

Inférence quantitative des relations spatiales directionnelles

Sidi Mohammed Réda Dehak

▶ **To cite this version:**

Sidi Mohammed Réda Dehak. Inférence quantitative des relations spatiales directionnelles. domain_other. Télécom ParisTech, 2002. English. NNT : . pastel-00000633

HAL Id: pastel-00000633
https://pastel.hal.science/pastel-00000633

Submitted on 16 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



École Doctorale
d'Informatique,
Télécommunications
et Électronique
de Paris

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : **Signal et Images**

Sidi Mohammed Réda DEHAK

Inférence Quantitative des Relations Spatiales Directionnelles

Soutenue le 20 décembre 2002 devant le jury composé de :

Michel Grabisch	Président
Jacky Desachy	Rapporteurs
Odile Papini	
Jean Louchet	Examinateurs
Camilla Schwind	
Isabelle Bloch	Directeurs de thèse
Henri Maître	

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Jacky Desachy et Odile Papini pour avoir accepté la lourde tâche d'être les rapporteurs de ce travail de thèse, ainsi que Michel Grabisch, Jean Louchet et Camilla Schwind pour avoir accepté de faire partie du jury de thèse.

Je remercie infiniment mes deux directeurs de thèse Isabelle Bloch et Henri Maître pour m'avoir dirigé, soutenu et de m'avoir fait profiter de leur expérience, leur science et leur temps.

Merci également aux équipes et aux thésards du département TSI de l'E.N.S.T (Alex, Anne-Catherine, Aymeric, Carlos, Dalila, Dominique, Elodie, Ferdaous, Florence, Francis, Gouenou, Hans, Henri, Isabelle, Jean-Marie, Jean-Pierre, Jérimie, Laurence, Laurent, Karim, Michel, Olivier, Oscar, Patricia, Valérie, Valérie, Saeid, Sophie-Charlotte, Stéphane, Yann ...) pour les inoubliables moments passés en leur compagnie.

Je ne manquerai pas de remercier mes amis (Abdel, Aissa, Azedine, Geoffroy, Gouenou, Laurent, jerome, Theo, Youcef ...) pour leur soutien.

Plus que tout, je veux remercier mes parents, ma grand mère Mima, mes deux frères et ma petite sœur Rizlène.

Résumé

Les relations spatiales entre les différentes régions d'une image jouent un rôle important dans les domaines de la reconnaissance des formes, vision par ordinateur, interprétation de scènes et plus particulièrement dans les tâches liées aux domaines des systèmes d'informations géographiques (GIS) et de la navigation autonome des robots mobiles. L'être humain est très habile dans l'estimation et la déduction de l'ensemble de ces relations. Nos déductions restent très précises malgré l'ambiguïté liée à la définition de ces relations.

L'objectif de cette thèse est de proposer une méthode d'inférence quantitative des relations spatiales directionnelles. Nous nous sommes intéressés au problème suivant : déduire les relations spatiales entre deux régions A et C connaissant celles qui les relient à une troisième région B. On est confronté à ce genre de problèmes chaque fois qu'on doit chercher notre direction en utilisant un plan, on se positionne par rapport à certains repères pour déduire notre direction.

Nous présentons tout d'abord une étude des modèles de représentation quantitative des relations spatiales directionnelles. Ces modèles reposent essentiellement sur la théorie de la logique floue pour quantifier l'ensemble de ces relations. Nous nous sommes inspirés dans la suite de l'un de ces modèles pour définir une nouvelle représentation, celle-ci nous a permis de représenter à la fois l'information angulaire nécessaire pour quantifier les différentes relations spatiales directionnelles et l'information de distance utile pour l'étape de déduction.

Dans la plupart des cas, cette information métrique n'est pas disponible ou impossible à déterminer. Alors, on est amené à déduire des nouvelles relations en utilisant uniquement l'information angulaire. Pour étudier ces cas, nous avons utilisé un réseau d'agrégation floue pour déterminer les degrés des quatre relations spatiales directionnelles de base entre deux régions A et C connaissant uniquement les degrés de ces relations entre les deux régions A et B et entre les deux régions B et C. Un algorithme d'apprentissage a été proposé pour déterminer les différents paramètres du réseaux (structures et opérateurs utilisés).

Dans le but de justifier les résultats obtenus, nous avons effectué une étude probabiliste du problème d'inférence. Nous avons déterminé la probabilité de trouver un point C dans la direction γ par rapport à un point A étant donné qu'il est placé dans

la direction β par rapport à un autre point B, lui même situé dans la direction α par rapport au point A. Cette étude à été effectuée pour différentes distributions de points dans le plan. La probabilité de positionner le point C dans le plan étant donné les deux paramètres α et β a été déterminée pour toute distribution continue des points dans le plan. Vu que la majorité des modèles de représentation des relations reposent sur les relations spatiales entre les différents points des deux objets, ces résultats constituent la base d'une méthode d'inférence probabiliste des relations spatiales directionnelles entre objets.

Abstract

Nowadays, the knowledge of spatial relations between objects is a key point in Image Processing and commonly used in pattern recognition, computer vision, scene interpretation and more specifically in Geographical Information Systems *(GIS)*, scene descriptions in natural language and autonomous navigation of mobile robots. Human beings are skilled in estimating spatial relationships and can make very precise deductions despite the ambiguous definition of these relations.

This thesis propose quantitative inference methods of directional spatial relations. We address the following problem : deduce the spatial relationships between two objects A and C knowing relationships which connect them to a third object B. Everybody has already tried to deduce a path from his position and visible reference buildings.

First, we present and discuss the basic quantitative models, essentially based on fuzzy logic theory. Then we develop a new model which can represent at the same time angular information, necessary to quantify spatial relationships, and metric knowledge, useful for the deduction step.

In the case of unknown distance information, we have used a fuzzy aggregation network to deduce directional spatial relationships. The network parameters (structure, type and parameters of operators) are learned from examples.

In order to explain the fuzzy aggregation network results, we have developed an evaluation of the position probability of a point C which is known to be in a direction β with respect to a point B, itself in the direction α with respect to another point A. We solve the problem for different distributions of points in the plane. These distributions represent prior knowledge about spatial localisation of points B and C. We generalized our formulas to the case of continuous distributions. These results constitute an important basis of probabilistic spatial reasoning.

Table des matières

Introduction **13**

1 Les modèles de représentation quantitative **17**
1.1 Relations spatiales 17
1.2 Ambiguïté des relations spatiales 19
1.3 Relations spatiales directionnelles floues entre des points 20
1.4 Relations spatiales directionnelles entre des objets 23
1.4.1 Méthodes représentant les régions par des points : ($1^{\text{ère}}$ classe) . 23
1.4.2 Méthode de Koczy : ($1^{\text{ère}}$ classe) 24
1.4.2.1 Définitions 24
1.4.2.2 Évaluation de la relation spatiale 25
1.4.2.3 Discussion 27
1.4.3 Histogramme d'angles : ($2^{\text{ème}}$ classe) 28
1.4.3.1 Définitions 28
1.4.3.2 Propriétés 28
1.4.3.3 Estimation des relations spatiales par la méthode de compatibilité 29
1.4.3.4 Estimation par réseau de neurones 29
1.4.3.5 Estimation par pattern matching flou entre H^n_{AB} et Rel 31
1.4.3.6 Discussion 32
1.4.4 Histogramme de forces : ($2^{\text{ème}}$ classe) 33
1.4.4.1 Définition 34
1.4.4.2 Remarque 34
1.4.4.3 Propriétés 34
1.4.4.4 Discussion 35
1.4.5 Méthode d'agrégation : ($3^{\text{ème}}$ classe) 36
1.4.6 Paysage flou : ($3^{\text{ème}}$ classe) 38
1.5 Conclusion 41

2 Histogramme angles-distances **43**
2.1 Inférence des relations spatiales directionnelles entre des points 44
2.2 Histogramme angles-distances 44
2.3 Propriétés 47
2.3.1 Invariance par rapport à l'objet de référence 47
2.3.2 Invariance par translation 48
2.3.3 Traitement de régions sécantes 48

2.3.4 Relation avec l'histogramme d'angles . . . 49
2.3.5 Relation avec l'histogramme de forces . . . 49
2.4 Estimation des relations spatiales directionnelles . . . 49
2.4.1 Définition de *Rel* . . . 50
2.4.2 Estimation des relations spatiales . . . 50
2.4.3 Exemples . . . 51
2.5 Estimation de la distance qui sépare les deux régions . . . 55
2.5.1 Définition . . . 55
2.5.2 Distance entre des régions nettes . . . 55
2.5.3 Distance entre des régions floues . . . 56
2.5.4 Évaluation à partir de l'histogramme angles-distances . . . 56
2.6 Inférence des relations spatiales . . . 57
2.6.1 Premier cas . . . 58
2.6.2 Deuxième cas . . . 59
2.6.3 Troisième cas . . . 60
2.6.4 Quatrième cas . . . 61
2.6.5 Application . . . 65
2.7 Conclusion . . . 65

3 Réseaux d'agrégation floue **69**
3.1 Opérateurs d'agrégation floue . . . 70
3.1.1 Union . . . 70
3.1.2 Intersection . . . 71
3.1.3 Moyenne . . . 73
3.2 Réseau d'agrégation multi-couches . . . 75
3.2.1 Définition . . . 75
3.2.2 Apprentissage . . . 76
3.3 Descente du gradient . . . 77
3.3.1 Comparaison entre notre approche et la méthode de Krishnapuram et Lee . . . 79
3.3.2 Conclusion . . . 80
3.4 Algorithmes d'estimation de distribution (EDA) et réseaux bayésiens continus . . . 80
3.4.1 Notations . . . 80
3.4.2 Réseaux bayésiens . . . 81
3.4.3 Optimisation en utilisant les EDAs . . . 82
3.4.4 Détermination des paramètres du réseau gaussien . . . 83
3.4.4.1 Algorithme UMDA . . . 84
3.4.4.2 Algorithme MIMIC . . . 85
3.4.4.3 Algorithme EGNA . . . 86
3.4.5 Comparaison entre la méthode de descente du gradient et les EDA 86
3.5 Construction du réseau d'agrégation floue . . . 88
3.5.1 Base d'apprentissage . . . 88
3.5.2 Apprentissage de la structure du réseau d'agrégation . . . 88
3.5.3 Apprentissage des paramètres du réseau d'agrégation . . . 90

3.6 Application à l'inférence des relations spatiales directionnelles 91
3.7 Conclusion 92

4 Étude probabiliste du problème d'inférence des relations spatiales directionnelles 95
4.1 Hypothèses et notations 95
4.2 Inférence des relations spatiales directionnelles : évaluation de $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ 97
4.2.1 Support de la loi de probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ 97
4.2.2 Évaluation de $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ 99
4.2.3 Discussion 105
4.3 Évaluation de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ 107
4.4 Les cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 109
4.4.1 $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 109
4.4.2 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 110
4.5 Discussion 111
4.6 Cas d'une fenêtre carrée 116
4.6.1 Premier cas : $\alpha < \beta \leq \pi/4$ 118
4.6.2 Deuxième cas : $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$ 119
4.6.3 Troisième cas : $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/4$ 120
4.6.4 Quatrième cas : $\beta \geq 3\pi/4$ et $\varphi \leq 3\pi/4$ 122
4.6.5 Cinquième cas : $\beta < \alpha + \pi$ et $\varphi \geq 3\pi/4$ 123
4.6.6 Cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 124
4.6.6.1 $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 124
4.6.6.2 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 125
4.6.7 Simulation 127
4.6.8 Conclusion 128
4.7 Cas d'une distribution quelconque continue 129
4.7.1 Cas général 129
4.7.2 Application : distribution gaussienne 133
4.7.2.1 Cas général : $\beta \neq \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 133
4.7.2.2 Cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 134
4.7.2.3 Discussion : 139
4.7.3 Conclusion 141
4.8 Inférence : décision bayésienne 142
4.8.1 Minimisation de l'erreur moyenne de décision 142
4.8.2 Maximum de vraisemblance 144
4.8.3 Minimisation du risque moyen de décision 145
4.8.4 Conclusion 148
4.9 Inférence des relations spatiales directionnelles entre des régions 148
4.9.1 Inférence dans le cas des petits objets compacts ou des objets éloignés 148
4.9.2 Inférence dans le cas général 152
4.10 Localisation d'un objet ou une région connaissant sa position relative . 155
4.10.1 Exemple 155
4.10.2 Résultats de la localisation 156

4.11 Conclusion 158

5 Conclusion et perspectives **159**

A Introduction à la théorie des sous ensembles flous **163**
A.1 Objectifs 163
A.2 Définition d'un ensemble flou 164
A.3 Caractéristiques d'un sous ensemble flou 164
A.3.1 Support d'un sous ensemble flou 164
A.3.2 Noyau d'un sous ensemble flou 165
A.3.3 Hauteur d'un sous ensemble flou 165
A.3.4 α coupe ou coupe de niveau α 166
A.4 opérations sur les sous ensembles flous 166
A.4.1 Inclusion 166
A.4.2 Égalité 166
A.4.3 Réunion 166
A.4.4 Intersection 167
A.4.5 Complément 167
A.4.6 Dualité entre T-Norme, T-Conorme et fonction négation 167
A.5 Propriétés des opérateurs ensemblistes flous 168

B Calcul de la surface de $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ **171**
B.1 1^{er} cas : $\beta \neq \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 171
B.2 $2^{\text{ème}}$ cas : $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 173
B.3 $3^{\text{ème}}$ cas : $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ 174

Bibliographie **177**

Introduction

Nous sommes amenés presque tous les jours à chercher une adresse, à orienter une personne pour trouver son chemin ou bien décrire notre position à quelqu'un pour nous trouver. Pour cela, nous utilisons un ensemble de relations et de termes pour décrire la position relative d'un endroit ou bien d'un objet par rapport à certains repères connus. Ces relations spatiales occupent une place importante dans notre vocabulaire quotidien [LAND-93], il est impossible de décrire par exemple une scène sans utiliser ces relations. Face à une demande croissante des systèmes automatiques, l'exploitation des relations spatiales a été intégrée à plusieurs applications liées à la reconnaissance des formes, la vision par ordinateur et l'interprétation de scènes et plus particulièrement aux tâches liées aux domaines des Systèmes d'Informations Géographiques *(SIG)*, de la description de scènes en langage naturel et de la navigation autonome des robots mobiles [DUDE-00].

Simuler le raisonnement humain représente l'axe le plus important des recherches liées à l'intelligence artificielle. Le cerveau humain est très habile dans l'interprétation et la déduction des relations spatiales, on n'éprouve aucune difficulté à trouver notre chemin ou bien à déduire la position relative d'un endroit par rapport à un autre même à partir d'une information sommaire sur leur position géographique. Malgré la complexité et la forte ambiguïté liées à la définition de ces relations, nous restons très précis dans nos définitions et nos déductions. Simuler ce raisonnement spatial est l'un des défis soulevés par de nombreuses équipes de recherche. Le nombre de conférences et de sessions dédiées au raisonnement spatial atteste de l'importance de ce problème.

Pour développer une méthode d'inférence ou de déduction des relations spatiales, il faut s'intéresser premièrement au problème de représentation de ces relations. La définition d'une méthode d'inférence repose essentiellement sur le modèle adopté. Plus cette représentation est fiable et proche de la définition de l'être humain, plus les résultats obtenus par déduction seront corrects et proches de la réalité. Dans la littérature, on retrouve un ensemble de modèles de représentation des relations spatiales. Cet ensemble peut être subdivisé en deux grandes classes :

1. **Les modèles de représentation qualitative :**
   Ces modèles reposent essentiellement sur la classification des intervalles temporels proposée par Allen [ALLE-83]. La représentation des relations spatiales en utilisant les 2D-Strings [CHAN-87] est l'une des méthodes les plus répan-

dues, elle est largement utilisée dans les systèmes d'information géographiques *(SIG)* [LEE-89, LEE-92b, LEE-92c, CHAN-91]. Elle repose essentiellement sur le traitement de la position relative de deux segments issus de la projection des deux régions concernées sur l'axes des abscisses et l'axes des ordonnées. Plusieurs versions de cette approche ont été proposées dans la littérature dans le but d'améliorer la représentation ou l'inférence des différentes relations spatiales [HUAN-94, LEE-90, LEE-92a, CHAN-95].

Dans la même classe, on retrouve aussi les modèles reposant sur la théorie de la méréotopologie. Ces approches ont été développées dans le but de représenter les relations spatiales topologiques [RAND-92, EGEN-94, MARK-94, VARZ-96, CLEM-97, VIEU-97, COHN-98].

2. **Les modèles de représentation quantitative :**
   L'ambiguïté liée à la définition des différentes relations spatiales a encouragé plusieurs chercheurs à adopter les relations floues introduites par Zadeh [ZADE-65] pour mieux caractériser ce problème. Ces modèles se sont intéressés particulièrement à la quantification des différentes relations spatiales. Plusieurs méthodes ont été développées dans la littérature [KOCZ-88, KRIS-93a, MIYA-94a, KELL-96, BLOC-96a, MATS-98b] pour la quantification de ces relations.

Le problème d'inférence ou de déduction des relations spatiales a été largement étudié dans le cas des modèles de représentation qualitative de l'espace. Il suffit de voir le nombre de publications traitant la représentation fondée sur les 2D-Strings et les méthodes de recherche dans les bases de données géographiques pour voir l'importance de cette tâche [LEE-91, LIU-98, FREK-92b, MANG-98, ZIMM-93, CHAN-96]. Malheureusement dans le cas des modèles quantitatifs, plusieurs recherches ont été orientées dans le but de développer des méthodes d'estimation plus fiables et plus précises sans s'intéresser réellement à l'inférence de ces relations, or cette étape est cruciale dans l'exploitation de ces informations. Ce problème d'inférence ou de déduction des relations spatiales peut être vu sous différents angles [DUTT-91] :

1. Pouvoir déduire des relations spatiales entre deux régions A et C connaissant celles qui les relient à une troisième région B : c'est une capacité que l'on exerce chaque fois que l'on doit chercher notre direction en utilisant un plan.

2. Déduire des informations spatiales complexes à partir d'informations spatiales simples, par exemple la relation SURROUND à partir des relations RIGHT OF, LEFT OF, ABOVE et BELOW [WANG-97a].

3. Déduire des relations spatiales entre des régions en mouvement à l'instant t connaissant celles à l'instant t_0 : c'est l'une des parties où l'être humain est très à l'aise. Prenant par exemple le cas où l'on monte ou on descend un escalier, notre

cerveau connaît la position de nos pieds par rapport aux différentes marches de l'escalier sans aucune information visuelle (personne ne regarde ses pieds en marchant), il déduit cela uniquement à partir du mouvement de nos pieds. L'autre exemple typique est la traversée d'une chaussée, à partir de deux ou trois vues on peut traverser la voie et connaître à peu près la position des voitures par rapport à nous à chaque instant.

Ce type de problème plus connu sous le terme de raisonnement spatio-temporel peut être vu comme un cas particulier du premier, car à partir de la connaissance du mouvement d'un objet, on est capable de le situer par rapport à son ancienne position. Dans ce cas, il suffit de déduire la nouvelle position relative à partir de cette information et de la position relative de l'ancienne position par rapport à l'objet de référence.

L'objectif de cette thèse est de contribuer au développement de méthodes d'inférence dédiées aux modèles de représentation quantitative de l'espace. Vu que le troisième type d'inférence peut être classé comme un cas particulier du premier, nous nous sommes intéressés particulièrement aux problèmes de type 1, comme par exemple :

La région B est située au nord-est de la région A.
La région C est située à l'ouest de la région B.
Alors que peut-on dire sur la position de la région C
par rapport à la région A ?

Dans le **premier chapitre** de ce rapport, nous présentons une étude détaillée des différentes approches d'estimation des relations spatiales directionnelles proposées dans la littérature. Nous présentons une comparaison de ces différentes approches d'estimation. Nous montrons que la majorité de ces modèles a négligé l'information métrique au profit de l'information angulaire nécessaire à l'estimation des différentes relations directionnelles.

Dans le **second chapitre** de ce manuscrit, nous introduisons un nouveau modèle de représentation des relations spatiales, celui-ci permet de représenter à la fois l'information angulaire nécessaire à la quantification des différentes relations spatiales et l'information métrique utile pour l'inférence et l'estimation des relations spatiales métriques. Nous étudions les différentes propriétés de ce modèle et la relation avec les modèles existants. Nous avons aussi étendu les méthodes d'estimation des relations spatiales directionnelles à notre modèle. Enfin nous présentons les propriétés d'inférence de ce modèle.

Le **troisième chapitre** présente une méthode d'inférence uniquement à partir des estimations des quatre relations spatiales directionnelles de base. Cette approche est utile dans le cas où l'on dispose uniquement de quelques estimations. Nous utilisons

un réseau d'agrégation floue pour déduire les quatre relations spatiales directionnelles de base entre les deux régions A et C à partir de celles entre les deux régions A et B et de celles entre les deux régions B et C. La structure ainsi que les paramètres du réseau sont obtenus par un algorithme d'apprentissage automatique. Pour remédier au problème des minima locaux, nous avons utilisé des algorithmes évolutifs fondés sur les algorithmes d'estimation de distributions statistiques.

La **dernière partie** de ce rapport présente une étude probabiliste du problème d'inférence des relations spatiales directionnelles entre des points. Cette étude représente la base d'une méthode d'inférence probabiliste. Afin d'élargir les domaines d'applications, nous avons étudié le problème dans le cas de plusieurs distributions des points dans le plan : distribution uniforme à l'intérieur d'un disque, distribution uniforme à l'intérieur d'une fenêtre carrée et distribution normale dans le plan. Nous montrons qu'il est possible de formaliser complètement le problème d'inférence à 3 points et d'en déduire des estimateurs probabilistes (au maximum de vraisemblance par exemple). Nous montrons que ces résultats permettent de résoudre des problème a priori difficiles (pas de solution exacte connue) de façon probabiliste. Nous présentons à la fin l'extension au cas des régions ou objets du plan. Un exemple concret d'utilisation des résultats théoriques est donné à la fin.

Chapitre 1

Les modèles de représentation quantitative des relations spatiales directionnelles

Dans le but de développer des méthodes d'inférence quantitative des relations spatiales, nous nous sommes intéressés particulièrement aux modèles de représentation quantitative de l'espace. Ces modèles reposent essentiellement sur la théorie des sous ensembles flous introduite par Zadeh[1] [ZADE-65] pour modéliser les différentes relations spatiales.

Nous commençons par la définition des différentes relations de base permettant de décrire l'espace (section 1.1). Nous verrons ensuite le problème de l'ambiguïté lié à ces relations (section 1.2) qui justifie l'adoption des relations floues dans presque toutes les méthodes proposées dans la littérature (section 1.3). Dans la section 1.4, nous présentons une étude détaillée des différentes approches proposées dans la littérature pour estimer les différentes relations spatiales directionnelles.

1.1 Relations spatiales

La classe des relations spatiales entre objets représente l'ensemble des caractéristiques qui déterminent la position de deux ou plusieurs objets en relation les uns avec les autres.

L'être humain utilise un grand ensemble d'expressions pour décrire la position relative des objets dans l'espace. Cet ensemble varie d'une personne à l'autre et dépend généralement de la langue utilisée [LAND-93]. Freeman [FREE-75] a étudié l'ensemble de ces relations dans le cadre de la langue anglaise, il a proposé une liste de 13 relations de base pour décrire la position relative de deux objets dans l'espace :

[1] Une introduction à la théorie des sous ensembles flous est donnée en annexe A

1. **LEFT OF** : à gauche de, à l'ouest de,
2. **RIGHT OF** : à droite de, à l'est de,
3. **BESIDE** (alongside, next to) : à côté de,
4. **ABOVE** (over, higher than, on top of) : au-dessus de, au nord de,
5. **BELOW** (under, underneath, lower than) : au-dessous de, au sud de,
6. **BEHIND** (in back of) : derrière,
7. **IN FRONT OF** : devant,
8. **NEAR** (close to, next to) : près de,
9. **FAR** : loin de,
10. **TOUCHING** : toucher,
11. **BETWEEN** : entre,
12. **INSIDE** (within) : à l'intérieur de,
13. **OUTSIDE** : à l'extérieur de.

Les autres relations peuvent être exprimées à partir d'une combinaison de ces relations de base. Si on examine cet ensemble de relations de base, on peut dégager un ensemble de propriétés importantes :

1. Toutes ces relations sont binaires à l'exception de la relation BETWEEN qui est ternaire.

2. L'utilisation des deux relations BEHIND et IN FRONT OF implique une représentation tridimensionnelle des objets. Dans le cas d'un plan, ces deux relations ne seront pas utilisées.

3. Les relations NEAR, FAR, BESIDE, TOUCHING sont des relations symétriques, exemple : si l'objet B est proche de l'objet A ($\text{NEAR}(A, B)$) alors l'objet A est aussi proche de l'objet B ($\text{NEAR}(B, A)$).

4. Les relations LEFT OF, RIGHT OF, ABOVE, BELOW, BEHIND, IN FRONT OF, INSIDE, OUTSIDE sont des relations antisymétriques et transitives, exemple :

   – Si l'objet B est à gauche de l'objet A ($\text{LEFT}(A, B)$) alors l'objet A n'est pas à gauche de l'objet B ($\neg\text{LEFT}(B, A)$),

   – Si l'objet C est à gauche de l'objet B ($\text{LEFT}(B, C)$) et l'objet B est à gauche de l'objet A ($\text{LEFT}(A, B)$) alors l'objet C est à gauche de l'objet A ($\text{LEFT}(A, C)$).

5. Toutes les relations à l'exception de BESIDE et TOUCHING ont une fonction inverse, exemple : $\neg\text{LEFT}(A, B) = \text{RIGHT}(B, A)$, $\neg\text{NEAR}(A, B) = \text{FAR}(B, A)$ ...

Suivant la nature des paramètres traités, cet ensemble de relations peut être subdivisé en trois grandes classes :

1. **Relations spatiales topologiques :** Ces relations font appel à des notions de la théorie des ensembles (INSIDE, OUTSIDE), ou des notions de voisinage (TOUCHING).

2. **Relations spatiales métriques :** Ce sont des relations qui ont un lien direct avec la distance qui sépare les deux objets concernés (NEAR, FAR).

3. **Relations spatiales directionnelles :** Cette classe regroupe l'ensemble des relations faisant appel à une direction de l'espace ou du plan (LEFT OF, RIGHT OF ...). Dans la suite on va s'intéresser particulièrement à cette classe de relations spatiales.

1.2 Ambiguïté des relations spatiales

En essayant de modéliser les relations spatiales entre de simples points, on peut voir que les relations mathématiques classiques (en tout ou rien) ne sont pas adaptées. Par exemple sur la figure 1.1 : le point B est situé à droite du point A, le point E n'est pas à droite du point A, mais que peut on dire des points C et D ? Les deux points C et D sont placés à droite du point A avec un degré de satisfaction inférieur à celui du point B par rapport à A. Le point B est situé plus à droite du point A que les deux autres points C et D. En conséquence, on peut déduire que la relation spatiale "le point P est situé à droite du point A" dépend de l'angle $\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AP})$ entre le vecteur $\overrightarrow{i}$[2] et le vecteur $\overrightarrow{AP}$. Plus cet angle est important plus le degré de vérification de la relation RIGHT OF (la direction de $\overrightarrow{i}$) sera faible. Le modèle mathématique qui permet de prendre en considération une échelle graduelle du degré de validité d'une relation repose sur une modélisation par des relations spatiales floues [ROSE-76, FREE-75, MIYA-94a] fondée sur la théorie des ensembles flous introduite par Zadeh [ZADE-65].

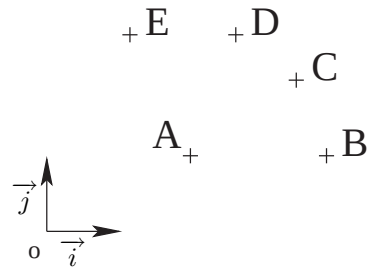


FIG. 1.1 – Ambiguïté des relations spatiales entre points.

[2]Le plan est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Si la représentation par des relations spatiales floues est satisfaisante dans le cas du traitement de la disposition spatiale des points, le problème est plus complexe lorsqu'il s'agit de traiter des objets ou des régions. Cette ambiguïté est accentuée par la diversité des paramètres de forme, de taille, d'orientation ... de ces objets [ROSE-76, WINS-75]. Par exemple, on peut voir sur la figure 1.2 que dans les trois cas l'objet B possède une partie située à droite de l'objet A, mais on ne peut pas affirmer que les trois exemples sont identiques. Cela implique que la relation RIGHT OF n'est pas vérifiée avec le même degré dans les trois cas. Le problème, dans ce cas, est de définir une méthode de quantification des relations spatiales entre deux régions. L'estimation des relations spatiales directionnelles entre des objets ou des régions ne sera pas aussi simple que dans le cas des points, car il faudra prendre en compte, en plus de l'information angulaire, la forme et la taille des deux régions.

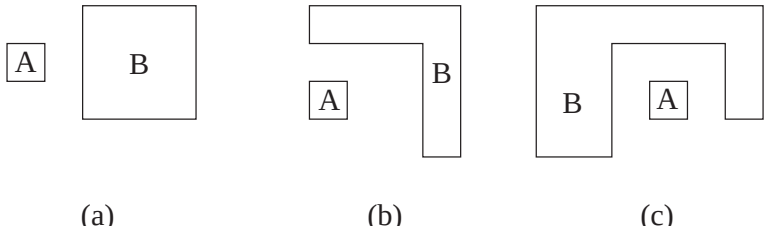


FIG. 1.2 – Ambiguïté des relations spatiales entre objets.

Si la modélisation reste floue dans toutes les approches de quantification des relations spatiales directionnelles proposées dans la littérature [KOCZ-88, KRIS-93a, MIYA-94a, KELL-96, BLOC-96a, MATS-98b], l'interprétation des degrés de satisfaction diffère d'une approche à une autre et dépend généralement de l'application souhaitée. Le seul point commun entre toutes ces méthodes est qu'une relation spatiale n'est pas vérifiée entre deux régions A et B (son degré de satisfaction est nul) si pour tout point $b \in B$ et pour tout point $a \in A$, cette relation spatiale n'est pas vérifiée.

1.3 Relations spatiales directionnelles floues entre des points

À cause de l'ambiguïté des relations spatiales directionnelles (paragraphe 1.2), l'ensemble de ces relations est représenté par des relations floues. Le degré de satisfaction de la relation sera important si la direction du vecteur formé par les deux points correspond à la direction de la relation spatiale. Plus cet angle est important moins le degré de satisfaction de la relation sera élevé.

La modélisation des relations spatiales directionnelles floues entre deux points repose sur la définition d'une fonction $f(\theta)$ pour représenter ces relations. La fonction $f(\theta)$ est une fonction symétrique, périodique de période 2π et décroissante entre 1 et 0 sur l'intervalle $[0, \pi]$. L'estimation du degré de satisfaction d'une relation spatiale

directionnelle $Rel_{\theta_0}(A,B)$[3] correspondant à la direction θ_0 du plan entre deux points A et B revient à déterminer la valeur de la fonction f au point $\left(\angle(\overrightarrow{i},\overrightarrow{AB}) - \theta_0\right)$:

$$Rel_{\theta_0}(A,B) = f\left(\angle(\overrightarrow{i},\overrightarrow{AB}) - \theta_0\right) \tag{1.1}$$

Miyajima et Ralescu avaient proposé d'utiliser des fonctions trigonométriques pour estimer ces relations (Fig. 1.3) :

$$f_{trigo}(\theta) = \begin{cases} \cos^2(\theta) & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.2}$$

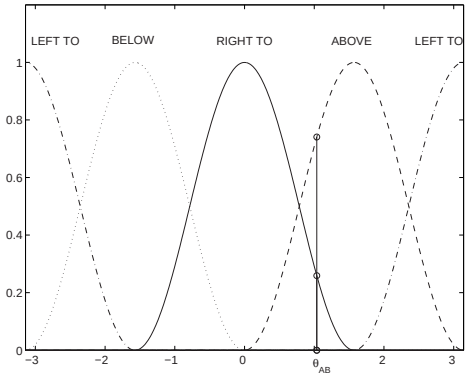


FIG. 1.3 – Définition de Miyajima et Ralescu [MIYA-94a, MIYA-94b] des relations spatiales floues à partir des fonctions trigonométriques f_{trigo}.

On retrouve aussi des fonctions triangulaires [KRIS-93a] (Fig. 1.4-a) et plus généralement des fonctions trapèzes [KRIS-93a, GADE-97] (Fig. 1.4-b) définies par :

$$f_{\triangle}(\theta) = \begin{cases} \frac{\pi/2-|\theta|}{\pi/2} & \text{si } -\pi/2 < \theta < \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.3}$$

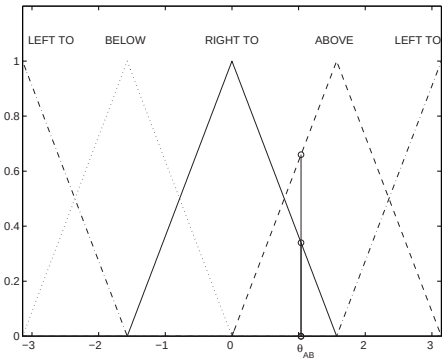
$$f_{trap}(\theta) = \begin{cases} 1 & \text{si } |\theta| < a\,\pi/2 \\ \frac{\pi/2-|\theta|}{\pi/2(1-a)} & \text{si } a\pi/2 \leq |\theta| \leq \pi/2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{1.4}$$

Le paramètre a permet de mesurer le degré d'optimisme de la méthode d'estimation. Si $(a = 0)$, les fonctions trapèzes f_{trap} sont équivalentes aux fonctions triangulaires $f_{\triangle}$.

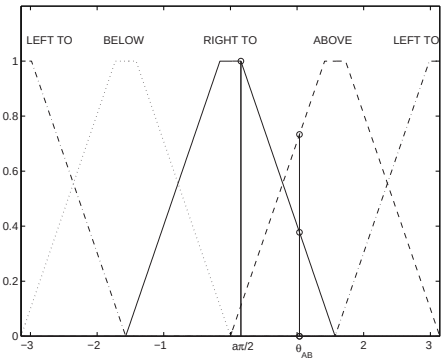
Discussion

La comparaison des trois types de fonctions précédentes (Fig. 1.5) montre que les fonctions trigonométriques permettent d'obtenir des résultats plus optimistes que les fonctions triangulaires dans le cas où la différence $\left|\angle(\overrightarrow{i},\overrightarrow{AB}) - \theta_0\right|$ est inférieure à $\pi/4$

[3] $Rel_{\theta_0}(A,B)$: représente le degré de satisfaction de la relation « Le point B est dans la direction θ_0 par rapport au point A »



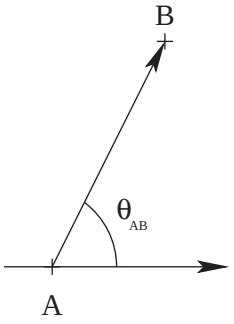
(a) Relations spatiales floues définies à partir des fonctions triangulaires $f_{\triangle}$.



(b) Relations spatiales floues définies à partir des fonctions trapèzes f_{trap} ($a = 0.1$).

FIG. 1.4 – Définition des relations spatiales floues à partir des fonctions linéaires.

$(\forall\theta \in [-\pi/4, \pi/4], f_{trigo}(\theta) \geq f_{\triangle}(\theta))$ et plus pessimistes dans l'autre cas (Fig. 1.5).



(a) l'angle $\angle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}\right)$.

	f_{trigo}	$f_{\triangle}$	f_{trap}
RIGHT OF	0.25	0.33	0.37
ABOVE	0.75	0.67	0.74
LEFT OF	0	0	0
BELOW	0	0	0

(b) Comparaison entre les trois types de relations.

FIG. 1.5 – Estimation des relations spatiales directionnelles entre des points.

Les deux premiers types de fonctions (f_{trigo} et $f_{\triangle}$) permettent de définir une bijection entre l'ensemble des angles $\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$ et le tuple des quatre relations spatiales directionnelles de base (LEFT OF, ABOVE, RIGHT OF, BELOW) (les quatre directions cardinales du plan). Cela implique que l'angle $\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$ peut être directement déterminé à partir du tuple (LEFT OF, ABOVE, RIGHT OF, BELOW). Dans le cas des fonctions trapèzes, cette propriété est vérifiée ssi $a \leq 0.5$. Si la valeur de a est supérieure à 0.5, tous les angles $(1-a)\pi/2 \leq \angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB}) \leq a\pi/2$ vont correspondre au tuple $(0, 1, 1, 0)$.

1.4 Relations spatiales directionnelles entre des objets

Si toute une communauté scientifique approuve une représentation par relation floue des différentes relations spatiales, les méthodes d'évaluation diffèrent d'un groupe à l'autre. Suivant l'approche choisie, cet ensemble de méthodes peut être subdivisé en trois grandes classes :

1. **Première classe :** Cette classe regroupe toutes les méthodes fondées sur le traitement d'une forme simplifiée déduite de la forme originale de chaque région. La forme originale des deux régions est négligée au profit d'une forme plus simple à traiter. Pour cette partie, on peut citer les méthodes qui remplacent le problème d'évaluation des relations spatiales entre régions par celui du traitement de deux points issus des deux régions [KELL-95, KRIS-93a] (centre de gravité, ...), ou par celui du traitement de la position relative des rectangles englobant les deux régions(MBR[4]). Les résultats de ces méthodes ne sont pas très fiables dès qu'il s'agit de traiter des régions ayant des formes complexes [BLOC-96a].

2. **Deuxième classe :** On peut regrouper dans cette classe toutes les méthodes fondées sur le passage par une représentation simplifiée de l'information spatiale (Histogramme d'angles, Histogramme de forces). Les différentes relations spatiales sont évaluées directement à partir de cette représentation.

3. **Troisième classe :** Elle regroupe les méthodes qui n'appartiennent ni à la première ni à la deuxième classe, on verra que ces approches permettent une évaluation des relations spatiales directement à partir du traitement de la position relative de l'ensemble des points des deux régions.

1.4.1 Méthodes représentant les régions par des points : (1$^{\text{ère}}$ classe)

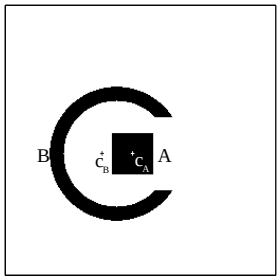
Une solution simple pour évaluer les relations spatiales entre deux régions consiste à représenter les deux régions A et B par deux points c_A et c_B déterminés à partir des deux régions. Krishnapuram et al. [KRIS-93a] proposent d'utiliser le centre de gravité pour représenter les deux régions. Les relations spatiales entre les deux régions A et B seront estimées à partir des relations spatiales entre les deux centres de gravité c_A et c_B, par exemple l'évaluation de la relation $\text{RIGHT}(A,B)$ (l'objet B est situé à droite de l'objet A) est donnée par :

$$\text{RIGHT}(A,B) = f\left(\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{c_A c_B})\right) \tag{1.5}$$

[4]MBR : Minimum Boundary Rectangle

Discussion

En examinant les résultats obtenus sur la figure 1.6, on découvre que cette approche atteint ses limites dès qu'il s'agit de traiter des régions ayant des formes complexes. Comme on peut le constater, la position relative des deux centres de gravité c_A et c_B des deux régions A et B ne reflètent pas très bien les relations spatiales entre ces deux régions. Les deux relations ABOVE et BELOW ne sont pas vérifiées d'après cette approche alors que si on examine la région B, celle-ci possède bien une partie située en bas et une partie située en haut de la région A.



(a) les deux régions A et B.

	$Rel(A,B)$
RIGHT OF	0
ABOVE	0
LEFT OF	1
BELOW	0

(b) Relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B.

FIG. 1.6 – Représentation des régions par des points particuliers (centre de gravité).

1.4.2 Méthode de Koczy : (1ère classe)

L'évaluation des relations spatiales par la méthode de Koczy [KOCZ-88] est fondée sur le traitement d'une projection floue des deux régions sur un axe du plan. Cette simplification nous permet de classer cette approche dans notre première classe, puisque le traitement de la position relative de deux régions bidimensionnelles est ramené a celui de leur projection (objet unidimensionnel) sur les axes du plan. Nous allons présenter l'approche pour évaluer la relation "LEFT OF", les autres relations peuvent être déduites facilement par des rotations.

1.4.2.1 Définitions

1. si A est une région (non floue) du plan, la projection floue A^f sur l'axe des x est définie par :

$$A^f(x) = \frac{A^{max}(x) - A^{min}(x)}{\max\limits_{x}\left(A^{max}(x) - A^{min}(x)\right)} \tag{1.6}$$

telle que :

$$A^{max}(x) = \sup\{y / P(x,y) \in A\} \tag{1.7}$$
$$A^{min}(x) = \inf\{y / P(x,y) \in A\} \tag{1.8}$$
$$P(x,y) : \text{représente le point } P \text{ du plan } \mathcal{E} \text{ de coordonnées } (x,y).$$

La projection floue $A^f(x)$ d'une région A du plan sur l'axe des x représente la hauteur de la région pour la coordonnée x normalisée par la hauteur maximale de la région.

2. Le support A^s d'une région A dans la direction x est défini comme étant le support de l'ensemble flou A^f (paragraphe A.3.1) :

$$A^s = \{x / A^f(x) > 0\} \tag{1.9}$$

3. A partir de la projection floue d'une région A, Koczy [KOCZ-88] définit l'ensemble flou "LEFT OF A", $A^{\leftarrow}(x)$, qui permet de représenter l'ensemble des points du plan qui sont situés à gauche de la région A. Pour chaque coordonnée x_0 du plan, le degré de satisfaction de la relation "LEFT OF A" dépend de la surface de la région A située à droite de la droite $(\Delta : x = x_0)$, plus cette surface est importante, plus ce degré va s'approcher de la valeur maximale 1.

$$A^{\leftarrow}(x) = \frac{\int_{x}^{+\infty} A^f(y)dy}{\int_{-\infty}^{+\infty} A^f(y)dy} \tag{1.10}$$

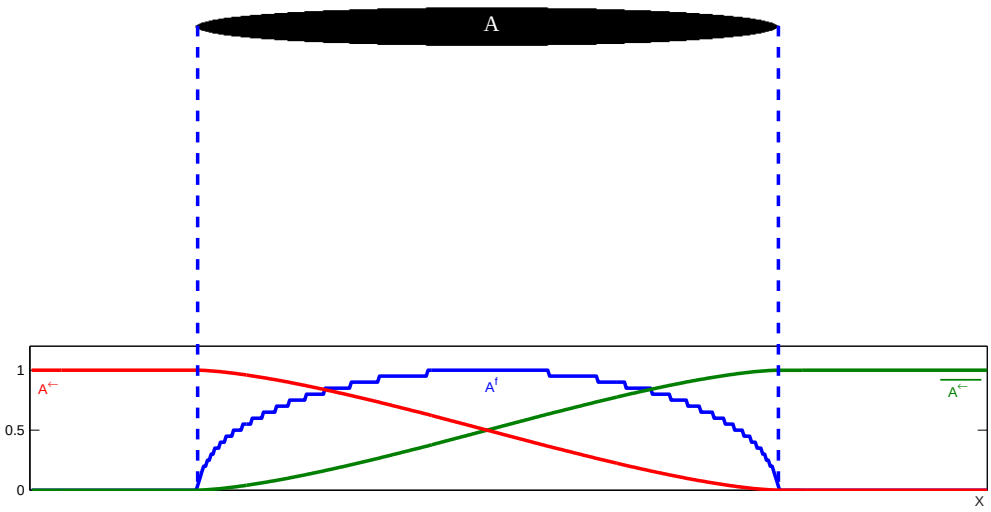


FIG. 1.7 – Définition de A^f, $A^{\leftarrow}$ et $\overline{A^{\leftarrow}}$.

1.4.2.2 Évaluation de la relation spatiale

Pour estimer le degré de satisfaction de la relation spatiale, Koczy calcule une défuzzification de l'ensemble flou $(B \leftarrow A)^f$, qui représente pour chaque point x le degré

de satisfaction de la proposition "x est dans la projection floue de B et situé à gauche de A". L'ensemble $(B \leftarrow A)^f$ est défini comme une conjonction floue (un produit ici) entre les deux ensembles flous B^f et $A^{\leftarrow}$.

$$\begin{aligned}(B \leftarrow A)^f &= B^f \wedge A^{\leftarrow} \\ (B \leftarrow A)^f(x) &= B^f(x) A^{\leftarrow}(x)\end{aligned}$$

La défuzzification de cet ensemble flou permet de déterminer le degré $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B)$ de la proposition "la région B est située à gauche de la région A". Koczy le défini comme étant le rapport de surface entre $(B \leftarrow A)^f(x)$ et $B^f(x)$ (Fig. 1.8) :

$$\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (B \leftarrow A)^f(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} B^f(x) dx} \tag{1.11}$$

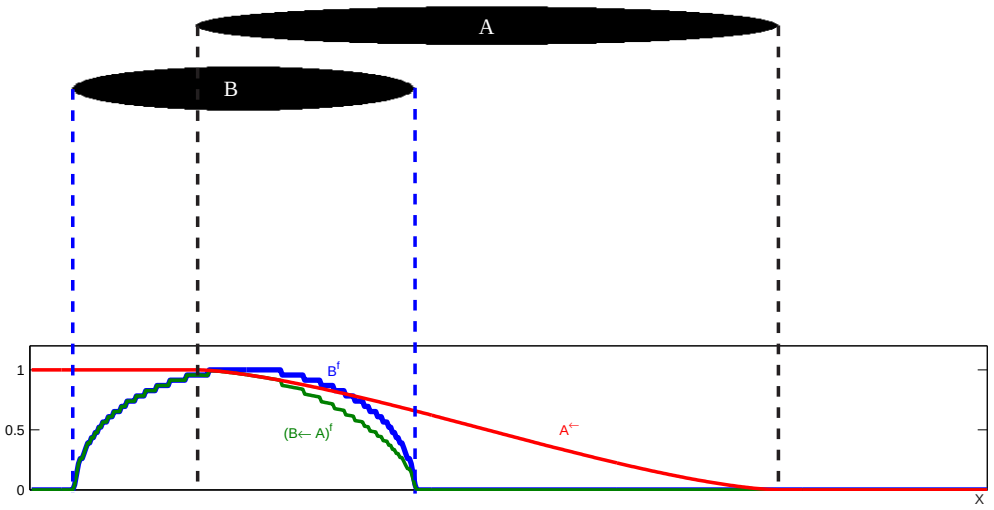


FIG. 1.8 – Évaluation de la relation spatiale $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = 0.90$.

Le degré $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B)$ de satisfaction de la relation LEFT OF entre les deux régions A et B calculé par la méthode de Koczy est caractérisé par l'ensemble des propriétés suivantes :

1. Si le support de la région B est situé à gauche du support de la région A alors $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = 1$.
2. Si le support de la région B est situé à droite du support de la région A alors $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = 0$.
3. $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = 1 \Rightarrow \text{LEFT}_{\text{koczy}}(B, A) = 0$.

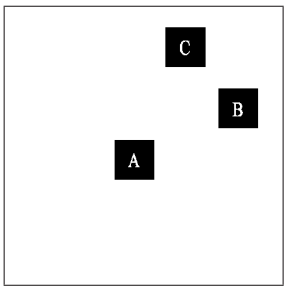
4. $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) = 0 \Rightarrow \text{LEFT}_{\text{koczy}}(B, A) = 1.$
5. $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) > 0 \Rightarrow \text{LEFT}_{\text{koczy}}(B, A) < 1.$
6. $\text{LEFT}_{\text{koczy}}(A, B) < 1 \Rightarrow \text{LEFT}_{\text{koczy}}(B, A) > 0.$

On reconnaît dans les propriétés (3-6) la relation antisymétrique vérifiée par la relation LEFT OF :

– Si l'objet B est à gauche de l'objet A alors l'objet A n'est pas situé à gauche de l'objet B,

– Si l'objet B n'est pas complètement à gauche de l'objet A alors il vérifie forcément la relation RIGHT OF (négation de LEFT OF) avec un degré non nul.

1.4.2.3 Discussion



(a)

Rel	$A - B$	$A - C$
RIGHT OF	1	1
ABOVE	1	1
LEFT OF	0	0
BELOW	0	0

(b)

FIG. 1.9 – Problème de représentation des relations spatiales lié au modèle de Koczy [KOCZ-88].

L'utilisation d'une projection sur les axes du plan pour évaluer les relations spatiales est une approche similaire à la notion de 2D-String [CHAN-87] utilisée dans les systèmes d'informations géographiques *(SIG)*. L'estimation d'une relation spatiale directionnelle entre deux régions à partir d'une seule projection n'est pas suffisante, car cela engendre une mauvaise distinction entre le cas où la région B est située à l'est de la région A et le cas où elle est située au nord-est si les supports des deux projections floues des régions A et B sont disjoints. Cet exemple, illustré sur la figure 1.9-a, montre que les deux régions B et C sont situées au nord-est de l'objet A, mais la région C est plus au nord de A que la région B. Cependant, si on examine les résultats de l'estimation des quatre relations spatiales directionnelles de base (Fig. 1.9-b), il n'existe aucune différence entre les deux cas. Sur ces critères, on peut affirmer que le modèle de Koczy [KOCZ-88] n'est pas adapté pour avoir une bonne quantification des relations spatiales à partir des quatre relations spatiales directionnelles de base correspondant aux quatre directions cardinales du plan.

1.4.3 Histogramme d'angles : (2$^{\text{ème}}$ classe)

Miyajima et Ralescu [MIYA-94a, MIYA-94b] ont proposé d'utiliser un histogramme d'angles pour représenter la position relative d'une région B par rapport à une région A. Pour cette méthode de la deuxième classe, l'histogramme d'angle est un outil simple pour représenter l'ensemble des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B.

Si les deux régions A et B représentent deux ensembles finis de points : $A = \{a_1, ..., a_n\}$ et $B = \{b_1, ..., b_m\}$, la position relative des deux régions A et B est évaluée à partir de la position relative de chaque point b_j de B par rapport à chaque point a_i de A.

1.4.3.1 Définitions

L'histogramme d'angles H_{AB} est défini comme une fonction d'une variable d'angle θ, telle que $H_{AB}(\theta)$ représente le nombre de couples $(a_i, b_j) \in A \times B$ tels que $\angle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{a_i b_j}\right) = \theta$:

$$H_{AB}(\theta) \quad = \quad \left| \left\{ (a_i, b_j) \in A \times B \;/\; \angle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{a_i b_j}\right) = \theta \right\} \right| \tag{1.12}$$

où $|X|$ représente le cardinal de l'ensemble X.

1.4.3.2 Propriétés

1. L'histogramme d'angles est une fonction périodique de période 2π.

2. L'histogramme d'angles qui représente la position relative de A par rapport à B, H_{BA}, se déduit de H_{AB} par une translation de π.

$$H_{BA}(\theta) = H_{AB}(\theta + \pi) \tag{1.13}$$

3. L'histogramme d'angles H_{AB} dépend implicitement de la forme des deux régions A et B : l'histogramme d'angles dépend des points des deux régions A et B, toute modification de la forme de ces deux régions entraîne une modification de l'ensemble des points appartenant à ces deux régions et donc de l'histogramme d'angles.

4. L'histogramme d'angles H_{AB} dépend de la distance entre les deux régions A et B : l'angle formé par le couple de points $(a_i, b_j) \in A \times B$ et le vecteur $\overrightarrow{i}$ dépend implicitement de la distance qui sépare les deux points :

$$\angle\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{a_i b_j}\right) = \arctan\left(\frac{y_{b_j} - y_{a_i}}{x_{b_j} - x_{a_i}}\right) \tag{1.14}$$

où (x_{a_i}, y_{a_i}) et (x_{b_j}, y_{b_j}) représentent respectivement les coordonnées des points a_i et b_j dans le plan.

Si la région B s'éloigne de la région A, les deux termes $(y_{b_j} - y_{a_i})$ et $(x_{b_j} - x_{a_i})$ vont tendre vers l'infini et le rapport va tendre vers la tangente de la direction du déplacement de B par rapport à A pour tous les couples (a_i, b_j). Dans ce cas, l'histogramme d'angles va s'approcher d'une fonction de Dirac correspondant à la direction du déplacement.

Cet ensemble de propriétés reflète bien la dépendance des relations spatiales vis-à-vis des paramètres de forme, de taille, d'orientation et de position des deux régions [ROSE-76, WINS-75].

1.4.3.3 Estimation des relations spatiales par la méthode de compatibilité

Pour évaluer les différentes relations spatiales à partir de l'histogramme d'angles Miyajima et Ralescu proposent d'utiliser une mesure de compatibilité entre deux ensembles flous. La compatibilité [ZADE-78b, DUBO-80] entre deux ensembles flous F et G est un ensemble flou $\mathrm{cp}(F,G)$ (Fig. 1.10-d) défini à partir du principe d'extension de Zadeh [ZADE-78b, DUBO-85b] :

$$\begin{array}{rccl} \mu_{\mathrm{cp}(F,G)} : & [0,1] & \longrightarrow & [0,1] \\ & v & \longmapsto & \mu_{\mathrm{cp}(F,G)}(v) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \mu_F^{-1}(v) = \emptyset \\ \sup\{\mu_G(s)/v = \mu_F(s)\} & \text{Sinon} \end{cases} \end{array} \tag{1.15}$$

Dans notre cas F représente l'histogramme d'angles (après normalisation) H^n_{AB} et G représente l'ensemble flou associé à la relation spatiale (définie par exemple comme sur la Fig. 1.10-c) :

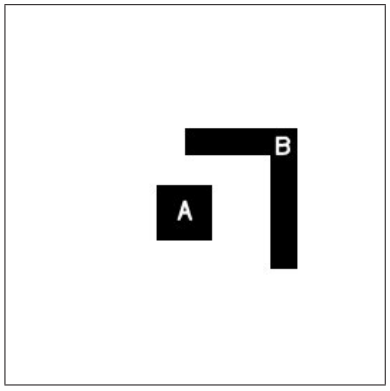
$$H^n_{AB}(x) = \frac{H_{AB}(x)}{\sup\limits_{x\in]-\pi,\pi]} H_{AB}(x)} \tag{1.16}$$

Un degré de satisfaction de la relation spatiale entre A et B est obtenu en prenant le centre de gravité de l'ensemble flou $\mathrm{cp}(H^n_{AB}, Rel)$. Pour modéliser les différentes relations spatiales, Miyajima et Ralescu utilisent des fonctions trigonométriques ($\cos^2(\theta)$ ou $\sin^2(\theta)$ Fig. 1.3).

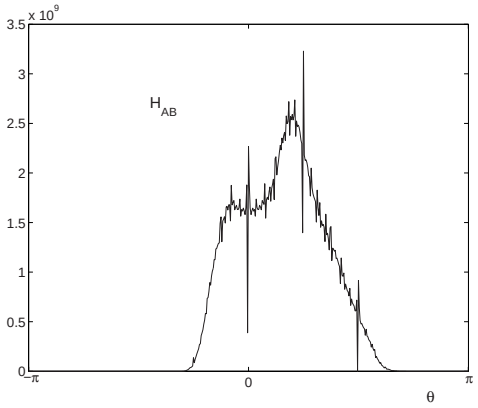
1.4.3.4 Estimation par réseau de neurones

Keller et Wang [KELL-96] ont proposé une autre approche pour évaluer les relations spatiales à partir de l'histogramme d'angles utilisant quatre réseaux de neurones multicouches (NN1, NN2, NN3, NN4) (Fig. 1.11). Chaque réseau dispose de 3 couches :

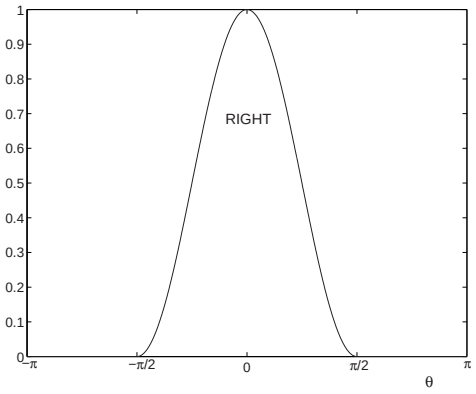
1. une couche d'entrée composée de 181 neurones correspondant aux 181 échantillons de l'histogramme d'angles,



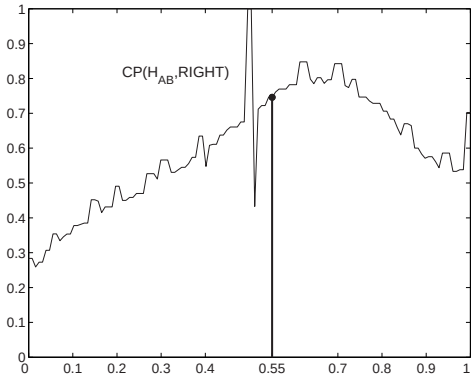
(a) Les deux objets A et B du plan.



(b) Histogramme d'angles entre les deux objets A et B.



(c) Relation spatiale floue RIGHT OF.



(d) La compatibilité entre l'histogramme des angles normalisé et la relation floue RIGHT OF (CP(H_{AB}, RIGHT)).

Le degré de **RIGHT**(A, B) est obtenu par défuzzification de l'ensemble CP(H_{AB}, RIGHT) : **RIGHT**$(A, B) = 0,55$ (moyenne pondérée de l'intervalle $[0, 1]$ par CP)

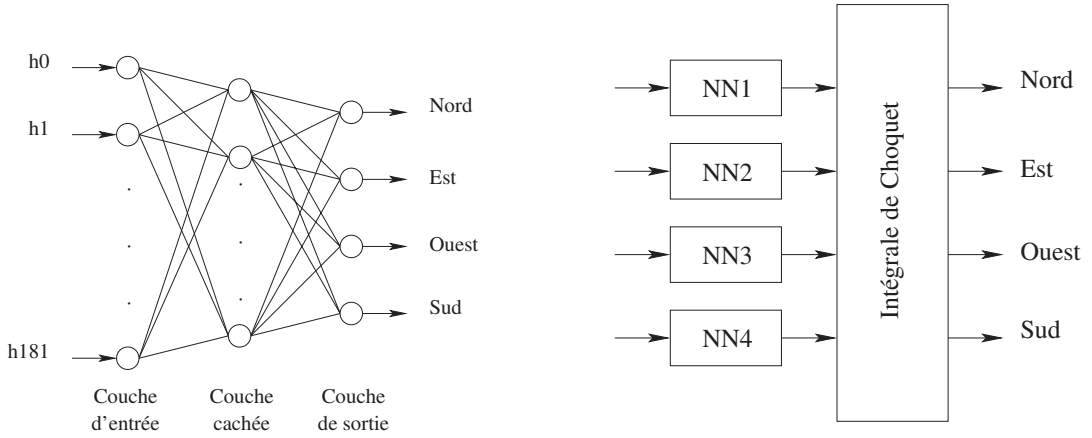
FIG. 1.10 – Évaluation de la relation spatiale "B est situé à droite de A" d'après Miyajima et Ralescu [MIYA-94a].

