

Géométrie et analyse des systèmes de commande avec dérive : planification des mouvements, évolution de la chaleur et de Schrödinger

Dario Prandi

CMAP, École Polytechnique, Palaiseau



23 octobre 2013

Aperçu de l'exposé

1 Introduction

2 Suivi de courbes non admissibles

- Définition des complexités
- Complexités dans les systèmes sous-riemanniens
- Complexités dans les systèmes avec dérive

3 Diffusions singulières

- Cadre géométrique
- Transmission d'une particule libre
- Transmission et conservation de la chaleur

Systèmes de contrôle avec dérive

On considère un système affine en le contrôle

$$\dot{q}(t) = f_0(q(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(q(t)).$$

Ici,

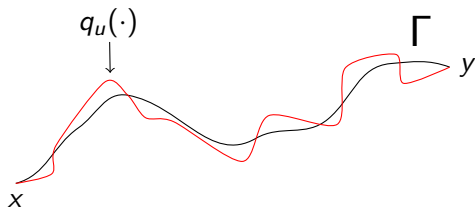
- q appartient à une variété lisse M ,
- f_i sont des champs des vecteurs lisses sur M ,
- $u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m)$.

Ce type de systèmes apparaît dans plusieurs applications :

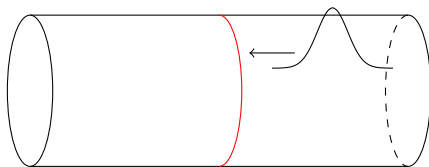
- Systèmes mécaniques
- Micro-nageur (Tucsna, Alouges)
- Contrôle quantique
- Neurogéométrie de la vision (Mumford, Petitot)

Plan de la thèse

① *Suivi de courbes non admissibles*



② *Évolution de Schrödinger et de la chaleur sur des variétés singulières*



Aperçu de l'exposé

1 Introduction

2 Suivi de courbes non admissibles

- Définition des complexités
- Complexités dans les systèmes sous-riemanniens
- Complexités dans les systèmes avec dérive

3 Diffusions singulières

- Cadre géométrique
- Transmission d'une particule libre
- Transmission et conservation de la chaleur

Planification des mouvements

Considérons un système de contrôle

$$\dot{q}(t) = f(q(t), u(t)), \quad u \in \mathcal{U}, f : M \times \mathcal{U} \rightarrow TM.$$

Étant donné $x, y \in M$, on veut trouver une trajectoire du système de contrôle qui joint x à y , soumise à certaines conditions.

Notamment :

- 1 Problème avec obstacles
- 2 Problème de rendez-vous, c.-à-d., être proche de certains endroits à certains moments

Pour l'exposé, on suppose avoir une métrique sur M , avec des boules $B(q, \varepsilon)$.

Méthode

On considère la méthode suivante :

- 1 Trouver une courbe $\Gamma \subset M$ ou un chemin $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ (non admissibles) qui résout le problème.
- 2 Suivre Γ ou γ avec une trajectoire admissible.

Remarque

- 1 \rightarrow dépend de la topologie globale de la variété mais pas du système de contrôle.
- 2 \rightarrow ne dépend que du comportement local du système de contrôle.

Complexités

Soit $J : \mathcal{U} \rightarrow [0, +\infty)$ une fonction coût.

Complexité

Une mesure du coût de l'approximation d'une courbe/un chemin donné avec une certaine précision.

En général, on fixe un ensemble $\text{Adm}(\Gamma, \varepsilon)$ de contrôles admissibles pour une précision ε (qui dépend du problème), et on définit la complexité par

$$\sigma(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \inf_{u \in \text{Adm}(\Gamma, \varepsilon)} J(u).$$

En gros, on mesure le nombre minimal de morceaux de coût inférieur à ε qu'il faut pour approximer notre courbe.

