# Stabilisation de trajectoires, ajout d'intégration, commandes saturées

Frédéric Mazenc

# THÈSE

présentée à

**L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE DES MINES DE PARIS**

par

**Frédéric MAZENC**

pour obtenir le titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS**

Spécialité :

**MATHÉMATIQUES ET AUTOMATIQUE**

Sujet de la thèse :

## STABILISATION DE TRAJECTOIRES, AJOUT D'INTÉGRATION, COMMANDES SATURÉES

soutenue le 22 avril 1996 devant le jury composé de :

| | | |
|---|---|---|
| MM. | **Jacques DESCUSSE** | Président |
| | **Georges BASTIN, Rodolphe SEPULCHRE** | Rapporteurs |
| | **Jean-Paul GAUTHIER** | Rapporteur |
| | **Philippe MARTIN** | Examinateur |
| | **Ramine NIKOUKHAH** | Examinateur |
| | **Laurent PRALY** | Examinateur |

# REMERCIEMENTS

Quoique ne connaissant pas Jacques Descusse personnellement, je tiens à lui exprimer ma reconnaissance toute particulière tant pour avoir accepté de présider le jury de ma thèse que pour le plaisir et l'honneur qu'il m'a fait en se penchant sur mon travail.

Je tiens également à remercier vivement Ramine Nikoukhah ainsi que les trois rapporteurs Rodolphe Sépulchre, Georges Bastin et Jean-Paul Gauthier pour leurs exigences tant stylistiques que scientifiques. Sans exigence, il n'est point de progrès possible, s'il est vrai que l'esprit scientifique se forme en se réformant[1] et que toute chose naît de la lutte[2]. Leurs remarques justes m'ont aidé à porter un regard nouveau sur l'ensemble de mon travail et à bonifier celui-ci autant que me l'a permis la durée qui m'était impartie.

Je remercie Phillipe Martin pour les conseils que je lui dois, pour la bonne volonté qu'il mit à me rendre service, pour le plaisir qu'il prend à échanger des idées dans les domaines multiples de son éclectique culture.

"La souveraine habileté consiste à bien connaître le prix des choses". Si l'admirable maxime de Larochefoucault surprend par l'étendue si vaste de sa portée qu'on ne peut toute entière l'embraser du regard, elle n'en est pas moins porteuse d'utiles fruits tant multiples et proches de nous sont les domaines de la réalité en lesquels il nous est donné d'en percevoir la véracité. Parmi ceux-ci figurent ceux de la science et de la recherche.

Je remercie Laurent Praly, non de m'avoir dit cela, ce qui serait peu, mais d'avoir fait bien plus en me le montrant. Au cours des heures nombreuses que nous passâmes, animés parfois jusqu'à l'agitation, à labourer de calculs des tableaux, je vis que la faculté qui au sein des travaux scientifiques décide de tout est celle que le chercheur d'or a de voir une pépite informe dés qu'elle se présente au milieu d'un ruisseau de cailloux. Mais j'appris également que la vertu sélective ne doit pas, certes, borner à cela son rôle mais encore s'employer toute entière au cour de la mise en forme de la matière brute. Car en effet, l'art de bien rédiger un travail consiste à présenter les divers résultats qui le constituent en donnant à ceux-ci un poids proportionné à leur importance afin que le lecteur, loin de s'égarer au sein d'un labyrinthe de mots et d'équations d'apparence semblable, se dirige aisément vers ce qui pour lui a le plus de prix.

Lorsque je songe aux entretiens qu'avec Jean-Michel Coron j'ai eu durant mes années de thèse, une autre maxime du célèbre duc me revient en mémoire : " La confiance fournit plus à la conversation que l'esprit ". Tout ceux qui le connaissent savent fort bien pourquoi. Car ses hautes capacités scientifiques, que personne ne lui conteste, jointes à sa bienveillance qui le fait apprécier de tous, ont ont pour effet presque magique de faire penser en sa présence avec une facilité inaccoutumée ceux-là même qui d'ordinaire ne réfléchissent qu'avec difficulté. Si son esprit était un métal, il serait conducteur et cette propriété, qui seule fait de quelqu'un un véritable éducateur, n'existe que chez ceux qui savent mettre en confiance leurs interlocuteurs. Pareil don devrait être enviés et surtout recherchée par ceux qui, tout en désirant s'enrichir du commerce d'autrui, ont l'esprit belliqueux et le goût de la polémique : car il y a plus à prendre d'un esprit en lui permettant d'exprimer le meilleur de lui même qu'en l'embarrassant par des

[1] Bachelard.
[2] Héraclite.

vérités disparates, assénées sans explication, dans l'espoir qu'ainsi rendues incompréhensibles on se figurera qu'elles sont d'une hauteur presque inaccessibles.

Brigitte d'Andréa-Novel est quelqu'un vers qui va toute ma sympathie. Et ce n'est là qu'un juste retour des choses parceque j'ai bénéficié de la sienne sans qu'il y eu d'autres raisons à cela que son inclinaison naturelle à être l'amie de qui n'est pas son ennemi.

Je la remercie vivement pour le plaisir qu'offre sa présence, pour la justesse de ses vues, pour l'aide qu'on sait pouvoir obtenir d'elle lorsque celle-ci fait besoin. Je souhaite en outre qu'il n'y ai jamais d'Octave sur le chemin du petit Marc-Antoine.

Je remercie Pierre Carpentier pour son humour salubre qui a des vertus dont il use au mieux. Je les ai aperçues lorsqu'il employa ses qualités de diplomates là ou les miennes ne pouvaient rien.

Jean Lévine, comme tel est souvent le cas de ceux qui croient en ce qu'ils disent, ne laisse pas indifférent. S'il se plait à vouloir réveiller les dormeurs par l'originalité de ses vues, c'est pour que de la confrontation de pensées adverses jaillissent des clartés nouvelles. Deux silex cognés l'un contre l'autre ne font ils pas des étincelles susceptibles d'allumer un grand feu ? Je le remercie de m'avoir appris que parfois tel peut être le cas ainsi que de m'avoir dévoilés des aspects peu connus du monde de la recherche aux cours de discussions qui toujours eurent le mérite de me laisser beaucoup à penser.

La distance géographique qui me sépare d'Andrew Teel ne doit pas me faire oublier le bénéfice que j'ai retiré des fréquents et fructueux échanges que j'ai eu avec lui. L'acuité de son regard porté sur mes recherches fit de ses commentaires et de ses suggestions autant de précieuses aides au cours de l'élaboration et du développement des idées essentielles de la thèse que je présente. Quand à Hector Sussmann, qui hante lui aussi de lointaines contrées et dont la renommée depuis longtemps ignore les frontières, il me fit l'instructif plaisir de converser avec Laurent Praly et moi de questions que nous lui soumirent, dans le français excellent qui est le sien. Je vis alors un grand virtuose de la pensée déployer les richesses de son savoir avec le bonheur et la déconcertante aisance que seuls connaissent les hommes passionnés.

Je ne saurais penser à Liliane Bell sans éprouver la reconnaissance qu'inspirent les facultés d'écoute et de compréhension exprimées au moment même où nous souhaitons le plus rencontrer celles-ci. Elles font naître une amitié soudaine et néanmoins durable plus que tout autre.

Je remercie Pierre Rouchon, Guy Cohen, Jean-Baptiste Pomet, Yves Lenoir, François Chaplais, Annick Legallic, Christine Sneed, Zhong-Ping Jiang, Naima El Farouk, Jean Christophe Culioli et mon vieil ami Yann Gontard d'avoir pris de leur temps pour m'aider de diverses façons.

# RÉSUMÉ

Dans une première partie, nous nous intéressons à la stabilisation asymptotique globale de point d'équilibre de systèmes non-linéaires. Nous étudions des systèmes qui généralisent la forme suivante: $\dot{x} = h(y, u), \dot{y} = f(y, u)$, i.e. où la composante $x$ de l'état intègre des fonctions des autres composantes $y$ et des entrées $u$. Nous énonçons des conditions suffisantes sous lesquelles la stabilisabilité asymptotique globale du sous système en $y$ (resp. par une commande saturée) implique la stabilisabilité asymptotique globale du système entier (resp. par une commande saturée). Ceci est établi par une technique d'assignation de fonction de Lyapunov donnant explicitement la loi de commande. Ce résultat est obtenu avec des fonctions $f$ et $h$ dépendant également de $x$, mais d'une façon particulière. Nous montrons comment il peut être employé comme outil de base pour traiter de façon récursive des systèmes plus complexes. En particulier, le problème de stabilisation des systèmes dits de forme feedforward est résolu de cette façon. Nous illustrons la méthode proposée en l'appliquant à divers exemples pratiques.

Dans une deuxième partie, nous adaptons les techniques mises en oeuvre dans la première au problème de stabilisation asymptotique globale d'une trajectoire de référence pour un système de forme feedforward, de structure un peu moins générale. Une attention particulière est donnée à l'aspect uniforme de la stabilité. Cette fois encore un exemple pratique nous permet d'illustrer nos résultats.

## Mots-clefs :

Système non-linéaire, Bornitude, Stabilité.

# ABSTRACT

The general topic of the first part of our work is the global asymptotic stabilization of non linear systems. We study systems which generalize the form $\dot{x} = h(y, u)$, $\dot{y} = f(y, u)$ , i.e. where the state components $x$ integrate functions of the others components $y$ and the inputs $u$. We give sufficient conditions under which global asymptotic stabilizability of the $y$-subsystem (resp. by saturated control) implies global asymptotic stabilizability of the overall system (resp. by saturated control). This is established by an explicit Lyapunov design of the control law. This result is established with the functions $f$ and $h$ depending in some way also on $x$. We show how it serves as a basic tool to be used, may be recurrently, to deal with more complex systems. In particular the stabilization problem of the so called feedforward systems is solved this way. We illustrate how this method works by applying it to various practical systems.

In the second part of our work, we adapt the techniques displaid in the firts part to the problem of global asymptotic stabilization of a reference trajectory for feedforward systems of a slightly less general form. A particular attention is devoted to the issue of uniform stability. This time again, a pratical example allows us to illustrate our results.

## Keywords :

Nonlinear system, Boundedness, Stability.

# Table des Matières

# Introduction

## 1 Le contexte.

La technique d'ajout d'intégrateur introduite par Byrnes et Isidori [5], Kolesnikov [33] et Tsinias [80], est devenue l'un des outils de base employés actuellement pour construire des lois de commandes stabilisantes. Elle a été généralisée de diverses manières — systèmes incertains, contexte adaptatif, feedback d'état partiel — (voir [36]). Sa vocation essentielle est de répondre à la question de savoir quand est ce que la stabilisabilité asymptotique du système :

$$\dot{y} \;=\; f(y,u) \tag{1}$$

implique la stabilisabilité asymptotique du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{y} & = & f(y,x)\ , \\ \dot{x} & = & h(x,y,u)\ . \end{array}\right. \tag{2}$$

De la réponse à celle-ci, peut se déduire la preuve de la stabilisabilité asymptotique globale de systèmes s'exprimant sous la forme dite feedback et notamment de ceux ayant la structure récurrente particulière suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & f_1(x_1,x_2)\ , \\ \dot{x}_2 & = & x_3 + f_2(x_1,x_2)\ , \\ & \vdots & \\ \dot{x}_n & = & u + f_n(x_1,\ldots\ldots,x_n)\ , \end{array}\right. \tag{3}$$

et tels que le système $\dot{x} = f_1(x,u)$ soit globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback suffisamment régulier.

Dans ce travail, des systèmes de structure différentes sont considérés. Voici, simplifié, le problème que nous nous posons. Quand le stabilité asymptotique globale du système :

$$\dot{y} \;=\; f(y,u) \tag{4}$$

implique-t-elle la stabilisabilité asymptotique globale de :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x} & = & h(y,u)\ , \\ \dot{y} & = & f(y,u)\ ? \end{array}\right. \tag{5}$$

En d'autres termes, au lieu d'utiliser une partie de l'état comme commande ainsi que cela est fait pour (2), et donc commander à travers un différentiateur, nous cherchons cette fois à déterminer une loi de commande qui fasse d'un système globalement asymptotiquement stable augmenté d'une dynamique qui intègre une fonction des composantes de l'état initial et de l'entrée un système globalement asymptotiquement stable. Nous établirons que le système (5) est globalement asymptotiquement stabilisable si tel est déjà le cas pour le sous-système $\dot{y} = f(y, u)$ et pour la linéarisation à l'origine de (5).

La connaissance d'une solution au problème de stabilisation pour le système (5), problème dit d'"ajout d'une intégration", permet d'aborder des systèmes possédant une structure récurrente, dite feedforward. Ce qui caractérise ceux-ci est que chacune des composantes de leur état intervient sur celles qui les suivent dans la chaîne d'intégration partant de la commande. Voici comment ceux-ci s'expriment.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_n & = & f_n(x_1, \ldots, x_{n-1}, u) \ , \\ & \vdots & \\ \dot{x}_2 & = & f_2(x_1, u) \ , \\ \dot{x}_1 & = & f_1(x_1, u) \ . \end{array} \right. \tag{6}$$

Remarquons que, contrairement aux systèmes de la forme (3), ceux de la forme (6) sont génériquement non linéarisables. En particulier, tel est le cas lorsque, la propriété de commandabilité de la linéarisation du système à l'origine étant supposée, la fonction $\frac{\partial^2 f_2}{\partial u^2}\frac{\partial f_1}{\partial u} - \frac{\partial f_2}{\partial u}\frac{\partial^2 f_1}{\partial u^2}$ n'est pas identiquement égale à zéro sur un voisinage ouvert de l'origine (voir [27, Theorem 2.6]).

Notons qu'il n'existe pour l'instant pas de conditions nécessaires et suffisantes connues garantissant qu'un système non linéaire puisse s'exprimer sous forme feedforward après changement de variables et bouclage dynamique. Toutefois, certaines conditions suffisantes de nature géométriques ont été exposées par Teel dans [75, Example 4.5].

Précisons encore que les systèmes dont la dynamique peut se mettre sous forme feedforward ne sont pas des singularités de la nature. Considérons par exemple le célèbre système pendule-chariot décrit dans tous les ouvrages de base en Automatique. Sa dynamique est décrite par :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} (M+m)\ddot{x} + ml\cos(\theta)\ddot{\theta} & = & ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) + F \ , \\ \ddot{x}\cos(\theta) + l\ddot{\theta} & = & g\sin(\theta) \ , \end{array} \right. \tag{7}$$

où :

- $(M, x)$ sont la masse et la position du chariot qui se déplace horizontalement,
- $(m, l, \theta)$ sont la masse, la longueur et la déviation angulaire par rapport à la position la plus haute atteinte par le pendule qui pivote autour d'un point fixe sur le chariot,
- et enfin $F$ est la force horizontale agissant sur le chariot.

Au moyen du changement de commande, de coordonnées et de temps suivants :

$$u_0 = \frac{l}{g}\,\frac{F + ml\dot{\theta}^2\sin(\theta) - mg\sin(\theta)\cos(\theta)}{M + m\sin(\theta)^2} \tag{8}$$

$$x_0 = \frac{x}{l} \ , \quad s_0 = \frac{\dot{x}}{\sqrt{gl}} \ , \quad \theta_0 = \theta \ , \quad \omega_0 = \dot{\theta}\sqrt{\frac{l}{g}} \ , \tag{9}$$

$$\tau = t\sqrt{\frac{g}{l}} \ , \tag{10}$$

et en notant $\mathring{}$ la dérivation par rapport au nouveau temps $\tau$, nous obtenons une dynamique équivalente, mais normalisée, s'exprimant ainsi :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \mathring{x}_0 & = & s_0 \\ \mathring{s}_0 & = & u_0 \\ \mathring{\theta}_0 & = & \omega_0 \\ \mathring{\omega}_0 & = & \sin(\theta_0) \;-\; u_0 \cos(\theta_0) \end{array}\right. \tag{11}$$

Ce système est sous la forme feedforward (6) avec :

$$x_1 \;=\; (\theta_0, \omega_0) \quad , \qquad x_2 \;=\; s_0 \quad , \qquad x_3 \;=\; x_0 \; . \tag{12}$$

Il nous servira dans diverses occasions à illustrer de quelle façon nos résultats s'appliquent.

# 2 Remarque concernant la stabilisation asymptotique globale.

## 2.1 Son intérêt.

Les phénomènes physiques qui concernent la théorie de la commande sont typiquement de nature locale : aussi peut-il sembler curieux de chercher à obtenir un résultat de stabilité asymptotique globale. Une des raisons qui motivent la poursuite de cet objectif vient de l'intérêt qu'il peut y avoir à pouvoir garantir que le bassin d'attraction d'un point d'équilibre asymptotiquement stable d'un système contienne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ difféomorphe à $\mathbb{R}^n$. En effet, en effectuant le changement de variable qui transforme l'ouvert en question en $\mathbb{R}^n$, on se trouve amené à traiter un problème de stabilisation sur un ensemble non borné. Lors de l'étude du système pendule-chariot mené au paragraphe 2.5.4, nous nous trouverons confrontés à ce cas de figure : nous souhaitons que le bassin d'attraction du point d'équilibre soit $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}^3$. L'ensemble $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ est un ouvert borné. Nous transformons celui-ci en $\mathbb{R}$ au moyen du changement de variables $t = \tan(\theta)$ et résolvons notre problème avec cette nouvelle variable. L'espace des phases est alors $\mathbb{R}^4$.

## 2.2 Diverses approches.

Le fait qu'un système soit globalement asymptotiquement stable n'implique pas qu'il ait une propriété de robustesse. Lorsqu'un tel système est soumis à des perturbations, il se peut même qu'il admette alors des solutions non bornées. Il est donc légitime de se demander pour un système :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(\chi) \;+\; \delta \tag{13}$$

globalement asymptotiquement stable lorsque $\delta \equiv 0$, s'il existe une fonction $\delta$ dans $L^k[0, +\infty)$, $1 \leq k$, pour laquelle des solutions non bornées apparaissent.

Pomet et Praly ont montré, dans [54], qu'une réponse affirmative à cette question est possible lorsque chaque solution obtenue pour $\delta \equiv 0$ n'est pas localement exponentiellement instable en temps rétrograde, uniformément en la condition initiale.

De ceci, nous concluons que, pour un système commandé :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(\chi, u) \; , \tag{14}$$

il peut être important de trouver une loi de commande qui non seulement donne à l'origine la propriété de stabilité asymptotique globale mais encore garantisse celle d'instabilité exponentielle locale en temps rétrograde pour toutes les solutions. Une façon de satisfaire, au moins partiellement, à ces deux exigences, est d'appliquer la technique standard utilisée lors de la mise en œuvre de la commande optimale, remise au goût du jour dans le domaine de la stabilisation par exemple dans [17] et consistant, dans un premier temps, à définir une commande boucle ouverte $u_r(\chi_0, t)$ telle que la solution associée $\chi_r(\chi_0, t)$, issue de la condition initiale donnée $\chi(0) = \chi_0$, rejoigne l'origine, puis dans un deuxième temps à définir une commande boucle fermée $u(\chi - \chi_r(\chi_0, t), \chi_0, t)$ stabilisant au moins localement exponentiellement (en temps direct) la solution $\chi_r(t)$. Faisons deux remarques :

1. Si la commande $u(\chi - \chi_r(\chi_0, t), \chi_0, t)$ stabilise globalement asymptotiquement uniformément $\chi_r(\chi_0, t)$ alors elle fait également de l'origine une solution globalement asymptotiquement stable.
2. Une façon de définir $u_r(\chi_0, t)$ est de construire une loi de commande $u(\chi)$ stabilisant globalement asymptotiquement l'origine et de prendre $u_r$ solution de :

$$\dot{\chi} = \varphi(\chi, u(\chi)) \quad , \qquad \chi = \chi_0 \quad , \qquad u_r(\chi_0, t) = u(\chi) \ . \tag{15}$$

Cette technique est celle pratiquée usuellement, mais implicitement, pour les systèmes linéaires :

$$\dot{\chi} = A\,\chi + B\,u \ . \tag{16}$$

Soit en effet, $F$ une matrice telle que $A - BF$ soit strictement Hurwitz. Alors les fonctions $u_r$ et $\chi_r$ sont données par :

$$\chi_r(\chi_0, t) = \exp((A - BF)t)\,\chi_0 \quad , \qquad u_r(\chi_0, t) = -F\,\exp((A - BF)t)\,\chi_0 \tag{17}$$

et $u$ l'est par :

$$\begin{aligned} u(\chi - \chi_r(\chi_0, t), \chi_0, t) &= u_r(\chi_0, t) - F\,(\chi - \chi_r(\chi_0, t)) \ , & (18)\\ &= -F\,\chi\ ! & (19) \end{aligned}$$

Ceci justifie en partie l'intérêt que nous porterons à la stabilisation asymptotique globale d'une trajectoire.

## 3 Ce qui a fortement influencé notre travail.

Le point de départ des idées que nous avons employées pour traiter les problèmes de la stabilisation que nous avons présentés trouve son origine dans la thèse de Andrew Teel : dans ce travail sont énoncés les premiers résultats significatifs concernant le problème de stabilisation de systèmes feedforward de la forme (6), (voir annexe A). La contribution de ce travail a été telle que la recherche sur le problème de la stabilisation de systèmes linéaires par des commandes saturées lui doit un nouvel élan. En effet, elle a permis à Sussmann, Sontag et Yang de proposer, dans [70], une méthode de calcul explicite de loi de commande en boucle fermée saturée pour les systèmes linéaires et à Teel, dans [76], et à Lin et Saberi, dans [61], de prouver la stabilisabilité asymptotique de certains systèmes partiellement linéaires (voir Corollaire 2.37).

Le point important mis en évidence par Andrew Teel est qu'en fait la connaissance du système linéarisé à l'origine est déjà suffisante pour permettre proposer une famille de lois de commande contenant un élément satisfaisant pour le système traité. Ce résultat repose sur les deux remarques:

1. Les termes d'ordre élevé (voir nos définitions de base) ne jouent un rôle que dans le choix de l'élément à effectuer dans la famille a priori proposée mais pas sur la famille elle-même.

2. Les coordonnées qui intègrent – $x_2$ à $x_n$ dans (6) – doivent être choisies de sorte que seuls des termes d'ordre élevé apparaissent dans leur dérivée. Pour satisfaire cette contrainte, des changements linéaires de variables ont été mis en place.

Pour obtenir son résultat Andrew Teel a utilisé des concepts d'interconnexion de systèmes que nous illustrons sur un exemple simple en Annexe A. Ces concepts ont été formalisés dans [77], article où A. Teel a notamment introduit la notion de "entrée asymptotiquement petite, état asymptotiquement petit".

L'objectif initial de nos travaux a été de trouver une contre partie à l'approche par interconnexion de systèmes en termes de fonctions de Lyapunov. Il a pu être atteint après qu'ait été effectuée la remarque suivante :
Supposons que, dans (5), nous ayons

$$h(y,0) \;\equiv\; 0 \qquad \forall y \;, \tag{20}$$

et que les fonctions en jeux soient régulières, ou plus précisément, que (5) puisse s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & h_2(y,u)u \;, \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_2(y,u)u \;. \end{array} \right. \tag{21}$$

Alors, si $y = 0$ est une solution globalement asymptotiquement stable de $\dot{y} = f_0(y)$, le théorème de Lyapunov inverse [83, Theorem V.19.8] garantit l'existence d'une fonction de Lyapunov $V(y)$ telle que :

$$u \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \dot{\overbrace{x^\top x + V(y)}} \;\leq\; -c\,V(y) \;. \tag{22}$$

Il s'en suit que nous nous trouvons situés dans le cadre de la théorie qui a été développée à partir d'un résultat de Jurdjevic et Quinn dans [29]. Des améliorations importantes apportées à celui-ci se trouvent notamment dans [19], [59], [39], [53], [2, Remark 10.9].

En poursuivant dans ce contexte Jurdjevic-Quinn, nous avons pu relâcher l'hypothèse (20). La combinaison de changements de variables, généralisant ceux proposés par Teel, et de cette méthode de Lyapunov nous ont alors permis d'obtenir nos divers résultats étendant quelque peu ceux présentés dans [72, 75] et de proposer de nouvelles classes de lois de commande contenant également des fonctions saturées.

Au cours de ce travail, nous avons appris que Mrjdan Jankovic, Rodolphe Sepulchre et Petar Kokotovic, avaient proposé un autre type de fonction de Lyapunov que celui que nous utilisions. Plus précisément, à la place de notre changement de variables, qui a pour effet indirect d'introduire un terme croisé de structure particulière dans la fonction de Lyapunov, ces trois auteurs ont proposé une construction directe, et donc a priori moins restrictive, de ce terme croisé. Nous détaillerons cette procédure au Chapitre 3 en la remettant dans notre contexte. Nous verrons en outre que nos travaux antérieurs permettent d'élargir le domaine d'application de cette nouvelle procédure en fournissant une méthode de synthèse de lois de commande à partir d'un système approximant le système donné et facilitant ainsi les calculs. L'intérêt de celle-ci aurait pu être rehaussé si nous avions pu déterminer des conditions simples impliquant les hypothèses que nous introduisons. Nous avons malheureusement manqué du temps qui aurait été nécessaire pour parvenir à cela ainsi que pour traiter des exemples au moyen de cette méthode.

# 4 Plan du mémoire.

## 4.1 Première partie.

Le Chapitre 1 est une phase préparatoire des chapitres suivants. Nous y présentons une version non linéaire en la commande du résultat de Jurdjevic et Quinn pour des systèmes qui, à commande nulle, sont composés d'un sous-système globalement asymptotiquement stable et d'un sous-système globalement stable qui n'ont ni l'un ni l'autre de terme de couplage. La famille de lois de commande globalement asymptotiquement stabilisantes que nous proposons contient des fonctions qui peuvent être arbitrairement bornées.

Dans le Chapitre 2, nous introduisons dans le système étudié précédemment des termes de couplages non linéaires dont les propriétés sont telles que l'origine du nouveau système est, comme celui de l'ancien, une solution globalement stable lorsqu'est appliquée la commande nulle. Plus précisément, nous donnons des conditions pour que l'origine du système suivant soit globalement asymptotiquement stabilisable :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & h_0(x_1) + h_1(x_1,x_2,y)y + h_2(x_1,x_2,y,u)u \\ \dot{x}_2 & = & e_0(x_2) + e_1(x_1,x_2,y)y + e_2(x_1,x_2,y,u)u \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_1(x_1,x_2,y)y + f_2(x_1,x_2,y,u)u \end{array}\right. \tag{23}$$

Parmi ces conditions il y a en particulier une restriction portant sur le comportement de $h_1(x_1,x_2,y)$ et $e_1(x_1,x_2,y)$ lorsque $y$ est proche de l'origine et $(|x_1|,|x_2|)$ est proche de l'infini. Cette restriction en $y$ est une généralisation de la notion d'ordre élevé introduite par Teel. Elle est donc, comme nous l'avons déjà mentionné, dépendante des coordonnées dans lesquelles la dynamique du système est exprimée. Ceci explique pourquoi, dans un deuxième temps, nous nous intéressons à divers changements de variables. L'application couplée de notre synthèse de Lyapunov et de changements de variables nous permet de clore ce chapitre par l'énoncé d'une solution au problème de la stabilisabilité asymptotique globale de systèmes ayant des formes généralisant (5) et (6) et par l'écriture de loi de commande pour le système pendule-chariot (11) et pour un modèle simplifié d'un avion à décollage vertical (PVTOL).

Le Chapitre 3 présente et prolonge la synthèse de Lyapunov proposée par Jankovic, Sepulchre et Kokotovic dans [28]. Dans un premier temps, nous décrivons cette méthode en la situant dans le contexte du Chapitre 2. Dans un deuxième temps, nous fixons des limites au sein desquelles il suffit d'effectuer une synthèse à partir d'un système approximant pour pouvoir conclure.

## 4.2 Seconde partie.

Dans cette partie, dont l'introduction constitue le Chapitre 4, la méthode employée jusqu'ici est adaptée au problème de suivi de trajectoires de référence de sortie. Celle-ci est constituée de deux parties :

• Génération d'une trajectoire exacte bornée lorsqu'une trajectoire de référence de sortie bornée est donnée; problème considéré au Chapitre 5.

• Stabilisation asymptotique globale d'une trajectoire de référence bornée pour une sous classe de systèmes de la forme (23); problème considéré au Chapitre 6.

Une application au système pendule-chariot des résultat obtenus est présenté au Chapitre 7. L'objectif est de donner un mouvement oscillatoire à l'angle du pendule.

## 5 Avertissement.

Dans ce mémoire, nous avons cherché à illustrer nos résultats en considérant le plus souvent possible des systèmes tirés d'applications pratiques. Ceux-ci restent cependant des exemples d'école étudiés dans le contexte idéal seulement : les modèles sont supposés être parfaits et les mesures effectuées être non perturbées. De plus, pour la plupart, d'autres solutions ont été proposées. Nous n'avons pas cherché à faire de comparaisons dont les conclusions, dans ce contexte trop idéal, pourraient être douteuses.

D'une façon plus générale, précisons encore que ce travail n'est pas axé sur les délicates questions de performance : celles-ci conduiraient à de trop amples développements pour qu'elles soient traitées ici. Elles pourront faire l'objet de nouvelles études au cours desquelles la réalisation de simulations trouvera tout son intérêt.

# Notations et définitions de base.

- Nous utiliserons souvent le symbole $c$ pour désigner un nombre réel strictement positif de façon générique. On aura alors :
$$c \, + \, c * c \, = \, c$$

- Par $< h(x,y) \, , \, y >$, nous désignons une matrice dont l'entrée $(i,j)$ de $(< h(x,y) \, , \, y >)_{ij}$ est :
$$< h(x,y) \, , \, y >_{ij} \, = \, \sum_k h(x,y)_{(k,i,j)} \, y_k \ .$$

- Nous dirons qu'une fonction $f(x)$ sur $\mathbb{R}^l$ est d'ordre $p$, pour un nombre réel $p$, si :
$$\limsup_{|x| \longrightarrow 0} \left\{ \frac{|f(x)|}{|x|^p} \right\} \ < \ +\infty \ .$$

- Nous notons :
$$|x| \ = \ \sqrt{x^\top x} \quad , \quad |x|_Q \ = \ \sqrt{x^\top Q x} \ ,$$
où $Q$ est une matrice symétrique définie positive.

- Pour une matrice $\Phi$, nous notons par $\lambda_{\Phi i}$ une de ces valeurs propres.

- Par $\dot{V}_{(25)}$ nous désignons la fonction définie par :
$$\dot{V}_{(25)}(\mathcal{X}) \ = \ \lim_{t \to 0_+} \frac{V(\mathcal{X} + t\varphi(\mathcal{X})) - V(\mathcal{X})}{t} \ . \tag{24}$$
lorsque cette définition a un sens. L'indice (25) renvoie au numéro de l'équation différentielle :
$$\dot{\mathcal{X}} \ = \ \varphi(\mathcal{X}) \ . \tag{25}$$
Si $\varphi$ est continue et $V$ est Lipschitz continue alors nous avons (voir [83, p.3]) :
$$\lim_{t \to 0_+} \frac{V(\Phi(t,\mathcal{X})) - V(\mathcal{X})}{t} \ = \ \dot{V}_{(25)}(\mathcal{X}) \tag{26}$$
où $\Phi(t,\mathcal{X})$ est une solution de :
$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,\mathcal{X}) \ = \ \varphi(\Phi(t,\mathcal{X})) \quad , \qquad \Phi(0,\mathcal{X}) \ = \ \mathcal{X} \ . \tag{27}$$

- Pour un champ de vecteurs $X$, nous définissons récursivement l'opérateur $L_X^k$ agissant sur la fonction à valeur réelle $h$ :
$$L_X^0 h \ = \ h \quad , \quad L_X h \ = \ \frac{\partial h}{\partial x} X \quad , \quad L_X^{k+1} h \ = \ L_X L_X^k h \ .$$

Pour un champ de matrices $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ et un champ de vecteurs $X$, nous définissons leur crochet de Lie par :

$$[X, Y] \; = \; ([X, Y_1], \dots, [X, Y_n]) \; .$$

Cela nous permet de définir récursivement le champ de matrices $\mathrm{ad}_X^k Y$ :

$$\mathrm{ad}_X^0 Y \; = \; Y \quad , \quad \mathrm{ad}_X^{k+1} Y \; = \; [X, \mathrm{ad}_X^k Y] \; .$$

- Pour une fonction de classe $C^1$ à valeurs réelle $k$, nous notons par $k'$ sa dérivée première.

- Une fonction $\alpha : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ est dite de classe $\mathcal{K}$ si celle-ci est zéro en zéro et strictement croissante. Si, de plus, elle diverge vers $+\infty$, elle est alors dite de classe $\mathcal{K}^\infty$.

- Une fonction saturation $\sigma : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, bornée, différentiable en 0 et telle que :

$$\sigma(s)\, s \; > \; 0 \, , \; \forall\, s \neq 0 \quad , \qquad \sigma'(0) \; > \; 0 \quad , \qquad \sigma|_{\mathbb{R}_+} \; \notin \; L^1(\mathbb{R}_+) \quad , \qquad \sigma|_{\mathbb{R}_-} \; \notin \; L^1(\mathbb{R}_-) \; .$$

  Elle est dite saturation linéaire s'il existe un nombre réel strictement positif $L$ tel que :

$$\sigma(s) \; = \; s \; , \quad \forall\, |s| \; \leq \; L \; .$$

  Cas multivariable

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R}^k & \rightarrow & \mathbb{R}^k \\ & (s_1, \dots, s_k) & \mapsto & (\sigma_1(s_1), \dots, \sigma_2(s_k)) \end{array}$$

  $\sigma$ est une saturation (resp. linéaire) si chaque $\sigma_i$ est une saturation (resp. linéaire).

- Nous utiliserons la terminologie suivante, introduite par Laurent Praly, et que nous restreignons en raison de l'usage que nous voulons en faire :
  Nous dirons qu'une fonction $\mathcal{V}$ est une fonction de Lyapunov assignable pour le système commandé

$$\dot{\mathcal{X}} \; = \; \varphi(\mathcal{X}, u)$$

  si :

  - $\mathcal{V}$ est une fonction Lipschitz continue, propre, définie positive.
  - Il existe un feedback d'état $u(\mathcal{X})$ tel que

$$\dot{V}_{(2.373)}(\mathcal{X}) \; \leq \; 0 \quad , \quad \forall\, \mathcal{X} \; .$$

    lorsque le système (5) est bouclé avec $u(\mathcal{X})$. Si la négativité est stricte pour tout $\mathcal{X} \neq 0$, nous dirons qu'elle est strictement assignable.

# Partie I

# Stabilisation d'un point d'équilibre

# Chapitre 1

# La technique de Jurdjevic et Quinn.

Lorsque dans le système (23), donné dans notre introduction, les termes de couplages $h_1$, $e_1$ et $f_1$ sont absents, ce système est de la forme :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(\chi) \;+\; \gamma(\chi)\, u \;+\; \eta(\chi,u)\, u \quad , \qquad \eta(\chi,0) \equiv 0 \; . \tag{1.1}$$

Pour un tel système, Jurdjevic et Quinn ont proposé dans [29] une technique de synthèse de loi de commande stabilisante relevant de la méthode d'assignation de fonction de Lyapunov. Les hypothèses requises sont :

1. L'existence d'une fonction $\mathcal{U}$ propre définie positive et de classe $C^1$ telle que la fonction $L_\gamma \mathcal{U}$ soit continue et :
$$L_\varphi \mathcal{U}(\chi) \;\leq\; 0 \; . \tag{1.2}$$
2. La solution $\chi = 0$ est la seule de :
$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(\chi) \quad , \qquad L_\varphi \mathcal{U}(\chi) \;=\; 0 \quad , \qquad L_\gamma \mathcal{U}(\chi) \;=\; 0 \; . \tag{1.3}$$

Cette technique va être la technique de base à laquelle nous allons nous référer pour traiter le système (23) de l'introduction. Elle n'est pas directement applicable du fait des termes de couplages. Aussi notre première tâche va-t-elle être d'en relâcher le plus possible les hypothèses. Ceci est la raison d'être de ce chapitre.

## 1.1 Synthèse de Lyapunov.

### 1.1.1 Résultat.

Commençons notre analyse en établissant à nouveau, dans un cadre légèrement plus général, (voir également [9, Corollary 1.6]), un résultat de Bacciotti se trouvant dans [2, Remark 10.9] (voir [35] pour une interprétation en termes de commande optimale). Considérons ainsi le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& h_0(x_1) + h_2(x_1,x_2,y,u)u \\ \dot{x}_2 &=& e_0(x_2) + e_2(x_1,x_2,y,u)u \\ \dot{y} &=& f_0(y) + f_2(x_1,x_2,y,u)u \end{array} \right. \tag{1.4}$$

où $y$ appartient à $\mathbb{R}^n$, $x_1$ à $\mathbb{R}^{m_1}$, $x_2$ à $\mathbb{R}^{m_2}$, $u$ à $\mathbb{R}^q$.

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse A0 :** *Les fonctions $h_0$, $h_2$, $e_0$, $e_2$, $f_0$ et $f_2$ sont continues et $h_0$, $e_0$ et $f_0$ sont zéro à l'origine.*

**Hypothèse A1 :** *Il existe trois fonctions de classe $C^1$ définies positives et propres $Q, S$ et $V$ telles que :*

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_0(x_1) \;=\; -R(x_1) \;\leq\; 0 \qquad \forall\, x_1 \;, \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)e_0(x_2) \;=\; -T(x_2) \;<\; 0 \qquad \forall\, x_2 \neq 0 \;, \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_0(y) \;=\; -W(y) \;<\; 0 \qquad \forall\, y \neq 0 \;. \tag{1.7}$$

**Hypothèse A2 :** *La seule solution de :*

$$\dot{x}_1 \;=\; h_0(x_1) \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_2(x_1,0,0,0) \;=\; 0 \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_0(x_1) \;=\; 0 \;. \tag{1.8}$$

*est la solution $x_1 = 0$.*

**Théorème 1.1** *Si les hypothèses A0, A1 et A2 sont vérifiées, alors pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0, +\infty]$, il existe une loi de commande bornée par $\overline{u}$ qui fait de l'origine une solution globalement asymptotiquement stable du système (1.4).*

### 1.1.2 Discussion autour des hypothèses du Théorème 1.1.

Quoique l'introduction de la variable $x_2$ dans les notations n'apporte rien au Théorème 1.1, puisque $x_2$ et $y$ pourraient être regroupées dans une seule variable sans que le résultat en soit changé, nous avons choisi de présenter nos résultats comme nous l'avons fait dans l'intention d'avoir des notations similaires à celles dont nous aurons besoin par la suite.

#### 1.1.2.1 Hypothèse A1.

L'hypothèse A1 exprime le fait que, lorsque $u$ est identiquement égal à zéro, le système (1.4) est bloc diagonalisé en trois sous systèmes dont l'origine du premier est globalement stable et les origines des seconds sont globalement asymptotiquement stables. Dans une certaine mesure, c'est en exploitant les propriétés de cette structure spécifique que le Théorème 1.1 se distingue des résultats, par exemple, de [29], [19], [2], [9].

#### 1.1.2.2 Hypothèse A2.

Vérifier si l'hypothèse A2 est satisfaite n'est pas simple. Il existe cependant de multiples conditions connues qui impliquent cette condition (voir [39, 41]). Ainsi par exemple, nous avons :

**Lemme 1.2 ([41])** *Si les fonctions sont suffisamment régulières, si l'inégalité (1.5) est satisfaite et s'il existe un entier $r$ tel que, en notant*

$$\widehat{h}_2(x_1) \;=\; h_2(x_1,0,0,0) \;, \tag{1.9}$$

*on ait :*

$$E_r \;=\; \{x_1 \,:\, L^k_{h_0} L_{ad^i_{h_0}\widehat{h}_2} Q(x_1) \;=\; 0 \,, \forall\, k \,\leq\, r \,,\, i \,\leq\, n-1\} \;=\; \{0\} \;. \tag{1.10}$$

*alors l'hypothèse A2 est satisfaite.*

Le Lemme 1.2 suggère que l'hypothèse A2 est reliée à une condition de détectabilité. Si cette hypothèse est violée, la stabilisation asymptotique peut être impossible. C'est ce qu'illustre l'exemple suivant :

**Example 1.3 :** Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\xi}_1 &=& -\xi_2 - u + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) u \\ \dot{\xi}_2 &=& \xi_1 - u + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) u \ . \end{array}\right. \tag{1.11}$$

En posant

$$x_1 \ = \ (\xi_1, \xi_2)^\top \quad , \qquad M \ = \ \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ , \tag{1.12}$$

et en prenant $u = 0$, on obtient :

$$\dot{\overbrace{|x_1|^2}} = 2x_1^\top M x_1 = 0 \ . \tag{1.13}$$

Puisqu'en outre il n'y a pas de sous système en $y$, l'hypothèse A1 est satisfaite. D'un autre coté, puisque le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& M x_1 \\ 0 &=& x_1^\top \begin{pmatrix} -1 + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) \\ -1 + \left(\xi_1^2 + \xi_2^2\right) \end{pmatrix} \end{array}\right. \tag{1.14}$$

admet comme solution :

$$\xi_1 \ = \ \cos(t) \quad , \quad \xi_2 \ = \ \sin(t) \ . \tag{1.15}$$

l'hypothèse A2 n'est pas vérifiée. Quelque soit le feedback employé, $(\cos(t), \sin(t))$ est une solution du système en boucle fermée. Puisque cette trajectoire ne converge pas vers zéro, l'origine du système (1.11) ne peut pas être globalement asymptotiquement stabilisée. $\diamond$

Cet exemple met en évidence le fait qu'il se peut que la commande ne puisse faire sortir une solution d'une surface de niveau $Q(x_1) = q$ particulière. Le résultat suivant exploite cette remarque pour donner une autre condition suffisante impliquant l'hypothèse A2.

**Lemme 1.4** *Soit $Q$ une fonction de classe $C^1$ et soient $h$ et $H$ des fonctions continues. S'il existe une fonction continue $\Lambda$ telle que le système :*

$$\dot{x} \ = \ h(x) \ + \ \Lambda(x)\, H(x) \tag{1.16}$$

*n'a pas de solution appartenant à une surface de niveau de $Q$ autre que $x = 0$, alors $x = 0$ est la seule solution de :*

$$\dot{x} \ = \ h(x) \quad , \quad H(x) \ = \ 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(x) h(x) \ = \ 0 \ . \tag{1.17}$$

**Preuve.** Soit $x(t)$ une solution de (1.17). Alors :

$$\dot{\overbrace{x(t)}} \ = \ h(x(t)) \ = \ h(x(t)) + \Lambda(x(t))\, H(x(t)) \ . \tag{1.18}$$

Donc $x(t)$ est solution de (1.16). D'un autre côté :

$$\dot{\overbrace{Q(x(t))}} \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))\,\dot{\overbrace{x(t)}} \;=\; \frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))\,h(x(t)) \;=\; 0\;. \tag{1.19}$$

Par conséquent, $x(t)$ appartient à une surface de niveau de $Q$. Donc $x(t)$ est identiquement égale à zéro. □

Ce résultat permet de garantir que l'hypothèse A2 est satisfaite s'il existe une fonction $\Lambda(x_1)$ telle que les solutions de :

$$\dot{x}_1 \;=\; h_0(x_1) \;+\; \Lambda(x_1)\,\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\,h_2(x_1,0,0) \tag{1.20}$$

autres que la solution nulle n'appartient à aucune surface de niveau de $Q$ sauf l'origine.

Le fait de trouver des coordonnées $(x_1, x_2, y)$ et une fonction $Q$ telles que l'hypothèse A2 soit satisfaite est donc le point clé de cette technique de Jurdjevic et Quinn. En annexe B, nous proposons deux variantes de cette hypothèse.

### 1.1.3 Preuve du Théorème 1.1.

Nous avons :

$$\dot{\overbrace{V(y)+Q(x_1)+S(x_2)}}_{(1.4)} \;=\; -\,W(y) \;-\; R(x_1) \;-\; T(x_2) \;+\; \mathcal{G}(x_1,x_2,y,u)\,u \tag{1.21}$$

avec :

$$\mathcal{G}(x_1,x_2,y,u) \;=\; \frac{\partial V}{\partial y}(y)\,f_2(x_1,x_2,y,u) \;+\; \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\,e_2(x_1,x_2,y,u) \;+\; \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\,h_2(x_1,x_2,y,u)\;. \tag{1.22}$$

Remarquons que, d'après l'hypothèse de régularité faite sur $V$, $S$, $Q$ et l'hypothèse A0, la fonction $\mathcal{G}$ est continue.

Avec (1.21), nous voyons que nous avons stabilité globale si la commande $u$ est telle que :

$$\mathcal{G}(x_1,x_2,y,u)\,u \;\leq\; 0\;. \tag{1.23}$$

Afin d'obtenir stabilité asymptotique globale pour (1.4), nous proposons deux manières d'appréhender cette inégalité :

1. Solution statique :

   **Lemme 1.5** *Soit $G(x,u)$ une fonction au moins continue. Pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0,+\infty]$, il existe une fonction $\lambda(x)$ aussi régulière que $G(x,u)$ telle que, si :*

   $$u(x) \;=\; -\lambda(x)\,G(x,0)^\top\;, \tag{1.24}$$

   *alors, pour tout $x$ on a :*

   $$|u(x)| \;\leq\; \overline{u}\;, \tag{1.25}$$

   $$G(x,u(x))\,u(x) \;\leq\; -\tfrac{1}{2}\,\lambda(x)\,|G(x,0)|^2\;. \tag{1.26}$$

   *De plus, si $G$ est de classe $C^1$, $\lambda$ peut être choisie telles que pour tout $c_1 \geq 0$, il existe $c_2 > 0$ tel que :*

   $$\lambda(x) \;\geq\; c_2 \qquad \forall\,|x| \leq c_1\;. \tag{1.27}$$

**Preuve :** Voir l'annexe C. □

2. Solution dynamique :[1] Une des caractéristiques principales de la technique de Jurdjevic et Quinn est qu'elle tire partie d'une propriété de passivité. Ainsi, d'après (1.21), le système d'entrée $u$, d'état $(x_1, x_2, y)$ et de sortie $\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)$ est-il passif. Dans ce contexte, on sait qu'au lieu de satisfaire l'inégalité (1.23) de façon statique, il suffit de la satisfaire de façon dynamique, i.e. il suffit que $u$ soit la sortie d'un système strictement passif d'entrée $-\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)$. Ceci se complique un peu du fait de la contrainte qu'il y a sur $u$. Mais en s'inspirant des méthodes frontières utilisées en optimisation (voir par exemple [15, chapter 3]), nous pouvons proposer la commande dynamique :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} & = & -z - \left(\overline{u}^2 - |z|^2\right) \mathcal{G}(x_1, x_2, y, u) \quad , \qquad |z(0)| < \overline{u} \; . \\ u & = & z \end{array} \right. \tag{1.28}$$

Ce système d'entrée $-\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)$, d'état $z$ et de sortie $u$ est strictement passif et tel que l'ensemble $\{z : |z| < \overline{u}\}$ est positivement invariant. Ainsi, nous obtenons :

$$\overbrace{V(y) + Q(x_1) + S(x_2) - \ln\left(\overline{u}^2 - |z|^2\right)}^{\cdot}{}_{(1.4),(1.28)} \; = \; -W(y) \; - \; R(x_1) \; - \; T(x_2) \; - \; \frac{2|z|^2}{\overline{u}^2 - |z|^2} \; . \tag{1.29}$$

Cette égalité établit la stabilité globale et l'invariance positive de l'ensemble ci-dessus. De plus :

$$u \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{G}(x_1, x_2, y, 0) \equiv 0 \; . \tag{1.30}$$

Les deux solutions précédentes garantissent donc de l'existence d'une loi de commande $u$ continue de norme inférieure à $\overline{u}$ telle que :

$$u \; \equiv \; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{G}(x_1, x_2, y, 0) \; = \; 0 \tag{1.31}$$

et les dérivées (1.21) ou (1.29) sont nulles si et seulement si :

$$y \; = \; 0 \quad , \qquad x_2 \; = \; 0 \quad , \qquad u \; = \; 0 \; . \tag{1.32}$$

En général, ces lois de commande donnent un système en boucle fermé dont le second membre n'est que continu. Le problème possible de non unicité des solutions qui en résulte fait que le principe d'invariance de LaSalle classique ne s'applique pas. Cependant, grâce à [58, Theorem 2], nous avons le résultat suivant :

**Lemme 1.6** *Soit un système*

$$\dot{\chi} \; = \; \varphi(\chi) \tag{1.33}$$

*où $\chi$ appartient à $\mathbb{R}^n$ et $\varphi$ est une fonction continue.*

*Soient $\mathcal{V} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction Lipschitz continue et $\mathcal{W} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, une fonction continue et positive telles que :*

$$\dot{\mathcal{V}}_{(1.33)}(\chi) \; = \; -\mathcal{W}(\chi) \; \leq \; 0 \quad , \quad \forall \chi \; . \tag{1.34}$$

*Alors, toutes les solutions de (1.33) qui sont bornées sur $[0, +\infty)$ tendent vers le plus grand ensemble quasi-invariant[2] contenu dans $\{\chi \in \mathbb{R}^n : \mathcal{W}(\chi) \; = \; 0\}$.*

---

[1] Initialement proposée dans [28].

[2] Un ensemble $\mathcal{E}$ est dit être quasi-invariant par rapport à (1.33) si, pour tout $\chi \in \mathcal{E}$, il existe au moins une solution maximale de (1.33), définie sur $[0, +\infty)$ qui est contenue dans $\mathcal{E}$.

Ce lemme s'applique directement au système (1.4) bouclé avec $u$. Dans ce cas, il s'agit de déterminer le plus grand ensemble quasi-invariant contenu dans l'ensemble :

$$\{(x_1, x_2, y) \;:\; y = 0\,,\; x_2 = 0\,,\; u = 0\}\ .$$

Les propriétés de $u$, écrites ci-dessus, font que cet ensemble quasi-invariant est contenu dans :

$$\{(x_1, x_2, y) \;:\; x_2 \;=\; 0\;,\; y \;=\; 0\;,\; R(x_1) \;=\; 0\;,\; \mathcal{G}(x_1, 0, 0, 0) \;=\; 0\}\ .$$

Avec la définition (1.22) de $\mathcal{G}$ et l'hypothèse A2, nous concluons que cet ensemble quasi-invariant est réduit à l'origine. Donc la commande $u$ est globalement asymptotiquement stabilisante.

Il est à noter que notre commande rend la dérivée

$$\overbrace{V(y) + Q(x_1) + S(x_2)}^{\cdot}{}_{(1.4)} \qquad \text{ou} \qquad \overbrace{V(y) + Q(x_1) + S(x_2) - \ln\left(\overline{u}^2 - |z|^2\right)}^{\cdot}{}_{(1.4),(1.28)}$$

définie négative si, pour tout $x_1 \neq 0$,

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_0(x_1)\right| \;+\; \left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_2(x_1, 0, 0, 0)\right| \;\neq\; 0\ . \tag{1.35}$$

Remarquons enfin que la technique d'ajout d'intégrateur peut se combiner avec la preuve Lyapunov que nous venons d'effectuer et cela même dans les cas où la conclusion s'obtient en appliquant le principe d'invariance de LaSalle, pourvu toutefois que les fonctions qui interviennent soient au moins de classe $C^1$. Il suffit en effet pour cela d'appliquer [10, Lemma 1] au système considéré. □

### 1.1.4 Applications.

#### 1.1.4.1 Un système composite partiellement linéaire.

Le Théorème 1.1 permet de retrouver certains résultats déjà été publiés. En particulier, nous pouvons à nouveau démontrer [60, Theorem 1] :

**Corollaire 1.7** *Considérons le système partiellement linéaire suivant :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& Mx_1 + Dy_1 \\ \dot{y} &=& f(y) + f_2(x, y, y_1)y_1 \\ \dot{y}_1 &=& u \end{array}\right. \tag{1.36}$$

*où $f$ et $f_2$ sont de classe $C^1$. Si :*

1. *La matrice $M$ est stable,*

2. *L'origine du sous système en $y$, lorsque $y_1$ considéré comme une entrée est identiquement égal à 0, est globalement asymptotiquement stable,*

3. *La paire $(M, D)$ est stabilisable,*

*alors il est possible de faire que l'origine soit une solution globalement asymptotiquement stable du système (1.36).*

Avant de débuter la preuve de ce corollaire, faisons la remarque suivante qui prolonge le Lemme 1.4 dans un cas particulier :

**Fait 1.8** *Si la paire* $(M, D)$ *est stabilisable et s'il existe une matrice symétrique définie positive* $Q$ *telle que :*

$$Q\,M \;+\; M^\top Q \;\leq\; 0\;, \tag{1.37}$$

*alors* $x_1 = 0$ *est l'unique solution de :*

$$\dot{x}_1 \;=\; M\,x_1 \quad , \qquad x_1^\top Q\,D \;=\; 0 \quad , \qquad x_1^\top Q\,M\,x_1 \;=\; 0\;. \tag{1.38}$$

**Preuve** : Voir l'annexe D. □

**Preuve du corollaire 1.7 :** Le Fait 1.8 et la stabilité de $M$ impliquent que l'hypothèse A2 est satisfaite par le sous système en $(x_1, y)$ de (1.36) avec $y_1$ considéré comme commande. Puisque d'après les hypothèses 1 et 2, l'hypothèse A1 est également vérifiée, il s'en suit grâce au Théorème 1.1 que, l'origine peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable de ce sous système. En fait, une analyse poussée montre que si $f_2$ est une fonction de classe $C^1$, il existe une fonction $y_1(x_1, y)$ qui est de classe $C^1$ et qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine du sous système en $(x_1, y)$ de (1.36) avec $y_1$ comme entrée. Alors, en appliquant la technique d'ajout d'une intégration, (voir [80, 5]), le résultat s'en suit. □

#### 1.1.4.2 Stabilisation pour un système d'Euler-Lagrange.

Considérons un système d'Euler-Lagrange complètement contrôlé avec pour "forces" généralisées $F$, pour coordonnées généralisées $q$, pour matrice d'"inertie" uniformément définie positive $I(q)$ et pour potentiel, disons $C^2$, $U(q)$. La dynamique d'un tel système est donnée par les équations :

$$\dot{\overbrace{\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q})}} \;=\; \frac{\partial L}{\partial q}(q, \dot{q}) \;+\; F^\top\;, \tag{1.39}$$

où $L$ est le Lagrangien :

$$L(q, \dot{q}) \;=\; \tfrac{1}{2}\,\dot{q}^\top I(q)\dot{q} \;-\; U(q)\;. \tag{1.40}$$

Choisissons une fonction $U_d$ de classe $C^2$ telle que le potentiel modifié :

$$U_m \;=\; U \;+\; U_d \tag{1.41}$$

soit radialement non borné et ait un unique point stationnaire $q = q_d$. Considérons la fonction :

$$V_1(q, \dot{q}) \;=\; \frac{1}{2}\dot{q}^\top I(q)\dot{q} \;+\; U_m(q)\;. \tag{1.42}$$

Elle est définie positive, radialement non bornée et de classe $C^2$. De plus, en prenant :

$$F \;=\; -\,\frac{\partial U_d}{\partial q}(q) \;+\; u\;, \tag{1.43}$$

on obtient :

$$\dot{V}_1 \;=\; u^\top \dot{q}\;. \tag{1.44}$$

Il s'en suit que l'hypothèse A1 est vérifiée. En outre, on peut vérifier qu'avec un tel choix pour $U_d$, l'hypothèse A2 est vérifiée. En effet, en exploitant (1.39), nous obtenons :

$$\dot{q}(t) \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial U_m}{\partial q}(q(t)) \equiv 0\;. \tag{1.45}$$

Par conséquent, la commande :

$$u(q, \dot{q}) \;=\; -\dot{q}\ . \tag{1.46}$$

assigne $V_1$ et est globalement asymptotiquement stabilisante.

Cette loi de commande (1.46) fait intervenir $\dot{q}$ qui peut n'être pas mesurable. Pour supprimer cette dépendance en $\dot{q}$, nous allons utiliser la propriété de passivité remarquée dans la solution dynamique de la preuve du Théorème 1.1. Précisément ici, le système (1.39) d'entrée $u$, d'état $(q, \dot{q})$ et de sortie $\dot{q}$ est passif. Pour obtenir notre résultat, il nous suffit donc d'exhiber un système strictement passif d'entrée $\dot{q}$ et sortie $-u$. Nous considérons donc le système :

$$\dot{x} \;=\; -x + q\ . \tag{1.47}$$

Ce système, avec $\dot{q}$ pour d'entrée, $x$ pour état et $q - x$ pour sortie, est strictement passif. En effet, nous avons :

$$\tfrac{1}{2}\,\dot{\overbrace{|x-q|^2}} \;=\; -|x-q|^2 \;+\; (q-x)^\top \dot{q}\ . \tag{1.48}$$

Ceci nous amène au choix :

$$u(q, x) \;=\; x - q\ . \tag{1.49}$$

Vérifions que nous avons bien stabilité asymptotique globale. Pour cela, nous prenons :

$$V(q, \dot{q}, x) \;=\; V_1(q, \dot{q}) \;+\; \frac{1}{2}(x-q)^\top (x-q)\ . \tag{1.50}$$

Nous obtenons :

$$\dot{V} \;=\; -\,(x-q)^\top (x-q)\ . \tag{1.51}$$

Ceci démontre la stabilité globale. Pour montrer l'attractivité, nous appliquons le principe d'invariance de LaSalle. Nous remarquons que :

$$u(q, x) \equiv 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \dot{x} \equiv \dot{q} \equiv 0\ . \tag{1.52}$$

Mais avec (1.39), (1.40) et (1.43), nous avons :

$$\{u(q, x) \equiv 0\ ,\ \dot{q} \equiv 0\} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial U_m}{\partial q}(q) \equiv 0\ . \tag{1.53}$$

Le seul point stationnaire de $U_m$ étant le point désiré $q_d$, nous pouvons conclure à la convergence de toutes les solutions $(q(t), \dot{q}(t), x(t))$ vers $(q_d, 0, 0)$. $\diamond$

## 1.2 Changement de coordonnées.

La forme (1.4) et les hypothèses A1 et A2 dépendent des coordonnées. Nous reviendrons plus longuement sur cet aspect dans la section 2.3. Pour le moment contentons nous d'une application.

### 1.2.1 Le système pendule chariot.

Reprenons les équations de la dynamique normalisée du système pendule-chariot écrites en (11) :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} & = & s \\ \dot{s} & = & u \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & \sin(\theta) - \cos(\theta)u \end{array}\right. \tag{1.54}$$

Pour simplifier les notations, nous avons supprimé l'indice 0 et repris la notation usuelle $\dot{}$ bien que le temps soit normalisé.

L'objectif que nous nous proposons est celui de la stabilisation du chariot à une position donnée et du pendule le long de sa solution homocline. L'intérêt pratique d'un tel objectif est que, si il est réalisé, alors en temps fini, toutes les solutions atteindront un voisinage du point d'équilibre désiré – avec le pendule en position verticale haute –. On obtient ainsi une phase d'initialisation pour une loi de commande qui ne serait définie qu'au voisinage de ce point d'équilibre.

L'orbite homocline du pendule est décrite par l'équation :

$$E \;=\; 1 \;, \tag{1.55}$$

où $E$ est la fonction énergie :

$$E \;=\; \frac{1}{2}\omega^2 + \cos(\theta) \;. \tag{1.56}$$

Pour réaliser notre objectif, nous procédons en deux étapes. Dans la première, nous nous intéressons au sous-système en $(s, \theta, \omega)$. Dans la seconde, nous nous intéressons au système complet. En effet, en remarquant que nous avons :

$$\dot{E} \;=\; -\cos(\theta)\omega u \;, \tag{1.57}$$

nous voyons que la dynamique du sous-système en $(s, \theta, \omega)$ est partiellement décrite par

$$\begin{aligned} \dot{s} &= u \;, \\ \dot{E} &= -\cos(\theta)\omega u \;, \end{aligned} \tag{1.58}$$

système de la forme (23) mais en un sens plus général. Dans cet esprit, le système complet est partiellement décrit par :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= s \;, \\ \dot{s} &= u \;, \\ \dot{E} &= -\cos(\theta)\omega u \;. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Ces équations ne sont pas sous la forme (23) puisque $s$ dans l'équation de $\dot{x}$ est un terme de couplage. Nous verrons cependant que nous pouvons contourner cette difficulté en choisissant une autre coordonnée que $x$.

**Le sous système en $(s, \theta, \omega)$ :** Considérons le système suivant :

$$\dot{s} \;=\; u_1 \quad , \quad \dot{\theta} \;=\; \omega \quad , \quad \dot{\omega} \;=\; \sin(\theta) - \cos(\theta)u_1 \;. \tag{1.60}$$

Soit :

$$V_1(s, \theta, \omega) \;=\; \Phi_1(E-1) + \frac{k_s}{2}s^2 \;, \tag{1.61}$$

où $k_s$ est un réel strictement positif et $\Phi_1$ est une fonction de classe $C^2$, définie positive et radialement non bornée qui satisfait :

$$\max\left\{\Phi_1'(s), |\Phi_1''(s)|\right\} \;\leq\; \frac{k_E}{2\sqrt{s+2}} \quad , \quad \forall\, s > 2 \tag{1.62}$$

où $k_E$ est un nombre qui appartient à $(0,1]$. On obtient :

$$\dot{V}_1 \;=\; \left[-\,\Phi_1'(E-1)\omega\cos(\theta) + k_s s\right] u_1 \;. \tag{1.63}$$

Par conséquent, le Théorème 1.1 s'applique et $V_1$ est assigné pour (1.60) par la loi de commande :

$$u_1(s,\theta,\omega) \;=\; \frac{\Phi_1'(E-1)\omega\cos(\theta) - k_s s}{1+|s|+\Phi_1''(E-1)\omega\cos(\theta)\sin(\theta)} \;. \tag{1.64}$$

**Le système entier :** Pour traiter maintenant le système (1.54), nous cherchons une coordonnée, jouant le rôle de $x$ mais telle que sa dérive soit nulle lorsque la commande est $u_1$ définie ci-dessus. Cet objectif est réalisé en prenant :

$$\xi \;=\; k_s x + s + \frac{s|s|}{2} - \,\Phi_1'(E-1)\sin(\theta) \;. \tag{1.65}$$

En effet, en définissant $u_2$ comme $u = u_1 + u_2$, on obtient :

$$\dot{\xi} \;=\; \left[1+|s|+\Phi_1''(E-1)\omega\cos(\theta)\sin(\theta)\right] u_2 \;. \tag{1.66}$$

Les hypothèse A1 et A2 sont vérifiées. Par conséquent, la fonction :

$$V_2(x,s,\theta,\omega) \;=\; \Phi_1(E-1) + \frac{k_s}{2}s^2 + \Phi_2(\xi) \tag{1.67}$$

où $\Phi_2$ est une fonction de classe $C^1$, définie positive et radialement non bornée, est assignée par :

$$u_2(x,s,\theta,\omega) \;=\; -\,\sigma\left(\Phi_2'(\xi) - \,u_1(s,\theta,\omega)\right) \tag{1.68}$$

où $\sigma$ est une fonction saturation. En poursuivant l'analyse, on peut se rendre compte que l'objectif de stabilisation fixé au départ est réalisé pour toutes conditions initiales, sauf peut-être celles prises dans un ensemble de mesure nulle qui est la variété stable associée à la position verticale basse du pendule. Remarquons que la loi de commande finale $u_1 + u_2$ est bornée et peut être rendue arbitrairement petite.

# Chapitre 2

# Ajout d'intégration : changement de coordonnées.

## 2.1 Introduction.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la technique de Jurdjevic et Quinn à une classe plus large de systèmes. Précisément, nous modifions (1.4) en introduisant des termes de couplage qui sont identiquement égaux à zéro quand $y$ est identiquement égal à zéro :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & h_0(x_1) + h_1(x_1, x_2, y)y + h_2(x_1, x_2, y, u)u \\ \dot{x}_2 & = & e_0(x_2) + e_1(x_1, x_2, y)y + e_2(x_1, x_2, y, u)u \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_1(x_1, x_2, y)y + f_2(x_1, x_2, y, u)u\end{array}\right. \tag{2.1}$$

Et faisons la première hypothèse suivante :

**Hypothèse B0 :** *Les fonctions $h_0$, $h_1 y$, $h_2$, $e_0$, $e_1 y$, $e_2$, $f_0$, $f_1 y$ et $f_2$ sont de classe $C^0$ et $h_0$, $e_0$ et $f_0$ sont zéro à l'origine.*

Dans le contexte du Théorème 1.1, ces termes de couplage $h_1$, $e_1$ et $f_1$ sont gênants. Pourtant la stabilisabilité asymptotique globale peut n'être possible qu'en raison de la présence de ces termes. Ainsi, le système linéaire

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{X}_1 & = & a\,Y \\ \dot{Y} & = & -Y \,+\, u\end{array}\right. \tag{2.2}$$

est-il stabilisable si et seulement si $a \neq 0$, i.e. si et seulement si un terme de couplage est présent. Comme nous l'avons remarqué à la section 1.2, on peut espérer que récrire (2.1) dans des coordonnées appropriées permette de retrouver la forme (1.4). Ainsi, en posant :

$$x_1 \;=\; X_1 \,+\, a\,Y \quad , \qquad y \;=\; Y \;, \tag{2.3}$$

le système (2.2) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl}\dot{x}_1 & = & a\,u \\ \dot{y} & = & -y \,+\, u\end{array}\right. \tag{2.4}$$

de sorte que les hypothèses A1 et A2 sont alors satisfaites lorsque $a \neq 0$. Malheureusement, l'espoir de trouver explicitement ces coordonnées appropriées est vain en général. Se pose donc la question de savoir s'il y a moyen de se contenter d'une approximation "calculable" du changement de coordonnées idéal mais "incalculable".

Dans ce qui suit, nous commençons par définir un contexte dans lequel la stabilisation asymptotique globale peut être établie qui est le moins restrictif concernant les termes $h_1$, $e_1$ et $f_1$ que nous avons pu obtenir. Celui-ci fixe les objectifs que devront atteindre les changements de coordonnées, étudiés dans un deuxième temps, pour donner la "presque-annulation" de ces termes.

## 2.2 Synthèse de Lyapunov.

### 2.2.1 Résultat.

Dans (1.4), lorsque $u$ est nul, le sous système en $(x_1, x_2)$ est faiblement dissipatif. Dans (2.1), ce sous système est perturbé par un terme dépendant de $y$. Ainsi d'une certain façon, les composantes $x_1$ et $x_2$ intègrent-elles des fonctions de $y$ – d'où ce nom d'ajout d'intégration –. Or, grâce à des propriétés de stabilité asymptotique du sous-système en $y$, on peut espérer que ses solutions $y(t)$ sont intégrables en un certain sens. C'est cette propriété d'intégrabilité que nous allons chercher à exploiter pour montrer que la technique de Jurdjevic et Quinn introduite pour (1.4) s'applique à (2.1). Pour cela, nous supposons que le système (2.1), privé des non linéarités $h_1 y$, $e_1 y$ et $f_1 y$, vérifie les hypothèses A1 et A2 que nous reprenons ici pour faciliter la lecture.

