

Etude et modélisation des instabilités du procédé de soufflage de gaine

Johann Laffargue

▶ **To cite this version:**

Johann Laffargue. Etude et modélisation des instabilités du procédé de soufflage de gaine. Matériaux. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003. Français. NNT : 2003ENMP1156 . pastel-00000432

HAL Id: pastel-00000432
https://pastel.hal.science/pastel-00000432

Submitted on 6 Aug 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE DES MINES
DE PARIS
Collège Doctoral

N° Attribué par la bibliothèque
|__|__|__|__|__|__|__|__|__|__|

THESE

Pour obtenir le grade de
Docteur de l'Ecole des Mines de Paris
Spécialité « Sciences et Génie des Matériaux »

présentée et soutenue publiquement par

Johann LAFFARGUE

Ingénieur INSA Lyon

ETUDE ET MODELISATION DES INSTABILITES DU PROCEDE DE SOUFFLAGE DE GAINE

le 6 février 2003

Directeurs de Thèse : Jean-François AGASSANT, Yves DEMAY

Jury

M. Jean SALENÇON Membre de l'Académie des Sciences	Président
M. Pierre LAFLEUR	Rapporteur
M. Uwe EHRENSTEIN	Rapporteur
M. David SILAGY	Examinateur
M. Jean-François AGASSANT	Examinateur
M. Yves DEMAY	Examinateur

Remerciements

Cette thèse s'est déroulée au Centre de Mise en Forme des Matériaux (CEMEF) de l'Ecole des Mines de Paris, à Sophia-Antipolis. Je tiens à remercier ici le Directeur de l'Ecole des Mines ainsi que l'équipe directrice du CEMEF pour m'avoir accueilli dans leurs locaux.

Je remercie M. Jean-François AGASSANT, Professeur à l'Ecole des Mines de Paris et responsable du Groupe Ecoulements Viscoélastiques et M. Yves DEMAY, Professeur à l'Institut Non-Linéaire de Nice (INLN) pour avoir su par leurs conseils et leur intuition guider ces trois années de travail, qui auront été pour moi riches en enseignements, aussi bien sur le plan scientifique qu'humain.

Ce travail a été réalisée en collaboration avec la société ATOFINA, dans le Service des Technologies de Transformation des Thermoplastiques (S3T) du Centre d'Etude de Recherche et Développement (CERDATO). Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance à MM. Daniel LEBOUVIER, Jean-Marc ANDRE, David SILAGY et Damien RAULINE, pour m'avoir accordé leur confiance et suivi pendant ce travail.

Je remercie M. Jean SALENÇON, Professeur à l'Ecole Polytechnique et membre de l'Académie des Sciences de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie M. Uwe EHRENSTEIN, Professeur à l'Université de Nice, pour avoir accepté de juger ce travail, et M. Pierre LAFLEUR, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Montréal pour m'avoir accueilli et encadré au sein du Centre de Recherche Appliquée Sur les Polymères (CRASP) pour les essais sur la ligne de soufflage de gaine et pour avoir également accepté d'être membre du jury.

J'adresse également mes plus vifs remerciements à M. Pierre CARREAU, Professeur à l'Ecole Polytechnique de Montréal, MM. Jean-Marc HAUDIN et Bernard MONASSE ainsi que Mme Noëlle BILLON, Professeurs à l'Ecole des Mines de Paris, pour les discussions passionnantes et si riches d'enseignements que nous avons eues et pour avoir à maintes reprises pris le temps de répondre à mes (nombreuses) questions.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à M. Luc PARENT, assistant de recherche à l'Ecole Polytechnique de Montréal et M. Gérard REIGNIER, technicien au S3T, pour m'avoir encadré pendant les expérimentations effectuées sur « leurs » lignes et m'avoir fait partager leur très grande connaissance du procédé.

Je remercie chaleureusement les stagiaires qui m'ont accompagné durant ce travail, Mlle Marylène BALLESTRA pour son aide précieuse dans la réalisation du code de calcul (et la vérification des équations !) et M. Yann TROVALET pour le temps passé sur les mesures en ligne de bulles instables à Montréal.

Je souhaiterais également saluer les personnes qui ont su rendre ces trois années de thèse inoubliables : Cédric et Annelaure, Nicolas et Lidwine, Olga la charmante slave, Lucia l'impétueuse ibérique, Gérard, Nicolas R. « ZE coatch » (merci pour ces trois ans rugbystiques !), François la mulasse, Jean-Ma l'ailier sacrifié, Jean-Luc l'esthète, Manu (j'y trouve un goût d'pommes…), Emmanuelle, Karine, Sylvie et Séverine (le clan des footeuses !), Mathieu, Laurent et les autres « manchots » François, Richard, Benjamin, et enfin mes glorieux aînés et exemples (si, si) : Xavier, les 2 Fabrice(s), Jocelyn, Ginès et Nathalie. Une pensée transatlantique toute particulière à Eric (bon courage pour le multicouches !), Karen, Nicolas et Yann pour le squat montréalais et Jeff qui a réussi à me faire comprendre les règles du base-ball.

Je n'oublie bien évidemment pas Marie-Françoise, Viviane, Geneviève et Sylvie, pour leur soutien moral et logistique sans failles (un passeport en quatre jours, c'est possible !).

Enfin, je souhaiterais remercier ma famille et mes proches tout simplement pour avoir toujours été là, avec une pensée particulière vers ceux qui sont partis trop tôt.

Table des matières

Chapitre 1. Introduction générale 1

Chapitre 2. Etude expérimentale du procédé 7
I. Caractérisation rhéologique du polymère utilisé 9
II. Etude thermomécanique du procédé stable 14
III. Etude des instabilités 27
IV. Conclusions 53
V. Références bibliographiques 54

Chapitre 3. Construction du modèle général axisymétrique 57
I. Les modèles de la littérature 59
II. Mise en équations 67
III. Méthodologie d'analyse des équations 76
IV. Etude des équations en régime stationnaire 83
V. Conclusions 96
VI. Références bibliographiques 97

Chapitre 4. Analyse de stabilité axisymétrique 101
I. La modélisation des instabilités dans les procédés d'étirage 103
II. Etude de stabilité linéaire du modèle 114
III. Analyse du modèle et résultats obtenus 123
IV. Conclusion et discussion 137
V. Références bibliographiques 138

Chapitre 5. Extension au cas non axisymétrique 143
I. La prédiction des comportements perturbés non axisymétriques 145
II. Construction du modèle tridimensionnel 150
III. Analyse de stabilité linéaire du système 156
IV. Résultats préliminaires – cohérence de l'analyse de stabilité 158
V. Conclusions 162
VI. Références bibliographiques 162

Chapitre 6. Conclusions 165

Annexes 169

Chapitre 1. Introduction générale

Depuis l'invention du Celluloïd par Parkes en 1860, les progrès de la chimie ont permis la création de nombreuses matières plastiques qui ont peu à peu meublé notre quotidien et nous sont devenues indispensables. Ainsi les polyoléfines (polyéthylène, polypropylène), le polychlorure de vinyle (PVC) ou le polymétacrylate de méthyle (PMMA) par exemple se retrouvent dans des applications aussi diverses que l'emballage, l'automobile, les jouets, les bouteilles, les cadres de fenêtre, les câbles électriques. Toutes ces applications ont bien entendu nécessité le développement d'outils de fabrication aux technologies spécifiques : injection, extrusion, extrusion-soufflage, rotomoulage, enduction…

	Polyéthylène basse densité	**Polyéthylène basse densité linéaire**	**Polyéthylène haute densité**
Injection	199	85	672
Extusion dont	4129	1653	1764
Film	3319	1571	630
Tube	78	35	765
Cable	224	35	63
Enduction	508	12	30
Corps creux	46	12	1638
Rotomoulage	5	125	12
Autres	259	48	114
TOTAL	**4638**	**1923**	**4200**

tableau 1.1 : Le marché du polyéthylène en Europe Occidentale en 2000, en milliers de tonnes (source ATOFINA)

Parmi les applications des polymères, les films plastiques ont rapidement pris une place prépondérante (tableau 1.1). En majeure partie destinés au secteur de l'emballage, notamment dans le secteur alimentaire pour la conservation et la présentation des aliments, on les retrouve également pour faire des sacs plastiques, des films agricoles, mais aussi des films de protection… (figure 1.1). Ainsi en France par exemple, 800 000 tonnes de films sont produites annuellement. Dans ces marchés, les enjeux techniques sont divers : tenue mécanique, adhésion, imperméabilité, compatibilité alimentaire, résistance au vieillissement, transparence, brillance sont autant de défis à relever pour le producteur de matière première et le transformateur. Tout « défaut » de ce film, quel qu'il soit, peut alors être un frein aux propriétés recherchées.

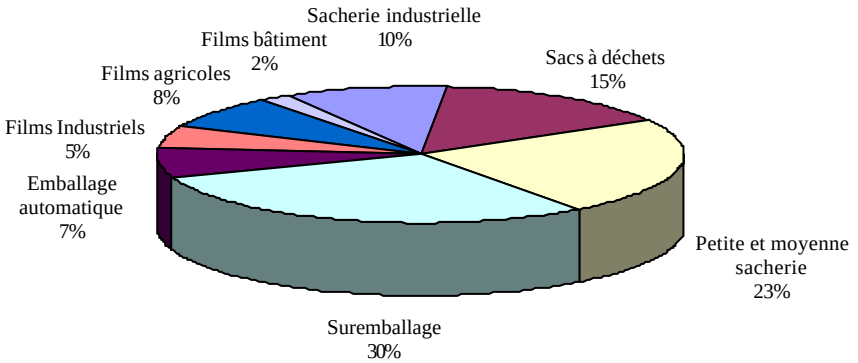


figure 1.1 : Répartition des marchés du film plastique en Europe en 2000 (source PLASTEUROFILM)

Le procédé de soufflage de gaine (*film blowing* ou *blown-film*) est, avec l'extrusion de film à plat *(cast-film)*, le principal procédé de fabrication de films plastiques. Son principe général est décrit sur la figure 1.2.

Le polymère est transporté, fondu et mis en pression dans une extrudeuse puis ensuite forcé à travers une filière annulaire. A la sortie de celle-ci, le tube de polymère fondu est étiré à l'aide de rouleaux pinceurs. Une surpression est créée à l'intérieur en insufflant de l'air par le centre de la filière, ce qui a pour effet le gonflement du tube qui forme ainsi une bulle (ou gaine). Celle-ci est refroidie par sa surface externe au moyen d'air soufflé uniformément par l'intermédiaire d'un anneau de refroidissement plus ou moins complexe. L'air piégé à l'intérieur de la bulle se trouvant à température élevée et diminuant donc l'efficacité du refroidissement, des dispositifs de refroidissement interne (*Internal Bubble Cooling* ou système *IBC*) ont également été développés. Ceux-ci renouvellent en permanence l'air intérieur en créant une circulation d'air qui contribue au refroidissement. Le diamètre de la bulle et la pression intérieure sont contrôlés par un système de régulation pilotant l'entrée et l'échappement d'air.

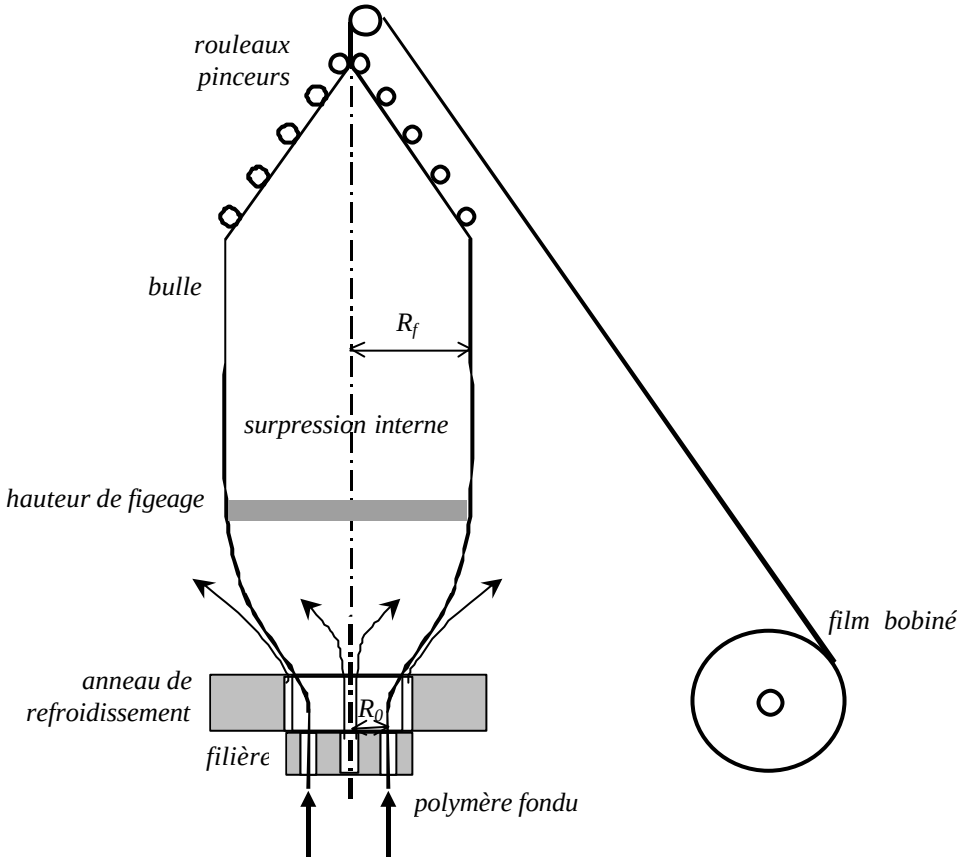


figure 1.2 : Schéma de principe du procédé de soufflage de gaine

Le polymère subit donc un bi-étirage, longitudinal par l'action des rouleaux pinceurs et transversal par l'action du gonflage. Sous l'effet du refroidissement, le polymère se solidifie à une certaine hauteur, que l'on désigne sous le nom de « hauteur de figeage » ou FLH *(Frost Line Height)*. Dans le cas des polymères semi-cristallins, cette zone, plus ou moins bien discernable, est le siège des phénomènes de cristallisation. Au-delà de cette zone, la bulle forme un tube de diamètre constant. Cette gaine est ensuite mise à plat par un système en V de rouleaux de guidage et par les rouleaux pinceurs, transportée par un système complexe de rouleaux (ou embarreurs) pour être bobinée selon l'application visée, soit directement, soit après découpage en deux films distincts (voir figure 1.3).

Les dimensions des lignes de soufflage de gaine sont très variables selon le type de machine (laboratoire ou industrielle), les produits utilisés et l'application visée. Les diamètres des filières varient ainsi de 50 mm à 2m, l'entrefer de 0.5 mm à 3 mm, les débits de matières de 5kg/h à 500

kg/h. Selon les cas, les films obtenus peuvent avoir des épaisseurs allant de 8 à 300 µm, pour des diamètres de bulles variant entre la dizaine de centimètres et 6 m.



figure 1.3 : Vue générale d'une ligne de soufflage de gaine industrielle KIEFEL (source ATOFINA)

Deux paramètres permettent de caractériser le bi-étirage subi par le film :

- le taux d'étirage DR (*Draw Ratio*), appelé aussi TUR *(Take Up Ratio)* définit l'étirage longitudinal induit par les rouleaux pinceurs :

$$DR = \frac{Vitesse\,de\,tirage\,des\,rouleaux}{Vitesse\,de\,sortie\,de\,\,filière} = \frac{V_f}{V_0} \qquad (1.1)$$

- le taux de gonflage BUR *(Blow Up Ratio)* définit quant à lui l'étirage transversal induit par le gonflement :

$$BUR = \frac{Rayon\,\,final\,de\,la\,gaine}{Rayon\,de\,la\,\,filière} = \frac{R_f}{R_0} \qquad (1.2)$$

Certains auteurs utilisent pour définir l'étirage global subi par le polymère le taux de réduction d'épaisseur TR *(Thickness Reduction)* . Il est obtenu en exprimant la conservation de la masse entre la sortie de la filière et la bulle figée :

$$TR = \frac{e_0}{ef} = \frac{Q_m}{r_0\,2pR_0V_0}.\frac{r_f\,2pR_fV_f}{Q_m} = \frac{r_f}{r_0}DR.BUR \qquad (1.3)$$

Les principaux avantages du soufflage de gaine sont :

- sa grande flexibilité permettant la fabrication de films de différentes largeurs avec le même outillage
- l'absence de défauts de bords rencontrés en cast-film (os de chien ou enrobage en co-extrusion)
- des investissements moins coûteux

En revanche, la répartition des épaisseurs des films produits ainsi que leurs propriétés optiques ont longtemps été réputées moins bonnes qu'en cast-film.

Depuis la première ligne industrielle expérimentée en 1939 aux Etats-Unis, le procédé a su s'adapter aux nouvelles matières apparues sur le marché ainsi qu'aux exigences accrues dans le domaine des applications. Initialement dédié à l'extrusion de polyéthylène basse densité (PEbd) pour l'emballage et la sacherie, sa technologie a suivi le développement des polyoléfines (d'où sont issus encore aujourd'hui près de 90% des films produits) vers les polyéthylènes haute densité (PEhd) (brevet Hoechst en 1953) puis les polyéthylènes basse densité linéaire (Pebdl) (brevet Union Carbide en 1977) ou encore les nouveaux produits actuellement développés grâce à la catalyse de type métallocène. Il a bien entendu su également s'ouvrir à d'autres polymères utilisés pour leurs fonctionnalités spécifiques, polyéthylènes fonctionnalisés par greffage ou co-polymérisation (liants de coextrusion, produits barrière (EVOH)…), polyamide (PA), polychlorure de vinyle (PVC), plus récemment polyfluorure de vinylidène (PVDF) par exemple. Ainsi ont été développés de nouveaux systèmes de refroidissement plus performants (anneaux double flux, refroidissement interne) ou des filières de co-extrusion permettant la réalisation de structures aux propriétés améliorées ou aux fonctionnalités multiples (propriétés barrière, mécanique…).

Dans le cas du PEbd, les épaisseurs minimales atteignables étaient restreintes par la survenue de casses longtemps attribuées à un mauvais réglage de la machine. Les évolutions technologiques et l'utilisation des nouvelles matières ont permis de repousser les limites du procédé : des films plus fins aux propriétés améliorées. Cependant elles ont également fait apparaître dans certaines conditions des comportements instables auparavant non rencontrés. Ces instabilités engendrent des variations dimensionnelles du film (épaisseur et largeur de la bulle) qui rendent délicat le conditionnement du film (bobinage) mais d'où découlent également des variations significatives des propriétés finales incompatibles avec les exigences du marché.

L'étude et la compréhension des phénomènes qui gouvernent le procédé de soufflage de gaine, que ce soit dans des conditions stables ou instables, sont donc des enjeux économiques forts afin d'optimiser la conception des nouvelles matières et les conditions de mise en œuvre pour atteindre une plus grande productivité et améliorer les propriétés finales du produit.

Ceci a fait l'objet d'un certain nombre d'études lancées par la société ATOFINA (issue de la fusion en 2000 de Elf-Atochem et de Fina). Après l'étude expérimentale puis numérique du procédé « stable » et des relations entre les propriétés finales du film et les conditions de mise en œuvre [PIA,84][AND,99], il est nécessaire d'appréhender les limitations que sont les instabilités du procédé. En préalable à notre travail, une étude expérimentale [LAS,99] a permis de caractériser des comportements instables très différents selon le type de matériau et les paramètres du procédé. L'objectif de notre travail a consisté à affiner cette étude expérimentale en quantifiant précisément les défauts observés puis à développer un modèle du soufflage de gaine permettant de prédire l'influence des conditions de procédé sur la forme de la bulle, et par conséquent sur les dimensions finales du film obtenu, mais également de déterminer les conditions pour lesquelles des phénomènes instables surviennent.

Pour aboutir à ce résultat nous proposons dans le chapitre 2 d'effectuer une étude expérimentale du procédé sur deux lignes pilotes équipées de dispositifs de mesure permettant de caractériser au mieux le comportement de la bulle à la fois dans l'état stable et dans l'état instable. Nos observations nous permettront de bien comprendre les phénomènes mis en jeu dans le procédé et

les mesures effectuées constitueront un solide outil de comparaison pour l'approche théorique que nous proposerons par la suite.

Le chapitre 3 sera dédié à l'élaboration d'un nouveau modèle axisymétrique du procédé de soufflage de gaine basé sur une méthode originale d'obtention des équations dans un repère lié au laboratoire et non pas dans un repère tangent à la gaine comme cela a été le cas jusqu'à présent dans la littérature. Nous montrerons dans le cas stable (stationnaire) que les équations obtenues sont cohérentes avec celles de la littérature.

Dans le chapitre 4, nous effectuerons l'analyse de stabilité linéaire de ce modèle et confronterons ces résultats avec les résultats expérimentaux. Cette étude de stabilité était très délicate dans un repère lié à la gaine dans la mesure où le repère lui-même bouge en fonction du temps quand le procédé est instable.

Enfin, le chapitre 5 sera consacré à l'extension de notre modèle dans le cas plus général non-axisymétrique.

Références bibliographiques

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[LAS,99] LASAUNIERE N., *Etude des instabilités de bulle dans le procédé de soufflage de gaine de polyéthylène*, Rapport final de Mastère, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[PIA,84] PIANA A., *Etude des relations entre mise en forme, orientation et rétraction dans des films de polyéthylène basse densité réalisés par soufflage de gaine*, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1984

Chapitre 2. Etude expérimentale du procédé

I. Caractérisation rhéologique du polymère utilisé 9
I.1. Rhéométrie en cisaillement 9
I.1.1. Thermodépendance 10
I.1.2. Viscoélasticité 11
I.2. Rhéométrie élongationnelle 13
I.3. Conclusions 14

II. Etude themomécanique du procédé stable 14
II.1. Présentation de la ligne de soufflage 15
II.1.1. Extrusion 15
II.1.2. Refroidissement 17
II.1.3. Mesures réalisées 19
II.2. Conditions imposées et synthèse des résultats obtenus 21
II.2.1. Conditions d'essais 21
II.2.2. Allure des profils obtenus 21
II.2.3. Influence des paramètres du procédé 22
II.3. Conclusions 27

III. Etude des instabilités 27
III.1. Etude bibliographique 27
III.1.1. Autres procédés comportant un étirage : le filage textile et le cast-film 28
III.1.2. Les différentes instabilités du soufflage de gaine 31
III.1.3. La difficulté de la quantification des instabilités 35
III.1.4. Cartographies des différentes zones 37
III.1.5. Conclusions 38
III.2. Présentation de la ligne de soufflage 39
III.2.1. Configuration de la ligne 39
III.2.2. Dispositif de mesure en ligne 40
III.2.3. Cas typiques rencontrés et critères de stabilité introduits 41
III.2.4. Critères de stabilité et protocole expérimental 45
III.3. Essais réalisés et résultats 46
III.3.1. Hauteur de figeage « basse » 46
III.3.2. Hauteur de figeage « haute » 49
III.3.3. Cartographies obtenues 51
III.4. Synthèse des résultats 52

IV. Conclusions 53

V. Références bibliographiques 54

Chapitre 2. Etude expérimentale du procédé

Dans ce chapitre, nous avons étudié le procédé de soufflage de gaine d'abord dans des conditions stables puis dans des conditions instables.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés au procédé « stable ». En faisant varier les conditions d'expérience telles que les taux d'étirage et de gonflage, le refroidissement ou les conditions en sortie de filière, nous avons observé la bulle dans sa zone de biétirage, depuis la sortie de la filière jusqu'à la hauteur de figeage. Nous avons mesuré le profil de la bulle, ainsi que sa température et tenté de quantifier la sensibilité du procédé aux différents paramètres expérimentaux. Cette étude, préliminaire à l'étude de stabilité qui est l'objectif majeur de notre travail, reste une étape obligée pour la compréhension phénoménologique du procédé. De surcroît, la modélisation des instabilités du procédé passe bien évidemment par la maîtrise optimale de celui-ci dans l'état stable.

Dans une seconde série d'essais, nous avons cherché à décrire qualitativement et quantitativement les différents phénomènes qui sont classiquement regroupés sous le vocable d'«instabilité de bulle ». Nous avons balayé l'espace des paramètres du procédé de façon à cerner les conditions d'apparition des différentes instabilités d'étirage, en centrant notre étude sur l'influence des paramètres de biétirage (DR,BUR) et de refroidissement (paramètres thermiques). Nous avons cherché à déterminer les comportements instables réellement pénalisants pour le procédé et les paramètres conditionnant préférentiellement leur apparition.

Ces données nous permettront par la suite de valider les différentes hypothèses et méthodes d'analyse mises en jeu dans la construction d'un modèle général représentatif du procédé instationnaire.

I. Caractérisation rhéologique du polymère utilisé

Le but de notre travail est de caractériser les instabilités survenant dans le procédé de soufflage de gaine et de se doter de données quantitatives fiables de confrontation expérimentale avec le modèle développé. Dans ce contexte, nous avons préféré centrer notre étude expérimentale sur un polymère réputé présenter lors de sa mise en œuvre les différentes instabilités décrites dans la littérature : un polyéthylène basse densité linéaire (PEbdl) à comonomère C6 obtenu par procédé phase gaz. Sa densité vaut 0.920 à 25°C et il a un indice de fluidité *(Melt Flow Index* (MFI) sous 2,16kg à 190°C) de 1.

Une série d'analyses a donc été menée afin de caractériser le comportement rhéologique de ce polymère par rapport à d'autres familles de polyéthylènes classiquement utilisées en soufflage de gaine. Nous utiliserons également les résultats de cette étude pour justifier ou critiquer les hypothèses faites pour la construction de notre modèle mécanique et juger ainsi de sa pertinence.

I.1. Rhéométrie en cisaillement

Nous avons étudié le comportement rhéologique en cisaillement du PEbdl en rhéométrie plan-plan oscillatoire à déformation imposée (rhéomètre RMS 800 de Rheometrics) entre 0.01 et 100 rad.s^{-1} pour 3 températures différentes (140°C, 160°C et 180°C). Le principe et le mode de dépouillement de ce type d'expériences sont par exemple décrits dans [AGA,96]. En résumé, il s'agit d'étudier la réponse dynamique du fluide situé entre deux plateaux parallèles à une sollicitation sinusoïdale d'amplitude et de fréquence contrôlée, à température fixée. En mesurant le couple et le déphasage résultants, il est possible de déduire les composantes visqueuse G' et élastique G'' du module

complexe G^* et la viscosité complexe h^*. La figure 2.1 présente les résultats obtenus pour le PEbdl aux trois températures.

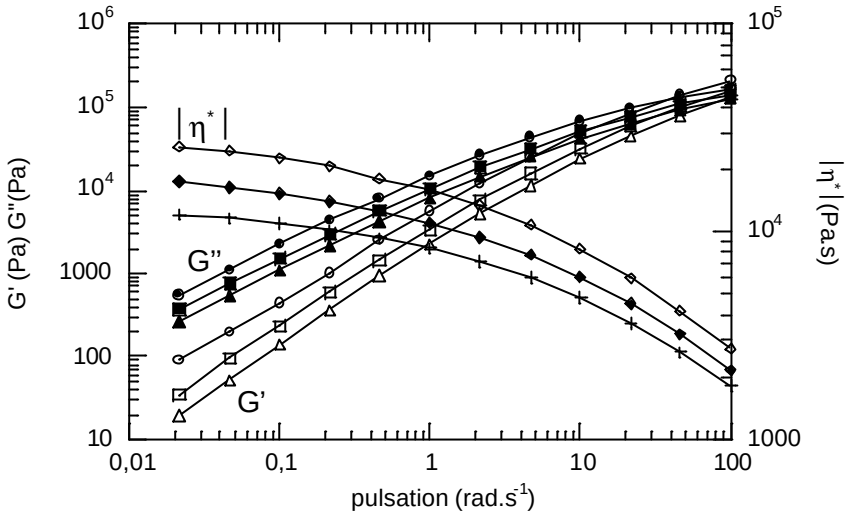


figure 2.1 : Rhéologie en cisaillement du PEbdl ;
G' : (□) : T=140°C ; (□) : T=160°C ; (□) : T=180°C
G'': (○) : T=140°C ; (□) : T=160°C ; (Δ) : T=180°C
*ïh*ï : (+) : T=140°C ; (□) : T=160°C ; (◊) : T=180°C*

Les informations que nous pouvons tirer de ces expériences sont de plusieurs types.

I.1.1. Thermodépendance

Aux températures considérées, nous pouvons noter que nous n'avons pas atteint le plateau newtonien. L'application du principe de superposition temps-température permet de tracer, à partir de nos courbes à température donnée, une courbe maîtresse en faisant glisser chacune des courbes d'un facteur de glissement a_T (en traçant $h(\dot{g})/a_T$ en fonction de $a_T.\dot{g}$). Etant donné que la gamme de température considérée est éloignée de la température de transition vitreuse, la relation classique exprimant l'évolution du coefficient de glissement avec la température est une loi d'Arrhenius :

$$a_T = \exp\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right) \qquad (2.1)$$

E_a est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits, T_0 la température de référence.

Ainsi, la viscosité pourra être exprimée par la relation approchée :

$$h(T) = a_T h(T_0) = h(T_0)\exp\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right) \qquad (2.2)$$

En appliquant le principe de Cox-Merz qui postule que la pulsation en régime dynamique est assimilable au taux de cisaillement en régime permanent (soit $h(\dot{g}) = |h^*(w)|$), nous obtenons la courbe maîtresse présentée sur la figure 2.2.

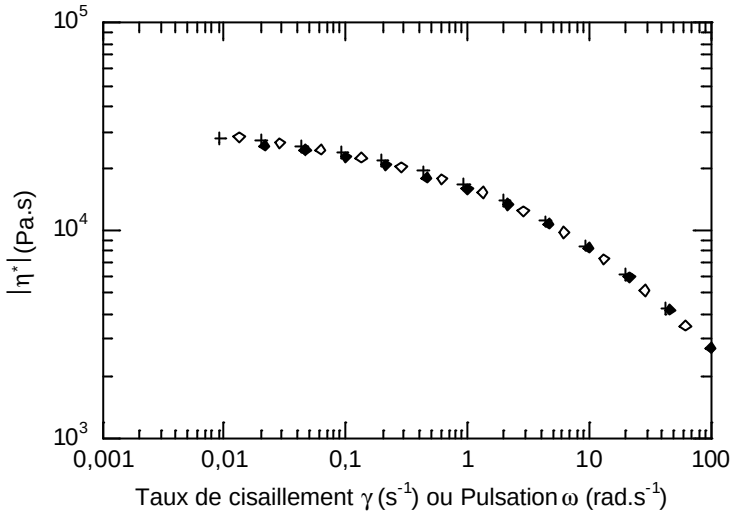


figure 2.2 : Courbe maîtresse de la viscosité à la température de référence de 140°C

Température (°C)	Facteur de glissement
160	0,62
180	0,43

tableau 2.1 : Valeurs des coefficients de glissement déterminés par rapport à la courbe de référence à 140°C

L'énergie d'activation déterminée à partir des coefficients de glissement vaut ainsi 33kJ/mol. Cette valeur est classique pour des PEbdl et relativement faible si nous la comparons à celles classiquement obtenues pour d'autres familles de polyéthylènes comme le PEbd (environ 50kJ/mol), voir par exemple [AND,99].

I.1.2. Viscoélasticité

Il existe un très grand nombre de lois de comportement rhéologique permettant de rendre compte du comportement d'un polymère fondu (voir par exemple [AGA,96]). Ces modèles ont pour objectif de décrire les propriétés viscoélastique du fluide qui le distinguent d'un fluide purement visqueux : dépendance du comportement en fonction du temps, effet Weissenberg, comportement singulier sous sollicitation elongationnelle...

Parmi ces modèles, le plus simple est le modèle de Maxwell linéaire, qui se compose d'un ressort élastique de module G et d'un amortisseur de viscosité h disposés en série.

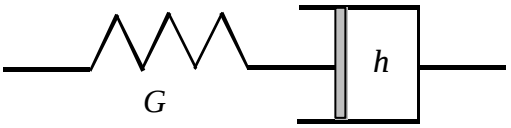


figure 2.3 : Schéma de principe du modèle de Maxwell linéaire

La contrainte σ est, dans ce cas, reliée à la déformation ε par l'équation :

$$s + l\frac{ds}{dt} = h\frac{de}{dt} \qquad (2.3)$$

La composante élastique du modèle est donc décrite par le temps de relaxation λ ($l = h / G$). Le caractère viscoélastique du matériau sera d'autant plus marqué que son temps de relaxation sera long. Une amélioration de cette loi de comportement fait intervenir un nombre n d'éléments de Maxwell disposés en parallèle. La viscoélasticité du matériau est alors liée à n temps de relaxation, représentatifs de la distribution de longueur des chaînes moléculaires. On parlera de modèle de Maxwell multi-mode.

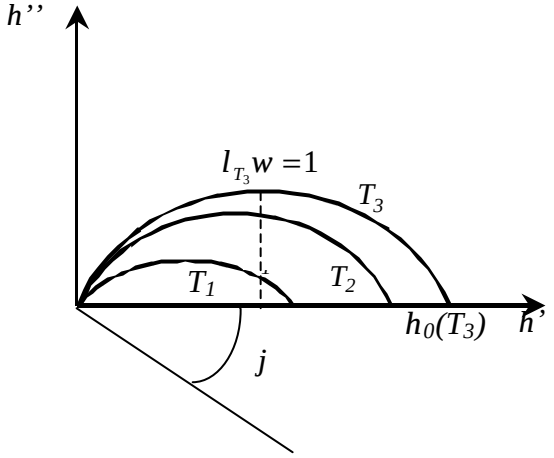


figure 2.4 : Représentation de Cole-Cole d'un polymère réel à différentes températures T ; $T_1 > T_2 > T_3$

Le diagramme de Cole-Cole (figure 2.4) permet d'avoir une première information sur la distribution des temps de relaxations et sur la moyenne de cette distribution. En traçant, pour chaque température et dans un repère orthonormé l'évolution de la composante élastique h'' de la viscosité complexe en fonction de la composante visqueuse h', on montre que l'on obtient un cercle centré de rayon $\eta/2$. Pour les différentes températures, les centres des cercles obtenus sont alignés. L'angle j que fait la ligne des centres avec l'axe des h' permet de remonter à un paramètre h de distribution des temps de relaxation par la relation $f = hp / 2$. Le cas $h=0$ correspond au cas idéal où il n'y a qu'un temps de relaxation, et le cas $h=1$ à une infinité de ces temps. Le sommet du cercle correspond à la relation $lw = 1$, ce qui nous permet de retrouver le temps de relaxation « moyen » du fluide.

Pour des polymères réels, la courbe décrite n'est pas un demi-cercle parfait mais plutôt un arc de cercle. L'extrapolation des arcs de cercles dans la zone, généralement non accessible par l'expérience, des faibles fréquences (partie droite sur le diagramme), nous fournit également une évaluation de la valeur de la viscosité limite au plateau newtonien.

La figure 2.5 présente le diagramme obtenu pour notre PEbdl. Il est difficile d'extrapoler ses courbes à faible fréquence, notamment à 140°C. Le tableau 2.2 regroupe les valeurs de temps de relaxation déduites. En supposant qu'une loi d'Arrhenius régit l'évolution du temps de relaxation avec la température, nous obtenons une énergie d'activation équivalente à celle déterminée pour les évolutions de la viscosité, ce qui tend à prouver que le module G est indépendant de la température.

Température (°C)	λ (s)
140	0.827
160	0.540
180	0.358

tableau 2.2 : Temps de relaxation déduits de la méthode de Cole-Cole

Ces valeurs de temps de relaxation moyen sont assez faibles, comparativement à ceux obtenus classiquement pour d'autres familles de polyéthylènes. Ainsi le PEbd est caractérisé par des temps de relaxation dix fois supérieurs (voir [AND,99] par exemple). Le caractère viscoélastique de notre polymère est donc relativement peu marqué.

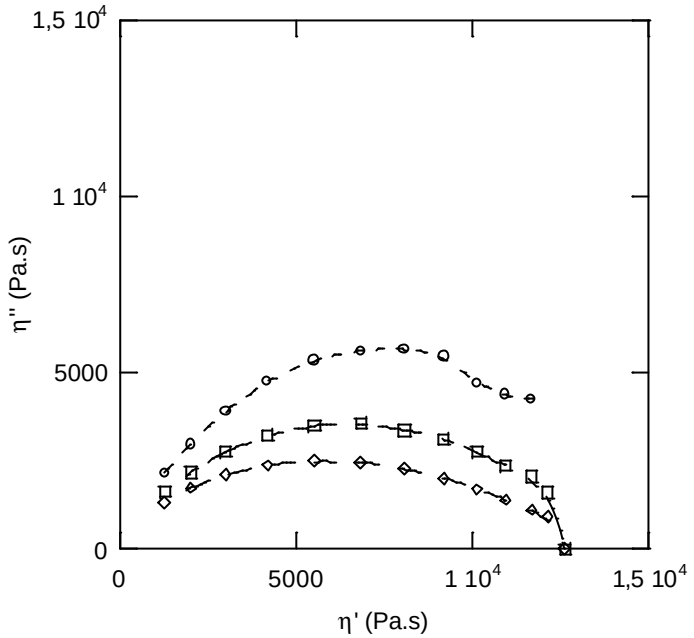


figure 2.5 : Représentation de Cole-Cole du PEbdl utilisé ;(○) : T=140°C ; (□) : T=160°C ; (◊) : T=180°C

I.2. Rhéométrie élongationnelle

Des mesures en élongation uniaxiale ont été réalisées sur un rhéomètre RME de Rheometric Scientific, utilisant la technique à pinces rotatives développée par Meissner (voir par exemple [MEI,94]). L'échantillon, un barreau à section rectangulaire, est étiré par deux pinces maintenues à distance fixe et constituées chacune par 2 chenilles. Un capteur de force, lié à une pince, permet de mesurer en continu la force nécessaire à étirer le polymère. Pour compenser son propre poids et éviter tout frottement, l'échantillon est placé sur une table poreuse huilée par laquelle on insuffle de l'azote à la température de l'essai.

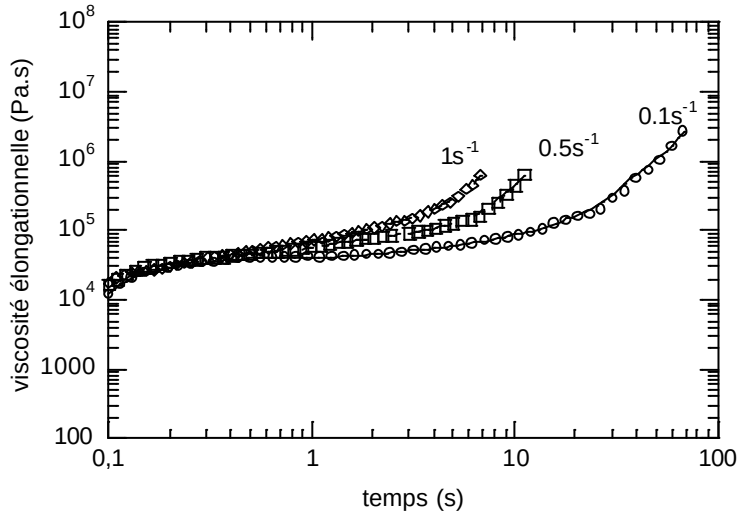


figure 2.6 : Courbe de viscosité élongationnelle du PEbdl à T=140°C

La figure 2.6 présente les résultats obtenus avec notre PEbdl pour trois vitesses de sollicitation. Nous pouvons noter une augmentation, modérée, de la viscosité élongationnelle avec la déformation, située surtout au voisinage du point de rupture. C'est le phénomène de rhéodurcissement (ou *strain hardening*). Celui-ci reste cependant limité, si on le compare à celui observé pour un PEbd (voir figure 2.7).

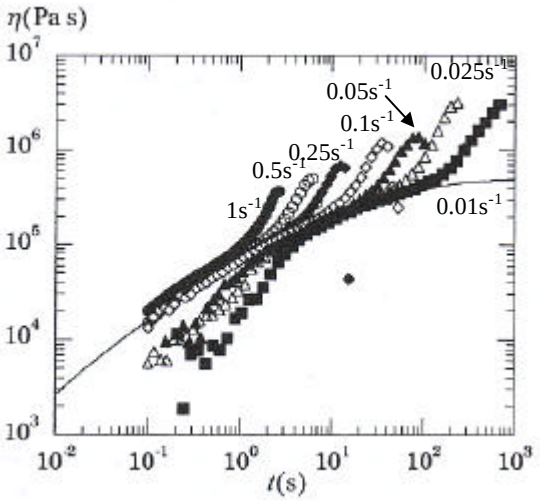


figure 2.7 : Courbe de viscosité élongationnelle d'un PEbd à T=140°C, d'après [AND,99]

I.3. Conclusions

Le polyéthylène basse densité linéaire que nous avons choisi pour notre étude possède un comportement rhéologique en cisaillement conforme à celui de la plupart des polyéthylènes. Ce comportement en cisaillement n'est d'aucune utilité pour prédire le comportement en soufflage de gaine dans la mesure où il ne permet pas de déterminer la viscosité au plateau newtonien. En revanche, il nous donne accès à l'énergie d'activation de la viscosité qui est un paramètre clef pour la prédiction de la forme de la bulle [AND,99].

Par ailleurs nous avons accès à un temps de relaxation moyen qui ne peut être utilisé directement dans les modélisations viscoélastiques des procédés d'étirage [SIL,96] mais qui comparativement apparaît faible (un facteur 10) par rapport à celui d'un polyéthylène basse densité déterminé dans les mêmes conditions. Il apparaît donc licite de négliger, dans un premier temps, le comportement élastique dans la modélisation du soufflage de gaine. Il ne faut cependant pas masquer la réalité : comme l'a montré André [AND,99], la modélisation viscoélastique du procédé de soufflage de gaine est un exercice délicat. Pour un modèle de Maxwell, on peut ainsi démontrer la disparition de solution numérique, et ce pour des faibles nombres de Deborah (voir définition au paragraphe II.1.1).

En conclusion, la donnée majeure dont nous aurons besoin dans la suite de cette étude est l'énergie d'activation de la viscosité qui est E=33kJ/mol. La viscosité sera supposée indépendante de la vitesse de déformation mais dépendante de la température.

II. Etude themomécanique du procédé stable

Dans une première série d'expériences, nous avons réalisé des essais de soufflage de gaine dans des conditions stables avec le PEbdl. Nous avons cherché à obtenir les formes de bulle et les profils de températures pour différentes valeurs des paramètres du procédé définis dans notre premier chapitre : le taux de gonflage, le taux d'étirage, la hauteur de figeage ou les conditions en sortie de

filière. L'étude du procédé stable n'étant pas l'objet principal de notre travail, les résultats que nous présentons n'ont pas pour vocation l'étude exhaustive de l'influence de ces paramètres, mais plutôt la caractérisation de certains cas précis qui nous serviront par la suite à juger de la validité des hypothèses et des résultats du modèle stationnaire que nous utiliserons comme base pour notre étude de stabilité. Des études plus complètes sont décrites, par exemple, dans [PIA,84][AND,99] [BEL,99].

II.1. Présentation de la ligne de soufflage

Cette première série d'essais a été réalisée sur une ligne de soufflage de laboratoire monocouche COLLIN du Service des Technologies de Transformation des Thermoplastiques (S3T) au CERDATO (ATOFINA).

II.1.1. Extrusion

a) Description

L'extrudeuse est équipée d'une vis standard pour polyoléfines de diamètre D=30 mm et de longueur 25D. La tête d'extrusion annulaire est dotée d'un poinçon intérieur interchangeable, permettant de fixer l'entrefer e de la filière (c'est-à-dire le diamètre intérieur, le diamètre extérieur restant quant à lui constant). Nous avons ainsi pu fixer un entrefer de 0.8 mm ou de 2 mm pour un diamètre intérieur respectivement de 50 mm et 47.6 mm et donc, en jouant sur le débit de l'extrudeuse et sur l'entrefer, faire varier considérablement les conditions dans lesquelles nous sollicitons le matériau dans la filière.

b) Quantification des conditions d'extrusion

La quantification du passé thermomécanique du matériau avant sa sortie de la filière est un point très délicat à appréhender. En effet le matériau subit dans l'extrudeuse puis dans la filière des actions mécaniques et thermiques variables selon, par exemple, le nombre, le type et la géométrie des éléments de la vis et la géométrie complexe de l'écoulement dans la filière. Compte tenu des difficultés évidentes de cette quantification, certains auteurs, tel André [AND,99], simplifient leur étude en considérant simplement les conditions à la sortie de la filière. Ils utilisent alors deux nombres adimensionnels décrivant les deux composantes d'un écoulement : le cisaillement et l'élongation.

- *Le nombre de Weissenberg We*

  Ce nombre caractérise, en cisaillement simple, le rapport entre les forces d'élasticité et les forces de viscosité (voir notamment [AGA,96]). Il est défini par :

$$We = \frac{N_1}{2t} \qquad (2.4)$$

  avec N_1 la première différence de contraintes normales, différence entre la contrainte dans la direction de cisaillement et celle dans la seconde direction du plan de cisaillement, et t la contrainte de cisaillement.

  On montre que dans le cas d'un modèle de Maxwell mono-mode, We est relié au taux de cisaillement $\dot{g}$ dans la filière par la relation :

$$We = l\dot{g} \qquad (2.5)$$

  où l est le temps de relaxation du matériau.

- *Le nombre de Deborah De*

  Ce nombre adimensionnel permet quant à lui de quantifier le niveau de contraintes viscoélastiques atteint par rapport au temps que dure l'écoulement. Il est défini comme le rapport entre le temps de relaxation du fluide et le temps propre du procédé t :

$$De = \frac{l}{t} \tag{2.6}$$

Dans le cas de l'extrusion à travers une filière annulaire de rayon R_0, d'entrefer e_0 et de longueur $L_{filière}$, nous pouvons écrire [AGA,96] :

$$\dot{g} = \frac{6.Q}{2pR_0 e_0^{\,2}} \tag{2.7}$$

où Q est le débit volumique du fluide.

Dans ce cas, nous avons ainsi :

$$We = l\,\frac{6.Q}{2pR_0 e_0^{\,2}} \tag{2.8}$$

De plus,

$$De = \frac{l}{t} = l\,\frac{Q}{2pL_{filière}R_0 e_0} \tag{2.9}$$

Comme souligné par André [AND,99], la valeur du nombre de Deborah est en réalité difficile à calculer, car du fait de la structure parfois très complexe des dispositifs d'extrusion (extrudeuses et filières), la longueur $L_{filière}$ n'est pas estimable aisément. En considérant que la variable dimensionnelle connue est le rayon initial R_0, il approche le taux d'élongation par le rapport V_0/R_0 et obtient ainsi un nombre de Deborah « approché » De_0 défini par :

$$De_0 = l_0\,\frac{V_0}{R_0} = l_0\,\frac{Q}{2pe_0R_0^2} \tag{2.10}$$

Où l_0 est le temps de relaxation moyen à la sortie de la filière.

En utilisant ces nombres adimensionnels, nous pouvons comparer les conditions auxquelles est soumis le matériau pour différentes valeurs des paramètres du procédé ou différentes machines. Afin de ne considérer que l'influence des paramètres « mécaniques » du procédé, nous divisons We et De_0 par le temps de relaxation du matériau, supposé constant et indépendant des paramètres étudiées. Nous pouvons ainsi représenter ces conditions dans un diagramme de coordonnées $(\frac{We}{l_0} = \dot{g}\ ,\ \frac{De_0}{l_0})$.

La figure 2.8 présente les résultats obtenus en faisant varier le débit cette fois massique Q de l'extrudeuse avec les deux entrefers de notre ligne et les compare avec ceux des essais réalisés par André [AND,99] sur une ligne de laboratoire de taille comparable (R_0=25.25 mm, e_0=0.945 mm)

et que nous utiliserons par la suite pour l'étude instationnaire et enfin sur une ligne plus « industrielle » (R_0 = 112.5 mm, e_0=0.8 mm).

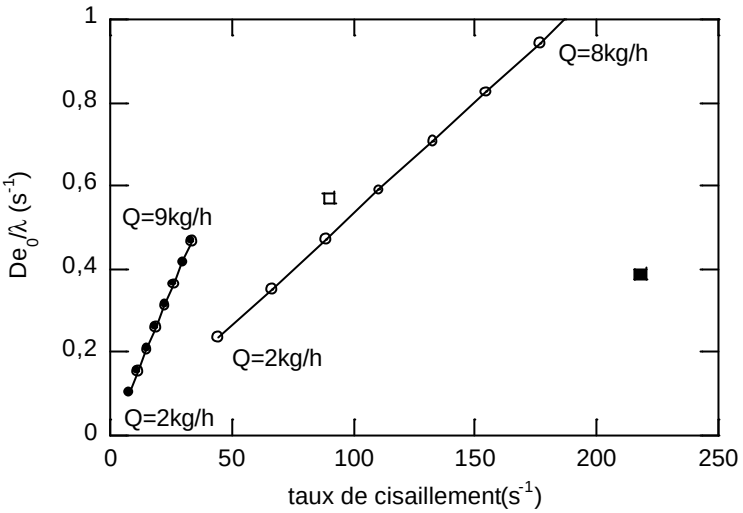


figure 2.8 : Influence de la géométrie de machine sur les conditions en sortie de filière ;
(·) : COLLIN e_0=2mm ; (○) : COLLIN e_0=0.8mm
(□) : ligne laboratoire ; (■) : ligne industrielle (d'après [AND,99]).

Nous pouvons noter que les conditions de sortie de filière peuvent être très différentes selon les caractéristiques de la machine considérée. Peu d'études se sont consacrées à l'analyse de l'influence de ces conditions sur le comportement de la bulle et les propriétés du film produit, les résultats présentés étant obtenus pour des configurations de machine et conditions d'extrusion très variables. Dans cette étude, nous nous sommes attachés à comparer les profils de bulle et de températures obtenus avec des conditions d'extrusion différentes, et proche, pour certaines d'entre elles, des conditions industrielles.

II.1.2. Refroidissement

a) Description

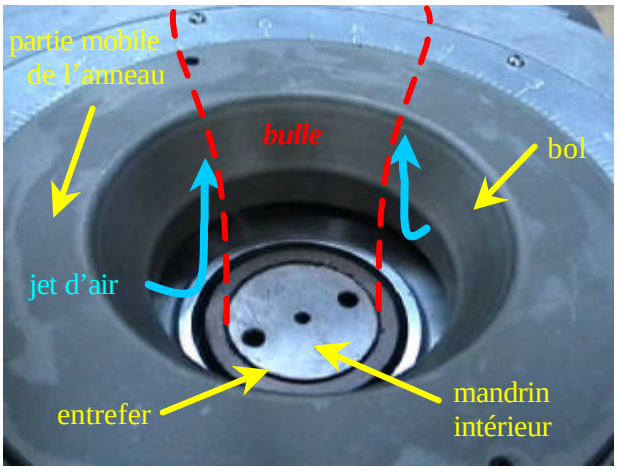
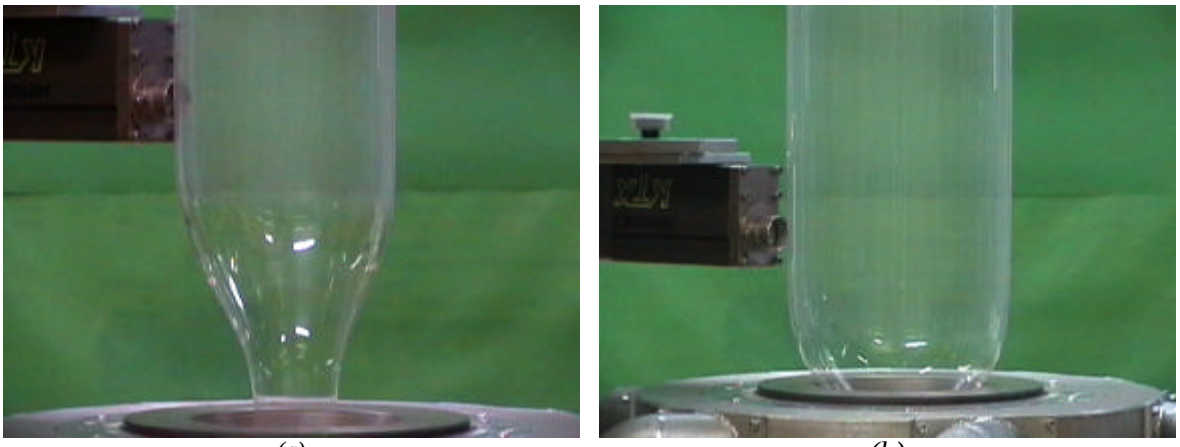


figure 2.9 : Sortie de la filière et conformation de l'anneau de soufflage

L'anneau de refroidissement utilisé pour ces essais a la conformation présentée sur la figure 2.9. Il s'agit d'un anneau simple-flux où le jet d'air est envoyé sur la bulle de façon à « lécher » sa surface et assurer son refroidissement par convection forcée. L'espace par lequel passe l'air soufflé est

ajustable en vissant ou dévissant la partie mobile de l'anneau. Pendant nos essais la température de l'air n'était pas régulée, la température ambiante peut être néanmoins considérée proche de 20°C.

En faisant varier le débit d'air soufflé ainsi que l'intervalle par lequel il passe, nous pouvons modifier considérablement les conditions dans lesquelles est refroidie notre bulle. En baissant la hauteur de figeage, la forme de bulle est également considérablement modifiée (voir figure 2.10). Les effets aérodynamiques entraînent, pour des taux de gonflage suffisants, un plaquage de la bulle (par effet Venturi) sur le bol situé au sommet de l'anneau de refroidissement (voir figure 2.9), ce qui conditionne ainsi sa forme globale. Notons qu'il devient impossible de diminuer davantage la hauteur de figeage, ni d'augmenter beaucoup plus le taux de gonflage, sans rencontrer des problèmes d'« accrochage » dû au frottement de la bulle sur l'anneau. Le design de l'anneau est donc une limitation effective des valeurs de paramètres de procédé que nous pouvons investiguer.



(a) *(b)*

figure 2.10 : Exemples de formes de bulles obtenues ; (a) : faible refroidissement ; (b) : fort refroidissement

b) Quantification de la thermique

La grande difficulté de l'étude de la thermique dans le procédé de soufflage de gaine réside dans le fait que l'efficacité du refroidissement est fonction de nombreux paramètres interdépendants. Ainsi les échanges par convection vont dépendre de l'intensité et de la température du débit d'air soufflé, de la vitesse et de la géométrie de la bulle (épaisseur et surface d'échange de la bulle). Nous venons de voir que ces différents paramètres ne sont, en réalité, pas découplés.

En pratique, les auteurs en sont réduits, dans la majeure partie des cas, à ne considérer comme paramètre décrivant la thermique que la hauteur de figeage. Cette démarche est fortement critiquable car cette valeur n'est pas adimensionnalisée et ne quantifie le refroidissement que pour la machine (et la température d'extrusion) considérée. De plus, elle ne tient pas compte du « chemin de refroidissement » que suit le matériau et ne considère que les bornes de l'intervalle des températures parcouru.

En considérant, en première approximation, une variation de température linéaire entre la sortie de la filière ($T_{extrusion}$) et la ligne de figeage ($T_{figeage}$), André [AND,99] adimensionnalise la hauteur de figeage (FLH) par le rayon de la filière R_0 et introduit la notion de « gradient thermique » $d\overline{T}/dz$, constante définie par la relation suivante :

$$\frac{d\overline{T}}{dz}(°C) = \frac{T_{extrusion} - T_{figeage}}{FLH} R_0 \qquad (2.11)$$

Cependant il s'agit là d'une représentation très réduite, la corrélation entre échanges thermiques et géométrie de la bulle étant manifestement plus dépendante de sa surface d'échange et de son épaisseur, sans compter les paramètres liés à l'air de refroidissement (température, vitesse...).

En utilisant la même hypothèse de linéarité du profil de température, une vitesse de refroidissement approximative $\dot{T}$ dans la partie fondue peut être exprimée en divisant la décroissance de température par le temps de figeage $t_{figeage}$, (voir [AND,99]) soit :

$$\dot{T} = \frac{dT}{dt} \approx \frac{\left(T_{exrusion} - T_{figeage}\right)}{t_{figeage}} \approx \left(T_{exrusion} - T_{figeage}\right)\frac{V_f - V_0}{FLH}\frac{1}{\ln DR} \qquad (2.12)$$

Dans les conditions typiques du procédé, cette vitesse de refroidissement est de l'ordre de 50°C/s.

II.1.3. Mesures réalisées

a) Profil de température le long de la bulle

La ligne est équipée d'un pyromètre infra-rouge HEITRONICS® KTX monté sur un système automatisé mobile verticalement qui permet l'acquisition d'une mesure de température de la bulle tous les centimètres le long de l'axe d'étirage, sur une étendue de 200 mm (i.e. pour 20 points de mesure).

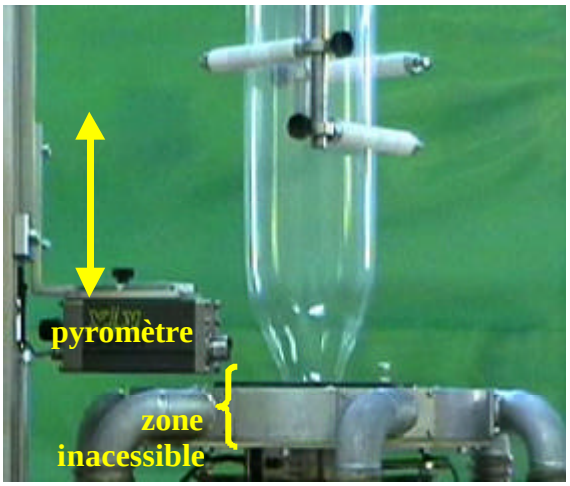


figure 2.11 : Pyromètre en position sur la ligne COLLIN

Le principal intérêt d'un tel dispositif réside dans le fait que l'on peut pratiquer une mesure sans contact et quasiment ponctuelle à intervalles réguliers et parfaitement définis. Cependant, du fait de l'encombrement engendré par l'anneau de soufflage et de la nécessité pour le pyromètre d'être suffisamment éloigné de toute surface réfléchissante, il existe, comme l'illustre la figure 2.11, une zone à laquelle nous n'avons pas accès entre la sortie de filière et une vingtaine de millimètres au dessus du haut du bol de l'anneau de soufflage. Sa hauteur vaut 67.5 mm. En revanche, nous connaissons un premier point du profil de température à la sortie de la filière : la température d'extrusion du matériau qui peut être mesuré par une simple mesure préalable grâce à un thermomètre à thermocouple avant le tirage de la bulle.

La technique de pyrométrie optique est basée sur la théorie du rayonnement du corps noir. Un corps noir est par définition un absorbeur parfait de rayonnements magnétiques incidents. Sa luminance spectrale $I_l^0(l,T)$, représentative du flux énergétique rayonné, s'écrit, dans une

enceinte fermée et isotherme à la température T, par la loi de Planck qui se réduit, par l'approximation de Wien [CAB,90] à :

$$I_l^0(l,T) = C_1 l^{-5} e^{-\frac{C_2}{lT}} \qquad (2.13)$$

Où :
C_1 = 1.1911 10^{-16} W.m^2.sr^{-1} T : température en K
C_2 = 1.4388 10^{-2} m.K λ : longueur d'onde en m

Un corps réel émettant une énergie toujours inférieure à celle du corps noir, le rapport entre sa luminance $I_l(l,T)$ et celle du corps noir définit son émissivité spectrale e :

$$e = \frac{I_l(l,T)}{I_l^0(l,T)} \qquad (2.14)$$

Ainsi, en mesurant la luminance d'un corps, il est théoriquement possible d'évaluer sa température. Le choix d'un pyromètre de longueur d'onde très courte et adaptée aux polyoléfines (3.43µm, correspondant à un pic d'absorption des liaisons C-H) permet de réduire les sources d'erreurs à la seule méconnaissance de la valeur de l'émissivité, en négligeant également certains autres facteurs comme l'influence de l'état de surface du matériau. André [AND,99] propose une courbe d'émissivité en fonction de l'épaisseur de films de polyéthylène (cf. figure 2.12).

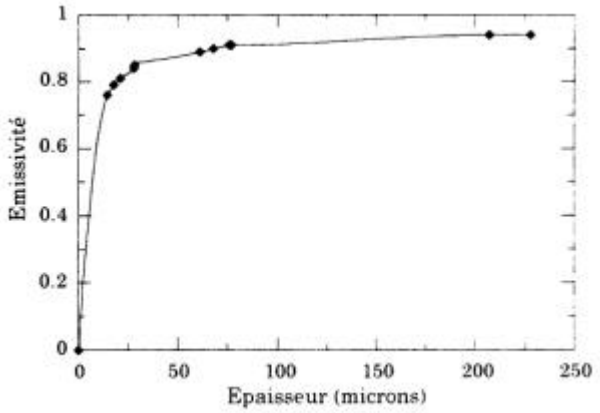


figure 2.12 : Evolution de l'émissivité en fonction de l'épaisseur de film de PE (d'après [AND,99])

Le matériau devenant translucide en dessous de 100µm, son émissivité diminue. Ainsi elle vaut 0.94 au dessus d'une épaisseur de 100µm et 0.8 quand l'épaisseur du film décroît à 20µm, ce qui est le minimum de ce que nous avons obtenu lors de nos essais. André montre cependant qu'en utilisant pour valeur approximative d'émissivité la moyenne de celles correspondant aux épaisseurs initiale et finale de la bulle, l'erreur commise reste très limitée. C'est cette méthode que nous avons également utilisée pour effectuer nos mesures. Les profils de températures obtenus sont alors la moyenne des profils relevés successivement sur une période d'environ 10 à 15 minutes.

b) Géométrie de la bulle

Durant ces essais, nous avons utilisé une caméra numérique afin de prendre des clichés de la bulle. Ces photographies ont ensuite été traitées à l'aide du logiciel d'analyse d'images VISILOG® 5 afin d'obtenir l'évolution du rayon de la bulle en fonction de la position sur l'axe d'étirage z. Cette fois encore, la zone située entre la sortie de la filière et le haut de l'anneau de refroidissement est inaccessible, c'est-à-dire les 40 premiers millimètres de la bulle. Nous connaissons par contre le rayon initial de la bulle, qui est le rayon de sortie de la filière annulaire.

II.2. Conditions imposées et synthèse des résultats obtenus

II.2.1. Conditions d'essais

Nous avons recueilli des images et des profils de température pour les conditions résumées dans le tableau 2.3. La température initiale du matériau dans nos conditions opératoires, mesurée grâce à un thermocouple, est de 230°C. Dans ces conditions, la bulle a conservé un comportement stable dans le temps. Néanmoins, pour des valeurs plus élevées de taux d'étirage et de hauteur de figeage notamment, nous avons pu observer un comportement instable que nous caractériserons dans la suite de ce chapitre.

Configuration	Essai	Débit (kg/h)	entrefer (mm)	BUR	DR	FLH (cm)
COLLIN 1	1	2.8	0.8	2.6	19	13
	2	2.8	0.8	2.2	19	17.5
	3	2.8	0.8	2.2	19	13
	4	2.8	0.8	1.7	19	13
	6	2.8	0.8	2.6	19	16
	7	2.8	0.8	2.5	25	12.5
	9	2.8	0.8	3	19	9
COLLIN 2	11	4	2	2.7	27.7	10
	12	5.75	2	2.7	19	15
	13	5.75	2	2.7	19	13
	14	5.75	2	2.7	19	14-15
	15	5.75	2	2.1	19	17.5
	16	5.75	2	2.1	19	13
	17	5.75	2	3	19	9.5
	18	5.75	2	3	34.2	11
	19	5.75	2	2.67	34.2	7

tableau 2.3 : Récapitulatif des conditions des essais réalisés

II.2.2. Allure des profils obtenus

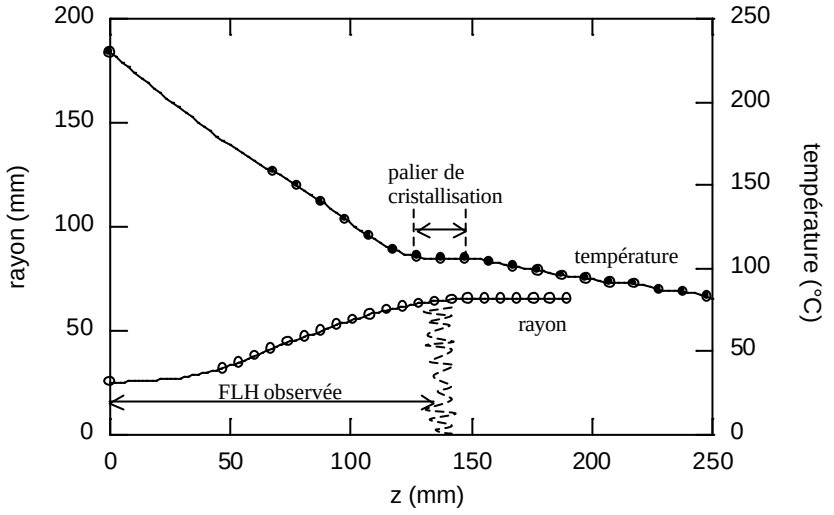


figure 2.13 : Profil typique de température de bulle ; essai 1

La figure 2.13 présente une forme de bulle et un profil de température obtenus dans les conditions de l'essai 1. Les premières températures mesurées (donc au-dessus de l'anneau) correspondent à la partie fondue, où se déroule le biétirage durant lequel la bulle voit son rayon augmenter

progressivement. L'air soufflé par l'anneau de soufflage sur la surface de la bulle induit une décroissance rapide de la température par convection forcée. Comme l'observe déjà André [AND,99] dans des conditions de refroidissement similaires, cette décroissance de température peut être considérée comme linéaire. Nous verrons par la suite que cette assertion est cependant à moduler en fonction des conditions opératoires.

La température se stabilise ensuite aux alentours de 105°C sur quelques centimètres pendant que le rayon de la bulle se fige et que l'on note, dans le cas de notre matériau, une perte de transparence de la bulle, définissant, comme nous l'avons présenté initialement, la hauteur de figeage. Ce palier isotherme correspond à la cristallisation du polymère qui est un phénomène exothermique se déroulant à une température de cristallisation T_c dépendante des conditions opératoires. La ligne de figeage *(Frost Line Height)* mesurée semble plus ou moins correspondre au début de ce palier, avec une incertitude relative de l'ordre du centimètre liée à la difficulté de la déterminer de façon nette. Notons que nous avons pu observer, notamment en augmentant le taux d'étirage, des variations de quelques degrés de la température de cristallisation.

Enfin, après le palier de cristallisation, la température décroît à nouveau de façon cependant moins importante qu'auparavant, du fait de la distance par rapport à l'anneau de soufflage et de la moins grande intensité du refroidissement par convection.

II.2.3. Influence des paramètres du procédé

a) Taux d'étirage

La figure 2.14 présente les profils de bulle et de température mesurés sur deux bulles de taux de gonflage d'environ 2.5 pour une hauteur de figeage proches de 13 cm, à des taux d'étirage de 19 et 25. Nous observons que le gradient thermique dans le fondu est légèrement plus important dans le cas du taux d'étirage le plus fort, de même qu'une température du palier de cristallisation légèrement plus basse. André [AND,99] fait la même constatation qualitative et explique ce phénomène par une épaisseur de film plus faible à taux d'étirage plus élevé. Les profils de bulle quant à eux semblent inchangés.

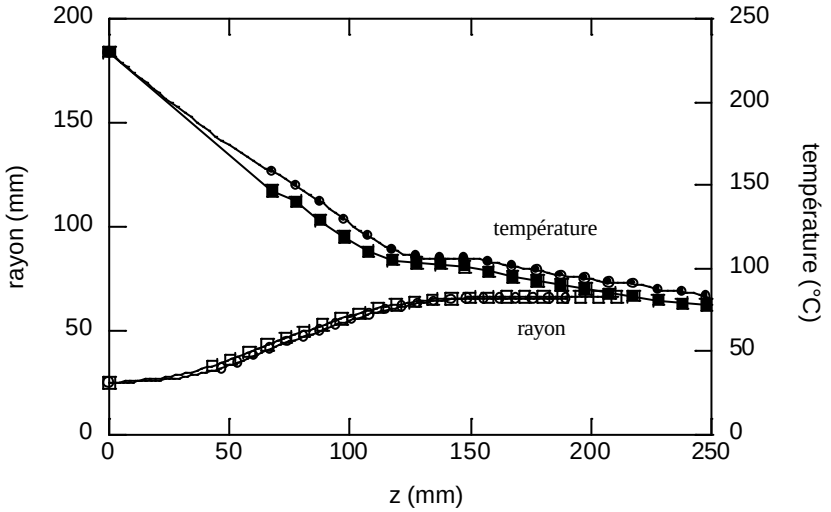


figure 2.14 : Influence du taux d'étirage sur la forme de la bulle et le profil de températures ;
essais 1 et 7 ; e=0.8mm ;
(○) BUR=2.6 ; DR=19 ; FLH=13 mm ;
(□) BUR=2.5 ; DR=25 ; FLH=12.5 mm ;

b) <u>Taux de gonflage</u>

En faisant varier le taux de gonflage (voir figure 2.15), le taux d'étirage et la hauteur de figeage étant maintenus respectivement à 19 et 13 cm, le profil de la bulle tend bien évidemment à s'élargir. Pour une hauteur de figeage modérée (i.e. un gradient thermique peu élevé), la forme de la bulle obtenue reste un « verre à pied ». Nous n'observons que peu de différences entre les profils de températures obtenus. Il n'y a pas d'incohérence avec les conclusions de André [AND,99].

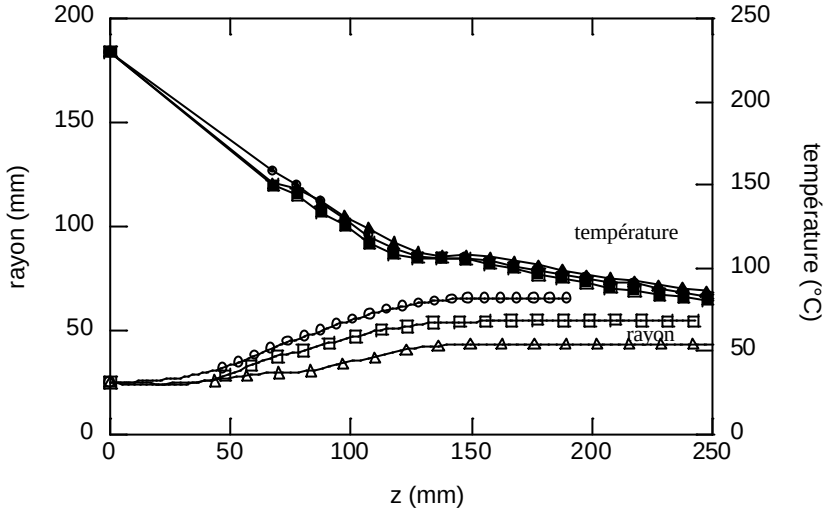


figure 2.15 : Influence du taux de gonflage sur la forme de la bulle et le profil de températures ; essais 1,3 et 4 ; e=0.8mm ;
(Δ) BUR=2.6 ; DR=19 ; FLH=13 mm ;
(□) BUR=2.2 ; DR=19 ; FLH=13 mm ;
(○) BUR=1.7 ; DR=19 ; FLH=13 mm

c) <u>Thermique</u>

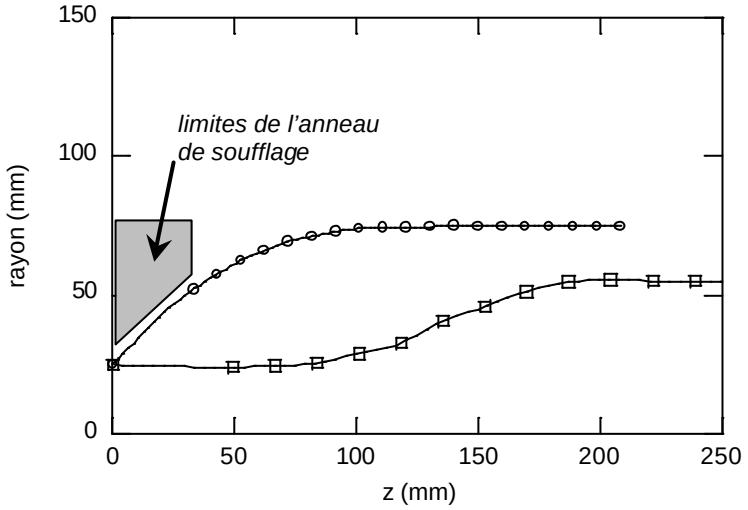


figure 2.16 : Influence du refroidissement sur la forme de la bulle ;
(□) : essai 2 ; BUR=2.2 ; DR=19, FLH=17,5cm ($d\overline{T}/dz$» -17,8 °C)
(○) : essai 9 : BUR=3, DR=19, FLH=9 cm ($d\overline{T}/dz$» -34,7 °C)

La figure 2.16 montre le résultat de l'analyse des photographies présentées sur la figure 2.10. Nous retrouvons la différence manifeste de forme des bulles obtenues. Ces formes sont la résultante d'un équilibre entre les différentes forces auxquelles est soumis le polymère fondu : force de tirage et

surpression interne. Le refroidissement, par son intensité, influe notablement sur cet équilibre. A faible refroidissement la bulle prend une forme classiquement décrite sous le vocable de « verre à pied » alors qu'on parlera, à fort refroidissement, de « forme en bol ».