2. une couche cachée de 20 neurones,

3. une couche de sortie composée de 4 neurones correspondant à l'évaluation des 4 relations de base (RIGHT OF, ABOVE, LEFT OF, BELOW).

L'étape d'apprentissage de ces quatre réseaux a été effectuée sur 4 ensembles d'exemples dont la complexité d'estimation des relations spatiales est différente. Ces exemples ont été présentés à un groupe de personnes afin d'estimer les quatre relations spatiales directionnelles de base et fournir ainsi une base d'apprentissage. Une

fois l'étape d'apprentissage effectuée, chaque réseau sera spécialisé dans un cas bien particulier d'évaluation des relations spatiales directionnelles lié à l'ensemble d'apprentissage utilisé. Keller et Wang [KELL-96] utilisent ensuite l'intégrale de Choquet [MURO-91] pour fusionner les résultats des quatre réseaux NN1,NN2, NN3, NN4 et obtenir ainsi un degré de satisfaction pour chaque relation.



(a) Architecture des réseaux multicouches NN.

(b) Fusion des résultats par intégrale de Choquet.

FIG. 1.11 – Évaluation des relations spatiales par réseau de neurones (d'après Keller et Wang [KELL-96, KELL-00]).

Une autre version de cette approche a été proposée par Wang et Keller [WANG-99] en utilisant comme entrée des quatre réseaux de neurones, en plus de l'histogramme d'angles, 11 paramètres liés aux caractéristiques de formes et de positions des deux régions.

Remarque :

La base d'apprentissage des réseaux de neurones a été construite à partir des estimations fournies par un ensemble de personnes, cela implique que les résultats obtenus ne seront pas objectifs et vont dépendre essentiellement de la population choisie. De plus la décomposition du problème d'évaluation en quatre cas n'est pas suffisante, car ce nombre explose avec les nombreuses possibilités que peut avoir la forme d'un objet. Ces deux remarques montrent les défauts de cette approche pour l'évaluation des relations spatiales à partir de l'histogramme d'angles.

1.4.3.5 Estimation par pattern matching flou entre H^n_{AB} et Rel

Une autre approche a été proposée par Bloch [BLOC-96a] pour évaluer le degré de ressemblance entre l'histogramme d'angles et l'ensemble flou représentant la relation spatiale. L'idée principale est de considérer les deux fonctions F et G comme des distributions de possibilités. Un moyen approprié pour mesurer la similarité entre

deux distributions de possibilités est donné par le pattern matching flou [ZADE-78a, DUBO-88]. Cette ressemblance est exprimée par deux valeurs :

– Une mesure de nécessité, N, correspondant à une estimation pessimiste du degré de ressemblance entre les deux distributions. Elle représente le degré d'inclusion de *Rel* dans H^n_{AB} :

$$N^{H^n_{AB}}_{Rel} = \inf_{x\in[-\pi,+\pi]} \mathcal{U}\left(H^n_{AB}(x), 1 - Rel(x)\right) \tag{1.17}$$

où $\mathcal{U}$ représente une t-conorme (opérateur d'union floue).

Cette mesure est maximale et égale à 1 si et seulement si l'intersection du sous ensemble flou *Rel* et du complémentaire du sous ensemble flou H^n_{AB} est égale à l'ensemble vide($Rel \cap \overline{H^n_{AB}} = \emptyset$). Elle est nulle si et seulement si noyau(Rel) $\cap$ noyau($\overline{H^n_{AB}}$) $\neq \emptyset$

– Une mesure de possibilité, Π, représentant une évaluation optimiste du degré de similarité entre les deux distributions. Elle représente le degré maximal avec lequel un angle x peut appartenir à l'intersection des deux sous ensembles flous H^n_{AB} et *Rel* :

$$\Pi^{H^n_{AB}}_{Rel} = \sup_{x\in[-\pi,+\pi]} \mathcal{I}\left(H^n_{AB}(x), Rel(x)\right) \tag{1.18}$$

où $\mathcal{I}$ représente une t-norme (opérateur d'intersection floue).

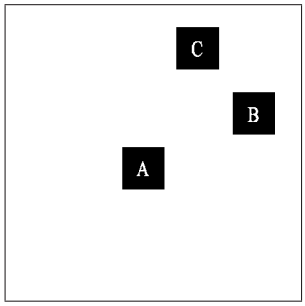
Cette mesure est nulle si et seulement si $H^n_{AB} \cap Rel = \emptyset$ et elle est maximale et égale à 1 si et seulement si $noyau(H^n_{AB}) \cap noyau(Rel) \neq \emptyset$.

Cette estimation des relations spatiales sous forme d'un intervalle $[N, \Pi]$ donne une meilleure représentation de l'ambiguïté de ces relations. Une valeur moyenne appartenant à cet intervalle peut être utile dans certains cas où l'intervalle $[N, \Pi] = [0, 1]$.

1.4.3.6 Discussion

En examinant les tableaux 1.12.b-d, on déduit que l'histogramme d'angles donne une meilleure description des relations spatiales que la méthode de Koczy (paragraphe 1.4.2). Les deux cas confondus par la méthode de Koczy (paragraphe 1.4.2.3) sont nettement distingués en utilisant l'histogramme d'angles.

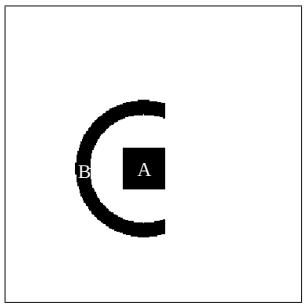
Dans l'exemple de la figure 1.12-c, on retrouve un exemple de relations composées : "La région B est située dans les trois directions LEFT OF, ABOVE et BELOW par rapport à la région A". Dans ce cas, on remarque que l'interprétation d'un seul degré indépendamment des autres peut conduire à des erreurs, par exemple, dire que la relation LEFT OF n'est pas complètement vérifiée pour les deux régions A et B ne peut pas être justifié en examinant la figure 1.12-c. Dans ce cas, on constate que la représentation sous forme d'un intervalle est plus intéressante mais l'utilisation d'une



(a) Les trois régions A, B et C.

	Compatibilité		Pattern matching			
	$Rel(A,B)$	$Rel(A,C)$	$Rel(A,B)$		$Rel(A,C)$	
			N	Π	N	Π
RIGHT OF	0.789	0.182	0	0.849	0	0.337
ABOVE	0.209	0.816	0	0.370	0	0.858
LEFT OF	0	0	0	0	0	0
BELOW	0	0	0	0	0	0

(b) Estimation des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B et les deux régions A et C.



(c) Les deux régions A et B.

$Rel(A,B)$	Compatibilité	Pattern matching	
		N	Π
RIGHT OF	0.10	0	0.16
ABOVE	0.50	0	1
LEFT OF	0.50	0	1
BELOW	0.50	0	1

(d) Estimation des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B.

FIG. 1.12 – Comparaison entre la méthode de compatibilité utilisée par Miyajima et Ralescu [MIYA-94a] et la méthode du pattern matching flou utilisée par Bloch [BLOC-96a] pour l'estimation des relations spatiales directionnelles à partir de l'histogramme des angles.

moyenne s'avère nécessaire car l'intervalle $[0,1]$ ne nous permet pas de déduire quelque chose.

En conclusion, il faudrait être très prudent dans l'interprétation des degrés évalués uniquement à partir des angles. Il faut considérer tous les degrés obtenus en même temps pour aboutir à des interprétations plausibles.

1.4.4 Histogramme de forces : ($2^{\text{ème}}$ classe)

L'histogramme de forces [MATS-98a] a été défini comme une extension de l'histogramme d'angles, celui-ci permet de prendre en compte, en plus de l'information angulaire, l'information métrique.

1.4.4.1 Définition

L'histogramme de forces $H^r_{\mathcal{F}}$ est défini comme étant une fonction d'une variable d'angle θ où $H^r_{\mathcal{F}}(\theta)$ représente un poids associé à l'hypothèse "l'objet B est situé dans la direction θ par rapport à l'objet A". Si l'histogramme d'angles effectuait un dénombrement des couples de points dans la direction θ, l'histogramme de forces fait un dénombrement pondéré. Pour définir ces poids, une famille de fonctions φ_r est utilisée prenant en compte la distance qui sépare les deux points a_i et b_j :

$$\begin{array}{rccl} \varphi_r : & R^+ & \longrightarrow & R^+ \\ & d & \longmapsto & \varphi_r(d) = \dfrac{1}{d^r} \end{array}$$

L'histogramme de forces est défini par :

$$H^r_{\mathcal{F}}(\theta) = \sum_{\substack{(a_i,b_j)\in A\times B \\ \angle\left(\overrightarrow{i},\overrightarrow{a_ib_j}\right)=\theta}} \varphi_r(\| \overrightarrow{a_ib_j} \|) \tag{1.19}$$

1.4.4.2 Remarque

En exploitant les propriétés d'intégrale, Matsakis [MATS-98b, MATS-99] définit l'histogramme de forces à partir de la position relative de segments situés sur la même section longitudinale de pente $\tan(\theta)$. A partir de cette définition, il propose une version rapide pour calculer l'histogramme de forces. Dans ce travail, nous optons pour une définition équivalente mais plus proche de l'histogramme d'angles.

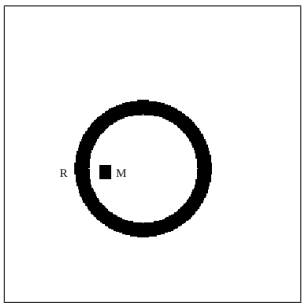
1.4.4.3 Propriétés

En plus des propriétés déjà énoncées pour l'histogramme d'angles, on peut citer les propriétés suivantes :

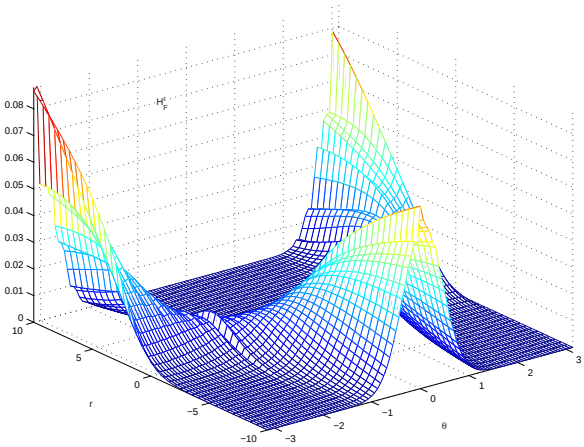
1. L'histogramme de forces correspondant à $r = 0$, $H^0_{\mathcal{F}}$, représente l'histogramme d'angles.

2. Pour $r \in [1, +\infty[$, l'histogramme de forces permet de rehausser le poids des couples de points proches. Par exemple, si on veut étudier la position relative d'une rivière par rapport à une maison placée sur le bord de celle-ci [MATS-98b] (Fig. 1.13), ce qui nous intéresse ici c'est la position relative de la maison par rapport au segment de la rivière le plus proche. L'histogramme $H^{10}_{\mathcal{F}}$ (Fig. 1.13-d) montre clairement que la rivière est placée à gauche (Direction $\pm\pi$) de la maison alors que cette direction n'était pas prédominante sur l'histogramme d'angles $H^0_{\mathcal{F}}$ (Fig. 1.13-c).

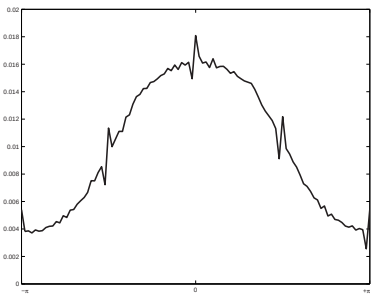
3. Pour $r \in]-\infty, -1]$, l'histogramme de forces permet de rehausser le poids des couples de points lointains. Cela permet d'avoir une vue globale des relations spatiales entre les deux régions. Prenons par exemple le cas précédent, si la maison est entourée par la rivière mais qu'elle est très proche du coté gauche de la rivière, la première famille de fonctions ($r \in [1, +\infty[$) va nous permettre d'affirmer que la maison est située à droite de la rivière. Pour pouvoir considérer aussi la partie de la rivière qui n'est pas proche de la maison, il faut pénaliser les couples de points proches (Fig. 1.13-e).



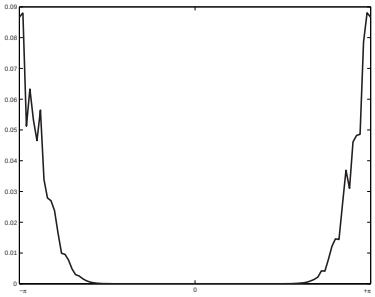
(a) Exemple d'une maison (M) entourée par une rivière (R).



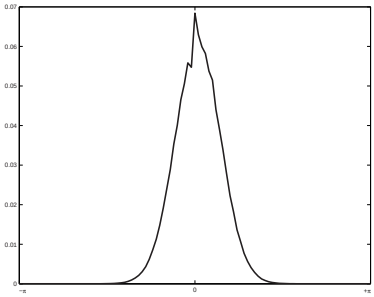
(b) histogrammes de forces (normalisés).



(c) $H^0_{\mathcal{F}}$.



(d) $H^{10}_{\mathcal{F}}$.



(e) $H^{-10}_{\mathcal{F}}$.

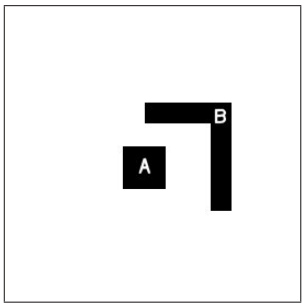
FIG. 1.13 – Évolution de l'histogramme de forces $H^r_{\mathcal{F}}$ [MATS-98b] en fonction de r.

Matsakis [MATS-98b] accorde une importance particulière aux deux fonctions φ_0 et φ_2 (Fig. 1.14-b) parce qu'elles ont de bonnes propriétés par rapport aux transformations géométriques (translation et zoom).

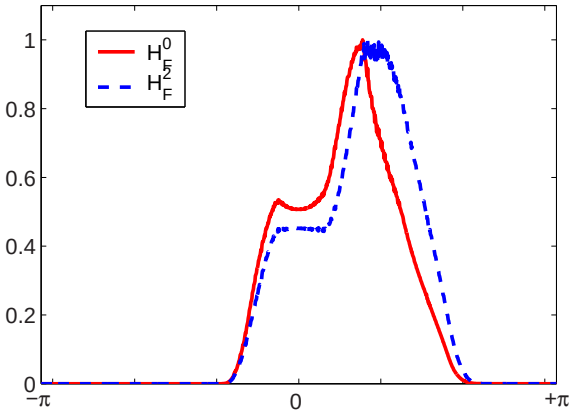
1.4.4.4 Discussion

L'estimation des relations spatiales à partir de l'histogramme de force utilise les mêmes approches que celles utilisées pour l'histogramme d'angles, la seule différence

est cet effet de pondération de chaque couple de points par la distance qui les sépare. Si on compare l'histogramme de forces $H^0_{\mathcal{F}}$ de la figure 1.14-b et l'histogramme d'angles de la figure 1.10-b, on voit bien qu'ils sont identiques. Par contre, on remarque bien que l'histogramme de forces $H^2_{\mathcal{F}}(\theta)$ est différent de l'histogramme d'angles $H^0_{\mathcal{F}}(\theta)$. On constate qu'il est supérieur à celui-ci pour les valeurs de $\theta \gtrapprox 7\pi/10$. Cela est dû aux poids plus importants associés aux couples de points proches correspondant à la partie supérieure des deux régions A et B.



(a) Les deux régions A et B.



(b) Évaluation des deux histogrammes de forces (normalisés) $H^0_{\mathcal{F}}$ et $H^2_{\mathcal{F}}$.

FIG. 1.14 – Histogramme de forces (d'après Matsakis [MATS-98b]).

1.4.5 Méthode d'agrégation : (3ème classe)

Pour estimer les relations spatiales directionnelles entre deux régions, Krishnapuram et al. [KRIS-93a] proposent de considérer l'ensemble des couples de points (a_i, b_j) des deux régions A et B. Un degré $\mu_{ij} = Rel(a_i, b_j)$ sera attribué à chaque couple en utilisant la définition des relations spatiales entre des points (paragraphe 1.3). L'estimation de la relation spatiale entre les deux régions sera déterminée directement à partir de l'ensemble de ces degrés en utilisant un opérateur d'agrégation floue [DUBO-85a]. Krishnapuram et al. [KRIS-93a] ont utilisé l'opérateur de moyenne généralisée :

$$Rel(A,B) = \left(\sum_{a_i \in A} \sum_{b_j \in B} w_{ij} \mu_{ij}^p \right)^{(1/p)} \tag{1.20}$$

tel que :

$$\sum_{a_i \in A} \sum_{b_j \in B} w_{ij} = 1 \tag{1.21}$$

Les poids w_{ij} représentent l'importance accordée à chaque degré μ_{ij}. Dans [KRIS-93a], tous les poids w_{ij} ont été choisis identiques, cela signifie qu'on ne fait aucune distinc-

tion entre les couples de points.

Le paramètre p permet d'ajuster le degré d'optimisme ou de pessimisme de la mesure. Quand p tend vers $+\infty$, l'opérateur de moyenne généralisée va tendre vers l'opérateur max et le degré obtenu sera le plus optimiste possible. Par contre, si p tend vers $-\infty$ l'évaluation sera plus pessimiste car l'opérateur de moyenne généralisée va tendre vers l'opérateur min.

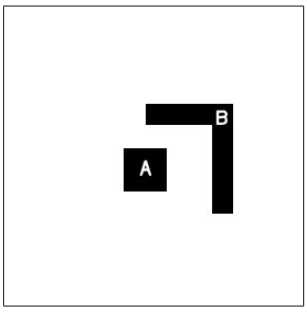
Cette approche est étroitement liée à l'histogramme d'angles. Le degré de satisfaction $Rel(A,B)$ (Eq. 1.20) peut être déterminé aussi de la même façon à partir de l'histogramme d'angles :

$$Rel(A,B) = \left(\int_{-\pi}^{\pi} H_{AB}^{N}(\theta) \left(f_{\text{rel}}(\theta) \right)^{p} d\theta \right)^{(1/p)} \tag{1.22}$$

$$H_{AB}^{N}(\theta) = \frac{H_{AB}}{\int_{-\pi}^{\pi} H_{AB}(\theta) d\theta} \tag{1.23}$$

Afin de vérifier la contrainte liée au poids w_{ij} (Eq. 1.21), l'histogramme d'angles H_{AB} est normalisé par rapport au produit des surfaces des deux régions A et B. Cette valeur représente l'intégrale de H_{AB} sur tout le domaine $[-\pi, \pi[$. En conclusion, on peut utiliser aussi cette approche pour estimer les relations spatiales à partir de l'histogramme d'angles. Cette approche relève alors plutôt de la $2^{\text{ème}}$ classe.

Discussion



(a) Les deux régions A et B.

$Rel(A,B)$	Compatibilité	Agrégation	
		$p=1$	$p=10$
RIGHT OF	0.573	0.637	0.871
ABOVE	0.427	0.335	0.786
LEFT OF	0.023	0.001	0.116
BELOW	0.117	0.027	0.290

(b) Estimation des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B.

FIG. 1.15 – Comparaison entre la méthode de compatibilité utilisée par Miyajima et Ralescu [MIYA-94b] et la méthode d'agrégation de Krishnapuram et al. [KRIS-93a] pour l'estimation des relations spatiales directionnelles entre deux régions.

Les résultats de l'estimation des relations spatiales directionnelles obtenus par la méthode d'agrégation dans le cas où $p = 1$ sont proches de ceux obtenus par la méthode

de compatibilité (Fig. 1.15). Le seul avantage dans ce cas est l'évaluation directe des relations spatiales.

L'autre avantage de cette approche est qu'elle peut être adaptée en fonction des résultats souhaités. Il suffit pour cela de déterminer le paramètre p adéquat pour notre application. Cet avantage n'est pas sans inconvénient car une valeur de $p \neq 1$ augmente le temps nécessaire pour évaluer la relation spatiale.

Remarque :

Toutes les méthodes citées jusqu'à présent permettent d'évaluer les relations spatiales entre des objets ou des régions nets. La position relative de deux régions floues est définie à partir de la position relative des $\alpha-$coupes (paragraphe A.3.4) de ces régions [DUBO-87, KRIS-93a], ce qui implique une sérieuse augmentation du temps nécessaire pour estimer ces relations. Cet inconvénient prend toute son importance quand on voit qu'une grande partie des algorithmes utilisés en traitement d'images est occupée par les algorithmes de segmentation floue.

1.4.6 Paysage flou : (3$^{\text{ème}}$ classe)

Cette approche [BLOC-96a, BLOC-99b] permet une évaluation directe des relations spatiales sans passer par une représentation réduite de l'information spatiale. Elle repose sur la définition d'un paysage flou $\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}$ (sous ensemble flou) autour de l'objet considéré directement dans l'espace des objets. Ce paysage reflète, pour chaque point $P(x,y)$ de l'espace $\mathcal{E}$, le degré de satisfaction de la relation spatiale "Le point $P(x,y)$ est situé dans la direction $\overrightarrow{u}$ par rapport à l'objet A" :

$$\mu_{\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}}\left(P(x,y)\right) = f\left(\min_{a\in A}\left(\left|\angle\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{aP}\right)\right|\right)\right) \tag{1.24}$$

où f est une fonction symétrique décroissante sur l'intervalle $[0,\pi]$ (section 1.3). La fonction utilisée dans [BLOC-99b] est la fonction triangulaire $f_{\triangle}$ (section 1.3) :

$$f_{\triangle}(\theta) = \max\left(0, 1-\frac{2\theta}{\pi}\right) \tag{1.25}$$

Le paysage flou peut être déterminé de manière équivalente à partir d'une dilatation floue [SERR-82, SCHM-94, BLOC-95] de la région A par l'élément structurant s défini par :

$$\forall P \in \mathcal{E}\ ,\ \mu_s(P) = \max\left(0,\ 1-\frac{2\left|\angle\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{OP}\right)\right|}{\pi}\right) \tag{1.26}$$

où O représente le centre de l'élément structurant.

Une extension de la formulation du paysage flou (Eq. 1.24) à été donnée pour évaluer en tout point du plan image la satisfaction d'une proposition directionnelle pour des régions ou objets flous :

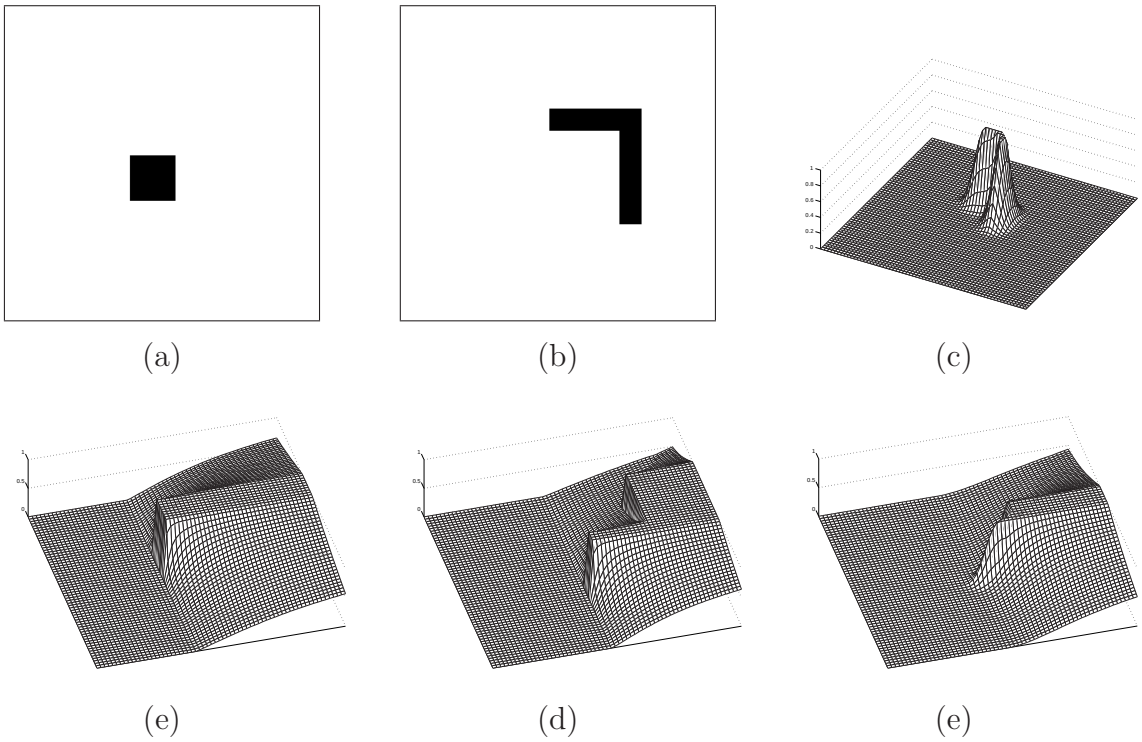


FIG. 1.16 – Le paysage flou correspondant à la relation RIGHT OF pour deux objets nets (a,b) et un objet flou (c) ($\mathcal{I} = \min$).

$$\mu_{\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}}(P(x,y)) = \max_{\mu_A(a)\neq 0} \mathcal{I}\left[\mu_A(a),\, f\left(\angle\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{aP}\right)\right)\right] \tag{1.27}$$

où $\mathcal{I}$ représente une t-norme floue (intersection floue).

Si on examine la figure 1.16, on voit très bien que la définition du paysage flou (Eq. 1.24 et Eq. 1.27) dépend de la forme de la région de référence A et de la position du point P de l'espace par rapport à celle-ci. Le degré associé à un point P du plan représente le maximum des degrés que peut avoir P avec l'ensemble des points a_i de la région A.

L'estimation des relations spatiales entre les deux régions A et B revient à déterminer le degré d'adéquation de la région B avec l'ensemble $\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}$. Pour cela, le pattern matching flou (paragraphe 1.4.3.5) est utilisé pour mesurer la similarité entre deux ensembles :

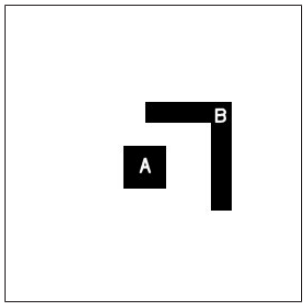
$$\mathrm{N} = \inf\, \mathcal{U}\left[\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}(x,\, y)\,,\, \mu_B(x,\, y)\right] \tag{1.28}$$

$$\Pi = \sup\, \mathcal{I}\left[\mathcal{P}_{\overrightarrow{u}}(x,\, y)\,,\, 1-\mu_B(x,\, y)\right] \tag{1.29}$$

A cause de l'ambiguïté des résultats obtenus dans certains cas (un intervalle $[0, 1]$ pour le degré de vérification des relations), Bloch [BLOC-99a] propose d'utiliser, en plus, une moyenne M calculée à partir de la correspondance entre les deux sous ensembles flous $\mathcal{P}$ et B :

$$\mathrm{M}_B^{\mathcal{P}} = \frac{1}{|B|} \sum_{x \in \mathcal{E}} \mu_B(x) \mu_{\mathcal{P}_{\vec{u}}}(x) \tag{1.30}$$

Discussion



(a) Les deux régions A et B.

$Rel(A, B)$	Hist. d'angles			Paysage flou		
	Comp.	N	Π	N	M	Π
RIGHT OF	0.573	0.120	0.747	0.294	0.810	1
ABOVE	0.427	0.010	0.610	0	0.518	1
LEFT OF	0.023	0	0.053	0	0.114	0.600
BELOW	0.117	0	0.275	0	0.021	0.435

(b) Estimation des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B.

FIG. 1.17 – Comparaison entre les résultats obtenus par l'histogramme des angles [MIYA-94a, MIYA-94b] et la méthode du paysage flou [BLOC-99a].

En comparant les résultats obtenus en utilisant l'histogramme d'angles [MIYA-94a, MIYA-94b] et la méthode du paysage flou [BLOC-99a], on remarque que les intervalles obtenus dans la méthode du paysage flou sont plus importants (tableau 1.17-b). Cela s'explique si on définit les degrés N (Eq. 1.28) et Π (Eq. 1.29) pour la méthode du paysage flou à partir des couples de points $(a_i, b_j) \in A \times B$:

$$\Pi = \sup_{(a_i, b_j) \in A \times B} Rel(a_i, b_j) \tag{1.31}$$

$$\mathrm{N} = \inf_{b_j \in B} \left(\sup_{a_i \in A} Rel(a_i, b_j) \right) \tag{1.32}$$

Dans ce cas, le degré Π déterminé à partir du pattern matching entre le paysage flou et la région B est égal à 1 ssi il existe un couple de points (a_i, b_j) tel que $Rel(a_i, b_j) = 1$. Dans le cas de l'histogramme d'angles, ce même degré est égal à 1 ssi l'angle θ_0 (direction de la relation spatiale) est représenté par la plus grande majorité de couples de points $(a_i, b_j) \in A \times B$. Cela explique les degrés obtenus par exemple pour la relation RIGHT OF, celui-ci est égal à 0.747 dans le cas de l'histogramme d'angles et à 1 dans le cas du paysage flou. Ces deux estimations sont différentes car la relation principale correspond à la direction nord-est. L'intérêt de l'utilisation d'une valeur moyenne M

est parfaitement justifié si on essaye de comparer les degrés des deux premières lignes (RIGHT OF, ABOVE) et les deux dernières lignes du tableau (LEFT OF, BELOW). On constate que la relation LEFT OF n'est pas vérifiée malgré l'importance du degré de possibilité obtenu.

1.5 Conclusion

Toutes les approches répertoriées ici permettent d'estimer les relations spatiales directionnelles entre deux régions. L'interprétation des différents degrés varie d'une approche à l'autre. Dans le cas de l'inférence des relations spatiales directionnelles, un modèle de représentation simplifié de l'ensemble des relations spatiales vérifiées entre les deux régions serait plus adapté. Les degrés des quatre relations spatiales directionnelles ne sont pas forcément suffisants car ils ne permettent pas de décrire l'ensemble des cas possibles. Nous avons opté pour l'utilisation d'un modèle qui s'approche de l'histogramme des angles et de l'histogramme des forces. La raison pour ne pas utiliser directement l'un de ces deux modèles est la mauvaise représentation de l'information métrique entre les deux régions. Malgré la dépendance directe de l'histogramme de forces et de la distance entre les deux régions, il est impossible de déduire cette information pour ces deux régions à partir de celui-ci. Cette remarque est aussi valable pour l'histogramme d'angles. Or comme on va le voir dans le chapitre suivant, cette information est capitale pour le problème de l'inférence des relations spatiales.

Chapitre 2

Histogramme angles-distances : un nouvel outil pour la représentation et l'inférence quantitative des relations spatiales directionnelles

La distance qui sépare les objets d'une scène est une information capitale dans l'étape d'inférence, son absence rend la déduction imprécise voire impossible. Zimmermann [ZIMM-93] avait déjà pensé à utiliser cette information pour améliorer le raisonnement spatial dans le cas de la représentation qualitative. Dans le chapitre précédent, nous avons vu que la distance a été complètement négligée au profit de l'information angulaire. Cette remarque nous a poussé à étudier la possibilité d'intégrer la distance dans ces modèles de représentation afin de pouvoir faire de l'inférence de relations spatiales en plus de l'estimation.

Dans un premier temps, nous allons voir l'importance de cette information de distance dans le cadre de l'inférence des relations spatiales entre des points (section 2.1). Ensuite, nous présentons l'histogramme angles-distances un nouveau modèle de représentation des différentes relations spatiales capable de représenter à la fois les informations angulaires et les informations métriques entre deux régions (section 2.2). Nous allons étudier les différentes propriétés de ce modèle (section 2.3) ainsi que les méthodes d'estimation des différentes relations spatiales directionnelles (section 2.4) et métriques (section 2.5). Enfin nous présenterons les possibilités de déduction ou d'inférence des relations spatiales directionnelles en utilisant l'histogramme angles-distances (section 2.6).

2.1 Inférence des relations spatiales directionnelles entre des points

Le problème de l'inférence des relations spatiales directionnelles (Fig. 2.1) consiste dans notre cas à déduire la position relative du point C par rapport au point A (l'angle $\gamma = \angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AC})$) à partir de la connaissance de la position relative du point C par rapport à un autre point B (l'angle $\beta = \angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{BC})$) et de la position relative de celui-ci par rapport au point A (l'angle $\alpha = \angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AB})$). Ce problème est complètement déterministe si l'on dispose, en plus des deux angles α et β, de la distance qui sépare les points A, B ($|AB|$) et B, C ($|BC|$) :

$$\gamma = \arctan\left(\frac{|AB|\cos(\alpha) + |BC|\cos(\beta)}{|AB|\sin(\alpha) + |BC|\sin(\beta)}\right) \tag{2.1}$$

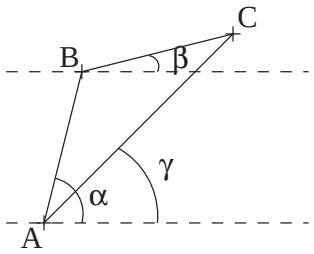


FIG. 2.1 – Inférence des relations spatiales directionnelles entre points.

En conclusion, cette information de distance sera capitale si l'on veut déterminer les relations spatiales entre les deux points A et C [ZIMM-93, ZIMM-96]. Les modèles de représentation quantitative des relations spatiales présentés dans le chapitre précédent se sont intéressés exclusivement à la représentation de l'information angulaire afin de pouvoir quantifier les relations spatiales directionnelles. Dans le cas de l'inférence, l'information métrique est aussi importante que l'information angulaire, ce qui nous a amenés à définir une extension de ces modèles pour pouvoir représenter à la fois l'information angulaire nécessaire à la quantification des relations spatiales directionnelles et l'information métrique nécessaire pour l'étape d'inférence.

2.2 Histogramme angles-distances

La distance entre deux régions dépend de la forme, de la taille et de la distance qui sépare les points des deux régions. Pour introduire cette information métrique dans les modèles de représentation quantitative de l'espace, nous avons deux possibilités :

1. Utiliser deux modèles différents : le premier représente uniquement l'information spatiale (angulaire) et l'autre va servir à décrire l'information métrique [GERAU-98, BLOC-00],

2. Utiliser un seul modèle pour représenter à la fois l'information spatiale (angulaire) et l'information métrique.

Afin de pourvoir utiliser l'équation 2.1, il faut connaître le nombre de couples de points placés à une distance d dans la direction θ. En conséquence, nous avons opté pour la deuxième possibilité, à savoir utiliser un seul modèle pour représenter à la fois l'information métrique et l'information angulaire. Ces deux informations ne sont pas indépendantes, elles dépendent de la forme et la position des deux régions.

Pour cela, nous avons proposé une modification de l'histogramme d'angles afin de pouvoir représenter, en plus de l'information angulaire, l'information de distance entre les deux régions. Cette nouvelle représentation permet d'utiliser l'information angulaire pour estimer les relations spatiales directionnelles, sans négliger l'information de distance nécessaire pour déduire de nouvelles connaissances et qui permet d'évaluer certaines relations spatiales métriques (NEAR, FAR) et topologiques (TOUCHING).

Définition

Pour introduire l'histogramme angles-distances, nous considérons au départ que les régions A et B sont des ensembles finis de points : $A = \{a_1, ..., a_n\}$ et $B = \{b_1, ..., b_m\}$. L'histogramme angles-distances est défini comme une fonction bidimensionnelle $\mathcal{H}_{AB}(r, \theta)$ qui représente le nombre de couples de points $(a_i, b_j) \in A \times B$ tels que le point $b_j \in B$ est situé à une distance r du point $a_i \in A$ dans la direction θ :

$$\mathcal{H}_{AB}(r,\theta) = \left| \left\{ (a_i,\, b_j) \in A \times B \;/ \overrightarrow{a_i b_j} = \begin{pmatrix} r\cos\theta \\ r\sin\theta \end{pmatrix} \right\} \right| \tag{2.2}$$

Si on examine de plus près l'équation (2.2), $\mathcal{H}_{AB}(r, \theta)$ peut être interprété comme la surface (cardinal) de l'intersection de la région B et la région $A_{\overrightarrow{t}}$ qui représente la translation de la région A par le vecteur $\overrightarrow{t} = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))^t$ (Fig. 2.2) :

$$\mathcal{H}_{AB}(r,\theta) = \left| \, A_{\overrightarrow{t}} \cap B \, \right| \tag{2.3}$$

Si A et B sont deux régions floues définies par les deux fonctions d'appartenance μ_A et μ_B, l'équation 2.3 devient :

$$\mathcal{H}_{AB}(r,\theta) = \sum_{P(u,v)\in\mathcal{E}} \mathcal{I}\left[\, \mu_A\left(u - r\cos\left(\theta\right), v - r\sin\left(\theta\right)\right) \;,\; \mu_B(u,v) \,\right] \tag{2.4}$$

où $\mathcal{I}$ est un opérateur d'intersection floue (t-norme).

Dans le cas où $\mathcal{E}$ est un espace continu, la somme devient une intégrale :

$$\mathcal{H}_{AB}(r,\theta) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\, \mu_A\left(u - r\cos\left(\theta\right), v - r\sin\left(\theta\right)\right) \;,\; \mu_B(u,v) \,\right] du dv \tag{2.5}$$

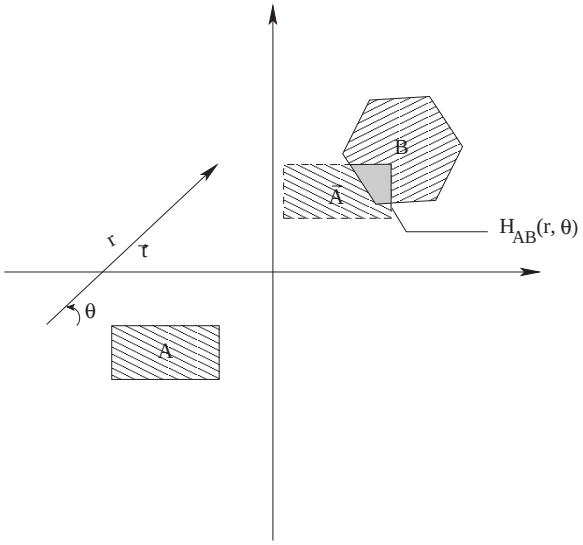


FIG. 2.2 – Calcul de l'histogramme Angles-Distances.

Le calcul numérique de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AB}$ nécessite la définition des pas d'échantillonnage des deux grandeurs r et θ. Pour remédier à ce problème, nous proposons de faire les calculs directement dans l'espace (x, y) de l'image :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{2.6}$$

Après un changement de variables dans l'expression 2.5, on obtient :

$$\mathcal{H}_{AB}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\,\mu_A\left(u-x, v-y\right),\ \mu_B(u,v)\,\right] du dv \tag{2.7}$$

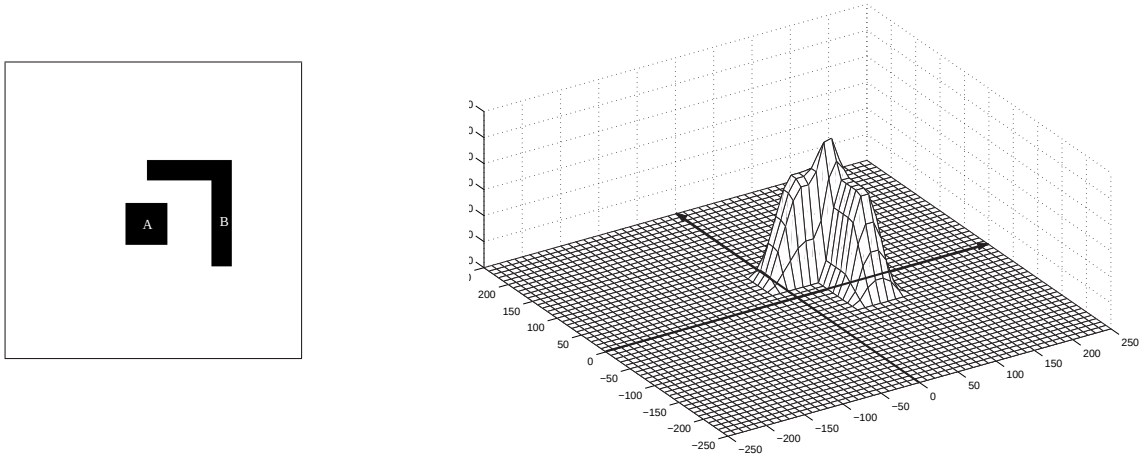


FIG. 2.3 – L'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AB}$.

Un exemple d'histogramme angles-distances entre deux régions A et B est illustré dans la figure 2.3.

Remarque :

Dans le cas où l'on choisit une multiplication pour l'opérateur $\mathcal{I}$, l'histogramme angles-distances représente la convolution bidimensionnelle des deux fonctions $\mu_A(-x,-y)$ et $\mu_B(x,y)$:

$$\mathcal{H}_{AB}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu_A\left(u-x, v-y\right)\ \mu_B(u,v)\ dudv \tag{2.8}$$

$$= \mu_A(-x,-y) ** \mu_B(x,y) \tag{2.9}$$

où $*\!*$ représente l'opérateur de la convolution bidimensionnelle.

Cette remarque importante nous permet d'utiliser l'algorithme du calcul de la transformée de Fourier rapide pour déterminer la convolution bidimensionnelle.

2.3 Propriétés

2.3.1 Invariance par rapport à l'objet de référence

L'histogramme angles-distances de la région A par rapport à la région B est défini par :

$$\mathcal{H}_{BA}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\ \mu_B\left(u-x, v-y\right)\ ,\ \mu_A(u,v)\ \right] dudv \tag{2.10}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} U = u - x \\ V = v - y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = U + x \\ v = V + y \end{cases} \tag{2.11}$$

on obtient :

$$\mathcal{H}_{BA}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\ \mu_B\left(U,V\right)\ ,\ \mu_A(U+x,V+y)\ \right] dUdV \tag{2.12}$$

$$= \mathcal{H}_{AB}(-x,-y) \tag{2.13}$$

car l'opérateur $\mathcal{I}$ est commutatif.

L'histogramme angles-distances qui représente les relations spatiales de la région A par rapport à la région B s'obtient à partir de celui qui représente les relations spatiales de B par rapport à A en utilisant une symétrie par rapport à l'origine. Cette propriété est équivalente à celle de l'histogramme d'angles.

2.3.2 Invariance par translation

Supposons que les régions A_{t_1} et B_{t_2} soient les translatés des régions A et B par les translations respectives $\overrightarrow{t_1}\,(x_{t_1}, y_{t_1})^t$ et $\overrightarrow{t_2}\,(x_{t_2}, y_{t_2})^t$:

$$\begin{aligned} \mu_{A_{t_1}}(x,y) &= \mu_A(x - x_{t_1}, y - y_{t_1}) \\ \mu_{B_{t_2}}(x,y) &= \mu_B(x - x_{t_2}, y - y_{t_2}) \end{aligned}$$

L'histogramme angles-distances qui exprime les relations spatiales entre les deux régions A_{t_1} et B_{t_2} est défini par :

$$\mathcal{H}_{A_{t_1}B_{t_2}}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\,\mu_{A_{t_1}}(u-x, v-y)\ ,\ \mu_{B_{t_2}}(u,v)\,\right] du dv \tag{2.14}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\,\mu_A(u-x-x_{t_1}, v-y-y_{t_1})\ ,\ \mu_B(u-x_{t_2}, v-y_{t_2})\,\right] du dv \tag{2.15}$$

En effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} U = u - x_{t_2} \\ V = v - y_{t_2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u = U + x_{t_2} \\ v = V + y_{t_2} \end{cases} \tag{2.16}$$

on obtient :

$$\mathcal{H}_{A_{t_1}B_{t_2}}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\,\mu_A(U-x-x_{t_1}+x_{t_2}, V-y-y_{t_1}+y_{t_2})\,,\,\mu_B(U,V)\,\right] dU dV \tag{2.17}$$

$$= \mathcal{H}_{AB}(x + x_{t_1} - x_{t_2}, y + y_{t_1} - y_{t_2}) \tag{2.18}$$

Donc $\mathcal{H}_{A_{t_1}B_{t_2}}(x,y)$ n'est rien d'autre que le translaté de $\mathcal{H}_{AB}(x,y)$ par le vecteur $\overrightarrow{t} = \overrightarrow{t_2} - \overrightarrow{t_1}$. Cette propriété nous permet de déduire le nouvel histogramme si un des objets a subi une translation sans refaire les calculs, ce qui est intéressant dans le cas de régions ou objets en mouvement (la navigation autonome des robots par exemple).

2.3.3 Traitement de régions sécantes

La représentation d'informations spatiales par l'histogramme angles-distances entre deux régions sécantes ne pose pas de problèmes d'indétermination. Dans ce cas l'intersection des deux régions forme un ensemble de couples de points (a_i, b_j) tel que $\overrightarrow{a_i b_j} = \overrightarrow{0}$. Ce vecteur ne présente aucune direction de l'espace. Miyajima et Ralescu [MIYA-94a, MIYA-94b] n'ont pas traité ces cas de figure. Matsakis [MATS-98b] propose de les compter pour toutes les directions possibles de l'histogramme des forces.

Dans notre cas, ces couples de points sont représentés par la valeur de $\mathcal{H}_{AB}$ à l'origine O. De plus cette valeur exprime la surface de l'intersection des deux régions A et B.

2.3.4 Relation avec l'histogramme d'angles

L'histogramme angles-distances a été défini comme une extension de l'histogramme d'angles. Cette définition permet de reconstruire celui-ci à partir du premier. Pour cela il suffit de remarquer que $H_{AB}(\theta)$ est le nombre de couples (a_i, b_j) tel que le point b_j est situé dans la direction θ par rapport au point a_i à n'importe quelle distance, donc H_{AB} représente l'intégrale de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AB}$ sur la demi-droite qui commence à l'origine et dont la pente est égale à $\tan(\theta)$:

$$H_{AB}(\theta) = \int_0^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(u\cos(\theta), u\sin(\theta))\, du \tag{2.19}$$

Cette possibilité de pouvoir déterminer l'histogramme d'angles à partir de l'histogramme angles-distances nous permet déjà d'utiliser les mêmes approches (paragraphe 1.4.3) que celles de l'histogramme d'angles pour l'évaluation des relations spatiales directionnelles.

2.3.5 Relation avec l'histogramme de forces

L'histogramme de forces peut être déduit directement à partir de l'histogramme angles-distances. En effet, l'histogramme angles-distances représente en plus de l'information angulaire, la distance entre les couples de points nécessaire pour l'évaluation de l'histogramme de forces :

$$H^r_{\mathcal{F}}(\theta) = \int_0^{+\infty} \varphi_r(u)\, \mathcal{H}_{AB}(u\cos(\theta), u\sin(\theta))\, du \tag{2.20}$$

2.4 Estimation des relations spatiales directionnelles à partir de l'histogramme angles-distances

Pour évaluer les degrés de satisfaction des différentes relations spatiales directionnelles à partir de l'histogramme angles-distances, on utilise deux approches différentes :

- Comme l'histogramme d'angles peut être déterminé directement à partir de l'histogramme angles-distances, on peut utiliser l'ensemble des méthodes d'estimations définies à partir de l'histogramme d'angles (paragraphe 1.4.3).

- A cause du temps nécessaire à la détermination de l'histogramme d'angles à partir de l'histogramme angles-distances, nous avons opté pour une méthode d'évaluation directe. Pour cela, on s'est inspiré de la méthode du paysage flou pour définir une méthode pour évaluer le degré de satisfaction d'une relation spatiale directement à partir de l'histogramme angles-distances. L'idée principale consiste à définir un degré de similarité entre un ensemble flou 2D (Rel) re-

présentant la relation spatiale et l'histogramme angles-distances normalisé $\mathcal{H}^n_{AB}$ (considéré comme un ensemble flou) :

$$\mathcal{H}^n_{AB}(x,y) = \frac{\mathcal{H}_{AB}(x,y)}{\sup\limits_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{H}_{AB}(x,y)} \tag{2.21}$$

Nous allons présenter dans ce qui suit le calcul des différents paramètres de la méthode.

2.4.1 Définition de *Rel*

Si on considère l'histogramme angles-distances comme un ensemble flou, l'estimation de la relation spatiale μ_{Rel} revient à définir une mesure de similarité entre l'histogramme angles-distances normalisé et un ensemble flou représentant la relation spatiale *Rel*.

Nous avons utilisé la définition des relations spatiales directionnelles entre des points pour définir le sous-ensemble flou représentant la relation spatiale directionnelle *Rel* correspondant à la direction θ_0 du plan. Pour cela il faut définir la relation pour tous les vecteurs $\overrightarrow{ab} = (x,y)^t$ du plan :

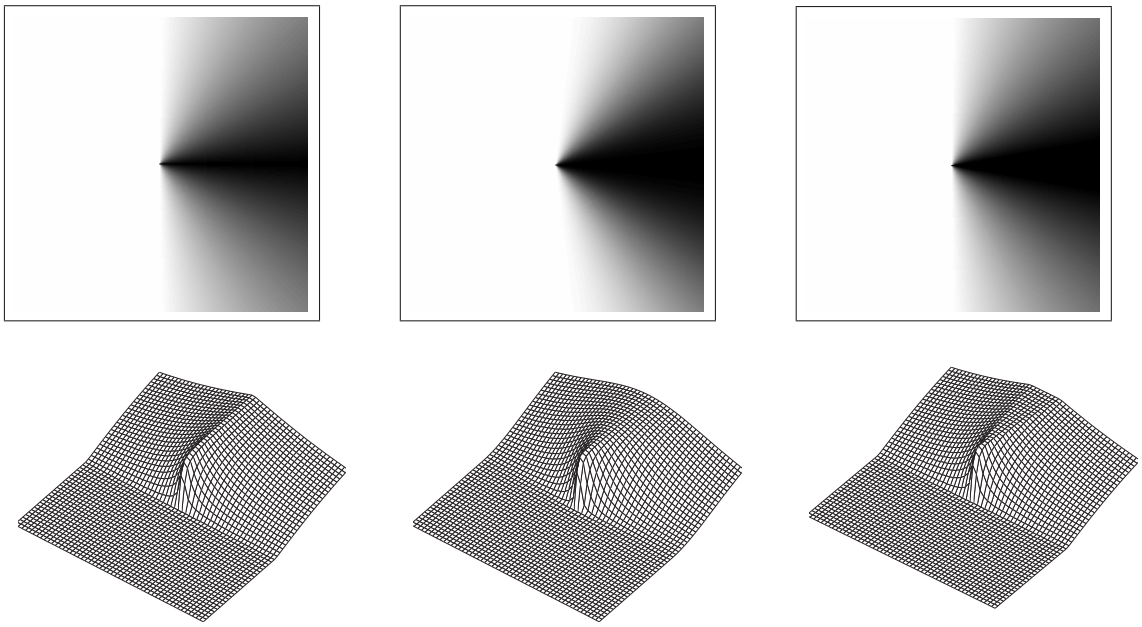
$$\mu_{Rel}(x,y) = \begin{cases} f\left(\angle(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{op}) - \theta_0\right) & \text{si } p(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.22}$$

L'ensemble des couples de points correspondant au vecteur nul $\overrightarrow{0}$ (couple appartenant à l'intersection des deux régions) ne présente aucune direction du plan, pour cela la valeur du degré $\mu_{Rel}(0,0)$ sera égale à 0. Comme nous traitons l'ensemble des couples de points appartenant au produit cartésien $A \times B$, cette hypothèse n'engendre pas de problème dans le cas des régions sécantes car ce degré nul correspond seulement au cas où les deux points du couple sont identiques.

Pour le choix de la fonction f, on peut utiliser (Fig. 2.4) les fonctions trigonométriques f_{trigo} (paragraphe 1.3) [MIYA-94a, MIYA-94b] ou bien les fonctions triangulaires $f_{\triangle}$ [KRIS-93b, GADE-97, BLOC-99b]. L'avantage de prendre les fonctions triangulaires est la vitesse de calcul de ces fonctions linéaires qui est importante devant celle du calcul des fonctions trigonométriques.

2.4.2 Estimation des relations spatiales

Comme on l'a déjà noté, une meilleure modélisation de l'ambiguïté des relations spatiales est obtenue par la théorie des possibilités. La similarité entre les deux distributions de possibilités est exprimée sous forme d'un intervalle défini par les deux mesures : un degré de nécessité N (une évaluation pessimiste) et un degré de possibilité Π (une évaluation optimiste) que nous rappelons ici :



(a) fonction triangulaire. (b) fonction trigonométrique. (c) fonction trapèze ($a = 0.1$).

FIG. 2.4 – Définition de la relation RIGHT OF avec les trois types de fonctions : triangulaire, trigonométrique et trapèze (blanc=0,noir=1).

$$N^{Rel}_{\mathcal{H}^n_{AB}} = \inf_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{U}\left(\mu_{Rel}\left(x,y\right), 1-\mathcal{H}^n_{AB}\left(x,y\right)\right) \tag{2.23}$$

$$\Pi^{Rel}_{\mathcal{H}^n_{AB}} = \sup_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{I}\left(\mu_{Rel}\left(x,y\right), \mathcal{H}^n_{AB}\left(x,y\right)\right) \tag{2.24}$$

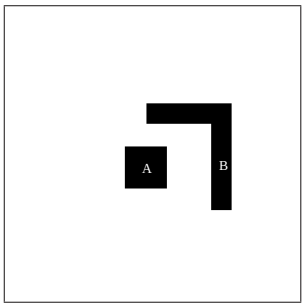
où $\mathcal{I}$ est une t-norme (intersection floue) et $\mathcal{U}$ est une t-conorme (union floue).

Pour le traitement de cas complexes (région incluse dans l'autre(Fig. 2.6)) une moyenne M est importante pour mieux distinguer l'ensemble des relations :

$$M^{Rel}_{\mathcal{H}_{AB}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}(\mathcal{H}^n_{AB}(x,y),\ \mu_{Rel}(x,y))dxdy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}^n_{AB}(x,y)dxdy} \tag{2.25}$$

2.4.3 Exemples

Pour comparer les trois modèles de définition des relations spatiales directionnelles (paragraphe 2.4.1), nous avons illustré sur la figure 2.5 le résultat de l'estimation des quatre relations spatiales directionnelles de base (RIGHT OF, ABOVE, LEFT OF, BELOW). Les résultats du tableau (Fig. 2.5-c) montrent bien que les fonctions trigonométriques sont plus optimistes que les fonctions triangulaires pour les degrés supérieurs



(a)

$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0.339	0.742	0.609
ABOVE	0.263	0.661	0.353
LEFT OF	0	0.156	0.003
BELOW	0	0.364	0.049

(b) Fonction triangulaire $f_{\triangle}$

$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0.339	0.805	0.639
ABOVE	0.203	0.664	0.345
LEFT OF	0	0.102	0.001
BELOW	0	0.322	0.030

(c) Fonction trigonométrique f_{trigo}

$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0.339	0.792	0.669
ABOVE	0.279	0.666	0.390
LEFT OF	0	0.169	0.003
BELOW	0	0.390	0.055

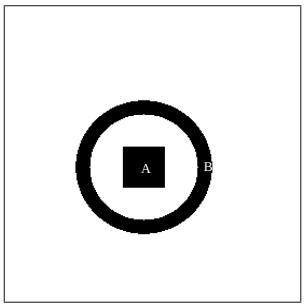
(d) Fonction trapèze f_{trap} $(a = 0.1)$.

FIG. 2.5 – Comparaison entre les différentes définitions de Rel ($\mathcal{I} = \min, \mathcal{U} = \max$).

à 0.5, ces valeurs ont été rehaussées en utilisant cette approche. Par contre, les degrés inférieurs à 0.5 ont été diminués par rapport aux résultats obtenus en utilisant les fonctions triangulaires. L'estimation des relations spatiales en utilisant les fonctions trapèzes (Fig. 2.5-d) est aussi plus optimiste que celle utilisant les fonctions triangulaires, cependant dans ce cas toutes les valeurs obtenues en utilisant les fonctions triangulaires (Fig. 2.5-b) ont été rehaussées sans distinction. À cause du temps nécessaire à l'évaluation des relations trigonométriques, nous avons opté dans la suite pour l'utilisation des fonction triangulaires dont l'évaluation est nettement plus rapide que les autres. Comme on peut le constater sur la figure 2.5, ce choix n'a pas une grande influence sur les résultats obtenus.

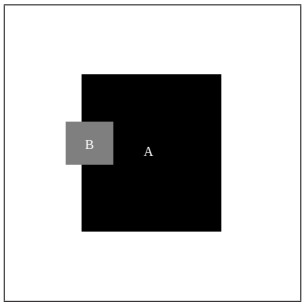
Maintenant, si on s'intéresse aux estimations des différentes relations spatiales, on voit par exemple que les degrés de possibilité des relations RIGHT OF et ABOVE ne sont pas égales à 1 car ces deux relations ne sont pas aussi importantes que la relation spatiale nord-est. Si on évalue les degrés pour cette relation ($\theta_0 = \pi/4$), on obtient bien des valeurs (N = 0.340, Π = 0.911, M = 0.663) qui sont plus importantes que les autres degrés estimés.

Sur la figure 2.6, nous avons estimé les quatre relations de base pour des cas complexes. Le premier cas représente une région B qui entoure la région A. Les deux autres cas représentent le problème du traitement des régions sécantes. Dans les deux cas, l'intersection des deux régions A et B n'est pas vide. De plus dans le dernier cas, la région B est située à l'intérieur de la région A. Ce problème est assez courant quand il s'agit



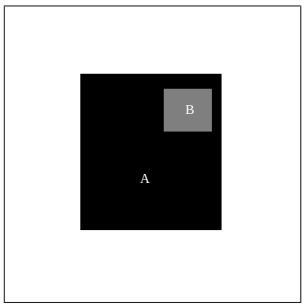
$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0	0.847	0.25
ABOVE	0	0.847	0.25
LEFT OF	0	0.847	0.25
BELOW	0	0.847	0.25

(a)



$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0	0.689	0.019
ABOVE	0	0.889	0.244
LEFT OF	0.111	1	0.580
BELOW	0	0.861	0.169

(b)



$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0	1	0.408
ABOVE	0	1	0.447
LEFT OF	0	1	0.080
BELOW	0	1	0.084

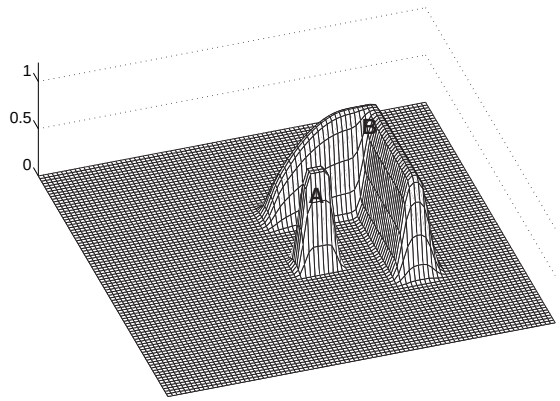
(c)

FIG. 2.6 – Évaluation des quatre relations spatiales directionnelles de base entre deux régions en utilisant l'histogramme angles-distances : *Rel* est définie à l'aide des fonctions triangulaires $f_{\triangle}$.

de positionner une rue à l'intérieur d'une ville, un pays à l'intérieur d'un continent, etc.

