Les résultats de simulation pour le même scénario de poursuite que dans le premier cas de la section précédente sont présentés dans la figure 6.16.

Une autre méthode de conception d'observateur pour le même système consiste à inverser l'observation en coordonnées polaires pour obtenir l'observation dans les coordonnées cartésiennes. En conséquence, le système de poursuite se réduit à trois sous-systèmes linéaires découplés. Nous retrouvons ainsi le cas de la poursuite en ligne droite que nous avons étudiée au chapitre 5.

6.3.2.2 Le cas passif

Dans le cas passif, nous travaillons sur le système (3.43) avec observation passive (3.44). L'observateur associé est de la forme

$$\dot{\hat{\zeta}} = f(\hat{\zeta}) + k(\hat{\zeta})(y - h(\hat{\zeta})) \quad \hat{\zeta}(t_0) = \hat{\zeta}_0 \quad (6.19)$$

(a) Erreur d'estimation de x .(b) Erreur d'estimation de y .(c) Erreur d'estimation de z .

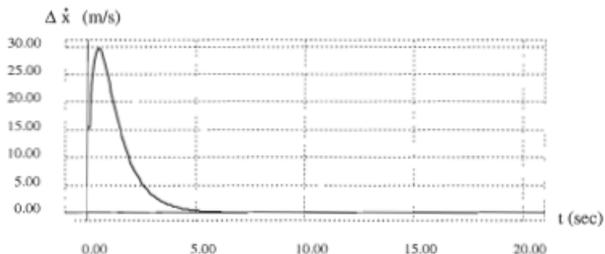
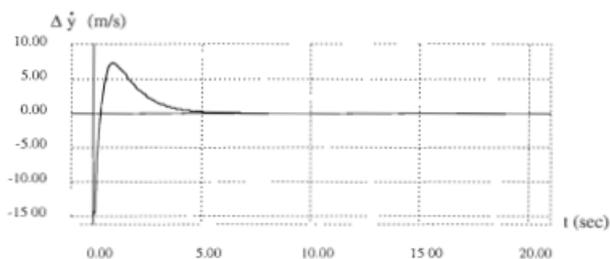
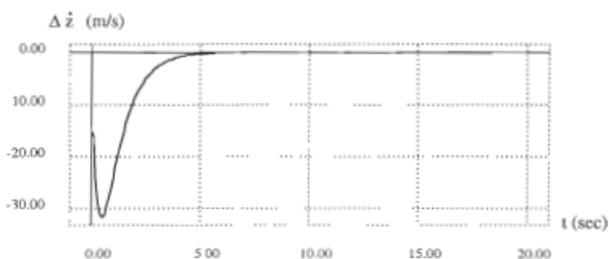
(a) Erreur d'estimation de \dot{x} (b) Erreur d'estimation de \dot{y} .(c) Erreur d'estimation de \dot{z} .

Figure 6.16: Erreurs d'estimation, poursuite active dans l'espace. $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

En choisissant une matrice d'observabilité correspondant à la suite d'indices d'observabilité (2,3), le gain de l'observateur est donné par

$$k(\hat{c}) = ((\alpha_1^1 + \alpha_2^1 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_1, (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mathcal{L} + \alpha_3^2 \mathcal{L}^2 + \mathcal{L}^3)W_2)$$

avec (α_1^1, α_2^1) et $(\alpha_1^2, \alpha_2^2, \alpha_3^2)$ des vecteurs Hurwitziens, et

$$W_{11} = -\frac{(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2)\hat{c}_1 \sin \hat{c}_4}{\sqrt{\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2}},$$

$$W_{12} = -\frac{(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2)\hat{c}_2 \sin \hat{c}_4}{\sqrt{\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2}}$$

$$W_{13} = -\frac{(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2)\hat{c}_3 \sin \hat{c}_4}{\sqrt{\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2}}$$

$$W_{14} = \frac{(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2 + \hat{c}_3^2)(\hat{c}_4^2 + 2\hat{c}_1^2\hat{c}_2^2 + \hat{c}_1^4) \cos \hat{c}_4}{(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2)^{3/2}}$$

$$W_{21} = (\hat{c}_1(\hat{c}_3\hat{c}_1^2 \sin \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_2^2 \sin \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 - \hat{c}_2\hat{c}_1^2 \cos \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 - \hat{c}_1^3 \cos \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 - \hat{c}_3^3 \cos \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 - \hat{c}_1\hat{c}_2^2 \cos \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_1^2 \sin \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_2^2 \sin \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5))/\beta$$

$$W_{22} = (\hat{c}_2(\hat{c}_3\hat{c}_1^2 \sin \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_2^2 \sin \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 - \hat{c}_2\hat{c}_1^2 \cos \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 - \hat{c}_1^3 \cos \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 - \hat{c}_3^3 \cos \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 - \hat{c}_1\hat{c}_2^2 \sin \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_1^2 \sin \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_3\hat{c}_2^2 \sin \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5))/\beta,$$

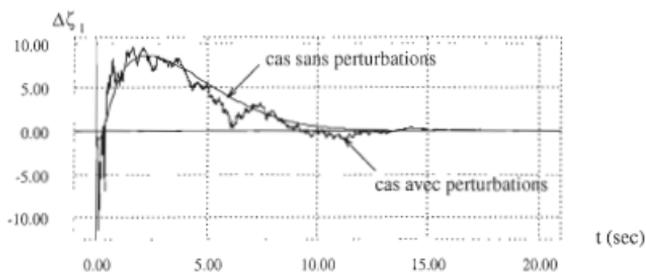
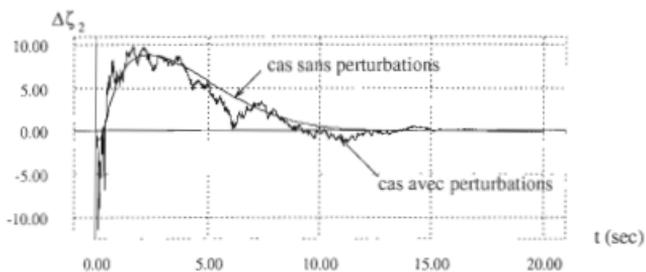
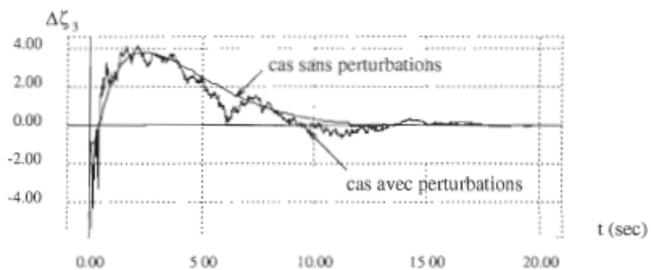
$$W_{23} = ((\hat{c}_3 \sin \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 - \hat{c}_2 \cos \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 - \hat{c}_1 \cos \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 + \hat{c}_3 \sin \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5)\hat{c}_3(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2))/\beta,$$

$$W_{24} = -((\hat{c}_3 \cos \hat{c}_4 \cos^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_3 \cos \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_2 \sin \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 + \hat{c}_1 \sin \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5)(\hat{c}_1^2 + \hat{c}_2^2))/\beta,$$

$$\beta = 2 \cos \hat{c}_4(\hat{c}_2 \sin^2 \hat{c}_4 \cos \hat{c}_5 \sin^2 \hat{c}_5 + \hat{c}_2 \cos \hat{c}_5 \cos^2 \hat{c}_4 \sin^2 \hat{c}_5 - \hat{c}_1 \cos^2 \hat{c}_5 \cos^2 \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 + \hat{c}_2 \cos^3 \hat{c}_5 \cos^2 \hat{c}_4 - \hat{c}_1 \sin^3 \hat{c}_5 \cos^2 \hat{c}_4 - \hat{c}_1 \sin^2 \hat{c}_4 \sin^3 \hat{c}_5 + \hat{c}_2 \sin^2 \hat{c}_4 \cos^3 \hat{c}_5 - \hat{c}_1 \sin^2 \hat{c}_4 \sin \hat{c}_5 \cos^2 \hat{c}_5)$$

Par inspection directe on vérifie que la seule singularité de la transformation de coordonnées est à $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0$ et $\hat{c}_4 = \frac{\pi}{2}$. $\hat{c}_1 = \hat{c}_2 = 0$ est le point inobservable dans ce problème. $\hat{c}_4 = \frac{\pi}{2}$ correspond également à un cas inobservable, le cas où la cible se déplace verticalement, c'est-à-dire $\gamma \equiv \text{constante}$. Il faut donc changer de stratégie pour éviter cette situation. En remarquant que le champ de vecteur associé au système dynamique dans ce problème est complet, il suffit d'éviter les points inobservables pour assurer la convergence de l'observateur donné par (6.19) pour une initialisation convenable.

Les résultats de simulation numérique dans le cas sans perturbations et le cas avec perturbations pour le scénario de poursuite identique à celui présentés dans le cas actif sont donnés à la figure 6.17. Dans le second cas, les perturbations sur la dynamique et sur l'observation sont supposées être des bruits blancs Gaussiens à covariances $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_\sigma = \sigma_\gamma = 1(deg)$. Les résultats de simulation montrent que cet observateur est robuste par rapport aux perturbations.

(a) Erreur d'estimation de ζ_1 (b) Erreur d'estimation de ζ_2 (c) Erreur d'estimation de ζ_3

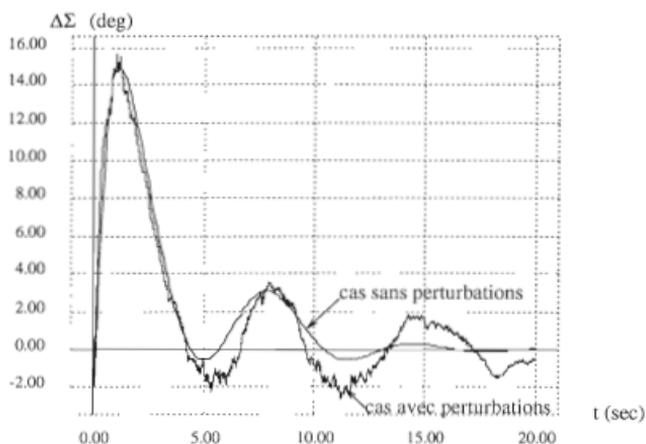
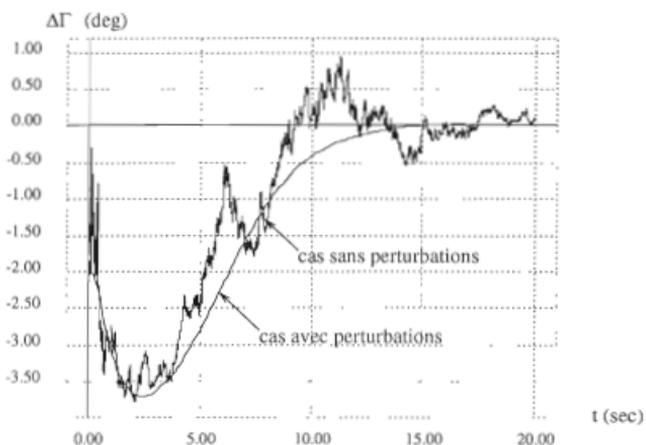
(d) Erreur d'estimation de Σ (e) Erreur d'estimation de Γ

Figure 6.17: Erreurs d'estimation, poursuite passive dans l'espace. $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$, $\sigma_{a_x} = \sigma_{a_y} = \sigma_{a_z} = 9.8(m/s^2)$, $\sigma_r = 30(m)$, $\sigma_s = \sigma_\gamma = 1(deg)$.

