

Structural analysis for the calculation of the long term cyclic behaviour of transportation infrastructure

Malek Abdelkrim

▶ **To cite this version:**

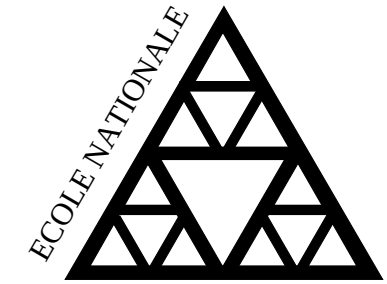
Malek Abdelkrim. Structural analysis for the calculation of the long term cyclic behaviour of transportation infrastructure. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. English. NNT : . pastel-00000644

HAL Id: pastel-00000644
https://pastel.hal.science/pastel-00000644

Submitted on 5 Apr 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée pour l'obtention du diplôme de

DOCTEUR

DE

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSÉES

Spécialité : Structures et Matériaux

par

MALEK ABDELKRIM

Sujet de la thèse :

Analyse par le calcul des structures du comportement cyclique à long terme des infrastructures de transport

soutenue le 14 Janvier 2004

Composition du jury :

B. Halphen	*Président*
D. Clouteau	*Rapporteur*
H. di Benedetto	*Rapporteur*
M. Bouassida	*Examinateur*
L. Schmitt	*Examinateur*
G. Bonnet	*Directeur de thèse*
P. de Buhan	*Directeur de thèse*

Remerciements

Je souhaite remercier Monsieur Bernard Halphen, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury de thèse ainsi que Messieurs Didier Clouteau et Hervé di Benedetto, qui ont accepté d'être rapporteurs de ce mémoire. Je tiens également à remercier Messieurs Laurent Schmitt et Mounir Bouassida (qui s´est spécialement déplacé de Tunis) d'avoir participé à l'évaluation de ce travail.

Je tiens à remercier mon directeur de thèse Monsieur Guy Bonnet, qui m´a fait confiance en me permettant de travailler sur ce sujet, je lui suis reconnaissante pour son aide inestimable.

J´adresse mes sincères remerciements à mon deuxième directeur de thèse, Monsieur Patrick de Buhan, dont le savoir, la rigueur et la pédagogie sont un exemple que je m´efforcerai de suivre tout au long de ma carrière scientifique. Je lui suis reconnaissante de m´avoir encouragée, soutenue et surtout aidée sur tous les plans.

Je souhaite également remercier toute l´équipe de chercheurs et de doctorants du LMSGC/CERMMO, en particulier mes amis Sami et Ghazi.

Merci aussi à tous ceux qui m'ont aidée ou soutenue d'une manière ou d'une autre, je pense notamment à mes meilleurs(es) amis(es).

J´adresse ma sincère gratitude à mes parents et mon frère pour leur soutien tout le long de mes études et dieu sait que ça n´était pas évident de supporter mes humeurs.

Un grand merci à Sami qui m´a poussée à poursuivre mes études, m'a soutenue et m´a encouragée à emprunter le chemin de la recherche.

Je leur dédie à tous ce travail.

Table des matières

1 Introduction générale **21**

2 Introduction bibliographique **27**

2.1 Introduction 29

2.2 Expérimentation en vraie grandeur et sur modèles réduits 30

2.2.1 Modèles en vraie grandeur 30

2.2.2 Essais sur modèles réduits 34

2.3 Modèles de calcul pour la prévision de l´interaction ballast-structure . . . 40

2.3.1 Modélisation de la structure de l´assise 40

2.3.2 Modélisation numérique de la voie ferrée et de sa fondation 42

2.4 Caractérisation des matériaux par des essais homogènes cycliques 45

2.5 Utilisation de lois de comportement élastoplastique avec modélisation pas-à-pas 47

2.6 Les approches “milieux granulaires” 50

2.7 Les chaussées routières 52

2.7.1 Hornych et al.(2000) [36] 53

2.7.2 Chai et al. (2002) [18] 55

2.7.3 Heck (2001) [33] 55

2.8 Vers une approche “calcul des structures” 58

3 Principe de la méthode de calcul proposée et exemple illustratif **61**

3.1 Introduction 63

3.2 Analyse qualitative de l´évolution du tassement d´une voie ferrée : un phénomène à double échelle de temps 64

3.3 Origine physique du phénomène de dérive : le comportement cyclique des matériaux 68

3.4 Schéma général de calcul du tassement résiduel 69

3.5 Exemple illustratif : un modèle simplifié de la plate-forme soumise à une charge roulante 75

3.6 Loi de comportement cyclique pour la modélisation des déformations permanentes 78

3.7 Détermination de l´état résiduel du massif 83

3.8 Implémentation numérique et résultats 85

3.9 Conclusions 93

4 Application au cas d´une voie ferrée ballastée : calcul des cycles élastiques de référence 95

4.1 Introduction 97

4.2 Situation par rapport aux études antérieures 97

4.2.1 Le modèle de Winkler 98

4.2.2 Modèle de Sauvage 100

4.3 Comparaison avec un calcul par éléments finis (PLAXIS) 104

4.3.1 Présentation du logiciel PLAXIS 104

4.3.2 Description du modèle de la voie ferrée 105

4.3.3 Comparaisons des résultats des modèles de Winkler, de Sauvage et du calcul Plaxis 108

4.4 Amélioration du calcul de Sauvage 112

4.4.1 Position du problème et principe de calcul 112

4.4.2 Conclusions 116

4.5 Calcul des cycles de contraintes 120

4.5.1 Description du modèle de la voie ferrée 120

4.5.2 Procédure de détermination des cycles élastiques 124

4.5.3 Constitution d´une *grille de points cibles* 127

4.5.4 Analyse des résultats : étude de sensiblité aux caractéristiques mécaniques des sous-couches 129

4.6 Conclusion 140

5 Comportement cyclique des matériaux 143

5.1 Comportement cyclique des sables 145

5.1.1 Observations expérimentales 145

5.1.2 Un modèle de comportement cyclique des sables (Dormieux, 1989) . 149

5.2 Comportement cyclique du ballast et des graves non traitées 151

5.2.1 Travaux de Juan Martinez (1980) 152

5.2.2 Travaux d´Alva-Hurtado (1980, 1981) 153

5.2.3 Travaux de Profillidis (1983) 155

5.2.4 Travaux de Li et Selig (1996) 156

5.2.5 Travaux de Lekarp et Dawson (1997) 157

5.2.6 Travaux d'Ionescu et al.(1996) 158

5.2.7 Un modèle de prédiction des déformations permanentes fondé sur l´élastoplasticité 159

5.3 Un modèle de loi de comportement cyclique pour les GNT 161

5.3.1 Description du modèle initial (Gidel et al. 2001) 161

5.3.2 Généralisations de la loi initiale 168

5.4 Conclusions 172

6 Mise au point d´un outil numérique et premières simulations d´essais cycliques 173

6.1 Introduction 175

6.2 Présentation du banc d´essai BETTER 175

6.2.1 Description de l´essai 175

6.2.2 La simulation visée 177

6.3 Modèle analytique de référence 178

6.3.1 Une modélisation analytique simplifiée : le modèle "bibloc" 178
6.3.2 Prise en compte de l´élastoplasticité des matériaux dans le calcul de l´état résiduel 186
6.4 Simulation numérique de l´essai BETTER 190
6.4.1 Présentation rapide du code de calcul CESAR-LCPC 190
6.4.2 Mise en place de la méthode de calcul 192
6.4.3 Modélisation numérique du bibloc 192
6.4.4 Simulation numérique de l´essai oedométrique avec prise en compte de l´élastoplasticité 194
6.5 Modélisation numérique de l´essai BETTER : premiers résultats 196
6.5.1 Paramètres physiques 196
6.5.2 Simulation de l´essai 201
6.5.3 Influence de la couche sousballast 202
6.6 Conclusion 203

7 Prise en compte de la non-linéarité élastique des matériaux : illustration sur l´exemple de l´essai oedométrique cyclique 205

7.1 Introduction 207
7.2 Le comportement élastique non-linéaire des matériaux granulaires : le modèle de Boyce (1980) 208
7.2.1 Quelques généralités sur le comportement élastique non-linéaire . . 208
7.2.2 Notations préalables. Loi de Boyce 210
7.3 Un exemple illustratif : la sollicitation oedométrique cyclique 213
7.3.1 Calcul du cycle élastique 215
7.3.2 Détermination de l´état résiduel à partir des déformations permanentes 218
7.3.3 Actualisation pas-à-pas du point de chargement maximal 221
7.3.4 Formulation d´une loi de comportement cyclique 222
7.3.5 Simulation numérique 224
7.3.6 Résultats et commentaires 225

7.4 Conclusion 232

8 Conclusions et perspectives 235

Table des figures

2.1 mesures de tassement en voie d´après Shenton (1978) [76] 31

2.2 banc d´essai du LCPC-Nantes d´après Cottineau et al. (2002) [20] 33

2.3 banc d´essai BETTER d´après Bodin (2001) [11] 36

2.4 répartition en pourcentage de la charge d´un essieu sur les traverses (d´après Profillidis (1983)) 44

2.5 signal déplacement appliqué en tête de l´échantillon lors de l´essai triaxial cyclique (d´après Aubry et al.) 47

2.6 modèle de calcul conçu par l´ECP [9] 48

2.7 profil des ornières d´après Heck (2001) [33] 57

3.1 allure de la courbe donnant l´évolution dans le temps du tassement d´une infrastructure sous chargement de trafic 65

3.2 évolution de l´état de contrainte en fonction du temps en un point de la structure 66

3.3 cycle élastique de référence et cycle élastique actuel subi par le matériau au point $\underline{x}$ 71

3.4 cycle élastique de référence engendré en un point de la structure par le déplacement de la charge de trafic 71

3.5 organigramme de la méthode de calcul pas-à-pas de l´état résiduel d´une plate-forme sous chargement cyclique 74

3.6 schématisation simplifiée de la charge roulante sur un massif semi-infini . . 75

3.7 principe de la détermination du cycle de référence dans le plan (p,q) dû au passage de la charge roulante 77

3.8 cycles élastiques dans le plan (p-q) 78

3.9 représentation de la loi de comportement cyclique proposée par Gidel et al. (2001) [27] 80

3.10 extension de la loi de comportement cyclique à un cycle de contraintes actuel relatif au problème de la charge roulante 81

3.11 procédure de calcul pas-à-pas du tassement résiduel de la plate-forme sous chargement de trafic répété 86

3.12 évolution de la déformation permanente verticale en fonction du nombre de cycles N à différentes profondeurs x/a 87

3.13 profil des contraintes résiduelles en fonction de N 88

3.14 états de contrainte résiduelle dans le plan (p-q) 89

3.15 évolution du tassement résiduel de la plate-forme en fonction du nombre de cycles de chargement 89

3.16 évolution du tassement résiduel en fonction de $\nu*$ 90

3.17 évolution de la déformation permanente latérale en fonction de $\nu*$ 91

3.18 évolution des déformations permanentes en fonction de ν 91

3.19 influence du coefficient de Poisson sur l´évolution du tassement résiduel . . 92

4.1 modèle de Winkler 99

4.2 modèle de Sauvage (1993) 100

4.3 calage des résultats de Sauvage sur le modèle de Winkler 103

4.4 modélisation de la voie ferrée 105

4.5 système barre-ressorts équivalent à une poutre semi-infinie sur appui élastique 107

4.6 évaluation du module de voie K_v 108

4.7 délexion : comparaisons des résultats Plaxis-Sauvage 109

4.8 réactions d´appuis : comparaisons des résultats Plaxis-Sauvage-Winkler . . 110

4.9 évaluation de γ 111

4.10 influence de la prise en compte de la rigidité en rotation sur les résultats du modèle de Winkler 112

4.11 amélioration du modèle de Sauvage 113

4.12 effet de la prise en compte de la raideur en rotation sur le déplacement des blochets 116
4.13 effet de la prise en compte de la raideur en rotation sur les réactions d´appuis 117
4.14 effet de la prise en compte du couplage sur le déplacement des blochets . . 117
4.15 effet de la prise en compte du couplage sur les réactions d´appuis 118
4.16 effet de la prise en compte des deux blochets sur le déplacement des blochets 118
4.17 effet de la prise en compte des deux blochets sur les réactions d´appuis . . 119
4.18 schématisation de la voie ferrée 120
4.19 configuration 1 122
4.20 configuration 2 122
4.21 maillage de la configuration 1 123
4.22 Maillage de la configuration 2 124
4.23 points homologues à gauche dans la configuration 2 125
4.24 points homologues à gauche et leurs symétriques (configuration 2) 125
4.25 points homologues à droite (configuration 2) 126
4.26 points homologues des deux configurations 127
4.27 grille de points cibles initiaux 128
4.28 calcul au point P_1 130
4.29 calcul au point P_4 130
4.30 calcul au point P_7 131
4.31 calcul au point P_2 131
4.32 calcul au point P_5 132
4.33 calcul au point P_8 132
4.34 calcul au point P_3 133
4.35 calcul au point P_6 133
4.36 calcul au point P_9 134
4.37 calcul au point P_1 135
4.38 calcul au point P_4 136

4.39 calcul au point P_7 . . . 136

4.40 calcul au point P_2 . . . 137

4.41 calcul au point P_5 . . . 137

4.42 calcul au point P_8 . . . 138

4.43 calcul au point P_3 . . . 138

4.44 calcul au point P_6 . . . 139

4.45 calcul au point P_9 . . . 139

5.1 chargement radial à $\eta < \eta_c$ (d´après Luong, 1980) . . . 146

5.2 chargement radial à $\eta > \eta_c$ (d´après Luong, 1980) . . . 146

5.3 cylindre creux (Dupla et Canou, 2003) . . . 148

5.4 résultats d´essais cycliques drainés à pression controlée (HCC test) (d´après Dupla et al., 2003) . . . 148

5.5 courbes d´évolution des déformations volumiques en fonction du nombre de cycles (d´après Dupla et al., 2003) . . . 149

5.6 détermination du rapport $\Delta q / < p >$ à partir de la représentation du cycle élastique dans le plan (p,q) . . . 151

5.7 évolution du diagramme effort-déformation dans un essai triaxial cyclique (d´après Martinez, 1980) . . . 152

5.8 influence des propriétés des cycles de contraintes sur la déformation axiale mesurée au triaxial (d´après Alva-Hurtado, 1980) . . . 154

5.9 évolution des déformations permanentes axiales en fonction du nombre de cycles de chargement (d´après Lekarp et al., 1998) . . . 158

5.10 chemins de contrainte radiaux dans le plan (p,q) . . . 162

5.11 évolution des déformations permanentes en fonction du nombre de cycles de chargement pour plusieurs niveaux de chargement [27] . . . 164

5.12 interprétation de la loi de Gidel et al. (2001) dans le plan (p,q) . . . 166

5.13 évolution des déformations permanentes axiales et latérales en fonction du nombre de cycles de chargement [27] . . . 166

5.14 évaluation du paramètre ν^* à partir des résultats des essais de Gidel et al. (2001) [27] sur la grave de Poulmarch . . . 167

5.15 exemples de cycles de contrainte non-radiaux 168

5.16 contraintes maximales-déformations permanentes 170

5.17 décompositions des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^{*}$ en parties déviatoriques et isotropes 171

6.1 modèle BETTER (Bodin, 2001) 176

6.2 schématisation en déformations planes de l'essai BETTER 177

6.3 modèle Bibloc 178

6.4 notations relatives au modèle "bibloc" 179

6.5 incrément des contraintes résiduelles dû à l´incrément des déformations permanentes dans le bibloc 183

6.6 évolution des déformations permanentes en fonction de N 185

6.7 évolution du tassement résiduel en fonction de N (modèle bibloc) 185

6.8 dérive du cycle de contrainte au delà de la droite de référence 187

6.9 cycle de contrainte relatif à un essai oedométrique 188

6.10 résultat de la modélisation semi-analytique du problème de l´oedomètre pour le cas élastique et élastoplastique 191

6.11 organigramme de la procédure de calcul pas-à-pas de l´état résiduel mettant en oeuvre le prologiciel CESAR 193

6.12 modélisation par éléments finis du bibiloc dans CESAR : système de ressorts équivalent 194

6.13 comparaison de la modélisation CESAR et de la modélisation semi-analytique du Bibloc 195

6.14 comparaison de la modélisation CESAR et de la modélisation semi-analytique du problème de l´oedomètre 195

6.15 variations du module d´Young et du coefficient de Poisson en fonction de la pression de confinement (d´après Indraratna et al. 1998) 197

6.16 détermination des caractéristiques de résistance d´un ballast (d´après Indraratna et al. 1998) 197

6.17 calage des paramètres de la loi de comportement sur la 1$^{\text{ère}}$ partie de la courbe expérimentale 199

6.18 calage des paramètres de la loi de comportement sur la $2^{\text{ième}}$ partie de la courbe expérimentale 200

6.19 comparaison entre le modèle bibloc et la simulation numérique de l´essai BETTER 200

6.20 comparaison des incréments de tassement donnés par les simulations numériques et les résultats de Bodin (2001) 202

6.21 comparaison entre les tassements résiduels obtenus pour différentes valeurs de la raideur de l´élastomère 203

7.1 courbe contrainte-déformation relative à un essai triaxial cyclique (d´après Hornych et al.(1998)) 208

7.2 trajets de chargement dans l´espace des déformations 209

7.3 éprouvette de matériau homogène placée dans un oedomètre et soumise à un chargement cyclique 213

7.4 cycles élastiques dans le plan (p,q) 214

7.5 définition de $[\underline{\underline{\epsilon}}]^e$,$\underline{\underline{\epsilon}}^+$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^r$ 216

7.6 états résiduels de l´éprouvette à l´instant initial $(N = 1)$ et au terme de N cycles 219

7.7 procédure d´actualisation pas-à-pas des points extrêmes du cycle élastique de contraintes 222

7.8 interprétation de la loi de comportement cyclique définie par les équations (7.64) à (7.66) 223

7.9 schéma de calcul itératif 226

7.10 variation de la contrainte verticale σ_1 en fonction du tassement élastique de l´éprouvette pour différentes valeurs de n_i 227

7.11 variation de la contrainte latérale σ_2 en fonction du tassement élastique de l´éprouvette pour différentes valeurs de n_i 228

7.12 cycles de contraintes initiaux $(N = 1)$ et intermédiaires $(N = 42000)$ en fonction de n_i $(k_1 = 0, 2)$ 228

7.13 courbes d´évolution du tassement résiduel pour différentes valeurs de n_i . . 229

7.14 variation de la contrainte verticale σ_1 avec k_1 230

7.15 variation de la contrainte horizontale σ_2 avec k_1 231

7.16 cycles de contraintes initiaux ($N = 1$) et intermédiaires ($N = 42000$) en fonction de k_1 ($n_i = 0,284$) 232

7.17 courbes d´évolution du tassement résiduel pour différentes valeurs de k_1 . . 232

Liste des tableaux

2.1 tableau descriptif des couches d´assises testées par Sauvage et al.(1982) . 41

2.2 tableau decriptif des matériaux constitutifs des structures d´après Sauvage et al.(1982) 41

2.3 caractéristiques mécaniques des matériaux du modèle de simulation des essais de Derby (d´après Profillidis, 1983) 43

2.4 caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les traverses et le rail (d´après Profillidis (1983)) 44

4.1 caractéristiques des matériaux 106

4.2 caractéristiques des matériaux 121

4.3 caractéristiques des poutres 123

Chapitre 1

Introduction générale

INTRODUCTION

Les procédures de dimensionnement et de maintenance des infrastructures de transport telles que les voies ferrées et les chaussées routières nécessitent l'élaboration de méthodes de prédiction visant à prévoir le comportement de telles infrastructures, soumises à des chargements cycliques à long terme. Le principal intérêt de ces méthodes est d'être notamment en mesure de déterminer l´évolution du profil résiduel de l'infrastructure (orniérage des chaussées, défauts de voie) induit par l'application des chargements de trafic.

En vue d´aboutir à une meilleure compréhension des phénomènes relativement complexes se produisant dans ce type de structures, des études expérimentales ont été entreprises consistant à procéder à des essais sur des sections de chaussées ou de voies ferrées soumises à des chargements répétés. Récemment, des modèles réduits de portions de voies ferrées ont été conçus pour modéliser le comportement à long terme des lignes ferroviaires à grandes vitesses (Guérin, 1996 ; Bodin, 2001). Bien que telles approches expérimentales soient certainement indispensables à la compréhension qualitative des divers phénomènes, elles ne permettent pas de développer des méthodes prédictives lorsqu'il s'agit de tenir compte d'un nombre important de paramètres susceptibles de varier.

L´élaboration de méthodes de calcul visant à prédire le comportement des infrastructures de transport soumises à des chargements cycliques, nécessite la formulation de lois de comportement cycliques des matériaux constitutifs de ces infrastructures. La méthode développée dans le présent travail est fondée sur une approche de type calcul des structures permettant de déterminer la réponse globale de la plate-forme et tout particulièrement le tassement résiduel en surface. Ceux-ci résultent de la résolution d´un problème aux limites bien posé, sous réserve de disposer d´une formulation du comportement local des matériaux constitutifs ; sous la forme d´une relation de type "contrainte-déformation". Plus précisément, en considérant un chargement donné (cyclique dans notre cas), il apparaît clairement que ce type de relation doit tenir compte du comportement cyclique à long terme des matériaux constitutifs qui produisent des déformations permanentes irréversibles lorsqu'ils sont soumis à de telles sollicitations cycliques.

Le présent travail s'articule donc de la façon suivante :

Dans le deuxième chapitre de ce mémoire, nous dressons tout d´abord un état de l'art des recherches relatives aux infrastructures de transport qui ont été étudiées par le biais d´expérimentations en vraie grandeur ou sur modèles réduits, afin d'en déduire des lois de comportement globales, décrivant l'évolution du tassement résiduel des infrastructures en fonction du nombre de cycles de chargement. D'autres études visent plutôt à analyser l'interaction entre des matériaux tels que le ballast et les structures, en réalisant des

modélisations semi-analytiques ou numériques de la voie ferrée et de ses sous-couches, permettant ainsi de déterminer la répartition des efforts sur les traverses de la voie. D´autres recherches se sont également intéressées à la caractérisation des matériaux tels que le ballast et les graves non traitées (GNT), en les soumettant à des essais triaxiaux cycliques homogènes, tandis que des tentatives ont été faites pour développer des lois de comportement élastoplastiques avec modélisation pas-à-pas. Un autre volet de ce chapitre décrit rapidement les approches de type "milieux granulaires", qui pour l'instant ne permettant pas encore la prédiction du comportement à long terme des structures soumises à des chargements répétés. Dans le domaine des chaussées routières enfin, des phénomènes analogues à ceux qui se manifestent dans les voies ferrées sont observés. L´analyse de ces phénomènes a notamment donné lieu à la formulation de lois de comportement cyclique pour les matériaux, et à leur intégration en vue de calculer l´état résiduel de la structure. L´approche de type "calcul des structures" qui est à la base du présent travail s´inspire d´une telle démarche.

Dans le troisième chapitre, nous exposons la méthode de calcul retenue, en analysant tout d'abord qualitativement l'évolution du tassement de la voie ferrée, puis en étudiant l'origine physique du phénomène de dérive des cycles de contraintes. Nous proposons ensuite un schéma général de calcul du tassement résiduel, à travers lequel nous mettons en évidence le besoin de disposer d´une formulation de la loi de comportement cyclique. La méthode de calcul est illustrée sur l´exemple simplifié d'une plate-forme soumise au passage d'une charge roulante. Nous calculons sur cet exemple, de façon semi-analytique, les cycles de contraintes élastiques induits par ce type de chargement, ainsi que l'état résiduel de la plate-forme, notamment le tassement résiduel. Dans ce calcul, la loi de comportement cyclique employée est directement inspirée de celle développée pour le cas des GNT.

Par la suite, nous abordons le quatrième chapitre consacré au calcul des cycles de contrainte élastiques. Nous évoquons tout d'abord les études antérieures que nous tentons d´améliorer afin qu'elles s'adaptent mieux au cas de la voie ferrée. Nous présentons alors les résultats de notre modélisation numérique et mettons en évidence l'influence de la prise en compte de certains paramètres sur les déflexions des traverses et les efforts qui leurs sont transmis. Nous modélisons ensuite un tronçon de voie et de ses sous-couches à l'aide du code de calcul en éléments finis PLAXIS, dans le but de calculer les cycles élastiques dans les couches de matériaux. Ce chapitre s'achève par une étude de sensibilité aux caractéristiques mécaniques des matériaux des sous-couches, dont l'objectif est de montrer l'influence de ces dernières sur le comportement de l'infrastructure.

Le chapitre 5 se rapporte au comportement cyclique des matériaux. Nous faisons tout d'abord un tour d'horizon des études relatives au comportement cyclique des sables et

les lois développées dans ce domaine. Nous décrivons ensuite les lois de comportement cycliques développées par les chercheurs pour caractériser des matériaux tels que le ballast et les GNT, qui relient généralement les déformations permanentes au nombre de cycles de chargement et aux caractéristiques de ces cycles. Les lois d'évolution des déformations permanentes en fonction du nombre de cycles, sont soit des lois en puissance soit des lois logarithmiques. Nous présentons un modèle de loi de comportement cyclique formulé pour les GNT (Gidel et al., 2000), que nous décrivons, avant d´en proposer des généralisations permettant de l´utiliser dans la méthode de calcul de l'état résiduel décrite au chapitre 3.

Dans le chapitre 6, nous élaborons un outil numérique basé sur la méthode de calcul décrite en chapitre 3 et utilisant le code de calcul en éléments finis CESAR, ainsi que la loi de comportement présentée en chapitre 5, afin de simuler un essai réalisé sur un modèle réduit d'une portion de voie ferrée (essai BETTER). Nous soulignons par ailleurs, l'importance de la prise en compte de l'élastoplasticité des matériaux. Quelques modèles simplifiés (oedomètre et modèle bibloc) sont simulés à l´aide de cette procédure, dans le but d´une part de valider la procédure de calcul numérique, de fournir d'autre part un ordre de grandeur de la valeur du tassement résiduel de l'essai BETTER. Nous présentons enfin les premiers résultats des simulations réalisées au moyen de la procédure de calcul mise au point, que nous comparons aux résultats obtenus expérimentalement.

Enfin, dans le chapitre 7, nous présentons une première illustration de la méthode de calcul développée au chapitre 3 qui tient compte du caractère élastique non-linéaire des matériaux. Cette étude est conduite sur l´exemple de l´essai oedométrique cyclique, qui permet une résolution semi-analytique, et met en évidence l´influence de la non-linéarité élastique des matériaux sur le comportement résiduel de la structure.

Nous terminons le présent travail par des conclusions et des perspectives.

Chapitre 2

Introduction bibliographique

Sommaire

2.1 Introduction 29

2.2 Expérimentation en vraie grandeur et sur modèles réduits . 30

2.2.1 Modèles en vraie grandeur 30

2.2.2 Essais sur modèles réduits 34

2.3 Modèles de calcul pour la prévision de l´interaction ballast-structure 40

2.3.1 Modélisation de la structure de l´assise 40

2.3.2 Modélisation numérique de la voie ferrée et de sa fondation . . 42

2.4 Caractérisation des matériaux par des essais homogènes cycliques 45

2.5 Utilisation de lois de comportement élastoplastique avec modélisation pas-à-pas 47

2.6 Les approches "milieux granulaires" 50

2.7 Les chaussées routières 52

2.7.1 Hornych et al.(2000) [36] 53

2.7.2 Chai et al. (2002) [18] 55

2.7.3 Heck (2001) [33] 55

2.8 Vers une approche "calcul des structures" 58

2.1 Introduction

DAns cette partie nous présentons les différentes recherches réalisées afin d´étudier le comportement des matériaux granulaires de type ballast, pour le cas des voies ferrées, et les graves non traitées, pour le cas des chaussées routières ou aéroportuaires, sous l´effet des chargements répétés, en vue d´en tirer les conséquences en ce qui concerne le comportement à long terme de ce type d´infrastructures. Dans certaines études, des essais sur des modèles réduits de portions de voie ont été réalisés, par exemple Guérin et al.(1996) [29] et Bodin (2001) [11]. Des campagnes d´essais en vraie grandeur ont été égalament menées au LCPC (Laboratoire Central des Ponts et Chaussées) sur une portion de voie ferrée soumise à un chargement cyclique.

D´autres études telles que celle menée par Sauvage (1993) [69] ont pour objectif de prédire l´interaction entre le matériau ballast et la structure. Cette recherche lui a permis de quantifier la déflexion des traverses d´une voie ferrée ainsi que la distribution des efforts sur ces traverses lors du passage d´un convoi ferroviaire, étant données des caractéristiques mécaniques de la couche de ballast et de la couche du sol en place.

Par ailleurs, dans le but de caractériser le comportement des matériaux granulaires, des essais cycliques en contraintes homogènes permettent de mettre en évidence des déformations permanentes, se produisant dans le matériau, soumis à des sollicitations répétés. Les lois de comportement permettant de prédire les déformations permanentes induites par le chargement cyclique peuvent être soit simulées pas-à-pas, à partir de la plasticité en chargement cyclique (Hujeux [9]), soit directement formulées à partir d´essais (Gidel et al. (2001)) en termes de déformation permanente induite par le chargement cyclique.

Les chaussées routières manifestent des problèmes similaires à ceux apparaissant dans les voies ferrées. Ils concernent en tout premier lieu la question de "l´orniérage", dont la prévision est basée sur la connaissance des lois d´évolution des déformations permanentes (Heck, 2001 [33]).

Après avoir exposé un état de l´art des études antérieures, nous discutons les points forts et les points faibles des méthodes utlisées, et nous expliquons notre choix d´adopter une approche de type *calcul des structures*.

2.2 Expérimentation en vraie grandeur et sur modèles réduits

Les essais réalisés sur les portions de voie ont pour but de déterminer des lois de tassement en fonction du nombre de cycles. Etant donné le coût élevé de ce genre d´essais nécessitant, hormis l´intervention et le matériel nécessaire aux mesures, un arrêt du trafic ferroviaire pendant les essais, une solution alternative consiste à reconstituer une portion de voie au laboratoire.

2.2.1 Modèles en vraie grandeur

2.2.1.1. Balsan (1981)[10]

La SNCF a réalisé des essais sur une tranche de voie ferrée, isolée et placée dans un caisson. La structure étudiée est constituée par la superposition d´une couche d´argile saturée d´épaisseur 70 cm, d´une couche de 15 cm de sable, d´une couche de grave dont l´épaisseur varie entre 0 et 40 cm et d´une couche de ballast d´épaisseur 25 cm. Balsan (1981) a soumis cette structure à un grand nombre de cycles de chargement (plusieurs millions) par l´intermédiaire d´un blochet sollicité par un vérin. Ses essais ont montré que pour des épaisseurs de la couche de grave inférieures à 25 cm, le tassement de la voie est très important. La loi de tassement qu´il propose est donnée par :

$$\delta = A + BN^{0,2} \tag{2.1}$$

où A et B sont des paramètres dépendant des caractéristiques de la voie (à chargement fixé) et N est le nombre de cycles.

2.2.1.2. Shenton [76], [75]

Shenton dispose de mesures de tassement en voie. Il en déduit que la partie la plus importante du mouvement de la voie a lieu juste après la phase de maintenance de celle-ci et qu´après cette période, assez courte, l´évolution du tassement et la détérioration de la voie sont ralenties. Une stabilisation de l´évolution du tassement se produit après 500000 cycles de chargement. Aussi bien les essais menés in-situ qu´au laboratoire montrent qu´une bonne approximation du tassement est obtenue lorsque ce dernier est considéré comme proportionnel à la racine cinquième du nombre de cycles de chargement. Ceci est en accord avec les mesures en voie pour des nombres de cycles de chargement de l´ordre du

million mais tend à sous-estimer le tassement pour des valeurs de cycles plus importantes. Le bon ajustement des mesures obtenues se traduit par l´équation (2.2).

$$\delta = K_1 N^{0,2} + K_2 N \tag{2.2}$$

où K_1 est le paramètre tenant compte de la perturbation du ballast lors de l´opération de *bourrage* (durant le premier million de cycles) tandis que K_2 représente le tassement résiduel apparaissant dans la couche de ballast sous les traverses et dans le sol. Ces deux paramètres dépendent de la charge des essieux, des caractéristiques du rail, de l´espacement des traverses et des caractéristiques mécaniques des matériaux constitutifs de la plateforme ferroviaire. La figure (2.1) montre les résultats des mesures de tassement, obtenues par Shenton (1978).

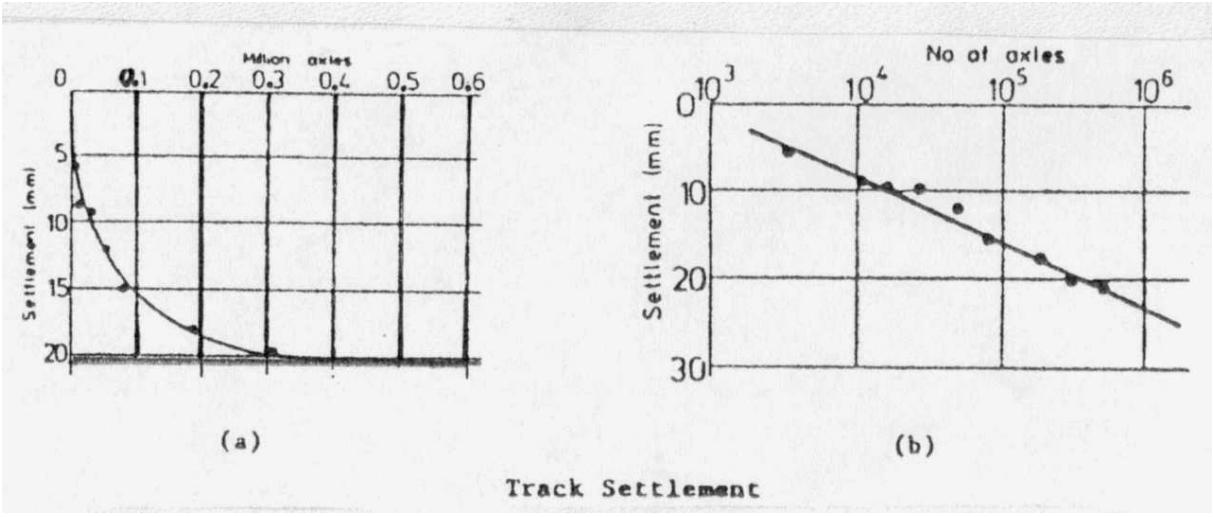


FIG. 2.1: mesures de tassement en voie d´après Shenton (1978) [76]

2.2.1.3. Projet EUROBALT : EUropean Research project for Optimised BALlast Track [17]

EUROBALT 1 Dans le cadre de ce projet, une collaboration avec le CERAM [1] a permis de mettre au point un essai à l´échelle réelle d´une portion de voie. Un seul blochet en béton (compte tenu de ce que la simulation porte sur la moitié de la voie) a été placé dans une caisse en bois de dimensions : 1 m de largeur ; 2, 5 m de longueur et 0, 8 m de hauteur. Le blochet repose sur une couche de ballast d´épaisseur 30 cm. Des tapis d´élastomère, simulant le sol support de raideur 30 MPa, sont placés au fond de la caisse.

[1] Laboratoire de l´Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, actuellement LAMI (Laboratoire Analyse des Matériaux et Identification)

Afin de simuler le passage d´un TGV, l´effort a été appliqué par un vérin hydraulique (Pannegeon, 1993 [56]) traduisant l´effort transmis par la traverse au ballast lors de la circulation d´un boggie sur la voie. Le signal est composé d´un "**M**" suivi d´une charge constante (poids du rail et des traverses). Cette charge persiste jusqu´à ce que le boggie suivant atteigne la traverse concernée. Chaque pic de **M** représente le passage d´un essieu sur la traverse. L´équation (2.3) donne le signal force à chaque instant pour le triplet (Q,V,X) (Guérin, 1996 [29]; Bodin, 2001 [11]) .

$$F(Q,V,t) = Q[X^{((Vt-a)/d)^2} + X^{((Vt-a-L)/d)^2}] \tag{2.3}$$

- t : temps,
- a : la distance critique du signal, qui correspond à la position expérimentale de la charge nulle, $a = 3$ m,
- d : la distance entre les traverses, $d = 0,6$ m,
- L : l´empattement du boggie, $L = 3$ m,
- X : variable dépendante du sol, qui traduit l´étalement du signal force ; pour un sol $QS2$ (30 MPa) par exemple, X vaut $0,7158$,
- V : est la vitesse du train (en m/s),
- Q : est la charge maximale appliquée sur la traverse (en Newton).

Cette expression analytique (équation 2.3) est inspirée des résultats de Sauvage [69] relatifs à l´influence de la raideur du sol sur les efforts transmis aux traverses et les déflexions des traverses. Cette étude est détaillée et discutée au chapitre 4.

Plusieurs charges (entre 14 et 17 tonnes) et vitesses (entre 250 et 350 km/h) ont été testées. Les mesures effectuées concernent le tassement du ballast et la déflexion du blochet. Le nombre de cycles de chargement est de l´ordre de 200000 cycles.

EUROBALT 2 La deuxième partie du projet de recherche EUROBALT, regroupant quatre pays européens (France, Grande-Bretagne, Allemagne et Suède) a été lancée en septembre 1997 et s´est achevée en septembre 2000. Le projet avait pour but l´observation et l´étude de l´enfoncement de la voie in-situ. Dans le cadre de ce projet, des instruments de mesure de déplacement vertical de la voie ont été développés pour interpréter les effets de la charge de trafic sur la voie. Des mesures in-situ de tassement et de déplacement dynamique des couches d´assise ont été réalisées sur la ligne TGV Paris-Nord, sur les sites de Ressons et Chaulnes (Krakutovski, 2000 [42]). Les mesures de déplacement dynamique et du tassement de remblai ont permis d´évaluer l´influence du remblai sur la réduction du tassement de la voie lors des passages des TGV. Les mesures des forces dynamiques et des déflexions des traverses sont par contre plus difficiles à réaliser. En effet, ces mesures

ont nécessité le placement de capteurs d´accélération sur la super-structure de la voie, ce qui a permis de mesurer tout d´abord les déflexions des traverses et de déterminer ensuite la raideur dynamique de la voie et son évolution avec le nombre de cycles de chargement.

Des mesures de déplacement des sous-couches ont été effectuées en utilisant deux extensomètres de type LVDT pour la mesure du déplacement dynamique, un extensomètre à un capteur de déplacement statique vertical, et une cellule de pression interstitielle. Les mesures statiques ont révélé des déplacements importants entre le ballast et le remblai et le ballast et le substratum, estimés respectivement à 8 mm et $2-3$ mm (les mesures étant faites à cinq jours d´intervalle).

2.2.1.4. Essai du LCPC (2002) [20]

Les essais réalisés au LCPC[2]-Nantes pour le compte de la SNCF visaient l´étude du comportement mécanique à long terme, et notamment du tassement sous chargement cyclique, d´un ballast recyclé en vue de comparer ses performances à celles d´un ballast neuf.



FIG. 2.2: banc d´essai du LCPC-Nantes d´après Cottineau et al. (2002) [20]

[2]Laboratoire Central des Ponts et Chaussées

Le dispositif expérimental est représenté sur la figure (2.2). Il a été conçu par le LCPC et comprend une caisse rigide de dimensions (5 m x 1,1 m x 1 m) dans laquelle est placée une couche de ballast d´épaisseur 30 cm reposant sur une couche d´élastomère de 30 mm d´épaisseur, de rigidité équivalente à celle d´une plate-forme de voie ferrée de module d´Young $E = 100$ MPa. Une traverse bibloc en béton armé est placée au-dessus de la couche de ballast et entourée de ballast sur toute sa hauteur (environ 30 cm). Les extrémités du massif de ballast sont terminées par des talus faisant des angles de 45°.

Le chargement vertical, appliqué à l´aide d´un vérin, a pour intensité 100 kN et émet un signal qui simule le passage d´un convoi. La charge verticale est répartie sur les deux blochets de la traverse par l´intermédiaire d´un platonnier (figure 2.2).