Si l'on examine la figure 2.6-a, on voit d'après les estimations des quatre relations de base que la région B est située dans les quatre directions cardinales du plan par rapport à la région A. Les quatre relations de base sont vérifiées avec le même degré, ce qui implique que la région B est située dans toutes les directions par rapport à la région A.

Le traitement des régions sécantes est illustré sur les figures 2.6-(b,c). Si on examine les degrés de vérification des quatre relations spatiales dans le premier cas, on arrive à la conclusion que la région B est située à gauche de la région A. Dans le deuxième cas, les valeurs de N et Π ne nous renseignent pas suffisamment sur la position relative de la région B par rapport A. Dans ce cas, on voit l'importance de l'utilisation de la moyenne qui exprime clairement que la région B est située au nord-est de la région A.



(a) Deux régions floues A et B.

$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0.195	0.860	0.568
ABOVE	0.141	0.805	0.386
LEFT OF	0	0.003	0.157
BELOW	0	0.043	0.368

(b) $\mathcal{I}(x,y) = x\,y$.

$Rel(A,B)$	N	Π	M
RIGHT OF	0.138	0.937	0.554
ABOVE	0.063	0.862	0.396
LEFT OF	0	0.177	0.005
BELOW	0	0.371	0.044

(c) $\mathcal{I}(x,y) = \min(x,y)$.

FIG. 2.7 – Évaluation des quatre relations spatiales directionnelles de base entre deux régions floues.

Sur la figure 2.7, nous avons estimé les quatre relations spatiales directionnelles de base entre deux régions floues. En examinant les degrés obtenus, on déduit clairement que la région B est située dans les deux directions RIGHT OF et ABOVE par rapport à la région A. Cet exemple ressemble à celui de la figure 2.5-a. En examinant les degrés obtenus, on remarque que le degré de possibilité de la relation RIGHT OF est supérieur à celui du cas non flou. Cela était prévisible car comme on n'est pas vraiment sûr que la partie supérieure appartienne à la région B(degré $\mu_B < 1$), cette relation devient la relation principale entre les deux régions A et B. En comparant les résultats obtenus avec des opérateurs d'intersection différents, on constate que l'intervalle [N, Π] obtenu

en utilisant le produit est inclus dans celui obtenu en utilisant le min car l'opérateur min est le plus optimiste de tous les opérateurs d'intersection floue.

2.5 Estimation de la distance qui sépare les deux régions

La distance est une information très importante. La distance qui sépare deux régions est définie à partir de la distance qui sépare les couples de points issus de ces deux régions.

2.5.1 Définition

Une distance (ou bien métrique) d est une fonction positive vérifiant les propriétés suivantes :

1. **Réflexivité :** $\forall a \in \mathcal{E}\ ,\ d(a,a) = 0$.

2. **Séparabilité :** $\forall (a,b) \in \mathcal{E}^2\ ,\ d(a,b) = 0 \Leftrightarrow a = b$.

3. **Symétrie :** $\forall (a,b) \in \mathcal{E}^2\ ,\ d(a,b) = d(b,a)$.

4. **Inégalité triangulaire :** $\forall (a,b,c) \in \mathcal{E}^3\ ,\ d(a,b) + d(b,c) \geq d(a,c)$.

2.5.2 Distance entre des régions nettes

En traitement d'images, les distances les plus utilisées dans le cas du traitement des régions nettes sont [ROSE-85, BLOC-99c] :

1. **Distance minimale :** elle représente la distance minimale qui sépare tous les couples de points des deux régions A et B :

$$d_1(A,B) = \min_{\substack{a \in A \\ b \in B}} d(a,b) \tag{2.26}$$

2. **Distance moyenne :** La distance moyenne entre deux régions nettes non vides A et B est définie par :

$$d_2(A,B) = \frac{1}{|A|\,|B|} \sum_{a \in A} \sum_{b \in B} d(a,b) \tag{2.27}$$

où $|X|$ représente la surface de la région X. Dans le cas continu, la somme est remplacée par une intégrale.

On retrouve aussi dans la littérature une autre définition de la distance moyenne :

$$d_3(A,B) = \frac{\sum\limits_{a\in A} \frac{d(a,B)}{|A|} + \sum\limits_{b\in B} \frac{d(b,A)}{|B|}}{2} \tag{2.28}$$

avec :

$$d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b) \tag{2.29}$$

$$d(b,A) = \inf_{a\in A} d(a,b) \tag{2.30}$$

3. **Distance de Hausdorff :** La distance de Hausdorff est définie par :

$$d_4(A,B) = \max\left[\max_{a\in A}\left(\min_{b\in B} d(a,b)\right), \max_{b\in B}\left(\min_{a\in A} d(b,a)\right)\right] \tag{2.31}$$

2.5.3 Distance entre des régions floues

Des extensions des définitions de distances entre régions nettes ont été définies pour le traitement des régions floues [ROSE-85, BOXE-97, CHAU-96, BLOC-99c] :

1. **Distance minimale :** La distance minimale entre deux régions floues a été représentée par un nombre flou appartenant à $\Re^+$:

$$d_1^f(A,B)(r) = \sup_{(a,b)\in\mathcal{E}^2, d(a,b)=r} [\min(\mu_A(a), \mu_B(b))] \tag{2.32}$$

2. **Distance moyenne :** La distance moyenne entre deux régions floues A et B est définie par :

$$d_2^f(A,B) = \frac{\sum_{a\in A}\sum_{b\in B} d(a,b)\min(\mu_A(a),\mu_B(b))}{\sum_{a\in A}\sum_{b\in B}\min(\mu_A(a),\mu_B(b))} \tag{2.33}$$

où $|X|$ représente la surface de la région X. Dans le cas continu, la somme est remplacée par une intégrale.

3. **Distance de Hausdorff :** La distance de Hausdorff entre deux régions floues est définie par :

$$d_2^f(A,B) = \inf\left\{\lambda,\ A\subset D^\lambda(B) \text{ et } B\subset D^\lambda(A)\right\} \tag{2.34}$$

où $D^\lambda(X)$ représente la dilatation floue [BLOC-95, BLOC-99c] de la région X par un disque de rayon λ centré à l'origine de l'élément structurant.

2.5.4 Évaluation à partir de l'histogramme angles-distances

Dans le cadre du traitement des régions nettes, on peut estimer les deux premières distances à partir de l'histogramme angles-distances :

1. **Distance minimale :** La distance minimale séparant deux régions nettes peut être obtenue directement à partir de l'histogramme angles-distances :

$$d_1(A,B) = \inf\left\{r \in \Re^+ / \ \exists\theta \in]-\pi,\pi] \ , \ \mathcal{H}_{AB}(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \neq 0\right\} \tag{2.35}$$

2. **Distance moyenne :** La première version de la distance moyenne d_2 séparant deux régions nettes peut être obtenue directement à partir de l'histogramme angles-distances par l'équation suivante :

$$d_2(A,B) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(x,y)d(O,P(x,y))dxdy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(x,y)dxdy} \tag{2.36}$$

Malheureusement, on ne peut pas déduire la distance de Hausdorff d_4 et la deuxième version de la distance moyenne d_3 entre deux régions directement à partir de l'histogramme angles-distances. Cela était prévisible car la distance de Hausdorff est définie à partir du max d'un min alors que l'histogramme angles-distances représente le cardinal de l'intersection (somme d'un min). Dans le cas de la distance moyenne d_3, la distinction entre les points de la régions A et ceux de la région B ne nous permet pas de déduire cette information uniquement à partir de l'histogramme angles-distances.

Dans le cas du traitement des régions floues, la distance moyenne est la seule information métrique qui peut être déduite directement à partir de l'histogramme angles-distances :

$$d_2^f(A,B) = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(x,y)d(O,P(x,y))dxdy}{\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(x,y)dxdy} \tag{2.37}$$

2.6 Inférence des relations spatiales

L'inférence des relations spatiales entre deux régions consiste à trouver une estimation $\mathcal{H}'_{AC}$ de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ représentant les relations spatiales entre deux régions A et C à partir des deux histogrammes angles-distances $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$. Ces deux histogrammes représentent les relations spatiales qui relient les deux régions A et C avec une autre région B.

Pour simplifier les explications, nous avons décomposé le problème en quatre cas :

1. Les deux régions A et C sont non floues et la région B se réduit à un seul point b.
2. Les deux régions A et C sont floues et la région B se réduit à un seul point $b(x_b, y_b)$.
3. La région B n'est pas floue et elle n'est plus réduite à un seul point.

4. Cas général.

Dans la suite, même si les régions traitées sont non floues on utilisera la notation $\mu_A(x,y)$ pour désigner la fonction d'appartenance d'un point $p(x,y)$ à la région A. Dans ce cas, la fonction d'appartenance μ_A prendra ses valeurs dans l'ensemble $\{0, 1\}$ au lieu de l'intervalle $[0, 1]$.

2.6.1 Premier cas : *les deux régions A et C sont non floues et la région B se réduit à un seul point b*

D'après la définition de l'histogramme angles-distances, $\mathcal{H}_{AC}(x,y)$ représente le cardinal de l'ensemble $\{\overrightarrow{ac} = (x,y)^t / (a,c) \in A \times C\}$. D'après la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{ac}$ peut s'exprimer en fonction du vecteur $\overrightarrow{ab}$ et du vecteur $\overrightarrow{bc}$:

$$\overrightarrow{ac}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \overrightarrow{ab}\begin{pmatrix}x_1\\y_1\end{pmatrix} + \overrightarrow{bc}\begin{pmatrix}x_2\\y_2\end{pmatrix} \tag{2.38}$$

avec :

$$\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ y = y_1 + y_2 \end{cases} \tag{2.39}$$

Dans ce cas, on peut déterminer l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ directement à partir des deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{AC}(x,y) &= \left| \left\{ (a,c) \ / \ \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} = (x,y) \right\} \right| \\ &= \left| \left\{ (a,c) \ / \ \overrightarrow{ab} = (u,v) \wedge \overrightarrow{bc} = (x-u, y-v) \right\} \right| \end{aligned}$$

En passant au cas continu on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{AC}(x,y) &= \int\int \mathcal{H}_{AB}(u,v)\, \mathcal{H}_{BC}(x-u, y-v)\, dudv \\ \mathcal{H}_{AC}(x,y) &= \mathcal{H}_{AB}(x,y) **\mathcal{H}_{BC}(x,y) \end{aligned} \tag{2.40}$$

Ce résultat était prévisible, car d'après la définition de l'histogramme angles-distances pour les régions nettes :

$$\mathcal{H}_{AB}(x,y) **\mathcal{H}_{BC}(x,y) = (\mu_A(-x,-y) **\mu_B(x,y)) ** (\mu_B(-x,-y) **\mu_C(x,y)) \tag{2.41}$$

$$= (\mu_A(-x,-y) **\mu_C(x,y)) ** (\mu_B(x,y) **\mu_B(-x,-y)) \tag{2.42}$$

$$= \mathcal{H}_{AC}(x,y) ** (\mu_B(x,y) **\mu_B(-x,-y)) \tag{2.43}$$

Comme la région B est réduite à un seul point, la fonction μ_B représente une fonction de Dirac qui est l'élément neutre pour l'opérateur de convolution, donc :

$$\mathcal{H}_{AC}(x,y) \;=\; \mathcal{H}_{AB}(x,y) **\mathcal{H}_{BC}(x,y) \tag{2.44}$$

2.6.2 Deuxième cas : *les deux régions A et C sont floues et la région B se réduit à un seul point $b(x_b, y_b)$*

Dans ce cas, la fonction d'appartenance associée à la région B se résume à un Dirac :

$$\mu_B(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } (x,y) = (x_b, y_b) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{2.45}$$

Les deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$ sont respectivement équivalents à une translation des deux fonctions d'appartenance μ_A et μ_C :

$$\mathcal{H}_{AB}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mu_A(u-x, v-y), \mu_B(u,v)\right] dudv \tag{2.46}$$

D'après les propriétés d'absorption des opérateurs d'intersection floue :

$$\mathcal{I}(x,1) \;=\; x \tag{2.47}$$
$$\mathcal{I}(x,0) \;=\; 0 \tag{2.48}$$

on simplifie l'équation 2.46 :

$$\mathcal{H}_{AB}(x,y) = \mu_A(x_b - x, y_b - y) \tag{2.49}$$

De même, l'histogramme $\mathcal{H}_{BC}$ est équivalent à $\mu_C(x + x_b, y + y_b)$:

$$\mathcal{H}_{BC}(x,y) \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mu_B(u-x, v-y), \mu_C(u,v)\right] dudv \tag{2.50}$$
$$\;=\; \mu_C(x + x_b, y + y_b) \tag{2.51}$$

D'après la définition, l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ est évalué à partir des fonctions d'appartenance des deux régions A et C :

$$\mathcal{H}_{AC} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mu_A(u-x, v-y), \mu_C(u,v)\right] dudv \tag{2.52}$$

Pour utiliser les deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$, on introduit les deux valeurs x_b et y_b en effectuant le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} u = U + x_b \\ v = V + y_b \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} U = u - x_b \\ V = v - y_b \end{cases} \tag{2.53}$$

L'intégrale de l'équation 2.52 devient :

$$\mathcal{H}_{AC} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mu_A(U+x_b-x, V+y_b-y), \mu_C(U+x_b, V+y_b)\right] dUdV \quad (2.54)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mu_A(x_b-(x-U), y_b-(y-V))), \mu_C(U+x_b, V+y_b)\right] dUdV \quad (2.55)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{I}\left[\mathcal{H}_{AB}(x-U, y-V), \mathcal{H}_{BC}(U,V)\right] dUdV \quad (2.56)$$

Dans le cas où l'opérateur d'intersection flou $\mathcal{I}$ est représenté par l'opérateur produit, on retrouve la convolution des deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$:

$$\mathcal{H}_{AC}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}_{AB}(x-U, y-V)\,\mathcal{H}_{BC}(U,V) dUdV \quad (2.57)$$

$$= \mathcal{H}_{AB}(x,y) **\mathcal{H}_{BC}(x,y) \quad (2.58)$$

Dans ce cas, le traitement des régions floues est similaire à celui des régions non floues.

Remarque :

Dans ces deux premiers cas, on peut déterminer l'histogramme $\mathcal{H}_{AC}$ directement à partir des deux autres histogrammes.

2.6.3 Troisième cas : *la région B n'est pas floue et elle n'est plus réduite à un seul point*

Dans ce cas, on ne peut pas déterminer exactement l'histogramme angles-distances. Comme on le verra dans la suite, le résultat obtenu sera une simple estimation $\mathcal{H}'_{AC}(x,y)$ de la valeur réelle de $\mathcal{H}_{AC}(x,y)$. D'après la définition de l'histogramme angles-distances, l'histogramme $\mathcal{H}_{AC}(x,y)$ est déterminé par :

$$\mathcal{H}_{AC}(x,y) = \left|\left\{(a,c) \in A \times C / \overrightarrow{ac} = (x,y)^t\right\}\right| \quad (2.59)$$

Soit (a,c) un couple de points de $A \times C$ correspondant au vecteur $\overrightarrow{ac} = (x,y)^t$. Si la région B n'est pas vide, ce vecteur peut être exprimé en utilisant les points de la région $b \in B$ en utilisant la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{ac}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \overrightarrow{ab}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} + \overrightarrow{bc}\begin{pmatrix}x-u\\y-u\end{pmatrix} \quad (2.60)$$

Sachant que $\mathcal{H}_{AB}(u,v)$ représente le nombre de couples (a,b) tels que $\overrightarrow{ab} = (u,v)$ et $\mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)$ représente le nombre de couples (b,c) tels que $\overrightarrow{bc} = (x-u,y-u)^t$, le nombre de vecteurs $\overrightarrow{ac}$ qui peuvent être décomposés en une somme de deux vecteurs $\overrightarrow{ab} = (u,v)^t$ et $\overrightarrow{bc}$ est borné par la valeur $\min[\mathcal{H}_{AB}(u,v), \mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)]$. En examinant uniquement la valeur de $\mathcal{H}_{AB}(u,v)$ et $\mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)$ rien ne nous permet d'affirmer que les points $b \in B$ qui sont à l'origine de la valeur de $\mathcal{H}_{AB}(u,v)$ correspondent à ceux qui sont à l'origine de la valeur de $\mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)$. Pour cela, l'histogramme $\mathcal{H}'_{AC}$ déduit sera une estimation de l'histogramme exact $\mathcal{H}_{AC}$:

$$\mathcal{H}'_{AC}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min[\mathcal{H}_{AB}(u,v), \mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)]\, dudv \tag{2.61}$$

En remplaçant le min par un produit en retrouve le produit de convolution utilisé dans le premier cas. Dans le cas où la région B est réduite à un seul point, les deux opérateurs sont équivalents car dans ce cas l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AB}(x,y)$ prend ses valeurs dans l'ensemble $\{0,1\}$. En comparant ce résultat avec celui du deuxième cas (Eq. 2.56), on remarque que l'opérateur d'intersection floue a été remplacé par un opérateur min. Cette modification est due au fait que les deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$ ne sont pas normalisés.

2.6.4 Quatrième cas : *Cas Général*

Dans ce cas général où toutes les régions sont floues, le calcul reste identique i.e. :

$$\mathcal{H}'_{AC}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \min[\mathcal{H}_{AB}(u,v), \mathcal{H}_{BC}(x-u,y-v)]\, dudv \tag{2.62}$$

En examinant les quatre cas, on remarque que la déduction de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ à partir des deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$ est complètement déterministe quand la région B est limitée à un seul point. Dans les autres cas, le résultat obtenu n'est qu'une simple estimation du résultat exact.

Proposition 1

Si la région B est normalisée (Noyau(B) $\neq \emptyset$) (paragraphe A.3.2), la valeur de $\mathcal{H}'_{AC}(x,y)$ est toujours supérieure ou égale à la valeur de $\mathcal{H}_{AC}(x,y)$.

$$Noyau(B) \neq \emptyset \Longrightarrow \forall (x,y) \in \Re^2,\ \mathcal{H}'_{AC}(x,y) \geq \mathcal{H}_{AC}(x,y) \tag{2.63}$$

Démonstration :

Les deux histogrammes $\mathcal{H}_{AC}(x,y)$ et $\mathcal{H}'_{AC}(x,y)$ sont définis par :

$$\mathcal{H}_{AC}(x,y) = \left| \left\{ (a,c) \in A \times C / \overrightarrow{ac} = (x,y)^t \right\} \right| \tag{2.64}$$

$$\mathcal{H}'_{AC}(x,y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \min \left[\mathcal{H}_{AB}(u,v), \mathcal{H}_{BC}(x-u, y-v) \right] dudv \tag{2.65}$$

Pour démontrer cette proposition, on considère deux points a et c appartenant respectivement aux deux régions A et C. Nous allons démontrer que le vecteur $\overrightarrow{ac} = (x,y)^t$ sera comptabilisé plusieurs fois dans la valeur estimée $\mathcal{H}'_{AC}$ alors qu'il représente un seul vecteur dans la valeur réelle $\mathcal{H}_{AC}$.

D'après la relation de Chasles, le vecteur $\overrightarrow{ac}$ peut s'exprimer en fonction des points b de la région B :

$$\forall b \in B \ , \ \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} \tag{2.66}$$

D'après la définition de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{XY}$, le poids associé à un vecteur $\overrightarrow{xy}$ lié au couple de points $(x,y) \in X \times Y$ est déterminé par :

$$\text{Poids}(\overrightarrow{xy}) = \mathcal{I} \left[\mu_X(x), \mu_Y(y) \right] \tag{2.67}$$

Si la région B est normalisée, alors :

$$\exists b \in B \text{ tel que : } \begin{cases} \overrightarrow{ac} = \overrightarrow{ab} + \overrightarrow{bc} \\ \text{Poids}(\overrightarrow{ab}) = \mu_A(a) \\ \text{Poids}(\overrightarrow{bc}) = \mu_C(c) \end{cases} \tag{2.68}$$

Cet ensemble de points représente le noyau de la région B. En utilisant la définition de l'histogramme estimé, le poids $\text{Poids}'_b(\overrightarrow{ac})$ associé au vecteur $\overrightarrow{ac}$ si on utilise le point b pour décomposer le vecteur $\overrightarrow{ac}$ est défini par :

$$\text{Poids}'_b(\overrightarrow{ac}) = \min \left[\text{Poids}(\overrightarrow{ab}), \text{Poids}(\overrightarrow{bc}) \right] \tag{2.69}$$

Si le point $b \in \text{Noyau}(B)$, on a :

$$\begin{aligned} \text{Poids}'_b(\overrightarrow{ac}) &= \min \left[\mu_A(a) \, , \, \mu_C(c) \right] && (2.70) \\ &\geq \mathcal{I} \left[\mu_A(a) \, , \, \mu_C(c) \right] && (2.71) \\ &\geq \text{Poids}(\overrightarrow{ac}) && (2.72) \end{aligned}$$

Car l'opérateur min est l'opérateur le plus optimiste de tous les opérateurs d'intersection floue.

Comme on utilise une intégrale pour tester l'ensemble des possibilités, le poids réel $\text{Poids}'(\overrightarrow{ac})$ associé à chaque vecteur $\overrightarrow{ac}$ dans l'évaluation de $\mathcal{H}'_{AC}$ sera supérieur à celui

utilisé pour déterminer $\mathcal{H}_{AC}$.

Cela est beaucoup plus facile à expliquer quand il s'agit de traiter des régions non floues. Prenons par exemple la figure 2.8, chaque vecteur $\overrightarrow{ac}$ sera comptabilisé $|B|$ fois, car le vecteur $\overrightarrow{ac}$ peut être décomposé en utilisant l'ensemble des points $b \in B$.

Du fait qu'on n'est pas sûr que les points b liés à la valeur de $\mathcal{H}_{AB}$ correspondent à ceux liés à la valeur de $\mathcal{H}_{BC}$, un ensemble de vecteurs $\overrightarrow{ac'}$ inexistants ($c' \notin C$) va être comptabilisé pour la détermination de $\mathcal{H}'_{AC}$. Prenons par exemple les deux vecteurs $\overrightarrow{ab_1}$ et $\overrightarrow{b_2c}$ de la figure 2.8, le point c' défini à partir de la combinaison de ces deux vecteurs n'appartient pas à la région C :

$$\overrightarrow{ab_1} + \overrightarrow{b_2c'} = \overrightarrow{ac'} \tag{2.73}$$

tous ces points inexistants vont renforcer cette surestimation.

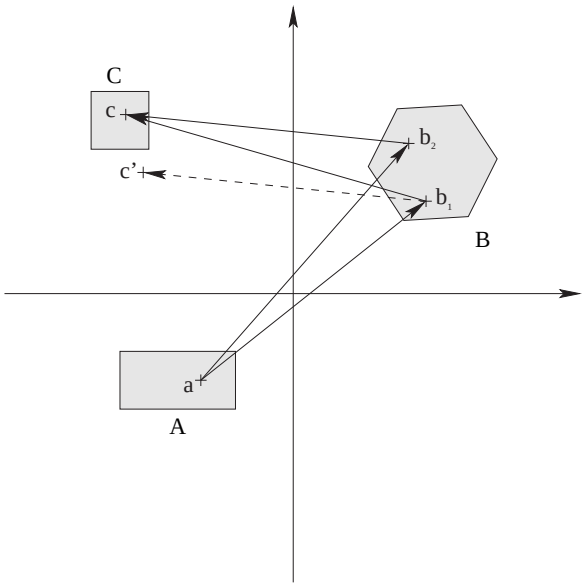


FIG. 2.8 – Estimation de l'histogramme Angles-Distances $\mathcal{H}_{AC}$ à partir des deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$: le couple de points (a, c') est comptabilisé par erreur ($c' \notin C$).

Ces deux problèmes seront d'autant plus importants que la surface de la région B sera importante. Il faudra choisir des régions de petite surface pour limiter ces erreurs. Dans la suite, si on dispose de la surface des régions, on pourra déterminer une meilleure estimation $\mathcal{H}''_{AC}(x,y)$ plus précise que $\mathcal{H}'_{AC}(x,y)$ en normalisant le résultat par la surface de B et en éliminant toutes les valeurs inférieures à cette surface :

$$\mathcal{H}''_{AC}(x,y) = \begin{cases} \frac{\mathcal{H}'_{AC}}{|B|} & \text{Si } \mathcal{H}'_{AC}(x,y) \geq |B| \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases} \tag{2.74}$$

Dans ce cas, on aura éliminé les dénombrements redondants du même vecteur ainsi que certains résidus.

Nous avons démontré que chaque vecteur $\overrightarrow{ac}$ issu de deux points a et c des deux régions A et C sera comptabilisé au moins une fois. Cela implique que $\mathcal{H}'_{AC}$ et $\mathcal{H}"_{AC}$ représentent une borne supérieure de l'histogramme réel $\mathcal{H}_{AC}$.

□

Proposition 2

Le support de l'ensemble flou $\mathcal{H}^n_{AC}$ (paragraphe A.3.1) est inclus dans le support de l'ensemble flou $\mathcal{H}'^n_{AC}$:

$$Support(\mathcal{H}^n_{AC}) \subseteq Support(\mathcal{H}'^n_{AC}) \tag{2.75}$$

Démonstration :

La démonstration de la deuxième proposition découle de la première proposition. Nous avons démontré que :

$$\forall (x,y) \in \Re^2,\ \mathcal{H}'_{AC}(x,y) \geq \mathcal{H}_{AC}(x,y) \tag{2.76}$$

Soit (x,y) un élément appartenant à l'ensemble $\text{Support}(\mathcal{H}^n_{AC})$:

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \text{Support}(\mathcal{H}^n_{AC}) &\Rightarrow \mathcal{H}^n_{AC}(x,y) > 0 && (2.77)\\
&\Rightarrow \frac{\mathcal{H}_{AC}(x,y)}{\max\limits_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{H}_{AC}(x,y)} > 0 && (2.78)
\end{aligned}$$

L'histogramme angles-distances est une fonction positive, donc :

$$\frac{\mathcal{H}_{AC}(x,y)}{\max\limits_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{H}_{AC}(x,y)} > 0 \Rightarrow \mathcal{H}_{AC}(x,y) > 0 \tag{2.79}$$

En utilisant la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \text{Support}(\mathcal{H}^n_{AC}) &\Rightarrow \mathcal{H}'_{AC}(x,y) \geq \mathcal{H}_{AC}(x,y) > 0 && (2.80)\\
&\Rightarrow \frac{\mathcal{H}'_{AC}(x,y)}{\max\limits_{(x,y)\in\Re^2} \mathcal{H}'_{AC}(x,y)} > 0 && (2.81)\\
&\Rightarrow \mathcal{H}'^n_{AC}(x,y) > 0 && (2.82)\\
&\Rightarrow (x,y) \in \text{Support}(\mathcal{H}'^n_{AC}) && (2.83)
\end{aligned}$$

□

2.6.5 Application

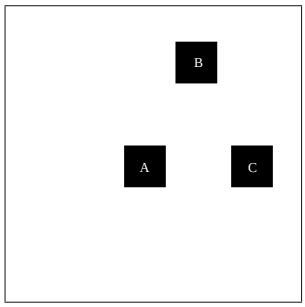
Nous avons appliqué la méthode d'inférence sur un ensemble d'images de tests en faisant varier la forme et la taille de la région B. Les erreurs dues à des vecteurs $\overrightarrow{ac}$ inexistants apparaissent clairement dans l'évaluation de la relation BELOW de la figure 2.9-b. En effet, la relation BELOW n'est pas vérifiée pour les deux régions A et C, mais l'évaluation de cette relation à partir de l'histogramme angles-distances estimé engendre un degré non nul ($\mathrm{N}' = 0$, $\mathrm{M}' = 0.02$, $\Pi' = 0.217$). Pour montrer l'influence de la surface de la région B sur les erreurs d'estimations, nous avons traité sur la figure 2.9-d le même exemple que celui de la figure 2.9-a en augmentant la surface de la région B. On constate clairement que la différence entre les degrés estimés et les degrés corrects dépend de la surface de la région B. Dans le cas où l'on dispose de plusieurs possibilités pour la déduction de l'histogramme $\mathcal{H}'_{AC}$, la meilleure estimation sera donnée par la région la plus petite. Ce critère prend toute son importance si on dispose, en plus des histogrammes angles-distances, de la surface des régions. Dans le cas contraire, on peut fusionner toutes les estimations possibles de l'histogramme $\mathcal{H}_{AC}$ pour obtenir un meilleur résultat.

Sur la figure 2.10, nous avons représenté deux exemples où les relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et B et les deux régions B et C sont identiques. La seule différence réside dans la distance entre les régions B et C qui est plus importante dans le deuxième cas (Fig. 2.10). En examinant les degrés obtenus, on remarque que les résultats estimés sont proches des résultats réels et les erreurs d'estimation ne sont pas différents des cas précédents. Cette remarque nous permet d'affirmer que l'information de distance entre les deux régions est bien représentée, et nous permet d'obtenir des estimations proches des valeurs exactes.

2.7 Conclusion

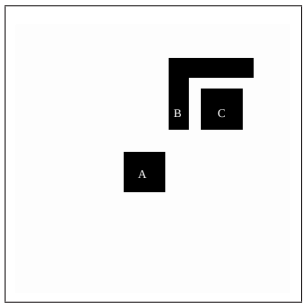
Dans ce chapitre, nous avons proposé un nouveau modèle pour la représentation des relations spatiales qui a l'avantage de pouvoir représenter en même temps l'information angulaire nécessaire à l'évaluation des relations spatiales directionnelles et l'information métrique indispensable pour faire de l'inférence des relations spatiales. L'histogramme angles-distances vérifie, en plus des propriétés vérifiées par les modèles existants, d'autres propriétés liées à la représentation de l'information de distance entre les deux régions. Nous avons défini, à partir de ce modèle, une méthode pour déduire une estimation des relations spatiales entre deux régions connaissant celles qui les relient à une autre région.

Pour construire l'histogramme angles-distances, il faut avoir une connaissance complète sur la forme et la distance qui sépare les deux régions. Malheureusement, cette information métrique est souvent indisponible ou impossible à déterminer. Pour cela, nous nous sommes orientés vers d'autres approches utilisant uniquement l'information angulaire. De plus, la taille mémoire occupée par l'histogramme angles-distances



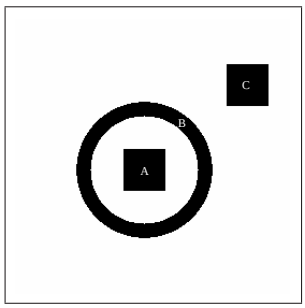
	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0.804	1	0.917	0.752	1	0.868
ABOVE	0	0.197	0.042	0	0.248	0.066
LEFT OF	0	0	0	0	0	0
BELOW	0	0.197	0.042	0	0.248	0.066

(a)



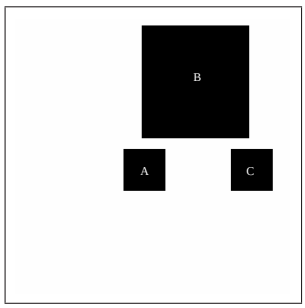
	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0.459	0.638	0.558	0.420	0.662	0.538
ABOVE	0.362	0.541	0.442	0.338	0.579	0.443
LEFT OF	0	0	0	0	0	0
BELOW	0	0	0	0	0.124	0.010

(b)



	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0.485	0.624	0.562	0.431	0.661	0.531
ABOVE	0.376	0.516	0.438	0.339	0.569	0.438
LEFT OF	0	0	0	0	0.176	0.010
BELOW	0	0	0	0	0.217	0.020

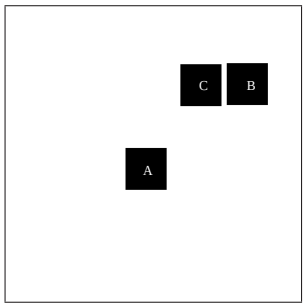
(c)



	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0.804	1	0.917	0.607	1	0.733
ABOVE	0	0.197	0.042	0	0.393	0.132
LEFT OF	0	0	0	0	0.093	0.003
BELOW	0	0.197	0.042	0	0.393	0.132

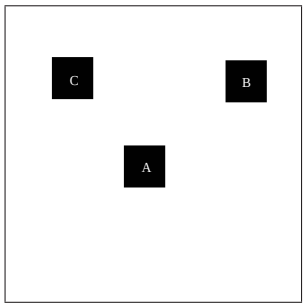
(d)

FIG. 2.9 – Comparaison entre les degrés évalués à partir de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ et ceux évalués à partir de l'histogramme estimé $\mathcal{H}'_{AC}$ pour les quatre relations spatiales directionnelles de base.



	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0.305	0.486	0.374	0.292	0.519	0.375
ABOVE	0.514	0.695	0.629	0.480	0.708	0.624
LEFT OF	0	0	0	0	0.058	0.001
BELOW	0	0	0	0	0	0

(a)



	$\mathcal{H}_{AC}$			$\mathcal{H}'_{AC}$		
	N	Π	M	N′	Π′	M′
RIGHT OF	0	0	0	0	0.011	0.000
ABOVE	0.470	0.631	0.559	0.444	0.648	0.559
LEFT OF	0.369	0.530	0.441	0.351	0.556	0.441
BELOW	0	0	0	0	0	0

(b)

FIG. 2.10 – Comparaison entre les degrés évalués à partir de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ et ceux évalués à partir de l'histogramme estimé $\mathcal{H}'_{AC}$ pour les quatre relations spatiales directionnelles de base dans le cas où l'information de distance est importante.

(fonction bidimensionnelle) nous a poussés à voir des approches utilisant moins de ressources.

Chapitre 3

Un réseau d'agrégation floue pour l'inférence des relations spatiales directionnelles

Nous avons vu dans le chapitre précédent que l'information métrique (distance qui sépare les objets) est capitale pour pouvoir déduire de nouvelles informations à partir des connaissances antérieures. Seulement dans quelques cas, cette information n'est pas disponible ou ne peut pas être déterminée. Dans ces cas, on est amené à déduire de nouvelles relations en utilisant uniquement l'information angulaire ou les degrés d'estimation des différentes relations spatiales. c'est ce type de problèmes que nous abordons dans ce chapitre.

L'être humain est capable de déduire plusieurs informations concernant sa position spatiale uniquement à partir de sa position relative par rapport à certains repères. Cela nous a encouragés à étudier la possibilité de l'inférence des quatre principales relations spatiales directionnelles entre deux régions A et C directement à partir de la connaissance de ces relations entre les deux régions A et B et celles entre les deux régions B et C.

Une grande majorité des problèmes d'inférence ou de décision est résolue en utilisant un ensemble de règles d'inférence [PEDE-89, DURK-94, BOUC-95] énumérées par un expert ou générées par une méthode d'apprentissage. Ces approches sont fréquemment utilisées pour la résolution des problèmes d'automatique [JOUF-97, LACR-97], de diagnostic, d'interprétation de scènes [MCKE-85], etc.

Dans le but de faire de l'inférence des relations spatiales directionnelles, nous avons utilisé un réseau d'agrégation multi-couches [ZIMM-83, KRIS-92a, KRIS-92b] pour déduire les relations spatiales entre les deux régions A et C. Les différents nœuds du réseau utilisent des opérateurs d'agrégation floue pour déterminer la relation entre les degrés des relations spatiales entre les deux régions A et C et ceux entre les deux régions A et B et les deux régions B et C. L'utilisation des opérateurs de la logique floue nous permet d'interpréter le résultat obtenu sous forme d'un ensemble de règles d'inférence.

Comme les réseaux de neurones, ces approches ont l'inconvénient d'être lentes à l'étape d'apprentissage, mais une fois cette étape franchie, le temps nécessaire pour déterminer le résultat est très réduit.

Nous allons commencer par une présentation des opérateurs d'agrégation floue utilisés par notre réseau d'agrégation floue (section 3.1). La définition du réseau d'agrégation floue est donnée dans la section 3.2. Pour construire notre réseau d'agrégation floue, nous avons utilisé deux approches différentes. La première repose sur l'algorithme de descente du gradient (section 3.3) et la deuxième sur des algorithmes évolutifs fondés sur les algorithmes d'estimation de distribution (section 3.4). Nous avons proposé une approche pour déterminer le réseau d'agrégation dans le cas où on n'a aucune information sur sa structure (section 3.5). Les résultats obtenus dans le cas de l'inférence des relations spatiales directionnelles sont présentés dans la section 3.6.

3.1 Opérateurs d'agrégation floue

La théorie des sous-ensembles flous [ZADE-65] comporte une extension de l'ensemble des opérateurs de la logique classique [DUBO-85a], afin de pouvoir manipuler des données floues [BLOC-96b, DUBO-85a, YAGE-91]. Ces opérateurs sont utilisés pour modéliser les opérateurs logiques et les opérateurs de la théorie des ensembles. Ils sont largement utilisés dans le domaine de la fusion de données.

Vue la diversité de ces opérateurs flous, nous nous sommes restreints à l'étude des trois opérateurs utilisés par notre réseau d'agrégation : l'union (ou logique), l'intersection (et logique) et la moyenne.

3.1.1 Union

A partir des données(paramètres), l'opérateur union produit un résultat élevé si au moins une des valeurs d'entrées est élevée, il représente l'opérateur or de la logique classique. Il est défini comme une t-conorme $\mathcal{U} : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ vérifiant l'ensemble des conditions suivantes [YAGE-91, GUPT-91] :

1. **Commutativité :** $\forall (a,b) \in [0,1]^2$, $\mathcal{U}(a,b) = \mathcal{U}(b,a)$.

2. **Associativité :** $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3$, $\mathcal{U}(\mathcal{U}(a,b),c) = \mathcal{U}(a,\mathcal{U}(b,c))$.

3. **Croissance :** $\forall (a,b,c,d) \in [0,1]^4$, $a \leq c$ et $b \leq d \Rightarrow \mathcal{U}(a,b) \leq \mathcal{U}(c,d)$.

4. **Élément neutre :** 0 est un élément neutre : $\forall a \in [0,1]$, $\mathcal{U}(a,0) = a$.

En utilisant les deux dernières propriétés, on peut démontrer que 1 est un élément absorbant pour l'opérateur union :

$$\forall a \in [0,1]\ ,\ \mathcal{U}(a,1) = 1 \tag{3.1}$$

L'opérateur union le plus utilisé en théorie de la logique floue est l'opérateur max. Cet opérateur permet de retourner le maximum de ses arguments, cela implique que le résultat est toujours borné par la valeur des arguments. Dans notre cas, cela n'est pas suffisant car on a des exemples où la relation RIGHT OF entre les deux régions A et C est complètement vérifiée ($\text{RIGHT}(A,C) = 1$) alors que les degrés de cette relation entre les deux régions A et B et les deux régions B et C sont inférieurs à 1. Pour remédier à ce problème, il faut utiliser un opérateur plus optimiste que l'opérateur max. Nous avons utilisé pour cela l'opérateur union de Yager [YAGE-80, YAGE-94] qui dépend d'un paramètre p. En modifiant la valeur de ce paramètre, on peut agir sur les résultats de cet opérateur et ainsi l'adapter à notre cas :

$$\mathcal{U}_p(x_1, x_2, ..., x_n) = \min\left[1, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^p\right)^{(1/p)}\right] \text{ avec } p \geq 0 \tag{3.2}$$

La t-conorme $\mathcal{U}_p$ est une fonction décroissante par rapport au paramètre p, celui-ci permet d'ajuster le degré optimiste de la t-conorme :

- L'opérateur $\mathcal{U}_p$ tend vers l'opérateur max (l'opérateur le plus pessimiste) quand p tend vers l'infini ($+\infty$).

$$\mathcal{U}_{+\infty} \equiv \max \tag{3.3}$$

- Si $p \to 0$, on obtient la t-conorme la plus optimiste possible (la sortie est toujours égale à 1).
- La t-conorme de Lukasiewicz [DUBO-85a] correspond à $\mathcal{U}_1$.

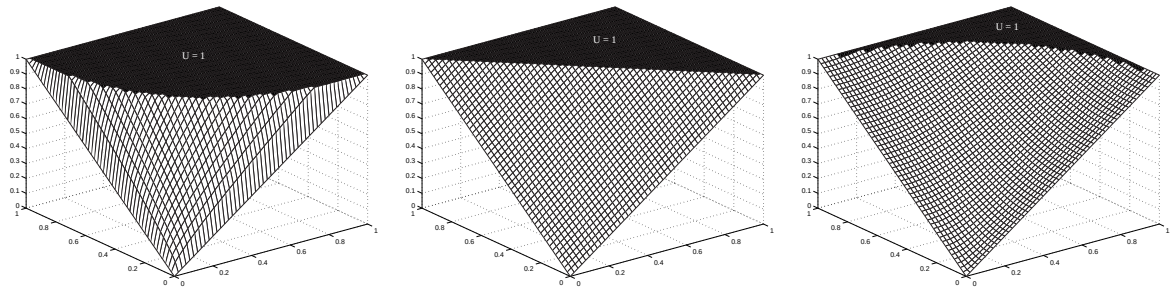
En examinant la figure 3.1, on constate bien que la valeur de p permet d'ajuster le comportement de la t-conorme. Plus la valeur de p est importante, plus le domaine où $\mathcal{U}_p = 1$ sera restreint.

3.1.2 Intersection

L'opérateur d'intersection est utilisé dans le cas où le résultat est élevé si toutes les valeurs d'entrées sont élevées, il représente l'opérateur and de la logique classique. Il est défini comme une t-norme $\mathcal{I} : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ vérifiant l'ensemble des propriétés suivantes [YAGE-91, GUPT-91] :

1. **Commutativité :** $\forall (a,b) \in [0,1]^2\ ,\ \mathcal{I}(a,b) = \mathcal{I}(b,a)$.

2. **Associativité :** $\forall (a,b,c) \in [0,1]^3\ ,\ \mathcal{I}(\mathcal{I}(a,b),c) = \mathcal{I}(a,\mathcal{I}(b,c))$.



(a) $\mathcal{U}_{0.5}$. (b) $\mathcal{U}_1$: T-Conorme de Lukasiewicz. (c) $\mathcal{U}_2$.

FIG. 3.1 – Comportement de la t-conorme de Yager en fonction de p.

3. **Croissance :** $\forall (a,b,c,d) \in [0,1]^4$, $a \leq c$ et $b \leq d \Rightarrow \mathcal{I}(a,b) \leq \mathcal{I}(c,d)$.

4. **Élément neutre :** 1 est un élément neutre : $\forall a \in [0,1]$, $\mathcal{I}(a,1) = a$.

En utilisant les deux dernières propriétés, on peut démontrer que 0 est un élément absorbant pour l'opérateur intersection :

$$\forall a \in [0,1] \ , \ \mathcal{I}(a,0) = 0 \tag{3.4}$$

L'opérateur min est une t-norme floue. Il vérifie l'ensemble de ces conditions. Celui-ci retourne la valeur minimale de tous ses arguments, ce qui implique que le résultat ne peut pas être inférieur au minimum des entrées. Pour cette raison, nous avons choisi la t-norme de Yager [YAGE-80, YAGE-94] qui dépend aussi d'un paramètre p :

$$\mathcal{I}_p(x_1, x_2, ..., x_n) = 1 - \min \left[1, \left(\sum_{i=0}^{n} (1 - x_i)^p \right)^{(1/p)} \right] \text{ avec } p \geq 0 \tag{3.5}$$

L'opérateur $\mathcal{I}_p$ est une fonction croissante par rapport au paramètre p, celui-ci permet d'ajuster le degré pessimiste de la t-norme $\mathcal{I}_p$:

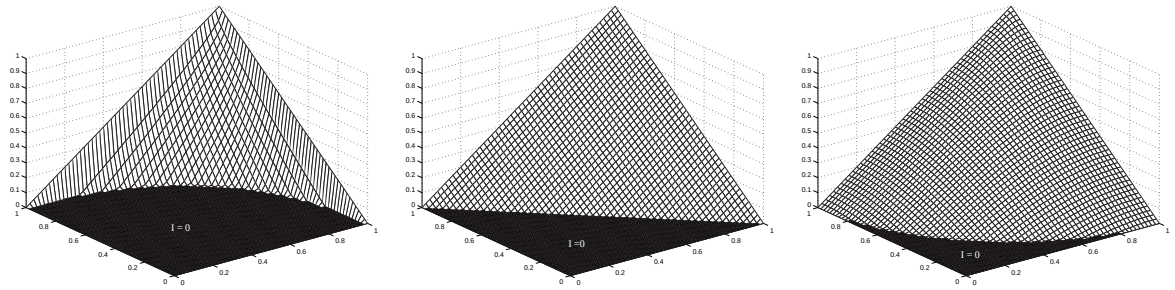
– L'opérateur $\mathcal{I}_p$ tend vers l'opérateur min (l'opérateur le plus optimiste) quand p tend vers l'infini ($+\infty$).

$$\mathcal{I}_{+\infty} \equiv \min \tag{3.6}$$

– Si $p \to 0$, on obtient la t-norme la plus pessimiste possible (la sortie est toujours égale à 0).

– La t-norme de Lukasiewicz [DUBO-85a] correspond à $\mathcal{I}_1$.

En examinant la figure 3.2, on constate que la valeur de p permet d'ajuster le comportement de la t-norme $\mathcal{I}_p$. La taille du domaine où $\mathcal{I}_p = 0$ est décroissante par rapport à la valeur de p.



(a) $\mathcal{I}_{0.5}$. (b) $\mathcal{I}_1$: T-norme de Lukasiewicz. (c) $\mathcal{I}_2$.

FIG. 3.2 – Comportement de la t-norme de Yager en fonction de p.

Remarque

Toutes les t-normes et t-conormes définies dans la théorie des sous ensembles flous se comportent comme les t-normes et t-conormes de Yager (Tab. 3.1). Le résultat obtenu est toujours supérieur à 0 et inférieur à la valeur minimale des arguments pour l'opérateur d'intersection (t-norme). Pour l'opérateur union (t-conorme), le résultat est inférieur à 1 et supérieur à la valeur maximale des arguments. Il est impossible d'obtenir un résultat entre la valeur minimale et la valeur maximale des paramètres d'entrés en utilisant uniquement ces deux opérateurs. Un résultat compris entre le minimum et le maximum des paramètres est important quand il s'agit de déterminer le degré d'un critère qui représente un compromis entre plusieurs paramètres. Un opérateur qui vérifie cette propriété est l'opérateur de moyenne.

p	0		$+\infty$
$\mathcal{I}_p$	0	$0 \leq \mathcal{I}_p \leq \min$	min
$\mathcal{U}_p$	1	$1 \geq \mathcal{U}_p \geq \max$	max

TAB. 3.1 – Comportement des t-normes et t-conormes de Yager en fonction p.

3.1.3 Moyenne

Un opérateur de moyenne est utilisé pour obtenir des résultats bornés par la valeur minimale et la valeur maximale des paramètres d'entrée. Il est défini comme une fonction $\mathcal{M}$ vérifiant les propriétés suivantes :

1. **L'homogénéité :**

$$\exists k \in \Re\ ,\ \forall x_i \in \Re\ ,\ \forall t \in \Re\ ,\ \mathcal{M}(t\,x_1, t\,x_2, ..., t\,x_n) = t^k \mathcal{M}(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.7}$$

2. **Borne supérieure et borne inférieure :**

$$\forall x_i \in \Re\ ,\ \min(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \mathcal{M}(x_1, x_2, ..., x_n) \leq \max(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{3.8}$$

La moyenne arithmétique vérifie les deux propriétés précédentes. C'est l'opérateur de moyenne le plus utilisé :

$$\mathcal{M}_{arith}(x_1, x_2, ..., x_n) = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{3.9}$$

Afin de pouvoir adapter l'opérateur en fonction des résultats souhaités, nous avons utilisé l'opérateur de moyenne généralisée utilisé par Dyckhoff et Pedrycz [DYCK-84, YAGE-88] :

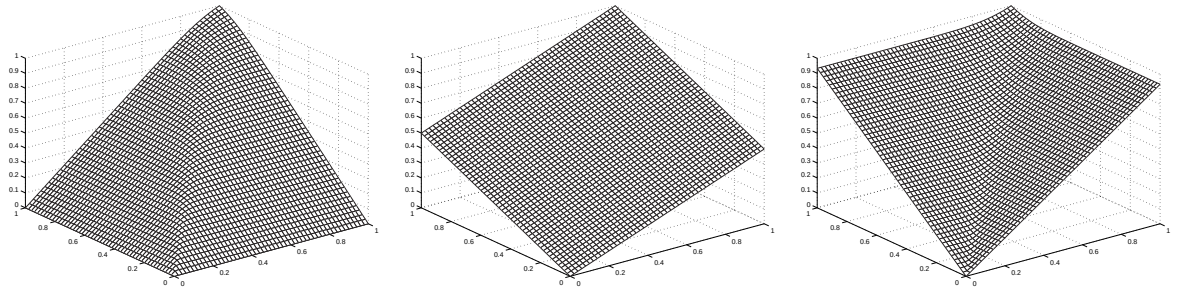
$$\mathcal{M}_{p,w_{1..n}}(x_1, ..., x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i x_i^p \right)^{1/p} \quad (p \in \Re) \tag{3.10}$$

avec :

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1 \text{ et } w_i \geq 0 \tag{3.11}$$

En remplaçant p par 1 et les w_i par $\frac{1}{n}$, on obtient la moyenne arithmétique. L'opérateur de moyenne généralisée est une fonction croissante par rapport à p [DYCK-84] et on peut obtenir l'ensemble des valeurs comprises entre le min et le max des arguments en faisant varier la valeur de p :

- Quand p tend vers $-\infty$, l'opérateur de moyenne généralisée est équivalent à l'opérateur min(Fig. 3.3-a),
- Quand p tend vers $+\infty$, l'opérateur de moyenne généralisée est équivalent à l'opérateur max (Fig. 3.3-c),
- Quand p tend vers 0, l'opérateur de moyenne généralisée tend vers la moyenne géométrique,
- On obtient la moyenne harmonique pour $p = -1$.



(a) $\mathcal{M}_{-10,.5,.5}$ (b) $\mathcal{M}_{1,.5,.5}$ (c) $\mathcal{M}_{10,.5,.5}$

FIG. 3.3 – Comportement de l'opérateur de moyenne généralisée en fonction de p.

3.2 Réseau d'agrégation multi-couches

Une des façons d'associer des mesures consiste à utiliser des réseaux de neurones. Ces méthodes [HAYK-99, SARZ-95] ne présupposent pas des relations fixées entre les mesures, mais elles s'appuient sur une base d'exemples déjà associés par d'autres techniques qui sert d'ensemble d'apprentissage pour déterminer les règles d'associations. Cette formulation est proche de notre problème car le résultat souhaité peut être déterminé par un calcul direct des relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et C. Il suffit donc de déterminer les différentes règles d'associations.

Un réseau d'agrégation multi-couches [ZIMM-83, KRIS-92a] représente un ensemble de nœuds organisé en couches à la manière d'un réseau de neurones multi-couches. Chaque nœud possède un ensemble de paramètres d'entrée provenant de la couche inférieure, ou bien des paramètres d'entrée du réseau pour la première couche. Les résultats du réseau sont donnés par les nœuds de la dernière couche. Les différents nœuds du réseau utilisent les opérateurs d'agrégation floue définis dans le paragraphe précédent, cela nous permet d'associer à chaque nœud un opérateur logique et ainsi d'interpréter le réseau d'agrégation comme un ensemble de règles. Un algorithme itératif est utilisé pour déterminer les différents paramètres pour chaque nœud (le type et les paramètres de l'opérateur utilisé). Ce principe a été utilisé par Krishnapuram et Lee [KRIS-92a] dans le but de construire des réseaux de fusion de données [KRIS-92b, KELL-93], des réseaux d'aide à la décision [KRIS-92a] ou la génération automatique de règles d'inférence floues [RHEE-93, KRIS-93b, RHEE-94]. Nous avons apporté une modification de l'algorithme d'apprentissage donné par Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b] pour assurer la convergence de l'étape d'apprentissage.

3.2.1 Définition

Afin de pouvoir adapter les trois opérateurs d'agrégation floue à notre cas, nous avons utilisé deux opérateurs $\mathcal{U}'_p$ et $\mathcal{I}'_p$ définis à partir des opérateurs de Yager [YAGE-80] :

$$\mathcal{I}'_p(x_1,...,x_n) = \mathcal{I}_{-1/p}(x_1,...,x_n) \text{ avec } (p<0) \quad (3.12)$$

$$= 1 - \min\left[1, \left(\sum_{i=0}^{n}(1-x_i)^{(-1/p)}\right)^{(-p)}\right] \text{ avec } (p<0) \quad (3.13)$$

$$\mathcal{U}'_p(x_1,...,x_n) = \mathcal{U}_{1/p}(x_1,...,x_n) \text{ avec } (p>0) \quad (3.14)$$

$$= \min\left[1, \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^{(1/p)}\right)^{p}\right] \text{ avec } (p>0) \quad (3.15)$$

Ces deux opérateurs sont directement issus des opérateurs de Yager [YAGE-80], la différence réside dont leur variation en fonction de p. Nos deux opérateurs sont croissants en fonction de p (Tab. 3.2) :

1. L'opérateur $\mathcal{I}'_p$ tend vers l'opérateur min quand p tend vers 0.

2. L'opérateur $\mathcal{I}'_p$ tend vers 0 quand p tend vers $-\infty$.

3. L'opérateur $\mathcal{U}'_p$ tend vers l'opérateur max quand p tend vers 0.

4. L'opérateur $\mathcal{U}'_p$ tend vers 1 quand p tend vers $+\infty$.

p	$-\infty$		0^-	0^+		$+\infty$
$\mathcal{I}'_p$	0	$0 \leq \mathcal{I}'_p \leq \min$	min	indéfini		
$\mathcal{U}'_p$	indéfini			max	$\max \leq \mathcal{U}'_p \leq 1$	1
$\mathcal{M}_p$	min	$\min \leq \mathcal{M}_p \leq \max$				max

TAB. 3.2 – Comportement de $\mathcal{I}'_p$, $\mathcal{U}'_p$ et $\mathcal{M}_p$ en fonction p.

L'utilisation de ces deux opérateurs nous a permis d'assurer la convergence de l'algorithme d'apprentissage dans les cas extrêmes (paragraphe 3.3.1).

3.2.2 Apprentissage

L'étape d'apprentissage a pour but d'associer à chaque nœud du réseau d'agrégation un opérateur d'agrégation floue. Cet opérateur permet de définir l'opération logique réalisée par ce nœud. Il faut aussi déterminer les paramètres pour chaque opérateur (p pour l'union et l'intersection, $(p, \{w_i\})$ pour la moyenne). Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b] avaient utilisé les trois opérateurs $\mathcal{I}_{(-p)}$, $\mathcal{M}_{p,w_{1..n}}$ et $\mathcal{U}_p$. Nous verrons dans la suite que l'algorithme d'apprentissage ne converge pas pour certaines données utilisées pour l'étape d'apprentissage.

Afin d'améliorer l'étape d'apprentissage, nous avons utilisé les trois opérateurs $\mathcal{I}'_p = \mathcal{I}_{(-1/p)}$, $\mathcal{M}_{p,w_{1..n}}$ et $\mathcal{U}'_p = \mathcal{U}_{(1/p)}$. Soit $D = \{((x_{1i}, x_{2i}, ..., x_{ni}), y_i)\ ,\ i = 1..N\}$ un ensemble d'apprentissage décrivant les entrées x_{ki} d'un nœud et les résultats y_i souhaités. Le problème consiste à déterminer le type du meilleur opérateur ainsi que ses paramètres afin que le résultat de l'agrégation soit le plus proche possible des résultats souhaités. Cela revient généralement à minimiser l'erreur moyenne E définie par :

$$E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (O_{p,w_{1..n}}(x_{1i}, ..., x_{ni}) - y_i)^2 \tag{3.16}$$

où O représente le type de l'opérateur.

Pour résoudre ce problème, nous avons appliqué deux méthodes de minimisation, la première approche est fondée sur l'algorithme de descente du gradient [DUDA-01] et l'algorithme de rétropropagation du gradient [HAYK-99]. L'autre approche est un algorithme évolutif fondé sur des méthodes d'estimation de distributions statistiques [CAST-97, LARR-01].

3.3 Descente du gradient

Supposons que le type de l'opérateur soit déjà déterminé. Prenons par exemple le cas de l'opérateur de moyenne généralisé $\mathcal{M}_{p,w_{1..n}}$. L'algorithme de descente du gradient est un algorithme itératif, qui calcule à chaque itération l une nouvelle valeur de $(p^{(l)}, w^{(l)}_{1..n})$ en fonction de $(p^{(l-1)}, w^{(l-1)}_{1..n})$:

$$p^{(l)} = p^{(l-1)} - \mu \frac{\partial E}{\partial p} \tag{3.17}$$

$$w_i^{(l)} = w_i^{(l-1)} - \mu' \frac{\partial E}{\partial w_i} \tag{3.18}$$

où μ et μ' sont des constantes positives représentant le taux d'apprentissage.

Le choix du type de l'opérateur dépend de la valeur de p à l'itération l. On définit deux bornes $P_{inter} < 0$ et $P_{union} > 0$ telles que :

- Si $(p > P_{union})$, l'opérateur O est remplacé par l'opérateur union $\mathcal{U}'_p$.
- Si $(p < P_{inter})$, l'opérateur O est remplacé par l'opérateur intersection $\mathcal{I}'_p$.
- Sinon on continue à utiliser l'opérateur moyenne $\mathcal{M}_{p,w_{1..n}}$.