**Hypothèse B1 :** *Il existe trois fonctions de classe $C^1$ définies positives et propres $Q, S$ et $V$ telles que :*

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_0(x_1) &= -R(x_1) \leq 0 \qquad \forall\, x_1 \,, && (2.5)\\ \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2) e_0(x_2) &= -T(x_2) < 0 \qquad \forall\, x_2 \neq 0 \,, && (2.6)\\ \frac{\partial V}{\partial y}(y) f_0(y) &= -W(y) < 0 \qquad \forall\, y \neq 0 \,. && (2.7) \end{aligned}$$

**Hypothèse B2 :** *La solution $x_1 = 0$ est la seule solution de :*

$$\dot{x}_1 = h_0(x_1) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_2(x_1, 0, 0, 0) = 0 \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_0(x_1) = 0 \,. \qquad (2.8)$$

Ces hypothèses ne permettent pas d'appliquer la technique de Jurdjevic et Quinn directement. En effet, lorsque $u = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{Q(x_1) + S(x_2) + V(y)}} = -R(x_1) - T(x_2) - W(y) + \tfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_1(x_1, x_2, y) y \qquad (2.9)\\ + \tfrac{\partial S}{\partial x_2}(x_2) e_1(x_1, x_2, y) y + \tfrac{\partial V}{\partial y}(y) f_1(x_1, x_2, y) y \,. \end{aligned}$$

Par conséquent, $Q(x_1) + S(x_2) + V(y)$ ne permet pas d'obtenir (1.2). Pour parvenir à construire une fonction $\mathcal{U}$ satisfaisant (1.2) que requiert la technique de Jurdjevic et Quinn, et donc garantir la stabilité du système (2.1) à commande nulle, introduire des contraintes sur $h_1, e_1, f_1$ est nécessaire. Tel est le rôle de la condition (2.10) de l'hypothèse B3.1 qui suit. Par ailleurs, la technique de Jurdjevic et Quinn requiert d'une part que la fonction à assigner soit Lipschitz continue et d'autre part que sa dérivée le long du système à stabiliser bouclé avec une certaine loi de commande soit continue et cela afin que le principe d'invariance de LaSalle puisse s'appliquer. Ceci justifie la présence de la condition (2.12) de l'hypothèse B3.1 et de l'hypothèse B3.2 qui suivent.

**Hypothèse B3:**
**B3.1 :** *Il existe une fonction $\rho$ positive, définie et continue sur $[0,+\infty)$ et une fonction $\kappa$ positive, définie et continue sur $(0,+\infty)$, telles que :*

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_1(x_1,x_2,y)\, y\right| \;+\; \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\, e_1(x_1,x_2,y)\, y\right| \;\leq \tag{2.10}$$

$$\sqrt{\kappa(V(y))W(y)}\,(1+\rho(Q(x_1)+S(x_2)))\left[\sqrt{\kappa(V(y))W(y)}\,(1+\rho(Q(x_1)+S(x_2)))+\sqrt{T(x_2)}\right] \;.$$

*et de plus, $\kappa$ et $\rho$ sont telles que :*

$$\frac{1}{1+\rho} \;\notin\; L^2\left([0,+\infty)\right) \;, \tag{2.11}$$

$$\forall\, c_1 > 0\,,\; \exists\, c_2 : \quad \{y \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}\,,\, |y| \leq c_1\} \quad\Longrightarrow\quad \kappa(V(y))\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right| \;\leq\; c_2\;. \tag{2.12}$$

*Enfin, $V$, $W$ et $f_1$ vérifient :*

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_1(x_1,x_2,y)\, y \;\leq\; \frac{1}{4}\, W(y)\;. \tag{2.13}$$

**B3.2 :** *La fonction $\kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x_1,x_2,y,u)$ est continue sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^q$.*

**Théorème 2.1** *Si les hypothèses B0, B1, B2 et B3 sont vérifiées, alors pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0,+\infty]$, l'origine du système (2.1) est globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback d'état borné par $\overline{u}$ et zéro à l'origine.*

### 2.2.2 Discussion autour des hypothèses du Théorème 2.1.

Les hypothèses B1 et B2 sont identiques aux hypothèses A1 et A2 du Théorème 1.1. Les nouvelles hypothèses introduites sont B3.1 et B3.2.

**L'hypothèse B3.1.** L'hypothèse B3.1 concerne les termes de couplage $h_1, e_1, f_1$ et a pour but de limiter l'importance de ceux-ci suffisamment pour que la technique de Jurdjevic et Quinn puisse être étendue au système (2.1) :

- La condition (2.13) implique que, quelques puissent être les fonctions (mesurables) $x_1(t), x_2(t)$, le terme $f_1$ n'ôte pas la propriété de stabilité asymptotique à l'origine du sous système en $y$.
- Les autres conditions de B3.1 apportent des restrictions sur les comportements de $h_1$ et de $e_1$. Plus précisément,
  - La condition de régularité (2.12) est une contrainte qui porte sur un voisinage de $y = 0$.
  - À l'inverse, la condition de non intégrabilité (2.11) est une contrainte à l'infini en $(x_1, x_2)$.

Voici un cas simple dans lequel ces conditions sont satisfaites. Il est constitué, en plus des hypothèses B1 et B2, de l'ensemble des trois hypothèses suivantes, introduites dans [28] et supposant :

$$f_1(x_1, x_2, y) \;\equiv\; 0 \;, \tag{2.14}$$

1. La solution $y = 0$ de $\dot{y} = f_0(y)$ est localement exponentiellement stable.
2. Les fonctions $Q$ et $S$ vérifient :

$$\limsup_{|x_1|\to+\infty} \frac{\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\right| |x_1|}{Q(x_1)} \;<\; +\infty \quad , \qquad \limsup_{|x_2|\to+\infty} \frac{\left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\right| |x_2|}{S(x_2)} \;<\; +\infty \;. \tag{2.15}$$

3. Il existe une fonction continue[1] $\gamma$ telle que, pour tout $(x_1, x_2, y)$,

$$|h_1(x_1, x_2, y)| \;\leq\; (1 + |x_1|)\, \gamma(|y|) \quad , \qquad |e_1(x_1, x_2, y)| \;\leq\; (1 + |x_2|)\, \gamma(|y|) \;. \tag{2.16}$$

En effet, grâce point 3 puis 2, l'inégalité (2.10) s'écrit :

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_1(x_1, x_2, y)\, y\right| \;+\; \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\, e_1(x_1, x_2, y)\, y\right| \tag{2.17}$$

$$\leq\; \left[\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\right| (1 + |x_1|) + \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\right| (1 + |x_2|)\right] |y|\, \gamma(|y|) \;, \tag{2.18}$$

$$\leq\; c_1 \left[1 + Q(x_1) + S(x_2)\right] |y|\, \gamma(|y|) \;, \tag{2.19}$$

où $c_1$ est un nombre réel positif. Il nous suffit donc de choisir les fonctions $\rho$ et $\kappa$ vérifiant :

$$\rho(s) \;=\; \sqrt{1+s} - 1 \quad , \qquad c_1\, |y|\, \gamma(|y|) \;\leq\; \kappa(V(y))\, W(y) \;, \tag{2.20}$$

les fonctions $V$ et $W$ étant celles données par l'hypothèse B1. Ainsi (2.11) est satisfaite. De plus, avec le point 1, les fonctions $V$ et $W$ peuvent être prises telles que :

$$\alpha_1|y|^2 \;<\; V(y) \;<\; \alpha_2|y|^2 \;, \quad \alpha_3|y|^2 \;<\; W(y) \;<\; \alpha_4|y|^2 \;, \quad \forall\, y \;:\; |y| \;\leq\; \alpha_5 \tag{2.21}$$

où les $\alpha_i$ sont des nombres réels strictement positifs (voir le Lemme 6.2 et l'Annexe G). Comme $V$ est de classe $C^1$, on a de plus :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right| \;\leq\; \alpha_6|y| \tag{2.22}$$

où $\alpha_6$ est un nombre réel strictement positif. Donc, pour satisfaire (2.12), il suffit de prendre, pour $s \leq 1$,

$$\kappa(s) \;=\; \frac{c_3}{\sqrt{s}} \;, \tag{2.23}$$

où $c_3$ est un nombre réel positif. Grâce au Lemme E.1, la définition de $\kappa$ peut être prolongée sur $]1, +\infty[$ de telle sorte que (2.20) soit satisfaite. Enfin, avec (2.14), (2.13) est trivialement vérifiée. Nous avons donc montré que l'hypothèse B3.1 est satisfaite.

[1] non nécessairement nulle en zéro.

**L'hypothèse B3.2** L'hypothèse B3.2 impose une condition de régularité supplémentaire en $y = 0$. Par exemple, dans le contexte des trois points du paragraphe précédent, le point 1 fait que la fonction $V$ peut être prise $C^2$ au voisinage de 0 et telle que :

$$\limsup_{y\to 0} \frac{\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y) - y^\top \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0)\right|}{W(y)} \;<\; +\infty \;. \tag{2.24}$$

Avec (2.12), on en déduit que B3.2 implique la continuité de la fonction $|y|\kappa(V(y))\frac{y^\top}{|y|}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0)f_2(x_1,x_2,y,u)$ . Or, s'il existe un point $(x_1,u)$ tel que :

$$f_2(x_1,0,0,u) \;\neq\; 0 \;, \tag{2.25}$$

la fonction $\frac{y^\top}{|y|}\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0)f_2(x_1,x_2,y,u)$ est discontinue en $y = 0$. Il est donc nécessaire d'avoir :

$$\lim_{y\to 0} |y|\,\kappa(V(y)) \;=\; 0 \;. \tag{2.26}$$

Mais alors, avec (2.20) et (2.21), on obtient la contrainte suivante :

$$\gamma(0) \;=\; 0 \;. \tag{2.27}$$

En résumé, dans le contexte des trois hypothèses du paragraphe précédent, si (2.25) est vérifiée en un point, l'hypothèse B3.2 implique, en particulier, que la fonction $h_1(x_1,x_2,y)y$ a un zéro d'ordre strictement supérieur à 1 en $y = 0$. (Voir les définitions de base). Remarquons que la condition (2.25) est une condition nécessaire de stabilisabilité asymptotique dans le cas où $h_2 \equiv 0$, $f_2$ ne dépendent pas de $u$ et où $x_1 = 0$ est une solution de $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$ stable mais non asymptotiquement stable. En effet, si le système est asymptotiquement stabilisable, d'après le Théorème d'Artstein [1], il existe une fonction aussi régulière que l'on veut $\mathcal{U}$, définie positive et propre telle que :

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x_1,x_2,y) \;=\; 0 \quad , \quad (x_1,x_2,y) \;\neq\; 0 \tag{2.28}$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(x_1,x_2,y)\,(h_0(x_1)+h_1(x_1,x_2,y)y)+\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_2}(x_1,x_2,y)\,(e_0(x_2)+e_1(x_1,x_2,y)y) \;<\; 0 \;.$$

En particulier, pour $y = 0$, $x_2 = 0$, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial y}(x_1,0,0)f_2(x_1,0,0) & = & 0 \\ x_1 & \neq & 0 \end{array}\right\} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(x_1,0,0)h_0(x_1) \;<\; 0 \;. \tag{2.29}$$

Mais si $f_2(x_1,0,0) = 0$ pour tout $x_1$, alors on aurait

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial x_1}(x_1,0,0)h_0(x_1) \;<\; 0 \quad , \quad \forall\, x_1 \;\neq\; 0 \;. \tag{2.30}$$

Ceci est en contradiction avec l'hypothèse faite que $x_1 = 0$ n'est pas solution asymptotiquement stable de $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$.

Pour permettre au lecteur de se faire une idée plus précise de ce que sont B3.1, B3.2 et du lien qui les lies, nous proposons l'exemple suivant :

**Example 2.2 :** Soit le système de dimension trois suivant[2] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & y^{n_1} + x_1^{a_1} y^{p_1} + x_2^{b_1} y^{m_1} + h_2(x_1, x_2, y, u) u \\ \dot{x}_2 & = & -\, x_2^{c_2} + y^{n_2} + x_1^{a_2} y^{p_2} + x_2^{b_2} y^{m_2} \\ \dot{y} & = & -\, y^q + y^q f_1 + y^r u \end{array} \right. \tag{2.31}$$

où la fonction $h_2$ est $C^1$, les exposants $a_1$, $a_2$, $b_1$, $b_2$, $c_2$, $q$ et $r$ sont non négatifs et les exposants $p_1$, $p_2$, $m_1$, $m_2$, $n_1$ et $n_2$ sont supérieurs ou égaux à 1. Pour simplifier, prenons $c_2 = 1$ et $b_1 \geq 1$. L'hypothèse B1 est satisfaite si nous prenons :

$$V(y) \;=\; \frac{1}{2}|y|^2 \,, \quad Q(x) \;=\; S(x) \;=\; \frac{1}{2}|x|^2 \;. \tag{2.32}$$

On obtient en effet :

$$W(y) \;=\; |y|^{q+1} \,, \quad R(x_1) \;=\; 0 \,, \quad T(x_2) \;=\; |x_2|^2 \;. \tag{2.33}$$

L'hypothèse B2 se réduit à la condition :

$$h_2(x_1, 0, 0, 0) \;\neq\; 0 \quad , \quad \forall\, x_1 \neq 0 \;. \tag{2.34}$$

L'inégalité (2.13) est satisfaite si :

$$|f_1| \;\leq\; \frac{1}{4} \;. \tag{2.35}$$

Enfin, nous montrons en Annexe I, qu'avec le choix fait ci-dessus pour les fonctions $V$, $Q$ et $S$, une condition nécessaire et suffisante pour que B3 soit vérifiée est que ce qui suit le soit :

$$\max\{a_1, b_2, a_2\} \;\leq\; 1 \quad , \quad b_1 \;=\; 1 \;, \tag{2.36}$$

et

$$q \;<\; \min\{n_1, p_1, 2n_2, 2m_2, 2p_2, 2m_1\} \tag{2.37}$$

ou bien

$$q \;=\; \min\{n_1, p_1, 2n_2, 2m_2, 2p_2, 2m_1\} \quad , \quad r \;>\; 0 \;. \tag{2.38}$$

Les conditions (2.36) donnent des bornes supérieures pour les exposants des termes en $x_1$ et $x_2$. Ceci traduit bien une limitation sur le comportement à l'infini en ces variables.

Avec (2.37) ou (2.38), c'est le phénomène inverse qui se produit pour les exposants des termes en $y$. Cette fois c'est le comportement autour de $y = 0$ qui est en question. Or, pour ce qui est du système général (2.1), il apparaît que de façon générique, le terme de gauche de (2.10) n'est que d'ordre 1 en $y = 0$ ce qui implique que $\kappa(V(y))W(y)$ doit être également d'ordre 1 en $y = 0$. Pour le système (2.31), ceci se traduit par l'égalité :

$$\min\{n_1, p_1, m_1, n_2, p_2, m_2\} \;=\; 1 \;. \tag{2.39}$$

Il est donc nécessaire que le sous système en $y$ ait au voisinage de $y = 0$ une attractivité suffisamment forte pour que (voir (2.37) et (2.38)) :

$$q \;\leq\; 2 \;. \tag{2.40}$$

En remarquant que $q = 1$ garanti la stabilité exponentielle, il devient aisé de comprendre la raison pour laquelle nous avons mentionné au cours de notre discussion sur l'hypothèse B3.1, la condition de stabilité exponentielle locale de l'origine du système $\dot{y} = f_0(y)$. ◇

[2] La notation $x^\alpha$ représente la fonction signe$(x)|x|^\alpha$.

#### 2.2.2.1 Stabilité du sous-système en $(x_1, x_2)$ lorsque $y = 0$ et $u = 0$.

D'après l'hypothèse B1, l'origine doit être une solution stable pour chacun des systèmes $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$ et $\dot{x}_2 = e_0(x_2)$. Cette restriction est justifiée par l'exemple suivant qui est obtenu en modifiant [34, Example 3.4].

**Example 2.3 :** Considérons le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & m\,x \;+\; u \;, \\ \dot{y} & = & -\,ay \;-\; y^3 \;-\; y^3\,u \end{array} \right. \tag{2.41}$$

où $a$ est un nombre réel strictement positif. Les hypothèses B2 et B3 sont satisfaites, mais B1 ne l'est que si $m \leq 0$. En fait, pour $m > 2a$, il n'existe pas de feedback dynamique asymptotiquement stabilisant. En effet, dans ce cas, l'ensemble

$$E \;=\; \left\{ (x,y) \,\middle|\, y \neq 0 \quad \frac{1}{2y^2} - x + \frac{1}{m} \leq 0 \right\} \;,$$

dont l'adhérence ne contient pas l'origine, est positivement invariant quoique $u$ puisse être. Prouvons cela :

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{\frac{1}{2y^2} - x + \frac{1}{m}}^{\cdot} & = & -\frac{1}{y^3}\left(-\,ay - \,y^3 \,-\, y^3 u\right) - \,(mx+u) \\ & = & \frac{a}{y^2} + 1 - \,mx \\ & = & m\left(\frac{a}{my^2} + \frac{1}{m} - \,x\right) \\ & < & m\left(\frac{1}{2y^2} - \,x + \frac{1}{m}\right) \;\leq\; 0 \;. \end{array} \tag{2.42}$$

Nous en déduisons que, dans le cas général, $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$ et $\dot{x}_2 = e_0(x_2)$ ne peuvent être instables sans une hypothèse supplémentaire sur $f_0$. ◇

#### 2.2.2.2 Restriction sur le comportement à l'infini en $(x_1, x_2)$ de $h_1$ et $e_1$

Nous avons remarqué que la condition de non intégrabilité (2.11) impose une restriction sur le comportement à l'infini en $(x_1, x_2)$ des fonctions $h_1$ et $e_1$. Cette restriction ne doit pas surprendre. En effet, elle a pour but de prévenir un phénomène d'instabilité fort semblable à celui dit de peaking mis en lumière dans [67] et dans [69]. Dans [67], il est notamment prouvé que, pour toute commande en boucle ouverte, il existe des trajectoires du système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & (x_1 y_1 - 1)\, x_1^3 + \left(x_1 y_1 + y_2^2 - 1\right) x_1 \\ \dot{y}_1 & = & y_2 \\ \dot{y}_2 & = & -y_1 \;-\; y_2 \;+\; u \end{array} \right. \tag{2.43}$$

qui vont à l'infini en temps fini. Le fait que, pour tout $(y_1, y_2) \neq 0$, la fonction $x_1 \longmapsto x_1^4 + x_1^2$, qui multiplie $y_1$, ne puisse être majorée par une fonction $\rho\left(x_1^2\right)$, telle que $\frac{1}{(1+\rho)^2}$ soit non intégrable, joue un rôle prépondérant.

L'exemple qui suit montre, de façon plus spécifique que (2.43), qu'il est impossible de supprimer cette hypothèse de non intégrabilité de $\frac{1}{(1+\rho)^2}$ sans en imposer quelqu'autres.

**Example 2.4 :** Lorsque nous avons étudié le système (2.31), nous avons vu que (2.11) impliquait $a_1 \leq 1$. L'exemple de système que nous considérons maintenant montre que des systèmes qui ne vérifient pas cette condition, mais vérifient toutes les autres imposées par B1, B2 et B3 peuvent ne pas être globalement asymptotiquement stabilisables.

Considérons le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & \frac{u}{1+u^2} + y^2 x_1^n \\ \dot{y} & = & -\frac{1}{2} y \end{array} \right. \tag{2.44}$$

avec $n \geq 1$. L'hypothèse B1 est vérifiée avec :

$$Q(x_1) \;=\; \tfrac{1}{2}\, x_1^2 \quad , \qquad V(y) = \tfrac{1}{2}\, y^2 \;. \tag{2.45}$$

L'hypothèse B2 l'est aussi puisque :

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1).1 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \;=\; 0 \;. \tag{2.46}$$

**Cas $n = 1$ :** On obtient alors un système du type (2.31) satisfaisant (2.36). L'hypothèse B3 est donc satisfaite.

**Cas $n > 1$ :** Remarquons tout d'abord qu'il n'existe pas de fonction $\rho$ telle que $\frac{1}{(1+\rho)^2}$ soit non intégrable et que l'inégalité :

$$\left| x_1 y^2 x_1^n \right| \;\leq\; y^2 \left( 1 + \rho \left( \frac{1}{2} x_1^2 \right) \right) \quad . \tag{2.47}$$

soit vérifiée. Nous ne savons donc pas vérifier si l'hypothèse B3 est satisfaite.

En fait, dans ce cas, le système (2.44) n'est pas globalement asymptotiquement stabilisable. Pour montrer ceci, il suffit de remarquer que l'ensemble $\left\{ (x_1, y) \;:\; x_1 > 1 \;,\; y^2 x_1^{n-1} > \frac{4}{n-1} + 3 \right\}$, qui ne contient pas l'origine dans son adhérence, est positivement invariant quoique $u$ puisse être. En effet, en posant :

$$z \;=\; y^2 x_1^{n-1} \;, \tag{2.48}$$

on a l'implication :

$$\{(x_1, y) \in E\} \qquad \Longrightarrow \qquad \{\dot{z} \;>\; 0 \;, \quad \dot{x}_1 \;>\; 0\} \;. \tag{2.49}$$

Cette implication résulte du fait que, pour tout point de $E$, on a :

$$\tfrac{1}{2}\, y^2\, x_1^n \;>\; \tfrac{3}{2} \;>\; \left| \frac{-\,u}{1+u^2} \right| \quad , \qquad z \;>\; \frac{4}{n-1} + 3 \;. \tag{2.50}$$

Donc, puisque :

$$\dot{z} \;=\; -\,z + (n-1) y^2 x_1^{n-2} \left( \frac{u}{1+u^2} + y^2 x_1^n \right) \;, \tag{2.51}$$

pour tout point de $E$, on obtient :

$$\dot{z} \;\geq\; -\,z + \frac{1}{2}(n-1) y^2 x_1^{n-2} y^2 x_1^n \;=\; -\,z + \frac{n-1}{2} z^2 \;\geq\; 3 \tag{2.52}$$

et, par ailleurs,

$$\dot{x}_1 \;\geq\; -1 + z \;\geq\; 2 \;. \tag{2.53}$$

◇

#### 2.2.2.3 Restriction sur le comportement des fonctions au voisinage de $y = 0$.

Nous avons également observé que l'hypothèse B3 impose des limitations sur le comportement des fonctions au voisinage de $y = 0$. Cette restriction est motivée par les deux exemples suivants.

**Example 2.5 :** Considérons le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & y + u \ , \\ \dot{y} & = & -y^3 + yu \ . \end{array} \right. \tag{2.54}$$

Les hypothèses B1 et B2 du Théorème 2.1 sont vérifiées, mais, en employant les notations du système (2.31), on a :

$$q \ > \ n_1 \ . \tag{2.55}$$

Ni l'inégalité (2.37) ni l'inégalité (2.38) ne sont satisfaites et donc nous ne savons pas si B3 l'est. Plus précisément, on observe[3] que l'origine de ce système (2.54) n'est pas stable lorsque $u = 0$. Or lorsque B1, B2 et B3 sont vérifiées il y a stabilité globale lorsque $u = 0$ (voir Lemme 2.7). Donc il est nécessaire qu'une des hypothèses B1, B2 ou B3 ne soit pas satisfaite.

En fait, ce système (2.54) n'est pas globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback d'état dynamique continu et stationnaire. Il ne satisfait pas la condition nécessaire de Brockett (voir [66]) puisque l'image d'un petit voisinage de 0 par la fonction $(x_1, y, u) \mapsto \big(y + u\,,\, -y^3 + uy\big)$ ne contient pas un voisinage de 0. On peut vérifier en effet que l'image par l'application :

$$(x, y) \ \mapsto \ \big(y + u\,,\, -y^3 + uy\big)$$

de l'ouvert $]-1, 1[^2$ ne contient pas l'ensemble $\{(0, \eta) | \, \eta > 0\}$. ◇

**Example 2.6 : (Suggestion de Andrew Teel).** Le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1|y| + y|y| + u \\ \dot{y} & = & -y - u \end{array} \right. \tag{2.56}$$

satisfait les hypothèses B1 et B2. Mais, pour vérifier la condition (2.10) nous devons prendre une fonction $\kappa$ vérifiant :

$$\kappa(V(y)) \ \geq \ \frac{|y|}{\frac{\partial V}{\partial y}(y)y} \ . \tag{2.57}$$

Par exemple, en prenant :

$$V(y) \ = \ \tfrac{1}{2}\, y^2 \ , \quad \kappa(v) \ = \ \frac{2}{\sqrt{v}} + 1 \ , \quad Q(x_1) \ = \ \tfrac{1}{2}\, x_1^2 \ , \quad \rho(q) \ = \ \sqrt{q+1} \ - \ 1 \ , \tag{2.58}$$

l'hypothèse B3.1 est satisfaite. Mais par ailleurs, pour toute fonction $\kappa$ satisfaisant (2.57) et pour toute constante $c > 0$, nous devons avoir à la fois :

$$\frac{\partial V}{\partial y}(c)\kappa(V(c)) \ \geq \ 1 \tag{2.59}$$

et

$$\frac{\partial V}{\partial y}(-c)\kappa(V(-c)) \ \leq \ \frac{c}{-c} \ = \ -1 \ . \tag{2.60}$$

[3] La fonction $y(t) = \frac{y_0}{\sqrt{1+2y_0^2 t}}$ n'est pas intégrable sur $[1, +\infty)$.

La fonction $\frac{\partial V}{\partial y}(y)\kappa(V(y))$ ne peut donc être continue à l'origine. Ceci implique que B3.2 n'est pas vérifiée.

En fait, le système (2.56) n'est pas globalement asymptotiquement stabilisable. En effet, en posant :

$$\chi_1 \; = \; x_1 \; + \; y \; , \tag{2.61}$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\chi}_1 & = & -y + \chi_1 |y| \\ \dot{y} & = & -y - u \end{array} \right. \tag{2.62}$$

On voit donc que l'ensemble des points vérifiant $\chi_1 \geq 1$, dont l'adhérence ne contient pas l'origine, est positivement invariant, pour tout $u$. $\diamond$

### 2.2.3 Preuve du Théorème 2.1.

#### 2.2.3.1 Preuve.

Cette preuve est constructive et, par les diverses idées qu'elle utilise, est plus importante que le résultat du Théorème 2.1 lui même.

Nous commençons par quelques remarques préliminaires.

1. Pouvant ajouter 1 à $\kappa$ si nécessaire, nous pouvons supposer que cette fonction n'appartient pas à $L^1([1, +\infty))$.
2. Grâce à (2.12) et l'hypothèse B0, les fonctions $\kappa(V(y))W(y)$ et $\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_1(x_1, x_2, y)y$ peuvent être étendues à des fonctions continues sur l'espace entier.
3. $\kappa$ étant continue sur $(0, +\infty)$ et $V$ étant de classe $C^1$ et définie positive, nous avons :

$$\int_{V(y_1)}^{V(y_2)} \kappa(s)ds \; = \; \int_0^1 \kappa\left(V(y_1 + s(y_2 - y_1))\right) \frac{\partial V}{\partial y}\left(y_1 + s(y_2 - y_1)\right)(y_2 - y_1)\, ds \; , \tag{2.63}$$

pour tout $y_1$ et $y_2$ dans $\mathbb{R}^n$ et tels que l'origine appartenant au segment $[y_1, y_2]$.

4. La condition (2.12) implique $\int_0^1 \kappa\left(V(sy)\right)\frac{\partial V}{\partial y}(sy)y\, ds$ est une intégrale de Riemann bien définie.

Ces divers points nous permettent de conclure que la fonction :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} k(y) & = & \displaystyle\lim_{i \to +\infty} \int_{V(\frac{1}{i}y)}^{V(y)} \kappa(s)ds \quad \forall\, y \neq 0 \; , \\ k(0) & = & 0 \; , \end{array} \right. \tag{2.64}$$

est bien définie, propre et Lipschitz continue sur $\mathbb{R}^n$ et satisfait :

$$k(y_2) \; - \; k(y_1) \; = \; \int_0^1 \kappa\left(V(y_1 + s(y_2 - y_1))\right) \frac{\partial V}{\partial y}\left(y_1 + s(y_2 - y_1)\right)(y_2 - y_1)\, ds \; , \tag{2.65}$$

pour tout $y_1$ et $y_2$ dans $\mathbb{R}^n$. Avec la définition (24), l'hypothèse (2.12), cette identité, et la continuité des fonctions $[f_0 + f_1 y + f_2 u]$ et $\kappa(V)\frac{\partial V}{\partial y}[f_0 + f_1 y + f_2 u]$, nous pouvons établir l'équation :

$$\dot{k}_{(2.1)}(x_1, x_2, y, u) \; = \; \kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)\left[f_0(y) + f_1(x_1, x_2, y)y + f_2(x_1, x_2, y, u)u\right] \; . \tag{2.66}$$

Ainsi, la fonction $k(y(t))$ est elle une fonction du temps de classe $C^1$ lorsqu'est employée une loi de commande continue.

Maintenant, notons par $l$ la fonction qui est zéro en zéro, de classe $C^1$, définie positive et propre sur $[0,+\infty)$ dont la dérivée $l'$ est (voir (2.11)) :

$$0 \; < \; l' \; = \; \frac{1}{(1+\rho)^2} \; . \tag{2.67}$$

Grâce à ces notations, nous pouvons introduire la fonction de Lyapunov susceptible d'être assignée suivante :

$$U(x_1, x_2, y) \; = \; l(Q(x_1) + S(x_2)) \; + \; \tfrac{7}{3}\, k(y) \; . \tag{2.68}$$

Elle est définie positive propre et Lipschitz continue et :

$$\begin{aligned}
\dot{U}_{(2.1)}(x_1, x_2, y, u) \; \leq \; & -\tfrac{7}{3}\, \kappa(V(y))W(y) \; + \; \mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)u \\
& + l'(Q(x_1) + S(x_2)) \left[ -R(x_1) - T(x_2) + \sqrt{\kappa(V(y))W(y)}\, [1 + \rho(Q(x_1) + S(x_2))]\, \sqrt{T(x_2)} \right] \\
& + \tfrac{7}{3}\, \kappa(V(y)) \frac{\partial V}{\partial y}(y) f_1(x_1, x_2, y) y \; + \; l'(Q(x_1) + S(x_2))\, \kappa(V(y))W(y)\, [1 + \rho(Q(x_1) + S(x_2))]^2
\end{aligned} \tag{2.69}$$

où $\mathcal{G}$ est la fonction continue (voir B0, B1, et B3.2) définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u) \; = \; & \tfrac{7}{3}\, \kappa(V(y)) \frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x_1, x_2, y, u) \\
& + l'(Q(x_1) + S(x_2)) \left[ \tfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_2(x_1, x_2, y, u) + \tfrac{\partial S}{\partial x_2}(x_2) e_2(x_1, x_2, y, u) \right] \; .
\end{aligned} \tag{2.70}$$

En complétant les carrés, on obtient finalement :

$$\dot{U}(x_1, x_2, y, u)_{(2.1)} \leq -l'(Q(x_1) + S(x_2)) \left[ R(x_1) + \tfrac{1}{2}\, T(x_2) \right] - \tfrac{1}{4}\, \kappa(V(y))\, W(y) + \mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)u \; . \tag{2.71}$$

Cette inégalité est le point clé de notre analyse. Elle a été établie en utilisant seulement les hypothèses B0, B1 et B3.1. A partir de ce point, nous pouvons conclure la preuve exactement comme l'avait été celle du Théorème 1.1, en invoquant le lemme 1.6. En effet, (2.71) est équivalent à (1.21).

□

Un point important établi par cette preuve est que l'inégalité (2.71) est satisfaite sous les conditions B0, B1 et B3.1. Nous voyons ainsi que la fonction $U$ est une fonction satisfaisant (dans un contexte moins régulier) le point 1 que nous avons mentionné dans le chapitre 1 pour appliquer la technique de Jurjevic et Quinn. Aussi avons nous le résultat suivant :

**Lemme 2.7** *Si les hypothèses B0, B1 et B3.1 sont vérifiées, alors l'origine du système (2.1) est un point d'équilibre globalement stable lorsque $u = 0$.*

Ce résultat de stabilité sera utilisé au chapitre 3 pour construire une autre fonction de Lyapunov permettant d'appliquer la technique de Jurdjevic et Quinn.

Observons enfin que la dérivée $\dot{U}(x_1, x_2, y)_{(2.1)}$ est rendue définie négative si :

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_0(x_1) \right| \; + \; \left| \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_2(x_1, 0, 0, 0) \right| \; \neq \; 0 \quad , \quad \forall\, x_1 \neq 0 \; . \tag{2.72}$$

#### 2.2.3.2 Une plus grande classe de feedback stabilisant.

Pour démontrer le Théorème 2.1, nous avons proposé deux lois de commande qui réalisent statiquement ou dynamiquement :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)\, u \;\leq\; 0 \;, \tag{2.73}$$

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, 0, 0) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \mathcal{G}(x_1, x_2, 0, u)\, u \;<\; 0 \;. \tag{2.74}$$

En fait d'autres lois de commande sont possibles. Pour les mettre en évidence, il faut en premier lieu remarquer qu'il est trop restrictif d'imposer (2.73). En effet, pareil choix ne tire pas profit de la négativité apportée par le terme $-\frac{1}{4}\kappa(V(y))W(y)$, i.e. de la marge de stabilité du sous système en $y$.

Pour montrer comment ceci peut-être fait, reprenons le système (2.1) mais dans un contexte plus régulier que celui du Théorème 2.1. Ainsi, introduisons des versions plus régulières des hypothèses B0, B1 et B3.2 :

**Hypothèse B0' :** *Les fonctions $f_0$, $f_1$, $e_1$ et $h_1$ sont continues, les fonctions $f_2$, $e_0$, $e_2$, $h_0$ et $h_2$ sont de classe $C^1$ et $h_0$, $e_0$ et $f_0$ sont zéro à l'origine.*

**Hypothèse B1' :** *Les fonctions $Q, S$ et $V$ satisfont l'hypothèse B1 et sont de classe $C^2$.*

**Hypothèse B3.2' :** *La fonction $\kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x_1, x_2, y, u)$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2} \times \mathbb{R}^q$.*

Nous allons employer les notations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \Gamma_v(x_1, x_2, y) & = & \frac{7}{3}\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_2(x_1, x_2, y, 0)\,, \\ \Gamma(x_1, x_2, y) & = & l'(Q(x_1) + S(x_2))\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_2(x_1, x_2, y, 0) + \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2) e_2(x_1, x_2, y, 0)\right] . \end{array}\right. \tag{2.75}$$

Remarquons que $\Gamma_v$ dépend de $V$ et que

$$\Gamma_v(x_1, x_2, 0) \;=\; 0 \;. \tag{2.76}$$

La fonction $\Gamma$, en revanche, ne dépend pas de $V$ mais dépend de $l'$, fonction qui peut être déterminée, au moyen de (2.67), à partir de la seule donnée du sous système en $(x_1, x_2)$. Avec nos nouvelles hypothèses qui imposent plus de régularité, la fonction $\mathcal{G}$ définie en (2.70) est de classe $C^1$ par rapport à $u$, pour tout $(x_1, x_2, y)$. Plus précisément, il existe une fonction continue $\widetilde{\mathcal{G}}$ vérifiant :

$$< \widetilde{\mathcal{G}}(x_1, x_2, y, u), u > = \; \mathcal{G}(x_1, x_2, y, u) - \; \mathcal{G}(x_1, x_2, y, 0) \;. \tag{2.77}$$

Avec de telles notations, (2.70) devient simplement :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u) \;=\; \kappa(V(y))\Gamma_v(x_1, x_2, y) + \Gamma(x_1, x_2, y) + < \widetilde{\mathcal{G}}(x_1, x_2, y, u), u > \tag{2.78}$$

et (2.71) :

$$\begin{aligned} \dot{U}(x_1, x_2, y)_{(2.1)} \;\leq\; & -\tfrac{1}{2}\, l'(Q(x_1) + S(x_2))\, T(x_2) \;-\; \tfrac{1}{4}\, \kappa(V(y))\, W(y) \\ & + \;\Big[\kappa(V(y))\Gamma_v(x_1, x_2, y) + \Gamma(x_1, x_2, y) + < \widetilde{\mathcal{G}}(x_1, x_2, y, u), u > \Big]\, u \;. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Donc on peut obtenir la stabilité asymptotique globale comme dans la preuve du Théorème 2.1 lorsque on peut déterminer une fonction $u$ continue satisfaisant :

$$|y| \neq 0 \implies -\tfrac{1}{2}\, l'(Q(x_1)+S(x_2))\, T(x_2) \;-\; \tfrac{1}{4}\,\kappa(V(y))\, W(y) \tag{2.80}$$
$$+\;\Big[\kappa(V(y))\Gamma_v(x_1,x_2,y)+\Gamma(x_1,x_2,y)+<\widetilde{\mathcal{G}}(x_1,x_2,y,u),u>\Big]\, u < 0$$

$$\Gamma(x_1,x_2,0) \neq 0 \implies \Big[\Gamma(x_1,x_2,0)+<\widetilde{\mathcal{G}}(x_1,x_2,0,u),u>\Big]\, u(x_1,x_2,0) < 0 \tag{2.81}$$

$$\Gamma(x_1,x_2,0) = 0 \implies u \;=\; 0\;. \tag{2.82}$$

Nous avons :

**Proposition 2.8** *Supposons que le système (2.1) satisfait les hypothèses B0' B1', B2 et B3.1 et B3.2'. Alors pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0,+\infty]$, l'origine peut être rendue globalement asymptotiquement stable par un feedback d'état borné par $\overline{u}$ et de la forme :*

$$u(x_1,x_2,y) \;=\; -\,\beta(x_1,x_2,y)\,[\alpha(x_1,x_2,y)\kappa(V(y))\Gamma_v(x_1,x_2,y)+\Gamma(x_1,x_2,y)]^\top \tag{2.83}$$

*où $\alpha$ et $\beta$ sont des fonctions continues satisfaisant, lorsque cela est possible,*

$$\beta(x_1,x_2,y) \;\geq\; 0\;, \tag{2.84}$$
$$\Gamma(x_1,x_2,0) \;\neq\; 0 \qquad\implies\qquad \beta(x_1,x_2,0) \;>\; 0\;, \tag{2.85}$$
$$W(y) \;\geq\; 3\,\beta(x_1,x_2,y)\,[\alpha(x_1,x_2,y)-1]^2\kappa(V(y))\,|\Gamma_v(x_1,x_2,y)|^2\;, \tag{2.86}$$
$$|\widetilde{\mathcal{G}}(x_1,x_2,y,u(x_1,x_2,y))|\,\beta(x_1,x_2,y) \;\leq\; \frac{1}{3}\;, \tag{2.87}$$

*et $\beta$ est tel que $|u(x_1,x_2,y)|$ est bornée par $\overline{u}$.*

**Preuve de la proposition 2.8 :** Remarquons tout d'abord qu'en raison de B0' B1' et B3.2', la fonction $\kappa|\Gamma_v|^2$ est continue et que (2.76), (2.85) et (2.87) impliquent (2.81) et (2.82). Donc reste à établir seulement (2.80). Puisque, pour tout réels $\alpha$, $\beta$, $b$ et $c$ nous avons :

$$-\,(b+c)(\alpha b+c) \;=\; \frac{(\alpha-1)^2}{4}b^2 - \left(\frac{\alpha+1}{2}b+c\right)^2\;, \tag{2.88}$$

avec (2.83) pour lois de commande, (2.80) est impliquée par :

$$|y|\neq 0 \quad\implies \tag{2.89}$$
$$-\tfrac{1}{4}\kappa(V)W+\beta\left[\tfrac{(\alpha-1)^2}{4}|\kappa(V)\Gamma_v|^2-\left|\tfrac{\alpha+1}{2}\kappa(V)\Gamma_v+\Gamma\right|^2\right]+\beta^2|\widetilde{\mathcal{G}}|\;|\alpha\kappa(V)\Gamma_v+\Gamma|^2<0\;.$$

La fonction $\kappa(V)W$ étant définie positive en $y$ et (2.84) et (2.86) étant supposées, (2.89) est vérifiée si :

$$|y|\;\neq\;0 \implies -\tfrac{1}{8}\,[\alpha-1]^2\kappa(V)^2|\Gamma_v|^2 \;-\; \left|\frac{\alpha+1}{2}\kappa(V)\Gamma_v+\Gamma\right|^2 \;+\; \beta\,|\widetilde{\mathcal{G}}|\;|\alpha\kappa(V)\Gamma_v+\Gamma|^2 \;\leq\; 0\;. \tag{2.90}$$

Puisque (2.87) implique que cette forme quadratique en $\kappa(V)\Gamma_v$ et $\Gamma$ est semi-définie négative, la conclusion s'en suit. □

Une des caractéristiques importantes de l'expression (2.83) est que, s'il est possible de prendre $\alpha \equiv 0$, la loi de commande devient simplement (voir (2.75)) :

$$u(x_1,x_2,y) \;=\; -\,\beta(x_1,x_2,y)\,l'(Q(x_1)+S(x_2))\left[\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_2(x_1,x_2,y,0)+\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)e_2(x_1,x_2,y,0)\right] . \tag{2.91}$$

Il n'est donc pas nécessaire de connaître explicitement $V$ pour obtenir une loi de commande s'il est possible d'obtenir une expression pour $\beta$ indépendante de $V$. D'après la proposition 2.8, cette fonction $\beta$ doit satisfaire (2.84)-(2.87). Avec (2.85)-(2.86) et $\alpha = 0$, une condition nécessaire pour qu'existe une telle fonction $\beta$ est :

$$\Gamma(x_1,x_2,0) \neq 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \liminf_{y\to 0} \frac{W(y)}{\kappa(V(y))|\Gamma_v(x_1,x_2,y)|^2} > 0 \tag{2.92}$$

qui, avec la définition (2.75), est garantie si :

$$\liminf_{y\longrightarrow 0} \frac{W(y)}{\kappa(V(y))\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right|^2} \;>\; 0 \;. \tag{2.93}$$

En fait cette dernière condition est également suffisante lorsque $f_2$, $h_2$, $e_2$ sont Lipschitz en la variable $u$ sur un voisinage de l'origine. Pour voir cela, prenons deux réels $R$ et $\overline{u}$ strictement positifs et introduisons deux fonctions indépendantes de $V$ :

1. Soit $\varphi_R$ une fonction continue positive à valeur dans $[0,1]$ telle que :

$$\varphi_R(0) \;=\; 1 \quad , \qquad \varphi_R(|y|^2) \;=0 \quad \forall\, y \;:\; |y| \;\geq\; R\;. \tag{2.94}$$

2. Soit $\psi_{R,\overline{u}}$ une fonction continue satisfaisant :

$$\psi_{R,\overline{u}}(x_1,x_2) \;\geq\; \max\left\{1, \sup_{\substack{|u| \;\leq\; \overline{u} \\ |y| \;\leq\; R}} \left\{\widehat{\psi}(x_1,x_2,y,u)\right\}\right\} \tag{2.95}$$

avec :

$$\widehat{\psi}(x_1,x_2,y,u) \;=\; \frac{|f_2(x_1,x_2,y,u)-f_2(x_1,x_2,y,0)|}{|u|} \tag{2.96}$$

$$+\;\frac{\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\,[h_2(x_1,x_2,y,u)-h_2(x_1,x_2,y,0)]\right|}{|u|} \;+$$

$\dfrac{\left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\,[e_2(x_1,x_2,y,u)-e_2(x_1,x_2,y,0)]\right|}{|u|}$ . Une telle fonction existe car les fonctions $f_2$, $h_2$, $e_2$ sont de classe $C^1$.

Nous avons :

**Proposition 2.9** *Supposons que le système (2.1) satisfasse les hypothèses B0', B1', B2, B3.1 et B3.2' et que $f_2$, $h_2$, $e_2$ soient localement lipschitzienne à l'origine en la variable $u$. Alors si de plus $\kappa$ est telle que :*

$$\liminf_{y\longrightarrow 0} \frac{W(y)}{\kappa(V(y))\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right|^2} \;>\; 0 \;, \tag{2.97}$$

*il existe pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0,+\infty)$ un réel positif $\mu^\star$ appartenant à $(0,\overline{u}]$ tel que l'origine du système (2.1) est globalement asymptotiquement stabilisé par un feedback d'état borné par $\overline{u}$ et de la forme :*

$$u(x_1,x_2,y) \;=\; -\,\frac{\mu\,\varphi_R(|y|^2)\,\Gamma(x_1,x_2,y)^\top}{\psi_{R,\overline{u}}(x_1,x_2)\,(1+|\Gamma(x_1,x_2,y)|)\,(1+|f_2(x_1,x_2,y,0)|^2)} \tag{2.98}$$

*où $\mu$ est un réel appartenant à $(0,\mu^\star]$ et $\Gamma$ est la fonction définie en (2.75).*

**Preuve :** Puisque (2.98) est obtenu à partir de (2.83), en prenant :

$$\alpha(x_1,x_2,y) \;=\; 0\,, \tag{2.99}$$

$$\beta(x_1,x_2,y) \;=\; \frac{\mu\,\varphi_R(|y|^2)}{\psi_{R,\overline{u}}(x_1,x_2)\,(1+|\Gamma(x_1,x_2,y)|)\,(1+|f_2(x_1,x_2,y,0)|^2)}\,, \tag{2.100}$$

il suffit de vérifier qu'on a (2.84)-(2.87). Les conditions (2.84)-(2.85) sont satisfaites, par définition, et nous avons :

$$|u(x_1,x_2,y)| \;\leq\; \overline{u}\,. \tag{2.101}$$

Pour voir que (2.86) est également vérifiée, nous utilisons le lemme suivant :

**Lemme 2.10** *Si (2.97) est vérifiée, il existe un réel strictement positive $\xi_W$ tel que :*

$$\frac{W(y)}{\kappa(V(y))\,|\Gamma_v(x_1,x_2,y)|^2} \;\geq\; \frac{\xi_W\,\varphi_R(|y|^2)}{1+|f_2(x_1,x_2,y,0)|^2}\,. \tag{2.102}$$

**Preuve :** Nous déduisons immédiatement de (2.97) que :

$$\inf_{|y|\leq R} \frac{W(y)}{\kappa(V(y))\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right|^2} \;=\; \xi_W \;>\; 0\,. \tag{2.103}$$

Donc :

$$\inf_{|y|\leq R} \frac{W(y)}{\kappa(V(y))\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x_1,x_2,y,0)\right|^2} \;\geq\; \frac{\xi_W}{1+|f_2(x_1,x_2,y,0)|^2} \quad,\quad \forall y\,:\,|y|\;\leq\;R\,. \tag{2.104}$$

Grâce à la définition de $\varphi_R$, l'inégalité (2.102) s'en suit. $\diamond$

Alors, puisque (2.100) implique que $\beta(x_1,x_2,y)$ est nulle quand $|y|$ est plus large que $R$, il s'en suit que :

$$3\,\beta(x_1,x_2,y)\,\kappa(V(y))\,|\Gamma_v(x_1,x_2,y)|^2 \;\leq\; \frac{3\mu}{\xi_W}\,W(y)\,. \tag{2.105}$$

Par conséquent (2.86) est vérifiée lorsque $\mu < \frac{1}{3}\xi_W$.

Pour obtenir (2.87), un lemme est nécessaire :

**Lemme 2.11** *Il existe une constante strictement positive $\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}}$ telle que :*

$$|y|\;\leq\;R \qquad\Longrightarrow\qquad \psi_{R,\overline{u}}(x_1,x_2) \;\geq\; \xi_{\widetilde{\mathcal{G}}}\,|\widetilde{\mathcal{G}}(x_1,x_2,y,u(x_1,x_2,y))|\,. \tag{2.106}$$

**Preuve :** De la définition de $\widetilde{\mathcal{G}}$, de (2.77), (2.70), (2.67), (2.95) et de (2.101), nous déduisons que pour tout $|y|$ plus petit que $R$ :

$$|\widetilde{\mathcal{G}}(x_1, x_2, y, u(x_1, x_2, y))| \;\leq\; \left(\kappa(V(y)) \left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right| \;+\; 1\right) \psi_{R,\overline{u}}(x_1, x_2)\ . \tag{2.107}$$

L'implication (2.106) est obtenue avec :

$$\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}} \;=\; \min_{|y|\leq R} \left\{ \frac{1}{\kappa(V(y)) \left|\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right| + 1} \right\} \tag{2.108}$$

$\diamond$

Pout tout $(x_1, x_2, y)$, nous avons donc maintenant :

$$\psi_{R,\overline{u}}(x_1, x_2)\, \beta(x_1, x_2, y) \;\geq\; \xi_{\widetilde{\mathcal{G}}}\, |\widetilde{\mathcal{G}}(x_1, x_2, y, u((x_1, x_2, y)))|\, \beta(x_1, x_2, y)\ . \tag{2.109}$$

Mais par (2.100), nous obtenons :

$$\psi_{R,\overline{u}}(x_1, x_2)\, \beta(x_1, x_2, y) \;=\; \frac{\mu\, \varphi_R(|y|^2)}{(1 + |\Gamma(x_1, x_2, y)|)\, (1 + |f_2(x_1, x_2, y, 0)|^2)} \;\leq\; \mu\ . \tag{2.110}$$

Par conséquent, une constante $\mu$ satisfaisant :

$$\mu \;\leq\; \tfrac{1}{3}\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}} \tag{2.111}$$

est suffisante pour que (2.87) soit vérifiée.

Finalement, en prenant :

$$0 \;<\; \mu \;\leq\; \mu^\star \;=\; \min\left\{\tfrac{1}{3}\xi_W, \tfrac{1}{3}\xi_{\widetilde{\mathcal{G}}}, \overline{u}\right\}\ , \tag{2.112}$$

les hypothèses de la proposition 2.8 sont toutes vérifiées ce qui implique que la conclusion de la proposition 2.9 l'est également. $\square$

**Remarque 2.12 :**

1. Comme nous l'avons déjà précisé, l'intérêt de la loi de commande (2.98) vient de ce qu'elle ne dépend pas des fonctions $V$ et $k$. Par contre, elle fait intervenir le paramètre $\mu$ à régler. Nous savons qu'en le prenant suffisamment petit, nous aurons une solution $\bullet$
2. Si l'approximation linéaire du sous système en $y$ de (2.1), est asymptotiquement stable, alors $V$ peut être choisie de façon que $\frac{\partial V}{\partial y}$ soit du premier ordre et que $W$ soit bornée inférieurement par une forme quadratique définie positive sur un voisinage de zéro (voir Lemme 6.2 en Annexe G). En ce cas, la condition (2.97) est satisfaite $\bullet$
3. Si les fonctions $f_2$, $e_2$ et $h_2$ ne dépendent pas de $u$, alors $\widetilde{\mathcal{G}}$ est 0 et (2.98) se simplifie en :

$$u(x_1, x_2, y) \;=\; -\,\frac{\mu\, \varphi_R(|y|^2)\, \Gamma(x_1, x_2, y)}{(1 + |\Gamma(x_1, x_2, y)|)\, (1 + |f_2(x_1, x_2, y)|^2)}\ \bullet \tag{2.113}$$

#### 2.2.3.3 Négativité stricte.

Pour conclure les preuves de stabilité asymptotique que nous avons présentées jusqu'ici, nous avons invoqué le principe d'invariance de LaSalle. Dans ce paragraphe, nous allons montrer comment, pour une classe particulière de systèmes de la forme (2.1), la fonction de Lyapunov donnée en (2.68) peut être modifiée de telle sorte qu'elle devienne strictement assignable. Ceci nous permettra de conclure à la stabilité asymptotique par une application directe du Théorème de Lyapunov. L'intérêt de ce résultat vient de ce que cette nouvelle fonction de Lyapunov peut jouer le rôle de $V$ pour le système bouclé et permettre ainsi une utilisation récursive de notre technique ou une combinaison avec d'autres synthèses de Lyapunov et ceci même lorsque la condition (2.72) n'est pas satisfaite.

**Résultat général.** Le système que nous considérons est un système de la forme (2.1) dans lequel la variable $x_2$ n'est pas présente[4] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & h_0(x) \ + \ h_1(x,y)\, y \ + \ h_2(x,y,u)\, u \\ \dot{y} & = & f_0(y) \ + \ f_1(x,y)\, y \ + \ f_2(x,y,u)\, u \end{array} \right. \tag{2.114}$$

Nous nous plaçons dans le contexte plus régulier du paragraphe 2.2.3.2. Nous avons :

**Théorème 2.13** *Supposons que le système (2.114) vérifie les hypothèses B0', B1', B2, B3.1 et B3.2'. Alors il existe une fonction positive et de classe $C^1$, $\mathrm{q}(x_1)$, une fonctions $\overline{k}$ de classe $\mathcal{K}^\infty$, de classe $C^1$ et une fonction $\overline{l}$ définie sur $[0,+\infty)$, propre, positive, de classe $C^1$, zéro en zéro, et de dérivée définie positive telles que la fonction :*

$$\overline{k}(U(x,y)) + \overline{l}(\mathrm{q}(x))$$

*avec $U$ donnée en (2.68), soit strictement assignable pour le système (2.114).*

**Remarque 2.14 :** Les hypothèses B0, B1, B2, B3 étant vérifiées, nous savons par le Théorème 2.1 qu'il existe une une loi de commande continue qui rend l'origine de (2.114) solution globalement asymptotiquement stable et donc, par le théorème de Lyapunov inverse (voir [83, Theorem 18.6]), qu'il existe une fonction de Lyapunov strictement assignable pour (2.114). L'objectif du Théorème 2.13 est de permettre de construire une telle fonction à partir de la fonction $V$ donnée en B1' et d'une fonction de Lyapunov strictement assignable pour le sous-système en $x$ bouclé pris avec $y = 0$ •

**Preuve.**
*Première étape.* Les fonctions $\kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,u)$ et $h_2$ étant supposées être de classe $C^1$, d'après par exemple le Lemme 1.5 et la définition (2.70), il existe une loi de commande $u_s$ qui fait de l'origine de (2.114) une solution globalement asymptotiquement stable et qui est telle que $u_s(x,0)$ est de classe $C^1$. Montrons qu'alors l'origine de :

$$\dot{x} \ = \ h_0(x) + h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0) \tag{2.115}$$

est une solution globalement asymptotiquement stable.

[4]Nous faisons cette hypothèse dans le but de simplifier la présentation et nous supprimons l'indice 1 de $x_1$ pour alléger les notations.

La fonction $l$ étant celle donnée en (2.67), on a :

$$\dot{\overbrace{l(Q(x))}}_{(2.115)} \;=\; -\,l'(Q(x))R(x) + l'(Q(x))\frac{\partial Q}{\partial x}(x)h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0)\;. \qquad (2.116)$$

Puisque $\frac{\partial V}{\partial y}(0) \;=\; 0$, on a, d'après (2.70) :

$$l'(Q(x))\frac{\partial Q}{\partial x}(x)h_2(x,0,u) \;=\; \mathcal{G}(x,0,u)\;. \qquad (2.117)$$

Donc :

$$\dot{\overbrace{l(Q(x))}} \;=\; -\,l'(Q(x))R(x) + \mathcal{G}(x,0,0,u_s(x,0))u_s(x,0)\;. \qquad (2.118)$$

Nous savons, grâce à la preuve du Théorème 1.1, que :

$$\mathcal{G}(x,0,0,u_s(x,0))\,u_s(x,0) \;\leq\; 0\;, \qquad (2.119)$$

$$\mathcal{G}(x,0,0,0) \;\neq\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \mathcal{G}(x,0,0,u_s(x,0))\,u_s(x,0) \;\neq\; 0\;. \qquad (2.120)$$

En utilisant B2 et en appliquant le principe d'invariance de LaSalle, on obtient alors que l'origine est une solution globalement asymptotiquement stable de (2.115).

L'origine du système (2.115) étant globalement asymptotiquement stable et la fonction $h_0(x) + h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0)$ étant de classe $C^1$, le Théorème de Lyapunov inverse (voir [83, Theorem 18.6]) garanti l'existence d'une fonction de Lyapunov $\mathfrak{q}$ zéro en zéro, de classe $C^1$ telle que :

$$\dot{\mathfrak{q}}(x)_{(2.115)} \;=\; -\,\Re(x) \;<\; 0\;, \quad x \neq 0\;. \qquad (2.121)$$

La fonction $\mathfrak{q}$ étant de classe $C^1$, on peut supposer que[5] :

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x}(x)\right| \;\leq\; c|x|\;, \quad \forall\, x\;:\;|x| \;\leq\; c\;. \qquad (2.122)$$

*Deuxième étape.* La fonction de Lyapunov que nous considérons maintenant est :

$$\overline{U}(x,y) \;=\; \overline{k}(U(x,y)) \;+\; \overline{l}(\mathfrak{q}(x)) \qquad (2.123)$$

avec $U$ définie en (2.68) et $\overline{k}$ et $\overline{l}$ des fonctions définies positives, de classe $C^1$ et ayant des dérivées strictement positives, $\overline{k}$ étant en outre propre. La dérivée de cette fonction le long des solutions du système (2.114) bouclé avec $u_s$ vérifie :

$$\begin{aligned}\dot{\overline{U}}(x,y)_{(2.114)} \;&\leq\; -\,\overline{k}'(U(x,y))\kappa(V(y))W(y) \qquad (2.124)\\ &\qquad + \overline{l}'(\mathfrak{q}(x))\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x}(x)\,[h_0(x) + h_1(x,y)y + h_2(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y)]\\ &\leq\; -\left[\overline{k}'(U(x,y))\kappa(V(y))W(y) + \overline{l}'(\mathfrak{q}(x))\Re(x)\right] \;+\; \overline{l}'(\mathfrak{q}(x))\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x}(x)\,\Delta(x,y) \qquad (2.125)\end{aligned}$$

avec

$$\Delta(x,y) \;=\; h_1(x,y)y \;+\; [h_2(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y) -\; h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0)]\;. \qquad (2.126)$$

Nous allons montrer que $\overline{k}$ et $\overline{l}$ peuvent être choisies de telle sorte que :

$$\overline{l}'(\mathfrak{q}(x))\,\frac{\partial \mathfrak{q}}{\partial x}(x)\,\Delta(x,y) \;\leq\; \frac{1}{2}\overline{k}'(U(x,y))\kappa(V(y))W(y) + \frac{1}{2}\overline{l}'(\mathfrak{q}(x))\Re(x)\;. \qquad (2.127)$$

[5]Remplacer $\mathfrak{q}$ par $\mathfrak{q}^2$ si nécessaire.

Pour ce faire, commençons par observer qu'il existe deux fonctions positives et continues $\gamma_{1x}$ et $\gamma_y$ telles que, pour tout $(x, y)$, on ait :

$$|\Delta(x, y)| \;\leq\; |y|\, \gamma_{1x}(|x|)\, \gamma_y(|y|) \;. \tag{2.128}$$

Ceci résulte du fait que $h_1$ est continue, que $h_2$ et $u_s$ sont de classe $C^1$ et que :

$$\Delta(x, 0) \;=\; 0 \;. \tag{2.129}$$

Par ailleurs (2.122) implique l'existence d'une fonction positive continue $\gamma_{2x}$ telle que, pour tout $x$,

$$\left|\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\right| \;\leq\; |x|\, \gamma_{2x}(|x|) \;. \tag{2.130}$$

Nous avons ainsi obtenu, pour tout $(x, y)$,

$$\frac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\, \Delta(x, y) \;\leq\; |x|\, |y|\, \gamma_x(|x|)\, \gamma_y(|y|) \tag{2.131}$$

en posant $\gamma_x = \gamma_{1x}\gamma_{2x}$. Notre prochaine étape consiste à majorer le terme de droite de cette inégalité par une somme d'une fonction de $|x|$ et d'une fonction de $|y|$. Pour cela, nous remarquons que la fonction $\kappa(V(y))W(y)$ étant continue et définie positive, il existe une fonction $\varphi$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que, pour une constante $c > 0$ :

$$|y|\, \varphi\left(\sup_{s\in[0,c]} \{\gamma_y(s)\}\, |y|\right) \;\leq\; \kappa(V(y))\, W(y) \;, \quad \forall\, y : |y| \;\leq\; c \;. \tag{2.132}$$

Par exemple, on peut prendre, pour $s \leq c$,

$$\varphi\left(\sup_{s\in[0,c]} \{\gamma_y(s)\}\, s\right) \;=\; \frac{2}{\pi} \int_0^s \frac{1}{1+\tau^2}\, \min\left\{\tau, \frac{1}{\tau} \min_{\tau\leq|y|\leq c} \{\kappa(V(y))W(y)\}\right\} d\tau \;. \tag{2.133}$$

et, pour $s > c$,

$$\varphi(s) \;=\; \varphi(c)\frac{s}{c} \tag{2.134}$$

Alors la somme recherchée est obtenue grâce à l'inégalité :

$$ab \;\leq\; a\varphi^{-1}(a) + b\varphi(b) \;, \quad \forall\, a \;\geq\; 0 \quad , \quad \forall\, b \;\geq\; 0 \;. \tag{2.135}$$

En effet, on obtient :

$$\begin{aligned} &\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\, |x|\, |y|\, \gamma_x(|x|)\, \gamma_y(|y|) \\ &\qquad \leq\; \bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\, |x|\, \gamma_x(|x|)\, \varphi^{-1}\left(\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))|x|\gamma_x(|x|)\right) \;+\; |y|\, \gamma_y(|y|)\, \varphi\left(|y|\gamma_y(|y|)\right) \;. \end{aligned} \tag{2.136}$$

Avec (2.132), nous pouvons appliquer le Lemme E.1 prouvé dans l'annexe E et déduire l'existence d'une fonction $\bar{k}$ telle que :

$$|y|\, \gamma_y(|y|)\, \varphi\left(|y|\gamma_y(|y|)\right) \;\leq\; \tfrac{1}{2}\, \bar{k}'(U(x, y))\, [\kappa(V(y))W(y)] \;. \tag{2.137}$$

Pour obtenir finalement (2.127), le dernier objectif à réaliser consiste à trouver $\bar{l}$ telle que :

$$\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\, |x|\, \gamma_x(|x|)\, \varphi^{-1}\left(\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))|x|\gamma_x(|x|)\right) \;\leq\; \tfrac{1}{2}\, \bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\, \Re(x) \tag{2.138}$$

ou encore :

$$\bar{l}'(\mathfrak{Q}(x)) \leq \frac{1}{|x|\gamma_x(|x|)}\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{\Re(x)}{|x|\gamma_x(|x|)}\right) . \tag{2.139}$$

On remarque alors que, puisque $\varphi$, $\mathfrak{Q}$ et $\Re$ sont définies positives et continues, la fonction définie par :

$$\ell(s) = \min\left\{s, \inf_{\{x:\mathfrak{Q}(x)=s\}}\left\{\frac{1}{|x|\gamma_x(|x|)}\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{\Re(x)}{|x|\gamma_x(|x|)}\right)\right\}\right\} \tag{2.140}$$

est également définie positive et continue et vérifie :

$$\ell(\mathfrak{Q}(x)) \leq \frac{1}{|x|\gamma_x(|x|)}\varphi\left(\frac{1}{2}\frac{\Re(x)}{|x|\gamma_x(|x|)}\right) . \tag{2.141}$$

Il suffit donc de choisir pour $\bar{l}$ une fonction de classe $C^1$ vérifiant :

$$0 < \bar{l}'(s) \leq \ell(s) , \quad \forall s \neq 0 . \tag{2.142}$$

Avec un tel choix (2.138) est vérifie et donc on a :

$$\dot{\overline{U}}(x,y)_{(2.114)} \leq -\frac{1}{2}\left(\bar{k}'(U(x,y))\kappa(V(y))W(y) + \bar{l}'(\mathfrak{Q}(x))\Re(x)\right) \tag{2.143}$$

Ceci termine notre preuve. □

**Cas particulier.** La fonction $\overline{U}(x,y)$ définie en (2.123) n'est l'expression explicite d'une fonction de Lyapunov strictement assignable pour (2.114) que si $\mathfrak{Q}$ est connue explicitement, ce qui a priori n'est pas le cas. Nous allons maintenant présenter un cas particulier pour lequel une telle fonction est explicitement connue. Le système que nous considérons maintenant est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{x} = Mx + h_1(x,y)y + h_2(x,y,u)u \\ \dot{y} = f_0(y) + f_2(x,y,u)u \end{cases} \tag{2.144}$$

où $h_2(x,0,0)$ est une constante notée :

$$h_2(x,0,0) = D$$

**Hypothèse B1" :** *Il existe une matrice symétrique définie positive $Q$ telle que :*

$$QM + M^\top Q \leq 0 . \tag{2.145}$$

*Il existe une fonction de classe $C^2$ définie positive et propre $V$ telle que :*

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_0(y) = -W(y) < 0 \qquad \forall y \neq 0 \tag{2.146}$$

*et l'origine du sous système en y de (2.144) pris à commande nulle est localement exponentiellement stable.*

**Hypothèse B2" :** *La paire $(M,D)$ est stabilisable.*

**Hypothèse B3" :** *Il existe une fonction $\gamma$ positive et continue telle que :*

$$|h_1(x,y)y| \leq (1+|x|)\gamma(y)|y|^2 \tag{2.147}$$

*et pour tout $(y,u)$ appartenant à un compact, les fonctions $\frac{|h_2(x,y,u)|}{1+|x|}$ et $\frac{|f_2(x,y,u)|}{1+|x|}$ sont bornées et $f_2(x,0,0)$ est constante.*

**Fait 2.15** *Lorsque les hypothèses B0', B1" et B2" sont vérifiées, alors pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une matrice $Q_\varepsilon$ symétrique et définie positive telle que :*

$$Q_\varepsilon(M + \varepsilon DD^\top Q) + (M + \varepsilon DD^\top Q)^\top Q_\varepsilon = -I \tag{2.148}$$

*où $I$ est la matrice identité.*

Ce fait, prouvé par Teel dans [78], (égalité (93)) peut l'être, dans le contexte de ce travail de la façon suivante :

- La paire $(M, D)$ étant stabilisable, le fait 1.8 garanti que $x_1 = 0$ est l'unique solution de (1.38).
- Ce résultat et l'inégalité (2.145) de l'hypothèse B1" font que les hypothèses A1 et A2 sont satisfaites par le système :

  $$\dot{x} = Mx + Du \; . \tag{2.149}$$

  Le Théorème 1.1 s'applique donc à celui-ci et d'après le Lemme 1.5, ce système est asymptotiquement stabilisé par toute commande :

  $$u = -\varepsilon D^\top Q x \quad , \quad \varepsilon > 0 \; . \tag{2.150}$$

  La matrice $(M - \varepsilon DD^\top Q)$ est donc une matrice exponentiellement stable pour tout $\varepsilon > 0$. L'existence d'une matrice symétrique définie positive $Q_\varepsilon$ vérifiant (2.148) s'en suit.

**Corollaire 2.16** *Supposons que le système (2.144) vérifie les hypothèses B0' B1", B2" et B3". Alors il existe une fonction $\overline{k}$ de classe $\mathcal{K}^\infty$, de classe $C^1$, de dérivée définie positive, une fonction $\overline{l}$ définie sur $[0, +\infty)$, zéro en zéro, positive, de classe $C^1$, de dérivée définie positive et des constantes strictement positives $q$ et $\varepsilon$ telles que la fonction :*

$$\overline{k}(U(x,y)) + \overline{l}(\mathcal{Q}(x))$$

*avec $U$ donnée en (2.68),*

$$\overline{l}(q) = \int_0^q \frac{1}{1+s^2} ds \tag{2.151}$$

*et*

$$\mathcal{Q}(x) = q(x^\top Q x)^2 + x^\top Q_\varepsilon x \tag{2.152}$$

*soit strictement assignable pour le système (2.144).*

**Preuve.** Montrons que les hypothèses du Corollaire 2.16 impliquent que le Théorème 2.13 s'applique à (2.144).

Les hypothèses B1" et B2" impliquent trivialement que les hypothèses B1' et B2 sont satisfaites. D'après l'hypothèse B1" l'origine du sous système en $y$ de (2.144) pris à commande nulle est localement exponentiellement stable : aussi, d'après l'annexe G, la fonction $V$ peut elle être choisie telle que $V$ et $W$ soient localement à approximées l'origine par des formes quadratiques définies positives. Avec un tel choix, l'hypothèse B3" implique que l'hypothèse B3.1 est vérifiée avec une fonction $\kappa$ de classe $C^1$. La fonction $\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,u)$ est alors de classe $C^1$ ce qui implique B3.2'. Le Théorème 2.13 s'applique donc à (2.144). Reste donc à montrer que la dérivée d'une fonction $\mathcal{Q}$ donnée en (2.152) le long du système (2.115), qui correspond au cas particulier que nous traitons, est définie négative pour une loi de commande $u_s$ qui appartient à la classe de celles qui permettent de conclure le Théorème 2.1 puisque la fonction $\bar{l}$ définie en (2.151) vérifie, pour une fonction $\bar{k}$ convenablement choisie, l'inégalité (2.127).

