



HAL
open science

Traitement optique en éclairage incoherent : possibilites theoriques et limitations experimentales.

Pierre Chavel

► **To cite this version:**

Pierre Chavel. Traitement optique en éclairage incoherent : possibilites theoriques et limitations experimentales.. Optique [physics.optics]. Université Paris Sud - Paris XI, 1979. Français. NNT : . pastel-00713919

HAL Id: pastel-00713919

<https://pastel.hal.science/pastel-00713919>

Submitted on 3 Jul 2012

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY
N° d'ordre
2109

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée
pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

Par

CHAVEL Pierre Henri

SUJET : Traitement optique en éclairage incohérent : possibilités théoriques
et limitations expérimentales.

Soutenue le 02 Mars 1979 devant la Commission d'examen.

MM. MARECHAL	Président
BIJAQUI	Examineur
Mme CONNES	"
LOHMANN	"
LOWENTHAL	"
RODDIER	"

ORSAY
N° d'ordre
2109

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

pour obtenir

Le grade de DOCTEUR ES-SCIENCES PHYSIQUES

Par

CHAVEL Pierre Henri

SUJET : Traitement optique en éclairage incohérent : possibilités théoriques
et limitations expérimentales.

Soutenue le 02 Mars 1979 devant la Commission d'examen.

MM. MARECHAL	Président
BIJAOU	Examineur
Mme CONNES	"
LOHMANN	"
LOWENTHAL	"
RODDIER	"

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION	page 1
Plan d'ensemble de ce mémoire	2 bis
 <u>PREMIERE PARTIE : PROPOSITION D'UNE METHODE DE TRAITEMENT D'IMAGE</u>	
INTRODUCTION A LA PREMIERE PARTIE	3
 CHAPITRE I - GENERALITES SUR LE TRAITEMENT D'IMAGES	
I - QU'APPELLE-T-ON TRAITEMENT D'IMAGES ?	4
1.1 Définition	
1.2 Classification	
1.2.1 Amélioration d'images	
1.2.2 Reconnaissance des formes	
1.2.3 Codage et décodage	
1.2.4 Correction d'images	
1.3 Les opérations du traitement d'images	
1.3.1 Opérations ponctuelles	
1.3.2 Opérations sur deux images	
1.3.3 Opérations intégrales	
II - TRAITEMENT D'IMAGES PAR CONVOLUTION	6
2.1 Application de la convolution à la correction d'images	
2.2 Principales grandeurs physiques mises en jeu	
2.2.1 Nombre de points	
2.2.2 Transmittance	
 CHAPITRE II - RAPPELS SUR LES METHODES DU TRAITEMENT D'IMAGES	
I - TRAITEMENT DIGITAL	13
1.1 Généralités	
1.2 Les opérations	
1.3 La convolution en traitement digital	
1.3.1 Calcul direct	
1.3.2 Calcul par transformation de Fourier	
1.3.3 Calcul par filtrage récurrent	
II - TRAITEMENT D'IMAGES PAR VOIE OPTIQUE EN ECLAIRAGE COHERENT	16
2.1 Généralités	
2.2 Les opérations	
2.2.1 Transformation de Fourier	
2.2.2 Convolution	
2.2.3 Autres opérations	
2.3 Procédés d'obtention du masque de filtrage	
2.3.1 Expérience d'Abbe	
2.3.2 Masque de phase et d'amplitude	
2.3.3 Masque holographique	
2.4 Utilisation d'hologrammes synthétiques, hétérodynage optique	
2.4.1 Masque holographique synthétique	
2.4.2 Hétérodynage optique	
2.5 Le bruit optique	

III

III - TRAITEMENT D'IMAGES PAR VOIE OPTIQUE EN ECLAIRAGE INCOHERENT	
3.1 Généralités	page 29
3.2 Convolution en éclairage incohérent	
3.2.1 Convolutions incohérentes géométriques	
3.2.2 Convolutions avec masque diffractant	
3.3 Autres opérations	
IV - BILAN COMPARATIF ET CONCLUSION	33
4.1 Tableau synoptique	
4.2 Méthodes hybrides	
4.3 Conclusion	
CHAPITRE III - LES CONVOLUTIONS INCOHERENTES : PROPOSITION D'UNE METHODE DE CORRECTION D'IMAGES	
I-REVUE DES EXPERIENCES DE CONVOLUTION INCOHERENTE AVEC MASQUE DIFFRACTANT	37
1.1 Généralités	
1.2 Utilisation d'un masque non holographique	
1.3 Utilisation d'un masque holographique	
1.4 Variante utilisant des hologrammes-images	
II - PRESENTATION D'UNE METHODE	44
2.1 Schéma d'ensemble	
2.2 Les principales étapes de la mise en oeuvre pratique	
CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE	47
<u>DEUXIEME PARTIE : LE BRUIT OPTIQUE EN TRAITEMENT D'IMAGES : INFLUENCE DE LA COHERENCE</u>	
INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE	48
CHAPITRE I - INTRODUCTION A L'ETUDE DU BRUIT	
I-D'OU VIENT LE BRUIT ?	49
1.1 La source	
1.2 L'objet	
1.3 Les éléments optiques	
1.4 L'air	
1.5 Le récepteur	
II - COMMENT ETUDIER LE BRUIT ?	52
2.1 Plan de l'étude	
2.2 Expression générale de l'éclairement de l'image	
CHAPITRE II - BRUIT PUPILLAIRE	
I - THEORIE ELEMENTAIRE	55
II - PRESENTATION DU CALCUL COMPLET	59
2.1 Hypothèses nécessaires	
2.2 Conclusions du calcul complet	

III - INTERFERENCES PARASITES PAR REFLEXION	page 61
3.1 Comportement général vis à vis de la cohérence	
3.2 Un exemple	
IV - CONSEQUENCES PRATIQUES	65
APPENDICE : calcul du rapport signal sur bruit pupillaire en utilisant les moyennes spatiales sur l'image	66
CHAPITRE III - BRUIT OBJECTIF	
I - THEORIE ELEMENTAIRE	69
II - ETUDE COMPLETE DE L'ESPERANCE MATHEMATIQUE DE L'ECLAIREMENT, EFFET CALLIER	72
2.1 Rappel historique sur l'effet Callier	
2.2 Hypothèses	
2.3 Résultats	
2.3.1 Densité et effet Callier	
2.3.2 Interprétation simple	
2.3.3 Contraste et effet Callier	
III - ETUDE COMPLETE DES FLUCTUATIONS DE L'ECLAIREMENT	79
3.1 Hypothèses	
3.2 Résultats	
IV - BRUIT OBJECTIF PERCUSSIONNEL	81
V - CONSEQUENCES PRATIQUES	82
CHAPITRE IV - L'HYPOTHESE GAUSSIENNE ET LE PARADOXE DE L'OBJET DE PHASE	
I - OBJETS DE PHASE ET THEOREME CENTRAL LIMITE	85
1.1 L'amplitude de bruit peut-elle être gaussienne ?	
1.2 Le paradoxe de l'objet de phase	
II - VARIANCE ET HYPOTHESE GAUSSIENNE	87
2.1 Principe du calcul	
2.2 Hypothèses et notations	
2.3 Eclairage cohérent	
2.4 Eclairage incohérent	
2.5 Résultat	
III - L'HYPOTHESE GAUSSIENNE CIRCULAIRE	92
CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE	95

ANNEXES : articles extraits de revues.

- ANNEXE I - P. CHAVEL et S. LOWENTHAL, "A method of incoherent optical-image processing using synthetic holograms", Journal of the Optical Society of America 66 (1976) 14-23.
- ANNEXE II - P. CHAVEL et S. LOWENTHAL, "Noise and coherence in optical image processing. I. The Callier effect and its influence on image contrast", Journal of the Optical Society of America 68 (1978) 559-568.
- ANNEXE III - P. CHAVEL et S. LOWENTHAL, "Noise and coherence in optical image processing. II. Noise fluctuations", Journal of the Optical Society of America 68 (1978) 721-732.
- ANNEXE IV - J. BRUNOL et P. CHAVEL, "Fourier transformation of rotationally invariant two-variable functions : computer implementation of Hankel transform", Proceedings of the Institute of Electrical and Electronics Engineers 65 (1977) 1089-1090.
- ANNEXE V - J.P. HUGONIN et P. CHAVEL, "A complement to the theory of Lohmann-type computer holograms", Optics Communications 16 (1976) 342-346.
- ANNEXE VI - P. CHAVEL et J.P. HUGONIN, "High quality computer holograms : the problem of phase representation", Journal of the Optical Society of America 66 (1976) 989-996.

INTRODUCTION

Qu'est-ce qu'une bonne image ? Quand une image paraît "mauvaise" , est-il possible de l'améliorer ? Quel sens donner à ce dernier mot ? Il suffit de penser au rôle primordial de la vue parmi les sens de l'homme pour saisir toute l'importance de ces questions . Le développement récent des moyens audio-visuels et l'universalité acquise par les procédés photographiques les rendent particulièrement actuelles . Il est probable que de nombreux spécialistes devront contribuer à formuler les réponses : mathématiciens , théoriciens de l'information , électroniciens , opticiens et informaticiens . Actuellement , leurs points de vue sont loin d'être unifiés : au cours d'un récent Congrès organisé par l'Association Française de Cybernétique sur "le traitement d'images" , les participants pouvaient, en entendant certains orateurs , se demander si le sujet traité avait vraiment un rapport avec leur domaine . Encore les sciences humaines et les arts , dont l'apport à l'étude de nos questions peut très probablement être capital , n'étaient-ils pas représentés !

Les opticiens et informaticiens ont adopté pour leur part une approche qui se rattache aux sciences de l'ingénieur : pour cerner une question , il est assurément utile d'acquérir une grande expérience à son sujet . Aussi se sont-ils employés à développer des techniques pour réaliser "certains" traitements d'images. C'est dans ce domaine que se situe le présent mémoire .

Les méthodes du traitement d'image sont probablement apparues avec l'expérience d'Abbe (1873) . Leur développement a été accéléré vers le milieu de ce siècle par la formulation de la théorie du filtrage des fréquences spatiales . Sur le plan pratique , il a été favorisé par deux développements techniques : l'invention du laser en 1961 et l'apparition , autour des années 1965-70 , d'ordinateurs assez puissants pour manipuler l'immense quantité d'information que contient une image. C'est pourquoi les méthodes de traitement d'images étudiées depuis lors se répartissent pour la plupart entre deux catégories : méthodes optiques cohérentes et méthodes digitales . Mais ces faits historiques ne sont-ils pas à l'origine d'une erreur ? Les méthodes optiques incohérentes ont pratiquement été oubliées ; pourtant , le formalisme du filtrage des fréquences spatiales s'applique à elles et quelques chercheurs ont depuis longtemps évoqué et étudié leurs possibilités .

Nous sommes partis de cette remarque pour apporter diverses contributions au traitement optique incohérent .

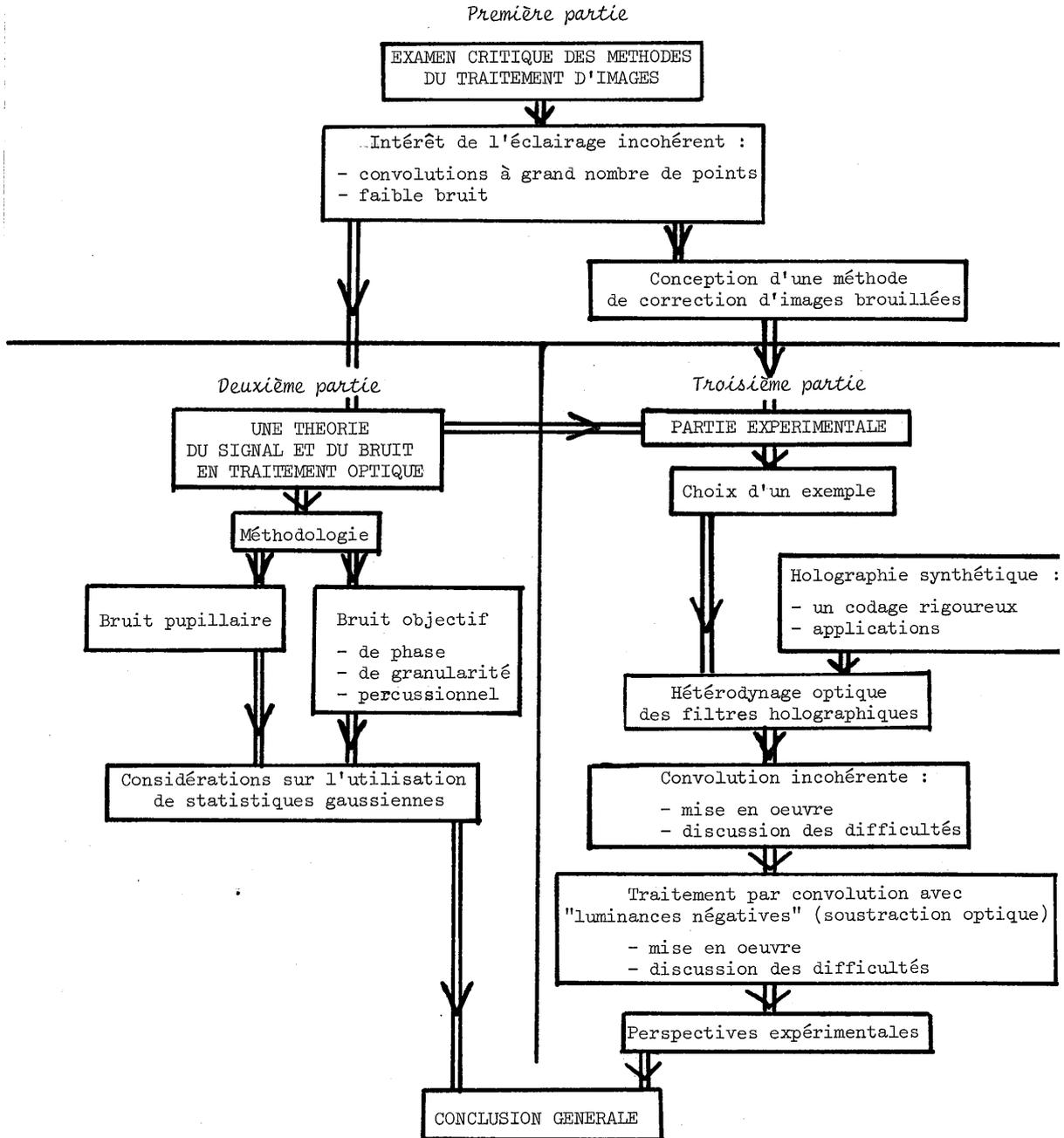
Dans une première partie , nous décrivons en détail les motivations qui nous ont amené à étudier le traitement incohérent ; nous comparerons à cet effet ses possibilités à celles des méthodes concurrentes .

La seconde partie , théorique , est consacrée à justifier par le raisonnement les avantages de l'éclairage incohérent par rapport à l'éclairage cohérent quant à l'influence des parasites qui affectent l'éclairement d'une image , et méritent le nom de "bruit" optique . Cette étude repose sur l'utilisation de quelques notions de statistiques dont beaucoup d'opticiens ont eu tendance à négliger l'intérêt jusqu'à présent .

La troisième partie décrit nos expériences de traitement d'images incohérent : définition d'une expérience qui nous semble intéressante et étude de ses paramètres , mise en oeuvre pratique , description et discussion des résultats . Un chapitre spécial est consacré à l'holographie synthétique : cette technique a attiré notre attention parce qu'elle fournit des outils utiles en traitement d'images ; nous lui avons réservé une place importante en raison de son intérêt théorique et de ses applications nombreuses .

Six de nos publications dans des revues spécialisées sont jointes en annexe. Nous aurions pu renvoyer le lecteur à ces annexes sans en décrire le contenu . Cependant , nous avons jugé utile d'inclure dans le texte une description physique , pratiquement sans calcul , de l'apport de ces articles . La référence aux annexes n'est donc utile que pour examiner le détail des calculs . De ce fait , nous n'avons pas évité l'écueil que signalait Vauvenargues : "le défaut unique de tous les ouvrages , c'est d'être trop longs". Mais nous espérons avoir gagné en clarté ce que nous avons perdu en concision .

PLAN D'ENSEMBLE DE CE MEMOIRE



PREMIERE PARTIE

PROPOSITION D'UNE METHODE DE TRAITEMENT DES IMAGES

INTRODUCTION A LA PREMIERE PARTIE

Le traitement d'images est un domaine où s'affrontent les partisans de trois techniques rivales : l'informatique , le traitement optique cohérent et le traitement optique incohérent . Le présent mémoire décrit des contributions à la troisième de ces techniques , qui pour l'instant , est aussi la moins répandue . Pourquoi un tel choix ? Cette première partie se propose de l'expliquer en examinant les principes , les moyens et les méthodes mis en oeuvre des trois côtés .

Plutôt que de rappels sur les possibilités du traitement d'images , il s'agit donc d'une étude critique et comparative des atouts et des limitations des procédés concurrents . Certains points nous semblent importants pour cette comparaison . En premier lieu , différents concepts de base doivent être examinés ; en particulier , la définition habituelle de la notion de transmittance mérite d'être précisée . Nous soulignerons par ailleurs l'intérêt de l'opération de convolution et le rôle que peut jouer l'holographie synthétique pour sa réalisation optique . La méthode "d'hétérodynage optique" que nous avons proposée rend ce rôle plus aisé et plus important . L'influence du "bruit optique" dans les expériences de traitement optique de l'information tient une place déterminante dans la comparaison entre traitement optique cohérent et traitement optique incohérent.

Toutes ces considérations éclaireront les motivations qui nous ont guidé lors du travail qui sera décrit plus loin . En particulier , elles nous permettront d'expliquer les grandes lignes d'une méthode de convolution incohérente que nous avons proposée et que nous présenterons dans le contexte d'une revue des méthodes voisines .

CHAPITRE I - GENERALITES SUR LE TRAITEMENT D'IMAGES

Pour situer notre travail dans le contexte du traitement d'images , il convient tout d'abord de préciser quelques définitions et d'introduire les principales notions utiles . Ainsi , nous esquisserons maintenant deux classifications possibles des sortes de traitements d'images , et nous nous intéresserons au formalisme du traitement d'images par convolution et à la notion de nombre de points . Le concept de transmittance dont la définition habituelle manque de rigueur , sera examiné avec une attention particulière .

I - QU'APPELLE-T-ON TRAITEMENT D'IMAGES

1.1) Définition

Le traitement d'images est une spécialité en croissance rapide car elle suscite de l'intérêt pour ses applications potentielles dans de nombreux domaines; de ce fait , sa définition n'est probablement pas encore cernée avec précision . Nous proposons cependant une définition qui nous aidera à délimiter nettement notre sujet , au risque d'exclure arbitrairement du domaine du traitement d'images certains travaux qui pourraient s'y rattacher .

Le traitement est effectué sur un objet , encore appelé image à traiter . Nous représenterons cet objet par une fonction $O(\vec{r})$. Nous appellerons traitement d'image toute opération qui forme physiquement à partir de l'image à traiter $O(\vec{r})$ une image considérée par l'utilisateur comme préférable à $O(\vec{r})$ en un certain sens. Cette nouvelle image est appelée image traitée et représentée par une fonction $I(\vec{r})$.

Le traitement d'image peut a priori faire intervenir un espace E de point courant \vec{r} dont la dimension est quelconque , mais nous nous restreindrons ici au cas le plus fréquent où cet espace est un plan , donc de dimension 2 . D'après cette définition , nous imposons aux fonctions objet $O(\vec{r})$ et image traitée $I(\vec{r})$ d'opérer sur le même espace de départ E . Nous excluons ainsi les cas où le résultat du traitement est , par exemple , une décision concernant l'objet ou encore un nombre le caractérisant .

Suivant les utilisateurs , l'amélioration apportée pour le traitement peut porter sur des critères très divers : c'est ce qui nous conduit à rappeler la

classification proposée par HUANG [1] des différentes sortes de traitements.

1.2) Classification

On peut distinguer quatre classes de traitement d'images .

- 1.2.1) L'amélioration d'images consiste à faire apparaître par le traitement une caractéristique importante pour l'observateur . L'augmentation de contraste , les traitements dits cosmétiques rendant l'image plus agréable à voir sont des exemples simples d'amélioration d'images . Le plus souvent , les critères de l'amélioration sont essentiellement subjectifs .
- 1.2.2) La reconnaissance des formes répond à la question : tel objet est-il présent dans l'objet $O(\vec{r})$ et si oui , où ? Il s'agit par exemple de la lecture automatique des adresses sur les lettres , de la reconnaissance des empreintes digitales ou de la distinction entre cellules normales et cellules pathologiques sur une préparation microscopique .
- 1.2.3) Les opérations de traitement par codage et décodage constituent la troisième classe . Il convient d'y distinguer deux sous-classes suivant le but assigné au codage et au décodage . Le premier cas concerne la transmission d'image à travers un canal qui peut être par exemple une ligne téléphonique . Il s'agit alors de minimiser l'occupation du canal pour transmettre une image donnée . L'image codée se présente sous forme comprimée , et l'information transmise sous cette forme est retransformée par le décodage qui aboutit à l'image traitée . L'autre cas est celui des objets dont on ne peut pas former d'image satisfaisante directement : ainsi , la formation d'images en rayons X ou γ peut se faire par codage et décodage .
- 1.2.4) La dernière classe de traitement d'images est la correction d'image : l'objet est alors lui-même l'image d'un autre objet . Cette image à traiter est entachée d'un défaut dont le traitement tente de supprimer les effets . Par exemple , le but de la correction peut être de réduire a posteriori l'effet des aberrations d'un système optique ou d'un microscope électronique , ou encore l'effet de la turbulence atmosphérique .

Cette classification par les buts des différentes sortes de traitements d'images en montre la variété . Mais d'autres classifications sont possibles . Nous consacrerons le chapitre II à une description des méthodes expérimentales du traitement d'images : traitements digital , optique , mixte . Une troisième classification tient compte des opérations utilisées en traitement d'images .

1.3) Les opérations du traitement d'images

La relation mathématique entre les fonctions $O(\vec{r})$ et $I(\vec{r})$ peut être de trois types que nous citerons par ordre de complexité croissante .

- 1.3.1) L'image traitée en un point \vec{r} peut ne dépendre que de l'objet au même point \vec{r} .
Il existe une relation de la forme :

$$I(\vec{r}) = f_1 [O(\vec{r})] \quad (1)$$

Ce cas se présente par exemple dans des opérations d'amélioration d'images comme l'augmentation de contraste .

- 1.3.2) L'image traitée peut résulter de la comparaison entre $O(\vec{r})$ et un objet de référence $O_R(\vec{r})$:

$$I(\vec{r}) = f_2 [O(\vec{r}) , O_R(\vec{r})] \quad (2)$$

Dans cette expression , la fonction de deux variables f_2 peut être par exemple une addition ou une multiplication . La soustraction est utilisée pour faire apparaître nettement de très faibles différences entre deux scènes , et nous aurons l'occasion d'en étudier une autre utilisation .

- 1.3.3) Enfin , l'image traitée peut dépendre des valeurs de la fonction $O(\vec{r})$ en différents points , ce qui s'exprime de façon générale par l'expression :

$$I(\vec{r}) = f_3 \left[\int f_4(O(\vec{r}_1)) f_5(\vec{r}_1, \vec{r}) d\vec{r}_1 \right] \quad (3)$$

Dans cette équation f_3 , f_4 et f_5 sont des fonctions quelconques . On peut voir que la relation entre objet et image n'est , en général , ni linéaire , ni invariante par translation . Cependant , un cas particulier très important en pratique est celui où l'équation (3) se réduit à une opération linéaire et invariante par translation , c'est-à-dire à une convolution . C'est essentiellement à cette opération que s'intéresse le présent travail , aussi la présenterons-nous de façon plus complète .

II - TRAITEMENT D'IMAGES PAR CONVOLUTION

2.1) Application de la convolution à la correction d'images

Dans un traitement d'images par convolution , l'objet et l'image traitée sont reliés par la relation

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= O(\vec{r}) * H(\vec{r}) \\ &= \int O(\vec{r}-\vec{r}_0) H(\vec{r}_0) d\vec{r}_0 \end{aligned} \quad (4)$$

où la fonction $H(\vec{r})$ est la réponse percussionnelle de traitement .

Par transformation de Fourier , la relation (4) donne une autre relation utile , qui rappelle que l'opération de convolution est aussi un filtrage des fréquences spatiales :

$$\tilde{I}(\vec{\Omega}) = \tilde{H}(\vec{\Omega}) \tilde{O}(\vec{\Omega}) \quad (5)$$

Dans cette expression , $\tilde{}$ désigne la transformation de Fourier , $\vec{\Omega}$ est le point courant de l'espace des fréquences spatiales et \tilde{H} est la fonction de transfert de modulation du processus de traitement (FTM de traitement) .

L'amélioration d'images , la reconnaissance des formes , le codage des images en rayons X et γ et leur décodage font fréquemment appel à la convolution. Nous nous intéresserons cependant plus spécialement à la correction d'images .

Il est particulièrement utile de faire la correction par convolution lorsque l'objet à traiter est entaché d'un défaut qui se présente lui-même sous la forme d'une convolution :

$$O(\vec{r}) = A(\vec{r}) * D(\vec{r}) \quad (6)$$

Dans cette relation , $A(\vec{r})$ est la scène originale que le traitement se propose de retrouver le mieux possible , $D(\vec{r})$ est la fonction défaut : l'Equation (6) représente avec une bonne approximation la formation d'une image brouillée par l'aberration sphérique , par un défaut de mise au point ou par un mouvement de translation de l'objet $A(\vec{r})$ par rapport à l'image $O(\vec{r})$ pendant la prise de vue .

La correction idéale de l'Equation (6) est appelée déconvolution . Dans le meilleur des cas , on pourrait rêver de réaliser la convolution (4) avec une fonction de traitement $H(\vec{r})$ telle que

$$H(\vec{r}) * D(\vec{r}) = \delta(\vec{r}) \quad (7)$$

où δ est la distribution de Dirac . La FTM de défaut \tilde{D} et la FTM de traitement \tilde{H} sont alors reliées par

$$\tilde{H}(\vec{\Omega}) = \frac{1}{\tilde{D}(\vec{\Omega})} \quad (8)$$

Les Equations (4) , (6) et (7) montrent que l'image $I(\vec{r})$ traitée par déconvolution est identique à la scène idéale $A(\vec{r})$. Malheureusement , ce traitement , encore appelé "filtrage inverse" est irréalisable .

Deux raisons essentielles rendent l'opération impossible , même si l'on admet que les processus représentés par les Equations (4) et (6) sont réellement linéaires . La première raison est qu'il n'existe pas de processus physique sans bruit , si bien que la relation (4) ne peut pas représenter la réalité en toute rigueur . La seconde raison est liée à l'existence de la "fonction" $H(\vec{r})$ des Equations (7) et (8) . Le comportement à l'infini et les zéros éventuels de la fonction $\tilde{D}(\vec{\Omega})$ font que $H(\vec{r})$ peut n'exister qu'au sens des distributions ou ne pas exister du tout . En particulier , la fonction $\tilde{D}(\vec{\Omega})$ est fréquemment à support borné , c'est-à-dire nulle en dehors d'un domaine fini du plan des fréquences spatiales : dans ce cas , aucune fonction $H(\vec{r})$ ne permet de retrouver l'information perdue sur les fréquences coupées .

Dans ces conditions , les Equations (7) et (8) ne correspondent pas à un traitement réalisable : la correction d'une image entachée du défaut $D(\vec{r})$ de l'Equation (6) ne peut pas être une vraie déconvolution , mais tout au plus une déconvolution approchée . La fonction $H(\vec{r})$ doit alors être choisie de façon à corriger le défaut $D(\vec{r})$ non pas parfaitement , mais "le mieux possible" , au sens d'un critère à définir . Nous reviendrons dans la troisième partie sur la relation qui relie alors les FTM de défaut et de traitement et qui remplace

l'équation (8) en tenant compte du bruit , des zéros de \hat{D} et du critère adopté .

2.2) Principales grandeurs physiques misés en jeu

L'équation (4) montre quelles grandeurs interviennent dans les traitements d'images par convolution : ce sont les grandeurs notées O , I , H et \vec{r} . Il convient de préciser leur nature physique . Nous commencerons par la grandeur \vec{r} .

2.2.1) Nombre de points :

L'espace bidimensionnel dans lequel sont plongés l'objet , l'image traitée et la réponse percussionnelle de traitement est pour nous le plan , repéré par le point courant \vec{r} et les coordonnées de x et y . Mais physiquement , objet , image et réponse percussionnelle sont toujours limités à des régions du plan en dehors desquelles leur valeur est physiquement assimilable à zéro , sinon mathématiquement nulle . Nous noterons S_o , S_i et S_H les aires de ces régions (voir figure 1)

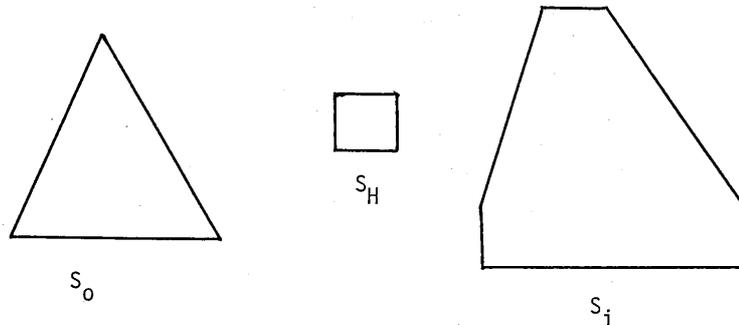


Figure 1. Supports de l'objet, de la réponse percussionnelle de traitement et de l'image.

La relation de convolution (4) montre que $I(\vec{r})$ est nulle en dehors de la région où les supports en \vec{r}_0 de $O(\vec{r}-\vec{r}_0)$ et $H(\vec{r}_0)$ se recouvrent. En particulier, si le support de O est rectangulaire de dimensions Δx_0 et Δy_0 et le support de H rectangulaire de dimensions Δx_H et Δy_H , alors le support de I est contenu dans un rectangle de dimensions

$$\begin{aligned} \Delta x_i &= \Delta x_0 + \Delta x_H \\ \Delta y_i &= \Delta y_0 + \Delta y_H \end{aligned} \quad (9)$$

Par ailleurs, il n'existe aucun cas de résolution infinie, c'est-à-dire qu'il existe toujours une distance minimale telle qu'aucun détail plus petit n'est distingué, soit parce que cela n'a pas d'intérêt, soit en raison du matériel utilisé, soit en raison de limitations difficilement surmontables comme la diffraction ou le bruit. Nous introduisons donc une limite de résolution suivant x , δx et une limite de résolution suivant y , δy . La cellule de résolution a pour aire

$$s = \delta x \cdot \delta y \quad (10)$$

Il s'introduit ainsi les nombres de points dans l'objet, N_0 , dans la réponse percussionnelle, N_H et dans l'image, N_i , donnés par la relation

$$N_\alpha = \frac{\Delta x_\alpha \cdot \Delta y_\alpha}{\delta x \cdot \delta y} = \frac{S_\alpha}{s} \quad (11)$$

avec $\alpha = 0, H, i$.

Les différents systèmes de traitement d'images ont des capacités, exprimées en nombre de points, très diverses. De ce fait, le nombre de points est un paramètre très important en pratique. Rappelons quelques ordres de grandeurs caractéristiques qui montrent dans quelles grandes proportions peut varier ce nombre.

- image télévision ordinaire : $625 \times 625 = 400\ 000$ points
- image médicale en gammagraphie : 1 000 points
- diapositive 24×36 mm limitée par le grain et les aberrations à une résolution de $10\ \mu\text{m}$: 8 000 000 points
- diapositive 24×36 mm idéale limitée par la diffraction à une ouverture $f/2$: 5 000 000 000 points

On conçoit que les méthodes à employer en traitement d'images ne soient pas les mêmes pour une image de 1 000 points et pour une image de 10^{10} points.

2.2.2) Transmittance :

Les grandeurs O et I décrivant l'objet et l'image sont nécessairement reliées à l'émission de lumière par l'objet. Certains traitements se font directement sur une scène lumineuse qui est décrite par sa luminance. Mais dans de nombreuses situations, et notamment dans notre cas de la déconvolution approchée, l'objet est une image enregistrée sur un support photographique. Il est courant de décrire les photographies par leur transmittance ou leur réflectance; ces notions, toutefois, utilisent implicitement certaines approximations. Nous rappellerons donc

comment elles sont définies . Pour simplifier l'exposé , limitons-nous au cas de photographies transparentes .

Considérons une émulsion photographique épaisse s'étendant de l'abscisse $x = 0$ à l'abscisse $x = \Delta x$ (Fig. 2) . Eclairons-la par une onde incidente plane et monochromatique . Le champ électrique au point $\vec{r}(x,y,z)$ s'écrit :

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_0 \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (12)$$

$$\vec{k} \begin{cases} k\sqrt{1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta} \\ k \sin \alpha \\ k \sin \beta \end{cases} \quad \text{et } k = \frac{\omega}{c} .$$

c est la vitesse de la lumière dans le vide et $\omega = 2\pi c/\lambda$ la pulsation de l'onde de longueur d'onde dans le vide λ . Une description complète de l'émulsion étudiée nécessite en principe que l'on explicite le champ réfléchi et transmis pour toutes les polarisations du champ incident , pour toutes les valeurs possibles de la pulsation ω et toutes les inclinaisons α et β possibles . Par exemple , et sous réserve de linéarité , le champ à la sortie de l'émulsion peut être écrit sous la forme :

$$[\vec{E}(\Delta x,y,z,t)] = [\tau][\vec{E}_0] \exp(-i\omega t + i\vec{k} \cdot \vec{r}) \quad (13)$$

Dans cette expression , les vecteurs sont notés sous forme de matrices-colonnes à trois éléments complexes , et le rôle de l'émulsion est décrit par une matrice 3×3 , $[\tau]$, dont les éléments dépendent de ω , α , β , y et z .

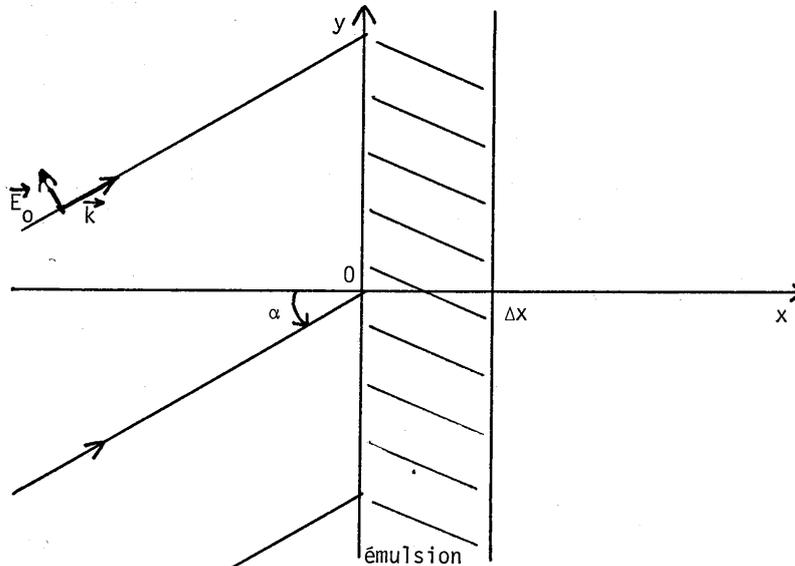


Figure 2. Emulsion photographique éclairée par une onde plane.

d'onde émergeant de l'émulsion, par la méthode proposée par D. JOYEUX {2, 3} .

Pour décrire correctement le comportement de certaines émulsions , il convient donc d'utiliser la fonction de 5 variables $\tau(\omega, \alpha, \beta, x, y)$. Pour la présente étude , nous négligerons cependant la dépendance de τ par rapport aux variables angulaires α et β , et nous retrouvons ainsi la transmittance en amplitude usuelle , $\tau(\omega, x, y)$. Pour abréger les notations , la variable ω sera omise dans la suite sauf si elle est indispensable .

C'est de cette quantité $\tau(\vec{r})$ que dépendent nos fonctions objet $O(\vec{r})$ et image traitée $I(\vec{r})$. Toutefois , elles ne sont pas nécessairement confondues avec $\tau(\vec{r})$. Ainsi , $O(\vec{r})$ peut parfois être la transmittance en intensité définie par

$$T(\vec{r}) = \frac{\text{éclairement mesuré en présence de l'émulsion}}{\text{éclairement mesuré en l'absence de l'émulsion}} \quad (14)$$

Nous aurons l'occasion d'étudier dans la deuxième partie la relation entre $\tau(\vec{r})$ et $T(\vec{r})$, qui fait intervenir le système optique utilisé .

Un autre choix possible pour la fonction objet $O(\vec{r})$ est la densité , définie par Hurter et Driffield {4} comme

$$D = \text{colog}_{10} T. \quad (15)$$

En fait , le choix de la fonction objet $O(\vec{r})$ dépend avant tout de la méthode de traitement d'image utilisée : ce choix est pratiquement imposé en traitement par voie optique en éclairage cohérent et en traitement par voie optique en éclairage incohérent , alors qu'il est plus libre en traitement numérique . La nature physique de la fonction image traitée $I(\vec{r})$ dépend de ce choix et de la méthode de traitement . Une description des principes et des possibilités de ces méthodes nous donnera l'occasion de préciser ces points .

CHAPITRE II - RAPPELS SUR LES METHODES DU TRAITEMENT D'IMAGES

L'ouvrier mécanicien qui doit réaliser une pièce dispose pour son travail de fraiseuses , de perceuses et de tours . Le spécialiste de traitement d'images dispose également de plusieurs outils : le traitement digital , le traitement optique en éclairage cohérent , le traitement optique en éclairage incohérent , les traitements hybrides . Mais ces outils sont encore en partie au stade de la mise au point et leurs attributions respectives ne sont pas encore parfaitement délimitées. Nous essayons dans ce chapitre de peser les mérites et les inconvénients respectifs de chaque outil . Cette comparaison nous permettra d'introduire la méthode de traitement que nous avons développée et qui sera décrite plus loin .

I - TRAITEMENT DIGITAL

1.1) Généralités

Le traitement d'images digital est une discipline jeune et en pleine expansion, comme toutes les applications de l'informatique . Outre plusieurs articles de synthèse {1,5,6} et de nombreux articles spécialisés et colloques , un ouvrage de base {7} vient de lui être consacré . Le schéma général d'une opération de traitement d'image digital est indiqué sur la figure 4 .

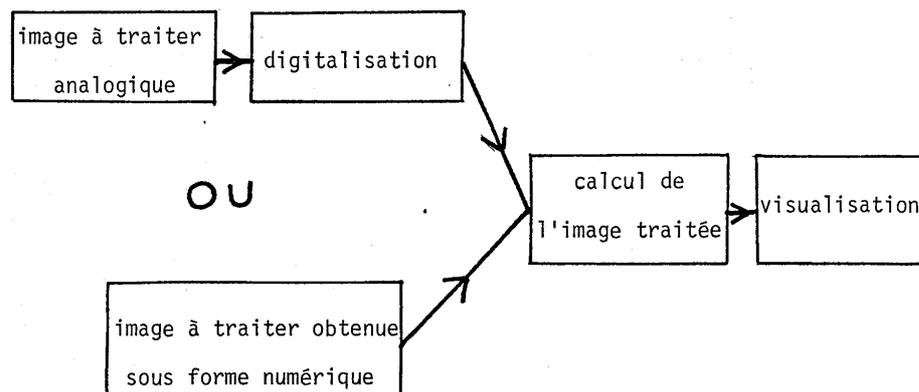


Figure 4. Traitement d'image digital.

Suivant les cas , l'image à traiter peut se présenter au départ soit sous forme digitale , soit sous forme analogique . Dans certains domaines comme l'imagerie par satellite et l'imagerie dans les domaines X et γ , il est fréquent que la détection de l'image soit faite directement sous forme numérique , et le traitement digital semble alors s'imposer tout naturellement . Cependant , la plus grande partie des acquisitions d'images a lieu sous forme analogique , en général à l'aide d'un récepteur photographique . Le traitement digital nécessite alors une étape préalable de digitalisation , et en toute rigueur on peut parler de traitement hybride . Le traitement digital , dans ces cas , se trouve en concurrence avec un traitement analogique de la photographie .

La partie centrale du traitement digital est l'étape de calcul . Au départ de ce calcul , l'ordinateur dispose de la fonction objet $O(\vec{r})$. Celle-ci se présente en fait sous la forme d'un tableau de valeurs O_{mn} déduit des échantillons de flux mesurés par toute transformation jugée utile .

Après le traitement , l'image traitée se présente comme un tableau de valeurs I_{mn} . Mais cette forme n'est pas utilisable directement : d'après notre définition de l'expression traitement d'image , une étape de visualisation est nécessaire pour compléter le processus .

1.2) Les opérations

Comment passe-t-on du tableau objet au tableau image ? C'est là le grand atout du traitement digital : l'ordinateur est capable de réaliser une grande variété d'opérations , linéaires ou non . Tracer un histogramme , sélectionner des niveaux de densité , transformer un négatif en positif , augmenter le contraste , additionner ou soustraire des images et même corriger une distorsion géométrique sont des opérations simples en traitement d'images numérique . Plus généralement , les opérations qui ne font intervenir qu'un point de l'image à la fois ne posent pas de problème important .

Par contre , une difficulté peut intervenir pour les opérations portant sur plusieurs points de l'image à la fois , comme la transformation de Fourier ou la convolution , qui nous intéresse plus particulièrement . Cette difficulté ne vient pas du principe même du calcul , mais du nombre d'opérations à effectuer et de la taille de mémoire nécessaires . Nous avons donné un ordre de grandeur du nombre de points nécessaires pour décrire diverses images . La difficulté que nous signalons est directement liée à ce nombre , comme nous allons le rappeler sur le cas particulier de la convolution .

1.3) La convolution en traitement digital

L'équation de convolution (4) du chapitre I s'écrit dans le cas digital

$$I_{mn} = \sum_{m_0} \sum_{n_0} O_{m-m_0, n-n_0} H_{m_0, n_0} \quad (16)$$

La sommation sur m_0 et n_0 doit s'étendre sur tout le domaine où H_{m_0, n_0} et $O_{m-m_0, n-n_0}$ sont définis et non nuls . H_{m_0, n_0} est l'élément courant du tableau qui décrit la réponse percussionnelle de traitement H .

1.3.1) Calcul direct :

L'Equation (16) peut être évaluée directement . Si l'image et l'objet contiennent N points et la réponse percussionnelle P points , le nombre d'opérations , multiplications ou additions , nécessaires pour calculer l'image entière est voisin de $2 NP$. Pour obtenir cette valeur , nous négligeons les effets de bord car nous ne considérons que l'ordre de grandeur .

Raisonnons sur un exemple numérique simple : on voit qu'avec un temps de l'ordre de 1 μ s pour une opération , la convolution d'une image de télévision ordinaire par une réponse percussionnelle de $3 \times 3 = 9$ points destinée par exemple à lisser l'image , se fait en 5 ou 10 secondes si l'image à traiter et l'image traitée tiennent entièrement en mémoire . Cette condition exige d'ailleurs quelque 2×400000 nombres , dont chacun occupe un nombre de bits dépendant de la dynamique requise , mais en général de l'ordre de 10 à 30 . Ainsi , la taille de mémoire nécessaire est déjà plus que respectable . Bien sûr , le calcul peut aussi être effectué avec seulement une petite partie de l'objet O et de l'image I en mémoire centrale au prix d'une certaine perte de temps calcul pour les transferts de données .

Cette discussion très simplifiée montre que même une convolution par une réponse percussionnelle très petite sur une image de taille modeste nécessite quelques précautions si on recourt au calcul direct de la convolution .

1.3.2) Calcul par transformation de Fourier :

L'exemple précédent montre que si les nombres de points N et P de l'objet et de la réponse percussionnelle sont tous deux élevés , le calcul direct est extrêmement long . Il y a lieu de chercher une méthode plus efficace pour le calcul des convolutions digitales . Une technique consiste à calculer les transformées de Fourier de O et de H , à faire leur produit point par point et à calculer la transformée de Fourier inverse du résultat pour aboutir à l'image traitée . Mais même avec l'algorithme de transformée de Fourier rapide , la transformée de Fourier d'une image est une opération longue et encombrante . Prenons pour exemple le temps de calcul sur les ordinateurs IBM 370/168-168 du Centre Inter Régional de Calcul Electronique (CIRCE) , à Orsay . Le temps d'une addition sur 4 octets est voisin de 1 μ s . Le calcul de la transformée de Fourier d'un tableau de 512×512 points exige environ 15s et 1000 K octets . A partir d'un tableau de 2048×2048 points , on doit avoir recours à de nombreux transferts de données entre la mémoire principale et

les mémoires de masse pour obtenir , en un temps fort long , la transformée de Fourier d'une image qui ne tient pas en mémoire centrale {8} .

Plus précisément , l'algorithme de transformée de Fourier rapide requiert environ $4 N \log_2 N$ multiplications et additions, et la convolution entière , $12 N \log_2 N + 2N$ si N est supérieur à P ; cette méthode est donc préférable à la méthode directe si

$$12 N \log_2 N + 2N < 2 NP \quad (17)$$

Par exemple , pour $N = 512 \times 512$, on trouve $P \geq 7 \times 7$

1.3.3) Convolution par filtrage récurrent :

Les difficultés des deux méthodes précédentes ont amené les spécialistes d'analyse numérique à étudier d'autres méthodes {7} , comme celle du filtrage récurrent . Il s'agit là d'une modification de la méthode directe dans laquelle I_{mn} se calcule non seulement à partir d'une combinaison linéaire O_{mn} mais aussi à partir des échantillons de l'image traitée déjà calculés :

$$I_{mn} = \sum_{m_0} \sum_{n_0} O_{m-m_0, n-n_0} A_{m_0, n_0} + \sum_{m_0=1}^{m-1} \sum_{n_0=1}^{n-1} I_{m-m_0, n-n_0} B_{m_0, n_0} \quad (18)$$

Cette méthode permet de calculer avec des matrices A et B de petite taille des convolutions de l'objet par des réponses percussionnelles H s'étendant sur tout l'objet . De A et B on peut , en effet , déduire la réponse percussionnelle de traitement H . Malheureusement , le problème réciproque de la synthèse des matrices A et B donnant une réponse H imposée a priori est ardu . Finalement , la convolution par filtrage récurrent présente des performances comparables à celles de la convolution par double transformée de Fourier .

En conclusion , la multiplicité des méthodes de convolution en traitement d'images numérique traduit une carence dans les possibilités , au reste très attrayantes , de l'informatique . Or , ainsi que nous l'avons déjà souligné , la convolution présente une grande importance en traitement d'images . Fournons-nous donc vers les méthodes optiques . Un bref examen de leurs possibilités nous permettra de rappeler que la convolution constitue précisément un de leurs principaux attraits

II - TRAITEMENT D'IMAGES PAR VOIE OPTIQUE EN ECLAIRAGE COHERENT

2.1) Généralités

Le traitement d'images optique cohérent est l'aîné du traitement numérique d'environ un siècle , puisque son origine remonte à Abbe {9} et même à Foucault {10} . Son développement n'a cependant été rapide qu'après l'apparition du formalisme du filtrage des fréquences spatiales {11,12,13} et l'invention du laser et de l'holographie {14,15} entre 1940 et 1962 .

Une expérience de traitement d'images par voie optique en éclairage cohérent fonctionne en général suivant le schéma de la figure 5 .

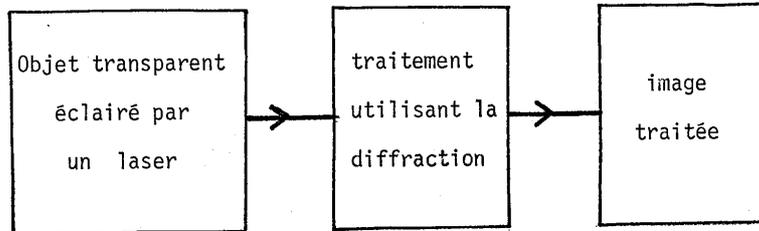


Figure 5. Traitement optique cohérent.

L'objet est une photographie sur support transparent , il est éclairé par une onde cohérente le plus souvent issue d'un laser . Le passage de l'objet à l'image traitée se fait par formation d'image en éclairage cohérent . Il utilise les propriétés de la diffraction . La fonction $O(\vec{r})$ s'identifie ici à la transmittance en amplitude du cliché à traiter , et la fonction $I(\vec{r})$ à l'amplitude diffractée dans le plan de l'image traitée . Le phénomène physique de diffraction est donc l'outil de base du traitement d'images en éclairage cohérent et détermine les opérations possibles .

2.2) Opérations

2.2.1) Transformation de Fourier :

la transformation de Fourier est l'opération la plus simple en traitement optique cohérent , grâce à une propriété bien connue { 16} de la diffraction de Fraunhofer (voir figure 6) . Cette propriété , valable dans le domaine des petits angles et sous réserve de validité de l'approximation scalaire , est la suivante : si une onde sphérique $A \exp(-i\omega t - 2i\pi r^2/2\lambda d)$, convergeant à la distance d du plan diffractant , éclaire un objet situé dans le plan diffractant de transmittance en amplitude $\tau(\vec{r})$, alors l'amplitude lumineuse diffractée dans le plan de convergence s'écrit

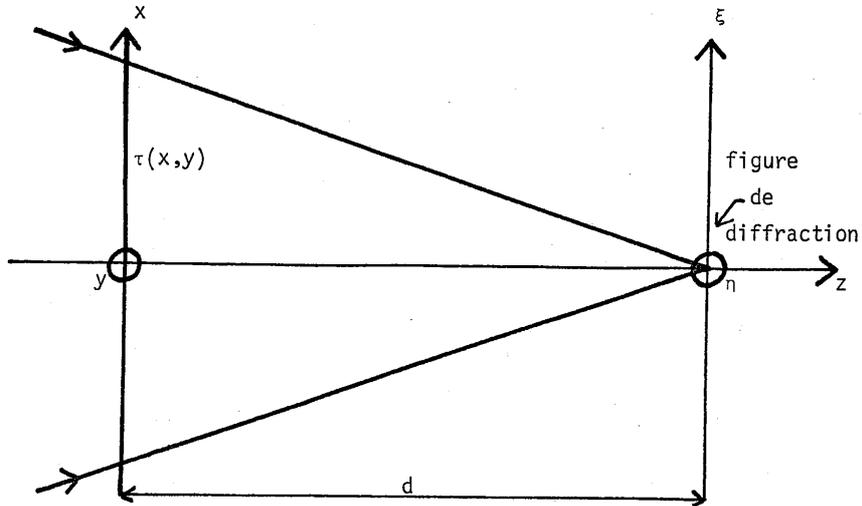


Figure 6. Diffraction de Fraunhofer.

$$a(\xi, \eta) = \frac{-iA}{\lambda d} \exp(ikt - i\omega t + 2i\pi \frac{\xi^2 + \eta^2}{2\lambda d}) \tilde{\tau}(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d}) \quad (19)$$

$\tilde{\tau}$ est la transformée de Fourier de τ .

L'intensité correspondante est la figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet : elle est proportionnelle au carré de la transformée de Fourier de la transmittance de l'objet. La transformation de Fourier est donc une opération rapide et aisée en optique cohérente, du moins dans le domaine de validité de l'Equation (19). Cette propriété est liée à la capacité de l'optique à traiter simultanément toutes les données du plan objet. Les travaux de Duvernoy {17} et Baurès {18} donnent des exemples d'applications de la transformation de Fourier à des domaines variés.

En observant un plan de diffraction de Fresnel au lieu du plan de diffraction de Fourier, on réalise de même la transformation de Fresnel.

2.2.2) Convolution :

La mise en oeuvre de la convolution en optique cohérente se fait par l'intermédiaire de deux transformations de Fourier {16} : c'est l'expérience de double

diffraction , ou expérience d'Abbe (voir figure 7) qui permet le filtrage des fréquences spatiales . La figure de diffraction de Fraunhofer de l'objet de transmittance en amplitude $O(\vec{r}) = \tau(\vec{r})$ se forme dans le plan ξ, η d'un masque de filtrage M de transmittance en amplitude $\hat{H}(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d})$.

Une lentille placée au voisinage du masque assure la seconde transformation de Fourier en formant l'image de l'objet $O(\vec{r})$ dans le plan de l'image traitée $I(\vec{r})$. Moyennant une graduation des axes du plan objet et du plan image donnant au système un grandissement +1 , l'amplitude image s'écrit :

$$I(\vec{r}) = A \exp(2ikd - i\omega t + 2i\pi \frac{x^2 + y^2}{2\lambda d}) [O(\vec{r}) * H(\vec{r})] \quad (20)$$

A un terme de phase près , on obtient donc la convolution désirée : le problème de la convolution en optique cohérente se ramène à la synthèse d'un filtre de transmittance en amplitude \hat{H} . Nous examinerons en détail cette question importante ci-dessous , mais remarquons dès maintenant que l'opération est instantanée , et ce quelque soient les dimensions de l'objet et de l'image traitée . Grâce à sa capacité d'effectuer le traitement en parallèle , l'optique se prête bien à des opérations portant sur de grands nombres de points .

2.2.3) Autres opérations :

Avant d'étudier de plus près la convolution , il convient de rappeler que l'optique cohérente est aussi capable d'effectuer quelques opérations autres que la transformation de Fourier et la convolution . L'addition et la soustraction des amplitudes optiques peuvent être réalisées par interférométrie , mais nécessitent un soin extrême et ne peuvent être envisagées que si la qualité optique du support des objets traités est excellente . Enfin , un certain nombre d'opérations non-linéaires ou non-invariantes par translation bien que dérivées du filtrage des

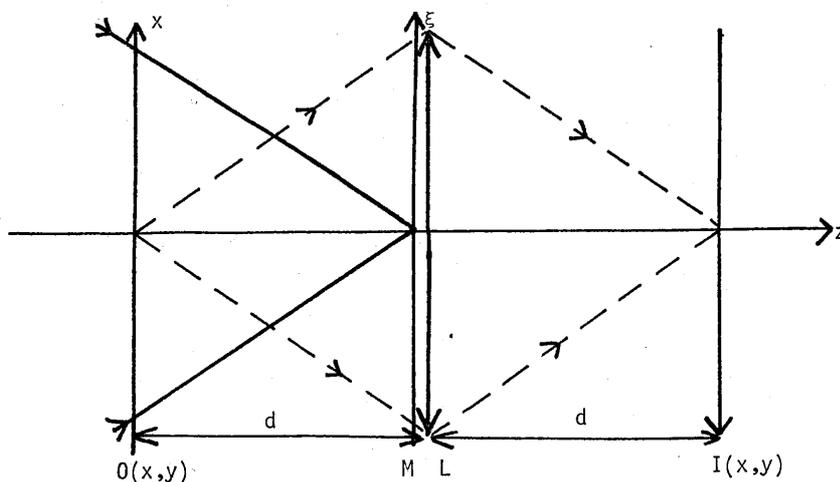


Figure 7. Expérience de double diffraction.

fréquences spatiales , ont été proposées récemment , à la suite des travaux de GOODMAN {19} BRYNGDAHL {20} et RHODES {21} ; ces méthodes ingénieuses semblent toutefois limitées à des images à nombre de points assez faibles .

2.3) Procédés d'obtention du masque de filtrage

D'après l'Equation (20) , l'expérience de double diffraction permet d'effectuer la convolution de l'objet par la fonction $H(\vec{r})$. La transformée de Fourier $\tilde{H}(\vec{\Omega})$ de cette dernière , c'est-à-dire la FTM de filtrage des fréquences spatiales s'identifie à la transmittance en amplitude du masque M de la figure 7 . Décrivons maintenant comment il est possible d'obtenir un masque de transmittance proportionnelle à la FTM désirée . Nous distinguerons trois moyens d'effectuer cette synthèse

2.3.1) Expérience d'Abbe proprement dite :

Dans l'expérience d'Abbe originale {9} , le masque de filtrage est un simple écran percé de trous ; un tel masque est adapté à des opérations de filtrage passe-bande mettant en relief certaines caractéristiques de l'objet . Il est donc utile pour quelques améliorations d'images , mais manque nettement de souplesse pour la fonction \tilde{H} ; cette fonction , en effet , peut rarement se contenter de prendre pour seules valeurs 0 et 1 , et elle est en général complexe ; l'absence d'amplificateurs optiques la restreint seulement à avoir dans tous les cas un module inférieur ou égal à l'unité .

2.3.2) Masques de phase et d'amplitude :

Nous en venons donc à la seconde classe de masques composés d'objets transparents quelconques , avec niveaux de gris et phases . Le contrôle des niveaux de gris peut être effectué à l'aide d'une émulsion photographique convenablement enregistrée et celui de la phase par blanchiment d'une autre émulsion ou par évaporation de matériaux transparents . Bien qu'en principe toute fonction de transfert \tilde{H} puisse être obtenue ainsi , les difficultés pratiques de réalisation du filtre sont considérables . En dehors de rares essais {22} , les filtres d'amplitude et de phase ne sont guère utilisés que pour des fonctions de transferts très simples, comme dans le cas important d'amélioration d'images qu'est le contraste de phase .

2.3.3) Masques holographiques :

La troisième catégorie de masques est constituée par les masques holographiques . Grâce à eux , toute répartition d'amplitude complexe peut être transformée en fonction de transfert d'un filtre des fréquences spatiales . Cette technique de traitement d'images s'est développée à la suite des travaux de Vander Lugt {23} sur la reconnaissance des formes et il nous sera utile d'en rappeler schématiquement le fonctionnement .

Par diffraction , formons à partir d'un objet adéquat la répartition d'amplitude \tilde{H} correspondant à la fonction de transfert désirée dans le plan P (voir Figure 8) . A l'aide d'une porteuse issue d'un point source , enregistrons l'hologramme M dans ce même plan . Soit α l'angle entre les ondes porteuse et objet

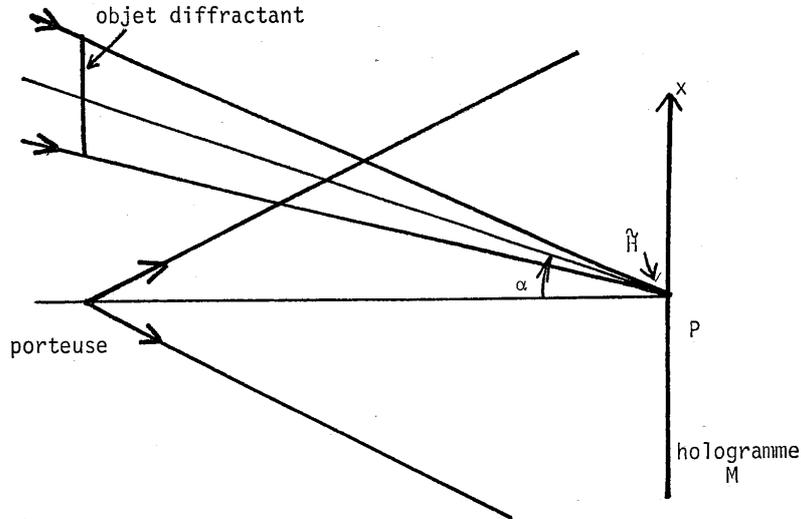


Figure 8. Enregistrement d'un hologramme de filtrage.

du niveau de la plaque . Cet hologramme peut alors être utilisé dans une expérience de filtrage des fréquences spatiales par double diffraction comme celle de la figure 9 .

La figure 9 ne diffère de la figure 7 que par l'existence des ordres de diffraction du filtre holographique . Si l'on se limite aux ordres 0, +1 et -1 , la réponse percussionnelle du filtre se compose de trois parties séparées spatialement . En effet , l'hologramme a pour transmittance en amplitude au point ϵ, η :

$$\tau_M\left(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d}\right) = 1 + \alpha_0 \left[H\left(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d}\right) \exp 2i\pi \frac{\xi \alpha}{\lambda} + H^*\left(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d}\right) \exp -2i\pi \frac{\xi \alpha}{\lambda} \right] \quad (21)$$

α_0 étant une constante .

Par transformation de Fourier , nous obtenons la réponse percussionnelle en amplitude :

$$\tilde{\tau}_M(-x, -y) = \delta(x, y) + \alpha_0 H(x + \alpha d, y) + \alpha_0 H^*(-x + \alpha d, -y) \quad (22)$$

Dans cette expression , nous avons omis de prendre en compte la diffraction par la pupille du système pour simplifier .

Lorsque cet hologramme est utilisé dans le montage de la figure 9 , avec un objet de transmittance $O(\vec{r})$, l'amplitude dans le plan image est proportionnelle à la convolution de cet objet par la réponse percussionnelle de l'équation (22) .

On y trouve la convolution désirée de O par H dans l'ordre 1 diffracté par l'hologramme, décalée d'une quantité ad par rapport à l'axe, et deux autres termes correspondant aux ordres 0 et -1 de l'hologramme. Il convient que ces termes n'empiètent pas sur l'ordre utile. Cela impose une relation entre les dimensions Δx_O , Δy_O de O , les dimensions Δx_H , Δy_H de H , et l'angle α entre porteuse et onde objet de l'hologramme. La figure 10 montre les domaines occupés par les trois termes dans le plan image : l'onde 1 occupe un domaine de dimension $\Delta x_O + \Delta x_H$, $\Delta y_O + \Delta y_H$ (voir Equation 6) l'ordre -1 également et l'ordre 0 est pratiquement identique à l'objet $O(x,y)$. La condition de non chevauchement s'écrit

$$ad > \Delta x_O + \frac{\Delta x_H}{2} \quad (23)$$

L'utilisation de tels masques en traitement d'images exige évidemment que l'on sache réaliser la distribution d'amplitude \hat{H} pour en enregistrer l'hologramme à l'aide du dispositif de la figure 8. C'est le cas en reconnaissance des formes par filtrage adapté (20) où la fonction \hat{H} n'est autre que la quantité complexe conjuguée de la transformée de Fourier de la forme à reconnaître ; de ce fait, on utilise dans ce cas particulier l'ordre -1 de l'hologramme plutôt que l'ordre 1. C'est aussi le cas dans une expérience particulière de correction d'image par filtrage inverse étudiée par Stroke et Halioua (24,25). Dans ce procédé, l'hologramme de la FTM du défaut à traiter \hat{D} est associé à un masque photographique de transmittance

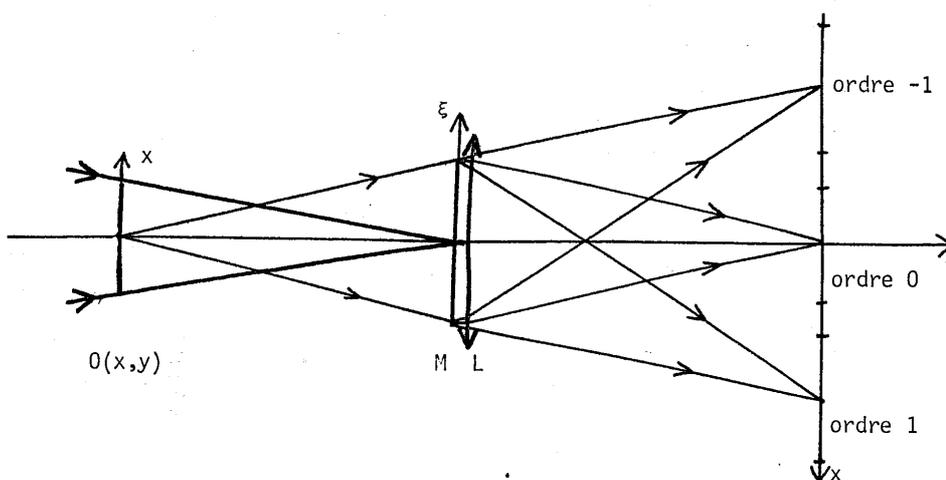


Figure 9. Filtrage des fréquences spatiales par double diffraction à l'aide d'un hologramme.

en amplitude $\frac{1}{|D|^2}$. En utilisant l'ordre -1 de l'hologramme, on effectue alors un filtrage des fréquences spatiales dont la FTM représente une approximation du filtre inverse :

$$\hat{H} \approx \frac{D^*}{|D|^2} = \frac{1}{D} \quad (24)$$

Mais il existe de nombreux cas où la FTM de traitement H ne peut guère être obtenue par diffraction d'objets existants dans les laboratoires. L'enregistrement de l'hologramme de filtrage peut alors être remplacé par sa synthèse sur ordinateur. Donnons quelques détails sur cette technique, que nous avons utilisée au cours de ce travail et dont nous avons contribué à augmenter les possibilités.

2.4) Utilisation d'hologrammes synthétiques, hétérodynage optique

Nous décrirons dans la troisième partie les principes de l'holographie synthétique : cette technique permet d'obtenir l'hologramme d'un front d'onde quelconque, qui n'a pas besoin d'être disponible physiquement, mais simplement connu par son amplitude complexe en un certain nombre de points d'échantillonnage.

2.4.1) Remplacement de l'hologramme naturel par un hologramme synthétique :

La première idée qui vient à l'esprit pour utiliser des hologrammes synthétisés par ordinateurs (HSO) en traitement d'images par convolution est de supprimer l'enregistrement de l'hologramme de filtrage (figure 8) pour le remplacer par la synthèse sur ordinateur du filtre holographique nécessaire dans l'étape de filtrage (figure 9). De cette façon, toute FTM de filtrage d'amplitude et de phase quelconques pourra être obtenue.

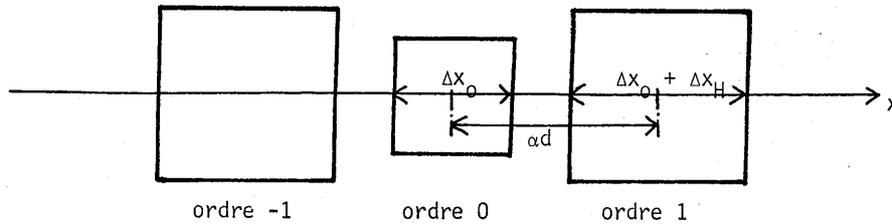


Figure 10. Allure du plan image.

Mais cette idée n'est pas parfaite, en raison de la complexité de réalisation de l'HSO nécessaire pour cette opération : calculons en effet le nombre de points nécessaires sur un tel hologramme, en tenant compte des trois faits suivants :

- les HSO sont échantillonnés suivant les deux dimensions x et y .
- l'intervalle moyen entre échantillons, qui vaut p_x suivant x et p_y suivant y, joue le rôle du pas d'un réseau : il détermine selon la formule du réseau la position des ordres diffractés par l'HSO. Les ordres sont repérés par deux entiers relatifs : l'ordre suivant x et l'ordre suivant y .
- le non-chevauchement des ordres lors de la convolution optique impose aux pas p_x et p_y de satisfaire la relation (23) et la relation correspondante suivant y. Cette dernière exprime que les ordres (1,0) et (1,1) doivent donner des images séparées :

$$\beta d > \Delta y_o + \Delta y_H \quad (25)$$

Les quantités $\beta, \Delta y_o$ et Δy_H sont les correspondants selon y de $\alpha, \Delta x_o$ et Δx_H .

Si λ est la longueur d'onde de l'onde d'éclairage, la formule du réseau s'écrit :

$$\alpha = \frac{\lambda}{p_x}, \quad \beta = \frac{\lambda}{p_y} \quad (26)$$

Supposons pour simplifier que la pupille qui limite l'hologramme est rectangulaire de côtés L_x et L_y (voir figure 11).

Le nombre de points d'échantillonnage sur l'hologramme est

$$N_H = \frac{L_x}{p_x} \frac{L_y}{p_y} \quad (27)$$

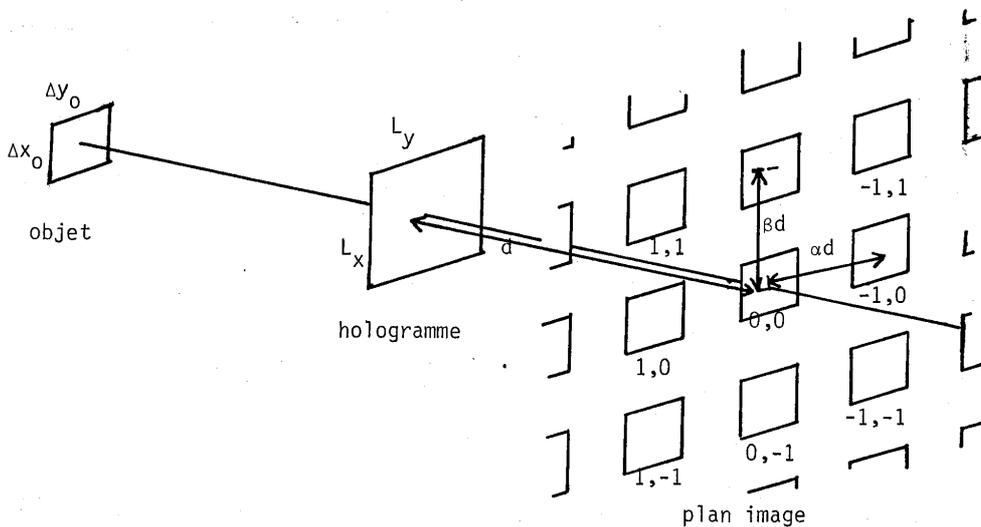


Figure 11. Le problème du chevauchement avec un hologramme synthétique.

les relations (23) , (25) et (26) imposent à ce nombre d'obéir à la relation :

$$N_H > \frac{(\Delta x_O + \frac{\Delta x_H}{2})(\Delta y_O + \Delta y_H) L_x L_y}{\lambda^2 d^2} \quad (28)$$

Cela implique notamment que N_H doit être supérieur au nombre N_O de points , ou degrés de libertés , dans l'objet O compte tenu de la diffraction par la pupille :

$$N_H > N_O \quad \text{avec} \\ N_O = \frac{\Delta x_O \Delta y_O L_x L_y}{\lambda^2 d^2} \quad (29)$$

Nous avons déjà remarqué qu'un atout très important du traitement optique est sa capacité de traiter un grand nombre de points . Cependant , si ce traitement doit être précédé par la synthèse sur ordinateur d'un hologramme ayant un nombre de points encore plus grand , l'avantage escompté est perdu . Précisons ici qu'un HSO de 100x100 points environ est facile à fabriquer , mais qu'au delà de 1000x1000 points environ la réalisation des HSO se heurte à des difficultés considérables non seulement en raison du temps de calcul et de la capacité des ordinateurs , mais surtout à cause de l'instrument chargé du tracé proprement dit . Nous reviendrons sur ce point dans la troisième partie .

2.4.2) Hétérodynage optique :

Il convient donc de chercher à utiliser les HSO en traitement d'images d'une autre manière que celle que nous venons de décrire .

A cet effet , remarquons que le grand nombre de points N_H indiqué par l'Equation (28) représente un gaspillage considérable en ce qui concerne l'information contenue dans l'HSO de filtrage . Cet hologramme , en effet , est destiné à synthétiser la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$, qui correspond à un nombre de points

$$n_H = \frac{\Delta x_H \Delta y_H L_x L_y}{\lambda^2 d^2} \quad (30)$$

bien inférieur à la limite imposée par l'Equation (28) . C'est uniquement pour éviter le chevauchement des ordres que le nombre de points n_H de l'Equation (30) doit être multiplié par le facteur

$$\frac{N_H}{n_H} = \frac{(\Delta x_O + \frac{\Delta x_H}{2})(\Delta y_O + \Delta y_H)}{\Delta x_H \Delta y_H} \quad (31)$$

lors de la synthèse de l'hologramme . Ce facteur est grand dans tous les cas où le support de la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ est petite par rapport à l'objet $O(\vec{r})$: le problème du chevauchement impose alors un suréchantillonnage tel que l'HSO de filtrage devient techniquement irréalisable , alors qu'un HSO contenant n_H points serait réalisable .

La meilleure utilisation de la technique de l'holographie synthétique ne consiste donc pas à utiliser directement l'HSO dans l'étape de convolution de la

figure 9 . Ainsi que nous l'avons suggéré [26 , 27] d'après une idée de S. Lowenthal , il convient plutôt d'utiliser l'HSO comme l'objet diffractant de la figure 8 . Dans cette figure que nous reproduisons et complétons sur la figure 12 , l'objet diffractant fournit dans le plan de l'hologramme naturel (c'est-à-dire non synthétique) de filtrage l'amplitude $\hat{H}(\frac{\xi}{\lambda d}, \frac{\eta}{\lambda d})$ nécessaire . Utilisé dans ce montage , l'HSO n'effectue pas la convolution , et aucun problème de chevauchement ne se pose : cet HSO peut contenir le nombre de cellules n_H de l'Equation (30) qui , dans beaucoup d'applications peut ne pas dépasser 10^4 environ .

Sur la figure 12 , on a représenté l'ordre 1 de l'hologramme synthétique entouré d'un masque qui arrête les autres ordres . Pour ne pas surcharger le schéma , la conjugaison entre l'HSO et l'hologramme naturel n'a pas été représentée . Cette conjugaison , réalisée grâce à la lentille L_0 , est nécessaire pour la phase de la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$. L'hologramme naturel de filtrage contient exactement les mêmes informations que l'hologramme synthétique : il n'en diffère que par l'angle entre les ondes objet et porteuse , c'est-à-dire par la fréquence spatiale porteuse (voir figure 13) : l'étape de la figure 12 mérite donc le nom de "changement de fréquence optique" ou "hétérodynage optique" . La fréquence spatiale dans le plan des hologrammes indiquée sur la figure 13 ne diffère de la coordonnée \vec{r} de la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$ que par un facteur d'échelle dimensionné

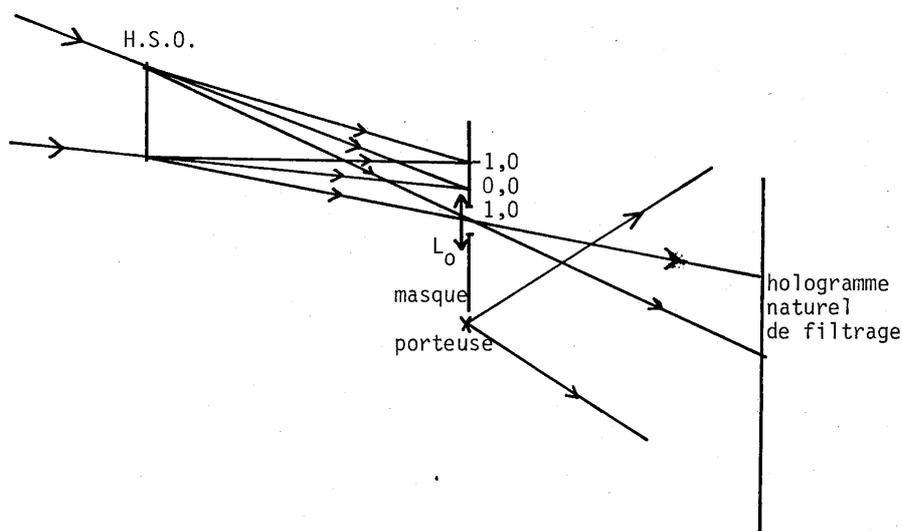


Figure 12. Enregistrement d'un hologramme de filtrage à partir d'une onde diffractée par un hologramme synthétique.

a)

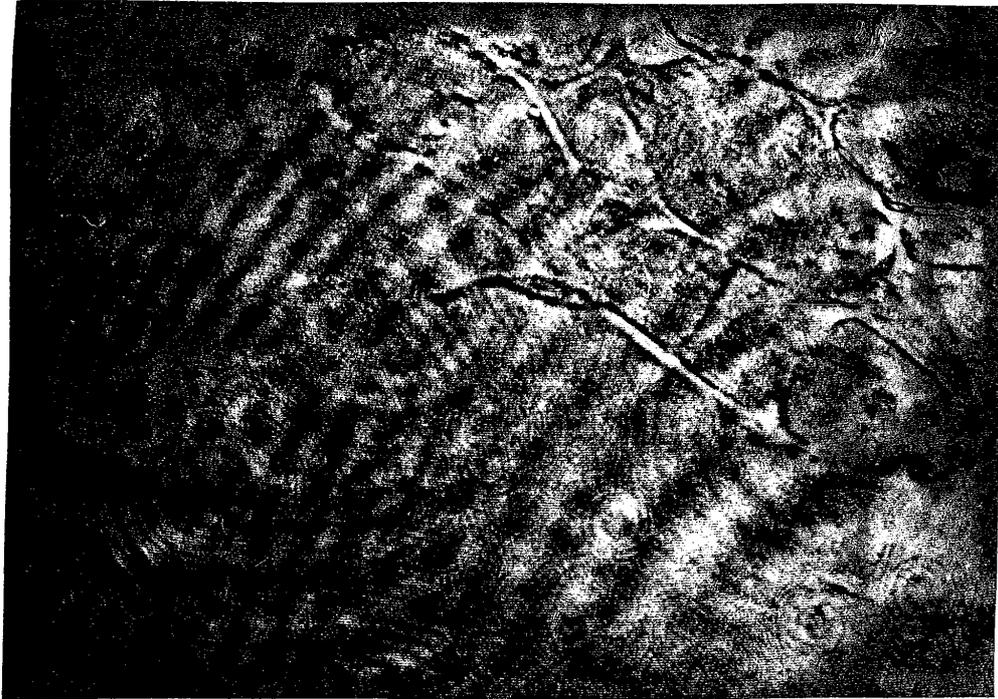
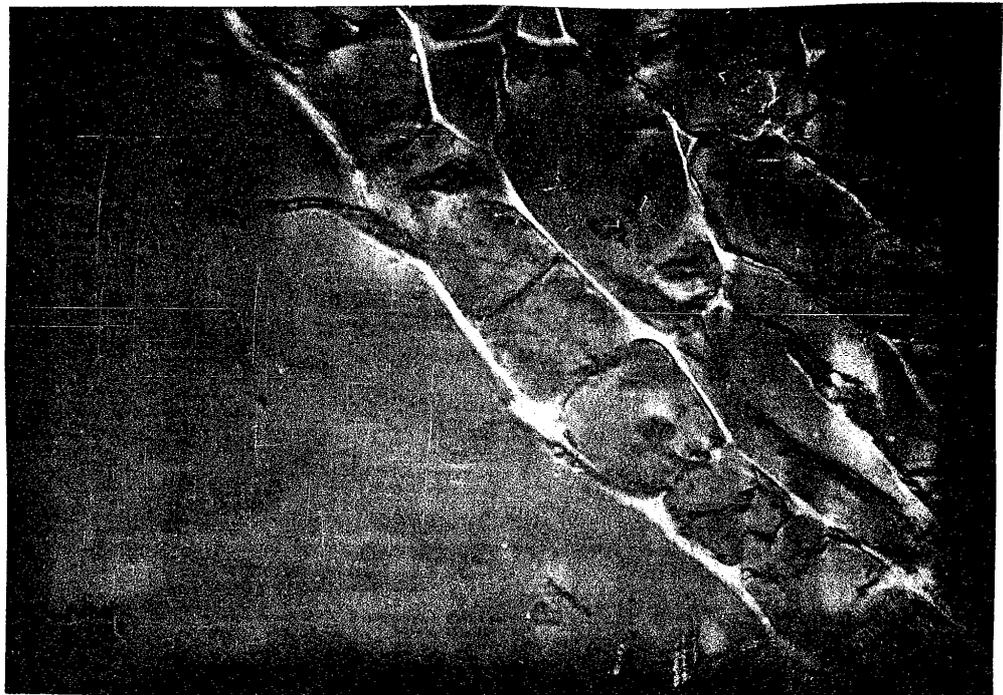


Figure 14. Une préparation microscopique observée à travers le même système dans des conditions de cohérence différentes :
a) éclairage cohérent ; b) éclairage partiellement incohérent.

b)



niveau de bruit apparent dans le cliché en éclairage incohérent, ou plus exactement partiellement cohérent. Pourtant, les sources physiques de bruit sont les mêmes. De cette constatation vient tout naturellement l'idée d'examiner les possibilités du traitement d'images par méthode optique en éclairage incohérent : moins sensible au bruit que le traitement cohérent, il lui est préférable chaque fois que les deux méthodes sont utilisables avec la même commodité.

III - TRAITEMENT D'IMAGES PAR VOIE OPTIQUE EN ECLAIRAGE INCOHERENT

3.1) Généralités

L'importance actuelle du traitement optique incohérent est modeste si on le compare au traitement cohérent et a fortiori au traitement digital. Il existe un certain nombre de travaux précurseurs qui peuvent être considérés comme des traitements d'images en éclairage incohérent avant la lettre {29 à 31}, mais ce n'est qu'après l'apparition du formalisme du filtrage des fréquences spatiales que le traitement incohérent s'est développé, notamment avec les travaux systématiques de ROGERS, à partir des années 1950.

L'importance de ce formalisme en traitement incohérent est évidente : comme en éclairage cohérent, l'opération privilégiée du traitement incohérent est la convolution. Toutefois, la différence entre les deux modes d'éclairage se manifeste sous deux aspects : en éclairage cohérent, dans l'expérience de double diffraction, le spectre de Fourier de l'objet est matériellement accessible alors qu'il n'est qu'un instrument de calcul en éclairage incohérent ; l'optique cohérente effectue la convolution des amplitudes lumineuses complexes alors que l'optique incohérente opère sur l'intensité, quantité réelle non négative. Ces deux différences sont des handicaps pour le traitement incohérent, qui apparaît donc moins souple que son concurrent.

3.2) Convolution en éclairage incohérent

La convolution en éclairage incohérent peut être effectuée par de nombreux dispositifs souvent simples, et que nous classerons en deux groupes : les convolutions géométriques, où la diffraction est une limitation, et les convolutions utilisant la diffraction. Présentons d'abord rapidement les premières auxquelles sont déjà consacrés les deux seuls articles de synthèse sur le traitement optique incohérent {32, 33} ainsi que le récent ouvrage de G.L. ROGERS {34}.

3.2.1) Convolution incohérente géométrique :

Les convolutions incohérentes géométriques elles-mêmes sont de deux types : la projection d'ombre ou ombroscopie et la projection d'images pour laquelle les anglais ont introduit le nom "image casting" par analogie avec "shadow casting".

L'ombroscopie a été utilisée déjà par W.B. BRACE pour interpréter des diagrammes de diffraction. Elle fait l'objet des travaux de ROGERS et sert également pour coder.

des objets émetteurs ou imagerie X et γ {35 , 36} . Son principe est rappelé sur la figure 15 .

Si $O(\vec{r})$ est la luminance de l'objet et $C(\vec{r})$ la transmittance en intensité du plan C , alors l'éclairement dans le plan de l'image traitée s'écrit avec une bonne approximation , sous réserve de validité de l'optique géométrique :

$$I(\vec{r}) = \int O(\vec{r}_o) C\left(\frac{d_1}{d_1+d_2} \vec{r} + \frac{d_2}{d_1+d_2} \vec{r}_o\right) d \vec{r}_o \quad (32)$$

qui , à des changements d'échelle près , est bien la convolution de O par C .

La projection d'image , dont une forme possible est indiquée sur la figure 16 , consiste à projeter l'image de l'objet à traiter sur la réponse percussive de traitement constituée par un masque M de transmittance convenable . Dans ce cas , un balayage est nécessaire pour obtenir l'image traitée à partir de la mesure du flux total traversant le plan image : ce balayage exige un mouvement d'un des composants du montage , objet , objectif , masque M ou miroir intermédiaire .

Dans le cas de l'ombroscopie , la diffraction de Fresnel perturbe fortement les phénomènes , ce qui limite le nombre de points effectivement utilisables . Dans le cas de la projection d'images , la diffraction est moins gênante car il s'agit de diffraction de Fraunhofer , mais la nécessité du balayage est un handicap . C'est pourquoi les méthodes de convolution incohérente utilisant la diffraction nous semblent présenter plus d'attrait pour le traitement d'images .

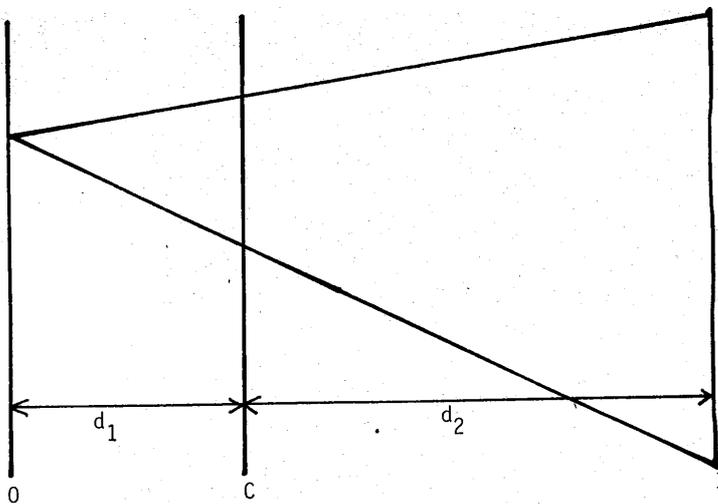


Figure 15. Ombroscopie.

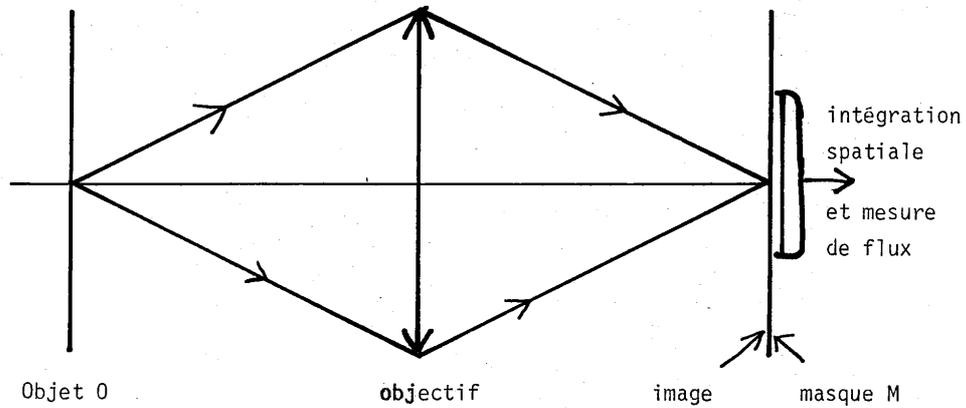


Figure 16. Projection d'image.

3.2.2) Convolution incohérente avec masque diffractant :

Considérons le schéma de la figure 17 . Le dispositif est identique à celui de la figure 8 , à l'exception de l'éclairage , non représenté sur la figure , et que nous supposons ici incohérent . Dans ce cas la fonction $O(\vec{r})$ décrivant l'objet est l'intensité lumineuse (carré du module de l'amplitude complexe) de l'objet qui, pour un objet transparent éclairé uniformément , s'identifie au carré du module de sa transmittance en amplitude ; la fonction $I(\vec{r})$ décrivant l'image est l'intensité lumineuse dans le plan image . Le calcul de la formation des images {16} en éclairage incohérent indique que les fonctions O et I sont , sous réserve de linéarité et invariance par translation , liées par la relation de convolution

$$I(\vec{r}) = O(\vec{r}) * H(\vec{r}) \quad (33)$$

La réponse percussionnelle $H(\vec{r})$ est l'intensité de l'image d'un point lumineux au centre de l'objet , normalisée de façon que sa transformée de Fourier \hat{H} vaille 1 pour la fréquence spatiale nulle . $H(\vec{r})$ est à une constante multiplicative près , le carré du module de la réponse percussionnelle cohérente et par conséquent $\hat{H}(\vec{\Omega})$ est la fonction d'autocorrélation de la transmittance en amplitude de la pupille $\tau_M(\vec{\Omega})$:

$$\hat{H}(\vec{\Omega}) = \int \tau_M(\vec{\Omega}_0) \tau_M^*(\vec{\Omega}_0 - \vec{\Omega}) d\vec{\Omega}_0 \quad (34)$$

Remarquons que le problème de l'alignement très précis du filtre , important en éclairage cohérent , ne se pose pas ici . Par contre , comme dans le cas cohérent , nous rencontrons le problème de la synthèse d'un filtre M donnant la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ désirée . Les différentes solutions proposées pour cette synthèse ne semblent pas avoir fait l'objet d'articles de synthèse jusqu'à présent ;

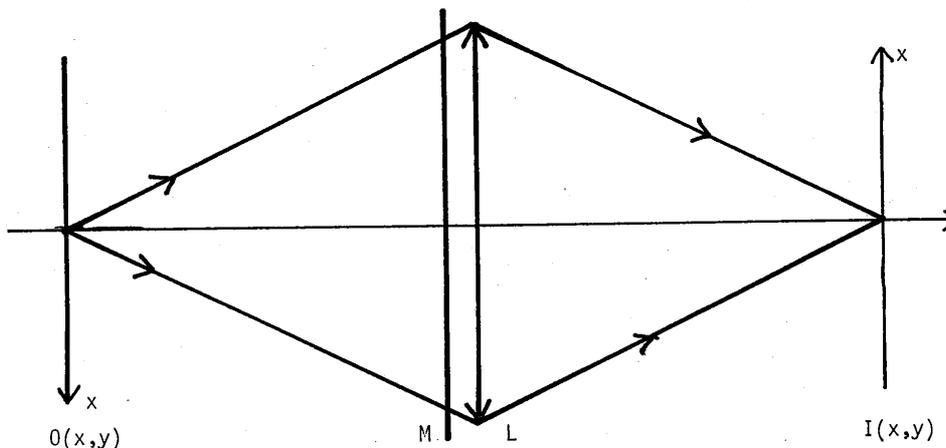


Figure 17. Convolution incohérente avec masque diffractant.

nous passerons donc en revue les quelques articles qui s'y rapportent en même temps que nous décrirons le principe de la méthode que nous avons utilisée au cours du présent travail . Ce sera l'objet du prochain chapitre.

Remarquons qu'en éclairage incohérent , la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$ n'est imposée qu'en intensité , et la réponse percussionnelle en amplitude $\sqrt{H(\vec{r})} \exp i\phi(\vec{r})$ peut être affecté d'une phase $\phi(\vec{r})$ quelconque . Mais l'intensité $H(\vec{r})$ est une quantité réelle non négative . Cette restriction est importante et empêche pratiquement toute correction d'images , car il n'arrive en pratique jamais que la réponse percussionnelle de correction ne présente aucune partie non négative . Pour parvenir malgré cela à effectuer des corrections en éclairage incohérent , il convient de se tourner vers les autres opérations réalisables en éclairage incohérent .

3.3) Autres opérations

Bien que deux méthodes de transformation de Fourier incohérente {32 , 37} aient été proposées , l'optique incohérente réalise difficilement cette opération .

La multiplication peut être obtenue par simple contact de deux clichés , ou encore par projection de l'image d'un des objets à multiplier sur l'autre .

L'addition ne pose aucune difficulté : il suffit de former des deux objets à additionner deux images aériennes que l'on superpose pour obtenir l'éclairement somme de deux éclairagements considérés ; si on utilise un récepteur photographique , il suffit même de former ces deux images successivement sur le récepteur .

Mais l'opération cruciale est la soustraction : elle permet , certes , de mettre en évidence de faibles différences entre deux photographies d'un même objet qui s'est modifié entre les deux poses ; mais surtout , elle rend possible la

correction par convolution en éclairage incohérent . En effet , si la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ est réelle , elle peut toujours être mise d'une infinité de façons sous la forme

$$H(\vec{r}) = H_+(\vec{r}) - H_-(\vec{r}) \quad (35)$$

Deux convolutions incohérentes de l'objet par H_+ et H_- respectivement et une soustraction des éclairagements permettent donc d'effectuer la convolution voulue

$$O(\vec{r}) * H_+(\vec{r}) - O(\vec{r}) * H_-(\vec{r}) = O(\vec{r}) * H(\vec{r}) \quad (36)$$

Nous ne reviendrons pas ici sur les différents dispositifs possibles de soustraction optiques dont EBERSOLE {38} a publié une soigneuse synthèse . Dans la partie III , nous aurons l'occasion de décrire la mise en oeuvre d'un de ces dispositifs dans une application particulière . Remarquons simplement ici que la multitude des procédés cités par EBERSOLE ne traduit pas une situation très favorable mais plutôt , comme dans le cas de la convolution digitale , une difficulté : de nombreux chercheurs ont tenté de mettre au point une soustraction optique commode et performante , mais aucune méthode n'a encore réussi à s'imposer .

IV - BILAN COMPARATIF ET CONCLUSION

4.1) Tableau synoptique

Le tableau 1 résume les caractéristiques qui nous semblent essentielles dans les méthodes de traitement d'images digitales , optique cohérente et optique incohérente qui viennent d'être présentées . Nous y ajoutons une colonne pour le traitement électronique analogique qui n'est guère utilisé seul en traitement d'images , mais intervient en association avec les autres méthodes dans des traitements hybrides .

Dans ce tableau il a été nécessaire de simplifier peut-être de façon quelque peu abusive certaines caractéristiques pour pouvoir regrouper l'ensemble des qualités mentionnées . Les indications de colonne "coût du traitement" par exemple , devraient être nuancées en fonction du nombre de points considérés et suivant que l'on considère l'investissement ou le coût d'un traitement particulier . De même , la colonne "temps de traitement" concerne le temps du traitement proprement dit , mais ignore les préparatifs et temps morts .

4.2) Méthodes hybrides

On constate à l'examen du tableau I que la méthode idéale et universelle en traitement d'images n'existe pas encore .

Une attitude possible est donc de choisir , pour chaque application envisagée , celle des méthodes possibles qui s'adapte le moins mal aux besoins . Une autre attitude consiste à essayer d'allier les avantages des différentes méthodes tout en évitant les inconvénients de chacune dans des méthodes hybrides ; dans ces méthodes , le traitement de chaque objet se fait en plusieurs étapes : une étape optique cohérente et une étape électronique analogique , ou toute autre combinaison de méthodes .

TABLEAU I - Comparaison des grandes classes de méthodes utilisées en traitement d'images

	OPTIQUE COHERENTE	OPTIQUE INCOHERENTE	ELECTRONIQUE ANALOGIQUE	ELECTRONIQUE DIGITALE
Signal traité	Amplitude lumineuse ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}$)	Intensité lumineuse ($\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$)	Courant ou tension ($\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$)	Tension binaire ($\mathbb{N} \rightarrow \{0,1\}$)
Entrée du système	transparent	transparent ou objet diffusant	récepteur de flux	disque ou bande
O P E R A T I O N S	très facile	possible	peu intéressant	facile aux faibles nombre de points seulement
	très facile	très facile	très facile (mais causalité)	difficile
Convolution	possible	difficile	très facile	très facile
Soustraction	rarement possibles	rarement possibles	très facile	très facile
Opérations non linéaires	rarement possibles	rarement possibles	faible	très facile
Opérations non invariantes	grand	grand	faible	très facile
Nombre de points	très sensible	peu sensible	peu sensible	peu sensible
Sensibilité au bruit	bon marché	bon marché	bon marché	cher
Coût d'un traitement	instantané (simultané)	instantané (simultané)	lent (séquentiel)	lent (séquentiel)
Temps de traitement	éclairage (sortie quadratique)	éclairage	courant ou tension	état de la mémoire, disque, bande
Sortie du système				

Sans prétendre être exhaustif, citons quelques possibilités de traitements hybrides. DUVERNOY {39} et BAURES {18} font suivre une transformation de Fourier optique d'une analyse statistique en composantes principales à faible nombre de points sur ordinateur pour caractériser des écritures manuscrites ou déceler des structures peu apparentes sur des photographies aériennes. Dans le corrélateur pour radar à vision latérale {27, 40} le signal radar est transformé en signal lumineux pour bénéficier de la grande capacité de traitement de la convolution optique. Dans toute une série de méthodes récentes {41} baptisées en anglais "coherent adaptive techniques" (COAT), la dégradation apportée à une image par la turbulence atmosphérique est corrigée en temps réel par une déformation de l'optique de formation d'image.

Des expériences de convolution optique incohérente à deux voies suivies d'une analyse d'image par balayage et d'une soustraction électronique ont été décrites par plusieurs auteurs. Elles offrent une solution commode à la question de la convolution par une réponse percussionnelle présentant des parties négatives et des parties positives, bien que le balayage soit une opération longue.

SWINDELL {42}, SCHACK {43}, ELSSNER et SCHULTZ {44} et HONDA {45} utilisent ce principe pour effectuer des corrections d'images, alors que ROUSSEL {46} et SCHNEIDER, VAN DER PIEPEN et FINK {47} réalisent des augmentations de contraste assez spectaculaires. HAUSLER et LOHMANN {48, 49} à l'aide d'un dispositif de cette catégorie, obtiennent sur écran de télévision une image de microscopie optique à profondeur de champ augmentée.

4.3) Conclusion

Au terme du tableau des méthodes du traitement d'images que nous venons de brosser en quelques pages, il n'est pas question de clamer la supériorité d'une méthode sur l'autre, ni de délimiter avec précision les champs d'application des différentes méthodes. Si d'ailleurs nous avions la prétention de le faire, une rapide réflexion sur les aléas de l'évolution technologique nous en dissuaderait : quelle sera la taille et la vitesse de cycle des grands ordinateurs dans dix ans ? Le progrès de l'informatique, des microprocesseurs, des processeurs câblés, rendront-ils le traitement optique caduc ? Ou, au contraire, de nouveaux détecteurs d'images plus performants que les actuels PROM et cristaux de niobate de lithium lui donneront-ils un regain d'intérêt en supplantant l'émulsion photographique ? Quel avenir les interfaces entre l'optique et l'électronique comme les matrices de photodiodes, les tubes Titus ou phototitus ou simplement des tubes de télévision améliorés réservent-ils au traitement hybride, actuellement en pleine croissance ?

Toutes ces inconnues nous incitent à la prudence ; aussi bien ce chapitre ne pouvait-il prétendre donner une vue complète et prospective d'un domaine en pleine

évolution . Notre but était avant tout de mettre en relief quelques points saillants qui ont motivé le choix de l'expérience de correction d'images qui fera l'objet de la troisième partie , et dont nous pouvons dès maintenant expliquer le principe .

CHAPITRE III - LES CONVOLUTIONS INCOHERENTES : PROPOSITION
D'UNE METHODE DE CORRECTION D'IMAGES

Nous venons de remarquer qu'il n'existe pas de solution universelle en traitement d'images , mais que le choix de la méthode dépend de l'opération à réaliser . En particulier , la convolution nous est apparue comme le domaine privilégié du traitement optique incohérent . Les dispositifs de convolution géométrique , cependant , sont limités par l'influence difficilement contrôlable de la diffraction ou la nécessité d'un balayage . Comme nous l'avons dit , il est donc préférable de mettre à profit la diffraction pour effectuer le traitement . Nous passerons en revue les articles , tous récents , décrivant de tels travaux avant d'expliquer le principe de notre propre méthode .

I - REVUE DES EXPERIENCES DE CONVOLUTION INCOHERENTE AVEC MASQUE DIFFRACTANT

1.1) Généralités

Le formalisme de toutes ces expériences a été décrit plus haut (Equations 33 34). LOHMANN et RHODES {50} ont déjà étudié leurs caractéristiques communes . La figure 17 nous suffira pour schématiser la configuration expérimentale , bien que des dispositifs différents soient utilisables : KERMISCH {51} , par exemple , préconise un balayage point par point de l'objet et LOHMANN {52} a suggéré toute une série de montages possibles . Nous nous proposerons d'examiner ici les différents procédés utilisables pour la synthèse de la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$ désirée par un masque diffractant adéquat . Le montage de la figure 17 est en somme le pendant en éclairage incohérent de l'expérience de double diffraction : comme dans le cas de cette dernière , ses possibilités sont très modestes si le masque placé contre la pupille est un simple écran percé de trous , mais elles peuvent être accrues très nettement en utilisant l'holographie , et tout particulièrement l'holographie synthétique .

1.2) Utilisation d'un masque non holographique

Dès 1958 , SAYANAGI {53} décrivait un procédé d'amélioration d'images utilisant un masque de phase constitué de grains déphasants aléatoires . Adapté sur un objectif photographique , ce composant détramait l'image d'une photographie tramée sans perte de flux . Pour obtenir ce résultat , il suffit , d'après l'Equation (34) que

la fonction d'autocorrélation de la structure de phase aléatoire s'annule , ou presque , à partir de la distance $\frac{\lambda d}{p}$, étant la longueur d'onde λ , d la distance entre l'objectif et la photographie tramée et p la période de la trame . Plus récemment , GONSALVES et CONSIDINE {54} ont utilisé un masque analogue , mais non aléatoire , pour détramer une image de télévision .

Dans l'expérience décrite par ARMITAGE et LOHMANN en 1965 {55} , le traitement est une reconnaissance des formes pour lecture automatique . Pour pouvoir utiliser comme masque une simple copie sur support transparent de la lettre à reconnaître , les auteurs utilisent le montage schématisé sur la figure 18 . Une transformation de Fourier en éclairage cohérent forme dans le plan objet du corrélateur incohérent le spectre d'une lettre du texte lu . Un diffuseur mobile D assure dans ce plan la synthèse d'incohérence . La pupille effectue un filtrage adapté à la lettre à reconnaître , ou plus précisément à son spectre de puissance . Dans le plan image se forme la corrélation des spectres de la lettre lue et de la lettre à reconnaître , ce qui produit un pic important dans le cas de l'autocorrélation . Bien sûr , il ne s'agit là que d'une expérience de principe : une seule lettre à la fois peut être lue , et sa lecture exige que l'on fasse défiler dans le plan de la pupille tout l'alphabet utilisé . Mais l'idée de cette expérience a porté ses fruits en contribuant à la naissance des travaux que nous décrivons dans la suite de ce paragraphe .

Un cas extrêmement simple de convolution incohérente est celui de la reconnaissance des droites parallèles à une direction donnée dans une image . Ainsi , les physiciens de l'Institut de spectrométrie nucléaire et de spectrométrie de masse d'Orsay nous ont posé le problème de la détection de raies fines et peu intenses

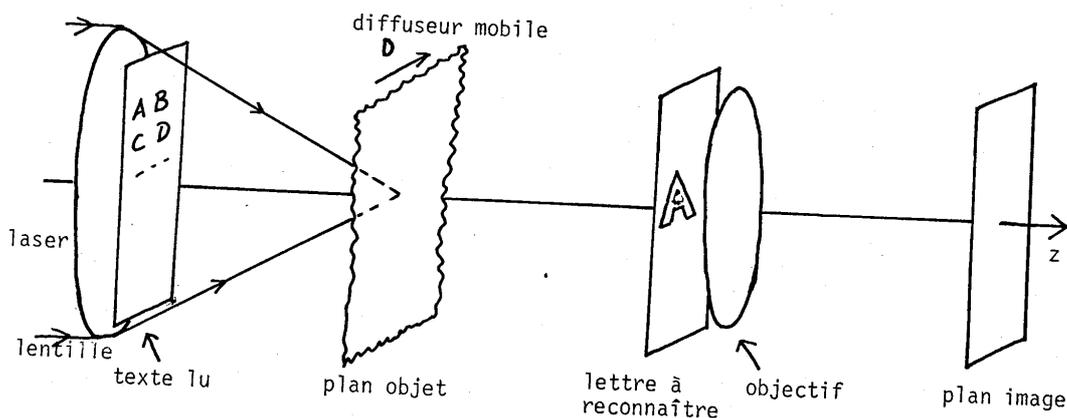


Figure 18. Méthode de lecture automatique, d'après Armitage et Lohmann.

dans un spectrogramme d'électrons : il s'agit de mettre en évidence le mieux possible les raies approximativement rectilignes et parallèles à une direction Oy sur un cliché . Le traitement qui a fait l'objet du stage de DEA de M.J. FAIVRE [56] , consiste simplement dans la formation de l'image du cliché à travers une fente fine perpendiculaire aux raies et jouant le rôle du masque M . La FTM de traitement est alors voisine d'une fonction en triangle suivant la direction y et constante suivant la direction x , ainsi que le montre la figure 19 .

La réponse percussive de traitement a pour expression :

$$H(x,y) = \frac{\epsilon}{\lambda d} \text{sinc}^2 \frac{\epsilon y}{\lambda d} \delta(x) \quad (37)$$

En choisissant la largeur ϵ de fente de façon que la largeur $\frac{\lambda d}{\epsilon}$ cette réponse percussive soit voisine de la hauteur du cliché , la convolution de l'Equation (33) se ramène approximativement à une intégration sur toute la hauteur de raies . La dimension y ne contient , en effet , aucune information utile , et cette intégration a simplement pour effet d'améliorer le rapport signal sur bruit en moyennant le bruit de granularité photographique . La dimension exacte des fonctions H et \tilde{H} n'étant pas critique , l'expérience a pu être faite en lumière blanche . La figure 20 montre un résultat obtenu . Le choix de l'éclairage incohérent était utile pour ce traitement parce que, s'il est vrai que cette fente aurait permis d'obtenir sensiblement la même FTM en éclairage cohérent , le réglage aurait nécessité un centrage critique et le résultat aurait été dégradé par le bruit optique.