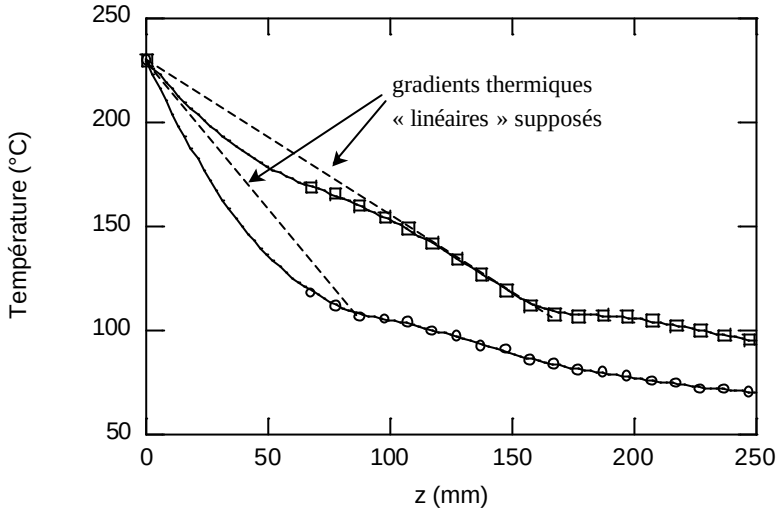


figure 2.17 : Influence du refroidissement sur les profils de température ;
(□) : essai 2 ; BUR=2.2 ; DR=19, FLH=175 mm ($d\overline{T}/dz$» -17,8 °C)
(○) : essai 9 : BUR=3, DR=19, FLH=90 mm ($d\overline{T}/dz$» -34,7 °C)

La figure 2.17 présente les profils de température correspondant aux deux bulles que nous venons de décrire. Notons que le profil correspondant à la hauteur de figeage de 90 mm est peu utilisable puisque nous n'avons, du fait de la zone inaccessible liée à l'anneau de soufflage, que deux points avant le palier de cristallisation. La tendance qui se dégage malgré tout est que nous ne pouvons pas réellement parler, dans ces cas extrêmes, de linéarité pour le profil de température dans la zone fondue. Le cas présenté sur la figure 2.13 semble donc être un cas particulier où les points sont quasiment alignés avec le point correspondant à la température d'extrusion.

Cette « non-linéarité » de profil de température a été observée sur de nombreux essais de façon reproductible, dans des conditions très différentes (extrusion, étirage…), et ce d'autant plus que la hauteur de figeage était élevée, comme l'illustre la figure 2.18.

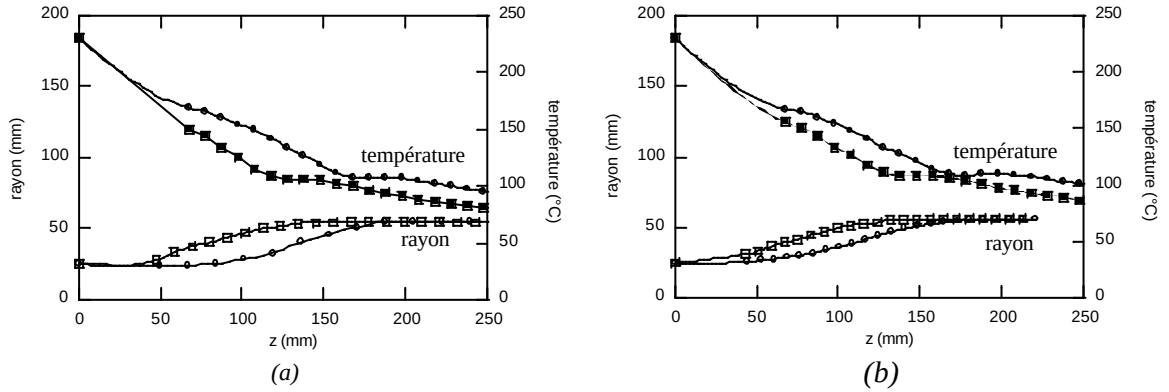


figure 2.18 : Influence du refroidissement sur la forme de la bulle et le profil de températures ;
(a) : essais 2 et 3 ; e=0.8 mm ; BUR=2.2 ; DR=19 ; (□) : FLH=130 mm ; (○) : FLH=175 mm
(b) : essais 15 et 16 ; e = 2 mm ; BUR=2.1 ; DR=19 ; (□) : FLH=130 mm ; (○) : FLH=175 mm

La notion de gradient thermique constant dans l'intégralité de la zone fondue est donc une hypothèse très forte. Il n'y a en fait aucune raison que le profil de température soit linéaire compte tenu de la complexité du dispositif de refroidissement.

En effet, le système de soufflage à anneau simple-flux est conçu de telle sorte qu'il convient de séparer en plusieurs zones le refroidissement appliqué (cf. figure 2.19). Dans la zone contenue dans le bol de l'anneau de soufflage (zone 1), l'air soufflé est plus ou moins canalisé entre la bulle et la paroi du bol. Ensuite, l'air n'est plus confiné et une partie n'est plus utile au refroidissement (zone 2). Bien entendu, la forme de la bulle influe beaucoup sur ces considérations. Pour des hauteurs de figeage faibles, la bulle épouse la forme du bol ce qui accélère l'air dans la première zone et rend plus efficace l'échange par convection, engendrant un gradient thermique important. Le gonflement survient ensuite rapidement. Pour des hauteurs de figeage plus élevées, comme présenté sur la figure 2.20, la bulle prend une forme de « verre à pied », décollée de l'anneau, rendant le refroidissement dans la zone 1 moins efficace. Le gonflement survient donc plus tard. Le profil thermique résultant est en quelque sorte le résultat d'une compétition entre l'effet de l'air soufflé, l'augmentation de la surface de la bulle, et la diminution de l'épaisseur du film.

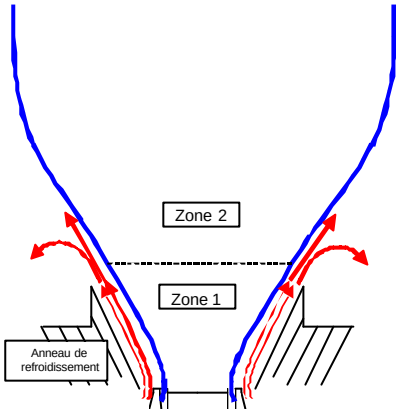


figure 2.19: Schéma de principe de l'action d'un anneau simple flux

- dans un premier temps (dans le bol de l'anneau, voir figure 2.20), l'air est canalisé, le refroidissement est important (gradient thermique fort),
- au dessus immédiat de l'anneau de soufflage, la bulle est encore peu gonflée, et l'air perd une partie de son efficacité, le gradient thermique diminue,
- le gonflement survient, augmentant la surface d'échange et diminuant l'épaisseur de la bulle, le gradient thermique augmente à nouveau,
- le palier de cristallisation survient ensuite, puis un refroidissement plus faible tendant vers l'ambiante.

Il est clair que ces considérations restent du domaine du qualitatif, car nous n'avons pas accès à la zone située dans l'anneau. De plus, nous n'abordons ici qu'une seule ligne de soufflage, équipée d'un type particulier d'anneau (simple-flux). Nous ne pouvons en aucun cas ni généraliser, ni extrapoler à d'autres lignes, de tailles similaires ou beaucoup plus grandes, ou à des anneaux de conception différente.

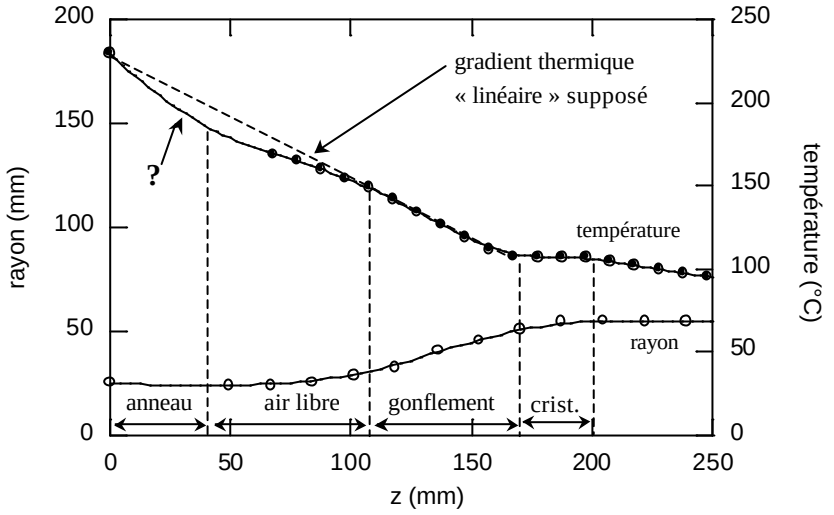


figure 2.20 : Présentation des différentes zones du profil thermique obtenu ;
essai 2 ; e=0.8 mm ; BUR=2.2 ; DR=19 ; FLH=175 mm

La bibliographie n'offre que peu de données concernant les évolutions de température et se contente surtout d'étudier la position du palier isotherme de cristallisation et la valeur de cette température [PIA,84][AND,99][BEL,99]. La relecture des essais réalisés permet cependant de montrer que les profils de températures généralement obtenus sont cohérents avec ceux présentés précédemment, et ce indépendamment du produit utilisé. Il conviendra certainement dans l'avenir, dans une modélisation même très simplifiée du procédé, de prendre en compte l'influence de cette évolution non linéaire de température sur la géométrie de la bulle. Cependant, étant donné le couplage évident entre ces deux variables, la prise en compte de ce phénomène dans le cas du calcul « instable » sera extrêmement délicate.

d) <u>Entrefer de la filière</u>

Afin d'évaluer l'effet des conditions en sortie de filière (par exemple lors de l'extrusion sur des machines différentes) sur les profils mesurés , nous avons imposé les mêmes taux de gonflage, taux d'étirage et hauteur de figeage dans les deux configurations de ligne évoquées précédemment : e=0.8 mm et e=2 mm. La figure 2.21 présente les profils obtenus pour un taux de gonflage de 2.6, un taux d'étirage de 19 et une hauteur de figeage de 130 mm.

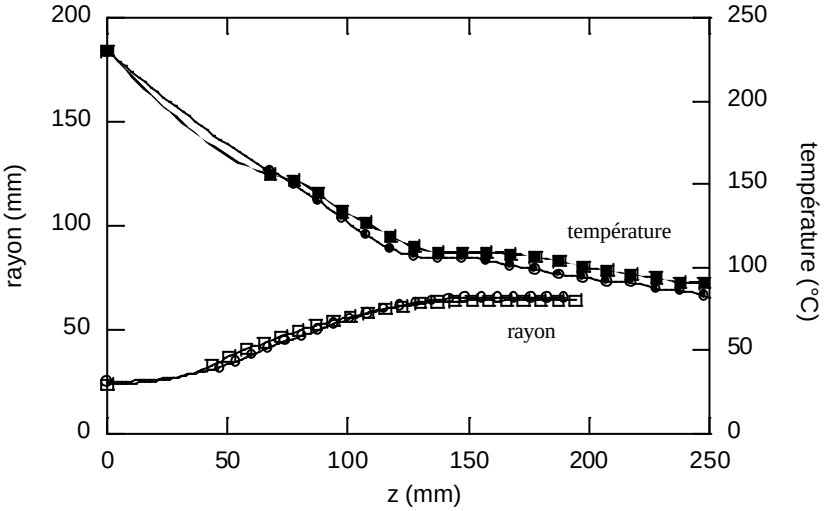


figure 2.21 : Influence des conditions en sortie filière sur la forme de la bulle et le profil de températures ;
essais 1 et 13 ; BUR»2.6 ; DR»19 ; FLH=130 mm ; (○) : e=0.8mm Q=2.8kg/h (□) : e=2mm Q=5.75kg/h

Nous n'observons que peu d'influence sur le profil de la bulle et sur le profil de température dans le fondu. Le palier de cristallisation survient sensiblement à la même température et à la même hauteur (ce qui est normal car nous imposons une hauteur de figeage constante). Nous observons par contre un léger décalage des refroidissements. Nous pouvons expliquer cet effet en invoquant les différences d'épaisseurs des deux bulles, introduisant un retard de refroidissement pour la plus épaisse. Le palier de cristallisation semble ainsi plus grand pour l'épaisseur la plus grande. La forme de bulle est quant à elle très similaire dans les deux conditions.

La variation d'entrefer de la filière, induisant des conditions d'extrusion différentes comme le montre la figure 2.8, ne semble avoir, de façon surprenante, qu'une influence très limitée sur le comportement du fluide pendant le biétirage, notamment sur la forme de la bulle. Néanmoins, maintenir la même hauteur de figeage pour un entrefer de filière et un débit d'extrusion plus grand signifie augmenter significativement le débit d'air soufflé sur la bulle. L'effet de cet écoulement d'air à la surface de la bulle pourra différer de celui obtenu sur des bulles extrudées dans d'autres conditions.

II.3. Conclusions

La première partie de notre travail expérimental nous a permis de balayer l'espace des paramètres du procédé de soufflage de gaine et évaluer l'influence de chacun sur le comportement de la bulle dans le cas stable. Nous avons notamment mis en évidence le rôle prépondérant des paramètres liés au refroidissement, capables d'influer sur la forme de la bulle et sur sa cinématique, avec des répercussions sur les propriétés finales du film obtenues (orientation cristalline…).

Les profils de température obtenus dans la zone fondue s'éloignent plus ou moins des hypothèses généralement admises de décroissance linéaire. Ces variations, plus ou moins nettes selon les cas, semblent résulter du couplage existant entre l'effet de l'anneau de soufflage et la forme de la bulle sur l'efficacité du refroidissement engendré.

Par ailleurs, nous n'avons pas observé d'influence majeure des conditions d'extrusion (débit, rapport entrefer/rayon de la filière) sur la forme et le comportement de la bulle. Ceci nous autorise à penser que ce paramètre est d'importance moindre par rapport à ceux liés au biétirage (taux d'étirage et de gonflage) et au refroidissement.

L'étendue des conditions investiguées dans cette étude a été limitée par le développement de comportements instables de la bulle, caractérisés par des variations dimensionnelles de celle-ci dans le temps. Ce sont les caractéristiques de ces instabilités que nous nous proposons à présent d'étudier.

III. Etude des instabilités

Dans cette partie, nous nous sommes attachés à définir les phénomènes instables que nous avons pu observer durant notre étude thermomécanique du procédé et quantifier les différents comportements constatés. L'apparition de ces instabilités semble dépendre des conditions dans lesquelles s'effectue le bi-étirage du film. Les comportements rencontrés semblent similaires à ceux observés dans d'autres procédés de transformation des polymères où survient un étirage.

III.1. Etude bibliographique

Parmi les procédés de transformation des matériaux thermoplastiques, nombreux sont ceux qui font intervenir un étirage afin d'obtenir les dimensions (et les propriétés) du produit visées. Dans le cas de l'étirage dans l'air (isotherme ou non), surviennent, dans certaines conditions, des variations périodiques dimensionnelles qui influencent bien évidemment la qualité du produit fini. Dans ce qui suit, nous présentons un résumé de la littérature existant sur ce sujet en nous intéressant tout

d'abord à des procédés comportant un étirage, le filage textile et le cast-film, avant de nous intéresser au cas, plus complexe du soufflage de gaine.

III.1.1. Autres procédés comportant un étirage : le filage textile et le cast-film

a) filage textile

Le filage textile (cf. figure 2.22) est le procédé de fabrication des fibres synthétiques. Dans ce procédé, le polymère fondu est forcé dans un «pack de filage » comportant une plaque filière percée d'une centaine de trous. Chaque fibre est ensuite soit étirée sur une courte distance (de l'ordre du centimètre) dans l'air puis refroidie brutalement par trempe dans l'eau (on parle de filage à l'eau), soit étirée et refroidie sur une plus longue distance dans l'air (on parle alors de filage à l'air), grâce parfois à un système de soufflerie. Les fils sont ensuite bobinés. Un taux d'étirage est défini, de la même manière que dans le cas du soufflage de gaine, comme le rapport entre la vitesse de tirage V_f de la bobine et la vitesse du polymère en sortie de filière V_0.

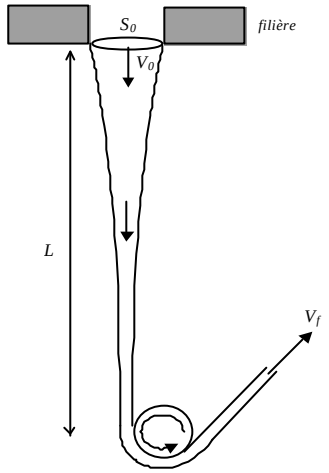


figure 2.22 : Schéma de principe du filage textile d'une fibre

Lorsqu'une certaine valeur critique de ce taux d'étirage est dépassée, il survient une instabilité périodique et axisymétrique de la section du fil le long de l'axe d'étirage (voir figure 2.23). Bergonzoni et Dicresce [BER,66 a,b] sont parmi les premiers à désigner ce comportement sous le vocable de « draw resonance » (résonance d'étirage).

Chang et Denn [CHA,79] montrent que la « draw resonance » n'est pas un effet purement viscoélastique, puisqu'ils observent son apparition pour un fluide newtonien pur (sirop de glucose) pour un taux d'étirage voisin de 20. D'autres auteurs étudient l'influence de la viscoélasticité du fluide et montrent une augmentation légère du taux d'étirage critique avec la composante élastique. Lorsque l'on augmente encore l'élasticité, l'instabilité périodique disparaît au profit d'une casse fréquente mais survenant aléatoirement [DEM,85].

Blyler et Gieniewsky [BLY,80], Demay et Agassant [DEM,85] établissent qu'un refroidissement à l'air (i.e. longueur de filage importante) retarde ou même annihile l'apparition de la « draw resonance » et donc que ce phénomène n'apparaît pas dans les conditions industrielles conventionnelles.

Minoshima & White [MIN,80][MIN,86] s'attachent à l'étude de l'influence des masses et des distributions de masses moléculaires dans le cas de polyéthylènes et de polypropylènes. Leurs résultats montrent de manière générale que le taux d'étirage critique diminue pour des mêmes

conditions expérimentales avec l'augmentation de la largeur de distribution de masses moléculaires.

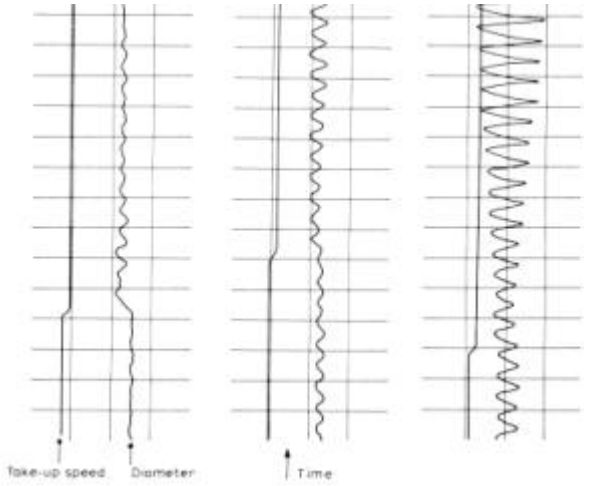


figure 2.23 : Enregistrement du diamètre du filament lors d'incréments de vitesse de tirage successifs, d'après [DEM,85]. (a) : le diamètre se stabilise ; (b) l'instabilité périodique apparaît et se maintient ; (c) l'instabilité se développe

L'interprétation de ce phénomène reste délicate. Les auteurs suggèrent généralement qu'il résulte d'une grande sensibilité du procédé à de petites perturbations (variations de débit, vitesse de tirage, etc…), d'où la notion de «résonance ». Hyun [HYU,78 a,b] se base sur l'étude des équations régissant l'écoulement pour proposer une explication basée sur la propagation d'ondes cinématiques. A partir de l'équation de continuité, il met en évidence l'existence d'une onde de débit. Lorsque cette onde (figure 2.4), créée en sortie de filière, arrive au niveau des rouleaux de tirage, la tension le long du filament augmente, ce qui créé une onde de débit inverse (« négative ») s'initiant à la sortie de la filière. Celle-ci se propage alors jusqu'aux rouleaux, initiant à son tour une onde de débit inverse (« positive »), et ainsi de suite. Le phénomène d'instabilité n'aura pas lieu, selon l'auteur, tant que le temps de «séjour» du produit dans le filament reste inférieur au temps nécessaire pour qu'une onde positive et négative parcourent le filament. Lorsque ces deux temps s'égalent, il y a apparition d'une onde stationnaire.

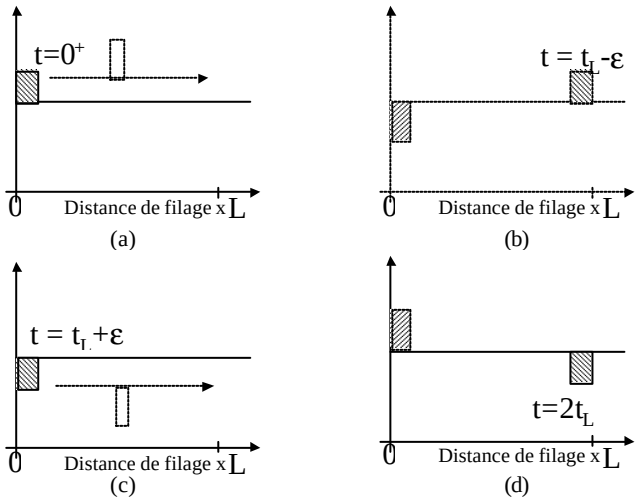


figure 2.24 : Schéma de la propagation d'ondes de débit dans le cas du filage textile, d'après [HYU,78 a,b] ; l'onde créée se propage (a) puis crée une onde inverse en fin d'étirage (b) qui se propage à son tour (c) en créant une autre onde positive (d).

Hyun calcule ainsi pour un fluide newtonien un taux d'étirage critique de 19, ce qui est proche des taux d'étirages critiques expérimentaux.

b) Cast-film

Dans l'extrusion de film à plat, ou *cast-film* (figure 2.25), le polymère est plastifié par une extrudeuse et passe dans une filière plate. L'extrudat est ensuite étiré dans l'air sur une assez courte distance puis refroidi brusquement sur un rouleau thermostaté (*chill roll*). L'étirage peut donc être considéré comme isotherme. Le film subit, du fait de cet étirage, une diminution de sa largeur ainsi qu'un épaississement de ses bords (forme « os de chien »).

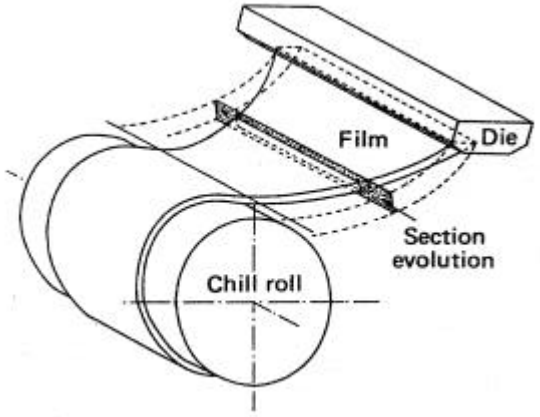


figure 2.25 : Schéma de principe du cast-film, d'après [BAR,90]

Il apparaît que la « draw resonance » existe également dans ce procédé. Barq [BAR,90] observe avec du PET une variation périodique de l'épaisseur et de la largeur du film au-delà d'un taux d'étirage critique. Dans le cas d'une « draw resonance » bien établie, il montre l'existence d'un couplage entre ces deux dimensions, les variations de largeur du film étant en phase avec celles de l'épaisseur au centre et en quadrature avec celle du bord (cf. figure 2.26). De plus, l'amplitude des variations aux bords est plus importante que celle mesurée au centre.

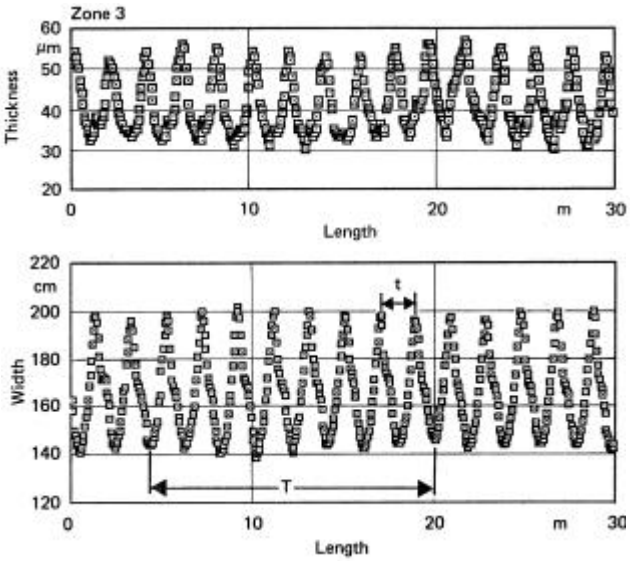


figure 2.26 : Variations d'épaisseur du bord (zone 3) et de largeur d'un film de PET dans le cas d'une instabilité de « draw resonance », d'après [BAR,90]

III.1.2. Les différentes instabilités du soufflage de gaine

Contrairement aux instabilités des procédés de filage textile et de cast-film, la littérature reste assez peu prolixe au sujet du soufflage de gaine. Les auteurs décrivent des comportements très différents selon les conditions utilisées. En préliminaire à notre travail de thèse, une étude bibliographique et expérimentale menée par Lasaunière [LAS,99], dont nous présentons dans ce qui suit les résultats majeurs, a permis la description détaillée des phénomènes suivants.

a) La « draw resonance »

Han et Park [HAN,75][PAR,75] décrivent les premiers l'apparition d'une instabilité dans le cas de bulles étirées uniaxialement obtenues en maintenant la pression interne de la bulle égale à la pression atmosphérique. Dans ce cas, le taux de gonflage de la bulle est proche de 1, ce qui est éloigné des conditions industrielles. Cette description est ensuite reprise par Minoshima et White [MIN,86] pour des bulles étirées uniaxialement mais également biaxialement (i.e. gonflées). Cette instabilité est caractérisée, comme l'illustre la figure 2.27, par une pulsation périodique du rayon de la bulle. Elle survient lorsqu'une valeur critique du taux d'étirage longitudinal est atteinte, puis s'amplifie. Ce comportement, analogue à celui décrit en filage textile et en cast-film, est également appelé « draw resonance ».

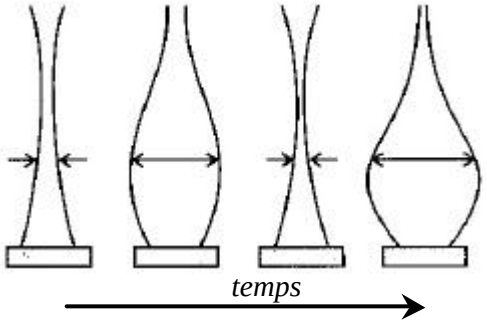


figure 2.27 : Schéma de principe d'une instabilité de type « draw resonance », d'après [GHA,96]

Dans le cas de bulles à haut col et à FLH hautes (autrement dit des bulles faiblement refroidies), White et ses collaborateurs [KAN,84][MIN,86] observent (cf. figure 2.28) des variations également périodiques et d'amplitude croissante de la FLH qu'ils désignent sous le nom d'instabilité « métastable », interprétant ces variations comme des transitions entre deux états stationnaires (formes « basse » et « haute » de bulle).

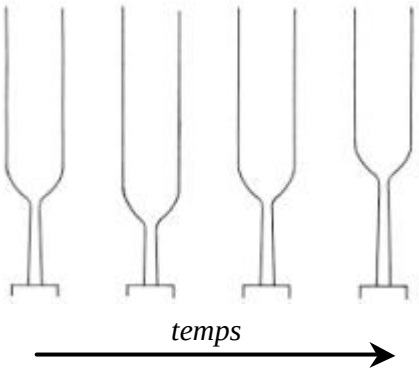


figure 2.28 : Schéma de principe d'une instabilité « métastable », d'après [MIN,86]

Cette appellation est jugée trompeuse par Ghaneh-Fard et al. [GHA,96] qui lui préfèrent le terme d'instabilité de FLH *(FLH instability)*. Andrianarahinjaka [AND,92] interprète ce défaut comme une résultante d'instabilités d'écoulement dans la filière liées à des phénomènes d'adhésion-glissement *(stick-slip)*. Il semble cependant qu'il s'agisse plutôt d'un cas particulier de «draw

resonance », comme le suggère Fleissner [FLE,88]. Il mesure, comme l'illustre la figure 2.29, des variations, en opposition de phase, de l'épaisseur et de la largeur du film obtenu.

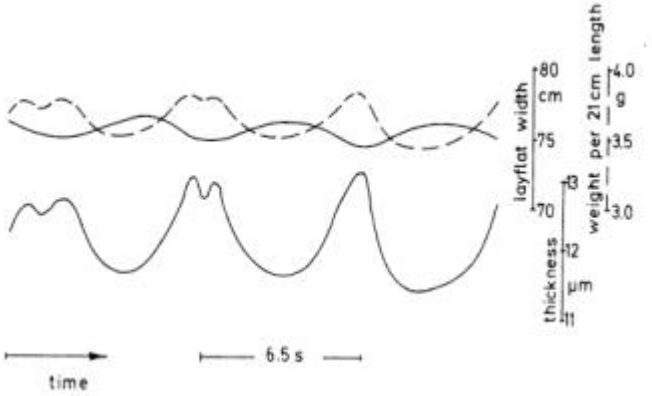


figure 2.29 : Evolutions de la largeur à plat, de la masse linéaire et de l'épaisseur selon l'axe d'étirage d'un film obtenu en conditions instables, d'après [FLE,88]

Ceci est contraire à la première description du défaut de White et très similaire aux observations de Barq [BAR,90] dans le cas de la « draw resonance » du cast-film. Les variations d'épaisseur de la bulle engendrent nécessairement des variations du temps que met le fluide à refroidir pendant l'étirage, ce qui se traduit par des variations de la hauteur de figeage, très visibles.

Sweeney et al. [SWE,92] montrent, en utilisant une méthode d'analyse statistique de leurs résultats expérimentaux, qu'il existe un haut niveau d'interaction entre les différents paramètres du procédé affectant la stabilité de la bulle. Nous n'étudions pas ici de manière exhaustive les résultats des différents auteurs qui ont étudié l'influence des paramètres procédé et matériau mais nous rappellons quelques résultats majeurs.

L'influence du refroidissement sur l'apparition de l'instabilité est étudiée en faisant varier la hauteur de figeage et en utilisant différentes technologies d'anneaux de refroidissement. Diminuer la hauteur de figeage est généralement stabilisant [HAN,75][PAR,75][KAN,84][MIN,86], c'est à dire que l'on repousse la valeur du taux d'étirage au-delà duquel l'instabilité se déclenche. L'utilisation d'un anneau de refroidissement double-flux, où les jets d'air sont séparés en deux courants pour une meilleure répartition sur la surface de la bulle, est jugée plus efficace qu'un anneau simple flux pour produire des films à haut débit [OBI,92] [SWE,93]. Néanmoins, contrairement à ce qui a été observé dans le cas du filage textile où le refroidissement «tue » rapidement l'instabilité, il ne fait ici que retarder son apparition.

Han et Park [HAN,75][PAR,75], puis Huang [HUA,88] et Micic et al. [MIC,98][FIE,99] montrent également que diminuer la température d'extrusion a un effet stabilisant, et qu'en général les PEbdl et les PEbd sont plus sensibles aux effets thermiques que les PEhd.

White et ses collaborateurs [KAN,84][MIN,86] étudient différents polyéthylènes et montrent que le PEbd est globalement plus stable que le PEhd et le PEbdl. La « draw resonance » est repoussée à des taux d'étirage très élevés et peut même être remplacée par la rupture de la bulle. Fang [FAN,01] montre l'équivalence de comportement d'un PE obtenu par catalyse métallocène avec un PEbdl. Un comportement plus stable est observé pour un PEbd comportant des branchements longs et pour les PEhd et PEbdl avec les plus larges distributions de masses moléculaires. Mélanger une petite proportion de PEbd à un PEbdl s'avère également stabilisant. Fleissner [FLE,88] puis Micic et al. [MIC,98][FIE,99] corrèlent cet effet stabilisant aux propriétés rhéologiques sous élongation, notamment au rhéo-durcissement.

b) L'instabilité hélicoïdale

Minoshima et White [MIN,84][MIN,86], les premiers, rendent compte d'un comportement non-axisymétrique survenant pour des taux de gonflage plutôt élevés et au-delà d'un taux d'étirage critique, celui-ci diminuant très rapidement avec le taux de gonflage.

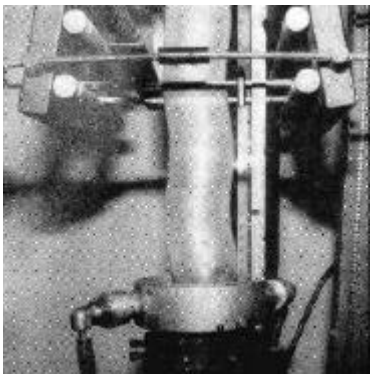


figure 2.30 : Instabilité hélicoïdale, d'après [MIN,86]

Dans ces conditions, la bulle, comme l'illustre la figure 2.30, développe un mouvement hélicoïdal entre la sortie de la filière et les rouleaux pinceurs, avec un pas d'hélice constant dans le temps. Cette instabilité très spectaculaire est par la suite décrite par d'autres auteurs [WHI,87][OBI,92][GHA,96], mais l'influence des paramètres du procédé et du matériau reste assez mal définie. Ghaneh-Fard et al. [GHA,96] observent cette instabilité pour différents polyéthylènes (PEbd ou PEbdl) et polypropylènes. Lasaunière [LAS,99] montre que l'on retrouve le comportement périodique hélicoïdal dans l'évolution de l'épaisseur du film (cf. figure 2.31). Il observe en effet une surépaisseur sur la circonférence du film et une variation périodique de l'épaisseur selon une génératrice.

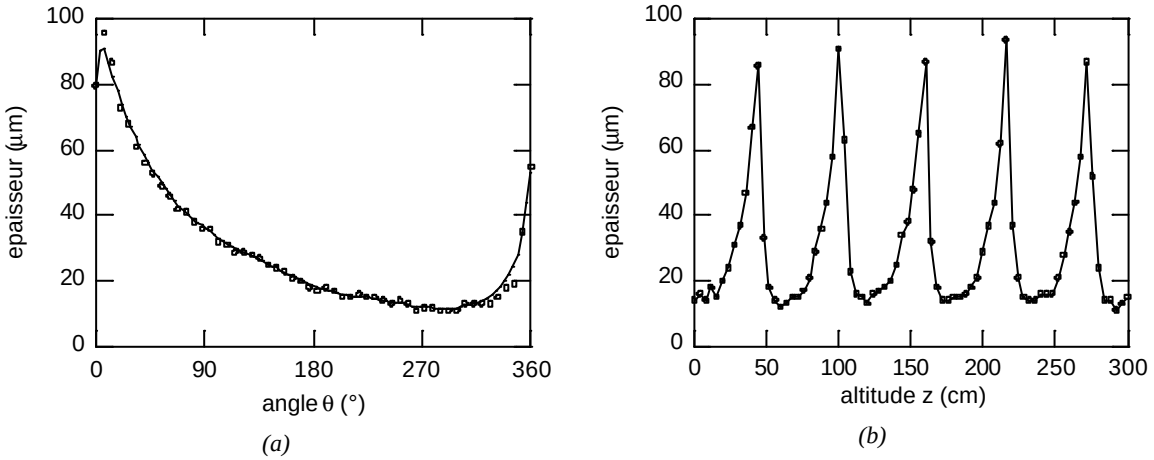


figure 2.31 : Evolution de l'épaisseur d'un film selon (a) : la circonférence, (b) : l'axe d'étirage dans le cas d'une instabilité hélicoïdale, d'après [LAS,99]

Minoshima et White [MIN,86] suspectent une origine aérodynamique à ce défaut, liée à l'air soufflé par l'anneau de refroidissement. Pour notre part, nous envisageons plutôt cette instabilité comme une résultante de l'étirage transversal induit par le gonflement. De même qu'un trop fort étirage longitudinal entraîne le déclenchement de la « draw resonance », un trop fort étirage transversal, induit par un fort gonflage, serait à même de déclencher une résonance transversale qui, couplée au déplacement longitudinal du fluide, expliquerait la perte d'axisymétrie de la bulle et le mouvement périodique hélicoïdal. L'aérodynamique, dans cette hypothèse, peut malgré tout jouer un rôle amplificateur du défaut. Dans le cas de mouvements hélicoïdaux d'amplitude

suffisante, certains auteurs observent des variations locales de la hauteur de figeage décrivant un pas d'hélice couplé au mouvement de la bulle [LAS,99]. Ceci peut aisément s'expliquer par la perte d'axisymétrie de la bulle entraînant des variations d'épaisseur selon la circonférence donc des variations locales du refroidissement lorsque la bulle se rapproche de l'anneau. Le fluide tend alors à se refroidir plus vite, baissant ainsi localement la hauteur de figeage.

Enfin, quelques auteurs font état d'une « superposition » de cette instabilité avec la « draw resonance » [WHI,87][GHA,96], pour des taux de gonflage et des taux d'étirage tous deux élevés. Au mouvement hélicoïdal se superpose alors les variations périodiques du rayon de la bulle. Cette description reste totalement qualitative mais laisse à penser qu'il existe des conditions pour lesquelles ces deux instabilités coexistent.

c) Autres comportements instables

D'autres comportements plus complexes et moins clairement définis ont pu être décrits dans des conditions de procédé particulières.

- *Etranglements de la bulle*

  Han et Park [HAN,75][PAR,75], puis Kanaï et White [KAN,84] observent après une augmentation brusque de la vitesse des rouleaux de tirage (de plus de 100% !), un comportement pulsatoire non axisymétrique illustré par la figure 2.32.

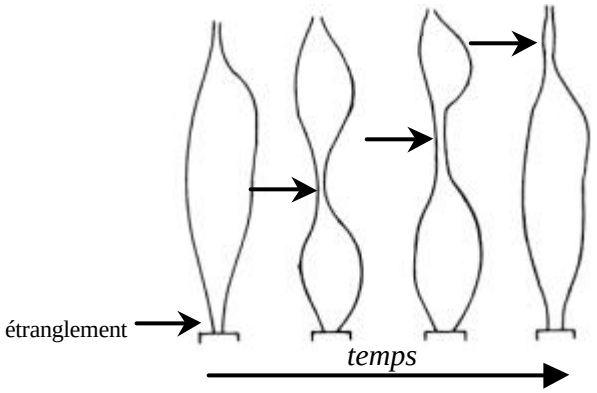


figure 2.32 : Schéma de principe du processus de dégénerscence, d'après [KAN,84]

  La bulle ne parvient pas, en quelque sorte, à accommoder la variation d'étirage qui lui a été imposée. L'épaisseur du film diminuant brusquement du fait de l'étirage, la bulle se solidifie plus vite. Un étranglement est ainsi provoqué, avec pour conséquence la séparation de la bulle en deux, avec formation de hernies. Le processus se répète à plusieurs reprises en s'accentuant, conduisant très rapidement, après quelques périodes seulement, à la rupture de la gaine.

- *Instabilité de masse*

  A faible taux d'étirage, et pour des taux de gonflage suffisants, le rayon de la gaine est assez grand pour que celle-ci puisse s'asseoir sur le bol de l'anneau de refroidissement, comme le présente la figure 2.33. Butler [BUT,00] parle de « gaine lourde » (*heavy bubble*). Il survient alors un couplage entre l'air soufflé par l'anneau et la gaine. Le flux d'air est suffisamment puissant pour déformer la zone fondue, provoquant des ondulations. L'apparition de ce type de comportement est bien entendu dépendant de la conception même de l'anneau de refroidissement.

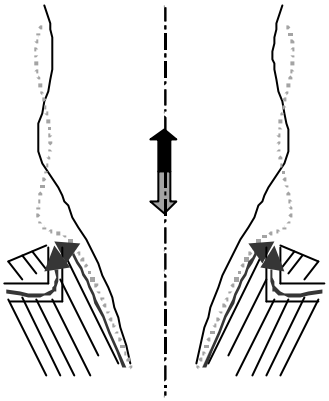


figure 2.33 : Schéma de principe d'une instabilité de type « gaine lourde », d'après [LAS,99]

- *Mauvais réglage de la cage de calibration*

  Il est possible également qu'à l'issue d'un mauvais réglage de la cage de calibration, celle-ci ne joue plus complètement son rôle de guidage de la gaine. La bulle peut alors, à faibles taux d'étirage, se balancer dans un plan comme l'indique la figure 2.34. Cette instabilité est donc à distinguer de l'instabilité hélicoïdale dont le mouvement est totalement tridimensionnel. Lorsque le taux d'étirage est augmenté, la bulle reprend sa position axisymétrique.

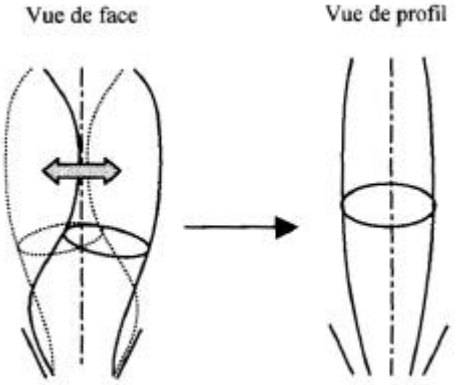


figure 2.34 : Instabilité due à un mauvais réglage de la cage de calibration (d'après [LAS,99])

Ces phénomènes ne sont pas à proprement parler des instabilités liées à l'étirage de la bulle, mais souvent les conséquences de mauvais réglages de la ligne de soufflage. De plus, elles surviennent dans des zones de paramètres procédés non représentatives de la réalité industrielle (taux d'étirage ou de gonflage très bas…), ou pour des variations brutales de ces paramètres. Il convient donc de les dissocier des instabilités de « draw resonance » et de type hélicoïdal qui sont, quant à elles, de véritables obstacles à la production de film.

III.1.3. La difficulté de la quantification des instabilités

Les différents auteurs ayant étudié les instabilités du procédé de soufflage de gaine décrivent souvent leurs difficultés à observer de manière précise le passage de l'état stable à une zone d'instabilité. Comme le soulignent Obijeski et Pruitt [OBI,92], l'observation de l'instabilité de la bulle est souvent effectuée de manière subjective, puisqu'il n'existe pas de critère quantitatif pour évaluer le démarrage de l'instabilité. Cette détermination est d'autant plus délicate qu'elle nécessite d'attendre suffisamment longtemps (typiquement entre quinze et trente minutes) afin d'être sûr de l'état de la bulle. La quantification de l'instabilité, en terme de période ou d'amplitude, ne peut se faire par l'observation directe de la bulle, et impose donc à l'opérateur de fastidieuses mesures a posteriori sur de grandes longueurs de film obtenu, comme le font Fleissner [FLE,88] ou Lasaunière [LAS,99].

Minoshima et White [MIN,86] relient l'apparition de l'instabilité de « draw resonance » aux variations mesurées de la tension du film imprimée par le système de tirage. Huang [HUA,88] propose un appareillage de suivi en ligne basé sur un capteur de pression à membrane placé à l'intérieur de la bulle. Il observe dans le cas de l'instabilité de «draw resonance », l'apparition d'une variation périodique de la surpression interne et corrèle la fréquence de cette variation avec celle de la variation du diamètre de la bulle.

Han et Park [HAN,75][PAR,75] puis Kanaï et White [KAN,84] filment le comportement de la bulle puis utilisent les images afin de quantifier les variations de diamètre. Sweeney et al. [SWE,92][SWE,93] sont, à notre connaissance, les premiers a utiliser un véritable système d'analyse vidéo en ligne (figure 2.35). La bulle est filmée à l'aide d'une caméra vidéo noir et blanc, l'image est ensuite digitalisée et analysée par un logiciel permettant l'enregistrement au cours du temps du diamètre et de la position axiale de la bulle. Ils mesurent ensuite (moyennant un étalonnage préalable) les déviations par rapport à une ligne de référence des positions des bords gauche (position P_l) et droit (position P_r) de la bulle, ce qui leur permet de définir une plage de variation de diamètre D_r (*Diameter range*) :

$$D_r = \left(P_{l\max} - P_{r\min}\right) - \left(P_{l\min} - P_{r\max}\right) \qquad (2.15)$$

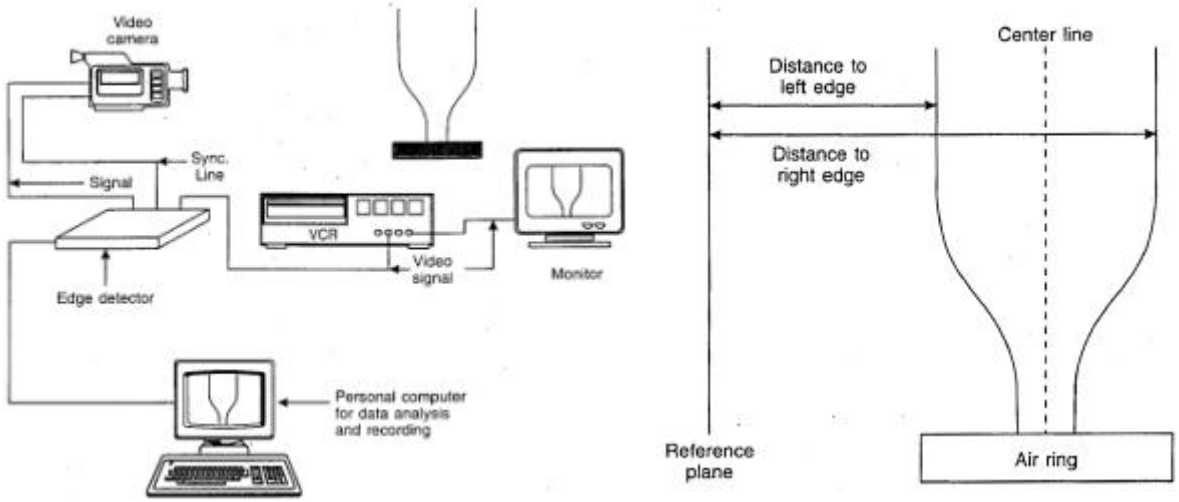


figure 2.35 : Montage expérimental et référentiel utilisés par Sweeney et al. [SWE,92]

Ghaneh-Fard et al. [GHA,96] utilisent une approche similaire et introduisent le premier critère objectif d'instabilité en utilisant le paramètre *DHI* (*Degree of Helical Instability*) pour caractériser le mouvement hélicoïdal de la bulle :

$$DHI(\%) = \frac{D_r}{D_{moyen}}.100 \qquad (2.16)$$

D_{moyen} est le diamètre moyen obtenu en soustrayant les positions moyennes des deux bords de l'image de la bulle. Une bulle est considérée stable si *DHI* était inférieur à 20%, partiellement instable lorsqu'il est situé entre 20% et 40%, et complètement instable pour des valeurs supérieures. Les résultats quantitatifs obtenus pour des PEbdl, PEbd, PEhd et des PP montrent un bon accord avec les cartographies qualitatives de la littérature, excepté pour l'influence de la FLH. Il s'agit là d'un critère objectif de caractérisation, permettant une cartographie de zones instables et stables, notamment leurs frontières, beaucoup plus rationnelle que l'observation et la qualification « visuelle ».

La principale limitation de ce type d'équipement en ligne réside dans le fait qu'il ne traite en réalité qu'une projection de la bulle sur le plan de l'image alors que la littérature souligne l'importance d'une approche tridimensionnelle. En effet, sur une simple projection planaire, il n'est pas possible de distinguer, par exemple, une instabilité hélicoïdale d'une instabilité liée à un mauvais réglage de la cage de calibration. Outre l'encombrement et les difficultés de maniement, l'utilisation simultanée de plusieurs caméras doit permettre la synchronisation des images, ce qui nécessite un matériel coûteux.

III.1.4. Cartographies des différentes zones

Suivant l'exemple de White et ses divers collaborateurs [KAN,84][MIN,84][MIN,86][WHI,87], les auteurs représentent généralement les diverses zones de comportement de la bulle sous forme de diagrammes dans l'espace tridimensionnel DR-BUR-FLH. A FLH maintenue constante (en adaptant l'intensité du refroidissement) la bulle, initialement stable, est fixée à une valeur de taux de gonflage et le taux d'étirage progressivement augmenté jusqu'à apparition d'une instabilité. Comme nous l'avons évoqué au paragraphe II.1.2, ce type de représentation est difficile d'exploitation du fait que l'axe représentant l'influence de la thermique est dépendant, entre autres, de la machine considérée. A défaut d'une quantification réellement objective de l'histoire thermique subie par le fluide, nous utiliserons par la suite le gradient thermique $d\overline{T}/dz$ défini par la relation (2.11). Celui-ci, supposé constant et donc ne rendant pas compte du « chemin thermique » suivi, a néanmoins comme principale vertu de proposer une rationalisation de la thermique par rapport à la taille de la filière utilisée. Notons également que si il est aisé de maîtriser les variations imposées du taux d'étirage (en faisant varier simplement la vitesse des rouleaux de tirage), il est beaucoup moins évident d'imposer une variation contrôlée du taux de gonflage, celui-ci étant régi par la quantité d'air introduite (ou extraite) à l'intérieur de la bulle.

Lasaunière [LAS,99] obtient, sur une machine KAUFMAN du CERDATO de dimensions sensiblement plus grandes que celle que nous avons utilisée pour la première série d'essais (R_0=75mm, e_0=2mm, Q=25kg/h), des cartographies des différentes zones dans plusieurs conditions pour le même PEbdl que celui que nous avons utilisé et un PEbd dont nous avons vu qu'il avait un « caractère viscoélastique » plus marqué. Les conditions expérimentales d'extrusion et de thermique sont résumées dans le tableau 2.4.

Essai	Produit	taux de cisaillement (s^{-1})	De_0/λ (s^{-1})	FLH (cm)	$d\overline{T}/dz$ (°C)
KAUFMAN-1	PEbdl	29.5	0.13	40	-23,4
KAUFMAN-2	PEbdl	29.5	0.13	28	-33,5
KAUFMAN-3	Pebd	29.5	0.13	38	-24,7

tableau 2.4 : Conditions d'extrusion et thermique des essais de référence de Lasaunière [LAS,99]

Les cartographies obtenues avec le PEbdl (voir figure 2.36 (a) et (b)) montrent une zone stable centrale entourée de zones correspondant aux diverses instabilités, avec des frontières peu précises du fait des points expérimentaux relativement éloignés. La zone de «tremblements » rapportée dans le cas du refroidissement le plus intense décrit en réalité un comportement assez flou. Le rayon de la bulle semble varier mais de façon peu franche. Il s'agit là d'une illustration de la difficulté de qualifier, et plus encore de quantifier, l'instabilité par la simple observation visuelle. La tendance la plus marquée qui se dégage est l'influence du refroidissement qui tend à augmenter la zone de stabilité vers des taux d'étirage et de gonflage plus élevés. Nous notons l'existence d'un optimum de taux d'étirage «accessible » pour des taux de gonflage situés entre 2,4 et 2,8. Cet optimum semble d'autant plus important que le refroidissement est fort.

La figure 2.36 (c) présente la cartographie obtenue dans quasiment les mêmes conditions que l'essai KAUFMAN-1 avec le PEbd. Nous notons le déplacement vers les taux de gonflage plus élevés de la zone d'instabilité hélicoïdale, l'augmentation des taux d'étirage accessibles et surtout

la disparition dans ce cas de l'instabilité de «draw resonance franche » au profit d'une zone où survient systématiquement la rupture de la bulle. Ce comportement est très similaire à celui que nous avons évoqué au paragraphe III.1.1 dans la comparaison du filage de matériaux newtoniens et viscoélastiques [CHA,79][DEM,83]. Ainsi le caractère viscoélastique plus marqué du PEbd semble être à l'origine de cette différence de comportement.

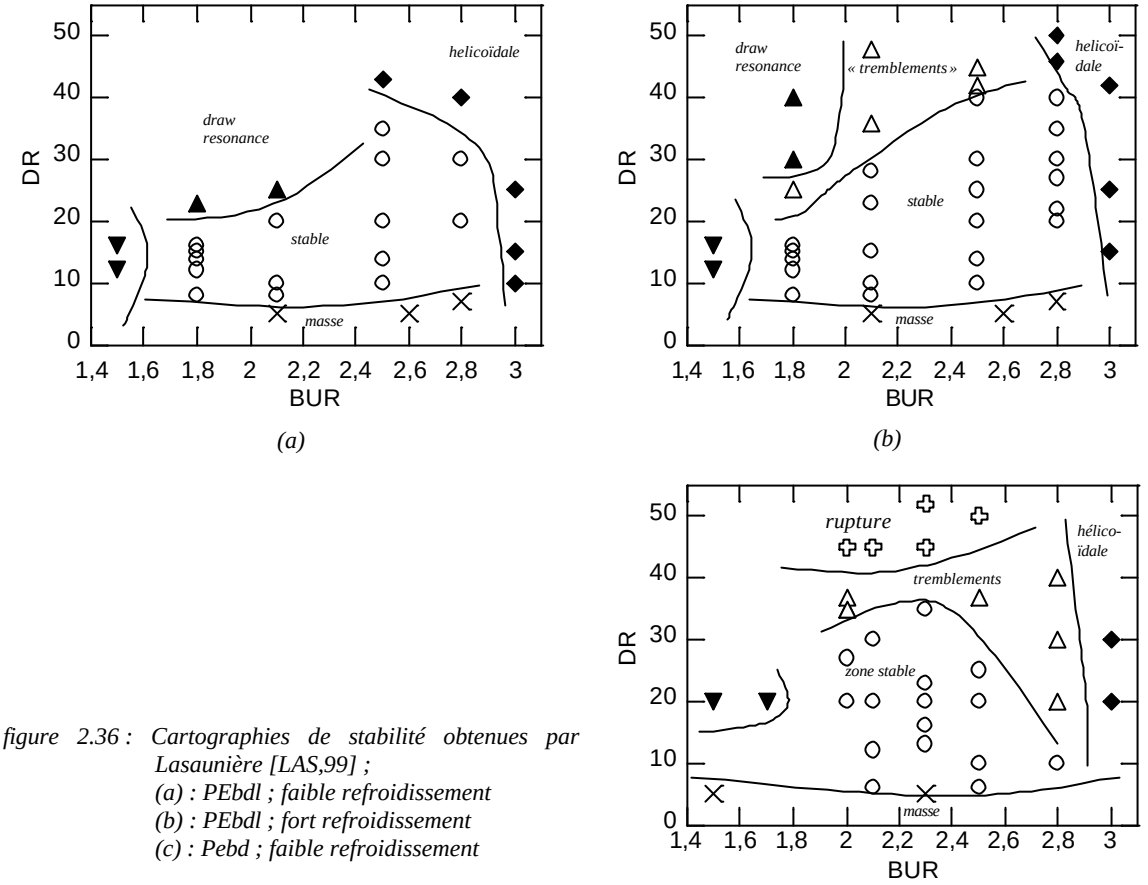


figure 2.36 : Cartographies de stabilité obtenues par Lasaunière [LAS,99] ;
(a) : PEbdl ; faible refroidissement
(b) : PEbdl ; fort refroidissement
(c) : Pebd ; faible refroidissement

III.1.5. Conclusions

A travers cette étude bibliographique, nous avons mis en évidence la multiplicité et la réelle complexité des comportements instables que peut engendrer le procédé de soufflage de gaine. Si nous occultons les comportements liés à de mauvais réglages de la machine ou bien intervenant dans des zones peu concernées par la réalité industrielle (taux d'étirage ou de gonflage faibles), nous pouvons dégager deux comportements bien distincts et dans certains cas couplés :

- le comportement de type «*draw resonance*», comparable à celui rencontré dans les procédés d'étirage uniaxial et survenant pour des valeurs de taux d'étirage situées au-delà d'un taux d'étirage critique. La bulle, et par conséquent le film produit, subissent alors des variations dimensionnelles périodiques qui s'amplifient avec le temps, la bulle conservant son axisymétrie.

- le comportement de type ***hélicoïdal***, spécifique au procédé de soufflage de gaine, caractérisé par une perte d'axisymétrie de la bulle qui décrit alors une hélice, engendrant également des variations dimensionnelles périodiques du film produit. Ce comportement survient pour des taux de gonflage élevés.

L'étude de l'influence des paramètres du procédé et du matériau sur le déclenchement de ces instabilités a montré l'influence stabilisante du refroidissement et du caractère viscoélastique du matériau considéré (comme le cas, beaucoup plus simple, du filage textile).

Nous avons également souligné les lacunes existant dans la caractérisation objective de ces défauts, en terme de fréquence, d'amplitude par exemple, liées à un manque d'outils de « mesure » efficaces du comportement de la bulle.

Dans cet esprit, nous avons, en plus des observations visuelles réalisées sur la machine du CERDATO, effectué une campagne d'essais au Centre de Recherche Appliquée sur les Polymères (CRASP) de l'Ecole Polytechnique de Montréal (Canada). Nous y avons utilisé une ligne de soufflage équipée d'un système optique original de suivi en ligne de la bulle. Nous avons ainsi obtenu des données permettant la comparaison quantitative avec le modèle que nous présenterons dans les chapitres suivants.

III.2. Présentation de la ligne de soufflage

Le fait de ne pas avoir effectué l'étude thermomécanique et l'étude des instabilités sur la même ligne de soufflage de gaine nous amène légitimement à nous interroger sur la « compatibilité » des résultats obtenus. En effet, rien n'est *a priori* moins sûr que la validité des réflexions menées sur les profils obtenus pour la bulle stable sur une autre ligne, tant ces résultats sont, comme nous l'avons précisé, dépendants de l'anneau (et plus généralement des conditions de thermique engendrées) et, dans une moindre mesure, des conditions d'extrusion imposées à notre matériau. Nous veillerons donc à nous placer dans des conditions les plus proches possibles de celles utilisées précédemment.

III.2.1. Configuration de la ligne

La ligne de soufflage du CRASP est constituée d'une extrudeuse monovis KILLION de 45 mm de diamètre, munie d'une vis polyéthylène standard. La filière annulaire que nous avons utilisée a un rayon de 25,25 mm pour un entrefer de 0.945 mm. L'anneau de refroidissement est un anneau simple-flux de constitution équivalente à celui de la ligne COLLIN, mais il s'est néanmoins avéré moins efficace à refroidir la bulle.

Si nous comparons les valeurs des paramètres que nous avons défini pour quantifier les conditions en sortie de filière (voir tableau 2.5 et figure 2.8), nous voyons que les conditions d'extrusion que nous obtenons avec cette ligne en imposant un débit de 5kg/h sont comparables avec celles obtenues lors de notre étude thermomécanique stable avec l'entrefer de 0.8 mm. Nous conserverons donc ces valeurs pour l'intégralité de notre étude. Notons également que nous sommes ainsi dans des conditions plus représentatives des conditions « industrielles » (taux de cisaillement élevés).

Essai	R_0 (mm)	e (mm)	débit (kg/h)	taux de cisaillement (s^{-1})	De_0/λ (s^{-1})
CRASP	25,25	0.95	5	77.60	0.49
COLLIN 1	25,00	0.8	3.5	77.37	0.41
COLLIN 2	23.80	2	5	18.58	0.26
KAUFMAN	75	2	25	29.47	0.13

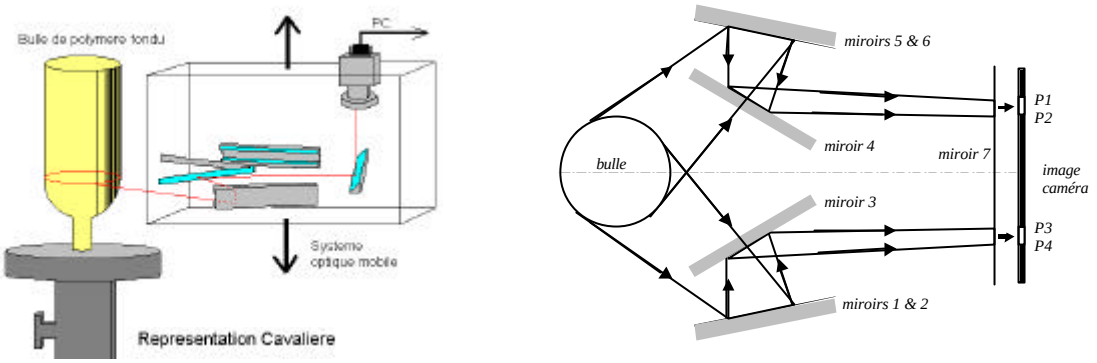
tableau 2.5 : Résumé des conditions d'extrusion des différents essais étudiés

Les essais de Lasaunière [LAS,99] présentés dans l'étude bibliographie (paragraphe III.1.4) et qui nous serviront de point de comparaison qualitative, sont quant à eux plus proches des conditions obtenues avec l'entrefer de 2 mm de la ligne COLLIN. Le peu de différences observées entre nos essais effectués avec les deux entrefers nous amène à penser qu'il est légitime d'effectuer une

comparaison des cartographies, du moins au point de vue des conditions d'extrusion. Nous traiterons plus en détails le sujet de la thermique lors de l'analyse de nos résultats.

III.2.2. Dispositif de mesure en ligne

La fonction de ce montage original développé au CRASP est de pouvoir repérer le comportement tridimensionnel de la bulle en permettant la mesure en ligne de ses déplacements et variations dimensionnelles.



(a) *(b)*

figure 2.37 : Schéma de principe du dispositif (d'après [TRO,00]) ;
(a) Vue perspective générale ;
(b) Vue en coupe du dessus du montage et chemin optique suivi jusqu'à la caméra.

L'installation optique, présentée sur la figure 2.37, comprend un jeu de sept miroirs qui permet l'acquisition par une caméra numérique dite « line-scan » de deux vues distinctes et synchronisées de la bulle sur la même image. Sur chaque image, nous obtenons ainsi naturellement deux vues de la bulle à une cote z située au dessus de la hauteur de figeage selon deux axes différents et ce, au même instant. La caméra est reliée à un PC qui traite en temps réel le signal numérique et crée la base de donnée exploitable ultérieurement pour l'étude des évolutions de la bulle avec le temps. Un système relativement complexe d'éclairage, non représenté sur les figures, permet d'assurer un contraste optimal.

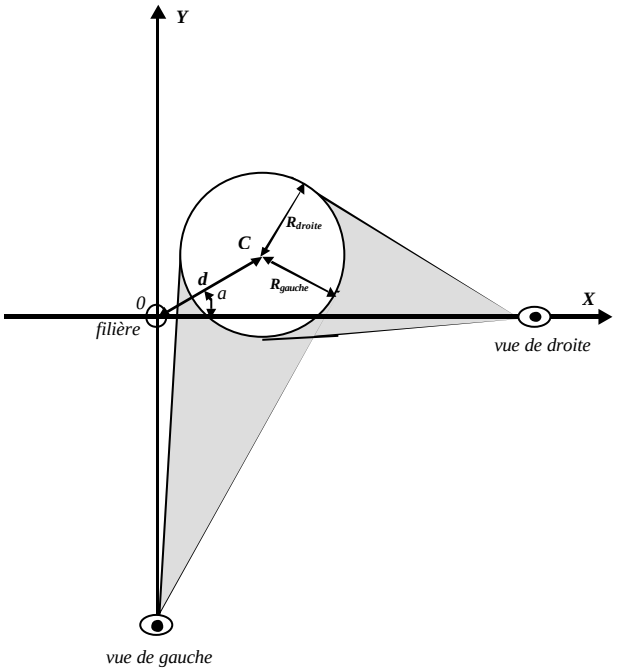


figure 2.38 : Notations utilisées pour le suivi des évolutions de la bulle avec le temps

Le signal traité se présente sous la forme d'une bande telle que l'illustre figure 2.37 (b). L'image est codée sur 1024 pixels sur 256 niveaux de gris (le noir a pour valeur 0, le blanc 256). Nous obtenons deux bandes blanches, correspondant aux deux vues de la bulle, sur un fond noir. Nous pouvons donc repérer les positions, pour chaque image, des bords de ces deux bandes (points P1, P2, P3 et P4 sur la figure).

Ainsi, comme le montre la figure 2.38, l'acquisition de cette image nous permet, après étalonnage, de suivre en fonction du temps la position du centre de la bulle, exprimée dans les coordonnées polaires (d,a), ainsi que les deux rayons apparents sur les deux vues de la bulle R_{gauche} et R_{droite}. Le détail des calculs est présenté en Annexe I. Le suivi de la valeur de d nous renseignera donc sur l'axisymétrie de la bulle, alors que le suivi des rayons apparents rendra compte de ses variations dimensionnelles.

III.2.3. Cas typiques rencontrés et critères de stabilité introduits

Afin de juger des possibilités de cet appareillage, nous présentons préalablement quelques cas de comportement de la bulle rencontrés et les mesures qui ont été réalisées.

Il est important de noter que nous n'avons jamais rencontré de cas où les deux rayons mesurés R_{gauche} et R_{droite} différaient de manière significative, sauf lorsque des « hernies » sont apparues sur la bulle à cause de la présence d'infondus sur le film. L'essai était alors considéré comme nul. Ainsi la bulle a, durant tous nos essais, conservé sa circularité à la côte z considérée. De ce fait nous ne représenterons dans ce qui suit, par souci de clarté, que l'évolution d'un seul rayon correspondant à la moyenne des deux mesures effectuées.

a) Cas d'une bulle stable

Etudions tout d'abord le cas d'une bulle obtenue dans des conditions considérées comme stables puis dont on augmente légèrement le taux de gonflage et dont on observe le comportement dans le temps.

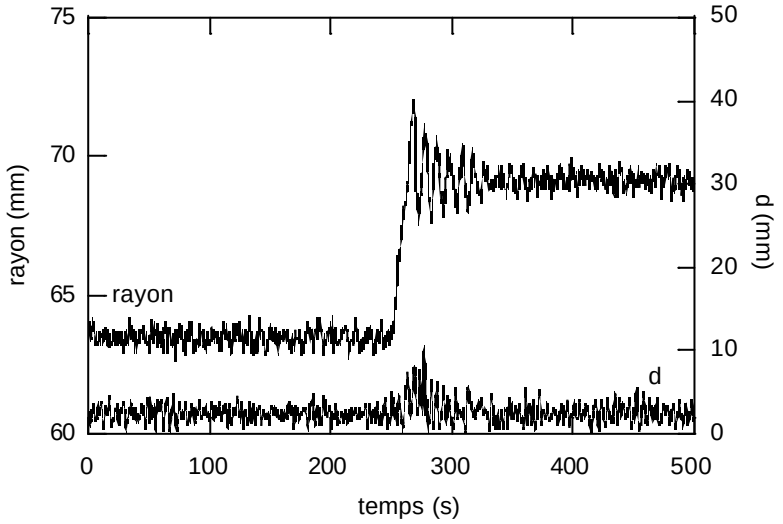


figure 2.39 : Cas du gonflage d'une bulle stable - Evolution du rayon et de la distance au centre d ; DR = 8.5 ; BUR passe de 2.5 à 2.7 ; FLH = 25 cm

La figure 2.39 présente les évolutions du rayon moyen de la bulle ainsi que du paramètre d. Plusieurs observations peuvent être faites. Tout d'abord avant l'augmentation du taux de gonflage, le rayon mesuré varie légèrement autour de la valeur de consigne, alors qu'à l'œil, la bulle semble stable. L'amplitude de ces variations ne dépasse néanmoins pas 5%, ce qui reste acceptable. Il n'y a

pas à proprement parler de périodicité vraiment établie, nous parlerons de bruit inhérent à la méthode de mesure. Au cours du temps (environ 5 minutes), la situation n'évolue pas.

Lorsque survient l'augmentation du taux de gonflage (*t » 250 s*), nous observons une augmentation brusque du rayon, puis quelques oscillations d'amplitude rapidement décroissante. Au bout d'environ 1 minute, le rayon s'est stabilisé, l'amplitude des variations étant de nouveau inférieure à 5%. L'instabilité introduite par le « pulse » de pression d'air à l'intérieur de la bulle ne s'est donc pas entretenue et le retour à une nouvelle situation d'équilibre s'est rapidement effectué.

L'évolution du paramètre *d*, distance entre le centre de la filière et le centre de la bulle, ne présente pas non plus d'instabilité manifeste. L'amplitude de sa variation reste inférieure à 5 mm, ce qui demeure très petit. Nous observons juste après l'augmentation du taux de gonflage une légère impulsion qui est très vite résorbée. Aucune périodicité n'est nettement décelable et la bulle a tout le temps conservé son caractère axisymétrique.

b) Cas d'une instabilité de type « draw resonance »

Afin de faciliter l'interprétation de nos mesures, nous introduisons un paramètre *DR* représentant la variation en pourcentage de la valeur du rayon moyen mesuré par rapport à la valeur de consigne initiale, déduite d'une mesure de la largeur du film obtenu dans le cas stable. Ce paramètre est équivalent à celui décrit par Ghaneh-Fard [GHA,96], et nous l'utiliserons pour décrire tous les comportements de la bulle.

$$\Delta R(\%) = \left(R_{reel} - R_{consigne}\right) * \frac{100}{R_{consigne}} \qquad (2.17)$$

La figure 2.40 présente les évolutions de ce paramètre de variation de rayon *DR* ainsi que du paramètre *d* lorsque le taux d'étirage est augmenté à partir d'un cas stable et qu'il y a développement d'une instabilité de « draw resonance ». Le taux de gonflage est fixé à 2.75 et le taux d'étirage vaut initialement 9.4. La hauteur de figeage est quant à elle maintenue à 25 cm.

Nous observons au saut de taux d'étirage (passage de 9.4 à 9.9) une augmentation brusque de l'amplitude des variations de rayons qui dépassent rapidement 10% pour atteindre des valeurs critiques où la bulle risque de s'accrocher à la structure et se crever.