Tous les opérateurs sont initialisés avec l'opérateur moyenne. L'étape d'apprentissage consiste à modifier la valeur de p en fonction des données D pour atteindre un minimum de E. Soit P_l la suite des paramètres p obtenus à chaque itération l pour un nœud O_i du réseau. Si le nœud doit représenter un opérateur *ou logique*, la valeur de y_i (données d'apprentissage) est supérieure ou égale au $\max(x_{1i}, ...x_{ni})$ pour l'ensemble des

exemples d'apprentissage. D'après le comportement de l'opérateur moyenne, la suite P_l sera une suite croissante entre p_0 et $p_t > P_{union}$ ($p_{(t-1)} < P_{union}$). Durant toutes ces itérations l'opérateur utilisé est l'opérateur moyenne. À partir de cette itération, l'opérateur moyenne va être remplacé par l'opérateur union généralisée $\mathcal{U}'_p$ dont le résultat est supérieur ou égal aux paramètres d'entrée. Cet opérateur est équivalent à 1 quand p tend vers $+\infty$ et à l'opérateur max quand p tend vers 0 (Tab. 3.2). L'opérateur $\mathcal{U}'_p$ est croissant en fonction de la valeur de p. Si la valeur de y_i est plus proche de 1 que du $\max(x_{1i}, ...x_{ni})$, la valeur de p va continuer à croître jusqu'à l'obtention d'une valeur optimale. Dans le cas contraire, si la valeur de y_i est plus proche du max, la valeur de p va se stabiliser.

Dans le cas inverse, si le nœud doit représenter un opérateur *et logique*, la suite P_l sera une suite décroissante entre p_0 et $p_t < P_{inter}$ ($p_{(t-1)} > P_{inter}$). À cette itération, l'opérateur intersection $\mathcal{I}'_p$ sera utilisé à la place de la moyenne pour calculer le résultat à partir des paramètres d'entrée. D'après le comportement de l'opérateur $\mathcal{I}'_p$ (Tab. 3.2), si la valeur de y_i est plus proche de 0 que du $\min(x_{1i}, ...x_{ni})$, la valeur de p va continuer à décroître jusqu'à l'obtention d'une valeur optimale.

p	$-\infty$		0^-	0^+		$+\infty$
$\mathcal{I}_{-p}$	min	$0 \leq \mathcal{I}_{-p} \leq \min$	0	indéfini		
$\mathcal{U}_p$	indéfini			1	$\max \leq \mathcal{U}_p \leq 1$	max
$\mathcal{M}_p$	min	$\min \leq \mathcal{M}_p \leq \max$				max

TAB. 3.3 – Comportement des opérateurs $\mathcal{I}_{-p}$, $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{M}_p$ utilisés par Krishnapuram et Lee [KRIS-92a] en fonction de p.

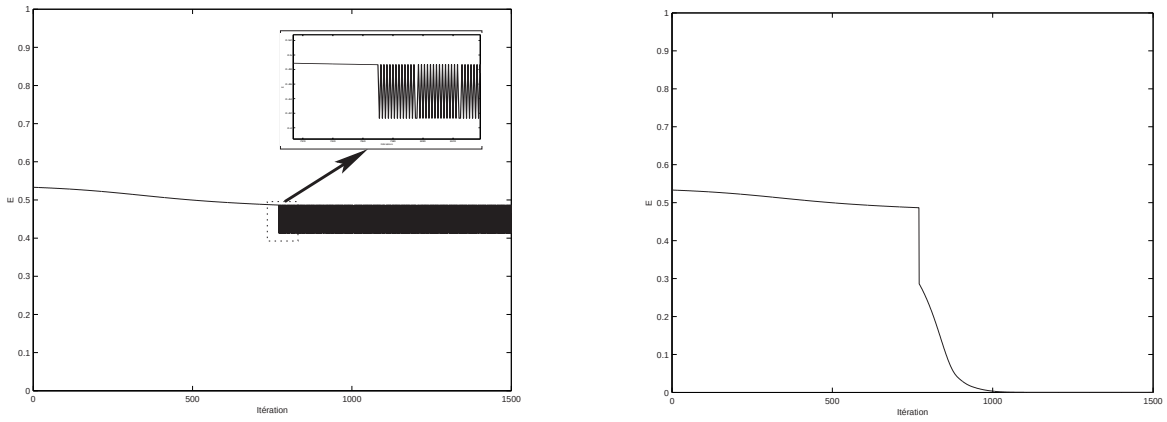
Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b] ont utilisé les opérateurs $\mathcal{U}_p$ et $\mathcal{I}_{-p}$ à la place des opérateurs $\mathcal{U}'_p$ et $\mathcal{I}'_p$, cette différence engendre une divergence de l'algorithme dans le cas où la valeur des résultats souhaités est plus proche de 1 ou 0. Prenant par exemple le cas où le nœud doit représenter un opérateur *ou logique*, la suite P_l sera une suite croissante entre la valeur initiale de p (p_0) et $p_t > P_{union}$ ($p_{(t-1)} < P_{union}$). À cette itération, l'opérateur moyenne va être remplacé par l'opérateur union de Yager $\mathcal{U}_p$. Contrairement à l'opérateur $\mathcal{U}'_p$, le résultat de cet opérateur est décroissant en fonction de p : il est équivalent à l'opérateur max quand p tend vers $+\infty$ et à 1 quand p tend vers 0 (Tab. 3.3). Si la valeur de y_k est plus proche de 1, la valeur de $p^{(t+1)}$ sera inférieure à $p^{(t)}$. Dans les cas extrêmes où l'opérateur souhaité est très optimiste, cette valeur sera aussi inférieure à P_{union} et l'opérateur union va être remplacé par l'opérateur moyenne. En conséquence le type de l'opérateur de ce nœud va osciller entre l'opérateur moyenne et l'opérateur union sans converger vers une solution fixe. On obtient le même problème quand y_i est plus proche de 0 avec la t-norme $\mathcal{I}_{-p}$ et l'opérateur moyenne.

3.3.1 Comparaison entre notre approche et la méthode de Krishnapuram et Lee

Pour illustrer la différence entre notre approche et la méthode de Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b], nous avons appliqué les deux algorithmes pour essayer d'estimer les paramètres d'un nœud représentant l'opérateur $\mathcal{U}_{0.1}$ et ayant deux entrées x_1 et x_2. L'ensemble des données d'apprentissage est illustré sur la table 3.4. Cet exemple représente un cas extrême où l'opérateur union est très optimiste.

i	Paramètres d'entrés		Résultat (y_i)
	x_{1i}	x_{2i}	
1	0.950	0.615	1.00
2	0.048	0.073	1.00
3	0.089	0.017	1.00
4	0.231	0.791	1.00
5	0.606	0.921	1.00
6	0.485	0.738	1.00
7	0.060	0.092	1.00
8	0.023	0.079	1.00
9	0.891	0.176	1.00
10	0.095	0.061	1.00

Tab. 3.4 – Exemples d'apprentissage utilisés pour comparer la méthode de Krishnapuram et Lee avec notre approche.



(a) Évolution de l'erreur dans l'algorithme de Krishnapuram et Lee.

(b) Évolution de l'erreur dans le cas de notre algorithme d'apprentissage.

Fig. 3.4 – Comparaison entre l'algorithme d'apprentissage de Krishnapuram et Lee et notre algorithme.

En examinant la figure 3.4, on remarque clairement que l'algorithme de Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b] ne converge pas, les oscillations entre les deux opérateurs $\mathcal{U}_p$ et l'opérateur moyenne $\mathcal{M}_p$ se traduisent par une oscillation de l'erreur entre les deux valeurs 0.41 et 0.48 sans converger. Dans le cas de notre algorithme, l'erreur décroît rapidement vers 0 dès que l'opérateur moyenne est remplacé par l'opérateur union. On remarque que les deux algorithmes se comportent de la même façon entre la première itération et l'itération 770. À cette itération, la valeur de p est supérieure à P_{union}, cela implique que l'opérateur moyenne sera remplacé par l'opérateur union. Pour notre algorithme, la valeur de p continue à augmenter jusqu'à obtenir une valeur optimale. Cela se traduit par une diminution de l'erreur moyenne obtenue. Dans le cas de l'algorithme de Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b], l'algorithme devient instable à cause du problème expliqué dans le paragraphe précédent.

3.3.2 Conclusion

Krishnapuram et Lee [KRIS-92a, KRIS-92b] avaient démontré que l'algorithme converge dans le cas où les opérateurs sont fixés à l'avance, mais leur approche qui consiste à modifier le type de ces opérateurs au cours de l'étape d'apprentissage engendre une non convergence de l'algorithme dans les cas extrêmes. Nous avons apporté une modification de cet algorithme d'apprentissage en modifiant les opérateurs utilisés, cette modification permet de résoudre le problème de divergence de l'algorithme d'apprentissage dans ces cas extrêmes.

3.4 Algorithmes d'estimation de distribution (EDA) et réseaux bayésiens continus

Afin de réduire les effets des minima locaux, nous nous sommes intéressés à des méthodes d'apprentissage proches des algorithmes génétiques. Ces algorithmes évolutifs ont la particularité d'être moins sensibles aux problèmes des minima locaux.

Nous avons utilisé pour cela les algorithmes d'estimation de distribution (EDA) [MUHL-96, CAST-97, LARR-01]. Le principe de ces algorithmes est d'apprendre les modèles des populations sous forme d'une distribution de probabilités. Les dépendances entre les différentes variables sont exprimées sous forme d'un graphe orienté acyclique (DAG).

3.4.1 Notations

Soit $\{X_i \,|\, i = 1..n\}$ un ensemble de variables aléatoires continues. Une réalisation possible de X_i est notée x_i. On note f_i la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire X_i :

$$f_i(x_i)dx = P(X_i \in [x_i - dx/2, x_i + dx/2]) \tag{3.19}$$

De même, $\mathbf{X_n} = (X_1, X_2, ..., X_n)$ représente une variable aléatoire à n dimensions. Les notations précédentes sont étendues au cas n-dimensionnel. On note $f_{2/1}$ la fonction de densité de la probabilité conditionnelle $P(X2/X1)$:

$$f_{2/1}(x_2/x_1)\, dx_1\, dx_2 = P(X_2 \in [x_2 - dx_2/2, x_2 + dx_2/2]/X_1 \in [x_1 - dx_1/2, x1 + dx_1/2]) \quad (3.20)$$

3.4.2 Réseaux bayésiens

Un réseau bayésien est défini par [PEAR-88, JENS-96, BECK-99] :

- un graphe orienté acyclique $G = (X, U)$, où X représente l'ensemble des nœuds de G et U l'ensemble des arcs de G. Le graphe G représente la structure du réseau bayésien.

- un ensemble de variables aléatoires correspondant aux nœuds du graphe, tel que :

$$P(x_1, x_2, ..., x_n) = \prod_{i=1..n} P(x_i/\Gamma^-(X_i)) \quad (3.21)$$

  où $\Gamma^-(X_i)$ est l'ensemble des parents du nœud x_i.

  L'ensemble des probabilités conditionnelles $P(x_i/\Gamma^-(X_i))$ représente les paramètres du réseau bayésien.

Cette représentation graphique permet de définir une factorisation de la densité de probabilité jointe $P(\mathbf{X_n})$. Dans ce cas, chaque variable X_i est indépendante par rapport aux variables $\{X_1, ..., X_n\} \backslash \{X_i, \Gamma^-(X_i)\}$ connaissant la valeur de $\Gamma^-(X_i)$.

Il existe deux types de modèles différents :

1. **Réseaux bayésiens discrets :** On parle de réseau bayésien discret (ou simplement réseau bayésien) quand la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$ est discrète. Ces exemples sont les plus courants, c'est pour cela que le terme *Réseau bayésien* est souvent utilisé pour désigner uniquement le cas discret.

2. **Réseaux bayésiens continus :** On parle de réseau bayésien continu quand la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$ est continue. Les exemples les plus connus sont les réseaux gaussiens où la variable aléatoire $\mathbf{X_n}$ suit une loi normale de dimension n.

À cause de leur bonne représentation des connaissances, les réseaux bayésiens [PEAR-88, HOWA-81, LAUR-96] ont été largement utilisés dans le domaine des systèmes experts. Le nombre d'applications reposants sur ces techniques a explosé ces dernières années [BECK-99].

3.4.3 Optimisation en utilisant les EDAs

Les EDAs [MUHL-96] sont des algorithmes évolutifs de la même classe que les algorithmes génétiques [GOLD-89]. L'utilisation des algorithmes génétiques nécessite une grande expérience dans ce domaine. En effet la définition des opérateurs de croisement et de mutation [GOLD-89] les plus adaptés est une tâche compliquée et demande une grande maîtrise du domaine. Les EDAs ont été développés dans le but de faciliter cette tâche. Les EDAs n'utilisent pas ces opérateurs pour faire évoluer une population d'une génération à l'autre. Le nombre de paramètres à fixer dans le cas des EDAs est largement moins important que dans le cas des algorithmes génétiques. En plus, la possibilité de pouvoir exprimer les dépendances entre les différentes variables du chromosome est un grand avantage par rapport aux algorithmes génétiques [HOLL-75].

Comme les algorithmes génétiques, le principe des EDAs est de faire évoluer une population d'individus à travers les générations. Chaque individu représente une solution possible du problème. Nous allons expliquer le principe des EDAs à travers un de nos exemples d'apprentissage. Il s'agit de déterminer les paramètres d'un seul nœud avec deux entrées. On dispose pour cela d'une base d'apprentissage comprenant les paramètres d'entrée et le résultat souhaité. Le but de l'algorithme d'apprentissage est de déterminer les trois paramètres p, w_1 et w_2 du nœud. Le chromosome caractérisant chaque individu de la population est constitué de la valeur de ces trois paramètres.

Dans le cadre des EDAs, on suppose que chaque individu de la population représente la réalisation d'une variable aléatoire, dans notre cas continue ($(p, w_1, w_2) \in \Re^3$) $\mathbf{X}_3 = (X_1, X_2, X_3)$. La variable aléatoire X_1 est associée au paramètre p, les deux autres variables X_2 et X_3 sont associées respectivement aux deux paramètres w_1 et w_2. Pour résoudre ce problème d'optimisation, on suppose que la distribution des individus à l'intérieur d'une population suit une loi normale multidimensionnelle (dans notre cas de dimensions 3) dont il faut déterminer les différents paramètres :

$$f_{\mathbf{3}}(\mathbf{x}) \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma) = \frac{\exp(-\frac{(\mathbf{x}-\mu)^t \Sigma^{-1} (\mathbf{x}-\mu)}{2})}{\sqrt{(2\pi)^3}\sqrt{|\Sigma|}} \tag{3.22}$$

où μ représente le vecteur moyenne de la variable aléatoire $\mathbf{X_3}$ et Σ représente la matrice de covariance.

En exploitant les dépendances entre les différentes variables du chromosome, l'équation 3.22 peut être simplifiée à l'aide du formalisme des réseaux bayésiens (paragraphe 3.4.2). Supposant que les dépendances entre les différentes variables aléatoires $\mathbf{X_3} = (X_1, X_2, X_3)$ sont décrites par le graphe de la figure 3.5, la densité de probabilité $f_{\mathbf{3}}$ peut s'exprimer sous la forme suivante :

$$
\begin{aligned}
f_{\mathbf{3}}(\mathbf{x}) &= f_{X_1}(x_1)\, f_{X_2/X_1}(x_2/x_1)\, f_{X_3/X_1}(x_3/x_1) && (3.23)\\
f_1(x_1) &\sim \mathcal{N}(\mu_1, v_1) && (3.24)\\
f_{2/1}(x_2/x_1) &\sim \mathcal{N}(\mu_2 + \beta_{12}(x_1 - \mu_1), v_2) && (3.25)\\
f_{3/1}(x_3/x_1) &\sim \mathcal{N}(\mu_3 + \beta_{13}(x_1 - \mu_1), v_3) && (3.26)\\
& && (3.27)
\end{aligned}
$$

où :

- μ_i représente la moyenne de la variable aléatoire X_i.
- v_2 et v_3 représentent respectivement la variance des variables aléatoires X_1 et X_2 étant donné la variable X_1.
- β_{ij} est un coefficient représentant la relation entre les deux variables X_j et X_i [DEGR-70]. Il représente un poids associé à l'arc $\overrightarrow{X_i X_j}$.

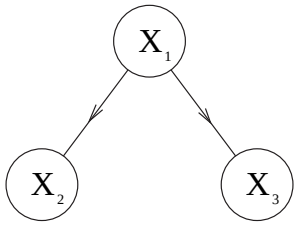


FIG. 3.5 – Un exemple d'un réseau bayésien.

La densité de probabilité $f_{\mathbf{3}}$ de la variable aléatoire $\mathbf{X_3}$ est complètement déterminée par la définition des paramètres des densités de probabilité f_1, $f_{2/1}$, $f_{3/1}$ et du graphe des dépendances.

La figure 3.6 présente le principe de fonctionnement général des EDA. Une population $\mathcal{P}_0$ de N individus est utilisée pour l'initialisation. Selon le critère de l'erreur moyenne, on sélectionne les $S < N$ meilleurs individus. À partir de cette population de S individus, on détermine les paramètres du réseau gaussien qui reflètent au mieux les dépendances entre les différentes variables du génome. Il s'agit de déterminer à cette étape la structure du graphe représentant les dépendances entre les différentes variables du chromosome ainsi que les paramètres nécessaires à la factorisation de la densité de probabilité $f_{\mathbf{3}}$. La différence entre les différents algorithmes utilisés réside dans la manière de construire ce réseau gaussien. Une nouvelle population est générée ensuite à partir de la simulation du réseau obtenu. Le processus est itéré jusqu'à la vérification d'une condition d'arrêt.

3.4.4 Détermination des paramètres du réseau gaussien

L'étape de construction du réseau gaussien à partir de la population $\mathcal{P}_k$ consiste à déterminer la structure du réseau gaussien $\mathbf{S}^k$ (le graphe) et les différents paramètres du réseau gaussien $\mathbf{\Theta}^k$ (les μ_i^k, v_i^k et les β_{ij}^k) qui reflètent au mieux la population $\mathcal{P}_k$.

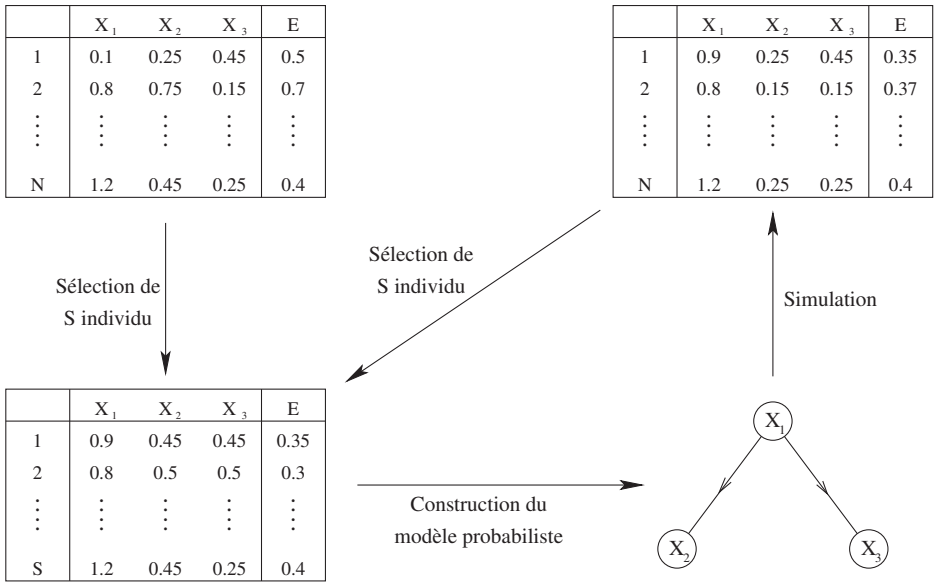


FIG. 3.6 – Principe des algorithmes d'estimation de distribution (EDA).

Nous avons utilisé trois algorithmes de complexités différentes pour construire le réseau gaussien. Chaque algorithme est brièvement expliqué ci-dessous.

3.4.4.1 Algorithme UMDA[1]

L'algorithme de construction des réseaux bayésiens discrets *Univariate Marginal Distribution Algorithm* (UMDA) introduit par Mühlenbein et Paaß[MUHL-96] a été généralisé par Larrañaga et al. [LARR-00] au cas des réseaux gaussiens. Dans cet algorithme, on suppose que toutes les variables sont indépendantes, ce qui revient à dire que le graphe correspondant au réseau gaussien ne contient aucun arc. La factorisation de la densité de probabilité $f_{\mathbf{n}}$ de $\mathbf{X_n}$ est définie par :

$$f^k_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}, \Theta^k) = \prod_{i=1}^{n} f^k_i(x_i, \Theta^l_i) \tag{3.28}$$

où Θ^k est recalculé pour chaque population par l'estimateur du maximum de vraisemblance :

$$\widehat{\mu^k_i} = \overline{X^k_i} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N} x^k_{i,r} \tag{3.29}$$

$$\widehat{v^k_i} = \frac{1}{N}\sum_{r=1}^{N}(x^k_{i,r} - \widehat{\mu^k_i})^2 \tag{3.30}$$

[1]UMDA : Univariate Marginal Distribution Algorithm

3.4.4.2 Algorithme MIMIC[2]

Larrañaga et al. [LARR-00] ont défini une généralisation de l'algorithme *Mutual Information Maximization for Input Clustering* (MIMIC) [DEBO-97] utilisé pour la construction des réseaux bayésiens discrets. Dans le cas de cet algorithme, on recherche le réseau gaussien le plus proche de la population dont la structure **S** est représentée par une chaîne. En conséquence, la fonction de densité marginale de la variable $\mathbf{X_n}$ est décomposée en un produit d'une fonction de densité marginale d'une seule variable et $(n-1)$ fonctions de densité conditionnelle par paires :

$$f^k_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = f_{\pi(1)/\pi(2)}(x_{\pi(1)}/x_{\pi(2)})...f_{\pi(n-1)/\pi(n)}(x_{\pi(n-1)}/x_{\pi(n)})\, f_{\pi(n)}(x_{\pi(n)}) \tag{3.31}$$

où $\pi = (i_1, i_2, ..., i_n)$ représente une permutation des variables X_i.

L'algorithme MIMIC consiste à chercher la meilleure permutation π des variables pour factoriser la fonction de densité jointe $f_{\mathbf{n}}$. Le problème revient à rechercher le minimum d'une fonction H :

$$H^k_\pi(\mathbf{X_n}) = h^k(X_{\pi(n)}) + \sum_{r=1}^{n-1} h^k(X_{\pi(r)}/X_{\pi(r+1)}) \tag{3.32}$$

où $h(X)$ représente l'entropie de Shannon d'une variable aléatoire X.

Dans le cas d'une variable normale $\mathbf{X_n}$ à n dimensions, l'entropie de la variable $\mathbf{X_n}$ est définie par [WHIT-90] :

$$h(\mathbf{X_n}) = \frac{1}{2}n(1 + \log(2\pi)) + \frac{1}{2}\log|\Sigma| \tag{3.33}$$

L'application dans le cas d'une fonction normale à une seule variable et d'une fonction conditionnelle à deux variables donne :

$$h(X) = \frac{1}{2}(1 + \log(2\pi)) + \log(\sigma_X) \tag{3.34}$$

$$h(X/Y) = \frac{1}{2}\left[(1 + \log(2\pi)) + \log\left(\frac{\sigma^2_X\sigma^2_Y - \sigma^2_{XY}}{\sigma^2_Y}\right)\right] \tag{3.35}$$

où σ^2_X et σ^2_Y représentent respectivement la variance des deux variables X et Y. σ_{XY} représente la covariance entre les deux variables aléatoires X et Y.

Pour minimiser la fonction H, l'algorithme MIMIC (Fig. 3.7) se décompose en deux étapes :

1. On choisit au début la variable X_i ayant la variance minimale. Cette variable va correspondre à la valeur de $\pi(n)$.

[2]MIMIC : Mutual Information Maximization for Input Clustering

2. De manière itérative, choisir à l'itération m la variable X_i correspondant à la plus petite valeur de $\frac{\sigma_X^2\sigma_Y^2-\sigma_{XY}^2}{\sigma_Y^2}$ où Y représente la dernière variable choisie. Cette variable correspond à la valeur de $\pi(n-m)$.

1. Choisir $\pi(n) = \arg\min_j \widehat{\sigma}_{X_j}$
2. **Pour** $k = n-1$ **jusqu'à** 1 **faire**
   Choisir $\pi(k) = \arg\min_{\substack{j \\ j\neq\pi(i,i=k+1..n)}} \widehat{\sigma}^2_{X_j} - \frac{\widehat{\sigma}^2_{X_j X_{\pi(k+1)}}}{\widehat{\sigma}^2_{X_{\pi(k+1)}}}$
   Fin Pour

FIG. 3.7 – Algorithme MIMIC pour l'apprentissage des réseaux bayésiens gaussien.

3.4.4.3 Algorithme EGNA[3]

L'algorithme *Estimation of Gaussian Network Algorithm* (EGNA) [LARR-01] propose un modèle plus complet où l'on autorise les dépendances multiples. Le principe est de déterminer la structure $\mathbf{S}$ du graphe en optimisant une mesure de qualité du réseau $Q(\mathcal{P}, \mathbf{S}, \widehat{\theta})$ calculée à partir de $\log P(\mathcal{P}/S, \widehat{\theta})$. Ce critère est un compromis entre la dimension du graphe (sa complexité) et la représentativité du modèle de la population $\mathcal{P}$:

$$\sum_{r=1}^{N}\sum_{i=1}^{n}\left[-\log\left(\sqrt{2\pi v_i}\right) - \frac{1}{2v_i}\left(x_{ir} - \mu_i - \sum_{x_j\in\Gamma^-(X_i)}\beta_{ji}(x_{jr}-\mu_j)\right)^2\right] - f(N)\dim(\mathbf{S}) \tag{3.36}$$

où :

– $dim(\mathbf{S})$ représente la dimension du graphe :

$$\dim(\mathbf{S}) = 2n + \sum_{i=1}^{n}\left|\Gamma^-(X_i)\right|. \tag{3.37}$$

– $f(N)$ est une fonction de pénalisation non négative : Nous avons utilisé le critère de Schwarz [SCHW-78] connu sous le terme de *Bayesian Information Criterion* (BIC).

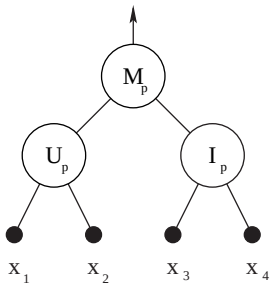
$$f(N) = \frac{1}{2}\log N \tag{3.38}$$

3.4.5 Comparaison entre la méthode de descente du gradient et les EDA

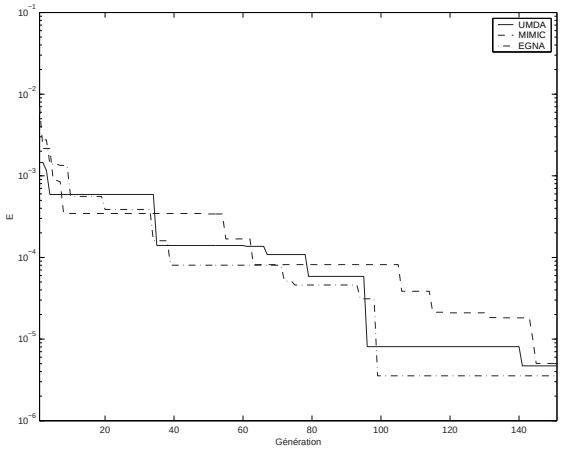
Pour comparer les deux approches, nous avons généré une base d'apprentissage comprenant les résultats du réseau d'agrégation de la figure 3.8-a. Ce réseau est com-

[3]Estimation of Gaussian Network Algorithm

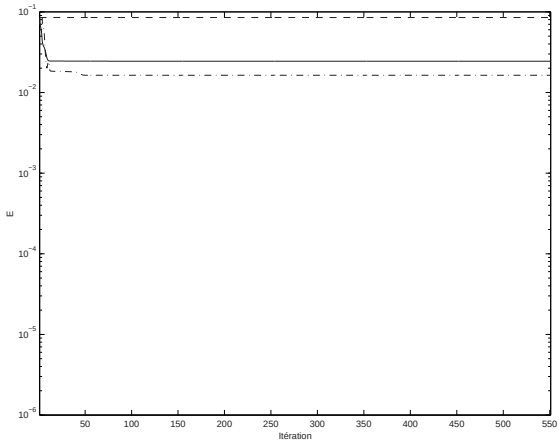
posé de trois nœuds organisés en deux couches, les deux nœuds de la première couche représentent respectivement les deux opérateurs $\mathcal{U}'_{2.5}$ et $\mathcal{I}'_{(-2.5)}$. L'unique nœud de la couche de sortie utilise l'opérateur de moyenne arithmétique $\mathcal{M}_1$ pour déterminer le résultat à partir de la sortie des deux nœuds de la première couche.



(a) Réseau d'agrégation floue.



(b) Évolution de l'erreur pour le meilleur individu à travers les générations dans les trois algorithmes UMDA, MIMIC et EGNA.



(c) Évolution de l'erreur à chaque itération pour l'algorithme de descente du gradient pour des initialisations différentes.

Fig. 3.8 – Comparaison entre les algorithmes EDA et l'algorithme de descente du gradient.

En examinant la figure 3.8-c, on constate clairement les faiblesses de la méthode de descente du gradient. La présence de plusieurs minima locaux pour la fonction E empêche l'algorithme de converger vers le minimum global. En modifiant les valeurs initiales des paramètres, l'algorithme converge vers des solutions différentes. Ce problème devient beaucoup plus important quand il s'agit d'apprendre les paramètres d'un réseau complexe.

Comme c'était prévu, les algorithmes EDAs sont moins sensibles à ce problème. L'erreur liée à la solution obtenue dans le cas des algorithmes EDAs est largement plus

petite que celle obtenue par la méthode de descente du gradient. Pour cela, nous avons opté dans la suite pour l'utilisation de ces algorithmes pour construire notre réseau d'agrégation floue.

3.5 Construction du réseau d'agrégation floue

Dans la suite, nous nous sommes restreints à l'étude de l'inférence de la relation RIGHT OF entre deux régions A et C étant donné les degrés des quatre relations spatiales directionnelles de base RIGHT OF, ABOVE, LEFT OF et BELOW entre les deux régions A et B et entre les deux régions B et C. L'inférence des autres relations est équivalente à l'inférence de la relation RIGHT OF en effectuant des rotations du plan de $\pi/2$. Cela revient à faire une permutation des quatre degrés RIGHT OF, ABOVE, LEFT OF, BELOW.

N'ayant aucune connaissance sur la structure du réseau d'agrégation floue, nous avons subdivisé l'étape d'apprentissage en deux étapes :

1. **Apprentissage de la structure du réseau d'agrégation floue :**
   Cette étape consiste à déterminer la structure du réseau, à savoir le nombre de couches ainsi que le nombre de nœuds d'agrégation par couche. Les connexions entre les différents nœuds sont déterminées à cette étape.

   N'ayant aucune connaissance sur la structure du réseau, nous effectuons une première étape d'apprentissage sur un réseau entièrement connecté en utilisant uniquement l'opérateur de moyenne généralisée. Une fois l'étape d'apprentissage terminée, nous retirons les connexions les moins importantes (dans le sens où leur absence augmente le moins possible l'erreur du réseau) [HASS-93, HAYK-99].
2. **Apprentissage des paramètres du réseau d'agrégation floue :**
   Dans cette étape, on détermine le type de chaque opérateur et les paramètres associés. Dans ce cas, on utilise les trois types d'opérateurs pour déterminer les meilleurs paramètres de la structure du réseau obtenu à la première étape.

3.5.1 Base d'apprentissage

Pour constituer notre base d'exemples, nous avons évalué les quatre relations spatiales entre des couples d'objets différents. Afin de ne pas privilégier certain cas, nous avons choisi des objets ayant des formes très différentes (carré, rectangle, concave, disque, etc.). Ces objets ont été placés d'une manière aléatoire dans une image. Nous avons évalué les degrés des quatre relations spatiales directionnelles de base pour chaque couple d'objet en utilisant la méthode de compatibilité (paragraphe 1.4.3.3).

3.5.2 Apprentissage de la structure du réseau d'agrégation

Afin de déterminer la structure du réseau d'agrégation, nous avons effectué une première étape d'apprentissage. Chaque nœud du réseau peut utiliser uniquement l'opé-

rateur de moyenne généralisée $\mathcal{M}_{p,w_i}$ pour déterminer la valeur du résultat à partir des entrées. L'étape d'apprentissage consiste à déterminer les poids associés à chaque connexion reliant deux nœuds du réseau ainsi que le paramètre p de chaque nœud. Les poids w_i représentent l'importance associée à la valeur de cette entrée du nœud pour déterminer la valeur de la sortie. Pour garder uniquement les liens importants, nous avons éliminé les connexions les moins importantes pour garder que le squelette essentiel du réseau. La structure obtenue est présentée sur la figure 3.9.

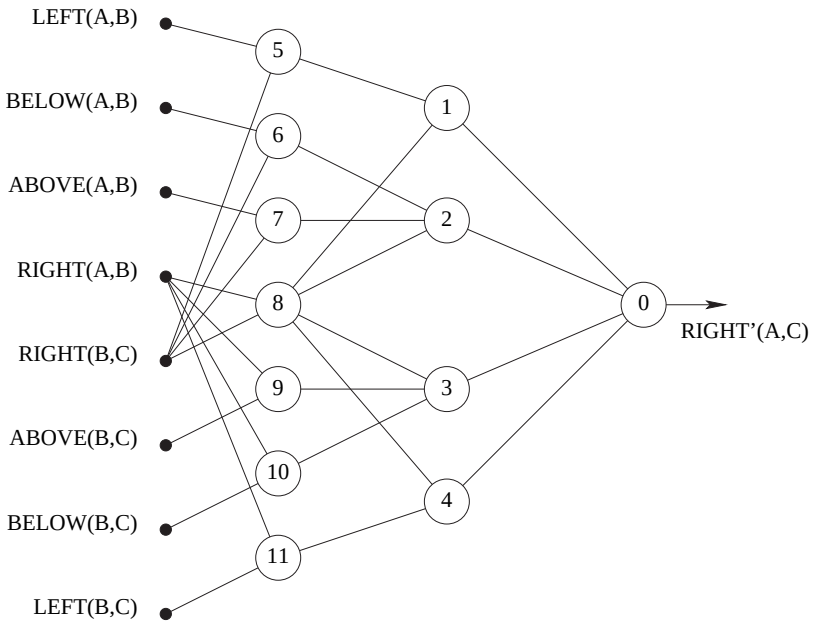


FIG. 3.9 – Structure du réseau obtenue à la première étape d'apprentissage.

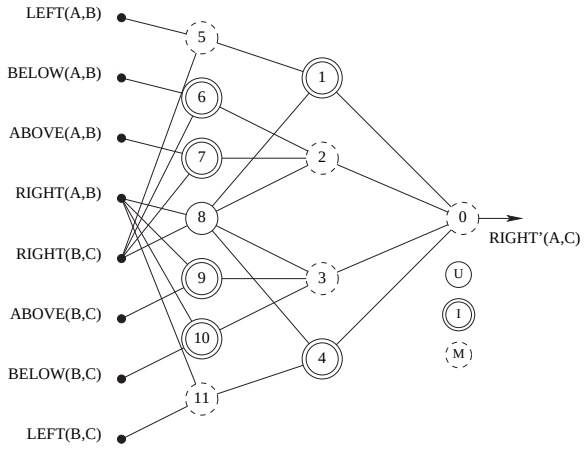
Discussion

En examinant le résultat obtenu (Fig. 3.9), on constate que chaque nœud du réseau possède une connexion directe où indirecte avec l'un ou les deux degrés RIGHT(A, B) et RIGHT(B, C). La valeur de ces deux degrés est très importante dans l'évaluation de RIGHT(A, C). Les autres degrés ont aussi un rôle à jouer car le réseau utilise les huit degrés pour évaluer RIGHT(A, C).

Sur la première couche du réseau, on observe une symétrie dans l'utilisation des deux degrés RIGHT(A, B) et RIGHT(B, C). Le degré RIGHT(A, B) est combiné avec les degrés des autres relations spatiales entre la région B et la région C. À l'inverse, l'autre degré RIGHT(B, C) est combiné avec les degrés des relations directionnelles entre les deux régions A et B. Ce résultat était prévisible, car pour obtenir de l'information sur la position relative des deux régions A et C, il faut combiner les degrés des relations entre les deux régions A et B avec ceux des relations entre les deux régions B et C.

3.5.3 Apprentissage des paramètres du réseau d'agrégation

Pour déterminer les paramètres du réseau obtenu à l'étape précédente, nous avons relancé l'algorithme d'apprentissage. Le type d'opérateurs obtenus pour chaque nœud est illustré sur la figure 3.10.



(a) Type des opérateurs utilisés.

Nœud	Opérateur	p	W
0	$\mathcal{M}$	1.726	0.421, 0.005, 0.153, 0.421
1	$\mathcal{I}$	-2.254	
2	$\mathcal{M}$	-0.160	0.073, 0.013, 0.914
3	$\mathcal{M}$	-1.014	0.588, 0.378, 0.034
4	$\mathcal{I}$	-2.030	
5	$\mathcal{M}$	0.758	0.998, 0.002
6	$\mathcal{I}$	-6.075	
7	$\mathcal{I}$	-2.487	
8	$\mathcal{U}$	2.795	
9	$\mathcal{I}$	-5.240	
10	$\mathcal{I}$	-6.695	
11	$\mathcal{M}$	-0.196	0.998, 0.002

(b) Paramètres des opérateurs utilisés.

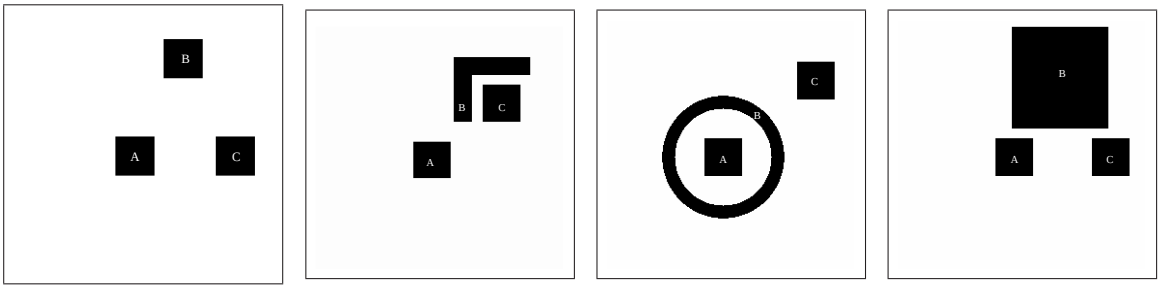
FIG. 3.10 – Apprentissage des paramètres du réseau d'agrégation floue.

Discussion

En examinant la figure 3.10-a, on constate clairement la symétrie obtenue à la première étape. Le type de l'opérateur utilisé pour combiner le degré RIGHT(A, B) avec un autre degré $rel(B, C)$ correspond exactement à celui utilisé pour combiner le degré RIGHT(B, C) avec $rel(A, B)$. Cette symétrie est aussi apparente sur les nœuds de la deuxième couche. Cette symétrie n'est pas complète car en examinant les paramètres des opérateurs trouvés (Fig. 3.10-b), les valeurs obtenues ne présentent pas une symétrie parfaite.

Pour combiner les deux degrés RIGHT(A, B) et RIGHT(B, C), un opérateur union a été utilisé. On en déduit que la région C est à droite de la région A si au moins l'une des deux relations RIGHT(A, B) et RIGHT(B, C) est vérifiée. Dans les autres cas, un opérateur intersection est utilisé pour combiner les degrés RIGHT(A, B) et RIGHT(B, C) avec les degrés correspondant aux relations ABOVE et BELOW. Pour utiliser la relation LEFT OF, l'opérateur moyenne a été utilisé avec un poids très important pour le degré de la relation RIGHT OF, cela veut dire que la région C est placée à droite si la relation RIGHT OF est plus vérifiée que la relation LEFT OF pour les couples de régions (A, B) et (B, C).

3.6 Application à l'inférence des relations spatiales directionnelles



(a) (b) (c) (d)

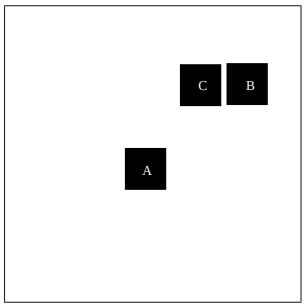
	Valeur déduite $\text{RIGHT}'(A,C)$	Valeur réelle $\text{RIGHT}(A,C)$
(a)	0.417	0.962
(b)	0.526	0.585
(c)	0.624	0.600
(d)	0.500	0.962

FIG. 3.11 – Résultat de l'inférence en utilisant le réseau d'agrégation floue

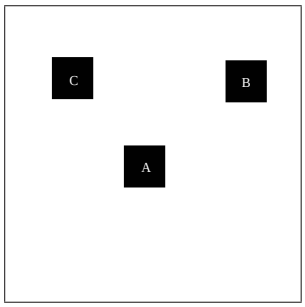
Pour valider les paramètres du réseau obtenu, nous avons testé ce réseau sur les exemples présentés au chapitre 2. Ces exemples ne font pas partie de la base d'apprentissage utilisée. Nous avons comparé le degré $\text{RIGHT}'(A,C)$ obtenu en utilisant le réseau d'agrégation avec le degré réel $\text{RIGHT}(A,C)$ obtenu à partir d'une évaluation directe.

En examinant les résultats obtenus (Fig. 3.11), on remarque que la différence entre le résultat du réseau et la valeur réelle est très importante dans les deux cas (a) et (d). Dans les deux autres cas, les deux degrés sont très proches. Cette différence est liée à l'absence de l'information métrique qui est importante dans les deux cas (a) et (d). Pour mieux voir cette différence, nous avons appliqué le réseau aux deux cas de la figure 2.10. Dans ce cas, l'information métrique est plus qu'importante. Si on examine les degrés des quatre relations spatiales (Fig. 3.12-b,c), on remarque clairement que les estimations sont très proches dans les deux exemples, la seule différence réside dans la distance qui sépare les deux objets B et C. Les résultats obtenus dans les deux exemples par le réseau d'agrégation sont identiques.

Dans les deux cas (b-c) de la figure 3.11, le résultat obtenu par le réseau est très proche du calcul exact. Malgré la ressemblance des relations entre le cas (a) et le cas (b), le réseau arrive à déterminer le degré de la relations RIGHT OF. Cela était prévisible car on examinant de plus près les degrés des différentes relations, les deux exemples sont différents : dans le deuxième cas, l'objet C est plus placé à droite de l'objet B que



(a)



(b)

	$rel(A,B)$	$rel(B,C)$
RIGHT OF	0.593	0
ABOVE	0.405	0.147
LEFT OF	0	0.841
BELOW	0	0.155

(c) Relations spatiales directionnelles entre les objets de (a).

	$rel(A,B)$	$rel(B,C)$
RIGHT OF	0.593	0
ABOVE	0.405	0.017
LEFT OF	0	0.989
BELOW	0	0.012

(d) Relations spatiales directionnelles entre les objets de (b).

	RIGHT$'(A,C)$	RIGHT(A,C)
(a)	0.204	0.322
(b)	0.204	0.

(e) Inférence de la relation RIGHT OF.

FIG. 3.12 – Inférence dans le cas où l'information métrique est indispensable.

dans le premier cas.

Pour valider les résultats obtenus, nous avons testé aussi les cas extrêmes où les relations sont transitives (Tab. 3.5-a) (la même relation est complètement vérifiée pour les deux couples). Nous avons estimé les quatre relations spatiales de base, ce qui correspond à changer la relation spatiale vérifiée et estimer la relation RIGHT OF. Les résultats obtenus sont corrects, ils correspondent exactement aux résultats souhaités. Dans le cas où l'on a deux relations différentes qui sont vérifiées (Tab. 3.5-b),le résultat du réseau correspond à la bissectrice des deux directions (le résultat de l'inférence sur les deux directions est identique, les autres relations sont non vérifiées).

3.7 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une méthode d'inférence des relations spatiales directionnelles en utilisant uniquement les degrés des quatre relations spatiales

	$rel(A,B)$	$rel(B,C)$	$rel(A,C)$	$rel'(A,B)$
RIGHT OF	1	1	1	0.999
ABOVE	0	0	0	0
LEFT OF	0	0	0	0
BELOW	0	0	0	0

(a)

	$rel(A,B)$	$rel(B,C)$	$rel'(A,C)$
RIGHT OF	1	0	0.728
ABOVE	0	1	0.728
LEFT OF	0	0	0
BELOW	0	0	0

(b)

TAB. 3.5 – Inférence dans les cas extrêmes.

directionnelles de base. Nous avons utilisé un réseau d'agrégation floue [KRIS-92a, KRIS-92b] pour déterminer les règles d'inférences. Nous avons apporté une modification à l'algorithme d'apprentissage proposé par Krishnapuram et Lee [KRIS-92a] pour assurer la convergence de l'algorithme d'apprentissage. Dans le cas de l'apprentissage des paramètres d'un réseau complexe, nous avons choisi d'utiliser des algorithmes évolutifs fondés sur les algorithmes d'estimation de distributions [LARR-01]. Ces algorithmes sont moins sensibles aux problèmes des minima locaux.

Comme c'était prévu, les résultats obtenus en utilisant le réseau d'agrégation sont proches du calcul direct, sauf dans le cas où l'information de distance est importante. Dans un tel cas, l'être humain essaye de voir d'autres possibilités pour avoir plus d'informations sur la position relative de l'objet C par rapport à A. Par exemple, on peut utiliser un autre objet intermédiaire B.

Il est possible d'améliorer la qualité des résultats obtenus en effectuant une sélection des objets intermédiaires B à utiliser en fonction de leurs positions relatives par rapport aux deux objets A et C. Cela implique une étude sur les erreurs d'estimations obtenues en exploitant une possibilité d'inférence. Pour cela, nous nous sommes lancés dans une étude théorique du problème d'inférence que nous présentons au prochain chapitre.

Chapitre 4

Étude probabiliste du problème d'inférence des relations spatiales directionnelles

Dans cette partie, nous allons aborder le problème d'inférence des relations spatiales par une approche probabiliste. Puisque la plus grande partie des méthodes de représentation des relations spatiales directionnelles utilisent les relations spatiales entre les différents points des deux objets pour représenter celles entre les objets, nous allons traiter en premier le problème d'inférence dans le cas des points.

Nous présentons au début les résultats obtenus dans le cas d'une distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque [DEHA-01] en essayant de faire la différence entre les résultats valables pour n'importe quelle distribution de points, de ceux liés à cette contrainte. Nous présentons ensuite dans la section 4.6 une extension de ces résultats dans le cas d'une fenêtre carrée. Dans la section 4.7, nous étudions le cas d'une distribution quelconque des points dans le plan avec une application sur une distribution gaussienne. Tous les résultats théoriques ont été comparés avec ceux obtenus par une simulation numérique. Enfin dans la section 4.8, nous présentons l'application des résultats obtenus pour l'inférence dans le cadre d'une décision bayésienne. Le traitement des régions est présenté dans la section 4.9.

4.1 Hypothèses et notations

On peut voir le problème d'inférence des relations spatiales directionnelles entre des points comme l'étude des relations spatiales entre deux points A et C sachant les relations spatiales directionnelles entre A et un autre point B et les relations entre B et C. En pratique on veut répondre à la question suivante : "où se trouve le point C par rapport au point A, sachant qu'il est dans telle direction par rapport au point B lui-même situé dans une direction connue par rapport à A". Afin d'alléger les formules énoncées nous allons utiliser un certain nombre de notations et d'hypothèses :

– L'espace $\mathcal{E}$ est réduit au plan muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

– Chaque point n du plan sera représenté par ces coordonnées cartésiennes (x_n, y_n) dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ ou bien par ses coordonnées polaires (r_n, Θ_n) définies par :

$$\begin{cases} x_n = r_n \cos(\Theta_n) \\ y_n = r_n \sin(\Theta_n) \end{cases} \quad \text{tel que : } r_n \in [0, +\infty[,\ \Theta_n \in [-\pi, \pi[\tag{4.1}$$

– Pour simplifier les formules, on va utiliser la notation $[y \pm z]$ pour représenter l'intervalle $[y - z, y + z]$.

– On suppose que la distribution des points n suit une loi uniforme sur l'espace réduit à un disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R :

$$P(r_n \in [r \pm dr/2], \Theta_n \in [\theta \pm d\theta/2]) r dr d\theta = \begin{cases} \frac{1}{\pi R^2} r dr d\theta & \text{si } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.2}$$

D'autres distributions seront étudiées dans la suite (sections 4.6 et 4.7).

– L'angle $\Theta_{n_1 n_2}$ représente l'angle existant entre le vecteur $\overrightarrow{i}$ du repère orthonormé et le vecteur $\overrightarrow{n_1 n_2}$ défini par les deux points n_1 et n_2.

– On suppose que le point A est placé à l'origine (A=O).

– On définit deux variables aléatoires continues bidimensionnelles $\mathbb{B} = (R_b, \Theta_b)$ et $\mathbb{C} = (R_c, \Theta_c)$ représentant respectivement les coordonnées polaires dans le plan des deux points B et C.

– On définit les trois variables aléatoires continues $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ et $\boldsymbol{\gamma}$ représentant respectivement les trois angles Θ_{AB}, Θ_{BC} et Θ_{AC}. Ces trois angles permettent de décrire la position relative des trois points A, B et C l'un par rapport à l'autre. Dans le cas du traitement de la position relative des points, si les relations spatiales floues sont bien choisies, l'angle Θ_{AB} peut être déterminé directement à partir du quadruplet $(\text{RIGHT}(A, B), \text{ABOVE}(A, B), \text{LEFT}(A, B), \text{BELOW}(A, B))$ (paragraphe 1.3). Ceci nous permet d'utiliser directement les angles à la place des degrés d'estimation des quatre relations spatiales directionnelles de base.

– Afin d'alléger les formules nous allons utiliser des symboles pour représenter des événements, par exemple on utilisera l'événement $\mathcal{B}$ pour désigner le fait que le point B est situé à l'intérieur de la surface définie par $R_b \in [r_b \pm dr_b]$ et $\Theta_b \in [\theta_b \pm d\theta_b]$:

$$P(\mathcal{B}) = P(\mathbb{B} \in ([r_b \pm dr_b], [\theta_b \pm d\theta_b])) \tag{4.3}$$

De la même manière, l'événement $\mathcal{C}$ va nous permettre de désigner le fait que le point C est situé à l'intérieur de la surface définie par $R_c \in [r_c \pm dr_c]$ et $\Theta_c \in [\theta_c \pm d\theta_c]$:

$$P(\mathcal{C}) = P(\mathbb{C} \in ([r_c \pm dr_c], [\theta_c \pm d\theta_c])) \tag{4.4}$$

On utilisera aussi l'événement α_e pour dire que le point B est dans la direction α à $d\alpha$ près par rapport au point A (i.e. $\boldsymbol{\alpha} \in [\alpha \pm d\alpha]$). De même, les événements β_e et γ_e vont représenter respectivement les événements $\boldsymbol{\beta} \in [\beta \pm d\beta]$ et $\boldsymbol{\gamma} \in [\gamma \pm d\gamma]$.

– On utilisera les éléments différentiels dB et dC pour noter les éléments différentiels $r_b dr_b d\theta_b$ et $r_c dr_c d\theta_c$.

4.2 Inférence des relations spatiales directionnelles : évaluation de $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$

Afin de pouvoir étudier les relations spatiales entre les deux points A et C, sachant les relations qui les relient à un autre point B, on va déterminer la loi de distribution des points C dans le plan conditionnée par les événements α_e (B est dans la direction α par rapport au point A), β_e (C est dans la direction β par rapport au point B) et l'hypothèse que le point A est placé à l'origine du repère. Dans toutes les formules l'hypothèse $(A = O)$ n'est pas reportée mais il faut se rappeler que toutes nos formules sont conditionnées par cette hypothèse. Dans un premier temps, on va supposer que $\beta \neq \alpha + k\pi$, $(k \in \mathcal{Z})$ qui est un cas particulier que nous aborderons à la fin. On va déterminer en premier l'ensemble de définition de cette probabilité.

4.2.1 Support de la loi de probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$

Si on examine la définition des événements α_e et β_e, on peut voir que si B est dans la direction α par rapport au point A alors B appartient au secteur angulaire $S_{A,\alpha}$ (Fig. 4.1-a) défini par :

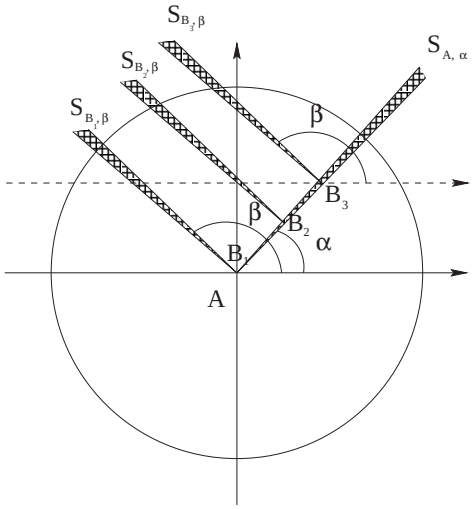
$$S_{A,\alpha} = \{n(r_n, \Theta_n) \in \mathcal{E} : \Theta_n \in [\alpha \pm d\alpha]\}$$

De même, si C est dans la direction β par rapport au point B alors C appartient au secteur angulaire $S_{B,\beta}$ (Fig. 4.1-a) défini par :

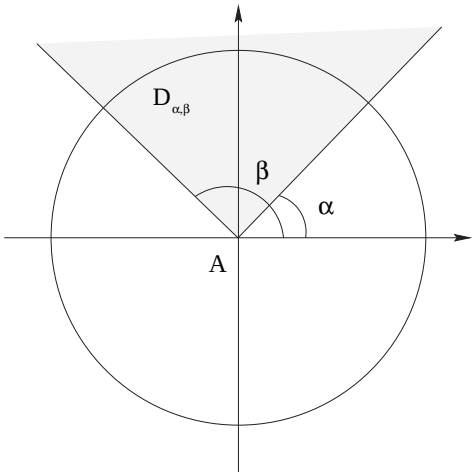
$$S_{B,\beta} = \{n \in \mathcal{E} : \Theta_{Bn} \in [\beta \pm d\beta]\}$$

Le domaine $S_{B,\beta}$ décrit un secteur angulaire $D_{\alpha,\beta}$ quand B décrit l'ensemble des points de l'ensemble $S_{A,\alpha}$ (Fig. 4.1). Ce secteur prend quatre formes différentes suivant la valeur de la différence $\beta - \alpha$. Nous avons regroupé ces formes en deux classes (les deux premières équations correspondent au premier cas et les deux suivantes au second cas) :

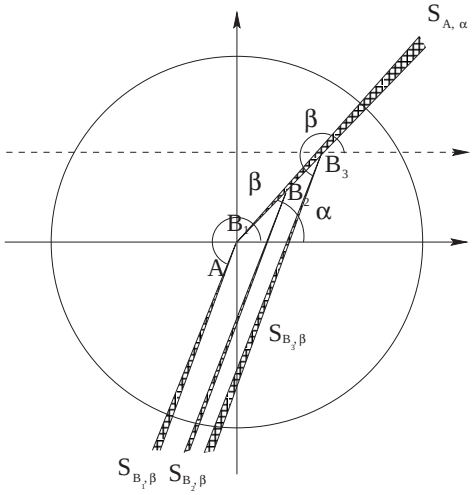
$$D_{\alpha,\beta} = \begin{cases} 1^{\text{er}} \text{ cas} & : \begin{cases} [\![\alpha,\beta]\!]^1 & \text{si } \beta-\alpha \in [2k\pi,(2k+1)\pi] \text{ et } (\alpha<\beta) \text{ et } (k\geq 0) \\ [\![\alpha,\beta+2\pi]\!] & \text{si } \beta-\alpha \in [2k\pi,(2k+1)\pi] \text{ et } (\alpha>\beta) \text{ et } (k\leq 0) \end{cases} \\ 2^{\text{ème}} \text{ cas} & : \begin{cases} [\![\beta,\alpha]\!] & \text{si } \beta-\alpha \in [(2k+1)\pi,(2k+2)\pi] \text{ et } (\beta<\alpha) \text{ et } (k\leq 0) \\ [\![\beta,\alpha+2\pi]\!] & \text{si } \beta-\alpha \in [(2k+1)\pi,(2k+2)\pi] \text{ et } (\beta>\alpha) \text{ et } (k\geq 0) \end{cases} \end{cases} \tag{4.5}$$



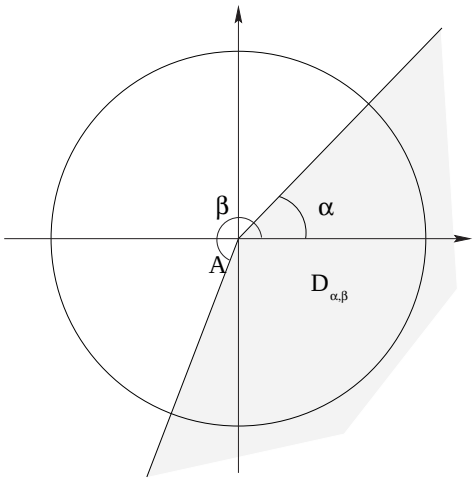
(a) Définition du domaine $S_{A,\alpha}$ et $S_{B,\beta}$ (1^{er} cas).



(b) Support de la loi de probabilité $P(C/\alpha_e,\beta_e)$ (1^{er} cas).



(c) Domaine $S_{A,\alpha}$ et $S_{B,\beta}$ ($2^{\text{ème}}$ cas).



(d) Support de la loi de probabilité $P(C/\alpha_e,\beta_e)$ ($2^{\text{ème}}$ cas).

FIG. 4.1 – Les différents cas du support $D_{\alpha,\beta}$ de la loi de probabilité $P(C/\alpha_e,\beta_e)$.

[1] $[\![a,b]\!]$: représente le secteur angulaire $S = \{n(r_n,\Theta_n) \,/\, a \leq \Theta_n \leq b\}$

Les deuxième et quatrième équations sont dues au problème de la périodicité des domaines angulaires. Il suffit de remplacer β par $\beta - 2\pi$ (qui représente la même direction que β) dans la première équation pour obtenir la deuxième équation. Comme β est inférieur à α, le domaine $[\![\alpha, \beta]\!]$ n'est pas un domaine acceptable, on rajoute dans ce cas 2π à β afin d'obtenir un secteur angulaire correct. De la même façon, la quatrième équation peut être déduite de la troisième équation en remplaçant β par $\beta + 2\pi$. En résumé, si on suppose que l'angle β est exprimé dans l'intervalle $[\alpha, \alpha + 2\pi]$ (on rajoute un multiple de 2π afin de satisfaire cette proposition), on peut regrouper les deux premières équations et les deux dernières équations, dans le premier cas le domaine est $D_{\alpha,\beta}$ est représenté par le domaine $[\![\alpha, \beta]\!]$ (Fig.4.1-a), dans l'autre cas le domaine est $D_{\alpha,\beta} = [\![\beta, \alpha + 2\pi]\!]$ (Fig.4.1-d).