Le système (2.115) qui correspond à (2.144) est :

$$\dot{x} \;=\; Mx \,+\, h_2(x, 0, u_s(x, 0)u_s(x, 0) \;. \tag{2.153}$$

Nous allons dans un premier temps exhiber une classe particulière de lois de commande $u_s(x, y)$ pour laquelle l'origine de (2.153) est une solution globalement asymptotiquement stable.

Nous avons vu à la section 2.2.2 que, dans le contexte des hypothèses B1" à B3", on peut prendre d'après (2.20) $\rho(s) = c_1\sqrt{s}$, où $c_1$ est une constante positive suffisamment grande. Selon (2.67), on peut choisir pour fonction $l$ :

$$l(s) \;=\; \ln(1 + s) \;\;. \tag{2.154}$$

Alors, d'après (2.70), on a :

$$\mathcal{G}(x, y, u) \;=\; \frac{7}{3}\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_2(x, y, u) \;+\; \frac{2}{1 + x^\top Qx}\left[x^\top Qh_2(x, y, u)\right] \;. \tag{2.155}$$

Par ailleurs, avec (2.147) et (2.21) on peut prendre pour satisfaire B3.1 $\kappa$ constante sur un voisinage de l'origine. Il s'en suit que $\kappa(V(0))\frac{\partial V}{\partial y}(0) \;=\; 0$. Montrons qu'avec un tel choix pour $\kappa$ il existe une constante strictement positive $\varepsilon$ et une fonction $u_s(x, y)$ telles que :

$$u_s(x, 0) \;=\; -\frac{\varepsilon}{1 + x^\top Qx}D^\top Qx \;. \tag{2.156}$$

$$\mathcal{G}(x, y, u_s(x, y))u_s(x, y) \;\le\; 0 \quad , \quad \forall\,(x, y) \tag{2.157}$$

$$\mathcal{G}(x, 0, u_s(x, 0))u_s(x, 0) \;\le\; -\frac{\varepsilon}{2}\frac{|D^\top Qx|^2}{(1 + x^\top Qx)^2} \;. \tag{2.158}$$

Pour montre ce résultat, décomposons $\mathcal{G}$ :

$$\mathcal{G}(x, y, u) \;=\; \frac{7}{3}\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_2(x, y, 0) \;+\; \frac{2}{1 + x^\top Qx}[x^\top Qh_2(x, y, 0)] \;+\; \Omega(x, y, u) \tag{2.159}$$

avec

$$\begin{aligned} \Omega(x, y, u) \;&=\; \tfrac{7}{3}\kappa(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y)[f_2(x, y, u) - f_2(x, y, 0)] \\ &\quad + \tfrac{1}{1+x^\top Qx}\left[x^\top Q(h_2(x, y, u) - h_2(x, y, 0))\right] \;. \end{aligned} \tag{2.160}$$

Définissons $u_s$ ainsi :

$$u_s(x, y) \;=\; -\,\delta\varphi_R(|y|^2)\frac{\tfrac{7}{3}\kappa(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y)f_2(x, y, 0) \;+\; \tfrac{2}{1+x^\top Qx}\left[x^\top Qh_2(x, y, 0)\right]}{1 + \left|\tfrac{7}{3}\kappa(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y)f_2(x, y, 0)\right| + |h_2(x, y, 0)|} \tag{2.161}$$

où $\delta$ est une constante strictement positive et $\varphi_R$ est une fonction continue, positive, à valeur dans $[0, 1]$ vérifiant (2.94). Alors $|u_s|$ est bornée par $\delta c$ où $c > 1$ ne dépend que de $Q$. Puisque $\kappa(V(0))\frac{\partial V}{\partial y}(0) \;=\; 0$, et $h_2(x, 0, 0)$ est constante, (2.156) est vérifiée avec $\varepsilon = \frac{2\delta}{1+|D|}$. Montrons que pour $\delta$ suffisamment petit, (2.158) l'est aussi.

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, 0, u_s(x, 0))u_s(x, 0) \;&=\; -\frac{4\delta|x^\top QD|^2}{(1 + |D|)(1 + x^\top Qx)^2} \\ &\quad -\Omega(x, 0, u_s(x, 0))\frac{2\delta x^\top QD}{(1 + |D|)(1 + x^\top Qx)} \;. \end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse B3", on déduit l'existence d'une fonction $\mu(y)$ et une constante positive $d$ telles que :

$$|h_2(x,y,u) - D| \;\leq\; (1+|x|)(\mu(y)|y| + d|u|) \tag{2.162}$$

pour tout $|u| \leq \delta c$. Il s'en suit que :

$$\begin{aligned} |\Omega(x,0,u_s(x,0))| \;&\leq\; \delta c^2 d \frac{|x^\top Q|(1+|x|)}{(1+|D|)^2(1+x^\top Qx)} |D^\top Qx| \\ &\leq\; \delta c \frac{|D^\top Qx|}{1+x^\top Qx} \end{aligned}$$

pour une constante $c > 0$ qui ne dépend que de $Q$ et de $D$. Donc :

$$\mathcal{G}(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0) \;\leq\; -\frac{4\delta|x^\top QD|^2}{(1+|D|)(1+x^\top Qx)^2} \;+\; \delta c \frac{|D^\top Qx|}{(1+x^\top Qx)^2} \frac{2\delta x^\top QD}{(1+|D|)(1+x^\top Qx)} \;. \tag{2.163}$$

Donc, pour $\delta$ suffisamment petit,

$$\mathcal{G}(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0) \;\leq\; -\frac{\varepsilon}{2} \frac{|D^\top Qx|^2}{(1+x^\top Qx)^2} \;. \tag{2.164}$$

L'inégalité (2.158) est donc obtenue. L'inégalité (2.157) reste à montrer. On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y) \;&\leq\; -\,\delta\varphi_R(|y|^2) \frac{\left|\frac{7}{3}\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0) \;+\; \frac{2x^\top Q h_2(x,y,0)}{1+x^\top Qx}\right|^2}{1 + \left|\frac{7}{3}\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0)\right| + |h_2(x,y,0)|} \\ &\quad + |\Omega(x,y,u_s(x,y))|\,|u_s(x,y)| \;. \end{aligned}$$

D'après l'hypothèse B3", on déduit l'existence de $c > 0$ telle que :

$$|f_2(x,y,u) - f_2(x,y,0)| \;\leq\; c|u| \quad , \quad |h_2(x,y,u) - h_2(x,y,0)| \;\leq\; c|u| \tag{2.165}$$

pour tout $x$ et pour tout $(y,u)$ tels que $|y| \;\leq\; R$ , $|u| \;\leq\; 1$. Grâce à la définition de $\varphi_R$, on en déduit que pour une constants $c > 0$,

$$|\Omega(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y))| \;\leq\; c \left| \delta\varphi_R(|y|^2) \frac{\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0) \;+\; \frac{c_1 x^\top Q h_2(x,y,0)}{1+x^\top Qx}}{1 + \left|\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0)\right| + |h_2(x,y,0)|} \right|^2 \;. \tag{2.166}$$

Par conséquent, pour $\delta \;\leq\; \frac{1}{c}$, on obtient l'inégalité :

$$\mathcal{G}(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y) \;\leq\; -\frac{\delta}{2}\varphi_R(|y|^2) \frac{\left|\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0) \;+\; \frac{c_1 x^\top Q h_2(x,y,0)}{1+x^\top Qx}\right|^2}{1 + \left|\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,0)\right| + |h_2(x,y,0)|} \tag{2.167}$$

qui implique(2.157).

Nous allons maintenant montrer que pour une fonction $\mathcal{Q}$ définie en (2.152), on a :

$$\overbrace{\mathcal{Q}(x)}^{\cdot}{}_{(2.153),(2.156)} \;\leq\; -\frac{1}{2}|x|^2 \;. \tag{2.168}$$

Remarquons que la fonction $\mathsf{Q}(x)$ donnée en (2.152) provient d'une démonstration de Lin, Chitour et Sontag faite dans [42].

Le long de (2.153) avec $u_s(x,0)$ donnée en (2.156), on obtient avec (2.148) :

$$\begin{aligned}
\dot{\overbrace{\mathsf{Q}(x)}}_{(2.153),(2.156)} &= 4q(x^\top Qx)x^\top Q\left(Mx+Du_s(x,0)\right)+2x^\top Q_\varepsilon\left(Mx+Du_s(x,0)\right)\\
&\quad +4q(x^\top Qx)x^\top Q(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\\
&\quad +2x^\top Q_\varepsilon(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\\
&\leq 4q(x^\top Qx)x^\top QDu_s(x,0)+2x^\top Q_\varepsilon\left(Mx-\varepsilon DD^\top Qx+Du_s(x,0)\right)\\
&\quad +2\varepsilon x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx+4q(x^\top Qx)x^\top Q(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\\
&\quad +2x^\top Q_\varepsilon(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\\
&\leq -\tfrac{4q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2-|x|^2-2\varepsilon x^\top Q_\varepsilon D\tfrac{D^\top Qx}{1+x^\top Qx}\\
&\quad +2\varepsilon x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx+4q(x^\top Qx)x^\top Q(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\\
&\quad +2x^\top Q_\varepsilon(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)
\end{aligned} \tag{2.169}$$

Grâce à l'hypothèse B3", on déduit l'existence de $c>0$ telle que :

$$|h_2(x,0,u)-D| \;\leq\; c(1+|x|)|u| \quad , \quad \forall\, u : |u| \leq \max\{\sup_{x,y}|u(x,y)|,1\}\ . \tag{2.170}$$

On en déduit que, pour $\varepsilon$ suffisamment petit :

$$4q(x^\top Qx)x^\top Q(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0) \;\leq\; \frac{q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2\ . \tag{2.171}$$

En outre, grâce à (2.170) :

$$\begin{aligned}
\left|2x^\top Q_\varepsilon(h_2(x,0,u_s(x,0))-D)u_s(x,0)\right| &\leq c|x^\top Q_\varepsilon|(1+|x|)|u_s(x,0)|^2\\
&\leq \tfrac{1}{8}|x|^2+c|Q_\varepsilon|(1+|x|)^2|u_s(x,0)|^4
\end{aligned} \tag{2.172}$$

Pour $q$ suffisamment grand, on a :

$$c|Q_\varepsilon|(1+|x|)^2|u_s(x,0)|^4 \;\leq\; \frac{q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2\ . \tag{2.173}$$

Puisqu'en outre :

$$-\varepsilon x^\top Q_\varepsilon D\frac{D^\top Qx}{1+x^\top Qx}+\varepsilon x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx \;=\; \varepsilon\frac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx\ , \tag{2.174}$$

on obtient :

$$\dot{\overbrace{\mathsf{Q}(x)}}_{(2.153),(2.156)} \;\leq\; -\frac{2q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2-\frac{3}{8}|x|^2+\varepsilon\frac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx\ . \tag{2.175}$$

Mais pour tout $c>0$,

$$\begin{aligned}
\left|2\varepsilon\tfrac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx\right| &\leq 2\varepsilon\tfrac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}|D^\top Qx|\left|x^\top Q_\varepsilon D\right|\\
&\leq \tfrac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}\left(c|D^\top Qx|^2+\tfrac{1}{c}\left(\varepsilon\left|x^\top Q_\varepsilon D\right|\right)^2\right)\ .
\end{aligned} \tag{2.176}$$

On peut choisir $c$ de telle sorte que :

$$\frac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}\frac{\varepsilon^2}{c}\left|x^\top Q_\varepsilon D\right|^2 \;\leq\; \frac{1}{8}|x|^2 \tag{2.177}$$

puis choisir $q$ de telle sorte que :

$$c\frac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}|D^\top Qx|^2 \;\leq\; \frac{q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2\ . \tag{2.178}$$

On obtient alors :

$$\left|2\varepsilon\frac{x^\top Qx}{1+x^\top Qx}x^\top Q_\varepsilon DD^\top Qx\right| \;\leq\; \frac{1}{8}|x|^2+\frac{q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2\ . \tag{2.179}$$

Et donc finalement :

$$\dot{\overbrace{\mathcal{Q}(x)}} \;\leq\; -\frac{q\varepsilon}{1+x^\top Qx}(x^\top Qx)|D^\top Qx|^2-\frac{1}{4}|x|^2 \;<\; 0 \quad , \quad \forall x\neq 0\ . \tag{2.180}$$

Le dernier point qui reste à montrer est que la fonction $\overline{l}$ choisie en (2.151) convient, c'est à dire permet d'obtenir l'inégalité (2.127).

Grâce à l'hypothèse B3" et au fait que $h_2$ est de classe $C^1$, on déduit l'existence d'une fonction $\zeta$ positive continue telle que :

$$|h_1(x,y)y+h_2(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y)-\ h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0)| \;\leq\; (1+|x|)\zeta(y)|y|\ . \tag{2.181}$$

D'un autre côté,

$$\left|\frac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}(x)\right| \;=\; \left|4q(x^\top Qx)x^\top Q+2x^\top Q_\varepsilon\right| \;\leq\; c\left(|x|+|x|^3\right)\ . \tag{2.182}$$

On déduit de ces deux inégalités que :

$$\begin{aligned}&\left|\overline{l}'(\mathcal{Q}(x))\tfrac{\partial\mathcal{Q}}{\partial x}(x)\left[h_1(x,y)y+h_2(x,y,u_s(x,y))u_s(x,y)-\ h_2(x,0,u_s(x,0))u_s(x,0)\right]\right|\\ &\qquad\leq\; \tfrac{c\left(|x|+|x|^3\right)(1+|x|)}{1+\mathcal{Q}(x)^2}\zeta(y)|y|\\ &\qquad\leq\; c(\zeta(y)|y|)^2+\tau\left(\tfrac{\left(|x|+|x|^3\right)(1+|x|)}{1+\Omega_2(x)^2}\right)^2\end{aligned} \tag{2.183}$$

où $\tau$ est une constante arbitraire. Pour conclure, il suffit d'observer que pour $\tau$ suffisamment petit, les inégalité :

$$\tau\left(\frac{\left(|x|+|x|^3\right)(1+|x|)}{1+\mathcal{Q}(x)^2}\right)^2 \;\leq\; \frac{1}{4}\frac{|x|^2}{1+\mathcal{Q}(x)^2} \;\leq\; \frac{1}{2}\frac{\Re(x)}{1+\mathcal{Q}(x)^2} \;=\; \frac{1}{2}\overline{l}'(\mathcal{Q}(x))\Re(x) \tag{2.184}$$

sont vérifiées et que, de part le fait que $W$ est approximée localement à l'origine par une forme quadratique définie positive et que $\kappa(0)>0$, il existe (d'après l'annexe E) une fonction $\overline{k}$ de classe $C^1$, de classe $\mathcal{K}^\infty$, de dérivée définie positive telle que :

$$c(\zeta(y)|y|)^2 \;\leq\; \frac{1}{2}\overline{k}'(U(x,y))\kappa(V(y))W(y)\ . \tag{2.185}$$

Ceci termine notre preuve. □

### 2.2.4 Robustesse du résultat de stabilité du Théorème 2.1.

Dans [75], Teel a écrit : "An important feature of our approach is that it is robust to unknown (possibly time-varying) parameters as well as unmodeled nonlinear perturbations that satisfy certain general properties". Nous pouvons reprendre à notre compte ce commentaire. En effet, en relisant l'hypothèse B3 à l'envers, nous obtenons :
Supposons les hypothèses B0, B1 et B2 satisfaites. Choisissons une fonction $\rho$ positive, définie et continue sur $[0, +\infty)$ et une fonction $\kappa$ positive, définie et continue sur $(0, +\infty)$, telles que les conditions (2.11), (2.12) et B3.2 soient vérifiées. Alors toute commande $u$ donnée par la preuve du Théorème 2.1 garantie la stabilité asymptotique globale de l'origine pour tout système s'écrivant sous la forme (2.1) où $h_1$, $e_1$ et $f_1$ sont des fonctions continues quelconques satisfaisant (2.10), (2.12) et (2.13). Ces fonctions peuvent même dépendre, de façon bornée, du temps. Dans ce cas, lorsque (2.72) est vérifiée, la stabilité asymptotique globale résulte du Théorème de Lyapunov. Lorsque (2.72) n'est pas vérifiée, on a nécessairement la stabilité globale mais pour montrer l'attractivité il faut mener à bien une démonstration assez similaire à celle du Lemme 6.2 qui s'appuie sur le lemme de Barbalat (voir [32, Lemma 4.4]).

**Example 2.17 :** Nous allons illustrer nos propos en considérant le système qui est une simplification de [75, Example 4.3]) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + \theta(t)x_3^2 + \sin(x_1 t)x_2^2 \exp(u) + u^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_2 \\ \dot{x}_2 & = & u \end{array} \right. \tag{2.186}$$

où $\theta$ est inconnu mais tel que, pour tout $t$,

$$|\theta(t)| \leq c \tag{2.187}$$

avec $c$ donné.

Pour stabiliser le sous-système en $(x_2, x_3)$, nous choisissons :

$$u = -x_2 - x_3 + v \, . \tag{2.188}$$

Le sous système en $(x_2, x_3)$ joue le rôle du sous système en $y$ dans (2.1). Comme fonction de Lyapunov, nous prenons :

$$V(x_2, x_3) = \tfrac{3}{2} x_2^2 + x_3^2 + x_2 x_3 \tag{2.189}$$

Nous obtenons :

$$\dot{\overbrace{V(x_2, x_3)}} = -x_2^2 - x_3^2 + (2x_3 + x_2)\, v \, . \tag{2.190}$$

Le changement de coordonnées (voir le paragraphe 2.3.2)) :

$$X_1 = x_1 + x_2 + x_3 \tag{2.191}$$

donne alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & v + \theta(t)x_3^2 + \sin(x_1 t)x_2^2 \exp(-x_2 - x_3 + v) + (x_2 + x_3 - v)^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & -x_2 - x_3 + v \end{array} \right. \tag{2.192}$$

D'après (2.68), une fonction de Lyapunov susceptible d'être assignable est :

$$U(X_1, x_2, x_3) \;=\; k(x_2, x_3) + \int_0^{X_1} \sigma(s)ds \tag{2.193}$$

où

- $k$ est la fonction définie en (2.64) pour une fonction $\kappa$ que nous déterminerons plus tard.
- $\sigma$ une saturation de classe $C^1$ bornée par 1.

Puisque :

$$\overbrace{\int_0^{X_1} \sigma(s)ds}^{\cdot} \;=\; \sigma(X_1) \left[v + \theta(t)x_3^2 + \sin(x_1 t)x_2^2 \exp(-x_2 - x_3 + v) + (x_2 + x_3 - v)^2\right] \tag{2.194}$$

$$|\theta(t)| \;\leq\; c \;, \quad |\sin(x_1 t)| \;\leq\; 1 \;, \quad |\sigma| \;\leq\; 1 \;, \tag{2.195}$$

nous avons :

$$\overbrace{\int_0^{X_1} \sigma(s)ds}^{\cdot} \;\leq\; \sigma(X_1)v + 2v^2 + 4x_2^2 + (4+c)x_3^2 + x_2^2 \exp(|x_2| + |x_3| + |v|) \tag{2.196}$$

Grâce à (2.189), on obtient donc :

$$\begin{aligned}\overbrace{U(X_1, x_2, x_3)}^{\cdot} \;\leq\; & \sigma(X_1)\, v \;+\; 2\, v^2 \;+\; 4\, x_2^2 \;+\; (4+c)\, x_3^2 \;+\; x_2^2 \,\exp(|x_2| + |x_3| + |v|) \\ & - \kappa(V(x_2, x_3)) \left[x_2^2 \;+\; x_3^2 \;-\; |2x_3 + x_2|\, |v|\right] \;.\end{aligned} \tag{2.197}$$

D'après la Proposition 2.9, prenons :

$$v = -\,\lambda(X_1, x_2, x_3)\sigma(X_1) \;, \tag{2.198}$$

où $\lambda$ est une fonction positive plus petite que $\frac{1}{8}$ que nous choisirons plus tard. Ceci nous donne :

$$\begin{aligned}\overbrace{U(X_1, x_2, x_3)}^{\cdot} \;\leq\; & -\tfrac{3}{4}\lambda(X_1, x_2, x_3)\sigma(X_1)^2 \;+\; 4\, x_2^2 \;+\; (4+c)\, x_3^2 \;+\; x_2^2 \,\exp(x_2^2 + x_3^2 + 3) \\ & - \kappa(V(x_2, x_3)) \left[x_2^2 \;+\; x_3^2 \;-\; |2x_3 + x_2||\lambda(X_1, x_2, x_3)\sigma(X_1)|\right] \;.\end{aligned} \tag{2.199}$$

Maintenant, l'inégalité :

$$|2x_3 + x_2|\, \lambda(X_1, x_2, x_3)\, |\sigma(X_1)| \;\leq\; 4\, \lambda(X_1, x_2, x_3)^2 \sigma(X_1)^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\left(x_3^2 + x_2^2\right) \tag{2.200}$$

nous permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\overbrace{U(X_1, x_2, x_3)}^{\cdot} \;\leq\; & -\tfrac{3}{4}\, \lambda(X_1, x_2, x_3)\, \sigma(X_1)^2 \;+\; 4\, x_2^2 \;+\; (4+c)\, x_3^2 \;+\; x_2^2 \,\exp(x_2^2 + x_3^2 + 3) \\ & - \kappa(V(x_2, x_3)) \left[\tfrac{1}{2}\, x_2^2 \;+\; \tfrac{1}{2}\, x_3^2 \;-\; 4\, \lambda(X_1, x_2, x_3)^2\, \sigma(X_1)^2\right] \;.\end{aligned} \tag{2.201}$$

Ainsi, en choisissant les fonctions $\lambda$ et $\kappa$ pour que :

$$\kappa(s) \;\;\geq\;\; 4\left[4 + c + \exp\left(3 + \frac{4}{3}s\right)\right] \tag{2.202}$$

$$|\lambda(X_1, x_2, x_3)| \;\;\leq\;\; \frac{1}{8\kappa(V(x_2, x_3))} \;, \tag{2.203}$$

et en observant que :

$$V(x_2, x_3) \ \geq \ \frac{3}{4}\left(x_2^2 + x_3^2\right) \ , \tag{2.204}$$

nous obtenons finalement :

$$\dot{\overbrace{U(X_1, x_2, x_3)}} \ \leq \ -\tfrac{1}{4}\,\lambda(X_1, x_2, x_3)\,\sigma(X_1)^2 \ - \ \tfrac{1}{4}\,\kappa(V(x_2, x_3))\left[x_2^2 + x_3^2\right] \ . \tag{2.205}$$

La fonction $U$ est donc assignée strictement par la loi de commande :

$$u \ = \ -x_2 \ - \ x_3 \ - \ \frac{\sigma(x_1 + x_2 + x_3)}{32\left[4 + c + \exp\left(3 + 2x_2^2 + \frac{4}{3}x_3^2 + x_2 x_3\right)\right]} \ . \tag{2.206}$$

$\diamond$

## 2.3 Changement de coordonnées.

### 2.3.1 Introduction.

#### 2.3.1.1 Le contexte.

Par l'hypothèse B3, nous avons fixé un contexte dans lequel la technique de Jurdjevic et Quinn peut être appliquée. L'intérêt d'avoir un changement de coordonnées tel que les termes de couplage $h_1$, $e_1$ et $f_1$ résultants de celui-ci satisfont l'hypothèse B3.1 apparaît donc. C'est un tel changement de coordonnées que nous cherchons maintenant à mettre au point.

Pour limiter le champ d'investigation, nous nous mettons dans le contexte de la discussion de l'hypothèse B3.1 située au paragraphe 2.2.2 :

- Nous nous intéressons au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & M_1 X_1 + H_1(X_1, X_2, Y)Y + H_2(X_1, X_2, Y, u)u \\ \dot{X}_2 & = & M_2 X_2 + E_1(X_1, X_2, Y)Y + E_2(X_1, X_2, Y, u)u \\ \dot{Y} & = & F_0(Y) + F_1(X_1, X_2, Y)Y + F_2(X_1, X_2, Y, u)u \end{array}\right. \tag{2.207}$$

  où $Y$ est dans $\mathbb{R}^n$, $X_1$ dans $\mathbb{R}^{m_1}$, $X_2$ dans $\mathbb{R}^{m_2}$, $u$ dans $\mathbb{R}^q$. De plus, nous supposons que $F_0(0) = 0$ et que les fonctions $H_1$, $H_2$, $E_1$, $E_2$, $F_0$ et $F_2$ sont de classe $C^{36}$. Nous utilisons ici des lettres capitales pour distinguer les coordonnées initiales $(X_1, X_2, Y)$ de celles obtenues après changement $(x_1, x_2, y)$ et avec lesquelles nous effectuons la synthèse de Lyapunov.

- La linéarité des fonctions $H_0$ et $E_0$ dans (2.207) fait que les fonctions $Q$, $R$, $S$ et $T$ de l'hypothèse B1 sont des formes quadratiques et donc que la condition (2.15) est satisfaite.

- Nous supposons la stabilité exponentielle locale de $Y = 0$ pour $\dot{Y} = F_0(Y)$, i.e. nous supposons que la matrice

$$A \ = \ \frac{\partial F_0}{\partial Y}(0) \tag{2.208}$$

[6]Nous faisons cette hypothèse qui pourrait être affaiblie dans certains des cas que nous traiterons par la suite dans un souci de simplicité.

est asymptotiquement stable. Avec l'hypothèse B1, ceci implique que les fonctions $V$ et $W$ peuvent être modifiées pour satisfaire (2.24). Nous avons observé en (2.26) qu'alors la fonction $\kappa$ de l'hypothèse B3.1 devait vérifier :

$$\lim_{y\to 0} |y|\, \kappa(|y|^2) \;=\; 0 \;. \tag{2.209}$$

- Pour les fonctions $H_1$ et $E_1$, nous supposons, comme en (2.16), qu'elles sont linéairement bornées en $X_1$ et $X_2$. Plus précisément, nous supposons l'existence d'une fonction continue positive $\gamma$ telle que :

$$\begin{aligned} |H_1(X_1, X_2, Y)| &\leq (1 + |X_1|)\, \gamma(|Y|) \;, & (2.210)\\ |E_1(X_1, X_2, Y)| &\leq (1 + |X_1| + |X_2|)\, \gamma(|Y|) \;. & (2.211) \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous avons vu, avec (2.20), que, pour vérifier (2.10) dans B3.1, il nous suffit de prendre :

$$\rho(s) \;\leq\; c\,\sqrt{s} \;. \tag{2.212}$$

Alors, avec ce qui précède, (2.20) implique que la fonction $\gamma$ dans (2.210) et (2.211) doit vérifier :

$$\gamma(0) \;=\; 0 \;. \tag{2.213}$$

Ceci signifie que les fonctions $H_1$ et $E_1$ doivent être d'ordre strictement supérieur à 1 en $Y = 0$, pour tout $(X_1, X_2)$.

Cette condition d'ordre pour $H_1$ et $E_1$ n'étant génériquement pas satisfaite, le problème que nous nous posons maintenant est celui de trouver un difféomorphisme global :

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix}$$

qui fasse que, dans ces nouvelles coordonnées, les termes de couplage $h_1$ et $e_1$ soient de l'ordre le plus élevé possible en $y = 0$, à défaut de pouvoir rendre ces fonctions identiquement nulles.

#### 2.3.1.2 Remarque.

En fait, si notre objectif est maintenant d'éliminer, dans la mesure du possible, les termes de couplage, il ne faut pas oublier que le choix des coordonnées joue aussi un rôle dans la satisfaction de l'hypothèse B2. Ainsi, le système suivant, introduit dans [28],

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 &=& Y^3 - Y + u \\ \dot{Y} &=& -Y + u \end{array} \right. \tag{2.214}$$

dont l'origine est globalement asymptotiquement stabilisable, satisfait B2 mais pas B3. Mais dans les coordonnées :

$$x_1 \;=\; X_1 \,-\, y \quad , \qquad y \;=\; y \tag{2.215}$$

il s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& y^3 \\ \dot{y} &=& -y + u \end{array} \right. \tag{2.216}$$

Cette fois B3 est satisfaite mais pas B2. Par conséquent, il faut avoir à l'esprit que trouver un changement qui fait que B3 est vérifiée n'a d'intérêt que si, dans les nouvelles coordonnées, B2 l'est également, ce que rien ne garantit a priori.

Une question qu'il est légitime de se poser est la suivante : plutôt que de rechercher des changements de coordonnées qui font que B3 est satisfaite, puis de vérifier si dans les nouvelles coordonnées B2 l'est ou pas, y aurait-il un avantage quelconque à procéder de façon inverse, c'est à dire à rechercher des changements de coordonnées qui font que B2 est satisfaite, puis à vérifier si B3 l'est ou pas ? Nous n'avons pas de réponse satisfaisante à cette question. Précisons toutefois que suivre cette deuxième démarche nous semble difficile en raison de la complexité qu'il y a à vérifier si l'hypothèse B2 est satisfaite. Aussi ne nous engagerons nous pas dans cette direction.

#### 2.3.1.3 Sommaire.

Dans un premier temps, nous considérons le cas plus simple où la fonction $H_1$ peut être approximée, au sens de (2.10) (voir paragraphe 2.2.4), par une fonction linéaire en $X_1$ et indépendante de $X_2$. Cette hypothèse nous permet de donner des conditions pour l'existence d'un changement de coordonnées tel que le nouveau terme de couplage soit une fonction du second ordre en $y = 0$ ou même soit totalement éliminée. Dans un second temps, nous relâcherons l'hypothèse de dépendance linéaire en $X_1$. Les changements de coordonnées que nous allons présenter vont être mis au point sur des systèmes auxiliaires. Chacun de ceux-ci est une simplification du système (2.207) telle que, d'après le paragraphe 2.2.4, les propriétés de stabilité de ce système détermine celles du système initial. De plus, les termes faisant intervenir la commande ne jouant aucun rôle dans le problème que nous étudions maintenant, il est inutile, pour le moment, de les considérer.

### 2.3.2 Un premier type de changement de coordonnées.

Considérons donc le système (2.207). La fonction $H_1 Y$, étant $C^2$, peut être décomposée ainsi :

$$H_1(X_1, X_2, Y)Y \;=\; H_{10}(Y) + H_{11}(Y)X_1 + H_{12}(X_1, X_2, Y) \;, \tag{2.217}$$

avec

$$H_{10}(Y) \;=\; H_1(0,0,Y)\,Y \quad , \quad H_{11}(Y) \;=<\frac{\partial H_1}{\partial X_1}(0,0,Y), Y> \;. \tag{2.218}$$

Pour simplifier notre tâche, nous allons mettre en place nos changements de coordonnées en considérant le système auxiliaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & M_1 X_1 \;+\; H_{10}(Y) \;+\; H_{11}(Y)\,X_1 \\ \dot{Y} & = & F_0(Y) \end{array} \right. \tag{2.219}$$

Pour ce système, nous cherchons un changement de coordonnées qui soit tel que les fonctions $H_{10}$ et $H_{11}$ soient remplacées par des fonctions d'ordre supérieure ou égal à 2 en $Y = 0$.

De façon à préserver la linéarité en $X_1$, nous nous restreignons à un changement de coordonnées de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\,P_2(Y))\,[X_1 \;+\; P_1(Y)] \\ Y \end{pmatrix} \tag{2.220}$$

où la fonction matricielle $P_2$ et la fonction $P_1$ sont à choisir. Dans ces nouvelles coordonnées, le système (2.219) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & M_1\, x_1 \;+\; h_{10}(y) \;+\; h_{11}(y)\, x_1 \\ \dot{y} & = & f_0(y) \end{array} \right. \tag{2.221}$$

avec :

$$h_{11}(y) \;=\; -\,M_1 + \exp(-P_2(y)) \Bigg[ M_1 + H_{11}(y) \tag{2.222}$$

$$-\int_0^1 \exp(P_2(y)s) < \frac{\partial P_2}{\partial y}(y), F_0(y) > \exp(-\,P_2(y)s)ds \Bigg] \exp(P_2(y))$$

$$h_{10}(y) \;=\; \exp(-P_2(y)) \left[ H_{10}(y) + \frac{\partial P_1}{\partial y}(y) F_0(y) \;-\; (M_1 + H_{11}(y))\, P_1(y) \right] \tag{2.223}$$

$$f_0(Y) \;=\; F_0(y)\ .$$

Les expressions de $h_{11}, h_{10}$ sont obtenues au moyen de l'identité :

$$\dot{\overbrace{\exp(-P_2(y))}} \;=\; -\,\exp(-\,P_2(y)) \int_0^1 \exp(P_2(y)s) \dot{\overbrace{P_2(y)}} \exp(-\,P_2(y)s)ds\ . \tag{2.224}$$

Celle-ci est elle même obtenue au moyen de l'identité :

$$\frac{d}{d\tau} \exp(-P_2(y)\tau) \;=\; -\,P_2(y)\, \exp(-P_2(y)\tau)\ . \tag{2.225}$$

Nous sommes amenés à nous poser les questions suivantes :
1- Etant données deux fonctions $H_{11}$ et $F_0$, comment peut être modifiée $h_{11}$ définie en (2.222) au moyen d'une fonction $P_2$ ?
2- Etant données quatre fonctions $H_{11}$, $F_0$, $H_{10}$ et $P_2$, comment peut être modifiée $h_{10}$ définie en (2.223) au moyen d'une fonction $P_1$ ?
En réponse à celles-ci, nous avons :

**Lemme 2.18** *Si les spectres de $A$ et de $M_1$ sont tels que :*

$$\lambda_{A_i} + \lambda_{M_{1j}} \;\neq\; \lambda_{M_{1k}}\ , \tag{2.226}$$

$$\lambda_{A_i} \;\neq\; \lambda_{M_{1k}}\ , \tag{2.227}$$

*pour tout $(i,j,k)$, alors il existe des fonctions régulières $P_1$ et $P_2$, obtenues par résolution d'un système d'équations linéaires, qui donnent $h_{11}$, en (2.222), et $h_{10}$, en (2.223), d'ordre 2.*

**Remarque 2.19 :** En exploitant la théorie des formes normales de Poincaré, on peut rendre ces fonctions d'ordre supérieur en imposant des conditions de non résonnance supplémentaires. (Voir la preuve de [3, Theorem 3.1]) •

**Preuve du Lemme 2.18 :** Introduisons la notation suivante :

$$\nabla H_{11\,(k,i,j)} \;=\; \frac{\partial H_{11\,(i,j)}}{\partial y_k}(0) \tag{2.228}$$

et notons par $(\mathcal{P}_{2\,(k,i,j)})$ la solution du système linéaire :

$$\nabla H_{11\,(k,i,j)} \;+\; \sum_l \left[M_{1\,(i,l)}\,\mathcal{P}_{2\,(k,l,j)} \;-\; \mathcal{P}_{2\,(k,i,l)}\,M_{1\,(l,j)} \;-\; \mathcal{P}_{2\,(l,i,j)}\,A_{(l,k)}\right] \;=\; 0\;. \tag{2.229}$$

On remarque alors (voir [40, I.10.10]), qu'avec la matrice $P_2$, définie par :

$$(\exp(P_2(y)) - I)_{(i,j)} \;=\; \frac{\sum_k \mathcal{P}_{2\,(k,i,j)} y_k}{1 + \sum_{i,j} |\sum_k \mathcal{P}_{2\,(k,i,j)} y_k|}\;, \tag{2.230}$$

la fonction $h_{11}$ est d'ordre 2. Des arguments similaires à ceux utilisés dans [3, Proof of Lemma 1.1] montrent que (2.229) peut en général être résolue si et seulement si (2.226) est vérifié.

Plus simplement, la fonction $h_{10}$ en (2.223) est d'ordre 2 si nous choisissons :

$$P_1(y) \;=\; P\,y \tag{2.231}$$

où $P$ est la solution du système linéaire :

$$PA - \;M_1 P + \frac{\partial H_{10}}{\partial y}(0) \;=\; 0 \tag{2.232}$$

qui peut être résolue en général si et seulement si (2.227) est vérifiée (voir [18, Section 8.1]). □

**Remarque 2.20 :** Les formules (2.230) et (2.231) peuvent ne pas être appropriées dans la pratique. Le point crucial à retenir à propos des fonctions $P_1$ et $P_2$ est que $\frac{\partial P_1}{\partial y}(0)$ et $\frac{\partial P_2}{\partial y}(0)$ sont imposés par la donnée des équations initiales. Ainsi on peut, si on le souhaite, choisir une fonction $P_1(y)$ bornée en prenant :

$$P_1(y) \;=\; \frac{Py}{1+|Py|}\;\bullet \tag{2.233}$$

Si la fonction $H_{11}(y)$ intervenant dans (2.223) est identiquement nulle, on peut obtenir $h_{10}(y) \equiv 0$ si on peut trouver une fonction $P_1$ résolvant l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$-\,M_1\,P_1(Y) \;+\; H_{10}(Y) \;+\; \frac{\partial P_1}{\partial Y}(Y)\,F_0(Y) \;=\; 0 \quad , \qquad P_1(0) \;=\; 0\;. \tag{2.234}$$

Remarquons que si $P_1$ est solution de l'équation (2.234), alors le graphe $\{(X_1, Y) : X_1 + P_1(Y) = 0\}$ est une variété invariante de :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}_1 &=& M_1\,X_1 \;+\; H_{10}(Y) \\ \dot{Y} &=& F_0(Y)\;. \end{array}\right. \tag{2.235}$$

Si la matrice $A$ est asymptotiquement stable, ce graphe est un sous ensemble de la variété stable et la variété stable elle même si toute les valeurs propres de $M_1$ ont leur partie réelle nulle. Donc, grâce à la théorie générale des variétés invariantes, nous savons que (2.234) admet une solution, au moins sur un voisinage de l'origine (voir [6]). En fait, ici, nous pouvons exploiter la structure triangulaire de (2.235) pour prouver que, lorsque l'intégrale suivante :

$$P_1(Y) \;=\; \int_0^\infty \exp\left(-sM_1\right) H_{10}(\Phi(s,Y))\,ds \tag{2.236}$$

où $\Phi(t, Y)$ est solution de :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, Y) \;=\; F_0(\Phi(t, Y)) \quad , \quad \Phi(0, Y) \;=\; Y \;, \tag{2.237}$$

est bien définie et est de classe $C^1$, alors $P_1(Y)$ est une solution de (2.234). Ce point important a été remarqué par Yang dans [82]. Plus précisément à propos de (2.236) et indépendamment du contexte de ce travail, nous avons :

**Lemme 2.21** *Si la matrice $\frac{\partial F_0}{\partial Y}(0)$ est asymptotiquement stable, la matrice $-M_1$ est stable et la fonction $H_{10}$ est $C^1$, alors la fonction $P_1$, donné par (2.236), est bien définie, est $C^1$ et est solution de (2.234).*

**Preuve :** Voir l'annexe F.

**Remarque 2.22 :**

1. Quand $M_1$ est égal à 0, l'égalité (2.234) se simplifie et donne :

$$\dot{\overbrace{P_1(Y)}}_{(2.235)} \;=\; -\,H_{10}(Y)\;, \tag{2.238}$$

ce qui signifie que $H_{10}(Y)$ est une dérivée exacte. Cette propriété, qui, il est vrai, n'est pas toujours aisément exploitable dans la pratique, sera néanmoins utilisée extensivement lors de la stabilisation du système pendule chariot à la section 2.5.4 •

2. Le résultat d'existence, donné par le lemme 2.21, a été exploité par Yang, dans [82], et par Sontag et Sussmann, dans [68] pour prouver le corollaire 2.37 qui se trouve dans la section suivante dans le cas où en (2.425) n'est pas présent le sous système en $y$. Ces auteurs utilisent pour y parvenir une technique Lyapunov similaire à celle utilisée pour le lemme 1.1 (avec $x_1$ remplacé par $X_1 + P_1(Y)$) •

3. Quand $X_1$ est de dimension 1, $M_1 = 0$, la matrice $A$ est asymptotiquement stable et la fonction $H_{11}(Y)$ est de classe $C^1$, la fonction (scalaire) $P_2$, qui a pour expression :

$$P_2(Y) \;=\; -\int_0^{\infty} H_{11}(\Phi(s, Y))\, ds \tag{2.239}$$

avec $\Phi(s, Y)$ solution de (2.237), est bien définie (voir l'annexe F). En ce cas, pour une telle fonction $P_2$, nous obtenons (voir (2.222)) :

$$h_{11}(y) \;=\; 0\;. \tag{2.240}$$

Nous remarquons également que (2.239) donne :

$$\dot{\overbrace{P_2(Y)}}_{(2.235)} \;=\; H_{11}(Y)\;, \tag{2.241}$$

ce qui signifie que $H_{11}(Y)$ est une dérivée exacte •

4. Remarquons finalement que, pour le système (2.219), le changement de coordonnées (2.220) a pour effet de transformer le système d'équations (2.8) de B2

$$\dot{X}_1 \;=\; M_1 X_1\;, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(X_1)\, H_2(X_1, 0, 0, 0) \;=\; 0\;, \quad \frac{\partial Q}{\partial x}(X_1)\, H_0(X_1) \tag{2.242}$$

en

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 \;=\; M_1 x_1 \quad , & \frac{\partial Q}{\partial x}(x_1) h_0(x_1) \;=\; 0 \quad , \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x_1)\left[h_2(x_1,0,0,0) + \frac{\partial P_1}{\partial y}(0)\, f_2(x_1,0,0,0) - < \frac{\partial P_2}{\partial y}(0), f_2(x_1,0,0,0) > x_1\right] \;=\; 0 \;. \end{array}\right. \tag{2.243}$$

Ainsi le changement de coordonnées introduit les fonctions

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}(0)\, f_2(x_1,0,0,0) \quad , \qquad - < \frac{\partial P_2}{\partial y}(0)\, ,\, f_2(x_1,0,0,0) > x_1$$

qui peuvent faire que B2 soit satisfaite dans les coordonnées $(x_1, y)$, alors qu'elle ne l'était pas dans les coordonnées $(X_1, Y)$, ou vice versa! Ce phénomène a été souligné en considérant les systèmes (2.2) et (2.214) •

### 2.3.3 Un deuxième type de changement de coordonnées.

Décomposons maintenant la fonction $H_1 Y$ de la façon suivante :

$$H_1(X_1, X_2, Y) Y \;=\; H_{13}(X_1)\, Y \;+\; H_{14}(X_1, X_2, Y)\;, \tag{2.244}$$

avec

$$H_{13}(X_1) \;=\; H_1(X_1, 0, 0)\;. \tag{2.245}$$

Remarquons que si :

$$\frac{\partial H_1}{\partial X_2}(X_1, X_2, 0) \;=\; 0\;, \tag{2.246}$$

alors $H_{14}$ est du second ordre en $Y = 0$. Ainsi nous considérons le système auxiliaire suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & M_1\, X_1 \;+\; H_{13}(X_1)\, Y \\ \dot{Y} & = & F_0(Y) \end{array}\right. \tag{2.247}$$

Pour ce système, nous cherchons un changement de coordonnées qui soit tel que la fonction $H_{13}(X_1) Y$ soit remplacée par une fonction d'ordre supérieur ou égal à 2 en $Y = 0$.

De façon à préserver les propriétés de croissance en $X_1$ de $H_{13}(X_1)$, nous nous restreignons à un changement de coordonnées de la forme :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + L(X_1) P(Y) \\ Y \end{pmatrix} \tag{2.248}$$

où la fonction matricielle $L$ et la fonction $P$ sont à choisir de classe $C^2$, $P$ devant de plus vérifier :

$$P(0) \;=\; 0\;. \tag{2.249}$$

Remarquons que si la fonction $\left|\frac{\partial L}{\partial X_1}\right|$ est bornée et plus exactement si, pour tout $X_1$,

$$\left|\frac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\right| \;\leq\; c\;, \tag{2.250}$$

alors le changement de coordonnées donné ci-dessus est un vrai difféomorphisme global si, pour tout $Y$,

$$|P(Y)| \;\leq\; \frac{1}{(1+\varepsilon)c} \tag{2.251}$$

avec $\varepsilon > 0$. En particulier, on a dans ce cas :

$$|X_1| \;\leq\; \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,|x_1 - L(0)P(y)| \quad , \qquad |X_1 - x_1| \;\leq\; (|L(0)| + c|X_1|)\,|P(y)|\ . \tag{2.252}$$

Dans ces nouvelles coordonnées, le système (2.247) s'écrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & M_1\, x_1 \;+\; h_{13}(x_1,y)\, y \\ \dot{y} & = & f_0(y) \end{array}\right. \tag{2.253}$$

avec :

$$\begin{aligned} h_{13}(x_1,y) \;=\; & \Big(-M_1\, L(X_1) + <\tfrac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\,,\,[M_1X_1 + H_{13}(X_1)y]>\Big)\int_0^1 \tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy)ds \qquad (2.254)\\ & + H_{13}(X_1) \;+\; L(X_1)\,\tfrac{\partial P}{\partial Y}(y)\int_0^1 \tfrac{\partial F_0}{\partial Y}(sy)ds\ , \end{aligned}$$

$$f_0(y) \;=\; F_0(y)\ . \tag{2.255}$$

Avec (2.252), nous voyons que la fonction $h_{13}$ est d'ordre 1 en $y=0$ et que la condition (2.251) est satisfaite, si nous choisissons :

$$P(y) \;=\; \frac{1}{\sqrt{1+(1+\varepsilon)^2c^2|y|^2}}\, y \tag{2.256}$$

et avons pour fonction $L$ une fonction de classe $C^2$, vérifiant (2.250) et solution de l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$-M_1\, L(X_1) + \;<\frac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\,,\, M_1X_1>\; + H_{13}(X_1) \;+\; L(X_1)\, A \;=\; 0\ . \tag{2.257}$$

Nous remarquons que s'il existe une solution $L$ à cette équation, alors l'ensemble

$$\{(L(X_1),X_1) :\; X_1 \in \mathbb{R}^{m_1}\}$$

est une variété invariante du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{Z} & = & M_1\, Z \;-\; Z\, A \;-\; H_{13}(X_1) \\ \dot{X}_1 & = & M_1\, X_1 \end{array}\right. \tag{2.258}$$

Cette remarque nous donne l'expression formelle suivante pour $L$ :

$$L(X_1) \;=\; \int_0^{+\infty} \exp(-M_1 s) H_{13}(\exp(M_1 s)X_1)\exp(As)ds\ . \tag{2.259}$$

On en déduit :

**Lemme 2.23** *Supposons que :*
*1. il existe un nombre réel positif $c$ tel que, pour tout $X_1$*[7]*,*

$$\left|\frac{\partial H_{13}}{\partial X_1}(X_1)\right| + \left|\frac{\partial^2 H_{13}}{\partial^2 X_1}(X_1)\right| \;\leq\; c \tag{2.260}$$

*3. la matrice $M_1$ est stable,*
*4. il existe un nombre réel strictement positif $c$ tel que, pour tout $s \geq 0$,*

$$|\exp(-M_1 s)| \left(1 + |\exp(M_1 s)|^2\right) |\exp(As)| \;\leq\; c \exp(-cs) \; . \tag{2.261}$$

*Alors la fonction $L$ donnée par (2.259) est bien définie, de classe $C^2$, solution de (2.257) et vérifie (2.250). De plus, la fonction $h_{13}$, définie en (2.254), vérifie, pour tout $(x_1, y)$ :*

$$|h_{13}(x_1, y)| \;\leq\; |y| \, (1 + |x_1|) \, \gamma(|y|) \tag{2.262}$$

*où $\gamma$ est une fonction positive continue.*

**Remarque 2.24 :**
1. Ce second changement de coordonnées est intéressant car il permet de traiter des systèmes plus complexes que le premier. Par contre il a l'inconvénient de demander le calcul explicite d'une solution $L$ appropriée de l'équation aux dérivées partielles (2.257), tâche beaucoup plus ardue que celle de résoudre les systèmes linéaires donnant les fonctions $P_1$ et $P_2$. Remarquons toutefois que, lorsque $M_1 = 0$, on a simplement :

$$L(X_1) \;=\; -\,H(X_1)\,A^{-1} \; . \tag{2.263}$$

   Il est également important d'observer que, dans le contexte du premier changement de coordonnées, la résolution de l'équation aux dérivées partielles (2.234) peut nous permettre de supprimer complètement le terme de couplage en $h_1$. Tel n'est pas le cas avec ce second changement de coordonnées : seuls les termes du premier ordre en $y = 0$ sont éliminés •

2. Comme (2.226)-(2.227), la condition (2.261) est une condition de séparation spectrale entre $A$ et $M_1$. Cette dernière est cependant plus restrictive car impose que le spectre de $A$ soit suffisamment à gauche dans le plan complexe par rapport au spectre de $M_1$ •

Nous n'aurons pas par la suite l'occasion d'illustrer le fonctionnement de ce changement de variable. Aussi proposons-nous ici l'exemple académique suivant :

**Example 2.25 :** Considérons le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & \frac{X}{1+X^2}\,Y \;+\; u^2 \\ \dot{Y} & = & -Y + \exp(-Y^2 - X^2)\,Y^2 \;+\; u \end{array}\right. \tag{2.264}$$

Le terme de couplage gênant est :

$$H_1(X, Y) \;=\; H_{13}(X) \;=\; \frac{X}{1 + X^2} \; . \tag{2.265}$$

[7] Puisque la fonction $H_1$ est de classe $C^3$, $H_{13}$ est de classe $C^3$

Puisque $M_1 = 0$ et $A = -1$, la formule (2.263) nous donne la fonction :

$$L(X) \;=\; \frac{X}{1+X^2} \tag{2.266}$$

dont la dérivée est bornée par 1. Donc en prenant :

$$P(Y) \;=\; \frac{Y}{1+Y^2}\ , \tag{2.267}$$

le changement de coordonnées (2.248) est un difféomorphisme global qui s'écrit :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} X + \frac{X}{1+X^2}\frac{Y}{1+Y^2} \\ Y \end{pmatrix}\ . \tag{2.268}$$

Pour ces nouvelles coordonnées, on obtient en particulier :

$$\begin{aligned}\dot{x} \;=\; &\left(\tfrac{X}{1+X^2}\tfrac{2y}{1+y^2} + \tfrac{X(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)}\exp(-y^2-X^2) + \tfrac{X(1-X^2)}{(1+X^2)^2(1+y^2)}\right) y^2 \\ &+ \left(\tfrac{X(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)} + \left[1 + \tfrac{1-X^2}{(1+X^2)^2}\tfrac{y}{1+y^2}\right] u\right) u\end{aligned} \tag{2.269}$$

Maintenant, le terme de couplage sur la première ligne est du second ordre en $y = 0$. Il est aussi borné en $x$ – puisqu'il l'est en $X$ –. Pour obtenir une loi de commande qui stabilise globalement asymptotiquement, il suffit alors d'appliquer le Théorème 2.1. Ainsi, prenons :

$$U(x,y) \;=\; \frac{1}{2}\left(x^2 + 15y^2\right) \tag{2.270}$$

comme fonction de Lyapunov susceptible d'être strictement assignable. Calculons sa dérivée par rapport au temps en utilisant l'expression obtenue pour la dérivée de $x$ :

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+15y^2\right)}} \;=\; &\frac{xX}{1+X^2}\frac{2y^3}{1+y^2} + y^2\exp(-y^2-X^2)\frac{xX(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)} + \frac{xX(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)}u \\ &+ \frac{xX(1-X^2)y^2}{(1+X^2)^2(1+y^2)} - 15y^2 + 15y^3\exp(-y^2-X^2) + 15yu \\ &+ x\left[1 + \frac{1-X^2}{(1+X^2)^2}\frac{y}{1+y^2}\right]u^2\end{aligned} \tag{2.271}$$

Après des calculs intermédiaires, on obtient :

$$\dot{\overbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+15y^2\right)}} \;\leq\; -3\,y^2 \;+\; \left[\frac{xX(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)} + 15y\right]u \;+\; 3\,|X|\,u^2 \tag{2.272}$$

On montre alors aisément que le bouclage :

$$u_s \;=\; -\frac{1}{6(1+X^2)}\left[\frac{xX(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)} + 15y\right] \tag{2.273}$$

donne l'inégalité :

$$\dot{\overbrace{\frac{1}{2}\left(x^2+15y^2\right)}} \;\leq\; -3y^2 - \frac{1}{12(1+X^2)}\left[\frac{xX(1-y^2)}{(1+X^2)(1+y^2)} + 15y\right]^2 \tag{2.274}$$

et donc est globalement asymptotiquement stabilisant. $\diamond$

**Preuve du Lemme 2.23 :** Définissons la fonction $\Delta$ ainsi :

$$\Delta(s, X_1) \;=\; \exp(-M_1 s) H_{13}(\exp(M_1 s) X_1) \exp(As)\ . \tag{2.275}$$

Grâce à (2.260), on obtient :

$$|H_{13}(X_1)| \;\leq\; c(1 + |X_1|) \tag{2.276}$$

et donc :

$$\begin{aligned} |\Delta(s, X_1)| \;&\leq\; c|\exp(-M_1 s)|(1 + |\exp(M_1 s) X_1|)|\exp(As)| \\ &\leq\; c|\exp(-M_1 s)|(1 + |\exp(M_1 s)|)|\exp(As)|(1 + |X_1|)\ . \end{aligned} \tag{2.277}$$

Grâce à (2.261), on en déduit que :

$$|\Delta(s, X_1)| \;\leq\; c\, \exp(-cs)(1 + |X_1|)\ . \tag{2.278}$$

Il s'en suit immédiatement que $L(X_1)$ donnée par (2.259) est bien définie pour tout $X_1$ dans $\mathbb{R}^{m_1}$.

Pour montrer que cette fonction est de classe $C^2$, montrons tout d'abord qu'elle est de classe $C^1$. Pour obtenir ce résultat, nous vérifions si les hypothèses de [14, Theorem (3.150)] le sont.

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, la fonction $\Delta(s, X_1)$ est continuement différentiable.

2. Nous avons :

$$\frac{\partial}{\partial X_1}\Delta(s, X_1) \;=\; \exp(-M_1 s) < \frac{\partial H_{13}}{\partial X_1}(\exp(M_1 s) X_1), \exp(M_1 s) > \exp(As)\ . \tag{2.279}$$

   Grâce à (2.260) et (2.261), il s'en suit que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial X_1}\Delta(s, X_1)\right| \;\leq\; c|\exp(-cs)|\ . \tag{2.280}$$

   pour tout $X_1$ dans $\mathbb{R}^{m_1}$ et tout $s$ dans $\mathbb{R}_{\geq 0}$.

3. La fonction $c|\exp(-cs)|$ est intégrable sur $[0, +\infty)$.

Ces trois points impliquent que la fonction $L$ est $C^1$ et que :

$$\frac{\partial L}{\partial X_1}(X_1) \;=\; \int_0^{+\infty} \exp(-M_1 s) < \frac{\partial H_{13}}{\partial X_1}(\exp(M_1 s) X_1), \exp(M_1 s) > \exp(As) ds\ . \tag{2.281}$$

Pour montrer que la fonction $L$ est de classe $C^2$, il suffit de procéder d'une façon analogue à celle que nous venons d'employer pour montrer qu'elle est de classe $C^1$ en substituant la fonction :

$$\exp(-M_1 s) < \frac{\partial H_{13}}{\partial X_1}(\exp(M_1 s) X_1), \exp(M_1 s) > \exp(As)$$

à la fonction $\Delta$.

Maintenant, pour montrer que $L$ définie en (2.259) est solution de (2.257), il suffit de montrer que $L(\exp(M_1 t)X_1)$ est une solution de (2.258). Ce résultat s'obtient en observant que $L(\exp(M_1 t)X_1)$ vérifie :

$$L(\exp(M_1 t)X_1) \;=\; \exp(tM_1)\left[\int_t^{+\infty} \exp(-M_1 s) H_{13}(\exp(M_1 s)X_1)\exp(As)ds\right]\exp(-At) \tag{2.282}$$

puis en dérivant cette égalité.

L'égalités (2.281) et les inégalités (2.260), (2.261) impliquent que (2.250) est vérifiée. Le dernier point qui reste à montrer est donc (2.262).

Grâce à (2.257) et (2.254), on a :

$$\begin{aligned} h_{13}(x_1, y) \;=\; & \left(< \tfrac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\,,\, M_1 X_1 >\right)\int_0^1 \left(\tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy) - I\right) ds \\ & + \left(< \tfrac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\,,\, H_{13}(X_1)y >\right)\int_0^1 \tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy)ds \\ & + L(X_1)\left[\tfrac{\partial P}{\partial Y}(y)\int_0^1 \tfrac{\partial F_0}{\partial Y}(sy)ds - A\right] \end{aligned} \tag{2.283}$$

Et donc :

$$\begin{aligned} |h_{13}(x_1, y)| \;\leq\; & \left|\tfrac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\right| |M_1 X_1| \left(\int_0^1 \left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy) - I\right| ds\right) \\ & + \left|\tfrac{\partial L}{\partial X_1}(X_1)\right| |H_{13}(X_1)y| \int_0^1 \left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy)\right| ds \\ & + |L(X_1)| \left(\left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(y)\right| \int_0^1 \left|\tfrac{\partial F_0}{\partial Y}(sy) - A\right| ds + \left|\frac{\partial P}{\partial Y}(y) - I\right| |A|\right) \;, \end{aligned} \tag{2.284}$$

Les fonctions $P$ et $F_0$ étant de classe $C^2$, il existe une fonction continue et positive $\mu$ telle que :

$$\left|\frac{\partial P}{\partial Y}(sy) - I\right| + \left|\frac{\partial F_0}{\partial Y}(sy) - A\right| \;\leq\; s\mu(|y|)|y| \quad , \quad \forall\,(y,s)\;:\; 0 \;\leq\; s \;\leq\; 1\;. \tag{2.285}$$

Alors, cette inégalité, (2.250) et (2.284) donnent :

$$\begin{aligned} |h_{13}(x_1, y)| \;\leq\; & c|M_1||X_1|\mu(|y|)|y| + c|H_{13}(X_1)||y| \int_0^1 \left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy)\right| ds \\ & + |L(X_1)| \left(\left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(y)\right| \mu(|y|)|y| + \mu(|y|)|y||A|\right) \;, \end{aligned} \tag{2.286}$$

Grâce à (2.250), on obtient :

$$|L(X_1)| \;\leq\; c\,|X_1| + |L(0)|\;. \tag{2.287}$$

Comme on a en outre montré l'inégalité (2.276), on obtient :

$$\begin{aligned} |h_{13}(x_1, y)| \;\leq\; & c|M_1||X_1|\mu(|y|)|y| + c(1+|X_1|)|y| \int_0^1 \left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(sy)\right| ds \\ & + (c\,|X_1| + |L(0)|) \left(\left|\tfrac{\partial P}{\partial Y}(y)\right| \mu(|y|)|y| + \mu(|y|)|y||A|\right) \;, \end{aligned} \tag{2.288}$$

Il s'en suit l'existence de d'une fonction continue positive $\zeta$ telle que :

$$|h_{13}(x_1, y)| \;\leq\; c(1+|X_1|)\zeta(|y|)|y| \tag{2.289}$$

Grâce à (2.252) :

$$|X_1| \;\leq\; \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\,(|x_1| + |L(0)||P(y)|)\;. \tag{2.290}$$

L'inégalité (2.262) s'en suit. Ceci termine notre preuve. □

## 2.4 Ajout d'intégration.

Nous combinons maintenant synthèse de Lyapunov et changements de coordonnées pour énoncer des résultats généralisant ceux obtenus par la technique de Jurdjevic et Quinn et traitant du problème d'ajout d'intégration (voir (5)).

Nous considérons à nouveau le système (2.207) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_1 & = & M_1 X_1 + H_1(X_1, X_2, Y)Y + H_2(X_1, X_2, Y, u)u \\ \dot{X}_2 & = & M_2 X_2 + E_1(X_1, X_2, Y)Y + E_2(X_1, X_2, Y, u)u \\ \dot{Y} & = & F_0(Y) + F_1(X_1, X_2, Y)Y + F_2(X_1, X_2, Y, u)u \end{array} \right. \tag{2.291}$$

où $Y$ est dans $\mathbb{R}^n$, $X_1$ dans $\mathbb{R}^{m_1}$, $X_2$ dans $\mathbb{R}^{m_2}$, $u$ dans $\mathbb{R}^q$, toutes les fonctions sont $C^3$ et nous notons :

$$A \;=\; \frac{\partial F_0}{\partial Y}(0) \; . \tag{2.292}$$

### 2.4.1 Avec l'aide du premier changement de coordonnées.

#### 2.4.1.1 Résultat.

Décomposons la fonction $H_1 Y$ comme en (2.217) :

$$H_1(X_1, X_2, Y)Y \;=\; H_{10}(Y) + H_{11}(Y)X_1 + H_{12}(X_1, X_2, Y) \; , \tag{2.293}$$

avec

$$H_{10}(Y) \;=\; H_1(0,0,Y)\,Y \quad , \qquad H_{11}(Y) \;=< \frac{\partial H_1}{\partial X_1}(0,0,Y), Y > \tag{2.294}$$

et introduisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse D1 :**

**D11 :** *Le terme $F_1(X_1, X_2, Y)Y$ n'est pas présent et le point $Y = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du sous système en $Y$ quand $u$ est pris égal à zéro.*

**D12 :** *Les matrices $A$ et $M_2$ sont asymptotiquement stables, la matrice $M_1$ est stable et les spectres de ces matrices sont tels que, pour tout $(i, j, k)$*[8]*,*

$$\lambda_{A_i} + \lambda_{M_{1j}} \;\neq\; \lambda_{M_{1k}} \quad , \quad \lambda_{A_i} \;\neq\; \lambda_{M_{1k}} \; . \tag{2.295}$$

L'hypothèse D12 implique l'existence de matrices $Q_1$ et $Q_2$ symétriques, définies positives, satisfaisant :

$$Q_1 M_1 + M_1^\top Q_1 \;\leq\; 0 \quad , \quad Q_2 M_2 + M_2^\top Q_2 \;=\; -I \tag{2.296}$$

et de $P$ et $\mathcal{P}_2$, solutions de respectivement (2.232) et (2.229). (Voir le lemme 2.18). Soit alors $\mathcal{H}_2$ définie par :

$$\mathcal{H}_2(X_1)\,u \;=\; - < \mathcal{P}_2, F_2(X_1,0,0,0)u > \; X_1 \;+\; [H_2\,(X_1,0,0,0) + P\,F_2\,(X_1,0,0,0)]\,u \; . \tag{2.297}$$

[8] Les conditions (2.295) sont nécessairement satisfaites si la partie réelle de chacune des valeurs propres de $M_1$ est nulle.

**Hypothèse D2 :** $X_1 = 0$ *est l'unique solution de :*

$$\dot{X}_1 \;=\; M_1 X_1 \;, \quad X_1^\top Q_1 M_1 X_1 \;=\; 0 \;, \quad X_1^\top Q_1 \mathcal{H}_2(X_1) \;=\; 0 \;. \tag{2.298}$$

**Hypothèse D3 :** *Les fonctions $H_{12}$ et $E_1$ sont telles qu'il existe une fonction positive continue $\gamma$ telle que :*

$$|H_{12}(X_1, X_2, Y)| \;\leq\; |Y|\,[|X_2| + |Y|\,(1 + |X_1| + |X_2|)]\,\gamma(Y) \;, \tag{2.299}$$
$$|E_1(X_1, X_2, Y)| \;\leq\; (1 + |X_1| + |X_2|)\,\gamma(Y) \;. \tag{2.300}$$

**Théorème 2.26** *Si les hypothèses D1, D2 et D3 sont vérifiées, alors pour tout $\overline{u}$ dans $(0, +\infty]$, l'origine du système (2.291) peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable par un bouclage d'état $C^3$, borné par $\overline{u}$ et zéro à l'origine. De plus, si la linéarisation de (2.291) est stabilisable, la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Finalement, lorsque la composante en $X_1$ n'est pas présente, l'origine de (2.291) avec $u = 0$ est globalement asymptotiquement stable.*

**Remarque 2.27 :**
1. Les hypothèses D1 et D3 donnent des indications sur la façon de décomposer la variable de l'intégration $X$ en $X_1$ et $X_2$. Premièrement, les termes couplants $H_1$ et $E_1$ peuvent au plus croître linéairement en $X$ à l'infini. Deuxièmement, la décomposition doit être effectuée de sorte que la matrice $M_2$ soit asymptotiquement stable et que la matrice $M_1$ soit seulement stable mais satisfasse la condition de séparation spectrale (2.295). Finalement le terme $H_{12}$ en (2.293) divisé par $|Y|$, doit s'annuler quand $X_2$ et $Y$ sont nuls •
2. Quand $X_1$ n'est pas présent et que $u$ est pris égal à 0, (2.296) et (2.300) impliquent que le sous système en $X_2$ avec $Y$ comme entrée est "entrée convergente, état borné" (Converging Input Bounded State), propriété définie dans [65]. Il s'en suit que le dernier point du Théorème 2.26 est une conséquence directe de [65, Theorem] et que la stabilité asymptotique de $A$ n'est en fait pas nécessaire dans ce cas •

#### 2.4.1.2 Preuve du Théorème 2.26.

Cette preuve est divisée en trois parties.

**1. Stabilité asymptotique globale :** Pour prouver le premier point du Théorème 2.26, nous vérifions qu'après un changement de coordonnées, le Théorème 2.1 s'applique.