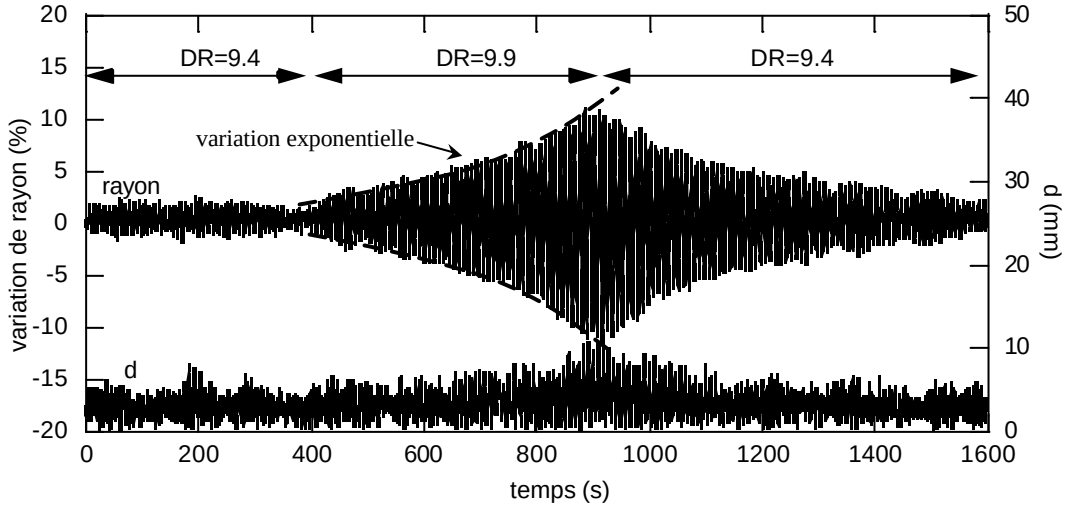


figure 2.40 : Cas d'une instabilité de « draw resonance » - Evolution du rayon et de la distance au centre d ; BUR=2.75 ; DR passe de 9.4 à 9.9 puis revient à 9.4 ; FLH = 25 cm

L'allure exponentielle de la croissance de ces oscillations n'est pas sans nous rappeler l'allure de celles observées sur le diamètre du filament lors de l'apparition du défaut de « draw resonance » dans le filage textile (cf. figure 2.23). Ces variations du rayon sont périodiques, comme le montre le zoom présenté sur la figure 2.41. La bulle ne perd pas son axisymétrie, puisque le paramètre *d* reste plus ou moins constant et proche de zéro (voisin de 5 mm). Avant la rupture de la bulle, nous avons préféré rétablir un taux d'étirage de 9.4. La bulle s'est re-stabilisé aussitôt, en suivant approximativement une évolution inverse de la croissance décrite précédemment.

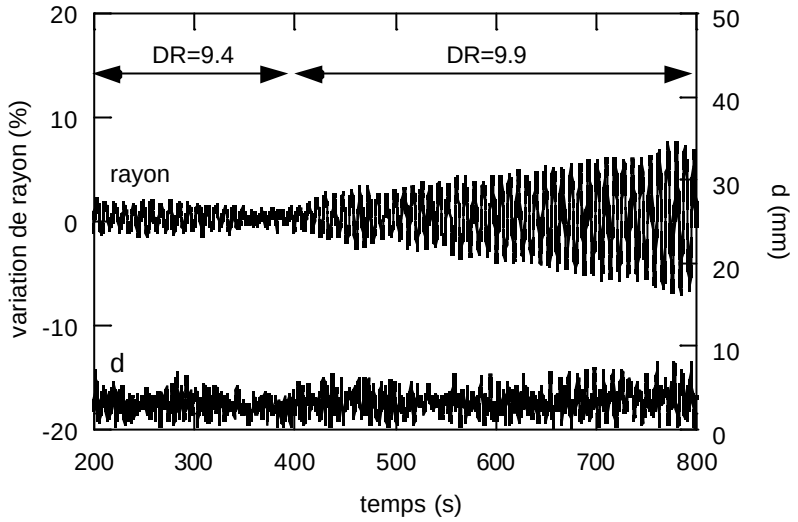
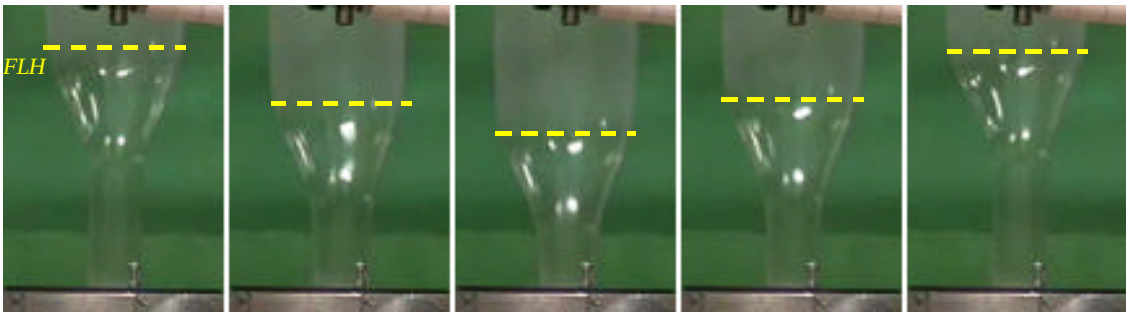
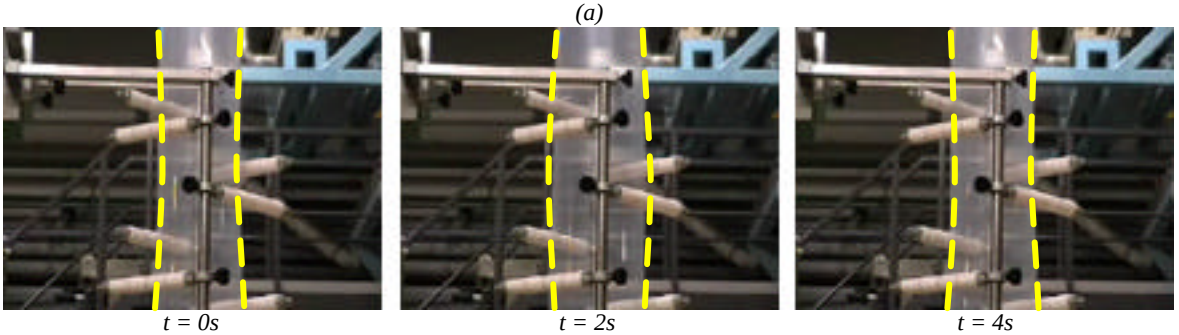


figure 2.41 : Cas d'une instabilité de « draw resonance » - Evolution du rayon et de la distance au centre d ; BUR=2.75 ; DR passe de 9.4 à 9.9 ; FLH = 25 cm



t = 0s *t = 1s* *t = 2s* *t = 3s* *t = 4s*

(a)



t = 0s *t = 2s* *t = 4s*

(b)

figure 2.42 : Exemple d'évolution du profil de la bulle lors d'une instabilité de « draw resonance » (a) : zone fondue ; (b) : bulle au niveau de la cage de calibration

Ces mesures traduisent fidèlement les observations pouvant être effectuées de visu (voir figure 2.42 (a) et (b)). Les variations de rayon observées sont alors de même période que les variations de

FLH. Cette instabilité peut ainsi être facilement caractérisée grâce à notre appareillage qui nous permet de quantifier rapidement le degré d'instabilité. Nous serons donc capables de construire des cartes précises de transitions stable-instable, en indiquant notamment des « isovaleurs » d'instabilités. Nous pouvons également avoir accès aux fréquences des oscillations et comparer entre elles des conditions d'apparition et de développement de l'instabilité (vitesse de croissance de l'instabilité, période, amplitude, etc…).

c) Cas d'une instabilité de type hélicoïdal

Nous étudions le comportement d'une bulle dont le taux de gonflage a été fixé à 3.25 et la FLH maintenue à 25 cm lorsque le taux d'étirage varie de 6.5 à 7. La figure 2.43 représente les évolutions de la variation de rayon *DR* et du paramètre *d* en fonction du temps.

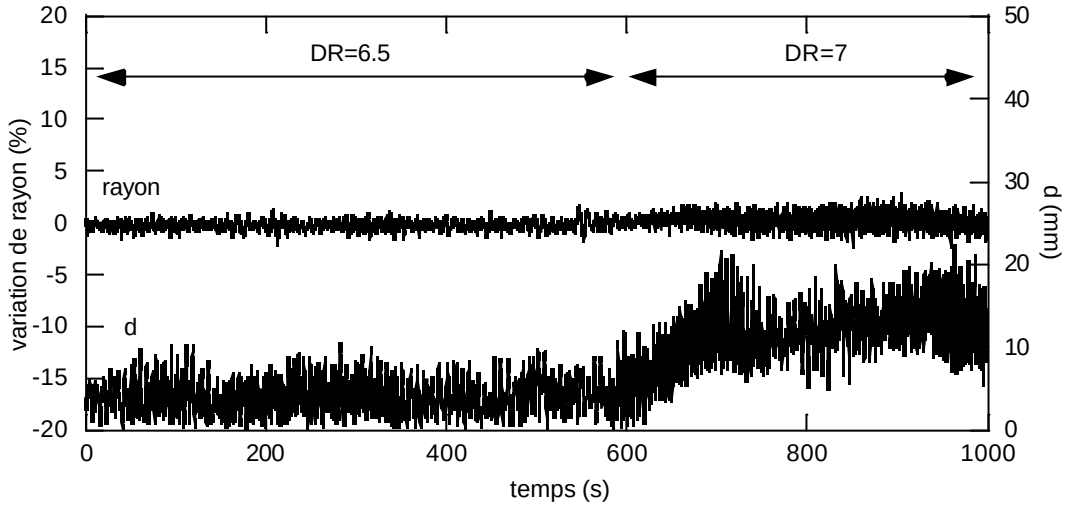


figure 2.43 : Cas d'une instabilité hélicoïdale - Evolution du rayon et de la distance au centre d ; BUR = 3.25 ; DR passe de 6.5 à 7 ; FLH = 25 cm

La bulle est initialement stable, les évolutions des deux paramètres sont en deçà des valeurs critiques évoquées précédemment. Lorsque nous augmentons le taux d'étirage *(t=600 s)*, l'amplitude de variation de rayon augmente légèrement mais reste dans les limites de stabilité. Le paramètre *d* quant à lui voit sa valeur moyenne augmenter jusqu'à dépasser 15 mm. La perte d'axisymétrie est manifeste.

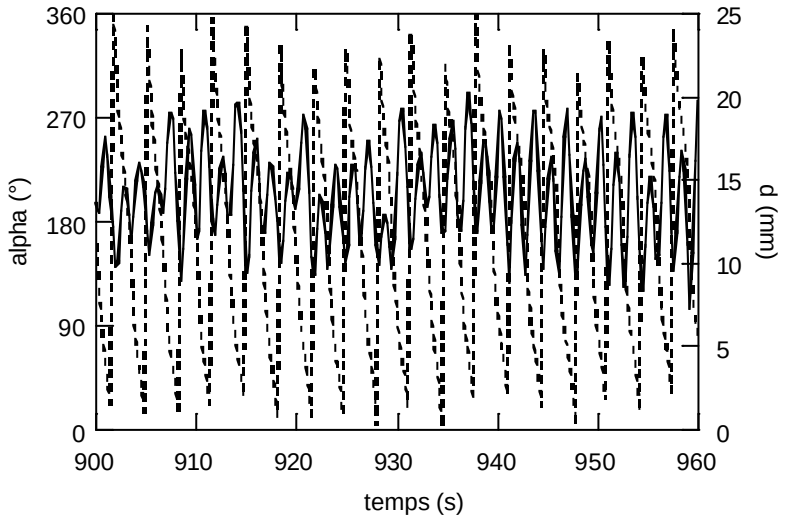


figure 2.44 : Cas d'une instabilité hélicoïdale - Evolution de la distance au centre d (¾) et de l'angle a (- -) ; BUR = 3.25 ; DR = 7 ; FLH = 25 cm

Si nous étudions plus en détail les évolutions de la position du centre de la bulle, par l'intermédiaire de d et de l'angle a (cf. figure 2.44), nous observons son caractère périodique. Nous notons également que α décrit l'intervalle complet [0°,360°], ce qui indique bien que la bulle tourne complètement autour de son axe. Tout ceci confirme que la bulle décrit, à la cote z considérée, une hélice autour de l'axe de la filière, comme l'illustre la figure 2.45.

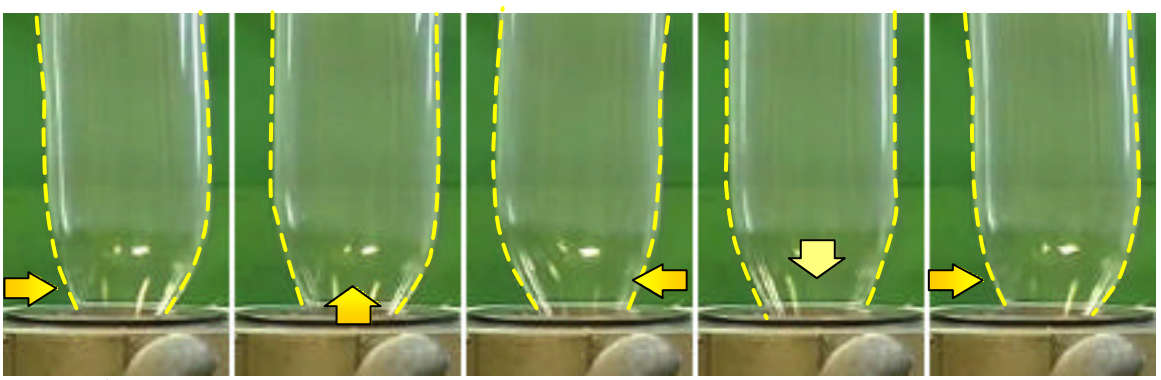


figure 2.45 : Exemple d'évolution du profil de la bulle lors du démarrage d'une instabilité de type hélicoïdal

Notons cependant que, du fait du caractère « spectaculaire » de l'instabilité hélicoïdale, la détermination effectuée visuellement par l'opérateur est quasi-identique à celle obtenue après traitement des données. Il s'est également rapidement avéré, comme nous allons le montrer dans la suite de ce chapitre, que le défaut hélicoïdal était obtenu soit «seul », soit en superposition au défaut de « draw resonance ». De plus ce type de défaut a tendance à dégénérer rapidement, ce qui ne favorise pas son étude. En effet, le mouvement hélicoïdal de la bulle entraîne facilement des accrochages au niveau soit de la cage de calibration, soit des rouleaux pinceurs et du système de mise à plat et d'enroulement, et donc une crevaison de la bulle.

III.2.4. Critères de stabilité et protocole expérimental

Au vu des exemples que nous venons d'évoquer, nous pouvons fixer des critères de stabilité sur les valeurs des paramètres DR et d. Nous considérerons comme stables des bulles dont les valeurs de variations de rayons n'excèdent pas 5 %, et des variations de d inférieures à 10 mm. Dans la suite de nos expérimentations, nous avons suivi la démarche suivante :

- Obtention d'une bulle stable dans des conditions standard fixées, par expérience, à BUR=2.2, DR=6, FLH=25 cm,
- Calibration de l'appareillage à partir de cette bulle,
- Modification des paramètres étudiés par incréments successifs, et attente de la stabilité entre chaque incrément,
- Aux conditions désirées pour l'étude de stabilité, observation de la bulle et suivi des mesures en ligne pendant au moins 10 minutes (moins si dégénérescence trop dangereuse),
- Lorsque la frontière stable-instable est atteinte, retour à la dernière condition stable pour vérifier la reproductibilité.

III.3. Essais réalisés et résultats

Dans les conditions d'extrusion décrites précédemment, nous avons centré notre étude sur le balayage des paramètres d'étirage (taux d'étirage et de gonflage) à deux hauteurs de figeage (20 cm et 25 cm) correspondant à des taux de refroidissement moyens $d\overline{T}/dz$ respectivement de 13.2 et 10.6 °C. Notons que ces hauteurs de figeage sont plus élevées que celles fixées lors de notre étude du procédé stable. Du fait de la moindre efficacité du système de refroidissement, nous n'avons pas été capables de maintenir une hauteur de figeage plus basse.

III.3.1. Hauteur de figeage « basse »

Dans cette configuration, et compte tenu de certaines limitations de notre ligne de soufflage, nous n'avons pu explorer de manière fiable qu'une fenêtre de taux de gonflage compris entre 2 et 3. Dans cette situation, nous n'avons jamais observé d'instabilité hélicoïdale.

La figure 2.46 présente le développement d'une instabilité de « draw resonance » observé pour un taux de gonflage de 2.3. Sur cette figure, le temps relatif $t=0$ correspond au moment où le taux d'étirage à été fixé à la valeur indiquée, et nous présentons les 250 premières secondes du comportement en rayon de la bulle.

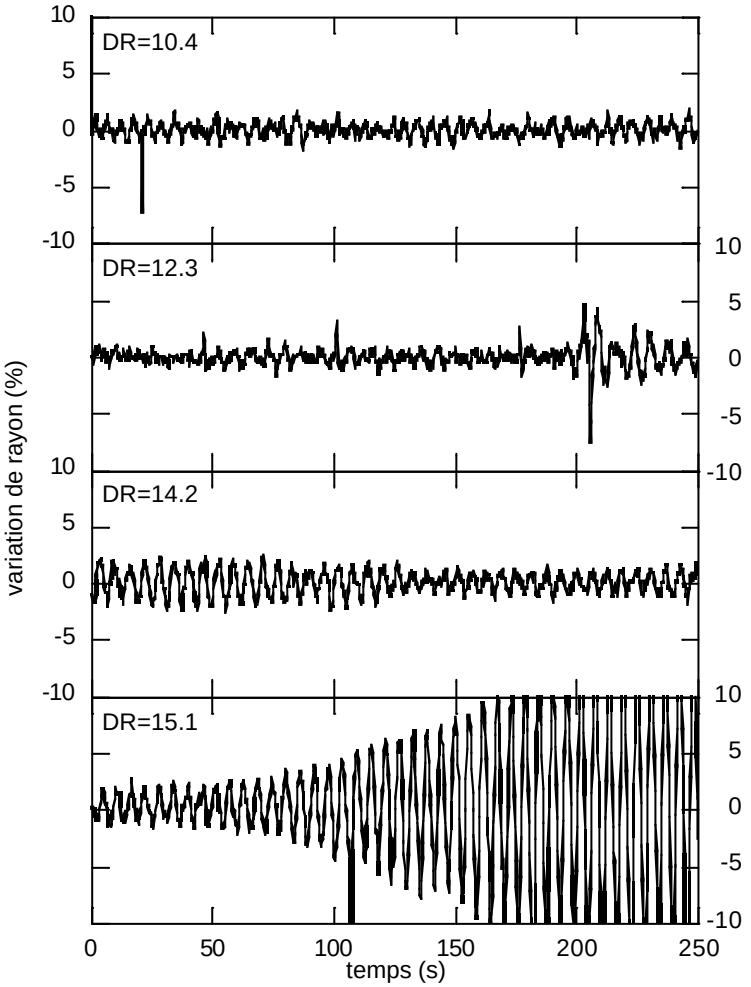


figure 2.46 : Influence du taux d'étirage sur le déclenchement de la « draw resonance » ; BUR = 2.3 ; FLH = 200 mm ; DR passe de 10.4 à 15.1

Comme nous l'avons précédemment décrit, le rayon oscille tout d'abord, pour un taux d'étirage suffisamment bas, de manière irrégulière et très limitée. Lorsque le taux d'étirage est augmenté (DR=12.3), l'amplitude de ces oscillations augmente légèrement, le rayon connaît même parfois

des démarrages d'instabilités vite résorbées (t ≈ 200 s). Pour un taux d'étirage égal à 14.2, nous pouvons observer une périodicité établie pour les variations de rayon dont l'amplitude reste malgré tout limitée. Enfin, pour DR=15.1, l'amplitude des oscillations augmente subitement pour dépasser la valeur critique que nous avons fixée à 10%. Au vu de la figure, la période de l'instabilité semble constante dans le temps à taux d'étirage fixé. La figure 2.47 permet de comparer les périodes temporelles des oscillations observées à ces deux derniers taux d'étirage. Notons qu'afin de faciliter l'analyse des courbes, l'échelle de temps a été arbitrairement fixée de façon à ce que les premiers points de celles-ci soient situés sur un des optimum d'oscillation. Nous pouvons remarquer que la période des oscillations semble diminuer lorsque le taux d'étirage est augmenté, ce qui est en parfait accord qualitatif avec les mesures effectuées par Lasaunière [LAS,99] sur les films produits.

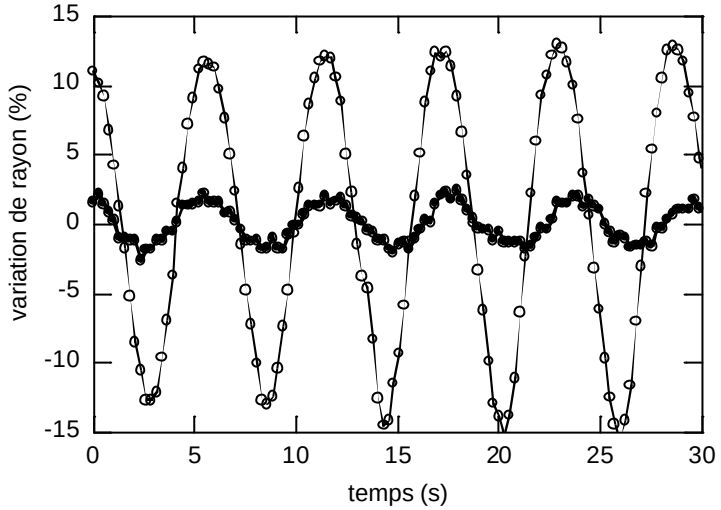


figure 2.47 : Evolution des périodes de l'instabilité en fonction des conditions de déclenchement ;
FLH = 200 mm ; BUR = 2.3 ; (●) DR = 14.2 ; (o) DR = 15.1

La figure 2.48 compare le comportement de la bulle pour plusieurs taux de gonflage lorsque le taux d'étirage était augmenté de 14.2 à 15.1. Pour chaque courbe, le temps $t=0$ correspond au moment où la vitesse des rouleaux pinceurs a été augmenté. Nous pouvons noter que les amplitudes atteintes dans le même temps d'instabilité sont d'autant plus importantes que le taux de gonflage est élevé. Pour un taux de gonflage de 2.1, l'amplitude des oscillations de rayon tend à se maintenir autour de 4% de variation, même après 5 minutes d'observation. Pour des taux de gonflage plus élevés, nous définissons un temps caractéristique d'instabilité t_i comme le temps mis par la bulle pour atteindre le seuil critique de 10% de variation d'amplitude évoqué précédemment. Nous pouvons également mesurer la période temporelle T de l'instabilité déclenchée. Le tableau 2.6 résume les résultats obtenus pour des taux de gonflage compris entre 2.2 et 2.45. Pour des taux de gonflage supérieurs, le comportement critique a été observé pour des taux d'étirage plus faibles.

BUR	t_i *(s)*	*T (s)*
2.1	-	5.7
2.2	330	5.7
2.3	168	5.7
2.45	146	5.7

tableau 2.6 : Evolution du temps critique et de la période de l'instabilité déclenchée en fonction du taux de gonflage ;
DR passe de 14.1 à 15.1

Nous illustrons ainsi le caractère déstabilisant du taux de gonflement, la bulle étant d'autant plus rapidement instable que celui-ci est important. La période de l'instabilité, à taux d'étirage critique

identique, semble quant à elle indépendante du taux de gonflage considéré, comme l'illustre la figure 2.49, et vaut environ 5.7 s.

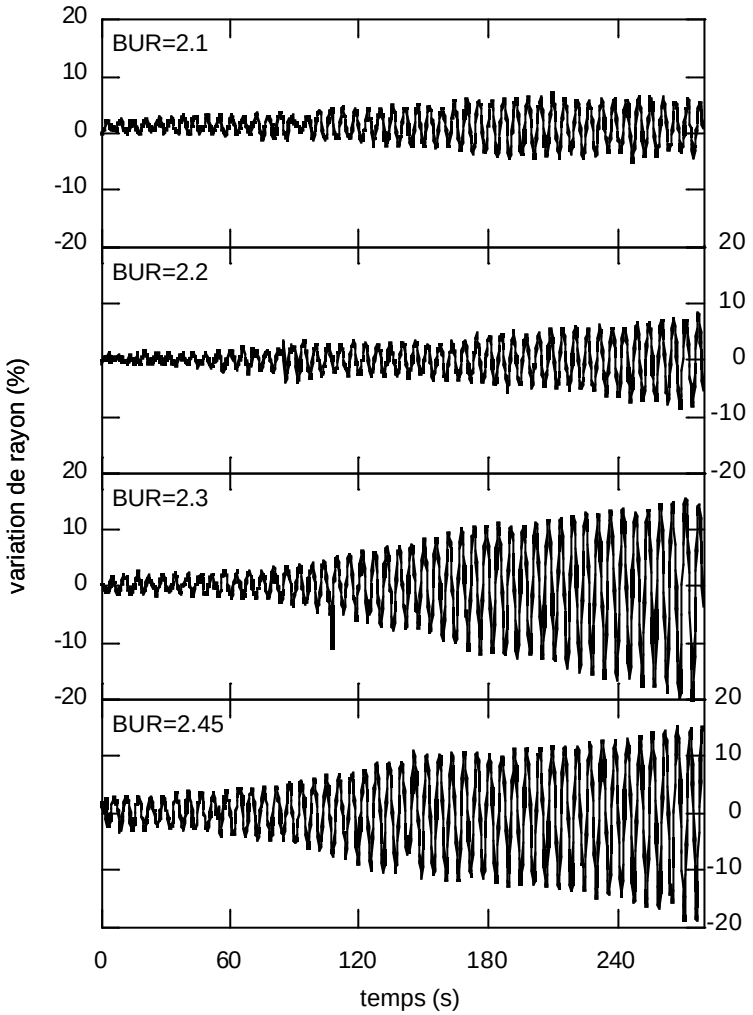


figure 2.48 : Influence du taux de gonflage sur le déclenchement de la « draw resonance » ; DR passe de 14.2 à 15.1 ; FLH = 200 mm ; BUR passe de 2.1 à 2.45

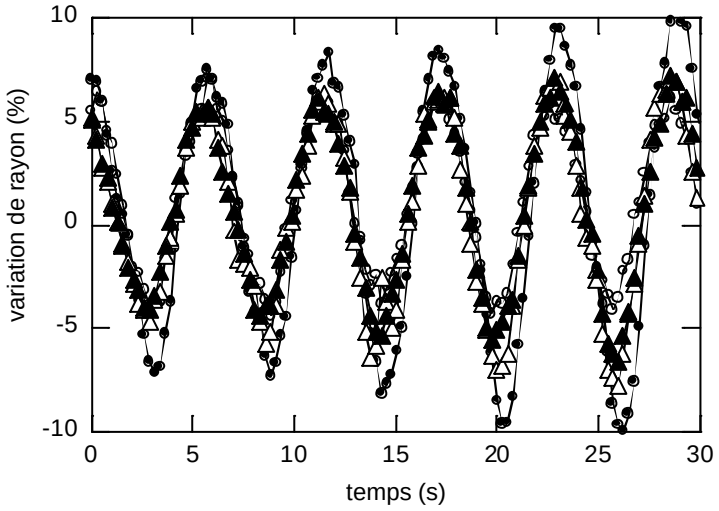


figure 2.49 : Comparaison des périodes de l'instabilité en fonction des conditions de déclenchement ; FLH = 200 mm ; DR = 15.1 (o) BUR = 2.1 ; (?) BUR = 2.2 ; (Δ) BUR = 2.3 ; (●) BUR = 2.45

La figure 2.50 compare de la même manière les évolutions des rayons obtenues pour un des essais que nous venons de commenter (BUR=2.2, $DR_{critique}$=15.1) et dans le cas où le taux de gonflage vaut 3 et où le taux d'étirage de déclenchement de l'instabilité a été déterminé égal à 12.2. Nous retrouvons de nouveau le fait que, dans ce cas, les périodes d'oscillations diffèrent, la période étant d'autant plus grande que le taux d'étirage fixé est faible.

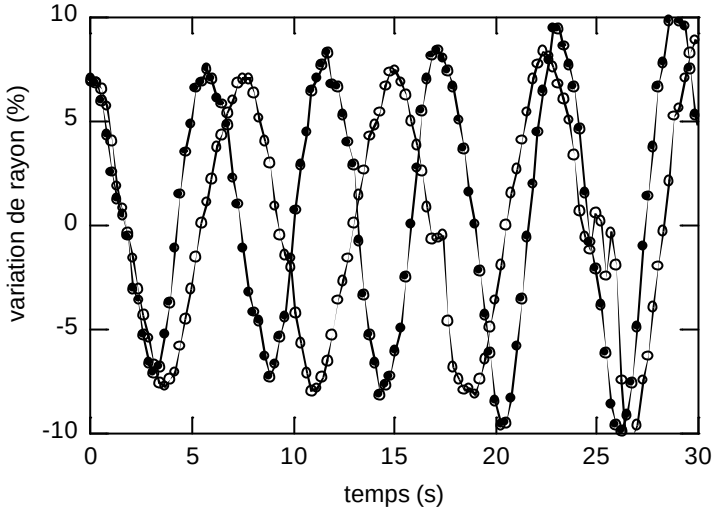


figure 2.50 : Comparaison des périodesde l'instabilité en fonction des conditions de déclenchement ;
FLH = 200 mm ; (●) BUR = 2.2 ; DR = 15.1 ; (o) BUR = 3 ; DR = 12.2

III.3.2. Hauteur de figeage « haute »

Nous avons ensuite augmenté la hauteur de figeage en diminuant la vitesse de l'air soufflé par l'anneau de refroidissement. Dans ce cas, nous avons pu balayer le taux de gonflage dans l'intervalle compris entre 2 et 3.2. De manière générale, nous remarquons que les taux d'étirage atteignables sont beaucoup plus restreints que dans le cas de la hauteur de figeage plus basse.

La figure 2.51 présente les oscillations du rayon de la bulle enregistrées pour différents taux de gonflage au même taux d'étirage de 9.8. Là encore, la période de l'instabilité n'est pratiquement pas influencée par le taux de gonflage, et vaut environ 8.5 secondes.

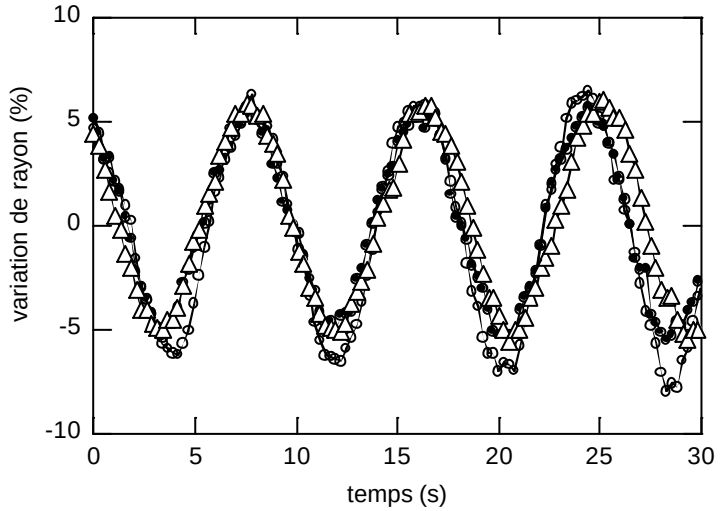


figure 2.51 : Comparaison des périodes de l'instabilité en fonction des conditions de déclenchement ;
FLH = 250 mm ; DR = 9.8 (●) BUR = 2.5 ; (o) BUR = 2.63 ; (Δ) BUR = 2.75

Lorsque nous avons augmenté le taux de gonflage, nous avons rapidement pu observer quelques déclenchements de l'instabilité hélicoïdale. Nous n'avons pas pu effectuer d'étude aussi précise sur la caractérisation de cette instabilité. Néanmoins, nous présentons dans ce qui suit quelques résultats.

La figure 2.52 présente les évolutions de ΔR et de d en fonction du temps dans le cas d'un taux de gonflage de 3.1 lorsque le taux d'étirage est progressivement augmenté de 8.4 à 9.9. La bulle initialement stable, voit tout d'abord, pour un taux d'étirage de 8.9, son comportement modifié par la perte de son axisymétrie, le paramètre d oscillant manifestement de façon périodique alors que le rayon reste dans les limites de la stabilité. Visuellement, la perte d'axisymétrie est déjà perceptible. Par souci de lisibilité, nous n'avons pas représenté les variations de l'angle α, qui se comporte identiquement au cas déjà présenté sur la figure 2.44 en balayant périodiquement l'intervalle compris entre 0° et 360°. La période angulaire est d'environ 4 secondes. Ce comportement évolue encore lorsque le taux d'étirage est fixé à 9.4 : le rayon présente alors à son tour des oscillations périodiques d'amplitude modérée. Enfin, pour un taux d'étirage de 9.9, le phénomène s'amplifie et le comportement de la bulle dégénère, ce qui entraîne sa rupture. Pour résumer, nous pouvons dire que la bulle, initialement stable, a tout d'abord présenté une instabilité de type hélicoïdal, induit par l'étirage transversal, à laquelle s'est ensuite superposé la « draw resonance » induite par l'étirage longitudinal, conduisant finalement à une dégénérescence du comportement de la bulle.

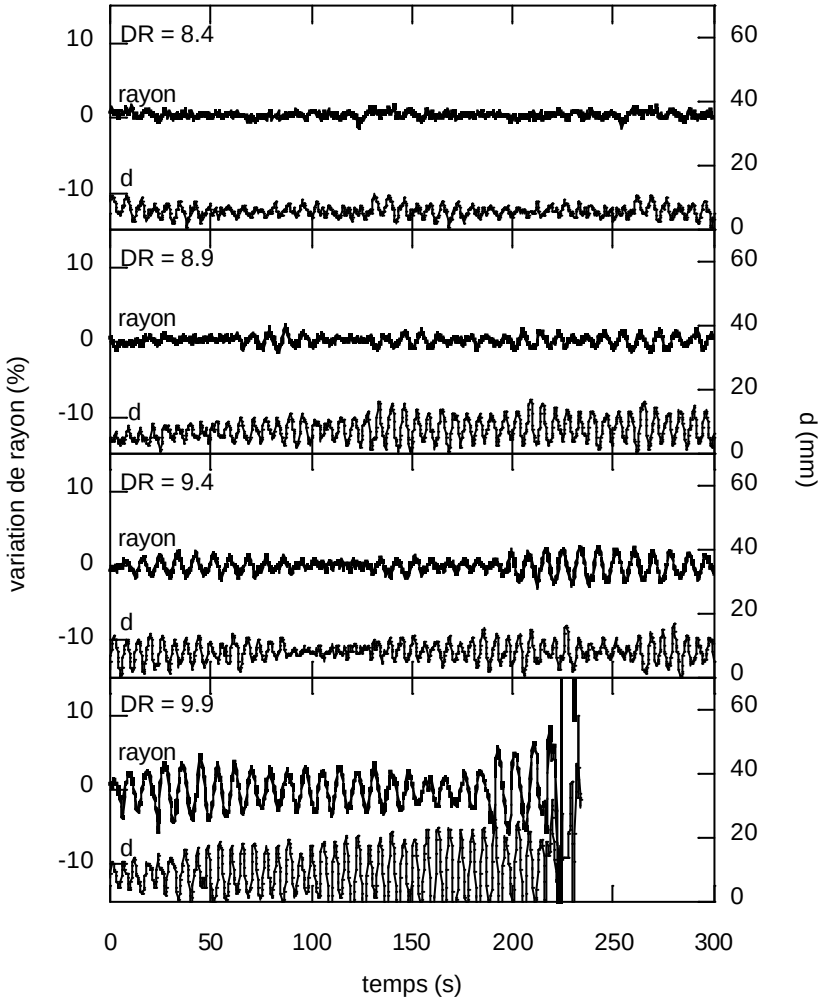


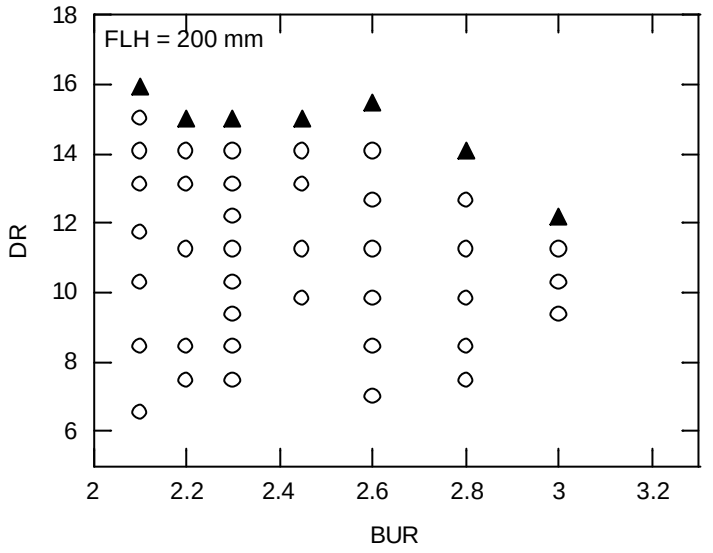
figure 2.52 : Influence du taux d'étirage sur le comportement de la bulle ;
BUR = 3.1 ; FLH = 250 mm ; DR passe de 8.4 à 9.9

Cette superposition des deux défauts est visuellement difficile à caractériser, la perte d'axisymétrie « cache » en quelque sorte les variations de rayon. Seuls White et ses collaborateurs [WHI,87] et

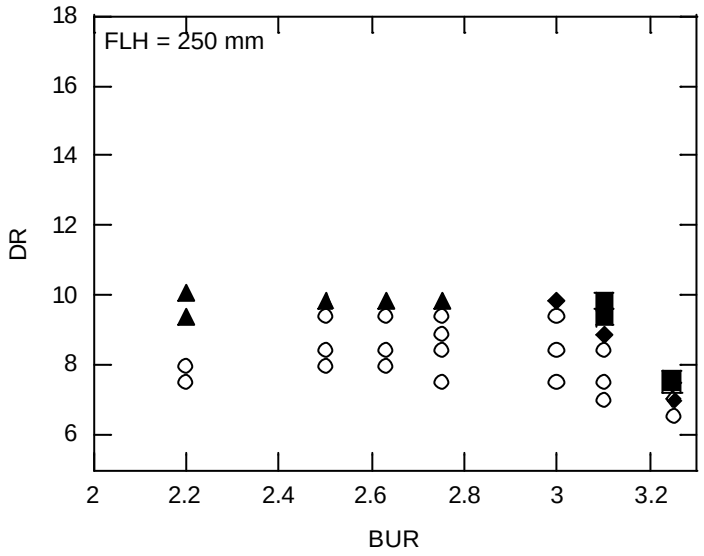
Ghaneh-Fard et al. [GHA,96] en font mention qualitativement. L'appareillage que nous avons utilisé ici a permis de mettre en évidence les différentes étapes du déclenchement du phénomène et les contributions des deux composantes de l'étirage de la bulle.

III.3.3. Cartographies obtenues

La figure 2.53 résume nos résultats en deux cartographies définies dans le plan (BUR-DR). Dans celles-ci, une zone stable est limitée pour les taux d'étirage élevés par l'apparition de la «draw resonance », et pour des taux de gonflage élevés par l'apparition de l'instabilité hélicoïdale, quand elle a pu être investiguée. Le gonflage, dans la zone considérée, semble jouer un rôle déstabilisateur. Le refroidissement a pour sa part un rôle stabilisateur, puisque la zone stable est plus étendue pour la hauteur de figeage la plus basse. Les taux d'étirage critiques pour l'apparition de la « draw resonance » sont notamment augmentés de près de 50%.



(a)



(b)

figure 2.53 : Influence de la FLH sur la stabilité de la bulle ;
(○) bulle stable ; (□) « draw resonance » ; (◆) instabilité hélicoïdale ;
(■) superposition des deux défauts ; (a) FLH = 200 mm ; (b) FLH = 250 mm

III.4. Synthèse des résultats

Nous cherchons à présent à comparer les frontières de stabilité que nous venons de déterminer avec les résultats de notre étude « stable » sur une machine de taille équivalente mais dans des conditions de refroidissement légèrement différentes, et les résultats plus qualitatifs de stabilité de Lasaunière présentés dans l'étude bibliographique (paragraphe III.1.4) et obtenus sur une machine plus grosse et à des taux de refroidissement plus élevés. Nous traçons dans le repère tridimensionnel $(BUR, DR, d\overline{T}/dz)$ l'évolution des zones stables observées (voir figure 2.54). Nous sommes conscients d'occulter ainsi les différences dans les conditions d'extrusion et de refroidissement.

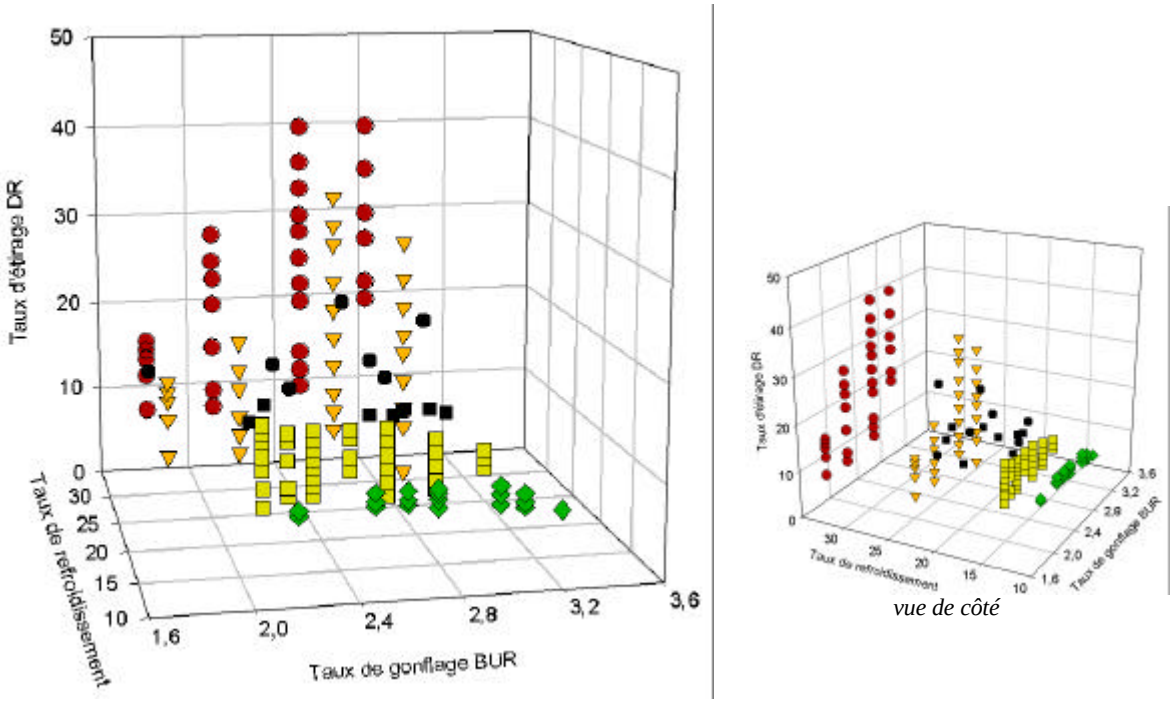


figure 2.54 : Comparaison des zones stables observées pour le PEbdl

(◊) *: CRASP-1 ;* $d\overline{T}/dz$ *» -12,6/R_0 °C ;* (□) *: CRASP-2 ;* $d\overline{T}/dz$ *» -15,8 °C*

(∇) *: KAUFMAN-1 ;* $d\overline{T}/dz$ *» -23,4 °C (d'après [LAS,99])*

(○) *: KAUFMAN-2 ;* $d\overline{T}/dz$ *» -33,5 °C (d'après [LAS,99])*

(●) *: COLLIN 1 ;* (■) *: COLLIN 2*

Notons tout d'abord la relative homogénéité de la répartition des points représentés pour les trois machines considérées, et ce malgré les hypothèses très fortes que nous avons prises, surtout au niveau de la quantification de la thermique. Aucun point ne semble en effet se détacher du reste des résultats de façon importante.

La tendance qui se dégage de ce graphique est l'émergence d'un pic de stabilité à taux de refroidissement élevé et pour un taux de gonflage situé entre 2,5 et 3. Les taux d'étirage accessibles sont dans cette zone beaucoup plus élevés que dans le reste du diagramme. Lorsque le taux de refroidissement diminue (i.e. la hauteur de figeage augmente), la zone de stabilité s'aplanit et s'amenuise. Ce résultat est loin d'être intuitif. En effet, comment imaginer qu'à thermique constante l'augmentation du taux de gonflage peut tout d'abord être un paramètre favorable à la stabilité de la bulle puis devenir défavorable, ce phénomène étant d'autant plus accentué que le refroidissement est important ? Nous soulignons ainsi la grande difficulté de la compréhension des interactions entre les différents paramètres du procédé et de leur influence non linéaire sur le comportement de la bulle.

Au delà de ces taux d'étirage stables, et à des taux de gonflage modérés, survient l'instabilité de type « draw resonance », dont nous avons vu qu'elle était typique des procédés faisant intervenir un étirage longitudinal.

La zone des taux de gonflage élevés (BUR>3 généralement) correspond à l'apparition, à des taux d'étirage d'autant plus faibles que le taux de gonflage est élevé, de l'instabilité hélicoïdale. Ce défaut nous est apparu entretenu, voire accentué, par les perturbations non axisymétriques de l'air soufflé autour de la bulle lors de son mouvement d'hélice. Ainsi la structure de l'anneau et le débit d'air soufflé (i.e. la machine utilisée) peuvent avoir une influence sur le comportement de la bulle que nous ne prenons pas du tout en compte dans nos représentations. Il s'agit d'un problème de couplage fluide-structure dans des conditions instationnaires dont la complexité paraît évidente. La frontière zone stable/défaut hélicoïdal est donc plus difficile à appréhender dans notre travail et les comparaisons entre machines beaucoup plus imprécises.

Notre approche très simpliste, notamment en ce qui concerne la quantification de la thermique et des conditions d'extrusion, nous permet de regrouper des résultats obtenus sur différentes machines. Bien entendu ce type de raisonnement restera d'autant plus valable que les machines considérées seront de taille comparable et les conditions appliquées voisines. Ainsi dans notre cas, le refroidissement était assuré dans les trois cas considérés par un anneau simple-flux standard. Il conviendra donc d'être extrêmement prudent quand il s'agira de traiter par exemple des résultats obtenus sur des anneaux double-flux où le couplage aérodynamique est beaucoup plus intime.

IV. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons procédé à l'étude expérimentale du soufflage de gaine d'un polymère « modèle », un PEbdl, dont nous avons caractérisé les principales propriétés rhéologiques : thermodépendance et comportement en cisaillement et en élongation.

Dans une première partie, nous nous sommes concentrés sur la caractérisation d'une bulle stable en faisant varier les différents paramètres du procédé, taux d'étirage et de gonflage, conditions de refroidissement et d'extrusion. Nous avons montré notamment l'influence majeure du refroidissement, et les limites d'une approche trop simplificatrice consistant à considérer une variation linéaire de température dans tout l'intervalle situé entre la sortie de la filière et la hauteur de figeage où survient la cristallisation. Néanmoins, nous avons conservé ce type d'approche pour quantifier le refroidissement indépendamment de la machine considérée.

Nous avons ensuite étudié les comportements instables survenant lorsque l'on dépasse des valeurs critiques des paramètres procédés. L'utilisation d'un appareillage de mesure en ligne original nous a permis de quantifier plus finement que par la simple observation visuelle les divers comportements de la bulle et mettre en avant deux défauts majeurs : l'instabilité de « draw resonance » et l'instabilité hélicoïdale. Ces défauts, initiés par le bi-étirage du fluide durant le procédé, dépendent de nombreux paramètres, et notamment du refroidissement. Nous avons établi des cartographies précises dans le plan (DR,BUR) pour deux conditions de refroidissement fixées. En comparant nos résultats avec des travaux de la bibliographie, nous avons pu montrer l'influence stabilisante du refroidissement ainsi que l'existence, pour des refroidissements suffisants, d'un optimum de stabilité.

C'est ce type d'information que nous chercherons à corréler, au moins qualitativement, avec les résultats du modèle que nous allons développer dans les chapitres suivants. Compte tenu du comportement très différent des deux défauts observés, l'un axisymétrique et l'autre non, nous serons amenés à effectuer des analyses différentes pour en rendre compte.

V. Références bibliographiques

[AGA,96] AGASSANT J. F., AVENAS P., SERGENT J.P., VERGNES B., VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques 3ème édition*, Technique & Documentation, Paris, 1996

[AND,92] ANDRIANARAHINJAKA H., *Etude des instabilités lors de la fabrication des films thermoplastiques biétirés par le procédé de soufflage de gaine*, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1992

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[BAR,90] BARQ P., HAUDIN J. M. & J. F. AGASSANT, *Instability phenomena in film casting process,* Intern. Polym. Process., vol. 5, n° 4, pp. 264-271, 1990

[BEL,99] BELLET G., *Relations structure-propriétés optiques et mécaniques de films de Polyéthylène basse densité linéaire mis en œuvre par soufflage de gaine*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[BER,66 a] BERGONZONI A. & A. J. DICRESCE, *The phenomenon of Draw Resonance in polymeric melts. Part I : Qualitative view*, Polym. Eng. Sci., pp. 45-49, jan. 1966

[BER,66 b] BERGONZONI A. & A. J. DICRESCE, *The phenomenon of Draw Resonance in polymeric melts. Part II : correlation to molecular parameters*, Polym. Eng. Sci., pp. 50-59, jan. 1966

[BLY,80] BLYLER L. L. & C. GIENIEWSKI, *Melt spinning and Draw Resonance studies on a Poly(a-Methyl Styrene/Silicone) Block Copolymer*, Polym. Eng. Sci., vol. 20, n° 2, pp. 140-148, 1980

[BUT,00] BUTLER T. I., *Blown film bubble instability induced by fabrication conditions*, SPE ANTEC, 2000

[CAB,90] CABANNES F., *Pyrométrie Optique,* In. Techniques de l'ingénieur, vol. RAB, article R2 610, 1990

[CHA,79] CHANG J. C. & DENN M. M., *An experimental study of isothermal spinning of a Newtonian and a Viscoelastic liquid*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 5, pp. 369, 1979

[DEM,83] DEMAY Y., *Instabilité d'étirage et bifurcation de Hopf*, Thèse d'Etat, Université de Nice, 1983

[DEM,85] DEMAY Y. & AGASSANT J.F., *Experimental study of the Draw Resonance in fiber spinning*, J. Non-Newtonian Fluid Mech ., vol. 18, pp. 187, 1985

[FAN,01] FANG Y., CARREAU P. J. & LAFLEUR P. G., *Rheological effects in film blowing*, XVIIth Polymer Processing Society meeting, Montreal, Canada , 2001

[FIE,99] FIELD G. J., MICIC P., & BHATTACHARYA S. N, *Melt strength and film bubble instability of LLDPE/LDPE blends*, Polym. Int., vol. 48, pp. 461-466, 1999

[FLE,88] FLEISSNER M., *Elongational flow of HDPE samples and bubble instability in film blowing*, Intern. Polym. Process., vol. 2, n° 3/4, pp. 229-233, 1988

[GHA,96] GHANEH-FARD A., CARREAU P. J. & LAFLEUR P. G., *Study of instabilities in film blowing*, AIChE Journal, vol. 42, n° 5, pp. 1388-1396, 1996

[HAN,75] HAN C. D. & J. Y. PARK, *Studies on blown film extrusion. III. Bubble instability*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 19, pp. 3291-3297, 1975

[HUA,88] HUANG T.A., *Instrumentation development for sensing modes of bubble motion of a blown-film process*, Adv. in Polym. Tech., vol. 8, n° 1, pp. 69-75, 1988

[HYU,78 a] HYUN J. C., *Theory of Draw Resonance. Part I : Newtonian Fluids*, AIChE Journal, vol. 24, n° 3, pp. 418-422, 1978

[HYU,78 b] HYUN J. C., *Theory of Draw Resonance. Part II : Power-Law and Maxwell fluids*, AIChE Journal, vol. 24, n° 3, pp. 423-426, 1978

[KAN,84] KANAI T. & WHITE J. L. , *Kinematics, dynamics and stability of the tubular film extrusion of various Polyethylenes*, Polym. Eng. Sci., vol. 24, n° 15, pp. 1185-1201, 1984

[LAS,99] LASAUNIERE N., *Etude des instabilités de bulle dans le procédé de soufflage de gaine de polyéthylène*, Rapport final de Mastère, , Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[MEI,94] MEISSNER J. & HOSTETTLER J., *A New elongational rheometer for polymer melts and other highly viscoelastic liquids*, Rheol. Acta, vol. 33, pp. 1-21, 1994

[MIC,98] MICIC P., BHATTACHARYA S. N. & FIELD G., *Transient elongational viscosity of LLDPE/LDPE blends and its relevance to bubble stability in the film blowing process*, Polym. Eng. and Sci., vol. 38, n° 10, pp. 1685-1693, 1998

[MIN,80] MINOSHIMA W., WHITE J. L. & SPRUIELL J. E., *Experimental investigations of the influence of molecular weight distribution on melt spinning and extrudate swell characteristics of Polypropylene*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 25, pp. 287-306, 1980

[MIN,84] MINOSHIMA W. & WHITE J. L., *Instability phenomena in cast and tubular film extrusion of Polyethylenes*, SPE ANTEC, pp. 20-22, 1984

[MIN,86] MINOSHIMA W. & WHITE J. L., *Instability phenomena in tubular fim and melt spinning of rheologically characterized high density, low density and linear low density polyethylenes*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 19, pp. 275-302, 1986

[OBI,92] OBIJESKI T.J. & PRUITT K.R., *Improving the output and bubble stability of thick gauge blown film*, SPE ANTEC, pp. 150-153, 1992

[PAR,75] PARK J.Y., *A study of blown film extrusion*, Ph.D. Thesis, Polytechnic Institute of New York, 1975

[PIA,84] PIANA A., *Etude des relations entre mise en forme, orientation et rétraction dans des films de polyéthylène basse densité réalisés par soufflage de gaine*, Thèse de Doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1984

[SIL,96] SILAGY D., *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'extrusion de film a plat de polymère*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996

[SWE,92] SWEENEY P. A., CAMPBELL G. A. & FEENEY F. A., *Real time video techniques in the analysis of blown film instability*, Intern. Polym. Process., vol. 7, n° 3, pp. 229-239, 1992

[SWE,93] SWEENEY P. A. & CAMPBELL G. A., *Blown film stability*, SPE ANTEC, pp. 461-464, 1993

[TRO,00] TROVALET Y., *Evolution et derniers résultats de l'installation optique destinée à l'étude des instabilités de bulle dans le procédé d'extrusion soufflage*, Rapport intermédiaire de stage, Ecole Polytechnique de Montréal, 2000

[WHI,87] WHITE J.L. & YAMANE H., *A collaborative study of the stability of extrusion, melt-spinning and tubular film extrusion of some high-, low- and linear-low density Polyethylene samples*, Pure & Appl. Chem., vol. 59, n° 2, pp. 193-216, 1987

Chapitre 3. Construction du modèle général axisymétrique

I. Les modèles de la littérature 59
I.1. Le modèle initial de Pearson et Petrie 59
I.2. Prise en compte des effets anisothermes 62
I.3. Prise en compte de l'aérodynamique 64
I.4. Prise en compte de la viscoélasticité – difficultés numériques 65
I.5. Introduction de la dépendance temporelle 66
I.6. Conclusions : les limites de l'approche « locale » 67

II. Mise en équations 67
II.1. Hypothèses géométriques, cinématiques et mécaniques 67
II.2. Conditions de surface 69
II.2.1. Conditions d'interface en vitesse 69
II.2.2. Conditions d'interface en contraintes 70
II.3. Adimensionnalisation et changement de variables 71
II.3.1. Traitement des variables 71
II.3.2. Introduction du changement de repère 72
II.3.3. Equations obtenues 74

III. Méthodologie d'analyse des équations 76
III.1. Développement des équations 76
III.2. Bilan général 82

IV. Etude des équations en régime stationnaire 83
IV.1. Equations stationnaires obtenues 83
IV.2. Equivalence avec les équations du modèle « local » 84
IV.2.1. Relations géométriques et cinématiques 85
IV.2.2. Expression des contraintes 85
IV.2.3. Conclusions et discussion sur la méthode de résolution 87
IV.3. Calculs stationnaires 88
IV.3.1. Prise en compte de la température 88
IV.3.2. Conditions aux limites 88
IV.3.3. Méthode de calcul 89
IV.4. Résultats 91
IV.4.1. Comparaison avec le modèle « local » 91
IV.4.2. Confrontation expérimentale 93

V. Conclusions 96

VI. Références bibliographiques 97

Chapitre 3. Construction du modèle général axisymétrique

Ce chapitre est consacré à l'élaboration d'un modèle thermomécanique du soufflage de gaine capable d'être utilisé par la suite pour l'étude de stabilité. La mise en équation se fera donc dans le cas instationnaire, c'est-à-dire fonction du temps, et dans une première étape, nous garderons l'hypothèse d'axisymétrie.

Tout d'abord nous établissons un bilan de la littérature existante sur le sujet en soulignant notamment les limites de l'approche classique. Nous décrivons ensuite une méthode, basée sur les travaux de Housiadas et Tsamopoulos [HOU,98], visant à l'obtention d'un système complet d'équations espace-temps dans le repère cylindrique lié au laboratoire. Nous comparons finalement le modèle ainsi obtenu à ceux de la littérature et confrontons les résultats obtenus en régime stationnaire (i.e. cas stable) aux résultats expérimentaux présentés dans le chapitre 2, avant d'en effectuer dans le chapitre 4 l'analyse de stabilité.

I. Les modèles de la littérature

La très grande majorité des études théoriques portant sur la modélisation du procédé de soufflage de gaine se restreignent à son étude stationnaire, c'est-à-dire sans prise en compte des variations temporelles. Les modèles développés au cours des trente dernières années pour décrire l'équilibre de la bulle biétirée que nous avons pu rencontrer sont tous issus d'un modèle originel proposé par Pearson [PEA,66] puis Pearson et Petrie [PEA,70a,b,c].

I.1. Le modèle initial de Pearson et Petrie

Dans ce modèle, les auteurs considèrent le fluide comme une membrane, l'épaisseur du film étant très petite devant ses autres dimensions. Ils font également l'hypothèse que la bulle conserve son axisymétrie, et que l'étirage s'effectue de manière isotherme. La géométrie du film, comme l'illustre la figure 3.1, peut alors être décrite dans le repère local préférentiel dirigé selon les tangentes et la normale au film $\left(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3\right)$. Ce repère est mobile, son orientation variant avec la cote verticale *z*. On notera q l'angle $\left(\vec{x}_1,\vec{z}\right)$.

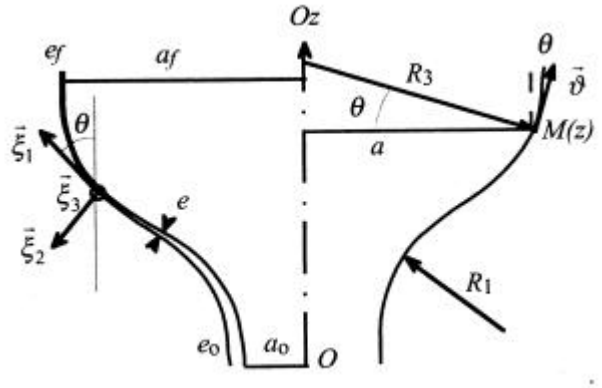


figure 3.1 : Système de coordonnées utilisé par Pearson et Petrie, d'après [AND,99]

Le film est décrit par la courbe méridienne *a(z)*, où a est le rayon de la bulle. Localement, la variation de cette courbe peut s'écrire :

$$\frac{da}{dz} = \tan q \qquad (3.1)$$

Les deux rayons de courbures R_1 et R_3 selon les directions x_1 et x_3 sont calculés par les relations suivantes :

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{d^2a}{dz^2}\cos^3 q \qquad (3.2)$$

$$\frac{1}{R_3} = \frac{\cos q}{a} \qquad (3.3)$$

Le fait de considérer le film comme une membrane implique que les composantes du vecteur vitesse $\vec{J}$ ainsi que celles du tenseur des contraintes sont supposées constantes dans l'épaisseur. Dans le repère local, ces variables ne dépendront donc, compte tenu également des hypothèses d'axisymétrie et de stationnarité, que de l'abscisse curviligne $\vec{x_1}$. Puisque le problème est axisymétrique, la circulation de matière se fait nécessairement uniquement dans le plan $(\vec{x_1},\vec{x_2})$. De plus, la composante dans l'épaisseur peut être négligée. Il en résulte qu'en première approximation, le vecteur vitesse $\vec{J}$ se réduit à :

$$\vec{J} = J\vec{x_1} \qquad (3.4)$$

Grâce à cette formulation membrane, il est possible de mettre en équations le problème en exprimant les différentes équations classiques de la mécanique :

- *conservation de la matière :*

La conservation de la masse s'exprime en satisfaisant la constance du débit massique M :

$$M = r\,2pae\,J = cte \qquad (3.5)$$

- *équilibre dynamique :*

Les forces d'inertie, de frottement sur l'air, de tension superficielle et de masse sont négligées devant les forces de viscosité élongationnelle. En négligeant les termes de cisaillement, le tenseur des contraintes est diagonal. La contrainte dans l'épaisseur est également négligée. De ce fait, le tenseur des contraintes [σ] se résume à :

$$[s] = \begin{bmatrix} s_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_3 \end{bmatrix} \qquad (3.6)$$

Les équations d'équilibre dynamique, projetées sur les directions $\vec{x_1}$ et $\vec{x_3}$, s'écrivent :

- *selon la direction $\vec{x_1}$:*

$$F_Z = 2pae\,s_1\cos q + p\left(a^2{}_f - a^2\right)\Delta P \qquad (3.7)$$

- *selon la direction* $\vec{x}_3$ *:*

$$\frac{\Delta P}{e} = \frac{s_1}{R_1} + \frac{s_3}{R_3} \qquad (3.8)$$

où F_z et DP sont respectivement la force de tirage appliquée à la hauteur de figeage H_f et la surpression interne à l'intérieur de la bulle par rapport à la pression atmosphérique P_a.

En faisant l'hypothèse d'un comportement newtonien, Pearson obtient ainsi un système d'équations complet qu'il résout en fixant arbitrairement la hauteur de figeage et en supposant que la bulle y est refroidie instantanément. La résolution numérique est effectuée à partir des conditions à la hauteur de figeage (rayon et vitesse connus, angle q nul). Une méthode de tir à 2 paramètres est utilisée pour ajuster les valeurs de la force de tirage et de la surpression interne afin de faire converger la bulle calculée vers les valeurs, imposées, en sortie de filière.

Cain et Denn [CAI,88], puis André [AND,99] intègrent ces équations à partir de la sortie de la filière en utilisant l'angle initial comme paramètre de tir supplémentaire. Ils mettent en évidence, à force de tirage F et surpression B données, l'extrême sensibilité du modèle à la valeur initiale de ce paramètre de tir. Ils observent en effet selon cette valeur la survenue de divergences numériques, résultantes de l'existence dans les équations du modèle d'un produit (viscosité*angle de bulle). La bulle peut alors « exploser » (rayon tendant vers l'infini) ou « imploser » (rayon tendant vers 0). Ils montrent également l'existence de solutions multiples, le choix de l'angle initial conditionnant la convergence de l'algorithme vers une solution correspondant soit à un taux de gonflage inférieur à 1, soit supérieur à 1 (voir figure 3.2).

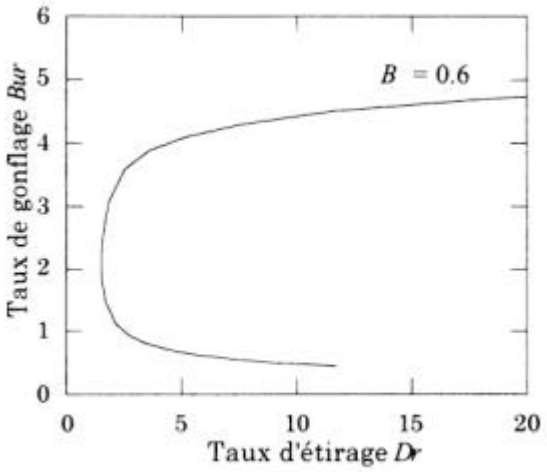


figure 3.2 : Multiplicité des solutions newtoniennes à pression B donnée et force de tirage F variable, d'après [AND,99]

Il est aisé d'imaginer que les divergences numériques observées dans ce cas, en plus d'être bien évidemment très limitantes dans le calcul stationnaire de la bulle, posent énormément de difficultés lors d'une analyse de stabilité, le principe de celle-ci étant d'étudier la réponse du système à des petites perturbations des différentes variables. Cette sensibilité exacerbée à des variations de paramètres sera un frein majeur à l'étude de stabilité. La méthode de résolution par «le haut », même si elle est moins réaliste d'un point de vue du procédé, permet de s'affranchir de ces difficultés.

En utilisant la même représentation « locale », de nombreux auteurs se sont néanmoins attachés à enrichir ce modèle afin de le rendre plus représentatif de la réalité physique du procédé.

I.2. Prise en compte des effets anisothermes

Depuis peu, de plus en plus d'auteurs s'accordent à postuler que le comportement de l'écoulement du polymère fondu est gouverné plus par la dépendance de ses propriétés rhéologiques vis-à-vis de la température que par le modèle rhéologique spécifique utilisé pour le modéliser. Nous avons également observé expérimentalement (voir chapitre 2) l'influence majeure des phénomènes liés au refroidissement sur la forme et le comportement de la bulle. Il semble donc primordial de prendre en compte les phénomènes thermiques dans la modélisation du procédé.

Petrie [PET,75 a,b] traite le cas anisotherme en imposant directement un profil de température issus de mesures expérimentales et variant selon la cote z, en supposant que la viscosité du polymère évolue avec la température moyenne T selon une loi d'Arrhenius. André [AND,99] a repris cette démarche en imposant un profil de température linéaire.

Par la suite, les auteurs ont directement cherché à résoudre l'équation de la chaleur. Ceci revient classiquement à effectuer un bilan thermique en prenant en compte la convection forcée provoquée par l'air soufflé sur la surface extérieure de la bulle par l'anneau de refroidissement, le rayonnement de la bulle et éventuellement la cristallisation du matériau. Devant ces termes, la dissipation visqueuse ainsi que les termes de transfert par conduction, que ce soit dans la direction radiale ou dans la direction longitudinale, et par convection avec l'intérieur de la bulle, sont négligeables. L'équation générale s'écrit alors [HAN,75][LUO,85][AGA,96] :

$$r C_p Q \cos q \frac{dT}{dz} = -2pa\left[h_c\left(T - T_{air}\right) + e s \left(T^4 - T^4_a\right)\right] + r Q \Delta H_f \cos q \frac{dc}{dz} \qquad (3.9)$$

avec Q le débit volumique de fluide ($m^3.s^{-1}$), r la masse volumique ($kg.m^{-3}$), C_p la chaleur spécifique du polymère ($J.kg^{-1}.K^{-1}$), h_c le coefficient de transfert par convection forcée ($W.m^{-2}.K^{-1}$), e l'émissivité du film, s la constante de Stefan-Boltzmann (s = 5.65 10^{-8} $W.m^{-2}.K^{-4}$). T_{air} est la température de l'air de refroidissement et T_a la température ambiante, exprimées en Kelvin (K). DH_f est la chaleur latente de fusion du matériau ($J.kg^{-1}$) et c le taux de cristallisation.

La principale difficulté de l'utilisation de cette équation réside dans la détermination précise du coefficient de transfert par convection, qui s'avère être un problème complexe [AGA,96][AND,99]. Han et Park [HAN,75] les premiers proposent une résolution en négligeant les phénomènes de cristallisation et de rayonnement et en considérant un coefficient de transfert par convection constant, qui devient un paramètre de tir ajusté afin de vérifier les conditions aux limites en température (température d'extrusion et température de cristallisation). Cette démarche est reprise par Luo et Tanner [LUO,85], Sidiropoulos et al. [SID,96 a,b], Andrianarahinjaka [AND,92][AND,96] ou Pontaza et Reddy [PON,00].

D'autres auteurs, tels Petrie [PET,74], Menges et Predöhl [MEN,75] ou Kanaï et White [KAN,84][KAN,85] proposent des expressions du coefficient d'échange, plus ou moins complexes, comme une fonction de la vitesse de l'air de refroidissement, considérée soit constante (valeur maximale), soit explicitement fonction de la cote z. Ces expressions sont basées sur une sorte de méthode par « analyse inverse » des phénomènes utilisant l'équation de la chaleur (et les mêmes hypothèses simplificatrices) et des profils de températures expérimentaux pour en déduire les coefficients d'échanges. Ils sont alors à même de calculer, à partir des conditions aux limites, le profil de température en imposant une loi de variation du coefficient d'échange.

Akaike, Tsuji et Nagano [AKA,99] ont proposé il y a peu une première tentative de couplage entre un calcul aérodynamique simulant l'air pulsé autour de la bulle et le transfert thermique induit en calculant un gradient thermique dans l'air autour d'une bulle supposée rigide. Les profils de température calculés (figure 3.3) par cette méthode laissent apparaître de légères variations locales

par rapport au profil linéaire entre la sortie de la filière et la cristallisation. Ces résultats sont en accord qualitatif avec les résultats expérimentaux présentés et nos considérations du chapitre 2.

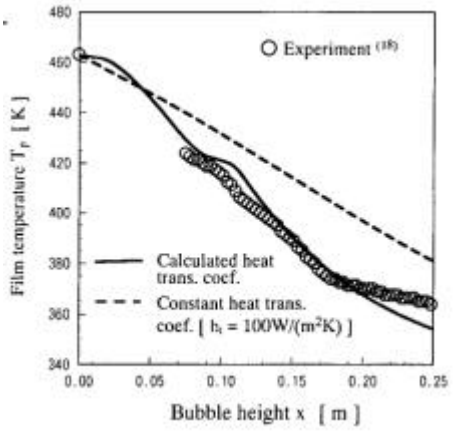


figure 3.3 : Modélisation aérodynamique de Akaike et al. [AKA,99] ;
Comparaison entre profil de température expérimental (○) et prédit (¾)

En évaluant grossièrement les différents termes du second membre de l'équation (3.9), Petrie [PET,74] et Menges et Predöhl [MEN,75] démontrent que le rayonnement représente à peine entre 10 et 20% de la chaleur totale perdue par la bulle. De ce fait, André [AND,99] substitue à ce terme de rayonnement une expression de type convectif en écrivant l'équation de la chaleur sous la forme simplifié :

$$r C_p Q \cos q \frac{dT}{dz} = -a\left(T - T_{air}\right) \tag{3.10}$$

avec

$$a = h_c + \frac{e s \left(T^4 - T_a^4\right)}{T - T_{air}} \tag{3.11}$$

Le coefficient d'échange global α est déterminé par analyse inverse des mesures expérimentales de température.

White et ses collaborateurs [KAN,84][KAN,85][YAM,87] rajoutent le terme lié à la cristallisation dans l'équation de la chaleur (3.9) en proposant également de prendre en compte la variation de propriétés rhéologiques qu'elle engendre à travers un terme supplémentaire dans l'évolution de la viscosité newtonienne :

$$h = h_0 e^{\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T}-\frac{1}{T_0}\right)} e^{Gc} \tag{3.12}$$

où h_0 est la viscosité du matériau à une température de référence T_0, E est l'énergie d'activation (J.mol^{-1}), R la constante des gaz parfaits (R=8.32 10^3 J.mol^{-1}), c le taux de cristallinité et G une constante déduite de mesures expérimentales.