Dans la suite, on va se limiter au premier cas (i.e. $D_{\alpha,\beta} = [\![\alpha, \beta]\!]$). L'autre cas peut être déduit par symétrie du premier cas.

Dans tous les cas, on a :

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) = 0 \text{ si } C \notin D_{\alpha,\beta} \tag{4.6}$$

Dans la suite, on va donc se limiter au domaine $D_{\alpha,\beta}$ pour évaluer $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$.

4.2.2 Évaluation de $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$

D'après la définition d'une loi de probabilité conditionnelle, l'évaluation de $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ va dépendre des deux probabilités $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ et $P(\alpha_e, \beta_e)$. On commence par évaluer la loi de probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$.

La loi de probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de la marginalisation de la loi de probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ par rapport à l'événement $\mathcal{C}$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{D_{\alpha,\beta}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.7}$$

Du fait que l'événement β_e met en relation la position du point C et celle du point B, on introduit l'événement $\mathcal{B}$ dans l'expression de $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$.

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \int_{\mathcal{E}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e, \mathcal{B}) dB \tag{4.8}$$

La distribution $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e, \mathcal{B})$ peut être écrite sous forme d'un produit de probabilités conditionnelles en utilisant la définition d'une loi de probabilité conjointe :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e, \mathcal{B}) = P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) P(\alpha_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}) P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \tag{4.9}$$

En remplaçant dans l'équation 4.8 :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \int_{\mathcal{E}} P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) P(\alpha_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}) P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) dB \tag{4.10}$$

La position de B par rapport à A est indépendante de la position de C, on a donc :

$$P(\alpha_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}) = P(\alpha_e/\mathcal{B}) = \begin{cases} 1 & \text{si } B \in S_{A,\alpha} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.11}$$

De ce fait, l'intégrale de l'équation 4.10 est réduite à l'ensemble $S_{A,\alpha}$.

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{A},\alpha}} P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) dB \tag{4.12}$$

Les positions des points B et C étant indépendantes, on a donc :

$$P(\mathcal{B}, \mathcal{C}) = P(\mathcal{B}) P(\mathcal{C}) \tag{4.13}$$

et l'équation 4.12 devient :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{A},\alpha}} P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) P(\mathcal{B}) P(\mathcal{C}) dB \tag{4.14}$$

La probabilité $P(\mathcal{C})$ est indépendante des variables d'intégration définies par dB donc :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = P(\mathcal{C}) \int_{\mathcal{S}_{\mathcal{A},\alpha}} P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) P(\mathcal{B}) dB \tag{4.15}$$

D'après la définition de l'événement β_e :

$$P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } C \in S_{B,\beta} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.16}$$

Mais si on examine l'intégrale de l'équation 4.15, celle-ci dépend de la position du point B dans le plan. Afin de pouvoir exploiter l'équation précédente, on va inverser les relations spatiales. Si le point C est dans la direction β par rapport au point B alors le point B est dans la direction $\beta - \pi$ par rapport au point C (Fig. 4.2).

$$P(\beta_e/\mathcal{B}, \mathcal{C}, \alpha_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } B \in S_{C,\beta-\pi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.17}$$

L'intégrale de l'équation 4.15 devient :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = P(\mathcal{C}) \int_{S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}} P(\mathcal{B}) dB \tag{4.18}$$

Remarque :

Toutes les équations présentées jusqu'ici sont valides pour n'importe quelle distribution de points indépendants dans le plan.

Du fait que la distribution des points suit une loi uniforme sur le disque $\mathcal{D}$, les probabilités $P(\mathcal{B})$ et $P(\mathcal{C})$ sont constantes et peuvent être factorisées pour l'intégrale de l'équation 4.18.

En remplaçant la valeur des probabilités $P(\mathcal{B})$ et $P(\mathcal{C})$ dans l'équation 4.18 :

$$\begin{aligned} P(\mathcal{B}) = P(\mathcal{C}) &= \frac{1}{\pi R^2} = K \\ P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) &= K^2 \int\limits_{S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}} dB \end{aligned} \tag{4.19}$$

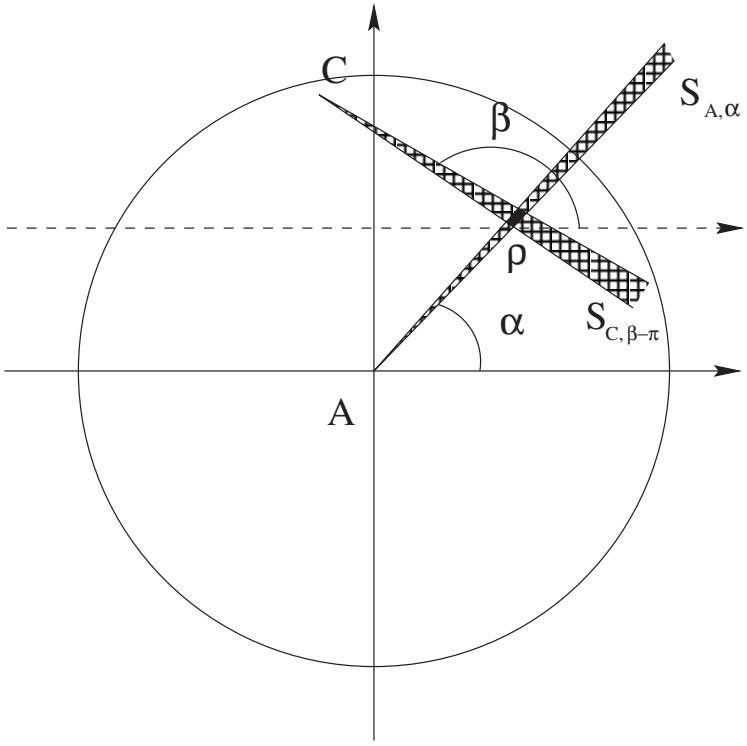


FIG. 4.2 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$.

La probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est proportionnelle à la surface du secteur $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ qui est donnée par la formule suivante (cf démonstration en annexe B) :

$$|\rho| = 2r_c^2 \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\theta_c)}{3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)} \tag{4.20}$$

Donc :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = 2r_c^2 K^2 \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)} \tag{4.21}$$

La limitation du plan à un disque impose une réduction du support $D_{\alpha,\beta}$ de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ à un secteur angulaire de rayon R. Cette nouvelle contrainte introduit une nouvelle forme particulière du support $D_{\alpha,\beta}$ dans le cas où $(\beta-\alpha) > \pi/2$. Ce domaine prend deux formes différentes pour chaque cas de l'équation 4.5 comme illustré sur la figure 4.3. On donne les deux formes pour le premier cas i.e. pour $D_{\alpha,\beta} = [\![\alpha, \beta]\!]$ ou $D_{\alpha,\beta} = [\![\alpha, \beta + 2\pi]\!]$ les autres sont similaires et s'obtiennent par symétrie.

Dans le cas où $(\beta - \alpha) > \pi/2$, il existe une partie du secteur angulaire $D_{\alpha,\beta}$ pour laquelle les points B correspondant sont à l'extérieur du cercle, en conséquence la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ vaut 0 dans cette partie (Fig. 4.3-c,4.3-d) :

- Si $(\beta-\alpha) \in]2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$, $D_{\alpha,\beta}$ est un secteur angulaire complet.

- Si $(\beta-\alpha) \in [\pi/2 + 2k\pi, (2k+1)\pi[$, $D_{\alpha,\beta}$ peut être décomposé en un secteur angulaire complet (pour $\theta \in [2\beta - \alpha - \pi, \beta]$) et un triangle (pour $\theta \in [\alpha, 2\beta - \alpha - \pi]$).

L'angle $(2\beta - \alpha - \pi)$ représente la coordonnée angulaire du point F (Fig. 4.3-d) issue de l'intersection de la frontière du disque de rayon R et la droite définie par une pente égale à $\tan(\beta)$ et passant par le point (R, α). La droite (AF) représente la frontière entre les deux secteurs.

Nous pouvons maintenant reporter la valeur de $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ (Eq. 4.21) dans l'Eq. 4.7 pour évaluer la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$. Dans le cas où $(\beta - \alpha) \in [2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$, le secteur $D_{\alpha,\beta}$ est un secteur angulaire complet, alors :

$$\begin{aligned} P(\alpha_e, \beta_e) &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{R} 2K^2 \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)} r_c^3 dr_c d\theta_c \\ P(\alpha_e, \beta_e) &= \frac{(\alpha-\beta)\cos(\alpha-\beta) - \sin(\alpha-\beta)}{2\pi^2 \left(\sin(3\alpha-3\beta) - 3\sin(\alpha-\beta)\right)} \end{aligned} \tag{4.22}$$

Dans le cas où $(\beta - \alpha) \in [\pi/2 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$, le secteur $D_{\alpha,\beta}$ peut être décomposé en deux parties (Fig. 4.4), une partie triangulaire Δ pour les angles $\gamma \in [\alpha, 2\beta - \alpha - \pi]$ dans laquelle r_c varie entre 0 et $R\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}$. L'autre partie est un secteur angulaire complet $D_{2\beta-\alpha-\pi,\beta}$.

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{\Delta} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC + \int_{D_{2\beta-\alpha-\pi,\beta}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.23}$$

Si on évalue chaque terme à part on obtient :

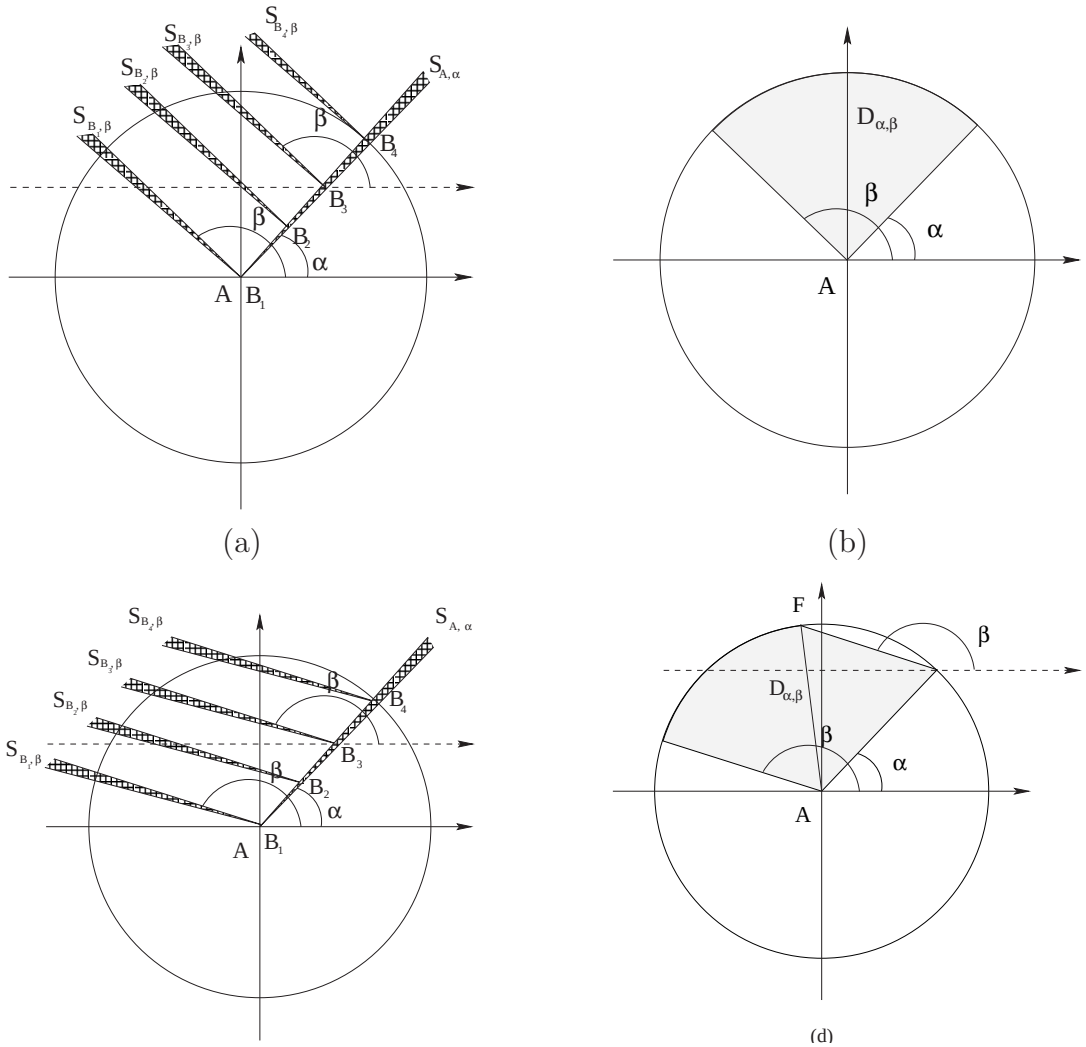


FIG. 4.3 – Définition du domaine $D_{\alpha,\beta}$.

$$\begin{aligned}
\int_{\Delta} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC &= \int_{\alpha}^{2\beta-\alpha-\pi} \int_{0}^{R\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\theta_c)}} 2K^2 \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)} r_c^3 dr_c \, d\theta_c \\
\int_{\Delta} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC &= \frac{5\sin(\alpha-\beta) + \sin(3\alpha-3\beta) - 3\sin(5\alpha-5\beta) + \sin(7\alpha-7\beta)}{8\pi^2 \left(10\sin(\alpha-\beta) - 5\sin(3\alpha-3\beta) + \sin(5\alpha-5\beta)\right)}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

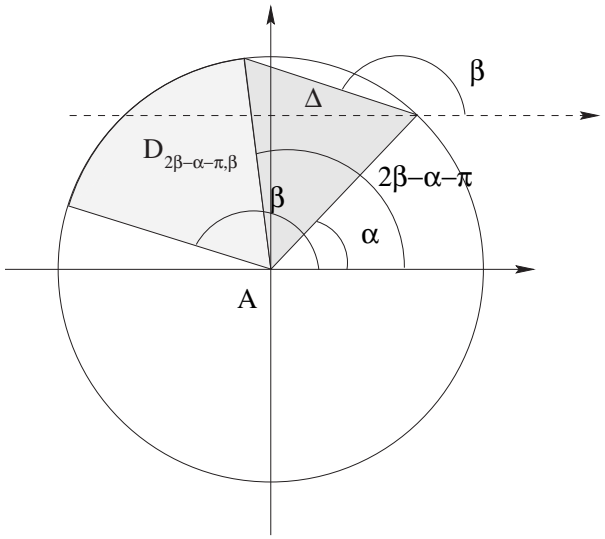


FIG. 4.4 – Décomposition du domaine $D_{\alpha,\beta}$ en deux domaines Δ et $D_{2\beta-\alpha-\pi}$ dans le cas où $\pi/2 < \beta - \alpha < \pi$.

$$\begin{aligned}
\int\limits_{D_{2\beta-\alpha-\pi,\beta}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)dC &= \int\limits_{2\beta-\alpha-\pi}^{\beta}\int\limits_{0}^{R} 2K^2\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)}r_c^3 dr_c\, d\theta_c \\
\int\limits_{D_{2\beta-\alpha-\pi,\beta}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)dC &= \frac{2(\beta-\alpha-\pi)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)+\sin(3\alpha-3\beta)}{4\pi^2\left(\sin(3\alpha-3\beta)-3\sin(\alpha-\beta)\right)} \qquad (4.25)
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
P(\alpha_e,\beta_e) = {} & \frac{5\sin(\alpha-\beta)+\sin(3\alpha-3\beta)-3\sin(5\alpha-5\beta)+\sin(7\alpha-7\beta)}{8\pi^2\left(10\sin(\alpha-\beta)-5\sin(3\alpha-3\beta)+\sin(5\alpha-5\beta)\right)} \\
& + \frac{2(\beta-\alpha-\pi)\cos(\alpha-\beta)-\sin(\alpha-\beta)+\sin(3\alpha-3\beta)}{4\pi^2\left(\sin(3\alpha-3\beta)-3\sin(\alpha-\beta)\right)} \qquad (4.26)
\end{aligned}$$

On peut remarquer que la probabilité $P(\alpha_e,\beta_e)$ dépend entièrement dans les deux cas de la différence $\beta-\alpha$. Ce résultat était prévisible car nous avons réduit le plan à un disque qui est invariant par rotation. On aurait pu fixer $\alpha = 0$ lors du choix des hypothèses. Afin d'alléger les formules, on pose $\Psi = \beta - \alpha$:

$$P(\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} \frac{\sin(\Psi)-\Psi\cos(\Psi)}{2\pi^2(3\sin(\Psi)-\sin(3\Psi))} & \text{si } 0 < \Psi \leq \pi/2 \\ \frac{3\sin(5\Psi)-5\sin(\Psi)-\sin(3\Psi)-\sin(7\Psi)}{8\pi^2(5\sin(3\Psi)-10\sin(\Psi)-\sin(5\Psi))} + \frac{2(\Psi-\pi)\cos(\Psi)+\sin(\Psi)-\sin(3\Psi)}{4\pi^2(3\sin(\Psi)-\sin(3\Psi))} & \text{si } \pi/2 \leq \Psi < \pi \end{cases} \qquad (4.27)$$

Si on calcule les limites de $P(\alpha_e,\beta_e)$ quand ψ tend vers $\frac{\pi}{2}$, on trouve que la fonction est continue en $\frac{\pi}{2}$:

$$\lim_{\psi \overset{<}{\to} \frac{\pi}{2}} P(\alpha_e,\beta_e) = \lim_{\psi \overset{>}{\to} \frac{\pi}{2}} P(\alpha_e,\beta_e) = \frac{1}{8\pi^2} \qquad (4.28)$$

Si on calcule l'intégrale de la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$, on vérifie bien la condition de normalisation d'une loi de distribution de probabilité :

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} P(\alpha,\beta)d\beta d\alpha = 1 \tag{4.29}$$

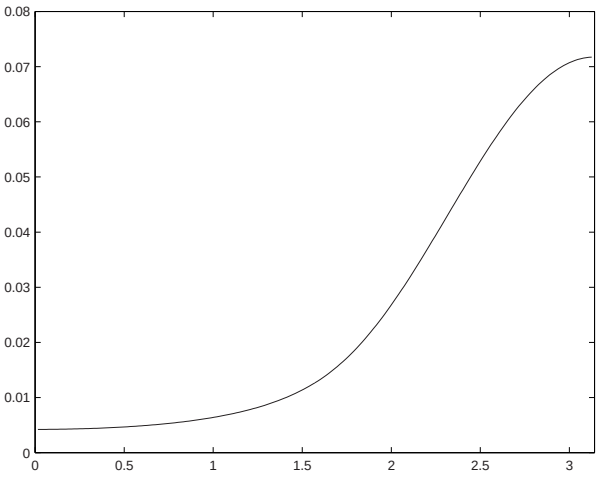


FIG. 4.5 – La probabilité $P(\alpha, \beta)$ en fonction de $\Psi = \beta - \alpha$.

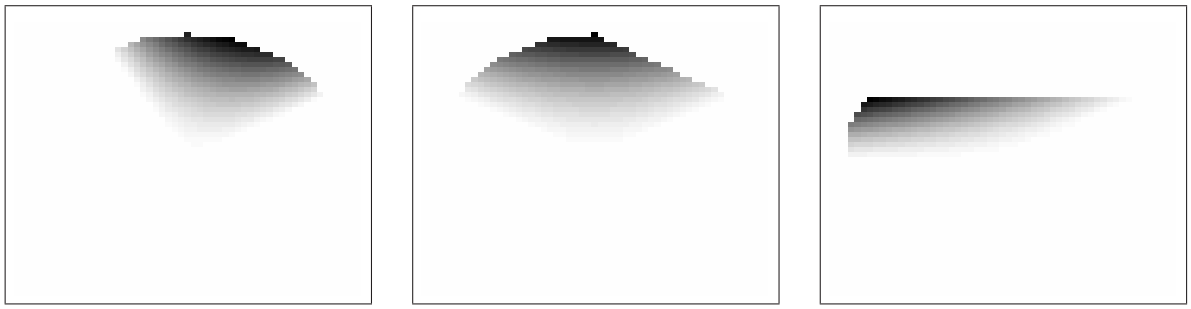
Pour simplifier les notations qui suivent, on pose $K_1 = \frac{2K^2}{P(\alpha_e,\beta_e)}$ qui prend deux formes différentes suivant qu'on est dans le cas $(\beta - \alpha) \in [2k\pi, \pi/2 + 2k\pi]$ ou le cas $(\beta - \alpha) \in [\pi/2 + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$. La probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ s'exprime donc :

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} K_1 r_c^2 \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)} & \text{si } C \in D_{\alpha,\beta} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.30}$$

4.2.3 Discussion

Si on examine la figure 4.5, on peut voir que la probabilité d'avoir les deux événements α_e (le point B est dans la direction α par rapport au point A) et β_e (le point C est dans la direction β par rapport au point A) dépend entièrement de la différence $\Psi = \beta - \alpha$. Cette probabilité est une fonction croissante sur le domaine $\psi =]0, \pi[$, et par symétrie elle est décroissante sur le domaine $\psi =]-\pi, 0[$.

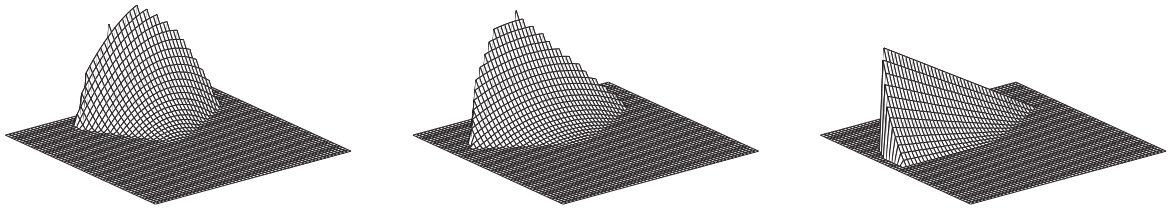
Comme on peut le constater sur la figure 4.6, la probabilité pour que le point C soit à l'extérieur du domaine $D_{\alpha,\beta}$ est nulle. On peut voir la différence de la forme de ce secteur dans les deux cas $(\beta-\alpha) \in]2k\pi, \pi/2+2k\pi]$ (Fig. 4.6-a) et $(\beta-\alpha) \in [\pi/2+2k\pi, \pi+2k\pi[$ (Fig. 4.6-b, Fig. 4.6-c).



(a) Représentation dans le plan de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = 2\pi/3)$

(b) Représentation dans le plan de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = 5\pi/6)$

(c) Représentation dans le plan de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = \pi)$



(d) Représentation surfacique de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = 2\pi/3)$

(e) Représentation surfacique de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = 5\pi/6)$

(f) Représentation surfacique de $P(\mathcal{C}/\alpha = \pi/6, \beta = \pi)$

FIG. 4.6 – Exemples d'évaluation de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha, \beta)$ (dans (a-c) noir=1, blanc=0).

Pour le premier cas $((\beta - \alpha) \in]2k\pi, \pi/2 + 2k\pi])$, on peut voir que cette probabilité est croissante en fonction de r_c. Cela était prévisible car si on examine l'équation 4.30, on remarque que cette probabilité dépend du paramètre r_c^2. De ce fait, le maximum est atteint sur la limite du domaine de définition.

La probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ dépend aussi de $\cos(\alpha+\beta-2\theta_c)$ (dans le premier cas $(\beta-\alpha) \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$ et $(\alpha < \beta)$ et $(k \geq 0)$, on a $(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)) < 0)$. Comme cette fonction atteint son maximum pour la valeur de $\theta_c = \frac{\alpha+\beta}{2}$, on peut affirmer que pour une valeur de r_c fixée, le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ est atteint sur la bissectrice $(\theta_c = \frac{\alpha+\beta}{2})$. En résumé, le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ est donné par le point situé à l'intersection du bord du disque et de la bissectrice $(C_0 = \left(R, \frac{\alpha+\beta}{2}\right))$ si ce point appartient au support $D_{\alpha,\beta}$ de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$.

$$C_0 \in D_{\alpha,\beta} \Rightarrow \begin{cases} (\beta-\alpha) \leq \pi/2 & \text{Secteur angulaire complet} \\ (\beta-\alpha) > \pi/2 \text{ et } \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right) \geq 2\beta-\alpha-\pi & \text{Secteur angulaire incomplet} \end{cases} \quad (4.31)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (\beta-\alpha) \leq \pi/2 & \text{Secteur angulaire complet} \\ (\beta-\alpha) > \pi/2 \text{ et } (\beta-\alpha) \leq 2\pi/3 & \text{Secteur angulaire incomplet} \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\Rightarrow (\beta-\alpha) \leq 2\pi/3 \quad (4.33)$$

On peut donc distinguer les deux cas suivants :

1. $(\beta-\alpha) \in]0+2k\pi, 2\pi/3+2k\pi]$: dans ce cas, le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ est donné par le point C_0 car l'intersection de la bissectrice avec la frontière du disque appartient au support $D_{\alpha,\beta}$.

2. $(\beta-\alpha) \in]2\pi/3+2k\pi, \pi+2k\pi[$: dans ce cas, le point C_0 est situé à l'extérieur du domaine $D_{\alpha,\beta}$. De ce fait le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ est donné par le point $C_1\,(R, 2\beta-\alpha-\pi)$ situé à l'intersection du bord du disque et de la frontière des deux domaines Δ et $D_{2\beta-\alpha-\pi,\beta}$ (la partie triangulaire et le secteur angulaire complet du domaine de définition), ce point correspond à la valeur maximale possible pour r_c.

4.3 Évaluation de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$

Si on s'intéresse maintenant aux relations spatiales entre le point C et le point A, il faut calculer la loi de distribution de l'angle γ conditionnée par les événements α_e et β_e $(P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e))$.

Sachant que l'événement γ_e est en relation avec la position du point C par rapport au point A, on va introduire l'événement $\mathcal{C}$ dans la formulation de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \int_{\mathcal{E}} P(\gamma_e/\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \quad (4.34)$$

D'après la définition de l'événement γ_e :

$$P(\gamma_e/\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } C \in S_{A,\gamma}\ (\theta_c = \gamma) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (4.35)$$

En conséquence, l'intégrale de l'équation 4.34 est réduite au domaine $S_{A,\gamma}$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \int_{S_{A,\gamma}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \quad (4.36)$$

Comme la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ est nulle à l'extérieur du domaine $D_{\alpha,\beta}$, l'intégrale va être réduite à l'intersection de $S_{A,\gamma} \cap D_{\alpha,\beta}$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \int\limits_{S_{A,\gamma}\cap D_{\alpha,\beta}} P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)dC \tag{4.37}$$

D'après la définition du domaine $D_{\alpha,\beta}$, on peut distinguer deux cas correspondant aux deux formes possibles de ce domaine :

1. Dans le cas d'un secteur angulaire complet $\big((\beta-\alpha)\in[2k\pi,\pi/2+2k\pi]\big)$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \int_0^R P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)rdr \tag{4.38}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} K_1\frac{R^4}{4}\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)} & \text{si } \alpha\le\gamma\le\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.39}$$

2. Dans le cas du secteur angulaire incomplet $\big((\beta-\alpha)\in[\pi/2+2k\pi,\pi+2k\pi[\big)$, le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma}\cap D_{\alpha,\beta}$ varie en fonction de γ. Dans le cas où ce secteur est inclus dans le domaine Δ $\big(\alpha<\gamma<(2\beta-\alpha-\pi)\big)$, le rayon est donné par :

$$R_{S_{A,\gamma}\cap D_{\alpha,\beta}} = R\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)} \tag{4.40}$$

Dans l'autre cas, (i.e. $(2\beta-\alpha-\pi)\le\gamma\le\beta\big)$, ce rayon est égal à R et on obtient la même formule que celle obtenue dans le cas du secteur angulaire complet.

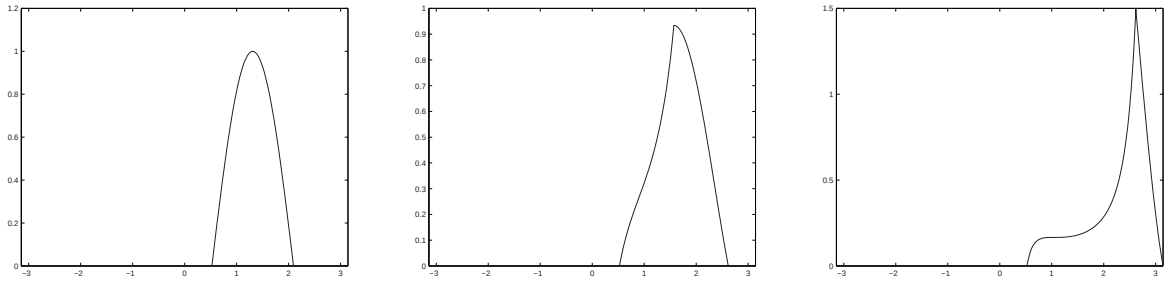
$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} \int\limits_0^{R\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}} P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)rdr & \text{si } \alpha\le\gamma\le2\beta-\alpha-\pi \\ \int\limits_0^{R} P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)rdr & \text{si } 2\beta-\alpha-\pi\le\gamma\le\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.41}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} K_1\frac{\left(R\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}\right)^4}{4}\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)} & \text{si } \alpha\le\gamma\le2\beta-\alpha-\pi \\ K_1\frac{R^4}{4}\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)} & \text{si } 2\beta-\alpha-\pi\le\gamma\le\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.42}$$

Discussion

Si on examine les formules 4.39 et 4.42, on remarque que la distribution de probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ est indépendante du paramètre R qui représente le rayon du disque puisque K_1 est proportionnel à $1/R^4$ et $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ est proportionnel à K_1R^4.

Dans le cas du secteur angulaire complet, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ (Eq. 4.39) dépend de la valeur de $\cos(\alpha+\beta-2\gamma)$. De ce fait, le maximum de cette probabilité est



(a) $P(\gamma_e/\alpha = \pi/6, \beta = 2\pi/3)$ (b) $P(\gamma_e/\alpha = \pi/6, \beta = 5\pi/6)$ (c) $P(\gamma_e/\alpha = \pi/6, \beta = \pi)$

FIG. 4.7 – Exemples d'évaluation de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ en fonction de $\gamma \in]-\pi, \pi[$.

donné pour la valeur de $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

Dans le cas du secteur angulaire incomplet, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ (Eq. 4.42) dépend aussi de la valeur $\frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin(\beta-\gamma)}$ qui est inférieure ou égale à 1 pour $\gamma \in [\alpha, 2\beta - \alpha - \pi]$. Cette fonction prend la valeur maximale 1 pour $\gamma = \alpha$ ou $\gamma = 2\beta - \alpha - \pi$. En conséquence, on peut distinguer deux cas possibles :

1. Si $\frac{\alpha+\beta}{2} \geq (2\beta - \alpha - \pi)$ alors $(\beta - \alpha) \in [\pi/2 + 2k\pi, 2\pi/3 + 2k\pi]$: le maximum de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est obtenu pour $\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}$.

2. Dans l'autre cas le maximum de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est atteint pour $\gamma = (2\beta - \alpha - \pi)$.

4.4 Les cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

4.4.1 $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

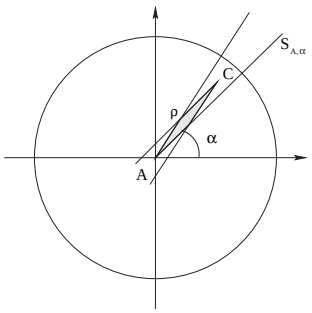


FIG. 4.8 – Définition du domaine ρ pour $\beta = \alpha + 2k\pi$.

Si le point B est dans la direction α par rapport au point A et le point C est dans la direction α par rapport au point B, alors le point C est forcément dans la direction

α par rapport au point A. Dans ce cas le support $D_{\alpha,\beta}$ de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sera limité au secteur $S_{A,\alpha}$. Si on garde les mêmes notations que pour les autres cas, la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ dépend de la surface du domaine ρ (Fig. 4.8) donnée par (cf. démonstration en annexe B) :

$$|\rho| = \frac{r_c^2}{4} \tag{4.43}$$

De ce fait,

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \frac{K^2 r_c^2}{4} \tag{4.44}$$

L'intégrale de cette probabilité sur le domaine $S_{A,\alpha}$ donne la valeur de $P(\alpha_e, \beta_e)$:

$$\begin{aligned} P(\alpha_e, \beta_e) &= \int_0^R P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c \\ P(\alpha_e, \beta_e) &= \frac{1}{16\pi^2} \end{aligned} \tag{4.45}$$

A partir des équations 4.44 et 4.45, on déduit :

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{4r_c^2}{R^4} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.46}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.47}$$

4.4.2 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

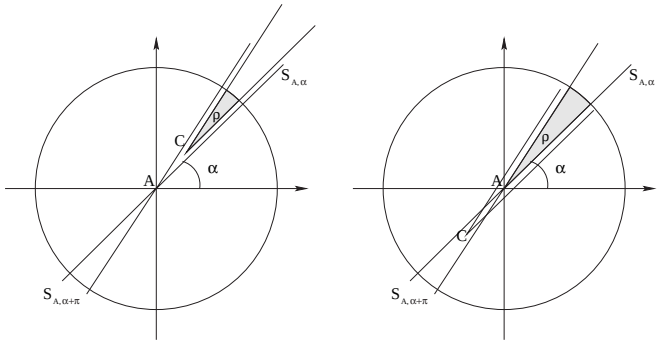


FIG. 4.9 – Définition du domaine ρ pour $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$.

Si le point B est dans la direction α par rapport au point A et le point C est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point B, alors le point C peut être dans la direction α par rapport au point A s'il est situé entre les deux points A et B, sinon il

est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point A. Dans ce cas le support $D_{\alpha,\beta}$ de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est défini par $S_{A,\alpha} \cup S_{A,\alpha+\pi}$. Si on garde les mêmes notations que pour les autres cas, la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ dépend de la surface du domaine ρ (Fig. 4.9) donnée par (cf. démonstration en annexe B) :

$$|\rho| = \begin{cases} \frac{(R-r_c)^2}{2} d\theta & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{R^2}{2} d\theta & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \end{cases} \tag{4.48}$$

De ce fait,

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{K^2(R-r_c)^2}{2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{K^2R^2}{2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.49}$$

Pour évaluer $P(\alpha_e, \beta_e)$, il faut intégrer la loi de probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $D_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} P(\alpha_e, \beta_e) &= \int_0^R \left(\frac{K^2(R-r_c)^2}{2} + \frac{K^2R^2}{2} \right) r_c dr_c \\ P(\alpha_e, \beta_e) &= \frac{7}{24\pi^2} \end{aligned} \tag{4.50}$$

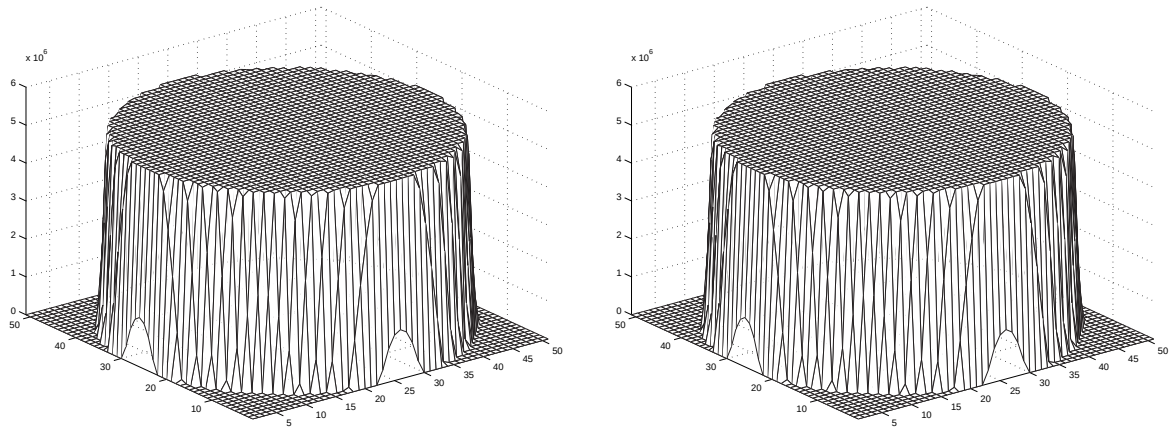
A partir des deux équations 4.49 et 4.50, on peut évaluer les deux probabilités $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ et $P(\gamma_e/, \alpha_e, \beta_e)$.

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{12(R-r_c)^2}{7R^4} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{12}{7R^2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.51}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} 1/7 & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \\ 6/7 & \text{si } \gamma = \alpha + \pi + 2k\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.52}$$

4.5 Discussion

Pour valider les résultats obtenus, nous avons effectué une simulation numérique pour calculer la valeur de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ pour $\gamma \in [-\pi, \pi]$ et $\beta \in [-\pi, \pi]$. Pour cela nous avons comparé le résultat théorique avec celui obtenu par une simulation numérique. Nous allons traiter seulement le cas où α est égal à 0 car les autres cas sont exactement les mêmes à une rotation près (cela est dû à la définition de notre distribution de probabilité des points). Comme les cas abordés dans le paragraphe 4.2.1 dépendent de la différence $\beta - \alpha$, cette représentation est suffisante pour représenter tous les cas possibles. Le résultat obtenu par un calcul direct de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ en utilisant les formules



(a) Le point B. (b) Le point C.

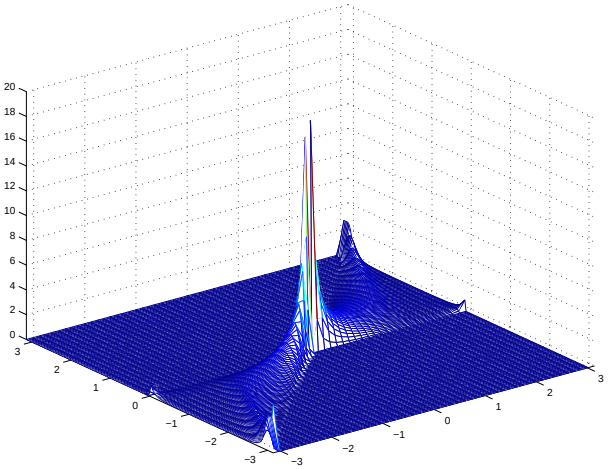
FIG. 4.10 – Histogramme des tirages aléatoires des points B et C.

Eq. 4.39 et Eq. 4.42 est donné sur la figure 4.11-a.

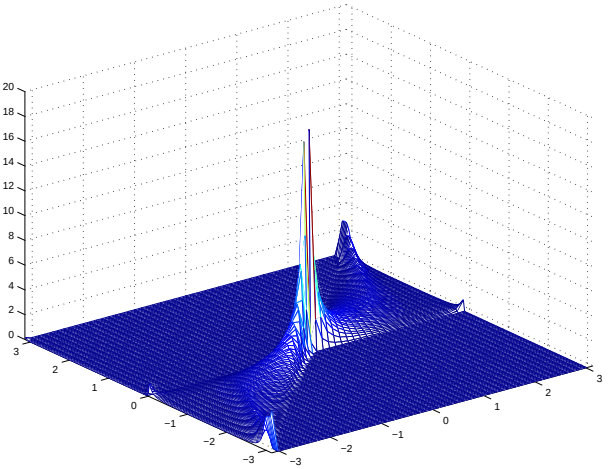
Afin d'effectuer un tirage aléatoire uniforme des points B et C dans le disque de rayon R, nous avons utilisé le générateur de nombres aléatoires de l'Ecuyer [ECUY-88, WILL-92] dont la période est supérieure à 2×10^{18}. Le tirage des points se fait à l'intérieur de la fenêtre carrée de coté $2R$ et on rejette l'ensemble des points situés à l'extérieur du disque de rayon R. Sur la figure 4.10, on peut voir que nos deux distributions sont parfaitement uniformes sur un disque. Nous avons effectué 10^{10} tirages aléatoires de points pour estimer la fonction $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$. Comme la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est nulle partout sauf dans l'intervalle $]\alpha, \beta[$ (ou $]\beta, \alpha[$ suivant les cas), nous avons pris un pas d'échantillonnage différent pour le paramètre γ afin de ne pas avoir des problèmes dans le cas où β est proche de α. Le pas d'échantillonnage à été fixé à $\pi/300$ pour les paramètres β et α, et à $\pi/1200$ pour γ, cette différence est due au fait que la loi de probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est non nulle entre 0 et β donc afin de pouvoir assurer au moins quelques points sur la courbe quand β s'approche de 0, on fixe le rapport entre le pas d'échantillonnage de γ et celui de β à 4 (cette limite est fixée par la taille physique de la mémoire). A cause d'un problème de lisibilité de la figure 4.11-b, nous avons réduit ces pas d'échantillonnage pour β à $\pi/25$ et celui de γ à $\pi/200$ pour la représentation.

Afin de pouvoir comparer les deux résultats, nous avons représenté sur la figure 4.11-b le résultat de la simulation de la loi de probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$, et sur la figure 4.11-c le maximum pour β constant de la différence en valeur absolue entre le calcul analytique et la simulation. On peut remarquer que l'erreur est importante pour trois valeurs qui correspondent au trois pics importants au voisinage de $-\pi$, 0 et $+\pi$:

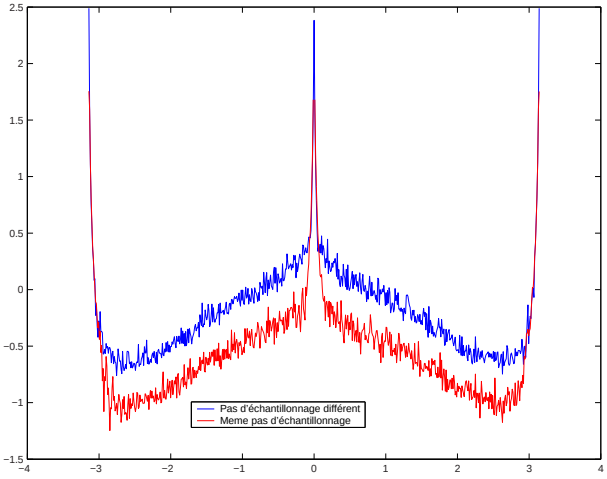
1. Au voisinage de 0 : comme la résolution du calcul pour γ est beaucoup plus importante que celle de α et β, on obtient pour la simulation un lobe au voisinage de zéro qui remplace le Dirac attendu(Fig. 4.12-a), ce phénomène disparaît



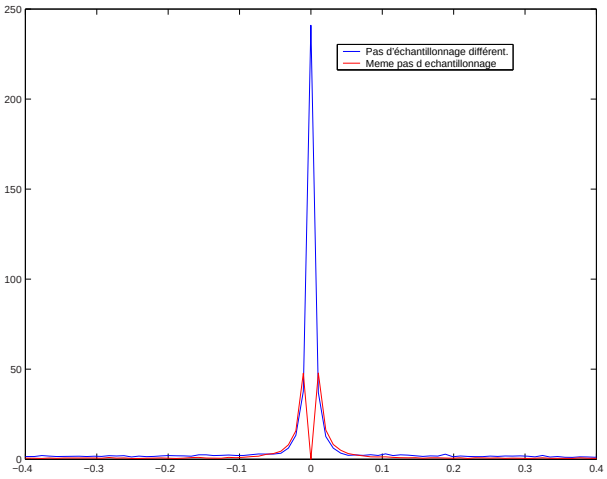
(a) la loi de probabilité $P(\gamma/\beta, \alpha = 0)$ évaluée à partir des équations 4.39, 4.42, 4.47 et 4.52



(b)La loi de probabilité $P'(\gamma/\beta, \alpha = 0)$ obtenue par simulation numérique.



(c)
$\log_{10}(\max_\gamma |P(\gamma/\beta, \alpha = 0) - P'(\gamma/\beta, \alpha = 0)|)$.

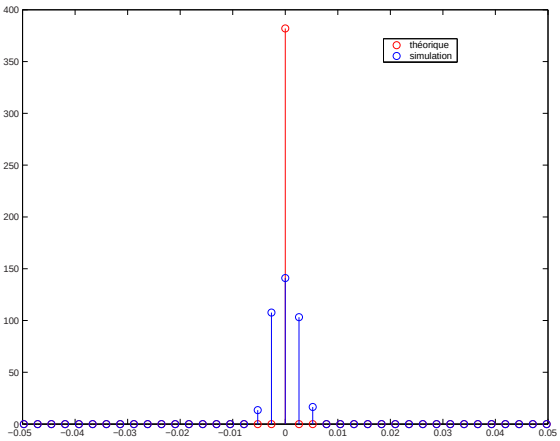


(d)
$\max_\gamma |P(\gamma/\beta, \alpha = 0) - P'(\gamma/\beta, \alpha = 0)|$ au voisinage de 0.

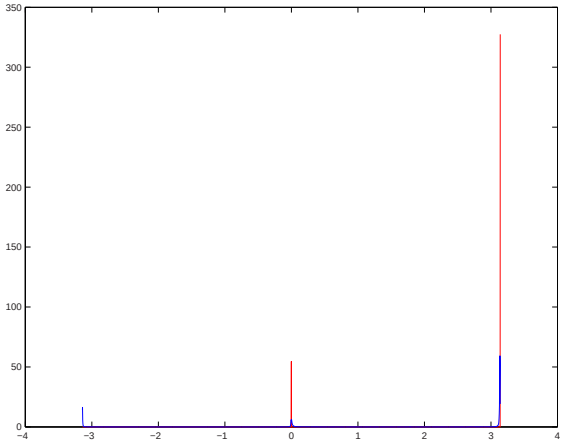
FIG. 4.11 – Comparaison entre $P(\gamma/\beta, \alpha = 0)$ calculée directement et la simulation numérique dans le cas d'une distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque.

comme on peut le voir sur la figure 4.11-d quand le pas d'échantillonnage est le même pour les trois paramètres. Malheureusement dans ce cas, on obtient des erreurs plus importantes quand $\beta = \alpha \pm \epsilon$ (ϵ représente le pas d'échantillonnage). Ce phénomène était prévisible car dans ce cas la courbe n'est représentée que par 2 points.

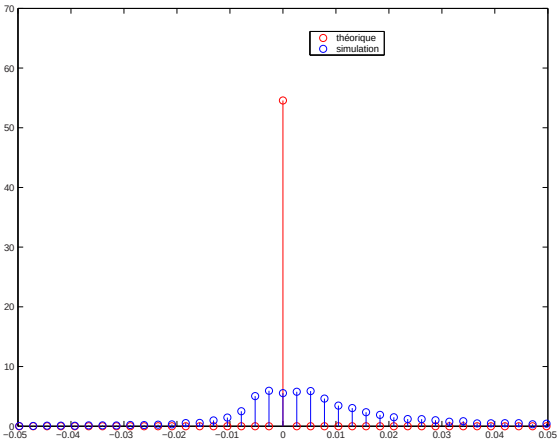
2. Au voisinage de $-\pi$ et π : cette erreur est due à un problème d'arrondi. Comme la résolution de α et β n'est pas très importante par rapport à γ, le calcul numérique



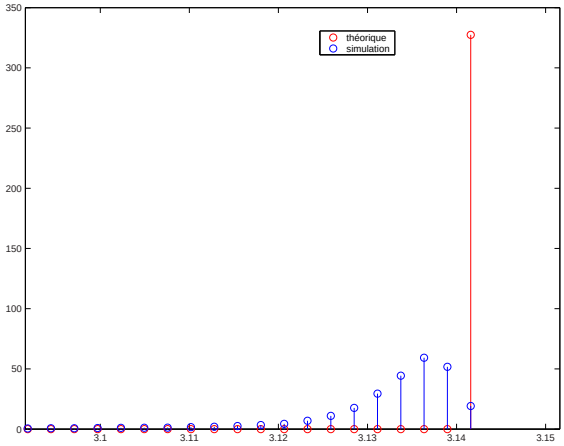
(a) Comparaison entre $P(\gamma_e/\beta = 0, \alpha = 0)$ calculée directement et la simulation.



(b) Comparaison entre $P(\gamma_e/\beta = \pi, \alpha = 0)$ calculée directement et la simulation.



(c) Comparaison entre $P(\gamma_e/\beta = \pi, \alpha = 0)$ calculée directement et la simulation au voisinage de $(\gamma = 0)$.

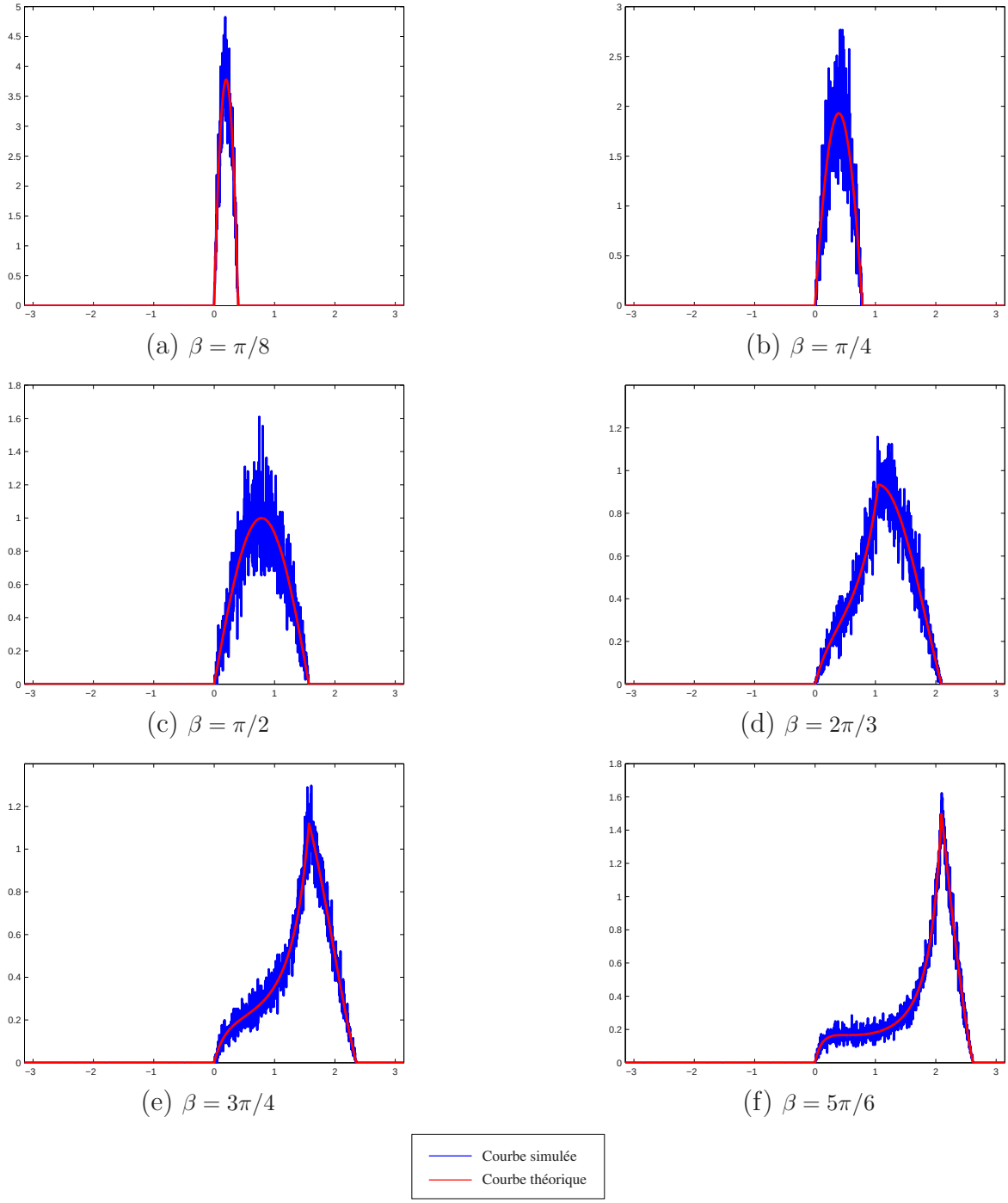


(d) Comparaison entre $P(\gamma_e/\beta = \pi, \alpha = 0)$ calculée directement et la simulation au voisinage de $(\gamma = \pi)$.

FIG. 4.12 – Problème d'arrondi pour la simulation numérique lors du calcul de $P(\gamma_e/\beta = 0, \alpha = 0)$ et $P(\gamma_e/\beta = \pi, \alpha = 0)$.

de l'angle γ donne deux valeurs différentes $-\pi$ et π (Fig. 4.12-b) qui représentent exactement la même direction. Par conséquent, ces deux pics doivent être cumulés dans un seul pic au voisinage de π. Comme pour le premier cas $(\beta = 0)$, on peut voir sur les deux figures 4.12-c et 4.12-d que les deux pics au voisinage de zéro et π ne sont pas des diracs car la résolution de γ est plus importante que celle de α et β.

Si on compare le résultat de plusieurs courbes de la loi $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ (Fig. 4.13) pour β fixé, on peut voir que les résultats sont proches et les deux courbes se superposent



(a) $\beta = \pi/8$ (b) $\beta = \pi/4$

(c) $\beta = \pi/2$ (d) $\beta = 2\pi/3$

(e) $\beta = 3\pi/4$ (f) $\beta = 5\pi/6$

FIG. 4.13 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\gamma_e/\beta_e, \alpha = 0)$.

très bien même dans le cas où β est proche de 0 (Fig. 4.13-a) ou de π (Fig. 4.13-f).

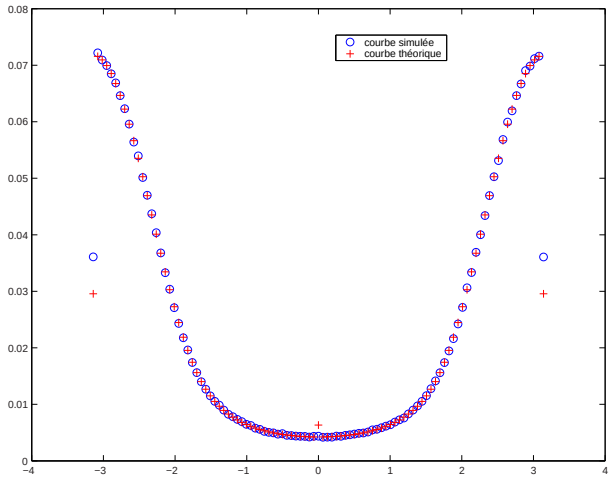


FIG. 4.14 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\alpha_e, \beta_e)$ pour $\alpha = 0$.

Si on s'intéresse maintenant à la loi $P(\alpha_e, \beta_e)$, on peut voir sur la figure 4.14 que les deux résultats sont exactement les mêmes et que les deux courbes se superposent bien sauf en 0 et π. cette différence est liée à la discontinuité de cette fonction en ces points. Comme la simulation donne une moyenne sur un intervalle de longueur $\epsilon = \pi/300$, la valeur de $P(\alpha = 0, \beta = \pi)$ obtenue par simulation est supérieure à la valeur théorique car au voisinage de π la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est supérieure à la valeur de $P(\alpha_e, \beta = \pi)$. Cette différence est importante, ce qui explique que la courbe simulée est discontinue. Dans le cas de $(\beta = 0)$, cette différence n'est pas assez importante pour observer la discontinuité sur la courbe résultat de la simulation numérique.

4.6 Cas d'une fenêtre carrée

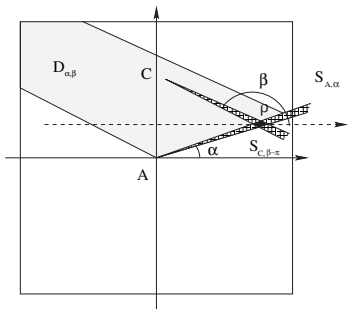


FIG. 4.15 – Définition du domaine ρ dans le cas d'une fenêtre carrée.

L'expression de $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ dépend uniquement de la forme du domaine ρ qui représente l'intersection des deux secteurs angulaires $S_{C,\beta-\pi}$ et $S_{A,\alpha}$. Pour tous les points C appartenant au domaine de définition de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ $(D_{\alpha,\beta})$, l'intersection des deux secteurs angulaires représente la même forme du domaine ρ (Fig. 4.15) que celle du cas de la distribution uniforme à l'intérieur d'un cercle. En conséquence, le passage à une autre forme de fenêtre (par exemple carrée ou rectangulaire) n'a aucune incidence sur l'équation 4.21, que nous rappelons ici :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = 2r_c^2 K^2 \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\theta_c)}{3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)} \tag{4.21}$$

La seule différence consiste à modifier la constante K qui représente la probabilité de distribution des points dans la fenêtre qui est différente dans ce cas. En supposant que le côté de la fenêtre carrée a une longueur de $2R$, on a :

$$P(R_n \in [r \pm dr], \Theta_n \in [\theta \pm d\theta])rdrd\theta = \begin{cases} \frac{1}{(2R)^2} rdrd\theta & \text{si } -R \leq r\cos(\theta) \leq R \\ & \text{et } -R \leq r\sin(\theta) \leq R \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{4.53}$$

ce qui signifie que :

$$K = \frac{1}{4R^2} \tag{4.54}$$

Le changement de la forme de la fenêtre entraîne une modification de la forme du support $D_{\alpha,\beta}$ de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$. Cette modification implique des expressions différentes pour les probabilités suivantes :

- la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ qui représente l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $D_{\alpha,\beta}$,
- la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ qui est égale au rapport de $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur $P(\alpha_e, \beta_e)$,
- la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ qui représente l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $S_{A,\gamma} \cap D_{\alpha,\beta}$.

Avant de commencer, on va étudier les différents cas pour la définition du domaine dans le cas d'une fenêtre carrée de coté $2R$. Afin de réduire le nombre de cas possibles, on suppose que :

- $\alpha \in [-\pi/4, \pi/4]$: les autres cas peuvent être déduits à partir de celui-ci en utilisant des rotations de $\pi/2$.
- $\beta \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$: si ce n'est pas le cas on rajoute ou on soustrait des multiples de 2π.