6.3.3 Poursuite passive en coordonnées polaires modifiées

6.3.3.1 Le cas sans commande

Nous présentons la construction d'un observateur pour le problème de trajectographie passive dans le plan. Supposons que le porteur est immobile, alors le système correspondant est donné par (voir la Sec.2.5)

$$\begin{cases} \dot{x} &= \begin{pmatrix} x_{pm2} \\ -2x_{pm2}x_{pm3} \\ x_{pm2}^2 - x_{pm3}^2 \end{pmatrix} \\ y &= x_{pm1} \end{cases} \quad (6.20)$$

La matrice d'observabilité associée à ce système est

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2x_{pm3} & -2x_{pm2} \end{pmatrix}$$

Donc (6.20) est localement observable si $x_{pm2} \neq 0$. L'inverse de Q est

$$Q^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{x_{pm3}}{x_{pm2}} & -\frac{1}{2x_{pm2}} \end{pmatrix}$$

Si nous prenons la dernière colonne de Q^{-1} comme le vecteur initial

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{2x_{pm2}} \end{pmatrix}^T$$

nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}W &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2\frac{x_{pm3}}{x_{pm2}} \end{pmatrix}^T, \\ \mathcal{L}^2W &= \begin{pmatrix} 1 & -6x_{pm3} & -6\frac{x_{pm3}^2}{x_{pm2}} \end{pmatrix}^T \end{aligned}$$

Alors dans les coordonnées originales, le gain d'observateur est donné par :

$$k(\hat{x}) = \alpha_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2\hat{x}_{pm2}} \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\frac{\hat{x}_{pm3}}{\hat{x}_{pm2}} \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -6\hat{x}_{pm3} \\ -6\frac{\hat{x}_{pm3}^2}{\hat{x}_{pm2}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6\hat{x}_{pm3} \\ 6\hat{x}_{pm2}^2 + 18\hat{x}_{pm3}^2 \\ 12\frac{\hat{x}_{pm3}^3}{\hat{x}_{pm2}} \end{pmatrix}$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ est un vecteur Hurwitzien.

On vérifie immédiatement que l'observateur obtenu est convergent sur un horizon fini si $\hat{x}_{pm2} \neq 0$. C'est une contrainte naturelle, puisque $\hat{x}_{pm2} = 0$ est le seul cas inobservable. Mais, lorsque $t \rightarrow \infty$, x_{pm2} s'annule, ce qui produit la divergence de l'observateur pour

une erreur d'estimation arbitraire. Donc le modèle en CPM en repère fixe ne s'applique pas à la poursuite de longue durée.

Les résultats de simulation numérique sont présentés dans la figure 6.18. Les paramètres de la cible sont $x_0 = 5000(m)$, $y_0 = 5000(m)$, $v_x = -4(m/s)$ et $v_y = -3(m/s)$, et les paramètres de l'observateur sont : $\alpha_1 = 3.5$, $\alpha_2 = 7$, $\alpha_3 = 5.5$.

Nous présentons ensuite l'observateur pour la poursuite en trois dimensions.

Supposons que $x_{pm2} \neq 0$. On peut alors construire un observateur sous forme canonique étendue suivant le schéma II présenté dans la Sec. 4.5 en écrivant explicitement .

$$x_{pm} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7)^T$$

Nous obtenons la sous matrice d'observabilité

$$Q_s = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -(x_4^2 + x_5^2 + x_6^2) & 0 & 0 & -2(x_7 + x_1 x_4) & -2x_1 x_5 & -2x_1 x_6 & -2x_4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ici nous utilisons le fait que $x_4 \neq 0$. Si ce n'est pas le cas, il suffit de choisir la sous-matrice d'observabilité correspondant aux cas $x_5 \neq 0$ ou $x_6 \neq 0$.

L'observateur asymptotique est donné par

$$\dot{\hat{x}}_{pm} = f(\hat{x}_{pm}) + k(\hat{x}_{pm})(y - C\hat{x}_{pm}) \quad \hat{x}_{pm}(t_0) = \hat{x}_{pm0} \quad (6.21)$$

avec un gain de la forme

$$k(\hat{x}_{pm}) = ((\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mathcal{L} + \alpha_3^2 \mathcal{L}^2 + \mathcal{L}^3)W_1, (\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_2, (\alpha_1^3 + \alpha_2^3 \mathcal{L} + \mathcal{L}^2)W_3)$$

avec $(\alpha_1^1, \alpha_2^1, \alpha_3^1)$, (α_1^2, α_2^2) et (α_1^3, α_2^3) des vecteurs Hurwitziens, et

$$W_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2\hat{x}_4 \end{pmatrix} \quad W_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\hat{x}_5 \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_4 \end{pmatrix} \quad W_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -\hat{x}_6 \hat{x}_1 \\ -\hat{x}_4 \end{pmatrix}$$

L'analyse de la convergence de l'observateur (6.21) est identique à celle de la poursuite dans le plan, puisque $x_4 = 0$ est à la fois le point inobservable et le point singulier de la transformation de coordonnées.

Les résultats de simulation sont présentés dans la figure 6.19 pour la poursuite de la même trajectoire qu'au cas précédent.

6.3.3.2 Le cas avec commande

Pour simplifier, nous considérons le problème de poursuite passive en dimension 2 correspondant au système (2.13). L'observateur pour ce système est de la forme

$$\dot{\hat{x}}_{pm} = f(\hat{x}_{pm}, u) + k(\hat{x}_{pm}, \bar{u})(y - \hat{x}_{pm1}), \quad \hat{x}_{pm}(t_0) = \hat{x}_{pm0} \quad (6.22)$$

En employant la technique de la forme canonique étendue, le gain de l'observateur est donné par :

$$k(\hat{x}_{pm}, \bar{u}) = (\alpha_1 + \alpha_2 \mathcal{L} + \alpha_3 \mathcal{L}^2 + \alpha_4 \mathcal{L}^3 + \mathcal{L}^4)W$$

où $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ est un vecteur Hurwitzien, et

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{u_x \sin \hat{x}_{pm1} - u_y \cos \hat{x}_{pm1}}{\beta(\hat{x}_{pm}, \bar{u})} & \frac{-2\hat{x}_{pm2}}{\beta(\hat{x}_{pm}, \bar{u})} \end{pmatrix}^T$$

avec

$$\begin{aligned} \beta(\hat{x}_{pm}, \bar{u}) = & 6\hat{x}_{pm2}^2(u_x \cos \hat{x}_{pm1} + u_y \sin \hat{x}_{pm1}) + 6\hat{x}_{pm2}\hat{x}_{pm3}(u_x \sin \hat{x}_{pm1} - u_y \cos \hat{x}_{pm1}) \\ & + 3\hat{x}_{pm4}(u_x \sin \hat{x}_{pm1} - u_y \cos \hat{x}_{pm1})^2 + 2\hat{x}_{pm2}(\dot{u}_x \sin \hat{x}_{pm1} - \dot{u}_y \cos \hat{x}_{pm1}) \end{aligned}$$

La figure 6.20 présente un scénario de poursuite d'un mobile. La position initiale de la cible est $x_c(0) = 1000(m)$, $y_c(0) = 1000(m)$, avec vitesse constante $\dot{x}_c(0) = 3(m/s)$, $\dot{y}_c(0) = 4(m/s)$. Le porteur démarre de l'origine avec la vitesse initiale $\dot{x}_o = 2(m/s)$, $\dot{y}_o = 0(m/s)$. Il fait une manoeuvre à accélération constante : $u_x = 0.35(m/s^2)$, $u_y = 0.6(m/s^2)$. Dans cet exemple, la transformation de coordonnées est bornée pour l'entrée choisie si l'état estimé ne vérifie par $\beta(\hat{x}_{pm}, \bar{u}) = 0$, c'est-à-dire le cas inobservable. À cause de la contrainte d'énergie, le porteur ne peut pas garder la même accélération trop longtemps, donc la convergence de (6.22) a lieu pendant la même durée que la manoeuvre. Pour assurer une convergence de l'observateur à long terme, il faut que le porteur fasse une manoeuvre aussi longue que possible. Les résultats de la simulation numérique sont présentés dans la figure 6.21.

On remarque finalement que pour la poursuite en coordonnées polaires modifiées, si la vitesse d'angle de la cible est faible, les points d'opération des systèmes sont très proches des points inobservables. Par conséquent, les observateurs sont très sensibles aux bruits d'observation dans cette situation.