Campbell et son équipe [CAO,90][ASH,92] proposent un formalisme visant à modéliser la transition liquide-solide par un modèle à deux phases, en faisant débuter la cristallisation depuis la périphérie du film. Les valeurs et évolutions des taux de cristallinité sont déterminées en supposant connu le profil de température ainsi que les coefficients d'échange. La cinétique de cristallisation est alors considérée comme ne dépendant que de l'évolution de température du matériau et aucune information ne peut être déduite en terme de microstructure. Ce type de formalisme fut par la suite repris par Yoon et Park [YOO,92] pour modéliser le soufflage d'une bulle bi-couche. Doufas et McHugh [DOU,01] utilisent un modèle général relativement complexe prenant en compte

l'influence de l'écoulement sur la cristallisation basé sur les principes de la théorie thermodynamique de la germination et de la cinétique de développement de structure.

Le caractère prédictif de ce type d'approche reste assez limité, puisque, du fait des difficultés rencontrées pour modéliser les échanges thermiques, il est nécessaire d'adapter au modèle des profils thermiques expérimentaux, soit directement, soit par l'intermédiaire d'une loi empirique de variation du coefficient d'échange. La résolution des équations de la mécanique fait intervenir la température à travers la seule évolution de la viscosité. La grande majorité des auteurs supposent connue *a priori* la hauteur de figeage qui leur permet de fixer la longueur sur laquelle ils effectuent leur calcul. Cain et Denn [CAI,88] puis André [AND,99] s'affranchissent de cette limitation en recherchant la longueur suffisante pour que l'augmentation de viscosité induite par la baisse de la température fasse tendre la bulle vers un tube (condition $dq/dz = 0$). La position de la ligne de figeage devient ainsi un résultat du calcul (critère asymptotique).

I.3. Prise en compte de l'aérodynamique

Lors de notre étude expérimentale (chapitre 2), nous avons souligné le fait qu'outre le refroidissement, l'aérodynamique du système de soufflerie d'air sur la surface extérieure de la bulle semble avoir un impact non négligeable sur la forme de la bulle [AND,99].

Dealy et Wissburn [DEA,90] tentent de rendre compte de cet effet en évaluant la pression extérieure à la bulle non plus comme égale à la pression atmosphérique mais en fonction de l'air soufflé. En supposant un régime laminaire (c'est à dire des lignes de courant d'air suivant le contour de la bulle), ces auteurs utilisent l'équation de Bernoulli pour exprimer la pression extérieure $P_{ext}(z)$ en fonction de la pression atmosphérique P_{atm}, de la vitesse de l'air $v_{air}(z)$ et de sa masse volumique $r_{air}(z)$:

$$P_{ext} = P_{atm} - \frac{1}{2} r_{air}^{2}(z) v_{air}^{2}(z) \qquad (3.13)$$

André [AND,99] puis Mitsoulis, Argyropaidas et Missirlis [MIT,01] utilisent cette formulation en employant des mesures de vitesses d'air effectuées sur plusieurs types d'anneaux. Cao et Campbell [CA0,89][CAM,92] se basent sur des mesures effectuées sur des modèles de bulles rigides munies de capteurs de pression le long de la direction longitudinale pour proposer une amélioration de cette équation. L'utilisation de ce type de loi, très simple, a permis notamment de mettre en évidence des différences de formes de bulles suivant le type d'anneau considéré [AND,99]. Néanmoins, comme le précisent Akaike et son équipe [AKA,99], le flux d'air autour de la bulle est loin d'être laminaire, le nombre de Reynolds calculé à partir de mesures de vitesse d'air excédant 10^4. Wolf, Feron et Wortberg [WOL,97][FER,97] traitent le jet d'air comme un flux turbulent dont ils modélisent par une méthode d'éléments-finis les lignes de champs autour d'une bulle supposée fixe (*rigid wall*).

Dans une série d'articles, Sidiropoulos et Vlachopoulos [SID,00 a,b][VLA,00][SID,01] étudient, en utilisant une méthode très similaire, les flux d'air engendrés par un anneau simple-flux et un anneau double-flux (voir figure 3.4) , ainsi que par un système de refroidissement interne (Internal Bubble Cooling). Akaike, Tsuji et Nagano [AKA,99] reprennent cette analyse en y couplant un calcul de thermique entre la surface de la bulle, toujours supposée rigide, et l'air circulant à sa surface extérieure. Il n'y a pas dans ces études à proprement parler de couplage entre l'aérodynamique calculée et la forme de bulle induite.

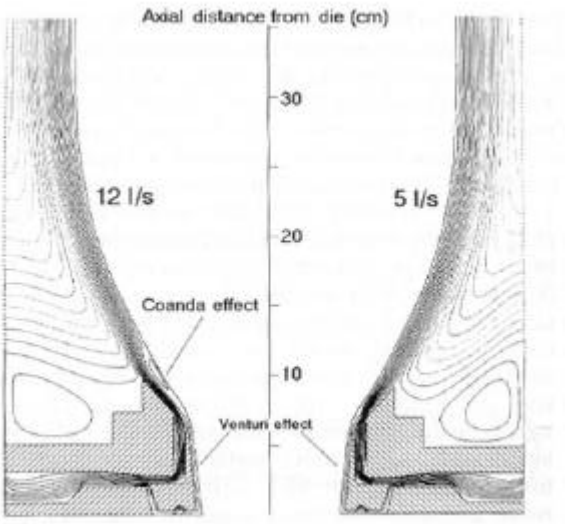


figure 3.4 : Modélisation des lignes de courant de l'air de refroidissement soufflé par un anneau double flux autour d'une bulle de PEBDL. Côté gauche : refroidissement modéré ; côté droit : refroidissement fort, d'après [SID,00 a]

I.4. Prise en compte de la viscoélasticité – difficultés numériques

L'introduction de lois de comportement viscoélastiques pour le fluide est amorcée dans le modèle isotherme par Petrie qui étudie le comportement du modèle avec les lois de Maxwell et d'Oldroyd mais se retrouve confronté à des instabilités numériques, qu'il attribue au schéma d'intégration partant de la hauteur de figeage, supposée alors connue [PET,73]. Luo et Tanner [LUO,85] reprennent ces équations en les intégrant cette fois depuis la sortie de la filière, l'angle initial de la bulle devenant, comme nous l'avons vu dans le cas newtonien, un paramètre de tir supplémentaire, dans les cas isotherme et non isotherme. Ils obtiennent, de même que dans le cas newtonien, l'existence de solutions multiples mais également des difficultés de convergence de l'algorithme. Les paramètres du procédé atteignables, notamment le niveau d'élasticité, sont alors restreints à des valeurs faibles du nombre de Deborah, celui étant défini comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent par l'expression :

$$De_0 = l_0 \frac{V_0}{R_0} = l_0 \frac{Q}{2\pi e_0 R_0^2} \qquad (3.14)$$

Hors de ces intervalles, ils montrent la divergence rapide du rayon de la bulle calculé. Ils mettent néanmoins en évidence le caractère «durcisseur » de la viscoélasticité qui, à force de tirage et surpression données, limite le gonflement de la bulle. André [AND,99] montre dans le cas d'une loi de Maxwell à un seul temps de relaxation que ces instabilités numériques correspondent en réalité à un disparition de solutions lorsque l'on augmente le nombre de Deborah De (i.e. on s'éloigne du cas newtonien (De=0)). A un nombre de Deborah limite, la force et la surpression calculées divergent, rendant impossible le calcul d'une bulle solution.

Ce type de comportement est caractéristique des procédés comportant un étirage. Ainsi Denn et ses collaborateurs [DEN,75][FIS,77] puis Demay [DEM,83] ont montré, pour un nombre de Deborah donné, l'existence d'un taux d'étirage à partir duquel aucune solution numérique ne pouvait être calculée. On parle de zone «inaccessible » ou « inatteignable » (*unattainable zone*) (figure 3.5). Silagy [SIL,96] met en évidence le même phénomène dans le cas du calcul des solutions viscoélastiques d'un modèle de cast-film. Il corrèle la zone inaccessible à la zone de casse du film observée expérimentalement.

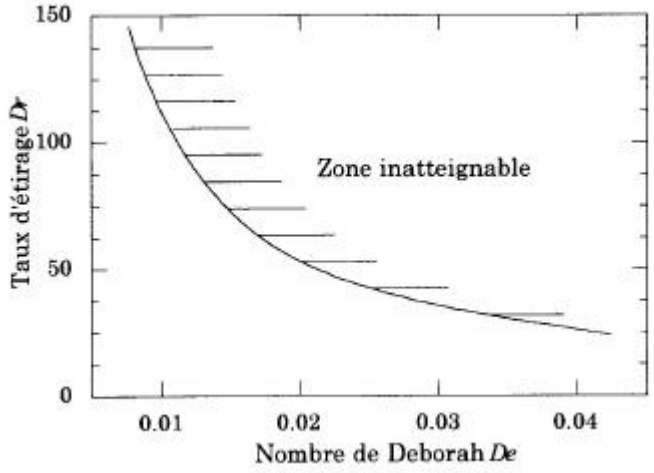


figure 3.5 : Représentation de la zone inatteignable du filage textile isotherme, d'après [FIS,77][AND,99]

Dans le cas d'un modèle de soufflage de gaine anisotherme, André obtient des solutions pour des nombres de Deborah inférieurs à 0.04. Pour d'aussi petites valeurs de nombre de Deborah, les solutions obtenues restent très proches de celles tirées du modèle newtonien (figure 3.6).

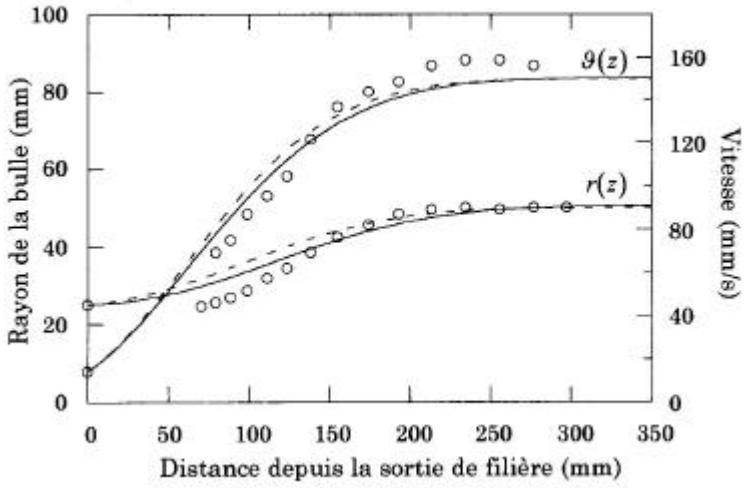


figure 3.6 : Comparaison modèle-expérience, d'après [AND,99] ; BUR=2 ; DR=10.6 ; FLH»300mm
(¾) : modèle newtonien ; (- -) : modèle viscoélatique De0=10-2 ; (○) : résultats expérimentaux

Ces valeurs de nombre de Deborah restent inférieures aux valeurs expérimentales classiquement calculées [AND,99]. Ainsi, si nous reprenons les valeurs correspondant à nos essais avec notre matériau (l_0»0.5s) sur la ligne COLLIN (De_0/l_0»0.35s pour l'essai COLLIN1-1 par exemple), nous parvenons à un nombre de Deborah approché de l'ordre de De_0»0.175. Néanmoins, ces valeurs restent faibles en comparaison à celles obtenues avec d'autres matériaux au caractère viscoélastique plus marqué, et donc aux temps de relaxation moyens plus grands.

I.5. Introduction de la dépendance temporelle

Yeow [YEO,76] est le premier à superposer au modèle original de Pearson et Petrie une petite perturbation temporelle et propose une méthode, assez peu « explicite », pour obtenir un système d'équations instationnaires décrivant la mécanique du procédé dans le cas isotherme. Cette mise en équations est reprise sans plus de détails par Cain et Denn [CAI,88], puis Andrianarahinjaka [AND,92],et Yoon et Park [YOO,99]. Les analyses de stabilité réalisées à l'aide de cette mise en équations, qui seront décrites dans le chapitre 4, aboutissent paradoxalement à des résultats très différents selon les auteurs. Ces faits nous amènent à nous interroger quant à la pertinence de ces

équations, que ce soit dans la méthode pour les obtenir ou plus fondamentalement dans le fait de décrire les phénomènes dans le repère local qui s'avère en quelque sorte mobile dans le cas instationnaire, puisque lié au film. Une analyse de stabilité réalisée dans ces conditions peut sembler assez hasardeuse. Il s'agit là d'une lacune majeure de l'approche de type membrane, qui semble peu adaptée au cas instationnaire. De plus ces modèles instationnaires sont traités principalement dans le cas isotherme, peu représentatif de la réalité du procédé.

I.6. Conclusions : les limites de l'approche « locale »

Nous avons vu que la modélisation du procédé de soufflage de gaine fait l'objet de nombreuses études stationnaires, avec pour objectif de décrire les différents phénomènes, mécanique, aérodynamique, thermique, survenant lors du procédé. La prédiction des instabilités de ce procédé nécessite bien entendu également la prise en compte optimale de ces phénomènes mais également l'obtention d'équations instationnaires, c'est-à-dire fonctions explicites du temps. Nous avons mis en évidence les lacunes de l'approche « membrane » qui, si elle permet, dans le cas stationnaire, de simplifier la mise en équations des phénomènes physiques, ne semble pas adaptée à une étude instationnaire. De plus, la description des équations membrane s'effectue avec l'hypothèse que la bulle conserve son axisymétrie. Cette hypothèse, très forte, réduit fortement le champ exploratoire, puisque nous avons vu dans le chapitre précédent que des phénomènes comme l'instabilité hélicoïdale faisaient perdre cette symétrie à la bulle.

Le principal objectif de notre travail a donc été de chercher à obtenir des équations instationnaires moins limitatrices. Pour cela, nous avons développé une méthode originale de mise en équations inspirée des travaux de Housiadas et Tsamopoulos [HOU,98] qui permet une description générale de la mécanique de la bulle dans un repère global fixe. Dans ce qui suit, nous présentons cette méthode dans le cas axisymétrique, en comparant le système obtenu avec les modèles que nous venons d'évoquer. Le cas non axisymétrique, extension de cette méthodologie, sera abordé au chapitre 5.

II. Mise en équations

La mise en équations passe par l'écriture d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices et des principes généraux de conservation et d'équilibre.

II.1. Hypothèses géométriques, cinématiques et mécaniques

- *Géométrie de la bulle*

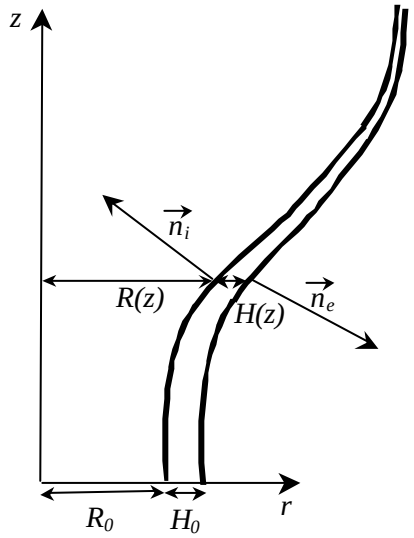


figure 3.7 : Repère et variables considérés

Comme nous l'avons évoqué précédemment, nous choisissons de décrire la bulle dans le repère cylindrique lié à la filière de l'extrudeuse (figure 3.7). Nous parlerons dans ce qui suit de modèle « cylindrique » ou « global ».

Du fait de l'hypothèse d'axisymétrie, les différentes variables de notre mise en équations ne dépendront pas de l'angle f. Le domaine occupé par le polymère se réduit donc au plan *(r,z)* borné de la façon suivante :

$$0 \le z \le L \text{ et } R(z,t) \le r \le \left(R(z,t) + H(z,t)\right) \tag{3.15}$$

La hauteur de figeage L est une inconnue du problème, nous ne pouvons donc pas présumer de sa valeur.

Nous définissons deux normales pour les deux surfaces de notre bulle :

$$\vec{n}_i(z,t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial R(z,t)}{\partial z} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{n}_e(z,t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\dfrac{\partial\left(R(z,t) + H(z,t)\right)}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

NB : Ces normales ne sont pas normées. Dans notre cas, cela n'a pas d'incidence directe puisque nous ne considérerons par la suite uniquement que des relations de type produits scalaires nuls, ou des égalités de projections sur ces normales. La norme se « simplifiera » donc en quelque sorte d'elle-même, et par souci de simplification, nous ne la ferons pas apparaître dans nos écritures.

- *Cinématique de la bulle et incompressibilité*

Compte tenu de l'hypothèse d'axisymétrie, nous pouvons considérer qu'en tout point du fluide, le vecteur vitesse $\vec{v}$ peut s'écrire sous la forme générale :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,z,t) \\ 0 \\ v_z(r,z,t) \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

Par définition, le tenseur des vitesses de déformations s'écrit donc :

$$[\dot{e}] = \frac{1}{2}\left([grad\,\vec{v}] + {}^t[grad\,\vec{v}]\right)$$
$$= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial v_r(r,z,t)}{\partial r} & 0 & \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r(r,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z(r,z,t)}{\partial r}\right) \\ 0 & \dfrac{v_r(r,z,t)}{r} & 0 \\ \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v_r(r,z,t)}{\partial z} + \dfrac{\partial v_z(r,z,t)}{\partial r}\right) & 0 & \dfrac{\partial v_z(r,z,t)}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{3.18}$$

Du fait que nous nous plaçons dans la zone fondue pour nos calculs, nous négligeons en première approximation les faibles variations de densité du matériau engendrées par le refroidissement [AND,99]. L'équation d'incompressibilité ($trace[\dot{e}]=0$) s'écrit alors :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_r}{r}+\frac{\partial v_z}{\partial z}=0 \qquad (3.19)$$

- *Loi de comportement et équilibre dynamique*

Compte tenu des difficultés inhérentes à l'utilisation de lois de comportement viscoélastiques, et du caractère «peu» viscoélastique de notre matériau d'étude démontré dans le chapitre précédent, nous conservons pour nos travaux le choix d'une loi de comportement newtonien. Le tenseur des contraintes [s] est relié au tenseur des vitesses de déformations par la relation :

$$[s]=-p[I]+2h[\dot{e}]=\begin{bmatrix} -p+2h\dfrac{\partial v_r}{\partial r} & 0 & h\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ 0 & -p+2h\dfrac{v_r}{r} & 0 \\ h\left(\dfrac{\partial v_r}{\partial z}+\dfrac{\partial v_z}{\partial r}\right) & 0 & -p+2h\dfrac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (3.20)$$

André [AND,99] a démontré, parmi d'autres auteurs, que l'on pouvait négliger les forces d'inertie, de masse, de frottement sur l'air et de tension superficielle devant les forces de viscosité [AND,99]. L'équation de l'équilibre dynamique s'écrit alors $div[s]=0$ soit ici :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s_{rr}}{\partial r}+\dfrac{\partial s_{rz}}{\partial z}+\dfrac{s_{rr}-s_{ff}}{r}=0 \\ \dfrac{\partial s_{rz}}{\partial r}+\dfrac{\partial s_{zz}}{\partial z}+\dfrac{s_{rz}}{r}=0 \end{cases} \qquad (3.21)$$

II.2. Conditions de surface

En considérant les surfaces intérieure et extérieure de la bulle comme deux interfaces fluide-air, nous pouvons exprimer deux types de conditions aux limites instationnaires.

II.2.1. Conditions d'interface en vitesse

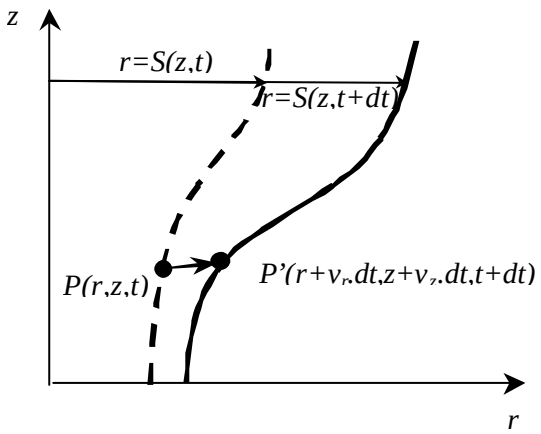


figure 3.8 : Principe de la condition cinématique d'interface

Les conditions d'interface instationnaires s'expriment (figure 3.8) en considérant qu'un point P initialement situé sur une des deux interfaces I définie par l'équation générale radiale $r=S(z,t)$ se maintient sur celle-ci avec le temps.

Au temps t le point P de coordonnées $(S(z,t),z)$ se déplace à une vitesse défini par le vecteur $\vec{v}$ défini par l'équation (3.17). Au temps $t+dt$, et en considérant de petites variations, le point P s'est par définition déplacé au point P' de coordonnées $(S(z,t)+v_r(t)dt,z+v_z(t)dt)$. D'autre part la nouvelle position de l'interface peut être décrite par l'équation $r=S(z+v_z(t)dt,t+dt)$. Nous obtenons donc, en considérant la position radiale du point P', l'égalité suivante :

$$S\left(z+v_z(t)dt,t+dt\right)=S(z,t)+v_r(t)dt \tag{3.22}$$

Ou, en utilisant un développement de Taylor au premier ordre et en simplifiant par dt :

$$v_r(t)-\frac{\partial S(z,t)}{\partial z}v_z(t)-\frac{\partial S(z,t)}{\partial t}=0 \tag{3.23}$$

D'après nos définitions de la figure 3.7, les deux interfaces sont définies par les équations radiales r=$R(z,t)$ et $r=R(z,t)+H(z,t)$. Nous obtenons ainsi deux conditions aux limites en vitesse :

- <u>en $r=R(z,t)$</u> :

$$v_r\left(R(z,t),z,t\right)-\left(\frac{\partial R(z,t)}{\partial z}\right)v_z\left(R(z),z,t\right)-\left(\frac{\partial R(z,t)}{\partial t}\right)=0 \tag{3.24}$$

- <u>en $r=R(z,t)+H(z,t)$</u> :

$$\begin{aligned}&v_r\left(\left(R(z,t)+H(z,t)\right),z,t\right)\\&-\left(\frac{\partial\left(R(z,t)+H(z,t)\right)}{\partial z}\right)v_z\left(\left(R(z,t)+H(z,t)\right),z,t\right)-\left(\frac{\partial\left(R(z,t)+H(z,t)\right)}{\partial t}\right)=0\end{aligned} \tag{3.25}$$

II.2.2. <u>Conditions d'interface en contraintes</u>

Les conditions d'interface en contraintes s'expriment en effectuant un bilan des forces s'exerçant à la cote z sur chacune des surfaces. On obtient ainsi :

- <u>en $r=R(z,t)$</u> : la surpression ΔP s'applique sur la surface interne selon la normale $\vec{n}_i$. Nous avons donc $[s]\vec{n}_i=-\Delta P\vec{n}_i$

$$\text{soit :}\begin{cases}s_{rr}\left(R(z),z,t\right)-\left(\dfrac{\partial R(z,t)}{\partial z}\right)s_{rz}\left(R(z),z,t\right)=-\Delta P\\[2ex] s_{rz}\left(R(z),z,t\right)-\left(\dfrac{\partial R(z,t)}{\partial z}\right)s_{zz}\left(R(z),z,t\right)=+\left(\dfrac{\partial R(z,t)}{\partial z}\right)\Delta P\end{cases} \tag{3.26}$$

- *en r=R(z,t)+H(z,t)* : $[\sigma]\vec{n}_e = 0$ (surface libre)

$$\text{soit : } \begin{cases} \sigma_{rr}\big((R(z,t)+H(z,t)),z,t\big) - \left(\dfrac{\partial\big(R(z,t)+H(z,t)\big)}{\partial z}\right)\sigma_{rz}\big((R(z)+H(z)),z,t\big) = 0 \\ \sigma_{rz}\big((R(z)+H(z)),z,t\big) - \left(\dfrac{\partial\big(R(z,t)+H(z,t)\big)}{\partial z}\right)\sigma_{zz}\big((R(z,t)+H(z,t)),z,t\big) = 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

II.3. Adimensionnalisation et changement de variables

Nous procédons à l'adimensionnalisation du système en effectuznt un changement de variables qui va nous permettre de développer les équations en puissances d'un petit paramètre ε.

II.3.1. Traitement des variables

a) Variables cinématiques

Nous écrivons les fonctions rayon, épaisseur et viscosité sous la forme adimensionnelle :

$$\begin{cases} R(z,t) = R_0\overline{R}(\overline{z},\overline{t}) \\ H(z,t) = H_0\overline{H}(\overline{z},\overline{t}) \\ h(z,t) = h_0\overline{h}(\overline{z},\overline{t}) \end{cases} \quad (3.28)$$

Les termes indicés X_0 sont les valeurs en sortie de filière. Elles sont supposées connues.

Les composantes du vecteur vitesse $\vec{v}$ sont adimensionnalisées quant à elles par la valeur initiale de la vitesse V_0 du fluide :

$$\begin{cases} v_r(r,z,t) = V_0\overline{v}_r(\overline{r},\overline{z},\overline{t}) \\ v_z(r,z,t) = V_0\overline{v}_z(\overline{r},\overline{z},\overline{t}) \end{cases} \quad (3.29)$$

b) Variables d'espace-temps

- *variable z*

La variable z ne peut être adimensionnalisée par la hauteur de figeage, qui est une inconnue, si nous suivons le raisonnement de André [AND,99]. Elle est donc adimensionnalisée par la valeur initiale en rayon R_0 :

$$z = R_0\overline{z} \quad (3.30)$$

ainsi $0 \le \overline{z} \le L/R_0$.

- *variable r*

La variable r est, quant à elle, adimensionnalisée en utilisant la technique dite de " *non orthogonal mapping* " développée par Housiadas et Tsamopoulos pour modéliser l'extrusion de tube [HOU,98][HOU,00 a,b,c,d] puis le soufflage de gaine [HOU,00 e]. Il s'agit, comme l'illustre la

figure 3.9, d'adimensionnaliser complètement la variable radiale et figer en quelque sorte les surfaces libres.

Si nous écrivons en effet :

$$r = R(z,t) + H(z,t)\bar{r} \tag{3.31}$$

ou même,

$$r = R_0\bar{R}(\bar{z},\bar{t}) + H_0\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\bar{r} \tag{3.32}$$

Notre nouvelle variable radiale est ainsi bornée par : $0 \le \bar{r} \le 1$

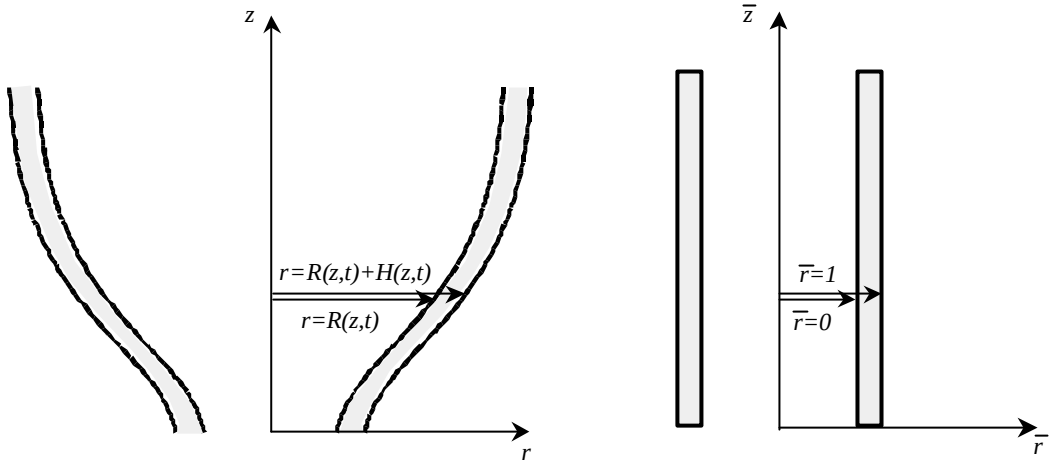


figure 3.9 : Schéma de principe du « non-orthogonal mapping », d'après [HOU,00 a]

- *variable temporelle*

La variable temporelle est adimensionnalisée par un temps caractéristique, défini identiquement à ce qui a déjà été présenté au chapitre 2 pour l'écriture du nombre de Deborah. Nous avons donc :

$$t = \frac{R_0}{V_0}\bar{t} \tag{3.33}$$

II.3.2. Introduction du changement de repère

L'introduction de ce changement complet de variables induit une dépendance des nouvelles variables d'espace-temps, r étant une fonction explicite de $\bar{r}, \bar{z}$ et $\bar{t}$. Nous pouvons écrire toute fonction $F(r,z,t)$ sous la forme :

$$F(r,z,t) = F_0\overline{F}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \tag{3.34}$$

Ceci implique notamment sur les termes en dérivées partielles de toute fonction $F(r,z,t)$ les transformations suivantes :

- *dérivée selon r :*

Nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = F_0\frac{\partial \overline{F}}{\partial \bar{r}} \tag{3.35}$$

avec, d'après la relation (3.31),

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{r}} = H_0 \bar{H} \tag{3.36}$$

donc

$$\frac{\partial F}{\partial r} = \frac{F_0}{H_0 \bar{H}} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{r}} \tag{3.37}$$

- *dérivée selon z :*

Nous écrivons l'égalité suivante :

$$\frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = F_0 \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \tag{3.38}$$

avec, d'après la relation (3.31),

$$\frac{\partial r}{\partial \bar{z}} = R_0 \frac{\partial \bar{R}}{\partial \bar{z}} + H_0 \bar{r} \frac{\partial \bar{H}}{\partial \bar{z}} \tag{3.39}$$

Nous aboutissons finalement en développant la relation (3.38) avec les relations (3.37) et (3.39) :

$$\frac{\partial F}{\partial z} = -\left[\frac{F_0}{R_0} \left(R_0 \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + H_0 \frac{\partial \bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{r} \right) \frac{1}{H_0 \bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \right] \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{r}} + \frac{F_0}{R_0} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{z}} \tag{3.40}$$

- *dérivée selon t :*

De même nous obtenons :

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\left[F_0 \frac{V_0}{R_0} \left(R_0 \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}} + H_0 \frac{\partial \bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}} \bar{r} \right) \frac{1}{H_0 \bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \right] \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{r}} + \frac{V_0}{R_0} \frac{\partial \bar{F}}{\partial \bar{t}} \tag{3.41}$$

Nous pouvons ainsi remplacer l'expression des variables et des termes différentiels dans les différentes équations du modèle. Les seules variables non encore adimensionnalisées sont les composantes du tenseur des contraintes et le terme de pression hydrostatique. Après le changement de repère, on montre que ces variables peuvent s'écrire sous la forme d'un produit d'une constante et d'une fonction adimensionnelle.

$$s = \frac{h_0}{R_0} V_0 \bar{s} \tag{3.42}$$

et

$$p = \frac{h_0}{R_0} V_0 \bar{p} \tag{3.43}$$

En simplifiant par cette constante, nous obtenons un système totalement adimensionnalisé en faisant apparaître un paramètre e défini par :

$$e = \frac{H_0}{R_0} \tag{3.44}$$

Ce paramètre est très petit, l'épaisseur initiale étant dans ce type de procédé de plusieurs ordres de grandeurs inférieur à celui du rayon (typiquement $e < 10^{-2}$ d'après [AND,99]).

Notons que la substitution de la variable r (relation (3.32)) dans un quotient est effectuée en utilisant un développement limité d'ordre 2. Nous obtenons ainsi :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R_0\overline{R}(\bar{z},\bar{t}) + H_0\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\bar{r}} = \frac{1}{1 + e\dfrac{H_0\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{R_0\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{r}} \tag{3.45}$$

Ce qui s'écrit sous la forme approchée suivante :

$$\frac{1}{1 + e\dfrac{H_0\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{R_0\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{r}} \approx 1 - e\frac{H_0\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{R_0\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{r} + e^2\left(\frac{H_0\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{R_0\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{r}\right)^2 + O\left(e^3\right) \tag{3.46}$$

II.3.3. Equations obtenues

La réécriture des équations adimensionnelles fait apparaître des termes en puissances croissantes de e, définissant ainsi chaque équation comme la somme de plusieurs équations à différents ordres de grandeur. Dans ce qui suit, nous faisons apparaître seulement les termes de puissance inférieure ou égale à 2, ceux-si s'avérant suffisants pour notre étude.

a) Incompressibilité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}} - \frac{\partial\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}} \\
&+ e\left[\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \overline{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\overline{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}} - \frac{\partial\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\bar{r}\right] \\
&- e^2\left[\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})^2}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{r}\,\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right] = 0
\end{aligned} \tag{3.47}$$

b) Loi de comportement

$$\overline{s}_{rr}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = -\overline{p}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \frac{1}{e}\left[2\frac{\overline{\hbar}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\right] \tag{3.48}$$

$$\begin{aligned}
\overline{s}_{ff}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = &-\overline{p}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \left[2\frac{\overline{\hbar}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right] \\
&- e\left[2\frac{\overline{\hbar}(\bar{z},\bar{t})\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})^2}\bar{r}\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right] + e^2\left[2\frac{\overline{\hbar}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\left(\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}^2\overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right]
\end{aligned} \tag{3.49}$$

$$\begin{aligned}\bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = &-\frac{1}{e}\left[2\frac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\right]\\ &-\bar{p}+2\bar{h}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}-2\frac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{r}\frac{\partial\bar{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\end{aligned} \tag{3.50}$$

$$\begin{aligned}\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = &\left[\bar{h}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}-\frac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{r}\frac{\partial\bar{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\right]\\ &+\frac{1}{e}\left[\frac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{H(\bar{z},\bar{t})}\left(\frac{\partial\bar{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\right)\right]\end{aligned} \tag{3.51}$$

c) <u>Equilibre dynamique</u>

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\\ &+e\left[\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}-\bar{r}\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}+\left(\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})-\bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right)\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\right]\\ &-e^2\left[\left(\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})-\bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right)\left(\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}\right]=0\end{aligned} \tag{3.52}$$

et

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\\ &+e\left[\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}-\bar{r}\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}+\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\right]\\ &-e^2\left[\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\left(\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}\right]=0\end{aligned} \tag{3.53}$$

d) <u>Conditions de surfaces</u>

- *<u>en vitesse :</u>*

$$\bar{v}_r(0,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z(0,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}}=0 \tag{3.54}$$

$$\bar{v}_r(1,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z(1,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}}-e\left[\bar{v}_z(1,\bar{z})\frac{\partial\bar{H}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}}\right]=0 \tag{3.55}$$

- *<u>en contraintes :</u>*

$$\begin{cases}\bar{s}_{rr}(0,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}(0,\bar{z},\bar{t})=-\overline{\Delta P}\\ \bar{s}_{rz}(0,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}(0,\bar{z},\bar{t})=+\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\overline{\Delta P}\end{cases} \tag{3.56}$$

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}(1,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{rz}(1,\bar{z},\bar{t}) - e\dfrac{\partial \overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{rz}(1,\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \overline{s}_{rz}(1,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{zz}(1,\bar{z},\bar{t}) - e\dfrac{\partial \overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{zz}(1,\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases} \quad (3.57)$$

III. Méthodologie d'analyse des équations

Pour résoudre ce système, nous allons chercher à approcher la valeur des différentes variables non géométriques adimensionnelles par un développement en série de celles-ci par rapport au petit paramètre géométrique ε . Ainsi les variables des champs de vitesse et de contrainte sont écrites sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \overline{v}_r(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \overline{v}_r^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e\overline{v}_r^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e^2\overline{v}_r^2(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \ldots \\ \overline{v}_z(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \overline{v}_z^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e\overline{v}_z^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e^2\overline{v}_z^2(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \ldots \\ \overline{s}_i(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \overline{s}_i^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e\overline{s}_i^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e^2\overline{s}_i^{\,2}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \ldots \\ \overline{p}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \overline{p}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e\overline{p}^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + e^2\overline{p}^2(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) + \ldots \end{cases} \quad (3.58)$$

En introduisant ces expressions dans les différentes équations, nous obtenons des équations à plusieurs ordres de grandeur distincts reliant les différents termes de nos variables.

L'analyse de ces équations est la principale difficulté de ce travail. Il va s'agir d'utiliser dans un ordre judicieux l'expression des différentes équations aux différents ordres de grandeur et les conditions de surface associées pour en déduire un système complet d'équations qui permettra par la suite d'effectuer les calculs stationnaire et instationnaire. Dans ce qui suit, nous détaillons la méthode d'analyse originale que nous avons mise au point dans le cas de l'hypothèse d'axisymétrie. La description de l'enchaînement des différentes étapes, même si elle paraîtra quelque peu fastidieuse au lecteur, reste néanmoins indispensable pour la compréhension de la méthode qui peut d'ailleurs être appliquée, dans son principe, à d'autres types de modélisations.

III.1. Développement des équations

- *Incompressibilité à l'ordre minimal (e^0)*

Compte tenu que le développement de nos variables impose un ordre de grandeur minimal de 0 (terme en puissance de ε^0), l'ordre minimal de l'équation d'incompressibilité (3.47) sera également l'ordre 0 et donnera la relation :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\overline{v}_r^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{v}_z^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \right) = 0 \quad (3.59)$$

Les conditions de surface libre en vitesse (3.54) et (3.55) nous donnent quant à elles :

$$\overline{v}_r^0(0,\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \overline{v}_z^0(0,\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (3.60)$$

$$\text{et même } \bar{v}_r^0(1,\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{v}_z^0(1,\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}} = 0 \tag{3.61}$$

Nous en déduisons aisément :

$$\boxed{\bar{v}_r^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{v}_z^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}}} \tag{3.62}$$

- *Equilibre dynamique à l'ordre minimal (e^{-1})*

D'après les équations (3.48), (3.49), (3.50) et (3.51) dérivant de la loi de comportement, les termes des contraintes d'ordre minimal sont d'ordre –1. En effet nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} \bar{s}_{rr}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = 2\dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{v}_r^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\ \bar{s}_{ff}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}_{zz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = -2\dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \dfrac{\partial \bar{v}_z^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\ \bar{s}_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{v}_z^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \dfrac{\partial \bar{v}_r^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \end{cases} \tag{3.63}$$

A cet ordre, les équations de l'équilibre dynamique (3.52) et (3.53) se résument quant à elles à :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{s}_{rr}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \right) = 0 \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{s}_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{zz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \right) = 0 \end{cases} \tag{3.64}$$

Et les conditions de surface libre en contraintes (3.56) et (3.57) donnent à cet ordre :

$$\begin{cases} \bar{s}_{rr}^{-1}(0,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{rz}^{-1}(0,\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}_{rz}^{-1}(0,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{zz}^{-1}(0,\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \bar{s}_{rr}^{-1}(1,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{rz}^{-1}(1,\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}_{rz}^{-1}(1,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{zz}^{-1}(1,\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases} \tag{3.65}$$

Ce dont nous déduisons :

$$\begin{cases} \bar{s}_{rr}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}_{zz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases} \tag{3.66}$$

Si nous remplaçons les termes de contraintes par leurs expressions issues de la relation (3.63), nous obtenons les relations suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{v}_r^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\left(2+\left(\dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right)^2\right)-\dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}=0 \\ \dfrac{\partial \overline{v}_r^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}+\left(2\left(\dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right)^2+1\right)\dfrac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}=0 \end{cases} \qquad (3.67)$$

Le déterminant de ce système est toujours strictement positif, ceci induit :

$$\boxed{\frac{\partial \overline{v}_r^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}=\frac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}=0} \qquad (3.68)$$

Les composantes de la vitesse à l'ordre 0 sont donc indépendantes de la variable $\bar{r}$. Ceci implique également :

$$s_{rr}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=s_{rz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=s_{zz}^{-1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=0 \qquad (3.69)$$

- *Incompressibilité à l'ordre suivant (e^1)*

Compte tenu de l'indépendance des composantes de vitesse à l'ordre 0 par rapport à la variable $\bar{r}$, l'équation d'incompressibilité (3.47) se réduit à l'ordre 1:

$$\frac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\overline{v}_r^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{v}_z^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})\right)=-\left[\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{v}_r^{\,0}(\bar{z},\bar{t})+\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right] \qquad (3.70)$$

ce qui s'intègre directement par rapport à $\bar{r}$:

$$\overline{v}_r^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{v}_z^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=-\bar{r}\left[\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{v}_r^{\,0}(\bar{z},\bar{t})+\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right]+C(\bar{z},\bar{t}) \qquad (3.71)$$

avec $C(\bar{z},\bar{t})$ la constante d'intégration indépendante de $\bar{r}$.

De plus, les conditions de surface libre en vitesse (3.54) à l'ordre 1 nous donnent :

$$\overline{v}_r^{\,1}(0,\bar{z})-\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\overline{v}_z^{\,1}(0,\bar{z})=0 \qquad (3.72)$$

Nous en déduisons $C(\bar{z},\bar{t})=0$ et donc :

$$\boxed{\overline{v}_r^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{v}_z^{\,1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=-\bar{r}\left[\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{v}_r^{\,0}(\bar{z},\bar{t})+\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \overline{v}_z^{\,0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right]} \qquad (3.73)$$

Ce qui donne plus précisément lorsque $\bar{r}=1$:

$$\bar{v}_r^1(1,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z^1(1,\bar{z},\bar{t})=-\left[\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{v}_r^0(\bar{z},\bar{t})+\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\right] \tag{3.74}$$

La condition de surface libre en vitesse *(3.55)* à l'ordre 1 donne, lorsque $\bar{r}=1$:

$$\bar{v}_r^1(1,\bar{z},\bar{t})-\frac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z^1(1,\bar{z},\bar{t})=\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}} \tag{3.75}$$

En égalant ces deux relations nous obtenons :

$$\frac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{v}_r^0(\bar{z},\bar{t})+\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\frac{\partial\bar{v}_z^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}+\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}}=0 \tag{3.76}$$

Ce que nous pouvons écrire finalement en multipliant par $\bar{R}(\bar{z},\bar{t})$ et en utilisant la relation (3.62) sous la forme réduite :

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\bar{R}(\bar{z},\bar{t})\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\bar{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})\right)+\frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\bar{R}(\bar{z},\bar{t})\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\right)=0} \tag{3.77}$$

- *Equilibre dynamique à l'ordre suivant (e^0)*

A l'ordre 0, en prenant en compte la nullité des termes d'ordre –1, les composantes des contraintes sont liées par les relations suivantes, issues des équations (3.52) et (3.53) :

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\bar{s}_{rr}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\dfrac{\partial\bar{s}_{rz}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}=0\\[2ex]\dfrac{\partial\bar{s}_{rz}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\dfrac{\partial\bar{s}_{zz}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}=0\end{cases} \tag{3.78}$$

avec, d'après les équations de la loi de comportement (3.48), (3.49), (3.50) et (3.51) :

$$\begin{cases}\bar{s}_{rr}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=2\dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial v_r^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\bar{p}_0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) & (3.79)\\[2ex]\bar{s}_{ff}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=2\dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}v_r^0(\bar{r},\bar{t})-\bar{p}_0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) & (3.80)\\[2ex]\bar{s}_{zz}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=2\bar{h}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial v_z^0(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}-2\dfrac{\bar{h}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\dfrac{\partial v_z^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\bar{p}_0(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) & (3.81)\\[2ex]\bar{s}_{rz}^0(\bar{r},\bar{z},\bar{t})=\bar{h}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial v_r^0(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}} & \\ \qquad+\bar{h}(\bar{z},\bar{t})\left(\dfrac{1}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial v_z^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}-\dfrac{1}{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\dfrac{\partial v_r^1(\bar{r},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{r}}\right) & (3.82)\end{cases}$$

Nous tirons finalement de ces relations l'égalité suivante :

$$\frac{\partial^2 \overline{v}_r^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}^2}\frac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}} = -\frac{\partial^2 \overline{v}_z^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}^2} \tag{3.83}$$

Cette relation s'avère incompatible avec la relation (3.70) et entraîne donc :

$$\frac{\partial^2 \overline{v}_r^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}^2} = \frac{\partial^2 \overline{v}_z^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}^2} = 0 \tag{3.84}$$

ainsi les termes $\frac{\partial \overline{v}_r^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}}$ et $\frac{\partial \overline{v}_z^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}}$ sont indépendants de $\overline{r}$.

En considérant les diverses relations données par la loi de comportement à l'ordre 0, nous déduisons aisément :

$$\frac{\partial \overline{s}_{rr}^0}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial \overline{s}_{ff}^0}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial \overline{s}_{zz}^0}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial \overline{s}_{rz}^0}{\partial \overline{r}} = \frac{\partial \overline{p}_0}{\partial \overline{r}} = 0 \tag{3.85}$$

L'intégration de la relation (3.78) implique alors :

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^0(\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{rz}^0(\overline{z},\overline{t}) = C_1(\overline{z},\overline{t}) \\ \overline{s}_{rz}^0(\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{zz}^0(\overline{z},\overline{t}) = C_2(\overline{z},\overline{t}) \end{cases} \tag{3.86}$$

avec $C_1(\overline{z},\overline{t})$ et $C_2(\overline{z},\overline{t})$ deux constantes d'intégration indépendantes de $\overline{r}$.

Or les conditions de surfaces libres en contraintes (3.56) et (3.57) donnent à l'ordre 0 :

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^0(0,\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{rz}^0(0,\overline{z},\overline{t}) = -\overline{\Delta P} \\ \overline{s}_{rz}^0(0,\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{zz}^0(0,\overline{z},\overline{t}) = \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta P} \end{cases} \tag{3.87}$$

et

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^0(1,\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{rz}^0(1,\overline{z},\overline{t}) = 0 \\ \overline{s}_{rz}^0(1,\overline{z},\overline{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{zz}^0(1,\overline{z},\overline{t}) = 0 \end{cases} \tag{3.88}$$

Ces conditions, incompatibles avec nos considérations précédentes, entraîne nécessairement que, si nous écrivons le terme $\overline{\Delta P}$ sous la forme d'un développement en ε, nous avons :

(3.89)

$$\overline{\Delta P} = \overline{\Delta P}^{0} + e\,\overline{\Delta P}^{1} + O\left(e^{2}\right) \text{ avec } \overline{\Delta P}^{0} = 0$$

Cela revient donc à négliger la projection du champs de contraintes selon la normale au film en première approximation devant les autres termes de contraintes. Dans ces conditions nous obtenons finalement :

$$\boxed{\begin{cases} \overline{s}_{rr}^{0}(\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases}} \quad \begin{matrix} (3.90) \\ (3.91) \end{matrix}$$

- *Equilibre dynamique à l'ordre suivant (e^1)*

Compte tenu de ces considérations, les équations (3.52) et (3.53) issues de l'équilibre dynamique à l'ordre 1 se ramènent à écrire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\overline{s}_{rr}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{rz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \right) = -\left(\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\left(\overline{s}_{rr}^{0}(\bar{z},\bar{t}) - \overline{s}_{ff}^{0}(\bar{z},\bar{t})\right) \right) \\ \dfrac{\partial}{\partial \bar{r}}\left(\overline{s}_{rz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{zz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) \right) = -\left(\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) \right) \end{cases} \quad (3.92)$$

donc en intégrant par rapport à $\bar{r}$:

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{rz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \\ \qquad -\bar{r}\left(\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\left(\overline{s}_{rr}^{0}(\bar{z},\bar{t}) - \overline{s}_{ff}^{0}(\bar{z},\bar{t})\right) \right) + C_3(\bar{z},\bar{t}) \\ \overline{s}_{rz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{zz}^{1}(\bar{r},\bar{z},\bar{t}) = \\ \qquad -\bar{r}\left(\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})}{\overline{R}(\bar{z},\bar{t})}\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) \right) + C_4(\bar{z},\bar{t}) \end{cases} \quad (3.93)$$

avec $C_3(\bar{z},\bar{t})$ et $C_4(\bar{z},\bar{t})$ les constantes d'intégration.

Les conditions de surfaces en contraintes *(3.56)* donnent pour $\bar{r} = 0$ à l'ordre 1 :

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^{1}(0,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{rz}^{1}(0,\bar{z},\bar{t}) = \overline{\Delta P} \\ \overline{s}_{rz}^{1}(0,\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{s}_{zz}^{1}(0,\bar{z},\bar{t}) = -\overline{\Delta P}\dfrac{\partial \overline{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \end{cases} \quad (3.94)$$

En intégrant la relation (3.93) avec ces conditions en surface, on obtient finalement en $\bar{r}=1$ les relations suivantes :

$$\begin{cases} \bar{s}_{rr}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})=-\left(\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}+\dfrac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\left(\bar{s}_{rr}^{0}(\bar{z},\bar{t})-\bar{s}_{ff}^{0}(\bar{z},\bar{t})\right)\right)-\overline{\Delta P} \\ \bar{s}_{rz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})=-\left(\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial\bar{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}+\dfrac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})\right)+\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\overline{\Delta P} \end{cases} \quad (3.95)$$

Or les conditions de surfaces en contraintes *(3.57)* à l'ordre 1 donnent pour $\bar{r}=1$:

$$\begin{cases} \bar{s}_{rr}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})=\dfrac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) \\ \bar{s}_{rz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})-\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}^{1}(1,\bar{z},\bar{t})=\dfrac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) \end{cases} \quad (3.96)$$

Ainsi en égalant les deux couples de relations on trouve :

$$\begin{cases} +\dfrac{\partial\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\overline{\Delta P}=\dfrac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t})+\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial\bar{s}_{zz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}+\dfrac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t}) & (3.97) \\ -\overline{\Delta P}=\dfrac{\partial\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})+\bar{H}(\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial\bar{s}_{rz}^{0}(\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}+\dfrac{\bar{H}(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})}\left(\bar{s}_{rr}^{0}(\bar{z},\bar{t})-\bar{s}_{ff}^{0}(\bar{z},\bar{t})\right) & (3.98) \end{cases}$$

III.2. Bilan général

A partir des équations de la mécanique exprimée dans le repère cylindrique, nous avons développé une stratégie basée sur un développement des variables en puissance d'un petit paramètre e et sur l'étude des équations obtenues à différents ordres de grandeur. L'originalité de cette démarche, inspirée des travaux de Housiadas et Tsamopoulos [HOU,98], réside dans l'enchaînement des équations étudiées, qui nous permet d'obtenir naturellement une série d'équations adimensionnelles instationnaires dont les inconnues sont ici des fonctions de la seule variable $\bar{z}$.

Il est intéressant de noter que l'intervention d'une dépendance temporelle dans notre mise en équations ne rajoute des termes différentiels supplémentaires que dans les relations (3.62) et (3.77). Ces termes différentiels en temps n'interviennent que sur les fonctions « géométriques » du procédé, c'est-à-dire le rayon et l'épaisseur. Ce type de système instationnaire est très proche, comme nous le verrons par la suite, de ce qui est classiquement rencontré dans la littérature pour d'autres procédés faisant intervenir un étirage comme le filage textile [DEM,83] ou le cast-film [SIL,96]. L'analyse de stabilité du système, utilisant une description dans un repère global, ne devrait donc pas s'éloigner de ce qui est classiquement réalisé pour ces procédés.

Ce système semble *a priori* bien plus complexe que les équations « locales » de Pearson et Petrie décrites dans la première partie de ce chapitre (voir paragraphe I.1), puisque les équations sont écrites dans un repère global non privilégié. Cependant, notre méthode nous a permis de nous affranchir d'un certain nombre d'hypothèses initiales devenant, comme nous le présentons dans ce qui suit, des résultats directs de l'analyse des équations aux différents ordres de grandeur.

IV. Etude des équations en régime stationnaire

L'analyse de stabilité consistant à suivre l'évolution d'une perturbation d'une solution calculée dans le cas stationnaire, une prédiction correcte de la stabilité du procédé passe nécessairement par une simulation, réaliste, dans le cas stable.

Nous présentons donc dans cette partie l'étude des équations en régime stationnaire, la méthode de calcul utilisée et les résultats comparés avec ceux du modèle « local » proposé par André [AND,99]. Nous comparons ensuite nos résultats avec les données expérimentales que nous avons acquises dans le chapitre 2. Nous évaluons ainsi la validité de notre modèle et son équivalence avec les équations « locales » classiquement employées.

IV.1. Equations stationnaires obtenues

Le passage au régime stationnaire s'effectue bien évidemment en considérant l'indépendance vis-à-vis du temps. Le système différentiel que nous obtenons fait intervenir 11 inconnues qui ne dépendent que de la cote $\bar{z}$:

$$\bar{v}_r^0(\bar{z}), \bar{v}_z^0(\bar{z}), \frac{\partial \bar{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}), \frac{\partial \bar{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}), \bar{R}(\bar{z}), \bar{H}(\bar{z}), \bar{p}^0(\bar{z}), \bar{s}_{rr}^0(\bar{z}), \bar{s}_{ff}^0(\bar{z}), \bar{s}_{zz}^0(\bar{z}), \bar{s}_{rz}^0(\bar{z})$$

Ce sont majoritairement les termes de plus grand ordre de grandeur (e^0) des décompositions des variables du modèle cylindrique. Nous notons également la présence des dérivées des termes suivants en vitesse $\frac{\partial \bar{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z})$ et $\frac{\partial \bar{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z})$ qui seront considérées comme des inconnues à part entière.

Nous avons démontré qu'en première approximation (i.e. à l'ordre de grandeur 0), les variables mécaniques peuvent être considérées constantes dans l'épaisseur. Il s'agit là de la principale hypothèse de la représentation « membrane » locale. Notre analyse dimensionnelle a donc pu être utilisée pour justifier une telle hypothèse.
Ces 11 inconnues sont liées par un système de 11 relations différentielles, décomposables en sous-ensembles :

- *équations " cinématiques ", d'après les relations (3.62), (3.70) et (3.77) :*

$$\bar{v}_r^0(\bar{z}) = \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{v}_z^0(\bar{z}) \qquad (3.99)$$

$$\frac{d}{d\bar{z}}\left(\bar{H}(\bar{z})\bar{R}(\bar{z})\bar{v}_z^0(\bar{z})\right) = 0 \qquad (3.100)$$

$$\frac{\partial \bar{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) - \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \frac{\partial \bar{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) + \bar{v}_r^0(\bar{z}) \frac{\bar{H}(\bar{z})}{\bar{R}(\bar{z})} + \frac{d\bar{v}_z^0(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{H}(\bar{z}) = 0 \qquad (3.101)$$

- *équations " en contraintes " d'après les relations (3.90), (3.91), (3.97) et (3.98) :*

$$\bar{s}_{rr}^0(\bar{z}) - \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{s}_{rz}^0(\bar{z}) = 0 \qquad (3.102)$$

$$\bar{s}_{rz}^0(\bar{z}) - \frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} \bar{s}_{zz}^0(\bar{z}) = 0 \qquad (3.103)$$

$$\frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}}\overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z})+\overline{H}(\bar{z})\frac{d\overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z})}{d\bar{z}}+\frac{\overline{H}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})}\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z})-\frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\overline{\Delta P}=0 \qquad (3.104)$$

$$\frac{d\overline{H}(\bar{z})}{d\bar{z}}\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z})+\overline{H}(\bar{z})\frac{d\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z})}{d\bar{z}}+\frac{\overline{H}(\bar{z})}{\overline{R}(\bar{z})}\left(\overline{s}_{rr}^{0}(\bar{z})-\overline{s}_{ff}^{0}(\bar{z})\right)+\overline{\Delta P}=0 \qquad (3.105)$$

- *la liaison entre ces deux ensembles est assurée par les équations issues de la loi de comportement (3.79), (3.80), (3.81) et (3.82) :*

$$\overline{s}_{rr}^{0}(\bar{z})=2\frac{\overline{h}(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}\frac{\partial\overline{v}_{r}^{1}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})-\overline{p}^{0}(\bar{z}) \qquad (3.106)$$

$$\overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z})=-\overline{p}^{0}(\bar{z})+2\overline{h}(\bar{z})\frac{d\overline{v}_{z}^{0}(\bar{z})}{d\bar{z}}-2\frac{\overline{h}(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}\frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_{z}^{1}}{\partial\bar{r}}(\bar{z}) \qquad (3.107)$$

$$\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z})=h(\bar{z})\frac{d\overline{v}_{r}^{0}(\bar{z})}{d\bar{z}}+h(\bar{z})\left(\frac{1}{\overline{H}(\bar{z})}\frac{\partial\overline{v}_{z}^{1}}{\partial r}(\bar{z})-\frac{1}{\overline{H}(\bar{z})}\frac{d\overline{R}(\bar{z})}{d\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_{r}^{1}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right) \qquad (3.108)$$

$$\overline{s}_{ff}^{0}(\bar{z})=-\overline{p}^{0}(\bar{z})+2\frac{\overline{h}(\bar{z})}{\overline{H}(\bar{z})}\overline{v}_{r}^{0}(\bar{z}) \qquad (3.109)$$

IV.2. Equivalence avec les équations du modèle « local »

Comme nous l'avons déjà souligné dans le paragraphe II.1, les équations originelles de Pearson et Petrie décrivent l'écoulement du fluide dans un repère privilégié local $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$ alors que nous considérons quant à nous un repère global cylindrique $(\vec{r},\vec{f},\vec{z})$. La figure 3.10 résume les notations dans ces deux repères.

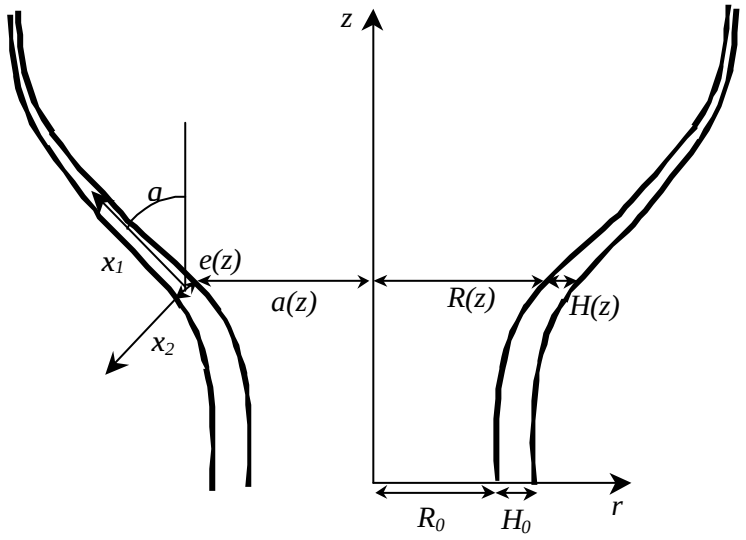


figure 3.10 : Equivalence entre la notation « locale » de Pearson et Petrie et la notation introduite dans le repère cylindrique

Compte tenu des relations angulaires existantes entre les deux repères et de l'adimensionnalisation par rapport aux valeurs initiales des variables géométriques, nous parvenons aisément à écrire la

relation reliant l'épaisseur «normale » *e(z)* utilisée dans le repère local et l'épaisseur *H(z)* que nous avons décrite.

$$\bar{e}(\bar{z}) = \bar{H}(\bar{z})\cos q \qquad (3.110)$$

Par hypothèse, à la hauteur de figeage, $\bar{e}(L/R_0) = \bar{H}(L/R_0)$ car $q = 0$

Nous notons de plus l'équivalence des variables exprimant le rayon de la bulle :

$$\bar{R}(\bar{z}) = \bar{a}(\bar{z}) \qquad (3.111)$$

La projection des contraintes principales du modèle de Pearson et Petrie s_1 et s_3 (voir relation (3.6)) dans le repère cylindrique donne quant à elle les égalités suivantes :

$$\begin{bmatrix} \bar{s}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{s}_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos q \\ \sin q \\ 0 \end{pmatrix} = \bar{s}_1 \cos^2 q = \bar{s}^0_{zz} \qquad (3.112)$$

et

$$\bar{s}_3 = \bar{s}^0_{ff} \qquad (3.113)$$

IV.2.1. Relations géométriques et cinématiques

L'équation (3.99) peut s'écrire également, compte tenu des définitions géométriques :

$$\frac{d\bar{R}(\bar{z})}{d\bar{z}} = \frac{\bar{v}^0_r(\bar{z})}{\bar{v}^0_z(\bar{z})} = \tan q \qquad (3.114)$$

Nous retrouvons ainsi l'hypothèse géométrique (3.1).

L'équation (3.100) s'écrit quant à elle :

$$\bar{H}(\bar{z})\bar{R}(\bar{z})\bar{v}^0_z(\bar{z}) = cte \qquad (3.115)$$

Il s'agit de l'équation adimensionnalisée de la conservation du débit (3.5) projetée sur l'axe $\bar{z}$.

IV.2.2. Expression des contraintes

a) Equilibre dynamique

La combinaison linéaire des équations d'équilibre dynamique (3.102) et (3.103) donne :

- en multipliant par $\dfrac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}$ la première et en ajoutant la seconde :

$$\frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}^0_{rr}(\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}^0_{zz}(\bar{z},\bar{t}) + \left[1 - \left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\right)^2\right] \bar{s}^0_{rz}(\bar{z},\bar{t}) = 0 \qquad (3.116)$$

nous retrouvons alors le fait de négliger en première approximation les termes de cisaillements du tenseur des contrainte exprimé dans le repère local $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$: $[s]_{\vec{x}_2,\vec{x}_1}=0$ [AND,99], avec par définition, à la norme près, (voir relation (3.16)) :

$$\vec{x}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\\dfrac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{z}}\end{pmatrix}\text{ et }\vec{x}_1=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial\overline{R}}{\partial\overline{z}}\\0\\1\end{pmatrix} \qquad (3.117)$$

- en multipliant par $\dfrac{\partial\overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial\overline{z}}$ la seconde et en soustrayant cela à la première :

$$\overline{s}^0_{rr}(\overline{z},\overline{t})-2\frac{\partial\overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial\overline{z}}\overline{s}^0_{rz}(\overline{z},\overline{t})+\left(\frac{\partial\overline{R}(\overline{z},\overline{t})}{\partial\overline{z}}\right)^2\overline{s}^0_{rz}(\overline{z},\overline{t})=0 \qquad (3.118)$$

nous retrouvons ici le fait de considérer la contrainte dans l'épaisseur $[s]_{\vec{x}_2,\vec{x}_2}$ négligeable par rapport aux autres (i.e. de l'ordre de grandeur de $\overline{\Delta P}$) [AND,99].

b) <u>Cas de l'équation (3.97)</u>

Cette équation s'écrit également :

$$\frac{\partial\overline{H}(\overline{z})}{\partial\overline{z}}\overline{R}(\overline{z})\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})+\frac{\partial\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})}{\partial\overline{z}}\overline{H}(\overline{z})\overline{R}(\overline{z})+\overline{H}(\overline{z})\overline{s}^0_{rz}(\overline{z})-\overline{R}(\overline{z})\frac{\partial\overline{R}(\overline{z})}{\partial\overline{z}}\overline{\Delta P}=0 \qquad (3.119)$$

c'est-à-dire, en nous souvenant que $\overline{s}^0_{rz}(\overline{z})-\dfrac{\partial\overline{R}(\overline{z})}{\partial\overline{z}}\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})=0$ (relation (3.90)) :

$$\frac{\partial}{\partial\overline{z}}\left(\overline{H}(\overline{z})\overline{R}(\overline{z})\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})\right)-\overline{R}(\overline{z})\frac{\partial\overline{R}(\overline{z})}{\partial\overline{z}}\overline{\Delta P}=0 \qquad (3.120)$$

en intégrant cette équation d'une cote $\overline{z}$ à la hauteur de figeage L/R_0, nous obtenons la relation suivante :

$$\overline{H}(L/R_0)\overline{R}(L/R_0)\overline{s}^0_{zz}(L/R_0)=\overline{F}_{tirage}=\overline{H}(\overline{z})\overline{R}(\overline{z})\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})+\frac{1}{2}\left(\overline{R}^2(L/R_0)-\overline{R}^2(z)\right)\overline{\Delta P} \qquad (3.121)$$

Nous retrouvons l'équation, adimensionnalisée, du modèle de Pearson et Petrie exprimant l'équilibre dynamique projetée selon la direction $\vec{x}_1$ (relation (3.7)), qui peut être écrite, en respectant la notation et en effectuant l'adimensionnalisation utilisée par André [AND,99] dans le repère $(\vec{x}_1,\vec{x}_2,\vec{x}_3)$:

$$\widetilde{F}_z=\overline{e}(\overline{z})\overline{a}(\overline{z})\overline{s}_1(\overline{z})\cos q+\widetilde{B}\left(\overline{a}^2(L)-\overline{a}^2(z)\right) \qquad (3.122)$$

les paramètres $\tilde{\overline{F}}_z$ et $\tilde{\overline{B}}$ étant respectivement les valeurs de la force de tirage et de surpression adimensionnelles dans cette notation. Nous notons la correspondance entre ces paramètres exprimés dans les deux modèles :

$$\frac{\overline{\Delta P}}{2} = \tilde{\overline{B}} \qquad (3.123)$$

et

$$\overline{F}_{tirage} = \tilde{\overline{F}}_z \qquad (3.124)$$

c) <u>Cas de l'équation (3.98)</u>

Le traitement de cette équation est plus délicat. Il nous faut réécrire tous les termes en fonction de $\overline{s}^0_{zz}(\overline{z})$. Nous utilisons pour cela la relation (3.90) et sa dérivée par rapport à $\overline{z}$:

$$\frac{\partial \overline{s}^0_{rz}(\overline{z})}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial \overline{R}(\overline{z})}{\partial \overline{z}} \frac{\partial \overline{s}^0_{zz}(\overline{z})}{\partial \overline{z}} + \frac{\partial^2 \overline{R}(\overline{z})}{\partial \overline{z}^2} \overline{s}^0_{zz}(\overline{z}) \qquad (3.125)$$

Les relations (3.112) et (3.113) permettent de parvenir finalement à la relation :

$$+\frac{\overline{\Delta P}}{\overline{e}(\overline{z})} = \overline{s}_1 \left(\frac{-\partial^2 \overline{a}(\overline{z})}{\partial \overline{z}^2} \cos^3 q \right) + \frac{\overline{s}_3}{\overline{a}(\overline{z})} \cos q \qquad (3.126)$$

Nous identifions sans problème l'adimensionnalisation de l'équation (3.8) exprimant cette fois l'équilibre dynamique projetée selon la direction $\vec{x}_3$.

IV.2.3. <u>Conclusions et discussion sur la méthode de résolution</u>

Nous avons montré l'équivalence, dans le cas stationnaire, de notre système d'équations avec celui issu de l'hypothèse « membrane » de Pearson et Petrie, puisque la combinaison de nos équations nous permet de retrouver les leurs. Pour résumer, notre système est un système "décomposé", dans lequel toutes les variables sont exprimées explicitement.

Notre nouvelle mise en équations ne pourra en aucune façon nous affranchir des problèmes de divergence numériques décrits par André [AND,99] liés à la méthode de résolution par tir (méthode de Newton), et à la présence au sein des équations «locales », pour schématiser, d'un produit (viscosité*angle), comme nous l'avons évoqué dans l'étude bibliographie (voir paragraphe I.4). Dans notre modèle, nous rencontrons un produit équivalent du type (viscosité*$\partial \overline{R} / \partial \overline{z}$), qui aura bien évidemment un comportement semblable.

Afin de nous affranchir de cette difficulté, nous opterons donc pour une méthode de calcul à partir du haut de notre longueur d'étirage L (cote $\overline{z} = L / R_0$), point situé au delà de la hauteur de figeage « physique » qui est une inconnue de notre système. Ceci élimine l'angle initial $q(0)$ comme paramètre de tir.

IV.3. Calculs stationnaires

IV.3.1. Prise en compte de la température

Nous allons considérer les phénomènes thermiques de façon très simplifiée en reprenant la méthode développée initialement par Petrie [PET,75 a,b] et présentée au paragraphe I.2. Nous allons fixer arbitrairement l'évolution de la température moyenne dans l'épaisseur *T(z)* le long de la longueur d'étirage, la variation de la viscosité du matériau avec cette température moyenne étant régie par une loi d'Arrhenius. L'équation de la chaleur simplifiée (relation (3.10)) devient, en adimensionnalisant la température par sa valeur à la sortie de filière T_0 et en considérant le terme instationnaire [AGA,96] :

$$\frac{\partial \overline{T}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial \overline{T}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\overline{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})=-\frac{a}{rc_p}\frac{R_0}{H_0.V_0}\left(\overline{T}(\bar{z},\bar{t})-\overline{T}_{air}\right) \qquad (3.127)$$

Où $\overline{C_t}$ est le coefficient total de transfert thermique adimensionnel ($\overline{C_t}=\frac{a}{rc_p}\frac{R_0}{H_0.V_0}$) :

$$\frac{\partial \overline{T}^0(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial \overline{T}^0(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\overline{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})=-\frac{\overline{C_t(\bar{z},\bar{t})}}{\cos q}\left(\overline{T}^0(\bar{z},\bar{t})-\overline{T}_{air}\right) \qquad (3.128)$$

En régime stationnaire, nous retrouvons la forme adimensionnelle utilisée par André [AND,99] :

$$\frac{\partial \overline{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}}=-\frac{\overline{C_t(\bar{z})}}{\cos q}\frac{1}{\overline{H}(\bar{z})\overline{v}_z^0(\bar{z})}\left(\overline{T}^0(\bar{z})-\overline{T}_{air}\right)=-\frac{\overline{C_t(\bar{z})}}{\cos q}\overline{R}(\bar{z})\left(\overline{T}^0(\bar{z})-\overline{T}_{air}\right) \qquad (3.129)$$

A thermique donnée, nous pouvons alors calculer la valeur du coefficient total de transfert thermique adimensionnel $\overline{C_t}$ défini par :

$$C_t(\bar{z})=-\frac{\cos q}{\left(\overline{T}^0(\bar{z})-\overline{T}_{air}\right)}\left[\frac{\partial \overline{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{t}}\overline{H}(\bar{z})+\frac{\partial \overline{T}^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\overline{H}(\bar{z})\overline{v}_z^0(\bar{z})\right] \qquad (3.130)$$

Ce coefficient de transfert thermique ainsi déterminé sera, comme nous le verrons par la suite, utilisé dans l'étude de stabilité.

Afin de comparer le résultat de nos calculs à ceux effectués par André [AND,99], nous allons tout d'abord imposer comme lui un profil de température linéaire le long de la longueur d'étirage, puis nous utiliserons les profils de températures expérimentaux relevés dans le chapitre 2 pour évaluer les changements intervenus.

IV.3.2. Conditions aux limites

Compte tenu de notre adimensionnalisation, nous pouvons écrire :

- *en sortie de filière :*

$$\bar{z}=0,\quad \overline{R}(0)=1,\quad \overline{H}(0)=1,\quad \left\|\vec{\overline{V}}\right\|=\sqrt{\overline{v}_z^{0^2}(0)+\overline{v}_r^{0^2}(0)}=1$$

- *en fin d'étirage :*

$$\bar{z}=L/R_0,\quad \overline{R}(L/R_0)=BUR,\quad \frac{d\overline{R}(L/R_0)}{d\bar{z}}=0,\quad \left\|\vec{\overline{V}}\right\|=\overline{v}_z^0(L/R_0)=DR$$

IV.3.3. Méthode de calcul

Il s'agit de calculer la solution de notre système différentiel semi-implicite en partant des conditions aux limites à la fin de notre bngueur d'étirage ($\bar{z} = L/R_0$). Les deux paramètres $\overline{F}_{tirage}$ et $\overline{\Delta P}$, respectivement la force de tirage et la surpression interne adimensionnelles, sont ajustés pour retrouver, à la fin de notre calcul, les conditions aux limites à la sortie de la filière (i.e. $\bar{z} = 0$).