Grâce à (2.293) et au fait que $H_1$ est $C^3$, D3 implique que la fonction $H_{12}$ peut être décomposée en :

$$H_{12}(X_1, X_2, Y) \;=\; [< H_{12Y}(X_1, X_2, Y), Y > \;+\; < H_{12X}(X_1, X_2), X_2 >]\, Y \;. \tag{2.301}$$

Alors, puisque les spectres de $A$ et de $M_1$ vérifient (2.295), le Lemme 2.18 donne des fonctions $P_1$ et $P_2$ telles qu'en appliquant le changement de coordonnées, linéaires en $(X_1, X_2)$,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \exp(-\,P_2(Y))\,(X_1 \,+\, P_1(Y)) \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix} \tag{2.302}$$

les fonctions $H_{10}$ et $H_{11}$ sont transformées en des fonctions du second ordre en $y = 0$. Plus précisément le système (2.291) peut être récrit sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& M_1 x_1 + < h_{1y}(x_1, x_2, y), y > \ y + < h_{1x}(x_1, x_2, y), x_2 > y + h_2(x_1, x_2, y, u)u \\ \dot{x}_2 &=& M_2 x_2 + e_1(x_1, x_2, y)y + e_2(x_1, x_2, y, u)u \\ \dot{y} &=& f_0(y) + f_2(x_1, x_2, y, u)u \end{array}\right. \tag{2.303}$$

où :
- la fonction $h_{1y}$ provient des fonctions $h_{10}$ et $h_{11}$ données en (2.222) et (2.223) et de la fonction $H_{12Y}$,
- la fonction $h_{1x}$ provient de la fonction $H_{12X}$,
- la fonction $h_2$ est donnée par :

$$\begin{aligned} h_2(x_1, x_2, y, u)\, u \;=\; & -\exp(-P_2(y)) \left( \int_0^1 \Xi(x_1, x_2, y, s) ds \right) \exp(P_2(y))\, x_1 \\ & + H_2\left([\exp(P_2(y))x_1 - P_1(y)], x_2, y, u\right) u \\ & + \frac{\partial P_1}{\partial y}(y)\, F_2\left([\exp(P_2(y))x_1 - P_1(y)], x_2, y, u\right) u \end{aligned} \tag{2.304}$$

avec $\Xi$ définie ainsi :

$$\Xi(x_1, x_2, y, s) = \exp(P_2(y)s) < \frac{\partial P_2}{\partial y}(y), F_2\left([\exp(P_2(y))x_1 - P_1(y)], x_2, y, u\right) u > \exp(-\,P_2(y)s). \tag{2.305}$$

Alors, premièrement, nous avons que D11 et (2.296) impliquent que B1 est vérifiée. En particulier on a :

$$Q(x_1) \;=\; x_1^\top M_1\, x_1 \quad , \qquad S(x_2) \;=\; x_2^\top M_2\, x_2 \,. \tag{2.306}$$

De plus (voir annexe G), la fonction de Lyapunov $V$ peut être prise de classe $C^3$ et obtenue comme une combinaison convexe appropriée de $Y^\top \mathcal{V} Y$ et de $V_0(Y)$ où $\mathcal{V}$ est une matrice de Lyapunov associée à la matrice asymptotiquement stable $A$ et $V_0(Y)$ est une fonction de Lyapunov associée (voir [83, Theorem V.19.8]) à la stabilité asymptotique globale de $Y = 0$. Ainsi, nous avons en outre :

$$|y| \;\le\; c \qquad \Longrightarrow \qquad V(y) \;\le\; c\,|y|^2 \,, \quad W(y) \;\ge\; c\,|y|^2 \,. \tag{2.307}$$

Deuxièmement, nous remarquons que $P_1$ et $P_2$, donnés par le lemme 2.18, satisfont :

$$P_1(Y) \;=\; P\,Y \quad , \quad \frac{\partial P_2}{\partial Y}(0) \;=\; \mathcal{P}_2 \,. \tag{2.308}$$

Il s'en suit qu'avec la définition (2.297), B2 n'est rien d'autre que D2.

Troisièmement, avec D3 et la linéarité en $(X_1, X_2)$ de (2.302), nous concluons qu'il existe une fonction $\gamma$ positive et continue telle que :

$$|h_{1y}(x_1, x_2, y)| \;\le\; (1 + |x_1| + |x_2|)\,\gamma(y) \quad , \quad |h_{1x}(x_1, x_2, y)| \;\le\; \gamma(y) \tag{2.309}$$

$$|e_1(x_1, x_2, y)| \;\le\; (1 + |x_1| + |x_2|)\,\gamma(y) \,. \tag{2.310}$$

Par conséquent, on a :

$$\left| x_1^\top Q_1 < h_{1y}(x_1, x_2, y)\,,\, y > y \right| \;\le\; c\,|y|^2\,\gamma(y)\,|x_1|\,(1 + |x_1| + |x_2|) \tag{2.311}$$

$$\le\; c\,|y|^2\,\gamma(y)\left(1 + \sqrt{1 + |x_1|_{Q_1}^2 + |x_2|_{Q_2}^2} - 1\right)^2 \tag{2.312}$$

$$\left| x_1^\top Q_1 < h_{1x}(x_1,x_2,y)\,,\, x_2 > y \right| \;\leq\; c\,|y|\,\gamma(y)\,|x_1|\,|x_2| \tag{2.313}$$

$$\leq\; c\,|y|\,\gamma(y)\,|x_2| \left(1+\sqrt{1+|x_1|_{Q_1}^2+|x_2|_{Q_2}^2}-1\right) \tag{2.314}$$

$$\left| x_2^\top Q_2 e_1(x_1,x_2,y) y \right| \;\leq\; c\,|y|\,\gamma(y)\,|x_2| \left(1+\sqrt{1+|x_1|_{Q_1}^2+|x_2|_{Q_2}^2}-1\right)\ . \tag{2.315}$$

Donc, en prenant

$$\rho(s) \;=\; \sqrt{1+s}\;-\;1 \tag{2.316}$$

et

$$\kappa(v) \;\geq\; 1\;+\;c \max_{\{y:V(y)\leq v\}} \left\{ \frac{|y|^2\left[\gamma(y)^2+\gamma(y)\right]}{W(y)} \right\}\ , \tag{2.317}$$

l'inégalité (2.10) est satisfaite. En plus de cela :

- La définition de $\rho$ implique que $\rho$ est zéro en zéro, Lipschitz continue et que (2.11) est satisfaite.
- D'après (2.317), la fonction $\kappa$ peut être choisie continue. Donc (2.12) et B3.2 sont satisfaites
- $V$ étant $C^3$, (2.12) est satisfaite.
- La condition (2.13) est satisfaite puisque $f_1 \equiv 0$.

Par conséquent, B3 est vérifiée.

Nous en concluons que le Théorème 2.1 s'applique. On en déduit, en particulier, qu'un bouclage d'état de classe $C^2$ ayant les propriétés désirées peut être obtenu.

Remarquons que (2.97) étant vérifiée, une loi de commande possible est (2.98). Rappelons que (2.68) donne une fonction de Lyapunov appropriée ayant une dérivée par rapport au temps définie négative si :

$$\left| x_1^\top Q_1\, M_1 x_1 \right| \;+\; \left| x_1^\top Q_1 \mathcal{H}_2(x_1) \right| \;\neq\; 0 \quad , \quad \forall\, x_1 \;\neq\; 0\ . \tag{2.318}$$

Si $x_1$ est de dimension 1, l'hypothèse D2 implique que cette condition est satisfaite. Enfin si cette condition n'est pas satisfaite, nous avons vu au paragraphe 2.2.3.3 comment construire une fonction de Lyapunov de dérivée définie négative.

**2. Stabilité exponentielle locale :** Pour prouver la stabilité asymptotique du système en boucle fermé linéarisé, nous écrivons la linéarisation de (2.303) ainsi :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& M_1 x_1 + \mathcal{D}_1 u\ , \\ \dot{x}_2 &=& M_2 x_2 + \mathcal{D}_2 u\ , \\ \dot{y} &=& Ay + Bu\ , \end{array} \right. \tag{2.319}$$

avec

$$B \;=\; f_2(0,0,0,0) \quad , \qquad \mathcal{D}_1 \;=\; h_2(0,0,0,0) \quad , \qquad \mathcal{D}_2 \;=\; e_2(0,0,0,0)\ . \tag{2.320}$$

Pour prouver que la linéarisation de la loi de commande donnée par (2.83) est stabilisante pour ce système, nous procédons en deux étapes :

1. Nous appliquons le lemme 1.1 pour obtenir une loi de commande linéaire $u_L$ pour le système linéaire (2.319).

2. Nous vérifions que cette loi de commande $u_L$ n'est rien d'autre que la linéarisation à l'origine de (2.83).

*Première étape :* Nous remarquons tout d'abord que (2.319) est de la forme (1.4). En conséquence l'hypothèse D12 implique que B1 est vérifiée. En outre, le fait d'avoir imposé la stabilisabilité de la linéarisation de (2.291) implique la stabilisabilité de la paire $(M_1, \mathcal{D}_1)$. Cette propriété implique grâce au Fait 1.8 que B2 est vérifiée. On déduit de (2.83) dans la proposition 2.8 que la loi de commande linéaire suivante stabilise (2.319) :

$$u_L(x, y) \;=\; -\,\beta_0 \left( \kappa_0 \alpha_0 \, B^\top \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0)\, y \;+\; l_0 \mathcal{D}^\top Q\, x \right) \tag{2.321}$$

où :

- $V$ est la fonction de Lyapunov satisfaisant (2.7) et (2.307) et donc :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) A \;+\; A^\top \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) \;<\; 0 \;, \tag{2.322}$$

-

$$x \;=\; \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathcal{D} \;=\; \begin{pmatrix} \mathcal{D}_1 \\ \mathcal{D}_2 \end{pmatrix} \quad , \quad Q \;=\; \begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{pmatrix} \tag{2.323}$$

- $\kappa_0$ et $l_0$ sont des nombres réels strictement positifs.
- $\alpha_0$ et $\beta_0$ sont des réels satisfaisant :

$$\beta_0 \;>\; 0 \quad , \qquad -\,\frac{\lambda_{\min}\left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) A \;+\; A^\top \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) \right\}}{\lambda_{\max}\left\{ \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) B B^\top \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}(0) \right\}} \;\geq\; 3\,\beta_0\, [\alpha_0 - 1]^2 \;. \tag{2.324}$$

*Deuxième étape :* Les conditions (2.84)-(2.87) indiquent qu'avec (2.67), on peut prendre, pour satisfaire (2.324) :

$$\kappa_0 \;=\; \kappa(0) \quad , \qquad l_0 \;=\; l'(0) \quad , \qquad \alpha_0 \;=\; \alpha(0,0,0) \quad , \qquad \beta_0 \;=\; \beta(0,0,0) \;. \tag{2.325}$$

Donc, l'approximation linéaire à l'origine de (2.83) est égale à (2.321).

**3. Cas où la composante $X_1$ n'est pas présente :** Pour prouver que l'origine de (2.291) avec $u = 0$ est globalement asymptotiquement stable s'il n'y a pas de composante $x_1$, nous remarquons simplement que dans ce cas, avec (2.300) et en complétant les carrés, on a :

$$\overbrace{k(y) + \ln(1 + |x_2|^2_{Q_2})}^{\cdot} \;=\; -\,\kappa(V(y))\, W(y) \;+\; \frac{-\,|x_2|^2 + x_2^\top Q_2 e_1(x_2, y) y}{1 + |x_2|^2_{Q_2}} \tag{2.326}$$

$$\leq\; -\,\kappa(y)\, W(y) \;-\; \frac{|x_2|^2}{1 + |x_2|^2_{Q_2}} \;+\; c\frac{(|x_2| + |x_2|^2)^2}{(1 + |x_2|^2_{Q_2})^2} \tag{2.327}$$

$$+\; \frac{1}{c}\, |y|^2\, \gamma(y)^2 \tag{2.328}$$

où le nombre $c$ peut être choisi pour que soit satisfaite l'inégalité :

$$c\, \frac{\left(|x_2| + |x_2|^2\right)^2}{(1 + |x_2|^2_{Q_2})^2} \;\leq\; \frac{|x_2|^2}{2(1 + |x_2|^2_{Q_2})} \;. \tag{2.329}$$

Par conséquent, en prenant $\kappa$ telle que :

$$\frac{1}{2}\kappa(V(y))W(y) \ \geq \ \frac{1}{c}\,|y|^2\,\gamma(y)^2\ , \tag{2.330}$$

on obtient :

$$\overbrace{k(y) + \ln(1 + |x_2|^2_{Q_2})}^{\cdot} \ \leq \ -\frac{1}{2}\kappa(V(y))W(y) - \frac{|x_2|^2}{2(1 + |x_2|^2_{Q_2})}\ . \tag{2.331}$$

Le terme de droite de (2.331) étant défini négatif, notre preuve est achevée. □

### 2.4.2 Avec l'aide du deuxième changement de coordonnées.

#### 2.4.2.1 Résultat.

Reprenons maintenant la décomposition (2.244) de $H_1Y$ :

$$H_1(X_1, X_2, Y)Y \ = \ H_{13}(X_1)\,Y \ + \ H_{14}(X_1, X_2, Y)\ , \tag{2.332}$$

avec :

$$H_{13}(X_1) \ = \ H_1(X_1, 0, 0)\ . \tag{2.333}$$

Nous introduisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèse E1 :**

**E11 :** *Le terme $F_1(X_1, X_2, Y)Y$ n'est pas présent et le point $Y = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable du sous système en $Y$ quand $u$ est pris égal à zéro.*

**E12 :** *Les matrices $A$ et $M_2$ sont asymptotiquement stables, la matrice $M_1$ est stable et il existe un nombre réel strictement positif $c$ tel que, pour tout $s \geq 0$,*

$$|\exp(-M_1 s)|\left(1 + |\exp(M_1 s)|^2\right)|\exp(As)| \ \leq \ c\,\exp(-cs)\ . \tag{2.334}$$

L'hypothèse E12 implique l'existence de matrices $Q_1$ et $Q_2$ symétriques, définies positives, satisfaisant :

$$Q_1M_1 + M_1^\top Q_1 \ \leq \ 0 \quad , \quad Q_2M_2 + M_2^\top Q_2 \ = \ -I \tag{2.335}$$

et fait que la fonction suivante est bien définie :

$$L(X_1) \ = \ \int_0^{+\infty} \exp(-M_1 s) H_{13}(\exp(M_1 s)X_1)\exp(As)ds\ . \tag{2.336}$$

Soit alors $\mathcal{H}_2$ définie par :

$$\mathcal{H}_2(X_1) \ = \ H_2(X_1, 0, 0, 0) \ + \ L(X_1)\,F_2(X_1, 0, 0, 0)\ . \tag{2.337}$$

**Hypothèse E2 :** $X_1 = 0$ *est l'unique solution de :*

$$\dot{X}_1 \ = \ M_1X_1\ , \quad X_1^\top Q_1 M_1 X_1 \ = \ 0\ , \quad X_1^\top Q_1 \mathcal{H}_2(X_1) \ = \ 0\ . \tag{2.338}$$

**Hypothèse E3 :**

**E31 :** *Les fonctions $H_{14}$ et $E_1$ sont telles qu'il existe une fonction positive continue $\gamma$ telle que :*

$$|H_{14}(X_1, X_2, Y)| \leq |Y| \left[|X_2| + |Y| \left(1 + |X_1| + |X_2|\right)\right] \gamma(Y) , \qquad (2.339)$$
$$|E_1(X_1, X_2, Y)| \leq (1 + |X_1| + |X_2|) \gamma(Y) . \qquad (2.340)$$

**E32 :** *Les fonctions* $\left|\frac{\partial H_{13}}{\partial X_1}(X_1)\right|$ *et* $\left|\frac{\partial^2 H_{13}}{\partial^2 X_1}(X_1)\right|$ *sont bornée.*

**Théorème 2.28** *Si les hypothèses E1, E2 et E3 sont vérifiées, alors pour tout $\overline{u}$ dans $(0, +\infty]$, l'origine du système (2.291) peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable par un bouclage d'état $C^1$, borné par $\overline{u}$ et zéro à l'origine. De plus, si la linéarisation de (2.291) est stabilisable, la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable. Finalement, lorsque la composante en $X_1$ n'est pas présente, l'origine de (2.291) avec $u = 0$ est globalement asymptotiquement stable.*

#### 2.4.2.2 Preuve du Théorème 2.28.

Nous allons établir ce théorème en nous ramenant à la preuve de Théorème 2.26.

Les hypothèses E12 et E32 garantissent que le Lemme 2.23 s'applique. On obtient ainsi des fonctions $L$ et $P$ telles qu'en appliquant le changement de coordonnées

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 + L(X_1)\, P(Y) \\ X_2 \\ Y \end{pmatrix} \qquad (2.341)$$

la fonctions $H_{13}Y$ est transformée en une fonction du second ordre en $y = 0$. Plus précisément, avec l'hypothèse E31, le système (2.291) peut être récrit sous la forme (2.303) avec les fonctions $h_{1x}$ et $h_{1y}$ obtenues de l'identité :

$$\begin{aligned} &< h_{1y}(x_1, x_2, y), y > y + < h_{1x}(x_1, x_2, y), x_2 > y \qquad (2.342) \\ &\quad = h_{13}(x_1, y)\, y + H_{14}(X_1, x_2, y) + < \frac{\partial L}{\partial X_1}(X_1) \,,\, H_{14}(X_1, x_2, y) > P(y) \end{aligned}$$

où $h_{13}$ est la fonction définie en (2.254) et vérifie (2.262). Ainsi, puisque, d'après le Lemme 2.23, la fonction $\frac{\partial L}{\partial X_1}$ est bornée, les inégalités (2.252) et (2.262) et l'hypothèse E31 impliquent-elles que les fonctions $h_{1y}$, $h_{1x}$ et $e_1$ vérifient (2.309) et (2.310). Enfin on a :

$$h_2(x_1, 0, 0, 0) = \mathcal{H}_2(x_1) . \qquad (2.343)$$

Nous en déduisons que la preuve peut être continuée exactement comme celle du Théorème 2.26.
□

**Remarque 2.29 :** Dans les Théorèmes 2.26 et 2.28 il est fait l'hypothèse que le terme $F_1(X_1, X_2, Y)Y$ n'est pas présent dans (2.291). Modifier ces théorèmes en autorisant la présence de pareils termes termes est possible, mais cela présente un inconvénient. En effet, il faut alors imposer une hypothèse semblable à (2.13) ce qui suppose connue une fonction Lyapunov $V$ assignée strictement pour le sous système en $Y$ par $u = 0$. Nous n'avons pas fait cette hypothèse mais avons seulement supposé que $Y = 0$ est un point globalement asymptotiquement stable du sous système en $Y$ pris à commande nulle. Nous tenons a garder cette hypothèse telle qu'elle est : en effet, celle-ci met en avant le fait que si la fonction $V$ n'est pas connue explicitement, il est tout de même possible grâce à la Proposition 2.9 de proposer une formule explicite de loi de commande globalement asymptotiquement stabilisante pour le système global, le paramètre $\mu$ restant à régler. •

## 2.5 Applications.

Au moyen des divers outils mis en place dans les sections précédentes, nous sommes maintenant en mesure d'appréhender différentes questions de stabilisation asymptotique globale.

### 2.5.1 Systèmes feedforward.

#### 2.5.1.1 Résultat.

Le Théorème 2.26 peut être appliqué de façon récursive pour prouver que le système suivant est globalement asymptotiquement stabilisable :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_n &=& h_{0n}(y_{n-1})x_n + h_{1n}(y_{n-1}) + h_{2n}(x_n, y_{n-1}, v)v \\ &\vdots& \\ \dot{x}_1 &=& h_{01}(y_0)x_1 + h_{11}(y_0) + h_{21}(x_1, y_0, v)v \\ \dot{y}_0 &=& f_0(y_0) + f_{20}(y_0, v)v \end{array}\right. \tag{2.344}$$

où $y_0$ est dans $\mathbb{R}^n$, $x_i$ dans $\mathbb{R}^{m_i}$, $u$ dans $\mathbb{R}^q$, $f_0$, $h_{0i}$, $h_{1i}$, $f_{20}$, $h_{2i}$ sont de classe $C^4$ et avec :

$$y_i \;=\; \left(x_i^\top, x_{i-1}^\top, \ldots, x_1^\top, y_0^\top\right)^\top \quad , \quad h_{1i}(0) \;=\; 0 \quad , \quad f_0(0) \;=\; 0\ . \tag{2.345}$$

Nous notons :

$$\begin{array}{c} M_i \;=\; h_{0i}(0) \quad , \quad C_i \;=\; \frac{\partial h_{1i}}{\partial y_{i-1}}(0) \quad , \quad D_i \;=\; h_{2i}(0,0,0)\ . \\ A_0 \;=\; \frac{\partial f_0}{\partial y_0}(0) \quad , \quad B_0 \;=\; f_{20}(0,0)\ . \end{array} \tag{2.346}$$

Nous avons :

**Théorème 2.30** *Supposons ce qui suit pour le système (2.344) :*

*2.30.1 Il existe une loi de commande $v_0(y_0)$ qui est $C^3$, vérifie $v_0(0) = 0$, qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine du sous système en $y_0$ de (2.344) et telle que la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable.*

*2.30.2 Pour tout $i$ dans $\{1, \ldots, n\}$, la matrice $M_i$ est telle qu'il existe une matrice définie positive $Q_i$ satisfaisant :*

$$Q_i M_i \;+\; M_i^\top Q_i \;=\; 0\ . \tag{2.347}$$

*2.30.3 La paire*

$$\left(\begin{array}{ccccc} M_n & \boxed{\qquad\qquad C_n \qquad\qquad} & & & \\ 0 & M_{n-1} & \boxed{\qquad C_{n-1} \qquad} & & \\ & & \ddots & & \\ & & & M_1 & \boxed{C_1} \\ & & & 0 & A_0 \end{array}\right) \quad , \quad \left(\begin{array}{c} D_n \\ D_{n-1} \\ \vdots \\ D_1 \\ B_0 \end{array}\right)$$

*est stabilisable.*

*2.30.4 Pour tout $i$ dans $\{1,\dots,n\}$, la fonction $h_{2i}$ satisfait, pour tout $(x_i, y_{i-1}, v)$,*

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_{2i}}{\partial x_i}(x_i,0,0) &= 0 \ , & (2.348)\\ \frac{\partial^2 h_{2i}}{\partial x_i^2}(x_i,y_{i-1},v) &= 0 \ . & (2.349) \end{aligned}$$

*Si ces conditions sont vérifiées, pour tout $\overline{u}$ dans $(0,+\infty]$, l'origine peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable du système (2.344) au moyen d'un bouclage d'état borné par $\overline{u} + \sup_{y_0}\{|v_0(y_0)|\}$ et la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable.*

**Remarque 2.31 :**
1. Avec les notations du système général (6), nous voyons que les hypothèses du Théorème 2.30 sont satisfaites si $\dot{x} = f_1(x,u)$ est globalement asymptotiquement stabilisable par une loi de commande qui donne en outre la propriétés de stabilité exponentielle locale et si la linéarisation à l'origine du système global est stabilisable •
2. Le Théorème 2.30 n'est qu'une des diverses versions qu'il est possible d'obtenir en appliquant de façon récursive les théorèmes 2.26 ou 2.28. Notons en particulier que nous aurions pu autoriser une dépendance non explicitement linéaire en $x_i$ pour les termes indépendants de $v$ et que la restriction (2.347) n'a pour seul objectif que de rendre plus facile la vérification de la condition spectrale D12 •

**Preuve du Théorème 2.30 :** Nous prouvons ce théorème par récurrence. Nous appellerons système $i$ le sous système dont l'état est $y_i = (y_0, x_1, \dots, x_i)$, i.e. :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_i &=& h_{0i}(y_{i-1})x_i + h_{1i}(y_{i-1}) + h_{2i}(x_i,y_{i-1},v)v \\ &\vdots& \\ \dot{x}_1 &=& h_{01}(y_0)x_1 + h_{11}(y_0) + h_{21}(x_1,y_0,v)v \\ \dot{y}_0 &=& f_0(y_0) + f_{20}(y_0,v)v \end{array} \right. \tag{2.350}$$

Sous une forme plus compacte le précédent système s'écrit :

$$\dot{y}_i \ = \ \overline{f}_i(y_i) + \overline{f}_{2i}(y_i,v)v \tag{2.351}$$

Prenons pour hypothèse de récurrence :

**Hypothèse de récurrence :** *L'origine du système (2.351) peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable par $v_i(y_i)$, un bouclage d'état de classe $C^3$ borné par $\frac{i}{n}\overline{u} + \sup_{y_0}\{|v_0(y_0)|\}$, vérifiant $v_i(0) = 0$, et tel que la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable.*

Cette hypothèse est satisfaite pour $i = 0$ grâce à l'hypothèse 2.30.1 du Théorème 2.30. Pour prouver que si celle-ci est satisfaite au rang $i$, elle l'est aussi au rang $i+1$, nous allons montrer que le Théorème 2.26 s'applique au système $i+1$, après bouclage.

1. Avec $v_i$, loi de commande donnée par l'hypothèse de récurrence, (2.349) et les notations suivantes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & v - v_i(y_i) \, , \\ h_0(y_i) & = & h_{0i+1}(y_i) + < \frac{\partial h_{2i+1}}{\partial x_{i+1}}(0, y_i, v_i(y_i)) \, , v_i(y_i) > \, , \\ h_1(y_i) & = & h_{1i+1}(y_i) + h_{2i+1}(0, y_i, v_i(y_i))v_i(y_i) \, , \\ h_2(x_{i+1}, y_i, u) & = & h_{2i+1}(x_{i+1}, y_i, v_i(y_i) + u) + < \left(\int_0^1 \frac{\partial h_{2i+1}}{\partial v}(x_{i+1}, y_i, lu + v_i(y_i))dl\right) \, , v_i(y_i) > \, , \\ f(y_i) & = & \overline{f}_i(y_i) \, + \, \overline{f_{2i}}(y_i, v_i(y_i)) \, v_i(y_i) \, , \\ f_2(y_i, u) & = & \overline{f}_{2i}(y_i, u + v_i(y_i)) \, + \, < \left(\int_0^1 \frac{\partial \overline{f_{2i}}}{\partial v}(y_i, lu + v_i(y_i))dl\right) \, , v_i(y_i) > \, , \end{array}\right. \tag{2.352}$$

le système $i+1$ s'écrit sous la forme (2.291), avec en particulier,

$$M \;=\; M_{i+1} \quad , \quad C \;=\; C_{i+1} + D_{i+1}K_i \quad , \quad D \;=\; D_{i+1} \tag{2.353}$$

et :

$$A \;=\; \left(\begin{array}{ccc} M_i & \boxed{\quad C_i \quad} & \\ & \ddots & \\ & & M_1 \;\; \boxed{C_1} \\ & & 0 \quad\; A_0 \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c} D_i \\ \vdots \\ D_1 \\ B_0 \end{array}\right) K_i \quad , \qquad B \;=\; f_2(0,0) \;=\; \left(\begin{array}{c} D_i \\ \vdots \\ D_1 \\ B_0 \end{array}\right) \tag{2.354}$$

où :

$$K_i \;=\; \frac{\partial v_i}{\partial y_i}(0) \; . \tag{2.355}$$

Les fonctions $h_i$, $f$ et $f_2$ sont toutes de classe $C^3$. En effet :

(a) Les fonctions $f_{20}, h_{2j}, h_{0j}, h_{1j}$ sont de classe $C^4$ pour tout $j$.

(b) La fonction $v_i$ est de classe $C^3$.

Notons également que $f_2$ ne dépend pas de $x_{i+1}$.

2. L'hypothèse D11 est une conséquence de l'hypothèse de récurrence.

3. Puisque la matrice $A$ est donnée par la linéarisation du système en boucle fermée :

$$\dot{y}_i \;=\; \overline{f}_i(y_i) + \overline{f}_{2i}(y_i, v_i(y_i))v_i(y_i) \; , \tag{2.356}$$

sa stabilité asymptotique est donnée par l'hypothèse de récurrence. Donc avec (2.347) l'hypothèse D12 est vérifiée.

4. L'hypothèse D2 est une conséquence de l'hypothèse 2.30.3 et du Fait 1.8. En effet, puisque $f_2$ ne dépend pas de $x_{i+1}$, (2.348) implique :

$$\mathcal{H}_2(x_{i+1}) \;=\; h_{2i+1}(x_{i+1}, 0, 0) \;=\; D \; . \tag{2.357}$$

5. Puisque $h_{0i+1}$ et $h_{1i+1}$ ne dépendent pas de $x_{i+1}$, l'hypothèse D3 est trivialement satisfaite.

Par conséquent, en appliquant le Théorème 2.26, on obtient un bouclage d'état $u_{i+1}(y_i, x_{i+1})$ borné par $\frac{1}{n}\overline{u}$, qui, de part le fait que $f_2$ et $h_2$ sont de classe $C^3$, peut être pris $C^3$ et tel que l'hypothèse de récurrence soit satisfaite par le système $i+1$. Ceci complète la preuve du Théorème 2.30. □

### 2.5.2 Système stable et système stabilisable couplées par la commande.

#### 2.5.2.1 Résultat de base.

Le résultat que nous allons présenter maintenant est à rapprocher du Théorème 1.1. En effet, comme le système (1.4), celui que nous allons considérer est constitué de deux sous systèmes sans termes de couplage lorsque la commande est nulle et l'un de ces sous systèmes est globalement asymptotiquement stable. Par contre, l'autre peut cette fois être instable, pourvu toutefois qu'il soit globalement asymptotiquement stabilisable par des lois de commandes arbitrairement petites et qu'il vérifie une propriété garantissant l'absence de trajectoires non bornées sur un intervalle fini du temps lorsque l'entrée vérifie certaines conditions. L'hypothèse garantissant cette propriété de non explosion en temps fini s'apparente à l'hypothèse B3.

Considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\chi} & = & h_0(\chi) + h_2(\chi, u)u \\ \dot{y} & = & f(y) + f_2(y, u)u \end{array} \right. \tag{2.358}$$

**Hypothèse B0$^*$ :** *Les fonctions $h_0$, $h_2$, $f$, et $f_2$ sont continues et $h_0$ et $f$ sont égales à zéro à l'origine.*

**Hypothèse B1$^*$ :** *Pour tout $\overline{u} > 0$, il existe une fonction $u_s$ continue et bornée en norme par $\overline{u}$ telle que l'origine du système :*

$$\dot{\chi} \;=\; h_0(\chi) + h_2(\chi, u_s(\chi))u_s(\chi) \tag{2.359}$$

*soit globalement asymptotiquement stable.*

*L'origine du système :*

$$\dot{y} \;=\; f(y) \tag{2.360}$$

*est globalement asymptotiquement stable.*

**Hypothèse B3$^*$ :** *Il existe une fonction de classe $C^1$ définie positive et propre $Q_b$, une constante strictement positive $\overline{u}$ et une fonction $\varrho$ positive, définie et continue sur $[0, +\infty)$ telles que :*

$$\frac{\partial Q_b}{\partial \chi}(\chi)[h_0(\chi) + h_2(\chi, u)u] \;\leq\; 1 + \varrho(Q_b(\chi)) \qquad \forall\, \chi \;, \qquad \forall\, u \,:\, |u| \;\leq\; |u_s(\chi)| \tag{2.361}$$

et

$$\frac{1}{1+\varrho} \;\notin\; L^1\left([0, +\infty)\right) \;. \tag{2.362}$$

Si l'hypothèse B1$^*$ est vérifiée, alors d'après le théorème de Lyapunov inverse (voir [83, Theorem V.19.8]), il existe une fonction $V$ propre, définie positive, Lipschitz continue, zéro en zéro et une fonction $W$ continue et définie positive telles que :

$$\dot{V}_{(2.360)}(y) \;=\; -W(y) \;<\; 0 \quad , \quad \forall\, y \neq 0 \tag{2.363}$$

et il existe une fonction $Q_s$ propre, définie positive et Lipschitz continue, et une fonction $T$ continue et définie positive telles que :

$$\dot{Q}_{s(2.359)}(\chi) \;=\; -T(\chi) \;<\; 0 \quad , \quad \forall\, \chi \neq 0 \;. \tag{2.364}$$

Notons par $\varphi$ une fonction de classe $C^1$ sur $[0, +\infty)$, décroissante et vérifiant :

- $\varphi(s) = 1$ pour tout $s \in [0, 3]$.
- $\varphi(s) = 0$ pour tout $s \geq 4$.

**Théorème 2.32** *Si les hypothèses* $B0^*$, $B1^*$ *et* $B3^*$ *sont vérifiées, il existe* $\overline{u}$ *tel que l'origine du système (2.358) bouclé avec :*

$$u_t(\mathcal{X}, y) \;=\; u_s(\mathcal{X})\varphi(V(y)) \tag{2.365}$$

*est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

Remarquons que la loi de commande (2.365) est inspirée de celle employée dans [77, Section 4].

**Discussion concernant le Théorème 2.32.**

Nous avons choisi de faire intervenir $V$ dans la formule de $u_s$ car cela simplifie la preuve de notre théorème. Mais un résultat similaire peut être obtenu en remplaçant par exemple $u_s(\mathcal{X})\varphi(V(y))$ par $u_s(\mathcal{X})\varphi(|y|^2)$. Par conséquent, la connaissance d'une fonction de Lyapunov $V$ n'est pas indispensable pour obtenir une loi de commande donnant la propriété de stabilité désiré. D'un point de vue pratique, il peut être alors toutefois plus difficile de déterminer une valeur suffisamment petite pour $\overline{u}$ pour que soit obtenue la propriété de stabilité désirée.

*Hypothèse* $B1^*$. Cette hypothèse n'implique ni que l'origine du sous système en $y$ pris à commande nulle ni celle du sous système en $\mathcal{X}$ bouclé avec $u_s(\mathcal{X})$ sont localement exponentiellement stable. C'est là une des caractéristiques importantes du Théorème 2.32. Remarquons que celle-ci ne doit pas surprendre : les propriétés locales à l'origine des fonctions d'un système auquel a été ajouté une intégration n'ont été jusqu'ici nécessaire qu'en présence de termes de couplage non nul quand la commande est nulle qui, au cours de nos constructions Lyapunov, génèrent des termes gênants et qu'il s'agit dominer .

*Hypothèse* $B3^*$.

1. Cette hypothèse montre un des intérêts qu'il y a à pouvoir garantir la stabilisabilité asymptotique globale au moyen de loi de commande de norme arbitrairement petite. A la section 2.5.2.2, nous déterminerons une classe de systèmes feedforward pouvant jouer le rôle du sous système en $\mathcal{X}$ et cela en exploitant le résultat du Théorème 2.30.
2. Cette hypothèse garanti que toutes les solutions de

$$\dot{\mathcal{X}} \;=\; h_0(\mathcal{X}) \tag{2.366}$$

sont bornées sur tout intervalle fini du temps. En effet en définissant une fonction $l_1$ par :

$$l_1(q) \;=\; \int_0^q \frac{1}{1 + \varrho(s)} ds \tag{2.367}$$

on obtient, grâce à (2.361), :

$$l_1'(Q_b(\mathcal{X})) \frac{\partial Q_b}{\partial \mathcal{X}}(\mathcal{X}) h_0(\mathcal{X}) \;\leq\; 1 \;. \tag{2.368}$$

Donc, pour tout solution $\mathcal{X}(t)$ de (2.366), on a :

$$l_1(Q_b(\mathcal{X}(t))) \;\leq\; Q_b(\mathcal{X}(0)) + T \quad , \quad \forall T \geq 0 \quad , \quad \forall t \in [0, T] \;. \tag{2.369}$$

La fonction $l_1$ étant de classe $\mathcal{K}^\infty$ en raison de la propriété (2.362) et $Q_b$ étant une fonction propre, il s'en suit que $\mathcal{X}(t)$ est bornée sur $[0, T]$.

**Preuve.** Notre preuve est constituée de trois étapes. Au cours de la première, nous construisons une fonction propre et définie positive dont la dérivée le long de (2.358) bouclé avec $u_t$ est strictement négative pour $y$ hors d'un voisinage ouvert contenant l'origine. Au cours de la deuxième, nous construisons une autre fonction propre et définie positive dont la dérivée le long de (2.358) bouclé avec $u_t$ est strictement négative lorsque $y$ appartient à un voisinage de l'origine et $(y, \chi) \neq (0, 0)$. Au cours de la troisième étape, nous combinons les deux fonctions obtenues précédemment pour construire une fonction de Lyapunov strictement assignée par $u_t$ pour (2.358).

*Première étape.* Définissons une fonction $U_1$ par :

$$U_1(\chi, y) \;=\; k_1(y) + l_1(Q_b(\chi)) \tag{2.370}$$

où $k_1$ est une fonction définie par (2.64) avec dans le rôle de $V$ la fonction vérifiant (2.363) et dans celui de $\kappa$, une fonction $\kappa_1$ à déterminer et $Q_b$ est la fonction donnée par l'hypothèse B3* et $l_1$ est la fonction, de classe $C^1$ et de classe $\mathcal{K}^\infty$ définie en (2.367). Alors :

$$\dot{U}_1(\chi, y) \;\leq\; -\kappa_1(V(y))W(y) + \kappa_1(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_t(\chi, y))u_t(\chi, y) + 1\ . \tag{2.371}$$

Montrons que $k_1$ et $\overline{u}$ peuvent être choisies de telle sorte que :

$$\frac{1}{2}\kappa_1(V(y))W(y) \;\geq\; \left|\kappa_1(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_t(\chi, y))u_t(\chi, y)\right| + 1 \quad , \quad \forall y : V(y) \;\geq\; 1\ . \tag{2.372}$$

D'après le Lemme E.1 de la Section E, la fonction $\kappa_1$ peut être choisie de telle sorte que :

$$\frac{1}{4}\kappa_1(V(y))W(y) \;\geq\; 1 \quad , \quad \forall y : V(y) \;\geq\; 1\ . \tag{2.373}$$

Montrons que, pour $\overline{u}$ suffisamment petit,

$$\frac{1}{4}W(y) \;\geq\; \left|\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_t(\chi, y))u_t(\chi, y)\right| \quad , \quad \forall y : V(y) \;\geq\; 1\ . \tag{2.374}$$

Lorsque $V(y) \geq 4$ cette inégalité est trivialement satisfaite car alors $u_t(\chi, y) = 0$. Considérons maintenant le cas où $V(y) \in [1, 4]$. La fonction $V$ étant propre, la fonction $\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u)$ étant continue, et $u_t$ étant bornée, il existe $c$ telle que :

$$\left|\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_t(\chi, y))\right| \;\leq\; c \quad , \quad \forall y : V(y) \;\in\; [1, 4]\ . \tag{2.375}$$

D'un autre côté, $W$ étant définie positive et continue, et $V$ étant une fonction propre, définie positive zéro en zéro, il existe $\delta > 0$ telle que :

$$W(y) \;\geq\; \delta \quad , \quad \forall y : V(y) \;\in\; [1, 4]\ . \tag{2.376}$$

Donc, en prenant $\overline{u} \leq \frac{\delta}{4c}$, l'inégalité (2.374) est vérifiée pour tout $y$ tel que $V(y) \in [1, 4]$ et donc l'est pour tout $y$ tel que $V(y) \geq 1$. Il en est par conséquent de même pour (2.372) en raison de (2.373).

Finalement, on obtient :

$$\dot{U}_1(\chi, y) \;\leq\; -\frac{1}{2}\kappa_1(V(y))W(y) \quad , \quad \forall y : V(y) \;\geq\; 1\ . \tag{2.377}$$

*Deuxième étape.* Plaçons nous sur l'ensemble des valeurs $y$ tel que $V(y) \leq 3$ et définissons une fonction $U_2$ par :

$$U_2(\chi, y) \;=\; k_2(y) + l_2(Q_s(\chi)) \tag{2.378}$$

où $k_2$ est une fonction définie par (2.64) avec dans le rôle de $V$ la fonction vérifiant (2.363) et dans celui de $\kappa$, une fonction $\kappa_2$ à déterminer et $Q_s$ est la fonction vérifiant (4.12) et $l_2$ est une fonction de classe $C^1$, de classe $\mathcal{K}^\infty$ et de dérivée définie positive. Puisque $V(y) \geq 3$, on a $u_t(\chi, y) = u_s(\chi)$ et donc :

$$\dot{U}_2(\chi, y) \;\leq\; -\kappa_2(V(y))W(y) + \kappa_2(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s(\chi))u_s(\chi) - \; l_2'(Q_s(\chi))T(\chi)\ . \tag{2.379}$$

Notons par $\Omega$ une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$. On a pour tout réels $a, b$ positifs quelconque :

$$a\, b \;\leq\; a\, \Omega(a) + b\, \Omega^{-1}(b)\ . \tag{2.380}$$

Donc en particulier :

$$\begin{aligned} \left|\kappa_2(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s(\chi))u_s(\chi)\right| \;&\leq\; \Omega^{-1}(|u_s(\chi)|)|u_s(\chi)| \\ &+ \left|\kappa_2(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s(\chi))\right| \Omega\left(\left|\kappa_2(V(y))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s(\chi))\right|\right)\ . \end{aligned} \tag{2.381}$$

Montrons qu'il existe $l_2$ et $\Omega$ telles que :

$$\frac{1}{2} l_2'(Q_s(\chi))T(\chi) \;\geq\; \Omega^{-1}(|u_s(\chi)|)|u_s(\chi)|\ . \tag{2.382}$$

D'après le Lemme E.1 de la Section E, on déduit l'existence d'une fonction $l_2$ et d'une fonction $\alpha_1$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que :

$$\frac{1}{2\overline{u}} l_2'(Q_s(\chi))T(\chi) \;\geq\; \alpha_1(|\chi|)\ . \tag{2.383}$$

D'un autre côté, $u_s$ étant zéro en zéro, il existe une fonction $\alpha_2$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que :

$$|u_s(\chi)| \;\leq\; \alpha_2(|\chi|)\ . \tag{2.384}$$

Les inégalités (2.383) et (2.384) et le fait que $|u_s|$ soit bornée par $\overline{u}$ impliquent qu'une condition suffisante pour que soit vérifiée (2.382) est que l'inégalité :

$$\alpha_1(s) \;\geq\; \Omega^{-1}(\alpha_2(s)) \quad , \quad \forall s \geq 0 \tag{2.385}$$

le soit. Tel est le cas pour :

$$\Omega \;=\; \alpha_2 \circ \alpha_1^{-1} \tag{2.386}$$

qui est bien une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ puisque $\alpha_2$ et $\alpha_1^{-1}$ le sont.

Montrons maintenant que pour $\Omega$ ainsi choisie, il existe $\kappa_2$ telle que :

$$\frac{1}{2}\kappa_2(V(y))W(y) \;\geq\; \left|\kappa_2(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s)\right| \Omega\left(\left|\kappa_2(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(y, u_s)\right|\right)\ . \tag{2.387}$$

En simplifiant par $\kappa_2(V(y))$ et en exploitant le fait que $y$ se trouve dans un compact, on obtient comme condition suffisante :

$$W(y) \;\geq\; c\, \Omega\left(c\kappa_2(V(y))\right)\ . \tag{2.388}$$

avec $c > 0$. On en déduit une autre :

$$\frac{1}{c}\,\Omega^{-1}\left(\frac{W(y)}{c}\right) \;\geq\; \kappa_2(V(y)) \;. \tag{2.389}$$

La fonction $W$ étant définie positive et $V$ étant zéro en zéro, il existe deux fonctions $\alpha_3$ et $\alpha_4$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que :

$$V(y) \;\leq\; \alpha_4(|y|) \quad , \quad c\,\Omega^{-1}\left(\frac{W(y)}{c}\right) \;\geq\; \alpha_3(|y|) \quad , \quad \forall y : V(y) \;\leq\; 3 \;. \tag{2.390}$$

Donc, la fonction $\kappa_2$ définie par :

$$\kappa_2(v) \;=\; \alpha_3 \circ \alpha_4^{-1}(v) \tag{2.391}$$

est continue, est strictement positive, n'appartient pas à $L^1([1, +\infty))$ et est telle que (2.389) est vérifiée.

Finalement, grâce à (2.382) et (2.387), on obtient :

$$\dot{U}_2(\chi, y) \;\leq\; -\frac{1}{2}\kappa_2(V(y))W(y) - \frac{1}{2}l_2'(Q_s(\chi))T(\chi) \;<\; 0 \quad , \quad \forall (y, \chi) \neq 0 \;. \tag{2.392}$$

*Troisième étape.* Soit $U$ définie par :

$$U(\chi, y) \;=\; \widetilde{\varphi}(V(y))U_1(\chi, y) + (1 - \widetilde{\varphi}(V(y)))\Gamma(U_2(\chi, y)) \tag{2.393}$$

où $\Gamma$ est une fonction de classe $C^1$, de classe $\mathcal{K}^\infty$ et de dérivée définie positive et $\widetilde{\varphi}(s) = \varphi(s+1)$. Les fonctions $U_1$ et $U_2$ étant des fonctions propres définies positives et de classe $C^{19}$, on peut vérifier que la fonction $U$ possède aussi ces propriétés.

Montrons qu'il existe $\Gamma$ telle que la dérivée de $U$ le long de (2.358) bouclé avec $u_t$ est définie négative. On a :

$$\begin{aligned} \dot{U}(\chi, y) \;&=\; \dot{U}_1(\chi, y)\widetilde{\varphi}(V(y)) + \Gamma'(U_2(\chi, y))\dot{U}_2(\chi, y)(1 - \widetilde{\varphi}(V(y))) \\ &\quad + \widetilde{\varphi}'(V(y))\dot{V}(\chi, y)\,[U_1(\chi, y) - \Gamma(U_2(\chi, y))] \;. \end{aligned} \tag{2.394}$$

La fonction $\widetilde{\varphi}'(v)$ étant nulle pour tout $v$ n'appartenant pas à $[2, 3]$, négative pour tout $v$ dans $[2, 3]$ et $\dot{V}(\chi, y)$ étant négative pour tout $y$ tel que $V(y) \geq 1$ puisque (2.374) est vérifiée, le terme

$$\widetilde{\varphi}'(V(y))\dot{V}(\chi, y)\,[U_1(\chi, y) - \Gamma(U_2(\chi, y))]$$

est négatif si $\Gamma$ est telle que :

$$U_1(\chi, y) - \Gamma(U_2(\chi, y)) \;\leq\; 0 \quad , \quad \forall y \;:\; V(y) \in [2, 3] \;. \tag{2.395}$$

Déterminons une fonction $\Gamma$ donnant cette inégalité. Les fonction $U_1$ et $U_2$ étant propre, définies positives et zéro en zéro, il existe des fonctions $\alpha_5$ et $\alpha_6$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que :

$$U_1(\chi, y) \;\leq\; \alpha_5(\chi^2 + |y|^2) \quad , \quad U_2(\chi, y) \;\geq\; \alpha_6(\chi^2 + |y|^2) \;. \tag{2.396}$$

Par conséquent, une condition suffisante pour que l'inégalité (2.395) soit satisfaite est que la suivante le soit :

$$\alpha_5(\chi^2 + c_1) \;\leq\; \Gamma(\alpha_6(\chi^2 + c_2)) \;, \tag{2.397}$$

[9] Les fonctions $\kappa_1$ et $\kappa_2$ sont continues et n'appartiennent pas à $L^1([0, +\infty))$

les constantes $c_1$ et $c_2$ étant des constantes strictement positives. Tel est le cas pour la fonction $\Gamma$, de classe $C^1$, définie par [10] :

$$\Gamma(v) \;=\; \int_0^{2v} c\alpha_5(\alpha_6^{-1}(s))ds \;+\; cv \tag{2.398}$$

où $c$ est une constante suffisamment grand.

Pour un tel choix, on a donc :

$$\dot{U}(\chi, y) \;=\; \dot{U}_1(\chi, y)\widetilde{\varphi}(V(y)) + c\,\dot{U}_2(\chi, y)(1 - \widetilde{\varphi}(V(y))) \tag{2.399}$$

Et donc, d'après (2.377) et (2.392) et la définition de $\widetilde{\varphi}$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}(\chi, y) \;&\leq\; -\tfrac{1}{2}\kappa_2(V(y))W(y)\widetilde{\varphi}(V(y)) \\ &\quad\; -\tfrac{c}{2}\left[\kappa_2(V(y))W(y) + l_2'(Q_s(\chi))T(\chi)\right](1 - \widetilde{\varphi}(V(y))) \\ &<\; 0 \quad , \quad \forall (y, \chi) \neq 0 \,. \end{aligned} \tag{2.400}$$

Ceci termine notre preuve. □

#### 2.5.2.2 Application du résultat de base.

Nous allons montrer que les systèmes de la forme (2.344) vérifiant les hypothèses du Théorème 2.30 plus une condition supplémentaire sont susceptibles de jouer le rôle du sous système en $\chi$, c'est à dire vérifient les conditions imposées par le Théorème 2.32 sur le sous système en $\chi$. Nous en déduirons un résultat portant sur des systèmes partiellement linéaires.

Commençons par établir le lemme suivant :

**Lemme 2.33** *Considérons le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\chi}_1 &=& h_0(\chi_1) + h_1(\chi_1, \chi_2)\chi_2 + h_2(\chi_1, \chi_2, u)u \\ \dot{\chi}_2 &=& f(\chi_2) + f_2(\chi_1, \chi_2, u)u \end{array} \right. \tag{2.401}$$

*où les fonctions $h_0$, $h_1$ et $f$ sont continues et $f_2$ et $h_2$ sont de classe $C^1$ et $h_0$ et $f$ sont zéro en zéro.*

*Supposons que pour une loi de commande $u_p$, il existe deux fonctions de classe $C^1$, propres et définies positives $Q_1$ et $Q_2$ et une fonction continue positive $K$ telles que :*

$$\frac{\partial Q_2}{\partial \chi_2}(\chi_2)\left[f(\chi_2) + f_2(\chi_1, \chi_2, u)u\right] \;\leq\; 1 \;, \quad \forall u : |u| \leq |u_p(\chi_1, \chi_2)| \;, \tag{2.402}$$

$$\frac{\partial Q_1}{\partial \chi_1}(\chi_1)\left[h_0(\chi_1) + h_1(\chi_1, \chi_2)\chi_2 + h_2(\chi_1, \chi_2, u)u\right] \;\leq\; 1 + K(Q_2(\chi_2)) \;, \quad \forall u : |u| \leq |u_p(\chi_1, \chi_2)| \;. \tag{2.403}$$

*Alors, il existe une fonction $\mathcal{Q}$ de classe $C^1$, propre et définie positive et $\Psi$, une fonction continue, positive telles que :*

$$\dot{\mathcal{Q}}(\chi_1, \chi_2)_{(2.401)} \;\leq\; 1 \;, \tag{2.404}$$

*lorsque*

$$u \;=\; u_{pn} + u_q \quad , \quad u_{pn} \,:\, |u_{pn}| \;\leq\; |u_p(\chi_1, \chi_2)| \quad , \quad u_q \,:\, |u_q| \;\leq\; \frac{1}{1 + \psi(\chi_1, \chi_2)} \;. \tag{2.405}$$

[10] En effet $\alpha_5 \circ \alpha_6^{-1}$ est croissante

**Remarque 2.34 :** Le résultat de ce lemme est plus fort que celui que nous utiliserons par la suite. Nous le donnons tel qu'il est afin de montrer que dans un contexte général la propriété de non existence de trajectoires non bornées sur un intervalle fini du temps se conserve par ajout d'intégration •

**Preuve.** Prenons la dérivée de $Q_2$ et $Q_1$ le long de (2.401) bouclé avec $u$ vérifiant (2.405) :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1(2.401),(2.405)} &= \frac{\partial Q_1}{\partial \mathcal{X}_1}(\mathcal{X}_1)\left[h_0(\mathcal{X}_1) + h_1(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)\mathcal{X}_2 + h_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_{pn}+u_q)(u_{pn}+u_q)\right] \;, \\ \dot{Q}_{2(2.401),(2.405)} &= \frac{\partial Q_2}{\partial \mathcal{X}_2}(\mathcal{X}_2)\left[f(\mathcal{X}_2) + f_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_{pn}+u_q)(u_{pn}+u_q)\right] \;. \end{aligned} \tag{2.406}$$

Les fonctions $f_2$ et $h_2$ étant de classe $C^1$, on en déduit l'existence d'une fonction $\psi$ telle que :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_1}{\partial \mathcal{X}_1}(\mathcal{X}_1)\left[h_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_p(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)+u_q)(u_{pn}+u_q) - \ h_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_{pn})u_{pn}\right] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \ \psi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)|u_q| \end{aligned} \tag{2.407}$$

et

$$\begin{aligned} &\frac{\partial Q_2}{\partial \mathcal{X}_2}(\mathcal{X}_2)\left[f_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_{pn}+u_q)(u_{pn}+u_q) - \ f_2(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,u_{pn})u_{pn}\right] \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \leq \ \psi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)|u_q| \;. \end{aligned} \tag{2.408}$$

Donc, grâce à (2.403), (2.404) et à la condition imposée sur $u_q$, on a :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_{1(2.401),(2.405)}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2) &\leq 1 + K(Q_2(\mathcal{X}_2)) + \psi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)|u_q| \ \leq \ 2 + K(Q_2(\mathcal{X}_2)) \;, \\ \dot{Q}_{2(2.401),(2.405)}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2) &\leq 1 + \psi(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2)|u_q| \ \leq \ 2 \;. \end{aligned} \tag{2.409}$$

Soit $L$ une fonction de classe $C^1$ et de classe $\mathcal{K}^\infty$ telle que $L' \geq K+1$. Alors :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{L(Q_2(\mathcal{X}_2)) + Q_1(\mathcal{X}_1)}} \ \leq \ 2 + K(Q_2(\mathcal{X}_2)) + 2L'(Q_2(\mathcal{X}_2) \ \leq \ 4L'(Q_2(\mathcal{X}_2)) \;. \tag{2.410}$$

Puisque $L' \geq K+1$ et $L$ est de classe $C^1$ et de classe $\mathcal{K}^\infty$, la fonction $L^{-1}$ est de classe $C^1$, de classe $\mathcal{K}^\infty$ et on a :

$$\begin{aligned} \overset{\cdot}{\overbrace{L^{-1}(L(Q_2(\mathcal{X}_2)) + Q_1(\mathcal{X}_1))}} &\leq \frac{4L'(Q_2(\mathcal{X}_2))}{L'(L^{-1}(L(Q_2(\mathcal{X}_2))+Q_1(\mathcal{X}_1))))} \\ &\leq \frac{4L'(Q_2(\mathcal{X}_2))}{L'(Q_2(\mathcal{X}_2))+Q_1(\mathcal{X}_1))} \ \leq \ 4 \;. \end{aligned} \tag{2.411}$$

En définissant $\mathcal{Q}$ par :

$$\mathcal{Q}(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2) \ = \ \frac{1}{4}L^{-1}(L(Q_2(\mathcal{X}_2)) + Q_1(\mathcal{X}_1)) \;, \tag{2.412}$$

l'inégalité (2.404) est obtenue et $\mathcal{Q}$ est de classe $C^1$, propre et définie positive

Ceci termine notre preuve. □

Nous reprenons maintenant les notations de la section 2.5.1.1. Montrons qu'un système de la forme (2.344) vérifiant les hypothèses du Théorème 2.13 et étant de plus tel que la loi de commande $v_0$ puisse être choisie identiquement égale à zéro vérifie les conditions imposées par les hypothèses A1* et A3* en faisant jouer au vecteur $y_n$ le rôle de $\mathcal{X}$ et le sous système en $y$ n'étant pas présent.

Voici le résultat que nous allons prouver :

**Corollaire 2.35** *Supposons ce qui suit pour le système (2.344) :*

*2.35.1 Les hypothèses du Théorème 2.30 sont satisfaites.*

*2.35.2 La loi de commande $v = 0$ stabilise globalement asymptotiquement l'origine du sous système en $y_0$ de (2.344) et est telle que la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable.*

*Alors, pour tout réel positif $\overline{u}$, l'origine du système (2.344) peut être rendue globalement asymptotiquement stable au moyen d'un bouclage d'état $u_s$ borné par $\overline{u}$ et il existe une fonction de classe $C^1$ définie positive et propre $Q_b$, une constante strictement positive $\overline{u}$ et une fonction $\varrho$ positive, définie et continue sur $[0, +\infty)$ telles que :*

$$\frac{\partial Q_b}{\partial y_n}(y_n)[\overline{f}_n(y_n) + \overline{f}_{2n}(y_n, v)v] \;\leq\; 1 \qquad \forall\, (y_n, u)\, :\, |u| \;\leq\; |u_s(y_n)|\, . \tag{2.413}$$

**Preuve.** Nous allons procéder par récurrence.

**Hypothèse de récurrence :** *L'origine du système (2.351) peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable par $v_i(y_i)$, un bouclage d'état de classe $C^2$ borné par $\frac{i}{n}\overline{u}$, vérifiant $v_i(0) = 0$, et tel que la linéarisation du système en boucle fermée est asymptotiquement stable. De plus, $v_i(y_i)$ est telle qu'il existe il existe une fonction de classe $C^1$, propre et définie positive $\mathcal{Q}_i$ telle que :*

$$\frac{\partial \mathcal{Q}_i}{\partial y_i}(y_i)\left[\overline{f}_i(y_i) + \overline{f}_{2i}(y_i, u)u\right] \;\leq\; 1 \quad , \quad \forall u : |u| \leq |v_i(y_i)|\, , \tag{2.414}$$

• Rang 0 : Cette hypothèse est satisfaite pour le sous système en $y_0$ avec pour $u_s$ la fonction nulle.

• Rang $i+1$ : Supposons que le système (2.351) vérifie l'hypothèse de récurrence. Alors celle du Théorème 2.30 l'est également. D'après la preuve de ce théorème, il existe une loi de commande $u_{i+1}(y_i, x_{i+1})$ borné par $\frac{1}{n}\overline{u}$, qui, de part le fait que $f_2$ et $h_2$ sont de classe $C^2$, peut être pris $C^2$ et tel que l'hypothèse de récurrence de ce théorème soit satisfaite par le système $i+1$. De plus, on peut montrer aisément que pour tout fonction continue positive $\psi$, $u_{i+1}$ peut être choisie de telle sorte que :

$$|u_{i+1}(y_i, x_{i+1})| \;\leq\; \frac{1}{n}\frac{\overline{u}}{1 + \psi(y_i, x_{i+1})} \quad , \quad \forall\, (y_i, x_{i+1})\, . \tag{2.415}$$

D'un autre côté, le lemme 2.33 s'applique au système $i+1$ avec $x_{i+1}$ jouant le rôle de $\chi_1$, $y_i$ celui de $\chi_2$ et $v_i(y_i)$ celui de $u_p$. Montrons cela.
• La propriété (2.402) est satisfaite en raison de (2.414).
• En posant :

$$Q_1(x_{i+1}) \;=\; \ln\left(1 + x_{i+1}^2\right)\, , \tag{2.416}$$

et en prenant $v$ tel que $|v| \leq |v_i(y_i)|$, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{Q}_1(x_{i+1}, y_i) \;&\leq\; \tfrac{|x_{i+1}|}{1+x_{i+1}^2}\, |h_{0i+1}(y_i)x_{i+1} + h_{1i+1}(y_i) + h_{2i+1}(x_{i+1}, y_i, v)v| \\ &\leq\; |h_{0i+1}(y_i)| + |h_{1i+1}(y_i)| + \tfrac{|x_{i+1}|}{1+x_{i+1}^2}|h_{2i+1}(x_{i+1}, y_i, v)v|\, . \end{aligned} \tag{2.417}$$

Puisque d'après (2.349),

$$\frac{\partial^2 h_{2i}}{\partial x_i^2}(x_i, y_{i-1}, v) \ = \ 0 \ , \tag{2.418}$$

et puisque $|v| \leq |v_i(y_i)|$, il existe une fonction $K_1(y_i)$ continue et positive telle que :

$$\frac{|x_{i+1}|}{1 + x_{i+1}^2} |h_{2i+1}(x_{i+1}, y_i, v)v| \ \leq \ K_1(y_i) \ . \tag{2.419}$$

Mais d'après le Lemme E.1 de la Section E, on déduit l'existence d'une fonction $K$ continue et positive telle que :

$$|h_{0i+1}(y_i)| + |h_{1i+1}(y_i)| + K_1(y_i) \ \leq \ K(Q_{2i}(y_i)) \ . \tag{2.420}$$

Donc :

$$\dot{Q}_1(x_{i+1}, y_i) \ \leq \ K(Q_{2i}(y_i)) \ . \tag{2.421}$$

La condition (2.403) du lemme 2.33 est donc satisfaite. Par conséquent, il existe $\mathcal{Q}_{i+1}$ et $\psi$ telles que, le long du système $i+1$ :

$$\dot{\mathcal{Q}}_{i+1}(y_{i+1}) \ \leq \ 1 \ , \tag{2.422}$$

lorsque

$$v \ = \ v_{pn} + u_q \quad , \quad \forall v_{pn} \ : \ |v_{pn}| \ \leq \ |v_i(y_i)| \quad , \quad \forall u_q \ : \ |u_q| \ \leq \ \frac{1}{n} \frac{\overline{u}}{1 + \psi(y_i, x_{i+1})} \ . \tag{2.423}$$

Puisque $u_{i+1}$ peut être choisie de telle sorte que (2.415) soit vérifiée, il s'en suit que l'hypothèse de récurrence est vérifiée au rang $i+1$.

Ceci termine notre preuve. □

Comme application immédiates du résultat précédent, nous avons :

**Corollaire 2.36** *Supposons ce qui suit le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathcal{X}} & = & h_0(\mathcal{X}) + h_2(\mathcal{X}, u)u \ , \\ \dot{y} & = & f(y) + f_2(y, u)u \ . \end{array} \right. \tag{2.424}$$

*Les fonctions $f$, et $f_2$ sont continues, le système $\dot{y} = f(y)$ est globalement asymptotiquement stable et le système en $\mathcal{X}$ soit de la forme (2.344) et vérifie les hypothèses du Corollaire 2.35. Alors il existe $\overline{u} > 0$ telle que pour tout $\overline{\overline{u}}$ telle que $0 < \overline{\overline{u}} < \overline{u}$, il existe une loi de commande $u_t$, bornée par $\overline{\overline{u}}$, telle que l'origine du système (2.424) bouclé avec $u_t$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable.*

**Preuve.** Grâce au résultat du Corollaire 2.35, on peut vérifier que les hypothèses B1* et B3* du Théorème 2.32 sont vérifiées. □

Comme application immédiates du résultat précédent, nous avons le résultat suivant qui porte sur un système partiellement linéaire :

**Corollaire 2.37** *Considérons le système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\mathcal{X}} & = & \mathcal{A}\mathcal{X} \ + \ \mathcal{B}u \ , \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_2(y, u)u \ . \end{array} \right. \tag{2.425}$$

*et supposons que:*

1. *La paire $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ est stabilisable,*

2. *Les valeurs propres de $\mathcal{A}$ ont une partie réelle négative ou nulle,*

3. *Les fonctions $f_0$ et $f_2$ sont continues et le point $y = 0$ est un point d'équilibre globalement asymptotiquement stable de $\dot{y} = f_0(y)$.*

*Alors, pour tout $\overline{u}$ dans $(0, +\infty]$, l'origine peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable du système (2.425) au moyen d'un bouclage d'état borné par $\overline{u}$.*

La preuve du résultat de stabilisabilité du système (2.425) par une loi de commande de la forme (2.365) n'est pas nouveau : il se trouve dans [77, Section 4]. Il n'y avait toutefois pas jusqu'ici de preuve Lyapunov de celui-ci. **Preuve :** Nous allons montrer que le Corollaire 2.36 s'applique au système (2.425).

Le système $\dot{y} = f_0(y)$ étant globalement asymptotiquement stable, le seul point qui est à montrer est que le sous système en $\chi$ de (2.425) peut s'exprimer, après un changement de variable en $\chi$, sous la forme (2.344) et vérifie alors les hypothèses du Corollaire 2.35.

En appliquant [70, Lemma 3.1] de façon répétée, nous pouvons garantir l'existence d'un changement linéaire de coordonnées $\chi \mapsto (x_n, \ldots, x_1, \varsigma_1)$ qui transforme le sous système en $\chi$ en :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_n & = & M_n\, x_n + C_n\, x_{n-1} + D_n u \\ & \vdots & \\ \dot{x}_1 & = & M_1\, x_1 + D_1\, u \\ \dot{\varsigma}_1 & = & \mathcal{A}_1\, \varsigma_1 + \mathcal{B}_1 u \end{array} \right. \tag{2.426}$$

où la matrice $\mathcal{A}_1$ est asymptotiquement stable, les matrices $M_i$ satisfont (2.347) et la paire

$$\left( \begin{array}{ccccc} M_n & C_n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & M_{n-1} & C_{n-1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & M_2 & C_2 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & M_1 \end{array} \right) , \left( \begin{array}{c} D_n \\ D_{n-1} \\ \vdots \\ D_2 \\ D_1 \end{array} \right)$$

est commandable. Alors le sous système en $y_0$ dans (2.344) est donné par $y_0 = (\varsigma_1, y)^\top$ :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\varsigma}_1 & = & \mathcal{A}_1\, \varsigma_1 + \mathcal{B}_1 u \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_2(y, u) u\ . \end{array} \right. \tag{2.427}$$

Toutes les hypothèses du Théorème 2.30 étant vérifiées, la conclusion s'en suit. □

En appliquant la technique d'ajout d'un intégrateur, le corollaire 2.37 peut être étendu aux systèmes de la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\chi}_0 & = & \mathcal{A}_0\, \chi_0\ +\ \mathcal{B}_0 \mathcal{C}_1 \chi_1\ , \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_2(y, \mathcal{C}_1 \chi_1) \mathcal{C}_1 \chi_1\ , \\ \dot{\chi}_1 & = & \mathcal{A}_1\, \chi_0\ +\ \mathcal{B}_1 u\ . \end{array} \right. \tag{2.428}$$

où le système linéaire $(\mathcal{C}_1, \mathcal{A}_1, \mathcal{B}_1)$ a un degré relatif maximum. Avec cette extension, le corollaire 2.37 appartient à la classe des résultats connus qui portent sur les systèmes appelée systèmes composites partiellement linéaires qui furent étudiés par exemple dans [75, 76, 61, 44, 60]. En particulier, quand le sous système en $y$ n'est pas présent, nous retrouvons le résultat connu que des systèmes linéaires dits " null controllable " peuvent être stabilisés par une loi de commande saturée (voir [70, 82])). Un autre résultat étroitement lié au corollaire 2.37 est [61, Theorem 2.2] qui généralise [76]. Dans ce théorème Lin et Saberi considèrent le cas plus général d'entrées multiples et prouvent la stabilisation asymptotique semi-globale par bouclage d'état partiel. Ici, afin de simplifier notre illustration du Théorème 2.26, nous avons considéré le cas d'une seule entrée et obtenu la stabilité asymptotique globale au moyen d'un bouclage d'état. Un tel résultat de stabilité asymptotique globale a été prouvé dans [60] par Saberi, Kokotovic et Sussmann avec l'hypothèse de stabilité pour la matrice $\mathcal{A}_0$. Le fait qu'il faille que dans la commande interviennent toutes le composantes de l'état apparaît grâce au fait que pour $n \geq 3$, il n'y a pas de bouclage dynamique de sortie qui n'employant que $x$ comme partie de l'état mesuré soit globalement asymptotiquement stabilisant pour le système (appliquer [51, Lemma 3]).

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & u \\ \dot{y} & = & -y + y^n u^2 \ . \end{array} \right. \tag{2.429}$$

#### 2.5.2.3 Nombre minimal de saturations pour les systèmes linéaires.

Soit le système :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\chi} & = & A\chi + K y_1 + B u \\ \dot{y}_1 & = & F_1 y_1 \end{array}$$

où $\chi \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$, les valeurs propres de $F$ sont à partie réelle strictement négative, celles de $A$ négatives ou nulles et la paire $(A, B)$ est commandable.

En notant par $n$ la dimension de $\chi$, on voit que cette commandabilité implique l'existence d'une matrice $H$ telle $HA^iB = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, (n-2)\}$ et $HA^{n-1}B = 1$. Posons :

$$\psi = H\chi$$

Le système d'entrée $u$ et de sortie $\psi$ a pour fonction de transfert $1/P(s)$ où $P(s)$ est le polynôme caractéristique de $A$. Prenons la factorisation suivante :

$$P(s) = P_k(s) \ldots P_1(s) P_s(s)$$

où :

- Le polynôme $P/P_s$ a toutes ses racines à partie réelle nulle.
- Toutes les racines de $P/P_s$ sont racines simples de $P_1$.
- Toutes les racines de multiplicité au moins 2 de $P/P_s$ sont racines simples de $P_2$.
- ...
- Toutes les racines de plus grande multiplicité $k$ de $P/P_s$ sont racines simples de $P_k$.