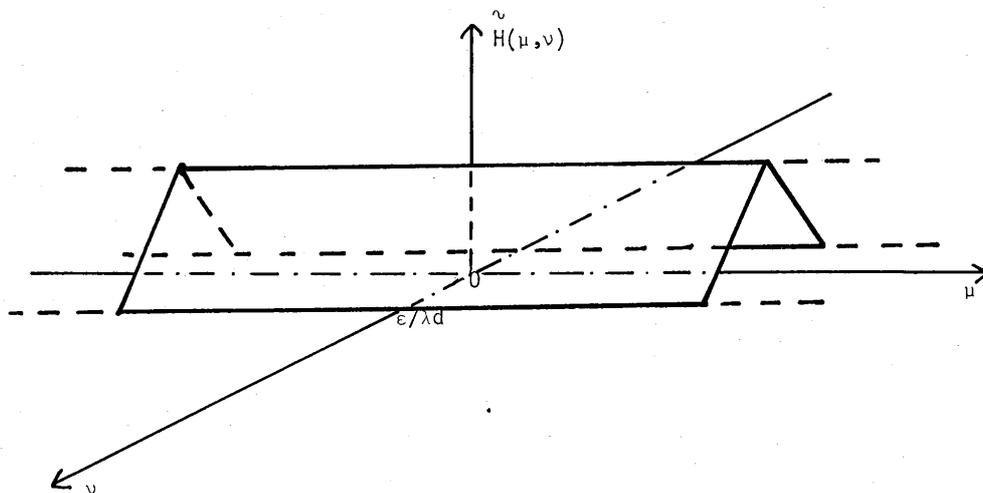


Figure 19. FTM de traitement à l'aide d'une fente de largeur ϵ suivant y et très longue suivant x.

a)

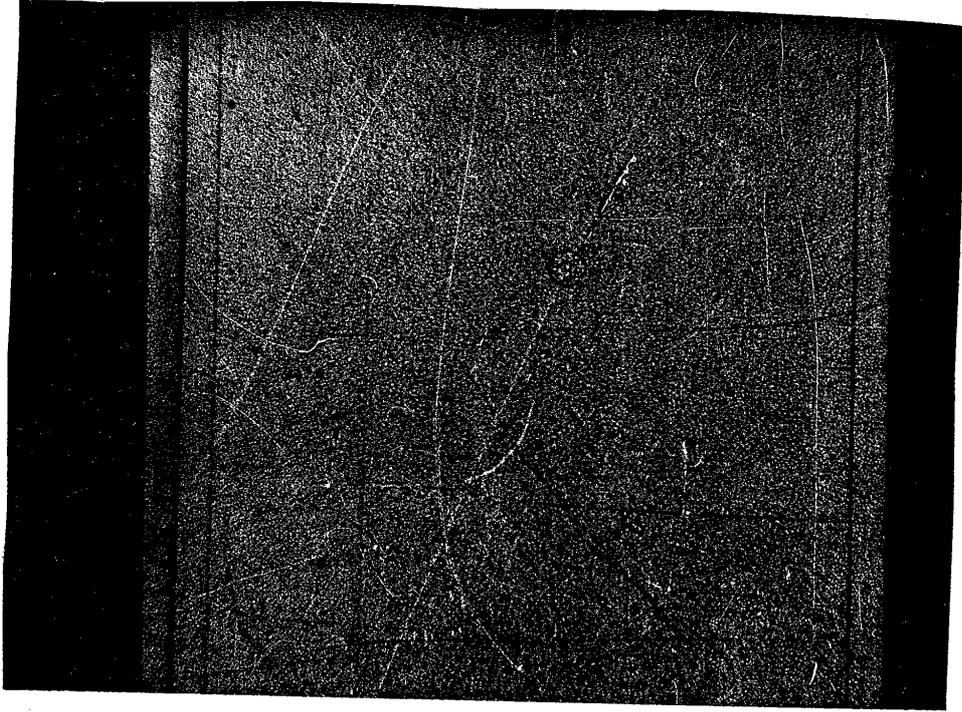
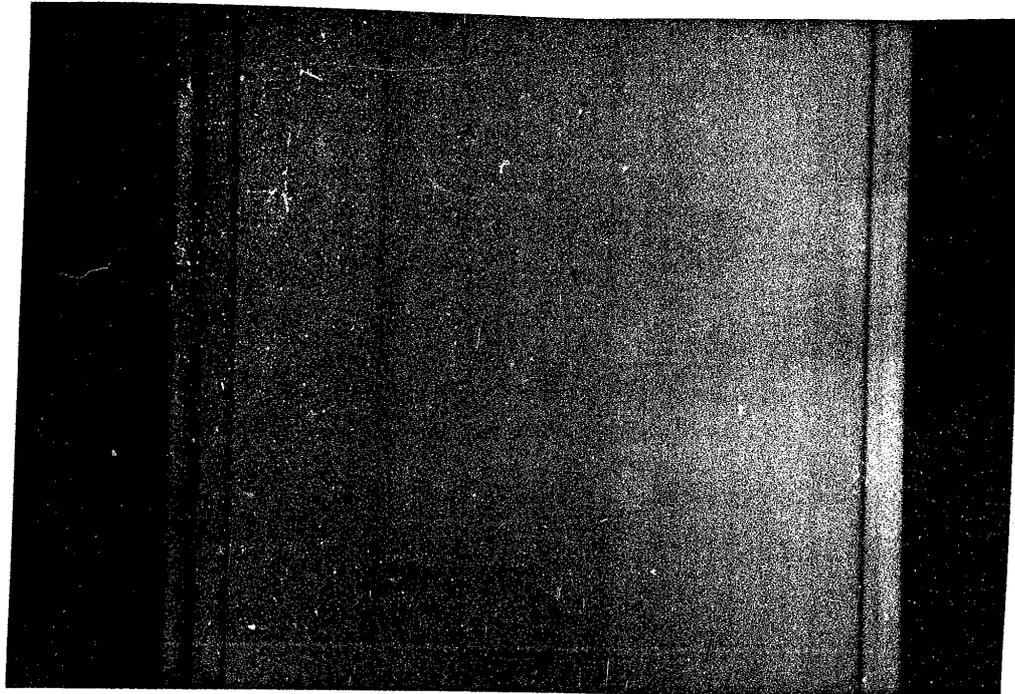


Figure 20. Amélioration de la visibilité de raies verticales sur un spectre électronique, exemple de résultat.
a) Image à traiter ; b) Image traitée.

b)



Cette expérience peut être interprétée comme une approximation de reconnaissance des formes , la forme à reconnaître étant la raie spectrale verticale . Un filtre adapté exact en présence de bruit blanc aurait dû avoir pour réponse percussionnelle la forme de la raie elle-même et non la forme exprimée par l'Equation (37) , mais celle-là est une approximation satisfaisante de celle-ci .

Cependant , une difficulté est apparue et a pratiquement enlevé tout intérêt à ce traitement : le phénomène de courbure de fente faisait que les raies n'étaient pas exactement rectilignes , mais légèrement incurvées et de courbure variable dans le champ . Dès lors , notre fente de filtrage ne pouvait plus convenir et aucun masque simple ne faisait l'affaire . La solution utilisant un prisme pour faire défiler sur le cliché l'image volontairement distordue d'une fente rectiligne a été rejetée pour son manque de souplesse : nos "clients" se sont finalement tournés vers le traitement numérique , qui , en plus de sa flexibilité, offre l'avantage de permettre une étude statistique du bruit de granularité dont notre méthode optique ne fournit qu'une valeur moyenne .

Une expérience très semblable a été décrite pour une application à la détermination de directions privilégiées du relief sur une carte géographique {57} .

Les possibilités du filtrage incohérent à l'aide de masques non holographiques sont quelque peu accrues si l'on accepte d'adjoindre à la convolution incohérente une étape de soustraction . Par exemple , un filtrage passe-bande peut être obtenu : c'est ce que décrivent GÖRLITZ et LANZL {58} , qui utilisent à cet effet une pupille en forme de fentes d'Young . Dans une des deux images à soustraire , une lame demi-onde est placée sur l'une des deux fentes d'Young . RHODES {59} propose d'utiliser un interféromètre de Michelson pour obtenir le même résultat . Les miroirs de l'instrument jouent le rôle de la pupille et sont recouverts chacun d'une des deux fentes de la méthode précédente . Le déphasage est cette fois assuré par une translation d'un des miroirs .

Mais il est clair que ces expériences utilisant des pupilles simples se limitent à quelques cas où les particularités du problème et l'astuce de l'expérimentateur les rendent utilisables . Pour plus de souplesse , il faut pouvoir disposer d'une plus grande classe de réponses percussionnelles : c'est ce que permet l'holographie , et nous décrirons maintenant l'analogie incohérent du filtrage de VANDER Lugt.

1.3) Utilisation d'un masque holographique

L'utilisation d'hologrammes en convolution incohérente a été proposée en 1968 indépendamment par LOWENTHAL et WERTS{60} et par LOHMANN {61} . Le principe en est de remplacer le masque de la figure 17 par un hologramme . Le montage ne diffère alors de son homologue cohérent (figure 9) que par la taille de la source.

La réponse percussive complète du système est constituée d'un point lumineux au centre (ordre zéro de l'hologramme) et des figures que produit l'hologramme dans ses différents ordres. Chaque point de l'objet donne, sous réserve de linéarité, une "image" sous la forme de cette réponse percussive, décalée en fonction de la position du point objet, et d'éclairement proportionnel à la luminance de l'objet. Le résultat est une convolution de l'objet par la réponse percussive. Toutefois, on fait en général en sorte que les contributions des différents ordres de l'hologramme soient séparées, et c'est l'image d'ordre 1 qui est utilisée comme image traitée: la réponse percussive utile de ce système de convolution incohérente est donc la répartition d'éclairement dans l'ordre 1 de l'hologramme restitué par un point. La question de la séparation des ordres se présente comme dans le cas cohérent (voir § 2.3 du chapitre II): il faut que la fréquence porteuse de l'hologramme soit assez grande pour éviter tout chevauchement, compte tenu de la taille de l'objet et de la réponse percussive de traitement.

LOWENTHAL et WERTS {60} et LOHMANN {61, 62} puis BARLAI {63} et DICKINSON {64} ont proposé d'utiliser cette méthode en reconnaissance des formes. MALONEY {65} l'a appliquée à la lecture de caractères d'imprimerie en utilisant un hologramme composite, qui contient un secteur par lettre de l'alphabet. MACOWSKI {66} décrit une expérience semblable à celle d'ARMITAGE et LOHMANN {55} (voir § 1.2 et figure 18), mais comportant un masque holographique.

Les hologrammes naturels placés dans la pupille du système de convolution incohérente permettent, on le voit, d'effectuer des améliorations d'images et des reconnaissances des formes. Quelques traitements d'information encore différents, comme la multiplication d'images {67, 68, 69} sont également à porter à l'actif de la méthode. Mais la correction d'images, qui est probablement le traitement d'images le plus difficile, exige des réponses percussives difficiles à synthétiser. Il faut alors recourir, comme dans le cas cohérent, aux hologrammes synthétiques.

L'intérêt des hologrammes calculés par ordinateur pour augmenter au maximum la souplesse des corrélateurs incohérents a été soulignée par LOHMANN dès 1968 {61}. En effet, toute distribution d'éclairement peut être synthétisée de cette façon, et le recours à une étape de soustraction permet d'obtenir toute réponse percussive réelle, comme nous l'avons déjà expliqué. Notre procédé d'hétérodynage optique, décrit plus haut, est applicable sans changement: un hologramme synthétique à faible nombre de points peut donc être utilisé même si l'image à traiter contient un grand nombre de points, sans que le chevauchement des ordres n'intervienne. Pour être précis, remarquons que la lentille L_0 de la figure 12 n'est pas nécessaire en traitement cohérent, puisqu'elle n'affecte que la phase de l'ordre 1 de l'hologramme.

Les essais de correction d'images par convolution incohérente à l'aide d'hologrammes synthétiques sont , à notre connaissance , au nombre de deux . Nous aurons l'occasion de revenir plus loin sur le nôtre ; BRAUNECKER et HAUCK {70} , de leur côté , utilisent pour éviter le chevauchement des ordres , la méthode de BARTELI et al {28} au lieu de l'hétérodynage optique et effectuent la convolution dans l'ordre (0,0) des hologrammes synthétiques .

1.4) Variante utilisant des hologrammes images

Pour terminer notre tour d'horizon des méthodes de convolution incohérente utilisant la diffraction , il nous reste à faire état d'une récente idée de LOHMANN {71} mise en oeuvre par STONER {72 , 73} et qui utilise une pupille non holographique , mais fait appel à l'holographie par l'image à traiter .

L'image à traiter se présente initialement sous la forme d'une fonction complexe

$$C_o(\vec{r}) = |C_o(\vec{r})| \exp i\phi_o(\vec{r}) \quad (38)$$

Dans un premier temps , on enregistre l'hologramme image de cet objet , en éclairage cohérent , avec une fréquence porteuse $\vec{\Omega}_o$. On obtient alors un objet dont la transmittance en intensité s'écrit :

$$O(\vec{r}) = K_o + |C_o(\vec{r})| \cos(2\pi \vec{\Omega}_o \cdot \vec{r} + \phi_o(\vec{r})) \quad (39)$$

Le spectre de l'image à traiter initiale est alors centré sur la fréquence $\vec{\Omega}_o$. Des pupilles non holographiques , formées de plusieurs ouvertures de formes adéquates séparées de $\vec{\Omega}_o$ les unes des autres et munies de lames déphasantes , permettent d'obtenir des FTM incohérentes de la forme :

$$P(\vec{\Omega}) = K_p(\vec{\Omega}) + C_p(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_o) + C_p^*(-\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_o) \quad (40)$$

La fonction $C_p(\vec{\Omega})$ n'est pas quelconque , puisqu'elle fait partie d'une fonction d'autocorrélation , mais elle n'est pas astreinte à respecter les conditions restrictives habituelles des FTM incohérentes : elle n'est pas nécessairement maximale en son centre , sa transformée de Fourier $C_p(\vec{r})$ peut présenter des parties négatives .

Des Equations (39) et (40) , on déduit aisément qu'une convolution incohérente suivie d'un filtrage passe-bande cohérent permet d'obtenir la convolution de $C_o(\vec{r})$ par $C_p(\vec{r})$. Aucune soustraction n'est nécessaire pour les parties négatives de $C_p(\vec{r})$.

Le problème de la synthèse d'une pupille donnant une FTM $C_p(\vec{\Omega})$ donnée n'est actuellement pas résolu en toute généralité , mais des opérations simples d'amélioration d'image ont déjà été effectuées : filtrage passe-bande , dérivation , augmentation de contraste .

II - PRESENTATION D'UNE METHODE

2.1) Schéma d'ensemble

Les expériences de convolution incohérente utilisant la diffraction et faisant intervenir une réponse percussionnelle de traitement positive sont sans aucun doute séduisantes ; nous avons déjà expliqué qu'elles nous paraissent supérieures à leurs homologues digitales , optiques cohérentes et optiques incohérentes géométriques . En particulier , elles nous semblent s'imposer pour les reconnaissances de formes , si les formes à reconnaître sont bien connues et de taille constante . Par contre, deux difficultés interviennent s'il s'agit de correction d'images : les réponses percussionnelles de traitement sont en général réelles , mais présentent des parties positives et des parties négatives , et elles ont des formes dont la synthèse est difficile . C'est ce problème que nous avons abordé . Pour le résoudre , nous avons proposé une méthode qui utilise des possibilités expérimentales déjà analysées . Son principe est expliqué dans l'article qui constitue l'annexe I . Résumons-le rapidement : pour tenir compte des parties positives et des parties négatives de la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$, nous utilisons deux convolutions incohérentes au lieu d'une , puis une soustraction des luminances . $H(\vec{r})$ est décomposée à cet effet sous la forme de l'Equation (35) . Pour obtenir $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$, nous faisons appel à l'holographie synthétique , complétée par un hétérodynage optique . Nous arrivons alors au schéma d'ensemble de la méthode présenté sur la figure 21 .

2.2) Les principales étapes de la mise en oeuvre pratique

Nous décrirons extensivement la mise en oeuvre de l'expérience sur cas particulier dans la troisième partie ; le schéma de la figure 21 nous permet de voir immédiatement quels seront les principaux points à étudier :

- La fonction défaut doit être connue avec une précision suffisante .
- Le calcul de la fonction correctrice doit tenir compte de la fonction défaut , d'un critère de qualité , de la bande passante utile , du bruit présent dans l'objet à traiter ...
- La synthèse des hologrammes pose le problème du codage de l'amplitude complexe et celui de la réalisation pratique .
- L'étape d'hétérodynage doit conduire à des hologrammes linéaires et d'efficacité raisonnable .
- La convolution incohérente nécessite une source monochromatique , étendue et suffisamment lumineuse .
- Pour les grands objets , la convolution incohérente peut poser des problèmes d'aberration notamment en liaison avec les masques holographiques . Bien que l'intérêt de la méthode porte sur les objets à grand nombre de points , cette

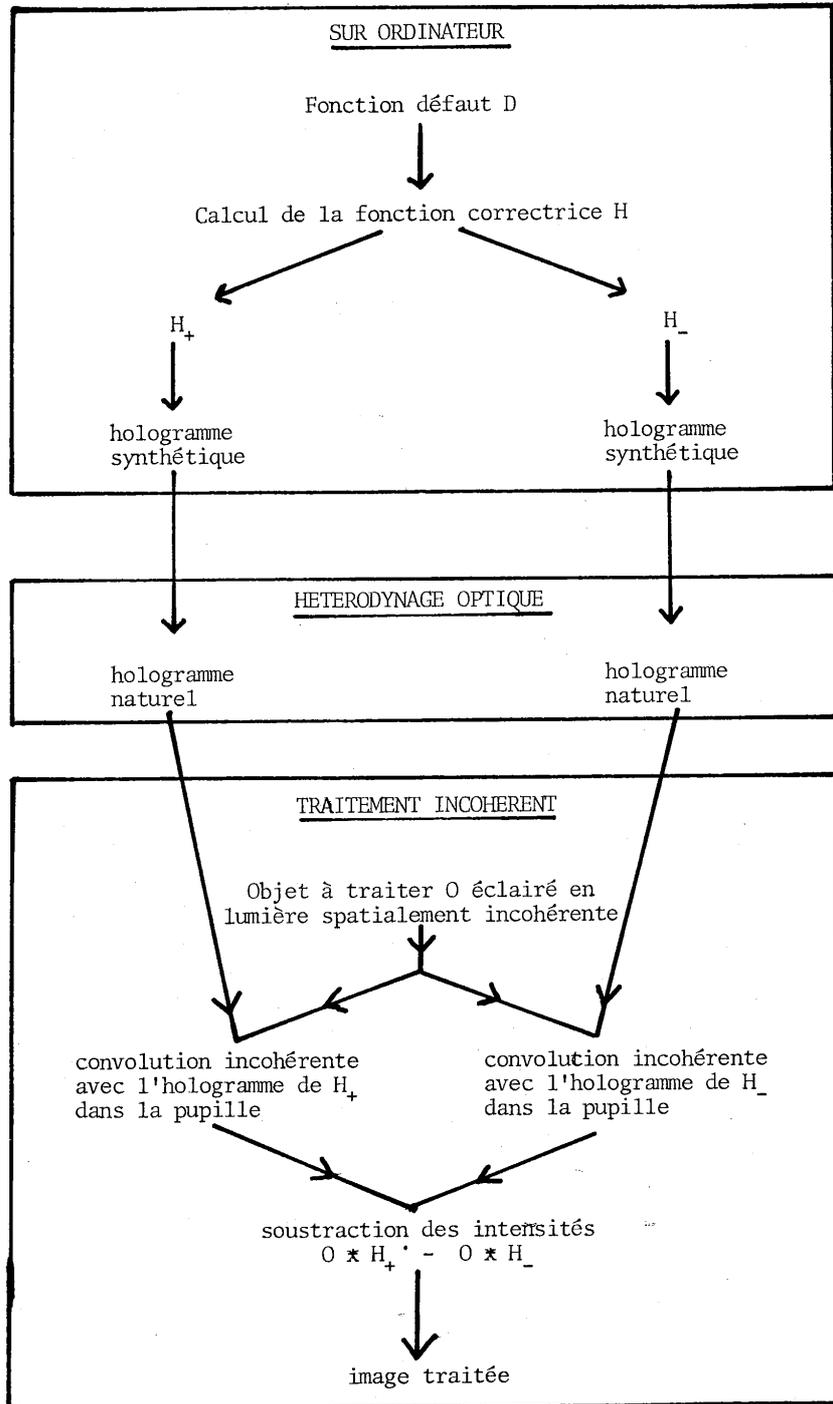


Figure 21. Schéma d'ensemble de la méthode proposée.

question peut être provisoirement éludée en mettant au point le traitement sur des objets à faible nombre de points . De ce fait , des simulations sur ordinateur permettront de vérifier les résultats obtenus sans temps de calcul prohibitifs .

- La soustraction des intensités est une difficulté de la méthode : elle doit être commode , donner des résultats satisfaisants et ne pas être la cause d'un bruit supplémentaire qui nous ferait perdre l'avantage escompté du traitement incohérent .

CONCLUSION DE LA PREMIERE PARTIE

En confrontant les atouts du traitement d'images incohérent à ceux de ses voisins , nous avons remarqué deux avantages essentiels : faible sensibilité au bruit optique , aptitude à effectuer aisément des opérations de convolution à grand nombre de points .

Nous sommes maintenant au seuil de deux exposés pratiquement indépendants . Nous avons fait état de la supériorité de l'éclairage incohérent sur l'éclairage cohérent au regard du bruit optique , mais nous avons encore à expliquer cette constatation par une analyse des causes et des manifestations de ce bruit . Par ailleurs , la mise en oeuvre de notre correction d'images soulève des difficultés sur lesquelles nous nous pencherons .

Bien que notre dernier chapitre se présente comme une introduction directe à la partie pratique de ce mémoire , la définition de notre méthode de traitement repose sur un raisonnement que l'étude du bruit doit d'abord étayer : nous consacrerons donc à cette dernière notre deuxième partie , et réserverons la troisième pour nos essais expérimentaux .

DEUXIEME PARTIE

LE BRUIT OPTIQUE EN TRAITEMENT D'IMAGES : INFLUENCE DE LA COHERENCE

INTRODUCTION A LA DEUXIEME PARTIE

Il est bien connu que les phénomènes de bruit en optique sont étroitement liés à la cohérence de l'éclairage . L'explication de cette relation n'apparaissait pour tant pas clairement dans la littérature : telle est l'étude que nous avons abordée et que nous décrirons dans les chapitres qui suivent .

Le bruit optique est à l'image ce que le bruit est au son : il se manifeste sous la forme de modifications jugées indésirables de l'éclairement de l'image . Après avoir tenté d'établir la liste des causes de bruit optique , nous constatons que deux de ces causes ont une importance particulière en traitement d'images: le bruit pupillaire , dû à des défauts dans la pupille , et le bruit objectif , dû à des défauts dans l'objet .

L'étude de l'influence de la cohérence de l'éclairage sur ces deux causes de bruit constitue la partie centrale de cette deuxième partie : elle nous permettra de cerner l'origine de la supériorité de l'éclairage incohérent . En insistant sur le cas particulièrement important en pratique du bruit de granularité , nous saisissons l'occasion d'affiner la théorie de l'effet Callier .

Le bruit est essentiellement sinon exclusivement un phénomène statistique . Nous aurons donc à utiliser un certain nombre d'hypothèses statistiques qu'il nous faudra justifier . En particulier , nous discuterons la validité de statistiques gaussiennes pour le bruit pupillaire comme pour le bruit objectif .

CHAPITRE I - INTRODUCTION A L'ETUDE DU BRUIT

"Le bruit dit cohérent peut être évité par l'utilisation de lumière incohérente au lieu de lumière cohérente . Cette cause a ses défenseurs depuis une dizaine d'années , mais elle n'a guère trouvé d'écho . Apparemment , il ne suffit pas de raisonnements physiques intuitifs et quelques expériences réussies ... pour convertir la majorité conservatrice du cohérent à l'incohérent" . Ces lignes de A. LOHMANN {73} expriment bien une des motivations qui nous ont poussé à aborder l'analyse du bruit optique en fonction de la cohérence . Il faut y ajouter l'intérêt de comprendre mieux des phénomènes physiques dont les manifestations étaient jusqu'à présent mieux connues que les causes . De plus , les succès du traitement électronique de l'information ne reposent-ils pas sur une maîtrise parfaite des causes de bruit en électronique ? Le traitement optique de l'information aurait assurément à gagner à mieux connaître le bruit optique pour mieux le combattre : l'étude statistique que l'on va lire est un pas vers cet objectif .

Ce court chapitre d'introduction se propose de délimiter dans le vaste domaine des études de bruit en physique la parcelle que nous étudierons ici : quelles sont , parmi les causes de bruit possibles en optique , les plus importantes dans le domaine du traitement d'images ? Quels sont les moyens à notre disposition pour étudier l'influence de la cohérence sur ce bruit ?

I - D'OU VIENT LE BRUIT ?

Notre étude se propose d'être aussi générale que possible en ce qui concerne la nature des traitements optiques . Il nous semble cependant impossible de ne pas préciser quelque peu la structure des systèmes optiques considérés .

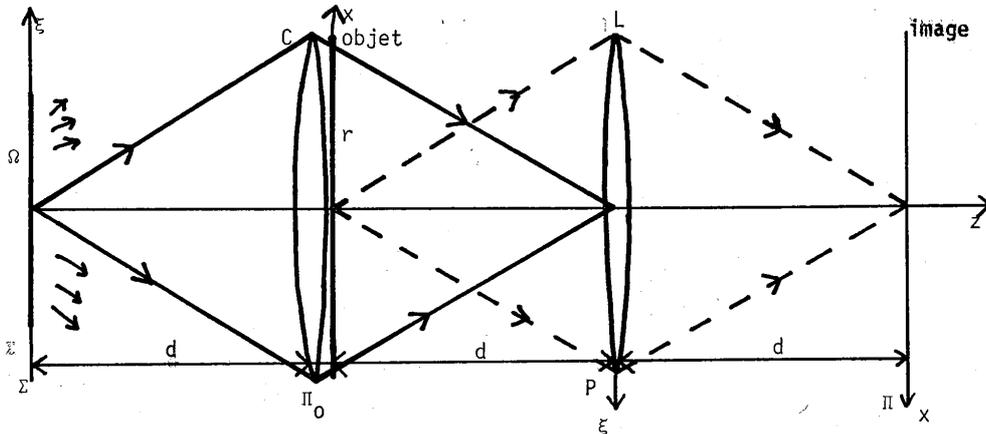


Figure 1. Schéma du montage considéré.

Nous avons choisi une structure à la fois simple , courante et complète ,
espérant que les propriétés que nous y découvrirons pourront aisément être généra-
lisées à d'autres cas . La figure 1 schématise notre exemple : il s'agit de la pro-
jection de l'image d'un objet transparent en éclairage dit de Köhler .

Un condenseur C , lentille mince placée au voisinage immédiat de l'objet, for-
me de la source plane Σ une image située dans le plan de la lentille mince L . Cette
dernière forme de l'objet dans le plan Π_0 une image dans le plan Π . La pupille du
système est située dans le plan P de la lentille L . Les distances entre les divers

plans Σ , Π_0 , P, Π sont prises égales à d pour simplifier les notations, et les axes de ces plans sont orientés de façon à assurer à C et à L un grandissement + 1.

Ce système sert à former une image, et nous nous intéressons au bruit qui affecte cette image. Plus précisément, nous étudions les perturbations apportées à l'éclairement de cette image par tous les phénomènes considérés comme parasites. Ces phénomènes, le plus souvent aléatoires, ont des statistiques variées. Tentons de donner une liste complète de ces causes de bruit aléatoires (voir figure 2).

- 1.1) La source, émettant de manière aléatoire et discontinue ses photons, cause un bruit quantique. Malgré le caractère fondamental de ce bruit, nous ne le considérerons pas dans la suite, parce qu'en traitement d'images il est en général possible d'utiliser une source de luminance suffisante pour qu'il n'intervienne pas.
- 1.2) L'objet lui-même est une cause de bruit s'il contient différents défauts : défauts d'homogénéité ou d'épaisseur du support, poussières, piqûres, diffusion par le support, et surtout granularité photographique.
- 1.3) Les éléments optiques sont également causes du bruit : la diffusion en surface ou en volume, les poussières modifient l'éclairement de l'image. Dans le dispositif de la figure 2, le bruit dû au condenseur mince et au contact de l'objet est indiscernable du bruit dû à l'objet : nous les regrouperons sous le nom de bruit objectif ; le bruit dû à la lentille L, au contraire, a un comportement fort différent.

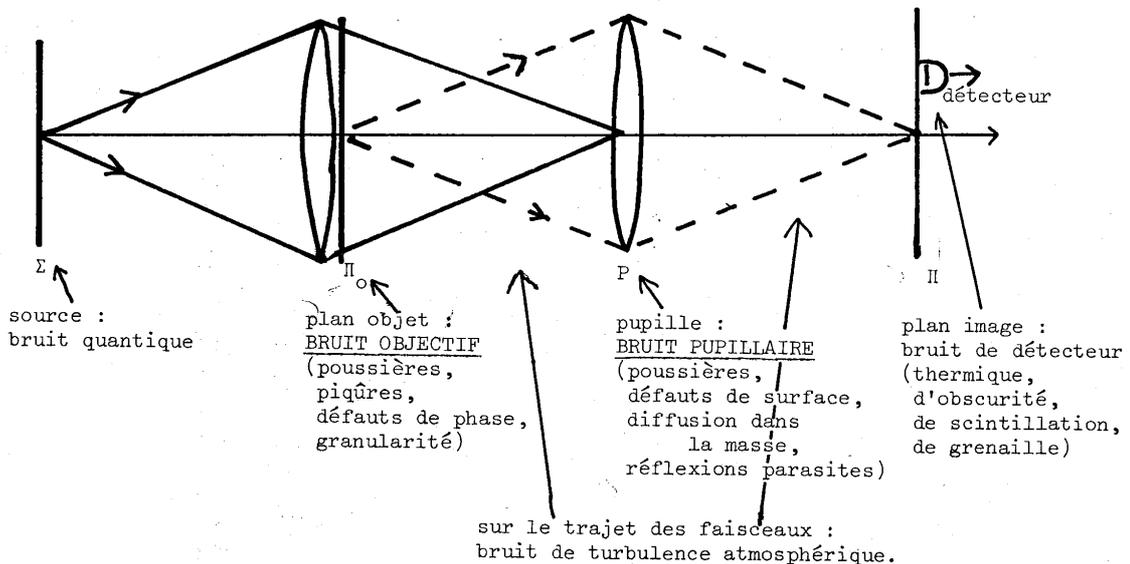


Figure 2. Les différentes sources de bruit optique.

Nous l'appellerons bruit pupillaire , car il provient de la pupille du système . Dans des dispositifs plus compliqués , il existe des composants optiques situés à d'autres endroits que le plan objet et la pupille , mais nous nous limiterons à ces deux cas typiques .

- 1.4) Le milieu situé entre les composants optiques peut aussi provoquer des fluctuations : la turbulence atmosphérique est une limitation bien connue en astronomie . Mais , dans le domaine du traitement d'images , il est raisonnable de dire que l'on peut en général l'éviter : nous ne retiendrons donc pas cette cause de bruit .
- 1.5) Enfin , le récepteur sur lequel se forme l'image pourrait être considéré comme une cause de bruit , mais nous écartons délibérément cette étude en considérant les propriétés de l'éclairement de l'image , donc de l'image avant sa détection . En effet , il nous semble que ce bruit dépend avant tout du type de récepteur utilisé : son étude ne pourrait être complète sans dépasser de loin le cadre de ce mémoire .

Bien que la lumière parasite par réflexion puisse difficilement être considérée comme un phénomène aléatoire , elle a un effet sur l'éclairement de l'image comparable au bruit dû aux composants optiques . Nous lui consacrerons donc un paragraphe lors de l'étude du bruit pupillaire .

II - COMMENT ETUDIER LE BRUIT

2.1) Plan de l'étude

Nous avons deux sortes de bruits à étudier : le bruit objectif et le bruit pupillaire . Notre but essentiel est de comparer l'éclairage cohérent et l'éclairage incohérent dans ces deux cas , qui correspondent tous deux au schéma de la figure 3 .

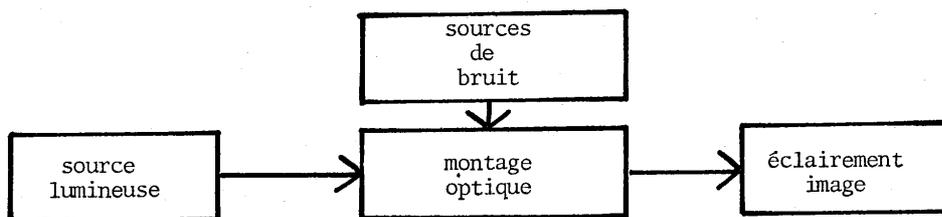


Figure 3'. Intervention du bruit considéré dans la formation de l'image.

La grandeur physique intéressante est l'éclairement de l'image $I(\vec{r})$, dont nous calculerons les statistiques pour les deux sortes de bruit et pour les différents états de cohérence. Plus exactement, nous nous limiterons à des propriétés statistiques simples : l'espérance mathématique $\langle I(\vec{r}) \rangle$ et la variance $\sigma_I(\vec{r})$ de $I(\vec{r})$. En effet, le calcul d'autres propriétés statistiques de $I(\vec{r})$, comme son auto-corrélation, serait fort complexe. De plus, les quantités $\langle I(\vec{r}) \rangle$ et $\sigma_I(\vec{r})$ permettent de tirer des conclusions intéressantes : la distinction entre bruit pupillaire et bruit objectif apparaît très nettement par leurs comportements différents en fonction de la cohérence. Nous pourrions ainsi justifier avec précision l'avantage de l'éclairage incohérent sur l'éclairage cohérent en matière de bruit, et formuler quelques suggestions pour lutter efficacement contre le bruit dans les montages optiques.

Nos calculs ont été publiés en collaboration avec S. LOWENTHAL. Plutôt que de les reprendre ici, nous nous proposons d'en expliquer l'essentiel par des raisonnements décrivant de façon simple la physique des phénomènes et que nous appellerons "théories élémentaires". Nous expliquerons aussi ce que le calcul complet apporte de plus, et nous soulignerons les enseignements pratiques que l'on peut en tirer. Nous accorderons aussi une importance particulière aux hypothèses nécessaires, que nous tenons à limiter au strict minimum : nous éviterons ainsi de construire des modèles trop sujets à caution.

Les deux chapitres qui suivent sont consacrés respectivement au bruit pupillaire et au bruit objectif. Le chapitre suivant revient sur la discussion de l'hypothèse gaussienne dans les calculs de bruit.

Auparavant, indiquons les notations et les équations communes à toute cette partie.

2.2) Expression générale de l'éclairement de l'image

Nous cherchons à exprimer l'éclairement $I(\vec{r})$ de l'image de la figure 1. Pour cela, nous nous plaçons dans l'hypothèse scalaire et nous utilisons les hypothèses et notations suivantes :

- la source est spatialement incohérente, mais quasimonochromatique, de longueur d'onde dans le vide λ ; nous renonçons donc à l'étude de la cohérence temporelle pour nous consacrer à la cohérence spatiale;
- \vec{r} désigne le point courant des plans objet et image;
- $\vec{\Omega}$ désigne le point courant des plans source et pupille exprimé en coordonnées réduites : si $\vec{\rho}$ désigne le même point courant en coordonnées vraies, alors :

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\rho}}{\lambda d} \quad (1)$$

- $\tau(\vec{r})$ désigne la transmittance en amplitude de l'objet ; nous admettons , compte tenu des remarques formulées dans le chapitre I de la première partie , que cette quantité a un sens ;
- $\tilde{s}(\vec{\Omega})$ désigne la luminance de la source . En vertu du théorème de Zernike-van Cittert , sa transformée de Fourier $s(\vec{r})$ désigne donc , à un facteur de normalisation près , le facteur de cohérence dans le plan objet . On peut modifier la cohérence de l'éclairage en changeant de fonction $\tilde{s}(\vec{\Omega})$: notamment , le cas cohérent est celui d'une source ponctuelle , de luminance $K \delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_0)$ où K est une constante et δ la "fonction" de Dirac ; le cas incohérent est celui d'une source de luminance constante et illimitée ;
- $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ désigne la transmittance en amplitude du plan de la pupille , hormis le déphasage $\exp(-2i\pi\lambda d\Omega^2)$ dû à la lentille L ; $p(\vec{r})$ est sa transformée de Fourier . L'éclairement de l'image s'écrit alors :

$$I(\vec{r}) = \int \tilde{s}(\vec{\Omega}_0) i(\vec{r}, \vec{\Omega}_0) d\vec{\Omega}_0 \quad (2)$$

où $i(\vec{r}, \vec{\Omega}_0)$ est l'éclairement que produirait une source ponctuelle de luminance $\delta(\vec{\Omega}-\vec{\Omega}_0)$:

$$i(\vec{r}, \vec{\Omega}_0) = |a(\vec{r}, \vec{\Omega}_0)|^2 = \left| \int \tau(\vec{r}_0) p(\vec{r}_0 - \vec{r}) \exp(-2i\pi\vec{\Omega}_0 \cdot \vec{r}_0) d\vec{r}_0 \right|^2 \quad (3)$$

Les expressions (2) et (3) constituent un calcul d'éclairement en cohérence partielle, conformément au formalisme introduit par BLANC-LAPIERRE et DUMONTET {75} . Elles expriment que les contributions des différents points de la source incohérente s'ajoutent en intensité, alors que chaque point forme pour sa part une image cohérente.

L'influence des sources de bruit sur l'éclairement de l'image est décrite en introduisant ces sources dans le calcul : le bruit objectif affecte la fonction $\tau(\vec{r})$, le bruit pupillaire affecte la fonction $\tilde{p}(\vec{\Omega})$. En général, le caractère aléatoire de la cause de bruit rend aléatoire la fonction $\tau(\vec{r})$ ou $\tilde{p}(\vec{\Omega})$, mais nous étudierons aussi l'influence d'un grain de poussière isolé dans l'objet en introduisant une modification non aléatoire sur la fonction $\tau(\vec{r})$.

CHAPITRE II - BRUIT PUPILLAIRE

La faible influence du bruit pupillaire en éclairage incohérent est un fait d'expérience quotidienne : n'arrive-t-il pas à maint porteur de lunettes de se demander , en essuyant ses verres , comment il pouvait encore voir le monde à travers tant de poussière ? En éclairage cohérent , au contraire , le bruit pupillaire se manifeste par une granularité très gênante .

Un raisonnement simple nous permettra de justifier cette constatation et de la préciser . Nous expliquerons ensuite l'intérêt que présente un calcul plus complet . Après avoir mis en évidence la similitude entre le bruit pupillaire et les interférences par réflexion parasite , nous soulignerons l'importance des conclusions de cette étude pour le traitement optique de l'information .

I - THEORIE ELEMENTAIRE

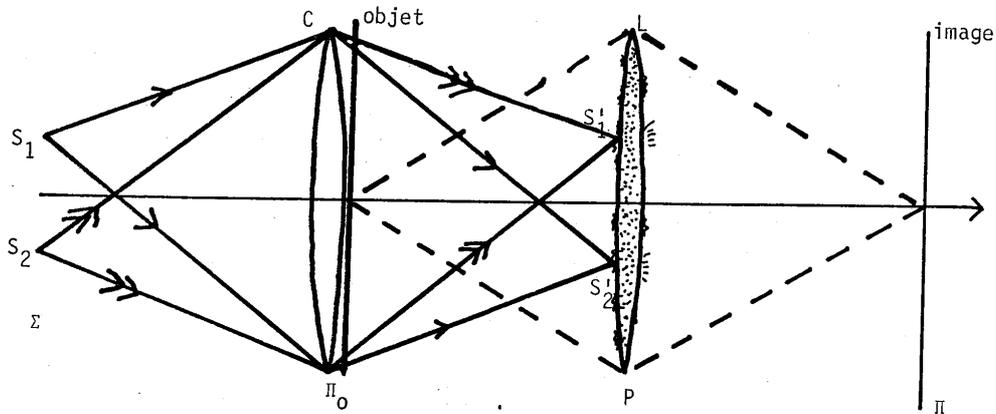


Figure 4. Bruit pupillaire : cas de deux points sources.

Considérons la figure 4 . Deux points sources S_1 et S_2 ont pour images à travers le condenseur les points S'_1 et S'_2 de la pupille . En S'_1 et en S'_2 se trouvent des sources de bruit : centres diffusants dans le verre de la lentille L , poussières , irrégularités de surface de la lentille . Quel est l'effet de ces défauts sur l'image de Π_0 observée en Π ?

Considérons d'abord le point S_1 seul . Il fournit en Π un éclaircissement où nous pouvons distinguer un signal et du bruit . Le signal est l'image cohérente que formerait S_1 en l'absence de tout défaut . Le bruit est la modification de cette image apportée par les défauts ; en considérant les défauts comme un phénomène aléatoire , construisons un ensemble statistique dont l'expérience envisagée est une réalisation . Sur cet ensemble , on peut définir l'espérance mathématique de l'éclaircissement $\langle I_1(\vec{r}) \rangle$ en chaque point de l'image , ainsi que sa variance $\sigma_{I_1}^2(\vec{r})$, et donc aussi le rapport signal sur bruit :

$$\rho = \frac{\langle I_1(\vec{r}) \rangle}{\sigma_{I_1}(\vec{r})} \quad (4)$$

Il est facile de décrire l'éclaircissement moyen $\langle I_1(\vec{r}) \rangle$ en faisant simplement l'hypothèse que le bruit pupillaire est faible , c'est-à-dire que nous étudions un montage relativement propre : dans ce cas , $\langle I_1(\vec{r}) \rangle$ est principalement constitué par le signal , qui est l'image en l'absence de bruit . Les défauts du plan pupillaire diffusent cependant une partie de la lumière qui devrait former ce signal et, au sens de l'espérance mathématique , la lumière diffusée se répartit sans variation brusque dans tout le plan image en épousant la forme du spectre de diffusion des défauts . $\langle I_1(\vec{r}) \rangle$ se compose donc de l'image sans bruit légèrement atténuée et superposée à un léger fond de lumière diffusée .

Rajoutons maintenant le second point source S_2 , que nous supposons de même intensité que S_1 et suffisamment éloigné de S_1 (nous précisons ce qu'il faut entendre par là) . L'éclaircissement de l'image est maintenant la somme des éclaircissements dus à S_1 et S_2 :

$$I(\vec{r}) = I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) \quad (5)$$

L'espérance mathématique et la variance de $I(\vec{r})$ s'écrivent , en toute généralité :

$$\langle I(\vec{r}) \rangle = \langle I_1(\vec{r}) \rangle + \langle I_2(\vec{r}) \rangle$$

$$\sigma_I^2(\vec{r}) = \langle (I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}))^2 \rangle - (\langle I_1(\vec{r}) + I_2(\vec{r}) \rangle)^2 \quad (6)$$

$$= \sigma_{I_1}^2(\vec{r}) + \sigma_{I_2}^2(\vec{r}) + 2 \langle I_1(\vec{r}) I_2(\vec{r}) \rangle - 2 \langle I_1(\vec{r}) \rangle \langle I_2(\vec{r}) \rangle \quad (7)$$

Les deux images que formeraient S_1 et S_2 en l'absence de bruit ne sont pas exactement identiques , car il s'agit de deux images formées en éclairant l'objet par deux ondes d'inclinaisons différentes : le filtrage des fréquences spatiales effectué dans le plan de la pupille n'est pas le même . Ces deux images sont cependant

suffisamment semblables pour que nous aboutissions à un ordre de grandeur correct pour σ_I en les considérant comme identiques dans les Equations (6) et (7) . Puisque nous avons supposé les deux points sources de même intensité :

$$\langle I(\vec{r}) \rangle \approx 2 \langle I_1(\vec{r}) \rangle \quad (8)$$

La variance de $I(\vec{r})$ se compose de trois termes . En tenant compte encore de l'égalité des intensités de S_1 et S_2 , nous écrivons que les variances des éclairagements I_1 et I_2 sont les mêmes : cela revient notamment à affirmer que les sources de bruit sont réparties uniformément sur la pupille , qu'il n'y a pas une partie "propre" et une partie "sale" . En termes statistiques , la pupille est décrite par une fonction aléatoire stationnaire , au moins au deuxième ordre .

$$\sigma_{I_1}(\vec{r}) = \sigma_{I_2}(\vec{r}) \quad (9)$$

Enfin , nous ferons l'hypothèse que les sources de bruit sur la pupille au point S_1' et les sources de bruit au point S_2' sont indépendantes , c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rapport entre la façon dont sont disposées les poussières en S_1' et en S_2' : les processus aléatoires $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ sont alors indépendants eux aussi , et :

$$\langle I_1(\vec{r}) I_2(\vec{r}) \rangle = \langle I_1(\vec{r}) \rangle \langle I_2(\vec{r}) \rangle \quad (10)$$

D'où le nouveau rapport signal sur bruit :

$$\rho = \frac{\langle I(\vec{r}) \rangle}{q_I(\vec{r})} = \frac{2 \langle I_1(\vec{r}) \rangle}{(2 \sigma_{I_1}^2(\vec{r}))^{1/2}} = \sqrt{2} \rho_1 \quad (11)$$

Plus généralement , on démontrerait de même que pour une source constituée de N points donnant des éclairagements statistiquement indépendants :

$$\rho = \rho_1 \sqrt{N} = \rho_{\text{cohérent}} \sqrt{N} \quad (12)$$

Ce résultat avait déjà été trouvé dans un cas particulier par Y. BELVAUX {28}.

Il reste à préciser quelle doit être la distance entre S_1 et S_2 pour qu'ils puissent être déclarés indépendants . Autrement dit , pour une source d'aire finie S_s comme celle de la figure 5 , quelle valeur choisir pour N ?

Revenons au cas de deux points et supposons les points S_1 et S_2 très voisins : si leurs images géométriques à travers le condenseur sont écartées d'une distance faible par rapport à la tache de diffraction , alors les défauts de la pupille éclairés par les images S_1' et S_2' limitées par la diffraction sont les mêmes , et il n'y a donc plus indépendance . L'indépendance exige que la distance entre S_1 et S_2 permette que ces deux points soient résolus au sens du critère de Rayleigh pour la diffraction : en ce sens , nous devons donc considérer que l'aire d'un point de la source est voisine de $\frac{2}{\lambda} d^2 / S_0$, où S_0 est l'aire du support de l'objet (supposé inclus dans le support du condenseur) . La valeur à choisir pour N est donc :

$$N = \frac{S_s}{\frac{2}{\lambda} d^2} \quad (13)$$

Cette expression , toutefois , n'est pas valable si l'image de la source n'est pas incluse dans le support de la pupille . En effet , les points de la source dont

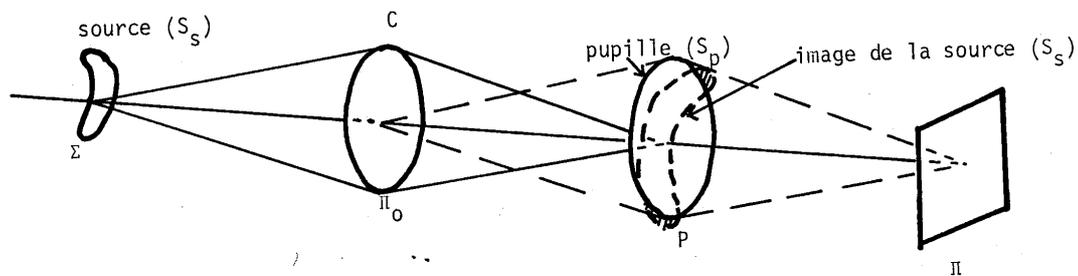


Figure 5. Cas d'une source étendue, d'aire S_s .

l'image est dans la partie hachurée de la figure 5 , ne contribuent de façon appréciable ni au signal , ni au bruit : ils modifient légèrement l'image uniquement par l'intermédiaire des composantes de haute fréquence spatiale dans l'objet qui correspondent à très peu d'énergie .

Finalement ,

$$N = \frac{S'_s S_o}{\lambda^2 d^2} \quad (14)$$

où S'_s est l'aire de la portion de l'image de la source incluse dans la pupille . En particulier , si la source et la pupille sont circulaires , centrées sur l'axe du système et que nous notons S_p l'aire de la pupille :

$$S'_s = \begin{cases} S_s & \text{si } S_s < S_p \\ S_p & \text{si } S_s > S_p \end{cases} \quad (15)$$

La figure 6 représente l'évolution du rapport $\rho/\rho_{\text{cohérent}}$, c'est-à-dire du gain en rapport signal sur bruit , en fonction de S_s dans ce dernier cas .

On constate que ce gain varie de 1 pour une source ponctuelle à $\sqrt{N_o}$ pour une source dont l'image couvre au moins toute la pupille , N_o étant le "nombre de degrés de liberté" dans l'image au sens du théorème d'échantillonnage .

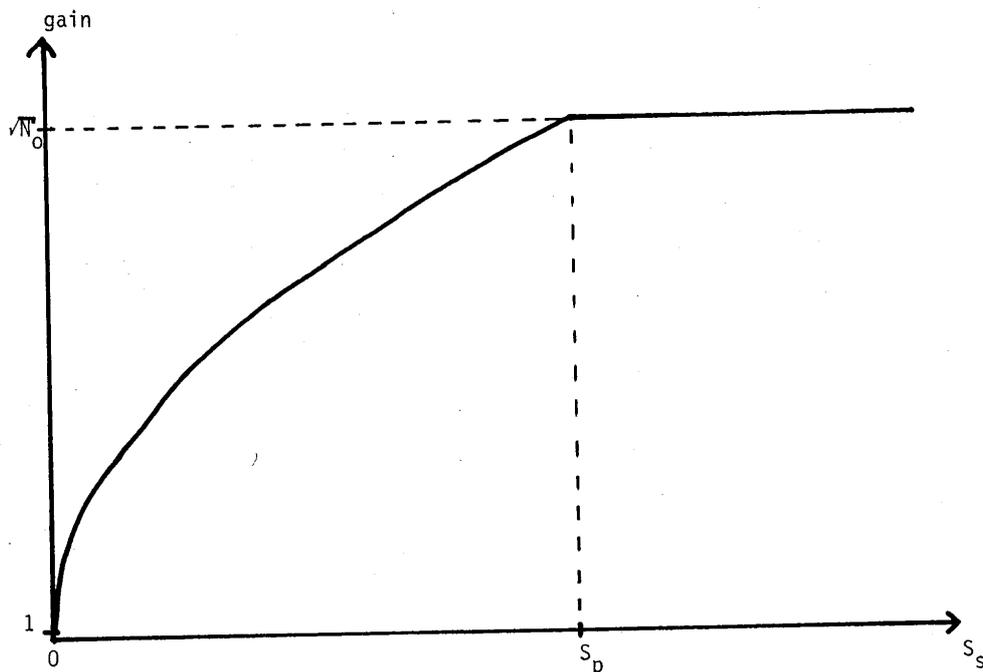


Figure 6. Gain en rapport signal sur bruit par rapport au cas cohérent, lorsque la source a pour aire S_s (bruit pupillaire).

II - PRESENTATION DU CALCUL COMPLET

2.1) Hypothèses nécessaires

Dans l'analyse précédente, nous avons déjà utilisé trois hypothèses :

- a) bruit pupillaire faible ;
- b) stationnarité du bruit pupillaire ;
- c) indépendance des défauts de la pupille distants de plus de la largeur d'une tache de diffraction par le condenseur .

Pour le calcul présenté dans l'annexe III, nous utilisons les notations des Equations (2) et (3). Le bruit affecte la fonction $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ qui décrit la transmittance en amplitude de la pupille :

$$\begin{aligned} \tilde{p}(\vec{\Omega}) &= \langle \tilde{p}(\vec{\Omega}) \rangle + \tilde{P}(\vec{\Omega}) \tilde{N}(\vec{\Omega}) \\ &= \langle \tilde{p}(\vec{\Omega}) \rangle + n(\vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (16)$$

Dans cette expression, $\tilde{P}(\vec{\Omega})$ désigne la fonction pupille sans bruit qui, en général, vaut 1 dans la pupille et 0 ailleurs. \tilde{N} est le processus aléatoire qui décrit le bruit. C'est à la fonction \tilde{N} que s'appliquent les hypothèses précédentes, qu'il y a lieu de compléter et de préciser :

- a) L'hypothèse de bruit faible reste inchangée .
- b) La fonction \hat{N} est supposée stationnaire au sens large à l'ordre 2 .
- c) Les moments d'ordre 2 de \hat{N} :
- $$\langle \hat{N}(\vec{\Omega}) \hat{N}(\vec{\Omega} + \vec{\Omega}_1) \rangle \text{ et } \langle \hat{N}(\vec{\Omega}) \hat{N}^*(\vec{\Omega} + \vec{\Omega}_1) \rangle$$
- sont supposés étroits devant la taille de la tache de diffraction par le condenseur dans le plan de la pupille .
- d) Le calcul de la variance de l'éclairement fait intervenir un moment du quatrième ordre de $\hat{N}(\vec{\Omega})$. L'expression complète du rapport signal sur bruit devient alors inextricable si on n'ajoute pas une hypothèse sur les statistiques de $\hat{N}(\vec{\Omega})$. Bien que d'autres statistiques puissent raisonnablement être envisagées, nous avons utilisé dans l'annexe III des statistiques gaussiennes . Physiquement , cette décision est parfaitement arbitraire . Par contre , un calcul d'ordre de grandeur permet de montrer qu'elle mène à des résultats intéressants . En effet , l'hypothèse gaussienne fournit une valeur du gain en rapport signal sur bruit $\rho / \rho_{\text{cohérent}}$ qui ne peut pas pêcher par optimisme : quelles que soient les statistiques exactes du bruit , le gain ainsi trouvé est soit correct en ordre de grandeur , soit même en-dessous de la réalité . Nous reviendrons au chapitre IV sur cette affirmation , également expliquée dans l'appendice de l'annexe III .
- e) A cela s'ajoute le problème de la stationnarité de l'éclairement image : en effet , si l'objet est très dense à certains endroits , la lumière diffusée est prépondérante aux endroits correspondants de l'image , l'hypothèse a) n'est plus utilisable et l'expression du rapport signal sur bruit est modifiée . Pour éviter que le rapport signal sur bruit et le gain $\rho / \rho_{\text{cohérent}}$ ne dépendent du point considéré dans l'image , une "stationnarisation" est nécessaire . Elle peut être obtenue de deux façons . La première , utilisée dans l'annexe III , consiste à supposer l'objet faiblement contrasté . A l'appui de ce procédé , on peut dire que l'étude du rapport signal sur bruit est importante lorsque , précisément , le signal est peu contrasté et risque d'être masqué par le bruit . Lorsque l'objet est fortement contrasté , le bruit intervient moins . Nous écrirons donc la transmittance de l'objet sous la forme :

$$\tau(\vec{r}) = [\tau_c + m(\vec{r})] F(\vec{r}) \quad (17)$$

τ_c désigne un fond continu toujours fort par rapport à la modulation $m(\vec{r})$, et $F(\vec{r})$ est la fonction support de l'objet , qui vaut 1 dans le "cadre" de l'objet et 0 ailleurs . De cette façon , le bruit comme le signal font intervenir essentiellement le fond continu , la modulation n'intervient que comme un terme correctif , et le rapport signal sur bruit ne dépend pas du point \vec{r} .

Cependant , on peut aussi préférer éviter l'hypothèse des faibles modulations . Dans ce cas , la deuxième façon de stationnariser le problème est utile: elle consiste à remplacer le calcul des statistiques de l'éclairement $I(\vec{r})$ par

celui de leurs moyennes spatiales sur toute l'image . Le résultat ne diffère pas sensiblement de celui trouvé dans l'appendice III . Pour ne pas alourdir l'exposé , nous plaçons ce calcul du rapport signal sur bruit avec moyenne spatiale en appendice du présent chapitre .

f) La dernière hypothèse nécessaire dans le calcul concerne les fréquences spatiales contenues dans l'objet . Si $\tau(\vec{r})$ contient des fréquences spatiales voisines de la fréquence de coupure de la lentille L , les images cohérente et incohérente , en l'absence de tout bruit , diffèrent en raison des écarts entre les fonctions de transfert de la lentille L en éclairage cohérent et incohérent . Ce fait bien connu n'a pas d'incidence directe sur le bruit : il convient de bien distinguer les pures questions de formation d'images , des questions de bruit , de façon à rendre plus claires nos considérations sur le bruit et à alléger les calculs . Nous supposons donc que la transmittance en amplitude $\tau(\vec{r})$ de l'objet ne contient que des fréquences assez faibles pour que les fonctions de transfert cohérente et incohérente soient pratiquement égales à l'unité . Dans un but de simplification , nous supposons enfin que $\tau(\vec{r})$ est une quantité réelle .

2.2) Conclusions du calcul complet

Munis de toutes les hypothèses qui viennent d'être commentées , nous présentons dans l'annexe III le calcul du rapport signal sur bruit . On constate que le résultat obtenu pour le gain $\rho/\rho_{\text{cohérent}}$ ne diffère de la valeur trouvée dans le paragraphe I par notre théorie élémentaire que par une constante multiplicative voisine de 1 et dépendant du détail des statistiques du bruit N . L'ordre de grandeur

$$\frac{\rho}{\rho_{\text{cohérent}}} = \sqrt{N} \quad (18)$$

est donc conservé , et c'est bien là l'essentiel , car N peut varier dans des proportions très grandes .

L'intérêt du calcul complet est donc simplement de préciser les hypothèses nécessaires , en particulier sur le phénomène aléatoire "source du bruit pupillaire" . Il permet par ailleurs de constater que l'augmentation de la taille de l'image de chaque point source due à la diffraction à travers l'objet , bien qu'elle fasse perdre sa rigueur au calcul grossier du paragraphe I , ne modifie guère le résultat .

III - INTERFERENCES PARASITES PAR REFLEXION

3.1) Comportement général vis à vis de la cohérence

Les interférences dues à la lumière parasite par réflexion ne sont pas exactement un cas de bruit pupillaire : les réflexions ne proviennent pas nécessairement de la pupille et n'ont rien du phénomène aléatoire . Mais le comportement des réflexions parasites en fonction de la cohérence présente une analogie avec celui du bruit pupillaire qui nous permet de traiter rapidement cette question ici .

En effet , comment se présentent en général les phénomènes de réflexion parasites sur une image ? En éclairage cohérent , il s'agit de franges annulaires concentriques semblables à des anneaux de Newton , et qui constituent une gêne bien connue des utilisateurs de lasers . En éclairage incohérent , le phénomène ne se manifeste guère que quand une source extrêmement intense , en pratique le soleil ou un lampadaire la nuit , située hors du champ d'un instrument , envoie cependant des rayons jusqu'à l'image en raison des réflexions parasites . Pourquoi cette différence entre les cas cohérent et incohérent ?

Dans le cas cohérent , il se forme des interférences entre l'onde directement transmise et l'onde réfléchie sur deux surfaces optiques ; nous pouvons écrire l'éclairement sous la forme :

$$I = |A + A \rho_0 \exp i\phi|^2 \quad (19)$$

ρ_0 représente le coefficient d'atténuation de l'amplitude dû aux deux réflexions et ϕ le déphasage correspondant , dont les variations spatiales dans l'image déterminent les franges .

Dans le cas d'un éclairage spatialement incohérent , chaque point de la source forme des anneaux d'interférences par réflexion , mais le déphasage ϕ en un point de l'image dépend du point de la source : il y a brouillage des franges . Si le brouillage est complet , le terme d'interférences de l'Equation (19) disparaît , et l'éclairement est de la forme :

$$I = A^2 + A^2 \rho_0^2 \quad (20)$$

Le passage de l'éclairage cohérent à l'éclairage incohérent s'accompagne donc de la disparition presque complète de la gêne due aux réflexions parasites : il ne reste plus , superposé à l'image correcte, qu'un éclairement nettement moins intense et qui se réduit souvent à une composante continue , alors que les franges d'interférences , de contraste $2 \rho_0$, ont disparu .

Cette description élémentaire montre que , comme le bruit pupillaire , la lumière parasite par réflexion est nettement moins gênante en éclairage incohérent qu'en éclairage cohérent . Illustrons ces considérations par un exemple plus explicite , mais aussi simple que possible .

3.2) Un exemple

Considérons l'expérience de la figure 7 où un objet transparent uniforme et très étendu est éclairé par une source de luminance uniforme , située à l'infini. Une lentille L , de distance focale f , forme une image de l'objet à la distance d. Par double réflexion sur les faces de la lentille , il apparaît une deuxième distance focale f'. Nous négligeons les réflexions d'ordre supérieur . Pour le point central de la source , il se forme ainsi deux ondes sphériques divergentes centrées sur l'axe et qui atteignent l'image avec des rayons d-f et d-f' ; le déphasage s'écrit :

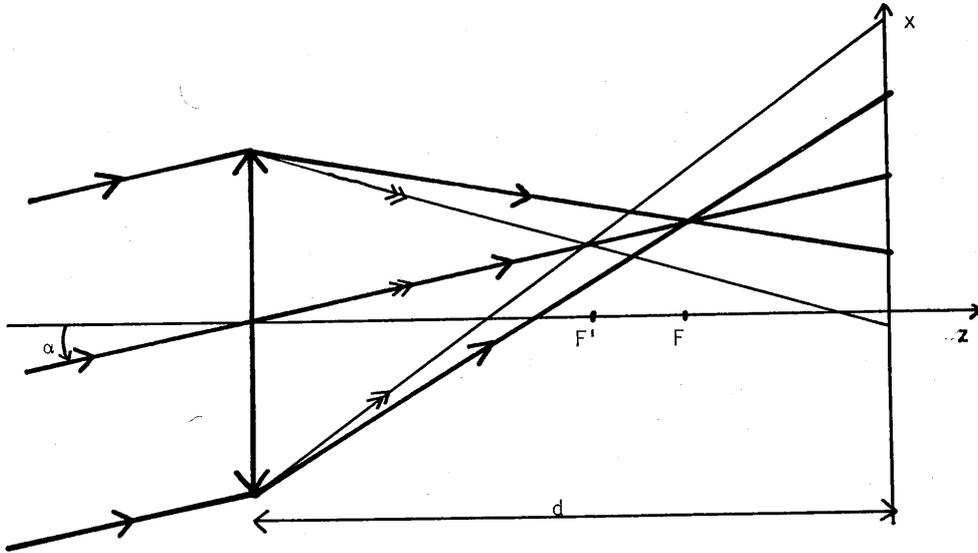


Figure 7.. Un exemple pour l'étude des interférences par réflexions parasites.
F et F' sont les foyers correspondant aux distances focales f et f'.

$$\Phi(0,0,x,y) = \frac{2\pi}{\lambda} (x^2 + y^2) \left(\frac{1}{d-f} - \frac{1}{d-f'} \right) \quad (21)$$

Pour un point source incliné, repéré par les cosinus directeurs α suivant x et β suivant y, les franges sont centrées au point de coordonnées $\alpha d, \beta d$ du plan image (voir figure 5) et le déphasage vaut :

$$\Phi(\alpha, \beta, x, y) = \frac{2\pi}{\lambda} [(x - \alpha d)^2 + (y - \beta d)^2] \left(\frac{1}{d-f} - \frac{1}{d-f'} \right) \quad (22)$$

Pour la source entière, d'intensité par unité d'angle solide $L(\alpha, \beta)$, et en n'explicitant pas la limitation des faisceaux par la lentille, l'éclairement s'écrit, à un facteur multiplicatif près :

$$I(x, y) = \iint_{\text{source}} L(\alpha, \beta) (1 + 2\rho_0 \cos \Phi(\alpha, \beta, x, y) + \rho_0^2) d\alpha d\beta \quad (23)$$

Effectuons cette intégration dans un cas particulier : cherchons le contraste des franges d'interférences au centre de l'image pour une source circulaire uniforme de rayon angulaire A.

$$I(0,0) = 2\pi L \int_0^A (1 + 2\rho_0 \cos 2\pi K(\alpha^2 + \beta^2) + \rho_0^2) \alpha d\alpha \quad (24)$$

$$\text{avec } K = \frac{1}{\lambda} \left(\frac{1}{d-f} - \frac{1}{d-f'} \right)$$

Pour trouver le contraste des franges au centre, nous les ferons défiler en introduisant artificiellement en plus du déphasage Φ de l'Equation (22) un déphasage Φ_0 arbitraire que nous pourrions faire varier. Il vient :

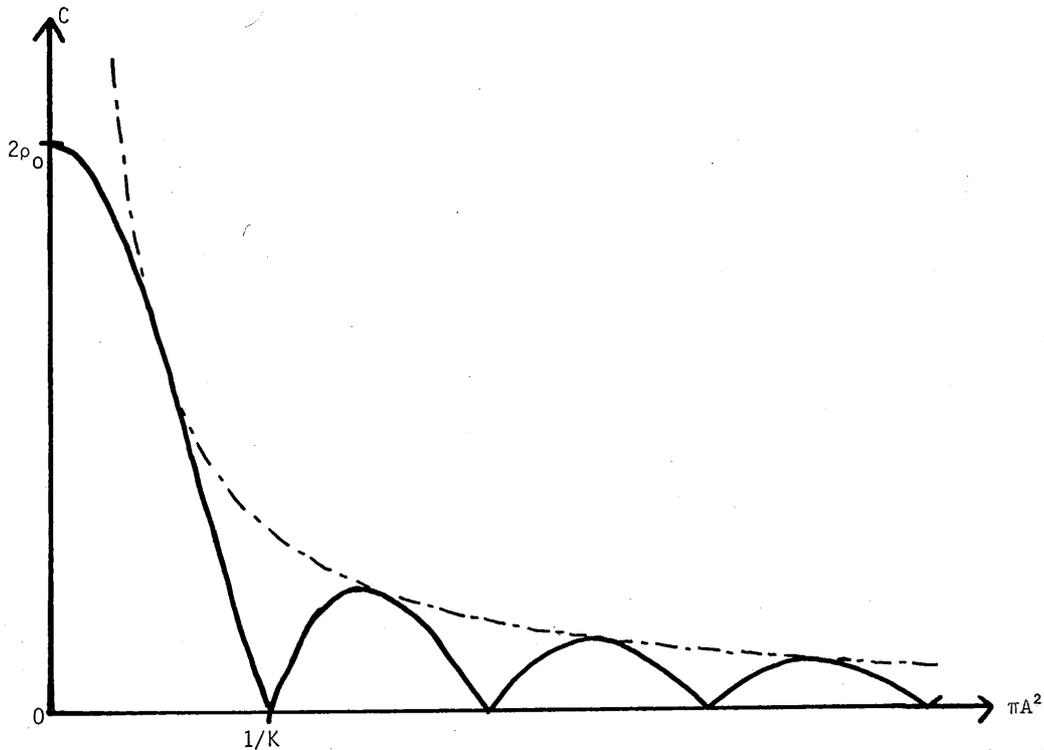


Figure 8. Courbe de contraste des franges d'interférences par réflexions parasites en fonction de l'aire de la source ; en pointillés, courbe enveloppe.

$$I(0,0) = 2\pi LA^2 \left[1 + 2\rho \frac{\sin \pi KA^2}{\pi KA^2} \cos(\pi KA^2 + \phi_0) + \rho_0^2 \right] \quad (25)$$

et le contraste vaut , si ρ est petit :

$$C = 2\rho \left(\frac{\sin \pi KA^2}{\pi KA^2} \right) \quad (26)$$

Ses variations avec A sont représentées sur la figure 8.

On voit que le contraste au centre de l'image admet pour enveloppe une fonction inversement proportionnelle à l'aire de la source .

Nous ne tenterons pas de tirer d'enseignement trop général de l'expression (26) qui correspond à un cas très particulier , et où nous n'avons pas pris en compte la limitation des faisceaux par l'objet et par la lentille . Nous constatons toutefois

que la lumière parasite par réflexion partage avec le bruit pupillaire la propriété de provoquer des variations d'éclairement de l'image dont l'amplitude relative baisse rapidement quand la dimension de la source croît .

IV - CONSEQUENCES PRATIQUES

Nous avons remarqué la grande différence entre les niveaux de bruit des deux clichés de microscopie en contraste de phase de la figure 14 (voir première partie). Ce chapitre nous éclaire sur les raisons de ce phénomène : nous venons de montrer que les fluctuations du bruit pupillaire sont beaucoup plus fortes en éclairage cohérent qu'en éclairage incohérent ; or , le bruit observé dans cet exemple provient , au moins partiellement , de diffusion par les défauts des éléments optiques et d'interférences par réflexions parasites .

Par ailleurs , il est instructif de revenir sur la valeur du rapport $\rho/\rho_{\text{cohérent}}$ pour le bruit pupillaire en examinant quelques situations particulières . Nous avons vu que le rapport signal sur bruit croît avec la taille de la source jusqu'à une valeur limite atteinte lorsque l'image de la source couvre entièrement la pupille. Au-delà , l'augmentation de taille de la source modifie encore la cohérence de l'éclairage , mais n'a plus d'effet sur le rapport signal sur bruit , qui est amélioré par rapport au cas cohérent dans une proportion égale à la racine carrée du nombre de degrés de liberté dans l'image . Par exemple , reprenons un exemple numérique déjà cité plus haut : pour une diapositive de taille 24 x 36 mm observée avec une ouverture $f/2$, le gain est de l'ordre de 70 000 . Cette amélioration est si forte que l'on peut dire qu'en éclairage incohérent le bruit pupillaire n'existe plus : même s'il est prépondérant en éclairage cohérent , il est probable qu'une fois divisé par 70 000 il sera devenu bien inférieur à d'autres sortes de bruit . Nous pouvons ainsi conclure que s'il convient d'utiliser en traitement optique cohérent des instruments optiques parfaitement propres , avec des surfaces d'excellente qualité, il est inutile de s'acharner à nettoyer les lentilles quand une expérience de traitement incohérent ne donne pas les résultats escomptés : le défaut est ailleurs .

L'évolution du rapport signal sur bruit pour le bruit pupillaire lorsque la source grandit est même si rapide qu'il n'est pas nécessaire de couvrir la pupille entière pour obtenir un gain notable . Par exemple , pour une modeste image contenant 10^6 degrés de liberté , il suffit que l'image de la source couvre un centième de l'aire de la pupille pour que le gain en rapport signal sur bruit atteigne 100 . Cette observation éclaire les raisons du succès de nombreux dispositifs expérimentaux destinés à réduire le bruit en traitement cohérent , et qui consistent à agrandir légèrement la source , quitte à tricher avec la cohérence . Le contraste de phase en éclairage "incohérent" (en fait , partiellement cohérent) en est un exemple.

Dans ce cas , le filtre des fréquences spatiales déphasant est agrandi de façon à épouser la forme de l'image de la source . Le formalisme du filtrage des fréquences spatiales par double diffraction ne s'applique plus en toute rigueur , mais le but de la technique du contraste de phase est toujours atteint : les objets de phase sont visualisés . Dans d'autres cas de traitements cohérents , la structure du filtre des fréquences spatiales , trop fine , ne permet pas d'utiliser une source étendue , et le traitement désiré exige que le point source soit conjugué du centre du filtre des fréquences spatiales ; il est cependant possible de diminuer le bruit pupillaire en simulant un agrandissement de l'image de la source dans la pupille : cela peut se faire en faisant vibrer ou tourner simultanément différents composants du montage au cours de l'observation de l'image traitée {76 à 79} .

APPENDICE

Calcul du rapport signal sur bruit pupillaire
en utilisant les moyennes spatiales sur l'image

Nous reprenons ici le calcul du paragraphe III de l'annexe III , mais en évitant l'hypothèse des faibles modulations de l'objet . L'Equation (17) du présent chapitre n'est donc plus valable ; nous gardons toutes les autres hypothèses . Pour éviter la non-stationnarité du rapport signal sur bruit , nous définissons ici le rapport signal sur bruit à partir des moyennes spatiales sur l'image , notées par une barre , de l'éclairement moyen statistique et de son écart quadratique moyen :

$$\rho' = \frac{\overline{\langle I(\vec{r}) \rangle}}{\left(\overline{\sigma_I^2(\vec{r})} \right)^{1/2}} \quad (27)$$

introduisons la notation :

$$\overline{\langle \hat{p}(\vec{\Omega}) \rangle} = K \hat{P}(\vec{\Omega}) \quad (28)$$

où K est un facteur d'atténuation et \hat{P} la pupille sans bruit .

Utilisons les expressions (2) et (3) , les hypothèses des basses fréquences spatiales et celle du faible bruit pupillaire :

$$\overline{\langle I(\vec{r}) \rangle} = \frac{1}{S_0} \int \langle I(\vec{r}) \rangle d\vec{r} = \frac{K}{S_0} \int \tau(\vec{r})^2 d\vec{r} \int \hat{v}(\vec{\Omega}) \hat{P}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} \quad (29)$$

S_0 désigne ici l'aire du support de l'objet , en dehors de laquelle $\tau(\vec{r})$ est nul . Les intégrales sont étendues à tout le plan objet ou pupille .

Pour le calcul de $\overline{\sigma_I^2}$, nous reprenons les expressions (5) à (7) de l'annexe III , en tenant compte de l'hypothèse du bruit faible ; posons

$$\begin{aligned} a(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int \tau(\vec{r}_1) p(\vec{r}_1 - \vec{r}) \exp(-2i\pi \vec{\Omega} \cdot \vec{r}_1) d\vec{r}_1 \\ &= \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle + g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (30)$$

$\sigma_I^2(\vec{r})$ s'écrit :

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\vec{r}) &= \iint \tilde{s}(\vec{\Omega}_1) \tilde{s}(\vec{\Omega}_2) 2 \operatorname{Re} [\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle \langle a^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \\ &\quad + \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle] d\vec{\Omega}_1 d\vec{\Omega}_2 \end{aligned} \quad (31)$$

et le terme de bruit g dans l'amplitude image s'exprime en fonction de la variable aléatoire décrivant le bruit pupillaire, \tilde{n} (Equation 16) :

$$g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int \tau(\vec{r}_1) n(\vec{r}_1 - \vec{r}) \exp(-2i\pi \vec{r}_1 \cdot \vec{\Omega}) d\vec{r}_1 \quad (32)$$

Les moments d'ordre 2 de g qui apparaissent dans l'Equation (31) font intervenir les quantités suivantes :

$$\langle n(\vec{r}_1) n^*(\vec{r}_2) \rangle = \phi(-\vec{r}_2) P(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \quad (33)$$

$$\text{et } \langle n(\vec{r}_1) n(\vec{r}_2) \rangle = \psi(\vec{r}_2) P(\vec{r}_1 + \vec{r}_2)$$

où ϕ et ψ sont les transformées de Fourier des deux moments d'ordre 2 de l'amplitude de bruit au niveau de la pupille, stationnaire par hypothèse :

$$\begin{aligned} \phi(\vec{\Omega}) &= \langle \tilde{N}(\vec{\Omega}_1) \tilde{N}^*(\vec{\Omega} + \vec{\Omega}_1) \rangle \\ \psi(\vec{\Omega}) &= \langle \tilde{N}(\vec{\Omega}_1) \tilde{N}(\vec{\Omega} + \vec{\Omega}_1) \rangle \end{aligned} \quad (34)$$

L'hypothèse c affirme que ces dernières fonctions sont étroites devant la tache de diffraction par l'objet au niveau de la pupille, si bien que ϕ et ψ sont des constantes sur le domaine utile de l'image.

Avec ces notations, le calcul de σ_I^2 conduit, en supposant la pupille symétrique par rapport aux axes x et y , à l'expression :

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\vec{r}) &= 2 K^2 \tau^2(\vec{r}) \iint \tilde{s}(\vec{\Omega}_1) \tilde{s}(\vec{\Omega}_2) \tilde{\Psi}(\vec{\Omega}_1) \tilde{\Psi}(\vec{\Omega}_2) \\ &\quad \operatorname{Re} \left[\int (\phi \tau(\vec{r}_1)^2 + \psi^* \tau(\vec{r}_1) \tau(-\vec{r}_1)) \exp(2i\pi(\vec{\Omega}_1 - \vec{\Omega}_2) \cdot (\vec{r}_1 - \vec{r})) d\vec{r}_1 \right] \end{aligned} \quad (35)$$

Dans le cas cohérent, la luminance de la source est :

$$\tilde{s}(\vec{\Omega}) = L\delta(\vec{\Omega}) \quad (36)$$

d'où :

$$\sigma_I^2(\vec{r}) = 2 K^2 \tau^2(\vec{r}) L^2 (\phi \int \tau^2(\vec{r}_1) d\vec{r}_1 + \operatorname{Re} \psi \int \tau(\vec{r}_1) \tau(-\vec{r}_1) d\vec{r}_1)$$

et le rapport signal sur bruit s'écrit :

$$\rho_{\text{coh}} = \frac{1}{\sqrt{2} S_0 (\phi + \alpha_1 \operatorname{Re} \psi)^{1/2}} \quad (37)$$

où l'on a posé :

$$\alpha_1 = \frac{\int \tau(\vec{r}_1) \tau(-\vec{r}_1) d\vec{r}_1}{\int \tau^2(\vec{r}_1) d\vec{r}_1} \quad (38)$$

α_1 est inférieur ou égal à l'unité.

Dans le cas incohérent ou partiellement cohérent , l'Equation (35) peut être exploitée dès que la taille de la source , exprimée en fréquences spatiales , est large devant le spectre de l'objet (qui , par hypothèse , ne contient que des basses fréquences spatiales) . Posons :

$$\begin{aligned} \tilde{Z}(\vec{\Omega}) &= \int \tau^2(\vec{r}) \exp -2i\vec{\Omega} \cdot \vec{r} \, d\vec{r} \\ \text{et } \tilde{Y}(\vec{\Omega}) &= \int \tau(\vec{r}) \tau(-\vec{r}) \exp -2i\vec{\Omega} \cdot \vec{r} \, d\vec{r} \end{aligned} \quad (39)$$

$\tilde{Z}(\vec{\Omega})$ et $\tilde{Y}(\vec{\Omega})$ sont étroits devant les fonctions source $\tilde{s}(\vec{\Omega})$ et pupille $\tilde{P}(\vec{\Omega})$. L'intégration par rapport à la variable $\vec{\Omega}_1$ dans l'Equation (35) donne alors :

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\vec{r}) &= 2 K^2 \tau^2(\vec{r}) \int \tilde{s}(\vec{\Omega}_2) \tilde{P}(\vec{\Omega}_2) \, d\vec{\Omega}_2 \\ &\quad \text{Re} [\phi Z(\vec{r}) + \psi^* Y(\vec{r})] \end{aligned} \quad (40)$$

La moyenne par rapport à la variable \vec{r} permet de simplifier cette expression pour arriver à :

$$\rho_{inc}^! = \frac{\overline{\tau^2}}{\tau^4}^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2}(\phi + \alpha_3 \text{Re} \psi)^{1/2}} \sqrt{\frac{S'_s}{\lambda^2 d^2}} \quad (41)$$

où S'_s est l'aire de la portion de pupille couverte par l'image de la source , $\overline{\tau^n}$ est la moyenne spatiale :

$$\begin{aligned} \overline{\tau^n} &= \frac{1}{S_o} \int \tau^n(\vec{r}) \, d\vec{r} \\ \text{et} \quad \alpha_3 &= \frac{\int \tau^3(\vec{r}) \tau(-\vec{r}) \, d\vec{r}}{\int \tau^4(\vec{r}) \, d\vec{r}} \end{aligned} \quad (42)$$

α_3 est un nombre de l'ordre de grandeur de l'unité , comme α_1 .

Le gain $\rho_{inc}^! / \rho_{coh}^!$ s'exprime :

$$\frac{\rho_{inc}^!}{\rho_{coh}^!} = C \left(\frac{S_o S'_s}{\lambda^2 d^2} \right)^{1/2} \quad (43)$$

avec

$$C = \frac{\overline{\tau^2}}{\tau^4}^{1/2} \left(\frac{\phi + \alpha_1 \text{Re} \psi}{\phi + \alpha_3 \text{Re} \psi} \right)^{1/2} \quad (44)$$

On retrouve bien le résultat de la théorie élémentaire et de l'annexe III , avec une valeur de C différente mais toujours voisine de 1 . Le passage par les valeurs moyennes spatiales nous a donc permis de généraliser le résultat obtenu pour les objets de faible contraste à tous les objets . Bien entendu , pour un objet contrasté , le bruit pupillaire a certainement plus d'importance dans l'image des parties sombres de l'objet que dans l'image des parties claires , mais le résultat essentiel demeure pour la moyenne spatiale de l'image : *le bruit pupillaire est moins sensible en éclairage incohérent qu'en éclairage cohérent dans un rapport voisin de la racine du nombre de degrés de liberté contenus dans l'image .*

CHAPITRE III - BRUIT OBJECTIF

Dans ce chapitre , comme dans le précédent , nous commencerons par une explication simple des phénomènes étudiés . Il s'agit ici de l'influence de la cohérence sur le bruit venant de l'objet . L'étude complète de ce bruit objectif est faite dans les annexes II et III . Nous la résumerons ici , sous ses deux aspects : présentation d'une théorie de l'effet Callier et étude statistique des fluctuations de l'éclairement de l'image . L'effet Callier a une influence intéressante sur le contraste de l'image des transparents photographiques . Un paragraphe sera consacré à l'étude très simple de l'influence de la cohérence sur l'image d'une petite poussière dans l'objet . Nous concluerons en soulignant les conséquences pratiques de l'étude .

I - THEORIE ELEMENTAIRE

Nous appelons bruit objectif les variations d'éclairement de l'image causées par des défauts situés dans le plan objet ou dans son voisinage immédiat . Ces défauts peuvent être notamment des poussières sur l'objet , des piqûres de l'objet qui le rendent localement transparent , de la granularité photographique si l'objet est une photographie , des défauts d'indice ou de surface du support de l'objet . Comme dans le cas du bruit pupillaire , un raisonnement très simple suffira pour mettre en relief les propriétés essentielles du bruit objectif .

La figure 9 remplace maintenant la figure 3 placée au début du chapitre précédent . Nous retrouvons les deux points sources S_1 et S_2 que nous avons utilisés pour le calcul du rapport signal sur bruit pupillaire . Par contre , les défauts ne sont plus situés aux points S'_1 et S'_2 , images de S_1 et S_2 à travers le condenseur . Ils se trouvent dans le plan objet , éclairé par S_1 et S_2 sous deux angles différents . Chaque défaut du plan objet a son image dans le plan Π , et la position de cette image ne dépend évidemment pas du point source qui éclaire l'objet .

Les éclairagements de l'image dus à S_1 et S_2 , $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ sont , comme précédemment , des réalisations de processus aléatoires dont les propriétés statistiques dépendent de celles des défauts . Mais , contrairement au cas du bruit pupillaire , il n'y a sûrement pas indépendance ni même décorrélation statistique entre

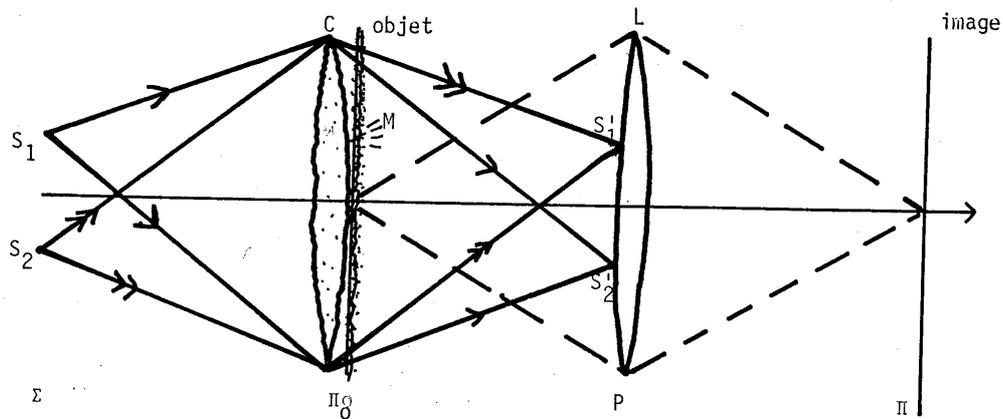


Figure 9. Bruit objectif : cas de deux points sources.

$I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ parce que les défauts qui contribuent à $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ sont les mêmes : ce sont ceux dont l'image géométrique est très proche du point \vec{r} .

Les images $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$ ne sont pas rigoureusement identiques, mais leur différence est faible et provient uniquement de la différence d'inclinaison entre les deux ondes émises par S_1 et S_2 : autour des points S'_1 et S'_2 se forment deux spectres de Fourier de l'objet avec ses défauts ; ces deux spectres sont identiques à la position près. En raison de leur décalage, le filtrage effectué sur eux par la pupille n'est pas le même et c'est de là que provient la seule différence entre les éclairagements $I_1(\vec{r})$ et $I_2(\vec{r})$. On voit qu'il s'agit d'une différence liée au processus de formation des images, et non à des raisons statistiques comme pour le bruit pupillaire.

Il n'y a donc pas de gain statistique à utiliser l'éclairage spatialement incohérent plutôt que l'éclairage cohérent en ce qui concerne le bruit objectif. Simplement, en agrandissant la source, on passe du processus de formation des images en éclairage cohérent, avec filtrage des amplitudes complexes, au processus incohérent, avec filtrage des intensités. Dans les deux cas, les variations du module de la transmittance de l'objet donnent lieu à des variations d'éclairagement dans l'image, et le rapport signal sur bruit pour des défauts "d'amplitude" de l'objet dépend peu de la cohérence. Par contre, les variations de phase donnent des effets visibles en éclairage cohérent, alors qu'ils n'ont aucun effet en éclairage incohérent. Il y a donc un gain infini en rapport signal sur bruit pour les défauts de phase.

Passons maintenant à l'étude plus précise du bruit objectif . Comme pour le bruit pupillaire , nous ne reprendrons pas le détail des calculs des annexes II et III , mais insisterons seulement sur les hypothèses et sur les résultats . Nous distinguerons deux calculs : celui de l'espérance mathématique de l'éclairement $\langle I(\vec{r}) \rangle$ et celui du rapport signal sur bruit . Dans le paragraphe précédent , le premier de ces calculs n'était pas d'un grand intérêt parce que nous pouvions supposer le bruit faible ; mais ici , surtout s'il s'agit de bruit photographique , le bruit peut ne pas être faible et donc affecter fortement l'espérance mathématique $\langle I(\vec{r}) \rangle$.

II - ETUDE COMPLETE DE L'ESPERANCE MATHEMATIQUE DE L'ECLAIREMENT , EFFET CALLIER

2.1) Rappel historique sur l'effet Callier

Nous avons déjà défini la transmittance en intensité d'une photographie :

$$T(x,y) = \frac{\text{éclairement mesuré en présence de l'émulsion}}{\text{éclairement mesuré en l'absence d'émulsion}} \quad (45)$$

La densité est le cologarithme à base 10 de cette quantité . D'après ce qui précède , il est clair que la densité mesurée dépend des conditions de mesure , et en particulier des tailles angulaires de la source de la pupille . En introduisant en 1890 transmittance et densité , HURTER et DRIFFIELD {4} pensaient surtout à l'étude des réactions photochimiques ; la relation :

$$D = \text{colog}_{10} T \quad (46)$$

n'était pas présentée comme la définition de la densité , mais comme une relation approchée entre la transmittance définie par l'Equation (45) et la densité définie comme "le nombre de particules d'une substance par unité d'aire , multipliée par le coefficient d'absorption" . La relation (46) avait pour eux l'avantage de remplacer une longue série de manipulations chimiques aboutissant à la pesée de l'argent contenu dans une plaque développée , par une mesure photométrique plus commode . Aussi avaient-ils construit avec grand soin le "grease spot photometer" qu'ils utilisaient pour mesurer la transmittance . Mais ils n'avaient pas nettement conscience de l'importance de la lumière diffusée dans cette mesure et les ouvertures de la source et du récepteur étaient variables d'une mesure à l'autre ! ABNEY avait construit avec un soin analogue un densitomètre à secteurs tournants qui fonctionnait dans des conditions d'éclairage fort différentes et fournissait des résultats différents : aussi eut-il droit à des remarques peu aimables de la part de HURTER et DRIFFIELD {4} . Il répondit en dénigrant le "grease-spot photometer" et la controverse s'envenima , chacun accusant le densitomètre de l'autre de mener à des erreurs relatives supérieures à 100% (voir les références de l'annexe II) ; nos trois auteurs en vinrent à perdre leur sang-froid , truffant leurs articles d'insinuations désobligeantes ou recommandant à leur adversaire de relire ses cours d'algèbre élémentaire , sans toutefois oublier de terminer chaque article par

l'expression de leur admiration sans bornes pour l'habileté d'expérimentateur et l'intelligence de ce même adversaire . L'éditeur du très digne Journal of the Society of Chemical Industry dut publier une note dans laquelle il annonçait qu'il n'accepterait plus les publications alimentant des controverses . La dispute s'acheva en avril 1891 , après que ABNEY eut fait quelques mesures à l'aide de l'appareil de HURTER et DRIFFIELD , et réciproquement , mais la raison de l'écart qui restait entre les mesures fournies par les deux appareils n'apparaissait pas clairement . HURTER et DRIFFIELD avaient pris conscience du fait qu' "aucun nombre ne peut en aucun cas représenter la vraie densité" , mais sous-estimaient l'importance de la lumière diffusée , alors qu'ABNEY avait conscience du rôle de cette dernière mais prétendait pouvoir définir une densité absolue , indépendante de l'appareil de mesure .

Ce n'est qu'en 1909 que CALLIER clarifia la situation , proposa la distinction entre densité spéculaire et densité diffuse et établit expérimentalement leur proportionnalité approchée . Dès lors , les études sur l'effet CALLIER se multiplièrent (voir références de l'annexe II) . Le seul calcul théorique sur le sujet semble cependant être celui de VERNIER en 1958 [81] . Notre calcul reprend et généralise ce dernier , en évitant toutefois l'hypothèse d'une transmittance en amplitude binaire : cette supposition conduit à certaines conséquences inexactes , par exemple que la densité diffuse est exactement le double de la densité spéculaire .

2.2) Hypothèses

L'éclairement $I(\vec{r})$ de l'image est toujours donné par les relations (2) et (3) . Dans le cas du bruit pupillaire , la transmittance de la pupille , $\tilde{p}(\vec{\Omega})$, était une fonction aléatoire . Ici , c'est au contraire la transmittance de l'objet $\tau(\vec{r})$, qui est aléatoire ; nous écrivons :

$$\tau(\vec{r}) = \langle \tau(\vec{r}) \rangle + X(\vec{r}) \quad (47)$$

$$\text{et } \langle \tau(\vec{r}_1) \tau^*(\vec{r}_2) \rangle = \langle \tau(\vec{r}_1) \rangle \langle \tau(\vec{r}_2) \rangle + \phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) . \quad (48)$$

Les seules hypothèses nécessaires au calcul de l'espérance mathématique $\langle I(\vec{r}) \rangle$ de l'éclairement image , de la transmittance en intensité et de la densité , sont les suivantes :

- a) existence de la transmittance en amplitude $\tau(\vec{r})$; cette question a déjà été soulevée au chapitre I de la partie I ;
- b) hypothèse des faibles modulations : l'espérance mathématique $\langle \tau(\vec{r}) \rangle$ s'écrit :

$$\langle \tau(\vec{r}) \rangle = \tau_0 + m(\vec{r}) \quad (49)$$
 où $m(\vec{r})$ est une modulation non aléatoire de faible contraste ;
- c) dans le cas où la modulation $m(\vec{r})$ est nulle , $\tau(\vec{r})$ est une fonction aléatoire stationnaire au second ordre au sens de la corrélation . Ainsi , $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ est en fait fonction de la seule variable $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$.

d) dans le cas où la modulation n'est pas nulle , une nouvelle hypothèse est nécessaire , que nous avons omis de signaler dans l'annexe II :

la fonction d'autocorrélation $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ peut n'être en fait fonction que de $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ si la photographie a été uniformément éclairée , mais elle dépend de \vec{r}_1 et \vec{r}_2 si l'objet est modulé , même faiblement . Pour une modulation variant lentement à l'échelle de l'aire de corrélation du grain , il est plausible d'écrire $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$ sous la forme :

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_\alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau_0 + m(\vec{r}_1)) \quad (50)$$

et pour les faibles modulations , un développement limité donne :

$$\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \phi_\alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau_0) + m(\vec{r}_1) \phi_\alpha(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \tau_0) \quad (51)$$

Nous aurons besoin , pour l'étude du contraste , de l'hypothèse que ϕ_α est très faible . Cette hypothèse , nécessaire pour arriver à l'Equation (54) ci-dessous , peut paraître arbitraire . Un fait d'expérience permet cependant de l'étayer : $\phi(\vec{r}_1, \vec{r}_1)$ n'est autre que la variance de la transmittance en amplitude ; or , aux densités moyennes , l'expérience montre [82] que cette variance est stationnaire : notre hypothèse semble donc acceptable si le fond continu τ_0 n'est ni proche de zéro , ni proche de l'unité .

2.3) Résultats

2.3.1) Densité et effet Callier

Les calculs de l'annexe II mettent en évidence les différentes propriétés de l'effet Callier trouvées empiriquement par les expérimentateurs . On constate ainsi que la densité D dépend des fonctions $\tilde{s}(\vec{\Omega})$, luminance de la source , $\tilde{p}(\vec{\Omega})$, transmittance en amplitude de la pupille , et $\tilde{\phi}(\vec{\Omega})$, spectre de Wiener de l'émulsion et transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation $\phi(\vec{r})$ de la transmittance en amplitude (et non en intensité) de l'émulsion .

Les fonctions \tilde{s} et $|\tilde{p}|^2$ jouent des rôles symétriques . En particulier , si la source et la pupille sont circulaires , uniformes et centrées , de rayons Ω_s et Ω_p , la densité est une fonction symétrique de Ω_s et Ω_p . La discontinuité au bord de la source et de la pupille (fonctions \tilde{s} et \tilde{p}) explique que la densité présente une ligne de crête pour $\Omega_s = \Omega_p$.

L'expérience montre que , pour presque toutes les émulsions , le spectre de Wiener $\tilde{\phi}$ est à symétrie de révolution et est une fonction décroissante de $|\vec{\Omega}|$. A partir de cette constatation , on montre que la densité est une fonction de Ω_p croissante pour $\Omega_p < \Omega_s$, puis décroissante pour $\Omega_p > \Omega_s$ (et réciproquement); la pente de $D(\Omega_p, \Omega_s)$ en fonction de Ω_p au voisinage du point anguleux $\Omega_p = \Omega_s$ est plus grande en valeur absolue à droite ($\Omega_p = \Omega_{s+}$) qu'à gauche . Enfin , la densité $D(\Omega_0, \Omega_0)$ pour $\Omega_p = \Omega_s = \Omega_0$ est une fonction décroissante .

Tous ces résultats sont résumés sur la figure 11 qui est une simulation sur ordinateur de la surface d'effet Callier $D(\Omega_s, \Omega_p)$ pour une émulsion ayant pour spectre de Wiener :

$$\tilde{\phi}(\vec{\Omega}) = A \exp(-\Omega^2/W^2) \quad (52)$$

où A et W sont des constantes .

La figure 12 présente les résultats expérimentaux obtenus par VERNIER [81] : on constate que les deux surfaces $D(\Omega_s, \Omega_p)$ des figures 9 et 10 ont bien toutes deux les propriétés que nous venons de décrire . Les résultats expérimentaux publiés par différents auteurs montrent que la variation de densité $D(0,0) - D(\infty, \infty)$ peut , aux fortes densités , dépasser l'unité .

L'analyse détaillée des courbes d'effet Callier est une façon d'obtenir des renseignements sur le spectre de Wiener $\tilde{\phi}(\vec{\Omega})$.

2.3.2) Interprétation simple de l'allure des surfaces d'effet Callier

Le calcul complet est nécessaire pour trouver les surfaces $D(\Omega_s, \Omega_p)$, mais leur allure est aisément compréhensible à l'aide de quelques arguments physiques simples . La figure 13 nous aidera à les exprimer . Une émulsion uniformément exposée est placée dans le plan objet . La source et la pupille sont uniformes , circulaires , centrées , de rayons Ω_s et Ω_p variables . Il est nécessaire de garder l'expression de la densité présente à l'esprit :

$$D = - \log_{10} \frac{E_{\text{avec}}}{E_{\text{sans}}} \quad (53)$$

avec E_{avec} = éclairement image en présence de l'émulsion,

et E_{sans} = éclairement image en l'absence de l'émulsion .

L'effet Callier n'est autre que l'influence sur la densité mesurée de la lumière diffusée par la granularité de l'émulsion .

Sur les figures 13-a) et 13-b) , la source est ponctuelle , la pupille est d'ouverture croissante . L'éclairement image E_{sans} , en l'absence d'émulsion donc de diffusion , est constant , alors que E_{avec} croît avec la pupille , car la quantité de la lumière diffusée recueillie augmente . La densité est donc décroissante .

Sur les figures 13-c) et 13-d) , la pupille est ponctuelle , la source est de taille croissante . L'éclairement E_{sans} est constant , car tout point S_1 hors de l'axe , a son image S'_1 en dehors de la pupille ; l'éclairement E_{avec} croît avec la source , car une partie du spectre de Wiener correspondant au point S_1 et centré en S'_1 , traverse la pupille . La densité est donc décroissante .

Sur la figure 13-e) , la pupille est d'ouverture non nulle et constante , la source est de taille croissante depuis le point S_0 sur l'axe . Le point S_1 a son image S'_1 sur le bord de la pupille . La figure 13-f) représente , en coupe , les spectres de Wiener centrés en S'_0 , S'_1 et S'_2 et la pupille . Lorsque le rayon de

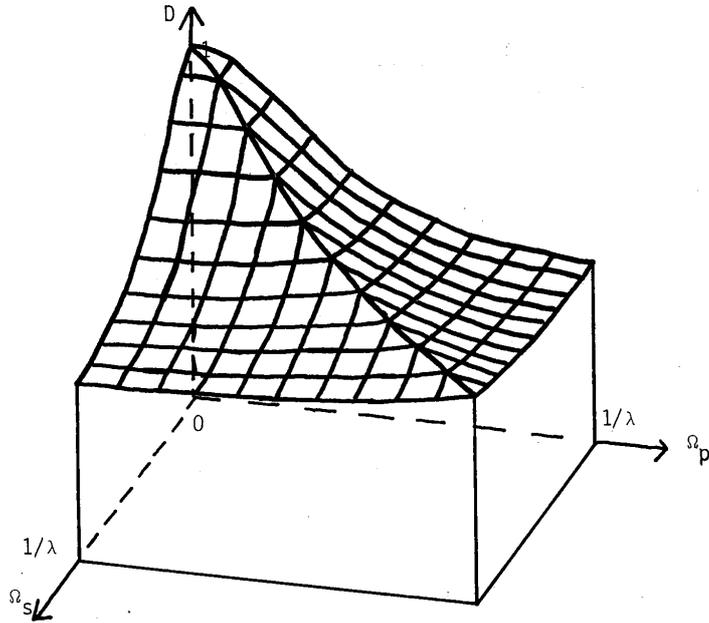


Figure 11. Un exemple de surface d'effet Callier. $W = 1000 \text{ mm}^{-1}$, $A = 2,16 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^{-2}$.

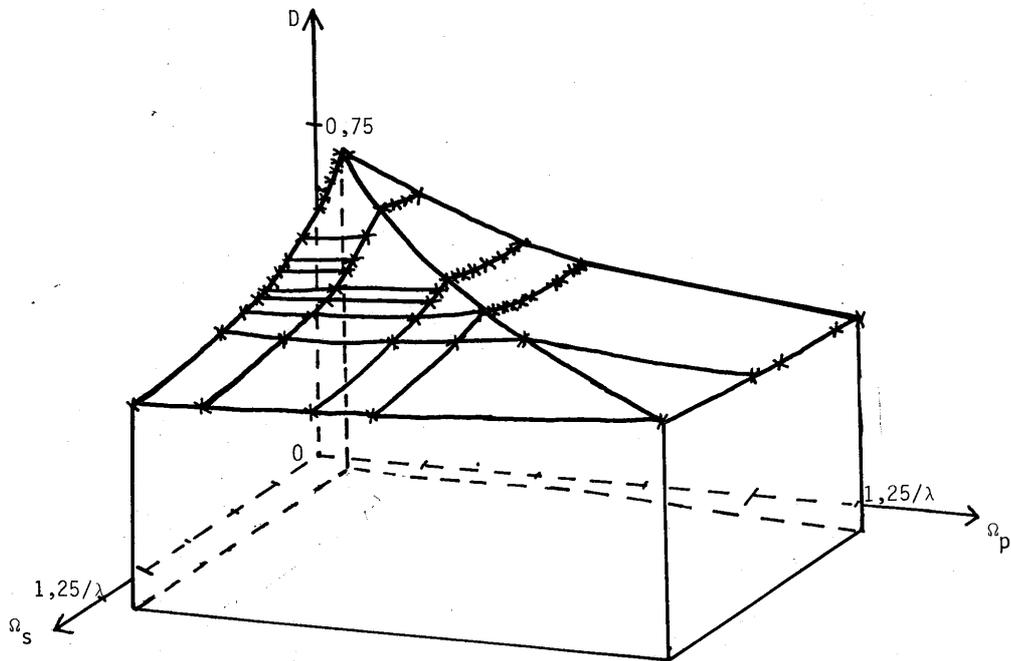


Figure 12. Effet Callier : résultats expérimentaux obtenus par Vernier (60) sur plaque Kodak "Maximum Resolution" uniformément exposée.

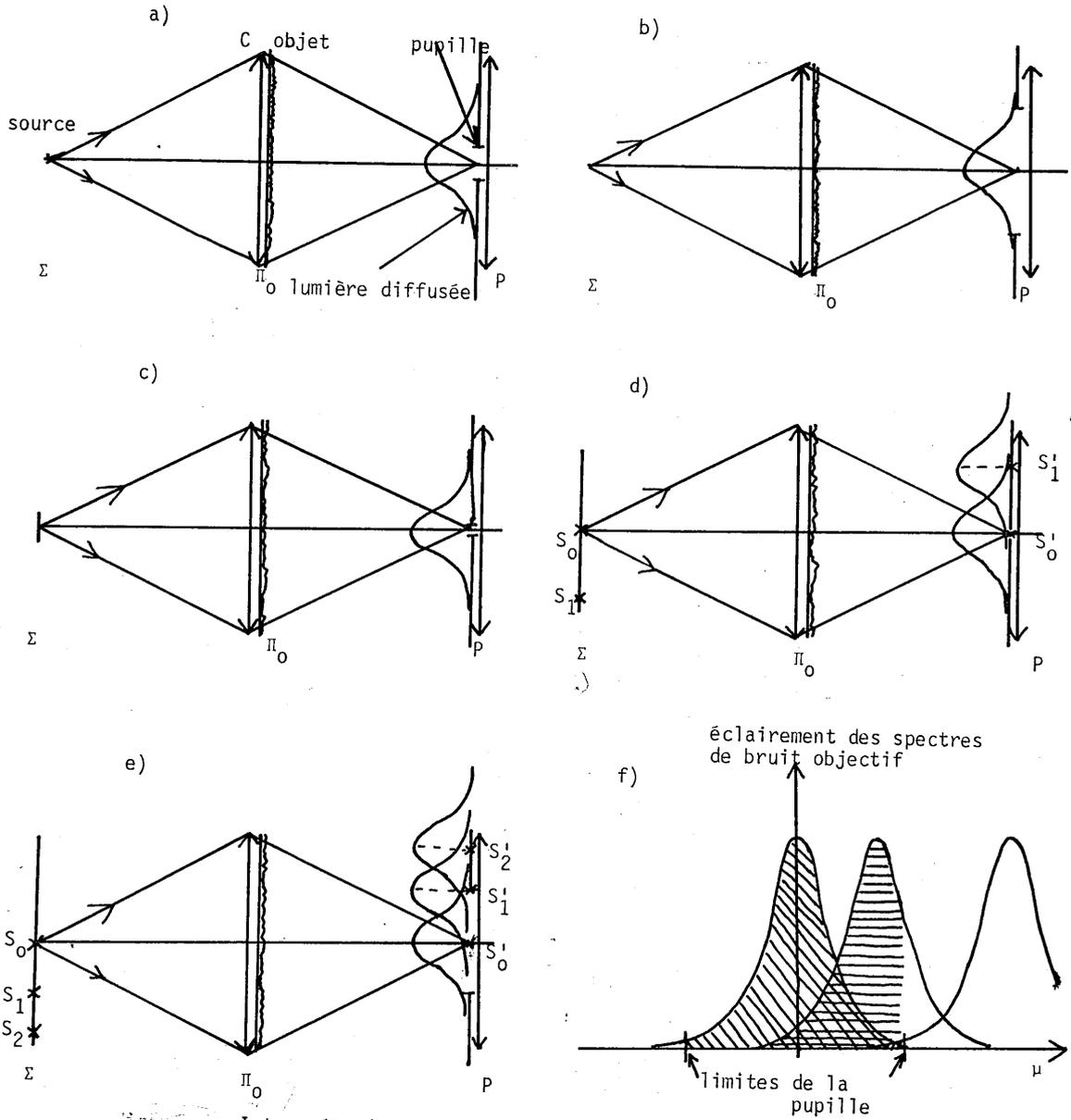


Figure 13. Interprétation physique de l'allure des courbes d'effet Callier. (Le plan image n'a pas été représenté).

la source croît de zéro à $S_0 S_1$, E_{sans} augmente proportionnellement à l'aire de la source. E_{avec} est constitué de deux parties : la partie non diffusée, qui croît proportionnellement à l'aire de la source, et la partie diffusée. Cette dernière correspond pour chaque point source à la portion du spectre de Wiener qui traverse la pupille (parties hachurées sur la figure 12-f). Cette portion est d'autant plus faible que le point source s'éloigne plus de l'axe, en raison du caractère décroissant du spectre $\hat{\phi}$: la partie diffusée de E_{avec} croît donc moins vite que l'aire de la source, et E_{avec} également : la densité est croissante. Mais lorsque le rayon de la source dépasse $S_0 S_1$, E_{sans} ne varie plus, alors que E_{avec} augmente encore grâce à la lumière diffusée correspondant aux spectres centrés sur des points tels que S_2' : la densité diminue.

Un raisonnement semblable permet de trouver le comportement de $D(\Omega_s, \Omega_p)$ à Ω_s constant en fonction de Ω_p et le comportement de $D(\Omega_s, \Omega_p)$ pour $\Omega_s = \Omega_p = \Omega_0$ en fonction de Ω_0 .

2.3.3) Contraste et effet Callier

Nous avons utilisé l'hypothèse des faibles modulations pour assurer la stationnarité de la fonction aléatoire qui décrit la granularité (Equation 49). Si nous supposons de plus que la modulation $m(\vec{r})$ ne contient que des basses fréquences spatiales, l'image de cette modulation ne varie guère avec l'ouverture de la source et de la pupille, alors que l'influence de la lumière diffusée fait varier l'éclairement moyen du plan image : il en résulte une variation de contraste par effet Callier en fonction des ouvertures de la source et de la pupille. Les Equations (2) et (3) permettent d'écrire le contraste C en fonction de l'espérance mathématique de la transmittance en intensité sous la forme :

$$C = \frac{\text{partie modulée de l'éclairement}}{\text{éclairement en l'absence de modulation}} = \frac{2 \operatorname{Re}[\tau_0 m(\vec{r})]}{\langle T \rangle} \quad (54)$$

τ_0 ne dépendant pas de l'éclairage ni de la pupille, on voit que le contraste, comme la densité, varie en sens inverse de la transmittance en intensité. La figure 14 montre l'allure de la surface de contraste correspondant à la surface de densité de la figure 9.

L'échelle des ordonnées est arbitraire, mais rappelons un ordre de grandeur : la variation de densité $D(0,0) - D(\infty, \infty)$ peut, aux fortes densités, dépasser l'unité, le rapport de contraste correspondant peut donc dépasser dix. Le phénomène est donc loin d'être négligeable.

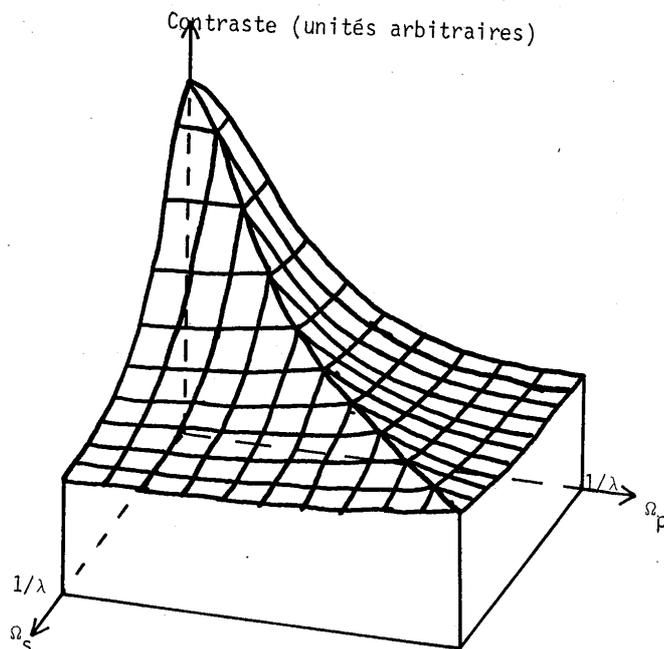


Figure 14. Un exemple de surface de contraste. $W = 1000 \text{ mm}^{-1}$, $A = 2,16 \cdot 10^{-7} \text{ mm}^{-1}$.