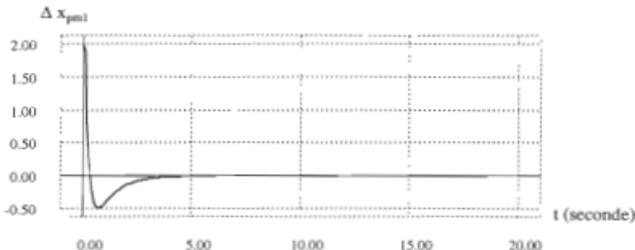
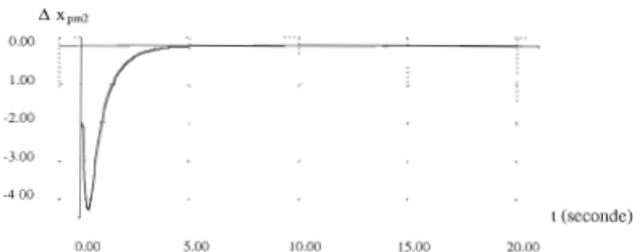
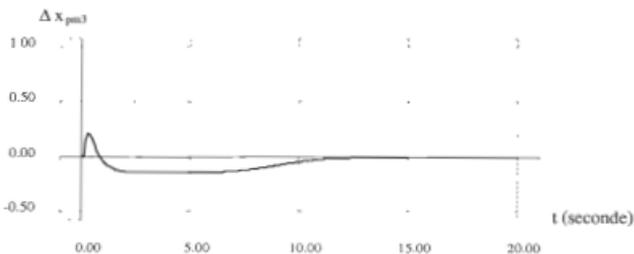
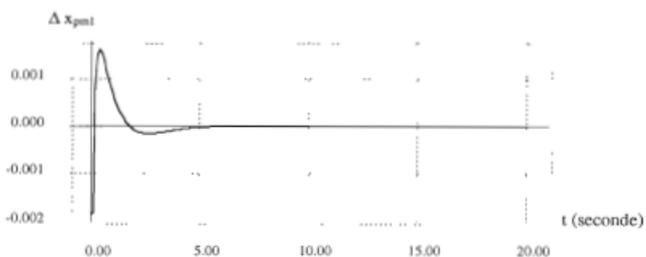
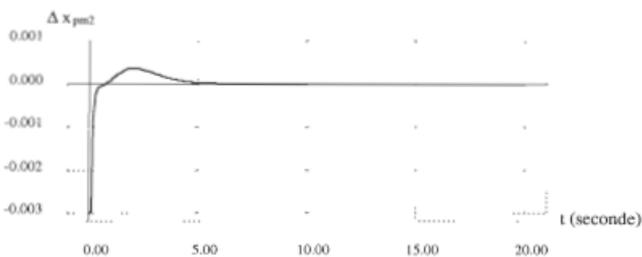
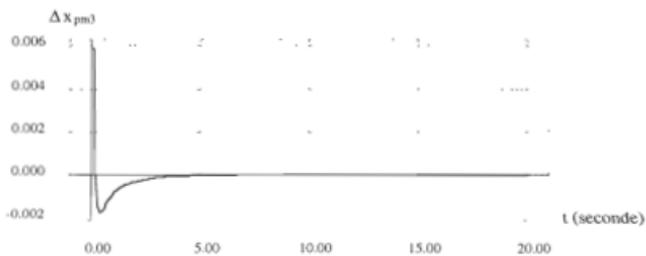
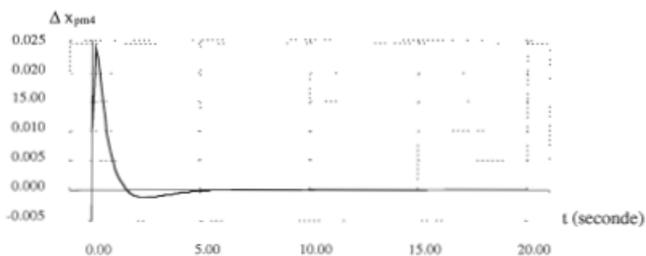
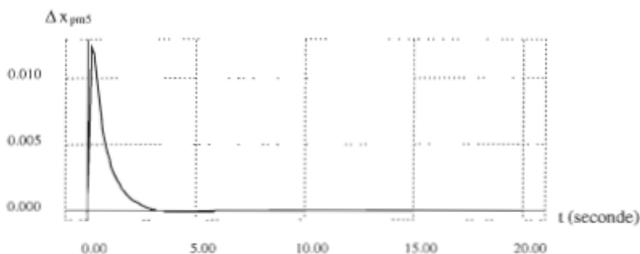
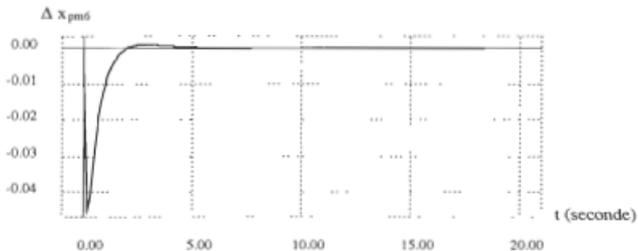
(a) Erreur d'estimation de x_{pm1} (b) Erreur d'estimation de x_{pm2} (c) Erreur d'estimation de x_{pm3} .

Figure 6.18: Erreurs d'estimation, poursuite passive dans le plan. $x_0 = 5000(m)$, $y_0 = 5000(m)$, $v_x = -4(m/s)$, $v_y = -3(m/s)$.

(a) Erreur d'estimation de x_{pm1} .(b) Erreur d'estimation de x_{pm2} .(c) Erreur d'estimation de x_{pm3} .

(d) Erreur d'estimation de x_{pm4} .(e) Erreur d'estimation de x_{pm5} .(f) Erreur d'estimation de x_{pm6} .

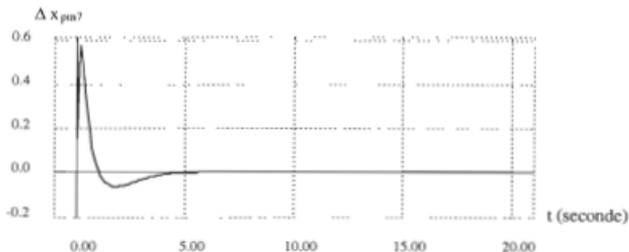
(g) Erreur d'estimation de x_{pm} .

Figure 6.19: Erreurs d'estimation, poursuite passive dans l'espace. $x_0 = 2500(m)$, $y_0 = 2500(m)$, $z_0 = 1000(m)$, $\dot{x}_0 = -240(m/s)$, $\dot{y}_0 = -200(m/s)$, $\dot{z}_0 = -50(m/s)$.

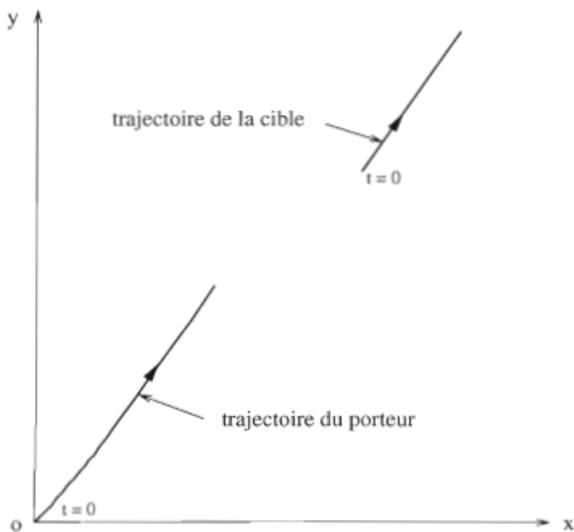
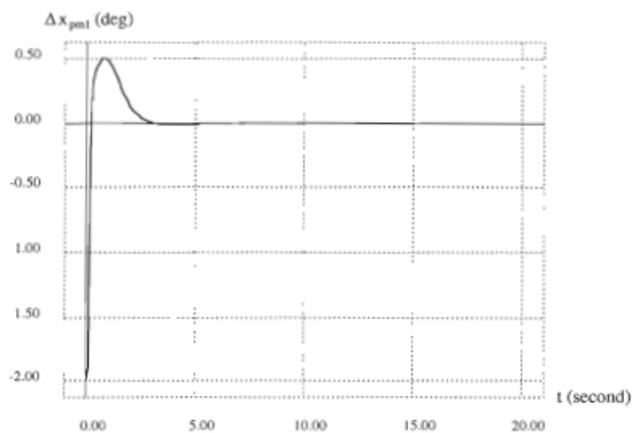
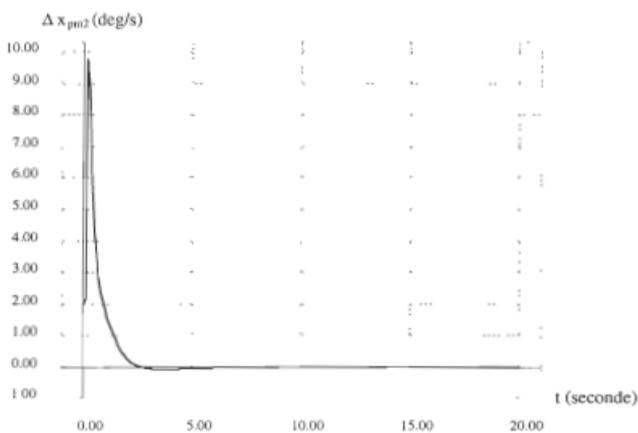


Figure 6.20: Poursuite passive dans le plan.

(a) Erreur d'estimation de x_{pm1} (b) Erreur d'estimation de x_{pm2}

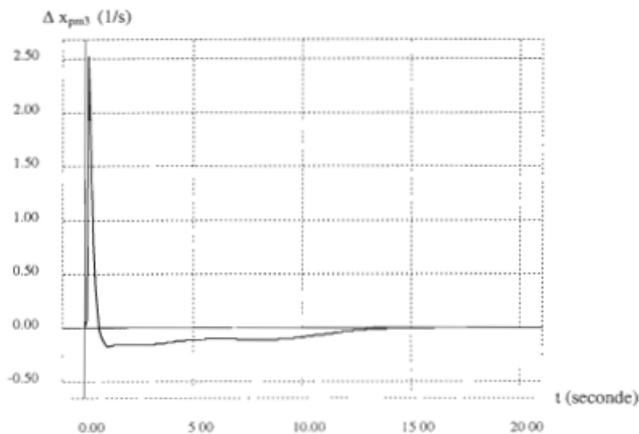
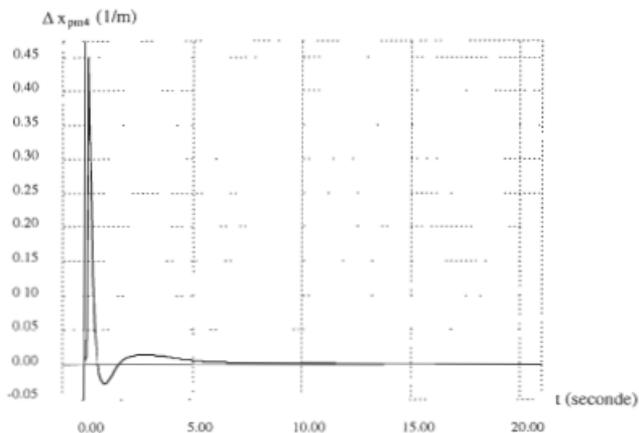
(c) Erreur d'estimation de x_{pm3} .(d) Erreur d'estimation de x_{pm4} .

Figure 6.21: Erreurs d'estimation, poursuite passive dans le plan. $x_c(0) = 1000(m)$, $y_c(0) = 1000(m)$, $\dot{x}_c(0) = 3(m/s)$, $\dot{y}_c(0) = 0(m/s)$, $u_x = 0.35(m/s^2)$, $u_y = 0.6(m/s^2)$.