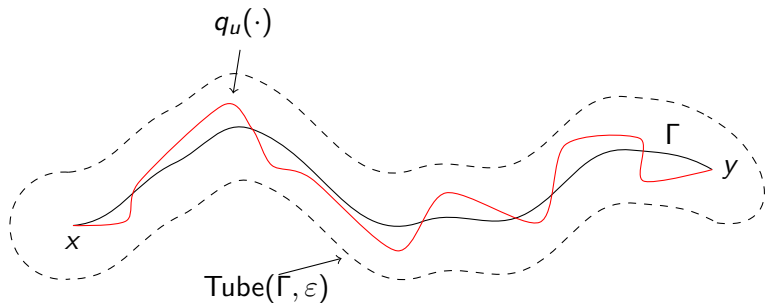
Problème avec obstacles

Soit $\Gamma \subset M$ une courbe et $\text{Tube}(\Gamma, \varepsilon) = \bigcup_{q \in \Gamma} B(q, \varepsilon)$,

$$\mathcal{A}(\Gamma, \varepsilon) = \left\{ u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m) \mid \begin{array}{l} T > 0, q_u(T) = y, \\ q_u(\cdot) \subset \text{Tube}(\Gamma, \varepsilon) \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble définit la *complexité par approximation tubulaire*

$$\sigma_a(\Gamma, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \inf_{u \in \mathcal{A}(\Gamma, \varepsilon)} J(u).$$



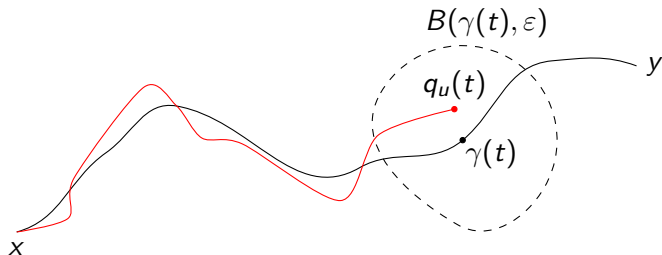
Problème de rendez-vous

Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ un chemin

$$\mathcal{N}(\gamma, \varepsilon) = \left\{ u \in L^1([0, T], \mathbb{R}^m) \mid \begin{array}{l} q_u(T) = y \text{ et } q_u(t) \in B(\gamma(t), \varepsilon) \\ \text{pour chaque } t \in [0, T] \end{array} \right\}.$$

Cet ensemble définit la *complexité par approximation de voisinage*

$$\sigma_n(\gamma, \varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon} \inf_{u \in \mathcal{N}(\gamma, \varepsilon)} J(u).$$



Géométrie sous-riemannienne

Un système de contrôle sous-riemannien (ou non-holonome) est un système de contrôle sans dérive

$$\dot{q}(t) = \sum_{i=1} u_i(t) f_i(q(t)),$$

qui satisfait la condition d'Hörmander – c.-à-d., t.q.

$$\text{Lie}_q\{f_1, \dots, f_m\} = T_q M, \quad \text{pour chaque } q \in M.$$

- 1 La fonction valeur d_{SR} associée à ce système avec le coût L^1 , est une distance. On l'appelle distance sous-riemannienne.
- 2 Grâce à la linéarité du système, on peut toujours reparamétriser les trajectoires sans changer leur coût. Donc,

Complexité par approximation tubulaire \iff Complexité par approximation de voisinage

Complexité sous-riemannienne

- Introduite par Gromov (1996) dans un contexte différent.
- *Équivalence faible* :

$$f(\varepsilon) \asymp g(\varepsilon) \iff C_1 \leq \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} \leq C_2 \text{ pour } \varepsilon \downarrow 0.$$

Étudiée par Jean (2003).

- *Équivalence forte* :

$$f(\varepsilon) \simeq g(\varepsilon) \iff \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{g(\varepsilon)} = 1.$$

Étudiée dans une série de papiers par Gauthier, Zakalyukin et al.

Systèmes avec dérive

Considère un système de contrôle avec dérive

$$\dot{q}(t) = f_0(q(t)) + \sum_{i=1}^m u_i(t) f_i(q(t)).$$

- On suppose que la condition d'Hörmander fort est satisfaite – c.-à-d., $\text{Lie}_q\{f_1, \dots, f_m\} = T_q M$ pour chaque $q \in M$.
- L'ensemble des contrôles est

$$\mathcal{U} = \bigcup_{0 < T \leq \mathcal{T}} L^1([0, T]).$$

- On choisit comme coût la norme L^1 .

Ces choix ont deux conséquences :

- ① Le système sans dérive associé ($f_0 = 0$) est sous-riemannien.
- ② Contrôlabilité locale en temps petit.

