



**HAL**  
open science

## Modélisation simplifiée des processus de laminage

Huy Le Dang

► **To cite this version:**

Huy Le Dang. Modélisation simplifiée des processus de laminage. Autre. Université Paris-Est, 2013. Français. NNT : 2013PEST1121 . pastel-00966940

**HAL Id: pastel-00966940**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00966940>**

Submitted on 27 Mar 2014

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**Thèse**

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE**

**L'UNIVERSITE PARIS EST**

Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures

par

**Huy LE DANG**

Sujet de la thèse :

**Modélisation simplifiée des processus de laminage**

Soutenue le 10 décembre 2013

devant le jury composé de :

Jacques BESSON	Président
Geneviève INGLEBERT	Rapporteur
Armelle CHABOT	Rapporteur
Nicolas LEGRAND	Examineur
Alain EHRLACHER	Directeur de thèse



**Thèse**

Présentée pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE**

**L'UNIVERSITE PARIS EST**

Spécialité : Mécanique des Matériaux et des Structures

par

**Huy LE DANG**

Sujet de la thèse :

**Modélisation simplifiée des processus de laminage**

Soutenue le 10 décembre 2013

devant le jury composé de :

Jacques BESSON	Président
Geneviève INGLEBERT	Rapporteur
Armelle CHABOT	Rapporteur
Nicolas LEGRAND	Examineur
Alain EHRLACHER	Directeur de thèse



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier à mon directeur de thèse Monsieur Alain EHRLACHER pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant d'encadrer ce travail doctoral, pour ses conseils et pour son temps qu'il a consacré à diriger cette thèse. J'aimerais lui dire que j'ai apprécié sa grande disponibilité et ses aides pour moi tout au long de ce travail doctoral.

Je tiens également à remercier chaleureusement Monsieur Nicolas LEGRAND qui m'a encadré ce travail au niveau industriel chez ArcelorMittal, notamment pour la confiance et l'indépendance qu'il m'a accordées mais également pour ses conseils avisés et l'orientation qu'il a su donner à la thèse dans les moments critiques.

Je tiens particulièrement à remercier Monsieur Karam SAB pour m'avoir intégré dans le monde de recherche au sein du laboratoire Navier. Je tiens à ne pas oublier de remercier Monsieur NGO Quang Tien de m'avoir accueilli au sein de son équipe dans le centre de recherche de l'ArcelorMittal.

Je tiens également à exprimer toute ma gratitude aux membres du jury. Tout d'abord, à Madame Geneviève INGLEBERT et à Madame Armelle CHABOT pour avoir accepté de rapporter sur cette thèse et pour les remarques pertinentes qu'elles ont apportées au mémoire de thèse. Enfin, à Monsieur Jacques BESSON pour l'intérêt qu'il a manifesté pour ce travail en acceptant de présider le jury de cette thèse.

J'exprime également toute ma reconnaissance et gratitude à l'ArcelorMittal, qui m'a financé pour réaliser ce travail de thèse, sans laquelle cette thèse n'aurait pas pu avoir lieu.

J'adresse aussi mes remerciements à l'ensemble des membres, et des doctorants du laboratoire Navier pour leur amitié, leurs encouragements et leur aide qu'ils ont pu m'apporter.

Je pense enfin à ma famille qui m'a soutenu tout au long de cette thèse.



## Résumé

L'objectif initial de la thèse était de proposer une nouvelle modélisation simplifiée du laminage permettant un calcul rapide, si possible en temps réel, afin que le modèle soit éventuellement intégré à un outil de pilotage des machines de production.

Ce modèle ne doit pas négliger les déformations élastiques afin de pouvoir être éventuellement appliqué à l'étude de phénomènes associés à la variation de largeur de la bande ou à des phénomènes de planéité. Il doit par ailleurs être assez ouvert pour que l'on puisse y intégrer éventuellement une description de la microstructure du matériau polycristallin et prendre en compte la déformation des cylindres de laminage.

Pour atteindre cet objectif, nous avons proposé de tenter de construire un modèle simplifié semi-analytique du laminage. Dans ce type de modèle, le gradient de la transformation globale  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\Phi)$  peut alors être décomposé multiplicativement en un produit d'une première transformation locale « plastique »  $\underline{\underline{P}}$ , qui transforme le voisinage local initial de  $\underline{\underline{X}}$  dans la configuration relâchée, par une seconde transformation locale « élastique »  $\underline{\underline{E}}$  qui transforme la configuration relâchée dans la configuration actuelle  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}.\underline{\underline{P}}$ . Cette décomposition est à la base de l'analyse thermodynamique de l'évolution mécanique lorsque le matériau subit de grandes transformations élastoplastiques, laquelle analyse fournit les concepts d'efforts intérieurs et de variables d'état nécessaires à l'écriture de ce comportement.

Nous avons montré deux approches permettant le calcul analytique de ces champs lorsque l'histoire de  $\underline{\underline{F}}$  est connue au voisinage d'une particule  $\underline{\underline{X}}$ .

Nous avons ensuite proposé l'étude d'une classe particulière d'évolutions élastoplastiques que nous avons appelées « simples radiales » et nous avons montré que les évolutions obéissaient à un principe de minimum énergétique. Nous avons enfin conjecturé que ce principe pouvait être étendu en régime permanent pour permettre de construire une modélisation simplifiée des processus de laminage.

**Mots clés :** modélisation simplifiée, déformation plastique, processus de laminage, évolution élastoplastique, principe de minimum



## Abstract

The initial aim of the thesis was to propose a new simplified model for rolling allowing a rapid calculation, if possible, in real time, so that the model would eventually integrate into a management tool production machines.

This model should not neglect the elastic deformations in order to be applied to the study of phenomena associated with the change in bandwidth or flatness phenomena. It must also be open enough that we can integrate the description of microstructure of polycrystalline material and possibly take into account the deformation of rolling rolls.

To achieve this goal, we proposed to build a simplified semi-analytical model of rolling. In this type of model, the gradient of global transformation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{\Phi}})$  can be multiplicatively decomposed of the first local transformation "plastic"  $\underline{\underline{P}}$  which transforms the initial local neighborhood of  $\underline{X}$  in the relaxed configuration, and the second local transformation "elastic"  $\underline{\underline{E}}$  which transforms the relaxed configuration in the current configuration  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}.\underline{\underline{P}}$ . This decomposition is the basis of thermodynamic analysis of the mechanical evolution when the material undergoes large elastoplastic transformations, which provides the concepts of internal forces and necessary variable state to write this behavior.

We showed two approaches to the analytical calculation of the mechanical fields when the history of  $\underline{\underline{F}}$  was known in the neighborhood of particle  $\underline{X}$ .

We then proposed to study a particular class of elastoplastic evolution that we called "simple radial" and we showed that the evolutions followed the principle of minimum energy. Finally, we conjectured that this principle can be extended in steady state, which allowed to build a simplified model of the rolling process.

**Keywords:** simplified model, plastic deformation, rolling process, elastoplastic evolution, principle of minimum



# Table des matières

Résumé .....	5
Abstract.....	7
Introduction .....	17
Chapitre 1: Les notions de base des processus de laminage .....	19
1.1. Hypothèses retenues pour les simulations de laminage .....	19
1.2. Présentation de LAM3 .....	20
1.3. Paramètres permettant de définir un processus de laminage .....	22
1.4. Les sorties utiles d'un calcul avec LAM3.....	25
1.5. Influence des principaux paramètres du laminage.....	38
1.6. Conclusion .....	55
Chapitre 2: Modèles simplifiés classiques .....	57
2.1. Méthode des lignes de glissement.....	58
2.1.1. Champ de contraintes et hodographe .....	58
2.1.2. Champ de vitesses et hodographe .....	60
2.2. Méthode des tranches.....	61
2.2.1. Méthode des tranches .....	61
2.2.1.1. Frottement de Tresca .....	64
2.2.1.2. Frottement de Coulomb.....	65
2.2.2. Modèle Bland & Ford .....	66
2.2.3. Modèle de Sims .....	68
2.2.4. Applications numériques.....	70
2.3. La méthode des bornes supérieures (MBS) .....	79
2.3.1. MBS avec champs de vitesse « Uniformes » .....	80
2.3.1.1. Choix du champ vitesse.....	80
2.3.1.2. Puissance dissipée par le taux de déformation .....	81
2.3.1.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :.....	83
2.3.1.4. Puissance dissipée par le frottement.....	83
2.3.1.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures .....	83
2.3.1.6. Détermination de $J^*$ .....	83

2.3.2. MBS avec champs de vitesse par Blocs.....	84
2.3.2.1. Choix du champ vitesse.....	84
2.3.2.2. Puissance dissipée par le taux de déformation .....	86
2.3.2.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :.....	86
2.3.2.4. Puissance dissipée par le frottement.....	86
2.3.2.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures .....	86
2.3.2.6. Détermination de $J^*$ .....	86
2.3.3. MBS avec champs de vitesse « mixtes » combinant les champs Uniformes et les champs par Blocs .....	87
2.3.3.1. Champs de vitesse .....	87
2.3.3.2. Puissance dissipée par le taux de déformation .....	89
2.3.3.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :.....	90
2.3.3.4. Puissance dissipée par le frottement.....	90
2.3.3.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures .....	91
2.3.4. Applications numériques.....	91
2.4. Conclusion .....	95
Chapitre 3: Un comportement élastoplastique en grandes transformations.....	97
3.1. Description du mouvement.....	97
3.2. Choix des variables d'état.....	99
3.3. Ecriture du comportement.....	102
3.3.1. Comportement isotrope .....	102
3.3.2. Critère de plasticité et taux de déformation plastique .....	104
3.4. Evolution élastoplastique.....	106
3.5. Illustration dans le cas de transformations homogènes.....	114
3.5.1. Exemple en « traction ».....	114
3.5.2. Exemple en cisaillement.....	118
3.6. Conclusion .....	121
Chapitre 4: Formulation du problème de l'évolution élasto-plastique vérifiant par construction le critère à chaque instant .....	123
4.1. Nouvelle écriture de la transformation élastique dans la zone en cours d'évolution plastique.....	123
4.2. Détermination des grandeurs $\theta$ et $p_{cum}$ si la transformation est connue .....	127

4.3. Application de la nouvelle écriture dans le cas de compression plane Channel Die	131
4.3.1. Description du test Channel Die.....	131
4.3.2. La première phase élastique .....	132
4.3.3. La fin de la première phase élastique .....	133
4.3.4. Dans la phase plastique .....	134
4.3.5. Application numérique.....	137
4.3.6. Résultat avec Abaqus : .....	141
4.4. Conclusion .....	142
Chapitre 5: Un principe de minimum pour l'élasto-plasticité.....	143
5.1. Solution du problème de la traction simple monotone avec une approche classique .....	143
5.2. Solution du problème de la traction simple en postulant un principe de minimum sur « l'énergie totale » .....	150
5.3. Principe de minimum pour les évolutions « simples radiales ».....	152
5.3.1. Définitions des évolutions « simples » et « simples radiales ».....	152
5.3.2. Principe de minimum .....	155
5.3.3. Exemple en « traction ».....	163
5.4. Conclusion .....	171
Chapitre 6: Retour sur le processus de laminage en régime permanent.....	173
6.1. La transformation en régime permanente .....	173
6.2. Détermination de tous les champs à l'aide de $\tilde{\Phi}(\underline{X})$ .....	177
6.3. Un « principe de minimum en régime permanent » sur l'ensemble de $\tilde{\Phi}^*(\underline{X}) \in CA$ .....	180
6.4. Proposition d'une famille de transformations simples .....	183
6.5. Conclusion .....	192
Conclusion générale .....	193
Bibliographie .....	195



# Liste des Figures

Figure 1-1 : Algorithme utilisé [LAM3, Manuel de l'utilisateur, 96].....	21
Figure 1-2 : Paramètres de laminage.....	22
Figure 1-3 : Vitesse horizontale dans la bande de laminage .....	30
Figure 1-4 : Vitesse verticale dans la bande de laminage .....	31
Figure 1-5 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage .....	31
Figure 1-6 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (matériau rigide plastique).....	32
Figure 1-7 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (l'écrouissage)...	32
Figure 1-8 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (grande échelle).....	33
Figure 1-9 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (petite échelle).....	34
Figure 1-10 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande-cylindre.....	34
Figure 1-11 : Courbe de la contrainte $\sigma_{xx}/\sigma_0$ .....	35
Figure 1-12 : Courbe de la contrainte $\sigma_{yy}/\sigma_0$ .....	35
Figure 1-13 : Courbe de la contrainte $\sigma_{xy}/\sigma_0$ .....	36
Figure 1-14 : Courbe de la contrainte Von Mises « normalisé » .....	36
Figure 1-15 : Courbe de la variation du volume .....	37
Figure 1-16 : Déformation plastique cumulée dans la bande de laminage .....	37
Figure 1-17 : Les valeurs des deux paramètres adimensionnels importants .....	38
Figure 1-18 : La force normalisée de laminage.....	39
Figure 1-19 : Le couple normalisé de laminage.....	40
Figure 1-20 : Le glissement en sortie .....	40
Figure 1-21 : Vitesse longitudinale normalisée dans la bande des 18 cas « de base » .....	41
Figure 1-22 : Vitesse verticale dans la bande des 18 cas « de base » .....	43
Figure 1-23 : Vitesse verticale normalisée dans la bande des 18 cas « de base ».....	44
Figure 1-24 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande - cylindre des 18 cas « de base ».....	45
Figure 1-25 : Contrainte normalisée $\sigma_{xx}/\sigma_0$ dans la bande des 18 cas « de base » .....	47
Figure 1-26 : Contrainte normalisée $\sigma_{xx}/\sigma_0$ dans la bande des 18 cas « de base » .....	49
Figure 1-27 : Contrainte normalisée $\sigma_{yy}/\sigma_0$ dans la bande des 18 cas « de base ».....	50

Figure 1-28 : Contrainte normalisée $\sigma_{xy}/\sigma_0$ dans la bande des 18 cas « de base ».....	51
Figure 1-29 : Variation de volume dans la bande des 18 cas « de base » .....	53
Figure 1-30 : Déformation plastique cumulée dans la bande des 18 cas « de base » .....	54
Figure 2-1 : Grandeurs fondamentales (Felder E., 2009).....	58
Figure 2-2: Processus de laminage.....	61
Figure 2-3 : Bilan des forces appliquées sur les faces après le point neutre .....	62
Figure 2-4 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	71
Figure 2-5 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	71
Figure 2-6 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	72
Figure 2-7 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	73
Figure 2-8 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	73
Figure 2-9 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	73
Figure 2-10 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	74
Figure 2-11 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	74
Figure 2-12 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	75
Figure 2-13 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	75
Figure 2-14 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	76
Figure 2-15 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	76
Figure 2-16 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	77
Figure 2-17 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	77
Figure 2-18 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	77
Figure 2-19 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xx}$ .....	78
Figure 2-20 : Comparaison des contraintes $\sigma_{yy}$ .....	78
Figure 2-21 : Comparaison des contraintes $\sigma_{xy}$ .....	79
Figure 2-22 : Champs de vitesse uniformes dans l'épaisseur .....	81
Figure 2-23 : Champs de vitesse par blocs.....	84
Figure 2-24 : Champs de vitesse mixtes.....	88

Figure 2-25 : MBS avec champs de vitesse uniforme.....	91
Figure 2-26 : MBS avec champs de vitesse par blocs.....	92
Figure 2-27 : Puissance optimale en fonction de $a/h_e$ – Laminage à froid .....	92
Figure 2-28 : MBS avec champs de vitesse uniforme.....	93
Figure 2-29 : MBS avec champs de vitesse par blocs.....	93
Figure 2-30 : Puissance optimale en fonction de $a/h_e$ – Laminage à chaud.....	94
Figure 3-1 : Décomposition du gradient de transformation .....	98
Figure 3-2 : Courbe donnant la fonction de charge en fonction du temps avec $\Delta t = 10^{-3} s$ ..	117
Figure 3-3 : Courbe donnant la contrainte $\sigma_{11}$ avec $\Delta t = 10^{-3} s$ .....	117
Figure 3-4 : Courbe donnant la contrainte $\sigma_{11}$ en fonction de $\sigma_{22}$ avec $\Delta t = 10^{-3} s$ .....	118
Figure 3-5 : Courbe donnant la fonction de charge en fonction du temps avec $\Delta t = 10^{-3} s$ ....	119
Figure 3-6 : Courbe donnant le taux de rotation $\Omega_3$ en fonction du temps avec $\Delta t = 10^{-3} s$ .....	120
Figure 3-7 : Courbe donnant la contrainte $\sigma_{12}$ en fonction du temps avec $\Delta t = 10^{-3} s$ .....	120
Figure 3-8 : Courbe donnant la contrainte $\sigma_{11}$ en fonction du temps avec $\Delta t = 10^{-3} s$ .....	121
Figure 4-1 : Test Channel Die .....	131
Figure 4-2 : La composante de contrainte $\sigma_{11}$ .....	138
Figure 4-3 : La composante de contrainte $\sigma_{22}$ .....	138
Figure 4-4 : La composante de contrainte $\sigma_{33}$ .....	139
Figure 4-5 : Logarithme de $F_1$ .....	139
Figure 4-6 : La variation de volume.....	140
Figure 4-7 : La composante $p_2$ .....	140
Figure 4-8 : Modèle Abaqus.....	141
Figure 4-9 : La composante de contrainte $\sigma_{22}$ .....	141
Figure 4-10 : La composante de contrainte $\sigma_{33}$ .....	142
Figure 5-1 : Courbe donnant la contrainte $\sigma_{11}$ .....	149
Figure 5-2 : Courbe donnant la fonction $\Theta(p^*)$ dans une phase élastique .....	165
Figure 5-3 : Courbe donnant la fonction $\Theta(p^*)$ dans une phase plastique .....	165
Figure 5-4 : Comparaison de contrainte $\sigma_{11}$ .....	170
Figure 5-5 : Comparaison de contrainte $\sigma_{11}$ en fonction de $\sigma_{22}$ .....	170

Figure 5-6 : Comparaison de la fonction de charge .....	171
Figure 6-1 : Processus de laminage.....	184
Figure 6-2 : Trace du tenseur de contrainte dans l'emprise .....	188
Figure 6-3 : La composante $\sigma_{xx}$ au milieu de la bande .....	188
Figure 6-4 : La composante $\sigma_{xx}$ au contact avec le cylindre.....	189
Figure 6-5 : La composante $\sigma_{yy}$ au milieu de la bande .....	189
Figure 6-6 : La composante $\sigma_{yy}$ au contact avec le cylindre.....	189
Figure 6-7 : Trace du tenseur de contrainte dans l'emprise .....	190
Figure 6-8 : La composante $\sigma_{xx}$ au milieu de la bande .....	190
Figure 6-9 : La composante $\sigma_{xx}$ dans le troisième élément.....	191
Figure 6-10 : La composante $\sigma_{yy}$ au milieu de la bande .....	191
Figure 6-11 : La composante $\sigma_{yy}$ dans le troisième élément.....	191
Figure 6-12 : La composante $\sigma_{yy}$ au contact avec le cylindre.....	192

# Introduction

L'industrie métallurgique est actuellement, engagée dans une course à la productivité et à la qualité. Les producteurs cherchent sans cesse des méthodes pour améliorer les procédés de laminage. Le contrôle et l'estimation du couple de forces appliqué sur deux cylindres sont, par exemple, de plus en plus nécessaires. Des processus de pilotage de la production, utilisant dans la boucle de contrôle des réglages des outillages, des modèles thermomécaniques de ces processus sont envisagés. Pour cela il est nécessaire de disposer de modèles simplifiés permettant un calcul en temps réel des champs dans la bande en cours de laminage. En effet les modèles thermo-élasto-plastiques par éléments finis de type LAM3 (Hacquin A., 1996) sont trop lourds pour pouvoir mener les calculs aussi rapidement.

Le premier chapitre de ce rapport a pour objectif principal d'introduire les notations de base des processus de laminage. Les principaux paramètres du processus sont identifiés et leur influence est discutée.

Le deuxième chapitre présente des modèles simplifiés classiques qui se basent sur la méthode des tranches et la Méthode des Bornes Supérieures (MBS).

Pour la méthode des tranches, tout d'abord, on divise la bande de laminage en tranches et ensuite on établit des équations d'équilibre mécanique pour ces tranches (Montmitonnet P., 1991). On obtient facilement la solution de ces équations.

Pour la méthode des « bornes supérieures » (Prager W. and Hodge P. G., 1951), on peut trouver une théorisation sous les termes d'« approche par l'extérieur en Calcul à la Rupture » (Salençon J. , 2002). Elle est très connue et donne satisfaction dans les situations suffisamment simples pour lesquelles il n'est pas nécessaire de prendre en compte les déformations élastiques, les déformations thermiques, ou l'évolution de la microstructure. Pour pouvoir élargir le domaine d'application des modèles simplifiés, il est nécessaire mieux de prendre en compte la partie élastique du comportement élastoplastique. C'est notamment le cas lorsque le retour élastique après déformation plastique est un problème important. Il en est souvent ainsi dans les processus de mise en forme des métaux (Da Silva Botelho T., Bayraktar E. and Inglebert G., 2007).

Ainsi, dans le troisième chapitre, on aborde le comportement élastoplastique en grandes transformations. Nous utilisons pour cette présentation le concept de configuration "relâchée" (Green A.E. and Naghdi P.M., 1965), (Perzyna P. and Wojno W., 1968), (Mandel J., 1971), dont nous savons depuis la fin des années 1960 que c'est le procédé le plus satisfaisant pour définir l'état thermodynamique d'un volume élémentaire d'un matériau devant subir de grandes transformations élastoplastiques.

Nous montrons que la connaissance du gradient de la transformation et son taux de variation permet la détermination simple et analytique de tous les champs.

Dans le quatrième chapitre, nous reprenons l'étude de la détermination des champs mécaniques lorsque l'on connaît le gradient de transformation et son taux de variation, avec une autre

approche qui permet de vérifier **par construction** le critère de plasticité dans la zone en cours d'évolution plastique.

La partie la plus originale de cette thèse en est le chapitre 5, dans lequel nous proposons un principe de minimum sur les champs cinématiques qui permet une approximation souvent acceptable des évolutions élastoplastiques dans le cas de chargements "monotones", ce qui est le cas dans la phase d'écrasement de la matière sous le cylindre. Nous entrons alors dans le cadre d'une "théorie de matériaux à dissipation simple" (Ehrlacher A. and Fedelich B. , 1988), (Ehrlacher A. et Fedelich B. , 1989), dont nous savons qu'elle permet de construire avec élégance et une facilité relative des modèles simplifiés à l'instar de ce qui peut être fait en élasticité.

Nous montrons que ce principe de minimum est équivalent à l'approche classique de l'évolution élastoplastique pour des familles d'évolutions particulières que nous nommons évolutions simples radiales, par référence au trajet des élongations plastiques principales.

Dans le dernier chapitre, nous tentons de revenir au problème de l'évolution élastoplastique dans un processus de laminage en régime permanent.

Nous proposons un « principe de minimum en régime permanent ». Nous n'avons pas pu prouver l'équivalence avec une approche classique de l'évolution, mais nous avons montré que ce principe de minimum est une généralisation de la Méthode des Bornes Supérieures prenant en compte les déformations élastiques et l'écroutissement.

Ce principe est un outil bien adapté pour construire dans l'avenir des modèles simplifiés des processus de laminage.

L'intérêt principal de notre approche est que nous proposons de travailler dans la configuration de référence qui a le double avantage d'être connue et simple (parallélépipède). Les approches classiques de l'étude d'évolutions élastoplastiques se font généralement dans la configuration actuelle qui est le plus souvent inconnue, ce qui nécessite du point de vue des calculs pour éléments finis une réactualisation de la géométrie.

Dans notre problème, compte tenu de la grande simplicité de la géométrie de référence, on peut imaginer une modélisation simplifiée considérant la bande comme un multicouche à l'instar de ce qui se fait pour étudier le roulement des pneumatiques sur une chaussée (Chabot A., Hun M., Hammoum F., 2013).

# Chapitre 1: Les notions de base des processus de laminage

Dans ce chapitre nous allons tenter de présenter les principales notions de base des processus de laminage et nous étudierons les évolutions élastoplastiques de la bande lors du laminage en fonction des principaux paramètres adimensionnels définissant ce processus. Ce travail nous servira de guide pour les choix des méthodes de modélisations simplifiées qui feront l'objet des prochains chapitres.

Dans le premier paragraphe nous préciserons les différentes hypothèses sous lesquelles nous avons mené les calculs afin de simplifier le problème et faciliter cette présentation. En particulier, comme dans ce travail nous nous intéressons principalement à ce qui se passe dans la partie centrale de la bande, nous travaillerons en déformations planes.

Dans le second paragraphe nous présenterons brièvement les principales caractéristiques du logiciel LAM3 qui nous a permis de mener ces calculs.

Dans le troisième paragraphe nous analyserons les différents paramètres permettant de définir un processus de laminage. Ensuite nous essaierons de déterminer, à priori, les principaux paramètres adimensionnels influençant les processus de déformation.

Dans le quatrième paragraphe nous présenterons les différentes sorties utiles d'une simulation numérique de laminage avec LAM3 et nous présenterons avec certains détails ces différentes sorties sur un cas de laminage typique.

L'influence des principaux paramètres de laminage sera présentée dans le cinquième paragraphe.

## 1.1. Hypothèses retenues pour les simulations de laminage

De nombreuses questions relatives au laminage sont clairement des questions qui font appel à une modélisation thermomécanique tridimensionnelle. C'est notamment le cas si l'on s'intéresse à la variation de largeur des bandes ou aux contraintes résiduelles présentes dans la bande, après le passage dans les cages des laminoirs. Cependant si l'on veut avoir une première idée simple des mécanismes de déformation en jeu dans la partie centrale des bandes, il est possible de faire l'hypothèse que l'évolution est en déformations planes, les frottements parallèles à l'axe des cylindres de laminage étant, en général, suffisants pour limiter très fortement les déplacements de la matière suivant cet axe dans une très large partie centrale.

**Nous nous placerons donc dans les hypothèses de déformations planes pour les modélisations ci-dessous.**

L'entrée et la sortie d'une bande dans une cage est un processus transitoire, donc fonction du temps, cependant il est généralement admis que le régime permanent s'établit très rapidement, la bande défilant à une vitesse quasiment constante et les lignes de courant de la matière en déplacement se stabilisant très rapidement.

**Les calculs ci-dessous seront donc menés dans l'hypothèse d'un régime permanent établi.**

Les aciers ont un comportement élastoplastique avec le plus souvent un écrouissage isotrope et cinématique. Cependant dans les cas les plus courants, la prise en compte de cette loi d'écrouissage dans les calculs ne modifie pas qualitativement les mécanismes de déformations à l'œuvre lors du laminage par rapport à une modélisation élastique parfaitement plastique.

Par ailleurs, la comparaison de simulations sans écrouissage est plus facile à développer.

**Nous retiendrons donc, ci-dessous, un comportement élastique parfaitement plastique de Von Mises pour modéliser les aciers.**

La loi de frottement entre le cylindre et la bande est complexe pour les laminages réels. Dans les modélisations il est généralement choisi une loi de Tresca, de Coulomb ou de Norton. Dans un objectif de comparaison des mécanismes de déformation en fonction de paramètres adimensionnels, il est plus simple de retenir la loi de frottement de Tresca, car la composante tangentielle de la force surfacique de contact entre le cylindre et la bande peut être donnée en proportion du seuil de Von Mises de l'acier, lorsqu'il y a glissement.

**Nous modéliserons donc le contact bande-cylindre avec une loi de Tresca.**

Lors du passage de la bande sous le laminoir les efforts mutuels exercés sont importants et la cage du laminoir se déforme, ainsi que le cylindre. Ce phénomène a plus ou moins d'importance suivant les conditions de laminage. Les calculs couplant les déformations élastoplastiques de la bande et les déformations, généralement élastiques, de la cage et des cylindres sont assez complexes et en tout cas trop lourds pour l'objectif modeste que nous nous sommes donné ici.

**Nous ferons donc l'hypothèse que les cylindres et les cages sont rigides et ne se déforment pas lors de l'opération de laminage.**

## **1.2. Présentation de LAM3**

Actuellement les chercheurs d'ArcelorMittal, utilisent fréquemment le logiciel LAM3 pour simuler les opérations de laminage. Ce logiciel a été développé au milieu des années 90 par le CEMEF en commun avec Alcan et Arcelor pour la modélisation du laminage de produits plats (Hacquin A., 1996). En fait, LAM3 est un outil de calculs thermomécaniques par Eléments Finis avec formulation lagrangienne réactualisée ou eulérienne stationnaire. La rhéologie est définie aux points d'intégration. Il est possible de coupler le calcul des déformations dans la bande avec un calcul Thermo-Elastique dans la cage de cylindres.

La formulation lagrangienne réactualisée est destinée à simuler les procédés non stationnaires (forgeage, bi-poinçonnement, laminage à pas de pèlerin,...).

La formulation eulérienne stationnaire est utilisée pour simuler les régimes permanents, le gain en précision ou temps de calcul est alors très significatif (de 1 à 2 ordres de grandeur).

La Figure 1-1 résume l'algorithme de calcul de LAM3.

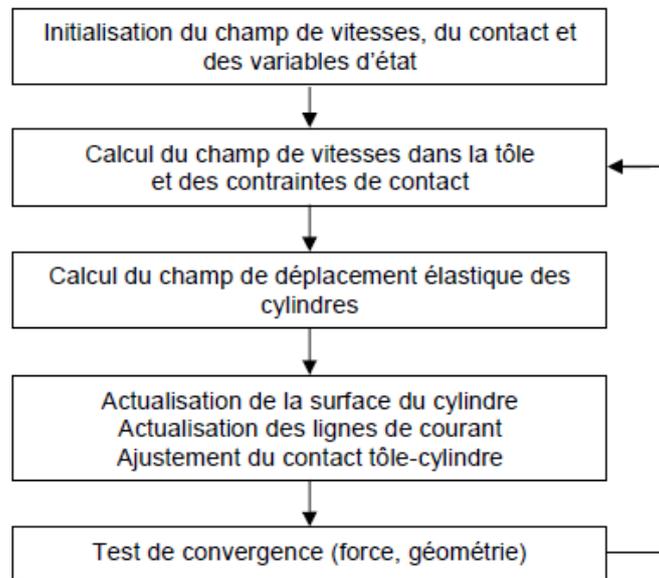


Figure 1-1 : Algorithme utilisé [LAM3, Manuel de l'utilisateur, 96]

L'inconvénient de LAM3 est le coût de stockage élevé pour la résolution et le temps de calcul pour des maillages fins en 3D. Cela limite sévèrement l'utilisation de LAM3 dans certaines questions industrielles plus complexes.

Le Tableau 1-1 résume les principales caractéristiques du modèle actuel :

FONCTION	METHODE NUMERIQUE
Déformation élastique de cage duo, quarto, sexto	Semi-analytique
Thermique Cylindre de Travail stationnaire/instationnaire	Eléments Finis (EF) 2D Streamline Upwind Petrov Galerkin (SUPG)
Plan de simulations thermomécaniques de cage	Boucle sur le cédage et/ou la thermique découplée de Forge3
Thermique pièce stationnaire/instationnaire	EF 3D SUPG/ EF 3D Galerkin en hexaèdres linéaires
Mécanique pièce multimatériaux stationnaire/instationnaire	EF 3D en hexaèdres avec pénalisation de l'incompressibilité (toutes rhéologies)

avec rhéologies : Visco-Plastique (VP) anisotrope	Lagrangienne Réactualisée/Eulérien
Elasto-Visco-Plastique (EVP) anisotrope	Lagrangienne Réactualisée/ Eulérienne Lagrangienne à pas de temps $\Delta t$ Hétérogène (ELDTH)
et frottement :      Coulomb anisotrope	
Norton anisotrope	
Tresca isotrope	
Bay-Wanheim aniso	

Tableau 1-1 Caractéristiques actuelles de LAM3 (Transvalor, 1996)

Dans les calculs ci-dessous nous utiliserons la version eulérienne stationnaire du logiciel LAM3. Ce modèle servira de modèle de référence tout au long de ce travail, mais les temps de calculs assez longs justifient l'objectif de recherche de modèles simplifiés pour un certain nombre d'applications courantes.

LAM3 sait faire beaucoup de choses, nous n'en utilisons qu'une petite partie.

### 1.3. Paramètres permettant de définir un processus de laminage

Sous les hypothèses du paragraphe 1.1 les paramètres permettant de définir un cas de laminage sont peu nombreux. Nous les introduisons ci-dessous.

#### A/ Paramètres géométriques.

Dans un problème en déformation plane et en régime permanent, le seul paramètre de la géométrie initiale est l'épaisseur. Le problème étant symétrique par rapport au plan médian horizontal, nous noterons  $h_e$  la demi-épaisseur initiale de la bande (ou **demi-épaisseur en entrée**).

L'objectif de réduction de l'épaisseur de la bande dans l'opération de laminage conduit à définir l'épaisseur de sortie de la bande après passage dans la cage. Nous noterons  $h_s$  la **demi-épaisseur de la bande en sortie**.

Les cylindres étant rigides, et leur axe ne se déplaçant pas (rigidité de la cage), d'un point de vue géométrique, il suffit de connaître leur **rayon R**.

Ainsi les paramètres géométriques sont :

Demi-épaisseur de la bande en entrée et sortie de l'emprise  $h_e, h_s$

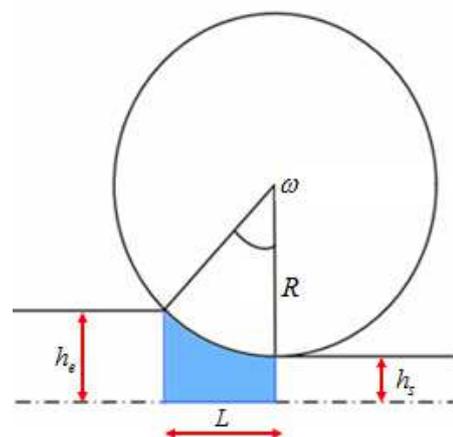


Figure 1-2 : Paramètres de laminage

Rayon de cylindre  $R$

### B/ Paramètres Matériaux.

Le comportement du matériau de la bande est supposé élastique parfaitement plastique de Von Mises. L'élasticité étant supposée isotrope, elle fait appel à deux paramètres caractéristiques du comportement, le **module d'Young**  $E$  et le **coefficient de poisson**  $\nu$ .

Il faut aussi définir la **limite d'élasticité**  $\sigma_0$  de ce matériau.

Enfin le frottement retenu est de type Tresca avec une limite de frottement  $\tau = \pm k\sigma_0/\sqrt{3}$  où  $k$  est un **paramètre adimensionnel de frottement**.

Ainsi les paramètres matériaux sont :

Module d'Young et coefficient de Poisson du matériau de la bande  $E, \nu$

Limite d'élasticité du matériau de la bande  $\sigma_0$  (Von Mises sans écrouissage)

Paramètre adimensionnel de frottement  $k$  (l'effort surfacique de frottement est  $\tau = \pm k\sigma_0/\sqrt{3}$  lorsqu'il y a glissement)

### C/ Paramètres de chargement.

Le chargement est donné d'une part par la **vitesse de rotation**  $\omega$  des cylindres. (La vitesse des particules sur la frontière des cylindres est  $V_c = R\omega$  )

D'autre part, en général on exerce une **contrainte de traction**  $\sigma_e$  sur la bande du côté de l'entrée et une **contrainte de traction**  $\sigma_s$  sur la bande du côté de la sortie.

Ainsi les paramètres de chargement sont :

Vitesse du cylindre  $V_c = R\omega$

Contraintes à l'entrée et à la sortie  $\sigma_e, \sigma_s$

Il y a ainsi une dizaine de paramètres pour définir les cas de laminage sous les hypothèses du paragraphe 1.1.

Parmi ces paramètres, nous n'évoquerons plus le module d'Young et le coefficient de Poisson qui n'ont pas de raisons de varier beaucoup d'un cas à l'autre et qui, de toute façon, jouent un rôle secondaire.

Nous retiendrons pour les calculs  $E = 210000$  MPa ,  $\nu = 0.3$  .

Les 8 autres paramètres sont dimensionnés. Il est possible de dégager les principaux paramètres adimensionnels associés à ces 8 paramètres.

### A'/ Paramètres adimensionnels géométriques.

Les trois paramètres géométriques dont la dimension est une longueur conduisent à deux paramètres adimensionnels.

Le premier que nous nommerons la **réduction verticale**  $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$  s'impose.

Pour avoir un second paramètre pertinent il est nécessaire de développer un peu les aspects géométriques du contact. Pour cela nous commençons par définir  $L$  la **longueur de contact** comme la longueur de la projection sur l'axe horizontal de la zone de contact entre la bande et le cylindre. La détermination de  $L$  est un petit travail géométrique élémentaire utilisant la rigidité de la cage, des cylindres et le théorème de Pythagore. Après calculs on trouve :

$$L = \sqrt{R^2 - (R + h_s - h_e)^2} .$$

Du point de vue le plus sommaire, l'opération de laminage peut être vu comme l'écrasement d'une bande de largeur  $L$  et de hauteur initiale  $2h_e$ .

Un deuxième paramètre géométrique adimensionnel important  $e = \frac{h_s}{L}$  semble alors apparaître.

Nous l'appellerons par abus de langage l'**élancement**  $e = \frac{h_s}{L}$

#### *B' / Paramètres adimensionnels matériaux.*

Nous avons déjà introduit le **paramètre adimensionnel de frottement**  $k$

Si nous acceptons l'idée que l'on peut négliger les phénomènes liés à l'élasticité dans l'étude de l'influence des paramètres de laminage, il n'y aura pas d'autres paramètres adimensionnels matériaux. En particulier la limite d'élasticité  $\sigma_0$  n'interviendra pas dans cette analyse. Bien sûr  $\sigma_0$  sera alors à peu de choses près (élasticité négligée) en facteur des différentes sorties en efforts ou en contraintes des simulations.

#### *C' / Paramètres adimensionnels de chargement.*

La vitesse de rotation  $\omega$  des cylindres est le seul paramètre faisant intervenir de manière explicite le temps. Il n'y a donc pas de paramètre adimensionnel qui lui soit associé.

Pour les autres paramètres de chargement, nous retiendrons

**le paramètre adimensionnel de traction en entrée**  $t_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_0}$

**et le paramètre adimensionnel de traction en sortie**  $t_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_0}$

On voit que, dans la limite où l'élasticité peut être négligée et sous les hypothèses du paragraphe 1.1, nous avons à travailler avec une famille de 5 paramètres adimensionnels.

C'est encore beaucoup et il semble nécessaire de mener un raisonnement qualitatif pour identifier les plus importants d'entre eux.

L'abondante littérature scientifique sur le sujet et la longue expérience des industriels guide heureusement pour le choix des paramètres principaux (Montmitonnet P., 2002).

Finalement les deux paramètres qui seront principalement étudiés sont la réduction verticale

$$\lambda = \frac{h_s}{h_e} \text{ et l'élanement } e = \frac{h_s}{L}.$$

Sauf indications contraires,  $k$  sera choisi égal à 0.4, et  $t_e = t_s = 0.25$ . La réduction verticale

$$\lambda = \frac{h_s}{h_e} \text{ variera dans les calculs qui suivent entre 0.5 et 0.9}$$

Enfin c'est surtout en faisant varier  $e = \frac{h_s}{L}$  entre 0.08 et 0.18 que nous essaierons de mettre en évidence un changement de mécanisme de déformation sous l'emprise.

A titre d'exemple donnons ici les paramètres adimensionnels et dimensionnés du cas de laminage N°1 étudié plus loin

### **Cas 1 :**

*Paramètres adimensionnels :*

$$\lambda = 0.7, e = 0.08, k = 0.4, t_e = t_s = 0.25$$

*Paramètres dimensionnés :*

Nous retenons les valeurs suivantes :

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, R = 250 \text{ mm}, V_c = 1000 \text{ mm/s}$$

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1-\lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda-1)^2} = 1.957 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 1.370 \text{ mm}$$

( $h_e, h_s$  : demi-hauteur d'entrée et de sortie de la bande)

$$\sigma_e = 150 \text{ MPa}, \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

C'est un cas typique de laminage à froid.

## **1.4. Les sorties utiles d'un calcul avec LAM3**

LAM3 permet d'obtenir une quantité considérable d'informations sur les opérations de laminage simulées. Nous allons ici lister les principales d'entre elles et la manière dont nous allons les utiliser. Nous verrons successivement des informations globales comme la force et le couple de laminage, la puissance de laminage et le glissement. Ensuite nous verrons les informations sur les vitesses, les contraintes, les déformations et la variation du volume.

### A/ Les sorties globales

Avec LAM3, on peut avoir des sorties globales comme la force et le couple de laminage, la puissance de laminage et le glissement.

- La force de laminage, exprimée en N/m est la force verticale exercée par les cylindres sur une largeur de 1m de la bande. Cette force n'apporte pas de puissance mécanique à la bande
- Le couple de laminage, exprimé en N.m/m est le couple exercé sur chacun des cylindres par mètre de largeur de la bande pour créer la rotation de celui-ci à la vitesse angulaire  $\omega$ . La puissance apportée par chaque cylindre à une unité de la largeur de la bande est  $C \cdot \omega$
- La puissance de laminage est la somme de la puissance dissipée par la déformation de la bande et la puissance dissipée par frottement entre la bande et les cylindre. Elle est égale à la somme de la puissance fournie par chacun des cylindres et des puissances fournies par les tractions en entrée et en sortie de la bande. Nous conviendrons de noter  $P$ , la moitié de cette puissance par unité de largeur de la bande :

$$P = C \cdot \omega - \sigma_e h_e V_e + \sigma_s h_s V_s$$

Où :

$V_e$  est la vitesse d'entrée de la bande

$V_s$  est la vitesse de sortie de la bande

- Le glissement, exprimé en % est une grandeur qui est associée au glissement entre la bande et le cylindre à la sortie du cylindre :

$$G = \frac{V_s - V_c}{V_c} \times 100$$

### B/ Les sorties en vitesse

Nous choisissons un repère orthonormé  $(O, \underline{e}_x, \underline{e}_y)$  tel que  $O$  soit sur l'axe de symétrie du problème sous le point bas du cylindre haut,  $\underline{e}_x$  le vecteur unitaire dans la direction de laminage et  $\underline{e}_y$  le vecteur unitaire directement orthogonal.

LAM3 donne les champs de vitesse en régime permanent.

Nous nous intéressons tout d'abord à  $V_x(x, y)$  **la première composante du champ de vitesse** des particules de la bande dans la direction de laminage. La question principale concerne la non uniformité éventuelle de ce champ dans l'épaisseur dans la zone d'emprise. Pour étudier cela, les calculs LAM3 sont menés avec un maillage comprenant 5 mailles dans l'épaisseur soit, 6 « lignes de nœuds ».

Il est facile de déterminer un champ de vitesse de référence sous les hypothèses d'uniformité parfaite de cette composante dans l'épaisseur et de conservation du volume. On trouve

$V_x^{ref}(x; \mathcal{X}) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$  où nous rappelons que  $V_e$  est la « vitesse d'entrée » de la bande avant la

zone d'emprise (vitesse des particules de la bande pour  $x < -L$ ) et  $h(x)$  est la demi-hauteur

de la bande sous l'hypothèse de cylindres et cages indéformables ( $h(x) = h_e$  avec  $x < -L$ ,  $h(x) = R + h_s - \sqrt{R^2 - x^2}$  avec  $x \in [-L, 0]$  et  $h(x) = h_s$  avec  $x > 0$ ).

La présentation des résultats LAM3 qui nous a paru la plus pertinente pour répondre à la question de la non uniformité éventuelle de la composante horizontale dans l'épaisseur est une présentation « normalisée » dans un repère  $\left(\frac{x}{L}, \frac{V_x(x, y)}{V_x^{ref}(x)}\right)$ .

Dans cette présentation chaque cas de laminage est représenté par 6 courbes (chacune d'entre elle correspond à une ligne de nœuds). L'écart entre ces courbes permet de juger de la non uniformité de cette composante. L'écart par rapport à une courbe uniforme de valeur 1 permet de juger de l'importance de la variation de volume dans la bande.

Nous nous intéressons ensuite à  $V_y(x, y)$  **la deuxième composante du champ de vitesse**.

Le champ de vitesse de référence sous les hypothèses d'uniformité parfaite de la composante horizontale dans l'épaisseur et de conservation du volume donne pour la composante verticale de la vitesse  $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$  (Intégration de l'équation  $div(\underline{V}^{ref}) = 0$ ).

La présentation des résultats des simulations LAM3 sera faite sous forme « normalisée » dans le repère  $\left(\frac{x}{L}, \frac{V_y(x, y)}{V_y^{ref}(x, y)}\right)$ .

Pour finir sur la comparaison des champs de vitesse pour les différents cas de laminage étudiés, nous nous intéresserons à la **vitesse de glissement à l'interface bande-cylindre**.

Sous les hypothèses du paragraphe 1.1 la vitesse des particules du cylindre à la surface du cylindre est uniforme égale à  $V_c = R\omega$ . LAM3 donne les deux composantes de la vitesse pour les particules sur la ligne de nœud du contact (ligne 6). Nous tracerons donc pour chaque cas de laminage la grandeur adimensionnelle  $\left(\sqrt{V_x^2(x, h(x)) + V_y^2(x, h(x))}\right) / V_c - 1$  en fonction de  $\frac{x}{L}$ . Nous la nommerons « Vitesse normalisée de glissement ». La valeur globale  $G$  est la

valeur de cette vitesse normalisée de glissement en  $x=0$ .

Dans la partie de la courbe où cette valeur est négative, les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre et le frottement est « moteur ». Dans la partie de la courbe où cette valeur est positive, les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre et le frottement est « résistant ».

Les points ou zones où la valeur est nulle sont des points ou zones neutres.

### C/ Les sorties en contrainte

LAM3 donne le champ de contraintes dans la bande de laminage. Nous présentons les courbes de contraintes « normalisées »  $\sigma_{xx} / \sigma_0$ ,  $\sigma_{yy} / \sigma_0$  et  $\sigma_{xy} / \sigma_0$

Avec LAM3, on peut également sortir la contrainte de Von mises « normalisée » :

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\frac{3}{2} (\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}$$

Où :  $\sigma_{eq}$  est la contrainte Von Mises « normalisée »

$\sigma_0$  est la limite d'élasticité de la matière

$\underline{\underline{s}}$  est la partie déviatorique de  $\underline{\underline{\sigma}}$

Dans toutes les zones « plastiques » sous le cylindre, on doit avoir  $\sigma_{eq} = 1$

#### D/ Les sorties en variation du volume et déformation

Nous ne présentons que peu des nombreuses sorties possibles en déformation. Nous nous contenterons de présenter la variation de volume d'origine purement élastique qui peut être déterminée à partir de la trace du tenseur de contrainte par la formule :

$$J = \frac{1}{3k_0} tr(\underline{\underline{\sigma}}) + 1$$

Où  $k_0$  est le module d'incompressibilité de la matière,  $k_0 = 1/3 \times E / (1 - \nu)$

Nous présenterons aussi la courbe de la déformation plastique cumulée. Par définition, la déformation plastique cumulée entre les instants  $t_0$  et  $t$  est le scalaire  $p_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$

Où  $\underline{\underline{d}}^p$  est le tenseur taux de déformation plastique.

Dans le cas du régime permanent, l'intégrale sur le temps est transformée en une intégrale sur l'espace et la déformation plastique cumulée est donnée par LAM3 pour chaque ligne d'éléments.

Donnons en détail ci-dessous ces sorties dans un cas particulier.

#### **Application numérique pour un cas de laminage (Cas 1) :**

Pour certaine comparaisons, nous ferons appel à d'autres jeux de paramètres. Ces jeux de paramètres seront alors précisés.

Rappelons les paramètres de ce cas 1.

*Paramètres adimensionnels :*

$$\lambda = 0.7, e = 0.08, k = 0.4, t_e = t_s = 0.25$$

*Paramètres dimensionnés :*

Nous avons retenu les valeurs dimensionnées de base suivantes :

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, R = 250 \text{ mm}, V_c = 1000 \text{ mm/s}, \left( \omega = V_c / R = 4 \text{ rad/s} \right)$$

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1-\lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda-1)^2} = 1.957 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 1.370 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = 150 \text{ MPa}, \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

#### A/ Les sorties globales

LAM3 donne les sorties globales suivantes :

La force de laminage par unité de largeur de la bande :  $F = 18.94 \times 10^6 \text{ N/m}$

Le couple de laminage par unité de largeur la bande sur chaque cylindre :

$$C = 1.44 \times 10^5 \text{ N.m/m}$$

La puissance de laminage par unité de largeur de la bande (pour une demie bande) :

$$P = 6.07 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$$

Le glissement en sortie :  $G = 6.20\%$  (Ce qui correspond à une vitesse de sortie sous le cylindre  $V_s = V_c(1 + 0.01 \times G) = 1062 \text{ mm/s}$ . Sous une hypothèse de conservation de débit, cela donnerait une vitesse d'entrée  $V_e = \lambda V_s = 743.4 \text{ mm/s}$ ).

*Remarque :*

*Nous avons vu que  $P = C \cdot \omega - \sigma_e h_e V_e + \sigma_s h_s V_s$*

*Bien sûr si le débit volumique de matière est conservé ( $h_e V_e = h_s V_s$ ), une différence entre ces valeurs en régime permanent ne peut être associée qu'à une compression élastique résiduelle en sortie du laminoir.*

*Ici  $\sigma_e = \sigma_s$ , donc dans l'hypothèse de débit conservé  $P = C \cdot \omega$ . Mais on constate que ce n'est pas exactement le cas dans nos résultats numériques  $C \cdot \omega = 5.76 \text{ kN.m/ms}$  au lieu de  $6.07 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$ . Il y a un écart numérique.*

*Cet écart ne peut pas être associé à une différence de débit volumique entre l'entrée et la sortie du cylindre. En effet, même si le débit volumique entre l'entrée et la sortie des cylindres n'est pas conservé, ce phénomène est due à la forte compression isotrope de la bande en sortie de cylindre qui « emporte » donc une certaine quantité d'énergie élastique ( $\sigma_s h_s V_s - \sigma_e h_e V_e$  par unité de largeur de la bande). La correction sur  $C \cdot \omega$  introduit par la prise en compte de ce phénomène de compression isotrope n'a donc pas le signe souhaité. L'écart est donc probablement dû au cumul d'erreurs numériques dans le calcul de la puissance de laminage. Cet écart est suffisamment faible pour qu'il ne soit pas nécessaire de s'inquiéter.*

*Pour confirmer ce que nous venons de dire, nous réalisons une simulation de laminage avec la traction en entrée et en sortie nulles ( $\sigma_e = \sigma_s = 0$ ) et nous obtenons :*

*La force de laminage par unité de largeur de la bande :  $F = 22.10 \times 10^6 \text{ N/m}$*

*Le couple de laminage par unité de largeur la bande sur chaque cylindre :*

$$C = 1.43 \times 10^5 \text{ N.m/m}$$

*La puissance de laminage par unité de largeur de la bande (pour une demi-bande) :*

$$P = 6.06 \times 10^5 \text{ N.m/ms}$$

Le glissement en sortie :  $G = 6.17\%$

Nous voyons que les forces sur la bande en entrée et sortie du laminoir ont surtout une influence sur la force de laminage qui ne travaille pas.

### B/ Les sorties en vitesse

Commençons par dessiner les sorties en vitesse non « normalisée » :

La première constatation que l'on peut faire sur cette courbe est que la vitesse horizontale est sensiblement identique pour toutes les particules à la même abscisse (courbe 1 à 6 à peu près confondues).

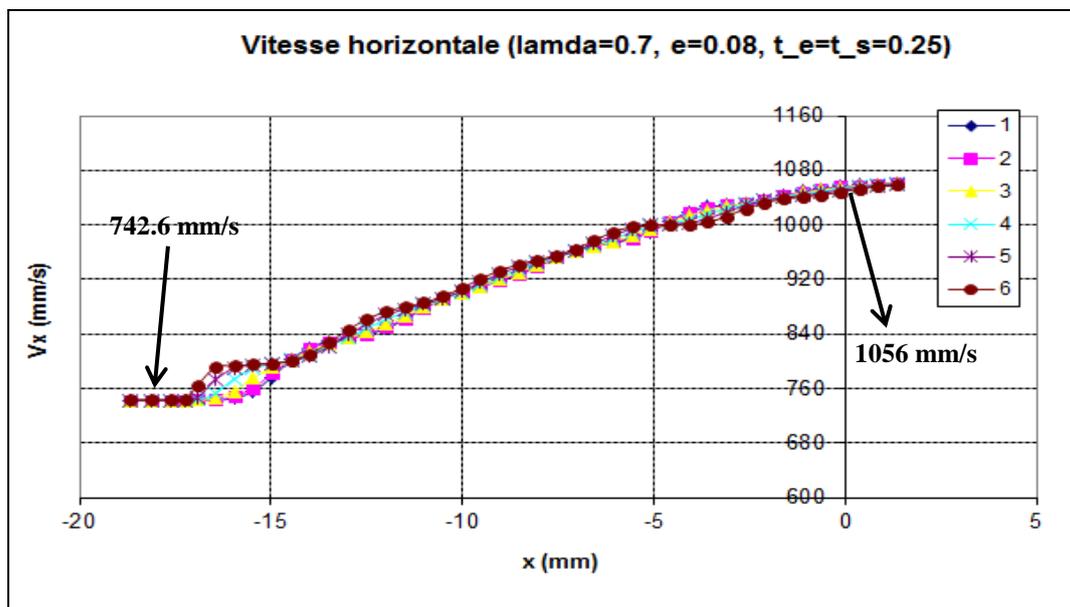


Figure 1-3 : Vitesse horizontale dans la bande de laminage

La deuxième constatation est que la vitesse maximale n'est pas atteinte directement à la sortie de la cage ( $x=0$ ) mais un peu plus loin. Ce phénomène est vraisemblablement due à la relaxation de la contrainte élastique dont la partie isotrope reste sensiblement négative en  $x=0$  et diminue ensuite, entraînant une augmentation élastique de volume.

La dernière constatation immédiate est que la vitesse d'entrée des particules de la bande (en  $x=-17.2$  mm) est de 742.6 mm/s. Cette valeur est un peu différente avec la valeur trouvée ci-dessus (743.4 mm/s avec hypothèse de conservation du débit). De plus, la vitesse en  $x=0$  est de 1056 mm/s. Cette valeur est un peu inférieure à la vitesse de sortie  $V_s = 1062$  mm/s.

Ainsi on constate que  $h_e V_e$  est en fait différent de  $h_s V_s$ . Le débit volumique est donc différent entre l'entrée et la sortie sous cylindre. Nous retrouvons ici le phénomène de forte compression élastique sous cylindre qui est ensuite relaxée.

Concernant la vitesse verticale (Figure 1-4), constatons d'abord qu'elle est de deux ordres de grandeur inférieure à la vitesse horizontale. La première ligne de nœuds correspondant à l'axe de symétrie a bien sûr une vitesse verticale nulle. La sixième ligne suit la géométrie du

cylindre et le rapport entre  $V_x$  et  $V_y$  est donc imposé. Pour les autres lignes de nœuds, on constate une oscillation. Les creux sur la Figure 1-4 correspondent à des sortes « de dents » de matière presque rigide s'enfonçant depuis le cylindre en rotation, les bosses correspondent à des dents presque rigides d'orientation inverse générées sur l'axe de symétrie.

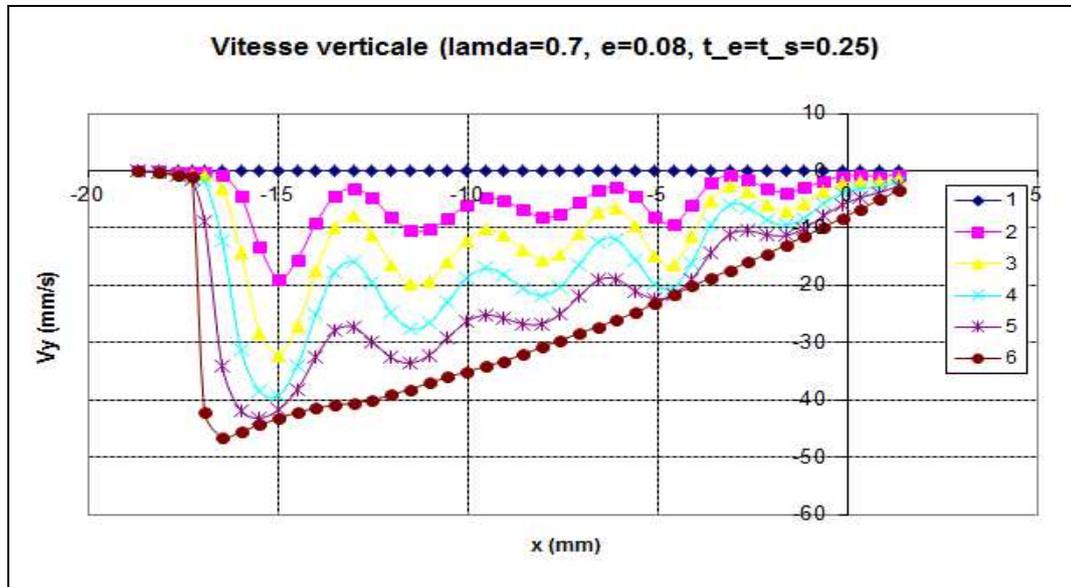


Figure 1-4 : Vitesse verticale dans la bande de laminage

Examinons maintenant les courbes « normalisées » telle qu'elles sont définies plus haut.

Nous constatons que la vitesse horizontale « normalisée » (Figure 1-5) ne vaut pas exactement 1 pour toutes les abscisses. Ceci confirme que le débit volumique n'est pas exactement uniforme. Comme la partie plastique de la déformation est sans variation de volume, l'écart à 1 de ces courbes résulte de la compression élastique de la matière.

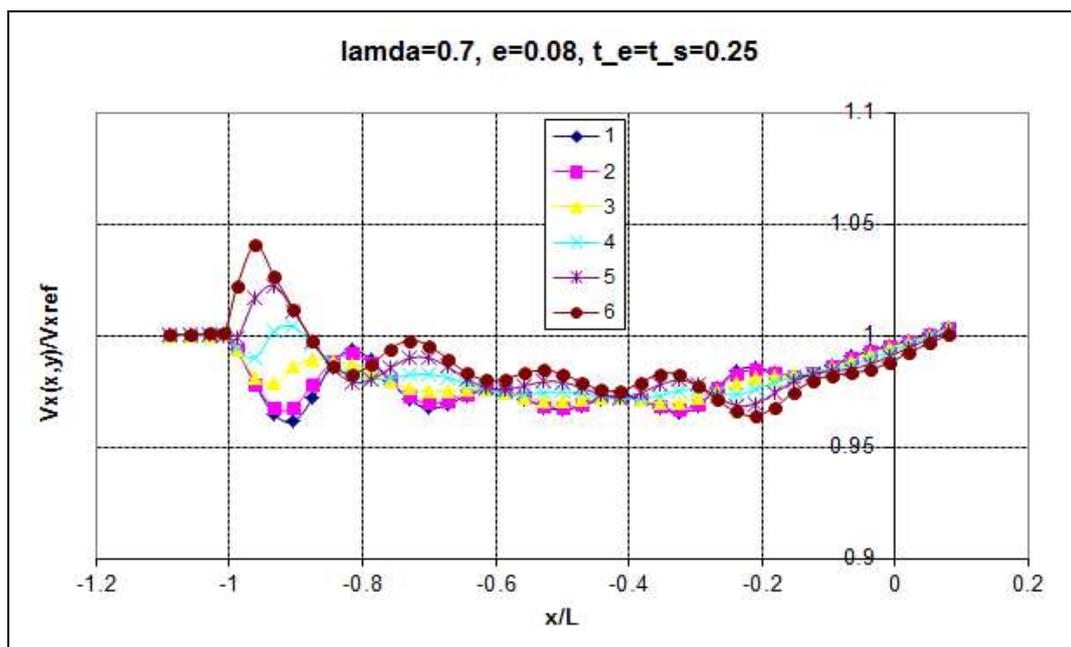


Figure 1-5 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage

Pour confirmer ce que nous venons de dire sur la compression élastique dans la bande, nous réalisons une simulation de laminage avec un Module d'Young multiplié par  $10^3$  de façon à être très proche de la description d'un matériau rigide plastique.

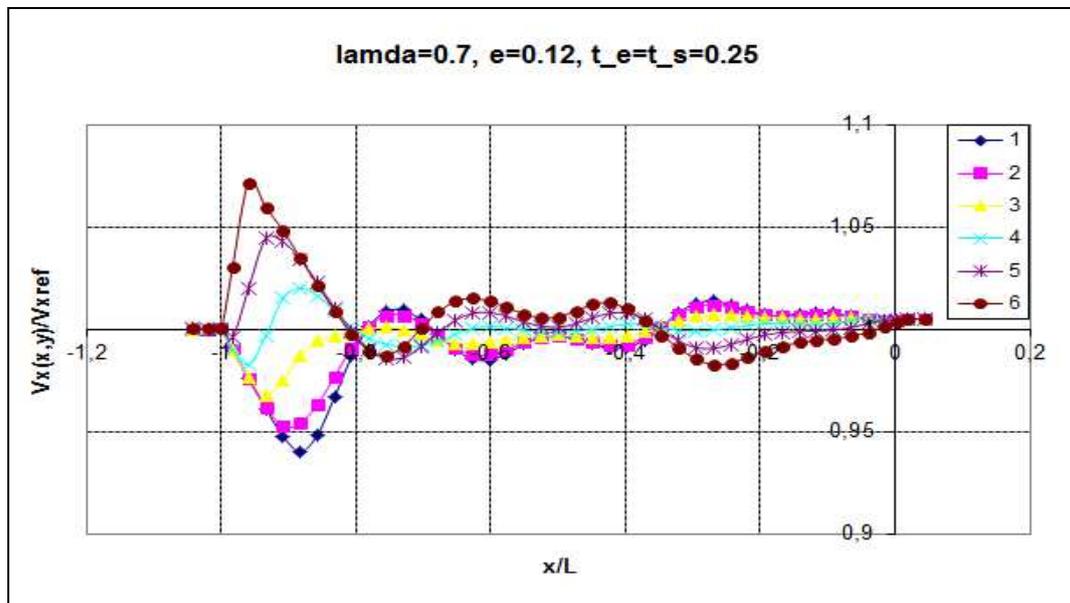


Figure 1-6 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (matériau rigide plastique)

Sur la Figure 1-6 donnant la vitesse horizontale « normalisée » correspondante, on constate que les courbes sont beaucoup plus proches de 1 (et la moyenne de ces courbes encore plus proche de 1). Ce qui implique que le débit volumique est uniforme. Cela confirme notre analyse sur l'influence de la compression élastique dans la variation de débit volumique.

Vérifions que l'écroutissage n'est pas déterminant dans le processus de laminage en montrant ci-dessous la courbe  $V_x$  « normalisée » dans un cas qui correspond à peu près à un écroutissage isotrope avec une limite d'élasticité  $\sigma_p = \sigma_0(1 + \alpha \times p_{cum})$  (on choisit  $\alpha = 0.1$ )

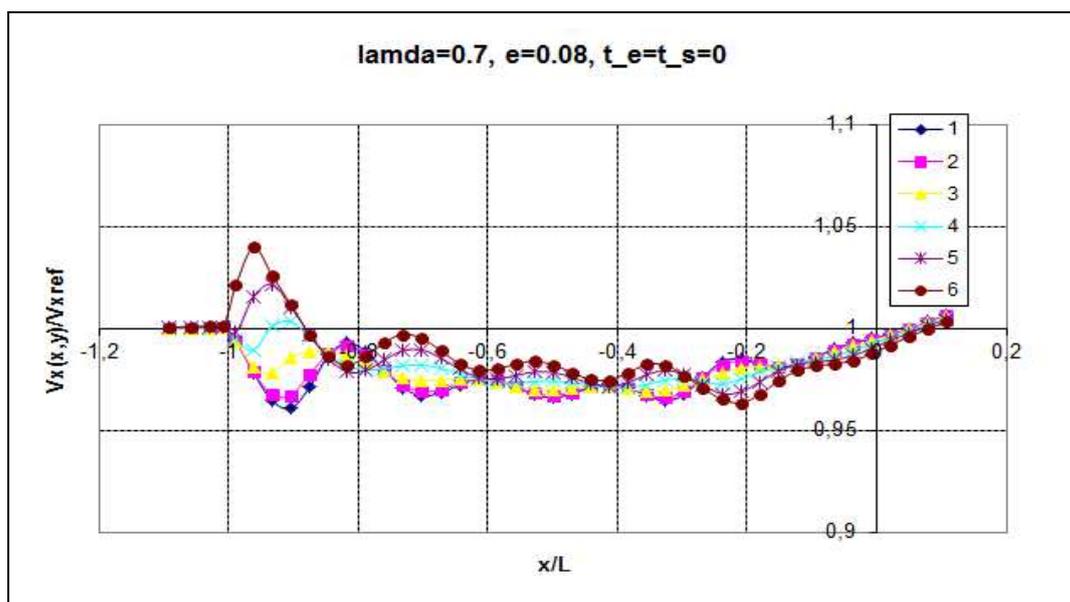


Figure 1-7 : Vitesse horizontale « normalisée » dans la bande de laminage (l'écroutissage)

En comparant cette courbe à celle du cas 1 de référence. On voit que les différences sont très faibles. Cela justifie de ne pas faire entrer les paramètres d'écroûissage dans les paramètres dont l'influence est primordiale.