III - ETUDE COMPLETE DES FLUCTUATIONS DE L'ECLAIREMENT

3.1) Hypothèses

L'effet Callier concerne l'espérance mathématique de l'éclairement, mais il est bon d'étudier aussi les fluctuations statistiques correspondantes. Elles permettent de trouver le rapport signal sur bruit et son comportement en fonction de la cohérence. Résumons ici le paragraphe correspondant de l'annexe III. Les hypothèses utilisées pour le calcul sont les suivantes :

- a) Comme dans l'étude de l'effet Callier, la transmittance en amplitude de l'objet s'écrit :

$$\tau(\vec{r}) = \tau_0 + m(\vec{r}) + X(\vec{r}) \quad (55)$$

L'espérance mathématique est $\tau_0 + m(\vec{r})$, la modulation $m(\vec{r})$ est faible par rapport à τ_0 et de faibles fréquences spatiales. $X(\vec{r})$ est stationnaire au second ordre au sens de la corrélation ..

- b) La fonction d'autocorrélation $\phi(\vec{r})$ de $X(\vec{r})$ est étroite devant la réponse percussive de la lentille L, $p(\vec{r})$. Cette hypothèse revient à supposer le spectre de Wiener de l'émulsion très large par rapport à la pupille ; elle n'a rien d'indispensable, mais permet de simplifier des calculs assez longs.

De même , $\psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \langle X(\vec{r}_1)X(\vec{r}_2) \rangle$ est supposé étroit devant $p(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

- c) Enfin , comme dans l'étude du bruit pupillaire , nous supposons que la cause du bruit est décrite par une fonction aléatoire gaussienne , ici $X(\vec{r})$. Rappelons que cette hypothèse n'est en général absolument pas légitime , mais que nous nous proposons d'étudier son influence au chapitre IV : nous constaterons qu'elle permet d'obtenir dans le cas cohérent une approximation très correcte du rapport signal sur bruit , et dans le cas incohérent , soit un ordre de grandeur acceptable , soit une estimation pessimiste . Autrement dit , le rapport signal sur bruit incohérent ne saurait être inférieur à la valeur calculée avec l'hypothèse gaussienne que dans des cas de statistiques très particulières et dont nous ne connaissons pas d'exemple physique plausible .

3.2) Résultats

Les résultats du calcul confirment la théorie élémentaire exposée plus haut : ils montrent que , sauf si l'objet est un film à grain très fort , le gain en rapport signal sur bruit $\rho_{\text{incohérent}}/\rho_{\text{cohérent}}$ est très voisin de 1 . L'étude de la cohérence partielle ne fait apparaître qu'un résultat clair : le rapport signal sur bruit incohérent n'est atteint que lorsque le rayon de la source dépasse celui de la pupille d'au moins la largeur du spectre de Wiener de l'émulsion objet .

Commentons brièvement le cas particulier des films très bruiteux . Pour cela , considérons les deux grandeurs :

$$\alpha = \frac{\sigma_x}{\tau_0} = \frac{\text{écart quadratique moyen de la transmittance en amplitude}}{\text{espérance mathématique de cette transmittance}} \quad (56)$$

$$\text{et } N_0 = \frac{\text{aire de la cellule de résolution dans l'image}}{\text{aire de corrélation de } X(\vec{r})} \quad (57)$$

D'après l'hypothèse b) , notre calcul est valable seulement si N_0 est nettement plus grand que 1 . Le cas particulier des films très bruiteux est atteint lorsque non seulement α , mais aussi α/N_0 sont grands devant l'unité . C'est alors que le gain $\rho_{\text{incohérent}}/\rho_{\text{cohérent}}$ peut nettement s'écarter de l'unité . Considérons à ce sujet la figure 15 .

L'éclairement bruiteux du plan image oscille autour d'une espérance mathématique $\langle I \rangle$ composée d'une partie non modulée I_0 qui varie avec la cohérence par effet Callier , et d'une partie modulée I_m indépendante de l'effet Callier .

Selon que l'on s'intéresse uniquement à l'observation de la partie modulée I_m dans le bruit , ou que tout l'éclairement moyen $\langle I \rangle$ a une importance , il conviendra de choisir comme définition du rapport signal sur bruit :

$$\rho = \frac{I_m}{\sigma_I} \quad (58)$$

ou

$$\rho_2 = \frac{\langle I \rangle}{\sigma_I} \quad (59)$$

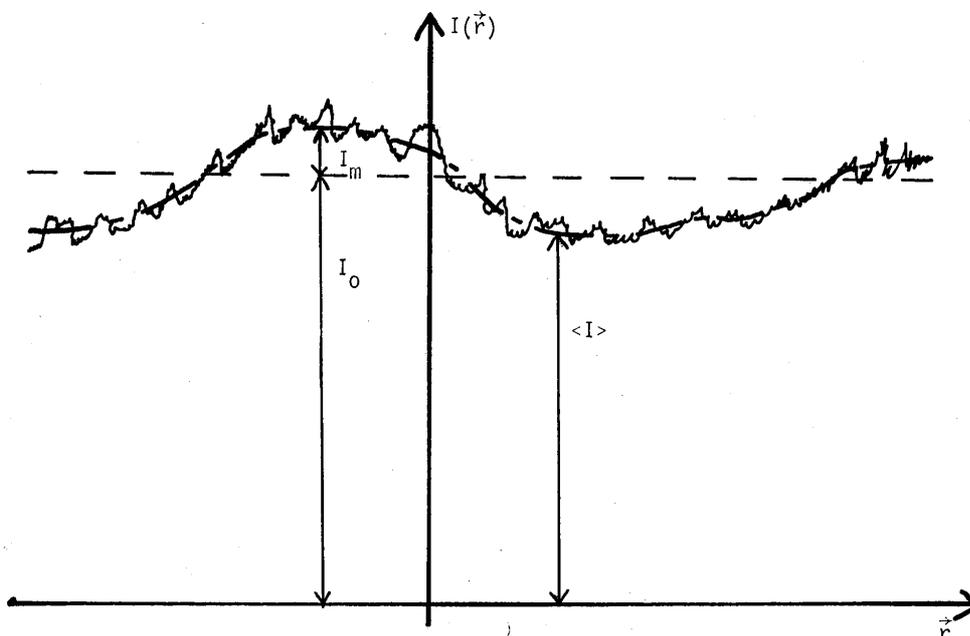


Figure 15: Eclairage du plan image en présence d'une faible modulation et de bruit objectif.

Le calcul montre que pour les films très bruiteux, le gain :

$$G_1 = \frac{\rho_1 \text{ incohérent}}{\rho_1 \text{ cohérent}} \quad (60)$$

correspondant à l'observation des faibles modulations est de l'ordre de $N_o^{-1/2}$, donc favorable à l'éclairage cohérent, alors que le gain :

$$G_2 = \frac{\rho_2 \text{ incohérent}}{\rho_2 \text{ cohérent}} \quad (61)$$

correspondant à l'observation de l'éclairage total est de l'ordre de $N_o^{1/2}$, donc favorable à l'éclairage incohérent.

IV - BRUIT OBJECTIF PERCUSSIONNEL

Achevons notre examen des résultats de l'annexe III : le bruit objectif percussionnel est un cas simple de bruit objectif, dans lequel la cause de bruit est un petit détail isolé placé sur l'objet, et non résolu par la lentille d'imagerie L , d'où le nom "percussionnel". En pratique, il peut s'agir d'un grain de

poussière , ou encore d'une piqure de l'émulsion objet . Pour un tel défaut isolé, l'approche statistique n'est pas adéquate , un calcul déterministe suffit . Nous écrivons la transmittance en amplitude de l'objet sous la forme :

$$\tau(\vec{r}) = \tau_c + X(\vec{r}) \quad (62)$$

où τ_c concerne l'objet sans bruit , pratiquement constant à l'échelle du défaut $X(\vec{r})$. Ce dernier est petit devant la réponse percussionnelle $p(\vec{r})$ du système et situé près du centre de l'objet $\vec{r} = 0$. Nous supposons que τ_c varie lentement à l'échelle de $p(\vec{r})$. Les Equations (2) et (3) prennent alors la forme :

$$\begin{aligned} I(\vec{r}) &= \int \tilde{s}(\vec{\Omega}) \left| \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_0 + X(\vec{r})} p(\vec{r}_0 - \vec{r}) \exp(-2i\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_0) d\vec{r} \right|^2 d\vec{\Omega} \\ &= \int \tilde{s}(\vec{\Omega}) \left| \tau_c \tilde{p}(\vec{\Omega}) \exp(-2i\vec{\Omega} \cdot \vec{r}) + p(-\vec{r}) \tilde{X}(\vec{\Omega}) \right|^2 d\vec{\Omega} \end{aligned} \quad (63)$$

Cette équation met en lumière une propriété intéressante : l'étude de l'influence sur $I(\vec{r})$ de la taille de la source donne des renseignements sur $\tilde{X}(\vec{\Omega})$, bien que le défaut ne soit pas résolu . Mais considérons les cas limites cohérent et incohérent . La comparaison se fait à partir de l'Equation (63) et amène à deux conclusions :

- la forme du défaut dans le plan image est voisine de la réponse percussionnelle incohérente $p(\vec{r})^2$ dans le cas incohérent , voisine de la réponse percussionnelle cohérente $p(\vec{r})$ dans le cas cohérent . Or , les extrema secondaires de $p(\vec{r})$ sont plus accusés que ceux de son carré ; le défaut apparaît donc plus large en éclairage cohérent .
- le contraste du défaut , défini par :

$$c = \frac{\text{éclairage au centre de l'image du défaut}}{\text{éclairage sans défaut}} - 1 \quad (64)$$

n'est pas exactement le même en éclairage cohérent et incohérent . Le rapport $C_{\text{incohérent}}/C_{\text{cohérent}}$ reste cependant voisin de 1 . Il est inférieur à 1 dans le cas d'un défaut percussionnel noir sur fond gris (poussière) , supérieur à 1 dans le cas d'un défaut clair sur fond gris (piqure) . La figure 6 montre l'allure de l'éclairage image dans les deux cas de défauts et les deux états extrêmes de cohérence . N_d représente le rapport de l'aire de la tache de diffraction dans l'image à l'aire du défaut .

V - CONSEQUENCES PRATIQUES

En conclusion de ce chapitre , nous soulignerons deux conséquences des calculs présentés .

Tout d'abord , les fluctuations de bruit objectif ont pratiquement la même importance , quel que soit l'état de cohérence spatiale , ce qui signifie qu'en éclairage cohérent comme en éclairage incohérent , un soin tout particulier doit être apporté à la propreté et à la qualité de l'objet et des éléments optiques qui en sont proches . Cette nécessité est même plus impérieuse probablement en

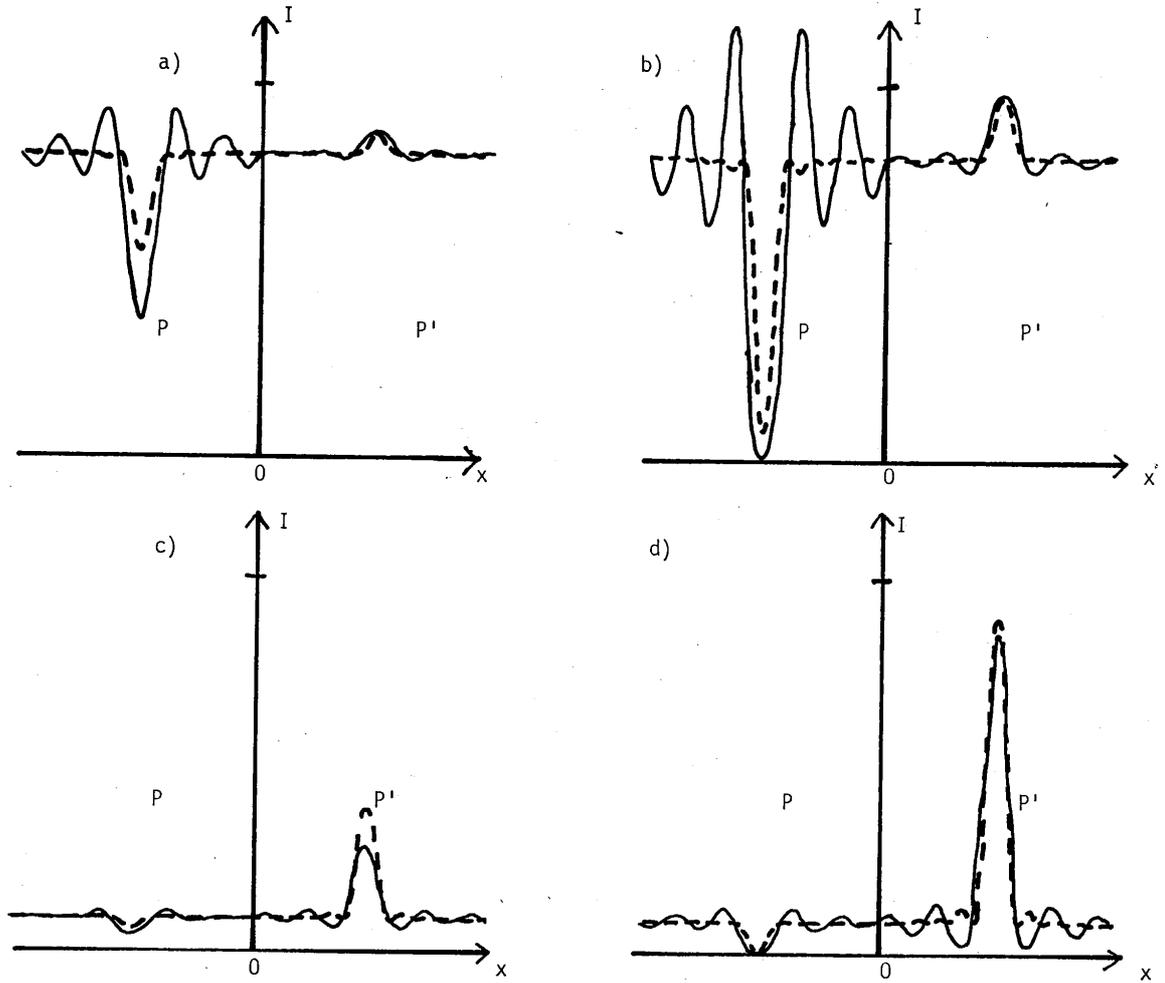


Figure 16. Allure de l'éclairage image $I(x)$ en présence d'un bruit objectif percussionnel. P est une poussière, P' une piqûre. En pointillés, les courbes en éclairage incohérent, en traits pleins, les courbes en éclairage cohérent. N_d vaut 1,1 dans les courbes a et b, 3 dans les courbes c et d. Le fond a pour transmittance en amplitude 0,3 dans les courbes a et c, 0,9 dans les courbes b et d.

éclairage incohérent qu'en éclairage cohérent, puisque l'insensibilité au bruit pupillaire met particulièrement en relief le bruit objectif. Par contre, le bruit de phase est supprimé en éclairage incohérent.

D'autre part, le calcul de l'espérance mathématique de l'éclairement a attiré notre attention sur l'effet CALLIER, connu de longue date et pourtant souvent sous-estimé. Son influence sur le contraste des faibles détails dans l'image doit être prise en compte. L'examen de la figure 12 nous permet de déterminer les conditions conduisant au meilleur contraste : il convient d'abord d'utiliser une source et une pupille de même ouverture angulaire, bien que SWING {82} et KINZLY {83} aient souligné que ces conditions d'éclairage compliquent, en raison de la cohérence partielle, la relation entre flux mesuré dans un micro-densitomètre et image analysée. Ensuite, cette ouverture angulaire commune doit être choisie aussi petite que possible, compte tenu de la résolution souhaitée dans l'image : il convient d'éliminer le mieux possible la lumière diffusée tout en laissant passer toute l'information désirée.

CHAPITRE IV - L'HYPOTHESE GAUSSIENNE ET LE PARADOXE DE L'OBJET DE PHASE

Deux raisonnements apparemment séduisants conduisent à deux résultats incompatibles pour l'image d'un objet de phase en éclairage incohérent . La résolution de ce paradoxe nous amènera à nous interroger sur l'utilisation du théorème central limite pour justifier l'utilisation de statistiques gaussiennes pour l'amplitude de bruit dans l'image . Nous compléterons ces considérations sur l'hypothèse gaussienne en montrant pourquoi nous avons évité d'utiliser l'hypothèse gaussienne circulaire , qui n'est valable que dans des circonstances particulières maintenant connues .

I - OBJETS DE PHASE ET THEOREME CENTRAL LIMITE

1.1) L'amplitude de bruit peut-elle être gaussienne , soit rigoureusement , soit approximativement ?

Dans les calculs de bruit présentés aux chapitres précédents , la variance de l'éclairement image fait intervenir les moments de l'amplitude lumineuse dans l'image jusqu'à l'ordre quatre . Jusqu'à présent , nous avons fait en sorte que cette amplitude soit un processus aléatoire gaussien , de façon à aboutir rapidement à des résultats utilisables , mais nous avons signalé que ce caractère gaussien n'avait rien de certain : c'est ce point que nous nous proposons d'examiner maintenant .

Revenant à l'Equation (3) , nous pouvons écrire l'amplitude image au point \vec{r} , dû à un point source $\vec{\Omega}$, sous la forme :

$$\begin{aligned} a(\vec{r}, \vec{\Omega}) &= \int \tau(\vec{r}_1) p(\vec{r}_1 - \vec{r}) \exp(-2i\pi\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_1) d\vec{r}_1 \\ &= \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle + g(\vec{r}, \vec{\Omega}) \end{aligned} \quad (65)$$

$g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est la partie fluctuante de cette amplitude ; son caractère aléatoire est dû aux défauts de l'objet ou de la pupille qui se manifestent dans l'Equation (65) par leur action sur $\tau(\vec{r})$ et sur $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ respectivement .

Deux raisons peuvent justifier que $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ soit un processus gaussien : ou bien les statistiques du défaut lui-même confèrent un caractère gaussien aux transmittances $\tau(\vec{r})$ et $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ et donc à $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$; ou bien , par application du

théorème central limite , le caractère gaussien provient de l'addition d'un grand nombre d'éléments aléatoires non corrélés .

Pour simplifier , nous avons fait jusqu'à présent l'hypothèse que $\tau(\vec{r})$ et $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ étaient des processus gaussiens . Mais , à défaut , le théorème central limite n'est-il pas utilisable ? Dans le cas du bruit pupillaire , $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ ne dépend des défauts décrits par $\tilde{p}(\vec{\Omega})$ que par l'intermédiaire de leur transformée de Fourier $p(\vec{r}_1, -\vec{r})$: dès que l'aire de corrélation des défauts est faible devant l'aire de la pupille , $p(\vec{r}_1, -\vec{r})$ se compose de la somme de nombreux phénomènes aléatoires sans corrélation et $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ peut donc être considéré comme gaussien . Dans le cas du bruit objectif , si l'aire de corrélation des défauts de l'objet est faible devant l'aire de la tache de diffraction dans l'image , l'intégrale de l'Equation (65) effectue une sommation qui nous permet d'invoquer le théorème central limite pour conclure que $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est un processus gaussien . Toutefois , bien sûr , si cette hypothèse de corrélation microscopique n'est pas vérifiée , le caractère gaussien de $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est douteux .

1.2) Le paradoxe de l'objet de phase

Considérons maintenant un objet de phase pure :

$$\tau(r) = \exp i\phi(\vec{r}) \quad (66)$$

En éclairage parfaitement incohérent spatialement , c'est-à-dire pour une source de luminance $\tilde{s}(\vec{\Omega})$ constante sur tout son plan , les Equations (2) et (3) se transforment très simplement en toute rigueur par intégration sur $\vec{\Omega}$ et donnent

$$I(\vec{r}) = \int |p(\vec{r}_0)|^2 d\vec{r}_0 \quad (67)$$

L'éclairement est donc constant : c'est une propriété bien connue des objets de phase en éclairage parfaitement incohérent .

Le paradoxe est le suivant : soit un objet uniforme entaché de défauts de phase pure à corrélation microscopique . D'après l'Equation (67) , son image est d'éclairement rigoureusement constant et non aléatoire . Un défaut de phase ne saurait être décrit par un processus $X(\vec{r})$ gaussien , mais d'après le théorème central limite , l'amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est gaussienne et le calcul du chapitre précédent sur les fluctuations du bruit objectif s'applique sans aucune modification ; or , d'après ce calcul , la variance de l'éclairement tend vers une limite non nulle quand l'éclairage devient complètement incohérent : ceci est incompatible avec l'Equation (67) . Où est l'erreur ? Un examen de la variance de l'éclairement image pour les processus $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ gaussien et non gaussien permet de lever le paradoxe .

II - VARIANCE ET HYPOTHESE GAUSSIENNE

2.1) Principe du calcul

L'éclairement $I(\vec{r})$ de l'image en éclairage de cohérence spatiale quelconque se déduit des Equations (2) et (3) . Sa variance s'écrit donc en toute généralité

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\vec{r}) &= \langle I(\vec{r})^2 \rangle - \langle I(\vec{r}) \rangle^2 \\ &= \langle (\int \tilde{s} | \langle a \rangle + g |^2 d\vec{\Omega})^2 \rangle - \langle \int \tilde{s} | \langle a \rangle + g |^2 d\vec{\Omega} \rangle^2 \end{aligned} \quad (68)$$

Dans cette expression apparaissent la luminance $\tilde{s}(\vec{\Omega})$ de la source , l'espérance mathématique $\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle$ de l'amplitude lumineuse au point \vec{r} due au point source $\vec{\Omega}$, et la fluctuation $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$, de moyenne nulle , de cette même amplitude .

Il s'agit ici de comparer les valeurs de $\sigma_I(\vec{r})$ dans les deux cas d'une amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ gaussienne et d'une amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ quelconque , mais résultant de l'addition d'éléments aléatoires indépendants permettant d'invoquer le théorème central limite . La comparaison sera faite dans le cas cohérent et dans le cas entièrement incohérent .

Dans le cas non gaussien , l'Equation (68) fait apparaître les termes T_i suivants , contenant les moments d'ordre i de $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ ($i = 2, 3, 4$) :

$$\begin{aligned} T_2(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) &= 2 \operatorname{Re} [\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \\ &\quad + \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle \langle a^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle] \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} T_3(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) &= 2 \operatorname{Re} [\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) | g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) |^2 \rangle \\ &\quad + \langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle \langle g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) | g(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) |^2 \rangle] \end{aligned} \quad (70)$$

$$T_4(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) = \langle |g(\vec{r}, \vec{\Omega}_1)|^2 |g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2)|^2 \rangle - \langle |g(\vec{r}, \vec{\Omega}_1)|^2 \rangle \langle |g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2)|^2 \rangle \quad (71)$$

L'intégration sur $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$ de l'Equation (68) fait intervenir les termes T_i ($i = 2, 3, 4$) par des contributions S_i :

$$S_i(\vec{r}) = \iint \tilde{s}(\vec{\Omega}_1) \tilde{s}(\vec{\Omega}_2) T_i(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) d\vec{\Omega}_1 d\vec{\Omega}_2 \quad (72)$$

$i = 2, 3, 4$

La question est de savoir si la variance ainsi calculée :

$$\sigma_I^2(\vec{r}) = S_2(\vec{r}) + S_3(\vec{r}) + S_4(\vec{r}) \quad (73)$$

est voisine ou non de celle correspondant à un processus $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ gaussien .

Dans le cas gaussien , les quantités S_i et T_i définies ci-dessus prennent des expressions plus simples , que nous distinguerons par un indice g . S_2 et T_2 , toutefois , sont inchangés ; S_3 , T_3 , S_4 et T_4 sont modifiés :

$$T_{2g} = T_2$$

$$T_{3g} = 0$$

$$T_{4g}(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) = |\langle g(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g(\vec{r}, \vec{\Omega}_2) \rangle|^2 + |\langle g(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) g^*(\vec{r}, \vec{\Omega}_1) \rangle|^2$$

Nous calculerons les deux variances $\sigma_I^2(\vec{r})$ et $\sigma_{Ig}^2(\vec{r})$ dans un seul des deux cas typiques de bruit : le cas du bruit objectif . Un calcul analogue conduirait au même résultat dans le cas du bruit pupillaire .

2.2) Hypothèses et notations

Rappelons l'expression de $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ pour le bruit objectif : les Equations (3) , (47) et (65) nous permettent d'écrire , pour un objet de transmittance moyenne constante τ_0 réelle :

$$g(\vec{r}, \vec{\Omega}) = \int X(\vec{r}_1) p(\vec{r}_1 - \vec{r}) \exp(-2i\pi\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_1) d\vec{r}_1$$

et $\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle = \tau_0 \hat{p}(\vec{\Omega}) \exp(-2i\pi\vec{\Omega} \cdot \vec{r})$ (75)

où $X(\vec{r}_1)$ est la partie fluctuante , d'espérance mathématique nulle , de la transmittance en amplitude de l'objet .

Le calcul des T_i fait intervenir les moments d'ordre 2,3 et 4 de X suivants :

$$\begin{aligned} \langle X^*(r_1)X(r_2) \rangle &= \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ \langle X(r_1)X(r_2) \rangle &= \psi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) \\ \langle X^*(r_1)X(r_2)X(r_3) \rangle &= \Gamma(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) \\ \langle X(r_1)X^*(r_2)X(r_3)X^*(r_4) \rangle &= \Delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1) \end{aligned}$$
 (76)

Les notations des seconds membres définissent les fonctions ϕ , ψ (déjà citées plus haut) et Γ et Δ ; elles ont été simplifiées en supposant la stationnarité de toutes ces quantités .

Nous avons à examiner si le théorème central limite peut être invoqué avec raison pour affirmer que $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est gaussien . Or , l'utilisation de ce théorème exige l'hypothèse de corrélation microscopique : l'aire de corrélation de X doit être petite vis à vis de la tache de diffraction . Nous aurons même besoin d'une hypothèse un peu plus forte : les fluctuations de X devront être étroites par rapport à $p(\vec{r})$, non seulement au sens de la corrélation $\phi(\vec{r})$, mais aussi pour les fonctions $\psi(\vec{r})$, $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ et $\Delta(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$. Nous supposons donc que $\phi(\vec{r})$, $\psi(\vec{r})$, $\Gamma(\vec{r}, \vec{r}')$ et $\Delta(\vec{r}, \vec{r}', \vec{r}'')$ ont pratiquement atteint leur valeur à l'infini dès qu'un argument dépasse nettement la distance de corrélation , elle-même très inférieure à la largeur de la tache de diffraction . Cette hypothèse porte en anglais la dénomination de "strong mixing assumption" . Nous supposons que le domaine de variation des fonctions ψ , Γ et Δ est voisin de l'aire de corrélation A_c définie par :

$$\int \phi(\vec{r}) d\vec{r} = A_c \phi(\vec{0})$$
 (77)

Une dernière hypothèse est nécessaire : comme X est une fluctuation de transmittance en amplitude , son module ne dépasse pas 2 . Il est raisonnable de penser que les ordres de grandeur de ψ , Γ et Δ sont voisins de celui de ϕ , et peuvent être représentés par $\phi(\vec{0}) = \sigma_X^2$. Bien entendu , des statistiques particulières peuvent mettre cette hypothèse en défaut .

Les hypothèses et équations ci-dessus permettent d'effectuer le calcul des variances $\sigma_I^2(\vec{r})$ et $\sigma_{Ig}^2(\vec{r})$ dans les deux cas cohérent et incohérent .

2.3) Eclairage cohérent

La source a pour luminance :

$$\tilde{v}(\vec{\Omega}) = L \delta(\vec{\Omega}) \quad (78)$$

Alors :

$$\sigma_I^2(\vec{r}) = L^2 |T_2(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0}) + T_3(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0}) + T_4(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0})| \quad (79)$$

Soit :

$$\frac{S_p}{\lambda^2 d^2} = \int \tilde{v}(\vec{\Omega}) d\vec{\Omega} = \int |\tilde{v}(\vec{\Omega})|^2 d\vec{\Omega} = p(\vec{0}) \quad (80)$$

l'aire , exprimée en variables réduites , de la pupille , supposée uniforme . Le calcul des ordres de grandeur de S_2 , S_3 , S_4 , compte-tenu des hypothèses , est le suivant :

$$\begin{aligned} S_2 &= L^2 T_2(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0}) \\ &= 2 L^2 \text{Re} \{ \tau_0^2 \tilde{p}(\vec{0})^2 [\iint \psi^*(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \\ &\quad + \iint \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) p(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2] \} \\ &\approx 4 L^2 \tau_0^2 \phi(\vec{0}) \frac{S_p A c}{\lambda^2 d^2} \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} S_3 &= L^2 T_3(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0}) \\ &= 4 L^2 \text{Re} [\tau_0 \tilde{p}(\vec{0}) \iint \Gamma(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p(\vec{r}_2 - \vec{r}) p(\vec{r}_3 - \vec{r}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3] \\ &\approx 4 L^2 \tau_0 \phi(\vec{0}) \left(\frac{S_p A c}{\lambda^2 d^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (82)$$

alors que dans le cas gaussien $S_{3g} = 0$.

$$\begin{aligned} S_4 &= L^2 T_4(\vec{r}, \vec{0}, \vec{0}) \\ &= L^2 \iiint \langle X(\vec{r}_1) X^*(\vec{r}_2) X(\vec{r}_3) X^*(\vec{r}_4) \rangle - \langle X(\vec{r}_1) X^*(\vec{r}_2) \rangle \langle X(\vec{r}_3) X^*(\vec{r}_4) \rangle \\ &\quad p(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) p(\vec{r}_3 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_4 - \vec{r}) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \end{aligned} \quad (83)$$

Dans l'intégration du moment d'ordre 4 , cinq domaines sont à considérer :

- au voisinage de la multiplicité $\vec{r}_1 = \vec{r}_2 = \vec{r}_3 = \vec{r}_4$, l'intégrale apporte une contribution de l'ordre de $L^2 \phi(\vec{0}) A_c^3 \int |p(\vec{r})|^4 dr$, c'est-à-dire de

$$L^2 \phi(\vec{0}) \left(\frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2} \right)^3 ;$$

- si une des quatre variables r_1, r_2, r_3, r_4 s'écarte de chacune des trois autres d'une distance supérieure à la distance de corrélation, alors le moment d'ordre 4 est nul ;

- au voisinage de la multiplicité $\vec{r}_1 = \vec{r}_2, \vec{r}_3 = \vec{r}_4$, l'hypothèse de "strong mixing" nous donne :

$$\langle X(\vec{r}_1) X^*(\vec{r}_2) X(\vec{r}_3) X^*(\vec{r}_4) \rangle \approx \langle X(\vec{r}_1) X^*(\vec{r}_2) \rangle \langle X(\vec{r}_3) X^*(\vec{r}_4) \rangle \quad (84)$$

et la contribution correspondante du moment d'ordre 4 annule celle de l'autre terme de l'Equation (83) ;

- enfin, au voisinage des multiplicités $\vec{r}_1 = \vec{r}_3 ; \vec{r}_2 = \vec{r}_4$ et $\vec{r}_1 = \vec{r}_4, \vec{r}_2 = \vec{r}_3$, la contribution de l'intégrale s'écrit :

$$L^2 \iiint |\phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) \phi(\vec{r}_3 - \vec{r}_2) + \psi(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \psi^*(\vec{r}_2 - \vec{r}_4)| \\ p(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p(\vec{r}_3 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_4 - \vec{r}) dr_1 dr_2 dr_3 dr_4$$

qui n'est autre que la valeur S_{4g} du terme d'ordre 4 en cas de statistiques gaussiennes et dont l'ordre de grandeur est $2L^2 \phi^2(\vec{0}) \left(\frac{S_p A_c}{2 d^2} \right)^2$.

La comparaison entre la variance dans le cas quelconque et dans le cas gaussien en éclairage cohérent s'établit donc ainsi :

$$\sigma_I^2 = S_2 + S_3 + S_4 \quad (85)$$

$$\sigma_{Ig}^2 = S_2 + S_{3g} + S_{4g}$$

$$\frac{S_3 - S_{3g}}{S_2} \text{ est de l'ordre de } \frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2}$$

$$\frac{S_4 - S_{4g}}{S_2} \text{ est de l'ordre de } \left(\frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2} \right)^2$$

Or, ce rapport $\frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2}$ n'est autre que l'inverse du nombre N_0 d'aires de corrélation du bruit dans une tache de diffraction. N_0 est grand par hypothèse, et représente intuitivement précisément le nombre des variables aléatoires indépendantes dont l'addition nous incite à invoquer le théorème central limite.

Le calcul qui précède donne donc le principe d'une démonstration de la validité du théorème central limite pour l'étude du bruit objectif avec l'hypothèse de "strong mixing" en éclairage cohérent. En particulier, nos résultats des

chapitres II et III sur le rapport signal sur bruit en éclairage cohérent sont exacts , même si l'on enlève l'hypothèse que la statistique des défauts $X(\vec{r})$ et $\hat{N}(\vec{\Omega})$ est gaussienne .

2.4) Eclairage incohérent

La source est de luminance \tilde{s} constante . La variance s'écrit :

$$\sigma_{\vec{r}}^2 = \tilde{s}^2 \iint [T_2(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) + T_3(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) + T_4(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2)] d\vec{\Omega}_1 d\vec{\Omega}_2 \quad (86)$$

Passons au calcul des ordres de grandeur de S_2 , S_3 et S_4 :

$$\begin{aligned} S_2 &= \tilde{s}^2 \iint T_2(\vec{r}, \vec{\Omega}_1, \vec{\Omega}_2) d\vec{\Omega}_1 d\vec{\Omega}_2 \\ &= 2 \tau_0^2 \tilde{s}^2 \operatorname{Re} \iint [\psi^*(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) p(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p(\vec{r}_2 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) \\ &\quad + \phi(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) p(\vec{r}_2 - \vec{r}_1) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) p(\vec{r}_2 - \vec{r})] d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 \\ &\approx 4 \tau_0^2 \tilde{s}^2 \phi(\vec{0}) \frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2} \left(\frac{S_p}{\lambda^2 d^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (87)$$

De même , après intégration sur $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$:

$$\begin{aligned} S_3 &= 4 \tau_0^2 \tilde{s}^2 \operatorname{Re} \iint \int \Gamma(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1) p^*(\vec{r}_1 - \vec{r}) p(\vec{r}_2 - \vec{r}) p(\vec{r}_3 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}_3) \\ &\quad \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 \\ &\approx 4 \tau_0^2 \tilde{s}^2 \phi(\vec{0}) \frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2} \left(\frac{S_p}{\lambda^2 d^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (88)$$

Le terme $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3)$ dû à l'intégration sur la source , est responsable de la différence essentielle entre le cas cohérent et le cas incohérent : il n'apparaît pas dans le cas cohérent (Equation 83) , alors que son effet dans l'Equation (88) est d'augmenter l'intégrale S_3 qui atteint maintenant l'ordre de grandeur de S_2 .

La relation

$$S_{3g} = 0$$

est inchangée . Enfin ,

$$\begin{aligned} S_4 &= \tilde{s}^2 \iiint \int [\Delta(\vec{r}_2 - \vec{r}_1, \vec{r}_3 - \vec{r}_1, \vec{r}_4 - \vec{r}_1) - \phi(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \phi(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)] \\ &\quad p(\vec{r}_1 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_2 - \vec{r}) p(\vec{r}_3 - \vec{r}) p^*(\vec{r}_4 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_4 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) \\ &\quad d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \\ &\approx \tilde{s}^2 \phi(\vec{0}) \frac{A_c S_p}{\lambda^2 d^2} \left(\frac{S_p}{\lambda^2 d^2} \right)^2 \end{aligned} \quad (90)$$

En raison des termes $\delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$ et $\delta(\vec{r}_3 - \vec{r}_4)$, S_4 est de l'ordre de grandeur de S_2 . S_{4g} est aussi du même ordre de grandeur .

On constate donc que l'intégration sur $\vec{\Omega}_1$ et $\vec{\Omega}_2$ a pour effet d'amplifier les termes S_3 et S_4 au point que S_2 , S_3 et S_4 sont tous trois du même ordre de grandeur .

2.5) Résultat

L'amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ est bien un processus gaussien par application du théorème central limite, et ce avec une précision relative pour la variance de $\frac{1}{N_0}$, où N_0 est le nombre de variables aléatoires indépendantes qui composent $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$.

Dans le cas cohérent, l'utilisation de l'hypothèse gaussienne est bien justifiée.

Dans le cas incohérent, l'intégration sur la source augmente l'importance des termes résiduels et le calcul de la variance avec l'hypothèse gaussienne est faux. Mais la variance se compose de $S_2 + S_3 + S_4$ au lieu de $S_2 + S_{4g}$. Comme nous venons de montrer que toutes ces quantités sont du même ordre de grandeur, il ne peut guère se produire que deux situations :

a) ou bien S_2 , S_3 et S_4 se compensent et la variance est nettement plus petite que celle que le calcul gaussien laisse prévoir : dans ce cas, nos résultats des chapitres II et III sont pessimistes pour l'éclairage incohérent ; en particulier, l'appendice de l'annexe III montre que pour le bruit de phase, on a rigoureusement :

$$S_3 = -2 S_2 = -2 S_4 . \quad (91)$$

Le paradoxe du bruit de phase est ainsi résolu.

b) ou bien S_2 , S_3 et S_4 ne se compensent pas, dans ce cas leur somme ne diffère de celle obtenue par le calcul gaussien que d'un facteur de quelques unités et l'ordre de grandeur reste correct.

Toutes ces considérations, bien qu'assez grossières, nous permettent d'espérer que le gain en rapport signal sur bruit $\rho_{\text{incohérent}}/\rho_{\text{cohérent}}$ peut être plus fort que celui calculé dans les chapitres II et III, mais ne risque guère d'être plus faible.

III - L'HYPOTHESE GAUSSIENNE CIRCULAIRE

Nous avons évité d'utiliser à quelque moment que ce soit l'hypothèse que l'amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ obéissait à des statistiques gaussiennes circulaires. Comme les calculs de bruit et de granularité laser publiés dans la littérature font souvent appel à cette hypothèse, nous terminerons par quelques remarques à son sujet.

Rappelons tout d'abord qu'un processus gaussien g est dit circulaire si, et seulement si, ses parties réelles g_r et imaginaires g_i obéissent aux deux relations :

$$\begin{aligned} \langle g_r^2(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle &= \langle g_1^2(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle \\ \langle g_r(\vec{r}, \vec{\Omega}) g_1(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle &= 0 \end{aligned} \quad (92)$$

ce qui est équivalent à

$$\langle g^2(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle = 0 \quad (93)$$

L'amplitude de bruit $g(\vec{r}, \vec{\Omega})$ peut-elle obéir à la relation (93) ? Pour les deux cas de bruit pupillaire et de bruit objectif, les relations (19) et (39) de l'annexe III montrent que cela impose :

$$\begin{aligned} \psi_N(\vec{\Omega}) &= \langle \hat{N}(\vec{\Omega}_1) \hat{N}(\vec{\Omega}_1 + \vec{\Omega}) \rangle = 0 \\ \text{et } \psi_X(\vec{r}) &= \langle X(\vec{r}_1) X(\vec{r}_1 + \vec{r}) \rangle = 0 \end{aligned} \quad (94)$$

pour les deux fonctions ψ relatives respectivement au bruit pupillaire et au bruit de granularité. Les défauts décrits par les fonctions aléatoires \hat{N} et X n'ont aucune raison d'obéir à de telles relations. En particulier, si toutefois ces fonctions sont gaussiennes, il faudrait qu'elles soient elles-mêmes circulaires, ce que rien ne justifie.

Pour toutes les relations donnant des valeurs exactes de la variance de l'éclairement, il convient donc de garder la contribution de ψ , c'est-à-dire d'écarter l'hypothèse que g est circulaire. Toutefois, ces contributions sont du même ordre de grandeur que les termes en ϕ , qui restent seuls présents avec l'hypothèse circulaire et, dans la mesure où l'on se contente de calculs d'ordres de grandeur, cette hypothèse est acceptable. Nous ne l'avons évitée que pour deux raisons : vérifier qu'elle n'avait pas une importance fondamentale et éviter d'augmenter encore le nombre déjà grand de nos hypothèses.

GOODMAN {84} semble avoir été le premier à faire remarquer que l'utilisation de processus gaussiens circulaires dans l'étude de la granularité laser n'était pas nécessairement justifié : il a mis en évidence le caractère non circulaire de l'amplitude lumineuse dans l'image d'un diffuseur de phase pure. L'habitude d'utiliser des statistiques circulaires dans ces calculs peut s'expliquer par le désir de simplification, mais aussi par le fait qu'elles sont valables dans le cas usuel d'un diffuseur éclairé en lumière cohérente et produisant une figure de granularité dans son plan de diffraction de Fraunhofer : McKECHNIE {85} a vérifié expérimentalement que la distribution statistique des intensités correspondait bien à une amplitude gaussienne circulaire. Un calcul très simple permettra de le retrouver. L'expérience évoquée correspond en effet au schéma de la figure 1, dans le cas où un objet ponctuel éclaire une pupille entachée d'un bruit pupillaire si fort que la composante continue est nulle. Les Equations (30), (32) et (33) s'appliquent alors, avec :

$$\begin{aligned} \vec{s}(\vec{\Omega}) &= L \delta(\vec{\Omega}) \\ \tau(\vec{r}_1) &= A \delta(\vec{r}_1) \end{aligned} \quad (95)$$

$$\langle a(\vec{r}, \vec{\Omega}) \rangle = 0$$

La variance $\sigma_I^2(\vec{r})$ de l'éclairement image et son espérance mathématique $\langle I(\vec{r}) \rangle$ s'écrivent, en tenant compte du caractère gaussien de l'amplitude diffractée et avec les notations du chapitre II :

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\vec{r}) &= L^2 A^2 (\langle |p(-\vec{r})|^4 \rangle - \langle |p(-\vec{r})|^2 \rangle^2) \\ &= L^2 A^2 (P^2(\vec{0}) \phi^2(-\vec{r}) + P^2(-2\vec{r}) |\psi(-\vec{r})|^2) \end{aligned} \quad (96)$$

$$\langle I(\vec{r}) \rangle = \langle LA |p(-\vec{r})|^2 \rangle = LA P(\vec{0}) \phi(-\vec{r}) \quad (97)$$

On voit que le caractère non circulaire traduit par la fonction $\psi(\vec{r})$ ne se manifeste que sur le domaine très étroit où $P^2(2\vec{r})$ n'est pas nul, c'est-à-dire dans la tache de diffraction centrale où serait concentrée la lumière en l'absence du diffuseur. Ce résultat confirme donc la circularité de l'amplitude diffuse dans le plan de diffraction de Fraunhofer ; ce n'est d'ailleurs qu'un cas particulier du résultat récemment publié par OHTSUBO et ASAKURA [86], d'après lequel les statistiques de l'amplitude diffuse de granularité laser sont circulaires en dehors du faisceau direct.

Tout comme le rapport signal sur bruit dans nos calculs, le contraste d'un phénomène de granularité laser est relativement peu affecté par le caractère non circulaire de l'amplitude : on définit en général ce contraste par :

$$C = \frac{\sigma_I}{I} \quad (98)$$

Si g est l'amplitude lumineuse, gaussienne, en un point :

$$C = \frac{[\langle |g|^2 \rangle^2 + \langle g^2 \rangle^2]^{1/2}}{\langle |g|^2 \rangle} \quad (99)$$

Or,

$$0 < \langle g^2 \rangle < \langle |g|^2 \rangle, \quad (100)$$

$$\text{d'où : } 1 < C < \sqrt{2}, \quad (101)$$

la valeur 1 étant atteinte dans le cas circulaire et la valeur $\sqrt{2}$ dans le cas où la phase de g serait constante.

CONCLUSION DE LA DEUXIEME PARTIE

Même dans le système optique extrêmement simple que nous avons considéré , les statistiques de l'éclairement de l'image en présence de différents défauts du système se prêtent à des études variées .

- a) Elles nous ont amenés à mettre en évidence la supériorité de l'éclairage incohérent sur l'éclairage cohérent ; cette supériorité est très nette pour le bruit pupillaire , elle demeure réelle pour le bruit objectif grâce à la suppression du bruit de phase .
- b) Elles ont attiré notre attention sur l'effet Callier et son influence sur le contraste des images .
- c) Elles ouvrent la voie à des spéculations sur les hypothèses statistiques qu'il convient d'employer .

La présente étude est loin d'être terminée : nos calculs statistiques manquent parfois de rigueur ; le bruit dû à des défauts situés entre l'objet et la pupille est probablement , nous l'avons dit , intermédiaire entre le bruit objectif et le bruit pupillaire , mais son étude permettrait de savoir comment se fait le passage d'un cas extrême à l'autre ; le calcul du bruit en éclairage critique, ou dans un système de formation d'images plus réaliste , comme un microdensitomètre à deux fentes , présenterait un intérêt pratique certain .

Mais la façon dont nous avons abordé le bruit optique ne doit être considérée que comme une première approche , non seulement à cause de la simplicité du système considéré , mais aussi en raison de notre choix délibéré de réduire les hypothèses au minimum . Nous nous sommes limités à des caractéristiques générales, ce qui rend nos conclusions applicables à de nombreux cas , mais ne permet pas de tenir compte de façon optimale du bruit effectivement rencontré . Dans toute expérience réelle , une étude détaillée de la nature physique des défauts en cause est nécessaire pour lutter efficacement contre le bruit , et c'est peut-être de là que le traitement d'images peut espérer le plus de progrès futurs . Un tel travail ne semble pas avoir été abordé systématiquement jusqu'à présent , mais le compte rendu du travail expérimental qui constitue la troisième partie de ce mémoire nous donnera l'occasion d'en évoquer un aspect au sujet du choix de la fonction de filtrage .

TROISIEME PARTIE

MISE EN OEUVRE EXPERIMENTALE

INTRODUCTION A LA TROISIEME PARTIE

Nous avons terminé la première partie de ce mémoire en proposant une expérience de traitement incohérent qui nous semblait apporter un progrès par rapport aux méthodes existantes . La seconde partie a été étayée par l'étude méthodique du bruit optique dans l'image , notre opinion sur l'avantage important de l'éclairage incohérent sur l'éclairage cohérent . Il nous reste à présenter , dans cette partie expérimentale , la mise en oeuvre des principes précédents .

Tout d'abord , nous choisirons une expérience de traitement significative apte à mettre nos idées à l'épreuve de la pratique . Dans ce but , nous serons amenés à approfondir l'étude du filtrage dit de Wiener dans son application à la déconvolution approchée par voie optique .

L'utilisation d'hologrammes synthétiques dans notre expérience nous a conduit à affiner la théorie et à étudier la mise en oeuvre pratique de cette technique . Un chapitre spécial sera consacré à nos travaux sur cet outil intéressant du traitement optique , qui nous a d'ailleurs offert l'occasion de plusieurs collaborations avec des chercheurs d'autres domaines .

Enfin , nous décrirons la réalisation de l'expérience projetée ; pour plus de clarté , la convolution incohérente et la soustraction seront étudiées séparément . Nous rencontrerons ainsi des difficultés nouvelles , caractéristiques des méthodes de traitement par convolution avec séparation de deux voies dont les sorties doivent être soustraites . Ces difficultés ont été cernées à l'occasion du présent travail , mais seulement partiellement résolues . Des modifications de notre méthode seront suggérées pour s'affranchir des limitations actuelles .

CHAPITRE I - CHOIX D'UN EXEMPLE DE TRAITEMENT

Revenons à l'expérience de correction d'images par déconvolution approchée en éclairage spatialement incohérent définie dans la première partie et dans l'annexe I . Nous reproduisons ici le schéma général de l'expérience (figure 21 de la première partie) .

Dans ce premier chapitre , nous définirons l'exemple de traitement choisi : quel défaut , quel objet à traiter sélectionner ? Comment obtenir pratiquement cet objet ? La déconvolution approchée de cet objet fait intervenir une fonction de transfert correctrice : nous discuterons le choix de cette fonction de transfert et la détermination de ses différents paramètres , liés au bruit et à la bande passante . Nous aboutirons ainsi à une réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ que nous diviserons en deux parties non négatives , $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$.

I - CHOIX DE L'OBJET A TRAITER

1.1) La fonction défaut

Reprenant les notations de la première partie , nous considérons que l'objet à traiter $O(\vec{r})$ est , en l'absence de bruit , le résultat de la convolution d'une scène originale $A(\vec{r})$ par une fonction défaut $D(\vec{r})$.

Nos expériences portent sur une seule fonction défaut , la fonction disque D_R (nous considérerons rapidement le cas d'autres fonctions D au § 3.3).

$$D_R(\vec{r}) = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} & \text{si } |\vec{r}| < R \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases} \quad (1)$$

Ce défaut est un exemple simple de défaut bidimensionnel . Il a l'avantage de se prêter à des calculs assez faciles , sa transformée de Fourier étant bien connue :

$$\mathcal{F}_{D_R}(\vec{\rho}) = \frac{2 J_1(2\pi\rho R)}{2\pi\rho R} \quad (2)$$

$$\text{avec } \rho = |\vec{\rho}|$$

Cette fonction de transfert de défaut présente des parties négatives , décroît à l'infini comme $\rho^{-3/2}$, c'est-à-dire relativement lentement en raison de la discontinuité au bord du disque D_R . On peut donc espérer redresser et amplifier les fréquences dans une bande assez large avant que le bruit ne devienne prépondérant:

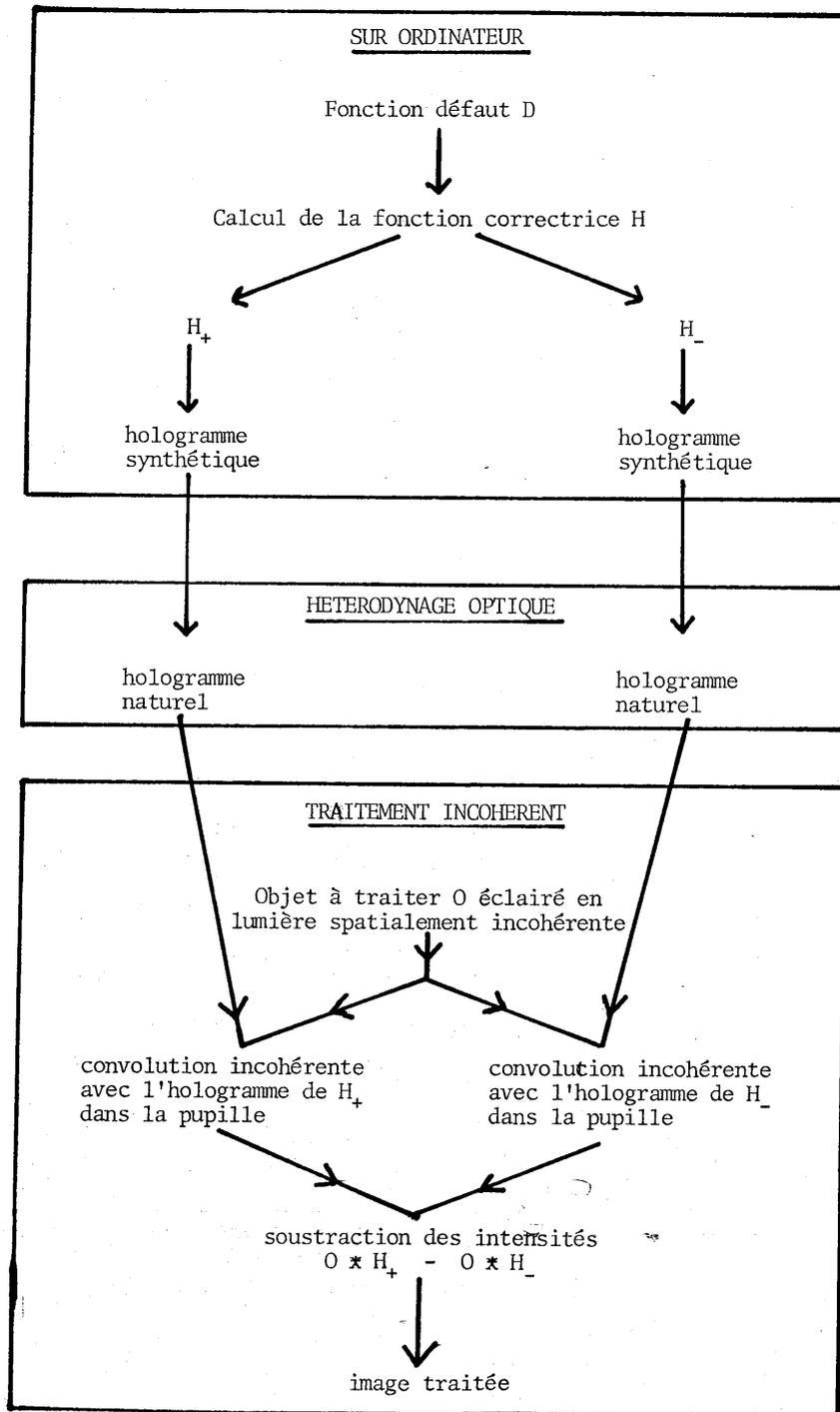


Schéma d'ensemble de la méthode proposée.
(figure 21 de la première partie).

le défaut choisi nous obligera à prendre en compte des fréquences spatiales élevées par rapport à $1/R$. Cet exemple ne pêche donc pas par excès de simplicité. Si, au contraire, nous avons choisi pour $D(\vec{r})$ une gaussienne, par exemple, la décroissance à l'infini de la fonction de transfert de défaut aurait été si rapide qu'il nous aurait suffi de faire le traitement dans une bande de fréquences étroites : le traitement aurait été plus facile mais, corrélativement, aurait fourni une amélioration beaucoup moins nette qu'avec notre fonction disque D_R . Il est raisonnable de dire que beaucoup de défauts rencontrés en pratique se situent entre ces deux cas limites.

La fonction disque peut-elle être considérée comme un modèle correct pour des défauts réels ? c'est, bien sûr, la limite géométrique pour un défaut de mise au point dans un appareil à pupille circulaire. Considérons la figure 1 : le rayon de la pupille est a , la distance de la pupille de sortie à l'image vraie d et l'erreur de mise au point ϵ . Dans ce cas,

$$R = \frac{\epsilon a}{d} \quad (3)$$

est le rayon du disque $D_R(\vec{r})$ qui tient lieu d'image géométrique pour chaque point de l'objet.

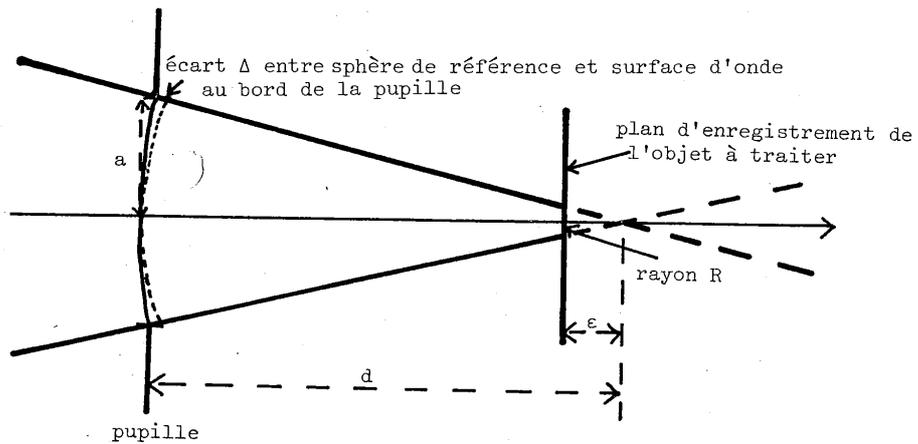


Figure 1. Défaut de mise au point géométrique.

Cependant , cette limite géométrique n'est jamais vraiment atteinte en raison de la diffraction . En éclairage monochromatique de longueur d'onde λ , même si ε est grand , le bord de la fonction défaut est toujours entouré de franges de diffraction de Fresnel . La fonction défaut s'écrit , en amplitude au point $\vec{r}(x,y)$:

$$d_a(\vec{r}) = \alpha_a \exp \frac{2i\pi(x^2+y^2)}{2\lambda(d-\varepsilon)}$$

$$\iint_{\text{pupille}} \exp\left(-2i\pi \frac{x_o x + y_o y}{\lambda(d-\varepsilon)}\right) \exp 2i\pi \frac{\varepsilon(x_o^2 + y_o^2)}{2\lambda d(d-\varepsilon)} dx_o dy_o . \quad (4)$$

α_a est ici une constante qui n'interviendra pas dans la suite . Pour comparer cette expression à la limite géométrique , il convient de prendre en compte la cohérence de l'éclairage . Si l'objet à traiter a été enregistré en éclairage cohérent , la réponse percussionnelle de défaut est l'amplitude lumineuse d_a de l'Equation (4) : cette fonction a une composante de phase importante et il n'est pas question de l'approcher par une fonction disque D_R . On peut s'en convaincre en considérant les transformées de Fourier de d_a et de D_R : la première vaut

$$d_a(\vec{\Omega}) = D \frac{a}{\lambda(d-\varepsilon)} (\vec{\Omega}) \exp 2i\pi \frac{\lambda(d-\varepsilon)\varepsilon\Omega^2}{2d} \quad (5)$$

et la seconde est donnée par l'Equation (2) .

Par contre , si l'objet a été enregistré en éclairage spatialement incohérent , la réponse percussionnelle de défaut est $|d_a(\vec{r})|^2$. Les figures 2a et 2b montrent cette intensité dans deux cas particuliers : $\lambda = 0,5 \mu\text{m}$, $a = 3 \text{ cm}$, $d = 50 \text{ cm}$, $\varepsilon = 1 \text{ mm}$ puis 5 mm , ce qui correspond à des défauts géométriques de rayons $R = 60 \mu\text{m}$ puis $300 \mu\text{m}$. La taille de la tache de diffraction est de l'ordre de $10 \mu\text{m}$ et la profondeur de mise au point limitée par la diffraction , de $150 \mu\text{m}$. L'écart entre la surface d'onde et la sphère de référence pour le plan de mise au point utilisé atteint au bord de la pupille respectivement $\Delta = 3,6$ puis 18λ .

La fonction D_R présente avec ces deux défauts $|d_a|^2$ une analogie claire . La similitude apparaît encore plus nettement si l'on compare les transformées de Fourier , c'est-à-dire les FTM de défaut (figure 2 c) .

Enfin , si l'objet a été enregistré en lumière blanche , la réponse percussionnelle est une intégrale de la fonction $|d_a|^2$ de la figure 2 sur le domaine spectral utilisé . Sauf au bord de la tache géométrique , cette intégration amortit les oscillations et l'approximation est meilleure .

Dans tous les cas cependant , il convient d'être prudent avant d'assimiler la vraie réponse percussionnelle de défaut de mise au point à la fonction disque D_R . Plutôt que d'étudier la validité de cette approximation , nous avons préféré mettre au point notre expérience avec un objet entaché d'un défaut représenté rigoureusement par $D_R(\vec{r})$.

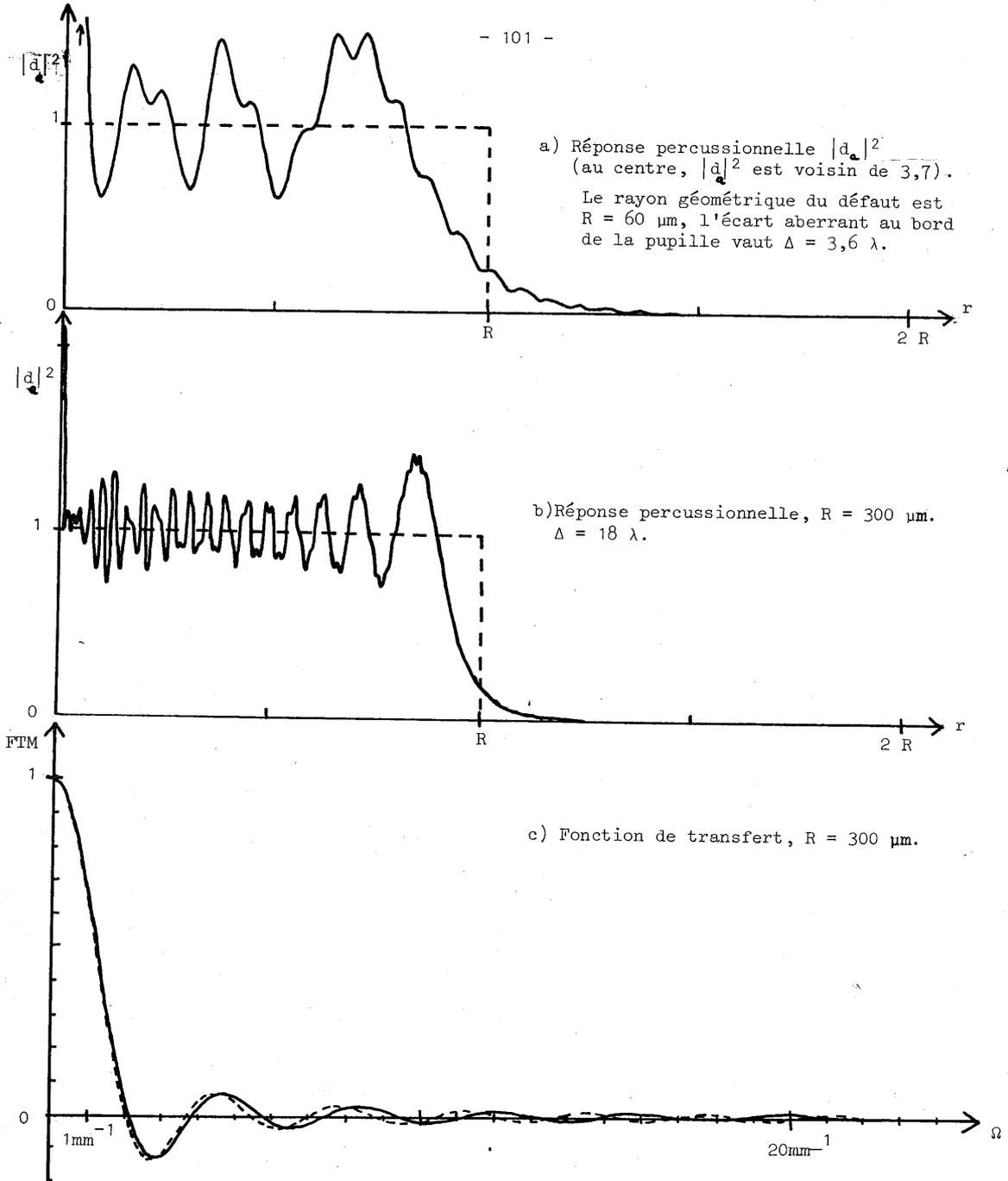


Figure 2. a) et b) Réponses percussives de défaut de mise au point en éclairage monochromatique spatialement incohérent pour deux valeurs du rayon R du défaut ; en pointillé, approximations géométriques. c) Transformées de Fourier des deux courbes de la figure b).

1.2) Enregistrement de l'objet

Considérons le montage schématisé sur la figure 3..

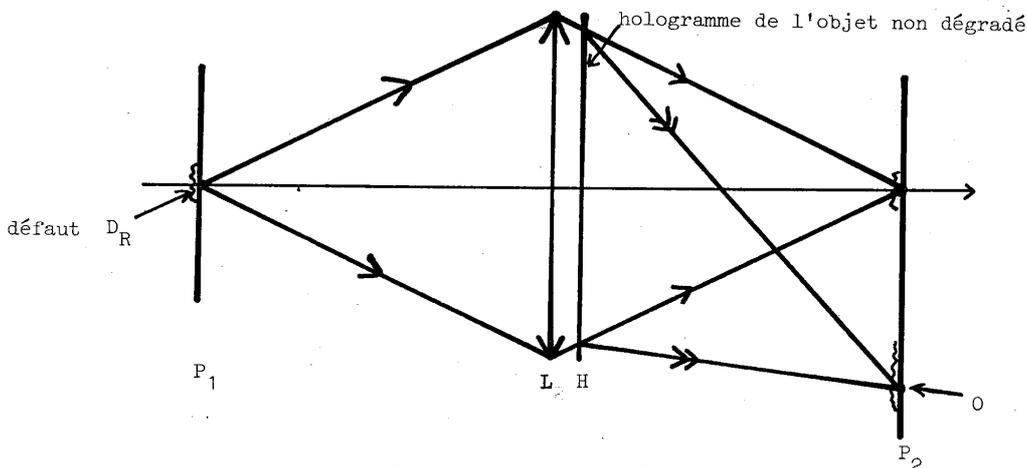


Figure 3. Obtention de l'objet à traiter.

Le plan P_1 est éclairé en lumière monochromatique spatialement incohérente et a son image à travers la lentille L en P_2 . Le masque H est en pratique un hologramme dont seul l'ordre 1 sera utilisé. Placé près de la lentille L , il détermine la réponse percussionnelle en intensité $A(\vec{r})$ du système. Plaçons dans le plan P_1 une ouverture circulaire de rayon R : l'éclairement dans le plan de l'image est

$$O(\vec{r}) = D_R(\vec{r}) * A(\vec{r}). \quad (6)$$

Cette expression représente l'image de l'objet $D_R(\vec{r})$ à travers un système de réponse percussionnelle $A(\vec{r})$. Mais $O(\vec{r})$ peut tout aussi bien être considéré comme l'image de l'objet $A(\vec{r})$ à travers un système imaginaire dont la réponse percussionnelle serait en toute rigueur $D_R(\vec{r})$. Ainsi, il suffit de disposer d'une ouverture circulaire $D_R(\vec{r})$ et de l'éclairer uniformément en lumière incohérente pour obtenir artificiellement un objet à traiter entaché du défaut désiré. La scène idéale $A(\vec{r})$ est déterminée par le masque H .

Cet objet $O(\vec{r})$ est enregistré sur support photographique. Pour assurer la linéarité de l'enregistrement une préexposition est nécessaire.

En pratique, nous avons utilisé le montage de convolution incohérente qui sert également dans l'étape de correction (voir Chapitre III). Dans le plan P_1 , nous avons placé successivement deux diaphragmes circulaires dont les images avaient pour diamètres $2R = 201 \pm 2 \mu\text{m}$ et $607 \pm 3 \mu\text{m}$. L'émulsion photographique

était un film Agfa Copex Pan . L'image $O(\vec{r})$ étant en elle-même floue , la mise au point de l'émulsion dans le plan P_2 était difficile à apprécier . Pour obtenir une mise au point correcte , sous réserve d'aplanétisme de l'objectif L , la visée était faite dans l'ordre zéro de l'hologramme H , suffisamment proche de l'ordre utile pour que les deux puissent être simultanément dans le champ . Le masque H était un hologramme synthétique de Fourier . La scène idéale A est représentée sur la figure 4 (sous forme échantillonnée et binaire) : telle est l'onde synthétique diffractée dans l'ordre (1,0) par l'hologramme H . Sa définition est limitée par la diffraction à travers une pupille circulaire de diamètre 10 mm à une distance de 500 mm en éclairage monochromatique de longueur d'onde 488 nm . La tache de diffraction a , dans ces conditions , une dimension (entre maximum central et premier zéro) voisine de 30 μm , nettement plus petite que le défaut introduit ($R \approx 100 \mu\text{m}$ ou 300 μm) .

Nous reviendrons dans le prochain chapitre sur l'obtention de l'hologramme synthétique H . Mentionnons seulement ici que l'onde synthétisée est échantillonnée en 128 x 128 points et que son amplitude a un module à dix niveaux équidistants et une phase aléatoire en chaque point d'échantillonnage , équipartie entre 0 et 2π et sans corrélation entre points . L'intensité $A(\vec{r})$ représentée sur la figure 4 est le carré du module de cette onde , entaché de granularité en raison de la phase aléatoire . Le support de $A(\vec{r})$ est un carré de côté voisin de 3,2 mm .

Les figures 5 et 6 montrent les objets à traiter $O(\vec{r})$ obtenus à l'aide du dispositif de la figure 3 , ainsi que les versions échantillonnées et binaires des simulations sur ordinateur (sans bruit) correspondantes . Les objets à traiter sont des négatifs , donc sombres sur fond clair .

Bien que ces objets soient simples , deux autres objets encore plus simples sont utiles comme tests pour l'expérience : il s'agit de la fonction défaut $D_R(\vec{r})$ elle-même et de son négatif . Si l'objet à traiter $O(\vec{r})$ se réduit à la fonction défaut , la scène idéale $A(\vec{r})$ est un simple point lumineux et l'image traitée se réduit à la réponse percussionnelle globale après traitement :

$$G(\vec{r}) = D_R(\vec{r}) * H(\vec{r}) \quad (7)$$

(Rappelons que H est la réponse percussionnelle de traitement) . Pour obtenir cette réponse percussionnelle globale G , il suffit en pratique d'utiliser comme objet à traiter les diaphragmes circulaires qui nous ont servi à obtenir les objets des figures 5 et 6 . La réponse percussionnelle globale de traitement peut ainsi être vérifiée par mesure photométrique .

Cet objet réduit à la fonction défaut constitue , par sa petite taille et son contraste (objet clair sur fond noir) , un cas particulièrement favorable car le fond n'apporte pas de bruit . On peut se placer dans des circonstances plus délicates en utilisant comme objet à traiter le négatif du défaut :

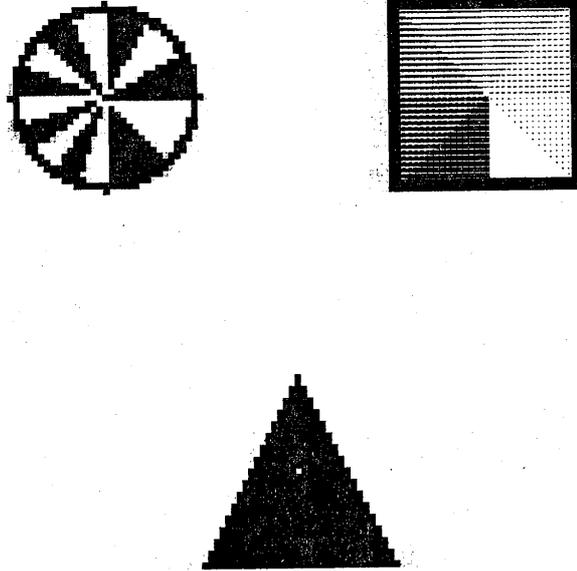


Figure 4. La scène idéale
(objet avant dégradation).

1 mm

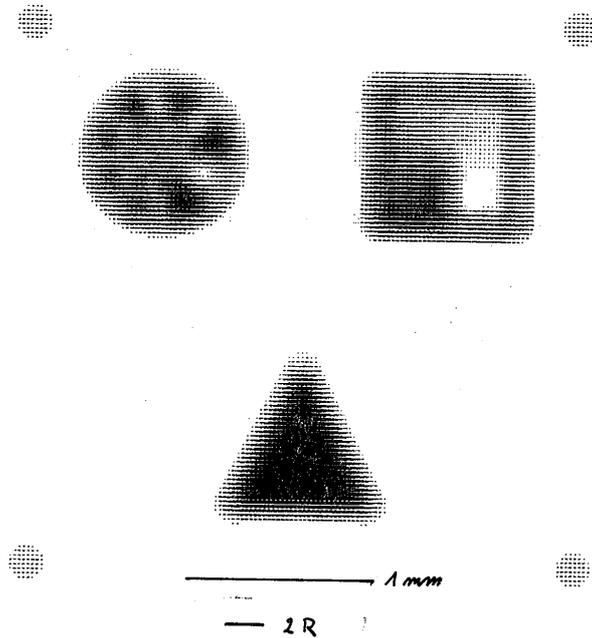
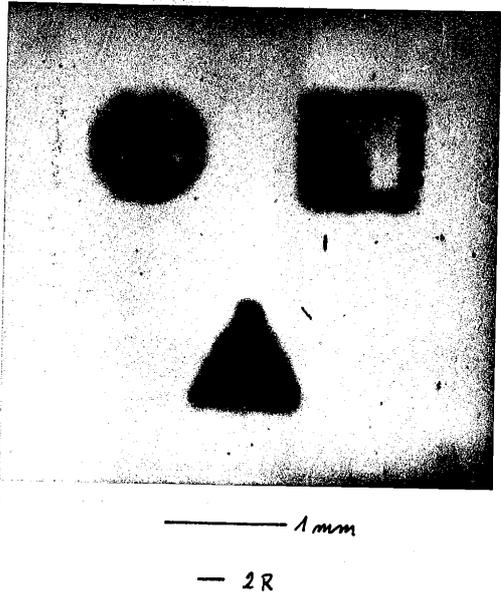


Figure 5. Un objet à traiter et sa simulation sur ordinateur ($2 R = 201 \mu\text{m}$).
Le défaut est un disque uniforme D_R de diamètre $2 R$.

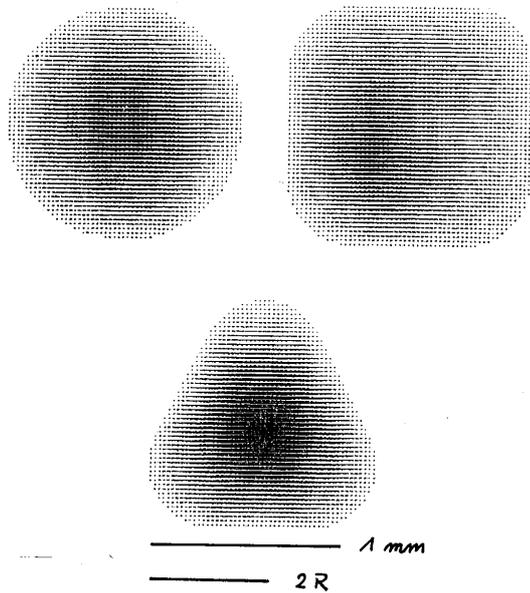
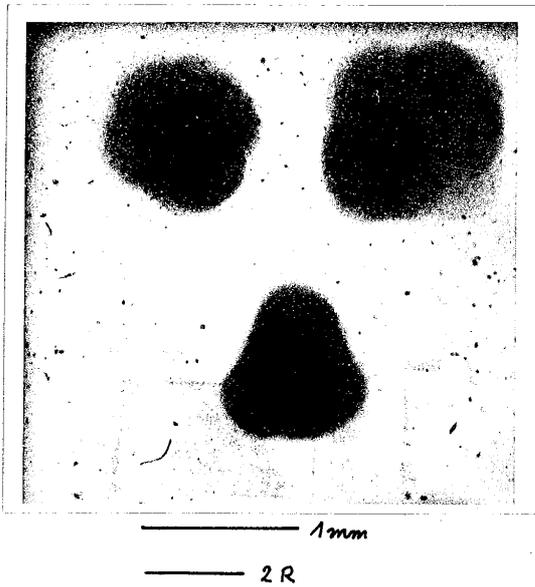


Figure 6. Un objet à traiter et sa simulation sur ordinateur ($2 R = 607 \mu\text{m}$).
Le défaut est un disque uniforme de diamètre $2 R$.

$$O(\vec{r}) = 1 - \alpha_1 D_R(\vec{r}) \quad (8)$$

(où α_1 est une constante)

c'est-à-dire encore l'image brouillée d'une scène idéale $A(\vec{r})$ constituée d'un point noir sur fond clair . Là encore , l'analyse photométrique du résultat du traitement est aisément interprétable : en posant pour normalisation $\hat{H}(\vec{0}) = 1$, on obtient

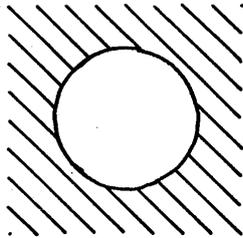
$$I(\vec{r}) = 1 - \alpha_1 D_R(\vec{r}) * H(\vec{r}) \quad (9)$$

$$= 1 - \alpha_1 G(\vec{r}) \quad (10)$$

En pratique , ce dernier objet a été obtenu par l'expérience de la figure 3 en enlevant le masque H ou en utilisant son ordre (0,0) .

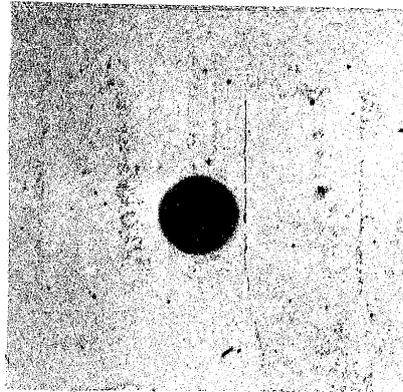
Les figures 7 et 8 montrent ces deux derniers objets .

Tels sont les objets à traiter que nous proposons de prendre pour exemples . Remarquons que sur les quatre objets , l'un est pratiquement exempt de bruit : le défaut $D_R(\vec{r})$ seul de la figure 7 . Les trois autres sont entachés de bruit "objectif" sous forme de granularité photographique et de poussières . Etudions maintenant quel traitement il convient de faire subir à ces objets .



2 R = 201 μm ou 607 μm.

Figure 7. Un objet à traiter : la réponse percussionnelle elle-même.



2 R = 201 μm ou 607 μm.

Figure 8. Un objet à traiter : image d'un point noir sur fond blanc.

II - LA FONCTION DE FILTRAGE

2.1) Filtrage de Wiener

Nous avons déjà signalé que la fonction de filtrage, c'est-à-dire la FTM de traitement $\hat{H}(\vec{\Omega})$ ne peut être rigoureusement l'inverse de la FTM de défaut $\hat{D}(\vec{\Omega})$, si bien qu'il faut se contenter d'une déconvolution approchée. La fonction $\hat{H}(\vec{\Omega})$ doit être choisie en tenant compte non seulement de $\hat{D}(\vec{\Omega})$, mais aussi du bruit présent dans l'objet et du critère choisi pour la qualité du traitement: en quel sens peut-on dire que l'image traitée $I(\vec{r})$ ressemble bien à la scène originale $A(\vec{r})$? Si l'image traitée $I(\vec{r})$ est destinée à l'observation à l'oeil, le meilleur critère devrait assurément tenir compte des lois encore mal maîtrisées de l'optique physiologique et même de l'histoire de chaque observateur: ce problème fait actuellement l'objet de diverses études {7, 88, 89} mais est loin d'avoir reçu une réponse définitive. Nous nous contenterons ici de l'approche utilisée par Helström {90}. Il s'agit d'estimer le mieux possible la scène originale inconnue $A(\vec{r})$ à partir d'un objet à traiter $O(\vec{r})$ connu. Considérons que la scène $A(\vec{r})$ et le bruit qui entache $O(\vec{r})$ sont tous deux aléatoires. L'image $I(\vec{r})$ est l'estimation de $A(\vec{r})$ fournie par le traitement. Moyennant certaines connaissances sur les statistiques de $A(\vec{r})$ et du bruit, on peut définir la quantité $\Pr(a_o(\vec{r})/O(\vec{r}))$, probabilité a posteriori pour que parmi toutes les scènes originales possibles, celle qui a donné naissance à l'objet $O(\vec{r})$ observé soit $a_o(\vec{r})$. Nous admettrons avec Helström que la meilleure estimation $I(\vec{r})$ possible, pour $A(\vec{r})$ est celle des scènes $a_o(\vec{r})$ qui rend maximale $\Pr(a_o(\vec{r})/O(\vec{r}))$.

Adoptons la notation :

$$O(\vec{r}) = A(\vec{r}) * D(\vec{r}) + N(\vec{r}), \quad (10)$$

où $N(\vec{r})$ désigne le bruit.

Helström montre que si les processus $A(\vec{r})$ et $N(\vec{r})$ sont indépendants et centrés, la meilleure estimation possible s'obtient par convolution de $O(\vec{r})$ par une certaine fonction $H(\vec{r})$. La FTM de filtrage, transformée de Fourier de $H(\vec{r})$, est donnée par l'expression :

$$\hat{H}(\vec{\Omega}) = \frac{\hat{D}^*(\vec{\Omega})}{|\hat{D}(\vec{\Omega})|^2 + \epsilon(\vec{\Omega})}. \quad (11)$$

Ce filtre est appelé par les opticiens filtre de Wiener, bien qu'il ne soit qu'un cas particulier des résultats obtenus par Wiener sur la minimisation de l'erreur quadratique moyenne. L'hypothèse gaussienne utilisée par Helström pour $A(\vec{r})$ et $N(\vec{r})$ n'est pas indispensable. Parmi l'ensemble des filtres linéaires invariants par translation, le filtre de Wiener rend minimale la quantité :

$$E = \langle (I(\vec{r}) - A(\vec{r}))^2 \rangle \quad (12)$$

Dans l'expression (11) du filtre de Wiener , la quantité $\epsilon(\vec{\Omega})$ vaut

$$\epsilon(\vec{\Omega}) = \frac{\tilde{\phi}_N(\vec{\Omega})}{\tilde{\phi}_A(\vec{\Omega})} \quad (13)$$

où $\tilde{\phi}_N$ et $\tilde{\phi}_A$ sont les spectres de puissance des processus N et A , c'est-à-dire les transformées de Fourier des fonctions d'autocorrélation de N et A .

Toutes les hypothèses nécessaires pour utiliser le filtrage de Wiener sont-elles réunies dans le traitement que nous étudions ? Certainement pas . On peut admettre que la conception d'un filtre destiné à traiter un grand nombre d'images soit faite en considérant la scène originale $A(\vec{r})$ comme un processus aléatoire . Mais si le bruit est , par exemple , essentiellement la granularité photographique , il n'est pas indépendant de la scène originale . La détermination de $\epsilon(\vec{\Omega})$, enfin , n'est pas toujours possible .

En suivant toujours Helström , nous pouvons cependant justifier l'utilisation d'un tel filtre en le présentant comme une étape initiale dans la recherche du filtre parfait . Ou encore , nous pouvons remarquer avec BRUNOL et FONROGET {91, 92} qu'un filtre de la forme (11) , mais où ϵ est considéré comme un paramètre réglable , a une interprétation physique claire : il se comporte comme le filtre inverse aux fréquences pour lesquelles la FTM de défaut \tilde{D} est grand devant ϵ ; il amplifie le module et corrige la phase aux fréquences pour lesquelles \tilde{D} est supérieur à ϵ ; il atténue au contraire les fréquences pour lesquelles \tilde{D} est inférieur à ϵ et , en particulier , il annule les fréquences correspondant aux zéros de \tilde{D} . Ainsi , si conformément à l'Equation (13) , ϵ est choisi égal au rapport de la puissance de bruit à la puissance de signal , ce "pseudo-filtre de Wiener" {91, 92} amplifie les fréquences où le signal dépasse le bruit et réciproquement . Mais on peut aussi choisir pour ϵ d'autres valeurs : diminuer ϵ revient à laisser passer plus de bruit mais à amplifier les fréquences dans une bande plus étendue , donc en pratique à gagner en résolution . Réciproquement , augmenter ϵ revient à sacrifier la résolution pour mieux atténuer le bruit .

Nous prendrons pour fonction de filtrage ce pseudo-filtre de Wiener . Examinons maintenant deux approches possibles pour le choix de ϵ .

2.2) Proposition de détermination du paramètre de bruit $\epsilon(\vec{\Omega})$:

Avec quelques informations a priori sur la scène originale et sur le bruit , et connaissant la FTM de défaut , une détermination approchée de ϵ est possible . BRUNOL et FONROGET {91} déterminent ainsi ϵ pour un objet émetteur γ à partir de son nombre de cellules de résolution tridimensionnelles et du nombre total de photons reçus , le bruit étant du bruit de photons . Dans le cas que nous étudions ,

nous pouvons également proposer une détermination de $\epsilon(\vec{\Omega})$. Bien que nous n'ayons pas encore utilisé expérimentalement cette idée, nous en décrirons ici rapidement le principe.

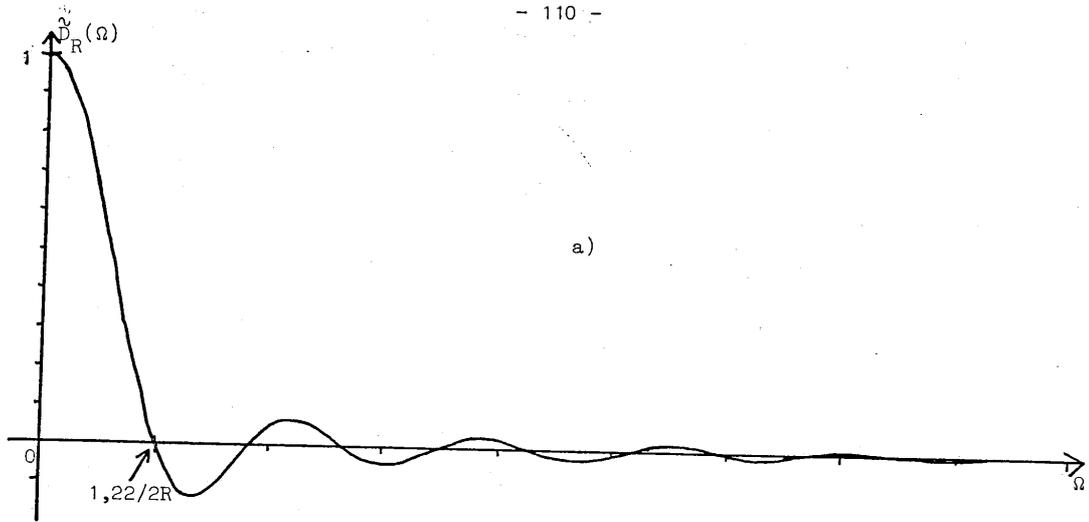
Le bruit mis en évidence sur les figures 5, 6 et 8 est avant tout dû à la granularité photographique. Pour un objet à traiter $O(\vec{r})$ peu contrasté, ce bruit est approximativement stationnaire et on peut déterminer expérimentalement la fonction $\check{\phi}_N(\vec{\Omega})$ pour l'émulsion utilisée et pour la transmittance moyenne considérée : cette fonction est le spectre de Wiener des fluctuations de transmittance en intensité (en mesure spéculaire) [93]. Remarquons qu'elle ne s'identifie donc pas avec le spectre de Wiener des fluctuations de transmittance en amplitude complexe dont il a été question dans la deuxième partie à propos de l'effet Callier.

Quant à la scène originale, nous avons vu que c'est pour nous l'intensité diffractée dans l'ordre (1,0) par un hologramme synthétique limité par une pupille circulaire. Cet hologramme a été obtenu par transformation de Fourier d'une onde pourvue d'une phase aléatoire : on peut donc parler du spectre de puissance $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$, au sens statistique, de $A(\vec{r})$. Le calcul de $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$ permet, une fois $\check{\phi}_N(\vec{\Omega})$ mesuré, de compléter la détermination de $\epsilon(\vec{\Omega})$. Le filtrage est alors adapté au traitement effectué aussi bien qu'un pseudo-filtre de Wiener peut l'être. En particulier, dans notre cas, la taille de la pupille de l'hologramme limite le support des fréquences contenues dans $A(\vec{r})$, et $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$ s'annule rigoureusement en dehors de ce support, si bien que la fonction de filtrage \check{H} s'annule également.

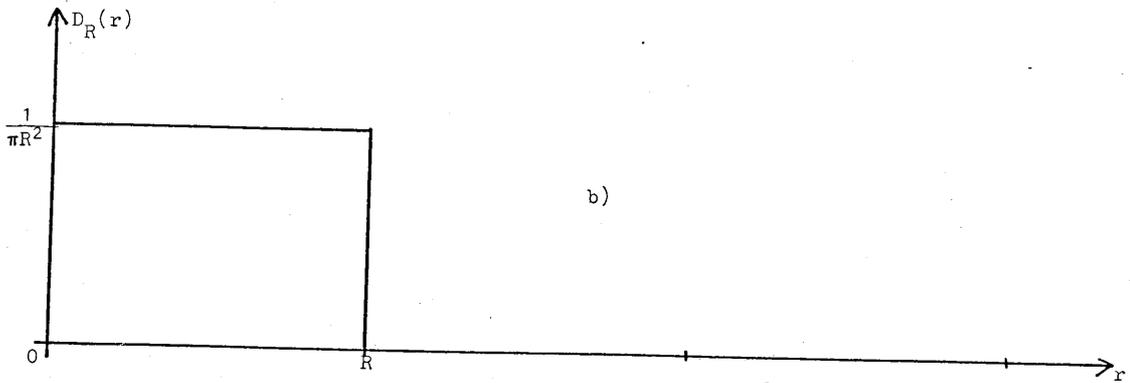
A titre d'exemple, nous présentons en appendice au présent chapitre le calcul de $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$ dans un cas simple. Toutefois, nous ne discuterons pas plus longuement cette méthode de détermination de $\epsilon(\vec{\Omega})$ parce que nous nous sommes, jusqu'à présent, bornés à une approche plus grossière.

2.3) Choix empirique de $\epsilon(\vec{\Omega})$

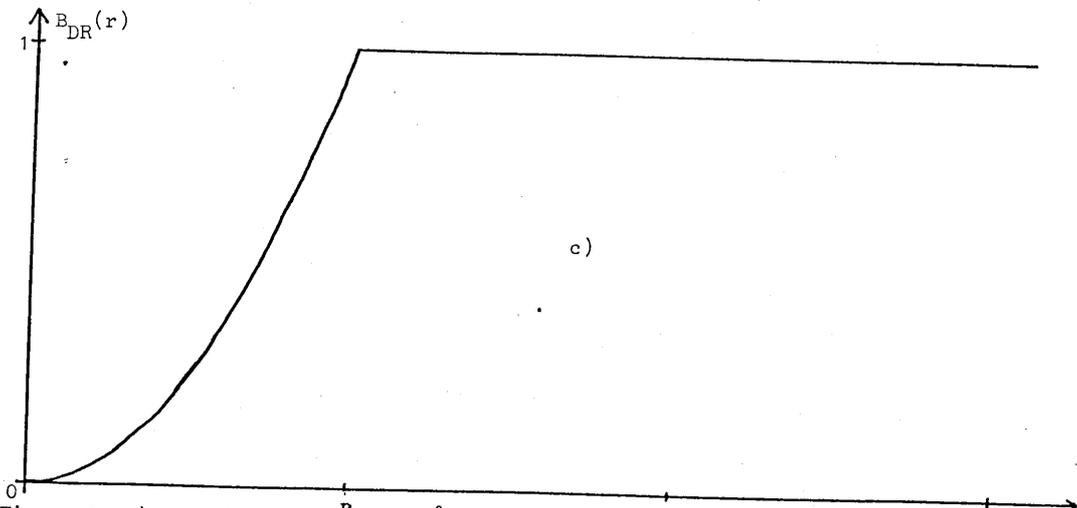
Une méthode plus simple et plus courante, mais assurément moins bonne, pour choisir la fonction $\epsilon(\vec{\Omega})$ du pseudo-filtre de Wiener est le choix empirique d'un paramètre ϵ . Pour simplifier, il n'y a pas d'inconvénient à prendre ϵ constant sur toute la bande de fréquences spatiales traitée. Le choix de la constante est guidé par plusieurs éléments : la fonction de transfert de modulation et la réponse percussionnelle globales, les simulations sur ordinateurs et, évidemment, le résultat de l'expérience de traitement elle-même. Etudions ces différents éléments sur l'exemple que nous avons choisi.



a)



b)



c)

Figure 9. a) Fonction de transfert $\hat{D}_R(\omega)$ du défaut $D_R(r)$, disque uniforme de rayon R ;
b) Réponse percussive de $D_R(r)$;
c) $B_{DR}(r)$ est l'intégrale de D_R encerclée dans un disque de rayon r .

La figure 9 présente , en coupe , la FTM $\tilde{D}_R(\vec{\Omega})$ de notre défaut , la réponse percussionnelle de défaut $D_R(\vec{r})$ ainsi que l'intégrale encerclée dans un disque de rayon R :

$$B_{DR}(r) = \int_0^r \int_0^{2\pi} D_R(\vec{\rho}) \rho \, d\rho \, d\theta \quad (14)$$

qui représente la portion de l'intégrale de la fonction défaut contenue dans un disque de rayon r . Dans la suite , nous comparerons ces trois fonctions aux fonctions correspondantes après traitement .

La fonction B(r) est parfois appelée "énergie encerclée" [133]. Toutefois, dans le domaine du traitement d'image, il ne s'agit pas nécessairement d'une énergie. On peut donc plutôt parler d'"intégrale encerclée".

L'examen de l'intégrale B(r) des réponses percussionnelles à symétrie de révolution avant et après traitement a été suggéré par BRUNOL comme un bon moyen d'estimer l'amélioration apportée par le traitement . En effet , les coupes des réponses percussionnelles avant et après traitement conduisent à mésestimer l'importance des petites "bosses" situées à grande distance du centre . Ces bosses , qui contribuent fortement à l'image , sont bien prises en compte par l'intégrale B(r) .

La figure 10 représente , en même temps que la FTM de défaut $\tilde{D}_R(\vec{\Omega})$ précédente , les FTM globales $\tilde{G}(\vec{\Omega})$ après traitement pour 3 valeurs de ϵ : $\epsilon = 10^{-1}$, 10^{-2} et 10^{-3} . Dans tous les cas , la fonction \tilde{G} est non négative et il n'y a plus d'inversion de contraste à aucune fréquence , mais le domaine des fréquences amplifiées augmente évidemment quand ϵ décroît . De même , la zone de fréquences "perdues" au voisinage de chaque zéro de $\tilde{D}_R(\vec{\Omega})$ rétrécit lorsque ϵ décroît . La figure 11 représente les courbes $D_R(\vec{r})$ et $G(\vec{r})$ correspondantes et la figure 12, les intégrales B_D et B_G correspondantes . On constate , bien sûr , que la réponse percussionnelle devient de plus en plus étroite lorsque ϵ décroît . Les figures 12 b et surtout 12 c font apparaître des oscillations s'étendant nettement au-delà du rayon R du défaut , mais ce phénomène est accessoire par rapport à l'avantage que constitue la finesse du minimum central .

Tant qu'on se limite à une détermination empirique de ϵ , il semble recommandable de prendre en compte toutes ces différentes courbes pour juger de la qualité du traitement , bien qu'en toute rigueur , chacune des trois séries de courbes contienne exactement les mêmes informations .

Pour compléter ces données , considérons maintenant les simulations sur ordinateur de l'expérience projetée . La scène originale de la figure 4 , échantillonnée en 128 points a été convolée (par double transformation de Fourier rapide sur ordinateur) d'abord par les fonctions disques D_R de rayons 4 et 12,5 cellules : on aboutit alors aux objets à traiter que nous avons déjà présenté sur les figures 5 et 6 . Puis , repartant de la scène originale , nous en avons calculé les convolutions par les réponses percussionnelles globales $G(\vec{r})$ cor-

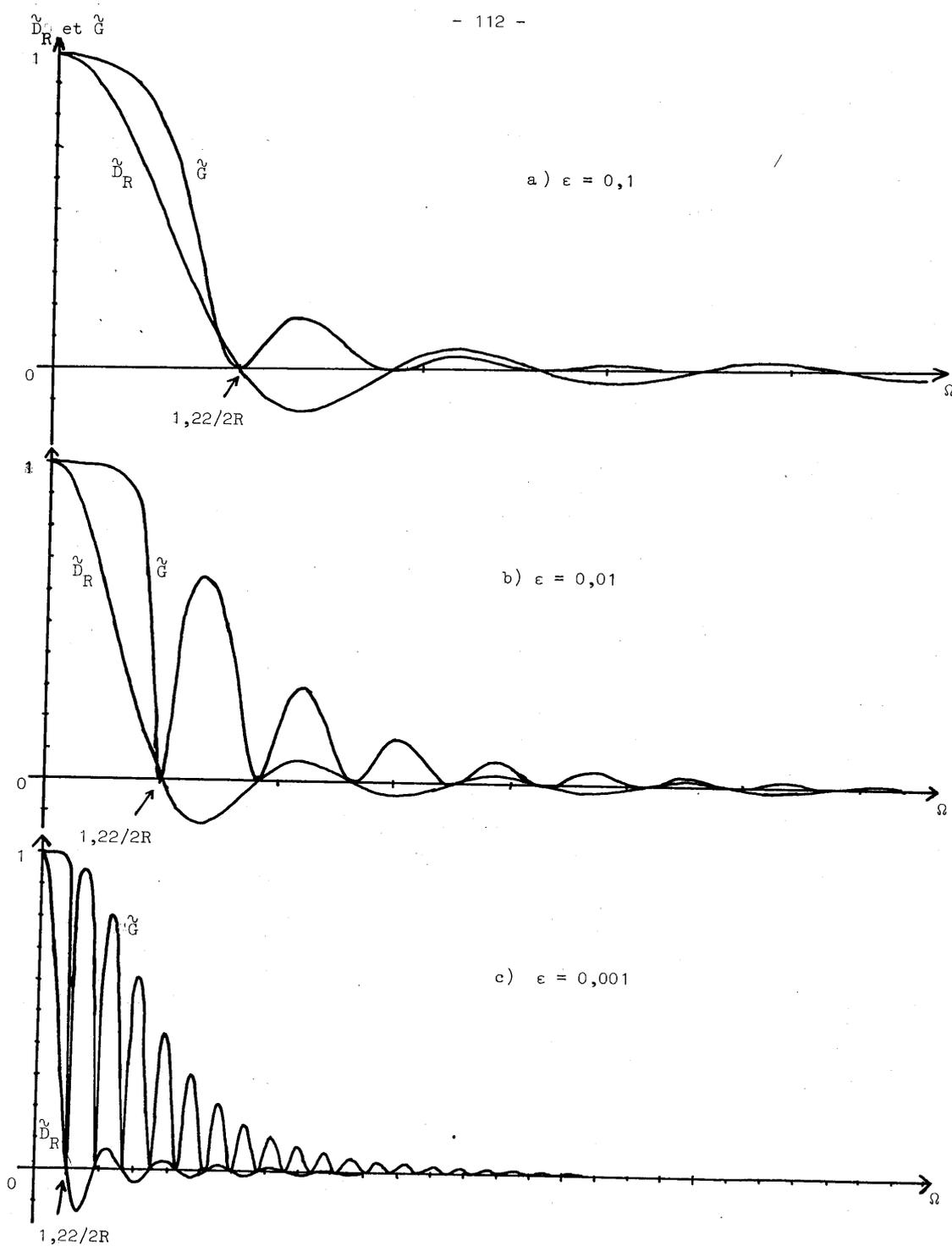


Figure 10. FTM de défaut \hat{D}_R et FTM globale \hat{G} après traitement par un pseudo-filtre de Wiener pour 3 valeurs de la constante de bruit ϵ .

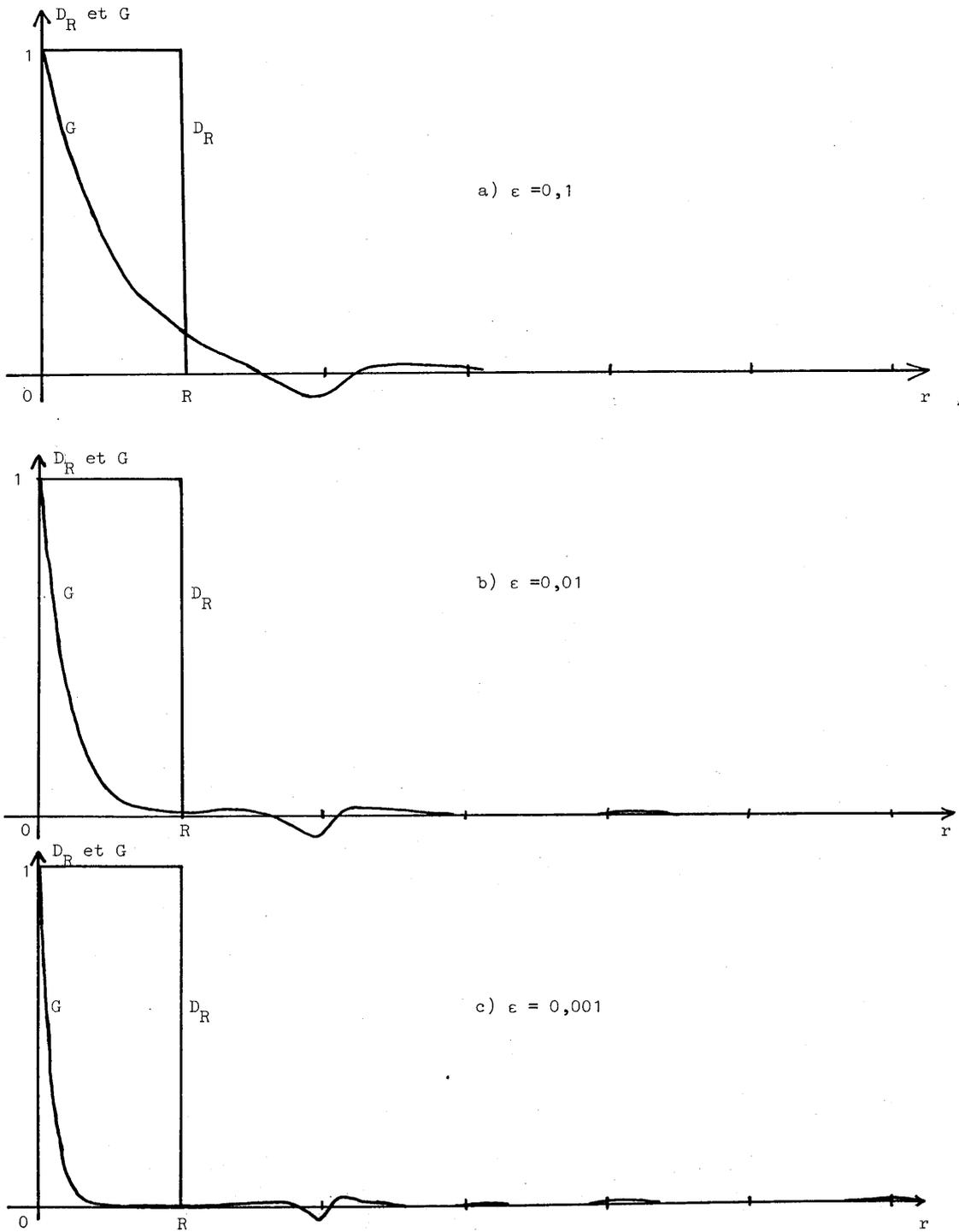


Figure 11. Réponses percussives de défaut D_R et globale G après traitement par un pseudo-filtre de Wiener pour trois valeurs de la constante de bruit ϵ .

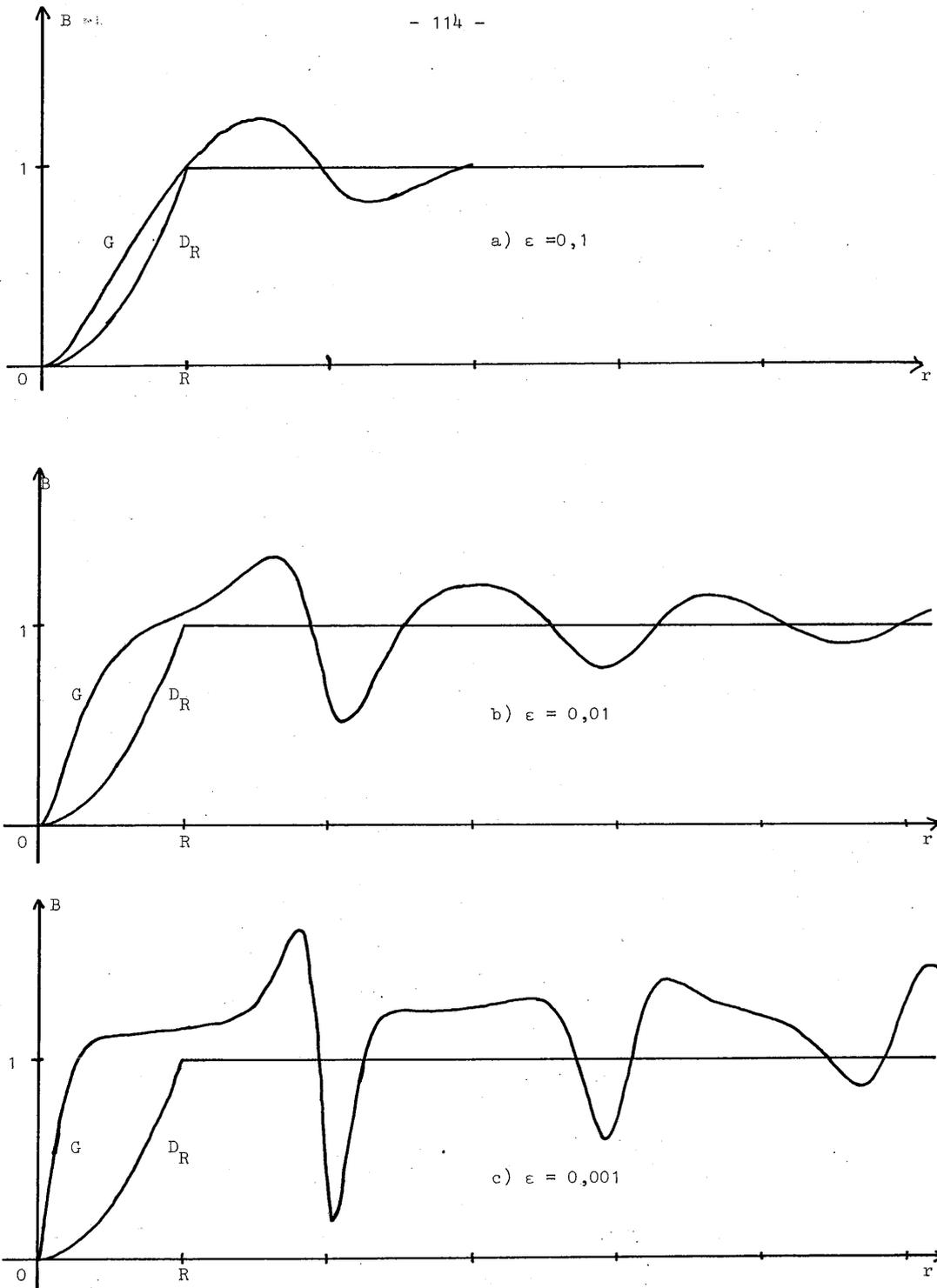
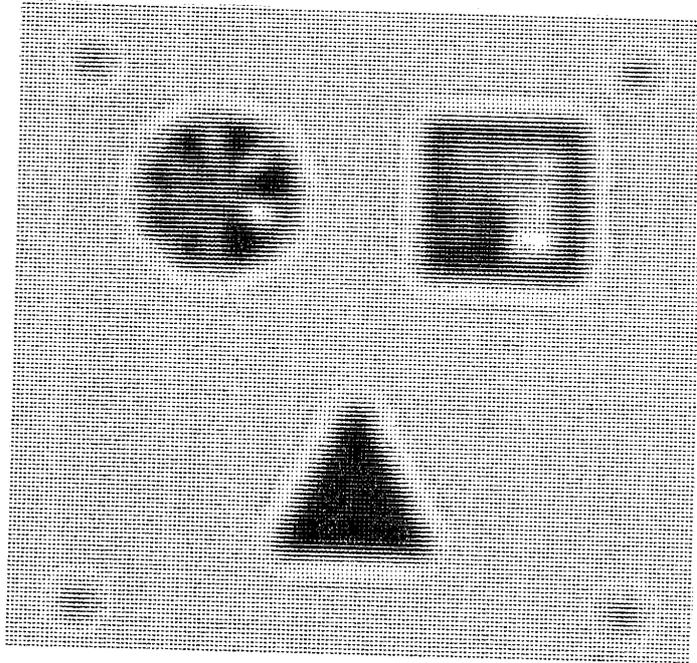


Figure 12. Intégrales B encerclées dans un disque de rayon r pour le défaut D_R et pour la fonction G, réponse percussive globale après déconvolution approchée par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit ϵ .

respondant à $\epsilon = 10^{-1}$, 10^{-2} , 10^{-3} de la figure 11, pour les deux valeurs du rayon de défaut de mise au point. Les résultats de ce traitement simulé et sans bruit sont présentés sur les figures 13 et 14. Les oscillations mises en évidence par la figure 12 c) ont une influence très nette sur les simulations 13 c) et 14 c). On constate que pour observer subjectivement une amélioration nette, le choix $R = 4$ cellules et $\epsilon = 10^{-2}$ est le seul qui nous évite d'avoir recours à la valeur $\epsilon = 10^{-3}$, plus difficile à utiliser pratiquement pour deux raisons : le bruit photographique des objets à traiter (figures 5 et 6) risque d'être amplifié par un tel filtre, et surtout le nombre de points de la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ risque d'être très élevé.