Complexités pour systèmes avec dérive

- On utilisera la métrique sous-riemannienne pour définir les complexités.
- Le système n'étant pas linéaire, on ne peut pas reparamétriser les trajectoires et donc

Complexité par approximation tubulaire \longleftrightarrow Complexité par approximation de voisinage

Pour chaque $q \in M$, $s \in \mathbb{N}$ on définit

$$\Delta^s(q) = \text{span}\{[f_{i_1}, [f_{i_2}, [\dots, f_{i_k}]] \dots](q) \mid 1 \leq k \leq s, 1 \leq i_j \leq m\}.$$

$$\Delta^1(q) \subset \Delta^2(q) \subset \dots \subset \Delta^r(q) = T_q M$$

Hypothèse

Equirégularité : $\dim \Delta^s(q)$ ne dépend pas du point $q \in M$, pour chaque $s \in \mathbb{N}$.

Théorème

On suppose $f_0 \in \Delta^s \setminus \Delta^{s-1}$.

- Soit $\Gamma \subset M$ une courbe lisse. Soit k tel que $T\Gamma \subset \Delta^k$ et $T\Gamma \not\subset \Delta^{k-1}$. Alors, si \mathcal{T} est suffisamment petit, on a

$$\sigma_a(\Gamma, \varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon^k}.$$

- Soit $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ un chemin et k t.q. $\dot{\gamma} \in \Delta^k(\gamma)$ et $\dot{\gamma} \notin \Delta^{k-1}(\gamma)$. Si de plus $s = k$, on suppose que $\dot{\gamma} \neq f_0(\gamma) \pmod{\Delta^{s-1}(\gamma)}$. Alors,

$$\sigma_n(\gamma, \varepsilon) \asymp \frac{1}{\varepsilon^{\max\{s, k\}}}.$$

- La complexité des **courbes** est insensible à la dérive.
- La complexité des **chemins** dépend de la dérive. Notamment, quand $f_0 \in \Delta^r \setminus \Delta^{r-1}$ où r t.q. $\Delta^r = TM$, la complexité est toujours maximale – c.-à-d. $\sigma_n(\gamma, \varepsilon) \asymp \varepsilon^{-r}$.

Remarques & techniques

- On a étudié aussi deux autres complexités, où on approxime en utilisant des interpolations et non une métrique, et également un autre coût,

$$\mathcal{I}(u, T) = \int_0^T \sqrt{1 + \sum_{i=1}^m u_i(t)^2} dt.$$

- La preuve est basée sur des estimations de la fonction valeur associée au système de contrôle.
- Pour obtenir ces estimations il est nécessaire de réduire le système de contrôle avec dérive à un système sans dérive mais dépendant du temps, pour lequel on arrive à définir une généralisation de l'approximation nilpotente.

$$\dot{q} = f_0(q) + \sum_{i=1}^m u_i f_i(q) \longrightarrow \dot{q} = \sum_{i=1}^m u_i (e^{-tf_0})_* f_i(q).$$

- Il est possible de supprimer l'hypothèse d'équirégularité en montrant que ces estimations sont uniformes aussi autour de points singuliers.

Travail futur

- On voudrait supprimer l'hypothèse $f_0 \in \Delta^s \setminus \Delta^{s-1}$ et notamment étudier la complexité des courbes Γ (ou chemins) t.q. $f_0|_{\Gamma} \equiv 0$.
- Une fois qu'on a des estimations asymptotiques faibles, il est naturel de chercher à obtenir des estimations fortes et un algorithme constructif pour obtenir les minimisantes de la complexité (à la Gauthier-Zakalyukin).
- On voudrait traiter aussi l'hypothèse Hörmander faible (c.-à-d. que $\text{Lie}_q\{f_0, f_1, \dots, f_m\} = T_qM$) en traitant d'abord des systèmes sur \mathbb{R}^n où la dérive est linéaire, comme les systèmes mécaniques. Dans ce cas on s'intéressera notamment aux mouvements quasi-statiques, c.-à-d. aux courbes t.q. $f_0|_{\Gamma} \equiv 0$.

Aperçu de l'exposé

1 Introduction

2 Suivi de courbes non admissibles

- Définition des complexités
- Complexités dans les systèmes sous-riemanniens
- Complexités dans les systèmes avec dérive

3 Diffusions singulières

- Cadre géométrique
- Transmission d'une particule libre
- Transmission et conservation de la chaleur

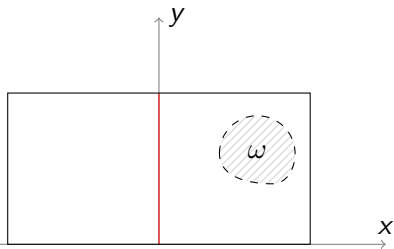
Plan de Grushin

On considère le système de contrôle sous-riemannien (non équirégulier)

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = u_1(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_X + u_2(t) \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}}_Y, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Introduit dans le contexte des opérateurs hypoelliptiques

($L = X^2 + Y^2 = \partial_x^2 + x^2 \partial_y^2$) par Baouendi (1967), Grushin (1970), Franchi-Lanconelli (1984).