Au départ, nous fixons donc arbitrairement ces deux paramètres, ce qui nous permet de calculer les valeurs de nos différentes variables à la cote $\bar{z} = L/R_0$. A chaque pas de discrétisation de la cote $\bar{z}$, il nous faut résoudre le système différentiel afin d'avoir accès aux accroissements des différentes variables. De proche en proche, nous calculons ainsi les valeurs des différentes variables à chaque pas et parvenons finalement aux valeurs à la cote $\bar{z} = 0$. Si les conditions aux limites à cette cote énoncées précédemment ne sont pas vérifiées, nous utilisons une méthode de Newton pour évaluer de nouvelles valeurs des paramètres $\overline{F}_{tirage}$ et $\overline{\Delta P}$.

Rappelons que, dans ce qui suit, la température est supposée connue pour tout $\bar{z}$.

a) Données initiales

D'après les conditions aux limites, nous avons initialement :

$$\overline{R}(L/R_0) = BUR, \quad \frac{\partial \overline{R}(L/R_0)}{\partial \bar{z}} = 0, \quad \left\| \vec{\overline{V}}(L/R_0) \right\| = \overline{v}_z^0(L/R_0) = DR$$

La relation (3.100) qui exprime la conservation du débit nous permet de calculer la valeur de $\overline{H}(L/R_0)$:

$$\overline{H}(L/R_0) = \frac{1}{\overline{R}(L/R_0).\overline{v}_z^0(L/R_0)} = \frac{1}{BUR.DR} \qquad (3.131)$$

De plus, la force $\overline{F}_{tirage}$ nous permet de calculer la valeur de la contrainte $\overline{s}_{zz}^0(L/R_0)$ (relation (3.121)) :

$$\overline{s}_{zz}^0(L/R_0) = \frac{\overline{F}_{tirage}}{\overline{R}(L/R_0).\overline{H}(L/R_0)} \qquad (3.132)$$

La connaissance des valeurs initiales de ces cinq variables va nous permettre de résoudre complètement le système.

b) Première étape

Les équations (3.99),(3.102)&(3.103) nous donnent directement accès aux valeurs des variables $\overline{v}_r^0(L/R_0), \overline{s}_{rz}^0(L/R_0)$ et $\overline{s}_{rr}^0(L/R_0)$:

$$\overline{v}_r^0(L/R_0) = \frac{d\overline{R}(L/R_0)}{d\bar{z}} \overline{v}_z^0(L/R_0) \qquad (3.133)$$

(3.134)

$$\overline{s}_{rz}^{0}(L/R_0)-\frac{\partial\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{zz}^{0}(L/R_0)=0 \text{ et } \overline{s}_{rr}^{0}(L/R_0)-\frac{\partial\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}^{0}(L/R_0)=0$$

c) <u>Deuxième étape</u>

La deuxième étape va consister à considérer les termes différentiels dans les équations restantes comme des inconnues en $\overline{z}$. Si nous faisons le compte des inconnues restant à calculer dans ces conditions, nous obtenons :

- 6 dérivées de nos variables :

$$\frac{\partial\overline{H}(L/R_0)}{\partial\overline{z}},\frac{\partial\overline{v}_z^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}},\frac{\partial\overline{v}_r^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}},\frac{\partial^2\overline{R}(L/R_0)}{\partial z^2},\frac{\partial\overline{s}_{zz}^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}},\frac{\partial\overline{s}_{rz}^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}$$

- 4 variables " annexes " :

$$\frac{\partial\overline{v}_r^{1}}{\partial\overline{r}}(L/R_0),\frac{\partial\overline{v}_z^{1}}{\partial\overline{r}}(L/R_0),\overline{p}^{0}(L/R_0),\overline{s}_{ff}^{0}(L/R_0)$$

Pour calculer la valeur de ces 10 inconnues, nous utilisons :

- les équations " cinématiques " (3.100)&(3.101)
- les équations " en contraintes " (3.104)&(3.105)
- les équations de la loi de comportement (3.106),(3.107),(3.108)&(3.109)
- les dérivées des équations (3.99) &(3.102) qui donnent :

$$\frac{\partial\overline{v}_r^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial^2\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}^2}\overline{v}_z^{0}(L/R_0)+\frac{\partial\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{v}_z^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}} \qquad (3.135)$$

$$\frac{\partial\overline{s}_{rz}^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}=\frac{\partial^2\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}^2}\overline{s}_{zz}^{0}(L/R_0)+\frac{\partial\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{s}_{zz}^{0}(L/R_0)}{\partial\overline{z}} \qquad (3.136)$$

Nous construisons ainsi un système linéaire de 10 équations qui, compte tenu des variables que nous avons déjà calculées, se réduit à être un système linéaire des 10 inconnues citées ci-dessus. Sa résolution ne pose à l'évidence aucun problème. Numériquement, nous faisons appel à la procédure DLSLRG issue de la bibliothèque mathématique IMSL® pour FORTRAN®.

d) <u>Généralisation</u>

Ainsi nous avons montré que nous sommes capables de calculer à la cote $\overline{z}=L/R_0$ et à partir de nos conditions aux limites les valeurs :

$$\overline{R}(L/R_0),\frac{\partial\overline{R}(L/R_0)}{\partial\overline{z}},\overline{v}_z^{0}(L/R_0),\overline{H}(L/R_0),\overline{s}_{zz}^{0}(L/R_0),\overline{v}_r^{0}(L/R_0),\overline{s}_{rz}^{0}(L/R_0),\overline{s}_{rr}^{0}(L/R_0)$$

puis :

$$\frac{\partial \overline{H}(L/R_0)}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial \overline{v}_z^0(L/R_0)}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial \overline{v}_r^0(L/R_0)}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial^2 \overline{R}(L/R_0)}{\partial z^2}, \frac{\partial \overline{s}_{zz}^0(L/R_0)}{\partial \overline{z}}, \frac{\partial \overline{s}_{rz}^0(L/R_0)}{\partial \overline{z}}$$

$$\text{et } \frac{\partial \overline{v}_r^1}{\partial \overline{r}}(L/R_0), \frac{\partial \overline{v}_z^1}{\partial \overline{r}}(L/R_0), \overline{p}^0(L/R_0), \overline{s}_{ff}^0(L/R_0)$$

En approximant les accroissements des variables par les termes différentiels calculés à la cote $\overline{z} = L/R_0$, nous pouvons calculer les valeurs à la cote $\overline{z} = (L/R_0 - pas)$ des variables :

$$\overline{R}(\overline{z}), \frac{\partial \overline{R}(\overline{z})}{\partial \overline{z}}, \overline{H}(\overline{z}), \overline{v}_z^0(\overline{z}), \overline{v}_r^0(\overline{z}), \overline{s}_{zz}^0(\overline{z}), \overline{s}_{rz}^0(\overline{z})$$

Pratiquement, nous utilisons une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 afin de minimiser l'imprécision liée à ce type d'approximation.

Nous nous retrouvons alors dans une situation similaire à celle rencontrée initialement, et nous pouvons résoudre le nouveau système linéaire obtenu. De proche en proche, nous sommes donc capables de calculer les valeurs et les variations successives de nos variables jusqu'à la cote $\overline{z} = 0$. La figure 3.11 présente l'organigramme global de la méthode de résolution.

IV.4. Résultats

IV.4.1. Comparaison avec le modèle « local »

Afin de comparer les solutions calculées par nos deux modèles, nous avons choisi de reproduire les mêmes conditions «test » que celles utilisées par André dans sa thèse [AND,99] pour évaluer numériquement son modèle.

La longueur de calcul adimensionnelle L/R_0 est fixée arbitrairement à 10 et le nombre de pas de discrétisation à 10000. La température à la sortie de filière T_0 vaut 200°C. Nous prenons un gradient thermique linéaire $d\overline{T}(\overline{z})/d\overline{z} = -10.625$ °C. L'énergie d'activation du matériau est arbitrairement prise égale à 100 kJ/mol de façon à obtenir des bulles dont le rayon n'évolue plus au delà de longueurs raisonnables. Nous considérons les cas où le taux de gonflage et d'étirage sont imposés égaux à 4.

a) Force et Surpression calculées

Pour les mêmes valeurs arbitraires initiales de force de tirage et de surpression interne adimensionnelles et pour le même critère de précision sur les valeurs de rayon et d'épaisseur initiale, les algorithmes convergent tous deux rapidement vers les valeurs présentées dans le tableau 3.1.

	Modèle « local »	Modèle « cylindrique »
Force	$\widetilde{F} = 11{,}6179$	$\overline{F}_{tirage} = 11{,}6179$
Surpression	$\widetilde{B} = 0{,}5922$	$\overline{\Delta P} = 1{,}1844$

tableau 3.1 : Valeurs de force de tirage et de surpression adimensionnelles calculées par les deux modèles ; conditions « test »

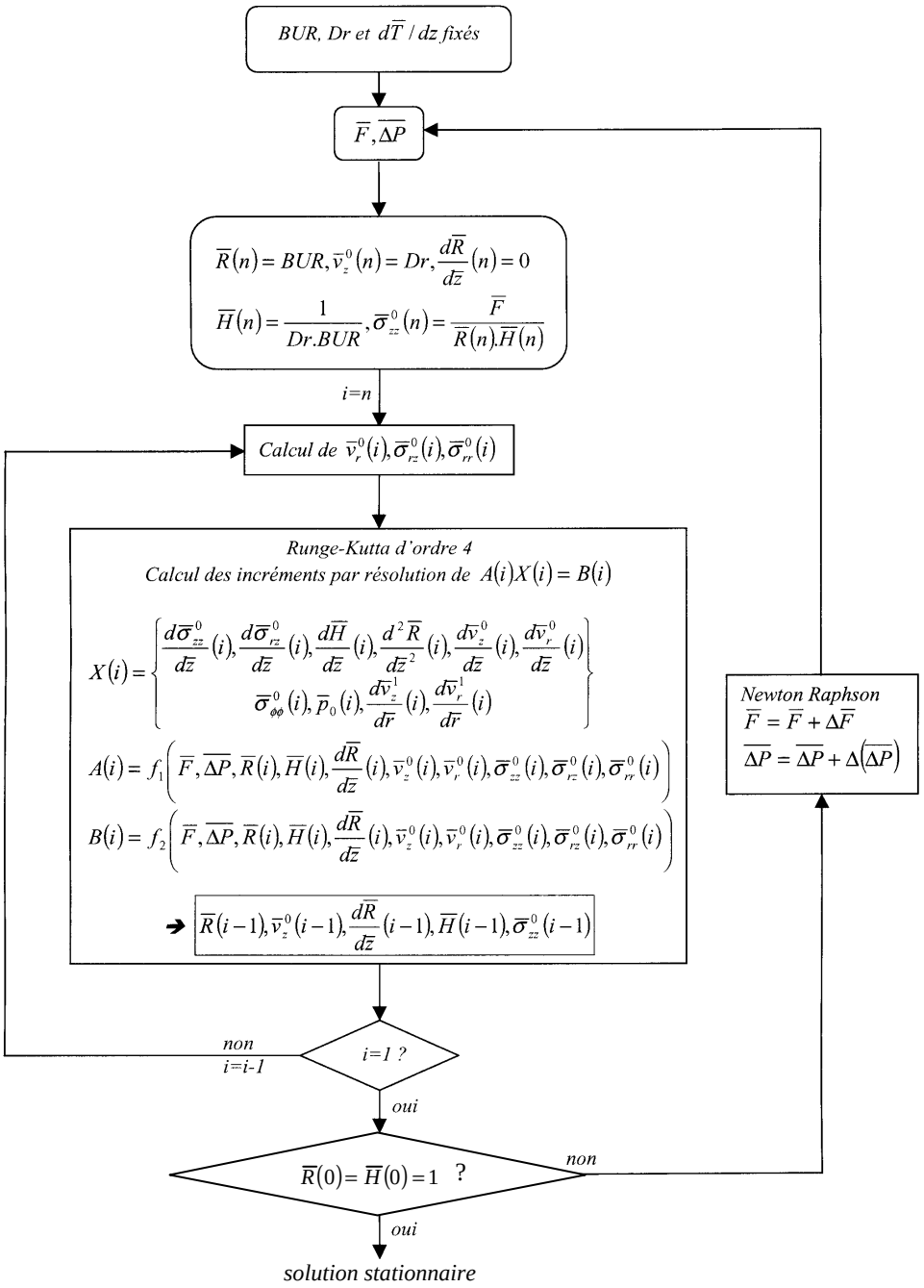


figure 3.11 : Organigramme de la méthode de tir employée en stationnaire

Nous retrouvons bien évidemment ici le fait que les paramètres adimensionnels $\overline{F}_{tirage}$ et $\overline{\Delta P}$ de notre modèle sont liés aux paramètres $\tilde{\tilde{F}}$ et $\tilde{\tilde{B}}$ du modèle de André par les relations (3.123) et (3.124) :

$$\boxed{\tilde{\tilde{F}}_{tirage} = \tilde{\tilde{F}}} \text{ et } \boxed{\frac{\overline{\Delta P}}{2} = \tilde{\tilde{B}}}$$

b) Valeurs des variables calculées

Nous pouvons comparer les évolutions de diverses variables prédites par les deux modèles. La figure 3.12 présente les évolutions selon l'axe d'étirage *z* des variables adimensionnalisées rayon, épaisseur, norme du vecteur vitesse et de l'angle *q* que fait la tangente à la bulle avec l'axe *z*. Ces différents profils sont confondus pour les deux modèles. Le rayon adimensionnel croît de la valeur $\overline{R}(0) = 1$ jusqu'à la valeur $\overline{R}(L/R_0) = BUR = 4$. L'épaisseur diminue bien quant à elle du fait du biétirage. Les conditions aux limites sont également bien respectés. Nous notons tout particulièrement que l'angle initial calculé n'est pas nul.

La comparaison de ces deux modèles est bien entendu satisfaisante puisque nous avons démontré l'équivalence des systèmes d'équations. Nous ne procèderons donc pas ici à l'analyse systématique des résultats des calculs effectués dans le cas stationnaire avec notre modèle, puisqu'elle ne s'éloignera en rien de celle, très complète, de André [AND,99]. Nous chercherons simplement à évaluer le réalisme des profils calculés en les comparant aux données expérimentales que nous avons acquises dans le chapitre 2.

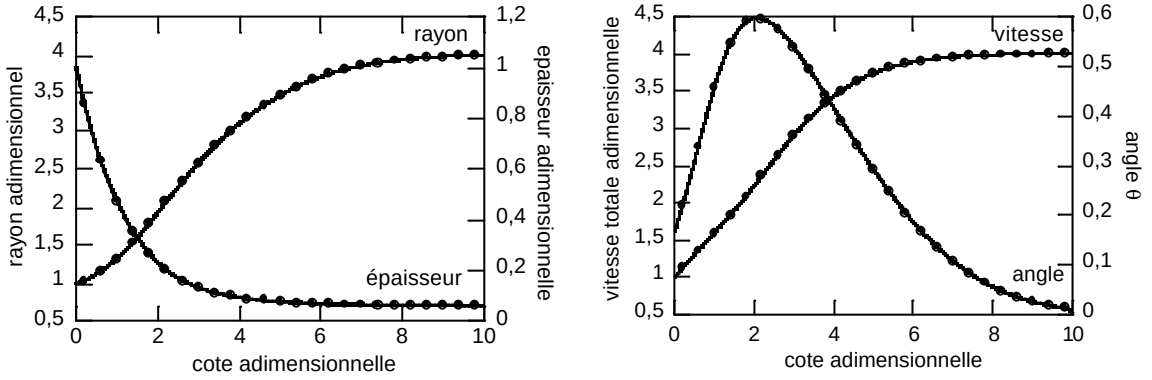


figure 3.12 : comparaison des résultats du modèle local (¾) [AN,99] et l'approche cylindrique (●) ; conditions « test »
(a) : rayon et épaisseur de la bulle ; (b) : norme du vecteur vitesse et angle de la bulle

IV.4.2. Confrontation expérimentale

Les cas que nous allons utiliser comme références sont les essais 2 et 9 de notre plan d'expérience. Le tableau 3.2 résume les conditions fixées lors de ces essais.

Essai	BUR	DR	FLH (cm)	$d\overline{T}/dz$ (°C)
2	2.2	19	17.5	-17.8
9	3	19	9	-34.7

tableau 3.2 : Récapitulatif des conditions d'essais références

Nous avons effectué deux simulations pour chacun de ces essais. Dans la première, nous avons, comme André [AND,99], fixé un gradient thermique constant, égal au gradient calculé pour quantifier la thermique dans la bulle (tableau 3.2). Dans la seconde, nous avons effectué un calcul en appliquant le profil de thermique mesuré expérimentalement. La figure 3.13 présente les profils ainsi définis.

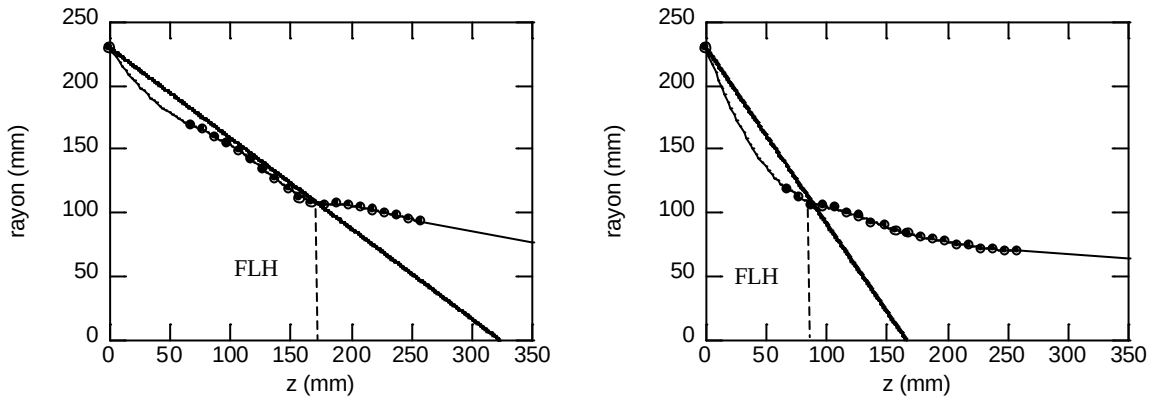


figure 3.13 : Profils de températures étudiés (•) : profil expérimental ; (¾) : profil linéaire équivalent ; (a) : essai 2 ; (b) essai 9

Dans le cas de l'essai 2 qui présente un refroidissement faible et une forme de bulle en « verre à pied » (figure 3.14), le profil linéaire reste assez proche du profil expérimental dans la partie fondue, et s'éloigne bien évidemment de celui-ci après la cristallisation. Le profil de bulle calculé avec le gradient thermique constant est assez éloigné de la forme expérimentale. La croissance du rayon est prédite plus tôt qu'elle ne survient en réalité, et le calcul doit être mené plus loin que la hauteur de figeage expérimentale (175 mm) pour obtenir le figeage « numérique ». Ces différences ont déjà été soulignées par André [AND,99]. Le décalage sur la position du figeage est explicable par le fait que seule la thermodépendance de la loi d'Arrhenius gouverne l'augmentation de la viscosité lors du refroidissement, et que le modèle ne prend absolument pas en compte le phénomène de cristallisation-solidification. Le figeage est donc en conséquence sous-évalué. Ce phénomène est mis en évidence par l'écart encore plus grand qui existe avec la courbe calculée cette fois en appliquant le profil expérimental.

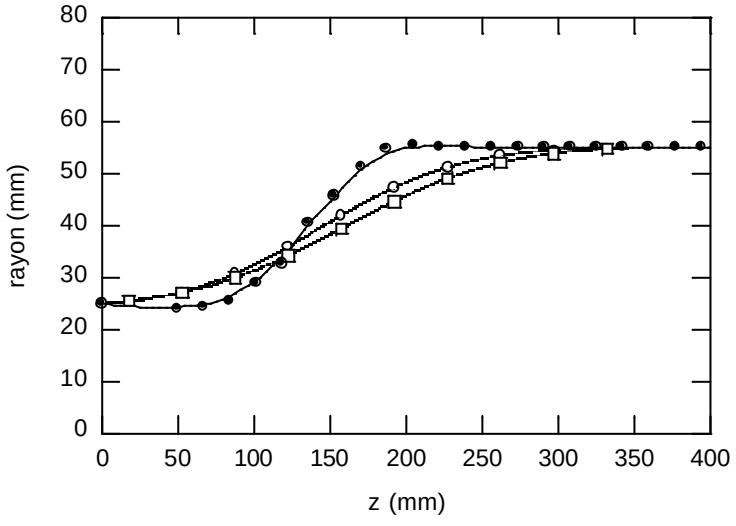


figure 3.14 : Formes de bulle obtenues ; essai 2 ; BUR = 2.2 ; DR = 19 ; FLH_{exp} = 175 mm
(•) : Mesures expérimentales
(○) : Gradient thermique constant $d\overline{T} / d\overline{z}$ = 17,8C
(□) : Profil de température expérimental

Ce phénomène est exacerbé dans le cas de l'essai 9, qui présente quant à lui un refroidissement fort et une forme en «bol» induite par l'effet Venturi sur le bord de l'anneau (voir figure 3.15). La courbe prédite avec le gradient thermique constant montre cette fois un retard au gonflement et un

décalage du figeage qui est prédit plus loin que la mesure expérimentale. L'application du profil thermique expérimental, très éloigné du profil linéaire, entraîne une forme de bulle prédite totalement différente et incompatible avec le résultat expérimental. La solidification induite par les seules évolutions de température est insuffisante pour rendre compte des phénomènes de figeage réels observés. Outre la cristallisation, l'autre phénomène majeur que notre modèle ne permet pas de prendre en compte est l'influence de l'aérodynamique, dont nous avons pourtant vu l'effet majeur sur la forme de la bulle dans la zone fondue.

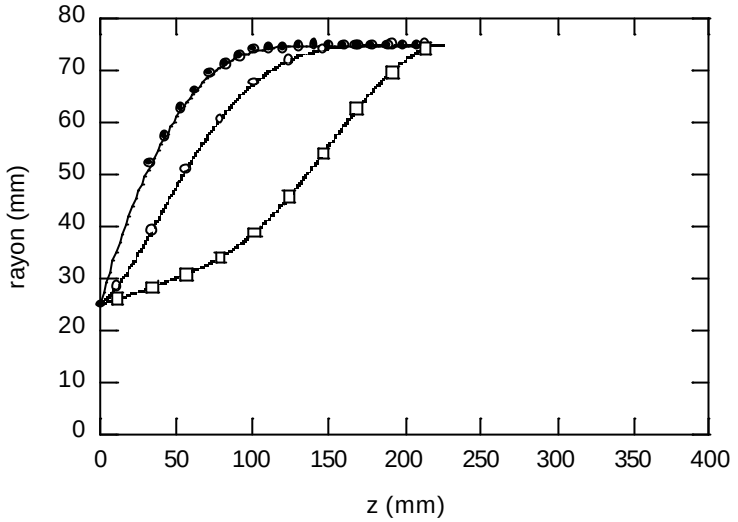


figure 3.15 : Formes de bulle obtenues ; essai 9 ; BUR = 3 ; DR = 19 ; FLH_{exp} = 9 mm
(●) : Mesures expérimentales
(○) : Gradient thermique linéaire $d\overline{T} / d\overline{z}$ =34,7°C
(□) : Profil de température expérimental

Les variations locales de températures que nous avons pourtant mis en évidence dans notre étude expérimentale du procédé, sont manifestement des phénomènes d'ordre d'importance moindre que les évolutions de propriétés physiques liées au refroidissement et à la cristallisation et l'aérodynamique que nous négligeons dans notre approche.

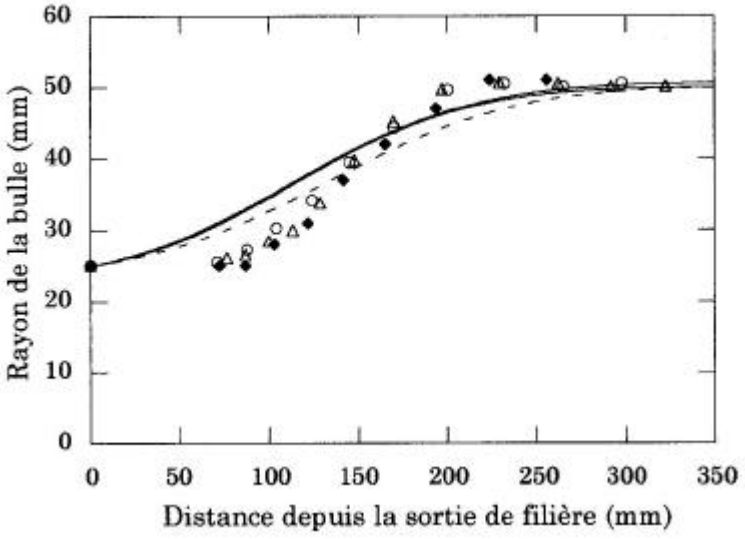


figure 3.16 : Formes de bulle pour deux PEbd et un PEbdl, d'après [AND,99] ; BUR=2 ; DR=8 ; FLH»200mm
(♦) et (○): Profils expérimentaux pour les Pebd ; (△) : Profil expérimental pour le Pebdl
Profils calculés : PEbd (¾) et PEbdl (- -)

En comparant un PEbdl et deux PEbd, André [AND,99] montre que le profil de bulle calculé est plus proche pour les PEbd qui ont une énergie d'activation plus importante (figure 3.16). Dans ce cas, la thermodépendance accrue tend à compenser en quelque sorte la sous-évaluation du figeage.

Il montre également qu'en prenant en compte l'aérodynamique dans le terme de pression par une loi de Bernoulli (relation (3.13)) les profils des bulles calculées sont dans certains cas plus proches des mesures expérimentales (figure 3.17). Cette approche, très séduisante, s'avère cependant inexploitable dans le cas instationnaire du fait du couplage existant entre les variations dimensionnelles de la bulle et les variations de vitesse de l'air autour de la bulle, et qui n'est pas exprimable aisément en instationnaire.

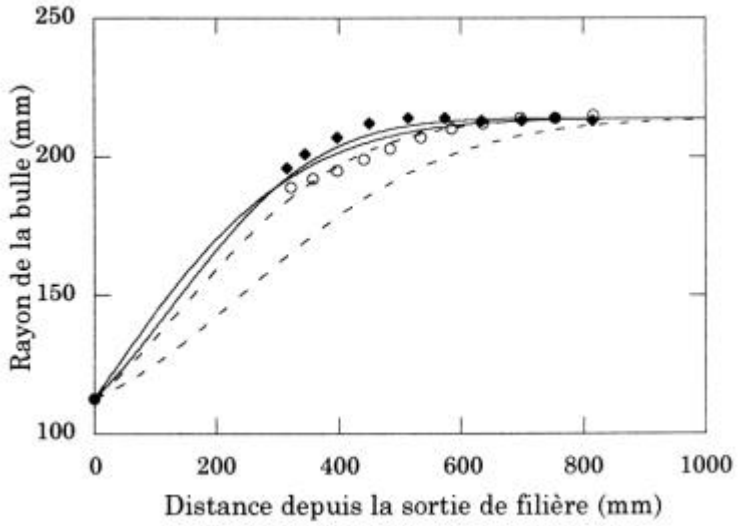


figure 3.17 : Effet de la prise en compte de l'aérodynamique sur le profil de bulle calculé pour un Pebd ;
(♦) : profil expérimental $d\overline{T}/d\overline{z}$ =17.2°C ; (○): Profil expérimental $d\overline{T}/d\overline{z}$ =22°C (ligne industrielle)
(- -) : modèle classique ; (¾) : modèle avec correction de pression (loi de Bernoulli)

V. Conclusions

Dans ce chapitre, nous avons développé une méthode de mise en équations permettant l'obtention d'un modèle thermomécanique instationnaire simple décrivant la bulle axisymétrique dans un repère cylindrique fixe lié à la filière d'extrusion. Cette méthode est basée sur un développement en fonction d'un petit paramètre e (rapport épaisseur/rayon initiaux) des variables et l'analyse des équations classiques de la mécanique aux différents ordres de grandeurs. L'analyse originale que nous avons décrite s'avère d'une efficacité remarquable quant à l'obtention des équations du système. Celles-ci s'avèrent de prime abord plus complexes que celles du modèle « local » du fait du repère non privilégié. Toutes les variables sont exprimées explicitement, ce qui favorisera naturellement les futures analyses de stabilité. De plus, l'emploi d'un tel référentiel rendra possible la rupture de l'axisymétrie, comme nous le verrons dans le chapitre 5.

Nous avons, préalablement à l'analyse de stabilité du système elle-même, traité le cas stationnaire (indépendant du temps) et montré l'équivalence de notre modèle avec celui « local » généralement utilisé dans la littérature. Notre mise en équations a néanmoins l'avantage de re-démontrer les principales hypothèses de la formulation locale. Compte tenu de cette équivalence, nous serons confrontés aux mêmes limitations concernant la multiplicité ou la disparition de solutions, notamment dans le cas viscoélastique.

La comparaison entre les profils de bulle prédits par le modèle avec les formes de bulles mesurées lors de l'étude expérimentale a montré les limites des hypothèses de notre modèle. Les écarts

relevés relèvent certainement de la non prise en compte de phénomènes aussi importants que la cristallisation, l'aérodynamique et le caractère viscoélastique du matériau (même si nous avons montré que celui de notre étude était relativement peu marqué). Néanmoins, nous allons dans les prochains chapitres effectuer l'analyse de stabilité du modèle, tout d'abord axisymétrique puis non axisymétrique, afin d'évaluer la pertinence d'une telle modélisation quant à la prédiction de l'apparition des différentes instabilités analysées dans le chapitre précédent.

VI. Références bibliographiques

[AGA,96] AGASSANT J. F., AVENAS P., SERGENT J.P., VERGNES B., VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques 3ème édition*, Technique & Documentation, Paris, 1996

[AKA,99] AKAIKE O., TSUJI T. and NAGANO Y., *Simulation of blown-film process taking account of cooling-air effect*, Intern. Polym. Process.,vol. 14, n° 2, pp. 168-174, 1999

[AND,92] ANDRIANARAHINJAKA H., *Etude des instabilités lors de la fabrication des films thermoplastiques biétirés par le procédé de soufflage de gaine*, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1992

[AND,96] ANDRIANARAHINJAKA H. & MICHEAU P., *Phénomènes d'instabilité en soufflage de gaine : une analyse de stabilité linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, t.322, série II b, pp. 363-370, 1996

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[ASH,92] ASHOK B.K. & CAMPBELL G.A., *Two-phase simulation of tubular film blowing of crystalline polymers*, Intern. Polym. Process., vol. 7, n° 3, pp. 240-247, 1992

[CAI,88] CAIN J. & DENN M. M., *Multiplicities and instabilities in film blowing*, Polym. Eng. Sci., vol. 28, n°23, pp. 1527-1541, 1988

[CAO,89] CAO B. & CAMPBELL G.A., *Air ring effect on blown film dynamics*, Intern. Polym. Process., vol. 4, n° 2, pp. 114-118, 1989

[CAO,90] CAO B., SWEENEY P. & CAMPBELL G.A., *Simultaneous surface and bulk temperature measurement of Polyethylene During Film Blowing*, Journal of Plastic Film & Sheeting, vol. 6, pp. 117-130, 1990

[CAM,92] CAMPBELL G.A., OBOT N.T. & CAO B., *Aerodynamics in the blown film process*, Polym. Eng. Sci., vol. 32, n° 11, pp. 751-759, 1992

[DEA,90] DEALY J.M. & WISSBURN K.F., *Melt rheology and its role in plastics processing. Theory and applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1990

[DEM,83] DEMAY Y., *Instabilité d'étirage et bifurcation de Hopf* , Thèse de doctorat, Université de Nice, 1983

[DEN,75] DENN M.M., PETRIE C.J.S. & AVENAS P., *Mechanics of steady spinning of a viscoelastic fluid*, AIChE J., vol. 23, pp. 791-799, 1975

[DOU,01] DOUFAS A.K. & McHUGH A.J., *Simulation of film blowing including flow-induced crystallization*, J. Rheol., vol. 45, n° 5, pp. 1085-1104, 2001

[FER,97] FERON B., WOLF D. & WORTBERG J., *Optimized cooling and gauge tolerances in blown film extrusion*, Polym. Eng. Sci., vol. 37, n° 5, pp. 876-881, 1997

[FIS,77] FISHER R. J. & DENN M. M., *Mechanics of nonisothermal polymer melt spinning*, AIChE Journal, vol.23, n°1, pp.23, 1977

[HAN,75] HAN C. D. & J. Y. PARK, *Studies on blown film extrusion. II.Analysis of the deformation and heat transfer process*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 19, pp. 3277-3290, 1975

[HOU,98] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady flow of an axisymmetric annular film under gravity*, Physics of fluids, vol. 10, n° 10, pp. 2500-2516, 1998

[HOU,00 a] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. I. General model and its numerical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 229-259, 2000

[HOU,00 b] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. II. Linearized model and its analytical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 303-325, 2000

[HOU,00 c] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Cooling of a viscoelastic film during unsteady extrusion from an annular die*, Rheol. Acta, vol. 39, pp. 44-61, 2000

[HOU,00 d] HOUSIADAS K. , GEORGIOU G. & TSAMOPOULOS J., *The steady annular extrusion of a Newtonian liquid under gravity and surface tension*, Int. J. Numer. Meth. Fluids , vol. 33, pp. 1099-1119, 2000

[HOU,00 e] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *3-Dimensional stability analysis of the film blowing process*, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK, , 3, 152-154, 2000

[KAN,84] KANAI T. & WHITE J. L. , *Kinematics, dynamics and stability of the tubular film extrusion of various Polyethylenes*, Polym. Eng. Sci., vol. 24, n° 15, pp. 1185-1201, 1984

[KAN,85] KANAI T. & WHITE J. L. , *Dynamics, heat transfer and structure developpement in tubular film extrusion of polymer melts : a mathematical model and predictions*, J. Polym. Eng., vol. 5, n° 2, pp. 136-157, 1985

[LUO,85] LUO X.L. & TANNER R.I., *A computer study of film blowing*, Polym. Eng. Sci., vol. 25, n° 10, pp. 620-629, 1985

[MEN,75] MENGES G. & PREDOHL W.O., *Certain aspects of film Bbowing of low-density Polyethylene*, Polym. Eng. Sci., vol. 15, n° 5, pp. 394-399, 1975

[MIT,01] MITSOULIS E., ARGYROPAIDAS J. & MISSIRLIS K., *Recent developments*

in the simulation of industrial film blowing lines, XIIIth Polymer Processing Society meeting, Montreal, Canada, 2001

[PEA,66] PEARSON J.R.A , *Mechanical principles of polymer melt processing*, Pergamon, Londres, 1966

[PEA,70 a] PEARSON J. R. A. & PETRIE C. J. S. , *The flow of a tubular film. Part 1 : Formal mathematical representation*, J. Fluid Mech., vol. 40, n° 1, pp. 1-19, 1970

[PEA,70 b] PEARSON J. R. A. & PETRIE C. J. S. , *The flow of a tubular film. Part 2 : Interpretation of the model and discussion of solutions*, J. Fluid Mech., vol. 42, n° 3, pp. 609-625, 1970

[PEA,70 c] PEARSON J.R.A & PETRIE C. J. S., *A fluid-mechanical Analysis of the film-blowing process*, Plastics and Polymers , vol. 38, pp. 85-94, 1970

[PET,73] PETRIE C.J.S., *Memory effect in a non-uniform flow : a study of the behaviour of a tubular film of viscoelastic fluid*, Rheol. Acta, vol. 12, pp. 92-99, 1973

[PET,74] PETRIE C.J.S., *Mathematical modelling of heat transfer in film blowing : a case study*, Plastics and Polymers, vol. 42, pp. 259-264, 1974

[PET,75 a] PETRIE C.J.S., *A Comparison of theoretical predictions with published experimental measurements on the blown film process*, AIChE Journal, vol. 21, n° 2, pp. 275-282, 1975

[PET,75 b] PETRIE C.J.S., *Mathematical modelling and the systems approach in plastics processing : The blown film process*, Polym. Eng. Sci., vol. 15, n° 10, pp. 708-724, 1975

[PON,00] PONTAZA J.P. & REDDY J.N., *Numerical simulation of tubular blown film processing*, Numerical Heat Transfer, Part A, vol. 37, pp. 227-247, 2000

[SID,96 a] SIDIROPOULOS V., TIAN J.J. & VLACHLOPOULOS J., *Computer simulation of film blowing*, Journal of Plastic Film & Sheeting, vol. 12, pp. 107-129, 1996

[SID,96 b] SIDIROPOULOS V., TIAN J.J. & VLACHLOPOULOS J., *Computer simulation of film blowing*, TAPPI Journal, vol. 79, n° 8, pp. 113-118, 1996

[SID,00 a] SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS J., *An investigation of Venturi and Coanda effects in blown film cooling*, Intern. Polym. Process., vol. 15, n°1, pp. 40-45

[SID,00 b] SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS J., *The effects of dual-orifice air-ring design on blown film cooling*, Polym. Eng. Sci., vol. 40, n°7, pp. 1611-1618

[SID,01] SIDIROPOULOS V. & VLACHOPOULOS J., *Numerical study of internal bubble cooling (IBC) in film blowing*, Intern. Polym. Process., vol. 16, n°1, pp. 48-53, 2001

[SIL,96] SILAGY D., *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'extrusion de film a plat de polymère*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996

[VLA,00] VLACHOPOULOS J. & SIDIROPOULOS V., *The role of aerodynamics of cooling and polymer rheology in the Film Blowing Process*, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK, vol. 3, pp. 403-405, 2000

[WOL,97] WOLF D., FERON B. & WORTBERG J., *Numerical analysis of cooling air systems in film blowing*, Intern. Polym. Process., vol. 12, n° 1, pp. 38-44, 1997

[YAM,87] YAMANE H. & WHITE J. L., *Simulation of tubular film extrusion of polymer melts*, Intern. Polym. Process., vol. 2, n° 2, pp. 107-112, 1987

[YEO,76] YEOW Y. L., *Stability of tubular film flow : a model of the film-blowing process*, J. Fluid Mech., 75, 3, 557-591, 1976

[YOO,92] YOON K.S. & PARK C.W., *Analysis of a isothermal two-layer blown-film coextrusion*, Polym. Eng. Sci., vol. 32, n°23, pp. 1771-1777, 1992

Chapitre 4. Analyse de stabilité axisymétrique

I. La modélisation des instabilités dans les procédés d'étirage 103
I.1. L'analyse de stabilité linéaire 103
I.1.1. Principe 103
I.1.2. Méthodes de résolution 104
I.1.3. Application au filage textile 105
I.1.4. Application au cast-film 107
I.2. Analyse de stabilité dynamique 108
I.2.1. Principe 108
I.2.2. Etudes effectuées pour le filage textile et le cast-film 108
I.3. Comparaison et limitations des deux méthodes 109
I.4. Application au soufflage de gaine 110
I.5. Conclusions 114

II. Etude de stabilité linéaire du modèle 114
II.1. Développement des équations 115
II.2. Résolution 116
II.2.1. Choix des conditions aux limites 116
II.2.2. Résolution pour λ donnée 119
II.2.3. Construction de l'équation aux valeurs propres 119

III. Analyse du modèle et résultats obtenus 123
III.1. Premiers calculs 123
III.1.1. Recherche de valeur propre 123
III.1.2. Influence de la condition aux limites 128
III.1.3. Influence de la longueur de calcul 129
III.2. Influence des différents paramètres 130
III.2.1. Paramètres thermiques 130
III.2.2. Taux de gonflage 132
III.3. Synthèse des résultats 133
III.4. Confrontation expérimentale 135

IV. Conclusions et discussion 137

V. Référence bibliographiques 138

Chapitre 4. Analyse de stabilité axisymétrique

Nous nous sommes dotés dans le chapitre précédent d'un modèle instationnaire, axisymétrique et anisotherme du soufflage de gaine d'un fluide newtonien décrit dans un repère cylindrique fixe lié à la filière d'extrusion. Dans ce chapitre, nous proposons une analyse de stabilité du système d'équations obtenu, en conservant dans une première étape l'hypothèse d'axisymétrie. Nous cherchons à retrouver numériquement les conditions de déclenchement du comportement instable périodique et axisymétrique expérimentalement observé et désigné sous le nom de « draw resonance », ou résonance d'étirage.

Dans une première partie, nous exposons les différentes méthodes permettant d'effectuer cette analyse de stabilité, en prenant l'exemple des procédés déjà abordés précédemment et comportant une phase d'étirage : le filage textile et le cast-film. Nous présentons également les quelques analyses de stabilité du procédé de soufflage de gaine proposées dans la littérature. Nous soulignerons notamment les limitations de ces études et dégagerons la méthode qui nous semble la plus adéquate.

Nous présentons ensuite la procédure d'analyse de stabilité effectuée sur notre modèle et la méthode de calcul suivie. Nous étudierons l'influence des différents paramètres du modèle sur sa stabilité et confronterons enfin les résultats obtenus avec les données expérimentales présentées dans le chapitre 2.

I. La modélisation des instabilités dans les procédés d'étirage

La modélisation des instabilités des procédés (pulsations périodiques et amplifiées avec le temps survenant pour certaines conditions précises) fait l'objet d'une littérature abondante. Dans le cas des procédés comportant un étirage, on recense deux méthodes d'analyse d'un système d'équations en espace-temps, l'analyse de stabilité linéaire et l'analyse de stabilité dynamique.

I.1. L'analyse de stabilité linéaire

I.1.1. Principe

Cette analyse est basée sur l'étude de la croissance temporelle de petites perturbations périodiques en espace d'amplitude suffisamment faible pour permettre de négliger les termes non-linéaires. Il s'agit donc d'étudier l'évolution d'une petite perturbation de la solution stationnaire des équations du modèle. Typiquement, on écrit la forme perturbée d'une variable stationnaire $A_0(x)$ sous la forme découplée en variable d'espace (x) et de temps (t) :

$$A(x,t) = A_0(x) + e^{\lambda t}\tilde{A}(x) \qquad (4.1)$$

λ est un nombre complexe appelé *valeur propre* et $\tilde{A}_1(x)$ est une *fonction propre*, complexe également. Cette forme perturbée est introduite dans les équations du modèle qui sont ensuite linéarisées en négligeant les termes d'ordre supérieur à 1. La valeur stationnaire des différentes variables étant supposée connu (i.e. ayant fait l'objet d'un calcul spécifique préalable), le système d'équations se résume, moyennant l'intégration de conditions aux limites sur les paramètres controlés du procédé, à un système différentiel complexe où les inconnues sont les fonctions propres et la valeur propre.

Il existe une infinité de valeurs propres solutions de ce système. La partie réelle de chaque valeur propre représente une amplitude d'oscillations, alors que la partie imaginaire est reliée à la fréquence de celle-ci. Lorsque toutes les parties réelles des valeurs propres sont négatives cela signifie que la perturbation, du fait de son expression exponentielle, tend vers zéro, et le système tend vers la stabilité. A l'inverse, lorsqu'une (ou *a fortiori* plusieurs) valeur propre a une partie réelle positive, la solution diverge exponentiellement de la solution stationnaire. L'objectif de l'analyse de stabilité linéaire est donc de déterminer dans quelles conditions une valeur propre voit sa partie réelle passer d'une valeur négative à une valeur positive. En parcourant l'intervalle des valeurs des paramètres caractéristiques du procédé, il est possible d'obtenir une cartographie des zones où la partie réelle de la valeur propre est soit négative, soit positive, délimitant ainsi les zones de stabilité prédite du procédé modélisé. Il est à noter que si un nombre complexe est valeur propre, son conjugué l'est également. On cherche donc en réalité des couples de valeurs propres.

Notons que dans le cas du filage textile et du cast-film, on parle de bifurcation de Hopf [DEM,83]. La solution stationnaire perd sa stabilité au-delà d'un taux d'étirage critique avec une paire de valeurs propres complexes conjuguées. Pour un taux d'étirage supérieur au taux d'étirage critique, l'amplitude des oscillations varie de manière exponentielle (domaine linéaire, voir figure 4.1) puis il y a « saturation » par les effets non-linéaires. La solution périodique obtenue est stable.

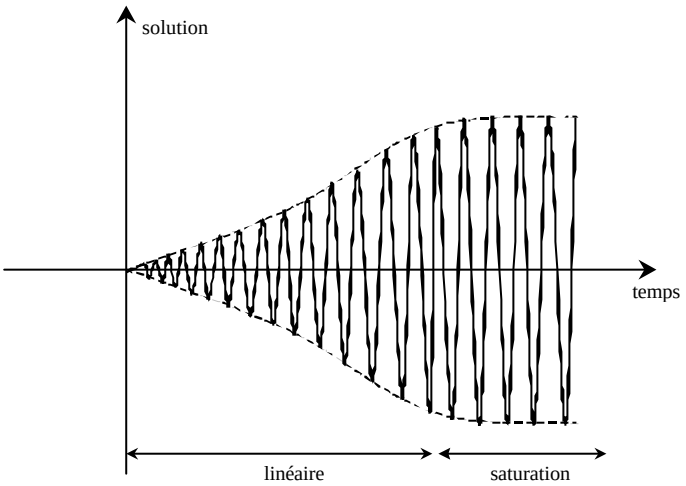


figure 4.1 : Représentation schématique d'une instabilité dans le cas d'une bifurcation de Hopf, d'après [DEM,83]

I.1.2. Méthodes de résolution

Dans la littérature, deux méthodes de résolution sont généralement évoquées pour ce type de système.

La première est une intégration des équations linéarisées par une méthode de Runge-Kutta à partir d'un des bords couplée à une méthode de tir (Newton-Raphson) sur l. La valeur propre est alors ajustée afin de vérifier les conditions aux limites à l'autre bord (équation aux valeurs propres).

La seconde utilise méthode d'approximation par différences finies pour transformer le système différentiel en système algébrique [CHA,81][AND,96] qui se résume sous la forme du problème matriciel :

$$BX = \Lambda CX \qquad (4.2)$$

Où Λ est un vecteur complexe contenant les valeurs propres du système, B et C deux matrices réelles, X la matrice complexe contenant les valeurs discrétisées des différentes fonctions propres $\tilde{A}(x)$.

Dans des cas de systèmes simples comme le filage textile isotherme, ces deux méthodes aboutissent aux mêmes valeurs propres, comme le montrent par exemple Chang, Denn et Geyling [CHA,81]. La méthode de tir a pour principal désavantage de nécessiter une valeur initiale du paramètre de tir, et donc d'une connaissance *a priori* d'au moins son ordre de grandeur, sous peine de ne pas obtenir de convergence de l'algorithme vers la « bonne » valeur propre, c'est à dire celle de plus grande partie réelle. Une des façons de procéder est de partir de valeurs de paramètres où cette valeur propre est bien déterminée et de progressivement les faire varier en suivant l'évolution de la valeur propre. Nous parlerons par la suite d'un « suivi de valeur propre ».

Pour des systèmes plus complexes, des réserves quant à la mise en œuvre de la méthode de tir sont émises par certains auteurs, comme Andrianarahinjaka [AND,96]. En effet il est possible que les valeurs propres se « croisent » dans le plan complexe, c'est-à-dire qu'une valeur propre initialement de partie réelle inférieure à celle suivie ait une partie réelle supérieure pour des conditions données. En ne suivant qu'une valeur propre, on prend donc le risque de « manquer » une valeur propre, et d'obtenir une cartographie de stabilité erronée. Demay [DEM,83] démontre que ce n'est pas le cas du filage textile. Cependant, pour des cas plus complexes, et afin d'être sûr de sa valeur propre, il serait alors nécessaire de suivre plusieurs valeurs propres à la fois, et donc multiplier considérablement les calculs.

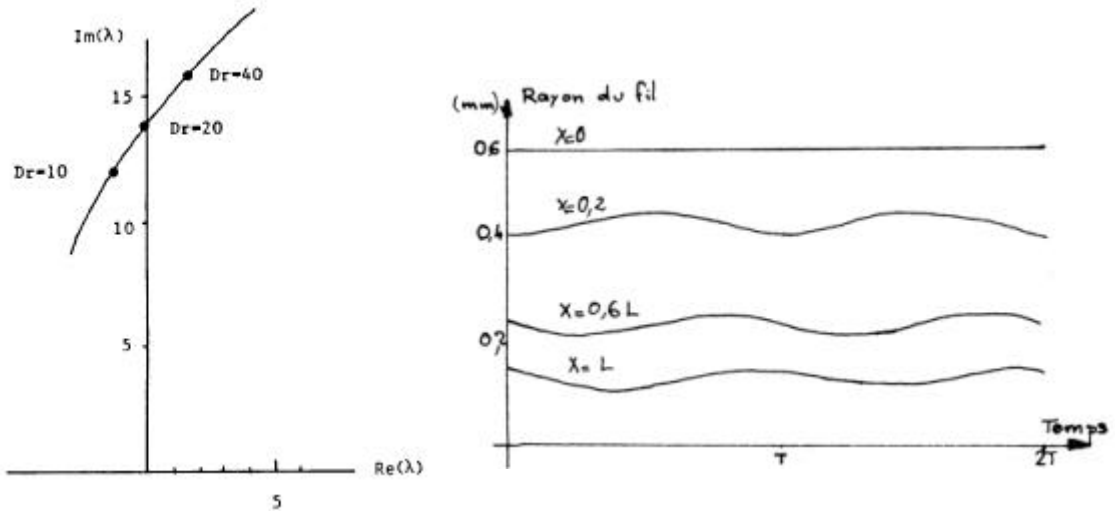
La méthode matricielle s'avère plus directe à utiliser. C'est pourquoi, comme nous le verrons par la suite, les auteurs qui se sont penchés sur l'étude du cas complexe du soufflage de gaine ont plutôt retenu la méthode matricielle.

Dans la suite, on se propose de détailler cette méthode dans le cas du filage textile puis du cast-film (les deux procédés étant traités de manière assez similaire) et de décrire les principaux résultats obtenus.

I.1.3. Application au filage textile

Depuis une quarantaine d'années, la modélisation du filage textile et de ses instabilités fait l'objet de nombreux travaux. A partir notamment des travaux de Kase et Matsuo [KAS,65], Pearson et Matovich [PEA,69] proposent la première étude de stabilité, prédisant notamment l'existence d'un taux d'étirage critique de 20 pour un fluide newtonien isotherme, valeur retrouvée expérimentalement par Chang et Denn [CHA,79].

Demay [DEM,83] étudie l'évolution de la valeur propre de plus grande partie réelle pour le filage newtonien isotherme (voir figure 4.2 (a)). L'analyse de stabilité linéaire ne donnant pas accès directement à la forme réelle de l'instabilité, il reprend et généralise la méthode de calcul des valeurs propres et montre que l'on peut, par des techniques dites de bifurcation, en résolvant une série d'équations linéarisées avec second membres, calculer la solution périodique au voisinage du point critique (voir figure 4.2 (b)). (a)). L'analyse de stabilité linéaire ne donnant pas accès directement à la forme réelle de l'instabilité, il reprend et généralise la méthode de calcul des valeurs propres et montre que l'on Il est nécessaire pour cela de pousser les calculs au-delà de la perturbation linéaire, et cette méthode semble rapidement difficilement utilisable pour des procédés plus complexes. L'étude de la partie imaginaire de la valeur propre permet de remonter à la période de l'instabilité.



(a) *(b)*

figure 4.2 : Analyse de stabilité du filage textile, d'après [DEM,83] ;
(a) : Evolution de la valeur propre de plus grande partie réelle avec le taux d'étirage Dr
(b) : Calcul de l'évolution du rayon du fil suivant la position sur l'axe d'étirage ; Dr=20.5

Demay [DEM,83] étudie également l'influence du refroidissement en faisant intervenir une équation de la chaleur similaire à celle évoquée dans la mise en équations du chapitre 3. Il montre, comme l'illustre la figure 4.3, que l'augmentation du transfert thermique, caractérisé dans ce cas par le nombre adimensionnel de Stanton (voir par exemple [AGA,96]), provoque une augmentation rapide du taux d'étirage critique. Au delà d'une certaine valeur de ce nombre de Stanton, le filage est inconditionnellement stable. Encore une fois, il y a la une cohérence totale avec les résultats expérimentaux (voir étude bibliographique du chapitre 2). Il montre l'effet stabilisateur de l'augmentation de la longueur d'étirage dans l'air ou la diminution de la vitesse ou de la section initiale.

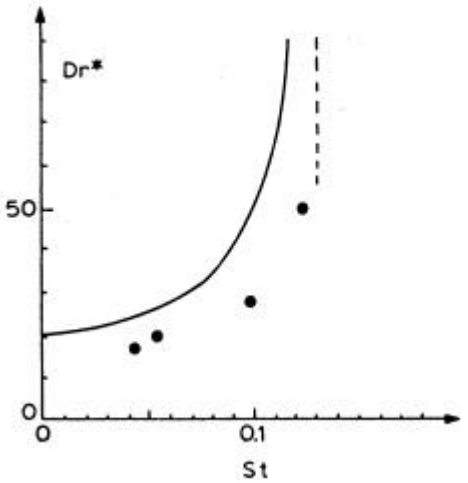


figure 4.3 : Evolution du taux d'étirage critique en fonction du nombre de Stanton (d'après [DEM,83]) ;
(--) courbe théorique ; (•) points de mesure

La même analyse menée sur un modèle isotherme viscoélastique (loi de Maxwell [DEN,75][FIS,77][DEM,83]) permet de mettre en évidence, en faisant évoluer le nombre de Deborah *De*, l'existence (cf. figure 4.4) :

- d'une zone instable périodique à faible nombre de Deborah pour des taux d'étirage légèrement supérieurs à ceux obtenus en newtonien,

- d'une zone pour des nombres de Deborah plus importants où il n'est plus possible d'obtenir une solution des équations stationnaires. C'est la zone « inaccessible » évoquée au chapitre précédent et qui correspondrait physiquement à la zone de rupture du filament observée expérimentalement.

La zone de stabilité à taux d'étirage très élevée pour de faibles nombres de Deborah (zone A sur la figure 4.4) n'a jamais été observée expérimentalement à notre connaissance [AGA,96].

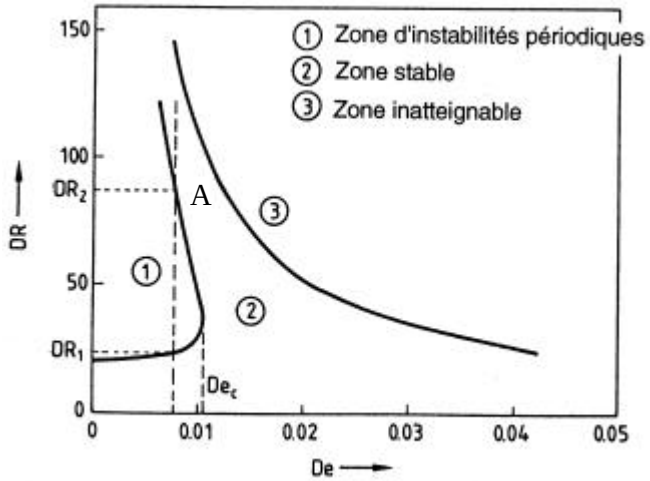


figure 4.4 : Evolution du taux d'étirage critique en fonction du nombre de Deborah, d'après [DEM,83]

I.1.4. Application au cast-film

La méthode d'analyse de stabilité linéaire est globalement identique à celle développée dans le cas du filage textile. Seul le modèle lui même devient plus complexe.

Les premières études effectuées s'appuient directement sur les résultats du filage textile. Yeow [YEO,74] suppose que la largeur du film reste constante au cours de l'étirage, et démontre que ceci revient à résoudre un problème dont les équations sont identiques à celles du filage textile. Un facteur de forme A caractérise le rapport de dimensions entre la hauteur d'étirage X et la demi-largeur d'étirage L_0. Silagy [SIL,96] démontre l'équivalence du cas où A=0 avec les équations du filage textile. Ainsi, muni de la valeur propre dominante issue du filage, il fait évoluer petit à petit son facteur de forme vers les valeurs réalistes du point de vue du procédé. Les premiers calculs de Yeow reposent sur l'analyse de stabilité linéaire des solutions analytiques des équations (de forme exponentielle) et retrouvent, pour un modèle newtonien isotherme, le taux d'étirage critique voisin de 20 du filage textile. L'équipe de Co [ANT,88][IYE,96] étudie l'influence de la viscoélasticité sur la stabilité. La première loi de comportement utilisée [ANT,88] est une loi de Maxwell dans laquelle temps de relaxation et viscosité dépendent du taux d'élongation. Le calcul de la solution stationnaire a permis d'établir, de la même façon que pour le filage textile, l'existence d'une zone inatteignable, assimilée là aussi à la zone de casse systématique du film.

La méthode de stabilité linéaire, effectuée en considérant des perturbations dans le sens de l'écoulement et dans le sens perpendiculaire, permet de mettre en évidence l'existence d'un « nez d'instabilité », similaire à celui présenté dans le cas du filage textile sur la figure 4.4. Cette première approche permet d'effectuer, comme le souligne Silagy [SIL,96], des études de stabilité sans être confronté à des gros problèmes de résolution. Ainsi l'influence de la viscoélasticité a pu être mise en évidence de manière cohérente avec les données expérimentales.

La méthode de stabilité linéaire appliquée aux modèles 1D permet d'obtenir des résultats cohérents avec les observations expérimentales. Cependant, ces modèles ne prennent pas en compte

l'inhomogénéité de l'épaisseur du film, et ne sont donc pas pleinement satisfaisants, ne modélisant pas par exemple l'écart expérimentalement montré entre le centre et le bord du film. Des modèles 2D ont été développés afin de décrire l'influence du défaut « os de chien » , mais Silagy [SIL,96] émet des réserves sur la complexité de la résolution qui découlerait d'une analyse de stabilité linéaire de ces équations. Il n'existe pas, à notre connaissance, de description d'une telle analyse dans la littérature.

I.2. Analyse de stabilité dynamique

I.2.1. Principe

Il s'agit cette fois d'étudier directement la réponse dynamique du système à une petite perturbation. Pour cela les équations du modèle sont résolues par méthode directe (différences ou éléments finis) en temps et espace et l'on observe directement la réponse du système à une sollicitation quelconque (de type Dirac par exemple) sur l'une de ses variables. Selon les conditions, on observera soit le retour à une solution stationnaire, soit l'apparition d'une pulsation périodique. Il s'agit d'une méthode séduisante car très « intuitive » permettant d'obtenir la réponse du système à des variations inévitables dans les conditions de mise en œuvre (variation de débit, température, viscosité…). Néanmoins elle nécessite la mise en oeuvre d'outils numériques plus complexes que la simple intégration des équations par la méthode de «tir » et ne s'appliquera qu'aux systèmes d'équations propices à la formulation de type éléments finis.

I.2.2. Etudes effectuées pour le filage textile et le cast-film

Cette méthode est utilisée dans le cas du filage textile newtonien isotherme par Ishihara et Kase [ISH,75][ISH,76] qui mettent en évidence (figure 4.5) l'apparition de la solution périodique au delà d'un taux d'étirage critique de 20. En dessous de ce taux, le rayon final du fil se stabilise rapidement vers sa valeur stationnaire imposée. Pour un taux d'étirage proche du taux critique, le rayon final s'amortit de moins en moins rapidement, pour diverger lorsque l'on dépasse le taux critique. Les amplitudes et fréquences mesurées sont très proches de celles déduites des valeurs propres calculées par l'analyse de stabilité linéaire. La notion de « saturation » de l'instabilité est mise en évidence (bifurcation de Hopf).

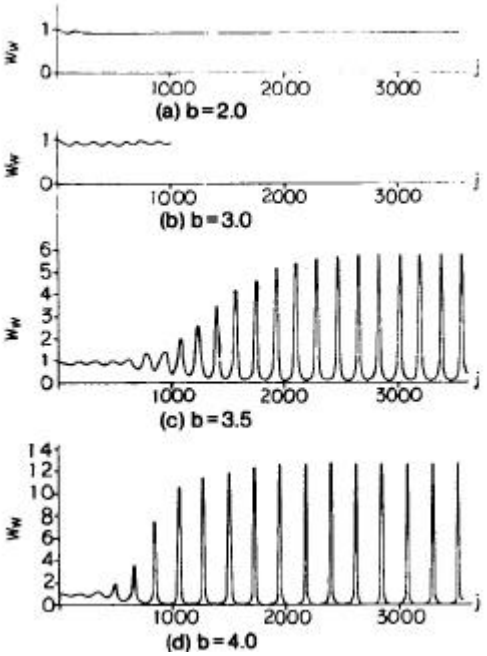


figure 4.5 : Simulation de l'évolution périodique du diamètre, modèle newtonien isotherme, d'après [ISH,76] ; b=ln(DR)

Barq [BAR,94] utilise le même principe dans le cas du modèle de cast-film à largeur constante, dans le cas newtonien puis viscoélastique. Silagy [SIL,96] développe quant à lui un modèle 2D, considérant une largeur et une épaisseur variables en introduisant des conditions de surface libre supplémentaires. En faisant varier le rapport d'aspect A défini comme le rapport entre la longueur d'étirage et la largeur initiale du film, il obtient une courbe critique (voir figure 4.6) qui montre l'effet stabilisant du rapport d'aspect lorsque celui-ci augmente.

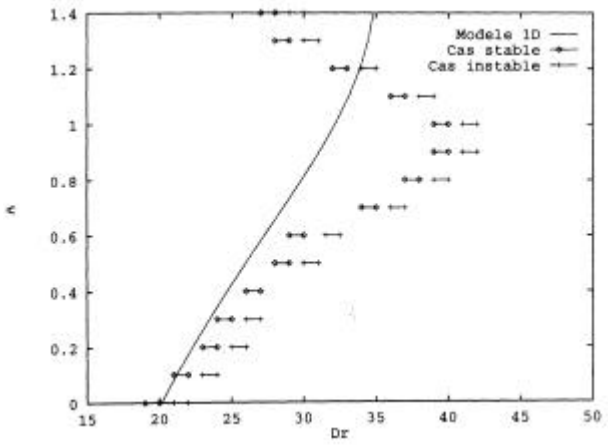


figure 4.6 : Courbe critique 2D dynamique, comparaison avec le cas1D de stabilité linéaire (d'après [SIL,96])

En traçant les évolutions de la largeur et de l'épaisseur finale avec le temps dans un cas typiquement instable (voir figure 4.7), il retrouve qualitativement l'allure expérimentale décrite au chapitre 2 [BAR,90], en particulier l'opposition de phase existant entre les épaisseurs au bord et au centre du film produit. Des écarts sont malgré tout constatés sur les valeurs de taux d'étirage critique.

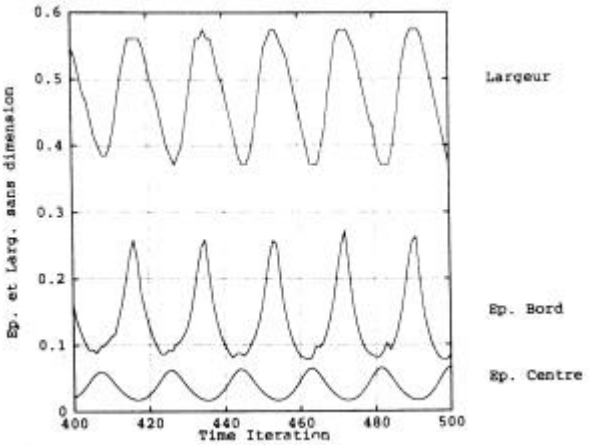


figure 4.7 : Evolution avec le temps des dimensions d'un film étiré à plat instable, d'après [SIL,96]

I.3. Comparaison et limitations des deux méthodes

La modélisation des instabilités d'étirage dans les cas simples du filage et du cast-film sont en accord avec les résultats expérimentaux et mettent en évidence l'existence d'une instabilité qui se caractérise par des pulsations périodiques et d'amplitude croissante avec le temps, expérimentalement connues sous le vocable général de « draw resonance ».

Dans le cas du filage textile, l'utilisation des deux méthodes existantes, stabilité linéaire ou dynamique, à partir du même modèle (i.e. des mêmes équations), aboutit aux mêmes résultats quant

à la détection des instabilités en fonction des paramètres du procédé (taux d'étirage, viscoélasticité…). Les seules différences notées dans la littérature concernent la facilité d'utilisation ainsi que le temps de calcul nécessaire.

Le cas du cast-film souligne quant à lui un aspect fondamental de l'analyse de la stabilité d'un procédé. En effet les études ont montré la nécessité d'avoir un modèle le plus réaliste possible afin de décrire l'ensemble des caractéristiques des instabilités rencontrées (déphasage dans les fluctuations d'épaisseur et de largeur par exemple…).

Dans son travail concernant la modélisation des instabilités de coextrusion, Valette [VAL,01] met en évidence l'insuffisance de l'analyse de stabilité linéaire pour rendre compte des comportements périodiques survenant à l'interface de deux fluides dans un écoulement confiné, qui s'amplifient dans ce cas spatialement et non temporellement. Notre caractérisation expérimentale (voir chapitre 2) a montré que pour le soufflage de gaine, ce cas de figure ne survenait pas, le défaut de « draw resonance » s'amplifiant avec le temps et non spatialement.

I.4. Application au soufflage de gaine

Un très petit nombre d'auteurs se sont, à notre connaissance, intéressés à la modélisation des instabilités rencontrées dans le procédé de soufflage de gaine. Comme nous l'avons déjà évoqué, la grande majorité de ces études utilisent un modèle dérivé des équations de Pearson et Petrie [PEA,66][PEA,70], décrivant le film comme une membrane dans un repère lié à celle-ci (voir figure 4.8), et en proposent une analyse de stabilité linéaire en supposant conservée l'axisymétrie pour la bulle. Citons Yeow [YEO,76], Cain et Denn [CAI,88], Andrianarahinjaka et Micheau [AND,92][AND,96], Yoon et Park [YOO,99]. Dans ces travaux, le procédé est considéré isotherme et le fluide newtonien.

La difficulté de l'intégration dans les équations de la dépendance temporelle a déjà été évoquée dans le chapitre précédent. En effet, le repère dans lequel est décrite la bulle bouge, et les paramètres physiques dans ce repère bougent aussi. L'étude de la bibliographie met également en évidence comme source de difficulté le choix de conditions aux limites pertinentes pour les valeurs des fonctions propres. Dans ce qui suit nous proposons de présenter plus en détail ces considérations.

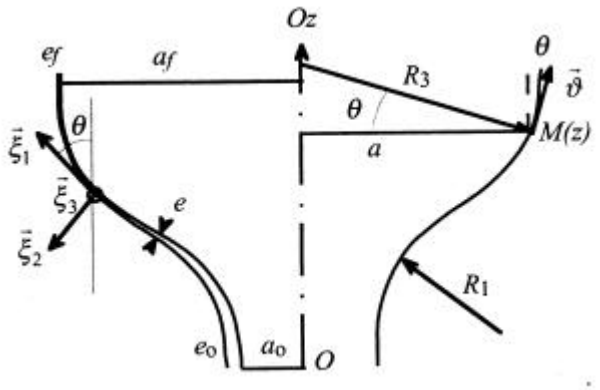


figure 4.8 : Système de coordonnées utilisé par Pearson et Petrie, d'après [AND,99]

Comme nous l'avons déjà précisé, les conditions aux limites sont fixées en considérant nulles les valeurs limites des paramètres contrôlés durant le procédé. Ainsi, en considérant que les perturbations ne proviennent pas de l'extrusion, les auteurs écrivent en sortie de filière les conditions sur les fonctions propres en rayon, épaisseur et vitesse :

$$\hat{a}(0) = \hat{e}(0) = \hat{J}(0) = 0 \qquad (4.3)$$

A l'autre bord du calcul, c'est-à-dire dans ces modèles la hauteur de figeage L, supposée connue, les conditions de «paramètres contrôlés » sont plus difficiles à exprimer. Les auteurs proposent ainsi de considérer non perturbées :

- *pour l'étirage longitudinal :*

Soit la vitesse d'appel $J(L)$, soit la force de tirage F_{tirage}, ce qui donne les expressions de ces conditions sur les fonctions propres suivantes :

$$\hat{J}(L) = 0 \qquad (4.4)$$

Ou

$$\hat{F}_{tirage} = 0 \qquad (4.5)$$

- *pour l'étirage transversal :*

Soit la surpression ΔP, soit une expression de la conservation de la quantité de gaz A contenue dans la bulle. Dans le cas de la non perturbation de la surpression, l'expression de la condition est :

$$\Delta\hat{P} = 0 \qquad (4.6)$$

L'expression de la conservation de la quantité de gaz A fait intervenir comme équation supplémentaire la loi des gaz parfaits :

$$(P_{atm} + \Delta P)V_{bulle} = nRT_{\text{int}} = A = cste \qquad (4.7)$$

où P_{atm} est la pression atmosphérique, V_{bulle} le volume total de la bulle, n le nombre de moles d'air contenu dans la bulle, et R la constante des gaz parfaits (R=8.32 kJ.mol^{-1}.K^{-1}).

Cette expression n'est pas utilisable en l'état, car la partie solide de la bulle est exclue du calcul (voir chapitre 3), et le volume total n'est donc pas exprimable directement. Cain et Denn [CAI,88] proposèrent de considérer en première approximation la bulle comme un cylindre et d'exprimer le volume de la bulle sous la forme approchée :

$$V_{bulle} = p.a^2(L).L_{totale} \qquad (4.8)$$

avec L_{totale} la hauteur totale de la bulle.

En linéarisant la relation (4.7) à l'aide de cette approximation, les auteurs obtiennent une relation entre la fonction propre de la surpression $\Delta\hat{P}$ et la valeur finale de celle du rayon $\hat{a}(L)$:

$$a^2(L).\Delta\hat{P} + 2.(P_{atm} + \Delta P).a(L).\hat{a}(L) = 0 \qquad (4.9)$$

Notons que, dans leur analyse, Andrianarahinjaka et Micheau [AND,92][AND,96] semblent aboutir à une expression erronée de cette équation. En partant de la même expression approchée du volume de la bulle (relation (4.8)), ils aboutissent en effet à l'expression linéarisée suivante :

$$\Delta\hat{P} + 2.(P_{atm} + \Delta P).\hat{a}(L) = 0 \qquad (4.10)$$

L'adimensionnalisation étant réalisée grâce aux valeurs en sortie de filière des différentes variables, il n'est évidemment pas possible de simplifier les termes $a^2(L)$ et $a(L)$ qui sont différents de 1. Cette erreur est répercutée dans tout le raisonnement présenté, ce qui peut expliquer les différences notables de leurs résultats avec le reste de la bibliographie.