Les essais ont été fractionnés en deux phases de chargement : une première phase, d´une durée d´environ un million de cycles avec une fréquence de chargement de 2,37 Hz correspondant à une vitesse de passage des trains de 160 km/h, puis la fréquence a été augmentée à 4,74 Hz pour simuler une vitesse de 320 km/h et le chargement a été poursuivi jusqu´environ 250000 cycles. Avec cette procédure, la durée du chargement était d´environ 120 h.

Les auteurs ont analysé les résultats des essais menés, et constatent que l´évolution de la courbe de tassement est caractérisée par une augmentation rapide jusqu´à 10000 cycles environ, puis la pente de la courbe diminue fortement et devient quasiment constante. Cette phase, où le tassement augmente de façon linéaire en fonction du nombre de cycles (l´ordre de grandeur des pentes de tassement est de 1 mm/million de cycles), est atteinte après environ 300000 cycles.

Les mesures de déplacement vertical au niveau des blochets ont permis à Cottineau et al. (2002) [20] de tracer les courbes *force-déplacement* . Celles-ci montrent que la réponse du ballast, sous chargement cyclique, est *non-linéaire* ; en effet, la raideur du ballast est une fonction croissante de la charge appliquée, les cycles présentant par ailleurs une forte hystérésis. Cette observation a été faite par plusieurs auteurs dans la littérature, et nous y reviendrons au chapitre 7.

Par ailleurs, les auteurs ont comparé les performances de différents types de ballasts : le ballast neuf, le ballast traité en usine et recyclé et le ballast non traité (usé), en les soumettant aux mêmes conditions d´essais cycliques (Cottineau et al. (2003) [20])

2.2.2 Essais sur modèles réduits

2.2.2.1. MICOBALLAST : le banc d´essai (Guérin (1996) [29])

Cet essai est réalisé au CERAM et s´inspire de l´essai à échelle réelle effectué au même laboratoire et cité ci-dessus. Le modèle réduit à échelle 1 : 3 de la voie, conçu par Guérin (1996), reproduit un blochet cylindrique en béton à base circulaire, noyé dans un massif de "microballast", confiné dans une caisse de section carrée dont le centre coïncide avec l´axe du blochet. L´objectif de cet essai est d´établir une loi de tassement du ballast à grand nombre de cycles. La machine d´essai utilisée est une machine de traction-compression-torsion MTS, qui pilote hydrauliquement un vérin à travers lequel la force est appliquée sur le blochet. L´essai se déroule en deux phases. La première consiste à *compacter* le ballast afin qu´il présente dès les premiers cycles de chargement une résistance optimale, cette phase modélise le *bourrage*. L´essai de bourrage est réalisé en soumettant l´échantillon à des vibrations. La deuxième phase est l´essai de tassement.

Plusieurs essais s´étalant sur 2 à 4 millions de cycles ont été réalisés, durant lesquels des mesures de déflexion élastique verticale maximale du blochet sous chargement et le tassement vertical du blochet après décharge, ont été réalisées.

Guérin (1996) considère que le comportement du ballast soumis à des chargements répétés, du point de vue tassement, se décompose en deux phases : la première correspond à la densification du ballast, elle est caractérisée par de grands tassements allant de 2 à 10 mm. Pendant cette phase, il n´y a pas de phénomènes de *vieillissement* des grains (usure par attrition, rupture). Dans le cas d´un bourrage par percussion, cette phase dure environ 50000 cycles contrairement au cas du bourrage par vibration dont la durée de densification peut atteindre 800000 cycles. Une deuxième phase caractérisant le comportement du ballast à long terme (plusieurs millions de cycles) se traduit par une variation lente, quasi-linéaire, du tassement en fonction du nombre de cycles N, de sorte que l´incrément de tassement par cycle $d\delta/dN$ peut être considéré comme approximativement constant.

Plusieurs charges à l´essieu (correspondant à échelle réelle à 14, 17 et 20 tonnes), raideurs de sol (30 à 100 MPa) et vitesses de sollicitations ont été testées. A l´issue des résultats de ces essais, Guérin (1996) [29] propose une loi de tassement vertical du ballast en régime *stabilisé*, reliant l´incrément de tassement vertical par cycle de chargement à la déflexion élastique d_v (enfoncement du blochet dans le ballast lors du passage d´un boggie). Cette loi s´écrit :

$$\frac{d\delta}{dN} = 4,8.10^{-7} d_v^{2,51} \tag{2.4}$$

Des mesures effectuées en voie par la SNCF, ont certes validé la dépendance entre l´incrément de tassement et la déflexion élastique, cependant les tassements mesurés en voie sont dix fois plus importants que ceux mesurés par Guérin sur le banc d´essai *MICOBALLAST*.

2.2.2.2. L´essai BETTER : Ballast Essai de Tassement Transversal à Echelle Réduite (Bodin (2001) [11])

C´est un modèle réduit à l´échelle 1 : 3 d´une portion de voie ballastée réalisé au LAMI ayant pour but d´étudier le comportement du ballast sous l´effet d´une sollicitation combinée (verticale et latérale). Une caisse en bois contenant une traverse et du ballast repose sur une dalle en acier. Le mode de chargement est similaire à celui qui a servi à réaliser les essais Microballast. Ce banc d´essai est destiné à la mesure des déplacements élastiques et résiduels provoqués par l´application de chargements répétés, simulant les passages successifs des TGV.

Une caisse parallélépipédique en bois de dimensions intérieures $1,7$ x $0,4$ x $0,5$ m, contient une couche de ballast réduit à l´échelle 1 : 3 (micro-ballast) d´épaisseur 10 cm, qui repose sur une couche de matériau (tapis d´élastomère ou bois) modélisant le sol de comportement élastique. Une traverse bi-blocs en béton armé reproduit à échelle 1 : 3 une traverse bi-bloc à l´échelle 1. Ce blochet est entouré de micro-ballast jusqu´à sa surface supérieure. Le banc d´essai BETTER est représenté sur la figure 2.3



FIG. 2.3: banc d´essai BETTER d´après Bodin (2001) [11]

La charge est appliquée sur la traverse par le biais d´un vérin à paliers hydrostatiques. Ce vérin est monté sur rotule afin de permettre l´application de sollicitations d´inclinaison maximale $\alpha = 30°$ par rapport à la verticale. La charge est appliquée sur une pièce de répartition en acier afin de garantir une transmission de la même charge sur les deux blochets.

Bodin (2001) a mesuré les déplacements verticaux des blochets soumis à des chargements répétés en utilisant trois capteurs de déplacement de type LVDT. Deux d´entre-eux sont placés sur le blochet "voie" . L´un permet la mesure du déplacement vertical et l´autre le déplacement horizontal. Le troisième capteur est placé sur le blochet côté "talus" et ne mesure que le déplacement vertical. Le ballast utilisé est fourni par la SNCF (comme pour l´essai Microballast) et a une granulométrie variant entre 6/10 à 14/20 mm avec les proportions respectives de 20% à 50% ; sa masse volumique est d´environ 1700 kg/m^3. Afin de pouvoir utiliser les similitudes conservant les champs de contraintes, et pour des raisons de faisabilité et de coût [3], Bodin (2001) a choisi de compenser le déficit de gravité au niveau de la couche de ballast située sous les blochets, par une masse additionnelle en disposant sur la surface supérieure du ballast, une couche uniforme de cyclindres d´acier, à l´inverse de Guérin qui en voulant créer un vide partiel sur l´échantillon, a placé une sorte de bâche autour de ce dernier.

Les essais réalisés sur le banc *BETTER* sont de deux types :

- des essais de stabilité latérale, pour lesquels le signal force est un signal sinus de faible fréquence (0, 5 Hz), permettant l´évaluation du déplacement latéral élastique sous chargement et le déplacement latéral résiduel après décharge de la traverse dans le ballast ;

- des essais de fatigue pour lesquels le signal force appliqué est décrit par la fonction en **M** donnée par l´équation (2.3).

Différentes valeurs du module du sol (élastomère ou bois), rapport entre les charges horizontales et verticales, inclinaison et vitesse de sollicitation ont été testées sur le banc d´essai *BETTER* et en analysant les résultats de ces essais, l´auteur propose une loi d´évolution des incréments de tassement latéral par cycle $d\delta_L/dN$ de chargement fonction du déplacement élastique latéral d_L donnée par l´équation suivante :

$$\frac{d\delta_L}{dN} = 8,1.10^{-6} d_L^{1,13} \tag{2.5}$$

Bodin (2001) met en évidence l´influence de la stabilisation des éprouvettes sur le comportement du ballast en terme d´incrément de tassement latéral qui est 32 fois plus faible pour les éprouvettes stabilisées que pour celles qui ne le sont pas. Les résultats obtenus sont du même ordre que ceux mesurés en voie.

Les essais de fatigue auxquels elle s´est intéressée sont relatifs à des sols de raideur 90 MPa. Pour ces essais, seule la similitude conservant les accélérations est étudiée. La loi de

[3] Une similitude rigoureuse entre l´essai sur modèle réduit et l´essai en vraie grandeur nécessiterait en effet l´emploi d´une centrifugeuse !

tassement vertical proposée par Bodin (2001) [11] relie l´incrément de tassement vertical par cycle de chargement à la déflexion élastique (équation 2.6). Les éprouvettes subissent toutes une stabilisation verticale de 25000 cycles avant la simulation de la circulation. Dans la phase de circulation, les incréments de tassement sont calculés à partir de la mesure du tassement divisé par le nombre de cycles. La mesure est toujours prise en compte sur une plage linéaire après 250000 cycles.

$$\frac{d\delta_v}{dN} = 2,5.10^{-6} d_v^{1,17} \tag{2.6}$$

Nous constatons que la loi de tassement vertical établie pour le banc d´essai *BETTER* (équation 2.6) est similaire à celle établie pour l´essai *MICOBALLAST* (équation 2.4), mais les coefficients sont nettement différents. On obtient dix fois plus de tassement pour l´essai *BETTER* que pour l´essai *MICOBALLAST*. Bodin attribue cet écart aux procédures employées pour compenser la gravité, dans le cas de la similitude en contraintes, qui sont différentes ; la bâche employée par Guérin (1996) pour appliquer une pression isotrope sur l´échantillon a réduit les phénomènes vibratoires contribuant au tassement de la voie et a diminué fortement le tassement.

Le passage à l´échelle 1 : 1 entraîne des changements sur les lois de tassements latéral (équation 2.5) et vertical (équation 2.6) qui s´écrivent respectivement d´après Bodin (2001) :

$$\frac{d\delta_{L_{1/1}}}{dN} = 7.10^{-6} d_{L_{1/1}}^{1,13} \tag{2.7}$$

et

$$\frac{d\delta_{v_{1/1}}}{dN} = 2,1.10^{-6} d_{v_{1/1}}^{1,17} \tag{2.8}$$

Ces essais sur le banc BETTER feront l´objet, au chapitre 6, d´une simulation à l´aide de la méthode de calcul développée dans le présent travail.

2.2.2.3. Indraratna et al. (2003) [38]

Indraratna et al. (2003) ont tout récemment réalisé des essais cycliques sur le ballast en utilisant une cellule de forme parallélépipèdique ayant quatre plans verticaux en acier et munie d´un vérin servo-hydraulique permettant d´appliquer des chargements verticaux d´amplitudes maximales de 73 kN. La chambre peut contenir des échantillons de dimensions 800x600x600 mm. Un système composé de charnières et de support à billes permet

le déplacement latéral de tous les plans de la cellule. Chaque paire de plans parallèles peut se déplacer indépendemment de l´autre, l´échantillon de ballast est alors libre de se déformer latéralement sous l´effet du chargement cyclique vertical et du confinement latéral.

Dans cet essai, la contrainte cyclique (contrainte de compression majeure σ_1) est appliquée par le vérin servo-hydraulique, la charge est ensuite transmise au ballast à travers un ensemble blochet-rail placé sur la couche de ballast. Les plans verticaux de l´éprouvette sont munis d´un système composé de poussoirs hydrauliques et de cellules de chargement afin de permettre l´application des contraintes intermédiaire et mineure ($\sigma_2 = 10$ kPa et $\sigma_3 = 7$ kPa, ces valeurs correspondent à l´estimation des contraintes de confinement vues par le ballast en voie). Le chargement vertical initial est de 10 kN, il est appliqué pour stabiliser la traverse et le ballast, et pour servir de référence pour toutes les mesures de tassement et de déplacement latéral. Les déformations verticales du ballast et les déplacements des plans verticaux sont mesurés par des potentiomètres électroniques.

Les essais sont réalisés à une fréquence de 15 Hz simulant une vitesse de train de 80 km/h, le nombre total des cycles de chargement par essai étant de 500000. Ensuite, les mesures de tassement, de déplacement des plans et d´amplitude du cycle de chargement sont enregistrées. Les résultats des essais à chargements répétés sur le ballast montrent que l´évolution des contraintes verticales en fonction des déformations verticales est caractérisée par un premier cycle de charge/décharge présentant un comportement élastique non-linéaire et que les déformations permanentes sont relativement importantes et tendent à se réduire au fur et à mesure de l´application du chargement. Les trajets de chargement deviennent alors plus ou moins linéaires, par contre les trajets de déchargement sont relativement non-linéaires. Chaque cycle de charge/décharge produit une boucle d´hystéresis qui tend à s´aplatir au fur et à mesure du chargement, ce qui induit une rigidification du ballast.

Dans les essais menés par Indraratna et al. (2003), plusieurs types de ballast ont été testés : ballast neuf, recyclé (avec ou sans géotextiles, humide ou sec). Les courbes de tassement en fonction du nombre de cycles montrent que c´est le ballast neuf qui tasse le moins. Les auteurs attribuent ce comportement au fait que les angularités des particules assurent un meilleur enboîtement. Les essais menés par Aubry et al. (cf. paragraphe 2.4) et au LCPC (cf. paragraphe 2.2.1) semblent montrer à l´inverse que c´est le ballast recyclé qui se comporte le mieux.

La loi de tassement proposée par les auteurs est la suivante :

$$\delta = \alpha + \beta log N \tag{2.9}$$

où α et β sont des paramètres dépendant de l'état initial de compaction, du type de ballast, du type de renforcement, de l'amplitude du cycle de chargement et du degré de saturation de l'échantillon. Indraratna et al. (2003) donnent l'évolution des déformations permanentes, dans les trois directions principales, en fonction des cycles de chargement ; les directions principales des contraintes et des déformations étant les mêmes. Ils en déduisent que les déformations permanentes sont des fonctions linéaires croissantes de $log(N)$.

La comparaison entre des courbes donnant les déformations permanentes latérales pour différents types de ballast montre que c'est le ballast recyclé sec qui produit le plus de déformations permanentes, ceci étant probablement dû à la forme arrondie des grains et au peu de frottement entre eux, comparé au ballast neuf. L'ampleur des déformations permanentes axiales, pour le ballast recyclé, est quant à elle réduite par le placement d'un géotextile.

Les auteurs interprétent ces essais comme des essais triaxiaux cycliques, mais ces essais ne sont pas véritablement homogènes compte tenu du fait que la surface supérieure de l'échantillon (rail placé sur une couche de ballast) n´est pas chargée uniformément.

A cette réserve près, l´intérêt du dispositif expérimental ainsi mis au point est de pouvoir appliquer des sollicitations différentes dans les trois directions de l´espace.

2.3 Modèles de calcul pour la prévision de l´interaction ballast-structure

2.3.1 Modélisation de la structure de l´assise

Sauvage et Larible (1982) [70] ont modélisé la structure de l´assise d´une voie ferrée par éléments finis . Pour ce faire, ils ont utilisé le code de calcul *ROSALIE* mis au point par le *LCPC*. Ce programme permet la prise en compte des caractéristiques rhéologiques des matériaux constitutifs des couches d´assise (module d´Young E, coefficient de Poisson ν, cohésion c et angle de frottement φ). La modélisation est tridimensionnelle et suppose une loi de comportement *élastoplastique parfaite* des matériaux, faisant intervenir un critère de plasticité définissant la limite d´écoulement plastique. Le critère utilisé est celui de Drucker-Prager, exprimé en fonction de la cohésion c et de l´angle de frottement φ du matériau.

Les couches d´assise de la voie sont modélisées par un maillage tridimensionnel à éléments hexaédriques à 20 noeuds. Deux cas de charge ont été modélisés : une structure d´assise chargée par l´intermédiaire d´une seule traverse (essai de Vienne Arsenal) et

une structure chargée par l´intermédiaire d´un châssis de voie complet. Dans tous les cas de figure, l´assise est composée d´une couche de ballast d´épaisseur $e_b = 25$ cm, d´une couche de grave d´épaisseur e_g variable et d´une couche de sable d´épaisseur $e_s = 15$ cm. Les résultats de la modélisation en terme de déflexion ont été confrontés aux résultats d´essais de chargements statiques. De bonnes corrélations sur les déflexions ont été contatées dans le cas d´essais à grand nombre de cycles de chargement (2 millions). Les couches d´assise testées sont décrites sur le tableau 2.1.

Structure	Grave e_g (cm)	Sous-couche $(e_g + e_s)$ (cm)	Couche d´assise $(e_b + e_g + e_s)$(cm)
Structure 1	40	55	80
Structure 2	30	45	70
Structure 3	15	30	55
Structure 4	0	15	40

TAB. 2.1: tableau descriptif des couches d´assises testées par Sauvage et al.(1982)

Les caractéristiques mécaniques des matériaux de la structure sont résumées sur le tableau 2.2

Matériaux	E (MPa)	ν	C (kPa)	φ (degré)
Argile	15	0,49	50	20
Sable	100	0,2	0,1	36
Grave	1000	0,2	0,1	44
Ballast	150	0,2	0,1	45

TAB. 2.2: tableau decriptif des matériaux constitutifs des structures d´après Sauvage et al.(1982)

Sauvage et al. (1982) définissent un *coefficient de rigidité* de l´assise ρ_n, sous la charge R correspondant à une seule traverse, propre à chaque couche de matériau.

$$\rho_n = \frac{R}{\Delta e_n} \tag{2.10}$$

où Δe_n est la variation d´épaisseur de la couche n.

A titre d´exemple, en considérant une assise où la couche de grave a pour épaisseur 40 cm et où la charge appliquée par traverse est $R = 45$ kN, le coefficient de rigidité de la couche de ballast est $\rho_b = 225$ kN/mm. D´après les résultats de Sauvage et al. (1982)

[70], plus la couche de grave est épaisse moindre est le coefficient de rigidité de la couche de ballast.

Par ailleurs, les courbes résultant de la modélisation de Sauvage et al. montrent que pour une structure d´assise, l´enfoncement réversible calculé, est différent selon qu´il est déterminé sous une traverse (4, 5 mm) ou à l´interface ballast-sous couches (3 mm), ou encore au niveau de la plate-forme (2, 3 mm). Le modèle mathématique développé par Sauvage et al. permet d´aborder le calcul des déformations sous charge mais ne permet pas une évaluation du tassement résiduel après un grand nombre de cycles.

2.3.2 Modélisation numérique de la voie ferrée et de sa fondation

Profillidis (1983) [65] a poursuivi le travail réalisé par Sauvage et al. (1982) [70] en l´améliorant et en effectuant une modélisation "complète" de la voie. Il a modélisé le système rail-traverse-couches d´assise-plate-forme par la méthode des éléments finis, à travers le code de calcul *ROSALIE* et en tenant compte de l´élasto-plasticité des matériaux. Cette modélisation correspond aux essais sous charges roulantes de la voie expérimentale (grandeur nature) de Derby (1981) [54].

Le modèle de voie complet de Profillidis (1983) comprend la traverse sous la charge et de part et d´autre de celle-ci quatre traverses adjacentes. En raison de la symétrie par rapport au plan d´application de la charge, l´auteur ne garde que la demi-traverse sous charge et les quatres traverses adjacentes. A cause de la symétrie dans le direction longitudinale à la voie, seule la moitié de la voie est modélisée. Le maillage de la structure modélisée est tridimensionnel à mailles hexaédriques isoparamétriques à vingt noeuds. Le rail a été schématisé par une poutre de section rectangulaire ayant le même moment d´inertie et la même largeur de la base que le rail réel.

Afin de remédier aux problèmes des interfaces d´un système multi-couches et plus particulièrement à l´interface rail-traverse et traverse-ballast, et afin de représenter correctement les discontinuités des contraintes à ces interfaces là, l´auteur a dédoublé les noeuds du maillage, qui sont en réalité géométriquement confondus, ce qui permet de tenir compte de l´enfoncement des traverses dans la couche de ballast, par glissement parallélement aux faces verticales de celles-ci.

Il a réalisé une modélisation mathématique dans laquelle il tient compte, dans son dimensionnement, du type de traverse (en bois, en béton armé (bi-bloc) ou en béton précontraint (monobloc) (voir le tableau 2.4)) et de la qualité du sol de la plate-forme. Une autre amélioration apportée par Profillidis par rapport aux études antérieures telles que celles de Sauvage (1982) consiste à prendre en compte la semelle de caoutchouc

interposée entre le rail et la traverse, le rôle de cette semelle étant d´assurer d´une part une liaison élastique permanente entre le rail et la traverse et d´améliorer d´autre part l´élasticité de la voie.

Les critères de plasticité adoptés sont :

- le critère de Drucker-Prager ([32]) pour les matériaux pulvérulents (sol de la plate-forme) et granulaires (ballast, grave, sable),

$$f(\sigma, k) = \alpha I_1 - \sqrt{J_2} - k \tag{2.11}$$

avec :

- I_1 : premier invariant du tenseur des contraintes, $I_1 = tr(\underline{\underline{\sigma}})$.
- J_2 : second invariant du déviateur des contraintes, $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij}$
- $\alpha = \frac{tg\varphi}{\sqrt{9+tg^2\varphi}}$ et $k = \frac{3C}{\sqrt{9+tg^2\varphi}}$

- le critère parabolique pour le béton (traverse) et l´acier (rail). Ce critère a pour fonction de charge :

$$f(\sigma, R_C, R_T) = J_2 + \frac{1}{3}(R_C - R_T) I_1 - \frac{1}{3} R_C R_T \tag{2.12}$$

avec : R_C (resp.R_T) est la résistance à la compression (resp. à la traction) du matériau.

Les caractéristiques mécaniques des matériaux des couches d´assises ont été déterminées grâce à des essais triaxiaux et à des essais à la plaque effectués à Derby (1981) [54] (tableau 2.3).

Matériaux	E (MPa)	ν	C (kPa)	φ (degré)
Sable	100	0,3	0	30
Grave	200	0,3	0	45
Ballast	130	0,2	0	45
Sol QS1	12,5	0,4	15	10
Sol QS2	25	0,3	10	20
Sol QS3	80	0,3	0	35
Sol : Roche	3000	0,2	1500	20

TAB. 2.3: caractéristiques mécaniques des matériaux du modèle de simulation des essais de Derby (d´après Profillidis, 1983)

Les résultats de la modélisation conduite par l´auteur montrent que la charge appliquée se reporte essentiellement sur la traverse sous charge et les deux traverses adjacentes de

Matériaux	E (MPa)	ν	R_T (MPa)	R_C (MPa)
Béton armé	30.10^3	0,25	3	30
Béton précontraint	50.10^3	0,25	6	9
Bois	20.10^3	0,25	10	100
Acier	2.10^3	0,3	700	600

TAB. 2.4: caractéristiques mécaniques des matériaux constituant les traverses et le rail (d´après Profillidis (1983))

part et d´autre. Au-delà de la deuxième traverse adjacente, une réaction très faible est constatée et de faibles contraintes de traction apparaissent dans l´infrastructure. Profillidis a mis en évidence l´influence non négligeable de l´épaisseur des sous-couches sur les contraintes et les déplacements.

L´auteur s´est intéressé également à la rigidité verticale de la voie, qui a été aussi étudiée par Sauvage et al. (1982) ; celle-ci dépend de l´épaisseur des couches d´assise et de la qualité du sol de la plate-forme. Il a aussi étudié la déformée de la traverse sous chargement dont la flexibilité dépend également de l´épaisseur des couches d´assise et de la qualité du sol de la plate-forme. Plus précisément, l´étude de la transmission de la charge appliquée aux traverses montre les pourcentages moyens de charge supportée par chacune des traverses situées de part et d´autre de la charge (figure 2.4) :

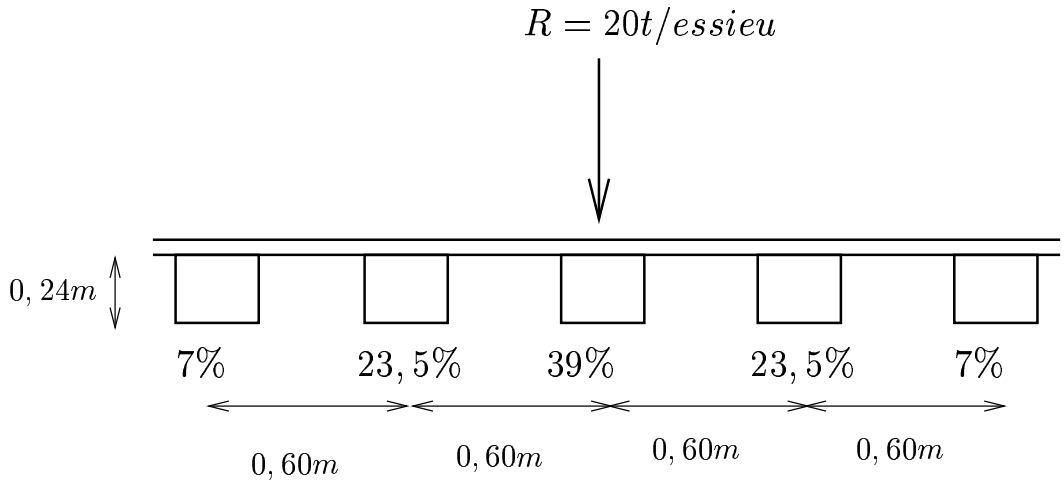


FIG. 2.4: répartition en pourcentage de la charge d´un essieu sur les traverses (d´après Profillidis (1983))

D´après Profillidis (1983), les pourcentages de la charge qui sont supportés par la traverse sous charge et les traverses adjacentes sont peu influencés par la qualité du sol de la plate-forme et par l´effet du type de la traverse. Ces résultats sont corroborés par les

mesures effctuées in-situ sous des traverses en bois ou en béton.

De plus, il a mis en exergue l´importance de la "qualité" de la couche de la plate-forme. Ainsi pour une même épaisseur des sous-couches, plus la couche de la plate-forme est raide (marne par exemple) moindres sont les valeurs des déplacements et des contraintes. D´autre part, il constate l´effet prépondérant de la plasticité sur la répartition des charges, qui se manifeste d´autant plus que la "qualité" de la plate-forme est dégradée. Les déflexions et les efforts calculés lors de la modélisation numérique de Profillidis (1983) sont comparables à ceux observés pendant les essais de Derby.

2.4 Caractérisation des matériaux par des essais homogènes cycliques

Dans cette partie nous décrivons le comportement des géomatériaux de façon générale et des matériaux constitutifs des infrastructures de transport en particulier lorsqu´ils sont soumis à des chargements de trafic. Ce comportement a été analysé par des essais triaxiaux à grand nombre de cycles, ce qui a permis de mettre en évidence les déformations permanentes accumulées dans ce type de matériaux.

Pour des matériaux comme le sable, plusieurs études telles que celles de Luong (1980) [48], Cambou et al. (1988) [16] ainsi que Vicens et al. (2003) [85], Dupla et al. (2003) [24], Dormieux (1989) [21], pour ne citer que ces auteurs, ont consisté à étudier le comportement cyclique de ce matériau, et à développer des modèles permettant la mise en évidence de l´évolution des déformations permanentes en fonction du nombre de cycles de chargement. Leurs études sont exposées au début du chapitre 5.

Des chercheurs tels que Alva-Hurtado (1980) [6] ont réalisé des essais triaxiaux cycliques (jusqu´à 100000 cycles) sur du ballast afin de déterminer le module d´Young de ce matériau et de mesurer les déformations permanentes. Les trajets de contraintes utilisés pour réaliser les essais sont déduits de la modélisation de la voie ferrée par le modèle analytique *GEOTRACK*. Il propose ensuite une loi de comportement qui relie la déformation permanente axiale au nombre de cycles de chargement. Ces différents travaux d´Alva-Hurtado sont décrits plus en détail dans le chapitre 5.

Afin de caractériser le matériau ballast, des essais triaxiaux statiques et cycliques ont été menés en Australie par Ionescu et al. (1996) [39] et Indraratna et al. (1998, 2003) [37], [38]. Ces auteurs déduisent de leurs essais une expression du tassement résiduel qui est logarithmique sur les premiers cycles de chargement (de l´ordre de 15 cycles) et linéaire ensuite, compte tenu du fait que le tassement a une faible évolution à long terme. Leurs

travaux sont également exposés plus en détail dans le chapitre 5.

Lekarp et Dawson [43] ont aussi réalisé des essais triaxiaux cycliques au laboratoire sur les graves non traitées en s´inspirant des travaux de Paute et al. (1988) [59]. Ils mettent ainsi en évidence l´accumulation des déformations permanentes dues au chargement cyclique et en déduisent une loi de comportement reliant la déformation permanente axiale à la longueur du cycle, à sa pente et au nombre de cycles de chargement (voir chapitre 5).

A titre d´exemple de caractérisation du ballast par des essais homogènes cycliques et également en vue de préparer la discussion du paragraphe (2.5), nous présentons les travaux d´Aubry et al.[9]

Des essais triaxiaux ont été menés par Aubry et al. [9] à L'ECP[4] sur du ballast fourni par la SNCF. La cellule triaxiale utilisée a un diamètre $\Phi = 300$ mm et une hauteur $h = 600$ mm. L´équipe de l´ECP a réalisé des essais triaxiaux monotones et cycliques sur du ballast neuf et usé. L´appareillage utilisé permet l´application d´un champ de contrainte uniforme autour de l´échantillon, le déviateur est appliqué à l´aide d´un piston, et le confinement est appliqué par aspiration. La cellule triaxiale repose sur une presse *MTS* électrohydraulique asservie en déplacement ou en force. Dans les essais réalisés à l´ECP, l´asservissement est imposé en déplacement.

Un capteur de déplacement de type LVDT[5] est placé sur la face supérieure de l´échantillon pour mesurer la *déformation axiale* de ce dernier. Deux autres capteurs, du même type, sont placés de part et d´autre de l´échantillon (diamétralement opposés) au niveau de la partie centrale de l´éprouvette pour mesurer la déformation latérale. Ce dispositif permet une estimation des *déformations radiales*, mais moins précise que la mesure à différents niveaux de l´échantillon souvent effectuée pour évaluer la déformation en "tonneau" de l´échantillon.

Les essais triaxiaux monotones sur du ballast neuf (16/63 mm) ont permis, pour des valeurs de confinement comprises entre 20 et 40 kPa, d´évaluer l´angle de frottement φ, égal à 54°, ainsi que le module d´Young E. Pour un niveau de déformation axiale de $\epsilon_1 = 10^{-3}$, ce dernier est de l´ordre de 190 MPa.

Les essais triaxiaux cycliques ont été réalisés de façon à reproduire le passage des trains sur la voie. Le signal appliqué en tête de l´échantillon est en déplacement, sous forme de "M". La première phase de l´essai consiste en un écrasement (déplacement de 2 mm vers le bas) puis un retrait de 1 mm vers le haut puis de nouveau un écrasement de 1 mm vers le bas et ensuite un retour vers la position initiale, comme le montre la figure 2.5. Ce

[4]École Centrale de Paris

[5]Low Voltage Displacement Transducer

signal a été appliqué à une fréquence variant de 5 à 10 Hz et les essais cycliques ont été menés jusqu´à 4 millions de cycles (simulant près de 3 ans de trafic TGV).

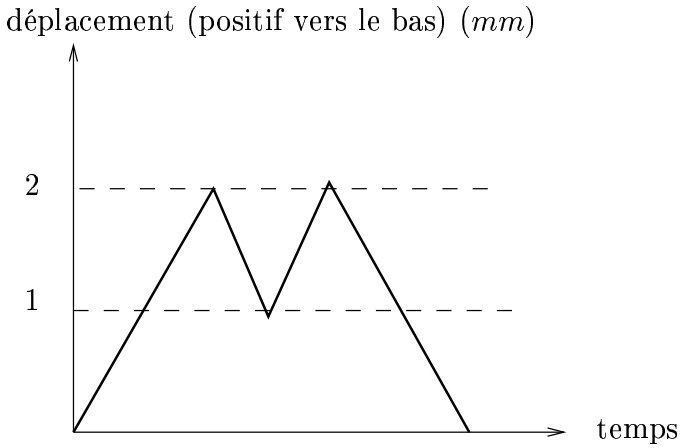


FIG. 2.5: signal déplacement appliqué en tête de l´échantillon lors de l´essai triaxial cyclique (d´après Aubry et al.)

Aubry et al. ont observé un changement de granulométrie de l´échantillon après l´essai, qui se manifeste par une production de fines, conséquence de l´usure des grains de ballast, où une perte d´aspérités s´est produite au niveau des points de contact. Aubry et al. ont mené le même type d´essai sur du microballast (ballast de dimension réduite de 1/3) donc de taille 6/20 mm. La comparaison des résultats des essais menés sur du microballast avec ceux obtenus pour le ballast "classique" montrent des comportements similaires.

2.5 Utilisation de lois de comportement élastoplastique avec modélisation pas-à-pas

Loi de Hujeux En se basant sur les résultats de ses essais triaxiaux cycliques exposés dans la partie (2.4) de ce chapitre, Aubry a tenté de modéliser le comportement du ballast sous chargement répété en utilisant une loi de comportement élastoplastique cyclique dite de "Hujeux", développée à l´ECP. C´est une loi incrémentale multimécanismes, basée sur la théorie de la *plasticité avec écrouissage* et le concept d´*état critique*.

Comme toute loi de comportement élastoplastique [32], cette loi se base sur trois notions importantes qui sont : la surface de charge, l´écrouissage et la régle d´écoulement plastique. Le taux de déformation plastique s´écrit :

$$d\underline{\underline{\epsilon}} = d\lambda \frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}, \alpha) \quad d\lambda \geq 0 \tag{2.13}$$

Dans la loi de Hujeux la règle de normalité n´est imposée que pour les mécanismes déviatoires. En effet, elle est décomposée en trois mécanismes de déformations planes dans trois plans orthogonaux et un mécanisme de consolidation purement volumique. Une fonction "d´endommagement" est aussi introduite dans cette loi, qui permet de tenir compte de la réduction de l´angle de frottement φ au cours des cycles de chargement.

A partir de ce modèle de comportement, les auteurs ont calé les résultats de leurs essais monotones afin de déterminer les caractéristiques mécaniques du ballast tels que l´angle de frottement φ qu´ils ont évalué à 48°, pour une pression de confinement de 5 kPa (correspondant à celle existant en voie), et le module d´Young qu´ils ont évalué à environ 200 MPa.

Le modèle adopté est constitué de cinq traverses bibloc en béton armé posées sur une couche de ballast (E_b = 50 MPa,γ_b = 16,4 kN/m^3), surmontant une couche de grave (E_g = 60 MPa,γ_g = 14 kN/m^3), le tout reposant sur un massif semi-infini (E_{sol} = 80 MPa,γ_{sol} = 18 kN/m^3). La charge appliquée sur les traverses est de l´ordre de 69 kN (figure 2.6).

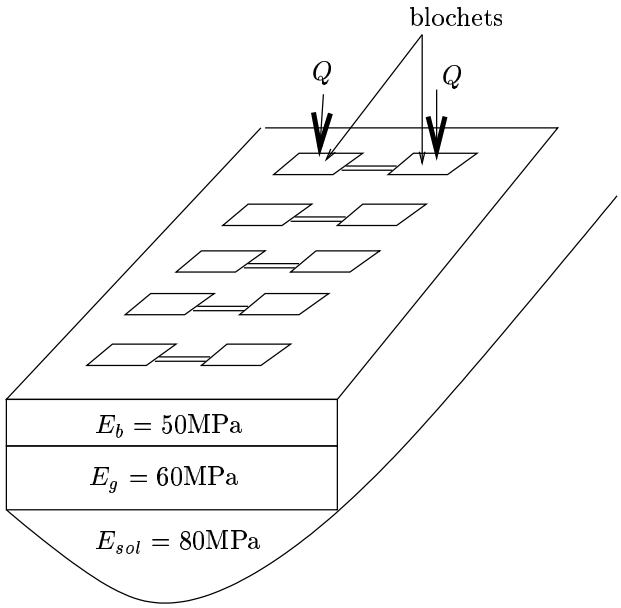


FIG. 2.6: modèle de calcul conçu par l´ECP [9]

La modélisation numérique réalisée par Aubry et al. est constituée de trois étapes : dans la première, les auteurs utilisent le logiciel *MISS3D* (outil numérique permettant de traiter des problèmes tridimensionnels de dynamique des sols et de propagation d´ondes) où des simulations tridimensionnelles, dans le domaine élastique, sont réalisées, tenant compte des effets dynamiques dus aux passages des trains. A l´issue de ce calcul, les auteurs déterminent les déplacements élastiques dans la couche de ballast, les efforts aux différents noeuds du maillage ainsi que les chemins dans l´espace des contraintes et des

déformations. La deuxième phase consiste a utiliser le code de calcul en éléments finis *GEFDYN*, dans lequel le comportement cyclique du matériau est modélisé par la loi de Hujeux, afin de déterminer les déplacements élastoplastiques dans une tranche de ballast soumise à une sollicitation équivalente au passage d´un convoi. Enfin, dans la troisième phase ils ont utilisé le logiciel *LAWYER*, qui est une version simplifiée de *GEFDYN*, pour prendre en compte l´aspect non-linéaire du comportement du ballast.

Une telle modélisation permet de calculer les déformations résiduelles en tout point de la structure et en particulier en plusieurs points d´une même verticale sous le blochet. Le tassement résiduel résulte de l´intégration de ces dernières.

La modélisation par MISS3D montre que pour une vitesse de sollicitation équivalente à une vitesse de train de 320 km/h, la déflexion de la traverse au droit de la charge est de $0,9$ mm. Le calcul cyclique par la loi de Hujeux a permis, par ailleurs, de déterminer les trajets de contraintes dont les pentes sont les plus raides pour les points situés exactement sous le blochet (pentes comprises entre 1 et 2), les valeurs de la pression moyenne p et du déviateur des contraintes q variant autour de 100 kPa.

Le tassement résiduel en surface de la couche de ballast résultant de l´application d´un million de cycles de chargement est ainsi évalué à 6 cm, ce qui apparaît comme une valeur beaucoup trop importante. Les mesures réalisées en voie, donnent en effet des valeurs au plus égales à quelques millimètres [9].

Le principe de simulation du comportement cyclique des matériaux à travers l´utilisation de la loi élastoplastique de Hujeux et d´un calcul pas-à-pas a été également mis en oeuvre par Cambou et al. (1988) [16], Vincens et al.(2003) [85], ainsi que Hicher et al. (1999) dans Correira (1999) [19]. Ces auteurs ont tenté d´améliorer le modèle de Hujeux afin de pouvoir simuler des phénomènes à grand nombre de cycles. En effet, ils évoquent certaines limitations du modèle de Hujeux, qui conduit comme constaté précédemment à une surestimation des déformations plastiques induites par la sollicitation cyclique à grand nombre de cycles.

Etudes de Habiballah et al. (2003) [31] Elles consistent à modéliser les déformations permanentes des matériaux granulaires constituant les chaussées routières, soumises à des charges de trafic, en se basant sur la théorie de l´adaptation en élastoplasticité. Nous détaillons cette étude dans le chapitre 5.

D´une façon générale, la principale limitation relative à l´utilisation d´une loi élastoplastique pour la simulation pas-à-pas du comportement cyclique des matériaux, et tout particulièrement la prévision des déformations permanentes cumulées en fonction du nombre de cycles, réside dans la lourdeur des calculs et le risque de cumul des erreurs de

ces derniers lorsque le nombre de cycles dépasse quelques dizaines ou centaines, conduisant souvent à des résultats peu réalistes.