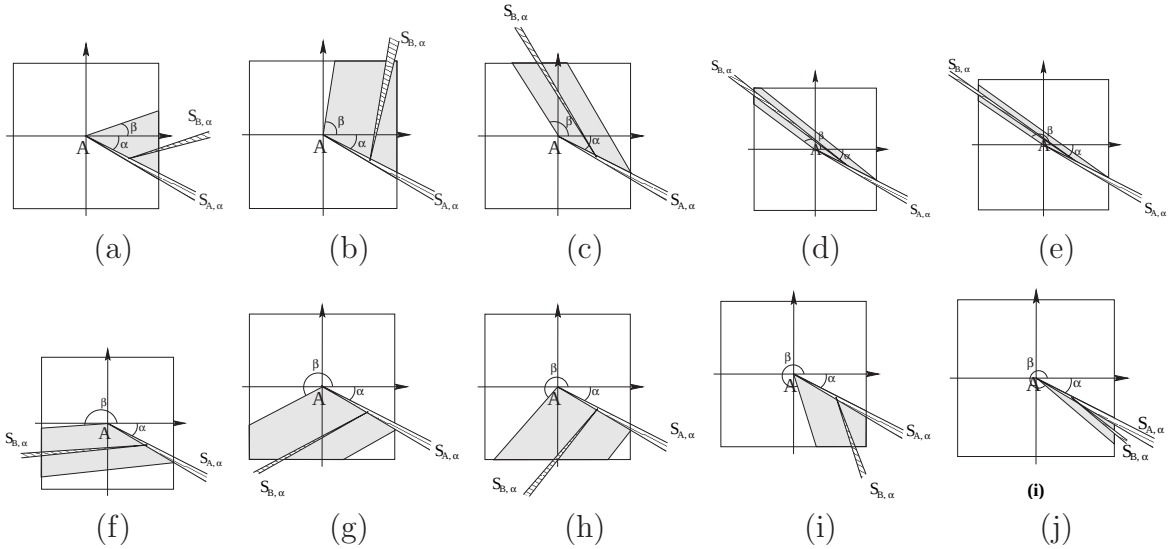


FIG. 4.16 – Les différentes formes possibles du domaine $D_{\alpha,\beta}$ pour le cas d'une fenêtre carrée.

Les différents cas possibles dans le cas d'une fenêtre carrée sont représentés sur la figure 4.16. Cette classification à été faite suivant le cas où le domaine est en contact avec un ou deux bords de la fenêtre carrée. On peut remarquer déjà que les cinq derniers cas sont les symétriques des cinq premiers cas. Par exemple, le cas (j) est le cas symétrique du (a), et (h) est le cas symétrique du (c). Ces cinq derniers cas correspondent au cas particulier $(\beta - \alpha) \in [\pi + 2k\pi, 2\pi + 2k\pi]$. Dans la suite, on ne va étudier que les cinq premiers cas.

4.6.1 Premier cas : $\alpha < \beta \leq \pi/4$

Dans ce cas le support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est représenté par le domaine D_1 (Fig. 4.17), les valeurs de $P(\alpha_e, \beta_e)$ et $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ sont données par :

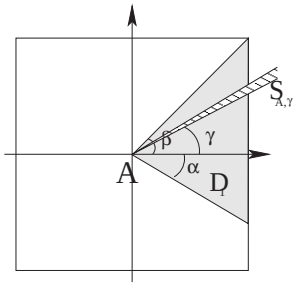


FIG. 4.17 – Support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour le cas $\alpha \leq \beta \leq \pi/4$.

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{C \in D_1} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.55}$$

$$P(\gamma_e / \alpha_e, \beta_e) = \int_{C \in S_{A,\gamma} \cap D_1} P(\mathcal{C} / \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.56}$$

Le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma} \cap D_1$ est égal à (Fig. 4.17) :

$$R_{S_{A,\gamma} \cap D_1} = \frac{R}{\cos(\gamma)}$$

Après l'évaluation des équations 4.55 et 4.56, on obtient :

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{\alpha}^{\beta} \int_{0}^{R/\cos(\theta_c)} 2 r_c^2 K^2 \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\theta_c)}{3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)} r_c dr_c d\theta_c \tag{4.57}$$

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \frac{1}{384 \cos^2(\alpha) \cos^2(\beta)} \tag{4.58}$$

$$P(\gamma_e / \alpha_e, \beta_e) = \int_{0}^{R/\cos(\gamma)} \frac{2 r_c^2 K^2}{P(\alpha_e, \beta_e)} \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\gamma)}{3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)} r_c dr_c \tag{4.59}$$

$$P(\gamma_e / \alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{1}{32 P(\alpha_e, \beta_e)} \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\gamma)}{(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)) \cos^4(\gamma)} & \text{Si } \alpha \leq \gamma \leq \beta \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.60}$$

4.6.2 Deuxième cas : $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$

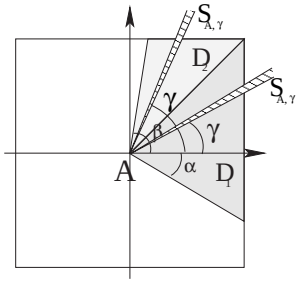


FIG. 4.18 – Support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour le cas $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$.

Dans ce cas le support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ se résume à l'union de deux domaines D_1 et D_2 (Fig. 4.18), donc :

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{C \in (D_1 \cup D_2)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.61}$$

$$P(\gamma_e / \alpha_e, \beta_e) = \int_{C \in S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2)} P(\mathcal{C} / \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.62}$$

Le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2)$ est donné par (Fig. 4.18) :

$$R_{S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2)} = \begin{cases} \frac{R}{\cos(\gamma)} & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \pi/4 \\ \frac{R}{\sin(\gamma)} & \text{si } \pi/4 \leq \gamma \leq \beta \end{cases}$$

Après l'évaluation des équations 4.61 et 4.62 on obtient :

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{\alpha}^{\pi/4} \int_{0}^{R/\cos(\theta_c)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c + \int_{\pi/4}^{\beta} \int_{0}^{R/\sin(\theta_c)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c \tag{4.63}$$

$$\begin{aligned} P(\alpha_e, \beta_e) = {} & \frac{\cos^2(\alpha+\pi/4)\,(8\sin(\alpha-\beta) - 4\sin(\alpha+\beta) + 4\cos(\alpha+\beta) + 4\cos(\alpha-\beta))}{192\cos^2(\alpha)\,(3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta))} + \\ & \frac{\cos(\beta+\pi/4)^2\,(8\sin(\alpha-\beta) + 4\cos(\alpha-\beta) - 4\cos(\alpha+\beta) - 4\sin(\alpha+\beta))}{192\sin^2(\beta)\,(3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta))} \end{aligned} \tag{4.64}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \int_{0}^{R/\cos(\gamma)} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \pi/4 \\ \int_{0}^{R/\sin(\gamma)} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \pi/4 \leq \gamma \leq \beta \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.65}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{1}{32P(\alpha_e,\beta_e)} \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))\cos^4(\gamma)} & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \pi/4 \\ \frac{1}{32P(\alpha_e,\beta_e)} \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))\sin^4(\gamma)} & \text{si } \pi/4 \leq \gamma \leq \beta \\ 0 & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{4.66}$$

4.6.3 Troisième cas : $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/4$

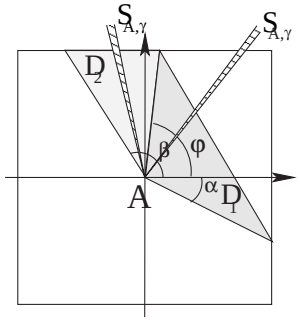


FIG. 4.19 – Support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour le cas $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/4$.

Dans ce cas le support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est limité à l'union des deux domaines D_1 et D_2 (Fig. 4.19) tels que $D_1 = [\![\alpha, \varphi]\!]$ et $D_2 = [\![\varphi, \beta]\!]$. La différence par

rapport au cas précédent, c'est que les côtés du domaine D_1 ne sont plus en contact avec les frontières de la fenêtre. L'angle φ qui permet de déterminer la frontière entre les deux domaines D_1 et D_2 est donné par l'expression :

$$\varphi = \operatorname{arccotg}\left(\frac{\cos(\alpha)\cos(\beta)+\sin(\beta-\alpha)}{\cos(\alpha)\sin(\beta)}\right) \tag{4.67}$$

La probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $D = (D_1 \cup D_2)$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_D P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.68}$$

De même, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ sera calculée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2)$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \int_{S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2)} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.69}$$

Le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2)$ n'est pas constant, il sera différent suivant les cas où $S_{A,\gamma} \subset D_1$ ou $S_{A,\gamma} \subset D_2$:

$$R_{S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2)} = \begin{cases} \frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)} & \text{si } \alpha \le \gamma \le \varphi \\ \frac{R}{\sin(\gamma)} & \text{si } \varphi \le \gamma \le \beta \end{cases}$$

En remplaçant dans les équations 4.68 et 4.69, on obtient :

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{\alpha}^{\varphi} \int_{0}^{\frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c + \int_{\varphi}^{\beta} \int_{0}^{R/\sin(\gamma)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c \tag{4.70}$$

$$= \frac{\sin^2(\varphi-\alpha)\sin^2(\varphi+\beta)}{128\cos^4(\alpha)\left(\cos^2(\beta)-\cos^2(\varphi)\right)^2} + \frac{\sin^2(\beta-\varphi)\left(3\cos(\alpha-\beta-\varphi)-\cos(\alpha-\beta+\varphi)-2\cos(\alpha+\beta-\varphi)\right)}{192\sin^3(\varphi)\sin^2(\beta)\left(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)\right)} \tag{4.71}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \int_0^{\frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \alpha \le \gamma \le \varphi \\ \int_0^{R/\sin(\gamma)} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \varphi \le \gamma \le \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.72}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma))\sin^4(\alpha-\beta)}{32P(\alpha_e,\beta_e)\sin^4(\gamma-\beta)\cos^4(\alpha)(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))} & \text{si } \alpha \le \gamma \le \varphi \\ \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{32P(\alpha_e,\beta_e)(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))\sin^4(\gamma)} & \text{si } \varphi \le \gamma \le \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.73}$$

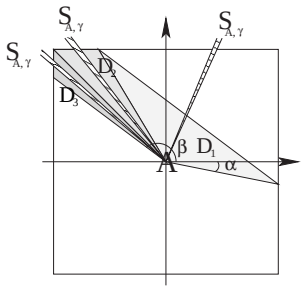


FIG. 4.20 – Support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour le cas $\beta \geq 3\pi/4$ et $\varphi \leq 3\pi/4$.

4.6.4 Quatrième cas : $\beta \geq 3\pi/4$ et $\varphi \leq 3\pi/4$

Le support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ peut être décomposé en trois domaines $D_1 = [\![\alpha, \varphi]\!]$, $D_2 = [\![\varphi, 3\pi/4]\!]$ et $D_3 = [\![3\pi/4, \beta]\!]$. Le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$ sera différent suivant que $S_{A,\gamma} \subset D_1$ ou $S_{A,\gamma} \subset D_2$ ou $S_{A,\gamma} \subset D_3$:

$$R_{S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)} = \begin{cases} \frac{R \sin(\alpha - \beta)}{\sin(\gamma - \beta)\cos(\alpha)} & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \varphi \\ \frac{R}{\sin(\gamma)} & \text{si } \varphi \leq \gamma \leq 3\pi/4 \\ \frac{-R}{\cos(\gamma)} & \text{si } 3\pi/4 \leq \gamma \leq \beta \end{cases}$$

La probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $(D_1 \cup D_2 \cup D_3)$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int\limits_{(D_1 \cup D_2 \cup D_3)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.74}$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\varphi} \int\limits_{0}^{\frac{R \sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta_c - \beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c + \int\limits_{\varphi}^{\pi/4} \int\limits_{0}^{\frac{R}{\sin(\theta_c)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c$$

$$+ \int\limits_{\pi/4}^{\beta} \int\limits_{0}^{\frac{-R}{\cos(\theta_c)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c \tag{4.75}$$

$$= \frac{\sin^2(\varphi - \alpha)\sin^2(\varphi + \beta)}{128\cos^4(\alpha)\left(\cos^2(\beta) - \cos^2(\varphi)\right)^2} + \frac{4\cos(\alpha - \beta) + 2\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)}{48\left(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)\right)} -$$
$$\frac{\cos(\varphi)\cos(\alpha - \beta)\left(2\cos^2(\varphi) - 3\right) + \cos(\alpha + \beta - 3\varphi)}{96\sin^3(\varphi)\left(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)\right)} +$$
$$\frac{\sin(\alpha + \beta) + 2\sin(\alpha - \beta)}{96\cos^2(\beta)\left(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)\right)} \tag{4.76}$$

De même, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ sera calculée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2 \cup D_3)$:

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \int\limits_{S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2\cup D_3)} P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)dC \tag{4.77}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_0^{\frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)r_c dr_c & \text{si } \alpha\le\gamma\le\varphi \\ \int\limits_0^{\frac{R}{\sin(\gamma)}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)r_c dr_c & \text{si } \varphi\le\gamma\le 3\pi/4 \\ \int\limits_0^{\frac{-R}{\cos(\gamma)}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)r_c dr_c & \text{si } 3\pi/4\le\gamma\le\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.78}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma))\sin^4(\beta-\alpha)}{32P(\alpha_e,\beta_e)\sin^4(\gamma-\beta)\cos^4(\alpha)(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))} & \text{si } \alpha\le\gamma\le\varphi \\ \frac{1}{32P(\alpha_e,\beta_e)}\frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))\sin^4(\gamma)} & \text{si } \varphi\le\gamma\le 3\pi/4 \\ \frac{\cos(\alpha+\beta-2\gamma)-\cos(\beta-\alpha)}{32P(\alpha_e,\beta_e)(3\sin(\beta-\alpha)+\sin(3\alpha-3\beta))\cos^4(\gamma)} & \text{si } 3\pi/4\le\gamma\le\beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.79}$$

4.6.5 Cinquième cas : $\beta < \alpha + \pi$ et $\varphi \geq 3\pi/4$

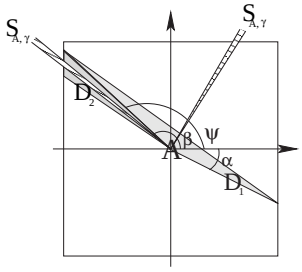


FIG. 4.21 – Support de la probabilité $P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)$ pour le cas $\beta < \alpha+\pi$ et $\varphi \geq 3\pi/4$.

Dans ce cas, le support de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e)$ est limité à l'union des deux triangles $D_1 = [\![\alpha,\psi]\!]$ et $D_2 = [\![\psi,\beta]\!]$ (Fig. 4.21). L'angle ψ est déterminé par l'équation suivante :

$$\psi = \text{arccotg}\left(\frac{\cos(\beta-\alpha)+\cos(\beta+\alpha)}{\sin(\beta+\alpha)+3\sin(\beta-\alpha)}\right) \tag{4.80}$$

Le rayon du secteur angulaire $S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2)$ sera différent suivant que $S_{A,\gamma}\subset D_1$ ou $S_{A,\gamma}\subset D_2$:

$$R_{S_{A,\gamma}\cap(D_1\cup D_2)} = \begin{cases} \frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)} & \text{si } \alpha\le\gamma\le\psi \\ \frac{-R}{\cos(\gamma)} & \text{si } \psi\le\gamma\le\beta \end{cases}$$

La probabilité $P(\alpha_e,\beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)$ sur le domaine $(D_1\cup D_2)$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int\limits_{(D_1 \cup D_2)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.81}$$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\psi} \int\limits_{0}^{\frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\theta_c-\beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c + \int\limits_{\psi}^{\beta} \int\limits_{0}^{\frac{-R}{\cos(\theta_c)}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c d\theta_c \tag{4.82}$$

$$= \frac{\sin^2(\psi-\alpha)\sin^2(\psi+\beta)}{128\cos^4(\alpha)\left(\cos^2(\beta)-\cos^2(\psi)\right)^2} + \frac{\sin^2(\beta-\psi)\left(2\sin(\beta-\psi+\alpha)-3\sin(\beta+\psi-\alpha)-\sin(\beta-\psi-\alpha)\right)}{192\cos^3(\psi)\cos^2(\beta)\left(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta)\right)} \tag{4.83}$$

De même, l'évaluation de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ dépend du domaine dans lequel se trouve l'angle γ :

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \int\limits_{S_{A,\gamma} \cap (D_1 \cup D_2)} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.84}$$

$$= \begin{cases} \int\limits_{0}^{\frac{R\sin(\alpha-\beta)}{\sin(\gamma-\beta)\cos(\alpha)}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \psi \\ \int\limits_{0}^{\frac{-R}{\cos(\gamma)}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) r_c dr_c & \text{si } \psi \leq \gamma \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.85}$$

$$= \begin{cases} \frac{(\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma))\sin^4(\beta-\alpha)}{32P(\alpha_e,\beta_e)\sin^4(\gamma-\beta)\cos^4(\alpha)(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))} & \text{si } \alpha \leq \gamma \leq \psi \\ \frac{\cos(\beta-\alpha)-\cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{32P(\alpha_e,\beta_e)(3\sin(\alpha-\beta)-\sin(3\alpha-3\beta))\cos^4(\gamma)} & \text{si } \psi \leq \gamma \leq \beta \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.86}$$

4.6.6 Cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

4.6.6.1 $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Si le point C est dans la direction α par rapport au point B lui-même dans la direction α par rapport au point A alors le point C est forcément dans la direction α par rapport au point A. Le support de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sera donc réduit au secteur angulaire $S_{A,\alpha}$ dont le rayon est $R_{S_{A,\alpha}}$:

$$R_{S_{A,\alpha}} = \frac{R}{\cos(\alpha)}$$

Si on examine la figure 4.22, on peut voir que la forme et la surface du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\alpha-\pi}$ ne changent pas par rapport au cas de la fenêtre circulaire, la seule différence est la surface du support de la probabilité $P(C, \alpha_e, \beta_e)$, donc :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \frac{K^2 r_c^2}{4} \tag{4.87}$$

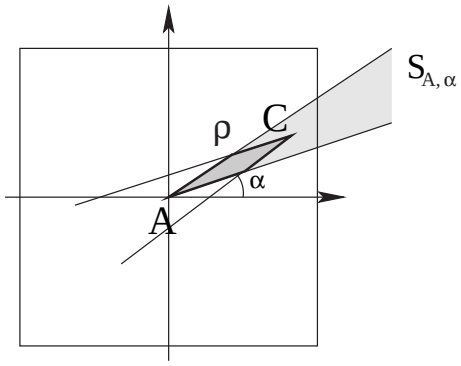


FIG. 4.22 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour le cas $\beta = \alpha + 2k\pi$

L'intégrale de cette probabilité sur le domaine $S_{A,\alpha}$ nous permet de déterminer la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_0^{R/\cos(\alpha)} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) r_c dr_c \tag{4.88}$$

$$= \frac{1}{256\cos^4(\alpha)} \tag{4.89}$$

Remarque :

la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ n'est pas continue quand $\beta \to \alpha$ car la limite de la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ (Eq. 4.58) vaut :

$$\lim_{\beta \to \alpha} P(\alpha_e, \beta_e) = \frac{1}{384\cos^4(\alpha)} \tag{4.90}$$

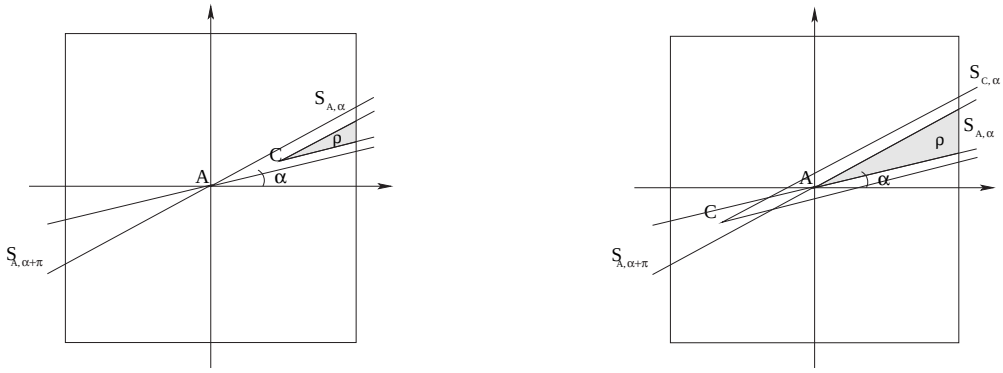
A partir des équations 4.87 et 4.89, on déduit :

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{4r_c^2}{R^4\cos^4(\alpha)} & \text{si } \mathcal{C} \in S_{A,\alpha} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.91}$$

$$P(\gamma_e, /\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.92}$$

4.6.6.2 $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Si le point C est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point B lui-même dans la direction α par rapport au point A alors le point C peut être dans la direction α ou la direction $\alpha + \pi$ suivant qu'il est placé entre le point A et le point B ou que le point A



(a) Le point C est dans la direction α par rapport au point A.

(b) Le point C est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point A.

FIG. 4.23 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta = \alpha + \pi$.

est placé entre les deux autres. Dans les deux cas la surface du domaine ρ est donnée par :

$$|\rho| = \begin{cases} \frac{\left(\frac{R}{\cos(\alpha)} - r_c\right)^2}{2} d\theta & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{R^2}{2\cos^2(\alpha)} d\theta & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \end{cases} \tag{4.93}$$

Donc :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} \frac{K^2\left(\frac{R}{\cos(\alpha)} - r_c\right)^2}{2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{K^2 R^2}{2\cos^2(\alpha)} & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.94}$$

La probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ sera déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le support $D_{\alpha,\beta}$:

$$\begin{aligned} P(\alpha_e, \beta_e) &= \int_0^{R/\cos(\alpha)} \left(\frac{K^2\left(\frac{R}{\cos(\alpha)} - r_c\right)^2}{2} + \frac{K^2 R^2}{2\cos^2(\alpha)} \right) r_c dr_c \\ P(\alpha_e, \beta_e) &= \frac{7}{384\cos^4(\alpha)} \end{aligned} \tag{4.95}$$

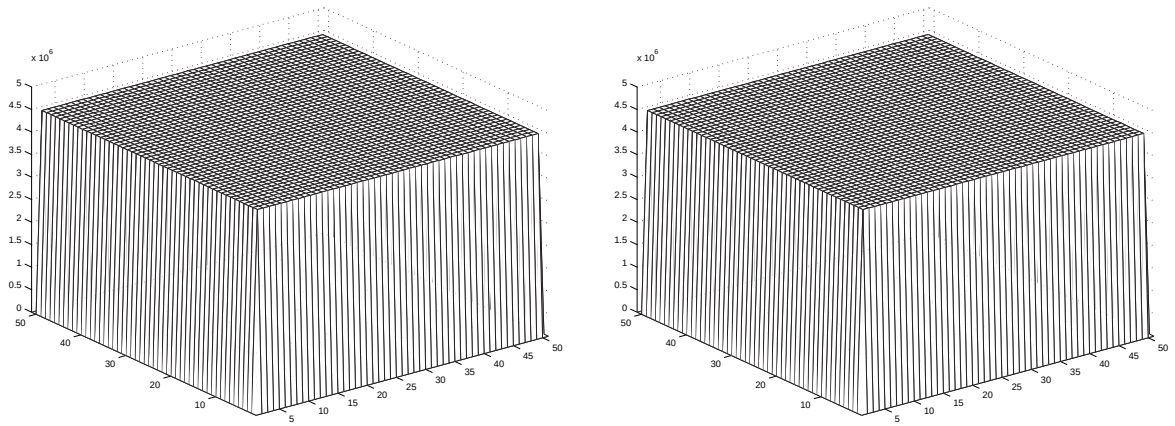
A partir des deux équations 4.94 et 4.95, on peut évaluer les deux probabilités $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ et $P(\gamma_e/, \alpha_e, \beta_e)$:

$$P(\mathcal{C}/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} \frac{12\left(R\cos(\alpha)-r_c\cos^2(\alpha)\right)^2}{7R^4} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{12\cos^2(\alpha)}{7R^2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha+\pi} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.96}$$

$$P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} 1/7 & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \\ 6/7 & \text{si } \gamma = \alpha + \pi + 2k\pi \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{4.97}$$

Si on examine les deux équations 4.92 et 4.97, on remarque que dans le cas où $\beta = \alpha + k\pi$ la probabilité $\gamma_e/\alpha_e,\beta_e$ est indépendante de la taille de fenêtre (le paramètre R) et de l'angle α.

4.6.7 Simulation



(a) Le point B. (b) Le point C.

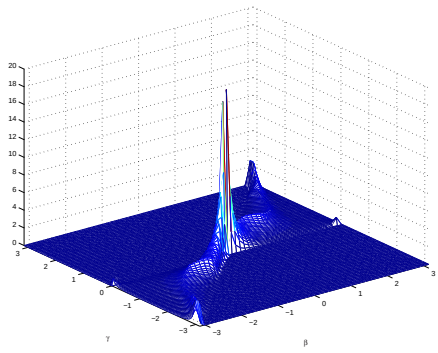
FIG. 4.24 – Histogramme des tirages aléatoires des points B et C.

Pour valider les résultats obtenus, nous avons calculé par simulation numérique la courbe de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ pour $(\alpha,\beta,\gamma) \in [-\pi,\pi]^3$. Cette loi de probabilité dépend des trois paramètres α,β et γ, ce qui rend sa représentation graphique impossible. Pour pouvoir comparer la courbe théorique et la courbe simulée, on va se limiter au cas $\alpha = 0$.

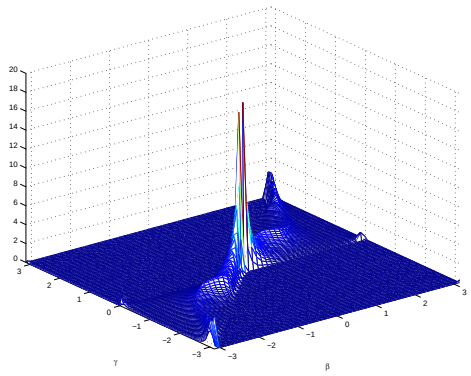
Nous avons fixé le pas d'échantillonnage de α et β à la valeur $\pi/300$ et celui de γ à $\pi/1200$ (cette différence est utile pour pouvoir être précis au voisinage de $\beta = 0$. Seulement cela implique une petite erreur pour la fonction pour $\beta = 0$ car l'échantillonnage étant plus précis pour la direction γ que pour la direction β, le dirac va se transformer en un lobe).

Pour calculer cette courbe, nous avons effectué 10^{10} tirages aléatoires pour les points B et C. Nous avons utilisé le générateur aléatoire de l'Ecuyer [ECUY-88, WILL-92] pour effectuer un tirage uniforme des points dans un carré de rayon R=2.

L'histogramme des tirages aléatoires des points B et C (Fig. 4.24) montre l'uniformité de la loi de distribution des points dans la fenêtre carrée.



(a) Courbe théorique de $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$.



(b) Courbe de $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$ issue d'une simulation numérique.

FIG. 4.25 – Comparaison entre la courbe théorique et la courbe simulée de $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$ dans le cas d'une distribution uniforme des points à l'intérieur d'une fenêtre carrée.

Si on examine les deux courbes de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha = 0, \beta_e)$ (Fig. 4.25), on remarque bien que cette probabilité est nulle pour $\gamma \geq \beta$ ou $\gamma \leq 0$ dans le cas où $\beta > 0$. Afin de pouvoir voir la différence entre les deux courbes nous avons affiché les deux fonctions (Fig. 4.27) dans le même plan pour certaines valeurs de β qui correspondent aux différents cas trouvés. Si on examine bien la figure 4.27 on remarque que les deux courbes se superposent bien malgré les perturbations qu'on retrouve sur la courbe simulée.

Nous avons aussi comparé les deux courbes de la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$. On peut voir sur la figure 4.26 que les résultats obtenus sont égaux. La seule différence est obtenue pour $\beta = \alpha + k\pi$. Cette différence est liée au pas d'échantillonnage de β et au rapport existant entre la valeur de la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ au point de la discontinuité et les valeurs dans son voisinage. L'observation de la discontinuité de cette fonction au voisinage de zéro est conditionnée par l'importance de ce rapport.

4.6.8 Conclusion

Dans le cas des applications réelles, les images ont souvent une forme carrée ou rectangulaire, les images rondes sont très rares. Pour cette raison nous avons déterminé

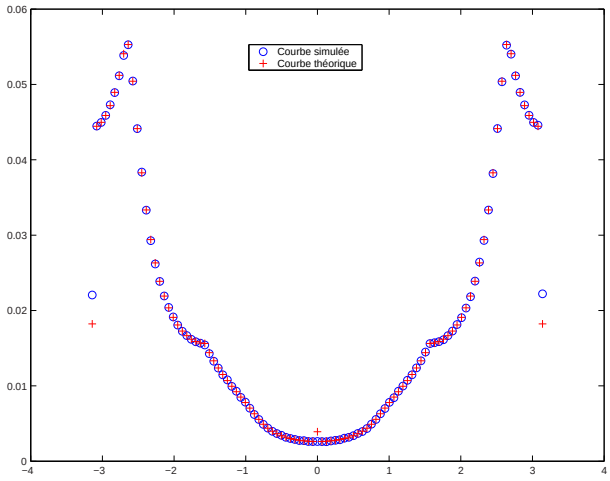


FIG. 4.26 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\alpha_e, \beta_e)$ pour $\alpha = 0$.

la probabilité *a posteriori* $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ dans le cas d'une distribution uniforme des points à l'intérieur d'une fenêtre carrée. Comme dans le cas de la fenêtre circulaire, cette probabilité est indépendante de la largeur de la fenêtre. Cela nous permet d'utiliser ces résultats sans faire d'hypothèses sur la taille de l'image utilisée.

4.7 Cas d'une distribution quelconque continue

Si on s'intéresse maintenant à une distribution quelconque continue $f(r, \Theta)$ des points dans le plan (exemple : une gaussienne), on démontre que la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ peut être exprimée directement en fonction de f.

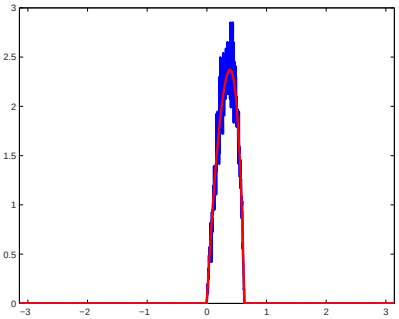
4.7.1 Cas général

La probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est calculée à partir de l'équation 4.18 qui reste valable pour n'importe quelle distribution de points indépendants dans le plan, que nous rappelons ici :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = P(\mathcal{C}) \int_{S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}} P(\mathcal{B}) dB \tag{4.18}$$

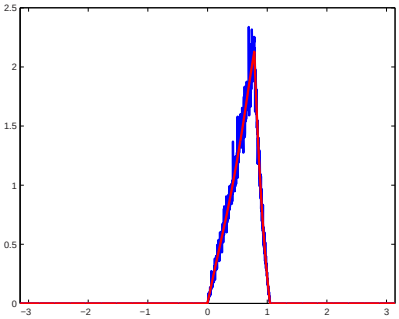
L'intersection des deux secteurs angulaires $S_{A,\alpha}$ et $S_{C,\beta-\pi}$ représente le domaine ρ (Fig. 4.28). L'intégrale de l'équation 4.18 devient :

Premier cas : $\alpha \leq \beta \leq \pi/4$



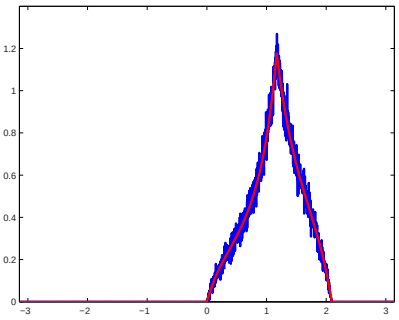
$\beta = \pi/5$

Deuxième cas : $\pi/4 \leq \beta \leq \pi/2$



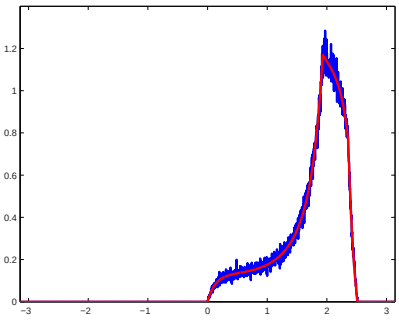
$\beta = \pi/3$

Troisième cas : $\pi/2 \leq \beta \leq 3\pi/4$



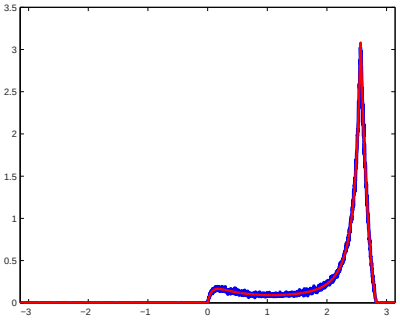
$\beta = 2\pi/3$

Quatrième cas : $\beta \geq 3\pi/4$ **et** $\varphi \leq 3\pi/4$



$\beta = 4\pi/5$

Cinquième cas : $\beta < \alpha + \pi$ **et** $\varphi \geq 3\pi/4$



$\beta = 9\pi/10$

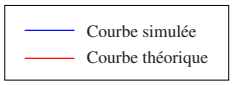


FIG. 4.27 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\gamma_e/\alpha = 0, \beta_e)$ pour les différents cas trouvés.

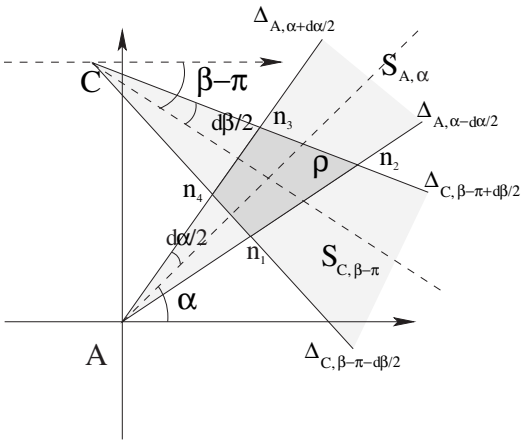


FIG. 4.28 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta \neq \alpha + k\pi$.

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = P(\mathcal{C}) \lim_{d\beta\to 0, d\alpha\to 0} \frac{1}{d\alpha d\beta} \int_{\rho} P(\mathcal{B}) dB \tag{4.98}$$

$$= f(r_c, \theta_c) \lim_{\substack{d\beta\to 0 \\ d\alpha\to 0}} \frac{1}{d\alpha d\beta} \int_{\rho} f(r_b, \theta_b) r_b dr_b d\theta_b \tag{4.99}$$

Le domaine ρ est délimité par les quatre droites (cf. annexe B) :

$$\Delta_{C,\beta-\pi-d\beta/2} : r = r_c \frac{\sin(\theta_c - (\beta - \pi - d\beta/2))}{\sin(\theta - (\beta - \pi - d\beta/2))} \tag{4.100}$$

$$\Delta_{C,\beta-\pi+d\beta/2} : r = r_c \frac{\sin(\theta_c - (\beta - \pi + d\beta/2))}{\sin(\theta - (\beta - \pi + d\beta/2))} \tag{4.101}$$

$$\Delta_{A,\alpha-d\alpha/2} : \theta = \alpha - d\alpha/2 \tag{4.102}$$

$$\Delta_{A,\alpha+d\alpha/2} : \theta = \alpha + d\alpha/2 \tag{4.103}$$

Les équations de ces droites permettent de déterminer les bornes de l'intégrale de l'équation 4.99 :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = f(r_c, \theta_c) \lim_{\substack{d\beta\to 0 \\ d\alpha\to 0}} \frac{1}{d\alpha d\beta} \int_{(\alpha-d\alpha/2)}^{(\alpha+d\alpha/2)} \int_{\left(r_c \frac{\sin(\theta_c - (\beta-\pi-d\beta/2))}{\sin(\theta-(\beta-\pi-d\beta/2))}\right)}^{\left(r_c \frac{\sin(\theta_c - (\beta-\pi+d\beta/2))}{\sin(\theta-(\beta-\pi+d\beta/2))}\right)} f(r_b, \theta_b) r_b dr_b d\theta_b \tag{4.104}$$

Pour simplifier les notations, on définit la fonction g_{r_c,θ_b} définie par :

$$\begin{aligned} g_{r_c,\theta_b} : \Re &\longrightarrow \Re \\ \phi &\longmapsto g_{r_c,\theta_b}(\phi) = r_c \frac{\sin(\theta_c - (\phi - \pi))}{\sin(\theta_b - (\phi - \pi))} = r_c \frac{\sin(\theta_c - \phi)}{\sin(\theta_b - \phi)} \end{aligned} \tag{4.105}$$

l'équation précédente devient :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = f(r_c,\theta_c)\lim_{\substack{d\beta\to 0\\ d\alpha\to 0}}\frac{1}{d\alpha d\beta}\int_{(\alpha-d\alpha/2)}^{(\alpha+d\alpha/2)}\int_{g_{r_c,\theta_b}(\beta-d\beta/2)}^{g_{r_c,\theta_b}(\beta+d\beta/2)} f(r_b,\theta_b)r_b dr_b d\theta_b \tag{4.106}$$

Si la fonction $f(r,\theta)$ est continue, on peut définir la fonction F_r comme la primitive de la fonction $r\,f(r,\theta)$ par rapport au paramètre r, et par conséquent :

$$F_r(r) = \int r\,f(r,\theta_b)dr \tag{4.107}$$

$$\frac{dF_r(r)}{dr} = r\,f(r,\theta_b) \tag{4.108}$$

Par cette définition, l'équation 4.106 peut s'écrire sous la forme suivante :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = f(r_c,\theta_c)\lim_{\substack{d\beta\to 0\\ d\alpha\to 0}}\frac{1}{d\alpha d\beta}\int_{(\alpha-d\alpha/2)}^{(\alpha+d\alpha/2)}(F_r(g_{r_c,\theta_b}(\beta+d\beta/2))-F_r(g_{r_c,\theta_b}(\beta-d\beta/2)))\,d\theta_b \tag{4.109}$$

$$= f(r_c,\theta_c)\lim_{d\alpha\to 0}\frac{1}{d\alpha}\int_{(\alpha-d\alpha/2)}^{(\alpha+d\alpha/2)}\lim_{d\beta\to 0}\frac{F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(\beta+d\beta/2)-F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(\beta-d\beta/2)}{d\beta}d\theta_b \tag{4.110}$$

Si on examine l'équation 4.110, on remarque que $\lim_{d\beta\to 0}\frac{F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(\beta+d\beta/2)-F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(\beta-d\beta/2)}{d\beta}$ représente la dérivée de la fonction $F_r\circ g_{r_c,\theta_b}$ au point β.

$$\left.\frac{d\,F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta} = \left.\frac{dg_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta}\left.\frac{dF_r(x)}{dx}\right|_{x=g_{r_c,\theta_b}(\beta)} \tag{4.111}$$

En remplaçant la dérivée de la fonction F_r (Eq. 4.108), on obtient :

$$\left.\frac{d\,F_r\circ g_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta} = \left.\frac{dg_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta} g_{r_c,\theta_b}(\beta)\;f(\,g_{r_c,\theta_b}(\beta)\,,\,\theta_b\,) \tag{4.112}$$

Par la suite l'équation 4.110 devient :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = f(r_c,\theta_c)\lim_{d\alpha\to 0}\frac{1}{d\alpha}\int_{(\alpha-d\alpha/2)}^{(\alpha+d\alpha/2)}\left.\frac{dg_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta} g_{r_c,\theta_b}(\beta)\;f(\,g_{r_c,\theta_b}(\beta)\,,\,\theta_b\,)d\theta_b \tag{4.113}$$

Si la valeur de α est différente de β, la dérivée $\left.\frac{dg_{r_c,\theta_b}(x)}{dx}\right|_{x=\beta}$ est une fonction continue au point $\theta_b=\alpha$ et la fonction $g_{r_c,\theta_b}(\beta)$ est continue au point $\theta_b=\alpha$ (par définition Eq. 4.105). De plus, si la fonction $f(r,\Theta)$ est une fonction continue, on retrouve la limite de l'intégrale d'une fonction h continue divisée par la longueur du domaine d'intégration :

$$\lim_{dx\to 0}\frac{1}{dx}\int_{(x_0-dx/2)}^{(x_0+dx/2)} h(y)dy = h(x_0) \tag{4.114}$$

Cette remarque nous permet de simplifier l'équation 4.113 :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = f(r_c, \theta_c) \left. \frac{dg_{r_c,\alpha}(x)}{dx} \right|_{x=\beta} g_{r_c,\alpha}(\beta)\ f(\, g_{r_c,\alpha}(\beta)\,,\ \alpha\,) \tag{4.115}$$

donc :

$$\boxed{P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = 2r_c^2 \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)} f(r_c, \theta_c) f\left(r_c \frac{\sin(\theta_c-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \alpha\right)} \tag{4.116}$$

Cette distribution de probabilité est valable pour n'importe quelle distribution continue des points dans le plan.

Remarque :

Si on remplace $f(r, \Theta)$ par $\frac{1}{\pi R^2}$, on retrouve la formule de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ dans le cas de la distribution uniforme des points dans un disque (Eq. 4.21).

Dans le cas où la distribution de probabilité des deux points B et C dans le plan n'est pas identique, l'équation 4.116 devient :

$$\boxed{P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = 2r_c^2 \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)}{3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)} f_C(r_c, \theta_c) f_B\left(r_c \frac{\sin(\theta_c-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}, \alpha\right)} \tag{4.117}$$

où :

- $f_C(r, \theta)$ représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{C}$ (coordonnés polaires du point C),
- $f_B(r, \theta)$ représente la densité de probabilité de la variable aléatoire $\mathbb{B}$ (coordonnés polaires du point B).

4.7.2 Application : distribution gaussienne

On suppose ici que la distribution des deux points B et C dans le plan suit une loi normale centrée réduite :

$$f(r, \Theta) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{r^2}{2}} \tag{4.118}$$

4.7.2.1 Cas général : $\beta \neq \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

En remplaçant dans l'équation 4.116, on obtient la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$:

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = \frac{r_c^2\,(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c))}{2\pi^2\,(3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta))} e^{-\frac{r_c^2}{2}\left(1+\left(\frac{\sin(\theta_c-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\right)^2\right)} \tag{4.119}$$

Remarque :

Si on examine l'équation 4.119, on remarque qu'on obtient la même formule que dans le cas de la distribution uniforme à l'intérieur d'un disque (Eq. 4.30), pondérée par une exponentielle.

La probabilité $P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $S_{A,\gamma}$:

$$P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e) = \int\limits_{S_{A,\gamma}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.120}$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{r_c^2 \left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\theta_c)\right)}{2\pi^2 \left(3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta)\right)} e^{-\frac{r_c^2}{2}\left(1+\left(\frac{\sin(\theta_c-\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}\right)^2\right)} r_c dr_c \tag{4.121}$$

$$= \frac{\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta-2\gamma)}{\pi^2(3\sin(\alpha-\beta) - \sin(3\alpha-3\beta))\left(\frac{\sin^2(\beta-\gamma)}{\sin^2(\beta-\alpha)} + 1\right)^2} \tag{4.122}$$

Remarque :

La probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est calculée à partir de la marginalisation de la probabilité $P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e)$. Cette intégrale existe mais sa formule analytique est très complexe et ne peut pas être simplifiée.

4.7.2.2 Cas particuliers : $\beta = \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

Dans ce cas, on peut distinguer les deux cas suivants :

a) $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ **:**

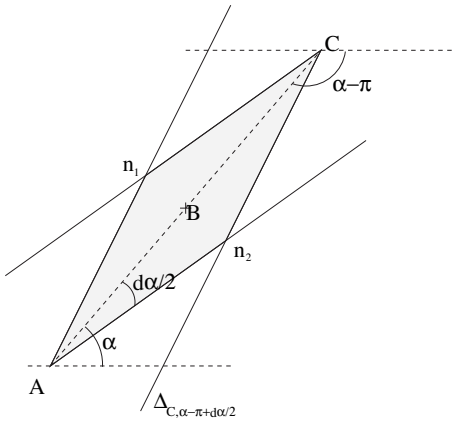


FIG. 4.29 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta = \alpha + 2k\pi$.

Dans ce cas, le point C est situé dans la direction α par rapport au point B, lui-même placé dans la même direction par rapport au point A. La figure 4.29 montre que le point C est forcément dans la direction α par rapport au point A. En conséquence, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est définie par :

$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi\,,\ (k \in \mathcal{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.123}$$

Le domaine ρ est représenté par le losange An_1Cn_2 qui est délimité par les quatre droite :

$$(An_1) \quad : \quad \theta = \alpha + d\alpha/2 \tag{4.124}$$
$$(An_2) \quad : \quad \theta = \alpha - d\alpha/2 \tag{4.125}$$
$$(Cn_1) \quad : \quad r\sin(\theta - (\alpha - \pi - d\alpha/2)) = r_c \sin(\theta_c - (\alpha - \pi - d\alpha/2)) \tag{4.126}$$
$$(Cn_2) \quad : \quad r\sin(\theta - (\alpha - \pi + d\alpha/2)) = r_c \sin(\theta_c - (\alpha - \pi + d\alpha/2)) \tag{4.127}$$

La probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ dépend de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{B})$ sur le domaine ρ (Eq. 4.18) :

$$P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) = P(\mathcal{C}) \int_{\rho} P(\mathcal{B}) dB \tag{4.128}$$

$$= P(\mathcal{C}) \lim_{d\alpha \to 0} \frac{1}{d\alpha} \left(\int_{\alpha - d\alpha/2}^{\alpha} \int_{0}^{r_c \frac{\sin(\alpha - (\alpha - \pi + d\alpha/2))}{\sin(\theta - (\alpha - \pi + d\alpha/2))}} f(r_b, \theta_b) r_b dr_b d\theta_b + \right.$$
$$\left. \int_{\alpha}^{\alpha + d\alpha/2} \int_{0}^{r_c \frac{\sin(\alpha - (\alpha - \pi - d\alpha/2))}{\sin(\theta - (\alpha - \pi - d\alpha/2))}} f(r_b, \theta_b) r_b dr_b d\theta_b \right) \tag{4.129}$$

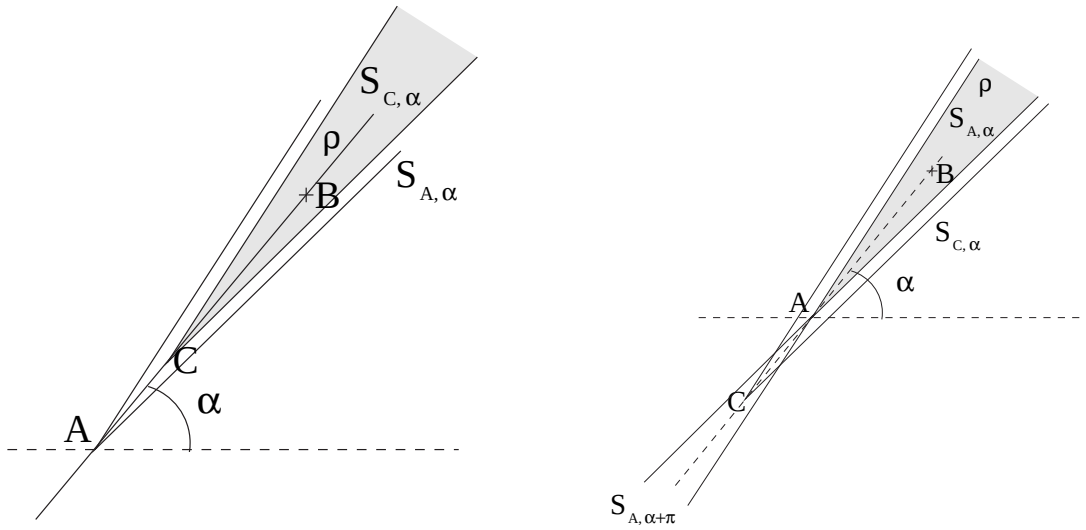
$$= \frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)} - e^{r_c^2}}{4\pi^2} \tag{4.130}$$

La loi marginale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ par rapport à l'événement $\mathcal{C}$ représente la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$:

$$P(\alpha_e, \beta_e) = \int_{C \in \mathcal{E}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.131}$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)} - e^{r_c^2}}{4\pi^2} r_c dr_c \tag{4.132}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} \tag{4.133}$$



(a) Intersection des deux domaines $S_{C,\alpha-\pi}$ et $S_{A,\alpha}$ dans le cas où C est dans la direction α par rapport à A.

(b) Intersection des deux domaines $S_{C,\alpha-\pi}$ et $S_{A,\alpha}$ dans le cas où C est dans la direction $\alpha+\pi$ par rapport à A.

FIG. 4.30 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$.

b) $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ **:**

Dans ce cas, le point C est placé dans la direction $(\alpha + \pi)$ par rapport au point B, lui-même situé dans la direction α par rapport au point A. D'après la figure 4.30, on peut distinguer deux cas possibles :

1. le point C est situé dans la direction α par rapport au point A, s'il est placé entre les deux points A et B (Fig. 4.30-a),

2. le point C est situé dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point A, si le point A est placé entre les deux points B et C (Fig. 4.30-b).

Dans le premier cas, le domaine ρ représente exactement le secteur $S_{C,\alpha-\pi}$, car celui-ci est inclus dans le domaine $S_{A,\alpha}$ (Fig. 4.30-a). La probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la distribution des points B sur le domaine ρ (Eq. 4.18) :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = P(\mathcal{C})\int_{\rho} P(\mathcal{B})dB \tag{4.134}$$

$$= P(\mathcal{C})\lim_{d\alpha\to 0}\frac{1}{d\alpha}\left(\int_{\alpha-d\alpha/2}^{\alpha}\int_{r_c\frac{\sin(\alpha-(\alpha-d\alpha/2))}{\sin(\theta-(\alpha-d\alpha/2))}}^{+\infty} f(r_b,\theta_b)r_b dr_b d\theta_b + \right.$$

$$\left.\int_{\alpha}^{\alpha+d\alpha/2}\int_{r_c\frac{\sin(\alpha-(\alpha+d\alpha/2))}{\sin(\theta-(\alpha+d\alpha/2))}}^{+\infty} f(r_b,\theta_b)r_b dr_b d\theta_b\right) \tag{4.135}$$

$$= \frac{e^{-r_c^2}}{4\pi^2} \tag{4.136}$$

Dans le deuxième cas, le domaine ρ est représenté par le secteur angulaire $S_{A,\alpha}$ car celui-ci est inclus dans le domaine $S_{C,\alpha-\pi}$ (Fig. 4.30-b) :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = P(\mathcal{C})\int_{\rho} P(\mathcal{B})dB \tag{4.137}$$

$$= P(\mathcal{C})\int_{0}^{+\infty} f(r_b,\theta_b)r_b dr_b \tag{4.138}$$

$$= \frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)}}{4\pi^2} \tag{4.139}$$

En résumé, La probabilité $P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)$ est donnée par :

$$P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e) = \begin{cases} \frac{e^{-r_c^2}}{4\pi^2} & \text{si } \theta_c = \alpha + 2k\pi\ ,\ (k\in\mathcal{Z}) \\ \frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)}}{4\pi^2} & \text{si } \theta_c = \alpha + \pi + 2k\pi\ ,\ (k\in\mathcal{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.140}$$

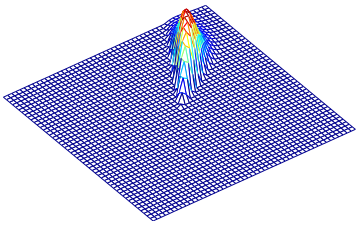
La probabilité $P(\alpha_e,\beta_e)$ représente la probabilité marginale de la probabilité $P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)$, ce qui nous permet d'écrire :

$$P(\alpha_e,\beta_e) = \int_{C\in\mathcal{E}} P(\mathcal{C},\alpha_e,\beta_e)dC \tag{4.141}$$

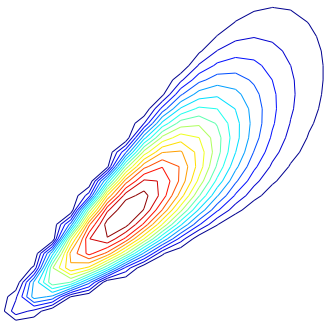
$$= \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{-r_c^2}}{4\pi^2}r_c dr_c + \int_{0}^{+\infty}\frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)}}{4\pi^2}r_c dr_c \tag{4.142}$$

$$= \frac{1}{8\pi^2} + \frac{1}{4\pi^2} \tag{4.143}$$

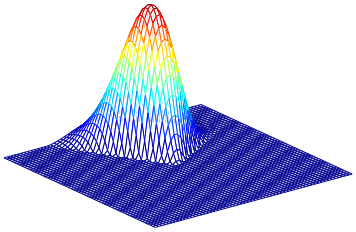
$$= \frac{3}{8\pi^2} \tag{4.144}$$



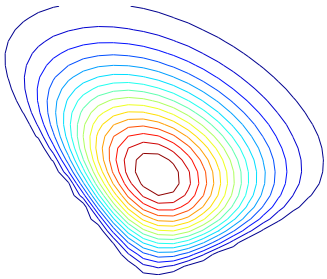
(a-1) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3)$.



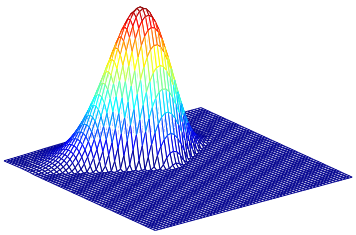
(a-2) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = \pi/3)$.



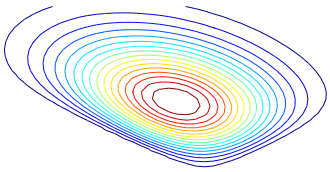
(b-1) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = 2\pi/3)$.



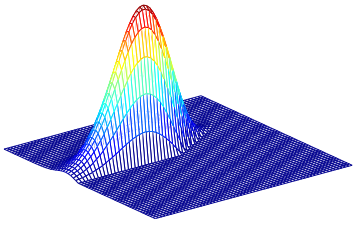
(b-2) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = 2\pi/3)$.



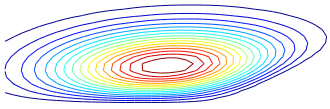
(c-1) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = 5\pi/6)$.



(c-2) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = 5\pi/6)$.



(d-1) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = \pi)$.



(d-2) $P(\mathcal{C}, \alpha = \pi/6, \beta = \pi)$.

FIG. 4.31 – Exemples d'évaluation de $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$: représentation surfacique et par courbe de niveaux.

D'après l'équation 4.36, la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est déterminée à partir de l'intégrale de la probabilité $P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e)$ sur le domaine $S_{A,\gamma}$:

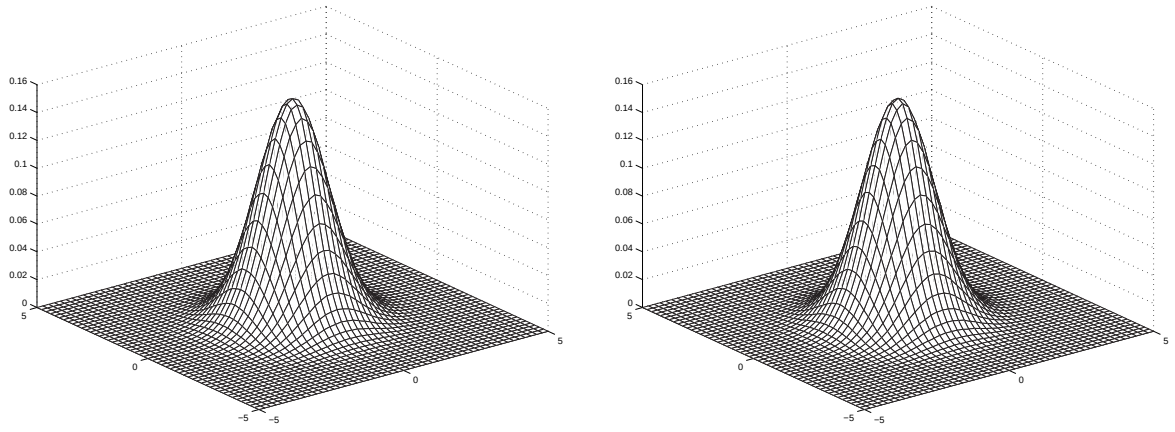
$$P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) = \int\limits_{C \in S_{A,\gamma}} P(\mathcal{C}/\alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.145}$$

$$= \frac{1}{P(\alpha_e, \beta_e)} \int\limits_{C \in S_{A,\gamma}} P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e) dC \tag{4.146}$$

$$= \begin{cases} \frac{8\pi^2}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-r_c^2}}{4\pi^2} r_c dr_c & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \text{ , } (k \in \mathcal{Z}) \\ \frac{8\pi^2}{3} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{\left(\frac{-r_c^2}{2}\right)}}{4\pi^2} r_c dr_c & \text{si } \gamma = \alpha + \pi + 2k\pi \text{ , } (k \in \mathcal{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.147}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } \gamma = \alpha + 2k\pi \text{ , } (k \in \mathcal{Z}) \\ \frac{2}{3} & \text{si } \gamma = \alpha + \pi + 2k\pi \text{ , } (k \in \mathcal{Z}) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.148}$$

4.7.2.3 Discussion :

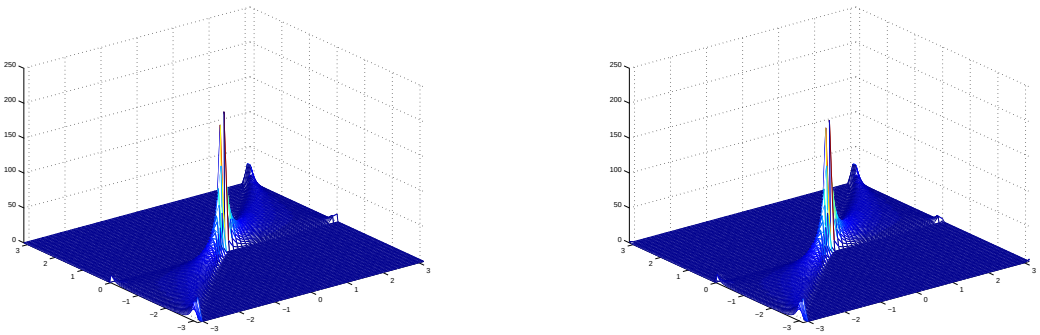


(a) Le point B. (b) Le point C.

FIG. 4.32 – Histogramme des tirages aléatoires des points B et C.

Comme on peut le constater sur la figure 4.31, la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est nulle à l'extérieur du domaine $D_{\alpha,\beta}$, elle dépend des coordonnées polaires du points $C(r_c, \theta_c)$ dans le plan. Pour une valeur fixe de θ_c, le maximum de la probabilité est atteint pour la valeur de $r_c = \frac{2\sin(\beta-\alpha)}{\sqrt{2\sin^2(\beta-\theta_c)+2\sin^2(\beta-\alpha)}}$. La formule analytique de l'angle θ_c qui maximise la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est trop complexe pour être reportée ici.

La formule analytique de la probabilité $P(\gamma, \alpha, \beta)$ (Eq. 4.122) est invariable par rotation car :



(a) Courbe théorique de $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$.

(b) Courbe de $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$ issue d'une simulation numérique.