Il est possible de contrôler l'évolution de la chaleur associée à L dans un carré contenant la singularité $\mathcal{Z} = \{x = 0\}$, en utilisant un contrôle localisé sur un seul côté (Beauchard, Cannarsa et Guglielmi (à paraître)).

Les champs X et Y sont linéairement indépendants sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$.

- Ils définissent sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{Z}$ la métrique riemannienne et le volume

$$\mathbf{g} = dx^2 + \frac{1}{x^2} dy^2 \quad dV = \frac{1}{x} dx dy.$$

- L'opérateur de Laplace-Beltrami singulier

$$\mathcal{L} u = \operatorname{div} \nabla u = \partial_x^2 u - \frac{1}{x} \partial_x u + x^2 \partial_y^2 u.$$

Boscain et Laurent (paraître) : l'évolution de la chaleur et de Schrödinger associée à cet opérateur ne traverse pas la singularité, c.-à-d.

$$\operatorname{supp} u(0) \subset \{x > 0\} \implies \operatorname{supp} u(t) \subset \{x > 0\} \text{ pour chaque } t > 0,$$

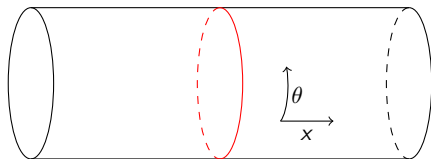
où u est solution de l'équation de Schrödinger ou de la chaleur associées à \mathcal{L} .

Problème ouvert

La chaleur est conservée ou elle est absorbée par la singularité ?

Cadre géométrique

On considère la variété $M = (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{S}^1$.



Avec le système de contrôle

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \theta \end{pmatrix} = u_1(t)X(x, \theta) + u_2(t)\Theta(x, \theta),$$
$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ |x|^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

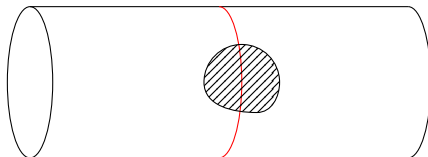
Ce système de contrôle définit la métrique Riemannienne et la mesure suivantes

$$\mathbf{g}_\alpha = dx^2 + |x|^{-2\alpha} d\theta^2, \quad dV = |x|^{-\alpha} dx dy$$

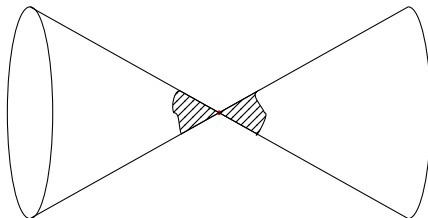
Interprétation topologique

$$M_\alpha = \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1, \quad X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} 0 \\ |x|^\alpha \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

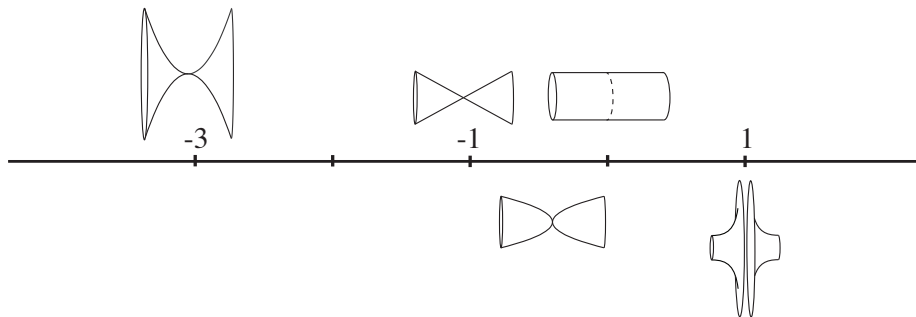
- ① Si $\alpha \geq 0$, la topologie est celle d'un cylindre.



- ② Si $\alpha < 0$, la topologie est celle d'un cône.