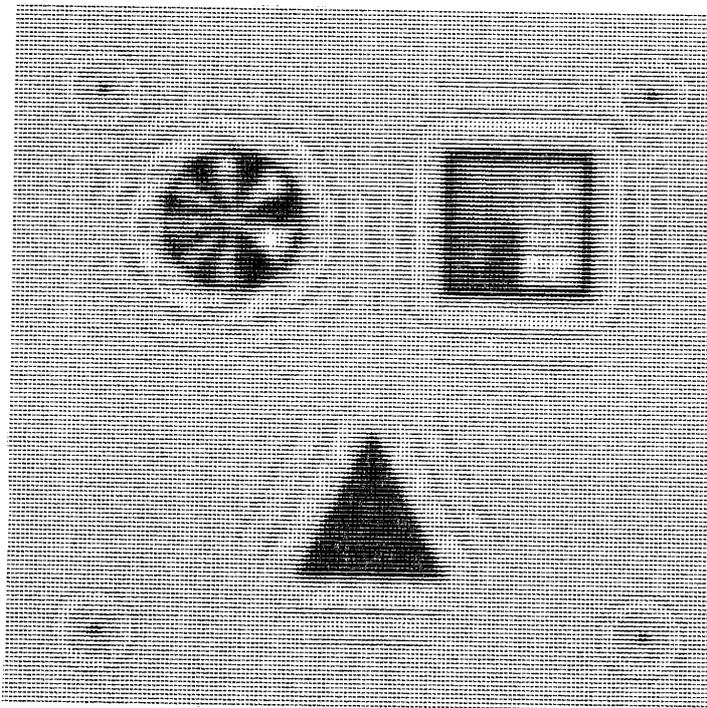
Cette dernière observation nous montre que le choix de ϵ ne peut être guidé uniquement par l'examen des diverses indications présentées dans ce paragraphe : la réalisation pratique du filtre doit aussi être prise en compte et la détermination de ϵ peut résulter d'un compromis entre l'amélioration apportée par le traitement et les possibilités pratiques de réalisation de ce traitement, indiquées par le nombre de points et la dynamique du filtre.

Figure 13. Simulation du traitement de l'objet de la figure 5 par pseudo-filtrage de Wiener pour trois valeurs de la constante ϵ .

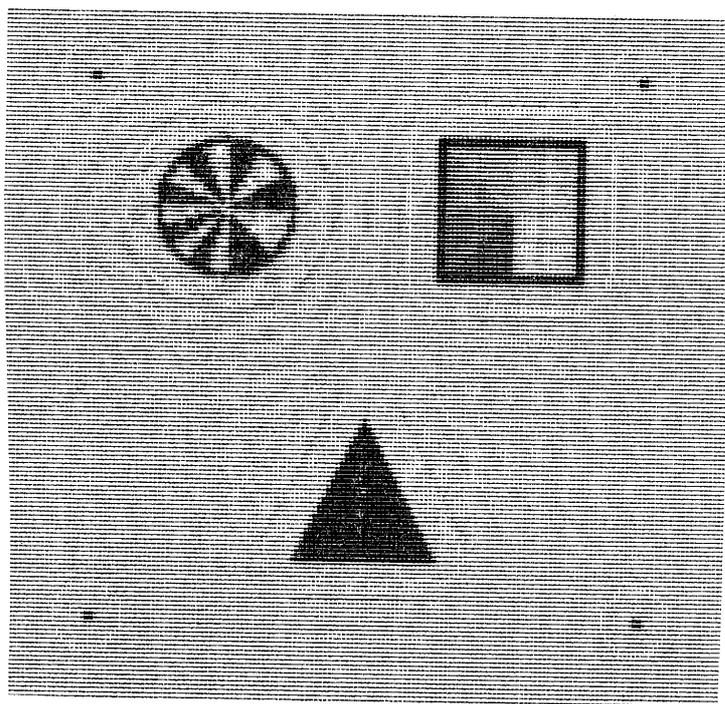


13 a) $\epsilon = 0,1$.

$\overline{2R} = 201 \mu\text{m}$.



13 b) $\epsilon = 0,01$.



13 c) $\epsilon = 0,001$.

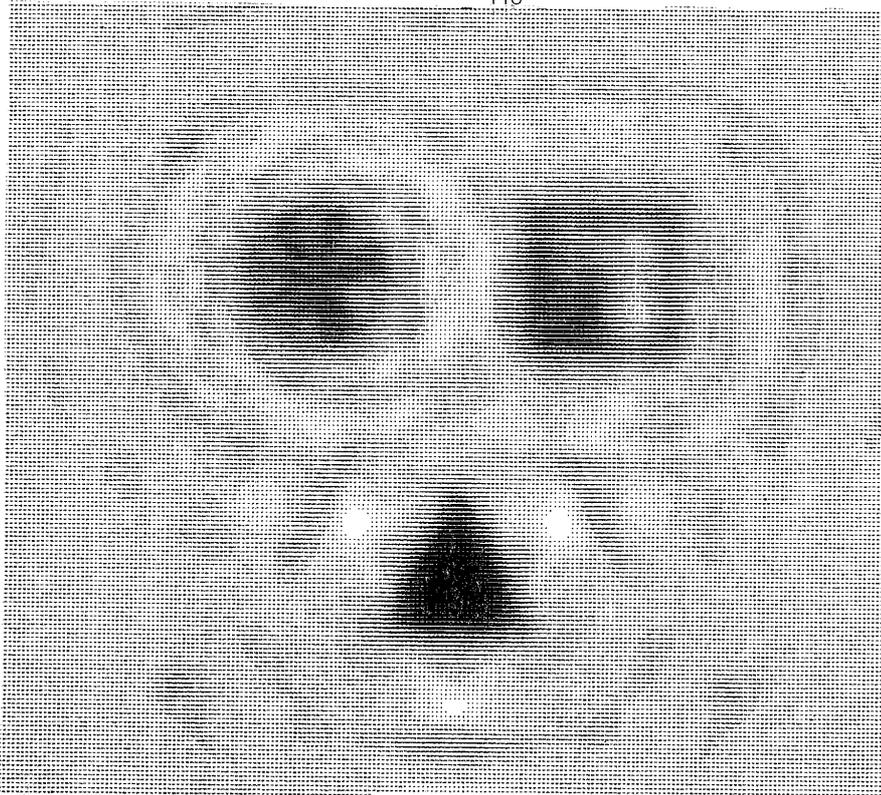
$\overline{2 R} = 201 \mu\text{m}$.

Figure 14. Simulation du traitement de l'objet de la figure 6 par pseudo-filtrage de Wiener pour trois valeurs de la constante ϵ .



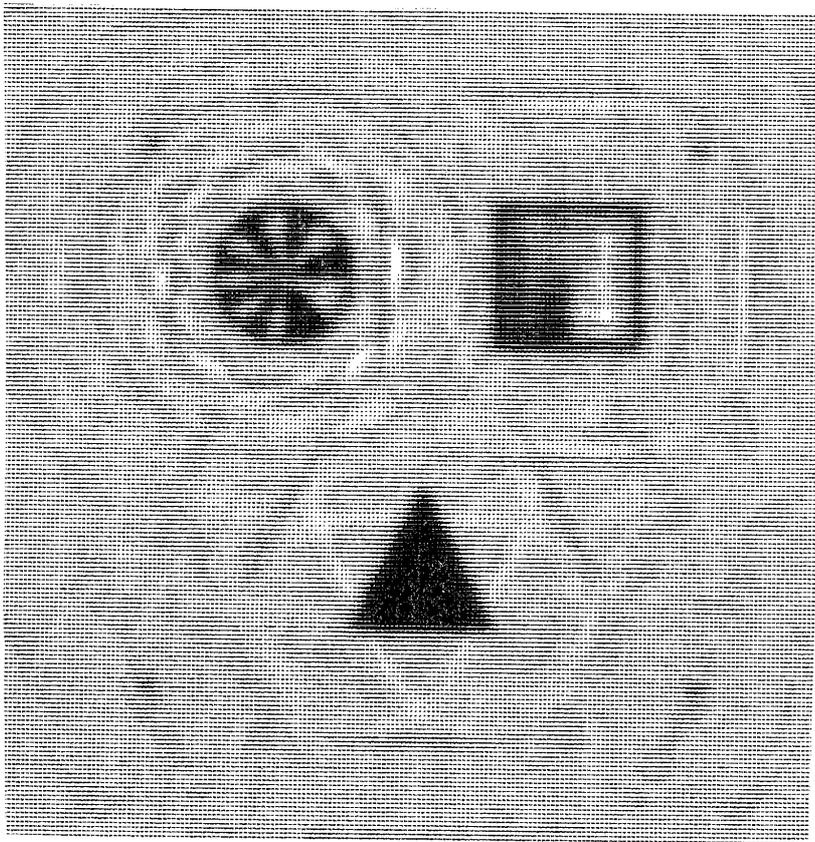
14 a) $\epsilon = 0,1$.

$\overline{2 R} = 607 \mu\text{m}$.



14 b) $\epsilon = 0,01$.

$2 R = 607 \mu\text{m}$.



14 c) $\epsilon = 0,001$.

III - DETERMINATION DES PARAMETRES DU FILTRE

3.1) Liaison entre paramètre de bruit ϵ , nombre de points et dynamique pour un objet à traiter quelconque :

Considérons les trois FTM de filtrage $\tilde{H}(\vec{\Omega})$ présentées sur la figure 15, page 14. Nous devons obtenir ces FTM à partir d'hologrammes synthétiques, il est donc nécessaire de les décrire à partir d'un nombre fini de valeurs échantillonnées, bien qu'en toute rigueur elles soient à support non borné. L'estimation de ce nombre peut se faire de façon équivalente soit en considérant la FTM, $\tilde{H}(\vec{\Omega})$, soit en considérant sa transformée de Fourier $H(\vec{r})$, la réponse percussionnelle de traitement. Nous choisissons la première solution. Il nous faut déterminer d'une part, une valeur maximale Ω_M au-delà de laquelle \tilde{H} sera considérée comme négligeable, d'autre part un pas d'échantillonnage $\delta\Omega$ considéré comme suffisamment fin pour bien décrire la fonction. Pour cela, revenons à l'expression de $\tilde{H}(\vec{\Omega})$:

$$\tilde{H}(\vec{\Omega}) = \frac{D^*(\vec{\Omega})}{|D(\vec{\Omega})|^2 + \epsilon} \quad (15)$$

La FTM de défaut \tilde{D} tend vers zéro à l'infini, et il en est de même de \tilde{H} . Pour trouver Ω_M , fixons un minimum m en-dessous duquel \tilde{H} sera considérée comme nulle. Il est raisonnable de considérer que m est inférieur à 1, c'est-à-dire que la FTM de traitement n'amplifie pas la fréquence correspondante. Que doit alors valoir \tilde{D} ? La figure 16 rappelle l'allure de la fonction de $\tilde{H}(\tilde{D})$.

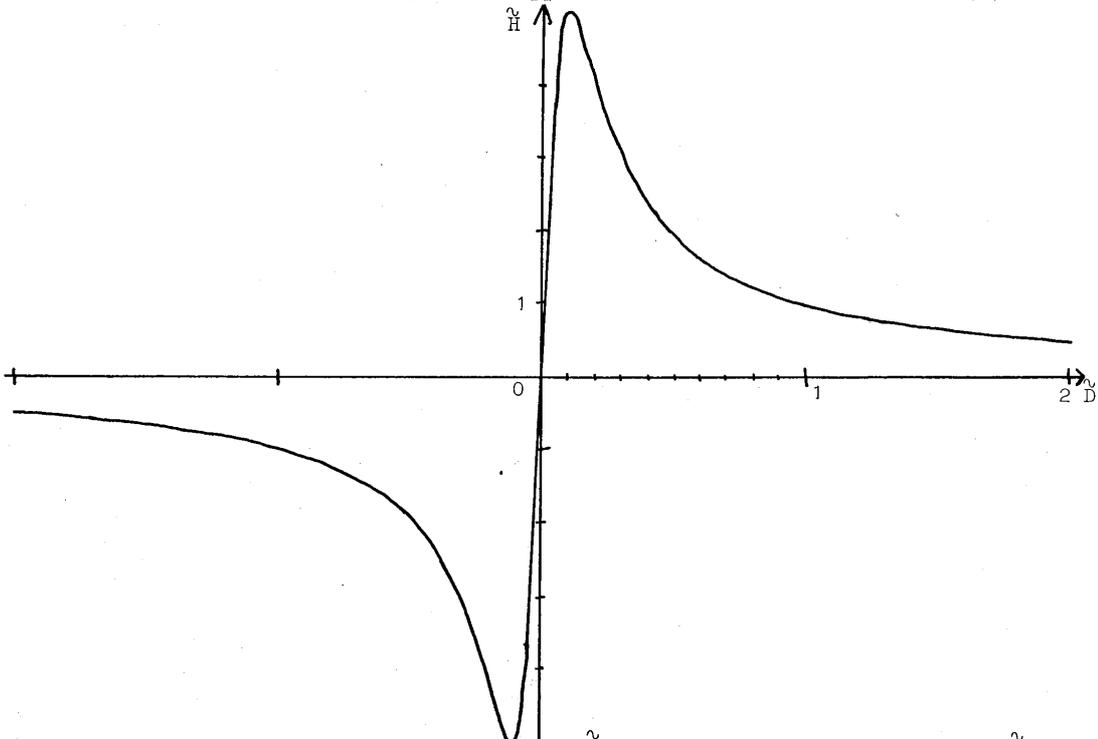


Figure 16. Valeur de la FTM de filtrage \tilde{H} en fonction de la FTM de défaut \tilde{D} au même point.

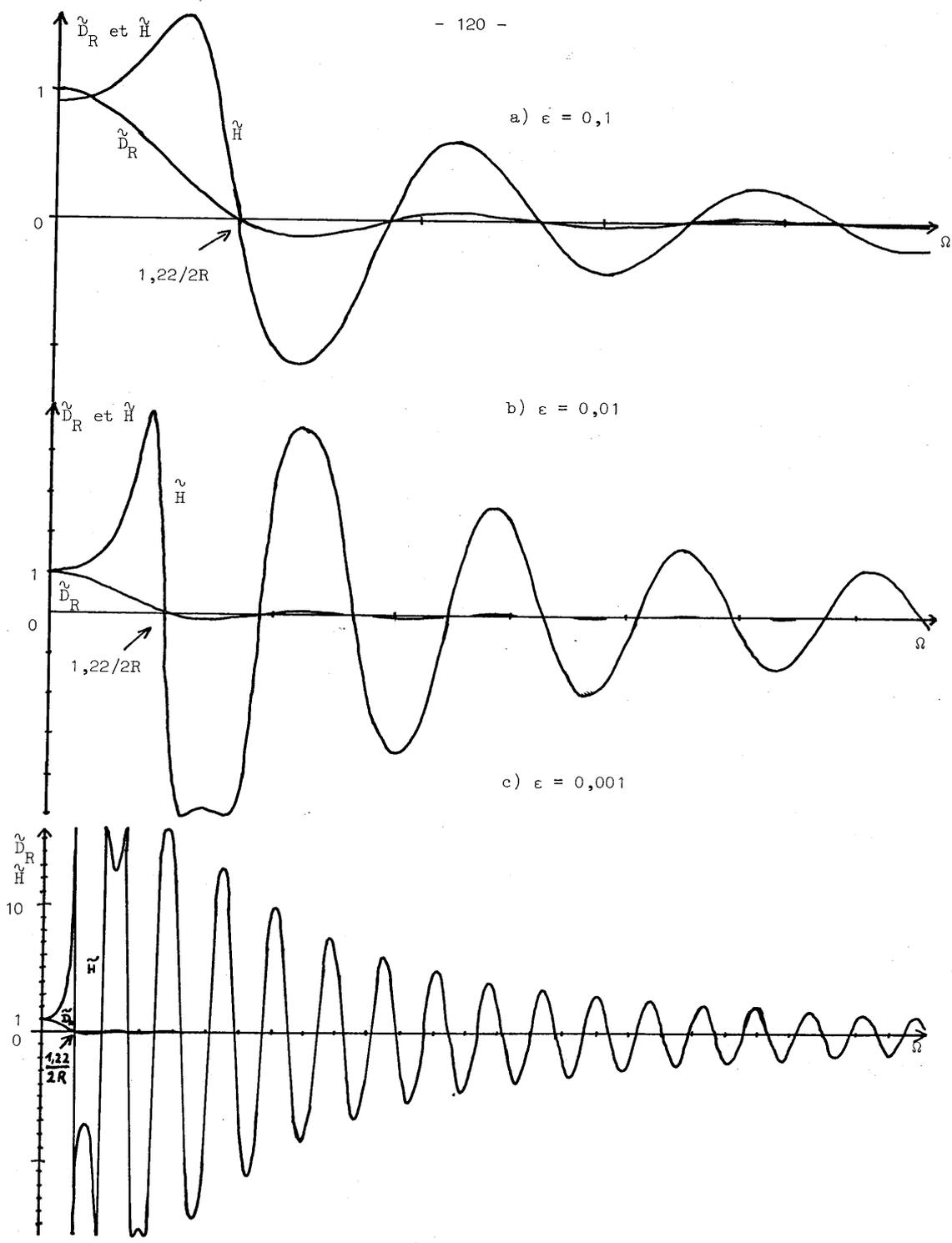


Figure 15. FTM du défaut \tilde{D}_R et du pseudo-filtre de Wiener \tilde{H} pour trois valeurs de la constante ϵ , paramètre de bruit du pseudo-filtre de Wiener

De l'équation

$$m = \frac{\tilde{D}}{|\tilde{D}|^2 + \epsilon} \quad (16)$$

avec m et ϵ inférieurs à 1, nous tirons

$$\tilde{D} \approx m \epsilon \quad (17)$$

La fonction \tilde{D} est, dans notre cas, la transformée de Fourier d'un disque, dont le comportement à l'infini est donné par le développement asymptotique de la fonction J_1 :

$$\tilde{D}(\vec{\Omega}) = \frac{2J_1(2\pi\Omega R)}{2\pi\Omega R} \underset{\Omega \rightarrow +\infty}{\sim} 2 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\cos(2\pi\Omega R - 3\pi/4)}{(2\pi\Omega R)^{3/2}} \quad (18)$$

L'enveloppe de cette fonction tombe en-dessous du seuil $m \epsilon$ lorsque Ω atteint la valeur Ω_M que nous cherchons :

$$\Omega_M = \frac{1}{R(\pi^2 m \epsilon)^{2/3}} \quad (19)$$

Quant au pas $\delta\Omega$, nous le déterminerons en observant l'allure des figures 15 et 16. La fonction $\tilde{H}(\vec{D})$ atteint son maximum $\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$ lorsque \tilde{D} vaut $\sqrt{\epsilon}$ et est une fonction impaire de \tilde{D} . La variation la plus rapide de la FTM de traitement $\tilde{H}(\vec{\Omega})$ a lieu au voisinage du premier zéro de $\tilde{D}(\vec{\Omega})$: c'est là que \tilde{D} passe le plus rapidement de la valeur $+\sqrt{\epsilon}$ à la valeur $-\sqrt{\epsilon}$; ce passage se fait sur une distance qui doit absolument être bien résolue pour que la fonction \tilde{H} soit bien représentée. Posons que cette distance vaut $k \delta\Omega$, où k est un nombre de l'ordre de quelques unités : 2 ou 4 est un ordre de grandeur correct.

Soient Ω_1 , Ω_0 et $\Omega_1 + k\delta\Omega$ les valeurs de Ω où \tilde{D} passe pour la première fois par les valeurs $\sqrt{\epsilon}$, 0, $-\sqrt{\epsilon}$. ϵ étant assez petit, nous obtiendrons un ordre de grandeur de $k\delta\Omega$ par un développement limité de \tilde{D} au premier ordre au voisinage de son premier zéro :

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\vec{\Omega}_1) &= \sqrt{\epsilon} = (\Omega_1 - \Omega_0) \frac{d}{d\Omega} \left[\frac{2J_1(2\pi\Omega R)}{2\pi\Omega R} \right] \quad (\Omega = \Omega_0) \\ \tilde{D}(\vec{\Omega}_1 + k\delta\Omega) &= -\sqrt{\epsilon} = (\Omega_1 + k\delta\Omega - \Omega_0) \frac{d}{d\Omega} \left[\frac{2J_1(2\pi\Omega R)}{2\pi\Omega R} \right] \quad (\Omega = \Omega_0) \end{aligned} \quad (20)$$

Après soustraction et en utilisant la formule de dérivation des fonctions de Bessel [94], il vient :

$$\delta\Omega = \frac{-\lambda_1 \sqrt{\epsilon}}{2\pi Rk J_0(\lambda_1)} \quad (21)$$

λ_1 est le premier zéro non nul de J_1 .

Le nombre de points à utiliser sur le rayon de la fonction $\tilde{H}(\vec{\Omega})$ est donc de l'ordre de :

$$N = \frac{\Omega_M}{\delta\Omega} = \frac{-2k J_0(\lambda_1)}{\pi \frac{1/3}{m} \frac{2/3}{\epsilon} \frac{7/6}{\lambda_1}} \approx 0,143 \frac{k}{m \frac{2/3}{\epsilon} \frac{7/6}}{\quad} \quad (22)$$

Le tableau 1 donne quelques valeurs numériques ; il faut rappeler que l'hologramme synthétique sera échantillonné en deux dimensions entre Ω_M et Ω_M et contiendra donc $4N^2$ points . On constate que l'évolution de ce dernier nombre avec ϵ est extrêmement rapide , et que la synthèse d'un filtre correspondant à $\epsilon = 0,001$ est hors de question .

N	$\epsilon = 0,1$		$\epsilon = 0,01$		$\epsilon = 0,001$	
	k = 2	k = 4	k = 2	k = 4	k = 2	k = 4
m = 0,1	20	40	300	600	4200	8400
m = 0,5	7	15	100	200	1500	3000

Tableau 1 - Nombre N de points à prendre sur le rayon de la réponse percussionnelle de traitement .

La dynamique nécessaire pour la synthèse de la FTM correctrice résulte immédiatement des valeurs choisies : le minimum pour \hat{H} étant m et le maximum $\frac{1}{2\sqrt{\epsilon}}$, la dynamique D doit être au minimum égale à

$$D_{\min} = \frac{1}{2m\sqrt{\epsilon}} \quad (23)$$

Il s'agit bien d'une valeur minimale , car au voisinage des zéros de \hat{D} , la fonction \hat{H} prend des valeurs inférieures à m qu'il peut être utile de bien représenter .

La figure 17 montre les trois réponses percussionnelles correctrices $H(\vec{r})$, transformées de Fourier des FTM de la figure 15 . Leur calcul a été fait en tenant compte , dans la mesure où nos moyens de calcul le permettaient , des considérations qui précèdent sur les nombres N et $\delta\Omega$.

3.2) Cas particulier où l'objet a un spectre à support borné

La scène originale $A(\vec{r})$ que nous nous proposons de retrouver a , nous l'avons vu , un spectre borné par la pupille qui limite le masque H de la figure 3 : les valeurs numériques indiquées dans le paragraphe 1.2 montrent que la fréquence spatiale dans $A(\vec{r})$ est bornée en module à

$$\Omega_B = \frac{\text{diamètre de la pupille}}{\lambda \times \text{distance de H à } P_2} \approx 41 \text{ mm}^{-1} \quad (24)$$

Puisqu'il n'y a pas d'information utile aux fréquences supérieures à Ω_B , il est nuisible de conserver ces fréquences dans la fonction de filtrage . En particulier si Ω_M est supérieur à Ω_B , toutes les fréquences comprises entre Ω_B et Ω_M ne servent qu'à ajouter du bruit à l'image traitée et à augmenter le nombre N, donc la difficulté de synthèse du filtre.

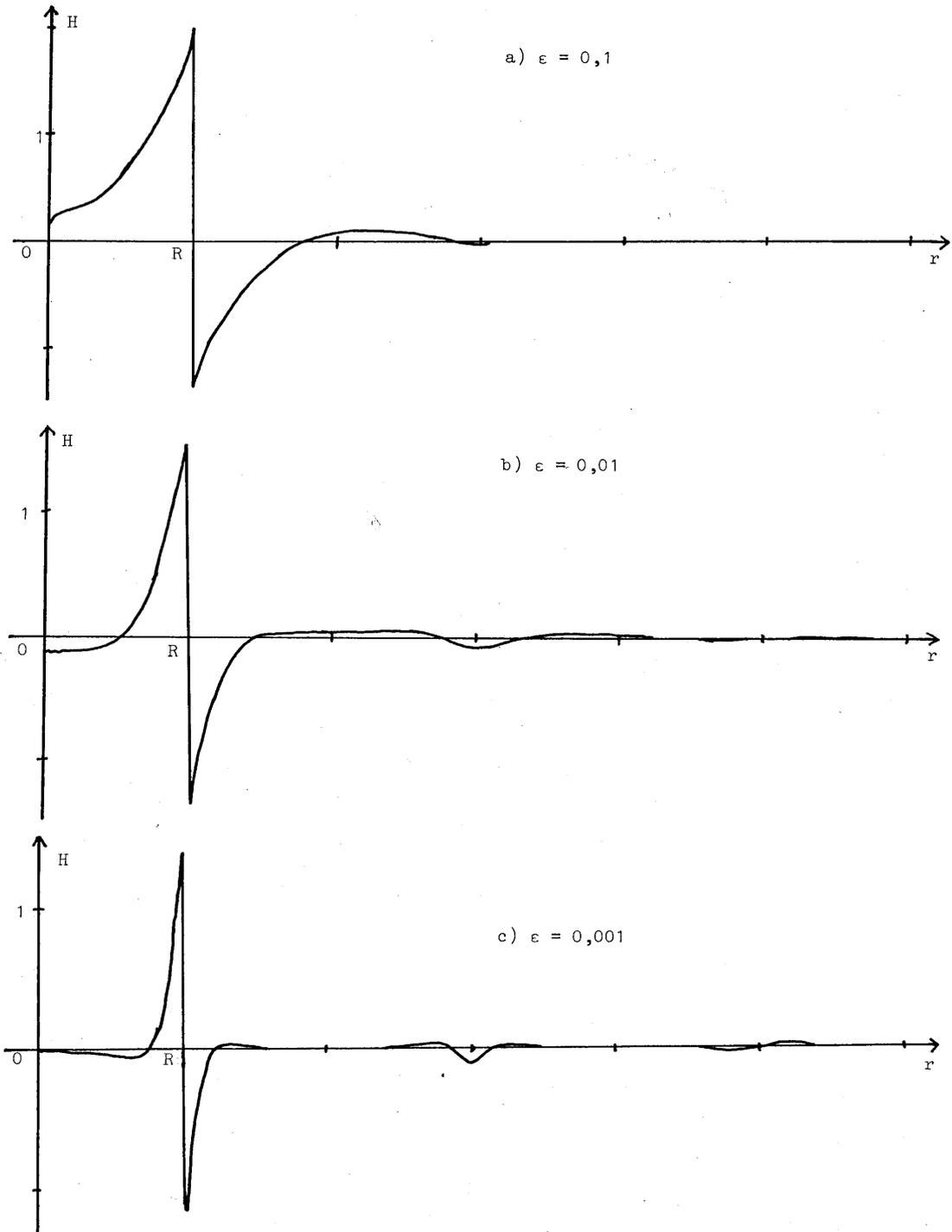


Figure 17. Réponses percussives correctrices de déconvolution partielle $H(r)$ pour trois valeurs du paramètre de bruit ϵ du pseudo-filtre de Wiener. L'unité en ordonnée est arbitraire.

Dans le cas des objets à spectre borné , au lieu de choisir pour $\epsilon(\vec{\Omega})$ une valeur constante ϵ , il convient donc de prendre

$$\epsilon(\vec{\Omega}) = \begin{cases} \epsilon & \text{pour } |\vec{\Omega}| \leq \Omega_B \\ 0 & \text{pour } |\vec{\Omega}| > \Omega_B \end{cases} \quad (25)$$

Le nombre de points prend dès lors une autre expression :

$$N_B = \frac{\Omega_B}{\delta\Omega} = \frac{-2\pi Rk J_0(\lambda_1)\Omega_B}{\lambda_1 \sqrt{\epsilon}} = 0,66 \frac{kR\Omega_B}{\sqrt{\epsilon}} \quad (26)$$

Contrairement à l'expression précédente , celle-ci dépend du rayon parce que la fréquence de coupure Ω_B n'est pas liée à lui , alors que Ω_M l'est .

Le tableau 2 indique quelques valeurs numériques de N_B avec les paramètres R et Ω_B de notre cas . Les valeurs encadrées correspondent aux résultats expérimentaux qui seront présentés aux chapitres III et IV .

N_B	$\epsilon = 0,1$		$\epsilon = 0,01$		$\epsilon = 0,001$	
	k = 2	k = 4	k = 2	k = 4	k = 2	k = 4
R = 100 μm	17	35	50	110	170	350
R = 300 μm	50	100	160	320	500	1024

Tableau 2 - Nombre de points à prendre sur le rayon de la réponse percussionnelle de traitement pour un objet particulier à spectre borné.

La comparaison entre les tableaux 1 et 2 montre que N_B est plus grand que N pour $\epsilon = 0,1$, du même ordre pour $\epsilon = 0,01$ et plus petit pour $\epsilon = 0,001$. Mais dans le tableau 1 intervient le paramètre arbitraire m , valeur de la FTM de traitement à la fréquence Ω_M : on peut , dans tous les cas , trouver une valeur de m pour laquelle N et N_B sont égaux . Il convient donc simplement de conclure de cette comparaison qu'en présence d'un objet à bande limitée à $\Omega_B = 41 \text{ mm}^{-1}$, il est nuisible de choisir une valeur de m aussi faible que 0,1 ou 0,5 pour $\epsilon = 0,001$ alors qu'au contraire pour $\epsilon = 0,1$ une valeur plus faible serait acceptable .

3.3) Essai de généralisation : cas d'une réponse percussionnelle de défaut D quelconque :

Les calculs des § 3.1 et 3.2 ont été faits dans le cas particulier d'un "défaut de mise au point géométrique" $D_R(\vec{r})$. Que peut-on dire , plus généralement , du nombre de points N à prendre sur le rayon de la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ d'un défaut $D(\vec{r})$ quelconque , mais toutefois à symétrie de révolution (et pour un objet quelconque) ? Nous avons obtenu les valeurs Ω_M et

$\delta\Omega$ déterminant la bande utile et la résolution en fréquence du filtre $\hat{H}(\vec{\Omega})$ en considérant d'une part sa décroissance à l'infini et d'autre part la région de ses plus fortes variations. Cherchons à généraliser les expressions (19) et (21) donnant Ω_M et $\delta\Omega$. Nous écrirons :

$$\hat{D}_{env}(\Omega_M) = m \epsilon \quad (27)$$

$$\text{et } 2\sqrt{\epsilon} = k \delta\Omega \hat{D}'_{max} \quad (28)$$

où \hat{D}_{env} est l'enveloppe de la FTM de défaut \hat{D} et \hat{D}'_{max} le maximum de sa pente, supposé atteint au voisinage d'un zéro de \hat{D} . Le nombre de points d'échantillonnage sur le rayon de la FTM de traitement \hat{H} est alors :

$$N = \frac{k \hat{D}'_{max} \hat{D}_{env}^{-1}(m\epsilon)}{2\sqrt{\epsilon}} \quad (29)$$

où \hat{D}_{env}^{-1} représente la fonction inverse de \hat{D}_{env} .

Deux exemples pris parmi les plus courants nous montreront que cette expression ne doit malheureusement être utilisée qu'avec grande prudence.

Considérons d'abord la FTM de défaut :

$$\hat{D}(\vec{\Omega}) = \begin{cases} \exp(i\alpha\Omega^2 + i\beta\Omega^4) & \text{dans la pupille} \\ 0 & \text{en dehors de la pupille} \end{cases} \quad (30)$$

qui représente un défaut de mise au point associé à une aberration sphérique, en éclairage cohérent. Cette FTM est le lot commun des spécialistes de microscopie électronique et constitue à ce titre un cas important. Le filtre de Wiener correspondant s'écrit, dans la pupille

$$\hat{H}(\vec{\Omega}) = \frac{\exp(-i\alpha\Omega^2 - i\beta\Omega^4)}{1+\epsilon} \quad (31)$$

En particulier, si ϵ est pris constant, \hat{H} est de module constant ! Dans ce cas, le paramètre m perd tout son sens, le seul choix raisonnable pour la fréquence maximale Ω_M est donc la fréquence de coupure déterminée par l'ouverture de la pupille. Par contre, il est possible dans ce cas de déterminer $\delta\Omega$ en utilisant le maximum \hat{D}'_{max} . En général, et notamment si α et β sont de même signe, ce maximum est atteint au bord de la pupille.

Un autre exemple est celui de la FTM de défaut gaussienne :

$$\hat{D}(\vec{\Omega}) = \exp(-\alpha\Omega^2) \quad (32)$$

qui correspond à une fonction $D(\vec{r})$ en forme de gaussienne. On considère parfois que ce défaut entache les clichés astronomiques enregistrés pendant un temps de pause long devant le temps caractéristique de la turbulence atmosphérique. Toutefois, certaines expériences ne confirment pas la validité de cette hypothèse [95]. La figure 18 montre cette fonction \hat{D} et les FTM correctrices associées pour $\epsilon = 0,1$, $0,01$ et $0,001$. Cette fois, il est possible de fixer la fréquence

de coupure Ω_M à partir du paramètre m , mais le maximum \tilde{D}'_{\max} , obtenu au point d'inflexion de la gaussienne :

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \quad (33)$$

ne correspond plus à la région où les variations de \tilde{H} sont les plus fortes et l'expression (29) n'a plus de sens.

On voit donc que chaque défaut particulier nécessite une étude adaptée pour déterminer N .

3.4) Remarque sur les calculs numériques de ce chapitre

Les figures 2, 11, 12 et 17 ont été obtenues par transformation de Fourier sur ordinateur. Il s'agit de fonctions bidimensionnelles à symétrie de révolution dont l'échantillonnage a nécessité entre 100 et 1000 échantillons sur le rayon. Avec l'algorithme de transformée de Fourier rapide bidimensionnel, le temps de calcul aurait été long, mais surtout la taille de mémoire d'ordinateur nécessaire si grande que nous aurions dû renoncer à ces calculs. Fort heureusement, on peut prendre en considération le fait que la transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction à symétrie de révolution se ramène à la transformée de Hankel unidimensionnelle de la méridienne de cette fonction. A la suite d'une

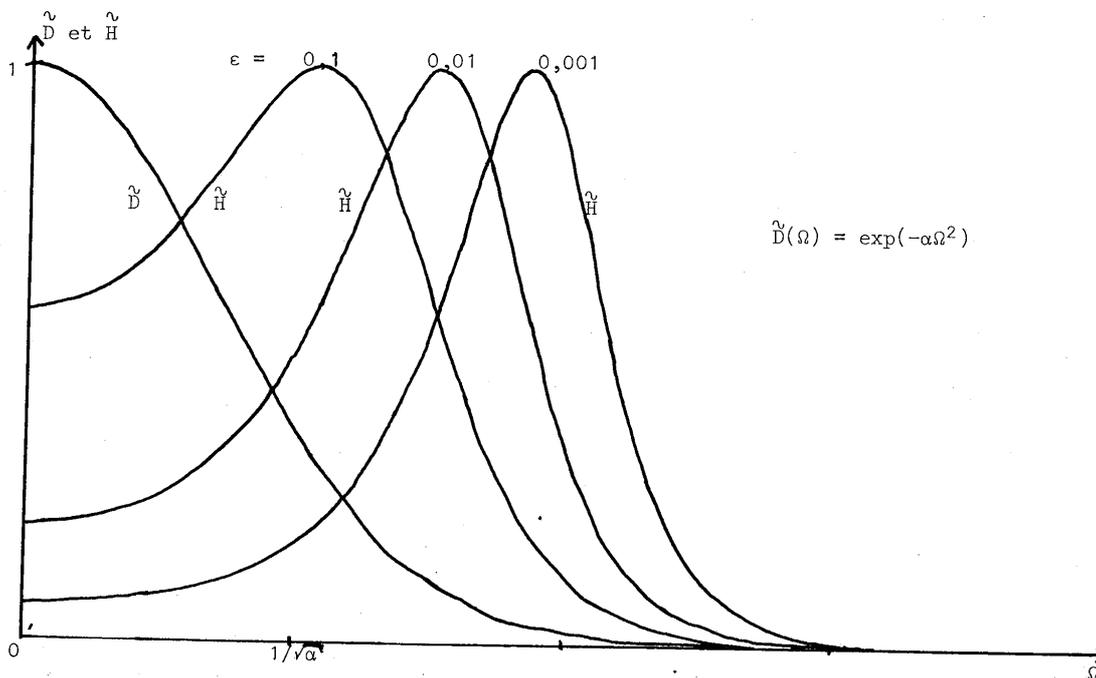


Figure 18. FTM de défaut \tilde{D} et FTM correctrices \tilde{H} par pseudo-filtrage de Wiener pour un défaut gaussien (toutes les FTM tracées ont été normalisées à 1).

idée de J. BRUNOL , un théorème d'échantillonnage pour les fonctions à symétrie de révolution a été utilisé dans notre laboratoire pour mettre au point un algorithme commode de transformation de Hankel . Le nombre et la position de points calculés sont arbitraires , contrairement à ce qui se passe en transformée de Fourier rapide . Nous avons publié le principe de cette méthode en collaboration avec J. BRUNOL , et cet article est inséré en annexe IV . Il présente l'algorithme et donne les temps de calcul sur les ordinateurs du CIRCE . Nous avons également utilisé cette méthode sur les mini-ordinateurs HP 9830 (jusqu'à 128 points d'échantillonnage ; temps de calcul 6 s par point calculé de la transformée de Hankel) et HP 9845 (jusqu'à 1024 points échantillonnés ; 60 s par point calculé) .

3.5) Partie positive et partie négative de la réponse percussionnelle de traitement

L'éclairage incohérent impose de séparer la fonction $H(\vec{r})$ en deux fonctions réelles non négatives $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ dont $H(\vec{r})$ est la différence . Une décomposition possible vient immédiatement à l'esprit (voir figure 19) :

$$H_+(\vec{r}) = \begin{cases} H(\vec{r}) & \text{si } H(\vec{r}) \geq 0 \\ 0 & \text{si } H(\vec{r}) < 0 \end{cases}$$

$$= 1/2(H(\vec{r}) + |H(\vec{r})|)$$
(34)

$$H_-(\vec{r}) = \begin{cases} -H(\vec{r}) & \text{si } H(\vec{r}) < 0 \\ 0 & \text{si } H(\vec{r}) \geq 0 \end{cases}$$

$$= 1/2(-H(\vec{r}) + |H(\vec{r})|)$$

mais tout couple (H_+ , H_-) obtenu à partir du couple de l'Equation (34) en ajoutant aux deux fonctions la même fonction de \vec{r} non négative arbitraire convient également . Quel est le meilleur choix possible ?

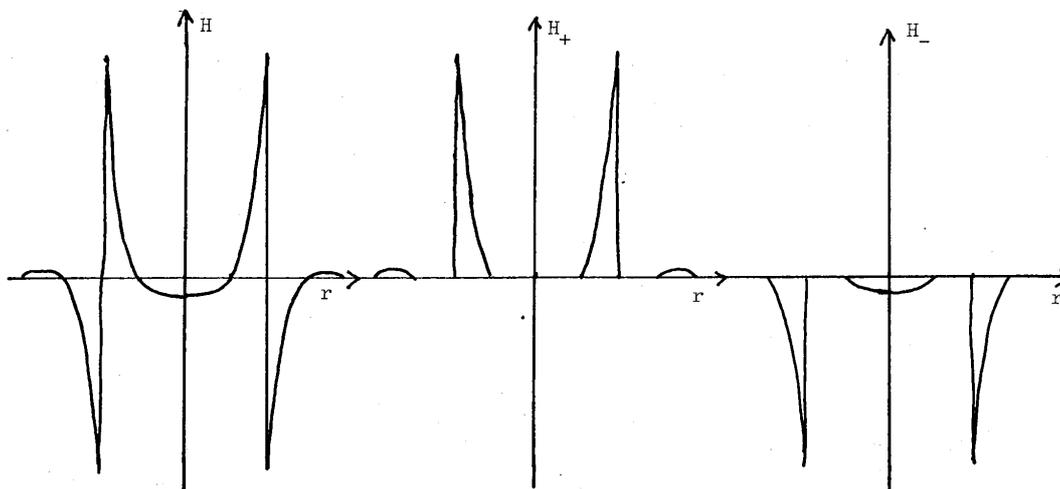


Figure 19. La décomposition la plus simple de $H(\vec{r})$ en $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$.

En coupant la fonction H en chacun de ses zéros conformément à l'Equation (34) , on fait apparaître dans les dérivées des fonctions H_+ et H_- des discontinuités qui induisent des composantes de hautes fréquences spatiales dans leur spectre : ce phénomène ne risque-t-il de nous obliger à augmenter le nombre déjà élevé , d'échantillons à calculer dans les hologrammes synthétiques ? En fait , l'augmentation de bande est rigoureusement la même pour H_+ et pour H_- et disparaît lorsque la soustraction est effectuée . Si nous en tenons compte , les hautes fréquences de H_+ et celles de H_- se compenseront lors de la soustraction : il est donc inutile de changer la valeur de N déterminée plus haut pour tenir compte de la discontinuité apportée par la séparation de H_+ et H_- conformément à l'Equation (34) .

Cette difficulté écartée , le choix de l'Equation (34) semble le meilleur , comme l'ont souligné LOHMANN et RHODES {50} , en raison de la faible différence entre les quantités à soustraire :

$$\begin{aligned} I_+(\vec{r}) &= O(\vec{r}) * H_+(\vec{r}) \\ \text{et } I_-(\vec{r}) &= O(\vec{r}) * H_-(\vec{r}) . \end{aligned} \quad (35)$$

Considérons en effet le rapport

$$\rho_0 = \frac{\int I_+(\vec{r}) d\vec{r}}{\int I_-(\vec{r}) d\vec{r}} = \frac{\int H_+(\vec{r}) d\vec{r}}{\int H_-(\vec{r}) d\vec{r}} , \quad (36)$$

Plus il est voisin de 1 , et plus les quantités à soustraire sont voisines . Le tableau 3 donne les valeurs numériques de ρ_0 correspondant aux fonctions H_+ et H_- de l'Equation (34) pour les trois valeurs de ϵ déjà considérées plus haut et dans le cas du défaut $D_R(\vec{r})$ qui nous sert d'exemple .

ϵ	ρ_0
0,1	1,28
0,01	1,032
0,001	1 à 10^{-4} près

Tableau 3 - Rapport des intégrales de H_+ et H_-

On constate que ρ_0 est voisin de 1 et que la précision sur la soustraction risque d'être faible . Certes , les intégrales de I_+ et I_- peuvent être très voisines alors que les différences locales entre ces deux fonctions peuvent être importantes ; sans cet argument , le tableau 3 risquerait de nous dissuader de continuer ce travail . Mais , en faisant pour H_+ et H_- un choix autre que celui de l'Equation (34) , c'est-à-dire en leur ajoutant une fonction non négative , on ne peut que rendre le rapport ρ_0 encore plus proche de 1 , en augmentant en chaque point $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ d'une même quantité : la précision du résultat ne peut qu'en souffrir . Nous choisissons donc les fonctions H_+ et H_- de l'Equation (34) et désormais les notations $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ désigneront respectivement la partie positive et l'opposé de la partie négative de la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$.

APPENDICE : EXEMPLE DE CALCUL DE $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$, SPECTRE DE WIENER DE L'OBJET.

Nous calculons ici $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$ dans un cas simple : l'onde synthétisée $a_1(\vec{r})$ est de module constant a_1 , de phase aléatoire, uniformément répartie de 0 à 2π , et de corrélation et moments d'ordre 4 microscopiques par rapport à la largeur de la réponse percussionnelle en amplitude $d_H(\vec{r})$ de la pupille limitant l'hologramme synthétique. En supposant ce dernier parfait, la scène originale a pour intensité :

$$A(\vec{r}) = |a_1(\vec{r}) * d_H(\vec{r})|^2 \quad (37)$$

Nous avons à calculer la transformée de Fourier $\check{\phi}_A(\vec{\Omega})$ de

$$\begin{aligned} \phi_A(\vec{r}) &= \langle A(\vec{r}_0) A^*(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle \\ &= \iiint \langle a_A(\vec{r}_1) a_1^*(\vec{r}_2) a_1(\vec{r}_3) a_1^*(\vec{r}_4) \rangle \\ &\quad d_H(\vec{r} - \vec{r}_1) d_H^*(\vec{r} - \vec{r}_2) d_H(\vec{r} + \vec{r}_3) d_H^*(\vec{r} + \vec{r}_4) \\ &\quad d\vec{r}_1 d\vec{r}_2 d\vec{r}_3 d\vec{r}_4 \end{aligned} \quad (38)$$

D'après nos hypothèses, le moment d'ordre 4 se réduit à

$$\begin{aligned} &a_1^4 [S_1^3 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_3) \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) \\ &+ S_2^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \delta(\vec{r}_3 - \vec{r}_4) + S_2^2 \delta(\vec{r}_1 - \vec{r}_4) \delta(\vec{r}_3 - \vec{r}_2)] \end{aligned}$$

où S_1 et S_2 sont des constantes homogènes à des aires et dépendant des statistiques de la phase aléatoire. D'où :

$$\begin{aligned} \phi_A(\vec{r}) &= a_1^4 [S_1^3 \int |d_H(\vec{r})|^2 |d_H(\vec{r} + \vec{r}_0)|^2 d\vec{r} \\ &+ S_2^2 (\int |d_H(\vec{r})|^2 d\vec{r})^2 + S_2^2 \int |d_H(\vec{r}) d_H^*(\vec{r} + \vec{r}_0)|^2 d\vec{r}] \end{aligned} \quad (39)$$

Le calcul de la transformée de Fourier aboutit à

$$\check{\phi}_A(\vec{\Omega}) = a_1^4 [S_1^3 \Gamma^2(\vec{\Omega}) + S_2^2 \check{d}_H(\vec{\Omega}) + S_2^2 \Sigma^2 \delta^2(\vec{\Omega})] \quad (40)$$

Dans cette dernière expression apparaissent la fonction $\check{d}_H(\vec{\Omega})$ qui représente la pupille de l'hologramme et sa fonction d'autocorrélation $\Gamma(\vec{\Omega})$, qui limite le support du spectre $\check{\phi}_A$. La distribution de Dirac dans l'Equation (40) représente la composante continue dans l'intensité $A(\vec{r})$, quantité réelle non négative ; on pourrait s'affranchir de ce δ en prenant en compte la taille finie de la scène $A(\vec{r})$.

L'Equation (40), complétée par la connaissance du spectre de bruit $\phi_N(\vec{\Omega})$ (voir Equation 13), permet de calculer la fonction $\epsilon(\vec{\Omega})$ la mieux adaptée à l'expérience réalisée.

CHAPITRE II - HOLOGRAPHIE SYNTHETIQUE ET
OBTENTION DES HOLOGRAMMES DE FILTRAGE

L'holographie synthétique est initialement intervenue dans notre travail comme technique permettant d'obtenir les fonctions H_+ et H_- . Nous nous sommes alors penchés, avec l'aide efficace de J.P. HUGONIN, sur les principes de cette méthode. Une amélioration de la rigueur du "codage" de l'amplitude complexe a ainsi été conçue, puis mise en pratique. Par ailleurs, ayant écrit une bibliothèque de programmes pour la synthèse d'hologrammes, nous avons eu l'occasion de l'utiliser pour diverses applications sortant du cadre initialement prévu. Le présent chapitre est donc plus étoffé qu'il ne serait nécessaire pour l'étude de notre exemple de déconvolution approchée.

Nous commencerons par analyser la théorie du codage de l'amplitude complexe dans les hologrammes synthétiques : hologrammes à franges, hologrammes échantillonnés. L'examen critique de la méthode de Lohmann nous conduira à proposer une amélioration, qui n'est d'ailleurs autre que la généralisation de la méthode de Fleuret. Notre méthode a l'avantage de fournir un codage rigoureux tout en faisant apparaître un degré de liberté utilisable pour optimiser l'efficacité ou simplifier le calcul et la réalisation de l'hologramme.

Dans un second paragraphe, nous décrirons les aspects pratiques de l'holographie synthétique : choix du traceur, optimisation des paramètres, photo-réduction, coût, qualité obtenue.

Nous nous pencherons ensuite sur les utilisations des hologrammes synthétiques que nous avons retenues, d'une part en collaboration avec d'autres chercheurs, d'autre part, pour notre expérience de traitement.

I - LE CODAGE DE L'AMPLITUDE COMPLEXE

1.1) Hologrammes à franges et hologrammes échantillonnés

Les hologrammes synthétisés par ordinateur (HSO) ont pour but de fournir, lorsqu'ils sont éclairés par un laser, une onde d'amplitude complexe donnée quelconque.

Nous nous restreindrons à l'étude des hologrammes d'amplitude pure, décrits par une transmittance en amplitude réelle non négative $\tilde{\tau}_A(\vec{\rho})$. Nous adoptons

cette notation par souci d'homogénéité avec les annexes 5 et 6 . $\vec{\rho}(\xi, \eta)$ désigne le point courant du plan de l'hologramme . Nous appellerons $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ l'amplitude complexe dans ce plan de l'onde à synthétiser : la transmittance $\tilde{\tau}_A(\vec{\rho})$ éclairée par une onde laser en général plane ou sphérique , $A \exp i\phi(\vec{r})$, doit fournir l'onde $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$. Or , l'amplitude lumineuse derrière l'hologramme s'écrit :

$$A \tilde{\tau}_A(\vec{\rho}) \exp i\phi(\vec{\rho})$$

Cette amplitude ne peut être identique à l'onde $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ que si $\phi(\vec{\rho})$ est précisément la phase de $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$: une telle exigence retirerait à l'holographie synthétique une grande partie de son intérêt . Il faut donc faire en sorte que dans l'onde émergent de l'HSO , exprimée ci-dessus , apparaisse parmi d'autres termes l'onde désirée $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$; la séparation entre les différents termes doit être réalisable pratiquement . C'est ainsi que se pose le problème appelé "codage" de l'amplitude complexe $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ par la fonction réelle non négative $\tau_A(\vec{\rho})$. Le contrôle des niveaux de gris étant , en général , malaisé et peu précis , on impose même souvent à la fonction $\tau_A(\vec{\rho})$ d'être binaire , c'est-à-dire de ne pouvoir prendre que deux valeurs distinctes . Deux catégories de procédés permettent le codage souhaité .

Dans la première catégorie , l'hologramme est considéré comme un interférogramme . Imaginons , en effet , que l'on fasse interférer l'onde désirée $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ avec une onde plane normale au plan de l'hologramme et d'amplitude A_0 . L'interférogramme résultant , d'intensité

$$I(\vec{\rho}) = |A_0 + \tilde{u}_A(\vec{\rho})|^2 \quad (41)$$

n'est autre que l'hologramme de $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ avec l'onde plane comme porteuse . Ainsi , si cet interférogramme est enregistré dans des conditions linéaires , puis éclairé à nouveau par l'onde A_0 , il apparaît trois termes diffractés , dont $A_0^* \tilde{u}_A(\vec{\rho})$.

Par conséquent , une transparence $\tilde{\tau}_A(\vec{\rho})$ proportionnelle à $I(\vec{\rho})$, produisant les franges d'interférences entre l'onde désirée et une onde porteuse est un HSO de l'onde $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$. Ce type d'HSO , que nous appellerons HSO à franges , a été proposé en 1965 par KOZMA et KELLY {96}; il avait fait l'objet de travaux précurseurs dès 1951 par ROGERS {97} . Il est aisé de généraliser son emploi à des porteuses planes inclinées ou sphériques , dont le choix permet , exactement comme en holographie naturelle , de séparer les trois termes diffractés : l'onde désirée , l'onde conjuguée et l'onde porteuse .

Les HSO à franges peuvent également être binaires : W.H. LEE {98} a montré que parmi les ordres diffractés , en nombre supérieur à trois , se trouve toujours $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$. Ces HSO ont plusieurs applications importantes : ils sont utilisés pour le contrôle des surfaces d'ondes asphériques {99 , 100} ; O.BRYNGDAHL et W.H. LEE ont introduit les défecteurs de faisceaux laser à HSO {101 , 102}, qui

sont également des HSO à franges . A l'occasion d'une étude réalisée dans notre laboratoire {103} , nous avons montré , en collaboration avec A. LEGARCON , que les performances de ces déflecteurs pour le balayage séquentiel se comparent avantageusement à ceux des déflecteurs acousto-optiques du commerce {104} .

Mais les HSO à franges présentent en pratique un inconvénient : leur synthèse nécessite le calcul de la fonction $I(\vec{\rho})$ en un nombre de points très élevé pour que les franges interférométriques soient fidèlement représentées . Sauf dans le cas où l'équation

$$I(\vec{\rho}) = \text{constante} \quad (42)$$

peut être résolue analytiquement , donnant ainsi l'équation des franges , la quantité de calculs nécessaire est énorme .

Nous en venons donc à la deuxième catégorie d'HSO : les HSO échantillonnés évitent l'écueil précédent en permettant la synthèse de l'onde $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ à partir d'un nombre limité d'échantillons

$$\tilde{u}_{mn} = u_A(m\delta\xi, n\delta\eta) \quad (43)$$

m, n entiers

où $\delta\xi$ et $\delta\eta$ sont les pas d'échantillonnage suivant ξ et η respectivement . Pour qu'une telle synthèse soit possible , il est cependant nécessaire que le théorème d'échantillonnage soit applicable , c'est-à-dire que l'onde $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ soit à bande spectrale limitée , au moins physiquement . Pour les fonctions à bande non limitée les HSO à franges sont les seuls possibles .

Nous considérons désormais le cas où la transformée de Fourier inverse de $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$, $u_A(\vec{r})$ est nulle ou négligeable en dehors d'un domaine rectangulaire . La fonction $\tilde{u}_A(\vec{\rho})$ peut alors être entièrement connue à partir de ses échantillons \tilde{u}_{mn} , à condition que l'échantillonnage soit assez fin . Ce cas est assez fréquent pour que de nombreux HSO puissent être synthétisés à partir des échantillons \tilde{u}_{mn} , notamment pour les applications des HSO au traitement d'images , qui nous intéressent plus particulièrement . Nous nous consacrerons maintenant à l'étude du codage de l'amplitude complexe dans les HSO échantillonnés .

Précisons les notations : considérons que l'HSO échantillonné est éclairé par une onde sphérique monochromatique de longueur d'onde λ convergeant à la distance d du plan de l'hologramme (figure 20) . Nous décrivons l'hologramme par la variable réduite $\vec{\Omega}(\mu, \nu)$:

$$\vec{\Omega} = \frac{\vec{\rho}}{\lambda d} \quad (44)$$

et nous utilisons à cet effet de nouvelles notations pour la transmittance en amplitude de l'HSO et pour l'onde à synthétiser :

$$\tilde{t}(\vec{\Omega}) = \tilde{t}_A(\vec{\rho}) \quad (45)$$

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}) = \tilde{u}_A(\vec{\rho}) \quad (46)$$

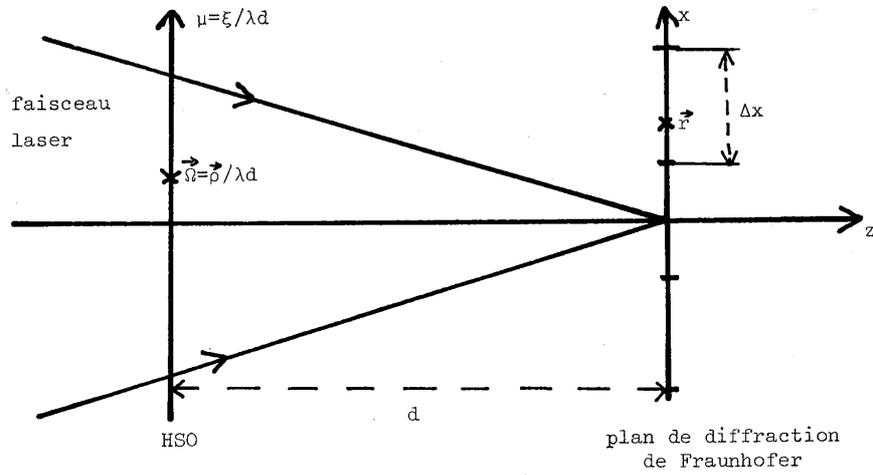


Figure 20. Diffraction de Fraunhofer par un HSO échantillonné.

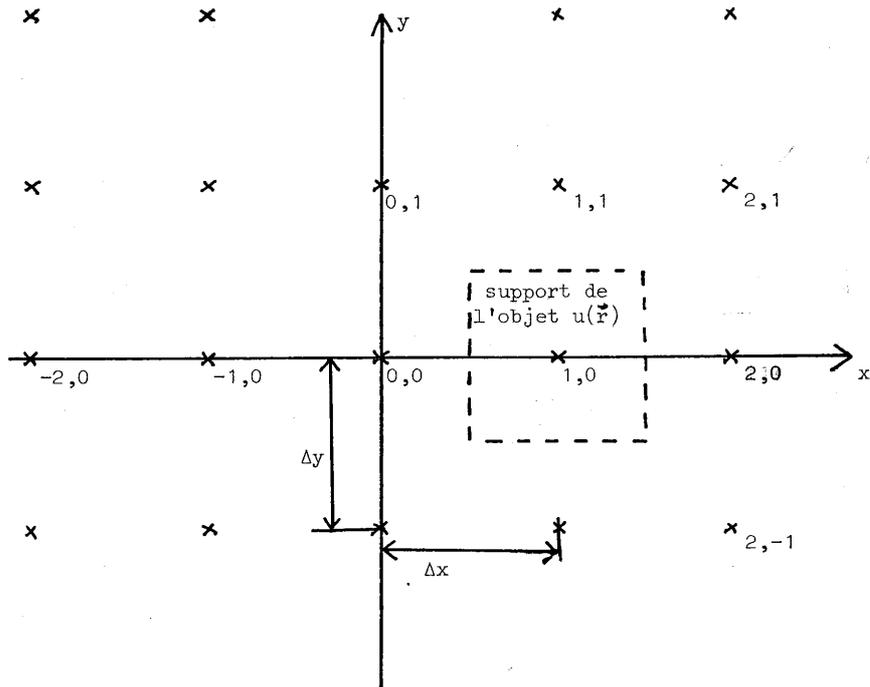


Figure 21. Ordres de diffraction dans le plan de diffraction de Fraunhofer d'un HSO échantillonné.

Dans le plan de diffraction de Fraunhofer , décrit par la variable $\vec{r}(x,y)$, apparaît en amplitude la transformée de Fourier $\tau(\vec{r})$ de $\tilde{u}(\vec{\Omega})$. Coder l'amplitude complexe , c'est alors choisir $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ de telle sorte que sa transformée de Fourier s'identifie à $u(\vec{r})$ dans le domaine où celle-là est non nulle . Mais cette fonction est à support borné de dimensions Δx , Δy . En dehors de ce support , la figure de diffraction de Fraunhofer de l'HSO peut être quelconque : c'est grâce à cette liberté qu'il existe des solutions au problème du codage de la fonction complexe $\tilde{u}(\vec{\Omega})$, à spectre à support borné , par la fonction réelle non négative - et même éventuellement binaire - $\tilde{r}(\vec{\Omega})$.

Pour illustrer les solutions que nous décrirons , nous présenterons les figures de diffraction de Fraunhofer correspondantes . Nous avons choisi pour $u(\vec{r})$ la fonction déjà présentée sur la figure 4 : il s'agit d'une fonction à support borné carré , présentée sous forme échantillonnée puisqu'elle servira de point de départ au calcul sur ordinateur . Elle est définie en 128×128 points et contient un carré de côté 32 points découpé en 8 secteurs de niveaux de gris différents , un triangle isocèle uniforme avec un point sombre au milieu de sa médiane principale , un cercle de rayon 16 points avec des secteurs permettant d'apprécier la résolution et quatre carrés de côté 2 points aux quatre coins permettant de juger de la qualité de l'onde $u(\vec{r})$ synthétique au bord du champ . Une grande partie du champ et notamment son centre a été laissée vide pour faire apparaître le bruit éventuel de l'HSO .

1.2) Cellules , ouvertures et efficacité de diffraction :

Les HSO échantillonnés font intervenir la valeur de l'onde synthétisée $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ uniquement en un certain nombre de points d'échantillonnage . Le pas d'échantillonnage critique est

$$\delta\mu = \frac{1}{\Delta x} , \quad \delta\nu = \frac{1}{\Delta y} . \quad (47)$$

Ces dimensions sont celles des cellules de l'HSO. Nous choisirons de centrer la cellule m, n au point $m \delta\mu, n \delta\nu$. Dans chaque cellule doit être calculée (au moins) une valeur échantillonnée de $\tilde{u}(\vec{\Omega})$, par exemple la valeur

$$\tilde{u}_{mm} = \tilde{u}(m \delta\mu, n \delta\nu) \quad (48)$$

au centre de la cellule.

L'échantillonnage $\delta\mu, \delta\nu$ définit dans le plan de l'HSO un réseau bidimensionnel. Dans le plan de diffraction de Fraunhofer, les ordres de ce réseau sont réduits à des points de coordonnées $m\Delta x, n\Delta y$ (voir figure 21). On voit que le support de la fonction $u(\vec{r})$ a pour dimensions les intervalles entre ordres. On pourra, lors du codage, choisir l'endroit où se situera la fonction $u(\vec{r})$ par rapport aux ordres. Une disposition courante est indiquée en pointillé sur la figure 21 : l'objet $u(\vec{r})$ y est centré sur l'ordre 1,0.

Tous les HSO échantillonnés, quel que soit le codage utilisé, utilisent un artifice pour obtenir l'amplitude lumineuse désirée : les codages ne sont rigoureux que si l'HSO se compose de fonctions de Dirac correctement positionnées dans la cellule. Par exemple, au point $\vec{\Omega}_A(\mu_A, \nu_A)$ l'HSO doit contenir le terme : $w \delta(\vec{\Omega} - \vec{\Omega}_A)$ (voir figure 22). Le coefficient w dépend de la valeur échantillonnée, par exemple \tilde{u}_{mn} , codée au point $\vec{\Omega}_A$. Or, bien sûr, la transmittance $\tilde{t}(\vec{\Omega})$ ne saurait être composée de véritables pics de Dirac. L'artifice consiste à

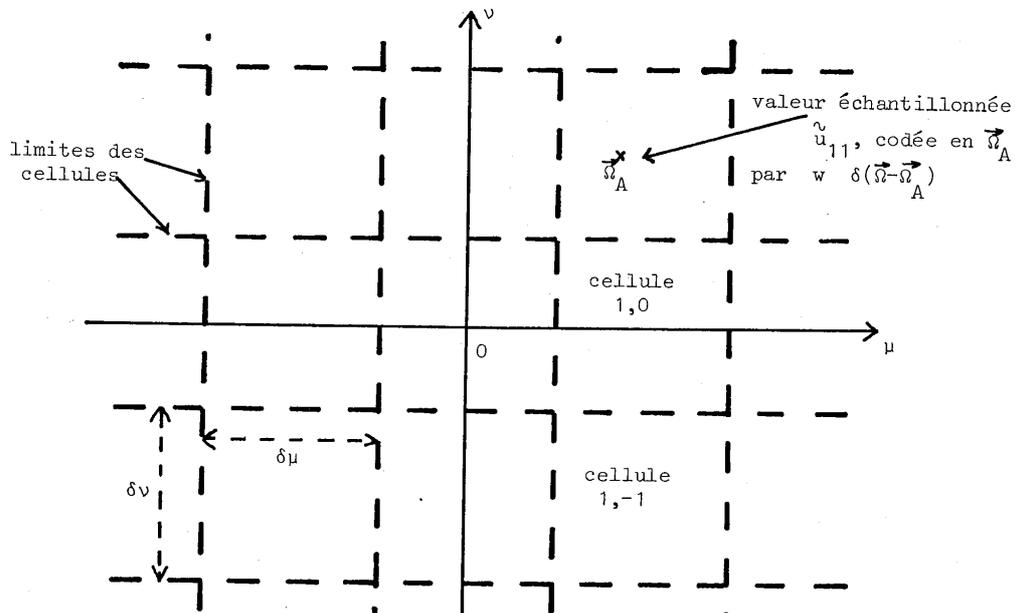


Figure 22. Cellules et valeurs échantillonnées dans l'HSO.

remplacer le pic en $\vec{\Omega}_A$ par une "ouverture" centrée en $\vec{\Omega}_A$ dont la taille et le niveau de gris peuvent être divers . Examinons l'effet du remplacement de ces pics par des ouvertures .

La forme d'ouverture la plus utilisée est probablement le rectangle transparent centré en $\vec{\Omega}_A$ et dont les dimensions suivant μ et ν , $\alpha\delta\mu$ et $\beta\delta\nu$ sont telles que l'aire $\alpha\beta\delta\mu\delta\nu$ soit proportionnelle à l'amplitude w du pic de Dirac idéal (voir figure 23) . Un calcul simple nous permettra d'apprécier la validité de ce procédé : si l'hologramme est éclairé par une onde sphérique convergente d'amplitude A_0 , la contribution de cette ouverture rectangulaire à l'amplitude diffractée dans le plan de diffraction de Fraunhofer est

$$f(\vec{r}) = -i A_0 \lambda d \exp(ikd + 2i\pi \frac{x^2 + y^2}{2\lambda d} - 2i\pi \vec{\Omega}_A \cdot \vec{r}) \quad (49)$$

$$\delta\mu\delta\nu \alpha\beta \operatorname{sinc} \alpha\delta\mu \operatorname{sinc} \beta\delta\nu$$

Il faut que cette amplitude soit proportionnelle à l'aire $\alpha\beta$ du rectangle , ce qui n'est vrai que si les termes $\operatorname{sinc} \alpha\delta\mu$ et $\operatorname{sinc} \beta\delta\nu$ n'apportent pas de perturbation . Pour cela il faut qu'ils soient ou bien pratiquement constants , ou bien compensés .

La compensation , déjà décrite par LOHMANN et PARIS [105] , peut être envisagée pour l'un des deux termes , par exemple $\operatorname{sinc} \alpha\delta\mu$. Il faut pour cela que toutes les ouvertures rectangulaires aient la même dimension $\alpha\delta\mu$ suivant x ; au lieu de calculer l'HSO de l'objet $u(\vec{r})$, on calculera celui de

$$u'(\vec{r}) = \frac{u(\vec{r})}{\operatorname{sinc} \alpha\delta\mu} \quad (50)$$

On voit que $u'(\vec{r})$ n'est défini que si $\operatorname{sinc} \alpha\delta\mu$ ne passe pas par la valeur 0 dans le support de largeur Δx de $u(\vec{x})$, ce qui impose que ce support soit compris entre deux points x_k successifs avec

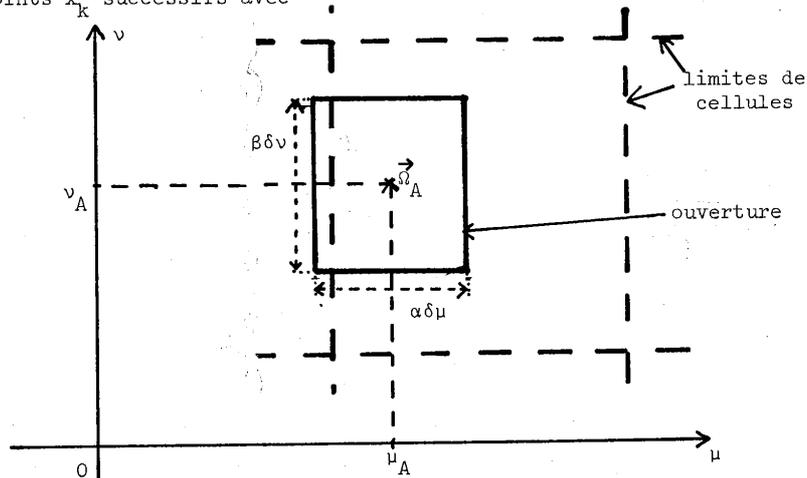


Figure 23. Chaque cellule d'HSO doit en principe contenir un ou plusieurs "pics" de Dirac, qui sont en pratique remplacés par des ouvertures rectangulaires.

$$x_k = \frac{k}{\alpha \delta \mu} = \frac{k \Delta x}{\alpha} \quad (51)$$

Notamment , il faut que

$$\alpha < 1 , \quad (52)$$

c'est-à-dire que la largeur des ouvertures soit inférieure à celle de la cellule . Mais comme il y a au moins une ouverture par cellule , cette dernière condition est nécessairement remplie .

Cependant , si toutes les ouvertures peuvent avoir la même dimension $\alpha \delta \mu$ suivant x , elles ne peuvent avoir la même dimension $\beta \delta \nu$ suivant y . Il faut donc imposer que le terme $\text{sinc } y \beta \delta \nu$ soit pratiquement constant lorsque β varie en fonction de l'amplitude w du pic de Dirac et y varie dans le support de l'objet $u(\vec{r})$. β atteint la valeur 0 lorsque w est nul , le sinus cardinal doit donc rester voisin de 1 . Il convient d'imposer à la valeur absolue de y de rester aussi petite que possible : en centrant l'objet $u(\vec{r})$ sur l'axe Ox (ordre de diffraction 0 suivant y) , $|y|$ est inférieur à $\frac{\Delta y}{2}$ et $|y| \beta \delta \nu$ est inférieur à $\frac{\beta}{2}$. Comme β est proportionnel à l'amplitude w du pic de Dirac , il reste à choisir la constante de proportionnalité pour que même pour la valeur maximale β_M de β , $\text{sinc } \frac{\beta}{2}$ reste suffisamment voisin de 1 . Par exemple , si on admet que β_M vaut 1 , le terme $\text{sinc } y \beta \delta \nu$ est toujours compris entre 0,6 et 1 . Comme en pratique , peu d'ouvertures s'approchent de la hauteur β_M , l'approximation est le plus souvent satisfaisante . Signalons toutefois qu'il est possible de s'en affranchir entièrement en déterminant les hauteurs β par un calcul itératif au lieu d'une simple proportionnalité à w . Ce procédé efficace est malheureusement très couteux en temps de calcul .

Dans cette discussion , nous n'avons pas mentionné une possibilité très simple pour limiter l'effet des deux sinus cardinaux : limiter α et β à des valeurs α_M et β_M très petites par rapport à 1 . La raison en est l'efficacité de l'HSO , c'est-à-dire l'énergie envoyée dans le support de l'objet $u(\vec{r})$. Soit , en effet , w_M la valeur maximale de l'amplitude des pics de Dirac représentés par les ouvertures . L'aire de l'ouverture étant proportionnelle à w , il vient :

$$\alpha \beta = \alpha_M \beta_M \frac{w}{w_M} \quad (53)$$

L'Equation (49) montre alors que l'énergie diffractée est proportionnelle à $(\alpha_M \beta_M)^2$, et on a donc intérêt à choisir α_M et β_M aussi grands que possible compte tenu d'une part , des termes parasites en sinus cardinal que nous venons de considérer , d'autre part de la nécessité d'éviter le chevauchement des ouvertures . Des ordres de grandeurs courants sont 1/4 à 1/2 pour α , constant , et 1 pour β_M ; on peut même souvent dépasser légèrement 1 .

L'Equation (53) fait également apparaître une autre propriété de l'efficacité : elle est inversement proportionnelle au carré de w_M . Nous aurons donc à veiller, dans la discussion des méthodes de codage qui suit, à rendre w_M aussi petit que possible.

Nous avons ainsi étudié l'influence du remplacement des pics de Dirac par des ouvertures. Nous simplifierons la description des méthodes de codage qui suit en considérant de HSO composés de pics de Dirac idéaux.

1.3) Les HSO échantillonnés de LOHMANN

1.3.1) Méthode du détour de phase

Ce sont LOHMANN et ses collaborateurs qui ont introduit, en 1966, les HSO échantillonnés, à l'occasion d'une expérience de reconnaissance des formes [106]. La première étude complète remonte à 1967 [105]. Le codage proposé alors pour l'amplitude complexe $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ a été baptisé méthode du détour de phase ; il repose sur la constatation que dans un réseau de pas $\delta\mu$, la différence de phase entre les ondes envoyées dans l'ordre 1 par deux points distants suivant μ de $\delta\mu$ est 2π ; plus généralement si on décale un point suivant μ d'une quantité ϵ , on modifie la phase de l'onde qu'il envoie dans la direction de l'ordre 1 de $2\pi\epsilon/\delta\mu$. Considérons alors un HSO comme un réseau bidimensionnel utilisé dans l'ordre (1,0) et déformé de façon à diffracter dans cet ordre, au lieu d'une onde plane, l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ à synthétiser. L'onde est échantillonnée aux points $\vec{\Omega}_{mn} (m\delta\mu, n\delta\nu)$, centres des cellules :

$$\tilde{u}_{mn} = \tilde{u}(\vec{\Omega}_{mn}) = |\tilde{u}_{mn}| \exp i\phi_{mn}. \quad (54)$$

L'amplitude complexe \tilde{u}_{mn} est codée au moyen d'un pic de Dirac d'amplitude

$$w = |\tilde{u}_{mn}| \quad (55)$$

situé au point $\vec{\Omega}_{Amn}$ décalé de $\vec{\Omega}_{mn}$ d'une quantité $\phi_{mn} \delta\mu/2\pi$ suivant l'axe des μ (voir figure 25 b). Le décalage effectue le codage de la phase ϕ_{mn} désirée dans la direction de l'ordre 1 suivant μ . Les hologrammes de LOHMANN que nous venons de décrire seront appelés "à phase échantillonnée". Nous entendons par cette expression que la phase codée ϕ_{mn} est celle de l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ au point d'échantillonnage $\vec{\Omega}_{mn}$. Ces hologrammes effectuent le codage avec une approximation qui apparaît clairement : la phase ainsi codée a bien la valeur désirée dans la direction de l'ordre 1 suivant μ , c'est-à-dire dans le plan de diffraction de Fraunhofer, sur la droite

$$x = \Delta x, \quad (56)$$

mais l'objet $u(\vec{r})$ ne se limite pas à cette droite. Il a un support de taille Δx , centré sur la droite précédente, et partout ailleurs que sur sa médiane, le

codage de phase n'est pas rigoureux . Il en résulte des erreurs dont nous avons fait l'analyse en collaboration avec J.P. HUGONIN (voir annexe 5) . La figure 24 montre une partie de la figure de diffraction d'un tel hologramme . On constate aisément que dans l'ordre (1,0) , la synthèse de l'objet $u(\vec{r})$ est correcte , mais qu'il s'y ajoute de la lumière parasite correspondant aux termes analysés dans l'annexe 5 : la lumière parasite est très faible au voisinage du centre de l'objet, mais très intense sur les bords . On reconnaît nettement une image affaiblie de l'ordre (-1,0) ramenée dans l'ordre utile par l'approximation dans le codage de la phase . Les quatre petits carrés dans les coins de l'objet se distinguent difficilement du bruit . L'objet $u(\vec{r})$ utilisé est pourvu d'une phase aléatoire qui explique la granularité observée et sur laquelle nous reviendrons .

BARTELT et FORSTER {107} ont fait remarquer que l'erreur systématique des hologrammes "à phase échantillonnée" peut être considérablement réduite en entourant l'objet $u(\vec{r})$ d'une bordure noire assez large . Malheureusement , le temps de calcul s'en trouve fort accru .

1.3.2) Les hologrammes de Lohmann à phase exacte

Les effets de l'approximation des hologrammes de Lohmann à phase échantillonnée étant assez gênants , BROWN et LOHMANN {108} ont proposé dès 1969 une modification au codage précédent .

Ces nouveaux HSO échantillonnés de LOHMANN , que nous appellerons "à phase exacte" , ne prennent pas en compte la valeur échantillonnée de l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ au

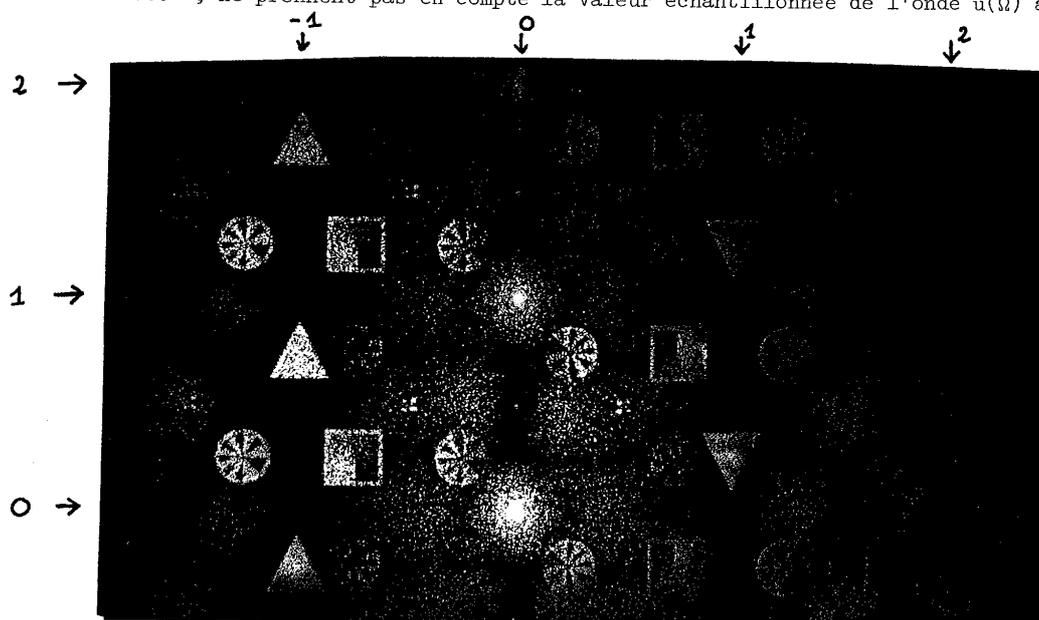


Figure 24. Portion de la figure de diffraction de Fraunhofer d'un HSO de Lohmann à phase échantillonnée. Les centres des ordres en x et en y sont fléchés . On remarquera le bruit dans l'ordre (1,0), sauf près du centre, et en particulier dans les coins. Ce bruit prend parfois l'allure de "fantômes".

centre $\vec{\Omega}_{mn}$ de chaque cellule mais au point $\vec{\Omega}_{Amn}$ où est placé le pic de Dirac de chaque cellule (en toute rigueur, il peut arriver qu'il y en ait plus d'un par cellule). BROWN et LOHMANN ont, en effet, eu l'intuition que l'erreur des hologrammes "à phase échantillonnée" était de coder $\tilde{u}(\vec{\Omega}_{mn})$ au point $\vec{\Omega}_{Amn}$, et qu'il valait mieux coder $\tilde{u}(\vec{\Omega}_{Amn})$ au point $\vec{\Omega}_{Amn}$. Nous justifions cette méthode dans l'annexe 5, où une généralisation du théorème d'échantillonnage permet de montrer que les hologrammes de LOHMANN "à phase exacte" effectuent un codage rigoureux de l'amplitude complexe $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ à condition toutefois d'y apporter une légère correction : l'amplitude du pic de Dirac ne doit pas être

$$w = \frac{|\tilde{u}(\vec{\Omega}_{Amn})|}{|\tilde{u}(\vec{\Omega}_{mn})|} \quad (57)$$

mais

$$w = \frac{\partial}{\partial \mu} \left(\frac{\mu}{\delta \mu} - \frac{\text{Arg } \tilde{u}(\vec{\Omega})}{2\pi} \right)_{Amn}$$

L'expression des amplitudes diffractées dans les différents ordres montre certes qu'un léger chevauchement de l'ordre (2,0) sur l'ordre (1,0) n'est pas exclu, mais en pratique il est imperceptible.

La figure 25 montre la différence entre les deux HSO de LOHMANN pour la détermination du point A. On voit que dans les HSO "à phase exacte" le point A est déterminé par une résolution de l'Equation

$$\text{Arg } \tilde{u}(\vec{\Omega}_{Amn}) = \left(\frac{\xi_{Amn} - m \delta \mu}{\delta \mu} \right) 2\pi \quad (58)$$

Mais cette équation ne peut être résolue que si l'amplitude $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ est connue en

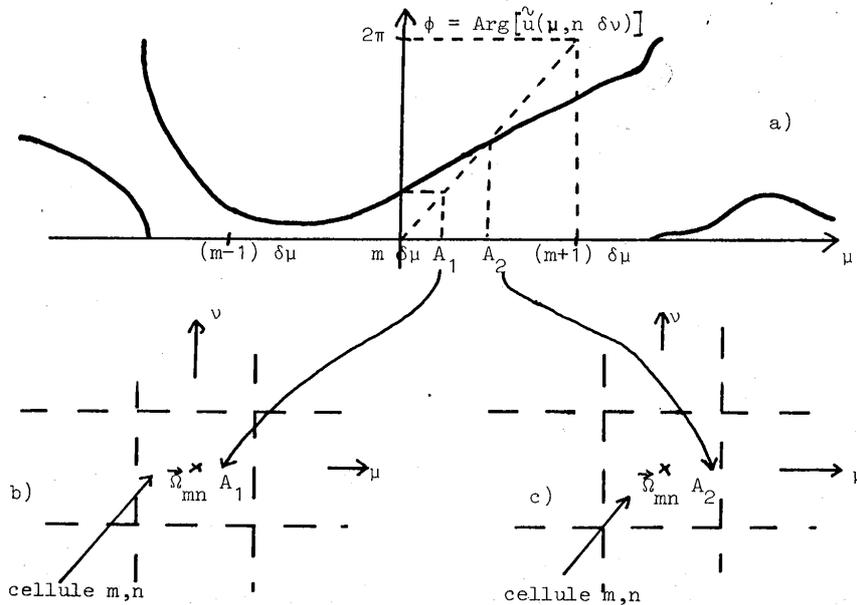


Figure 25. Les deux HSO de Lohmann : détermination du centre des ouvertures ;
 a) Phase de l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ à synthétiser.
 b) Codage des hologrammes "à phase échantillonnée".
 c) Codage des hologrammes "à phase exacte".

tout point au moins sur les lignes d'ordonnée

$$v = n\delta v \quad (59)$$

De ce fait , les valeurs échantillonnées de \hat{u} qui permettraient la synthèse des HSO de LOHMANN "à phase échantillonnée" ne suffisent plus pour les HSO de LOHMANN "à phase exacte" , et l'intérêt des HSO échantillonnés sur les HSO à franges est perdu . Pour tenter de résoudre cette difficulté , BROWN et LOHMANN ont représenté la phase de $\hat{u}(\vec{\Omega})$ entre les points d'échantillonnage $\vec{\Omega}_{mn}$ par une approximation polynomiale utilisant les points d'échantillonnage voisins . Nous avons utilisé cette méthode pour obtenir les deux clichés de la figure 26 , qui correspondent à des approximations de la phase par des polynomes de degré 1 et 3 .

L'inconvénient des HSO "à phase échantillonnée" était la lumière parasite : on constate une certaine diminution de cette lumière parasite , qui subsiste néanmoins . De plus , il apparaît de la lumière parasite au centre de l'objet alors qu'il n'y en avait pas dans les HSO de LOHMANN "à phase échantillonnée" . La comparaison objective des niveaux de bruit sur les figures 24 et 26 est rendue difficile par le tirage , mais les mesures photométriques indiquées sur la figure 7 de l'annexe 6 montrent que l'amélioration obtenue est faible : l'éclairement dans le triangle de l'objet $u(\vec{r})$ et à côté de lui comporte même à cet endroit un peu plus de bruit dans l'hologramme "à phase exacte" . Ce n'est pas étonnant : à cause de l'approximation polynomiale , la phase n'est plus exacte ! Nous montrons dans l'introduction de l'annexe 6 que l'erreur entraînée par cette approximation peut être très importante . Les hologrammes de LOHMANN "à phase exacte" codent donc l'amplitude complexe de façon rigoureuse , mais sont très difficiles à calculer . De là vient la nécessité de trouver encore une autre méthode de codage .

1.4) Les HSO de FLEURET

La difficulté dans les HSO de LOHMANN vient , nous l'avons vu , de la détermination du point A correspondant , d'après la méthode du détournement de phase , à la phase voulue . Pour résoudre cette difficulté , il suffit d'imposer la phase de l'onde codée . Il faut donc coder une onde autre que $u(\vec{r})$. Pour cela , utilisons la liberté qui nous est laissée de fixer arbitrairement la figure de diffraction de l'HSO en dehors du support de l'objet $u(\vec{r})$. Choisissons comme précédemment de centrer ce support sur l'ordre (1,0) et imposons à la figure de diffraction de contenir , non seulement $u(\vec{r}-\Delta x\vec{i})$ où \vec{i} est le vecteur unitaire de l'axe Ox , mais aussi

$$v(\vec{r}) = u(\vec{r}-\Delta x\vec{i}) + u^*(-\vec{r}-\Delta x\vec{i}) + k_0 \delta(\vec{r}) \quad (60)$$

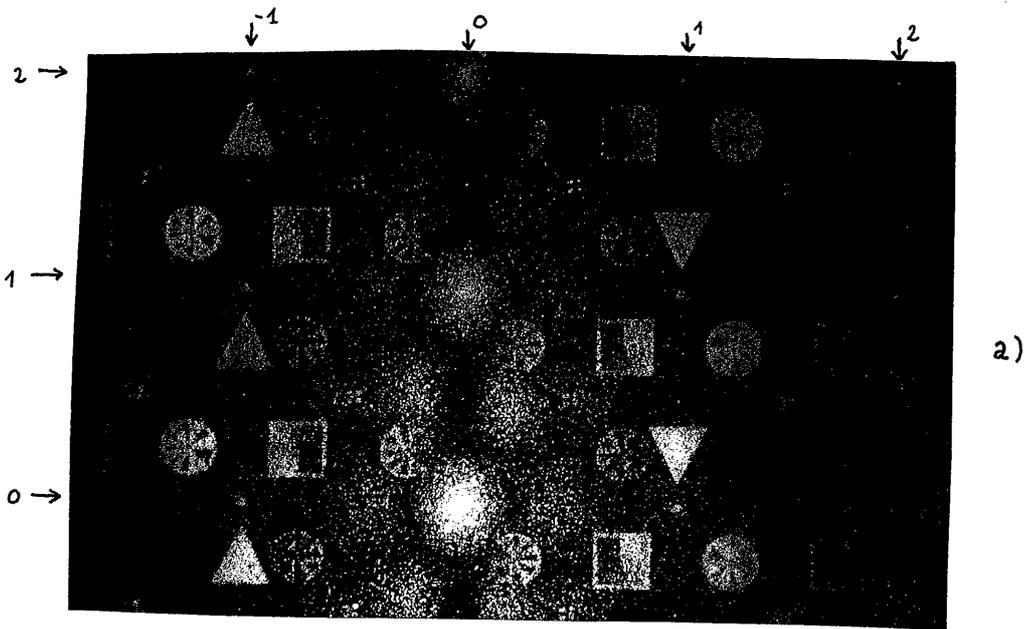
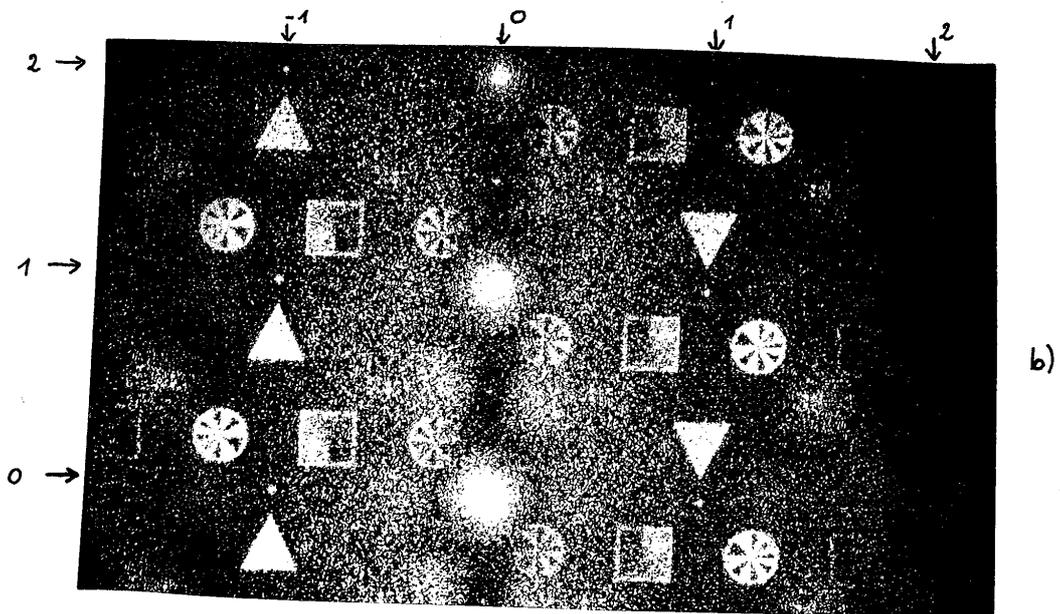


Figure 26. Figures de diffraction d'HSO de Lohmann à phase "exacte" obtenue par approximation polynomiale. a) Interpolation d'ordre 1 ; b) interpolation d'ordre 3. Les centres des ordres sont fléchés. On remarquera l'évolution du bruit au centre et des fantômes.



La figure 27 indique l'allure de l'objet $v(\vec{r})$. Dans l'Equation (60), la constante réelle positive k_0 est telle que la transformée de Fourier $\tilde{v}(\vec{\Omega})$ soit non négative :

$$\tilde{v}(\vec{\Omega}) = k_0 + 2\text{Re}[\tilde{u}(\vec{\Omega}) \exp(-2i\pi\Delta x)] \quad (61)$$

Considérons donc que l'onde à synthétiser n'est plus $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ mais $\tilde{v}(\vec{\Omega})$, dans laquelle l'onde désirée $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ apparaît avec un facteur d'inclinaison sans inconvénient. $\tilde{v}(\vec{\Omega})$ étant une fonction réelle non négative, son HSO de LOHMANN "à phase échantillonnée" et son HSO de LOHMANN "à phase exacte" sont identiques et leur codage est rigoureux : il s'agit de pics de Dirac tous situés aux points d'échantillonnage de la fonction $\tilde{v}(\vec{\Omega})$. Remarquons que cette dernière a une bande identique à celle de $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ suivant y , mais trois fois plus large que cette dernière suivant x : le pas d'échantillonnage de \tilde{v} suivant x est

$$\delta\mu_v = \frac{1}{3\Delta x} \quad (62)$$

De même, l'ordre $(3m, n)$ de l'HSO de $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ est l'ordre (m, n) de l'HSO de $\tilde{v}(\vec{\Omega})$. Pour éviter toute confusion, nous ne ferons plus allusion qu'aux ordres correspondant à l'onde désirée $\tilde{u}(\vec{\Omega})$.

L'HSO de LOHMANN de l'onde $\tilde{v}(\vec{\Omega})$ est donc aussi un HSO de l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ avec codage rigoureux de l'amplitude complexe et sans aucun risque de chevauchement d'ordres, que nous appellerons HSO de Fleuret de l'onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ {109}. La figure 28 présente une portion de la figure de diffraction : l'amélioration par rapport aux HSO de LOHMANN est nette. Remarquons que les ordres $(0,0)$, $(1,0)$ et $(-1,0)$ qui constituent l'objet $\tilde{v}(\vec{r})$ ont la même allure que dans les HSO de LOHMANN à la lumière parasite près, mais que les ordres supérieurs sont entièrement différents.

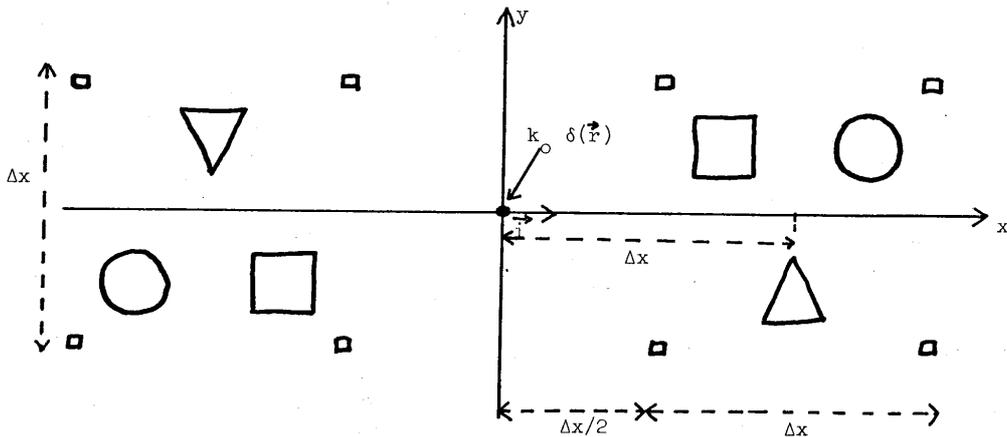


Figure 27. Objet dont la transformée de Fourier est réelle et positive (HSO de Fleuret).

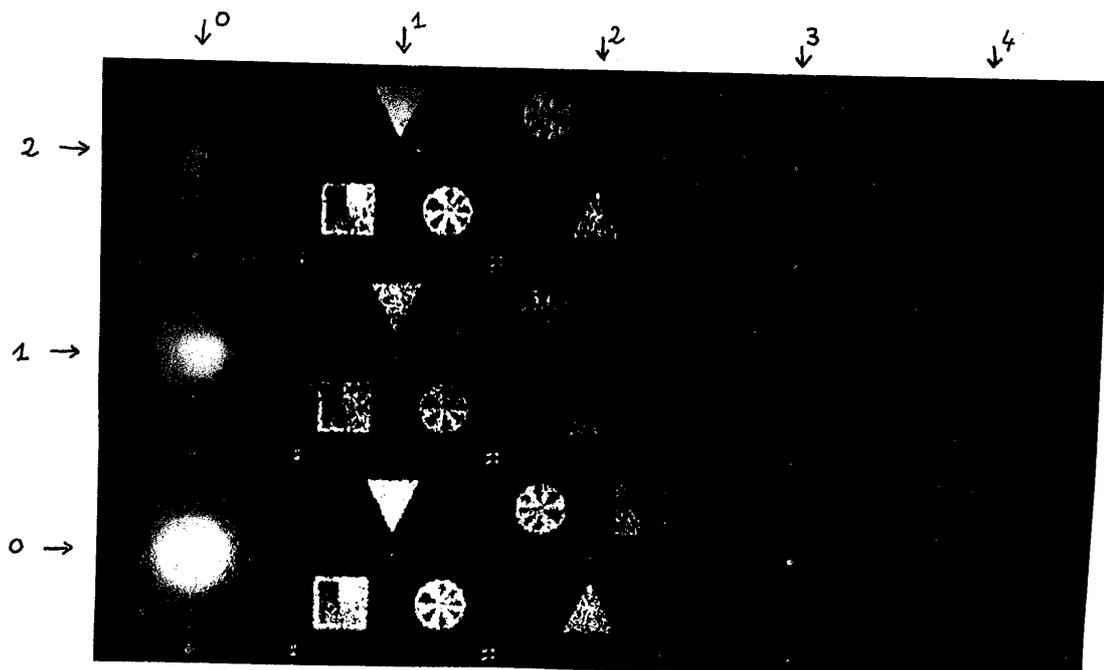


Figure 28. Figure de diffraction d'un HSO de Fleuret. Les centres des ordres sont fléchés. On constate le diminution très nette du bruit, en particulier dans les coins.

L'inconvénient de ces hologrammes est la nécessité d'un suréchantillonnage d'un facteur trois par rapport aux HSO de Lohmann : le temps de calcul et de tracé s'en ressentent. Cependant, si une synthèse de bonne qualité s'impose, l'amélioration apportée par ce suréchantillonnage le justifie pleinement. YAROSLAVSKI et MERZLIAKOFF {110} ont réduit à deux le rapport de suréchantillonnage en utilisant pour objet $v(\vec{r})$ celui de la figure 29. Mais l'ordre (0,0) se forme alors au bord de l'objet $u(\vec{r})$: comme il est nettement plus lumineux que ce dernier, et qu'il est inévitablement entouré de lumière diffusée intense, la qualité de la synthèse s'en ressent, comme on peut l'observer sur les photographies de la référence 110. On pourrait d'ailleurs facilement imaginer des hologrammes intermédiaires entre ces derniers et ceux de FLEURET.

1.5) Généralisation de la méthode précédente :

En collaboration avec J.P. HUGONIN, nous avons recherché les conditions d'un codage rigoureux de l'amplitude complexe. Nous avons ainsi défini une méthode qui se ramène en fait à une généralisation de celle de FLEURET. Nous en décrirons uniquement les caractéristiques essentielles : l'étude complète figure dans l'annexe VI, extrait du Journal of the Optical Society of America.

1.5.1) HSO le plus général à P ouvertures équidistantes par cellule :

Considérons un HSO constitué de P (entier supérieur à 2) pics de Dirac équidistants suivant l'axe μ par cellule d'échantillonnage. Il doit diffracter l'objet désiré $u(\vec{r})$ centré sur l'ordre (1,0) (pour un autre centrage, il suffit de modifier l'équation 68). La transmittance en amplitude s'écrit :

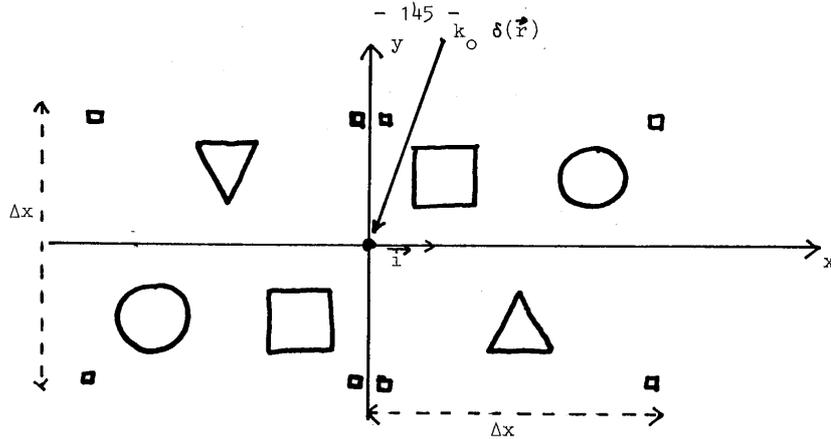


Figure 29. Objet dont la transformée de Fourier est réelle et positive
(HSO de Yaroslavski et Merzliakoff).

$$\tilde{\tau}(\vec{\Omega}) = \sum_{m'n} \tilde{\tau}_{m'n} \delta(\xi - \frac{m'\delta\mu}{P}) \delta(\eta - n\delta\nu) \quad (63)$$

Les sommations sur m' et n doivent être étendues au support de l'hologramme, mais nous les supposons illimitées pour simplifier le calcul. Dans l'expression (63), nous pouvons regrouper les pics de Dirac situés à la même distance algébrique des points d'échantillonnage $\vec{\Omega}_{mn} (m\delta\mu, n\delta\nu)$. Nous obtenons P séries d'échantillons, numérotées k ($k = 0, 1, \dots, P-1$) (voir figure 30). Dans chaque série k , les échantillons C_{mnk} sont distants de $\delta\mu, \delta\nu$ entre eux et définissent donc une fonction $\tilde{u}_k(\vec{\Omega})$ dont le spectre $u_k(\vec{r})$ est à support borné de dimensions $\Delta x, \Delta y$:

$$\begin{cases} u_k(\vec{r}) = 0 \text{ pour } |x| > \frac{\Delta x}{2} \text{ et pour } |y| > \frac{\Delta y}{2} \\ k = \{0, 1, \dots, P-1\} \end{cases} \quad (64)$$

L'Equation (63) devient alors :

$$\tilde{\tau}(\vec{\Omega}) = \sum_{k=0}^{P-1} \tilde{u}_k(\vec{\Omega}) \prod_{\delta\mu\delta\nu}(\vec{\Omega}) * \delta(\vec{\Omega} - \frac{k}{P} \delta\mu\vec{i}) \quad (65)$$

où \vec{i} est le vecteur unitaire de la direction μ et $\prod_{\delta\mu\delta\nu}(\vec{\Omega})$ le peigne de Dirac bidimensionnel de pas $\delta\mu$ suivant μ et $\delta\nu$ suivant ν . L'amplitude diffractée par cet HSO dans le plan de diffraction de Fraunhofer est la transformée de Fourier inverse de $\tilde{\tau}(\vec{\Omega})$:

$$\begin{aligned} \tau(\vec{r}) &= \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{P-1} u_k(\vec{r}) * [\prod_{\Delta x \Delta y}(\vec{r}) \exp 2i\pi \frac{kx}{P\Delta x}] \\ &= \Delta x \Delta y \sum_{k=0}^{P-1} \sum_{l=0}^{\infty} u_k(\vec{r} - l\Delta x \vec{i}) \zeta_{kl} * \prod_{\Delta y}(\vec{r}) \end{aligned} \quad (66)$$

où $\prod_{\Delta y}$ est un peigne de Dirac unidimensionnel de pas Δy suivant y et ζ_{α} est la racine complexe d'ordre P de l'unité d'expression :

$$\zeta_{\alpha} = \exp \frac{2i\pi\alpha}{P} \quad \alpha \text{ entier} \quad (67)$$

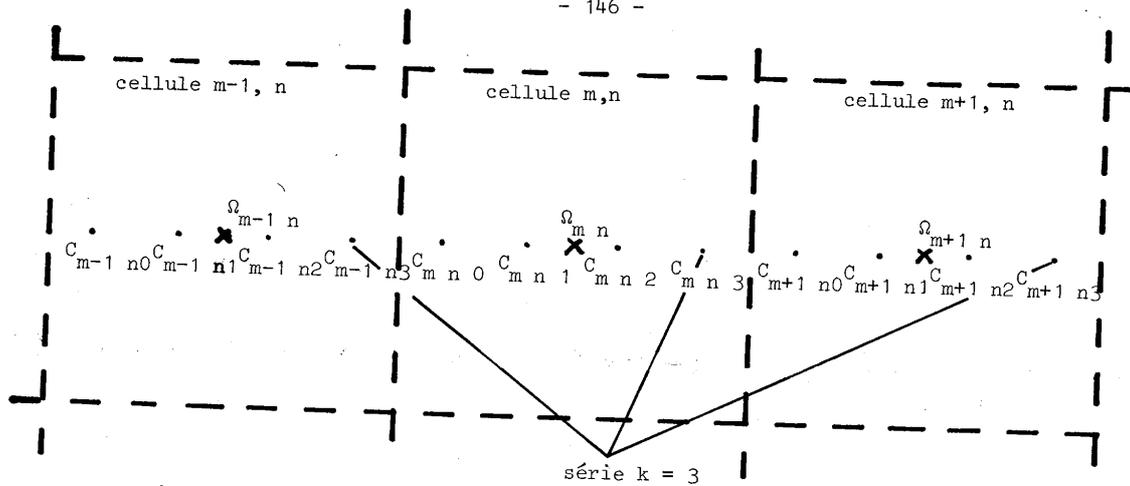


Figure 30 . Trois cellules contigües d'un HSO à quatre ouvertures équidistantes par cellule : notations.

La condition (64) et l'expression (66) montrent que la figure de diffraction est périodique suivant x , de période $P\Delta x$; chaque période est composée de P ordres de diffraction sans chevauchement. Pour obtenir dans l'ordre $(1,0)$ l'objet $u(\vec{r})$ ($l = 1$), il suffit d'imposer, en omettant le facteur de normalisation $\Delta x \Delta y$:

$$u(\vec{r}) = \sum_{k=0}^{P-1} u_k(\vec{r}) \zeta_k \quad (68)$$

c'est-à-dire $\hat{u}(\vec{\Omega}) = \sum_{k=0}^{P-1} \hat{u}_k(\vec{\Omega}) \zeta_k$

Cette équation, jointe à la condition (64) et à la condition que tous les échantillons soient positifs:

$$C_{mnk} = \hat{u}_k \left[\left(m + \frac{k}{P} \right) \delta_{\mu, n} \delta_{\nu} \right] > 0 \quad (69)$$

$m, n \in \mathbb{Z}, k = \{0, 1, \dots, P-1\}$

constitue la solution la plus générale recherchée:

pour obtenir un HSO de Fourier de l'objet à support borné $u(\vec{r})$ composé de P ouvertures équidistantes suivant μ par cellule d'échantillonnage, il suffit d'exprimer $u(\vec{r})$ sous la forme d'une combinaison linéaire des P racines complexes d'ordre P de l'unité; les coefficients de la combinaison linéaire sont P fonctions $u_k(\vec{r})$ de même support que $u(\vec{r})$ qui admettent pour transformée de Fourier $\hat{u}_k(\vec{\Omega})$ des fonctions réelles non négatives (au moins aux points d'échantillonnage).

Cette solution est évidemment trop générale pour être utilisable directement. Nous en donnerons diverses illustrations s'appuyant sur une interprétation géométrique.