2.6 Les approches "milieux granulaires"

Généralement l´étude du comportement du ballast soumis à des chargements cycliques est réalisée en considérant le ballast comme un milieu continu, c´est-à-dire faisant abstraction de son caractère granulaire. Cette caractéristique revêt d´autant plus d´importance, que dans le cas d´un ballast, la dimension des grains (jusqu´à quelques cm) n´est pas nécessairement très faible au regard de certaines dimensions du problème, telles que l´épaisseur de la couche de ballast. L´assimilation de ce dernier à un milieu continu peut être ainsi remise en question, amenant certains chercheurs à modéliser le ballast comme un milieu discret formé d´un assemblage de corps rigides en interaction mutuelle. En dépit des nombreux travaux auxquels cette approche a donné lieu, nous nous limitons à deux tentatives récentes de mettre en oeuvre une telle approche "discrète" pour modéliser les déformations d´un ballast.

Guérin (1996) a utilisé le logiciel LMGC [6] [1] pour modéliser le ballast comme un système de corps rigides en contact, ce logiciel étant basé sur la théorie des contacts et des chocs. La résolution du problème est basée sur les équations dynamiques de *Lagrange*, la loi de comportement au contact étant celle de *Coulomb*.

Guérin a réalisé une modélisation tridimensionnelle de l´essai *Microballast* en considérant que celui-ci est constitué d´un assemblage de sphères rigides en contact, le calcul étant conduit de façon quasi-statique. L´épaisseur de la couche de ballast sous la section d´application du chargement est équivalente à 9 couches de grains ayant un rayon de 7 mm (rayon moyen du ballast réduit à l´échelle 1 : 3). Les couches sont organisées de façon à avoir un réseau cubique à faces centrées. Le sol a été modélisé par une liaison élastique (ressorts) entre chaque sphère de la couche inférieure et un point fixe. Le chargement est appliqué sur une surface circulaire de rayon 100 mm, imposant des déplacements verticaux aux sphéres de la couche supérieure.

Les simulations effectuées par l´auteur, consistant à appliquer le chargement par une assiette à section circulaire, lui permettent de visualiser la répartition des déplacements et des forces sur toute l´épaisseur de la couche de ballast et jusqu´au sol. Une concentration de forces sur le pourtour de la surface de chargement est observée. Elle est attribuée au gradient de déplacement entre les couches en contact direct avec la surface circulaire et le

[6] Logiciel de Mécanique Gérant le Contact développé à l´université de Montpellier [1]

reste de l´éprouvette. Le calcul cyclique, simulant le passage des TGV sur la voie, consiste à effectuer un calcul incrémental dans lequel la position relative des grains est actualisée à chaque incrément. Des incréments de déplacement sont imposés au niveau de la surface de chargement. Dès le second incrément, l´auteur constate que les contacts unilatéraux entre certains grains sont rompus et que la transmission des charges reste confinée dans des chaînes privilégiées.

Cette tentative de simulation du comportement du ballast sous charge de trafic a permis de mettre en évidence le phénomène de transmission des efforts au sein du matériau au cours du chargement, mais ne fournit pas une évaluation de la réponse du matériau sous chargement cyclique, en particulier du tassement résiduel.

Oviedo (2001) Une autre étude portant sur le comportement du ballast (considéré comme un milieu discret) en vue de la modélisation de la procédure de maintenance dénommée *“bourrage”*, a été menée par Oviedo (2001) [55]. L'auteur a schématisé le comportement du ballast à l´aide d´un modèle micromécanique basé sur la théorie des éléments discrets. Elle a adopté plus précisément une approche discrète bidimensionnelle du type *dynamique moléculaire* (Moreau, 1999) [52].

Pour tenir compte de la convexité des grains de ballast, de leur taille et de leur angularité, Oviedo modélise les grains de ballast par des polygones. Ainsi, la modélisation de deux particules en contact est tributaire de la géométrie des grains d'une part et de l'algorithme de détection des contacts, de la loi de comportement adoptée en ces points, d'autre part. La géométrie des grains est définie de façon à ce que chaque grain soit caractérisé par un nombre de sommets, les coordonnées de chaque sommet, son centre d'inertie, un rayon caractéristique (plus grande distance entre le centre d'inertie et ses sommets) et des vecteurs normaux et tangents à chaque face du grain. Afin de détecter les contacts entre grains, l'auteur utilise une technique consistant à détecter les particules voisines directes à une particule donnée, en entourant cette dernière d'une sorte de “halo” circulaire et à effectuer des tests, mis à jour, pour lesquels il y a contact entre deux particules si la distance entre leurs centres d'inerties est inférieure à la somme de leurs rayons caractéristiques, plus une distance de sécurité.

L'algorithme de détection des contacts a pour objectif le calcul de l'interpénétration des grains. Trois types de contact sont traités par l'auteur : contact entre un côté et un sommet, contact entre deux côtés et contact entre deux sommets. Enfin la loi de comportement au contact dicte à l'échantillon la façon dont il doit réagir au contact, compte tenu de l'identification du type de contacts entre grains et du calcul de l'interpénétration.

La loi de comportement au contact, que propose l'auteur, est relative à la force de

contact dont la composante normale dépend de la raideur du matériau et de la vitesse relative d'un grain par rapport à son voisin direct. La composante tangentielle, suit quant à elle la loi de *Coulomb*.

Ce "code de calcul" développé par Oviedo a été utilisé tout d'abord pour déterminer l'angle de repos φ du ballast (variant entre 38° et 42°), qui confronté aux résultats expérimentaux montre de bonnes corrélations. L'auteur a ensuite simulé l'essai triaxial de révolution afin de visualiser les déplacements des grains de ballast. Enfin, elle a simulé l'expérience de bourrage menée au LAMI sur le banc d'essai *BOUBA* [7].

Dans cet essai, un échantillon de ballast sur lequel repose un blochet, est soumis à des vibrations de fréquences de sollicitation variant entre $9,5$ et $70,3$ Hz. Oviedo constate, que le ballast à un comportement "solide" pour les faibles fréquences (< 25 Hz) c'est-à-dire que la résistance du ballast est importante et les effets de la fréquence sont trop faibles pour perturber les contacts entre les grains. Pour la plage des fréquences moyennes ($25 < f < 50$ Hz), le milieu granulaire présente un comportement "visqueux", les contacts entre grains sont perturbés et des phénomènes localisés de rupture se produisent. Enfin, pour la plage des hautes fréquences, ($f > 50$ Hz), le ballast devient "liquide", les grains de ballast sont complètement liquéfiés par l'action des vibrations et subissent de grands déplacements. Oviedo a réussi à retrouver ces trois phases de comportement du ballast à l´aide de son modèle micromécanique.

En conclusion de ce très bref exposé sur l´application des approches de type "mécanique des milieux granulaires" à la modélisation du comportement de matériaux de type ballast, il apparait que de telles approches peuvent apporter un certain nombre d´éclairages en ce qui concerne les mécanismes gouvernant à l´échelle microscopique les déformations de tels matériaux, mais qu´en l´état actuel, étant extrêmement coûteux en terme de temps de calcul, l´emploi de ce type d´outils parait mal adapté au traitement d´un problème tel que la prévision du comportement à long terme d´une infrastructure ferroviaire ou routière sous charge de trafic.

2.7 Les chaussées routières

Les chaussées routières sont soumises aux charges de trafic dues aux passages des véhicules, et dans ce cas un phénomène désigné par *orniérage* se produit. Il se manifeste par une déformation de la couche supérieure de la chaussée, due à l´accumulation des déformations permanentes se produisant suite à l´application répétée d´une charge roulante. Il apparaît ainsi, qu´en dépit de certaines différences et du fait que les recherches conduites

[7] BOUrrage BAllast

dans les domaines ferroviaires et routiers se soient pour ainsi dire quelque peu ignorées, le comportement des matériaux de chaussées de type graves non traitées (GNT) est très proche de celui du ballast. Plusieurs auteurs tels que Hornych et al.(2000)[36] ou Heck (2001)[33] ont récemment travaillé sur cette question.

2.7.1 Hornych et al.(2000) [36]

Hornych et al.(2000) ont mené une étude portant sur les graves non traitées constituant les chaussées routières. Leurs études rentrent dans le cadre d´un programme de recherche du LCPC dont les principaux objectifs sont de développer des modèles décrivant le comportement cyclique des graves non traitées (GNT), et de les appliquer à la conception et au dimensionnement des chaussées. Pour ce faire, des expériences sur un banc d´essai à échelle 1 : 1 ont été réalisées. Deux types d´essais ont été effectués sur une portion de chaussée, constituée d´une couche d´enrobé bitumineux et d´une couche de GNT : le premier consiste à appliquer un chargement cyclique à l´aide d´un plateau de section circulaire actionné par un vérin hydraulique ; dans le second, le chargement est dû au passage d´une moitié d´un essieu roulant à une faible vitesse (2 km/h). Le nombre total des cycles de chargement est compris entre 30000 et 60000 cycles.

Dans le cas du premier type d´essai, un chargement cyclique de 65 kN est appliqué sur 60000 cycles, puis une série de chargements de 120 cycles chacun avec des niveaux de chargements de 15, 30, 45 et 65 kN est appliquée. La fréquence de chargement est de 0, 5 Hz et la température de la chaussée est maintenue constante. Les mesures des déformations verticales dans la portion de chaussée montrent que les déformations permanentes évoluent rapidement pendant les premiers cycles de chargement, et sont ensuite fonction linéaire croissante de $log(N)$, les déformations réversibles décroîssant durant les premiers cycles de chargement avant de devenir quasiment constantes.

La réponse cyclique de la chaussée en terme d´évolution du déplacement vertical en fonction de la charge appliquée est similaire à celle obtenue par les essais triaxiaux cycliques sur les GNT. D´après les auteurs, après quelques milliers de cycles, les incréments de déformation permanente deviennent très faibles et la relation contrainte-déformation devient pratiquement élastique non-linéaire.

Dans le cas de l´essai où le chargement est dû au passage du demi-essieu, un chargement de 65 kN est appliqué durant 30000 cycles puis des séquences de 120 cycles de chargement de 15, 30, 45 et 60 kN sont appliquées.

La mesure des déformations montre que la variation des déformations permanentes en fonction de $log(N)$ n´est plus linéaire et les valeurs des déformations permanentes sont

relativement importantes. D´autre part, comparé à l´essai précédent, les déformations révesibles décroissent plus lentement et ne se stabilisent qu´après 1000 cycles.

Pour modéliser numériquement les deux essais, un comportement visco-élastique est adopté pour l´enrobé bitumineux tandis que, les GNT sont décrites par un comportement élastique non-linéaire tel que celui de Boyce (1980)[14], modifié par Hornych et al. (1998) [36] afin de tenir compte de l´anisotropie. Le comportement du sol est considéré élastique non-linéaire, le module d´Young étant une fonction de la pression de confinement.

Une modélisation bidimensionnelle en éléments finis est réalisée pour l´essai au plateau circulaire. Hornych et al. (2000) [36] retrouvent par cette modélisation les résultats qu´ils ont obtenu par leurs essais, sauf pour les déplacements mesurés à l´interface de deux couches où l´une d´elles est constituée de granite. Dans ce cas, une différence de 50% entre les valeurs mesurées et calculées est observée.

L´essai à l´essieu est quant à lui modélisé en éléments finis tridimensionnels (code de calcul CESAR) afin de respecter la géométrie du chargement (demi-essieu composé de deux roues) mais en tenant compte des symétries du problème (seule la moitié de la structure est modélisée). Chaque roue est représentée par un rectangle agisant sur la portion de chaussée.

En analysant les résultats de cette modélisation numérique, les auteurs trouvent des résultats similaires à ceux obtenus expérimentalement concernant les déplacements dans les couches de GNT. Par contre dans la couche de sol, les déplacements sont surestimés de 25 à 50% suivant la nature du matériau constituant la couche de sol. Ils attribuent cette différence au fait que le chargement appliqué par les roues entraîne une rotation des directions principales des contraintes qui n´apparaissent pas dans le cas de l´essai où la charge s´applique à l´aide d´un plateau, ce même essai ayant servi à déterminer les caractéristiques mécaniques du sol.

Les travaux d´Hornych et al. (2000) mettent par ailleurs en évidence certains phénomènes tels que la production des déformations permanentes lors du chargement cyclique. D´autre part, la modélisation numérique qu´ils ont réalisée en tenant compte de deux structures qui différent par la composition de la couche de sol montre justement l´importance de la qualité des couches constituant la plate-forme et leur effet sur l´apparition des défauts de chaussée (orniérage). On retrouve ce même phénomène dans le cas des voies ferrées, où les défauts de voie dépendent de la qualité du sol.

2.7.2 Chai et al. (2002) [18]

Chai et al. (2002) [18] ont développé une méthode permettant la prédiction du tassement des chaussées résultant des chargements de trafic. Pour déterminer les déformations permanentes dans la couche supérieure de la chaussée, ils ont utilisé les lois empiriques proposées par Monismith et al. (1975) [51], modifiée ensuite par Li et Selig (1996) [45]. Cette loi a été adaptée par les auteurs afin de tenir compte des effets dynamiques et se met sous la forme suivante :

$$\epsilon^*(N) = a\Big(\frac{q_d}{q_f}\Big)^m + \Big(1 + \frac{q_s}{q_f}\Big)^n N^b \tag{2.14}$$

où :

- ⋆ N le nombre de cycles de chargement.
- ⋆ q_d est la contrainte déviatorique dynamique due au chargement de trafic.
- ⋆ $q_f = 2S_u$ est la contrainte déviatorique à la rupture du sol, où S_u est la résistance au cisaillement évaluée en conditions non drainées.
- ⋆ q_s est la contrainte déviatorique statique initiale.
- ⋆ a, b, m, n sont des constantes.

Les déformations permanentes dépendent donc uniquement du nombre de cycles de chargement, puisque les caractéristiques du cycle élastique sont constantes. Bien que la notion de déformation permanente soit adoptée ici, les auteurs ne font pas allusion aux contraintes résiduelles qui sont naturellement engendrées par ces déformations.

Des mesures de tassements résiduels sur le site d´une chaussée au Japon ont été réalisées par Chai et al. (2002) sur une durée de 2500 jours. Ces mesures ont été confrontées aux résultats d´une modélisation numérique dans laquelle la loi (2.14) est introduite. Les incréments de tassements calculés après le début du trafic sont comparables à ceux qui sont mesurés. Des mesures de déformations permanentes réalisées sur une année montrent que celles-ci apparaissent sur une épaisseur de couche de matériau d´environ 6 m et qu´elles sont fonctions décroissantes de la profondeur.

2.7.3 Heck (2001) [33]

Ce travail concerne la modélisation des déformations réversibles et permanentes des enrobés bitumineux et s´intéresse plus particulièrement à l´orniérage des chaussées. Heck (2001) a réalisé, entre autres, une modélisation structurelle de l´orniérage en considérant une section courante de chaussée constituée d´une part de matériaux ayant un comportement élastique linéaire (sol, matériaux granulaires liés ou non ...) et d´autre part de

matériaux bitumineux ayant un comportement visco-élastique. Son approche repose sur un certain nombre d´hypothèses nécessaires à la modélisation qu´il a réalisée. Il suppose par exemple que seules les couches supérieures bitumineuses sont concernées par l´orniérage.

Par ailleurs les déformations subies par les matériaux étant considérées comme petites, la déformation totale peut être décomposée de manière additive en une partie élastique réversible, récupérable à la décharge, et une déformation permanente.

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}}^e + \underline{\underline{\epsilon}}^* \tag{2.15}$$

L´auteur fait par ailleurs l´hypothèse, que nous expliciterons en détail au chapitre 3, selon laquelle sur un cycle de chargement, c´est-à-dire suite au passage d´un véhicule, l´augmentation de la déformation permanente est faible en comparaison de l´amplitude de la déformation élastique due au chargement :

$$||\underline{\underline{\epsilon}}^*(N+1) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(N)|| \ll ||\underline{\underline{\epsilon}}^e|| \tag{2.16}$$

Il suppose en revanche que les contraintes résiduelles associées aux déformations permanentes sont négligeables devant les contraintes élastiques associées au chargement. Une telle hypothèse qui revient à négliger toute dérive du cycle élastique, est contestable dans la mesure où, si une telle dérive est évidemment négligeable sur un seul cycle, elle devient du même ordre que l´amplitude du cycle élastique, voire plus importante, si l´on raisonne sur un grand nombre de cycles (jusqu´à plusieurs millions).

En considérant une section transversale de la chaussée, l´auteur définit l´incrément de déformation permanente en un point de cette section comme fonction des caractéristiques du cycle élastique.

$$\delta\underline{\underline{\epsilon}}^*(y,z) = \int_{\text{cycle de chargement}} F(\underline{\underline{\sigma}}(\tau,y,z))d\tau \tag{2.17}$$

Dans ses travaux, Heck (2001) a développé un module de calcul de l´ornièrage (*ORNI*) qu´il utilise pour simuler le phénomène d´orniérage. Pour ce faire, il propose une loi de comportement cyclique qui relie la déformation permanente *axiale* au nombre de cycles de chargement et à la longueur et pente du cycle de contraintes élastique. Cette loi est donnée sous la forme suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = a(\sqrt{p^2+q^2})^b(\frac{q}{p})^c[1-(\frac{N}{100})^{-d}] \tag{2.18}$$

où N est le nombre de cycles, p et q désignent respectivement les valeurs maximales de la pression moyenne et du déviateur des contraintes atteintes au cours du cycle, tandis que a, b, c, et d sont des constantes caractéristiques du matériau.

Faisant l´hypothèse que les cycles élastiques ne subissent pas de dérive, c´est-à-dire que l´amplitude $\sqrt{p^2+q^2}$ et la pente q/p demeurent indépendantes de N, le calcul de l´état résiduel de la structure au terme de N cycles de chargement s´effectue directement par intégration du champ des déformations permanentes calculées en tout point à l´aide de l´équation 2.18. L´auteur suppose que ce champ est purement *uniaxial* de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(N;\underline{x}) = \epsilon_1^*(N;p(\underline{x});q(\underline{x}))\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \tag{2.19}$$

où $\underline{e}_1$ désigne le vecteur unitaire porté par la direction de compression majeure au point $\underline{x}$.

Pour déterminer les déplacements résiduels (orniérage) dus à l´accumulation progressive des déformations permanentes, l´auteur considère une coupe transversale du plan dans lequel évolue la charge roulante. L´intégration en tous les points d´une même ligne horizontale parallèle à ce plan transversal, des déformations permanentes conduit à un profil d´ornièrage qui dépend, entre autres, du nombre de passages des convois et de la position du véhicule à chaque passage (centrée, décalée à droite ou à gauche), comme représenté sur la figure (2.7).

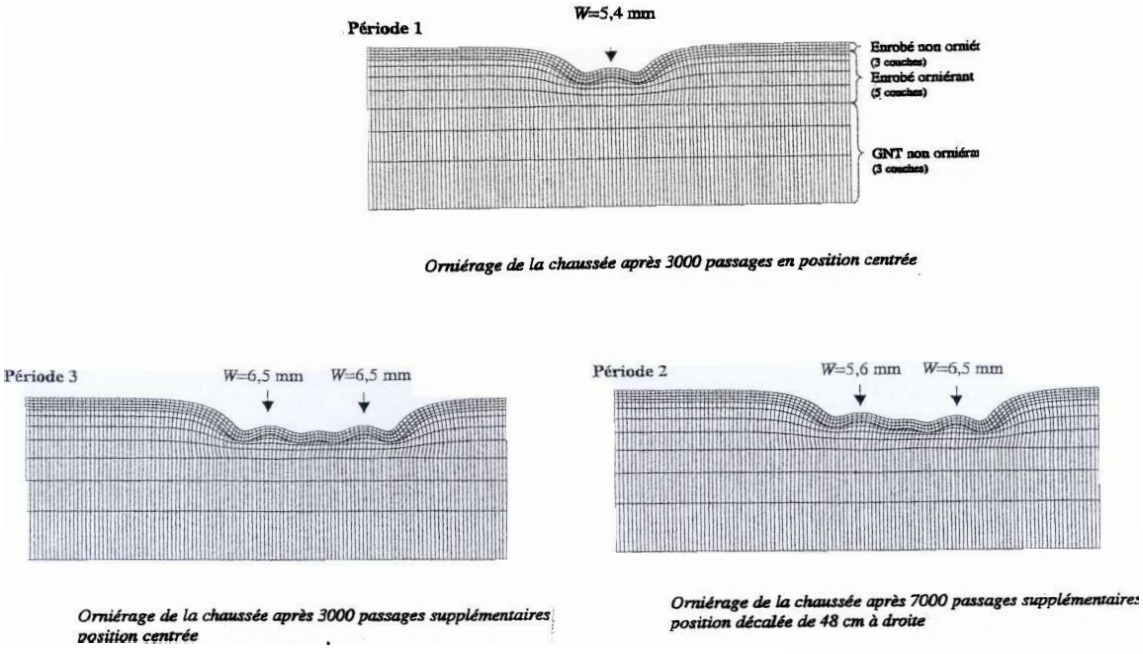


FIG. 2.7: profil des ornières d´après Heck (2001) [33]

2.8 Vers une approche "calcul des structures"

Après avoir présenté les diverses approches adoptées pour étudier le comportement des matériaux granulaires de type ballast ou graves non traitées soumis à des chargements cycliques et les méthodes qui en découlent pour la prévision du comportement d´infrastructures de trafic, nous pouvons dégager les constatations suivantes :

- Les essais cycliques réalisés sur des modèles de voie ferrée en vraie grandeur ou à échelle réduite ont permis de proposer des lois de comportement cycliques globales portant sur l´évolution du tassement en fonction du nombre de cycles. Certaines de ces lois postulent une évolution linéaire du tassement en fonction du nombre de cycles, ce qui peut conduire à surestimer ce dernier à long terme, dans la mesure où de nombreuses observations expérimentales paraissent indiquer, sinon une stabilisation du tassement, du moins un infléchissement de la courbe à long terme. De façon plus générale, il convient de noter que les approches expérimentales sur modèles réduits ou en vraie grandeur sont évidemment indispensables pour servir de références permettant la validation de modèles de calcul, mais ne peuvent que difficilement se substituer à ces derniers dans l´élaboration d´outils de prévision.

- De même, les méthodes de calcul permettant l´analyse des interactions entre le ballast et la structure ont permis d´estimer des charges transmises aux blochets, mais un tel calcul n´est pas suffisant pour prédire le comportement résiduel à long terme de la structure qui suppose une caractérisation locale du matériau.

- Nous avons montré qu´en ce qui concerne le calcul de l´état résiduel de la structure, la connaissance de l´évolution de l´ensemble des composantes du tenseur des déformations permanentes, et non pas seulement de sa composante volumique ou axiale, était indispensable.

- Les approches basées sur la simulation du comportement des matériaux vus sous l´angle de milieux granulaires, permettent la visualisation d´un certain nombre de phénomènes se produisant dans le ballast soumis à des chargements répétés, mais ne constituent pas, ou tout au moins pas encore, un modèle de prévision du comportement à long terme des infrastructures.

- Les approches développées en vue de simuler et prévoir l´orniérage des chaussées routières peuvent servir de base aux méthodes destinées à la simulation du comportement à long terme d´une voie ferrée, en dépit de certaines différences : présence

de couches bitumineuses de surface dans le cas des chaussées routières/transmission des charges de trafic pour un système rail+traverses dans le cas d´une voie ferrée. La méthode décrite en particulier dans le travail de Heck (2001), qui consiste à intégrer les champs des déformations permanentes engendrées en tout point de la structure à partir d´une loi de comportement cyclique des matériaux, nous semble pouvoir être généralisée et mise en oeuvre dans le contexte des voies ferrées.

Au terme de l´analyse des différentes approches développées dans la littérature, nous proposons une approche basée sur l´analyse des structures, permettant l´évaluation du tassement résiduel d´une plate-forme sous l´effet d´un chargement de trafic dans la ligne des travaux de Heck (2001). Cette approche est basée sur la *formulation d´une loi de comportement cyclique*, qui décrit l´accumulation progressive des *déformations irréversibles* (permanentes), localement présentes dans les divers matériaux granulaires constituant la plate-forme lorsqu´elle est sujette, à long terme, à des cycles de contraintes induits par les chargements répétés. Cette loi de comportement est incorporée dans un *schéma de calcul numérique pas-à pas* où deux types de calculs élastiques (ou élastoplastiques) sont implémentés : le premier vise à déterminer des cycles de contrainte de référence, tandis que le second a pour objet de calculer le déplacement résiduel et le champ de contrainte régnant dans la plate-forme, obtenu par intégration des déformations permanentes de nature *anélastique*. C´est cette méthode que nous allons décrire en détail au chapitre suivant.

Chapitre 3

Principe de la méthode de calcul proposée et exemple illustratif

Sommaire

3.1 Introduction **63**

3.2 Analyse qualitative de l´évolution du tassement d´une voie ferrée : un phénomène à double échelle de temps **64**

3.3 Origine physique du phénomène de dérive : le comportement cyclique des matériaux **68**

3.4 Schéma général de calcul du tassement résiduel **69**

3.5 Exemple illustratif : un modèle simplifié de la plate-forme soumise à une charge roulante **75**

3.6 Loi de comportement cyclique pour la modélisation des déformations permanentes **78**

3.7 Détermination de l´état résiduel du massif **83**

3.8 Implémentation numérique et résultats **85**

3.9 Conclusions **93**

3.1 Introduction

Le chapitre 2 nous a permis de mettre en évidence la nécessité de développer une approche rationnelle, de type "calcul des structures", pour la conception et le dimensionnement des infrastructures de transport sous chargement de trafic.

L´objectif à terme est de parvenir à l´élaboration d´outils de calcul permettant de prédire le comportement à long terme de ce type de structures, et tout particulièrement leur état résiduel (orniérage de chaussées routières, déformations de voies ferroviaires, ...) pouvant être préjudiciables à leur bon fonctionnement.

Comme tout problème de calcul des structures, la question de la détermination de la réponse à long terme d´une (infra)structure, repose sur un certain nombre de données relatives à la géométrie du système, à son chargement (charge roulante répétée), mais bien évidemment aussi au *comportement des matériaux* qui constituent cette infrastucture . De façon générale, et en raisonnant dans le cadre de la mécanique des milieux continus tridimensionnels, une telle *loi de comportement* relie l´histoire des déformations subies localement par le matériau à celle de la sollicitation (contrainte) engendrée en ce même point par le chargement.

Quelle que soit sa formulation, une telle loi doit être capable de modéliser des phénomènes non-élastiques, c´est-à-dire de nature irréversible. On peut donc être tenté dans un premier temps de recourir à des lois de type élastoplastique, fondées sur les concepts classiques de critères de plasticité, écrouissage et règle d´écoulement. En dépit de quelques tentatives faites en ce sens, l´utilisation de telles lois dans un schéma de calcul numérique de type incrémental, exigeant de découper chacun des cycles en un nombre suffisant de pas de chargement, devient très rapidement impossible au delà d´un faible nombre de cycles, d´autant que l´objectif est de pouvoir aboutir à des simulations suffisamment réalistes du comportement de la structure au-delà du million de cycles de chargement.

L´idée retenue dans ce travail, est d´adopter un point de vue plus "macroscopique" qui consiste à relier directement les déformations anélastiques (que nous appellerons ici *permanentes*) du matériau au nombre N de cycles appliqué, l´"incrément" de chargement étant constitué d´un accroissement ΔN du nombre de cycles suffisamment faible vis-à-vis du nombre total N. Les paramètres d´une telle loi phénoménologique devront être identifiées expérimentalement à partir d´essais homogènes à grand nombre de cycles sur des éprouvettes de matériau.

Le présent chapitre développe les différentes étapes d´une telle approche. Il part d´une analyse des phénomènes observés tant à l´échelle globale que locale, sur une structure soumise à un chargement de trafic répété, qui permet de "découpler" la réponse réversible

(élastique) à court terme de la structure, de son évolution irréversible qui se manifeste progressivement à plus long terme. Nous montrerons comment la mise au point d´une méthode de calcul permettant de prédire cette dernière requiert la mise en oeuvre d´une procédure de calcul pas-à-pas. La description générale d´une telle procédure fait l´objet des sections (3.2 à 3.4) de ce chapitre, tandis que la seconde partie (sections 3.5 à 3.8) est consacrée à sa mise en oeuvre détaillée sur un modèle très simplifié d´infrastructure soumise à un chargement de trafic, où l´ensemble des calculs peuvent être conduits de manière (semi)-analytique.

3.2 Analyse qualitative de l´évolution du tassement d´une voie ferrée : un phénomène à double échelle de temps

La figure (3.1) donne une représentation schématique de la réponse *globale* d´une infrastructure sous l´effet d´un chargement de trafic, sous la forme de l´évolution du tassement vertical δ en un point donné, en fonction du temps $t{=}NT$, où N est le nombre de chargements due au passage des véhicules, et T est l´intervalle de temps entre deux passages consécutifs. Il est important de préciser tout de suite qu´il n´y a pas de lieu de spécifier la valeur de cette période de temps. En effet, nous ferons l´hypothèse, essentielle dans tout ce qui suit, que *tout les effets dynamiques ou viscoélastiques peuvent être négligés*, de sorte que la variable de chargement pertinente est le nombre N de cycles de chargement, et non pas la période de temps physique pendant lequel ces cycles sont appliqués. Il conviendra bien évidemment de remettre éventuellement en question une telle hypothèse simplificatrice, qu´il s´agisse de prendre en compte les effets dynamiques du chargement (cas des trains à grande vitesse dans une plage de vitesse élevée), ou le comportement différé dans le temps des matériaux constituant l´infrastructure (dissipation des surpressions interstitielles dans le cas de sols saturés).

En se référant donc à la figure (3.1), il apparaît que la caractéristique importante d´une telle courbe, que nous allons nous efforcer d´exploiter par la suite, est son *allure quasi-périodique*. Plus précisément, se plaçant à un instant t quelconque situé à l´intérieur du $(N+1)^{\text{ième}}$ cycle de chargement ($t \in [NT, (N+1)T]$), la valeur totale du tassement $\delta(t)$ observé à cet instant peut être décomposée en un terme représentant la déflexion *élastique* $\delta^{el}(t)$, récupérable à la décharge, c´est-à-dire lorsque la charge s´est suffisamment éloignée du point d´observation, et d´un second terme traduisant le caractère *résiduel* du tassement $\delta^{r}(t)$.

$$\delta(t) = \delta^{el}(t) + \delta^{r}(t) \tag{3.1}$$

Une telle évolution se présente comme un phénomène à *"double échelle de temps"*, la *variation* du tassement résiduel *sur une période* étant très faible en comparaison de l´amplitude du cycle de la composante élastique (voir zoom de la figure 3.1) :

$$\delta^{r}((N+1)T) - \delta^{r}(NT) \ll Max(\delta^{el}(t), t \in [NT, (N+1)T]) \tag{3.2}$$

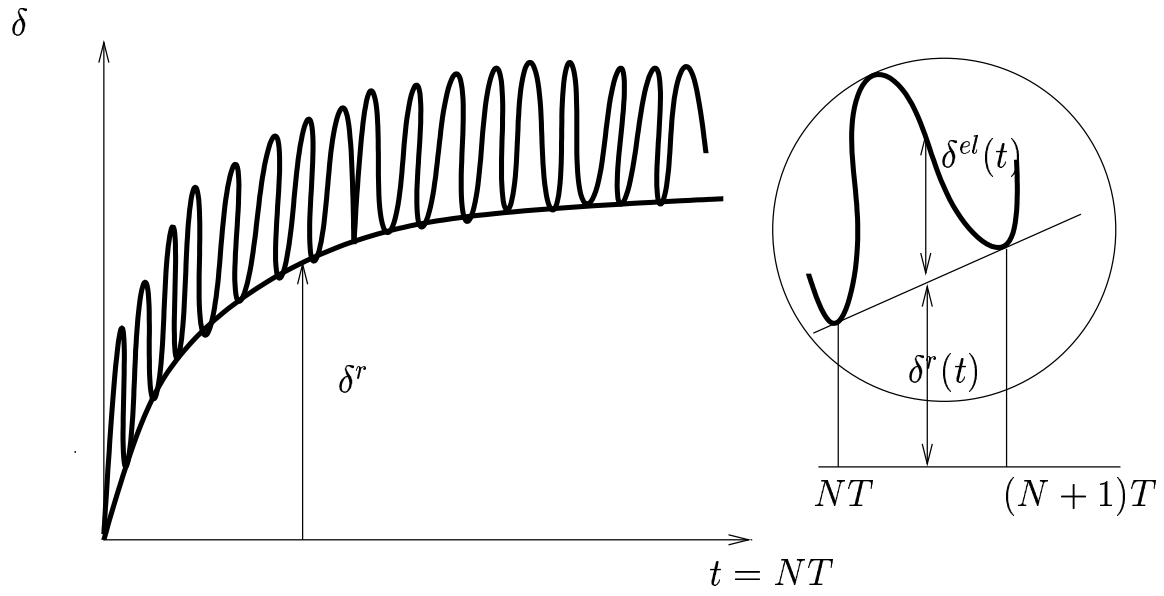


FIG. 3.1: allure de la courbe donnant l´évolution dans le temps du tassement d´une infrastructure sous chargement de trafic

On pourra donc réécrire l´équation (3.2) sous la forme :

$$\delta(t = NT + \tau) = \delta^{el}(\tau, N) + \delta^{r}(N) \qquad \tau \in [0, T] \tag{3.3}$$

faisant ainsi apparaître la déflexion élastique comme étant une fonction de la variable temps "rapide" τ à l´intérieur du cycle, tandis que le tassement résiduel ne dépend que de la variable "lente" que représente le nombre N de cycles de chargement, puisque sa variation sur un cycle est négligeable. Le fait que la composante élastique du tassement puisse dépendre de N, permet de tenir compte du fait que dans certaines circonstances (cas de l´élasticité non-linéaire : chapitre 7) la réponse élastique de la structure peut elle-même dépendre de son état résiduel, fonction de N.

Un constat analogue peut être fait pour toutes les autres variables, de type déplacements, déformations ou contraintes, attachées à un point quelconque $\underline{x}$ de l´infrastructure.

$$\text{Déplacements :} \quad \underline{\xi}(\underline{x}, t = NT + \tau) = \underline{\xi}^r(\underline{x}; N) + \underline{\xi}^{el}(\underline{x}, \tau, N) \tag{3.4a}$$

$$\text{Déformations :} \quad \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, t = NT + \tau) = \underline{\underline{\epsilon}}^r(\underline{x}, N) + \underline{\underline{\epsilon}}^{el}(\underline{x}, \tau, N) \tag{3.4b}$$

$$\text{Contraintes :} \quad \underline{\underline{\sigma}}(\underline{x}, t = NT + \tau) = \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N) + \underline{\underline{\sigma}}^{el}(\underline{x}, \tau, N) \tag{3.4c}$$

L´objet de la méthode de calcul proposée est bien évidemment d´évaluer quantitativement la façon dont l´état résiduel de la structure caractérisé par les champs ($\underline{\xi}^r$,$\underline{\underline{\epsilon}}^r$, $\underline{\underline{\sigma}}^r$) évolue en fonction du nombre N de cycles.

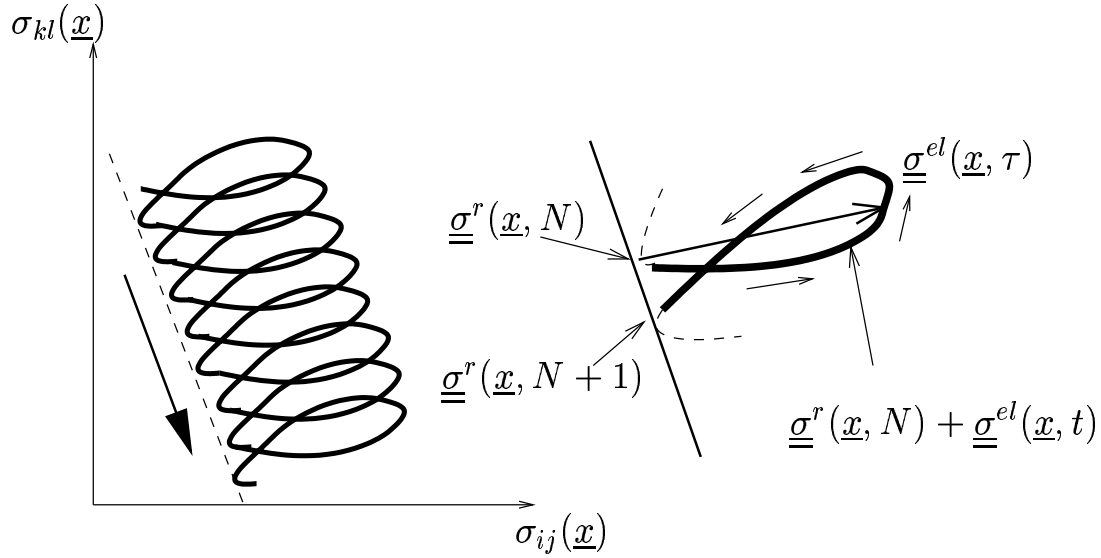


FIG. 3.2: évolution de l´état de contrainte en fonction du temps en un point de la structure

Concernant par exemple les contraintes, l´équation (3.4c) montre que l´état de contrainte en un point donné s´écrit comme la somme d´une composante *élastique* (réversible) due à l´application de la charge et d´une composante *résiduelle*.

Cette décomposition est illustrée sur la figure (3.2) qui schématise l´évolution de l´état de contrainte local en fonction du temps, sous la forme d´un trajet tracé dans l´espace des contraintes $\{\sigma_{ij}\}$ (espace à six dimensions). La courbe décrivant un tel trajet est constituée par l´enchaînement de "boucles", représentant les cycles de contrainte élastiques, dérivant lentement au fur et à mesure que le nombre N de cycles augmente. La trajectoire parcourue par l´état de contrainte résiduel $\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N)$ constitue une courbe enveloppe de la première courbe. La distance entre deux boucles successives est très faible au regard de la dimension de la boucle, ce qui signifie que la variation de contrainte résiduelle sur un cycle de chargement est négligeable vis-à-vis de l´amplitude du cycle élastique, soit :

$$||\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N+1) - \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N)|| \ll Max(||\underline{\underline{\sigma}}^{el}(t)||, t \in [NT, (N+1)T]) \tag{3.5}$$

Cette première analyse de la réponse à long terme d´une infrastructure sous charge de trafic appelle plusieurs remarques.

a) Si comme l´indiquent les relations (3.2) et (3.5) l´évolution de l´état résiduel de la structure sur un cycle de chargement est pratiquement indécelable (sauf peut-être pour les premiers cycles), elle devient au contraire tout à fait significative à long terme, c´est-à-dire au bout d´un grand nombre de cycles de chargement (ce nombre pouvant aller jusqu´à plusieurs millions). Celà signifie notamment qu´au bout d´un grand nombre de cycles, le tassement résiduel cumulé devient du même ordre de grandeur, voire excède largement l´amplitude de la déflexion élastique.

b) La notion de cycle de chargement ou de cycle des contraintes doit être précisée en fonction de la situation rencontrée. Dans le cas d´un trafic routier un tel cycle correspond au passage d´un véhicule, tandis que pour une voie ferrée, ce cycle est associé au passage d´un boggie à deux essieux dont on peut modéliser l´action sur l´infrastructure par celle d´un couple de charges mobiles ponctuelles. Il en ressort par exemple que l´allure de la déflexion élastique peut revêtir une forme plus complexe que celle représentée par la figure (3.1) (signal en "M" dans le cas d´une voie ferrée).

c) Sur un plan plus général, la décomposition de type (3.3) en une composante réversible à variation cyclique rapide et une composante résiduelle évoluant progressivement, rappelle fortement l´allure des phénomènes que l´on observe dans le cas de structures (notamment géotechniques) soumises à un chargement cyclique (houle, séisme, etc...). Les techniques de simulation numérique du comportement de telles structures sont généralement fondées sur la mise en évidence de deux échelles de temps très différentes. Celle relative à la période de la sollicitation se révèle en effet être beaucoup plus petite que le temps caractéristique du comportement des matériaux : temps caractéristique de fluage dans le cas d´un modèle de comportement visco-plastique (Ponter, 1976 [63] ; Shahrour et Meimon, 1992, 1995 [73], [74]), temps caractéristique de consolidation dans le cas d´un sol saturé (Dormieux et al., 1993, Pecker et al. 2001 [22],[62]). Une telle comparaison doit être à vrai dire quelque peu relativisée dans la mesure où nous avons précisément considéré que dans notre problème de charge roulante, le temps physique n´intervient pas.