Quatre « paires » de conditions sont donc applicables sur le modèle :

① Pour A et $J(L)$ fixés : $a^2(L).\Delta\hat{P} + 2.(P_{atm} + \Delta P).a(L).\hat{a}(L) = 0$, $\hat{J}(L) = 0$

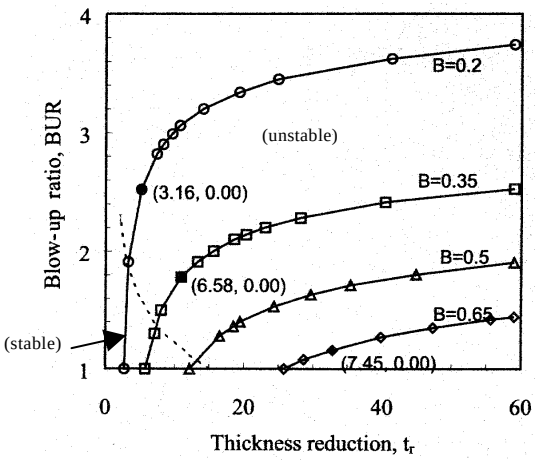
② Pour A et F_{tirage} fixés : $a^2(L).\Delta\hat{P} + 2.(P_{atm} + \Delta P).a(L).\hat{a}(L) = 0$, $\hat{F}_{tirage} = 0$

③ Pour DP et $J(L)$ fixés : $\Delta\hat{P} = 0$, $\hat{J} = 0$

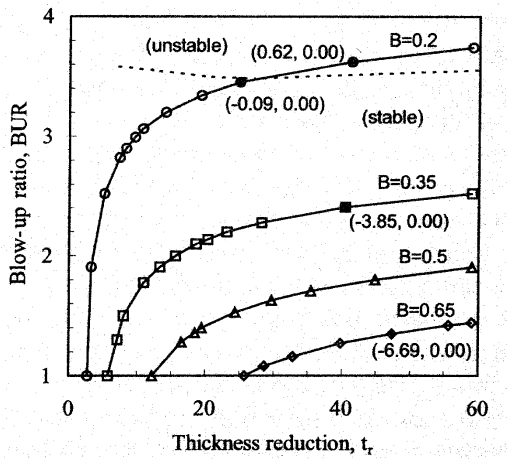
④ Pour DP et F_{tirage} fixés : $\Delta\hat{P} = 0$, $\hat{F}_{tirage} = 0$

Il paraît évident qu'une prédiction réaliste de l'apparition des instabilités passe par le choix de conditions aux limites représentatives du procédé. La limitation essentielle de cette approche semble être le fait d'effectuer le calcul uniquement dans la partie fondue et de considérer la hauteur de figeage connue et fixe. Nous avons en effet vu lors de notre étude expérimentale que celle-ci varie lors de la «draw resonance ». Fixer la hauteur de figeage revient donc en quelque sorte à priver le système d'un degré de liberté. Il nous faut néanmoins modérer cette remarque par le fait que c'est la frontière stable-instable qui est recherchée, et que les variations dimensionnelles de la bulle dans ces conditions sont infimes.
Conformément à ce qui est classiquement effectué dans le cas des procédés de filage textile et de cast-film, le choix de contrôler la vitesse de tirage plutôt que la force d'étirage semble s'imposer. L'autre condition aux limites est plus délicate à fixer. En effet, le fait de fixer la surpression semble trop réducteur, alors que l'expression de la conservation de la quantité de gaz à l'intérieur de la bulle ne semble réaliste, au vu des observations expérimentales, qu'en exprimant le volume entier de la bulle, c'est-à-dire en prenant en compte les variations à la fois dans la partie fondue et dans la partie solide. La forme approchée consistant à considérer la bulle comme un cylindre entraîne une surestimation de sa déformation lors de la perturbation du système. Nous discuterons plus en détail de ces conditions dans la suite de ce chapitre.

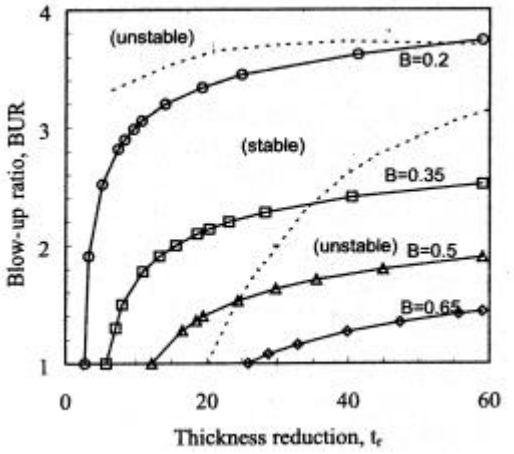
Cain et Denn [CAI,88] effectuent le calcul pour ces quatre cas, Yoon et Park [YOO,99] ne s'intéressent qu'aux cas ① , ② et ③. Yeow [YEO,76] n'a en son temps considéré que le cas ④. Les résultats obtenus par Yeow [YEO,76] pour DP et F_z fixés montrent une frontière stable-instable, pour des taux de gonflage compris entre 2 et 3,5, à des taux de réduction d'épaisseur (voir définition dans le chapitre 1) supérieurs à 5000 (soit typiquement des taux d'étirage critiques supérieurs à 10^3 !). Cain et Denn [CAI,88] obtiennent dans les mêmes conditions des résultats très différents et attribuent ces écarts à des problèmes numériques liés à la résolution du système différentiel et aux progrès réalisés dans les méthodes numériques dans les quinze ans qui séparent les deux études. En effet, contrairement aux autres auteurs qui utilisent une méthode matricielle, Yeow utilise une méthode de tir. Son suivi de valeur propre peut donc être erroné, comme nous l'avons évoqué précédemment (tir sur une valeur propre non dominante). Notons que les méthodes matricielles sont utilisées sur des modèles dans lequel la discrétisation spatiale ne dépasse pas la centaine de pas, ce qui est très imprécis, si on la compare aux valeurs utilisées en stationnaire par André [AND,99] qui avoisinent plutôt 10000 pas, ce qui est nécessaire aux approximations liées à la méthode de Runge-Kutta.



(a)



(b)



(c)

figure 4.9 : Solutions obtenues à Pression et Force de tirage données dans le plan (t_r=BUR.DR ;BUR), d'après [YOO,99] ; Courbes de stabilité obtenues (- -) dans le cas newtonien isotherme, les nombres entre parenthèses sont les valeurs propres de plus grandes partie réelles calculées :
(a) : pour DP et J(L) fixés
(b) : pour A et F_z fixés
(c) : pour A et J(L) fixés

Cain et Denn [CAI,88] puis Yoon et Park [YOO,99] qui ont approfondi l'étude en faisant varier les paramètres sur un intervalle plus étendu, montrent que les frontières obtenues sont extrêmement dépendantes des conditions aux limites considérées (figure 4.9). Il est frappant de constater que selon les conditions aux limites choisies, le résultat sur la stabilité des solutions stationnaires calculées est complètement différent. Compte tenu du modèle choisi (conditions isotherme) et de la méthode de calcul (matricielle) dont nous venons de voir les limites de précision, nous ne pouvons conclure quant au réalisme de ces résultats. Nous pouvons cependant approfondir cette comparaison par l'observation des valeurs propres calculées. En effet dans certains cas (cas ② et ③, voir figure 4.9 (a) et (b)), les valeurs propres de plus grande partie réelle détectées s'avèrent avoir une partie imaginaire nulle, ce qui indique que la bifurcation rencontrée n'est pas une bifurcation vers une solution instationnaire oscillante (bifurcation de Hopf) mais une bifurcation d'une solution stationnaire vers une autre solution stationnaire (ou *pitchfork*). Ce type de situation est rencontrée par exemple dans le cas de l'écoulement de Couette (écoulement entre deux cylindres concentriques en rotation inverse l'un par rapport à l'autre). Au delà d'une certaine vitesse angulaire, l'écoulement de cisaillement classique est remplacé par un écoulement plus complexe, toujours axisymétrique, formant des bandes de recirculation stationnaire appelés rouleaux de Taylor [CHO,94]. Dans la cas du soufflage de gaine, ce type de défaut n'a pas été caractérisé et ne semble donc pas correspondre à la réalité de notre procédé. Notons qu'aucun de ces auteurs ne fait mention de cet état de fait, que nous serons amenés à rediscuter dans la suite de ce chapitre.

Housiadas et Tsamopoulos utilisent une description cylindrique globale similaire à celle qu'ils ont déjà utilisée dans le cas de l'extrusion de tubes minces [HOU,98][HOU,00 a,b] et qui nous a servi de base pour le développement de notre modèle dans le chapitre précédent. En considérant des conditions isothermes et axisymétriques, et en fixant comme conditions aux limites la surpression

DP et la vitesse finale *J(L)* (cas ③), ils semblent retrouver les résultats de Cain et Denn [CAI,88] et Yoon et Park [YOO,99] (voir Figure 4.10). On retrouve ainsi la notion de multiplicité de solution : à force et surpression donnée, deux solutions pour la bulle stationnaire existent, dont une de taux de gonflage inférieur à 1. Cependant, dans cet article, les valeurs propres ne sont pas précisées, ce qui ne nous permet pas de comparer avec les résultats présentés plus haut.

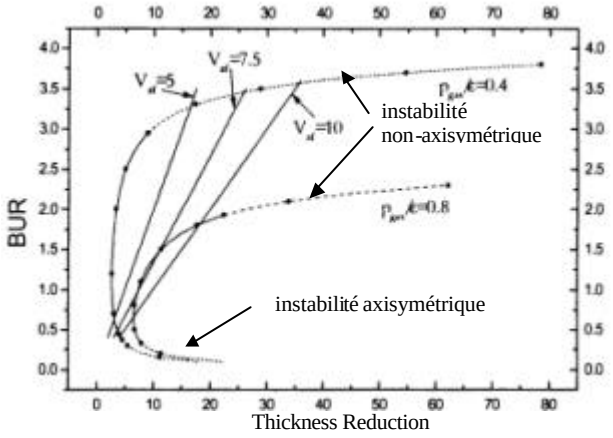


Figure 4.10 : Solutions obtenues à Pression et Force de tirage données dans le plan (BUR.DR - BUR), d'après [HOU,00] ; Cas newtonien isotherme ; (¾) état stable ; (···) : état instable

Notons également que ces auteurs furent les seuls à effectuer une analyse de stabilité non axisymétrique en recherchant des instabilités périodiques angulairement. Ce travail fera l'objet d'une étude approfondie dans le chapitre suivant.

I.5. Conclusions

Les études de stabilité du procédé de soufflage de gaine que nous avons pu mettre en évidence dans la littérature se basent, pour leur majorité, sur un modèle, fort peu réaliste, newtonien isotherme et en font une analyse de stabilité linéaire axisymétrique. Nous avons vu que les résultats obtenus diffèrent grandement avec le type de conditions aux limites imposées. De plus, à conditions identiques, les résultats de certains auteurs sont contradictoires.

L'origine de ces différences peut résider dans la mise en équations instationnaires proprement dite, c'est-à-dire dans un repère local impropre à être perturbé, car mobile. L'analyse originale de Housiadas et Tsamopoulos [HOU,00 c], consistant en une description de la bulle dans le repère cylindrique lié à la filière, doit permettre de s'affranchir de cette difficulté. Leurs premiers résultats, dans le cas isotherme et newtonien, sont malheureusement trop éloignés de la réalité pour envisager une confrontation expérimentale.

Nous allons effectuer dans ce qui suit une étude de stabilité linéaire du modèle axisymétrique et anisotherme que nous avons développé dans le chapitre 3. Nous étudierons notamment l'influence des conditions aux limites imposées et des différents paramètres du procédé sur le résultat des calculs.

II. Etude de stabilité linéaire du modèle

Le modèle que nous avons développé dans le chapitre précédent ne considère que la partie fondue de la gaine où la hauteur de figeage n'est pas connue a priori. La longueur de calcul L est fixée suffisamment grande pour satisfaire le critère de convergence vers un tube ($d\bar{R}/d\bar{z} = 0$). Nous serons donc amenés à faire le même type d'hypothèses que celles présentées dans l'étude bibliographique concernant notamment les conditions aux limites à imposer.

II.1. Développement des équations

Les différentes variables adimensionnelles stationnaires de notre modèle sont écrites sous la forme perturbée :

$$\begin{cases} \overline{R}_p(\bar{z},\bar{t}) = \overline{R}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{R}(\bar{z}) \\ \overline{H}_p(\bar{z},\bar{t}) = \overline{H}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{H}(\bar{z}) \\ \overline{v}^0_{z\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{v}^0_z(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{v}^0_z(\bar{z}) \\ \overline{v}^0_{r\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{v}^0_r(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{v}^0_r(\bar{z}) \\ \overline{s}^0_{rr\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{s}^0_{rr}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{s}^{\,0}_{rr}(\bar{z}) \\ \overline{s}^0_{ff\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{s}^0_{ff}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{s}^{\,0}_{ff}(\bar{z}) \\ \overline{s}^0_{rz\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{s}^0_{rz}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{s}^{\,0}_{rz}(\bar{z}) \\ \overline{s}^0_{zz\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{s}^0_{zz}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{s}^{\,0}_{zz}(\bar{z}) \\ \overline{p}_{0\,p}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{p}_0(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{p}_0(\bar{z}) \\ \left(\dfrac{\partial \overline{v}^1_z}{\partial \bar{r}}\right)_p(\bar{z},\bar{t}) = \dfrac{\partial \overline{v}^1_z}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\dfrac{\partial \hat{v}^1_z}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \\ \left(\dfrac{\partial \overline{v}^1_r}{\partial \bar{r}}\right)_p(\bar{z},\bar{t}) = \dfrac{\partial \overline{v}^1_r}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\dfrac{\partial \hat{v}^1_r}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \end{cases} \qquad (4.11)$$

La température adimensionnelle $\overline{T}(\bar{z})$ est également linéarisée :

$$\overline{T}(\bar{z},\bar{t}) = \overline{T}_s(\bar{z}) + e^{l\bar{t}}\hat{T}(\bar{z}) \qquad (4.12)$$

Nous linéarisons enfin la force de tirage et la surpression adimensionnelle (qui sont les paramètres du tir stationnaire) :

$$\begin{cases} \overline{F}_{tirage_p} = \overline{F}_{tirage} + e^{l\bar{t}}\hat{F}_{tirage} \\ \overline{\Delta P}_p = \overline{\Delta P} + e^{l\bar{t}}\Delta\hat{P} \end{cases} \qquad (4.13)$$

Dans ce cas, les termes sont indépendants de $\bar{z}$.

La linéarisation des équations ne pose aucune réelle difficulté. Les formes perturbées des différentes variables et de leurs dérivées sont introduites dans les équations du modèle. Les produits de variables sont ensuite développés en ne conservant que les termes de premier ordre. En effet les termes d'ordre 0 s'annulent puisqu'ils sont solutions de l'équation stationnaire, et l'on néglige les produits de fonctions propres qui seraient d'ordre supérieur ou égal à 2. Par souci de clarté et de concision, nous ne présentons pas dans ce chapitre le détail des équations linéarisées obtenues. Le lecteur pourra trouver un descriptif de ce système dans l'Annexe II.

Dans le cas particulier de l'équation de la chaleur, le traitement s'effectue en considérant que le coefficient de transfert adimensionnel $\overline{C_t(\bar{z})}$ est constant et égal à la valeur calculée dans le calcul stationnaire :

$$\frac{\partial \hat{T}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{\bar{v}_z^0(\bar{z})}\frac{\partial \bar{T}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\hat{v}_z^0(\bar{z}) - \frac{\partial \bar{T}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\frac{1}{\bar{H}(\bar{z})}\hat{H}(\bar{z})$$
$$-\frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\bar{C}_t\left(\bar{T}(\bar{z}) - \bar{T}_{air}\right)\frac{1}{\bar{H}(\bar{z})\bar{v}_z^0(\bar{z})}\frac{\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}}{\sqrt{1+\left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^2}}\right] \qquad (4.14)$$
$$-\hat{T}(\bar{z})\frac{1}{\bar{H}(\bar{z})\bar{v}_z^0(\bar{z})}\left[l\bar{H}(\bar{z}) + \bar{C}_t\sqrt{1+\left(\frac{\partial \bar{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right)^2}\right]$$

II.2. Résolution

Nous obtenons finalement un système où les inconnues sont les fonctions propres introduites par la linéarisation (relations (4.11), (4.12) et (4.13)), certaines de leurs dérivées, et bien entendu la valeur propre λ. Puisque nous avons négligé les termes de degré supérieur à 1, ces inconnues ont pour facteurs dans ces équations, à l donnée, des termes ou des produits de termes stationnaires qui sont connus depuis le calcul de la solution stationnaire.

Ainsi, en approximant les termes différentiels avec les accroissements des variables concernées, nous nous retrouvons dans une situation très proche de celle évoquée lors du calcul stationnaire. Nous aurons donc à appliquer le même schéma de résolution en partant des conditions aux limites à l'un des bords (ici le «haut ») et en calculant de proche en proche la valeur de nos diverses inconnues tout au long de la longueur d'étirage. Une méthode de tir sera ensuite employée pour calculer la valeur propre λ qui permet de vérifier les conditions aux limites à la sortie de la filière.

II.2.1. Choix des conditions aux limites

L'étude bibliographique a montré que le choix des conditions aux limites des fonctions propres a une grande influence sur le résultat de l'analyse de stabilité. Ces conditions se doivent donc d'être pertinentes et correspondre au mieux à la réalité du procédé.

- *en sortie de filière :*

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, le passage de la notation «locale » à la notation « cylindrique » donne les relations suivantes :

$$\bar{a}(\bar{z}) = \bar{R}(\bar{z}) \qquad (4.15)$$

$$\bar{e}(\bar{z}) = \bar{H}(\bar{z})\cos\theta \qquad (4.16)$$

$$\bar{J}^2(\bar{z}) = \bar{v}_z^2 + \bar{v}_r^2 \qquad (4.17)$$

Après linéarisation, les conditions de l'équation (4.3) s'écrivent, avec notre notation :

$$\hat{R}(0) = 0 \qquad (4.18)$$

$$\hat{e}(0) = \hat{H}(0) - \frac{\partial \hat{R}}{\partial \bar{z}}(0) \frac{\overline{E}(0) \frac{\partial \overline{R}}{\partial \bar{z}}(0)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \bar{z}}(0) \right)^2}} = 0 \qquad (4.19)$$

$$\overline{v}_z^0(0)\hat{v}_z^0(0) + \overline{v}_r^0(0)\hat{v}_r^0(0) = 0 \qquad (4.20)$$

Etant donné que nous faisons intervenir la température, nous considérons également nulle sa perturbation initiale :

$$\hat{T}(0) = 0 \qquad (4.21)$$

- *<u>en fin d'étirage :</u>*

Si nous considérons la réalité du procédé et la façon dont est asservi le contrôle de la bulle, il semble naturel de considérer que la vitesse de tirage (i.e. la vitesse en fin d'étirage, après la ligne de figeage) est fixe. La bulle est alors figée et se déplace verticalement vers les rouleaux d'entraînement dont on suppose la vitesse parfaitement contrôlée. Ceci impose donc les deux conditions couplées suivantes :

$$\hat{v}_z^0(L/R_0) = \hat{v}_r^0(L/R_0) = 0 \qquad (4.22)$$

Le choix de l'autre paramètre « contrôlé » pose beaucoup plus de difficultés. Nous avons vu que nous pouvons considérer comme paramètre fixé la surpression interne (condition I), ce qui s'écrit :

$$\Delta\hat{P} = 0 \qquad (4.23)$$

Cette condition n'est pas absolument conforme à la réalité physique du procédé, comme le prouva d'ailleurs Huang [HUA,88] en enregistrant des variations de pression à l'intérieur de la bulle pendant une instabilité. En fixant la surpression, on viole en quelque sorte l'équilibre naturel volume-pression à l'intérieur de la bulle. Néanmoins, nous recherchons la frontière entre la zone stable et instable et les perturbations que nous considérons sont infimes le long de cette frontière, ce qui rend malgré tout légitime cette approche.

Une approche intuitivement plus licite consiste, comme nous l'avons déjà exposé, à chercher à exprimer la conservation de la quantité de gaz dans la bulle. Pour cela, outre l'expression de la loi des gaz parfaits (relation (4.7)), nous avons besoin d'une expression du volume de la bulle V_{bulle}. Nous avons vu que Cain et Denn [CAI,88] ont approché de manière très sommaire ce volume par un cylindre de rayon égal au rayon final de la bulle et obtenu l'expression suivante :

$$V_{bulle} = pR_f^{\,2} L_{bulle} \qquad (4.24)$$

Où L_{bulle} représente la hauteur totale de la bulle et R_f son rayon final.

La linéarisation de cette expression amène finalement à la condition II définie par l'équation :

$$\overline{R}^2(L)\Delta\hat{P} + 2\left(\overline{P}_{atm} + \overline{\Delta P}\right)\overline{R}(L)\hat{R}(L) = 0 \qquad (4.25)$$

Cette expression semble beaucoup trop approximative et réductrice, dans la mesure où elle considère que le cylindre représentant la bulle pulse en conservant sa forme (voir figure 4.11). On ne prend ainsi pas en compte les variations de rayon dans la partie fondue, ce qui handicape bien entendu le calcul de stabilité pour lequel cette perturbation en volume semble surestimée.

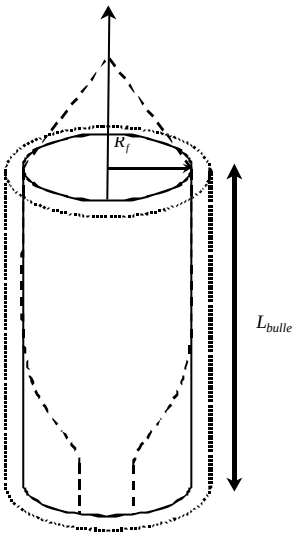


figure 4.11 : Schéma de principe de l'approximation du volume de la bulle par un cylindre (condition II) ;

Nous proposons une alternative à ce calcul pour limiter l'erreur commise en considérant l'évolution du rayon de la bulle dans la partie fondue en écrivant le volume de la bulle sous la forme :

$$V_{bulle} = \int_0^{FLH} \pi R(z)^2 dz + \pi R_f{}^2 L_{figée} \qquad (4.26)$$

Où $L_{figée}$ est la longueur de la bulle solidifiée.

Comme précédemment, le calcul s'effectue uniquement dans la partie fondue et ne nous donne pas accès au comportement de la bulle dans la partie figée. Nous allons faire l'hypothèse que la variation de volume de la bulle ne survient que dans la partie fondue, en considérant que les oscillations de rayon de la bulle ne sont que transportées dans la partie figée et se compensent à volume constant (figure 4.12).

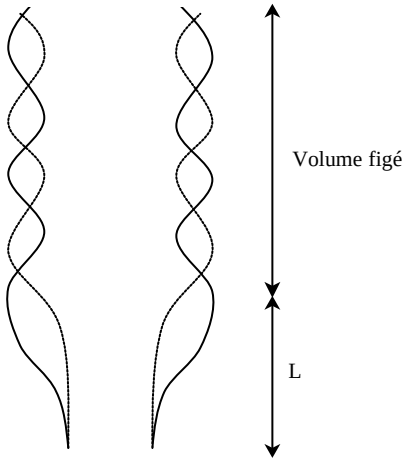


figure 4.12 : Schéma de principe de l'approximation à volume figé constant (condition III) ;

De plus, nous allons approcher la hauteur de figeage, variable et non fixée dans notre calcul, à la longueur de calcul L. Ceci est également une hypothèse forte, que nous faisons cependant en

considérant, rappelons-le, de petites perturbations. Cette formulation, après introduction dans la loi des gaz parfaits aboutit à l'expression suivante :

$$n.R.T = cste = [P_{atmo} + \Delta P]\left[\int_0^{FLH} 2p\,.R_{fondu}^2(z)dz + V_{solide}\right] \qquad (4.27)$$

où V_{solide} est le volume de la bulle solidifiée considérée constant.

Après discrétisation (nombre de points n) et linéarisation, nous obtenons naturellement la condition III définie par l'équation :

$$\Delta\hat{P}.\left[V_{solide} + \sum_{i=1}^{n} R^2(i)pas\right] + P_{bulle}\left[\sum_{i=1}^{n} 2R(i).\hat{R}(i)\,pas\right] = 0 \qquad (4.28)$$

Cette condition aux limites, encore une fois approximative par rapport à la réalité physique du procédé, s'avère être en quelque sorte un compromis entre la condition I trop stricte (surpression non perturbée) et la condition II qui surestime la variation de volume engendrée. Nous pouvons donc nous attendre, en cas de différences constatées des résultats obtenus avec les différentes conditions aux limites, à un comportement intermédiaire dans le cas de l'utilisation de cette condition III.

II.2.2. Résolution pour λ donnée

La méthode de résolution du système linéarisé est très similaire à celle utilisée pour le calcul stationnaire (voir chapitre 3). Il s'agit, à partir des conditions aux limites du «haut » , de déduire par calcul d'accroissements successifs les valeurs des différentes variables jusqu'à la sortie de la filière.

En supposant connus les termes $\hat{R}(L/R_0)$, $\hat{H}(L/R_0)$, $\hat{T}(L/R_0)$, $\Delta\hat{P}$ et $\hat{F}_{tirage}$ ainsi que la valeur propre l, nous pouvons résoudre complètement le système instationnaire à la cote $\bar{z} = L/R_0$. Le système linéaire complexe se réduit à 11 équations à 11 inconnues ne dépendant que de la variable $\bar{z}$ et dont la résolution numérique peut être par exemple effectuée avec la procédure DLSLCG de la bibliothèque IMSL® de FORTRAN®.

Une méthode de Runge-Kutta d'ordre 2 nous permet alors d'évaluer à partir des termes dérivés les accroissements des variables perturbations $\hat{R}, \hat{H}, \frac{\partial\hat{R}}{\partial\bar{z}}, \hat{v}_z^0, \hat{s}_{zz}^0$ et $\hat{T}$, et donc de calculer les valeurs au pas précédent de ces variables. Nous sommes alors à même de calculer à partir de ces valeurs toutes les autres valeurs des variables. Nous pouvons ainsi de proche en proche calculer les fonctions propres en fonction des conditions aux limites choisies et du paramètre de tir l, en calculant à chaque pas de discrétisation la valeur des variables et leur accroissements pour le pas suivant. Cette méthode est résumé par l'organigramme présenté sur la figure 4.13.

II.2.3. Construction de l'équation aux valeurs propres

Nous venons de voir que nous sommes à même de calculer à partir du «haut » les fonctions propres le long de la cote $\bar{z}$ à partir des conditions aux limites si nous fixons les valeurs de $\hat{R}(L/R_0), \hat{H}(L/R_0), \hat{T}(L/R_0), \Delta\hat{P}$ et $\hat{F}$.

Ce sont les conditions aux limites en sortie de filière, que doivent vérifier les fonctions propres solutions, qui vont nous permettre de déterminer ces valeurs et de construire l'équation aux valeurs

propres. Nous utilisons pour cela les propriétés de linéarité des équations linéarisées. La méthode est résumée sur la figure 4.14.

Nous cherchons à construire une combinaison de conditions initiales en $\bar{z} = L/R_0$ qui aboutissent à des fonctions propres vérifiant les conditions aux limites en $\bar{z} = 0$. Nous effectuons le calcul pour cinq ensembles de conditions :

$$\begin{cases} \hat{R}(L/R_0) = 1,\ \hat{H}(L/R_0) = \hat{T}(L/R_0) = \Delta\hat{P} = \hat{F} = 0 & \textit{cas 1} \\ \hat{H}(L/R_0) = 1,\ \hat{R}(L/R_0) = \hat{T}(L/R_0) = \Delta\hat{P} = \hat{F} = 0 & \textit{cas 2} \\ \hat{T}(L/R_0) = 1,\ \hat{R}(L/R_0) = \hat{H}(L/R_0) = \Delta\hat{P} = \hat{F} = 0 & \textit{cas 3} \\ \hat{F} = 1,\ \hat{R}(L/R_0) = \hat{H}(L/R_0) = \hat{T}(L/R_0) = \Delta\hat{P} = 0 & \textit{cas 4} \\ \Delta\hat{P} = 1,\ \hat{R}(L/R_0) = \hat{H}(L/R_0) = \hat{T}(L/R_0) = \hat{F} = 0 & \textit{cas 5} \end{cases}$$

Nous obtenons cinq ensembles de fonctions propres solutions (que nous désignerons par souci de simplification $\hat{X}_1(l), \hat{X}_2(l), \hat{X}_3(l), \hat{X}_4(l)$ et $\hat{X}_5(l)$ par la suite). Ces ensembles de fonctions propres sont par définition solutions du système différentiel. Toute combinaison linaire de ces fonctions sera donc par conséquent également solution de ce système.

Il nous faut donc déterminer les coefficients de la combinaison linéaire lui permettant de vérifier les conditions en sortie de filière. Il existe une infinité de combinaisons linéaires (toutes multiples) vérifiant ces conditions. Nous allons rechercher la combinaison « normalisée » par rapport au *cas 1*. Autrement dit, nous allons chercher les coefficients $A(l), B(l), C(l)$ et $D(l)$ tels que :

$$\begin{cases} \hat{R}_1(0) + A(l)\hat{R}_2(0) + B(l)\hat{R}_3(0) + C(l)\hat{R}_4(0) = 0 & \text{(condition (4.18))} \\ \hat{e}_1(0) + A(l)\hat{e}_2(0) + B(l)\hat{e}_3(0) + C(l)\hat{e}_4(0) = 0 & \text{(condition (4.19))} \\ \hat{T}_1(0) + A(l)\hat{T}_2(0) + B(l)\hat{T}_3(0) + C(l)\hat{T}_4(0) = 0 & \text{(condition (4.21))} \\ \text{condition aux limites supplémentaire I, II ou III (relation (4.23), (4.25) ou (4.28))} \end{cases}$$

La résolution d'un tel système linéaire complexe est immédiate. Numériquement, nous utilisons, de même que précédemment, la procédure DLSLCG de la bibliothèque IMSL® de FORTRAN®.

La condition aux limites en vitesse (relation (4.20)) sera alors vérifiée par la combinaison linéaire construite si et seulement si le paramètre l fixé est valeur propre du système. Si tel n'est pas le cas, ce critère nous permet de réévaluer cette valeur de l grâce à un algorithme de tir à un paramètre de type Newton-Raphson.

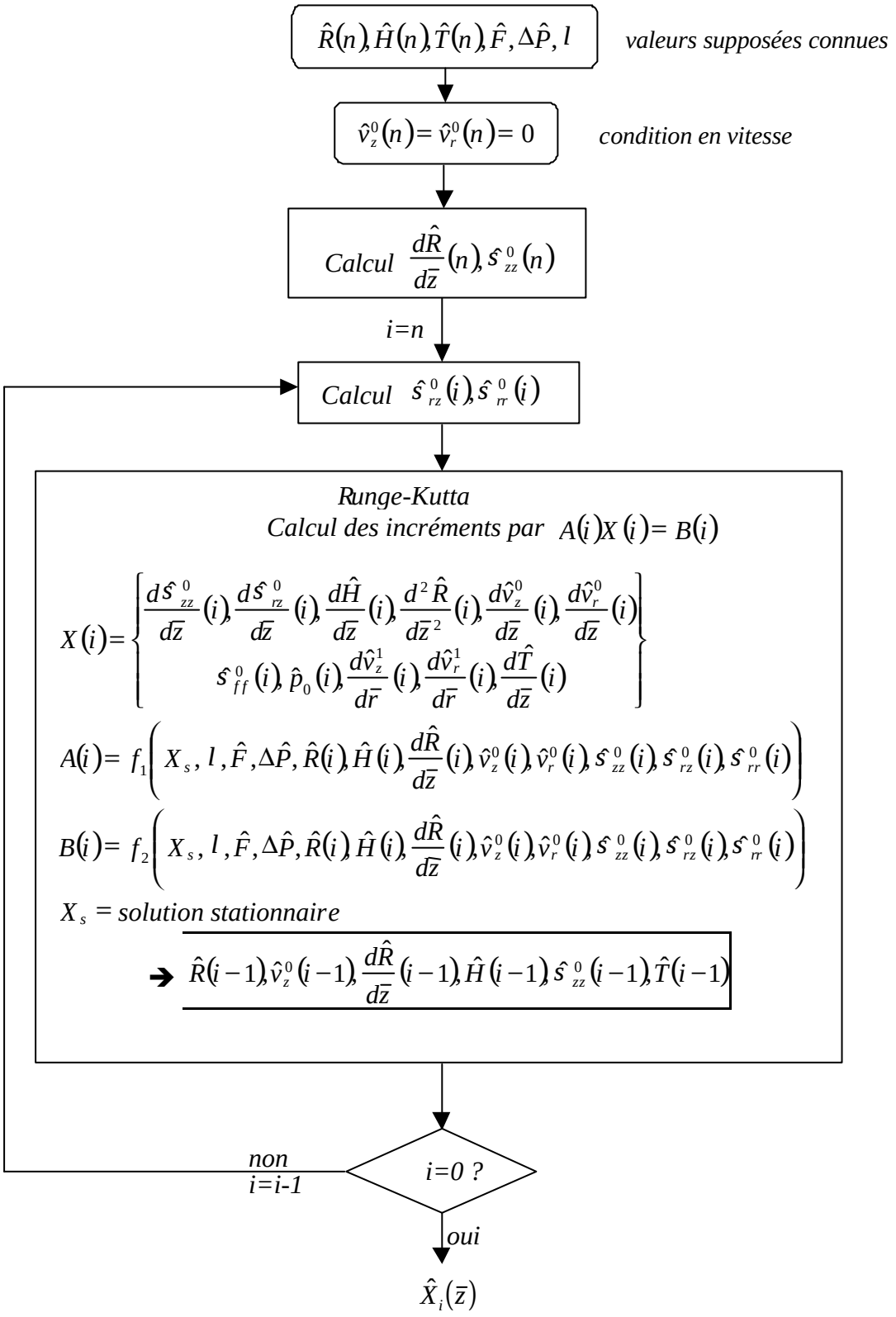


figure 4.13 : Organigramme de la méthode de résolution des équations linéarisées pour $\hat{R}(\bar{z}), \hat{H}(\bar{z}), \hat{T}(\bar{z}), \hat{F}$ *et* l *donnés*

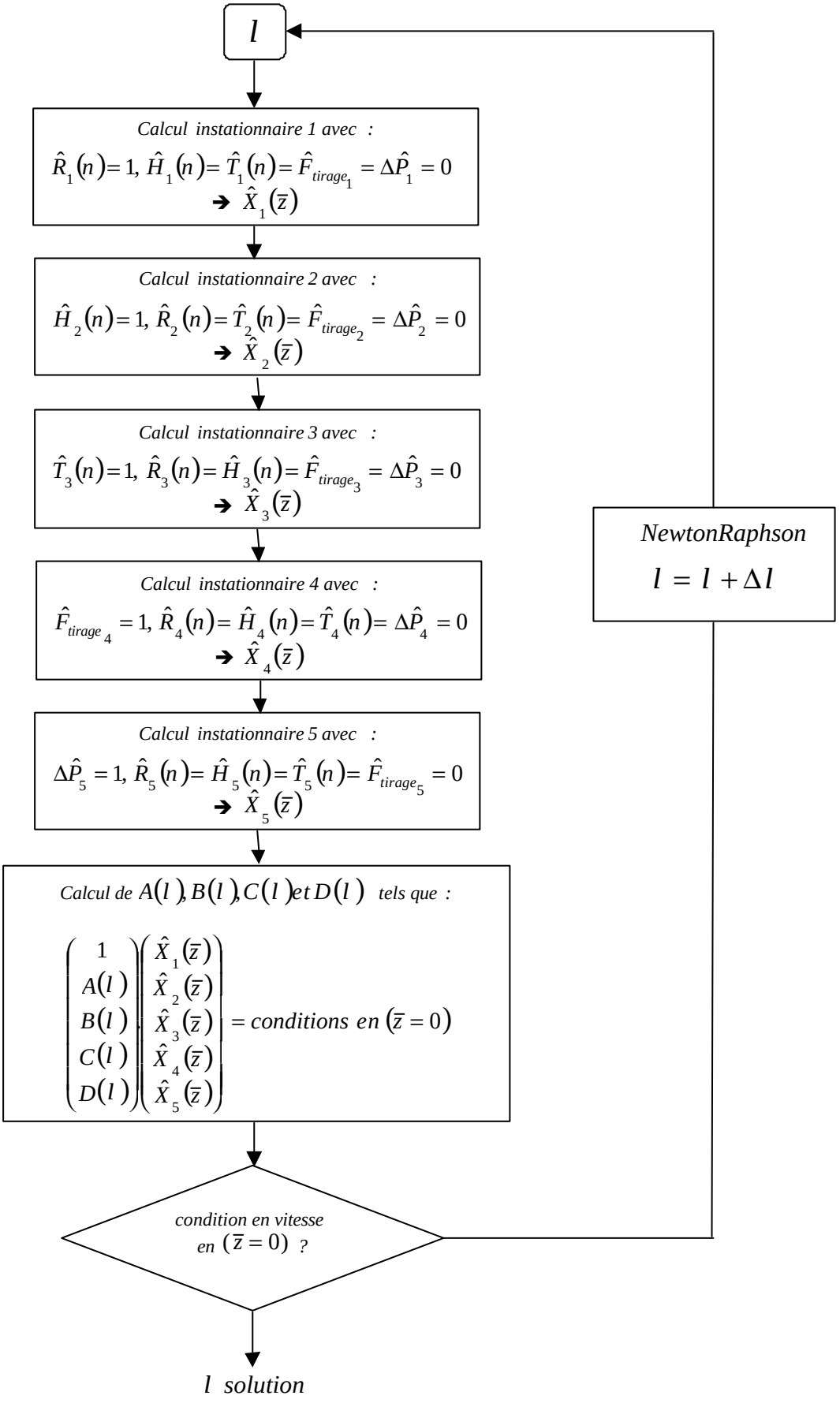


figure 4.14 : Organigramme de la méthode de construction de l'équations aux valeurs propres

III. Analyse du modèle et résultats obtenus

III.1. Premiers calculs

III.1.1. Recherche de valeur propre

Nous avons montré dans notre étude bibliographique préalable (voir paragraphe I.1.2) que la technique de stabilité linéaire nécessite la connaissance a priori de la valeur propre dominante (i.e. de plus grande partie réelle) dans une condition particulière du procédé pour dériver petit à petit vers les conditions de l'étude de stabilité proprement dite (« suivi de valeur propre »). Pour notre modèle de soufflage de gaine, un équivalent stationnaire du filage textile isotherme peut être calculé en fixant le taux de gonflage à 1 et la pente de notre gradient thermique à 0 (voir figure 4.15). Les profil d'épaisseur et de vitesse tangentielle ainsi obtenus sont alors ceux obtenus pour la section et la vitesse dans la direction de l'étirage dans le cas du filage textile.

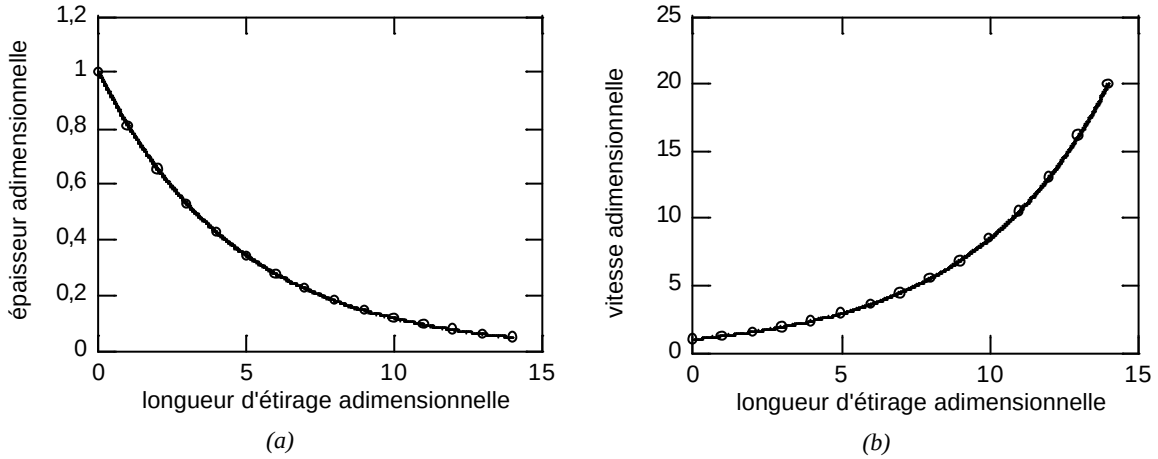


figure 4.15 : Comparaison stationnaire à DR=20 entre le modèle de filage textile (○), d'après [DEM,83] et le modèle de soufflage de gaine (¾) ; BUR=1, dT/dz=0) ; (a) : profil d'épaisseur ; (b) : profil de vitesse

Malheureusement, les conditions aux limites à fixer pour l'analyse de stabilité linéaire du soufflage de gaine sont incompatibles avec celles employées lors de l'analyse du filage. En effet, dans notre cas, le rayon de la bulle est considéré comme perturbé et intervient donc dans le calcul, ce qui est contraire au traitement du filage où le seul paramètre géométrique est la section. Ainsi il ne nous est pas possible, avec notre modèle de soufflage de gaine, de « remonter » au cas du filage textile pour la détermination des premières valeurs propres.

Nous avons donc été contraints d'effectuer, pour des conditions de soufflage données, une recherche systématique de valeurs propres dans l'espace complexe. Le tableau 4.1 résume les valeurs des paramètres utilisées. Celles-ci ont été choisies proches de celles utilisées par André [AND,99] pour ses premiers calculs.

Remarque : *Il ne s'agit pas là dans un premier temps de coller à la réalité du procédé, que ce soit pour les conditions d'étirage, de thermique ou même les paramètres du matériau (énergie d'activation), mais d'établir la faisabilité de l'étude de stabilité sur des bulles bien définies. Par la suite, nous nommerons cet ensemble de paramètres « conditions standard ».*

Taux de gonflage	2
Taux d'étirage	6
$d\bar{T}/d\bar{z}$ (°C)	10.625
E/R (K)	7600
L	14
$T_{extrusion}$ *(°C)*	200
nombre de noeuds n	10001

tableau 4.1 : Conditions standard utilisées

Dans ces conditions, nous obtenons, pour le calcul stationnaire, les profils de rayon et d'angle (entre la tangente à la bulle et l'axe vertical) présentés sur la figure 4.16. La bulle calculée satisfait au critère établi dans le chapitre 3, la bulle tend bien vers un tube à longue distance, l'angle q tend quant à lui vers 0.

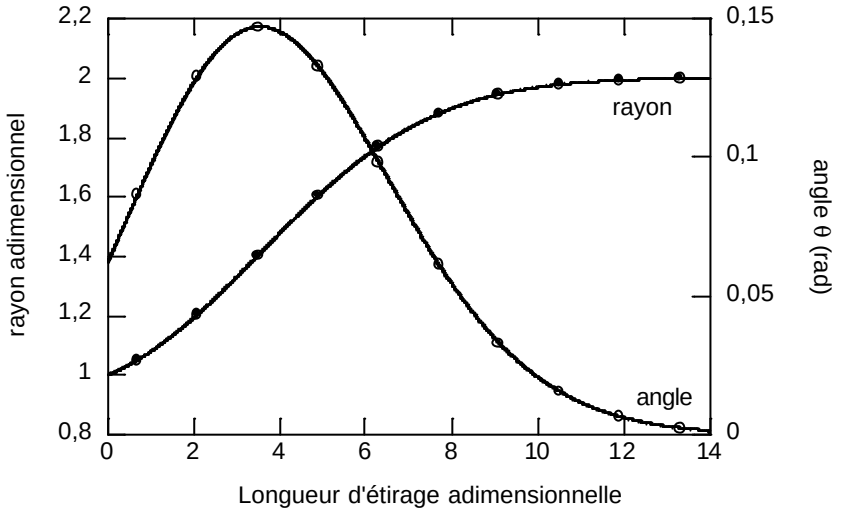


figure 4.16 : Profils stationnaires de rayon (●) et d'angle (○) obtenus dans les conditions standard ;

Dans une première étape, nous avons effectué un calcul instationnaire avec la condition aux limites I, c'est à dire à surpression fixée ($\Delta\hat{P} = 0$). Dans ces conditions, un balayage systématique de l'intervalle [-10,10] avec un pas de 0,1 des parties réelles et imaginaires du paramètre de tir l aboutit à la détermination des valeurs propres solutions du système présentées dans le tableau 4.2.

Partie réelle	Partie imaginaire
0,353	0
-0,689	*1,953*
-1,21	0
-2,76	*4,521*
-3,08	0
-5,08	0

tableau 4.2 : Valeurs propres détectées ; conditions standard, surpression fixe (condition I).

Comme l'illustre la figure 4.17, nous observons deux « familles » de valeurs propres. L'une regroupe des valeurs propres strictement réelles, l'autre des valeurs propres complexes. Notons que

sur cette figure, nous n'avons représenté que les valeurs propres de partie imaginaire positive, mais leurs conjuguées sont également solutions du système.

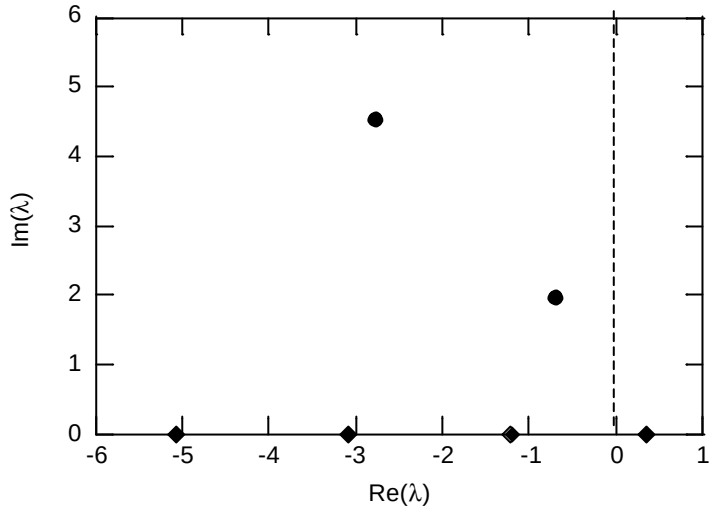


figure 4.17 : premières valeurs propres détectées (condition I)

Dans ces conditions de calcul, la valeur propre dominante semble être un nombre réel pur, ce qui n'est pas, comme nous l'avons déjà précisé au paragraphe I.4, représentatif d'une bifurcation vers un comportement périodique instable mais d'un passage d'une solution stable à une autre. Ce résultat est très surprenant, l'instabilité recherchée étant précisément périodique. Une interprétation physique de cette famille de valeurs propres, réparties périodiquement semble-t-il sur l'axe des réels, peut être donnée comme un comportement de type «flambement» d'amplitude limitée occasionnant des «tremblements» de faible amplitude. Il peut également s'agir d'un «artefact numérique» lié au choix d'une condition aux bords trop limitante. En effet considérer la surpression interne non perturbée ($\Delta\hat{P} = 0$), et ce même pour de petites variations, n'est pas totalement conforme à la physique du procédé. Le volume de la bulle étant lui-même perturbé, la pression interne le sera également. Le choix d'une condition trop restrictive pourrait engendrer une famille de solutions «fantômes». Ce résultat est en accord avec ceux recensés par Cain et Denn [CAI,88] et Yoon et Park [YOO,99] qui décrivent une valeur propre réelle pure pour des conditions aux limites similaires. Cependant aucune information n'est donnée quant aux autres valeurs propres calculées, ce qui limite notre comparaison (en plus du fait que leur modèle est isotherme).

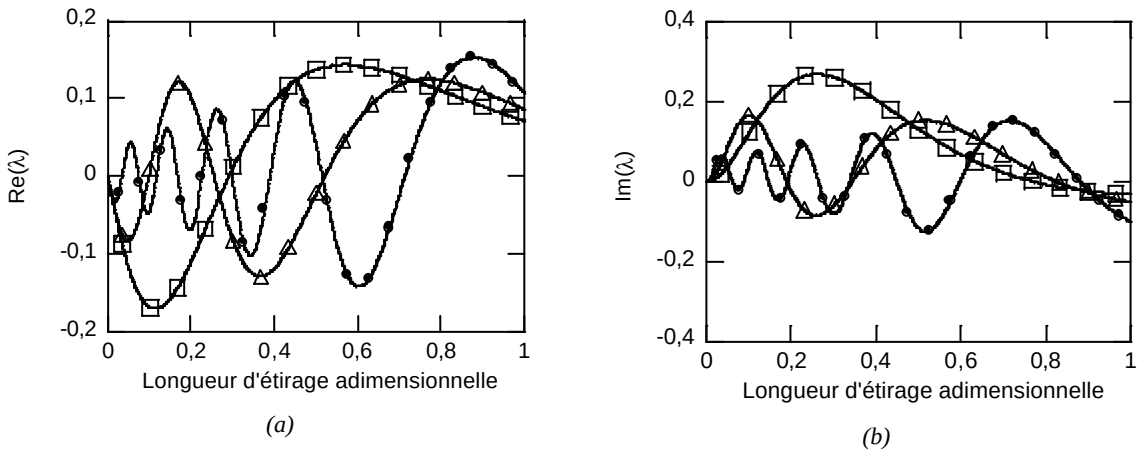


figure 4.18 : Evolutions des parties réelles (a) et imaginaires (b) du vecteur propre de la section le cas du filage isotherme (DR=20), d'après [DEM,82] ;
(□) : 1ère valeur propre ; (Δ) : 2ème valeur propre ; (●) : 5ème valeur propre

La seconde valeur propre détectée est un nombre complexe de partie réelle négative qui correspond donc à une solution stable. Du fait de notre méthode d'obtention de ces valeurs propres par balayage d'une région de l'espace complexe, nous ne pouvons pas *a priori* exclure le fait d'en avoir « manqué » une. Il n'existe pas de critère réel de vérification de l'ordre de la valeur propre. Néanmoins, l'étude des vecteurs propres obtenus dans le cas du filage textile a montré, comme l'illustre la figure 4.18, que les parties réelle et imaginaire du vecteur propre de la section du fil $\hat{S}(z)$ présentaient un nombre d'oscillations égal à l'ordre de la valeur propre considérée. Ainsi la première valeur propre ne présente qu'une oscillation, la seconde deux oscillations et la cinquième cinq oscillations. Il s'agit là d'une vérification « avec les mains » de l'ordre de la valeur propre, reliée au fait que le phénomène de «draw resonance » intervient sous forme d'une oscillation unique sur la longueur d'étirage, comme le montre la figure 4.19 dans le cas du filage textile.

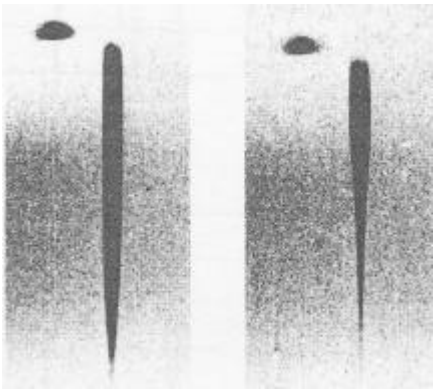


figure 4.19 : Photographies d'un filament présentant l'instabilité de « draw resonance » séparées par une demi-période, d'après [DEM,85]

L'allure du vecteur propre du rayon de la bulle $\hat{R}(\bar{z})$, qui est l'équivalent géométrique dans notre cas de la section dans le cas du filage, est présentée sur la figure 4.20. Les courbes obtenues ne présentent qu'une oscillation, en accord avec les observations expérimentales du chapitre 2. Ceci conforte notre idée selon laquelle la valeur propre que nous avons obtenu est bien la valeur propre de plus grande partie réelle et qu'elle correspond à l'instabilité de type « draw resonance ».

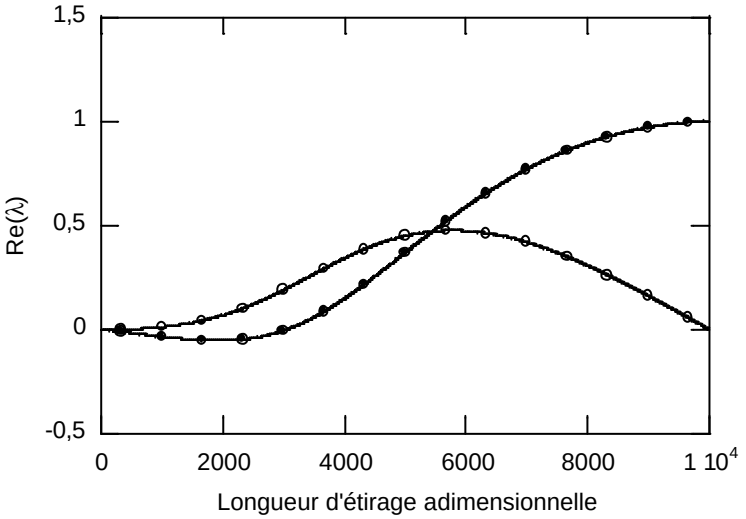


figure 4.20 : Evolution des parties réelle (□) et imaginaire (○) du vecteur propre du rayon de la bulle ; conditions standard ; première valeur propre complexe

A titre de comparaison, nous présentons sur la figure 4.21 le vecteur propre du rayon obtenu avec la plus grande valeur propre réelle. Celui-ci est également strictement réel (partie imaginaire nulle) et ne présente pas d'oscillations.

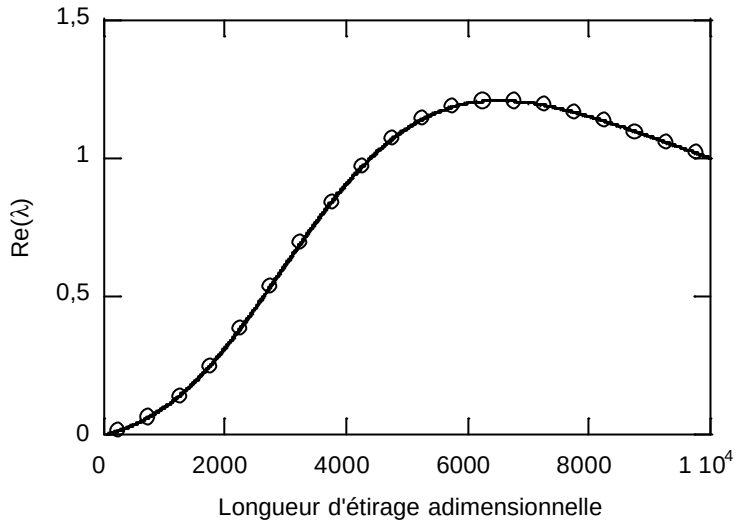


figure 4.21 : Evolution de la partie réelle (○) du vecteur propre du rayon de la bulle ; conditions standard ; première valeur propre réelle

La figure 4.22 décrit les évolutions des parties réelles de ces deux valeurs propres (la première réelle pure et la première complexe) lors de l'augmentation du taux d'étirage. Nous observons que la valeur propre réelle augmente quasi linéairement avec le taux d'étirage alors que la valeur propre complexe voit sa partie réelle initialement négative (i.e. condition stable) couper l'axe des abscisses pour un taux d'étirage voisin de 28 pour rester ensuite inconditionnellement positive (i.e. condition instable). Nous n'observons pas de croisement de valeurs propres, les parties réelles de celles-ci s'éloignant plutôt l'une de l'autre avec l'augmentation du taux d'étirage.

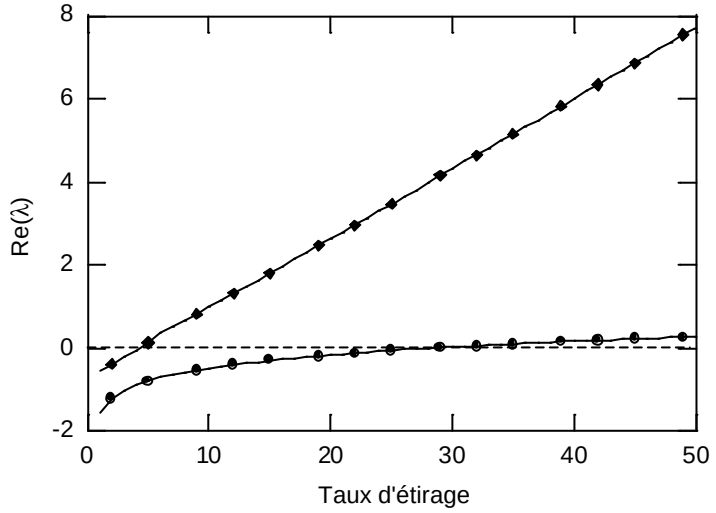


figure 4.22 : Evolution des parties réelles des deux premières valeurs propres avec le taux d'étirage ; conditions standard ; (□) : valeur propre réelle pure ; (□) : valeur propre complexe

L'évolution des parties réelle et imaginaire de la valeur propre complexe est décrite sur la figure 4.23. Celle-ci s'avère incontestablement très similaire à l'évolution typique de la valeur propre dans le cas du filage textile (voir figure 4.2). Nous retrouvons ainsi la notion de taux d'étirage critique au-delà duquel survient la bifurcation vers une solution instable périodique.

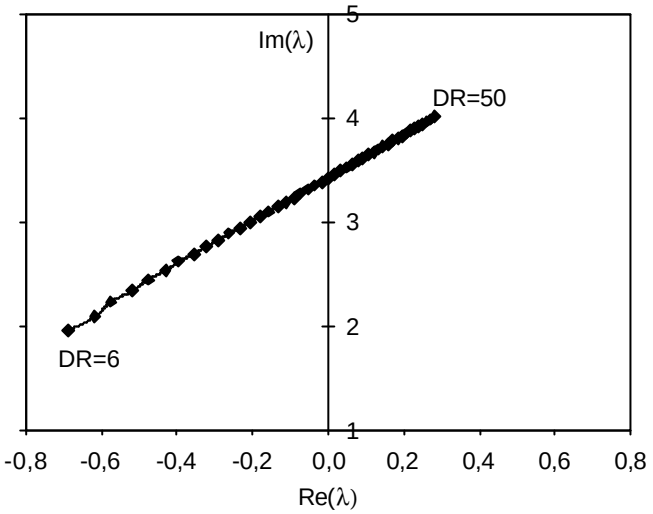


figure 4.23 : Evolution de la première valeur propre complexe avec le taux d'étirage ;

III.1.2. Influence de la condition aux limites

Le même balayage effectué dans les mêmes conditions excepté pour la condition aux limites appliquée (II ou III) aboutit à des résultats très différents.

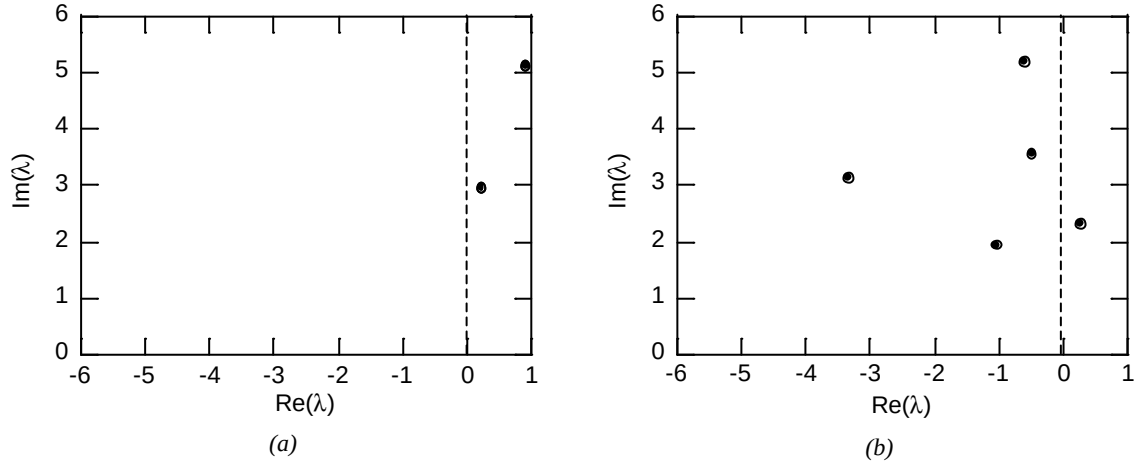


figure 4.24 : Influence des conditions aux limites sur les valeurs propres détectées ; conditions standard ; (a) : condition aux limites II ; (b) : condition aux limites III

La figure 4.24 (a) présente les valeurs propres obtenues dans le cas de l'emploi de la condition II, c'est-à-dire en exprimant la conservation de la quantité de gaz et en approchant le volume de la bulle par un cylindre. Deux valeurs propres complexes ont été trouvées dans le même intervalle de paramètre de tir initial. Les valeurs propres strictement réelles ne sont quant à elles plus observées. Notons que des difficultés de convergence de l'algorithme ont également été rencontrées. Les valeurs propres que nous trouvons ont une partie réelle positive, ce qui signifie qu'avec ces conditions aux limites, nous prédisons un état instable dès un taux d'étirage modéré. La condition aux limites surestime donc en quelque sorte la perturbation et rend le procédé trop instable par rapport à la réalité physique. Ces considérations vont donc bien dans le sens de ce que nous envisagions avec cette condition (voir paragraphe I.2.1), et sont compatibles avec les résultats de la littérature, Yoon et Park [YOO,99] observant également avec ces conditions aux limites une valeur propre complexe.

L'utilisation de la condition III « intermédiaire » aboutit quant à elle aux valeurs propres présentées sur la figure 4.24 (b). Dans ce cas, les valeurs propres trouvées ont également une partie imaginaire non nulle, et la plus grande partie réelle de la valeur propre dominante est inférieure à celle obtenue avec la condition aux limites II. Elle reste néanmoins positive, ce qui signifie que nous continuons malgré tout à surestimer la sensibilité aux perturbations de notre système.

Nous notons par ailleurs que les parties imaginaires des valeurs propres complexes dominantes obtenues dans les conditions I et III (figure 4.17 et figure 4.24 (b)) sont très proches, et que celle de la valeur propre dominante obtenue avec la condition II, beaucoup trop « instable » comme nous l'avons déjà dit, reste malgré tout du même ordre de grandeur (figure 4.24 (a)). Cette partie imaginaire étant reliée à la fréquence de l'instabilité déclenchée, nous pouvons dire que l'instabilité caractérisée à l'aide de chacune des trois conditions aux limites que nous avons décrites correspond au même comportement pulsatoire.

Au vu de ces résultats, nous montrons que la prise en compte de conditions aux limites plus proches de la réalité du procédé permet d'éviter le calcul de valeurs propres « parasites » réelles pures. Néanmoins, du fait des approximations malgré tout grossières que nous avons été obligés de faire, la stabilité prédite du procédé s'avère restreinte à des taux d'étirage bas. En faisant varier les conditions aux limites mais dans les mêmes conditions de procédé, il est possible d'obtenir des résultats complètement différents en terme de stabilité. Nous soulignons ainsi la nécessité d'une prise en compte la plus précise possible de ces conditions aux limites. Celle-ci passe sans doute dans la modélisation du comportement de la phase solide, qui, soit par la réponse élastique qu'elle apportera à des petites perturbations, soit par le calcul du volume réel de la bulle et la possibilité de faire varier réellement la hauteur de figeage nous rapprochera de la réalité expérimentale.

Dans ce qui suit, nous poursuivons l'étude avec la condition aux limites la plus simple, c'est-à-dire en considérant la surpression non perturbée (condition I). Nous suivrons l'évolution de la valeur propre complexe dominante avec les différents paramètres du procédé, en occultant la famille de solution réelles.

III.1.3. Influence de la longueur de calcul

Comme nous l'avons déjà dit pendant la construction de notre modèle, la longueur d'étirage L que nous fixons doit être suffisante pour que la bulle calculée satisfasse le critère de « tube à grande distance » ($d\overline{R}/d\overline{z} = \tan\theta = 0$).

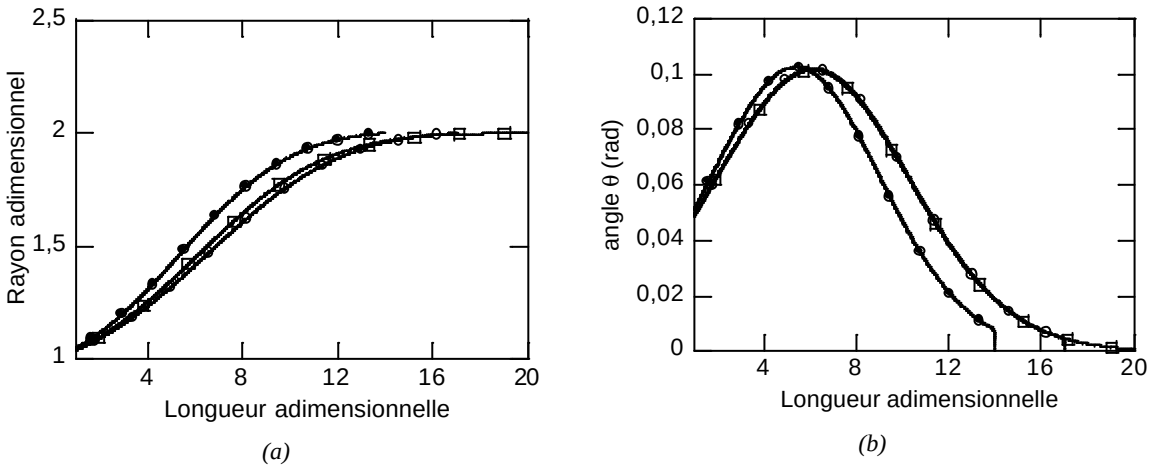


figure 4.25 : Influence de la longueur de calcul adimensionnelle sur le résultat du calcul stationnaire ; (a) : rayon de la bulle ; (b) : angle de la bulle ; (●) : L=14 ; (○) : L=17 ; (□) : L=20

Nous avons essayé d'évaluer l'erreur sur le taux d'étirage critique déterminé occasionné par un choix erroné de L. La figure 4.26 montre que le taux d'étirage critique obtenue diminue légèrement lorsque L est augmenté (i.e. donc plus « juste ») pour atteindre une valeur constante lorsque L est suffisamment grand. L s'avère donc un paramètre à l'influence limitée que nous nous efforcerons simplement de prendre suffisamment grand pour limiter notre risque d'erreur sur le taux d'étirage critique.

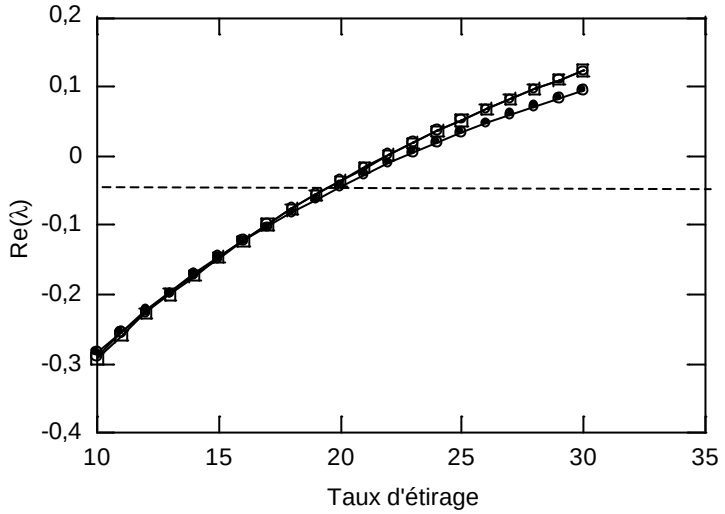


figure 4.26 : Influence de la longueur de calcul adimensionnelle sur l'évolution de la partie réelle de la valeur propre dominante; (●) : L=14 ; (○) : L=17 ; (□) : L=20

III.2. Influence des différents paramètres

Nous avons déjà évoqué l'effet déstabilisant de l'augmentation du taux d'étirage par un passage d'une solution stable à une solution instationnaire périodique au delà d'un taux d'étirage critique. Ceci caractérise, comme l'a montré l'expérience (chapitre 2), le défaut de « draw resonance ». Dans ce qui suit, nous cherchons à évaluer la sensibilité de la stabilité du procédé aux autres paramètres, et ainsi retrouver (ou non) les grandes tendances expérimentales que nous avons observées.

III.2.1. Paramètres thermiques

- *Gradient thermique adimensionnel*

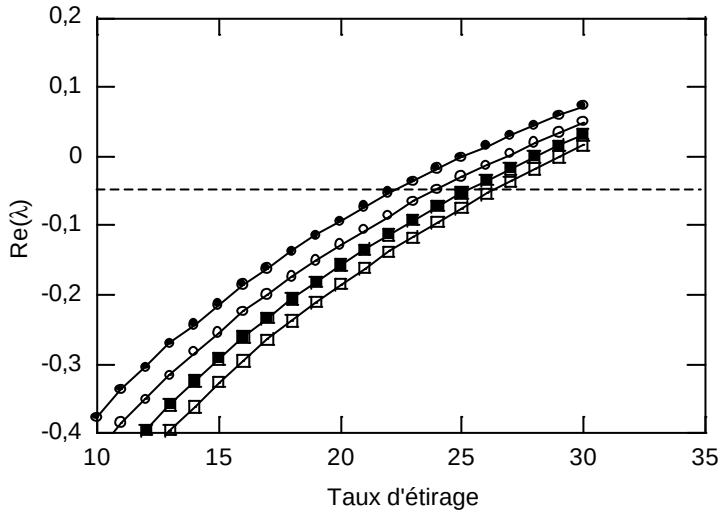


figure 4.27 : Influence du gradient thermique sur l'évolution de la partie réelle de la première valeur propre complexe ; (□) : $d\overline{T}/d\overline{z}$ = 11.625°C ; (■) : $d\overline{T}/d\overline{z}$ = 10.625°C ; (○) : $d\overline{T}/d\overline{z}$ = 9.625°C ; (●) : $d\overline{T}/d\overline{z}$ = 8.625°C

A partir des conditions standard définies au début de cette partie, nous avons fait varier la pente du gradient thermique imposé. Sur la figure 4.27, nous observons qu'une diminution de ce gradient thermique (i.e. un refroidissement moins important) diminue le taux d'étirage pour lequel la courbe coupe l'axe des abscisses. En d'autres termes, le modèle prévoit qu'une diminution du refroidissement induit une déstabilisation du procédé, le taux d'étirage critique diminuant. Cette conclusion est en parfait accord qualitatif avec les tendances expérimentales que nous avons observées dans notre étude expérimentale (voir chapitre 2).

- *Energie d'activation du matériau*

Dans notre modèle, le matériau est considéré newtonien et sa viscosité décrit une loi d'Arrhenius avec la température :

$$\bar{h}(T) = \exp\left[\frac{E}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0}\right)\right] \qquad (4.29)$$

E est l'énergie d'activation, R la constante des gaz parfaits et T_0 une température de référence (typiquement, la température d'extrusion).

Cette relation est une simplification du comportement du matériau puisqu'elle n'est licite que dans la zone fondue et ne prend pas en compte les variations de comportement (augmentation rapide de la viscosité) survenant au moment de la cristallisation.

Sur la figure 4.28, nous avons représenté l'allure de la courbe $Re(l) = f(DR)$ en faisant varier le paramètre *E/R* de 7600 à 4500. Nous observons clairement qu'une diminution de l'énergie d'activation entraîne une diminution, modérée, de la valeur du taux d'étirage critique. Nous mettons ainsi en valeur le caractère déstabilisant d'une diminution de l'énergie d'activation. Bien entendu, il s'agit là d'un comportement prévisible agissant dans le même sens qu'une diminution du gradient thermique adimensionnel.

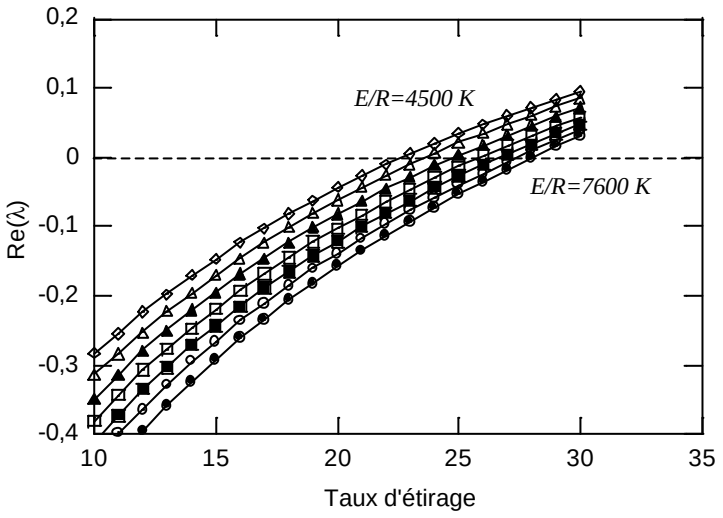


figure 4.28 : Influence de l'énergie d'activation sur l'évolution de la partie réelle de la première valeur propre complexe

Nous ne pouvons pas cependant imaginer que notre modèle soit suffisant pour rendre compte des différences de comportement observées expérimentalement sur plusieurs polymères. En effet, même si l'augmentation de l'énergie d'activation stabilise numériquement le procédé dans des proportions modérées, nous n'expliquons pas par ce biais pourquoi par exemple dans le cas d'un

PEbd (dont l'énergie d'activation est plus grande que celle d'un Pebd) l'instabilité de «draw resonance » est repoussée jusqu'à disparaître et être remplacée par la rupture du film [KAN,84][MIN,86][LAS,99]. A l'image de ce qui a été réalisé pour le filage textile ou le cast-film, c'est l'intégration des propriétés viscoélastiques qui doit permettre de mettre en évidence ces différences de comportement.