Interprétation métrique



- $\alpha = -1$: Cône
- $\alpha = 0$: Cylindre
- $\alpha = 1$: plan de Grushin compactifié sur une direction
- $\alpha < -1$: surface de rotation conique avec profil $x^{-\alpha}$
- $\alpha \in (-1, 0)$: pas plongeable dans \mathbb{R}^3 , mais on peut penser à une surface de rotation conique
- $\alpha > 0$: pas plongeable, mais on peut penser à une surface de rotation "anti-cône"

L'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\mathcal{L} u = \operatorname{div} \nabla u = \partial_x^2 - \frac{\alpha}{x} \partial_x + |x|^{2\alpha} \partial_\theta^2.$$

- **Équation de Schrödinger pour une particule libre :**

$$i \frac{\partial}{\partial t} u = -\mathcal{L} u,$$

- **Équation de la chaleur :**

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \mathcal{L} u.$$

Questions

- 1 Est-il possible d'envoyer une particule quantique d'une côté à l'autre de la singularité ?
- 2 Est-ce que la chaleur passe à travers la singularité ?
- 3 La chaleur total est conservée ou la singularité l'absorbe ?

L'opérateur de Laplace-Beltrami sur $L^2(M, dV)$

À cause de la singularité $\mathcal{Z} = \{x = 0\}$ on définit \mathcal{L} sur $C_c^\infty(M)$.

On doit donner du sens à \mathcal{L} sur la singularité \mathcal{Z}



On doit étudier le caractère auto-adjoint de \mathcal{L}

Résultats classiques

Dans chaque espace de Hilbert il y a les équivalences,

A opérateur auto-adjoint $\longleftrightarrow e^{-itA}$ groupe unitaire
fortement continu

A opérateur auto-adjoint
défini non-positif $\longleftrightarrow e^{tA}$ semi-groupe fortement
continu

Définition

Un opérateur $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ (on assumera toujours que $D(A)$ soit dense dans \mathcal{H}) est *auto-adjoint* si

- A est *symétrique* (c.-à-d. si $(Au, v)_{\mathcal{H}} = (u, Av)_{\mathcal{H}}$ pour chaque $u, v \in D(A)$),
- $D(A) = D(A^*)$.

L'opérateur $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)} : C_c^\infty(M) \rightarrow L^2(M, dV)$ est

- **Symétrique** : car si $u \in C_c^\infty(M)$, par intégration par parties on a

$$(\mathcal{L} u, v)_{L^2(M, dV)} = (u, \mathcal{L} v)_{L^2(M, dV)} + \left(\cancel{\partial_x u v} - u \cancel{\partial_x v} \right) \Big|_{0^-}^{0^+}.$$

pour chaque $v \in L^2(M, dV)$ t.q. $\mathcal{L} v \in L^2(M, dV)$.

- **Non auto-adjoint** : car on a

$$D(\mathcal{L}^*) = \{v \in L^2(M, dV) \mid \mathcal{L} v \in L^2(M, dV)\}.$$

Extensions auto-adjointes de $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$

Un opérateur A est une extension auto-adjointe de $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$ si

$$D(\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}) \subset D(A) = D(A^*) \subset D(\mathcal{L}^*)$$
$$Au = \mathcal{L}^* u \quad \text{pour chaque } u \in D(A).$$

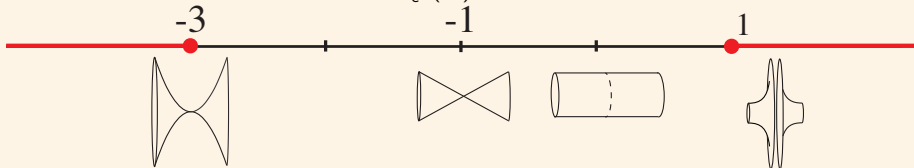
En gros, choisir une extension auto-adjointe correspond à choisir des conditions au bord sur la singularité.

On a deux cas :

- 1 *Il existe seulement une extension auto-adjointe* : dans ce cas l'opérateur est dit essentiellement auto-adjoint et l'unique extension \mathcal{L}_F est l'extension de Friedrichs. On a un seul moyen de fixer des conditions au bord sur la singularité.
- 2 *Il y a une infinité d'extensions auto-adjointes* : chaque extension auto-adjointe donne des conditions au bord différentes.

Théorème

Pour $\alpha \notin (-3, 1)$ l'opérateur $\mathcal{L}|_{C_c^\infty(M)}$ est essentiellement auto-adjoint.