3.3 Origine physique du phénomène de dérive : le comportement cyclique des matériaux

L´évolution à deux échelles de temps observée pour le tassement d´une infrastructure soumise au passage répété d´une charge roulante, est très similaire au *phénomène de liquéfaction* d´un sable saturé sous chargement cyclique sujet à des sollicitations sismiques ou à des phénomènes de houle, classiquement décrit en mécanique des sols (Pecker, 1984 [61]; Dormieux et al., 1993 [22]; Pecker et al., 2001 [62]). En effet, comme on l´a précisé précédemment, cette évolution peut être décrite par une fonction quasi-périodique du temps, comme pour les courbes représentant l´évolution en fonction du temps de la pression interstitielle dans un essai triaxial cyclique, en conditions non drainées, d´une éprouvette de sable saturé (Dormieux et al., 1993 [22]). Ce type de courbe présente en effet une analogie frappante avec celle de la figure 3.1 : superposition d´un cycle élastique directement lié au cycle de chargement, et d´une "dérive" conduisant à une augmentation progressive de la pression interstitielle jusqu'à apparition du phénomène de liquéfaction du matériau par annulation de la contrainte effective. Il a été démontré que ce phénomène physique, d´accumulation progressive de la pression interstitielle, est lié à la présence d´une *déformation volumique plastique de contraction* (Dormieux, 1989)[21].

L´hypothèse fondamentale sur laquelle sont basées les analyses et les méthodes de modélisation développées dans la présente recherche, est que le comportement à long terme de l´infrastructure observé à la fois *globalement* (accumulation progressive du tassement résiduel) et *localement* (dérive des contraintes résiduelles), est à attribuer au *comportement cyclique des différents matériaux granulaires constituant la plate-forme* : ballast, grave, sols frottants, etc. Plus précisément, ces matériaux subissent des *déformations irréversibles (permanentes)* lorsqu´ils sont soumis à des chargements répétés, comme l´ont montré notamment Alva Hurtado (1980) [6] et Hornych et al. (2000) [36], qui ont réalisé des essais triaxiaux répétés respectivement sur du matériau de type ballast et sur les graves routières.

En dépit de l´analogie évidente entre le phénomène de liquéfaction et les problèmes de prédiction du tassement des plate-formes, il subsiste néanmoins du point de vue du comportement mécanique des matériaux constitutifs, certaines différences importantes que nous explicitons ci-dessous :

- Les matériaux granulaires qui constituent la plate-forme ne sont généralement pas sujets à la liquéfaction, même dans le cas de sous-couches saturé.

- Tandis que dans le problème de la liquéfaction, seule la *partie volumique* des défor-

mations irréversibles du matériau est à prendre en compte, il convient *à priori* de tenir compte de l´*ensemble des composantes de ces déformations* qui entrent en jeu dans le tassement résiduel observé, comme cela sera explicité ultérieurement.

- Le nombre de cycles de chargement est beaucoup plus important dans le cas des problèmes d´infrastructures (jusqu'à plusieurs millions de cycles), que dans le cas de la liquéfaction des massifs sous l´action d´un séisme ou de la houle (quelques milliers de cycles tout au plus).

- Enfin, les mécanismes physiques qui se produisent à l´échelle des grains constitutifs de la microstructure des matériaux et sont à l´origine des déformations irréversibles macroscopiques observables expérimentalement, sont sans doute assez différents de ceux conduisant au *phénomène de contractance* des sables : usure progressive des contacts entre grains (attrition) soumis à de très fortes contraintes, et non pas simple densification du matériau par réarrangement de la structure granulaire initialement lâche, hormis sans doute dans les premiers cycles.

3.4 Schéma général de calcul du tassement résiduel

La mise au point d´une méthode générale de modélisation et de calcul en vue de la prédiction du tassement résiduel de la plate-forme sous l´effet des charges répétées de trafic est étroitement liée à la formulation d´une loi de comportement des différents matériaux soumis à des chargements cycliques. Ce type de *loi de comportement cyclique* apparait comme pouvant se mettre sous la forme d´une relation entre le taux d´accumulation des déformations permanentes acquises au N^{ime} cycle de chargement et des caractéristiques du trajet de chargement cyclique :

$$\frac{d\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x},N)}{dN} = \mathcal{F}[N;(\oint \underline{\underline{\sigma}})(\underline{x},N)] \tag{3.6}$$

Dans l'équation ci-dessus :

- $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ est la *déformation permanente* du matériau en un point $\underline{x}$ au bout de N cycles de chargement appliqués ;

- $(\oint \underline{\underline{\sigma}})(\underline{x},N)$ est le cycle des contraintes auquel est soumis le matériau situé au même point $\underline{x}$ entre $t = NT$ et $t = (N+1)T$.

Les développements suivants sont basés sur les deux hypothèses suivantes :

H1 : Le comportement réversible à court terme des différents matériaux est décrit par une loi de *comportement élastique linéaire*.

H2 : Les paramètres élastiques (module d´Young et coefficient de Poisson dans le cas de l´isotropie) ne sont pas affectés par le cycle de chargement.

Ces deux hypothèses, qui vont se révéler essentielles par la suite, méritent d´être commentées.

- L'hypothèse (H2) est raisonnablement bien vérifiée. Elle signifie que les propriétés élastiques des matériaux ne sont pas sensiblement modifiées par le chargement cyclique, ni dans le sens de leur dégradation (endommagement dans le cas de matériaux cohésifs), ni dans celui de leur amélioration (par densification par exemple). On observe en effet une stabilisation de ces propriétés au delà d´un faible nombre de cycles de chargement.

- La première hypothèse (H1), relative à la linéarité du comportement élastique est en revanche plus sujette à caution. De nombreuses expérimentations mettent en effet en évidence la *forte non-linéarité* élastique de matériaux à structure granulaire tels que ceux mis en oeuvre dans les plate-formes d´infrastructure (graves, ballasts, mais aussi sols frottants). Nous conviendrons néanmoins provisoirement d´adopter une telle hypothèse simplificatrice, même si l´analyse proprement dite des effets d´une telle non-linéarité sera effectuée au chapitre 7.
  Il résulte notamment de cette hypothèse la conséquence importante suivante. En vertu du *principe de supersposition* qu´elle implique (sous réserve de se placer dans le cadre de *l´hypothèse des petites perturbations* (H.P.P), qui suppose notamment que les déformations des matériaux restent infinitésimales), il apparaît que la réponse élastique de l´(infra)structure sous l´action de la charge de trafic peut être calculée comme la somme de l´état résiduel et de la réponse élastique à partir d´un état naturel (contraintes en tout point). Ainsi, en ce qui concerne par exemple l´état de contrainte, on peut écrire :

$$(\oint \underline{\underline{\sigma}})(\underline{x}; N) = \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N) + (\oint \underline{\underline{\sigma}})^{ref}(\underline{x}) \tag{3.7}$$

Ce qui signifie qu´en un point donné, le cycle de contrainte actuel est obtenu dans l´espace des contraintes en translatant le cycle de *référence* en ce même point. Les cycles de référence, qui ne dépendent que du point $\underline{x}$, sont obtenus comme la solution d´un problème d´élasticité linéaire dans lequel le champ de contrainte initial est nul, le chargement étant constitué de la charge roulante. Plus précisément, chaque point du cycle correspond à une position de cette dernière, comme indiqué sur la figure (3.4). Le tracé de la boucle

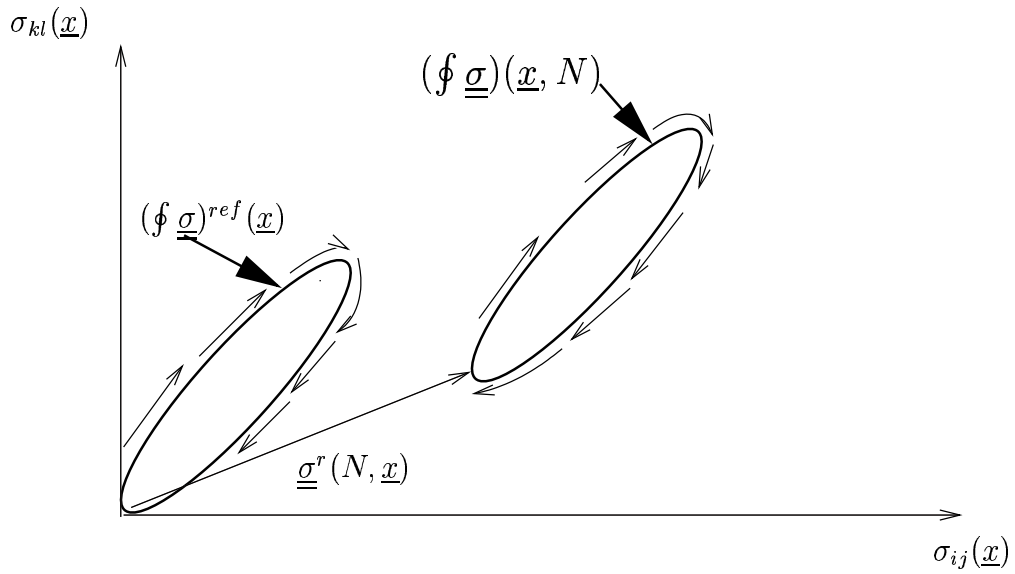


FIG. 3.3: cycle élastique de référence et cycle élastique actuel subi par le matériau au point $\underline{x}$

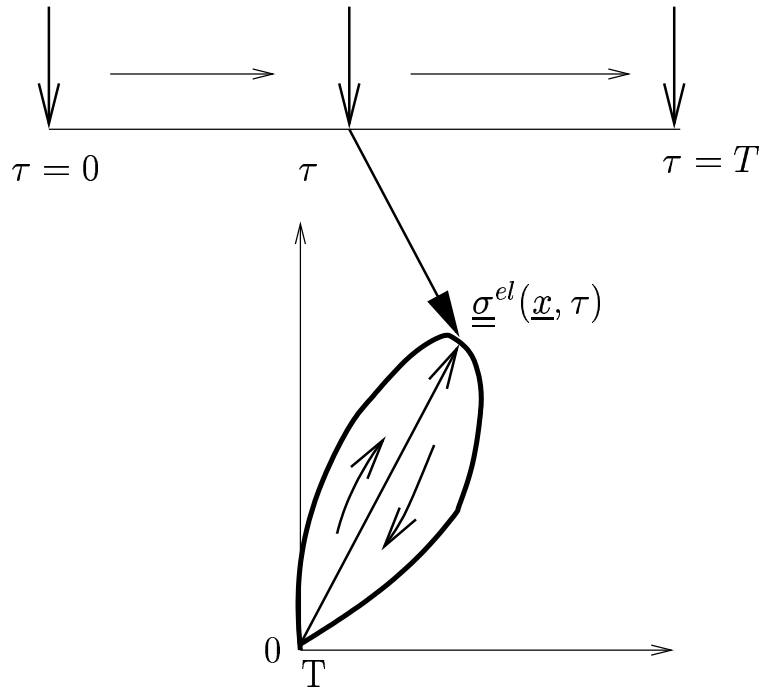


FIG. 3.4: cycle élastique de référence engendré en un point de la structure par le déplacement de la charge de trafic

représentative de ce cycle de référence est obtenu en faisant varier la charge, l´origine du cycle (contrainte nulle) étant associée au cas où la charge est infiniment éloignée ($\tau = 0, T$). Nous examinerons plus particulièrement au chapitre 4 comment s´effectue, en pratique, le calcul de ces cycles dans le cas d´une infrastructure complexe telle qu´une voie ferrée. L´hypothèse de linéarité du comportement élastique implique un découplage complet des

équations (3.4), les champs associés à la réponse élastique ne dépendant plus que de la variable "rapide" τ.

$$\underline{\xi}^{el}(\underline{x},\tau,N) = \underline{\xi}^{el}(\underline{x},\tau) \tag{3.8a}$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^{el}(\underline{x},\tau,N) = \underline{\underline{\sigma}}^{el}(\underline{x},\tau) \tag{3.8b}$$

Il ressort de ces analyses préliminaires que la méthode proposée pour la détermination de l´état résiduel de la structure, et notamment le tassement cumulé en fonction de la charge de trafic, doit combiner trois éléments complèmentaires :

(a) La formulation d´une *loi de comportement cyclique* sous la forme de l´équation (3.6), qui doit être déduite à partir d´essais de laboratoire menés pour chaque type de matériau et pour diverses conditions de chargement cyclique.

(b) Un outil de calcul pour la *détermination du cycle de contrainte de référence* en tout point de la structure comme fonction des caractéristiques de la charge de trafic.

(c) Une procédure numérique pour le *calcul de l´état résiduel de la structure* et plus particulièrement le tassement résiduel, à partir de la connaissance du champ des *déformations permanentes* accumulées.

La procédure (c) revient à résoudre un problème d´élasticité relatif à la même structure, *en l´absence de charge de trafic* (mais sous l´action des charges de type pesanteur), le champ de déformations permanentes, de nature *anélastique*, étant imposé. L´évolution de l´état résiduel de la structure est directement liée à la génération du champ des déformations permanentes notées $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x},N)$. Tout comme dans le cas des déformations thermiques ou plastiques, c´est *l´incompatibilité géométrique* du champ des déformations permanentes qui explique l´apparition d´un état résiduel de la structure différent de son état initial. Plus précisément, désignant par $\underline{\xi}^r(\underline{x};N)$ le déplacement résiduel au point $\underline{x}$ créé par N cycles de chargement, et par $\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x},N)$ l´état de contrainte résiduel correspondant, qui vérifient bien évidemment les conditions initiales.

$$\underline{\xi}^r(\underline{x};N=0) = 0 \qquad \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x},N=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) \tag{3.9}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x})$ désigne l´état de contrainte *initial* (dû par exemple à l´application de la pesanteur, ainsi que des charges permanentes), le couple $(\underline{\xi}^r,\underline{\underline{\sigma}}^r)(N)$ constitue la solution en déplacement et en contrainte du problème d´élasticité relatif à la structure, en l´absence de charge roulante, mais à *champ de déformations permanentes imposé*. A ce titre, le

champ $\underline{\xi}^r(N)$ est *cinématiquement admissible* avec les différentes conditions aux limites en déplacement du problème, et le champ de déformation résiduel associé défini par :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^r(\underline{x};N) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}^r) + t\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}^r))(\underline{x};N) \tag{3.10}$$

est relié en tout point au champ de contrainte résiduel par la loi de comportement élastique linéaire :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x};N) = \underline{\underline{\sigma}}^0(\underline{x}) + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{x}) : (\underline{\underline{\epsilon}}^r - \underline{\underline{\epsilon}}^*)(\underline{x};N) \tag{3.11}$$

qui tient compte de l´état de contrainte initial et de la présence du champ de déformation permanente créé par le chargement cyclique ($\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}(\underline{x})$ représente le tenseur des modules d´élasticité au point $\underline{x}$).

Pour que le champ $\underline{\underline{\sigma}}^r$ défini par (3.11) constitue bien la solution en contrainte du problème d´élasticité, il reste à vérifier son caractère *statiquement admissible* avec les données en efforts, c´est-à-dire qu´il doit satisfaire les équations d´équilibre.

$$div(\underline{\underline{\sigma}}^r)(\underline{x};N) + \underline{\gamma}(\underline{x}) = 0 \tag{3.12}$$

($\underline{\gamma}(\underline{x})$) : poids volumique du matériau au point $\underline{x}$), ainsi que les conditions aux limites en contrainte associées à l´absence de la charge roulante.

Comme la formulation de la loi de comportement est donnée sous la forme incrémentale (3.6), l´implémentation de la méthode proposée nécessite la discrétisation du nombre total de cycles de chargement appliqués par exemple en un nombre fini de "pas" constants $N = k\Delta N$, $k = 0, 1, .., K$ où ΔN peut varier entre l´unité et quelques milliers. Le principe de l´algorithme numérique correspondant explicité sur la figure (3.5), est décrit comme suit :

- Un calcul élastique préliminaire est mené en premier lieu et donne une fois pour toute le cycle élastique de référence en tout point de la structure à partir des caractéristiques de la charge roulante.

- L´algorithme lui-même commence à $k = 0$, où l´état résiduel de la structure coïncide avec son état initial, donné. Le champ des déformations permanentes et le tassement résiduel associé sont conventionnellement pris égaux à zéro. Le champ des contraintes résiduelles est égal au champ de contrainte initial qui doit être en équilibre avec le poids propre.

$$\delta^r(k=0) = 0 \qquad \underline{\underline{\epsilon}}^*(k=0) = 0 \qquad \underline{\underline{\sigma}}^r(k=0) = \underline{\underline{\sigma}}^0 \tag{3.13}$$

- Supposons maintenant que le champ des déformations permanentes ainsi que l´état résiduel soient connus au pas numéro k. La valeur locale du champ des déformations permanentes au pas $k+1$ est simplement calculée en faisant la somme de sa valeur au pas précédent et l´incrément donné par l´équation 3.6, où dN est remplacé par ΔN et $d\underline{\underline{\epsilon}}^*(N)$ est approché par $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x}, k+1) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x}, k)$. Ainsi :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x}, k+1) = \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x}, k) + \Delta N.\mathcal{F}[N = k.\Delta N; \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x}, N) + (\oint \underline{\underline{\sigma}})^{ref}(\underline{x})] \qquad (3.14)$$

- Le champ des contraintes résiduelles au pas numéro $(k+1)$ est alors déterminé en résolvant le problème élastique avec la structure déchargée, mais en imposant le champ de déformations permanentes calculé à ce même pas.

- La procédure de calcul est poursuivie jusqu´à ce que k atteigne la valeur maximale K.

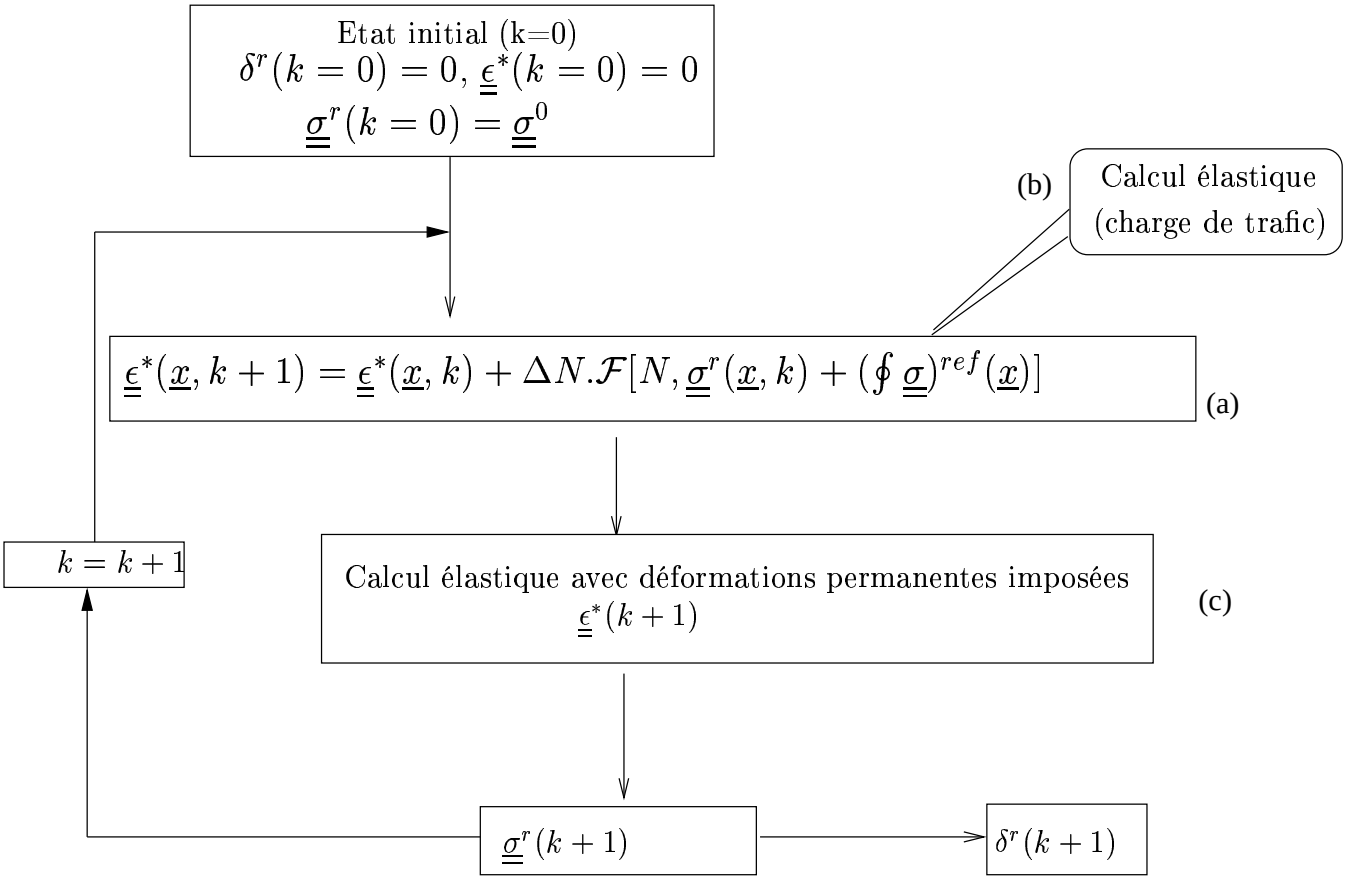


FIG. 3.5: organigramme de la méthode de calcul pas-à-pas de l´état résiduel d´une plateforme sous chargement cyclique

3.5 Exemple illustratif : un modèle simplifié de la plate-forme soumise à une charge roulante

Afin d´illustrer comment la méthode proposée et l´algorithme numérique associé peuvent être implémentés, la schématisation simplifiée suivante de la plate-forme soumise à un chargement de trafic sera adoptée. La charge représentant l´action du passage du véhicule est appliquée sur un demi-espace homogène, sous la forme d´une pression constante P_0 agissant sur une bande de largeur $2a$ et de longueur infinie, comme le montre la figure (3.6), et qui se déplace avec une vitesse V le long de l´axe Oy, le repère cartésien $Oxyz$ étant attaché à la charge roulante.

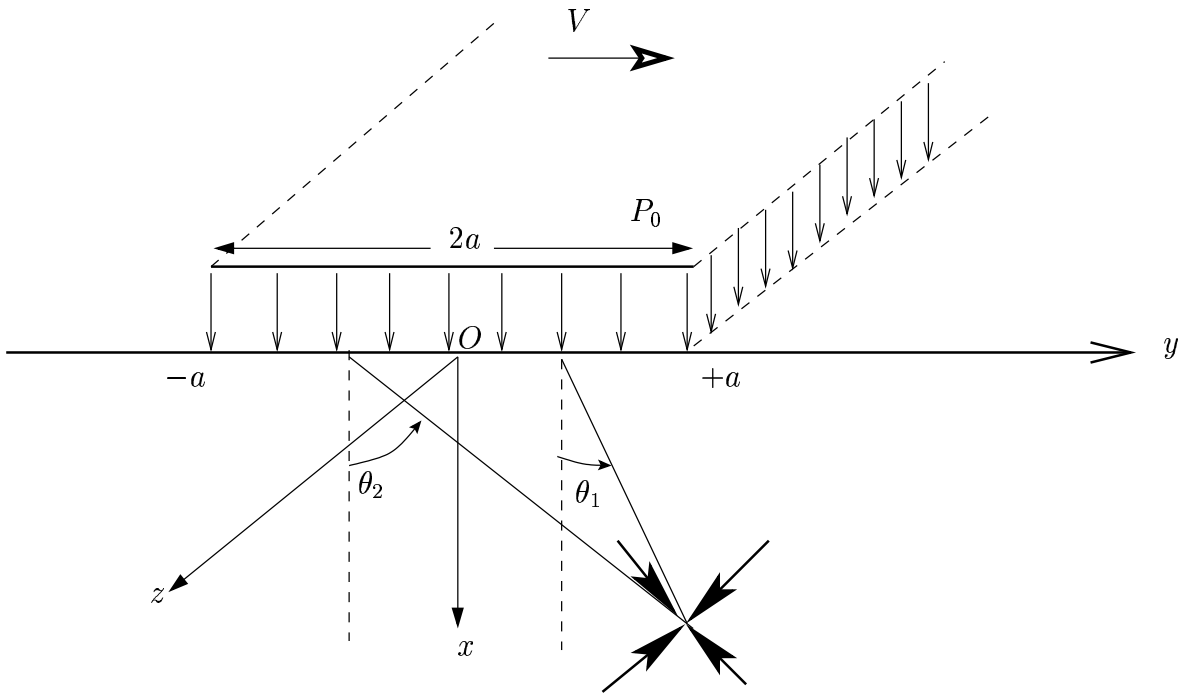


FIG. 3.6: schématisation simplifiée de la charge roulante sur un massif semi-infini

On suppose que le matériau constitutif se comporte comme un milieu homogène, isotrope, élastique et linéaire (le fluage n´est pas pris en compte) et les effets dynamiques étant négligés. Il apparait alors, que pour une structure initialement dans un état naturel (contrainte nulle en tout point), le champ de contrainte élastique créé en tout point (x, y, z) par l´application de ce type de chargement réparti, est classiquement obtenu en intégrant la solution élémentaire de Boussinesq sur la largeur de la bande $2a$. Les différentes composantes du tenseur des contraintes sont données par (Poulos et Davis, 1991 [64]) :

$$\begin{aligned}
\sigma_{xx} &= \frac{P_0}{\pi}(\theta_1 - \theta_2 + \frac{1}{2}(sin2\theta_1 - sin2\theta_2)) \\
\sigma_{yy} &= \frac{P_0}{\pi}(\theta_1 - \theta_2 - \frac{1}{2}(sin2\theta_1 - sin2\theta_2)) \\
\sigma_{xy} &= \frac{P_0}{\pi}(cos^2\theta_1 - cos^2\theta_2) = \frac{p}{2\pi}(cos2\theta_1 - cos2\theta_2) \\
\sigma_{zz} &= \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}) = 2\nu\frac{P_0}{\pi}(\theta_1 - \theta_2)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

les autres $\sigma_{ij} = 0$. Les angles (θ_1, θ_2) sont définis sur la figure (3.6) par :

$$\theta_1 = \tan^{-1}(\frac{y+a}{x}); \theta_2 = \tan^{-1}(\frac{y-a}{x}) \tag{3.16}$$

et ν est le coefficient de Poisson du matériau. Les expressions des deux premiers invariants correspondants définis par :

$$p = -\frac{tr(\underline{\underline{\sigma}})}{3} \qquad q = \sqrt{\frac{3}{2}tr(\underline{\underline{s}}^2)} \tag{3.17}$$

où $\underline{\underline{s}}$ est le déviateur de contrainte, s´écrivant :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} + p\underline{\underline{I}} \tag{3.18}$$

sont :

$$\begin{aligned}
p &= -\frac{2}{3}\frac{P_0}{\pi}(1+\nu)(\theta_1 - \theta_2) \\
q &= \frac{P_0}{\pi}[(1-2\nu)^2(\theta_1 - \theta_2)^2 + 3sin^2(\theta_2 - \theta_1)]^{\frac{1}{2}}
\end{aligned} \tag{3.19}$$

Ces équations montrent que les valeurs des deux premiers invariants de la contrainte ne dépendent que de $\theta_1 - \theta_2$ c´est-à-dire de l´ouverture de l´angle d´où l´on "voit" la charge d´un point donné. Les isovaleurs de ces invariants ne sont autres que la *famille de surfaces cylindriques circulaires* d´axes parallèles à Oz et contenues dans le plan de symétrie Oxz, et passant par les droites d´équations $x = 0$, $y = \pm a$, qui délimitent en surface du massif la zone d´application de la charge. La détermination du cycle élastique de référence s´effectue alors comme indiqué sur la figure 3.7. On voit immédiatement que parcourir un tel cycle dans l´espace des contraintes équivaut à se déplacer par rapport au chargement appliqué le long de la droite parallèle à l´axe Oy passant par le point considéré.

$$(\oint \underline{\underline{\sigma}})^{ref}(x) = \{\underline{\underline{\sigma}}(x,y), y \in]\infty, -\infty[\} \tag{3.20}$$

Un tel cycle ne dépend que de la profondeur x du point.

Le trajet de chargement associé dans le plan (p,q) est donc déterminé à partir des équations (3.19) où le paramètre angulaire $(\theta_1 - \theta_2)$ augmente de 0 à la valeur maximale $2\tan^{-1}(\frac{a}{x})$ lorsque y diminue de $+\infty$ à 0 (chargement approchant), puis décroît jusqu´à 0 lorsque y tend vers $-\infty$ quand la charge s´éloigne. Ce trajet de contrainte est situé sur la courbe d´équation

$$\frac{q}{P_0} = \frac{1}{\pi}[(1-2\nu)^2(\frac{3\pi p}{2(1+\nu)P_0})^2 + 3sin^2(\frac{3\pi p}{2(1+\nu)P_0})]^{\frac{1}{2}} \tag{3.21}$$

obtenue en éliminant $(\theta_1 - \theta_2)$ entre les équations paramètriques (3.19). Ce trajet de contrainte, relie le point origine au point extrême dont les coordonnées normalisées sont (figure 3.7) :

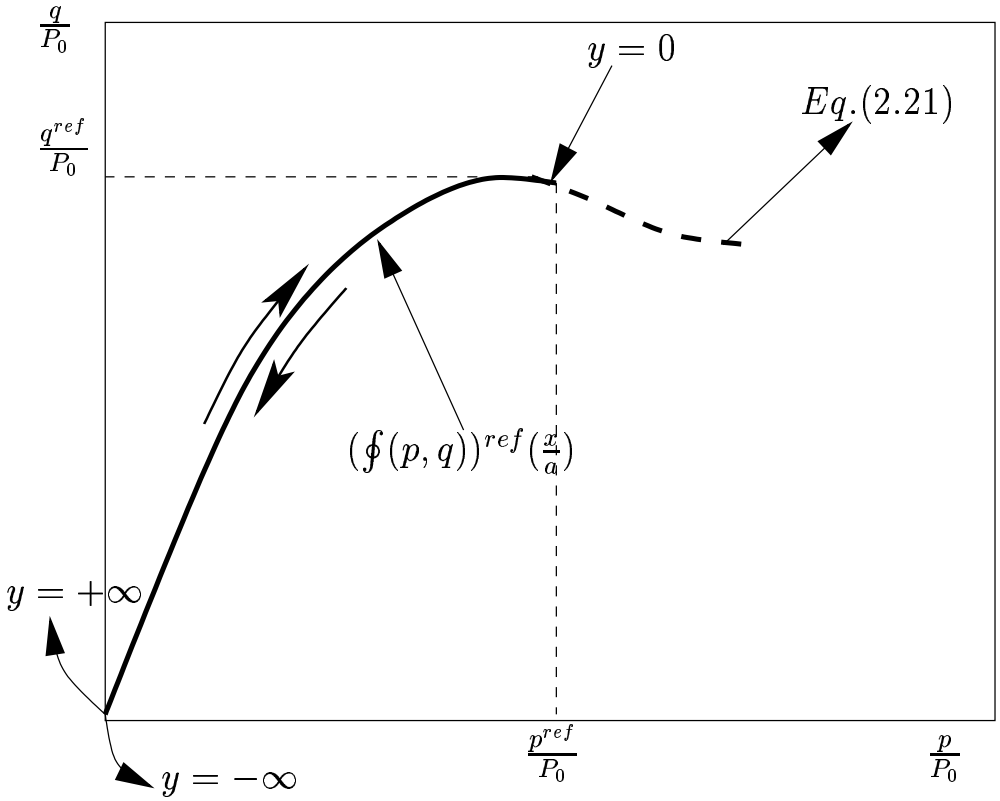


FIG. 3.7: principe de la détermination du cycle de référence dans le plan (p,q) dû au passage de la charge roulante

$$\frac{p^{ref}}{P_0} = \frac{4}{3\pi}(1+\nu)tan^{-1}(a/x) \qquad (3.22)$$
$$\frac{q^{ref}}{P_0} = \frac{1}{\pi}\left[(1-2\nu)^2(2tan^{-1}(a/x)^2 + 3sin^2(tan^{-1}(a/x)))\right]^{\frac{1}{2}}$$

Ces cycles de contraintes de référence sont présentés par la figure (3.8). Ils dépendent uniquement du coefficient de Poisson ν et de la profondeur relative x/a. Pour une valeur donnée de ν, ils sont situés sur la même courbe donnée par l´équation (3.21), leur amplitude étant une fonction décroissante de la profondeur relative.

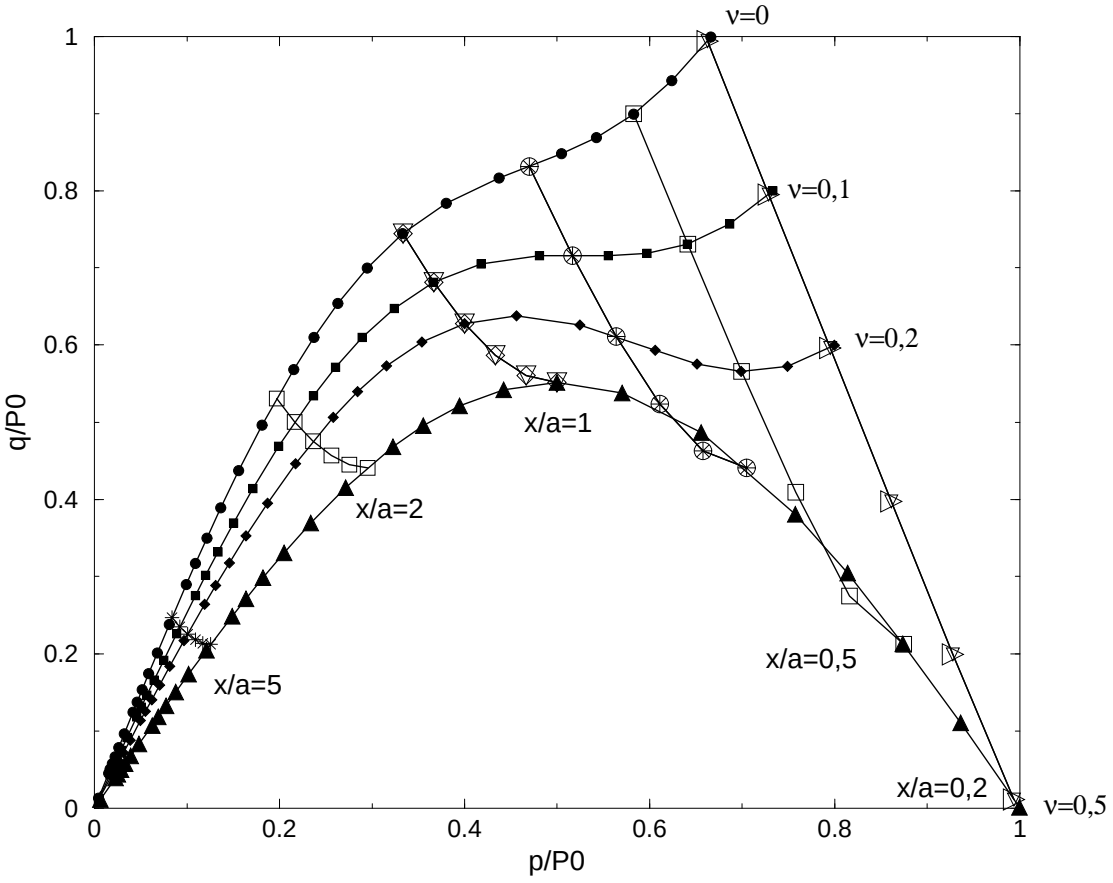


FIG. 3.8: cycles élastiques dans le plan (p-q)

3.6 Loi de comportement cyclique pour la modélisation des déformations permanentes

La procédure générale exposée dans le paragraphe (3.4) nécessite la spécification d´une loi de comportement permettant de relier la production des déformations permanentes

exhibées par le matériau sous l´effet du chargement cyclique répété, au nombre de cycles appliqués ainsi qu´à certaines caractéristiques de ces cycles, comme leur position ou leur amplitude dans l´espace des contraintes. L´ensemble de cette problématique sera détaillé au chapitre 5. La loi de comportement cyclique que nous adopterons dans notre exemple illustratif, est directement inspirée de celle formulée par Gidel et al.(2001) [27] sur la base d´essais triaxiaux à chargement répétés effectués sur des graves non traitées, comme les graves de Poulmarch et les graves de Sorèze. Ces essais triaxiaux ont été réalisés de telle sorte qu´il soit possible de faire varier indépendamment la contrainte axiale et la pression de confinement, permettant ainsi d´explorer le comportement cyclique du matériau vis à vis de plusieurs trajets de chargement radiaux comme le montre la figure (3.9). La loi de comportement proposée par Gidel et al.(2001) [27] pour modéliser le comportement en termes de déformations permanentes dans la direction axiale , de la grave de Poulmarch est donnée par :

$$\epsilon_1^* = \epsilon_0^*(1 - N^{-B}) f(p^{ref}, q^{ref}) g(p^{ref}, q^{ref}) \qquad N \geq 1 \tag{3.23}$$

où ϵ_1^* est la *déformation permanente axiale accumulée*, due à l´application de N cycles de contrainte radiaux, caractérisés par les valeurs maximales (p^{ref},q^{ref}). Les fonctions f et g sont définies comme suit :

$$f(p^{ref}, q^{ref}) = (\frac{l_{max}}{100})^n \qquad g(p^{ref}, q^{ref}) = \frac{p^{ref}}{(s + mp^{ref} - q^{ref})} \tag{3.24}$$

où $l_{max} = \sqrt{(p^{ref})^2 + (q^{ref})^2}$ est l´amplitude du cycle.

où ϵ_0^*, B,n, s et m sont des paramètres intrinsèques du matériau, toutes les variables homogènes à une contrainte utilisées dans les différentes formules étant exprimées en kPa. La fonction f représente l´influence de l´amplitude l_{max} du cycle de contrainte sur le taux de déformation permanente axiale, tandis que la fonction g, quantifie la proximité du point extrême (p^{ref}, q^{ref}) par rapport à une *"droite de référence"* dont l´équation est : $q = s + mp$. Plus précisément, les isovaleurs de g sont les lignes droites coupant l´axe q au même point que la "droite de référence", de sorte que la valeur de la fonction g tend vers l´infini lorsque le point extrême s´approche de cette droite de référence.