- *Température d'extrusion*

Le dernier paramètre « procédé » que nous pouvons fixer est la température d'extrusion. Dans nos conditions initiales, celle-ci était fixée à 200°C. La figure 4.29 montre l'influence d'une augmentation de 20°C sur la courbe $Re(l) = f(DR)$. Nous prévoyons une diminution du taux d'étirage critique avec l'augmentation de la température d'extrusion, ce qui est, là encore, en parfaite cohérence avec les résultats de la littérature [HAN,75][MIC,98][FIE,99].

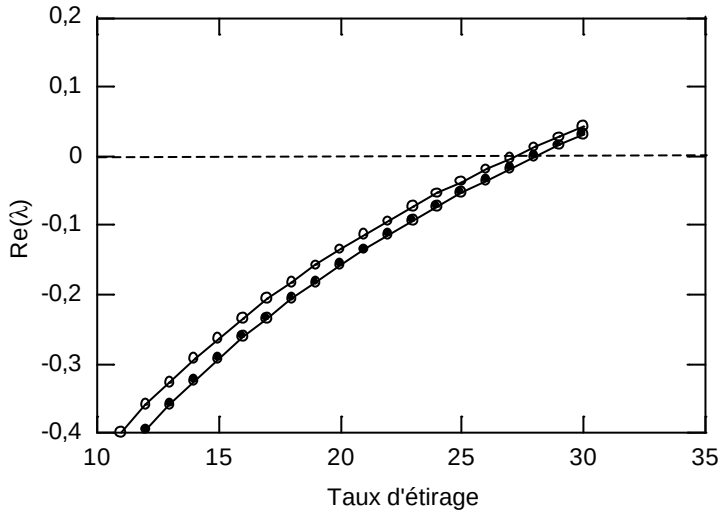


figure 4.29 : Influence de la température d'extrusion sur le taux d'étirage critique détecté pour la première valeur propre complexe (conditions 1) ; (○) : T_{ext} = 220°C ; (□) : T_{ext} = 200 °C

III.2.2. Taux de gonflage

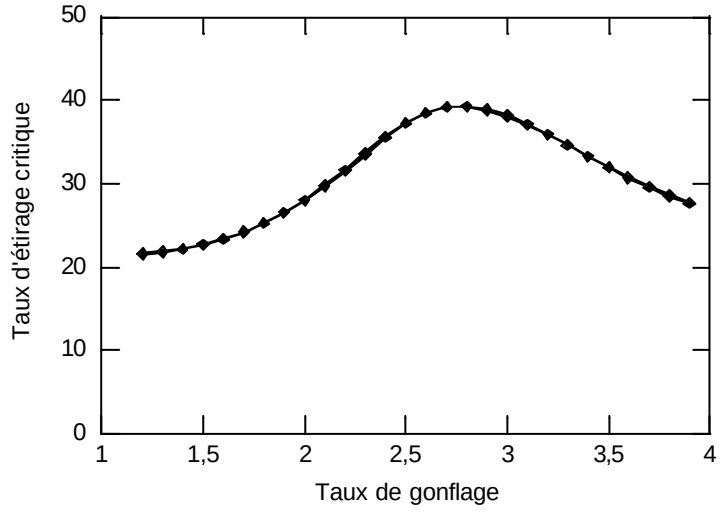


figure 4.30 : Influence du taux de gonflage sur le taux d'étirage critique détecté pour la première valeur propre complexe (conditions 1)

A partir des conditions standard, nous avons fait varier petit à petit le taux de gonflage de la bulle dans l'intervalle compris entre 1 et 4. Nous avons relevé à chaque calcul le taux d'étirage critique à partir duquel la partie réelle de la valeur propre dominante devenait positive. Les résultats sont présentés sur la figure 4.30. Nous observons que la valeur de taux d'étirage critique dépend du taux de gonflage mais ne varie pas continûment avec celui-ci. La présence d'un optimum de stabilité (i.e. taux d'étirage critique maximal) pour un taux de gonflage de 2.7 environ n'est pas sans nous rappeler, qualitativement, les conclusions expérimentales du chapitre 2 sur la stabilité du PEbdl.

III.3. Synthèse des résultats

Afin de rendre compte des interactions entre les différents paramètres, nous avons cherché à évaluer l'évolution du taux d'étirage critique calculé en fonction à la fois du taux de gonflage et du taux de refroidissement adimensionnel. Nous avons donc balayé de manière systématique l'espace $(BUR, d\overline{T}/d\overline{z})$ en suivant l'évolution du taux d'étirage critique déterminé. La figure 4.31 résume dans l'espace $((BUR, d\overline{T}/d\overline{z}, DR)$ les résultats obtenus.

De manière générale, les taux d'étirages critiques relevés augmentent avec le taux de refroidissement. Nous notons, aux taux de refroidissement les plus élevés que nous avons investigués, la présence d'un «pic de stabilité » en fonction du taux de gonflage qui s'amenuise continûment lorsque le refroidissement diminue.

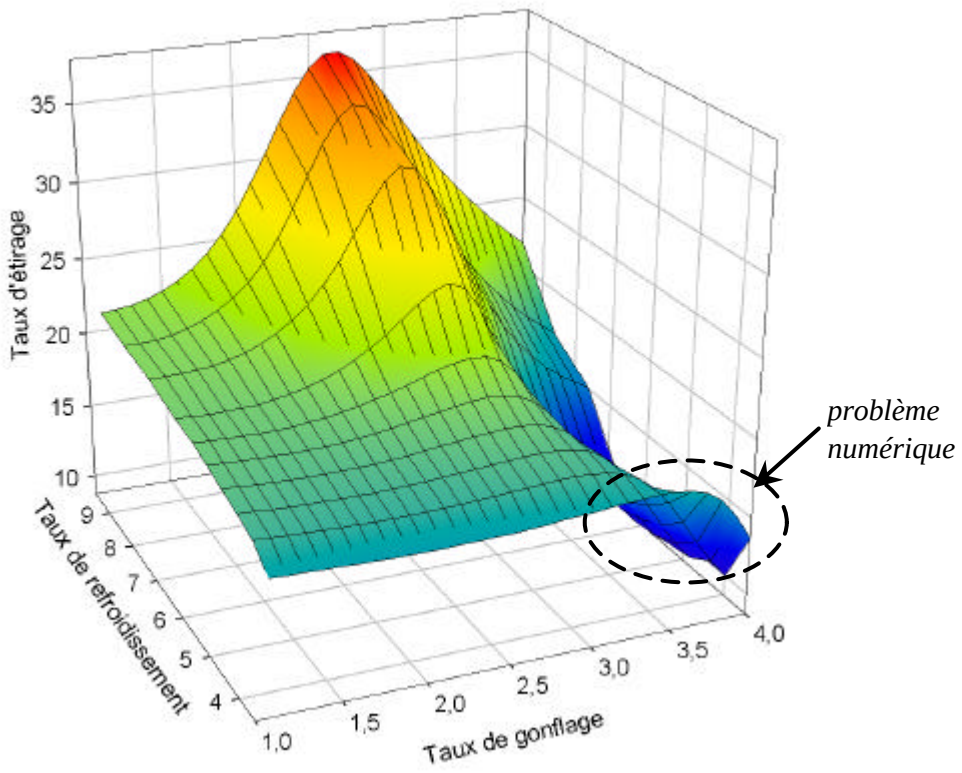


figure 4.31 : Evolution du taux d'étirage critique en fonction du taux de gonflage et du taux de refroidissement

Nous n'avons pas pu techniquement continuer nos calculs pour des cas de refroidissement encore plus faibles car nous avons rencontré des difficultés à faire converger la bulle vers un tube, et ce même en augmentant fortement la longueur d'étirage L. Dans ces conditions, les résultats de stabilité étaient sans doute erronés. Ce problème semble être d'ailleurs à l'origine de la « remontée » de taux d'étirage critique observée pour des taux de gonflage élevés (i.e. conditions

où la convergence vers un tube est la plus délicate) et les plus faibles taux de refroidissement (voir figure 4.31). La valeur du paramètre L fixée serait alors insuffisante et engendrerait, comme évoqué précédemment sur la figure 4.26, une surestimation du taux d'étirage critique. Il s'agit là d'une limitation certaine de notre modèle liée au fait que nous ne postulons pas à priori la position de la ligne de figeage et que nous ne prenons pas en compte les phénomènes de cristallisation durant le refroidissement.

Nous retrouvons malgré tout qualitativement l'allure du graphique de synthèse de l'investigation expérimentale que nous avons construit en conclusion de notre chapitre 2, ce qui nous conforte dans le bien fondé de notre démarche d'analyse numérique de stabilité. Notons cependant qu'aux taux de gonflage élevés, l'instabilité rencontrée expérimentalement n'est pas l'instabilité axisymétrique de « draw resonance » mais l'instabilité de type hélicoïdal. L'analyse de stabilité non axisymétrique que nous proposons d'effectuer au chapitre suivant doit permettre de compléter ces résultats.

Sur la figure 4.32, nous avons représenté ces mêmes résultats dans le plan ($(BUR, d\bar{T}/d\bar{z}, TR)$, où TR est le taux de réduction d'épaisseur (*Thickness Reduction*) défini par la relation :

$$TR = \frac{h_0}{h_f} = DR.BUR \qquad (4.30)$$

h_0 étant l'épaisseur initiale, h_f l'épaisseur finale, et en négligeant les variations de densité du matériau.

Cette représentation permet de mieux matérialiser l'épaisseur finale atteignable en fonction du taux de gonflage de la bulle et le taux de refroidissement, en mettant en évidence l'optimum existant apparemment pour un taux de refroidissement haut et un taux de gonflage compris entre 2,5 et 3.

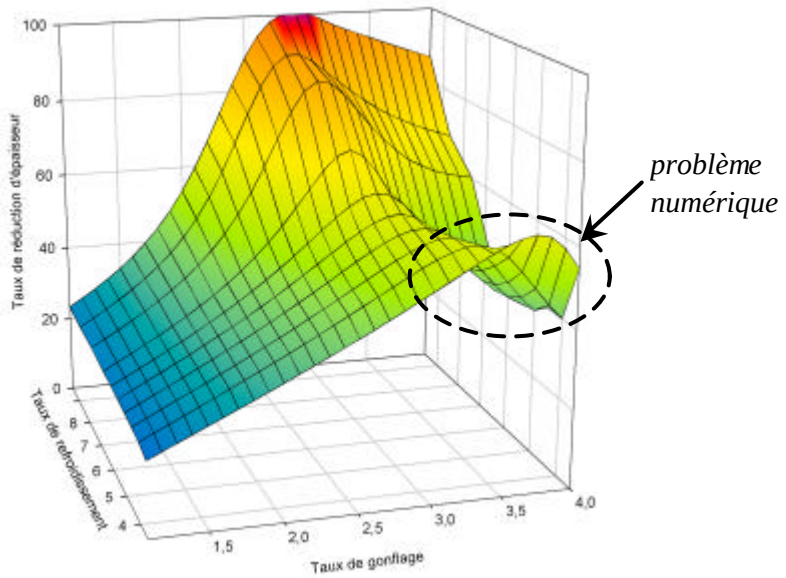


figure 4.32 : Evolution du taux de réduction d'épaisseur en fonction du taux de gonflage et du taux de refroidissement

III.4. Confrontation expérimentale

Nous venons de voir que, qualitativement, nous retrouvions les grandes tendances expérimentales sur la stabilité du soufflage de gaine avec un modèle pourtant extrêmement simpliste par rapport à la réalité du procédé. Nous allons maintenant tenter de comparer quantitativement les résultats de notre modèle avec nos observations expérimentales en utilisant les valeurs réelles des divers paramètres.

Dans les essais réalisés au CRASP présentés dans le chapitre 2, nous avons effectué un balayage des paramètres d'étirage pour les conditions recensés dans le tableau 4.3.

Essai	E/R PEbdl	$d\bar{T}/d\bar{z}$ (°C)
CRASP-1	3660	-12,6
CRASP-2	3660	-15,8

tableau 4.3 : Résumé des conditions expérimentales utilisées

Nous avons déjà évoqué lors de notre calcul stationnaire (chapitre 3) que, dans le cas d'une faible thermodépendance de la viscosité, nous rencontrons des difficultés pour fixer une longueur de calcul L suffisante pour respecter totalement le critère de convergence de la bulle vers un tube à grande distance. Le calcul de stabilité s'en ressent alors, comme présenté sur la figure 4.31, où le taux d'étirage critique à haute taux de gonflage et bas taux de refroidissement semble surestimé du fait de l'erreur faite sur la solution stationnaire. Ce phénomène survient bien évidemment d'autant plus facilement que l'énergie d'activation fixée pour le matériau est faible, la viscosité étant alors insuffisante pour « rigidifier » la bulle. Nous avons rencontré ce type de problèmes avec le gradient thermique le plus faible ($d\bar{T}/d\bar{z}$=12,6°C) à des taux de gonflage supérieurs à 3 et des taux d'étirage élevés. L'erreur sur la variation de la valeur propre est alors importante et des difficultés de convergence sont rencontrés, on parlera de « zone d'incertitude numérique ».

La figure 4.33 présente les résultats obtenus en fixant un gradient thermique $d\bar{T}/d\bar{z}$ de 15,8°C et les compare aux résultats expérimentaux correspondants (essais CRASP-2). Nous notons, comme nous le présagions, un écart relativement conséquent entre les taux d'étirage critiques prédits et ceux réellement observés sur la ligne expérimentale. De plus nous prédisons un optimum de taux d'étirage critique accessibles que nous n'avons pas observé durant nos essais.

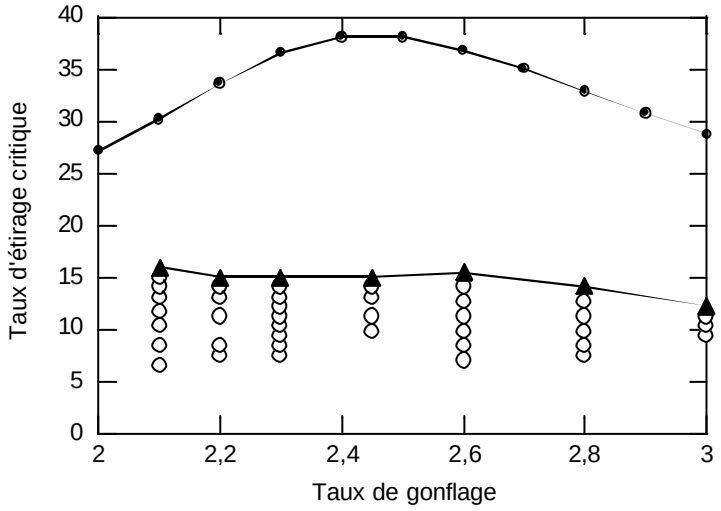


figure 4.33 : Comparaison entre les résultats expérimentaux CRASP-2 ((○) : zone stable ; (□) : zone de « draw resonance ») et le calcul de stabilité sur le modèle ($d\bar{T}/d\bar{z}$ =-15.8°C ; E/R=3660)

Sur la figure 4.34, nous comparons cette fois les résultats obtenus dans les conditions CRASP-1 ($d\overline{T}/d\overline{z}$ =12,6°C). Nous constatons à nouveau une surestimation manifeste des taux d'étirage critiques prédits, même si ceux-ci sont plus faibles que ceux prédits pour un taux de refroidissement plus élevé et que l'optimum prédit (situé dans la zone d'incertitude numérique définie précédemment) tend à s'amoindrir.

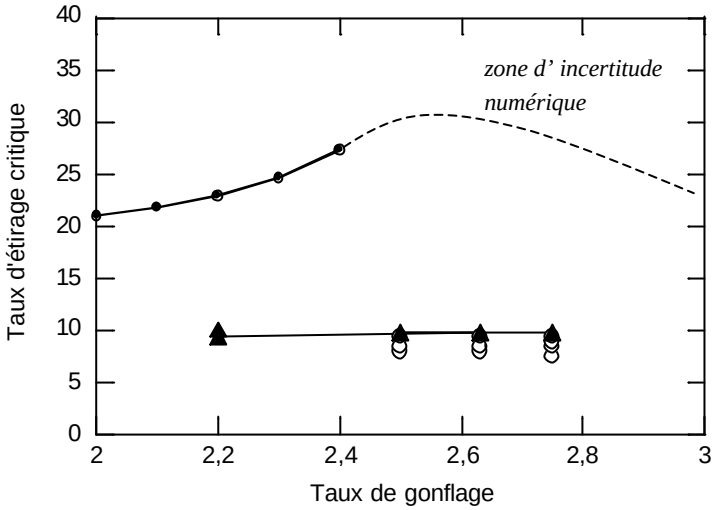


figure 4.34 : Comparaison entre les résultats expérimentaux CRASP-1 ((○) : zone stable ; (□) : zone de « draw resonance ») et le calcul de stabilité sur le modèle ($d\overline{T}/d\overline{z}$ =-12.6°C ; E/R=3660)

Nous pouvons tenter de caractériser plus finement le comportement de l'instabilité prédite en nous intéressant à la partie imaginaire de la valeur propre au moment de la transition stable-instable (i.e. changement de signe de la partie réelle de cette valeur propre). En effet, puisque nous décrivons la perturbation temporelle sous la forme e^{lt}, la partie imaginaire de la valeur propre est par définition la pulsation adimensionnelle $\overline{w}$ de l'instabilité. Ainsi la période $\overline{T}$ de l'instabilité vaudra :

$$\overline{T} = \frac{2p}{\overline{w}} \qquad (4.31)$$

Nous avons vu lors de notre adimensionnalisation (voir chapitre 3), que la variable temporelle t était adimensionnalisée par la relation suivante :

$$t = t_0.\bar{t} = \frac{R_0}{V_0}\bar{t} \qquad (4.32)$$

où V_0 est la vitesse du fluide en sortie de filière et R_0 le rayon de celle-ci.

La vitesse du fluide est reliée au débit et à la géométrie de la filière par la relation approchée :

$$V_0 = \frac{Q_v}{S} = \frac{Q_m}{r.2p.R_0.e_0} \qquad (4.33)$$

avec Q_v et Q_m respectivement les débits volumique et massique de l'extrudeuse, r la masse volumique du fluide (ici 750 kg/m^3) et e_0 l'entrefer de la filière.

Débit massique(kg/h)	5
Rayon filière (mm)	25,25
entrefer filière (mm)	0,95

tableau 4.4 : Caractéristiques des essais expérimentaux CRASP-1 et CRASP-2

Avec les données du tableau 4.4 résumant les conditions d'extrusion de nos essais expérimentaux, nous aboutissons finalement à la valeur du coefficient d'adimensionnalisation de la variable temporelle :

$$t = t_0.\bar{t} = \frac{R_0}{V_0}\bar{t} \approx 2.055\bar{t} \qquad (4.34)$$

La figure 4.35 présente en fonction du taux de gonflage les périodes déduites des parties imaginaires des valeurs propres à la transition stable-instable, ce qui représente donc en quelque sorte le déclenchement de l'instabilité. Nous constatons que la période prédite pour chacun des deux cas considérés varie très peu avec le taux de gonflage dans la plage de valeurs considérée. Nous prédisons ainsi des périodes d'environ 4,3s et 6,4s pour les deux conditions de refroidissement. Ceci est globalement en bon accord avec nos observations expérimentales où nous avons mesuré des périodes d'instabilités respectivement de 5,7s et 8,5s qui variaient très peu avec le taux de gonflage (voir chapitre 2).

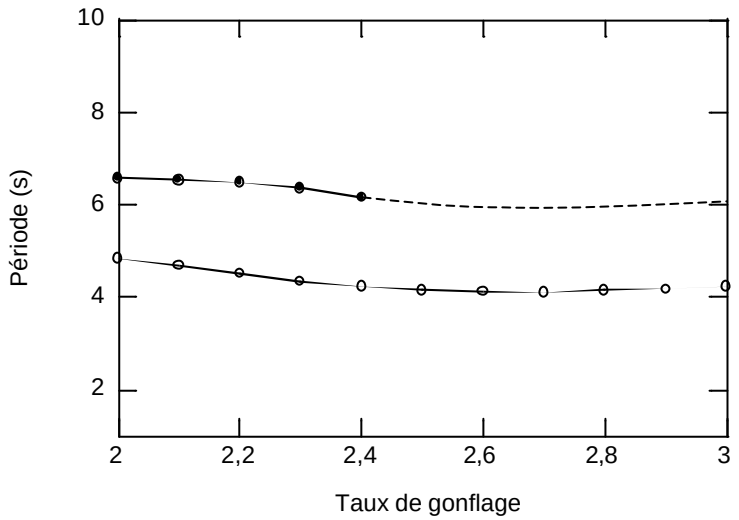


figure 4.35 : Evolution de la période de déclenchement de l'instabilité prédite en fonction du taux de gonflage ;
(●) : $d\bar{T}/d\bar{z}$ =-12.6°C ; (○) : $d\bar{T}/d\bar{z}$ =-15.8°C

IV. Conclusions et discussion

A travers ce chapitre, nous avons effectué l'analyse de stabilité axisymétrique du modèle thermomécanique du soufflage de gaine que nous avons construit dans le chapitre 3. La réponse du système à de petites perturbations est le développement d'une instabilité périodique au delà d'un taux d'étirage critique (bifurcation de Hopf). Cette valeur critique est dépendante des autres paramètres du système (taux de gonflage, de refroidissement) et, chose plus surprenante, des conditions aux limites imposées (notion de paramètres « contrôlés »). Cette pulsation axisymétrique est à rapprocher du défaut expérimentalement observé appelé « draw resonance ».

Qualitativement, nous retrouvons l'influence des différents paramètres du procédé sur l'apparition de ce défaut, en particulier le caractère stabilisant du refroidissement. Un optimum de stabilité est même prédit pour des valeurs suffisamment élevées de refroidissement, ce qui s'avère cohérent avec l'analyse, très simplificatrice, des résultats expérimentaux que nous avons menée dans le

chapitre 2. La confrontation quantitative des résultats apportés par ce modèle avec les mesures expérimentales précises que nous avons pu réaliser nous montre cependant que les valeurs de taux d'étirage critique prédites sont surestimées par rapport à la réalité du procédé. Néanmoins, l'étude des périodes des instabilités prédites tend à démontrer que le phénomène physique qu'elles représentent est bel et bien l'instabilité de « draw resonance ». La source de l'instabilité est donc bien, comme pour des études effectuées dans les procédés de filage textile et de cast-film, l'étirage longitudinal et non, comme l'ont tout d'abord postulé certains auteurs, des défauts d'extrusion par exemple [AND,92].

Lors de l'étude stationnaire du modèle (chapitre 3), nous avons déjà observé, comme avant nous André [AND,99], des écarts entre la forme de bulle prédite et les mesures expérimentales. L'origine de ces écarts est à rechercher dans les nombreuses simplifications que nous avons effectuées dans la construction de notre modèle. Il n'est pas réellement étonnant d'observer des écarts sur les résultats de stabilité, qui sont basés, comme nous l'avons vu, sur ces calculs stationnaires. Une prévision correcte des phénomènes instationnaires passe ainsi nécessairement par une simulation stationnaire la plus réaliste possible. Les phénomènes thermiques complexes sont donc trop simplifiés pour rendre compte fidèlement de la réalité. L'aérodynamique peut également, par le couplage naturel existant entre l'air soufflé autour de la bulle et celle-ci, jouer un rôle déstabilisateur que nous ne prenons absolument pas en compte ici. Ainsi, si le « démarrage » de l'instabilité est bien lié à l'étirage, le couplage fluide-structure peut modifier la réponse du système à ces petites variations dimensionnelles occasionnées. Ce rôle « perturbateur » variera bien entendu avec les caractéristiques cinématiques de l'air pulsé et sera d'autant plus important que l'écoulement de l'air sera turbulent.

L'analyse de stabilité axisymétrique telle que nous venons de la décrire n'est pas adaptée pour rendre compte du second défaut expérimentalement observé : l'instabilité hélicoïdale. Dans le chapitre suivant, nous proposons de rompre l'hypothèse d'axisymétrie de notre modèle en tenant compte cette fois des variations angulaires de nos variables. Nous verrons comment nous sommes alors capables d'effectuer une analyse de stabilité permettant de rendre compte des pulsations non axisymétriques de la bulle observées pour des taux de gonflage élevés

V. Référence bibliographiques

[AGA,96] AGASSANT J. F., AVENAS P., SERGENT J. P., VERGNES B. & VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques*, 3ème édition, Techniques et Documentation, Paris, 1996

[AND,92] ANDRIANARAHINJAKA H., *Etude des instabilités lors de la fabrication des films thermoplastiques biétirés par le procédé de soufflage de gaine*, Thèse de doctorat, Université de Lille, 1992

[AND,96] ANDRIANARAHINJAKA H. & MICHEAU P., *Phénomènes d'instabilité en soufflage de gaine : une analyse de stabilité linéaire*, C. R. Acad. Sci. Paris, vol.322, pp.363-370, 1996

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[ANT,88] ANTURKAR N. T. & CO A., *Draw Resonance in film casting of viscoelastic fluids : A linear stability analysis*, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol.28, pp.287-307, 1988

[BAR,90] BARQ P., HAUDIN J. M. & AGASSANT J. F., *Instability phenomena in film casting process*, Intern. Polym. Process., vol.5, n°4, pp.264-271, 1990

[BAR,94] BARQ P., HAUDIN J. M. & AGASSANT J. F., *Stationary and dynamic analysis of film casting process*, Intern. Polym. Process., vol.9, n°4, pp.350-358, 1994

[CAI,88] CAIN J. & DENN M. M., *Multiplicities and instabilities in film blowing*, Polym. Eng. Sci., vol.28, n°23, pp.1527-1541, 1988

[CHA,79] CHANG J. C. & DENN M. M., *An experimental study of isothermal spinning of a Newtonian and a Viscoelastic liquid*, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol.5, pp.369, 1979

[CHA,81] CHANG J. C., DENN M. M. & GEYLING F. T., *Effects of inertia, surface tension and gravity on the stability of isothermal drawing of Newtonian fluids*, IEC Fund., vol.20, n°, pp.147, 1981

[CHO,94] CHOSSAT P. & IOOSS G., *The Couette-Taylor problem*, Applied Mathematical Sciences, vol. 102, Springer-Verlag, New York, 1994

[DEM,82] DEMAY Y. & AGASSANT J.F., *Application de la stabilité linéaire à l'étude du filage textile isotherme et non-isotherme*, J. Mecanique Théorique et Appliquée, vol.1, pp.763, 1982

[DEM,83] DEMAY Y., *Instabilité d'étirage et bifurcation de Hopf* , Thèse de doctorat, Université de Nice, 1983

[DEM,85] DEMAY Y. & AGASSANT J.F., *Experimental study of the Draw Resonance in fiber spinning*, J. Non-Newt. Fluid Mech., vol.18, pp.187, 1985

[DEN,75] DENN M. M. , PETRIE C. J. S. & AVENAS P., *Mechanics of steady spinning of a Viscoelastic liquid*, AIChE Journal, vol.21, pp.791-799, 1975

[FIE,99] FIELD G. J., MICIC P., & BHATTACHARYA S. N, *Melt strength and film bubble instability of LLDPE/LDPE blends*, Polym. Int., vol. 48, pp. 461-466, 1999

[FIS,77] FISHER R. J. & DENN M. M., *Mechanics of non-isothermal polymer melt spinning*, AIChE Journal, vol.23, n°1, pp.23, 1977

[HAN,75] HAN C. D. & J. Y. PARK, *Studies on blown film extrusion. III. Bubble instability*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 19, pp. 3291-3297, 1975

[HOU,98] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady flow of an axisymmetric annular film under gravity*, Physics of fluids, vol. 10, n° 10, pp. 2500-2516, 1998

[HOU,00 a] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. I. General model and its numerical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 229-259, 2000

[HOU,00 b] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. II. Linearized model and its analytical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 303-325, 2000

[HOU,00 c] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *3-Dimensional stability analysis of the film blowing process*, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK, vol. 3, pp.152-154, 2000

[HUA,88] HUANG T.A., *Instrumentation development for sensing modes of bubble motion of a blown-film process*, Adv. in Polym. Tech., vol. 8, n° 1, pp. 69-75, 1988

[ISH,75] ISHIHARA H. & KASE S., *Studies on melt spinning. V. Draw resonance as a limit cycle*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 19, pp. 557-565, 1975

[ISH,76] ISHIHARA H. & KASE S, *Studies on melt spinning. VI. Simulation of draw resonance using Newtonian and power-law viscosities*, J. Appl. Polym. Sci., vol. 20, pp. 169-191, 1976

[IYE,96] IYENGAR V. R. & CO A. , *Film casting of a modified Giesekus fluid : stability analysis* , Chem. Eng. Sci. , vol.51, n°9, pp.1417-1430, 1996

[KAN,84] KANAI T. & WHITE J. L. , *Kinematics, dynamics and stability of the tubular film extrusion of various Polyethylenes*, Polym. Eng. Sci., vol. 24, n° 15, pp. 1185-1201, 1984

[KAS,65] KASE S. & MATSUO T., *Studies on melt spinning. I. Fundamental equations on the dynamics of melt spinning*, J. Polym. Sci., vol.3, pp.2541-2554, 1965

[LAS,99] LASAUNIERE N., *Etude des instabilités de bulle dans le procédé de soufflage de gaine de polyéthylène*, Rapport final de Mastère, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[MIC,98] MICIC P., BHATTACHARYA S. N. & FIELD G., *Transient elongational viscosity of LLDPE/LDPE blends and its relevance to bubble stability in the film blowing process*, Polym. Eng. and Sci., vol. 38, n° 10, pp. 1685-1693, 1998

[MIN,86] MINOSHIMA W. & WHITE J. L., *Instability phenomena in tubular film, and melt spinning of rheologically characterized high density, low density and linear low density Polyethylenes*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 19, pp. 275-302, 1986

[PEA,66] PEARSON J.R.A, *Mechanical principles of polymer melt processing*, Pergamon, Londres, 1966

[PEA,69] PEARSON J.R.A & MATOVITCH M.A., *Spinning a molten threadline (Stability)*, IEC Fund., vol. 8, pp. 605-609, 1969

[PEA,70] PEARSON J.R.A & PETRIE C. J. S., *A fluid-mechanical analysis of the film-blowing process*, Plastics and Polymers , vol. 38, pp. 85-94, 1970

[SIL,96] SILAGY D., *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'extrusion de film a plat de polymère*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996

[VAL,01] VALETTE R., *Etude de la stabilité de l'écoulement de Poiseuille de fluides viscoélastiques. Application au procédé de coextrusion des polymères*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2001

[YEO,74] YEOW Y.L., *On the stability of extending films ; a model for the film casting process*, J. Fluid. Mech., vol. 66, part 3, pp. 613-622, 1974

[YEO,76] YEOW Y. L., *Stability of tubular film flow : a model of the film-blowing process*, J. Fluid Mech., vol.75, n°3, pp.557-591, 1976

[YOO,99] YOON K. S. & PARK C. W., *Stability of a blown film extrusion process*, Intern. Polym. Process., vol.14, n°4, pp.342-349, 1999

Chapitre 5. Extension au cas non axisymétrique

I. La prédiction des comportements perturbés non axisymétriques 145
I.1. Un cas « pédagogique » : l'écoulement de Couette (1888) 145
I.1.1. Observations expérimentales 146
I.1.2. Etude numérique – analyse de stabilité linéaire non axisymétrique 147
I.2. Application au procédé de soufflage de gaine 148

II. Construction du modèle tridimensionnel 150
II.1. Mise en équations 150
II.1.1. Description de la géométrie de la bulle 150
II.1.2. Equations générales de la mécanique 151
II.1.3. Conditions aux limites : surfaces libres 152
II.2. Changement de repère, adimensionnalisation et développement des équations 153
II.3. Analyse dimensionnelle et équations obtenues 153
II.4. Commentaires sur le système obtenu 155
II.5. Equation de la chaleur 156

III. Analyse de stabilité linéaire du système 156
III.1. Perturbation introduite 156
III.2. Résolution 156
III.2.1. Choix des conditions aux limites 157
III.2.2. Méthode de calcul 158

IV. Résultats préliminaires – cohérence de l'analyse de stabilité 158
IV.1. Recherche des valeurs propres 158
IV.2. Influence du taux d'étirage 159
IV.3. Influence du taux de gonflage 160

V. Conclusions 162

VI. Références bibliographiques 162

Chapitre 5. Extension au cas non axisymétrique

Dans notre étude expérimentale, nous avons montré l'existence, pour des conditions particulières de procédé, d'un comportement instable dans lequel la bulle perd son axisymétrie. Son centre décrit alors un mouvement hélicoïdal périodique que ne peuvent bien entendu pas prédire les approches consistant à considérer l'écoulement axisymétrique. Prendre en compte cette « rupture » d'axisymétrie revient en quelque sorte à accorder au fluide un degré de liberté supplémentaire dans l'espace, ce qui est une complexification certaine de la mise en équations et de l'analyse, stationnaire puis non stationnaire, qui en est faite.

Dans ce chapitre, nous proposons d'étendre la méthodologie développée dans les chapitres 3 et 4 à un modèle mécanique du procédé dont les équations sont décrites cette fois dans le repère cylindrique global sans l'hypothèse d'axisymétrie. Nous développons ensuite les bases de l'étude de stabilité linéaire non axisymétrique de ce modèle. Les premiers résultats obtenus sont en cohérence avec les défauts expérimentalement observés.

I. La prédiction des comportements perturbés non axisymétriques

Pour des écoulements plus simples que le procédé de soufflage de gaine, les auteurs ont développé des méthodes d'analyse permettant de rendre compte des instabilités tridimensionnelles survenant dans certaines conditions. Dans ce qui suit, et afin de présenter le principe de l'analyse de stabilité non axisymétrique, nous présentons un aperçu des travaux effectués sur l'écoulement simple de Couette. Ce cas, a priori très éloigné du procédé qui nous intéresse, s'avère en réalité présenter certaines similitudes avec celui-ci, notamment dans le développement d'instabilités axisymétriques ou non axisymétriques. Ainsi dotés des connaissances acquises sur ce cas « pédagogique », nous serons à-même de mieux comprendre la méthode d'analyse de stabilité d'équations que nous allons appliquer dans le cas non axisymétrique pour le procédé de soufflage de gaine.

I.1. Un cas « pédagogique » : l'écoulement de Couette (1888)

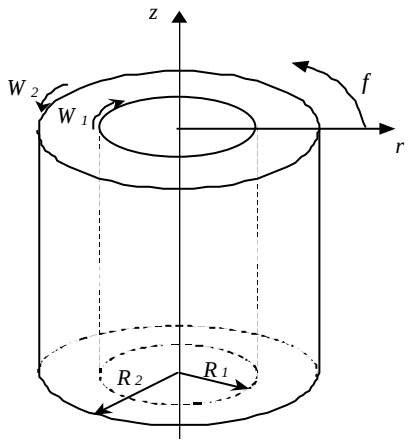


figure 5.1 : Schéma de principe de la géométrie dans un écoulement de Couette

Dans le cas d'un écoulement dit « de Couette » (voir figure 5.1), le fluide est contenu dans l'espace entre deux cylindres co- ou contrarotatifs. L'étude expérimentale montre que l'écoulement de cisaillement simple ainsi généré [AGA,96] laisse place à un grand nombre de comportements décrits dans la littérature lorsque sont modifiés la valeur de l'espace (R_2-R_1) entre les deux cylindres, le rapport de leurs vitesses de rotations W_1 et W_2, ou la nature du fluide.

I.1.1. Observations expérimentales

En 1923, Taylor mit en évidence, dans le cas d'un fluide newtonien, un comportement caractérisé par une série de « bandes » correspondant à des recirculations du fluide selon l'axe $\vec{z}$ (voir figure 5.2). Ce comportement est connu sous le vocable de « vortex » ou « rouleaux » de Taylor (*Taylor vortices*) .



(a) *(b)*

figure 5.2 : Ecoulement en vortex de Taylor,(d'après [CHO,94]) ; (a) : photographie ; (b) : schéma de l'écoulement

En faisant varier plus précisément les conditions expérimentales, les études ultérieures mirent en évidence un grand nombre de comportements où l'écoulement est perturbé de façon différente. Ainsi il existe notamment des conditions pour lesquelles l'axisymétrie de l'écoulement est rompue, celui décrivant alors une spirale, telle que l'illustre la figure 5.3.



(a) *(b)*

figure 5.3 : Ecoulement en spirales (d'après [CHO,94]) ; (a) : photographie ; (b) : schéma de l'écoulement

Parmi les nombreux auteurs qui se sont intéressés à ces comportements, Andereck, Liu et Swinney [AND,86] proposèrent le diagramme synthétique très complet présenté sur la figure 5.4. Celui-ci fait apparaître, pour un fluide newtonien et une géométrie définie et en faisant varier les vitesses des deux cylindres, un grand nombre de zones correspondant à des comportements différents plus complexes.

L'existence de comportements particuliers, notamment hélicoïdal, au-delà de valeurs critiques des paramètres régissant l'écoulement nous rappelle bien entendu ce que nous avons décrit dans le chapitre 2 lors de l'étude expérimentale du procédé de soufflage de gaine.

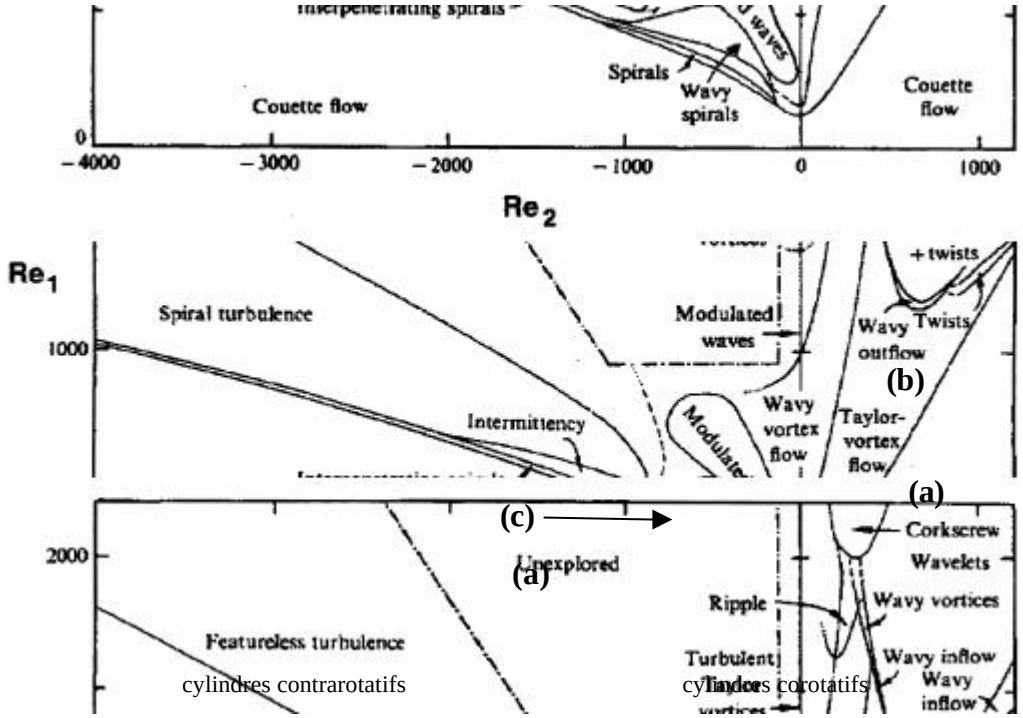


figure 5.4 : Diagramme des différents comportements rencontrés dans une géométrie de Couette, d'après [AND,96] ; les vitesses des cylindres sont adimensionnalisées par les nombres de Reynolds correspondants Re_1 et Re_2 (a) : zone d'écoulement de Couette ; (b) : zone des rouleaux de Taylor ; (c) : zone des spirales

I.1.2. Etude numérique – analyse de stabilité linéaire non axisymétrique

L'écoulement de Couette est régi par les équations de Navier-Stokes que nous ne détaillerons pas ici. Nous supposerons connues dans le repère cylindrique (r,f,z) défini sur la figure 5.1, les équations instationnaires (i.e. où les différentes variables du système dépendent du temps) de cet écoulement. Comme nous l'avons présenté dans le chapitre 4, l'analyse de stabilité linéaire du système nécessite dans un premier temps l'obtention de la solution stationnaire, qui sera ensuite perturbée. Etant donné que l'écoulement de Couette non perturbé est axisymétrique, la résolution des équations en régime stationnaire s'effectue en négligeant les termes dépendant de l'angle f.

Dans le repère cylindrique (r,f,z), et compte tenu de l'absence d'hypothèse simplificatrice, la forme perturbée des variables X du système s'écrit, par extension de l'expression introduite dans le chapitre 4, sous la forme générale suivante :

$$X(r,z,f,t) = X_s(r,z) + \hat{X}(r)e^{lt+ikz+imf} \qquad (5.1)$$

où X_s est la solution stationnaire calculée, $\hat{X}(r)$ la fonction propre complexe, l la valeur propre complexe, et les nombres réels k et m sont appelés respectivement nombre d'onde axial et azimutal (*axial and azimuthal wavenumbers*)[TAG,94].

- A l'adimensionnalisation près, la valeur propre l est reliée à la période temporelle de l'instabilité par la relation :

$$T_t = 2p / \mathrm{Im}(l) \qquad (5.2)$$

- De même, le nombre d'onde axial k est relié à la période spatiale T_z de répétition de l'écoulement selon l'axe $\vec{z}$ par l'expression :

$$T_z = 2p / k \qquad (5.3)$$

- Le nombre d'onde azimutal m est relié quant à lui la périodicité angulaire de l'écoulement. Ce nombre, contrairement à k, ne peut avoir que des valeurs entières du fait de la continuité évidente des différentes variables X aux angles f et $f+2p$.

Ainsi, à k et m donnés, on se ramène à un calcul aux valeurs propres l très similaire à celui décrit dans l'analyse de stabilité axisymétrique. Seule est modifiée la forme de la perturbation induite et dont on étudie la réponse par le système. En faisant graduellement varier m et k et en calculant la valeur propre l pour des conditions données, les auteurs ont pu obtenir les cartographies des zones correspondant aux différents comportements évoqués, comme l'illustre la figure 5.5.

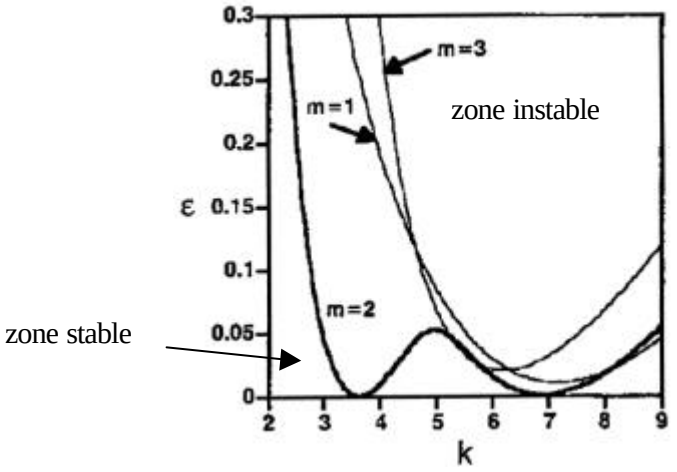


figure 5.5 : Exemple de courbes limites de stabilité en fonction de la valeur du nombre d'onde longitudinal k et de la vitesse de rotation adimensionnalisée du cylindre intérieur e, d'après [TAG,94]

Sur ce principe, les rouleaux de Taylor, qui présentent un motif de répétition selon l'axe $\vec{z}$ mais pas de perte d'axisymétrie, seront décrit lors de l'analyse de la réponse du système à une perturbation pour laquelle $m=0$ (non présenté sur la figure 5.5). La spirale, quant à elle, correspond à un nombre d'onde azimutal $m=1$, car la symétrie est 2π-périodique. Les cas où m est supérieur à 1 correspondent à des instabilités plus spécifiques et complexes de type hélices enchevêtrées qui ne seront pas développées ici. Nous notons simplement que selon les conditions d'écoulement, c'est-à-dire ici la valeur de e, c'est l'un ou l'autre des états perturbés qui survient plus tôt.

I.2. Application au procédé de soufflage de gaine

A notre connaissance, et comme nous l'avons déjà évoqué dans l'étude bibliographique du chapitre 4, seuls Housiadas et Tsamopoulos [HOU,00 a] proposent une analyse de stabilité non axisymétrique d'un modèle du soufflage de gaine inspiré de leurs travaux sur l'extrusion de tubes minces [HOU,98][HOU,00 b,c].

Les équations sont développées selon la même méthode que celle que nous avons utilisée au chapitre 3 pour construire notre modèle, c'est-à-dire un changement de repère adéquat (*non orthogonal mapping*) couplé à une analyse des différentes équations en fonction d'un petit paramètre. Compte tenu de l'indépendance, démontrée, des différentes variables par rapport au

rayon *r* (c'est l'hypothèse membrane), les équations instationnaires sont linéarisées en exprimant les différentes variables $X(z,f,t)$ sous la forme perturbée :

$$X(f,z,t) = X_s(f,z) + \hat{X}(z)e^{lt+imf} \qquad (5.4)$$

Du fait de l'invariance par translation dans la direction *z*, il n'existe pas, dans ce cas, de nombre d'onde *k* comme dans l'expression (5.1). Ainsi, en fixant *m=0*, le calcul aux valeurs propres revient exactement au cas axisymétrique, que nous avons décrit dans le chapitre précédant. On recherche alors la réponse du système à une perturbation longitudinale. Par contre, dans le cas où *m=1*, cette perturbation est cette fois transversale.

Cette analyse est appliquée sur un modèle dont nous avons déjà évoqué les limites dans les chapitres précédents. Ainsi, le procédé est considéré isotherme, la ligne de « figeage » est supposée connue et artificiellement imposée à la fin du calcul. De plus les premiers résultats, présentés sur la figure 5.6, sont obtenus en imposant comme conditions aux limites la non-perturbation de la vitesse et du rayon de la bulle en fin d'étirage. Cette dernière considération est très limitative car éloignée des observations expérimentales, du moins dans le cas de l'instabilité de « draw resonance » (voir chapitre 2).

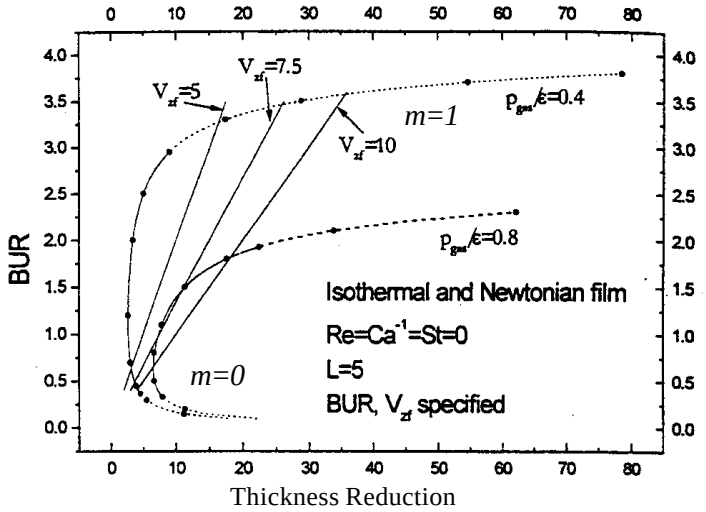


figure 5.6 : Solutions obtenues à Pression et Force de tirage données dans le plan (BUR.DR;BUR), d'après [HOU,00a] ; Cas newtonien isotherme ; (¾) état stable ; (···) : état instable

L'analyse des résultats de l'analyse de stabilité réalisée (figure 5.6) met néanmoins en évidence la prédiction de zones d'instabilités différentes selon que *m* vaut *0* ou *1*, ce qui tend à prouver l'existence de défauts distincts. De plus, la zone instable où m=1 est localisée vers les taux de gonflage élevés, ce qui est en accord, du moins qualitatif, avec l'expérience.

II. Construction du modèle tridimensionnel

La première étape de notre travail consiste à établir les équations régissant l'écoulement du fluide dans le procédé de soufflage de gaine sans considérer l'hypothèse d'axisymétrie. Pour cela, il nous faut réécrire les différentes équations d'équilibre en tenant compte cette fois des variations angulaires pouvant intervenir.

II.1. Mise en équations

II.1.1. Description de la géométrie de la bulle

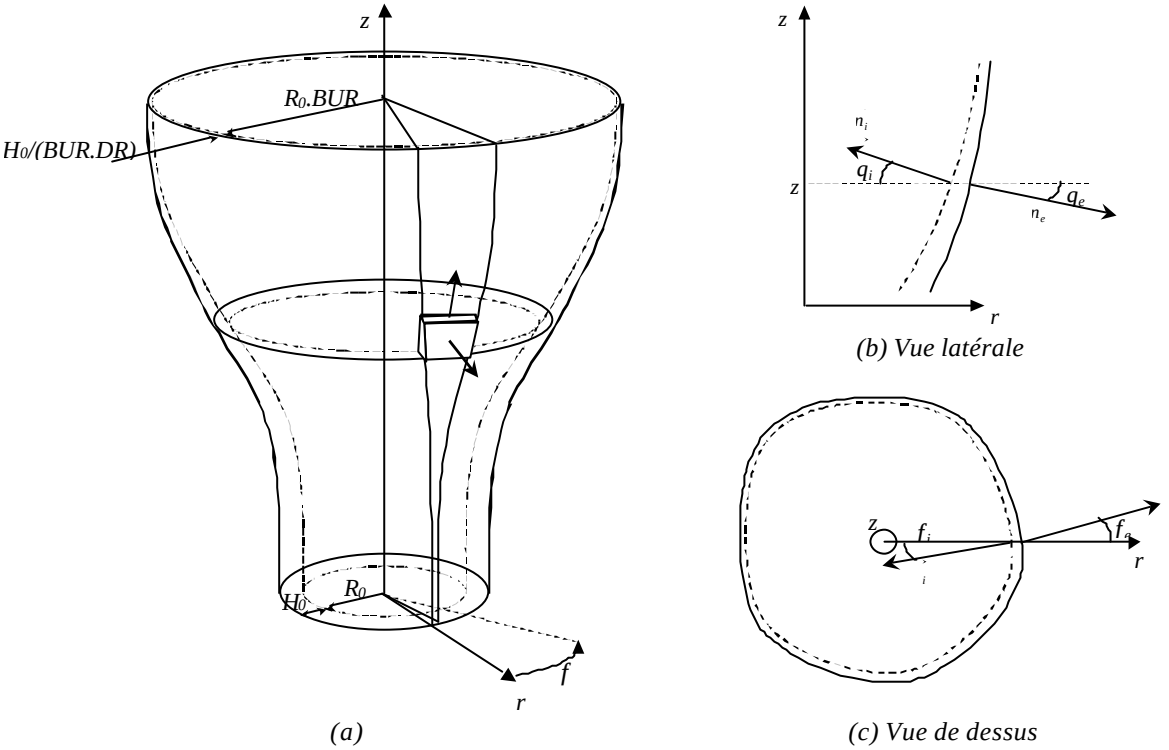


figure 5.7 : Description de la bulle dans le repère cylindrique ; cas non axisymétrique
(a) schéma de principe ; (b) et (c) description des normales aux surfaces

Sur la figure 5.7, la bulle est décrite dans le repère cylindrique (r, f, z). Dans ce cas, les normales des surfaces intérieure et extérieure ont pour coordonnées, sans toutefois les normaliser :

$$\vec{n}_i = \begin{pmatrix} -1 \\ \tan f_i \\ \tan q_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ (1/R(f,z,t))\partial R(f,z,t)/\partial f \\ \partial R(f,z,t)/\partial z \end{pmatrix} \qquad (5.5)$$

et

$$\vec{n}_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -\tan f_e \\ -\tan q_e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -(1/(R(f,z,t)+H(f,z,t)))\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))/\partial f \\ -\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))/\partial z \end{pmatrix} \qquad (5.6)$$

II.1.2. Equations générales de la mécanique

Le vecteur vitesse $\vec{v}$ du fluide s'écrit sous la forme générale :

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_r(r,f,z,t) \\ v_f(r,f,z,t) \\ v_z(r,f,z,t) \end{pmatrix} \tag{5.7}$$

Le tenseur des vitesses de déformations s'écrit alors sous la forme complète :

$$[\dot{e}] = \frac{1}{2}\left([grad\ \vec{v}] + {}^t[grad\ \vec{v}]\right) =$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v_r}{\partial r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_f}{\partial r} - \frac{v_f}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial f}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_f}{\partial r} - \frac{v_f}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial f}\right) & \frac{1}{r}\frac{\partial v_f}{\partial f} + \frac{v_r}{r} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_f}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial f}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_f}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial f}\right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{5.8}$$

L'équation d'incompressibilité ($trace[\dot{e}] = 0$) devient :

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_f}{\partial f} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \tag{5.9}$$

La loi de comportement newtonien aboutit à l'expression suivante :

$$[s] = -p[I] + 2h[\dot{e}] =$$

$$\begin{bmatrix} -p + 2h\frac{\partial v_r}{\partial r} & h\left(\frac{\partial v_f}{\partial r} - \frac{v_f}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial f}\right) & h\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) \\ h\left(\frac{\partial v_f}{\partial r} - \frac{v_f}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial f}\right) & -p + 2h\frac{\partial v_f}{\partial f} + 2h\frac{v_r}{r} & h\left(\frac{\partial v_f}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial f}\right) \\ h\left(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\right) & h\left(\frac{\partial v_f}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial f}\right) & -p + 2h\frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{5.10}$$

L'équation de l'équilibre dynamique s'écrit, en négligeant les forces de masse et d'inertie, $div\ [s] = 0$ soit ici :

$$\begin{cases} \frac{\partial s_{rr}}{\partial r} + \frac{\partial s_{rz}}{\partial z} + \frac{s_{rr} - s_{ff}}{r} = 0 \\ \frac{\partial s_{rf}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial s_{ff}}{\partial f} + \frac{\partial s_{fz}}{\partial z} + 2\frac{s_{rf}}{r} = 0 \\ \frac{\partial s_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial s_{zz}}{\partial z} + \frac{s_{rz}}{r} = 0 \end{cases} \tag{5.11}$$

II.1.3. Conditions aux limites : surfaces libres

Les équilibres d'interfaces fluide-air permettent d'exprimer sur les deux surfaces de la bulle les relations aux limites suivantes :

a) Conditions d'interface en vitesse

Par un raisonnement identique à celui exprimé dans le chapitre 3, nous parvenons aux expressions suivantes :

- *en r=R(f,z,t)* :

$$v_r(R(f,z,t),f,z,t)-\left(\frac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)v_z(R(z),f,z,t)-\frac{1}{R(f,z,t)}\left(\frac{\partial R(f,z,t)}{\partial f}\right)v_f(R(z),f,z,t)-\left(\frac{\partial R(f,z,t)}{\partial t}\right)=0 \qquad (5.12)$$

- *en r=R(f,z,t)+H(f,z,t)* :

$$\begin{aligned} &v_r((R(f,z,t)+H(f,z,t)),f,z,t)-\left(\frac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial z}\right)v_z((R(z,t)+H(z,t)),f,z,t)\\ &-\frac{1}{R(f,z,t)}\left(\frac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial f}\right)v_f((R(z,t)+H(z,t)),f,z,t)-\left(\frac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial t}\right)=0 \end{aligned} \qquad (5.13)$$

b) Conditions d'interface en contraintes

- *en r=R(f,z,t)* : $[s]\vec{n}_i=-\Delta P\vec{n}_i$

soit :

$$\begin{cases} s_{rr}(R(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t),z,t}\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial f}\right)s_{rf}-\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)s_{rz}(R(f,z,t),z,t)=-\Delta P \\ s_{rf}(R(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t),z,t}\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial f}\right)s_{ff}-\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)s_{fz}(R(f,z,t),z,t) \\ \qquad =\dfrac{1}{R(f,z,t),z,t}\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)\Delta P \\ s_{rz}(R(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t),z,t}\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial f}\right)s_{fz}-\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)s_{zz}(R(f,z,t),z,t)=+\left(\dfrac{\partial R(f,z,t)}{\partial z}\right)\Delta P \end{cases} \qquad (5.14)$$

- *en r=R(f,z,t)+H(f,z,t)* : $[s]\vec{n}_e=0$

soit :

$$\begin{cases} s_{rr}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t)+H(f,z,t)}\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial f}\right)s_{rf} \\ \qquad -\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial z}\right)s_{rz}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)=0 \\ s_{rf}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t)+H(f,z,t)}\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial f}\right)s_{ff} \\ \qquad -\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial z}\right)s_{fz}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)=0 \\ s_{rz}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)-\dfrac{1}{R(f,z,t)+H(f,z,t)}\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial f}\right)s_{fz} \\ \qquad -\left(\dfrac{\partial(R(f,z,t)+H(f,z,t))}{\partial z}\right)s_{zz}(R(f,z,t)+H(f,z,t),z,t)=0 \end{cases} \qquad (5.15)$$

II.2. Changement de repère, adimensionnalisation et développement des équations

Le traitement des variables n'est pas modifié par la rupture de l'axisymétrie de notre système. La méthode reste, comme présenté dans le chapitre 3, l'adimensionnalisation des variables par rapport aux valeurs caractéristiques en sortie de filière (indicées en 0). Simplement, nos nouvelles variables pourront dépendre cette fois également de l'angle f. Cet angle étant par nature sans dimension, il reste inchangé durant le traitement. Nous conviendrons simplement par la suite, afin d'assurer l'homogénéité des notations, de le dénommer $\bar{f}$.

La dépendance à une variable supplémentaire fait intervenir un terme « dérivées partielles » supplémentaire qui s'écrit dans notre nouveau système de coordonnées $(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})$:

$$\frac{\partial F}{\partial f} = -F_0\left[\left(\frac{R_0\partial\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{f}} + \frac{H_0\partial\overline{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{f}}\bar{r}\right)\frac{1}{H_0\overline{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\right]\frac{\partial\overline{F}}{\partial\bar{r}} + \frac{\partial\overline{F}}{\partial\bar{f}} \qquad (5.16)$$

Les autres termes restent inchangés.

L'introduction de ce changement de repère dans les équations de la mécanique permet l'obtention d'un système d'équations adimensionnalisées où apparaît le même petit paramètre $e = H_0 / R_0$ que dans le cas axisymétrique décrit dans le chapitre 3. Bien évidemment, la principale différence avec celui-ci réside dans la présence de termes dépendants de l'angle f et des composantes supplémentaires introduites par la dépendance angulaire dans le vecteur des vitesses et dans les tenseur des vitesses de déformation et de contraintes. Dans un souci de clarté, ces équations ne sont pas présentées dans le corps de ce texte. Le lecteur pourra néanmoins s'y référer en Annexe III.

II.3. Analyse dimensionnelle et équations obtenues

La méthode d'analyse des équations est exactement la même que celle développée pour le cas axisymétrique dans le chapitre 3. L'enchaînement de l'étude des équations aux différents ordres de grandeur, bien que rendu plus délicat du fait du plus grand nombre d'équations, s'effectue selon la même philosophie. Le développement lui-même est également présenté en Annexe III. Dans ce qui suit nous n'en extrayons que les résultats principaux et présentons le système d'équations obtenu.

Nous démontrons à nouveau l'indépendance de nos variables de premier ordre vis-à-vis de $\bar{r}$, l'hypothèse membrane reste donc licite. Nous pouvons regrouper les équations obtenues en sous-ensembles :

- *3 équations cinématiques*

$$\overline{v}_r^0(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = \frac{\partial\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{z}}\overline{v}_z^0(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \frac{1}{\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{f}}\overline{v}_f^0(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \frac{\partial\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial\bar{t}} \qquad (5.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\overline{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\overline{v}_z^0(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{f}}\left(\overline{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\overline{v}_f^0(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\right) + \frac{\partial}{\partial\bar{t}}\left(\overline{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\overline{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\right) = 0 \qquad (5.18)$$

(5.19)

$$\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\frac{\partial\overline{v}_r^1\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}-\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\frac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{v}_z^1\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}-\frac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\frac{\partial\overline{v}_f^1\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}$$
$$+\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\left[\overline{v}_r^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\frac{\partial\overline{v}_f^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}+\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\frac{\partial\overline{v}_z^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\right]=0$$

- *6 équations en contraintes :*

$$\begin{cases}\overline{s}_{rr}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0 & (5.20)\\ \overline{s}_{rf}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{ff}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0 & (5.21)\\ \overline{s}_{rz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{zz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0 & (5.22)\end{cases}$$

$$\begin{cases}-\overline{\Delta P}=\left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\overline{s}_{rf}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\ \quad+\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\dfrac{\partial\overline{s}_{rz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}} & (5.23)\\ \quad+\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left(\overline{s}_{rr}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\overline{s}_{ff}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{s}_{rf}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\dfrac{\overline{\Delta P}}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}=\left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\overline{s}_{ff}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\ \quad+\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\dfrac{\partial\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}} & (5.24)\\ \quad+\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left(2\overline{s}_{rf}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{s}_{ff}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\end{cases}$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{\Delta P}=\left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\ \quad+\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{zz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\dfrac{\partial\overline{s}_{zz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}} & (5.25)\\ \quad+\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left(\overline{s}_{rz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{s}_{fz}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\end{cases}$$

- *La liaison entre ces deux sous-ensembles est assurée par 6 équations issues de la loi de comportement*

$$\overline{s}_{rr}^0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=-\overline{p}_0\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\frac{2\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\frac{\partial\overline{v}_r^1}{\partial\overline{r}}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \qquad (5.26)$$

$$\bar{s}_{zz}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=-\bar{p}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+2\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\frac{\partial\bar{v}_{z}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}} -2\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{v}_{z}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) \tag{5.27}$$

$$\bar{s}_{rz}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=h\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\frac{\partial\bar{v}_{r}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}} +h\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\left(\frac{1}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{v}_{z}^{1}}{\partial r}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\frac{1}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{v}_{r}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\right) \tag{5.28}$$

$$\bar{s}_{ff}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=-\bar{p}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+2\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\bar{v}_{r}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) +2\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\frac{\partial\bar{v}_{f}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+2\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{v}_{f}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}} \tag{5.29}$$

$$\bar{s}_{fz}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\frac{\partial\bar{v}_{f}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}+\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{v}_{z}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}} -\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\bar{v}_{f}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) -\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\frac{\partial\bar{v}_{z}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) \tag{5.30}$$

$$\bar{s}_{fr}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\left[\bar{v}_{f}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+\frac{\partial\bar{v}_{r}^{0}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\right]+\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{v}_{f}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) -\frac{\bar{\eta}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\frac{\partial\bar{v}_{r}^{1}}{\partial\bar{r}}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right) \tag{5.31}$$

II.4. Commentaires sur le système obtenu

Nous venons de construire, à partir des équations de la mécanique régissant l'écoulement du fluide dans le procédé de soufflage de gaine, un système d'équations exprimées dans le repère cylindrique global composé de 15 équations et les 15 inconnues dépendant de $\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)$ suivantes :

$$\bar{v}_{r}^{0},\bar{v}_{z}^{0},\bar{v}_{f}^{0},\frac{\partial\bar{v}_{r}^{1}}{\partial\bar{r}},\frac{\partial\bar{v}_{z}^{1}}{\partial\bar{r}},\frac{\partial\bar{v}_{f}^{1}}{\partial\bar{r}},\bar{R},\bar{H},\bar{p}^{0},\bar{s}_{rr}^{0},\bar{s}_{ff}^{0},\bar{s}_{zz}^{0},\bar{s}_{rz}^{0},\bar{s}_{zf}^{0},\bar{s}_{rf}^{0}$$

Nous avons vu qu'il s'agissait en fait d'une extension du modèle axisymétrique développé dans le chapitre 3, basé sur une technique d'analyse des équations à plusieurs ordres de grandeur. La méthode que nous avons élaborée s'avère donc suffisamment robuste pour permettre son utilisation dans ce cas apparemment plus complexe. Il est par ailleurs aisé d'effectuer le passage de l'un à l'autre de ces systèmes d'équations en annulant simplement dans le second les composantes ou les termes des divers vecteurs et tenseurs impliquant l'angle f .

Au vu de ce que nous avons montré dans notre brève étude bibliographique, l'analyse de stabilité, réponse du système à une impulsion axisymétrique ou non, s'effectue en perturbant la solution stationnaire du système, qui correspond à l'état indépendant du temps de l'écoulement étudié. Dotés du système d'équations non axisymétrique, nous pouvons tout à fait envisager (moyennant un outil de calcul adapté) de le résoudre dans le cas stationnaire en rompant l'axisymétrie de la bulle. Ce cas ne sera pas traité ici mais sera évoqué dans le chapitre 6. Nous considèrerons donc dans ce qui suit qu'à la sortie de la filière, le comportement de l'extrudat est parfaitement axisymétrique, de même que les conditions de bi-étirage et de refroidissement auxquelles il est soumis. Le calcul stationnaire axisymétrique effectué dans le chapitre 3 sera donc introduit dans notre analyse de stabilité et les différents termes des équations faisant intervenir l'angle seront considérés alors comme nuls en régime stationnaire.

II.5. Equation de la chaleur

L'équation de la chaleur s'écrit dans le cas non axisymétrique et en considérant une température moyenne dans l'épaisseur du film :

$$\frac{\partial \overline{T}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{t}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial \overline{T}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\overline{v}_z^0(\bar{z},\bar{t})+\frac{\partial \overline{T}(\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\overline{H}(\bar{z},\bar{t})\overline{v}_f^0(\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{z},\bar{t})} = -\frac{a}{rc_p}\frac{R_0}{H_0.V_0}\left(\overline{T}(\bar{z},\bar{t})-\overline{T}_{air}\right) \qquad (5.32)$$

III. Analyse de stabilité linéaire du système

Nous allons à présent procéder à la linéarisation des équations de notre modèle instationnaire. La technique est bien évidemment très similaire à celle que nous avons déjà présenté dans le chapitre 4.

III.1. Perturbation introduite

Comme nous l'avons déjà exposé au début de ce chapitre, la petite perturbation des variables *X* de notre système va cette fois s'écrire sous la forme :

$$\overline{X}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = \overline{X}_s(\bar{f},\bar{z}) + \hat{X}(\bar{z})e^{l\bar{t}+im\bar{f}} \qquad (5.33)$$

L'introduction de la dépendance angulaire induit, outre l'existence d'autres équations ainsi que d'autres termes dans les équations préexistantes, le calcul de la dérivée supplémentaire suivante :

$$\frac{\partial \overline{X}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} = im\hat{X}(\bar{z})e^{l\bar{t}+im\bar{f}} \qquad (5.34)$$

Du fait de la complexité des équations obtenues, nous ne les présentons pas dans le corps de ce texte. Le lecteur pourra trouver un descriptif de ce système dans l'Annexe IV.

III.2. Résolution

D'après ce qui précède, il est aisé de montrer que le cas $m=0$ est strictement identique au cas axisymétrique développé dans le chapitre 4. Nous allons donc dans ce qui suit centrer notre analyse sur le cas $m=1$.

III.2.1. Choix des conditions aux limites

- En sortie de filière, celles-ci restent les mêmes que dans l'étude axisymétrique. Nous fixons donc :

$$\hat{R}(0) = 0 \tag{5.35}$$

$$\hat{e}(0) = \hat{H}(0) - \frac{\partial \hat{R}}{\partial \bar{z}}(0) \frac{\overline{E}(0) \frac{\partial \overline{R}}{\partial \bar{z}}(0)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \overline{R}}{\partial \bar{z}}(0) \right)^2}} = 0 \tag{5.36}$$

$$\overline{v}_z^0(0)\hat{v}_z^0(0) + \overline{v}_r^0(0)\hat{v}_r^0(0) = 0 \tag{5.37}$$

$$\hat{T}(0) = 0 \tag{5.38}$$

- En fin d'étirage, nous ne considérons ici que le cas où sont supposées constantes la vitesse finale du film ainsi que la surpression à l'intérieur de la bulle.

$$\hat{v}_z^0(L/R_0) = \hat{v}_r^0(L/R_0) = 0 \tag{5.39}$$

$$\Delta\hat{P} = 0 \tag{5.40}$$

Cette dernière condition se justifie dans ce cas assez simplement compte tenu des considérations expérimentales du chapitre 2. En effet, nous avons montré que, dans le cas d'une instabilité de type hélicoïdal, seule la position du centre de la bulle à une hauteur donnée varie, le rayon restant lui constant.

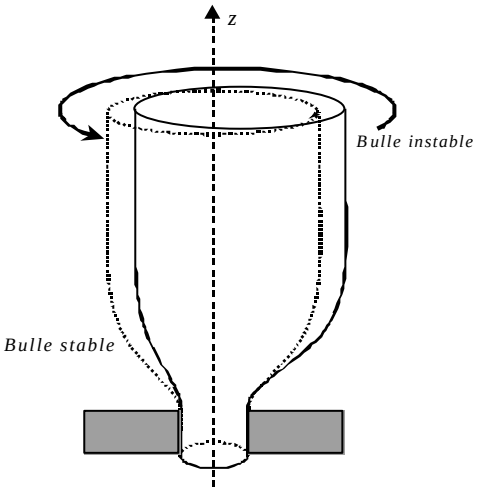


figure 5.8 : Schéma de principe de l'instabilité de type hélicoïdal dans la partie fondue

Ceci induit, comme l'illustre schématiquement la figure 5.8, que le volume de la bulle ne varie, en première approximation, pas ou peu en comparaison des variations engendrées par l'instabilité de « draw resonance ». Ainsi, à volume considéré constant, la pression à l'intérieur de la bulle est également constante. Cette affirmation est d'autant plus valide que nous cherchons la réponse du système à de très petites perturbations au voisinage de la transition stable-instable.

III.2.2. Méthode de calcul

En dépit de l'introduction de nouvelles équations et de nouveaux termes, le système d'équations linéarisées reste très similaire à celui obtenu dans le cas de l'étude axisymétrique développé dans le chapitre 4. Le principe de la méthode de calcul est donc strictement le même, et nous ne le détaillerons pas plus précisément ici. Retenons simplement pour mémoire qu'il s'agit d'une méthode de tir sur l où l'équation aux valeurs propres est construite selon le principe de linéarité des vecteurs propres solutions.

IV. Résultats préliminaires – cohérence de l'analyse de stabilité

Les résultats que nous présentons dans ce qui suit ont été obtenus à partir des conditions standard définies dans le chapitre 4 et que nous récapitulons dans le tableau suivant :

Taux de gonflage	2
Taux d'étirage	6
$d\bar{T}/d\bar{z}$ (°C)	10.625
E/R (K)	7600
longueur de calcul L	14
$T_{extrusion}$ *(°C)*	200
nombre de noeuds n	10001

tableau 5.1 : Définition des conditions standard utilisées

Nous avons montré dans le précédent chapitre que ces conditions, même si elles ne correspondent pas à nos conditions expérimentales, du moins en ce qui concerne les paramètres liés à la thermique, nous apportent malgré tout un nombre non négligeable d'informations intéressantes sur notre modèle et sa stabilité. Elles ont également l'avantage de rendre le calcul suffisamment « robuste » pour permettre une étude approfondie [AND,99].