Notons que l'écart à 1 sur la Figure 1-5 reste faible (<3%) pour toutes les abscisses, ce qui justifie que certains modèles simplifiés négligent cette compression. La vitesse de référence dans la direction longitudinale de la bande de laminage  $V_x^{ref}(x; \mathcal{X}) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$  est souvent une bonne approximation.

Examinons maintenant la vitesse « normalisée » verticale (Figure 1-8). On constate que la vitesse de référence verticale  $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$  est une assez médiocre approximation, particulièrement en sortie de l'emprise (Figure 1-9).

Notons qu'en sortie d'emprise  $V_y^{ref}(x, y)$  tend vers 0, ainsi la vitesse verticale normalisée n'a plus de sens. Il ne donc pas trop s'inquiéter de cette brusque montée sur la courbe de la Figure 1-8. Nous redessinons la courbe sur la Figure 1-9 en changeant d'échelle. Les courbes de la vitesse verticale normalisée oscillent. La pseudo période d'oscillation de ces courbes (de l'ordre de  $2 \times e$ ) semble fixée mais l'amplitude est variable.

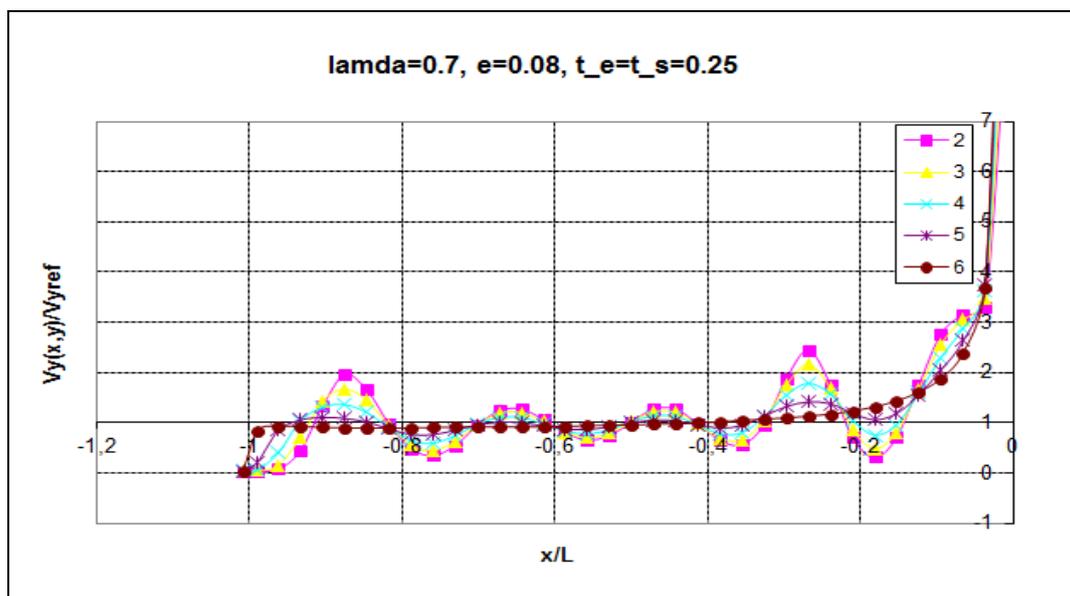


Figure 1-8 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (grande échelle)

Examinons maintenant la vitesse normalisée de glissement à l'interface bande-cylindre. Dans la partie de la courbe où cette valeur est négative (partie à gauche de la zone neutre, Figure 1-10), les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre et le frottement est « moteur ». Dans la partie de la courbe où cette valeur est positive (partie à gauche de la zone neutre, Figure 1-10), les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre et le frottement est « résistant ».

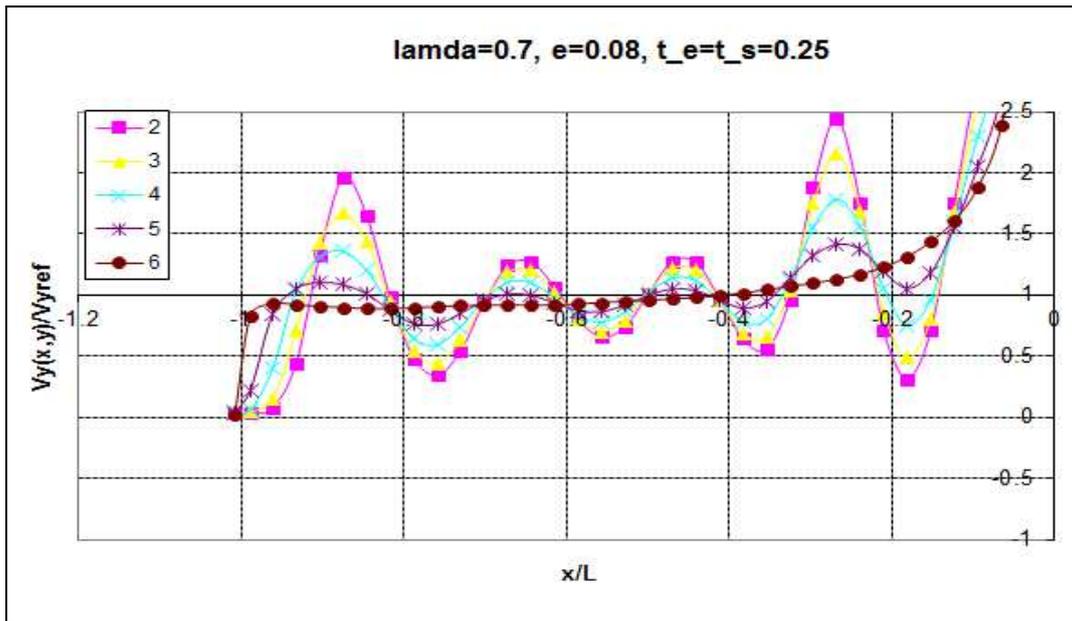


Figure 1-9 : Vitesse verticale « normalisée » dans la bande de laminage (petite échelle)

La zone (indiquée dans la Figure 1-10) où la valeur de la vitesse de glissement est nulle est la zone neutre.

Rappelons que  $G = 6.20\%$  est égale au maximum de cette courbe. Ce maximum est atteint un peu après la sortie de l'empise.

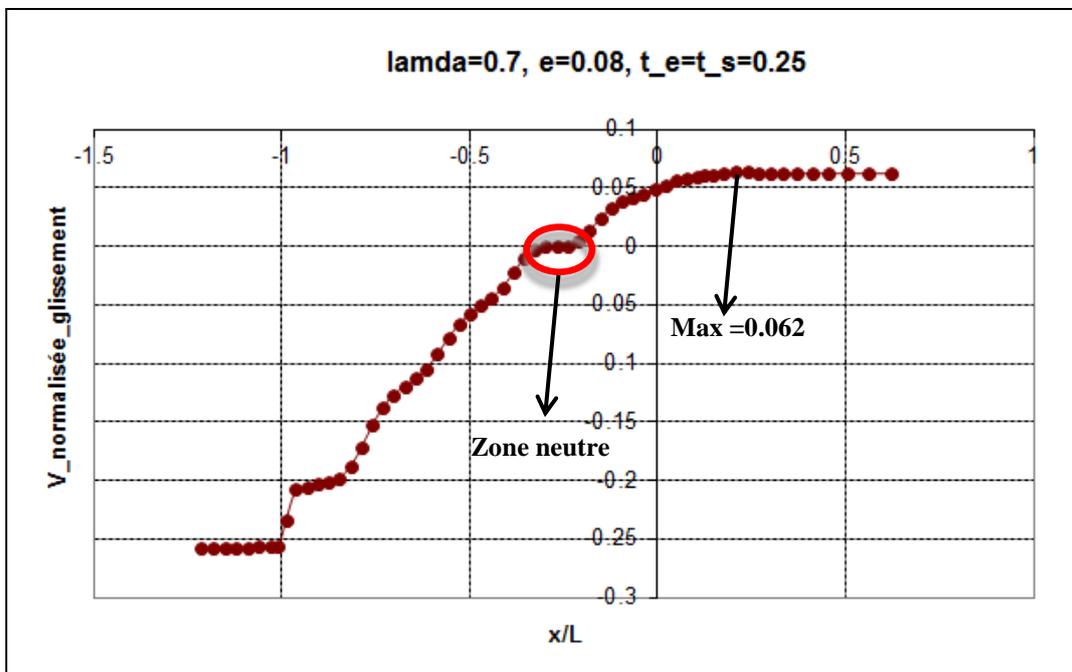


Figure 1-10 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande-cylindre

C/ Les sorties en contrainte

Les contraintes « normalisé »  $\sigma_{xx} / \sigma_0$  et  $\sigma_{yy} / \sigma_0$  sont présentées dans Figure 1-11 et Figure 1-12. Nous constatons que dans notre cas (l'élancement  $e$  est petit), ces contraintes sont presque identiques pour les éléments qui ont la même abscisse. De plus, elles sont à peu près linéaires par morceaux (2 morceaux ici) et l'intersection entre les deux morceaux se situe au niveau de la zone neutre.

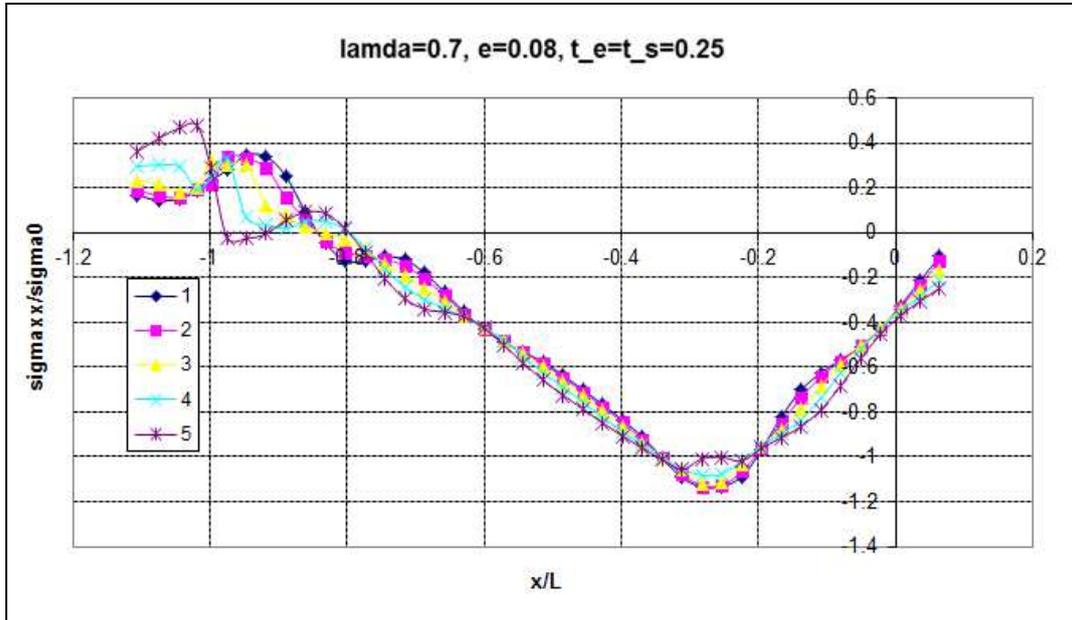


Figure 1-11 : Courbe de la contrainte  $\sigma_{xx} / \sigma_0$

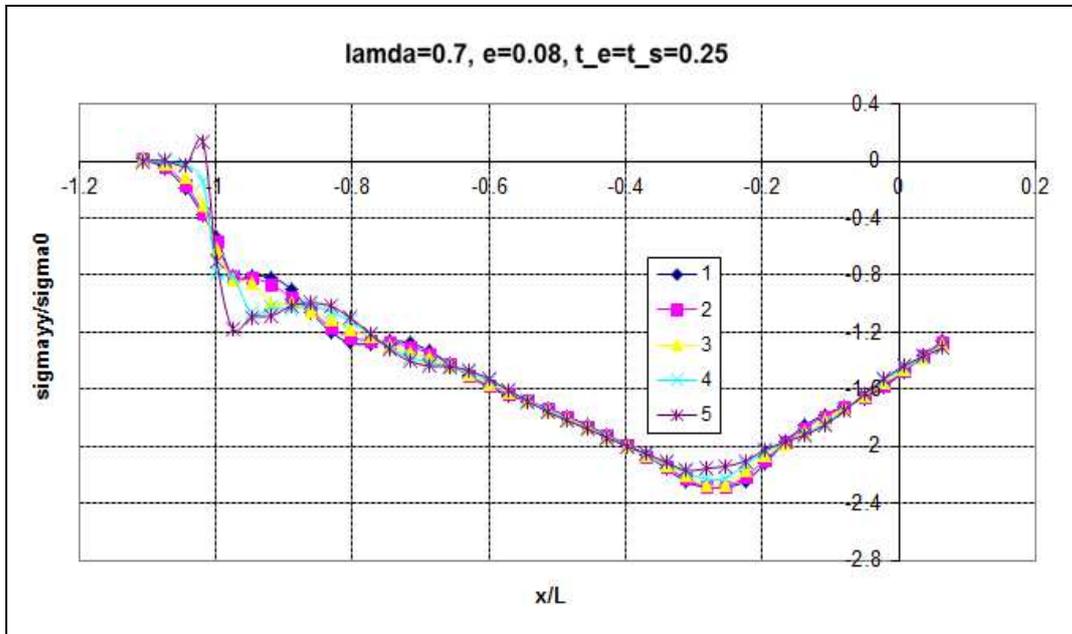


Figure 1-12 : Courbe de la contrainte  $\sigma_{yy} / \sigma_0$

Concernant le cisaillement « normalisé », on constate qu'il est plus élevé dans les éléments qui sont plus proches du cylindre et qu'ils sont nulles au point neutre. Dans la partie en amont

(à gauche du point neutre), la valeur de cisaillement est positive (Figure 1-13). Cela s'explique par le fait que les particules de la bande vont moins vite que celles du cylindre. Dans la partie en aval (à droite du point neutre), la valeur de cisaillement est négative. Cela s'explique par le fait que les particules de la bande vont plus vite que celles du cylindre.

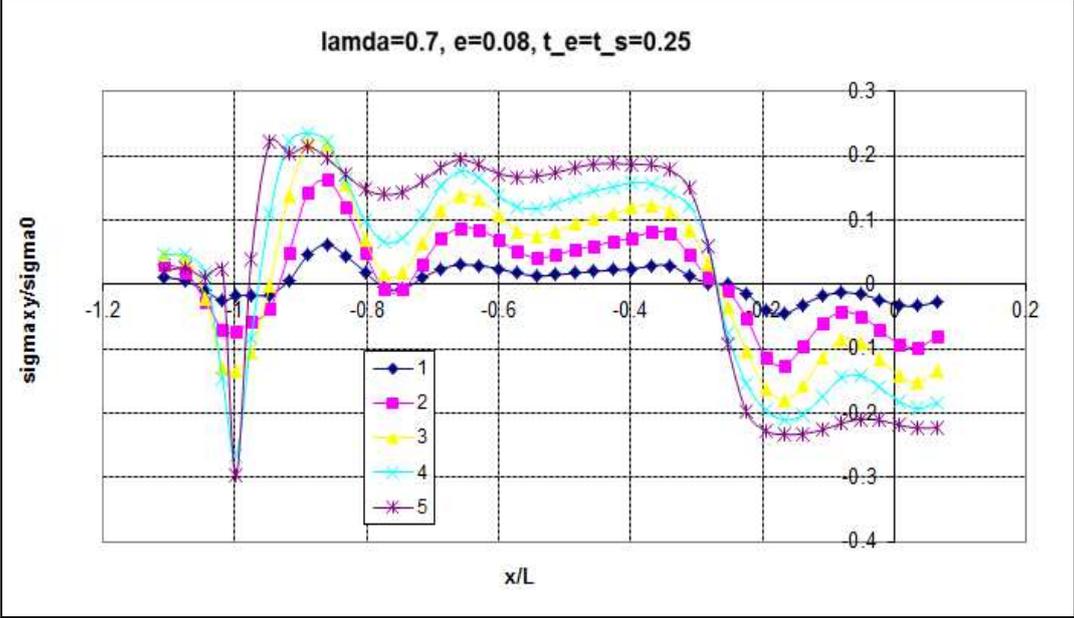


Figure 1-13 : Courbe de la contrainte  $\sigma_{xy}/\sigma_0$

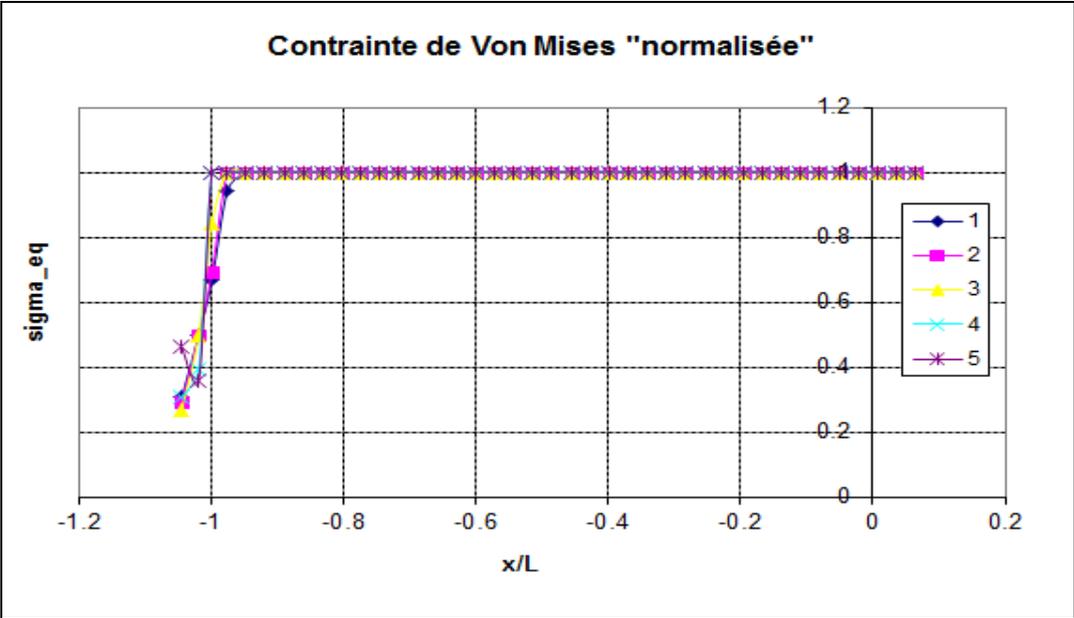


Figure 1-14 : Courbe de la contrainte Von Mises « normalisé »

Nous vérifions que la courbe de la contrainte Von Mises « normalisée » vaut bien uniformément 1 dans la zone plastique de la bande de laminage.

D/ Les sorties en variation du volume et déformation

Comme les contraintes  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{yy}$ ,  $\sigma_{zz}$  sont à peu près linéaires par morceaux, la variation du volume (associé à  $tr(\underline{\underline{\sigma}})$ ) est aussi à peu près linéaire par morceaux. L'intersection entre les deux morceaux se situe au point neutre.

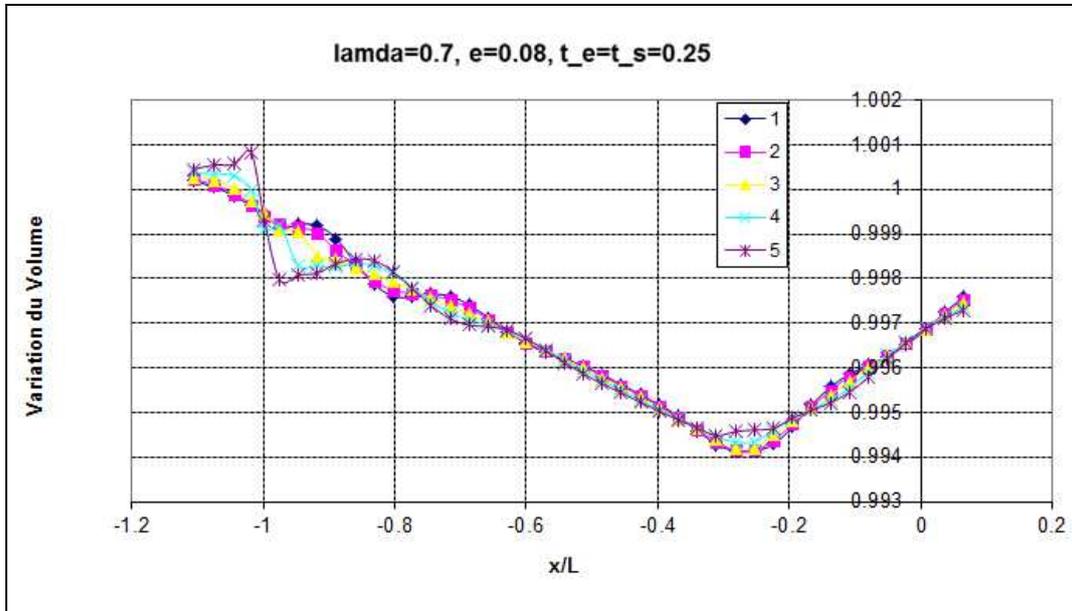


Figure 1-15 : Courbe de la variation du volume

La déformation plastique cumulée dans la bande de laminage dans ce cas-là est presque uniforme dans l'épaisseur :

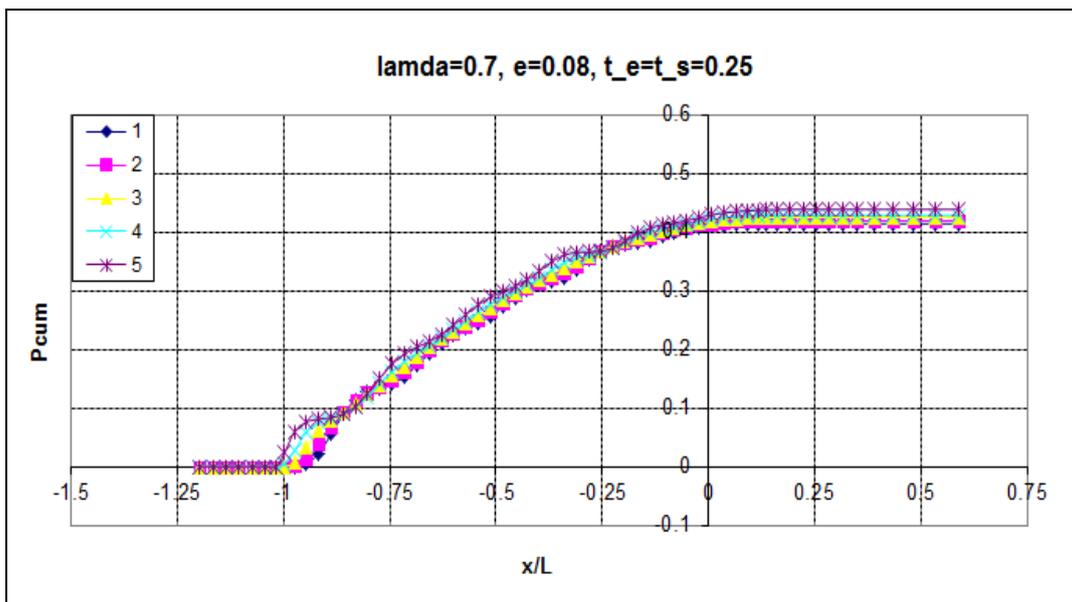


Figure 1-16 : Déformation plastique cumulée dans la bande de laminage

## 1.5. Influence des principaux paramètres du laminage

Nous avons vu plus haut que nous avons 5 paramètres adimensionnels définissant les cas de laminage sous les hypothèses du paragraphe 1.1.

L'expérience des industriels nous a conduit à privilégier 2 de ces paramètres dont nous allons étudier l'influence

- la réduction verticale  $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$

- l'élanement  $e = \frac{h_s}{L}$ .

Rappelons que les autres paramètres ont été fixés :

- le paramètre adimensionnel de frottement  $k=0.4$

- le paramètre adimensionnel de traction en entrée  $t_e = \frac{\sigma_e}{\sigma_0} = 0.25$

- le paramètre adimensionnel de traction en sortie  $t_s = \frac{\sigma_s}{\sigma_0} = 0.25$

Pour étudier l'influence de ces deux paramètres adimensionnels importants, nous avons fait des calculs LAM3 avec 3 valeurs pour  $\lambda$  (0.5 ; 0.7 ; 0.9) et 6 valeurs pour  $e$  (0.08 ; 0.10 ; 0.12 ; 0.14 ; 0.16 ; 0.18). Cela donne 18 cas « de base » :

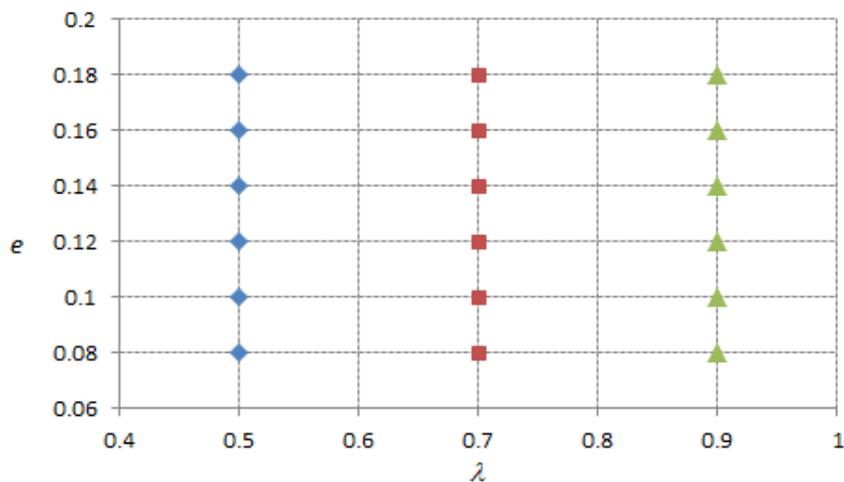


Figure 1-17 : Les valeurs des deux paramètres adimensionnels importants

Nous avons ajouté à ces 18 cas, 6 cas pour l'étude de l'influence des tractions d'entrée et de sortie, 6 cas pour l'étude de l'influence de l'écroutissage et 6 cas pour l'étude de l'influence de la prise en compte de déformation élastique. Nous ne reviendrons pas sur ces 18 autres cas.

Les résultats complets correspondent à ces 36 cas ne sont pas présentés dans ce mémoire de thèse. Dans ce paragraphe, nous ne présentons que les résultats qui nous paraissent nécessaires pour discuter l'influence des principaux paramètres.

Commençons par nous intéresser aux valeurs globales. Nous définissons la force normalisée (adimensionnel) de laminage par unité de longueur de bande par :

$$\hat{F} = \frac{F}{\sigma_0 L}$$

- Où
- $F$  est la force de laminage par unité de largeur de bande
  - $\sigma_0$  est la limite d'élasticité
  - $L$  est la longueur de contact entre le cylindre et la bande

Les 3 courbes de la figure ci-dessous donnent la force normalisée de laminage par unité de largeur de bande  $\hat{F}$  en fonction de l'élancement  $e$  pour les 3 valeurs de la réduction verticale  $\lambda$

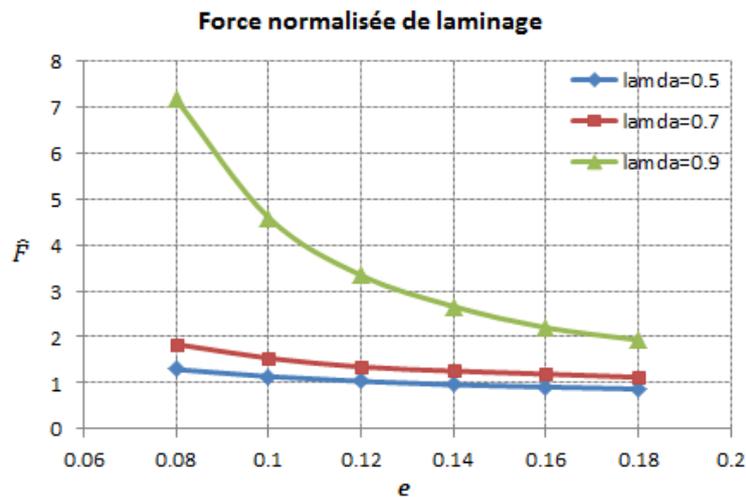


Figure 1-18 : La force normalisée de laminage

Nous constatons que pour les réductions fortes ( $\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.5$ ) ou moyennes ( $\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.7$ ), la force de laminage est de l'ordre de grandeur  $\sigma_0 L$  quel que soit l'élancement  $e = \frac{h_s}{L}$ . Pour les cas de réduction faible ( $\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.9$ ), la force normalisée de laminage est beaucoup plus grande, en particulier lorsque l'élancement  $e = \frac{h_s}{L}$  est faible. Rappelons que la force de laminage est sensible aux tractions d'entrée et de sortie des bandes que nous ne faisons pas varier. Nous n'étudierons pas plus ce phénomène ici.

Définissons maintenant le couple normalisé (adimensionnel) de laminage par unité de longueur par :

$$\hat{C} = \frac{C}{\sigma_0 L}$$

Où  $C$  est le couple de laminage par unité de largeur de bande.

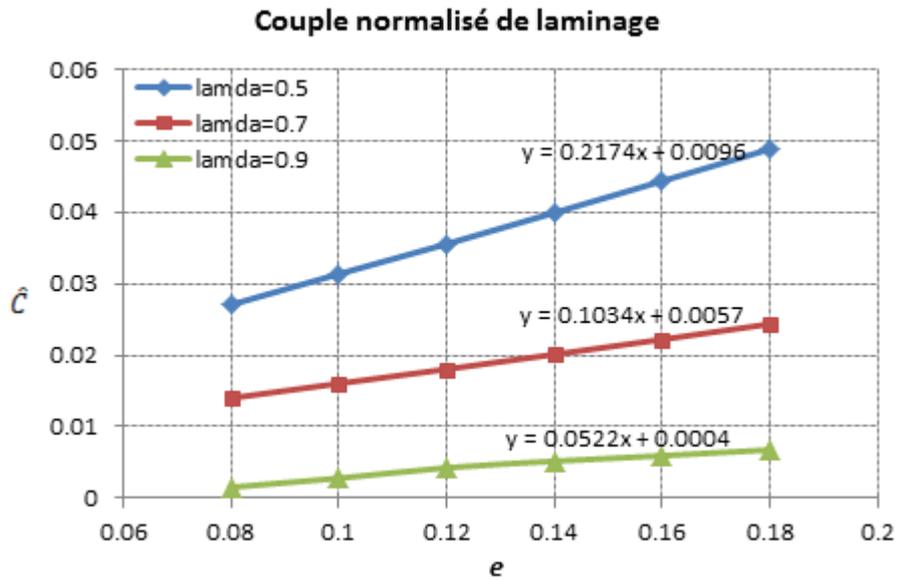


Figure 1-19 : Le couple normalisé de laminage

Nous constatons que les couples normalisés de laminage varient de façon à peu près linéaire en fonction de  $e$  quel que soit  $\lambda$ . Plus la réduction verticale est forte ( $\lambda \searrow$ ) plus le couple normalisé est élevé.

La courbe ci-dessous donne le glissement en sortie  $G$  en fonction de  $e$  pour les 3 valeurs de  $\lambda$  :

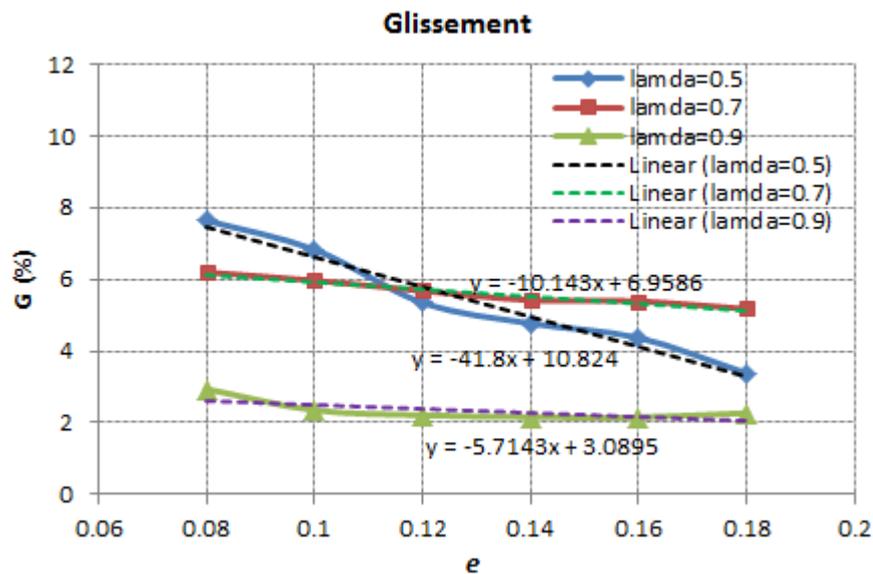


Figure 1-20 : Le glissement en sortie

Nous constatons que pour les fortes réductions fortes ( $\lambda = \frac{h_s}{h_e} = 0.5$ ), le glissement en sortie

dépend fortement de l'élanement  $e = \frac{h_s}{L}$ .

Intéressons-nous maintenant à la vitesse longitudinale normalisée dans la bande  $\frac{V_x(x, y)}{V_x^{ref}(x)}$  où

la vitesse longitudinale de référence est définie par la formule  $V_x^{ref}(x; \lambda) = V_e \frac{h_e}{h(x)}$

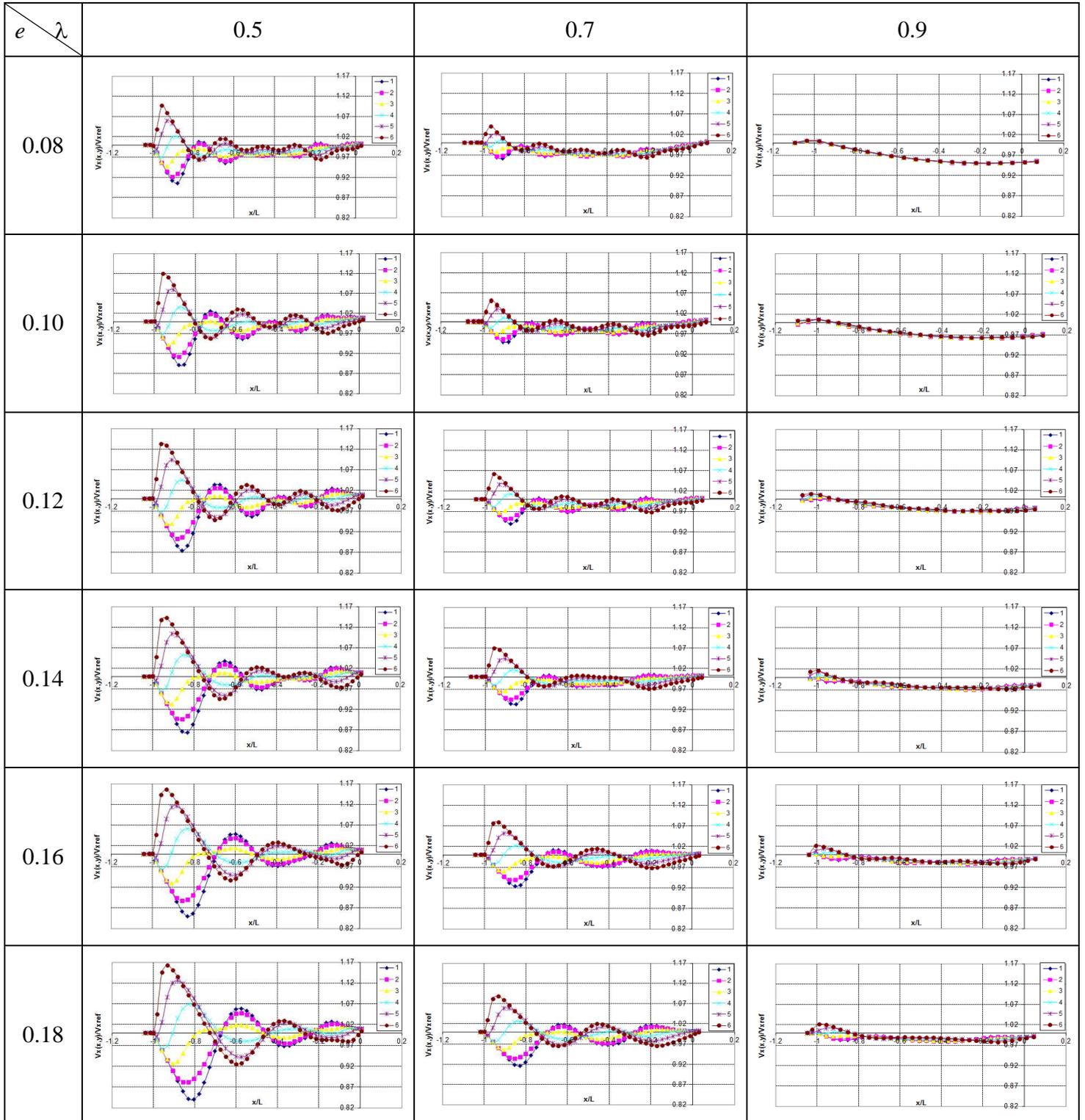


Figure 1-21 : Vitesse longitudinale normalisée dans la bande des 18 cas « de base »

Nous constatons que la vitesse de référence reste une approximation acceptable dans la plupart des cas (l'écart maximal de 17% en entrée sous le cylindre pour le cas le plus défavorable de forte réduction ( $\lambda = 0.5$ ) et de grand élancement ( $e = 0.18$ ).

Plus la réduction est faible, plus l'hypothèse d'uniformité de la vitesse horizontale dans l'épaisseur est vérifiée.

Pour les réductions plus fortes, la vitesse horizontale normalisée « oscille » en fonction de  $x/L$ , les particules les plus rapides étant alternativement au centre de la bande ou sur les surfaces de contact des cylindres.

On compte de 4 à 7 « demi-oscillations », la diminution de  $e$  entraînant une augmentation du nombre des oscillations.

Enfin, l'amplitude de « l'oscillation » est plus forte en entrée qu'en sortie et d'autant plus forte que la réduction est importante ( $\lambda \searrow$ ) ou l'élancement est grand ( $e \nearrow$ ).

Présentons maintenant 18 courbes donnant la vitesse verticale de la bande (Figure 1-22). Cela n'aurait pas de sens ici de représenter les résultats à la même échelle avant adimensionalisation. La constatation principale sur cet ensemble de figures est « l'oscillation » de la vitesse verticale qui fait écho à l'oscillation constatée sur les vitesses horizontales.

Notons cependant que ces oscillations apparaissent mêmes pour de faibles réductions ( $\lambda = 0.9$ ) alors que les oscillations correspondantes sur les vitesses horizontales étaient presque imperceptibles. Cela est bien sûr due au fait que la vitesse verticale est de 2 ordres de grandeurs inférieure à la vitesse horizontale. Les petites variations de l'une entraînent de fortes variations de l'autre.

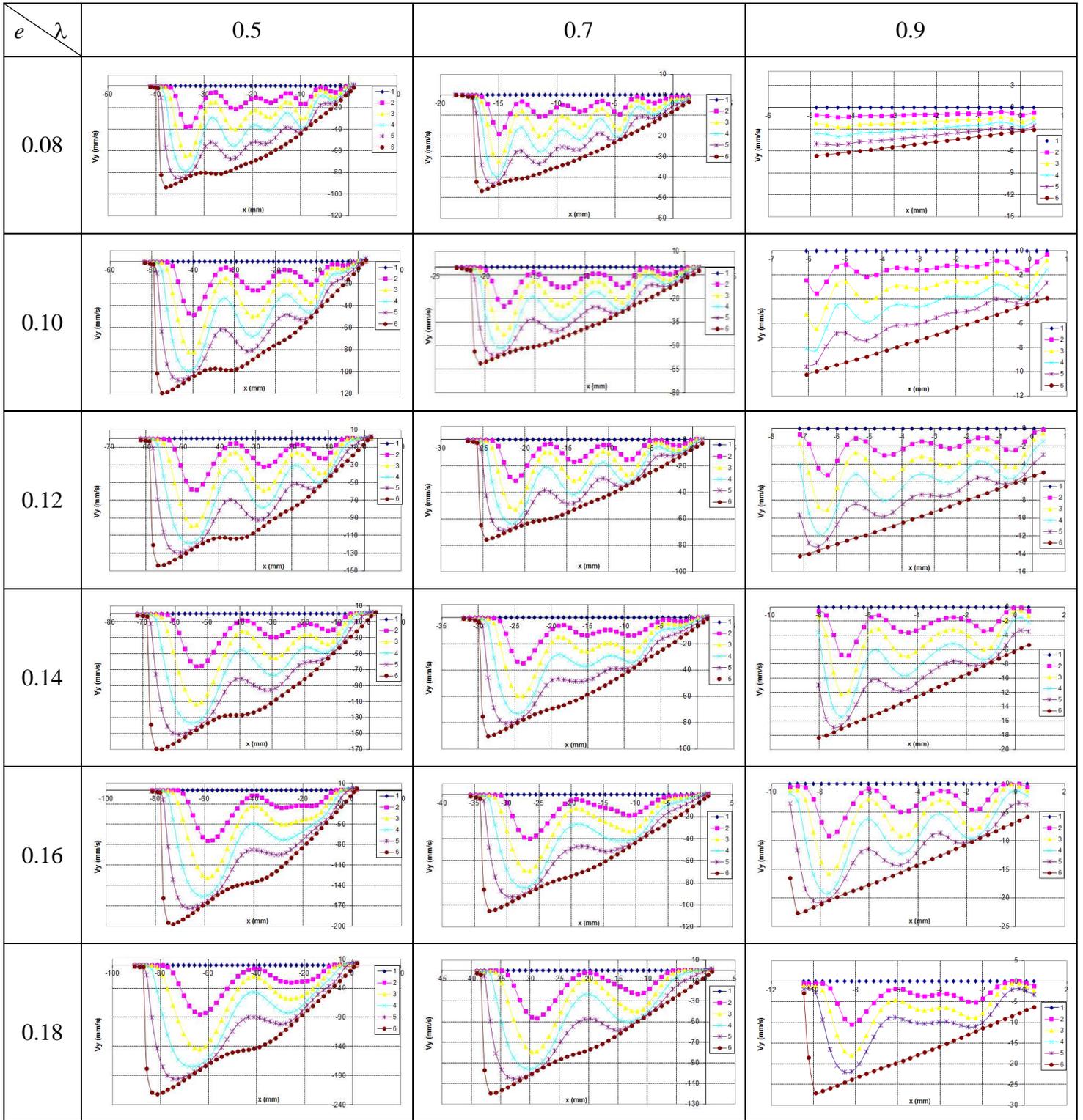


Figure 1-22 : Vitesse verticale dans la bande des 18 cas « de base »

Une autre façon de présenter ces résultats est de considérer les courbes donnant la vitesse

verticale normalisée  $\frac{V_y(x, y)}{V_y^{ref}(x, y)}$  dans la bande (Figure 1-23) où la vitesse verticale de

référence est définie par la formule  $V_y^{ref}(x, y) = V_e h_e \frac{h'(x)}{h^2(x)}$

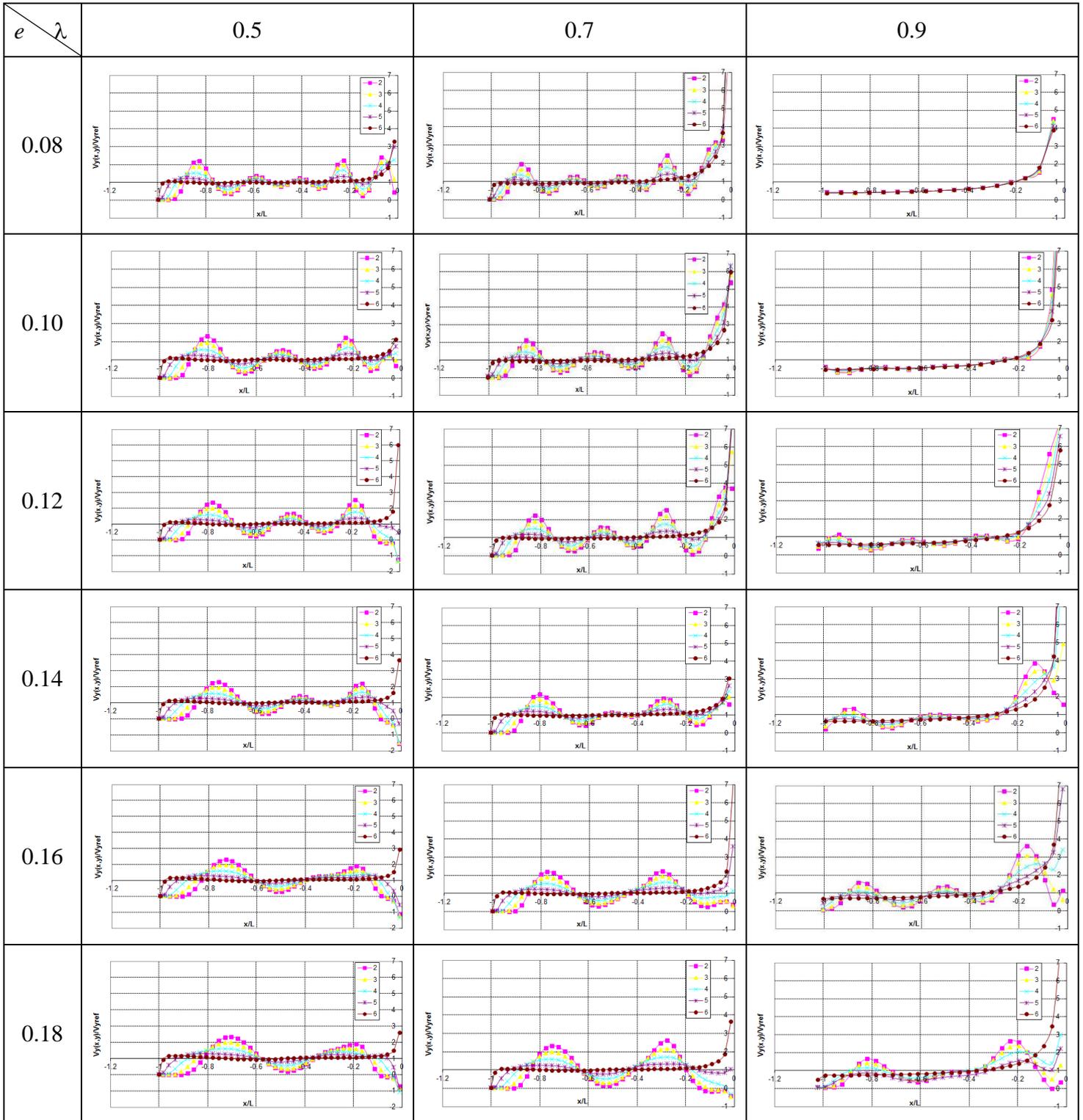


Figure 1-23 : Vitesse verticale normalisée dans la bande des 18 cas « de base »

Les courbes peuvent être ici présentées avec la même échelle. On constate que la vitesse verticale de référence est une assez médiocre approximation de la vitesse verticale. C'est particulièrement le cas en sortie de la bande mais ceci est due au fait que la vitesse verticale de référence tend vers 0 en sortie de cylindre. Il ne faut donc pas attacher trop d'importance à cette partie des courbes. Pour le reste, on constate à nouveau le phénomène d'oscillation.

Présentons les courbes donnant les vitesses normalisées de glissement à l'interface bande – cylindre qui sont définies par la formule  $\left(\sqrt{V_x^2(x, h(x)) + V_y^2(x, h(x))}\right) / V_c - 1$ :

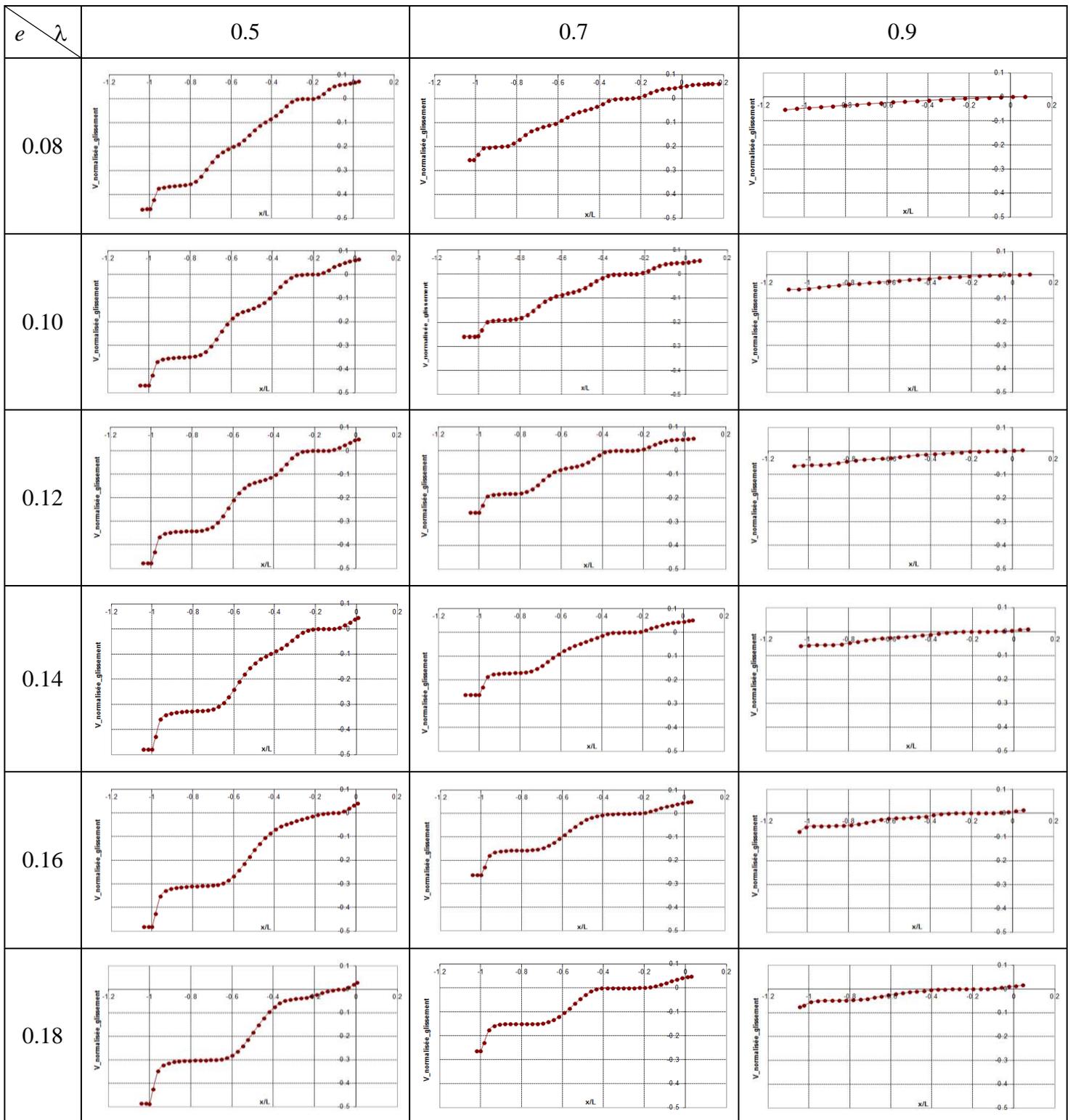


Figure 1-24 : Vitesse normalisée de glissement à l'interface bande - cylindre des 18 cas « de base »

Pour les faibles réductions ( $\lambda = 0.9$ ), les vitesses normalisées de glissement restent faibles. Le point neutre (ou la zone neutre) correspondant au point (ou à la portion de courbe) où le glissement est nul est très proche de la sortie.

Lorsque la réduction est plus importante, la courbe a une allure de « fonction en escalier », impliquant l'existence de bloc en rotation autour de l'axe du cylindre pour lesquelles la vitesse de glissement est assez uniforme.

On constate surtout que la zone neutre est d'autant plus importante que la réduction est faible ( $\lambda \geq 0.7$ ) et l'élancement est grand ( $e \nearrow$ ).

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées  $\sigma_{xx}/\sigma_0$

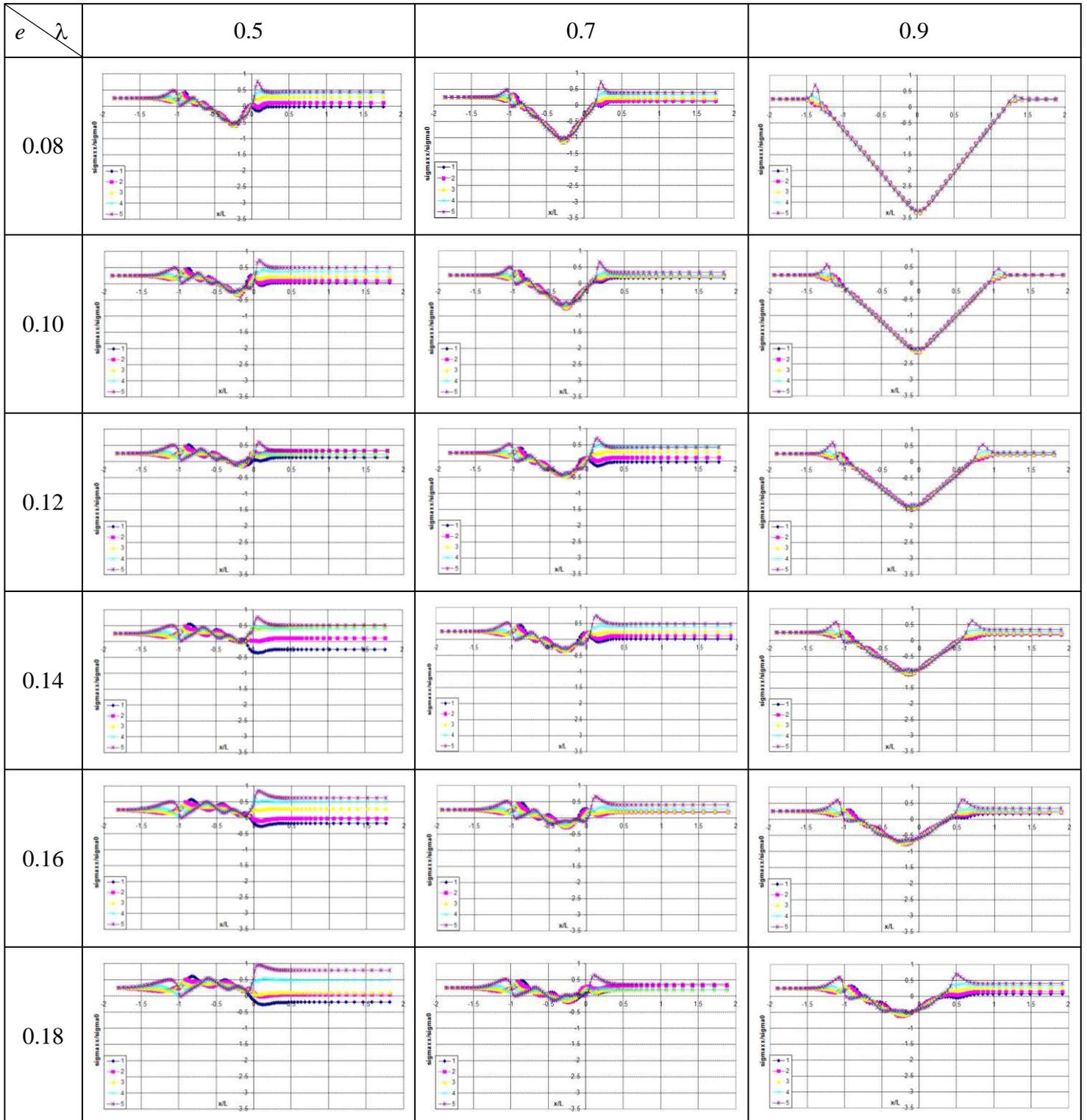


Figure 1-25 : Contrainte normalisée  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  dans la bande des 18 cas « de base »

Nous présentons tout d'abord les courbes  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  sur une large plage de valeur de  $x/L$  ( $x/L \in [-2; 2]$ ). Nous faisons cela principalement pour observer les valeurs en entrée et sortie de la bande.

Nous constatons qu'en  $x/L$  de l'ordre de -2 (en entrée), toutes les courbes ont la valeur déterminée par la condition limite ( $t_e = 0.25$ ). Par contre, on constate que  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  s'écarte de  $t_e$  bien avant l'entrée de la bande sous le cylindre (bien avant  $x/L = -1$ )

La constatation en sortie est encore plus intéressante, car même loin du cylindre en  $x/L = 2$ , on constate que généralement le champ  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  n'est pas uniformément égale à  $t_s = 0.25$ . En fait seule la valeur moyenne sur l'épaisseur vaut 0.25. Il y a donc généralement un champ de contrainte résiduel dans l'épaisseur de la bande en sortie du laminoir. Cette contrainte résiduelle est d'autant plus importante que l'écrasement est fort ( $\lambda$  petit) et l'élanement important ( $e$  grand).

Etudions maintenant le reste de la courbe dans la partie sous le cylindre. Pour cela, nous présentons un zoom des courbes pour  $x/L \in [-1.2; 0.2]$  (voir Figure 1-26).

On constate que la courbe  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  initialement positive pour  $x/L = -1$ , décroît et devient rapidement fortement négative à cause de la compression volumique élastique.

Une approximation de ces courbes par des courbes affines par morceau peut être envisagée pour de faible écrasement ( $\lambda$  grand) et de faible élanement ( $e$  petit). Tout se passe en première approximation comme si le frottement moteur en avant, entre la bande et le cylindre, comprimait la bande, puis le frottement en sortie la décomprimait. Cette approximation est de plus en plus médiocre si l'on s'éloigne de cette zone des paramètres et on observe l'apparition croissante d'oscillations qui font écho aux oscillations constatées sur les courbes en vitesse.

Il semble par ailleurs clair que le contact entre la bande et le cylindre est prolongé au-delà du point bas ( $x/L = 0$ ) jusqu'à un point  $x/L > 0$  à partir duquel les valeurs de  $\sigma_{xx}$  n'évoluent plus.

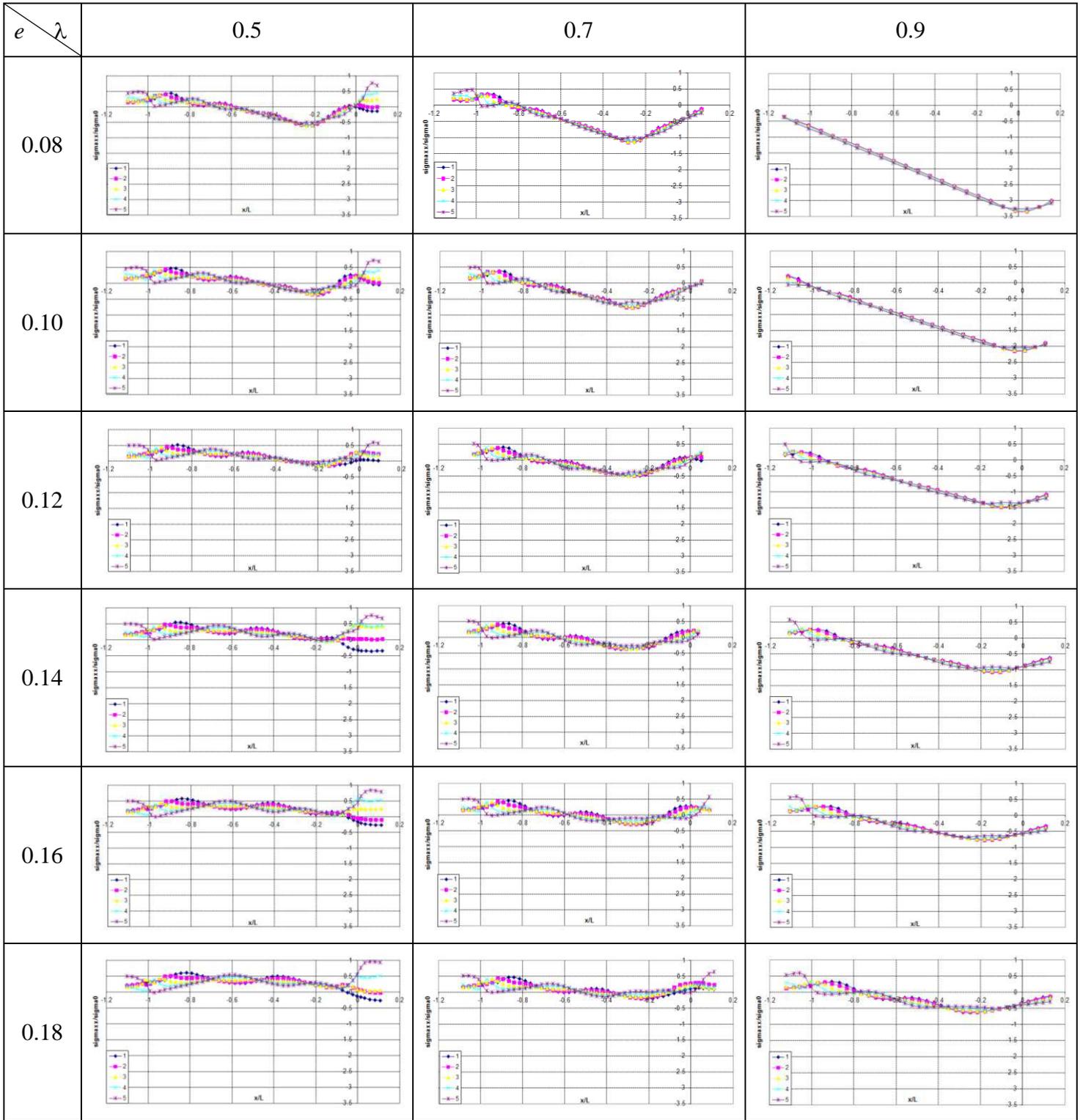


Figure 1-26 : Contrainte normalisée  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  dans la bande des 18 cas « de base »

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées  $\sigma_{yy}/\sigma_0$

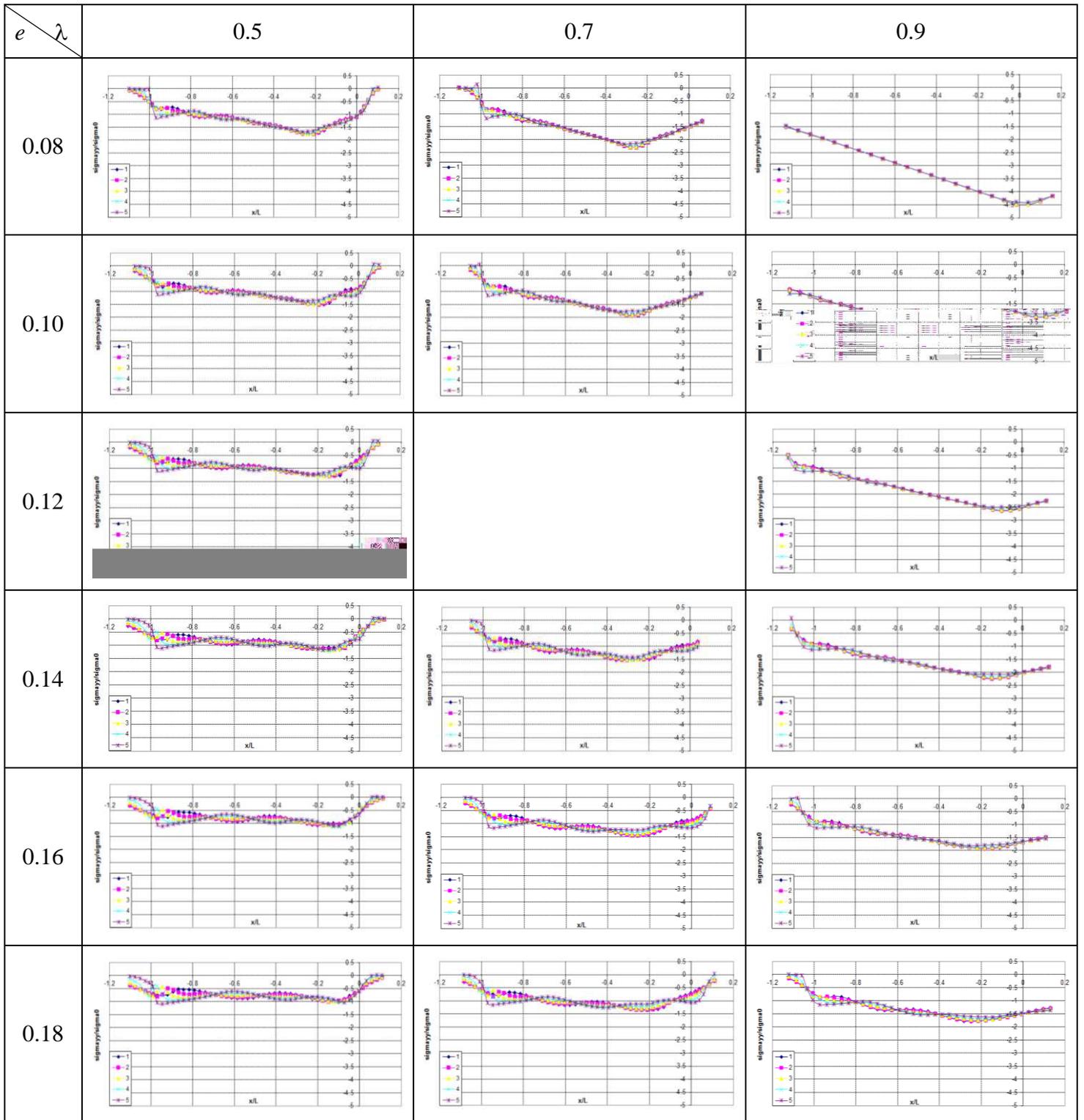


Figure 1-27 : Contrainte normalisée  $\sigma_{yy}/\sigma_0$  dans la bande des 18 cas « de base »

Ces courbes ne présentent pas un intérêt majeur aussi nous ne les donnons que pour  $x/L \in [-1.2; 0.2]$ . On constate l'augmentation progressive de la compression de la bande et

surtout qu'au-delà de  $x/L = 0$ ,  $\sigma_{yy}$  est non nul ce qui implique bien que le contact bande – cylindre se prolonge au-delà du point bas du cylindre.