Bien que la loi cyclique précédente ait été identifiée à partir de cycles de contrainte radiaux, nous en proposons ci-après une généralisation aux cycles de contrainte actuels créés par la charge mobile à partir d´un état résiduel quelconque de ce dernier, conformément à l´équation (3.7). Plus précisément, désignant par $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}(\underline{x})$ l´état de contrainte élastique correspondant au point maximal $(p^{ref}, q^{ref})(\underline{x})$, on définit l´état de contrainte maximal *actuel* par la relation :

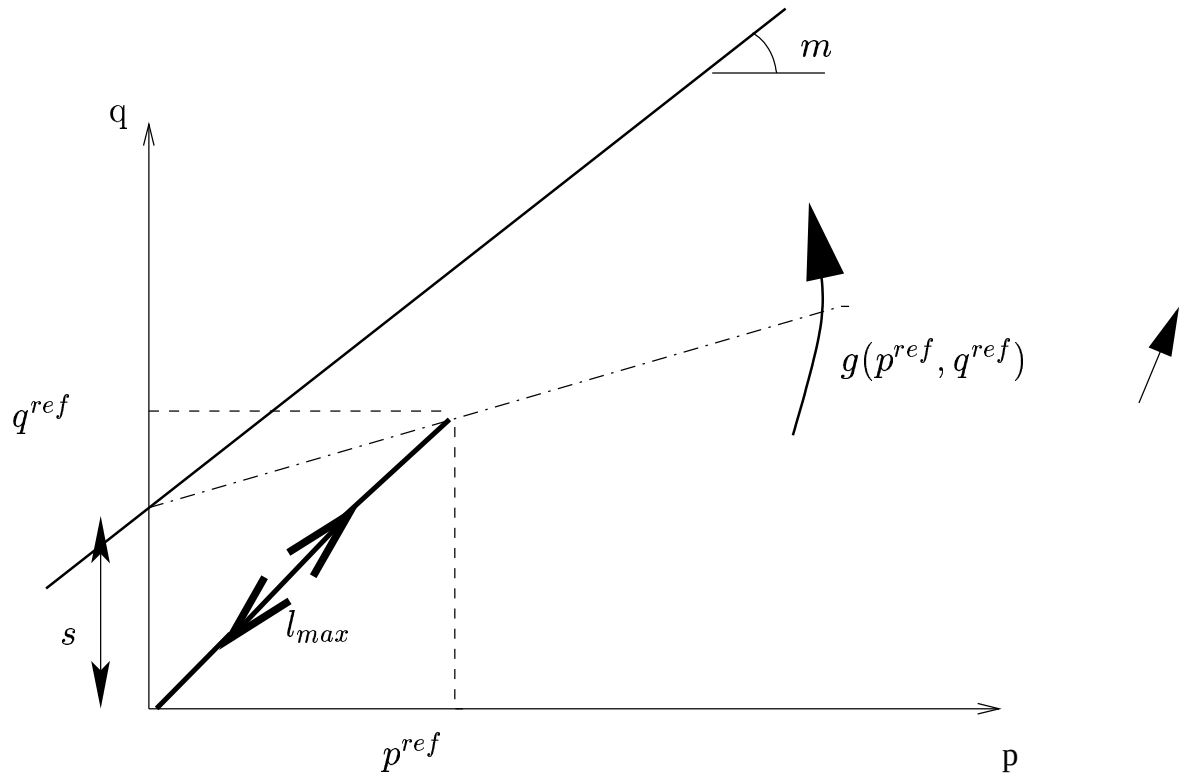


FIG. 3.9: représentation de la loi de comportement cyclique proposée par Gidel et al. (2001) [27]

$$\underline{\underline{\sigma}}^{ac}(\underline{x}; N) = \underline{\underline{\sigma}}^{r}(\underline{x}; N) + \underline{\underline{\sigma}}^{ref}(\underline{x}) \tag{3.25}$$

et les deux premiers invariants par la relation :

$$p^{ac}(\underline{x}; N) = -\frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}^{ac}(\underline{x}; N)) \tag{3.26}$$

$$q^{ac}(\underline{x}; N) = \sqrt{\frac{3}{2} tr(\underline{\underline{s}}^{ac})^2(\underline{x}; N)} \tag{3.27}$$

Il convient de noter que l´on a bien la relation :

$$p^{ac}(\underline{x}; N) = p^{r}(\underline{x}; N) + p^{ref}(\underline{x}; N) \tag{3.28}$$

mais que par contre, hormis dans le cas particulier d´états de contrainte triaxiaux de révolution,

$$q^{ac}(\underline{x}; N) \neq q^{r}(\underline{x}; N) + q^{ref}(\underline{x}; N) \tag{3.29}$$

de sorte que , *dans le plan* (p,q), le cycle de contrainte actuel n´est pas obtenu par simple translation du cycle de référence. La généralisation de la loi d´accumulation des déformations permanentes (3.23) consiste à adopter l´expression modifiée suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = \epsilon_0^*(1 - N^{-B}) f(p^{ac} - p^{ref}, q^{ac} - q^{ref}).g(p^{ac}, q^{ac}) \tag{3.30}$$

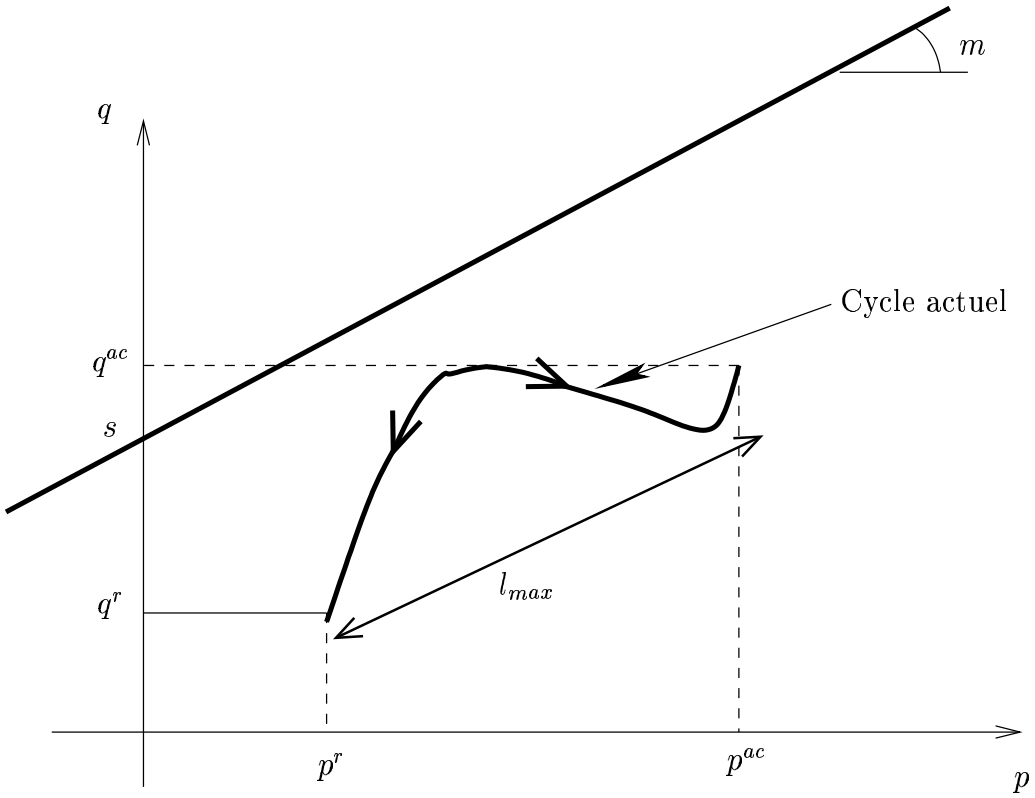


FIG. 3.10: extension de la loi de comportement cyclique à un cycle de contraintes actuel relatif au problème de la charge roulante

Cette expression est valable pour un nombre N de cycles appliqués entre les points extrémaux (p^r, q^r) et (p^{ac}, q^{ac}) considérés. Mais, compte tenu de l´évolution continue du champ des déformations permanentes, les contraintes résiduelles (p^r, q^r) générées par l´incompatibilité géométrique de ces dernières varient progressivement lorsque N croît. La loi présentée ci-dessus doit donc être formulée *sous une forme incrémentale* comme suit. L´incrément de déformation permanente axiale dû à l´application de ΔN cycles de contrainte entre $(p^r, q^r)(N)$ et(p^{ac}, q^{ac})(N) s´écrit :

$$\Delta\epsilon_1^*(N) = \epsilon_1^*(N^{-B} - (N + \Delta N)^{-B}) f((p^{ac} - p^{ref})(N), (q^{ac} - q^{ref})(N)).g(p^{ac}(N), q^{ac}(N)) \tag{3.31}$$

C´est-à-dire qu´entre N et $N + \Delta N$ les caractéristiques du cycle actuel, que traduisent les fonction f et g, sont supposées constantes.

En vue d´obtenir une formulation complète de la loi de comportement cyclique qui doit être incorporée dans la procédure générale du calcul décrite dans le paragraphe (3.4), il est nécessaire de spécifier l´évolution des autres composantes des déformations permanentes. En fait, en se référant plus précisément aux essais triaxiaux, il apparaît que très peu de données relatives aux composantes des déformations permanentes latérales $\epsilon_2^* = \epsilon_3^*$ produites sur des matériaux granulaires sous l´effet de chargements répétés, soient disponibles (voir chapitre 5). Néanmoins, des recherches préliminaires semblent indiquer que ces composantes latérales varient proportionnellement aux composantes axiales mais avec un signe opposé. Ceci veut dire plus précisément que l´échantillon de matériau, soumis à un essai de compression triaxiale cyclique, se dilate latéralement $\epsilon_2^* = \epsilon_3^* \geq 0$, tandis qu´il subit une contraction axiale $\epsilon_1^* \leq 0$. Comme première tentative de formuler une loi de comportement cyclique tridimensionnelle, nous adopterons la relation suivante entre les composantes axiale et latérale de la déformation permanente.

$$\epsilon_2^* = \epsilon_3^* = -\nu^* \epsilon_1^* \tag{3.32}$$

Le paramètre ν^* est un paramètre sans dimension, pouvant être interprété comme l´analogue du coefficient de Poissson reliant les déformations permanentes au lieu des déformations élastiques. Il peut être intéréssant de rattacher ce paramètre au concept de dilatance-contractance, classiquement introduit, pour décrire la variation volumique plastique des volumes.

Introduisant la déformation volumique permanente définie dans le cas d´une sollicitation triaxiale de révolution par :

$$\epsilon_v^* = tr(\underline{\epsilon}^*) = \epsilon_1^* + 2\epsilon_2^* = (1 - 2\nu^*)\epsilon_1^* \tag{3.33}$$

et compte tenu de ce que $\epsilon_1^* \leq 0$, il apparaît que le matériau est contractant pour $\nu^* < 1/2$, dilatant lorsque $\nu^* \geq 1/2$. Nous verrons au chapitre 5 que certains résultats expérimentaux suggérent que ν^* est une fonction croissante du rapport q^{ref}/p^{ref} c´est-à-dire de la pente du trajet cyclique radial. Celà signifie que le matériau est d´autant plus dilatant que cette pente est élevée. Toutefois, notre objectif étant ici d´illustrer la démarche de calcul à partir du traitement d´un exemple simple, nous supposerons provisoirement que ν^* est un paramètre constant.

3.7 Détermination de l´état résiduel du massif

Soit $\underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x};N)$ le tenseur des déformations permanentes accumulées au point $\underline{x}$ de la plate-forme de trafic au terme de N cycles de chargement. La détermination des champs de contrainte et de déplacement résiduels et notamment du tassement résiduel en surface consiste, comme indiqué en (3.4) à résoudre un problème d´élasticité en l´absence de charge de trafic mais en imposant le champ de déformations permanentes $\underline{\underline{\epsilon}}^*$, d´origine anélastique. Plus précisément, notant $\underline{\xi}^r(N)$ et $\underline{\underline{\sigma}}^r(N)$ les champs de déplacement et de contrainte résiduels, les équations suivantes doivent être satisfaites.

- *Comportement élastique* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x};N) = \underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x};N=1) + 2\mu[\underline{\underline{\epsilon}}^r(\underline{x};N) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x};N)] + \lambda tr[\underline{\underline{\epsilon}}^r(\underline{x};N) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(\underline{x};N)]\underline{\underline{I}} \quad (3.34)$$

  avec

$$\underline{\underline{\epsilon}}^r(\underline{x};N) = \frac{1}{2}(\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}^r) + t\underline{\underline{grad}}(\underline{\xi}^r))(\underline{x};N)$$

  où $\underline{\underline{\sigma}}^r(N=1)$ est le champ de contrainte *initial* (c´est-à-dire avant application du chargement cyclique), tandis que λ et μ sont les constantes de Lamé.

- *Equation d´équilibre*

$$div(\underline{\underline{\sigma}}^r)(\underline{x};N) = 0 \quad (3.35)$$

  où le poids volumique $\underline{\gamma}$ du matériau est négligé.

- *Conditions aux limites* : surface *libre de contrainte* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(N, x=0).\underline{e}_x = 0 \quad (3.36)$$

La forme du tenseur champ de déformations permanentes peut être spécifiée comme suit. Bien que, pendant un cycle de chargement, les directions principales des contraintes en tout point subissent une rotation lorsque la charge se déplace, nous pouvons admettre en raison des symétries du problème, que les directions principales des déformations permanentes générées suite à ce type de chargement coïncident avec les axes horizontaux et vertical. D´où nécessairement :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(x;N) = \epsilon_1^*(x;N)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \epsilon_2^*(x;N)(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + \underline{e}_z \otimes \underline{e}_z) \quad (3.37)$$

où la déformation (principale) verticale est ϵ_1^* et les déformations (principales) horizontales sont $\epsilon_2^* = \epsilon_3^*$, et ne dépendent que de la profondeur x. Leur évolution est gouvernée

par la loi de comportement cyclique donnée par les relations (3.31) et (3.32). Le champ de déplacement résiduel est alors recherché sous la forme : $\underline{\xi}^r(N,x) = u^r(N,x).\underline{e}_x$ En supposant que la plate-forme est initialement libre de contrainte, $(\underline{\underline{\sigma}}^r(N=1,\underline{x}) = 0)$, l´équation de comportement élastique s´écrit :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(\underline{x};N) = 2\mu(\underline{\underline{\epsilon}}^r(x;N) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(x;N)) + \lambda tr(\underline{\underline{\epsilon}}^r(x;N) - \underline{\underline{\epsilon}}^*(x;N))\underline{\underline{I}} \tag{3.38}$$

avec :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^r(x;N) = \frac{du^r}{dx}(x;N)\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x$$

Il vient alors en tenant compte de (3.37) que les composantes du tenseur des contraintes résiduelles sont :

$$\begin{aligned} \sigma^r_{xx} &= \lambda(\frac{du^r}{dx} - \epsilon^*_1 - 2\epsilon^*_2) + 2\mu(\frac{du^r}{dx} - \epsilon^*_1) \\ \sigma^r_{yy} &= \sigma^r_{zz} = \lambda(\frac{du^r}{dx} - \epsilon^*_1 - 2\epsilon^*_2) - 2\mu\epsilon^*_2 \end{aligned} \tag{3.39}$$

Les autres composantes du tenseur des contraintes résiduelles sont nulles.

En reportant ces expressions dans l´équation d´équilibre (3.35), nous obtenons :

$$div(\underline{\underline{\sigma}}^r) = 0 \Rightarrow \frac{d\sigma^r_{xx}}{dx} = 0 \Rightarrow \sigma^r_{xx} = 0 \tag{3.40}$$

la condition aux limites (3.36) ayant été prise en compte. Par conséquent :

$$\frac{du^r}{dx} = \epsilon^*_1(x) + \frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}\epsilon^*_2(x) = \epsilon^*_1(x) + \frac{2\nu}{1-\nu}\epsilon^*_2(x) \tag{3.41}$$

Par ailleurs, il est légitime de considérer que les déformations permanentes sont négligeables au delà d´une profondeur suffisante $H >> 2a$. Le tassement résiduel peut donc être pris nul à cette profondeur, et l'équation (3.41) peut être intégrée pour obtenir :

$$u^r(x;N) = -\int_{\chi=x}^{\chi=H} [\epsilon^*_1(\chi) + \frac{2\nu}{1-\nu}\epsilon^*_2(\chi)]d\chi \tag{3.42}$$

qui donne en particulier l´expression du *tassement résiduel en surface* :

$$\delta^r(N) = u^r(x=0;N) = -\int_{x=0}^{x=H} [\epsilon_1^*(x;N) + \frac{2\nu}{1-\nu}\epsilon_2^*(x;N)]dx \tag{3.43}$$

Finalement, l´introduction de (3.41) dans (3.39) donne les expressions pour les différentes composantes des contraintes résiduelles, comme des fonctions de la *seule déformation permanente latérale.*

$$\sigma_{yy}^r(x;N) = \sigma_{zz}^r(x;N) = -\frac{2\mu(2\mu+3\lambda)}{\lambda+2\mu}\epsilon_2^p(x;N) = -\frac{E}{1-\nu}\epsilon_2^*(x;N) \tag{3.44}$$

Les autres composantes du tenseur des contraintes résiduelles sont nulles. Les invariants des contraintes correspondants sont :

$$\begin{aligned} p^r(N,x) &= \frac{2E}{3(1-\nu)}\epsilon_2^*(x;N) \\ q^r(N,x) &= \frac{E}{1-\nu}|\epsilon_2^*(x;N)| = \frac{3}{2}|p^r(N,x)| \end{aligned} \tag{3.45}$$

3.8 Implémentation numérique et résultats

L´algorithme numérique incrémental présenté sous sa forme générale sur la figure (3.5), a été implémenté pour le modèle simplifié de la plate-forme soumise à une charge roulante : figure (3.11). Tous les pas de calcul ont été menés analytiquement et indépendamment pour chaque profondeur x. Le tassement résiduel résultant en surface $\delta^r(N)$ est calculé par une procédure d´intégration classique de la distribution des déformations permanentes jusqu´à la profondeur relative $H/a = 50$ grâce à l´équation (3.43). Le jeu de données suivant a été sélectionné pour la simulation :

$$\begin{gathered} P_0 = 300 \quad \text{kPa}, \quad E = 100 \quad \text{MPa}, \quad \nu = 0,3, \quad \nu^* = 0,6 \\ \epsilon_0^* = -0.0195, \quad B = 0,03 \quad n = 0,588, \quad m = 3,8 \quad \text{et} \quad s = 42,8 \quad \text{kPa} \end{gathered} \tag{3.46}$$

où les cinq derniers paramètres correspondent aux valeurs identifiées pour un type particulier de matériau granulaire (Grave de Poulmarch) par Gidel et al., (2001), sur la base d´essais triaxiaux cycliques.

La figure (3.12) montre tout d´abord plusieurs courbes donnant l´évolution des *déformations permanentes axiales* accumulées lorsque le nombre de cycles de chargement croît jusqu´à un million. On observe sur cette figure, que pour le jeu de données du matériau sélectionné, ainsi que le chargement choisi, la déformation permanente est négative

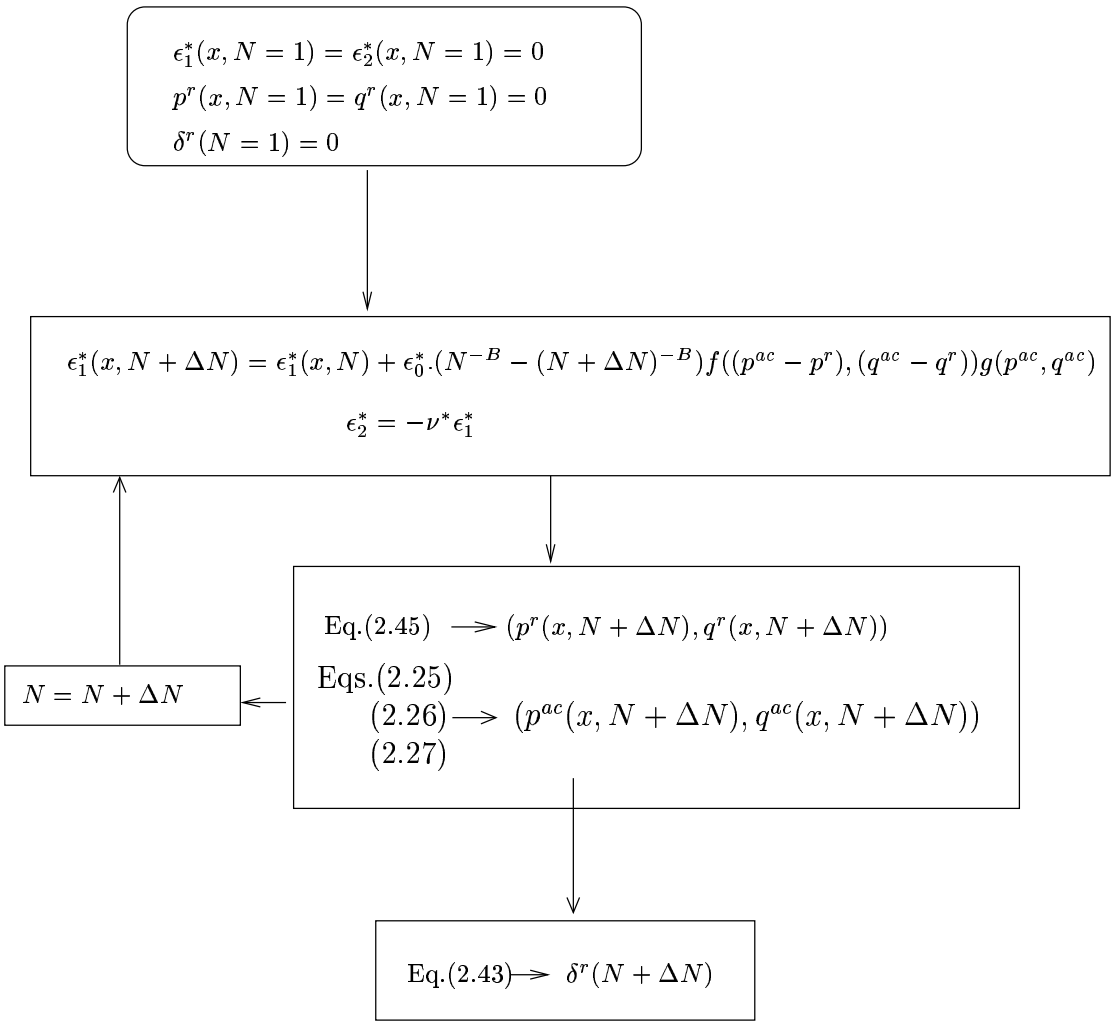


FIG. 3.11: procédure de calcul pas-à-pas du tassement résiduel de la plate-forme sous chargement de trafic répété

(contraction verticale), son amplitude étant, comme prévu, une fonction croissante de N et décroissante de la profondeur relative x/a. Comme le coefficient ν^* est choisi égal à $0,6$, il ressort de l´équation (3.32) que la déformation permanente horizontale est toujours positive, ce qui correspond à une extension latérale du matériau. L´équation (3.44) montre ce type de distribution de la déformation permanente horizontale, produit des contraintes résiduelles de *compression*.

$$\sigma_{yy}^r(x; N) = \sigma_{zz}^r(x; N) = \frac{E\nu^*}{1-\nu}\epsilon_1^*(x; N) \leq 0 \tag{3.47}$$

La figure (3.13) représente les profils de contraintes résiduelles correspondantes qui augmentent progressivement avec N, tandis que la figure (3.14), donne pour différents niveaux de profondeur relative x/a, le trajet de chargement associé dans le plan (p, q), mettant en évidence une dérive progressive de l´origine du cycle de contraintes actuel et

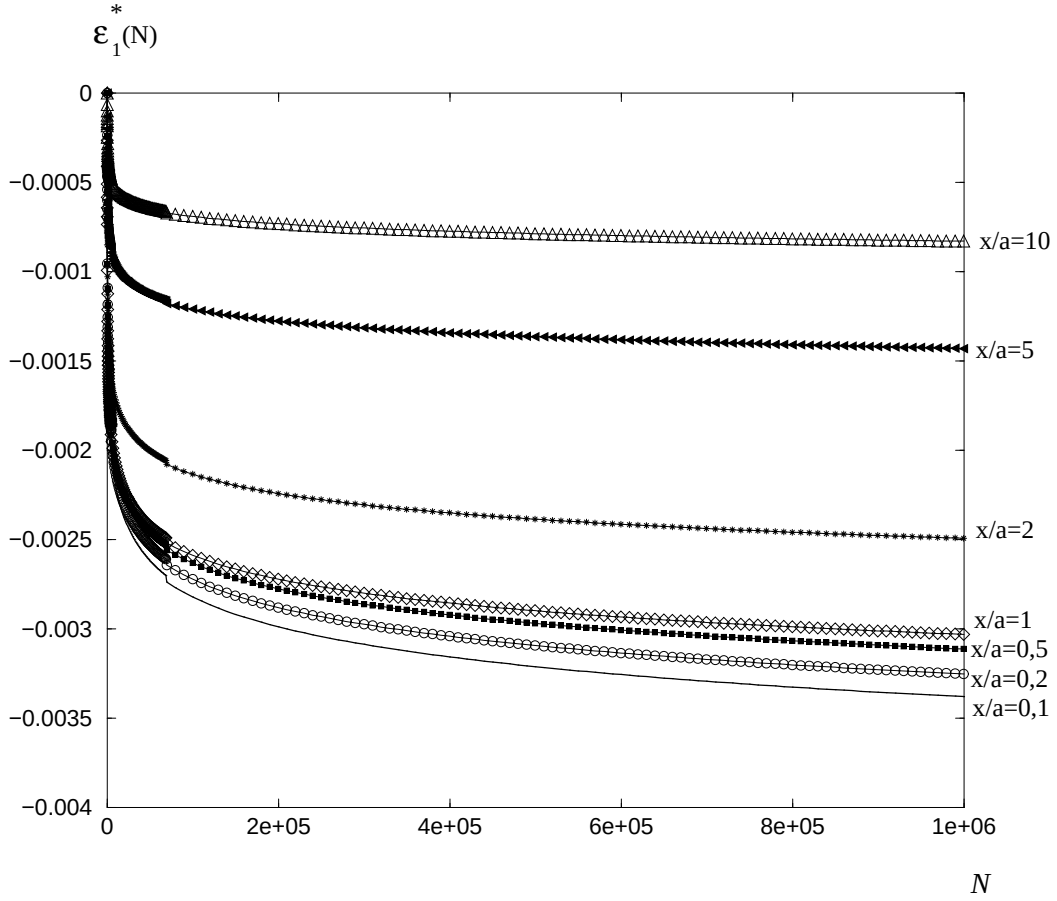


FIG. 3.12: évolution de la déformation permanente verticale en fonction du nombre de cycles N à différentes profondeurs x/a

sa position par rapport à la "droite de référence" d´équation $q = 42,8 + 3,8p$ tracée sur la même figure. Il faut aussi noter que ces contraintes résiduelles sont placées le long de la même droite d´équation $q = 3p/2$, leur distance à l´origine pour un nombre donné de cycles étant une fonction décroissante de la profondeur. Comme résultat global et final de ces calculs, le *tassement résiduel adimensionnel*, $\delta^r(N)/H$ est représenté sur la figure (3.15) comme une fonction croissante de N.

On peut observer tant sur la figure (3.12) qui décrit l´évolution des déformations permanentes à différentes profondeurs dans le massif, que sur la figure (3.15) représentant l´évolution du tassement résiduel, que l´évolution des différentes grandeurs en fonction de N, tout d´abord très rapide, ralentit considérablement au fur et à mesure que N augmente. C´est ainsi que le tassement résiduel calculé pour un millier de cycles dépasse déjà la moitié de la valeur de ce même tassement évalué pour un million de cycles ! Il faut toutefois se garder de tirer de cette observation des conclusions hatives, en se souvenant que l´allure de ces courbes doit être avant tout attribuée à l´expression adoptée pour la loi cyclique (3.23) qui prescrit une évolution en $1 - N^{-B}$ avec $B = 0,03$.

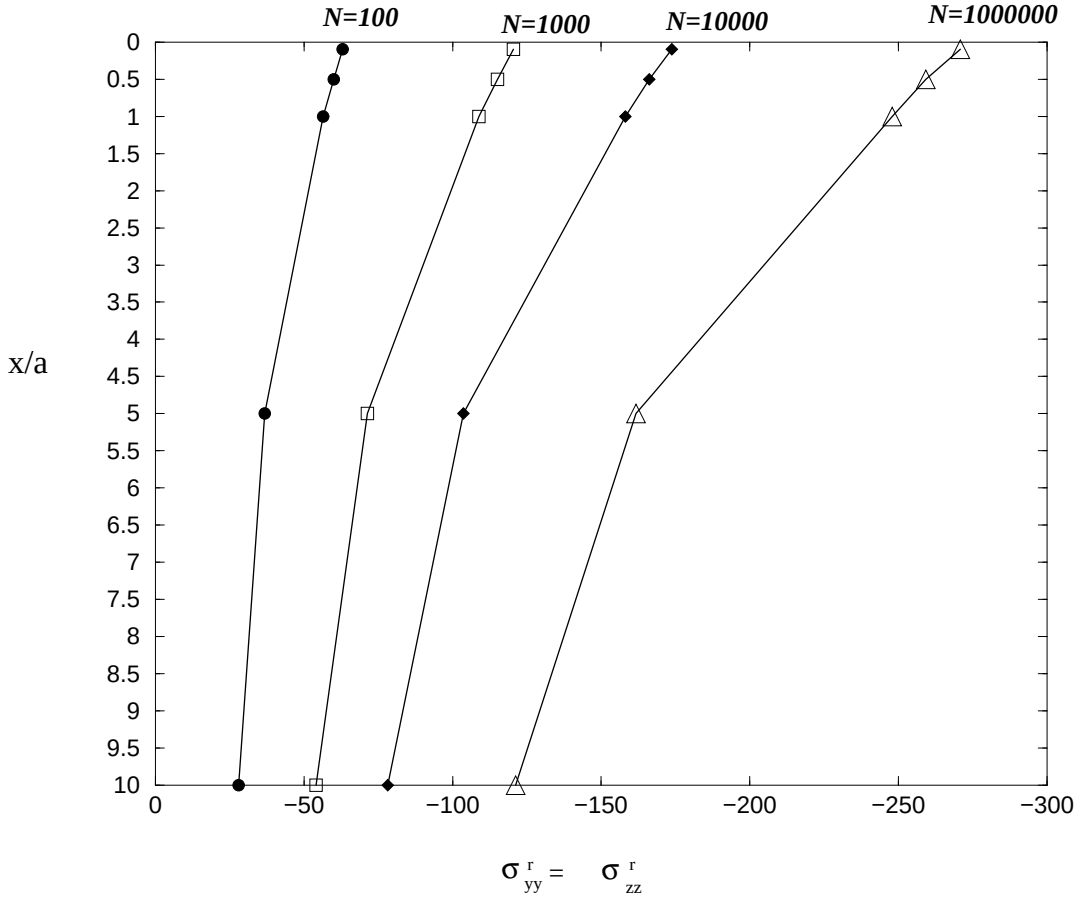


FIG. 3.13: profil des contraintes résiduelles en fonction de N

En partant du jeu de données de référence (3.46), une étude paramétrique a été menée, dans laquelle nous avons fait varier les coefficients ν^* et ν indépendamment, afin de voir leurs influences respectives sur le résultat des simulations. En premier lieu, la valeur du coefficient de Poisson ν étant maintenue constante, égale à $0,3$, nous avons réalisé des simulations en faisant varier le coefficient ν^* qui gouverne l´amplitude de la déformation permanente latérale comme une fonction de la déformation permanente axiale. La plage de valeurs retenues est $[0,2-0,7]$. Cet intervalle de variation semble être représentatif de ce type de paramètre comme le montrent les observations expérimentales préliminaires. La figure (3.17) représente une série de courbes montrant l´influence de ν^* sur l´accumulation des déformations permanentes latérales à une profondeur donnée $x/a = 1$, tandis que la figure (3.16) décrit l´influence du même paramètre sur l´ampleur du tassement résiduel global.

D´après la figure (3.16), il apparaît clairement que le taux d´accumulation du tassement résiduel est une fonction décroissante de ν^*. Sur l´exemple retenu, le tassement résiduel relatif global, résultant de l´application d´un million de cycles de chargement, varie de 9.10^{-3} pour $\nu^* = 0,7$ à $1,4.10^{-2}$ pour $\nu^* = 0,2$, ce qui montre la sensibilité relativement

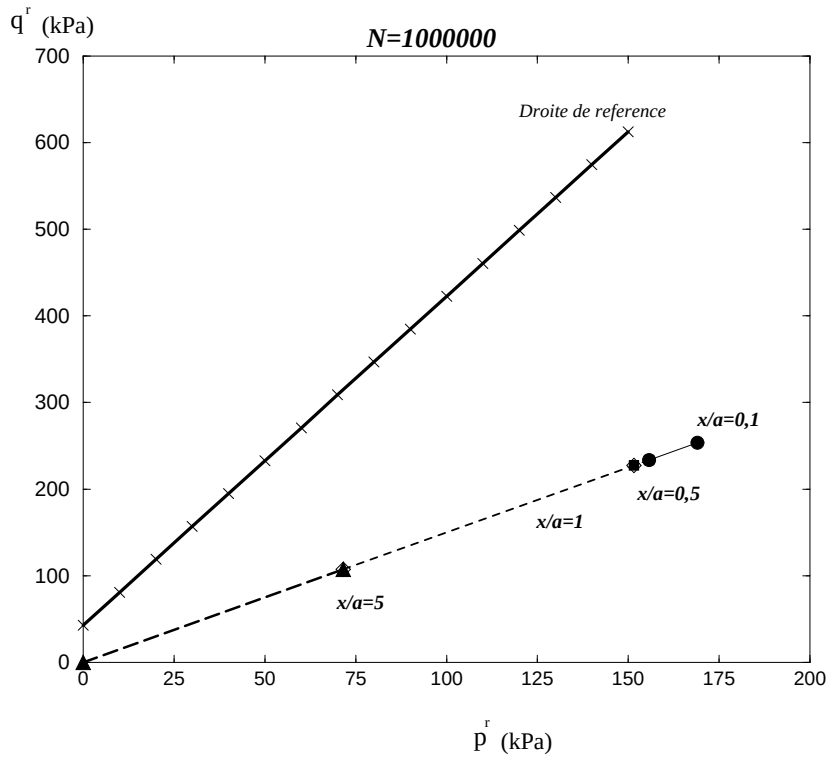


FIG. 3.14: états de contrainte résiduelle dans le plan (p-q)

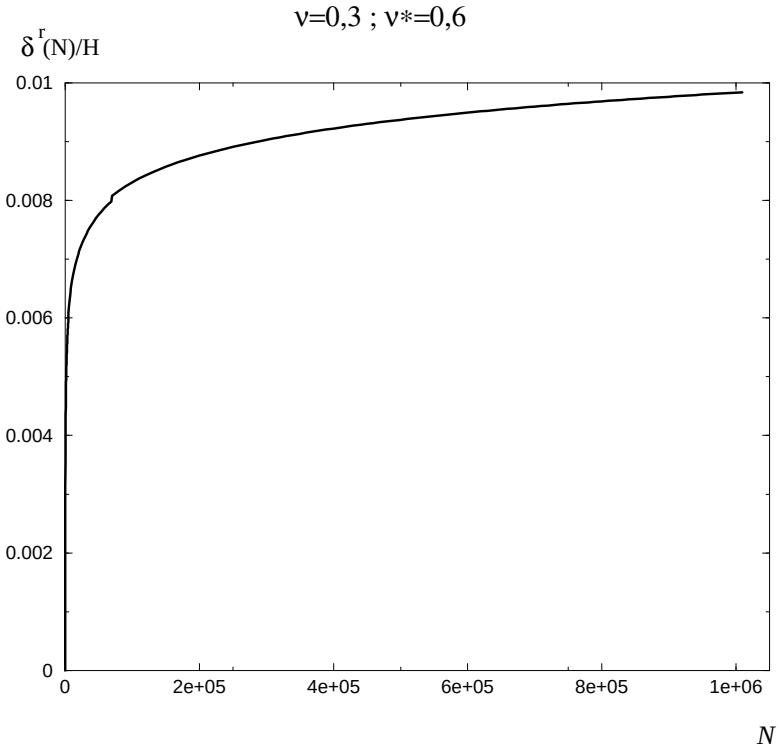


FIG. 3.15: évolution du tassement résiduel de la plate-forme en fonction du nombre de cycles de chargement

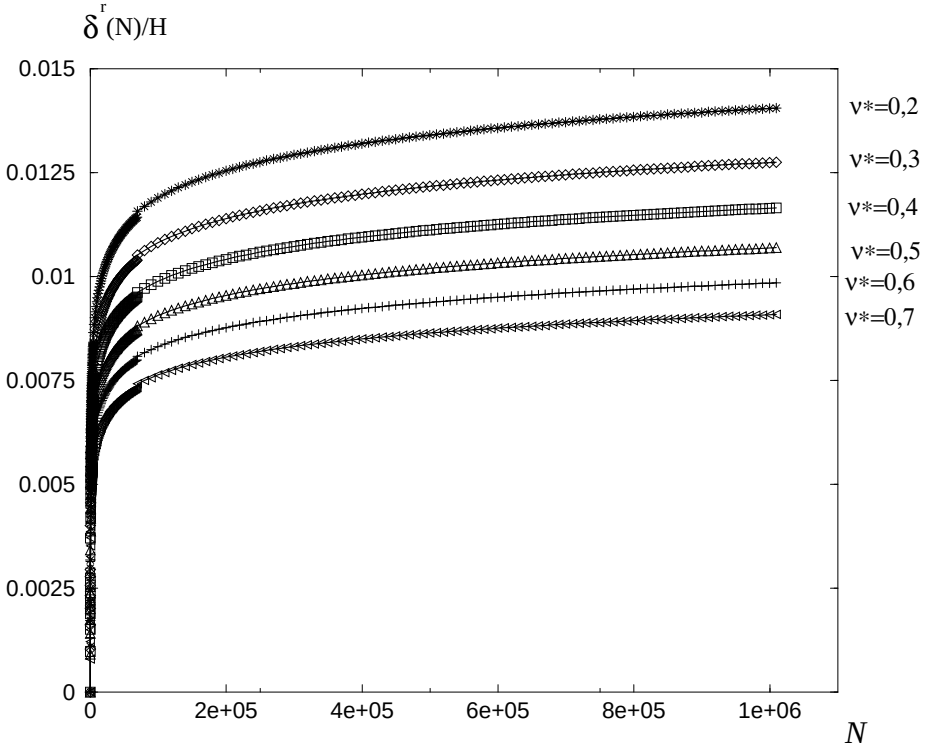


FIG. 3.16: évolution du tassement résiduel en fonction de $\nu*$

importante de ce paramètre. Une explication possible de ces résultats peut être trouvée en se référant à l´équation (3.43), en tenant compte du fait que la déformation permanente axiale ϵ_1^* est négative (contraction) tandis que la déformation permanente latérale ϵ_2^* est d´autant plus positive (extension) que la valeur de ν^* est importante, limitant ainsi l´amplitude du tassement résiduel. Plus précisément, le tassement résiduel en surface peut être réécrit à partir des équations (3.43) et (3.32) sous la forme

$$\delta^r(N) = (1 - 2\nu^* \frac{\nu}{1-\nu})[-\int_0^H \epsilon_1^*(x;N)dx] \tag{3.48}$$

En supposant que ν^* ait une influence limitée sur la valeur de l´intégrale de la déformation permanente axiale, le terme placé entre crochets peut être considéré comme une quantité sensiblement constante et positive. L´équation (3.48) démontre alors clairement que le tassement résiduel total est une fonction décroissante de ν^*.