1.5.2.) Deux exemples d'HSO à 4 ouvertures par cellule

Dans le cas où $P = 4$, on voit que l'Equation (68) s'écrit :

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}) = \tilde{u}_0(\vec{\Omega}) + i \tilde{u}_1(\vec{\Omega}) - \tilde{u}_2(\vec{\Omega}) - i \tilde{u}_3(\vec{\Omega}) \quad (70)$$

c'est-à-dire que nous avons à décomposer $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ en quatre fonctions qui soient respectivement pour tout $\vec{\Omega}$ réelle positive, imaginaire pure à partie imaginaire positive, réelle négative, imaginaire pure à partie réelle négative. Considérons alors dans le plan complexe le nuage S de toutes les valeurs échantillonnées de $\tilde{u}(\vec{\Omega})$. Le nuage est représenté sur la figure 3 de l'annexe 6 dans le cas de notre objet-test. Considérons-le à nouveau sur les figures 31a et b. Chaque point $M = \tilde{u}(\vec{\Omega}_M)$ de ce nuage peut être exprimé sous la forme (70) de plusieurs façons, et notamment en utilisant les longueurs des segments indiqués sur les figures 31 a et b :

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}_M) = EM + iDM - AB - iBC \quad (71)$$

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}_M) = \frac{OP}{RP} KM + i \frac{ON}{QN} JM - \frac{OR}{RP} Mi - i \frac{OQ}{QN} MJ \quad (72)$$

L'utilisation des distances de chaque point du nuage à une figure correctement choisie permet ainsi de trouver des HSO possibles. La figure ne doit pas couper le nuage de points S pour que les valeurs échantillonnées des \tilde{u}_k soient toujours positives.

La figure 32 présente une portion de la figure de diffraction d'un HSO correspondant à l'Equation (72). L'objet $u(\vec{r})$ synthétisé est légèrement différent de celui des photographies précédentes, mais on constate la bonne qualité de la synthèse et la périodicité dans les ordres diffractés avec une atténuation due au remplacement des pics de Dirac par des ouvertures finies.

1.5.3) Autres méthodes

Les dessins de la figure 31 sont les premiers exemples auxquels nous avons pensé en cherchant un codage aboutissant à des échantillons tous non négatifs. Prenant ensuite conscience de l'analogie entre nos HSO et ceux de Fleuret, nous avons reconnu que la façon la plus simple d'effectuer une décomposition d'un nombre complexe en nombres non négatifs utilise trois nombres et non pas quatre. Devant l'économie de temps de calcul et de tracé impliquée, nous nous sommes donc intéressés aux décompositions sur les racines cubiques de l'unité 1, j et j^2 .

Si on choisit d'utiliser comme figure circonscrite au nuage S un triangle équilatéral de centre de gravité 0, on obtient les HSO de Fleuret (voir annexe 6).

Mais ce choix n'est pas le seul possible. L'Equation (66) montre que les figures de diffraction de tous HSO à trois ouvertures par cellule possibles se

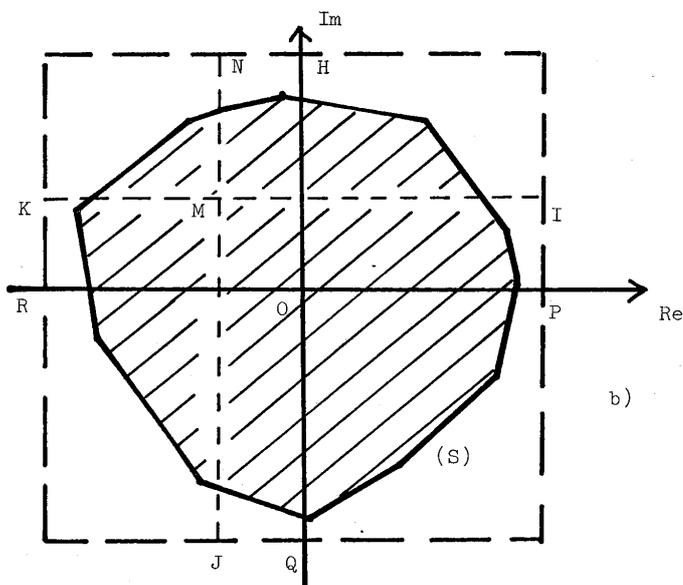
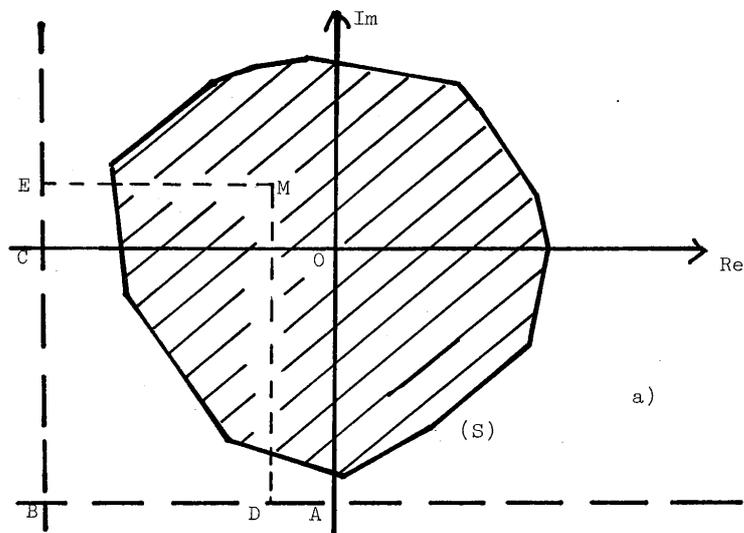


Figure 31. Représentations géométriques illustrant deux possibilités de codage pour des HSO à quatre ouvertures équidistantes par cellule. On utilise le nuage S des valeurs échantillonnées de l'onde \tilde{u} à coder. Le point courant M de ce nuage est repéré de deux façons (a et b) par quatre longueurs de segments.

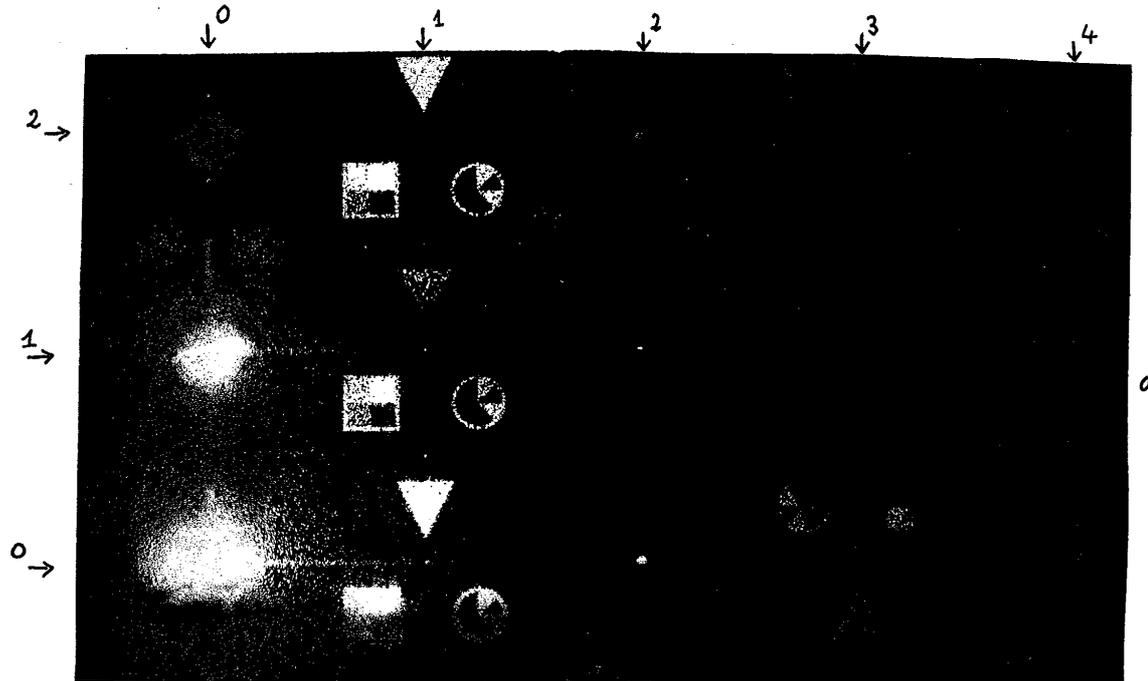
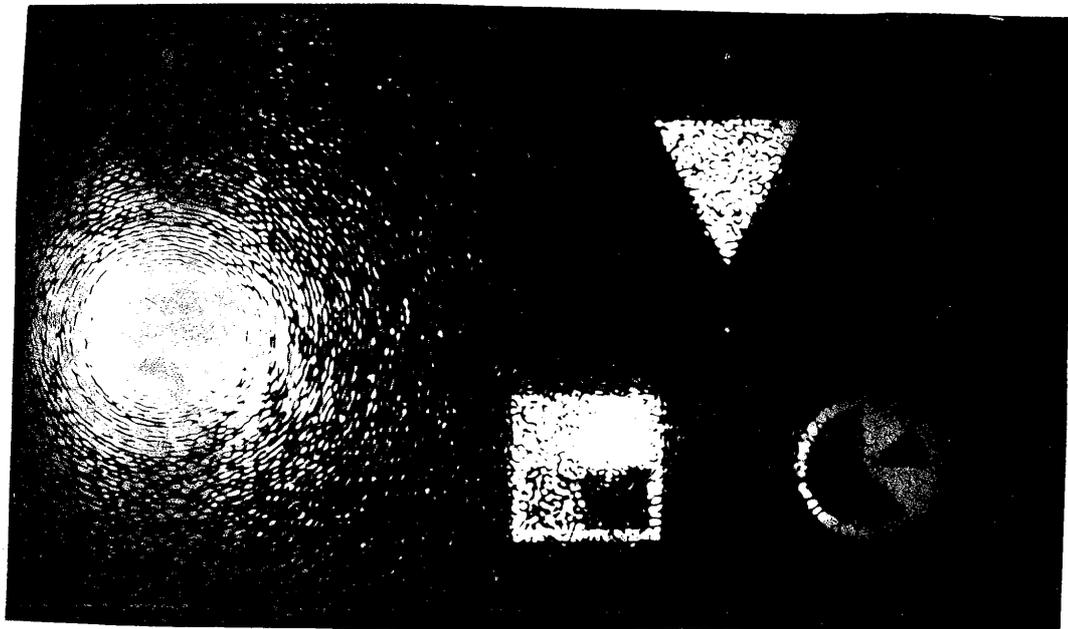


Figure 32. Figure de diffraction d'un HSO de notre type à 4 ouvertures par cellule
L'objet est légèrement différent de celui des figures précédentes.
a) Ordres 0 à 4 en x et 0 à 2 en y. On remarque la périodicité.
b) Ordres (0,0) et (1,0), avec limitation de l'HSO par un diaphragme circulaire qui évite les lignes de diffraction de la pupille carrée.



composent de trois motifs distincts : $u(\vec{r})$ dans les ordres $(3\ell+1, n)$ (ℓ et n entiers) , $u^*(-\vec{r})$ dans les ordres $(3\ell-1, n)$ et

$$u_0(\vec{r})+u_1(\vec{r})+u_2(\vec{r})$$

dans les ordres $(3\ell, n)$. Ils ne diffèrent donc les uns des autres que par ce dernier motif , qui est celui de l'ordre $(0,0)$. Autrement dit , les HSO de Fleuret peuvent être généralisés en mettant dans l'ordre $(0,0)$, au lieu d'un pic de Dirac , tout motif à transformée de Fourier non négative . Comment utiliser cette liberté ?

Une possibilité est de l'utiliser pour augmenter au maximum l'efficacité de diffraction dans l'ordre utile . Rappelons que cette efficacité est inversement proportionnelle au carré du plus grand segment codé (voir les dernières lignes du § 1.2) ; il est donc intéressant de choisir la figure circonscrite au nuage S de façon que le plus grand segment codé soit le plus court possible . Le problème de l'HSO à efficacité maximale n'est pas encore résolu , mais nous présentons dans l'annexe VI une méthode utilisant pour figure un hexagone à angles de $\frac{2\pi}{3}$ qui fournit en principe , un gain d'un facteur 2,3 en efficacité par rapport aux HSO de Fleuret (voir tableau 1 de l'annexe VI ; le gain escompté n'a , en fait , été que de 1,1 pour des raisons liées à la photoréduction des tracés d'HSO).

Une autre possibilité intéressante est de diminuer le temps de calcul de l'HSO en limitant le nombre des échantillons à calculer aux deux tiers des échantillons à tracer , tous les autres échantillons étant égaux : le temps de tracé ne change pas , mais le temps de calcul est alors de l'ordre du double , et non plus du triple , de celui d'un HSO de LOHMANN . La solution est présentée sur la figure 33 :

$$\hat{u}(\vec{\Omega}_M) = OA + jAC + j^2CM, \quad OA \text{ constant.} \quad (73)$$

La figure 34 présente les ordres $(0,0)$ et $(1,0)$ de la figure de diffraction d'un de nos HSO à 3 ouvertures . On remarquera la différence dans les ordres $(0,0)$ avec les HSO de Fleuret (figure 28) .

Ces quelques exemples montrent que notre analyse générale des HSO à P ouvertures équidistantes par cellule que nous avons donnée débouche sur une grande variété de possibilités .

II- REALISATION PRATIQUE DES HOLOGRAMMES SYNTHETIQUES

2.1) Les étapes de la synthèse d'un hologramme

La synthèse d'un HSO comprend toujours deux étapes principales : le calcul et le tracé .

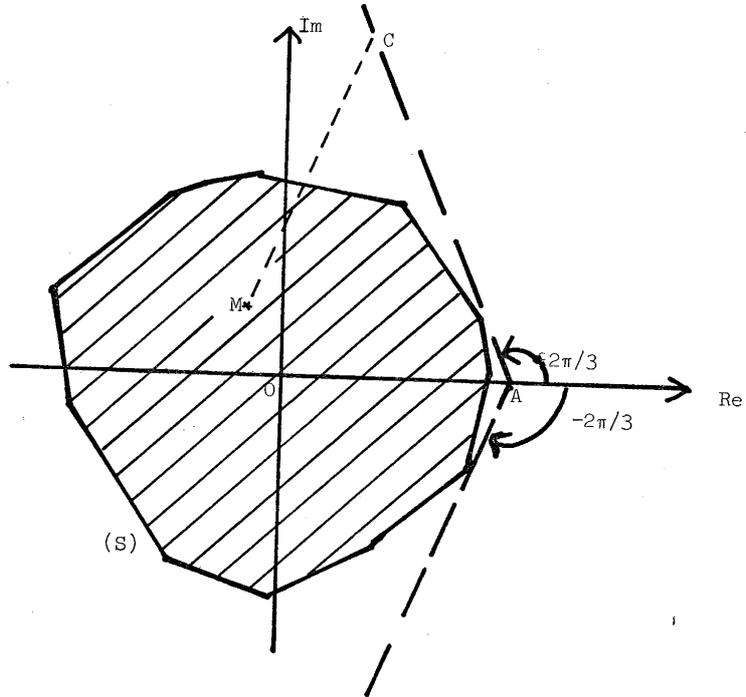


Figure 33. représentation géométrique illustrant une possibilité de codage pour un HSO à trois ouvertures équidistantes par cellule : diminution du temps de calcul.

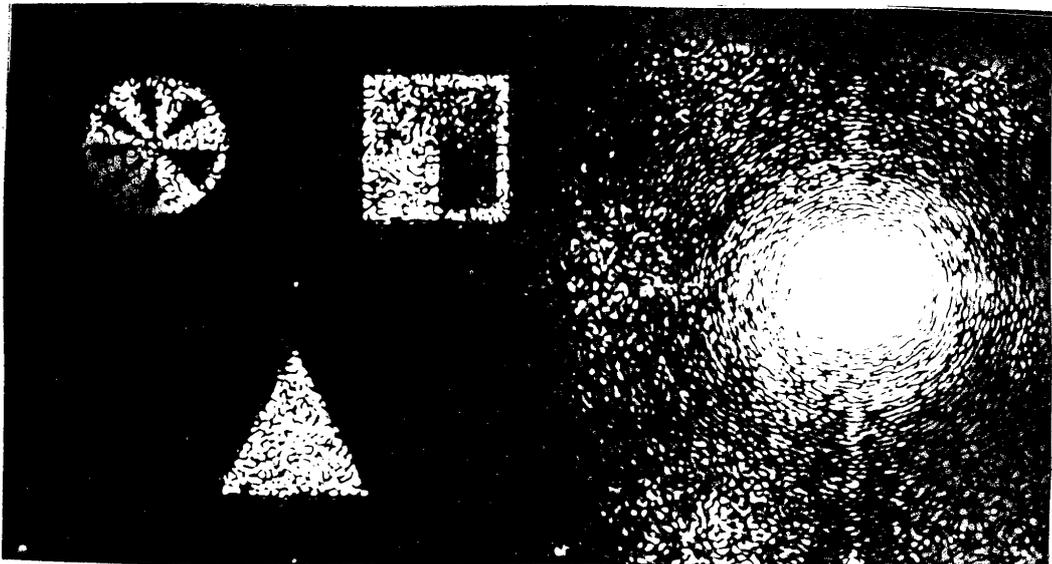


Figure 34. Ordres (0,0) et (1,0) diffractés par un hologramme à trois ouvertures par cellule. On remarque la différence dans l'ordre (0,0) par rapport à l'HSO de Fleuret de la figure 28.

Le calcul sur ordinateur commence , si nécessaire , par celui de l'onde $\hat{u}(\vec{n})$ à coder . Ainsi , les HSO dont les figures de diffraction ont été présentées plus haut ont-ils nécessité le calcul de $\hat{u}(\vec{n})$ à partir de l'objet $u(\vec{r})$ défini par ses valeurs échantillonnées en 128×128 points ; un algorithme de transformée de Fourier rapide a été employé à cette fin . Une fois $\hat{u}(\vec{n})$ connue, l'ordinateur doit la coder d'abord sous la forme d'un certain nombre de pics de Dirac définis par leur position et leur amplitude , puis sous la forme d'ouvertures , rectangulaires dans notre cas . Enfin , les paramètres caractérisant ces ouvertures sont mis sous une forme interprétable par le traceur . Précisons quelques ordres de grandeur . Sur l'ordinateur IBM 370/168-168 du CIRCE à Orsay, le calcul complet des HSO de LOHMANN des figures 24 et 26 a exigé 8 à 10 secondes et 200 K octets en mémoire centrale . Les HSO à 3 et 4 ouvertures par cellule des figures 28 , 32 et 34 ont nécessité environ 40 s de calcul ; un maniement correct des mémoires de masse permet dans leur cas , de limiter l'encombrement à 250 K octets pratiquement sans perte de temps .

Le traceur qui reçoit les résultats de ce calcul peut soit être en ligne sur l'ordinateur , soit communiquer avec lui par une mémoire de masse , en général la bande magnétique . Mais surtout , il peut soit fournir directement l'HSO sur un support transparent de taille correcte , soit produire seulement un tracé qui ne sera converti en HSO utilisable que par photoréduction . La première solution est nettement plus commode et permet en principe d'obtenir des HSO d'excellente qualité , mais elle est fort coûteuse parce qu'elle fait appel à des instruments très perfectionnés .

Ainsi , nous avons pu faire l'essai d'un masqueur électronique destiné à la fabrication des circuits intégrés . La Société THOMSON-CSF a bien voulu réaliser un HSO pour nous gratuitement , à l'aide de cet instrument situé au Laboratoire central de recherche de Corbeville , et qui est capable de tracer des rectangles dont les dimensions sont définies avec une précision de $0,1 \mu\text{m}$ sur un champ carré de côté $0,2 \text{ mm}$, et de juxtaposer des champs avec une précision de $0,2 \mu\text{m}$ sur un champ total de $50 \times 50 \text{ mm}$. L'HSO résultant se présente sous la forme d'une plaque de verre métallisée , les ouvertures étant percées dans le métal . Le résultat de notre essai est présenté sur la figure 35 a) . La différence d'aspect avec les restitutions présentées jusqu'ici s'explique par le fait que l'objet $u(\vec{r})$ des figures 35 est non diffus , alors que les objets précédents étaient pourvus d'une phase aléatoire destinée à répartir de façon uniforme l'énergie dans le plan de l'HSO : les objets non diffus ont l'inconvénient bien connu d'avoir une transformée de Fourier très étroite , si bien que l'HSO de LOHMANN de $u(\vec{r})$ est alors constitué d'une seule grande ouverture entourée d'un nombre faible d'ouvertures

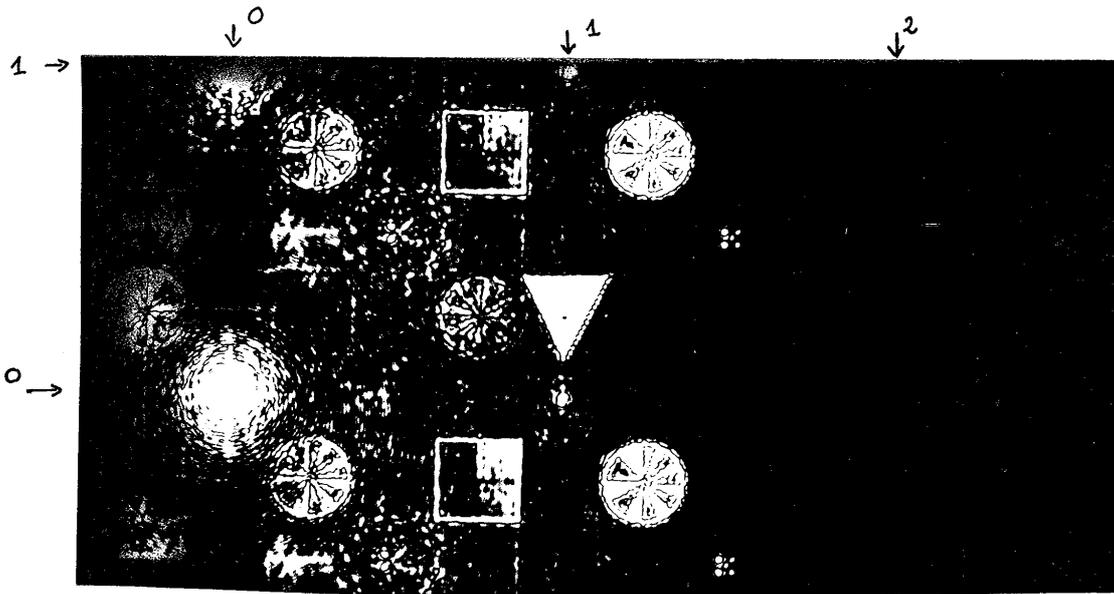
beaucoup plus petites . Il en résulte une faible efficacité de diffraction dans l'ordre utile , et le bruit cohérent se fait sentir . Le choix d'un objet non diffusant s'imposait cependant ici pour réduire le temps d'utilisation du masqueur électronique . La restitution de la figure 35 a) , n'est malheureusement pas parfaitement concluante en raison de la mauvaise adaptation de certains paramètres dans l'utilisation du masqueur électronique . Un second essai nous aurait peut-être permis de corriger les défauts , mais n'a pas été possible en raison du coût de l'opération (environ 10000 F par HSO) . On constate diverses différences entre les figures diffractées par l'hologramme obtenu sur masqueur et par l'hologramme synthétisé par notre méthode habituelle , dont les détails seront expliqués plus loin : la figure 35 a) met en évidence une meilleure représentation des niveaux de gris que la figure 35 b) et on y observe le point sombre au centre du triangle , mais le niveau de bruit y est élevé et les hautes fréquences sont amplifiées .

Mais il existe une autre possibilité de synthèse directe d'HSO par traceur : le synthétiseur d'image . Nous espérons utiliser prochainement à cet effet le microdensitomètre-restituteur PDS 1010G du C.D.S.I. (Centre de Dépouillement et de Synthèse des Images) , service du CNRS créé en 1977 et situé à l'Institut d'Optique à Orsay . Le champ est de 250 x 250 mm , la précision de positionnement peut atteindre 1 μ m , mais la plus petite ouverture rectangulaire possible est un carré de 7,5 μ m de côté . L'HSO est directement enregistré sur une émulsion photographique impressionnée par une diode électroluminescente ; cependant , la faible luminance de cette diode rend difficile l'utilisation d'émulsions très résolventes .

A défaut de traceurs synthétisant directement les HSO , nous avons fait essentiellement appel à des traceurs de résolution plus faible : l'imprimante électrostatique "Versatec" et le traceur de courbes incrémental "Benson" du CIRCE . L'imprimante a un nombre de points adressables relativement faible , 2112 , alignés sur 268 mm avec un pas de 0,127 mm , mais offre la commodité d'être en ligne sur l'ordinateur . Le traceur de courbes a un incrément de 0,1mm et un champ de largeur 700 mm . Dans les deux cas , le tracé obtenu doit être photoréduit .

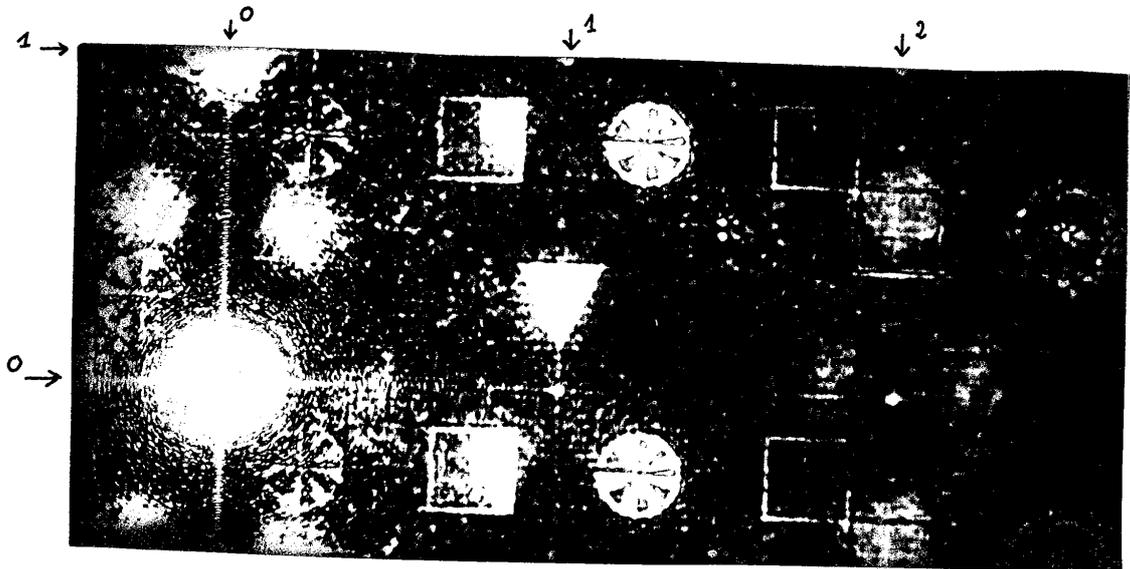
Le point au milieu de l'ordre utile sur les figures 26 , 28 , 32 , 34 et 35 b) est dû à une erreur périodique de ce traceur de courbes : l'holographie synthétique est un moyen d'analyse potentiel très sensible de ce genre de défauts!

L'étude des approximations dues au traceur dans la représentation des amplitudes complexes permet de comparer les différents traceurs .



a)

Figure 35. Figures de diffraction d'HSO de Lohmann non diffus
a) synthétisé par masqueur électronique,
b) synthétisé par traceur incrémental et photoréduction.
Les différences sont dans le bruit, la synthèse des niveaux de gris,
le point noir dans le triangle, l'amplification des hautes
fréquences spatiales dans a). Les centres des ordres sont fléchés.



b)

2.2) Nombre de points adressables et représentation des niveaux de gris

Nous étudions dans ce paragraphe les questions pratiques de dessin d'ouvertures dans les cellules des HSO . La figure 36 présente deux portions d'HSO tracés sur papier par le traceur de courbes incrémental , un HSO de LOHMANN et un à trois ouvertures .

Considérons un HSO de LOHMANN constitué de $N \times N$ cellules . Si le positionnement de l'ouverture dans la cellule doit être fait avec une précision de $1/n$ cellule , le nombre de points adressables P_a du traceur doit être au moins , suivant chaque direction

$$P_a = n N . \quad (74)$$

Pour un traceur donné , n et N sont donc inversement proportionnels . Or , plus n est petit , plus la phase est mal représentée : il en résulte une erreur dite de quantification de phase {111 , 112} . Plus N est petit , plus la résolution dans l'onde synthétisée $u(\vec{r})$ est faible : il faut donc choisir un compromis entre ces deux limitations , ainsi que l'ont souligné plusieurs auteurs {113 , 114} . Dans les HSO à plusieurs ouvertures par cellule , la répartition des ouvertures est régulière et un choix correct de la taille de la cellule permet de supprimer l'erreur de quantification de phase . Mais le nombre n intervient pour limiter le

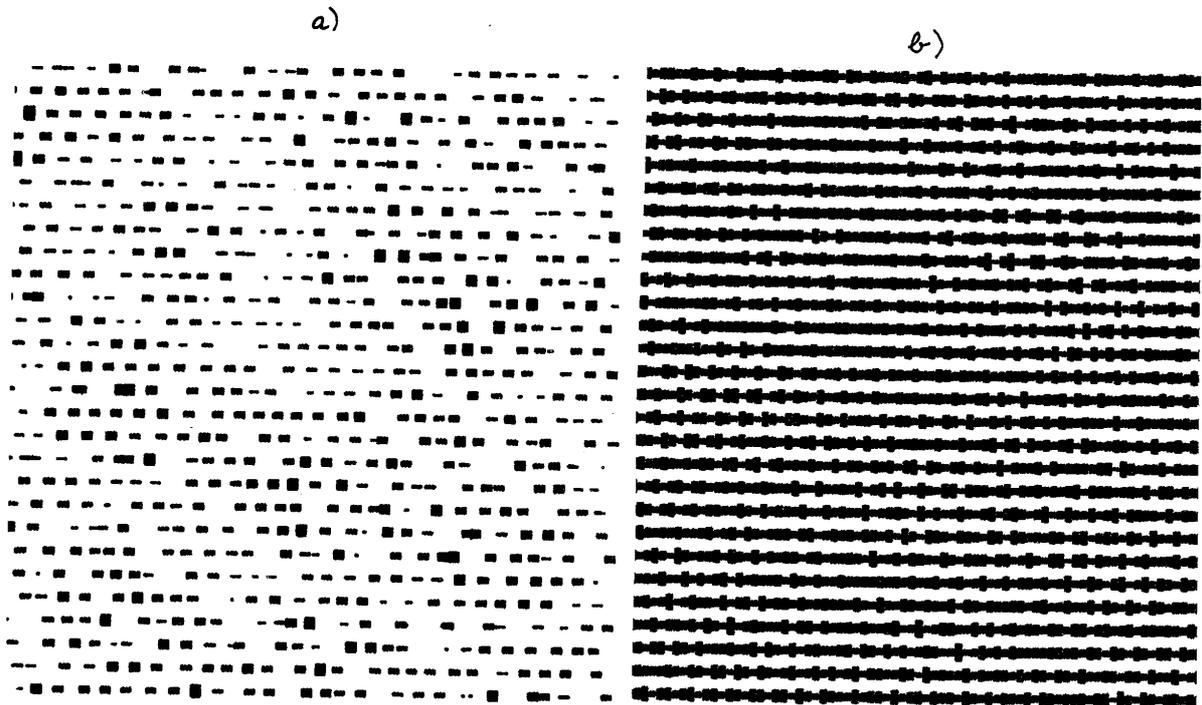


Figure 36. Portions d'un HSO de Lohmann (a) et d'un HSO à trois ouvertures (b) tracés par traceur incrémental.

nombre des tailles d'ouverture
tous les cas , le nombre de p
paramètre important pour comp
que , le microdensitomètre re
ceur de courbes mentionnés pl
7000 points adressables dans
utilisé des imprimantes à cha
comme traceurs d'HSO : la qua
te .

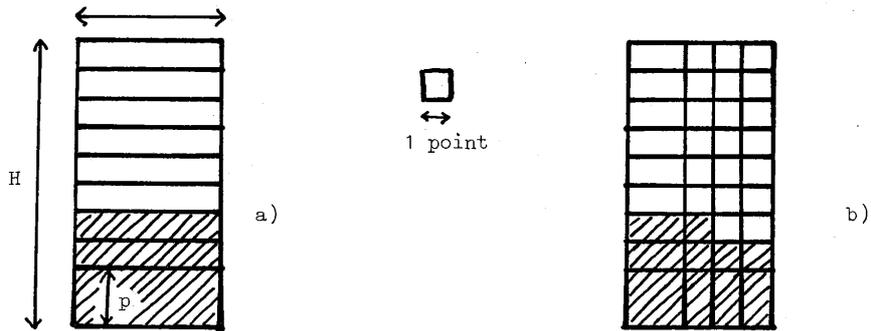
Examinons en détail l'inf
du codage de l'amplitude comp
incrémental à 7000 points , p
male de chaque cellule , expr
Nous ne tiendrons pas compte
vu qu'elle n'existe que dans
indiquent que pour $H = 54$ niv
qu'elle disparaît devant la l
donc la représentation du mod
veaux de gris" .

Nous considérerons par ex
0,4 mm , soit $p = 4$ points de
la supposons carrée pour sin
bavures d'encre sur le papier
tracés ont , en principe , un
ordre de grandeur correspondan
points , c'est-à-dire une dem
les hologrammes de LOHMANN .
maximale du rectangle une cel
à-dire les niveaux de gris ,
par pas de 1 point de 4 à 54
 $H-p+2 = 52$ "niveaux de gris"
conduit à choisir une autre a
tangles sont destinés à coder
Nous représentons sur la figur
rapport w/w_M .

nombre des tailles d'ouvertures rectangulaires possibles , si bien que dans tous les cas , le nombre de points adressables dans une dimension , P_a , est un paramètre important pour comparer les traceurs entre eux . Le masqueur électronique , le microdensitomètre restituteur , l'imprimante électrostatique et le traceur de courbes mentionnés plus haut ont respectivement 500000 , 250000 , 2112 et 7000 points adressables dans chaque dimension . Certains auteurs {109 , 115} ont utilisé des imprimantes à chaîne d'ordinateur , à 137 caractères par ligne , comme traceurs d'HSO : la qualité de ces hologrammes ne peut être que très modeste .

Examinons en détail l'influence de la résolution du traceur sur la précision du codage de l'amplitude complexe en prenant comme exemple le traceur de courbes incrémental à 7000 points , pour un HSO de 128 x 128 cellules . La dimension maximale de chaque cellule , exprimée en points de résolution du traceur , est $H = 54$. Nous ne tiendrons pas compte de l'erreur de quantification de phase : nous avons vu qu'elle n'existe que dans les HSO de LOHMANN , et les références 113 et 116 indiquent que pour $H = 54$ niveaux de phase , elle est insensible , c'est-à-dire qu'elle disparaît devant la lumière parasite due à l'erreur de codage . Etudions donc la représentation du module de l'amplitude complexe , c'est-à-dire des "niveaux de gris" .

Nous considérerons par exemple que la plume choisie pour le tracé mesure 0,4 mm , soit $p = 4$ points de résolution . La section est circulaire , mais nous la supposerons carrée pour simplifier le raisonnement : dans la pratique , les bavures d'encre sur le papier rendent la distinction sans intérêt . Les rectangles tracés ont , en principe , une largeur constante : choisissons , pour donner un ordre de grandeur correspondant aux possibilités du traceur incrémental , $l = 27$ points , c'est-à-dire une demi-cellule ; cet ordre de grandeur convient bien pour les hologrammes de LOHMANN . Avec ces valeurs numériques et en fixant pour hauteur maximale du rectangle une cellule , on voit que les rectangles possibles , c'est-à-dire les niveaux de gris , sont de largeur $l = 27$ points et de hauteurs variant par pas de 1 point de 4 à 54 points , mais pouvant aussi être nulle . Il y a donc $H-p+2 = 52$ "niveaux de gris" (voir figure 37 ; la clarté de la figure nous a conduit à choisir une autre application numérique indiquée en légende) . Les rectangles sont destinés à coder des pics de Dirac d'amplitude w variant de 0 à w_M . Nous représentons sur la figure 38 a) l'aire du rectangle tracé en fonction du rapport w/w_M .



— Figure 37. Ouvertures possibles dans une cellule de côté $H = 10$ points pour une largeur maximale = 5 points et une plume carrée de côté $p = 2$ points. En hachuré, représentation du niveau $w = 0,352 w_M$.
a) Ouvertures rectangulaires : 10 niveaux de "gris" distincts ;
b) Quantification plus fine : 37 niveaux de "gris" distincts.

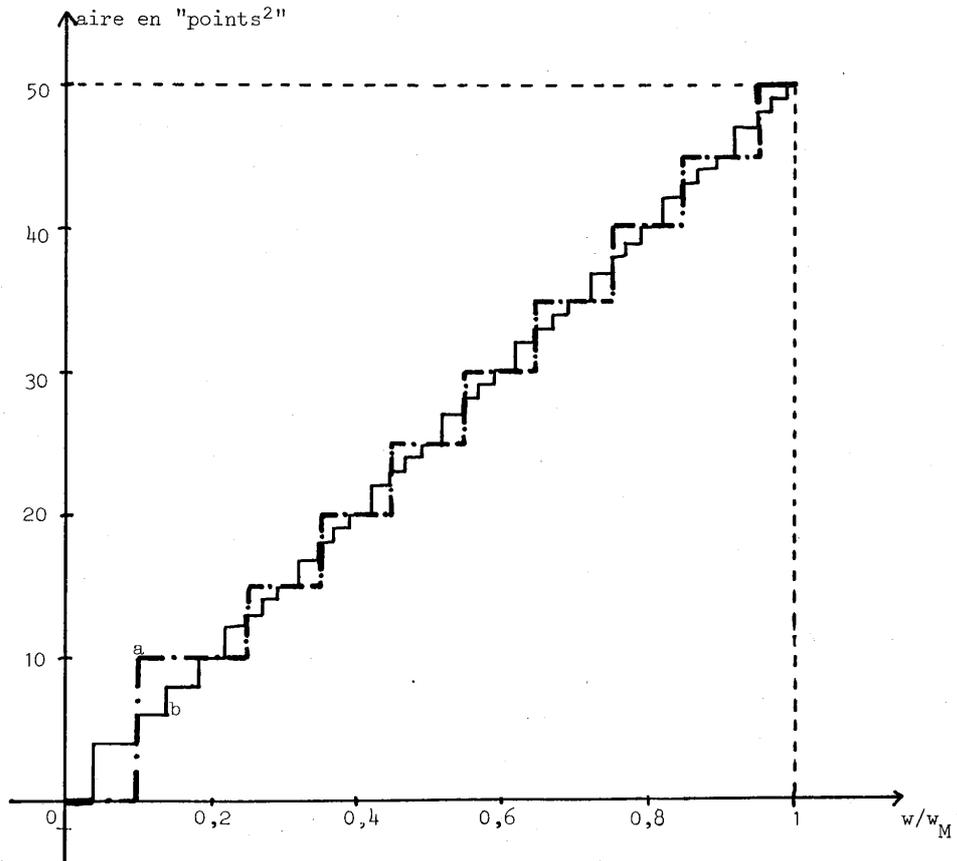


Figure 38. Courbes de quantification de l'amplitude codée : aire de l'ouverture en fonction de w pour les deux cas a) et b) de la figure précédente.

Dans la figure 38 , on a considéré pour simplifier que l'amplitude w est codée par le rectangle dont l'aire est la plus proche de

$$\frac{w}{w_u} \times S_u$$

où S_u est l'aire du plus grand rectangle , soit $H \times l$: cela revient à fixer le seuil entre deux quelconques des 52 niveaux au milieu entre les niveaux ; divers auteurs {114 , 117} ont observé que ce choix n'est pas le choix optimal , mais qu'il s'en écarte peu . 52 niveaux peut sembler un nombre déjà confortable pour une quantification d'amplitude assez précise , bien que , de toute évidence , les très petites amplitudes soient moins bien représentées que les autres . Pourtant, l'expérience montre que l'écart entre niveaux consécutifs reste très sensible . La figure 39 a) en donne un exemple , il s'agit de l'HSO d'une onde $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ à variation lente , de la forme

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}) = \exp(\Omega/\Omega_0)^2 , \quad \Omega_0 \text{ constant} \quad (75)$$

Cet HSO a été réalisé avec les valeurs de H , p et l indiquées ci-dessus , mais en raison de la difficulté d'une réduction photographique de qualité suffisante , la figure 39 a été refaite à l'échelle 1 sur imprimante électrostatique avec d'autres valeurs de H , p et l . Certes , des phénomènes d'optique physiologique renforcent l'impression de discontinuité entre niveaux d'amplitude , mais nous avons voulu éviter cette cause d'erreur . Il suffit pour cela d'ajouter entre les rectangles de largeur $l = 27$ points et de hauteur k et $k+1$ points ($k > 4$) , des ouvertures constituées d'un rectangle de largeur $l = 27$ points et de hauteur k points complété par une partie de la $k+1$ ème rangée de points . De même , les faibles amplitudes sont représentées par un rectangle de hauteur $p = 4$ points et de largeur inférieure à $l = 27$ points . On arrive ainsi à $(H-p+1)(l-p+1)+1 = 1225$ niveaux de quantification d'amplitude . Les figures 37 b) et 38 b) montrent les diverses ouvertures possibles et la courbe de quantification de l'amplitude avec les mêmes valeurs numériques que les figures 37 a) et 38 a) . La figure 39 b) montre l'efficacité de la méthode . Toutefois cette amélioration est obtenue au prix d'une approximation supplémentaire dans la théorie : les ouvertures ne sont plus des rectangles de même largeur . La méthode de compensation de l'influence de la largeur des ouvertures expliquée au paragraphe 1.2 n'est pas correcte pour les points de la rangée $k+1$, qui , heureusement , ne constituent qu'une faible partie de l'ouverture , ni pour les petites ouvertures de longueur inférieure à l . L'avantage d'une quantification fine nous semble cependant plus important que cet inconvénient .

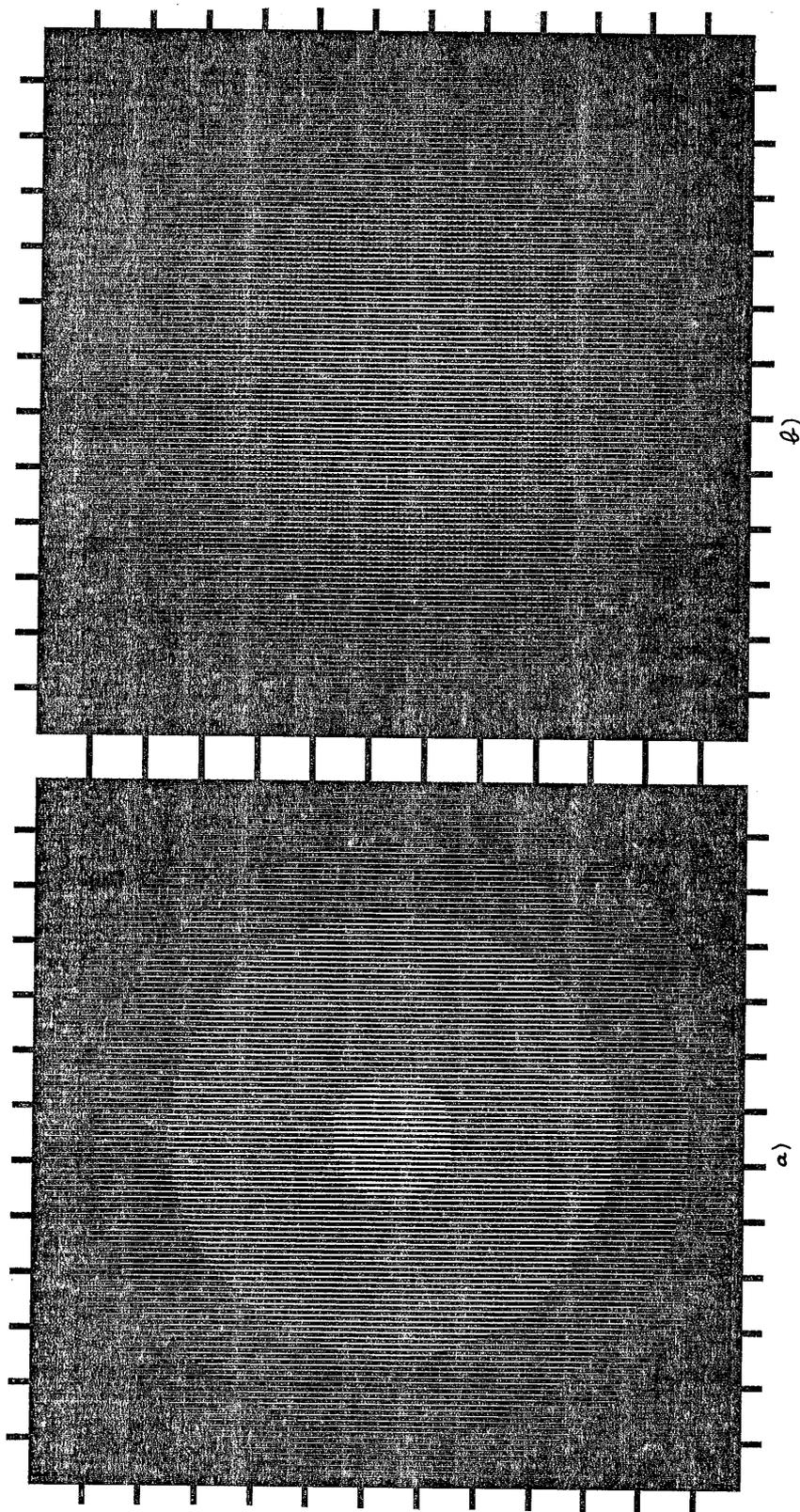


Figure 39. Intérêt d'une quantification d'amplitude très fine : HSO de la fonction $\exp(\omega^2/\omega_0^2)$. Les HSO présentés ont été obtenus sur imprimante électrostatique avec les valeurs suivantes des paramètres décrivant la forme exacte des ouvertures : hauteur $H = 8$ points, largeur $l = 8$ points, "plume" réduite à $p = 1$ point.

a.) Ouvertures rectangulaires, 9 niveaux de quantification d'amplitude ; b) Quantification plus fine, 65 niveaux. Intervalle entre graduations = 10 cellules.

2.3) Etape photographique

La photoréduction des tracés sur papier doit être faite avec soin : si on désire que l'analyse qui a été présentée jusqu'ici soit valable , il convient que les images photoréduites des ouvertures soient des ouvertures strictement semblables , transparentes sur fond opaque ou , à la rigueur , opaques sur fond transparent , ce qui ne change que l'éclairement dans l'ordre zéro . Que se passe-t-il si ces exigences ne sont pas satisfaites ?

Si les ouvertures et le fond sont uniformes mais de transmittance binaire dont les deux niveaux sont τ_a et τ_b au lieu de 0 et 1 , la transmittance réelle $\hat{\tau}_r(\vec{\Omega})$ de l'HSO est liée à la transmittance idéale $\hat{\tau}(\vec{\Omega})$ par la relation :

$$\hat{\tau}_r(\vec{\Omega}) = (\tau_a - \tau_b) \hat{\tau}(\vec{\Omega}) + \tau_b \quad (76)$$

Mise à part la tache centrale , tous les ordres voient leur efficacité multipliée par $|\tau_a - \tau_b|^2$; rien n'est donc modifié dans l'allure de la figure de diffraction. Si τ_a et τ_b sont les transmittances réelles non négatives , il y a seulement perte d'efficacité ; si , au contraire , τ_a et τ_b ont des phases différentes , il peut y avoir un gain d'efficacité allant dans le meilleur des cas jusqu'à 4 , d'où l'intérêt du blanchiment des HSO ou de leur enregistrement sur un matériau de phase .

Toutes les émulsions ont du grain : les ouvertures et le fond ne peuvent être rigoureusement uniformes . Dans la figure de diffraction de Fraunhofer , le grain ajoute une figure de granularité diffractée qui peut être gênante . Toutefois , elle est moins gênante avec des hologrammes binaires qu'avec des hologrammes à niveaux de gris , car il est bien connu {82} que le spectre de bruit est plus intense aux densités moyennes qu'aux densités très faibles ou très fortes .

Si la forme des ouvertures est modifiée par un défaut de mise au point , par les aberrations chromatiques ou géométriques de l'objectif de photoréduction ou par le manque de définition de l'émulsion , il en résulte un filtrage passe bas qui se manifeste dans la figure de diffraction de Fraunhofer . Il est vrai que les ordres supérieurs sont affectés par ce brouillage avant l'ordre utile , si bien qu'un léger brouillage peut ne pas être gênant , mais l'existence de ce brouillage mal connu ne peut que nuire à une analyse complète de la diffraction par l'HSO ; l'étude de l'influence des dimensions des rectangles , notamment , perd tout intérêt si l'image d'un rectangle n'est pas un rectangle .

Il convient donc d'utiliser un bon objectif et de faire la mise au point avec soin . L'émulsion doit être contrastée pour que l'HSO soit bien binaire , résolvente , à grain fin ; mais sa sensibilité n'est pas très importante .

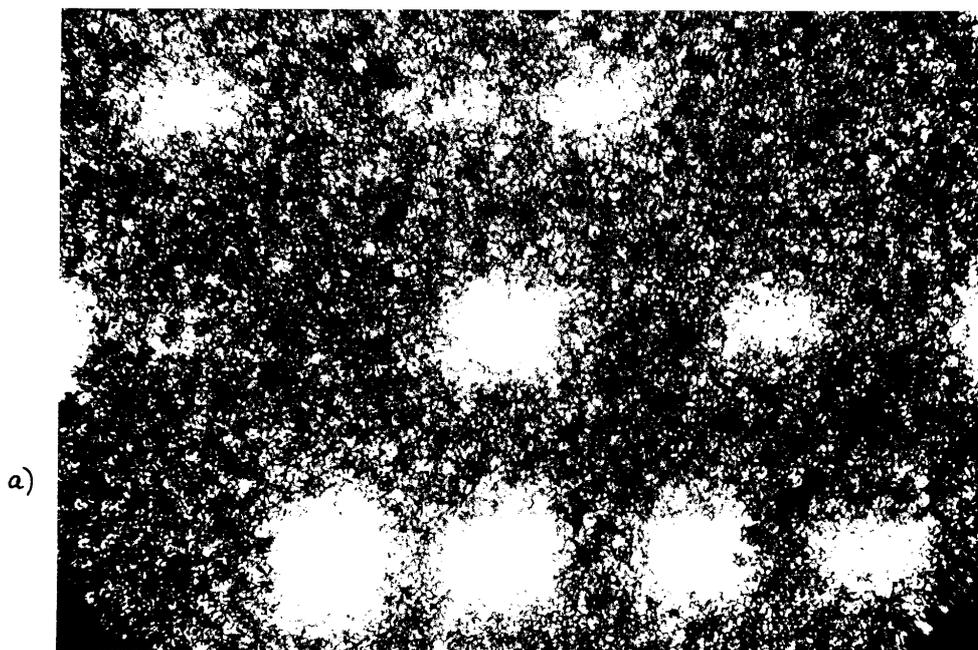
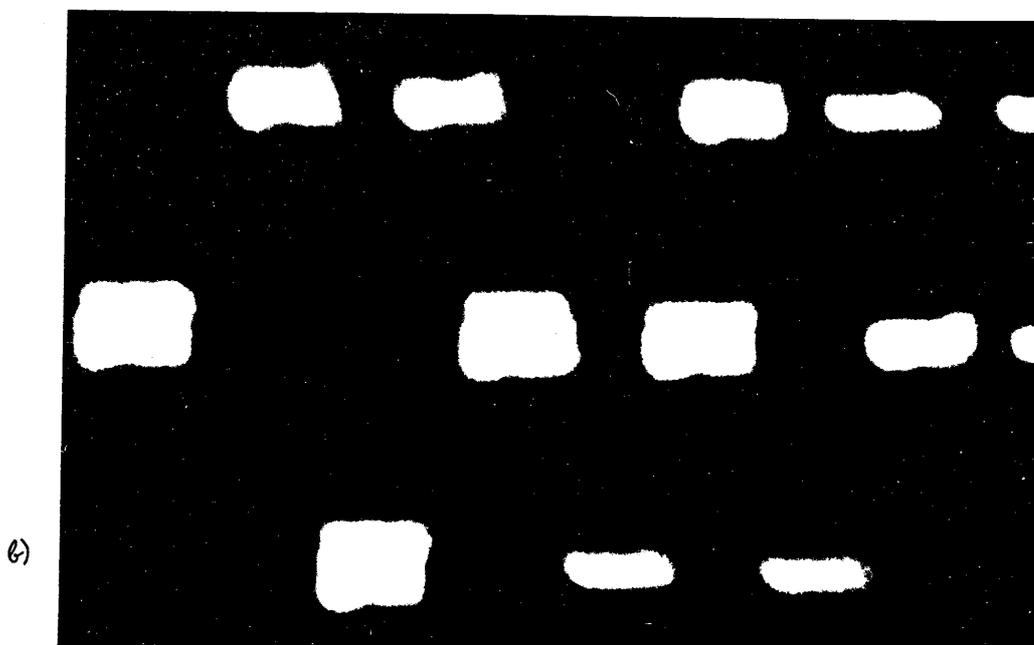


Figure 40. Portions d'HSO de Lohmann photographiées à travers un microscope.
a) HSO sur film Agfa Copex Pan, avec objectif Leitz de focale 65 mm ouvert à f/8.
b) HSO sur plaque Kodak 649 F, avec objectif de photographie aérienne de focale 400 mm ouvert à f/4.
Grandissement : x 400

100 μ m



Le support de l'émulsion doit être soit une plaque de bonne qualité optique soit un film placé en immersion .

Nous illustrerons ces considérations par quelques résultats expérimentaux : la figure 40 présente les micrographies de deux portions HSO photoréduits à partir d'un même original , l'un sur film Agfa Copex Pan avec un objectif commercial Leitz de bonne qualité , de focale 65 mm , ouvert à $f/3,5$, l'autre sur plaque Kodak 649 F de qualité optique microflat avec un objectif CERCO de photographie aérienne très bien corrigé de toutes les aberrations géométriques , de focale 400 mm , ouvert à $f/4$.

Les différences entre les deux figures de diffraction correspondantes pourraient être mises en évidence par une analyse photométrique , mais sont trop faibles pour apparaître de façon significative au tirage photographique . La figure 41 permet d'apprécier , par comparaison avec les figures 26 , l'importance de la qualité optique de la plaque .

III - APPLICATIONS DE L'HOLOGRAPHIE SYNTHETIQUE

3.1) Introduction , HSO de Fourier et HSO images

Notre intérêt pour l'holographie synthétique a son origine dans l'utilisation d'HSO dans notre expérience de correction d'images en éclairage incohérent . Mais plusieurs autres applications de cette technique sont apparues ensuite . Nous avons déjà évoqué l'utilisation d'HSO à franges dans notre laboratoire pour le contrôle de surfaces asphériques {100} et pour la déflexion de faisceaux laser {103} . Décrivons maintenant diverses applications des HSO échantillonnés sur lesquelles nous nous sommes penché , en terminant par nos HSO de déconvolution approchée .

Il est utile de préciser d'abord la distinction entre HSO de Fourier et HSO images . Nous avons utilisé jusqu'ici le nom d'onde à synthétiser pour l'amplitude lumineuse $\hat{u}(\vec{\Omega})$ désirée dans le plan de l'HSO , et la transformée de Fourier $u(\vec{r})$ de $\hat{u}(\vec{\Omega})$ a été appelée objet . Ce dernier mot sous-entend que notre intérêt principal se portait sur $u(\vec{r})$ et que $\hat{u}(\vec{\Omega})$ n'avait d'autre rôle que de fournir , par diffraction de Fraunhofer , la distribution d'amplitude $u(\vec{r})$. A ce titre , on peut parler d'HSO de Fourier et les exemples qui ont été utilisés s'intéressaient à notre objet-test de la figure 4 , codé sur l'HSO par sa transformée de Fourier . Mais rien n'est à changer à nos considérations sur le codage de l'amplitude complexe et la réalisation des HSO si $\hat{u}(\vec{\Omega})$ est l'amplitude intéressante et $u(\vec{r})$ un simple intermédiaire commode . L'HSO prend dans ce cas le nom d'HSO image . Le montage à utiliser est alors celui de la figure 42 : à travers la lentille L , on forme l'image de l'HSO ; un masque situé dans le plan de diffraction de Fourier sélectionne une région de taille $\Delta x . \Delta y$ correctement placée . Le calcul

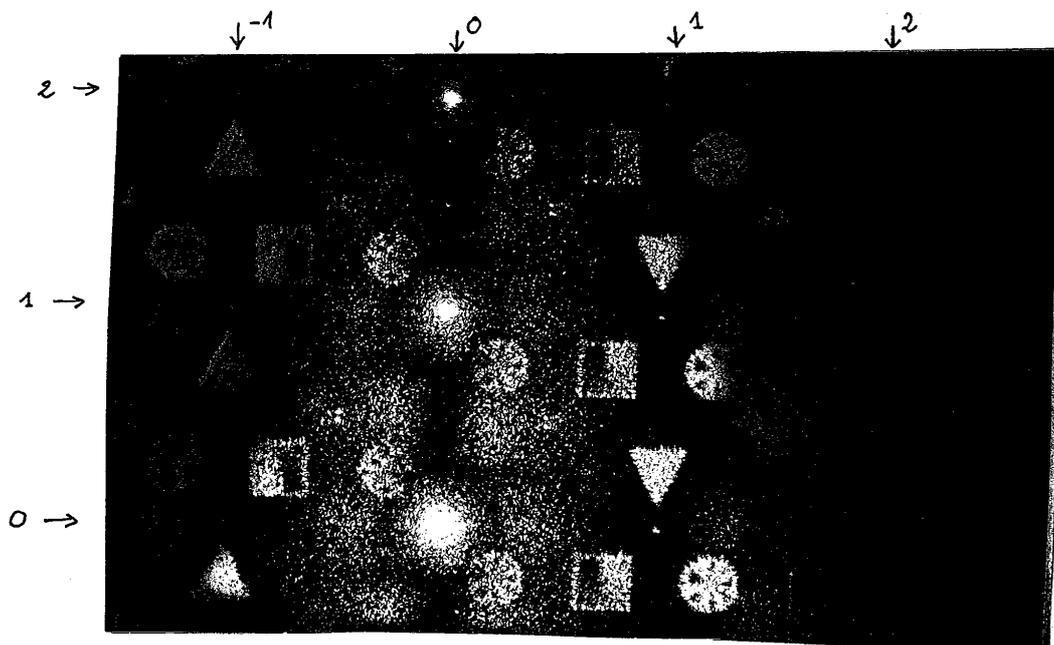


Figure 41. Figure de diffraction d'un HSO de Lohmann à phase "exacte" obtenu par interpolation d'ordre 2 mais photoréduit sur plaque Kodak 649 f à support de verre ordinaire. On remarque l'effet des défauts de la plaque sur cette figure, qui sans eux serait intermédiaire entre les figures 26 a et 26 b. Les centres des ordres sont fléchés.

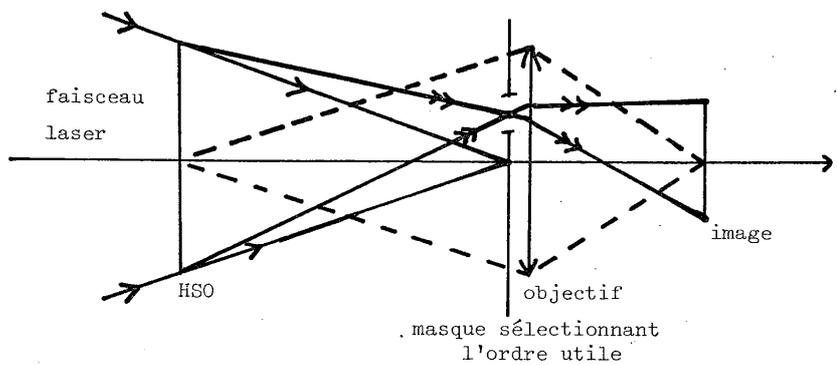


Figure 42. Utilisation d'un HSO image.

de l'amplitude diffractée dans l'image est donné en appendice B de l'annexe I pour les HSO de Lohmann et peut être généralisé aux HSO à P ouvertures par cellule qui assurent un codage plus rigoureux.

En pratique, on peut distinguer deux sortes d'HSO images, suivant que la quantité utile pratiquement est l'amplitude complexe $\hat{u}(\vec{\Omega})$ ou l'intensité $|\hat{u}(\vec{\Omega})|^2$.

Dans le second cas, il n'ya pas de phase à coder et la position du masque de la figure 42, qui ne modifie que la phase, est indifférente si l'HSO est parfait et les ouvertures très fines. Cependant, on a intérêt (voir § 1.2) à mettre le masque à proximité de l'ordre (0,0) pour minimiser l'influence parasite de la taille des ouvertures. De plus, si l'HSO binaire n'est pas constitué de parties rigoureusement transparentes et de parties entièrement opaques, l'ordre (0,0) est modifié (voir § 2.3) : en conséquence, il convient de placer le masque au voisinage du centre, en évitant cependant le centre.

Si, au contraire, la synthèse de $\hat{u}(\vec{\Omega})$ doit être exacte en module et en phase, nous avons expliqué que la phase n'est correcte que dans un ordre de diffraction donné, en général (1,0). Un cas particulier, toutefois, est celui où la phase est nulle : tous les ordres sont alors équivalents pour le codage. Par conséquent, la position du masque est déterminée, comme précédemment, par l'approximation concernant la taille des cellules et par la transparence des parties claires et sombres de l'HSO binaire.

Les applications qui suivent illustreront ces considérations.

3.2) Profileur pour faisceaux gaussiens

Le profil gaussien bien connu des faisceaux laser est gênant pour enregistrer des hologrammes naturels. La porteuse issue d'un laser ne peut pas être uniforme sur toute la plaque, si bien que le point de fonctionnement utilisé sur la caractéristique de l'émulsion varie dans le champ, et avec lui l'efficacité et les non-linéarités. La façon la plus simple d'obtenir un faisceau pratiquement uniforme dans le champ est de faire diverger fortement le faisceau laser à l'aide d'un objectif puissant et de n'utiliser que la partie centrale, mais la perte de lumière est alors considérable. Y. BELVAUX et S.P.S. VIRDI {118} ont suggéré d'utiliser un HSO-image pour rendre uniforme un faisceau laser gaussien : si le faisceau laser a une intensité $I(\vec{\Omega})$ dans le plan de l'HSO et qu'on désire une intensité $I'(\vec{\Omega})$, l'HSO doit coder la quantité

$$\hat{u}(\vec{\Omega}) = \sqrt{\frac{I'(\vec{\Omega})}{I(\vec{\Omega})}} \exp i\phi(\vec{\Omega}) \quad (77)$$

Cette équation est l'expression générale des HSO destinés à mettre en forme des faisceaux laser. BARNARD {119} est le premier à avoir proposé cette utilisation

des HSO . Bien entendu , la phase importe si on désire contrôler la propagation ultérieure du faisceau . En l'occurrence , $I'(\vec{\Omega})$ est constant et une phase nulle convient , si bien que $\tilde{u}(\vec{\Omega})$ de l'HSO profileur de faisceau gaussien a pour expression :

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}) = \exp (\Omega/\Omega_0)^2 . \quad (78)$$

Les calculs {118} montrent qu'on peut espérer utiliser ainsi jusqu'à 37% de l'énergie incidente sous forme d'un éclaircissement uniforme . Pour cela , il faut toutefois que les ouvertures dans les cellules de l'HSO soient aussi grandes que possible , et la plus grande doit remplir entièrement la cellule . L'influence parasite de la taille des ouvertures est donc considérable . On peut songer à les corriger , mais en tout cas , il convient de s'écarter le moins possible de l'ordre (0,0) pour minimiser l'erreur due à cette approximation et pour recueillir le plus d'énergie possible . Le masque doit être centré sur l'ordre (0,0) , et il est donc important d'enregistrer un HSO binaire dont les parties sombres soient aussi opaques que possible et les parties claires aussi transparentes que possible . En pratique , à l'aide du tracé à niveaux de gris affinés analogue à celui présenté sur la figure 39 b) , S.P.S. VIRDI {120} a ainsi obtenu un faisceau laser uniforme à 1 ou 2% près avec 20% de l'énergie incidente . Sans HSO , et en n'utilisant que le centre du faisceau gaussien pour limiter ses variations d'éclaircissement à 2% , on ne peut utiliser que 2% de l'énergie du faisceau .

3.3) Autres exemples de mise en forme de faisceaux laser

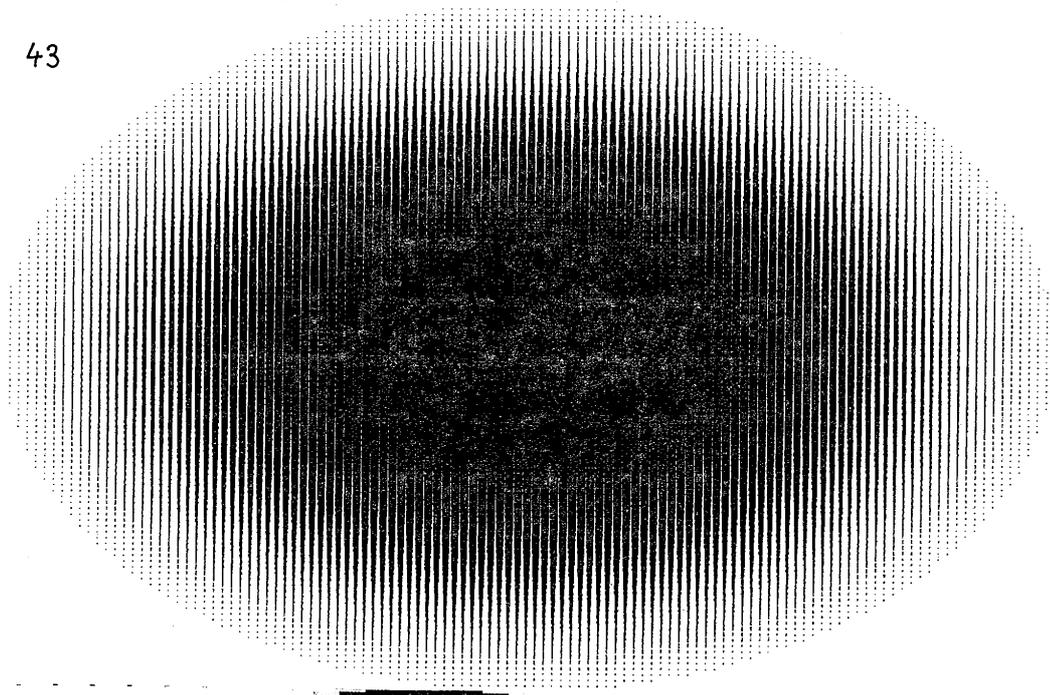
Une application de la même méthode a été proposée pour les expériences sur la fusion par laser . A un niveau où l'énergie laser est déjà très importante , il est nécessaire de donner au faisceau une forme plus abrupte que la forme gaussienne : le profil idéal est de la forme

$$I'(\vec{\Omega}) = I_0 \exp(-\Omega^n) \quad (79)$$

avec n de l'ordre de 5 , I_0 et n constants .

Cette opération était réalisée auparavant à l'aide de masques photographiques . Les HSO apportent une double amélioration : le contrôle de la transmittance en amplitude est plus précis et plus commode par HSO que par photographie , et l'HSO peut être utilisé plusieurs fois alors que la photographie est brûlée à chaque impulsion . En effet , si l'HSO est réalisé par métallisation , le métal réfléchit l'énergie des parties obscures de l'HSO et ne brûle pas . En commun avec Y. BELVAUX et S. LOWENTHAL , nous détenons un brevet français sur cette idée {121} . La figure 43 présente un HSO correspondant à cette application . Il doit être utilisé dans l'ordre zéro pour recueillir le maximum d'énergie . Le tracé est le négatif de l'HSO , qui doit être transparent au centre . Pour éviter de renvoyer l'énergie réfléchie dans la direction d'incidence , l'HSO n'est pas normal au faisceau , ce qui explique l'anamorphose .

43



44

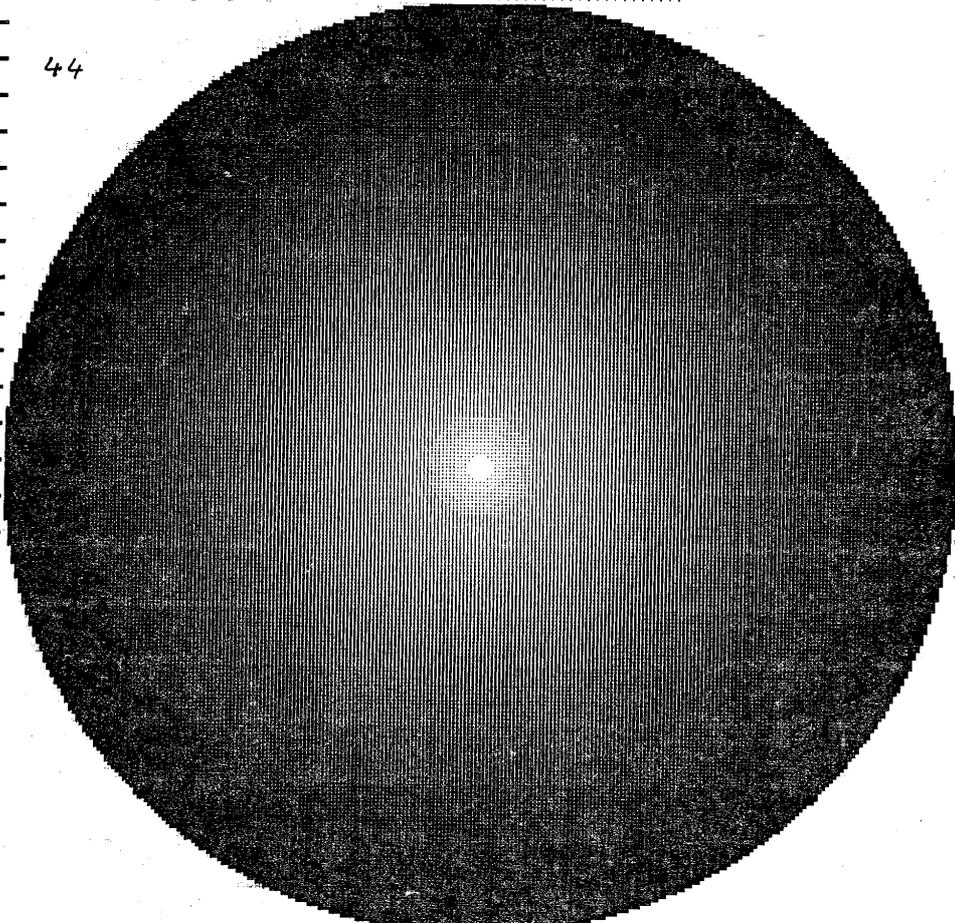


Figure 43. Masque pour mise en forme de faisceaux laser de puissance.
Figure 44. Masque pour mise en forme de faisceaux laser destinés à produire la lévitation de billes creuses.
Intervalle entre graduations = 10 cellules.

Nous avons aussi étudié la mise en forme des faisceaux laser dans les expériences de lévitation par faisceau laser de G. ROOSEN et B. FORMEY de SAINT LOUVENT {122} . Pour obtenir la lévitation d'une bille sphérique creuse ,un faisceau laser à profil gaussien ne convient pas . Le profil idéal est nul au centre, parabolique au voisinage du centre , et rejoint le profil gaussien naturel ensuite : l'HSO à réaliser correspond donc à

$$\tilde{u}(\vec{\Omega}) = \begin{cases} \alpha\Omega \exp\beta\Omega^2 & \Omega \leq \Omega_1 \\ 1 & \Omega > \Omega_1 \end{cases} \quad (80)$$

(Ω_1, α, β sont des constantes) .

La figure 44 montre un exemple de tracé 256 x 256 cellules réalisé à cet effet .

IV - OBTENTION DES HOLOGRAMMES POUR L'EXPERIENCE DE DECONVOLUTION APPROCHEE

4.1) Etape d'holographie synthétique

Les HSO des fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ introduites dans le Chapitre I , Equation (34) sont destinés à enregistrer ensuite ces deux fonctions par "hétérodynage optique" sur hologrammes naturels .

Le rôle de l'ordinateur est d'abord de calculer les fonctions H_+ et H_- , connaissant la fonction défaut $D(\vec{r})$, puis de coder les amplitudes $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$, avec une phase arbitraire , sous forme d'HSO . Ce calcul est schématisé sur la figure 45 . A l'entrée sont données d'une part , la constante ϵ du filtre de Wiener et , d'autre part , soit la fonction $D(\vec{r})$, soit la FTM de défaut $\tilde{D}(\vec{\Omega})$ si elle est connue analytiquement , comme dans l'exemple choisi . Le calcul point par point de $H(\vec{\Omega})$ est suivi d'une transformation de Fourier . En cas de symétrie de révolution , la transformation de HANKEL économise la place occupée en mémoire et évite de rompre la symétrie par l'échantillonnage à maille carrée de la transformation de FOURIER bidimensionnelle . La réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ est ensuite décomposée conformément à l'Equation (34) . L'ensemble de ce calcul pour 128 x 128 et même pour 256 x 256 points nécessite quelques secondes de calculs sur les ordinateurs du CIRCE avec 300 à 500 K octets en mémoire centrale .

Ensuite vient le codage des deux HSO .

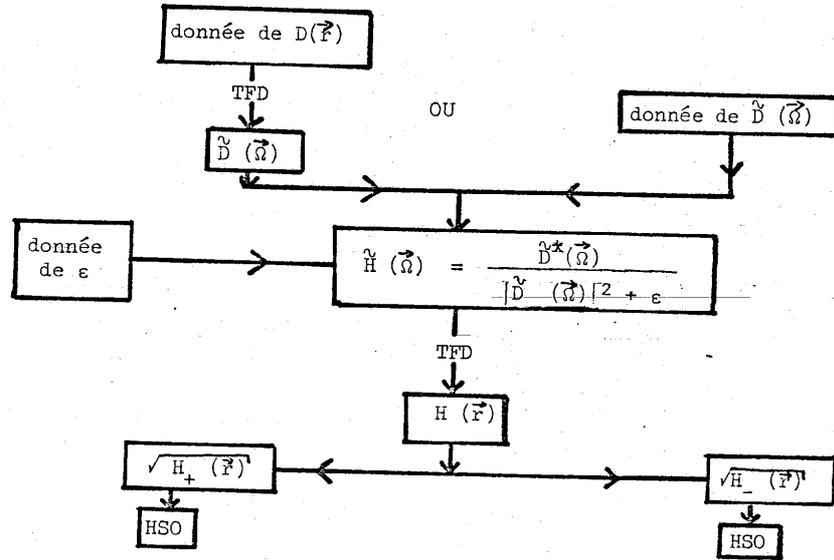


Figure 45: Etape de calcul des HSO.

TFD = transformation de Fourier discrète, ou si possible transformation de Hankel.

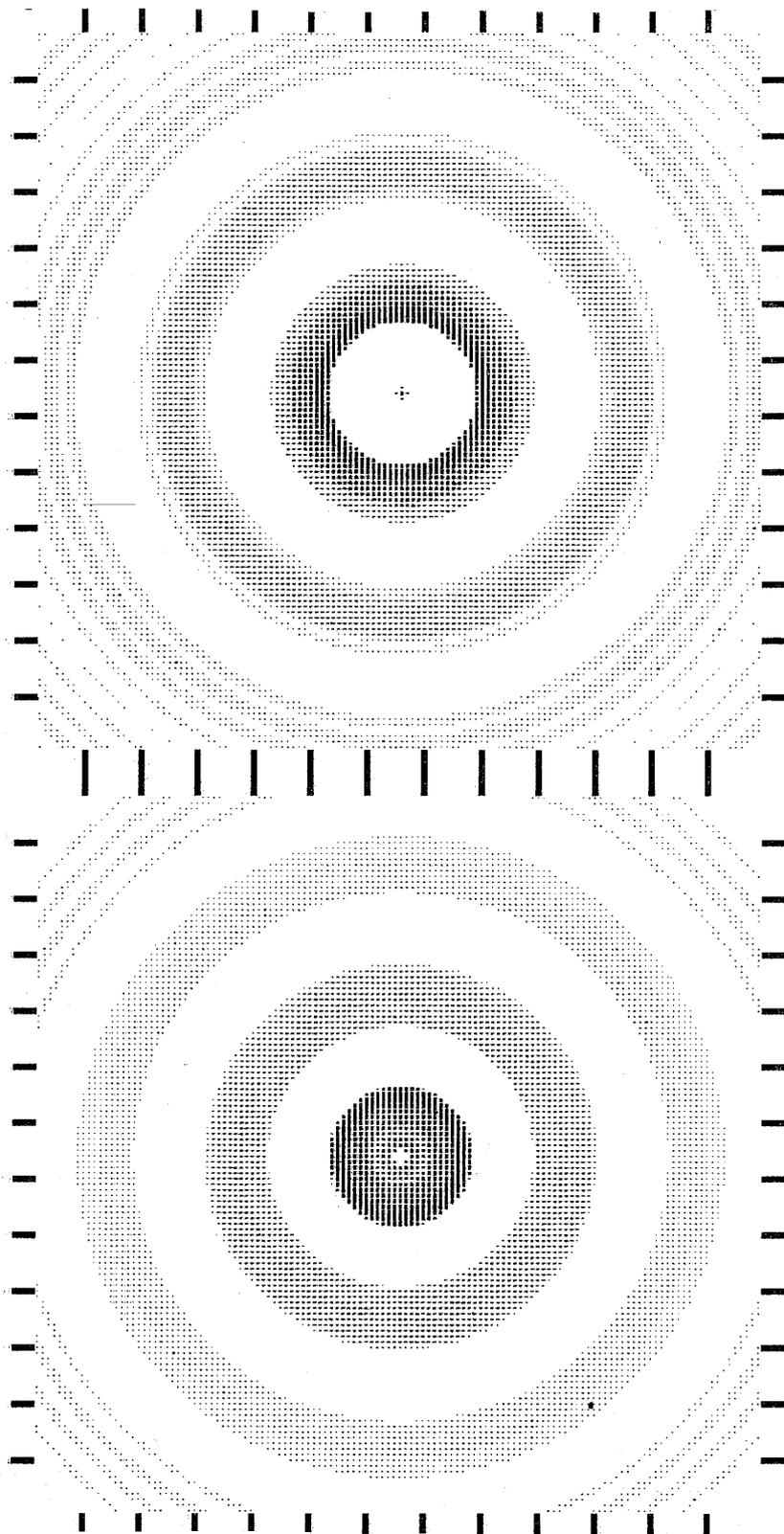


Figure 46. HSO-images pour la déconvolution approchée par pseudo-filtrage de Wiener d'une image entachée d'un défaut D_R en forme de disque de rayon $R = 12$ cellules. Le paramètre ϵ vaut 0,1. Dimension 128 x 128 points. Intervalle entre graduations : 10 cellules ; a) partie positive H_+ de la réponse percussionnelle de traitement ; b) partie négative H_- .

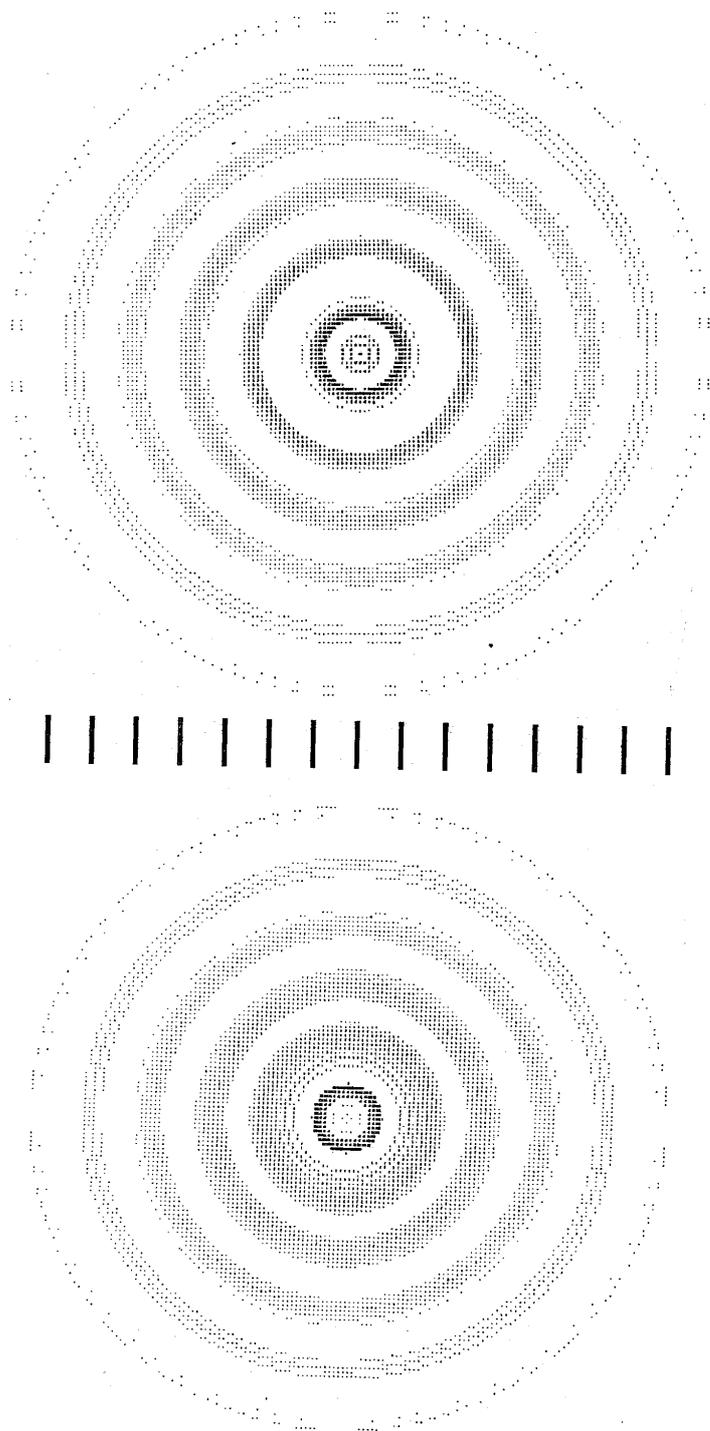


Figure 47. HSO images de déconvolution approchée du même type que ceux de la figure 46, mais avec $\epsilon = 0,01$, $R = 8$ cellules. Dimension 256 x 256 points. a) H_+ ; b) H_- .

Convient-il d'enregistrer des HSO de FOURIER ou des HSO images ? La seule différence entre les deux nous semble être que les HSO images évitent une nouvelle transformation de Fourier et abrègent donc légèrement le calcul , ainsi que le tracé puisque sur les HSO images de H_+ et de H_- de nombreuses cellules sont vides : les fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ ne sont jamais simultanément non nulles.

Les figures 46 et 47 montrent les paires $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ pour notre défaut $D_R(\vec{r})$ avec les valeurs des paramètres annoncées dans le Chapitre I : dans un cas, le rayon R du défaut vaut 12 cellules de résolution δx , le paramètre de bruit ϵ , 0, et les HSO comprennent 128 x 128 points ; dans le second cas , ces trois valeurs deviennent $8\delta x, \epsilon = 10^{-2}$ et 256 x 256 points . Le premier couple est destiné au traitement des objets des figures 5 , 7 et 8 , le second à celui des objets des figures 6 , 7 et 8 . Les simulations présentées au Chapitre I (figures 13 et 14) montrent que la valeur $\epsilon = 0,1$ est un choix peu judicieux , alors que la valeur 0,01 permet d'obtenir par le traitement une amélioration nette . Le nombre de points est conforme au tableau 2 (valeurs encadrées) . Le choix du pas d'échantillonnage est , en principe , imposé par la fréquence de coupure $\Omega_B = 41 \text{ mm}^{-1}$ du Chapitre I , § 3.2 : il doit être égal à

$$\delta x = \frac{1}{2\Omega_B} = 12 \text{ } \mu\text{m} \quad (81)$$

La valeur correcte de $R/\delta x$ aurait donc été 25 et non pas 12 pour les HSO de la figure 46 , alors que la valeur 8 est adaptée à ceux de la figure 47 .

4.2) Hétérodynage optique

4.2.1) Montage expérimental

Les distributions d'intensité $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ fournies par les HSO sont enregistrées sous forme d'hologrammes naturels à l'aide d'une porteuse ponctuelle située dans leur plan ; le principe du dispositif d'enregistrement est schématisé sur les figures 48 et 49 respectivement pour les cas d'HSO de Fourier et image . C'est ce dernier schéma qui a été réalisé et que présente la figure 50. Le faisceau laser est issu d'un laser à argon ionisé de puissance voisine de 1 W pour la raie de longueur d'onde 488 nm . Il est dédoublé par un cube séparateur ; le faisceau objet est dilaté par un objectif de microscope pour éclairer de façon suffisamment uniforme l'HSO image : le doublet D_1 fait converger le faisceau diffracté par l'HSO dans un plan de filtrage où un masque sélectionne l'ordre (1,0) .

Le doublet D_2 situé derrière le masque forme la fonction H_+ ou H_- dans le plan image de l'HSO ; la position du doublet est réglée de façon que la taille de l'image soit exactement adaptée à la taille du défaut $D_R(\vec{r})$ à corriger ;

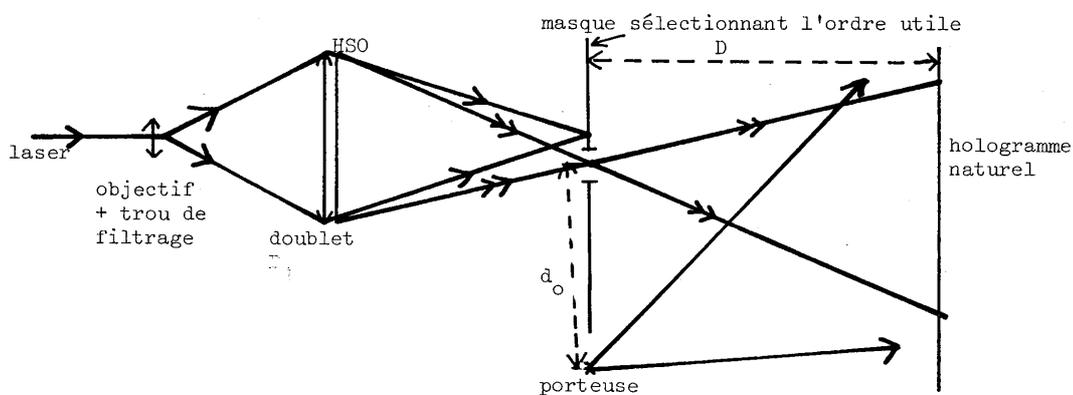


Figure 48. Hétérodynage optique à partir d'un HSO de Fourier.
(Une flèche : faisceau direct ; deux flèches : ordre utile).

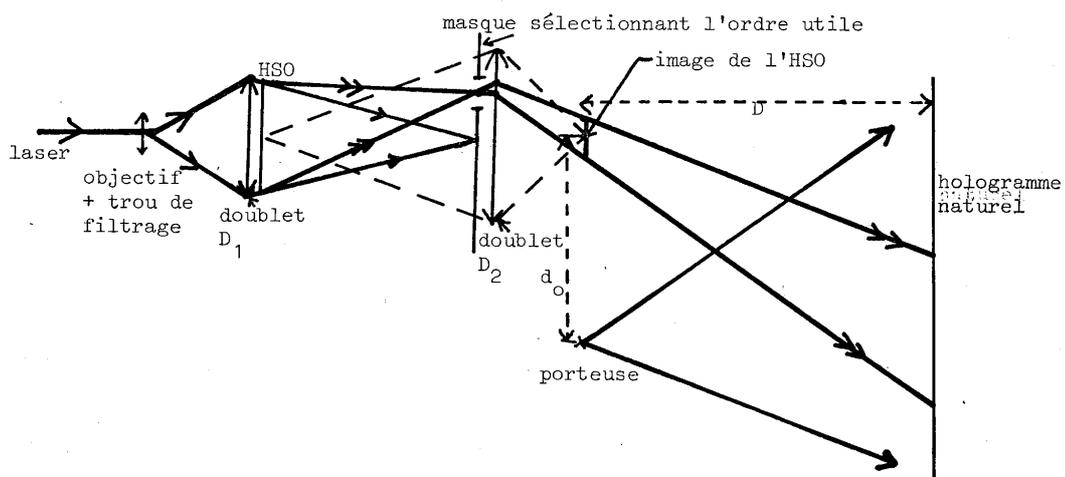


Figure 49. Hétérodynage optique à partir d'un HSO image.
(Une flèche : faisceau direct ; deux flèches : ordre utile).

dans nos deux exemples , le support de l'image doit avoir pour côté 3072 μm et 3200 μm respectivement , ce qui peut être réglé sans peine avec une précision meilleure que 1% . Le faisceau objet éclaire ensuite la plaque , située à une distance $D = 500 \pm 1$ mm de l'objet . L'onde porteuse , atténuée si nécessaire par des densités pour régler au mieux l'efficacité et la linéarité de l'hologramme , converge dans le plan objet (à 1 mm près environ) à la distance $d_o = 35$ à 50 mm (suivant les cas) du centre de celui-ci ; la distance d_o doit être suffisante pour éviter le chevauchement d'ordres , mais assez faible pour que les aberrations holographiques restent tolérables (voir Chapitre suivant) ; en pratique , il est malaisé de descendre en-dessous de 35 mm pour des questions d'encombrement . Mentionnons la nécessité de centrer les deux HSO de H_+ et H_- exactement au même endroit de l'enregistrement de leurs hologrammes naturels , bien qu'une très légère correction puisse être faite lors de leur utilisation en convolution incohérente .

4.2.2) Utilité d'un diffuseur et efficacité de diffraction des hologrammes :

Le montage tel que nous venons de le décrire ne peut fournir que des hologrammes de très faible rendement . Il est bien connu que la transformée de Fourier d'un objet non diffusant est une fonction très étroite : si son pic doit être enregistré dans des conditions linéaires , les faibles oscillations correspondant aux hautes fréquences spatiales et qui contribuent à la forme de l'objet mais contiennent très peu d'énergie , n'apportent pratiquement aucune contribution à l'efficacité de l'hologramme . Dans notre cas , l'hologramme enregistré n'est pas de Fourier , mais nous nous heurtons à la même difficulté en raison de la très faible étendue géométrique du faisceau , limité par le masque de l'objet , d'autant plus que la répartition de lumière est loin d'être uniforme dans ces deux plans . La figure 51 montre une coupe photométrique du faisceau au niveau de l'hologramme : on voit que l'énergie est contenue dans une zone d'aire inférieure à $s_o = 1$ mm² . Or , pour ne pas limiter la résolution , l'aire utilisée dans l'hologramme doit être au moins

$$S_o = (\lambda D \Omega_B)^2 = 1 \text{ cm}^2 \quad (82)$$

Donc , même dans l'hypothèse très optimiste où le centre de l'hologramme aurait l'efficacité de diffraction maximale théorique pour un hologramme enregistré dans des conditions linéaires , soit 6% , l'efficacité globale ne pourrait guère dépasser $6 \cdot 10^{-4}$. L'expérience nous a montré que 10^{-4} était une valeur difficile à atteindre . Un tel hologramme , utilisé dans le montage de convolution incohérente avec un faisceau laser de 1 W pourrait fournir jusqu'à 100 μW dans l'ordre utile , s'il n'y avait pas d'autres pertes de lumière . Mais nous verrons plus loin que les autres pertes sont si importantes qu'une efficacité de 10^{-4} est un inconvénient



Figure 50. Montage d'hétérodynage conforme au schéma de la figure 49.

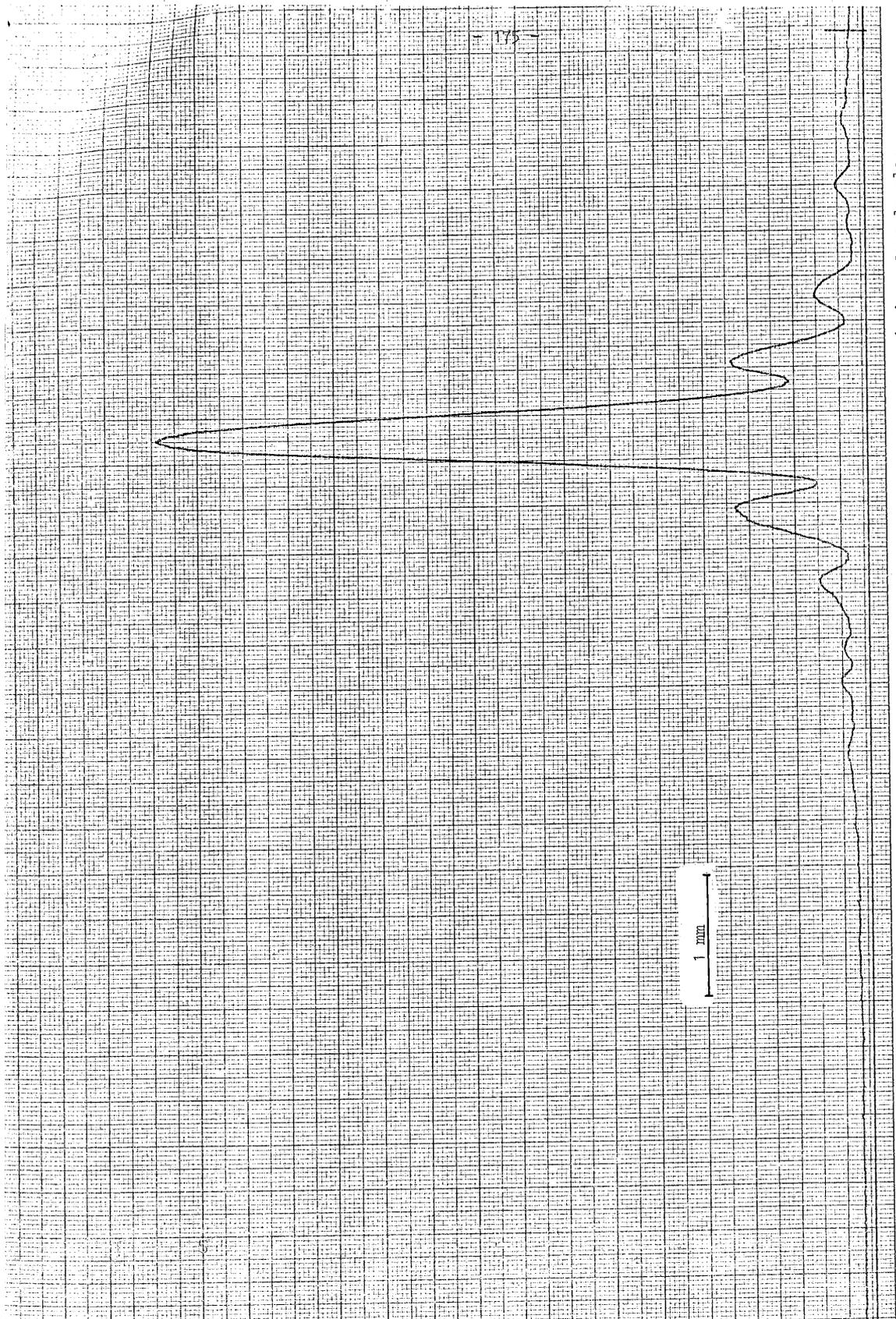
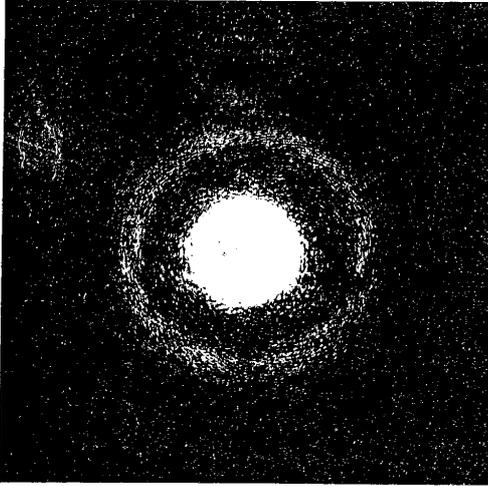
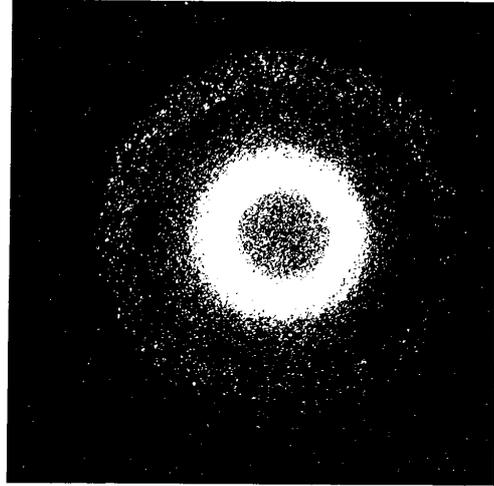


Figure 51. Onde objet de l'hologramme naturel hétérodyne (non diffus) : coupe photométrique dans le plan de l'hologramme.



a) —

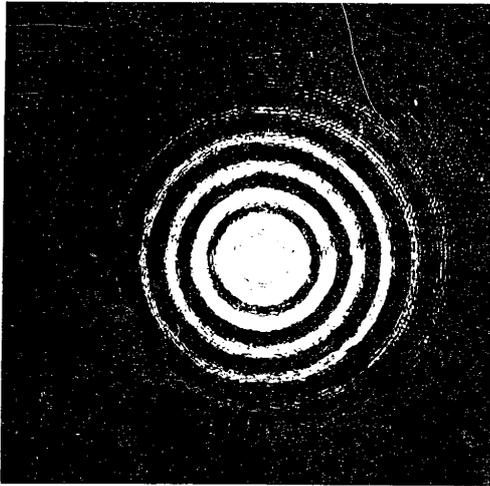


b) —

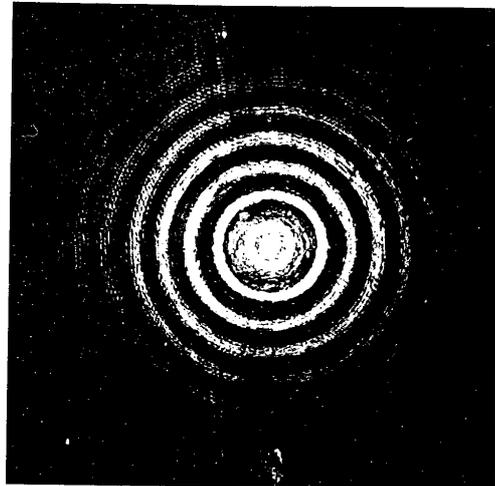
Figures 52 et 53 : Parties positive H_+ (a) et négative H_- (b) des réponses percussives de traitement restituées par les hologrammes hétérodynes.

En haut, figure 52 : hologrammes diffus pour traitement d'un défaut de rayon $R = 300 \mu\text{m}$ avec pseudo-filtrage de Wiener de paramètre $\epsilon = 0,1$.

En bas, figure 53 : hologrammes non diffus, $R = 100 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,01$.



a) —



b) —

L'échelle n'ayant pas été respectée exactement au tirage on a indiqué le rayon R par un segment en-dessous de chaque figure.

très gênant . C'est cependant avec de tels hologrammes qu'ont été obtenus certains résultats .

Le recours aux hologrammes de phase est à éviter en raison de leurs non-linéarités . Pour augmenter l'efficacité des hologrammes , la seule solution est donc de changer la phase des objets $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ dont seule l'intensité importe . Nous avons essayé de placer une lame déphasante sur une partie de l'objet , mais son effet n'a pas été suffisant . Il a fallu recourir à la mise en place d'un diffuseur de phase sur l'objet $H_+(\vec{r})$ ou $H_-(\vec{r})$. De cette façon , l'onde objet a été répartie sur une aire de plusieurs dizaines de centimètres carrés au niveau de l'hologramme et une efficacité dépassant légèrement 1% a été atteinte .

Cette solution n'est malheureusement pas sans inconvénients . Le diffuseur, en élargissant le faisceau objet , diminue son éclairement sur l'hologramme et des poses assez longues , de l'ordre de 15 mn sur plaque Kodak 646 F , ont été nécessaires malgré la puissance du faisceau incident .

Le caractère diffus de l'onde objet s'accompagne évidemment de granularité à la restitution . Pour que cette granularité ne perturbe pas la convolution incohérente , il faut qu'elle soit de petite taille par rapport à la résolution désirée . Si l'aire de l'hologramme a la valeur minimale S_0 de l'Equation (82) , la taille de la granularité est égale à la résolution désirée : il faut donc utiliser une aire d'hologramme nettement plus grande que S_0 . Mais cette nécessité a pour conséquence l'augmentation des aberrations holographiques : nous discuterons cette question plus loin en détail .

C'est toutefois avec des hologrammes hétérodynes diffus qu'a été réalisée la plupart des expériences . Les figures 52 et 53 présentent les ondes restituées par les hologrammes hétérodynes de H_+ et H_- . La figure 52 correspond aux HSO de la figure 46 et à des hologrammes diffus , la figure 53 aux HSO de la figure 47 et à des hologrammes non diffus .

Nous verrons au Chapitre IV qu'il est utile d'ajouter aux hologramme hétérodynes de $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ un hologramme auxiliaire de réglage dont l'onde objet est issue d'un point lumineux situé au centre des fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$.

CONCLUSION DU CHAPITRE

Nous ramenons de notre voyage au pays des hologrammes synthétiques les objets exotiques que nous étions partis y chercher : les fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ de déconvolution approchée . Mais nous avons eu la chance de pouvoir joindre à notre butin d'autres pièces : les masques de mise en forme des faisceaux laser .

L'holographie synthétique telle qu'elle nous est apparue est divisée en deux grandes régions : le domaine de la pratique et celui de la théorie . Le premier est celui qui nous semble le moins bien étudié actuellement , et les limitations à la technique des HSO nous semblent provenir des erreurs de troncature du plan de Fourier à spectre large , des erreurs de quantification de la phase et des niveaux de gris , de la précision et de la qualité limitées des tracés et de leur photoréduction . Toutes ces questions sont liées à la technologie des ordinateurs et surtout des organes de tracé .

Dans le domaine de la théorie , le codage de l'amplitude complexe , où nous avons ouvert quelques sentiers nouveaux , est maintenant bien connu , bien que la taille finie des ouvertures reste une cause d'approximation , à vrai dire corrigible par des calculs itératifs . A ce domaine se rattachent toutefois deux presque îles où une mission exploratrice nous semblerait du plus grand intérêt . D'une part, l'application des HSO échantillonnés aux ondes à symétrie de révolution devrait pouvoir déboucher sur des HSO respectant cette symétrie et réduisant les temps de calcul ; J. BRUNOL s'est déjà engagé dans cette voie {92} . D'autre part , le problème du diffuseur parfait , connu dans tous les domaines du traitement de l'information , se retrouve en holographie synthétique où il a déjà fait l'objet de diverses études {123 , 124} couronnées d'un succès très partiel . Il serait pourtant bon de pouvoir débarrasser tous les résultats présentés au début de la présente étude de la granularité qui les détériore . On pourrait , par exemple, étudier l'ensemble très riche des fonctions à spectre borné et dont le carré du module se confond avec l'image cohérente d'un peigne de Dirac bidimensionnel diaphragmé à travers une pupille finie .

CHAPITRE III - LA CONVOLUTION INCOHERENTE

Nous n'avons considéré jusqu'ici que les opérations préliminaires à nos essais de déconvolution approchée : l'enregistrement de l'objet à traiter et des hologrammes de traitement . Nous en venons maintenant au traitement lui-même . La figure 54 en rappelle le schéma dont nous décrirons maintenant les différentes parties : la source , la convolution optique et la soustraction .

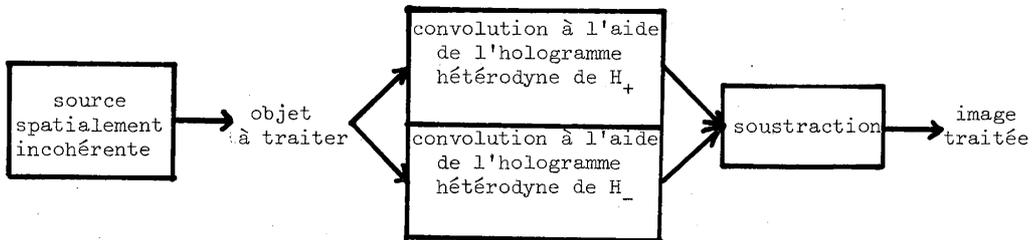


Figure 54. Rappel des étapes du traitement.

L'étude du mode d'éclairage de l'objet nous amènera à considérer les conditions de cohérence spatiale et temporelle et à choisir une source lumineuse et commode d'emploi .

Le montage de convolution , très simple dans son principe , nécessite l'étude des aberrations .

La soustraction peut être réalisée par l'une quelconque des nombreuses méthodes existantes . Nous commencerons par présenter quelques résultats de traitements obtenus par mesure des deux éclairagements , puis soustraction point par point . La lourdeur de ce procédé en limite l'utilisation à quelques cas simples, mais sa simplicité nous permettra de nous concentrer sur les questions indépendantes de la soustraction . Le chapitre suivant sera consacré à la mise en oeuvre d'une méthode de soustraction plus élaborée .

I - L'ECLAIRAGE

La source doit , en principe , être "monochromatique" et "spatialement incohérente" . Une étude des conditions de cohérence temporelle et spatiale est nécessaire pour préciser ces mots . Les sources satisfaisant à ces conditions sont certaines lampes spectrales et le laser décohéré . Le calcul de la luminosité du montage et sa commodité de mise en oeuvre achèvent de déterminer le choix du dispositif d'éclairage .

1.1) Cohérence temporelle

Pour étudier la condition sur le spectre de la source , considérons un point M de l'objet et ses trois images , M_1 , M_0 , M_{-1} , dans les ordres 1 , 0 et -1 de l'hologramme de traitement (Figure 55) .

La position du point M_1 dépend de la longueur d'onde en raison de la dispersion par l'hologramme : l'écart $\lambda' - \lambda$ entre les extrémités du spectre de la source doit être tel que la distance entre $M_1(\lambda)$ et $M_1(\lambda')$ soit inférieure à la résolution désirée , qui peut atteindre au maximum

$$\delta x = \frac{1}{2\Omega_B} \quad (83)$$

Ω_B étant le rayon du domaine spectral où se trouvent des informations sur l'objet . La distance entre hologrammes et plan image étant la même que lors de l'enregistrement (Figure 50) , la distance $d(\lambda)$ entre M_0 et $M_1(\lambda)$ est liée à la distance d_0 entre ces points à l'enregistrement par la relation :

$$d(\lambda) = d_0 \frac{\lambda}{\lambda_0} \quad (84)$$

où $\lambda_0 = 488 \text{ nm}$ est la longueur d'onde d'enregistrement .

Des Equations (83) et (84) , on tire la condition :

$$\delta \lambda < \frac{\lambda_0}{2d_0 \Omega_B} \quad (85)$$

soit avec $\Omega_B = 40 \text{ mm}^{-1}$ et $d_0 = 40 \text{ mm}$, $\delta \lambda < 0,15 \text{ nm}$. La source doit en pratique être une lampe à vapeur de mercure à basse pression ou un laser .