6.4 Annexe : Preuve de la proposition 6.2

En dérivant les sorties par rapport au temps, par exemple γ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \gamma^{(3)} &= \left(2 \cos^3 \zeta_4 ((\zeta_3^2 - 3\zeta_1^2 \zeta_2) \cos^2 \zeta_5 + (2\zeta_1^3 - 6\zeta_1 \zeta_2^2) \sin \zeta_5 \cos \zeta_5 \right. \\ &\quad + (3\zeta_1^2 \zeta_2 - \zeta_2^2) \sin^2 \zeta_5) \cos \zeta_5 - ((3\zeta_1 \zeta_2^2 - \zeta_3^2) \cos^2 \zeta_5 + (2\zeta_2^3 - 6\zeta_1^2 \zeta_2) \sin \zeta_5 \cos \zeta_5 \\ &\quad \left. + (\zeta_1^3 - 3\zeta_1 \zeta_2^2) \sin^2 \zeta_5) \sin \zeta_5 \right) / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \\ &= \frac{2 (\zeta_4^2 + \zeta_5^2)^{3/2} \zeta_6 (\zeta_2^2 \zeta_6^2 - 3 \zeta_2 \zeta_6^2 \zeta_1^2 + 3 \zeta_2 \zeta_5^2 \zeta_1^2 - \zeta_2^3 \zeta_5^2 + 2 \zeta_1^3 \zeta_5 \zeta_6 - 6 \zeta_1 \zeta_5 \zeta_6 \zeta_2^2)}{(\zeta_5^2 + \zeta_6^2)^{3/2} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \\ &\quad - \frac{2 (\zeta_4^2 + \zeta_5^2)^{3/2} (3 \zeta_1 \zeta_6^2 \zeta_2^2 - \zeta_1^3 \zeta_6^2 + \zeta_1^2 \zeta_5^2 - 3 \zeta_1 \zeta_5^2 \zeta_2^2 - 6 \zeta_2 \zeta_5 \zeta_6 \zeta_1^2 + 2 \zeta_2^3 \zeta_5 \zeta_6) \zeta_5}{(\zeta_5^2 + \zeta_6^2)^{3/2} (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \\ &= \frac{N(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6)}{D(\zeta_1, \zeta_2, \zeta_4, \zeta_5, \zeta_6)} \\ &= \frac{N(\psi^{-1}(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}))}{D(\psi^{-1}(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma}))} \end{aligned}$$

où $\psi^{-1}(\sigma, \dot{\sigma}, \ddot{\sigma}, \gamma, \dot{\gamma}, \ddot{\gamma})$ est définie par (3.36). Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} N &= -(4 \gamma^6 \cos^6 \sigma + 4 \sigma^6 \sin^2 \sigma + 2 \cos^5 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma} \ddot{\gamma} \dot{\sigma} \sin \sigma + \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^2 \ddot{\gamma}^2 \\ &\quad + 2 \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma} \ddot{\gamma} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4 \cos^3 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma} \ddot{\sigma}^3 \sin \sigma + \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma \\ &\quad + 2 \cos^3 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \ddot{\sigma} + 4 \cos^2 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma + \cos^3 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 \\ &\quad + 4 \cos \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin \sigma + 8 \dot{\gamma}^4 \cos^4 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\sigma}^2 + 4 \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\sigma}^4 \\ &\quad + 2 \cos^5 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^3 \dot{\sigma} \sin \sigma + 2 \cos^4 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4 \cos^3 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma} \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \\ &\quad + \cos^4 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma + 2 \cos^3 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \ddot{\sigma} + 4 \cos^2 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma \\ &\quad + \cos^2 \sigma \sin^2 \gamma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 + 4 \cos \sigma \sin^2 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin \sigma + 8 \dot{\gamma}^4 \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^2 \\ &\quad + 4 \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^4)^{3/2} (\dot{\gamma}^2 \dot{\sigma} \cos \sigma \sin^2 \sigma - \sin \sigma \dot{\gamma} \ddot{\gamma} \cos^3 \sigma - \sin \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 2 \dot{\sigma} \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^2 \\ &\quad + 2 \dot{\sigma}^3 \cos \sigma) (12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^3 \sin^2 \sigma - 4 \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^6 \cos^2 \sigma \\ &\quad - 3 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 + 12 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^3 \dot{\gamma} - 12 \sin \gamma \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^4 \\ &\quad + 24 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \dot{\sigma}^5 \sin \sigma \dot{\gamma} \cos \sigma + 12 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma} \dot{\sigma}^2 \\ &\quad + 12 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^5 \sigma \dot{\gamma}^5 \dot{\sigma} \sin \sigma - 12 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^6 \sin^2 \sigma - 12 \sin \gamma \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^6 \cos^6 \sigma \\ &\quad - 3 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 - 6 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^5 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \dot{\sigma} \sin \sigma \\ &\quad + 12 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^4 \dot{\gamma} + 36 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \\ &\quad - 12 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma - 6 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \ddot{\sigma} \\ &\quad - 12 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos \sigma \dot{\sigma}^4 \dot{\sigma} \sin \sigma - 12 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \\ &\quad - 24 \sin \gamma \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^4 \cos^4 \sigma \dot{\sigma}^2 - 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\sigma}^2 \dot{\sigma} \ddot{\sigma} - 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^4 \ddot{\sigma} \\ &\quad + 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \sin \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} - 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \dot{\sigma} \\ &\quad + 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma \ddot{\sigma} + 6 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^5 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \sin \sigma \\ &\quad - 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma - 36 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin \sigma \\ &\quad - 6 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^3 \sigma + 6 \cos \gamma \sin^3 \gamma \cos \sigma \dot{\sigma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \cos^3 \sigma \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \dot{\gamma} + 4 \sin^5 \gamma \cos \sigma \dot{\sigma}^4 \ddot{\sigma} \sin \sigma \\
& -4 \sin^4 \gamma \cos^5 \sigma \cos \gamma \dot{\gamma}^5 \dot{\sigma} \sin \sigma - 12 \sin^4 \gamma \cos^3 \sigma \cos \gamma \dot{\gamma}^3 \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \\
& -4 \sin^4 \gamma \cos^4 \sigma \cos \gamma \dot{\sigma} \ddot{\gamma}^3 + 4 \sin^5 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma - 4 \sin^4 \gamma \cos^6 \sigma \cos \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\gamma} \\
& -4 \sin^4 \gamma \cos^2 \sigma \cos \gamma \dot{\sigma}^3 \ddot{\gamma} - 8 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^5 \cos^6 \sigma \dot{\sigma} + \sin^5 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma \\
& +4 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^4 + 4 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^6 \cos^6 \sigma \cos^2 \gamma + \sin^5 \gamma \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \\
& +2 \sin^5 \gamma \cos^5 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \dot{\sigma} \sin \sigma + 8 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^4 \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^2 + 2 \sin^5 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} \\
& +4 \sin^5 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma}^3 \sin \sigma + 12 \sin^2 \gamma \cos^3 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\sigma} \ddot{\gamma}^3 - 4 \cos^3 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin^2 \sigma \sin \gamma \dot{\sigma} \\
& -4 \cos^3 \gamma \dot{\sigma}^3 \sin^2 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \cos^2 \sigma + 4 \cos^3 \gamma \cos^4 \sigma \sin \gamma \dot{\sigma}^2 \ddot{\gamma}^2 \\
& -4 \cos^3 \gamma \cos^3 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \sin \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4 \cos^3 \gamma \cos^6 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \dot{\sigma} \\
& -2 \cos^3 \gamma \cos^5 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \sin \sigma + 4 \cos^3 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin^3 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^2 \cos \sigma \\
& +8 \cos^3 \gamma \dot{\sigma}^6 \sin \sigma \sin \gamma \cos \sigma + 4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^4 \cos^5 \sigma \sin \sigma \dot{\gamma} - 4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^5 \cos^4 \sigma \dot{\sigma} \sin^2 \sigma \\
& -16 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^4 \sigma \dot{\sigma}^3 + 4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^2 \cos^3 \sigma \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \dot{\gamma} - 4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^3 \sin^2 \sigma \\
& +4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma} \cos \sigma \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \ddot{\sigma} - 8 \sin^4 \gamma \dot{\sigma}^5 \sin \sigma \cos \gamma \dot{\gamma} \cos \sigma + 2 \sin^5 \gamma \cos^3 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \ddot{\sigma} \\
& + \sin^5 \gamma \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 + 12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \cos^2 \sigma \sin^2 \sigma \\
& -12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \cos^5 \sigma \dot{\sigma} - 12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin \sigma \dot{\sigma}^4 \ddot{\sigma} \cos \sigma \\
& -12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \cos^3 \sigma \dot{\sigma}^3 - 12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma} \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^2 \\
& +3 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \cos^4 \sigma - 6 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin^3 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \cos^3 \sigma \dot{\sigma} \\
& +3 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \cos^2 \sigma \sin^4 \sigma - 6 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \cos \sigma \sin^3 \sigma \ddot{\sigma} \\
& +12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \cos^4 \sigma \sin^2 \sigma - 12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma} \cos \sigma \dot{\sigma}^3 \sin \sigma \ddot{\sigma} \\
& -12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^4 \sin^3 \sigma \dot{\gamma}^2 \cos \sigma - 12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \cos^5 \sigma \sin \sigma \dot{\gamma} \\
& +12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^5 \cos^4 \sigma \dot{\sigma} \sin^2 \sigma + 12 \cos \gamma \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^3 \sin^2 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \\
& -12 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^3 \sigma \sin \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 24 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^5 \cos^6 \sigma \dot{\sigma} \\
& +12 \cos^3 \gamma \cos^3 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \sin \sigma - 2 \cos^3 \gamma \cos \sigma \sin \gamma \dot{\sigma}^2 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma \\
& +4 \cos^3 \gamma \cos^2 \sigma \sin \gamma \dot{\sigma}^4 \ddot{\sigma} + 4 \cos^4 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^3 \sigma \sin \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} - 8 \cos^4 \gamma \dot{\gamma} \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^5 \\
& +2 \cos^3 \gamma \cos^3 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^3 \sigma + 4 \cos^3 \gamma \cos^4 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma}^3 \\
& +4 \cos^3 \gamma \cos^5 \sigma \sin \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin \sigma - 8 \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^4 \cos^4 \sigma \dot{\gamma}^2 - \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \cos^2 \sigma \sin^4 \sigma \\
& +4 \sin^3 \gamma \sin \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \cos^3 \sigma \dot{\sigma} + 4 \sin^3 \gamma \sin \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \cos^3 \sigma \dot{\sigma}^3 - 4 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \cos^4 \sigma \sin^2 \sigma \\
& -4 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^4 \cos^2 \sigma \sin^2 \sigma + 4 \sin^3 \gamma \sin \sigma \dot{\sigma}^4 \ddot{\sigma} \cos \sigma - 2 \sin^3 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \cos^2 \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} \\
& +4 \sin^3 \gamma \sin \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma} \cos^3 \sigma \dot{\gamma}^2 - 4 \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^2 \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^4 - 6 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} \\
& -3 \sin^3 \gamma \cos^2 \gamma \cos^4 \sigma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma + 3 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 \\
& +24 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^4 \cos^4 \sigma \dot{\gamma}^2 + 12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^6 \cos^2 \sigma + 2 \sin^3 \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\sigma}^2 \cos \sigma \sin^3 \sigma \ddot{\sigma} \\
& +24 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma} \cos^2 \sigma \dot{\sigma}^5 + 4 \sin^5 \gamma \dot{\sigma}^6 \sin^2 \sigma - 24 \cos \gamma \sin^3 \gamma \dot{\sigma}^6 \sin \sigma \cos \sigma \\
& +48 \cos^2 \gamma \sin^2 \gamma \dot{\gamma}^3 \cos^4 \sigma \dot{\sigma}^3 - \sin^3 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \cos^4 \sigma + 2 \sin^3 \gamma \sin^3 \sigma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \cos^3 \sigma \dot{\sigma} \\
& - \sin^3 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\sigma}^2 \ddot{\sigma}^2 + 12 \sin \gamma \cos^2 \gamma \dot{\sigma}^2 \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^4 + 6 \sin \gamma \cos^2 \gamma \sin^2 \sigma \dot{\gamma} \dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma \dot{\sigma} \ddot{\sigma} \\
& -4 \sin^4 \gamma \cos^4 \sigma \cos \gamma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma} \dot{\sigma}^2) \\
& -(4 \dot{\gamma}^6 \cos^6 \sigma + 4 \dot{\sigma}^6 \sin^2 \sigma + 2 \cos^5 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^3 \dot{\gamma} \dot{\sigma} \sin \sigma + \cos^6 \sigma \dot{\gamma}^2 \dot{\gamma}^2 \\
& +2 \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma} \ddot{\sigma} + 4 \cos^3 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma} \dot{\gamma} \dot{\sigma}^3 \sin \sigma + \cos^4 \sigma \cos^2 \gamma \dot{\gamma}^4 \dot{\sigma}^2 \sin^2 \sigma
\end{aligned}$$