Quand \mathcal{L} est essentiellement auto-adjoint rien ne peut passer à travers la singularité. En fait, l'extension de Friedrichs est la somme directe des extensions de Friedrichs des deux côtés.

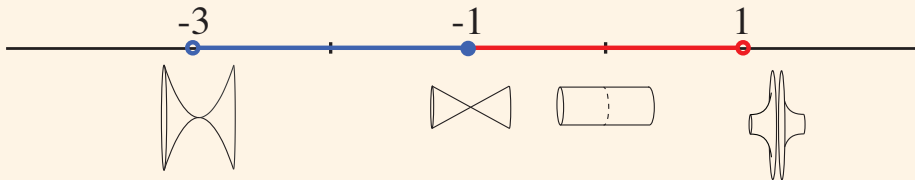
$$D(\mathcal{L}_F) = \{u \in H_0^1(M, dV) \mid \mathcal{L}u \in L^2(M, dV)\}.$$

\implies Pour $\alpha \notin (-3, 1)$ les évolutions de Schrödinger et de la chaleur ne passent pas à travers la singularité.

Transmission d'une particule libre

Théorème

Pour $\alpha \notin (-3, 1)$ la transmission d'information par l'équation de Schrödinger n'est pas possible. D'ailleurs, pour $\alpha \in (-3, -1]$ il est possible de transmettre seulement la *valeur moyenne* de la fonction, tandis que pour $\alpha \in (-1, 1)$ on peut obtenir une *communication complète* à travers la singularité.



Pour $\alpha \in (-1, 0)$ la variété a la topologie d'un cône, mais on peut transmettre "l'information rotationnelle".

Techniques

- En faisant une décomposition de Fourier de $L^2(M, dV)$ on obtient une famille d'opérateurs sur $L^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}, |x|^{-\alpha} dx)$.

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \widehat{\mathcal{L}}_k, \quad \text{t.q.} \quad \widehat{\mathcal{L}}_k = \partial_x^2 - \frac{\alpha}{x} \partial_x - |x|^{2\alpha} k^2.$$

- À travers une transformation unitaire U on transforme $\widehat{\mathcal{L}}_k$ en un opérateur de Schrödinger avec potentiel de Calogero (x^{-2}) sur $L^2(\mathbb{R} \setminus \{0\}, dx)$, qu'on sait étudier

$$\partial_x^2 - \frac{\alpha}{2} \left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \frac{1}{x^2} - k^2 |x|^{2\alpha} \quad \text{on } L^2(\mathbb{R}, dx).$$

Notamment, pour $k = 0$ cet opérateur est symétrique en α par rapport à $\alpha = -1$ tandis que pour $k \neq 0$ non.

Transmission de la chaleur

Pour pouvoir accepter une extension auto-adjointe de $\mathcal{L}|_{C_c^\infty(M)}$ comme opérateur définissant l'évolution de la chaleur, il faut demander une condition supplémentaire.

Definition

L'opérateur auto-adjoint A sur $L^2(M, dV)$ est *de Markov* s'il est défini non-positif et

$$u \in L^2(M, dV) \text{ t.q. } 0 \leq u \leq 1 \text{ p.p.} \implies 0 \leq e^{tA}u \leq 1 \text{ p.p.}$$

- Le caractère de Markov est une condition d'admissibilité physique.
- Chaque opérateur de Markov (avec un hypothèse de régularité qui est toujours satisfaite dans notre cas) est le générateur d'un processus de Markov continu à gauche, Fukushima (1970).

Extensions de Markov

On va considérer deux extensions de Markov de $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$.

- **Extension de Friedrichs \mathcal{L}_F**

$$D(\mathcal{L}_F) = \{u \in H_0^1(M, dV) \mid \mathcal{L}u \in L^2(M, dV)\},$$

- **Extension de Neumann \mathcal{L}_N**

$$D(\mathcal{L}_N) = \{u \in H^1(M, dV) \mid (\mathcal{L}u, v)_{L^2(M, dV)} = (\nabla u, \nabla v)_{L^2(M, dV)} \\ \text{pour chaque } v \in H^1(M, dV)\}.$$

En plus, si $\alpha \in (-1, 1)$ on définit aussi l'extension suivante.