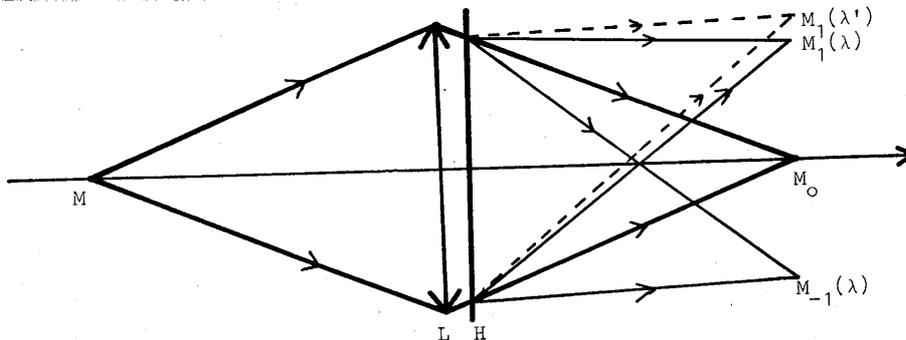


Figure 55. La dispersion de l'hologramme impose une condition de cohérence temporelle.

1.2) Incohérence spatiale

L'incohérence spatiale ne peut être parfaite : la source n'est pas illimitée . Mais si la *bande* des fréquences spatiales contenues dans l'*objet* est *limitée* - ce qui est notre cas - une source de taille *finie suffisante* donne *exactement* la même image qu'une source parfaitement incohérente {80} . La condition exprimée dans la référence {80} revient à dire que la source doit être plus grande que le support du produit de convolution de la pupille par le spectre de l'objet . La figure 56 illustre cette condition pour une pupille circulaire de rayon R_p située à la distance d de notre objet de fréquence de coupure Ω_B .

Ainsi , si nous exigeons que la fréquence de coupure de la pupille (en éclairage cohérent) soit au moins égal à k fois la fréquence de coupure de l'objet , les rayons R_p de la pupille et R_S de la source doivent obéir aux inégalités :

$$R_p > \frac{k\lambda d \Omega_B}{2} \quad (86)$$

$$R_S > R_p + 2\lambda d \Omega_B > \frac{k+4}{2} \lambda d \Omega_B$$

soit , avec $d = 600$ mm :

$$\begin{aligned} R_p &> 6k && \text{en millimètres} \\ R_S &> 6(k+4) && \text{en millimètres} \end{aligned} \quad (87)$$

Avec les hologrammes hétérodynes enregistrés en éclairage non diffus , on peut choisir $k = 1$; avec les hologrammes diffus , la nécessité de réduire l'influence de la granularité impose de prendre k supérieur à 1 : nous avons adopté un rayon de pupille de 12,5 mm , ce qui correspond à une valeur proche de 2 pour k .

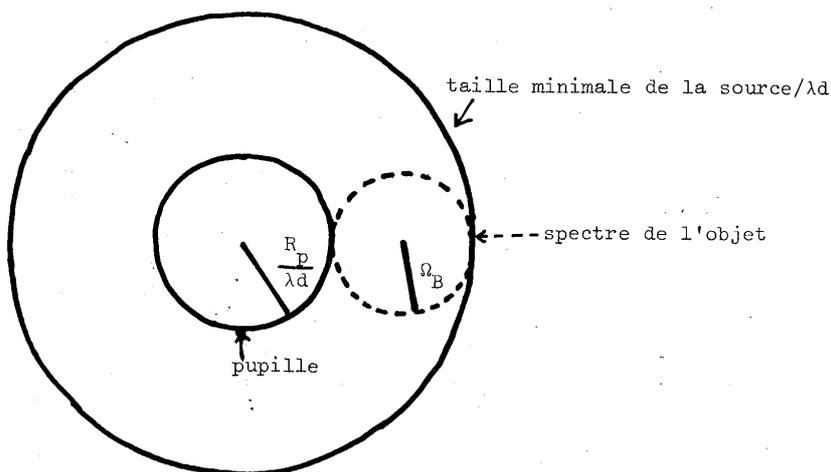


Figure 56. Taille de la source assurant l'équivalent de l'incohérence spatiale.

Mais il ne suffit pas de respecter les conditions de cohérence : la source doit aussi être commode d'emploi , et notamment être suffisamment lumineuse pour que les temps de pose pour enregistrer l'image traitée restent raisonnables . Passons en revue les différentes sources qui s'offrent à notre choix en considérant l'éclairage de l'image qu'elles permettent et les contraintes pratiques dans la réalisation du montage .

1.3) Lampe à vapeur de mercure

La figure 57 schématise le montage . Cherchons à calculer le flux dans l'image . Appelons T_c et T_o les transmittances en intensité du condenseur et de l'objectif , et L_{Hg} la luminance de la source , supposée uniforme . Supposons , pour simplifier , que l'objet est un cadre vide d'aire S_o . Si η est l'efficacité de l'hologramme , c'est-à-dire le rapport de l'énergie dans l'ordre utile à l'énergie incidente , le flux dans l'image s'écrit :

$$\phi_{Hg} = \eta L_{Hg} T_c T_o \frac{S_o \pi R_p^2}{d^2} \quad (88)$$

la luminance des lampes à vapeur de mercure du commerce peut atteindre $8000 \text{ W/cm}^2/\text{sr}$ pour la raie verte . Toutefois , cette valeur n'est atteinte que pour une zone lumineuse carrée , de côté $0,25 \text{ mm}^2$, ce qui exige , compte-tenu de l'Equation (88) , un condenseur de grandissement 280 . Si on désire n'avoir à faire qu'un grandissement 70 , la luminance des lampes disponibles tombe à $1300 \text{ W/cm}^2/\text{sr}$.

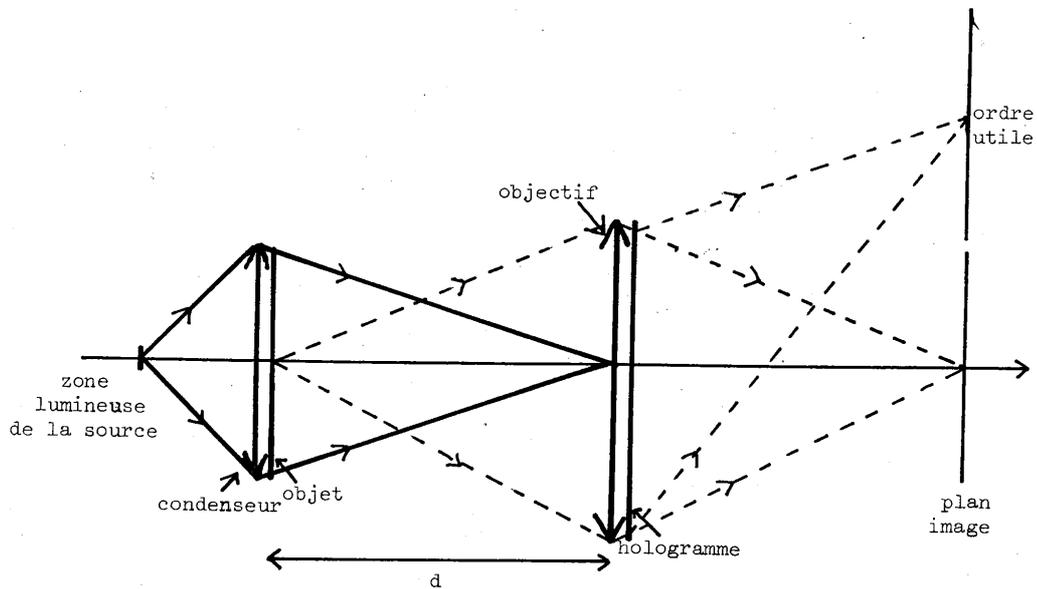


Figure 57. Convolution incohérente : éclairage par lampe à vapeur de mercure ou diffuseur mobile.

Encore cette valeur du grandissement n'est-elle pas aisée à atteindre , car les dimensions de la lampe empêchent que le condenseur s'en approche à moins de quelques centimètres . Ce problème pratique justifie l'abandon de la lampe à mercure au profit du laser décohéré , ce qui a , par ailleurs , l'avantage de permettre la restitution des hologrammes avec leur longueur d'onde d'enregistrement .

1.4) Diffuseur mobile

Le schéma précédent , mais dans lequel la cathode est remplacée par un diffuseur mobile éclairé par un faisceau laser , constitue un mode d'éclairage remplissant les conditions exigées .

Soit W la puissance du laser , et supposons qu'une fraction η_D de cette puissance soit recueillie par l'objet et le condenseur , qui forme de l'aire éclairée du diffuseur une image sur l'objectif d'aire πR_S^2 . Négligeons , pour un calcul d'ordre de grandeur , la non-uniformité de la luminance . Le flux dans l'image prend la forme :

$$\phi_D = \eta_D \eta W \frac{\pi R_P^2}{\pi R_S^2} T_o T_c \quad (89)$$

En comparant cette équation à la précédente , on peut définir une luminance équivalente pour le diffuseur mobile par la relation :

$$L_D = \frac{\eta_D W}{\pi R_S^2} \frac{d^2}{S_o} \quad (90)$$

W valant $1W$, R_S valant 36 mm dans le cas le plus défavorable , et l'aire du cadre de l'objet étant dans notre cas voisine de 10 mm² , on voit que L_D est donnée , en $W/cm^2/sr$, par l'expression :

$$L_D \approx 900 \eta_D \quad (91)$$

Elle est donc inférieure à celle obtenue avec une lampe à mercure , mais le condenseur peut s'approcher du diffuseur sans obstacle .

Ainsi que l'ont fait remarquer LOWENTHAL et JOYEUX {126} , l'incohérence spatiale est synthétisée plus rapidement si on utilise deux diffuseurs très proches l'un de l'autre , l'un mobile et l'autre fixe . En effet , si le diffuseur mobile se déplace à la vitesse v , avec un seul diffuseur , l'incohérence est réalisée dès que le temps d'observation est grand devant le temps t de passage d'un point du diffuseur devant le faisceau laser de diamètre à mi-hauteur d_L , soit :

$$t_1 = \frac{d_L}{v} \quad (92)$$

Avec deux diffuseurs , t_1 est remplacé par le temps t_2 de passage d'un point du diffuseur mobile devant un grain du diffuseur fixe , de taille moyenne g :

$$t_2 = \frac{g}{v} \quad (93)$$

Toutefois , les pertes lumineuses sont alors augmentées par l'adjonction du second diffuseur et η_D diminue . Avec notre montage , v est voisin de 3 m/s et d_L de 3 mm . Le grain du diffuseur Kodatrace est de l'ordre de $5 \mu\text{m}$. t_1 vaut environ 1 ms , ce qui est suffisamment court pour que l'incohérence soit correcte, même avec des temps de pose relativement brefs (de l'ordre de 1 s) . Cependant, le mouvement du diffuseur étant en fait circulaire de rayon 6 cm , le périmètre du cercle décrit ne contient que quelque 100 échantillons indépendants d'un diffuseur . C'est pourquoi le montage à double diffuseur , qui correspond à environ 70 000 échantillons indépendants , nous a paru préférable . Le temps caractéristique d'incohérence t_2 est de l'ordre de $2 \mu\text{s}$.

Remarquons que cette utilisation du diffuseur mobile est bien meilleure que celle souvent adoptée , et qui consiste à placer le diffuseur immédiatement devant l'objet éclairé par un faisceau laser dilaté . En effet , la taille de la source n'est alors pas réglable , et on éclaire dans le plan de la pupille une surface très étendue , avec une perte de lumière considérable (Figure 58) .

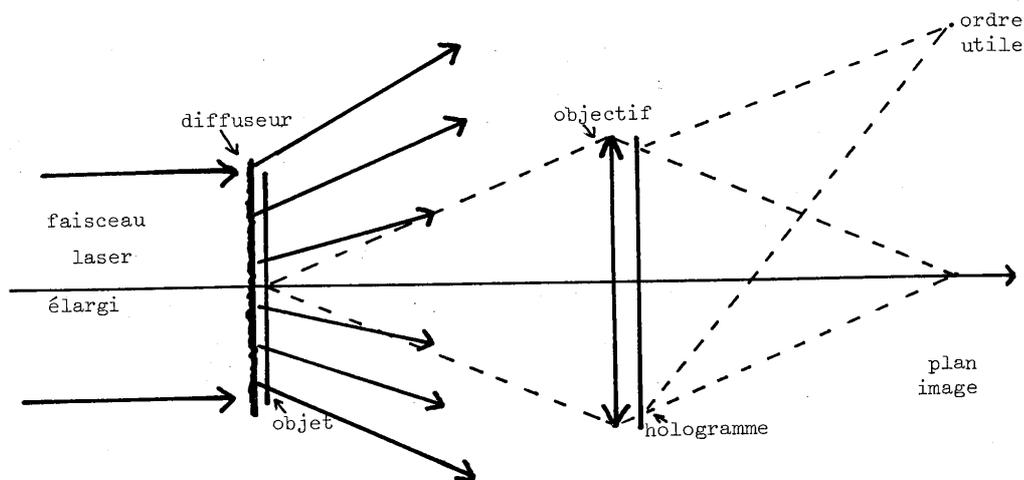


Figure 58. Eclairage par diffuseur mobile : configuration à éviter.

1.5) Synthèse d'incohérence par balayage

BRAAT et LOWENTHAL [127] ont décrit un procédé de synthèse d'incohérence plus lumineux dont nous analysons la cohérence partielle résiduelle en Appendice A de l'Annexe 1. Le principe est schématisé sur la figure 59 .

A chaque instant , on forme à partir du faisceau laser un point source qui éclaire uniformément le condenseur et l'objet . Un dispositif de déflexion bidimensionnel fait parcourir à ce point source une courbe plane qui constitue la source synthétique . L'objet est ainsi éclairé uniformément , mais par une onde d'incidence variable . Grâce au condenseur , cette onde issue du point source converge dans le plan de la pupille .

L'Equation (89) donnant le flux dans l'image utile reste valable , mais on peut espérer gagner nettement sur η_D grâce à la suppression des pertes lumineuses dues aux diffuseurs .

Le balayage bidimensionnel doit couvrir la source synthétique de façon assez dense pour éviter tout effet de cohérence partielle parasite . En pratique , le plus simple est de décrire un réseau de lignes très serrées au moyen d'un balayage horizontal nettement plus rapide que le balayage vertical .

J. BRAAT avait initialement utilisé deux défecteurs mécaniques à miroirs, l'un vibrant à une fréquence de 100 Hz , l'autre mû par un moteur qui effectuait la synthèse d'incohérence en un temps de l'ordre de la minute , égal au temps de pose pour l'enregistrement d'hologrammes incohérents sur résine . Il nous a semblé que pour la mise au point de notre expérience de traitement , une synthèse d'incohérence assez rapide pour être visible à l'oeil et ne pas être liée

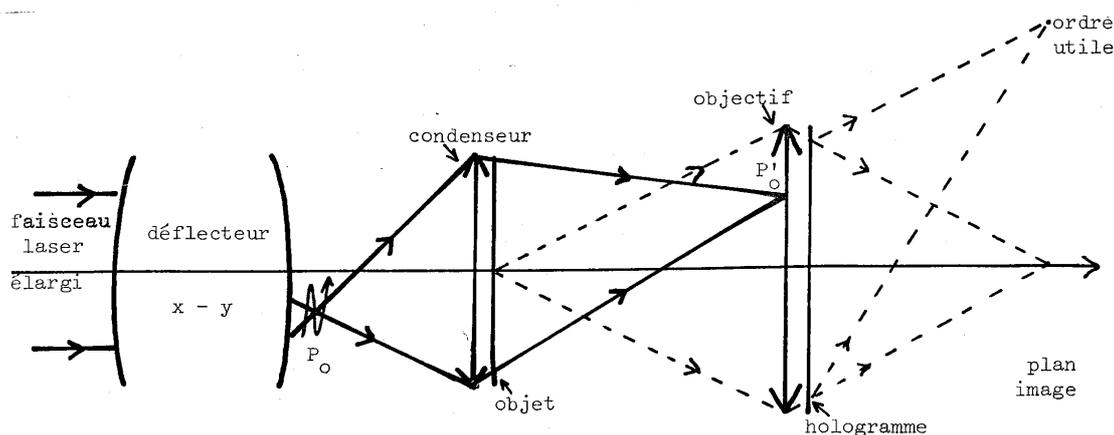


Figure 59. Principe de l'éclairage par balayage de faisceau laser. Le point P_0 parcourt le plan source, ce qui synthétise l'incohérence spatiale.

au temps de pose était nettement plus commode . A cet effet , nous avons remplacé le second miroir mobile par un déflecteur acousto-optique , aimablement prêté par la Société Thomson-CSF . Le montage complet de l'éclairage est schématisé sur la figure 60 et photographié sur la figure 61 (seuls sont fléchés sur la photographie les éléments correspondant à la figure 60 ; les autres servent pour une autre utilisation du montage) . Un afocal A1 de rapport de grandissement 15 étend le faisceau laser avant le miroir vibrant MV . Un afocal cylindrique A0 constitué de deux lentilles cylindriques de focale 80 mm adapte le faisceau à la forme aplatie du déflecteur acousto-optique DAO , parallélépipédique de section $2 \times 18 \text{ mm}^2$ et d'épaisseur 10 mm . Le déflecteur est piloté à la fréquence 20 000 Hz , si bien que la figure balayée se compose de 400 lignes . Le trou T sélectionne l'ordre utile issu de ce déflecteur . La lentille L de focale 120 mm , assure la constance de l'éclairage de l'objet en le conjuguant avec le miroir vibrant d'une part, et le déflecteur acousto-optique d'autre part , compte-tenu de la présence des lentilles cylindriques . La difficulté du réglage de tous ces éléments nous a finalement fait abandonner ce montage pour revenir au diffuseur mobile . Cette difficulté vient du nombre des composants , des instabilités du laser , de la forme du cristal déflecteur et de la nécessité de l'éclairer sous incidence de BRAGG . La tolérance angulaire

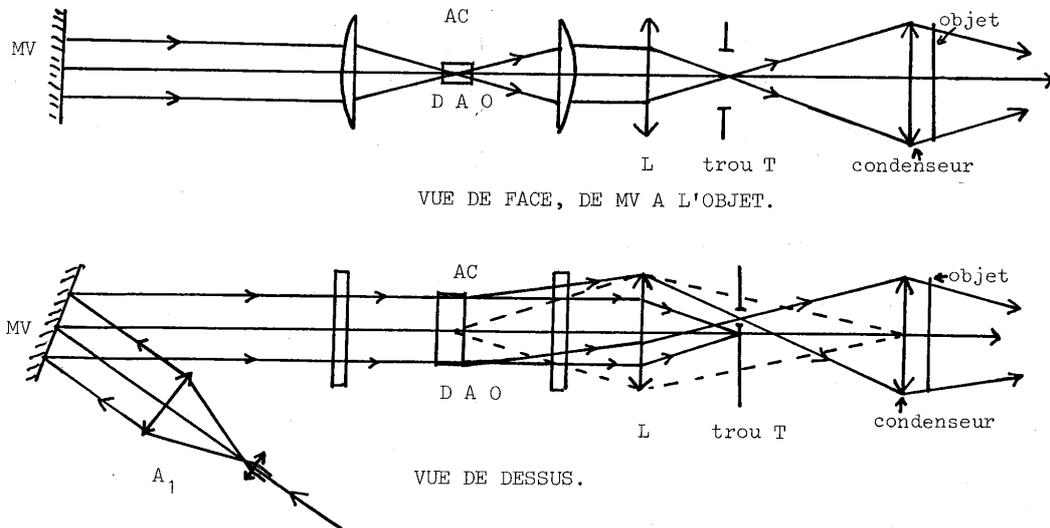


Figure 60. Synthèse d'incohérence par balayage : schéma du montage utilisant un miroir vibrant MV et un déflecteur acousto-optique D A O . L'afocal A₁ élargit le faisceau laser . L'afocal cylindrique AC adapte le faisceau à la forme de D A O . Le trou T sélectionne l'ordre 1 diffracté par D A O . La lentille L conjugue D A O et le condenseur .

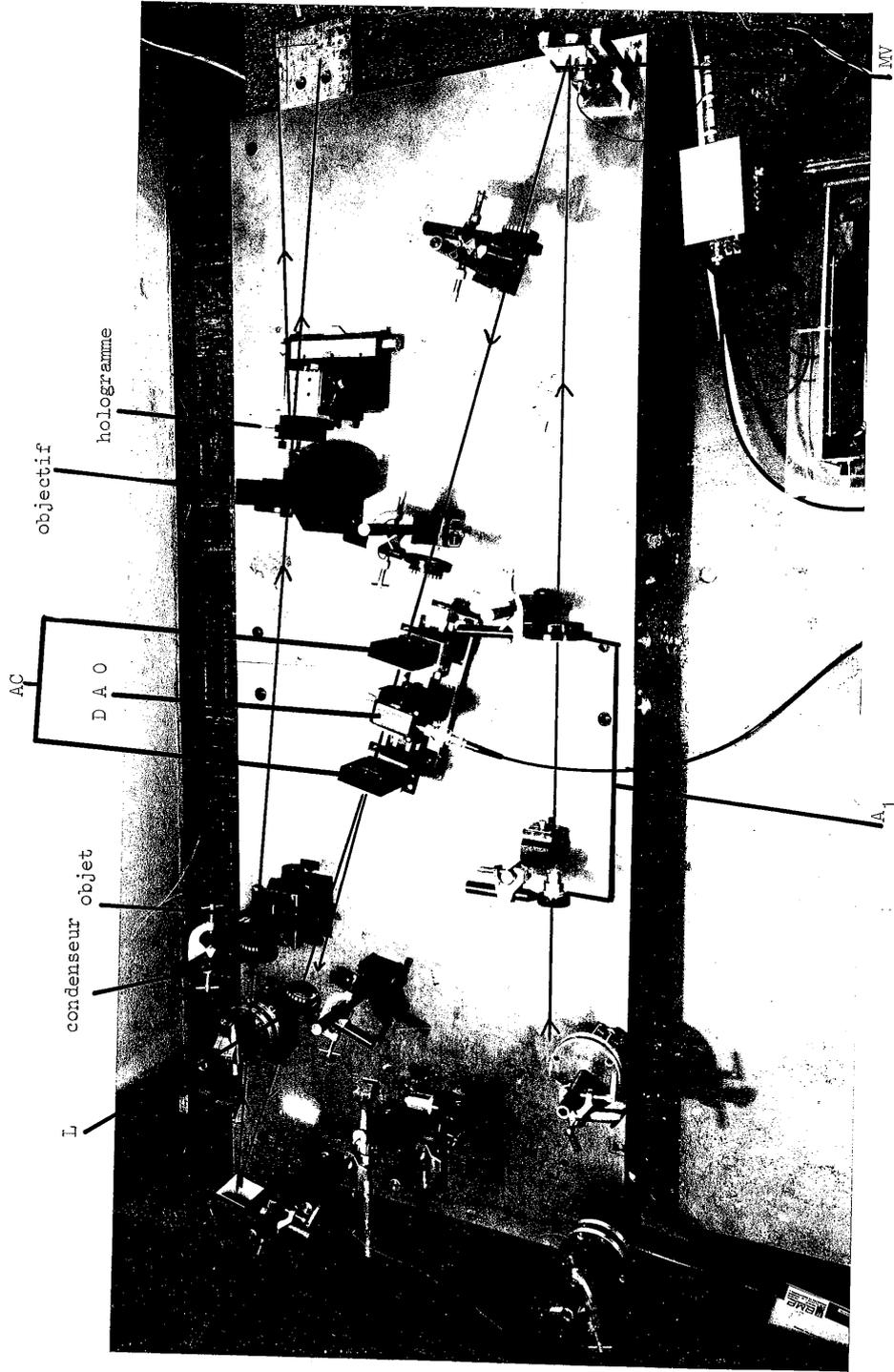


Figure 61. Montage de synthèse d'incohérence par balayage conforme au schéma de la figure 60.
Le trou T n'a pas été photographié.

sur ce réglage est de l'ordre de $10'$. Deux autres inconvénients sont liés à ce cristal : son nombre de points de déflexion , 450 , est légèrement insuffisant pour assurer une incohérence spatiale conforme à l'Equation (87) , et son rendement dans l'ordre utile est inférieur à 30% , si bien que le gain en flux dans l'image par rapport à l'éclairage par diffuseur mobile , déjà limité par le grand nombre des surfaces optiques rencontrées par le faisceau , n'atteint que 2 ou 3 : cet avantage n'est pas suffisant pour justifier la complication qui l'accompagne .

Le retour à la configuration utilisée par J. BRAAT permettrait éventuellement un gain plus important et serait à envisager dans une exploitation systématique de notre expérience si le temps de pose devenait trop important . Plus facile à aligner que celle de la figure 60 , cette configuration à balayage lent exige néanmoins deux afocaux pour assurer la dilatation du faisceau laser et la conjugaison des deux défecteurs et de l'objet . Enfin , un montage analogue , mais nettement plus rapide , pourrait être conçu à l'aide d'un miroir tournant à air comprimé semblable à ceux utilisés dans les caméras ultra-rapides . Le prix en serait très élevé . Finalement , le montage utilisant un diffuseur mobile et un diffuseur fixe décrit au § 1.4 a été suffisant pour les expériences présentées ici .

II - LE MONTAGE DE CONVOLUTION

2.1) Description

Le montage de convolution , montré sur la figure 62 avec l'éclairage par diffuseur mobile , se compose de l'objet , d'un objectif et des deux hologrammes de $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$. L'éclairage est conforme au schéma de la figure 57 avec double diffuseur . La lumière rencontre successivement un diffuseur "Kodatrace" fixe , un diffuseur "Kodatrace" mobile à 2 mm environ du précédent , puis un condenseur de focale 40 mm qui conjugue le plan du Kodatrace mobile avec l'objectif de convolution ; ensuite vient l'objet , à 20 mm du condenseur (le rôle de la lame demi-onde placée sur le faisceau incident avant les diffuseurs sera expliqué plus loin) .

Le montage de convolution doit être conçu de façon que les aberrations soient aussi faibles que possible . Les aberrations de l'objectif utilisé n'interviennent pas . Il s'agit d'un doublet de focale 300 mm , de diamètre 60 mm , corrigé des aberrations aux points antinodaux pour la longueur d'onde du laser à hélium-néon ; nous avons utilisé la raie à 488 nm du laser à argon ionisé , mais l'aberration sphérique pour les ouvertures mises en jeu (jusqu'à 25 mm de diamètre) reste très faible et le champ objet est si faible avec nos objets

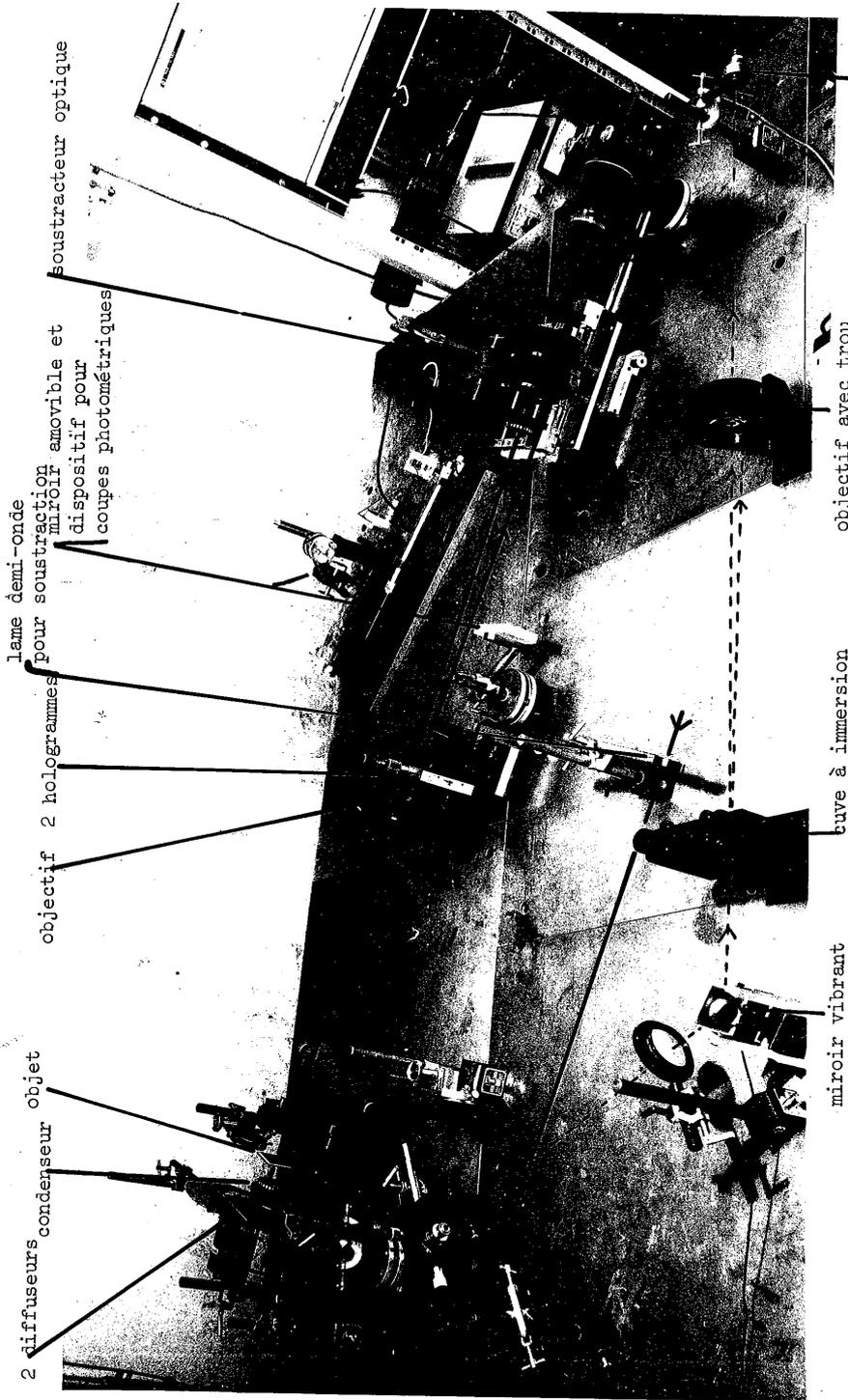


Figure 62. En haut : montage de convolution avec synthèse d'incohérence par diffuseur mobile (faisceau en traits pleins).
En bas : montage d'observation de la soustraction optique (faisceau en pointillés).

carrés de côté 3,2 mm que les aberrations de champ n'interviennent pas, du moins si on prend la précaution de placer l'hologramme après l'objectif et non avant. Remarquons que le grandissement de l'objectif est -1 . Un mouvement de translation manuel sert à remplacer un hologramme par l'autre entre les deux images à soustraire. Les deux hologrammes sont montés sur des supports à trois degrés de liberté de rotation et peuvent être translattés dans deux directions orthogonales de leur plan.

Il reste à considérer les aberrations holographiques.

2.2) Aberrations holographiques

Renonçant à une étude complète nous nous sommes contentés, pour les présents essais expérimentaux, de nous assurer que les aberrations holographiques restent peu importantes, compte-tenu de la petite taille de l'objet.

Nous utilisons pour ce calcul les formules de MEIER sur les aberrations du troisième ordre dans les hologrammes {128}. Les paramètres utiles sont définis sur la figure 63.

La pupille, lors de la restitution, est décrite par les coordonnées polaires ρ et θ .

Dans le cas particulier que nous considérons, on peut prendre :

$$z_P = z_M = -z_R = z \quad (94)$$

L'axe des x est choisi de sorte que la porteuse et le point M central de l'onde objet aient même ordonnée. Négligeons pour l'instant l'aberration sphérique due à la lame à faces parallèles, et ne considérons que celui des deux premiers ordres diffractés par l'hologramme qui fournit une restitution

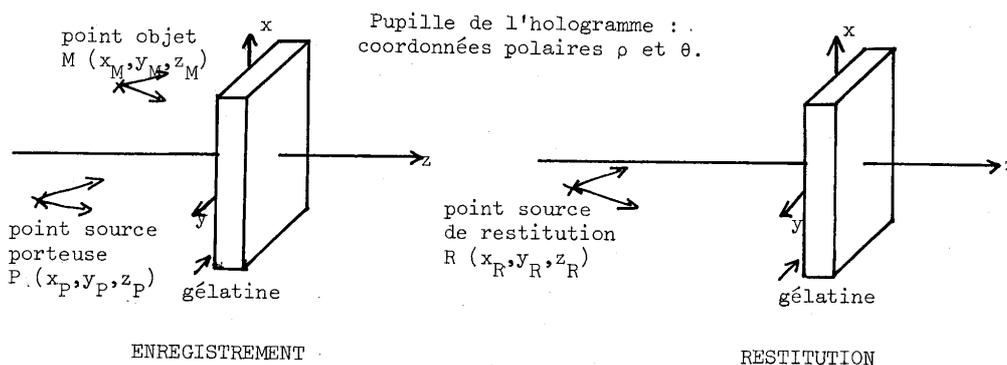


Figure 63. Paramètres utilisés dans l'étude des aberrations holographiques.

stigmatique si R et P sont symétriques par rapport à l'émulsion . D'après MEIER , l'écart entre l'onde restituant l'image et une onde sphérique parfaite s'écrit , au quatrième ordre en ρ :

$$\begin{aligned}
 W = \frac{2\pi}{\lambda} & \left[-\frac{\rho^4 S}{8} \right. && \text{aberration sphérique} \\
 & + \frac{\rho^3}{2} (C_x \cos\theta + C_y \sin\theta) && \text{coma} \\
 & - \frac{\rho^2}{2} (A_x \cos^2\theta + A_y \sin^2\theta + 2A_{xy} \sin\theta \cos\theta) && \text{astigmatisme} \quad (95) \\
 & - \frac{\rho^2}{4} F && \text{courbure de champ} \\
 & \left. + \frac{\rho}{2} (D_x \cos\theta + D_y \sin\theta) \right] && \text{distorsion}
 \end{aligned}$$

L'aberration sphérique et la coma sont rigoureusement nulles dans notre cas , et les autres coefficients ont pour expression :

$$A_x = \frac{2(x_p - x_R)(x_p - x_M)}{z^3} \quad (96-a)$$

$$A_y = \frac{2(y_p - y_R)(y_p - y_M)}{z^3} \quad (96-b)$$

$$A_{xy} = \frac{(x_p - x_R)(y_p - y_M) + (y_p - y_R)(x_p - x_M)}{z^3} \quad (96-c)$$

$$F = A_x + A_y \quad (96-d)$$

$$\begin{aligned}
 D_x = & \frac{3(x_p - x_R)(x_R + x_M)(x_p - x_M) + (x_p - x_R)(y_R + y_M)(y_p - y_M)}{z^3} \\
 & + \frac{(y_p - y_R)(x_R + x_M)(y_p - y_M) + (y_p - y_R)(y_R + y_M)(x_p - x_M)}{z^3}
 \end{aligned} \quad (96-e)$$

$$\begin{aligned}
 D_y = & \frac{3(y_p - y_R)(y_R + y_M)(y_p - y_M) + (y_p - y_R)(x_R + x_M)(x_p - x_M)}{z^3} \\
 & + \frac{(x_p - x_R)(y_R + y_M)(x_p - x_M) + (x_p - x_R)(x_R + x_M)(y_p - y_M)}{z^3}
 \end{aligned} \quad (96-f)$$

On constate que si les points R et P sont symétriques par rapport à l'émulsion, tous les coefficients s'annulent : la restitution est stigmatique . Mais deux

raisons empêchent que cette condition soit toujours réalisée : l'étendue de l'objet à traiter et le réglage de l'hologramme .

Considérons d'abord un hologramme parfaitement réglé : le point central de l'objet à traiter a pour image à travers l'objectif le point de restitution stigmatique . Chaque point de l'objet à traiter $O(\vec{r})$ se comporte comme source de restitution R et restitue l'ensemble des points M de l'onde objet H_+ ou H_- . L'étendue de l'objet , qui est pour nous un carré de côté $a = 3,2$ mm , fait que $(x_p - x_R)$ et $(y_p - y_R)$ varient de $-\frac{a}{2}$ à $\frac{a}{2}$. Les termes d'astigmatisme et de courbure de champ font intervenir la distance $x_p - x_o$ entre onde porteuse et onde objet à l'enregistrement , voisine de 40 mm , et la différence d'ordonnée $y_p - y_o$ correspondante peut atteindre 1,5 mm pour les points M extrêmes de l'onde objet H_+ ou H_- . De ce fait , l'astigmatisme et la courbure de champ se réduisent pratiquement aux termes en A_x et correspondent à un déphasage :

$$W_1 = - \frac{2\pi}{\lambda} \rho^2 \frac{1+2 \cos^2 \theta}{2} \frac{(x_p - x_R)(x_p - x_M)}{z^3} \quad (97)$$

Avec un hologramme diffus , ce terme atteint $0,16\lambda$ au bord de la pupille de rayon 10 mm .

Calculons maintenant la distorsion . Contrairement à la distorsion apportée par une lentille mince , cette distorsion ne se réduit pas à une transformation ponctuelle de l'image traitée , parce qu'elle dépend à la fois du point R de l'objet à traiter et du point M de l'onde objet diffractée par l'hologramme . Nous considérons un hologramme parfaitement réglé , ce qui s'exprime par les équations :

$$x_R + x_o = y_R + y_o = 0 \quad (98)$$

où x_o et y_o concernent le centre M_o de l'onde objet H_+ ou H_- . L'Equation (98) exprime qu'il n'apparaît pas de distorsion dans l'image du point central M_o pour aucun point de l'objet à traiter . Par contre , la distorsion apparaît pour les autres points . Le plus fort des termes de distorsion a pour déphasage:

$$W_2 = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\rho}{2} \frac{3(x_p - x_R)(x_R + x_M)(x_p - x_M) \cos \theta}{z^3} \quad (99)$$

W_2 atteint $0,05\lambda$ au bord de la pupille pour les points M et R extrêmes .

Ainsi , avec un hologramme diffus de rayon 10 mm bien centré , les aberrations holographiques restent faibles grâce à la petite taille de l'objet . Cependant , les déphasages W_1 et W_2 croissent rapidement avec l'angle entre porteuse et onde objet $(x_p - x_M)/z$, et avec la taille de l'objet , qui intervient par le terme $(x_R - x_p)$. De ce fait , les aberrations holographiques constituent une difficulté majeure pour traiter des objets étendus .

Envisageons maintenant l'influence du réglage en position de l'hologramme sur les déphasages W_1 et W_2 . Les trois degrés de liberté de rotation et les deux degrés de liberté de translation affectent très légèrement la cote z_R du point source de restitution R, mais leur effet essentiel porte sur les coordonnées x et y des points P, M et R par rapport au centre de la pupille.

Considérons, par exemple, un dérèglement de 1 mm en abscisse entre P et R : les valeurs de W_1 et de W_2 atteignent déjà $0,1\lambda$ au bord de la pupille. Or, un tel dérèglement peut être lié à une translation de l'hologramme de 1 mm ou à une rotation de $6'$. Un montage mécanique soigné permettrait une mise en place des hologrammes à l'enregistrement et à la restitution avec une précision de cet ordre, ou même meilleure. Cependant, dans les essais expérimentaux décrits ici, le réglage des cinq degrés de liberté des supports d'hologrammes était en partie effectué par tâtonnements et la précision était insuffisante ; nous nous assurons toutefois que les aberrations ne modifiaient pas de façon visible les réponses percussionnelles H_+ et H_- .

Remarquons que certains des degrés de liberté dans le réglage des hologrammes affectent la position du centre des ondes objets $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ en modifiant la distance hologramme-plan image. Le traitement ne peut évidemment être correct que si ces positions sont rigoureusement identiques, avec une précision bien meilleure que la résolution $\delta x \approx 12 \mu\text{m}$ (Equation 84). Il est indispensable de vérifier ce point en observant à travers un viseur successivement $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ pendant les réglages. De cette façon, il est possible de compenser une très légère erreur de mise en place de H_- par rapport à H_+ lors de l'enregistrement des hologrammes. Mais si l'erreur de mise en place est trop forte, elle ne pourra pas être compensée sans que les aberrations n'affectent la qualité de la restitution.

L'étude des aberrations holographiques, enfin, ne peut être entièrement dissociée de celle des aberrations apportées par le support de l'hologramme. A ce sujet, un compromis est nécessaire. En effet, si le support est mince, il est en général, de mauvaise qualité optique et perturbe fortement les ondes diffractées par l'hologramme (voir figure 64). Si le support est de bonne qualité optique, il est en général épais et les aberrations de la lame à faces parallèles interviennent. Ainsi, avec les plaques Kodak 649 F de qualité micro-flat, d'épaisseur 6 mm, l'aberration sphérique atteint, avec nos valeurs numériques et pour un hologramme diffus, 2λ . Nous avons choisi d'utiliser des plaques de qualité ultra-flat, d'épaisseur 0,15 mm, de moins bonne qualité optique que les précédentes, mais néanmoins sélectionnées pour leur relative planéité. Les aberrations apportées sont suffisamment faibles sur la meilleure

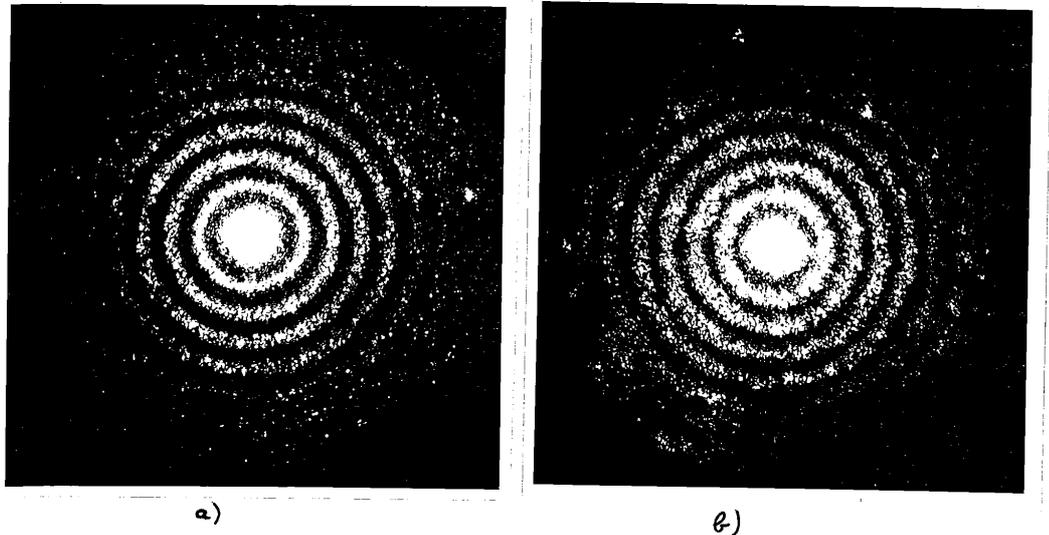


Figure 64. Aberrations dues au support de l'hologramme : restitution de deux hologrammes diffus de la fonction H_+ enregistrés tous deux sur plaque Kodak 649 F ultra-flat.
a) plaque de planéité satisfaisante, b) plaque défectueuse.

d'une série de 3 ou 5 plaques pour pouvoir être pratiquement compensées par de légères aberrations holographiques lors des réglages de la position de l'hologramme .

Ce paragraphe fait ressortir les difficultés introduites par les aberrations holographiques . Notre méthode de traitement ne pourra rendre de vrais services que si ces difficultés sont maîtrisées . Une solution , bien sûr , consiste à revenir aux hologrammes non diffus , dont l'aire utile a un rayon de quelques millimètres à peine au lieu d'un centimètre : les aberrations holographiques sont alors pratiquement supprimées . Mais nous avons déjà signalé un inconvénient des hologrammes non diffus : leur rendement extrêmement faible . Un autre inconvénient apparaîtra plus loin .

III - EXEMPLES DE TRAITEMENTS SANS SOUSTRACTION OPTIQUE

Quelques traitements simples effectués avec les montages d'éclairage et de convolution décrits ci-dessus et en calculant la soustraction point par point apporteront de précieuses indications sur les causes d'erreurs et les difficultés essentielles de l'expérience . Après avoir présenté la procédure suivie , nous montrerons et discuterons les résultats obtenus en prenant pour image à

traiter le défaut lui-même , puis son négatif . Les cas des hologrammes diffus et non diffus seront distingués .

3.1) Procédure expérimentale

Nos deux objets-tests les plus simples sont ceux des figures 7 et 8 , décrits dans le Chapitre I ; le disque clair sur fond noir n'est autre que la fonction défaut elle-même et son traitement fournit donc la réponse percussionnelle corrigée . Le disque gris sur fond clair peut être considéré comme l'image à traiter d'un petit point noir et constitue un exemple d'objet étendu .

Le traitement de ces objets par convolution sans soustraction optique est effectué pour les deux valeurs du rayon R du défaut D_R choisies : 303,5 μm et 100,5 μm . Ces deux défauts sont traités respectivement avec des pseudo-filtres de Wiener de paramètres $\epsilon = 0,1$ et 0,01 , ainsi que nous l'avons expliqué au Chapitre I .

Les deux convolutions incohérentes fournissent dans le plan image les distributions d'éclairement :

$$\left. \begin{aligned} I_+(\vec{r}) &= O(\vec{r}) * H_+(\vec{r}) \\ \text{et } I_-(\vec{r}) &= O(\vec{r}) * H_-(\vec{r}) \end{aligned} \right\} \quad (100)$$

L'analyse de ces deux images est faite à l'aide d'un dispositif adapté à la résolution nécessaire et au niveau de lumière disponible . On obtient ainsi une coupe photométrique passant par le centre de symétrie de l'image . On obtient alors des courbes dont la figure 65 donne un exemple . Le dépouillement point par point de ces courbes exige le relevé de 100 à 250 points . Les coordonnées de ces points sont ensuite frappées au clavier d'un ordinateur qui calcule la soustraction avec les facteurs de normalisation voulus pour tenir compte des efficacités des hologrammes utilisés : après normalisation , le rapport des énergies totales contenues dans $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ doit être égal au rapport ρ_0 introduit dans l'Equation (36) , Chapitre I :

$$\rho_0 = \frac{\int I_+(\vec{r}) \, d\vec{r}}{\int I_-(\vec{r}) \, d\vec{r}} = \frac{\int H_+(\vec{r}) \, d\vec{r}}{\int H_-(\vec{r}) \, d\vec{r}} \quad (36)$$

3.2) Réponses percussionnelles traitées à l'aide d'hologrammes non diffus

Les figures 66 et 67 représentent les réponses percussionnelles globales traitées $G(\vec{r})$ obtenues avec des hologrammes non diffus pour les deux valeurs

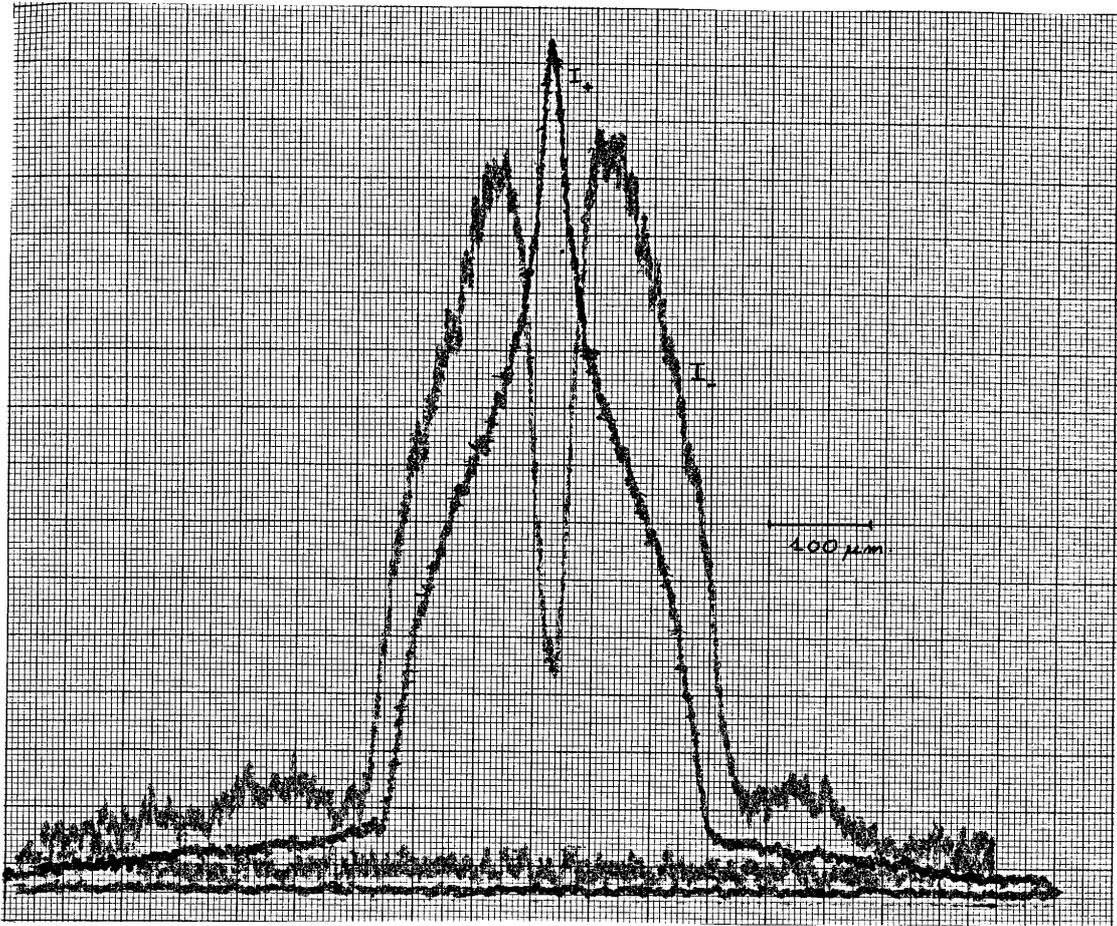


Figure 65. Traitement d'un disque de rayon $R = 100 \mu m$ représentant le défaut D_R seul, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,01$: coupes photométriques des distributions d'éclairement $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ avant soustraction. A chaque courbe est associé un enregistrement avec faisceau masqué pour repérer le zéro.

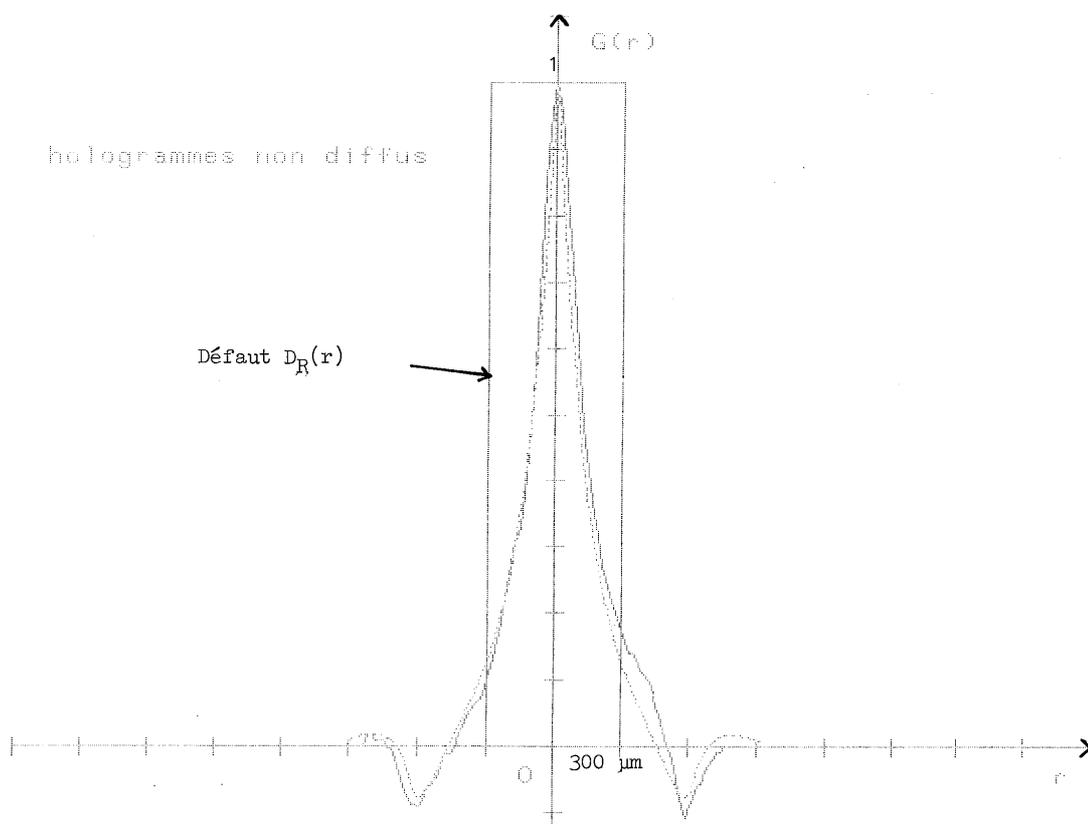


Figure 66. Traitement d'un disque de rayon $R = 300 \mu\text{m}$ représentant le défaut D_R seul, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,1$: réponse percussive globale après traitement $G(r)$ (en traits pleins : courbe expérimentale, en pointillés : courbe théorique).

considérées du rayon du défaut. On remarquera la différence d'échelle pour les abscisses des deux courbes. Les fonctions $G(\vec{r})$ théoriques correspondant à ces deux expériences et normalisées de façon à avoir la même valeur au centre ont été ajoutées, en pointillés, pour comparaison, ainsi que le défaut $D_R(\vec{r})$ lui-même, en traits pleins.

Il apparaît clairement que dans les deux cas les courbes expérimentale et théorique sont relativement voisines, mais que l'accord est bien meilleur sur la figure 66 que sur la figure 67. Cette constatation s'explique aisément : comparée à la réponse percussive de traitement utilisée pour la figure 67, celle de la figure 66 présente moins de détails de hautes fréquences spatiales

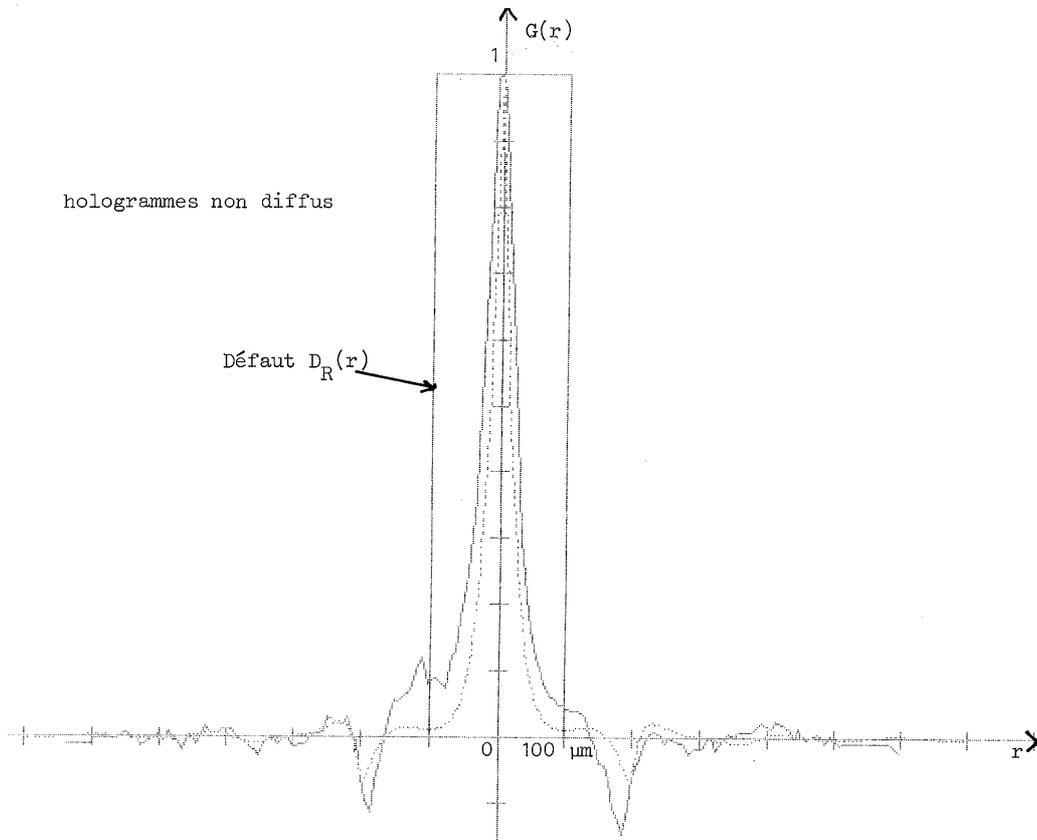


Figure 67. Traitement d'un disque de rayon $R = 100 \mu\text{m}$ représentant le défaut D_R seul, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,01$: réponse percussive globale après traitement $G(r)$ (en traits pleins : courbe expérimentale, en pointillés : courbe théorique).

parce qu'elle correspond à une valeur de ϵ dix fois plus grande (voir Chapitre I), et d'autre part elle est, en valeur relative, échantillonnée plus finement parce qu'elle correspond à un rayon R de défaut trois fois plus grand. Autrement dit, le traitement de la figure 66 est à la fois plus simple et plus minutieusement fait que celui de la figure 67.

Cherchons maintenant à comprendre les raisons de l'écart entre les courbes expérimentales et théoriques, en nous limitant au cas de la figure 67, le plus sensible.

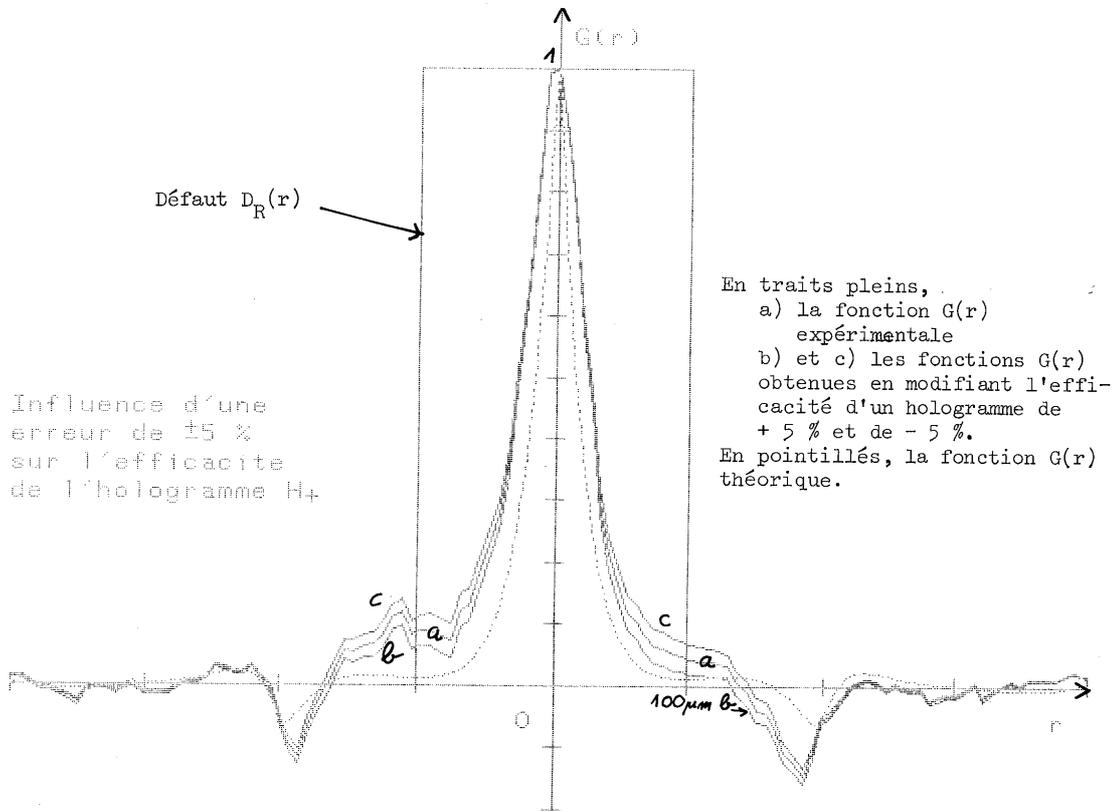


Figure 68. Partie centrale des courbes de la figure 67 et étude de l'influence sur $G(r)$ d'une erreur concernant l'efficacité d'un hologramme.

3.2.1) Influence d'une erreur sur l'efficacité

Le rapport ρ_0 de l'Equation (36) n'est effectivement atteint que si les efficacités de diffraction des hologrammes de H_+ et H_- ont été mesurées avec précision. L'ordre de grandeur de la précision relative de cette mesure est de 2 à 5 % sur chaque hologramme en raison du niveau de lumière diffusée au voisinage de l'ordre utile. Une erreur relative du même ordre est à attendre sur le coefficient de normalisation. La figure 68 reprend la partie centrale de la figure 67, et on y a ajouté le résultat de la normalisation de la soustraction obtenu en modifiant de +5 %, puis de -5 % l'efficacité de l'hologramme de H_+ , l'efficacité de l'autre hologramme étant maintenue constante. Les courbes obtenues parviennent à se rapprocher mieux soit du "palier" de la fonction $G(r)$

théorique avant son premier zéro , soit de sa première région négative . Mais on ne peut pas de cette façon améliorer uniformément l'accord entre les courbes théorique et expérimentale . Retenons cependant qu'une erreur de l'ordre de 5% sur le coefficient de normalisation a une influence sensible sur la courbe ; il est donc nécessaire , dans la mesure du possible , de mesurer les efficacités avec une précision relative supérieure .

3.2.2) Influence d'une "erreur tomographique"

Les hologrammes correcteurs ont été enregistrés et utilisés de façon à concerner un défaut de rayon $R = 100 \mu\text{m}$. Le rayon de l'image dans l'ordre zéro du trou utilisé pour la figure 67 était également $R = 100 \mu\text{m}$. Cependant ces deux valeurs de $100 \mu\text{m}$ résultent de quatre mesures de longueurs indépendantes entachées d'erreur :

- mesure de la taille de l'onde objet lors de l'hétérodynage ; précision $\pm 2\%$, limitée par la résolution de l'onde objet ;
- mesure de la distance objet-hologramme lors de l'hétérodynage ; précision $\pm 0,2\%$;
- mesure de la distance hologramme-image lors de la convolution ; précision $\pm 0,2\%$;
- mesure de la taille de l'image du disque à "traiter" ; précision $\pm 5\%$, limitée par les aberrations de la plaque supportant les hologrammes et par la diffraction .

Ces erreurs peuvent provoquer une mauvaise adaptation entre le rayon du défaut effectivement traité et le rayon du défaut que sont censés corriger les hologrammes utilisés . On voit qu'une erreur relative de l'ordre de 5% est vraisemblable.

Cette source d'erreur correspond formellement exactement au phénomène utilisé en tomographie par ouverture codée pour obtenir l'effet de profondeur [129]: les différents plans de l'émetteur sont codés dans l'image à traiter par des réponses percussionnelles qui ne diffèrent que par une homothétie . Toutefois, en médecine nucléaire , il est utile que les réponses percussionnelles globales (après traitement) soient très sensibles à une petite variation de taille pour donner une bonne résolution en profondeur . Dans notre cas au contraire , cet effet est nuisible . Nous le baptisons par analogie "erreur tomographique" .

Nous avons simulé une erreur tomographique par ordinateur . La réponse percussionnelle traitée en présence de défaut G_t est obtenue par transformation de Fourier bidimensionnelle de

$$\hat{G}_t(\rho, \alpha) = \hat{D}(\alpha\rho) \hat{H}(\rho) \quad (101)$$

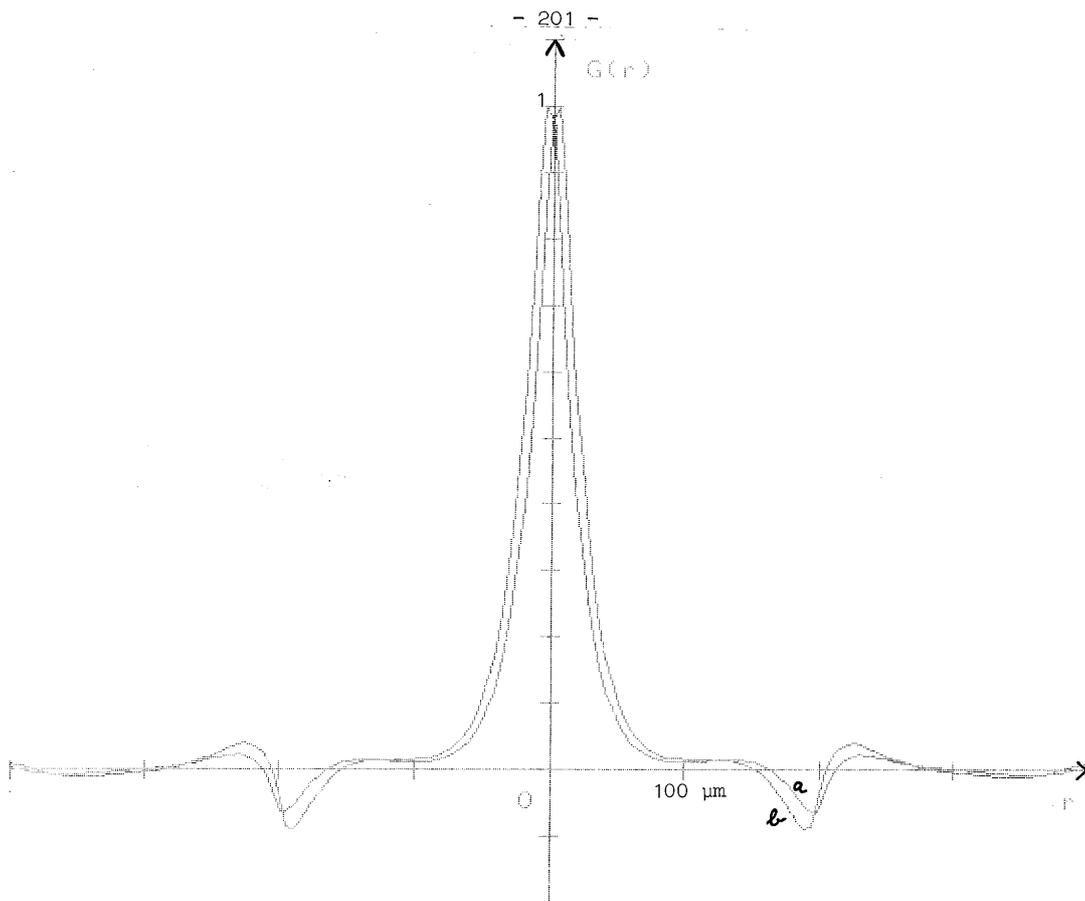


Figure 69. Simulation d'une erreur "tomographique" dans le cas $R = 100 \mu\text{m}$
 $\epsilon = 0,01$. a) pas d'erreur ; b) erreur de 5 %.

Le facteur α , voisin de 1, mesure l'écart relatif entre le rayon du défaut effectivement traité et celui pour lequel ont été fabriqués les filtres holographiques.

La figure 69 présente un résultat de cette simulation. Pour ne pas surcharger la figure, nous n'avons représenté que la courbe $G(r)$ simulée sans défaut et celle $G_t(r, 0,95)$ obtenue si le disque effectivement traité a un rayon de $105 \mu\text{m}$ au lieu de 100 . On constate que cette dernière courbe s'approche en tous points de notre courbe expérimentale : le maximum central est élargi, le plateau qui le suit est légèrement surélevé et la partie négative est à la fois rapprochée du centre et plus importante que dans la courbe $G(r)$ idéale. Toutefois, pour expliquer entièrement l'allure de notre courbe expérimentale, il faudrait un défaut nettement supérieur à 5%, ce qui semble exclus.

Envisageons donc la troisième cause d'erreur.

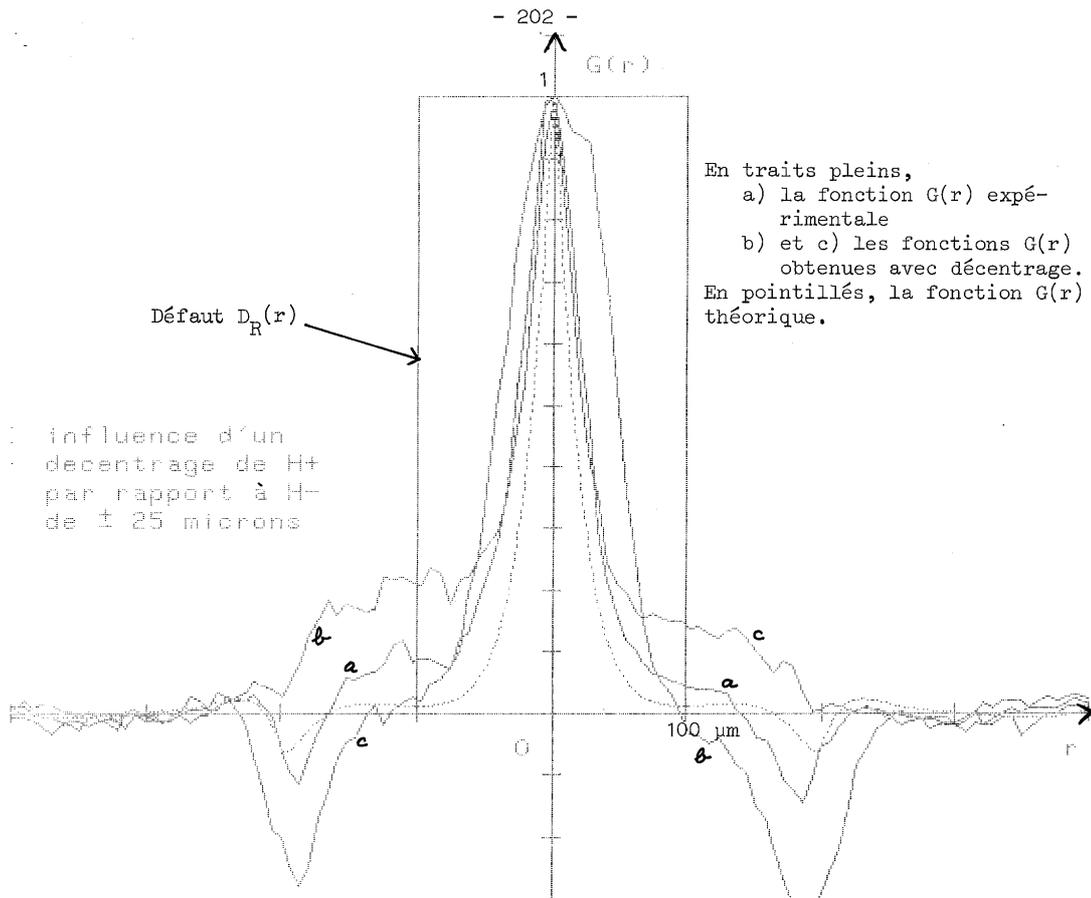


Figure 70. Partie centrale des courbes de la figure 67 et étude de l'influence d'un décentrage de $25 \mu\text{m}$ d'un des éclairagements à soustraire par rapport à l'autre.

3.2.3) Influence du centrage mutuel des images à soustraire

Les coupes de I_+ et I_- analysées de la figure 65 ne peuvent donner un résultat en accord avec la théorie que si d'une part, la ligne d'analyse passe effectivement par leurs centres de symétrie et d'autre part, ces deux centres sont confondus. La fréquence de coupure de l'objet étant 40 mm^{-1} , il convient d'effectuer ces réglages avec une précision meilleure de $12 \mu\text{m}$. Malheureusement, plusieurs facteurs rendent ce réglage difficile :

- les deux distributions d'éclairement I_+ et I_- ne sont pas accessibles simultanément, mais successivement ;
- la meilleure façon de repérer le maximum est de mesurer sa position à l'aide d'une fibre optique branchée sur un photomultiplicateur. Mais ce faisant, on ne repère qu'un point de la courbe et une erreur concernant ce seul point, due par exemple à une synthèse de la fonction $H_+(\vec{r})$ par l'hologramme légèrement dissymétrique, affecte considérablement l'ensemble ;
- enfin, le réglage est relativement peu sensible, surtout pour la courbe I_- .

hologrammes diffus

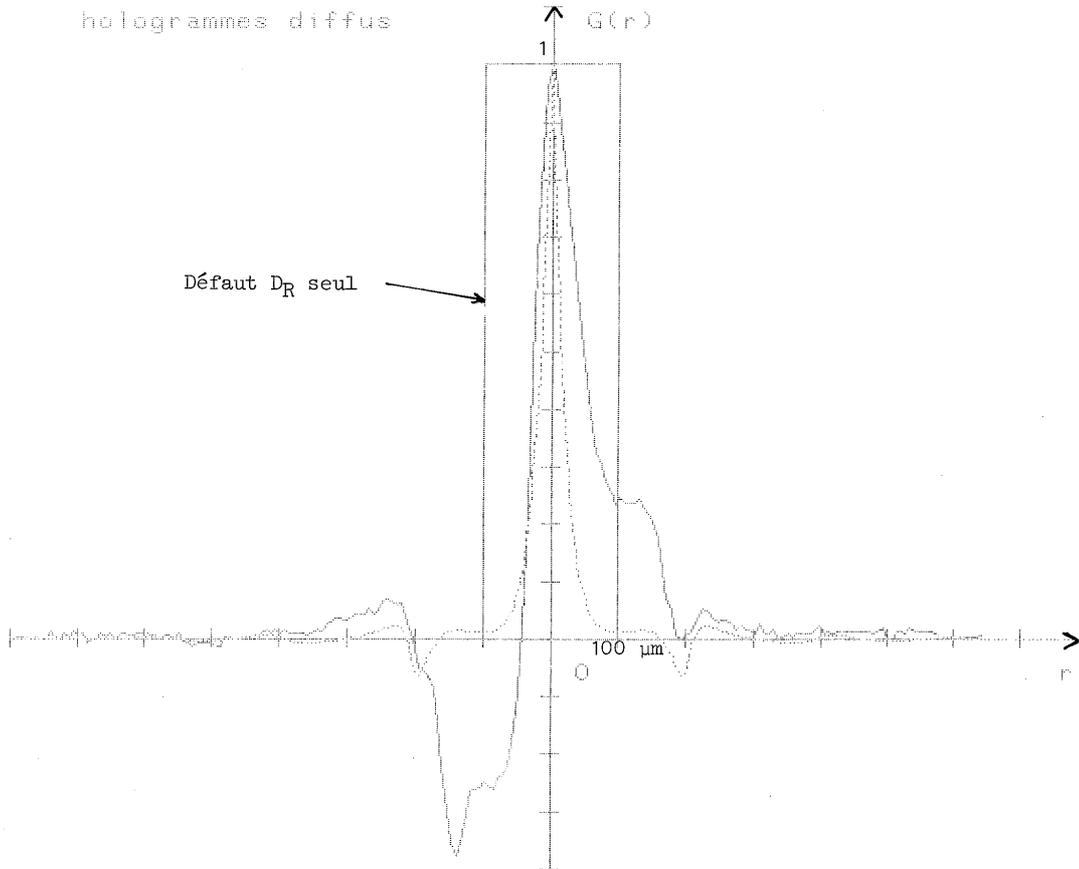


Figure 71. Traitement d'un disque de rayon $R = 100 \mu\text{m}$ représentant le défaut D_R seul, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,01$: réponse percussive globale après traitement $G(r)$ (en traits pleins : courbe expérimentale, en pointillés : courbe théorique).

Ces difficultés sont très regrettables car un bon centrage est une condition essentielle pour obtenir un bon résultat, comme le montre la figure 70. Pour obtenir cette figure, on a supposé que les coupes de I_+ et I_- utilisées pour la figure 67 avaient bien été analysées suivant une droite passant par les centres des répartitions d'intensité $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$, mais que ces deux répartitions étaient décalées de $\pm 25 \mu\text{m}$ suivant cette même droite. On constate qu'une telle erreur est suffisante pour expliquer des écarts entre théorie et expérience supérieurs à ceux observés.

La symétrie du résultat expérimental présenté sur la figure 67 exclut une erreur exactement semblable à cette dernière . Toutefois , si l'erreur est un décalage entre les centres de $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ et la ligne d'analyse perpendiculaire à cette dernière , la symétrie est conservée . Nous n'avons pas étudié l'influence d'un tel défaut parce que les calculs nécessaires seraient nettement plus compliqués que les précédents , mais il semble plausible d'affirmer que les défauts de centrage sont suffisants pour expliquer l'écart entre les deux courbes de la figure 67 .

3.3) Traitement à l'aide d'hologrammes diffus

Les figures 66 et 67 ont été obtenues à l'aide d'hologrammes non diffus, de rendements très faibles . L'augmentation du rendement que permet l'utilisation d'hologrammes diffus a des contreparties que nous avons déjà évoquées : l'augmentation considérable des aberrations holographiques et des aberrations dues à la qualité du support , la présence de granularité dans la réponse percussive de traitement , et des perturbations apportées à cette dernière par la structure relativement grossière du diffuseur utilisé . La figure 71 met en évidence l'influence de ces inconvénients : elle est à comparer à la figure 67 . La grande perturbation visible est due au diffuseur utilisé et peut être retrouvée sur la réponse percussive H_+ correspondante : il ne s'agit pas , comme on pourrait le penser d'après l'allure de la figure 71 , d'un défaut de centrage . Parmi les différents résultats que nous avons obtenus à l'aide d'hologrammes diffus , celui-ci est cependant exceptionnellement mauvais .

3.4) Traitement d'un disque gris sur fond clair

La figure 72 présente le résultat du traitement d'un disque gris sur fond clair avec des hologrammes non diffus et les valeurs $R = 100 \mu\text{m}$ et $\epsilon = 0,01$ des paramètres du traitement . L'accord avec la courbe théorique , en pointillé, est moins bon que pour la réponse percussive traitée de la figure 67 . La partie utile de la courbe est élargie au point de n'être guère plus étroite que le défaut traité .

Deux raisons suffisent à expliquer cette constatation :

- le bruit objectif , constitué de poussières et de granularité photographique;
- la difficulté du centrage accrue en raison du très faible contraste des éclaircissements $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ analysés et soustraits . En effet , ce contraste est si faible que , compte tenu de l'absence de variations rapides d'éclaircissement dans ces figures , les parties utiles des images sont invisibles à l'oeil ! Il est donc nécessaire de considérer que le centrage effectué

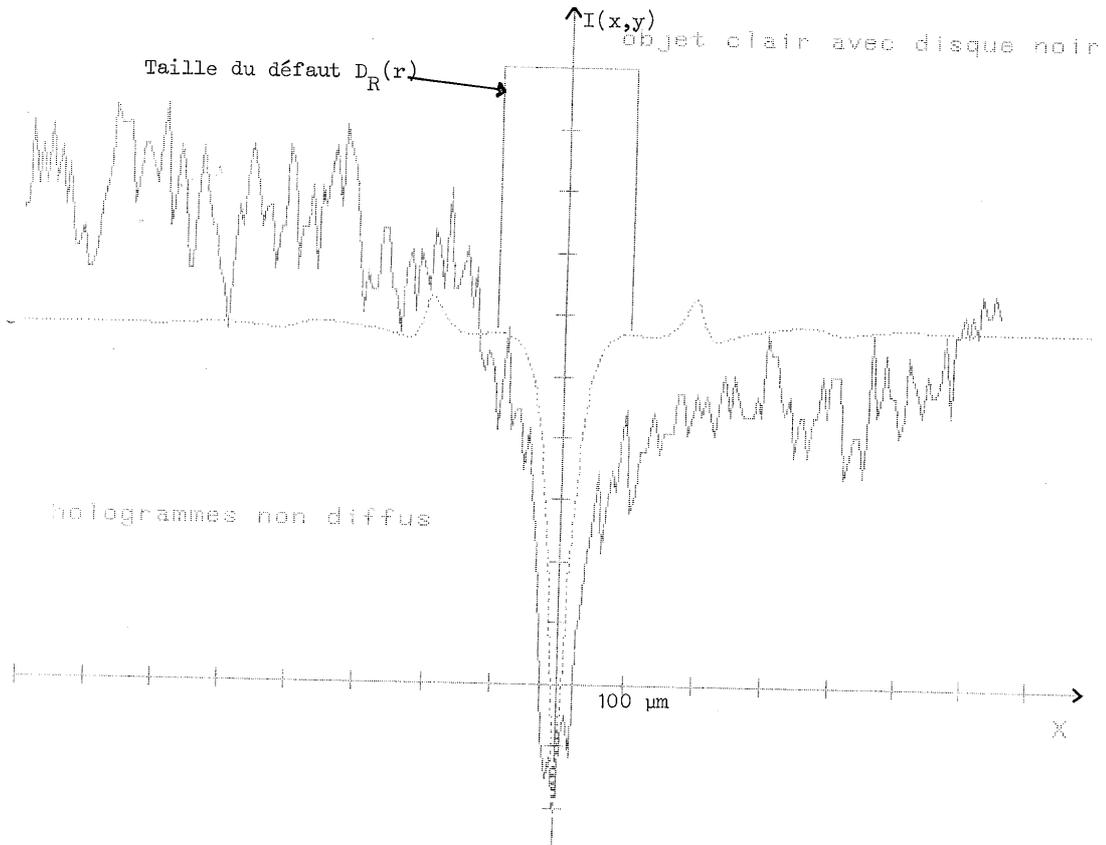


Figure 72. Traitement d'un disque gris sur fond clair , de rayon $R = 100 \mu\text{m}$, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,01$; échelle arbitraire en ordonnée . En traits pleins : courbe expérimentale , en pointillés : courbe théorique.

préalablement avec un autre objet (le disque lumineux des paragraphes précédents) reste valable .

Enfin , la figure 73 présente le résultat du traitement d'un objet analogue , mais avec $R = 300 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,1$ et des hologrammes diffus . Bien que nous ayons réuni ici les deux sources de difficultés de ces deux derniers paragraphes (fond clair et hologrammes diffus) , le résultat est relativement satisfaisant . Ceci n'est toutefois que d'un intérêt limité , car nous avons déjà signalé que le choix de paramètres $R = 300 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,1$ constitue un cas trop facile . Aussi , l'amélioration apportée , théoriquement comme expérimentalement , est-elle très modeste (voir Chapitre I) .

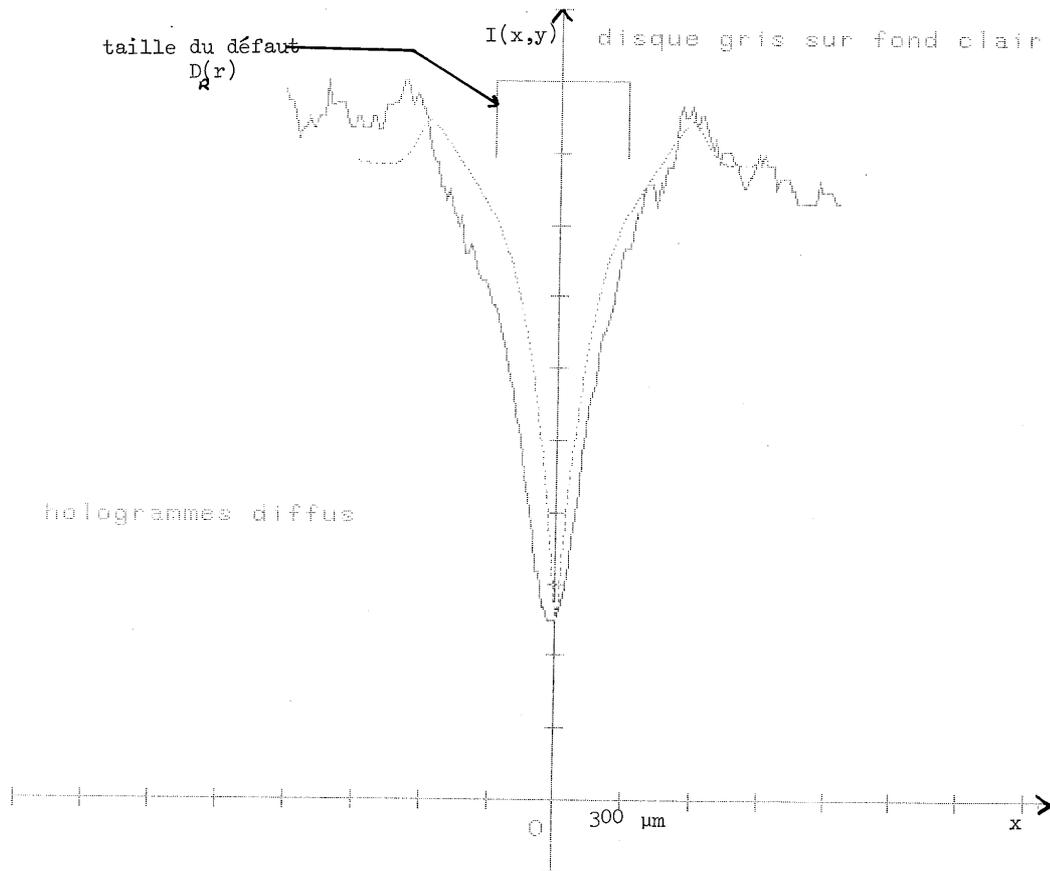


Figure 73. Traitement d'un disque gris sur fond clair , de rayon $R = 300 \mu\text{m}$, par pseudo-filtrage de Wiener de paramètre de bruit $\epsilon = 0,1$; échelle arbitraire en ordonnée . En traits pleins : courbe expérimentale , en pointillés : courbe théorique .

IV - CONCLUSION DU CHAPITRE

L'épreuve de l'expérience a mis en relief plusieurs difficultés dans la réalisation de notre méthode . Le traitement d'un objet étendu , dont la possibilité est le principal intérêt des méthodes optiques , ne pourra être mené à bien que si les aberrations holographiques sont vaincues . La sensibilité de la déconvolution approchée au défaut tomographique incite à une vigilance particulière au sujet de la dimension exacte du défaut . Enfin , la cause d'erreur la plus importante dans les expériences présentées , semble être le réglage parfait du centrage relatif des deux images à soustraire ..

Il s'agit là d'une conséquence de la nécessité d'une soustraction en éclairage incohérent : c'est donc à ce prix que nous nous affranchissons du bruit cohérent , dont l'absence est attestée par l'insensibilité de l'éclairement dans le plan image au mouvement des éléments optiques voisins de la pupille (hologramme et objectif) . Avant de conclure sur l'opportunité du traitement incohérent avec soustraction , il nous faut cependant décrire la réalisation et les résultats de l'expérience complète , avec soustraction optique des éclairagements .

CHAPITRE IV - LA SOUSTRACTION OPTIQUE , EXEMPLES
DE TRAITEMENT COMPLET

Pour la soustraction des images $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$, nous avons le choix entre une méthode optique et une méthode électronique (analogique ou digitale) . Deux raisons ont écarté ce dernier choix : la nécessité d'un balayage ligne par ligne , fort long , et la difficulté de la conversion de courant en luminance nécessaire pour l'observation du résultat du traitement avec un grand nombre de points . Il faut d'ailleurs constater que l'évolution très récente de la technologie fait perdre à ces deux arguments une partie du poids qu'ils avaient il y a quelques années . Cependant , les soustractions purement optiques nous semblaient bien adaptées à notre cas . Dans le choix de la méthode de soustraction optique {38} , nous avons été guidé par la possibilité de profiter de l'expérience acquise sur ce sujet dans notre laboratoire par Y. BELVAUX et J.C. SAGET : leur soustraction {130} a fait ses preuves . L'adaptation de cette méthode à notre problème a fait apparaître de nouvelles contraintes pratiques que nous examinerons en présentant les résultats obtenus .

I - RAPPEL DU PRINCIPE DE LA METHODE

Soient deux objets spatialement incohérents , monochromatiques de luminances $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$. La soustraction se fait en deux étapes : dans la première étape , on enregistre sur un même hologramme image H_1 les images modulées :

$$I_+(\vec{r}) (1 + \cos 2\pi x/p)$$

et

$$I_-(\vec{r}) (1 - \cos 2\pi x/p)$$

où $1/p$ est une fréquence spatiale plus élevée que la plus élevée des fréquences spatiales contenues suivant la direction x dans $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$, la seconde étape est un filtrage des fréquences spatiales par double diffraction où l'on sélectionne l'ordre 1 (ou - 1) de l'hologramme image H_1 précédent : on vérifie immédiatement que , sous réserve de linéarité de la caractéristique de

l'émulsion de H_1 au voisinage du point de fonctionnement étudié , l'éclairement du plan image est proportionnel à $(I_+(r) - I_-(r))^2$.

Grâce à la forme rectiligne des franges de modulation de l'hologramme image , le filtrage peut être effectué en éclairage partiellement cohérent avec une fente source , si bien qu'il est peu sensible au bruit pupillaire , conformément à nos conclusions de la deuxième partie .

Pour la première étape , PENNINGTON et ses collaborateurs {131} avaient proposé d'utiliser un réseau placé sur l'objet ou l'image . Mais la translation du réseau d'une demi-période entre les deux poses doit alors être réalisée avec une extrême précision : c'est pourquoi BELVAUX {130} a préféré obtenir la modulation par polarisation . La figure 74 schématise le dispositif expérimental . Le prisme polarisant S est un prisme de SAVART modifié par FRANCON {132} . Il a la propriété de fournir des franges à l'infini , rectilignes , sinusoïdales et parallèles avec une très bonne approximation , quand il est placé entre polariseur P et analyseur A . Une rotation de l'analyseur de $\frac{\pi}{2}$ déphase ces franges de π exactement , même si la rotation est faite avec une légère erreur d'angle . Dans le dispositif de la figure 74 , P , S et A sont placés entre les objectifs L_1 et L_2 formant un afocal , l'objet I_+ ou I_- est dans le plan focal objet de L_1 et l'hologramme H_1 dans le plan focal objet de L_2 : de cette façon , à chaque point de I_+ ou I_- correspond une direction pour P , S et A , donc un état d'interférences donné . La figure 75 détaille la procédure de soustraction.

II - LE MONTAGE D'ENREGISTREMENT DE LA SOUSTRACTION

2.1) Description

La solution la plus simple aurait été de d'inclure la soustraction dans la convolution incohérente en plaçant le prisme S de SAVART modifié par FRANCON au niveau de la pupille de l'objectif de convolution . Mais les franges à l'infini du prisme dont nous disposons , de fréquence 6750 rd^{-1} en lumière de 488 nm de

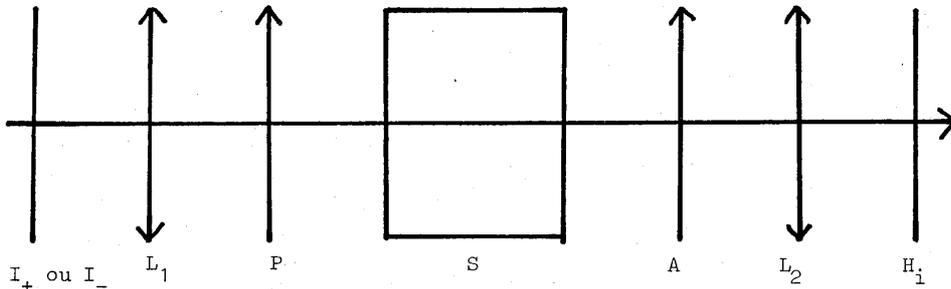
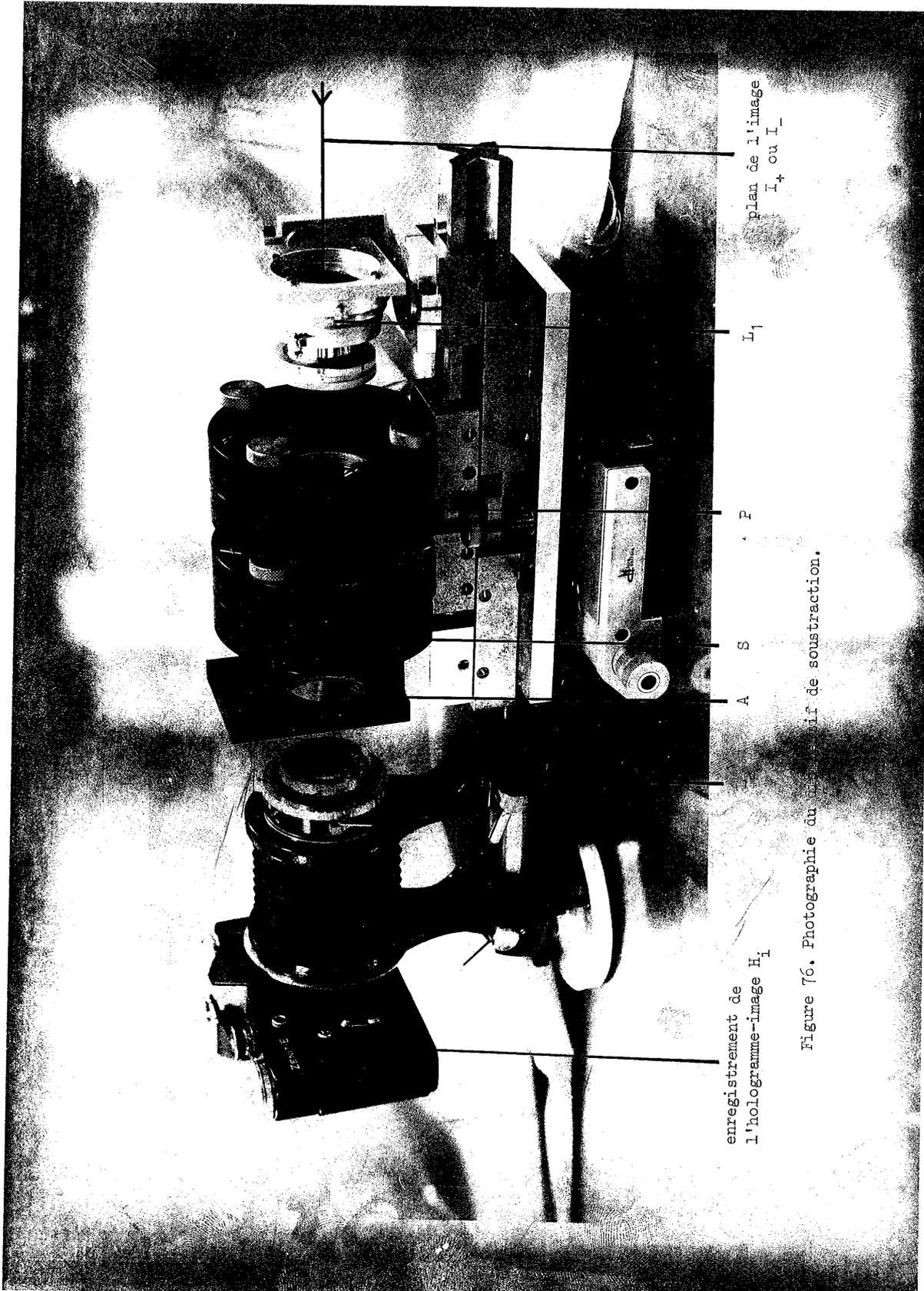


Figure 74. Principe du dispositif de soustraction.



enregistrement de
l'hologramme-image H_1

Figure 76. Photographie du montage optique de soustraction.

x Enregistrement de l'hologramme-image H_1 :

- 1° pose : $I_+ = 0$ H_+ modulé par un système de franges ;
- changement d'hologramme et d'état de polarisation ;
- 2° pose : $I_- = 0$ H_- modulé par le système de franges complémentaire du précédent .

x Développement de H_1 .

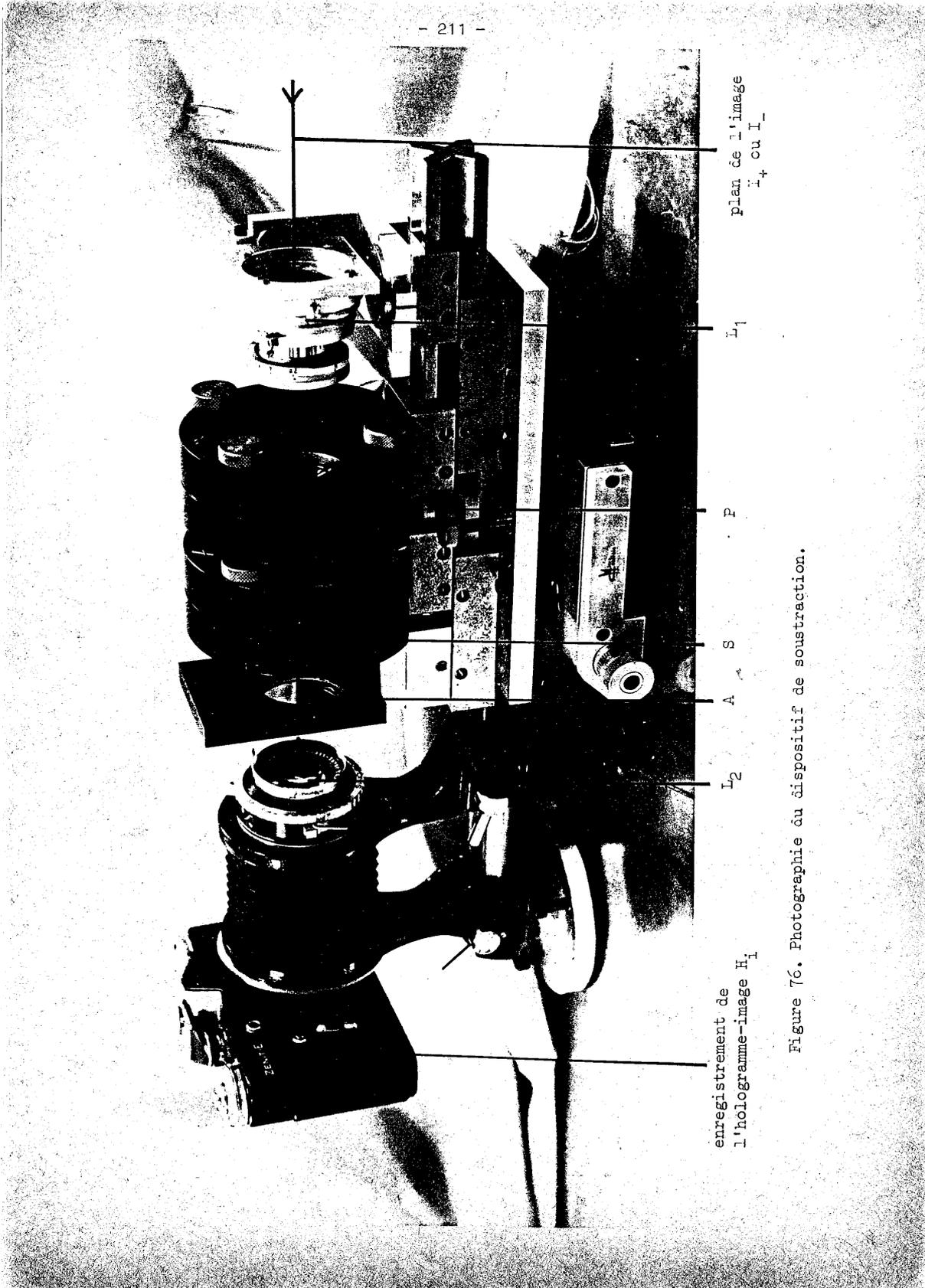
x Observation de H_1 par double diffraction en sélectionnant l'ordre 1 diffracté par les franges.

Figure 75. Procédure à suivre pour la soustraction.

longueur d'onde , n'étaient pas assez serrées ; leur fréquence spatiale dans le plan image de la convolution aurait été inférieure à la fréquence de coupure des images à soustraire . Nous avons donc placé le soustracteur présenté sur la figure 76 à la suite du montage de convolution incohérente . Ce soustracteur comprend six éléments dont quatre sont montés sur un banc d'optique et mobiles ensemble sur une unité de translation pour la commodité des réglages :

- un objectif photographique L_1 de distance focale $f_1 = 50$ mm , d'ouverture $f_1/2.8$, utilisé à l'envers forme l'image de $I_+(\vec{r})$ ou $I_-(\vec{r})$ à l'infini ; utilisé à une ouverture de $f/20$ et sur un champ de 6 mm à peine , il est pratiquement dépourvu d'aberrations . L_1 est réglable en translation et en orientation sur le banc d'optique .
- un premier polariseur P est constitué d'un "polaroid" collé entre des lames de verre de bonne qualité optique . P est réglable en orientation . Son diamètre est 40 mm .
- le prisme S est d'excellente qualité optique , de dimensions limitées en raison du prix élevé du spath d'Islande (section 20 x 20 mm , longueur 28 mm) ; S est réglable en orientation .
- l'analyseur A est identique au polariseur P , mais non réglable : son orientation détermine celle des autres éléments .
- l'objectif photographique L_2 , de distance focale $f_2 = 127$ mm , forme l'image de $I_+(\vec{r})$ ou $I_-(\vec{r})$ modulé par les franges dues aux prismes S sur l'émulsion de l'hologramme image H_1 . Il est utilisé à une ouverture de $f/50$ sur un champ de 20 mm ; ses aberrations sont très faibles . L_2 est indépendant du banc d'optique portant L_1 , P , S et A . L'image de I_+ ou I_- , agrandie par l'afocal L_1 et L_2 , a pour fréquence de coupure :

$$\Omega'_B = \Omega_B \frac{f_1}{f_2} \approx 16 \text{ mm}^{-1} \quad (101)$$



enregistrement de
l'hologramme-image H_1

Figure 76. Photographie du dispositif de soustraction.

Les franges ont pour fréquence :

$$\frac{6750}{127} = 53 \text{ mm}^{-1}$$

et la condition sur leur finesse par rapport au spectre de l'objet traité est donc satisfaite .

- enfin , l'inversion des franges entre les deux poses est obtenue à l'aide d'une lame demi-onde $L_{\lambda/2}$ convenablement orientée et que l'on interpose entre P et S . Nous expliquerons plus loin pourquoi , plutôt que de tourner l'analyseur A ou le polariseur P entre les deux poses , nous préférons utiliser cette lame dont le diamètre , 25 mm , et le parallélisme sont suffisants et le prix raisonnable . Sa monture est indépendante du banc d'optique et elle n'apparaît pas sur la figure 76 .

La figure 77 montre le trajet des faisceaux issus du montage de convolution incohérente dans le soustracteur . On constate que les divers éléments du soustracteur ne limitent pas les faisceaux .

Le réglage du soustracteur nécessite l'alignement de L_1 , P , S , A , $L_{\lambda/2}$ et L_2 sur l'ordre utile des hologrammes de convolution . A cet effet , il est commode d'adjoindre au couple des hologrammes de $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ un troisième hologramme enregistré avec pour onde objet une onde sphérique issue du centre des fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ (voir le montage d'enregistrement sur la figure 50) : cet hologramme auxiliaire , éclairé par un faisceau laser , diffracte un faisceau centré sur l'ordre utile et non élargi du fait de la forme des fonctions $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$. L'hologramme image situé dans le plan focal de L_2 doit être enregistré sur une émulsion qui résoud bien les franges , de pas $19 \mu\text{m}$. Une préexposition est souhaitable pour que les franges soient bien sinusoïdales et leur enveloppe proportionnelle aux éclairagements $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ à soustraire .

Les deux temps de pose doivent tenir compte des efficacités des hologrammes hétérodynes de $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$.

2.2) Réglage de l'état de polarisation

Les éléments P , S , A et $L_{\lambda/2}$ doivent être réglés une fois pour toutes en orientation dans leur plan . On commence par placer le prisme S dans une position telle que ses deux faisceaux soient séparés horizontalement , de façon que les franges soient verticales sur l'hologramme image . Ayant ensuite éteint une des deux images à l'aide de P , on tourne P de $\frac{\pi}{4}$, puis on croise P et A .

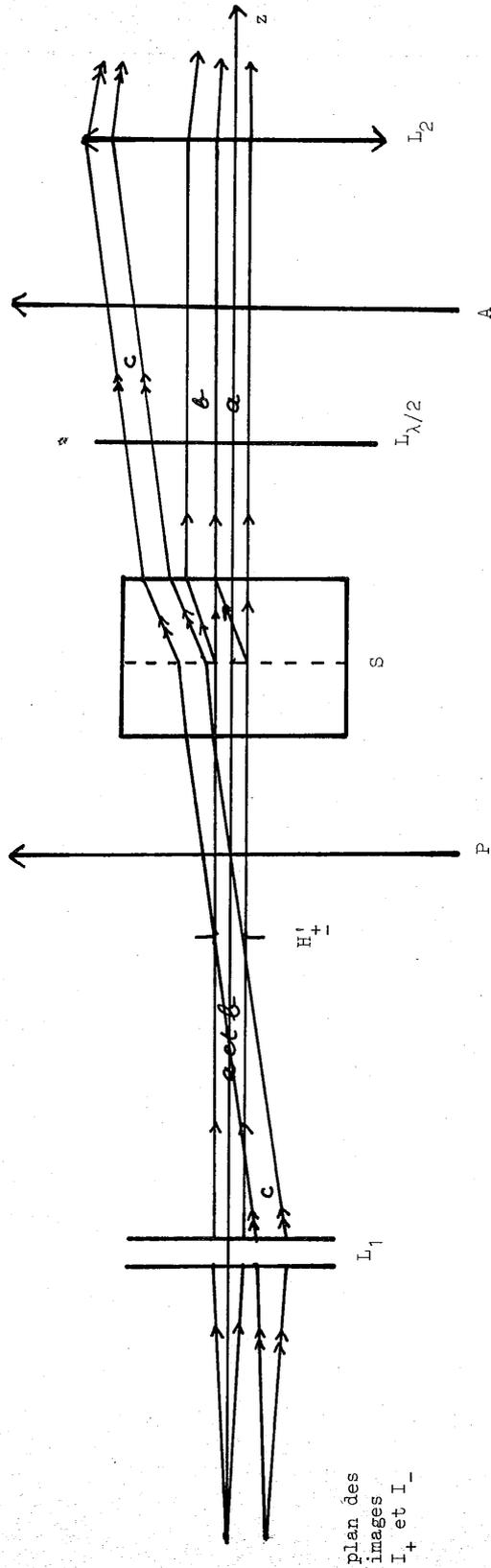


Figure 77. Trajet des faisceaux dans le soustracteur.
 Echelle le long de l'axe z : 1 ; échelle perpendiculairement à l'axe : 2.
 H'_+ désigne l'image à travers L_1 des hologrammes hétérodynes de H_+ et H_- . La figure

est faite dans le cas d'hologrammes diffus, limités par une pupille de diamètre 25 mm.
 L'objectif L_1 est représenté par ses deux plans principaux, dont la distance n'est pas à l'échelle.
 La figure est tracée en projection orthogonale sur le plan défini par l'axe commun de L_1 et L_2
 et le rayon extraordinaire de la deuxième moitié du prisme de Savart modifié par Françon S.
 On a tracé : - les deux faisceaux a et b issus du point central du champ et correspondant
 aux deux polarisations propres des lignes neutres du prisme S ;
 - le faisceau c issu du point extrême du champ utile et responsable de la limitation.

On place A par collage dans sa position , et enfin on place $L_{\lambda/2}$ de façon à établir l'extinction quand on le place entre P et un analyseur auxiliaire A' préalablement croisé avec A , donc de même direction de polarisation que P . Enfin , une lame demi-onde $L'_{\lambda/2}$ est placée sur le faisceau laser incident immédiatement à la sortie du laser , dans une direction telle que P laisse passer le maximum de lumière : le faisceau laser , en effet , est polarisé dans une direction qui , a priori , n'a rien à voir avec celle sélectionnée par P . Remarquons qu'en principe P est alors inutile , puisque le laser et $L'_{\lambda/2}$ fournissent une lumière polarisée rectilignement dans sa direction . Néanmoins , les éléments optiques d'éclairage et de convolution incohérente produisent une légère dépolarisation qui rend le polariseur P nécessaire .