$\gamma^{(3)}$ devient une fonction algébrique, ce qui nous permet de supprimer tous les facteurs communs entre le numérateur N et le dénominateur D . On transforme ensuite l'expression simplifiée en fonction des arguments originaux par le changement de variables :

$$\begin{aligned} u &= \frac{\sin(\sigma/2)}{\cos(\sigma/2)}, & v &= \frac{\sin(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)}, \\ \dot{u} &= \frac{\dot{\sigma}}{1 + \cos \sigma} & \dot{v} &= \frac{\dot{\gamma}}{1 + \cos \gamma} \\ \ddot{u} &= \frac{\dot{\sigma}^2 \sin(\sigma/2) + \ddot{\sigma} \cos(\sigma/2)}{\cos(\sigma/2)(1 + \cos \sigma)}, & \ddot{v} &= \frac{\dot{\gamma}^2 \sin(\gamma/2) + \ddot{\gamma} \cos(\gamma/2)}{\cos(\gamma/2)(1 + \cos \gamma)} \end{aligned}$$

Par le calcul direct, nous pouvons vérifier que, par exemple, $(\dot{\gamma}^2 \cos^2 \sigma + \dot{\sigma}^2)$ n'est pas un facteur commun entre N et D (le calcul étant trop lourd à la main, il peut être effectué avec un logiciel symbolique, par exemple MAPLE), $\gamma^{(3)}$ n'est donc pas polynomiale en $(\dot{\sigma}, \dot{\gamma})$. On peut en déduire immédiatement que $\ddot{\gamma}$ n'est pas polynomiale en $(\dot{\sigma}, \dot{\gamma})$. En remarquant que les indices d'observabilité du système sont $k_1 = 3$, $k_2 = 2$, le résultat est donc déduit de la proposition 4.3 et du théorème 4.4.

Chapitre 7

Conclusion

Le travail de cette thèse consiste en l'étude des observateurs et leurs applications au problème de trajectographie.

Nous nous intéressons d'abord à la construction d'observateurs instationnaires. Des conditions suffisantes permettant de vérifier la convergence d'observateurs sont proposées moyennant la théorie des formes normales et des corps de Hardy. A l'aide d'une notion asymptotique, pour certains systèmes linéaires instationnaires, on peut se ramener à un observateur simple dit observateur à gain asymptotique. Nous proposons également des idées permettant d'étendre la technique de la forme canonique observateur au cas non linéaire. Toutefois, dans ce dernier cas, la convergence d'observateur ne peut être vérifiée, pour l'instant, que pour des cas particuliers.

Nous appliquons ensuite ces méthodes au problème de trajectographie où l'on peut se ramener à un système linéaire ou non linéaire. Les résultats de notre étude confirment l'importance de la théorie de de l'observateur pour les systèmes de poursuite.

En définitive, nous remarquons qu'en ce qui concerne les systèmes linéaires instationnaires perturbés par des bruits, nous pouvons étendre l'analyse asymptotique et concevoir un filtre à gain asymptotique [60]. Cependant, dans le cas général, la construction de filtre pour le problème de trajectographie est loin d'être complètement résolu.

Annexe A

Rappels sur la théorie de formes normales

A.1 Formes normales des systèmes non linéaires

Considérons un système

$$\dot{x} = f(x) \tag{A.1}$$

sur une variété analytique X de dimension n , f étant un champ de vecteurs analytiques. Supposons que, sans nuire à la généralité, $f(0) = 0$, autrement dit l'origine est le point singulier (appelé autrement point d'équilibre) de (A.1). Notons

$$\dot{z} = \Lambda z$$

la forme de Jordan du linéarisé tangent de (A.1) avec

$$\Lambda = P \frac{\partial f}{\partial x}(0) P^{-1}$$

où P est la matrice de changement de coordonnées associée à la forme de Jordan. On cherche à quelle condition le flot associé au champ f est l'image par difféomorphisme h associé à Λz dans un voisinage convenable de l'origine. Autrement dit, on cherche un difféomorphisme local h défini dans un voisinage de 0 tel que $X_t(x) = h(e^{\Lambda t} z)$ pour tous x, z vérifiant $x = h(z)$. Puisque le système et son linéarisé tangent coïncident en 0, on peut choisir h tel que l'origine est son point fixe $h(0) = 0$ et $T_0 h = \frac{\partial h}{\partial z}(0) = Id_{T_0 X}$ sans restreindre la généralité [54].

Considérons les développements de Taylor de f et h jusqu'à l'ordre r , notés $f^{(r)}$ et $h^{(r)}$

$$f^{(r)}(x) = \Lambda x + \sum_{i=2}^r f^{(i)}(x) \quad h^{(r)}(z) = z + \sum_{i=2}^r h^{(i)}(z)$$

où $f^{(i)}$ et $h^{(i)}$ sont des polynômes homogènes de degré i pour $i = 2, \dots, r$. Alors, $R_f^{(r)}(x) = f(x) - f^{(r)}(x)$ et $R_h^{(r)}(z) = h(z) - h^{(r)}(z)$ sont les restes d'ordre supérieur ou égal à r .

Notons $X_t^{(r)}$ le flot associé au champ $f^{(r)}$ approché d'ordre r .

Définition A.1 On dit que le champ f est formellement équivalent à Λz jusqu'à l'ordre r ou r -équivalent à Λz , si $X_i^{(r)} = h^{(r)}(e^{\Lambda t} z)$ pour tous x, z tels que $x = z$ dans un voisinage de l'origine.

Définition A.2 On dit aussi que le champ f est formellement r -équivalent au champ g , si $X_i^{(r)} = h^{(r)}(Z_t(z))$ pour tous x, z tels que $x = h(x)$, où $Z_t(z)$ est le flot local engendré par g .

Le théorème de Poincaré affirme que dans la classe des séries entières formelles un champ de vecteurs peut se ramener à son linéarisé tangent en un point singulier par un difféomorphisme formel si la condition de non résonance est vérifiée. Énonçons cette condition.

Définition A.3 On dit que la matrice Λ est résonnante s'il existe une suite $\{k_1, \dots, k_n\}$ d'entiers, avec $k_1 + \dots + k_n \geq 2$, telle que l'une au moins des valeurs propres λ_j de Λ vérifie

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i, \quad (\text{A.2})$$

Dans le cas contraire, Λ est dite non résonnante. Si (A.2) a lieu avec $\sum_{i=1}^n k_i \lambda_i = r$ la résonance est dite d'ordre r .

Théorème A.1 (Poincaré) Si Λ n'a pas de résonance d'ordre inférieur ou égal à r le champ f est r -équivalent à son linéarisé tangent Λz . En particulier, si Λ est non résonnante, f est équivalent à Λz .

La démonstration du théorème de Poincaré est basée sur un procédé d'élimination successive des termes d'ordre supérieur à r . Pour les détails, nous nous référons à, par exemple, [3, 10, 54].

Dans le cas où Λ est résonnante, nous pouvons décrire très précisément le type de champ polynômial auquel f est difféomorphe. Il nous faut pour cela introduire la notion de monôme résonnant. Si Λ admet une résonance d'ordre k $\lambda_j = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i$, nous appelons monôme résonnant le champ de vecteurs monôme

$$z^k \frac{\partial}{\partial z_j} \hat{=} z_1^{k_1} \dots z_n^{k_n} \frac{\partial}{\partial z_j}$$

Théorème A.2 (Poincaré-Dulac) Le champ f ayant un point singulier en θ et dont la matrice Λ est résonnante est équivalent au champ polynômial

$$\Lambda z + \sum_{j,k} a_{k,j} z^k \frac{\partial}{\partial z_j} \quad (\text{A.3})$$

où la sommation est effectuée sur toutes les paires (k, j) telles que $\lambda_j = \sum_{i=1}^n k_i \lambda_i$, avec $k = \sum_{i=1}^n k_i \geq 2$, les coefficients $a_{k,j}$ pouvant être complexes.

Définition A.4 Le champ de vecteurs polynômiaux (resp. le système) obtenu par le théorème de Poincaré-Dulac est dit sous forme normale.

Il nous faut évidemment vérifier la convergence de séries formelles qui ramènent le champ f à la forme normale donnée par le théorème de Poincaré-Dulac. Un résultat sur la convergence de séries formelles dépend de la disposition des valeurs propres de Λ dans le plan complexe.

Définition A.5 On dit qu'une collection de valeurs propres λ appartient au domaine de Poincaré, si l'enveloppe convexe des n points $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ du plan complexe ne contient pas l'origine.

Théorème A.3 [3] Si les valeurs propres de Λ d'un champ f ayant un point singulier en θ appartiennent au domaine de Poincaré, alors f est, au voisinage de θ , analytiquement équivalent au champ sous forme normale définie par (A.3).

Autrement dit, les séries formelles convergent si les valeurs propres du linéarisé tangent sont situées dans le domaine de Poincaré même dans le cas résonnant. Dans le cas non résonnant, le champ est équivalent à son linéarisé tangent si la disposition des valeurs propres vérifie la condition précédente.

Par la définition du domaine de Poincaré, il existe dans le plan complexe une droite réelle qui sépare la collection des valeurs propres de l'origine. Alors pour les systèmes réels, le domaine de Poincaré est le demi-plan des variables complexes (droit ou gauche) ne contenant pas l'axe imaginaire. Un contre-exemple du domaine de Poincaré est le cas où le champ possède une sous-variété centrale. Le problème de la convergence des séries formelles admet une réponse générale lorsque les valeurs propres du linéarisé tangent ne sont pas trop proches de la résonance [17]. On dit dans ce cas qu'il n'y a pas de *petits diviseurs*.

Nous remarquons que bien que la convergence des séries formelles ne puisse pas être toujours vérifiée, par une substitution convergente nous pouvons repérer les termes résonnants d'ordre peu élevé et reculer la perturbation à des termes d'un certain ordre fini, c'est-à-dire ramener le champ à la forme

$$\dot{z} = \Lambda z + \sum_{j,k} a_{k,j} z^k \frac{\partial}{\partial z_j} + o(\|z\|^p) \quad (\text{A.4})$$

en un point singulier par un changement de coordonnées non plus formel mais véritable (au besoin polynômial). Ce fait va faciliter l'application du théorème de Poincaré-Dulac aux problèmes pratiques.

A.2 Formes normales des systèmes linéaires instationnaires

Dans cette section, nous allons envisager la famille d'équations linéaires instationnaires suivantes :

$$\dot{x} = F(t)x \quad (\text{A.5})$$

Ce type de systèmes peut être le linéarisé tangent d'un champ général $f(t, x)$ au voisinage d'un point singulier. Le cas où le champ n'est pas équivalent à son linéarisé tangent est compliqué, et ceci outrepassé ce qui nous intéresse.