Présentons les courbes donnant les contraintes normalisées  $\sigma_{xy}/\sigma_0$

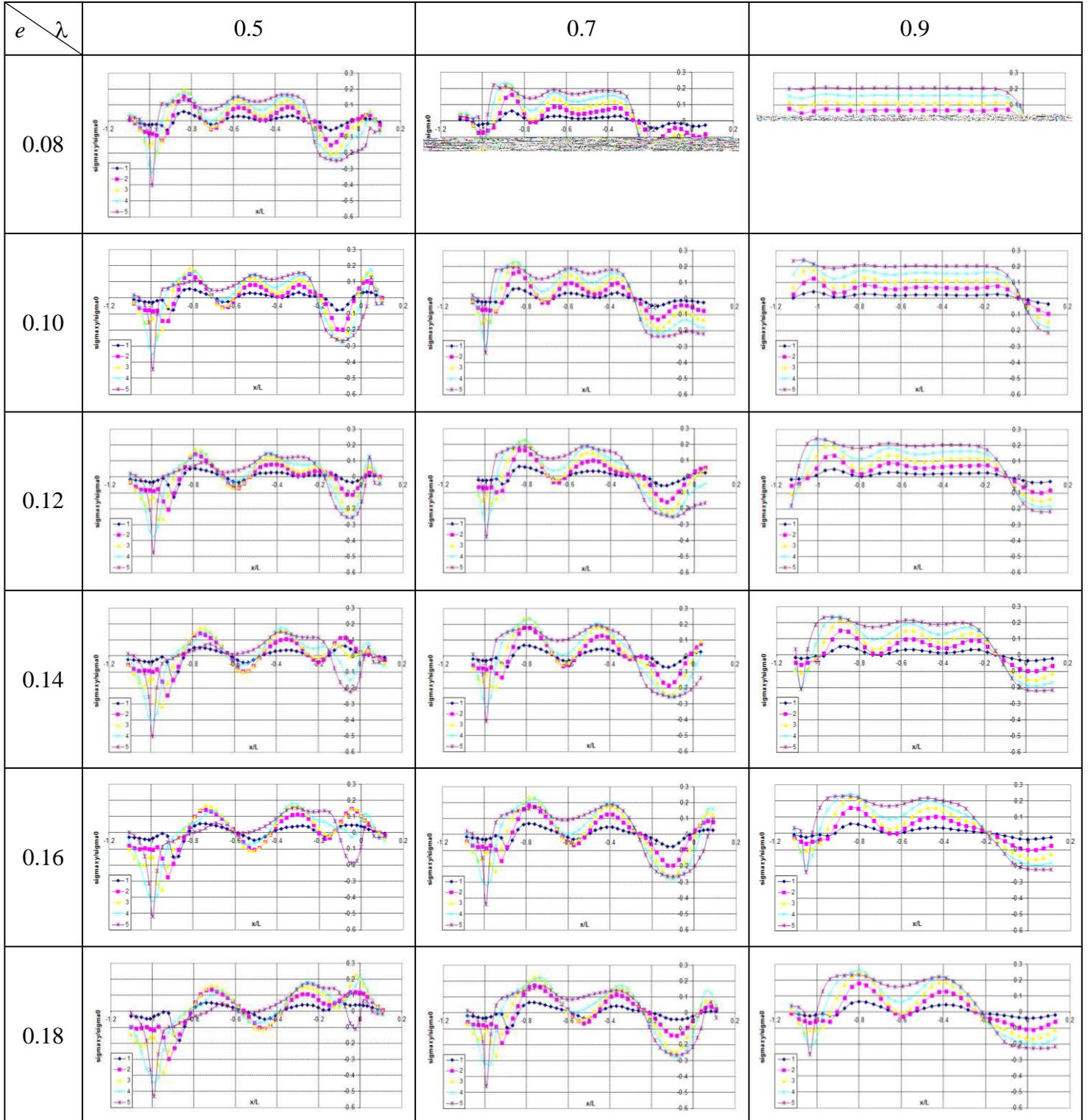


Figure 1-28 : Contrainte normalisée  $\sigma_{xy}/\sigma_0$  dans la bande des 18 cas « de base »

La contrainte normalisée  $\sigma_{xy}/\sigma_0$  est d'un ordre de grandeur inférieur à  $\sigma_{xx}/\sigma_0$ . Le signe change au passage de la zone neutre, comme attendu.

La zone d'entrée de la bande sous le cylindre est soumise à un cisaillement  $\sigma_{xy}$  beaucoup plus intense. Pour les faibles valeurs d'écrasement ( $\lambda$  grand), il est raisonnable de considérer que la composante  $\sigma_{xy}/\sigma_0$  est linéaire en  $y$  dans l'épaisseur et quasi uniforme par morceau en  $x$ . Enfin dans le cas de plus fort écrasement ( $\lambda$  faible) et de grand élancement ( $e$  grand). On observe de fortes oscillations de  $\sigma_{xy}/\sigma_0$  généralement sans changement signe en amont.

Présentons les courbes donnant la variation de volume (Figure 1-29) qui est déterminée à partir de la trace du tenseur de contrainte par la formule :

$$J = \frac{1}{3k_0} \text{tr}(\underline{\underline{\sigma}}) + 1$$

Où  $k_0$  est le module d'incompressibilité de la matière,  $k_0 = 1/3 \times E/(1-\nu)$

Nous constatons que la variation de volume peut paraître faible, mais la raideur du matériau étant importante. Elle permet d'expliquer le niveau de contrainte  $\sigma_{xx}/\sigma_0$  et  $\sigma_{yy}/\sigma_0$  observé plus haut.

Notons qu'une approximation affine par morceau de part et d'autre du point ou de la zone neutre peut être acceptable généralement.



Présentons les courbes donnant la déformation plastique cumulée. Rappelons que par définition, la déformation plastique cumulée entre les instants  $t_0$  et  $t$  est le scalaire

$$P_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt$$
 où  $\underline{\underline{d}}^p$  est le tenseur le taux de déformation plastique. Dans le cas du régime permanent, l'intégrale sur le temps est transformée en une intégrale sur l'espace.

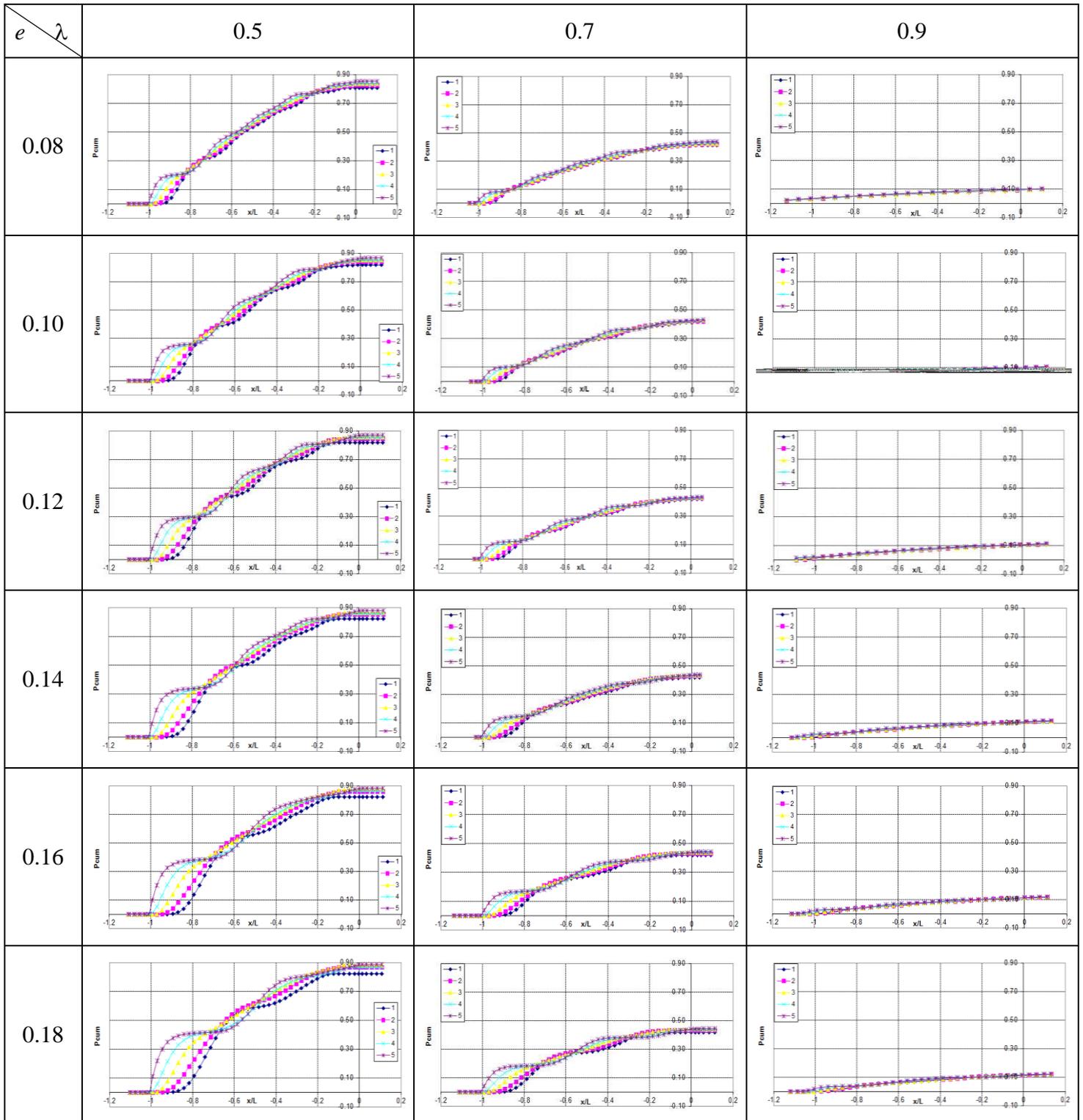


Figure 1-30 : Déformation plastique cumulée dans la bande des 18 cas « de base »

En observant les courbes pour un fort écrasement ( $\lambda$  petit), on observe qu'en entrée de la bande sous le cylindre, la zone plastique débute au voisinage du cylindre et que le cœur de la bande ne se plastifie que plus loin. Il y a ainsi une sorte de « coin élastique » sous le cylindre en entrée de la bande. Ce phénomène est d'autant plus important que l'élanement  $e$  est important.

Ensuite la déformation plastique cumulée tend à devenir uniforme dans l'épaisseur.

## 1.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons voulu nous forger une certaine compréhension du processus de laminage et de l'influence des principaux paramètres que sont la réduction verticale  $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$  et

l'élanement  $e = \frac{h_s}{L}$  sur ces processus. Pour cela, nous avons mené des calculs avec le logiciel LAM3 en déformation plane et régime permanent dans 18 « cas de base » avec  $\lambda = 0.5 ; 0.7 ; 0.9$  et  $e = 0.08 ; 0.10 ; 0.12 ; 0.14 ; 0.16 ; 0.18$ .

L'examen des différentes courbes indique une évolution continue des mécanismes avec ces paramètres plutôt que l'apparition d'une variation brutale de mécanismes.

Parmi les principales conclusions, retenons l'influence de la variation de volume d'origine élastique sous les cylindres entraînant, entre autre, le fait que le contact bande cylindre continue au-delà du point bas du cylindre, à cause du retour élastique.

Retenons aussi l'existence de contraintes résiduelles dans l'épaisseur d'autant plus importantes que la réduction  $\lambda = \frac{h_s}{h_e}$  est faible (fort écrasement) et l'élanement  $e = \frac{h_s}{L}$







En tout point de l'écoulement, où ces équations sont vérifiées, il existe quatre directions remarquables orthogonales deux à deux (Figure 2-1) :

- Les deux normales aux facettes sur lesquels s'exercent les contraintes principales  $\sigma_I, \sigma_{II}$  classées par convention  $\sigma_I \geq \sigma_{II}$ . Le critère de plasticité devient  $\sigma_I - \sigma_{II} = 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ . Notons  $\theta$  l'angle entre la normale à la facette sur laquelle s'exerce  $\sigma_I$  et l'axe  $Ox$
- Les facettes  $\alpha, \beta$  sont à  $45^\circ$  des précédentes (Figure 2-1). Notons classiquement  $p = -\frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3}$ . Compte tenu du fait que  $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  pour un comportement rigide plastique en déformation plane, on a  $p = -\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$  ou ce qui revient au même  $p = -\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$ . Il est possible de tracer le cercle de Mohr de centre  $(-p, 0)$  (Figure 2-1b). Cela montre que les facettes  $\alpha$  et  $\beta$  subissent le cisaillement extrême  $\tau = \pm \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$

Ainsi l'état de contrainte en un point donné est caractérisé par les valeurs de  $\theta$  et  $p$ , le rayon du cercle de Mohr étant fixé à  $\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$ .

Les lignes de glissement sont par définition, constituées du double réseau de courbes orthogonales 2 à 2 et tangentes en tout point aux directions  $\alpha$  et  $\beta$  définies précédemment. L'écriture des équations d'équilibre dans le repère local mobile  $\alpha, \beta$  montre que les variations de la pression  $p$  sont liées aux variations de leur direction  $\theta$  le long de ces lignes :

$$\begin{cases} p + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \theta = cte & \text{le long des lignes } \alpha \\ p - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \theta = cte & \text{le long des lignes } \beta \end{cases} \quad (2.2)$$

En termes mathématiques, le système d'équation (2.1) est hyperbolique et les lignes  $\alpha$  et  $\beta$  sont ses caractéristiques. L'angle de rotation d'une ligne  $\alpha$  par exemple entre deux points d'intersection avec deux courbes  $\beta$  fixées est le même pour toutes les courbes  $\alpha$  (Figure 2-1c). Nous choisissons un point  $O$  à l'origine du réseau des courbes  $\alpha$  et  $\beta$ . On peut alors paramétrer la position d'un point  $P$  par le couple de nombres  $(\alpha, \beta)$ . Le nombre  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) est la valeur de  $\theta$  au point  $A$  (resp.  $B$ ) où la ligne  $\beta$  (resp.  $\alpha$ ) coupe la ligne  $\alpha_0$  (resp.  $\beta_0$ ) (Figure 2-1c). Par construction, on a en  $P$  :  $\theta = \alpha + \beta$

Notons  $R_\alpha, R_\beta$  les rayons des courbures des lignes  $\alpha$  et  $\beta$  passant par  $P$ . Ils vérifient par définition :

$$\begin{cases} \frac{1}{R_\alpha} = \frac{\partial \theta}{\partial s_\alpha} \\ \frac{1}{R_\beta} = \frac{\partial \theta}{\partial s_\beta} \end{cases} \quad (2.3)$$

Avec  $s_\alpha$  et  $s_\beta$  sont abscisses curvilignes le long des lignes  $\alpha$  et  $\beta$  passant par  $P$

On démontre aisément que

$$\begin{cases} \frac{\partial R_\alpha}{\partial \alpha} = -R_\beta \\ \frac{\partial R_\beta}{\partial \beta} = R_\alpha \end{cases} \quad (2.4)$$

Donc,  $R_\alpha$  et  $R_\beta$  vérifient l'équation différentielle linéaire du second ordre et homogène de Klein-Gordon :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \alpha \partial \beta} + f = 0 \quad (2.5)$$

### 2.1.2. Champ de vitesses et hodographe

En écrivant la loi d'écoulement, on voit aisément que les lignes de glissement sont les lignes de vitesse d'extension nulles  $\dot{\varepsilon}_{\alpha\alpha} = \dot{\varepsilon}_{\beta\beta} = 0$ . On déduit que les variations, le long des lignes de glissement, des composantes  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  du champ de vitesse dans le repère  $(\alpha, \beta)$  vérifient les relations suivantes (Geiringer, 1930) :

$$\begin{cases} dv_\alpha - v_\beta d\theta = 0 \text{ le long des lignes } \alpha \\ dv_\beta + v_\alpha d\theta = 0 \text{ le long des lignes } \beta \end{cases} \quad (2.6)$$

On voit que  $v_\alpha$  et  $v_\beta$  sont aussi des solutions de l'équation différentielle de Klein-Gordon. Donc, le champ des lignes de glissement construit à partir des conditions aux limites en contraintes permet de construire un champ de vitesse qui vérifie les conditions aux limites sur les vitesses et les relations (2.6) le long des lignes de glissement.

Cette méthode des lignes de glissement est une méthode analytique qui donne des solutions exactes. Mais, elle est très lourde et nous ne présentons pas des résultats de cette méthode dans ce rapport.

Nous allons ci-dessous présenter les approches simplifiées, tout d'abord en contrainte (méthode des tranches) puis en vitesse (Méthode des Bornes Supérieures).

## 2.2. Méthode des tranches

Nous allons présenter ici tout d'abord la méthode des tranches dans sa globalité avec la prise en compte d'un frottement Tresca ou d'un frottement de Coulomb à l'interface entre la bande et le cylindre, puis nous verrons une simplification permettant l'obtention de solutions analytiques explicites, le modèle de Bland et Ford.

Pour compléter, nous présenterons aussi le modèle de Sims qui abandonne l'hypothèse des cages rigides et la remplace par une approche simplifiée utilisant un « rayon déformé » appelé rayon d'Hitchcock (Hitchcock, J.H. , 1935).

Enfin, nous appliquons aux deux cas de laminage présentés ci-dessus.

### 2.2.1. Méthode des tranches

L'objectif de cette méthode est de prévoir la force de laminage exercée verticalement sur la bande comprise entre les deux cylindres. Le principe consiste à discrétiser l'emprise de laminage en tranches verticales et à établir les équations d'équilibre statique de chacune d'elles.

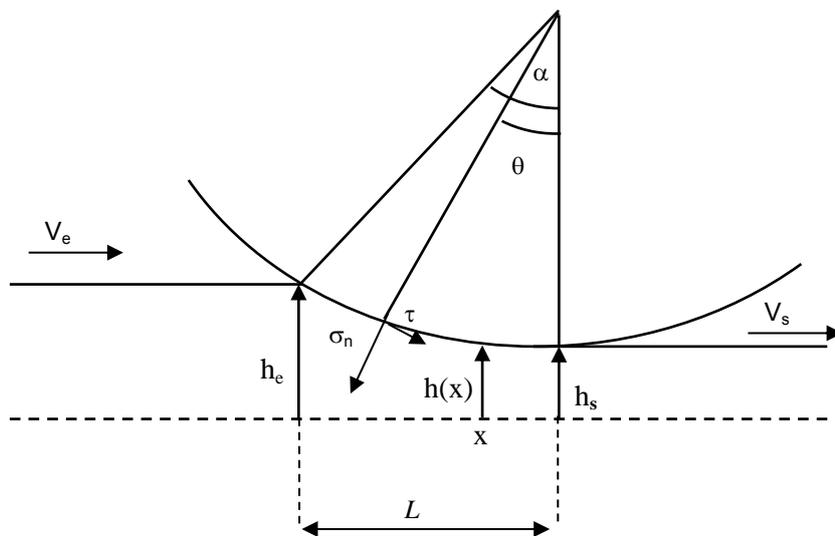


Figure 2-2: Processus de laminage

Dans la zone de contact bande – cylindre, l'abscisse  $x \in [-L, 0]$  ( $x = -L$  à l'entrée,  $x = 0$  à la sortie). Comme indiqué sur Figure 2-2, il peut être commode de remplacer l'abscisse  $x$  par l'angle  $\theta$  du point de contact sur le cylindre. Notons  $\alpha > 0$ , l'angle total de contact  $\theta \in [-\alpha, 0]$  ( $\theta = -\alpha$  si  $x = -L$  et  $\theta = 0$  si  $x = 0$ ).

Avec ces signes de  $x$  et  $\theta$ , la changement de variable s'écrit  $x = R \sin \theta$  où  $R$  est encore rayon du cylindre.

La méthode des tranches utilise les hypothèses simplificatrices suivantes :

- La déformation est plane
- Le comportement est rigide plastique de Von Mises

- La composante  $\sigma_{xy}$  est négligeable. Les axes  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$  sont les directions principales du tenseur des contraintes. Donc, dans le repère  $Oxyz$ , le tenseur des contraintes s'écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

avec  $\sigma_{zz} = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})$  comme nous venons de le voir au paragraphe précédent pour un comportement rigide plastique.

Donc, il nous reste deux contraintes inconnues  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . En notant que  $\sigma_{yy} < \sigma_{xx}$ , le critère de Von Mises s'écrit :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (2.7)$$

L'étude du chapitre précédent a permis de montrer que  $\sigma_{xy}$  est d'un ordre inférieur à  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$ . L'hypothèse ci-dessus ( $\sigma_{xy} = 0$ ) est forte mais acceptable en première approximation.

- Les déformations et les contraintes sont homogènes dans une tranche. C'est-à-dire que  $\sigma_{xx}$  et  $\sigma_{yy}$  ne dépendent que de  $x$  ( $x \in [-L, 0]$  ou  $\theta \in [-\alpha, 0]$ ).

L'étude du chapitre précédent a souligné que cette hypothèse peut être fautive, surtout en sortie du cylindre pour certain cas de laminage.

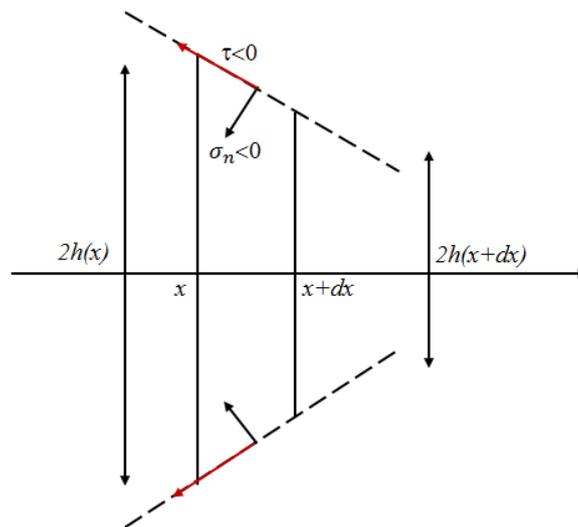


Figure 2-3 : Bilan des forces appliquées sur les faces après le point neutre

*Remarque : Il est possible d'alléger sensiblement ces hypothèses, tout en obtenant les mêmes équations que celles écrites ci-dessous.*

Nous allons écrire l'équilibre d'une « tranche » comprise entre les sections  $x$  et  $x + dx$

Rappelons que la hauteur sous cylindre à la sortie est  $2h(x)$ . Les efforts extérieurs s'exerçant sur cette tranche suivant  $\underline{e}_x$  sont :

- le contact avec l'amont  $-2h(x)\sigma_{xx}(x)$
- le contact avec l'aval  $+2h(x+dx)\sigma_{xx}(x+dx)$
- le contact entre la bande et le cylindre

Notons  $\sigma_n$  ( $\sigma_n < 0$ ) l'effort normal de contact entre la bande et le cylindre, et  $\tau$  l'effort de cisaillement parallèlement à la surface de contact entre la bande et le cylindre ( $\tau > 0$  avant le point neutre et  $\tau < 0$  après le point neutre).

Le contact entre la tranche  $(x, x+dx)$  et le cylindre s'exerce sur une zone de longueur  $Rd\theta = \frac{dx}{\cos\theta}$ . La composante suivant  $\underline{e}_x$  du vecteur contrainte de contact de la tranche  $(x, x+dx)$  avec les cylindres haut et bas est donc :

$$2(-\sigma_n \sin\theta + \tau \cos\theta) \frac{dx}{\cos\theta}$$

( $\sigma_n < 0$  et  $\theta < 0$ , le premier terme de cette somme est une composante de freinage donc négative. En amont du point neutre  $\tau > 0$ , donc  $2\tau \cos\theta$  est une composante motrice. En aval du point neutre  $\tau < 0$ , donc,  $2\tau \cos\theta$  est une composante de freinage).

La Figure 2-3 représente les différentes forces agissant sur une tranche après le point neutre.

L'équilibre de la tranche  $[x, x+dx]$  en projection suivant l'axe  $Ox$  nous donne :

$$2h(x+dx)\sigma_{xx}(x+dx) - 2h(x)\sigma_{xx}(x) + 2(-\sigma_n \sin\theta + \tau \cos\theta) \frac{dx}{\cos\theta} = 0$$

Soit :

$$d(h\sigma_{xx}) = [\sigma_n \sin\theta - \tau \cos\theta] \frac{dx}{\cos\theta} = [\sigma_n \sin\theta - \tau \cos\theta] Rd\theta \quad (2.8)$$

Etudions maintenant l'équilibre de la demi-tranche  $[x, x+dx]$ ,  $y > 0$  en projection suivant l'axe  $\underline{e}_y$ .

Cette demi-tranche est soumise aux efforts de contact suivant :

- le contact avec la demi-tranche symétrique sur le plan de symétrie  $-\sigma_{yy}dx$  (cette composante est positive car  $\sigma_{yy}$  est négative)
- la composante verticale du contact de la tranche avec le cylindre supérieur  $(\sigma_n \cos\theta + \tau \sin\theta) \frac{dx}{\cos\theta}$   
(le premier terme est négatif, le deuxième terme est du signe opposé de  $\tau$ )

Il n'a pas d'effort vertical sur les sections  $x$  et  $x+dx$ , car nous avons fait l'hypothèse que le cisaillement  $\sigma_{xy}$  est négligeable.

L'équilibre vertical de la demi-tranche conduit donc, à l'équation :

$$\sigma_{yy} dx = (\sigma_n \cos \theta + \tau \sin \theta) \frac{dx}{\cos \theta}$$

Ou encore :

$$\sigma_{yy} = \sigma_n + \tau \tan \theta \quad (2.9)$$

En tenant compte du critère de Von Mises  $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}$ , on en déduit :

$$\sigma_n = \sigma_{xx} - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \tau \tan \theta \quad (2.10)$$

En reportant cette expression de  $\sigma_n$  dans l'équation (2.8) et en remarquant que  $\frac{dh}{dx} = \tan \theta$ , on obtient :

$$h \frac{d\sigma_{xx}}{dx} = -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \tan \theta - \tau [1 + \tan^2 \theta] \quad (2.11)$$

En faisant le changement de variable  $x = R \sin \theta$  ( $dx = R \cos \theta d\theta$ ), on obtient l'équation différentielle :

$$h(R \sin \theta) \frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} \frac{1}{R \cos \theta} = -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \tan \theta - \tau(\theta) [1 + \tan^2 \theta]$$

Ou encore :

$$\frac{h(R \sin \theta)}{R} \frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{\tau(\theta)}{\cos \theta} \quad (2.12)$$

Pour les cylindres rigides,  $h(R \sin \theta) = h_s + R(1 - \cos \theta)$ , donc l'équation (2.12) devient :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = \left[ -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{\tau(\theta)}{\cos \theta} \right] \frac{R}{h_s + R(1 - \cos \theta)} \quad (2.13)$$

La suite de l'analyse simplifiée peut être menée aussi bien avec un frottement de Tresca (voir 2.2.1.1) qu'avec un frottement de Coulomb (voir 2.2.1.2)

### 2.2.1.1. Frottement de Tresca

La contrainte tangentielle est générée par frottement, elle s'oppose donc au mouvement relatif de la bande par rapport au cylindre or nous avons généralement  $V_e < \omega R < V_s$ . Il existe au moins un point de la bande (pour laquelle  $V = \omega R$ ). Au-delà, le frottement change de sens.

Dans le cas de frottement de Tresca, par hypothèse, la contrainte tangentielle dans la zone où il y a glissement entre la bande et le cylindre s'écrit :

$$\tau = \frac{k\sigma_0}{\sqrt{3}} > 0 \text{ avant le point neutre et } \tau = -\frac{k\sigma_0}{\sqrt{3}} < 0 \text{ après le point neutre}$$

Où  $k$  est un coefficient compris entre 0 et 1

En reportant l'expression de  $\tau$  dans l'équation (2.13), nous obtenons :

Avant le point neutre :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ -\sin\theta - \frac{k}{2\cos\theta} \right] \frac{R}{h_s + R(1 - \cos\theta)} \quad (2.14)$$

Après le point neutre :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ -\sin\theta + \frac{k}{2\cos\theta} \right] \frac{R}{h_s + R(1 - \cos\theta)} \quad (2.15)$$

Il est possible d'intégrer l'équation (2.14) à partir de l'entrée et de la condition limite en  $\theta = -\alpha$ ,  $\sigma_{xx}(-\alpha) = \sigma_e$ . Il est aussi possible d'intégrer l'équation (2.15) à partir de la sortie et de la condition limite en  $\theta = 0$ ,  $\sigma_{xx}(0) = \sigma_s$ . L'intersection de ces deux courbes donne la position du point neutre.

La composante  $\sigma_{xx}(\theta)$  étant maintenant connue analytiquement, on en déduit :

$$\sigma_{yy}(\theta) = \sigma_{xx}(\theta) - 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

Enfin, on peut calculer la force de laminage qui vaut :

$$F = -\int_{-\alpha}^0 \sigma_{yy}(\theta) R d\theta > 0 \quad (2.16)$$

### 2.2.1.2. Frottement de Coulomb

Sous hypothèse d'un frottement de Coulomb, la contrainte tangentielle s'écrit  $\tau = -\mu\sigma_n > 0$  dans la partie amont et  $\tau = \mu\sigma_n < 0$  dans la partie aval, où  $\mu$  est un coefficient entre 0 et 1.

Comme nous avons montré que  $\sigma_n = \sigma_{xx} - 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} - \tau \tan\theta$ , on en déduit :

Dans la partie amont :

$$\tau(\theta)[1 - \mu \tan\theta] = -\mu \left[ \sigma_{xx}(\theta) - 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] \quad (2.17)$$

Dans la partie aval :

$$\tau(\theta)[1 + \mu \tan\theta] = \mu \left[ \sigma_{xx}(\theta) - 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] \quad (2.18)$$

En reportant les expressions de  $\tau$  ci-dessus dans l'équation (2.13), nous obtenons des équations différentielles suivantes.

Avant le point neutre :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = \left[ -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \theta + \frac{\mu}{\cos \theta - \mu \sin \theta} \left( \sigma_{xx}(\theta) - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \right] \frac{R}{h_s + R(1 - \cos \theta)} \quad (2.19)$$

Après le point neutre :

$$\frac{d\sigma_{xx}}{d\theta} = \left[ -2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sin \theta - \frac{\mu}{\cos \theta + \mu \sin \theta} \left( \sigma_{xx}(\theta) - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) \right] \frac{R}{h_s + R(1 - \cos \theta)} \quad (2.20)$$

Il convient d'ajouter à ces équations les conditions aux limites  $\sigma_{xx} = \sigma_e$  (pour l'équation (2.19)) à l'entrée et  $\sigma_{xx} = \sigma_s$  (pour l'équation(2.20)) à la sortie de l'emprise.

A partir de ces deux équations différentielles, en intégrant en amont à partir de l'entrée puis en aval à partir de la sortie, on obtient  $\sigma_{xx}$  puis  $\sigma_{yy}$  et enfin la force de laminage  $F$  de la même manière que pour le frottement de Tresca.

### 2.2.2. Modèle Bland & Ford

Le modèle Bland & Ford se base sur la méthode des tranches avec l'hypothèse que l'angle d'attaque  $\alpha$  (l'angle sur cylindre pour le point de contact d'entrée (Figure 2-2)) est assez petit, c'est toujours le cas en laminage à froid et c'est moins vrai dans le cas du laminage à chaud mais cette hypothèse est souvent faite car elle va nous donner rapidement des solutions analytiques

Comme  $\alpha$  est petit et  $|\theta| \leq \alpha$ , donc :

$$\begin{cases} \tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta < 0 \\ \cos \theta \approx 1 \\ 1 - \cos \theta \approx \frac{1}{2} \theta^2 \end{cases} \quad (2.21)$$

Alors, la hauteur de la bande  $h = h_s + R(1 - \cos \theta)$  devient :

$$h \approx h_s + \frac{1}{2} R \theta^2 \quad (2.22)$$

et

$$dx = R \cos \theta d\theta \approx R \theta \quad (2.23)$$

Etudions le cas du frottement Coulomb ( $\tau = -\mu \sigma_n > 0$  avant le point neutre,  $\tau = \mu \sigma_n < 0$  après le point neutre).

En reportant l'expression de  $\tau$  dans les équation (2.8) et (2.9), nous obtenons (avant le point neutre):

$$d(h\sigma_{xx}) = \sigma_n [\tan \theta + \mu] dx \quad (2.24)$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_n [1 - \mu \tan \theta] \quad (2.25)$$

En remarquant que  $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} + 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$  et  $\frac{dh}{dx} = \tan \theta$ , l'équation (2.24) devient :

$$h \frac{d\sigma_{yy}}{dx} = \sigma_{yy} \frac{\tan \theta + \mu}{1 - \mu \tan \theta} - \left[ \sigma_{yy} + 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] \tan \theta$$

En utilisant les approximations (2.21), (2.22) et (2.23), on a :

$$\left[ \frac{h_s}{R} + \frac{1}{2}\theta^2 \right] \frac{d\sigma_{yy}}{d\theta} = \sigma_{yy} \frac{\theta + \mu}{1 - \mu\theta} - \left[ \sigma_{yy} + 2\frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] \theta \quad (2.26)$$

Ou encore 
$$\left[ \frac{h_s}{R} + \frac{1}{2}\theta^2 \right] \frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} \right) = \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} \frac{\theta + \mu}{1 - \mu\theta} - \left[ \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} + 1 \right] \theta$$

De plus, comme  $\alpha$  est petit, nous pouvons considérer que  $\left[ \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} + 1 \right] \theta \approx 0$  et  $1 - \mu\theta \approx 1$

Donc, nous obtenons les équations différentielles :

Avant le point neutre :

$$\frac{\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} \right)}{\frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}}} = \frac{2R(\theta + \mu)}{2h_s + R\theta^2} \quad (2.27)$$

De la même manière, nous obtenons après le point neutre :

$$\frac{\frac{d}{d\theta} \left( \frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} \right)}{\frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}}} = \frac{2R(\theta - \mu)}{2h_s + R\theta^2} \quad (2.28)$$

En intégrant ces équations différentielles, nous obtenons:

Avant le point neutre :

$$\frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} = B_1 \frac{2h(\theta)}{R} \exp \left[ 2\mu \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \right) \right] \quad (2.29)$$

Après le point neutre :

$$\frac{\sigma_{yy}}{2\sigma_0/\sqrt{3}} = B_2 \frac{h(\theta)}{R} \exp \left[ -2\mu \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \right) \right] \quad (2.30)$$

Où  $B_1$  et  $B_2$  sont constantes d'intégration

Il convient d'ajouter à ces équations les conditions aux limites :

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} - 2\sigma_0/\sqrt{3} = \sigma_e - 2\sigma_0/\sqrt{3} \quad (\text{pour l'équation (2.29)}) \quad \text{à l'entrée de l'emprise.}$$

$$\sigma_{yy} = \sigma_{xx} - 2\sigma_0/\sqrt{3} = \sigma_s - 2\sigma_0/\sqrt{3} \quad (\text{pour l'équation (2.30)}) \quad \text{à la sortie de l'emprise.}$$

Enfin, nous déduisons :

Avant le point neutre :

$$\sigma_{yy} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h}{h_e} \left( 1 - \frac{\sigma_e}{\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}} \right) \exp \left[ 2\mu \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \left( \text{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \right) + \text{atan} \left( \alpha \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \right) \right) \right] \quad (2.31)$$

Après le point neutre :

$$\sigma_{yy} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h}{h_s} \left( 1 - \frac{\sigma_s}{\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}} \right) \exp \left[ -2\mu \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \text{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R}{2h_s}} \right) \right] \quad (2.32)$$

L'intersection de ces deux courbes de  $\sigma_{yy}$  donne la position du point neutre.

La composante  $\sigma_{yy}(\theta)$  étant maintenant connue analytiquement, donc, on en déduit :

$$\sigma_{xx}(\theta) = \sigma_{yy}(\theta) + 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

En remplaçant l'expression  $\sigma_{yy}$  dans l'équation (2.16), nous obtenons la force de laminage.

### 2.2.3. Modèle de Sims

Le modèle de Sims se base sur la méthode des tranches avec l'hypothèse des petits angles, et la prise en compte des déformations élastiques de cylindres

On abandonne l'hypothèse des cages rigides et on fait l'hypothèse que le cylindre déformé peut être localement assimilé à un cylindre de rayon  $R' \neq R$ . Le rayon déformé  $R'$  est appelé le rayon d'Hitchcock et calculé par la formule (Hitchcock, J.H. , 1935) :

$$R' = R \left\{ 1 + \frac{16(1-\nu^2)}{\Pi b_e E} \frac{F}{2h_e - 2h_s} \right\} \quad (2.33)$$

Où  $E$  : module d'Young

$F$  : Force de laminage

$b_e$  : Largueur de la bande

A partir de l'hypothèse que le processus de laminage peut être comparé au processus de déformation entre des plaques inclinées, Orowan a démontré que (Orowan E., 1943):

$$h\sigma_{xx} = h \left[ \sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] \quad (2.34)$$

Plaçons-nous dans le cas de frottement Tresca et avant le point neutre. L'équation (2.14) se réécrit avec les cylindres déformés:

$$\frac{d}{d\theta} \left[ \sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right] = \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \left[ -\sin\theta - \frac{k}{2\cos\theta} \right] \frac{R'}{h_s + R'(1 - \cos\theta)} \quad (2.35)$$

Tenant compte (2.21), nous déduisons :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} 2R' \frac{\theta + \frac{k}{2}}{2h_s + R'\theta^2} \quad (2.36)$$

Cette équation différentielle donne la solution :

$$\sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{R'} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} k \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \right) + B_1 \quad (2.37)$$

Où  $B_1$  est constante d'intégration

De la même manière, nous obtenons l'équation différentielle après le point neutre :

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} 2R' \frac{\theta - \frac{k}{2}}{2h_s + R'\theta^2} \quad (2.38)$$

Cette équation différentielle donne la solution :

$$\sigma_n - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = -\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{R'} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} k \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \right) + B_2 \quad (2.39)$$

Où  $B_2$  est constante d'intégration

Il convient d'ajouter à ces équations les conditions aux limites :

$$\sigma_n = \sigma_{xx} + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = \sigma_e + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{pour l'équation (2.37)}) \text{ à l'entrée de l'emprise.}$$

$$\sigma_n = \sigma_{xx} + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} = \sigma_s + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \quad (\text{pour l'équation (2.39)}) \text{ à la sortie de l'emprise.}$$

Donc, on déduit :

Avant le point neutre :

$$\sigma_n = \sigma_e + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_e} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} k \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \left[ \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \right) + \operatorname{atan} \left( \alpha \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \right) \right] \quad (2.40)$$

Après le point neutre :

$$\sigma_n = \sigma_s + \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} - \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \ln \frac{h}{h_s} + \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} k \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \operatorname{atan} \left( \theta \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \right) \quad (2.41)$$

L'intersection de ces deux courbes de  $\sigma_n$  donne la position du point qui est déterminé par  $\theta_n$  tel que :

$$\theta_n = -\sqrt{\frac{2h_s}{R'}} \tan \left( \frac{\pi}{8k} \sqrt{\frac{2h_s}{R'}} \ln \left( \frac{h_s}{h_e} \right) - \sqrt{\frac{2h_s}{R'}} \frac{\sigma_e - \sigma_s}{2 \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} k} + \frac{1}{2} \operatorname{atan} \left( \sqrt{\frac{R'}{2h_s}} \alpha \right) \right) \quad (2.42)$$

La composante  $\sigma_n(\theta)$  étant maintenant connue analytiquement, on en déduit :

$$\sigma_{xx}(\theta) = \sigma_n(\theta) - \frac{\pi}{4} \frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}} \text{ puis } \sigma_{yy}(\theta) = \sigma_{xx}(\theta) - 2 \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}}$$

La force de laminage est calculée par la formule :

$$F \approx -\int_{-\alpha}^0 \sigma_{yy} R' d\theta \quad (2.43)$$

#### 2.2.4. Applications numériques

Les applications numériques sont faites pour deux cas de laminage

(1)  $\lambda = 0.7, e = 0.08$  (que nous avons nommé le cas de laminage à froid)

(2)  $\lambda = 0.7, e = 0.18$  (que nous avons nommé le cas de laminage à chaud)

Nous allons successivement comparer les prévisions de la méthode des tranches (avec un critère de frottement de Tresca), du modèle Bland & Ford (avec un critère de frottement Coulomb) et du modèle de Sims (avec un critère de frottement de Tresca) avec les prévisions de LAM3.

##### A/ Méthode des tranches

###### Cas 1 :

Rappelons les paramètres de ce cas de laminage « à froid »

*Paramètres adimensionnels :*

$$\lambda = 0.7, e = 0.08, k = 0.4 \text{ (Frottement de Tresca)}, t_e = t_s = 0.25$$

*Paramètres dimensionnés :*

Rappelons que nous avons retenu les valeurs dimensionnées de base suivantes :

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, R = 250 \text{ mm}, V_c = 1000 \text{ mm/s}, \left( \omega = V_c/R = 4 \text{ rad/s} \right)$$

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1 - \lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda - 1)^2} = 1.957 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 1.370 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = 150 \text{ MPa}, \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

$$L = 17.12 \text{ mm}$$

LAM3 - Compte tenu de l'uniformité du champ de contrainte dans l'épaisseur, il suffit d'utiliser un élément dans la demi-épaisseur.

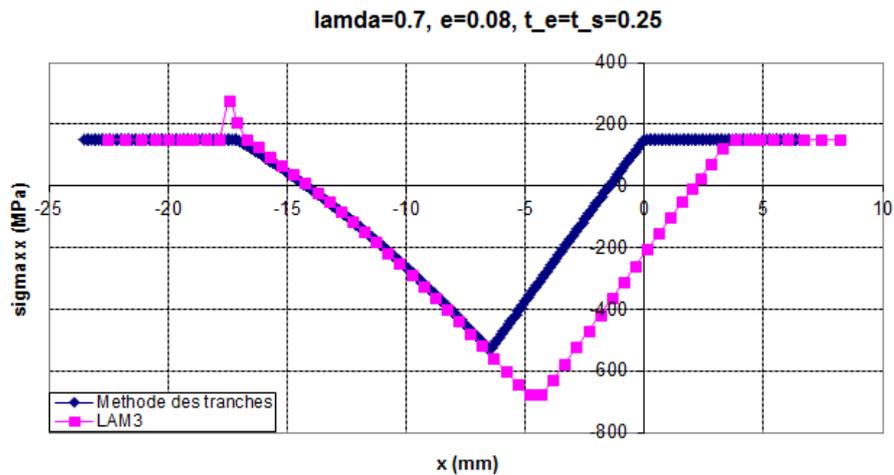


Figure 2-4 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

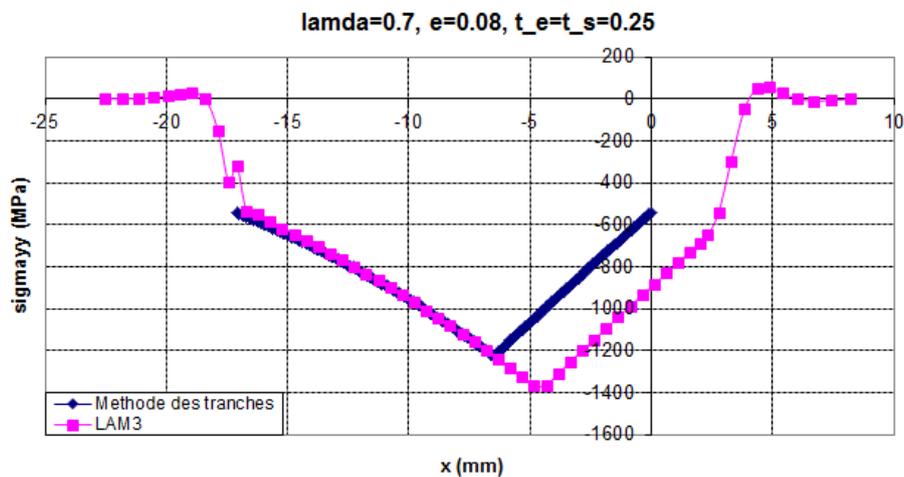


Figure 2-5 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

Dans le cas 1 (laminage à froid) ( $e = 0.08$ ), nous trouvons que les champs approchés calculés par la méthode des tranches approchent bien les champs de contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  calculés par LAM3 pour la partie avant le point neutre dans l'emprise. L'écart entre la prévision de la méthode des tranches et LAM3 dans la partie avale est essentiellement lié au retour élastique de la bande fortement comprimée qui entraîne un contact frottant de freinage au-delà de la section  $x = 0$ . Si on reconstruit la solution de la méthode des tranches à partir du point où la bande quitte le cylindre (environ  $x = 3$  mm ici), l'approximation est bien meilleure.

Notons que ce défaut entraîne aussi un défaut de prévision de la position du point neutre. Nous voyons là un encouragement à rechercher des modèles simplifiés prenant en compte la partie élastique de la transformation.

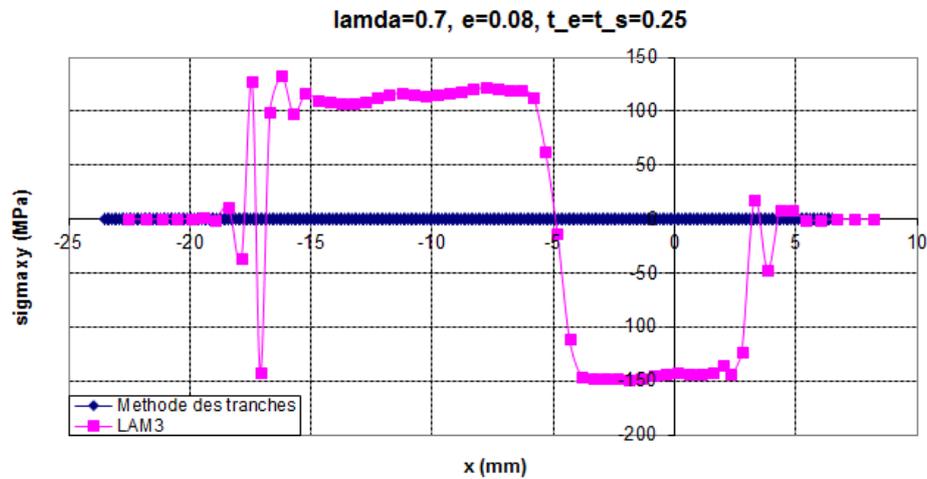


Figure 2-6 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

Le cisaillement dans la bande n'est pas égale de 0 contrairement à l'hypothèse faite dans la méthode des tranches.

### Cas 2 :

Rappelons les paramètres de ce cas de laminage « à chaud »

*Paramètres adimensionnels*

$\lambda = 0.7$ ,  $e = 0.18$ ,  $k = 0.4$  (Frottement de Tresca),  $t_e = t_s = 0.25$

*Paramètres dimensionnés*

$\sigma_0 = 600$  MPa,  $R = 250.00$  mm

$V_c = 1000$  mm/s,  $E = 210000$  MPa

Ce qui donne :

$$h_e = \frac{2R(1-\lambda)e^2}{\lambda^2 + e^2(\lambda-1)^2} = 9.860 \text{ mm}$$

$$h_s = \lambda h_e = 6.902 \text{ mm}$$

$$\sigma_e = \sigma_s = 150 \text{ MPa}$$

$$L = 38.34 \text{ mm}$$

LAM3 – Cette fois, les champs ne sont plus uniformes dans l'épaisseur. Nous utilisons donc 5 éléments dans la demi-épaisseur de la bande.

L'élément 1 est au milieu de la bande

L'élément 5 est au contact avec le cylindre

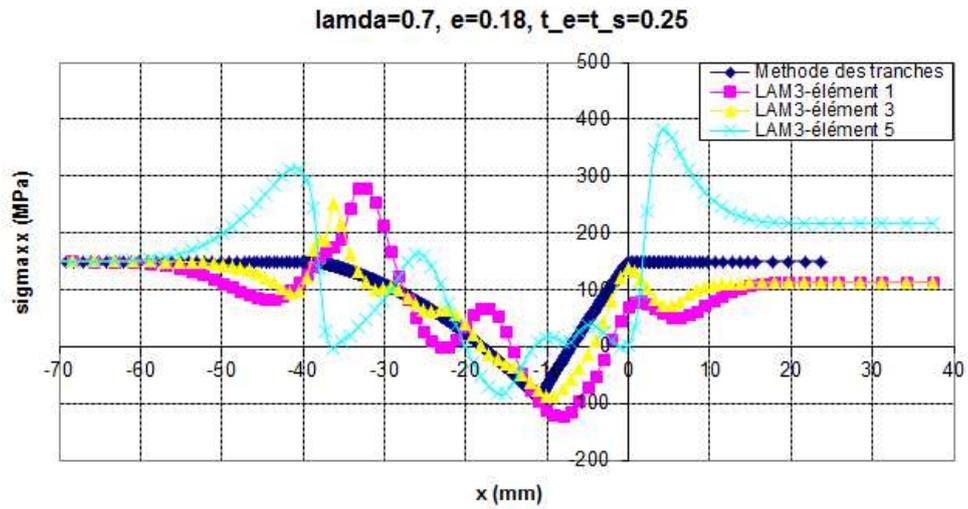


Figure 2-7 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

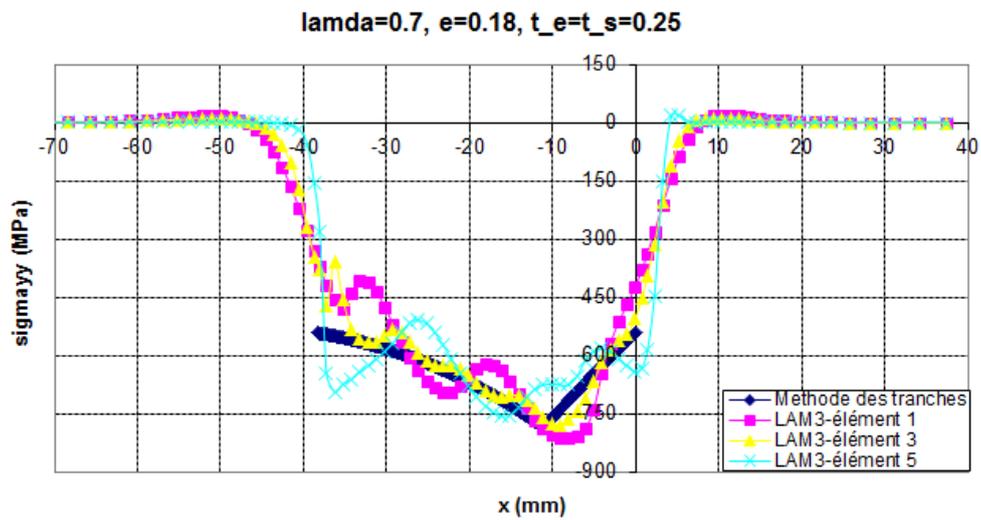


Figure 2-8 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

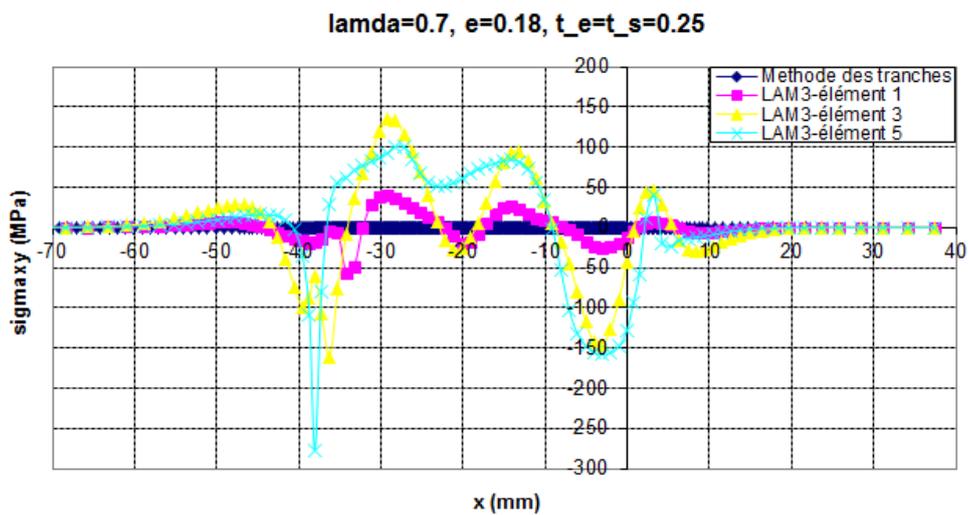


Figure 2-9 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

Nous trouvons que les champs approchés calculés par la méthode des tranches n’approchent pas bien les champs de contraintes calculé par LAM3 dans le cas d’élancement important ( $e = 0.18$ ) car les champs de contraintes ne sont plus uniformes dans l’épaisseur.

D’ailleurs notons que la composante  $\sigma_{xy}$  commence à devenir importante.

*B/ Modèle Bland & Ford*

**Cas 1 :**

Etudions le cas du laminage « à froid » ( $e = 0.08$ ). Ici, nous remplaçons le critère de frottement de Tresca ( $k=0.4$ ) par le critère de frottement de Coulomb ( $\mu = 0.2$ ).

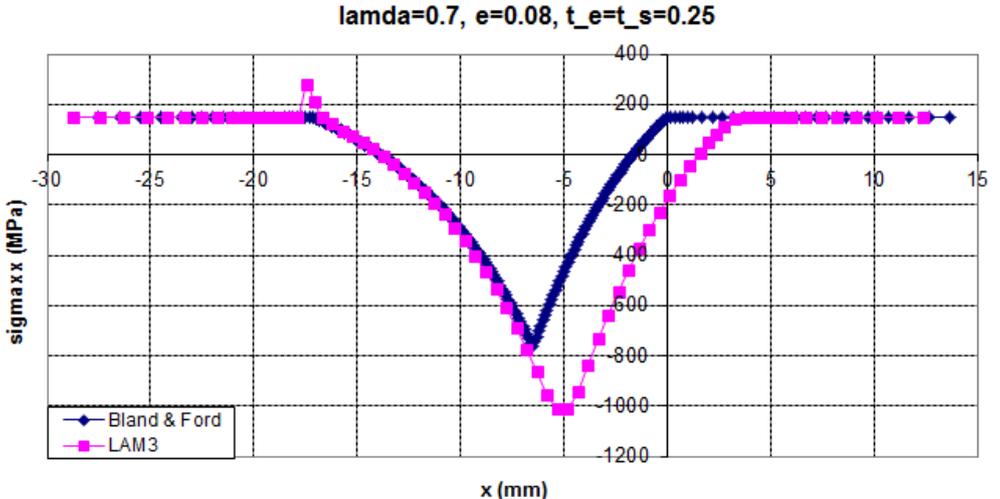


Figure 2-10 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

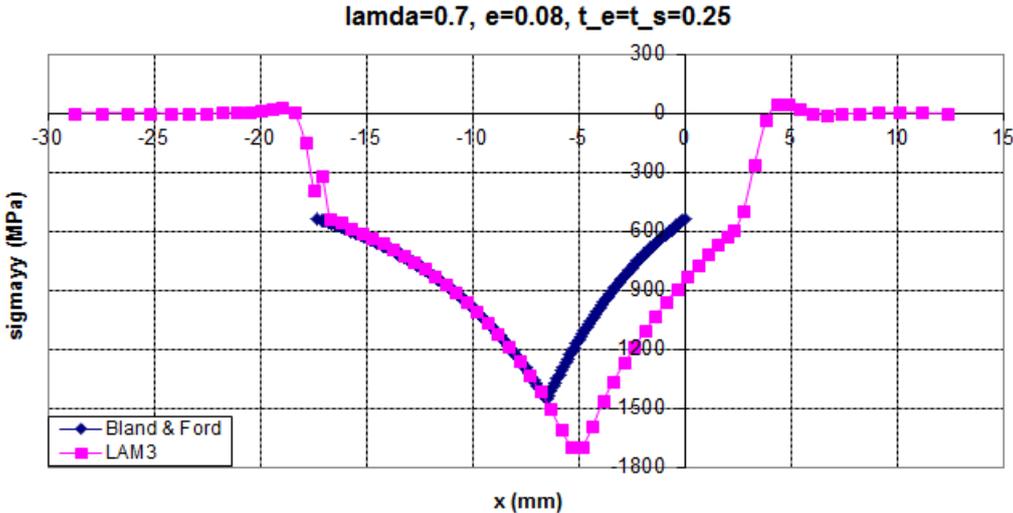


Figure 2-11 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

Dans le cas 1 (laminage à froid) ( $e = 0.08$ ), nous trouvons que les champs approchés calculés par le modèle Bland et Ford approchent bien les champs de contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}$  calculés par LAM3 pour la partie avant le point neutre dans l’emprise. L’écart entre la prévision de la

méthode des tranches et LAM3 dans la partie aval est essentiellement lié au retour élastique de la bande fortement comprimée qui entraîne un contact frottant de freinage au-delà de la section  $x=0$ . Si on reconstruit la solution du modèle Band et Ford à partir du point où la bande quitte le cylindre (environ  $x = 2.75$  mm ici), l'approximation est bien meilleure.

Notons que ce défaut entraîne aussi un défaut de prévision de la position du point neutre.

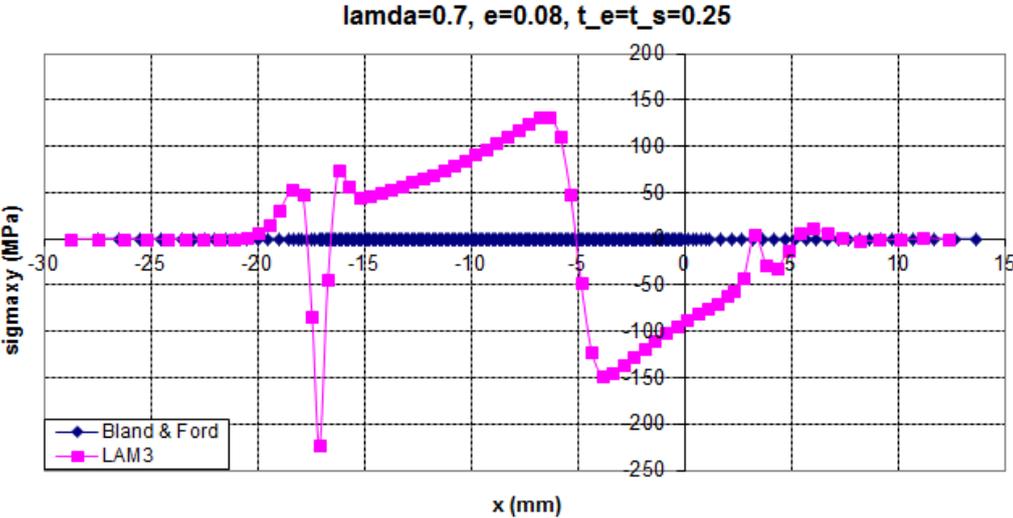


Figure 2-12 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

Le cisaillement dans la bande n'est pas égale de 0 contrairement à l'hypothèse faite dans le modèle Bland et Ford.

**Cas 2 :**

Etudions maintenant le cas de laminage « à chaud » ( $e = 0.18$ ). Nous remplaçons à nouveau ici, le critère de frottement de Tresca ( $k = 0.4$ ) par le critère de frottement de Coulomb ( $\mu = 0.2$ ).