Puisque généralement $\nu \in [0, 1/2]$ et donc $\frac{\nu}{1-\nu} \geq 0$, le même type d´observation peut être faite concernant l´influence du coefficient de Poisson ν sur les résultats de la simulation. Les courbes donnant l´évolution des déformations permanentes axiales et latérales à un niveau de profondeur relative donné sont représentées sur la figure (3.18) pour différentes valeurs de ce coefficient comprises entre 0 et $0,5$. On constate que l´amplitude de ces déformations atteint sa valeur maximale pour $\nu = 0$, avec une décroissance significative

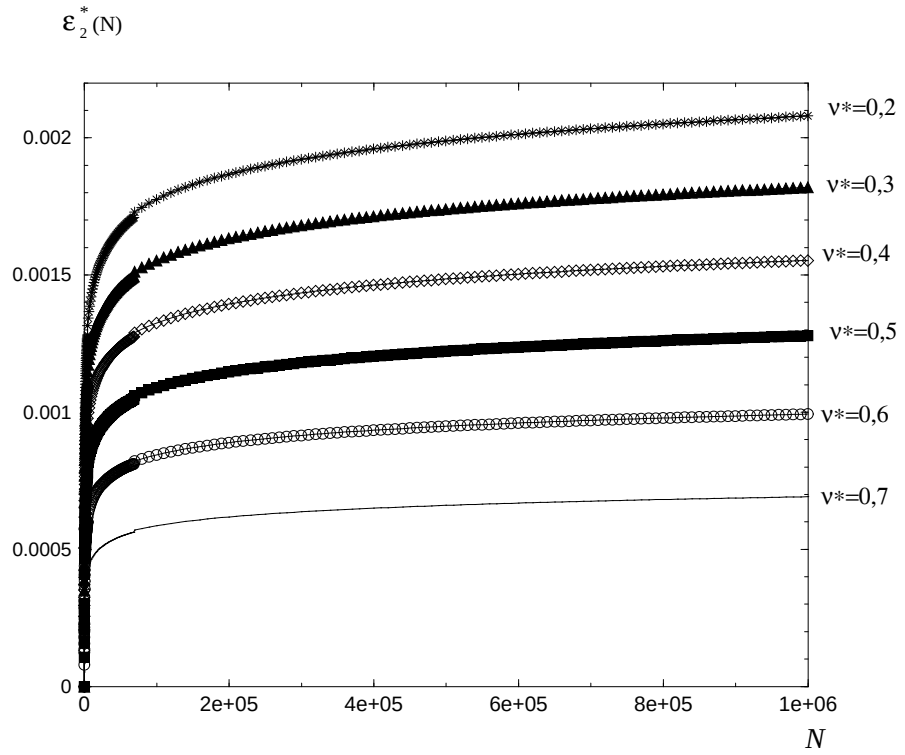


FIG. 3.17: évolution de la déformation permanente latérale en fonction de $\nu*$

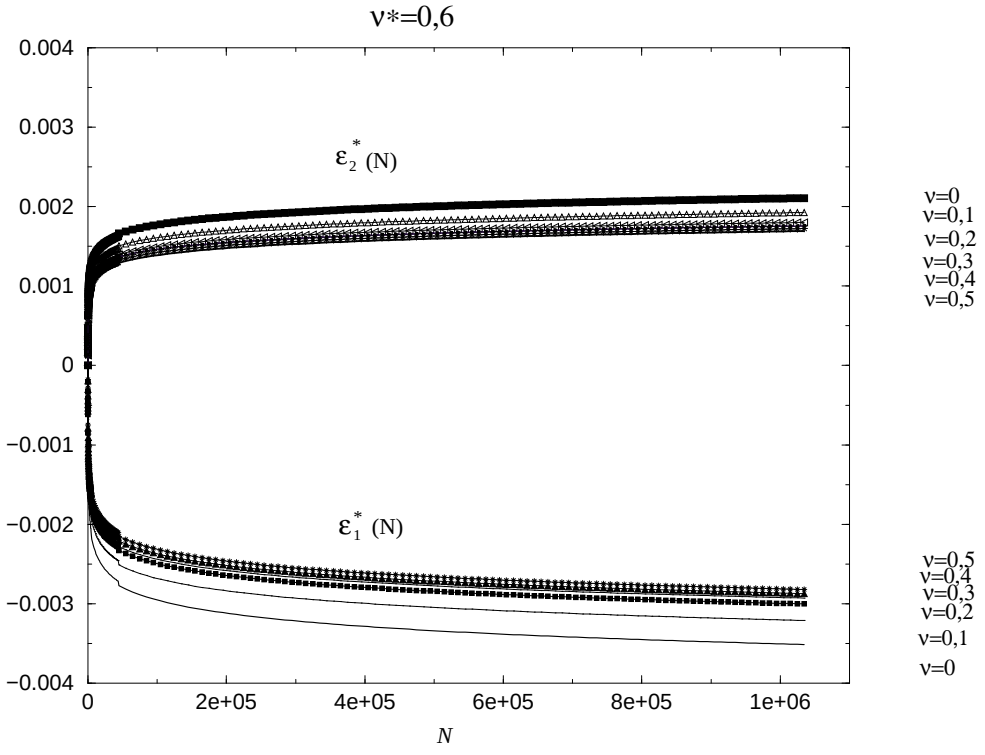


FIG. 3.18: évolution des déformations permanentes en fonction de ν

lorsque ν augmente. Ceci peut être attribué au fait que les caractéristiques (inclinaisons, amplitudes) des cycles de contrainte de référence, et donc le taux de production des

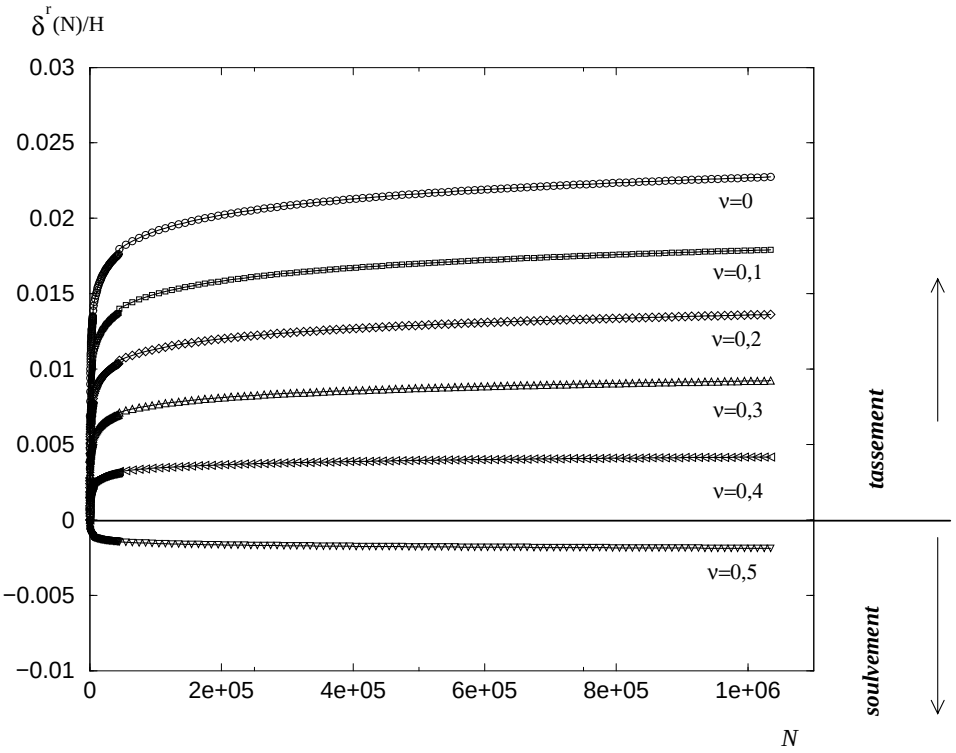


FIG. 3.19: influence du coefficient de Poisson sur l´évolution du tassement résiduel

déformations permanentes, dépendent du coefficient de Poisson, comme le montre la figure (3.8).

L´influence des valeurs adoptées pour le coefficient de Poisson du matériau sur le tassement résiduel de la surface est encore plus prononcée, comme l´indique la figure (3.19). On observe même que, pour des valeurs de ν comprises entre $0,4$ et $0,5$, le signe du déplacement est inversé, le tassement résiduel en surface de la plate-forme correspond à un phénomène de soulèvement ! Ce résultat qui peut paraître surprenant, s´explique facilement à partir de l´équation (3.48). En effet, tant que le terme mis entre crochets reste positif, le signe du déplacement en surface est donné par celui de l´expression placée juste devant ce terme, qui dépend uniquement de ν et ν^*. Il en résulte que la condition pour laquelle le signe du déplacement résiduel en surface devient négatif (soulèvement, au lieu de tassement, du massif), s´écrit :

$$\nu \geq \frac{1}{1+2\nu^*} \tag{3.49}$$

Etant donné que le coefficient de Poisson ne peut dépasser la valeur $0,5$, ce phénomène d´inversion de signe ne peut se produire que pour $\nu^* \geq 1/2$, ce qui correspond à un matériau présentant des déformations permanentes volumiques dilatantes (équation 3.33).

Il convient encore une fois de se garder de toute généralisation hative. La possibilité

de voir apparaître un déplacement résiduel négatif (soulèvement) est bien évidemment liée au caractère simplifié du modèle de charge roulante, et au fait notamment que cette dernière est appliquée sur une bande de longueur infinie, permettant une analyse du problème en déformation plane, et non sur une zone d´extension limitée dans le plan Oyz, comme le suggérerait une schématisation plus réaliste. Dans ce dernier cas en effet, le profil de déplacement résiduel en surface dans la direction Oz ne serait plus constant et correspondrait à un tassement effectif au voisinage de la région où s´applique la charge, même si des soulèvements sont susceptibles d´apparaître de part et d´autres (phénomène d´ornièrage des chaussées routières).

3.9 Conclusions

Le présent chapitre nous a permis de démontrer la faisabilité de la méthode de calcul proposée, illustrée sur un exemple simple. Il en ressort que l´un des éléments essentiels sur lesquels repose une telle méthode, est la possibilité de disposer d´une loi de comportement cyclique à long terme pour les matériaux constituant l´infrastructure. Cette question sera abordée au chapitre 5 où l´on examinera la possibilité de formuler une telle loi dans un cadre tridimensionnel à partir de données expérimentales d´ores et déjà disponibles.

La procédure ici appliquée à un exemple très simple peut et doit être étendue à des situations plus réalistes telle qu´une plate-forme ferroviaire dont la structure est relativement complexe, les charges du véhicule roulant (boggie) étant transmises aux couches inférieures de la plate-forme par le système (rail+blochets+ballast). L´objet du chapitre suivant sera précisément d´approfondir sur ce type de structure l´analyse de la réponse élastique sous charge roulante afin de déterminer en tout point les cycles de référence. Cette analyse nécessitera l´utilisation d´un code de calcul en éléments finis.

Enfin il importe de rappeler que l´une des hypothèses fondamentales sur lesquelles s´appuie la méthode proposée est celle d´un comportement élastique linéaire à court terme des matériaux. Celle-ci permet de n´effectuer qu´un seul calcul élastique destiné à déterminer une fois pour toutes en tout point le cycle de référence, qui est indépendant de l´état résiduel. Ainsi que nous l´avons déjà signalé, des matériaux granulaires de type ballast ou grave non traitée présentent un comportement sensiblement élastique mais fortement non-linéaire. Le chapitre 7 examinera sur un cas simple l´effet de la prise en compte d´une telle non-linéarité sur le schéma de calcul proposé.

Chapitre 4

Application au cas d´une voie ferrée ballastée : calcul des cycles élastiques de référence

Sommaire

4.1 Introduction 97

4.2 Situation par rapport aux études antérieures 97

4.2.1 Le modèle de Winkler 98

4.2.2 Modèle de Sauvage 100

4.3 Comparaison avec un calcul par éléments finis (PLAXIS) . . 104

4.3.1 Présentation du logiciel PLAXIS 104

4.3.2 Description du modèle de la voie ferrée 105

4.3.3 Comparaisons des résultats des modèles de Winkler, de Sauvage et du calcul Plaxis 108

4.4 Amélioration du calcul de Sauvage 112

4.4.1 Position du problème et principe de calcul 112

4.4.2 Conclusions 116

4.5 Calcul des cycles de contraintes 120

4.5.1 Description du modèle de la voie ferrée 120

4.5.2 Procédure de détermination des cycles élastiques 124

4.5.3 Constitution d´une *grille de points cibles* 127

4.5.4 Analyse des résultats : étude de sensiblité aux caractéristiques mécaniques des sous-couches 129

4.6 Conclusion 140

4.1 Introduction

Le présent chapitre se propose de développer sur une infrastructure de transport particulière, que constitue une voie ferrée, l´une des composantes de la méthode de calcul générale exposée au chapitre précédent : celle relative à l´évaluation des cycles élastiques de référence engendrés en tout point de l´infrastructure par le passage de la charge de trafic. La spécificité de ce type d´infrastructure par rapport par exemple à une chaussée routière, réside dans son caractère relativement complexe, puisque les charges de trafic sont transmises à la plate-forme (ballast et couches sous-jacentes) par l´intermédiaire de rails et de traverses distribuées de manière périodique. Un premier élément de réponse à ce type de problème consiste à analyser la façon dont les charges de trafic se répartissent entre les différentes traverses, compte tenu de la rigidité en flexion du rail et des caractéristiques des couches constituant la plate-forme. La solution de ce problème permet d´évaluer la variation dans le temps de l´effort transmis par un appui, qui est la principale donnée d´entrée des essais effectués jusqu´à présent sur le microballast ou le ballast.

Différents modèles de calcul s´efforçant de répondre à cette question seront présentés, comparés à une simulation par éléments finis, et l´on proposera une amélioration de l´un de ces modèles (Sauvage, 1993 [69]), ayant débouché sur la mise au point d´un outil numérique (sections (4.2) à (4.4)).

La dernière section (4.5) de ce chapitre sera plus particulièrement consacrée à l´évaluation à l´aide d´un logiciel de calcul par éléments finis bidimensionnels (PLAXIS), des cycles de contrainte créés en tout point de la plate-forme, et plus précisément au sein de la couche supérieure de ballast, par une charge roulante associée au défilement d´un boggie à deux essieux. Un certain nombre de conclusions seront tirées des résultats de cette analyse en ce qui concerne l´allure des cycles des contraintes, même si de telles conclusions pourront être revues à la lumière de calculs numériques plus réalistes (de type éléments finis ou équations intégrales) prenant notamment en compte le caractère tridimensionnel du problème.

4.2 Situation par rapport aux études antérieures

Dans cette partie nous présentons les études antérieures portant sur le comportement de l´infrastructure du point de vue détermination de la déflexion et de la répartition des efforts sur les blochets. Dans un premier temps, nous exposons les résultats obtenus par Sauvage (1993), en détaillant sa démarche et les hypothèses sur lesquelles il s´est basé pour mener son étude. Ensuite, nous comparerons ses résultats à ceux obtenus par un

calcul avec le logiciel Plaxis.

Une étude plus poussée qui s´intéresse à une structure tridimensionnelle permettra de modéliser la voie ferrée de façon plus exacte. Cette étude peut être considérée comme une extension du travail effectué par Sauvage (1993) en tenant compte d´un certain nombre de paramètres.

Nous avons voulu comparer les résultats d´un calcul réalisé avec le logiciel Plaxis en terme de déflexion et de répartition des efforts par rapport à ceux donnés par Sauvage (1993) et ceux obtenus par un modèle analytique issu de la théorie d'une poutre placée sur des appuis élastiques.

Afin que l'on puisse bien se situer par rapport à ces études, nous avons choisi d'adopter la même structure que celle prise par Sauvage soit un bicouche composé d´une couche de ballast et de grave d´épaisseur 30 cm et de module d´Young 450 MPa qui repose sur une couche de sol d'épaisseur infinie et dont le module d´Young est de 30 MPa (c´est le module qui nous a paru le plus réaliste). Une charge de 100 kN due à l´essieu est appliquée sur le rail modélisé par une poutre.

4.2.1 Le modèle de Winkler

Cette modélisation d'une voie ferrée est la plus simple que l'on puisse imaginer. On en trouve une description dans les ouvrages classiques tels que celui de Timoshenko (1990). Elle consiste à schématiser le rail comme une poutre élastique de rigidité en flexion EI, reposant sur un appui élastique continu de raideur uniforme K_v appelée "module de voie", modélisant l'action de cette dernière sur le rail, et définie comme suit (figure 4.1)

$$p(x) = -K_v z(x) \tag{4.1}$$

où z désigne la flèche du rail au point x, égale à l'opposé du tassement de la voie, et $p(x)$ la densité linéique d'effort exercée par la voie sur le rail. L'équation (4.1) combinée à l'équation d'équilibre de la poutre

$$\frac{d^2M}{dx^2}(x) - p(x) = 0 \tag{4.2}$$

($M(x)$: moment fléchissant), ainsi qu'à loi de comportement moment courbure :

$$M(x) = EI\frac{d^2z}{dx^2} \tag{4.3}$$

conduit à l'équation différentielle suivante donnant la déflexion du rail :

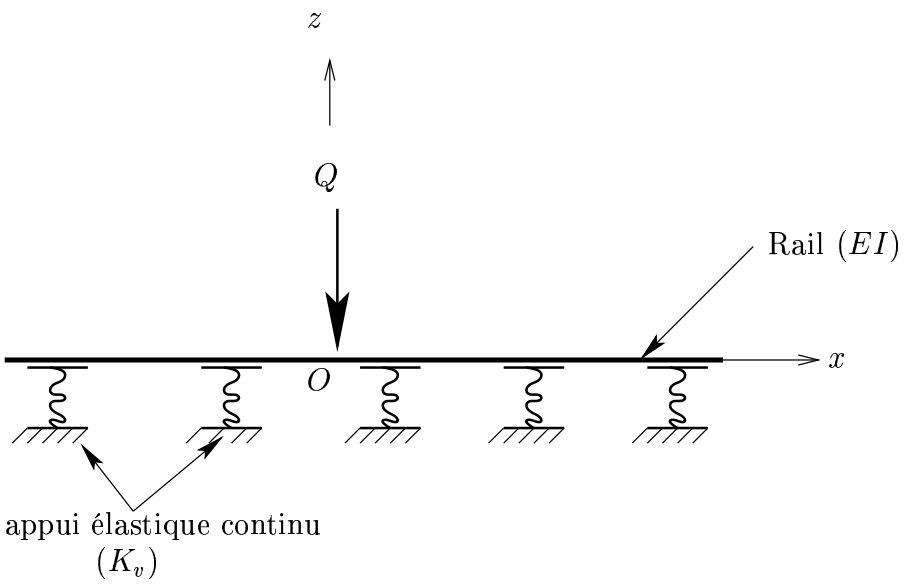


FIG. 4.1: modèle de Winkler

$$d^4z/dx^4 + (K_v/EI)z = 0 \tag{4.4}$$

La solution de cette équation, pour une charge concentrée Q appliquée en $x = 0$, est la suivante :

$$z = (\frac{-Q}{8\alpha^3 EI})exp(\alpha x)(cos(\alpha x) - sin(\alpha x)) \quad si \quad x < 0 \tag{4.5a}$$

$$z = (\frac{-Q}{8\alpha^3 EI})exp(-\alpha x)(cos(\alpha x) + sin(\alpha x)) \quad si \quad x > 0 \tag{4.5b}$$

où :

$$\alpha = (K_v/(4EI))^{\frac{1}{4}} \tag{4.6}$$

α a la dimension de l'inverse d'une longueur.

La courbe de déflexion est alors composée de deux sinusoïdes amorties symétriques par rapport à l´axe vertical (Oz) coïncidant avec la charge appliquée Q. Le tassement au droit du point d'application de la charge ponctuelle, vaut en particulier

$$\delta = -z(x = 0) = \frac{Q}{8\alpha^3 EI} \tag{4.7}$$

4.2.2 Modèle de Sauvage

Le modèle developpé par Sauvage (1993) [69] pour décrire le comportement mécanique d'une voie ferrée diffère du modèle simplifié de Winkler exposé précédemment sur deux points :

- Le contact entre le rail et la plate-forme n'est pas continument distribué, mais se fait à travers une *répartition discrète* de traverses biblocs (c'est-à-dire constituées de deux blochets en béton) régulièrement espacées d'une distance $l = 0,6$ m.

- Contrairement à l'équation (4.1) qui suppose que la déflexion en un point donné de la plate-forme ne dépend que de la valeur de l'effort appliqué en ce même point, le modèle de Sauvage s'efforce de prendre en compte *l'interaction* entre les traverses.

Nous nous proposons ci-après de restituer brièvement le principe de raisonnement suivi par Sauvage. La figure 4.2 représente le rail de raideur en flexion égale à EI en appui sur deux traverses quelconques i et j, qui reposent elles mêmes sur la plate-forme modélisée comme un massif multicouche élastique (ballast+grave+sol).

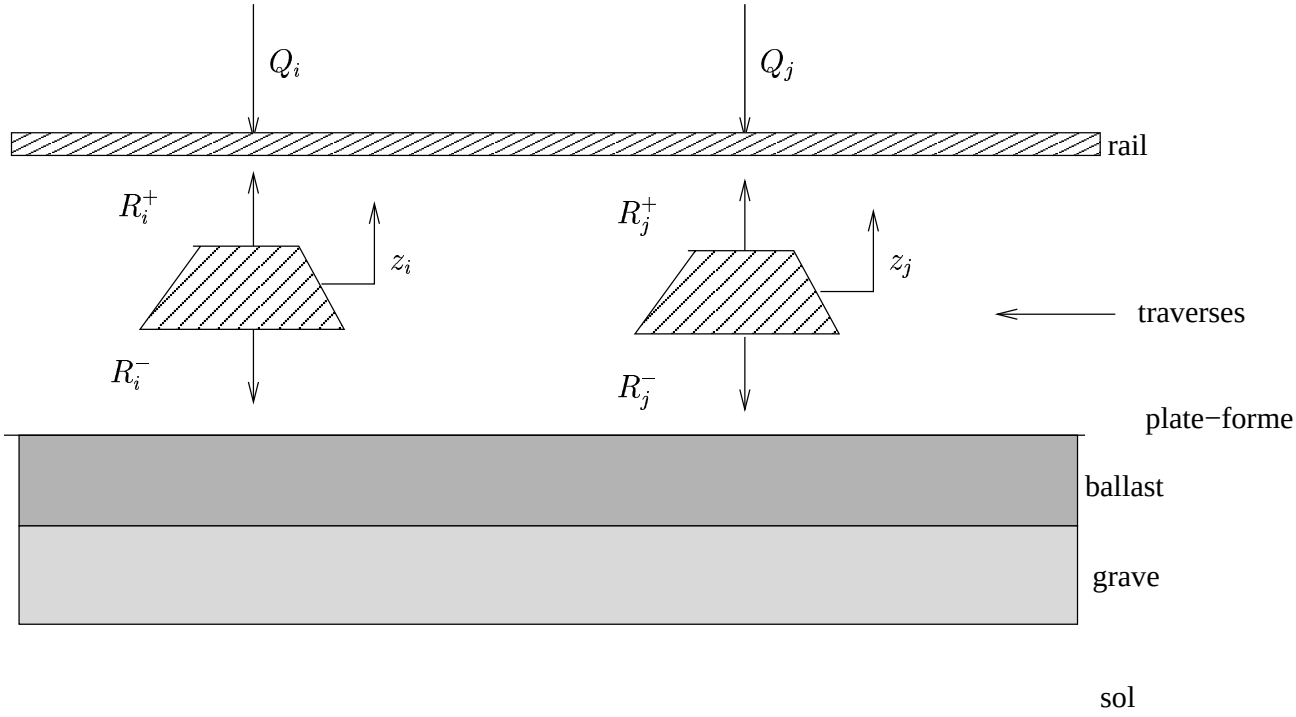


FIG. 4.2: modèle de Sauvage (1993)

On désigne alors par :

- z_i le déplacement (supposé purement vertical) de la traverse n°i, supposé égal à la

déflexion du rail (compté positif vers le haut).

- Q_i l'effort extérieur (charge ponctuelle verticale) appliqué sur le rail situé au dessus de la traverse n°i.

- et R_i^+ (resp.R_i^-) l'effort (intérieur au système rail+traverses+plate-forme) appliqué par la traverse n°i sur le rail (resp. sur la plate-forme).

La réponse de la plate-forme étant supposée élastique, on désigne par K_{ij}^- la valeur de l'effort R_i^- qui apparaît sous la traverse n°i lorsque l'on impose un déplacement unitaire à la traverse j ($z_j = 1$) toutes les autres traverses étant bloquées ($z_k = 0$, $k \neq j$). On peut donc écrire en raison de la linéarité du problème :

$$R_i^- = K_{ij}^- z_j \tag{4.8}$$

La matrice des K_{ij}^-, symétrique ($K_{ij}^- = K_{ji}^-$), est la *matrice de rigidité globale* de la plate-forme. Le même type de relation peut être écrite pour le rail soumis aux efforts R_i^+ exercés par les traverses d'une part, aux charges extérieures d'autre part :

$$Q_i + R_i^+ = K_{ij}^+ z_j \tag{4.9}$$

où K_{ij}^+ est la matrice de rigidité du rail que l'on peut aisément calculer en fonction de sa rigidité à la flexion EI et de l'espacement l entre les traverses. Faisant la somme des relations (4.8) et (4.9) il vient :

$$Q_i + (R_i^+ + R_i^-) = (K_{ij}^+ + K_{ij}^-) z_j \tag{4.10}$$

En tenant compte du fait que chaque traverse est en équilibre sous l'action des efforts qui lui sont appliqués par le rail ($-R_i^+$) et la plate-forme ($-R_i^-$), c'est-à-dire

$$\forall i, \quad R_i^+ + R_i^- = 0 \tag{4.11}$$

on obtient la relation matricielle

$$Q_i = (K_{ij}^+ + K_{ij}^-) z_j \tag{4.12}$$

L'inversion de cette relation permet de calculer la déformée du rail associée aux déplacements z_i des traverses en fonction des efforts extérieurs appliqués Q_i.

L'évaluation des coefficients K_{ij}^{-} qui caractérisent la réponse de la plate-forme est faite à partir des formules de Boussinesq extrapolées au cas d'un massif multicouche élastique, la surface de contact rectangulaire entre les blochets et la couche de ballast étant remplacée par une surface circulaire de même aire.

Les caractéristiques des différentes couches retenues par Sauvage sont les suivantes

- Une couche de ballast caractérisée par un module d´Young E_b variant entre 300 et 450 MPa et une épaisseur e_b.
- Une couche de grave de raideur E_g comparable à E_b et d´épaisseur e_g. $e_b + e_g = 30$ cm, $E_g = 450$ MPa.
- Une plate-forme constituée d´un sol de module d´Young E_{sol} et d´épaisseur e_{sol}.
  Le module de cette couche est déterminé expérimentalement par l´essai C.B.R.(Californian Bearing Ratio) ou par l´essai à la plaque. Sa valeur dépend de la qualité du sol dont la classification préconisée par la *SNCF*, que l´on retrouve dans (Sauvage, 1993) est la suivante :

  1. Sol *mou* : catégorie $QS1$, $E_{sol} = 12,5$ à $25MPa$.
  2. Sol *moyen* : catégorie $QS2$, $E_{sol} = 25MPa$ à $80MPa$.
  3. Sol *raide* : catégorie $QS3$, $E_{sol} > 80MPa$.

  Dans les différents calculs effectués par Sauvage, la raideur du sol pouvait varier entre 5 et 100 MPa.

Comparaison avec le modèle de Winkler

Même si le modèle de Sauvage donne des résultats plus représentatifs que ceux fournis par le modèle de Winkler, car reposant sur des données mesurables concernant les modules d'élasticité des couches de la plate-forme, l'utilisation de ce dernier est beaucoup plus simple, car reposant directement sur l'exploitation d'une formule analytique telle que (4.5). Elle nécessite en revanche la connaissance d'un module de voie K_v, non directement accessible à l'expérience. Ce module peut être en revanche déterminé de la manière suivante à partir de la comparaison entre les deux modèles. Etant donné une voie ferrée reposant sur un sol dont la raideur est égale à $E_{sol} = 30$ MPa, toutes les autres caractéristiques étant fixées, l'exploitation du calcul numérique relatif au modèle de Sauvage donne la courbe $C3$ représentée sur la figure 4.3, correspondant à l'application d'une charge ponctuelle unité appliquée en $x = 0$. L'adoption d'un module de voie $K_v = 13,28$ MPa dans les formules 4.5 permet de tracer la courbe C_2 telle que la déflexion maximale en $x = 0$ est identique pour les deux courbes. La courbe C_1 est quant à elle une courbe de la forme (4.5) pour laquelle le module de voie retenu est égal à $K_v = 18,09$ MPa. Cette dernière courbe étant approximativement translatée de la courbe C_3, la courbure du rail et donc la distribution des moments fléchissants est proche de celles correspondant à la

courbe C_3. Répétant cette même opération en faisant varier le module du sol E_{sol}, on obtient par le biais d'une telle identification une relation linéaire du type :

$$K_v = 0,6E_{sol} \tag{4.13}$$

dans le cas où le module du ballast est pris égal à $E_b = 450$ MPa. Une telle relation permet alors d'utiliser directement le modèle de Winkler c'est-à-dire les formules analytiques (4.5) qui donnent la déflexion z de la voie, ainsi que l'équation (4.1) qui intégrée sur un intervalle de part et d'autre de chaque traverse permet de calculer les efforts repris par chacune d'entre elles.

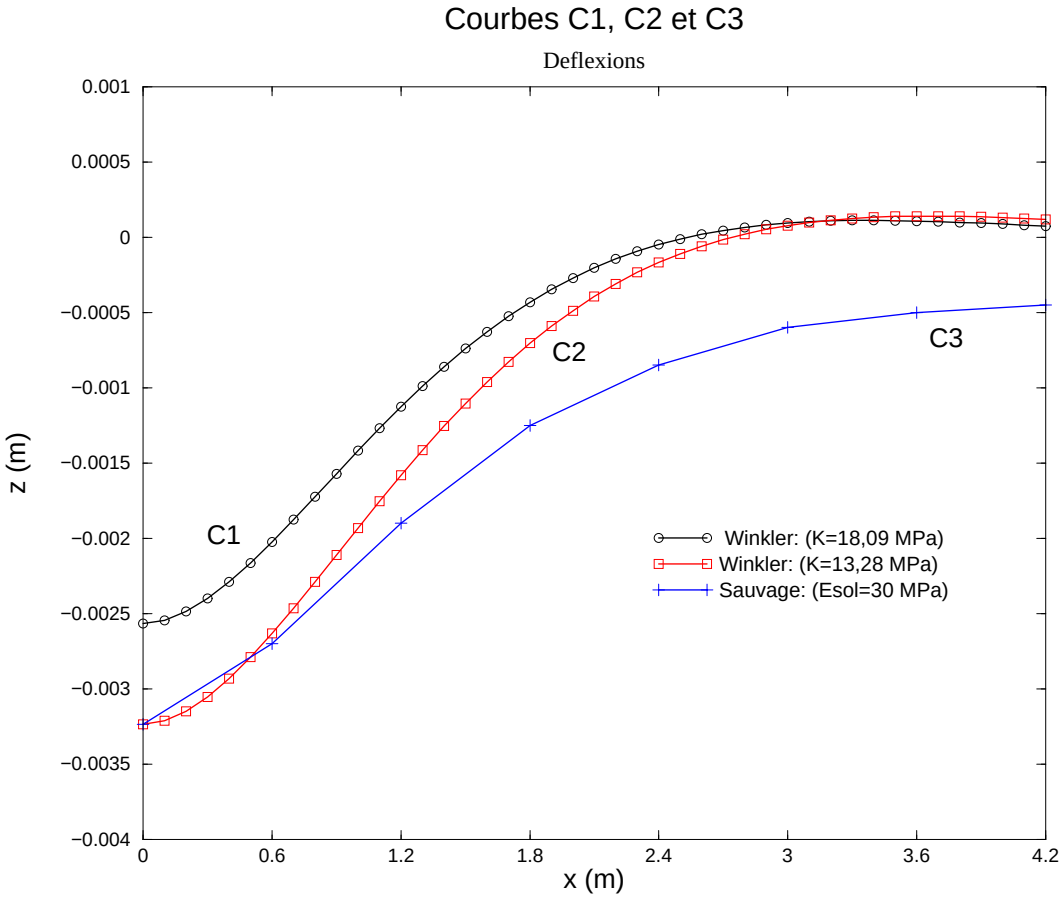


FIG. 4.3: calage des résultats de Sauvage sur le modèle de Winkler

4.3 Comparaison avec un calcul par éléments finis (PLAXIS)

4.3.1 Présentation du logiciel PLAXIS

L´intérêt principal du code de calcul que nous allons utiliser (PLAXIS), outre sa grande convivialité, est de pouvoir effectuer des simulations d´ouvrages comprenant des éléments de structures de type "poutre" (dans notre exemple : rail) en interaction avec des éléments de type milieu continu bidimensionnel (déformation plane).

Le logiciel employé est PLAXIS 7.2 [84] qui est un code de calcul par éléments finis conçu pour les analyses de sols et de roches. Le calcul réalisé par PLAXIS est un calcul de structure *bidimensionnel*. Nous décrivons ci-après, très rapidement les principales fonctionnalités de ce logiciel.

1. Entrées du programme (module INPUT)
   - Données géométriques :
     - ⋆ dimensions des couches de matériaux ;
     - ⋆ structures : poutres, interfaces, ancrages, géotextiles, tunnels, etc...
   - Modèles de comportement des matériaux : linéaire élastique, Mohr-Coulomb avec plasticité associée ou non, Cam-Clay, élastoplastique type hyperbolique, etc...
   - Sollicitations : la charge appliquée peut être concentrée (nodale) ou uniformément répartie ou imposée sous la forme de déplacements.
   - Conditions aux limites : en déplacement vertical, horizontal ou rotation.
   - Maillage automatique : peut être généré globalement ou localement. On dispose d'éléments triangulaires à 6 et à 15 noeuds. Le maillage de la structure modélisée nécessite des contours fermés.
2. Calcul (module CALCULATIONS)
   - On peut sélectionner des noeuds du maillage pour lesquels on trace les courbes charge/déplacement ou contrainte/déformation.
   - Le calcul peut être fait en plusieurs phases. Pour chaque phase on définit si le calcul est de type consolidation, élastoplastique etc... Dans le cas élastoplastique, il est plus commode de faire les calculs en plusieurs étapes (phases). Le chargement total est alors automatiquement décomposé en plusieurs incréments et pour chaque incrément de chargement il est possible de spécifier le nombre maximal d´itérations.

- Pendant l'analyse des déformations, il est nécessaire de contrôler l'amplitude de tout type de sollicitation (effort ou déplacement). En général, les sollicitations sont contrôlées à l'aide d'un système de multiplicateurs. Les chargements à appliquer sont calculés à partir du fichier INPUT en affectant des multiplicateurs à ces chargements.

3. Sorties du programme (module OUTPUT)

   Les résultats sont donnés sous forme de tableaux, coupes, courbes...
   - les déformations, les déformées ;
   - les déplacements : vertical et horizontal ;
   - Les contraintes : effectives, de cisaillement, totales, les points plastiques, les moments fléchissants etc...

Nous avons réalisé une *modélisation bidimensionnelle* (déformation plane) de la voie ferrée et ses sous-couches qui est décrite ci-après.

4.3.2 Description du modèle de la voie ferrée

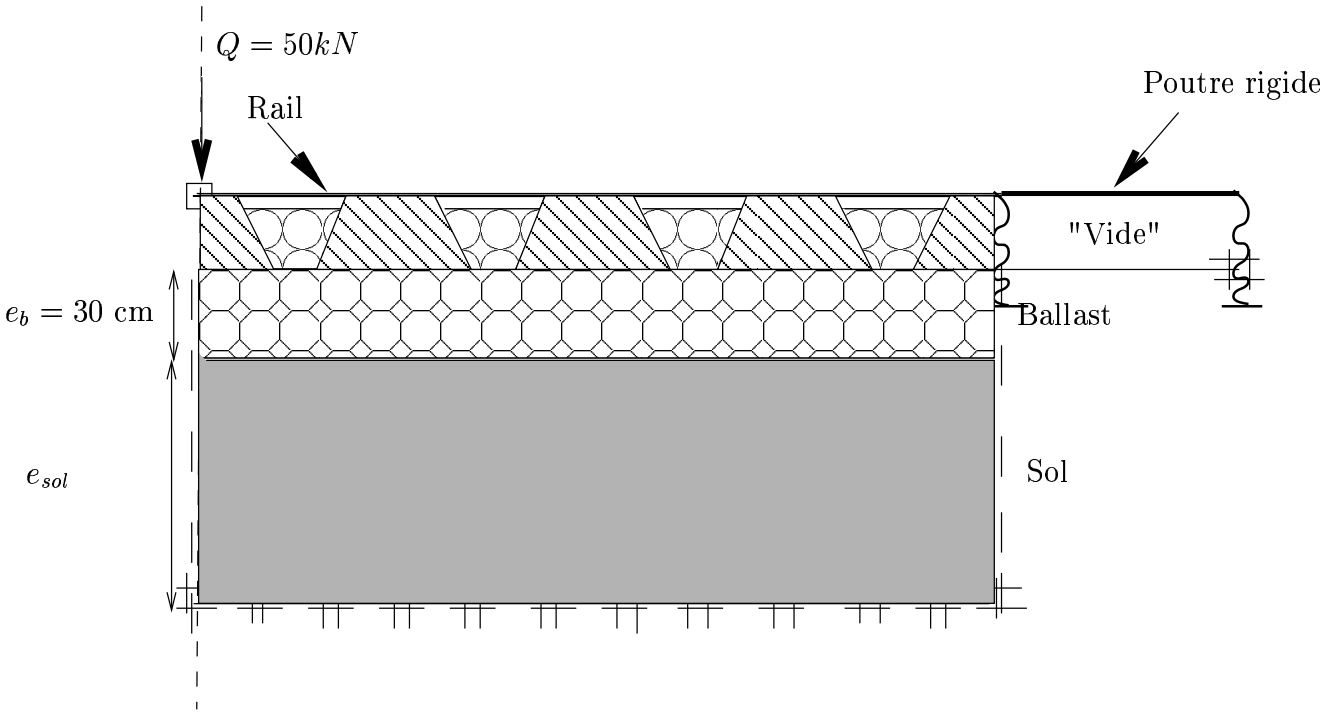


FIG. 4.4: modélisation de la voie ferrée

Afin de modéliser un tronçon de voie ferrée typique, nous avons considéré la structure bi-couches constituée d´une couche inférieure de sol et d´une couche de ballast. Sur la couche

de ballast reposent des blochets en béton (figure 4.4). Les caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches de matériaux sont présentées dans le tableau (4.1). Le choix des caractéristiques et des épaisseurs des couches de matériaux a été fait en se basant sur les données de Sauvage concernant le module d´Young.

Matériau	épaisseur(m)	E(MPa)	ν	γ (kN/ m^3)
Sol	1,4	30	0,4	18
ballast	0,3	450	0,3	18
Béton	0,26	4.10^4	0,2	25
"Vide"	0,26	10^{-4}	0,2	0,1

TAB. 4.1: caractéristiques des matériaux

Conditions aux limites Ne nous intéressant qu´à une portion de la voie ferrée d´extension horizontale limitée, il est important de bien choisir les conditions aux limites. Sous l´effet de la charge ponctuelle, seul le déplacement vertical de la structure au point d´application de la charge est autorisé ; nous avons donc choisi de bloquer le déplacement horizontal des bords latéraux de la structure. Concernant la face inférieure du sol, nous avons bloqué les déplacements horizontal et vertical. Une charge ponctuelle s´applique au niveau de l´axe de symétrie de la structure, elle a pour valeur $Q = 100/2$ kN $= 50$ kN (compte tenu de la symétrie). Nous avons en outre bloqué le rail en rotation au niveau de l´axe de symétrie.

Le rail n´étant en contact avec la voie qu´à travers les blochets, il existe un espacement vide entre chaque poutre de rail situé entre deux blochets et le ballast. Ce "vide" a été modélisé par un matériau de très faibles raideurs et poids volumique.

Un autre point important a été soulevé, qui concerne la condition aux limites à appliquer à l´extrémité droite du rail afin de tenir compte de l´extension infinie de la voie. Une telle condition aux limites est imposée par l´intermédiaire d´un système constitué d´une barre rigide de longueur L prolongeant le rail et reposant sur deux ressorts de raideur K^* comme schématisé sur la figure (4.4). L´idée est d´ajuster les paramètres L et K^* constitutifs de ce modèle de façon à ce que son comportement sous l´action d´un effort vertical T et d´un couple C soit identique à celui d´une poutre semi-infinie de raideur en flexion EI en appui élastique continu (module K_v).