On remarque que bien que les études du système (A.5) soient effectuées en général sur le domaine complexe $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}$, nous restreignons aux systèmes définis dans le domaine réel $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$. Dans ce cas, il suffit de considérer le système comme une restriction dans le domaine réel d'un système défini dans le domaine complexe.

A.2.1 Points singuliers, équivalences formelles et formes normales

Si $F(t)$ d'un système (A.5) possède un pôle en un point $t_0 \in \mathbb{R}$, t_0 est appelé le point singulier. Nous considérons d'abord le cas où la singularité de $F(t)$ se trouve à l'origine.

Supposons que $F(t)$ admet le comportement asymptotique suivant :

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^\mu F(t) = A_0 \quad (\text{A.6})$$

avec $\mu \in \mathbb{Z}$ et A_0 matrice constante finie. Alors le système (A.5) peut s'écrire comme

$$t^\mu \dot{x} = A(t)x \quad (\text{A.7})$$

où $A(t)$ est analytique dans un voisinage de 0, donc

$$A(t) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j t^j$$

est une série convergente en $t = 0$. Si $\mu = 1$, nous dirons que la singularité est *Fuchsienne*, si non *non-Fuchsienne*.

Nous caractérisons ensuite la régularité d'un point singulier.

Définition A.6 *Le point singulier 0 du système (A.7) est régulier s'il existe un entier κ non-négatif tel que toutes les solutions de ce système dans un voisinage de 0 ne croissent pas plus rapidement que $t^{-\kappa}$. Pour le cas contraire, la singularité est irrégulière.*

La régularité et l'irrégularité d'un point singulier pour l'équation différentielle d'ordre n

$$z^{(n)} + p_1(t)z^{(n-1)} + \dots + p_n(t)z = 0 \quad p_0 = 1 \quad (\text{A.8})$$

sont définies de la même façon. En effet, par la transformation de variables

$$x = (z, \dot{z}, \dots, z^{(n-1)})$$

nous pouvons transformer (A.8) en un système sous forme de (A.5) dont les éléments de la matrice $F(t)$ sont donnés par

$$\left. \begin{array}{l} f_{i,i+1} = 1 \\ f_{i,j} = 0 \quad i \neq j+1 \\ f_{n,j} = -p_{n-j+1}(t) \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 1, 2, \dots, n-1 \\ j = 1, 2, \dots, n \end{array}$$

Théorème A.4 [3] *Le point singulier Fuchsien du système (A.7) ($\mu = 1$) est régulier.*

L'inverse du théorème A.4 est faux. En effet le point singulier d'ordre μ du système (A.7) est régulier si on peut donner à ce système la forme (A.8), et s'il vérifie la condition Fuchsienne ci-dessous

Théorème A.5 [3, 22] *Un point singulier 0 de (A.8) est régulier si et seulement si toutes les fonctions $t^p_j(t)$ sont analytiques dans un voisinage de 0.*

Définition A.7 *Soit V un voisinage de 0. Les deux systèmes suivants*

$$\dot{x} = A(t)x \quad \dot{z} = B(t)z \quad (\text{A.9})$$

sont analytiquement équivalents, s'il existe une application analytique $H : V \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ (appelée l'application conjuguée) telle que la substitution $(t, z) \mapsto (t, H(t)z)$ transforme un système en l'autre.

Si les deux systèmes dans (A.9) sont conjugués par l'application $H(t)$, la relation suivante

$$B(t) = H(t)A(t)H^{-1}(t) + \dot{H}(t)H^{-1}(t) \quad (\text{A.10})$$

existe dans un voisinage de 0.

Définition A.8 *On dit que les deux systèmes dans (A.9) sont formellement équivalents, si $H(t)$ est une série formelle de Taylor par rapport à t à coefficients dans $GL(n, \mathbb{R})$ vérifiant formellement la relation (A.10).*

En remarquant que le système (A.7) peut s'écrire de manière équivalente comme un système de dimension $n + 1$, appelé le système sous forme autonome

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = A(t)x \\ \frac{dt}{d\tau} = t^\mu \end{cases} \quad (\text{A.11})$$

nous sommes alors en mesure d'appliquer le théorème de Poincaré-Dulac au système (A.11) pour obtenir la forme normale associée. Nous distinguons le cas Fuchsien et celui non-Fuchsien.

Définition A.9 *Le spectre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A_0 d'un système avec singularité Fuchsienne ($\mu = 1$) est dit résonnant s'il existe au moins une paire λ_i et λ_j telle que*

$$\lambda_i = \lambda_j + k$$

où k est un entier strictement positif.

Théorème A.6 [3] *Le système (A.7) ayant un point singulier Fuchsien et vérifiant*

$$\lim_{t \rightarrow 0} A(t) = A_0$$

avec $A_0 \neq 0$, est formellement équivalent, et alors analytiquement équivalent au système suivant

$$t\dot{z} = A_0 z \quad (\text{A.12})$$

si le spectre de A_0 n'a pas de résonance.

Le système avec un points singulier Fuchsien peut s'écrire comme

$$\dot{x} = (t^{-1}A_0 + P(t))x$$

où $P(t)$ est donnée par des séries convergentes dans un voisinage de 0. Nous déduisons facilement la solution fondamentale du système sous forme normale (A.12)

$$\Phi(t) = t^{A_0}$$

En définissant $t^{A_0} = \exp(A_0 \log t)$, nous réécrivons

$$\Phi(t) = \exp(A_0 \log t)$$

En appliquant le théorème A.6 au système ayant une perturbation de séries convergentes, nous avons

Corollaire A.7 Soit V un voisinage de 0. Sous les conditions du théorème A.6, la solution fondamentale du système (A.7) ($\mu = 1$) est donnée par

$$\Phi(t) = H(t) \exp(\Lambda \log t)$$

où $H(t) : V \rightarrow GL(n, \mathbb{R})$ est une matrice dont tous les éléments sont des séries convergentes dans un voisinage de 0.

Nous passons maintenant au cas non-Fuchsien.

Définition A.10 Le spectre $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de $A_0 = \lim_{t \rightarrow 0} A(t)$ d'un système (A.7) avec singularité non-Fuchsienne ($\mu > 1$) est résonnant s'il existe au moins une paire telle que $\lambda_i = \lambda_j, i \neq j$

Théorème A.8 [3] Si le système (A.7) avec $A_0 \neq 0$ admet 0 pour un point singulier non-Fuchsien d'ordre μ et que le spectre de la matrice A_0 est non résonnant, alors il est formellement équivalent au système

$$t^\mu \dot{z} = B(t)z \tag{A.13}$$

où $B(t)$ est une matrice diagonale polynômiale en forme de

$$B(t) = B_0 + B_1 t + \dots + B_{\mu-2} t^{\mu-2} + C t^{\mu-1} \tag{A.14}$$

avec $B_0, \dots, B_{\mu-2}, C$ des matrices constantes diagonales et particulièrement $B_0 = \Lambda$ la forme de Jordan de A_0 .

Si dans l'équation originale A_0 est a priori sous forme diagonale, B_i coïncident avec les éléments diagonaux de $A_i, i = 1, \dots, \mu - 2$, c'est-à-dire $B_i = \text{diag}(a_{11}^i, \dots, a_{nn}^i)$ [22]. Ceci indique le procédé pour déterminer la forme normale si elle existe.

Le système sous forme normale (A.13) est sous forme découplée, ceci nous permet d'obtenir la solution fondamentale par intégration directe

$$\Phi(t) = t^{G_e Q(t^{-1})}$$

où G est une matrice constante diagonale, et $Q(t^{-1})$ une matrice diagonale polynômiale:

$$Q(t^{-1}) = -\frac{1}{(\mu-1)t^{\mu-1}} B_0 - \frac{1}{(\mu-2)t^{\mu-2}} B_1 - \dots - \frac{1}{t} B_{\mu-2}$$

Corollaire A.9 [3] *Sous les conditions du théorème A.8, la solution fondamentale formelle du système (A.7) est de la forme de*

$$\Phi(t) = H(t)t^G e^{Q(t^{-1})} \quad (\text{A.15})$$

où $H(t)$ est une matrice dont les éléments sont des séries formelles.

Considérons maintenant les systèmes possédant une singularité polynômiale en $t = \infty$. Supposons que $F(t)$ ne croît pas plus rapide que t^μ à l'infini, ce système peut alors s'écrire en forme

$$\dot{x} = t^\mu A(t)x \quad (\text{A.16})$$

En faisant un changement de l'échelle de temps $\theta = 1/t$, le système (A.5) se réécrit comme

$$\frac{dx}{d\theta} = -\theta^{-\mu-2} A(\theta^{-1})x \quad (\text{A.17})$$

Alors la singularité de ce système est définie par la valeur de μ . Insistons sur le fait que la singularité d'un système est toujours définie à l'origine, donc pour le système (A.16) le cas $\mu = -1$ est le cas Fuchsien, et $\mu > -1$ le cas non-Fuchsien.

En appliquant le théorème A.8 à (A.17), si le spectre de $A_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} A(t)$ est non résonnant, la forme normale de (A.16) est donnée par

$$\dot{z} = B(t)z \quad (\text{A.18})$$

où $B(t)$ est une matrice diagonale sous forme

$$B(t) = t^\mu B_0 + t^{\mu-1} B_1 + \dots + B_m + t^{-1} C \quad (\text{A.19})$$

avec $B_0 = \Lambda$ la forme de Jordan de A_0 . Et la solution fondamentale est donnée par

$$\Phi(t) = H(t)t^G e^{Q(t)} \quad (\text{A.20})$$

où $H(t)$ est une matrice dont les éléments sont des séries formelles, G une matrice diagonale constante, et $Q(t)$ une matrice diagonale polynômiale de la forme suivante.

$$Q(t) = \frac{t^{\mu+1}}{\mu+1} B_0 + \frac{t^\mu}{\mu} B_1 + \dots + t B_\mu$$

A.2.2 Convergences de séries formelles

Comme dans le cas non linéaire, il nous reste à vérifier la convergence de changement de variables pour ramener l'équivalence formelle à celle actuelle. En effet, la convergence de la substitution $H(t)$ dépend du caractère de la singularité.

Théorème A.10 [3] *Si le point singulier de deux systèmes formellement équivalents est régulier, alors l'application conjuguée est donnée par des séries convergentes dans un voisinage du point singulier.*

En vertu du théorème A.4, dans le cas Fuchsien, les éléments de la substitution $H(t)$ sont toujours convergents, le corollaire A.7 donne donc une solution fondamentale actuelle. Par contre, dans le cas non-Fuchsien, nous n'avons trouvé qu'une solution formelle, si la condition Fuchsienne n'est pas vérifiée. Dans ce dernier cas, nous utilisons une notion de convergence plus faible.

Définition A.11 Soit f une fonction analytique dans un voisinage de $t = \infty$. On dit que la série formelle

$$p = \sum_{j=0}^{\infty} p_j t^{-j}$$

est une série asymptotique de f si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^k \left(f - \sum_{j=0}^k p_j t^{-j} \right) = 0 \quad \forall k \geq 0$$

uniformément pour tout t dans un voisinage de l'infini.