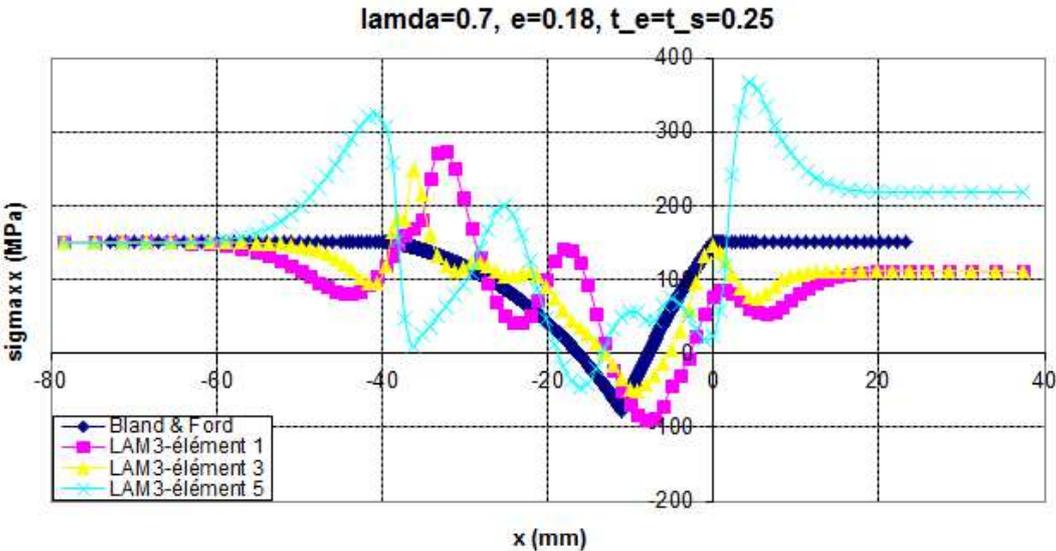


Figure 2-13 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

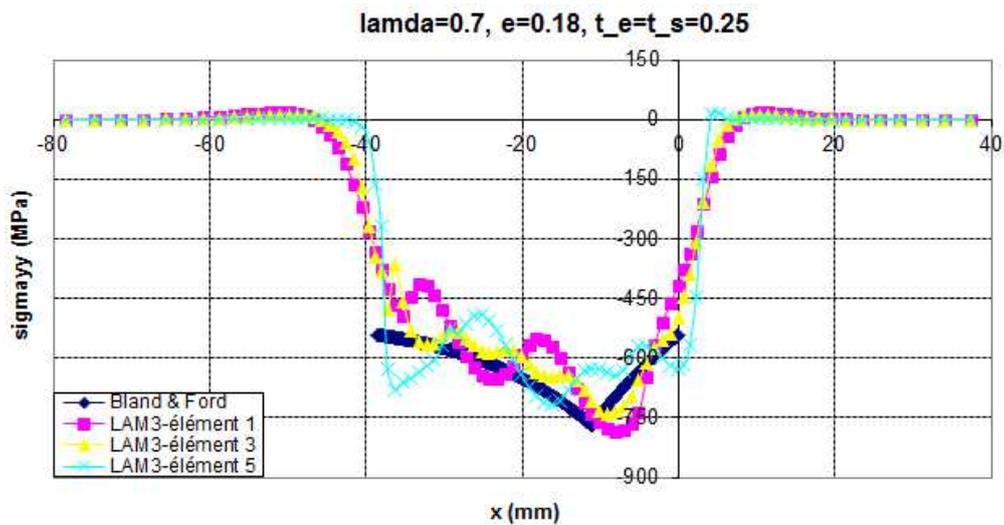


Figure 2-14 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

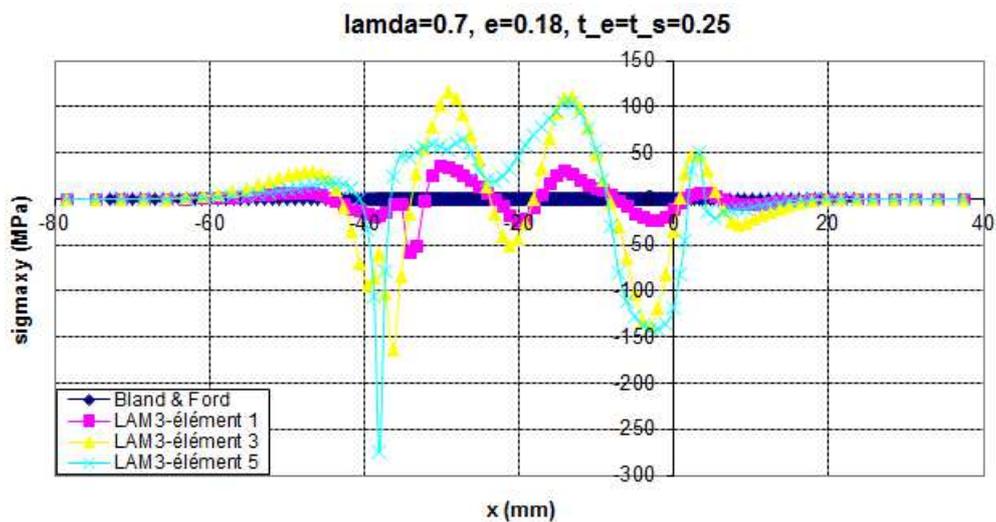


Figure 2-15 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

Nous trouvons que les champs approchés calculés par le modèle Bland et Ford n'approchent pas bien les champs de contraintes calculé par LAM3 dans le cas d'élançement important ( $e = 0.18$ ) car les champs de contraintes ne sont plus uniformes dans l'épaisseur.

D'ailleurs notons que la composante  $\sigma_{xy}$  commence à devenir importante.

### C/ Modèle de Sims

#### **Cas 1 :**

Etudions le cas de laminage « à froid » ( $e = 0.08$ ).

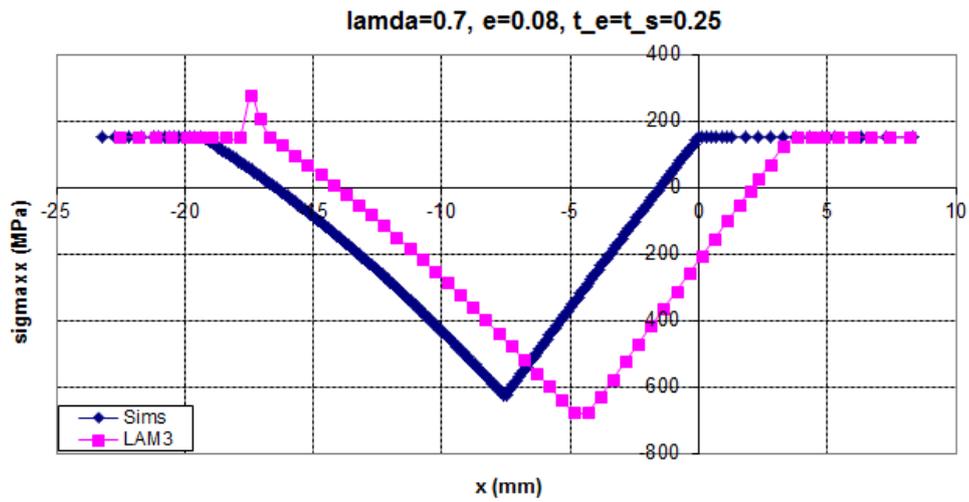


Figure 2-16 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

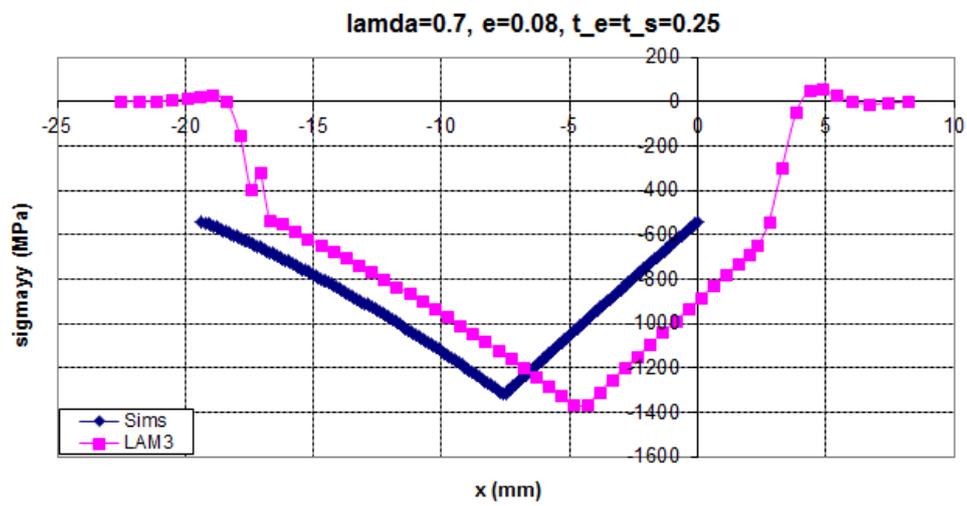


Figure 2-17 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

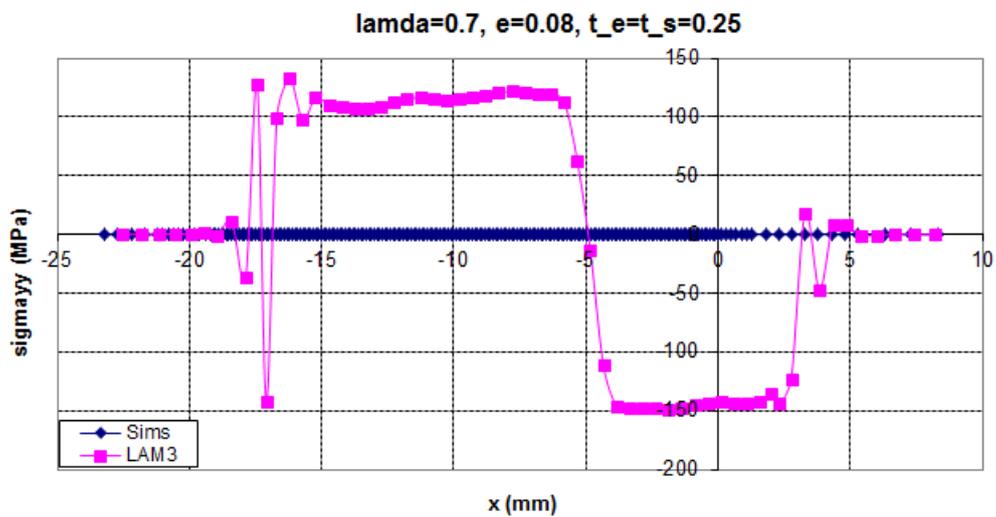


Figure 2-18 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

Contrairement aux apparences des figures ci-dessus (Figure 2-16 et Figure 2-17), on peut considérer que le modèle de SIMS donne (à une translation en  $x$  près) une meilleure approximation de la contrainte. Ceci est principalement dû au fait que la prise en compte d'un pseudo rayon déformé  $R'$  allonge la zone de contact entre la bande et le cylindre et permet ainsi de compenser la sous-estimation de cette longueur de contact dans les autres modèles, liée à la non prise en compte du retour élastique en sortie de cylindre. Il nous semble toutefois que ceci est assez artificiel et nous restons, à ce stade, convaincus de l'intérêt d'un modèle simplifié prenant en compte la déformation élastique.

**Cas 2 :**

Etudions le cas de laminage « à chaud » ( $e = 0.18$ ).

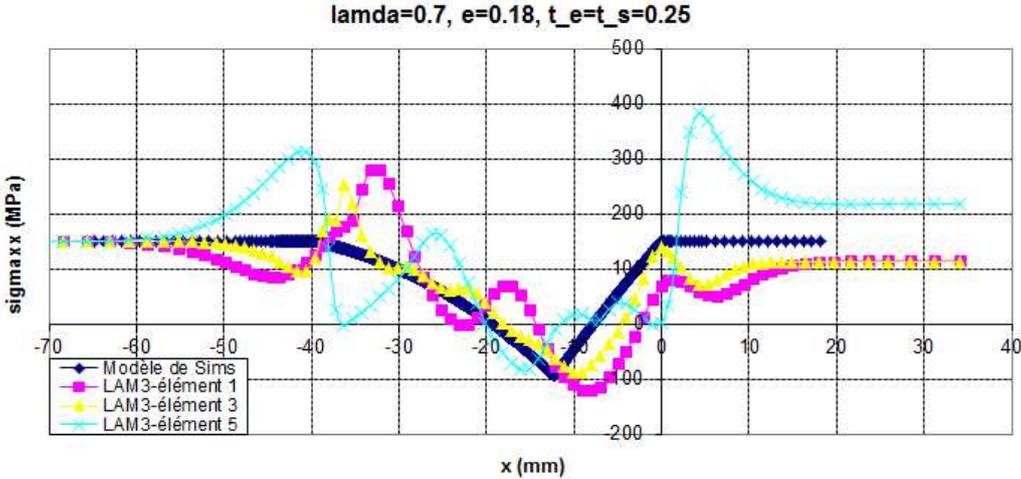


Figure 2-19 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xx}$

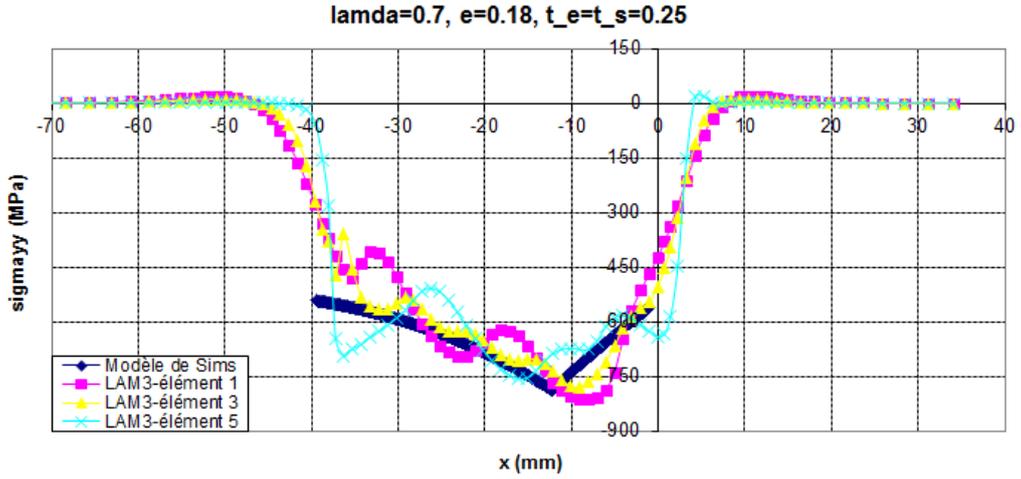


Figure 2-20 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{yy}$

A nouveau, nous trouvons que les champs approchés calculés par le modèle de SIMS n'approchent pas bien les champs de contraintes calculés par LAM3 dans le cas de laminage « à chaud » ( $e = 0.18$ ) car les champs de contraintes ne sont plus uniformes dans l'épaisseur.

D'ailleurs notons que la composante  $\sigma_{xy}$  commence à devenir importante.

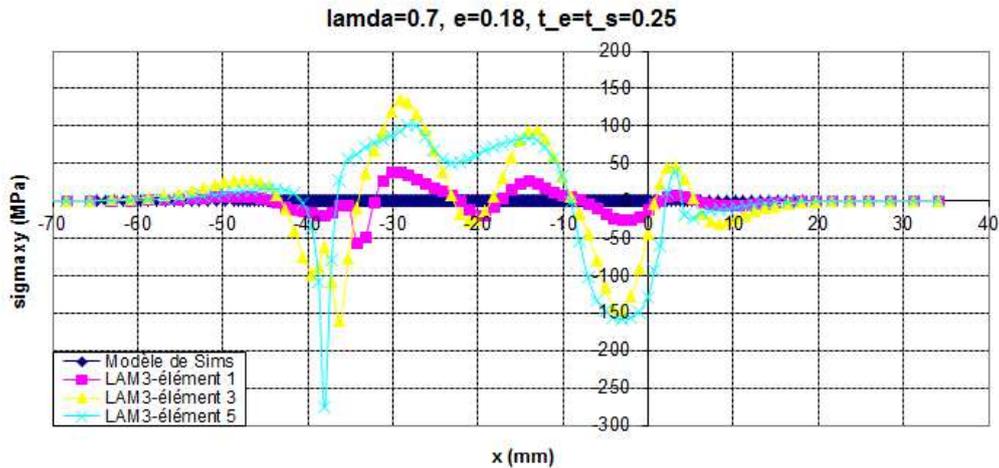


Figure 2-21 : Comparaison des contraintes  $\sigma_{xy}$

En conclusion de ce paragraphe, nous pouvons dire que la méthode des tranches et ses variantes Bland & Ford et Sims permettent d'approcher assez correctement les principales composantes du champ de contrainte lorsque l'élancement ( $e = \frac{h_s}{L}$ ) est faible et que ce n'est pas le cas lorsque l'élancement devient trop grand (ici  $e = 0.18$ ).

En complément de ces approches « en contrainte », présentons maintenant des approches en vitesse.

### 2.3. La méthode des bornes supérieures (MBS)

On fait le plus souvent remonter la méthode des bornes supérieures aux travaux de W. Prager et P.G. Hodge qui ont proposé une théorie des solides rigides parfaitement plastiques en 1951 (Prager W. and Hodge P. G., 1951). Ces travaux ont été repris, pour la mise en forme des métaux par B. Avitzur en 1968 (Avitzur B., 1968). On peut aussi y associer les travaux sur la théorie du Calcul à la Rupture présentée par J. Salençon (par exemple (Salençon J. , 2002) ).

La méthode des bornes supérieures s'appuie sur le théorème de la borne supérieure. Celui-ci s'énonce ainsi :

« Parmi tous les champs de vitesse cinématiquement admissibles dans la structure, la solution (si elle existe) du problème de l'évolution rigide plastique est le champ qui minimise la fonctionnelle  $J^*$ , différence entre la puissance qui serait dissipée plastiquement dans le champ de vitesse et la puissance des efforts extérieurs imposés à la structure ».

Les champs de vitesse cinématiquement admissibles sont les champs continûment dérivables par morceaux dans la structure et vérifiant les conditions aux limites en vitesses imposées sur la frontière du solide.

Considérons un solide  $\Omega$  :

- sans force de volume,
- avec un comportement rigide plastique de Von Mises de valeur seuil  $\sigma_0$ ,

- soumis au vecteur contrainte imposé  $\underline{T}_d$  sur une partie  $S_t$  de la frontière,
- en contact sur une partie  $\Sigma$  de sa frontière avec un « outil » exerçant un frottement de contrainte de cisaillement  $\tau$
- avec une vitesse  $\underline{V}$  imposée sur une partie  $S_v$  de sa frontière.

Notons  $\underline{V}^*$  un champ de vitesse cinématiquement admissible (donc vérifiant  $\underline{V}^* = \underline{V}$  sur  $S_v$ )

Supposons que  $\underline{V}^*$  admette une discontinuité  $\llbracket \underline{V}^* \rrbracket$  tangentielle à une surface  $S^*$  dans  $\Omega$ .

La fonctionnelle à minimiser  $J^*$  s'écrit alors :

$$J^*(\underline{V}^*) = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \sqrt{\underline{d}^* : \underline{d}^*} d\Omega + \int_{S^*} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS + \int_{\Sigma} \tau \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS - \int_{S_t} \underline{T}_d \cdot \underline{V}^* dS$$

$$\text{où } \underline{d}^* = \text{sym}(\underline{\text{grad}}(\underline{V}^*))$$

La solution  $\underline{V}$  (si elle existe) du problème rigide plastique minimise la fonctionnelle  $J^*(\underline{V}^*)$  parmi tous les champs  $\underline{V}^*$  cinématiquement admissibles.

La méthode approchée de la borne supérieure consiste à choisir une famille de champs de vitesse cinématiquement admissibles, définis par quelques paramètres (un sous ensemble de l'ensemble des champs cinématiquement admissibles) et à déterminer le jeu de paramètres qui va permettre de minimiser  $J^*(\underline{V}^*)$  dans cette famille. Le champ de vitesse ainsi déterminé est la meilleure approximation de la solution dans la famille considérée.

Etudions maintenant les familles de champs de vitesse les plus classiquement utilisés pour l'étude des problèmes de laminage.

Dans les paragraphes suivants, on change la convention en notant  $x=0$  à l'entrée et  $x=L$  à la sortie de la bande pour faciliter les calculs.

### 2.3.1. MBS avec champs de vitesse « Uniformes »

#### 2.3.1.1. Choix du champ vitesse

Pour la première famille de champs de vitesse « classiques » en déformations planes, nous choisissons des champs tels que la composante « horizontale » de la vitesse (la composante suivant la direction de laminage) est uniforme dans l'épaisseur (il s'agit du champ qui a été appelé la vitesse de référence au chapitre 1). Pour abrégier l'expression, nous dirons « champs de vitesse Uniformes », bien que ce ne soit évidemment pas le cas au sens strict, la composante horizontale  $V_x(x)$  variant avec  $x$  et la composante verticale  $V_y(x, y)$  variant avec  $x$  et  $y$ .

Le débit linéique en entrée de bande est  $V_e h(0)$ . Dans la section  $x$  le débit linéique est  $V_x(x) h(x)$ . la conservation du débit liée à l'incompressibilité plastique d'un matériau rigide

plastique de Von Mises permet de déterminer la vitesse horizontale fonction d'un seul paramètre  $V_e$ .

$$\text{Vitesse horizontale : } V_x(x) = \frac{h(0)}{h(x)} V_e$$

L'incompressibilité du matériau s'écrit :

$$\frac{\partial V_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial y} = 0$$

Ainsi, la vitesse verticale est affine en  $y$ .

$$V_y(x, y) = a(x)y + b(x)$$

La condition de matériau incompressible

$$\frac{\partial V_x(x)}{\partial x} + \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial y} = 0 \text{ implique :}$$

$$a(x) = \frac{h'(x)}{h^2(x)} h(0) V_e$$

Au centre de la plaque, la vitesse verticale est égale :

$$V_y(x, 0) = 0 \Rightarrow b(x) = 0$$

$$\text{Donc : } V_x(x) = \frac{h(0)}{h(x)} V_e \quad \text{et} \quad V_y(x, y) = \frac{h'(x)}{h(x)^2} h(0) V_e y$$

Avec :  $(h(x) - R - h_s)^2 + (x - L)^2 = R^2$  si le cylindre est considéré comme rigide (cercle de rayon  $R$  dont le centre est en  $(L, R + h_s)$ )

Où  $L$  est la « longueur de contact » (longueur de la projection sur  $Ox$  de la zone de contact)

$$L = \sqrt{R^2 - (R + h_s - h_e)^2}$$

Comme on peut le voir la famille de champs « Uniformes » est une famille à un paramètre  $V_e$ .

Nous allons ci-dessous calculer les différents termes de la fonctionnelle

$$J^*(\underline{V}^*) = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \sqrt{\underline{d}^* : \underline{d}^*} d\Omega + \int_{S^*} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS + \int_{\Sigma} \tau \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS - \int_{S_i} \underline{T}_d \cdot \underline{V}^* dS$$

Puis nous déterminerons plus loin la valeur du paramètre qui minimisera la fonctionnelle dans les deux applications choisies, laminage à froid et laminage à chaud.

### 2.3.1.2. Puissance dissipée par le taux de déformation

Le taux de déformation dans l'emprise est :

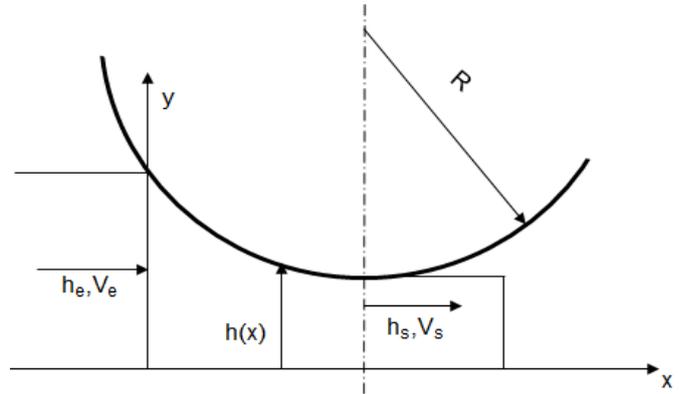


Figure 2-22 : Champs de vitesse uniformes dans l'épaisseur

$$d_{xx} = \frac{\partial V_x(x)}{\partial x} = -\frac{h'(x)}{h(x)^2} h(0)V_e$$

$$d_{yy} = \frac{\partial V_y(x, y)}{\partial y} = \frac{h'(x)}{h(x)^2} h(0)V_e = -d_{xx}$$

$$d_{xy} = d_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_x(x)}{\partial y} + \frac{\partial V_y(x)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} y h(0)V_e \left( \frac{h''(x)}{h(x)^2} - \frac{2h'(x)^2}{h(x)^3} \right)$$

La puissance dissipée par le taux de déformation est:

$$P_{def} = \int_{\Omega} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sqrt{2 \underline{d} : \underline{d}} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} (d_{xx}^2 + d_{yy}^2 + 2d_{yx}^2)} d\Omega$$

$$= \int_0^L \int_0^{b_e} \int_0^{h(x)} \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{h^2(0)V_e^2}{2h^4(x)} \left[ 4h'(x)^2 + \left( h''(x) - \frac{2h'(x)^2}{h(x)} \right)^2 y^2 \right]} dx dy dz$$

$$= \int_0^L \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h(0)V_e b_e}{h(x)} C_1(x) dx$$

Où :

$b_e$  est la largeur de la bande

$$C_1(x) = \frac{1}{h(x)} \int_0^{h(x)} \sqrt{4h'(x)^2 + \left( h''(x) - \frac{2h'(x)^2}{h(x)} \right)^2 y^2} dy$$

Changeons la variable en posant  $y^* = \frac{y}{h(x)}$ , on a :

$$C_1(x) = \int_0^1 \sqrt{4h'(x)^2 + \left( h''(x)h(x) - 2h'(x)^2 \right)^2 y^{*2}} dy^*$$

On utilise la formule d'intégration suivante :

$$C_1(x) = \int_0^1 \sqrt{a^2(x) + b^2(x)} y^{*2} dy^* = \frac{1}{2} \left( \sqrt{a^2(x) + b^2(x)} + \frac{a^2(x)}{b(x)} \ln \frac{b(x) + \sqrt{a^2(x) + b^2(x)}}{a(x)} \right)$$

avec  $a(x) = 2|h'(x)|$   $b(x) = |h''(x)h(x) - 2h'(x)^2|$

En posant  $I_2(x) = \sqrt{a^2 + b^2}$  et  $I_1(x) = b(x)$ , on a :

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \left( I_2(x) + \frac{4h'(x)^2}{I_1(x)} \ln \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2|h'(x)|} \right)$$

Donc

$$P_{def} = \int_0^L \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{h(0)V_e b_e}{h(x)} C_1(x) dx = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} h(0)V_e b_e \int_0^L \left( I_2(x) + \frac{4h'(x)^2}{I_1(x)} \ln \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2|h'(x)|} \right) \frac{dx}{h(x)}$$

### 2.3.1.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :

Le champ de vitesse que nous avons choisi présente une discontinuité dans la section  $x = 0$ .

En effet,  $V_y(x, y) = \frac{h'(x)}{h(x)^2} h(0) V_e y$  donc  $V_y(0, y) = \frac{h'(0)}{h(0)} V_e y$ . Cette composante est non nulle et représente la limite à droite lorsque  $x \rightarrow 0$ . La limite à gauche (avant l'emprise) est évidemment nulle.

On applique la formule :

$$P_{\Delta V} = \int_{S_{dis}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS$$

Sur la surface d'entrée :  $[[V]] = |V_y(x=0, y)|$

$$P_{\Delta V} = \int_S \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \int_0^{h(0)} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{|h'(0)|}{h(0)} V_e y dy = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} b_e V_e h(0) |h'(0)|$$

### 2.3.1.4. Puissance dissipée par le frottement

Sur la surface de contact, la différence entre la vitesse du cylindre et celle de la plaque est :

$$\begin{aligned} [[V]] &= \left| V_c - \sqrt{V_x^2(y=h(x)) + V_y^2(x, y=h(x))} \right| = \left| V_c - \frac{h(0)V_e}{h(x)} \sqrt{1+h'(x)^2} \right| \\ &= \left| V_c - \frac{e_2(0)}{h(x) - h_{1,2}(x)} V_e \sqrt{1 + (h'(x) - h'_{1,2}(x) + h'_{1,2}(x))^2} \right| = \left| V_c - \frac{h(0)}{h(x)} V_e \sqrt{1+h'(x)^2} \right| \end{aligned}$$

On en déduit la puissance dissipée par le frottement :

$$P_{frot} = \int_S \frac{k\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = \int_0^L b_e \frac{k\sigma_0}{\sqrt{3}} \left| V_c - \frac{h(0)}{h(x)} V_e \sqrt{1+h'(x)^2} \right| \sqrt{1+h'(x)^2} dx$$

### 2.3.1.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures

Les efforts extérieurs sont les tractions amont (contrainte  $\sigma_e$ ) et aval (contrainte  $\sigma_s$ ) dont la contribution à  $J^*$  est donnée par  $-P_{trac}$  :

$$P_{trac} = -\int_{S_e} \sigma_e u(0) dS + \int_{S_s} \sigma_s u(L) dS = (\sigma_s - \sigma_e) h_e b_e V_e$$

### 2.3.1.6. Détermination de $J^*$

La fonctionnelle  $J^*$  (fonction du paramètre  $V_e$ ) est la combinaison des termes précédents :

$$J^*(V_e) = P_{def}(V_e) + P_{\Delta V}(V_e) - P_{trac}(V_e) + P_{frot}(V_e)$$

Les trois premiers termes du membre de droite de cette équation sont linéaires en  $V_e$  (plus précisément positivement homogène de degré 1, mais nous prenons  $V_e > 0$ ). Le dernier terme ne l'est pas car il dépend du point neutre qui est une fonction complexe de  $V_e$ .

L'application aux deux cas de laminage sera faite plus loin.

Nous allons voir qu'il existe une valeur du paramètre  $V_e$  qui minimise la fonctionnelle  $J^*$ .

### 2.3.2. MBS avec champs de vitesse par Blocs.

#### 2.3.2.1. Choix du champ vitesse

Présentons maintenant la deuxième famille « classique » de champs de vitesse pour l'analyse des problèmes de laminage par la méthode des bornes supérieures (Avitzur B., 1986).

Nous allons partitionner la bande en 3 « blocs » et proposer une famille de champs de vitesse rigidifiant chacun des blocs.

Notons qu'il est possible de partitionner en un nombre de blocs plus important, mais ici nous voulons principalement présenter la méthode et nous nous limiterons à 3 blocs.

Le premier bloc est le bloc d'entrée. Le champ de vitesse  $y$  est uniforme en translation horizontale à la vitesse  $V_e$ . La vitesse d'entrée  $V_e$  est donc un paramètre de ce champ de vitesse.

Le bloc de sortie est lui aussi en translation horizontale à la vitesse  $V_s$ . Compte tenu de la

conservation du débit,  $V_s = V_e \frac{h(L)}{h(0)}$

Le champ de vitesse dans le bloc central est celui d'un mouvement rigidifiant de rotation autour du centre du cylindre de laminage et à la même vitesse de rotation (Le cylindre et le bloc de laminage constituent ensemble un solide rigide, il n'y a pas de puissance dissipée dans le frottement).

Le bloc d'entrée et le bloc central sont séparés par une frontière. De même le bloc central et le bloc de sortie sont séparés par une frontière.

La discontinuité de vitesse sur ces frontières devant être tangente, on démontre (Avitzur B., 1986), que ces frontières sont des arcs de cercle dont les centres se trouvent sur la normale à la direction de laminage passant par le centre  $O_1$  du cylindre de laminage.

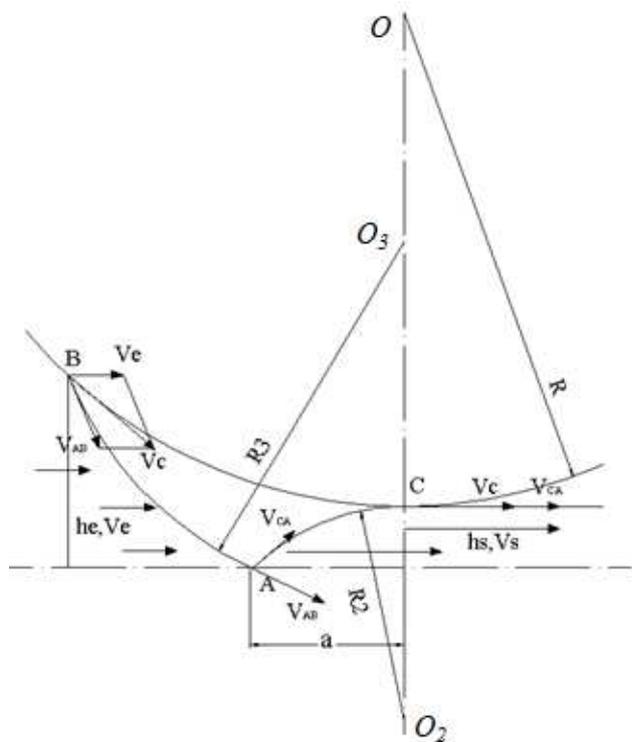


Figure 2-23 : Champs de vitesse par blocs

Ainsi le bloc central en rotation est limité par le cylindre de laminage de rayon  $R$  et deux cercles de rayon  $R_2, R_3$ . ( $R_2$  rayon de l'arc de cercle de centre  $O_2$  frontière entre le bloc central et le bloc de sortie,  $R_3$  rayon de l'arc de cercle de centre  $O_3$  frontière entre le bloc d'entrée et le bloc central) (Figure 2-23).

Notons  $A$  le point d'intersection sur l'axe de symétrie de ces deux cercles et  $L-a$  l'abscisse de ce point sur cet axe de symétrie. Le centre du cercle associé à la frontière entre le bloc central et le bloc de sortie est à une ordonnée négative et est tangent au cylindre en  $x=L$ . Nous avons donc :

$$(R_2 - h_s)^2 + a^2 = R_2^2 \Rightarrow R_2 = \frac{h_s}{2} + \frac{a^2}{2h_s}$$

Notons  $B$  le premier point de contact de la bande avec le cylindre,  $B = (0, h(0))$ . On établit facilement l'équation du cercle passant par  $A$  et  $B$  dont le centre se trouve sur la normale à la direction de laminage passant par  $O_1$ , ( $x=L$ ). Après calculs on en déduit :

$$R_3 = \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} + a^2\right)}$$

$$\text{où : } c = 2R + 2h_s - \frac{2Rh_s}{h_e} - \frac{h_s^2}{h_e} - \frac{a^2}{h_e}$$

La continuité de la vitesse normale à la traversée des frontières des blocs donne après calculs une relation entre le paramètre vitesse d'entrée  $V_e$  (vitesse horizontale du bloc d'entrée), le paramètre  $a$  (lié au choix de la position du point  $A$ ) et la donnée vitesse du cylindre  $V_c$ .

$$\frac{V_e}{V_c} = \frac{2h_s R + h_s^2 + a^2}{2Rh_e} = \frac{h_s}{h_e} \left( 1 + \frac{h_s}{2R} + \frac{a^2}{2Rh_s} \right)$$

Ainsi le choix du paramètre  $a$  est lié à celui de  $V_e$ . Nous avons donc construit une famille de champs de vitesse à 1 paramètre.

Notons que si nous n'exigeons pas que le bloc central tourne à la même vitesse que le cylindre, nous avons, de fait, construit une famille de champ à 2 paramètres  $V_e$  et  $a$ . Bien sûr le prix à payer, du point de vue de l'énergie dissipée, du glissement entre le cylindre et le bloc central sera le plus souvent trop élevé et conduira vraisemblablement à choisir la valeur de  $a$  tirée de l'équation ci-dessus pour minimiser l'énergie dissipée.

Nous allons ci-dessous calculer les différents termes de la fonctionnelle :

$$J^*(\underline{V}^*) = \int_{\Omega} \sqrt{\frac{2}{3}} \sigma_0 \sqrt{\underline{d}^* : \underline{d}^*} d\Omega + \int_{S^*} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS + \int_{\Sigma} \tau \llbracket \underline{V}^* \rrbracket dS - \int_{S_i} \underline{T}_d \cdot \underline{V}^* dS$$

Puis nous déterminerons plus loin la valeur du paramètre qui minimise la fonctionnelle dans les deux applications choisies, laminage à chaud et laminage à froid.

### 2.3.2.2. Puissance dissipée par le taux de déformation

Elle est bien évidemment nulle par construction.

### 2.3.2.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :

On applique la formule :

$$P_{\Delta V} = \int_{S_{dis}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS = \int_{S_1} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS + \int_{S_2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS$$

Sur la surface de l'entrée ( $S_1$ ) la discontinuité de vitesse tangentielle est uniforme :

$$[[\underline{V}]] = V_{AB}$$

$$V_{AB}^2 = V_e^2 + V_c^2 - 2V_c V_e \cos(\vec{V}_c, \vec{V}_e) \Rightarrow V_{AB} = \sqrt{V_e^2 + V_c^2 - 2V_c V_e \frac{R + h_s - h_e}{R}}$$

La puissance dissipée sur  $S_1$  est :

$$\int_{S_1} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e V_{AB} AB = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e V_{AB} R_3 \alpha_3 \quad \text{où } \alpha_3 = AO_3B$$

Sur la surface de la sortie ( $S_2$ ) la discontinuité de vitesse tangentielle est uniforme:

$$[[\underline{V}]] = V_{CA} = V_s - V_c = V_e \frac{h_e}{h_s} - V_c$$

La puissance dissipée sur  $S_2$  est :

$$\int_{S_2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e V_{CA} CA = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e V_{CA} R_2 \alpha_2 \quad \text{où } \alpha_2 = AO_2B$$

Donc :

$$P_{\Delta V} = \int_{S_{dis}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[\underline{V}]] dS = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e (V_{AB} R_3 \alpha_3 + V_{CA} R_2 \alpha_2)$$

### 2.3.2.4. Puissance dissipée par le frottement

Elle est bien évidemment nulle par construction.

### 2.3.2.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures

Les efforts extérieurs sont les tractions amont (contrainte  $\sigma_e$ ) et aval (contrainte  $\sigma_s$ ) dont la contribution à  $J^*$  est donnée par  $-P_{trac}$  :

$$P_{trac} = -\int_{S_e} \sigma_e u(0) dS + \int_{S_s} \sigma_s u(L) dS = (\sigma_s - \sigma_e) h_e b_e V_e$$

### 2.3.2.6. Détermination de $J^*$

La fonctionnelle  $J^*$  (fonction du paramètre  $V_e$ ) est la combinaison des termes précédents :

$$J^*(V_e) = P_{\Delta V}(V_e) - P_{trac}(V_e)$$

$$P = P_{\Delta V} + P_{trac} = \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} b_e (V_{AB} R_3 \alpha_3 + V_{CA} R_2 \alpha_2) - (\sigma_s - \sigma_e) h_e b_e V_e$$

La dépendance en  $V_e$  est complexe car la position du point A dépend de  $V_e$

L'application aux deux cas de laminage sera faite plus loin.

### 2.3.3. MBS avec champs de vitesse « mixtes » combinant les champs Uniformes et les champs par Blocs

La première idée qui vient à l'esprit est de faire une combinaison convexe des 2 champs (champ de vitesse uniforme  $V_1$  et champ de vitesse par blocs  $V_2$ ) tous deux fonctions du seul paramètre  $V_e$

$$V(x, y) = \alpha V_1(x, y) + (1 - \alpha) V_2(x, y) \quad \alpha \in [0, 1]$$

Cette famille de champs a deux paramètres  $V_e$  et  $\alpha$ . Il est facile de montrer que la fonctionnelle  $J^*$  associée est la combinaison convexe des fonctionnelles associées à  $V_1$  et  $V_2$

En effet, le point neutre n'est pas modifié et les contributions à  $J^*$  pour chaque morceau de  $V$  correspondent à des zones différentes.

Ainsi, pour toutes les valeurs de  $\alpha$ , la courbe  $J^*(\alpha, V_e)$  d'abscisse  $V_e$  est la combinaison convexe des 2 courbes correspondant au cas à vitesse uniforme ou à vitesse par blocs. Le minimum de cette combinaison convexe  $J^*(\alpha, V_e)$  est toujours supérieur à  $\text{Inf}(J^*_1(V_e), J^*_2(V_e))$ . Ainsi, le minimum sur cette courbe est supérieur ou égal au plus petit des minimums de  $J^*_1(V_e), J^*_2(V_e)$

Il faut donc penser à une autre idée pour combiner les 2 familles de champs de vitesse. Nous en proposons une ci-dessous.

Nous proposons une approche « mixte » dans laquelle, on a une zone (au contact avec le cylindre) avec les champs de vitesse par blocs et une zone (au centre de la bande) avec les champs de vitesse uniformes (Le Dang H., 2008)

#### 2.3.3.1. Champs de vitesse

Notons  $a = BC$ , la hauteur d'entrée de la couche 1 où les champs de vitesse sont uniformes. La couche 2 où les champs de vitesse sont par blocs sont limités par 4 cercles  $(O, R_1)$ ,  $(O_2, R_2)$ ,  $(O_3, R_3)$  et  $(O, R)$  (Figure 2-24). Nous proposons ainsi une famille de champ de vitesse à deux paramètres  $V_e$  et  $a$ .

Pour  $a = 0$ , nous retrouvons la MBS avec champs de vitesse par blocs

Pour  $a = h_e$ , nous retrouvons la MBS avec champs de vitesse uniformes

- Pour la première couche :

$$V_{x1}(x) = \frac{h_{1,2}(a_1)}{h_{1,2}(x)} V_e = \frac{a}{h_{1,2}(x)} V_e \quad V_{y1}(x, y) = \frac{h'_{1,2}(x)}{h_{1,2}(x)^2} a V_e y$$

Où  $h_{1,2}(x)$  est la hauteur des points sur le cercle  $(O, R_1)$

- Pour la deuxième couche :

C'est un bloc rigidifiant qui a la même vitesse de rotation que cylindre.

Par construction (Figure 2-24), nous avons les relations suivantes:

$$V_{AB} = \sqrt{V_c^2 + V_e^2 - 2V_c V_e \frac{R + h_s - h_e}{R}}$$

$$V_{EF} = V_s - V_c = \frac{V_e h_e}{h_s} - V_c$$

$$R_3 = \frac{L}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\alpha_1 = \langle \vec{V}_e, \vec{V}_c \rangle = a \cos \left( \frac{V_e^2 + V_c^2 - V_{AB}^2}{2V_e V_c} \right)$$

$$\alpha_2 = \langle \vec{V}_{AB}, \vec{V}_c \rangle = a \cos \left( \frac{V_c^2 + V_{AB}^2 - V_e^2}{2V_c V_{AB}} \right)$$

$$x_{O3} = L \quad y_{O3} = h_e + \sqrt{R_3^2 - L^2}$$

$$(x-L)^2 + (y-y_{O3})^2 = R_3^2 \text{ avec}$$

$$y = BC = a \Rightarrow CG = a_1 = L - \sqrt{R_3^2 - (a - y_{O3})^2}$$

$$R_1 = \sqrt{(L - a_1)^2 + (R + h_s - a)^2} = \sqrt{R_3^2 - (a - y_{O3})^2 + (R + h_s - a)^2}$$

$$b = \frac{V_e a}{V_s} = \frac{h_s a}{h_e}$$

$$DH = a_2 = \sqrt{R_1^2 - (R + h_s - b)^2}$$

$$V_1 = R_1 \frac{V_c}{R}$$

$$\beta_1 = \langle \vec{V}_{EF}, \vec{V}_1 \rangle = a \cos \left( \frac{V_{EF}^2 + V_1^2 - V_s^2}{2V_{EF} V_1} \right)$$

$$R_2 = \frac{a_2}{\cos(\pi/2 - \beta_1)} = \frac{a_2}{\sin(\beta_1)}$$

$$(h(x) - R - h_s)^2 + (x-L)^2 = R^2$$

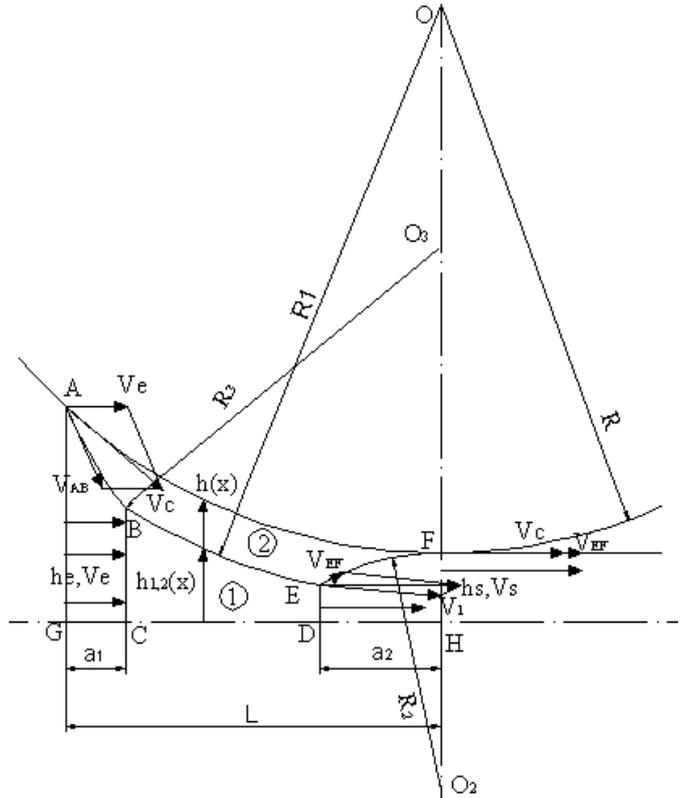


Figure 2-24 : Champs de vitesse mixtes

$$(h_{1,2}(x) - R - h_s)^2 + (x - L)^2 = R_1^2$$

### 2.3.3.2. Puissance dissipée par le taux de déformation

○ Pour la première couche :

$$d_{xx}^1 = \frac{\partial V_{x1}(x)}{\partial x} = -\frac{h'_{1,2}(x)}{h_{1,2}(x)^2} aV_e$$

$$d_{yy}^1 = \frac{\partial V_{y1}(x, y)}{\partial y} = \frac{h'_{1,2}(x)}{h_{1,2}(x)^2} aV_e = -d_{xx}^1$$

$$d_{xy}^1 = d_{yx}^1 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial V_{x1}(x)}{\partial y} + \frac{\partial V_{y1}(x)}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} yaV_e \left( \frac{h''_{1,2}(x)}{h_{1,2}(x)^2} - \frac{2h'_{1,2}(x)^2}{h_{1,2}(x)^3} \right)$$

La puissance dissipée par le taux de déformation est:

$$\begin{aligned} P_{def}^1 &= \int_{\Omega_1} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \sqrt{2\underline{d}^1 : \underline{d}^1} d\Omega = \int_{\Omega_1} \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} (d_{xx}^1)^2 + d_{yy}^1{}^2 + 2d_{yx}^1{}^2} d\Omega \\ &= \int_{a1}^{L-a2} \int_0^{be} \int_0^{h_{1,2}(x)} \sigma_0 \sqrt{\frac{2}{3} \frac{a^2 V_e^2}{2h_{1,2}(x)^4} \left[ 4h'_{1,2}(x)^2 + \left( h''_{1,2}(x) - \frac{2h'_{1,2}(x)^2}{h_{1,2}(x)} \right)^2 \right] y^2} dx dy dz \\ &= \int_{a1}^{L-a2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{aV_e b_e}{h_{1,2}(x)} \frac{1}{h_{1,2}(x)} \int_0^{h_{1,2}(x)} \sqrt{4h'_{1,2}(x)^2 + \left( h''_{1,2}(x) - \frac{2h'_{1,2}(x)^2}{h_{1,2}(x)} \right)^2} y^2 dy dx \\ &= \int_{a1}^{L-a2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{aV_e b_e}{h_{1,2}(x)} C_1(x) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Avec } C_1(x) &= \frac{1}{h_{1,2}(x)} \int_0^{h_{1,2}(x)} \sqrt{4h'_{1,2}(x)^2 + \left( h''_{1,2}(x) - \frac{2h'_{1,2}(x)^2}{h_{1,2}(x)} \right)^2} y^2 dy \\ &= \int_0^1 \sqrt{4h'_{1,2}(x)^2 + \left( h''_{1,2}(x)h_{1,2}(x) - 2h'_{1,2}(x)^2 \right)^2} y^{*2} dy^* \quad (\text{avec } y^* = \frac{y}{h_{1,2}(x)}) \end{aligned}$$

On utilise la formule d'intégrale mathématique suivante :

$$C_1(x) = \int_0^1 \sqrt{p^2(x) + q^2(x)} y^2 dy = \frac{1}{2} \left( \sqrt{p^2(x) + q^2(x)} + \frac{p^2(x)}{q(x)} \ln \frac{q(x) + \sqrt{p^2(x) + q^2(x)}}{p(x)} \right)$$

$$\text{Avec } p(x) = 2|h'_{1,2}(x)|, \quad q(x) = |h''_{1,2}(x)h_{1,2}(x) - 2h'_{1,2}(x)^2|$$

En posant  $I_2(x) = \sqrt{p^2(x) + q^2(x)}$  et  $I_1(x) = q(x)$ , on a :

$$C_1(x) = \frac{1}{2} \left( I_2(x) + \frac{4h'_{1,2}(x)^2}{I_1(x)} \ln \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2|h'_{1,2}(x)|} \right)$$

Donc :

$$P_{def}^1 = \int_{a_1}^{L-a_2} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{aV_e b_e}{h_{1,2}(x)} C_1(x) dx = \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} aV_e b_e \int_{a_1}^{L-a_2} \left( I_2(x) + \frac{4h'_{1,2}(x)^2}{I_1(x)} \ln \frac{I_1(x) + I_2(x)}{2|h'_{1,2}(x)|} \right) \frac{dx}{h_{1,2}(x)}$$

○ Pour la deuxième couche :

$$P_{def}^2 = 0 \text{ par construction}$$

La puissance totale dissipée par le taux de déformation est:  $P_{def} = P_{def}^1 + P_{def}^2$

### 2.3.3.3. Puissance dissipée par la discontinuité de vitesse :

$$P_{\Delta V} = \int_{S_{dis}} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS$$

$$= \int_{AB} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS + \int_{BC} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS + \int_{BE} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS + \int_{ED} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS + \int_{EF} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS$$

Sur la surface AB :  $[[V]] = V_{AB}$

$$\int_{AB} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_{AB} \langle \overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3B} \rangle = b_e \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_{AB} R_3 \alpha \text{ avec } \alpha = \langle \overrightarrow{O_3A}, \overrightarrow{O_3B} \rangle$$

Sur la surface BC :  $[[V]] = |V_{y1}(x = a_1, y)|$

$$\int_{BC} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \int_0^a \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{|h'_{1,2}(a_1)|}{a} V_e y dy = b_e a \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |h'_{1,2}(a_1)| V_e$$

Sur la surface BE :  $[[V]] = \left| \sqrt{V_{x1}^2(x) + V_{y1}^2(x, y = h_{1,2}(x))} - R_1 \frac{V_c}{R} \right| = \left| V_e \frac{a}{h_{1,2}(x)} \sqrt{1 + h'_{1,2}(x)^2} - R_1 \frac{V_c}{R} \right|$

$$\int_{BE} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \int_{a_1}^{L-a_2} \left| V_e \frac{a}{h_{1,2}(x)} \sqrt{1 + h'_{1,2}(x)^2} - R_1 \frac{V_c}{R} \right| \sqrt{1 + h'_{1,2}(x)^2} dx$$

Sur la surface ED:  $[[V]] = |V_{y1}(x = L - a_2, y)|$

$$\int_{ED} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \int_0^b \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} \frac{|h'_{1,2}(L - a_2)|}{b^2} a V_e y dy = b_e a \frac{\sigma_0}{2\sqrt{3}} |h'_{1,2}(L - a_2)| V_e$$

Sur la surface EF :  $[[V]] = V_{EF}$

$$\int_{EF} \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} [[V]] dS = b_e \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_{EF} \langle \overrightarrow{O_2E}, \overrightarrow{O_2F} \rangle = b_e \frac{\sigma_0}{\sqrt{3}} V_{EF} R_2 \chi \text{ avec } \chi = \langle \overrightarrow{O_2E}, \overrightarrow{O_2F} \rangle$$

### 2.3.3.4. Puissance dissipée par le frottement

$$P_{frot} = 0 \text{ par construction}$$

### 2.3.3.5. Contribution à $J^*$ due aux forces extérieures

Les efforts extérieurs sont les tractions amont (contrainte  $\sigma_e$ ) et aval (contrainte  $\sigma_s$ ) dont la contribution à  $J^*$  est donnée par  $-P_{trac}$  :

$$P_{trac} = -\int_{S_e} \sigma_e u(0) dS + \int_{S_s} \sigma_s u(L) dS = (\sigma_s - \sigma_e) h_e b_e V_e$$

L'application aux deux cas de laminage sera faite dans la partie suivante

### 2.3.4. Applications numériques

#### Cas 1 :

Commençons par étudier le cas 1 ( $e = 0.08$ ). Pour la comparaison avec LAM3, on utilise un maillage avec 5 éléments dans la demi-épaisseur de la bande.

Nous avons pris la précaution d'utiliser un module d'Young très élevé pour nous approcher d'un cas de calcul rigide plastique et nous obtenons la vitesse d'entrée de la bande  $V_e = 0.743$  m/s et la puissance de laminage  $P = 5.74 \times 10^5$  N.m

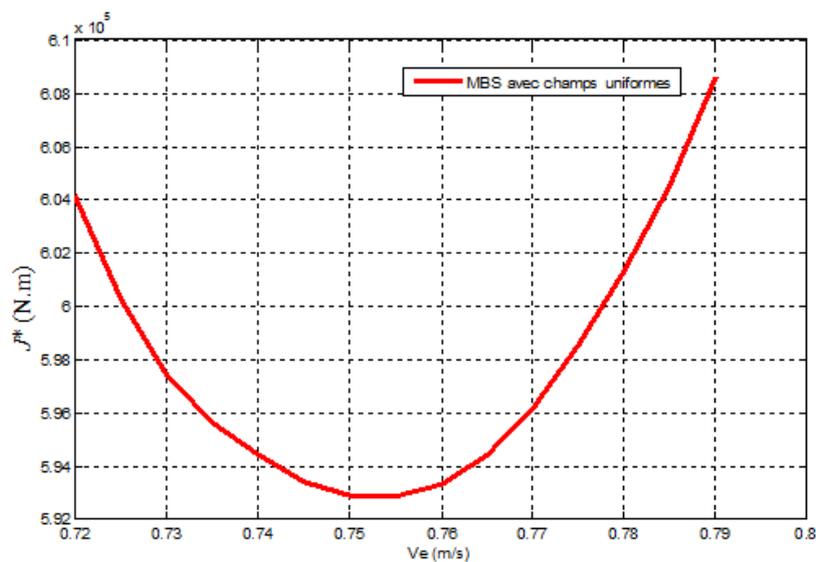


Figure 2-25 : MBS avec champs de vitesse uniforme

La MBS avec champs de vitesse Uniformes (champs de vitesse mixtes avec  $a = h_e$ ) nous donne la vitesse d'entrée optimale  $V_e^{opt} = 0.753$  m/s et la puissance optimale  $J^* = 5.93 \times 10^5$  N.m. Cette valeur est plus grande que celle obtenue par LAM3. La famille à un paramètre  $V_e$  est probablement trop limitée dans notre approche MBS

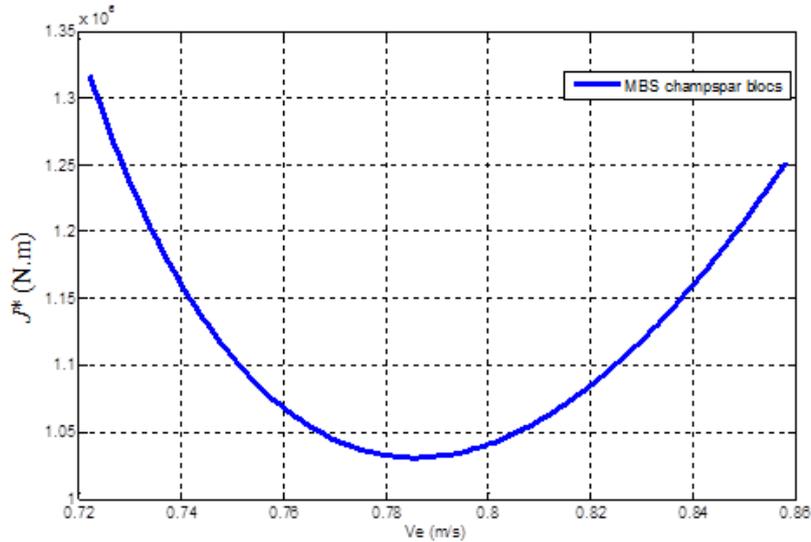


Figure 2-26 : MBS avec champs de vitesse par blocs

La MBS avec champs de vitesse par blocs (champs de vitesse mixtes avec  $a = 0$ ) nous donne la vitesse d'entrée optimale  $V_e^{opt} = 0.782 m/s$  et la puissance optimale  $J^* = 10.30 \times 10^5 N.m$ .

Nous pouvons compléter l'analyse pour différentes valeurs du paramètre  $a$  pour les champs de vitesse « mixtes » et optimiser sur  $V_e$  pour chaque valeur de  $a$ .

La Figure 2-27 donne la courbe de la puissance optimale en fonction de  $\frac{a}{h_e}$  :

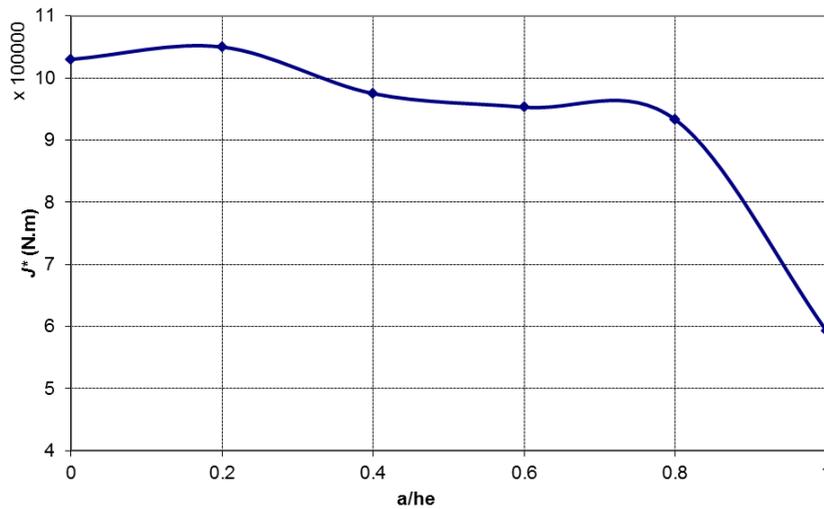


Figure 2-27 : Puissance optimale en fonction de  $a/h_e$  – Laminage à froid

On constate qu'on obtient la valeur minimale de la puissance optimale avec la MBS avec champs de vitesse uniforme ( $a = h_e$ ).

Dans le cas de laminage à froid ( $e = 0.08$ ), la MBS avec champs de vitesse uniformes donne les meilleurs résultats.

## Cas 2 :

Etudions maintenant le 2<sup>ème</sup> cas de laminage à chaud ( $e = 0.18$ ).

Avec LAM3 (5 éléments dans la demi-épaisseur), nous obtenons la vitesse d'entrée de la bande  $V_e = 0.753$  m/s et la puissance de laminage  $P = 23.01 \times 10^5$  N.m

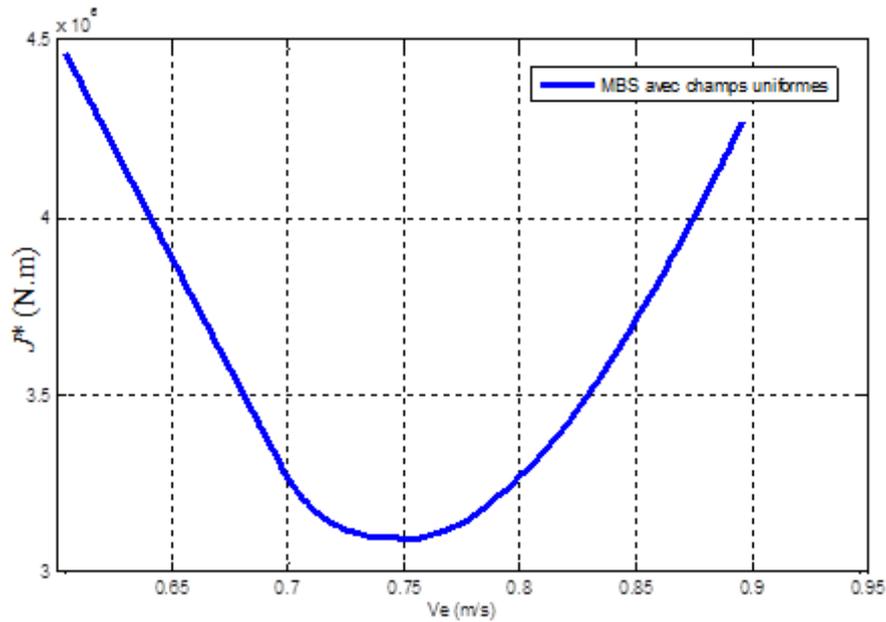


Figure 2-28 : MBS avec champs de vitesse uniforme

La MBS avec champs de vitesse Uniformes (champs de vitesse mixtes avec  $a = h_e$ ) nous donne la vitesse d'entrée optimale  $V_e^{opt} = 0.75$  m/s et la puissance optimale  $J^* = 30.10 \times 10^5$  N.m. Cette valeur est nettement plus grande que celle obtenue par LAM3.

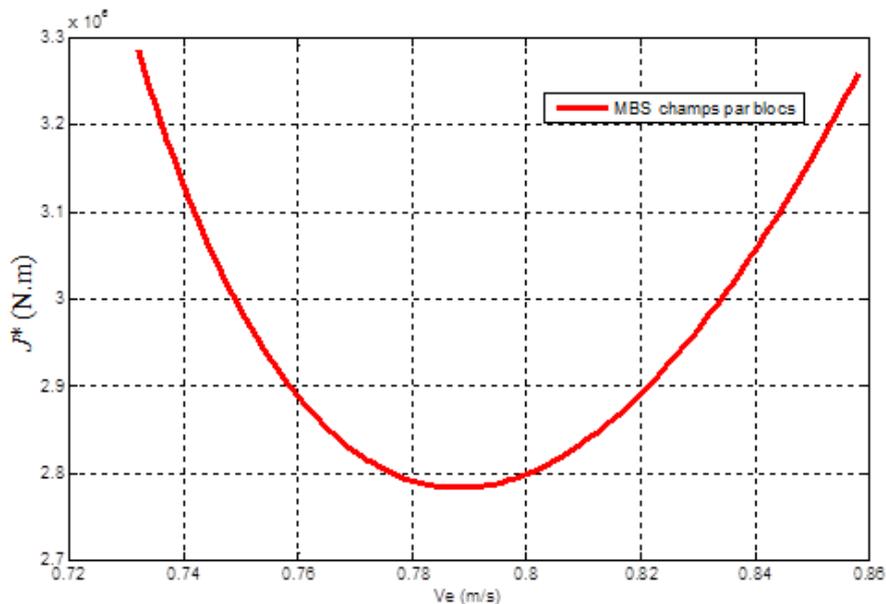


Figure 2-29 : MBS avec champs de vitesse par blocs

La MBS avec champs de vitesse par blocs (champs de vitesse mixtes avec  $a = 0$ ) nous donne la vitesse d'entrée optimale  $V_e^{opt} = 0.783 m/s$  et la puissance optimale  $J^* = 27.80 \times 10^5 N.m$ . Cette valeur est aussi nettement plus grande que celle obtenue par LAM3.

Comme pour le cas précédent, étudions la vitesse  $V_e$  optimale pour différente valeur de  $a$

La Figure 2-30 donne la courbe de la puissance optimale en fonction de  $\frac{a}{h_e}$  :

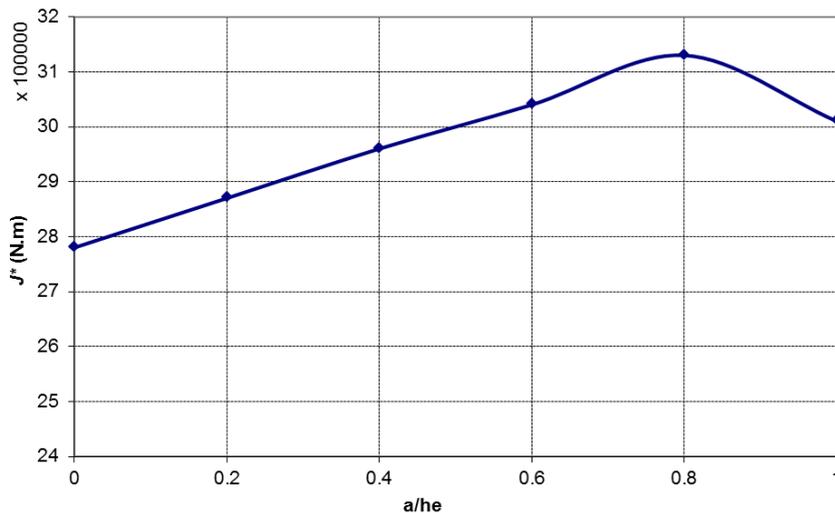


Figure 2-30 : Puissance optimale en fonction de  $a/h_e$  – Laminage à chaud

On constate qu'on obtient la valeur minimale de la puissance optimale avec la MBS avec champs de vitesse par blocs ( $a = 0$ ).