Soit alors $(M_i, B_i, C_i)$ une réalisation minimale d'état $x_i$ de $1/P_i(s)$ et $(F_2, G_2, H_2)$ une réalisation minimale d'état $y_2$ de $1/P_s(s)$. Les matrices $M_i$ et $-M_i$ sont stables et le système peut s'écrire :

$$\begin{array}{rcllll}
\psi & = & C_k\, x_k & & & \\
\dot{x}_k & = & M_k\, x_k & + & B_k\, C_{k-1}\, x_{k-1} & + \quad K_k\, y_1 \\
 & \vdots & & & & \\
\dot{x}_2 & = & M_2\, x_2 & + & B_2\, C_1\, x_1 & + \quad K_2\, y_1 \\
\dot{x}_1 & = & M_1\, x_1 & + & B_1\, H_2\, y_2 & + \quad K_1\, y_1 \\
\dot{y}_2 & = & F_2\, y_2 & + & G_2\, u & + \quad K_0\, y_1 \\
\dot{y}_1 & = & F\, y_1 & & &
\end{array}$$

Le système $y = (y_1, y_2)$ est asymptotiquement stabilisé par $u = 0$. On peut donc appliquer le Théorème 2.30 qui est démontré en itérant $k$ fois l'application du Théorème 2.26. On peut donc obtenir une commande constituée de la somme de $k$ saturations.

### 2.5.3 Commandes saturées et mesures saturées de chaque composante de l'état.

Zongli Lin a étudié dans [45] le problème de la stabilisation de systèmes dont les entrées sont saturées en ne s'autorisant l'usage que de mesures saturées. Au moyen des techniques que nous avons développées dans la section 2.5, nous parvenons à retrouver et à élargir le résultat de [45] qui concerne la stabilisation asymptotique globale de l'origine de la chaîne d'intégrateurs.

**Théorème 2.38** *Considérons le système :*

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x}_1 & = & u + h_1(y) + h_2(y)u \\
\dot{y} & = & f(y) + f_2(y)u
\end{array}\right. \tag{2.430}$$

*où $x_1$ est dans $\mathbb{R}$, $y$ est dans $\mathbb{R}^k$, $\dot{y} = f(y)$ est globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable et $h_1$ est telle que :*

$$|h_1(y)| \;\leq\; c|y|^2 \quad , \quad \forall |y| \leq c\ . \tag{2.431}$$

*Supposons que les fonctions $f, f_2, h_2, h_1$ soient de classe $C^2$. Alors l'origine de (2.430) est globalement asymptotiquement stabilisable par un bouclage d'état de classe $C^2$ de la forme : $u_s(\sigma_1(x_1), \sigma_2(y))$, où $\sigma_1$ et $\sigma_2$ sont des saturations linéaires*[11] *de classe $C^\infty$.*

**Preuve :** Comme Zongli Lin l'a fait dans [45], nous prouvons le Théorème 2.38 en construisant explicitement une loi de commande $u_s$ donnant le résultat désiré. Remarquons tout d'abord que la structure de (2.430), la régularité des fonctions de ce système, la propriété (2.431) et l'hypothèse de globale asymptotique stabilité et d'exponentielle stabilité locale de l'origine de $\dot{y} = f(y)$ font que le Théorème 2.1 s'applique à (2.430). La fonction $\rho$ correspondante est la fonction nulle, la fonction $\kappa$ une fonction de classe $C^2$, la fonction $V$ est de classe $C^3$, approximée localement à l'origine par une forme quadratique définie positive et telle que $-L_f V(y)$ soit définie positive et approximée localement à l'origine par une forme quadratique définie positive.

[11] Voir les définitions de base.

En prenant $Q(x_1) = x_1^2$ et $l(r) = \displaystyle\int_0^{\sqrt{r}} \sigma_1(s)ds$ où $\sigma_1$ est une saturation linéaire[12] telle que $\sigma_1(s) = s$ pour tout $s$ tel que $|s| \leq L_1$ pour une constantes $L_1 > 0$, nous obtenons l'inégalité :

$$\dot{\overbrace{U(x_1,y)}} \leq -\frac{1}{4}\kappa(V(y))W(y) + \left[\frac{7}{3}\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_2(y) + \sigma_1(x_1)(1+h_2(y))\right]u \qquad (2.432)$$

qui est l'inégalité (2.71) dans le cas particulier en lequel nous sommes. Pour conclure, nous allons montrer que le terme de droite de (2.432) est défini négatif lorsqu'est appliquée la loi de commande $u_s(\sigma_1(x), \sigma_2(y))$ où $\sigma_2$ est une saturation linéaire telle que $\sigma_2(s) = s$ pour tout $s$ tel que $|s| \leq L_2$ pour une constantes $L_2 > 0$ et $u_s$ est définie par :

$$u_s(X,Y) = -\lambda(|Y|)\left[\frac{7}{3}\kappa(V(Y))\frac{\partial V}{\partial y}(Y)f_2(Y) + X(1+h_2(Y))\right] \qquad (2.433)$$

avec $\lambda$ vérifiant :

- $\lambda$ est de classe $C^2$
- $\lambda$ est positive partout.
- $\lambda$ est égal à zéro lorsque $|Y| \geq \frac{L_2}{2}$.
- $\lambda$ est égal à 1 lorsque $|Y| \leq \frac{L_2}{4}$.

Etudions le signe de l'expression donnée en (2.432) quand $u_s(\sigma_1(x_1), \sigma_2(y))$ est la loi de commande appliquée au système.

**Premier cas :** $|y| \geq \frac{L_2}{2}$. Alors $|\sigma_2(y)| \geq \frac{L_2}{2}$. Par conséquent, $u_s(X,Y)$ est égal à zéro. D'un autre coté, $-\kappa(V(y))W(y)$ est un terme strictement négatif : l'expression donnée en (2.432) est donc strictement négative.

**Deuxième cas :** $|y| \leq \frac{L_2}{2}$. Alors $\sigma_2(y) = y$. Par conséquent, les deux termes qui constituent l'expression donnée en (2.432) sont négatifs. Si leur somme est égale à zéro, alors $W(y) = 0$ et $u_s(\sigma_1(x_1), \sigma_2(y)) = 0$. Puisque $W$ est définie positive, nécessairement $y = 0$. Par conséquent on a : $u_s(\sigma_1(x_1), 0) = 0$. De la formule de $u_s$, on déduit que : $\sigma_1(x_1) = 0$. Cette égalité implique $x_1 = 0$.

**Conclusion :** La dérivée de la fonction $U(x,y)$ le long des solutions du système (2.430) bouclé avec $u_s(\sigma_1(x), \sigma_1(y))$ est définie négative. Cela termine notre preuve. □

### 2.5.4 Le système pendule chariot.

Le système pendule chariot, dont la dynamique normalisée est donnée par les équations (11), est un exemple qui permet de fort bien illustrer la technique proposée dans la section 2.5.1.1.

Pour faciliter la lecture, récrivons les équations (11) en reprenant la notation usuelle $\dot{}$ bien que le temps soit normalisé :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_0 & = & s_0 \\ \dot{s}_0 & = & u_0 \\ \dot{\theta}_0 & = & \omega_0 \\ \dot{\omega}_0 & = & \sin(\theta_0) - u_0\cos(\theta_0) \end{array}\right. \qquad (2.434)$$

[12] Voir nos définitions de base.

La démarche proposée à la section 2.5.1.1 amène à stabiliser tout d'abord le sous système en $(\theta_0, \omega_0)$. Ensuite, on ajoute une première intégration afin de stabiliser le sous système en $(s_0, \theta_0, \omega_0)$. Pour finir, une dernière intégration nous permet de traiter le système entier.

Avant d'en venir à cela, remarquons que le sous système en $(\theta_0, \omega_0)$ se trouve sur le cylindre $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. La topologie de cette variété ainsi que le fait que $\cos(\theta_0)$ multiplie $u_0$ conduit à restreindre l'espace d'état pour ce système à $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \times \mathbb{R}$. Alors, pour ramener notre étude à l'étude d'un système sur $\mathbb{R}^4$, nous faisons un changement de coordonnées :

$$t_0 \;=\; \tan(\theta_0) \quad , \qquad r_0 \;=\; (1+t_0^2)\,\omega_0 \; . \tag{2.435}$$

Alors (2.434) se récrit :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_0 & = & s_0 \\ \dot{s}_0 & = & u_0 \\ \dot{t}_0 & = & r_0 \\ \dot{r}_0 & = & \dfrac{2t_0r_0^2}{1+t_0^2} \;+\; t_0\sqrt{1+t_0^2} \;-\; u_0\sqrt{1+t_0^2} \end{array}\right. \tag{2.436}$$

Puisque nous suivons la démarche de la section 2.3, à chaque nouvel ajout d'intégration, un changement de coordonnées sera nécessaire. D'après la remarque 2.22, nous savons que des changement de coordonnées supprimant entièrement les non linéarités sont faciles à trouver lorsque certaines dérivés exactes sont connues.

En conséquence, commençons par répertorier certaines dérivées exactes indépendantes de l'entrée :

$$\left\{\begin{array}{l} \dot{x}_0 \;=\; s_0\,, \quad \dot{t}_0 \;=\; r_0\,, \quad \dot{\overbrace{s_0 + \dfrac{r_0}{\sqrt{1+t_0^2}}}} \;=\; t_0\left(1+\dfrac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \\ \qquad\qquad\qquad \dot{\overbrace{\ln(t_0+\sqrt{1+t_0^2})}} \;=\; \dfrac{r_0}{\sqrt{1+t_0^2}} \; . \end{array}\right. \tag{2.437}$$

**Le sous système en $(t_0, r_0)$ :** Puisque le contrôle $u_0$ est intégré dans le système (2.436), nous donnons la préférence au bouclage :

$$u_0(t_0, r_0) \;=\; 2\,t_0\left(1+\frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \;+\; r_0 \; . \tag{2.438}$$

En effet, ce bouclage est une dérivée exacte et est stabilisant. Une fonction de Lyapunov assignée par celui-ci est :

$$V_0(t_0, r_0) \;=\; r_0^2 \;+\; \tfrac{1}{3}\left((1+t_0^2)^{\frac{3}{2}} - 1\right) \;+\; r_0\,t_0 \; . \tag{2.439}$$

En effet, en ce cas, on obtient :

$$\dot{V}_{0\,((2.436),(2.438))} \;\leq\; -\tfrac{1}{2}\left(r_0^2+t_0^2\right)\sqrt{1+t_0^2} \;<\; 0 \quad , \quad \forall\,(r_1, t_0) \neq 0 \; . \tag{2.440}$$

**Le sous système en $(s_0, t_0, r_0)$ :** Afin de donner à ce sous système une représentation de la forme (1.4), nous exploitons (2.437) en posant

$$x_1 \;=\; x_0 \;+\; 2\,\ln(t_0+\sqrt{1+t_0^2}) \;, \quad s_1 \;=\; s_0 \;+\; 2\frac{r_0}{\sqrt{1+t_0^2}} \;+\; t_0 \;, \tag{2.441}$$

$$t_1 \;=\; t_0 \;, \quad r_1 \;=\; r_0 \;, \tag{2.442}$$

$$u_1 \;=\; u_0 \;-\; 2\,t_0 \left(1 + \frac{r_0^2}{(1+t_0^2)^{\frac{3}{2}}}\right) \;-\; r_0 \;. \tag{2.443}$$

Il s'en suit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_1 & = & s_1 \;-\; t_1 \\ \dot{s}_1 & = & -u_1 \\ \dot{t}_1 & = & r_1 \\ \dot{r}_1 & = & -\,(t_1 + r_1)\,\sqrt{1+t_1^2} \;-\; u_1\,\sqrt{1+t_1^2} \end{array}\right. \tag{2.444}$$

Le sous système en $(s_1, t_1, r_1)$ est sous la forme (1.4). Par conséquent, la technique de la preuve du lemme 1.1 s'applique. Il s'en suit notamment que :

$$V_1(s_1, t_1, r_1) \;=\; V_0(t_1, r_1) \;+\; l(s_1^2) \;. \tag{2.445}$$

est une une fonction de Lyapunov strictement assignable. Cette fois encore, dans un but de simplicité et de performance, nous devons effectuer le choix de la commande $u_1$, en ayant en tête la dernière étape, celle au cours de laquelle $s_1 - t_1$ est intégré. Nous remarquons que pour :

$$u_1(s_1, t_1, r_1) \;=\; \tfrac{1}{10} s_1 \;, \tag{2.446}$$

une nouvelle dérivée exacte est obtenus, qui dépend cette fois de la commande utilisée :

$$\dot{s}_1 \;=\; -\,\tfrac{1}{10} s_1 \;. \tag{2.447}$$

Pour montrer que cette commande stabilise, il suffit de déterminer une fonction de Lyapunov assignée par celle-ci. Prenons :

$$l(s_1^2) \;=\; 5 s_1^2 \;+\; \frac{1}{6}|s_1|^3 \;. \tag{2.448}$$

Alors, pour un tel choix, on obtient :

$$\dot{V}_{1\,((2.444),(2.446))} \;\leq\; -\tfrac{1}{2}\left(r_1^2 + t_1^2\right)\sqrt{1+t_1^2} \;-\; \left[s_1^2 + \tfrac{1}{20}|s_1|^3\right] \;+\; \tfrac{1}{10}\left[2r_1 + t_1\right]\sqrt{1+t_1^2}\,s_1 \;. \tag{2.449}$$

Mais, grâce à l'inégalité de Young, nous avons :

$$|2r_1 + t_1|\sqrt{1+t_1^2}\,s_1 \;=\; |2r_1 + t_1|\left[\sqrt{1+t_1^2} - 1\right] s_1 \;+\; |2r_1 + t_1|\,s_1 \;, \tag{2.450}$$

$$\leq\; \left(\tfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{3}{2}} [r_1^2 + t_1^2]^{\frac{3}{4}} \left[\sqrt{1+t_1^2} - 1\right]^{\frac{3}{2}} \;+\; \tfrac{1}{2}|s_1|^3 \;+\; \tfrac{1}{4}[r_1^2 + t_1^2] \;+\; 5 s_1^2 \;, \tag{2.451}$$

$$\leq\; \left(\tfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{3}{2}} [r_1^2 + t_1^2]\sqrt{1+t_1^2}\,\frac{|t_1|^3}{\sqrt{1+t_1^2}[\sqrt{1+t_1^2}+1]^{\frac{3}{2}}[r_1^2+t_1^2]^{\frac{1}{4}}} \;+\; \tfrac{1}{2}|s_1|^3 \;+\; \tfrac{1}{4}[r_1^2 + t_1^2] \;+\; 5 s_1^2 \tag{2.452}$$

$$\leq\; \left[\left(\tfrac{2\sqrt{5}}{3}\right)^{\frac{3}{2}} + \tfrac{1}{4}\right] [r_1^2 + t_1^2]\sqrt{1+t_1^2} \;+\; 5 s_1^2 \;+\; \tfrac{1}{2}|s_1|^3 \;. \tag{2.453}$$

Pour conclure, écrivons :

$$-\,W_1(s_1, t_1, r_1) \;=\; \dot{V}_{1\,((2.444),(2.446))} \;\leq\; -\,\tfrac{1}{4}\left(r_1^2 + t_1^2\right)\sqrt{1+t_1^2} \;-\; \tfrac{1}{2} s_1^2 \;. \tag{2.454}$$

**Le système entier :** Le lemme 2.21 garanti l'existence de coordonnées permettant d'écrire ce système sous la forme (1.4). Mais dans le cas où nous nous trouvons, il semble qu'il soit fort difficile d'obtenir les expressions explicites de ce changement de coordonnées. Nous ne cherchons donc qu'à obtenir la forme (2.303). Pour parvenir à celle-ci, en nous inspirant de (2.219) et du lemme 2.18, et en employant (2.437) et (2.447), nous prenons :

$$x_2 \;=\; x_1 \;+\; 10 s_1 \;+\; \left(s_0 + \frac{r_0}{\sqrt{1+t_0^2}}\right) \quad , \quad s_2 \;=\; s_1 \;, \quad t_2 \;=\; t_1 \;, \quad r_2 \;=\; r_1 \;, \tag{2.455}$$

$$u_2 \;=\; u_1 \;-\; \tfrac{1}{10} s_1 \;. \tag{2.456}$$

Immédiatement, on obtient :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \dot{x}_2 & = & -10\, u_2 \;+\; \dfrac{t_2 r_2^2}{(1+t_2^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \dot{s}_2 & = & -\frac{1}{10}\, s_2 \;-\; u_2 \\ \dot{t}_2 & = & r_2 \\ \dot{r}_2 & = & -\left(t_2 + r_2 + \frac{1}{10} s_2\right)\, \sqrt{1+t_2^2} \;-\; u_2 \sqrt{1+t_2^2} \end{array}\right. \tag{2.457}$$

Ce système est de la forme (2.221), un terme d'ordre trois, $\frac{t_2 r_2^2}{(1+t_2^2)^{\frac{3}{2}}}$, étant présent. Grâce à (2.454), on peut vérifier que (2.12) est satisfaite avec :

$$\left| \frac{t_2 r_2^2}{(1+t_2^2)^{\frac{3}{2}}} \right| \;\leq\; \tfrac{4}{3}\, W_1(s_2, t_2, r_2) \tag{2.458}$$

qui est une conséquence de l'implication :

$$\left\{ \frac{3}{4} \;\leq\; \left(t^2 - |t| + 1\right) \;,\; 0 \;\leq\; (1-|t|)^4 \right\} \quad \Longrightarrow \quad \left\{ 3\,|t| \;\leq\; 4\,|t|\, \left(t^2 - |t| + 1\right) \;\leq\; \left(1+t^2\right)^2 \right\} \;. \tag{2.459}$$

La technique du Théorème 2.1 s'applique donc et fournit la fonction de Lyapuonv strictement assignable suivante :

$$V_2(x_2, s_2, t_2, r_2) \;=\; 2\, V_1(s_2, t_2, r_2) \;+\; \int_0^{|x_2|} \sigma(s) ds \;, \tag{2.460}$$

où) $\sigma$ est une fonction continue, impaire, satisfaisant :

$$\sigma(0) \;=\; 0 \quad , \qquad 0 \;<\; s\sigma(s) \;\leq\; |s| \quad \forall\, s \neq 0 \quad , \qquad \liminf_{s \longrightarrow +\infty} \sigma(s) \;>\; 0 \;. \tag{2.461}$$

En effet,au moyen de (2.458), on vérifie que :

$$\dot{V}_2 \;\leq\; -\tfrac{2}{3}\, W_1(s_2, t_2, r_2) \;-\; \left[2\left([2r_2 + t_2]\sqrt{1+t_2^2} + s_2[10 + \tfrac{1}{2}|s_2|]\right) + 10\sigma(x_2)\right] u_2 \;. \tag{2.462}$$

Par conséquent, en choisissant la fonction $u_2(x_2, s_2, t_2, r_2)$ parmi les solutions de :

$$-\left[2\left([2r_2 + t_2]\sqrt{1+t_2^2} + s_2[10 + \frac{1}{2}|s_2|]\right) \;+\; 10\sigma(x_2)\right] u_2(x_2, s_2, t_2, r_2) \;<\; 0 \;, \tag{2.463}$$

quand le terme entre crochets est non nul, on obtient une loi de commande qui stabilise globalement asymptotiquement le système (2.436). Celle-ci est :

$$u \;=\; u_0(t_0, r_0) \;+\; u_1(s_1, t_1, r_1) \;+\; u_2(x_2, s_2, t_2, r_2)\ . \tag{2.464}$$

D'un point de vue physique, cette loi de commande implique l'asymptotique stabilité pourvu que la déviation initiale du pendule par rapport à la position verticale est strictement moins grande que 90°.

**Remarque 2.39 :**

1. Ce résultat de stabilisation asymptotique sur le demi espace supérieur n'est pas nouveau et se trouve au moins dans [4] •
2. Dans un souci de clarté, nous n'avons introduit aucun paramètre dans la loi de commande proposée. L'introduction de ces paramètres pourrait cependant donner des degrés de liberté permettant de modifier les comportements des diverses variables •
3. Nous nous sommes efforcés de tirer avantage au mieux des dynamiques du système en utilisant systématiquement la connaissance de dérivées exactes pour construire nos changements de coordonnées. Mais pour à la fois le sous système en $(s_0, t_0, r_0)$ et celui en $(x_0, s_0, t_0, r_0)$ il aurait été possible de résoudre l'équation linéaire correspondante (2.232) et d'utiliser la loi de commande donnée par (2.98) qui, dans le cas particulier où $h_1$, $h_2$ et $f_2$ dépendent seulement de $y$, se simplifie en :
$$u(x_1, y) \;=\; -\,\mu\,\varphi_R(|y|^2)\,\Gamma(x_1, y)\ , \tag{2.465}$$
la fonction $\Gamma$ étant celle définie en (2.75) pour laquelle, d'après (2.461), nous pouvons choisir $l'\left(qs^2\right) = \frac{\sigma(s)}{s\sigma'(0)}$. En procédant ainsi, la loi de commande suivante peut être obtenue :
$$\begin{aligned} u \;=\; & u_0(t_0, r_0) \;+\; \mu_s\,\varphi_{R_s}(t_0^2 + r_0^2)\,\sigma_s\,(s_0 + 2r_0 + t_0) \\ & + \mu_x\,\varphi_{R_x}(s_0^2 + t_0^2 + r_0^2)\,\sigma_x\left(x_0 + 2t_0 + \tfrac{1}{\mu_s}\,(s_0 + 2r_0 + t_0) + s_0 + r_0\right)\ , \end{aligned} \tag{2.466}$$
les fonctions $\varphi_{R_s}$ et $\varphi_{R_x}$ satisfaisant (2.94) avec $R_s$ et $R_x$ des constantes strictement positives, les fonctions $\sigma_s$ et $\sigma_x$ satisfaisant (2.461) et les réels $\mu_s$ et $\mu_x$ étant à choisir strictement positifs et suffisamment petits •

### 2.5.5 L'avion "Vertical take off and landing".

De nombreuses techniques sont applicables aux équations du système physique que nous allons maintenant traiter. En effet, on peut appliquer au système (2.467)

- La technique de linéarisation entrée-sortie : voir [23]
- Une technique de linéarisation par extension dynamique : voir [49].
- Des techniques de stabilisation asymptotique globale basées sur la forme feedforward de ce système : voir [78].

C'est dans ce dernier contexte que notre approche se situe. Notre intention particulière est d'illustrer, comme nous l'avons dèsjà fait par l'exemple 2.17, la propriété de robustesse de la loi de commande fournie par la démonstration du Théorème 2.26 : nous parviendrons à obtenir une loi de commande globalement asymptotiquement stabilisante avec pour seul renseignement sur le paramètre $\varepsilon$ une connaissance a priori d'une borne supérieure de sa norme. Il est à remarquer que dans [49] il est en revanche supposé que $\varepsilon$ est connu. De plus, le bouclage que nous proposons ici est borné sur tout ensemble compact de l'espace d'état et $u_1$, la poussée, est bornée.

#### 2.5.5.1 Positionnement du problème et résultat principal.

Dans les coordonnées normalisées de [23] et après un premier bouclage qui fait de l'origine un point d'équilibre, les équations du mouvement pour le PVTOL sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{X} & = & s_X \\ \dot{s}_X & = & -\sin(\theta)(1+u_1)+\varepsilon\cos(\theta)u_2 \\ \dot{Y} & = & s_Y \\ \dot{s}_Y & = & \cos(\theta)-1+\cos(\theta)u_1+\varepsilon\sin(\theta)u_2 \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & u_2 \end{array}\right. \tag{2.467}$$

où $\varepsilon$ est un petit paramètre.

Ainsi que cela a été observé par Teel dans [74], le système (2.467) est sous forme feedforward. Lorsque $\varepsilon$ est connu, on peut se ramener au cas $\varepsilon = 0$, cas pour lequel le Théorème 2.30 s'applique. En effet, le changement de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \widetilde{X} & = & X+\varepsilon\sin(\theta) \\ \widetilde{s_X} & = & s_X+\varepsilon(\cos(\theta)-1) \\ \widetilde{Y} & = & Y+\varepsilon(\cos(\theta)-1) \\ \widetilde{s_Y} & = & s_Y-\varepsilon\sin(\theta)\omega \end{array}\right. \tag{2.468}$$

transforme (2.467) en :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\widetilde{X}} & = & \widetilde{s_X} \\ \dot{\widetilde{s_X}} & = & -\sin(\theta)(1+u_1) \\ \dot{\widetilde{Y}} & = & \widetilde{s_Y} \\ \dot{\widetilde{s_Y}} & = & \cos(\theta)-1+\cos(\theta)u_1 \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & u_2 \end{array}\right. \tag{2.469}$$

Lorsque $\varepsilon$ n'est pas connu, le changement de variables présenté ci-dessus, avec une approximation de $\varepsilon$ au lieu de $\varepsilon$, permet de se ramener au cas où $|\varepsilon|$ est petit. Dans ce cas, un résultat de stabilisation peut être obtenu en tirant profit de la robustesse de la stabilisation fournie par la technique du Théorème 2.1. Le cas où $\varepsilon$ est connu étant un cas particulier de celui où il est inconnu, nous nous intéressons à ce dernier cas et supposons $|\varepsilon|$ petit; disons, pour fixer les idées, $|\varepsilon| \leq \frac{1}{50}$[13]. Cette borne peut être modifiée en changeant certains coefficients de notre loi de commande.

Tout au long de cette exemple, $\varepsilon_1$ désignera la fonction $\varepsilon\cos(\theta)$.

[13] D'un point de vue pratique, un tel seuil est raisonnable : d'après [23], $|\varepsilon|$ est typiquement borné par $\frac{1}{100}$.

**Première étape :** Deux possibilités se présentent. Nous pouvons stabiliser d'abord le sous système en $(\omega, \theta, Y, s_Y)$ ou d'abord le sous système en $(\omega, \theta, s_X)$. Dans un but de simplicité, nous écartons la première possibilité. En effet, d'un côté nous savons que les calculs rencontrées quand le Théorème 2.26 est appliqué sont d'autant plus pénibles que grande est la dimension de la variété stable et d'un autre côté, nous observons que si une loi de commande qui stabilise l'origine globalement asymptotiquement et localement exponentiellement est construite, pour le sous système en $(\omega, \theta, s_X)$, alors le comportement de ce sous système n'est pas changé de façon significative par la présence d'une loi de commande perturbatrice, pourvu que celle-ci soit suffisamment petite. En employant cette propriété et le résultat de stabilisabilité d'une chaîne d'intégrateurs multiple par un bouclage arbitrairement petit, il sera possible de conclure facilement.

La loi de commande $u_2 = -\theta - \omega$ stabilise exponentiellement le sous système en $(\theta, \omega)$. Alors, en prenant $u_2 = -\theta - \omega + v_2$ et $u_1 = 0$, on se trouve face à un système la forme (2.291), avec $(\omega, \theta)$ jouant le rôle de $y$ et $s_x$ celui de $x_1$, pour lequel le Théorème 2.26 s'applique lorsque $\varepsilon = 0$. Employons la technique de la preuve de celui-ci. Le changement de variables du type (2.220) suivant : $(\omega, \theta, s) = (\omega, \theta, s_X - \omega - \theta)$ transforme le sous système en $(\omega, \theta, s_X)$ en :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{s} & = & \theta - \sin(\theta) - \varepsilon_1(\theta + \omega) + (-1 + \varepsilon_1)v_2 \\ \dot{\theta} & = & \omega \\ \dot{\omega} & = & -\theta - \omega + v_2 \end{array} \right. \tag{2.470}$$

Alors pour $\varepsilon = 0$, les hypothèses B1, B2 et B3 du Théorème 2.1 sont vérifiées avec

$$\rho \equiv 0 \quad , \quad V(\theta, \omega) = \frac{1}{2}\omega^2 + \omega\theta + \frac{3}{2}\theta^2 \quad , \quad \kappa(s) = 1 \, . \tag{2.471}$$

Comme fonction de Lyapunov susceptible d'être strictement assignable, nous proposons donc (voir (2.68)) :

$$V_1 = \sqrt{1+s^2} + \frac{1}{2}\omega^2 + \omega\theta + \frac{3}{2}\theta^2 - 1 \, . \tag{2.472}$$

Prenons sa dérivée :

$$\dot{V}_1 = -\omega^2 - \theta^2 + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\left[\theta - \sin(\theta) - \varepsilon_1(\theta + \omega)\right] + \left\{\omega + \theta + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\left[-1 + \varepsilon_1\right]\right\} v_2 \tag{2.473}$$

Introduisons la notation :

$$R = \omega + \theta - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} \, . \tag{2.474}$$

Elle permet d'écrire :

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_1 & \leq & -\omega^2 - \theta^2 + (1 - \varepsilon_1)Rv_2 + \varepsilon_1(\omega + \theta)v_2 + \frac{1}{2}\theta^2 + \varepsilon_1(R - \omega - \theta)(\theta + \omega) \\ & \leq & (-1 + 2|\varepsilon_1|)\omega^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2|\varepsilon_1|\right)\theta^2 + (1 - \varepsilon_1)Rv_2 + \varepsilon_1(\omega + \theta)v_2 + \varepsilon_1(\omega + \theta)R \end{array} \tag{2.475}$$

Prenons $v_2 = -\lambda R$, avec $\lambda > 0$ :

$$\begin{array}{rcl} \dot{V}_1 & \leq & (-1 + 2|\varepsilon_1|)\omega^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2|\varepsilon_1|\right)\theta^2 - \lambda(1 - |\varepsilon_1|)R^2 + (\lambda + 1)\left|\varepsilon_1(\omega + \theta)R\right| \\ & \leq & \left(-1 + 2|\varepsilon_1| + \frac{\varepsilon_1^2(\lambda+1)^2}{\lambda}\right)\omega^2 + \left(-\frac{1}{2} + 2|\varepsilon_1| + \frac{\varepsilon_1^2(\lambda+1)^2}{\lambda}\right)\theta^2 - \lambda\left(\frac{1}{2} - \varepsilon_1\right)R^2 \end{array} \tag{2.476}$$

Faisons le choix : $\lambda = 1$ et supposons que $|\varepsilon| \le \frac{1}{50}$. Alors :

$$\dot{V_1} \;\le\; -\frac{47}{50}\omega^2 - \frac{11}{25}\theta^2 - \frac{5}{11}R^2 \;<\; 0 \quad , \quad \forall\,(\omega,\theta,R) \,\neq\, 0 \tag{2.477}$$

pour $u_2 = -\,2\omega -\, 2\theta + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}}$.

**Deuxième étape :** Nous stabilisons le sous système en $(\omega,\theta,s_X,x)$. Nous avons obtenu une loi de commande qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine du sous système en $(\omega,\theta,s_X)$. Grâce au changement de loi de commande : $u_2 = -\,2\omega -\, 2\theta + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + v_3$, on se trouve face à un système la forme (2.291) avec $(\omega,\theta,s_X)$ jouant le rôle de $y$ et $x$ celui de $x_1$ pour lequel le Théorème 2.26 s'applique lorsque $\varepsilon = 0$. Employons la technique de la preuve de celui-ci. Le changement de variables du type (2.220) suivant : $(\omega,\theta,s,x) \,=\, (\omega,\theta,s,X+3s+2\omega)$ donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl}
\dot{x} &=& \frac{s^3}{1+s^2+\sqrt{1+s^2}} + 3(\theta-\sin(\theta)) + 3\varepsilon_1\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + 3\varepsilon_1(\theta+\omega) + (-1+3\varepsilon_1)v_3 \\
\dot{s} &=& \theta - \sin(\theta) + (-1+\varepsilon_1)\frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + (1-\varepsilon_1)(\theta+\omega) + (-1+\varepsilon_1)v_3 \\
\dot{\theta} &=& \omega \\
\dot{\omega} &=& -2\theta - 2\omega + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} + v_3
\end{array}\right. \tag{2.478}$$

Ce système est maintenant de la forme (2.291) avec $(\omega,\theta,s)$ jouant le rôle de $y$ et $x$ celui de $x_1$.

Comme fonction de Lyapunov susceptible d'être strictement assignable, nous proposons :

$$V_\nu \;=\; \sqrt{1+x^2} + \nu(V_1) -\, 1 \;. \tag{2.479}$$

Prenons sa dérivée :

$$\begin{array}{rcl}
\dot{V_\nu} &\le& \nu'(V_1)\left[-\,\frac{47}{50}\omega^2 -\, \frac{11}{25}\theta^2 -\, \frac{5}{11}R^2\right] + \nu'(V_1)\left[\omega+\theta+(-\,1+\varepsilon_1)\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right]v_3 \\
&& +\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\left[\frac{s^3}{1+s^2+\sqrt{1+s^2}} + 3(\theta -\, \sin(\theta)) + 3\varepsilon_1(\omega+\theta) + (-\,1+3\varepsilon_1)v_3\right] \\
&\le& \nu'(V_1)\left[-\,\frac{47}{50}\omega^2 -\, \frac{11}{25}\theta^2 -\, \frac{5}{11}R^2\right] + \nu'(V_1)\left[\omega+\theta+(-\,1+\varepsilon_1)\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right]v_3 \\
&& +\frac{|s|^3}{1+s^2+\sqrt{1+s^2}} + \frac{3}{2}\theta^2 + \frac{3|\varepsilon||x|}{\sqrt{1+x^2}}|\omega+\theta| + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(-1+3\varepsilon_1)v_3
\end{array} \tag{2.480}$$

Mais, avec (2.474) :

$$\frac{|s|^3}{1+s^2+\sqrt{1+s^2}} \;\le\; (R-\omega-\theta)^2(\sqrt{1+s^2}-1) \;\le\; (4R^2+2\theta^2+4\omega^2)(\sqrt{1+s^2}-1) \tag{2.481}$$

Nous choisissons par conséquent[14] :

$$\nu'(v) \;=\; 18(1+v)\;. \tag{2.482}$$

$$\begin{array}{rcl}
\dot{V_\nu} &\le& -\,\left[\frac{423}{25}\omega^2 + \frac{371}{50}\theta^2 + \frac{90}{11}R^2\right] -\, \left[\frac{323}{25}\omega^2 + \frac{148}{25}\theta^2 + \frac{46}{11}R^2\right]V_1 \\
&& +\left\{18(1+V_1)\left[\omega+\theta+(-\,1+\varepsilon_1)\frac{s}{\sqrt{1+s^2}}\right] + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}(-1+3\varepsilon_1)\right\}v_3 + \frac{3|\varepsilon||x|}{\sqrt{1+x^2}}|\omega+\theta|
\end{array} \tag{2.483}$$

Employons la notation

$$T \;=\; 18(1+V_1)R - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \tag{2.484}$$

[14] La fonction $\nu'(m)$ doit être non bornée. En effet, il est aisé de vérifier que pour toute fonction $\nu'(m)$ bornée, les conditions du théorème d'Artstein (voir [1]) ne sont pas vérifiées

et prenons $v_3 = -\frac{\mu}{18(1+V_1)}T$ avec $\mu > 0$. Alors, on obtient l'inégalité :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\nu \;\leq\; & -\left[\tfrac{423}{25}\omega^2 + \tfrac{371}{50}\theta^2 + \tfrac{90}{11}R^2\right] - \left[\tfrac{323}{25}\omega^2 + \tfrac{148}{25}\theta^2 + \tfrac{46}{11}R^2\right] V_1 - \tfrac{\mu}{18(+V_1)}(1-3|\varepsilon|)T^2 \\ & + |\varepsilon| \left[(2|R| + |(\omega+\theta)|)\,|\mu T| + 3|\omega+\theta||T - 18(1+V_1)R|\right] \end{aligned} \tag{2.485}$$

Avec :

$$(1+V_1)|\omega+\theta||R| \;\leq\; \frac{1}{2}\left[R^2 + 9\omega^2 + \frac{9}{8}\theta^2\right] + \frac{1}{2}\left[R^2 + 9\omega^2 + \frac{9}{8}\theta^2\right] V_1 \,, \tag{2.486}$$

on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\nu \;\leq\; & -\left[16\omega^2 + \tfrac{13}{2}\theta^2 + \tfrac{15}{2}R^2\right] - \left[7\omega^2 + 5\theta^2 + \tfrac{7}{2}R^2\right] V_1 - \tfrac{\mu}{18(1+V_1)}(1-3|\varepsilon|)T^2 \\ & + |\varepsilon| \left[2|R| + \left|\left(1+\tfrac{3}{\mu}\right)(\omega+\theta)\right|\right] |\mu T| \end{aligned} \tag{2.487}$$

Soit $\mu$ un réel plus grand que 3. Alors :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\nu \;\leq\; & -\left[16\omega^2 + \tfrac{13}{2}\theta^2 + \tfrac{15}{2}R^2\right] - \left[7\omega^2 + 5\theta^2 + \tfrac{7}{2}R^2\right] V_1 - \tfrac{\mu}{18(1+V_1)}(1-3|\varepsilon|)T^2 \\ & + 2|\varepsilon| \left[|R| + |\omega| + |\theta|\right] |\mu T| \,. \end{aligned} \tag{2.488}$$

Mais :

$$2|\varepsilon| \left[|R| + |\omega| + |\theta|\right] |\mu T| \;\leq\; \frac{\mu T^2}{36(1+V_1)} + \frac{3\mu}{20}(1+V_1)\left[\theta^2 + 2R^2 + 2\omega^2\right] \tag{2.489}$$

Donc, en prenant $\mu = 10$, l'inégalité suivante :

$$2|\varepsilon| \left[|R| + |\omega| + |\theta|\right] |\mu T| \;\leq\; \frac{\mu T^2}{36(1+V_1)} + \frac{3}{2}(1+V_1)\left[\theta^2 + 2R^2 + 2\omega^2\right] \tag{2.490}$$

est vérifiée. On déduit de celle-ci que :

$$\dot{V}_\nu \;\leq\; -\left[13\omega^2 + 5\theta^2 + \frac{9}{2}R^2\right] - \left[4\omega^2 + \frac{7}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}R^2\right] V_1 - \frac{5}{11(1+V_1)}T^2 \;<\; 0 \tag{2.491}$$

pour tout $(\omega, \theta, R, T) \neq (0,0,0,0)$ lorsque

$$u_2 \;=\; -2\omega - 2\theta + \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} - \frac{5}{9(1+V_1)}T \,. \tag{2.492}$$

**Dernière étape :** Nous stabilisons globalement asymptotiquement l'origine du système (2.467). Une façon de faire pour parvenir à ce résultat, consiste à appliquer directement le Théorème 2.26. Alors, seraient mis à notre disposition des lois de commandes stabilisantes de norme arbitrairement petites. Toutefois, dans un but de simplicité, nous prouvons notre résultat en exploitant la propriété de robustesse de la stabilité possédée par le sous système en $(\omega, \theta, s_X, X)$ lorsque $u_2$ est la commande.

Quand $u_1 \neq 0$, en prenant la dérivée de $V_\nu$ par rapport au temps, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{V}_\nu \;\leq\; & -\left[13\omega^2 + 5\theta^2 + \tfrac{9}{2}R^2\right] - \left[4\omega^2 + \tfrac{7}{2}\theta^2 + \tfrac{1}{2}R^2\right] V_1 - \tfrac{5}{11(1+V_1)}T^2 \\ & + \tfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(-3\sin(\theta)u_1) + 18(1+V_1)\tfrac{s}{\sqrt{1+s^2}}(-\sin(\theta)u_1) \end{aligned} \tag{2.493}$$

Avec (2.474) et (2.484) et en posant

$$A = 3|18(1+V_1)R - T||\sin(\theta)||u_1| + 18(1+V_1)|\sin(\theta)||\omega+\theta-R||u_1| \tag{2.494}$$

il s'en suit que :

$$\dot{V}_\nu \leq -\left[13\omega^2 + 5\theta^2 + \frac{9}{2}R^2\right] - \left[4\omega^2 + \frac{7}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}R^2\right]V_1 - \frac{5}{11(1+V_1)}T^2 + A \tag{2.495}$$

Soit $u_1$ une fonction de norme plus petite que $\frac{b}{1+V_1}$. Alors :

$$A \leq 3b[18|R| + \frac{|T|}{1+V_1}]|\sin(\theta)| + 18b|\sin(\theta)||\omega+\theta-R| . \tag{2.496}$$

Mais :

$$\begin{array}{rcl} 18b|\sin(\theta)||\omega+\theta-R| & \leq & b\left(37\theta^2 + 81\omega^2 + \frac{9}{2}R^2\right) \\ 3b\frac{|T|}{1+V_1}|\sin(\theta)| & \leq & \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{9b^2}{2}\frac{T^2}{(1+V_1)^2} \\ 54b|R||\sin(\theta)| & \leq & \theta^2 + (27b)^2R^2 \end{array} \tag{2.497}$$

Par conséquent, si $b = \frac{5}{74}$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\dot{V}_\nu \leq -\left[\omega^2 + \theta^2 + \frac{1}{2}R^2\right] - \left[4\omega^2 + \frac{7}{2}\theta^2 + \frac{1}{2}R^2\right]V_1 - \frac{1}{11(1+V_1)}T^2 . \tag{2.498}$$

Soit

$$u_1 = -\frac{5}{74(1+V_1)}\left(\frac{s_Y}{2\sqrt{1+s_Y^2}} + \frac{Y}{2\sqrt{1+Y^2}}\right) . \tag{2.499}$$

Alors (2.498) est vérifiée et les équations du sous système en $(Y, s_Y)$ sont :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{Y} & = & s_Y \\ \dot{s}_Y & = & -\frac{5}{74}\left(\frac{s_Y}{2\sqrt{1+s_Y^2}} + \frac{Y}{2\sqrt{1+Y^2}}\right) + \widehat{e}(\omega,\theta,s_X,X,s_Y,Y) \end{array}\right. \tag{2.500}$$

avec :

$$\begin{array}{rcl} \widehat{e}(\omega,\theta,s_X,X,s_Y,Y) & = & \cos(\theta) - 1 + \frac{5(\cos(\theta)-1)}{74(1+V_1)}\left(\frac{s_Y}{2\sqrt{1+s_Y^2}} + \frac{Y}{2\sqrt{1+Y^2}}\right) \\ & & +\varepsilon\sin(\theta)u_2(\omega,\theta,s_X,X) \end{array} \tag{2.501}$$

Par conséquent, nous avons :

$$\begin{array}{rcl} \dot{\overbrace{\sqrt{1+s_Y^2 + \frac{5}{148}\left(\sqrt{1+Y^2}-1\right)}}} & \leq & -\frac{5}{37}\frac{s_Y^2}{2\sqrt{1+s_Y^2}} + |\widehat{e}(\omega,\theta,s_X,X,s_Y,Y)| \\ & \leq & -\frac{5}{74}\frac{s_Y^2}{\sqrt{1+s_Y^2}} + 2|\cos(\theta)-1| \\ & & +|\theta|\left[|\omega| + |\theta| + |R| + \left|\frac{T}{1+V_1}\right|\right] \end{array} \tag{2.502}$$

Grâce à cette dernière inégalité, et grâce à (2.498), nous déduisons l'existence de $c$ tel que :

$$2|\cos(\theta)-1| + |\theta|\left[|\omega| + |\theta| + |R| + \left|\frac{T}{1+V_1}\right|\right] \leq \frac{1}{2}c\,W(\omega,\theta,R,T) \tag{2.503}$$

avec

$$W(\omega,\theta,R,T) \;=\; \left[\omega^2+\theta^2+\frac{1}{2}R^2\right]+\left[4\omega^2+\frac{7}{2}\theta^2+\frac{1}{2}R^2\right]V_1+\frac{1}{11(1+V_1)}T^2\;. \tag{2.504}$$

Il s'en suit que :

$$\overbrace{\sqrt{1+s_Y^2+\frac{5}{148}\left(\sqrt{1+Y^2}-1\right)}+cV_\nu}^{\cdot} \;\leq\; -\frac{5}{74}\frac{s_Y^2}{\sqrt{1+s_Y^2}}-\frac{c}{2}W(\omega,\theta,R,T)\;. \tag{2.505}$$

La conclusion s'obtient en appliquant le principe d'invariance de LaSalle.

#### 2.5.5.2 Stabilisation par bouclage dynamique de sortie.

Pour le système (2.467), nous venons d'obtenir un résultat de stabilisation asymptotique globale par bouclage d'état au moyen d'une technique Lyapunov. Nous savons, grâce à [55], que cette technique de preuve peut permettre dans certains cas d'obtenir un résultat de stabilité asymptotique globale par bouclage dynamique de sortie. Il suffit pour cela qu'une propriété structurelle soit vérifiée : les variables non mesurées interviennent linéairement dans les équations du système. Il s'avère que les variables qui désignent les diverses composantes de la vitesse de l'avion VTOL doivent intervenir linéairement dans (2.467). Ainsi, pouvons nous nous contenter des variables de positions comme variables mesurées ce qui, d'un point de vue pratique, a de l'intérêt. Ceci nous conduit à choisir pour sortie la composante de l'état $x=(s_X,s_Y,\omega)^\top$ et à chercher à prouver que le système (2.467) est globalement asymptotiquement stabilisable par bouclage dynamique de sortie du.

Vérifions que [55, Proposition1] s'applique au système (2.467).

**Notations.**
Avec les notations de [55], nous avons :

$$z \;=\; \begin{pmatrix} X\\ Y\\ \theta\end{pmatrix}\quad,\quad x\;=\;\begin{pmatrix} s_X\\ s_Y\\ \omega\end{pmatrix}\quad,\quad u\;=\;(u_1,u_2)^\top\;. \tag{2.506}$$

et :

$$\begin{aligned} A(z,u)\;=\;0\quad,\quad B(z,u)\;&=\;\begin{pmatrix} -\sin(\theta)(1+u_1)+\varepsilon\cos(\theta)u_2\\ \cos(\theta)-1+\cos(\theta)u_1+\varepsilon\sin(\theta)u_2\\ u_2\end{pmatrix}\quad,\\ C(z,u)\;=\;I\quad&,\quad D(z,u)\;=\;0\;. \end{aligned} \tag{2.507}$$

**Vérification.**
Nous allons montrer que les hypothèses de [55, Proposition 1] sont vérifiées par (2.467).

- **Assumption S :** Nous avons montré que cette propriété est vérifiée et que $\mathcal{U}$ définie par

$$\begin{aligned} \mathcal{U} \;&=\; \sqrt{1+s_Y^2+\tfrac{5}{74}\int_0^Y\frac{l}{2\sqrt{1+l^2}}dl}+c\sqrt{1+(X+3(s_X-\omega-\theta)+2\omega)^2}\\ &\quad+c\,\nu\left(\sqrt{1+(s_X-\omega-\theta)^2}+\tfrac{1}{2}\omega^2+\omega\theta+\tfrac{3}{2}\theta^2-1\right)\\ \nu(m)\;&=\;18m+9m^2\quad,\quad c\;>\;0\;. \end{aligned} \tag{2.508}$$

  est une fonction de Lyapunov assignable pour (2.467). Puisque $\mathcal{U}\geq 1+c$, la fonction $\ln(\mathcal{U})$ est également une fonction de Lyapunov assignable pour (2.467).

- **Assumption D :** Lorsque $A$ et $C$ sont des constantes, cette hypothèse est vérifiée si la propriété suivante l'est :

  Il existe deux matrices $K_x, K_z$ telles que la matrice

$$\begin{bmatrix} A & K_x \\ C & K_z \end{bmatrix}$$

  soit Hurwitz. Puisque dans notre cas particulier, $A = 0$ et $C = I$, la détectabilité de la paire :

$$\left( \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ I & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \right)$$

  implique que cette propriété est vérifiée. De plus, $K_x$ et $K_z$ peuvent être choisi de telle sorte que $\Sigma_x$ soit une matrice identité. Par conséquent, la composante $x$ non mesurée est fortement détectable (voir [55]).

- **Assumption GC :** Posons

$$\mathcal{V} \;=\; \ln(\mathcal{U}) \ . \tag{2.509}$$

  Sans difficulté, on peut montrer que les fonctions :

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s_Y} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 s_Y} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial Y} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 Y} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial X} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 X} \tag{2.510}$$

  sont bornées. Reste à étudier les dérivées partielles par rapport à $s_X, \omega, \theta$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s_X} &= \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{\partial U}{\partial s_X} \\
\frac{\partial U}{\partial s_X} &= 3c \frac{X + 3(s_X - \omega - \theta) + 2\omega}{\sqrt{1 + (X + 3(s_X - \omega - \theta) + 2\omega)^2}} \\
&\quad + 18c \left( 1 + \sqrt{1 + (s_X - \omega - \theta)^2} + \frac{1}{2}\omega^2 + \omega\theta + \frac{3}{2}\theta^2 - 1 \right) \frac{s_X - \omega - \theta}{\sqrt{1 + (s_X - \omega - \theta)^2}} \ .
\end{aligned}$$

  Mais, en considérant les degrés, il est facile de montrer que $\mathcal{U}$ est supérieure et à une forme quadratique définie positive en $s_X, \omega, \theta$ et à 1. Ceci implique que $\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s_X}$ est bornée.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 s_X} \;=\; -\frac{1}{\mathcal{U}^2} \left( \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial s_X} \right)^2 + \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 s_X} \;=\; -\left( \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial s_X} \right)^2 + \frac{1}{\mathcal{U}} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 s_X} \ . \tag{2.511}$$

  Par conséquent, pour que $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 s_X}$ soit bornée, il faut et il suffit que $\frac{1}{\mathcal{U}} \frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 s_X}$ le soit. Il est facile de montrer que :

$$\frac{\partial}{\partial s_X} \left[ \frac{X + 3(s_X - \omega - \theta) + 2\omega}{\sqrt{1 + (X + 3(s_X - \omega - \theta) + 2\omega)^2}} \right] \quad , \quad \frac{\partial}{\partial s_X} \left[ \sqrt{1 + (s_X - \omega - \theta)^2} \right]$$
$$\frac{\partial}{\partial s_X} \left[ \frac{s_X - \omega - \theta}{\sqrt{1 + (s_X - \omega - \theta)^2}} \right]$$

  sont des fonctions bornées. Il s'en suit immédiatement que $\frac{\partial^2 \mathcal{U}}{\partial^2 s_X}$ est bornée. Puisque $\mathcal{U}$ est supérieure à 1, la fonction $\frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 s_X}$ est bornée.

De façon analogue, on peut montrer que les fonctions

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \theta} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 \theta} \quad , \quad \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial \omega} \quad , \quad \frac{\partial^2 \mathcal{V}}{\partial^2 \omega} \tag{2.512}$$

sont bornées.

- **Assumption BO :** La fonction $\mathcal{V}$ est propre de sorte que le commentaire de [55] qui suit l'énoncé de l'hypothèse BO implique que cette hypothèse est vérifiée.

**Résultat.**
Nous venons de montrer que la proposition 1 de [55] s'applique au système (2.467). Donc nous savons construire un contrôleur dynamique tel que toutes les solutions $(x, z, \hat{x}, \hat{z}, \chi)$ du système augmenté bouclé convergent vers l'ensemble :

$$W(\hat{x}, z) \;=\; 0 \quad , \quad (\hat{x} - x)^\top (\hat{x} - x) \;=\; 0 \quad , \quad \hat{z} \;=\; z \quad , \quad \chi \;=\; \alpha \frac{\partial \mathcal{V}}{\partial x}(\hat{x}, z) \tag{2.513}$$

où $\alpha$ est un réel strictement positif convenablement choisi. Nous avons vu, au cours de la vérification de l'hypothèse D, que la composante $x$ non mesurée est fortement détectable. Par conséquent, d'après [55], nous savons que nous avons les même propriétés de régulation que celles du système bouclé avec la loi de commande stabilisante que nous avons lorsque $x$ est mesurée. Puisque $\hat{x}$ et $\hat{z}$ convergent vers $x, z$, il s'en suit que $x, z$ convergent vers zéro.

# Chapitre 3

# Ajout d'intégration : changement de fonction de Lyapunov.

Pour pouvoir appliquer à un système de la forme (1.1) la technique de Jurdjevic et Quinn, il est nécessaire qu'à commande nulle l'origine soit un point d'équilibre globalement stable de ce système. Lorsque cette propriété est vérifiée, deux questions se posent : connaît-on des fonctions $U$ propres et définies positives vérifiant (1.2) et si tel est le cas, quelles sont celles pour lesquelles (1.3) est vérifiée ? Cette dernière interrogation montre un des avantages qu'il y a à avoir à sa disposition la plus grande classe possible de fonctions propres et définies positives pour lesquelles (1.3) est vérifiée. Il y en a un autre qui a priori peut être de quelqu'importance si des critères d'optimalité sont à prendre en compte : à chaque fonction $U$, vérifiant (1.2) et (1.3), correspond une classe particulière de lois de commande qui stabilise globalement asymptotiquement l'origine de (1.1) et c'est parmi celle-ci qu'on peut chercher une commande "sous" optimale.

Gardons en tête ce que nous venons de dire et analysons la preuve du Théorème 2.1 que nous avons effectué. Le Lemme 2.7 assure que si les hypothèses B1 et B31 sont vérifiées, l'origine du système (2.1) est un point d'équilibre globalement stable lorsque $u = 0$. Ce résultat a été démontré au moyen d'une fonction $U$ propre et définie positive très particulière faisant intervenir des fonctions $k$ et $l$ dont les comportements doivent être déterminés en fonction des non linéarités $h_1(x, x_2, y)y, e_1(x, x_2, y)y$. Plus précisément, des fonctions $k$ et $l$ convenablement choisies permettent d'obtenir une fonction définie positive dont la dérivée le long des solutions du système (2.1) pris à commande nulle est négative.

Quoique d'un point de vue pratique, il ne soit jamais très difficile de trouver des fonctions $k$ et $l$ qui conviennent, il est néanmoins légitime de se demander s'il est possible de se passer des ces fonctions, en ajoutant un terme à la somme $V(y) + Q(x_1) + S(x_2)$. La dérivée de $V(y) + Q(x_1) + S(x_2)$ donne, avec (2.13),

$$\begin{aligned}
\overbrace{V(y) + Q(x_1) + S(x_2)}^{\cdot} &= -W(y) - T(x_2) - R(x_1) + \frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_1(x_1, x_2, y)\, y && (3.1)\\
&\quad + \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\, e_1(x_1, x_2, y)\, y + \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_1(x_1, x_2, y)\, y \\
&\leq -\tfrac{1}{2} W(y) - T(x_2) - R(x_1) && (3.2)\\
&\quad + \frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)\, e_1(x_1, x_2, y)\, y + \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)\, h_1(x_1, x_2, y)\, y
\end{aligned}$$

S'il existe une fonction $\mathcal{H}$ telle que la fonction $V(y) + Q(x_1) + S(x_2) + \mathcal{H}(x_1, x_2, y)$ soit propre et telle que

$$\overbrace{\mathcal{H}(x_1, x_2, y)}^{\cdot} = -\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2) e_1(x_1, x_2, y) y - \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1) h_1(x_1, x_2, y) y \,, \tag{3.3}$$

l'objectif est atteint.

Ce point de vue a été adopté par Jankovic, Sepulchre et Kokotovic dans [28]. Nous le présentons ici en l'immergeant dans notre contexte général.

## 3.1 Synthèse à partir du système exact.

### 3.1.1 Résultat.

Selon ce point de vue, le découpage du sous-système $(x_1, x_2)$ n'apporte rien. Aussi écrivons nous (2.1) sous la forme la plus simple suivante[1] :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & h_0(x) + h_1(x,y)y + h_2(x,y,u)u \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_1(x,y)y + f_2(x,y,u)u \end{array} \right. \tag{3.4}$$

où les fonctions $h_i$ et $f_i$ sont de classe $C^1$. Le point de vue de [28] permet de reprendre B1 et B3.1 et de modifier B2 et B3.2. Précisément, les hypothèses sont :

**Hypothèse F1 :** *Il existe deux fonctions $Q$ et $V$ de classe $C^1$ définies positives et propres telles que :*

$$\frac{\partial Q}{\partial x}(x) h_0(x) = -R(x) \leq 0 \qquad \forall x \,, \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y) f_0(y) = -W(y) < 0 \qquad \forall y \neq 0 \,. \tag{3.6}$$

**Hypothèse F2:** $x(t) = 0$ *est l'unique solution de :*

$$\begin{array}{c} \dot{x} = h_0(x) \quad , \qquad \frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_0(x) = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x,0) f_2(x,0,0) + \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,0)\right] h_2(x,0,0) = 0 \end{array} \tag{3.7}$$

**Hypothèse F3:** *Il existe une fonction $\rho$, définie, continue et positive sur $[0, +\infty)$ et une fonction $\kappa$, définie, continue et positive sur $(0, +\infty)$, telles que :*

$$\left| \frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_1(x,y)\, y \right| \leq \kappa(V(y)) W(y) \left(1 + \rho(Q(x))\right)^2 \,. \tag{3.8}$$

*De plus, les fonctions $\kappa$ et $\rho$ sont telles que :*

$$\frac{1}{1+\rho} \notin L^2([0, +\infty)) \,, \tag{3.9}$$

$$\forall c_1 > 0 \,,\, \exists c_2 : \quad \{y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \,,\, |y| \leq c_1\} \implies \kappa(V(y)) \left| \frac{\partial V}{\partial y}(y) \right| \leq c_2 \,. \tag{3.10}$$

[1] Les indices pour $x$ sont donc supprimés.

*Enfin, $V$, $W$ et $f_1$ vérifient :*

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_1(x,y)\, y \;\leq\; \frac{1}{4}\, W(y)\ . \tag{3.11}$$

**Hypothèse F4:** *Il existe une fonction $\mathcal{H}$, de classe $C^1$ vérifiant $\mathcal{H}(x,0) \equiv 0$, et telle que l'ensemble*

$$\mathcal{E} \;=\; \{(z,x,y)\,|\, z = \mathcal{H}(x,y)\} \tag{3.12}$$

*est une variété invariante du système :*

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} & = & -\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_1(x,y)\, y \\ \dot{x} & = & h_0(x) + h_1(x,y)\, y \\ \dot{y} & = & f_0(y) + f_1(x,y)\, y \end{array}\right. \tag{3.13}$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème 3.1** *Si les hypothèses F1, F2, F3 et F4 sont satisfaites par (3.4), alors pour tout réel $\overline{u}$ dans $(0,+\infty]$, l'origine peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable de (3.4) par une loi de commande continue, indépendante du temps et bornée par $\overline{u}$.*

Pour être précis, écrivons le résultat effectivement démontré dans [28] :

**Corollaire 3.2** *Considérons un système de la forme (3.4) et notons par $(x(t),y(t))$ la solution de ce système pris à commande nulle à l'instant $t$ qui a pour condition initiale $(x,y)$. Supposons que :*

- *L'hypothèse F1 soit satisfaite.*
- *On ait $f_0(y) = Ay$ et qu'il existe une matrice symétrique définie positive $V$ telle que :*

$$V\,A \;+\; A^{\top} V \;<\; 0\ . \tag{3.14}$$

- *La fonction $h_2$ ne dépende pas de $u$ et la fonction $f_2$ soit constante.*
- *Il existe deux fonctions croissantes, zéro en zéro, différentiables à l'origine $\gamma_1$ et $\gamma_2$ telles que :*

$$|h_1(x,y)y| \;\leq\; \gamma_1(|y|) \;+\; \gamma_2(|y|)\,|x|\ . \tag{3.15}$$

  *Il existe deux constantes positives $c_1$ et $c_2$ telles que*

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\right|\,|x| \;\leq\; c_1 Q(x) \quad , \quad \forall\,|x| \geq c_2\ . \tag{3.16}$$

*Alors, la fonction suivante :*

$$\mathcal{H}(x,y) \;=\; \int_0^{+\infty} \frac{\partial Q}{\partial x}(x(s))[h_1(x(s),y(s)))y(s)]ds\ . \tag{3.17}$$

*existe et est continue. Si de plus cette fonction est suffisamment régulière et telle que :*

$$S = \left\{ x : L_{h_0}^{k+1} Q(x) = 0 \quad , \quad L_{h_0}^{k} u_1(x,0) = 0 \quad , \quad \forall\, k \geq 0 \right\} = \{0\} \,, \tag{3.18}$$

*la loi de commande :*

$$u_1(x,y) = -\frac{\partial(Q+\mathcal{H}+V)}{\partial x}(x,y)\, h_2(x,y) - \frac{\partial(Q+\mathcal{H}+V)}{\partial y}(x,y)\, f_2 \tag{3.19}$$

*stabilise globalement asymptotiquement la solution zéro de (3.4).*

### 3.1.2 Comparaison des hypothèses des Théorèmes 2.1 et 3.1.

Les hypothèses F1 et F3 sont identiques à B1 et B3.1. Grâce au lemme 2.7, nous savons donc que (3.4) est globalement stable pour $u = 0$. De plus, comme nous le verrons au cours de la preuve du Théorème 3.1, ces hypothèses impliquent que $V(y) + Q(x) + \mathcal{H}(x,y)$ est une fonction propre définie positive.

Les points où les Théorèmes 2.1 et 3.1 diffèrent se situent respectivement dans les hypothèses B2 et F2, et B3.2 et F4.

#### 3.1.2.1 Hypothèses B2 et F2.

La différence entre B2 et F2 vient de ce que, dans les deux cas, la loi de commande est donnée, par exemple, par n'importe quelle fonction $\phi$ satisfaisant :

1. La fonction $|\phi(x)|$ est bornée par $\overline{u}$.
2. Pour tout $x$, le scalaire $\mathcal{G}(x,y,u)\,\phi(x)$ est non positif et nul si et seulement si le vecteur $\mathcal{G}(x,0,0)$ est nul où, dans le contexte de B3,

$$\mathcal{G}(x,y,u) = \left( \frac{7}{3}\kappa(V(y)) \frac{\partial V}{\partial y}(y) \,,\, l'(Q(x)) \frac{\partial Q}{\partial x}(x) \right) \begin{pmatrix} f_2(x,y,u) \\ h_2(x,y,u) \end{pmatrix} \tag{3.20}$$

et où, dans le contexte de F3 et F4,

$$\mathcal{G}(x,y,u) = \left( \frac{\partial V}{\partial y}(y) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x,y) \,,\, \frac{\partial Q}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,y) \right) \begin{pmatrix} f_2(x,y,u) \\ h_2(x,y,u) \end{pmatrix} . \tag{3.21}$$

On voit ainsi que lorsque $y = 0$ et $u = 0$, il reste le terme $l'(Q(x))\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_2(x,0,0)$ dans le contexte du Théorème 2.1 et le terme $\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x,0)\right) h_2(x,0,0)$ dans celui du Théorème 3.1. Cependant ces expressions dépendent de façon prépondérante des coordonnées. Il est en général impossible de garantir la non existence de coordonnées appropriées qui montreraient l'équivalence entre B2 et F2. Remarquons pourtant qu'il semble que l'hypothèse F2 dépendante de façon moins cruciale des coordonnées. Pour illustrer ce point, reprenons le système linéaire (2.2) :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & a\,Y \\ \dot{Y} & = & -Y + u \end{array} \right. \tag{3.22}$$

ou dans les coordonnées $(x, y) = (X + aY \, , \, Y)$,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & a\,u \\ \dot{y} & = & -y \,+\, u \end{array} \right. \tag{3.23}$$

Si $Q$ est donnée par :

$$Q(x) \;=\; \tfrac{1}{2}\,x^2 \ , \tag{3.24}$$

on a, dans les coordonnées $(X, Y)$,

$$\mathcal{H}(X,Y) \;=\; a\,XY \;+\; \tfrac{a^2}{2}\,Y^2 \tag{3.25}$$

et, dans les coordonnées $(x, y)$,

$$\mathcal{H}(x,y) \;=\; 0 \tag{3.26}$$

de sorte que F2 et F4 sont vérifiées dans les deux cas. Par contre B2 et B3.2 ne sont satisfaites que dans les coordonnées $(x, y)$.

Un point important à souligner à ce stade est la nécessité qu'il y a de connaître explicitement des expressions pour les fonctions $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}$ car celles-ci sont utilisées dans la loi de commande. Or, dès que des non linéarités quelque peu compliquées interviennent dans les dynamiques du système, il devient très difficile d'obtenir ces expressions, la seule formule connue donnant $\mathcal{H}$ étant :

$$\mathcal{H}(x,y) \;=\; \int_0^{+\infty} \left[ \frac{\partial Q}{\partial x}(x(s)) h_1(x(s), y(s)) y(s) \right] ds \ . \tag{3.27}$$

Nous reviendrons sur ce problème de “calculabilité” de $\mathcal{H}$ au paragraphe 3.2.

#### 3.1.2.2 Hypothèses B3.2 et F4.

Les hypothèses B3.2 et F4 sont de nature très différente.

B3.2 impose que la fonction $f_2$ soit d'un ordre au moins $p$ en $y = 0$, où $p$ — qui peut être nul — dépend des autres fonctions et donc, encore une fois, des coordonnées. Cette hypothèse nous permet de traiter les termes de couplage par domination de leurs effets.

L'existence de la variété invariante $\mathcal{E}$ de (3.13), imposée dans F4 est, comme nous le voyons avec (3.17), liée au comportement à l'infini des fonctions $x(t)$ et $y(t)$ solutions de (3.13). Jankovic, Sepulchre et Kokotovic ont donné des conditions suffisantes pour garantir cette existence. Ainsi, le lemme suivant est-il prouvé dans [28].

**Lemme 3.3** *La variété invariante $\mathcal{E}$ de (3.13) est de classe $C^1$ si le système $\dot{x} = h_0(x)$ admet la représentation suivante :*

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & h_{01}(x_1) \\ \dot{x}_2 & = & M_2 x_2 + e_{02}(x_1, x_2) \end{array} \tag{3.28}$$

*où zéro est un point d'équilibre asymptotiquement stable de $\dot{x}_1 = h_{01}(x_1)$ et où $\dot{x}_2 = M_2 x_2$ est stable au sens de Lyapunov.*

L'existence de $\mathcal{H}$ nous permet de traiter les termes croisés en annulant leurs effets. Ceci est donc à rapprocher de l'objectif recherché par les changements de coordonnées de la section 2.3.

#### 3.1.2.3 Conclusion.

L'étude comparative des hypothèses des Théorèmes 2.1 et 3.1 que nous venons de mener nous indique que le Théorème 3.1 s'apparente en fait davantage au Théorème 1.1 muni des changements de coordonnées permettant de supprimer exactement les termes de couplages $h_1$, $e_1$ et $f_1$. Mais s'il y a une analogie entre ces deux approches, le Théorème 3.1 n'en est pas moins plus avancé d'un point de vue théorique. En effet, pour ce qui est du Théorème 1.1, nous n'avons pu étudier l'outil changement de coordonnées qu'en nous plaçant dans le contexte des hypothèses du Lemme 2.21. Par contre, pour ce qui est du Théorème 2.1, qui met en évidence le fait qu'on peut se contenter d'approximations, les changements de coordonnées possibles se situent dans le contexte plus général des hypothèses des Lemmes 2.18 et 2.23. Nous étudierons dans la section 3.2 s'il peut être trouvée pour le Théorème 3.1 une extension analogue.

### 3.1.3 Preuves.

#### 3.1.3.1 Preuve du Théorème 3.1.

Nous adaptons au cadre général de notre travail le schéma de preuve proposé dans [28]. Nous avons vu au cours de la démonstration du Théorème 2.1 que lorsqu'on se situe dans le contexte de l'hypothèse B3, nous avons comme fonction de Lyapunov assignable au système (3.4) :

$$U(x,y) \;=\; l(Q(x)) + k(y) \; . \tag{3.29}$$

Nous allons montrer que lorsqu'on se situe dans le contexte de l'hypothèse F3, une fonction de Lyapunov assignable au système (3.4) est la suivante :

$$\overline{U}(x,y) \;=\; Q(x) + \mathcal{H}(x,y) + V(y) \; . \tag{3.30}$$

**Première étape.** Nous allons montrer que cette fonction est définie positive et propre. Notre démonstration s'appuie sur le lemme technique que nous introduisons maintenant et que nous prouverons par la suite.