Théorème A.11 [22] Si le spectre de A_0 d'un système non-Fuchsien (A.16) ($\mu > -1$) est non résonnant, la solution fondamentale formelle donnée par (A.20) est une série asymptotique de la solution fondamentale actuelle.

Il est équivalent de dire que les séries formelles dans $H(t)$ de (A.20) sont convergentes pour t suffisamment grand, si la non résonance est vérifiée.

A.3 Stabilité de systèmes instationnaires au point singulier

L'étude sur le comportement asymptotique d'un système instationnaire au point singulier est effectuée, comme dans le cas régulier, sur la stabilité de la solution fondamentale.

Lemme A.12 [86] Soit t_0 un point singulier de système (A.5). Les conditions suivantes sont équivalentes

(i) Le point d'équilibre $x = 0$ est asymptotiquement stable lorsque $t \rightarrow \infty$.

(ii) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|\Phi(t)\| = 0$.

Remarque A.1 La stabilité asymptotique annoncée ci-dessus est une propriété globale par rapport à l'état et locale par rapport au temps.

Proposition A.13 Le système (A.5) avec point singulier Fuchsien à 0 est asymptotiquement stable lorsque $t \rightarrow 0$, si le spectre de $A_0 = \lim_{t \rightarrow 0} A(t)$ n'a pas de résonance et toutes les valeurs propres de A_0 sont à partie réelle strictement positive.

Preuve: Soit Λ la forme de Jordan de A_0 , alors $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, parce que le spectre de A_0 n'a pas de résonance. En vertu du théorème de Poincaré-Dulac, ce système est analytiquement équivalent à

$$t\dot{z} = \Lambda z$$

dont la solution fondamentale est donnée par

$$\hat{\Phi}(t) = t^\Lambda = \begin{pmatrix} t^{\lambda_1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & t^{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

qui est stable si et seulement si $\text{Re}\{\lambda_i\} > 0$, pour tout $i = 1, \dots, n$. L'application conjuguée $H(t)$ est analytique dans un voisinage de 0 dans le cas non résonnant, d'où la proposition. ■

Le cas non Fuchsien est plus complexe. En analysant la solution fondamentale des systèmes avec point singulier non Fuchsien (A.15), il est clair que si toutes les valeurs propres de A_0 sont à partie réelle non nulle, c'est le terme $e^{\frac{1}{\nu-1} \Lambda t^{1-\nu}}$ qui maîtrise le comportement asymptotique du système.

Proposition A.14 *Si le système (A.5) admet un point singulier d'ordre μ à 0 et les conditions du théorème A.8 sont vérifiées, alors*

- (i) *si μ est impair et toutes les valeurs propres de A_0 sont à partie réelle strictement positive, le système est stable dans un voisinage de 0.*
- (ii) *si μ est pair et le système est stable à 0^+ le système sera instable à 0 et vice versa.*

Preuve: Si le système est sous forme normale, ce qui est annoncé dans la proposition est vrai. D'autre part, si la non résonance de A_0 est vérifiée, d'après le théorème A.11, la substitution qui met le système sous forme normale est convergente dans un voisinage de 0, donc la stabilité de solution fondamentale est déterminée par la disposition des valeurs propres de A_0 . ■

Remarque A.2 *Tous les résultats peuvent être étendus directement aux cas où la singularité se trouve à $|t_0| < \infty$.*

Le cas où le système admet une singularité à l'infini est plus intéressant. Pour ce cas, nous avons

Corollaire A.15 *Si le système (A.5) admet un point singulier d'ordre μ à l'infini et les conditions du théorème A.8 sont vérifiées, alors ce système est asymptotiquement stable lorsque $t \rightarrow +\infty$ si toutes les valeurs propres de A_0 sont à partie réelle strictement négative.*

Dans des cas particuliers, la condition de stabilité annoncée ci-dessus est aussi nécessaire. Par exemple le système

$$\dot{x} = t^\mu Ax \tag{A.21}$$

avec $\mu \geq 0$, A une matrice constante. Puisque (A.21) est a priori sous forme normale (en négligeant une transformation linéaire inversible du temps indépendant), nous pouvons décrire sa solution fondamentale

$$\Phi(t) = \exp\left(\frac{t^{\mu+1}}{\mu+1}A\right)$$

La condition nécessaire et suffisante pour que (A.21) soit stable lorsque $t \rightarrow +\infty$ est que toutes les valeurs propres de A soient à partie réelle strictement négative. Surtout dans le cas où $\mu = 0$, nous revenons au cas linéaire stationnaire. A ce sens, nous avons obtenu des résultats plus généraux.

Annexe B

Rappels sur les corps de Hardy

Nous rappelons quelques éléments concernant les corps de Hardy, pour le contenu détaillé nous nous référons à [13, 14, 15, 72, 73].

Un corps de Hardy est un ensemble de fonctions à valeur réelle définies dans un voisinage de $t = +\infty$ en \mathbb{R} (ou, de manière équivalente, en demi-ligne positive en \mathbb{R}) qui est fermé par rapport à la différentielle et forme un corps pour l'addition et la multiplication ordinaires. Des exemples de corps de Hardy sont

- Tous les sous-corps de \mathbb{R} .
- Le corps $\mathbb{R}(t)$ des fonctions rationnelles à coefficients réels de la variable t .
- Tous les L -corps de Hardy (L signifie *logarithmico-exponentiel*), un L -corps étant un corps de germes de fonctions obtenues par $\mathbb{R}(t)$ en répétant les adjonctions de fonctions algébriques à valeur réelle, de logarithmes de fonctions positives, et d'exponentiels de fonctions (e.g., le corps $\mathbb{R}(t, \sqrt{\log t}, e^t, \exp \sqrt{(t^2 - 1) \log t})$).

Le premier exemple signifie que notre étude contient le cas de systèmes linéaires stationnaires.

Si K est un corps de Hardy et que f un élément non nul de K , alors K contient un élément $1/f$. ceci implique que $f(t) \neq 0$ si $t \in \mathbb{R}$ est suffisamment grand. Puisque $f' \in K$, f est dérivable pour $t \in \mathbb{R}$ suffisamment grand, par conséquent f est continu et soit toujours positif ou soit toujours négatif pour t suffisamment grand. Donc chaque $f \in K$ est asymptotiquement zéro, ou toujours positif, ou toujours négatif, c'est-à-dire que le signe de f est asymptotiquement invariable. Ce fait est également vrai pour $f' \in K$, donc chaque $f \in K$ est asymptotiquement monotone. En particulier, pour chaque $f \in K$, $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$ existe comme un élément de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Ce sont les propriétés les plus fondamentales des corps de Hardy. Nous remarquons que la caractérisation du corps de Hardy exclut les comportements oscillatoires à $+\infty$, par exemple ce qui est présenté par $\sin(t)$.

Si $f, g \in K$ croissent infiniment lorsque $t \rightarrow \infty$, alors à partir d'un t suffisamment grand nous avons $f \geq g$ ou $g \geq f$. On dit que f et g sont comparables si et seulement s'il existe des entiers $N, M > 0$ et des constantes réelles $\alpha, \beta > 0$ tels que, pour t suffisamment grand,

$$f(t) \leq \alpha g^N(t), \quad g(t) \leq \beta f^M(t).$$

Si $f(t)$ ou $g(t) \rightarrow -\infty$, remplaçons-les par $-f$ ou $-g$. Si $f(t)$ ou $g(t) \rightarrow 0$, remplaçons-les par $\pm 1/f$ ou $\pm 1/g$. On dit que la classe de comparabilité de f est plus grande que celle de g , si, f, g croissant infiniment, $f > g^N$ quel que soit N . Le terme de "comparabilité" ne s'applique qu'aux éléments non nuls de K dont les limites sont 0 ou $\pm\infty$ lorsque $t \rightarrow \infty$. C'est facile de vérifier que la comparabilité est une relation d'équivalence.

Le rang d'un corps de Hardy K est défini par le nombre de la classe de comparabilité de K . Par exemple, le corps de Hardy $\mathbb{R}\{t, \log t, e^t\}$ est de rang 3, avec $t, \log t$ et e^t représentant ses classes de comparabilité. Un corps de Hardy K est de rang 0, si et seulement si $K \subset \mathbb{R}$.

Bibliographie

- [1] V. Aidala and R. Hammel, "Utilization of polar coordinates for bearing-only tracking", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-28, pp. 283-293, 1983.
- [2] D.V. Anosov and V.I. Arnold (Eds.), *Dynamical Systems, I*. Encyclopaedia of Mathematical Sciences, Vol.1. New York: Springer-Verlag, 1980.
- [3] V.I. Arnold, *Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1983.
- [4] Y. Bar-Shalom and T.E.R. Hammel Fortmann, *Tracking and Data Association*. New York: Academic Press, 1988.
- [5] G. Bastin, "State estimation and adaptive control of multilinear compartmental systems: theoretical framework and application to (bio)chemical processes", *New Trends in Nonlinear Control Theory*. Lecture Notes in Control and information Sciences, vol. 122, J. Descusse, M. Fliess, A. Isidori, and D. Leborgne ed., pp. 341-352, 1988.
- [6] G. Bastin and D. Dochain, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, Science Publishers B.V, 1990.
- [7] G. Bastin, J. Lévine and L. Praly, "Exact state observers for uncertain nonlinear systems: preliminary results and examples" *Proc. of NOLCOS'92*, Bordeaux, June 1992, pp. 248-250.
- [8] W.T. Baumann and W.J. Rugh, "Feedback control of nonlinear systems by extended linearization" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-31, pp. 40-46, 1986.
- [9] D. Bestle and M. Zeitz, "Canonical form observer design for non-linear time-variable systems", *Int. J. Control*, Vol.38, p. 419-431, 1983.
- [10] Yu. N. Bibikov, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*, Lecture Notes in Mathematics, No. 702, Springer-Verlag, New York, 1979.
- [11] J. Birk and M. Zeitz, "Extended Luenberger observer for non-linear multivariable systems" *Int. J. Control*, Vol. 47, p. 1823-1836, 1988.
- [12] G. Bornard and H. Hammouri, "A high gain observer for a class of uniformly observable systems" *Proc. of the 30th CDC*, Brighton, England, December 1991, pp. 1494-1496.