Dans le cas de laminage à chaud, la MBS avec champs de vitesse par blocs donne de meilleurs résultats mais ceux-ci ne sont toutefois pas très satisfaisants dans une comparaison avec des calculs LAM3.

Pour les deux cas que nous avons étudiés, la sophistication introduite par la proposition d'une famille de champ de vitesse à 2 paramètres est inutile. Cependant, l'observation des Figure 2-27 et Figure 2-30 laisse penser que cette conclusion n'a peut-être pas un caractère complètement général. Il existe peut-être des jeux des paramètres pour lesquelles, les valeurs optimales de  $\frac{a}{h_e}$  s'éloignent des bornes 0 et 1.

Nous n'avons pas cependant pris le temps d'approfondir cette question car quel que soit l'intérêt de ces méthodes simplifiées, elles ne semblent pas donner de résultats suffisamment satisfaisants dans les cas où  $e$  prend des valeurs importantes. On aurait pu imaginer d'autres associations que celle présentée des 2 familles de base (par exemple une association en série au lieu d'une association en parallèle). On aurait aussi pu étudier des champs de vitesse paraboliques dans l'épaisseur de la bande ... Cependant aucune sophistication de ces champs ne permettent de prendre en compte les déformations élastiques dans le modèle simplifié. Comme il s'agit là d'un objectif important de travail, nous n'approfondissons pas plus les pistes évoquées ici.

## 2.4. Conclusion

Les modèles simplifiés classiques fonctionnent à peu près bien dans les cas de laminage à froid où les champs (de vitesse et de contraintes) sont à peu près uniformes dans l'épaisseur. Mais dans le cas de laminage à chaud où les champs ne sont plus uniformes dans l'épaisseur. Ces modèles donnent alors de mauvais résultats. Une des raisons de ces problèmes est liée à l'approximation rigide plastique de ces modèles simplifiés. Lorsque  $e$  devient importantes, la partie isotrope du tenseur de contrainte devient importante et il est alors nécessaire de prendre en compte la variation de volume d'origine élastique pour espérer avoir une description simplifiée acceptable du processus de laminage.

Dans les chapitres suivants, nous allons donc, aborder la description d'un comportement élastoplastique dans un formalisme de grande transformation qui nous semble bien adapté aux objectifs de notre travail.



## Chapitre 3: Un comportement élastoplastique en grandes transformations

La construction d'un modèle simplifié du laminage peut être facilitée par un choix judicieux de la formulation du comportement élastoplastique du métal.

L'objectif de ce chapitre est de construire dans un cadre très général une telle formulation en nous appuyant sur les outils de base de la thermodynamique des milieux continus.

Nous commençons au premier paragraphe, comme cela est classique, par **décrire le mouvement** au voisinage d'une particule dans un solide élastoplastique. Ceci nous conduit à faire au deuxième paragraphe le **choix des variables d'état** pertinentes pour décrire le processus d'évolution élastoplastique. A l'aide de ces variables d'état nous proposons au troisième paragraphe une **écriture du comportement** élastoplastique sous une forme assez générale pour englober la plupart des modèles habituellement utilisés, puis nous nous restreignons au cas d'un écrouissage isotrope.

Dans le quatrième paragraphe nous montrons que **l'évolution élastoplastique** locale, dans le cas de l'écrouissage isotrope, est entièrement déterminée explicitement à partir de la donnée de  $\underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t_0) = \underline{\underline{Grad}}(\underline{\dot{\Phi}}(\underline{X}, t_0))$ .

Dans le dernier paragraphe, nous allons donner **une illustration dans le cas de deux exemples** très simples d'histoires de transformation homogène. Dans le premier exemple que nous nommerons abusivement « traction », le gradient de transformation est choisi diagonal et il n'y a pas de rotation de la matière.

(La simulation d'une vraie expérience de traction simple avec le même matériau est donnée au chapitre 5)

Dans le second exemple que nous nommerons « cisaillement », nous choisissons une évolution du gradient de la transformation faisant intervenir une rotation de la matière.

### 3.1. Description du mouvement

On sait depuis la fin des années 1960 que le procédé le plus satisfaisant pour définir l'état thermodynamique d'un volume élémentaire d'un matériau devant subir de grandes transformations élastoplastiques consiste à introduire une configuration « relâchée » (Green A.E. and Naghdi P.M., 1965), (Perzyna P. and Wojno W., 1968), (Mandel J., 1971)).

Soient  $\Omega_0$  la configuration initiale dans son état naturel (contrainte nulle), à la température  $T_0$  et  $\Omega_t$  la configuration actuelle. Considérons un voisinage de la particule  $\underline{X}$ . Il est transporté dans le mouvement des particules en un voisinage de  $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ . Les champs de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t)$  et de température  $T(\underline{x}, t)$  sont à peu près uniformes dans le voisinage de  $\underline{x}$ .

La configuration relâchée est obtenue par une décharge instantanée du voisinage de la particule et un retour instantané de la température à la température  $T_0$ . Cette configuration relâchée est définie à une rotation près.

Le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{\Phi}})$  peut alors être décomposé multiplicativement en un produit d'une première transformation locale « plastique »  $\underline{\underline{P}}$ , qui transforme le voisinage local initial de  $\underline{X}$  dans la configuration relâchée, par une seconde transformation locale « élastique »  $\underline{\underline{E}}$  qui transforme la configuration relâchée dans la configuration actuelle

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}} \quad (3.1)$$

Soulignons que cette décomposition de  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{\underline{\Phi}})$  est locale. Le champ  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t)$ , défini dans la configuration de référence, n'est pas compatible en général. (Ce n'est pas le gradient d'une transformation).

Dans les métaux, on peut généralement faire l'hypothèse que la déformation plastique est isochore.

Ceci implique que  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$ . La variation de volume est alors uniquement d'origine élastique et  $J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}})$ .

La décharge étant définie à une rotation près, en général pour les métaux polycristallins on choisit cette rotation locale pour que  $\underline{\underline{E}}$  soit un tenseur d'ordre 2 symétrique.

Cette décomposition est à la base de l'analyse thermodynamique de l'évolution mécanique qui suit, lorsque le matériau subit de grandes transformations élastoplastiques, laquelle analyse fournit les concepts d'efforts intérieurs et de variables d'état nécessaires à l'écriture de ce comportement.

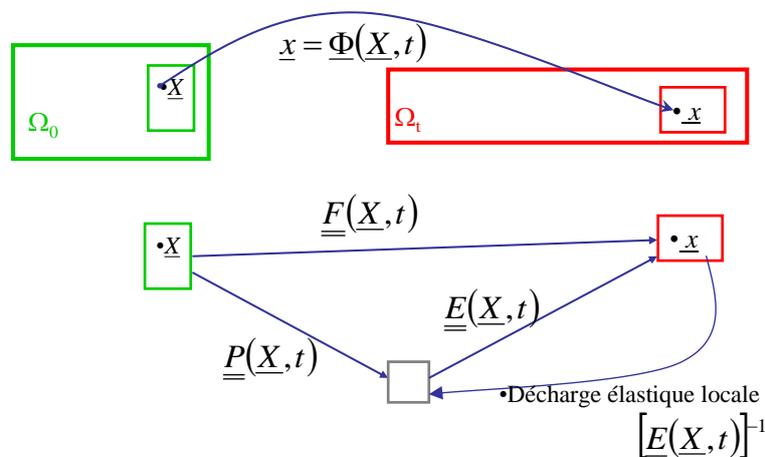


Figure 3-1 : Décomposition du gradient de transformation

### 3.2. Choix des variables d'état

Rappelons que l'analyse thermodynamique d'un processus de déformation (bilan d'énergie interne et bilan d'entropie) se résume localement à l'écriture de l'équation des bilans dans la configuration actuelle.

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t) - \rho(\underline{x},t) [\dot{\psi}(\underline{x},t) + \dot{T}(\underline{x},t)s(\underline{x},t)] - \frac{\underline{q}(\underline{x},t) \cdot \underline{\underline{grad}}(T(\underline{x},t)))}{T(\underline{x},t)} - T(\underline{x},t)p_s(\underline{x},t) = 0 \quad (3.2)$$

Où :

$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$  est le tenseur de contrainte de Cauchy

$\underline{\underline{d}}(\underline{x},t)$  est le taux de déformation et  $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \frac{1}{2} [\underline{\underline{grad}}\underline{v}(\underline{x},t) + {}^t \underline{\underline{grad}}\underline{v}(\underline{x},t)]$

$\underline{v}(\underline{x},t)$  est le champ de vitesse

$\rho(\underline{x},t)$  est la masse volumique

$\psi(\underline{x},t)$  est la densité massique d'énergie libre et  $\psi(\underline{x},t) = e(\underline{x},t) - T(\underline{x},t)s(\underline{x},t)$

$e(\underline{x},t)$  est la densité massique d'énergie interne

$s(\underline{x},t)$  est la densité massique d'entropie

$p_s(\underline{x},t)$  est la production volumique d'entropie dans la configuration actuelle

$T(\underline{x},t)$  est la température absolue

$\underline{q}(\underline{x},t)$  est le flux de chaleur par unité de surface de la configuration actuelle

$\dot{\psi}(\underline{x},t) = \frac{\partial \psi}{\partial t}(\underline{x},t) + \underline{\underline{grad}}(\psi)(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$

$\dot{T}(\underline{x},t) = \frac{\partial T}{\partial t}(\underline{x},t) + \underline{\underline{grad}}(T)(\underline{x},t) \cdot \underline{v}(\underline{x},t)$

En vertu du second principe de la thermodynamique, nous avons  $Tp_s \geq 0$ .

Pour simplifier cette présentation nous nous plaçons dans une approximation isotherme. L'équation des bilans s'écrit alors :

$$\boxed{\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t) : \underline{\underline{d}}(\underline{x},t)}{\rho(\underline{x},t)} - [\dot{\psi} + D](\underline{x},t) = 0} \quad (3.3)$$

où  $D = \frac{Tp_s}{\rho}$  est la puissance massique dissipée par les phénomènes plastiques dans le matériau.

Comme le tenseur de contrainte de Cauchy  $\underline{\underline{\sigma}}(\underline{x},t)$  est symétrique il est possible dans la relation ci-dessus de remplacer  $\underline{\underline{d}}(\underline{x},t) = \left[ \underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x},t)) \right]_{sym}$  par  $\underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x},t))$ .

Or  $\underline{\underline{grad}}(\underline{v}(\underline{x},t)) = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} = \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} + \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}$ .

Notons que  $tr(\underline{\underline{d}}) = tr(\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}) = tr(\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1})$  si  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$  car, alors,  $tr(\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}) = 0$

et donc  $tr(\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}) = 0$  ( $tr(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = tr(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}})$ ).

Le premier terme de l'équation des bilans s'écrit alors :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : \underline{\underline{d}}(\underline{\underline{x}}, t) = \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : \underline{\underline{grad}}(\underline{\underline{v}}(\underline{\underline{x}}, t)) = \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1}) + \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}) \quad (3.4)$$

En notant que  $tr(\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}) = tr(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{A}}) = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}}$  et  $\underline{\underline{A}}(\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}) = (\underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}})\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}\underline{\underline{B}}\underline{\underline{C}}$ , le premier terme du membre de droite de cette équation devient :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1}) = tr \left[ \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} (\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1}) \right] = tr \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{\dot{E}}} \right] = tr \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{E}}^{-1} \underline{\underline{E}} \underline{\underline{\dot{E}}} \right]$$

Introduisons la déformation de Green Lagrange entre la configuration relâchée et la configuration actuelle  $\underline{\underline{e}}_{\text{Rel}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}}\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{I}})$ .

Le taux de déformation lagrangien entre la configuration relâchée et la configuration actuelle est  $\dot{\underline{\underline{e}}}_{\text{Rel}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{E}}} + \underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}})$ .

En utilisant le tenseur de contrainte de Piola Kirchhoff dans la configuration relâchée

$$\frac{\underline{\underline{\pi}}_{\text{Rel}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{Rel}}} = \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{E}}^{-1} \right], \text{ on peut réécrire :}$$

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{\dot{E}}}\underline{\underline{E}}^{-1}) = \frac{\underline{\underline{\pi}}_{\text{Rel}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{Rel}}} : \dot{\underline{\underline{e}}}_{\text{Rel}} \quad (3.5)$$

Considérons maintenant le second terme du membre de gauche  $\frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1})$

$$\begin{aligned} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} : (\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}) &= tr \left[ \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} (\underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}\underline{\underline{E}}^{-1}) \right] = tr \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{E}}\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1} \right] \\ &= \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{E}} \right] : (\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}) \end{aligned}$$

Introduisons le tenseur de « contrainte plastique »  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  tel que  $\frac{\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{Rel}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)} \underline{\underline{E}}$ , défini dans la configuration relâchée. Ce tenseur peut être non symétrique.

(Notons que si,  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\sigma}}$  commutent  $\frac{\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}}{\underline{\underline{\rho}}_{\text{Rel}}} = \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\underline{\underline{\rho}}(\underline{\underline{x}}, t)}$ ).

La partie symétrique  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^s$  de  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  est associée à la partie symétrique  $\underline{\underline{d}}^p$  de  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$ . Le tenseur symétrique  $\underline{\underline{d}}^p$  est appelé le taux de déformation plastique, défini dans la configuration relâchée.

La partie antisymétrique  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^a$  de  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  est associée à la partie anti symétrique  $\underline{\underline{\Omega}}^p$  de  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$ . Le tenseur antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}^p$  est le taux de rotation plastique défini dans la configuration relâchée.

Nous appelons taux de déformation plastique cumulée le scalaire :

$$\dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} \quad (3.6)$$

et déformation plastique cumulée entre les instants  $t_0$  et  $t$ , le scalaire :

$$p_{cum} = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} dt \quad (3.7)$$

Notons que  $\dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p}$  est un scalaire positif.

Les modèles les plus simples d'élastoplasticité isotherme font le choix des trois variables d'état suivantes  $\underline{\underline{E}}, \underline{\underline{P}}, p_{cum}$ .

La variable d'état  $p_{cum}$  est généralement associée à un écrouissage isotrope du matériau.

La variable d'état  $\underline{\underline{P}}$  est généralement associée à un écrouissage cinématique du matériau.

L'énergie libre massique du matériau est le plus souvent une fonction des variables d'état  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{P}}$ .

Dans la plupart des modèles classiques on admet un « découplage » de l'énergie libre en deux parties, la première, fonction uniquement de  $\underline{\underline{E}}$ , donnant l'énergie récupérable lors de la décharge, la seconde fonction uniquement de  $\underline{\underline{P}}$ , donnant la part d'énergie libre « bloquée » au niveau de la microstructure du matériau à cause du champ d'autocontrainte (à moyenne macroscopique nulle) qui subsiste à cette échelle.

Ce sont ces champs d'autocontrainte microscopique et donc l'énergie libre bloquée à l'échelle macroscopique qui sont généralement considérés comme étant à l'origine de l'évolution dissymétrique du domaine d'élasticité macroscopique, modélisé par un écrouissage cinématique.

La prise en compte de cet écrouissage cinématique a surtout de l'importance dans le cas de plasticité cyclique. Dans un problème de laminage nous ne sommes pas dans cette situation et, comme nous cherchons, pour l'instant, à retenir le modèle le plus simple possible, **nous ne retiendrons finalement comme variable d'état que  $\underline{\underline{E}}$  et  $p_{cum}$** , et l'énergie libre massique

du matériau sera considérée comme n'étant fonction que de la variable d'état  $e_{\text{Rel}} = \frac{1}{2}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - I)$ , ou, plus simplement et de manière équivalente, fonction du tenseur de dilatation de Cauchy entre la configuration relâchée et la configuration actuelle  ${}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$ . Cela ne pose pas de problèmes majeurs de prendre en compte un écrouissage cinématique, si ce n'est la lourdeur un peu plus grande des calculs.

### 3.3. Ecriture du comportement

#### 3.3.1. Comportement isotrope

Les déformations élastiques dans les métaux sont, le plus souvent, petites. Ainsi le tenseur symétrique  $\underline{\underline{E}}$  est voisin de  $\underline{\underline{I}}$ . L'hypothèse d'une décharge élastique correspondant à une petite perturbation par rapport à la configuration actuelle simplifie grandement le formalisme, mais cela est source de confusion. Nous préférons donc dans la suite garder un formalisme en grandes transformations y compris pour la partie élastique de celles-ci.

Nous choisissons donc un modèle néo-hookéen isotrope compressible pour écrire la partie élastique du comportement. Ceci revient à choisir un modèle linéaire pour cette partie élastique du comportement.

Rappelons que la variation de volume est entièrement d'origine élastique  $J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}})$

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}$  est factorisé en une partie isotrope (volumique)  $J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{I}}$  et une partie isochore  $\bar{\underline{\underline{E}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}}$  avec  $\det(\bar{\underline{\underline{E}}}) = 1$ .

Dans un modèle néo-hookéen isotrope compressible, l'énergie libre est la somme de deux termes. Le premier est une fonction du premier invariant de  ${}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$ ,  $\bar{I}_1 = \text{tr}({}^t \bar{\underline{\underline{E}}} \cdot \bar{\underline{\underline{E}}})$ , le second est fonction de la variation de volume  $J$  :

$$\Psi(e_{\text{Rel}}) = \Psi(\bar{I}_1, J) = \frac{1}{\rho_{\text{Rel}}} \left( C_{10} (\bar{I}_1 - 3) + \frac{1}{D_1} (J - 1)^2 \right) \quad (3.8)$$

Les constantes caractéristiques du matériau  $C_{10}$  et  $D_1$  sont respectivement associées au module de cisaillement  $\mu_0$  et au module d'incompressibilité  $k_0$ ,  $\mu_0 = 2C_{10}$ ,  $k_0 = \frac{2}{D_1}$ .

On sait que  $\frac{dJ}{dt} = J \text{tr}(\underline{\underline{d}}) = J \text{tr}(\dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1})$ .

On montre facilement que  $\frac{d\bar{I}_1}{dt} = 2(\bar{\underline{\underline{E}}} \cdot {}^t \bar{\underline{\underline{E}}}) : [D\acute{e}v(\dot{\underline{\underline{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1})]$

Où  $D\acute{e}v[\dots]$  désigne la partie déviatorique du tenseur entre crochets.

Ainsi :

$$\dot{\psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} 2 \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right) : \left[ D \acute{e}v \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) \right] + \frac{\partial \Psi}{\partial J} J \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) \quad (3.9)$$

Supposons maintenant que  $D = \frac{Tp_s}{\rho}$ , la puissance massique dissipée par les phénomènes plastiques dans le matériau, est indépendante du taux de variation de la transformation élastique  $\underline{\underline{\dot{E}}}$ . Cela revient à dire, compte tenu de notre choix pour les variables d'état,  $D = \frac{k(p_{cum}, \underline{\underline{E}}) \dot{p}_{cum}}{\rho_{Rel}}$ , avec  $k(p_{cum}, \underline{\underline{E}})$  scalaire positif.

Nous supposons dans la suite que  $k(p_{cum}, \underline{\underline{E}})$  ne dépend pas de  $\underline{\underline{E}}$ .

L'équation des bilans isotherme  $\frac{\underline{\underline{\sigma}}(x,t) : \underline{\underline{d}}(x,t)}{\rho(x,t)} - [\dot{\psi} + D](x,t) = 0$  s'écrit alors :

$$\frac{\underline{\underline{\sigma}}}{\rho} : \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) + \frac{\psi}{\rho_{Rel}} : \left( \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \right) - \frac{\mu_0}{\rho_{Rel}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right) : \left[ D \acute{e}v \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) \right] - \frac{k_0 (J-1) J}{\rho_{Rel}} \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) - \frac{k(p_{cum}) \dot{p}_{cum}}{\rho_{Rel}} = 0 \quad (3.10)$$

Cette égalité doit être vérifiée pour toute évolution possible.

Il est toujours possible d'envisager une évolution telle que  $\underline{\underline{\dot{P}}} = 0$ .

Alors  $\dot{p}_{cum} = 0$ .

Sous cette première hypothèse, considérons une évolution telle que  $D \acute{e}v \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) = 0$  (évolution purement volumique).

Ecrivons la contrainte de Cauchy à l'aide de sa partie isotrope et de sa partie déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}} \quad (3.11)$$

L'équation des bilans s'écrit alors  $\frac{\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3\rho(x,t)} \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) - \frac{k_0}{\rho_{Rel}} (J-1) J \operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right) = 0$ , équation qui doit être vérifiée pour toute valeur de  $\operatorname{tr} \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right)$ .

On en déduit, en notant que  $\rho J = \rho_{Rel}$  :

$$\frac{\operatorname{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = \rho_{Rel} \frac{\partial \Psi}{\partial J} = k_0 (J-1) \quad (3.12)$$

De même, en choisissant une valeur quelconque pour  $D \acute{e}v \left( \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1} \right)$  (toujours sous l'hypothèse  $\underline{\underline{\dot{P}}} = 0$ ). On déduit :

$$\underline{\underline{s}} = 2\rho D \acute{e}v \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \right) \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right] = \frac{\mu_0}{J} D \acute{e}v \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right] \quad (3.13)$$

Nous pouvons récrire :

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \text{Dév} \left[ \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} \right] = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right) \quad (3.14)$$

Ainsi :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} + \left( k_0 (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} \quad (3.15)$$

Rappelons que  $\frac{\psi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t)}{\rho(\underline{\underline{x}}, t)} \cdot \underline{\underline{E}}$ , soit encore  $\psi_{\text{Rel}} = J \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{x}}, t) \cdot \underline{\underline{E}}$

Ainsi :

$$\psi_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} = J \underline{\underline{\sigma}} \quad (3.16)$$

**Nous constatons que  $\psi_{\text{Rel}}$  est symétrique (résultat qui est conservé pour un autre comportement élastique isotrope).**

### 3.3.2. Critère de plasticité et taux de déformation plastique

L'équation des bilans s'écrit maintenant :

$$\frac{\psi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} : \left( \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \right) - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{Rel}}} = 0 \quad (3.17)$$

Cette égalité doit, encore une fois, être vérifiée pour toute évolution possible.

Comme  $\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p}$  et que  $\underline{\underline{d}}^p$  est la partie symétrique de  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$ , on voit que l'expression ci-dessus est une expression scalaire positivement homogène de degré 1 par rapport à  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$ .

Ainsi, l'équation ci-dessus définit un domaine convexe de l'espace des contraintes « plastiques »  $\psi_{\text{Rel}}$ .

Décomposons  $\psi_{\text{Rel}}$  en ses parties, isotrope et déviatorique  $\psi_{\text{Rel}} = \frac{\text{tr}(\psi_{\text{Rel}})}{3} \underline{\underline{I}} + \psi_{\text{Rel}}^d$ .

Décomposons  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$  en ses parties symétrique et antisymétrique  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{\Omega}}^p$ .

Comme  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  est symétrique et  $\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$  est déviatorique, l'équation des bilans s'écrit maintenant :

$$\frac{\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d}{\rho_{\text{Rel}}} : \underline{\underline{d}}^p - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{Rel}}} = 0 \quad (3.18)$$

où  $\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p}$

Pour chaque valeur de  $\underline{\underline{d}}^p$ ,  $\frac{\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d}{\rho_{\text{Rel}}} : \underline{\underline{d}}^p - \frac{k(p_{\text{cum}}) \dot{p}_{\text{cum}}}{\rho_{\text{Rel}}} = 0$  est l'équation du plan tangent au domaine dans l'espace des  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$ .

Si  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  se trouve strictement à l'intérieur de ce domaine, la seule façon possible de vérifier l'équation est d'avoir  $\underline{\underline{d}}^p = 0$  (pas d'écoulement plastique).

Lorsque  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  se trouve sur la frontière de ce domaine, un écoulement plastique  $\underline{\underline{d}}^p \neq 0$  est possible, perpendiculairement à la frontière du domaine. Il s'agit donc d'une loi d'écoulement associé (matériaux standard).

Avec les choix faits, le domaine correspond à une généralisation du critère de Von Mises pour le tenseur symétrique  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$ .

La dérivée de  $\dot{p}_{\text{cum}} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p}$  par rapport à  $\underline{\underline{d}}^p$  est  $\frac{2}{3} \frac{\underline{\underline{d}}^p}{\dot{p}_{\text{cum}}}$ .

On déduit  $\frac{\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d}{\rho_{\text{Rel}}} - k(p_{\text{cum}}) \frac{2}{3} \frac{\underline{\underline{d}}^p}{\dot{p}_{\text{cum}}} = 0$ , c'est-à-dire que le taux de déformation plastique  $\underline{\underline{d}}^p$  est proportionnel à la partie déviatorique du tenseur  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{\text{cum}}}{k(p_{\text{cum}})} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \quad (3.19)$$

En reportant dans l'équation des bilans, on en déduit le critère qui porte sur  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{\text{cum}}) = 0 \quad (3.20)$$

Dans le cas où les déformations élastiques sont petites, on peut écrire  $\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\varepsilon}}$ , avec les composantes du tenseur symétrique  $\underline{\underline{\varepsilon}}$  petites par rapport à 1. On peut alors approcher au premier ordre  $\underline{\underline{E}}^{-1}$  par  $\underline{\underline{E}}^{-1} = \underline{\underline{I}} - \underline{\underline{\varepsilon}}$  et  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} \approx \underline{\underline{\sigma}}$  symétrique.

On retrouve alors les approches classiques pour la plasticité des métaux.

### 3.4. Evolution élastoplastique

Considérons un solide  $\Omega_0$  et supposons qu'à l'instant  $t_0$  nous connaissons sa transformation  $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t_0)$ ,  $\underline{X} \in \Omega_0$  et son état donné par les champs  $\underline{E}(\underline{X}, t_0)$  et  $p_{cum}(\underline{X}, t_0)$ ,  $\underline{X} \in \Omega_0$ .

Nous pouvons en déduire les champs :

$$\underline{F}(\underline{X}, t_0) = \underline{Grad}(\underline{\Phi}(\underline{X}, t_0))$$

$$J = \det(\underline{F}) \quad (\text{avec la relation } J = \det(\underline{F}) = \det(\underline{E}) \text{ supposée vérifiée})$$

$$\underline{P}(\underline{X}, t_0) = \underline{E}^{-1}(\underline{X}, t_0) \cdot \underline{F}(\underline{X}, t_0)$$

$$\underline{\sigma} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{E} \cdot {}^t \underline{E} + \left( k_0 (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr(\underline{E} \cdot {}^t \underline{E})}{3} \right) \underline{I}$$

$$\underline{\psi}_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} {}^t \underline{E} \cdot \underline{E} + \left( k_0 J (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{tr({}^t \underline{E} \cdot \underline{E})}{3} \right) \underline{I} = J \underline{\sigma}$$

$$\underline{B} = \left[ \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \underline{E} \cdot {}^t \underline{E} + \left( k_0 J (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{tr(\underline{E} \cdot {}^t \underline{E})}{3} \right) \right] \cdot {}^t \underline{F}^{-1}$$

Où  $\underline{B}$  est le tenseur de contrainte de Boussinesq (ou Piola-Kirchhoff 1) pas nécessairement symétrique.

Rappelons que la définition de  $\underline{B}$  est donnée par l'égalité des vecteurs forces élémentaires,

$\underline{\sigma} \cdot d\mathbf{a} = \underline{B} \cdot d\mathbf{A}$  où  $d\mathbf{A}$  est le vecteur normal à la surface élémentaire de la configuration de référence de norme associé à la mesure de cette surface élémentaire,  $d\mathbf{a}$  est le vecteur normal à la surface élémentaire constituée des mêmes particules dans la configuration actuelle.

*Remarque :*

*Si nous préférons retenir la définition suivante pour le tenseur de Piola-Kirchhoff 1*

$$d\mathbf{a} \cdot \underline{\sigma} = d\mathbf{A} \cdot \underline{B}', \text{ alors } \underline{B}' = {}^t \underline{B}$$

En l'absence de force de volume et en quasi statique, nous devons bien sûr avoir

$$\underline{Div}(\underline{B}) = \frac{\partial B_{ij}}{\partial X_j} \mathbf{e}_i = \underline{0}$$

Supposons qu'une évolution du chargement entraîne une évolution de la transformation

$$\underline{\dot{\Phi}}(\underline{X}, t_0) = \frac{\partial \Phi}{\partial t}(\underline{X}, t_0).$$

**Montrons que les évolutions de tous les champs ci-dessus peuvent être déterminées à l'aide de  $\underline{\dot{F}}(\underline{X}, t_0) = \underline{\text{Grad}}(\underline{\dot{\Phi}}(\underline{X}, t_0))$**

Tout d'abord déterminons  $\underline{j}$

Le taux de variation de volume  $\underline{j} \underline{J}^{-1} = \text{tr}(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1})$ , ce qui permet la détermination de  $\underline{j}$  :

$$\underline{j} = \underline{J} \cdot \text{tr}(\underline{\dot{F}} \cdot \underline{F}^{-1}) \quad (3.21)$$

Déterminons le taux de rotation plastique  $\underline{\Omega}^p$

Revenons à la décomposition du gradient de la transformation  $\underline{F} = \underline{E} \cdot \underline{P}$ . En dérivant en fonction du temps, on a  $\underline{\dot{F}} = \underline{\dot{E}} \cdot \underline{P} + \underline{E} \cdot \underline{\dot{P}}$ . Donc, la dérivée de la transformation élastique peut être exprimée sous la forme  $\underline{\dot{E}} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{P}^{-1} - \underline{E} \cdot \underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1}$

Le terme  $\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1}$  peut être décomposé en ses parties symétrique et antisymétrique  $\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} = \underline{d}^p + \underline{\Omega}^p$ .

(Si l'évolution est élastique,  $\underline{d}^p = 0$ , mais pas forcément  $\underline{\Omega}^p$ , donc  $\underline{\dot{P}}$  peut être non nul dans une évolution élastique)

$$\underline{\dot{E}} = \underline{\dot{F}} \cdot \underline{P}^{-1} - \underline{E} \cdot (\underline{d}^p + \underline{\Omega}^p)$$

Comme  $\underline{\dot{E}}$  est un tenseur symétrique cette équation détermine le tenseur antisymétrique  $\underline{\Omega}^p$  en fonction de  $\underline{\dot{F}}$  (et de  $\underline{F}$  et  $\underline{E}$ ).

En effet, notons  $\underline{I}_1^* = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3$ ,  $\underline{I}_2^* = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1$ ,  $\underline{I}_3^* = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$

$$\underline{\Omega}^p = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1 \underline{I}_1^* + \Omega_2 \underline{I}_2^* + \Omega_3 \underline{I}_3^* \quad (3.22)$$

La condition de symétrie de  $\underline{\dot{E}}$  nous donne  $\underline{\dot{E}} : \underline{I}_i^* = 0$  ( $i = 1, 2, 3$ ).

$$\left[ \underline{\dot{F}} \cdot \underline{P}^{-1} - \underline{E} \cdot (\underline{d}^p + \underline{\Omega}^p) \right] : \underline{I}_i^* = 0$$

Il est toujours possible d'écrire  $\underline{d}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{cum}}{k(p_{cum})} \underline{\psi}^d$  avec éventuellement  $\dot{p}_{cum} = 0$  si l'évolution est localement élastique.

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}, \text{ donc } \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{d}}^p \text{ est symétrique et } (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{d}}^p) : \underline{\underline{I}}_i^* = 0$$

$$\text{Un calcul simple permet de montrer que } \begin{pmatrix} (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p) : \underline{\underline{I}}_1^* \\ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p) : \underline{\underline{I}}_2^* \\ (\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p) : \underline{\underline{I}}_3^* \end{pmatrix} = (\underline{\underline{E}} - \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}}) \cdot \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix}$$

(On vérifie facilement que  $(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{I}}_i^*) : \underline{\underline{I}}_j^* = E_{ij} - \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \cdot \delta_{ij}$ )

Notons  $E_1, E_2, E_3$  les trois valeurs principales de  $\underline{\underline{E}}$ . Elles sont toutes strictement positives.

$\det(\underline{\underline{E}} - \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}}) = -(E_2 + E_3)(E_3 + E_1)(E_1 + E_2) \neq 0$  donc  $(\underline{\underline{E}} - \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}})$  est inversible.

Ainsi :

$$\begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} = (\underline{\underline{E}} - \text{tr}(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_1^* \\ (\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_2^* \\ (\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_3^* \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Déterminons maintenant  $\dot{p}_{cum}$  :

Tout d'abord si  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d < \frac{2}{3} k^2 (p_{cum})$  nous avons bien sûr  $\dot{p}_{cum} = 0$

Plaçons nous maintenant dans le cas où  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{2}{3} k^2 (p_{cum})$

Deux types d'évolutions sont possibles

Considérons d'abord les évolutions de « décharge », telles que  $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d < 0$

Dans ce cas  $\dot{p}_{cum} = 0$

Considérons maintenant les évolutions de « charge » telles que  $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \geq 0$

Nous savons qu'alors  $\dot{p}_{cum} \geq 0$  et  $\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2k(p_{cum})} \dot{p}_{cum} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$

Calculons  $\underline{\underline{\dot{\psi}}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  à partir de  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$  ou

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right], \text{ déduisons :}$$

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d &= -\frac{2}{3}\mu_0 \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-\frac{5}{3}} {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \frac{2}{3}\mu_0 \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-\frac{5}{3}} \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}} + {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) - \frac{1}{3} \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}} + {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) \underline{\underline{I}} \\ &= -\frac{2}{3} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d + \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}} + {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) - \frac{1}{3} \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{\dot{E}}} \cdot \underline{\underline{E}} + {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) \underline{\underline{I}}\end{aligned}$$

Comme  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  est symétrique et déviatorique,

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = -\frac{2}{3} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{E}}} \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$$

Rappelons que  $\underline{\underline{\dot{E}}} = \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \left( \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{\Omega}}^p \right)$

Notons que

$$\left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \text{tr} \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \right) = \text{tr} \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\Omega}}^p \right) = \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right) : \underline{\underline{\Omega}}^p = 0$$

car  $\left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right)$  est symétrique et  $\underline{\underline{\Omega}}^p$  antisymétrique.

Ainsi :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = -\frac{2}{3} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \left( \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{d}}^p \right) \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \quad (3.24)$$

La situation de décharge est caractérisée par

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = -\frac{2}{3} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d < 0$$

Que l'on peut écrire, en utilisant  $\underline{\underline{j}} = \underline{\underline{J}} \cdot \text{tr} \left( \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \right)$ ,  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{2}{3} k^2(p_{cum})$  et les commutations possibles dans les traces de produits de tenseurs

$$\left[ -\frac{4}{9} k^2(p_{cum}) \underline{\underline{F}}^{-1} + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}} \right) \right] : \underline{\underline{\dot{F}}} < 0$$

(Cette condition ne porte que sur  $\underline{\underline{\dot{F}}}$ )

En situation de charge  $\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2k(p_{cum})} \dot{p}_{cum} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  et  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) \dot{p}_{cum}$  où

$k'(p_{cum})$  est la dérivée de la fonction  $k(p_{cum})$  par rapport à  $p_{cum}$ .

L'équation  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = -\frac{2}{3} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \left( \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{d}}^p \right) \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  peut se réécrire :

$$\frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) \dot{p}_{cum} = -\frac{4}{9} \underline{\underline{j}} \underline{\underline{J}}^{-1} k^2(p_{cum}) + 2 \underline{\underline{J}}^{-\frac{2}{3}} \mu_0 \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \left( \underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \frac{3 \dot{p}_{cum}}{2k(p_{cum})} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \right) \right) : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \quad (3.25)$$

On en déduit l'expression de  $\dot{p}_{cum}$  dans les situations de « charge ».

$$\dot{p}_{cum} = \left[ -\frac{4}{9} \dot{J} J^{-1} k^2(p_{cum}) + 2J^{-\frac{2}{3}} \mu_0 ({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{\psi}}^d \right] \left[ \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) + \frac{3J^{-\frac{2}{3}} \mu_0}{k(p_{cum})} ({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}^d) : \underline{\underline{\psi}}^d \right]^{-1}$$

En utilisant le fait que  $\dot{J} = J \cdot tr(\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1})$  et les commutations possibles dans les traces de produits de tenseurs, cette équation peut se récrire :

$$\dot{p}_{cum} = \left[ \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) + \frac{3J^{-\frac{2}{3}} \mu_0}{k(p_{cum})} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}}) \right]^{-1} \left[ -\frac{4}{9} k^2(p_{cum}) \underline{\underline{F}}^{-1} + 2J^{-\frac{2}{3}} \mu_0 (\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}}) \right] : \dot{\underline{\underline{F}}}$$

On peut regrouper les situations de « charge » et celles de « décharge », lorsque le critère est atteint en écrivant :

$$\dot{p}_{cum} = \frac{\left\langle \left[ -\frac{4}{9} k^2(p_{cum}) \underline{\underline{F}}^{-1} + 2J^{-\frac{2}{3}} \mu_0 (\underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}}) \right] : \dot{\underline{\underline{F}}} \right\rangle}{\left[ \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) + \frac{3J^{-\frac{2}{3}} \mu_0}{k(p_{cum})} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot \underline{\underline{\psi}}^d \cdot {}^t \underline{\underline{E}}) \right]} H \left( \underline{\underline{\psi}}^d : \underline{\underline{\psi}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) \right) \quad (3.26)$$

Où le symbole  $\langle A \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } A < 0 \\ A & \text{si } A \geq 0 \end{cases}$  et  $H(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } A < 0 \\ 1 & \text{si } A \geq 0 \end{cases}$

Déterminons maintenant  $\dot{\underline{\underline{E}}}$

A partir de la connaissance de  $\dot{p}_{cum}$  on détermine  $\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2} \frac{\dot{p}_{cum}}{k(p_{cum})} \underline{\underline{\psi}}^d$ .

A partir de celles de  $\underline{\underline{d}}^p$  et  $\underline{\underline{\Omega}}^p$  on détermine  $\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{\Omega}}^p$

On peut alors en déduire :

$$\dot{\underline{\underline{E}}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \quad (3.27)$$

## Résumé

Considérons une particule  $\underline{\underline{X}} \in \Omega_0$  et supposons connus, à l'instant  $t_0$ , le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t_0)$  et l'état donné par  $\underline{\underline{E}}(\underline{\underline{X}}, t_0)$  et  $p_{cum}(\underline{\underline{X}}, t_0)$ . Nous pouvons en déduire

$J = \det(\underline{\underline{F}})$  (On doit avoir la relation  $J = \det(\underline{\underline{F}}) = \det(\underline{\underline{E}})$ )

$\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}, t_0) = \underline{\underline{E}}^{-1}(\underline{\underline{X}}, t_0) \cdot \underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t_0)$

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0(J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J(J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} = J \underline{\underline{\sigma}}$$

$$\left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right] \right)$$

$$\underline{\underline{B}} = \left[ \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J(J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} \right] \cdot \underline{\underline{F}}^{-1}$$

(Sans force de volume,  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{E}}$  sont reliés par la relation  $\underline{\underline{Div}}(\underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{0}}$ )

Supposons connue l'évolution du gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}}, t_0)$ . Alors,

$$\dot{p}_{cum} = \frac{\left\langle \left[ -\frac{4}{9} k^2 (p_{cum}) \underline{\underline{F}}^{-1} + 2J^{\frac{2}{3}} \mu_0 \left( \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{E}} \right) \right] : \dot{\underline{\underline{F}}} \right\rangle}{\left[ \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) + \frac{3J^{\frac{2}{3}} \mu_0}{k(p_{cum})} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{E}}) \right]} H \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) \right)$$

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2 k(p_{cum})} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{3}{2 k(p_{cum})} \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right]$$

$$\underline{\underline{\Omega}}^p = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix} = \Omega_1 \underline{\underline{I}}_{=1}^* + \Omega_2 \underline{\underline{I}}_{=2}^* + \Omega_3 \underline{\underline{I}}_{=3}^* \quad \text{avec} \quad \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \left( \underline{\underline{E}} - tr(\underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_{=1}^* \\ (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_{=2}^* \\ (\dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) : \underline{\underline{I}}_{=3}^* \end{bmatrix}$$

Où  $\underline{\underline{I}}_{=1}^* = \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_2 - \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_3$ ,  $\underline{\underline{I}}_{=2}^* = \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_3 - \underline{\underline{e}}_3 \otimes \underline{\underline{e}}_1$ ,  $\underline{\underline{I}}_{=3}^* = \underline{\underline{e}}_2 \otimes \underline{\underline{e}}_1 - \underline{\underline{e}}_1 \otimes \underline{\underline{e}}_2$

$$\underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \underline{\underline{d}}^p + \underline{\underline{\Omega}}^p$$

$$\underline{\underline{\dot{E}}} = \dot{\underline{\underline{F}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$$

Il est possible de calculer  $\underline{\underline{B}}$  en fonction de  $\underline{\underline{F}}$  et  $\underline{\underline{F}}$  doit vérifier  $\underline{\underline{Div}}(\underline{\underline{B}}) = \underline{\underline{0}}$

L'état de la particule à l'instant  $t_0 + dt$ , peut, dans un calcul de type explicite, être approché par :

$$\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0 + dt) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0) + \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{X}, t_0) dt$$

$$p_{cum}(\underline{X}, t_0 + dt) = p_{cum}(\underline{X}, t_0) + \dot{p}_{cum}(\underline{X}, t_0) dt$$

On peut itérer alors le calcul pour le pas de temps suivant.

Cependant, en cas d'évolution élastoplastique, la valeur approchée de  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}$  donnée par (3.16) ne respectera pas rigoureusement le critère de plasticité. Dans les exemples que nous avons étudiés, ce problème est parfois gênant car l'on viole de plus en plus le critère à chaque pas de temps de calcul.

Nous proposons ci-dessous une éventuelle « correction » de  $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0 + dt) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0) + \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{X}, t_0) dt$  de façon que le critère soit vérifié à chaque pas de temps. Il s'agit d'une forme de projection que nous décrivons ci-dessous.

Au chapitre 4, nous proposons une autre détermination de  $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$  dans la zone plastique de la structure de façon à ce que le critère soit toujours vérifié dans cette zone.

### **Correction de $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t)$ pour vérifier le critère de plasticité**

Rappelons l'expression de la contrainte plastique

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}} = \frac{\mu_0}{J^3} {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} + \left( k_0 J (J - 1) - \frac{\mu_0}{J^3} \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}} = J \underline{\underline{\sigma}}$$

Sa partie déviatorique est  $\left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \frac{\mu_0}{J^3} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right] \right)$

En introduisant  $\underline{\underline{\bar{E}}} = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}}$  et  $\left( \underline{\underline{D}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right] \right)$  la partie déviatorique de  ${}^t \underline{\underline{\bar{E}}} \cdot \underline{\underline{\bar{E}}}$ ,

la partie déviatorique de la contrainte plastique s'écrit  $\left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \mu_0 \underline{\underline{D}} \right)$

Ainsi le critère  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) = 0$  vérifiée dans la zone plastique peut être réécrite sur  $\underline{\underline{D}}$  :

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} = 0 \quad (3.28)$$

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}$ , symétrique peut être diagonalisé dans une base orthonormale, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur orthogonal  $\underline{\underline{Q}}$  et trois valeurs  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) / \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$  tels que

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{Q}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{Q}}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{Q}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \alpha_1^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \alpha_2^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \alpha_3^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{Q}}$$

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} = \left( \frac{2}{3} \alpha_1^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \alpha_2^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \alpha_3^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \right)^2$$

Lorsque le critère est violé, notons :

$$a^2 = \frac{\frac{2}{3} \frac{k^2}{\mu_0^2} (p_{cum})}{\left( \frac{2}{3} \alpha_1^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \alpha_2^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) \right)^2 + \left( \frac{2}{3} \alpha_3^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \right)^2}$$

(Le critère est exactement vérifié si  $a = 1$  et lorsque le critère est violé  $a < 1$ )

Nous allons chercher  $\underline{\underline{E}}^{Corrigé}$  sous la forme

$$\underline{\underline{E}}^{Corrigé} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{Q}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1^c & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2^c & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3^c \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{Q}}$$

Avec  $\alpha_1^c \alpha_2^c \alpha_3^c = 1$

$$\frac{2}{3} \alpha_1^{c2} - \frac{1}{3} (\alpha_2^{c2} + \alpha_3^{c2}) = a \left( \frac{2}{3} \alpha_1^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_3^2) \right)$$

$$\frac{2}{3} \alpha_2^{c2} - \frac{1}{3} (\alpha_1^{c2} + \alpha_3^{c2}) = a \left( \frac{2}{3} \alpha_2^2 - \frac{1}{3} (\alpha_1^2 + \alpha_3^2) \right)$$

$$\frac{2}{3} \alpha_3^{c2} - \frac{1}{3} (\alpha_2^{c2} + \alpha_1^{c2}) = a \left( \frac{2}{3} \alpha_3^2 - \frac{1}{3} (\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \right)$$

Si  $\alpha_1^c, \alpha_2^c, \alpha_3^c$  vérifient ces équations, la valeur correspondante de  $\underline{\underline{E}}^{Corrigé}$  permet de vérifier rigoureusement le critère de plasticité.

Les trois dernières équations sont liées.

Ce système se réécrit :

$$\alpha_1^{c^2} = \alpha_3^{c^2} + a(\alpha_1^2 - \alpha_3^2)$$

$$\alpha_2^{c^2} = \alpha_3^{c^2} + a(\alpha_2^2 - \alpha_3^2)$$

$$(\alpha_3^{c^2} + a(\alpha_1^2 - \alpha_3^2))(\alpha_3^{c^2} + a(\alpha_2^2 - \alpha_3^2))\alpha_3^{c^2} = 1$$

La dernière équation est un polynôme du troisième degré en  $\alpha_3^{c^2}$  dont on démontre facilement qu'il n'a qu'une seule racine positive si  $\alpha_3$  est la plus petite des valeurs propres de  $\underline{\underline{E}}$ .

La démarche incrémentale consiste alors à calculer  $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0 + dt) = \underline{\underline{E}}(\underline{X}, t_0) + \underline{\underline{\dot{E}}}(\underline{X}, t_0) dt$  puis à le corriger suivant la procédure ci-dessus lorsque le critère est violé.

Il est souvent non nécessaire d'introduire cette correction.

### 3.5. Illustration dans le cas de transformations homogènes

Pour illustrer l'algorithme ci-dessus, nous allons étudier deux exemples très simples d'histoires de transformation homogène sur un matériau de type acier, avec un module de cisaillement  $\mu_0 = 80.8 * 10^9$  (Pa), un module d'incompressibilité  $k_0 = 175 * 10^9$  Pa, (ce qui implique un coefficient de Poisson de 0.3 et un module d'Young  $E = 210 * 10^9$  Pa), une limite initiale de plasticité  $\sigma_0 = 5 * 10^8$  Pa et un écrouissage isotrope donné par  $k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \alpha (\exp(p_{cum}) - 1))$  avec  $\alpha = 0.01$ . (Ce choix est proche d'un écrouissage isotrope linéaire mais permet de simplifier certaines expressions comme nous le verrons par la suite).

Dans le premier exemple que nous nommerons abusivement « traction », le gradient de transformation est choisi diagonal et il n'y a pas de rotation de la matière.

(La simulation d'une vraie expérience de traction simple avec le même matériau est donnée au chapitre 5).

Dans le second exemple que nous nommerons « cisaillement », nous choisissons une évolution du gradient de la transformation faisant intervenir une rotation de la matière.

#### 3.5.1. Exemple en « traction »

Considérons un repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  et supposons que la « traction » est effectuée suivant  $\underline{e}_1$ .

Le gradient de la transformation est diagonal dans la base choisie et les composantes 22 et 33 sont identiques par raison de symétrie dans la base choisie.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_2 t \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha_1 = 0.1s^{-1}, \alpha_2 = -0.03s^{-1}$$

Notons que le temps qui intervient ci-dessus, n'est pas forcément le temps physique. Il s'agit d'un temps chronologique dont la seule fonction est de classer les événements dans leur ordre d'apparition. L'unité de temps, notée  $s$ , est cette unité de temps chronologique et ne correspond pas forcément à la valeur d'une seconde.

La valeur de  $\alpha_2 = -0.03$  est choisie pour avoir  $\alpha_2 = -0.3\alpha_1$  de façon à être effectivement en traction simple pendant la phase de comportement élastique ( $\sigma_{22} = \sigma_{33} = 0$ )

A l'instant initial  $\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{E}}(0) = \underline{\underline{P}}(0) = \underline{\underline{I}}$ ,  $p_{cum} = 0$ .

Il est alors facile de montrer que les tenseurs  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{P}}$  restent diagonaux dans la base  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  (pas de rotation de la matière), et les composantes 22 et 33 restent identiques.

Par ailleurs comme  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$ , on peut les exprimer sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix}, \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^{-\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & p^{-\frac{1}{2}} \end{bmatrix}$$

$$\text{Remarquons que } \underline{\underline{\dot{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{p}}{p} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} \end{bmatrix}. \text{ Ainsi } \dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{d^p}{d^p} = \frac{\dot{p}}{p}, \text{ et } p_{cum} = \ln(p),$$

( $p = 1$  lorsqu'il n'y a pas de déformations plastiques,  $p_{cum}$  est alors égale de 0).

Ainsi,

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \alpha (\exp(p_{cum}) - 1)) = \sigma_0 (1 + \alpha (p - 1)), \quad k'(p_{cum}) = \sigma_0 \alpha \exp(p_{cum}) = \sigma_0 \alpha p$$

Nous pouvons exprimer  $J$ ,  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  en fonction de  $t$  et  $p$ .

$$J = \det(\underline{\underline{F}}) = (1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)^2$$

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} (1 + \alpha_1 t)/p & 0 & 0 \\ 0 & (1 + \alpha_2 t)\sqrt{p} & 0 \\ 0 & 0 & (1 + \alpha_2 t)\sqrt{p} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d &= \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right] \\ &= \frac{\mu_0}{(1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}} (1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} \left[ (1+\alpha_1 t)^2 / p^2 - (1+\alpha_2 t)^2 p \right] \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En reportant tout ceci dans l'équation (3.26) du résumé précédent :

$$\dot{p}_{cum} = \frac{\left\langle \left[ -\frac{4}{9} k^2(p_{cum}) \underline{\underline{F}}^{-1} + 2J^{\frac{2}{3}} \mu_0 \left( \underline{\underline{P}}^{-1} \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{E}} \right) \right] : \underline{\underline{\dot{F}}} \right\rangle}{\left[ \frac{2}{3} k(p_{cum}) k'(p_{cum}) + \frac{3J^{\frac{2}{3}} \mu_0}{k(p_{cum})} \text{tr} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d \cdot \underline{\underline{E}} \right) \right]} H \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) \right)$$

Nous établissons une équation différentielle du premier ordre de la forme  $\dot{p} = f(p, t)$ , avec la condition initiale  $p(0) = 1$  dont la solution numérique est facile.

La connaissance de  $p(t)$  permet de déterminer toutes les autres grandeurs.

Nous présentons ci-dessous les résultats obtenus avec un algorithme explicite très simple, sans la correction suggérée à la fin du résumé précédent.

Nous commençons par présenter, dans la Figure 3-2, la courbe donnant la « fonction de charge »  $\frac{1}{\sigma_0^2} \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) \right)$  en fonction du temps. Cette fonction doit être négative, tant que l'évolution est élastique et doit s'annuler lorsque l'évolution est plastique.

On constate que compte tenu du fait que l'algorithme utilisé ne projette pas la contrainte sur la frontière du critère de plasticité, celui-ci est légèrement violé (fonction de charge pas tout à fait nulle après la première phase de comportement élastique), ainsi qu'il était attendu. L'erreur est cependant suffisamment faible pour que l'on puisse considérer que la modification de  $\underline{\underline{E}}$  suggérée plus haut pour corriger cette erreur est une sophistication un peu inutile ici.

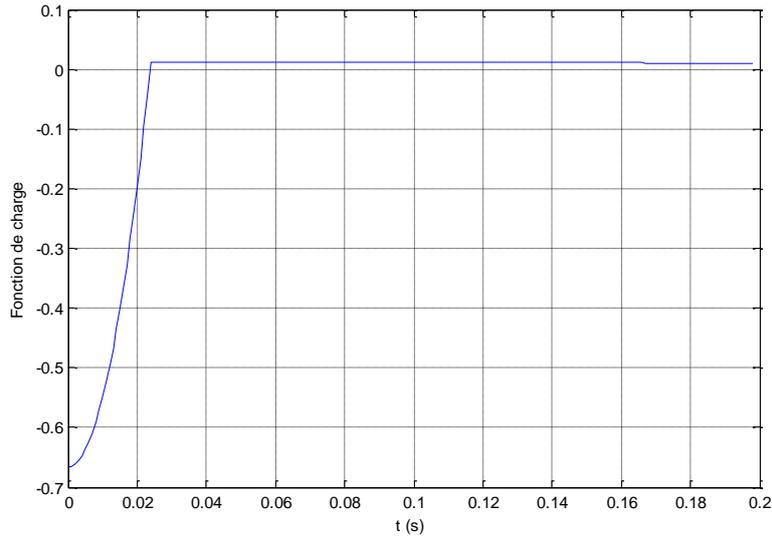


Figure 3-2 : Courbe donnant la fonction de charge en fonction du temps avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

Présentons maintenant, dans la Figure 3-3, la courbe donnant la contrainte de traction  $\sigma_{11}$  en fonction de la déformation logarithmique  $\ln(F_{11})$ . On constate que, comme annoncé, la forme retenue pour définir l'écroutissage isotrope s'éloigne peu d'un écroutissage linéaire.

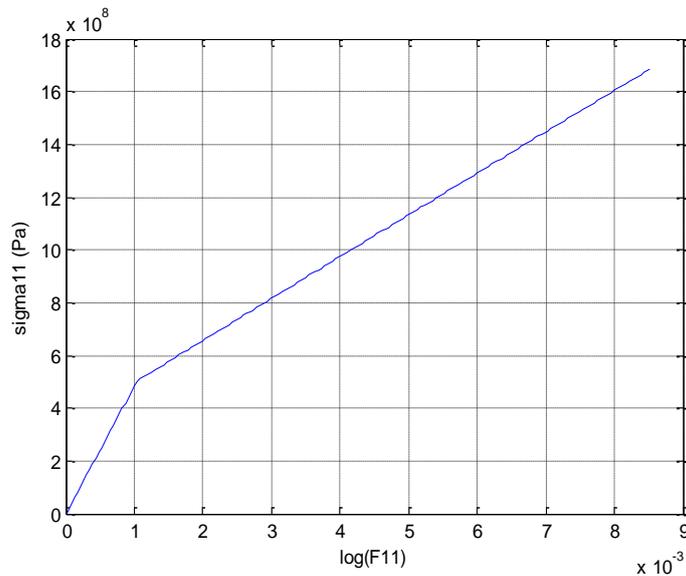


Figure 3-3 : Courbe donnant la contrainte  $\sigma_{11}$  avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

Montrons pour finir, dans la Figure 3-4, la courbe donnant  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\sigma_{22}$ . On constate, comme attendu, que  $\sigma_{22} = 0$  pendant toute la phase de comportement élastique car nous avons choisi  $\alpha_2 = -0.3\alpha_1$  avec le coefficient de Poisson du matériau égal à 0.3.

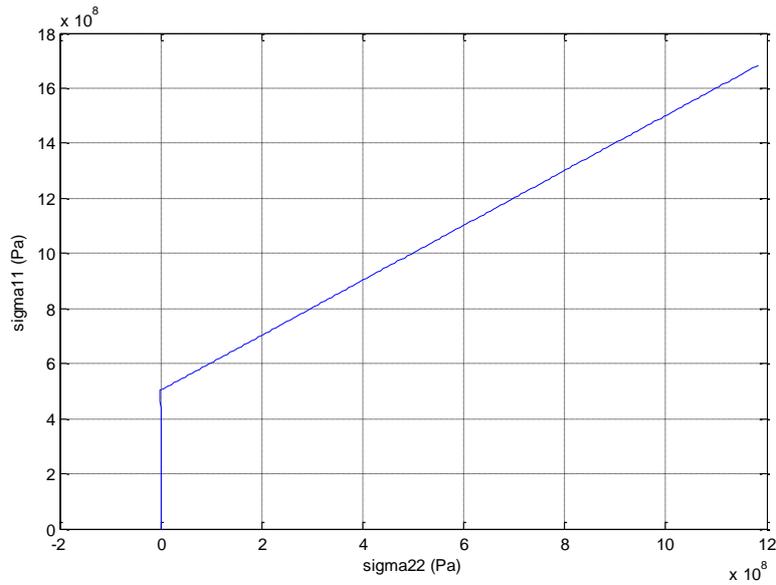


Figure 3-4 : Courbe donnant la contrainte  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\sigma_{22}$  avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

Cette situation cesse dès que le comportement devient plastique et comme la partie plastique de la transformation conserve le volume, il est nécessaire de « tirer sur le matériau » ( $\sigma_{22} > 0$ ) pour limiter à 0.3 la contraction latérale. Notre simulation n'est donc pas celle d'une traction simple aussitôt que la phase de comportement plastique commence. (Voir le chapitre 5 pour une vraie modélisation de l'essai de traction simple avec  $\sigma_{22} = 0$  dans toutes les phases de comportement).

L'information principale à tirer de ce petit exemple est que l'on obtient, avec l'algorithme simple proposé des résultats satisfaisants avec un incrément de déformation à chaque pas de l'ordre de  $\alpha_1 \Delta t = 10^{-4}$ . On peut aussi avoir des pas sensiblement plus grands si on accepte une précision inférieure à celle qu'exhibent ces résultats.

### 3.5.2. Exemple en cisaillement

Dans l'exemple ci-dessus, il n'y avait pas de rotation de la matière. Etudions maintenant un autre exemple simple, dans lequel celle-ci joue un rôle important.

Considérons une transformation dont le gradient uniforme s'exprime dans le repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  avec les composantes suivantes :

$$\underline{\underline{F}}(X, Y, Z, t) = \begin{bmatrix} 1 & 2\gamma t & 0 \\ 0 & 1 + \beta t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{Pour les applications numériques nous prenons}$$

$$\gamma = 0.1s^{-1}, \beta = -0.05s^{-1})$$

Il s'agit en quelque sorte d'un « glissement » parallèlement au plan  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2)$ , accompagné d'une contraction suivant  $\underline{e}_2$ . Nous sommes en déformations planes suivant  $\underline{e}_3$ .

A l'instant initial  $\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{E}}(0) = \underline{\underline{P}}(0) = \underline{\underline{I}}$ ,  $p_{cum} = 0$ .

$$\text{Par la suite } \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{12} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & 0 \\ p_{21} & p_{22} & 0 \\ 0 & 0 & p_{33} \end{bmatrix} \text{ avec } \det(\underline{\underline{P}}) = 1$$

Il est inutile de développer ici les calculs élémentaires. Le seul point notable est que la seule composante non nulle du taux de rotation est  $\Omega_3$ .

Nous avons utilisé le même algorithme explicite simple que dans l'exemple précédent.

La première courbe présentée ci-dessous (Figure 3-5) est celle donnant la « fonction de charge »  $\psi_{\text{Rel}}^d : \psi_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3}k^2(p_{cum})$  en fonction du temps. Nous constatons que dès le début de la phase plastique, notre approximation donne une fonction de charge très proche de zéro, sans que nous ayons eu besoin de corriger  $\underline{\underline{E}}$  pour que le critère soit vérifié.

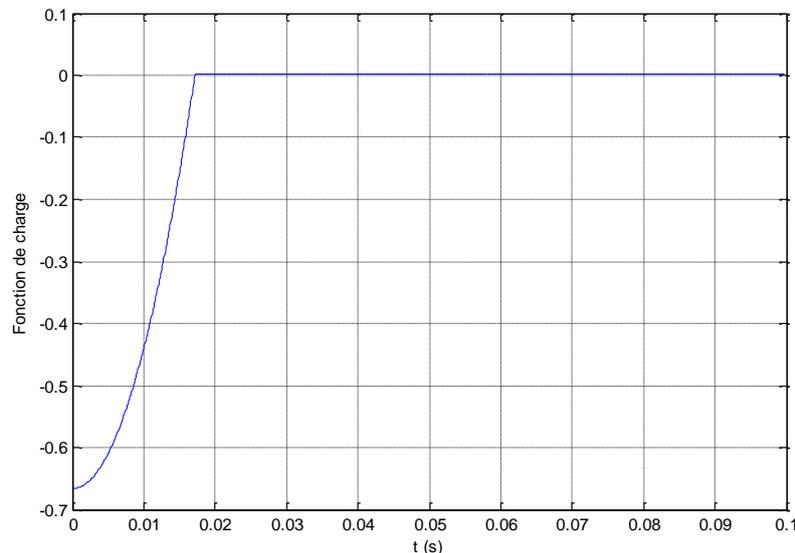


Figure 3-5 : Courbe donnant la fonction de charge en fonction du temps avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

La deuxième courbe (Figure 3-6) donne le taux de rotation de la matière,  $\Omega_3$ , en fonction du temps.

On constate que celle-ci tourne dans le sens des aiguilles d'une montre ( $\Omega_3 < 0$ ), ce qui est attendu avec la transformation proposée pour la matière. On constate aussi que cette rotation « s'accélère » légèrement.

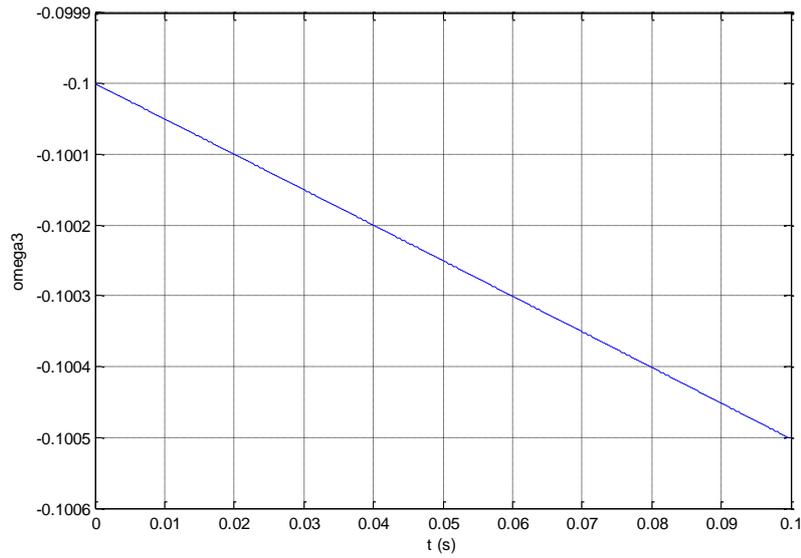


Figure 3-6 : Courbe donnant le taux de rotation  $\Omega_3$  en fonction du temps avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

La troisième courbe (Figure 3-7) présente la composante  $\sigma_{12}$  du tenseur de contrainte.

On constate que malgré l'écroutissage cette composante est stabilisée dès le début de la plastification.

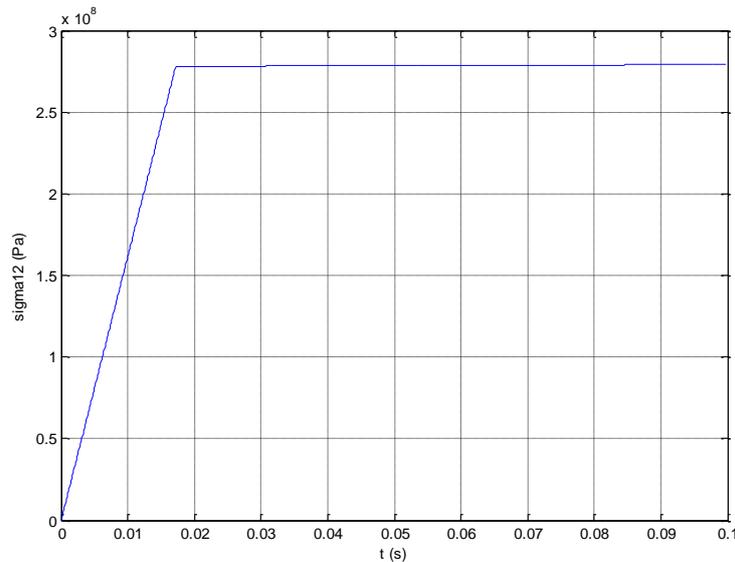


Figure 3-7 : Courbe donnant la contrainte  $\sigma_{12}$  en fonction du temps avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

Nous pouvons aussi présenter d'autres composantes du champ de contrainte. Limitons nous à présenter ici (Figure 3-8) la composante  $\sigma_{11}$ , fortement négative en raison de l'écrasement de la matière liée à la transformation choisie.