FIG. 4.33 – Comparaison entre la courbe théorique et la courbe simulée de la probabilité $P(\gamma/\alpha = 0, \beta)$ dans le cas d'une distribution gaussienne des points dans le plan.

$$
\begin{aligned}
P(\gamma = x+a, \alpha = y+a, \beta = z+a) &= \frac{\cos\left((y+a)-(z+a)\right) - \cos\left((y+a)+(z+a)-2\,(x+a)\right)}{\pi^2\left(3\sin\left((y+a)-(z+a)\right) - \sin\left(3\,(y+a)-3\,(z+a)\right)\right)} \\
&\quad \times \frac{1}{\left(\frac{\sin^2((z+a)-(x+a))}{\sin^2((z+a)-(y+a))}+1\right)^2} \qquad (4.149) \\
&= \frac{\cos\left(y-z\right) - \cos\left(y+z-2x\right)}{\pi^2\left(3\sin\left(y-z\right) - \sin\left(3y-3z\right)\right)\left(\frac{\sin^2(z-x)}{\sin^2(z-y)}+1\right)^2} \qquad (4.150) \\
&= P(\gamma = x, \alpha = y, \beta = z) \qquad (4.151)
\end{aligned}
$$

Cette remarque était prévisible car notre distribution des points dans le plan 4.119 est invariable par rotation (indépendante de θ). Dans la suite, nous allons traiter seulement le cas où $\alpha = 0$ ce qui est suffisant pour représenter l'ensemble des cas possibles.

Pour valider les formules obtenues dans le cas d'une distribution normale, nous avons réalisé une simulation numérique pour estimer la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$. Nous avons effectué 10^{10} tirages aléatoires de points dans le plan suivant une loi normale centrée réduite. Les pas d'échantillonnages sont les mêmes par rapport au cas de la fenêtre circulaire et de la fenêtre carrée. Pour un problème de lisibilité de la figure 4.33, nous avons réduit ces pas d'échantillonnage à $\pi/25$ pour β et à $\pi/100$ pour γ. Une comparaison des deux courbes (Fig. 4.34) montre que les résultats obtenus par simulation numérique obéissent à la formule analytique calculée au paragraphe précédent.

Pour la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$, on retrouve le même problème que celui rencontré précédemment, à savoir :

– une discontinuité non observée au voisinage de zéro due à un faible saut de la fonction,

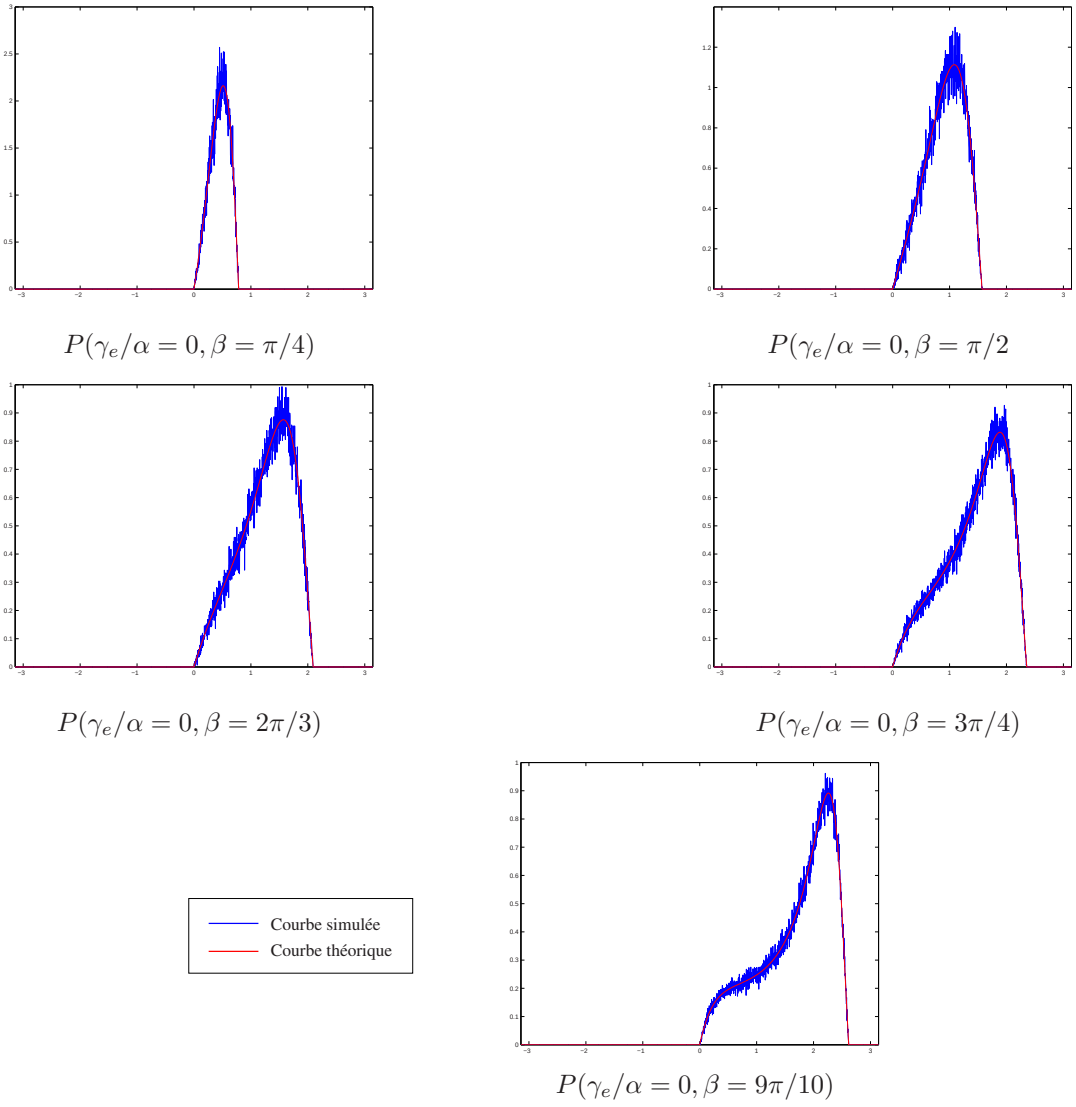


FIG. 4.34 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\gamma_e/\beta_e, \alpha = 0)$.

– une différence entre la valeur simulée et la valeur théorique dans le cas où $\beta = \alpha + \pi$ car le calcul numérique nous donne une moyenne sur un intervalle de longueur ϵ (pas d'échantillonnage).

4.7.3 Conclusion

Nous avons déterminé dans cette partie la probabilité conjointe $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour n'importe quelle distribution continue des points dans le plan. Ce résultat peut être utilisé dans les problèmes de localisation où il s'agit de trouver la position spatiale du point C à partir des position relative α et β. Dans ce cas, l'hypothèse qui nécessite que le points A soit à l'origine du repère peut être éliminée en effectuant un changement

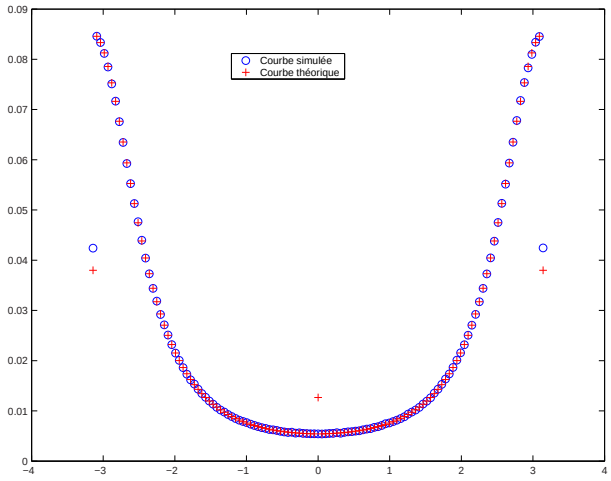


FIG. 4.35 – Comparaison entre la courbe théorique et celle obtenue par simulation de la loi $P(\alpha_e, \beta_e)$ pour $\alpha = 0$.

de repère.

Pour valider ce résultat, nous l'avons appliqué dans le cas d'une distribution normale des points dans le plan. Comme les résultats précédents, les résultats obtenus correspondent bien à ceux obtenus par une simulation numérique. Le calcul analytique de la probabilité $P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e)$ n'est possible que dans certains cas. Pour une distribution gaussienne, cela est possible seulement si la distribution est centrée. Dans les autres cas, on sera amené à faire des intégrales numériques de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour résoudre le problème.

4.8 Inférence : décision bayésienne

L'inférence consiste à déterminer une règle de décision $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ qui associe pour chaque observation des deux événements α_e, β_e un angle γ correspondant à la position spatiale du point C par rapport au point A. En général, cette règle est établie de façon à minimiser une fonction de coût [BOX-73, HATO-91, DUDA-01].

4.8.1 Minimisation de l'erreur moyenne de décision

Dans ce cas, il s'agit de déterminer la règle $\mathcal{D}(\alpha, \beta)$ qui minimise la probabilité globale d'erreur P_{err}. Soit $\gamma^*(\alpha_e, \beta_e)$ l'angle correspondant à la position relative du point C par rapport à A correspondant aux deux événements α_e et β_e. La probabilité d'erreur globale est donnée par :

$$P_{err} = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e, \beta_e\right) \neq \gamma^*\left(\alpha_e, \beta_e\right)\right) P(\alpha_e, \beta_e) d\alpha \, d\beta \tag{4.152}$$

Sachant que la probabilité $P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)=\gamma^*\left(\alpha_e,\beta_e\right)\right)$ représente la probabilité que le points C soit dans la direction $\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)$ étant donné les deux événements α_e et β_e $\left(P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)/\alpha_e,\beta_e\right)\right)$, la probabilité $P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)\neq\gamma^*\left(\alpha_e,\beta_e\right)\right)$ est donnée par :

$$P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)\neq\gamma^*\left(\alpha_e,\beta_e\right)\right)=1-P\left(\mathcal{D}\left(\alpha_e,\beta_e\right)/\alpha_e,\beta_e\right) \tag{4.153}$$

En remplaçant dans l'équation 4.152, on obtient :

$$\begin{aligned} P_{err} &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(1-P(\mathcal{D}(\alpha_e,\beta_e)/\alpha_e,\beta_e)\right)P(\alpha_e,\beta_e)d\alpha\, d\beta \\ P_{err} &= 1-\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P(\mathcal{D}(\alpha_e,\beta_e)/\alpha_e,\beta_e)P(\alpha_e,\beta_e)d\alpha\, d\beta \end{aligned} \tag{4.154}$$

Comme la probabilité $P(\alpha_e,\beta_e)$ est une fonction positive, minimiser la probabilité d'erreur globale P_{err} revient à déterminer l'angle γ qui maximise la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$.

$$\mathcal{D}_0(\alpha_e,\beta_e)=\gamma_0 \Longrightarrow \left(\forall\theta\in[-\pi,\pi]\right),\ P(\gamma=\gamma_0/\alpha_e,\beta_e)\geq P(\gamma=\theta/\alpha_e,\beta_e) \tag{4.155}$$

Application

Nous avons trouvé (paragraphe 4.3) dans le cas d'une distribution uniforme des points dans un disque de rayon R que le maximum de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ était atteint pour la valeur de $\gamma=\frac{\alpha+\beta}{2}$ ou bien $\gamma=2\beta-\alpha-\pi$ suivant les cas suivants :

$$\mathcal{D}_{0c}(\alpha_e,\beta_e)=\begin{cases}\frac{\alpha+\beta}{2} & \text{si } -2\pi/3\leq\beta-\alpha\leq 2\pi/3\\ 2\beta-\alpha-\pi & \text{sinon}\end{cases} \tag{4.156}$$

Dans les deux autres cas (fenêtre carrée et distribution normale), le calcul du maximum de la probabilité revient à résoudre une équation (la dérivée de $P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)$ par rapport à γ) d'ordre 3 dans le cas de la fenêtre carrée et une équation d'ordre 4 dans le cas de la distribution normale. Ces deux types d'équations peuvent être résolues par la méthode de Lodovico Ferrari ou bien la méthode de Niccolo Tartaglia [DUNH-90]. Ces deux méthodes sont implantées dans les outils de calcul mathématique comme Maple [2] [GARV-02] et Mathematica [3] [4] [POIT-98, WOLF-98]. Malheureusement, la formule analytique des solutions réelles est trop complexe pour être notée ici, pour cela, nous avons préféré montrer la courbe de ces résultats et les comparer dans les différents cas.

Sur la figure 4.36, nous avons tracé la courbe de la règle de décision $\mathcal{D}(\alpha=0,\beta)$ en fonction de β pour les trois cas précédents : distribution uniforme des points à

[2] `http://www.maplesoft.com`.

[3] Équation d'ordre 3 : `http://mathworld.wolfram.com/CubicEquation.html`.

[4] Équation d'ordre 4 : `http://mathworld.wolfram.com/QuarticEquation.html`.

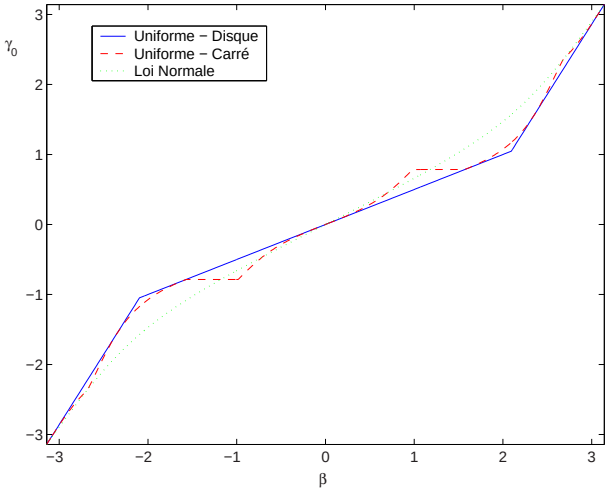


FIG. 4.36 – Comparaison du résultat de la règle de décision $\mathcal{D}_0(\alpha_e, \beta_e)$ pour $\alpha = 0$ en fonction de β dans les trois cas : une distribution uniforme à l'intérieur d'un disque, une distribution uniforme à l'intérieur d'un carré et une distribution normale.

l'intérieur d'une fenêtre circulaire, distribution uniforme des points à l'intérieur d'une fenêtre carrée et distribution normale des points dans le plan. On remarque que les résultats obtenus diffèrent peu suivant la distribution choisie des points dans le plan. Les résultats obtenus dans le cas d'une distribution uniforme à l'intérieur d'un carré et de la distribution normale sont légèrement supérieurs à ceux de la distribution uniforme à l'intérieur d'un disque dans le cas où β est supérieur à 0. Cette différence était prévisible car dans le cas de la fenêtre carrée, quand β est supérieur à $\pi/2$, il existe un ensemble de points D_0 (Fig. 4.37) dont la coordonnée angulaire est proche de l'angle 0 et qui n'appartiennent pas au domaine $D_{\alpha,\beta}$. Comme la règle de décision bayésienne minimise la probabilité globale d'erreur, le résultat de l'inférence sera plus proche de l'angle β que de l'angle 0, ce qui explique que l'angle γ_0 obtenu est supérieur à la bissectrice $\frac{\alpha+\beta}{2}$. On retrouve le même cas de figure si on veut comparer les deux résultats de l'inférence $((\beta - \alpha) \leq 2\pi/3$ et $(\beta - \alpha) \geq 2\pi/3)$ dans le cas de la distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque.

4.8.2 Maximum de vraisemblance

Pour cette méthode, il faut choisir l'angle γ qui maximise la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e/\gamma_e)$. Cette probabilité est liée à la probabilité a posteriori $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ par le théorème de Bayes :

$$P(\alpha_e, \beta_e/\gamma_e) = \frac{P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)P(\alpha_e, \beta_e)}{P(\gamma_e)} \tag{4.157}$$

Comme la probabilité $P(\alpha_e, \beta_e)$ est indépendante de la variable γ, il suffit de choisir la valeur de γ qui maximise le quotient $\frac{P(\gamma_e/\alpha_e,\beta_e)}{P(\gamma_e)}$. Or comme nous n'avons aucune direction privilégiée, maximiser $P(\alpha_e, \beta_e/\gamma_e)$ revient à déterminer la valeur de γ qui maximise

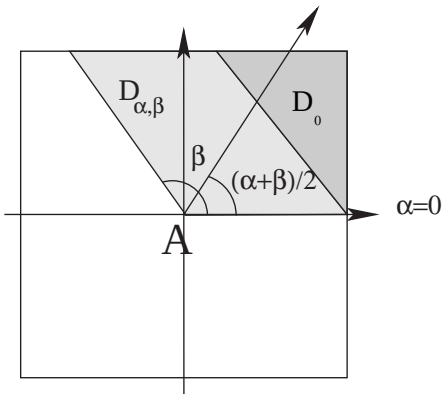


FIG. 4.37 – Définition de l'ensemble D_0 des points C dont la coordonnée angulaire est proche de l'angle α et n'appartenant pas au domaine $D_{\alpha,\beta}$.

la probabilité a posteriori $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ car la probabilité a priori $P(\gamma_e)$ représente une loi uniforme sur l'intervalle $[-\pi, \pi[$. En conséquence, les résultats obtenus seront identiques à ceux de la méthode de minimisation de l'erreur moyenne de décision (paragraphe 4.8.1).

4.8.3 Minimisation du risque moyen de décision

C'est en fait une généralisation de la première méthode (paragraphe 4.8.1). On définit dans ce cas une fonction de coût λ qui associe un coût $\lambda(D(\alpha_e, \beta_e)/\gamma_e)$ à chaque décision $D(\alpha_e, \beta_e)$ choisie, sachant que la position relative du point C par rapport au point A correspond à l'angle γ. Notre problème revient donc à trouver la valeur de γ qui minimise le risque moyen R défini par :

$$R = \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} R\left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right)/\alpha_e, \beta_e\right) P(\alpha_e, \beta_e) d\alpha d\beta \tag{4.158}$$

où $R\left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right)/\alpha_e, \beta_e\right)$ représente le risque conditionnel :

$$R\left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right)/\alpha_e, \beta_e\right) = \int_{-\pi}^{\pi} \lambda(D(\alpha_e, \beta_e)/\gamma_e) P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) d\gamma \tag{4.159}$$

Minimiser l'équation 4.158 revient à déterminer la valeur de γ qui minimise le risque conditionnel $R\left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right)/\alpha_e, \beta_e\right)$ (Eq. 4.159) pour toutes les valeurs de α et β.

Remarque :

Si on définit la fonction de coût λ par :

$$\lambda(D(\alpha_e, \beta_e)/\gamma_e) = \begin{cases} 0 & \text{si } D(\alpha_e, \beta_e) = \gamma \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.160}$$

la définition du risque moyen R (Eq. 4.158) sera équivalente à la définition de la probabilité globale d'erreur P_{err} (Eq. 4.152).

Application

Dans notre cas, on définit la fonction de coût comme le carré de la différence entre l'angle exact et la décision choisie :

$$\lambda(D(\alpha_e, \beta_e)/\gamma_e) = \left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right) - \gamma\right)^2 \tag{4.161}$$

Dans le cas de la distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque, le minimum du risque conditionnel $R\left(D\left(\alpha_e, \beta_e\right)/\alpha_e, \beta_e\right)$ (Eq. 4.159) est obtenu pour la valeur de γ_0 suivante :

$$\gamma_0 = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{2} & \text{si } (\beta-\alpha) \in [2k\pi, \pi/2 + 2k\pi] \\ \Big[-4\left((2\beta-\alpha-\pi)^2 - \beta^2 + 1\right)\cos(\alpha-\beta) + 5\cos(3\alpha-3\beta) - \\ \cos(5\alpha-5\beta) - (12\alpha-20\beta+8\pi)\sin(\alpha-\beta) + \\ (8\alpha-10\beta+5\pi)\sin(3\alpha-3\beta) - (2\beta-\pi)\sin(5\alpha-5\beta)\Big] \Big/ \\ \Big[8(\alpha-\beta+\pi)\cos(\alpha-\beta) + 8\sin(\alpha-\beta) - 2\sin(3\alpha-3\beta) - 2\sin(5\alpha-\beta)\Big] & \text{si}(\beta-\alpha) \in [2k\pi+\pi/2, (2k+1)\pi[\\ \alpha + \frac{6\pi}{7} & \text{si } \beta = \alpha + \pi \end{cases} \tag{4.162}$$

Les autres cas, où $(\beta - \alpha) < 0$, sont obtenus par symétrie.

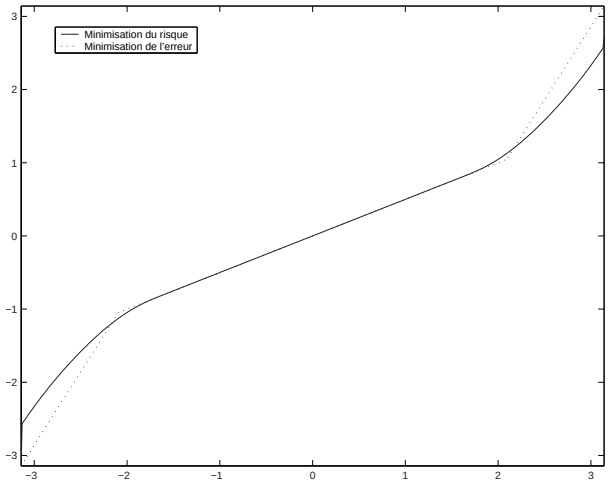
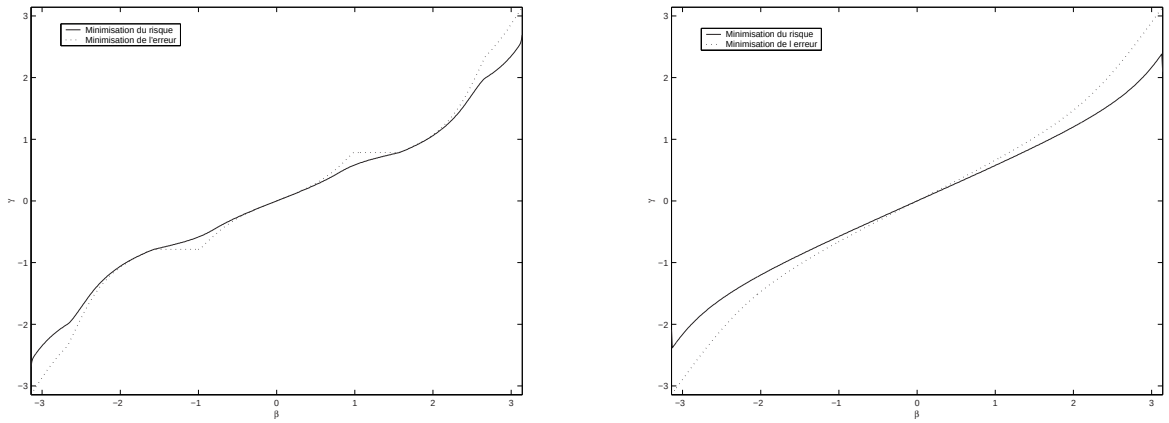


FIG. 4.38 – Comparaison des résultats des deux règles de décision : minimisation de l'erreur et minimisation du risque dans le cas d'une distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque ($\alpha = 0$).

En examinant cette équation, on remarque que le résultat obtenu pour le cas du secteur angulaire complet est identique à celui de la méthode de minimisation de l'erreur moyenne (Fig. 4.38). Cela était prévu car la probabilité conditionnelle $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ est symétrique dans ce cas par rapport à l'axe $\left(\gamma = \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ (Fig. 4.7-a). Dans le cas contraire (secteur angulaire incomplet), la courbe de la densité de probabilité conditionnelle $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ n'est pas symétrique, ce qui explique la différence des deux résultats. En examinant la courbe de la règle de décision en fonction de β $(\alpha = 0)$, on remarque que le résultat de la règle de décision γ dans le cas où $\beta = \pi$ est différent des deux angles possibles 0 et π. Ce résultat est une conséquence directe de la définition de notre fonction de coût λ. En effet pour minimiser le risque (distance par rapport à la valeur exacte), le résultat γ est placé au centre de gravité de la courbe de $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$, c'est-à-dire plus proche de π que de 0 car la probabilité $(P(\gamma = \pi/\alpha = 0, \beta = \pi) > P(\gamma = 0/\alpha = 0, \beta = \pi))$.



(a) Fenêtre carrée. (b) Distribution gaussienne.

FIG. 4.39 – Comparaison des résultats des deux règles de décision : minimisation de l'erreur et minimisation du risque dans le cas d'une distribution uniforme des points dans un carré et d'une distribution gaussienne dans le plan $(\alpha = 0)$.

Nous n'avons pas pu obtenir une formulation analytique en fonction de α et β de la règle de décision dans le cas d'une distribution uniforme à l'intérieur d'un carré et d'une distribution gaussienne dans le plan car la primitive de la fonction liée à l'intégrale qui définit le risque conditionnel ne peut pas être exprimée à l'aide des fonctions connues. Pour cela nous avons déterminé le résultat par un calcul numérique de l'intégrale. La courbe de l'angle γ qui minimise le risque conditionnel est tracée en fonction de l'angle β sur la figure 4.39 dans le cas où l'angle α est fixé à 0. Comme on peut le constater, les résultats des deux exemples sont totalement différents des résultats de la première méthode. Cela était prévisible car en examinant les courbes de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ (Fig. 4.27 et 4.34), celles-ci ne sont pas symétriques par rapport au maximum de la probabilité.

4.8.4 Conclusion

Les résultats obtenus par les trois méthodes sont très proches. Dans le cas d'une application réelle, on est amené à minimiser d'autres critères que le risque moyen R. En général les fonctions de coût utilisées sont différentes d'une application à l'autre et dépendent des résultats souhaités. Dans ce cas, il faudrait développer cette partie pour chaque application.

4.9 Inférence des relations spatiales directionnelles entre des régions

Les résultats obtenus dans le cas des points peuvent être appliqués au cas des objets, pour cela on distingue deux cas :

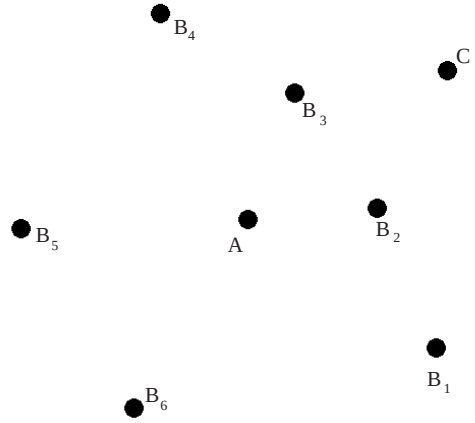
1. Inférence dans le cas des petits objets compacts ou bien des objets éloignés : l'histogramme d'angles représentant les relations spatiales entre deux régions compactes et petites est très proche d'une fonction de Dirac correspondant à la direction principale (position relative des deux centres de gravité). De même nous avons vu que l'histogramme d'angles tend vers un Dirac (une seule direction) quand l'objet B s'éloigne de l'objet A. Dans ce cas, cela nous permet d'utiliser un seul angle pour représenter les relations spatiales entre deux régions.

2. Dans l'autre cas, on combine toutes les possibilités à partir de l'histogramme d'angles pour obtenir une estimation de l'histogramme exact.

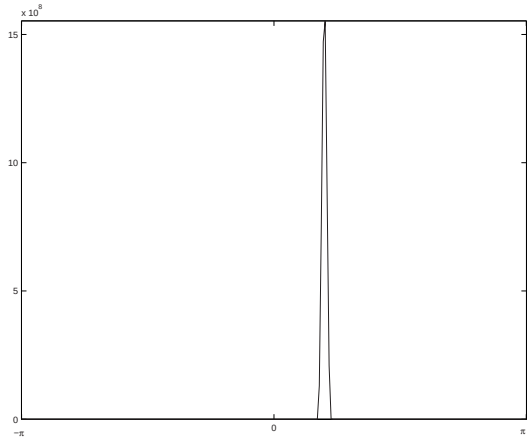
4.9.1 Inférence dans le cas des petits objets compacts ou des objets éloignés

On utilise directement les résultats obtenus dans la section précédente. Prenons par exemple les objets de la figure 4.40-a, l'histogramme d'angles lié à un couple d'objets (Fig. 4.40-b) est très proche d'un Dirac. Cela nous permet de représenter tous les objets par leur centre de gravité. Une estimation de l'angle correspondant à l'angle formé par les deux centres de gravité peut être obtenue en calculant le centre de gravité de l'histogramme d'angles. Plus l'histogramme d'angles est proche d'une fonction de Dirac, plus cette estimation sera correcte.

Pour illustrer ces résultats, supposons qu'on soit amené à déduire la position relative d'un objet ou une région C par rapport à une région A (Fig. 4.40-a) connaissant la position relative de cette région par rapport à certains repères B_i. Pour utiliser les résultats précédents, la position relative de ces repères par rapport à la région A est connue. Cet exercice est très fréquent quand il s'agit de trouver son chemin en utilisant un plan. À partir de l'information visuelle, l'être humain (objet A) détermine sa position relative par rapport à certains repères (objets B_i) présents sur le plan. La



(a) Un exemple d'objets compacts.



(b) Histogramme d'angles H_{AC}.

Objet intermédiaire	γ	$\lvert\gamma - \theta_{AC}\rvert$	$\lvert\alpha - \beta\rvert$
B_1	0.5171	0.123	2.12
B_2	0.5923	0.048	1.01
B_3	0.6806	0.040	1.07
B_4	0.7852	0.145	2.16
B_5	0.6683	0.028	2.83
B_6	0.6163	0.024	2.94

(c) Inférence de la position relative γ de l'objet C par rapport à A (les angles sont exprimés en radian, $\theta_{AC} = 0.64$), connaissant l'histogramme d'angle de l'objet C par rapport à un autre objet B_i et l'histogramme d'angle de l'objet B_i par rapport à l'objet A.

FIG. 4.40 – Application de l'inférence des relations spatiales directionnelles dans le cas des objets compacts.

position relative du point d'arrivée (objet C) par rapport à ces repères (objets B_i) est déterminée à partir du plan. Le problème, dans ce cas, consiste à déduire la direction à suivre en partant de A pour arriver en C.

Puisque les résultats obtenus en utilisant les trois types de distribution sont presque identiques, nous utilisons dans cette partie uniquement les résultats liés à une distribution uniforme des points à l'intérieur d'un disque. On suppose pour cela que les objets $B_{1..6}$ et C sont uniformément placés autour de l'objet A à l'intérieur d'un disque. Les différentes positions relatives θ_{XY} sont exprimées à partir des histogrammes d'angles. Les résultats de l'inférence en utilisant la règle de la minimisation de la probabilité d'erreur sont illustrés sur le tableau de la figure 4.40-c.

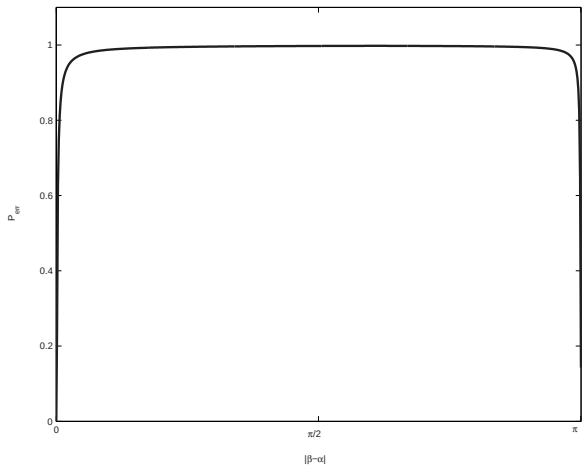
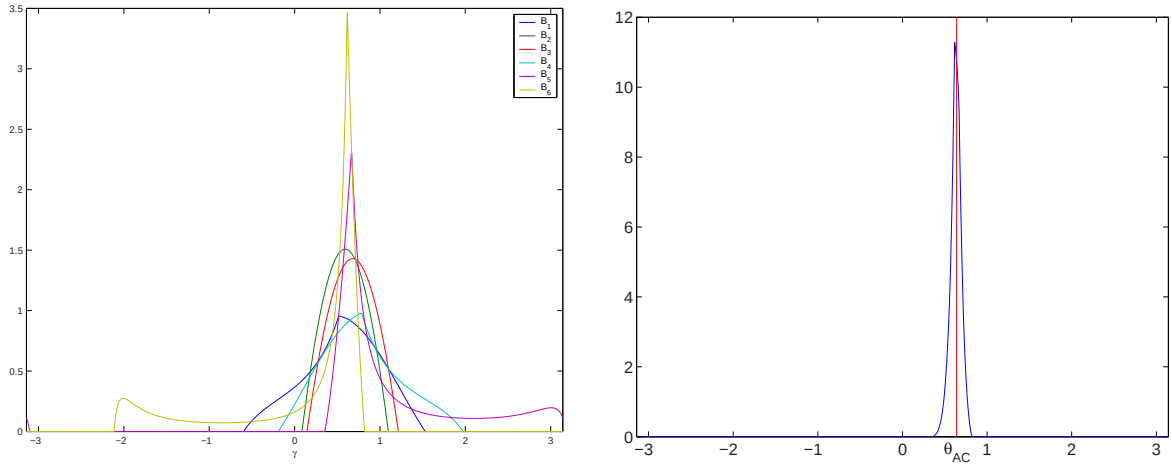


FIG. 4.41 – Évolution de la probabilité d'erreur en fonction de $|\beta - \alpha|$.

En examinant ce tableau, on remarque clairement que les plus faibles erreurs d'estimation $|\gamma - \theta_{AC}|$ correspondent à des faibles ou fortes valeurs de la différence $|\beta - \alpha|$. Cela était prévisible car la localisation du point C est d'autant plus difficile que le secteur angulaire $D_{\alpha,\beta}$ est large. Cela est confirmé en examinant la courbe de la probabilité d'erreur (Fig. 4.41), celle-ci est croissante par rapport à la différence $|\beta - \alpha|$ entre 0 et ($\psi_0 \simeq 1.915$) où ψ_0 représente la racine de l'équation $2\psi - 2\pi + 6\sin(\psi) - 8\sin(2\psi) + 6\sin(3\psi) + 5\sin(4\psi) + 2\sin(5\psi)$ appartenant au domaine $[\pi/2, 2\pi/3]$. Pour $\psi_0 \leq |\beta - \alpha| \leq \pi$, la probabilité d'erreur est décroissante. Dans le cas où la valeur de $|\beta - \alpha|$ est proche de π, on doit choisir parmi deux angles possibles α et β. Comme la probabilité d'avoir $\gamma = \alpha$ étant donné les deux positions relatives α_e, β_e est largement inférieure à celle d'avoir $\gamma = \beta$, on a une très faible probabilité d'erreur en choisissant $\gamma = \beta$.

La probabilité d'erreur devient moins importante si on utilise plusieurs possibilités d'inférence. On peut fusionner les différentes probabilités $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ obtenues pour les différents objets intermédiaires afin d'améliorer le résultat final. En traçant la courbe des six probabilités conditionnelles $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ liées aux six objets intermédiaires $B_{1..6}$ (Fig. 4.42-a), on remarque clairement que le produit des différentes probabilités tend vers un Dirac correspondant à la position relative de l'objet C par rapport à l'objet A. On peut même obtenir une très bonne estimation à partir d'objets correspondant à un large domaine $D_{\alpha,\beta}$. Par exemple avec les deux objets intermédiaires B_1 et B_4 correspondant à une forte erreur, on arrive à une estimation $\gamma = 0.655$ qui est très proche de la position exacte $\theta_{AC} = 0.64$. Cela est dû au fait que la surface du secteur angulaire issu de l'intersection des deux domaines $D_{\alpha,\beta}$ est très petite comparée à celle des domaines de départ. Plus la surface du domaine d'intersection est petite, plus notre estimation sera proche de la valeur exacte.



(a) Les courbes de la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$ en utilisant les six objets intermédiaires de la figure 4.40-a.

(b) Produit des six probabilités conditionnelles $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$.

FIG. 4.42 – Fusion des différents résultats obtenus.

Discussion et exemple d'application

Le problème présenté dans cette partie est très proche de nos hypothèses de départ : si les régions sont compactes, elles peuvent être représentées par un seul point. L'une des applications les plus proches de cet exemple est la localisation des téléphones mobiles. Actuellement les méthodes de localisation utilisent essentiellement l'estimation du temps de retard entre l'instant d'émission et l'instant d'arrivée des ondes au niveau d'une ou plusieurs stations de base dont la position est connue [ELNA-99]. Il existe toutefois une autre possibilité en utilisant une estimation de la direction d'arrivée de l'onde émise par le mobile sur une ou plusieurs stations de base. Cette approche nécessite que les stations de bases concernées soient équipées d'antennes multiples dites intelligentes.

Une localisation précise à l'aide des temps de retard suppose l'existence d'un trajet direct entre le mobile et la station de base. Cela n'est malheureusement pas toujours vrai en particulier en milieu urbain, ce qui entraîne souvent des erreurs importantes sur l'estimation de la position du mobile. À partir de notre calcul théorique de la probabilité a posteriori $P(\gamma/\alpha, \beta)$ et en utilisant les informations angulaires estimées sur chaque station, on peut associer un degré de confiance à chaque mesure. Pour cela, il suffit de supposer que la trajectoire de l'onde entre le mobile et la station de base principale (la plus proche) est directe. Cette station va représenter dans notre cas le point B. Le mobile représente le point C et l'autre station de base va représenter le point A. À partir de la position relative de la station de base principale B par rapport à la station A (angle α) et la position relative du mobile par rapport à la station de base principale B (β), on peut associer un degré de confiance à l'estimation de l'angle d'arrivée γ_0 mesurée par la station de base A en fonction de la probabilité $P(\gamma_0/\alpha, \beta)$.

Sachant qu'il faut trois stations de base pour localiser le mobile, on peut choisir la meilleure combinaison possible à partir des degrés de confiance associés aux différentes mesures.

4.9.2 Inférence dans le cas général

Dans ce cas, on ne peut pas se restreindre au centre de gravité de l'histogramme d'angles pour représenter les relations spatiales directionnelles entre les différents objets. Un objet peut être dans plusieurs directions par rapport à un autre. Pour résoudre ce problème, on suppose que les trois objets A, B et C sont représentés respectivement par trois points a, b et c dont la position relative α, β n'est pas précise. Dans ce cas, l'histogramme d'angles normalisé $H^N_{AB}(\theta)$ va représenter la probabilité de trouver le point b dans la direction θ par rapport au point a :

$$P(\alpha_e) = H^N_{AB}(\alpha) \tag{4.163}$$

De même, l'histogramme d'angles normalisé $H^N_{BC}(\theta)$ représente la probabilité de trouver le point c dans la direction θ par rapport au point b. L'inférence revient donc à déterminer une estimation $H^{'N}_{AC}$ de l'histogramme d'angles H^N_{AC} à partir des deux histogrammes d'angles H^N_{AB} et H^N_{BC}.

La probabilité $P(\gamma_e)$ est déterminée à partir de la marginalisation de la densité de probabilité conjointe $P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e)$ par rapport à α et β :

$$P(\gamma_e) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\gamma_e, \alpha_e, \beta_e)\, d\alpha\, d\beta \tag{4.164}$$

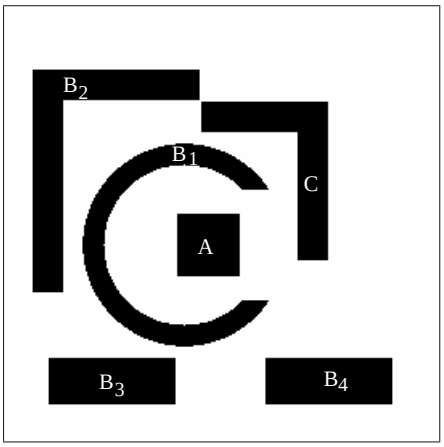
$$= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)\, P(\beta_e/\alpha_e)\, P(\alpha_e)\, d\alpha\, d\beta \tag{4.165}$$

En supposant que les régions sont représentées par des points, la variable aléatoire $\boldsymbol{\beta}$ (événement β_e) est indépendante de la variable aléatoire $\boldsymbol{\alpha}$ (événement α_e). Dans ce cas, l'estimation de l'histogramme d'angles $H^{'N}_{AC}$ est donnée par :

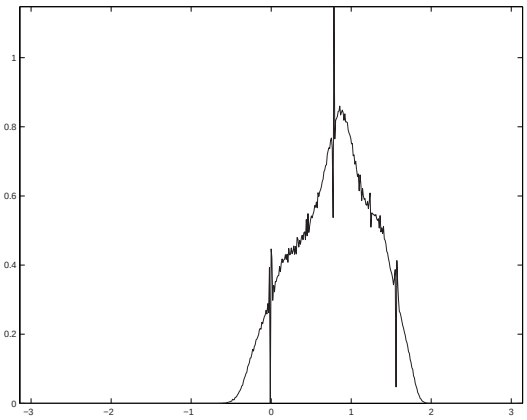
$$H^{'N}_{AB}(\gamma) = \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e) H^N_{AB}(\alpha) H^N_{BC}(\beta)\, d\alpha\, d\beta \tag{4.166}$$

Application

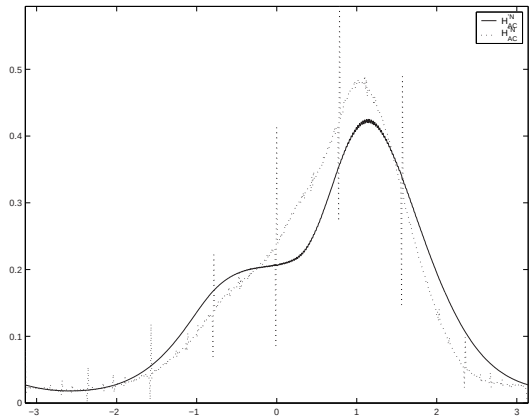
Nous avons appliqué cette méthode pour avoir une estimation de l'histogramme d'angles normalisé entre les deux régions A et C de la figure 4.43-a en utilisant les objets $B_{1..4}$. Dans cet exemple, la région C est située dans deux directions par rapport à la région A et l'histogramme d'angles H_{AC} (Fig. 4.43-b) n'est pas proche d'un Dirac. Nous avons comparé les résultats obtenus avec ceux utilisant l'histogramme angles-distances (Chap. 2). L'histogramme d'angles est calculé à partir de l'histogramme



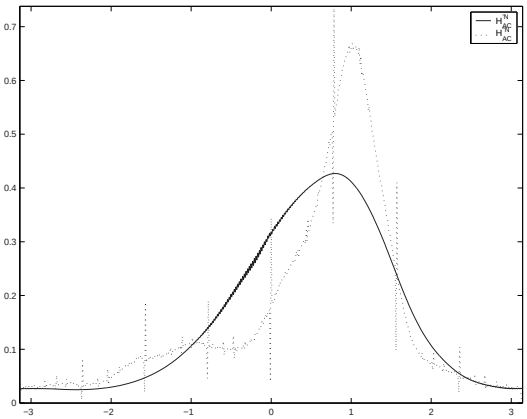
(a) Un exemple d'objets non compacts.



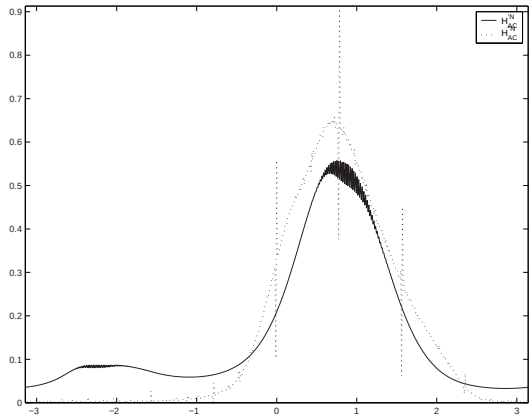
(b) L'histogramme d'angles H_{AC}.



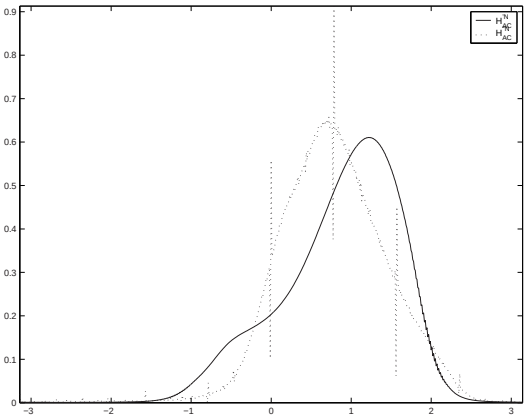
(c) L'histogramme d'angles obtenu en utilisant la région intermédiaire B_1.



(d) L'histogramme d'angles obtenu en utilisant la région intermédiaire B_2.



(e) L'histogramme d'angles obtenu en utilisant la région intermédiaire B_3.

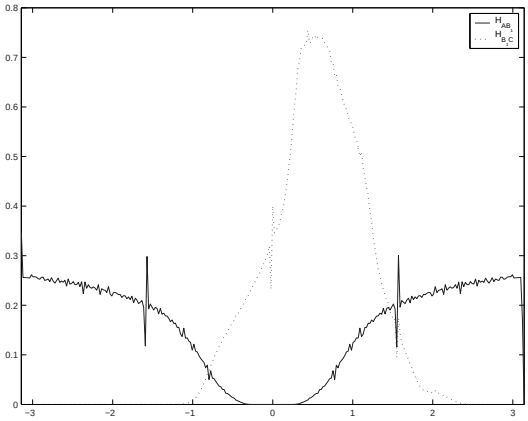


(f) L'histogramme d'angles obtenu en utilisant la région intermédiaire B_4.

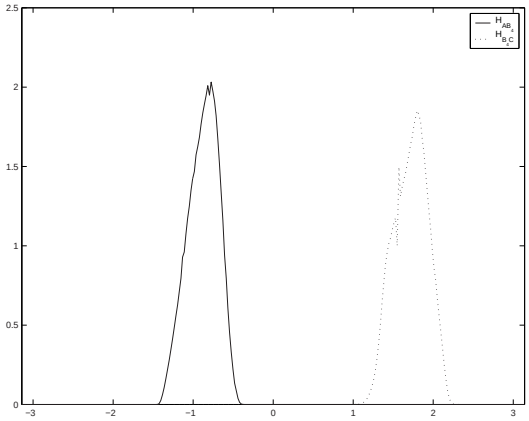
FIG. 4.43 – Comparaison entre l'histogramme d'angles $H^{"N}_{AC}$ (en pointillés) obtenu par la méthode utilisant l'histogramme angles-distance et H'^{N}_{AC} (trait plein) obtenu en utilisant uniquement les histogrammes d'angles H_{AB} et H_{BC} et la probabilité $P(\gamma_e/\alpha_e, \beta_e)$.

angles-distances estimé en utilisant l'équation 2.19.

En examinant les différents histogrammes obtenus par la méthode probabiliste (Fig. 4.43), on remarque que le résultat obtenu est presque identique à celui de l'histogramme angles-distances. L'information métrique représentée dans l'histogramme angles-distances fait la différence dans certains cas. Par exemple sur la figure 4.43-e, on voit clairement que l'histogramme d'angles obtenu à partir de l'histogramme angles-distances affirme qu'il n'existe pas de couples de points correspondant aux directions $]-\pi..\theta]$ ($\theta \approx -1$). Dans le cas de la méthode probabiliste, le résultat obtenu affirme qu'il peut y avoir quelques couples, car en l'absence de l'information métrique cette hypothèse devient probable. Cette différence reste négligeable devant l'importance de l'espace mémoire nécessaire pour stocker l'histogramme angles-distances (fonction bi-dimensionnelle).



(a) Les deux histogrammes d'angles H_{AB_1} et H_{B_1C}.



(b) Les deux histogrammes d'angles H_{AB_4} et H_{B_4C}.

FIG. 4.44 – Les deux histogrammes d'angles H_{AB} et H_{BC} correspondant aux deux régions B_1 et B_4.

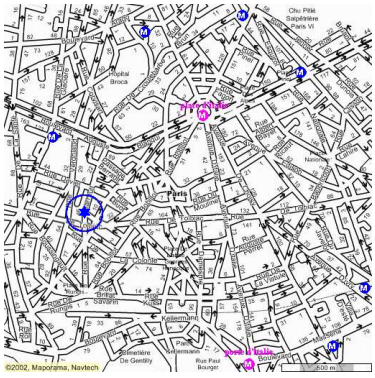
Comme l'histogramme angles-distances (section 2.6), on remarque que les erreurs obtenues dépendent aussi de la région intermédiaire utilisée. Les histogrammes d'angles obtenus en utilisant les deux régions B_1 (Fig. 4.43-c) et B_4 (Fig. 4.43-f) sont plus proches de l'histogramme d'angles correct (Fig. 4.43) que les autres. Seulement dans ce cas, les erreurs ne sont pas dues directement à la surface de la région intermédiaire B mais à la forme de l'histogramme d'angles. Ces deux cas sont plus proches que les autres de nos hypothèses de départ (relations spatiales entre des points). Plus le problème est proche de celui des points, plus le résultat sera précis. En examinant les deux histogrammes d'angles H_{AB} et H_{BC} pour ces deux exemples, on remarque que l'histogramme d'angles H_{B_1C} (Fig. 4.44-a) présente une seule direction principale correspondant à 0.55. Dans l'autre cas (Fig. 4.44-b), les deux histogrammes sont presque équivalents à ceux des régions compactes (paragraphe 4.9.1).

4.10 Localisation d'un objet ou une région connaissant sa position relative

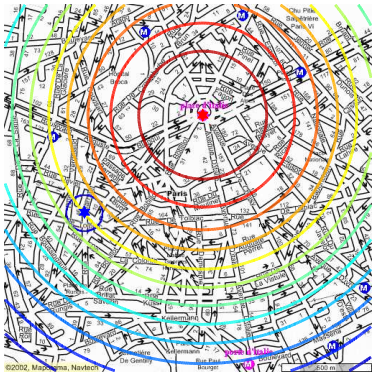
Dans le cas des problèmes de localisation, on est intéressé par la position géographique de l'objet C et non pas par sa position relative. Pour résoudre ce problème, on utilise la probabilité $P(C, \alpha, \beta)$ (Eq. 4.116,4.117) qui a été déterminée pour n'importe quelle distribution continue des points dans le plan. Localiser le point C revient, dans ce cas, à choisir le point du plan qui minimise une fonction risque fixée. Dans la suite, nous avons utilisé le critère de minimisation de l'erreur moyenne de décision (paragraphe 4.8.1).

4.10.1 Exemple

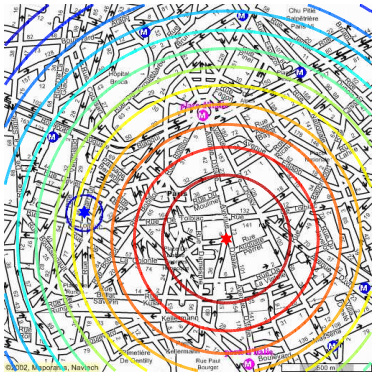
Supposons qu'on soit amené à se rendre à l'ENST[5] de Paris. Cette école est située pas très loin de place d'Italie à l'ouest de la station de métro Tolbiac. Malheureusement sur notre plan (Fig. 4.45-a), cette station de métro n'est pas précisée. L'unique information dont on dispose est quelle est située entre les deux stations place d'Italie et porte d'Italie. Cela nous permet de déduire qu'elle est située au sud de place d'Italie et au nord de porte d'Italie. Le problème consiste à déterminer une approximation de la position géographique de l'ENST à partir de ces informations.



(a) Plan de Paris[6]



(b) Distribution des points C (ENST) dans le plan.



(b) Distribution des points B (station de métro Tolbiac) dans le plan.

FIG. 4.45 – Hypothèse sur la distribution des points dans le plan pour le problème de localisation de l'ENST (le symbole * entouré en bleu représente la position exacte de l'ENST sur le plan).

Pour revenir à notre problème des trois points A, B et C : l'ENST représente le point C, la station de métro Tolbiac représente le point B et place d'Italie représente le point

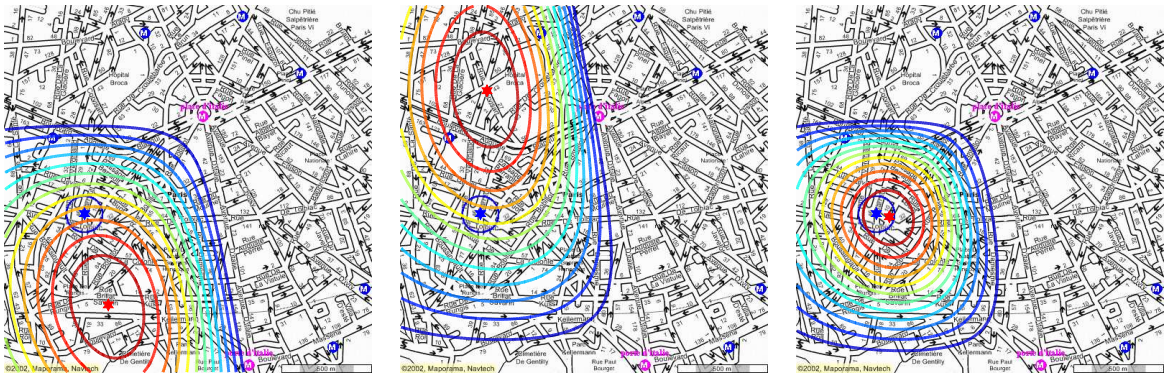
[5]ENST : École Nationale Supérieure des Télécommunications

[6]Plan récupéré sur le site `http://www.maporama.com`.

A. Pour résoudre ce problème, il faut trouver une interprétation à chaque information donnée. Pour modéliser l'information métrique "pas très loin" entre le point A et le point C, on suppose que la distribution des points C dans le plan, f_c, suit une loi normale centrée sur le point A (Fig. 4.45-b). Pour la distribution des points B dans le plan, nous avons choisi une loi normale centrée sur le centre du segment reliant la station place d'Italie à la station porte d'Italie (Fig. 4.45-c), cela représente la modélisation de l'information "la station de métro Tolbiac est située entre les deux stations place d'Italie et porte d'Italie". Les deux angles α et β correspondent respectivement aux deux angles $-\pi/2$ et π. La probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est déterminée en utilisant l'équation 4.117.

4.10.2 Résultats de la localisation

Nous avons représenté sur la figure 4.46-a le résultat de l'évaluation de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$, le maximum de cette probabilité est atteint au point représenté par l'étoile rouge. On remarque que le résultat obtenu n'est pas très fiable et très loin de la position exacte de l'école. Ce résultat était prévisible car les informations utilisés ne sont pas suffisantes. Pour voir l'importance d'avoir plusieurs informations, nous avons utilisé la position de la station de métro porte d'Italie. Comme la station de métro Tolbiac est situé au nord de la station de métro porte d'Italie, nous avons une deuxième possibilité pour déduire la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$. Sur la figure 4.46-b, Nous avons présenté le résultat de l'évaluation de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ en utilisant l'information concernant porte d'Italie. Ce résultat est encore moins fiable que le précédent, mais si on examine la fusion des deux informations (Fig. 4.46-c), la localisation est très proche de la position réelle de l'ENST.



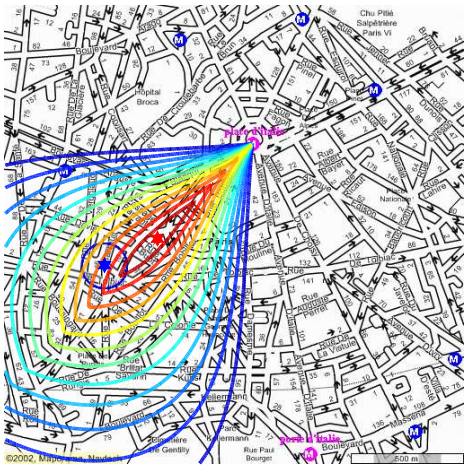
(a) Localisation à partir de la station de métro place d'Italie.

(b) Localisation à partir de la station de métro porte d'Italie.

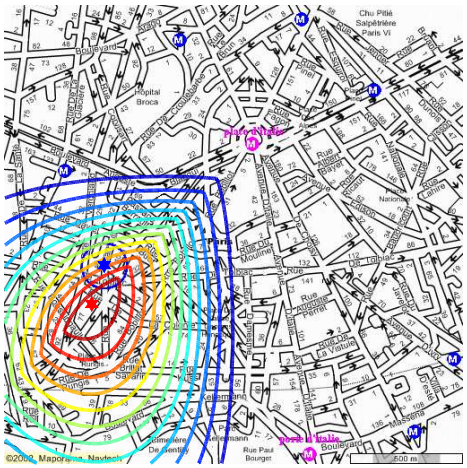
(c) Fusion des deux résultats

FIG. 4.46 – Localisation de l'ENST de Paris à partir de sa position relative par rapport à la station de métro Tolbiac (Le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est atteint sur le point représenté par le symbole *).

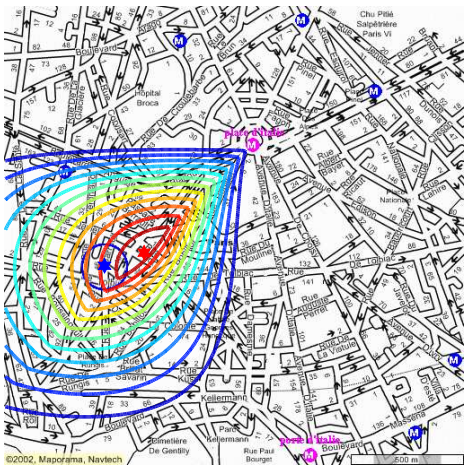
Maintenant, si on sait, en plus des informations précédentes, que l'ENST est située au sud-ouest de place d'Italie, on peut modifier la distribution a priori des points C dans le plan pour mieux représenter cette information (Fig. 4.47-a). L'utilisation de cette distribution pour localiser l'ENST à partir de place d'Italie (Fig. 4.47-b) ou bien porte d'Italie (Fig. 4.47-c) est plus précise qu'avant (Fig. 4.46). La fusion des deux nouveaux résultats donne un résultat encore plus précis (Fig. 4.47-d).



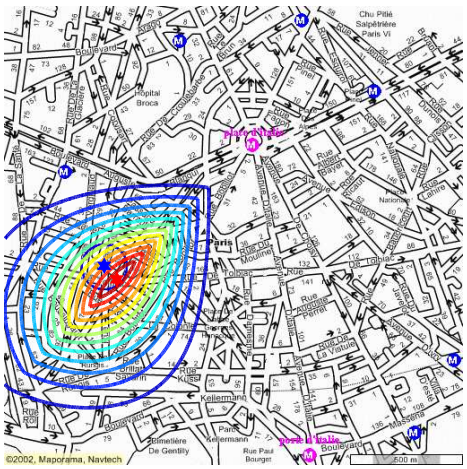
((a) Distribution a priori des points C (ENST) dans le plan.



(b) Localisation à partir de la station de métro place d'Italie.



(c) Localisation à partir de la station de métro porte d'Italie.