2.3) Tolérances sur le soustracteur

BELVAUX et SAGET ont fait remarquer {130} que toute modification des éléments optiques situés après le prisme S risque d'affecter fortement les résultats . Supposons , en effet , qu'en un temps de pose T , au lieu d'une lumination :

$$L(\vec{r}) = T [I_+(\vec{r}) (1 + \cos 2\pi x/p) + I_-(\vec{r}) (1 - \cos 2\pi x/p)] \quad (102)$$

l'hologramme image enregistre une lumination dans laquelle une des modulations a subi une légère translation :

$$L'(\vec{r}) = T [I_+(\vec{r}) (1 + \cos 2\pi x/p) + I_-(\vec{r}) (1 - \cos(2\pi x/p + \epsilon))] \quad (103)$$

L'observation de la soustraction par filtrage sélectif de l'ordre 1 dans l'hologramme image fournit alors une distribution d'éclairement :

$$|I_+(\vec{r}) - I_-(\vec{r}) \exp i\epsilon|^2 \approx (I_+(\vec{r}) - I_-(\vec{r}))^2 + \epsilon^2 I_+(\vec{r}) I_-(\vec{r}) \quad (104)$$

Si , comme c'est le cas dans notre expérience , les deux images $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ sont très voisines , le terme parasite , bien que proportionnel à ϵ^2 , risque d'être très gênant .

Or , si un défaut quelconque d'une surface optique située après le prisme S est bougé entre les deux poses , les franges se déplacent et l'avantage de l'utilisation de la polarisation sur la méthode de PENNINGTON est perdu . Par exemple , si on tourne entre les deux poses l'analyseur de $\frac{\pi}{2}$ et que cet analyseur , d'indice n , est affecté d'un défaut prismatique d'angle θ , les franges sont déplacées par ce défaut de $(n-1)\theta$, ce qui correspond à :

$$\epsilon = \frac{(n-1)\theta}{i} \quad (105)$$

où $i = \frac{1}{6750}$ rd est l'interfrange . On voit qu'un angle θ de 0,6" suffit pour

déplacer les franges d'un centième d'interfrange , et il est préférable de l'éviter . Au contraire , la rotation d'un élément optique très légèrement déflectueux placé avant le prisme S ne déplace pas les franges . Il déplace légèrement les images $I_+(\vec{r})$ ou $I_-(\vec{r})$, mais ce déplacement est moins grave que celui des franges , puisque les fréquences spatiales contenues dans $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ sont inférieures à la fréquence des franges .

Il semble donc naturel de changer la phase des franges entre les deux poses de la soustraction par rotation de $\pi/2$ du polariseur P . Dans notre cas, toutefois , ceci oblige à tourner également la lame $L'_{\lambda/2}$ placée devant le laser de $\pi/4$; à moins que les deux rotations ne soient faites avec une grande précision , on doit mesurer la lumière qui traverse P avant et après les rotations pour corriger , si nécessaire , le temps d'une des deux poses .

Pour éviter toute cette procédure supplémentaire , deux possibilités s'offraient à nous : revenir à la rotation de l'analyseur A , mais avec un analyseur de très bonne qualité , ou tourner la polarisation par l'interposition d'une lame quart d'onde $L_{\lambda/2}$ entre P et S . Vu le prix d'un analyseur de très bonne qualité assez grand pour ne pas limiter les faisceaux , la question a été tranchée en faveur de la lame $L_{\lambda/2}$, malgré la nécessité d'apporter une correction fixe d'un facteur de l'ordre de 1,1 à un des deux temps de pose pour compenser les pertes par réflexion sur les faces de $L_{\lambda/2}$. Les réflexions parasites correspondantes sur l'image sont assez faibles pour ne pas être gênantes en pratique .

2.4) Influence du bruit dû aux éléments du soustracteur

Les figures 78 et 79 présentent deux résultats d'essais du soustracteur . La première est le résultat de la soustraction de deux images identiques obtenues dans l'ordre 1 de l'hologramme de $H_+(\vec{r})$ avec pour objet , le cadre de l'objet , mais vide , c'est-à-dire un carré uniforme de côté voisin de 3 mm . La forme du champ s'explique par des obturations partielles qui ont été supprimées depuis cet essai . On constate que le résultat est très raisonnablement uniforme et foncé . La seconde photographie concerne le traitement de ce même objet qui , sauf sur les bords , peut être considéré comme le résultat de la convolution d'un objet uniforme par lui-même : on le traite donc par déconvolution approchée en faisant la soustraction de ses convolutions par $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ dans les ordres 1 des hologrammes correspondants , et le résultat doit être une distribution d'éclairement non nulle mais uniforme . Or , la figure 79 montre qu'il n'en est rien : on observe de fortes fluctuations jusqu'au centre

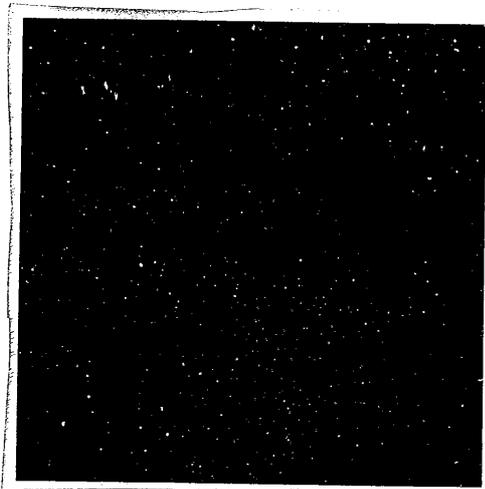


Figure 78. Convolution d'un objet uniforme carré par H_+ soustraite d'elle-même.

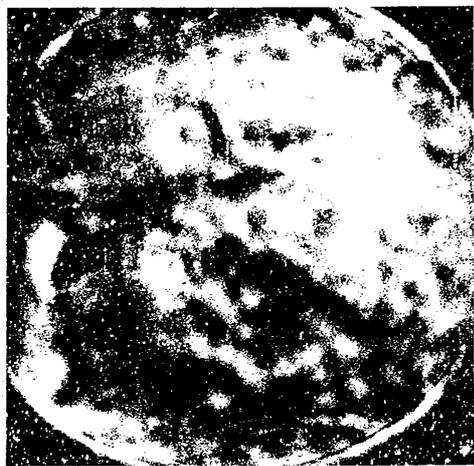


Figure 79. Objet uniforme carré "traité" à l'aide d'hologrammes non diffus ($H_+ - H_-$).

de l' "image traitée" . Précisons que les hologrammes utilisés dans cette soustraction étaient du type non diffus , c'est-à-dire à aire efficace très petite .

La répétition de l'expérience a permis de constater que le bruit observé est reproductible jusque dans ses détails . Une analyse photométrique d'une ligne du plan image de la convolution (donc avant le soustracteur) suivie d'une soustraction point par point a montré que le bruit n'y est pas présent . Par contre , la même analyse dans le plan de l'hologramme image de soustraction fait apparaître le bruit , qui n'est donc pas lié à l'émulsion . Tous ces faits accusent nettement les éléments du soustracteur de causer le bruit . Plus précisément , notre diagnostic est le suivant : une poussière ou un défaut quelconque situé sur L_1 , P , S , A ou L_2 sur le trajet des faisceaux issus de l'objet et de l'hologramme de H_+ a un léger effet sur l'éclairement de l'hologramme image . Lorsqu'on soustrait l'image d'elle-même (figure 78) , le même défaut a le même effet et ne perturbe pas le résultat . Mais lorsqu'on remplace l'hologramme de H_+ par celui de H_- , l'étroit faisceau utile a une répartition lumineuse tout-à-fait différente et le même défaut est beaucoup plus éclairé ou beaucoup moins éclairé , si bien que son influence sur le résultat de la soustraction est importante . Le bruit résultant est d'autant plus intense que les deux

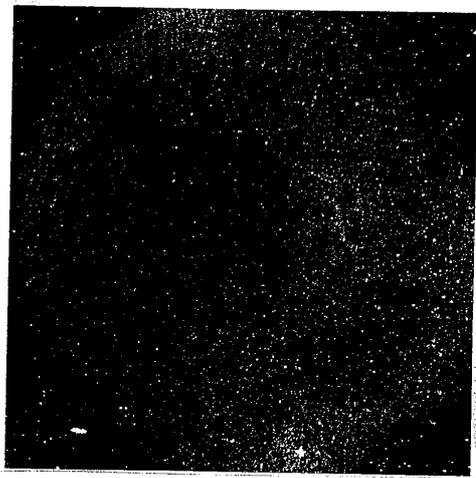


Figure 80. Objet uniforme carré "traité" à l'aide d'hologrammes diffus (H_+ - H_-)

éclairagements à soustraire sont plus voisins . Or , nous avons vu que le rapport ρ_0 de l'Equation (36) ne s'écarte de 1 que de quelques centièmes .

La thérapeutique à proposer est simple : le bruit est dû à la finesse des deux faisceaux et à la différence entre leurs structures . Il faut donc étaler les faisceaux et les rendre plus semblables : au lieu d'hologrammes de $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ obtenus en éclairage non diffus , enregistrons des hologrammes diffus grâce à un diffuseur placé sur les objets H_+ et H_- dans le montage d'enregistrement de la figure 50 , ainsi que nous l'avons déjà décrit dans le Chapitre II .

La figure 80 , obtenue avec des hologrammes diffus et correspondant à la même expérience que la figure 79 , montre le succès de la méthode .

La difficulté que nous venons d'étudier peut surprendre dans une méthode de traitement incohérent dont l'intérêt principal devait être l'insensibilité au bruit , en particulier au bruit dû aux défauts des composants optiques . Mais il n'y a là aucun paradoxe : le bruit de la figure 79 est lié à la finesse des faisceaux et supprimé lorsqu'on augmente leur étendue géométrique : c'est typiquement un bruit cohérent , la petite aire des zones utiles des hologrammes non

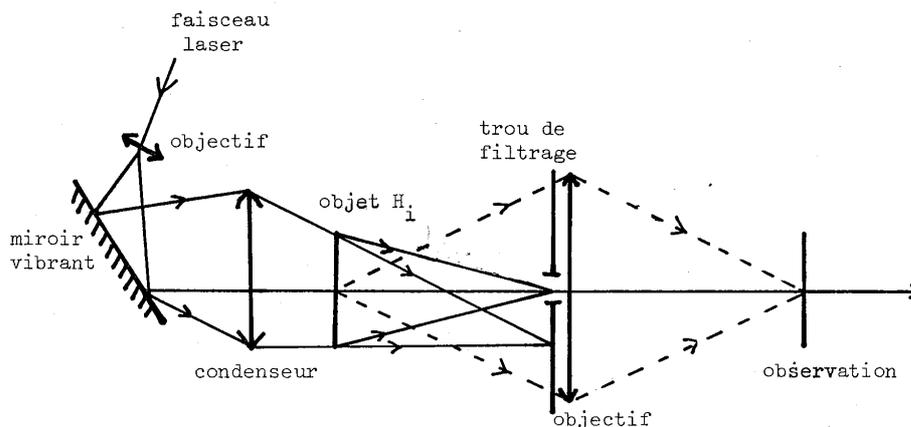


Figure 81. Schéma du montage d'observation de la soustraction.
L'objet est l'hologramme-image H_1 placé en immersion.

diffus introduisant une forte cohérence partielle . Autrement dit , notre méthode n'est pas suffisamment incohérente , et en utilisant des hologrammes diffus, nous ne faisons rien d'autre que la rendre plus incohérente .

Cette nouvelle différence entre hologrammes diffus et non diffus nous donne l'occasion de récapituler , sur le tableau 4 , les avantages et inconvénients respectifs . On constate que le choix est loin d'être simple , et il est probable qu'il dépend de chaque cas particulier de défaut traité .

Avantages	Inconvénients
<ul style="list-style-type: none"> - rendement amélioré (plus de 10^{-3} au lieu de moins de 10^{-4}) - suppression du bruit cohérent du soustracteur 	<ul style="list-style-type: none"> - granularité laser - perturbations apportées par la structure du diffuseur - augmentation des aberrations

Table 4. Avantages et inconvénients des hologrammes hétérodynes diffus sur les hologrammes hétérodynes non diffus.

III - LE MONTAGE DE RESTITUTION DE LA SOUSTRACON OPTIQUE

La restitution de l'hologramme image se fait par double diffraction en filtrant une bande de fréquences spatiales égale à celle Ω'_B des fréquences utiles dans l'objet autour de l'ordre 1 diffracté par l'hologramme image . Grâce à la forme rectiligne des franges , une restitution partiellement cohérente est possible.

Notre montage est conforme à celui décrit par Y. BELVAUX et J.C. SAGET {130}. Toutefois, nous avons remplacé la fente source éclairée par une lampe à vapeur de mercure par le faisceau laser rendu spatialement partiellement cohérent par un miroir vibrant (figure 81). L'hologramme image, enregistré sur film Agfa Copex Pan, est restitué en immersion. Le montage est photographié sur la figure 62. Il a fourni les figures 78 à 80, ainsi que les photographies du paragraphe qui suit.

IV - RESULTATS DE TRAITEMENT COMPLET

4.1) Descriptions des opérations

Au moment de présenter les résultats des essais de traitements complets dont nous avons commenté la conception et les diverses étapes, nous décrivons ici la procédure à suivre pour effectuer un traitement réel, du moins dans l'état actuel de notre méthode.

Nous supposons qu'un objet à traiter et la fonction de défaut correspondante nous sont remis. Le montage est prêt, c'est-à-dire que tous les réglages indépendants du cas particulier traité sont faits : mise en place et alignement du montage d'hétérodynage des hologrammes, de la convolution incohérente avec son soustracteur, et du filtrage des fréquences spatiales pour l'observation de la soustraction.

- Etape informatique : à l'aide des programmes écrits à cet effet, on calcule la réponse percussionnelle du pseudo-filtre de Wiener qui sera utilisé pour la déconvolution approchée ; le résultat du calcul est placé sur une bande magnétique sous forme d'ordres de tracé des hologrammes synthétiques images des amplitudes $\sqrt{H_+(\vec{r})}$ et $\sqrt{H_-(\vec{r})}$. Le rapport ρ_0 est fourni par l'ordinateur.
- Tracé des deux hologrammes synthétiques sur traceur de courbes incrémental.
- Photoréduction sur plaque.
- Hétérodynage dans des conditions d'enregistrement linéaires sur plaques Kodak 649 F ultraflat sous forme de deux hologrammes diffus dont les ondes objets doivent être centrées avec soin et avoir une taille exactement adaptée au défaut à traiter.
- Mise en place des deux hologrammes dans le montage de convolution incohérente de façon que les réponses percussionnelles $H_+(\vec{r})$ et $H_-(\vec{r})$ soient exactement centrées et non aberrantes. Cette opération peut nécessiter le choix d'un couple d'hologrammes de qualité optique suffisante. L'objet de la convolution est remplacé par un point.
- Centrage de l'objet à traiter sur ce point.
- Mesure de l'efficacité des deux hologrammes.

4.2) Présentation et discussion des résultats

Un certain nombre d'essais ont été effectués sur les objets-tests choisis. Dans l'ensemble, ils sont décevants. Nous ne présenterons ici que quelques uns de ces résultats, choisis pour leur intérêt dans l'analyse des difficultés qui restent à surmonter.

4.2.1) Traitement du défaut seul :

Lorsque l'objet à traiter $O(\vec{r})$ se réduit au défaut $D(\vec{r})$ lui-même, la soustraction sur calculateur après convolution optique fournit la réponse percussionnelle globale $G(\vec{r})$. Par contre, la soustraction optique fournit son carré $G^2(\vec{r})$, la détection quadratique finale faisant perdre sa linéarité au traitement.

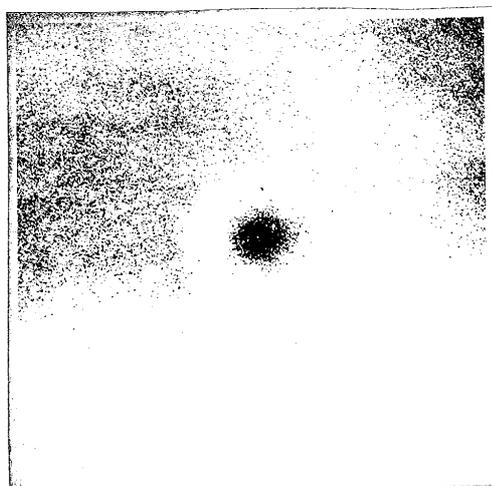
La figure 82 présente la coupe photométrique de cette fonction dans le cas d'un disque de rayon $R = 300 \mu\text{m}$ avec pseudo-filtrage de Wiener de paramètre $\epsilon = 0,1$. La courbe simulée et le défaut lui-même y ont été ajoutés. Ce résultat, obtenu avec hologramme non diffus, est parmi les plus satisfaisants que nous ayons obtenus. Rappelons qu'il correspond au cas le plus favorable : objet très petit sur fond noir, traitement apportant une amélioration très modeste ($\epsilon = 0,1$) et échantillonné très finement par rapport à sa taille ($R = 300 \mu\text{m}$).

La figure 83 concerne le même traitement pour les valeurs des paramètres $R = 100 \mu\text{m}$ et $\epsilon = 0,01$. L'analyse photométrique confirme ce que la photographie permet d'apercevoir : l'amélioration apportée par le traitement est faible, et même presque négligeable par rapport à celle que l'on pourrait espérer. Nous voyons à cela plusieurs raisons : les difficultés de centrage et le défaut tomographique ont été étudiés précédemment. Par ailleurs, l'hologramme-image de soustraction souffre de la mauvaise adaptation du récepteur photographique à l'enregistrement linéaire d'une fonction très étroite. La figure 83 permet enfin de constater une autre limitation de la soustraction optique. Le montage d'observation de la soustraction fonctionne en éclairage partiellement cohérent : conformément aux résultats énoncés dans notre deuxième partie, il est très peu sensible au bruit pupillaire, mais souffre du bruit objectif. Ce bruit se manifeste sur la figure sous la forme de taches blanches : il s'agit de "bruit percussionnel" (voir Chapitre III de la 2ème partie) dû à des poussières sur l'émulsion de l'hologramme-image de soustraction ou sur la cuve à immersion qui le contient. Un nettoyage soigneux n'a pas permis de s'en affranchir et on peut également observer, sur certains clichés, l'effet très gênant de rayures ou de piqûres du film.



échelle 19.

Figure 83. Traitement du défaut seul, $R = 100 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,01$, hologrammes non diffus. Le défaut est indiqué en marge. On remarque le bruit percussionnel.



Echelle 19.

Figure 84. Traitement d'un disque gris sur fond clair, $R = 300 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,1$. Le défaut est indiqué en marge. On remarque le bruit de granularité.

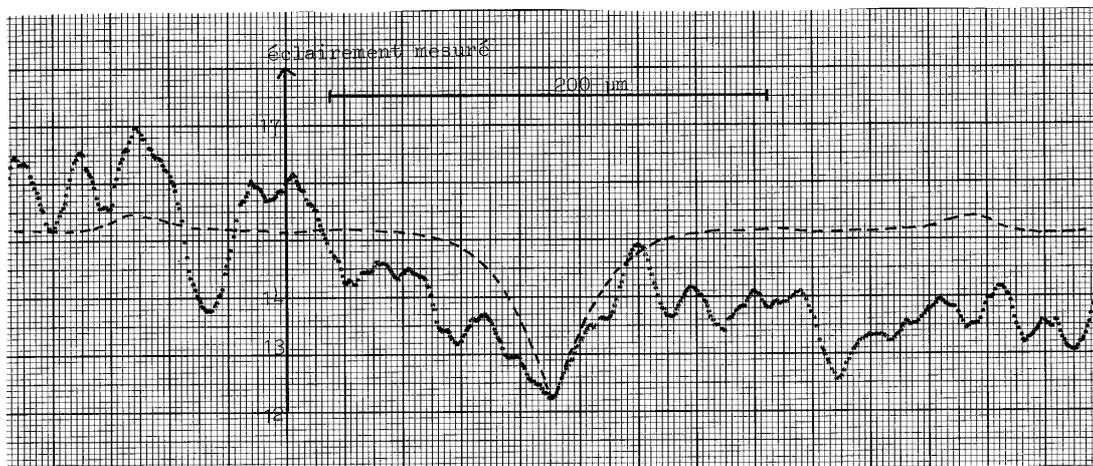


Figure 85. Traitement d'un disque gris sur fond clair, $R = 100 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,01$. En pointillés, coupe photométrique ; en tirets, simulation correspondante. L'unité en ordonnée est arbitraire, mais l'origine des graduations correspond à l'obscurité.

4.2.2) Traitement d'un disque gris sur fond clair :

La figure 84 concerne le défaut de rayon $R = 300 \mu\text{m}$ avec $\epsilon = 0,1$. La taille et l'allure de l'image traitée sont conformes aux prévisions. Outre un manque d'uniformité du champ que nous attribuons à un défaut d'éclairage, on observe une granularité assez forte. Ce bruit vient de l'hologramme-image soustracteur : comme pour les poussières, il s'agit de bruit objectif que la cohérence partielle ne peut pas vaincre. Il aurait donc été souhaitable d'utiliser une émulsion à grain particulièrement fin, par exemple Kodak 649 F, ce qui toutefois aurait porté le temps de pose à quelques minutes.

La figure 85 représente, en coupe photométrique, le même traitement dans le cas $R = 100 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,01$. La simulation et le résultat expérimental ne sont que très vaguement analogues. Pour expliquer leur écart, on peut évoquer les raisons déjà analysées ; mais il convient aussi d'examiner la question du rendement des divers hologrammes, qui ne se présente pas de la même façon que lors du traitement sans soustraction optique.

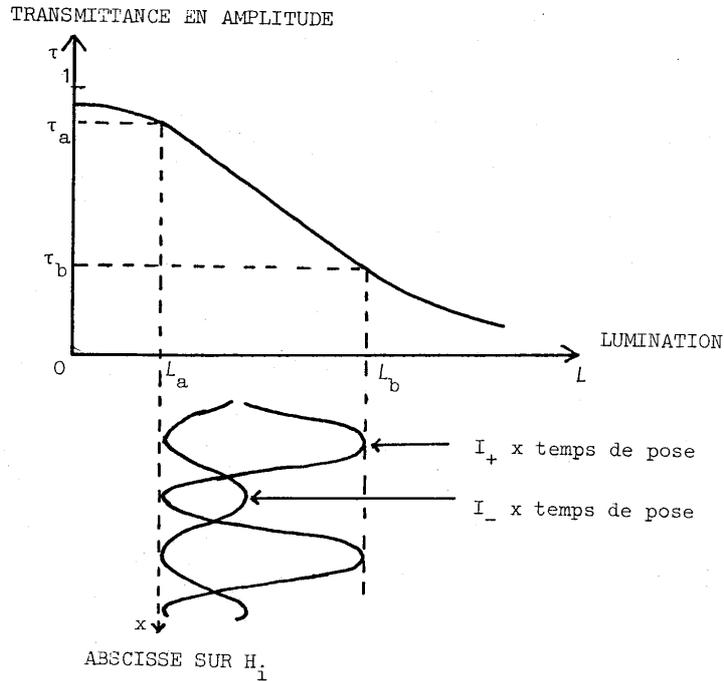


Figure 86. Efficacité de l'hologramme-image soustracteur H_1 : utilisation de la partie linéaire de la courbe $\tau-L$ de l'émulsion.

4.2.3) Efficacité de diffraction de l'hologramme-image :

Considérons d'abord l'efficacité de l'hologramme-image de soustraction . Il s'agit d'un hologramme d'amplitude qui contient la soustraction des images $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ codée par la fréquence porteuse du dispositif biréfringent soustracteur . Le terme utile s'exprime sous la forme d'une modulation de transmittance en amplitude , sous réserve de linéarité de la courbe $\tau-L$ (transmittance en amplitude-illumination) de l'émulsion .

$$\tau_m(\vec{r}) = \alpha_1 [I_+(\vec{r}) - I_-(\vec{r})] \cos 2\pi x/p . \quad (106)$$

La constante α_1 dépend uniquement du temps de pose et de l'émulsion choisie . On voit que l'efficacité de l'hologramme-image au point \vec{r} est ,

$$\eta_I(\vec{r}) = \frac{1}{4} \alpha_1^2 I(\vec{r})^2 . \quad (107)$$

Il est , comme il se doit , proportionnel au carré de l'image traitée . Mais cherchons à évaluer la constante α_1 . Considérons pour cela la courbe $\tau-L$ de l'émulsion (figure 86) .

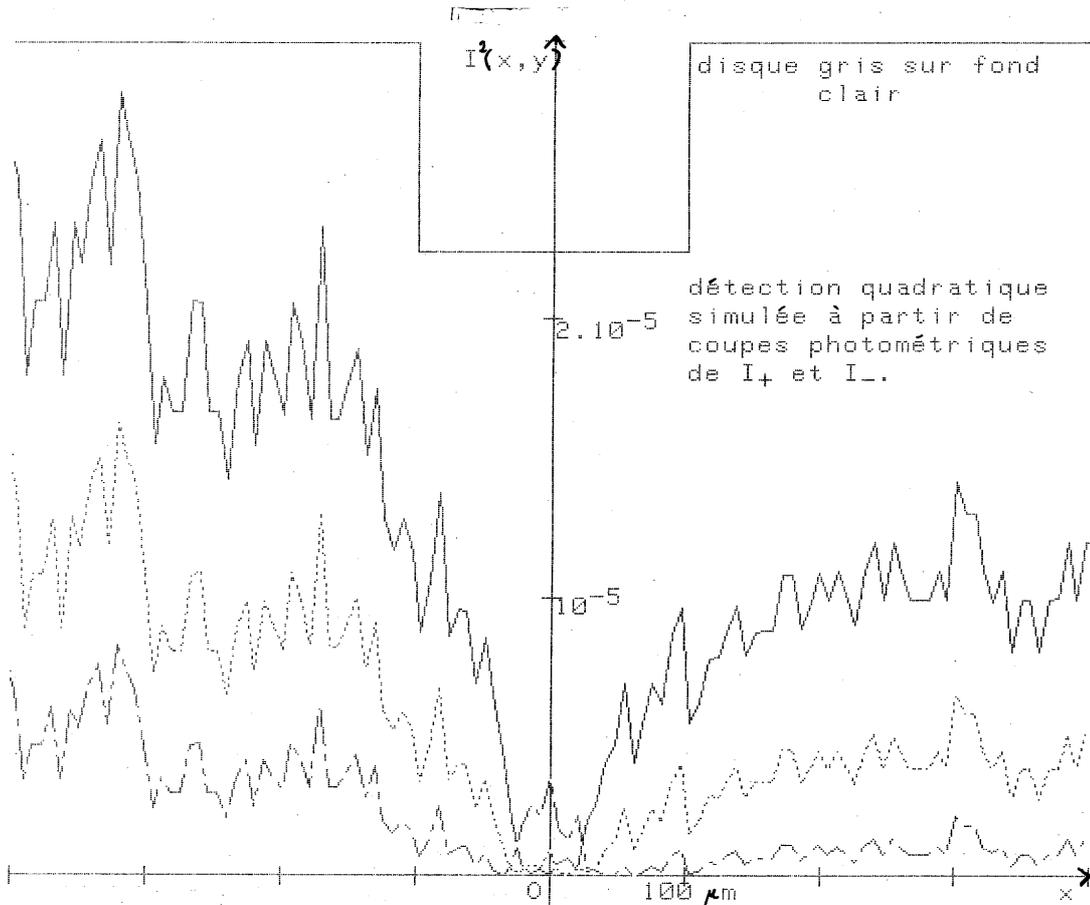


Figure 87. Influence sur le résultat du traitement avec soustraction optique d'une erreur de $\pm 5\%$ sur l'efficacité d'un des hologrammes hétérodynes. L'allure de l'objet à traiter est rappelée en haut de la figure. L'axe des ordonnées est gradué en efficacité de l'hologramme-image soustracteur.

Appelons $(L_a - \tau_a)$ et $(L_b - \tau_b)$ les coordonnées des points extrêmes de la région linéaire de la courbe. Une préexposition amène la lamination à la valeur L_a . Le temps de pose doit être choisi de façon que pour les images modulées de I_+ et I_- isolément, compte tenu bien sûr de la partie non modulée, la région linéaire ne soit pas dépassée, même au point où $I_+(\vec{r})$ ou $I_-(\vec{r})$ atteint son maximum. C'est en général $I_+(\vec{r})$ qui détermine ce maximum, que nous appellerons I_{+M} .

La constante α_1 vaut donc

$$\alpha_1 = \frac{\tau_b - \tau_a}{2I_{+M}} \quad (108)$$

L'efficacité η_I vaut alors :

$$\eta_I(\vec{r}) = \frac{(\tau_b - \tau_a)^2}{16} \left[\frac{I_+(\vec{r}) - I_-(\vec{r})}{I_{+M}} \right]^2 \quad (109)$$

Dans le produit du second membre, on reconnaît un terme qui ne dépend que de l'émulsion et un terme qui ne dépend que de l'image traitée. Le premier terme est limité à 6,25%, même si $\tau_b - \tau_a$ atteint 1 : c'est le rendement maximal bien connu d'un réseau sinusoïdal d'amplitude. Dans notre cas, τ_a et τ_b sont respectivement de l'ordre de 0,8 et 0,2, si bien que $(\tau_b - \tau_a)^2$ est voisin de 0,35. La suppression de la préexposition ne porterait ce terme qu'à 0,5 environ.

Le terme dépendant de l'image dans l'équation (109) a une grande importance pour l'efficacité. En effet, considérons d'abord une image à traiter réduite au défaut, clair sur fond sombre. Le maximum I_{+M} est atteint au centre de l'image traitée et, en ce point, l'image $I_-(\vec{r})$ n'atteint qu'environ 1/5 de $I_+(\vec{r})$ (voir par exemple l'allure de ces fonctions sur la figure 65). Le terme dépendant de l'image dans η_I atteint alors :

$$\left[\frac{I_+(0) - I_-(0)}{I_{+M}} \right]^2 \approx 0,64 \quad (110)$$

ce qui limite l'efficacité à 1,4% environ.

Par contre, considérons une image grise sur fond clair, où le "fond" s'étend sur une région au moins aussi grande que la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$. Le maximum I_{+M} est atteint sur le fond clair et correspond à la convolution de $H_+(\vec{r})$ par ce fond clair uniforme. Mais la valeur de $I_-(\vec{r})$ à ce même endroit est la convolution de $H_-(\vec{r})$ par le fond clair, si bien que $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ sont exactement dans le rapport ρ_0 de l'équation (36). Si l'on rappelle que ρ_0 vaut 1,032 pour $\epsilon = 0,01$, on constate que le rendement de l'image traitée vaut alors au maximum :

$$\eta_I(\vec{r}) = 0,35 \times 0,64 \times \left[\frac{1,032 - 1}{1,032} \right]^2 \approx 2 \cdot 10^{-5}.$$

Cette valeur extrêmement faible explique que le bruit objectif, percussionnel ou de granularité, parvienne aisément à modifier complètement l'allure de l'image traitée. Ainsi, seuls les objets présentant des pics clairs sur fond sombre comme un champ d'étoiles, permettent d'obtenir un rendement η_I non ridiculement faible.

Il est bien connu que la mesure précise de la différence de deux quantités identiques à 3% près est un travail expérimental délicat : on voit que la détection quadratique de la soustraction optique augmente encore cette difficulté. Remarquons que toute autre méthode optique de soustraction des luminances que celle de BELVAUX et SAGET se termine également par une détection quadratique et est donc soumise à la même critique.

4.2.4) Efficacité des hologrammes hétérodynes de traitement :

Nous avons déjà examiné l'influence d'une erreur de $\pm 5\%$ sur la mesure de l'efficacité des hologrammes hétérodynes dans le chapitre précédent. Nous avons constaté alors que cette erreur n'affecte pratiquement pas le résultat du traitement sans soustraction optique du défaut seul. Par contre, lors du traitement avec détection quadratique d'une image à fond clair, son influence est considérable. Il suffit pour s'en convaincre de constater que dans l'image du fond, le rapport de I_+ à I_- passe de 1,032 à 0,98 ou 1,08. L'efficacité η_I varie donc de façon considérable et il se produit même des inversions de contraste !

Pour illustrer cette remarque, nous avons utilisé des coupes photométriques de $I_+(\vec{r})$ et $I_-(\vec{r})$ obtenues expérimentalement mais sans soustraction optique. Nous avons calculé leur différence point par point sur ordinateur en tenant compte des efficacités mesurées des hologrammes, comme dans les résultats présentés dans le chapitre III, mais nous avons simulé la détection quadratique. Puis, le calcul a été recommencé en modifiant de + 5% et de - 5% l'efficacité d'un des hologrammes. La figure 87 présente le résultat du calcul. Les courbes n'ont pas été normalisées pour montrer l'influence considérable de l'efficacité mesurée des hologrammes hétérodynes sur l'éclairement moyen observé. L'axe des ordonnées est gradué en efficacité $\eta_I(\vec{r})$ de l'hologramme-image.

4.2.5) Traitement de l'objet-test:

Les figures 88 et 89 présentent les images traitées correspondant aux deux couples de valeurs choisies pour les paramètres R et ϵ .

En même temps que les images traitées, nous présentons à nouveau les images à traiter (voir figures 5 et 6), ainsi que les images traitées simulées. Ces dernières diffèrent des figures 13-a et 14-b, parce qu'il a été tenu compte ici d'une part de la détection quadratique, et d'autre part du fait que les images à traiter sont grises sur fond clair, alors que cela n'était pas nécessaire dans le chapitre I.

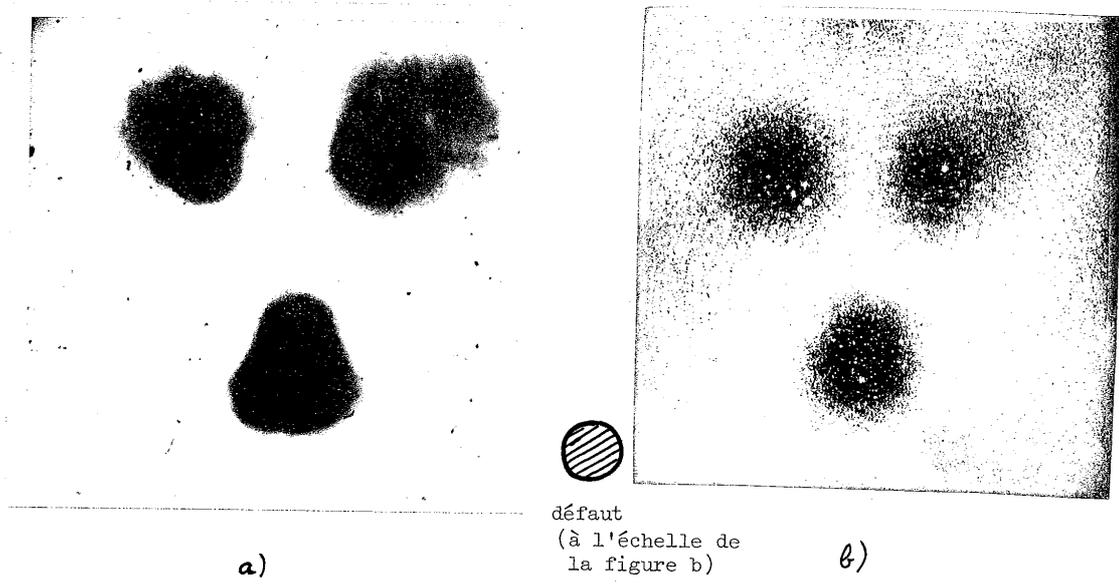
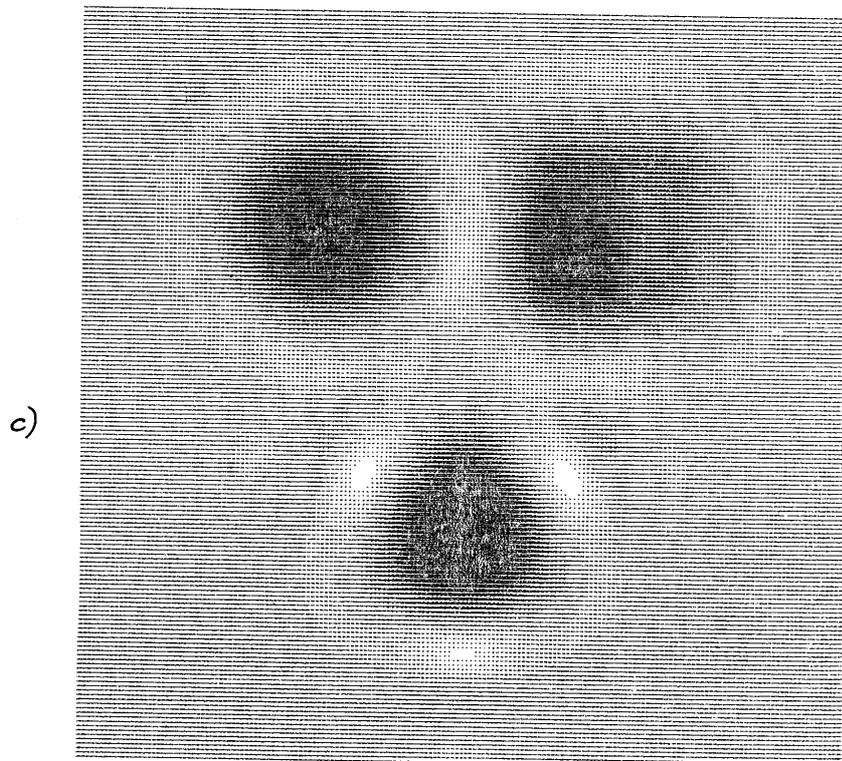


Figure 88. Traitement de l'objet-test, $R = 300 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,1$, hologrammes diffus. a) Image à traiter ; b) image traitée ; c) simulation de l'image traitée.



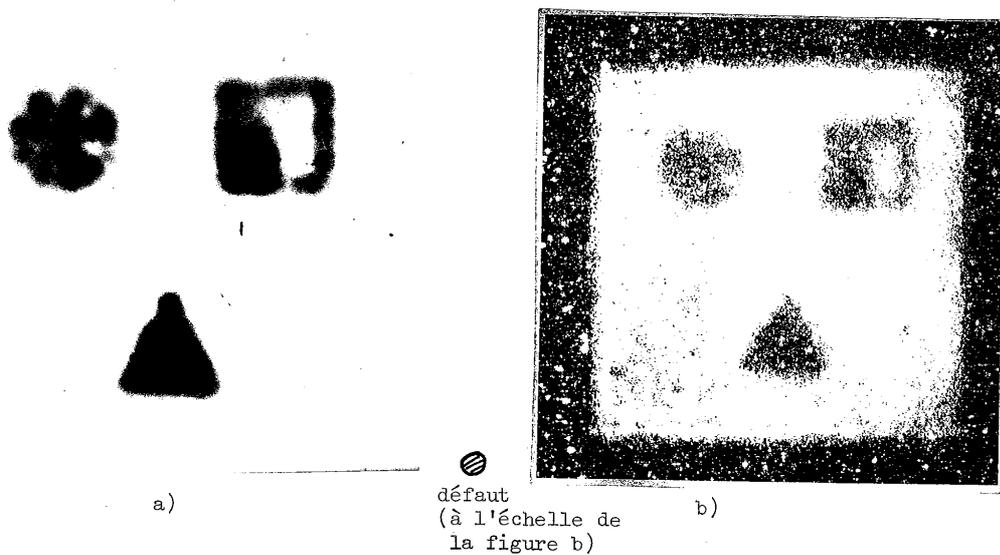
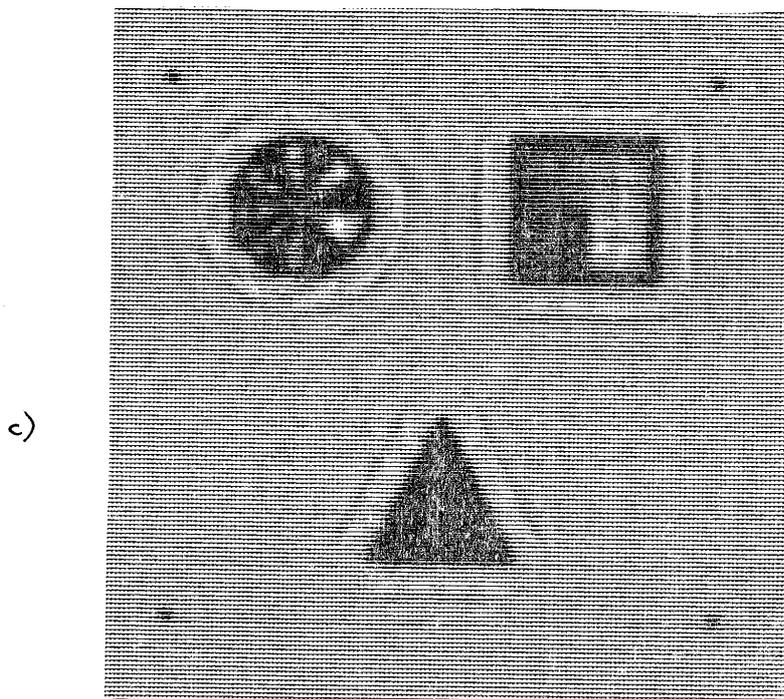


Figure 89. Traitement de l'objet-test, $R = 100 \mu\text{m}$, $\epsilon = 0,01$, hologrammes non diffus. a) Image à traiter ; b) image traitée ; c) simulation de l'image traitée.



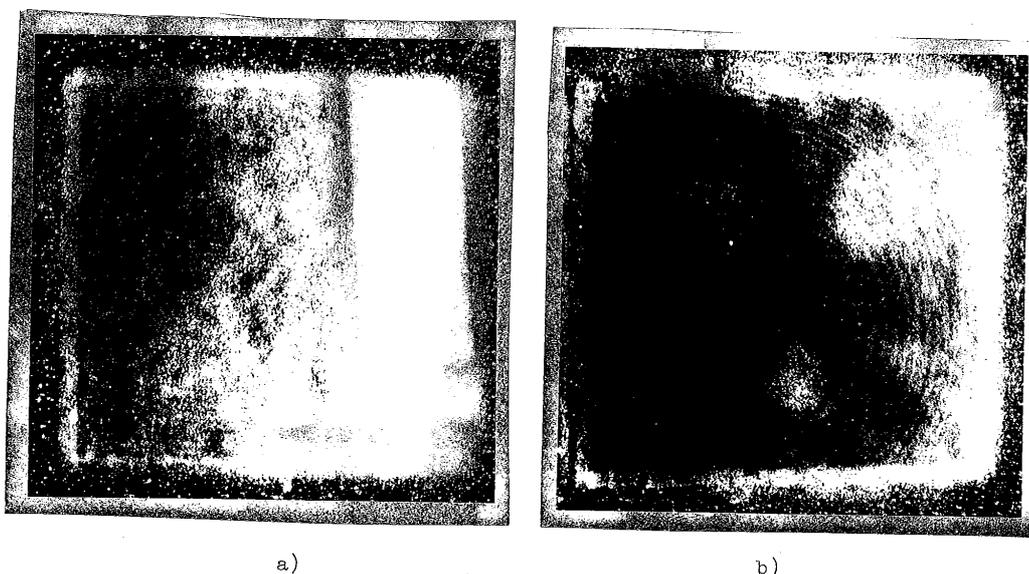


Figure 90. Influence d'une surexposition lors de l'enregistrement de l'hologramme-image soustracteur H_1 : a) surexposition d'un facteur 2 ; b) surexposition d'un facteur 4.

Il est clair que les traitements effectués n'apportent en fait aucune amélioration. Dans le cas de la figure 88, l'image à traiter et les images traitées théorique et expérimentale sont fort semblables en raison du choix de R et ϵ . Dans le cas de la figure 89, l'image traitée est probablement plus "mauvaise" que l'image à traiter en raison de toutes les difficultés étudiées.

Deux derniers résultats apportent une nouvelle illustration de ces difficultés : les figures 90 correspondent exactement au traitement de la figure 89. Seul le temps des deux poses t_+ et t_- lors de l'exposition de l'hologramme-image soustracteur a été modifié d'un facteur 2 ou 4, c'est-à-dire d'un ou deux "temps de pose" sur la bague des vitesses de l'appareil photographique, par rapport à la figure 89. On constate sur la figure 90-a qu'avec une surexposition d'un facteur 2 l'image traitée est d'un rendement si faible qu'elle disparaît complètement dans le bruit objectif. Sur la figure 90-b, au contraire, une surexposition d'un facteur 4 fait apparaître l'image "traitée" en négatif. En principe, le fond devrait être modulé par les franges soustractrices de l'hologramme-image plus fortement que les trois figures de notre objet-test. Mais la surexposition atténue la modulation du fond qui se trouve dans la partie non-linéaire de la courbe $\tau-L$ de l'émulsion.

V - CONCLUSION DU CHAPITRE

Plusieurs des résultats expérimentaux examinés dans ce chapitre sont assurément décevants. L'important, nous semble-t-il, est de tirer une leçon de cet état de choses. Que faut-il incriminer, et que faut-il faire pour obtenir des images meilleures, conformes à la théorie ? La méthode de soustraction n'est pas en cause : BELVAUX et SAGET [130] en ont tiré des clichés excellents et la figure 78 permet d'en vérifier le bon fonctionnement. De même, la méthode pour la déconvolution approchée à l'aide de deux convolutions incohérentes n'est pas à incriminer, puisque les résultats du chapitre précédent sont, sinon parfaits, du moins satisfaisants. Ce n'est que lorsque les difficultés de la soustraction optique s'ajoutent à celles de la convolution que les résultats laissent à désirer. Pour savoir pourquoi, il nous semble utile de récapituler les difficultés mentionnées en un tableau :

Difficultés liées au traitement avec convolutions incohérentes.	Difficultés liées uniquement à la soustraction optique.
<ul style="list-style-type: none"> - Choix difficile entre hologrammes diffus et non diffus : aberrations, rendement, qualité de la synthèse de H_+ et H_-. - Défaut tomographique. - Grande importance du centrage très précis de I_+ et I_-. 	<ul style="list-style-type: none"> - Détection quadratique. - Efficacité de la soustraction très faible - Grande influence de la précision sur l'efficacité des hologrammes de H_+ et H_-. - Bruit objectif percussionnel. - Bruit objectif de granularité.

Tableau 5 : Résumé des causes d'erreurs

On peut tirer de ce tableau des enseignements fructueux, et nous les exposons en conclusion de cette partie expérimentale, dans le chapitre qui suit.

CHAPITRE V - CONCLUSION DE LA TROISIEME PARTIE, PERSPECTIVES.

I - RESUME

La partie expérimentale de ce travail nous a amenés à préciser une série de caractéristiques du nouvel outil dont nous avons essayé d'enrichir l'arsenal du traitement d'images. Les difficultés qui, finalement, ont empêché que cet outil soit vraiment utile ne doivent pas nous décourager. En effet, certaines études décrites dans ces derniers chapitres dépassent le cadre de l'expérience proposée : c'est en particulier le cas pour nos considérations sur le bruit et le pseudo-filtrage de Wiener avec la détermination des différents paramètres du traitement, ainsi que pour la contribution apportée à la théorie et à la pratique de l'holographie synthétique. Mais de plus, l'examen des difficultés expérimentales récapitulées dans le tableau 5 permet de formuler des propositions pour une nouvelle méthode de déconvolution incohérente évitant les écueils rencontrés par la précédente. Des progrès technologiques récents y seront mis à profit : il s'agit en particulier des réseaux linéaires de photodiodes et des mémoires digitales de grande capacité adaptées au stockage des images.

II - SUGGESTIONS POUR UNE NOUVELLE METHODE

L'expérience dont le principe va être décrit a le même but que son aînée : il s'agit d'effectuer une correction d'images par déconvolution approchée à l'aide d'hologrammes synthétiques. Le désir d'éviter les bruits pupillaire et objectif de phase nous conduit à maintenir l'éclairage spatialement incohérent. La nécessité d'une soustraction en est la conséquence directe et inévitable, et la question de l'utilité d'une telle méthode se pose dès lors en ces termes : la difficulté de soustraire avec précision deux éclairagements ne différant que de quelques centièmes est le prix qu'il faut payer pour s'affranchir du bruit cohérent : ce prix est-il raisonnable ou excessif ?

Tout d'abord, il nous semble maintenant clair que les méthodes optiques de soustraction sont à proscrire en pareil cas, parce qu'elles se terminent par une détection quadratique. Nous utiliserons donc une soustraction électronique.

Les inconvénients des soustractions électroniques que nous avons soulignés étaient les suivants : la nécessité d'un balayage bidimensionnel de l'image traitée, fort long si l'on veut profiter du grand nombre de points potentiel de la convolution optique, et la difficulté de la restitution. L'utilisation d'une barrette de photodiodes permet de transformer le balayage mécanique bidimensionnel en balayage unidimensionnel. Par exemple, une barrette de 1700 photodiodes, disponible dans le commerce, permettrait de traiter un nombre de points déjà respectable. Quant à la restitution, elle serait facilitée par l'arrivée récente sur le marché de tubes à rayons cathodiques à haute résolution dotés d'une mémoire d'images ; 1024 x 1024 points d'image codés sur un octet est un ordre de grandeur des meilleures performances actuelles, dont on peut espérer qu'elles seront encore dépassées dans un avenir très proche et pour des prix non prohibitifs.

Reprenons donc notre montage de convolution incohérente et plaçons dans l'ordre 1 diffracté par l'hologramme de traitement une barrette de photodiodes perpendiculaire à la direction Ox de diffraction de l'hologramme. L'image à traiter placée dans le plan objet sera translatée parallèlement à Ox pour balayer l'image traitée devant la barrette de photodiodes. Le caractère rectiligne de la barrette a une conséquence très favorable : à chaque instant, seule une bande de l'objet parallèle à Oy et de largeur égale à celle de la réponse percussionnelle de traitement $H(\vec{r})$ a une influence sur l'éclairement de la barrette. Il est donc inutile d'éclairer le reste de l'objet. Dès lors, le problème du chevauchement des ordres de l'hologramme devient beaucoup moins critique, ce qui entraîne trois avantages :

- a) L'hétérodynage n'est plus nécessaire : il suffira de réaliser des hologrammes synthétiques de traitement en ménageant autour de la réponse percussionnelle $H(\vec{r})$ une bande noire de largeur égale à celle de $H(\vec{r})$ pour éviter tout chevauchement. La méthode décrite par Bartelt et al. [28] pour écarter les ordres des hologrammes synthétiques pourra par exemple être utilisée à cette fin. Le chevauchement des ordres suivant Oy des hologrammes synthétiques pourra être évité par l'utilisation d'hologrammes à franges au lieu d'hologrammes à échantillonnage bidimensionnel (voir chapitre II, §1.1). La procédure est ainsi simplifiée par la suppression de l'enregistrement des hologrammes hétérodynes.
- b) La question irritante des hologrammes diffus ou non diffus disparaît du même coup.
- c) Les aberrations holographiques sont pratiquement supprimées par la réduction de l'angle entre onde porteuse et onde objet.

Nous arrivons ainsi au schéma de principe de la figure 91.

En principe, l'utilisation d'une mémoire-image permet de réaliser la soustraction par deux convolutions successives, comme nous l'avons fait jusqu'à présent. Toutefois, le réglage très délicat du centrage relatif des deux images

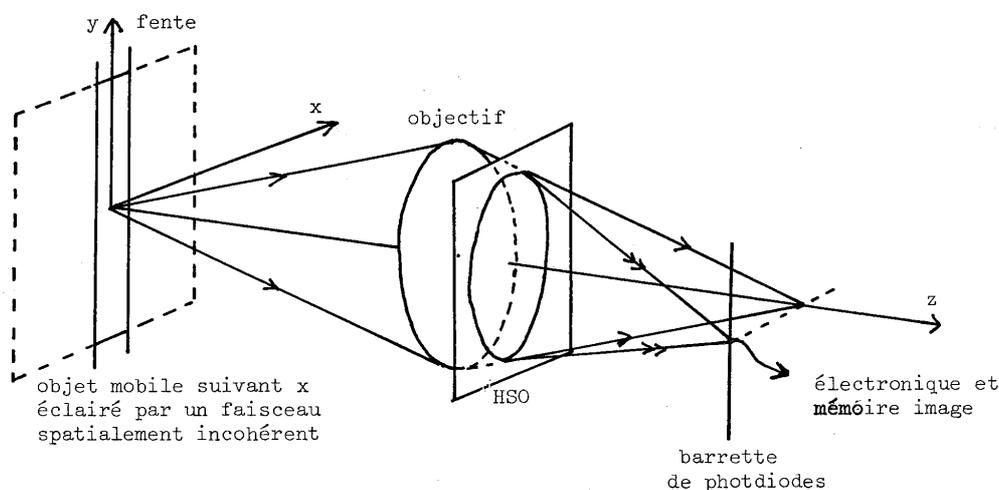


Figure 91. Schéma d'une expérience utilisant une barrette de photodiodes pour pallier les défauts analysés et pour simplifier la procédure expérimentale.

à soustraire serait grandement facilité par un procédé "en temps réel", ou du moins rapide, alors que jusqu'à présent, il était nécessaire de développer un film pour vérifier le centrage ! Il est donc sage de prévoir un système à deux voies : les images I_+ et I_- seront formées simultanément par deux canaux correspondant chacun au schéma de la figure 91. La polarisation, une modulation temporelle ou tout simplement une séparation spatiale permettra de distinguer les deux images. La correction d'une erreur "tomographique" ou d'une erreur sur l'efficacité de diffraction d'un des deux hologrammes sera également facilitée par cette mesure.

Un retour sur le tableau 5 permet de constater que tous les défauts dénoncés dans l'ancienne méthode seront, au moins en partie, corrigés dans la nouvelle. Probablement, de nouvelles difficultés apparaîtront. Mais un pas aura été franchi, et l'ensemble de la procédure, jusqu'à présent fort lourd, aura été considérablement simplifié. On remarque en particulier la suppression de trois des cinq étapes photographiques : il ne reste que la synthèse des deux hologrammes synthétiques. De plus, le fonctionnement "en temps réel" est un avantage important.

L'utilisation de la barrette de photodiodes permet en outre de faire quelques traitements ponctuels simples non linéaires ou non invariants par translation sur le résultat de la convolution optique. En anticipant sur le développement technologique, on peut par ailleurs rêver à la réalisation d'hologrammes synthétiques sur un matériau adressé en temps réel par un

petit ordinateur : le traitement optique lui-même pourrait alors être linéaire mais non invariant par translation, et on gagnerait encore en commodité.

III - DOMAINE D'APPLICATION DE LA METHODE

Ainsi corrigée, la méthode proposée pourra-t-elle être une méthode universelle de traitement d'images par convolution ? Certainement pas : nous avons déjà insisté dans la première partie sur les caractéristiques des méthodes optiques : possibilité d'effectuer rapidement des convolutions à grand nombre de points, mais faible souplesse. En l'occurrence, la nécessité de synthétiser les hologrammes de filtrage empêche de modifier rapidement les paramètres du traitement, dans l'état actuel des techniques. Autrement dit, notre méthode n'est pas à recommander à des spécialistes du traitement d'images à la recherche de nouveaux raffinements, par exemple dans l'étude du filtrage optimal. Par contre, elle est parfaitement adaptée aux applications systématiques et productibles, exigeant de nombreux traitements à l'aide du même filtre ou d'une série restreinte de filtres. Le traitement est alors rapide, il utilise toujours les mêmes hologrammes ; le fonctionnement de l'expérience est peu onéreux une fois l'appareillage en place. Un exemple d'application qui semble bien adapté est le traitement de clichés de microscopie électronique à haute résolution, pour la correction partielle de l'aberration sphérique et du défaut de mise au point associé. D'autres cas intéressants peuvent être envisagés dans le cadre du traitement de clichés astronomiques.

Notre expérience modifiée est devenue une méthode hybride, et profite à la fois des avantages du traitement optique analogique et de l'informatique. Les spécialistes d'informatique n'auraient-ils pas avantage à abandonner eux aussi leur isolement pour se tourner vers les méthodes analogiques quand elles sont préférables ? C'est en tout cas une des conclusions qu'a tirées W.K. PRATT, éminent spécialiste du traitement d'images digital, d'un récent séjour dans notre laboratoire.

CONCLUSION GENERALE

Qu'est-ce qu'une bonne image, demandions nous au début de ce mémoire ? Si nous n'avons pas précisément apporté de réponse à cette question, nous espérons avoir contribué à forger et à maîtriser les instruments qui permettront d'ouvrir la voie qui mène à cette réponse.

La supériorité de l'éclairage incohérent quant au bruit optique a été établie par un raisonnement circonstancié. En particulier, rien n'autorise plus à hésiter entre l'éclairage cohérent et l'éclairage incohérent pour effectuer une convolution entre fonctions réelles non négatives. Différents apports au codage de l'amplitude complexe dans les hologrammes synthétisés par ordinateur, à la réalisation pratique et aux applications de ces hologrammes ont été introduits. La mise en oeuvre du pseudo-filtrage de Wiener a été discutée en détail. Les essais expérimentaux ont conduit à l'analyse des contraintes propres aux méthodes incohérentes.

Toutefois, aucun de ces sujets n'est épuisé, et l'intérêt croissant dont bénéficie le traitement d'images dans tous les domaines scientifiques nous engage à penser à leurs prolongements. En concluant les chapitres consacrés au bruit et aux hologrammes synthétiques, nous avons évoqué plusieurs voies dans lesquelles il nous semblerait utiles de s'engager. Citons aussi l'intérêt de l'étude des propriétés statistiques du plus important support d'images, l'émulsion photographique, notamment par le procédé élaboré par JOYEUX {2,3}.

Mais pour poursuivre l'étude des moyens et surtout des buts du traitement d'images, nous trouvons recommandable de mettre à profit la souplesse du traitement digital. En particulier, pour essayer de battre en brèche l'empirisme qui règne dans le choix des méthodes de traitement d'images, tel que l'a décrit et souligné PRATT {7}, il serait bon de tenter de définir une estimation de l'amélioration apportée à une image par un traitement. Cette information serait d'un intérêt capital pour l'utilisateur. Il est certain que sa définition

ne peut être universelle : elle doit dépendre du but recherché dans le traitement. De plus, les images traitées sont le plus souvent destinées à être observées par un être humain : l'optique physiologique doit indiscutablement intervenir dans de telles recherches [88]. En tout état de cause, un grand nombre de tests dans des conditions variées, mais pas nécessairement avec un grand nombre de points, est nécessaire : l'ordinateur est donc tout désigné pour cette étude.

Est-ce à dire que nous préconisons l'abandon des méthodes analogiques ? La proposition de nouvelle expérience de déconvolution, hybride (optique incohérente et électronique digitale) qui clôt notre troisième partie prouve le contraire. Nous affirmons que pour tout traitement d'images répétitif et bien défini, les méthodes optiques ont encore un rôle de premier plan à jouer.

REFERENCES

1. T.S. HUANG, Editeur, Picture processing and digital filtering (SPRINGER, Berlin, 1975) Topics in Applied Physics, volume 6.
2. D. JOYEUX, Thèse de Doctorat d'Etat, ORSAY(1977) .
3. D. JOYEUX, Opt. Commun. 28, 15 (1979).
4. F. HURTER et V.C. DRIFFIELD, "Photo-chemical investigations and a new method of determination of the sensitiveness of photographic plates", J. Soc. Chem. Ind. 9 (1890) 455-469 .
5. Numéro spécial, "Digital picture processing", Proc. I.E.E.E. 60 (1972) .
6. B.R. HUNT, "Digital image processing", Proc. I.E.E.E. 63 (1975) 693-708.
7. W.K. PRATT, Digital image processing (WILEY, New-York, 1978) .
8. H. DELOUIS, Thèse de Doctorat d'Etat, ORSAY (1973) .
9. E. ABBE, Archiv. f. mikroskopische Anat. 9 (1873) 413 .
10. L. FOUCAULT, Etude optique des surfaces (ARMAND COLIN, Paris, 1858) .
11. M. DUFFIEUX, L'intégrale de Fourier et son application à l'optique, (chez l'auteur , Besançon , 1946) .
12. A. MARECHAL et P. CROCE, C.R. Acad. Sc. 237 (1953) 607-609 .
13. E. O'NEILL, I.R.E. Trans. Inform. Theory IT2 (1956) 56 .
14. D. GABOR, Nature 161 (1948) 777 .
15. E.N. LEITH et J. UPATNIEKS, J. Opt. Soc. Am. 52 (1962) 1123 .
16. A. MARECHAL et M. FRANCON, Diffraction, structure des images (2ème tirage, MASSON , Paris, 1970) .
17. J. DUVERNOY, Thèse de Doctorat d'Etat, BESANCON (1973) .
18. J.Y. BAURES, Thèse de Docteur-Ingénieur , BESANCON (1977) .
19. H. KATO et J.W. GOODMAN, "Nonlinear filtering in coherent optical systems through halftone screen processes", Appl. Opt. 14 (1975) 1813-1824 .
20. O. BRYNGDAHL, "Optical map transformations", Opt. Commun. 10 (1974) 164-168.
21. W.T. RHODES, "New approach to optical processing of one-dimensional signals", J. Opt. Soc. Am. 64 (1974) 545 .
22. J. TSUJIUCHI, "Restitution des images aberrantes par filtrage des fréquences spatiales", Opt. Acta 7 (1960) 243-261 et 385-398.
23. A.B. VANDER LUGT, I.E.E.E. Trans. Inform. Theory IT10 (1964) 139-145 .

24. G.W. STROKE, "Image deblurring and aperture synthesis using a posteriori processing by Fourier-transform holography", *Opt. Acta* 16 (1969) 401-422.
25. G.W. STROKE et M. HALIOUA, *Optik* 35 (1972) 50-65, 36 (1972) 1-20, 37 192-203 et 37 (1973) 249-264 .
26. S. LOWENTHAL et P. CHAVEL, "Réduction of the number of samples in computer holograms for image processing", *Appl. Opt.* 13 (1974) 718-720 .
27. W.H. LEE et M.O. GREER, "Matched filter optical processor", *Appl. Opt.* 13 (1974) 925-930 .
28. H. BARTELT, W.J. DALLAS et A.W. LOHMANN, "Computer-generated spatial filters for large object formats", *Opt. Commun.* 20 (1977) 50-55 .
29. Y. BELVAUX, Thèse de Doctorat d'Etat, ORSAY (1973) .
30. A. SCHUSTER, *Terr. Mag.* 3 (1898) 13-41 .
31. F.E. YVES, "Lectures on photo-process work", *Lond. Tech. Ed. Gaz* 5 (1899) 2-17 .
32. G.L. ROGERS, "Non-coherent optical processing", *Opt. Las. Technol.* 7 (1975) 153-162 .
33. M.A. MONAHAN, K. BROMLEY et R. BOCKER, "Incoherent optical correlators", *Proc. I.E.E.E.* 65 (1977) 121-129 .
34. G.L. ROGERS, Non-coherent optical processing (WILEY, New-York, 1977) .
35. N.O. YOUNG, *Sky Telesc.* 25 (1963) 8 .
36. H.H. BARRETT et F.A. HERRIGAN, "Fresnel-zone plate imaging of gamma rays ; theory", *Appl. Opt.* 12 (1973) 2686-2702 .
37. J. BRAAT, Thèse de Docteur-Ingénieur, ORSAY (1972) .
38. J.F. EBERSOLE, "Optical image subtraction", *Opt. Engineering* 14 (1975) 436-447 .
39. J. DUVERNOY, "Optical pattern recognition and clustering ; Karhunen-Loeve analysis", *Appl. Opt.* 15 (1976) 1585-1590 .
40. L. CUTRONA, E.N. LEITH, L.J. PORCELLO et W.E. VIVIAN, *Proc. I.E.E.E.* 54 (1966) 1026 .
41. Numéro spécial, "coherent adaptive techniques", *J. Opt. Soc. Am.* 67 (1977).
42. W.A. SWINDELL, "Noncoherent optical analog image processor", *Appl. Opt.* 9 (1970) 2459-2469.
43. R.V. SHACK, "Image processing by an optical analog device", *Pattern Recog.* 2 (1970) 123-126 .
44. K.E. ELSSNER et G. SCHULTZ, "Eine inkohärente Methode aktiver optischer Übertragung", *Opt. Acta* 19 (1972) 243-246 .
45. T. HONDA, K. KUMAGAYA et J. TSUJIUCHI, "Restoration of defocused pictures by image-scanning method", *Opt. Acta* 24 (1977) 23-34 .

46. A. ROUSSEL, Thèse de Docteur-Ingénieur, ORSAY (1975) .
47. W. SCHNEIDER, H. van der PIEPEN et W. FINK, "Opto-electronic spatial high-pass filtering", Opt. Acta 22 (1975) 719-724 .
48. G. HAEUSLER, "A method to increase the depth of focus by two-step image processing", Opt. Commun. 6 (1972) 38-42 .
49. G. HAEUSLER et A. W. LOHMANN, dans Applications of holography and optical data processing (E. MAROM, A.A. FRIESER et E. WIENER-AVNEAR, PERGAMON PRESS Oxford, 1977) 9-18 .
50. A.W. LOHMANN et W. T. RHODES, "Two-pupil synthesis of optical transfer functions", Appl. Opt. 17 (1978) 1141-1151 .
51. D. KERMISCH, "Partially coherent image processing by laser scanning", J. Opt. Soc. Am. 65 (1975) 887-891 .
52. A.W. LOHMANN, "Several optical correlators", International Optical Computing Conference, Washington (1975) , I.E.E.E. catalog no. 75 CH 0941 5C, pp. 142-144 .
53. K. SAYANAGI, "Filtre du bruit de phase et son effet sur l'image tramée", Sc. Ind. Phot. 30 (1959), 172-175 .
54. R.A. GONSALVES et P.S. CONSIDINE, "Spot shaping and incoherent optical smoothing for raster scanned imagery", Opt. Engin. 15 (1976) 64-67 .
55. J.D. ARMITAGE and A.W. LOHMANN, "Character recognition by incoherent spatial filtering", Appl. Opt. 4 (1965) 461-467 .
56. M.J. FAIVRE, Rapport de stage de D.E.A., ORSAY (1975) .
57. M. LASSERRE et R.W. SMITH, "Incoherent image processing using slit-shaped apertures", Opt. Commun. 12 (1974) 260-265 .
58. D. GÖRLITZ et F. LANZL, "Methods of zero-order non-coherent filtering", Opt. Commun. 20 (1977) 68-72 .
59. W.T. RHODES, "Bipolar pointspread function synthesis by phase switching", Appl. Opt. 16 (1977) 265-267 .
60. S. LOWENTHAL et A. WERTS, "Filtrage des fréquences spatiales en lumière incohérente à l'aide d'hologrammes", C.R. Acad. Sc. 266B (1968) 542-545 .
61. A.W. LOHMANN, "Matched filtering with self-luminous objects", Appl. Opt. 7 (1968) 561-563 .
62. A.W. LOHMANN et H.W. WERLICH, "Incoherent matched filtering with Fourier holograms", Appl. Opt. 10 (1971) 670-672 .
63. P. BARLAI, "Integraltransformationen im inkohärenten Licht : Abbildung eines Bildmusters durch ein Hologram", IITB-Mitteilungen (1970) 8-10 .
64. A. DICKINSON, "Optical filtering with incoherent light", Opt. technol. (1969) 99-100 .

65. W.T. MALONEY, "Lensless holographic recognition of spatially incoherent patterns in real time", Appl. Opt. 10 (1971) 2127-2131 .
66. A. MACOVSKI, "Use of frequency offset in incoherent optical data processing", Appl. Opt. 12 (1973) 1745-1747 .
67. S. LOWENTHAL, A. WERTS et M. REMBAULT, "Formation de réseaux d'images à l'aide d'un hologramme multiplicateur éclairé en lumière spatialement incohérente", C.R. Acad. Sc. 267B (1968) 120-123 .
68. S. LOWENTHAL, "Les possibilités du filtrage des fréquences spatiales", rapport D.G.R.S.T. (1968) .
69. G. GROH, "Optical multiplex system for pattern recognition utilizing point holograms", Opt. Commun. 1 (1970) 454-456 .
70. B. BRAUNECKER et R. HAUCK, "Grey level on axis computer holograms for incoherent image processing", Opt. Commun. 20 (1977) 234-238 .
71. A.W. LOHMANN, "Incoherent optical processing of complex data", Appl. Opt. 16 (1977) 261-263 .
72. W. STONER, "Edge enhancement with incoherent optics", Appl. Opt. 16 (1977) 1451-1453 .
73. W. STONER, "Incoherent optical processing via spatially offset pupil masks", Appl. Opt. 17 (1978) 2454-2467 .
74. A.W. LOHMANN, compte-rendu du Congrès "Applications of holography and optical data processing", dans Appl. Opt. 16 (1977) 2 .
75. A. BLANC-LAPIERRE et P. DUMONTET, "la notion de cohérence en optique", Rev. Opt. 34 (1955) 1-21.
76. C.E. THOMAS, "Coherent optical noise suppression", Appl. Opt. 7 (1968) 517-522 .
77. G.J. GREBOWSKY, R.L. HERMAN, H.B. PAUL et A.L. SHULMAN, "Elimination of coherent noise in a coherent imaging system", Appl. Opt. 10 (1971) 438-439 .
78. D.J. CRONIN et A.E. SMITH, Opt. Eng. 12 (1973) 50 .
79. J. SANTAMARIA, P.T. GOUGH et D.W. WARREN, "Noise-free contrast improvement with a low frequency polarizing filter : a practical evaluation", Appl. Opt. 16 (1977) 1513-1520 .
80. N. BROUSSEAU et H. ARSENAULT, "Les effets causés par les dimensions de la source dans les systèmes optiques éclairés en lumière spatialement incohérente", Opt. Commun. 15 (1975) 389-391 .
81. P. VERNIER, Thèse de Doctorat d'Etat, PARIS (1958) .
82. J.C. DAINTY et R. SHAW, Image science (ACADEMIC PRESS, London, 1974) .
83. R.E. SWING, "Conditions for microdensitometer linearity", J. Opt. Soc. Am. 62 (1972) 199-207 .

84. R.E. KINZLY, "Partially coherent imaging in a microdensitometer", J. Opt. Soc. Am. 62 (1972) 386-394 .
85. J.W. GOODMAN, "Dependance of image speckle contrast on surface roughness", Opt. Commun. 14 (1975) 324-327 .
86. T.S. McKECHNIE, "Measurement of some second-order statistical properties of speckle", Optik 39 (1974) 258-267 .
87. J. OHTSUBO et T. ASAKURA, "Statistical properties of laser speckle produced in the diffraction field", Appl. Opt. 16 (1977) 1442-1453 .
88. W.A. PEARLMAN, "A visual model and a new distorsion measure in the context of image processing", J. Opt. Soc. Am. 68 (1978) 374-386 .
89. P. MARTHON, Thèse de Docteur-Ingénieur, TOULOUSE (1978) .
90. C.W. HELSTROM, "Image restoration by the method of least squares", J. Opt. Soc. Am. 57 (1967) 297-303 .
91. J. BRUNOL et J. FONROGET, "Bruit multiplex en gammagraphie par codage", Opt. Commun. 22 (1977) 301-306 .
92. J. BRUNOL, J. FONROGET et S. LOWENTHAL, "Déconvolution analogique en imagerie par ouverture codée appliquée à la médecine nucléaire", Opt. Acta 25 (1978) 113-124 .
93. P. PICINBONO et M. SAVELLI, "Mesures sur le bruit de fond en optique", Optica Acta 2 (1955) 106-107 .
94. M. ABRAMOWITZ et I. STEGUN, Handbook of mathematical functions (DOVER, NEW-YORK, 1965) .
95. A.M. SCHNEIDERMAN et D.P. KARO, "Measurement of r_0 with speckle interferometry", J. Opt. Soc. Am. 68 (1978) 348-352 .
96. A. KOZMA et D.L. KELLY, Appl. Opt. 4 (1965) 387 .
97. G.L. ROGERS, Proc. Roy. Soc. Edinburgh 63A (1949-1952) 313 .
98. W.H. LEE, "Binary synthetic holograms", Appl. Opt. 13 (1974) 1677-1682 .
99. A.J. McGOVERN et J.C. WYANT, "Computer generated holograms for testing optical elements", Appl. Opt. 10 (1971) 619-624 .
100. R. MERCIER, "Holographic testing of aspherical surfaces", first european Conference on Optics applied to metrology , Strasbourg , 26-28 octobre 1977 , Proc: SPIE 136 (1977) 208-214 .
101. O. BRYNGDAHL et W.H. LEE, "Laser beam scanning using computer-generated holograms", Appl. Opt. 15 (1976) 186-194 .
102. W.H. LEE, "Holographic grating scanners with aberration corrections", Appl. Opt. 16 (1977) 1392-1399 .
103. A. LEGARCON, Thèse de Docteur-Ingénieur, ORSAY (1978) .
104. A. LEGARCON et P. CHAVEL, "Le facteur de qualité N/τ dans les déflecteurs de faisceaux laser : comparaison entre déflecteurs holographiques et acousto-optiques", Opt. Commun. 25 (1978) 151-156 .

105. A.W. LOHMANN et D.P. PARIS, "Binary Fraunhofer holograms, generated by computer", Appl. Opt. 6 (1967) 1739-1748 .
106. B.R. BROWN et A.W. LOHMANN, "Complex spatial filtering with binary masks", Appl. Opt. 5 (1966) 967-969 .
107. H.O. BARTELT et K.M. FÖRSTER, "Computer generated holograms with reduced phase errors", Opt. Commun. 26 (1978) 12-16 .
108. B.R. BROWN et A.W. LOHMANN, "Computer-generated binary holograms", I.B.M. J. Res. Dev. 13 (1969) 160-168 .
109. J. FLEURET, "Calcul d'hologrammes à niveaux continus de gris : application à la synthèse d'une mémoire", Nouv. Rev. Opt. 5 (1974) 219-230 .
110. L.P. YAROSLAVSKI et N.S. MERZLIAKOFF, "Méthodes de l'holographie numérique", (NAUKA, Moscou, 1977) en russe .
111. J.W. GOODMAN et A. SILVESTRI, "Some effects of Fourier-domain phase quantization", I.B.M. J. Res. Dev. 14 (1969) 478 .
112. W.J. DALLAS, "Phase quantization - a compact derivation", Appl. Opt. 10 (1971) 673 .
113. R.A. GABEL et B. LIU, "Minimization of reconstruction errors with computer-generated binary holograms", Appl. Opt. 9 (1970) 1180-1191 .
114. N.C. GALLAGHER, "Optimum quantization in digital holography", Appl. Opt. 17 (1978) 109-116.
115. A. BRUEL et J.C. CAZAUX, Thèse de Doctorat d'Etat, TOULOUSE (1974) .
116. W.J. DALLAS, "Phase quantization in holograms - a few illustrations", Appl. Opt. 10 (1971) 674-676 .
117. R.S. POWERS et J.W. GOODMAN, "Error rates in computer generated holographic memories", Appl. Opt. 14 (1975) 1690-1701 .
118. Y. BELVAUX et S.P.S. VIRDI, "A method for obtaining a uniform non-gaussian laser illumination", Opt. Commun. 15 (1975) 193-195 .
119. T.W. BARNARD, "Binary imagery and its application to beam shaping", Appl. Opt. 10 (1971) 2274-2278 .
120. S.P.S. VIRDI, Thèse de Docteur-Ingénieur, ORSAY (1977) .
121. Brevet français numéro 77.04680, aux noms de Y. BELVAUX, S. LOWENTHAL et P. CHAVEL (1977) .
122. G. ROOSEN et B. de SAINT-LOUVENT, "The TEM₀₁ mode laser beam : a powerful tool for optical levitation of various types of spheres", actes du congrès ICO 11, MADRID (10-17 sept. 1978), p. 96 .
123. N.C. GALLAGHER et B. LIU, "Method for computing kinoforms that reduces image-reconstruction error", Appl. Opt. 12 (1973) 2328-2335 .
124. B. LIU et N.C. GALLAGHER, "Convergence of a spectrum shaping algorithm", Appl. Opt. 13 (1974) 2470-2471 .

125. H. AKAHORI, "Comparison of deterministic phase coding with random phase coding in terms of dynamic range", *Appl. Opt.* 12 (1973) 2336-2343.
126. S. LOWENTHAL et D. JOYEUX, "Speckle removal by a slowly moving diffuser associated with a motionless diffuser", *J. Opt. Soc. Am.* 61 (1971) 847-851.
127. J. BRAAT et S. LOWENTHAL, "Short-exposure spatially incoherent holography with a plane-wave illumination", *J. Opt. Soc. Am.* 63 (1973) 388-390.
128. R.W. MEIER, "Magnification and third-order aberrations in holography", *J. Opt. Soc. Am.* 55 (1965) 987-992.
129. J. BRUNOL, N. de BEAUCCOUDREY, J. FONROGET et S. LOWENTHAL, "Imagerie tri-dimensionnelle en gammagraphie", *Opt. Commun.* 25 (1978) 163-168.
130. Y. BELVAUX et J.C. SAGET, "Dispositif de soustraction de luminances utilisant un prisme de Savart", *Nouv. Rev. Opt.* 7 (1976) 33-39.
131. K.S. PENNINGTON, P.M. WILL et G.L. SHELTON, "Grid coding : a technique for extraction of differences from scenes", *Opt. Commun.* 2 (1970) 113.
132. M. FRANÇON et S. MALLICK, Polarization interferometers (WILEY, Londres, 1972).
133. M. BORN et E. WOLF, Principles of Optics (2nd Edition, Pergamon Press, New-York, 1964).

ERRATUM

- . Equation (6) : remplacer π par $1/2$.
- . Equation (8b) : lire 2π au lieu de 2π .

Fourier Transformation of Rotationally Invariant Two-Variable Functions: Computer Implementation of Hankel Transform

J. BRUNOL AND P. CHAVEL

Abstract—Computing the Fourier transform of a circularly symmetric function is often necessary in optics. Use of the 2-D FFT algorithm leads to loss of the symmetry because of the sampling and to a waste in storage requirements; to avoid these inconveniences, a 1-D algorithm is described using the Hankel transform of the section of the function.

INTRODUCTION

The computation of Fourier transforms has been considerably simplified by the introduction of the fast-Fourier-transform (FFT) [1]. As is well known, the FFT allows computation of N samples of the Fourier transform of a function sampled at N points using a number of elementary operations (addition and multiplication) of the order of $N \log_2 N$ instead of N^2 . Every important computer center is, nowadays, equipped with powerful FFT algorithms for functions of 1, 2, or 3 variables. However, the FFT is not well suited for functions having certain kinds of symmetry. This letter is concerned with the computation of the Fourier transform of a function $f(x, y)$ invariant by rotation around the center of the coordinates, such as

$$f(x, y) = g(r), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1)$$

For such a function, the use of the 2-D FFT algorithm implies loss of the circular symmetry through square sampling and excessive use of computer memory because the 2-D sampling does not take into account the *a priori* knowledge of the symmetry of the function. It is possible to compute the Fourier transform $\tilde{f}(\mu, \nu)$ of $f(x, y)$ using the Hankel transform [2]; this Hankel transform algorithm can be of great use in many problems of physics, and mainly of optics, such as diffraction by circularly symmetric apertures [3], [4], gammagraphy [5], correction of circularly symmetric blurs of an image [6]. However, similar problems for three dimensional functions presenting spherical symmetry, such as high-energy diffraction by spherical particles, can be solved adequately using a 1-D FFT algorithm.

I. THEORY

Let $\rho = \sqrt{\mu^2 + \nu^2}$. We consider the case where $f(x, y)$ is known to be band-limited, so that

$$\tilde{f}(\mu, \nu) = 0 \quad \text{for } \rho > A. \quad (2)$$

It is easily seen that

$$\tilde{f}(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp [2i\pi(\mu x + \nu y)] dx dy \quad (3)$$

Manuscript received November 8, 1976.
The authors are with the Institut d'Optique, Bâtiment 503, Université de Paris-Sud, 91405 Orsay Cedex, France.

can be rewritten as

$$\tilde{f}(\mu, \nu) = 2\pi \int_0^{+\infty} g(r) J_0(2\pi r \rho) r dr \quad (4)$$

which is exactly the Hankel transform of $g(r)$; J_0 is the Bessel function of first kind and zero order.

Let λ_p be the zeroes of function $J_1(x)$, $x \geq 0$, $p = 0, 1, 2, 3, \dots, +\infty$. It is known from the work of Dossier [2], [7], [8] that the functions $J_0[\lambda_p(\rho/A)]$ are a complete set of orthogonal functions for the functions satisfying (2). Hence, $\tilde{f}(\mu, \nu)$ can be expanded on this basis as

$$\tilde{f}(\mu, \nu) = \sum_{p=0}^{+\infty} C_p J_0 \left(\lambda_p \frac{\rho}{A} \right). \quad (5)$$

The C_p 's are easily expressed using the property of reciprocity of the Hankel transform and that of normalization [9]

$$\int_0^A J_0 \left(\lambda_p \frac{\rho}{A} \right) \rho d\rho = \pi A^2 J_0^2(\lambda_p). \quad (6)$$

This leads to the following result

$$\tilde{f}(\mu, \nu) = \sum_{p=0}^{+\infty} g \left(\frac{\lambda_p}{2\pi A} \right) \frac{J_0[\lambda_p(\rho/A)]}{\pi A^2 J_0^2(\lambda_p)}. \quad (7)$$

If g decreases rapidly enough for large arguments (a sufficient condition is a decrease faster than $\rho^{-1/2}$), the evaluation of the sum in (7) is quick and precise by computer, as will be explained in the next section.

Let us note parenthetically that the Fourier transform of (7) is nothing but the expression of the sampling theorem for rotationally invariant functions [8].

II. THE ALGORITHM

The λ_p 's and the $J_0^2(\lambda_p)$'s are either stored on any support (card, tape, disk) or computed at the beginning of the program using a series expansion [9]. The function $\tilde{f}(\mu, \nu)$ is then computed at a given value of ρ using (7) truncated to P terms. The value of P is determined empirically (or theoretically if sufficient knowledge of a function g is at hand). Each of the P terms involves determination of $g(\lambda_p/2\pi A)$ and of $J_0[\lambda_p(\rho/A)]$, the latter by a series expansion.

It should be pointed out that the nonuniform sampling of the function g makes our algorithm convenient for analytically known functions, but not so for experimental results, because of the possible difficulty of taking nonequidistant measurements. On the other hand, the position of the samples of f as well as the number of these samples can be arbitrarily chosen, which is not the case in the FFT.

III. PERFORMANCES, COMPARISON WITH THE FFT

The latter algorithm will now be compared with the FFT in terms of computation time, storage requirements, and precision.

The computation time is determined by the number of elementary operations necessary. The determination of $J_0[\lambda_p(\rho/A)]$ by series expansion requires n elementary operations (n is of the order of 20 and depends on the precision required). Hence, one value of \tilde{f} is determined by approximately $(n + 3)P$ elementary operations and if, for example, P samples of f are desired, $(n + 3)P^2$ operations give the entire function \tilde{f} .

The same result can be obtained by a 2-D Fourier transform. An ordinary FFT algorithm requires in that case $N = 2P \times 2P$ samples, and hence approximately $4P^2 \log_2(4P^2)$ elementary operations. An optimized FFT algorithm can take into account the parity of function f with respect to both x and y , so as to suppress the factor 4. Hence, the computation times are in the ratio of $(n + 3)$ to $\log_2(4P^2)$, i.e. roughly of the same order.

For the storage requirements, the Hankel algorithm requires only P samples of the function g to be stored, whereas the FFT needs $4P^2$ (or at least P^2) samples of f . This is the main advantage of the proposed method, which makes it applicable either on a smaller computer than the FFT for a given P , or with a much larger P than the FFT on the same computer.

As regards the precision, the Hankel algorithm should be approximately as precise as the FFT for given P , because the number of elementary operations are of the same order. However, the errors are not

A method of incoherent optical-image processing using synthetic holograms*

P. Chavel and S. Lowenthal

Institut d'Optique, Université de Paris-Sud, Bâtiment 503, 91405 Orsay - France

(Received 30 July 1975)

Under coherent illumination, the interference between signal and noise produces an amplification of the noise. That is why image processing by optical methods may be done better with incoherent light than with coherent light. A method is described where image deblurring is performed in spatially incoherent illumination. The two main features are an additional step of illuminance subtraction to simulate negative intensities, and the use of computer-generated holograms of a low number of cells.

INTRODUCTION

Several efforts have been made over the recent years in developing the possibilities of image processing.

In the field of digital processing, good results have been reported^{1,2}; they are of particular interest in the cases where *a priori* knowledge is taken into account, allowing super-resolution,³⁻⁵ or when nonlinear transformations are involved, which, however, are difficult to realize through optical processing. Nevertheless, computer processing of blurred images becomes difficult as soon as the number of points, or more precisely the space-bandwidth-time product in the image increases. For ordinary two-dimensional images, digital processing becomes lengthy and expensive, and requires large computer storage capacities; this is an important limitation to digital image processing in several fields of interest, such as astronomy and optical or electron microscopy.

A second kind of image processing is coherent optical spatial filtering, using holograms. These methods are usually easy to implement and inexpensive. They are becoming even more convenient with the development of computer-aided optical processing employing computer-generated holograms (CGH). However, in this case also the number of samples to be computed is affected by the above-mentioned difficulties regarding storage capacity and computing time. In addition, coherent optical image processing systems suffer from the well-known coherent noise and, obviously, removing a deterministic blur is of little interest if the processing adds a greater amount of stochastic blur to the final result.

Owing to these reasons, there is a need in the field of image processing for some inexpensive methods which would lead to a satisfactory signal-to-noise ratio. This could partly be fulfilled by the development of incoherent optical image processing.

The first section of this paper deals with the reduction of noise which can be expected from incoherent systems, when compared with coherent ones. In the three other sections, we describe a possible method of incoherent processing and present some preliminary results.

In the method described, CGH are used but, as we shall show, they need only a limited number of samples, even if a large image is to be processed.

As we are mainly concerned with spatial incoherence and quasimonochromatic light, we shall always mean by "incoherent" in the following, unless otherwise

specified, what should more precisely be called spatially incoherent.

I. NOISE IN OPTICAL IMAGE PROCESSING SYSTEMS

The following is not a general theory on noise in image processing, but merely a brief review of some typical kinds of noise. In the case of coherent illumination, noise interferes with signal, and this interference results in a deterioration of the apparent quality of the image when compared to the incoherent case.

A general block diagram of an optical image processing experiment is shown in Fig. 1. In each of the three steps indicated here, viz., input, processing, and output, different kinds of noise are encountered. It will be useful to distinguish between input noise, optical setup noise, and output noise, although this classification is somewhat arbitrary.

A. Input noise

In an input image $A(\vec{r})$ to be processed, there is usually a certain amount of noise present, in the form of dust particles, phase defects, and mainly photographic grain noise. The purpose of the processing is to minimize the disturbing effect of some kind of blur introduced in a previous recording step, but the processing has to take the noise into account so as to obtain an optimal result. Under certain assumptions about the input noise, the best processing with respect to the blur and to the noise may be found using some convenient criteria. For example, least-squares Wiener filtering minimizes the quadratic error between the object and the processed image for a linear space-invariant blur $d(\vec{r})$ in the presence of a stationary additive Gaussian input.⁶ In this case, the filter function is given in the Fourier domain by

$$\tilde{h}(\mu, \nu) = \tilde{d}^*(\mu, \nu) / [|\tilde{d}(\mu, \nu)|^2 + \epsilon(\mu, \nu)], \quad (1)$$

where $\tilde{}$ denotes Fourier transformation, and $\epsilon(\mu, \nu)$ is the ratio between noise power and signal power at the spatial frequency (μ, ν) . Whether such a filter is adequate or not depends on the noise statistics and on the knowledge of the function $\epsilon(\mu, \nu)$.

However, it should be noted that the meaningful physical quantities are not the same under coherent and incoherent illumination. In the coherent case, the processed function $A_c(\vec{r})$ is an amplitude transmittance and the noise ratio $\epsilon_c(\mu, \nu)$ must take into account phase defects. In the incoherent case, the processed function $A_I(\vec{r})$ is an intensity transmittance and the noise ratio

$$A(\vec{r}) = O(\vec{r}) * d(\vec{r}) . \quad (3)$$

From $d(\vec{r})$, the filter function $\tilde{h}(\mu, \nu)$ can be computed. If we choose to perform a Wiener filtering, it is given by Eq. (1). The corresponding impulse response is its Fourier transform $h(\vec{r})$, and the desired output image $B(\vec{r})$ is given by

$$B(\vec{r}) = h(\vec{r}) * A(\vec{r}) = O(\vec{r}) * [d(\vec{r}) * h(\vec{r})] . \quad (4)$$

In the case of Wiener filtering, it is the best possible approximation of $O(\vec{r})$ with the amount of noise present, according to the least-squares criterion; after processing, the ideal object $O(\vec{r})$ is only modified by the overall impulse response $d(\vec{r}) * h(\vec{r})$. The block diagram of the processing is shown in Fig. 2. As can be seen, the convolution of the input image $A(\vec{r})$ by the processing impulse response $h(\vec{r})$ is made by two different incoherent convolutions, one by $h_+(\vec{r})$ and the other by $h_-(\vec{r})$. Both of these convolutions make use of one holographic filter obtained with the help of a computer.

Let us now make precise what the functions $h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$ are, and how they can be implemented as holographic filters.

B. Introducing negative values in an incoherent processing

Incoherent convolution allows only a real non-negative impulse response (impulse response in intensity), whereas $h(\vec{r})$, as obtained by Fourier transformation of Eq. (1), is almost never all positive. An intuitive approach suggests that by convolving $d(\vec{r})$ by a positive function, one can only broaden the blur instead of "processing" it. Therefore, to really obtain an impulse response $h(\vec{r})$, we will have to split it into any two functions $h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$, such that

$$\begin{cases} h(\vec{r}) = h_+(\vec{r}) - h_-(\vec{r}) , \\ h_+(\vec{r}) \geq 0 , \\ h_-(\vec{r}) \geq 0 . \end{cases} \quad (5)$$

The simplest way to do this is to take

$$\begin{cases} h_+(\vec{r}) = \begin{cases} h(\vec{r}) , & \text{if } h(\vec{r}) \geq 0 , \\ 0 , & \text{elsewhere ;} \end{cases} \\ h_-(\vec{r}) = \begin{cases} 0 , & \text{if } h(\vec{r}) \geq 0 , \\ -h(\vec{r}) , & \text{elsewhere .} \end{cases} \end{cases} \quad (6)$$

$h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$ being real non-negative functions, they can be the incoherent impulse responses of suitable filters, whose synthesis will be described as follows.

After two convolutions of $A(\vec{r})$ have been performed with $h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$, respectively, an illuminance subtraction is needed. This can be done either by electronic scanning of the two images, in real time or with

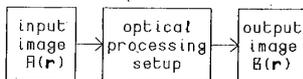


FIG. 2. Block diagram of the method.

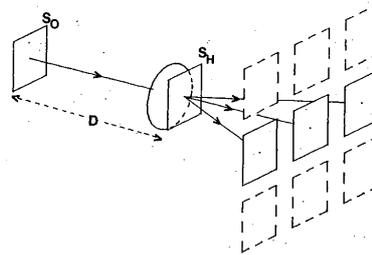


FIG. 3. Image processing using CGH; S_o = area of the object; S_H = area of the hologram; D = distance between object and pupil; the number of samples in the hologram must be at least $S_o S_H / \lambda^2 D^2$.

a memory, followed by subtraction of voltages and reconstruction on a CRT or plotter device, or by an optical "illuminance subtraction" method.¹⁴⁻¹⁸ The final result is

$$B(\vec{r}) = A(\vec{r}) * h_+(\vec{r}) - A(\vec{r}) * h_-(\vec{r}) = A(\vec{r}) * h(\vec{r}) . \quad (7)$$

We note that this final image may take negative values at some points, near straight edges for instance, but this should not occur often and can be neglected. From a practical point of view, these negative values can be set to zero if an electronic subtraction is performed, whereas they are squared as is the whole image Eq. (7) if an optical subtraction method is used.

C. Synthesis of the filter and the number of computed cells

Equation (6) gives the expression of the two filters. From Eq. (6), $h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$ are two analytically known functions. It is known that the synthesis of such functions is possible with accuracy with the help of a computer, the interface between digital electronics and optics being a computer-generated hologram (CGH). We must therefore synthesize two CGH's yielding as impulse responses intensities proportional to $h_+(\vec{r})$ and $h_-(\vec{r})$.

Let us briefly recall how the number of samples of these holograms can be made small even if a large image is to be processed.^{19,20} A hologram, used in image processing, can be thought of as a diffraction grating in the pupil plane of an optical imaging system, whose first diffraction order has been shaped adequately so as to give the desired impulse response. Each diffracted order of the grating produces its own image of the input plane; the number of lines of the grating must be high enough to avoid overlapping between these images. When, in addition, the hologram is synthetic, the two-dimensional sampling creates a gratinglike effect over two dimensions, and overlapping may occur in both of them. A very simple derivation shows that this requires drawing on the CGH a number of cells at least equal to the number N of resolution cells or degrees of freedom in the image or the object $A(\vec{r})$, as seen through the pupil of the hologram (see Fig. 3), i. e.,

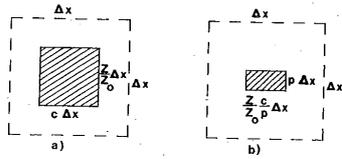


FIG. 6. Amplitude quantization: $\Delta x \times \Delta x =$ size of one cell; $Z =$ amplitude to be coded; $Z_0 =$ maximum value of Z ; $c\Delta x =$ maximum rectangle width; $p\Delta x =$ pen width, (a) if $Z/Z_0 > p$; (b) if $Z/Z_0 < p$.

plotter, and the quantization in phase, as well as in amplitude, has to be as fine as possible. After that, the photoreduction must be very faithful. We have drawn the holograms on a Benson incremental plotter; the increments along each direction are always multiples of $\delta x = 0.1$ mm. In each sampling cell of size Δx by $\Delta x = 4 \times 4$ mm, a rectangle is drawn with an area proportional to the sampled value of the optical amplitude Z . If $p\Delta x$ is the pen width, $c\Delta x$ the maximum rectangle width, and Z_0 the maximum amplitude to be drawn, the height H and width w of the rectangle plotted are always as nearly equal as possible, within increment δx , to

$$\left. \begin{aligned} H &= (Z/Z_0)\Delta x \\ w &= c\Delta x \end{aligned} \right\} \text{if } Z/Z_0 > p, \quad (9)$$

$$\left. \begin{aligned} H &= p\Delta x \\ w &= (Z/pZ_0)c\Delta x \end{aligned} \right\} \text{if } Z/Z_0 < p$$

(see also Fig. 6).

This allows a finer quantization in the domain of small amplitudes than is possible with the usual method of constant width. After plotting, the hologram is photoreduced on a Kodak 649-F plate by a factor of 50 using a well-corrected objective of aperture $f/4$.

(b) So far, we have essentially dealt with the problem of amplitude quantization. Phase quantization is known to present more severe limitations to the accuracy of the images obtained.^{23,24} We propose to avoid this problem entirely, as well as the imperfections resulting from the usual approximations in binary Fourier holograms and related to the detour phase method first proposed by Lohmann.²⁵ To this end, we profit from the real positive nature of h_s and h_r in plotting them as binary image holograms and not as binary Fourier holograms; in such a case, the phase is always zero.

A binary image hologram consists of an array of rectangles of area proportional to the sampled value of the function represented. As is explained in Appendix B, the function itself is retrieved by a low-pass coherent filtering of the image hologram. Note that the rectangles must be small when compared to the cells for the theory to hold.

This method is very convenient for solving problems concerning accuracy of synthetic holograms and, furthermore, avoids one Fourier transform to be computed. However, it is limited to the case of real positive functions.

Figure 7 shows how the setup of Fig. 4 must be modified for an image hologram. The point source of the reference wave is placed for convenience in the plane of the filtered image of the CGH given by lens L . The size of this image must be set to the proper value using L . The hole m in the Fourier plane of the CGH can select any order. The zero order is the most luminous one, but it contains light which comes through the dark regions of the CGH in case they are not perfectly black. Thus it is preferable to select one of the first orders rather than the zero order.

IV. A PRELIMINARY RESULT

A. Realization of the two filters

The method described in Secs. II and III has been applied in a first step to a simple input image, i. e., the impulse response $d(\vec{r})$ itself. Thus

$$A(\vec{r}) = d(\vec{r}). \quad (10)$$

The processing then gives the overall impulse response

$$B(\vec{r}) = d(\vec{r}) * h(\vec{r}), \quad (11)$$

which depends on the noise and on the optical bandwidth of the processing setup. In the absence of noise and with infinite bandwidth, a perfect processing would lead to a "Dirac delta function."

We consider the case of "geometrical" defocusing, where the blurring function is a uniform disk. Although it is well known that even a strong out-of-focus never gives, with monochromatic light, a disk-shaped impulse response, since the diffraction rings near the edge of the disk never disappear, this model may be used as an approximation of the impulse response in some cases. However, in order to realize the deblurring of the impulse response itself, this case is very convenient because we simply have to take as an object a small disk of adequate size.

We used a disk of radius $300 \mu\text{m}$, which corresponds to a blurring function of a radius of 12 resolution cells in the case of an optical processing setup of aperture $f/50$ illuminated with the blue line of an argon-ion laser at 4880 \AA . We chose, for a preliminary experiment, a noise ratio of $\epsilon = 0.1$ (see Eq. 1). The two image holograms for h_s and h_r are shown in Fig. 8; they each correspond to 128×128 computed cells; as explained in Secs. II A and III B, part (b) (see Fig. 7), these holograms were bandpass filtered, yielding two images shown in Fig. 9. These images were then used to obtain the final natural holographic filters.

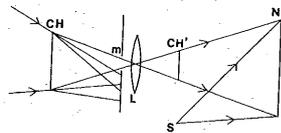


FIG. 7. Two-step holographic filter: recording of the natural hologram NH from a synthetic image-hologram CH; S = reference wave, m = hole; CH' = image of CH given by lens L .

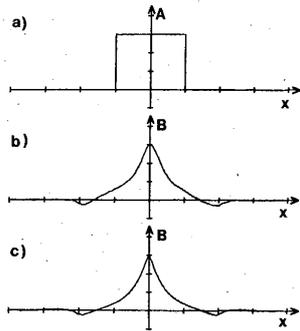


FIG. 11. Result of the processing: (a) blur; (b) corrected impulse response; (c) computer simulation of (b).

CONCLUSION

The choice of an image processing method depends on several factors, the most important of which seem to be the deterioration of the signal-to-noise ratio due to the method itself, the cost-effectiveness, and the ease of implementation.

The experiment described in this article, although requiring a somewhat cumbersome subtraction step, takes advantage of the association between optics and computer science in exploiting the very desirable advantages of incoherent optical methods versus digital and coherent optical ones. The incoherent methods are seen to offer a much better cost-performance ratio than digital methods and a signal-to-noise ratio far superior to those of coherent optical methods.

APPENDIX A: SYNTHESIS OF INCOHERENCE BY ILLUMINATION BY A MOVING COHERENT BEAM

Let us consider the configuration of Fig. 12, where an object of amplitude transmittance $a(\vec{r})$ is illuminated by a coherent beam converging at a point P in the pupil plane. The focal point P scans the pupil plane, and its position is described by the vector function $\vec{p}(t)$. We seek the irradiance in the image plane $E(\vec{r}', t)$.

Let $\tau(\vec{r})$ be the coherent impulse response of the system, related by Fourier transformation to the amplitude transparency of the pupil. At any time t imaging is performed with an illuminating wave converging at $\vec{p}(t)$, so that

$$E(\vec{r}', t) = \frac{1}{\lambda^4 d^4} \left| \int a(\vec{r}) \tau(\vec{r}' - \vec{r}) \exp\left(2i\pi \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}(t)}{\lambda d}\right) d\vec{r} \right|^2, \quad (\text{A1})$$

where $\vec{r} \cdot \vec{p}(t)$ denotes a scalar product.

However, this irradiance $E(\vec{r}', t)$ is not the observed quantity; the image is always viewed by a receptor of finite integration time T_1 . This receptor is therefore sensible to the luminous exposure

$$I_1(\vec{r}') = \int_t^{t+T_1} E(\vec{r}', \theta) d\theta. \quad (\text{A2})$$

If T_1 is either a multiple of the period T of the scanning

or much greater than it, I_1 is at least approximately proportional to

$$\begin{aligned} I_1(\vec{r}') &= \int_t^{t+T} E(\vec{r}', \theta) d\theta \\ &= \frac{1}{\lambda^4 d^4} \iint_{-\infty}^{+\infty} a(\vec{r}_1) \tau(\vec{r}' - \vec{r}_1) a^*(\vec{r}_2) \\ &\quad \times \tau^*(\vec{r}' - \vec{r}_2) D(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) d\vec{r}_1 d\vec{r}_2, \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

where we have introduced the function

$$D(\vec{r}) = \int_t^{t+T} \exp\left(2i\pi \frac{\vec{r} \cdot \vec{p}(\theta)}{\lambda d}\right) d\theta. \quad (\text{A4})$$

This expression means that a partial coherence is obtained in the image plane.

The quality of the incoherence synthesized depends on the function $D(\vec{r})$. For example, with an homogeneous scanning of the entire pupil plane, $D(\vec{r})$ would be a Dirac peak and Eq. (A3) would yield

$$I_1(\vec{r}') = \int |a(\vec{r})|^2 |\tau(\vec{r}' - \vec{r})|^2 d\vec{r}, \quad (\text{A5})$$

ensuring therefore the same spatial incoherence as an infinite incoherent monochromatic source.²⁶

On the other hand, it is obvious that a motionless point \vec{p} gives a perfect coherence, and this can be verified from Eq. (A1) or from Eqs. (A3) and (A4).

As a more realistic example, let us consider the case of a line-by-line scanning with N lines. The scanned area is a rectangle of dimension L_1 and L_2 in the x and y directions, respectively. Between the instants zero and T , the position \vec{p} of the scanning point in the pupil plane is given by

$$\vec{p}(t) = \begin{cases} \left(\frac{tN}{T} - k - \frac{1}{2}\right) L_1 & \text{for } \frac{kT}{N} < t < \frac{(k+1)T}{N} \\ \left(\frac{k}{N} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2N}\right) L_2 & \text{and } 0 < k < N-1 \end{cases} \quad (\text{A6})$$

with integer k . Such a scanning implies

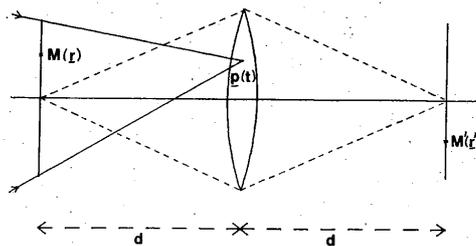


FIG. 12. Synthesis of incoherence; M = point in the object plane; p(t) = point scanning the pupil; M' = point in the image plane.

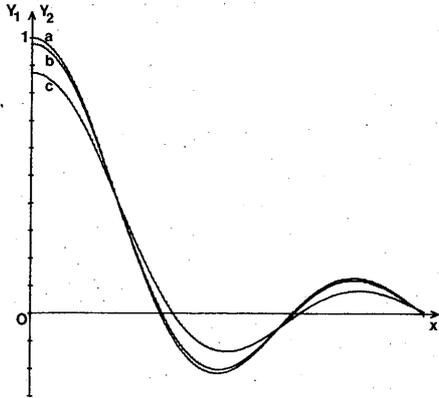


FIG. 14. Validity of the approximation of computer-generated image holograms; (a) the approximated function $Y_2(x)$; (b) $Y_1(x)$ for $\alpha=0.4$; (c) $Y_1(x)$ for $\alpha=1$.

sen so as to limit the width of all rectangle functions to $\alpha\delta x$ ($\alpha < 1$), the approximation becomes better. Figure 14 shows a comparison between $Y_1(x)$ and $Y_2(x)$, where

$$Y_1(x) = \alpha \operatorname{sinc} \frac{x}{\delta x} * \operatorname{rect}_{\alpha\delta x}(x) \\ = \frac{\delta x}{\pi\alpha} \left[\operatorname{Si} \left(\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi x}{\delta x} \right) - \operatorname{Si} \left(-\frac{\pi\alpha}{2} - \frac{\pi x}{\delta x} \right) \right], \quad (\text{B8})$$

$$Y_2(x) = \delta x \operatorname{sinc}(x/\delta x)$$

for different values of α ; the sine integral $\operatorname{Si}(x)$ is defined as

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du. \quad (\text{B9})$$

$$f'_1(x, y) = \frac{A_0}{CK\delta x^2} \sum_{(i\delta x, j\delta x) \in D} \left[\operatorname{sinc} \frac{x-i\delta x}{\delta x} \operatorname{sinc} \frac{y-j\delta x}{\delta x} \exp \left(2i\pi \frac{(x-i\delta x)m + (y-j\delta x)n}{\delta x} \right) \right] * \operatorname{rect}_{\alpha\delta x}(x) * \operatorname{rect}_{Kf_{ij}\delta x}(y), \quad (\text{B12})$$

and $f'_1(x, y)$ gives an intensity equal to the desired distribution $F(x, y)$ subject to the fact that the following approximation holds:

$$\begin{cases} \operatorname{sinc} \frac{x}{\delta x} \exp \left(2i\pi m \frac{x}{\delta x} \right) * \operatorname{rect}_{\alpha\delta x}(x) \approx c\delta x \operatorname{sinc} \frac{x}{\delta x} \exp \left(2i\pi m \frac{x}{\delta x} \right), \\ \operatorname{sinc} \frac{y}{\delta x} \exp \left(2i\pi n \frac{y}{\delta x} \right) * \operatorname{rect}_{Kf_{ij}\delta x}(y) \approx Kf_{ij}\delta x \operatorname{sinc} \frac{y}{\delta x} \exp \left(2i\pi n \frac{y}{\delta x} \right). \end{cases} \quad (\text{B13})$$

This condition is more severe than Eq. (B7). Hence, m and n must be chosen as small as possible and the value of α must be arrived at through a correct compromise between luminosity and precision.

*Work partly presented at International Optical Computing Conference, Washington D. C., April 23-25, (1975).

¹T. S. Huang, W. F. Schrieber, and O. J. Treliak, Proc. IEEE 59, 1586 (1971).

²J. L. Harris, J. Opt. Soc. Am. 56, 569 (1966).

³Y. Biraud, Astron. Astrophys. 1, 121 (1969).

⁴B. Roy Frieden, J. Opt. Soc. Am. 62, 511 (1972).

⁵B. Roy Frieden and J. J. Burke, J. Opt. Soc. Am. 62, 1202 (1972).

⁶C. Helstrom, J. Opt. Soc. Am. 57, 297 (1967).