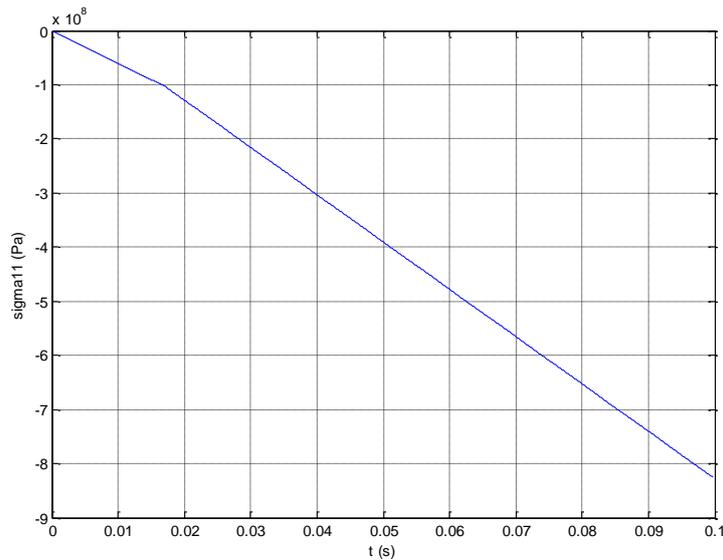


Figure 3-8 : Courbe donnant la contrainte  $\sigma_{11}$  en fonction du temps avec  $\Delta t = 10^{-3} s$

### 3.6. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé un comportement élastoplastique en grande transformation bien adapté pour une écriture des champs dans la configuration de référence. Cela peut être utile pour une simulation du processus de laminage car la configuration de référence a une géométrie très simple. Nous avons en particulier montré que l'ensemble des champs lors d'une évolution peut être déterminé assez simplement à l'aide du seul champ  $\underline{\dot{F}}(\underline{X}, t)$ . Cette approche privilégie donc la transformation  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$  comme inconnue principale du problème.

Nous avons donc, l'idée d'étudier des familles de transformation pour déterminer la transformation la plus proche de l'évolution réelle dans cette famille. Les outils dans ce chapitre sont insuffisants pour cela puisque nous nous y sommes intéressés à la solution exacte en vitesse.

Pour pouvoir parler de solution approchée, il serait utile d'avoir une formulation du problème d'élastoplasticité avec un principe de minimum. La transformation réalisant le minimum dans une sous famille de transformation cinématiquement admissibles peut être une approximation de la transformation réelle. C'est ce que nous nous tenterons de faire au chapitre 5. Mais auparavant au chapitre 4, nous proposons une autre formulation du problème permettant de déterminer une solution qui vérifie **par construction** le critère de plasticité à chaque instant.



## Chapitre 4: Formulation du problème de l'évolution élasto-plastique vérifiant par construction le critère à chaque instant

Dans le premier paragraphe, nous allons proposer une nouvelle écriture de la transformation élastique dans la zone en cours d'évolution plastique. Cette écriture fait intervenir un champ d'angle  $\theta$  et le champ de la déformation plastique cumulée  $p_{cum}$ .

*Remarque : La notation de l'angle  $\theta$  dans les chapitres 4, 5 et 6 n'est pas l'angle d'attaque  $\theta$  que nous avons utilisé dans le chapitre 2.*

Dans le deuxième paragraphe, nous allons établir les équations d'évolution de ces 2 champs si l'évolution de la transformation est connue

Dans le troisième paragraphe, nous allons illustrer cette démarche sur un essai non trivial dit essai de compression plane ou Chanel Die. C'est l'essai à déformation uniforme qui se rapproche le plus du processus de laminage.

### 4.1. Nouvelle écriture de la transformation élastique dans la zone en cours d'évolution plastique

Rappelons la factorisation de  $\underline{\underline{F}}(X, t)$

$$\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}} \text{ avec } J = \det(\underline{\underline{F}}), \underline{\underline{E}} \text{ symétrique, } \det(\underline{\underline{E}}) = \det(\underline{\underline{P}}) = 1.$$

Nous avons introduit au chapitre 3,  $\underline{\underline{D}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right]$  la partie déviatorique de  ${}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$

$$\text{Notons } T = \frac{\text{tr}({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3}, \left( {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} = T \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}} \right).$$

La partie déviatorique de la contrainte plastique s'écrit  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \mu_0 \underline{\underline{D}}$  et le critère de plasticité

peut donc se réécrire  $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$  en tous les points où la plasticité évolue

(Equation (3.28)).

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}$ , symétrique peut être diagonalisé dans une base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe un tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$  et trois valeurs  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) / \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1$  tels que

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_3 \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}}$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\alpha_1^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2 + \alpha_3^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3}\alpha_2^2 - \frac{1}{3}(\alpha_1^2 + \alpha_3^2) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}\alpha_3^2 - \frac{1}{3}(\alpha_2^2 + \alpha_1^2) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}}$$

Que nous réécrivons  $\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2 & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3 \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}}$

Comme  $tr(\underline{\underline{D}}) = 0$  et  $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2(p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$  dans la zone plastique, nous avons les relations :

$$\begin{aligned} \beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 &= \frac{2}{3} \frac{k^2(p_{cum})}{\mu_0^2} \end{aligned} \quad (4.1)$$

Dans cette situation, si les  $\beta_i$  sont rangés dans l'ordre décroissant, il existe un paramètre

$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  tel que :

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta) \\ \beta_2 &= \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \beta_3 &= \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.2)$$

Nous noterons ces fonctions  $\beta_i(\theta, p_{cum})$

Comme  ${}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} = T \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}}$   $\begin{bmatrix} \beta_1(\theta, p_{cum}) + T & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(\theta, p_{cum}) + T & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(\theta, p_{cum}) + T \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}}$

et  $\det({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) = 1$ ,  $T$  vérifie l'équation :

$$f(T) = (\beta_1 + T)(\beta_2 + T)(\beta_3 + T) = 1 \quad (4.3)$$

Or, à partir de l'équation (4.2), on peut calculer trois termes suivants :

$$\begin{aligned}\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 &= 0 \\ \beta_1\beta_2 + \beta_1\beta_3 + \beta_2\beta_3 &= \frac{(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3)^2 - (\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2)}{2} = -\frac{1}{3} \frac{k^2(p_{cum})}{\mu_0^2} \quad (4.4) \\ \beta_1\beta_2\beta_3 &= \frac{1}{4} \left( \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^3 \cos(3\theta)\end{aligned}$$

Donc, on peut réécrire le trinôme en T :

$$f(T) = (\beta_1 + T)(\beta_2 + T)(\beta_3 + T) - 1 = T^3 - 3T \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^3 \cos(3\theta) - 1 \quad (4.5)$$

$f(T)$  est un polynôme de degré 3 dont la dérivée admet  $\pm \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$  comme racine.

Or,  $(\beta_3 + T)$  est une valeur propre de  $\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$  donc  $(\beta_3 + T) > 0$ .

Comme  $\beta_3 \leq -\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ ,  $T \geq \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ .

Pour  $T \geq \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ ,  $f(T)$  est croissante et  $f\left(\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}\right) < 0$ .

Le polynôme  $f(T)$  n'admet donc qu'une racine pour  $T \geq \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ .

La valeur de  $T$  est donc la plus grande racine de  $f(T)$ . Elle est donnée analytiquement par les formules de Cardan.

Nous la noterons  $T(\theta, p_{cum})$ .

Ainsi dans la zone en cours d'évolution plastique il existe, en chaque point, un tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$ , une valeur de  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$  et une valeur de  $p_{cum}$  tels que

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} (\beta_1(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta_2(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & (\beta_3(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}}$$

Avec

$$J = \det(\underline{\underline{F}})$$

$$\beta_1(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta)$$

$$\beta_2(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\beta_3(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

et  $T(\theta, p_{cum})$  la plus grande des racines de :

$$T^3 - 3T \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^3 \cos(3\theta) - 1 = 0 \quad (4.6)$$

Comme  $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$  est petit, cette racine est proche de 1 et vaut au troisième ordre en

$$\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$$

$$T \approx 1 + \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right) \cos(3\theta) \right]$$

Donc,  $T \approx 1$  au premier ordre en  $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ .

Pour ces valeurs de  $\underline{E}$  la contrainte plastique est sur la frontière du domaine de plasticité, **par construction**.

Dans la suite nous noterons  $\gamma_i(\theta, p_{cum}) = (\beta_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}}$

$$(\gamma_1(\theta, p_{cum}) \gamma_2(\theta, p_{cum}) \gamma_3(\theta, p_{cum}) = 1)$$

Au premier ordre en  $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$  on a :

$$\gamma_1(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta)$$

$$\gamma_2(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\gamma_3(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

## 4.2. Détermination des grandeurs $\theta$ et $p_{cum}$ si la transformation est connue

Nous supposons donc ici que la transformation  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$  dans le voisinage d'une particule  $\underline{X}$  en cours d'évolution plastique est connue.

Le gradient de la transformation  $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$ , ainsi que  $\underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{X}, t)$  et  $J(\underline{X}, t) = \det(\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t))$  sont donc, aussi connus.

Nous savons alors qu'il existe en chaque point  $\underline{X}$  un tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$ , une valeur de  $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ , une valeur de  $p_{cum}$  et un tenseur  $\underline{\underline{P}}$  tels que :

$$\underline{\underline{F}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \underline{\underline{P}} \quad (4.7)$$

Nous souhaitons déterminer  $\underline{\underline{O}}$ ,  $\theta$ ,  $p_{cum}$  et  $\underline{\underline{P}}$ .

Pour cela donnons une expression de  $\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}$  en utilisant une décomposition de  $\underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1}$  en sa partie antisymétrique  $\underline{\underline{\Omega}}^p$  et sa partie symétrique  $\underline{\underline{d}}^p$

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1} &= \frac{1}{3} \frac{\dot{J}}{J} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{\dot{O}}}\underline{\underline{O}}^{-1} + \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}_1(\theta, p_{cum})}{\gamma_1(\theta, p_{cum})} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}_2(\theta, p_{cum})}{\gamma_2(\theta, p_{cum})} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}_3(\theta, p_{cum})}{\gamma_3(\theta, p_{cum})} \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \\ &+ \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{\dot{O}}}\underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \\ &+ \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \underline{\underline{\Omega}}^p \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \\ &+ \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \underline{\underline{d}}^p \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \gamma_1^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^{-1}(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^{-1}(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \end{aligned}$$

Ainsi  $\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}$  comprend 6 termes dans l'expression ci-dessus.

Nous allons nous intéresser à  $\left(\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}\right)_{sym}^{dev}$ , la partie symétrique déviatorique de  $\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}$ . Nous verrons plus loin pourquoi.

Le premier est un tenseur isotrope. Le second est un tenseur antisymétrique. Comme  $\gamma_i(\theta, p_{cum}) \approx 1$ , les quatrième et cinquième termes sont approximativement antisymétriques au premier ordre.

Seuls les troisième et sixième termes vont donc participer à l'expression de  $(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dév}$

La loi d'écoulement plastique s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^p = \frac{3}{2} \dot{p}_{cum} \frac{\mu_0}{k(p_{cum})} \underline{\underline{D}} = \frac{3}{2} \dot{p}_{cum} \frac{\mu_0}{k(p_{cum})} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \beta_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \beta_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (4.8)$$

Ce qui se réécrit en tenant compte du fait que  $\beta_1(\theta, p_{cum}) = \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta), \dots$

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{p}_{cum} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (4.9)$$

Notons que  $\frac{\dot{\gamma}_1(\theta, p_{cum})}{\gamma_1(\theta, p_{cum})} + \frac{\dot{\gamma}_2(\theta, p_{cum})}{\gamma_2(\theta, p_{cum})} + \frac{\dot{\gamma}_3(\theta, p_{cum})}{\gamma_3(\theta, p_{cum})} = 0$

Ainsi la partie symétrique déviatorique de  $\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1}$  s'écrit au premier ordre :

$$(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dév} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} + \dot{p}_{cum} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{\gamma}_3}{\gamma_3} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (4.10)$$

La diagonalisation de  $(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dév}$  va nous donner l'information que nous recherchons.

Tout d'abord, elle permet de déterminer le tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$ .

Ensuite les valeurs propres de  $(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dév}$  permettent d'établir deux équations linéaires portant sur  $\dot{\theta}$  et  $\dot{p}_{cum}$  conduisant à une expression analytique de  $\dot{\theta}$  et  $\dot{p}_{cum}$  en fonction de  $\theta, p_{cum}$  et des valeurs propres de  $(\underline{\underline{\dot{F}}}\cdot\underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dév}$ .

Il est ainsi possible de faire une intégration semi analytique pour déterminer  $\theta$  et  $p_{cum}$ .

Ceci détermine :

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} (\beta_1(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & (\beta_2(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & (\beta_3(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (4.11)$$

donc  $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \underline{\underline{F}}$ .

Etablissons les équations analytiques que doivent vérifier  $\dot{\theta}$  et  $\dot{p}_{cum}$ .

Notons  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  les trois valeurs propres de  $(\underline{\underline{\dot{F}}} \cdot \underline{\underline{F}}^{-1})_{sym}^{dev}$

Seules deux équations sont indépendantes car  $(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0)$

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{\dot{\gamma}_1}{\gamma_1} + \dot{p}_{cum} \cos(\theta) \\ \lambda_2 &= \frac{\dot{\gamma}_2}{\gamma_2} + \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

Rappelons que  $\gamma_i(\theta, p_{cum}) = (\beta_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum}))^{\frac{1}{2}}$ , donc:

$$\frac{\dot{\gamma}_i}{\gamma_i} = \frac{1}{2} \frac{\dot{\beta}_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum})}{\beta_i(\theta, p_{cum}) + T(\theta, p_{cum})} \quad (4.13)$$

Où :

L'équation

permet de déterminer :



### 4.3. Application de la nouvelle écriture dans le cas de compression plane Channel Die

La compression plane Channel Die ressemble beaucoup au processus de laminage. Pour les deux processus, on comprime le matériau dans une direction et on le laisse s'écouler dans une autre direction. Donc, dans ce paragraphe, nous étudions le test Channel Die dans une évolution élastoplastique (avec écrouissage) avec la nouvelle écriture du champ de transformation.

Généralement le modèle de comportement adopté pour étudier ce problème est un modèle rigide plastique. Or le point le plus intéressant dans cet exercice est l'élargissement de l'éprouvette après relâchement de la contrainte. C'est en effet une manière simplifiée d'étudier la variation de largeur d'une bande en sortie de la cage de laminage. Pour cette étude, il est nécessaire de tenir compte de l'élasticité dans le modèle élastoplastique. C'est ce que nous allons faire ici pour améliorer les approches habituelles.

#### 4.3.1. Description du test Channel Die

Figure 4-1 : Test Channel Die

Considérons un repère orthonormé  $(e_1, e_2, e_3)$  et supposons que la « compression » est effectuée suivant  $e_3$  sur une plaque rigide (en noir) au-dessus de l'échantillon. La direction suivant  $e_1$  est libre et la direction suivant  $e_2$  est fixée par deux cloisons rigides. Les contacts entre l'échantillon et les cloisons, sont des contacts sans frottement. Donc, dans ce cas, nous pouvons exprimer le champ de transformation sous la forme :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}$$

Avec  $F_3(t)$  connu dans la direction  $e_3$ . De plus, le champ de contrainte peut s'écrire :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

L'objectif de cette étude est de tracer les contraintes , en fonction de



Ou encore :

$$2\bar{E}_1^2 + (-\bar{E}_3^2) = J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) \quad (4.18)$$

De plus,  $\bar{E}_1\bar{E}_3 = J^{\frac{1}{3}}$  ou encore  $2\bar{E}_1^2(-\bar{E}_3^2) = -2J^{\frac{2}{3}}$

Donc,  $2\bar{E}_1^2, -\bar{E}_3^2$  sont les deux solutions de l'équation trinomiale dont on connaît la somme et le produit :

$$y^2 - \left( J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) \right) y - 2J^{\frac{2}{3}} = 0 \quad (4.19)$$

Comme  $2\bar{E}_1^2$  positif et  $-\bar{E}_3^2$  négatif, on peut déduire facilement ces valeurs et ensuite les valeurs de  $\bar{E}_1, \bar{E}_3$  comme ci-dessous :

$$\begin{aligned} \bar{E}_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{ J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) + \sqrt{ \left( J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) \right)^2 + 8J^{\frac{2}{3}} } } \\ \bar{E}_3 &= \sqrt{ \frac{ \sqrt{ \left( J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) \right)^2 + 8J^{\frac{2}{3}} } - J^{\frac{2}{3}} + 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) }{2} } \end{aligned} \quad (4.20)$$

A l'aide  $\bar{E}_1(J), \bar{E}_3(J)$ , nous pouvons aussi exprimer les autres paramètres en fonction de  $J$ .

Par exemple :

$$\begin{aligned} F_3 &= J^{\frac{1}{3}}\bar{E}_3 = J^{\frac{1}{3}} \sqrt{ \frac{ \sqrt{ \left( J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) \right)^2 + 8J^{\frac{2}{3}} } - J^{\frac{2}{3}} - 3\frac{k_0}{\mu_0} J(J-1) }{2} } \\ \sigma_2 &= \frac{\mu_0}{J} \left( \frac{2}{3\bar{E}_1^2\bar{E}_3^2} - \frac{1}{3}\bar{E}_1^2 - \frac{1}{3}\bar{E}_3^2 \right) + k_0(J-1) \\ \sigma_3 &= \frac{\mu_0}{J} \left( \frac{2}{3}\bar{E}_3^2 - \frac{1}{3\bar{E}_1^2\bar{E}_3^2} - \frac{1}{3}\bar{E}_1^2 \right) + k_0(J-1) \\ \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d &= \mu_0 \left[ \underline{\underline{\bar{E}}}\cdot\underline{\underline{\bar{E}}} - \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\bar{E}}}\cdot\underline{\underline{\bar{E}}})}{3} \underline{\underline{I}} \right] \end{aligned} \quad (4.21)$$

**Donc**, on peut tracer  $\sigma_2, \sigma_3$  en fonction de  $\ln(F_3)$  à l'aide de ces expressions paramétrées par  $J$  décroissant à partir de 1, pendant cette phase élastique.

#### 4.3.3. La fin de la première phase élastique

Le tenseur de contrainte  $\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d$  est un tenseur fonction de  $J$ . On appelle  $J^{el}$  la première valeur de  $J$  qui permet de vérifier le critère d'élasticité

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} \sigma_0^2 = 0$$

Pour  $J$  décroissant à partir de  $J^{el}$ , on entre dans la phase plastique.

#### 4.3.4. Dans la phase plastique

Dans cette phase, nous avons toujours le tenseur de transformation totale et le tenseur de contrainte sous forme

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

Notons le tenseur de transformation élastique et le tenseur de transformation plastique comme ci-dessous

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_3 \end{bmatrix}, \quad \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \text{ avec } p_1 p_2 p_3 = 1$$

Comme dans le chapitre précédent, avec la nouvelle écriture du champ de transformation, on peut exprimer le tenseur  $\underline{\underline{E}}$  en fonction de  $J, \theta, p_{cum}$  avec  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}$

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \begin{bmatrix} \gamma_1(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix}$$

$$\text{Où } \gamma_1(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta)$$

$$\gamma_2(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\gamma_3(\theta, p_{cum}) = 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Donc, on réécrit explicitement :

$$\begin{cases} E_1(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta) \right] \\ E_2(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \\ E_3(\theta, p_{cum}, J) = J^{\frac{1}{3}} \left[ 1 + \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \end{cases} \quad (4.22)$$

De plus, à partir de la relation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}P$ , on déduit  $p_2 = \frac{1}{E_2}$ ,  $p_3 = \frac{F_3}{E_3}$ , prenons le logarithme et ensuite dérivons, on a :

$$\frac{\dot{p}_2}{p_2} = -\frac{\dot{E}_2}{E_2}, \quad \frac{\dot{p}_3}{p_3} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{\dot{E}_3}{E_3}$$

En remplaçant l'expression de  $\underline{\underline{E}}$  dans le comportement Néo-Hookien

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot^t \underline{\underline{E}} + \left( k_0 (J-1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}} \cdot^t \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

On obtient :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \mu_0 J^{-1} \begin{bmatrix} \gamma_1^2(\theta, p_{cum}) & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2^2(\theta, p_{cum}) & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) \end{bmatrix} + \left[ k_0 (J-1) - \frac{1}{3} \mu_0 J^{-1} (\gamma_1^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum})) \right] \underline{\underline{I}} \quad (4.23)$$

Comme  $\sigma_{11} = 0$ , on peut déduire :

$$\mu_0 J^{-1} \gamma_1^2(\theta, p_{cum}) + k_0 (J-1) - \frac{1}{3} \mu_0 J^{-1} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_1^2(\theta, p_{cum})) = 0$$

Ou encore :

$$J^2 - J - \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{k_0} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum})) \quad (4.24)$$

La variation de volume  $J$  est une valeur positive et proche de 1, donc,  $J$  peut être exprimé en fonction de  $\theta, p_{cum}$  :

$$J(\theta, p_{cum}) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum}))}}{2} \quad (4.25)$$

Avec cette expression, nous pouvons calculer la dérivée de la variation de volume  $J$  en fonction de temps

$$\dot{J} = \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum}$$

$$\text{Où : } \frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial \theta} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \frac{\left( \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial \theta} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial \theta} - 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial \theta} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum}))}}$$

$$\frac{\partial J(\theta, p_{cum})}{\partial p_{cum}} = \frac{2}{3} \frac{\mu_0}{k_0} \frac{\left( \gamma_2 \frac{\partial \gamma_2}{\partial p_{cum}} + \gamma_3 \frac{\partial \gamma_3}{\partial p_{cum}} - 2\gamma_1 \frac{\partial \gamma_1}{\partial p_{cum}} \right)}{\sqrt{1 + \frac{4}{3} \frac{\mu_0}{k_0} (\gamma_2^2(\theta, p_{cum}) + \gamma_3^2(\theta, p_{cum}) - 2\gamma_1^2(\theta, p_{cum}))}}$$

A l'aide des expressions ci-dessus, on peut réécrire  $\frac{\dot{p}_2}{p_2}$ ,  $\frac{\dot{p}_3}{p_3}$  en fonction de  $(\theta, p_{cum})$

$$\frac{\dot{p}_2}{p_2}(\theta, p_{cum}) = -\frac{\dot{E}_2}{E_2} = -\frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right)$$

$$\frac{\dot{p}_3}{p_3}(\theta, p_{cum}) = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{\dot{E}_3}{E_3} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{1}{E_3} \left( \frac{\partial E_3}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right)$$

De plus, comme dans le paragraphe précédent (équation (4.8)), le taux de déformation plastique s'écrit :

$$\underline{\underline{d}}^p = \dot{p}_{cum} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Ou encore

$$\begin{bmatrix} \frac{\dot{p}_1}{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{p}_2}{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{p}_3}{p_3} \end{bmatrix} = \dot{p}_{cum} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix}$$

Avec ces deux expressions de  $\frac{\dot{p}_2}{p_2}$ ,  $\frac{\dot{p}_3}{p_3}$ , on en déduit les équations:

$$\begin{cases} -\frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_2}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right) = \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \\ \frac{\dot{F}_3}{F_3} - \frac{1}{E_3} \left( \frac{\partial E_3}{\partial J} \dot{J} + \frac{\partial E_3}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \dot{p}_{cum} \right) = \dot{p}_{cum} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \end{cases}$$

Ou encore :

$$\begin{cases} \dot{p}_{cum} \left( \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = 0 \\ \dot{p}_{cum} \left( \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \right) + \frac{1}{E_3} \left( \frac{\partial E_3}{\partial \theta} + \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \dot{\theta} = \frac{\dot{F}_3}{F_3} \end{cases}$$

Enfin, on peut exprimer les paramètres  $\dot{p}_{cum}$  et  $\dot{\theta}$  en fonction de  $(p_{cum}, \theta)$  :

$$\begin{cases} \dot{p}_{cum}(p_{cum}, \theta) \\ \dot{\theta}(p_{cum}, \theta) \end{cases} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{F}_3}{F_3} \frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left[ -\frac{1}{E_3} \left( \frac{\partial E_3}{\partial \theta} + \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left( \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left( \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_3} \frac{\partial E_3}{\partial p_{cum}} \right) \right]^{-1} \\ \frac{\dot{F}_3}{F_3} \left( \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) \left[ \frac{1}{E_3} \left( \frac{\partial E_3}{\partial \theta} + \frac{\partial E_3}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left( \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{E_2} \left( \frac{\partial E_2}{\partial \theta} + \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \theta} \right) \left( \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial p_{cum}} + \frac{1}{E_2} \frac{\partial E_2}{\partial p_{cum}} \right) \right]^{-1} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

**En résumé**, dans la phase plastique, on commence avec

$$p_{cum}(t = t^{el}) = 0$$

$$\theta(t = t^{el}) = \arccos\left( \left( J^{el} \right)^{\frac{2}{3}} \frac{3}{2} \frac{\mu_0}{\sigma_0} \left( \frac{2}{3} E_1^{el} - \frac{1}{3} E_3^{el} - \frac{1}{3} \right) \right)$$

Les formules  $\dot{p}_{cum}(p_{cum}, \theta)$ ,  $\dot{\theta}(p_{cum}, \theta)$  ci-dessus nous permettent de déterminer  $p_{cum}, \theta$  en fonction du temps.

Donc, on peut calculer tous les autres paramètres grâce à  $p_{cum}, \theta$  en utilisant les formules  $J(\theta, p_{cum})$ ,  $\underline{E}(J, \theta, p_{cum})$ ,  $\underline{\sigma}(\theta, p_{cum})$  ci-dessus (équation (4.20), (4.21) et (4.23)).

#### 4.3.5. Application numérique

Pour l'application numérique, on utilise Matlab avec les données ci-dessous

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1(t) & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & F_3(t) \end{bmatrix} \text{ avec } F_3(t) = 1 + \alpha_3 * t, \quad \alpha_3 = -0.01$$

$$\sigma_0 = 600 \text{ MPa}, k_0 = 175000 \text{ MPa}, \mu_0 = 80769 \text{ MPa}$$

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 \left( 1 + \alpha \left( e^{p_{cum}} - 1 \right) \right), k'(p_{cum}) = \sigma_0 \alpha e^{p_{cum}}, \alpha = 0.1$$

Les résultats numériques nous donnent  $J^{el} = 0.9983249$  et  $-\log(F_3^{el}) = 0.00127$ . On voit bien que la composante  $\sigma_{11} = 0$  dans Figure 4-2

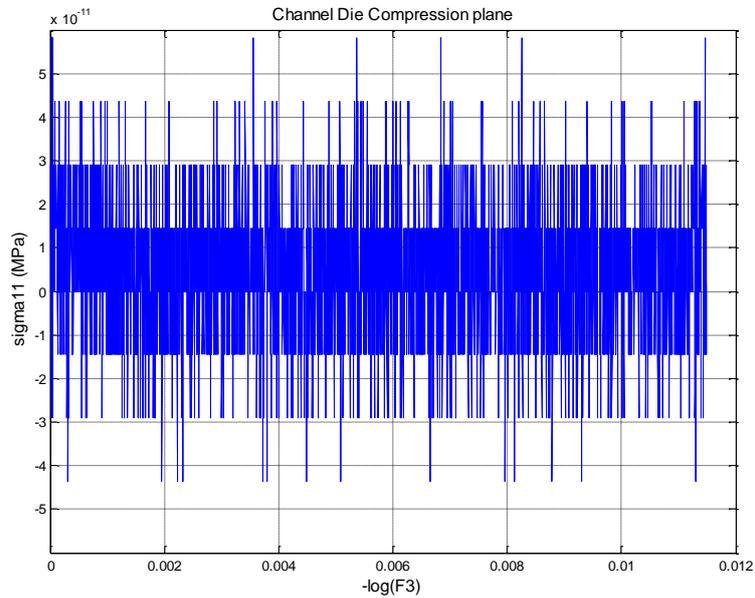


Figure 4-2 : La composante de contrainte  $\sigma_{11}$

La composante  $\sigma_{22}$  (Figure 4-3) est « linéaire » dans la phase élastique et « parabolique » dans la phase plastique, elle a tendance à se stabiliser vers la valeur 350 MPa.

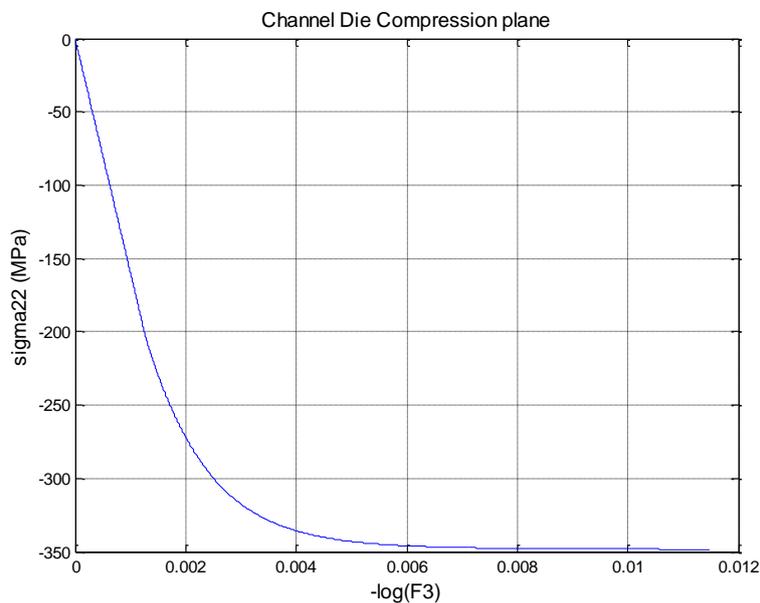


Figure 4-3 : La composante de contrainte  $\sigma_{22}$

Identiquement, la composante  $\sigma_{33}$  (Figure 4-4) est « linéaire » dans la phase élastique et « parabolique » dans la phase plastique, elle a tendance à se stabiliser vers la valeur 700 MPa.

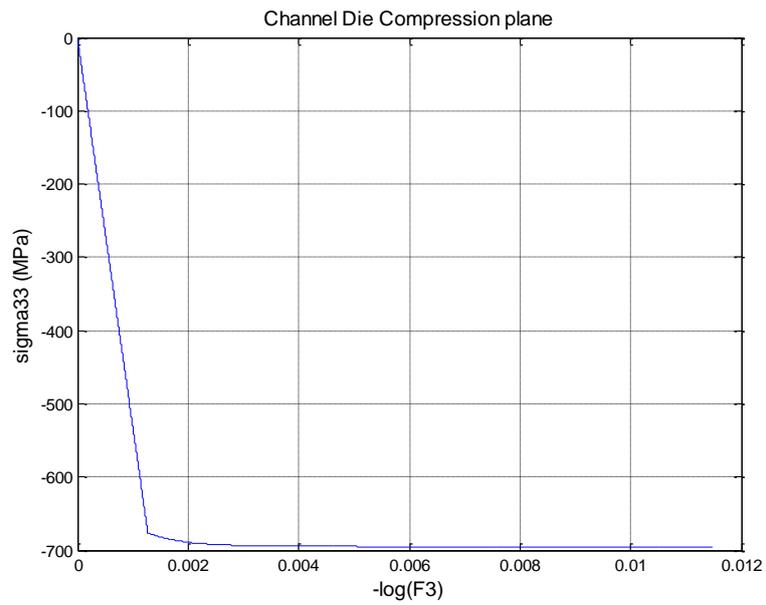


Figure 4-4 : La composante de contrainte  $\sigma_{33}$

On dessine aussi les autres grandeurs comme  $\log(F_1)$  (Figure 4-5) et la variation de volume  $J$  (Figure 4-6) en fonction de  $-\log(F_3)$

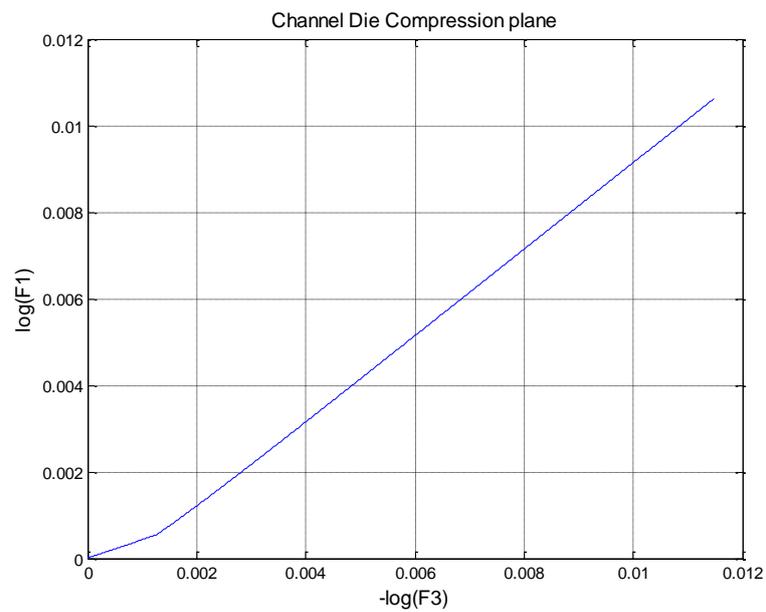


Figure 4-5 : Logarithme de  $F_1$

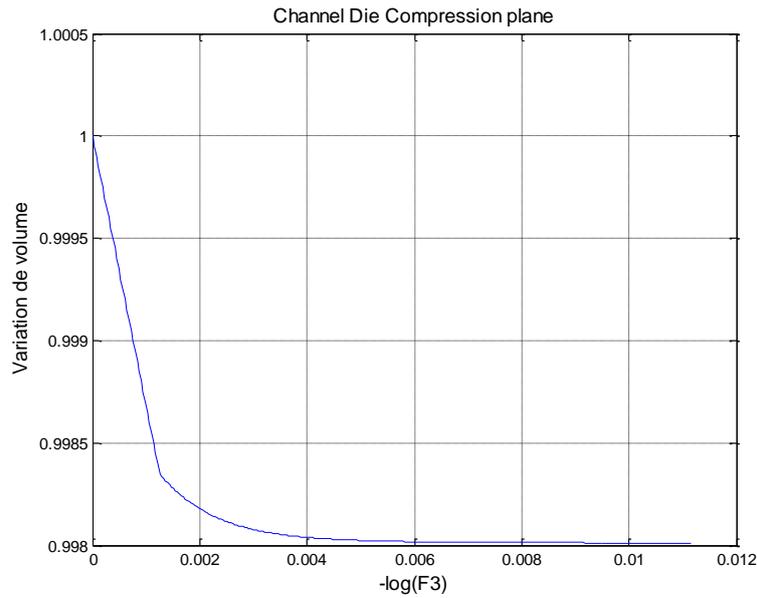


Figure 4-6 : La variation de volume

Nous allons présenter maintenant la composante  $p_2$  du tenseur  $\underline{\underline{P}}$  dans la Figure 4-7

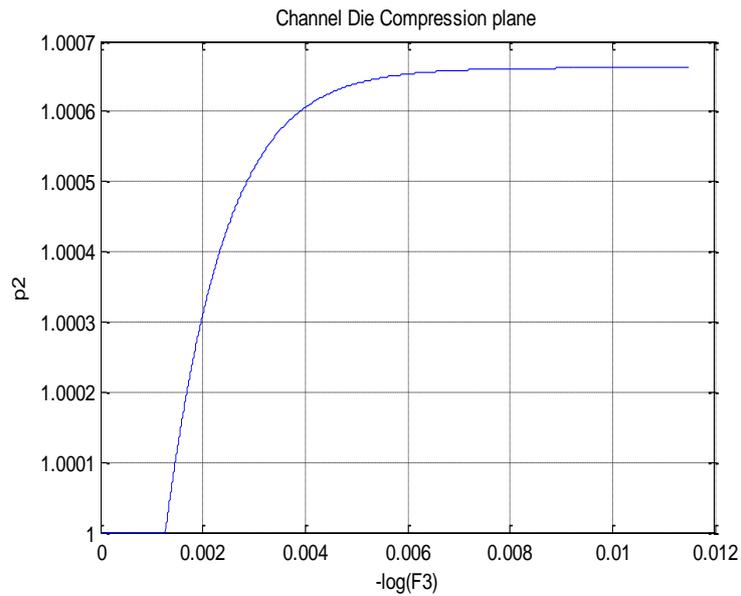


Figure 4-7 : La composante  $p_2$

Cette grandeur est la plus intéressante pour la simulation extrêmement simplifiée d'un processus de laminage à l'aide de cet essai uniforme car elle donne l'élongation dans la direction 2 de l'éprouvette une fois que les contraintes ont été relaxées. Cela correspond à la partie retour élastique faisant varier la largeur de la bande dans le processus de laminage. L'exercice ci-dessus permet donc une détermination quasi analytique de cette approximation.

#### 4.3.6. Résultat avec Abaqus :

Afin de vérifier les résultats numériques déterminés avec Matlab dans la partie précédente, on utilise Abaqus pour modéliser le test de Channel Die et dessiner les courbes de contrainte en fonction de  $-\log(F_3)$

Avec Abaqus, on utilise un échantillon qui a une hauteur de 50 unités et une largeur de 10 unités (l'unité est bien sûr quelconque) dans le cas de déformation plane. Deux plaques rigides sont appliquées sans frottement aux deux extrémités de l'échantillon. Enfin, on fixe la plaque en bas, et on applique un champ de vitesse  $v=0.01$  unité/s sur la plaque en haut (voir la Figure 4-8)

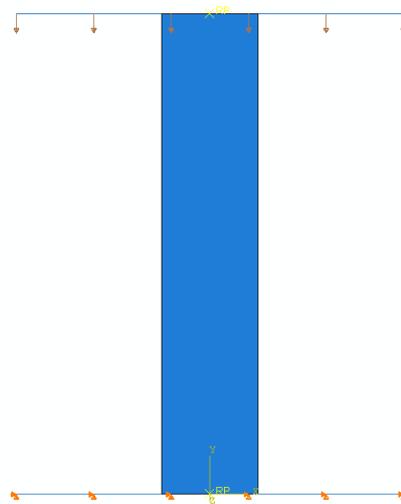


Figure 4-8 : Modèle Abaqus

Avec ce modèle, on retrouve des courbes de contraintes en fonction de  $-\log(F_3)$

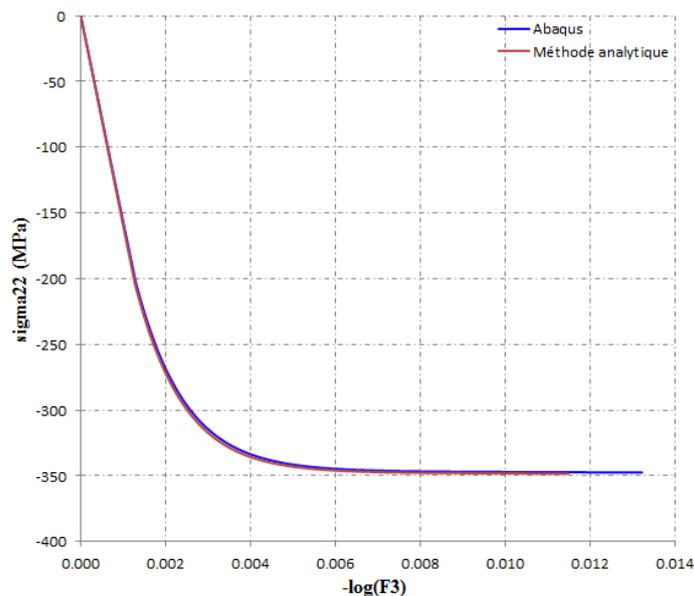


Figure 4-9 : La composante de contrainte  $\sigma_{22}$

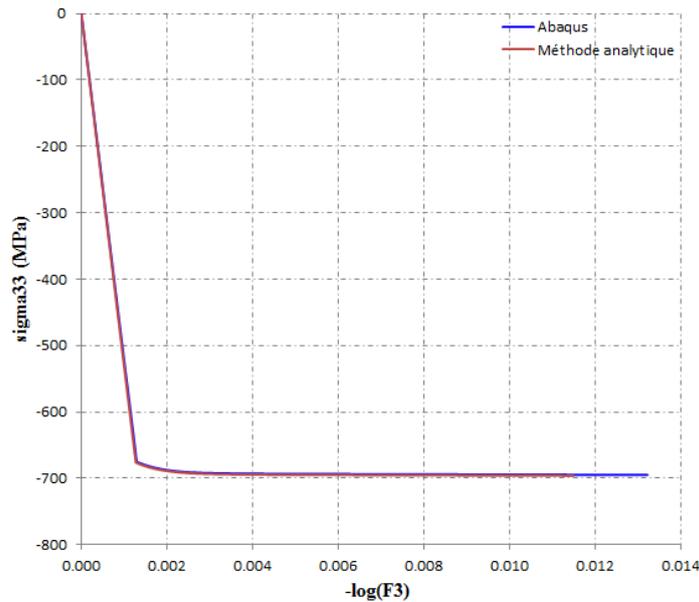


Figure 4-10 : La composante de contrainte  $\sigma_{33}$

Nous constatons que la nouvelle écriture du champ de transformation donne les résultats exactement identiques à ceux obtenus par Abaqus. Donc, dans le cas de compression plane Channel Die, nous pouvons obtenir une solution quasi analytique avec la nouvelle écriture du champ de transformation.

#### 4.4. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons formulé une autre approche du problème de l'étude de l'évolution élastoplastique d'une structure à l'aide de champs auxiliaires qui permettent de reconstruire des champs physiques dont les contraintes vérifient par construction le critère de plasticité. L'application de cette approche à l'essai de compression plane qui est proche d'un processus de laminage peut nous encourager à chercher des fonctions approchées pour un processus de laminage.

Cependant en conclusion du chapitre précédent, nous avons ressenti le besoin de tenter d'écrire un principe de minimum qui permet une détermination plus commode de solutions approchées. C'est ce que nous allons entreprendre au chapitre suivant.

## Chapitre 5: Un principe de minimum pour l'élasto-plasticité

Dans ce chapitre nous proposons une approche alternative de l'élastoplasticité basée sur un principe de minimisation de la somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée, c'est-à-dire un modèle à dissipation simple (Ehrlacher et Fedelich, 1988, 1989, 1997).

Pour commencer, nous donnons dans le premier paragraphe la **solution du problème de la traction simple monotone avec une approche classique**.

Dans le deuxième paragraphe, nous donnons la **solution du problème de la traction simple monotone en postulant un principe de minimum sur « l'énergie totale »**, somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée. Avec cette deuxième approche, nous retrouvons, de manière directe et très économe en calculs, la solution obtenue avec l'approche classique.

Bien évidemment, cette approche par minimisation d'une fonctionnelle ne peut pas être généralisée à tous types de chargement, mais nous définissons une classe particulière d'évolutions élastoplastiques, que nous appellerons les évolutions simples radiales, pour lesquelles il est possible de démontrer l'équivalence entre les équations classiques de comportement et d'équilibre et celles obtenues à l'aide d'un **principe de minimum sur « l'énergie totale » pour les évolutions « simples radiales »** que nous formulerons plus complètement dans le troisième paragraphe.

Dans le quatrième paragraphe, pour illustrer la démarche de minimum, nous allons appliquer ce principe de minimum au premier exemple simple du chapitre 3.

### 5.1. Solution du problème de la traction simple monotone avec une approche classique

Nous allons dans ce paragraphe présenter l'analyse exacte d'un essai en traction simple. La différence principale par rapport aux exemples du chapitre 3 tient au fait que, dans une expérience de traction simple l'histoire de la transformation n'est pas imposée, mais seulement l'élongation principale dans la direction de traction. En revanche le vecteur contrainte est imposé nul sur les faces latérales de l'éprouvette.

Considérons un repère orthonormé  $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$  et supposons que la traction est effectuée suivant  $\underline{e}_1$ .

Le gradient de la transformation est alors diagonal dans la base choisie et les composantes 22 et 33 sont identiques par raison de symétrie.

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & F_2 & 0 \\ 0 & 0 & F_2 \end{bmatrix}$$

Les tenseurs  $\underline{\underline{E}}$  et  $\underline{\underline{P}}$  seront eux aussi diagonaux dans la même base.

Par ailleurs comme  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$ , on peut les exprimer sous la forme suivante :

$$\underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix}, \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & p^{-1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Remarquons que } \underline{\underline{\dot{P}}}\underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{p}}{p} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} \end{bmatrix}. \text{ Ainsi } \dot{p}_{cum} = \frac{\dot{p}}{p}, \text{ et } p_{cum} = \ln(p)$$

( $p = 1$  lorsqu'il n'y a pas de déformations plastiques).

$$\text{Avec } \underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}\underline{\underline{P}} \text{ on a } F_1 = E_1 p \text{ et } F_2 = E_2 p^{-1/2}$$

$$\text{Par ailleurs } J = \det(\underline{\underline{F}}) = F_1 F_2^2 = E_1 E_2^2 \quad \left( \rho = \frac{\rho_0}{J} = \frac{\rho_{Rel}}{J} \right).$$

Pour écrire la partie élastique du comportement nous avons besoin de  $\underline{\underline{\bar{E}}} = J^{-1/3} \underline{\underline{E}}$ .

$$\underline{\underline{\bar{E}}} = \begin{bmatrix} \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{2/3} & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{-1/3} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{-1/3} \end{bmatrix} \text{ dont le déterminant est égal à 1. Nous notons } \bar{E}_1 = \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{2/3}$$

$$\text{De plus } \bar{I}_1 = tr(\underline{\underline{\bar{E}}}\underline{\underline{\bar{E}}}) = \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{4/3} + 2 \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{-2/3}, \text{ soit } \bar{I}_1 = \bar{E}_1^2 + 2\bar{E}_1^{-1}$$

La traction simple implique que le champ de contrainte de Cauchy est uniforme et uni axial.

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ donc :}$$

$$\underline{\underline{s}} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

On en déduit  $\frac{\pi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\sigma(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}$  et  $\frac{\psi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\sigma(\underline{x}, t)}{\rho(\underline{x}, t)} \cdot \underline{\underline{E}}$

$$\pi_{\text{Rel}} = \begin{bmatrix} \pi_{\text{Rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \psi_{\text{Rel}} = \begin{bmatrix} \psi_{\text{Rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \text{ avec } \pi_{\text{Rel}} = \sigma \frac{E_2^2}{E_1} \text{ et } \psi_{\text{Rel}} = \sigma E_1 E_2^2$$

La partie élastique du comportement avec  $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \underline{\underline{I}} + \underline{\underline{s}}$  implique

$$\frac{\text{tr}(\underline{\underline{\sigma}})}{3} = k_0(J-1) \text{ et } \underline{\underline{s}} = \frac{\mu_0}{J} \text{Dév} \left[ \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} \right], \text{ soit :}$$

$$\sigma = 3k_0(J-1) \quad (5.2)$$

et

$$\underline{\underline{s}} = \frac{\mu_0}{E_1 E_2^2} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \left[ \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{4}{3}} - \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{-2}{3}} \right] & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{4}{3}} - \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{-2}{3}} \right] & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \left[ \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{4}{3}} - \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{-2}{3}} \right] \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

En utilisant (5.1), on a  $\sigma = \frac{\mu_0}{E_1 E_2^2} \left[ \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{4}{3}} - \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{-2}{3}} \right]$  ou encore :

$$\sigma = \frac{\mu_0}{J} \left[ \bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1} \right] \quad (5.4)$$

Ces deux expressions (5.2) et (5.4) de  $\sigma$  peuvent être regroupées pour donner une relation

entre  $J = E_1 E_2^2$  et  $\bar{E}_1 = \left( \frac{E_1}{E_2} \right)^{\frac{2}{3}}$ ,  $\left[ 3k_0 J(J-1) = \mu_0 \left[ \bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1} \right] \right]$ , ou encore :

$$J \left( \bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0} \right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} \left[ \bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1} \right]}}{2} \quad (5.5)$$

Comme  $\sigma = 3k_0(J-1)$ , on en déduit :

$$\sigma(\bar{E}_1, k_0, \mu_0) = 3k_0 \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \quad (5.6)$$

Ces expressions de  $J$  et  $\sigma$  dépendent de la seule inconnue  $\bar{E}_1$  et du rapport  $\frac{k_0}{\mu_0}$ .

On peut récrire l'équation (5.6) en  $\bar{E}_1$  sous la forme d'un polynôme du troisième degré :

$$\bar{E}_1^3 - \frac{3k_0}{4\mu_0} \bar{E}_1 \left[ \left( \frac{2\sigma}{3k_0} + 1 \right)^2 - 1 \right] - 1 = 0 \quad (5.7)$$

Expression vérifiée aussi bien pendant la phase élastique que la phase élastoplastique du comportement.

Cette équation peut être résolue analytiquement pour obtenir  $\bar{E}_1(\sigma, k_0, \mu_0)$ .

Notre objectif étant de tracer la « courbe de traction », c'est-à-dire  $\sigma$  en fonction de  $\ln(F_1)$ , cette résolution n'est pas très utile et il est plus efficace de chercher à exprimer  $F_1$  en fonction de  $\bar{E}_1$  pour pouvoir tracer  $\sigma$  en fonction de  $\ln(F_1)$  à l'aide des deux expressions paramétrées par  $\bar{E}_1$  croissant à partir de 1.

Pour exprimer  $F_1$  en fonction de  $\bar{E}_1$ , nous devons distinguer les deux phases de l'essai, la première phase dans laquelle le comportement en traction est purement élastique et la seconde phase dans laquelle le comportement en traction est élastoplastique

**La première phase du comportement en traction est purement élastique**, donc  $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$  et  $p = 1$ .

Dans ce cas  $E_1 = F_1$ , ce qui s'écrit encore  $J\bar{E}_1^3 = F_1^3$ , ce qui se récrit :

$$F_1 \left( \bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0} \right) = E_1 \left( \bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0} \right) = \bar{E}_1 \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.8)$$

Cette expression de  $F_1$  dépend de la seule inconnue  $\bar{E}_1$  et du rapport  $\frac{k_0}{\mu_0}$ .

Il est donc possible de tracer  $\sigma$  en fonction de  $\ln(F_1)$  à l'aide des deux expressions paramétrées par  $\bar{E}_1$  croissant à partir de 1, pendant cette phase élastique.

Toutes les autres inconnues du problème s'expriment simplement à l'aide de  $\bar{E}_1 \left( F_1, \frac{k_0}{\mu_0} \right)$ .

Par exemple,

$$E_2\left(\bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0}\right) = \bar{E}_1^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.9)$$

**La seconde phase du comportement en traction est élastoplastique**

Pendant cette phase les relations suivantes sont conservées

$$J\left(\bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0}\right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2}$$

$$\sigma(\bar{E}_1, k_0, \mu_0) = 3k_0 \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2}$$

Par contre, maintenant  $E_1 = F_1 p^{-1}$ , ce qui s'écrit encore  $J\bar{E}_1^3 = F_1^3 p^{-3}$

Nous avons donc les mêmes équations que précédemment à condition de remplacer  $F_1$  par  $F_1 p^{-1}$ .

Ainsi  $F_1 p^{-1}$  peut être exprimé à l'aide de  $\bar{E}_1$  et  $\frac{k_0}{\mu_0}$  :

$$\frac{F_1}{p}\left(\bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0}\right) = E_1\left(\bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0}\right) = \bar{E}_1 \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.10)$$

Nous conservons donc dans cette phase l'expression de  $E_2$ .

$$E_2\left(\bar{E}_1, \frac{k_0}{\mu_0}\right) = \bar{E}_1^{-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \right]^{\frac{1}{3}}$$

Rappelons l'équation des bilans que nous avons obtenue après avoir écrit la partie élastique du comportement.

$$\frac{\psi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} : \left( \underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \right) - \frac{k(p_{cum}) \dot{p}_{cum}}{\rho_{\text{Rel}}} = 0$$

Dans notre exemple de traction uniaxiale,  $\underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\dot{p}}{p} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \frac{\dot{p}}{p} \end{bmatrix}$

et  $\psi_{\text{Rel}} = \begin{bmatrix} \psi_{\text{Rel}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  avec  $\psi_{\text{Rel}} = \sigma J$

L'équation des bilans s'écrit alors  $\frac{\psi_{\text{Rel}}}{\rho_{\text{Rel}}} : \left( \underline{\dot{P}} \cdot \underline{P}^{-1} \right) - \frac{k(p_{cum}) \dot{p}_{cum}}{\rho_{\text{Rel}}} = 0$  ou encore :

$$\begin{bmatrix} \frac{\sigma J}{p \rho_{\text{Rel}}} & -\frac{k(p_{cum})}{p \rho_{\text{Rel}}} \end{bmatrix} \dot{p} = 0 \quad (5.11)$$

On voit que si  $\left[ \sigma J < k(p_{cum}) \right]$ , cela implique  $\dot{p} = 0$

Ainsi pendant la phase plastique, comme  $\dot{p} \neq 0$ , cela impose  $\sigma = \frac{1}{J} k(p_{cum})$

**La fin de la première phase élastique** est donc obtenue lorsque  $\sigma = \frac{1}{J} k(0)$ .

Comme  $\sigma = \frac{\mu_0}{J} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]$ , la valeur correspondante du paramètre  $\bar{E}_1^{el}$  est donnée par l'équation  $\mu_0 \left[ (\bar{E}_1^{el})^2 - (\bar{E}_1^{el})^{-1} \right] = k(0)$  qui admet une solution analytique simple.

En remplaçant  $J$ ,  $\sigma$  et  $p_{cum}$  dans l'équation (5.11) par  $J \left( \frac{k_0}{\mu_0} \right) = \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2}$ ,

$\sigma(\bar{E}_1, k_0, \mu_0) = 3k_0 \frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2}$ , et  $p_{cum} = \ln(p)$ , on trouve une équation reliant  $p$  et  $\bar{E}_1$  pendant la phase élastoplastique :

$$\mu_0 \left[ \bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1} \right] = k(\ln(p)) \quad (5.12)$$

Pour des expressions simples de  $k(\ln(p))$  il est possible d'expliciter  $p$  en fonction de  $\bar{E}_1$  et ainsi  $F_1$  en fonction de  $\bar{E}_1$ .

Il est alors possible de tracer  $\sigma$  en fonction de  $\ln(F_1)$  à l'aide des deux expressions paramétrées par  $\bar{E}_1$  croissant, pendant cette phase élastoplastique.

Choisissons par exemple  $k(\ln(p)) = \sigma_0(1 + \alpha(p-1))$

Nous avons alors  $\mu_0[\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}] = \sigma_0(1 + \alpha(p-1))$  dont on tire  $p = 1 + \left( \frac{\mu_0}{\sigma_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}] - 1 \right) \frac{1}{\alpha}$

Ainsi pendant la phase plastique, :

$$F_1(\bar{E}_1, k_0, \mu_0, \sigma_0, \alpha) = \bar{E}_1 \left[ 1 + \left( \frac{\mu_0}{\sigma_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}] - 1 \right) \frac{1}{\alpha} \right] \left[ \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4\mu_0}{3k_0} [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}]}}{2} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (5.13)$$

La courbe  $\sigma(\ln(F_1))$  est alors donnée sous forme paramétrique avec le paramètre  $\bar{E}_1$  croissant à partir de 1.

Nous obtenons la Figure 5-1 où  $\bar{E}_1^{el} = 1.002062703$  :

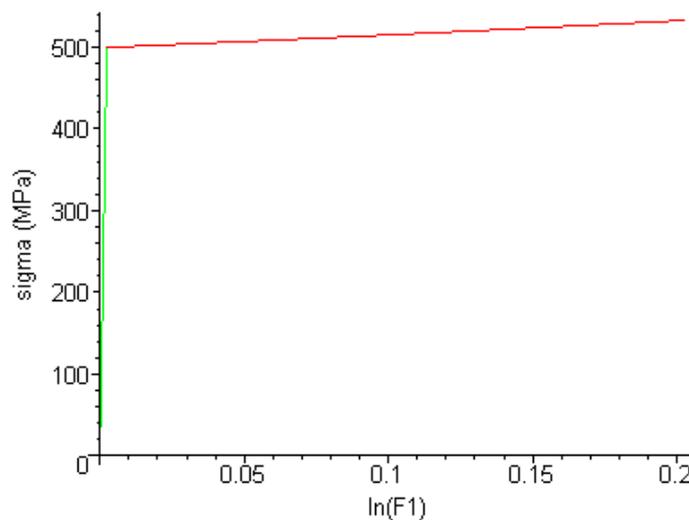


Figure 5-1 : Courbe donnant la contrainte  $\sigma_{11}$

Nous constatons une forte différence entre les courbes des Figure 3-3 et Figure 5-1, mettant en évidence l'influence des conditions aux limites latérales dans la réponse du matériau.

Le problème de la traction simple donne donc lieu à une solution analytique exacte (paramétrée par  $\bar{E}_1$ ), mais les calculs sont un peu longs et complexes. Montrons qu'une approche par le principe de minimum est plus compacte.

## **5.2. Solution du problème de la traction simple en postulant un principe de minimum sur « l'énergie totale »**

L'exemple pourtant très simple de la traction uniaxiale a permis de montrer que les calculs en grandes transformations, pour un comportement élastoplastique, sont complexes.

Cela rend ardue la tâche de proposition d'une modélisation simplifiée des processus de laminage.

Nous allons dans ce paragraphe postuler un principe de minimum d'énergie dont nous allons montrer qu'il donne des résultats cohérents avec l'approche ci-dessus dans le cas de la traction uniaxiale monotone. Ce postulat de minimum d'énergie n'est pas équivalent au comportement élastoplastique décrit plus haut, mais il donne une bonne approximation des champs lorsque le chargement est « monotone », et que l'on peut donner un certain sens au concept de « croissance » de la déformation plastique. C'est ce qui sera fait au paragraphe suivant. Le modèle élastoplastique du comportement est alors remplacé par un modèle à « dissipation simple » (Ehrlacher A. and Fedelich B. , 1988), (Ehrlacher A. et Fedelich B. , 1989), (Ehrlacher A. and Fedelich B. , 1997), dont on sait qu'il permet l'élaboration commode de modèles simplifiés.

Dans les modèles à « dissipation simple », l'énergie dissipée (intégrale dans le temps de la puissance dissipée) peut être exprimée à l'aide des variables d'état. Ce n'est pas le cas en général en plasticité, mais lorsque le trajet de chargement est suffisamment « monotone », il est possible d'approcher cette énergie dissipée par une fonction des variables d'état.

*Remarque : Lorsque l'évolution n'est pas « monotone » mais peut être approchée par une succession de phases «*



Cette équation est identique à l'équation (5.10) trouvée dans l'étude du problème d'élastoplasticité ci-dessus.

Dérivée partielle par rapport  $p$  :

$$\frac{\partial \tilde{\Gamma}(\bar{E}_1, p)}{\partial p} = \frac{1}{2\rho_{\text{Rel}}} \left( -6 \frac{k_0}{p} \left( \left( \frac{F_1}{p\bar{E}_1} \right)^3 - 1 \right) \left( \frac{F_1}{p\bar{E}_1} \right)^3 \right) + \frac{1}{p\rho_{\text{Rel}}} \frac{dK}{dp_{\text{cum}}} (\ln(p)) = 0 \quad (5.19)$$

En utilisant la relation encadrée (5.18) ci-dessus, cette deuxième équation se réécrit :

$$\mu_0 [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}] = \frac{dK}{dp_{\text{cum}}} (\ln(p)) \quad (5.20)$$

Elle est à comparer à l'équation (5.12)  $\mu_0 [\bar{E}_1^2 - \bar{E}_1^{-1}] = k(\ln(p))$  qui a été obtenue lors de l'étude du problème d'élastoplasticité.

Notre principe de minimum correspond donc au cas  $\frac{dK}{dp_{\text{cum}}}(p_{\text{cum}}) = k(p_{\text{cum}})$ .

Sous cette hypothèse et dans le cas de chargement uniaxial monotone, les deux approches (calcul élastoplastique et principe de minimum) donnent les mêmes résultats.

Il est clair que l'on ne peut pas généraliser à tous les chargements, cependant lorsque l'on constate la grande brièveté des calculs pour obtenir la solution à l'aide du principe de minimum, on comprend que cette approche à l'aide d'un modèle à dissipation simple est plus commode pour construire un modèle simplifié.

### 5.3. Principe de minimum pour les évolutions « simples radiales »

Nous commencerons par définir ce que nous appelons ici les évolutions « simples » à partir d'un état  $E_0$ , et les évolutions « simples radiales » puis nous formulerons un principe de minimum et nous démontrerons que ce principe permet d'écrire des équations équivalentes à celles du comportement élastoplastique et d'équilibre dans le cas des évolutions « simples radiales ».

#### 5.3.1. Définitions des évolutions « simples » et « simples radiales »

Dans le cadre des matériaux qui nous intéressent, l'état isotherme d'une structure à l'instant  $t$  est donné par la transformation  $\underline{x} = \underline{\Phi}(\underline{X}, t)$ ,  $\underline{X} \in \Omega_0$ , le champ des transformations élastiques  $\underline{E}(\underline{X}, t)$  ou, ce qui revient au même, le champs des transformations plastiques  $\underline{P}(\underline{X}, t) = \underline{E}^{-1}(\underline{X}, t) \cdot \underline{F}(\underline{X}, t)$  (avec  $\underline{F} = \underline{\text{Grad}}(\underline{\Phi})$ ) et enfin le champ des déformations plastiques cumulées  $p_{\text{cum}}(\underline{X}, t)$ .

Nommons  $E_0$  l'état de la structure à l'instant  $t_0$  après une certaine évolution élastoplastique.

Nous nous intéressons ici aux évolutions à partir de  $t_0$  ( $t > t_0$ )

L'état « zéro » de la structure est donc caractérisé par la transformation à l'instant  $t_0$   $\underline{x} = \underline{\Phi}^0(\underline{X}) = \underline{\Phi}(\underline{X}, t_0)$ ,  $\underline{X} \in \Omega_0$ , le champ de transformation élastique  $E^0(\underline{X}) = E(\underline{X}, t_0)$  ou le champ de transformation plastique  $P^0(\underline{X}) = P(\underline{X}, t_0)$  et le champs de déformation plastique cumulée  $p_{cum}^0(\underline{X}) = p_{cum}(\underline{X}, t_0)$ .

Nous noterons en outre  $\underline{\underline{F}}^0(\underline{X}) = \underline{\underline{F}}(\underline{X}, t_0)$  et  $\underline{\underline{J}}^0(\underline{X}) = \underline{\underline{J}}(\underline{X}, t_0)$

$\underline{\underline{E}}^0(\underline{X}) = \underline{\underline{F}}^0(\underline{X})\underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X})$  doit être symétrique

$\underline{\Phi}(\underline{X}, t_0)$  doit être cinématiquement admissible, c'est-à-dire vérifier les conditions aux limites en position à l'instant  $t_0$ .