- [13] M. Boshernitzan, "An extension of Hardy's class of 'orders of infinity' ", *J. Analyse Math.*, 39, pp. 235-251, 1981.
- [14] M. Boshernitzan, "New 'orders of infinity' " *J. Analyse Math.*, 41, pp. 130-167 1982.
- [15] M. Bourbaki, *Fonctions d'une Variable Réelle*. Hermann, Paris, 1976.
- [16] R.W. Brockett, *Finite Dimensional Linear Systems*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1970.
- [17] A. Bruno, *Local Methods in Nonlinear Differential Equations*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1989.
- [18] R.S. Bucy and P.D. Joseph. *Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance*(2nd ed.). Chelsea Publishing Company, New York, 1987
- [19] C.I. Byrnes and S.V. Pandian, " Exponential observer design", *Proc.of NOLCOS'92*, Bordeaux, June 1992, pp. 606-609.
- [20] J. Carr, *Applications of Centre Manifold Theory*. Springer-Verlag, New York, 1981.
- [21] C.B. Chang and J.A. Tabaczynski. "Application of state estimation to target tracking" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-29, pp. 98-109, 1984.
- [22] E.A. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1955.
- [23] D. Claude, M. Fliess and A. Isidori, "Immersion, directe et par bouclage, d'un système non linéaire" *C.R. Acad. Sci. Paris, Série I*, 296, pp. 237-240, 1983.
- [24] F. Deza, E. Busvelle, J.P. Gauthier, and D. Rakotopara, " High gain estimation for nonlinear systems" *Systems and Control Letters*, 18, pp. 295-299, 1992.
- [25] X. Ding, P.M. Frank and L. Guo, "Nonlinear observer design via an extended observer canonical form" *Systems and Control Letters*, 15, pp. 313-322, 1990.
- [26] S. Diop and M. Fliess, "On nonlinear observability" *Proc. ECC 91*, Grenoble, pp. 152-157 1991.
- [27] P. Faurre, M. Clerget et F. Germain, *Opérateurs Rationnels Positifs Application à l'hyperstabilité et aux processus aléatoires*. Bordas, Paris, 1979.
- [28] M. Fliess, "Quelques remarques sur les observateurs non linéaires", *Proc. Coll. GRETSI*, Nice, pp. 169-172, 1987
- [29] M. Fliess, "Some remarks on gain scheduling" *Proc. ECC 91*, Grenoble, pp. 177-181, 1991.
- [30] M. Fliess, "A Hardy field approach to feedback stabilization of time-varying linear systems with an application to gain scheduling" to appear.

- [31] M. Fliess and I. Kupka, "A finiteness criterion for nonlinear input-output differential systems" *SIAM J. Control and Optimiz.*, 21, pp. 721-728, 1983.
- [32] B. Friedland, *Control System Design An introduction to state-space methods*. McGraw-Hill Book Company, New York, 1986.
- [33] J.P. Gauthier and G. Bornard, "Observability for any $u(t)$ of a classe of nonlinear systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 922-926, 1981.
- [34] J.P. Gauthier, H. Hammouri and I. Kupka, "Observers for nonlinear systems", *Proceeding of 30th CDC*, Brighton, England, December 1991, pp. 1483-1489.
- [35] J.P. Gauthier, H. Hammouri and S. Othman, "A simple observer for nonlinear systems application to bioreactors" *IEEE Trans. on Automatic Control* (to appear).
- [36] O.M. Grasselli and A. Isidori, "Deterministic reconstruction and reachability of bi linear control processes" *Proc. J.A.C.C.*, San Francisco, June 22-25, 1977, pp 1423-1427
- [37] O.M. Grasselli and A. Isidori, "An existence theorem for observers of bilinear systems" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-26, pp. 1299-1300, 1981.
- [38] W. Grossman, "An algebraic approach to the bearings-only estimation equations" *AIAA J. of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 14, pp. 1086-1088, 1991.
- [39] W. Grossman, "Bearings-only tracking: a hybrid coordinate system approach" *Proc. of the 30th CDC*, Brighton, pp. 2032-2037, 1991
- [40] W. Hahn. *Stability of Motion*, Springer-Verlag, New York, 1967
- [41] H. Hammouri and J.P. Gauthier, "Bilinearization up to output injection", *Systems and Control Letters*, 11, pp. 139-149, 1988.
- [42] H. Hammouri and J. De Léon Morales, "Observer synthesis for state-affine systems" *Proceeding of 29th CDC*, Honolulu, Hawaii, December 1990, pp. 784-785.
- [43] S. Hara and K. Furuta, "Minimal order state observers for bilinear systems", *Int. J. Control*, Vol.24, p. 705-718, 1976.
- [44] R. Hermann and Krener, "Non-linear controllability and observability" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-22, pp. 728-740, 1977
- [45] A. Isidori, *Nonlinear Control Systems* (2nd ed.). New York: Springer-Verlag, 1989.
- [46] A.H. Jazwinski, *Stochastic Processes and Filtering Theory*. Academic Press, New York, 1970.
- [47] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1980.
- [48] R.E. Kalman and R.S. Bucy, "New results in linear filtering and prediction theory", *Trans. ASME, Ser. D: J. Basic Eng.* 83, pp. 95-108, 1960.

- [49] H. Keller, "Non-linear observer design by transformation into a generalized observer canonical form" *Int. J. Control*. Vol.46, p. 1915-1930, 1987
- [50] S.R. Kou, D.L. Elliott and T.J. Tarn, "Exponential observers for non-linear dynamic systems" *Inform. and Control*. 29, pp 203-216, 1975.
- [51] A.J. Krener and A. Isidori, "Linearization by output injection and nonlinear observers" *Systems and Control Letters*, 3, pp. 47-52, 1983.
- [52] A.J. Krener and W. Respondek, "Non-linear observers with linearizable error dynamics" *SIAM J. Control Optim.* 23, pp. 197-216, 1985.
- [53] J. Lévine, "Finite dimensional filters for a class of nonlinear systems and immersion in a linear system", *SIAM J. Control and Optimiz.*, Vol. 25, 6, pp. 1430-1439., 1987
- [54] J. Lévine, *Introduction aux Aspects Qualitatifs de la Commande Non Linéaire*. École des Mines de Paris, Fontainebleau, 1992.
- [55] J. Lévine and R. Marino, "Nonlinear system immersion, observers and finite-dimensional filters", *Systems and Control Letters*. 7, pp. 133-142, 1986.
- [56] J. Lévine and R. Marino, "On fault-tolerant observers" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, pp. 623-627, 1990.
- [57] J. Lévine and R. Marino, "Constant-speed target tracking via bearing-only measurements", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-28, pp. 174-182, 1992.
- [58] J. Lévine et M. Vogel, *Application du Filtrage et des Observateurs Non Linéaires à un Problème de Trajectographie Passive*. Rapport interne CAS-ENSMP, 1989.
- [59] J. Lévine and G. Zhu, "Observers with asymptotic gain for a class of linear time-varying systems with singularity" Submitted to *12th IFAC World Congress*, Sydney, 1993.
- [60] J. Lévine and G. Zhu, "Observers and filters with asymptotic gain for a class of linear time-varying systems" Submitted to *ECC'93*.
- [61] D.G. Luenberger, "Observing the state of a linear system" *IEEE Trans. on Military Electronics*, Vol. MIL-8, pp. 74-80, 1964.
- [62] D.G. Luenberger, "Observers for multivariable systems" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 190-197 1966.
- [63] D.G. Luenberger, "An introduction to observers," *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-16, pp. 596-602, 1971.
- [64] R. Marino, "Adaptive observers for single output nonlinear systems" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-33, pp. 1054-1058. 1990.

- [65] R. Marino and P. Tomei, "Dynamic output feedback linearization and global stabilization" *Systems and Control Letters*, 17, pp. 115-121, 1991.
- [66] S. Nardone and V. Aidala, "Observability criteria for bearing-only target motion analysis", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. AES-17, pp. 162-166, 1981.
- [67] S. Nicosia, P. Tomei and A. Tornambè, "An approximate observer for a class of nonlinear systems" *Systems and Control Letters*, 12, pp. 43-51, 1989.
- [68] H. Nijmeijer and A.J. van der Schaft, *Nonlinear Dynamical Control Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [69] E. Pardoux, *Filtrage non linéaire et équations aux dérivées partielles associées*. Ecole d'été de Probabilités de Saint-Flour, 1989.
- [70] A.N. Payne, "Observability problem for bearing-only tracking" *Int. J. Control*, Vol.49, p. 761-768, 1989.
- [71] A.R. Phelps, "On constructing nonlinear observers" *SIAM J. Control Optim.* Vol. 29, pp. 516-534, 1991
- [72] M. Rosenlicht, "Hardy fields" *J. Math. Analysis Appl.*, 92, pp. 297-311, 1983.
- [73] M. Rosenlicht, "The rank of a Hardy field" *Trans. Amer. Math. Soc.* 280, pp. 659-671, 1983.
- [74] A.J. van der Schaft, "On nonlinear observers" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-30, pp. 1254-1256, 1985.
- [75] L.M. Silverman, "Transformation of time-variable systems to canonical (phase-variable) form" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-11, pp. 300-303, April 1966.
- [76] L.M. Silverman and H.E. Meadows, "Controllability and observability in time-variable linear systems," *SIAM J. Control*, vol. 5, pp. 64-73, 1967
- [77] J.-J. E. Slotine, J.K. Hedrick and E.A. Misawa, "Nonlinear state estimation using sliding observers" *Proceeding of 25th CDC*, Athens, Greece, December 1986, pp. 332-339.
- [78] E.D. Sontag, "On the observability of polynomial systems" *SIAM J. Control and Optimization*, Vol. 17, pp. 139-151, 1979.
- [79] E.D. Sontag, *Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems*. Springer-Verlag, New York, 1990.
- [80] H. Sussman, "Existence and uniqueness of minimal realizations of nonlinear systems" *Math. Systems Theory* 10, pp. 171-188, 1977

- [81] H. Sussman, "Single-input observability of continuous-time systems" *Math. Systems Theory*, 12, pp. 371-393, 1979.
- [82] F.E. Thau, "Observing the state of non-linear dynamic systems" *Int. J. Control*, Vol. 17, p. 471-479, 1973.
- [83] A. Tornambè, "Use of asymptotic observer having high-gains in the state and parameter estimation" *Proc. the 28th CDC*, Tampa, Florida, pp. 1791-1794, 1989.
- [84] J. Tsiniias, "Observer design for nonlinear systems", *Systems and Control Letters*, 13, pp. 135-142, 1989.
- [85] J. Tsiniias, "Further results on observer design problem", *Systems and Control Letters*, 14, pp. 411-418, 1990.
- [86] M. Vidyasagar, *Nonlinear Systems Analysis*. Prentice-Hall, Inc. Englewood Cliffs, N.J., 1978.
- [87] M. Vidyasagar, "On the stabilization of nonlinear systems using state detection" *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. AC-25, pp. 504-509, June 1980.
- [88] B.L. Walcott, M.J. Corless and S.H. Żak, "Comparative study of non-linear state-observer techniques" *Int. J. Control*, Vol.45, p. 2109-2132, 1987
- [89] B.L. Walcott, and S.H. Żak, "State observation of nonlinear uncertain dynamical systems" *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-32, pp. 166-169, February 1987
- [90] N. Wiener, *The Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series*. John Wiley & Sons, New York, 1949.
- [91] D. Williamson, "Observation of bilinear systems with application to biological control" *Automatica*, Vol.13, p. 243-254. 1977
- [92] X.H. Xia and W.B. Gao, "On exponential observers for nonlinear systems" *Systems and Control Letters*, 11, pp. 319-325, 1988.
- [93] X.H. Xia and W.B. Gao, "Nonlinear observer design by canonical form", *Int. J. Control*, Vol.47, p. 1081-1100, 1988.
- [94] X.H. Xia and W.B. Gao, "Nonlinear observer design by observer error linearization" *SIAM J. Control Optim.*, vol. 27, pp. 199-216, 1989.
- [95] M. Zeitz, "The extended Luenberger observer for nonlinear systems" *Systems and Control Letters*, 9, pp. 149-156, 1987