Désignant alors respectivement par δ et θ le déplacement et la rotation associés à l´application des efforts (T, C), on obtient :

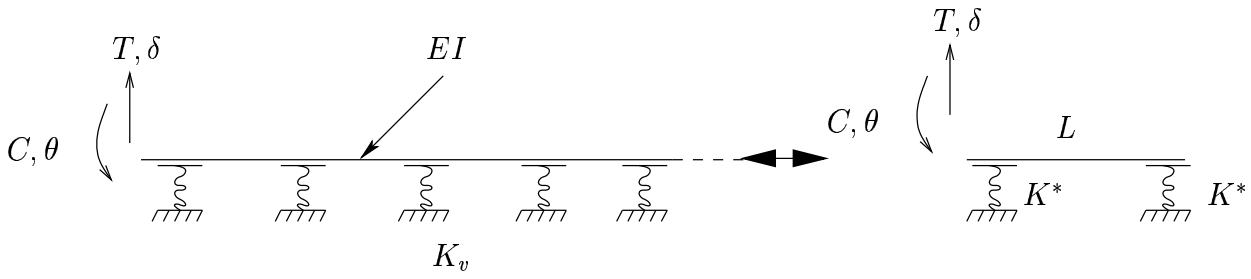


FIG. 4.5: système barre-ressorts équivalent à une poutre semi-infinie sur appui élastique

$$\begin{pmatrix}\delta\\ \theta\end{pmatrix} = \frac{l^2}{2EI}\begin{pmatrix} l & 1\\ 1 & \frac{2}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\\ C\end{pmatrix} \tag{4.14}$$

avec $l = (4EI/K_v)^{1/4}$, pour la poutre semi-infinie sur appui élastique continu (modèle de Winkler), ainsi que

$$\begin{pmatrix}\delta\\ \theta\end{pmatrix} = \frac{1}{K^*L}\begin{pmatrix} L & 1\\ 1 & \frac{2}{L}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} T\\ C\end{pmatrix} \tag{4.15}$$

pour ce qui concerne le système barre+ressorts. Choisissant de prendre $L = l$, il apparaît que le système barre+ressorts donne une réponse identique à celle de la poutre semi-infinie lorsque l´on prend

$$K^* = \frac{2EI}{l^3} \tag{4.16}$$

Cette équation suppose d´avoir déterminé au préalable la rigidité en flexion du rail EI d´une part, le module de voie K_v à travers l d´autre part.

Afin de déterminer la rigidité EI du rail, nous avons considéré la courbe tracée par Sauvage donnant l´enfoncement maximal du rail en fonction du module de voie K_v. Ainsi, pour $K_v = 10000$ kPa par exemple et pour un enfoncement maximal à l´origine de 4 mm, nous utilisons l´équation (4.5) pour $x = 0$, ce qui donne $EI = 6090$ kNm^2, correspondant à une raideur égale à 7250 kNm^2/m compte tenu de la largeur du blochet (0,84 m). Le module de voie est quant à lui déterminé par un calcul Plaxis effectué sur la même structure mais en l´absence de rail, comme indiqué sur la figure (4.6).

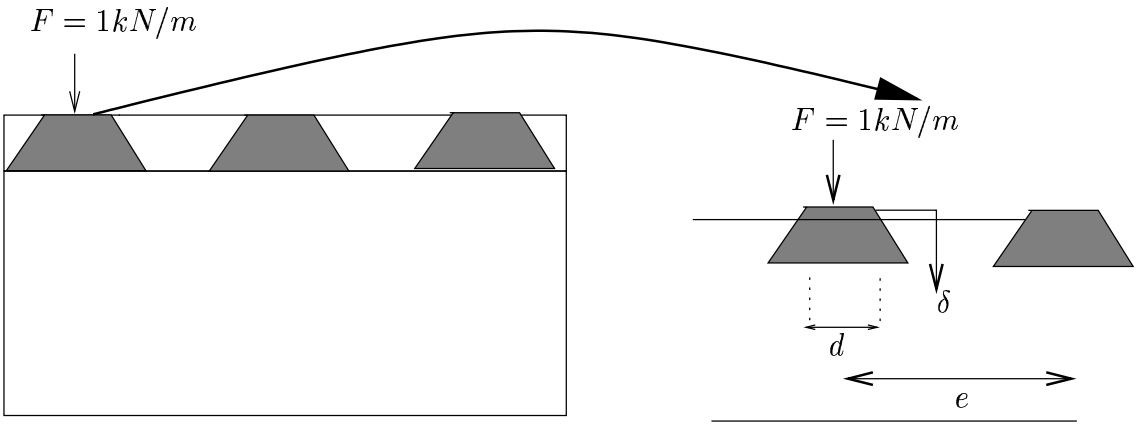


FIG. 4.6: évaluation du module de voie K_v

On obtient ainsi :

$$K_v(\text{kPa}) = 0,84\frac{Fd}{\delta e} = 78 \quad \text{MPa} \tag{4.17}$$

Les caractéristiques de la structure additionnelle (barre+ressort) sont donc : $l = L = 0,74$ m et $K^* = 30$ MN/m.

Dans les simulations que nous avons faites, nous avons utilisé un maillage avec des éléments triangulaires à 15 noeuds (1 noeud par sommet, 3 noeuds par arête et 3 noeuds au centre du triangle). Le maillage est automatique, mais nous avons la possibilité de le rendre plus fin ou plus grossier globalement ou localement.

4.3.3 Comparaisons des résultats des modèles de Winkler, de Sauvage et du calcul Plaxis

A partir des simulations faites avec le code de calcul Plaxis dans lesquelles nous avons fait varier le coefficient de Poisson du sol ($\nu = 0; 0,2; 0,4$)[1], nous avons déterminé la déformée du rail ainsi que les réactions des appuis que nous avons comparées aux résultats obtenus par Sauvage (1993) [69].

Nous remarquons à partir de la figure 4.7, que le coefficient de Poisson du sol a une influence sur la déflexion de la voie, mais que ces valeurs de déflexion restent inférieures (en valeur absolue) à celles obtenues par la modélisation de Sauvage. La figure 4.8 donne les réactions d´appuis (blochets). Nous constatons qu´avec le calcul Plaxis nous obtenons des réactions plus importantes que celles obtenues analytiquement ou avec la modélisation de Sauvage.

[1] à noter que les calculs de Sauvage n´intégrent pas explicitement ce coefficient

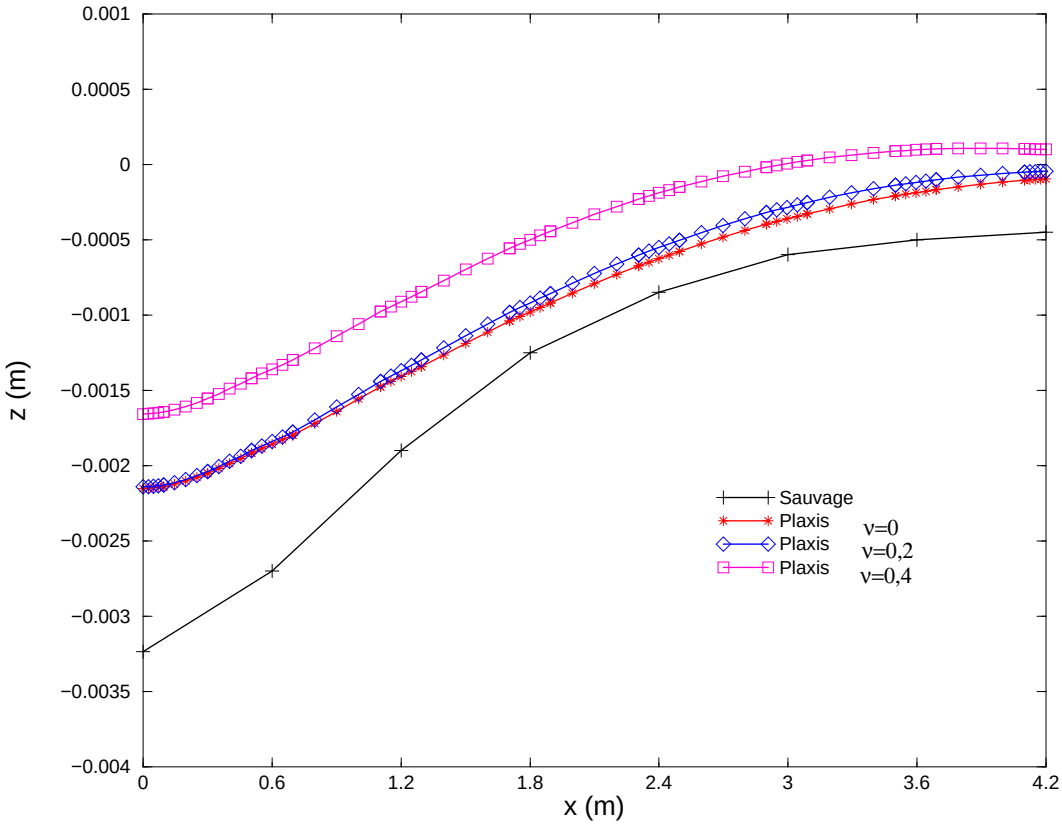


FIG. 4.7: délexion : comparaisons des résultats Plaxis-Sauvage

Une des explications possibles de cet écart constaté réside peut être dans le fait que le calcul PLAXIS, contrairement aux modèles de Winkler et Sauvage, prend en compte la *rigidité en rotation* des appuis. Nous proposons ci-après d´examiner sur le modèle de Winkler comment une telle prise en compte contribue à rigidifier la structure.

Influence de la prise en compte des rigidités en rotation des blochets Pour étudier si la prise en compte de la raideur en rotation des blochets entraîne une différence significative entre les résultats de Sauvage, les résultats analytiques et les résultats obtenus par les simulations par Plaxis en termes de déflexions et de réactions d´appuis, nous avons résolu l´équation (4.4) en y ajoutant un terme traduisant la raideur en rotation des appuis, ce qui nous amène à résoudre l´équation différentielle suivante :

$$\frac{d^4z}{dx^4} - \gamma\frac{d^2z}{dx^2} + (\frac{K_v}{EI})z = 0 \tag{4.18}$$

où γ désigne la raideur en rotation des appuis défini par

$$m(z) = -\gamma\frac{dz}{dx} \tag{4.19}$$

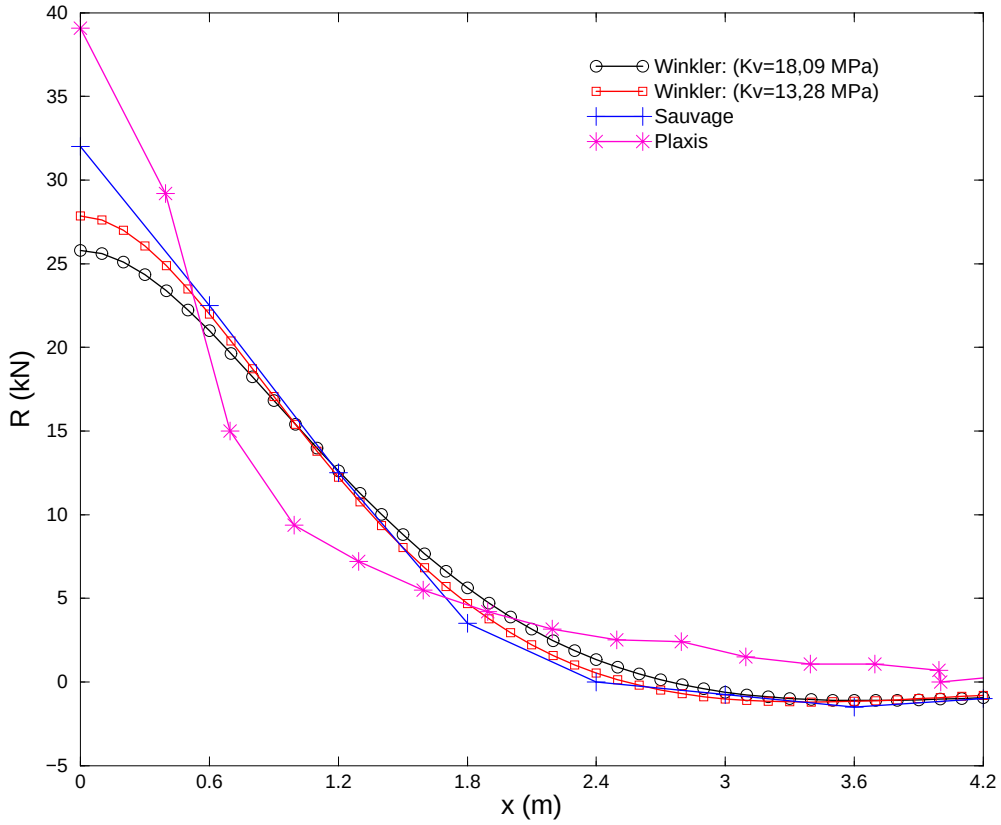


FIG. 4.8: réactions d´appuis : comparaisons des résultats Plaxis-Sauvage-Winkler

$m(z)$ étant la densité linéique de moments exercée par l´appui élastique sur le rail. Compte tenu des conditions aux limites, c´est-à-dire une rotation nulle au point d´abscisse $x = 0$ et un effort tranchant donné par (4.20) :

$$EI\frac{d^3z}{dx^3} = \frac{Q}{2} \tag{4.20}$$

la solution de l´équation (4.18) est la suivante :

$$z = \Big[\frac{Q}{2EI(2N^3 + NM^2 + MN^2)}\Big] exp(-Nx)\big(cos(Mx) - sin(Mx)\big) \tag{4.21}$$

où l´on a posé :

$$N = \alpha(1+b)^{1/2}, \quad M = \alpha(1-b)^{1/2} \quad , \alpha = (K_v/(4EI))^{\frac{1}{4}} \quad \text{et} \quad b = \frac{\gamma}{2(K_vEI)^{1/2}} \tag{4.22}$$

Une évaluation de la valeur de γ a été obtenue grâce à une simulation par le logiciel Plaxis. N´ayant pas la possibilité de modéliser une rotation du blochet, nous avons appliqué une force unitaire sur l´un des coins supérieurs d´un blochet et la même force mais

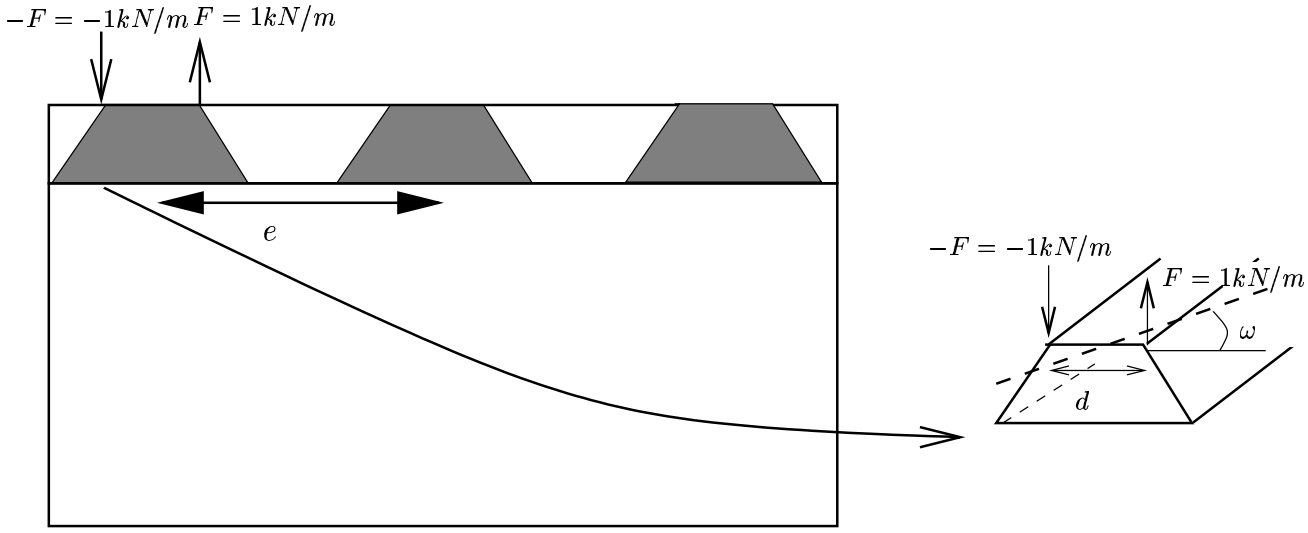


FIG. 4.9: évaluation de γ

de valeur opposée sur l´autre coin, ce qui est équivalent à l´application d´un couple de forces. Nous obtenons ainsi la rotation du blochet ω due à l´application de ce couple et l´évaluation correspondante du paramètre γ.

$$\gamma(\text{kN/m}) = 0,84\frac{Fd}{\omega e} = 8328,42 \quad \text{kN/m} \tag{4.23}$$

Pour un même module de voie (18,09 MPa) par exemple, nous remarquons à partir de la figure 4.10 que la prise en compte de la rigidité en rotation des appuis a tendance à raidir la structure. Ceci laisse penser que si dans le modèle de Sauvage, qui tient compte de l´interaction entre les blochets, nous introduisons les rigidités en rotation des appuis, cette nouvelle "version" du modèle de Sauvage donnerait peut être des résultats plus proches de ceux que nous obtenons avec la modélisation par PLAXIS.

L´hypothèse ci-dessus n´est pas la seule à pouvoir expliquer les différences constatées. En effet, la modélisation réalisée par Sauvage est tridimensionelle, tandis que les simulations réalisées par PLAXIS sont bidimensionnelles. Cette différence pourrait expliquer l´écart entre les résultats. D´autres paramètres tels que la prise en compte du couplage entre les blochets, l'influence de la prise en compte de la présence de deux files de rail (deux blochets dans la direction transversale à la voie) sont à considérer. Dans ce qui suit, nous étudions la possibilité d´améliorer le modèle semi-analytique de Sauvage.

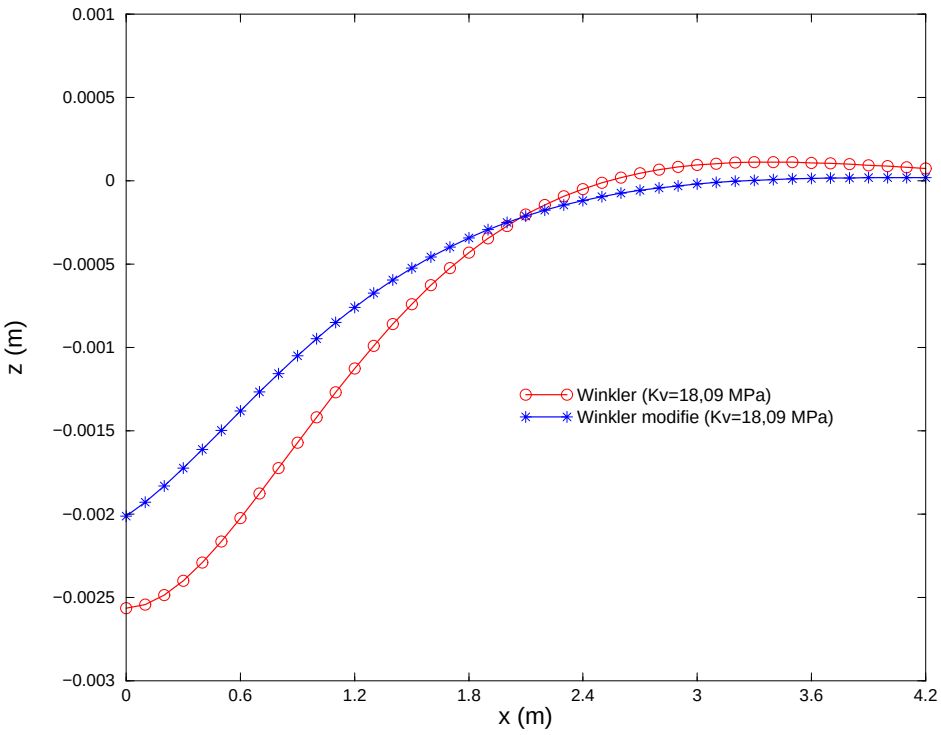


FIG. 4.10: influence de la prise en compte de la rigidité en rotation sur les résultats du modèle de Winkler

4.4 Amélioration du calcul de Sauvage

Dans cette partie, nous nous inspirons de l´étude faite par Sauvage et nous proposons une extension permettant en particulier de tenir compte des raideurs en rotation des appuis. Nous considérons une structure bicouche comportant des blochets (appuis). Nous modélisons cette structure considérée comme une poutre sur appuis élastiques en introduisant ses caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que l´effort qui s´y exerce (dû au passage du boggie) et les déplacements aux appuis. Nous nous ramenons donc à un problème d´équilibre élastique qu´il faudra résoudre en employant les méthodes variationnelles.

4.4.1 Position du problème et principe de calcul

La figure (4.11) ci-dessous généralise le schéma de calcul de Sauvage de la figure (4.2) en prenant en compte les rigidités en rotation des blochets.

On désigne par :

- z_i et θ_i le déplacement et la rotation du blochet n°i $(i = 1, ..., n)$.
- F_i^+ et C_i^+ (resp. F_i^- et C_i^-) la résultante et le moment des efforts appliqués par le blochet n°i sur le rail (resp. la plate-forme) ;

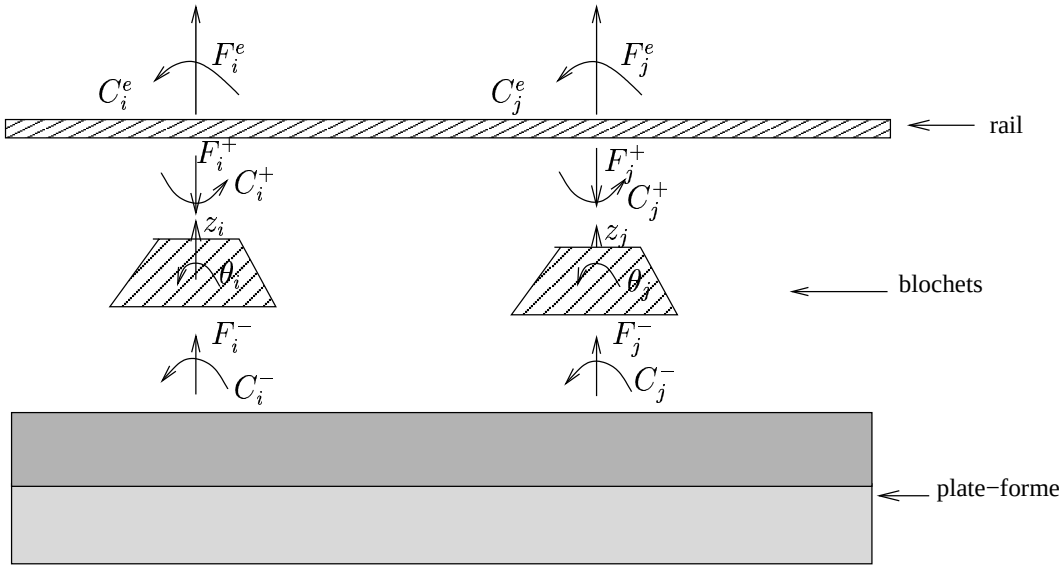


FIG. 4.11: amélioration du modèle de Sauvage

- F_i^e et C_i^e la résultante et le moment des efforts extérieurs (charge roulante) appliqués sur le rail au droit du blochet n°i.

On pose alors pour $I = 1, ..., 2n$

$$\delta_I = \begin{cases} u_i & \text{si } I = 2i-1 \\ \theta_i & \text{si } I = 2i \end{cases} \tag{4.24}$$

ainsi que :

$$R_I^{\pm} = \begin{cases} F_i^{\pm} & \text{si } I = 2i-1 \\ C_i^{\pm} & \text{si } I = 2i \end{cases} \tag{4.25a}$$

et

$$Q_I = \begin{cases} F_i^e & \text{si } I = 2i-1 \\ C_i^e & \text{si } I = 2i \end{cases} \tag{4.25b}$$

de sorte que $\delta_I, I = 1, ..., 2n, R_I^{\pm}, I = 1, ..., 2n$ et $Q_I, I = 1, ..., 2n$ constituent respectivement les vecteurs de déplacements généralisés, efforts intérieurs et extérieurs généralisés. La réponse *élastique* de la plate-forme se traduit par la relation :

$$R_I^- = K_{IJ}^- \delta_J \tag{4.26}$$

où K_{IJ}^- désigne la valeur de l´effort généralisé (force ou moment selon la valeur de I) lorsque l´on impose $\delta_J = 1$ les autres δ_K étant fixés à la valeur nulle. Compte tenu

du principe de réciprocité (Maxwell-Betti) la matrice de rigidité de la plate-forme est symétrique.

$$K_{IJ}^{-} = K_{JI}^{-} \tag{4.27}$$

De même, la réponse *élastique* du rail se traduit par

$$Q_I + R_I = K_{IJ}^{+}\delta_J \tag{4.28}$$

avec

$$K_{JI}^{+} = K_{IJ}^{+} \tag{4.29}$$

L´équilibre des blochets en résultante et moment s´écrivant

$$\forall I \quad R_I^{+} + R_I^{-} = 0 \tag{4.30}$$

il vient en faisant la somme de (4.26) et (4.28) et en adoptant la relation matricielle :

$$[Q] = ([K]^{+} + [K]^{-})[\delta] \tag{4.31}$$

Il reste à calculer les matrices de raideur du rail $[K]^{+}$ et de la plate-forme $[K]^{-}$.

4.4.1.1. Résultats des calculs

Nous avons élaboré un programme Fortran permettant d´obtenir les déplacements et les efforts aux noeuds de la structure, c´est-à-dire au niveau des blochets, en fonction du chargement appliqué. Les résultats nous permettent de traçer ensuite la déformée du rail et la répartition des efforts sur les blochets. Nous avons paramétré notre programme de façon à pouvoir faire le choix entre plusieurs cas de figure :

- Calcul bidimensionnel ou tridimensionnel des raideurs d´appui et des coefficients d´interaction.
- Prise en compte ou non de la raideur en rotation.
- Prise en compte ou non du couplage entre les appuis.
- Prise en compte ou non de l´influence des deux blochets symétriques.
- Mode de calcul des raideurs de déplacement vertical et de rotation, c´est-à-dire que les valeurs de ces raideurs sont calculées par le programme à partir de la donnée du module d´Young du sol à partir des relations données dans Gazetas (1991) [26] ou sont entrées directement en se basant sur les résultats du calcul Plaxis (bidimensionnel).

Nous avons établi un code qui nous permet d´identifier pour chaque calcul, les différents paramètres dont on tient compte. Ce code est constitué de cinq chiffres écrit sous la forme $a-b-c-d-e$.

- a indique la dimension du problème donc a prend la valeur 2 si le calcul est bidimensionnel et 3 s´il est tridimensionnel.

- b indique le fait de tenir compte ou non de la raideur en rotation donc b prend la valeur 1 s´il y a prise en compte de cette raideur et 0 dans le cas contraire.

- c indique le fait de tenir compte ou non du couplage entre les appuis donc c prend la valeur 1 s´il y a prise en compte de ce couplage et 0 dans le cas contraire.

- d indique le fait de tenir compte ou non de l´influence des deux blochets symétriques donc d prend la valeur 1 s´il y a prise en compte de cette influence et 0 dans le cas contraire.

- e indique le mode de calcul des raideurs verticale et de rotation. Dans tous les calculs que nous avons réalisés la valeur de e a été prise égale à 0, ce qui signifie que le paramètre G est calculé à partir des paramètres d´élasticité du sol ($G = E_{sol}/2(1+\nu)$).

Nous présentons ci-après les différents résultats donnés par le programme pour le cas d´une voie ferrée soumise à une seule charge verticale ponctuelle appliquée sur un blochet, c´est-à-dire lorsque le vecteur des efforts extérieurs se réduit à

$$Q_I = \begin{cases} Q & \text{si } I = 2i-1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{4.32}$$

où i désigne le numéro du blochet sur lequel est appliquée la charge verticale Q.

La figure (4.12) représente quatre courbes donnant la déflexion du rail dans le cas de calculs 2D et 3D ($a = 2, 3$) et en tenant compte ou non de la raideur en rotation des blochets ($b = 0$ ou 1). Il apparaît que pour le jeu de valeurs retenues dans les calculs, l´effet de la prise en compte ou non de la raideur en rotation est négligeable, tandis que la prise en compte du caractère tridimensionnel du problème a une influence notable : la courbe de déflexion du rail est en effet beacoup plus étalée dans le cas 3D que dans le calcul 2D. Ce résultat est confirmé par la figure (4.13) qui représente les courbes donnant la répartition des réactions d´appui. Le calcul 3D donne des valeurs de ces réactions plus importantes au niveau du blochet situé au point d´application de la charge ainsi qu´à celui des deux blochets adjacents. La figure (4.14) donne le même type de courbes que la figure (4.12), la condition de couplage entre blochets étant ou non prise en compte. Elle montre que l´influence de cette dernière condition sur le résultat du calcul est importante notamment dans le calcul 2D, dans une moindre mesure en ce qui concerne le calcul 3D. La prise en compte d´un tel couplage contribue à accentuer la déflexion du rail au

voisinage du point d´application de la charge. La figure (4.15) en revanche, relative à la répartition des efforts sur les blochets, semble montrer que l´influence de la prise en compte ou non de ce couplage est beaucoup plus limitée. Les figures (4.16) et (4.17) permettent d´évaluer, dans le cas du calcul 3D, l´influence de la prise en compte ou non de l´interaction entre les deux blochets d´une même traverse. Cette influence apparait négligeable en ce qui concerne la répartition des efforts sur les blochets, plus marquée pour ce qui est des déplacements.

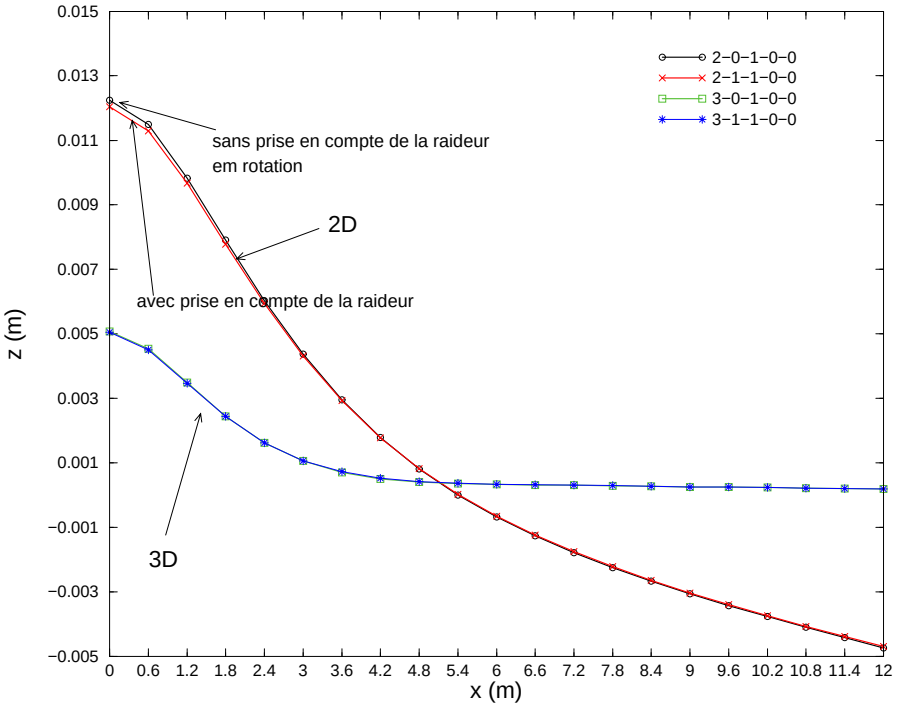


FIG. 4.12: effet de la prise en compte de la raideur en rotation sur le déplacement des blochets

4.4.2 Conclusions

L´exploitation des résultats obtenus par l´outil de calcul résultant de la généralisation du modèle de Sauvage a permis de mettre en évidence deux aspects qu´il convient de prendre en compte dans ce type de calcul : l´interaction entre les blochets d´une part, le caractère tridimensionnel du problème d´autre part. L´évaluation des cycles de contrainte engendrés localement en tout point de la plate-forme devra être faite à partir de codes numériques (éléments finis ou équations intégrales) intégrant ces différents aspects. Nous nous limitons ci-après au calcul de ces cycles dans un cadre bidimensionnel à l´aide du logiciel PLAXIS.

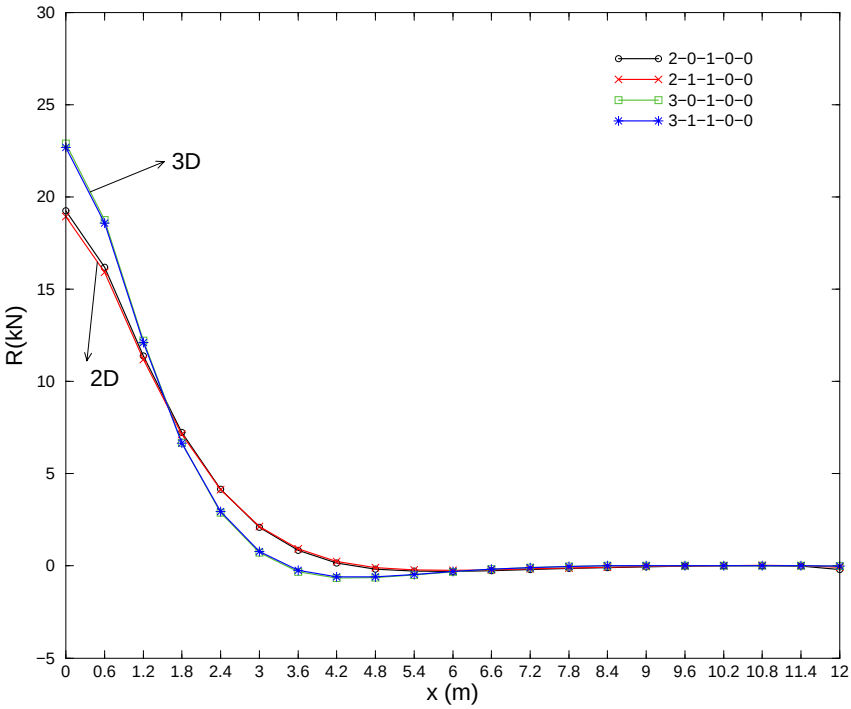


FIG. 4.13: effet de la prise en compte de la raideur en rotation sur les réactions d´appuis

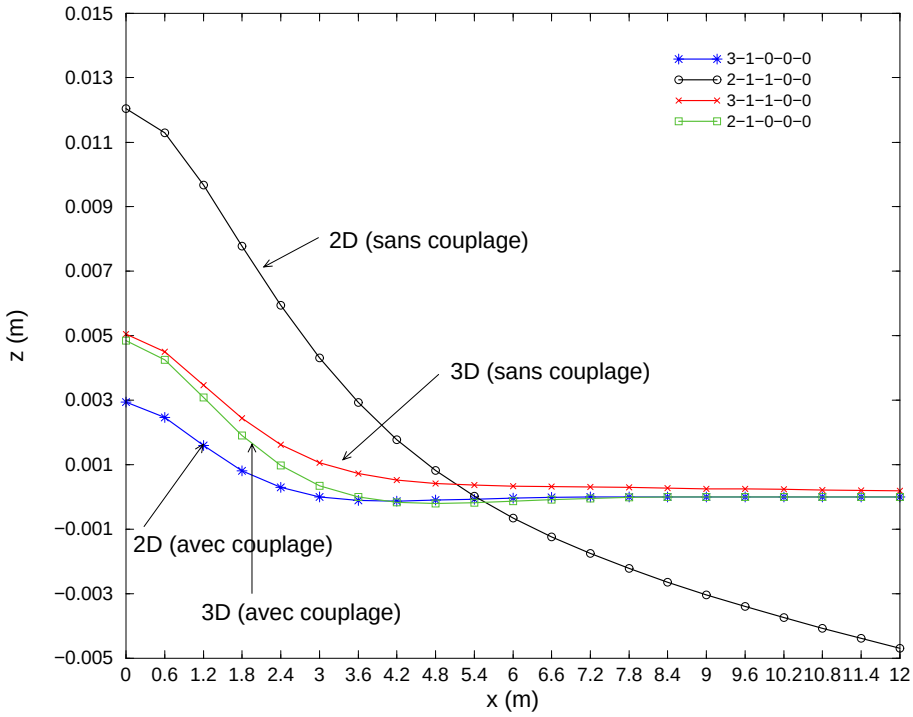


FIG. 4.14: effet de la prise en compte du couplage sur le déplacement des blochets

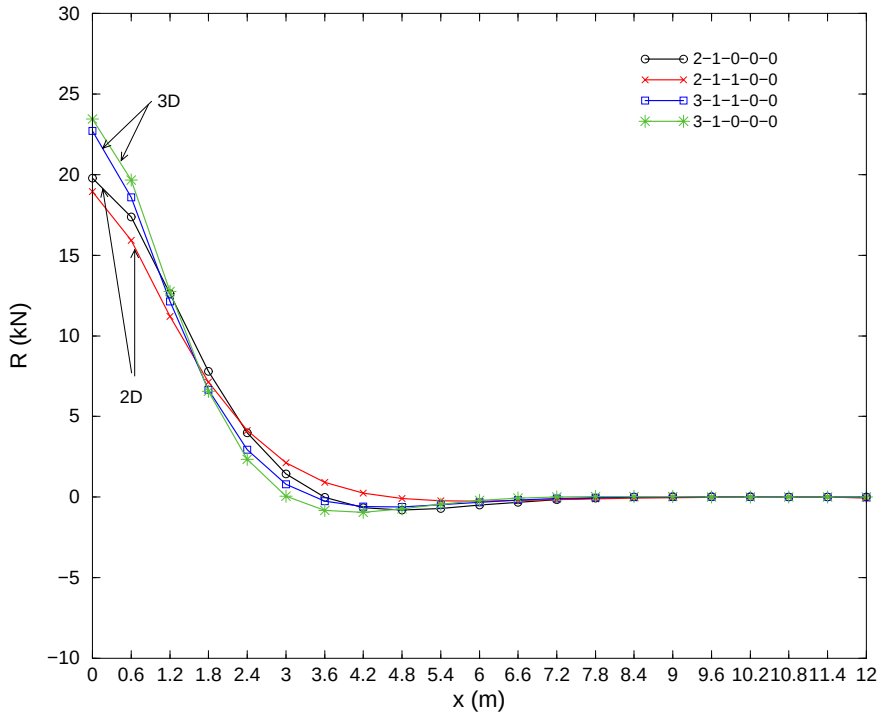


FIG. 4.15: effet de la prise en compte du couplage sur les réactions d´appuis

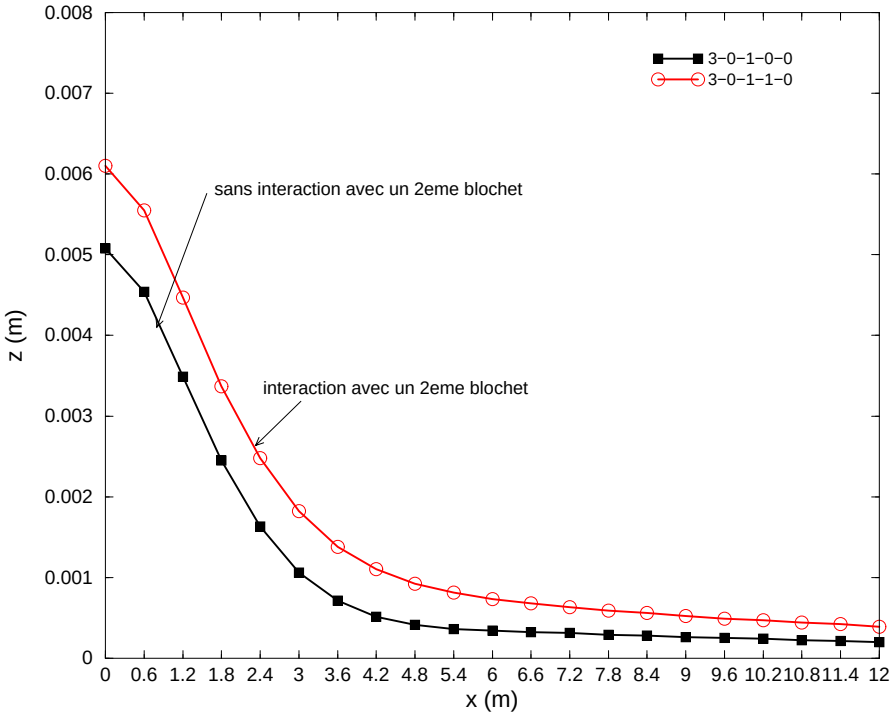


FIG. 4.16: effet de la prise en compte des deux blochets sur le déplacement des blochets

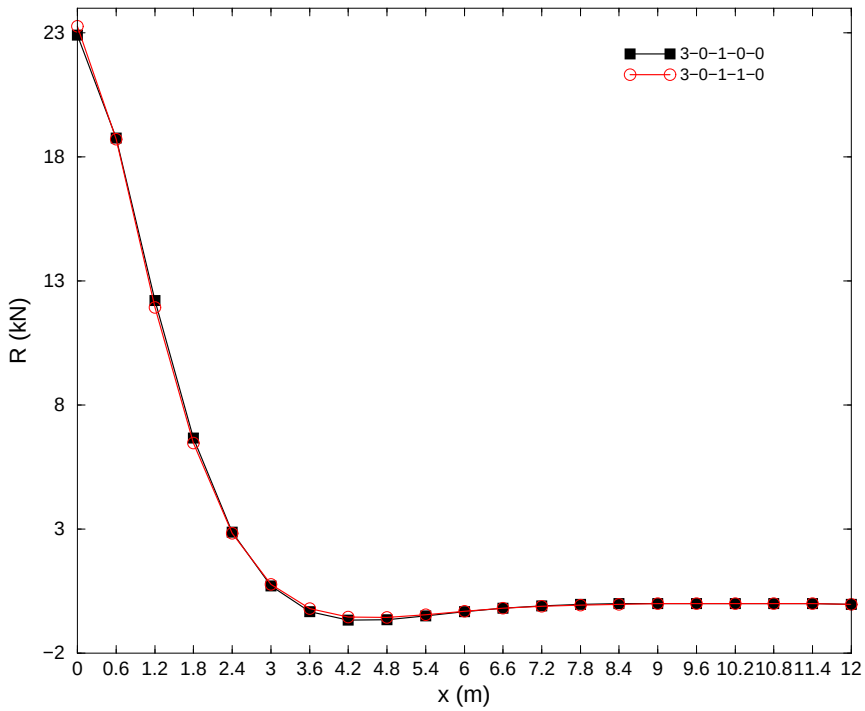


FIG. 4.17: effet de la prise en compte des deux blochets sur les réactions d´appuis

4.5 Calcul des cycles de contraintes

Nous nous intéressons dans cette partie à l´évaluation des cycles de contrainte créés en tout point de la couche de ballast par une charge roulante due au passage d´un boggie à deux essieux. Les cycles de contraintes (p,q) sont calculés à l´aide du logiciel PLAXIS.