**Lemme 3.4** *Les hypothèses du Théorème 2.1 impliquent que :*

1. *La fonction* $(x,y) \longmapsto Q(x) + \mathcal{H}(x,y)$ *est positive.*
2. *La fonction* $l$ *définie par :*

$$l(c) \;=\; \int_0^c \frac{1}{[1+\rho(s)]^2} ds \; . \tag{3.31}$$

   *vérifie*

$$l(Q(x) + \mathcal{H}(x,y)) \;\geq\; l(Q(x)) - \frac{4}{3}k(y) \; . \tag{3.32}$$

<u>$\overline{U}$ est définie positive :</u> La fonction $\overline{U}$ est positive puisque d'après F1, $V$ est positive et que d'après le Lemme 3.4, $Q(x) + \mathcal{H}(x,y)$ est positive. Soient $(x,y)$ tels que $\overline{U}(x,y) = 0$. Puisque $Q(x) + \mathcal{H}(x,y)$ et $V(y)$ sont positifs, nécessairement ces deux termes sont nuls. Puisqu'en outre $V$ est définie positive, nécessairement $y = 0$. Puisque d'après l'hypothèse F4, $\mathcal{H}(x,0) = 0$, on en déduit que $Q(x) = 0$. Puisque $Q$ est définie positive, il s'en suit que $x = 0$. Par conséquent, $\overline{U}$ est définie positive.

$\overline{U}$ est propre : Nous allons procéder par contradiction. Supposons qu'il existe une suite $(x_n, y_n)$ et une constante positive $c$ telles que :

$$\lim_{n\to+\infty} |(x_n, y_n)| \;=\; +\infty \quad , \qquad \overline{U}(x_n, y_n) \;\leq\; c \quad , \quad \forall n \; . \tag{3.33}$$

Puisque d'après le lemme 3.4, $Q(x_n) + \mathcal{H}(x_n, y_n)$ est positif pour tout $n$ on a

$$V(y_n) \;\leq\; c \quad , \quad \forall n \; . \tag{3.34}$$

Par conséquent, la suite $y_n$ appartient à un compact. Puisque $k$ est une fonction Lipschitz continue, celle-ci est bornée sur tout compact. Donc, il existe $\overline{c} > 0$ telle que :

$$\frac{4}{3}k(y_n) \;\leq\; \overline{c} \; . \tag{3.35}$$

Grâce à (3.32), on en déduit :

$$l(Q(x_n) + \mathcal{H}(x_n, y_n)) \;\geq\; l(Q(x_n)) - \overline{c} \; . \tag{3.36}$$

La croissance de $l$ et la positivité de $V$ impliquent que l'on a :

$$l(c) \;\geq\; l(Q(x_n) + \mathcal{H}(x_n, y_n) + V(y_n)) \;\geq\; l(Q(x_n) + \mathcal{H}(x_n, y_n)) \;\geq\; l(Q(x_n)) - \overline{c} \; . \tag{3.37}$$

Par conséquent :

$$l(Q(x_n)) \;\leq\; \overline{c} + l(c) \; . \tag{3.38}$$

La condition (3.9) de l'hypothèse F3 implique :

$$\lim_{s\to+\infty} l(s) \;=\; +\infty \; . \tag{3.39}$$

Donc $Q(x_n)$ est une suite bornée. Puisque $Q$ est propre, $x_n$ est une suite bornée. Puisque tel est également le cas de la suite $y_n$, on aboutit à une contradiction.

**Deuxième étape.** Remarquons que nous avons :

$$\dot{\widehat{\mathcal{H}(x, y)}} \;=\; -\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_1(x, y)\, y \;+\; \left[\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y)\, f_2(x, y, u) + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, y)\, h_2(x, y, u)\right] u \; . \tag{3.40}$$

Ceci nous permet d'écrire la dérivée $\dot{\overline{U}}$ sous la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\widehat{\overline{U}(x, y)}} \;=\; & -R(x) \;-\; W(y) \;+\; \tfrac{\partial V}{\partial y}(y) f_1(x, y)\, y \\ & +\; \left[\left(\tfrac{\partial Q}{\partial x}(x) + \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x, y)\right) h_2(x, y, u) + \left(\tfrac{\partial V}{\partial y}(y) + \tfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x, y)\right) f_2(x, y, u)\right] u \; . \end{aligned} \tag{3.41}$$

Grâce à (3.11) et la définition de $\mathcal{G}$ (voir (3.21)) nous obtenons :

$$\dot{\widehat{\overline{U}(x, y)}} \;\leq\; -R(x) - \frac{3}{4}W(y) + \mathcal{G}(x, y, u)u \; . \tag{3.42}$$

Puisque $\mathcal{G}$ est une fonction continue, nous concluons en utilisant F2 et la même démarche que celle utilisée pour terminer la preuve du Théorème 1.1. □

#### 3.1.3.2 Preuve du lemme 3.4.

Soit $(x(t), y(t))$ la solution au temps $t$ du système (3.4) pris à commande nulle qui a pour valeur $x, y$ à l'instant zéro.

Commençons par établir 3 propriétés possédées par la solution $(x(t), y(t))$.

1− Montrons que $(x(t), y(t))$ est une fonction bornée du temps.

Puisque (3.8), (3.9), (3.10), (3.11) sont vérifiées, l'inégalité (2.71) obtenue dans la preuve du Théorème 2.1 est vérifiée. Par conséquent, nous avons :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{U(x(t), y(t))}} \;\leq\; -\frac{1}{4}\kappa(V(y(t)))W(y(t)) \; . \tag{3.43}$$

Puisque $U$ est une fonction propre définie positive, les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont nécessairement bornées. Il en est donc de même des fonctions $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$. Puisque $\kappa(V)W$ est définie négative, on en déduit :

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \;=\; 0 \; . \tag{3.44}$$

2− Puisque $x(t)$ est bornée, $\mathcal{H}$ est continue, $\mathcal{H}(x, 0) \equiv 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t) = 0$, on a :

$$\lim_{t\to+\infty} \mathcal{H}(x(t), y(t)) \;=\; 0 \; . \tag{3.45}$$

3− Montrons que pour tout $t \geq 0$ :

$$\int_0^t \kappa(V(y(s)))W(y(s))ds \;\leq\; \frac{4}{3}k(y) \; . \tag{3.46}$$

Intégrons entre 0 et un instant $t \geq 0$ l'égalité (2.66) avec $u = 0$ :

$$\int_0^t \dot{k}_{(2.1)}(x_1, x_2, y, 0)ds \;=\; \int_0^t \kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y)\,[f_0(y) + f_1(x_1, x_2, y)y]\,ds \; . \tag{3.47}$$

On déduit l'égalité suivante :

$$k(y(t)) - \,k(y) \;=\; -\int_0^t \kappa(V(y))\,W(y)ds + \int_0^t \kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_1(x_1, x_2, y)yds \; . \tag{3.48}$$

Puisque $k$ est une fonction positive, l'inégalité suivant s'en suit :

$$\int_0^t \kappa(V(y))\,W(y)ds - \int_0^t \kappa(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y)f_1(x_1, x_2, y)yds \;\leq\; k(y) \; . \tag{3.49}$$

Grâce à (3.11) de F3, il s'en suit que :

$$\frac{3}{4}\int_0^t \kappa(V(y))\,W(y)ds \;\leq\; k(y) \; . \tag{3.50}$$

Donc (3.46) est obtenue.

A l'aide de ces trois propriétés, démontrons maintenant les assertions du lemme 3.4.

**Assertion 1.** Nous avons :

$$\dot{\overbrace{Q(x(t))}} \; = \; -R(x(t)) + \frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))h_1(x(t),y(t))y(t) \; . \tag{3.51}$$

La définition de $\mathcal{H}$ implique donc que :

$$\dot{\overbrace{Q(x(t))}} + R(x(t)) \; = \; -\dot{\overbrace{\mathcal{H}(x(t),y(t))}} \; . \tag{3.52}$$

Par conséquent :

$$Q(x(t)) + \int_0^t R(x(s))ds - Q(x) \; = \; -\mathcal{H}(x(t),y(t)) + \mathcal{H}(x,y) \tag{3.53}$$

Puisque $Q$ et $R$ sont des fonctions positives :

$$Q(x) + \mathcal{H}(x,y) \; = \; Q(x(t)) + \int_0^t R(x(s))ds + \mathcal{H}(x(t),y(t)) \; \geq \; \mathcal{H}(x(t),y(t)) \tag{3.54}$$

Le terme de gauche étant indépendant de $t$, la propriété (2.251) nous donne :

$$Q(x) + \mathcal{H}(x,y) \; \geq \; 0 \; . \tag{3.55}$$

**Assertion 2.** L'égalité (3.51) et l'inégalité (3.8) impliquent :

$$\dot{\overbrace{Q(x(t))}} + R(x(t)) \; \geq \; -\kappa(V(y(t)))W(y(t)) \left[1 + \rho(Q(x(t)))\right]^2 \; . \tag{3.56}$$

Puisque $\rho$ est croissante et que $\displaystyle\int_0^t R(x(s))ds$ est positif pour tout $t \geq 0$, l'inégalité précédente implique :

$$\frac{\dot{\overbrace{Q(x(t))}} + R(x(t))}{\left[1 + \rho\left(Q(x(t)) + \displaystyle\int_0^t R(x(s))ds\right)\right]^2} \; \geq \; -\kappa(V(y(t)))W(y(t)) \; . \tag{3.57}$$

En intégrant cette inégalité de 0 à $t$, on obtient :

$$l\left(Q(x(t)) + \int_0^t R(x(s))ds\right) - l\left(Q(x)\right) \; \geq \; -\int_0^t \kappa(V(y(s)))W(y(s))ds \; . \tag{3.58}$$

Grâce à (3.53), on a :

$$Q(x(t)) + \int_0^t R(x(s))ds \; = \; Q(x) + \mathcal{H}(x,y) - \mathcal{H}(x(t),y(t)) \; . \tag{3.59}$$

Donc, d'après (3.58),

$$l\left(Q(x) + \mathcal{H}(x,y) - \mathcal{H}(x(t),y(t))\right) - l\left(Q(x)\right) \; \geq \; -\int_0^t \kappa(V(y(s)))W(y(s))ds \tag{3.60}$$

Par passage à la limite, grâce à (3.45), on obtient :

$$l\left(Q(x) + \mathcal{H}(x,y)\right) - l\left(Q(x)\right) \; \geq \; -\int_0^{+\infty} \kappa(V(y(s)))W(y(s))ds \; . \tag{3.61}$$

Avec (3.46), on en déduit (3.32). □

#### 3.1.3.3 Preuve du corollaire 3.2.

Nous allons montrer que les hypothèses du corollaire 3.2 impliquent que F1, F2, F3 sont vérifiées.

- Dans [28, Appendice B], l'existence et la continuité de $\mathcal{H}$ sont prouvées lorsque sont vérifiées les conditions (3.15) et (3.16).
- L'hypothèse F1 est supposée.
- Nous allons maintenant montrer que F3 est vérifiée. On vérifie aisément que $\mathcal{H}$ étant de classe $C^1$,

$$\overset{\cdot}{\overbrace{\mathcal{H}(x(t),y(t))}} \;=\; -\frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))\, h_1(x(t),y(t)))y(t)\;. \tag{3.62}$$

lorsque $u=0$. Donc l'ensemble

$$\mathcal{E} \;=\; \{(z,x,y)\,|\,z \;=\; \mathcal{H}(x,y)\} \tag{3.63}$$

est une variété invariante du système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z} &=& -\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\,h_1(x,y)\,y \\ \dot{x} &=& h_0(x)+h_1(x,y)\,y \\ \dot{y} &=& Ay \end{array}\right. \tag{3.64}$$

En outre, $y(t)\equiv 0$ si $y=0$. Donc $\mathcal{H}(x,0)\equiv 0$.

Nous savons que $h_1$ et $Q$ vérifient (3.15) et (3.16). On en déduit que :

$$|h_1(x,y)y| \;\leq\; [\gamma_1(|y|)+\gamma_2(|y|)]\,[1+|x|] \tag{3.65}$$

et qu'il existe un nombre réel strictement positif $c$ tel que, pour tout $x$,

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\right|[|x|+1] \;\leq\; c\,Q(x)+c\;. \tag{3.66}$$

On en déduit :

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x}(x)h_1(x,y)y\right| \;\leq\; [\gamma_1(|y|)+\gamma_2(|y|)]\,[cQ(x)+c] \tag{3.67}$$

Puisque $\gamma_1$ et $\gamma_2$ sont différentiables à l'origine, en prenant :

$$\kappa(s) \;=\; c\frac{\gamma_1(c\sqrt{s})+\gamma_2(c\sqrt{s})}{s} \quad,\quad \rho(s) \;=\; c\sqrt{1+s}\;, \tag{3.68}$$

où $c$ désigne génériquement un nombre réel positif, on obtient (3.8), (3.9), (3.10).

Puisqu'il n'y a pas de terme $f_1y$, (3.11) sont automatiquement satisfaites.

- Il nous reste à montrer que (3.18) implique que F2 est vérifiée. Cette implication est du même type que celle énoncée dans le Lemme 1.2. Démontrons la par l'absurde en supposant que F2 n'est pas satisfaite. Il existe alors $x(t)$, non identiquement égale à zéro, telle que :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) &=& h_0(x(t)) \\ \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x(t),0)f_2+\frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))\,h_2(x(t),0) &=& 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x}(x(t))\,h_0(x(t)) &=& 0 \end{array} \tag{3.69}$$

Par conséquent, en dérivant $k$ fois les deux dernières égalités, on obtient :

$$L_{h_0}^{k}\Lambda(x(t)) \;=\; 0 \quad , \quad L_{h_0}^{k+1}Q(x(t)) \;=\; 0 \; . \tag{3.70}$$

avec

$$\Lambda(x) \;=\; \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}(x,0)\, f_2 + \frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_2(x,0) \; . \tag{3.71}$$

D'après (3.18), ceci implique que $x(t) = 0$, pout tout $t$, ce qui contredit le fait que F2 n'est pas satisfaite.

En dernier lieu, observons que (3.21) et (3.42) impliquent que la commande (3.19) stabilise globalement asymptotiquement. □

## 3.2 Synthèse à partir d'un système approximant.

Nous avons mentionné la similarité qu'il y a entre les Théorèmes 1.1 et 3.1. Dans les deux cas, il s'agit de trouver explicitement la solution d'une équation aux dérivées partielles pour nous permettre d'annuler les effets dûs aux termes de couplage. Grâce au Théorème 2.1, nous savons que le changement de coordonnées, nécessaire pour appliquer le Théorème 1.1, n'a en fait pas besoin d'être parfaitement connu. Précisément, seule une approximation à un ordre suffisamment élevé en $y = 0$ est suffisante. Nous nous posons ici la même question à propos de la fonction $\mathcal{H}$ : Peut-on se contenter d'une approximation ?

Pour répondre à cette question, et puisque cette fonction $\mathcal{H}$ a une interprétation structurelle très forte en termes de variété invariante de (3.13), nous ne cherchons pas à approximer directement cette fonction et introduisons un système approximant (3.4) sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} &=& h_0(x) + h_{1a}(x,y)y + h_2(x,y,u)u \\ \dot{y} &=& f_{0a}(y) + f_{1a}(x,y)y + f_2(x,y,u)u \end{array} \right. \tag{3.72}$$

et auquel sera associé une fonction $\mathcal{H}_a$. Notre problème est donc de déterminer les fonctions approximantes $h_{1a}$, $f_{0a}$ et $f_{1a}$ telles que :

1. Les erreurs d'approximations :

$$h_{1\delta} \;=\; h_1 \;-\; h_{1a} \quad , \qquad f_{0\delta} \;=\; f_0 \;-\; f_{0a} \quad , \qquad f_{1\delta} \;=\; f_1 \;-\; f_{1a} \tag{3.73}$$

soient suffisamment petites pour qu'une commande obtenue à partir des approximations soit globalement asymptotiquement stabilisante pour le système réel (3.4).

2. La fonction $\mathcal{H}_a$ correspondante puisse être calculée explicitement.

### 3.2.1 Conditions suffisantes sur l'approximation.

Pour obtenir des conditions sur l'approximation suffisantes pour garantir la stabilisabilité asymptotique globale, nous reprenons les techniques utilisées au cours de la preuve du Théorème 2.1 et qui mettent à profit la marge de stabilité du sous-système en $y$.

#### 3.2.1.1 Résultat.

**Hypothèse G1 :**

**G1.1 :** *Il existe des fonctions $Q_a$, $V_a$, $R_a$, $W_a$, $\rho_a$ et $\kappa_a$ telles que les hypothèses F1, F2 et F3*

*soient satisfaites par le système approximant (3.72).*
**G1.2 :** *Choisissons une fonction propre, définie positive, de classe $C^2$ notée $\ell$ et posons :*

$$Q(x) \;=\; \ell(Q_a(x)) \;. \tag{3.74}$$

*Nous supposons l'existence d'une fonction $\mathcal{H}_a$, de classe $C^1$ vérifiant $\mathcal{H}_a(x,0) \equiv 0$, et telle que l'ensemble :*

$$\mathcal{E}_a \;=\; \{(z,x,y) \,|\, z = \mathcal{H}_a(x,y)\} \tag{3.75}$$

*soit une variété invariante du système :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{z} &=& -\frac{\partial Q}{\partial x}(x)\, h_{1a}(x,y)\, y \\ \dot{x} &=& h_0(x) + h_{1a}(x,y)\, y \\ \dot{y} &=& f_{0a}(y) + f_{1a}(x,y)\, y \end{array} \right. \tag{3.76}$$

**Hypothèse G2 :**
**G2.1 :** *Il existe une fonction de classe $C^1$ définie positive et propre $V$ telle que :*

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_0(y) \;=\; -\, W(y) \;<\; 0 \qquad \forall\, y \neq 0 \;, \tag{3.77}$$

$$\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_1(x_1,x_2,y)\, y \;\leq\; \frac{1}{4}\, W(y) \;. \tag{3.78}$$

**G2.2 :** *Il existe une fonction $\kappa$, définie et continue sur $(0,+\infty)$, telle que :*

$$\forall\, c_1 > 0 \,,\; \exists\, c_2 \,: \quad \{y \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \,,\, |y| \leq c_1\} \quad \Longrightarrow \quad \kappa(V(y)) \left| \frac{\partial V}{\partial y}(y) \right| \;\leq\; c_2 \;. \tag{3.79}$$

$$\kappa(V(y))\, \frac{\partial V}{\partial y}(y) f_2(x,y,u) \;\in\; C^0((\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m_1}); \mathbb{R}^q) \;. \tag{3.80}$$

*et*[2] *:*

$$\left| \left( \tfrac{\partial Q}{\partial x}(x) + \tfrac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x}(x,y) \right) h_{1\delta}(x,y) y \right| \;+\; \left| \left( \tfrac{\partial V_a}{\partial y}(y) + \tfrac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial y}(x,y) \right) (f_{0\delta}(y) + f_{1\delta}(x,y) y) \right| \tag{3.81}$$
$$\leq\; \kappa(V(y))\, W(y) \;.$$

**Théorème 3.5** *Si les hypothèses G1 et G2 sont satisfaites, alors, pour tout réel $\overline{u}$ dans $(0,+\infty]$, l'origine du système (3.4) est globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback d'état borné par $\overline{u}$ et ne dépendant pas explicitement des fonctions $h_{1\delta}$, $f_{0\delta}$ et $f_{1\delta}$.*

#### 3.2.1.2 Discussion autour des hypothèses du Théorème 3.5.

Supposons le sous-système en $y$ globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable et choisissons la fonction approximante $f_{0a}$ telle que :

$$\frac{\partial f_0}{\partial y}(0) \;=\; \frac{\partial f_{0a}}{\partial y}(0) \;. \tag{3.82}$$

[2]Il faudrait écrire : la fonction $\ell$ de G1.2 a pu être choisie pour satisfaire (3.81).

Dans ce cas l'hypothèse G2.1 est satisfaite et les fonctions $V_a$, $W_a$, $V$ et $W$ peuvent choisies telles qu'elles soient approximées à l'origine par des formes quadratiques définies positives. Alors, pour satisfaire les conditions (3.79) et (3.80) sans hypothèse sur $f_1$ et $f_2$, nous pouvons prendre, pour $\kappa$ une fonction définie sur $[0, +\infty[$ vérifiant :

$$\kappa(0) \ > \ 0 \ . \tag{3.83}$$

Dans ces conditions,
pour $|y|$ voisin de 0, on a :

$$\kappa(V(y))\, W(y) \ \geq \ c|y|^2 \tag{3.84}$$

et pour $|y|$ grand, la fonction $\kappa$ peut être déterminée de sorte que $\kappa(V(y))W(y)$ majore n'importe quelle fonction de $y$. Alors, si $f_0$ et $f_{0a}$ sont de classe $C^2$, (3.82) implique que $f_{0\delta}$ est d'ordre 2 en $y = 0$. On voit ainsi que l'inégalité (3.81), et donc l'hypothèse G2, est satisfaite si :

1. les fonctions

$$\left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x}(x,y)\right) h_{1\delta}(x,y)y \quad , \qquad \left(\frac{\partial V_a}{\partial y}(y) + \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial y}(x,y)\right) (f_{0\delta}(y) + f_{1\delta}(x,y)y)$$

   sont bornées par rapport à la variables $x$.
2. les fonction $h_{1\delta}(x,y)$ et $f_{1\delta}(x,y)$ sont d'ordre 1 en $y = 0$.

Enfin, comme nous l'avions remarqué dans le paragraphe 2.2.4 pour le Théorème 2.1, la connaissance exacte des fonctions $h_{1\delta}, f_{0,\delta}$ et $f_{1\delta}$ n'étant pas nécessaire pour déterminer la loi de commande, le Théorème 3.5 fournit un résultat de stabilité robuste par rapport à certaines erreurs de modélisations.

#### 3.2.1.3 Preuve.

Considérons la fonction

$$\overline{U}_a(x,y) \ = \ Q(x) + \mathcal{H}_a(x,y) + V_a(y) \ . \tag{3.85}$$

L'hypothèse G1 et l'inégalité (3.42) donnent :

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{\overline{U}_a(x,y)}}_{(3.4)} \ \leq \ & -\ell'(Q_a(x))\, R_a(x) \ - \ \tfrac{3}{4}\, W_a(y) \ + \ \mathcal{G}_a(x,y,u)\, u \\ & + \ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x}(x,y)\right) h_{1\delta}(x,y)\, y \\ & + \ \left(\frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial V_a}{\partial y}\right) (f_{0\delta} + f_{1\delta}(x,y)y) \end{aligned} \tag{3.86}$$

avec

$$\mathcal{G}_a(x,y,u) \ = \ \left(\frac{\partial V_a}{\partial y}(y) + \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial y}(x,y) \, , \, \ell'(Q_a(x))\frac{\partial Q_a}{\partial x}(x) + \frac{\partial \mathcal{H}_a}{\partial x}(x,y)\right) \begin{pmatrix} f_2(x,y,u) \\ h_2(x,y,u) \end{pmatrix} . \tag{3.87}$$

En utilisant (3.81), on obtient :

$$\dot{\overbrace{\overline{U}_a(x,y)}}_{(3.4)} \ \leq \ -\ell'(Q_a(x))\, R_a(x) \ - \ W_a(y) \ + \ \mathcal{G}_a(x,y,u)u \ + \ \kappa(V(y))W(y) \ . \tag{3.88}$$

Par ailleurs, notons que G2.1 donne :

$$\dot{V}_{(3.4)} \ \leq \ -\tfrac{3}{4}\, W(y) \ + \ \frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_2(x,y,u) \ . \tag{3.89}$$

Posons alors

$$K(v) \;=\; 2\int_0^v (\kappa(s)+1)ds \tag{3.90}$$

et introduisons :

$$\begin{aligned} U(x,y) \;&=\; U_a(x,y) + K(V(y)) \;, && (3.91)\\ \mathcal{G}(x,y,u) \;&=\; \mathcal{G}_a(x,y,u) \;+\; K'(V(y))\,\frac{\partial V}{\partial y}(y)\, f_2(x,y,u) \;. && (3.92) \end{aligned}$$

Nous avons :

$$\overbrace{U(x,y)}^{\cdot}{}_{(3.4)} \;\leq\; -\ell'(Q_a(x))\,R_a(x) \;-\; W_a(y) \;-\; \tfrac{1}{2}\,[\kappa(V(y))+1]\,W(y) \;+\; \mathcal{G}(x,y,u)\,u \;. \tag{3.93}$$

Le fait que, d'après G1.1, le système approximant vérifie F2 permet de conclure. □

# Partie II

# Stabilisation d'une trajectoire

# Chapitre 4

# Introduction

## 4.1 Présentation générale.

Dans cette partie, nous abordons le problème de suivi asymptotique de trajectoires pour des systèmes non linéaires. Il y a deux raisons pour lesquelles nous nous intéressons à ce problème. La première a été présentée à la section 2.2. La deuxième est le désir que nous avons de traiter des problèmes de suivi asymptotique de trajectoires de sortie. Toutes les approches que nous connaissons de ce dernier problème se scindent en deux parties distinctes.
1. Génération d'une solution qui réalise le suivi exact d'une trajectoire de référence de sortie.
2. Stabilisation asymptotique de la trajectoire précédemment déterminée.
Voir à ce propos ce qui est fait par exemple dans [13], dans [46], [49], ainsi que dans [27, Sections 4.3 et 4.5] et [47, Sections 4.1 et 4.2]. Nous allons emprunter la même démarche : le Chapitre 5 est consacré à des résultats généraux permettant de garantir l'existence d'une trajectoire de référence de sortie bornée et le Chapitre 6 propose une technique permettant, pour des systèmes de forme feedforward, de stabiliser globalement asymptotiquement des trajectoires bornées.

## 4.2 Présentation du Chapitre 5.

Dans ce chapitre, nous donnons des résultats généraux qui portent sur des équations différentielles de la forme :

$$\dot{\mathcal{X}} \;=\; \varphi(\mathcal{X}, t) \tag{4.1}$$

et permettent de garantir l'existence de trajectoires bornées pour celles-ci. En effet, lorsqu'on cherche à déterminer l'existence d'une trajectoire de suivi exact bornée, on est amené à résoudre des problèmes de cette sorte. Pour mettre en évidence cela, nous allons rappeler l'approche, devenue classique, du problème de suivi exact d'une trajectoire de référence de sortie pour des systèmes linéaires en l'entrée qui se trouve dans [27, Sections 4.3 et 4.5] et [47, Sections 4.1 et 4.2]. Nous montrerons ensuite comment nous nous distinguons de celle-ci tout en empruntant certains de ses éléments.

### 4.2.1 Suivi exact de trajectoires de sortie : rappels.

#### 4.2.1.1 Positionnement du problème.

Le système considéré est de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \,+\, g(x)u \tag{4.2}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, et $u \in \mathbb{R}^p$ est l'entrée. Nous munissons ce système d'une fonction de sortie :

$$y \;=\; h(x) \tag{4.3}$$

vérifiant $h(0) = 0$ et supposons les fonctions $f, g, h$ régulières. Le problème de suivi exact d'une trajectoires de sortie $y_r$ bornée (aussi appelé problème de reproduction d'une sortie) consiste à déterminer, si elles existent, une entrée $u_r(t)$ bornée et une condition initiale $x_0$ telles que, la trajectoire $x_r(t)$ de (4.2) bouclé avec $u_r$ issue de $x_0$ vérifie :

$$h(x_r(t)) - y_r(t) \;=\; 0 \quad , \quad \forall\, t \geq [0, T)\ . \tag{4.4}$$

et soit bornée. Si $T$ est fini, nous dirons que le problème est résolu localement en temps. Si $T = +\infty$, nous dirons qu'il est résolu globalement en temps.

#### 4.2.1.2 Ecriture des équations sous une forme appropriée.

Pour simplifier l'approche du problème précédent, nous supposons que le système (4.2) est mono entrée, mono sortie. Dans [47] se trouve présentée une généralisation au cas multi-entrées, multi-sorties.

La première hypothèse cruciale qui est faite est celle de l'existence pour (4.2) d'un degré relatif fini $d$. Celle-ci garanti en effet l'existence d'un difféomorphisme local, défini sur un voisinage $U_0$ de l'origine, qui transforme (4.2) en un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{z}_1 & = & z_2 \\ \vdots & & \\ \dot{z}_{d-1} & = & z_d \\ \dot{z}_d & = & b(\xi, \nu) + a(\xi, \nu) u \\ \dot{\nu} & = & q(\xi, \nu) \\ y & = & z_1 \end{array}\right. \tag{4.5}$$

où $\xi = (z_1, \ldots, z_d)^\top$ et $a$ est une fonction non nulle sur un voisinage ouvert de l'origine. Cette forme est appelée forme normale. Cette façon d'écrire les équations permet de voir immédiatement que la commande $u_r$ recherchée est donnée par :

$$u_r(t) \;=\; \frac{y_r^{(d)}(t) - b(\xi_r(t), \nu(t))}{a(\xi_r(t), \nu(t))} \tag{4.6}$$

où $\xi_r(t) = (y_r(t), y_r^{(1)}(t), \ldots, y_r^{(d-1)}(t))$ et $\nu(t)$ est une solution quelconque de

$$\dot{\nu} \;=\; q(\xi_r, \nu). \tag{4.7}$$

On observe donc que la condition initiale $x_0$ n'est pas unique puisque $\nu(0)$ peut être quelconque. En revanche, il se pose les problèmes suivants :

1. Existe t-il $\nu(0)$ tel que la solution de (4.7) associée à ce vecteur soit définie sur $[0, T)$ et reste dans $V_0$.
2. Cette solution est-elle telle que $a(\xi_r(t), \nu(t)) \neq 0$ , $\forall t \in [0, T)$.

C'est essentiellement à la première de ces questions que le Chapitre 5 apporte des réponses.

Dans la littérature le système :

$$\dot{\nu} \; = \; q(\xi_r, \nu) \tag{4.8}$$

est appelé système inverse et les dynamiques du système inverse conduites par $y_r, \ldots, y_r^{(d-1)}$ sont appelées dynamiques traquantes. Lorsque $y_r \equiv 0$, les dynamiques traquantes sont alors appelées dynamiques des zéros. Un système dont la dynamique des zéros est asymptotiquement stable est dit être à minimum de phase.

### 4.2.2 Existence d'une solution globale en temps.

Nous venons de voir que récrire le système (4.2)-(4.3) sous forme (4.5) permet de poser le problème de suivi d'une trajectoire de sortie comme celui de l'existence d'une (ou plusieurs) solution $\nu(t)$ du système inverse (4.7) telle que $(\xi_r(t), \nu(t))$ soit dans $V_0$ pour tout $t \in [0, T)$ et soit bornée.

Cette question est difficile dans la mesure où le comportement des dynamiques du système inverse données par l'équation (4.7) est a priori quelconque et difficile à déterminer : il dépend de la fonction de sortie et de la trajectoire de référence considérée (voir pour ce dernier point [47, Sections 4.1, Example 4.1.5]). Pour montrer le rôle que peut jouer la fonction de sortie, considérons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_2 + x_2^3 \\ \dot{x}_2 & = & -x_2 + u \end{array} \right. \tag{4.9}$$

$$y \; = \; x_2 - a x_1 \tag{4.10}$$

où $a \in \mathbb{R}$. Ce système s'exprime sous la forme normale suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y} & = & (-1 - a)(y + a x_1) - a(y + a x_1)^3 + u \\ \dot{x}_1 & = & y + a x_1 + (y + a x_1)^3 \end{array} \right. \tag{4.11}$$

de sorte que $V_0 = \mathbb{R}^2$. Le système inverse est donné par

$$\dot{x}_1 \; = \; y_r(t) + a x_1 + (y_r(t) + a x_1)^3 \tag{4.12}$$

et $u_r$ par :

$$u_r(t) \; = \; \dot{y}_r(t) + (1 + a)(y_r(t) + a x_1(t)) + a(y_r(t) + a x_1(t))^3 \; . \tag{4.13}$$

Si $a = 0$, et $y_r(t) = \varepsilon \cos^2(t)$ avec $\varepsilon > 0$, alors l'équation précédente n'admet pas de solution bornée sur $[0, +\infty)$ et si $a > 0$, l'existence d'une solution bornée n'est pas évidente. Notons en outre que pour toutes valeurs initiales $x_{10} \geq 0$, les solutions $x_1$ issues de celles-ci admettent une explosion en temps fini. Notons également que si $a < 0$, alors la dynamique des zéros qui est :

$$\dot{x}_1 \; = \; a x_1 + a^3 x_1^3 \tag{4.14}$$

est globalement asymptotiquement stable et le système :

$$\dot{x}_1 \; = \; v + a x_1 + (v + a x_1)^3 \; . \tag{4.15}$$

où $v$ est l'entrée, possède la propriété " entrée bornée, sortie bornée ", de sorte que pour toutes trajectoires $y_r$ bornées, toutes les solutions de (4.12) sont elles aussi bornées.

Il apparaît donc que la propriété pour un système d'être à minimum de phase est susceptible de permettre de garantir des solutions bornées sur $[0, +\infty)$ pour le système inverse. Dans le contexte linéaire, tel est en effet le cas et cela d'une façon globale. Malheureusement dans le contexte non linéaire, cette propriété ne garanti l'existence de telles solutions que localement, c'est à dire pour pour des trajectoires de référence de sortie demeurant dans un voisinage de l'origine. C'est là une contrainte importante qui s'ajoute à celle, non moins contraignant, de devoir être face à un système à minimum de phase pour pouvoir traiter globalement en temps le problème du suivi exact d'une trajectoire de sortie. En effet, des systèmes qui ne sont pas à minimum de phase se rencontrent fréquemment dans la pratique : tel est le cas, par exemple, pour le système pendule chariot avec pour sortie associée $\theta_0$ (voir (11)) pour lequel nous traiterons à au chapitre 7 le problème du suivi exact puis asymptotique d'une trajectoire périodique, problème non résolu jusque là. Signalons que le fait qu'un système soit à minimum de phase ne constitue donc pas une condition nécessaire pour que puisse être suivie exactement une trajectoire donnée et cela même si elle en est effectivement une pour que puisse être suivie exactement *n'importe qu'elle* trajectoire se situant dans un voisinage de l'origine (voir [20, Theorem 16]).

Faisons maintenant quelques observations complémentaires. Il se peut que l'on veuille donner un comportement particulier à un système sans que soit imposée une fonction de sortie. Le choix de cette fonction de sortie peut alors s'avérer être crucial. En effet le degré relatif d'un système, ou dans le cas multi-entrées, multi-sortie les indices caractéristiques, sont dépendant de la fonction de sortie qui lui est associée. Hors, nous avons vu que les dynamiques du système inverse causent des difficultés théoriques et techniques, car elles conduisent à intégrer des équations différentielles non-autonomes. Il est donc a priori avantageux que la dimension de celles-ci soit la plus petite possible ce qui est équivalent à dire que le degré relatif (ou les indices caractéristiques) soient les plus grands possible. Nous nous trouvons donc face à un problème de linéarisation maximale qui est traité dans [47, Section 2.4, Theorem 2.4.2]. Celui-ci n'autorise pas d'extensions dynamiques et donne des conditions géométriques qui permettent de dire quel est la plus petite dimension qu'il est alors possible d'obtenir pour un système inverse. Cette dimension peut être encore réduite en introduisant des extensions dynamiques appropriées. La dimension minimale possible est liée à la notion de défaut d'un système introduite et mise en évidence en utilisant un formalisme d'algèbre différentielle par Fliess, Lévine, Martin et Rouchon dans [16].

Précisons pour conclure que toutes les approches que nous venons d'évoquer conduisent, lorsqu'est recherchée une trajectoire de référence, à dériver successivement une fonction $y_r$ (qui est donnée lorsque le problème considéré est celui d'un suivi de trajectoire de sortie), puis à trouver une condition initiale pour laquelle le système inverse, donné par une équation différentielle de la forme (4.1), admet une solution bornée.

### 4.2.3 Raison d'être du Chapitre 5.

La raison d'être du Chapitre 5 est une conséquence directe de ce que nous venons de voir au cours des deux sections précédentes. Nous nous appuyons sur la technique de linéarisation entrée-sortie pour obtenir la commande et la partie de l'état qui sont déterminée de manière unique par la donnée d'une trajectoire de sortie et étudions l'existence d'une solutions bornée pour le système inverse (4.7).

Ce système inverse, pour lequel il est donc souhaitable d'obtenir une solution bornée en imposant sur celui-ci le moins d'hypothèse possible, est une équation de la forme (4.1). Aussi présentons nous dans un premier temps des résultats généraux portant sur celle-ci puis appliquons ceux-ci à des formes particulières qui, dans l'optique générale de notre travail, nous intéressent de façon spécifique. Notons par exemple, que grâce au Lemme 5.1 du Chapitre 5, nous pouvons déduire de façon directe que (4.12) admet une solution une solution bornée lorsque $a > 0$ et $y_r(t) = \varepsilon \cos(t)^2$.

Remarquons qu'il peut paraître surprenant qu'après avoir étudié des systèmes non linéaires en l'entrée dans la première partie de notre travail, nous comptions pour générer des trajectoires, sur une technique qui porte sur des systèmes linéaires en l'entrée. Comment en ces conditions aborder par exemple des systèmes de la forme (5)? La réponse à cette question est simple : ces systèmes deviennent linéaire en la commande après qu'on leur ai ajouté un intégrateur.

Remarquons encore que nous verrons dans le Chapitre 5 qu'il est possible, pour certains systèmes de forme feedforward et pour certaines sorties, d'obtenir une trajectoire de suivi exact d'une façon directe qui ne repose pas sur la notion de degré relatif mais seulement sur la structure particulière des systèmes considérés.

## 4.3 Présentation du Chapitre 6.

L'objectif de ce chapitre est de stabiliser globalement asymptotiquement une trajectoire bornée particulière pour des systèmes de forme feedforward au moyen de lois de commandes bornées. La technique employée est une technique d'assignation de fonction de Lyapunov semblable à celles employées durant la première partie de ce travail et adaptée au cas non autonome. Cette fois, la propriété de linéarité en la commande n'est plus supposée.

### 4.3.1 Suivi asymptotique de trajectoires par loi de commande statique : positionnement du problème.

Le système considéré est de la forme :

$$\dot{x} \;=\; f(x) \;+\; g(x,u)u \tag{4.16}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^p$ est l'entrée et les fonctions $f, g, h$ sont supposées être de classe $C^2$. L'existence d'une trajectoire $x_r(t)$ et d'une loi de commande $u_r(t)$ telles que :

$$\dot{x}_r(t) \;=\; f(x_r(t)) \;+\; g(x_r(t), u_r(t))u_r(t) \quad , \quad \forall\, t \geq 0 \tag{4.17}$$

est également supposée. Le problème de suivi asymptotique global de la trajectoire $x_r$ par loi de commande statique est dit être soluble par loi de commande statique s'il existe $u(x,t)$ telle que :

$$\lim_{t \to +\infty} |x(t) - x_r(t)| \;=\; 0\ . \tag{4.18}$$

pour toute trajectoire $x(t)$ de (4.16) bouclé avec $u(x,t)$.

### 4.3.2 Motivation.

Nous avons vu de quelle façon A. Isidori exploite la notion de degré relatif pour générer une trajectoire de suivi exact. Le pas suivant franchi par celui-ci consiste à stabiliser asymptotiquement la trajectoire obtenue en se reposant à nouveau sur la forme normale. La façon dont il procède donne un résultat de stabilisation local et nécessite de faire l'hypothèse que la solution de :

$$\dot{\nu} \;=\; q(\xi_r, \nu) \tag{4.19}$$

satisfaisant $\nu(0) = 0$ est définie pour tout $t \geq 0$, est bornée et est uniformément asymptotiquement stable. Quand à Marino et Tomei, ils supposent que les dynamiques traquantes ont la propriété " entrée bornée, état borné ". Ces hypothèses peuvent n'être pas satisfaites pour une trajectoire de sortie pour laquelle le problème de suivi asymptotique de trajectoire est néanmoins soluble.

Tel est le cas pour (4.9) (4.10) lorsque $a > 0$, $y_r(t) = \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Nous avons vu que les dynamiques traquantes sont dans ce cas données par :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= y_r(t) + ax_1 + (y_r(t) + ax_1)^3 \ , \\ &= \varepsilon + ax_1 + (\varepsilon + ax_1)^3 \ . \end{aligned} \tag{4.20}$$

Donc, la solution qui a pour valeur initiale zéro tend vers $+\infty$ en temps fini. Il existe pourtant une solution bornée à cette équation : $x_1(t) = -\frac{\varepsilon}{a}$. Cette solution du système inverse est instable car en posant $X_1 = \varepsilon + ax_1$, on obtient :

$$\dot{X}_1 = a(X_1 + X_1^3) \ . \tag{4.21}$$

Pourtant, la trajectoire $(-\frac{\varepsilon}{a}, 0)$, qui est solution de (4.9) bouclé avec $u = 0$, peut être globalement asymptotiquement stabilisée. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{aligned} \dot{X}_1 &= a\left(x_2 + x_2^3\right) \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \end{aligned} \right. \tag{4.22}$$

qui est un système globalement asymptotiquement stabilisable d'après le Théorème 2.26.

Ceci montre qu'imposer une propriété de stabilité pour une trajectoire d'un système inverse est une hypothèse non nécessaire et suggère de quelle façon la forme feedforward peut permettre de résoudre le problème de suivi asymptotique global d'une trajectoire par loi de commande bornée.

# Chapitre 5

# Existence d'une solution bornée.

Nous allons donner divers résultats qui se trouvent dans la littérature et qui garantissent, dans des cas particuliers, qu'une équation de la forme :

$$\dot{\chi} \;=\; \varphi(\chi, t) \tag{5.1}$$

où $\chi \in \mathbb{R}^n$, admet une solution bornée. Comme le montre l'exemple (4.9), (4.10), les dynamiques d'un système inverse peuvent avoir des comportements quelconques et donc avoir des propriétés de stabilité ou d'instabilité. Nous donnons deux résultats correspondant à ces deux cas. Le troisième que nous présentons repose sur une propriété de linéarité.

## 5.1 Résultats généraux.

Dans cette section, nous décomposons la fonction $\varphi$ ainsi :

$$\varphi(\chi, t) \;=\; \eta(\chi) + \theta(\chi, t) \; . \tag{5.2}$$

avec $\eta(0) = 0$. On obtient donc un système de la forme

$$\dot{\chi} \;=\; \eta(\chi) + \theta(\chi, t) \; . \tag{5.3}$$

Notons par $\Phi_{(5.3)}(t, t_0, \chi)$ le flot le long de (5.3) au temps $t$ qui est égal à $\chi$ à l'instant $t_0$.

### 5.1.1 Cas d'instabilité.

**Lemme 5.1** *Supposons que pour tout $\chi$, la fonction $\theta(\chi, t)$ soit périodique de période $T$ en la variable $t$ et que $\Phi_{(5.3)}(t, 0, \chi)$ soit définie pour tout $t \in [0, T]$.*

*Supposons qu'il existe une fonction $\nu$ propre et définie positive et deux réels strictement positifs $\Delta_1$ et $\Delta_2$ tels que :*

$$\frac{\partial \nu}{\partial \chi}(\chi)\eta(\chi) \;>\; \left| \frac{\partial \nu}{\partial \chi}(\chi)\theta(\chi, t) \right| \tag{5.4}$$

*pour tout $t$ et tout $\chi$ tel que $\nu(\chi) \in [\Delta_1, \Delta_1 + \Delta_2]$.*

*Alors (5.3) admet une solution périodique.*

**Preuve.** Vérifions que si les hypothèses du Lemme 5.1 sont satisfaites par (5.3) alors le Corollaire 9.2.3 de [43] s'applique à (5.3). Soit $D$ l'ensemble défini par :

$$D \;=\; \{\chi : \quad \nu(\chi) \;<\; \Delta_1\} \; . \tag{5.5}$$

- $D$ est un sous ensemble borné et ouvert de $\mathbb{R}^n$.
- Si $\nu(\chi) = \Delta_1$, alors (5.4) implique que $\eta(\chi) + \theta(\chi, 0) \neq 0$.
- Par hypothèse, $\Phi_{(5.3)}(t, 0, \chi)$ est définie pour tout $t \in [0, T]$.

Donc deux points restent à prouver :

- Pour tout $t \in [0, T]$ et pour tout $\chi$ tel que $\nu(\chi) = \Delta_1$ alors $\Phi_{(5.3)}(t, 0, \chi) \neq \chi$.
- Le degré à zéro sur $B(0, \Delta_1)$ de la fonction $\chi \longmapsto \eta(\chi) + \theta(\chi, 0)$ est non nul.

Le premier point se vérifie aisément grâce à la condition (5.4). Pour ce qui est du deuxième point, il est connu que celui-ci est vérifié si (5.4) l'est. Ceci termine notre preuve. □

### 5.1.2 Cas de stabilité.

**Lemme 5.2** *Soit $\nu$ une fonction propre, définie positive, zéro en zéro, satisfaisant :*

$$\gamma_1(|\chi|) \ \leq \ \nu(\chi) \ \leq \ \gamma_2(|\chi|) \tag{5.6}$$

*pour des fonctions $\gamma_1, \gamma_2$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ et soit $\mu(\chi) = -\frac{\partial \nu}{\partial \chi}(\chi)\eta(\chi)$. Supposons que cette fonction soit négative et que :*
*1. Ou pour une valeur $t_f$ on ait $\theta(0, t) = 0$ pour tout $t > t_f$.*
*2. Ou pour une valeur $t_f$ il existe deux constantes $\delta_1$ et $\delta_2$ strictement positives pour lesquelles l'ensemble :*

$$E_{\theta, t_f} \ = \ \left\{ \chi \ : \ -\frac{3}{4}\mu(\chi) + \frac{\partial \nu}{\partial \chi}(\chi)\theta(\chi, t) \ \leq \ 0 \quad , \quad \forall t \geq t_f \right\} \tag{5.7}$$

*contienne les éléments $\chi$ tels que $|\chi| \in [\gamma_2^{-1}(\delta_1), \gamma_1^{-1}(\delta_1(1 + \delta_2))]$.*
*Alors, pour tout $\chi$ de norme strictement plus petite que $\gamma_2^{-1}(\delta_1)$, on a :*

$$\left|\Phi_{(5.3)}(t, t_f, \chi)\right| \ < \ \gamma_1^{-1}(\delta_1(1 + \delta_2)) \quad , \quad \forall t \geq t_f \ . \tag{5.8}$$

**Remarque 5.3 :** Si $\dot{\chi} = \eta(\chi)$ est localement asymptotiquement stable, il existe toujours des fonctions $\theta(\chi, .)$ non identiquement nulles sur tout intervalle de la forme $[c, +\infty[$ pour toute valeur $\chi \neq 0$ appartenant à un voisinage de l'origine, telles que le Lemme 5.2 s'applique pour chacune de ces fonctions •

**Preuve.** Procédons par contradiction. Supposons dans un premier temps que ce soit la deuxième condition du lemme 5.2 qui soit vérifiée. Considérons un élément $\chi \in B(0, \gamma_2^{-1}(\delta_1))$ et supposons qu'il existe $t_1, t_2$ tels que $t_2 \geq t_1 \geq t_f$,

$$|\Phi_{(5.3)}(t_1, t_f, \chi)| \ = \ \gamma_2^{-1}(\delta_1) \quad , \quad |\Phi_{(5.3)}(t_2, t_f, \chi)| \ = \ \gamma_1^{-1}(\delta_1(1 + \delta_2)) \tag{5.9}$$

et

$$|\Phi_{(5.3)}(t, t_f, \chi)| \in ]\gamma_2^{-1}(\delta_1), \gamma_1^{-1}(\delta_1(1 + \delta_2))[ \quad , \quad \forall t \in ]t_1, t_2[ \ . \tag{5.10}$$

Alors, on déduit des hypothèses du Lemme 5.2 que :

$$\dot{\overbrace{\nu(\Phi_{(5.3)}(t, t_f, \chi))}} \ \leq \ -\frac{1}{4}\mu(\chi) \ \leq \ 0 \quad , \quad \forall t \in [t_1, t_2[ \ . \tag{5.11}$$

Grâce à (5.11), (5.6), (5.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \gamma_1(\gamma_1^{-1}(\delta_1(1+\delta_2))) \;=\; \gamma_1(|\Phi_{(5.3)}(t_2,t_f,\chi)|) \;\leq\; \nu(\Phi_{(5.3)}(t_2,t_f,\chi)) \\ \nu(\Phi_{(5.3)}(t_2,t_f,\chi)) \;\leq\; \nu(\Phi_{(5.3)}(t_1,t_f,\chi)) \;\leq\; \gamma_2(|\Phi_{(5.3)}(t_1,t_f,\chi)|) \;=\; \gamma_2(\gamma_2^{-1}(\delta_1)) \;. \end{aligned}$$

Il s'en suit que :

$$0 \;<\; \delta_1(1+\delta_2) \;\leq\; \delta_1 \;. \tag{5.12}$$

Par conséquent, on aboutit à une contradiction.

Supposons maintenant que ce soit la première condition du Lemme 5.2 qui soit vérifiée. Alors :

$$0 \;=\; \eta(0)+\theta(0,t) \quad , \quad \forall\, t \;\geq\; t_f \;. \tag{5.13}$$

Il s'en suit que $\Phi_{(5.3)}(t,t_f,0)=0$ pour tout $t \geq t_f$. Ceci termine notre preuve. □

### 5.1.3 Cas linéaire.

Nous supposons maintenant que la fonction $\varphi$ se décompose ainsi :

$$\varphi(\chi,t) \;=\; M\chi+\gamma(t) \;. \tag{5.14}$$

où $M$ est une matrice constante.

**Lemme 5.4** *Le système*

$$\dot{\chi} \;=\; M\chi+\gamma(t) \tag{5.15}$$

*admet une solution bornée sur $(-\infty,+\infty)$ si $\gamma$ est bornée (respectivement presque périodique, périodique de période $T$) et si $\chi = 0$ est la seule solution bornée (respectivement presque périodique, périodique de période $T$) de :*

$$\dot{\chi} \;=\; M\chi \;. \tag{5.16}$$

**Remarque 5.5 :** Les solutions de (5.15) sont :

$$\chi(t) \;=\; \exp(Mt)\chi(0) \;+\; \int_0^t \exp[(t-s)M]\gamma(s)ds \tag{5.17}$$

Donc quand $\gamma(s)$ et $\exp(-sM)$ sont de période $T$, on voit directement que les fonctions $\chi$ sont bornées si

$$\int_0^T \exp(-sM)\gamma(s)ds \;=\; 0 \tag{5.18}$$

•

**Preuve.** Ce résultat est une conséquence immédiate de la définition 1 du Théorème 1.1 de [21, Chapter 4]. □

## 5.2 Applications.

Le Lemme 5.1 ne trouve d'application dans le cadre de notre travail que lorsqu'il s'agit d'obtenir une solution bornée pour le système inverse (4.7) résultant de la forme normale d'Isidori. Les lemmes 5.2 et 5.4 sont eux aussi susceptibles de fournir la même aide mais peuvent également servir à obtenir pour des certains systèmes une trajectoire de suivi exact d'une façon directe.

### 5.2.1 Application du Lemme 5.2.

Nous allons employer le Lemme 5.2 pour résoudre un problème de suivi exact de trajectoire de sortie.

**Corollaire 5.6** *Considérons le système de la forme :*

$$\begin{cases} \dot{a} &= \eta(a,b,u) \\ \dot{b} &= \chi(a,b,u) \end{cases} \tag{5.19}$$

*où $u$ est l'entrée, avec pour fonction de sortie $h(a,b) = b$. Soit $b_r(t)$ une trajectoire de référence de sortie. Supposons qu'il existe $u_r(a,t)$ tel que pour tout $a$ :*

$$\dot{b}_r(t) \ = \ \chi(a, b_r(t), u_r(a,t)) \quad , \quad \forall\, t \ \geq \ 0 \ . \tag{5.20}$$

*De plus, supposons que :*

$$\dot{a} \ = \ \eta(a, b_r(t), u_r(a,t)) \tag{5.21}$$

*admette une solution entre $t_c$ et 0 qui est bornée et égale à zéro à l'instant zéro. Alors si les conditions du Lemme 5.2 sont satisfaites avec les fonctions $\widehat{\eta}$ et $\widehat{\theta}$ définies par :*

$$\widehat{\eta}(a) \ = \ \eta(a,0,0) \quad , \quad \widehat{\theta}(a,t) \ = \ \eta(a, b_r(t), u_r(a,t)) - \eta(a,0,0) \tag{5.22}$$

*jouant respectivement les rôles de $\eta$ et $\theta$ et $t_c$ jouant le rôle de $t_f$, il existe une valeur initiale $a_i$ telle que la trajectoire de (5.19) avec $u_r(a,t)$ comme loi de commande issue de $(a_i, b_r(0))$ est bornée sur $[0,+\infty]$ et est solution du problème de suivi exact de la trajectoire de référence de sortie $b_r(t)$ .*

**Remarque 5.7 :** Quand $b_r(t)$ et $u_r(0,t)$ sont identiquement égales à zéro en dehors d'un compact, le Corollaire 5.6 se réduit à la preuve d'une solution du " Stable Inversion Problem " défini dans [7] restreint à l'intervalle de temps $[0,+\infty)$ •

**Remarque 5.8 :** Les hypothèses du Corollaire 5.6 n'impliquent pas que l'approximation linéaire à l'origine du système :

$$\begin{cases} \dot{a} &= \eta(a,b,0) \\ \dot{b} &= \chi(a,b,0) \end{cases} \tag{5.23}$$

soit hyperbolique (c'est à dire n'ai qu'une partie stable et instable). De plus, quand $b_r(t)$ et $u_r(0,t)$ sont identiquement égales à zéro en dehors d'un compact, ce système approximé peut avoir une partie instable •

**Preuve.** Puisque le Lemme 5.2 s'applique au système

$$\dot{a} \ = \ \widehat{\eta}(a) + \widehat{\theta}(a,t) \tag{5.24}$$

on obtient que :

$$|\Phi_{(5.24)}(t, t_f, 0)| \ \leq \ \gamma_1^{-1}(\delta + \alpha) \quad , \quad \forall t \geq t_f \ . \tag{5.25}$$

Maintenant considérons la valeur particulière :

$$a_i \ = \ \Phi_{(5.24)}(0, t_f, 0) \tag{5.26}$$

qui, par hypothèse, est bien définie. Alors

$$\Phi_{(5.24)}(t_f, 0, a_i) \;=\; 0 \; . \tag{5.27}$$

Grâce à ce résultat, on peut vérifier que la trajectoire issue de $(a_i, b_r(0))$ a les propriétés désirées pour pouvoir conclure la preuve du Corollaire 5.6. □

Le résultat qui suit, et qui est une conséquence du corollaire précédent, montre que la forme feedforward est bien adaptée à la recherche de trajectoires de références exactes à support compact. Notons qu'il peut être appliqué de façon récursive à des systèmes de la forme (6).

**Corollaire 5.9** *Considérons un système de la forme :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Mx + h_1(y,x)y + h_2(x,y,u)u \\ \dot{y} & = & f(y) + f_1(x,y) + f_2(x,y,u)u \end{array} \right. \tag{5.28}$$

*avec pour fonction de sortie $h(x,y) = y$. Supposons que $M$ soit une matrice stable. Alors pour toute trajectoire de référence de sortie $y_r$ telle qu'il existe une fonction $u_r(x,t)$ continue et $t_f > 0$ tels que :*

- *pour tout $t \geq 0$ :*

$$\dot{y}_r \;=\; f(y_r) + f_1(x,y_r) + f_2(x,y_r,u_r(x,t))u_r(x,t) \; , \tag{5.29}$$

- *pour tout $t \geq t_f$ les fonctions $y_r(t)$ et $u_r(0,t)$ sont égales à zéro,*

*le problème de suivi exact de la trajectoire de sortie de référence $y_r$ admet une solution qui est nulle pour tout $t \geq t_f$.*

**Remarque 5.10 :** Quand $h_1$, $h_2$ et $u_r$ ne dépendent pas de $x$, une formule explicite d'une valeur $x_i$ telle que la trajectoire issue de $(x_i, y_r(0))$ soit bornée et suive exactement $y_r$ est :

$$x_i \;=\; -\int_0^{t_f} \left[\exp(-Ms)h_1(y_r(s))y_r(s) + \exp(-Ms)h_2(y_r(s),u_r(s))u_r(s)\right] ds \; \bullet \tag{5.30}$$

**Preuve du Corollaire 5.9.** On vérifie immédiatement que le Corollaire 5.6 s'applique avec $x$ jouant le rôle de $a$ et $y$ jouant le rôle de $b$. □

### 5.2.2 Application du Lemme 5.4.

Considérons la sous classe de la classe des systèmes (5.28) suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & Mx + h_1(y) + h_2(y,u)u \; , \\ \dot{y} & = & f(y) + f_2(y,u)u \; . \end{array} \right. \tag{5.31}$$

où $y$ est dans $\mathbb{R}^n$, $x$ est dans $\mathbb{R}^m$ et $u$, l'entrée, est dans $\mathbb{R}^q$ et

$$h_1(0) \;=\; 0 \quad , \quad f(0) \;=\; 0 \; . \tag{5.32}$$

Si $h(x) = y$ et s'il existe $y_r(t)$ et $u_r(t)$ bornées telles que :

$$\dot{y}_r \;=\; f(y_r) \;+\; f_2(y_r, u_r)u_r \tag{5.33}$$

alors, en posant $\gamma(t) \;=\; h_1(y_r(t)) + h_2(y_r(t), u_r(t))u_r(t)$, on se trouve amené à étudier l'équation :

$$\dot{x} \;=\; Mx \;+\; \gamma(t) \;. \tag{5.34}$$

D'où le profit qu'on peut tirer du Lemme 5.4. Celui-ci ne donne toutefois pas de résultat lorsque $M = 0$. En effet, $x = 0$ n'est alors pas la seule solution bornée de $\dot{x} \;=\; 0$. Toutefois, dans ce cas il est généralement facile de conclure car l'équation précédente est alors :

$$\dot{x} \;=\; \gamma(t) \;. \tag{5.35}$$

Lorsque $\gamma$ est périodique de période $T$, cette équation admet une solution bornée si et seulement si :

$$\int_0^T \gamma(s)ds \;=\; 0 \;. \tag{5.36}$$

Cette simple remarque va être utilisée lors de l'étude du système pendule-chariot menée au Chapitre 2.5.

# Chapitre 6

# Ajout d'intégration : cas instationnaire.

Au cours des deux chapitres précédents, nous avons donné quelques indications sur la façon d'obtenir des trajectoires, dites de référence, répondant à des spécifications particulières et notamment à celle d'être bornée sur $[0, +\infty)$. Nous cherchons maintenant à stabiliser globalement asymptotiquement ces trajectoires au moyen d'une loi de commande statique dépendante du temps. Nous reprenons ici le contexte plus simple de la section 2.4.1. Signalons que Teel a déjà étudié le cas particulier où le système est une simple chaîne d'intégrateurs. (Voir [75, Corollary 2.1]).

## 6.1 Résultat.

Les résultats de cette section suivent étroitement ceux de la section 2.4.1 : l'objectif est d'adapter les idées principales de celle-ci à un problème de suivi de trajectoire.

Considérons le système :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X} & = & MX + H_1(Y) + H_2(Y,u)\,u \ , \\ \dot{Y} & = & F_0(Y) + F_2(Y,u)\,u \ . \end{array} \right. \tag{6.1}$$

où $Y$ est dans $\mathbb{R}^n$, $X$ est dans $\mathbb{R}^m$, $u$ est dans $\mathbb{R}^q$, toutes les fonction sont de classe $C^2$ et

$$H_1(0) \ = \ 0 \quad , \quad F_0(0) \ = \ 0 \ . \tag{6.2}$$

Supposons qu'il existe une trajectoire de référence telle que :

**Hypothèse H0 :** *Il existe une fonction $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$ bornée sur $[0, +\infty)$ et vérifiant :*

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{X}_r(t) & = & MX_r(t) + H_1(Y_r(t)) + H_2(Y_r(t), u_r(t))\,u_r(t) \ , \\ \dot{Y}_r(t) & = & F_0(Y_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))\,u_r(t) \ . \end{array} \right. \tag{6.3}$$

Cette hypothèse nous permet de définir la matrice :

$$A(t) \ = \ \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}} \left[ F_0(\tilde{Y} + Y_r(t)) + F_2(\tilde{Y} + Y_r(t), u_r(t))u_r(t) \right] \Bigg|_{\tilde{Y}=0} \ . \tag{6.4}$$

Soit $\Phi_A(t, t_0)$ la matrice de transition associée à cette matrice, i.e. :

$$\frac{\partial \Phi_A}{\partial t}(t, t_0) \;=\; \Phi_A(t, t_0) A(t) \quad , \quad \Phi_A(t_0, t_0) \;=\; I \; . \tag{6.5}$$

**Hypothèse H1 :**

*H11 : Le point $\tilde{Y} = 0$ est un point d'équilibre globalement uniformément asymptotiquement stable du système :*

$$\dot{\tilde{Y}} \;=\; F(\tilde{Y}) - F(Y_r) + F_2(\tilde{Y} + Y_r, u_r(t))u_r(t) - F_2(Y_r, u_r(t))u_r(t) \; . \tag{6.6}$$

*H12 : La matrice $M$ est stable et il existe des nombres réels strictement positifs $c$ et $\alpha$ tels que, pour tout $t$ et tout $s$ dans $[0, t]$, on ait :*

$$|\exp(Mt)| \;\leq\; c \quad , \quad |\Phi_A(t, s)| \;\leq\; c \exp(-\alpha(t - s)) \; . \tag{6.7}$$

Nous montrerons que cette hypothèse implique que la matrice :

$$P(t) \;=\; \left[\int_t^{+\infty} \exp(M(t - s))C(s)\Phi_A(s, t)ds\right] \; , \tag{6.8}$$

où

$$C(t) \;=\; \frac{\partial}{\partial \tilde{Y}}\left[H_1(\tilde{Y} + Y_r) + H_2(\tilde{Y} + Y_r, u_r(t))u_r(t)\right]|_{\tilde{Y}=0} \tag{6.9}$$

est bien définie, continuement dérivable et bornée.

**Hypothèse H2 :** *Il existe une fonction $K(t)$ bornée et continue telle que la solution $\chi = 0$ de*

$$\dot{\chi} \;=\; -\,(M + D(t)K(t))^\top \chi \tag{6.10}$$

*où*

$$\begin{aligned} D(t) \;\;=\;\; & \frac{\partial H_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t))u_r(t) + H_2(Y_r(t), u_r(t)) \\ & + P(t)\left[\frac{\partial F_2}{\partial u}(Y_r(t), u_r(t)) + F_2(Y_r(t), u_r(t))\right] \end{aligned} \tag{6.11}$$

*soit exponentiellement stable.*

**Théorème 6.1** *Si les hypothèses H0, H1 et H2 sont vérifiées, pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0, +\infty]$, la solution $(X_r, Y_r)$ peut être rendue solution globalement asymptotiquement stable du système (6.1) au moyen d'un bouclage d'état $\overline{u}(X, Y, t)$ tel que :*

$$|\overline{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \;\leq\; \overline{u} \; . \tag{6.12}$$

## 6.2 Discussion autour des hypothèses du Théorème 6.1.

**Hypothèse H1.** L'hypothèse H12 garanti l'exponentielle stabilité locale à l'origine de la solution $Y_r$ du sous système en $Y$ de (6.1) pris à commande nulle. L'hypothèses H12 est donc à mettre en parallèle avec l'hypothèse D12. En effet, celles-ci permettent d'avoir pour le sous système en $y$ une fonction de Lyapunov et sa dérivée de Lie supérieures sur un voisinage de l'origine à des formes quadratiques définies positives et de définir un changement de coordonnées qui permet d'obtenir dans la dynamique en $x$ un terme non linéaire bornée par une fonction indépendante du temps et d'ordre 2 en $y$, propriétés cruciales pour la preuve que nous effectuerons. Précisons que les conditions (6.7) sont étroitement liées aux propriétés de dichotomie exponentielles ou ordinaires introduites dans [8].

**Hypothèse H2.** D'après [26, Definition 4.2], une condition suffisante pour que l'hypothèse H2 soit vérifiée est que la paire $(-M^\top, D(t)^\top)$ soit uniformément complètement détectable. D'après [26, Corollary 4.1], une condition suffisante pour que la paire $(-M^\top, D(t)^\top)$ soit uniformément complètement détectable est qu'elle soit uniformément complètement observable. Ce qui d'après [26, Définition 2.6] (définition introduite à l'origine par Kalman dans [30]) signifie qu'il existe des nombres strictement positifs $\sigma, \alpha_1$ et $\alpha_2$ tels que :

$$0 \ < \ \alpha_1 I \ \leq \ W(t, t+\sigma) \ \leq \ \alpha_2 I \ . \tag{6.13}$$

où

$$W(t,s) \ = \ \int_t^s \exp[M(t-\tau)] D(\tau)^\top D(\tau) \exp[M^\top (t-\tau)] d\tau \ . \tag{6.14}$$

Un premier moyen susceptible de permettre de montrer que (6.13) est vérifié consiste à calculer la fonction matricielle $W$, appelée le grammien d'observabilité, en intégrant l'équation différentielle (donnée dans [31]) que cette fonction vérifie :

$$\frac{dW(t,t_f)}{dt} \ = \ MW(t,t_f) + W(t,t_f)M^\top - \ D(t)D(t)^\top \ . \tag{6.15}$$

Un autre moyen permettant de monter que (6.13) est vérifiée est donné par [79, 2.31 Theorem]. En effet, une condition suffisante pour que (6.13) soit vérifiée, lorsque $D(t)$ est un vecteur colonne, est que la matrice :

$$\Gamma(t) \ = \ [q_0, q_1, \ldots, q_{n-1}] \ ; \ q_{k+1} \ = \ -Mq_k + \dot{q}_k \ ; \ q_0 \ = \ D(t)^\top \tag{6.16}$$

soit de rang plein pour tout $t$ et que $\Gamma$, $\Gamma^{-1}$, $\dot{\Gamma}$ soient continues et uniformément bornées.

L'avantage de cette condition vient de la facilité qu'il y a à la vérifier.

## 6.3 Preuve du Théorème 6.1.

Pour construire une loi de commande vérifiant (6.12) et rendant $(X_r, Y_r)$ solution globalement asymptotiquement stable du système (6.1), nous commençons par introduire le changement de coordonnées suivant :

$$\tilde{X} \ = \ X - X_r(t) \quad , \quad \tilde{Y} \ = \ Y - Y_r(t) \quad , \quad v \ = \ u - u_r(t) \ . \tag{6.17}$$

Le système (6.1) prend la forme :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{X}} = M\tilde{X} + \Big[H_1(\tilde{Y}+Y_r) - H_1(Y_r)\Big] + \Big[H_2(\tilde{Y}+Y_r, u_r(t)+v)(u_r(t)+v) - H_2(Y_r, u_r(t))u_r(t)\Big] \\ \dot{\tilde{Y}} = \Big[F_0(\tilde{Y}+Y_r) - F_0(Y_r)\Big] + \Big[F_2(\tilde{Y}+Y_r, u_r(t)+v)(u_r(t)+v) - F_2(Y_r, u_r(t))u_r(t)\Big] \end{cases} \tag{6.18}$$

Nous avons vu au cours de la preuve du Théorème 2.1 l'importance que peut avoir le comportement local en zéro des non linéarités en $y$ présentes dans les dynamiques en $\tilde{X}$. Puisque nous savons que le sous système en $\tilde{Y}$ de (6.18) est localement exponentiellement stable, nous aimerions trouver un changement de coordonnés tel que, dans les nouvelles coordonnées, le terme

$$H_1(\tilde{Y}+Y_r) - H_1(Y_r) + H_2(\tilde{Y}+Y_r, u_r(t))u_r(t) - H_2(Y_r, u_r(t))u_r(t)$$

soit du second ordre. En effet, nous pouvons dire de façon imprécise qu'un terme du second ordre est dominé par une fonction du second ordre définie positive, propriété qui peut être fort utile lors de la construction d'une fonction de Lyapunov assignable.