⁷D. A. Tichenor and J. W. Goodman, Digest of papers, Inter-

2. Synthesis of an intensity distribution

Let $F(x, y)$ be a function representing a luminous intensity to be synthesized. If

$$f(x, y) = \sqrt{F(x, y)} \quad (\text{B10})$$

is, at least physically, of bounded support and of bounded spectrum, the preceding paragraph holds and, under assumption of validity of the approximation Eq. (B7), the intensity $F(x, y)$ is obtained from the image CGH after low-pass filtering.

However, a modification of the above experiment is possible. Since with any phase function $\phi(x, y)$, the amplitude $f(x, y) \exp\{i\phi(x, y)\}$ gives rise to the same intensity distribution, the low-pass filter in the Fourier domain can select any square of size $\Delta\mu\Delta\nu$ and it no longer has to be centered. This has a useful experimental consequence. If the binary hologram is not perfect and the black regions are not really opaque, but have nonzero transmittance (and this is always the case), there exists in the Fourier plane a central order which is stronger than it should be, whereas the remainder of the spectrum is the same as for a perfect black and white CGH. If it is possible to filter out the zero spatial frequency, the result is not affected by the bias transmittance.

Hence, the domain selected in the Fourier plane is D'' , defined by

$$D'' \left\{ \begin{array}{l} (m - \frac{1}{2})\Delta\mu < \mu < (m + \frac{1}{2})\Delta\mu, \\ (n - \frac{1}{2})\Delta\nu < \nu < (n + \frac{1}{2})\Delta\nu, \\ \text{with } |m| \text{ or } |n| > \frac{1}{2}, \end{array} \right. \quad (\text{B11})$$

instead of the domain D' , which corresponds to $m=n=0$. Equation (B6) thus becomes

national Optical Conference, Washington D. C. (1975), IEEE Catalog n° 75, CHO 941-5 C, p. 82.

⁸J. W. Goodman, J. Opt. Soc. Am. 57, 493 (1967).

⁹S. Lowenthal and A. Werts, C. R. Acad. Sci. Paris 266B, 542 (1968).

¹⁰A. W. Lohmann, Appl. Opt. 7, 561 (1968).

¹¹W. Swindell, Appl. Opt. 9, 2459 (1970).

¹²W. T. Maloney, Appl. Opt. 10, 2127 (1971).

¹³M. Lasserre and R. W. Smith, Opt. Commun. 12, 260 (1974).

¹⁴K. S. Pennington, P. M. Will, and G. L. Shelton, Opt.

Noise and coherence in optical image processing. I. The Callier effect and its influence on image contrast

Pierre Chavel and Serge Lowenthal

Institut d'Optique, Université de Paris-Sud, B.P. 43, 91406 Orsay, France

(Received 18 August 1977)

The observed density of a photographic record is dependent on the aperture of the illuminating and imaging optics. This effect, due to the scattering by the photographic emulsion, is analyzed using as few assumptions as possible. The results show a reasonable agreement with experiments on Callier effect found in the literature. In the realm of a study about noise and coherence in image processing, the influence of the Callier effect on image contrast is discussed. It is found in particular that contrast variations may be large (over a factor of 10 in some cases) and that the best contrast is obtained for a certain partially coherent illumination.

I. INTRODUCTION

The birth of the laser in the early 1960s opened to the experimenters the large field of coherent optical data processing, but it seems that nowadays the matter is still in the state of research and development, and that only a few applications of optical computing have reached the level of an industrial product. It is probable that the noise problems are partly responsible for this situation, and we would like, in this series of two articles, to investigate the question: to what extent could the quality achieved by optical processing methods be improved by using more extensively incoherent or partially coherent illumination, in spite of the possibly increased difficulties of implementation?

In particular, it has been repeatedly pointed out¹⁻³ that incoherent imaging is preferable to coherent imaging with respect to noise. In the present work, we try to support this opinion by a comparison of the statistical properties of noise in coherent, incoherent, and partially coherent illumination, generalizing the work of Goodman and his co-workers about noise in coherent optical systems.⁴⁻⁶

A large amount of image processing is done on photographic records. Therefore, in this first paper, we consider the optical image of such a record and examine the influence of partial coherence on its contrast. We are only interested in the effect of scattering by the emulsion and not in pure image formation problems, hence our problem is closely related to the Callier effect.

Contrast variations may be fairly large, in some cases more than by a factor of 10, according to the kind of illumination. As a consequence, quantitative interpretation of processed photographic emulsion has to be manipulated with great care. This is true also for computer processed images, since the input is done through an optical instrument: a microdensitometer.

Let it be noted that this problem is not a matter of noisy fluctuations of the image illuminance, but rather of its statistical expectation. The fluctuations will be considered in the second paper.

The variation of the density of a photographic emulsion with the apertures of the densitometer, called the Callier effect, was first observed almost simultaneously by Abney^{7,8} and by Hurter and Driffield⁹⁻¹² and originated a strong controversy between them, because they did not immediately recognize the importance of scattering by the emulsions. It was

Callier^{13,14} who made the first systematic experimental study of the effect. To our knowledge, only Vernier¹⁵⁻¹⁷ has given a theoretical explanation of the effect, and only in the case of a binary model.

Our aim is to develop a somewhat more general theoretical analysis of the Callier effect, independently of any emulsion model, using a minimum number of assumptions. We then compare this theory with known experimental results about Callier effect. Finally, we apply the theory to the problem of the dependence of image contrast on the coherence.

II. SOME PROBLEMS

Let us consider the setup Fig. 1. An emulsion in the object plane Π_0 yields an image in the plane Π . For any kind of illumination, the physical quantity that can be measured in the image plane is an illuminance.

In order to describe quantitatively the influence of the Callier effect, we have to relate the image illuminance to the properties of the emulsion and to the optical configuration, i.e., the imaging and the illuminating systems.

To do that, we define an intensity transmittance, which can be measured. But, since we do not operate only with incoherent illumination but also with coherent or partially coherent illumination, we have to relate the intensity transmittance to some amplitude transmittance which cannot always be measured.

A. Definition of the intensity transmittance

For a given uniformly exposed and developed photographic emulsion, the measured transmittance does not depend only

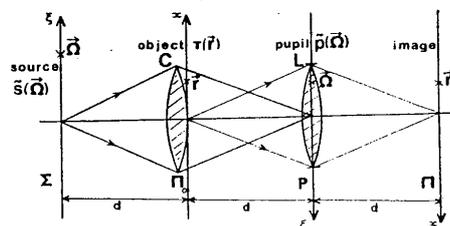


FIG. 1. Schematic diagram of the setup. The photographic emulsion located in the object plane Π_0 is imaged on the image plane Π by the lens L located in the pupil plane P . The condenser C placed against the object images the plane Σ of the source of luminance $\xi(\Omega)$ on the pupil plane.

on the emulsion, but it is also a function of the geometry of the densitometer. Therefore, the intensity transmittance T must be carefully defined. If R_1 and R_2 are two readings on a photometer with and without the emulsion, the intensity transmittance is defined as the ratio R_1/R_2 , and the density D as $-\log_{10} T$.¹⁸

This definition requires a few comments. T is not an intrinsic physical property of the emulsion, but depends on the measuring apparatus. Another possible definition of the intensity transmittance is the squared modulus $T' = |\tau_0|^2$ of the average amplitude transmittance τ_0 . T' is an intrinsic property of the emulsion, but does not describe completely its photometric behavior, and does not take into account the light scattered by the emulsion and transmitted by the optical system: it is only a particular value of T among all the values the transmittance T can take.

B. Amplitude transmittance

Some difficulties are related to this concept, which we recall here in order to show how carefully theoretical properties related with large scattering angles have to be considered.

Let us consider an emulsion with finite thickness Δz , as shown on Fig. 2. A plane and monochromatic wave is incident on the plane $z = 0$. Let the wave be

$$E_0 \exp(ik \cdot r - i\omega t), \quad (1)$$

where E_0 is a constant complex vector, r a space vector, and k the wave vector dependent on two angles, α and β . The outgoing wave at $z = \Delta z$ is, using matrix notation ($[E_0]$ is a column matrix):

$$[\tau][E_0] \exp(ik \cdot r - i\omega t), \quad (2)$$

where $[\tau]$ is a 2×2 matrix; the amplitude transmittance for this configuration is therefore a matrix, which is dependent on the variables $x, y, \alpha, \beta, \omega$. It is quite obvious that the variables α and β play a role that increases with the scattering angles. But it seems rather difficult to take into account all these parameters, which involve in particular non-tilt invariance with the angles α and β . Therefore, we make assumptions that bring us back to a more classical definition of the amplitude transmittance, i.e., we assume (i) small variation of $[\tau]$ with α and β , which means, in particular, no multiple scattering inside the emulsion; (ii) scalar approximation that

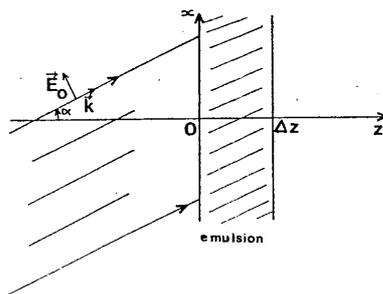


FIG. 2. A thick photographic emulsion illuminated by an inclined plane wave.

is valid for small angles α and β and for emulsions details larger than the wavelength.

As a consequence of (ii), the matrix character of τ can be ignored. The resulting scalar amplitude transmittance $\tau(x, y)$ only depends on x and y for fixed ω , it is independent on the shape or on the tilt of the illuminating wave.

III. EXPRESSING THE CALLIER EFFECT

The schematic setup Fig. 1 makes use of Köhler illumination, where $r(x, y)$ is a point in the object plane Π or in the image plane Π' ; $\Omega(u, v) = N/\lambda d$ is a point in the source plane Σ or in its image Σ' (pupil of the system), expressed as spatial frequencies; $s(r)$ is the degree of coherence in the object plane; $\bar{s}(\Omega)$, the Fourier transform of $s(r)$ is, apart a constant factor, the luminance (radiance) of the quasimonochromatic, spatially incoherent source Σ .

For the coherent case, we set $s(\Omega) = C\delta(\Omega)$, where C is a constant and δ the Dirac function; $p(r)$ is the coherent impulse response of the imaging system; $\bar{p}(\Omega)$, its Fourier transform, is the amplitude transmittance of the pupil P . For normalization, we set $\bar{p}(0) = 1$.

For simplicity, all the optical intervals d are the same; therefore, with suitable axis orientations, the illuminating and imaging magnifications are $m = +1$.

From the theory of imaging in partially coherent illumination,¹⁹ the deterministic image illuminance is

$$I(r) = \int_{\Sigma} \int_{\Pi} \int_{\Pi} \bar{s}(\Omega) \tau(r_1) \tau^*(r_2) p(r - r_1) p^*(r - r_2) \times \exp[2i\pi\Omega \cdot (r_1 - r_2)] dr_1 dr_2 d\Omega, \quad (3)$$

where τ is the amplitude transmittance.

We must now introduce the statistics of τ so as to account for the diffusion by the emulsion; let us write

$$\tau(r) = \tau_0(r) + X(r) \quad (4)$$

with $\tau_0(r) = \langle \tau(r) \rangle$. Here $\langle \rangle$ means statistical expectation. Let $\phi(r_1, r_2)$ be the statistical autocorrelation function of the random process X . Hence

$$\langle \tau(r_1) \tau^*(r_2) \rangle = \tau_0(r_1) \tau_0^*(r_2) + \phi(r_1, r_2). \quad (5)$$

From our definition of the intensity transmittance T , we find as statistical average of T :

$$\langle T(r) \rangle = \frac{\langle I(r) \text{ with emulsion} \rangle}{\langle I(r) \text{ without emulsion} \rangle} = \frac{A}{B} \quad (6)$$

with

$$A = \int_{\Sigma} \int_{\Pi} \int_{\Pi} \bar{s}(\Omega) \tau_0(r_1) \tau_0^*(r_2) p(r - r_1) p^*(r - r_2) \times \exp[2i\pi\Omega \cdot (r_1 - r_2)] dr_1 dr_2 d\Omega + \int_{\Sigma} \int_{\Pi} \int_{\Pi} \bar{s}(\Omega) \phi(r_1, r_2) p(r - r_1) p^*(r - r_2) \times \exp[2i\pi\Omega \cdot (r_1 - r_2)] dr_1 dr_2 d\Omega \quad (6)$$

and

$$B = \int_{\Sigma} \int_{\Pi} \int_{\Pi} \bar{s}(\Omega) p(r_1) p^*(r_2)$$

$$\times \exp[2i\pi\Omega \cdot (r_2 - r_1)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\Omega. \quad (6c)$$

Equation (6) is the general expression for the intensity transmittance in partially coherent illumination. To simplify further calculation, we consider, for the moment, only the case of emulsions uniformly exposed and developed, so that in Eq. (2) τ_0 is constant over the plane Π and that it is reasonable to suppose that $X(\mathbf{r})$ is a stationary process, at least in the wide sense, i.e., that ϕ depends only on $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$. By so doing, we suppose that the emulsion plane is of infinite extent; a finite size emulsion would not change the results.

For the stationary case, the transmittance Eq. (6) then simplifies to

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + H \quad (7a)$$

with

$$H = \frac{\int_{\mathcal{R}^2} \bar{\phi}(\Omega) [\bar{s}(\Omega) \otimes |\bar{p}(\Omega)|^2] d\Omega}{\int_{\mathcal{R}^2} \bar{s}(\Omega) |\bar{p}(\Omega)|^2 d\Omega}, \quad (7b)$$

where \otimes denotes correlation. H designates the contribution of the scattered light, it expresses the Callier effect.

It is seen from Eqs. (7) that the mean measured value of $T(\mathbf{r})$ depends on the relative aperture of the source and the pupil and on the autocorrelation of the grain. More insight into Eqs. (7) will show that it includes most of the experimentally found properties of the Callier effect. This is shown in the next section.

IV. PROPERTIES OF THE CALLIER EFFECT

References 13-17 and 20-24 give a number of experimental results about the properties of the Callier effect. In this section, we try to find to what extent these properties can be deduced from Eqs. (7).

A. Calculations

We begin with some particular and usual cases that can be deduced in a straightforward way from Eqs. (7).

(i) Case of a small source (coherent illumination)

Putting $\bar{s}(\Omega) = C\delta(\Omega)$ in Eqs. (7) yields

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + \int_{\mathcal{R}^2} \bar{\phi}(\Omega) |\bar{p}(\Omega)|^2 d\Omega \quad (8)$$

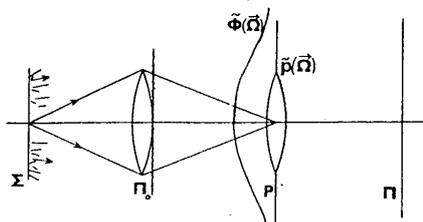


FIG. 3. The image is due to the parts of the nondiffuse light and of the diffuse light which are transmitted through the pupil. This figure shows the nondiffuse component and the diffuse light spectrum $\bar{\phi}$ corresponding to the central point of the source.

which can be interpreted easily as the sum of the nondiffuse component and the part of the diffuse light which is transmitted through the pupil (see Fig. 3).

(ii) Case of a large uniform source (fully spatially incoherent illumination)

From Eqs. (4) and (6), we obtain the following result, which has been given earlier by Vernier²² for a binary model of emulsion:

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + \sigma^2 = \langle |\tau|^2 \rangle, \quad (9)$$

where $\sigma^2 = \phi(0)$, which means that the transmittance is independent of the pupil aperture. This result, of course, may be approximate, because considering an infinitely large source is contradictory with our assumption of small angles.

(iii) Microscopic correlation

If the grain is very fine, or rather if the diffused light spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$ is spread over an area of the pupil large compared to both pupil and source, then we can set for the autocorrelation function: $\phi(\mathbf{r}) = \sigma^2 A_c \delta(\mathbf{r})$, A_c being the noise correlation area. Putting this expression into Eqs. (7), the transmittance becomes, for coherent and partially coherent illumination

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + \phi(0) A_c^2 \frac{\int_{\mathcal{R}^2} \bar{s}(\Omega) d\Omega \int_{\mathcal{R}^2} |\bar{p}(\Omega)|^2 d\Omega}{\int_{\mathcal{R}^2} \bar{s}(\Omega) |\bar{p}(\Omega)|^2 d\Omega} \quad (10a)$$

Hence, if the pupil or source size is increased from zero, $\langle T \rangle$ increases linearly with the variance σ^2 of the object amplitude transmittance as long as the assumption of microscopic correlation holds. For the coherent case, Eq. (10a) takes a simple form:

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + \sigma^2/N, \quad (10b)$$

where

$$N = \frac{\text{image resolution cell area}}{\text{correlation area of object transmittance}}$$

(iv) Very small or very large pupil

In the above three particular cases, the variable was the

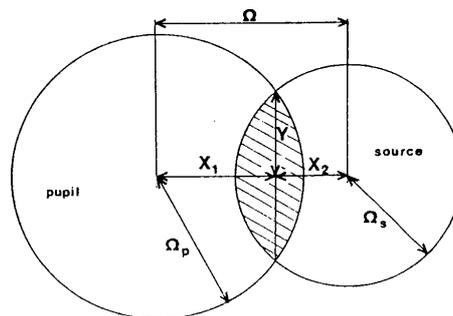


FIG. 4. Geometrical interpretation of the weighting function $w(\Omega)$ of Eq. (14).

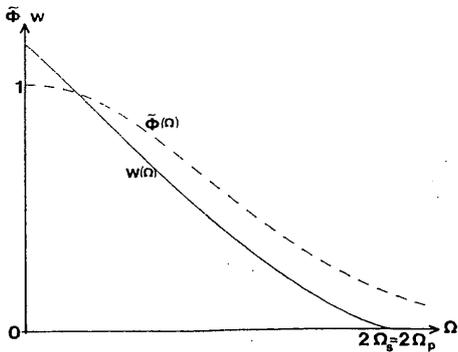


FIG. 5. Diffuse light spectrum $\bar{\phi}$ and weighting function w in the case of equal source and pupil radii.

source aperture \bar{s} at constant pupil aperture \bar{p} . But in Eq. (7b), H is unchanged with an interchange of $|\bar{p}|^2$ and \bar{s} . This results from the theory of coherence and has been sometimes crudely related to the reciprocity law of Helmholtz.^{25,26} We therefore obtain straightforwardly from Eqs. (8)–(10) the expressions of $\langle T \rangle$ for a small pupil and for a large pupil; for the case of microscopic correlation and of a small pupil, Eq. (10b) holds if N is replaced by

$$N' = \frac{\text{coherence area of object illumination}}{\text{correlation area of object transmittance}}$$

We now turn to a more general case. For simplicity we assume that both source and pupil are circular and uniform. The radius of the source is R_s , or $\Omega_s = R_s/\lambda d$ in spatial frequencies. The source luminance is therefore

$$\bar{s}(\Omega) = LC(\Omega_s), \quad (11)$$

where L is a constant luminance and C is the disk function:

$$C(\Omega_s) = 1, \quad \text{for } |\Omega| < \Omega_s \\ = 0, \quad \text{for } |\Omega| > \Omega_s. \quad (12)$$

The pupil of radius $R_p = R_p/\lambda d$ yields in the same way the pupil transmittance:

$$\bar{p}(\Omega) = C(\Omega_p). \quad (13)$$

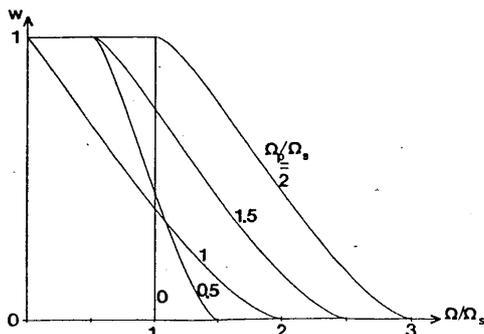


FIG. 6. Behavior of the weighting function $w(\Omega)$ with fixed source radius $R_s = \lambda\sigma\Omega_s$, for 5 different values of the pupil radius $R_p = \lambda\sigma\Omega_p$, the parameter indicated is the ratio $R_p/R_s = \Omega_p/\Omega_s$.

Therefore, the average transmittance Eq. (7) is rewritten as

$$\langle T \rangle = |\tau_0|^2 + \int_{\mathcal{D}^2} \bar{\phi}(\Omega) w(\Omega) d\Omega, \quad (14)$$

where the weighting function $w(\Omega)$ (see Fig. 4) is the cross-correlation function of the disks $C(\Omega_s)$ and $C(\Omega_p)$ normalized as

$$w(0) = 1. \quad (15)$$

The function $w(\Omega)$ is expressed in the Appendix, but all we need here is to know that it has a sharp cutoff at

$$\Omega = \Omega_s + \Omega_p.$$

The shape of $w(\Omega)$ is shown in Fig. 5 for the case $\Omega_s = \Omega_p$, it is the usual transfer function for a circular pupil. Other shapes for $\Omega_s \neq \Omega_p$ are represented in Fig. 6. The average transmittance $\langle T \rangle$, Eq. (14), is again the sum of a constant $|\tau_0|^2$, the specular transmittance, and of a noise term which depends on three quantities only, the apertures Ω_s and Ω_p of the source and the pupil, and the power spectrum of the amplitude noise fluctuations $\bar{\phi}(\Omega)$. As already pointed out, $\langle T \rangle$ is symmetrical with respect to Ω_s and Ω_p .

We now demonstrate that for given Ω_s and variable Ω_p , or conversely, $\langle T \rangle$ has a minimum for $\Omega_s = \Omega_p$. The detailed calculations are given in the Appendix, where it is also shown that the derivative of $\langle T \rangle$, with respect to Ω_s , is not continuous at the minimum; a comparison is given between the right-handed and the left-handed slopes at the minimum, in agreement with experimental results.

The demonstration relies on the following additional assumption: the scattered noise spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$ is isotropic and is a monotonic nonincreasing function of Ω . Physically, this means that the scattering does not present any preferred direction or frequency. Experimental results generally agree with this assumption, with however a few exceptions.^{27,28}

B. Illustrations

Our theory on Callier effect was made independently on any model of photographic emulsion. Only the amplitude autocorrelation function has to be known. An illustration for one model of autocorrelation function will be given at the end of this section, but let us first summarize some general theoretical properties. These agree well with experimental results published in Refs. 14–17 and 20–23; one slight disagreement will appear in point (v), it will be commented on there. Since the most usual quantity used in the literature is the density D , we use it hereafter instead of the transmittance.

(i) The density $D(\Omega_s, \Omega_p)$ is a symmetrical function of the source and pupil apertures Ω_s and Ω_p . This appears clearly in Fig. 4 and Eq. (14), it is a consequence of the symmetry of the weighting function $w(\Omega)$.

(ii) The range of variation of the density increases with the total power $\sigma^2 = \int \bar{\phi}(\Omega) d\Omega$ scattered by the emulsion. When the apertures are varied, Eq. (14) and Fig. 6 show that the transmittance $\langle T \rangle$ may vary from $|\tau_0|^2$ (specular transmittance) to $|\tau_0|^2 + \sigma^2$.

(iii) When the illumination aperture Ω_s is kept constant and the imaging aperture Ω_p is varied (or conversely), the

density goes through a maximum D_M for

$$\Omega_s = \Omega_p.$$

When the apertures are held equal and increase, then D_M decreases. This can be seen from Eq. (14) where the scattered term increases through the broadening of the weighting function w with the increasing apertures. This decrease is faster for small than for large values of the aperture, as a consequence of the bell-shaped noise spectrum, where the edges contribute less than the center.

Moreover, let us note that the width of D_M as a function of $\Omega_s = \Omega_p$ depends on the grain size: the finer the grain, the broader D_M . A fine grain means a narrow autocorrelation function $\phi(r)$, and hence a broad spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$. As can be seen in Figs. 4 and 6, if Ω_s increases from zero, the variation of $\langle T \rangle$ and occurs physically over a domain of Ω_s of the same order as the width of the function $\bar{\phi}(\Omega)$.

(iv) The slope of the density as a function of one of the apertures, say Ω_s , is discontinuous at $\Omega_s = \Omega_p$. The absolute slope $|\partial D/\partial \Omega_s|$ is larger for $\Omega_s = \Omega_{p+}$ than for $\Omega_s = \Omega_{p-}$ (see Appendix); the question of whether the derivative of D is continuous or not is difficult to decide experimentally, but the slope can be approached experimentally by measuring and computing the value of

$$[D(\Omega_s = \Omega_p + \epsilon, \Omega_p) - D(\Omega_s = \Omega_p - \epsilon, \Omega_p)]/\epsilon$$

for small positive and negative values of ϵ .

Some of these results had been obtained theoretically by Vernier¹⁵ with a binary model of the emulsion; this model, however, leads to the conclusion that

$$D(0,0) = 2D(\infty, \infty) \quad (16)$$

which is generally untrue.

(v) As can be seen in Eq. (9), the density $D(\infty, \Omega_p)$ for diffuse illumination is independent of the pupil aperture Ω_p , but experimental results show a slow increase²¹ with increasing Ω_p (0.2 density units from $\Omega_p = 0$ to $\Omega_p = \infty$ near $D = 2$).

This contradiction may be due to three reasons: first, from our hypotheses, our theory is limited to small angles and is not valid for Ω_s infinite. Secondly, it is difficult, experimentally, to have a really completely diffuse illumination. Thirdly, we have neglected the thickness of the emulsion, and real emulsions always have a certain thickness. As pointed out in Ref. 23, light, in general, has to go through a larger path in the emulsion if it is traveling towards outer parts of the pupil; it is therefore more strongly absorbed, which causes an increase in density if the pupil radius Ω_p is increased.

For the sake of completeness, we now state three more properties of the Callier effect, which are not retrieved by our theory but are not contradictory with it. The reason for this is that they are related in detail with the scattering properties of photographic emulsion, whereas we have restricted ourselves intentionally to the minimum assumptions about this process. The use of a model of photographic emulsion would allow us to go further, but we prefer to avoid this interesting but hazardous process for the time being. These three properties, nevertheless, can give some insight into the structure of photographic emulsions.

(a) The density D , to a good approximation, may be written $Q(\Omega_s, \Omega_p)D_0$, where $Q(\Omega_s, \Omega_p)$ only depends on the apparatus, and D_0 only on the emulsion. This result, given by Vernier,¹⁵ is a generalization of the introduction by Callier^{13,14} of the factor $Q = D(\infty, 0)/D(0, 0)$, which was found to be approximately independent of $D(0, 0)$.

(b) The finer the grain, the smaller the value of $D(\infty, 0) - D(0, 0)$;²⁰ this means that $\phi(0)$, which is the variance of the noise, is smaller for fine grain emulsions than for coarse grain emulsions.

(c) The shape of the curves giving the variations of the diffuse density $D(\infty, 0)$ or of $D(\Omega_s, \Omega_p)$ as functions of the specular density $D(0, 0)$,²⁰ is the last property which cannot be retrieved without additional assumptions about the scattering process and the spectrum $\bar{\phi}$.

Up to this point, the number of hypotheses has been kept to the minimum and no model has been used. It seems desirable, however, to illustrate the results given by our theory by some curves of $\langle T \rangle$, the mean intensity transmittance, and of the density D with respect to the source and pupil radii Ω_s and Ω_p . For that, we need to know the scattered noise spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$. Several authors^{24,27-35} have measured noise power spectra, at least for spatial frequencies above zero, and various models³⁴⁻³⁷ agree approximately with these measurements, but we shall consider here a rather simple analytical form that is physically compatible with the shape of the function $\bar{\phi}$, namely,

$$\bar{\phi}(\Omega) = A \exp(-\Omega^2/W^2). \quad (17)$$

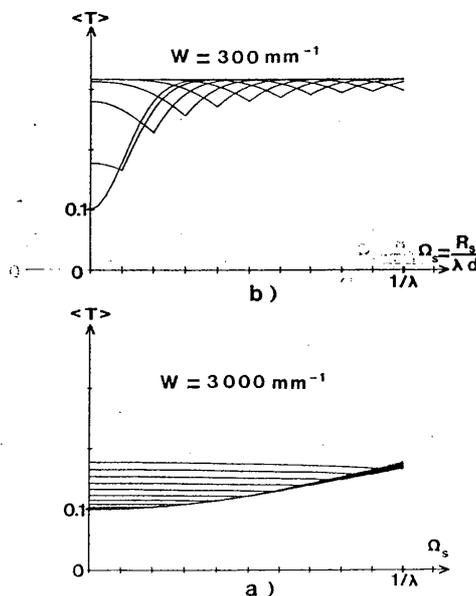


FIG. 7. Callier effect: variations of the measured intensity transmittance with the source radius $R_s = \lambda \alpha \Omega_s$ for fixed pupil radius $R_p = \lambda \alpha \Omega_p$ (or conversely); the parameter is the ratio Ω_s/λ , which varies from 0 to 1 by steps of 0.1. (a) fine grain, (b) medium grain.

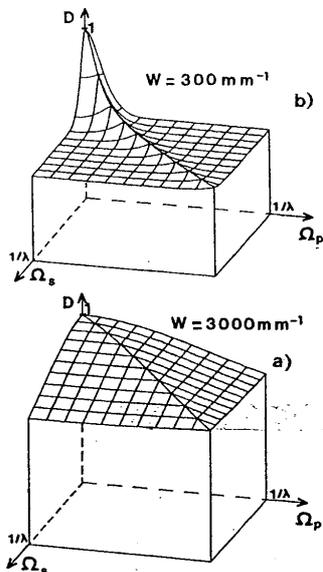


FIG. 8. Callier effect: variations of the density with source radius $R_s = \lambda \sigma \Omega_s$ and pupil radius $R_p = \lambda \sigma \Omega_p$. The solid has a sharp ridge for $\Omega_s = \Omega_p$ corresponding to a maximum on the lines of constant Ω_s and of constant Ω_p . The plane $\Omega_s = \Omega_p$ is a plane of symmetry. The curves drawn correspond to values of Ω_p/λ and of Ω_s/λ varying from 0 to 1 by steps of 0.1. (a) fine grain; (b) medium grain.

Admittedly, this model does not show perfect agreement with the measurements mentioned above, but it has been chosen for simplicity of calculation. The parameter W obviously characterises the grain size of the emulsion; the larger W , the finer the grain. To give the parameter A a correct order of magnitude, we use the following relation:

$$\sigma^2 = \phi(0) = \int_{\mathcal{R}^2} \bar{\phi}(\Omega) d\Omega = \tau_0(1 - \tau_0), \quad (18)$$

where the value $\tau_0(1 - \tau_0)$ is deduced from the binary model.

This approximation, that leads in general to some unsatisfactory results, as mentioned in Eq. (16), is quite suitable here for calculating an approximate value of the constant A , since experimental results^{28,33,36} show that for small or large values of τ_0 , the order of magnitude given by Eq. (18) is good. Therefore, we get for the parameter A ,

$$A = \tau_0(1 - \tau_0)/W^2. \quad (19)$$

The curves shown in Figs. 7 and 8 correspond to two values of W : 300 mm^{-1} , representing a relatively coarse grain, and 3000 mm^{-1} , corresponding to a fine grain. The mean amplitude transmittance τ_0 has been chosen equal to $1/\sqrt{10}$, so that the expected intensity transmittance $\langle T \rangle$ can vary from $1/10$ to $1/\sqrt{10}$, and the density D from 0.5 to 1. This variation of one half between the diffuse density and the specular density lies in the midrange of the different experimental results. Values of $D(0,0) - D(\infty,0)$ up to 1 have been reported,^{13,20} which corresponds to a tenfold variation in the transmittance $\langle T \rangle$.

The calculations have been performed from Eq. (14) on an HP 9830 computer, using a Gaussian integration algorithm.^{38,39} Figure 7 shows the variations of $\langle T \rangle$ for given Ω_p with variable Ω_s (or conversely). The values of Ω_s and Ω_p have been restricted to $\Omega_s < 1/\lambda$ and $\Omega_p < 1/\lambda$, since the scalar approximation has been made in our calculations. It is seen that for the fine-grained emulsion, $\langle T \rangle$ varies rather slowly and that the minimum for Ω_s and Ω_p is almost imperceptible.

As the density is the quantity the most commonly used in densitometry, we show on Fig. 8 the density corresponding to the curves of Fig. 7, plotted as a function of the two variables Ω_s and Ω_p . All these curves agree reasonably well with the published measurements about the Callier effect.^{15,20}

A subsidiary point can be mentioned here. In this subsection, we have derived from Eq. (14) and from the Gaussian model of the noise spectrum Eq. (17) the value of $\langle T \rangle$. It is an open question whether Eq. (14) can be inverted, so as to yield, from measured values of $\langle T \rangle$ as a function of Ω_s and Ω_p , an indirect determination of the scattered noise spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$: this would be interesting if the value of $\bar{\phi}(0)$, which is not directly measurable, could be determined in that way, or, at least, if one could determine $\bar{\phi}$ at values of Ω low enough to show the behavior of the noise spectrum near zero, because even the low-angle measurements reported by Biedermann down to 0.2° , i.e., 5 mm^{-1} , seem to show a nonphysical divergence at $\Omega = 0$. This suggested method of determining $\bar{\phi}$ is a generalization of the usual coherent method reported in Refs. 26–35 as can be seen by examining the close analogy between their methods and Eq. (8), which expresses the integration of the noise flux by the pupil in the coherent case.

For further illustration and comparison with the results of our theory, Fig. 9 shows the experimental results published by Vernier in Ref. 15. It is seen that the general shape of the surface $D(\Omega_s, \Omega_p)$ agrees with that of Fig. 8 as well as with the theoretical predictions stated at the beginning of this section.

V. CALLIER EFFECT AND IMAGE CONTRAST

We now consider the effect of the sensitometric properties studied in Secs. III and IV, upon the contrast of a given image $I(\mathbf{r})$.⁴⁰

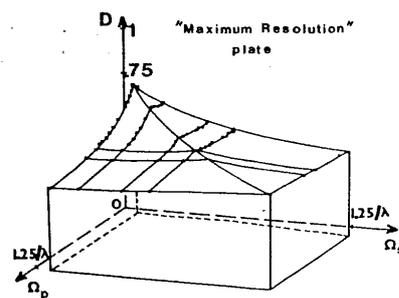


FIG. 9. Callier effect: experimental results obtained by Vernier¹⁵ on "maximum resolution" electron plates. The notations are the same as in Fig. 8.

We first investigate the case of a low-contrast, low-frequency modulation $m(\mathbf{r})$ superposed on a constant transparency τ_0 . Due to the assumption of low frequency, the modulation $m(\mathbf{r})$ is imaged without modification, whatever the coherence of the illumination may be. From the assumption of low contrast, we can induce that the noise term is almost entirely determined by the background τ_0 and is independent on $m(\mathbf{r})$, so that the property of stationarity still holds. Starting back from Eq. (4), we then find an expression quite close to Eq. (7):

$$\langle T(\mathbf{r}) \rangle = |\tau_0|^2 + \tau_0 m^*(\mathbf{r}) + \tau_0^* m(\mathbf{r}) + H \quad (20)$$

with the same expression for H as in Eq. (6).

Let us define the contrast as the ratio of the modulation to the constant component:

$$C = (\tau_0 m^* + \tau_0^* m) / (|\tau_0|^2 + H). \quad (21)$$

For given τ_0 , C is seen to be inversely proportional to the expected intensity transmittance $\langle T \rangle$. As a consequence, the best contrast is obtained in partially coherent illumination with equal angular sizes of the source and of the pupil; if that common angular size can be chosen arbitrarily, the smallest

$$H(\mathbf{r}) = \frac{\int \bar{s}(\Omega) d\Omega \int \phi_0 \{ \tau(\mathbf{r}_1) \} |p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1}{\int \int \bar{s}(\Omega) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p^*(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \exp[2i\pi\Omega \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\Omega} \quad (22)$$

because $\phi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ can be approximated by $\phi_0 \{ \tau(\mathbf{r}_1) \} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)$. Hence, $H(\mathbf{r})$ is the normalized incoherent image, not of $\tau(\mathbf{r})$ itself, but of $\phi_0 \{ \tau(\mathbf{r}) \}$.

It is not easy to give a general account of the role of the Callier effect in the case of high-contrast modulations. The following physical reasoning, which summarizes our study of the Callier effect, is nevertheless valid for any modulation of low frequency: let the radius Ω_s of the source increase, starting from the coherent illumination (see Fig. 3):

(i) the signal contains mainly low spatial frequencies, so that the signal power increases roughly proportionally to the size of the source until $\Omega_s = \Omega_p$, and then remains approximately constant;

(ii) the noise increases with Ω_s for $\Omega_s < \Omega_p$, but more slowly than the signal power, because an off-axis point of the source gives in the pupil plane an off-axis noise spectrum, and the noise power transmitted from this point is lower than for the on-axis point. For $\Omega_s > \Omega_p$, the noise power still increases, due to the tails of the noise spectra corresponding to the outer points of the source. The conclusion is that the best contrast is obtained for $\Omega_s = \Omega_p$.

CONCLUSION

The comparison of the advantages of coherent and incoherent illumination for the purpose of information processing is not a straightforward matter. Clearly, several characteristics, such as the simplicity of the setup, the possibility of performing a large variety of operations, etc., must be taken into account.

In this paper, the mean illuminance has been considered and we have tried to give some insight into several important features related with scattering by photographic emulsions. The Callier effect has been studied with a minimum of hypotheses and it has been shown that a certain degree of par-

size compatible with the needed resolution gives the best contrast. On the other hand, for an increasing size of the source and a given pupil (or conversely), the contrast first increases up to this maximum, then decreases.

This conclusion, however, is not straightforwardly applicable to the special case of microdensitometers, for which Swing⁴¹ and Kinzly⁴² recommend that, because of instrumental reasons, the numerical aperture of the influx optics should be greater than the numerical aperture of the efflux optics.

As already mentioned, the order of magnitude of the contrast variation may reach 10. The contrast in completely incoherent illumination is smaller than in coherent illumination and it varies with the source Ω_s and pupil radii Ω_p , as shown in Fig. 10, for the example discussed in Sec. IV.

In the case of high-contrast modulations, the noise correlation ϕ is not stationary, and depends on the value of \mathbf{r} at each point \mathbf{r} : the effect of the noise is therefore not only to add a constant term, but also to modify the image. Let us take an example: in the case of microscopic correlation, it is easily seen that the noise term in Eq. (7) can be written:

partially coherent illumination yields the best image contrast, and that the totally incoherent illumination is the worst case for contrast. The variation of contrast with coherence of illu-

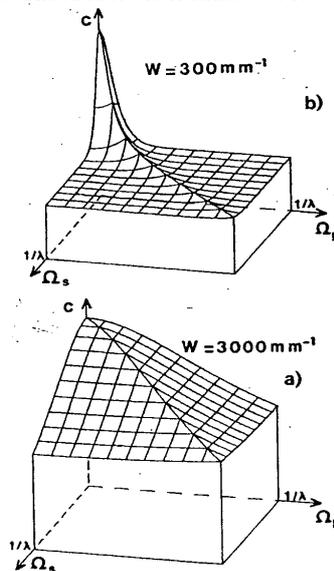


FIG. 10. As a consequence of the Callier effect, the image contrast C of a weakly modulated object depends on the scattering by the emulsion and hence, on the source radius $R_s = \lambda \Omega_s$ and on the pupil radius $R_p = \lambda \Omega_p$. For given Ω_s , the contrast is maximum for $\Omega_s = \Omega_p$, and conversely. The overall maximum is obtained for very small Ω_s and Ω_p (coherent illumination and very low resolution). The curves drawn correspond to values of Ω_s/λ and of Ω_p/λ varying from 0 to 1 by steps of 0.1. (a) fine grain; (b) medium grain. The C coordinate is in arbitrary units.

mination may be rather large; a factor 10 may be obtained. But contrast is not all, the ability of detection of a signal depends on noise fluctuation: these will be considered in the second part of this work, and will lead to reconsider to a certain extent the conclusions of the present article.

We thank Professor K. Biedermann for useful correspondence. We thank Professor P. Vernier for allowing us to reproduce the experimental results presented on Fig. 9.

APPENDIX: CALCULATIONS ABOUT THE TRANSMITTANCE AS A FUNCTION OF SOURCE RADIUS AND PUPIL RADIUS

We start from Eqs. (6) and (14) of the text, and we are mainly interested in the term H due to scattering by the object, which can be rewritten with the assumptions of Sec. III:

$$H(\Omega_s, \Omega_p) = 2\pi \int_0^{+\infty} \bar{\phi}(\Omega) w(\Omega) \Omega d\Omega. \quad (A1)$$

The purpose of this Appendix is twofold: we first show that $H(\Omega_s, \Omega_p)$, considered as a function of Ω_s with Ω_p fixed, has a minimum for $\Omega_s = \Omega_p$, and then we shall calculate and compare the two slopes of the curve $H(\Omega_s, \Omega_p)$ at the minimum.

A. Minimum of the function $H(\Omega_s, \Omega_p)$ with Ω_p fixed

The shapes of the functions $w_1(\Omega)$ and $w_2(\Omega)$ corresponding to the values Ω_{s1} and Ω_{s2} of Ω_s and the same Ω_p with $\Omega_{s1} < \Omega_{s2} < \Omega_p$, are shown in Fig. 11. The two curves intersect at abscissa Ω_0 .

with

$$X_1 = (\Omega_p^2 - \Omega_s^2 + \Omega^2)/2\Omega,$$

$$X_2 = (\Omega_s^2 - \Omega_p^2 + \Omega^2)/2\Omega,$$

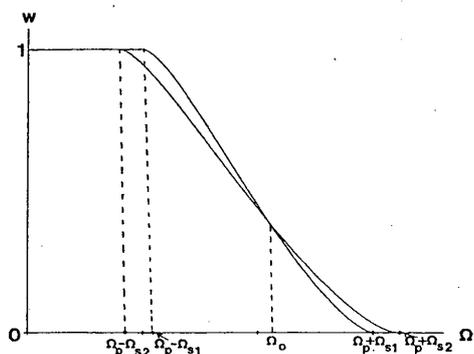


FIG. 11. The weighting function $w(\Omega)$ for two values Ω_{s1} and Ω_{s2} of Ω_s ($\Omega_{s1} < \Omega_{s2} < \Omega_p$).

Let us calculate $H(\Omega_{s2}, \Omega_p) - H(\Omega_{s1}, \Omega_p)$:

$$\begin{aligned} H(\Omega_{s2}, \Omega_p) - H(\Omega_{s1}, \Omega_p) &= 2\pi \int_{\Omega_p - \Omega_{s2}}^{\Omega_0} \bar{\phi}(\Omega) \{w_2(\Omega) - w_1(\Omega)\} \Omega d\Omega \\ &+ 2\pi \int_{\Omega_0}^{\Omega_p + \Omega_{s2}} \bar{\phi}(\Omega) \{w_2(\Omega) - w_1(\Omega)\} \Omega d\Omega. \quad (A2) \end{aligned}$$

We can add to the second term a quantity equal to zero [see Eq. (15)], namely,

$$-2\pi \int_0^{\Omega_0} \bar{\phi}(\Omega_0) \{w_2(\Omega) - w_1(\Omega)\} \Omega d\Omega,$$

and we get

$$\begin{aligned} H(\Omega_{s2}, \Omega_p) - H(\Omega_{s1}, \Omega_p) &= 2\pi \int_{\Omega_p - \Omega_{s2}}^{\Omega_0} \{\bar{\phi}(\Omega) - \bar{\phi}(\Omega_0)\} \{w_2(\Omega) - w_1(\Omega)\} \Omega d\Omega \\ &+ 2\pi \int_{\Omega_0}^{\Omega_p + \Omega_{s2}} \{\bar{\phi}(\Omega) - \bar{\phi}(\Omega_0)\} \{w_2(\Omega) - w_1(\Omega)\} \Omega d\Omega. \quad (A3) \end{aligned}$$

From our assumption about $\bar{\phi}(\Omega)$ being isotropic and non-increasing, it is clear that both integrands in Eq. (A3) are negative (or zero if $\bar{\phi}$ is constant over the considered range of Ω), so that the function $H(\Omega_s, \Omega_p)$ and therefore the transmittance $\langle T \rangle$, for a given Ω_p , is decreasing from $\Omega_s = 0$ to $\Omega_s = \Omega_p$. The same demonstration can be utilized for $\Omega_p < \Omega_{s1} < \Omega_{s2}$ showing that $\langle T \rangle$ is increasing from $\Omega_s = \Omega_p$ to infinity: this shows that $\langle T \rangle$ is minimum for $\Omega_s = \Omega_p$.

B. Slopes at the minimum

Here we need the analytic expression of the weighting function $w(\Omega)$:

$$\begin{aligned} w(\Omega) &= \begin{cases} 1, & \text{if } \Omega < |\Omega_s - \Omega_p| \\ \frac{\Omega_p^2 \text{Arc cos}(X_1/\Omega_p) + \Omega_s^2 \text{Arc cos}(X_2/\Omega_s) - Y\Omega}{\pi \text{Inf}(\Omega_s^2, \Omega_p^2)}, & \text{if } |\Omega_s - \Omega_p| < \Omega < \Omega_s + \Omega_p \\ 0, & \text{if } \Omega > \Omega_s + \Omega_p \end{cases} \quad (A4) \end{aligned}$$

$$Y = (1/\Omega)(2\Omega^2\Omega_p^2 + 2\Omega^2\Omega_s^2 + 2\Omega_p^2\Omega_s^2 - \Omega^4 - \Omega_p^4 - \Omega_s^4)^{1/2}.$$

The geometrical interpretation of X_1 , X_2 , and Y is indicated in Fig. 4. From Eq. (16)

$$\frac{dH}{d\Omega_s}(\Omega_s, \Omega_p) = 2\pi \int_0^{+\infty} \bar{\phi}(\Omega) \frac{dw}{d\Omega_s} \Omega d\Omega. \quad (A5)$$

Equation (A1) allows us to calculate the derivative of w with respect to S : for $\Omega_s < \Omega_p$ and $\Omega_p - \Omega_s < \Omega < \Omega_p + \Omega_s$:

$$\frac{dw}{d\Omega_s} = \frac{-2}{\pi\Omega_s^3} [\Omega^2 \text{Arc cos}(X_1/\Omega_p) - Y\Omega]. \quad (A6a)$$

For $\Omega_s > \Omega_p$ and $\Omega_s - \Omega_p < \Omega < \Omega_s + \Omega_p$,

$$dw/d\Omega_s = (2\Omega_s/\pi\Omega_p^2) \text{Arc cos}(X_2/\Omega_s) \quad (A6b)$$

In all other cases,

$$dw/d\Omega_s = 0. \quad (A6c)$$

We can note parenthetically that, from Eqs. (A5) and (A6a), it can be shown, using an appropriate Taylor expansion, that $dH/d\Omega_s(0, \Omega_p) = 0$; this agrees with the behavior near $\Omega_s = 0$ of the curves of Figs. 6-8.

Let us now consider the sign of the derivative Eq. (A5):

$$\frac{dH}{d\Omega_s}(\Omega_{p+}, \Omega_p) = \frac{4}{\Omega_p} \int_0^{2\Omega_p} \bar{\phi}(\Omega) \text{Arc cos} \frac{\Omega}{2\Omega_p} \Omega d\Omega. \quad (\text{A7})$$

As the noise power spectrum $\bar{\phi}(\Omega)$ is necessarily non-negative and $0 < \Omega < 2\Omega_p$, the integrand of Eq. (A7) is non-negative and the result is positive.

We now study the case $\Omega_s = \Omega_{p-}$:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\Omega_s}(\Omega_{p-}, \Omega_p) &= \frac{-4}{\Omega_p} \int_0^{2\Omega_p} \bar{\phi}(\Omega) \left\{ \text{Arc cos} \frac{\Omega}{2\Omega_p} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2\Omega}{2\Omega_p} \left[1 - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_p} \right)^2 \right]^{1/2} \right\} \Omega d\Omega \\ &= -16\Omega_p \int_0^1 \bar{\phi}(2\Omega_p t) [\text{Arc cost} - 2t(1-t^2)^{1/2}] t dt. \quad (\text{A8}) \end{aligned}$$

It is easy to show that

$$\int_0^1 [\text{Arc cost} - 2t(1-t^2)^{1/2}] t dt = 0. \quad (\text{A9})$$

The consideration of the graph of the function $t[\text{Arc cost} - 2t(1-t^2)^{1/2}]$ (see Fig. 12) and the fact that $\bar{\phi}$ is decreasing (see text) shows that

$$(dH/d\Omega_s)(\Omega_{p-}, \Omega_p) \leq 0, \quad (\text{A10})$$

the value zero being only attainable if $\bar{\phi}$ is constant over $0 < \Omega < \Omega_p$.

To compare the moduli of $(dH/d\Omega_s)(\Omega_{p-}, \Omega_p)$ and $(dH/d\Omega_s)(\Omega_{p+}, \Omega_p)$, we calculate their sum:

$$\begin{aligned} \frac{dH}{d\Omega_s}(\Omega_{p-}, \Omega_p) + \frac{dH}{d\Omega_s}(\Omega_{p+}, \Omega_p) \\ = \frac{4}{\Omega_p} \int_0^{2\Omega_p} \bar{\phi}(\Omega) \frac{2\Omega}{2\Omega_p} \left[1 - \left(\frac{\Omega}{2\Omega_p} \right)^2 \right]^{1/2} \Omega d\Omega. \quad (\text{A11}) \end{aligned}$$

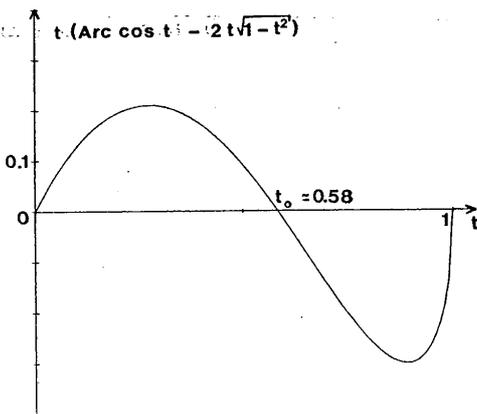


FIG. 12. Explaining Eq. (A10).

This expression is positive because the integrand is everywhere non-negative.

It follows from this Appendix that:

(i) the expected value of the intensity transmittance has a minimum with discontinuous derivative for $\Omega_s = \Omega_p$; the absolute value of the slope is greater to the right ($\Omega_s = \Omega_{p+}$) than to the left; only the slope to the left can be zero, and that happens for a flat noise power spectrum over at least twice the radius of the pupil in reduced coordinates;

(ii) the discontinuity in the derivative of the intensity transmittance for $\Omega_s = \Omega_p$ is by no means surprising: it is due to the discontinuities in the functions $\bar{s}(\Omega)$ and $\bar{p}(\Omega)$ describing the source and the pupil [Eqs. (11)-(13)].

- 1G. Häusler and A. W. Lohmann, "Hybrid Image Processing," in *Proceedings of the International Conference on Applications of Holography and Optical Data Processing* (International Commission of Optics, Jerusalem, 1976), paper MB-1.
- 2G. L. Rogers, "Non-coherent optical processing," *Opt. Las. Technol.* 7, 153-162(1975).
- 3P. Chavel and S. Lowenthal, "A method of incoherent optical-image processing using synthetic holograms," *J. Opt. Soc. Am.* 66, 14-23(1976).
- 4J. W. Goodman, "Noise in Coherent Optical Information Processing," in *Optical Information Processing*, edited by Yu. E. Nesterikhin, G. W. Stroke, and W. E. Kock (Plenum, New York, 1976), pp. 85-103.
- 5D. Tichenor and J. W. Goodman, "Practical Noise Limitations in Holographic Image Deblurring," in *Proceedings of the International Optical Computing Conference* (I.E.E.E., Washington, D.C., 1975, I.E.E.E. Catalog No. 75 CH 0941-5C), pp. 82-84.
- 6R. S. Powers and J. W. Goodman, "Error rates in computer-generated holographic memories," *Appl. Opt.* 14, 1690-1701(1975).
- 7W. M. W. Abney, "On the accuracy of the grease spot photometer for measuring the density of photographic plates, and a note on the sector photometer," *J. Soc. Chem. Ind.* 9, 722-725(1890).
- 8W. M. W. Abney, "Grease spot photometer measures," *J. Soc. Chem. Ind.* 10, 18-20(1891).
- 9F. Hurter and V. C. Driffield, "Reply to the preceding communication of Captain Abney, 'On the accuracy of the grease spot photometer for measuring the density of photographic plates, and a note on the sector photometer,'" *J. Soc. Chem. Ind.* 9, 725(1890).
- 10F. Hurter and V. C. Driffield, "The sector and grease spot photometers and their results," *J. Soc. Chem. Ind.* 10, 20-24(1891).
- 11F. Hurter and V. C. Driffield, "The sector and grease spot photometers," *J. Soc. Chem. Ind.* 10, 98-100(1891).
- 12F. Hurter, "The sector and grease spot photometers," *J. Soc. Chem. Ind.* 10, 318(1891).
- 13A. Callier, "Absorption und Diffusion des Lichtes in der entwickelten photographischen Platte, nach Messungen mit dem Martenschen Polarisationphotometer," *Z. Wiss. Photogr. Photochem. Photochem.* 8, 257-272(1909).
- 14A. Callier, *Photogr. J.* 49(NS33), 200(1909).
- 15P. Vernier, "Sur l'action photographique des électrons—Application aux observations astronomiques," *Bull. Astron.* 12, 84-127(1959).
- 16P. Vernier, "Etude de l'effet Callier et de sa relation avec la granularité des plaques photographiques," *C. R. Acad. Sci. (Paris)* 246, 1527-1530(1958).
- 17P. Vernier, "Conditions for linearity between density and exposure for photographic plates," *J. Opt. Soc. Am.* 59, 444-454(1969).
- 18F. Hurter and V. C. Driffield, "Photo-chemical investigations and a new method of determination of the sensitiveness of photographic plates," *J. Soc. Chem. Ind.* 9, 455-469(1890).
- 19M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, 2nd ed. (Pergamon, New York, 1964), Chap. X.
- 20R. Görisch, "Untersuchungen über den Callier-Effekt I," *Z. Wiss. Photogr. Photochem. Photochem.* 48, 85-102(1953).
- 21J. L. Tupper, "General sensitometry," in *The Theory of the Pho-*

- tographic Process*, 3rd ed., edited by C. E. K. Mees and T. H. James (Macmillan, New York, 1966), pp. 409-436.
- ²²P. Vernier, "Définition du contour du spot d'un densitomètre, effet Callier et granulation photographique," *Rev. Opt.* **39**, 505-515(1960).
- ²³A. M. Koerner and C. Tuttle, "Experimental determination of photographic density," *J. Opt. Soc. Am.* **27**, 241-256(1937).
- ²⁴C. Tuttle and J. W. McFarlane, "The measurement of density in variable density sound film," *J. Soc. Motion Pict. Telev. Eng.* **15**, 345-351(1930).
- ²⁵H. J. McNicholas, "Absolute methods in reflectometry," *Natl. Bur. Stand. J. Res.* **1**, 29-73(1928).
- ²⁶H. von Helmholtz, *Handbuch der physiologischen Optik*, 1st ed. (Voss, Leipzig, 1856), pp. 166-191.
- ²⁷P. Croce and M. Marquet, "Détermination optique du "bruit de fond" photographique," *Opt. Acta* **2**, 107-108(1955).
- ²⁸G. B. Brandt, "Coherent optical power spectra of photographic materials," *Appl. Opt.* **9**, 1424-1428(1970).
- ²⁹K. Biedermann, "The scattered flux spectrum of photographic materials for holography," *Optik* **31**, 367-389(1970).
- ³⁰E. N. Leith, "Photographic film as an element of a coherent optical system," *J. Photogr. Soc. Am.* **6**, 75-80(1962).
- ³¹C. B. Burckhardt, "Storage capacity of an optically formed spatial filter for character recognition," *Appl. Opt.* **6**, 1359-1366(1967).
- ³²H. Stark, W. R. Bennett, and M. Arm, "Design considerations in power spectra measurements by diffraction of coherent light," *Appl. Opt.* **8**, 2165-2172(1969).
- ³³H. Stark, "Some film-noise measurements by diffraction of coherent light," *Appl. Opt.* **10**, 333-337(1971).
- ³⁴D. H. R. Vilkomerson, "Measurements of the noise spectral power density of photosensitive materials at high spatial frequencies," *Appl. Opt.* **9**, 2080-2087(1970).
- ³⁵H. M. Smith, "Light scattering in photographic materials for holography," *Appl. Opt.* **11**, 26-32(1972).
- ³⁶C. E. Thomas, "Film characteristics pertinent to coherent optical data processing systems," *Appl. Opt.* **11**, 1756-1765(1972).
- ³⁷J. C. Dainty and R. Shaw, *Image Science* (Academic, London, 1974) pp. 68-115.
- ³⁸C. Lanczos, *Applied Analysis* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J. 1956).
- ³⁹M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965), pp. 887 and 916.
- ⁴⁰S. Lowenthal and P. Chavel, "Noise Problems in Optical Image Processing," in *Proceedings of the International Conference on Applications of Holography and Optical Data Processing* (International Commission of Optics, Jerusalem, 1976), paper TuA-1.
- ⁴¹R. E. Swing, "Conditions for microdensitometer linearity," *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 199-207(1972).
- ⁴²R. E. Kinzly, "Partially coherent imaging in a microdensitometer," *J. Opt. Soc. Am.* **62**, 386-394(1972).

Investigations of errors in sample autocovariance functions and their corresponding power spectra*

S. A. Armstrong and P. T. Gough

Instituté of Optics, University of Rochester, Rochester, New York 14627

(Received 9 December 1977)

This paper concerns the calculation of autocovariance (autocorrelation) functions and the corresponding power spectra from a set of finite samples selected from the infinite population. In many optical experiments involving statistical fluctuations we wish to subtract the population mean from each measurement when the population mean is unknown. It is shown that subtracting the sample mean from each sample measurement leads to definite and predictable errors in the autocovariance function and its corresponding power spectrum. We show in a computer-generated example that the error introduced has significance in the autocovariance function but has much less significance in the power spectrum.

INTRODUCTION

A typical optical experiment that involves statistical fluctuations is the calculation of the Wiener spectrum of a photographic grain sample.^{1,2} Similar optical experiments include measurements of atmospheric turbulence^{3,4} and measurements of rough optical surfaces.^{5,6} In most optical problems, we are dealing with a spatial random process for which a two-dimensional autocorrelation function or a two-dimensional power spectrum is desired. Such calculations are always done from finite data so that the problem becomes one of statistical estimation of the population parameters.

Usually the statistics of the random process can be considered to be isotropic as well as stationary and a profile or cross section of the two-dimensional autocorrelation function or power spectrum is sufficient. It is a subtle point that the geometry of our sampling aperture should be chosen according to whether we desire a profile of the two-dimensional autocorrelation function or a profile of the two-dimensional power spectrum. We may choose the sampling aperture to obey the

sampling theorem⁷ in both dimensions of a Cartesian coordinate system and thereby achieve a profile of the autocorrelation function but a spatially integrated version of the corresponding power spectrum. (That is, the circular symmetric spectrum, which can be visualized as a three dimensional solid, is integrated for any value of spatial frequency along one Cartesian coordinate of frequency. The integrated spectrum value is then projected onto the plane through the origin that corresponds to the orthogonal spatial frequency component.) Alternatively, we can choose the sampling aperture such that it obeys the sampling theorem in one dimension but is very large in the other to yield a profile of the power spectrum but a spatially integrated version of the two-dimensional autocorrelation function.⁸

The latter configuration (i.e., sampling with a long, narrow slit aperture) is the type most often used in generating Wiener spectra of photographic materials. In this case, we begin with a film which has been evenly exposed and uniformly developed to a specific average density; it is then scanned with the proper sampling aperture to produce a record of small density fluctuations.

Noise and coherence in optical image processing. II. Noise fluctuations

Pierre Chavel and Serge Lowenthal

Institut d'Optique, Université de Paris-Sud, B.P. 43, 91406 Orsay, France
(Received 18 August 1977)

Fluctuations in image illuminance resulting from various sources of optical noise are studied as a function of the spatial coherence of the illumination. It is shown that noise fluctuations caused by the pupil plane can be reduced considerably by using incoherent, or even partially coherent, rather than coherent illumination. Conversely, noise caused by defects in the object plane is not affected by the degree of coherence, except for phase noise which is suppressed in incoherent light. Expressions for noise fluctuations are developed on the basis of a simplifying Gaussian assumption for the noise sources; the validity of this assumption is justified.

I. INTRODUCTION

Noise appears to be a severe limitation to the practical implementation of processing by optical filtering in coherent illumination. Although processing by incoherent filtering is known to be less flexible, it shows in a number of circumstances the same possibilities as coherent filtering.¹⁻³ Incoherent filtering is also known for giving a better signal-to-noise ratio than coherent filtering.

Our aim is to compare by a detailed analysis the principal noise effects for coherent and incoherent (and partially coherent) illumination and then to decide whether incoherent processing should be preferred or not to coherent processing, in spite of its possibly more cumbersome implementation.

In this context, the first part of this work⁴ has dealt with the preliminary question of the influence of coherence on the contrast of a grainy image; that problem was a question of first-order statistics of the image illuminance.

We now turn to the central point of the second-order statistics, i.e., noise fluctuations. A useful classification of noise types in optics refers to the part of the system where the noise comes from: input noise, optical setup noise, and detector noise. Except for the detector noise, we extend here the short description already given.¹

Setup noise is analyzed in Sec. III. For input noise (Secs. IV and V), we consider film grain noise, input impulse noise, and phase noise. Unfortunately, the statistics are not always as nicely Gaussian as desired; some considerations to overcome these difficulties are developed in the Appendix.

Before entering the detailed analysis of the phenomena, let us have a first insight into the subject by some simple physical arguments. Let us consider an incoherent illuminating source of finite but variable aperture. Then using the terminology of communication theory, it can be said that the transfer of information from the input (object) to the output (processed image) is carried out by a certain number of channels; each point of the source corresponds to one channel, and the output is the incoherent superposition of the different outputs of the different channels. The coherent case corresponds to one source point, i.e., one channel. The incoherent case corresponds to a large source, i.e., to a large number (to be made more precise later on) of channels. If the noise is present in the input, then all channels carry the same noise and there is no gain in using several channels. If the noise does not depend

on the input, but is inherent to each channel (as will be the case for the noise coming from the pupil), then the gain in using several channels is equal to the square root of the number of channels. This brief reasoning does not account for all peculiarities to be discussed, such as input phase noise, but gives a good first understanding of the question.

II. GENERAL FORM OF IMAGE STATISTICS AS A FUNCTION OF ILLUMINATING AND IMAGING APERTURE

The schematic setup in Fig. 1 works in Köhler illumination.

$\mathbf{r}(x,y)$ is a point in the object plane Π or in the image plane Π' ; $\Omega(u,v) = N/\lambda d$ is a point in the source plane Σ or in its image Σ' (pupil of the system), expressed as a spatial frequency; $s(\mathbf{r})$ is the degree of coherence in the object plane; $\tilde{s}(\Omega)$, the Fourier transform of $s(\mathbf{r})$, is apart from a constant factor the luminance (radiance) of the quasimonochromatic, spatially incoherent source Σ .

For the coherent case, we set: $\tilde{s}(\Omega) = C\delta(\Omega)$, where C is a constant and δ the Dirac function; $p(\mathbf{r})$ is the coherent impulse response of the imaging system; $\tilde{p}(\Omega)$, its Fourier transform, is the amplitude transmittance of the pupil P .

For simplicity, all the optical intervals d are the same; therefore, with suitable axis orientations, the illuminating and imaging magnifications are $m = +1$.

What we wish to do is to express a signal-to-noise ratio for the image illuminance as a function of the source and imaging apertures. The deterministic image illuminance is given by the theory of partial coherence⁵:

$$I(\mathbf{r}) = \int \tilde{s}(\Omega) i(\mathbf{r}, \Omega) d\Omega \quad (1)$$

with, if τ is the object amplitude transmittance,

$$i(\mathbf{r}, \Omega) = \left| \int \tau(\mathbf{r}_1) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \exp 2i\pi\Omega \cdot \mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_1 \right|^2 = |a(\mathbf{r}, \Omega)|^2, \quad (2)$$

where a is the normalized complex amplitude in the image due to the point Ω of the source; the center dot denotes the scalar product.

For a description of the noise properties of the system, we need the statistical expectation $\langle I(\mathbf{r}) \rangle$ of the image illuminance, its variance $\sigma_I^2(\mathbf{r})$ and a signal-to-noise ratio that we choose following Goodman⁶ as $\rho = \langle I \rangle / \sigma_I$.

plane due to the object modulation. Both difficulties can be overcome in two ways: either by taking space averages of signal and of noise over the finite image plane, or by assuming the modulations are weak. The latter method is probably more realistic in the sense that we do not eliminate the modulation by space averaging. In addition it may be noted that the influence of noise is precisely the greatest for small modulations. Therefore we write the object amplitude transmittance as

$$\tau(\mathbf{r}) = [\tau_c + m(\mathbf{r})]F(\mathbf{r}), \quad \max|m| \ll \tau_c \quad (8)$$

where τ_c is a constant, $m(\mathbf{r})$ the small modulation and $F(\mathbf{r})$ the object frame function which is 1 in the object and 0 elsewhere. Moreover, for the sake of simplicity, we assume the modulation $m(\mathbf{r})$ to be of low spatial frequency, i.e., to vary slowly when compared with the impulse response $p(r)$.

We now calculate the average image illuminance $\langle I \rangle$, its variance σ_I^2 and the signal-to-noise ratio (SNR) $\langle I \rangle / \sigma_I$ for a finite size source, according to Sec. II. This problem is similar to the study of speckle in partially coherent light.⁷⁻⁹

The pupil amplitude transmittance is

$$\tilde{p}(\Omega) = \langle \tilde{p}(\Omega) \rangle + \tilde{n}(\Omega), \quad (9)$$

where the fluctuation n is of zero mean by definition. Because of the pupil noise $\tilde{p}(\Omega)$ is different from the ideal pupil function $\tilde{P}(\Omega)$, equal to one inside the pupil and to zero elsewhere.

The average transmittance

$$\langle \tilde{p}(\Omega) \rangle = K\tilde{P}(\Omega), \quad K < 1 \quad (10)$$

is in fact the noise-free pupil $\tilde{P}(\Omega)$ attenuated by scattering. By the assumption of stationarity, K is constant all over the pupil. The fluctuating term $\tilde{n}(\Omega)$ can be rewritten as

$$\tilde{n}(\Omega) = \tilde{P}(\Omega)\tilde{N}(\Omega), \quad (11)$$

where $\tilde{N}(\Omega)$ is $\tilde{n}(\Omega)$ continued over R^2 . \tilde{N} is stationary by consequence of assumption (a).

We shall now sum up the contributions due to each point Ω of the source; for a given point the elementary complex image amplitude is given by Eqs. (2)–(10) and using the assumptions of low spatial frequencies, by

$$\langle a(\mathbf{r}, \Omega) \rangle = K\tau(\mathbf{r})\tilde{P}(\Omega) \exp(2\pi i\Omega \cdot \mathbf{r}) \quad (12)$$

which represents a replica of the object amplitude $\tau(\mathbf{r})$ attenuated by the scattering factor K and phase-shifted by the skew illumination.

The average image illuminance is then obtained from Eq. (1) as

$$\langle I(\mathbf{r}) \rangle = K^2\tau^2(\mathbf{r}) \int \tilde{s}(\Omega)\tilde{P}(\Omega) d\Omega, \quad (13)$$

where $\tilde{s}(\Omega)$ is the source frame function.

The variance Eq. (5) can be rewritten

$$\begin{aligned} \sigma_I^2(\mathbf{r}) = 2\tau^2(\mathbf{r}) \operatorname{Re} \int \int \tilde{s}(\Omega_1)\tilde{s}(\Omega_2)K^2\tilde{P}(\Omega_1)\tilde{P}(\Omega_2) \\ \times \{ \langle g^*(\mathbf{r}, \Omega_1)g(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle \\ \times \exp[-2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_2 - \Omega_1)] \\ + \langle g(\mathbf{r}, \Omega_1)g(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle \\ \times \exp[-2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_1 + \Omega_2)] \} d\Omega_1 d\Omega_2, \quad (14) \end{aligned}$$

where the noise term g [see Eq. (3)] is expressed for a single point Ω of the source as

$$g(\mathbf{r}, \Omega) = \int \tau(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \exp(2i\pi\Omega \cdot \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (15)$$

For Eq. (14), we need the second-order moments of Eq. (15), and subsequently the following statistical averages:

$$\langle n(\mathbf{r}_1)n^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \phi(\mathbf{r}_2)P(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \quad (16)$$

and

$$\langle n(\mathbf{r}_1)n(\mathbf{r}_2) \rangle = \psi(-\mathbf{r}_2)H(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2),$$

where ϕ and ψ are the Fourier transforms of the pupil second-order moments:

$$\tilde{\phi}(\Omega) = \langle \tilde{N}(\Omega_1)\tilde{N}^*(\Omega_1 + \Omega) \rangle \quad (17)$$

and

$$\tilde{\psi}(\Omega) = \langle \tilde{N}(\Omega_1)\tilde{N}(\Omega_1 + \Omega) \rangle.$$

$\tilde{\psi}$ is zero if \tilde{N} is a circular Gaussian process, i.e., a complex Gaussian process whose real and imaginary parts are uncorrelated and have the same variance. Such an assumption, however, would not be necessarily justified.

The moments of the noise term g are then obtained from Eqs. (8), (15), (16) and assumptions (a) and (c):

$$\langle g(\mathbf{r}, \Omega_1)g^*(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle = \phi\tilde{P}(\Omega_2)\tau_c^2\tilde{P}(\Omega_1 - \Omega_2) \quad (18)$$

and

$$\begin{aligned} \langle g(\mathbf{r}, \Omega_1)g(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle \\ = \psi\tilde{P}(\Omega_2)\tau_c^2\tilde{F}'(\Omega_2 - \Omega_1, 2\mathbf{r}) \exp(4i\pi\Omega_2 \cdot \mathbf{r}), \quad (19) \end{aligned}$$

where F' is the product of the object frame function F by an inverted and translated version of itself:

$$F'(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = F(\mathbf{r}_1)F(2\mathbf{r} - \mathbf{r}_1). \quad (20)$$

[The Fourier transform of F' in Eq. (19) is taken with respect to the first variable.]

The signal-to-noise ratio is then obtained from Eqs. (13) and (14) where Eqs. (18) and (19) have been used:

$$\frac{\langle I(\mathbf{r}) \rangle}{\sigma_I(\mathbf{r})} = \frac{\tau(\mathbf{r})K \int \tilde{s}(\Omega)P(\Omega) d\Omega}{(A_1 + A_2)^{1/2}} \quad (21)$$

with

$$\begin{aligned} A_1 = 2\phi\tau_c^2 \int \int \tilde{s}(\Omega_1)\tilde{s}(\Omega_2)\tilde{P}(\Omega_1)\tilde{P}(\Omega_2)\tilde{P}(\Omega_1 - \Omega_2) \\ \times \exp[-2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_2 - \Omega_1)] d\Omega_1 d\Omega_2 \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_2 = 2\operatorname{Re}\{\psi\tau_c^2 \int \int \tilde{s}(\Omega_1)\tilde{s}(\Omega_2)\tilde{P}(\Omega_1)\tilde{P}(\Omega_2)\tilde{F}'(\Omega_1 - \Omega_2, \mathbf{r}) \\ \times \exp[-2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_2 - \Omega_1)] d\Omega_1 d\Omega_2\}. \quad (23) \end{aligned}$$

This expression depends on the object point \mathbf{r} through the slowly varying object transmittance $\tau(\mathbf{r})$ in the numerator and through the function F' in the denominator. For small modulations [assumption (c)], we can, for the evaluation of this signal-to-noise ratio, set $\tau(\mathbf{r}) = \tau_c$.

Let us now express the SNR as a function of coherence. In the coherent case, the source aperture $\tilde{s}(\Omega)$ is narrow compared with all other functions of the variable Ω in Eq. (21); therefore, we have

$$\langle I \rangle / \sigma_I = K / [2\phi S_0 + 2\operatorname{Re}\psi S_0']^{1/2}, \quad (24)$$

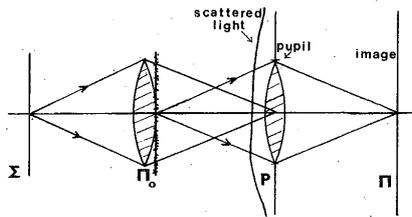


FIG. 5. Input grain noise.

IV. INPUT NOISE DUE TO GRANULARITY

Input grain noise is generated from photographic emulsions, but it corresponds to other situations too. Let the noisy input transparency be

$$\tau(\mathbf{r}) = \langle \tau(\mathbf{r}) \rangle + X(\mathbf{r}), \quad (32)$$

where $X(\mathbf{r})$ is the zero mean fluctuating part of $\tau(\mathbf{r})$. This fluctuation is responsible for two effects on the image illuminance (see Fig. 5):

- (i) Due to the variation of the average image illuminance, X creates a variation of the image contrast versus the degree of coherence. This effect corresponds in densitometry to the Callier effect and has been analyzed in part I of this paper.⁴
- (ii) Image fluctuations (our main interest here): we shall calculate the image illuminance variance, the SNR, and its variations as a function of the coherence. As in the case of pupil noise, some simplifying assumptions are necessary, but the nature of the grain noise does not allow us to suppose that the noise is weak with respect to the signal. The assumptions are as follows.
 - (a) Here again, for a single source point, the noise amplitude g in the image plane is only approximately Gaussian. If g is considered as a true Gaussian process, then (see Appendix) large errors may appear. Nevertheless, the true SNR is, in most cases, close to the SNR that is obtained when the input X itself is assumed to be Gaussian. The major exception is pure phase noise: this is explained in the Appendix, Sec. B, and the case will be considered in an other way in Sec. V.
 - (b) The autocorrelation of X is narrow compared with the impulse response $p(\mathbf{r})$.
 - (c) As in Sec. III and for the same reasons, the object is assumed to be of low contrast and we write

$$\tau(\mathbf{r}) = \tau_c + m(\mathbf{r}) + X(\mathbf{r}), \quad (33)$$

where m is the low spatial frequency modulation. The object frame function F [Eq. (8)] is not necessary here. τ_c and $m(\mathbf{r})$ are real. This assumption allows to consider $X(\mathbf{r})$ as a stationary process. Equations (1) and (2) then yield for the image term I_0 of Eq. (14)

$$I_0(r) = |\tau_c + m(r)|^2 \int \bar{s}(\Omega) \bar{p}(\Omega) d\Omega \quad (34)$$

The Callier effect introduces here a small difficulty in the definition of the signal-to-noise ratio. In the case of pupil noise (Sec. III) due to the weak-noise assumption, in the SNR $\langle I \rangle / \sigma_I$, only σ_I was depending on the coherence conditions.

For film grain noise, due to the Callier effect, the average illuminance (I) also depends on the degree of coherence. Therefore, we define two signal-to-noise ratios:

$$R = \langle I \rangle / \sigma_I, \quad (35a)$$

$$R_m = \langle I_m \rangle / \sigma_I, \quad (35b)$$

where $\langle I_m \rangle$ is the average of the modulated part only of $\langle I \rangle$. Then, in R_m only the denominator depends on the degree of coherence. The important quantity may be R or R_m depending on the practical situation.

From the assumption c, we obtain readily, neglecting the terms in m ,

$$\langle I \rangle \simeq \tau_c^2 + I_m + I_N, \quad (36a)$$

where

$$I_m \simeq 2\tau_c m(\mathbf{r}) \int \bar{s}(\Omega) \bar{p}(\Omega) d\Omega \quad (36b)$$

is the image modulation, where $\bar{s}(\Omega)$ and $\bar{p}(\Omega)$ are the source illuminance function and the noise-free pupil transmittance. I_N is the Callier term, i.e., the average noise illumination.

We now calculate $\langle I \rangle$, σ_I , and I_m with the assumptions above: the contribution $g(\mathbf{r}, \Omega)$ of point Ω of the source to the noise amplitude [see Eq. (3)] is a complex-valued Gaussian (noncircular) random variable; the object is a photograph of a weak, low-frequency modulation $m(\mathbf{r})$ on a constant background τ_c . Equations (5)–(7) show that we need to know $\langle g(\mathbf{r}, \Omega_1) g^*(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle$ and $\langle g(\mathbf{r}, \Omega_1) g(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle$. It is easily seen from Eqs. (2), (3), and (32) that

$$g(\mathbf{r}, \Omega) = \int X(\mathbf{r}_1) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \exp(2i\pi\Omega \cdot \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1. \quad (37)$$

From Eq. (37), we have to consider the two second-order moments of the stationary random process $X(\mathbf{r})$ which describes the granularity:

$$\begin{aligned} \phi_X(\mathbf{r}) &= \langle X(\mathbf{r}_1) X^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \rangle, \\ \psi_X(\mathbf{r}) &= \langle X(\mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}) \rangle. \end{aligned} \quad (38)$$

Making use of the assumption of microscopic correlation, which means that both ϕ_X and ψ_X are narrow when compared to the impulse response p , we get

$$\begin{aligned} \langle g(\mathbf{r}, \Omega_1) g^*(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle &= \bar{\phi}_X(-\Omega_1) \bar{\phi}_P(\Omega_1 - \Omega_2) \\ &\quad \times \exp[2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_1 - \Omega_2)], \\ \langle g(\mathbf{r}, \Omega_1) g(\mathbf{r}, \Omega_2) \rangle &= \bar{\psi}_X(-\Omega_1) \bar{\phi}_P(\Omega_1 + \Omega_2) \\ &\quad \times \exp[2i\pi\mathbf{r} \cdot (\Omega_1 + \Omega_2)], \end{aligned} \quad (39)$$

where $\bar{\phi}_P$ is the deterministic autocorrelation function of the pupil transmittance \bar{p} .

From Eqs. (5) and (39), we deduce $I_N(\mathbf{r})$ and $\sigma_I(\mathbf{r})$:

$$I_N(\mathbf{r}) = (1/A_R) \int \bar{s}(\Omega) \bar{\phi}_X(-\Omega) d\Omega, \quad (40)$$

where A_R is the resolution area [see Eq. (44)].

$$\sigma_I(\mathbf{r}) = P_1 + P_2 + 2Q_1 + 2\text{Re}Q_2$$

is reached as soon as the source can be considered as small with respect to the pupil. This again was not the case in Sec III (Fig. 2).

For the intermediate values of the size of the source, Eqs. (40) and (41) directly show that the quantities listed in Table I, with the exception of Q_2 which contains a complex factor, are real, positive, increasing functions of the size of the pupil. They all increase from zero for pupil area equal to 0 to a maximum corresponding to the incoherent case, but the rate of increase is not the same for all, so that the signal-to-noise ratio varies with the pupil area. To simplify the following discussion, we now reduce ourselves to the coherent and incoherent limits.

Following Eq. (35), since two useful signal-to-noise ratios have been introduced, we define two gains:

$$G = \frac{[(I)/\sigma_I]_{\text{incoherent}}}{[(I)/\sigma_I]_{\text{coherent}}}, \quad G_m = \frac{[I_m/\sigma_I]_{\text{incoherent}}}{[I_m/\sigma_I]_{\text{coherent}}}. \quad (50)$$

For G , the signal is the total average image illuminance $\langle I \rangle$; for G_m , the signal is uniquely the modulated part I_m .

We then obtain

$$G = \frac{1 + \alpha^2}{1 + \alpha^2/N_0} G_m \quad \text{and} \quad G_m \simeq \left[\frac{1 + \alpha^2/2N_0}{1 + \alpha^2/2} \right]^{1/2}, \quad (51)$$

where $\alpha = \sigma_x/\tau_c$, ratio of film complex amplitude standard deviation to the film mean transmittance, is a measure of the object noise contrast, and where in G_m the factors k, K_0, K_1, K_2 , close to unity, have been set equal to 1. Since we have assumed microscopic correlation, N_0 has to be large with respect to unity. Hence, N_0 can vary from a few units (coarse grain film) to large numbers (fine grain film), the terms coarse and fine grain being relative to the object resolution cell.

Now, for a given film, i.e., fixed α , when N_0 varies, the two gains G and G_m vary in opposite direction.

Through $\alpha = \sigma_x/\tau_c$, the gain is also dependent on the mean transmittance τ_c and the corresponding film standard deviation σ_x , but the conclusions on the overall variation of both α and N_0 are rather simple:

- (i) for α and α^2/N large (very noisy film), incoherent illumination is better than coherent illumination for average illuminance level observation ($G = N^{1/2}$) and worse for small modulation observation ($G_m = N^{-1/2}$);
- (ii) for all other cases, the input noise due to granularity has essentially the same effect in coherent or incoherent illumination.

V. SOME OTHER CASES OF INPUT NOISE

The noise due to granularity has been studied in detail in Sec. IV, because it is a fundamental limitation of the most common imaging device, the photographic emulsion. However, other kinds of input noise exist, and this section examines briefly three of them.

A. Case of phase defects

It is a well-known fact that phase defects are invisible in incoherent illumination, whereas they create disagreeable

artifacts in coherent light. This is obviously an advantage of incoherent illumination.

The study of phase noise was excluded from Sec. IV because phase noise cannot be Gaussian, as we shall show by a brief argument.

Let us consider a constant, real amplitude transmittance τ_R upon which a phase noise $\exp[i\phi(\mathbf{r})]$ is superimposed. With the notations introduced before, the average transmittance is

$$\langle \tau(\mathbf{r}) \rangle = \tau_R \langle \exp[i\phi(\mathbf{r})] \rangle. \quad (52)$$

The noisy fluctuation is

$$X(\mathbf{r}) = \tau_R \exp[i\phi(\mathbf{r})] - \langle \tau(\mathbf{r}) \rangle. \quad (53)$$

The values of the real and imaginary parts of X are by any means restricted to remain between finite boundaries, so that X cannot be a Gaussian process. Then, it could be said that even if X is not Gaussian, the noisy image amplitude g of Sec. IV can approach a Gaussian process, in the case of microscopic correlation, owing to the central limit theorem. It is explained in the Appendix why the central limit theorem does not apply straightforwardly in the incoherent case. Hence, we are in a case where the conclusions of Sec. IV are not valid.

Of course, from Eqs. (52) and (53), and from the general equation of image formation Eq. (1), it can be seen easily that the illuminance in the coherent case is, apart from a constant factor,

$$I(\mathbf{r}) = \left| \int \tau_R \exp[i\phi(\mathbf{r}_1)] p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \exp(2i\pi\Omega \cdot \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 \right|^2, \quad (54)$$

where the phase fluctuations obviously have an influence, whereas the illuminance in the incoherent case is, apart from a constant factor,

$$I(\mathbf{r}) = \int \tau_R^2 |\exp[i\phi(\mathbf{r}_1)]|^2 |p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)|^2 d\mathbf{r}_1 = \tau_R^2 \Sigma_P,$$

where the phase defects have no consequence.

B. Low-frequency noise

In Sec. IV, only defects subject to the assumption of microscopic correlation, i.e., very small defects, have been considered. The other extreme case corresponds to large, slowly varying defects. This case is easy to handle, so we shall consider it briefly in this subsection. We consider an amplitude transmittance:

$$\tau(\mathbf{r}) = \langle \tau(\mathbf{r}) \rangle + X(\mathbf{r}), \quad (56)$$

where $\langle \tau(\mathbf{r}) \rangle$ is deterministic, and $X(\mathbf{r})$ is a zero mean random fluctuation of low frequency.

By the assumption of low frequency, we mean that $X(\mathbf{r})$ varies slowly when compared to the amplitude impulse response $p(\mathbf{r})$ of the optical imaging system so that, from Eqs. (1) and (2), the image illuminances in the coherent, partially coherent and incoherent cases differ only by a constant multiplicative factor from

$$|\tau(\mathbf{r})|^2 = |\langle \tau(\mathbf{r}) \rangle + X(\mathbf{r})|^2. \quad (57)$$

Hence, low-frequency noise has the same effect for any degree of coherence.

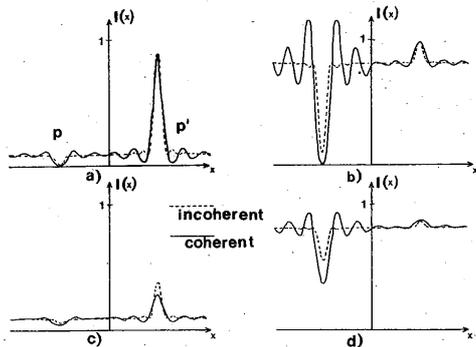


FIG. 7. Input impulse noise: effect of an opaque dust particle P (left) and of the negative image of a dust particle P' (right), both of size $1/N_d$ resolution cell, on the illuminance in the image plane of a constant background of intensity τ_c^2 : (a) $\tau_c = 0.3$, $N_d = 1.1$; (b) $\tau_c = 0.9$, $N_d = 1.1$; (c) $\tau_c = 0.3$, $N_d = 3$; (d) $\tau_c = 0.9$, $N_d = 3$.

and the noise contrast in the incoherent case is larger than in the coherent case by a factor between 1 and $1 + (1 - \tau_0)/2\tau_0$. This comparison shows that the input impulse noise has approximately the same effect in both extreme cases of coherence; the results of the discussion are illustrated in Fig. 7 on the simple example of one dark and one luminous dust particle seen through a square pupil: sections along one axis are shown for various values of N_d and τ_0 .

VI. CONCLUSION

We have studied in this paper the influence of coherence on noise in an optical image; two especially important kinds of noise, considered as characteristic, have been analyzed in detail: the setup noise (pupil noise) and the input noise. The results can be summarized as follows:

- (i) For setup noise, there is a definite advantage in using incoherent light, instead of coherent. The gain in SNR is then of the order of \sqrt{N} , where N is the number of degrees of freedom in the illuminating beam transmitted by the optical system. This gain increases with increasing illuminating aperture Ω_s up to a maximum reached for Ω_s equal to imaging aperture, and then remains constant. In other words, this means that the gain is maximum for an object coherence area equal to or smaller than the object resolution area.
- (ii) For input noise (impulse noise or granularity noise in the object), there is no significant difference between coherent and incoherent illumination, except for phase noise. Therefore, the main advantage of incoherent illumination for the input noise is the suppression of phase noise.
- (iii) For the sake of completeness, we recall the result of part I of this paper: due to the Callier effect, the image contrast is maximum when the illuminating aperture equals the imaging aperture.
- (iv) The case of deterministic parasitic reflections has not been considered in detail, but we think that it is obvious to anybody having ever worked with a laser that reflection fringes are rather disturbing in coherent light. A simple calculation shows that the contrast of these fringes is given by

$$C = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \frac{2\rho^{1/2}}{1 + \rho},$$

where I is the total image illumination and ρ the ratio of the parasitic to the noiseless image illumination. For example, for $\rho = 0.01$, the fringe contrast is 20%. In incoherent illumination, the effect of parasitic reflections is only an approximately constant background of illumination ρI superimposed on the image.

The practical conclusion of our study is that it is never a disadvantage, with respect to noise, to use incoherent illumination, and therefore that incoherent optical processing should be used whenever possible. In a coherent optical processing setup, clearness and optical quality of the components are of crucial importance everywhere, with the consequence that it is very difficult to overcome noise problems, whereas in an incoherent setup, noise due to the optical components is relatively harmless, and attention need only be given to amplitude defects of the object plane (grain noise, dust).

As early as 1966, Lohmann, Lowenthal, and their co-workers^{14,15} have pointed out the possibility of improving the quality of optical processing by using incoherent light. The analysis developed in this paper is a justification of their claims, and we hope that incoherent methods, which are already used in a number of experiments (for bibliography, see Refs. 1, 2, and 3) will become more and more important and numerous because they should yield good performances in a large number of practical situations; they can be an important alternative to digital processing, at least for a certain class of operations, involving low-cost convolutions with a large number of degrees of freedom.

ACKNOWLEDGMENT

We wish to thank Dr. D. Joyeux for numerous helpful discussions.

APPENDIX: ABOUT GAUSSIAN STATISTICS

This Appendix is about the use of the central limit theorem to justify the Gaussian character of the noise in the image plane. In the cases considered in Secs. III and IV of this paper, the amplitude due to the noise is the result of the summation of a large number of independent random contributions: for the pupil noise, every image point receives light from the whole pupil; for the input grain noise, by our assumption of microscopic correlation, there are many grains in one diffraction area. It seems therefore justified to assume Gaussian statistics for the amplitude in the image plane, as a consequence of the central limit theorem. Although this assumption is fully justified in the coherent case, as is demonstrated by the experimental investigations on speckle statistics published by McKechnie,¹⁶ it will be shown here that the central limit theorem is of no use in the incoherent case. Hence, in the incoherent case, Gaussian statistics can only be used if the physical noise source (the grain or the pupil defects) is itself Gaussian; this is what we have done in the body of the paper. The non-Gaussian case will be briefly considered at the end of this Appendix (with special attention to the input phase noise), in order to evaluate whether the non-Gaussian

We now execute the integrations with respect to Ω_1 and Ω_2 :

$$S_2 = 2 \int \int p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \times \text{Re} \{ |\tau_0(\mathbf{r})|^2 \phi_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \tau_0^*(\mathbf{r}) \psi_X^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \} d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (\text{A15})$$

$$S_3 = 4 \text{Re} \int \int \int s(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_3) \times \tau_0(\mathbf{r}) \Gamma_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}_3. \quad (\text{A16})$$

In the latter equation, the integration with respect to \mathbf{r}_3 is simplified by the fact that, in the incoherent case, the spatial coherence function s is very narrow with respect to the impulse response p and to Γ_X :

$$S_3 = 4 \text{Re} \int \int p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \tau_0(\mathbf{r}) \times \Gamma_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2. \quad (\text{A17})$$

Equations (A15) and (A17) are rather similar: the only difference is that $\tau_0^*(\mathbf{r})$ is replaced by $\tau_0(\mathbf{r})$ and that ϕ_X or ψ_X are replaced by Γ_X , which, as we have said above, is of the same order as ϕ_X except for special cases of the grain statistics. If, as in the coherent case, we denote by ϕ_0 the order of magnitude of $\phi_X(0)$, and by A_N the correlation area of the noise, both S_2 and S_3 are seen to be of the order of $\phi_0 A_N S_p / \lambda^2 d^2$; this shows that the Gaussian assumption is not justified in the incoherent case. Mathematically, this arises from the fact that in the coherent case, Γ_X appears with two different arguments over which two independent integrations are performed, whereas here the two arguments of Γ_X [Eq. (A17)] are equal. As previously, similar results would be obtained for T_4 and for the case of pupil noise.

Let us try to explain physically this point in a few words. The discussion of the coherent case has shown that the noise

amplitude in the image plane $g(\mathbf{r}, \Omega)$ can be considered as the sum of N_0 independent random contributions, so that it obeys Gaussian statistics. This is also true in the incoherent case, but there the intensity in the image plane is not so directly related to $g(\mathbf{r}, \Omega)$: it is obtained from $g(\mathbf{r}, \Omega)$ by interference with the deterministic component $\langle a(\mathbf{r}, \Omega) \rangle$, squaring and then integrating over Ω , which means that the noise contributions due to each point of the source first interfere with the signal, and then add mutually incoherently. The result is that the statistics of the illuminance can be obtained from those of $g(\mathbf{r}, \Omega)$ only through an integration over Ω . As, from Eq. (A6), the signal $\langle a \rangle$ depends on Ω through the pupil term $\bar{p}(\Omega)$, it is seen that the integration with respect to Ω_2 is limited by the size of the pupil for T_2 and is not for T_3 ; hence, for each point Ω of the source, T_3 is of the order of T_2/N_0 , but the integration over the source is responsible for an amplification of T_3 .

B. Input Phase Noise

The preceding subsection has shown that the only way to simplify the calculations in Secs. III and IV of this paper was, as we have done, to suppose that the physical source of the noise was itself Gaussian. In the general case, the Gaussian assumption gives good results in coherent illumination, but in incoherent illumination the intensity fluctuations can only be obtained by a complete calculation of the terms T_2 , T_3 , and T_4 of Eqs. (A1)–(A4). This point has already been mentioned in sec. V, where it has been pointed out that a phase noise can never be Gaussian.

To show that the variance of the illuminance in the case of phase input noise and incoherent illumination is zero, we go back to Eqs. (A15) and (A17) giving the contributions S_2 and S_3 to σ_I^2 of the second- and third-order terms T_2 and T_3 , and we add the contribution S_4 of the fourth-order term:

$$S_4 = \int \int \int \int \bar{s}(\Omega_1) \bar{s}(\Omega_2) T_4(\mathbf{r}, \Omega_1, \Omega_2) d\Omega_1 d\Omega_2 \\ = \int \int \int \int \bar{s}(\Omega_1) \bar{s}(\Omega_2) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_1) p(\mathbf{r} - \mathbf{r}'_2) \\ \times \{ \langle X(\mathbf{r}_1) X^*(\mathbf{r}'_1) X(\mathbf{r}_2) X^*(\mathbf{r}'_2) \rangle - \langle X(\mathbf{r}_1) X^*(\mathbf{r}'_1) \rangle \langle X(\mathbf{r}_2) X^*(\mathbf{r}'_2) \rangle \} \\ \times \exp 2i\pi[\Omega_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'_1) + \Omega_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}'_2)] d\Omega_1 d\Omega_2 d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2 d\mathbf{r}'_1 d\mathbf{r}'_2 \\ = \int \int p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \Delta_X(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (\text{A18})$$

where

$$\Delta_X(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle |X(\mathbf{r}_1)|^2 |X(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle - \langle |X(\mathbf{r}_1)|^2 \rangle \langle |X(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle. \quad (\text{A19})$$

Phase noise is described by Eqs. (52) and (53), which allow to express the second-, third-, and fourth-order statistics of X appearing in Eqs. (A15), (A17), and (A18); if we assume that the phase defect is stationary, and if we let

$$H_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle \exp i[\phi(\mathbf{r}_2) - \phi(\mathbf{r}_1)] \rangle, \quad (\text{A20})$$

$$H_2(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle \exp i[\phi(\mathbf{r}_2) + \phi(\mathbf{r}_1)] \rangle, \quad (\text{A21})$$

then

$$\phi_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle X^*(\mathbf{r}_1) X(\mathbf{r}_2) \rangle \\ = \tau_R^2 H_1(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) - |\tau_0|^2, \quad (\text{A22})$$

$$\psi_X^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle X^*(\mathbf{r}_1) X^*(\mathbf{r}_2) \rangle \\ = \tau_R^2 H_2^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) - \tau_0^{*2}, \quad (\text{A23})$$

$$\Gamma_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \langle X^*(\mathbf{r}_1) | X(\mathbf{r}_2) |^2 \rangle \\ = 2|\tau_0|^2 \tau_0^* - \tau_R^2 \tau_0^* H_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ - \tau_R^2 \tau_0 H_2^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (\text{A24})$$

$$\Delta_X(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 2 \text{Re} [\tau_R^2 |\tau_0|^2 H_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \\ + \tau_R \tau_0^2 H_2^*(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] - 4|\tau_0|^4. \quad (\text{A25})$$

Replacing the statistics of X by these expressions in Eqs. (A15), (A17), and (A18) allows to express the variance of the illuminance:

$$\sigma_I^2 = S_2 + S_3 + S_4 \\ = \int \int p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) p^2(\mathbf{r} - \mathbf{r}_2) \mathcal{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) d\mathbf{r}_1 d\mathbf{r}_2, \quad (\text{A26})$$

where the integrand \mathcal{S} is

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = 2 \text{Re} \{ |\tau_0|^2 \phi_1(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) + \tau_0^2 \psi_X^*(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \} \\ + 4 \text{Re} \{ \tau_0 \Gamma_X(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) \} + \Delta_X(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (\text{A27})$$

Using Eqs. (A22)–(A25), it is seen that $\mathcal{S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ vanishes identically for any $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, and that moreover

A COMPLEMENT TO THE THEORY OF LOHMANN-TYPE COMPUTER HOLOGRAMS

J.P. HUGONIN and P. CHAVEL

Institut d'Optique, Université de Paris-Sud, Bâtiment 503, 91405 Orsay, France

Received 1 December 1975

The introduction by Lohmann and co-workers of the detour phase method in realizing synthetic holograms has been an important step in the history of computer generated holography. In 1969, Brown and Lohmann proposed an improvement to their method: they used true phase and amplitude coding at the center of the diffracting aperture instead of periodically sampled phases and amplitudes. We present a mathematical analysis of this procedure and examine the approximation related to its practical realization.

1. Introduction

The synthesis of holograms by computer has become an important subject of interest since the work of Lohmann, Brown and Paris [1,2], who introduced the convenient phase coding scheme called the detour phase method. Moreover, these holograms were binary and hence, suitable for computer plotting and easy photoreduction.

A great deal of work published since the appearance of refs. [1,2] was to modify their method, either by making it less expensive, or by increasing the quality of the wavefront synthesized [3-7]. Brown and Lohmann [8] presented an improved version of the detour phase method, where the coded phase is the phase at the center of the diffracting aperture instead of that at the center of the sampling cell. In ref. [8], experimental results show that this method works.

The purpose of this paper is to propose a mathematical justification of the latter method and to compare it theoretically with the original detour phase method. This will be done in section 3 after we have pointed out in section 2 some properties of the detour phase. We will restrict ourselves to the case of Fourier holograms.

2. The two kinds of detour phase

In this section, we recall briefly the detour phase method and the approximations related with it.

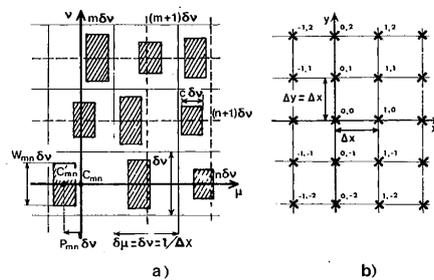


Fig. 1. Notations: a) Parameters describing the cells and the diffracting apertures in the synthetic hologram. b) Fraunhofer diffraction pattern of the synthetic hologram: the crosses indicate the centers of the orders.

Lohmann-type computer generated holograms, i.e. holograms containing in each cell one rectangular aperture of proper position and size, can be described by the following parameters: $\delta\mu$, $\delta\nu$, m , n , c , W_{mn} and P_{mn} , introduced in fig. 1a. Such holograms diffract light both along the x - and y -direction. The centers of the orders in the Fourier plane are separated by an amount

$$\Delta x = \Delta y = 1/\delta\mu = 1/\delta\nu, \tag{1}$$

and one of these orders, generally the one labelled (1,0), is the desired image (see fig. 1b).

Our purpose is to discuss the approximations of Lohmann-type holograms related with aperture sizes

and positions: the size and the position of these apertures are determined by the amplitude and the phase of the coded wave. However, from the sampling theorem, the apertures should be points instead of rectangles and should be located at the center of the cells. The corresponding approximation is stated in ref. [2], eq. (17), as follows:

$$\text{sinc}\{c\delta\nu(x-x_0)\} \simeq \text{const in } |x| < \Delta x/2, \quad (2a)$$

$$\text{sinc}(W_{mn}\delta\nu y) \simeq 1 \quad \text{in } |y| < \Delta x/2, \quad (2b)$$

$$\exp(2i\pi x P_{mn}\delta\nu) \simeq 1 \quad \text{in } |x| < \Delta x/2. \quad (2c)$$

Here, $(-x_0, 0)$ are the coordinates of the center of the useful order in the (x, y) plane. Approximations (2a) and (2b) are related to the diffraction by the rectangular aperture (m, n) . The first approximation can easily be compensated for (see ref. [2]); anyway, they both are far less damageable to the quality of the synthesized wavefront than approximation (2c) is. We shall deal only with the latter one, and assume that the rectangle is replaced by a luminous point of amplitude proportional to W_{mn} [in which case eqs. (2a) and (2b) are rigorous].

Approximation (2c) is related with the detour phase method: if

$$2\pi P_{mn} = \phi_{mn}, \quad (3)$$

where ϕ_{mn} is the phase of the synthesized wavefront, the phase coding is seen (2c) to be rigorous at the central line $x = x_0$ of the object, and approximate anywhere else. This becomes worse as one goes far from the central line.

A method to limit the influence of this approximation is to consider an object of size notably smaller than the size Δx of the reconstructed orders, but this leads to oversampling, i.e. to a waste of number of cells and hence of computer time and, as a consequence, to difficult plotting and photoreducing conditions.

A second method was suggested by Lohmann and Paris in ref. [2]. This consists of an iterative algorithm to compensate for the approximation. As pointed out by Brown and Lohmann in 1969 [8], this iterative method is rather expensive in computer time and yields relatively poor results.

In the latter article [8], the authors proposed another method which is simpler and more successful, according to the following idea: the phase ϕ_{mn} [eq. (3)]

coded by the detour phase method is the phase at the center C_{mn} of the (mn) th cell, but not at the center C'_{mn} of the rectangular aperture which actually diffracts light onto the image plane. If we replace in (3) the sampled phase ϕ_{mn} by the true phase at the point C'_{mn} , the hologram improves. Moreover, W_{mn} is then related to the amplitude at point C'_{mn} and not at the sampling point C_{mn} . This hologram could be called the "true phase" hologram, in contrast to the "sampled phase" hologram. Experience has demonstrated the validity of this idea [8]. However, two problems still remain. On one hand, the phase $\phi(\mu, \nu)$ is known at the periodic sampling points $(m\delta\nu, n\delta\nu)$ but not all over the hologram plane. In order to avoid a rigorous but long interpolation using sinc functions, Brown and Lohmann suggest to interpolate the phase using a short polynomial expansion. On the other hand, the method works: but why does it work? Let us answer this question in the next section.

3. Diffraction by the true phase hologram and by the sampled phase hologram

In this section, we give analytical expressions for the two kinds of holograms in order to study their Fraunhofer diffraction patterns.

3.1. The true phase hologram

Let $u(x, y)$ be the desired amplitude in the first diffracted order and $\tilde{u}(\mu, \nu)$ its inverse Fourier transform:

$$\begin{aligned} \tilde{u}(\mu, \nu) &= \iint_{\mathbb{R}^2} u(x, y) \exp\{2i\pi(\mu x + \nu y)\} dx dy \\ &= F^{-1}\{u(x, y)\} = |\tilde{u}(\mu, \nu)| \exp\{i\phi(\mu, \nu)\}. \end{aligned} \quad (4)$$

The amplitude $H_t(\mu, \nu)$ of the true phase hologram used to encode $\tilde{u}(\mu, \nu)$ may be represented as the set of all the Dirac-delta functions with ordinate $n\delta\nu$ and with abscissa satisfying the condition of true phase, i.e.:

$$\mu_k = k\delta\nu + \frac{\phi(\mu_k, n\delta\nu)}{2\pi} \delta\nu, \quad k \text{ an integer.} \quad (5)$$

In this relation, k is but a counting index, and the position $(\mu_k, n\delta\nu)$ of the (k, n) th dot is not simply related with k as it is with n : in the (m, n) th cell there may be zero, one or several dots.

so that the diffracted wave $\tilde{H}_s(x, y)$ of H_s is:

$$\tilde{H}_s(x, y) = \sum_{m,n} \{U_m(x, y) * \text{III}_{\Delta x}(x)\} \delta y \\ \times \text{sinc}(x \delta y) * \delta(x - m \Delta x) * \delta(y - n \Delta x). \quad (15)$$

From eq. (15), the sampled phase hologram H_s is seen to produce a Fourier pattern consisting of the orders U_m obtained from H_t , each of them being repeated because of the term $\text{III}_{\Delta x}(x)$. The spacing of the repetition is equal to the order spacing, but fortunately the sinc function affects the amplitude of the parasitic terms.

3.3. Summary

We have sketched graphically the results of subsections 3.1 and 3.2 in fig. 3. The different orders diffracted by the hologram H_t and described by eq. (11), are schematized in fig. 3a for $y=0$. The shape of the different orders has been drawn rather arbitrarily, but their size along x is approximately proportional to the order m . If this property holds, as it generally does, there is only a small amount of order overlapping in the useful domain, and the overlapping is rigorously zero if the useful domain is reduced to $\frac{2}{3} \Delta x$.

In fig. 3b, the different terms diffracted by H_s corresponding to the different values of m have been plotted separately. Their sum is shown in fig. 3c: a large and unavoidable amount of order overlapping is visible, due to an attenuated repetition of every order at the center of all others. Hence, the gain yielded by the improved kind of hologram is clear.

4. Discussion and conclusion

This article has dealt with what seems to be a major cause of error of Lohmann-type holograms, namely approximation (2c). However, there remain approximations (2a) and (2b), as well as the different defects due to the practical realization of the hologram: truncation of the Fourier plane, phase and amplitude quantization [9,10,13], possible imprecision of the plotting device, different photographic or optical defects in the reduction step.

However, on one hand, we have justified the empirical method proposed by Brown and Lohmann [8] to improve Lohmann-type holograms. Our derivation

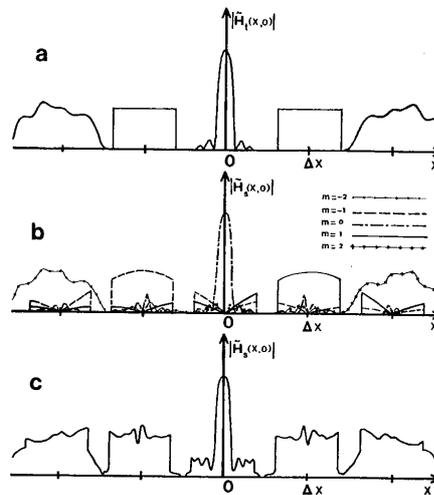


Fig. 3. Comparison between the amplitudes diffracted by the true phase hologram and by the sampled phase hologram. a) True phase hologram. b) Different terms in the amplitude due to the sampled phase hologram. c) Sampled phase hologram (sum of the different terms of b).

has introduced a slight modification concerning the coded amplitude, but the true phase holograms do not suffer from any order overlapping.

On the other hand, it is not easy to calculate such a true phase hologram, because of the difficulty to know the phase function everywhere in the hologram plane. The interpolation by a cubic form of Newton's formula [8] avoids the drawback of long and expensive interpolation, but may cause the resulting hologram to be of lower quality: this is especially damageable if a quantitative synthesis of a function is expected from the computer generated hologram, for instance in the applications to image processing.

Appendix

This appendix concerns the equivalence of eqs. (8), (9) and (12) of subsection 3.1.

A1. Theorem

Let $\psi(\mu)$ be a real function of the real variable μ , infinitely differentiable and one-to-one from \mathbb{R} upon \mathbb{R} . The theorem is as follows:

PERMIS D'IMPRIMER

Doctorat ETAT

Thèse de SCIENCES PHYSIQUES

Nom CHAVEL

Prénoms Pierre Henri

Date et lieu de naissance 28 Janvier 1950 à STRASBOURG (Bas-Rhin)

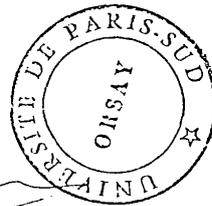
SUJET :

Thèse : Traitement optique en éclairage incohérent : possibilités théoriques et limitations expérimentales.

Vu et approuvé :

Orsay, le 02 MARS 1979

~~Les Membres du Jury :~~
LES MEMBRES DU JURY:



[Handwritten signatures of jury members]