- **Extension bridging \mathcal{L}_B**

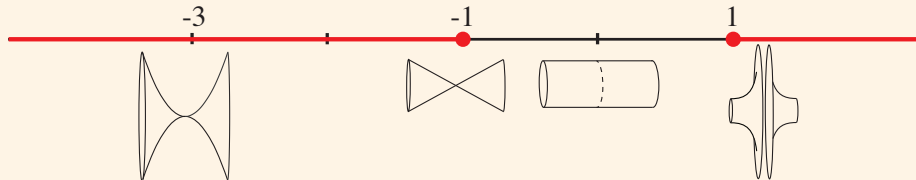
$$D(\mathcal{L}_B) = \{u \in H^2(\bar{M}, dV) \mid u(0^+, \cdot) = u(0^-, \cdot), \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{-\alpha} \partial_x u(x, \cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^-} |x|^{-\alpha} \partial_x u(x, \cdot) \text{ for a.e. } \theta \in \mathbb{S}^1\}$$

Unicité de Markov et transmission de la chaleur

Si l'opérateur $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$ a une seule extension de Markov (c.-à-d., si $\mathcal{L}_F = \mathcal{L}_N$), on dit qu'il est **Markov unique**.

Théorème

- Si $\alpha \leq -1$ ou $\alpha \geq 1$, alors $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$ est Markov unique ;
- Si $\alpha \in (-1, 1)$, alors \mathcal{L}_F , \mathcal{L}_B et \mathcal{L}_N sont trois extensions de Markov différentes.



Ce théorème implique qu'on peut avoir transmission de la chaleur seulement si $\alpha \in (-1, 1)$.

Conservation de la chaleur

La propriété de Markov permet d'étendre e^{tA} de $L^2(M, dV)$ à $L^\infty(M, dV)$.

Definition

L'opérateur de Markov A est *stochastiquement complet* si

$$e^{tA}1 = 1 \quad \text{pour chaque } t \geq 0.$$

Question 3

Les extensions de Markov de $\mathcal{L}|_{C_c^\infty(M)}$ sont-elles stochastiquement complètes ?

Dans les variétés Riemanniennes complètes (où le Laplace-Beltrami est toujours auto-adjoint) ce caractère est lié à

- l'unicité des solutions bornées du problème de Cauchy (Khas'minskii 1960),
- l'explosion du volume à l'infini (Grygorian 1985).

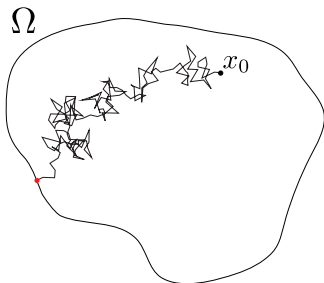
Connections avec le processus stochastique associé

L'opérateur A est
stochastiquement
complet

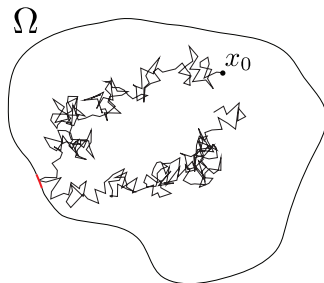


Le processus stochastique associé
avec A a presque sûrement un temps
de vie infini

Mouvement brownien associé avec $\mathcal{L} = \partial_x^2 + \partial_y^2$ sur un ensemble borné
 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$:



Conditions au bord de Dirichlet

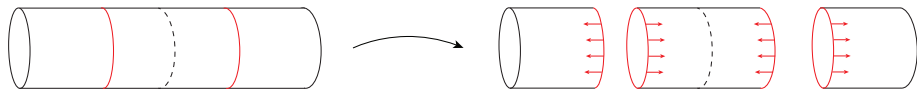


Conditions au bord de Neumann

Complétude stochastique à 0 et à ∞

Soit $M_0 = M \cap \{x \in [-1, 1]\}$ et $M_\infty = M \setminus \{x \in (-1, 1)\}$.

Soient A_0 et A_∞ définis en considérant A sur M_0 et sur M_∞ avec des conditions au bord de Neumann.



Définition

L'opérateur de Markov A est *stochastiquement complet en 0* (resp. à l' ∞) si A_0 (resp. A_∞) est stochastiquement complet.