(c) Fusion des deux résultats

FIG. 4.47 – Utilisation de la nouvelle connaissance « L'ENST est située au sud ouest de place d'Italie » pour la localisation (Le maximum de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ est atteint sur le point représenté par le symbole *).

En conclusion, la fiabilité du résultat dépend du nombre d'informations exploitées pour déduire la position géographique du point C. Avec peu d'informations, le résultat

ne peut pas être très fiable car tous les points du domaine $D_{\alpha,\beta}$ vérifient les hypothèses de départ.

4.11 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre une étude théorique du problème d'inférence des relations spatiales directionnelles entre des points. Nous avons étudié plusieurs exemples de distributions des points dans le plan. Cette étude constitue la base d'une méthode d'inférence probabiliste des relations spatiales directionnelles. Nous avons déterminé la probabilité conjointe $P(\mathcal{C}, \alpha_e, \beta_e)$ pour n'importe quelle distribution continue des points dans le plan.

Les résultats de l'inférence obtenus dans le cas des régions non compactes sont très proches de ceux obtenus en utilisant l'histogramme angles-distances et cela en utilisant uniquement l'information angulaire. Seulement, dans le cas où les histogrammes d'angles H_{AB} et H_{BC} sont très loin des hypothèses du calcul théorique le résultat obtenu n'est pas équivalent au résultat exact. Cela est dû au fait que ces deux histogrammes d'angles ne sont pas indépendants, ils dépendent tous les deux de la forme de la région B. Pour améliorer cette estimation, il serait intéressant de voir la possibilité d'utiliser des paramètres de la forme de la région B et les deux histogrammes d'angles pour déterminer la probabilité $P(\alpha, \beta)$.

L'exemple étudié dans la section 4.10 montre l'importance de nos résultats théoriques dans le cadre d'une application réelle. Cet exemple est proche aussi du problème de localisation des téléphones mobiles : on peut utiliser uniquement l'information angulaire pour localiser le mobile. L'importance du nombre de stations de base, dans ce cas, permet de garantir une bonne fiabilité du résultat. L'étude générale de la probabilité $P(\mathcal{C}, \alpha, \beta)$ pour n'importe quelle distribution de probabilité, nous permet d'introduire plusieurs hypothèses au problème de localisation (distributions différentes pour les deux points B et C par exemple) et ainsi adapter le résultat théorique aux exigences du problème à résoudre.

Chapitre 5

Conclusion et perspectives

Le raisonnement spatial est de plus en plus utilisé pour résoudre un ensemble de problèmes d'analyse d'image, d'interface homme-machine et de traitement du langage naturel. Face à des problèmes où les données sont incomplètes ou imprécises, il est nécessaire de s'intéresser aux modèles de représentation quantitative des relations spatiales. Cette représentation fondée sur des modèles flous cherche à quantifier les différentes relations spatiales entre les différents objets ou régions de l'espace. Comparées aux méthodes de représentation qualitative de l'espace, ces approches se sont limitées à l'estimation des différentes relations sans s'intéresser réellement à la partie raisonnement. L'objectif principal de cette thèse vise à développer des méthodes d'inférence quantitative en utilisant ces modèles.

Dans un premier temps, nous nous sommes intéressés aux modèles existants dans le but de les enrichir afin de pouvoir faire de l'inférence sans avoir à réestimer chaque fois ces modèles de représentation. En s'appuyant sur l'exemple des points, nous avons introduit l'information métrique dans l'histogramme d'angles pour définir l'histogramme angles-distances. Notre modèle permet de représenter à la fois l'information angulaire nécessaire à l'estimation des différentes relations spatiales directionnelles et l'information métrique utile pour déterminer la distance qui sépare les deux régions. En combinant ces deux informations, nous avons pu définir une méthode d'estimation de l'histogramme angles-distances $\mathcal{H}_{AC}$ qui représente les relations spatiales entre les deux régions A et C à partir des deux histogrammes $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$. La fiabilité des résultats obtenus dépend essentiellement de la forme et de la taille de la région B. Malheureusement, on est incapable d'estimer cette fiabilité uniquement à partir des deux histogrammes. De plus, la taille de mémoire occupée par ce modèle (fonction bidimensionnelle) limite son utilisation à des petites applications et celle-ci ne peut pas être envisagée par exemple dans le cas d'un système d'information géographique.

Pour remédier à ces inconvénients, nous nous sommes orientés vers des méthodes utilisant moins de ressources. De plus, l'estimation de l'histogramme angles-distances nécessite la connaissance complète de la forme, la taille et la position relative des deux régions. Or ces informations sont parfois indisponibles ou bien impossibles à déterminer. On s'est intéressé, dans la deuxième partie, à la possibilité de déduire la position

relative d'un objet C par rapport à l'objet A uniquement à partir des estimations des quatre relations spatiales directionnelles de base. Pour cela, nous avons utilisé un réseau d'agrégation floue pour déduire les relations spatiales directionnelles entre les deux régions A et C à partir de celles entre les deux régions A et B et les deux régions B et C. Les résultats obtenus dans le cas général sont acceptables. Malheureusement, utiliser uniquement le degré des quatre relations de base s'avère insuffisant surtout dans le cas où l'information métrique est importante. Afin de pouvoir détecter ces cas de figure et avoir une idée sur les erreurs d'estimation, nous nous sommes orientés vers une étude théorique du problème d'inférence en s'appuyant sur l'histogramme d'angles.

Nous avons présenté dans la troisième partie une étude probabiliste du problème dans le cas des points. Sachant que la majorité des modèles de quantification est fondée sur la représentation des relations spatiales entre des points pour estimer ces relations entre des régions, cette étude peut être facilement étendue au cas des objets. Afin d'élargir les domaines d'application, nous avons déterminé la probabilité a posteriori $P(\gamma/\alpha,\beta)$ pour différentes distributions des points dans le plan. Nous avons déterminé en même temps la probabilité jointe $P(\mathcal{C},\alpha,\beta)$ qui relie la position spatiale du point C dans le plan et les deux positions relatives α et β. Cette probabilité a été aussi déterminée pour n'importe quelle distribution continue des points dans le plan. Ce résultat a un grand intérêt dans le cas où l'on s'intéresse à la position spatiale du point C et non pas à sa position relative. C'est le cas par exemple du problème de localisation des téléphones mobiles.

Le calcul analytique de la probabilité jointe $P(\gamma,\alpha,\beta)$ ne peut pas être déterminé pour n'importe quelle distribution mais le calcul numérique à partir de la probabilité $P(\mathcal{C},\alpha,\beta)$ reste possible. Pour le passage au cas des objets, nous avons distingué deux cas :

- **Cas des régions compactes ou des régions éloignées :** L'hypothèse de supposer que les régions sont représentées dans ce cas par des points n'est pas très loin de la réalité. Pour cela les résultats obtenus sont très fiables et les erreurs engendrées peuvent être estimées directement à partir de l'information angulaire.

- **Cas des régions non compactes :** Dans ce cas, les résultats obtenus sont proches de ceux déjà obtenus en utilisant l'histogramme angles-distances et cela en utilisant uniquement l'histogramme d'angles. Les erreurs d'estimation obtenues sont étroitement liées aux hypothèses du calcul théorique. Dans le cas où les régions sont non compactes, les deux histogrammes d'angles H_{AB} et H_{BC} ne sont pas indépendants, ils dépendent tous les deux de la forme de la région B. En conséquence, l'hypothèse que la variable aléatoire β (position relative de la région C par rapport à B) est indépendante par rapport à la variable aléatoire α (position relative de la région B par rapport à A) n'est pas vérifiée. Ce qui engendre une grande différence dans certains cas par rapport à une évaluation directe.

Perspectives

La perspective la plus importante est sans doute de continuer à travailler sur l'approche probabiliste. En s'appuyant sur d'autres informations autres que les deux histogrammes d'angles, on pourrait améliorer les résultats obtenus dans le cas des régions non compactes. Il faudrait déterminer les paramètres qui nous permettront d'obtenir une bonne estimation de la probabilité conditionnelle $P(\beta/\alpha)$. Ce point nous semble essentiel dans le cas du traitement des régions non compactes.

Une seconde perspective également importante est de voir ce que peuvent apporter nos résultats sur les régions compactes dans le cas des problèmes de localisation des téléphones mobiles. Les données de ce problème sont très proches de notre étude théorique et l'intégration aux systèmes existants devrait être facile, mais il conviendrait de prendre de façon réaliste les incertitudes de mesures propres à ce problème particulier.

Une autre perspective est de développer une méthode d'estimation de la taille et de la forme de la région intermédiaire B à partir des deux histogrammes angles-distances $\mathcal{H}_{AB}$ et $\mathcal{H}_{BC}$. Cela permettrait de réduire le nombre de redondances dans l'histogramme angles-distances estimé.

D'autres perspectives sont ouvertes dans le cas du réseau d'agrégation. Pour l'instant, nous avons utilisé uniquement les quatre relations spatiales de base pour déduire la relation RIGHT OF. D'autre relations (métriques ou topologiques) peuvent être intégrées aux entrées du réseau. Il est aussi possible d'utiliser notre algorithme d'apprentissage pour déterminer les règles d'inférence des relations spatiales complexes à partir des relations simples (Inférence de type 2 : cf. introduction).

Annexe A

Introduction à la théorie des sous ensembles flous

L'inadaptation de la théorie classique des ensembles aux notions vagues et imprécises, rencontrées pourtant dans de nombreux autres domaines que la linguistique, a conduit à une nouvelle modélisation par l'introduction en 1965 de la théorie des sous ensembles flous (fuzzy sets) par L. Zadeh [ZADE-65].

Très utilisée dans de nombreuses disciplines mathématiques(intégration, théorie de la mesure, théorie de l'information, statistique, calcul différentiel, topologie...), la théorie des sous ensembles flous s'est ouverte, en quelque années, à un vaste champ d'applications. Les domaines concernés vont des produits de consommation du grand public(caméra, appareil photo, machine à laver, ...) jusqu'aux sciences humaines (psychologie, sociologie...) en passant par les automatismes industriels, la robotique, l'intelligence artificielle, la reconnaissance des formes, la météorologie et l'évaluation des risques sismiques.

A.1 Objectifs

La théorie des sous ensembles flous est une théorie mathématique dont l'objectif est de modéliser les notions vagues du langage naturel pour pallier à l'inadaptation de la théorie des ensembles classiques. Ce concept a été aussi introduit dans le but d'éviter les passages brusques d'une classe à une autre(par exemple : de la classe noire à la classe blanche) et autoriser les éléments à n'appartenir complètement ni à l'une ni à l'autre.

La définition d'un ensemble flou répond au besoin de représenter des connaissances imprécises, soit parce qu'elles sont exprimées en langage naturel par un observateur qui n'éprouve pas le besoin de fournir plus de précisions ou n'en est pas capable, soit parce qu'elles sont obtenues avec des instruments d'observation qui produisent des erreurs de mesure.

A.2 Définition d'un ensemble flou

Un sous ensemble flou A de l'univers X est défini par une fonction d'appartenance μ_A qui associe à chaque élément x de X le degré $\mu_A(x)$, compris entre 0 et 1, avec lequel x appartient à A.

Exemple :

Si X est l'ensemble des âges possibles d'une personne, on peut définir le sous ensemble flou A des personnes jeunes. Le degré d'appartenance de toute personne âgée de x au sous ensemble flou A est d'autant plus grand que son âge est petit (Fig. A.1

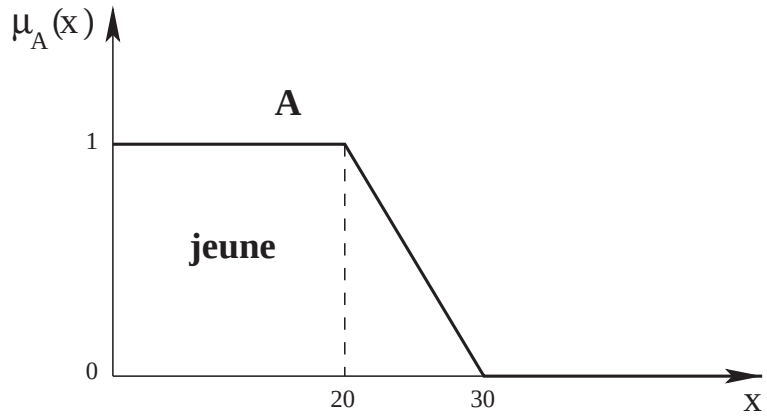


FIG. A.1 – Sous ensemble flou A représentant la population jeune. L'âge est représenté par la variable x

Remarque :

Dans le cas où μ_A ne prend que des valeurs égales à 0 ou 1, le sous ensemble flou A n'est rien d'autre qu'un sous ensemble classique de X.

A.3 Caractéristiques d'un sous ensemble flou

Divers notions complémentaires, d'utilisation courante, permettent de mieux distinguer les sous ensembles flous des ensembles classiques :

A.3.1 Support d'un sous ensemble flou

Soit A un sous ensemble flou de l'univers X. Le support du sous ensemble flou A est un sous ensemble classique de X, dont chacun des éléments a un degré d'appartenance non nul par rapport à A (Fig. A.2) :

$$\text{Support}(A) = \{\, x \in X \,/\, \mu_A(x) \neq 0 \,\} \tag{A.1}$$

A.3.2 Noyau d'un sous ensemble flou

Le noyau d'un sous ensemble flou A de X est un sous ensemble ordinaire de X dont chaque élément a un degré d'appartenance égal à 1 (Fig. A.2) :

$$\text{Noyau}(A) = \{\, x \in X / \mu_A(x) = 1\} \tag{A.2}$$

Remarque :

lorsque $\text{Noyau}(A) \neq \emptyset$, on dit que le sous ensemble flou A est normal ou normalisé, sinon on dit qu'il est sous normal.

A.3.3 Hauteur d'un sous ensemble flou

La hauteur D'un sous ensemble flou A de X est la valeur maximale de la fonction d'appartenance, c'est le plus grand degré d'appartenance à A (Fig. A.2) :

$$H(A) = \max_{x \in X} (\mu_A(x)) \tag{A.3}$$

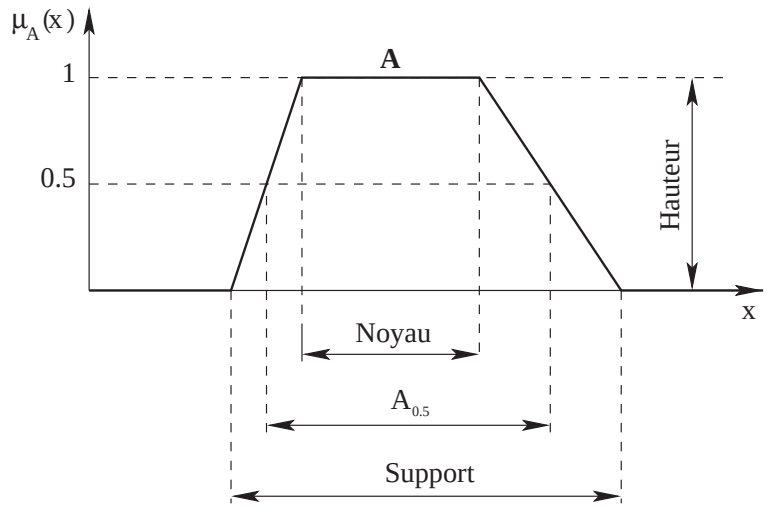


FIG. A.2 – Support, Noyau, Hauteur et α-coupe d'un sous ensemble flou.

Remarque :

Un sous ensemble flou est normalisé si $H(A) = 1$.

A.3.4 α coupe ou coupe de niveau α

On appelle α-coupe ou coupe de niveau α du sous ensemble flou A pour une valeur donnée $\alpha \in [0, 1]$, le sous ensemble classique A_α de X défini par (Fig. A.2) :

$$A_\alpha = \{x \in X / \mu_A(x) \geq \alpha\} \tag{A.4}$$

Une α-coupe telle que $\mu_A(x) > \alpha$; $\forall x \in A$ est dite stricte.

A.4 opérations sur les sous ensembles flous

Toutes les opérations ensemblistes définies pour les ensembles stricts ont été généralisées de tel sorte qu'on puisse les utiliser pour les sous ensembles flous :

A.4.1 Inclusion

Un sous ensemble flou A est un sous ensemble d'un sous ensemble flou B ssi :

$$\forall x \in X \ ; \ \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \tag{A.5}$$

A.4.2 Égalité

Soit deux sous ensembles flous A et B de l'univers X. On dit que A et B sont égaux si les fonctions d'appartenance ont la même valeur en tout point $x \in X$:

$$A = B \Leftrightarrow \forall x \in X; \mu_A(x) = \mu_B(x) \tag{A.6}$$

A.4.3 Réunion

La réunion de deux sous ensembles flous A et B de même référentiel X est un sous ensemble flou noté $A \cup B$ dont la fonction d'appartenance est :

$$\forall x \in X; \mu_{A \cup B}(x) = \mathcal{U}\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \tag{A.7}$$

où $\mathcal{U}$ est une fonction de $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$. Pour rester conforme au cas classique cette fonction doit vérifier certains critères :

1. **Commutatitivité :** $\forall x, y \in [0,1]$; $\mathcal{U}(x,y) = \mathcal{U}(y,x)$.
2. **Associativité :** $\forall x, y, z \in [0,1]$; $\mathcal{U}\Big(x, \mathcal{U}(y,z)\Big) = \mathcal{U}\Big(\mathcal{U}(x,y), z\Big)$.
3. **Croissance :** $\forall x, y, z, t \in [0,1]$; $x \leq z$ et $y \leq t \Rightarrow \mathcal{U}(x,y) \leq \mathcal{U}(z,t)$.
4. **Élément neutre :** $\forall x \in [0,1]$; $\mathcal{U}(x,0) = x$.

Ces fonctions portent le nom de **conorme triangulaire** ou **T-Conorme**.

Les T-Conormes les plus utilisées sont indiquées dans le tableau A.1.

A.4.4 Intersection

L'intersection de deux sous ensembles flous A et B de même référentiel X est un sous ensemble flou noté $A \cap B$ dont la fonction d'appartenance est :

$$\forall x \in X; \mu_{A\cup B}(x) = \mathcal{I}\Big(\mu_A(x), \mu_B(x)\Big) \tag{A.8}$$

où $\mathcal{I}$ est une fonction de $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$. Pour rester conforme au cas classique cette fonction doit vérifier certains critères :

1. **Commutatitivité :** $\forall x, y \in [0,1];\ \mathcal{I}(x,y) = \mathcal{I}(y,x)$.
2. **Associativité :** $\forall x, y, z \in [0,1];\ \mathcal{I}\Big(x, \mathcal{I}(y,z)\Big) = \mathcal{I}\Big(\mathcal{I}(x,y), z\Big)$.
3. **Croissance :** $\forall x, y, z, t \in [0,1];\ x \leq z$ et $y \leq t \Rightarrow \mathcal{I}(x,y) \leq \mathcal{I}(z,t)$.
4. **Élément neutre :** $\forall x \in [0,1];\ \mathcal{I}(x,1) = x$.

Ces fonctions portent le nom de **norme triangulaire** ou **T-Norme**.

Les T-Normes les plus utilisées sont indiquées dans le tableau A.1.

A.4.5 Complément

Le complément d'un sous ensemble flou A de référentiel X est un sous ensemble flou noté $\overline{A}$ dont la fonction d'appartenance est donnée par :

$$\forall x \in X;\ \mu_{\overline{A}}(x) = \mathcal{N}(\mu_A(x)) \tag{A.9}$$

où $\mathcal{N}$ est une fonction de $[0,1] \rightarrow [0,1]$ appelée fonction négation. Comme pour les t-normes et les t-conormes, la fonction négation doit vérifier certains critères :

1. $\mathcal{N}(0) = 1$ et $\mathcal{N}(1) = 0$.
2. **Monotonie :** $\forall x, y \in [0,1];\ x \geq y \Rightarrow \mathcal{N}(x) \leq \mathcal{N}(y)$.

Elle est dite **stricte** si $\mathcal{N}(x)$ est continue et satisfait $\forall x, y \in [0,1];\ x > y \Rightarrow \mathcal{N}(x) < \mathcal{N}(y)$. Elle est de plus **involutive** ssi $\forall x \in [0,1];\ \mathcal{N}(\mathcal{N}(u)) = u$.

A.4.6 Dualité entre T-Norme, T-Conorme et fonction négation

Une T-Norme $\mathcal{I}$ et une T-Conorme $\mathcal{U}$ sont dites duales pour la fonction négation $\mathcal{N}$ si elles satisfont les relations suivantes :

1. $\forall x, y \in [0,\ 1];\ \mathcal{N}\Big(\mathcal{U}(x,y)\Big) = \mathcal{I}\Big(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)\Big)$.
2. $\forall x, y \in [0,\ 1];\ \mathcal{N}\Big(\mathcal{I}(x,y)\Big) = \mathcal{U}\Big(\mathcal{N}(x), \mathcal{N}(y)\Big)$.

Remarque :

Ces deux relations correspondent pour les ensembles aux relations définies par le théorème de De Morgan :

1. $\Leftrightarrow \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.
2. $\Leftrightarrow \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Les principales dualités existantes entre les différents opérateurs sont données aussi dans le tableau A.1.

T-Norme $\mathcal{I}(x,y)$	T-Conorme $\mathcal{U}(x,y)$	Négation $\mathcal{N}(x)$	Nom
$\min(x,\ y)$	$\max(x,\ y)$	$1-x$	Zadeh
xy	$x+y-xy$	$1-x$	Bandler et Kohout
$\max(x+y-1,\ 0)$	$\min(x+y,\ 1)$	$1-x$	Lukasiewicz
$\frac{xy}{\gamma+(1-\gamma)(x+y-xy)}$	$\frac{x+y+xy-(1-\gamma)xy}{1-(1-\gamma)xy}$	$1-x$	Hamacher $(\gamma>0)$
$\max\left(1-\sqrt[p]{(1-x)^p+(1-y)^p},\ 0\right)$	$\min\left(\sqrt[p]{x^p+y^p},\ 1\right)$	$1-x$	Yager $(p\geq 1)$
$\max\left(\frac{x+y-1+\lambda xy}{1+\lambda},\ 0\right)$	$\min\left(x+y+\lambda xy,\ 1\right)$	$\frac{1-x}{1+\lambda x}$	Weber $(\lambda>-1)$
$\begin{cases} x & \text{si } y=1 \\ y & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } y=0 \\ y & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$	$1-x$	Drastique

Tab. A.1 – Principales T-Normes et T-Conormes duales [BOUC-95].

A.5 Propriétés des opérateurs ensemblistes flous

Par définition des opérateurs t-normes et t-conormes, une grande partie des propriétés vérifiées par les opérateurs de la théorie des sous ensembles classiques restent valable :

Soit A,B et C trois sous ensembles flous de l'univers X.

1. **Commutativité :**

$$\begin{aligned} A\cap B &= B\cap A \\ A\cup B &= B\cup A \end{aligned}$$

2. **Associativité :**

$$\begin{aligned} (A\cap B)\cap C &= A\cap(B\cap C) \\ (A\cup B)\cup C &= A\cup(B\cup C) \end{aligned}$$

3. **Idempotence :**

$$\begin{aligned} A\cap A &= A \\ A\cup A &= A \end{aligned}$$

4. **Distribution :**

$$\begin{aligned} A\cap(B\cup C) &= (A\cap B)\cup(A\cap C) \\ A\cup(B\cap C) &= (A\cup B)\cap(A\cup C) \end{aligned}$$

5. **Absorption :**

$$\begin{aligned} A \cap \emptyset &= \emptyset \\ A \cup X &= X \end{aligned}$$

6. **Identité :**

$$\begin{aligned} A \cup \emptyset &= A \\ A \cap X &= X \end{aligned}$$

Remarques :

1. La propriété de contradiction ainsi que la propriété du tiers exclu ne sont pas vérifiées par les opérateurs flous :

$$\begin{aligned} A \cup \overline{A} &\neq X \\ A \cap \overline{A} &\neq \emptyset \end{aligned}$$

2. Si on utilise une t-norme $\mathcal{I}$ et une t-conorme $\mathcal{U}$ duales pour une fonction de négation$\mathcal{N}$ pour construire les opérateurs d'intersection, d'union et du complémentaire, le théorème de De Morgan est vérifié :

$$\begin{aligned} \overline{A \cup B} &= \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} &= \overline{A} \cup \overline{B} \end{aligned}$$

3. Si nous utilisons une fonction négation $\mathcal{N}$ involutive, la propriété d'involution est vérifiée :

$$\overline{\overline{A}} = A$$

Annexe B

Calcul de la surface de $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$

B.1 1$^{\mathbf{er}}$ cas : $\beta \neq \alpha + k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

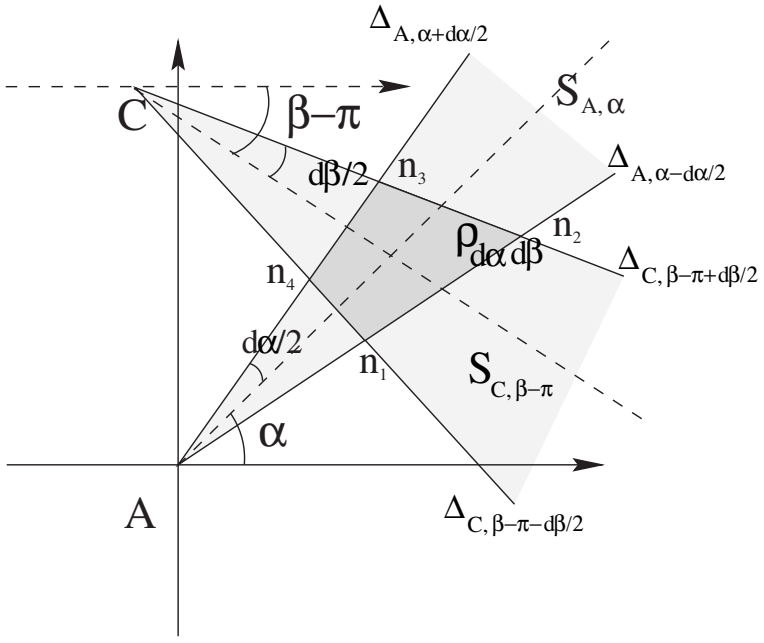


FIG. B.1 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta \neq \alpha + k\pi$.

On veut déterminer la surface du secteur ρ qui représente l'intersection du secteur angulaire $S_{A,\alpha}$ et du secteur angulaire $S_{C,\beta-\pi}$ quand $d\alpha$ et $d\beta$ tendent vers zéro (Fig. B.1).

$$|\rho| = \lim_{d\beta \to 0, d\alpha \to 0} \frac{|\rho_{d\alpha, d\beta}|}{d\alpha d\beta} \tag{B.1}$$

Le secteur $\rho_{d\alpha,d\beta}$ est représenté par le quadrilatère $n_1n_2n_3n_4$ issu de l'intersection des quatre droites $\Delta_{C,\beta-\pi-d\beta/2}$, $\Delta_{C,\beta-\pi+d\beta/2}$, $\Delta_{A,\alpha-d\alpha/2}$ et $\Delta_{A,\alpha+d\alpha/2}$. L'équation d'une droite Δ dont la pente est égale à ϕ et qui passe par un point $N(x_n, y_n)$ est définie par :

$$\cos(\phi)(y - y_n) = \sin(\phi)(x - x_n)$$

Cette équation peut être écrite en coordonnées polaires sous la forme :

$$r\sin(\theta - \phi) = r_n \sin(\Theta_n - \phi) \tag{B.2}$$

où (r_n, Θ_n) représente les coordonnées polaires du point N.

En remplaçant ϕ dans l'équation B.2 par $\beta - \pi - d\beta/2$ et $\beta - \pi + d\beta/2$, θ par $\alpha - d\alpha/2$ et les coordonnées du point N par celles du point C, on obtient les coordonnées des points n_1 (l'intersection des droites $\Delta_{C,\beta-\pi-d\beta/2}$ et $\Delta_{A,\alpha-d\alpha/2}$) et n_2 (l'intersection des droites $\Delta_{C,\beta-\pi+d\beta/2}$ et $\Delta_{A,\alpha-d\alpha/2}$) :

$$n_1 \quad : \quad \begin{cases} \theta_{n_1} = \alpha - d\alpha/2 \\ r_{n_1} = r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi-d\beta/2))}{\sin(\alpha - d\alpha/2 - (\beta-\pi-d\beta/2))} \end{cases} \tag{B.3}$$

$$n_2 \quad : \quad \begin{cases} \theta_{n_2} = \alpha - d\alpha/2 \\ r_{n_2} = r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi+d\beta/2))}{\sin(\alpha - d\alpha/2 - (\beta-\pi+d\beta/2))} \end{cases} \tag{B.4}$$

Les coordonnées des points n_3 et n_4 sont obtenus de la même façon, en remplaçant θ par $\alpha + d\alpha/2$:

$$n_3 \quad : \quad \begin{cases} \theta_{n_3} = \alpha - d\alpha/2 \\ r_{n_3} = r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi+d\beta/2))}{\sin(\alpha + d\alpha/2 - (\beta-\pi+d\beta/2))} \end{cases} \tag{B.5}$$

$$n_4 \quad : \quad \begin{cases} \theta_{n_4} = \alpha - d\alpha/2 \\ r_{n_4} = r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi-d\beta/2))}{\sin(\alpha + d\alpha/2 - (\beta-\pi-d\beta/2))} \end{cases} \tag{B.6}$$

On peut exprimer la surface de $\rho_{d\alpha,d\beta}$ sous la forme d'une intégrale :

$$|\rho_{d\alpha,d\beta}| = \int_{\alpha-d\alpha}^{\alpha+d\alpha} \left(\int_{r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi-d\beta/2))}{\sin(\theta - (\beta-\pi-d\beta/2))}}^{r_c \frac{\sin(\Theta_c - (\beta-\pi+d\beta/2))}{\sin(\theta - (\beta-\pi+d\beta/2))}} r\,dr \right) d\theta \tag{B.7}$$

l'évaluation de cette intégrale nous donne :

$$|\rho_{d\alpha,d\beta}| = \frac{2r_c^2 \sin(d\alpha)\sin(d\beta)\left(\sin(2\alpha - 2\Theta_c)\cos(d\beta) - \sin(2\beta - 2\Theta_c)\cos(d\alpha) - \sin(2\alpha - 2\beta)\right)}{4\cos(2\alpha - 2\beta)\cos(d\alpha)\cos(d\beta) - \cos(2d\beta) - \cos(2d\alpha) - \cos(4\alpha - 4\beta) - 1} \tag{B.8}$$

Comme on a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$, l'évaluation de l'équation B.1 nous donne :

$$\rho = \frac{2r_c^2\left(\sin(2\alpha - 2\Theta_c) - \sin(2\beta - 2\Theta_c) - \sin(2\alpha - 2\beta)\right)}{4\cos(2\alpha - 2\beta) - \cos(4\alpha - 4\beta) - 3} \tag{B.9}$$

Après simplification, on obtient :

$$\rho = \frac{2r_c^2\sin(\alpha - \beta)\left(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\Theta_c)\right)}{\sin(\alpha - \beta)\left(3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)\right)} \tag{B.10}$$

Comme β est différent de $\alpha + k\pi$, la valeur de $\sin(\alpha - \beta)$ est différente de zéro :

$$\rho = 2r_c^2\frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta - 2\Theta_c)}{3\sin(\alpha - \beta) - \sin(3\alpha - 3\beta)} \tag{B.11}$$

B.2 2ème cas : $\beta = \alpha + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$

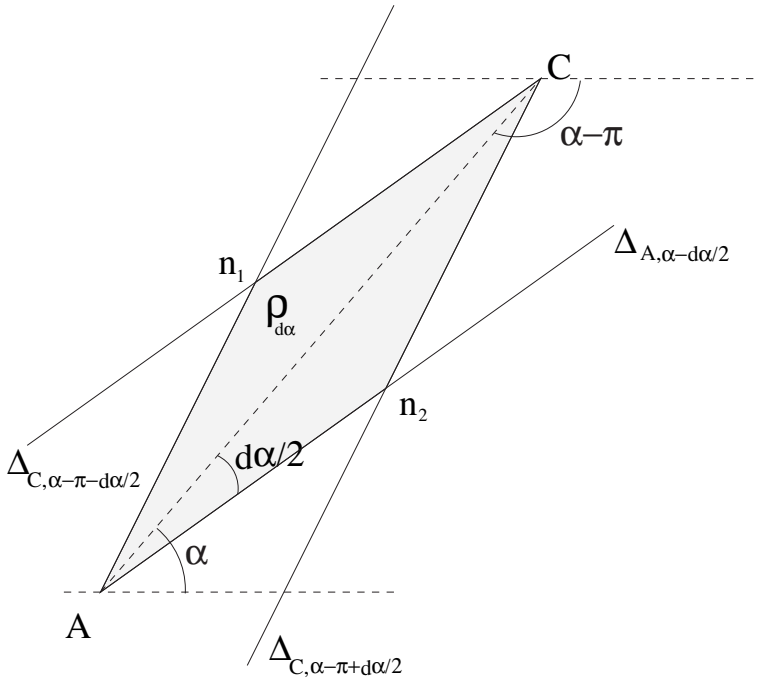


FIG. B.2 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta = \alpha + 2k\pi$.

Dans ce cas, le point C est dans la direction $\alpha \pm d\alpha$ par rapport au point A. Comme pour le cas précédent, la surface du domaine $\rho_{d\alpha}$ peut être exprimée sous la forme d'une intégrale :

$$|\rho_{d\alpha}| = \int_{\alpha - d\alpha/2}^{\alpha} \int_0^{r_c \frac{\sin(\alpha-(\alpha-\pi+d\alpha/2))}{\sin(\theta-(\alpha-\pi+d\alpha/2))}} r dr d\theta + \int_{\alpha}^{\alpha+d\alpha/2} \int_0^{r_c \frac{\sin(\alpha-(\alpha-\pi-d\alpha/2))}{\sin(\theta-(\alpha-\pi-d\alpha/2))}} r dr d\theta \tag{B.12}$$

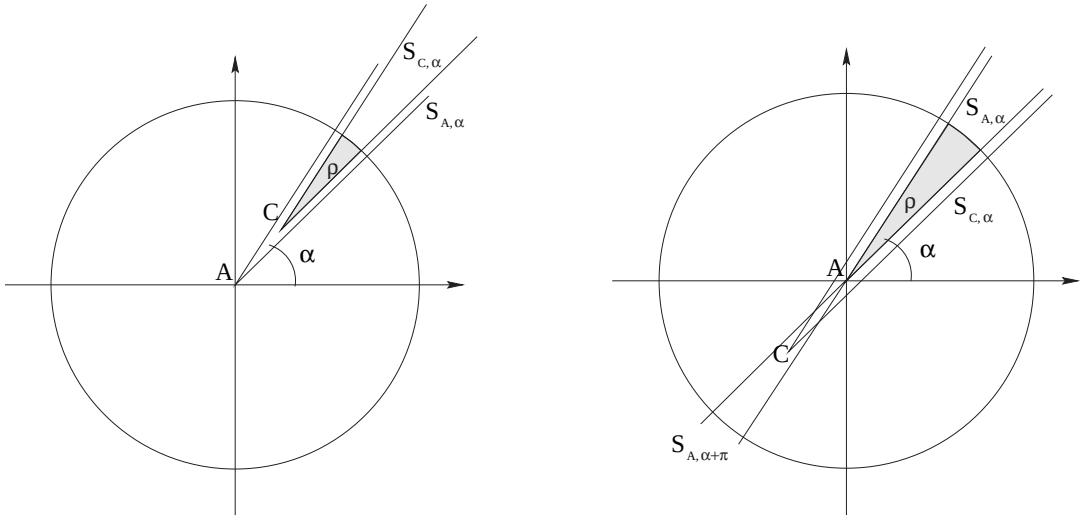
$$|\rho_{d\alpha}| = \frac{r_c^2\tan(d\alpha/2)}{2} \tag{B.13}$$

La limite de $\rho_{d\alpha}/d\alpha$ quand $d\alpha$ tend vers zéro nous donne :

$$|\rho| = \lim_{d\alpha \to 0} \frac{|\rho_{d\alpha}|}{d\alpha} \tag{B.14}$$

$$|\rho| = \frac{r_c^2}{4} \tag{B.15}$$

B.3 3ème cas : $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$



(a) Intersection des deux domaines $S_{C,\alpha-\pi}$ et $S_{A,\alpha}$ dans le cas où C est dans la direction α par rapport à A.

(b) Intersection des deux domaines $S_{C,\alpha-\pi}$ et $S_{A,\alpha}$ dans le cas où C est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport à A.

FIG. B.3 – Définition du domaine $\rho = S_{A,\alpha} \cap S_{C,\beta-\pi}$ pour $\beta = \alpha + \pi + 2k\pi$.

Dans ce cas, si le point C est dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport à un point B, lui-même dans une direction α par rapport au point A, le point C sera dans la direction α par rapport au point A s'il est situé entre les deux points A et B, ou bien dans la direction $\alpha + \pi$ par rapport au point A dans l'autre cas. Dans ce cas, la surface du domaine ρ va dépendre de la position de C par rapport au point A. Si C est dans la direction α par rapport au point A (Fig. B.3-a), le domaine $S_{C,\alpha-\pi}$ est inclus dans le domaine $S_{A,\alpha}$. De ce fait, la surface de ρ sera égale à celle du domaine $S_{C,\alpha-\pi} \cap \mathcal{D}$. Le rayon de ce secteur angulaire est égale à $(R - r_c)$, donc :

$$|\rho| d\alpha = \frac{(R - r_c)^2}{2} d\alpha \tag{B.16}$$

Dans l'autre cas, le domaine $S_{A,\alpha}$ est inclus dans le domaine $S_{C,\alpha-\pi}$ (Fig. B.3-b). La surface du domaine ρ sera égale à celle du domaine $S_{A,\alpha} \cap \mathcal{D}$:

$$|\rho| d\alpha = \frac{R^2}{2} d\alpha \tag{B.17}$$

En résumé, la surface du domaine ρ est donnée par :

$$|\rho| = \begin{cases} \frac{(R-r_c)^2}{2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha} \\ \frac{R^2}{2} & \text{si } C \in S_{A,\alpha-\pi} \end{cases} \tag{B.18}$$

Bibliographie

[ALLE-83] J. F. Allen, *Maintaining Knowledge about Temporal Intervals*, Communications of the ACM, 26 (1983), pp. 832–843.

[BECK-99] A. Becker et P. Naïm, *Les Réseaux Bayésiens : Modèles Graphiques de Connaissance*, Eyrolles, Paris, 1999.

[BLOC-00] I. Bloch, *Spatial Representation of Spatial Relationships Knowledge*, dans 7$^{\text{th}}$ International Conference on Principles of Knowledge Representation and Reasoning KR 2000, Breckenridge, CO, 2000, pp. 247–258.

[BLOC-95] I. Bloch et H. Maître, *Fuzzy Mathematical Morphologies : A Comparative Study*, Pattern Recognition, 28 (1995), pp. 1341–1387.

[BLOC-96a] I. Bloch, *Fuzzy Relative Position Between Objects in Images : A Morphological Approach*, dans IEEE International Conference on Image Processing, vol. II, Lausanne, Sept. 1996, pp. 987–990.

[BLOC-96b] I. Bloch, *Information Combination Operators for Data Fusion : A Comparative Review with Classification*, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, 26 (1996), pp. 52–67.

[BLOC-99a] I. Bloch, *Fuzzy Relative Position Between Objects in Image Processing : New Definition and Properties Based on a Morphological Approach*, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 7 (1999), pp. 99–133.

[BLOC-99b] I. Bloch, *Fuzzy Relative Position Between Objects in Image Processing : A Morphological Approach*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21 (1999), pp. 657–664.

[BLOC-99c] I. Bloch, *On Fuzzy Distances and Their Use in Image Processing Under Imprecision*, Pattern Recognition, 32 (1999), pp. 1873–1895.

[BOUC-95] B. Bouchon-Meunier, *La Logique Floue et Ses Applications*, Addison Wesley, france, 1995.

[BOX-73] G. Box et G. Tiao, *Bayesian Inference in Statistical Analysis*, Addison-Wesley, 1973.

[BOXE-97] L. Boxer, *On Hausdorff-Like Metrics for Fuzzy Sets*, Pattern Recognition Letters, 18 (1997), pp. 115–118.

[CAST-97] E. Castillo, J. M. Gutiérrez, et A. S. Hadi, *Expert Systems And Probabilistic Network Models*, Springer, New York, 1997.

[CHAN-87] S. K. Chang, Q. Y. Shi, et C. W. Yan, *Iconic Indexing by 2D Strings*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 9 (1987), pp. 413–428.

[CHAN-91] C. C. Chang et S. Y. Lee, *Retrieval of Similar Picture on Pictorial Database*, Pattern Recognition, 24 (1991), pp. 675–680.

[CHAN-95] C. C. Chang et C. F. Lee, *Relative Coordinates Oriented Symbolic String for Spatial Relationship Retrieval*, Pattern Recognition, 28 (1995), pp. 563–570.

[CHAN-96] C.-C. Chang et J.-H. Jiang, *A Spatial Filter for Similarity Retrieval*, International Journal of Pattern Recognition and Artificial Intelligence, 10 (1996), pp. 711–730.

[CHAU-96] B. Chaudhuri et A. Rosenfeld, *On a Metric Distance Between Fuzzy Sets*, Pattern Recognition Letters, 17 (1996), pp. 1157–1160.

[CLEM-97] E. Clementini et P. D. Felice, *Approximate Topological Relations*, International Journal of Approximate Reasoning, 16 (1997), pp. 173–204.

[COHN-98] A. G. Cohn et A. Varzi, *Connection Relations in Mereotopology*, dans Proceedings of the 13th European Conference on Artificial Intelligence (ECAI-98), H. Prade, ed., Wiley, August 1998, pp. 150–154.

[DEBO-97] J. De Bonet, C. Isbell, et P. Viola, *Mimic : Finding Optima by Estimating Probability Densities*, dans Advances in Neural Information Processing, M. M. M. Jordan et M. Perrone, eds., vol. 9, Denver, 1996, MIT Press, Cambridge.

[DEGR-70] M. De Groot, *Optimal Statistical Decisions*, McGraw-Hill, New York, 1970.

[DEHA-01] R. Dehak, I. Bloch, et H. Maitre, *Inference of Directional Spatial Relationship between Points : A Probabilistic Approach*, dans IEEE International Conference on Image Processing, ICIP 2001, vol. 3, Thessalonique, Greece, 2001, pp. 704–707.

[DUBO-80] D. Dubois et H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems : Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[DUBO-85a] D. Dubois et H. Prade, *A Review of Fuzzy Set Aggregation Connectives*, Information Sciences, 36 (1985), pp. 85–121.

[DUBO-85b] D. Dubois et H. Prade, *Théorie des Possibilités : Application à la Représentation des Connaissances en Informatique*, MASSON, Paris, 2ème édition, 1985.

[DUBO-87] D. Dubois et M.-C. Jaulent, *A General Approach to Parameter Evaluation in Fuzzy Digital Picture*, Pattern Recognition Letters, 6 (1987), pp. 251–259.

[DUBO-88] D. Dubois, H. Prade, et C. Testemale, *Weighted Fuzzy Pattern Matching*, Fuzzy Sets and Systems, 28 (1988), pp. 313–331.

[DUDA-01] R. O. Duda, P. E. Hart, et D. G. Stork, *Pattern Classification*, New York : John Wiley & sons, 2ème édition, 2001.

[DUDE-00] G. Dudek et M. Jenkin, *Computational Principles of Mobile Robotics*, Cambridge University Press, 2000.

[DUNH-90] W. Dunham, *Cardano and the Solution of the Cubic*, ch. 6, dans Journey Through Genius : The Great Theorems of Mathematics, Wiley, New York, 1990, pp. 133–154.

[DURK-94] J. Durkin, *Expert Systems : Design and Devellopment*, Maxwell Macmillan, New York, 1994.

[DUTT-91] S. Dutta, *Approximate Spatial Reasoning : Integrating Qualitative and Quantitative Constraints*, International Journal of Approximate Reasoning, 5 (1991), pp. 307–331.

[DYCK-84] H. Dyckhoff et W. Pedrycz, *Generalized Means as a Model of Compensation Connectives*, Fuzzy Sets and Systems, 14 (1984), pp. 143–154.

[ECUY-88] P. L'Ecuyer, *Efficient and Portable Combined Random Number Generators*, Communications of the ACM, 31 (1988), pp. 742–774.

[EGEN-94] M. J. Egenhofer, E. Clementini, et P. Felice, *Topological Relations Between Regions with Holes*, International Journal of Geographical Information Systems, 8 (1994), pp. 129–144.

[ELNA-99] H. ElNahas, *Mobile Localization in a GSM Network*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 1999.

[FREE-75] J. Freeman, *The Modeling of Spatial Relations*, Computer Graphics and Image Processing, 4 (1975), pp. 156–171.

[FREK-92b] C. Freksa, *Using Orientation Information for Qualitative Spatial Reasoning*, dans Theories and Methods of Spatio-Temporal Reasoning in Geographic Space, A. U. Frank, I. Campari, et U. Formentini, eds., vol. 639, International Conference GIS - From Space to Territory : Theories and Methods of Spatio-Temporal Reasoning, Springer, 1992, pp. 162–178.

[GADE-97] P. D. Gader, *Fuzzy Spatial Relations Based on Fuzzy Morphology*, dans IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1997, pp. 1179–1183.

[GARV-02] F. Garvan, *The Maple Book*, Chapman & Hill, 2002.

[GERAU-98] T. Géraud, *Segmentation des Structures Internes du Cerveau en Imagerie par Résonance Magnétique Tridimensionnelle*, Thèse de doctorat, École Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, 1998.

[GOLD-89] D. E. Goldberg, *Genetic Algorithms in Search, Optimisation and Machine Learning*, Addison-Wesley, 1989.

[GUPT-91] M. M. Gupta et J. Qi, *Theory Of T-Norm and Fuzzy Inference Method*, Fuzzy Sets and Systems, 40 (1991), pp. 431–450.

[HASS-93] B. Hassibi et D. G. Stork, *Second Order Derivatives for Network Pruning : Optimal Brain Surgeon*, dans Advances in Neural Information Processing Systems, S. J. Hanson, J. D. Cowan, et C. L. Giles, eds., vol. 5, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, 1993, pp. 164–171.

[HATO-91] J. P. Haton, N. Bouzid, F. Charpillet, M. C. Haton, B. Lâasri, H. Lâasri, P. Marquis, T. Mondot, et A. Napoli, *Le Raisonnement en Intelligence Artificielle : Modèles, Techniques et Architectures pour les Systèmes à Bases de Connaissances*, InterEditions, 1991.

[HAYK-99] S. Haykin, *Neural Networks : A Comprehensive Foundation*, Prentice Hall, 2ème édition, 1999.

[HOLL-75] J. H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press, 1975.

[HOWA-81] R. A. Howard et J. E. Matheson, *Influence Diagrams*, dans Readings on the Principles and Applications of Decision Analysis, Strategic Decisions Group, Menlo Park, California, 1984, pp. 721–762.

[HUAN-94] P. Huang et Y. R. Jean, *Using 2D C^+-String As Spatial Knowledge Representation for Image Database Systems*, Pattern Recognition, 27 (1994), pp. 1249–1257.

[JENS-96] F. V. Jensen, *An Introduction To Bayesian Networks*, UCL Press, 1996.

[JOUF-97] L. Jouffe, *Apprentissage de Systèmes d'Inférence Floue par des Méthodes de Renforcement : Application à la Régulation d'Ambiance dans un Bâtiment d'Élevage Porcin*, Thèse de doctorat, Université de Rennes I, 1997.

[KELL-00] J. M. Keller et X. Wang, *A Fuzzy Rule-Based Approach For Scene Description Involving Spatial Relationships*, Computer Vision and Image Understanding, 80 (2000), pp. 21–41.

[KELL-93] J. M. Keller, R. Krishnapuram, Z. Chen, et O. Nasraoui, *Fuzzy Additive Hybrid Operator for Network-Based Decision Making*, International Journal Of Intelligent Systems, 9 (1994), pp. 1001–1023.

[KELL-95] J. M. Keller et X. Wang, *Comparison of Spatial Relation Definitions in Computer Vision*, dans IEEE Proceedings of ISUMA-NAFIPS, Sept. 1995, pp. 679–684.

[KELL-96] J. M. Keller et X. Wang, *Learning Spatial Relationships in Computer Vision*, dans Proceedings of the Fifth IEEE International Conference on Fuzzy Systems, 1996, pp. 118–124.

[KOCZ-88] L. Koczy, *On The Description of Relative Position of Fuzzy Patterns*, Pattern Recognition Letters, 8 (1988), pp. 21–28.

[KRIS-92a] R. Krishnapuram et J. Lee, *Fuzzy-Connective-Based Hierarchical Aggregation Networks for Decision Making*, Fuzzy Sets and systems, 46 (1992), pp. 11–27.

[KRIS-92b] R. Krishnapuram et J. Lee, *Fuzzy-Set-Based Hierarchical Networks for Information Fusion in Computer Vision*, Neural Networks, 5 (1992), pp. 335–350.

[KRIS-93a] R. Krishnapuram, J. M. Keller, et Y. Ma, *Quantitative Analysis of Properties and Spatial Relations of Fuzzy Image Regions*, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 1 (1993), pp. 222–233.

[KRIS-93b] R. Krishnapuram et F. C. H. Rhee, *Compact Fuzzy Rule Base Generation Methods for Computer Vision*, dans IEEE International Conference on Fuzzy Systems, vol. 2, 1993, pp. 809–814.

[LACR-97] V. Lacrose, *Réduction de la Complexité des Contrôleurs Flous : Application à la Commande Multivariable*, Thèse de doctorat, INSA, Toulouse, 1997.

[LAND-93] B. Landau et R. Jackendoff, *"What" and "Where" in Spatial Language and Spatial Cognition*, Behavioral and Brain Sciences, 16 (1993), pp. 217–265.

[LARR-00] P. Larrañaga, R. Etxeberria, J. A. Lozano, et J. M. Peña, *Optimization In Continuous Domains by Learning and Simulation of Gaussian Networks*, dans Procceedings of the 2000 Genetic and Evolutionary Computation Conference Workshop Program, A. S. Wu, ed., 2000, pp. 201–204.

[LARR-01] P. Larrañaga et J. Lozano, *Estimation of Distribution Algorithms : A New Tool for Evolutionary Computation*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[LAUR-96] S. L. Lauritzen, *Graphical Models.* Oxford University Press, 1996.

[LEE-89] S. Y. LEE, M. K. Shan, et W. P. Yang, *Similarity Retrieval of Iconic Image Databases*, Pattern Recognition, 22 (1989), pp. 675–682.

[LEE-90] S. Y. Lee et F. J. Hsu, *2D C-String : A New Spatial Knowledge Representation for Image Database Systems*, Pattern Recognition, 23 (1990), pp. 1077–1087.

[LEE-91] S. Y. LEE et F. J. Hsu, *Picture Algebra for Spatial Reasoning of Iconic Images Represented in 2D C-String*, Pattern Recognition Letters, 12 (1991), pp. 425–435.

[LEE-92a] S. Y. Lee, M. C. Yang, et J. W. Chen, *2D B-String : A Spatial Knowledge Representation for Image Database Systems*, dans International Computer Science Conference, 1992, pp. 609–615.

[LEE-92b] S. Y. Lee, M. C. Yang, et J. W. Chen, *Signature File As A Spatial Filter For Iconic Image Database*, Journal Of Visual Languages and Computing, 3 (1992), pp. 373–397.

[LEE-92c] S. Y. LEE et F. J. Hsu, *Spatial Reasoning and Similarity Retrieval of Images Using 2D C-String Knowledge Representation*, Pattern Recognition, 25 (1992), pp. 305–318.

[LIU-98] J. Liu, *A Method of Spatial Reasoning Based on Qualitative Trigonometry*, Artificial Intelligence, (1998), pp. 137–168.

[MANG-98] L. Mangelinck, *Représentation et Classification de Structures Spatiales - Application à la Reconnaissance de Paysage Agricoles*, Thèse de doctorat, Université Henri Poincaré, Nancy, 1998.

[MARK-94] D. M. Mark et M. J. Egenhofer, *Modeling Spatial Relations Between Lines and Regions : Combining Formal Mathematical Models and Human Subjects Testing*, Cartography and Geographic Information Systems, 21 (1994), pp. 195–212.

[MATS-98a] P. Matsakis, L. Wendling, et J. Desachy, *Représentation de la Position Relative d'Objets 2D au Moyen d'un Histogramme de Forces*, Traitement du Signal, 15 (1998), pp. 63–76.

[MATS-98b] P. Matsakis, *Relations Spatiales Structurelles et Interprétation d'Image*, Thèse de doctorat, Université Paul SABATIER de TOULOUSE, 1998.

[MATS-99] P. Matsakis et L. Wending, *A New Way to Represent the Relative Position Between Areal Objects*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 21 (1999), pp. 634–643.

[MCKE-85] D. McKeown, W. Harvey, et J. McDermott, *Rule-Based Interpretation of Aerial Imagery*, IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence, 7 (1985), pp. 570–585.

[MIYA-94a] K. Miyajima et A. Ralescu, *Spatial Organisation in 2D Segmented Images : Representation and Recognition of Primitive Spatial Relations*, Fuzzy Sets and Systems, 65 (1994), pp. 225–236.

[MIYA-94b] K. Miyajima et A. Ralescu, *Spatial Organisation in 2D Images*, dans FUZZ-IEEE, Orlando, june 1994, pp. 100–105.

[MUHL-96] H. Mühlenbein et G. Paass, *From Recombination of Genes to the Estimation of Distributions I. Binary Parameters*, dans Lecture Notes in Computer Science 1411 : Parallel Problem Solving from Nature (PPSN IV), 1996.

[MURO-91] T. Murofushi et M. Sugeno, *A Theory of Fuzzy Mesures : Representations, The Choquet Integral and Null Sets*, Math Analysis and Applications, 159 (1991), pp. 532–549.

[PEAR-88] J. Pearl, *Probabilistic Reasoning In Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann, 1988.

[PEDE-89] K. Pedersen, *Expert Systems Programming : Practical Techniques For Rule-Based Expert Systems*, John Wiley and Sons, New York, 1989.

[POIT-98] Y. Poitevineau, MATHEMATICA *3 par la Pratique*, Eyrolles, Paris, 1998.

[RAND-92] D. A. Randell, Z. Cui, et A. G. Cohn, *A Spatial Logic Based On Regions and Connection*, dans International Conference on Knowledge Representation and Reasoning, Morgan Kaufmann, 1992, pp. 165–176.

[RHEE-93] F. C.-H. Rhee et R. Krishnapuram, *Fuzzy Rule Generation Methods For High-Level Computer Vision*, Fuzzy Sets and Systems, 60 (1993), pp. 245–258.

[RHEE-94] F. C.-H. Rhee et R. Krishnapuram, *Generation of Fuzzy Rules Involving Spatial Relations For Computer Vision*, dans IEEE International Conference on Fuzzy Systems, Orlando, 1994, pp. 2014–2019.

[ROSE-76] A. Rosenfeld et A. C.Kak, *Digital Picture Processing*, vol. 2, Academic presss, New York, 1976.

[ROSE-85] A. Rosenfeld, *Distance Between Fuzzy Sets*, Pattern Recognition Letters, 3 (1985), pp. 229–233.

[SARZ-95] O. Sarzeaud, *Les Réseaux de Neurones : Contribution à une Théorie*, Ouest Editions, 1995.

[SCHM-94] M. Schmitt et J. Mattioli, *Morphologie Mathématique*, Masson, 1994.

[SCHW-78] G. Schwarz, *Estimating The Dimension of a Model*, Annals of Statistics, 7 (1978), pp. 461–464.

[SERR-82] J. Serra, *Image Analysis And Mathematical Morphology*, Academic Press, 1982.

[VARZ-96] A. C. Varzi, *Parts, Wholes And Part-Whole Relations : The Prospect Of Mereotopology*, Data and Knowledge Engineering, 20 (1996), pp. 259–286.

[VIEU-97] L. Vieu, *Spatial Representation and Reasoning In Artificial Intelligence*, ch. 1, dans Spatial and Temporal Reasoning, Kluwer, 1997, pp. 3–40.

[WANG-97a] X. Wang et J. M. Keller, *Fuzzy Surroundedness*, dans IEEE International Conference of Fuzzy Systems, Spain, 1997, pp. 1173–1178.

[WANG-99] X. Wang et J. M. Keller, *Human-Based Spatial Relationship Generalization Through Neural/Fuzzy Approaches*, Fuzzy Sets and Systems, 101 (1999), pp. 5–20.

[WHIT-90] J. Whittaker, *Graphical Models in Applied Multivariable Statistics*, John Wiley and Sons, 1990.

[WILL-92] W. H. Press, B. P. Flannery, S. A. Teukolsky, et W. T. Vetterling, *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge (UK) and New York, 2ème édition, 1992.

[WINS-75] P. H. Winston, *The Psychology of Computer Vison*, McGraw-Hill, New York, 1975.

[WOLF-98] S. Wolfram, *The Mathematica Book*, Cambridge university press, 1998.

[YAGE-80] R. R. Yager, *On General Class of Fuzzy Connectives*, Fuzzy Sets and Systems, 4 (1980), pp. 235–242.

[YAGE-88] R. R. Yager, *On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multicriteria Decisionmaking*, IEEE Transactions On Systems, Man and Cybernetics, 18 (1988), pp. 183–190.

[YAGE-91] R. R. Yager, *Connectives and Quantifiers in Fuzzy Sets*, Fuzzy Sets and Systems, 40 (1991), pp. 39–75.

[YAGE-94] R. R. Yager, *Aggregation Operators and Fuzzy Systems Modeling*, Fuzzy Sets and Systems, 67 (1994), pp. 129–146.

[ZADE-65] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, Information and Control, 8 (1965), pp. 338–353.

[ZADE-78a] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets as a Basis for Theory of Possibility*, Fuzzy Sets and Systems, 1 (1978), pp. 3–28.

[ZADE-78b] L. A. Zadeh, *PRUF - A Meaning Repreentation Language for Natural Languages*, International Journal of Man-Machne Studies, 10 (1978), pp. 395–460.

[ZIMM-83] H. J. Zimmermann et P. Zysno, *Decision and Evaluations by Hierarchical Aggregation of Information*, Fuzzy Sets and Systems, 10 (1983), pp. 234–260.

[ZIMM-93] K. Zimmermann, *Enhancing Qualitative Spatial Reasoning - Combining Orientation and Distance*, dans COSIT, 1993, pp. 69–76.

[ZIMM-96] K. Zimmermann et C. Freksa, *Qualitative Spatial Reasoning Using Orientation, Distance, and Path Knowledge*, Applied Intelligence, 6 (1996), pp. 49–58.