$\underline{\underline{E}}^0(\underline{X})$  (ou  $\underline{\underline{P}}^0(\underline{X})$ ) doit être tel que  $\det(\underline{\underline{P}}^0(\underline{X})) = 1$  et le champs de contrainte

$$\underline{\underline{B}}^0(\underline{X}) = \left[ \frac{\mu_0}{J^{0\frac{2}{3}}} \underline{\underline{E}}^0 \cdot {}^t \underline{\underline{E}}^0 + \left( k_0 J^0 (J^0 - 1) - \frac{\mu_0}{J^{0\frac{2}{3}}} \frac{tr(\underline{\underline{E}}^0 \cdot {}^t \underline{\underline{E}}^0)}{3} \right) \right] \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{0-1}$$
 soit admissible, c'est-à-dire

vérifier  $\underline{\underline{Div}}(\underline{\underline{B}}^0(\underline{X})) = \underline{\underline{F}}_d(\underline{X}, t_0)$  et les conditions aux limites en vecteur contrainte

$\underline{\underline{B}}^0(\underline{X}) \cdot \underline{N}(\underline{X}) = \underline{\underline{T}}_d(\underline{X}, t_0)$  où  $\underline{\underline{F}}_d(\underline{X}, t_0)$  est l'effort volumique extérieur dans le domaine  $\Omega_0$  et  $\underline{\underline{T}}_d(\underline{X}, t_0)$  est l'effort surfacique extérieur sur la partie  $\partial\Omega_{0T}$  de la frontière sur laquelle il est imposé à l'instant  $t_0$

*Remarque :*

*Les efforts extérieurs sont bien sûr appliqués dans la configuration actuelle, cependant il est souvent préférable de les transporter dans la configuration de référence où ils sont le plus souvent plus clairement définis. Considérons en effet par exemple une force massique. La force volumique  $\underline{\underline{F}}_d$  n'est alors connue que dans la configuration de référence car la masse volumique  $\rho_0$  y est connu, ce qui n'est pas le cas de  $\rho$  dans la configuration actuelle. Autre exemple, les efforts sur les structures sont le plus souvent connus via la résultante des forces surfaciques sur une portion de la surface (pensez à un essai de traction). Le vecteur de contrainte correspondant n'est vraiment connu que dans la configuration de référence où la mesure de la surface est connue.*

Enfin, si l'état initial de la structure était naturel ( $\underline{\underline{E}}(\underline{X}, 0) = \underline{\underline{I}}$ ,  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, 0) = \underline{\underline{I}}$ ,  $p_{cum}(\underline{X}, 0) = 0$ ), il est nécessaire que  $p_{cum}(\underline{X})$  soit « assez grand » pour être cohérent avec  $\underline{\underline{P}}^0(\underline{X})$ . Cette condition n'est pas triviale mais nous la supposons vérifiée.

Nous nous intéressons ci-dessous à l'évolution entre  $t_0$  et  $t$ . En particulier, l'évolution plastique entre  $t_0$  et  $t$  est caractérisée par le champ de tenseur  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X})$ .

Le tenseur  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X})$  peut toujours être factorisé sous la forme :

$$\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X}) = \underline{\underline{R}}(\underline{X}, t) \cdot \begin{bmatrix} p_1(\underline{X}, t) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(\underline{X}, t) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(\underline{X}, t) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}}(\underline{X}, t) \quad (5.21)$$

où  $\underline{\underline{R}}(\underline{X}, t)$  et  $\underline{\underline{O}}(\underline{X}, t)$  sont des tenseurs orthogonaux et  $p_1, p_2, p_3$  sont appelées les élongations plastiques principales dans l'évolution à partir de l'état  $E_0$

Notons que  $\det(\underline{\underline{P}}^0(\underline{X})) = 1$  et  $\det(\underline{\underline{P}}) = 1$  implique  $p_1 p_2 p_3 = 1$

Nous pouvons exprimer  $\dot{\underline{\underline{P}}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{X}, t) = \underline{\underline{d}}_p(\underline{X}, t) + \underline{\underline{\Omega}}_p(\underline{X}, t) \left( \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \frac{\dot{\underline{\underline{P}}}}{\underline{\underline{P}}} \cdot (\underline{\underline{P}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1})^{-1} \right)$

$$\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \dot{\underline{\underline{R}}} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} + \underline{\underline{R}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p}_1 & 0 & 0 \\ p_1 & & \\ 0 & \dot{p}_2 & 0 \\ & p_2 & \\ 0 & 0 & \dot{p}_3 \\ & & p_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} + \underline{\underline{R}} \cdot \begin{bmatrix} p_1 & 0 & 0 \\ 0 & p_2 & 0 \\ 0 & 0 & p_3 \end{bmatrix} \cdot \dot{\underline{\underline{O}}} \cdot \underline{\underline{O}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} p_1^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & p_2^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & p_3^{-1} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \quad (5.22)$$

Les évolutions « simples » à partir de l'état  $E_0$  sont, par définition, les évolutions telles que  $\underline{\underline{O}}(\underline{X}, t)$  ne dépend pas de  $t$  (le troisième terme du membre de droite ci-dessus est donc nul).

On peut dire de manière un peu schématique que dans une phase d'évolution « simple », c'est le même mécanisme plastique qui est à l'ouvrage à l'échelle microscopique du poly cristal. On a ainsi l'espoir que l'étude particulière de cette famille d'évolutions présente un intérêt, et que beaucoup d'évolutions réelles peuvent être assez bien approchées par une succession de phase d'évolutions « simples » par morceaux.

Elles présentent en effet des caractéristiques particulières déduites de l'équation ci-dessus qui en facilite grandement l'analyse.

On voit ainsi clairement que pour ces évolutions simples.

La partie antisymétrique de  $\dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$  est  $\underline{\underline{\Omega}}_p(\underline{X}, t) = \dot{\underline{\underline{R}}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{X}, t)$

$$\text{La partie symétrique de } \dot{\underline{\underline{P}}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \text{ est } \underline{\underline{d}}_p = \underline{\underline{R}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{p}_1 & 0 & 0 \\ p_1 & & \\ 0 & \dot{p}_2 & 0 \\ & p_2 & \\ 0 & 0 & \dot{p}_3 \\ & & p_3 \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{R}}^{-1} \quad (\underline{\underline{R}}^{-1} = {}^t \underline{\underline{R}})$$

Il est alors commode d'introduire les variables  $q_1 = \ln(p_1)$ ,  $q_2 = \ln(p_2)$ ,  $q_3 = \ln(p_3)$  que nous appellerons les déformations plastiques logarithmiques à partir de l'état  $E_0$ .

(On a bien sûr  $q_1 + q_2 + q_3 = 0$  et, de plus,  $\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = \dot{q}_3 = 0$  si  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X})$  est un tenseur orthogonal).

L'histoire de l'évolution de la transformation plastique  $\underline{\underline{P}}(\underline{X}, t) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{X})$  à partir de l'état  $E_0$  peut alors être représentée par un trajet de  $(q_1, q_2, q_3)$  dans le plan du déviateur des déformations plastiques logarithmiques.

Pour ces évolutions simples,

$$\dot{p}_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} \underline{\underline{d}}^p : \underline{\underline{d}}^p} = \sqrt{\frac{2}{3} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2 + \dot{q}_3^2)} \quad (5.23)$$

Ainsi, si l'on considère une phase d'évolution simple, représentée par un trajet de  $(q_1, q_2, q_3)$  dans le plan du déviateur des déformations plastiques logarithmiques à partir de l'état  $E_0$ , commençant à  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ , la variation de déformation plastique cumulée  $\Delta p_{cum} = p_{cum}(t) - p_{cum}(t_0)$  est la longueur de la courbe décrite par  $(q_1, q_2, q_3)$  dans ce plan, multipliée par  $\sqrt{\frac{2}{3}}$ .

Les phases d'évolutions « simples radiales » sont, par définition, les évolutions simples telles que le trajet de  $(q_1, q_2, q_3)$  soit un segment de droite dans le plan du déviateur des déformations plastiques logarithmiques (commençant à  $q_1 = q_2 = q_3 = 0$  au début de la phase).

Pour les évolutions simples radiales, on voit que :

$$p_{cum}(t) - p_{cum}(t_0) = \Delta p_{cum} = \sqrt{\frac{2}{3} (q_1^2 + q_2^2 + q_3^2)} = \sqrt{\frac{2}{3} [(\ln(p_1))^2 + (\ln(p_2))^2 + (\ln(p_3))^2]} \quad (5.24)$$

En particulier dans une expérience de traction simple commençant à partir de l'état naturel

$$p_1 = p, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{p}}, \quad p_3 = \frac{1}{\sqrt{p}}. \quad \text{On retrouve bien } p_{cum} = |\ln(p)|.$$

Les évolutions composées de phases d'évolutions « simples radiales » sont probablement rares dans les processus de mise en forme des matériaux métalliques, mais elles peuvent être de bonnes approximations des évolutions réelles. Nous espérons qu'il en est ainsi pour ce qui est du processus de laminage.

### 5.3.2. Principe de minimum

La formulation d'un principe de minimum pour la détermination de l'état d'une structure déformée par un chargement, suppose de commencer par définir un ensemble fonctionnel

dont les éléments pourraient chacun décrire un état possible de cette structure, puis d'introduire une fonctionnelle, à valeur réelle, définie sur cet ensemble fonctionnel, dont la valeur prise pour l'état actuel de la structure sera le minimum de l'ensemble des valeurs de la fonctionnelle prise sur l'ensemble considéré.

C'est ce que nous allons tenter de faire maintenant.

Nous nous intéressons aux évolutions à partir de l'état  $E_0$  caractérisé par  $\underline{\Phi}^0(\underline{X})$  et  $\underline{P}^0(\underline{X})$

Notons  $CA(t)$  (Cinématiquement Admissible à l'instant  $t$ ) l'ensemble des couples de champs  $(\underline{\Phi}^*(\underline{X}), \underline{P}^*(\underline{X}))$ ,  $\underline{X} \in \Omega_0$  tels que  $\underline{\Phi}^*(\underline{X})$  vérifie les données en déplacement du problème à l'instant  $t$ ,  $\det(\underline{P}^*(\underline{X}))=1$  et  $\underline{Grad}(\underline{\Phi}^*)(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X})$  symétrique.

Il est toujours possible de factoriser  $\underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{0-1}(\underline{X})$  :

$$\underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{0-1}(\underline{X}) = \underline{R}^*(\underline{X}) \cdot \begin{bmatrix} p_1^*(\underline{X}) & 0 & 0 \\ 0 & p_2^*(\underline{X}) & 0 \\ 0 & 0 & p_3^*(\underline{X}) \end{bmatrix} \cdot \underline{O}^*(\underline{X}) \quad (5.25)$$

où  $\underline{R}^*(\underline{X})$  et  $\underline{O}^*(\underline{X})$  sont des tenseurs orthogonaux et  $p_1^*, p_2^*, p_3^*$  sont tels que  $\det(\underline{P}^*) = p_1^* p_2^* p_3^* = 1$ .

Il est toujours possible de trouver une évolution simple radiale qui démarre de l'état  $E_0$  et qui s'achève à l'instant  $t$  en  $\underline{P}^*(\underline{X})$ .

Nous noterons :

$$p_{cum}^*(\underline{X}) = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ \left( \ln(p_1^*(\underline{X})) \right)^2 + \left( \ln(p_2^*(\underline{X})) \right)^2 + \left( \ln(p_3^*(\underline{X})) \right)^2 \right]} + p_{cum}^0(\underline{X}) \quad (5.26)$$

Il s'agit du champ de déformation plastique cumulée dans la structure si l'évolution à partir de l'état « zéro » jusqu'à l'état  $(\underline{\Phi}^*(\underline{X}), \underline{P}^*(\underline{X}))$  était simple et radiale.

Envisageons une petite variation  $(\delta \underline{\Phi}^*(\underline{X}), \delta \underline{P}^*(\underline{X}))$  au voisinage de  $(\underline{\Phi}^*(\underline{X}), \underline{P}^*(\underline{X}))$ .

La condition  $\det(\underline{P}^*(\underline{X}) + \delta \underline{P}^*(\underline{X})) = 1$  impose  $tr(\delta \underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X})) = 0$  au premier ordre.

Etudions maintenant les conséquences de la condition  $\underline{Grad}(\underline{\Phi}^* + \delta \underline{\Phi}^*)(\underline{X}) \cdot (\underline{P}^* + \delta \underline{P}^*)^{-1}(\underline{X})$  symétrique.

Notons  $\underline{F}^*(\underline{X}) = \underline{Grad}(\underline{\Phi}^*)(\underline{X})$ ,  $\underline{E}^* = \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$ ,  $\delta \underline{F}^*(\underline{X}) = \underline{Grad}(\delta \underline{\Phi}^*)(\underline{X})$

Nous avons  $(\underline{P}^* + \delta \underline{P}^*)^{-1} = \left[ (\underline{I}^* + \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) \cdot \underline{P}^* \right]^{-1}$  ou encore :

$(\underline{P}^* + \delta \underline{P}^*)^{-1} = \underline{P}^{*-1} \cdot (\underline{I}^* + \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1})^{-1} \approx \underline{P}^{*-1} \cdot (\underline{I}^* - \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1})$  au premier ordre en  $\delta \underline{P}^*$

Nous déduisons  $(\underline{F}^* + \delta \underline{F}^*) \cdot (\underline{P}^* + \delta \underline{P}^*)^{-1} \approx \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} + \delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} - \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} \cdot \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$  au premier ordre.

De plus,  $\underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$  étant symétrique, la condition  $\underline{Grad}(\underline{\Phi}^* + \delta \underline{\Phi}^*)(\underline{X}) \cdot (\underline{P}^* + \delta \underline{P}^*)^{-1}(\underline{X})$

symétrique implique donc au premier ordre  $\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} - \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} \cdot \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$  symétrique.

Rappelons que  $\underline{E}^* = \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$

Introduisons comme au chapitre 3 les termes  $\underline{I}_{\underline{1}}^* = \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_2 - \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_3, \underline{I}_{\underline{2}}^* = \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_3 - \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_1,$   
 $\underline{I}_{\underline{3}}^* = \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_1 - \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_2$

La condition  $\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} - \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1} \cdot \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1}$  symétrique implique que  $\delta \underline{P}^*$  doit être choisi pour vérifier les équations suivantes :

$$\forall i \in (1, 3) \quad (\underline{E}^* \cdot \delta \underline{P}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) : \underline{I}_i^* = (\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) : \underline{I}_i^* \quad (5.27)$$

Décomposons  $\delta \underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X})$  en ses parties antisymétrique et symétrique.

$$\delta \underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X}) = \begin{bmatrix} 0 & -\delta \Omega_3^* & \delta \Omega_2^* \\ \delta \Omega_3^* & 0 & -\delta \Omega_1^* \\ -\delta \Omega_2^* & \delta \Omega_1^* & 0 \end{bmatrix} + \underline{\delta}^{p^*} \quad (\underline{\delta}^{p^*} \text{ symétrique})$$

Ou encore  $\delta \underline{P}^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X}) = \delta \Omega_1^* \cdot \underline{I}_{\underline{1}}^* + \delta \Omega_2^* \cdot \underline{I}_{\underline{2}}^* + \delta \Omega_3^* \cdot \underline{I}_{\underline{3}}^* + \underline{\delta}^{p^*}$

Par exemple, étudions les petites variations particulières tel que  $\underline{E}^* \cdot \underline{\delta}^{p^*}$  soit symétrique.

Alors, les équations (5.27) impliquent comme au chapitre 3 :

$$\begin{pmatrix} \delta \Omega_1^* \\ \delta \Omega_2^* \\ \delta \Omega_3^* \end{pmatrix} = (\underline{E}^* - \text{tr}(\underline{E}^*) \underline{I})^{-1} \cdot \begin{pmatrix} (\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) : \underline{I}_{\underline{1}}^* \\ (\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) : \underline{I}_{\underline{2}}^* \\ (\delta \underline{F}^* \cdot \underline{P}^{*-1}) : \underline{I}_{\underline{3}}^* \end{pmatrix} \quad (5.28)$$

Ainsi, si  $\delta \underline{P}^*(\underline{X})$  est tel que  $\underline{E}^* \cdot \underline{\delta}^{p^*}$  symétrique, il est astreint (au premier ordre) à rester dans un espace vectoriel de dimension 5 car les 4 équations encadrées ci-dessus sont linéaires en  $\delta \underline{P}^*(\underline{X})$ .

Pour être plus concis, la partie antisymétrique de  $\delta^*(\underline{X}) \cdot \underline{P}^{*-1}(\underline{X})$  est entièrement déterminée par  $\delta \underline{F}^*$  et la trace de sa partie symétrique  $\underline{\delta}^{p^*}$  est nulle.

Nous allons maintenant définir sur l'ensemble  $CA(t)$  une fonctionnelle que nous appellerons « Energie totale ».

Notons  $J^* = \det(\underline{\underline{F}}^*) = \det(\underline{\underline{E}}^*)$

$$\underline{\underline{E}}^* = J^{*\frac{-1}{3}} \underline{\underline{E}}^* \text{ et } \underline{\underline{I}}_1^* = tr(\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^*)$$

$W(\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}}^*) = \int_{\Omega_0} \left( \frac{\mu_0}{2} (\underline{\underline{I}}_1^*(\underline{\underline{X}}) - 3) + \frac{k_0}{2} (J^*(\underline{\underline{X}}) - 1)^2 \right) d\Omega$  représente l'énergie élastique qui serait stockée dans la structure si la transformation était  $\underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}})$  et le champ des transformations plastiques  $\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})$ .

Notons  $D(\underline{\underline{P}}^*) = \int_{\Omega_0} K(p_{cum}^*(\underline{\underline{X}})) d\Omega$  où  $p_{cum}^*$  est donné par l'équation(5.26). La grandeur

$D(\underline{\underline{P}}^*) - \int_{\Omega_0} K(p_{cum}^0(\underline{\underline{X}})) d\Omega$  représente l'énergie qui serait dissipée dans la structure dans une évolution « simple radiale » depuis l'état  $E_0$  jusqu'au champ des transformations plastiques  $\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})$ . (Rappelons que  $\frac{dK}{dp_{cum}}(p_{cum}) = k(p_{cum})$ )

$\Upsilon(\underline{\underline{\Phi}}^*) = \int_{\Omega_0} \underline{\underline{F}}_d(\underline{\underline{X}}, t) \underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{0T}} \underline{\underline{T}}_d(\underline{\underline{X}}, t) \underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}}) dS$  est le potentiel des efforts extérieurs à l'instant  $t$  dans la transformation ( $\underline{\underline{F}}_d(\underline{\underline{X}}, t)$ ) est l'effort volumique extérieur dans  $\Omega_0$  et  $\underline{\underline{T}}_d(\underline{\underline{X}}, t)$  l'effort surfacique extérieur sur la partie  $\partial\Omega_{0T}$  de la frontière sur laquelle il est imposé à l'instant  $t$ ).

La fonctionnelle « Energie totale » est :

$$\Sigma(\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}}^*) = W(\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}}^*) + D(\underline{\underline{P}}^*) - \Upsilon(\underline{\underline{\Phi}}^*) \quad (5.29)$$

Notons que la seule référence à l'état de départ  $E_0$  dans cette fonctionnelle se trouve dans  $D(\underline{\underline{P}}^*)$  via la définition de  $p_{cum}^*$  (équation(5.26)) qui fait référence à la factorisation de  $\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}})$  (équation (5.25)).

Supposons que cette fonctionnelle admette sur  $CA(t)$  un minimum pour un élément particulier noté  $(\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}), \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}))$  (Par la suite toutes les notations sans \* se réfèrent à ce couple de champs).

La factorisation de  $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}})$  permet de déterminer les tenseurs orthogonaux  $\underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{X}})$ ,  $\underline{\underline{R}}(\underline{\underline{X}})$  et les élongations plastiques principales dans l'évolution depuis l'état « zéro »  $p_1(\underline{\underline{X}})$ ,  $p_2(\underline{\underline{X}})$ ,  $p_3(\underline{\underline{X}})$  ( $p_1(\underline{\underline{X}}) \cdot p_2(\underline{\underline{X}}) \cdot p_3(\underline{\underline{X}}) = 1$ ) :

$$\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}).\underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{X}}) \cdot \begin{bmatrix} p_1(\underline{\underline{X}}) & 0 & 0 \\ 0 & p_2(\underline{\underline{X}}) & 0 \\ 0 & 0 & p_3(\underline{\underline{X}}) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{Q}}(\underline{\underline{X}}) \quad (5.30)$$

Intéressons-nous aux équations vérifiées par  $(\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}), \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}))$ .

Comme  $(\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}), \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}))$  est un minimum de  $\Sigma(\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}}^*)$  sur  $CA(t)$ , la variation au premier ordre est nulle au voisinage de  $(\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}), \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}))$ .

$$\Sigma(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*) = W(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*) + D(\underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*) - \Upsilon(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*) \quad (5.31)$$

Calculons  $\Sigma(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*)$  au premier ordre en utilisant l'équivalence de l'équation (3.9) adaptée à notre cas :

$$W(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*) = W(\underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{P}}) + \int_{\Omega_0} \left( \mu_0 \left( \overline{\underline{\underline{E}}} \cdot \overline{\underline{\underline{E}}} \right) : Dev(\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) + k_0 J (J-1) tr(\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \right) d\Omega \quad (5.32)$$

$$\text{Où } \delta\underline{\underline{E}}^* \approx (\underline{\underline{F}} + \delta\underline{\underline{F}}^*) \cdot (\underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*)^{-1} - \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \approx \delta\underline{\underline{F}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}$$

Considérons le premier terme sous l'intégrale

$$\begin{aligned} \mu_0 \left( \overline{\underline{\underline{E}}} \cdot \overline{\underline{\underline{E}}} \right) : Dev(\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) &= \mu_0 Dev \left( \frac{\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}}{J^{\frac{2}{3}}} \right) : (\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \\ &= \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) : (\delta\underline{\underline{F}}^* \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) \\ &= \left[ \underline{\underline{F}}^{-1} \cdot \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) \right] : \delta\underline{\underline{F}}^* - \left[ \underline{\underline{E}}^{-1} \cdot \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{\underline{E}} \right] : (\delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) \end{aligned}$$

$$\text{Si nous notons } \underline{\underline{B}}^1 = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} \text{ et } \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^1 = \frac{\mu_0}{J^{\frac{2}{3}}} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} tr(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right)$$

Le premier terme sous l'intégrale s'écrit :

$$\mu_0 \left( \overline{\underline{\underline{E}}} \cdot \overline{\underline{\underline{E}}} \right) : Dev(\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) = \underline{\underline{B}}^1 : \delta\underline{\underline{F}}^* - \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^1 : (\delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) \quad (5.33)$$

Considérons maintenant le deuxième terme sous l'intégrale :

$$k_0 J (J-1) tr(\delta\underline{\underline{E}}^* \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) = k_0 J (J-1) tr(\delta\underline{\underline{F}}^* \cdot \underline{\underline{F}}^{-1} - \underline{\underline{E}} \cdot \delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1})$$

$$\text{Si nous notons } \underline{\underline{B}}^2 = k_0 J (J-1) \underline{\underline{F}}^{-1} \text{ et } \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^2 = k_0 J (J-1) \underline{\underline{I}}$$

Le deuxième terme sous l'intégrale s'écrit :

$$k_0 J(J-1) \text{tr}(\delta \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}^{-1}) = {}^t \underline{\underline{B}}^2 : \delta \underline{\underline{F}}^* - \psi_{\underline{\underline{Rel}}}^2 : (\delta \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) \quad (5.34)$$

Rassemblons ces termes et notons  $\underline{\underline{B}}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{B}}^1(\underline{\underline{X}}) + \underline{\underline{B}}^2(\underline{\underline{X}})$  et  $\psi_{\underline{\underline{Rel}}}(\underline{\underline{X}}) = \psi_{\underline{\underline{Rel}}}^1(\underline{\underline{X}}) + \psi_{\underline{\underline{Rel}}}^2(\underline{\underline{X}})$

Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{X}}) &= \frac{\mu_0}{J^3} \left( \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) \cdot {}^t \underline{\underline{F}}^{-1} + k_0 J(J-1) {}^t \underline{\underline{F}}^{-1} \\ \psi_{\underline{\underline{Rel}}}(\underline{\underline{X}}) &= \frac{\mu_0}{J^3} \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}) \underline{\underline{I}} \right) + k_0 J(J-1) \underline{\underline{I}} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Ainsi, au premier ordre :

$$W(\underline{\underline{\Phi}} + \delta \underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*) = W(\underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{P}}) + \int_{\Omega_0} \left( {}^t \underline{\underline{B}}(\underline{\underline{X}}) : \delta \underline{\underline{F}}^*(\underline{\underline{X}}) - \psi_{\underline{\underline{Rel}}}(\underline{\underline{X}}) : (\delta \underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{\underline{X}})) \right) d\Omega \quad (5.36)$$

En intégrant par partie le premier terme sous l'intégrale, on trouve au premier ordre :

$$W(\underline{\underline{\Phi}} + \delta \underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*) = W(\underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{P}}) + \int_{\Omega_0} \left( -\text{Div} \underline{\underline{B}} \cdot \delta \underline{\underline{\Phi}}^* - \psi_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) \right) d\Omega + \int_{\partial \Omega_0} (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{N}}) \cdot \delta \underline{\underline{\Phi}}^* dS \quad (5.37)$$

Calculons maintenant  $D(\underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*)$  au premier ordre :

$$D(\underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*) = D(\underline{\underline{P}}) + \int_{\Omega_0} k(p_{cum}(\underline{\underline{X}})) \delta p_{cum}^*(\underline{\underline{X}}) d\Omega \quad (5.38)$$

Calculons  $\Upsilon(\underline{\underline{\Phi}} + \delta \underline{\underline{\Phi}}^*)$  au premier ordre :

$$\Upsilon(\underline{\underline{\Phi}} + \delta \underline{\underline{\Phi}}^*) = \Upsilon(\underline{\underline{\Phi}}) + \int_{\Omega_0} \underline{\underline{F}}_d(\underline{\underline{X}}, t) \cdot \delta \underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}}) d\Omega + \int_{\partial \Omega_0} \underline{\underline{T}}_d(\underline{\underline{X}}, t) \cdot \delta \underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}}) dS \quad (5.39)$$

La variation au premier ordre de  $\Sigma(\underline{\underline{\Phi}} + \delta \underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*)$  est nulle  $\forall \delta \underline{\underline{\Phi}}^*, \delta \underline{\underline{P}}^*$  admissible :

$$\int_{\Omega_0} \left( -(\text{Div} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{F}}_d) \delta \underline{\underline{\Phi}}^* - \psi_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) + k(p_{cum}) \delta p_{cum}^* \right) d\Omega + \int_{\partial \Omega_0} (\underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{N}} - \underline{\underline{T}}_d) \cdot \delta \underline{\underline{\Phi}}^* dS = 0 \quad (5.40)$$

Choisissons tout d'abord une variation  $(\delta \underline{\underline{\Phi}}^*(\underline{\underline{X}}), \delta \underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}}))$  telle que  $\underline{\underline{\delta}}^{p^*}$ , la partie symétrique de  $\delta \underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{\underline{X}})$ , soit nulle (ce que l'on pourrait appeler une variation « élastique »).

Dans ce cas  $\delta p_{cum}^*(\underline{\underline{X}}) = (\delta \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1})_{sym} = 0$  et  $\psi_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta \underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) = 0$  (car  $\psi_{\underline{\underline{Rel}}}$  symétrique)

La nullité de la variation au premier ordre  $\forall \delta \underline{\underline{\Phi}}^*$  implique alors :

$$\begin{aligned} \text{Div} \underline{\underline{B}} + \underline{\underline{F}}_d &= 0 \\ \underline{\underline{B}} \cdot \underline{\underline{N}} &= \underline{\underline{T}}_d \end{aligned} \quad (5.41)$$

Ces équations s'identifient aux équations d'équilibre de la configuration de référence.

Ainsi,  $\underline{\underline{B}}$  s'identifie bien au tenseur de contrainte de Boussinesq dans la configuration de référence (ce que la notation avait anticipée) et l'expression de  $\underline{\underline{B}}$  est identique à celle démontrée au chapitre 3.

En utilisant l'équation (5.41), nous obtenons la variation au premier ordre de la fonctionnelle « Energie totale » :

$$\Sigma(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*) - \Sigma(\underline{\underline{\Phi}}, \underline{\underline{P}}) = \int_{\Omega_0} \left( -\psi_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta\underline{\underline{P}}^* \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}) + k(p_{cum}) \delta p_{cum}^* \right) d\Omega \quad (5.42)$$

Considérons une variation  $(\delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \delta\underline{\underline{P}}^*)$

La factorisation de  $(\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}) + \delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}})$  permet la détermination de 2 tenseurs orthogonaux  $\underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}})$ ,  $\underline{\underline{O}}^*(\underline{\underline{X}})$  et les 3 élongations plastiques principales  $p_1^*(\underline{\underline{X}})$ ,  $p_2^*(\underline{\underline{X}})$ ,  $p_3^*(\underline{\underline{X}})$  ( $p_1^*(\underline{\underline{X}}) \cdot p_2^*(\underline{\underline{X}}) \cdot p_3^*(\underline{\underline{X}}) = 1$ ) :

$$(\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}) + \delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \begin{bmatrix} p_1^*(\underline{\underline{X}}) & 0 & 0 \\ 0 & p_2^*(\underline{\underline{X}}) & 0 \\ 0 & 0 & p_3^*(\underline{\underline{X}}) \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}}^*(\underline{\underline{X}}) \quad (5.43)$$

Considérons des variations  $\delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})$  particulières telles que  $\underline{\underline{O}}^*(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{O}}(\underline{\underline{X}})$  (prolongement de l'évolution simple). Donc, l'équation (5.43) devient :

$$(\underline{\underline{I}} + \delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \begin{bmatrix} p_1^* & 0 & 0 \\ 0 & p_2^* & 0 \\ 0 & 0 & p_3^* \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{O}}(\underline{\underline{X}}) \quad (5.44)$$

En utilisant l'expression de  $\underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{0-1}(\underline{\underline{X}})$  (équation (5.30)), nous obtenons :

$$\underline{\underline{I}} + \delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{P}}^{-1}(\underline{\underline{X}}) = \underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \begin{bmatrix} \frac{p_1^*}{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{p_2^*}{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{p_3^*}{p_3} \end{bmatrix} \cdot \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{X}}) \quad (5.45)$$

$\delta\underline{\underline{P}}^*(\underline{\underline{X}})$  étant petit, il est possible d'écrire :

$$\underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \approx \underline{\underline{R}}(\underline{\underline{X}}) + \delta\underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \text{ avec } \delta\underline{\underline{R}}^*(\underline{\underline{X}}) \cdot \underline{\underline{R}}^{-1}(\underline{\underline{X}}) \text{ antisymétrique}$$

$$\text{et } p_i^* \approx p_i + \delta p_i^*$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation (5.45), on obtient au premier ordre :

$$\delta \underline{\underline{P}}^* (\underline{X}) . \underline{\underline{P}}^{-1} (\underline{X}) = \delta \underline{\underline{R}}^* (\underline{X}) . {}^t \underline{\underline{R}} (\underline{X}) + \underline{\underline{R}} (\underline{X}) \begin{bmatrix} \frac{\delta p_1^*}{p_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\delta p_2^*}{p_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\delta p_3^*}{p_3} \end{bmatrix} . {}^t \underline{\underline{R}} (\underline{X}) \quad (5.46)$$

Au premier ordre, le premier terme du membre de droite est antisymétrique et le second est symétrique.

Nous avons au premier ordre :

$$\delta p_{cum}^* = \sqrt{\frac{2}{3} \left[ \left( \frac{\delta p_1^*}{p_1} \right)^2 + \left( \frac{\delta p_2^*}{p_2} \right)^2 + \left( \frac{\delta p_3^*}{p_3} \right)^2 \right]} \quad (5.47)$$

Si  $(\underline{\Phi}(\underline{X}), \underline{\underline{P}}(\underline{X}))$  réalise un minimum de la fonctionnelle « Energie totale »  $\Sigma(\underline{\Phi}, \underline{\underline{P}})$ , la variation au premier ordre de  $\Sigma(\underline{\Phi} + \delta \underline{\Phi}^*, \underline{\underline{P}} + \delta \underline{\underline{P}}^*)$  doit être positive pour  $\forall \delta \underline{\Phi}^*, \delta \underline{\underline{P}}^*$  admissible. C'est à dire :

$$\int_{\Omega_0} \left( -\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta \underline{\underline{P}}^* . \underline{\underline{P}}^{-1}) + k(p_{cum}) \delta p_{cum}^* \right) d\Omega \geq 0 \quad \forall \delta \underline{\underline{P}}^* \text{ admissible} \quad (5.48)$$

Nous allons en déduire par l'absurde que  $\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}$  vérifie le critère  $\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d : \underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) \leq 0$

où  $\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d$  est la partie déviatorique de  $\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}$

Supposons le contraire et choisissons  $\delta \underline{\underline{P}}^* = \lambda \underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d . \underline{\underline{P}} \quad (\lambda > 0)$

(Ce choix est acceptable car  $tr(\delta \underline{\underline{P}}^* . \underline{\underline{P}}^{-1}) = 0$  et  $\delta \underline{\underline{P}}^* . \underline{\underline{P}}^{-1}$  étant symétrique, il suffit de choisir  $\delta \underline{\Phi}^* = 0$  par exemple).

Avec ce choix de  $\delta \underline{\underline{P}}^*$ , nous avons  $\delta p_{cum}^* = \lambda \sqrt{\frac{2}{3} (\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d : \underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d)}$ .

En reportant cette expression de  $\delta p_{cum}^*$  dans l'équation (5.48), nous obtenons :

$$\int_{\Omega_0} \left( -\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}} : (\delta \underline{\underline{P}}^* . \underline{\underline{P}}^{-1}) + k(p_{cum}) \lambda \sqrt{\frac{2}{3} (\underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d : \underline{\psi}_{\underline{\underline{Rel}}}^d)} \right) d\Omega \geq 0 \quad \forall \delta \underline{\underline{P}}^* \text{ admissible} \quad (5.49)$$

Si  $\underline{\underline{\psi}}_{Rel}^d : \underline{\underline{\psi}}_{Rel}^d > \frac{2}{3}k^2(p_{cum})$  (hypothèse de la démonstration par l'absurde). Cela implique que la variation au premier ordre de  $\Sigma(\underline{\underline{\Phi}} + \delta\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}} + \delta\underline{\underline{P}}^*)$  est négative ce qui est en contradiction avec le fait que  $(\underline{\underline{\Phi}}(X), \underline{\underline{P}}(X))$  réalise un minimum.

La grandeur  $\underline{\underline{\psi}}_{Rel}$  (notée ainsi par anticipation du résultat démontré ici) joue donc bien le rôle de la contrainte plastique définie au chapitre 3 et son expression donnée à l'équation (5.35) est identique à celle donnée à l'équation (3.16). Au minimum s'il existe, la contrainte plastique vérifie le critère.

L'ensemble des équations du problème d'élastoplastique sont ainsi vérifiées lorsque le minimum de notre fonctionnelle écrite dans une évolution simple radiale.

Soulignons la limite principale de cette approche. Nous avons fait l'hypothèse qu'il existe un couple  $(\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}}), \underline{\underline{P}}(\underline{\underline{X}}))$  qui est un minimum de  $\Sigma(\underline{\underline{\Phi}}^*, \underline{\underline{P}}^*)$  sur  $CA(t)$ . Nous n'avons pas prouvé que celui-ci existe.

A titre d'illustration, nous allons appliquer cette démarche à l'exemple de « traction » du chapitre 3.

### 5.3.3. Exemple en « traction »

Revenons à l'exemple en « traction » du chapitre 3 avec le tenseur de transformation « total » ci-dessous :

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_2 t \end{bmatrix} \text{ avec } \alpha_1 = 0.1s^{-1}, \alpha_2 = -0.03s^{-1}$$

A l'instant initial ( $t_0 = 0$ )  $\underline{\underline{F}}(0) = \underline{\underline{E}}(0) = \underline{\underline{P}}(0) = \underline{\underline{I}}$ ,  $p_{cum} = 0$ .

$$\text{Par la suite } \underline{\underline{E}}^* = \begin{bmatrix} E_1^* & 0 & 0 \\ 0 & E_2^* & 0 \\ 0 & 0 & E_2^* \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{P}}^* = \begin{bmatrix} p^* & 0 & 0 \\ 0 & p^{*\frac{-1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & p^{*\frac{-1}{2}} \end{bmatrix}$$

La relation  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}}^* \underline{\underline{P}}^*$  nous donne  $E_1^* = \frac{1 + \alpha_1 t}{p^*}$ ,  $E_2^* = (1 + \alpha_2 t) \sqrt{p^*}$

Nous avons la variation du volume  $J = (1 + \alpha_1 t)(1 + \alpha_2 t)^2$

La relation  $\overline{\underline{\underline{E}}}^* = J^{-\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}}^*$  permet de déterminer les grandeurs  $\overline{\underline{\underline{E}}}_1^*$  et  $\overline{\underline{\underline{E}}}_2^*$

$$\bar{E}_1^* = \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}}}{p^* (1+\alpha_2 t)^{\frac{2}{3}}}, \quad \bar{E}_2^* = \frac{(1+\alpha_2 t)^{\frac{1}{3}}}{(1+\alpha_1 t)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{p^*}$$

En utilisant l'équation (5.24), nous avons  $p_{cum}^* = \ln(p^*)$

L'énergie élastique qui serait stockée dans la structure :

$$W(\underline{\Phi}^*, \underline{P}^*) = \int_{\Omega_0} \left( \frac{\mu_0}{2} (\bar{I}_1^*(\underline{X}) - 3) + \frac{k_0}{2} (J(\underline{X}) - 1)^2 \right) d\Omega$$

Où :

$\mu_0$  est le module de cisaillement,  $k_0$  est le module d'incompressibilité

$$\bar{I}_1^* = tr \left( \underline{\bar{E}}^* \cdot \underline{\bar{E}}^* \right) = \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{4}{3}}}{p^{*2} (1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} + \frac{2p^* (1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{\frac{2}{3}}}$$

$$J = (1+\alpha_1 t)(1+\alpha_2 t)^2$$

L'énergie qui serait dissipée dans la structure dans une évolution « simple radiale » :

$$D(\underline{P}^*) = \int_{\Omega_0} K(p_{cum}^*(\underline{X})) d\Omega \quad (\text{avec } \frac{dK}{dp_{cum}}(p_{cum}^*) = k(p_{cum}^*))$$

Rappelons  $k(p_{cum}^*) = \sigma_0 \left[ 1 + \alpha (\exp(p_{cum}^*) - 1) \right]$  avec  $\alpha = 0.01$

Nous déduisons :

$$K(p_{cum}^*) = \sigma_0 (1-\alpha) p_{cum}^* + \alpha \sigma_0 \left[ \exp(p_{cum}^*) - 1 \right] = \sigma_0 (1-\alpha) \ln(p^*) + \alpha \sigma_0 (p^* - 1)$$

Il n'y a pas de potentiel des efforts extérieurs, donc :

$$\Upsilon(\underline{\Phi}^*) = \int_{\Omega_0} \underline{F}_d(\underline{X}, t) \underline{\Phi}^*(\underline{X}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_{0r}} \underline{T}_d(\underline{X}, t) \underline{\Phi}^*(\underline{X}) dS = 0$$

Enfin, la fonctionnelle « Energie totale » est :

$$\Sigma(\underline{\Phi}^*, \underline{P}^*) = W(\underline{\Phi}^*, \underline{P}^*) + D(\underline{P}^*) - \Upsilon(\underline{\Phi}^*) = \int_{\Omega_0} \Theta(p^*) d\Omega \quad (5.50)$$

Où :

$$\Theta(p^*) =$$

$$\left[ \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{4}{3}}}{p^{*2} (1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} + \frac{2p^* (1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{\frac{2}{3}}} - 3 \right) + \frac{k_0}{2} \left( (1+\alpha_1 t)(1+\alpha_2 t)^2 - 1 \right)^2 \right] + \sigma_0 (1-\alpha) \ln(p^*) + \alpha \sigma_0 (p^* - 1)$$

Nous allons donc chercher la valeur de  $p$  qui minimise sans contrainte la fonction  $\Theta(p^*)$  ci-dessus. Dans ce cas-là, l'énergie totale  $\Sigma(\underline{\Phi}^*, \underline{P}^*)$  réalisera un minimum.

A titre d'illustration, nous présentons ci-dessous la fonction  $\Theta(p^*)$ ,  $p^* > 0$  pour 2 instants.

Pour le premier instant, le chargement est encore assez faible pour qu'il n'y ait pas de déformation plastique.

Sur la courbe ci-dessous, on constate que le minimum de la courbe a une valeur inférieure à  $p = 1$ .

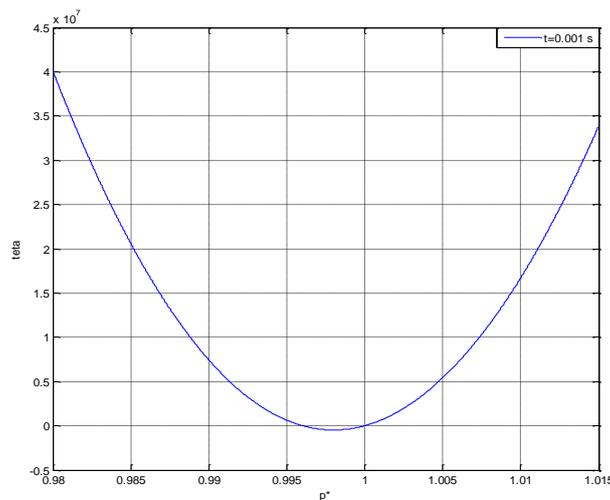


Figure 5-2 : Courbe donnant la fonction  $\Theta(p^*)$  dans une phase élastique

La valeur initiale de  $p$  est 1 et  $p$  doit être croissant. Le minimum de  $\Theta(p^*)$ ,  $p^* \geq 1$  est donc obtenu en  $p = 1$ , nous sommes dans une phase élastique.

Dessignons maintenant la fonction  $\Theta(p^*)$  à un instant ultérieur suffisant grand pour que la plasticité se produise.

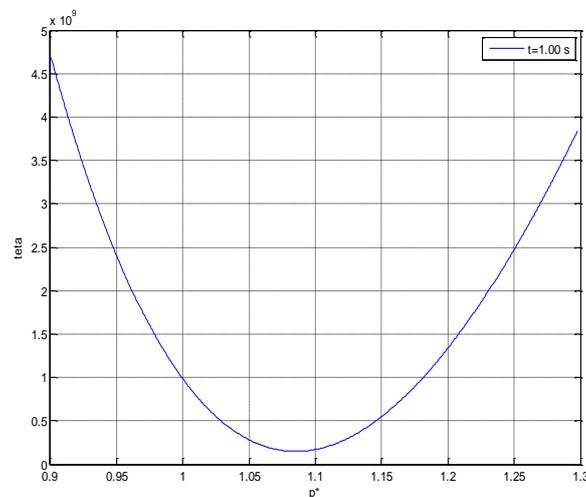


Figure 5-3 : Courbe donnant la fonction  $\Theta(p^*)$  dans une phase plastique

Nous constatons qu'il existe une valeur de  $p > 1$  qui minimise  $\Theta(p^*)$ .

Démontrons tout ceci.

La valeur de  $p$  qui minimise  $\Theta(p^*)$ , donc, vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial \Theta}{\partial p}(p^*) = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{-2(1+\alpha_1 t)^{\frac{4}{3}}}{p^{*3}(1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} + \frac{2(1+\alpha_1 t)^{-\frac{2}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{-\frac{2}{3}}} \right) + \frac{\sigma_0(1-\alpha)}{p^*} + \alpha\sigma_0 = 0$$

Ou encore :

$$\tilde{\Theta}(p^*) = p^{*3} \frac{\partial \Theta}{\partial p}(p^*) = \left[ \mu_0 \frac{(1+\alpha_1 t)^{-\frac{2}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{-\frac{2}{3}}} + \alpha\sigma_0 \right] p^{*3} + \sigma_0(1-\alpha)p^{*2} - \mu_0 \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{4}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} = 0 \quad (5.51)$$

Notons  $C(t) = \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{\frac{2}{3}}}$ , évidemment  $C(t) \geq 1 \quad \forall t$ , l'équation (5.51) devient :

$$\tilde{\Theta}(p^*) = \left[ \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha\sigma_0 \right] p^{*3} + \sigma_0(1-\alpha)p^{*2} - \mu_0 C^2(t) = 0 \quad (5.52)$$

$\tilde{\Theta}(p^*)$  est un polynôme de degré 3 dont la dérivée est positive avec tout  $p^* > 0$  car  $\alpha = 0.01$

Donc, pour  $p^* > 0$ , la fonction  $\tilde{\Theta}(p^*)$  est croissante et  $\tilde{\Theta}(0) = -\mu_0 C^2(t) = -\mu_0 \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{4}{3}}}{(1+\alpha_2 t)^{\frac{4}{3}}} < 0$

car  $\alpha_1 = 0.1s^{-1}$ ,  $\alpha_2 = -0.03s^{-1}$ .

Le polynôme  $\tilde{\Theta}(p^*)$  n'admet donc qu'une racine pour  $p^* > 0$ .

La valeur de racine de  $\tilde{\Theta}(p^*)$  est donnée analytiquement par les formules de Cardan.

Deux cas se présentent alors.

Premier cas, la racine de  $\tilde{\Theta}(p^*)$  est inférieure à 1 et la valeur de  $p$  à retenir est 1. On est dans une phase élastique.

Deuxième cas, la racine de  $\tilde{\Theta}(p^*)$  est supérieure à 1 et l'on retient pour la valeur de  $p$  cette racine. On est dans une phase plastique.

### **Déterminons l'instant de la fin de la phase élastique**

Rappelons que  $p = 1$  pendant la phase élastique.

Notons  $t_0$  l'instant de fin de la phase élastique. Donc,  $t_0$  vérifie l'équation:

$$\frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial p}(p=1) = \left[ \frac{\mu_0}{C(t_0)} + \alpha \sigma_0 \right] + \sigma_0 (1 - \alpha) - \mu_0 C^2(t_0) = 0$$

On voit que  $C(t_0)$  est la racine du polynôme  $\tilde{\Theta}(C)$  :

$$\tilde{\Theta}(C) = C^3 - \frac{\sigma_0}{\mu_0} C - 1 = 0 \quad (5.53)$$

Le polynôme  $\tilde{\Theta}(C)$  n'admet donc qu'une racine pour  $C \geq 1$  :

$$C = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}}$$

$$\text{Donc, } C(t_0) = \frac{(1 + \alpha_1 t_0)^{\frac{2}{3}}}{(1 + \alpha_2 t_0)^{\frac{2}{3}}} = C, \text{ soit :}$$

$$t_0 = \frac{\left[ \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}} \right]^{\frac{3}{2}} - 1}{\alpha_1 - \alpha_2 \left[ \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{4}{27} \left( \frac{\sigma_0}{\mu_0} \right)^3}} \right]^{\frac{3}{2}}} \quad (5.54)$$

Pour tout  $t \leq t_0$ , **la phase est élastique**, donc  $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{I}}$  et  $p = 1$ .

Le tenseur de transformation  $\underline{\underline{E}}$  :

$$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{F}} \cdot \underline{\underline{P}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \alpha_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1 + \alpha_2 t \end{bmatrix}$$

Nous déduisons le tenseur de contrainte Cauchy :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}} + \left( k_0 (J - 1) - \frac{\mu_0}{J^{\frac{5}{3}}} \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot {}^t \underline{\underline{E}})}{3} \right) \underline{\underline{I}}$$

Pour  $t > t_0$ , nous entrons dans **une phase plastique** et  $p$  croit à partir de 1.

Rappelons que

$$\underline{\underline{F}} = \begin{bmatrix} 1+\alpha_1 t & 0 & 0 \\ 0 & 1+\alpha_2 t & 0 \\ 0 & 0 & 1+\alpha_2 t \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{E}} = \begin{bmatrix} E_1 & 0 & 0 \\ 0 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_2 \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{P}} = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p^{\frac{-1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & p^{\frac{-1}{2}} \end{bmatrix}$$

Dans cette phase, nous déterminons analytiquement la valeur de  $p$  à l'aide de l'équation :

$$\tilde{\Theta}(p) = \left[ \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right] p^3 + \sigma_0 (1-\alpha) p^2 - \mu_0 C^2(t) = 0 \quad (5.55)$$

Nous avons alors  $E_1 = \frac{1+\alpha_1 t}{p}$ ,  $E_2 = (1+\alpha_2 t) \sqrt{p}$

Nous allons démontrer que, dans la phase plastique, l'équation (5.55) va impliquer le critère de plasticité (équation (3.20)).

En utilisant l'équation (3.16) et la relation  $\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{E}}$ , nous obtenons :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d = \mu_0 \left( \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{\text{tr}(\underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right) = \frac{\mu_0}{3} \begin{bmatrix} 2(\overline{E}_1^2 - \overline{E}_2^2) & 0 & 0 \\ 0 & \overline{E}_2^2 - \overline{E}_1^2 & 0 \\ 0 & 0 & \overline{E}_2^2 - \overline{E}_1^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{Où } \overline{E}_1 = \frac{(1+\alpha_1 t)^{\frac{2}{3}}}{p(1+\alpha_2 t)^{\frac{2}{3}}} = \frac{C(t)}{p}, \quad \overline{E}_2 = \frac{(1+\alpha_2 t)^{\frac{1}{3}}}{(1+\alpha_1 t)^{\frac{1}{3}}} \sqrt{p} = \sqrt{\frac{p}{C(t)}}$$

Donc,

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) = \frac{\mu_0^2}{9} \left[ 4(\overline{E}_1^2 - \overline{E}_2^2)^2 + (\overline{E}_2^2 - \overline{E}_1^2)^2 + (\overline{E}_2^2 - \overline{E}_1^2)^2 \right] - \frac{2}{3} k^2(p_{cum})$$

$$\text{Rappelons que } k(p_{cum}) = \sigma_0 [1 + \alpha (\exp(p_{cum}) - 1)] = \sigma_0 [1 + \alpha (p - 1)]$$

Utilisons l'expression de  $k(p_{cum})$ , nous avons :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) = \frac{2\mu_0^2}{3} (\overline{E}_1^4 + \overline{E}_2^4 - 2\overline{E}_1^2 \overline{E}_2^2) - \frac{2}{3} [\sigma_0 (1 + \alpha (p - 1))]^2 \quad (5.56)$$

Ou encore :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2(p_{cum}) = \frac{2\mu_0^2}{3} \left( \frac{C^4(t)}{p^4} + \frac{p^2}{C^2(t)} - 2 \frac{C(t)}{p} \right) - \frac{2}{3} \sigma_0^2 (1 + \alpha (p - 1))^2$$

Cette équation se réécrit encore :

$$\begin{aligned} & \left[ \underset{=Rel}{\Psi^d} : \underset{=Rel}{\Psi^d} - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) \right] \frac{3}{2} p^4 \\ & = \frac{\mu_0^2}{C^2(t)} p^6 - 2\mu_0^2 C(t) p^3 + \mu_0^2 C^4(t) - \sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 - 2\sigma_0^2 \alpha (1-\alpha) p^5 - \sigma_0^2 \alpha^2 p^6 \end{aligned} \quad (5.57)$$

Examinons le quatrième terme du membre à droite :

$$-\sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 = -2\sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 + \sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4$$

De plus, l'équation (5.55) nous donne :

$$\sigma_0 (1-\alpha) p^2 = \mu_0 C^2(t) - \left( \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right) p^3$$

Le quatrième terme du membre à droite devient :

$$-\sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 = -2\sigma_0 (1-\alpha) p^2 \left[ \mu_0 C^2(t) - \left( \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right) p^3 \right] + \sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4$$

Ou encore :

$$-\sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 = -2\sigma_0 (1-\alpha) \mu_0 C^2(t) p^2 + 2 \left( \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right) \sigma_0 (1-\alpha) p^5 + \sigma_0^2 (1-\alpha)^2 p^4 \quad (5.58)$$

Identiquement avec le cinquième et sixième terme du membre à droite :

$$-2\sigma_0^2 \alpha (1-\alpha) p^5 - \sigma_0^2 \alpha^2 p^6 = -2\sigma_0 \alpha p^3 \left[ \sigma_0 (1-\alpha) p^2 + \sigma_0 \alpha p^3 \right] + \sigma_0^2 \alpha^2 p^6$$

De plus, l'équation (5.55) nous donne :

$$\sigma_0 (1-\alpha) p^2 + \alpha \sigma_0 p^3 = \mu_0 C^2(t) - \frac{\mu_0}{C(t)} p^3$$

Donc, le cinquième et sixième terme du membre à droite devient :

$$-2\sigma_0^2 \alpha (1-\alpha) p^5 - \sigma_0^2 \alpha^2 p^6 = -2\sigma_0 \alpha p^3 \left[ \mu_0 C^2(t) - \frac{\mu_0}{C(t)} p^3 \right] + \sigma_0^2 \alpha^2 p^6$$

Ou encore :

$$-2\sigma_0^2 \alpha (1-\alpha) p^5 - \sigma_0^2 \alpha^2 p^6 = -2\sigma_0 \alpha \mu_0 C^2(t) p^3 + 2\sigma_0 \alpha \frac{\mu_0}{C(t)} p^6 + \sigma_0^2 \alpha^2 p^6 \quad (5.59)$$

En reportant des expressions (5.58) et (5.59) dans l'équation (5.57), nous obtenons :

$$\left[ \underset{=Rel}{\Psi^d} : \underset{=Rel}{\Psi^d} - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) \right] \frac{3}{2} p^4 = \left[ \left( \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right) p^3 + \sigma_0 (1-\alpha) p^2 - \mu_0 C^2(t) \right]^2$$

Utilisons l'équation (5.55), nous retrouvons le critère de plasticité :

$$\underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) = \frac{2}{3} p^{-4} \left[ \left( \frac{\mu_0}{C(t)} + \alpha \sigma_0 \right) p^3 + \sigma_0 (1 - \alpha) p^2 - \mu_0 C^2(t) \right]^2 = 0 \quad (5.60)$$

Pour les résultats numériques, nous retrouvons exactement la composante de contrainte  $\sigma_{11}$  calculée par la méthode analytique au chapitre 3.

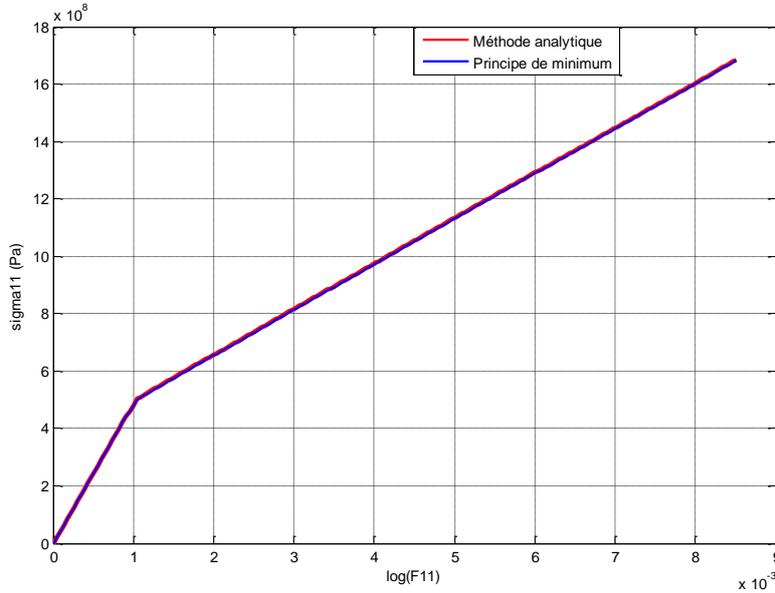


Figure 5-4 : Comparaison de contrainte  $\sigma_{11}$

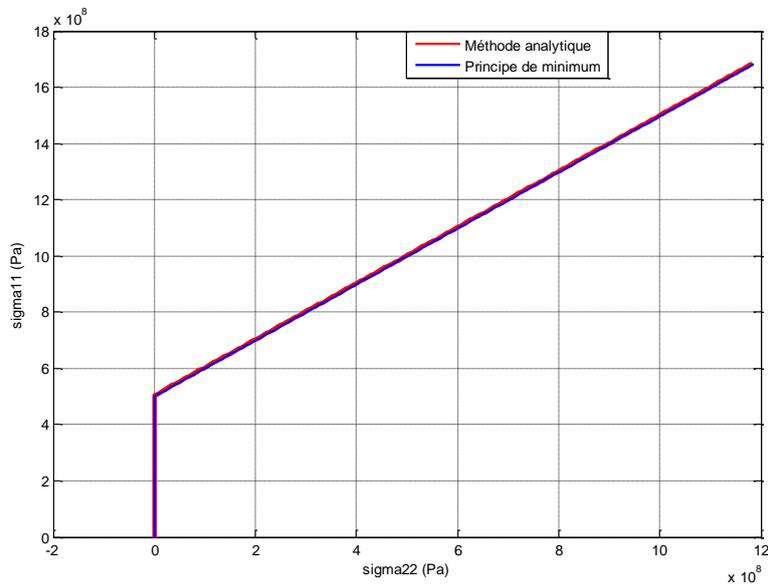


Figure 5-5 : Comparaison de contrainte  $\sigma_{11}$  en fonction de  $\sigma_{22}$

Nous traçons maintenant la « fonction de charge ». Rappelons que la « fonction de charge »

$\frac{1}{\sigma_0^2} \left( \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d : \underline{\underline{\psi}}_{\text{Rel}}^d - \frac{2}{3} k^2 (p_{cum}) \right)$  doit être négative, tant que l'évolution est élastique et doit

s'annuler lorsque l'évolution est plastique. Nous constatons dans la Figure 5-6 que, avec le principe de minimum, le critère de plasticité est bien satisfait (mieux satisfait qu'au chapitre 3 qui introduisait une légère erreur numérique due à une intégration explicite dans le temps de  $\dot{P}_{cum}$ ).

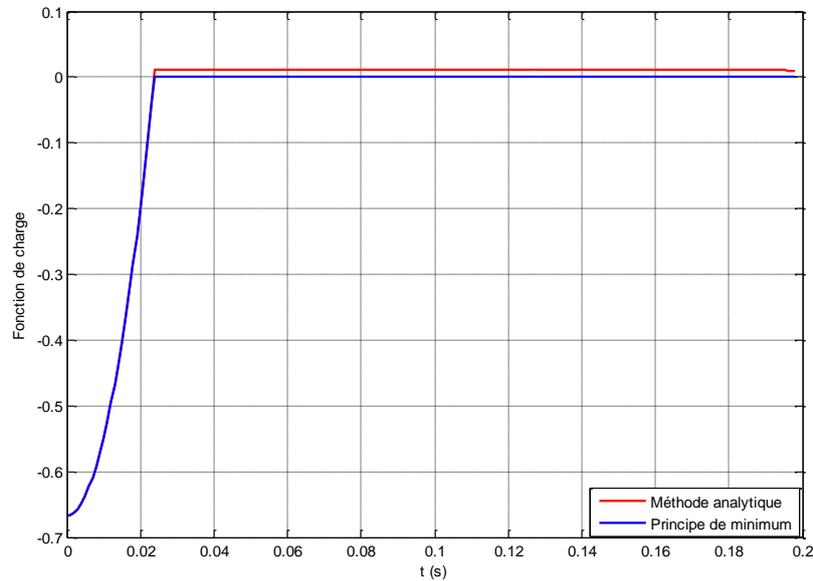


Figure 5-6 : Comparaison de la fonction de charge

## 5.4. Conclusion

Dans ce chapitre, après avoir montré la lourdeur de la démarche pour obtenir la solution d'un essai de traction simple, nous avons montré qu'un principe de minimum portant sur l'énergie totale, somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée moins le potentiel des efforts extérieurs permet de résoudre le même problème avec beaucoup plus de légèreté.

Comme il est évident que le comportement élastoplastique ne peut pas en général être ramené à ce principe de minimum, nous avons essayé de trouver certaines familles d'évolutions élastoplastiques pour lesquelles, l'application de ce principe serait équivalente à l'écriture du comportement élastoplastique pendant l'évolution. Nous avons appelé ces évolutions, les « évolutions simples radiales » par référence au trajet des valeurs de logarithme des élongations plastiques dans leur « plan déviatorique ». Nous avons démontré ensuite à l'aide d'une approche variationnelle l'équivalence entre le comportement élastoplastique et le principe de minimum pour cette famille particulière d'évolutions.



## Chapitre 6: Retour sur le processus de laminage en régime permanent

Après avoir développé les outils pour un calcul simplifié d'une évolution élastoplastique aux chapitres 3, 4 et 5, nous revenons dans ce chapitre au problème de l'évolution élastoplastique lors d'un processus de laminage. Ce dernier chapitre de cette thèse présente un travail inachevé faute de temps mais nous espérons pouvoir donner avec clarté la démarche que nous proposons et les conjectures qui restent à prouver afin qu'un éventuel successeur de ce travail puisse mener celui-ci à terme.

Dans la première partie du chapitre, nous présentons les conséquences sur la transformation de l'hypothèse de régime permanent. Cela conduit à introduire le concept de vitesse de défilement du processus dans la configuration de référence, qu'en toute rigueur, nous devons distinguer de la vitesse d'entrée de la bande dans la cage de laminage lorsque la bande subit une traction en entrée.

Dans la deuxième partie du chapitre, nous montrons comment la connaissance de la transformation permet la détermination de tous les champs mécaniques dans la bande. Même si cette proposition peut sembler naturelle, sa démonstration est loin d'être évidente.

Dans la troisième partie du chapitre, nous montrons comment le principe de minimum établi au chapitre 5 permet de conjecturer un principe de minimum sur la transformation en régime permanent. Nous verrons que ce principe peut être vu comme une généralisation de la Méthode des Bornes Supérieures. Nous n'avons pas eu le temps de faire la démonstration de cette conjecture ni une véritable application de ce principe de minimum mais dans la dernière partie du chapitre, nous proposons une famille de transformation à peu de paramètres inspirée des simulations de LAM3.

Le travail de programmation reste malheureusement à faire car faute de temps, nous n'avons pas pu l'entreprendre avec une généralité suffisante.

### 6.1. La transformation en régime permanente

Nous supposons ici que la transformation  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t)$  satisfait à l'hypothèse du régime permanent, avec une vitesse de défilement dans la configuration de référence du processus de laminage égale à  $V$ .

Contrairement à ce que pourrait laisser penser une analyse sommaire, la vitesse  $V$  de défilement du processus dans la configuration de référence n'est pas forcément la vitesse d'entrée  $V_e$  de la bande dans la cage. En effet, si la partie amont de la bande est en traction, celle-ci est allongée (élastiquement) avant son entrée dans la cage et la vitesse d'entrée est supérieure à la vitesse de défilement du processus dans la configuration de référence ( $V_e > V$ ).

Examinons maintenant les principales conséquences de l'hypothèse de régime permanent.

A l'instant  $t$  postérieur à  $t_0$ , passe au point  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t_0)$  la particule en amont de  $\underline{X}$  d'une distance  $V(t - t_0)$ .

Ainsi  $\underline{\Phi}(\underline{X} - V(t - t_0)\underline{e}_x, t) = \underline{\Phi}(\underline{X}, t_0)$ ,  $\forall \underline{X}, t, t_0$

On en déduit qu'il existe une fonction  $\tilde{\Phi}(\underline{X})$  telle que  $\underline{\Phi}(\underline{X}, t) = \tilde{\Phi}(\underline{X} + Vt\underline{e}_x)$ .

En notant  $\underline{X} = X\underline{e}_x + Y\underline{e}_y + Z\underline{e}_z$ , on voit que  $\frac{\partial \underline{\Phi}}{\partial t}(\underline{X}, t) = V \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial X}(\underline{X} + Vt\underline{e}_x) = V(\underline{\text{Grad}}(\tilde{\Phi}))\underline{e}_x$

Cette propriété est vraie pour tous les champs et on écrit  $\frac{\partial(\bullet)}{\partial t} = V(\underline{\text{Grad}}(\bullet))\underline{e}_x = V \frac{\partial(\bullet)}{\partial X}$

En régime permanent, en toute rigueur la configuration de référence de  $\Omega_0$  est un parallépipède infini  $X \in ]-\infty, +\infty[$ ,  $Y \in [-H_0, +H_0]$ ,  $Z \in [-l_0, +l_0]$

*A/ Etudions  $\tilde{\Phi}(\underline{X})$  en amont de la cage*

Loin en amont de la cage, la vitesse des particules est uniforme égale à  $V_e\underline{e}_x$ . Ceci s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(X, Y, Z)}{\partial X} = \frac{V_e}{V}; \frac{\partial \tilde{\Phi}_2(X, Y, Z)}{\partial X} = 0; \frac{\partial \tilde{\Phi}_3(X, Y, Z)}{\partial X} = 0 \right] \quad (6.1)$$

Ceci s'implique en :

$$\tilde{\Phi}_1(X, Y, Z) \approx \frac{V_e}{V} X + C_1^e(Y, Z) \quad X \rightarrow -\infty$$

$$\tilde{\Phi}_2(X, Y, Z) \approx C_2^e(Y, Z) \quad X \rightarrow -\infty$$

$$\tilde{\Phi}_3(X, Y, Z) \approx C_3^e(Y, Z) \quad X \rightarrow -\infty$$

Où les fonctions « d'entrée »  $C_1^e(Y, Z)$ ,  $C_2^e(Y, Z)$ ,  $C_3^e(Y, Z)$  sont des données du problème, décrivant la situation en amont de la cage. De même  $V_e$  est reliée à  $V$  par cette même situation en amont de la cage.