IV.1. Recherche des valeurs propres

Un balayage systématique des valeurs initiales du paramètre de tir l aboutit à la détermination des valeurs propres solutions du système représentées sur la figure 5.9. Ces valeurs propres sont des nombres complexes, et nous ne rencontrons pas le problème des solutions réelles «parasites » obtenues avec les mêmes conditions aux limites et les mêmes valeurs de paramètres procédé dans le cas axisymétrique. Ceci corrobore le fait que les conditions imposées sont sûrement plus « licites » dans le cas étudié ici. La première valeur propre a sa partie réelle négative, ce qui signifie que le système est stable dans ces conditions.

Ces valeurs propres sont néanmoins différentes de celles obtenues dans le cas axisymétrique ($m=0$), comme le montre le tableau 5.2.

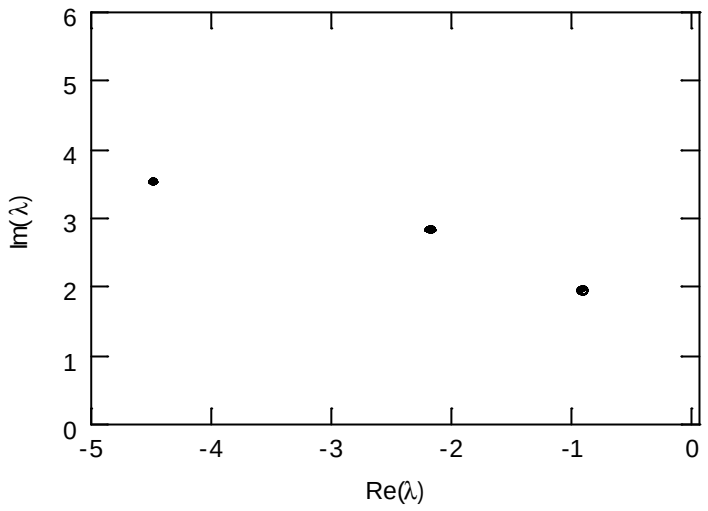


figure 5.9 : Premières valeurs propres détectées pour les conditions standard

m=0		m=1	
Partie réelle	Partie imaginaire	Partie réelle	Partie imaginaire
-0,689	*1,953*	*-0,900*	*1,967*
-2,76	*4,521*	*-2,160*	*2,833*
-	-	*-4,458*	*3,532*

tableau 5.2 : Valeurs propres détectées ; comparaison avec les valeurs propres réelles détectées dans le cas axisymétrique (m=0)

IV.2. Influence du taux d'étirage

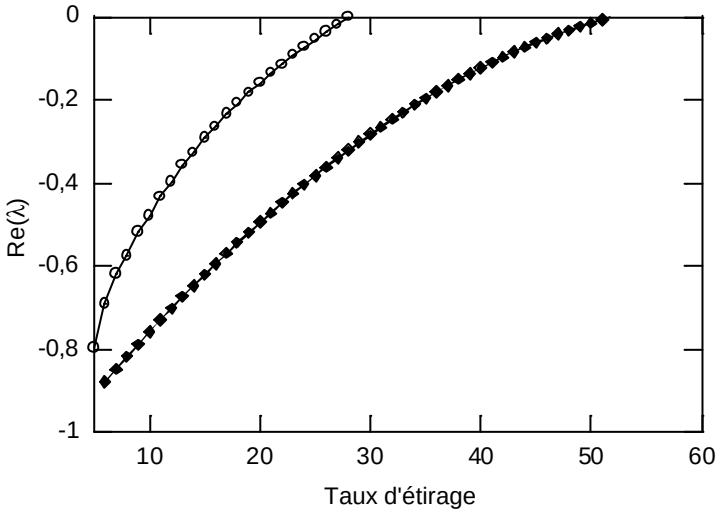


figure 5.10 : Evolution de la partie réelle de la première valeur propre détectée avec le taux d'étirage à partir des conditions standard ; (○) m=0 ; (◆) m=1

Le comportement de la valeur propre dominante lorsque le taux d'étirage est progressivement augmenté est qualitativement identique à celui rencontré dans le cas axisymétrique, comme le montre la figure 5.10. Sa partie réelle initialement négative augmente jusqu'à s'annuler pour un

taux d'étirage critique à partir duquel le système est instable. Cependant, ce taux d'étirage critique s'avère ici supérieur à 50, contre 28 dans le cas axisymétrique. Nous prédisons donc dans ce cas un comportement instable non axisymétrique survenant à des taux d'étirage plus élevés que l'instabilité axisymétrique (que nous avons assimilée à la «draw resonance» expérimentalement décrite). Il n'est donc pas étonnant que ce comportement non axisymétrique n'ait pas été décelé expérimentalement, car « masqué » par l'instabilité axisymétrique.

IV.3. Influence du taux de gonflage

- *Notion de taux de gonflage critique*

Lorsque, à taux d'étirage maintenu constant, nous faisons varier le taux de gonflage, nous obtenons la courbe décrite sur la figure 5.11. La partie réelle de la valeur propre suit le même comportement que celui obtenu en augmentant le taux d'étirage. Elle finit par atteindre une valeur positive à partir d'un taux de gonflage de 3,5. Nous mettons dans ce cas en évidence la notion de taux de gonflage critique dans le cas non axisymétrique, valeur seuil à partir de laquelle le système est instable. Ceci est en totale cohérence avec les mesures expérimentales qui montrent l'apparition de l'instabilité de type hélicoïdal pour des taux de gonflage élevés. Dans ces conditions, le calcul axisymétrique prédisait un système stable.

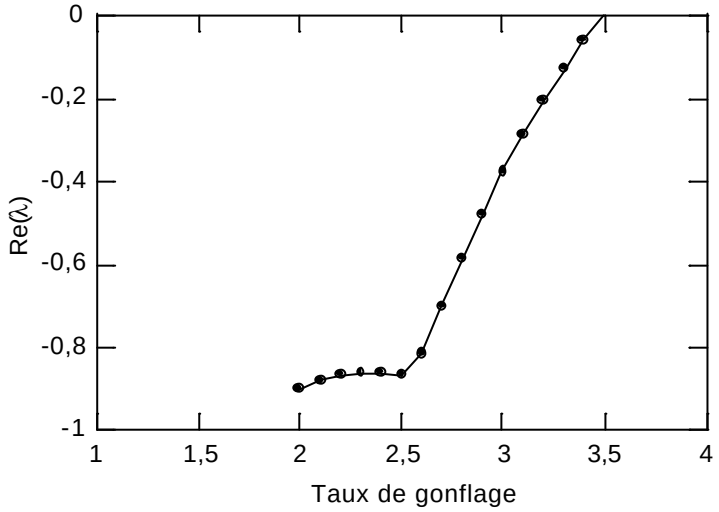


figure 5.11 : Evolution de la partie réelle de la première valeur propre détectée avec le taux de gonflage à partir des conditions standard

- *Etude du croisement éventuel de valeurs propres*

Le fait que la partie réelle de la valeur propre dominante n'évolue pas continûment avec le taux de gonflage (voir figure 5.11) nous amène à nous interroger sur un éventuel croisement de valeur propre survenant lorsque le taux de gonflage augmente. Dans ce cas, la valeur propre initialement dominante verrait sa partie réelle devenir inférieure à celle d'une autre valeur propre solution, provoquant un «saut» de notre algorithme de tir d'une valeur propre à l'autre. Afin de lever cette incertitude, nous avons suivi simultanément les trois valeurs propres initialement calculées (tableau 5.2) lorsque le taux de gonflage est augmenté. La figure 5.12 présente les évolutions obtenues. Celles-ci confirment qu'il n'y a pas de croisement des valeurs propres déterminées dans la plage de taux de gonflage étudiée, représentative de ceux rencontrés dans le procédé industriel.

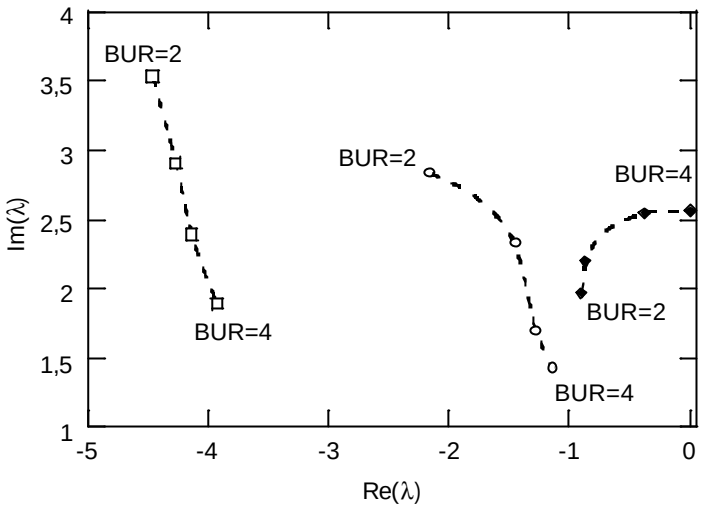


figure 5.12 : Comparaison des évolutions des trois premières valeurs propres avec l'augmentation du taux de gonflage

- *Caractérisation de l'instabilité calculée*

Même si les valeurs des paramètres thermiques ne sont pas représentatives des essais présentés dans le chapitre 2, nous pouvons essayer de comparer le défaut numériquement détecté au comportement observé expérimentalement. La figure 5.13 présente l'évolution des parties réelle et imaginaire de la valeur propre dominante calculée avec le taux de gonflage.

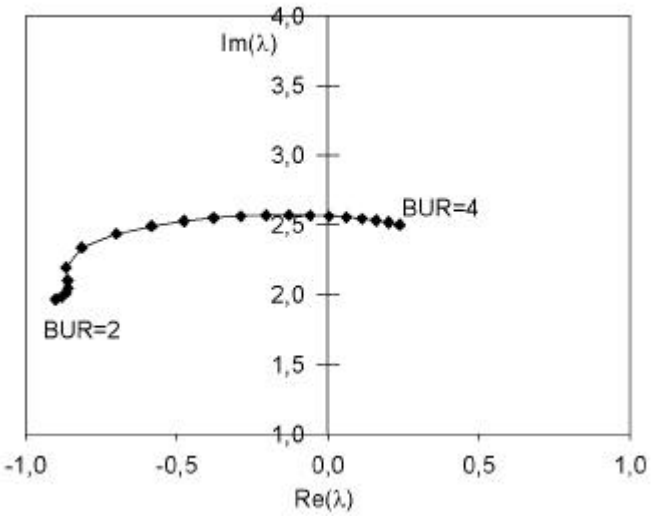


figure 5.13 : Evolution des parties réelle et imaginaire de la valeur propre dominante avec l'augmentation du taux de gonflage.

Nous avons démontré dans le chapitre 4 que la partie imaginaire de la valeur propre représente la pulsation adimensionnelle de l'instabilité périodique détectée. Dans le cas de nos expériences réalisées sur la ligne de soufflage de gaine COLLIN du CERDATO, cette pulsation est reliée à la période temporelle par la relation :

$$t = t_0.\bar{t} = \frac{R_0}{V_0}\bar{t} \approx 2.055\bar{t} \qquad (5.41)$$

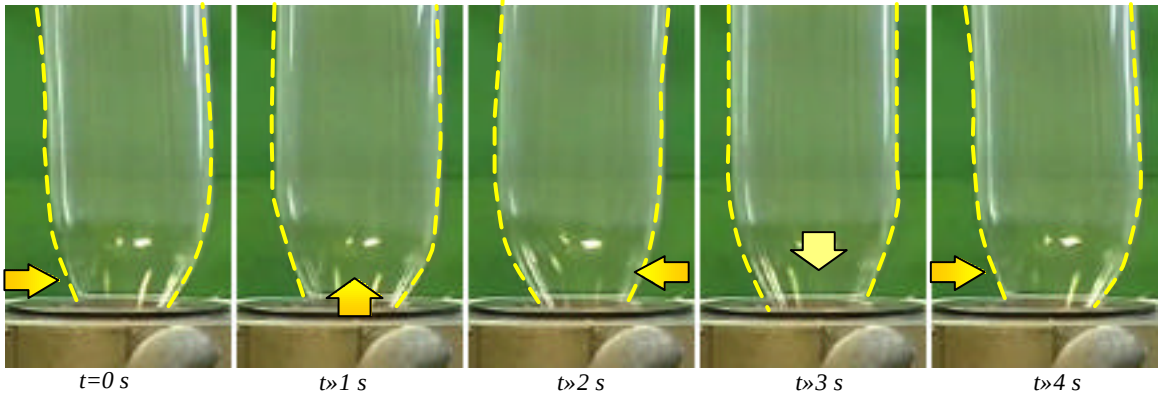


figure 5.14 : Exemple d'évolution du profil de la bulle lors du démarrage d'une instabilité de type hélicoïdal

La pulsation adimensionnelle déterminée par notre analyse de stabilité dans le cas m=1 valant environ 2.5, nous aboutissons à une période temporelle de l'instabilité calculée de l'ordre de 5 secondes, ce qui est bien l'ordre de grandeur de la période de l'instabilité hélicoïdale caractérisée expérimentalement (figure 5.14) .

V. Conclusions

La rupture de l'axisymétrie dans le modèle mécanique du procédé de soufflage de gaine décrit dans le repère lié au laboratoire est a priori une démarche osée du fait de la complexité des équations à construire. Nous en avons cependant montré la faisabilité grâce à la méthode d'analyse des équations à différents ordres de grandeur que nous avons développé dans le cas axisymétrique.

Nous avons ensuite mené une analyse de stabilité du système d'équations à une petite perturbation que nous avons choisie non axisymétrique. La réponse du système s'avère différente de celle calculée dans le cas axisymétrique et semble correspondre, du moins qualitativement, au défaut hélicoïdal expérimentalement observé pour des taux de gonflage élevés.

Compte tenu des difficultés numériques rencontrées pour faire converger convenablement l'algorithme pour des taux de gonflage élevés et un refroidissement faible, nous n'avons pas poursuivi plus précisément la comparaison entre notre modèle et les résultats expérimentaux. Les résultats préliminaires que nous présentons permettent néanmoins de conclure sur l'origine incontestablement mécanique du défaut hélicoïdal, sorte de « draw resonance transversale » initiée par le gonflement de la bulle (notion de taux de gonflage critique).

Cette étude, dont les premiers résultats sont encourageants, reste cependant à poursuivre par le balayage systématique des paramètres du procédé (étirage, gonflage et thermique) et la comparaison dans des conditions équivalentes à celles de nos observations expérimentales.

VI. Références bibliographiques

[AGA,96] AGASSANT J. F., AVENAS P., SERGENT J. P., VERGNES B. & VINCENT M., *La mise en forme des matières plastiques*, 3ème édition, Techniques et Documentation, Paris, 1996

[AND,96] ANDERECK C.D., LIU S.S. & SWINNEY H.L., *Flow regimes in a circular Couette system with independently rotating cylinders*, J. Fluid Mech., vol. 164, pp. 155-183, 1996

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[CHO,94] CHOSSAT P. & IOOSS G., *The Couette-Taylor problem*, Applied Mathematical Sciences, vol. 102, Springer-Verlag, New York, 1994

[HOU,98] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady flow of an axisymmetric annular film under gravity*, Physics of fluids, vol. 10, n° 10, pp. 2500-2516, 1998

[HOU,00 a] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *3-Dimensional stability analysis of the film blowing process*, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK, vol. 3, pp. 152-154, 2000

[HOU,00 b] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. I. General model and its numerical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 229-259, 2000

[HOU,00 c] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *Unsteady extrusion of a viscoelastic annular film. II. Linearized model and its analytical solution*, J. Non-Newtonian Fluid Mech., vol. 88, pp. 303-325, 2000

[TAG,94] TAGG R., *The Couette-Taylor problem*, Nonlinear Science Today, vol. 4, n° 3, pp. 1-25, 1994

Chapitre 6. Conclusions

Nous avons étudié le procédé de soufflage de gaine et les limitations industrielles que sont les comportements instables.

Notre étude expérimentale a porté sur la caractérisation du procédé stable puis instable pour un matériau donné, un polyéthylène basse densité linéaire (PEbdl). L'utilisation d'un dispositif original de suivi en ligne du comportement de la bulle nous a permis d'effectuer une caractérisation quantitative fiable des deux instabilités réellement limitatives pour le procédé, l'instabilité de *draw resonance* et l'instabilité hélicoïdale. En balayant les conditions opératoires du procédé, nous avons pu construire de véritables cartographies que nous avons, par l'intermédiaire d'une approche très simplificatrice du refroidissement permettant de s'affranchir de la taille de la machine, pu corréler à des résultats issus de la bibliographie. Le graphique ainsi obtenu (figure 6.1) permet de représenter les conditions stables du procédé en fonction des trois paramètres principaux que sont le taux d'étirage (DR), le taux de gonflage (BUR) et le refroidissement simplifié. Nous montrons ainsi que le refroidissement permet de retarder l'apparition de l'instabilité et ouvre une fenêtre locale où l'étirage est optimal. Cela reste à confirmer pour d'autres polymères.

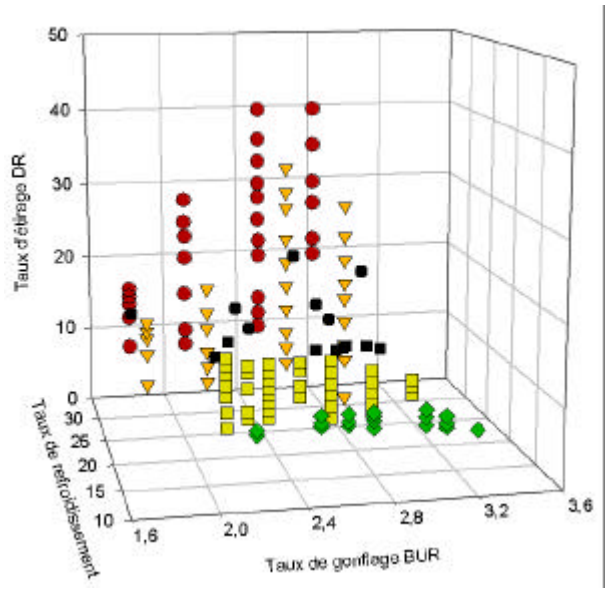


figure 6.1 : Comparaison des zones stables observées pour le PEbdl

(◊) : CRASP-1 ; $d\overline{T}/dz$» -12,6/R_0 °C ; (□) : CRASP-2 ; $d\overline{T}/dz$» -15,8 °C

(∇) : KAUFMAN-1 ; $d\overline{T}/dz$» -23,4 °C (d'après [LAS,99])

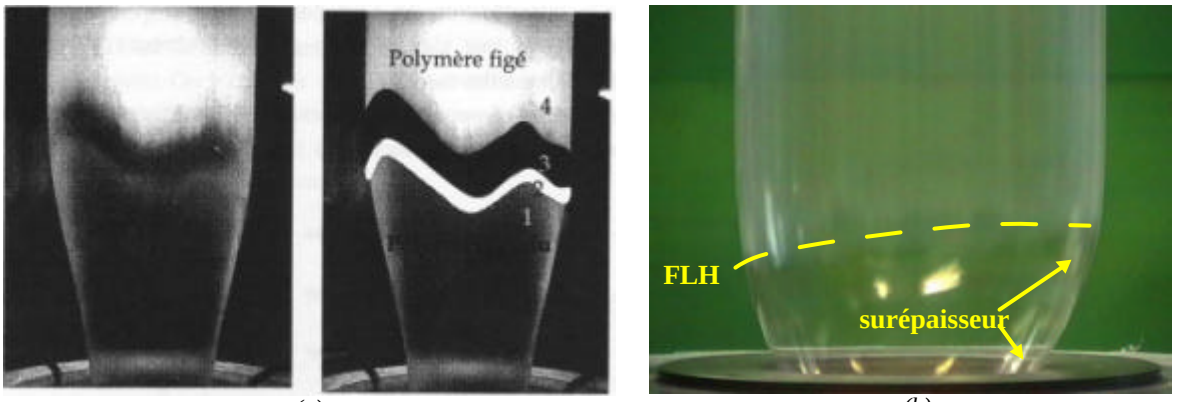
(○) : KAUFMAN-2 ; $d\overline{T}/dz$» -33,5 °C (d'après [LAS,99])

(●) : COLLIN 1 ; (■) : COLLIN 2

Nous nous sommes ensuite attachés à développer un modèle thermomécanique newtonien anisotherme du soufflage de gaine dont nous avons effectué une analyse de stabilité linéaire. Nous avons dans un premier temps considéré le cas axisymétrique. L'approche que nous avons choisie est en rupture avec la grande majorité de la littérature sur le sujet qui utilise un repère local tangent à la bulle en tout point de l'axe d'étirage [PEA,66]. Cette représentation simplifie grandement l'écriture des équations dans le cas stationnaire (stable) mais s'avère inadéquate dans le cas d'une analyse instationnaire car le repère choisi est alors mobile en fonction du temps. Notre démarche a donc consisté en une sorte de « régression » vers une représentation dans le repère cylindrique lié au laboratoire, qui lui reste fixe. La mise en équations est basée sur un développement des variables

en fonction d'un petit paramètre e (rapport épaisseur/rayon initiaux) puis une analyse de ces équations aux différents ordres de grandeurs. Cette approche, inspirée de [HOU,00], s'avère d'une efficacité remarquable. Dans le cas stationnaire, les équations obtenues sont équivalentes aux modèles de la littérature. Nous sommes donc amenés à rencontrer les mêmes difficultés concernant la multiplicité ou la disparition de solutions, notamment lors de l'intégration de lois de comportement viscoélastique [AND,99]. C'est pourquoi nous nous sommes limités au cas newtonien. La comparaison entre les profils de bulle prédits par le modèle avec les formes de bulles mesurées a montré les limites des hypothèses de notre modèle : non prise en compte de phénomènes aussi importants que la cristallisation, l'aérodynamique ou le caractère viscoélastique du matériau.

La même méthode de développement en fonction du petit paramètre ε a été utilisée en rompant cette fois l'axisymétrie de la bulle. Le système d'équations obtenu, s'il fait naturellement intervenir une variable supplémentaire angulaire, ne diffère cependant pas fondamentalement du cas axisymétrique. La résolution de ces équations dans le cas stable est sans intérêt si l'on suppose que la bulle conserve son axisymétrie. Ce calcul peut néanmoins s'avérer une voie de recherche très intéressante pour étudier de nombreux problèmes rencontrés dans le procédé où l'axisymétrie n'est plus conservée. Citons par exemple l'étude de l'influence d'une surépaisseur locale ou d'un gradient thermique non homogène (figure 6.2).



(a) *(b)*

figure 6.2 : Mise en évidence d'hétérogénéités sur le pourtour d'une bulle ;
(a) Cas d'une mauvaise répartition de l'air de refroidissement autour de la bulle, d'après [BEL,99]
(b) Cas d'un mauvais réglage de la concentricité du mandrin interne de la filière de la ligne COLLIN

Dans ce cas, étant donné que le système stationnaire dépendra des deux variables d'espace $\bar{z}$ et $\bar{f}$, il sera nécessaire d'utiliser une méthode de résolution bidimensionnelle de type éléments-finis.

Nous avons ensuite effectué l'analyse de stabilité axisymétrique puis non axisymétrique de notre modèle. Celles-ci ont mis en évidence le développement d'une instabilité axisymétrique au-delà d'un taux d'étirage critique fonction du taux de gonflage et du refroidissement appliqué, et d'une instabilité non axisymétrique de type hélicoïdal pour des taux de gonflage élevés (figure 6.3). Ces instabilités prédites par le modèle s'avèrent en accord qualitatif avec celles expérimentalement observées. Il existe même une zone commune aux deux frontières stable-instable numériquement déterminées, ce qui correspond tout à fait à la coexistence des deux défauts que nous mentionnons dans le chapitre 2. Nous démontrons ainsi l'origine mécanique indiscutable de ces instabilités. Ceci ne signifie pas qu'il n'existe pas de couplage avec l'aérodynamique autour de la bulle mais simplement que le facteur déclenchant réside, de même que dans le filage textile et dans le cast-film, dans l'étirage (ou plutôt le biétirage) auquel est soumis le matériau. Il existe des écarts entre les frontières stable-instables calculées et celles relevées durant notre étude expérimentale. Compte tenu des hypothèses très simplificatrices de notre modèle, et des écarts observés entre l'expérience et le calcul dans le cas stationnaire, il est même étonnant que les cartographies prédites soient si représentatives de la réalité du procédé.

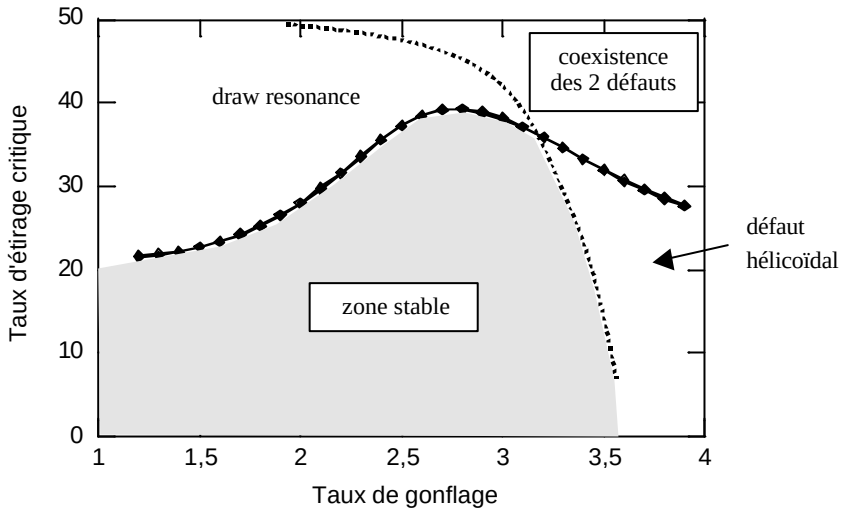


figure 6.3 : Cartographies des zones prédites, conditions standard ;
(¾) : instabilité axisymétrique ; (- -) : instabilité non-axisymétrique

Pour aller plus loin dans la modélisation du procédé de soufflage de gaine et de ses instabilités, il est évident que l'on ne pourra pas faire l'économie d'un modèle stationnaire plus riche :

- Au niveau de la loi de comportement : l'introduction d'une loi de comportement viscoélastique recèle de véritables difficultés. La disparition de solutions dans le cas d'une loi de Maxwell non isotherme [AND,99] s'apparente à la «zone inatteignable » obtenue pour d'autres procédés d'étirage (filage textile, cast-film) avec le même type de loi. Ce phénomène avait été surmonté en introduisant des lois de comportement plus réalistes (de type Phan-Thien Tanner) qui limitent en particulier la croissance de la viscosité élongationnelle. Nous avons logiquement suivi la même démarche dans le cas du soufflage de gaine mais ceci s'est révélé insuffisant pour estomper ces problèmes de « disparition » de solutions [LAF,00].

- Au niveau du transfert thermique : il n'y a aucune raison physique pour que la température de la gaine évolue linéairement entre la sortie de la filière et la ligne de figeage, et les mesures que nous avons détaillées au chapitre 2 le démontrent. La difficulté est cependant de prévoir, en fonction de l'anneau de soufflage et du profil de bulle qu'il induit, l'évolution du coefficient de transfert thermique qui rende compte de cette évolution non linéaire de température. On aborde ainsi le problème complexe du couplage fluide/structure évoqué également dans le paragraphe suivant.

- Au niveau de l'aérodynamique : André [AND,99] a montré que la prise en compte même simpliste de l'écoulement de l'air au voisinage de la bulle (équation de Bernoulli) peut modifier significativement sa géométrie.

- Au niveau de la cristallisation : les modèles biphasiques développés par Campbell et son équipe [CA0,90][ASH,92], basés sur le calcul de plusieurs couches dans l'épaisseur de la gaine, paraissent séduisants mais des modèles thermiques développés récemment démontrent que même une hétérogénéité de température forte en sortie de filière dans l'épaisseur du film ne débouche que sur des gradients de température infinitésimaux au niveau de la ligne de figeage [GAM,02]. La clef ne réside donc pas dans la prise en compte de cette hétérogénéité mais plutôt dans la maîtrise de la rhéologie, couplée à celle de la cristallisation, dans cette zone de figeage. Il s'agit d'un problème récurrent que l'on retrouve aujourd'hui dans tous les procédés de mise en forme des polymères, où cristallisation et mise en forme sont couplés.

- Nous pouvons enfin évoquer l'intérêt majeur que représente la modélisation du procédé de soufflage de gaine multi-couches, tant cette technique tend à se développer industriellement.

L'étude de la stabilité de ces modèles plus riches ne pourra sans doute pas être effectuée à l'aide des méthodes de stabilité linéaire que nous avons évoquées. La multiplication des paramètres physiques du modèle risque en effet de rendre aléatoire le suivi des valeurs propres. Il sera donc nécessaire de développer des méthodes de stabilité dynamique semblables à celles utilisées par Silagy [SIL,96] dans le cas du procédé de cast-film. Les méthodes de stabilité linéaire développées jusqu'alors resteront cependant le garant du réalisme des résultats de stabilité dynamique.

Enfin, le problème des conditions aux limites reste ouvert : nous avons montré au chapitre 4 que les résultats de stabilité y étaient très sensibles mais nous n'avons pas définitivement tranché : surpression ou volume d'air constants, équations dans la partie figée…

Nous ne sommes donc pas « au bout » de l'analyse du procédé de soufflage de gaine et les progrès futurs nécessiteront la mobilisation conjointe d'aérodynamiciens, de thermiciens, de thermodynamiciens, de mathématiciens et de spécialistes des polymères.

Références bibliographiques

[AND,99] ANDRE J. M., *Modélisation thermomécanique et structurale du soufflage de gaine de polyéthylènes*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[ASH,92] ASHOK B.K. & CAMPBELL G.A., *Two-Phase Simulation of Tubular Film Blowing of Crystalline Polymers*, Intern. Polym. Process., vol. 7, n° 3, pp. 240-247, 1992

[BEL,99] BELLET G., *Relations structure-propriétés optiques et mécaniques de films de Polyéthylène basse densité linéaire mis en œuvre par soufflage de gaine*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[CAO,90] CAO B., SWEENEY P. & CAMPBELL G.A., *Simultaneous Surface and Bulk Temperature Measurement of Polyethylene During Film Blowing*, Journal of Plastic Film & Sheeting, vol. 6, pp. 117-130, 1990

[GAM,02] GAMACHE E., *Modélisation du soufflage de gaine : calcul thermique*, Rapport d'avancement de thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2002

[HOU,00] HOUSIADAS K. & TSAMOPOULOS J., *3-Dimensional stability analysis of the film blowing process*, XIIIth International Congress on Rheology, Cambridge, UK, , 3, 152-154, 2000

[LAF,00] LAFFARGUE J., Etude et modélisation du procédé de soufflage de gaine, Rapport n°2 d'avancement de thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2000

[LAS,99] LASAUNIERE N., *Etude des instabilités de bulle dans le procédé de soufflage de gaine de polyéthylène*, Rapport final de Mastère, , Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1999

[PEA,66] PEARSON J.R.A , *Mechanical Principles of Polymer Melt Processing*, Pergamon, Londres, 1966

[SIL,96] SILAGY D., *Etude expérimentale et modélisation du procédé d'extrusion de film a plat de polymère*, Thèse de doctorat, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1996

Annexes

Annexe 1. Calcul des paramètres de la bulle i

Annexe 2. Linéarisation des équations du modèle axisymétrique instationnaire v

Annexe 3. Obtention des équations du modèle de soufflage de gaine tridimensionnel ix

Annexe 4. Linéarisation des équations du modèle non axisymétrique instationnaire xvii

Annexe I. Calcul des paramètres de la bulle

Dans cette annexe, nous détaillons les calculs permettant de déterminer, grâce aux mesures effectuées avec le dispositif optique de suivi en ligne de la bulle développé au CRASP, les valeurs de rayons R_{droit} et R_{gauche} correspondant aux 2 vues du dispositif, ainsi que la position du centre de la bulle en coordonnées polaires (d,a).

I. Position du centre de la bulle

La figure I.1 présente la géométrie du système obtenu. Les chemins optiques réels ne sont ici pas représentés. Les points de vue de droite et de gauche indiqués sont des points de vue virtuels équivalents au système de miroirs. Ils sont définis par la géométrie du système optique, et sont donc situés aux distances L_{droite} et L_{gauche} connues et fixes du centre de la filière. Ils forment avec celui-ci un angle droit.

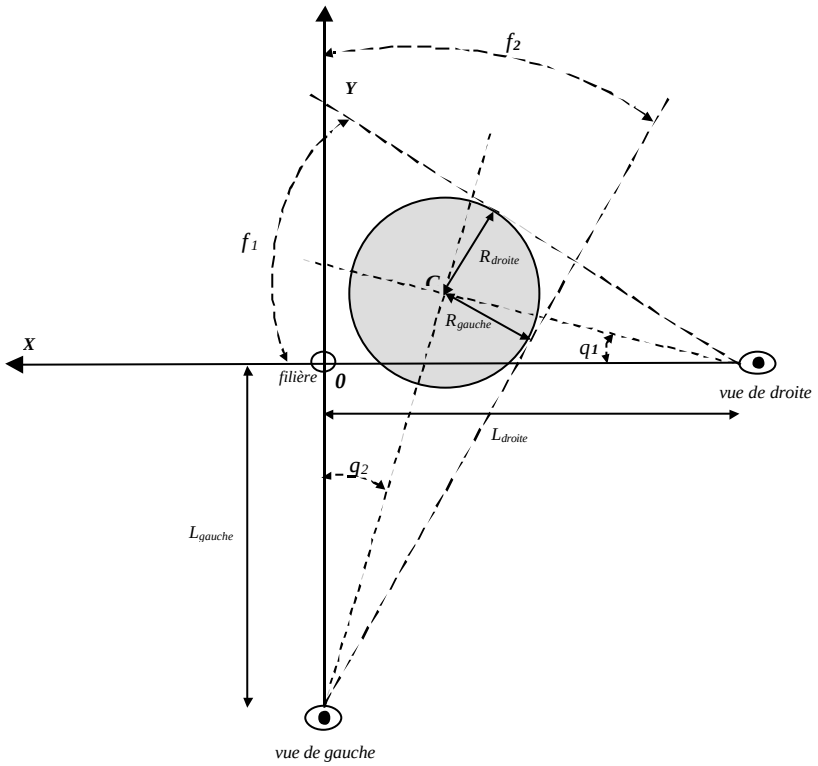


figure I.1 : Position du centre de la bulle ; schéma géométrique du système (d'après [TRO,01])

Un étalonnage préalable a permis de centrer le système optique par rapport au centre de la filière O, qui définit notre repère fixe. Tout décalage angulaire de la bulle par rapport à ce repère va se traduire par un déplacement des bandes blanches sur l'image caméra. Nous devons donc faire correspondre tout déplacement de ces bandes avec la variation angulaire (q_1,q_2) par rapport à nos axes de références. Ceci a été effectué lors du réglage de l'appareil en plaçant un cylindre opaque de diamètre connu à une distance donnée face au dispositif. Connaissant l'angle sous lequel est observé ce cylindre, il est possible de définir le nombre de degrés équivalent au déplacement d'un pixel de la caméra. Ce nombre de degrés par pixel sera ultérieurement appelé D_p. Dans ce qui suit, nous considérons cet étalonnage réalisé.

La position des bords de la bulle selon les deux vues (points P1 et P2, P3 et P4) nous permet d'évaluer la position du centre *C* (situé au milieu de chacune des bandes blanches). L'écart sur les deux vues avec la position du référentiel *O* supposée connue nous permet d'avoir accès directement aux valeurs des angles (q_1,q_2) par l'intermédiaire du rapport D_p.

La connaissance de ces deux angles permet de calculer aisément les coordonnées (X_C,Y_C) du centre *C* de la bulle dans notre repère *(X,Y)*, grâce aux relations trigonométriques (AI.1) et (AI.2).

$$\tan(q_1) = \frac{Y_C}{L_{droite} - X_C} \qquad (AI.1)$$

$$\tan(q_2) = \frac{X_C}{L_{gauche} + Y_C} \qquad (AI.2)$$

Ce qui donne :

$$X_C = \frac{\tan(q_2)\left[L_{gauche} + \tan(q_1)L_{droite}\right]}{1 + \tan(q_2)\tan(q_1)} \qquad (AI.3)$$

$$Y_C = \tan(q_1)\left[L_{droite} - X_C\right] \qquad (AI.4)$$

Afin de faciliter l'interprétation des déplacements de la bulle autour de l'axe d'axisymétrie de la filière, il est préférable d'exprimer le déplacement de la bulle dans notre plan dans le système polaire (d,a). Le calcul de ces nouvelles coordonnées est immédiat :

$$d = \sqrt{\left(X_C^{\,2} + Y_C^{\,2}\right)} \qquad (AI.5)$$

$$a = \arctan\left(\frac{Y_C}{X_C}\right) \qquad (AI.6)$$

Ces deux valeurs nous permettent de positionner la bulle dans le plan et de décrire ses mouvements au cours du temps. Il nous reste à calculer ses dimensions.

II. Dimensions de la bulle

Le calcul des rayons apparents s'effectue grâce aux notations présentées sur la figure I.2.

Par construction, les rayons apparents respectivement des vues droite et gauche sont les segments *[RD]* et *[RG]* tels que *D* et *G* soient les intersections des droites passant par le centre de la bulle et les tangentes à la bulle passant par nos deux points de vue virtuels.

De la même façon que présenté précédemment, les valeurs des frontières des bandes de l'image obtenue par la caméra nous permettent d'accéder aux valeurs des angles f_1 et f_2 définis comme les angles que font nos deux tangentes avec les axes de notre repère fixe *(0,X,Y)*.

Munis de ces valeurs, nous pouvons écrire dans ce repère les équations des tangentes *(1),(2)* et des diamètres *(CD)* et *(CG)* et ainsi calculer les coordonnées des points *D* et *G*, intersections de ces droites.

Nous obtenons les équations suivantes :

tangente (1) :

$$Y = -\tan(f_1).X + \tan(f_1).L_{droite} \qquad \textit{(AI.7)}$$

tangente (2) :

$$Y = \frac{X}{\tan(f_2)} - L_{gauche} \qquad \textit{(AI.8)}$$

Par construction, le diamètre *(CG)* est perpendiculaire à la tangente *(2)*, et fait donc avec l'axe des X un angle égal à f_2 (propriété des angles internes-alternes). Nous pouvons calculer par les relations simples de la trigonométrie l'intersection de cette droite avec l'axe Y et nous tirons finalement l'équation :

diamètre (CG):

$$Y = -\tan(f_2).X + Y_C + \tan(f_2)X_C \qquad \textit{(AI.9)}$$

Le même raisonnement est applicable avec le diamètre *(CD)*, perpendiculaire à la tangente *(1)*, et dont l'équation s'écrit finalement :

diamètre (CD):

$$Y = \frac{X}{\tan(f_1)} + Y_C + \frac{X_C}{\tan(f_1)} \qquad \textit{(AI.10)}$$

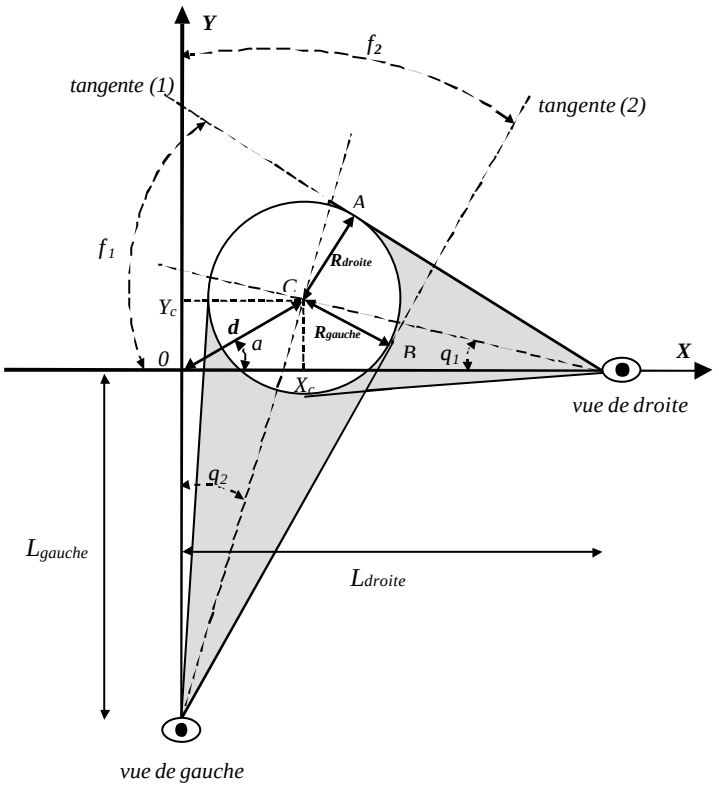


figure I.2 : Rayons de la bulle schéma géométrique du système (d'après [TRO,01])

Le point *D*, intersection de la tangente *(1)* et du diamètre *(CD)* aura donc pour coordonnées :

$$X_D = \frac{(\tan(f_1))^2 L_{droite} - \tan(f_1) Y_C + X_C}{1 + (\tan(f_1))^2} \quad (AI.11)$$

$$Y_D = -\tan(f_1) X_D + \tan(f_1) L_{droite} \quad (AI.12)$$

Le point G, intersection de la tangente *(2)* et du diamètre *(CG)* aura de la même façon pour coordonnées :

$$X_G = \frac{(\tan(f_1))^2 X_C + \tan(f_1)(Y_C + L_{gauche})}{1 + (\tan(f_2))^2} \quad (AI.13)$$

$$Y_G = -\tan(f_2) X_G + L_{gauche} \quad (AI.14)$$

Les valeurs des rayons se retrouvent très rapidement par un calcul simple de modules et nous obtenons finalement :

$$R_{droite} = \sqrt{(X_C - X_D)^2 + (Y_C - Y_D)^2} \quad (AI.15)$$

$$R_{gauche} = \sqrt{(X_C - X_G)^2 + (Y_C - Y_G)^2} \quad (AI.16)$$

Annexe II. Linéarisation des équations du modèle axisymétrique instationnaire

Dans cette annexe, nous proposons de détailler les équations instationnaires linéarisées du modèle de soufflage de gaine axisymétrique. Les formes perturbées des différentes variables sont introduites dans les équations du modèle et les produits de variables sont développés en ne conservant que les termes de premier ordre (on néglige les produits de fonction propres).

I. Cas des équations " en vitesse "

Nous obtenons les relations suivantes :

$$\hat{v}_r^0(\bar{z}) = \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{v}_z^0(\bar{z}) + \overline{v}_z^0(\bar{z}) \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + l\hat{R}(\bar{z}) \qquad (AII.1)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{v}_z^0(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{v}_z^0(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] \\ &+ \hat{R}(\bar{z}) \left[\overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{v}_z^0(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + \hat{H}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{v}_z^0(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &+ \hat{v}_z^0(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + l \left[\overline{R}(\bar{z}).\hat{H}(\bar{z}) + \overline{H}(\bar{z}).\hat{R}(\bar{z})\right] = 0 \end{aligned} \qquad (AII.2)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z})\right] - \frac{\partial \hat{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + \hat{R}(\bar{z}) \left[\frac{\partial \overline{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) + \overline{H}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &- \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{R}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \right] + \hat{H}(\bar{z}) \left[\overline{v}_r^0(\bar{z}) + \overline{R}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &+ \hat{v}_r^0(\bar{z}) \left[\overline{H}(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] = 0 \end{aligned} \qquad (AII.3)$$

II. Cas des équations " en contraintes "

Nous obtenons :

$$\hat{s}_{rr}^{\,0}(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{s}_{rz}^{\,0}(\bar{z}) - \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{rz}^{\,0}(\bar{z}) = 0 \qquad (AII.4)$$

$$\hat{s}_{rz}^{\,0}(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{s}_{zz}^{\,0}(\bar{z}) - \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{zz}^{\,0}(\bar{z}) = 0 \qquad (AII.5)$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right]+\frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})\right]\\
&\quad+\hat{s}^{0}_{zz}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right]+\hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]\\
&\quad+\hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}-\overline{\Delta P}.\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right]\\
&\quad+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\right]+\frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[-\overline{\Delta P}.\overline{R}(\bar{z})\right]\\
&\quad+\Delta\hat{P}\left[-\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right]=0
\end{aligned} \qquad \textit{(AII.6)}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right]+\frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\right]\\
&\quad+\hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right]+\left(\hat{s}^{0}_{rr}(\bar{z})-\hat{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right)\left[\overline{H}(\bar{z})\right]\\
&\quad+\hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\overline{\Delta P}\right]\\
&\quad+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}+\overline{s}^{0}_{rr}(\bar{z})-\overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right]+\Delta\hat{P}\left[\overline{R}(\bar{z})\right]=0
\end{aligned} \qquad \textit{(AII.7)}$$

III. <u>Cas des équations issues de la loi de comportement</u>

Nous retrouvons l'expression des termes de contraintes reliant nos deux précédents groupes de variables et d'équations :

$$\begin{aligned}
\hat{s}^{0}_{rr}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{rr}(\bar{z})\right]&=\frac{\partial \hat{v}^{1}_{r}}{\partial \bar{r}}(\bar{z})\left[2\overline{h}(\bar{z})\right]+\hat{T}(\bar{z})\left[2\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial \overline{v}^{1}_{r}}{\partial \bar{r}}\right]\\
&\quad-\hat{p}_{0}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]-\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{p}_{0}(\bar{z})\right]
\end{aligned} \qquad \textit{(AII.8)}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\right]+\hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right]&=\hat{v}^{0}_{r}(\bar{z})\left[2\overline{h}(\bar{z})\right]+\hat{T}(\bar{z})\left[2\overline{h}'(\bar{z})\overline{v}^{0}_{r}(\bar{z})\right]\\
&\quad-\hat{p}_{0}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\right]-\hat{R}(\bar{z})\left[\overline{p}_{0}(\bar{z})\right]
\end{aligned} \qquad \textit{(AII.9)}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{zz}^{0}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}_{zz}^{0}(\bar{z})\right]=&\frac{\partial\hat{v}_z^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[-2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\hat{T}(\bar{z})\left[-2\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_z^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+2\overline{h}'(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\frac{\partial\hat{v}_z^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[2\overline{h}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]+\frac{\partial\hat{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[-2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_z^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\\&-\hat{p}_0(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[-\overline{p}_0(\bar{z})+2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\end{aligned}\qquad(AII.10)$$

$$\begin{aligned}\hat{s}_{rz}^{0}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}_{rz}^{0}(\bar{z})\right]=&\frac{\partial\hat{v}_z^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\right]-\frac{\partial\hat{v}_r^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\hat{T}(\bar{z})\left[\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_z^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}_r^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+\overline{h}'(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_r^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\frac{\partial\hat{v}_r^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]+\frac{\partial\hat{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[-\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_r^1}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\\&+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}_r^0(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\end{aligned}\qquad(AII.11)$$

IV. Commentaire sur les équations obtenues

Nous obtenons finalement un système de onze équations linéarisées où les inconnues sont les fonctions propres introduites par la linéarisation, certaines de leurs dérivées, et la valeur propre l. Puisque nous avons négligé les termes de degré supérieur à 1, ces inconnues ont pour facteurs dans ces équations, à l donnée, des termes ou des produits de termes stationnaires qui sont connus depuis le calcul de la solution stationnaire. Notons que la valeur propre l n'apparaît bien évidemment que dans les linéarisations des équations du modèle instationnaire où apparaissent des termes différentiels en temps, c'est à dire l'équation géométrique, qui donne la relation (AII.1) et celle de conservation de débit qui aboutit à la relation (AII.2) (voir chapitre 3).

.

Annexe III. Obtention des équations du modèle de soufflage de gaine tridimensionnel

Nous présentons dans cette annexe des équations non axisymétriques du soufflage de gaine. Celles-ci sont obtenues de manière similaires à celles du modèle axisymétrique développé dans le chapitre 3. Dans une première étape, un changement de repère permet d'écrire les différentes équations sous la forme d'un développement en puissances d'un petit paramètre e. L'analyse de ces équations aux différents ordres de grandeur permet ensuite d'obtenir un système différentiel complet dépendant cette fois également de la variable angulaire f.

I. Développement au petit paramètre e

Nous obtenons les relations suivantes :

I.1. Incompressibilité

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{v}_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{v}_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\
&+e\left[\begin{array}{l}
\left(\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})^2}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\bar{r} - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\right)\frac{\partial \bar{v}_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\
+\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\left(\bar{v}_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \frac{\partial \bar{v}_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\right) \\
+\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\bar{r}
\end{array}\right] \\
&+e^2\left[\begin{array}{l}
\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\bar{r}^2\frac{\partial \bar{v}_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\
-\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})^2}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\bar{r}\left(\bar{v}_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \frac{\partial \bar{v}_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\right)
\end{array}\right] = 0
\end{aligned} \qquad \textit{(AIII.1)}$$

I.2. Equilibre dynamique

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\
&+e\left[\begin{array}{l}
\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \left(\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})\right)\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \\
+\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} - \bar{r}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\
-\frac{\bar{r}}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} + \frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})^2}\bar{r}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}
\end{array}\right] \\
&-e^2\left[\left(\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}\left[\begin{array}{l}
\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \\
-\frac{\bar{r}}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}
\end{array}\right]\right] = 0
\end{aligned} \qquad \textit{(AIII.2)}$$

$$\frac{\partial \bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}$$
$$+e\left[\begin{array}{l}\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + 2\dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \\ +\dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} - \bar{r}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\ -\dfrac{\bar{r}}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} + \dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})^2}\bar{r}\dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\end{array}\right] \qquad \textit{(AIII.3)}$$
$$-e^2\left[\left(\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}\left(\begin{array}{l}2\bar{s}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \\ -\dfrac{\bar{r}}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\end{array}\right)\right] = 0$$

$$\frac{\partial \bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\frac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}$$
$$+e\left[\begin{array}{l}\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\dfrac{\partial \bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} + \dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \\ +\dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} - \bar{r}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\dfrac{\partial \bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} \\ -\dfrac{\bar{r}}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} + \dfrac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})^2}\bar{r}\dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\end{array}\right] \qquad \textit{(AIII.4)}$$
$$-e^2\left[\left(\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\right)^2\bar{r}\left(\begin{array}{l}\bar{s}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \\ -\dfrac{\bar{r}}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\dfrac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}}\dfrac{\partial \bar{s}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\end{array}\right)\right] = 0$$

I.3. Loi de comportement

$$\bar{s}_{rr}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = -\bar{p}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \frac{1}{e}\left[2\frac{\bar{\hbar}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{v}_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\right] \qquad \textit{(AIII.5)}$$

$$\begin{aligned}\bar{s}_{zz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = &-\frac{1}{e}\left[2\frac{\bar{\hbar}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\right] \\ &-\bar{p} + 2\bar{\hbar}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} - 2\frac{\bar{\hbar}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}\frac{\partial \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}}\bar{r}\frac{\partial \bar{v}_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}}\end{aligned} \qquad \textit{(AIII.6)}$$

$$\overline{s}_{rz}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=+\frac{1}{e}\left[\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left(\frac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}-\frac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\frac{\partial\overline{v}_r\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\right)\right]$$
$$+\left[\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\frac{\partial\overline{v}_r\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}-\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\frac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{r}\frac{\partial\overline{v}_r\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\right] \quad \textit{(AIII.7)}$$

$$\overline{s}_{ff}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=\frac{1}{e}\left[2\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\frac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\frac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\right]-\overline{p}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)$$
$$+2\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left[\begin{array}{l}\overline{v}_r\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\\+\left(\dfrac{\overline{r}}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{\overline{r}}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\end{array}\right] \quad \textit{(AIII.8)}$$
$$+e\left[2\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)^2}\left(\begin{array}{l}-\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\overline{r}\left(\overline{v}_r\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)\\+\overline{r}^2\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\end{array}\right)\right]$$

$$\overline{s}_{zf}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=+\frac{1}{e}\left[\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left(\begin{array}{l}-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\dfrac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\\-\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\end{array}\right)\right]$$
$$+\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\left[\begin{array}{l}\dfrac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}+\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\\+\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{r}\dfrac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\\-\dfrac{\overline{r}}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\dfrac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\\-\dfrac{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\overline{r}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\dfrac{\partial\overline{v}_f\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\end{array}\right] \quad \textit{(AIII.9)}$$
$$+e\left[\frac{\overline{h}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)^2}\left(-\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\overline{r}\frac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}+\overline{r}^2\frac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\frac{\partial\overline{v}_z\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{r}}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}\bar{s}_{rf}\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=&+\frac{1}{e}\left[\frac{\hbar\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\left(\frac{\partial\bar{v}_f\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{r}}-\frac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\frac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\frac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{r}}\right)\right]\\&+\frac{\hbar\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\left[\begin{array}{l}-\bar{v}_f\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+\dfrac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}-\dfrac{\bar{r}}{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\dfrac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{r}}\\+\dfrac{\bar{r}}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\dfrac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{r}}\end{array}\right]\\&+e\left[\frac{\hbar\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)^2}\left(\begin{array}{l}\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\bar{r}\bar{v}_f\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+\bar{r}^2\dfrac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{r}}\\-\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\bar{r}\dfrac{\partial\bar{v}_r\left(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\end{array}\right)\right]\end{aligned}\qquad \textit{(AIII.10)}$$

I.4. Conditions aux limites

- *en vitesse :*

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{v}_r\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)\\\qquad\qquad-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{t}}=0\end{array}\right.\qquad \textit{(AIII.11)}$$

$$\left\{\begin{array}{l}\bar{v}_r\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_f\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{t}}\\-e\left[\dfrac{\partial\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_z\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{v}_f\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)+\dfrac{\partial\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{t}}\right]\\-e^2\dfrac{\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)^2}\dfrac{\partial\bar{H}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\bar{v}_f\left(1,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=0\end{array}\right.\qquad \textit{(AIII.12)}$$

- *en contraintes :*

$$\left\{\begin{array}{c}\bar{s}_{rr}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{rz}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\bar{s}_{rf}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=-\overline{\Delta P}\\\bar{s}_{rf}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{fz}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\bar{s}_{ff}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\dfrac{\overline{\Delta P}}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\\\bar{s}_{rz}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\bar{s}_{zz}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)-\dfrac{1}{\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{f}}\bar{s}_{fz}\left(0,\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)=+\dfrac{\partial\bar{R}\left(\bar{f},\bar{z},\bar{t}\right)}{\partial\bar{z}}\overline{\Delta P}\end{array}\right.\qquad \textit{(AIII.13)}$$

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\left[
\begin{array}{l}
\overline{s}_{rr}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+e\left[
\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\left(\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)
\end{array}
\right]\\
+e^2\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0
\end{array}
\right]\\
\left[
\begin{array}{l}
\overline{s}_{rr}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+e\left[
\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\left(\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)
\end{array}
\right]\\
+e^2\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0
\end{array}
\right]\\
\left[
\begin{array}{l}
\overline{s}_{rr}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+e\left[
\begin{array}{l}
-\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{s}_{rz}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
+\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\left(\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}-\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\right)
\end{array}
\right]\\
+e^2\dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{f}}\overline{s}_{rf}\left(1,\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=0
\end{array}
\right]
\end{array}
\right.
\qquad \textit{(AIII.14)}
$$

II. <u>Analyse des équations aux différents ordres de grandeur</u>

Nous suivons le même cheminement que celui présenté au chapitre 3 dans le cas axisymétrique.

II.1. <u>Incompressibilité à l'ordre minimal (ε^0)</u>

L'intégration de l'équation d'incompressibilité (AIII.1) à l'ordre 0 en utilisant les conditions de surface libre en vitesse (AIII.11) et (AIII.12) nous donne :

$$
\boxed{
\begin{array}{l}
\overline{v}_r^{\,0}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)=\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{v}_z^{\,0}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)\\
\qquad\qquad+\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{z}}\overline{v}_f^{\,0}\left(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)+\dfrac{\partial\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial\overline{t}}
\end{array}
}
\qquad \textit{(AIII.15)}
$$

II.2. <u>Equilibre dynamique à l'ordre minimal (ε^{-1})</u>

L'intégration des équations de l'équilibre dynamique (AIII.2), (AIII.3) et (AIII.4) à l'ordre minimal –1 par rapport à $\overline{r}$ avec la condition d'interface en contraintes (AIII.14) permet d'écrire :

$$\begin{cases} \bar{s}^{-1}_{rr}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}^{-1}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \bar{s}^{-1}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}^{-1}_{rf}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}^{-1}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \bar{s}^{-1}_{ff}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = 0 \\ \bar{s}^{-1}_{rz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{s}^{-1}_{zz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \dfrac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \dfrac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \bar{s}^{-1}_{fz}(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = 0 \end{cases} \qquad \textit{(AIII.16)}$$

Si nous considérons alors les expressions de ces termes en contraintes à l'ordre –1 tirées des équations de la loi de comportement (AIII.5) à (AIII.10), nous obtenons des relations incompatibles avec l'équation (AIII.15) qui montrent que :

$$\boxed{\frac{\partial \bar{v}^0_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}^0_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial \bar{v}^0_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}} = 0} \qquad \textit{(AIII.17)}$$

ou $\boxed{\bar{v}^0_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = \bar{v}^0_r(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}$ $\boxed{\bar{v}^0_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = \bar{v}^0_z(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}$ et $\boxed{\bar{v}^0_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) = \bar{v}^0_f(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}$

Ceci implique également que les expressions des contraintes à l'ordre –1 sont nulles.

II.3. Incompressibilité à l'ordre suivant (ε^1)

En tenant compte de l'indépendance des composantes de vitesse à l'ordre 0 par rapport à la variable $\bar{r}$, l'intégration de l'équation d'incompressibilité (AIII.1) à l'ordre 1 avec la condition de surface libre en vitesse (AIII.11) permet d'écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} &\bar{v}^1_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \bar{v}^1_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) - \frac{1}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \frac{\partial \bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{f}} \bar{v}^1_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \\ &\qquad = -\bar{r}\left[\frac{\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})} \bar{v}^0_r(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) + \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \frac{\partial \bar{v}^0_z(\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{z}} \right] \end{aligned}} \qquad \textit{(AIII.18)}$$

L'égalité entre cette relation pour $\bar{r} = 1$ et la condition de surface libre en vitesse (AIII.12) permet d'aboutir, en multipliant par $\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t})$ et en utilisant la relation (AIII.15), à l'équation :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial \bar{z}} \left(\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \bar{v}^0_z(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \right) + \frac{\partial}{\partial \bar{f}} \left(\bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \bar{v}^0_f(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \right) \\ &\qquad + \frac{\partial}{\partial \bar{t}} \left(\bar{R}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \bar{H}(\bar{f},\bar{z},\bar{t}) \right) = 0 \end{aligned}} \qquad \textit{(AIII.19)}$$

II.4. Equilibre dynamique à l'ordre suivant (ε^0)

A l'ordre 0, nous pouvons introduire les expressions (AIII.5) à (AIII.10) des termes en contraintes issues de la loi de comportement dans les équations de l'équilibre dynamique (AIII.2), (AIII.3) et (AIII.4) à cet ordre. Le déterminant strictement positif montre que l'on a :

$$\frac{\partial^2 \bar{v}^1_r(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{v}^1_f(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}^2} = \frac{\partial^2 \bar{v}^1_z(\bar{r},\bar{f},\bar{z},\bar{t})}{\partial \bar{r}^2} = 0 \qquad \textit{(AIII.20)}$$

Ceci signifie bien sûr :

- que les termes $\frac{\partial \overline{v}_r^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}}$, $\frac{\partial \overline{v}_f^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}}$ et $\frac{\partial \overline{v}_z^1(\overline{r},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{r}}$ sont indépendants de $\overline{r}$,

- de même que les différentes composantes du tenseur des contraintes à l'ordre 0 (équations (AIII.5) à (AIII.10)).

L'intégration à l'ordre 0 des relations de l'équilibre dynamique (AIII.2), (AIII.3) et (AIII.4) par rapport à $\overline{r}$ avec les conditions d'interfaces en contraintes (AIII.13) et (AIII.14) permet de montrer que le terme $\overline{\Delta P}$ est d'ordre 1 et donne les relations suivantes :

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{rz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{rf}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) = 0 & \textit{(AIII.21)} \\ \overline{s}_{rf}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{fz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{ff}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) = 0 & \textit{(AIII.22)} \\ \overline{s}_{rz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{zz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{fz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) = 0 & \textit{(AIII.23)} \end{cases}$$

II.5. Equilibre dynamique à l'ordre suivant (ε^1)

L'intégration à l'ordre 1 des relations de l'équilibre dynamique (AIII.2), (AIII.3) et (AIII.4) par rapport à $\overline{r}$ avec les conditions d'interfaces en contraintes (AIII.13) permet d'écrire, en prenant en compte les relations d'indépendance par rapport à $\overline{r}$ de certains des termes :

$$\begin{cases} \overline{s}_{rr}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{rz}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{rf}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) \\ = -\overline{r}\left(\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})\frac{\partial \overline{s}_{rz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}} + \frac{\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\left(\overline{s}_{rr}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \overline{s}_{ff}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) + \frac{\partial \overline{s}_{rf}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\right)\right) - \overline{\Delta P} \\ \overline{s}_{rf}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{fz}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{ff}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) \\ = -\overline{r}\left(\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})\frac{\partial \overline{s}_{fz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}} + \frac{\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\left(\overline{s}_{rf}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) + \frac{\partial \overline{s}_{ff}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\right)\right) + \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{\Delta P} \\ \overline{s}_{rz}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{s}_{zz}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) - \frac{1}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\overline{s}_{fz}^{1}(\overline{r},\overline{f},\overline{z},\overline{t}) \\ = -\overline{r}\left(\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})\frac{\partial \overline{s}_{zz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}} + \frac{\overline{H}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}\left(\overline{s}_{rz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t}) + \frac{\partial \overline{s}_{fz}^{0}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{f}}\right)\right) + \frac{\partial \overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})}{\partial \overline{z}}\overline{\Delta P} \end{cases} \quad \textit{(AIII.24)}$$

L'égalité entre cette relation pour $\overline{r}=1$ et la condition de surface en contraintes (AIII.14) permet d'aboutir, en multipliant par $\overline{R}(\overline{f},\overline{z},\overline{t})$ et en utilisant la relation (AIII.15), aux égalités :

$$\begin{cases} -\overline{\Delta P} = \left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} - \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \overline{s}^{0}_{rf}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \overline{s}^{0}_{rz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{rz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \\ \quad + \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \left(\overline{s}^{0}_{rr}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) - \overline{s}^{0}_{ff}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{rf}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \end{cases} \quad \textit{(AIII.25)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \dfrac{\overline{\Delta P}}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} = \left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} - \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \overline{s}^{0}_{ff}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \overline{s}^{0}_{fz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{fz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \\ \quad + \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \left(2\overline{s}^{0}_{rf}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{ff}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \end{cases} \quad \textit{(AIII.26)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \overline{\Delta P} = \left(\dfrac{1}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} - \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \dfrac{\partial \overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \overline{s}^{0}_{fz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \\ \quad + \dfrac{\partial \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \overline{s}^{0}_{zz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{zz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{z}} \\ \quad + \dfrac{\overline{H}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\overline{R}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)} \left(\overline{s}^{0}_{rz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right) + \dfrac{\partial \overline{s}^{0}_{fz}\left(\overline{f},\overline{z},\overline{t}\right)}{\partial \overline{f}} \right) \end{cases} \quad \textit{(AIII.27)}$$

Annexe IV. Linéarisation des équations du modèle non axisymétrique instationnaire

La linéarisation des équations du modèle instationnaire s'effectue de la même façon que dans le cas axisymétrique. Dans ce qui suit, nous présentons le système obtenu. Les termes supplémentaires introduits par la rupture de l'axisymétrie dans les équations sont soulignés et les nouvelles équations apparues sont encadrées.

I. Cas des équations " en vitesse "

Nous obtenons les relations suivantes :

$$\hat{v}_r^0(\bar{z}) = \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{v}_z^0(\bar{z}) + \overline{v}_z^0(\bar{z}) \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + l\hat{R}(\bar{z}) \tag{AIV.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{v}_z^0(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{v}_z^0(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] \\ &+ \hat{R}(\bar{z}) \left[\overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{v}_z^0(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + \hat{H}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{v}_z^0(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &+ \hat{v}_z^0(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + l \left[\overline{R}(\bar{z}).\hat{H}(\bar{z}) + \overline{H}(\bar{z}).\hat{R}(\bar{z})\right] \\ &\underline{+ im\overline{H}(\bar{z})\hat{v}_f^0(\bar{z}) = 0} \end{aligned} \tag{AIV.2}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \hat{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z})\right] - \frac{\partial \hat{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \left[\overline{R}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] + \hat{R}(\bar{z}) \left[\frac{\partial \overline{v}_r^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \frac{\partial \overline{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) + \overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &- \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{R}(\bar{z}) \frac{\partial \overline{v}_z^1}{\partial \bar{r}}(\bar{z}) \right] + \hat{H}(\bar{z}) \left[\overline{v}_r^0(\bar{z}) + \overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \right] \\ &+ \hat{v}_r^0(\bar{z}) \left[\overline{H}(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{v}_z^0(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] \underline{+ im\overline{H}(\bar{z})\hat{v}_f^0(\bar{z}) = 0} \end{aligned} \tag{AIV.3}$$

II. Cas des équations " en contraintes "

Nous obtenons cette fois 6 équations :

$$\hat{s}_{rr}^0(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{s}_{rz}^0(\bar{z}) - \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{rz}^0(\bar{z}) = 0 \tag{AIV.4}$$

$$\hat{s}_{rz}^0(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{s}_{zz}^0(\bar{z}) - \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \overline{s}_{zz}^0(\bar{z}) = 0 \tag{AIV.5}$$

(AIV.6)

$$\hat{s}^{0}_{rf}(\bar{z}) - \frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} \hat{s}^{0}_{fz}(\bar{z}) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})\right] \\
&\quad + \hat{s}^{0}_{zz}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right] + \hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right] \\
&\quad + \hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} - \overline{\Delta P}.\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right] \\
&\quad + \hat{H}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{zz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[-\overline{\Delta P}.\overline{R}(\bar{z})\right] \\
&\quad + \Delta\hat{P}\left[-\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{R}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right] + im\overline{H}(\bar{z})\hat{s}^{0}_{fz}(\bar{z}) = 0
\end{aligned} \qquad \textit{(AIV.7)}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})\right] + \frac{\partial \hat{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{R}(\bar{z}).\overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\right] \\
&\quad + \hat{s}^{0}_{rz}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right] + \left(\hat{s}^{0}_{rr}(\bar{z}) - \hat{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right)\left[\overline{H}(\bar{z})\right] \\
&\quad + \hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{H}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{\Delta P}\right] \\
&\quad + \hat{H}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z}).\frac{\partial \overline{s}^{0}_{rz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}} + \overline{s}^{0}_{rr}(\bar{z}) - \overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right] + \Delta\hat{P}\left[\overline{R}(\bar{z})\right] - im\overline{H}(\bar{z})\hat{s}^{0}_{rf}(\bar{z}) = 0
\end{aligned} \qquad \textit{(AIV.8)}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial \hat{s}^{0}_{fz}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\left[\overline{H}(\bar{z}).\overline{R}(\bar{z})^{2}\right] + \left[\overline{R}(\bar{z})^{2}.\frac{\partial \overline{H}(\bar{z})}{\partial \bar{z}}\right]\hat{s}^{0}_{fz}(\bar{z}) + \left[2\overline{H}(\bar{z})\overline{R}(\bar{z})\right]\hat{s}^{0}_{fr}(\bar{z}) \\
&+ im\overline{R}(\bar{z})\overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\hat{H}(\bar{z}) - im\overline{H}(\bar{z})\overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\hat{R}(\bar{z}) + im\overline{H}(\bar{z})\overline{R}(\bar{z})\hat{s}^{0}_{ff} - im\overline{R}\,\overline{\Delta P}\hat{R}(\bar{z})
\end{aligned} \qquad \textit{(AIV.9)}$$

III. Cas des équations issues de la loi de comportement

Nous retrouvons l'expression des six termes de contraintes reliant nos deux précédents groupes de variables et d'équations :

$$\begin{aligned}
\hat{s}^{0}_{rr}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right] + \hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{rr}(\bar{z})\right] &= \frac{\partial \hat{v}^{1}_{r}}{\partial \bar{r}}(\bar{z})\left[2\overline{\hbar}(\bar{z})\right] + \hat{T}(\bar{z})\left[2\overline{\hbar}'(\bar{z})\frac{\partial \overline{v}^{1}_{r}}{\partial \bar{r}}\right] \\
&\quad - \hat{p}_{0}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right] - \hat{H}(\bar{z})\left[\overline{p}_{0}(\bar{z})\right]
\end{aligned} \qquad \textit{(AIV.10)}$$

$$\begin{aligned}
\hat{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\right] + \hat{R}(\bar{z})\left[\overline{s}^{0}_{ff}(\bar{z})\right] &= \hat{v}^{0}_{r}(\bar{z})\left[2\overline{\hbar}(\bar{z})\right] + \hat{T}(\bar{z})\left[2\overline{\hbar}'(\bar{z})\overline{v}^{0}_{r}(\bar{z})\right] \\
&\quad - \hat{p}_{0}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\right] - \hat{R}(\bar{z})\left[\overline{p}_{0}(\bar{z})\right] + \left[2im\overline{\hbar}(\bar{z})\right]\hat{v}^{0}_{f}(\bar{z})
\end{aligned} \qquad \textit{(AIV.11)}$$

$$\begin{aligned}\hat{s}^{\,0}_{zz}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}^{\,0}_{zz}(\bar{z})\right]=&\frac{\partial\hat{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[-2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\hat{T}(\bar{z})\left[-2\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+2\overline{h}'(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{0}_{z}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\frac{\partial\hat{v}^{0}_{z}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[2\overline{h}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]+\frac{\partial\hat{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[-2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\\&-\hat{p}_{0}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[-\overline{p}_{0}(\bar{z})+2\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{0}_{z}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\end{aligned}\qquad(AIV.12)$$

$$\begin{aligned}\hat{s}^{\,0}_{rz}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\right]+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{s}^{\,0}_{rz}(\bar{z})\right]=&\frac{\partial\hat{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\right]-\frac{\partial\hat{v}^{1}_{r}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\hat{T}(\bar{z})\left[\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+\overline{h}'(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\frac{\partial\overline{v}^{1}_{r}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})+\overline{h}'(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{0}_{r}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\\&+\frac{\partial\hat{v}^{0}_{r}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]+\frac{\partial\hat{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\left[-\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{1}_{r}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\\&+\hat{H}(\bar{z})\left[\overline{h}(\bar{z})\frac{\partial\overline{v}^{0}_{r}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\end{aligned}\qquad(AIV.13)$$

$$\begin{aligned}\hat{s}^{\,0}_{fz}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]=&\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{R}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]\frac{\partial\hat{v}^{1}_{f}}{\partial\bar{z}}(\bar{z})-\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{R}(\bar{z})\frac{\partial\overline{R}(\bar{z})}{\partial\bar{z}}\right]\frac{\partial\hat{v}^{1}_{f}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\\&+im\overline{h}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\hat{v}^{0}_{z}(\bar{z})-\overline{R}(\bar{z})\frac{\partial\hat{v}^{1}_{z}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\end{aligned}\qquad(AIV.14)$$

$$\begin{aligned}\hat{s}^{\,0}_{rf}(\bar{z})\left[\overline{R}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]=&\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{R}(\bar{z})\right]\frac{\partial\hat{v}^{1}_{f}}{\partial\bar{z}}(\bar{z})-\left[\overline{h}(\bar{z})\overline{H}(\bar{z})\right]\hat{v}^{0}_{f}(\bar{z})\\&+im\overline{h}(\bar{z})\left[\overline{H}(\bar{z})\hat{v}^{0}_{r}(\bar{z})-\overline{R}(\bar{z})\frac{\partial\hat{v}^{1}_{r}}{\partial\bar{r}}(\bar{z})\right]\end{aligned}\qquad(AIV.15)$$