Un tel changement de coordonnés existe si l'équation suivante admet une solution bornée sur $[0, +\infty)$ :

$$\dot{\overbrace{P(t)}} = MP(t) - P(t)A(t) - C(t) \tag{6.19}$$

où $C(t)$ est la fonction définie en (6.9). En employant la terminologie introduite par Gantmacher dans [18, Chap 14], ce problème peut être formulé de la façon suivante. Est ce que le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{X}} &=& M\tilde{X} + C(t)\tilde{Y} \\ \dot{\tilde{Y}} &=& A(t)\tilde{Y} \end{array}\right. \tag{6.20}$$

peut être transformé par une transformation de Lyapunov en :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{\tilde{X}} &=& M\tilde{X} \\ \dot{\tilde{Y}} &=& A(t)\tilde{Y} \ ? \end{array}\right. \tag{6.21}$$

Une réponse à cette question peut être déduite de [8, Lemma 3] qui requiert les propriétés dites d'exponentielle et d'ordinaire dichotomie. Néanmoins, dans le cas particulier en lequel nous sommes, il est plus facile de vérifier directement que, sous l'hypothèse H0, (6.19) admet une solution bornée. En effet, l'hypothèses H0 implique que la matrice $P(t)$ définie en (6.8), qui est une solution formelle de (6.19), est bien définie, continuement dérivable et bornée. Démontrons ceci :
Les fonctions $f$ et $f_2$ étant de classe $C^1$ et les fonctions $u_r$ et $Y_r$ étant continues, la fonction $A(t)$ est continue. Les fonctions $h_1$ et $h_2$ étant de classe $C^1$ et les fonctions $u_r(t)$ et $Y_r(t)$ étant continues, la fonction $C(t)$ est continue. La fonction définie en (6.8) est donc de classe $C^1$.

Comme de plus, d'après l'hypothèse H0 la fonction $Y_r$ est bornée sur $[0, +\infty)$, la fonction $C(t)$ est bornée par une constante positive $c$. Alors, grâce à l'hypothèse H12, on obtient :

$$\left|\int_t^{+\infty} \exp(M(t-s))C(s)\Phi_A(s,t)ds\right| \leq c\left|\int_t^{+\infty} \exp(-\alpha(s-t))ds\right| < +\infty \ . \tag{6.22}$$

Appliquons maintenant à (6.18) le changement de coordonnées donné par :

$$x = \tilde{X} + P(t)\tilde{Y} \quad , \quad y = \tilde{Y} \ . \tag{6.23}$$

Il transforme (6.18) en :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x} &=& Mx + h_1(y,t) + h_2(y,v,t)v \\ \dot{y} &=& f_0(y,t) + f_2(y,v,t)v \ . \end{array}\right. \tag{6.24}$$

et où $h_1$, $h_2$, $f$ et $f_2$ sont des fonctions de classe $C^1$ bornées en $t$ et définies par :

$$\begin{aligned}
h_1(y,t) &= H_1(y+Y_r(t)) - H_1(Y_r(t)) + [H_2(y+Y_r(t),u_r(t)) - H_2(y,u_r(t))]\,u_r(t) && (6.25)\\
&\quad + P(t)\,[f_0(y,t) - A(t)y] - C(t)\,y && (6.26)\\
h_2(y,v,t)\,v &= [H_2(y+Y_r(t),u_r(t)+v) - H_2(y+Y_r(t),u_r(t))]\,u_r(t) && (6.27)\\
&\quad + [H_2(y+Y_r(t),u_r(t)+v) + P(t)f_2(y,v,t)]\,v && (6.28)\\
f_0(y,t) &= [F_0(y,Y_r(t)) - F_0(Y_r(t))] + [F_2(y+Y_r(t),u_r(t))u_r(t) - F_2(Y_r(t))u_r(t)] && (6.29)\\
f_2(y,v,t)\,v &= [F_2(y+Y_r(t),u_r(t)+v) - F_2(y+Y_r(t),u_r(t))]\,u_r(t) && (6.30)\\
&\quad + F_2(y+Y_r,u_r(t)+v)\,v\ . && (6.31)
\end{aligned}$$

Grâce à l'hypothèse H0 d'une part et à la propriété de régularité des fonctions de (6.1) de l'autre, on voit, d'après la définition de $h_1$, qu'il existe une fonction continue et positive $\gamma$ telle que :

$$|h_1(y,t)| \leq \gamma(|y|)\,|y|^2 \tag{6.32}$$

Pour poursuivre, nous avons besoin du résultat suivant prouvé dans l'annexe G :

**Lemme 6.2** *Si le système (6.1) satisfait les hypothèses H11 et H12 alors il existe une fonction de Lyapunov $V(y,t)$, des nombres réels strictement positifs que nous notons génériquement $c$, une fonction $W(y,t)$ et des fonctions $\alpha_1$, $\alpha_1$ et $\alpha_3$, de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que :*

- *pour tout $|y| \leq c$ :*

$$c|y|^2 \leq V(y,t) \leq c|y|^2 \quad , \quad \left|\frac{\partial V}{\partial y}(y,t)\right| \leq c|y|\ , \tag{6.33}$$

$$c|y|^2 \leq \alpha_3(|y|) \leq W(y,t) \tag{6.34}$$

- *pour $v=0$ et tout $y$ :*

$$\alpha_1(|y|) \leq V(y,t) \leq \alpha_2(|y|) \tag{6.35}$$

$$\dot{\overbrace{V(y,t)}}_{(6.24)} = -W(y,t) \leq -\alpha_3(|y|) < 0 \quad , \quad \forall\, y \neq 0\ . \tag{6.36}$$

Notons enfin que l'hypothèse H12 implique l'existence d'une matrice symétrique définie positive $Q$ telle que :

$$M^\top Q + QM = -R \leq 0\ . \tag{6.37}$$

Maintenant, construisons un bouclage d'état instationnaire qui rende la solution 0 du système (6.24) globalement asymptotiquement stable.

Nous allons chercher à assigner la fonction :

$$U(x,y,t) = K(V(y,t)) + \int_0^{|x|_Q} \sigma(s)ds\ , \tag{6.38}$$

où $K$ est une fonction de classe $\mathcal{K}^\infty$ continuement différentiable de dérivée strictement positive, et où $\sigma$ est une saturation (voir les définitions de base). Le choix effectué pour cette famille vient du fait que les non linéarités présentes dans les dynamiques de $x$ ne dépendent pas de $x$. Nous savons donc que la fonction $\rho$ qui intervient dans l'hypothèse B3.1 peut être prise identiquement égale à zéro. Ce fait indique que la fonction

$$l(s) = \int_0^s \sigma(\tau)d\tau \tag{6.39}$$

convient.

La fonction $U$ ainsi définie est de classe $C^1$, propre et définie positive. Prenons sa dérivée par rapport au temps :

$$\overbrace{U(x,y,t)}^{\cdot}_{(6.24)} = -K'(V(y,t))\,W(y,t) + K'(V(y,t))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y,t)\,f_2(y,v,t)\,v + \sigma(|x|_Q)\tfrac{x^\top Q}{|x|_Q}\,(Mx + h_1(y,t) + h_2(y,v,t)v)\ . \tag{6.40}$$

Il est prouvé dans l'annexe E que si (6.33) et (6.34) sont vérifiées, la fonction $K$ peut être choisie de classe $C^2$ et de sorte que :

$$\frac{1}{2}K'(\alpha_1(|y|)) \geq \left(\sup_{s\in\mathbb{R}}|\sigma(s)|\right)\frac{|y|^2}{\alpha_3(|y|)}\gamma(|y|)\ . \tag{6.41}$$

On peut imposer en outre à $K$ d'être telle que, pour tout $s \geq 0$,

$$K'(s) \geq 1\ . \tag{6.42}$$

Avec une telle fonction $K$, on obtient :

$$\overbrace{U(x,y,t)}^{\cdot}_{(6.24)} \leq -\tfrac{1}{2}K'(V(y,t))W(y,t) - \sigma(|x|_Q)\tfrac{x^\top Rx}{|x|_Q} + \left[K'(V(y,t))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y,t)f_2(y,v,t) + \sigma(|x|_Q)\tfrac{x^\top Q}{|x|_Q}h_2(y,v,t)\right]v\ . \tag{6.43}$$

Grâce au Lemme 1.5 et à l'Annexe C, on obtient une loi de commande satisfaisant la contrainte (6.12) et du type

$$v(y,x,t) = -\lambda(y,x,t)\left[K'(V(y,t))\frac{\partial V}{\partial y}(y,t)f_2(y,0,t) + \sigma(|x|_Q)\frac{x^\top Q}{|x|_Q}h_2(y,0,t)\right]^\top \tag{6.44}$$

où, les fonctions étant de classe $C^1$ uniformément par rapport au temps, $\lambda$ est une fonction telle que :

$$\forall c_1 \geq 0\,,\quad \exists c_2 > 0 :\quad \{|(x,y)| \leq c_1 \quad\Rightarrow\quad \lambda(y,x,t) \geq c_2\} \tag{6.45}$$

et :

$$\left[K'(V(y,t))\tfrac{\partial V}{\partial y}(y,t)f_2(y,v,t) + \sigma(|x|_Q)\tfrac{x^\top Q}{|x|_Q}h_2(y,v,t)\right]v(y,x,t) \leq -\tfrac{1}{2}\lambda(y,x,t)\left[K'(V(y,t))\frac{\partial V}{\partial y}(y,t)f_2(y,0,t) + \sigma(|x|_Q)\frac{x^\top Q}{|x|_Q}h_2(y,0,t)\right]^2\ . \tag{6.46}$$

La négativité de la dérivée de la fonction de Lyapunov est donc obtenue :

$$\overbrace{U(x,y,t)}^{\cdot}_{(6.24)} \leq -\tfrac{1}{2}K'(V(y,t))\,W(y,t) - \sigma(|x|_Q)\,\tfrac{x^\top Rx}{|x|_Q} - \tfrac{1}{2}\lambda(y,x,t)\left[K'(V(y,t))\frac{\partial V}{\partial y}(y,t)f_2(y,0,t) + \sigma(|x|_Q)\frac{x^\top Q}{|x|_Q}h_2(y,0,t)\right]^2\ . \tag{6.47}$$

Le terme de droite de (6.47) est négatif. Avec (6.35), ceci implique la stabilité uniforme globale de la trajectoire de référence $(X_r(t), Y_r(t))$. Malheureusement $\overbrace{U(x,y,t)}^{\cdot}_{(6.24)}$ n'est pas nécessairement uniformément définie négative; on ne peut donc conclure à la stabilité asymptotique. De plus, comme nous sommes dans le cas instationnaire, le principe d'invariance de LaSalle ne s'applique pas. Malgré cela, il est tout de même possible d'obtenir un résultat de stabilité asymptotique en exploitant (6.47). Le reste de cette section est dédié à l'obtention de ce résultat.

En intégrant (6.47) entre 0 et $t > 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} U(x(t), y(t), t) - U(x(0), y(0), 0) \ \leq\ & -\tfrac{1}{2} \int_0^t K'(V(y(s), s)) W(y(s), s) ds \\ & - \int_0^t \frac{|v(y(s), x(s), s)|^2}{2\lambda(y(s), x(s), s)} ds \ - \int_0^t \sigma(|x(s)|_Q) \frac{x(s)^\top R x(s)}{|x(s)|_Q} ds \ . \end{aligned} \tag{6.48}$$

Puisque $U$ est propre, l'inégalité précédente implique que la fonction $t \longmapsto (x(t), y(t))$ est bornée. Elle implique également qu'il existe un réel $M$ positif et dépendant de $(x(0), y(0))$ tel que :

$$\int_0^{+\infty} K'(V(y(s), s)) W(y(s), s) ds \ \leq\ M \ , \tag{6.49}$$

$$\int_0^{+\infty} \sigma(|x(s)|_Q) \frac{x(s)^\top R x(s)}{|x(s)|_Q} ds \ \leq\ M \ , \tag{6.50}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda(y(s), x(s), s)} |v(y(s), x(s), s)|^2 ds \ \leq\ M \ . \tag{6.51}$$

Exploitons ces trois inégalités :

1. Les inégalités (6.42), (6.34) et le fait que $W$ soit définie positive et que $y(t)$ soit bornée implique l'existence d'un nombre réel $c$ strictement positif tel que, pour tout $t \in [0, +\infty)$,

$$c\, |y|^2 \ \leq\ K'(V(y(s), s)) W(y(s), s) \ . \tag{6.52}$$

L'inégalité (6.49) implique donc que $y(t)$ appartient à $L^2([0, +\infty))$. Comme, d'après (6.24), la fonction $\dot{\overline{y^2}}(t)$ est bornée, il s'en suit, (voir [32, Lemma 4.4]), que :

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) \ =\ 0 \ . \tag{6.53}$$

2. Les propriétés de la fonction $\sigma$ et l'aspect borné de la fonction $x(t)$ font qu'il existe un nombre réel strictement positif $c_\sigma$ tel que, pour tout $t$,

$$0 \ <\ c_\sigma \ \leq\ \frac{\sigma(|x(t)|_Q)}{|x(t)|_Q} \ . \tag{6.54}$$

L'inégalité (6.50) implique donc que la fonction $x(t)^\top R x(t)$ est dans $L^1([0, +\infty))$.

3. La fonction $(x(t), y(t))$ étant bornée, il en est de même de $\lambda(y(t), x(t), t)$. L'inégalité (6.51) implique donc que la fonction $v(y(t), x(t), t)$ est dans $L^2([0, +\infty))$. Alors, avec (6.32) et ce qui précède, nous concluons que la fonction :

$$\varphi_1(t) \ =\ h_1(y(t), t) + h_2(y(t), v(x(t), y(t), t), t) v(x(t), y(t), t) \tag{6.55}$$

est dans $L^2([0,+\infty))$.
Mais par ailleurs, grâce à (6.45), l'inégalité (6.51) implique que la fonction $\frac{v(y(t),x(t),t)}{\lambda(y(t),x(t),t)}$ est dans $L^2([0,+\infty))$. Or d'après (6.33), (6.35), (6.53) le fait que $y(t)$ soit bornée et la définition (6.44) de $v(y,x,t)$, il existe un nombre réel positif $c$ et un instant $t_c$ tels que, pour tout $t \in [t_c,+\infty)$, on ait :

$$c_\sigma \left| x(t)^\top Q h_2(y(t),0,t) \right| \;\leq\; \left| \sigma(|x(t)|_Q) \frac{x(t)^\top Q}{|x(t)|_Q} h_2(y(t),0,t) \right| , \tag{6.56}$$

$$\leq\; \left| \frac{v(y(t),x(t),t)}{\lambda(y(t),x(t),t)} \right| \;+\; c\,|y(t)| \,. \tag{6.57}$$

La fonction $h_2$ étant de classe $C^1$, ceci nous permet de conclure que la fonction $x(t)^\top Q h_2(0,0,t)$ appartient à $L^2([0,+\infty))$.

Récapitulons les résultats que nous avons obtenu :

- Pour la fonction $y(t)$, nous savons qu'elle est dans $L^2([0,+\infty))$ et vérifie

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \;=\; 0 \,. \tag{6.58}$$

- Pour la fonction $x(t)$, nous savons qu'elle vérifie (6.24) et que les fonctions $\varphi_1(t)$ (définie en (6.55)) et $x(t)^\top Q h_2(0,0,t)$ sont dans $L^2([0,+\infty))$ et que la fonction $x(t)^\top R x(t)$ est $L^1([0,+\infty))$.

Pour obtenir :

$$\lim_{t\longmapsto+\infty} x(t) \;=\; 0 \,, \tag{6.59}$$

nous appliquons le Lemme qui suit, démontré dans l'annexe H, en observant que $D(t) = h_2(0,0,t)$.

**Lemme 6.3** *Si $D(t)$ est une fonction continue et bornée, si*

$$M^\top Q + QM \;=\; -R \;\leq\; 0 \tag{6.60}$$

*où $Q$ est une matrice symétrique définie positive, s'il existe une fonction $K(t)$ continue et bornée telle que*

$$\dot{\chi} \;=\; -(M+DK)^\top \chi \tag{6.61}$$

*soit exponentiellement stable, si $\varphi_1$ et $\varphi_2$ sont $L^2([0,+\infty))$ et si $\varphi_3$ est $L^1([0,+\infty))$, alors chaque solution du système :*

$$\dot{x}(t) \;=\; M\,x(t) \;+\; \varphi_1(t) \quad , \qquad x(t)^\top Q\,D(t) \;=\; \varphi_2(t) \quad , \qquad x(t)^\top R\,x(t) \;=\; \varphi_3(t) \tag{6.62}$$

*converge vers zéro quand le temps tend vers l'infini.*

Puisque d'un autre côté $P(t)$ est bornée, (6.17), (6.23) et (6.58) impliquent finalement :

$$\lim_{t\longmapsto+\infty} (X(t) - X_r(t)) \;=\; 0 \quad , \qquad \lim_{t\longmapsto+\infty} (Y(t) - Y_r(t)) \;=\; 0 \,. \tag{6.63}$$

Par conséquent, la loi de commande $u = u_r + v$ fait de la trajectoire $(X_r, Y_r)$ une solution globalement asymptotiquement stable du système (6.1). De plus, on a :

$$|u_s - u_r| \;\leq\; \overline{u} \,. \tag{6.64}$$

□

## 6.4 Stabilité asymptotique uniforme globale.

Le résultat du Théorème 6.1 présente un inconvénient : il suppose que le sous système en $y$ admet $Y_r$ comme solution globalement uniformément asymptotiquement stable lorsque lui est appliquée la loi de commande $u_r$ et permet d'obtenir une nouvelle loi de commande qui rend la solution $(X_r, Y_r)$ non pas solution globalement uniformément asymptotiquement stable du système (6.1) mais seulement solution globalement asymptotiquement stable et cela même lorsque la variable $X$ est de dimension 1. Par conséquent, on ne peut pas appliquer récursivement le Théorème 6.1 à des systèmes de la forme (2.344). Toutefois, sous des hypothèses légèrement plus restrictives, il est possible d'améliorer le résultat de ce théorème et d'obtenir l'uniforme asymptotique stabilité désirée pour la solution $(X_r, Y_r)$.

### 6.4.1 Cas périodique.

Traitons tout d'abord du cas où la trajectoire de référence $(X_r(t), Y_r(t))$ et la loi de commande $u_r(t)$ sont des fonctions périodiques en $t$ et de période $T$. Ce cas particulier est important car dans la pratique des trajectoires de référence périodiques se présentent fréquemment. De plus, il est à noter que le corollaire qui suit se combine parfaitement avec le Théorème 5.4 de la section 5 et que l'un et l'autre peuvent être appliqués de façon récursive à des systèmes de la forme (2.344).

**Corollaire 6.4** *Supposons que les hypothèses du Théorème 6.1 soient vérifiées et que les fonctions $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$ soient périodiques en la variable $t$ et de période $T$. Alors la solution $(X_r, Y_r)$ du système (6.1) bouclé avec (6.44) est une solution globalement uniformément asymptotiquement stable si $\lambda$ est choisie périodique en temps et de période $T$.* [1]

**Preuve :** Supposer que les fonctions $(X_r(t), Y_r(t), u_r(y,t))$ sont périodiques en temps et de période $T$ et choisir $\lambda(X, Y, .)$ périodique et de période $T$ implique que le système (6.24) est périodique en temps. D'un autre côté, ce système bouclé avec la loi de commande (6.44) admet zéro comme solution localement asymptotiquement stable et toutes ses solutions tendent vers zéro en $+\infty$. Par conséquent, grâce à [83, Theorem 11.3], nous savons que zéro est solution globalement uniformément asymptotiquement stable du système (6.24) bouclé avec la loi de commande (6.44). Le résultat désiré s'en suit. $\Box$

### 6.4.2 Cas général.

Le résultat que nous présentons maintenant est une version non autonome du Corollaire 2.16 de la section 2.2.3.3. Il présente l'avantage de pouvoir être appliqué de façon récursive à des systèmes de la forme (2.344).

**Théorème 6.5** *Si les hypothèses H0, H1, H2 sont vérifiées et si la paire $(M, D(t)^\top Q)$, où $D(t)$ est donnée en (6.11) et $Q$ est une matrice symétrique définie positive vérifiant (6.37), est uniformément observable, alors pour tout $\overline{u}$ appartenant à $(0, +\infty]$, la solution $(X_r, Y_r)$ peut être rendue solution globalement uniformément asymptotiquement stable du système (6.1) au moyen d'un bouclage d'état $\overline{u}(X, Y, t)$ tel que :*

$$|\overline{u}(X, Y, t) - u_r(t)| \leq \overline{u} . \tag{6.65}$$

[1] Cette dernière condition n'est pas restrictive, un tel choix étant toujours possible dès que les fonctions $(X_r(t), Y_r(t), u_r(y,t))$ sont de période $T$.

**Preuve.** Pour le système (6.24), nous allons construire une fonction de Lyapuonv dépendante du temps assignée strictement par une loi de commande de la forme (6.44). Pour obtenir ce résultat, nous allons procéder d'une façon analogue à celle employée pour prouver le Corollaire 2.16.

Commençons par remarquer que dans les hypothèses du Théorème 6.5 sont incluses celles du Théorème 6.1. Donc pour une fonction $U$ donnée en (6.38) et une loi de commande $v$ donnée en (6.44), on a l'inégalité (6.47).

Observons que la fonction $\lambda$ qui intervient dans la formule (6.44) peut être choisie indépendante de $x$ et de $t$ puisque d'une part, d'après H0, la solution $(X_r(t), Y_r(t), u_r(t))$ est bornée sur $[0, +\infty)$ et que d'autre part $\frac{|v|}{\lambda(x,y,t)}$, où $v$ est donnée en (6.44), peut être majorée par une fonction dépendante seulement de $y$. Pour voir cela, il suffit de d'adapter les calculs de l'annexe C, à partir de (C.69).

Notons donc $\lambda(x, y, t)$ par $\lambda(y)$ et posons $\lambda_0 = \lambda(0)$. Alors, on a :

$$v(0, x, t) \;=\; -\,\lambda_0 \frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} D(t)^\top Q x \;. \tag{6.66}$$

Choisissons pour $\sigma$ est une saturation linéaire[2] bornée par 1 et linéaire sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Afin d'exploiter (6.66), commençons par prouver le lemme suivant :

**Lemme 6.6** *Considérons le système suivant :*

$$\dot{x} \;=\; Mx - \lambda_0 \frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} D(t)D(t)^\top Q x \;. \tag{6.67}$$

*où $M$ est une matrice vérifiant (6.37), avec $Q$ une matrice symétrique définie positive, où $\lambda_0$ est une constante strictement positive et où $\sigma$ est une saturation linéaire bornée par 1 et linéaire sur $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. Supposons que la paire $(M, D(t)^\top Q)$ soit uniformément observable. Alors, il existe une fonction $\mathsf{Q}$ appartenant à la famille définie en (2.152) telle que :*

$$\dot{\mathsf{Q}}_{(6.67)}(x) \;\leq\; -\frac{1}{2}|x|^2 \;. \tag{6.68}$$

**Preuve du Lemme 6.6.** Commençons par établir que, pour tout $\varepsilon > 0$, la fonction matricielle $(M - \varepsilon D(t)D(t)^\top)$ est uniformément asymptotiquement stable. On a :

$$Q[M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q] \;+\; [M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q]^\top Q \;+\; 2\varepsilon Q D(t)D(t)^\top Q \;=\; 0 \tag{6.69}$$

Donc, la dérivée de $x^\top Q x$ le long de :

$$\dot{x} \;=\; (M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q)x \tag{6.70}$$

est donnée par :

$$\dot{\overbrace{x^\top Q x}} \;=\; -\,2\varepsilon Q D(t)D(t)^\top Q \;. \tag{6.71}$$

D'un autre côté, puisque $(M, D(t)^\top Q)$ est supposée être uniformément observable, il en est de même de $((M - \varepsilon D(t)D(t)^\top Q, D(t)^\top Q)$. Avec (6.71), on en déduit immédiatement de [32, Chapter 4, Example 4.7] que la fonction matricielle $(M - \varepsilon D(t)D(t)^\top)$ est uniformément asymptotiquement stable.

[2] Voir les définitions de base

Il s'en suit d'après [32, Chapter 4, Theorem 4.3] qu'il existe une matrice $Q_\varepsilon(t)$ telle que :

$$\dot{\overbrace{x^\top Q_\varepsilon(t) x}}_{(6.70)} \;=\; -\,|x|^2 \;. \tag{6.72}$$

Etablissons maintenant la stabilité asymptotique uniforme de (6.67).

On a :

$$\dot{\overbrace{x^\top Q x}}_{(6.67)} \;=\; -\lambda_0 \frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} |D(t)^\top Q x|^2 \;. \tag{6.73}$$

Considérons $\mathcal{Q}(x)$ définie en (2.152) en prenant $\varepsilon = \lambda_0$ et en gardant $q$ pour l'instant quelconque.

$$\dot{\mathcal{Q}}(x) \;=\; -2\lambda_0 q \sigma(|x|_Q)|x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 \;-\; |x|^2 + 2x^\top Q_{\lambda_0}(t)\lambda_0 \left(\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right) D(t)D(t)^\top Q x \tag{6.74}$$

Mais :

$$\begin{aligned}\left|2x^\top Q_{\lambda_0}(t)\lambda_0 \left(\tfrac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right) D(t)D(t)^\top Q x\right| \;&\leq\; \lambda_0 q \sigma(|x|_Q)|x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 \\ &+ \tfrac{4\lambda_0 |D(t)|^2}{q\sigma(|x|_Q)|x|_Q} \left(\tfrac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right)^2 |x^\top Q_{\lambda_0}(t)|^2\end{aligned} \tag{6.75}$$

Donc, pour une constante $c > 0$ :

$$\dot{\mathcal{Q}}(x) \;\leq\; -\lambda_0 q \sigma(|x|_Q)|x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 \;-\; |x|^2 + \frac{c\lambda_0 |x|}{q\sigma(|x|_Q)} \left(\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right)^2 \;. \tag{6.76}$$

Considérons deux cas :

- Premier cas : $|x|_Q \;\leq\; \frac{1}{2}$. Alors $\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1 = 0$.

- Deuxième cas : $|x|_Q \;\geq\; \frac{1}{2}$. Alors $\left(\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right)^2 \;\leq\; 4|x|_Q^2$. Donc, pour $q$ suffisamment grand,

$$\frac{c\lambda_0 |x|_Q}{q\sigma(|x|_Q)} \left(\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q} - 1\right)^2 \;\leq\; \frac{1}{2}|x|^2 \;. \tag{6.77}$$

Finalement, on a donc pour un tel choix pour $q$ :

$$\dot{\mathcal{Q}}(x) \;\leq\; -\,\lambda_0 q \sigma(|x|_Q)|x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 \;-\; \frac{1}{2}|x|^2 \;<\; 0 \quad , \quad \forall\, x \neq 0 \;. \tag{6.78}$$

Ceci termine la preuve du Lemme 6.6. □

Prenons maintenant la dérivée de $\bar{l}(\mathcal{Q}(x))$ le long de (6.24) en boucle fermée lorsque $\bar{l}$ est la fonction donnée en (2.151).

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{\bar{l}(\mathcal{Q}(x))}} \;&=\; \bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\tfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\,[Mx + h_1(y,t) + h_2(y, v(y,x,t), t)v(y,x,t)] \\ &\leq\; \bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\tfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\,[Mx + D(t)v(0,x,t)] \\ &+\; \bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\tfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\,[h_1(y,t) + h_2(y, v(y,x,t), t)v(y,x,t) \;-\; h_2(0,0,t)v(0,x,t)] \\ &\leq\; -\,\tfrac{1}{2}\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))|x|^2 - \tfrac{\lambda_0 q}{2}\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\sigma(|x|_Q)|x|_Q |D(t)^\top Q x|^2 + |h_1(y,t)| \\ &\quad + \left|\bar{l}'(\mathcal{Q}(x))\tfrac{\partial \mathcal{Q}}{\partial x}(x)\right| |h_2(y, v(y,x,t), t)v(y,x,t) \;-\; h_2(0,0,t)v(0,x,t)|\end{aligned} \tag{6.79}$$

Grâce à (6.32) :

$$\begin{aligned}\dot{\overline{l(\mathsf{Q}(x))}} \;\leq\;& -\tfrac{1}{2}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2 - \tfrac{\lambda_0 q}{2}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\sigma(|x|_Q)|x|_Q|D(t)^\top Qx|^2 + \gamma(|y|)|y|^2 \\ & +\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\tfrac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)||v(y,x,t)| \\ & +\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\tfrac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |D(t)||v(y,x,t) \;-\; v(0,x,t)|\;.\end{aligned} \tag{6.80}$$

Grâce au fait que $h_2$ et $v$ sont de classe $C^1$ et que $|v|$ et $|D(t)|$ sont bornée, on déduit l'existence d'une constante $c > 0$ et d'une fonction $\xi$ continue telles que :

$$\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\frac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |D(t)||v(y,x,t) \;-\; v(0,x,t)| \;\leq\; c\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\frac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right|\xi(|y|)|y| \tag{6.81}$$

$$|h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)| \;\leq\; \xi(|y|)|y| + c|v(y,x,t)| \tag{6.82}$$

L'inégalité (6.81) donne, pour tout $\eta > 0$,

$$\begin{aligned}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\frac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |D(t)||v(y,x,t) \;-\; v(0,x,t)| \;&\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + \eta\left(\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\frac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right|\right)^2 \\ &\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + c\eta\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2\;.\end{aligned}$$

Donc, pour $\eta$ suffisamment petit,

$$\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\frac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |D(t)||v(y,x,t) \;-\; v(0,x,t)| \;\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + \frac{1}{8}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2\;. \tag{6.83}$$

L'inégalité (6.82) donne :

$$\begin{aligned}|h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)||v(y,x,t)| \;&\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + c|v(y,x,t)|^2 \\ &\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + c|v(0,x,t)|^2 \\ &\quad\; +c(|v(0,x,t)| - |v(y,x,t)|)\end{aligned}$$

Et donc, $v$ étant bornée et $C^1$, pour une fonction $\xi_2(|y|)$ positive et continue, on a :

$$\begin{aligned}|h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)||v(y,x,t)| \;&\leq\; c\xi(|y|)^2|y|^2 + c|v(0,x,t)|^2 + c\xi_2(|y|)|y| \\ &\leq\; c\xi_3(|y|)|y| + c\left|\lambda_0\frac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q}D(t)^\top Qx\right|^2 + c\xi_2(|y|)|y|\;.\end{aligned}$$

Donc, pour tout $\eta > 0$ :

$$\begin{aligned}&\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\tfrac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)||v(y,x,t)| \;\leq \\ &\qquad c\xi(|y|)^2|y|^2 + c\eta\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2 + c\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\tfrac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right|\left|\lambda_0\tfrac{\sigma(|x|_Q)}{|x|_Q}D(t)^\top Qx\right|^2\end{aligned}$$

Par conséquent, $D(t)$ étant bornée, pour $\eta$ et $\lambda_0$ suffisamment petits, on a :

$$\begin{aligned}&\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))\left|\tfrac{\partial \mathsf{Q}}{\partial x}(x)\right| |h_2(y, v(y,x,t),t) - h(0,0,t)||v(y,x,t)| \;\leq \\ &\qquad c\xi(|y|)^2|y|^2 + \tfrac{1}{8}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2\end{aligned} \tag{6.84}$$

Grâce à (6.83) et (6.84) et (6.80), on obtient, pour une fonction positive continue $\xi_4$ :

$$\dot{\overbrace{\bar{l}(\mathsf{Q}(x))}} \leq -\frac{1}{4}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2 + \xi_4(|y|)|y|^2 . \tag{6.85}$$

D'un autre côté, grâce à (6.47), on a :

$$\dot{\overbrace{U(x,y,t)}}_{(6.1)} \leq -\frac{1}{2}K'(V(y,t))\,W(y,t) \tag{6.86}$$

où $V$ et $W$ sont des fonctions vérifiant (6.33), (6.34) et (6.35). Alors puisque $U(x,y,t) \geq K(V(y,t))$, on déduit de l'annexe E qu'il existe une fonction $\overline{K}$ de classe $C^2$, de classe $\mathcal{K}^\infty$ et de dérivée strictement positive telle que :

$$\frac{1}{4}\overline{K}'(U(x,y,t))K'(V(y,t))\,W(y,t) \geq \xi_4(|y|)|y|^2 . \tag{6.87}$$

Il s'en suit immédiatement que :

$$\dot{\overbrace{\mathcal{U}(x,y,t)}} \leq -\frac{1}{4}K'(V(y,t))\,W(y,t) - \frac{1}{4}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2 \tag{6.88}$$

où

$$\mathcal{U}(x,y,t) = \bar{l}(\mathsf{Q}(x)) + \overline{K}(U(x,y,t)) . \tag{6.89}$$

Puisque, d'après (6.42), $K'(s) \geq 1$, on obtient :

$$\dot{\overbrace{\mathcal{U}(x,y,t)}} \leq -\frac{1}{4}\,\alpha_3(|y|) - \frac{1}{4}\bar{l}'(\mathsf{Q}(x))|x|^2 . \tag{6.90}$$

Pour conclure notre preuve, il suffit de montrer que le Théorème 3.1 de [21, Chapter 10] s'applique.

- On a :

$$\overline{K}(K(\alpha_1(|y|))) + \bar{l}(\mathsf{Q}(x)) \leq \mathcal{U}(x,y,t) \leq \bar{l}(\mathsf{Q}(x)) + \overline{K}(K(\alpha_2(|y|)) + c|x|_Q) . \tag{6.91}$$

  Donc $\mathcal{U}(x,y,t)$ est " positive definite " et " possess an infinitely small upper bound " au sens des définition de [21, Chapter 10, paragraph 3].

- Le membre de droite de l'inégalité (6.90) est constituée d'une fonction " positive definite ".

□

# Chapitre 7

# Application : Mouvement périodique du système pendule chariot.

Nous allons maintenant donner un exemple qui illustre comment les théorèmes 5.4 et 6.1 peuvent être appliqués de façon récursive à un système de forme feedforward et être combinés entre eux. Le système que nous considérons est le système pendule-chariot dèjà étudié à la section 2.5.4. Nous nous donnons pour objectif de stabiliser globalement asymptotiquement celui-ci autour d'une trajectoire de référence périodique et allons traiter ce problème en deux temps :

- Détermination d'une trajectoire de référence et de sa commande associée.
- Stabilisation uniforme asymptotique globale de la trajectoire précédemment déterminée.

Nous souhaitons donner à l'angle du pendule un mouvement oscillatoire d'une amplitude strictement inférieure à $\frac{\pi}{2}$. En raison de cette contrainte, nous pouvons opérer sur les équations initiales (11) ou bien sur celles obtenues après le changement de variables (2.441) ou encore sur celles qui sont données en (2.444) et qui se déduisent des précédentes par un changement de variables et de loi de commande. Ces dernières présentent l'avantage de n'avoir de non-linéarités présentes que dans le sous système en $(t_1, r_1)$ et de pouvoir être modifiées de la façon suivante : Le changement de loi de commande

$$u \;=\; r_1 + v \tag{7.1}$$

transforme le système (2.444) en :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & s_1 - t_1 \\ \dot{s}_1 & = & -\,r_1 - \,v \\ \dot{t}_1 & = & r_1 \\ \dot{r}_1 & = & -\,(t_1 + 2r_1)\sqrt{1+t_1^2} - \,v\sqrt{1+t_1^2} \end{array}\right. \tag{7.2}$$

et le changement de variables :

$$x_2 \;=\; x_1 \quad , \quad s_2 \;=\; s_1 + t_1 \quad , \quad t_2 \;=\; t_1 \quad , \quad r_2 \;=\; r_1 \;, \tag{7.3}$$

donne :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_2 & = & s_2 - \,t_2 \\ \dot{s}_2 & = & -\,v \\ \dot{t}_2 & = & r_2 \\ \dot{r}_2 & = & -\,(t_2 + 2r_2)\sqrt{1+t_2^2} - \,v\sqrt{1+t_2^2} \end{array}\right. \tag{7.4}$$

## 7.1 Construction d'une trajectoire de référence.

Le problème que nous nous posons est celui de trouver une loi de commande $v_r$ et des fonctions $(x_{2r}, s_{2r}, t_{2r}, r_{2r})$, solution du système précédent avec $v_r$ pour loi de commande, telles que

$$t_{2r}(t) = \cos(t) . \tag{7.5}$$

On obtient immédiatement :

$$r_{2r}(t) = -\sin(t) \quad , \quad v_r(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} - \cos(t) + 2\sin(t) . \tag{7.6}$$

Par conséquent, $s_{2r}$ doit vérifier :

$$\dot{s}_{2r} = \cos(t) - 2\sin(t) - \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos(t)^2}} . \tag{7.7}$$

Pour $s_{2r}$ nous pouvons donc choisir :

$$s_{2r}(t) = 2\cos(t) + \sin(t) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right) . \tag{7.8}$$

Par conséquent, $x_{2r}$ doit vérifier :

$$\dot{x}_{2r} = \sin(t) - \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right) . \tag{7.9}$$

Pour $x_{2r}$ nous pouvons donc choisir :

$$x_{2r}(t) = -\cos(t) - \int_0^t \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\right) ds \tag{7.10}$$

qui est une fonction bornée car :

$$\int_0^{2\pi} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\right) ds = 0 \tag{7.11}$$

et $\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\right)$ est de période $2\pi$.

En conclusion, nous avons établi que la trajectoire

$$\begin{aligned} x_{2r}(t) &= -\cos(t) - \int_0^t \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\right) ds \\ s_{2r}(t) &= 2\cos(t) + \sin(t) - \arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right) \\ t_{2r}(t) &= \cos(t) \\ r_{2r}(t) &= -\sin(t) \end{aligned} \tag{7.12}$$

et la loi de commande

$$v_r(t) = \frac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}} - \cos(t) + 2\sin(t) \tag{7.13}$$

sont solution du problème de suivi exact de la sortie $t_{2r}(t) = \cos(t)$.

## 7.2 Stabilisation asymptotique uniforme globale.

Nous allons maintenant construire une loi de commande qui rend la solution précédemment déterminée globalement uniformément asymptotiquement stable pour le système (7.4). Afin de ramener ce problème à celui de la stabilisation asymptotique globale de l'origine pour un système non linéaire et non-autonome, posons

$$\begin{array}{c} \tilde{x_2} \;=\; x_2 - x_{2r} \quad , \quad \tilde{s_2} \;=\; s_2 - s_{2r} \quad , \quad \tilde{t_2} \;=\; t_2 - t_{2r} \quad , \quad \tilde{r_2} \;=\; r_2 - r_{2r} \quad , \\ v \;=\; v_r(t) + \tilde{v} \; . \end{array} \tag{7.14}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x_2}} & = & \tilde{s_2} - 2\tilde{t_2} \\ \dot{\tilde{s_2}} & = & -\tilde{v} \\ \dot{\tilde{t_2}} & = & \tilde{r_2} \\ \dot{\tilde{r_2}} & = & -(t_2 + 2r_2)\sqrt{1+t_2^2} - (v_r(t) + \tilde{v})\sqrt{1+t_2^2} + \cos(t) \end{array} \right. \tag{7.15}$$

Après le changement de loi de commande :

$$\tilde{v} \;=\; \frac{-\cos(t)\,\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)} + \sqrt{1+t_2^2}\right)} + \tilde{v}_2 \tag{7.16}$$

et en posant :

$$T \;=\; \frac{2\cos^2(t)}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)} + \sqrt{1+t_2^2}\right)} \tag{7.17}$$

le système (7.15) devient :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{\tilde{x_2}} & = & \tilde{s_2} - 2\tilde{t_2} \\ \dot{\tilde{s_2}} & = & \dfrac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)} + \sqrt{1+t_2^2}\right)} - \tilde{v}_2 \\ \dot{\tilde{t_2}} & = & \tilde{r_2} \\ \dot{\tilde{r_2}} & = & -[\tilde{t_2} + 2\tilde{r_2}]\sqrt{1+t_2^2} - T\tilde{t_2} - \tilde{v}_2\sqrt{1+t_2^2} \; . \end{array} \right. \tag{7.18}$$

### 7.2.1 Stabilisation du sous-système en $(\tilde{s}_2, \tilde{t}_2)$.

Prenons $\tilde{v}_2 = 0$ et montrons au moyen d'une construction Lyapunov que le sous système en $(\tilde{t_2}, \tilde{r_2})$ admet alors l'origine comme solution globalement uniformément asymptotiquement stable. Posons

$$Q_1(\tilde{t_2}, \tilde{r_2}) \;=\; 2\tilde{t_2}^2 + \tilde{r_2}^2 + \tilde{t_2}\tilde{r_2} \tag{7.19}$$

et prenons la dérivée de cette fonction par rapport au temps :

$$\begin{aligned} \overbrace{\dot{Q_1}(\tilde{t_2}, \tilde{r_2})}_{(7.18)} \;&=\; -\sqrt{1+\tilde{t_2}^2}\,(\tilde{t_2} + 2\tilde{r_2})^2 + \tilde{r_2}^2 - \tilde{t_2}^2 T - 2\tilde{t_2}\tilde{r_2}(T-2) && (7.20) \\ &\leq\; -\left[3\tilde{r_2}^2 + \tilde{t_2}^2(1+T) + 2\tilde{t_2}\tilde{r_2}T\right] && (7.21) \end{aligned}$$

En utilisant :

$$2\left|\tilde{t_2}\tilde{r_2}T\right| \;\leq\; \tilde{r_2}^2 + \tilde{t_2}^2 T^2 \; , \tag{7.22}$$

cette inégalité devient :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{Q_1(\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;\leq\; -\left[2\tilde{r_2}^2+\tilde{t_2}^2(1+T-T^2)\right] \tag{7.23}$$

Puisque $T \in [0,1)$, on obtient finalement :

$$Q_1(\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \;=\; 2\tilde{t_2}^2+\tilde{r_2}^2+\tilde{t_2}\tilde{r_2} \quad , \quad \overset{\cdot}{\overbrace{Q_1(\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;\leq\; -\left[2\tilde{r_2}^2+\tilde{t_2}^2\right] \ . \tag{7.24}$$

**Stabilisation du sous système en** $(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})$**.** On peut vérifier que le Théorème 6.1 s'applique avec $(\tilde{t_2},\tilde{r_2})$ jouant le rôle de $y$ et $\tilde{s_2}$ celui de $x$. Nous allons maintenant déterminer la formule explicite d'une loi de commande stabilisante et d'une fonction de Lyapunov assignée par celle-ci.

Posons

$$Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \;=\; Q_1(\tilde{t_2},\tilde{r_2})+\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}-1 \tag{7.25}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\overset{\cdot}{\overbrace{Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;&\leq\; -\left[2\tilde{r_2}^2+\tilde{t_2}^2\right]+\frac{\tilde{s_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\left[\frac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)}+\sqrt{1+t_2^2}\right)}\right]\\ &\quad -\frac{\tilde{s_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\tilde{v_2}-\tilde{v_2}\sqrt{1+t_2^2}\left(2\tilde{r_2}+\tilde{t_2}\right) &(7.26)\\ &\leq\; -\left[2\tilde{r_2}^2+\left(1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}\right)\tilde{t_2}^2\right]+\left[-\frac{\tilde{s_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}-\left(\tilde{r_2}+2\tilde{t_2}\right)\sqrt{1+t_2^2}\right]\tilde{v_2} &(7.27)\end{aligned}$$

Pour faciliter l'élimination des termes du premier ordre dans la dernière étape de notre construction, nous souhaitons obtenir une loi de commande stabilisante pour le sous-système en $(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})$ ayant la forme suivante :

$$\tilde{v_2}(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \;=\; \left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \tag{7.28}$$

avec $\xi(0,0,0) \neq 0$. En effet, dans ce cas les termes du premier ordre disparaissent avec le changement de variables :

$$\tilde{x_3} \;=\; \tilde{x_2}+\frac{\tilde{s_2}}{\xi(0,0,0)} \ . \tag{7.29}$$

Avec un tel choix, on obtient :

$$\begin{aligned}\overset{\cdot}{\overbrace{Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;\leq\; &-2\tilde{r_2}^2-\tfrac{1}{2}\tilde{t_2}^2-\tfrac{\xi\tilde{s_2}^2}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}+\tfrac{2\xi\tilde{s_2}\tilde{t_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}-\xi\tilde{s_2}\left(\tilde{r_2}+2\tilde{t_2}\right)\sqrt{1+t_2^2} &(7.30)\\ &+2\xi\left(2\tilde{t_2}^2+\tilde{t_2}\tilde{r_2}\right)\sqrt{1+t_2^2}\ .\end{aligned}$$

On remarque que :

$$1+t_2^2 \;=\; 1+(\tilde{t_2}+\cos(t))^2 \;\leq\; 3+2\tilde{t_2}^2 \ . \tag{7.31}$$

Il s'en suit :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;\leq\; -2\tilde{r_2}^2\left[1-4\xi\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}\right]\left[3+2\tilde{t_2}^2\right] \tag{7.32}$$

$$-\tilde{t_2}^2\left[1-\frac{1}{2+\sqrt{2}}-\frac{4\xi}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}-21\xi\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}(3+2\tilde{t_2}^2)\right]-\frac{\xi\tilde{s_2}^2}{4\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\ .$$

On en déduit un choix possible pour $\xi$ :

$$\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \ = \ \frac{1}{108\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}(3+2\tilde{t_2}^2)}\ . \tag{7.33}$$

Celui-ci donne :

$$\overset{\cdot}{\overbrace{Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \ \le \ -\tilde{r_2}^2-\frac{1}{2}\tilde{t_2}^2-\frac{1}{4}\frac{\xi\tilde{s_2}^2}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\ . \tag{7.34}$$

### 7.2.2 Stabilisation du système global.

A nouveau, nous pouvons vérifie que le Théorème 6.1 s'applique avec $(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})$ jouant le rôle de $y$ et $\tilde{x_2}$ celui de $x$. Comme nous l'avons mentionné plus haut, nous éliminons le terme du premier ordre en prenant :

$$\tilde{x_3} \ = \ \tilde{x_2}+\frac{1}{\xi_0}\tilde{s_2} \tag{7.35}$$

et

$$\tilde{v_2} \ = \ \left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})+\xi_0\tilde{v_3}\ . \tag{7.36}$$

avec $\xi_0 \ = \ \frac{1}{324}$. Alors :

$$\begin{aligned}
\dot{\tilde{x_3}} \ &= \ \tilde{s_2}-2\tilde{t_2} \qquad (7.37)\\
&\quad +\frac{1}{\xi_0}\left(\frac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)}+\sqrt{1+t_2^2}\right)}-\left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})-\xi_0\tilde{v_3}\right)\\
&= \ \left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\left[1-\frac{1}{\xi_0}\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})\right]+\frac{1}{\xi_0}\frac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)}+\sqrt{1+t_2^2}\right)}-\tilde{v_3} \qquad (7.38)
\end{aligned}$$

Définissons $Q_3$ par :

$$Q_3(\tilde{x_3},\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}) \ = \ K(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))+\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}-1\ . \tag{7.39}$$

où $K$ désigne une fonction dont la dérivée est strictement positive et croissante.

Prenons la dérivée de $Q_3$ :

$$\begin{aligned}
\overset{\cdot}{\overbrace{Q_3(\tilde{x_3},\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \ &= \ K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\overset{\cdot}{\overbrace{Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}}\\
&\quad +\frac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\left[\left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\left[1-\frac{1}{\xi_0}\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})\right]+\frac{1}{\xi_0}\frac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)}+\sqrt{1+t_2^2}\right)}\right]\\
&\quad -\frac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\tilde{v_3}\\
&\le \ -K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\left[\tilde{r_2}^2+\frac{1}{2}\tilde{t_2}^2+\frac{1}{4}\frac{\xi\tilde{s_2}^2}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\right]\\
&\quad -\left[\xi_0K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\left(\frac{\partial Q_2}{\partial\tilde{r_2}}\sqrt{1+t_2^2}+\frac{\partial Q_2}{\partial\tilde{s_2}}\right)+\frac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\right]\tilde{v_3}\\
&\quad +\left|\left(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}\right)\left[1-\frac{1}{\xi_0}\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})\right]\right|+\frac{1}{2\xi_0}\tilde{t_2}^2\ .
\end{aligned} \tag{7.40}$$

En choisissant :

$$\tilde{v_3} \;=\; \xi_0 K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\left(\frac{\partial Q_2}{\partial \tilde{r_2}}\sqrt{1+t_2^2}+\frac{\partial Q_2}{\partial \tilde{s_2}}\right)+\frac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\ , \tag{7.41}$$

on obtient :

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{Q_3(\tilde{x_3},\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}} \;&\leq\; -K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\left[\tilde{r_2}^2+\left(\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{\xi_0 K'(0)}\right)\tilde{t_2}^2+\tfrac{1}{4}\tfrac{\xi\tilde{s_2}^2}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\right]\\ &\quad -\left[\xi_0 K'(Q_2(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2}))\left(\tfrac{\partial Q_2}{\partial \tilde{r_2}}\sqrt{1+t_2^2}+\tfrac{\partial Q_2}{\partial \tilde{s_2}}\right)+\tfrac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\right]^2\\ &\quad +\left|(\tilde{s_2}-2\tilde{t_2})\left[1-\tfrac{1}{\xi_0}\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})\right]\right|\ .\end{aligned} \tag{7.42}$$

On remarque alors que :

$$|\tilde{s_2}-2\tilde{t_2}|\left|1-\frac{\xi(\tilde{s_2},\tilde{t_2},\tilde{r_2})}{\xi_0}\right| \;\leq\; \left(2+\sqrt{2}\right)\frac{\tilde{s_2}^2}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}+\frac{5}{3}\tilde{t_2}^2\ . \tag{7.43}$$

Ceci nous amène à déterminer une fonction $k$ telle que :

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{\xi_0 K'(0)} \;\geq\; \frac{1}{4}\ . \tag{7.44}$$

et

$$K'\left(\tilde{t_2}^2+\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}-1\right) \;\geq\; 108\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}\left(3+2\tilde{t_2}^2\right)+\frac{20}{3}\ . \tag{7.45}$$

En prenant :

$$K(s) \;=\; 126s^3+576s^2+1296s \tag{7.46}$$

on obtient (7.44) et (7.45). La loi de commande qui correspond au choix effectué pour $k$ est :

$$\tilde{v_3} \;=\; \left(\frac{7}{6}Q_2^2+\frac{32}{9}Q_2+4\right)\left((2\tilde{r_2}+\tilde{t_2})\sqrt{1+\tilde{t_2}^2}+\frac{\tilde{s_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\right)+\frac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\ . \tag{7.47}$$

## 7.3 Conclusion.

Grâce à la formule (7.47) que nous venons d'établir, nous déduisons que la commande :

$$\begin{aligned}u \;&=\; r_1+\tfrac{\cos(t)}{\sqrt{1+\cos(t)^2}}-\cos(t)+2\sin(t)-\tfrac{\cos(t)\tilde{t_2}^2}{\sqrt{1+\cos^2(t)}\left(\sqrt{1+\cos^2(t)}+\sqrt{1+t_1^2}\right)}\\ &\quad+\tfrac{1}{108}\tfrac{\tilde{s_2}-2\tilde{t_2})}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2(3+2\tilde{t_2}^2)}}\\ &\quad+\tfrac{1}{324}\left(\tfrac{7}{6}Q_2^2+\tfrac{32}{9}Q_2+4\right)\left((2\tilde{r_2}+\tilde{t_2})\sqrt{1+\tilde{t_2}^2}+\tfrac{\tilde{s_2}}{\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}}\right)\\ &\quad+\tfrac{1}{324}\tfrac{\tilde{x_3}}{\sqrt{1+\tilde{x_3}^2}}\end{aligned} \tag{7.48}$$

avec

$$\begin{aligned}\tilde{x_2} \;&=\; x_1+\cos(t)+\int_0^t \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sin(s)\right)ds\ ,\\ \tilde{s_2} \;&=\; s_1+t_1-2\cos(t)-\sin(t)+\arcsin\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin(t)\right)\ ,\\ \tilde{t_2} \;&=\; t_1-\cos(t)\quad ,\quad \tilde{r_2} \;=\; r_1+\sin(t)\\ Q_2 \;&=\; 2\tilde{t_2}^2+\tilde{r_2}^2+\tilde{t_2}\tilde{r_2}+\sqrt{1+\tilde{s_2}^2}-1\end{aligned} \tag{7.49}$$

est solution pour le système (2.444) du problème de suivi asymptotique uniforme de la trajectoire de sortie $t_{1r}=\cos(t)$.

# Conclusion

Nous avons proposé une construction Lyapunov de lois de commandes stabilisantes pour la classe des systèmes de la forme $\dot{x} = h(x, y, u)$, $\dot{y} = f(y, u)$ , en ayant supposé la stabilisabilité asymptotique globale du sous système en $y$. Nous avons également montré que, si cette stabilisation peut se faire au moyen d'une commande saturée, il en est de même pour le système total. Nous avons appelé notre technique *ajout d'intégration*, puisque les hypothèses requises sur le sous système en $x$ portent principalement sur le fait que les composantes en $x$ intègrent des fonctions de $y$ et de $u$.

L'outil technique fondamental peut être utilisé de façon combinée avec d'autres. En particulier, l'avantage qu'il y a à posséder des fonctions de Lyapunov assignées fait que celui-ci se combine fort bien avec la technique d'ajout d'un intégrateur et permet la construction de lois de commande adaptatives (voir à ce sujet [56]).

Nous avons appliqué cet outil de façon récursive pour prouver la stabilité asymptotique globale de systèmes ayant une structure récurrente spéciale et dont la forme a été appelée forme feedforward. Ces systèmes ne sont génériquement pas linéarisables pas bouclage dynamique.

En outre, afin d'améliorer l'intérêt pratique de nos résultats, et notamment de pourvoir procéder par récurrence de façon explicite, nous avons pu, dans un cas particulier, modifier la fonction de Lyapunov que nous avions employée afin d'obtenir que la dérivée de Lie de celle-ci soit définie négative lorsque les dimensions des variables d'intégration successivement ajoutées sont supérieure ou égale à deux.

Ensuite, nous avons adapté les diverses idées dont nous venons de parler au problème important de suivi de trajectoire pour des systèmes ayant une structure feedforward.

Remarquons que les diverses applications de nos techniques que nous avons effectué montre que les preuves de nos résultats, de par leur aspect constructif, sont plus utile que ces résultats eux même.

Au cour de ces travaux, axés sur des problèmes profondément non-linéaires n'employant que peu les propriétés vérifiées par les linéarisations des divers systèmes considérés et pas du tout celle de partielle linéarisabilité, il est apparut que l'emploi de commandes saturées, qui, il n'y a pas longtemps encore, était dans le cas linéaire considéré comme mal aisé, permet d'obtenir d'importants résultats qui loin d'être simplement théoriques se sont immédiatement avéré avoir des applications pratiques intéressantes. Signalons encore que parmi les améliorations qui seraient peut être susceptibles d'être apportées à la technique que nous avons proposé, il pourrait y avoir la mise en place de résultats récursif portant sur des systèmes de formes feedforward pour lesquels l'exponentielle stabilité ne serait pas obtenue à chaque étape.

# Annexes

## A Illustration de [72, Theorem 2.1].

Afin de rappeler de quelle façon procède la technique de stabilisation de systèmes feedforward au moyen de saturations linéaires emboîtées, nous donnons ici l'Example 4.2 traité dans [72].

Le système considéré est le suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 & = & x_1 + \theta(t) x_2^2 \\ \dot{x}_2 & = & x_3 \\ \dot{x}_3 & = & u \end{array}\right. \tag{A.1}$$

où $u$ est l'entrée et $\theta$ une fonction du temps de norme bornée par une constante $K$ connue.

**Résultat.** L'origine du système (A.1) est globalement asymptotiquement stabilisé et localement exponentiellement stabilisé par une loi de commande :

$$u \;=\; -\sigma_3(x_3 + \sigma_2(x_2 + x_3 + \sigma_1(x_1 + 2x_2 + x_3))) \tag{A.2}$$

où chaque $\sigma_i$ est une saturation linéaire (voir les définitions de base) associée à des constantes $(L_i, M_i)$ choisies de façon appropriée.

**Preuve.** Avec le changement de variables :

$$\begin{array}{rcl} y_1 & = & x_1 + 2x_2 + x_3 \\ y_2 & = & x_2 + x_3 \\ y_3 & = & x_3 \end{array} \tag{A.3}$$

et la loi de commande

$$u \;=\; -\sigma_3(x_3 + \sigma_2(x_2 + x_3 + \sigma_1(x_1 + 2x_2 + x_3))) \tag{A.4}$$

le système (A.1) devient :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & y_2 + y_3 - \sigma_3(y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) + \theta(t)(y_2 - y_3)^2 \\ \dot{y}_2 & = & y_3 - \sigma_3(y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) \\ \dot{y}_3 & = & -\sigma_3(y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) \end{array}\right. \tag{A.5}$$

Soit $V_3(y_3) = y_3^2$. Alors :

$$\dot{V}_3(y_3) = -2y_3\sigma_3(y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) \ . \tag{A.6}$$

Prenons $L_3 = 1$, $M_3 = 2$ et $M_2 < \frac{1}{2}$. Alors, pour une constante $c > 0$

$$\dot{V}_3(y_3) < -c \quad , \quad \forall\, y_3 : |y_3| \geq 2M_2 \ . \tag{A.7}$$

Par conséquent, $y_3$ entre au bout d'un temps fini $t_3$ dans l'ensemble :

$$Q_3 = \{y_3 : |y_3| < 2M_2\} \tag{A.8}$$

et y reste par la suite. Puisque $L_3 = 1$ et $M_2 < \frac{1}{2}$,

$$u = -y_3 + \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \quad , \quad \forall y_3 \in Q_3 \ . \tag{A.9}$$

Donc, pour tout $t \geq t_3$, le système (A.5) se comporte comme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= y_2 - \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1))) + \theta(t)(y_2 - y_3)^2 \\ \dot{y}_2 &= -\sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \\ \dot{y}_3 &= -y_3 - \sigma_2(y_2 + \sigma_1(y_1)) \end{cases} \tag{A.10}$$

Etudions maintenant l'évolution de la variable $y_2$. Prenons $M_1 < \frac{L_2}{2}$. Alors par le même raisonnement que celui appliqué pour prouver que $y_1$ entre dans $Q_3$, on montre que $y_2$ entre au bout d'un temps fini $t_2$ dans l'ensemble $Q_2$ défini par :

$$Q_2 = \{y_2 : |y_2| < 2M_1\} \ . \tag{A.11}$$

et y reste par la suite. Donc que pour tout $t \geq t_2 \geq t_3$, le système (A.5) se comporte comme :

$$\begin{cases} \dot{y}_1 &= -\sigma_1(y_1) + \theta(t)(y_2 - y_3)^2 \\ \dot{y}_2 &= -y_2 - \sigma_1(y_1) \\ \dot{y}_3 &= -y_3 - y_2 - \sigma_1(y_1) \end{cases} \tag{A.12}$$

Etudions maintenant l'évolution de la variable $y_1$. La dérivée de :

$$V_1(y_1) = y_1^2 \tag{A.13}$$

le long de (A.12) donne

$$\dot{V}_1(y_1) = -2y_1\sigma_1(y_1) + 2y_1\theta(t)(y_2 - y_3)^2 \ . \tag{A.14}$$

Puisque pour tout $t \geq t_2$, on a :

$$|y_3| \leq 2M_2 \quad , \quad |y_2| \leq 2M_1 \leq 2M_2 \ , \tag{A.15}$$

pour tout $t \geq t_2$, on a :

$$\dot{V}_1(y_1) = -2y_1\sigma_1(y_1) + 32KM_2^2|y_1| \ . \tag{A.16}$$

On peut choisir $L_1 = \frac{M_1}{2}$. Alors la croissance de $\sigma$ implique que pour tout $y_1$ de norme supérieure à $L_1$,

$$\dot{V}_1(y_1) \leq \big(-M_1 + 32KM_2^2\big)\frac{M_1}{2} \ . \tag{A.17}$$

Donc, en prenant $M_2 \in \left]0, \frac{1}{8\sqrt{2}(K+1)}\right[$ et $M_1 \in \left]64KM_2^2, \frac{M_2}{2}\right[$, on a :

$$\dot{V}_1(y_1) \ < \ -\frac{M_1^2}{4} \quad , \quad \forall\, y_1 \ : \ |y_1| \ \geq \ L_1 \ = \ \frac{M_1}{2} \ . \tag{A.18}$$

On en déduit qu'au bout d'un temps fini $t_1$, $y_1$ entre dans l'ensemble $Q_1$ défini par :

$$Q_1 \ = \ \left\{ y_1 \ : \ |y_1| \ < \ \frac{M_1}{2} \right\} \tag{A.19}$$

et y reste par la suite. Alors, le système (A.12) se comporte, après le temps $t_1 \ \geq \ t_2 \ \geq \ t_3$, comme :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{y}_1 & = & -\,y_1 + \varphi_1(y_2, y_3, t) \\ \dot{y}_2 & = & -\,y_2 - \,y_1 \\ \dot{y}_3 & = & -\,y_3 - \,y_2 - \,y_1 \end{array} \right. \tag{A.20}$$

avec

$$\varphi_1(y_2, y_3, t) \ = \ \theta(t)(y_2 - y_3)^2 \tag{A.21}$$

qui vérifie :

$$|\varphi_1(y_2, y_3, t)| \ \leq \ 2K(2M_1|y_2| + 2M_2|y_3|) \ . \tag{A.22}$$

Le système (A.20) peut donc être vu comme un système linéaire exponentiellement stable perturbé par un terme majoré par une fonction linéaire dont les coefficients peuvent être choisis arbitrairement petits. Donc, en choisissant convenablement $M_1$ et $M_2$, on obtient un système globalement asymptotiquement stable et localement exponentiellement stable à l'origine.

Ceci termine notre preuve. □

# B Deux variantes de l'hypothèse A2.

Comme nous l'avons mentionné dans la section 1.1.2, un des points délicats et restrictifs de la technique de Jurdjevic et Quinn est l'hypothèse A2. Dans ce paragraphe, nous proposons deux variantes à cette hypothèse A2.

## B.1 Hypothèse A2'.

Pour simplifier, supposons que la variable $x_2$ ne soit pas présente.

**Hypothèse A2' :** *Il existe des fonctions* $g_2(x_1, y, u)$ *et* $\lambda(u)$ *continues,* $\lambda(u)$ *étant une matrice symétrique définie positive pour tout* $u \neq 0$ *et des fonctions* $\gamma_1, \gamma_2$ *continues, de classe* $\mathcal{K}^\infty$ *telles que, pour* $\mathcal{G}$ *définie en (1.22) :*

$$\limsup_{y \to 0} \frac{|\mathcal{G}(x_1, y, u) - g_2(x_1, y, u)\lambda(u)|}{\gamma_1(W(y))} < +\infty , \quad \forall x_1, u . \tag{B.1}$$

$$\liminf_{|u| \to 0} \frac{|\lambda(u)u|}{m(|u|)\gamma_1(\gamma_2(m(|u|)))} = +\infty . \tag{B.2}$$

*où* $m$ *est une fonction continue, zéro en zéro, strictement croissante sur un voisinage de l'origine telle que* $\frac{|u|}{m(|u|)}$ *est une fonction continue zéro en zéro strictement croissante sur un voisinage de l'origine,*

$$\gamma_1(w)\gamma_2^{-1}(w) < w , \quad w \neq 0 , \tag{B.3}$$

*et* $x_1 = 0$ *est la seule solution de :*

$$\dot{x}_1 = h_0(x_1) \quad , \quad \frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_0(x_1) = 0 \quad , \quad g_2(x_1, 0, 0) = 0 . \tag{B.4}$$

**Théorème B.1** *Si les hypothèses A1 et A2' sont vérifiées, alors pour tout* $\overline{u}$ *appartenant à* $(0, +\infty]$*, il existe une fonction* $\xi$ *continue et positive telle que la loi de commande :*

$$u_s = -\xi(x_1, y)g_2(x_1, 0, 0)^\top \tag{B.5}$$

*stabilise globalement asymptotiquement l'origine de (2.1) et est bornée par* $\overline{u}$*.*

**Preuve.** Pour prouver ce résultat, nous dérivons $V(y) + Q(x_1)$ par rapport au temps :

$$\dot{\overbrace{V(y) + Q(x_1)}} = -W(y) - R(x_1) + \mathcal{G}(x_1, y, u)u . \tag{B.6}$$

La condition (B.1) implique l'existence d'une fonction continue positive $\Gamma_1$ telle que :

$$\begin{aligned} |(\mathcal{G}(x_1, y, u)u - g_2(x_1, y, u)\lambda(u)u)| &\leq \Gamma_1(x_1, y, u)|u|\gamma_1(W(y)) \\ &\leq \Gamma_1(x_1, y, u)|u|\gamma_1(\gamma_2(\Gamma_1(x_1, y, u)|u|)) \\ &\quad + \gamma_1(W(y))\gamma_2^{-1}(W(y)) . \end{aligned} \tag{B.7}$$

Mais avec (B.4), il existe une fonction définie positive $\gamma_3$ telle que :

$$w - \gamma_1(w)\gamma_2^{-1}(w) \geq \gamma_3(w) . \tag{B.8}$$

Donc (B.6) donne :

$$\begin{aligned}\dot{\overbrace{V(y)+Q(x_1)}} \;&=\; -\gamma_3(W(y)) - R(x_1) + \Gamma_1(x_1,y,u)|u|\gamma_1(\gamma_2(\Gamma_1(x_1,y,u)|u|)) \\ &\quad + g_2(x_1,y,u)\lambda(u)u\,.\end{aligned} \tag{B.9}$$

D'après (B.2), $\frac{|u|}{m(|ul)}$ est une fonction continue zéro en zéro strictement croissante sur un voisinage de l'origine de sorte qu'il existe une fonction définie positive $\psi$ telle que si :

$$|u| \;\leq\; \psi(x,y) \tag{B.10}$$

on ait :

$$\Gamma_1(x_1,y,u)|u| \;\leq\; m(|u|)\,. \tag{B.11}$$

Alors

$$\Gamma_1(x_1,y,u)|u|\gamma_1(\gamma_2(\Gamma_1(x_1,y,u)|u|)) \;\leq\; m(|u|)\gamma_1(\gamma_2(m(|u|))\,. \tag{B.12}$$

D'après (B.2), il existe une fonction $n$ zéro en zéro, telle que pour tout $v$, $n(v)$ soit colinéaire à $v$ et que son produit scalaire avec ce vecteur soit positif et :

$$m(|u|)\gamma_1(\gamma_2(m(|u|))) \;\leq\; n(u)^\top\lambda(u)u \quad , \quad \forall\, u\,:\,|u|\,\leq\, c\,. \tag{B.13}$$

Donc :

$$\Gamma_1(x_1,y,u)|u|\gamma_1(\gamma_2(\Gamma_1(x_1,y,u)|u|)) \;\leq\; n(u)^\top\lambda(u)u\,. \tag{B.14}$$

Maintenant, pour conclure, il suffit d'observer que pour la loi de commande :

$$u_s \;=\; -\,\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top\,, \tag{B.15}$$

où $\xi(x_1,y)$ est une fonction positive continue, non nulle dès que $g_2(x_1,0,0)$ est non nulle et suffisamment petite, on a :

$$\begin{aligned}&-\,n(-\,\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top)^\top\lambda(-\,\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top)\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top \\ &\quad\leq\; \tfrac{1}{4}g_2(x_1,0,0)^\top\lambda\left(-\,\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top\right)\xi(x_1,y)g_2(x_1,0,0)^\top\,.\end{aligned} \tag{B.16}$$

En suite en adaptant le lemme 1.5 au cas de la fonction $g_2(x_1,y,u_s)\lambda(u_s)u_s$ puis enfin en appliquant le principe d'invariance de LaSalle, il est possible de conclure.