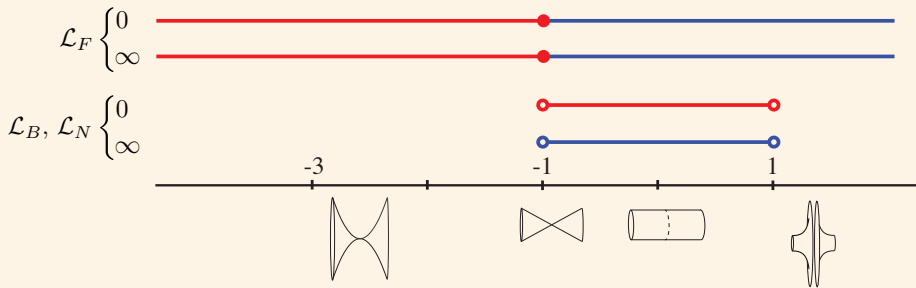
Théorème

L'opérateur A est *stochastiquement complet* si et seulement si il est *stochastiquement complet à la fois en 0 et à l' ∞* .

Complétude stochastique de \mathcal{L}_F , \mathcal{L}_B et \mathcal{L}_N

Theorem

- L'extension de Friedrichs \mathcal{L}_F est **stochastiquement complète** (à la fois en 0 et à l' ∞) si et seulement si $\alpha \leq -1$.
- Si $\alpha \in (-1, 1)$, alors les extensions bridging et de Neumann, \mathcal{L}_B et \mathcal{L}_N , sont **stochastiquement complètes** en 0 et **incomplètes** à l' ∞ .



Techniques

- Les preuves de cette section sont basées sur la théorie du potentiel et en particulier sur la théorie des formes de Dirichlet développée par Fukushima.
- Notamment, le fait que $\mathcal{L} |_{C_c^\infty(M)}$ est Markov unique est équivalent au fait que $H^1(M_\alpha, dV) = H_0^1(M_\alpha, dV)$ – c.-à-d. que $C_c^\infty(M)$ est dense dans $H^1(M_\alpha, dV)$ par rapport à la norme $\|u\|_{H^1(M_\alpha, dV)} = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2}$.
- En plus, dans ce contexte, le fait qu'un opérateur soit stochastiquement complet est équivalent à sa récurrence.
- Pour $\alpha < 1$, la récurrence à 0 d'une extension auto-adjointe A de \mathcal{L} est équivalente au fait que $1_\eta \in H^1(M_\alpha, dV)$ et $A1 = 0$, où $\eta \in C_c^\infty(M)$ est une fonction cut-off t.q. $\eta \equiv 1$ dans un voisinage de 0.

Problèmes ouverts

- On voudrait étudier le même problème du point de vue des processus stochastiques, alors qu'ici on ne s'est intéressé qu'à leurs générateurs.
- Étudier les propriétés spectrales de \mathcal{L} . En particulier, dans le cas $\alpha \in (-1, 1)$, les propriétés de scattering en utilisant l'extension bridging comme référence.
- Étendre ces résultats à des surfaces singulières plus générales, pour lesquelles le cône ($\alpha = -1$) et le plan de Grushin ($\alpha = 1$) sont des cas génériques.

Ball-Box

Soit $\{\partial_{z_i}\}_{i=1}^n$ la base canonique de \mathbb{R}^n et $\mathcal{R}_{f_0}(q, \varepsilon)$ l'ensemble atteignable à partir de q avec un coût $\leq \varepsilon$. On définit

$$\Xi(\eta) = \bigcup_{0 \leq \xi \leq \mathcal{T}} (\xi \partial_{z_\ell} + \text{Box}(\eta))$$

$$\Pi(\eta) = \bigcup_{0 \leq \xi \leq \mathcal{T}} \{z \in \mathbb{R}^n : |z_\ell - \xi| \leq \eta^s, |z_i| \leq \eta^{w_i} + \eta \xi^{\frac{w_i}{s}} \text{ pour } w_i \leq s, i \neq \ell, \\ \text{et } |z_i| \leq \eta(\eta + \xi^{\frac{1}{s}})^{w_i-1} \text{ pour } w_i > s\},$$

Theorem

Soit $z = (z_1, \dots, z_n)$ un système de coordonnées privilégiées en q pour $\{f_1, \dots, f_m\}$, qui rectifie f_0 comme le k ème champ de vecteurs coordonnée ∂_{z_ℓ} , pour un $1 \leq \ell \leq n$. Alors, il existe C, ε_0, T_0 t.q., si $\mathcal{T} < T_0$, on a

$$\Xi\left(\frac{1}{C}\varepsilon\right) \subset \mathcal{R}_{f_0}(q, \varepsilon) \subset \Pi(C\varepsilon), \quad \text{for } \varepsilon < \varepsilon_0.$$

Résumé