Par exemple, considérons une bande qui arrive sur le site de laminage dans son état naturel et qui est soumise à la traction de vecteur contrainte  $\sigma_e\underline{e}_x$  en amont de la cage. Alors :

$$\frac{V_e}{V} \approx \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(X, Y, Z)}{\partial X} \right) \text{ égale à l'élongation due à la traction}$$

$C_1^e(Y, Z)$  est une constante dépendante de  $Y$  et  $Z$

$C_2^e(Y,Z) = \alpha Y$  et  $C_3^e(Y,Z) = \alpha Z$  où  $\alpha < 1$  est lié à la contraction dans les direction  $\underline{e}_y$  et  $\underline{e}_z$  due à l'effet Poisson lors de la traction simple dans la bande ( $\frac{V_e}{V}$  et  $\alpha$  peuvent en première approximation être écrit sous la forme  $1 + \varepsilon_e^i$  avec  $\varepsilon_e^i$  dépendant linéairement de  $\sigma_e$ )

### B/ Etudions $\tilde{\Phi}(\underline{X})$ en aval de la cage

Loin en aval de la cage, la vitesse des particules est uniforme égale à  $V_s \underline{e}_x$ . Ceci s'écrit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(X,Y,Z)}{\partial X} = \frac{V_s}{V}; \frac{\partial \tilde{\Phi}_2(X,Y,Z)}{\partial X} = 0; \frac{\partial \tilde{\Phi}_3(X,Y,Z)}{\partial X} = 0 \right] \quad (6.2)$$

Ceci s'implique en :

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}_1(X,Y,Z) &\approx \frac{V_s}{V} X + C_1^s(Y,Z) & X \rightarrow +\infty \\ \tilde{\Phi}_2(X,Y,Z) &\approx C_2^s(Y,Z) & X \rightarrow +\infty \\ \tilde{\Phi}_3(X,Y,Z) &\approx C_3^s(Y,Z) & X \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

$C_1^s(Y,Z)$  joue un rôle essentiel pour déterminer l'état de contrainte interne dans la bande après le laminage. Ceci est en relation avec ce qui est appelé la « planéité » de la bande en sortie de cage. La détermination de  $C_1^e(Y,Z)$  est un des objectifs majeurs de la simulation du processus de laminage.

$C_2^s(Y,Z)$  et  $C_3^s(Y,Z)$  sont à mettre en relation avec les variation d'épaisseur et de largeur de la bande en sortie de cage, à condition de tenir compte de l'effacement de l'effet Poisson due à la traction de la bande par le vecteur contrainte  $\sigma_s \underline{e}_x$  en aval de la cage.

### C/ Etudions $\tilde{\Phi}(\underline{X})$ dans la cage

La zone de contact entre la bande et le cylindre supérieur dans la configuration de référence est une portion de surface de plan  $Y = H_0$  en translation à la vitesse  $-V \underline{e}_x$ .

Nous supposons que le contact a lieu sur toute la largeur  $Z \in [-l_0, +l_0]$

La zone de contact supérieure  $C^+(t)$  est donc définie à l'aide de deux fonctions auxiliaires  $\tilde{X}^e(Z)$ ,  $\tilde{X}^s(Z)$ ,  $Z \in [-l_0, +l_0]$  :

$$C^+(t) = \left\{ (X,Y,Z) / X \in [\tilde{X}^e(Z) - Vt, \tilde{X}^s(Z) - Vt], Y = H_0, Z \in [-l_0, +l_0] \right\} \quad (6.3)$$

Nous supposons que la surface de contact avec le cylindre inférieur est symétrique :

$$C^-(t) = \left\{ (X,Y,Z) / X \in [\tilde{X}^e(Z) - Vt, \tilde{X}^s(Z) - Vt], Y = -H_0, Z \in [-l_0, +l_0] \right\} \quad (6.4)$$

La condition de contact impose au déplacement des particules de  $C^+$  d'être sur la frontière du cylindre supérieur.

Si nous supposons les cylindres rigides de rayon  $R$ , de centre  $(0, a)$  et les cages indéformables. Cela s'écrit :

$$\tilde{\Phi}_1^2(X, H_0, Z) + (\tilde{\Phi}_2(X, H_0, Z) - a)^2 = R^2 \quad \forall X \in [\tilde{X}^e(Z), \tilde{X}^s(Z)], \forall Z \in [-l_0, +l_0] \quad (6.5)$$

De façon générale, on doit avoir :

$$\tilde{\Phi}_1^2(X, H_0, Z) + (\tilde{\Phi}_2(X, H_0, Z) - a)^2 \geq R^2 \quad \forall X \in ]-\infty, +\infty[, \forall Z \in [-l_0, +l_0] \quad (6.6)$$

(Les conditions sur la face inférieure sont symétriques)

La vitesse des particules de la bande sur la surface de contact supérieur est donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} V \frac{\partial \tilde{\Phi}_1(X, Y, Z)}{\partial X} \\ V \frac{\partial \tilde{\Phi}_2(X, Y, Z)}{\partial X} \\ V \frac{\partial \tilde{\Phi}_3(X, Y, Z)}{\partial X} \end{array} \right.$$

Dans le repère local associé à la surface du cylindre, cette vitesse peut être décomposée en une vitesse tangente au cylindre, orthogonale à son axe et une vitesse tangente au cylindre, parallèle à son axe.

La première a par norme  $V \sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^2}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_2^2}{\partial X}}$

Si on note  $\omega$  est la vitesse de rotation du cylindre, la vitesse de glissement bande cylindre orthogonale à l'axe de rotation du cylindre vaut  $V \sqrt{\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^2}{\partial X} + \frac{\partial \tilde{\Phi}_2^2}{\partial X}} - R\omega$ . Si cette valeur est négative, le frottement du cylindre sur la bande est moteur. Si cette valeur est positive, le frottement est résistant.

Les lignes neutres (ou les zones neutres) sont constituées des particules telles que la vitesse de glissement orthogonale à l'axe du cylindre est nulle.

Notons que ceci est indépendant de la vitesse de glissement parallèle à l'axe qui vaut

$$V \frac{\partial \tilde{\Phi}_3(X, Y, Z)}{\partial X}.$$

Dans la suite, nous nous intéressons à l'ensemble des transformations  $\tilde{\Phi}^*(\underline{X})$  associées à des vitesses de défilement  $V^*$ , vérifiant les conditions de passage sous le cylindre (équation (6.5)), les conditions amont (équation (6.1)) et aval (équation (6.2)).

Nous noterons  $CA$  (pour cinématiquement admissible cet ensemble de couples (transformation, vitesse de défilement)  $(\tilde{\Phi}^*(\underline{X}), V^*)$ ).

## 6.2. Détermination de tous les champs à l'aide de $\tilde{\Phi}(\underline{X})$

Nous allons ici proposer une démarche constructive de ces champs, en particulier  $\underline{\underline{P}}$  et  $p_{cum}$ . Nous nous appuyerons pour cela sur l'approximation du chapitre 4 qui permet de simplifier les calculs.

Rappelons que cette approximation est excellente lors que les déformations élastiques sont petites.

Si nous supposons connue la solution  $\tilde{\Phi}(\underline{X})$  de la transformation en régime permanent de la bande pour certaines conditions de laminage, tous les champs peuvent être déterminés.

Nous allons travailler par « fils » ou ligne de courant dans la configuration de référence. C'est-à-dire que  $Y$  et  $Z$  sont fixés et  $X$  va croître depuis une valeur initiale  $X_0$  telle que  $(X_0, Y, Z)$  soit situé dans la zone élastique en amont de la cage de laminage.

Dans un premier domaine  $[X_0, X_1]$  le comportement est élastique sans déformations plastiques.

Comme nous connaissons  $\tilde{\Phi}(\underline{X})$  il est possible de calculer  $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{Grad}}(\tilde{\Phi})$ .

Ce tenseur  $\underline{\underline{F}}(\underline{X})$  peut être factorisé en une partie symétrique et une partie orthogonale.

Le tenseur  $\underline{\underline{E}}(\underline{X})$  est la partie symétrique de cette factorisation.

Le tenseur  $\underline{\underline{P}}(\underline{X})$  est la partie orthogonale de cette factorisation.

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{P}}$$

Bien évidemment dans ce premier domaine  $p_{cum}$ , nul en  $X_0$ , reste nul.

Ayant déterminé  $\underline{\underline{E}}$ , il est possible de calculer  $\underline{\underline{D}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{tr({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right]$  la partie déviatorique de  ${}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}}$ .

Tant que nous sommes dans ce domaine de comportement élastique  $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} < 0$ .

La valeur de  $X_1$  est la première valeur de  $X$  telle que  $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$

Pour  $X > X_1$  nous entrons dans une zone d'évolution élastoplastique.

Rappelons tout d'abord les principaux résultats du chapitre 4 concernant la zone plastique.

Si nous supposons les champs  $\underline{\underline{F}}(\underline{X}, t)$  et  $\dot{\underline{\underline{F}}}(\underline{X}, t)$  connus, nous nous intéressons à la partie symétrique déviatorique de  $\dot{\underline{\underline{F}}}^{-1}$  que nous diagonalisons. Cette diagonalisation nous fournit un champ de tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$  et trois champs de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$$\left(\dot{\underline{\underline{F}}}^{-1}\right)_{sym}^{dév} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (6.7)$$

L'ensemble des champs mécaniques dans la zone plastique vont être déterminés à l'aide de deux champs scalaires.

Le premier  $\theta(\underline{X}, t)$  est un champ d'angle.

Le second  $p_{cum}(\underline{X}, t)$  est la déformation plastique cumulée.

Ces deux champs vérifient les systèmes d'équation aux dérivées partielles (4.14) que nous rappelons ici :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \sin(\theta) \right] \dot{\theta} + \left[ \frac{\partial T}{\partial p_{cum}} + \left( \frac{2}{3} \frac{k'(p_{cum})}{\mu_0} + 2\gamma_1^2 \right) \cos(\theta) \right] \dot{p}_{cum} &= 2\lambda_1 \gamma_1^2 \\ \left[ \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \dot{\theta} + \left[ \frac{\partial T}{\partial p_{cum}} + \left( \frac{2}{3} \frac{k'(p_{cum})}{\mu_0} + 2\gamma_2^2 \right) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \dot{p}_{cum} &= 2\lambda_2 \gamma_2^2 \end{aligned} \quad (6.8)$$

Si  $\theta(\underline{X}, t)$  et  $p_{cum}(\underline{X}, t)$  sont connus, on peut déterminer le champ auxiliaire  $T(\theta, p_{cum})$  qui est la plus grande racine de l'équation :

$$T^3 - 3T \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^2 + 2 \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^3 \cos(3\theta) - 1 = 0$$

(Rappelons que  $T \approx 1 + \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right)^2 \left[ 1 - \frac{2}{3} \left( \frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \right) \cos(3\theta) \right]$  au troisième ordre en  $\frac{1}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0}$ )

Le champ  $\underline{\underline{E}}$  est alors donné par :

$$\underline{\underline{E}} = J^{\frac{1}{3}} \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \left( \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta) + T \right)^{\frac{1}{2}} & 0 & 0 \\ 0 & \left( \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) + T \right)^{\frac{1}{2}} & 0 \\ 0 & 0 & \left( \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + T \right)^{\frac{1}{2}} \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (6.9)$$

et finalement  $\underline{\underline{P}} = \underline{\underline{E}}^{-1} \underline{\underline{F}}$

Plaçons-nous maintenant en régime permanent.

Les champs de  $\underline{\underline{\Phi}}(\underline{\underline{X}})$  et  $V$  sont connus.

On en déduit  $\underline{\underline{F}}(\underline{\underline{X}})$  et  $\underline{\underline{\dot{F}}}(\underline{\underline{X}}) = V \frac{\partial \underline{\underline{F}}}{\partial \underline{\underline{X}}}$

En diagonalisant la partie symétrique déviatorique de  $\underline{\underline{\dot{F}}}\underline{\underline{F}}^{-1}$ , on déduit tenseur orthogonal  $\underline{\underline{O}}$  et trois champs de valeurs propres  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

Le système d'équation (6.8) s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \sin(\theta) \right] \frac{\partial \theta}{\partial X} + \left[ \frac{\partial T}{\partial p_{cum}} + \left( \frac{2}{3} \frac{k'(p_{cum})}{\mu_0} + 2\gamma_1^2 \right) \cos(\theta) \right] \frac{\partial p_{cum}}{\partial X} &= \frac{2\lambda_1 \gamma_1^2}{V} \\ \left[ \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \frac{\partial \theta}{\partial X} + \left[ \frac{\partial T}{\partial p_{cum}} + \left( \frac{2}{3} \frac{k'(p_{cum})}{\mu_0} + 2\gamma_2^2 \right) \cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \frac{\partial p_{cum}}{\partial X} &= \frac{2\lambda_2 \gamma_2^2}{V} \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si  $\theta$  et  $p_{cum}$  sont connus dans une section amont de la bande,  $\theta$  et  $p_{cum}$  peuvent être déterminés partout par intégration (numérique) de ces deux équations.

La valeur de  $p_{cum}$  dans une section amont de la bande est clairement une donnée du problème (par exemple  $p_{cum} = 0$  si la bande n'a pas encore subi de laminage où  $p_{cum}$  donné par la simulation du passage dans la cage amont à celle que l'on étudie si la bande a déjà subi un passage dans une autre cage).

La détermination de  $\theta$  en amont est plus complexe car elle est déterminée par la phase élastique qui précède la phase plastique sous les cylindres.

Pour un fil  $(Y, Z)$  donné, nous avons vu ci-dessous que la zone plastique commence en  $X_1$  telle que :

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2(p_{cum})}{\mu_0^2} = 0 \quad (6.11)$$

Ce tenseur  $\underline{\underline{D}}$  en  $X_1$  peut être écrit sous la forme :

$$\underline{\underline{D}} = \underline{\underline{O}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos(\theta_1) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta_1 - \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} \frac{k(p_{cum})}{\mu_0} \cos\left(\theta_1 + \frac{2\pi}{3}\right) \end{bmatrix} \cdot {}^t \underline{\underline{O}} \quad (6.12)$$

(Voir équation (4.2)) avec  $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$

Nous avons donc pour chaque fil la valeur  $X_1$  d'entrée dans la zone plastique et la valeur initiale  $\theta = \theta_1$  en  $X = X_1$  pour tout  $(Y, Z)$ .

Nous pouvons intégrer les équations (6.10) dans la zone plastique tant que  $\frac{\partial p_{cum}}{\partial X} > 0$

Si  $\frac{\partial p_{cum}}{\partial X} < 0$  nous quittons la zone plastique pour entrer dans une zone de décharge en évolution élastique. Nous notons  $\underline{\underline{P}}_0$  la dernière valeur de  $\underline{\underline{P}}$  calculée dans la zone plastique et considérons  $\underline{\underline{F}}(X + dX) \cdot \underline{\underline{P}}_0^{-1}$ . Ce tenseur peut être factorisé en une partie symétrique  $\underline{\underline{E}}(X + dX)$  et un tenseur orthogonal  $\underline{\underline{R}}(X + dX)$ .

$$\underline{\underline{P}}(X + dX) = \underline{\underline{R}}(X + dX) \cdot \underline{\underline{P}}_0.$$

Bien sûr on calcule aussi  $\underline{\underline{D}} = J^{-\frac{2}{3}} \left[ {}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}} - \frac{tr({}^t \underline{\underline{E}} \cdot \underline{\underline{E}})}{3} \underline{\underline{I}} \right]$  et on itère tant que

$$\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} < 0.$$

Si  $\underline{\underline{D}} : \underline{\underline{D}} - \frac{2}{3} \frac{k^2 (p_{cum})}{\mu_0^2} = 0$ , on entre à nouveau dans une zone plastique et l'on applique la procédure de calcul plus haut.

A la fin de cette procédure, on connaît  $\underline{\underline{E}}$  et  $p_{cum}$  en chaque point de la ligne  $Y$  et  $Z$  fixés.

On fait ensuite varier  $Y$  et  $Z$  pour connaître  $\underline{\underline{E}}$  et  $p_{cum}$  partout.

Avec cette démarche applicable à tous les champs  $\tilde{\Phi}^*(\underline{\underline{X}}) \in CA$  et toutes les vitesses  $V^*$ , toutes les grandeurs mécaniques, y compris les grandeurs énergétiques sont des fonctionnelles de  $(\tilde{\Phi}^*(\underline{\underline{X}}), V^*)$  définis sur l'ensemble des champs  $CA$ .

### 6.3. Un « principe de minimum en régime permanent » sur l'ensemble de $\tilde{\Phi}^*(\underline{\underline{X}}) \in CA$

Nous allons nous appuyer sur les résultats du chapitre 5 pour tenter de conjecturer un « principe de minimum en régime permanent ».

Pour être plus précis, nous cherchons une fonctionnelle  $\Sigma(\tilde{\Phi}^*, V^*)$  à valeur scalaire définie sur l'ensemble des couples  $(\tilde{\Phi}^*, V^*) \in CA$  et telle que la solution du problème en régime permanent rend minimum cette fonctionnelle sur  $CA$ . Si nous y parvenons, la démarche de

modélisation simplifiée consistera à déterminer le champ de transformation minimisant la fonctionnelle dans un sous ensemble de  $CA$  défini à l'aide de peu de paramètres.

Intéressons-nous à une longue portion de la bande  $[X_0, X_1]$  avec  $X_0$  appartenant à la zone amont telle que les particules sont en translations à la vitesse  $V_e e_x$  et  $X_1$  appartient à la zone aval telle que les particules sont en translations à la vitesse  $V_s e_x$ .

Prenons comme état « zéro », l'état de cette portion de la bande à l'instant  $t_0$  et considérons l'état de la portion à l'instant  $t_0 + \Delta t$  avec  $\Delta t$  petit par rapport à  $\frac{L}{V}$  où  $L$  est une longueur caractéristique de la zone de contact.

Intéressons-nous à la variation de l'énergie stockée dans cette portion de bande entre les instant  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$  et supposons une vitesse de défilement  $V^*$ .

A l'instant  $t_0 + \Delta t$  la portion comprise entre  $X_0$  et  $X_1 - V^* \Delta t$  est dans un état équivalent à celui de la portion  $[X_0 + V^* \Delta t, X_1]$  à l'instant  $t_0$  à cause de l'hypothèse de régime permanent.

La variation de l'énergie élastique est donc égale à l'énergie élastique dans la petite portion  $[X_1 - V^* \Delta t, X_1]$  à l'instant  $t_0 + \Delta t$  moins l'énergie élastique dans la petite bande  $[X_0, X_0 + V^* \Delta t]$  à l'instant  $t_0$ .

Dans ces deux petites portions, la densité volumique d'énergie élastique  $\Psi$  ne dépend que  $Y$  et  $Z$  au premier ordre (indépendant par rapport  $t$  et  $X$ ).

La variation de l'énergie élastique est donc égale au premier ordre à :

$$\Delta\Psi = V^* \Delta t \left( \int_{S_s} \Psi dYdZ - \int_{S_e} \Psi dYdZ \right) \quad (6.13)$$

Où  $S_s, S_e$  sont respectivement les sections de sortie et d'entrée dans la configuration de référence.

Un raisonnement identique permet de calculer l'augmentation d'énergie dissipée dans la portion de bande entre les instants  $t_0$  et  $t_0 + \Delta t$  :

$$\Delta K = V^* \Delta t \left( \int_{S_s} K dYdZ - \int_{S_e} K dYdZ \right) \quad (6.14)$$

Le travail des efforts extérieurs exercés par les tractions amont et aval sur les sections d'entrée et de sortie de la portion de bande s'écrit :

$$\Delta Y = T_s \frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X} (X_1 + V^* t, Y, Z) V^* \Delta t - T_e \frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X} (X_0 + V^* t, Y, Z) V^* \Delta t \quad (6.15)$$

Où  $T_s$  et  $T_e$  sont respectivement les efforts de traction de sortie et d'entrée.

Notons que au voisinage de  $X_0$  (resp.  $X_1$ )  $\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}$  est uniforme et indépendant de  $t$  au premier ordre.

Il reste à déterminer le travail des efforts de contact entre le cylindre et la bande.

Dans le cas de cylindres et de cages rigides, seuls les efforts de cisaillement travaillent.

Nous avons vu que la composante tangentielle au cylindre et orthogonale à l'axe de la vitesse des particules et vaut :

$$V_{\tan} = V^* \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_2^*}{\partial X}\right)^2} \quad (6.16)$$

Si cette vitesse est inférieure à  $R\omega$ , le frottement est moteur, sinon le frottement est résistant.

Pour simplifier, plaçons nous dans le cas d'un frottement de Tresca de module  $\tau$ .

Le travail fourni à la portion de la bande par ces frottements pendant l'instant de temps  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  est :

$$P_{frot} = \Delta t \tau \int_{S_c} \text{sign} \left( R\omega - V^* \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_2^*}{\partial X}\right)^2} \right) V^* \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_2^*}{\partial X}\right)^2} dS \quad (6.17)$$

Où  $S_c$  est la surface de contact entre le cylindre et la bande.

Comme dans le cas de l'approche par la Méthode des Bornes Supérieures, la dépendance en  $V^*$  est complexe à cause du signe de la vitesse de glissement.

La variation d'énergie totale dans la portion de la bande  $[X_0, X_1]$  pendant l'intervalle de temps  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  moins le travail des efforts extérieurs pendant le même instant de temps, si le processus en régime permanent était donné par le couple  $(\tilde{\Phi}^*(\underline{X}), V^*)$  serait :

$$\Sigma(\tilde{\Phi}^*, V^*) \Delta t = V^* \Delta t \left[ \begin{aligned} & \int_{S_s} (\Psi + K) dYdZ - \int_{S_e} (\Psi + K) dYdZ \\ & -T_s \frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}(X_1 + V^*t, Y, Z) + T_e \frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}(X_0 + V^*t, Y, Z) \\ & + \tau \int_{S_c} \text{sign} \left( R\omega - V^* \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_2^*}{\partial X}\right)^2} \right) \sqrt{\left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_1^*}{\partial X}\right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{\Phi}_2^*}{\partial X}\right)^2} dS \end{aligned} \right] \quad (6.18)$$

En restant dans l'esprit que nous avons fait au chapitre 5, il semble naturel de conjecturer le principe de minimum suivant :

« Le couple  $(\tilde{\Phi}, V)$  qui minimise la fonctionnelle  $\Sigma(\tilde{\Phi}^*, V^*)$  ci-dessus parmi tous les couples de l'ensemble  $CA$  est la solution du problème de l'évolution élastoplastique en régime permanent ».

La détermination de cette conjecture est une tâche difficile que nous n'avons pas su mener à son terme. Nous nous contentons ici de commenter un peu la proposition de façon à augmenter le niveau de confiance en cette conjecture.

Tout d'abord, on peut être surpris de ne voir apparaître les énergies élastique et dissipée qu'aux sections d'extrémités de la portion de bande étudiée.

Pour mieux comprendre, plaçons-nous dans le cas où la bande est initialement dans son état naturel (dans ce cas  $D=0$  sur la section d'entrée) et les énergies élastiques négligeables.

On voit alors apparaître dans la fonctionnelle uniquement l'intégrale sur la section de sortie de l'énergie dissipée dans cette section pendant le processus de laminage multipliée par  $V^* \Delta t$ .

En notant que  $\dot{p}_{cum} = \frac{\partial p_{cum}}{\partial X} V^*$ ,  $D = K(p_{cum})$  et  $\frac{\partial K(p_{cum})}{\partial p_{cum}} = k(p_{cum})$ , on voit que cette énergie dissipée dans la section de sortie est égale à l'intégrale sur l'ensemble de la portion de bande de la puissance dissipée multipliée par  $\Delta t$ .

Notre approche apparait alors comme une généralisation de la Méthode des Bornes Supérieures (MBS). Notre généralisation est forte car elle permet de prendre en compte les déformations élastique et l'érouissage ce que ne permet pas la MBS.

#### 6.4. Proposition d'une famille de transformations simples

Bien que nous n'ayons pas eu le temps de développer une application du principe de minimum ci-dessus, il nous a semblé utile pour les éventuels travaux ultérieurs de proposer une famille de transformations définies à l'aide de peu de paramètres et indéfinis des champs que nous pouvons déterminer à l'aide de LAM3.

On utilise deux systèmes de coordonnées : dans la configuration initiale, non déformée, un point  $M_0$  de la matière est représenté par le couple  $(X, Y)$ . Dans la configuration actuelle, déformée, ses coordonnées sont  $M(x, y)$ . L'écriture de la transformation, c'est trouver les relations entre les coordonnées  $(x, y)$  en fonction de  $(X, Y)$  ou l'inverse.

Nous faisons l'hypothèse simplificatrice que dans la zone de contact bande – cylindre, l'abscisse  $x \in [-L, 0]$  ( $x = -L$  à l'entrée,  $x = 0$  à la sortie). Comme indique sur Figure 6-1, il peut être commode de remplacer l'abscisse  $x$  par l'angle  $\theta$  du point de contact sur le cylindre. Notons  $\alpha > 0$ , l'angle total de contact  $\theta \in [-\alpha, 0]$  ( $\theta = -\alpha$  si  $x = -L$  et  $\theta = 0$  si  $x = 0$ ).

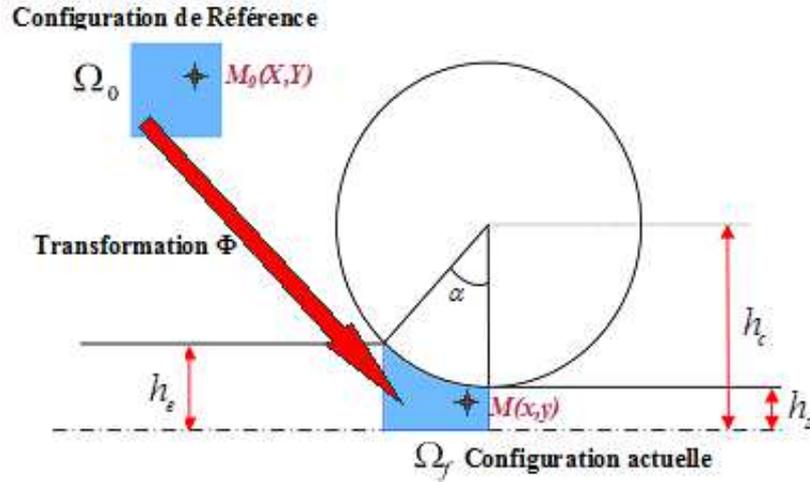


Figure 6-1 : Processus de laminage

A priori, la transformation s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} x = \Phi_X(X, Y, Z, t) \\ y = \Phi_Y(X, Y, Z, t) \\ z = \Phi_Z(X, Y, Z, t) \end{cases} \quad (6.19)$$

Dans le cas de déformation plane, avec l'hypothèse que la section reste droite le système d'équation (6.19) devient :

$$\begin{cases} x = \Phi(X) \\ y = Y\Psi(X) \\ z = Z \end{cases} \quad (6.20)$$

Le tenseur de transformation totale s'écrit alors :

$$\underline{\underline{F}}(X, Y) = \begin{bmatrix} \Phi'(X) & 0 & 0 \\ Y\Psi'(X) & \Psi(X) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.21)$$

Notons  $h(x)$  la hauteur de l'emprise à l'abscisse  $x$ , nous obtenons :

$$h(x) = h_c - \sqrt{R^2 - x^2} \quad \text{où } h_c = R + h_s$$

Déduisons la relation entre fonction  $\Psi(X)$  et  $h(x)$  :

$$\Psi(X) = \frac{1}{h_e} h(x) \quad (6.22)$$

La variation du volume est exprimée sous la forme :

$$J(X) = \Phi'(X)\Psi(X) = \Phi'(X)\frac{1}{h_e}h(x) = \frac{1}{h_e}\Phi'(X)h(\Phi(X)) \quad (6.23)$$

Notons  $\tilde{J}(X)$  la primitive de  $J(X)$  :

$$\begin{aligned}\tilde{J}(X) &= \int J(X) dX = \frac{1}{h_e} \int \Phi'(X) h(\Phi(X)) dX = \frac{1}{h_e} \int h(\Phi(X)) d\Phi(X) \\ &= \frac{1}{h_e} \int h(x) dx = \frac{1}{h_e} \int (h_c - \sqrt{R^2 - x^2}) dx\end{aligned}\quad (6.24)$$

Changeons la variable par  $x = R \sin \theta$ , donc, nous avons :

$$\begin{aligned}dx &= R \cos \theta d\theta \\ h_c - \sqrt{R^2 - x^2} &= h_c - R \cos \theta\end{aligned}$$

En reportant ces expressions dans l'équation (6.24), nous obtenons :

$$\tilde{J}(X) = \frac{1}{h_e} \int (h_c - \sqrt{R^2 - x^2}) dx = \frac{1}{h_e} \int (h_c - R \cos \theta) R \cos \theta d\theta$$

$$\text{Ou encore : } \tilde{J}(X) = \frac{1}{h_e} \int (h_c R \cos \theta - R^2 \cos^2 \theta) d\theta$$

En remarquant que  $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$ , nous obtenons :

$$\tilde{J}(X) = \frac{1}{h_e} \int \left( h_c R \cos \theta - R^2 \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta \quad (6.25)$$

Nous en déduisons :

$$\tilde{J}(X) = \frac{h_c}{h_e} R \sin \theta - \frac{R^2}{2h_e} \theta - \frac{R^2}{4h_e} \sin 2\theta \quad (6.26)$$

L'expression de  $\tilde{J}(X)$  dans la configuration actuelle :

$$\tilde{J}(X) = \frac{h_c}{h_e} x - \frac{R^2}{2h_e} \arcsin \frac{x}{R} - \frac{x}{2h_e} \sqrt{R^2 - x^2} \quad (6.27)$$

Ou encore dans la configuration de référence :

$$\tilde{J}(X) = \frac{h_c}{h_e} \Phi(X) - \frac{R^2}{2h_e} \arcsin \frac{\Phi(X)}{R} - \frac{\Phi(X)}{2h_e} \sqrt{R^2 - \Phi(X)^2} \quad (6.28)$$

Nous allons maintenant faire l'hypothèse que la variation du volume est une fonction affine de  $X$  par morceau (2 morceaux voir la Figure 1-29).

La variation de volume s'écrit alors dans la configuration de référence:

$$J(X) = \begin{cases} 1 + aX & \text{si } 0 \leq X \leq X_{PN} \\ bX + c & \text{si } X_{PN} \leq X \leq L_0 \end{cases} \quad (6.29)$$

Où :  $a, b, c$  sont des constantes

$X_{PN}$  est la position du point neutre dans la configuration de référence

$L_0$  est la longueur de l'emprise dans la configuration de référence

La continuité de la variation de volume  $J(X)$  au point neutre  $X_{PN}$  nous donne la relation :

$$1 + aX_{PN} = bX_{PN} + c \quad (6.30)$$

Ou encore :

$$a = b + \frac{c-1}{X_{PN}} \quad (6.31)$$

En intégrant l'équation (6.29), nous obtenons la deuxième expression de  $\tilde{J}(X)$  :

$$\tilde{J}(X) = \int J(X) dX = \begin{cases} \frac{1}{2} aX^2 + X + c_1 & \text{si } 0 \leq X \leq X_{PN} \\ \frac{1}{2} bX^2 + cX + c_2 & \text{si } X_{PN} \leq X \leq L_0 \end{cases} \quad (6.32)$$

L'équation (6.28) et l'équation (6.32) sont les deux expressions de  $\tilde{J}(X)$  dans la configuration de référence. Nous déduisons :

$$\begin{aligned} & \frac{h_c}{h_e} \Phi(X) - \frac{R^2}{2h_e} \operatorname{asin} \frac{\Phi(X)}{R} - \frac{\Phi(X)}{2h_e} \sqrt{R^2 - \Phi(X)^2} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} aX^2 + X + c_1 & \text{si } 0 \leq X \leq X_{PN} \\ \frac{1}{2} bX^2 + cX + c_2 & \text{si } X_{PN} \leq X \leq L_0 \end{cases} \end{aligned} \quad (6.33)$$

Les conditions aux limites et la condition de continuité de  $\tilde{J}(X)$  au point  $X_{PN}$  nous donnent le système d'équations :

$$\begin{cases} \Phi(X=0) = -L \\ \Phi(X=L_0) = 0 \\ \tilde{J}(X_{PN}^-) = \tilde{J}(X_{PN}^+) \end{cases} \quad (6.34)$$

Où  $X_{PN}^-$  et  $X_{PN}^+$  représentent respectivement l'abscisse de la limite à gauche et à droite du point neutre.

Ce système d'équation se réécrit alors :

$$\begin{cases} -\frac{h_c}{h_e} L - \frac{R^2}{2h_e} \operatorname{asin} \frac{-L}{R} + \frac{L}{2h_e} \sqrt{R^2 - L^2} = c_1 \\ \frac{1}{2} bL_0^2 + cL_0 + c_2 = 0 \\ \frac{1}{2} aX_{PN}^2 + X_{PN} + c_1 = \frac{1}{2} bX_{PN}^2 + cX_{PN} + c_2 \end{cases} \quad (6.35)$$

Ou encore :

$$\begin{cases} c_1 = -\frac{h_c}{h_e} L - \frac{R^2}{2h_e} \operatorname{asin} \frac{-L}{R} + \frac{L}{2h_e} \sqrt{R^2 - L^2} \\ c_2 = -\frac{1}{2} bL_0^2 - cL_0 \\ \frac{1}{2} bL_0^2 + cL_0 + \left( \frac{1}{2} aX_{PN}^2 + X_{PN} - \frac{1}{2} bX_{PN}^2 - cX_{PN} \right) - \left( L - \frac{R^2}{2h_e} \operatorname{asin} \frac{L}{R} + \frac{L}{2h_e} \sqrt{R^2 - L^2} \right) = 0 \end{cases}$$

Avec l'hypothèse que la variation de volume  $J$  est connue (ou  $a, b, c, X_{PN}$  connus), les trois dernières équations ci-dessus nous permettent de déterminer  $c_1, c_2, L_0$  (ou  $\tilde{J}(X)$ ). Ensuite on déduit  $\Phi(X)$  à partir de l'équation :

$$\tilde{J}(X) = \frac{h_c}{h_E} \Phi(X) - \frac{R^2}{h_E} \operatorname{asin} \frac{\Phi(X)}{R} - \frac{\Phi(X)}{h_E} \sqrt{R^2 - \Phi(X)^2}$$

Rappelons que  $\Psi(X) = \frac{1}{h_e} h(\Phi(X))$  et  $\Phi'(X) = \frac{J(X)}{\Psi(X)}$ .

Nous déduisons :

$$\Psi'(X) = \frac{d\Psi(X)}{dX} = \frac{1}{h_e} \frac{dh(\Phi(X))}{dX} = \frac{1}{h_e} h'(\Phi(X)) \Phi'(X) \quad (6.36)$$

**Donc, avec l'hypothèse que la variation de volume  $J$  est connue, on peut déterminer totalement le tenseur de transformation totale  $\underline{\underline{F}}(X, Y)$ .**

A partir de ce tenseur, on utilise le modèle analytique développé dans le chapitre 5 pour obtenir le champ de contraintes dans l'emprise.

Nous trouvons que la variation de volume  $J$  est liée à la partie d'énergie élastique  $\Psi$  dans la bande. En minimisant l'énergie dans la bande  $\Sigma$  ci-dessus, on obtient la variation de volume  $J$  mais ce travail s'est avéré lourd et compliqué. Donc, pour simplifier la présentation des exemples ci-dessous, on détermine la valeur de  $J$  en se basant sur la trace du tenseur de contrainte obtenue par LAM3.

**Exemple 1 :**

Choisissons des données d'entrée d'un cas de « laminage à froid »:

$$h_e = 5.00mm \quad h_s = 3.50mm \quad b_e = 50.00mm$$

$$k = 0.4 \text{ (frottement de Tresca)} \quad V_c = 1000.00mm/s$$

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \alpha (\exp(p_{cum}) - 1)) \text{ avec } \alpha = 0$$

$$\sigma_0 = 600MPa \quad R = 250.00mm \quad \sigma_e = \sigma_s = 150 MPa$$

On utilise le modèle LAM3 avec 5 fils dans la demi-épaisseur, premier fil est au milieu de la bande.

La trace du tenseur de contrainte dans l'emprise permet une détermination appelée de  $J$  sous la forme d'une fonction affine par morceaux.

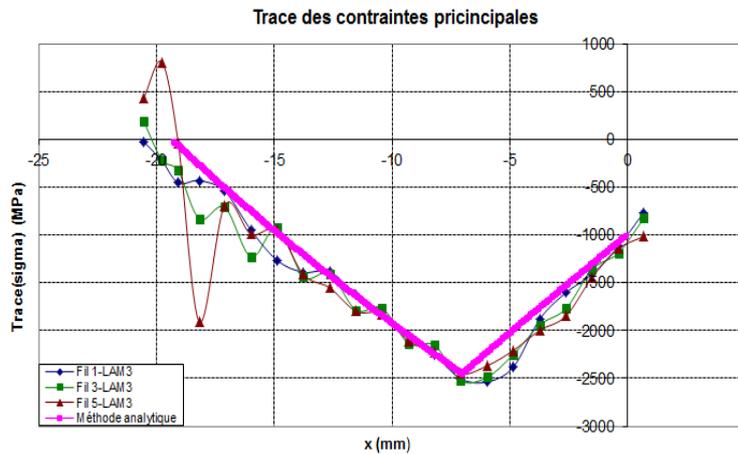


Figure 6-2 : Trace du tenseur de contrainte dans l'emprise

L'utilisation de cette approximation de  $J$  permet une détermination analytique des composantes du tenseur de contrainte que nous comparons aux calculs LAM3.

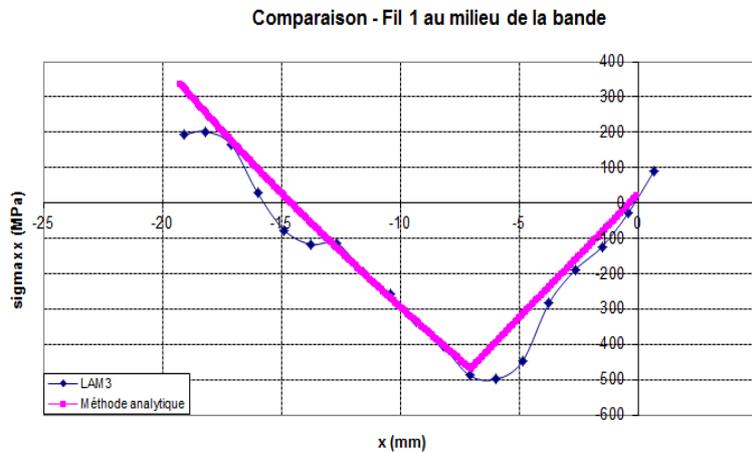


Figure 6-3 : La composante  $\sigma_{xx}$  au milieu de la bande

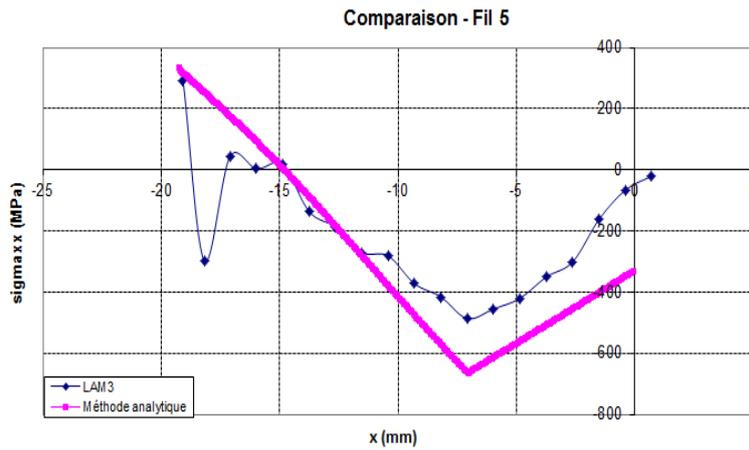


Figure 6-4 : La composante  $\sigma_{xx}$  au contact avec le cylindre

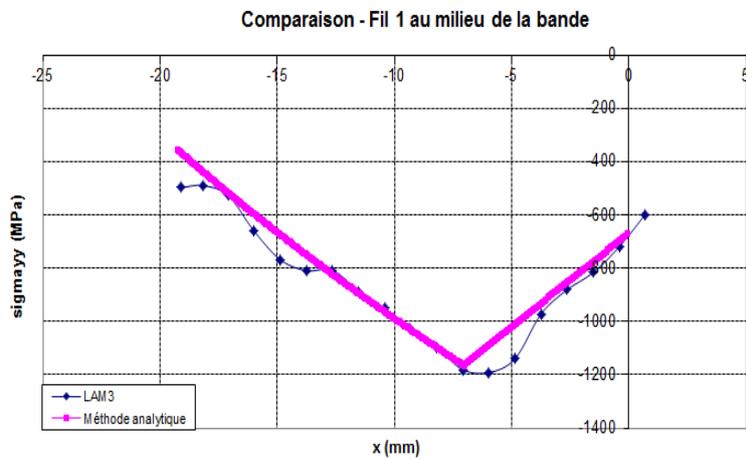


Figure 6-5 : La composante  $\sigma_{yy}$  au milieu de la bande

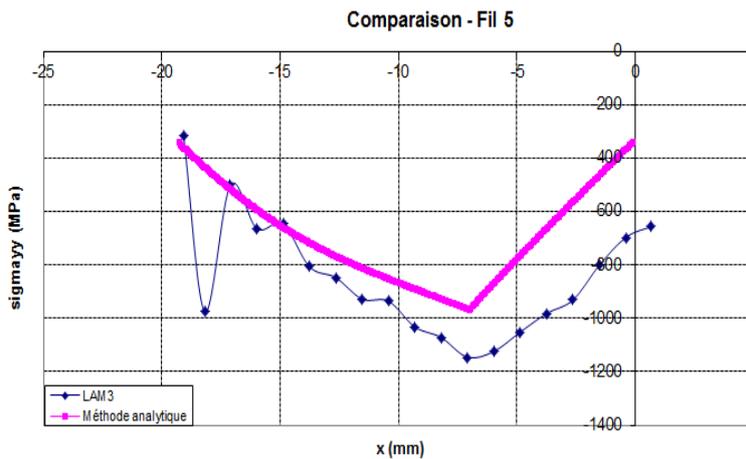


Figure 6-6 : La composante  $\sigma_{yy}$  au contact avec le cylindre

Nous constatons que dans l'exemple « laminage à froid », le choix adapté de  $J$  sous la forme d'une fonction affine par morceaux donne une bonne approche des contraintes pour les éléments au milieu de la bande (cette approximation est moins bonne pour les éléments loin du centre de la bande).

**Exemple 2 :**

Choisissons des données d'entrée d'un cas de « laminage à chaud »:

$$h_e = 37.00\text{mm} \quad h_s = 22.00\text{mm} \quad b_e = 100.00\text{mm}$$

$$k = 0.4 \text{ (frottement de Tresca)} \quad V_c = 800.00\text{mm/s}$$

$$k(p_{cum}) = \sigma_0 (1 + \alpha (\exp(p_{cum}) - 1)) \text{ avec } \alpha = 0$$

$$\sigma_0 = 144\text{MPa} \quad R = 350.00\text{mm} \quad \sigma_e = \sigma_s = 0 \text{ MPa}$$

On utilise le modèle LAM3 avec 6 fils dans la demi-épaisseur, premier fil est au milieu de la bande.

La trace du tenseur de contrainte dans l'emprise permet une détermination appelée de  $J$  sous la forme d'une fonction affine par morceaux.

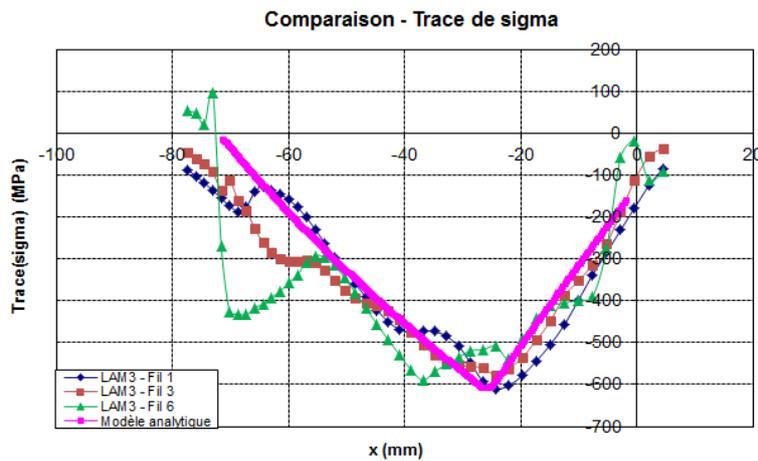


Figure 6-7 : Trace du tenseur de contrainte dans l'emprise

L'utilisation de cette approximation de  $J$  permet une détermination analytique des composantes du tenseur de contrainte que nous comparons aux calculs LAM3.

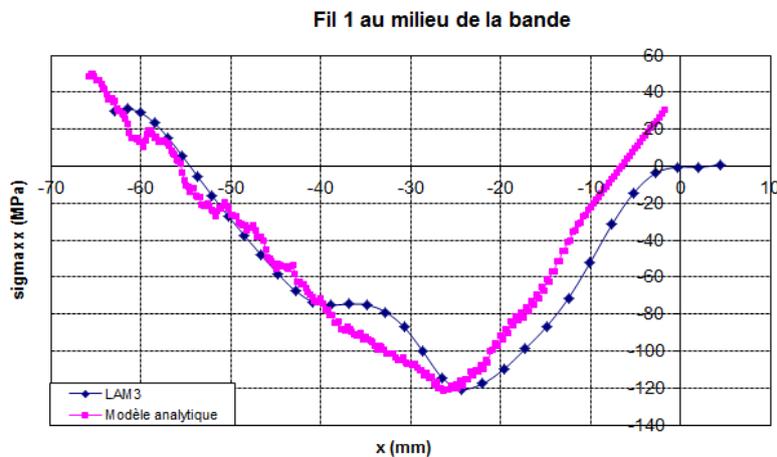


Figure 6-8 : La composante  $\sigma_{xx}$  au milieu de la bande

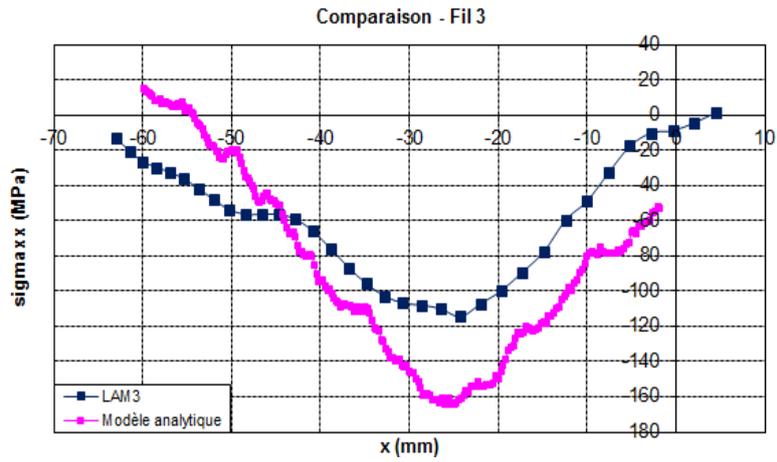


Figure 6-9 : La composante  $\sigma_{xx}$  dans le troisième élément

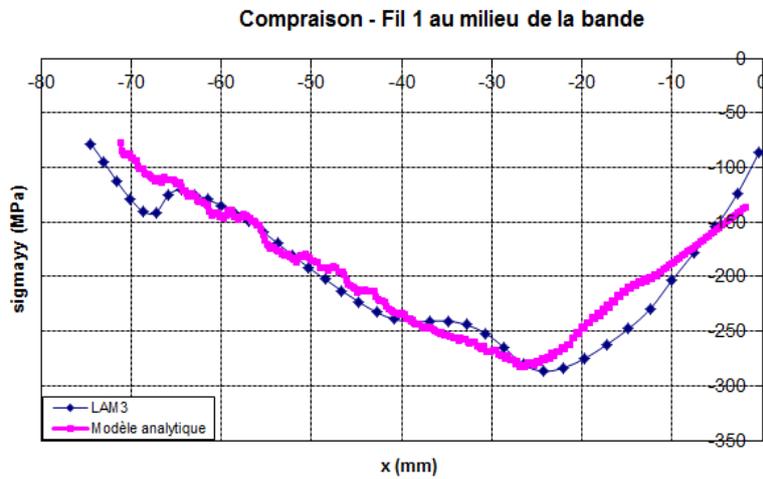


Figure 6-10 : La composante  $\sigma_{yy}$  au milieu de la bande

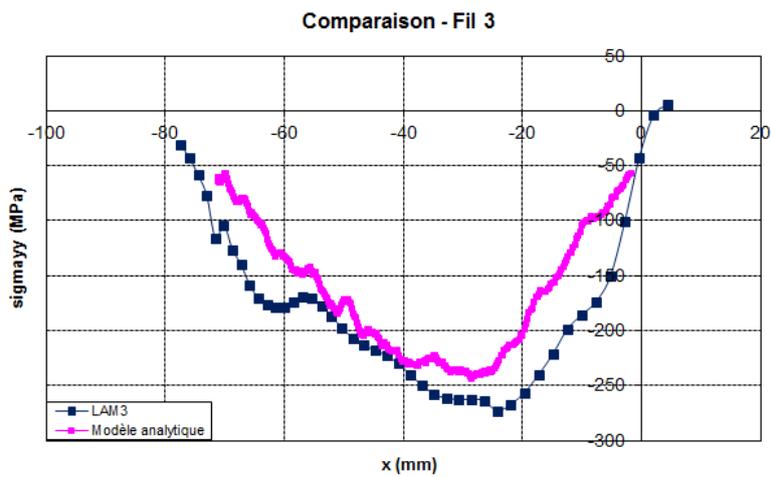


Figure 6-11 : La composante  $\sigma_{yy}$  dans le troisième élément

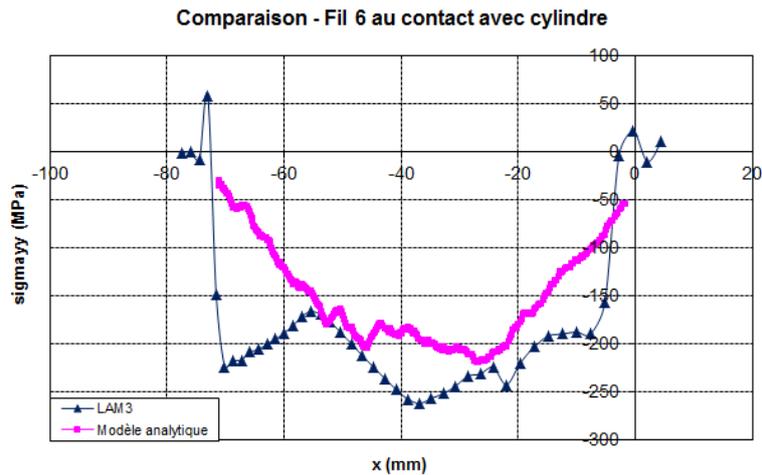


Figure 6-12 : La composante  $\sigma_{yy}$  au contact avec le cylindre

Dans cet exemple, l'hypothèse d'homogénéité des champs sur l'épaisseur est bien sûr trop forte et la famille de transformations devait être élargie. Cependant, pour une première approximation brutale, cette approche ne donne pas des résultats si mauvais, tout du même du centre de la bande. Cela est encourageant et l'approche mérite d'être développée.

## 6.5. Conclusion

Dans ce chapitre, nous sommes revenus au problème de l'évolution élastoplastique lors d'un processus de laminage.

Nous avons tout d'abord présenté les principales conséquences de l'hypothèse d'évolution en régime permanent et nous avons montré que la connaissance de la transformation permet la détermination de tous les champs mécaniques et des grandeurs énergétiques.

En nous inspirant du « principe de minimum » établi au chapitre 4 pour les évolutions simples radiales, nous avons conjecturé un « principe de minimum en régime permanent » pour les transformations en régime permanent. Nous n'avons pas su démontrer l'équivalence de ce principe de minimum avec les équations de l'évolution élastoplastique, mais nous avons montré qu'il s'agit d'une généralisation de la Méthode des Bornes Supérieures permettant la prise en compte des déformations élastiques et de l'écroutissage.

Nous avons terminé ce chapitre en présentant une famille de transformations simples construites à l'aide d'une hypothèse sur la variation de volume élastique qui nous semble présenter un intérêt pour des travaux ultérieurs. Beaucoup de travail reste encore à faire pour aller au bout de ces idées.

## Conclusion générale

Les travaux présentés dans ce mémoire portent essentiellement sur l'amélioration des modèles simplifiés classiques du laminage. Pour cet objectif, nous avons construit des modèles simplifiés semi-analytiques qui prennent en compte les déformations élastoplastiques.

Tout d'abord, dans le premier chapitre, nous avons introduit les notations de base des processus de laminage. Les principaux paramètres du processus sont identifiés et leur influence est discutée.

Ensuite, dans le deuxième chapitre, nous avons présenté des modèles simplifiés classiques qui se basent sur la méthode des tranches et la Méthode des Bornes Supérieures (MBS). L'application de ces méthodes dans le processus de laminage est présentée et comparée avec LAM3. Avec cette comparaison, nous avons vu que les méthodes classiques qui négligent les déformations élastiques ne donnent pas une bonne approche dans le cas laminage si les déformations élastiques sont importantes.

Ainsi, dans le troisième chapitre, nous avons abordé le comportement élastoplastique en grandes transformations. Nous avons utilisé le concept de configuration "relâchée" pour définir l'état thermodynamique d'un volume élémentaire d'un matériau devant subir de grandes transformations élastoplastiques. Nous avons montré aussi que la connaissance du gradient de la transformation et son taux de variation permet la détermination simple et analytique de tous les champs mécaniques. Nous avons aussi donné une illustration dans le cas de deux exemples très simples d'histoires de transformation homogène (traction et cisaillement).

Après, dans le quatrième chapitre, nous avons repris l'étude de la détermination des champs mécaniques lorsque l'on connaît le gradient de transformation et son taux de variation, avec une autre approche qui permet de vérifier par construction le critère de plasticité dans la zone en cours d'évolution plastique. Nous avons fait une application numérique dans le cas de compression plane Channel Die qui ressemble beaucoup au processus de laminage. Car pour les deux processus, on comprime le matériau dans une direction et on le laisse s'écouler dans une autre direction. Les résultats analytiques sont identiques aux résultats obtenus par Abaqus (éléments finis).

Dans le cinquième chapitre, nous avons proposé une approche alternative de l'élastoplasticité basée sur un principe de minimisation de la somme de l'énergie élastique et de l'énergie dissipée, c'est-à-dire un modèle à dissipation simple. Nous avons montré que ce principe de minimum est équivalent à l'approche classique de l'évolution élastoplastique pour des familles d'évolutions particulières que nous nommons évolutions simples radiales, par référence au trajet des élongations plastiques principales. L'application numérique de ce principe de minimum est réalisée dans le cas de traction simple et nous avons retrouvé des champs mécaniques obtenus par le modèle semi-analytique au chapitre 3.

Enfin, dans le dernier chapitre, nous sommes revenus au problème de l'évolution élastoplastique dans un processus de laminage en régime permanent. Nous avons proposé un

« principe de minimum en régime permanent ». Nous n'avons pas réussi à prouver l'équivalence avec une approche classique de l'évolution, mais nous avons montré que ce principe de minimum est une généralisation de la Méthode des Bornes Supérieures prenant en compte les déformations élastiques et l'écroutissement. Ce principe est un outil bien adapté pour construire dans l'avenir des modèles simplifiés des processus de laminage. Enfin, nous avons proposé une famille de transformation à peu de paramètres inspirée des simulations de LAM3.

En ce qui concerne les orientations futures, un certain nombre de perspectives se dégagent. Tout d'abord, le travail de programmation reste malheureusement à faire car faute de temps, nous n'avons pas pu l'entreprendre avec une généralité suffisante. Enfin, pour l'application du principe de minimum au processus de laminage, surtout au laminage à chaud, nous pourrions choisir une famille de transformations plus large pour améliorer les résultats.

## Bibliographie

**Avitzur B.** Metal Forming: Processes and Analysis [Journal]. - [s.l.] : McGraw Hill, 1968.

**Avitzur B.** The Upper Bound Approach to Plane Strain Problems Using Linear and Rotational Velocity Field [Journal]. - [s.l.] : Journal of Engineering for Industry, 1986.

**Chabot A., Hun M., Hammoum F.** Mechanical analysis of a mixed mode debonding test for "composite" pavements [Journal]. - F. : Construction and Building Materials, 2013. - 40: 1076-1088.

**Coleman B. D.** "Thermodynamics of materials with memory" [Journal] // Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 17. - 1964. - pp. 1-46.

**Coleman B. D. and Noll W.** "The thermodynamics of elastic materials with heat conduction and viscosity" [Journal] // Arch. Rat. Mech. Anal., vol. 13. - 1963. - pp. 167-178.

**Da Silva Botelho T., Bayraktar E. and Inglebert G.** Experimental and finite element analysis of spring back in sheet metal forming [Journal]. - [s.l.] : International Journal of Computational Materials Science and Surface Engineering, 2007.

**Dafalias Y. F.** "A missing link in the macroscopic constitutive formulation of large plastic deformations" [Book Section] // "Plasticity Today" / book auth. A. Sawczuk and G. Bianchi. - London : Elsevier Applied Science Publisher, 1985.

**Ehrlacher A. and Fedelich B.** "An analysis of stability of equilibrium and of quasi-static transformations on the basis of the dissipation function" [Journal] // European Journal of Mechanics, A/Solids, 16, n°5. - 1997. - pp. 833-855.

**Ehrlacher A. and Fedelich B.** "Stability and bifurcation of simple dissipative systems: application to brutal damage", in Strain Localisation and Size Effect Due to Cracking and Damage [Journal] // Elsevier Applied Science Publishers LTD. - 1988. - pp. 217-227.

**Ehrlacher A. et Fedelich B.** "Sur un principe de minimum concernant des matériaux à comportement indépendant du temps physique" [Journal] // C. R. Acad. Sc. Paris, t.308, Série II. - 1989. - pp. 1391-1394.

**Ericksen J. E. and Rivlin R. S.** "Large elastic deformations of homogeneous isotropic materials" [Journal] // J. Rat. Mech. Anal., 3. - 1954. - p. 281.

**Felder E.** Analyse des procédés de mise en forme - Méthodes de calcul des contraintes [Journal]. - [s.l.] : Techniques de l'Ingénieur , 2009.

**Green A. E. and Adkins J. E.** "Large elastic deformations" [Book]. - Oxford : 1st Edn., Oxford University Press, 1960.

**Green A.E. and Naghdi P.M.** "A general theory of an elastic-plastic continuum" [Journal] // Arch. Rat. Mech. Anal. , vol. 18, n°4. - 1965. - pp. 251-281.

**Green A.E. and Naghdi P.M.** "Some remarks on elastic-plastic deformation at finite strain" [Journal] // Int. J. Engng. Sci., vol. 9. - 1971. - pp. 1219-1229.

- Hacquin A.** Modélisation thermomécanique tridimensionnelle du laminage – couplage [Report]. - [s.l.] : Thèse de Doctorat, Ecole des Mines de Paris, 1996.
- Hill R.** “The mathematical theory of plasticity” [Book]. - Oxford : Clarendon Press, 1950.
- Hitchcock, J.H.** Roll neck bearings [Journal]. - [s.l.] : A.S.M.E Research Publication, 1935.
- Le Dang H.** Modélisation multifils des processus de laminage [Report]. - Paris : ENPC, 2008.
- Lee E. H.** “Elastic plastic deformation at finite strains” [Journal] // J. Appl. Mech., vol. 36. - 1969. - pp. 1-6.
- Lee E. H.** “Some comments on elastic-plastic analysis” [Journal] // Int. J. Solids Struct., vol. 17. - 1981. - p. 859.
- Loret B.** “On the effects of plastic rotation in the finite deformation of anisotropic elastoplastic materials” [Journal] // Mech. Mater., vol.2. - 1983. - p. 287.
- Mandel J.** “Sur les relations de comportement d’un milieu élastique viscoplastique” [Journal] // C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, n°1, A. - 1972. - pp. 44-46.
- Mandel J.** « Equations constitutives et directeurs dans les milieux plastiques et viscoplastiques » [Journal] // Int. J. Solids Struct., 9. - 1973. - pp. 725-740.
- Mandel J.** « Plasticité classique et viscoplasticité » [Book]. - [s.l.] : Centre International des Sciences Mécaniques, Editions CISM, Springer, 1971.
- Montmitonnet P.** Laminage - Objectifs et modélisation [Journal]. - [s.l.] : Ecole des Mines de Paris, 2002.
- Montmitonnet P.** Laminage à chaud - Théorie du laminage [Journal]. - [s.l.] : Techniques de l’Ingénieur, 1991.
- Moreau J. J.** “Sur l’évolution d’un système élasto-visco-plastique” [Journal] // C.R. Acad. Sc. Paris, t. 273, A. - 1971. - pp. 118-121.
- Moreau J. J.** « Fonctionnelles convexes » [Conference] // Séminaire sur les équations aux dérivées partielles. - Paris : Collège de France, 1967.
- Nagtegaal J. C. and de Jong J. E.** “Some aspects of non-isotropic work-hardening in finite strain plasticity” [Book Section] // “Plasticity of metals at finite strain: theory, experiment and computation” / book auth. E. H. Lee and R. L. Mallet . - [s.l.] : Stanford University and Rensselaer Polytechnic Institute, 1982.
- Orowan E.** The calculation of roll pressure in hot and cold flat rolling [Journal]. - [s.l.] : Proc. Inst. Mech. Eng., 1943. - Vol. 150.
- Paqué P. Felder E. and Hyafil J.** Mise en forme des matériaux - Calcul par la plasticité [Book]. - Paris : Dunod, 1973. - Vol. 2.
- Perzyna P. and Wojno W.** [Journal] // Arch. Mech. Stosowanej, 20. - 1968. - pp. 499-511.
- Pipkin A. C. and Rivlin R. S.** “The formulation of constitutive equations in continuum physics, I” [Journal] // Arch. Rat. Mech. Anal., 4. - 1959. - p. 129.

**Prager W. and Hodge P. G.** Theory of perfectly plastic solids [Book]. - New York : Wiley, 1951.

**Rivlin R. S. and Saunders D. W.** « Large elastic deformations of isotropic materials » [Journal] // VII, Phil. Trans. Roy. Soc., vol. 243. - 1951. - p. 251.

**Salençon J.** De l'élasto-plasticité au calcul à la rupture [Book]. - France : Ecole Polytechnique, 2002.

**Smith G. F. and Rivlin R. S.** "The strain-energy function for anisotropic materials" [Journal] // Trans. Amer. Math. Soc., 88. - 1958. - p. 175.

**Spencer A. J. M.** "The formulation of constitutive equations for anisotropic solids" [Book Section] // "Mechanical Behaviour of Anisotropic Solids". - Amsterdam : J.P. Boehler (Ed.), Nijhoff, 1982.

**Stolz C.** « Etudes des milieux à configuration physique et application » [Conference] // C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, II. - 1984. - pp. 1153-1155.

**Stosowanej** "Sur les relations de comportement d'un milieu élastique viscoplastique" [Conference] // Arch. Mech., 20. - [s.l.] : C.R. Acad. Sc. Paris, t. 272, n°24, A, p. 1596-1598, 1971. - pp. 499-511.

**Transvalor LAM3** - Manuel de l'utilisateur [Book]. - [s.l.] : ArcelorMittal, 1996.

**Zarka J.** « Etude du comportement des monocristaux métalliques : application à la traction simple » [Journal] // J. Méc., 12. - 1973. - pp. 275-318.