□

**Example B.2 :** Le Théorème B.1 s'applique au système suivant :

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 \;&=\; u^3 \\ \dot{y} \;&=\; -\,y^3 + y^2u\end{aligned} \tag{B.17}$$

En effet, prenons $V(y) = y^2$ et $Q(x_1) = \sqrt{1+x_1^2} - 1$.

1. L'hypothèse A1 est vérifiée : pour $u = 0$, on a $\dot{\overbrace{V(y)}} = -2y^4$.

2. On a :

$$\mathcal{G}(x_1, y, u) \;=\; 2y^3 u + \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} u^3 \;. \tag{B.18}$$

Donc, avec

$$\lambda(u) \;=\; u^2 \;,\; g_2(x_1, y, u) \;=\; \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \tag{B.19}$$

on a :

$$\mathcal{G}(x_1, y, u) \;=\; 2y^3 + \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \lambda(u) \;. \tag{B.20}$$

En prenant $\gamma_1(s) \;=\; 2s^{\frac{3}{4}}$, (B.1) est vérifiée. D'un autre côté, en prenant :

$$m(w) \;=\; w^{\frac{9}{10}} \quad , \quad \gamma_2(w) \;=\; 20w^3 \tag{B.21}$$

(B.2) et (B.3) sont vérifiées et $\frac{w}{m(w)}$ a les propriétés requises.

3. On a $g_2(x_1, y, u) = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}}$ et donc $x_1 = 0$ est la seule solution de : $g_2(x_1, 0, 0) \;=\; 0$.

Dans ce cas, on obtient :

$$u \;=\; -\frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^2}} \;. \tag{B.22}$$

Remarquons maintenant que, sur un voisinage de l'origine, $\frac{1}{2}y^4 \;\leq\; \frac{3}{4}\gamma_3(W(y))$ avec $\gamma_3(s) \;=\; \frac{3}{4}s$. Le terme $y^4$ ne modifie pas le résultat de stabilité obtenu pour (B.17). L'origine du système :

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \tfrac{1}{2}y^4 + u^3 \\ \dot{y} &= -y^3 + y^2 u \end{aligned} \tag{B.23}$$

est donc globalement asymptotiquement stable lorsqu'est appliquée la loi de commande (B.22). ◇

## B.2 Hypothèse A2".

Décomposons la fonction $\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)u$, dont la formule est donnée par (1.22), sous la forme suivante :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u)u \;=\; \mathcal{G}_1(x_1, x_2, y, u_1)u_1 + \mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_1, u_2)\zeta(y)u_2 \tag{B.24}$$

où $u = (u_1^\top, u_2^\top)^\top$, où, pour tout $y$, $\zeta(y)$ est une matrice symétrique positive et où $\mathcal{G}_1(x_1, x_2, y, u)$ et $\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u)$ sont des fonctions de classe $C^1$, nulles en zéro.

**Hypothèse A2" :** *La fonction $V$ satisfaisant la condition (1.7) de l'hypothèse A1 est telle que :*
• *Soit $\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u)$ ne dépend pas de $u_2$, soit il existe une fonction strictement positive $\varepsilon(x_1, x_2, y)$ telle que*[1] *:*

$$\frac{\left|\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|}{\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|} \;\geq\; \varepsilon(x_1, x_2, y)|\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)| \tag{B.25}$$

*pour tout $y$ appartenant à un voisinage de l'origine.*

[1] $\zeta(y)^{\frac{1}{2}}$ est une matrice symétrique solution de $\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\zeta(y)^{\frac{1}{2}} = \zeta(y)$.

• $x_1 = 0$ *est la seule solution de :*

$$\dot{x}_1 \;=\; h_0(x_1) \quad , \quad \tfrac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_0(x_1) \;=\; 0 \quad , \quad f_2(x_1,0,0,0)\,[0 \qquad \mathcal{G}_2(x_1,0,0,0)]^\top \;=\; 0 \;,$$
$$\mathcal{G}_1(x_1,0,0,0) \;=\; 0 \;. \tag{B.26}$$

Nous avons le résultat suivant :

**Théorème B.3** *Si les hypothèses A1 et A2" sont vérifiées, alors pour tout* $\overline{u}$ *appartenant à* $(0,+\infty]$*, il existe une loi de commande bornée par* $\overline{u}$ *qui fait de l'origine une solution globalement asymptotiquement stable du système (1.4).*

**Remarque B.4 :**
1. Si on peut choisir une décomposition de $\mathcal{G}$ dans laquelle $\mathcal{G}_1$ n'est pas présente et $\zeta(0) = 0$, alors A2 n'est vérifiée que si $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$ est globalement asymptotiquement stable, tandis que A2" peut l'être même si $\dot{x}_1 = h_0(x_1)$ n'est pas globalement asymptotiquement stable. (Voir l'exemple B.5) •
2. L'hypothèse A2" dépend de la fonction $V$ vérifiant (1.7), tandis que A2 ne dépend que des fonctions $h_0, h_2, Q$. Ce fait peut être exploité de façon positive (voir exemple B.5). Remarquons en outre qu'une difficulté est causée par la non unicité de la décomposition (B.24) •
3. La deuxième condition de A2" est toujours vérifiée si la fonction $\frac{\zeta(y)}{|\zeta(y)|}$ tend vers la matrice identité quand $y$ tend vers zéro. C'est en particulier le cas si la dimension de l'entrée est 1 •

**Example B.5 :** Le Théorème B.3 s'applique au système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \dot{x}_1 &=& y^2u + y^4u^2 \\ \dot{y} &=& -y+u \end{array}\right. \tag{B.27}$$

Ce nouveau système ne vérifie pas A2. Par contre, il vérifie A2" pour certaines fonctions $V$. En effet

- Pour
$$Q(x_1) \;=\; \frac{1}{2}x_1^2 \quad , \quad V(y) \;=\; \frac{1}{4}y^4 \;, \tag{B.28}$$
on a :
$$\mathcal{G}(x_1,y,u) \;=\; x_1y^2 + x_1y^4u + y^3 \;. \tag{B.29}$$

- En prenant :
$$\zeta(y) \;=\; y^2 \quad , \quad \mathcal{G}_2(x_1,y,u) \;=\; x_1 + Y + x_1y^2u \;, \tag{B.30}$$
on a :
$$\mathcal{G}(x_1,y,u) \;=\; \mathcal{G}_2(x_1,y,u)\zeta(y) \quad , \quad \frac{\left|\mathcal{G}_2(x_1,y,0)\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|}{\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|} \;=\; |\mathcal{G}_2(x_1,y,0)| \tag{B.31}$$
et
$$f_2(x_1,0,0)\mathcal{G}_2(x_1,0,0) \;=\; x_1 \;. \tag{B.32}$$

L'hypothèse A2" est donc satisfaite. Remarquons que si nous avions pris $V(y) = \frac{1}{2}y^2$, A2" ne l'aurait pas été.

Puisque A1 l'est, il s'en suit que l'origine de (B.27) est globalement asymptotiquement stabilisable par un feedback continu que l'on peut obtenir d'après le calcul suivant :

$$\dot{\overbrace{\frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{4}y^4}} \;=\; -\,y^4 + y^2(x_1+y)u + x_1 y^4 u^2 \;. \tag{B.33}$$

On en déduit que le feedback : $u = -\,\frac{(x_1+y)x_1^2}{2\sqrt{x_1^2+y^2}\left(1+x_1^4\right)}$ donne le résultat désiré. $\diamond$

**Preuve du Théorème B.3.** Nous allons prouver ce Théorème, en nous limitant toutefois aux décompositions pour lesquelles $\mathcal{G}_1$ n'est pas présente. En effet, la démonstration dans le cas général se déduit ensuite de la preuve du Théorème 1.1.

Nous supposons donc que :

$$\mathcal{G}(x_1, x_2, y, u) \;=\; \mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)u_2 \;. \tag{B.34}$$

Prenons $u_2$ de la forme :

$$u_2(x_1, x_2, y) \;=\; -\xi(x_1, x_2, y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \tag{B.35}$$

où $\xi$ est une fonction de classe $C^1$ positive.

Montrons que nous pouvons choisir la fonction $\xi$ de telle sorte que l'inégalité suivante soit satisfaite :

$$\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \;\geq\; 0 \;. \tag{B.36}$$

Notons par $\Phi$ la différence :

$$\Phi(x_1, x_2, y, u_2) \;=\; \mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_2) \;-\; \mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0) \;. \tag{B.37}$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \;&=\; \left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top\right|^2 \\ &\qquad +\Phi(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \\ &\geq\; \left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top\right|^2 \\ &\qquad -\left|\Phi(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top\right| \;.\end{aligned} \tag{B.38}$$

La question est donc de savoir si on peut choisir $\xi$ pour que l'inégalité :

$$\frac{1}{2}\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top\right| \;\geq\; |\Phi(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)^{\frac{1}{2}}| \tag{B.39}$$

soit vérifiée. Une condition suffisante pour que tel soit le cas est :

$$\frac{\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top\right|}{\left|\zeta(y)^{\frac{1}{2}}\right|} \;\geq\; 2|\Phi(x_1, x_2, y, u_2)| \;. \tag{B.40}$$

La définition de $\Phi$ et le fait que $\mathcal{G}_2$ soit de classe $C^1$ implique qu'il existe une fonction positive et continue $\widehat{\Phi}(x_1, x_2, y, u)$ telle que :

$$\widehat{\Phi}(x_1, x_2, y, u)|u| \;\geq\; |\Phi(x_1, x_2, y, u)| \;. \tag{B.41}$$

Grâce à (B.25) et (B.41), on voit qu'il suffit que $\xi$ satisfasse :

$$0 \;\leq\; \xi(x_1, x_2, y) \;\leq\; \frac{\varepsilon(x_1, x_2, y)}{2(1 + |\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)|)(1 + \varepsilon(x_1, x_2, y))\left(1 + \sup\limits_{\{|u|\leq 1\}} \widehat{\Phi}(x_1, x_2, y, u)\right)} \;. \tag{B.42}$$

Alors, pour chaque fonction $\xi$ vérifiant (B.42), on obtient :

$$\begin{aligned} \overbrace{Q(x_1) + S(x_2) + V(y)}^{\cdot} \;\;\leq\;\; & - R(x_1) - T(x_2) - W(y) \\ & - \xi(x_1, x_2, y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, u_2)\zeta(y)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \;\leq\; 0 \;. \end{aligned} \tag{B.43}$$

Appliquons le principe d'invariance de LaSalle au système (1.4) bouclé avec une loi de commande $u_2$. Considérons une solution $(x_1(t), x_2(t), y(t))$ telle que pour tout $t \geq 0$ :

$$\begin{aligned} & - W(y(t)) - \; R(x_1(t)) - \; T(x_2(t)) \\ - \xi(x_1(t), x_2(t), y(t))\mathcal{G}_2(x_1(t), & x_2(t), y(t), u_2)\zeta(y(t))\mathcal{G}_2(x_1(t), x_2(t), y(t), 0)^\top \;=\; 0 \;. \\ \dot{y}(t) \;&=\; f_0(y(t)) + f_2(x_1(t), x_2(t), y(t), u_2)u_2 \\ \dot{x_1}(t) \;&=\; h_0(x_1(t)) + h_2(x_1(t), x_2(t), y(t), u_2)u_\xi \end{aligned} \tag{B.44}$$

Alors, le fait que $W$ et $T$ soient définies positives implique que pour tout $t \geq 0$,

$$y(t) \;=\; 0 \quad , \quad x_2(t) \;=\; 0 \;. \tag{B.45}$$

Il s'en suit que pour tout $t \geq 0$ :

$$R(x_1(t)) \;=\; 0 \quad , \quad f_2\left(x_1(t), 0, 0, u_2(x_1(t), 0, 0)\right)\mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0)^\top \;=\; 0 \;. \tag{B.46}$$

Mais le fait que $f_2$ soit de classe $C^1$ implique qu'il existe une fonction continue $F_2$ telle que :

$$f_2\left(x_1, 0, 0, u\right) \;=\; f_2(x_1, 0, 0, 0) + < F_2(x_1, u), u > \;. \tag{B.47}$$

Grâce à la deuxième condition de (B.46) et à la définition de $u_2$, il s'en suit que :

$$\begin{gathered} \left| f_2(x_1(t), 0, 0, 0)\mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0)^\top \right| \\ = \\ \xi(x_1(t), 0, 0) \left| < F_2\left(x_1(t), u_\xi(x_1(t), 0, 0)\right)\mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0)^\top, \mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0) > \right| \;. \end{gathered} \tag{B.48}$$

Choisissons la fonction $\xi$ sous la forme :

$$\xi(x_1, x_2, y) \;=\; \varphi(x_1, x_2, y) \left| f_2(x_1, x_2, y, 0)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \right| \tag{B.49}$$

où $\varphi$ est une fonction telle que $\varphi(x_1, 0, 0)$ soit strictement positive et l'inégalité (B.42) soit satisfaite. Supposons qu'il existe $t$ tel que

$$f_2(x_1(t), 0, 0, 0)\mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0) \;\neq\; 0 \tag{B.50}$$

Alors, d'après (B.49), on peut simplifier (B.48) pour obtenir :

$$\varphi(x_1(t), x_2(t), y(t)) \left| < F_2\left(x_1(t), u_2(x_1(t), 0, 0)\right) \mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0)^\top, \mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0) > \right| \; = \; 1 \; . \tag{B.51}$$

Mais en choisissant :

$$\varphi(x_1, x_2, y) \; \le \; \frac{1}{2} \frac{1}{|\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)|^2 \sup_{|u| \le 1} |F_2(x_1, u)| + 1} \tag{B.52}$$

(B.51) ne peut être vérifiée. Donc (B.50) est faux et :

$$f_2(x_1(t), 0, 0, 0)\mathcal{G}_2(x_1(t), 0, 0, 0)^\top \; = \; 0 \quad , \quad \forall t \ge 0 \; . \tag{B.53}$$

Puisque la loi de commande que nous considérons est :

$$u_2(x_1, x_2, y) \; = \; -\varphi(x_1, x_2, y) \left| f_2(x_1, x_2, y, 0)\mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \right| \mathcal{G}_2(x_1, x_2, y, 0)^\top \; , \tag{B.54}$$

on a pour tout $t \ge 0$ :

$$u_2(x_1(t), x_2(t), y(t)) \; = \; 0 \; . \tag{B.55}$$

Par conséquent :

$$\dot{x}_1(t) \; = \; h_0(x_1(t)) \; . \tag{B.56}$$

Nous en déduisons maintenant grâce à la dernière des conditions de A2" que $x_1(t) = 0$ pour tout $t \ge 0$.

# C Preuve du lemme 1.5.

Notre preuve s'appuie sur la proposition suivante :

**Proposition C.6** *Soit $a$ une fonction appartenant à $C^0(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Pour tout $k$, il existe deux fonctions $\gamma_0$ et $\gamma_1$, de classe $\mathcal{K}^\infty$, telles que pour tout $(x, y)$ appartenant à $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, l'inégalité :*

$$|a(x,y) - a(x,0)| \;\leq\; \gamma_0(|y|)\,\left[1 + \gamma_1(|x|^2 + |y|^2)\right] \;. \tag{C.57}$$

*soit vérifiée, $\gamma_1$ étant de plus $C^k$.*

**Preuve.** Soit

$$b(x,y) \;=\; |a(x,y) - \,a(x,0)|\;. \tag{C.58}$$

Définissons deux fonctions $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$. Pour tout $s$, strictement positif, on pose :

$$\tilde{\gamma}_0(s) \;=\; \max_{\{(x,y):|y|\leq s\}} \left\{\frac{b(x,y)}{1 + |x| + b(x,y)^2}\right\} \quad , \qquad \tilde{\gamma}_1(s) \;=\; \max_{\{(x,y):|x|^2+|y|^2\leq s\}} \left\{1 + |x| + b(x,y)^2\right\} \tag{C.59}$$

et pour $s = 0$, on pose :

$$\tilde{\gamma}_0(0) \;=\; 0 \quad , \qquad \tilde{\gamma}_1(0) \;=\; 1\;. \tag{C.60}$$

Puisque $b$ est une fonction continue et que $\frac{b(x,y)}{1+|x|+b(x,y)^2}$ converge vers zéro quand $x$ tend vers l'infini, $\tilde{\gamma}_0$ et $\tilde{\gamma}_1$ sont bien définies, non décroissantes et continues en $s = 0$. Ceci nous permet de définir deux fonctions de classe $\mathcal{K}^\infty$, $\overline{\gamma}_0$ et $\overline{\gamma}_1$ de la façon suivante :

$$\overline{\gamma}_0(s) \;=\; \frac{1}{s}\int_s^{2s} \tilde{\gamma}_0(t)dt + s \;\geq\; \tilde{\gamma}_0(s) \;+\; s\;, \tag{C.61}$$

$$\overline{\gamma}_1(s) \;=\; \frac{1}{s}\int_s^{2s} (\tilde{\gamma}_1(t) - \,1)\,dt + s \;\geq\; (\tilde{\gamma}_1(s) - \,1) \;+\; s\;. \tag{C.62}$$

Par construction, nous avons, pour tout $(x, y)$ dans $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$,

$$b(x,y) \;\leq\; \frac{b(x,y)}{1 + |x| + b(x,y)^2}\left[1 + |x| + b(x,y)^2\right] \;\leq\; \overline{\gamma}_0(|y|)\left[1 + \overline{\gamma}_1(|x|^2 + |y|^2)\right] \;. \tag{C.63}$$

Définissons alors :

$$\gamma_0(s) \;=\; (1 + \overline{\gamma}_1(1))\,\overline{\gamma}_0(s)\;, \tag{C.64}$$

$$\gamma_1(s) \;=\; \int_0^{2s}\int_0^{2s_1}\ldots\int_0^{2s_{k-1}} \frac{\overline{\gamma}_1(s_k)}{1 + \overline{\gamma}_1(1)}\,ds_k\,ds_{k-1}\ldots ds_1\;. \tag{C.65}$$

Puisque, pour tout $s \geq 1$, nous avons :

$$\gamma_1(s) \;\geq\; \frac{\overline{\gamma}_1(s)}{1 + \overline{\gamma}_1(1)}\;, \tag{C.66}$$

nous déduisons :

$$\overline{\gamma}_0(|y|)\left[1 + \overline{\gamma}_1(|x|^2 + |y|^2)\right] \;\leq\; \gamma_0(|y|)\left[1 + \gamma_1(|x|^2 + |y|^2)\right] \tag{C.67}$$

et donc (C.57). De plus $\gamma_1$ est $C^k$ sur $[0, +\infty)$. □

**Remarque C.7 :** Dans l'énoncé ci-dessus, si $a$ est dans $C^1(\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$, on peut prendre :

$$\gamma_0(|y|) \;=\; c\,|y| \tag{C.68}$$

où $c$ est un nombre réel positif. En effet, dans ce cas, on a :

$$|a(x,y) - a(x,0)| \;\leq\; |y| \left| \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y}(x, sy) ds \right| \;. \tag{C.69}$$

On peut donc prendre :

$$\tilde{\gamma}_0(s) \;=\; s \quad , \qquad \tilde{\gamma}_1(s) \;=\; \max_{\{(x,y): |x|^2+|y|^2 \leq s\}} \left\{ 1 \;+\; \left| \int_0^1 \frac{\partial a}{\partial y}(x, sy) ds \right| \right\} \;. \tag{C.70}$$

Prouvons maintenant le Lemme 1.5. Puisque $G$ est $C^0$, la proposition C.6 s'applique et donc il existe deux fonctions $\gamma_0$ et $\gamma_1$ de classe $\mathcal{K}^\infty$ telles que, avec (1.24) pour choix, on a :

$$\begin{aligned} G(x, u(x))\, u(x) \;\leq\; & -\lambda(x)\, |G(x,0)|^2 \\ & + \gamma_0(\lambda(x)|G(x,0)|)\, \lambda(x)\, |G(x,0)| \left[ 1 + \gamma_1(|x|^2 + \lambda(x)^2 |G(x,0)|^2) \right] \;. \end{aligned} \tag{C.71}$$

Pour obtenir (1.26), il suffit donc que $\lambda$ soit solution de :

$$\lambda(x) |G(x,0)| \;\leq\; \gamma_0^{-1} \left( \tfrac{1}{2} \frac{|G(x,0)|}{1 + \gamma_1(|x|^2 + \lambda(x)^2 |G(x,0)|^2)} \right) \;. \tag{C.72}$$

<u>Si $G$ est $C^1$,</u> alors, d'après (C.68), l'inégalité (C.72) donne :

$$\lambda(x) \;\leq\; \tfrac{1}{2c} \frac{1}{1 + \gamma_1(|x|^2 + \lambda(x)^2 |G(x,0)|^2)} \;. \tag{C.73}$$

Puisque la fonction $\gamma_1$ est croissante, une solution est :

$$\lambda(x) \;=\; \lambda_0 \frac{1}{1 + \gamma_1(|x|^2 + \lambda_0^2 |G(x,0)|^2)} \frac{1}{1 + |G(x,0)|^2} \;. \tag{C.74}$$

avec :

$$\lambda_0 \;=\; \min \left\{ \tfrac{1}{c}, 2\overline{u} \right\} \;. \tag{C.75}$$

Puisque $\gamma_1$ peut être obtenue aussi régulière que l'on veut, cette fonction $\lambda$ est aussi régulière que $G(x,0)$. De plus les contraintes (1.25) à (1.27) sont satisfaites.

<u>Si $G$ est $C^0$,</u> une solution de (C.72) satisfaisant les contraintes (1.25) et (1.26) est :

$$\lambda(x) \;=\; \min \left\{ \frac{\overline{u}}{1 + |G(x,0)|} \,,\, \gamma_0^{-1} \left( \tfrac{1}{2} \frac{|G(x,0)|}{1 + \gamma_1(|x|^2 + \overline{u}^2 |G(x,0)|^2)} \right) \frac{1}{1 + |G(x,0)|} \right) \;. \tag{C.76}$$

□

# D Preuve du fait 1.8.

Tout d'abord, remarquons qu'il est possible de simplifier le problème en supprimant la matrice $Q$ au moyen d'un changement de variables et de notations. En effet, puisque $Q$ est une matrice symétrique définie positive, il existe une matrice symétrique définie positive $P$ telle que $P^2 = Q$. Alors en posant :

$$\widetilde{x} = Px \quad , \quad \widetilde{D} = PD \quad , \quad \widetilde{M} = PMP^{-1} \tag{D.1}$$

on obtient les équations :

$$\dot{\widetilde{x}} = \widetilde{M}\widetilde{x} \quad , \qquad \widetilde{x}^\top \widetilde{D} = 0 \quad , \qquad \widetilde{x}^\top \widetilde{M}\widetilde{x} = 0 \tag{D.2}$$

et l'égalité :

$$\widetilde{M} + \widetilde{M}^\top = 0 \, . \tag{D.3}$$

Pour simplifier, gardons les lettres employées initialement et considérons $x(t)$, une trajectoire qui satisfait les hypothèses du fait 1.8. Alors pour toute matrice $L$ compatible au niveau des dimensions :

$$\dot{x} = Mx = -\left(M^\top + LD^\top\right) x + LD^\top x + \left(M + M^\top\right) x \, . \tag{D.4}$$

Puisque $-(M + M^\top)$ est une matrice symétrique non négative et que $x^\top(M + M^\top)x = 0$, nécessairement $\left(M + M^\top\right) x = 0$. D'un autre coté, puisque $x(t)$ est supposée satisfaire les hypothèses du fait 1.8 on sait que : $D^\top x = 0$. Par conséquent, nous avons :

$$\dot{x} = -\left(M^\top + LD^\top\right) x \, . \tag{D.5}$$

Puisque $(M, D)$ est stabilisable, c'est un résultat bien connu que $\left(M^\top, D^\top\right)$ est détectable. Donc, $L$ peut être choisi de telle sorte que la matrice $-\left(M^\top + LD^\top\right)$ soit instable. Puisque $M$ est une matrice stable et $x(t)$ est solution de (D.4) et de (D.5), il s'agit nécessairement de la solution zéro . $\square$

# E Fonctions dominantes.

Soient $V$ et $W$ des fonctions continues telles que $V$ soit définie positive et propre et $W$ soit définie positive.

**Lemme E.1** *Soit $\kappa$ une fonction continue, positive, satisfaisant :*

$$\limsup_{Y\to 0} \left\{ \frac{\kappa(Y)}{W(Y)} \right\} \ < \ +\infty \ . \tag{E.1}$$

*Sous ces conditions, il existe une fonction $K$, positive, propre et de classe $C^1$ telle que :*

$$K'(t) \ > \ 0 \quad , \quad \forall\, t \ \geq \ 0 \tag{E.2}$$

*et*

$$K'(V(Y))W(Y) \ \geq \ c\, \kappa(Y) \ . \tag{E.3}$$

**Preuve :** La condition (E.1) imposée sur $\kappa$, la continuité de $\kappa$ et le fait que $V$ soit une fonction propre définie positive garantissent l'existence de deux nombres réels strictement positifs $c_1$, $c_2$ tels que :

$$\frac{\kappa(Y)}{W(Y)} \ \leq \ c_1 \qquad \forall Y \ : \ V(Y) \ \leq \ c_2 \ . \tag{E.4}$$

Nous définissons sur $[0, +\infty[$ une fonction $\overline{\overline{K}}$ comme suit :

$$\overline{\overline{K}}(v) \ = \ \sup_{\{Y : V(Y) \leq v\}} \left\{ \max\left\{ c_1, \frac{\kappa(Y)}{W(Y)} \right\} \right\} \ . \tag{E.5}$$

Elle est positive, croissante et identiquement égale à $c_1$, un nombre réel positif suffisamment grand, sur un voisinage de 0. Ainsi nous pouvons définir un autre fonction positive sur $[0, +\infty)$ par :

$$\overline{K}(v) \ = \ \int_v^{v+1} \overline{\overline{K}}(s)ds + v \ . \tag{E.6}$$

Cette fonction est continue, strictement positive et propre. En outre, nous avons :

$$\overline{K}(V(Y)) \ \geq \ \overline{\overline{K}}(V(Y)) \ \geq \ \frac{\kappa(Y)}{W(Y)} \ . \tag{E.7}$$

En prenant :

$$K(s) \ = \ c \int_0^s \overline{K}(\sigma)d\sigma \ . \tag{E.8}$$

la preuve s'achève.

**Remarque E.2 :** La façon dont la fonction $K$ a été construite durant cette démonstration ne doit pas induire en erreur : Quand toutes les fonctions mises en jeu sont connues, il est possible d'obtenir sans trop de difficultés une formule explicite pour la fonction $K$ •

□

# F Preuve du lemme 2.21

Soit $\Theta$ un ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. Remarquons tout d'abord que puisque la matrice $A = \frac{\partial F_0}{\partial Y}(0)$ est asymptotiquement stable, la fonction $\Psi$ définie par :

$$\Psi(s, Y) \ = \ \exp\left(-\tfrac{1}{2}As\right) \ \Phi(s, Y) \ . \tag{F.1}$$

est bornée sur $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Theta$ ainsi que $\frac{\partial \Psi}{\partial Y}$. Cela implique en particulier que :

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} s^2 |\Phi(s, Y)| \ < \ +\infty \tag{F.2}$$

uniformément en $Y \in \Theta$. En outre, puisque $H_{10}(Y)$ est de classe $C^1$, zéro en zéro, et $|\exp(-Ms)|$ est borné, nous avons grâce à l'inégalité triangulaire :

$$\lim_{s \longrightarrow +\infty} s^2 |\exp(-sM_1) H_{10}(\Phi(s, Y))| \ < \ +\infty \tag{F.3}$$

uniformément en $Y \in \Theta$. Il s'en suit que :

$$\int_0^{+\infty} |\exp(-sM_1) H_{10}(\Phi(s, Y))| \, ds \ < \ +\infty \ , \tag{F.4}$$

qui prouve que la fonction $P_1$ donnée par la formule (2.236) est bien définie.

Pour prouver que cette fonction est $C^1$, nous montrons que les hypothèses de [14, Theorem (3.150)] sont vérifiées.

1. Pour tout $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$, la fonction $\exp(-sM) H_{10}(\Phi(s, Y))$ est continuement différentiable pour tout $Y$ appartenant à $\Theta$.

2. Nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial Y}\left[\exp(-sM_1) H_{10}\left(\Phi(s, Y)\right)\right] \ &= \ \exp(-sM_1) \frac{\partial H_{10}}{\partial Y}\left(\Phi(s, Y)\right) \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(s, Y) \ , \\ &= \ \exp(-sM_1) \frac{\partial H_{10}}{\partial Y}\left(\Phi(s, Y)\right) \exp\left(\tfrac{1}{2}As\right) \ \frac{\partial \Psi}{\partial Y}(s, Y) \ , \end{aligned}$$

   où les fonctions $\left|\exp(-sM_1) \frac{\partial H_{10}}{\partial Y}(\Phi(s, Y))\right|$ et $\left|\frac{\partial \Psi}{\partial Y}(s, Y)\right|$ sont bornées sur $\mathbb{R}_{\geq} 0 \times \Theta$. Cela implique l'existence d'un nombre réel strictement positif $c$ tel que :

$$\left|\frac{\partial}{\partial Y}\left[\exp(-sM_1) H_{10}(\Phi(s, Y))\right]\right| \ \leq \ c \left|\exp\left(\tfrac{1}{2}As\right)\right| \tag{F.5}$$

   pour tout $(s, Y)$ appartenant à $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \Theta$.

3. La fonction $\left|\exp\left(\tfrac{1}{2}As\right)\right|$ est intégrable sur $[0, +\infty)$.

Ces trois points impliquent que la fonction $P_1$ est $C^1$ et que :

$$\frac{\partial P_1}{\partial Y}(Y) \ = \ - \int_0^{+\infty} \exp(-sM_1) \frac{\partial H_{10}}{\partial Y}(\Phi(s, Y)) \frac{\partial \Phi}{\partial Y}(s, Y) ds \ . \tag{F.6}$$

Remarquons également que :

$$\Phi(s, \Phi(t, Y)) \ = \ \Phi((s + t), Y) \ , \tag{F.7}$$

pour tout $(s,t)$, implique :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial Y}(s,Y)\,f(Y) \;=\; f(\Phi(s,Y)) \;=\; \frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,Y)\ . \tag{F.8}$$

Par conséquent, on a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial P_1}{\partial Y}(Y)\,f(Y) \;&=\; -\int_0^{+\infty}\exp(-sM_1)\frac{\partial H_{10}}{\partial Y}(\Phi(s,Y))\frac{\partial \Phi}{\partial s}(s,Y)ds\ . &\text{(F.9)}\\ &=\; -H_{10}(Y)+\int_0^{+\infty}(-M_1)\exp(-sM_1)H_{10}(\Phi(s,Y))ds\ . &\text{(F.10)}\end{aligned}$$

Ainsi, l'égalité (2.234) est-elle obtenue. □

# G Preuve du lemme 6.2

**Première étape :** Nous montrons l'existence d'une fonction de Lyapunov globale sans nous préoccuper des propriétés locales désirées.

Si la commande est $v = 0$, le sous système en $Y$ de (6.24) vérifie l'hypothèse de [32, Theorem 4.7] avec $r = +\infty$. Il s'en suit qu'il existe une fonction continue différentiable $\overline{V}$ et des fonctions $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ définies sur $[0, +\infty[$ et de classe $\mathcal{K}^\infty$ qui satisfont les inégalités :

$$\alpha_1(|Y|) \;\leq\; \overline{V}(Y,t) \;\leq\; \alpha_2(|Y|)\;, \tag{G.1}$$

$$-\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}(Y,t) + \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y}(Y,t)F(Y,t)\right) \;\geq\; \alpha_4(|Y|)\;. \tag{G.2}$$

Introduisons la notation :

$$\overline{W}(Y,t) \;=\; -\left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial t}(Y,t) + \frac{\partial \overline{V}}{\partial Y}(Y,t)F(\tilde{y},t)\right)\;. \tag{G.3}$$

**Deuxième étape :** Nous montrons l'existence d'une fonction de Lyapunov quadratique pour le système linéarisé autour de l'origine. D'après [32, Theorem 4.3], l'hypothèse H12 et le fait que $A(t)$ soit continue et bornée, il existe deux réels strictement positifs tels que :

$$d_1 I \;\leq\; \mathcal{V}(t) \;\leq\; d_2 I \tag{G.4}$$

où $\mathcal{V}(t)$ est une fonction de classe $C^1$ définie sur $[0, +\infty)$ par

$$\mathcal{V}(t) \;=\; \int_t^\infty \Phi_A(s,t)^\top \Phi_A(s,t)ds\;. \tag{G.5}$$

Alors en posant :

$$V_A(\eta,t) \;=\; \eta^\top \mathcal{V}(t)\eta \tag{G.6}$$

on a pour tout $t$,

$$\dot{\overbrace{V_A(\eta,t)}}_{(G.8)} \;=\; -\,|\eta|^2\;. \tag{G.7}$$

avec

$$\dot{\eta} \;=\; A(t)\eta\;. \tag{G.8}$$

**Troisième étape :** Nous construisons la fonction de Lyapunov finale au moyen de $\overline{V}$ et $V_A$.

Considérons la famille de fonction suivante :

$$V_\omega(y,t) \;=\; \omega\,\varphi_R(V_A(y,t))V_A(y,t) + [1 - \varphi_R(V_A(y,t))]\,\overline{V}(y,t) \tag{G.9}$$

où $\omega > 0$, $R > 0$ et $\varphi_R$ est une fonction régulière décroissante telle que :

1. $$\varphi_R(s) \;=\; 1 \quad \forall\, s \leq R\;, \tag{G.10}$$

2. $$\varphi_R(s) \;=\; 0 \quad \forall\, s \geq 2R\;. \tag{G.11}$$

Il est aisé de voir que chaque fonction $V_\omega$ est propre, définie positive et de classe $C^1$.

Prenons la dérivée par rapport au temps de $V_\omega$ :

$$\overbrace{V_\omega(Y,t)}^{\cdot} \;=\; -\,W_\omega(Y,t) \tag{G.12}$$

avec

$$\begin{aligned} W_\omega(Y,t) \;=\; -\Bigg(&\omega\varphi_R(V_A(Y,t))\overbrace{V_A(Y,t)}^{\cdot} + [1-\;\varphi_R(V_A(Y,t))]\,\overbrace{\overline{V}(Y,t)}^{\cdot} \\ &+\varphi_R'(V_A(Y,t))\overbrace{V_A(Y,t)}^{\cdot}\left[\omega V_A(Y,t) - \overline{V}(Y,t)\right]\Bigg)\;. \end{aligned} \tag{G.13}$$

Les propriétés de $V_A$ et les conditions (G.10) et (G.11), impliquent :

$$\begin{aligned} |Y| \;\leq\; \sqrt{\frac{R}{d_2}} \quad &\Longrightarrow \quad \varphi_R'(V_A(Y,t)) \;=\; 0\;, \\ |Y| \;\geq\; \sqrt{\frac{2R}{d_1}} \quad &\Longrightarrow \quad \varphi_R'(V_A(Y,t)) \;=\; 0\;. \end{aligned}$$

De ces inégalités, on déduit que $V_\omega$ a une dérivée le long des solutions de (6.18) strictement négative si le réel $R$ choisi tel que :

$$\overbrace{V_A(Y,t)}^{\cdot} \;\leq\; 0 \quad , \quad \forall Y\,:\,|Y| \;\leq\; \sqrt{\frac{R}{d_2}}\;. \tag{G.14}$$

et

$$\omega V_A(Y,t) - \overline{V}(Y,t) \;\leq\; 0 \quad , \quad \forall\, Y \in E \tag{G.15}$$

où $E$ est l'ensemble :

$$E \;=\; \left\{ Y \;:\; \sqrt{\frac{R}{d_2}} \;\leq\; |Y| \;\leq\; \sqrt{\frac{2R}{d_1}} \right\}\;. \tag{G.16}$$

La condition (G.14) ne pose pas de difficulté : il suffit de prendre $R$ suffisamment petit pour que les termes du premier ordre en $Y$ dominent les autres. Pour montrer que la condition (G.15) est vérifiée pour $\omega$ suffisamment petit, nous procédons de la façon suivante.

Soit $Y_E$ un point quelconque de $E$. Alors nécessairement, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$V_A(Y_E,t) \;\leq\; 2R \quad , \quad \alpha_1\left(\sqrt{\frac{R}{d_2}}\right) \;\leq\; \overline{V}(Y_E)\;. \tag{G.17}$$

Par conséquent, si :

$$\omega \;\leq\; \frac{1}{2R}\alpha_1\left(\sqrt{\frac{R}{d_2}}\right) \tag{G.18}$$

l'inégalité :

$$\omega V_A(Y_E,t) - \overline{V}(Y_E,t) \;\leq\; 0 \tag{G.19}$$

est vérifiée pour tout $Y_E$ de $E$.

On en déduit que :

$$W_\omega(Y,t) \;>\; 0 \quad , \quad \forall\, Y \neq 0\;. \tag{G.20}$$

**Quatrième étape :** Montrons que $V_\omega$ avec $\omega$ satisfaisant (G.18) vérifie les conditions du lemme 6.2. Prenons $\delta \leq R$. Alors la définition de $V_\omega$ et les inégalités (G.4) impliquent pour tout $Y$ appartenant à $\overline{B(0,\delta)}$ :

$$\begin{aligned}
V_\omega(Y,t) &= V_A(Y,t) \\
d_1|Y|^2 \leq V_\omega(Y,t) &\leq d_2|Y|^2 \\
\left|\frac{\partial V_\omega}{\partial Y}(Y,t)\right| &\leq d_2|Y| \\
W_\omega(Y,t) &= |Y|^2
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous avons établi :

$$\begin{aligned}
W_\omega(Y,t) &\geq (\omega\varphi_R(V_A(Y,t))\,|Y|^2 + [1-\varphi_R(V_A(Y,t))]\,\overline{W}(Y,t) \\
&\geq (\omega\varphi_R(V_A(Y,t))\,|Y|^2 + [1-\varphi_R(V_A(Y,t))]\,\alpha_4(Y)\ .
\end{aligned} \tag{G.21}$$

En prenant :

$$\alpha_3(Y) \leq \inf\left\{\omega|Y|^2, \alpha_4(Y)\right\}\ , \tag{G.22}$$

on obtient :

$$W_\omega(Y,t) \geq \alpha_3(Y)\ . \tag{G.23}$$

Ceci termine notre preuve. □

# H Preuve du lemme 6.3.

D'après [32, Theorem 4.3], il existe une fonction matricielle $P(t)$ continue, bornée, différentiable, symétrique, solution de :

$$\dot{P}(t) \;=\; P(t)Q^{-1}(M+D(t)K(t))^\top Q + Q(M+D(t)K(t))Q^{-1}P(t) - I \tag{H.1}$$

et vérifiant :

$$0 \;<\; \frac{1}{c}I \;\leq\; P(t) \;. \tag{H.2}$$

Par conséquent, la dérivée de $X^\top P(t)X$ le long des solutions de (6.62) est :

$$\begin{aligned} \dot{\overbrace{x^\top P(t)x}}_{(6.62)} &= x^\top \dot{\overbrace{P(t)}} x + 2x^\top P(t)(Mx+\varphi_1(t)) \\ &= -|x|^2 + 2x^\top P(t)\left[Q^{-1}(K(t)^\top D(t)^\top Q - R)x + \varphi_1(t)\right] \;. \end{aligned} \tag{H.3}$$

Nous avons les inégalités suivantes :

$$\begin{aligned} \left|2x^\top P(t)Q^{-1}Rx\right| &\leq \tfrac{1}{4}|x|^2 + 4|P(t)Q^{-1}|^2|Rx|^2 \\ \left|2x^\top P(t)\varphi_1(t)\right| &\leq \tfrac{1}{4}|x|^2 + 4|P(t)|^2|\varphi_1(t)|^2 \\ \left|2x^\top P(t)Q^{-1}K(t)^\top D(t)^\top Qx\right| &\leq \tfrac{1}{4}|x|^2 + 4|Q||Q^{-1}|P(t)|^2|K(t)|^2|\varphi_2(t)|^2 \end{aligned} \tag{H.4}$$

et savons que $P(t)$ et $K(t)$ sont bornées. Nous en déduisons l'existence d'un nombre réel positif $c$ tel que :

$$\dot{\overbrace{x^\top P(t)x}} \;\leq\; -\frac{1}{4}|x|^2 + c|Rx|^2 + c|\varphi_1(t)|^2 + c|\varphi_2(t)|^2 \;. \tag{H.5}$$

Puisque $R$ est symétrique, le nombre $c$ peut être choisi pour que

$$|Rx|^2 \;\leq\; cx^\top Rx \;=\; c\varphi_3(t) \;. \tag{H.6}$$

Ainsi en posant :

$$V(t) \;=\; x(t)^\top P(t)x(t) \tag{H.7}$$

nous obtenons grâce à (H.2) :

$$\dot{V}(t) \;\leq\; -\frac{1}{c}V(t) + c\left(\varphi_1(t)^2 + \varphi_2(t)^2 + \varphi_3(t)\right) \;. \tag{H.8}$$

Les fonctions $\varphi_1^2, \varphi_2^2$ et $\varphi_3$ étant intégrable, on en déduit :

$$\lim_{t\to+\infty} V(t) \;=\; 0 \tag{H.9}$$

et donc :

$$\lim_{t\to+\infty} X(t) \;=\; 0 \;. \tag{H.10}$$

Ceci termine notre preuve. □

# I Contraintes sur les exposants du système (2.31).

Remarquons pour commencer que le terme de gauche de (2.10) s'écrit :

$$\left|\frac{\partial Q}{\partial x_1}(x_1)h_1(x_1,x_2,y)y\right| + \left|\frac{\partial S}{\partial x_2}(x_2)e_1(x_1,x_2,y)y\right| \;=\; A(x_1,x_2,y)\;, \tag{I.1}$$

où :

$$A(x_1,x_2,y) \;=\; |x_1y^{n_1} + x_1^{a_1+1}y^{p_1} + x_1x_2^{b_1}y^{m_1}| + |x_2y^{n_2} + x_2x_1^{a_2}y^{p_2} + x_2^{1+b_2}y^{m_2}|\;. \tag{I.2}$$

## I.1 Conditions nécessaires pour que l'hypothèse B3 soit satisfaite.

Nous commençons par montrer diverses conséquences de la condition de non intégrabilité (2.11). Nous verrons ensuite certaines des conséquences des conditions de continuité (2.12) et B3.2.

### I.1.1 Conséquences de (2.11).

En prenant :

$$y \;=\; 1 \quad , \qquad x_1 \;=\; x_2 \;=\; \sqrt{[2s]}\;, \tag{I.3}$$

on obtient :

$$A(\sqrt{[2s]},\sqrt{[2s]},1) \;=\; \sqrt{[2s]}\left(2 + [2s]^{\frac{a_1}{2}} + [2s]^{\frac{b_1}{2}} + [2s]^{\frac{a_2}{2}} + [2s]^{\frac{b_2}{2}}\right)\;. \tag{I.4}$$

Avec l'expression de $T$ donnée en (2.33), l'inégalité (2.10) implique l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$\sqrt{s}\left(1 + s^{\frac{a_1}{2}} + s^{\frac{b_1}{2}} + s^{\frac{a_2}{2}} + s^{\frac{b_2}{2}}\right) \;\le\; c(1+\rho(s))^2 + c(1+\rho(s))s^{\frac{1}{2}}\;. \tag{I.5}$$

Cette inégalité porte sur un polynôme de degré 2 en $1+\rho$. Elle implique donc la contrainte suivante :

$$1+\rho(s) \;\ge\; \frac{c\sqrt{s}\left(1 + s^{\frac{a_1}{2}} + s^{\frac{b_1}{2}} + s^{\frac{a_2}{2}} + s^{\frac{b_2}{2}}\right)}{\left(s^{\frac{1}{2}} + \sqrt{s + \sqrt{s}\left(1 + s^{\frac{a_1}{2}} + s^{\frac{b_1}{2}} + s^{\frac{a_2}{2}} + s^{\frac{b_2}{2}}\right)}\right)}\;. \tag{I.6}$$

Donc la condition de non intégrabilité (2.11) impose :

$$\max\{a_1,b_1,a_2,b_2\} \;\le\; 1\;. \tag{I.7}$$

Puisqu'on a supposé $b_1 \ge 1$, on a :

$$b_1 \;=\; 1\;. \tag{I.8}$$

Une dernière conséquence de la condition de non intégrabilité (2.11) est qu'un choix approprié pour la fonction $\rho$ est :

$$\rho(s) \;=\; \sqrt{s}\;. \tag{I.9}$$

### I.1.2 Conséquences de (2.12).

Cette condition implique :

$$\kappa\left(\frac{1}{2}y^2\right)|y| \;\leq\; c \quad , \quad \forall\,|y| \;\leq\; c\ . \tag{I.10}$$

Cette inégalité est vérifiée pour $\kappa$ telle que :

$$0 \;\leq\; \kappa(s) \;\leq\; \frac{c}{\sqrt{s}} \quad , \quad \forall\, s \;\in\; [0,c]\ . \tag{I.11}$$

D'autre part, en prenant :

$$y > 0 \quad , \qquad x_1 = 1 \quad , \qquad x_2 = 0\ , \tag{I.12}$$

on obtient :

$$A(1,0,y) \;=\; |y^{n_1} \;+\; y^{p_1}|\ . \tag{I.13}$$

Avec l'expression de $W$ donnée en (2.33), l'inégalité (2.10) donne :

$$\max\left\{s^{\frac{n_1}{2}}, s^{\frac{p_1}{2}}\right\} \;\leq\; c\,\kappa(s)\,s^{\frac{q+1}{2}}\ . \tag{I.14}$$

La condition (I.11) implique donc :

$$\max\left\{s^{\frac{n_1}{2}}, s^{\frac{p_1}{2}}\right\} \;\leq\; c\,s^{\frac{q}{2}} \quad , \quad \forall\, s \;\in\; [0,c]\ . \tag{I.15}$$

On en déduit :

$$q \;\leq\; \min\{n_1, p_1\}\ . \tag{I.16}$$

En prenant $x_1 = 0$ on obtient :

$$A(0,x_2,y) \;=\; |x_2\,y^{n_2} + x_2^2\,y^{m_2}|\ . \tag{I.17}$$

Avec l'expression de $W$ donnée en (2.33) et l'expression de $T$ donnée en (2.33), l'inégalité (2.10) implique l'existence d'une constante $c > 0$ telle que :

$$s^{2n_2} + s^{2m_2} \;\leq\; c\,s^q \quad , \quad \forall\, s \;\in\; [0,c]\ . \tag{I.18}$$

On en déduit :

$$q \;\leq\; \min\{2n_2, 2m_2\}\ . \tag{I.19}$$

Les conditions (2.12) impliquent également :

$$\begin{aligned} |x_1 x_2 y^{m_1}| + |x_2 x_1^{a_2} y^{p_2}| \;\;\leq\;\; & \kappa\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)|y|^{q+1}\left(1+\rho\left(\tfrac{1}{2}x_1^2+\tfrac{1}{2}x_2^2\right)\right)^2 \\ & + \sqrt{\kappa\left(\tfrac{1}{2}y^2\right)}|y|^{\frac{q+1}{2}}\left(1+\rho\left(\tfrac{1}{2}x_1^2+\tfrac{1}{2}x_2^2\right)\right)|x_2|\ . \end{aligned} \tag{I.20}$$

Donc en prenant $x_1 = x_2$, $y = \sqrt{s}$, on obtient grâce à (I.11) :

$$s^{\frac{m_1}{2}} + s^{\frac{p_2}{2}} \;\leq\; c\,(s^{\frac{q}{2}} + s^{\frac{q}{4}}) \quad , \quad \forall\, s \;\in\; [0,c]\ . \tag{I.21}$$

On en déduit de façon immédiate que nécessairement :

$$q \;\leq\; \min\{2p_2, 2m_1\}\ . \tag{I.22}$$

### I.1.3 Conséquences de B3.2.

La condition (2.12) implique que l'hypothèse B3.2 est vérifiée si et seulement la fonction : $\kappa\left(\frac{1}{2}y^2\right)y^{r+1}$ est continue.

Deux cas se présentent donc :

- Premier cas : $q < \min\{n_1, p_1, 2n_2, 2m_2, 2p_2, 2m_1\}$. Alors $\kappa$ peut être localement choisie ainsi :
$$\kappa(s) \;=\; \frac{c}{s^{\frac{1}{2}-\varepsilon}} \quad , \quad \forall\, s \in [0,c]\;. \tag{I.23}$$
où $\varepsilon$ est un réel strictement positif. Par conséquent, on a :
$$\kappa\left(\frac{1}{2}y^2\right)y^{r+1} \;=\; c\,\frac{y}{|y|}\,|y|^{r+2\varepsilon} \tag{I.24}$$
sur un voisinage de l'origine. Aucune restriction n'apparaît donc sur $r$.

- Deuxième cas : $q$ est égal à une des valeurs $n_1, p_1, 2n_2, 2m_2, 2p_2, 2m_1$. Alors $\kappa$ doit nécessairement vérifier :
$$\kappa(s) \;=\; \frac{c}{s^{\frac{1}{2}}} \quad , \quad \forall\, s \in [0,c]\;. \tag{I.25}$$
Par conséquent on a :
$$\kappa\left(\frac{1}{2}y^2\right)y^{r+1} \;=\; c\frac{y}{|y|}\,|y|^{r} \tag{I.26}$$
sur un voisinage de l'origine. Donc pour que B3.2 soit vérifiée, il est nécessaire que :
$$r \;>\; 0\;. \tag{I.27}$$

## I.2 Conditions suffisantes pour que l'hypothèse B3 soit satisfaite.

Nous allons montrer que l'hypothèse B3.1 est satisfaite si (I.7), (I.8), (I.16), (I.19) et (I.22) sont vérifiées.

Nous avons :

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,y) \;\leq\;& |x_2|(1+|x_2|)\left(|y|^{n_2}+|y|^{m_2}\right)+|x_2|(1+|x_1|)\left(|y|^{p_2}+|y|^{m_1}\right)\;, \\ &+|x_1|(1+|x_1|)\left(|y|^{n_1}+|y|^{p_1}\right)\;. \end{aligned} \tag{I.28}$$

Par conséquent :

$$A(x_1,x_2,y) \;\leq\; |x_2|(1+|x_2|+|x_1|)\left(|y|^{n_2}+|y|^{m_2}+|y|^{p_2}+|y|^{m_1}\right)+|x_1|(1+|x_1|)\left(|y|^{n_1}+|y|^{p_1}\right)\;. \tag{I.29}$$

De (I.16), (I.19) et (I.22) on déduit l'existence d'une fonction $\tilde{\kappa}$ continue et positive telle que :

$$A(x_1,x_2,y) \;\leq\; |x_2|(1+|x_2|+|x_1|)\tilde{\kappa}(y)|y|^{\frac{q}{2}} \;+\; |x_1|(1+|x_1|)\tilde{\kappa}(y)|y|^{q}\;. \tag{I.30}$$

D'après les définitions de $V$, $W$, $Q$, $S$ et $T$, on a donc :

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,y) \;\leq\;& c\left(1+\sqrt{Q(x_1)+S(x_2)}\right)\frac{\tilde{\kappa}(y)}{V(y)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{W(y)}\sqrt{T(x_2)} \\ &+c\left(1+\sqrt{Q(x_1)+S(x_2)}\right)^2\frac{\tilde{\kappa}(y)}{V(y)^{\frac{1}{2}}}W(y)\;. \end{aligned} \tag{I.31}$$

Mais, d'après le Lemme E.1 de l'annexe E, il existe une fonction $\tilde{\tilde{\kappa}}$ telle que :

$$\tilde{\tilde{\kappa}}(V(y)) \;\geq\; \tilde{\kappa}(y)^2 + \tilde{\kappa}(y) \; . \tag{I.32}$$

Définissons maintenant $\kappa$ par :

$$\kappa(v) \;=\; c\,\frac{\tilde{\tilde{\kappa}}(v)}{\sqrt{v}} \; . \tag{I.33}$$

Alors :

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, y) \quad \leq \quad & c\left(1 + \sqrt{Q(x_1) + S(x_2)}\right)\sqrt{\kappa(V(y))}\sqrt{W(y)}\sqrt{T(x_2)} \\ & + c\left(1 + \sqrt{Q(x_1) + S(x_2)}\right)^2 \kappa(V(y))W(y) \; . \end{aligned} \tag{I.34}$$

L'inégalité (2.10) est donc obtenue. De plus :

$$\left|\kappa(V(y))\frac{\partial V}{\partial y}(y)\right| \;\leq\; \tilde{\tilde{\kappa}}(V(y)) \; . \tag{I.35}$$

La fonction $\tilde{\tilde{\kappa}}(v)$ étant continue, la propriété (2.12) est vérifiée.

On vérifie de façon immédiate que B3.2 est vérifiée si et seulement si

$$r \;>\; 1 \tag{I.36}$$

ou

$$q \;<\; \min\{n_1, p_1, 2n_2, 2m_2, 2p_2, 2m_1, \} \; . \tag{I.37}$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'hypothèse B3 soit vérifiée avec les fonctions $V$, $Q$ et $S$ sont donc obtenues.

# Bibliographie


[1] Z. Artstein : *Stabilization with relaxed controls.* Nonlinear Anal. (1983) 1163-1173.

[2] A. Bacciotti : *Local Stabilizability of non linear control systems.* Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, Vol.8, World Scientific, 1992.

[3] Y. Bibikov : *Local Theory of Nonlinear Analytic Ordinary Differential Equations.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1979.

[4] V.A. Brusin : *Global stabilization of the inverted pendulum on the cart.* Report of the Nizhny Novgorod Architectural and Building Institute. Krasnoflotskaya 65 NABI, 603000, Nizhny Novgorod, Russia, 1992.

[5] C. Byrnes, A. Isidori : *New results and examples in nonlinear feedback stabilization.* Systems & Control Letters. 12 (1989) 437-442

[6] J. Carr : *Applications of Centre Manifold Theory.* Springer Verlag 1981.

[7] D. Chen, B. Paden : *Stable Inversion of Nonlinear Nonminimun Phase Systems.*

[8] W.A. Coppel : *Dichotomies in Stability Theory.* Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1978.

[9] J.-M. Coron, *Linearized control systems and its applications to smooth stabilization.* SIAM. J. Optimization and Control, 32, No 2, pp. 358-386, March 1994.

[10] J.-M. Coron, B. d'Andrea-Novel : *Smooth stabilizing time-varying control laws for a class of nonlinear systems. Application to mobile robots.* Proceedings-Actes Nolcos 92. Non linear control systems design symposium 92. 24-26 June 1992. Bordeaux-France.

[11] J.M. Coron, L. Praly : *Adding an integrator for the stabilization problem.* Systems & Control Letters 17 (1991) 89-104.

[12] Danskin : *The theory of Max-Min and its application to weapons allocation problem.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1967.

[13] Degang Chen : *Output Tracking Control of Nonlinear Nonminimum Phase Systems.* Proceedings of the 33rd Conference on Decision and Control Lake Buena Vista, FL-Decembre 1994.

[14] P. Deheuvels , *L'intégrale.* Presses universitaires de France, Paris 1980.

[15] A.V. Fiacco, G.P. McCormick : *Nonlinear Programming : Sequential unconstrained minimization techniques.* John Wiley and Sons. 1968.

[16] M. Fliess, J.Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon : *On differentially flat non linear system.* In Proceedings if IFAC NOLCOS Conf., Bordeaux, France, 1992.

[17] M. Fliess, J.Lévine, Ph. Martin, and P. Rouchon : *Flatness and defect of non-linear systems : introductory theory and examples.* INT. J. Control, 1995, vol.61, no.6, 1327-1361.

[18] F.R. Gantmacher, *Théorie des matrices. Tome 1*, Dunod, Paris 1966.

[19] J.P. Gauthier, G. Bornard, *Stabilisation des systèmes non-linéaires.* Outils et modèles mathématiques pour l'automatique, l'analyse des systèmes et le traitement du signal. Ed. du CNRS, 1981.

[20] J. W. Grizzle, M.D. Di Benedetto, F. Lamnabhi-Lagarrigue, *Necessary Conditions for Asymptotic Tracking in Nonlinear Systems.* IEEE Transactions on Automatic Contol, 39(9):1782-1794, 1994.

[21] J.K. Hale : *Ordinary differential equations.* Robert E. Krieger publishing company, Malabar, Florida.

[22] J. Hauser, S. Sastry, P. Kokotovic : *Nonlinear control via approximate input-output linearization : the ball and beam example.* IEEE Transactions on Automatic Contol, 37(3):392-398, 1992.

[23] J. Hauser, S. Sastry, G. Mayer : *Nonlinear Control Design for Slightly Nonminimum Phase Systems : Application ot V/STOL Aircraft.* Automatica, 28 No 4, pp 665-679, 1992.

[24] H. Hermes : *Nilpotent and high-order approximations of vector field systems.* SIAM Vol. 33, No. 2, pp. 238-264, June 1991.

[25] R. Hirschorn, J. Davis : *Output tracking for nonlinear systems with singular points.* SIAM J. Contr. Optim., vol. 25, no. 3, pp.

[26] M. Ikeda, H. Maeda, S. Kodama : *Estimation and feedback in linear time-varying systems : a deterministic theory.* SIAM J. Control, vol.13, no. 2, 1975.

[27] A. Isidori : *Nonlinear Control System.* Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, Hong Kong.

[28] M.J. Jankovic, R. Sepulchre, P. V. Kokotovic : *Global stabilization of an enlarged class of cascade nonlinear systems.* Submitted for publication in IEEE Transactions on Automatic control.

[29] V. Jurdjevic, J.P. Quinn : *Controllability and stability.* Journal of differential equations. vol. 4 (1978) pp. 381-389

[30] R.E. Kalman : *Contribution to the theory of optimal control* Bol. Soc. Mat. Mexicana (2), 5 (1960), pp. 102-119.

[31] T. Kailath : *Linear systems.* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 07632.

[32] H. Khalil : *Nonlinear Systems.* Macmillan Publishing Company New York, Maxwell Macmillan Canada Toronto, Maxwell Macmillan international New York Oxford Singapore Sydney.

[33] A. A. Kolesnikov : *Analytical construction of nonlinear algebraic regulators with given invariant manifolds,* Izv. Buisshix Uchevnix Savedenii, Electromexanica, No. 3, 1987, pp. 100-109. See also : ibid No. 5, pp. 58-66.

[34] P.V. Kokotovic, H.J. Sussmann : *A positive real condition for global stabilization of nonlinear systems.* Systems & Control Letters 13 (1989) 125-133.

[35] A.A. Krasovsky : *A new solution to the problem of a control system analytical design.* Automatica, Vol.7, pp. 45-50, 1971.

[36] M. Krstic, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic : *Nonlinear and adaptive control design.* John Wiley & Sons, New York, 1995.

[37] J.Kurzweil : *On the inversion of Lyapunov's second theorem on stability of motion.* Am.Math.Soc.Transl.,Ser.2,24:19-77,1956.

[38] E. Lee, L. Markus : *Foundations of Optimal Control Theory.* The SIAM Series in Applied Mathematics.

[39] K.K. Lee, A. Arapostathis : *Remarks on smooth feedback stabilization of nonlinear systems.* Systems & Control Letters 10 (1988), 41-44.

[40] S. Lefschetz : *Differential equations: Geometric theory.* Dover. 1977.

[41] W. Lin : *Input saturation and global stabilization by output feedback for affine systems.* Proceeding of the 33rd IEEE conference on decision and control. December 1994.

[42] W. Liu, Y. Chitour, E. Sontag : *Remarks on Finite Gain Stabilizability of Linear Systems Subject to Input Saturation.* Proceedings of the 32rd IEEE conference on decision and control. December 1993.

[43] N. G. Lloyd : *Degree theory.* Cambridge university press. London, New York, Melbourne.

[44] Z. Lin : *Global and semi-global control problems for linear systems subject to input saturation and minimum-phase input-output linearizable systems.* Washington state university, Decembre 1993.

[45] Z. Lin : *Global Stabilization and Restricted Tracking for Linear Systems Subject to Input and Measurement Saturation - A Chain of Integrators Case.* Proceedings of the 1995 American Control Conference, pp. 2488-2492, 1995.

[46] R. Marino, I. Kanellakopoulos, P. Kokotovic : *Adaptative Tracking for Feedback Linearizable SISO Systems.* Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control. Tampa, Florida. Decembre 1989.

[47] R. Marino, P. Tomei : *Nonlinear Control Design.* Prentice Hall, London, New York, Toronto, Sydney, Tokyo, Singapore, Madrid, Mexico City, Munich.

[48] P. Martin : Contribution à l'étude des systèmes différentiellement plats. Thèse de doctorat. Ecole des mines de Paris. Décembre 1992.

[49] P. Martin, S. Devasia and B. Paden : *A different look at output tracking : control of a VTOL aircraft.* Automatica, Vol.32, No.1, pp 101-107, 1996.

[50] F.Mazenc, L. Praly : *Adding an integration and Global asymptotic stabilization of feedforward systems.* Submitted for publication in IEEE Transactions on Automatic control.

[51] F. Mazenc, L. Praly, and W. P. Dayawansa, *Global stabilization by output feedback : Examples and Counter-Examples.* Systems & Control Letters 23 (1994) 119-125.

[52] F. Mazenc, L. Praly, Adding an integration and global asymptotic stabilization of feedforward systems, *Proceed. 33rd IEEE Conference on Decision and Control,* December 1994.

[53] R.Outbib and G.Sallet, *Stabilizability of the angular velocity of a rigid body revisited.* Systems & Control Letters 18 (1992) 93-98.

[54] J.B. Pomet, L. Praly : *A result on robust boundedness.* Systems & Control Letters 10 (1988) 83-92.

[55] L. Praly, *Lyapunov design of a dynamic output feedback for systems linear in their unmeasured state components.* Nolcos 92.

[56] L. Praly, G. Bastin, J.-B. Pomet, Z.P. Jiang, *Adaptive stabilization of non linear systems.* in *Foundations of Adaptive Control*, Kokotovic P.V., Ed., Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[57] L. Praly, Z.-P. Jiang, *Stabilization by output feedback for systems with ISS inverse dynamics,* Systems & Control Letters 21 (1993) 19-33.

[58] E.P. Ryan, *Adaptive stabilization of multi-input nonlinear systems,* Int. J. Robust and Nonlinear Control. Vol. 3, 169-181 (1993).

[59] E.P. Ryan, N.J. Buckingam, *On asymptotically stabilizing feedback control of bilinear system.* IEEE transaction on control, vol as, 28 no.8, august 1983.

[60] A. Saberi, P. V. Kokotovic, H. J. Sussmann, *Global stabilization of partially linear composite systems.* Siam J. Control and optimization. Vol. 28 , No 6 , pp. $1491 - 1503$ , November 1990.

[61] Z. Lin, A. Saberi : *Robust Semi-Global Stabilization of Minimum-Phase Input-Output Linearizable Systems via Partial State and Output Feedback* To appear in IEEE Transactions on Automatic Control.

[62] L.M Silverman, H.E. Meadows : *Controllability and observability in time varying linear systems.* SIAM J. Control, vol.5, no.1, 1967.

[63] E.D. Sontag : *Mathematical Control Theory. Deterministic Finite Dimensional Systems.* Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, London, Paris, Tokyo, Hong Kong.

[64] E.D. Sontag : *A ' universal ' construction of Artstein' s theorem on nonlinear stabilization.* Systems & Control Letters 13 (1989) 117-123.

[65] E.D. Sontag : Remarks on stabilization and input-to-state stability. *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control,* 1376-1378, December 1989.

[66] E.D. Sontag : *Feedback stabilization of nonlinear systems.* in *Robust control of Linear Systems and Nonlinear Control.* M.A Kaashoek, J.H. van Schuppen, A.C.M Ran, Ed.. Birkhäuser, pages 61-81, 1990.

[67] H.J. Sussmann : Limitations on the Satabilizability of Globally Minimum Phase Systems. IEEE Transactions on automatic control, Vol.35, No.1,january 1990.

[68] E.D. Sontag, H.J. Sussmann : *Nonlinear output feedback design for linear systems with saturating controls.* Proceeding of the 29th IEEE conference on decision and control. December 1990.

[69] H.J. Sussmann, P.V.Kokotovic : *The Peaking Phenomenon and the Global Stabilization of Nonlinear Systems.* IEEE Transactions on automatic control, Vol.36, No.4april 1991.

[70] H. Sussmann, E.D. Sontag, Y. Yang : *A General Result on the Stabilization of Linear Systems Using Bounded Controls.* IEEE Transactions on automatic control, Vol.39, No.12, December 1994.

[71] H.M. Tai : *Equivalent characterizations of detectability and stabilizability for a class of linear time-varying systems.* Systems & Control Letters 8(1987) : $425-428$. North-Holland.

[72] A. Teel : *Using Saturation to Stabilize a Class of Single-Input Partially Linear Composite Systems.* Proceedings-Actes Nolcos 92. Non linear control systems design symposium 92. 24-26 June 1992. Bordeaux-France.

[73] A. Teel : *Global stabilization and restricted tracking for multiple integrators with bounded controls.* Systems & Control Letters 18(1992): 165-171.

[74] A. Teel : *A nonlinear small gain theorem for the analysis of control systems with saturation.* Submitted for publication in IEEE Transactions on Automatic control.

[75] A. Teel : *Feedback stabilization : nonlinear solutions to inherently nonlinear problems.* Memorandum No. UCB/ERL M92/65. 12 June 1992

[76] A. Teel : *Semi-global stabilization of minimumphase nonlinear systems in special normal forms.* Systems & Control Letters 19(1992) 187-192

[77] A. Teel : *Additional stability results with bounded controls.* Proceedings of the 33rd IEEE Conference on Decision and Control, December 1994.

[78] A. Teel : *A nonlinear small gain theorem for the analysis fo control systems with saturation.* To appear in IEEE Transactions on Automatic Contol. 1996

[79] K.S. Tsakalis, P.A. Ioannou : *Linear Time-varying Systems, Control and Adaptation.* Prentice Hall, Engelwood Cliffs, New Jersey 07632.

[80] J. Tsinias : *Sufficient Lyapunov-like conditions for stabilization.* Math. Control Signals Systems 2 (1989) 343-357

[81] W.M. Wonham : *On a matrix Riccati equation of stochastic control,* SIAM J. Control Letters 6(1968) : $681 - 697$.

[82] Y. Yang : *Global Stabilization of Linear Systems with Bounded Feedback,* Ph. D. Thesis, Mathematics Department, Rutgers University,1993.

[83] T. Yoshizawa : *Stability theory by Lyapunov's second method.* The mathematical Society of Japan, 1966.