4.5.1 Description du modèle de la voie ferrée

Afin de modéliser un tronçon de voie ferrée typique, nous avons considéré une structure multicouche constituée d´une couche inférieure de sol, d´une couche de grave et d´une couche de ballast. Sur la couche de ballast, reposent des blochets en béton. Les espaces entre les blochets sont remplis d´un ballast (ballast 1) dont le module d´Young est pris inférieur à celui du ballast situé sous les blochets. Les caractéristiques géométriques et mécaniques des différentes couches de matériaux sont regroupées dans le tableau (4.2). La figure (4.18) montre la disposition des différentes couches de matériaux constitutifs. Le choix des caractéristiques et des épaisseurs des couches de matériaux a été fait en se basant sur les données indiquées dans Alias (1984) [5].

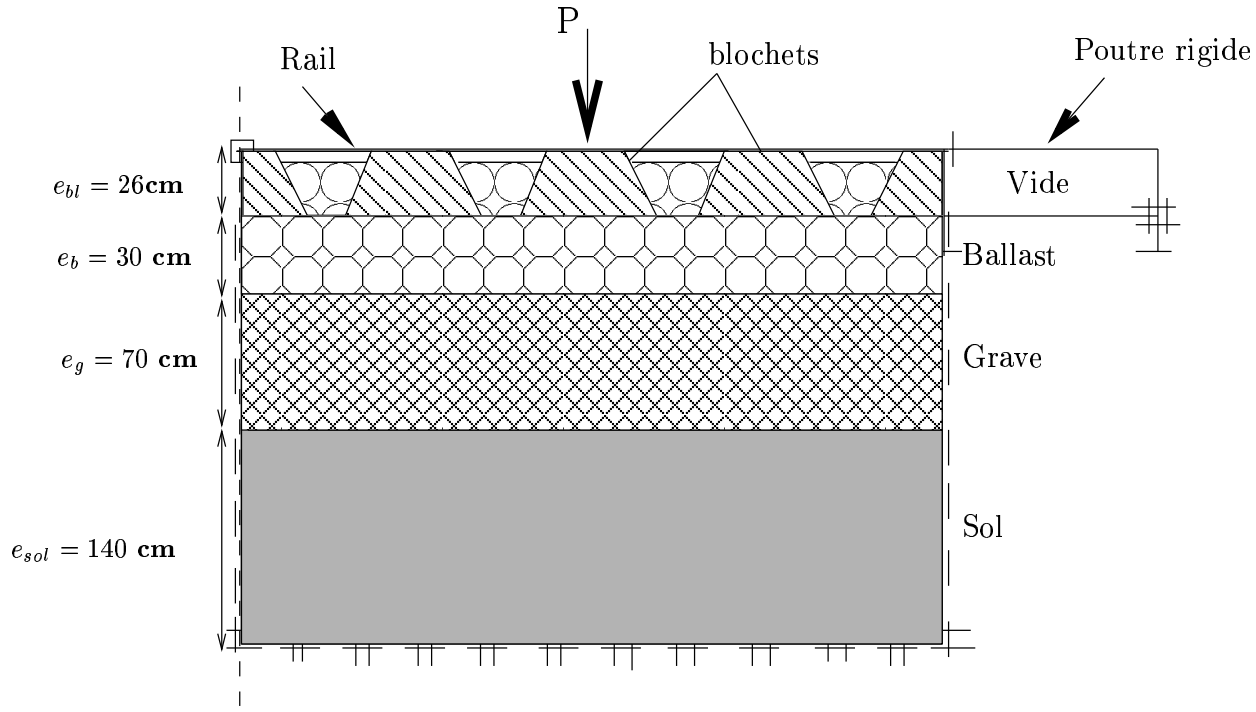


FIG. 4.18: schématisation de la voie ferrée

Concernant le ballast, qui suit la loi de comportement élastique linéaire, nous nous sommes basés sur les résultats des essais d´Indraratna et al.(1998) [37] qui ont estimé le module d´Young du ballast à 25 MPa. Cette valeur du module d´Young correspond à

un état de contrainte qu´on a évalué grâce à des simulations préliminaires par le logiciel PLAXIS (de l'ordre de 100 kPa).

Matériau	épaisseur(m)	E(MPa)	ν	γ (kN/ m^3)
Sol	1,4	30	0,4	18
Grave	0,7	200	0,4	18
ballast	0,3	250	0,3	18
ballast1	0,26	25	0,3	18
Béton	0,26	4.10^{04}	0,2	25
"Vide"	0,26	10^{-04}	0,2	0,1

TAB. 4.2: caractéristiques des matériaux

Conditions aux limites Le passage d´un boggie correspond à l´application de deux charges associées à chaque essieu. Nous devons donc, reproduire ce passage dans notre modélisation.

Nous admettons dans tout ce qui suit que la distance entre deux boggies successifs est suffisamment grande pour qu´en un point donné de la voie se manifeste l´influence d´un seul boggie. La détermination exacte d´un cycle de contrainte en ce point exigerait donc à priori d´effectuer un calcul pour chaque position du boggie évoluant entre deux positions suffisamment éloignées de part et d´autre du point considéré. Nous allons voir comment l´hypothèse de réponse *élastique réversible* de la structure sous l´action de la charge roulante, combinée au caractère *périodique* de cette même structure va nous permettre de simplifier notablement un tel calcul.

Deux positions particulières du boggie par rapport aux blochets font apparaître une symétrie évidente du problème par rapport au plan vertical situé à mi-distance entre les essieux. Il y a tout d´abord l´éventualité où les essieux agissent à mi-distance entre les blochets, que nous appellerons dans la suite *configuration 1* (figure 4.19). La seconde éventualité que nous appellerons *configuration 2* (figure 4.20), correspond au cas où les essieux sont placés à l´aplomb des blochets (à travers le rail). La charge appliquée est une charge concentrée de 100 kN (de l´ordre de 120 kN/m) ce qui correspond à une charge de 20 tonnes par essieu. Selon que l´on considère la première ou la seconde configuration, il est nécessaire de bien choisir la position des blochets par rapport à l´axe de symétrie afin de respecter la symétrie du problème du point de vue du chargement et de la géométrie. Dans les deux cas, il suffit alors de considérer la moitié de la structure totale, en plaçant la charge de manière à conserver la symétrie. Le nombre de blochets compris entre l´axe

de symétrie et le point d´application de la charge est donc égal à la moitié du nombre de blochets séparant deux essieux.

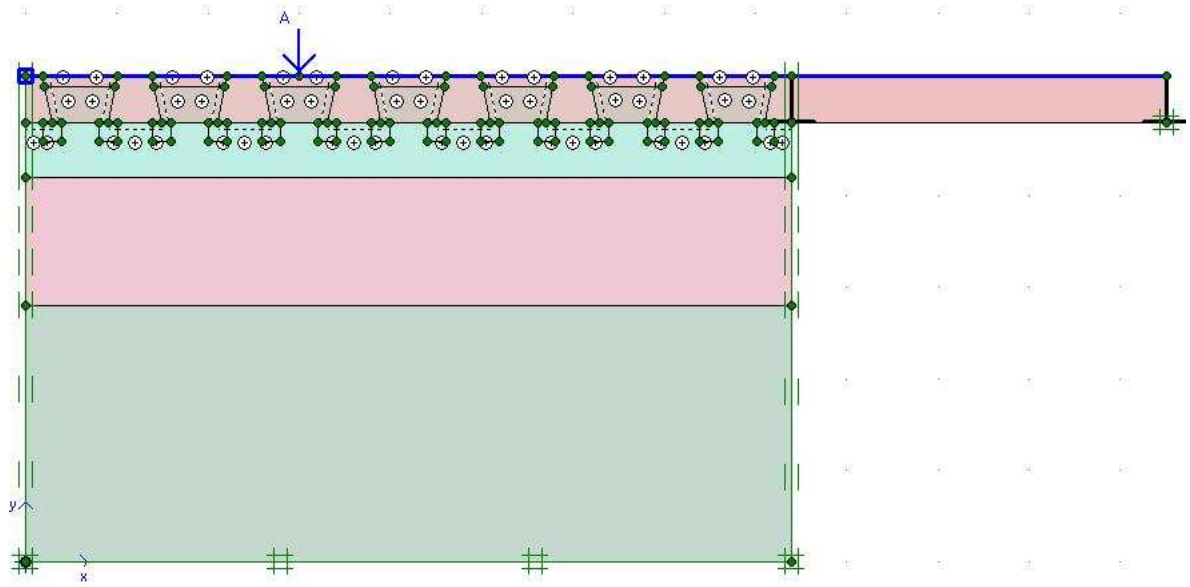


FIG. 4.19: configuration 1

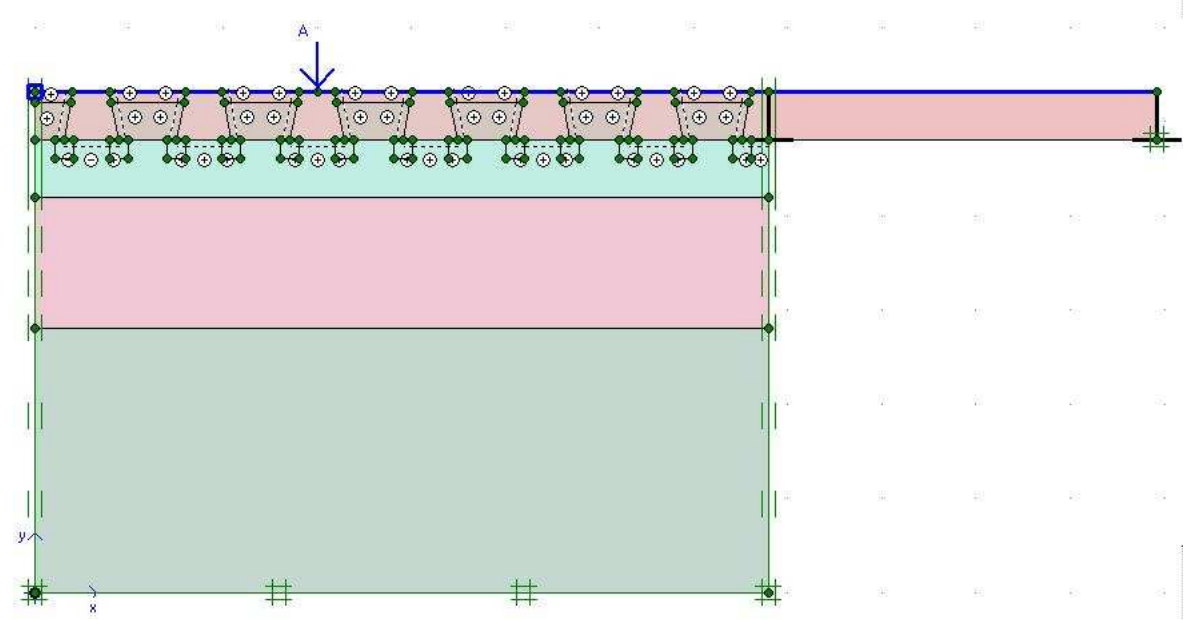


FIG. 4.20: configuration 2

Un nombre de blochets suffisant a été pris à droite de la charge de sorte qu´à cette distance l´action du chargement dû à l´essieu devienne presque négligeable. Au delà, le rail est prolongé par le système équivalent barre+ressorts que nous avons déjà introduit à la section 4.3 de ce chapitre, et dont les caractéristiques ont été calculées comme suit

Pour une inertie du rail de l´ordre de $2,02.10^{-5}m^4$, un module d´Young $E = 210^5$ MPa, une aire $A = 6,48.10^{-3}m^2$, le calcul de K_v donne une valeur de l´ordre de $892kN/m^2$, d´où on déduit celle de $L = 2,06$ m puis celle de $K^* = 924,29$ kN/m. Ces valeurs sont introduites dans le fichier INPUT de PLAXIS, en les ramenant à des grandeurs par unité de longueur, c´est-à-dire en divisant par la longueur du blochet (0, 84 m). Le tableau (4.3) résume les différentes caractéristiques du rail, de la poutre et des ressorts.

Structure	EA (kN/m)	EI (kN.m^2/m)	ω (kN/m/m)	ν	L (m)
Rail	4800	$1,54.10^6$	0,6	0,25	4,2
Poutre rigide	10^{11}	10^6	0,6	0	2,06
Ressort	922,46				

TAB. 4.3: caractéristiques des poutres

Afin de passer à la *configuration* 2 (figure 4.20), nous avons apporté des modifications à la structure de la *configuration* 1 (figure 4.19) de façon à ne pas altérer la symétrie du problème. La charge est appliquée, dans ce cas, au-dessus d´un blochet et à travers le rail.

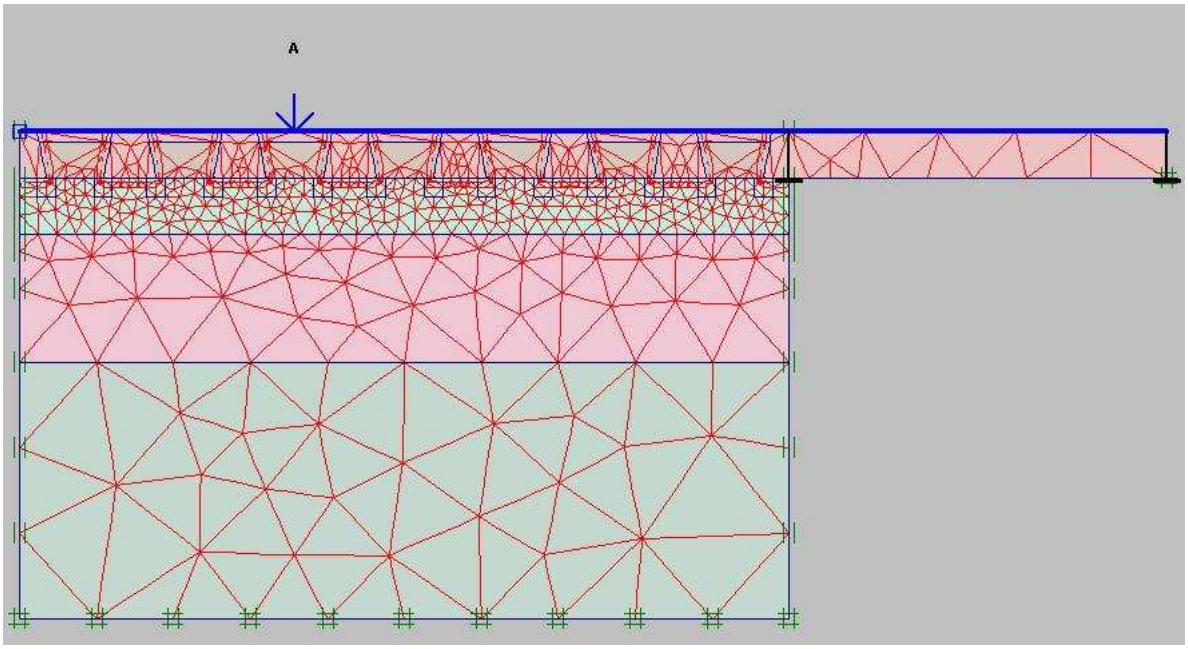


FIG. 4.21: maillage de la configuration 1

Notre objectif est tout d´abord de déterminer les cycles élastiques dans la couche de ballast. Nous avons donc utilisé pour cette couche un maillage plus fin que pour les autres couches.

Nous avons réalisé des simulations préliminaires pour lesquelles nous avons remarqué la présence de zones de concentration de contraintes, ces zones se situent majoritairement

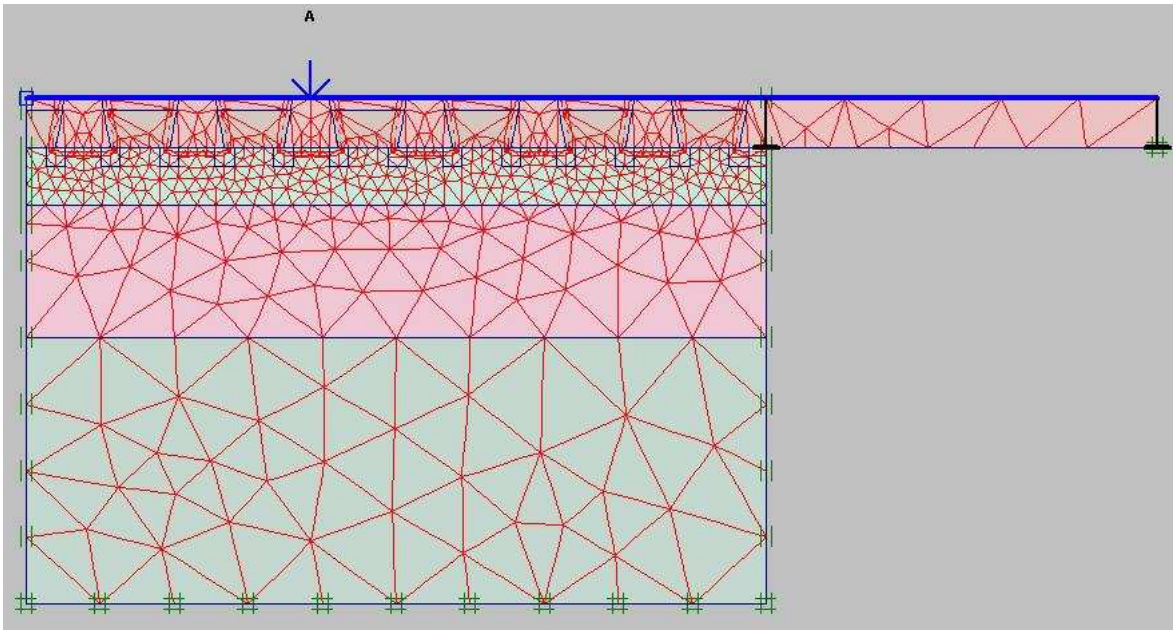


FIG. 4.22: Maillage de la configuration 2

au niveau des coins des blochets.

4.5.2 Procédure de détermination des cycles élastiques

Le but des simulations que nous avons réalisées à l´aide du logiciel *Plaxis* est la détermination des cycles élastiques qui sont générés par le passage de convois sur l´infrastructure de transport.

Ayant défini les deux configurations pour lesquelles nous avons symétrie du problème, il apparaît alors que pour chacune d´entre elles, compte-tenu du caractère *élastique linéaire* de la réponse de la structure, les états de contrainte successivement subis par un point donné du ballast lorsque le chargement se déplace par pas égaux à la distance entre deux blochets, ne sont autres que les états de contraintes aux *points homologues* déduits de ce point par translations égales à un multiple entier de l´intervalle entre blochets (0, 6 m).

4.5.2.1. Détermination des *points homologues* et reconstitution du cycle

Nous nous intéressons tout d´abord à la configuration 2 où les charges d´essieu s´appliquent sur les blochets figure (4.23). La modélisation de la structure ne comprend que la moitié de la structure réelle pour des raisons de symétrie. Il est cependant utile de garder en mémoire la deuxième moitié de la structure puisqu´il faut, dans notre raisonnement, considérer tous les blochets situés en amont et en aval du boggie.

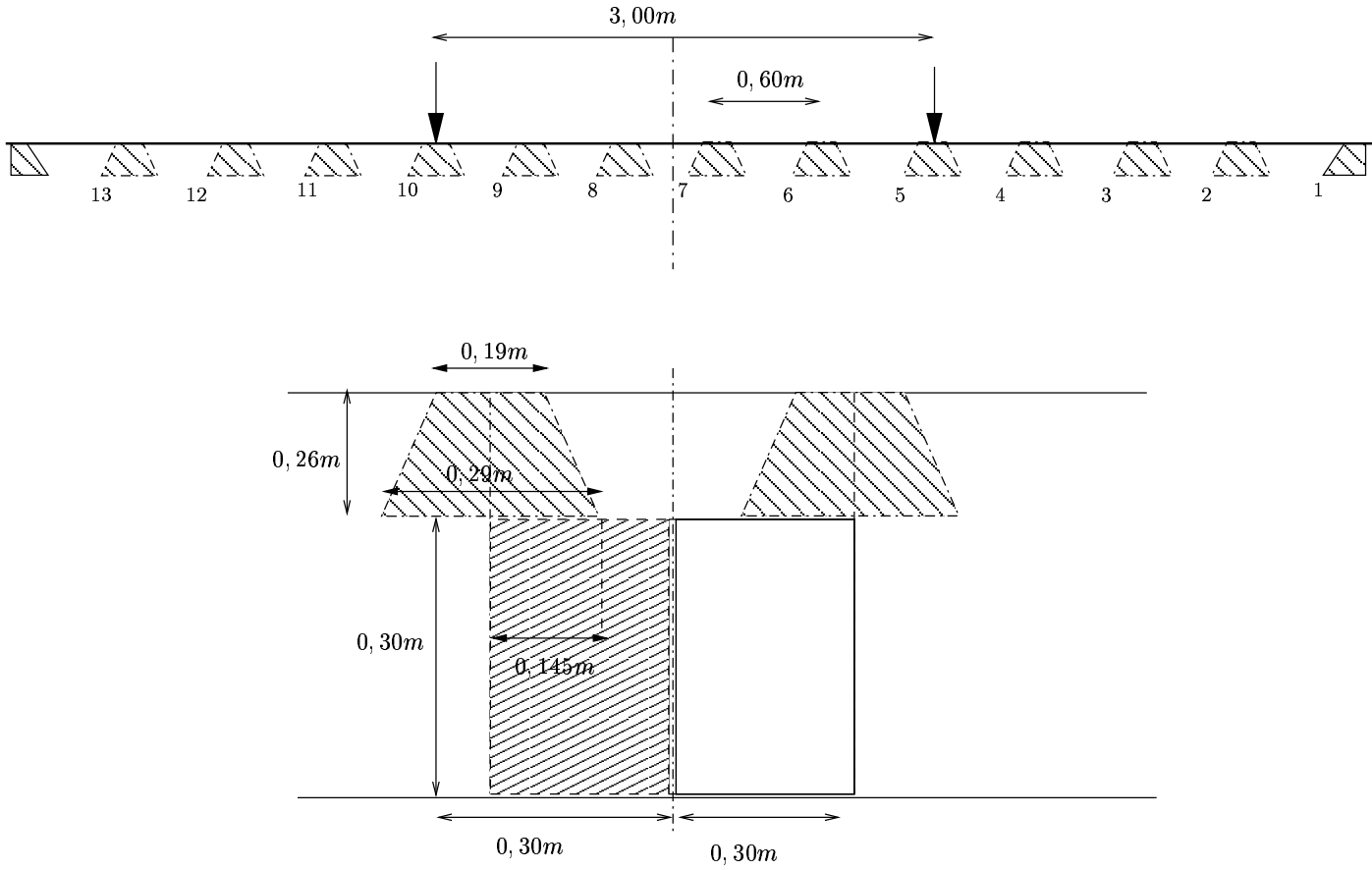


FIG. 4.23: points homologues à gauche dans la configuration 2

Pour ce faire, nous repérons un point dans le ballast, le point N° 7 par exemple de la figure (4.23), situé au voisinage du coin gauche du premier blochet à droite de l´axe de symétrie, et nous regardons l'évolution des contraintes lorsque ce point subit le passage d'un convoi.

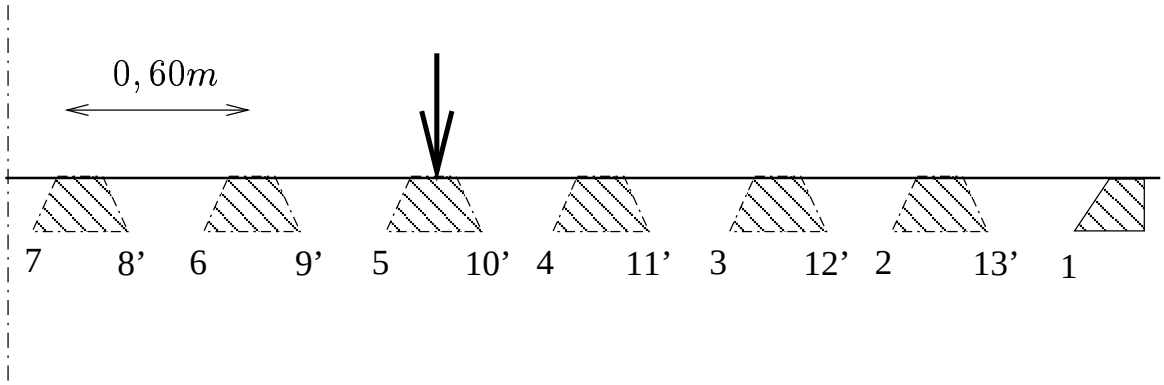


FIG. 4.24: points homologues à gauche et leurs symétriques (configuration 2)

Les points numérotés de 8 à 13 étant situés à gauche de l´axe de symétrie de la figure

ne sont pas accessibles au calcul PLAXIS qui ne considère que la moitié droite de la structure. En revanche il est facile de voir que les états de contrainte associés aux points 8′ à 13′ (figure 4.24) sont symétriques de ceux relatifs aux points 8 à 13. Leurs invariants (p,q) sont en particulier identiques. De sorte que la reconstitution du cycle de contrainte dans le plan (p,q) engendré par le passage du boggie consiste à recueillir les valeurs des contraintes aux points 1 à 7 puis 8′ à 13′

Nous avons utilisé la même procédure pour décrire tous les points se trouvant au niveau des coins droits des blochets (figure 4.31).

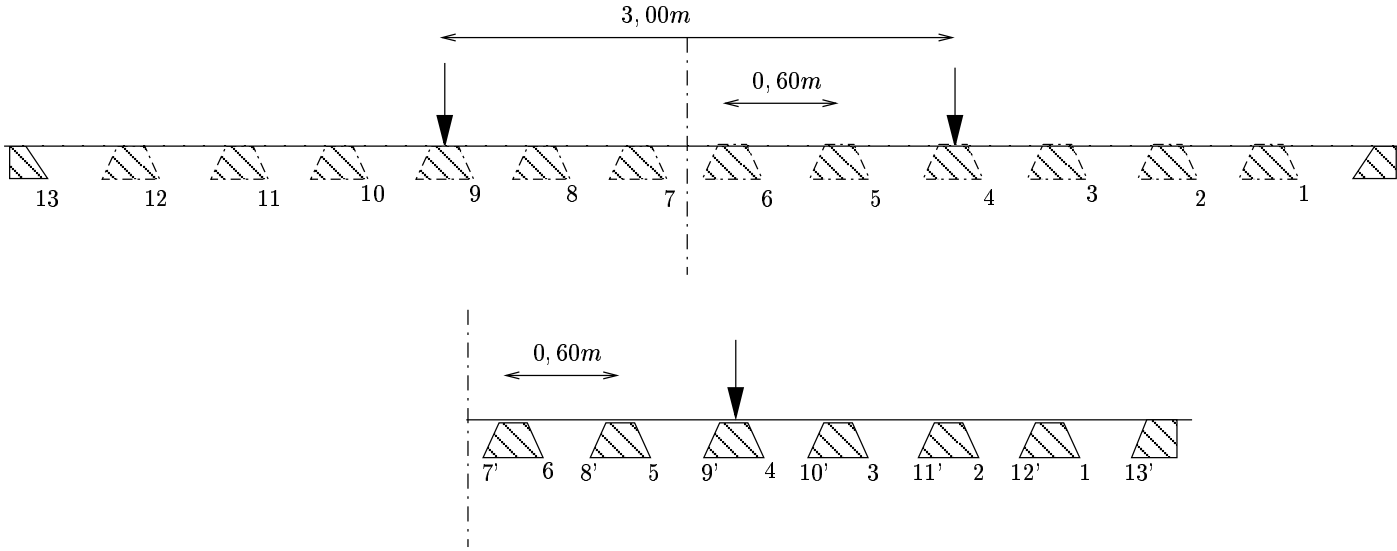


FIG. 4.25: points homologues à droite (configuration 2)

Nous avons réalisé le même traitement lors de l´étude de la structure de la configuration 1, qui correspond à une charge qui s´applique entre deux blochets (figure 4.25). Ainsi pour ces deux cas de figure, si l´on désire décrire les états de contraines de tous les coins des blochets, il faut fusionner les deux configurations qui correspondent à deux positions différentes de la charge.

Concrétement, ceci consiste à repérer, pour la configuration 2 (bas de la figure 4.26) le point situé au coin gauche du dernier blochet construit (point n°1) puis en prenant une période de $-0,60$ m (de droite à gauche vers l´axe de symétrie), de balayer tous les points homologues se trouvant sous les coins gauches des blochets. Ensuite, il faut prendre le coin droit du 1er blochet (point N°8′) et ses homologues obtenus pour la même période de $+0,60$ m (de gauche à droite). Ensuite, nous appliquons la même procédure à la configuration 1.

Une restitution du cycle élastique par "échantillonnage" est ainsi obtenue en intercalant les points de la configuration n°2 entre ceux de la configuration n°1 : point 1 de la

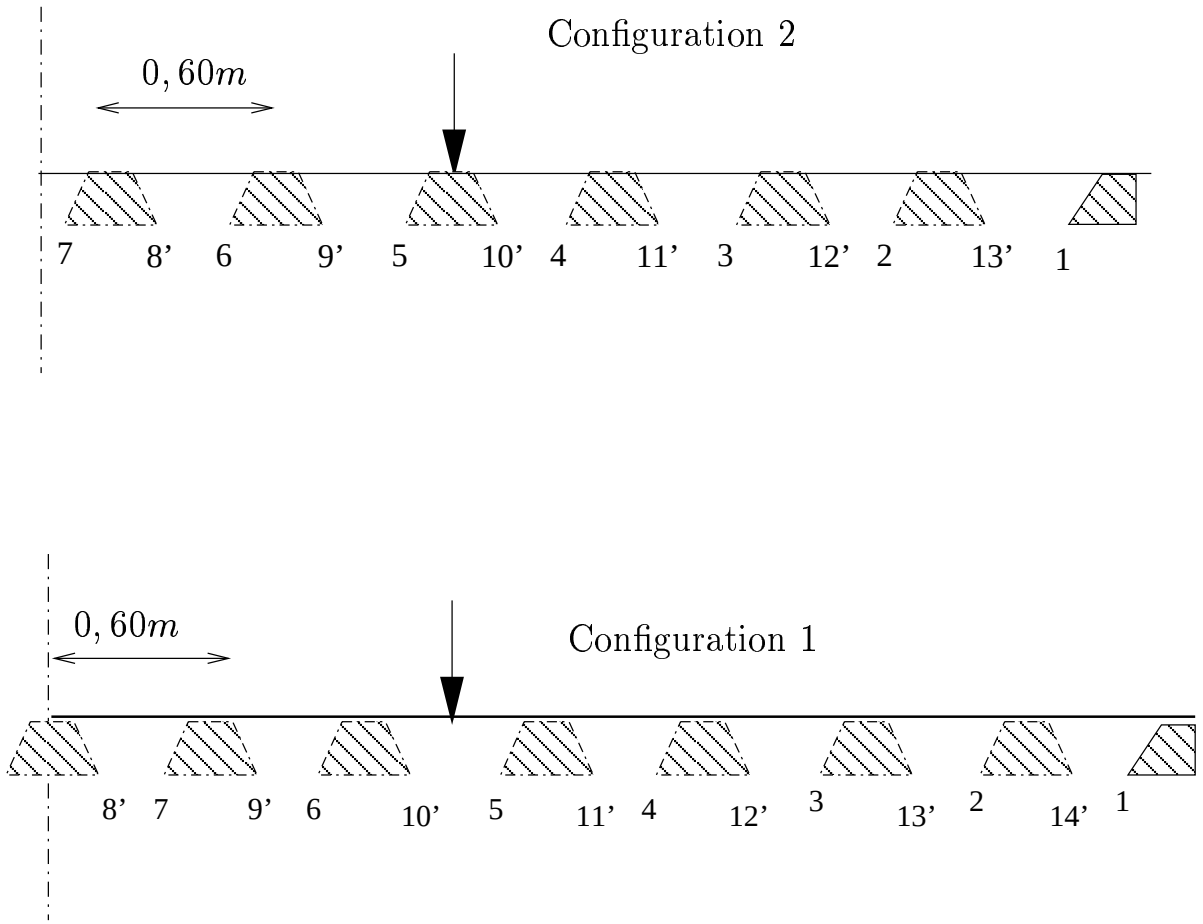


FIG. 4.26: points homologues des deux configurations

configuration 1, point 1 de la configuration 2, point 2 de la configuration 1, etc ...

La procédure de détermination des cycles de contraintes est valable quelle que soit la position du *point cible* choisi. Nous nous intéressons plus particuliérement aux états de contraintes des points se trouvant entre deux blochets successifs et aux points situés au niveau des axes des blochets (axes passant par les centres des blochets).

4.5.3 Constitution d´une *grille de points cibles*

En considérant une portion de la structure de la configuration 1 par exemple (la charge s´applique entre deux blochets), nous nous sommes fixés de se donner des points cibles initiaux, dont les homologues seront déterminés par la suite, et d'analyser les cycles (p,q) dus au passage d´un convoi. Ainsi, nous avons constitué une grille de 9 points situés à l´intersection de 3 segments horizontaux et de 3 segments verticaux, pour lesquels nous obtenons les cycles (p,q). Les groupes des points (P_1, P_4 et P_7), (P_2, P_5 et P_8) et (P_3, P_6 et P_9) correspondent respectivement aux points situés sous l´axe du blochet, sous les

coins des blochets et dans le ballast à mi-distance de deux blochets successifs. Cette grille est représentée sur la figure (4.27).

Nous allons alors représenter les cycles élastiques décrits par les points homologues de tous les points de la grille. Le repérage des points homologues et le calcul des contraintes peut se faire selon deux méthodes.

1. La première méthode consiste à repérer, par son numéro, un point de Gauss ("stress point") où le tenseur des contraintes est calculé, ainsi que ses images à partir du fichier INPUT de PLAXIS, pour chacune des deux configurations, calculer les (p,q) où p est la contrainte moyenne et q est le déviateur des contraintes pour chaque point et à représenter le cycle obtenu dans le plan (p,q). Cette méthode suppose d´avoir constitué un maillage périodique.
2. Traitement par *Visual Fortran* Point le plus proche du point cible. Nous avons élaboré un programme *Fortran* qui nous permet de repérer pour chaque point cible fixé, le point de Gauss ("stress point") qui lui est le plus proche, ses homologues puis de calculer les contraintes en ces points. Les résultats fournis par cette procédure sont ensuite exploités en utilisant un logiciel de traitement des données (du type Excel). Cette procédure rend plus systématique les calculs et donne les mêmes résultats que la procédure "à la main", lorsque le maillage est périodique.

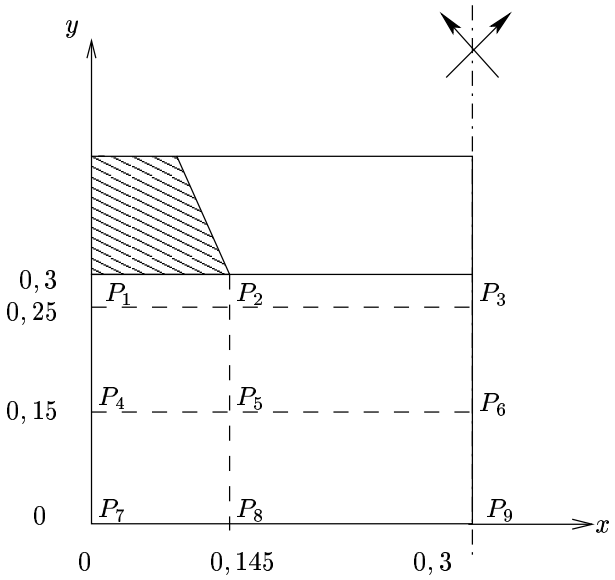


FIG. 4.27: grille de points cibles initiaux

Pour valider les résultats de Plaxis et vérifier l´efficacité du traitement par Fortran, nous sommes partis d´un problème simple de *Boussinesq* pour lequel nous connaissons la solution analytique en contraintes.

Nous avons modélisé ce problème par Plaxis (en étudiant les allures des courbes de contraintes issues de quelques coupes) puis nous avons effectué un traitement par la procédure Fortran sur les résultats, en terme de contrainte en chaque noeud du maillage, donnés par Plaxis. En comparant les résultats des deux procédures de calcul avec le calcul analytique, nous avons remarqué que les deux méthodes donnent les mêmes résultats, ce qui valide notre procédure.

4.5.4 Analyse des résultats : étude de sensiblité aux caractéristiques mécaniques des sous-couches

Les caractéristiques mécaniques des divers matériaux constituant les sous-couches sont issues de la littérature. Nous considérons la classification des sols citée dans la partie 4.2.2 de ce chapitre.

En se donnant comme structure de référence celle pour laquelle le module d´Young de la grave est de $200MPa$ et celui du sol à $30MPa$, nous avons réalisé une étude de sensibilité par rapport au module du sol et celui de la grave en prenant, pour le sol, un module d´Young correspondant à chacune des trois catégories énumérées ci-dessus tout en étant proportionnel au module de référence, et pour celui de la grave des modules proportionnels au module de référence (mêmes facteurs de proportionnalité) . En clair, en fixant la raideur de la grave à 200 MPa, nous prenons comme raideur de sol 15 MPa (sol mou), 60 MPa (sol moyen) et 90 MPa (sol raide). Puis en fixant le module du sol à 30 MPa, nous prenons des modules de grave égaux à 100 MPa, 400 MPa et 600 MPa.

4.5.4.1. Sensibilité par rapport au module du sol

Les courbes des figures 4.28 à 4.36 donnent pour chaque point de la grille l´évolution des cycles élastiques dans le plan (p,q) en fonction du module du sol. L´analyse de ces courbes appelle les commentaires suivants :

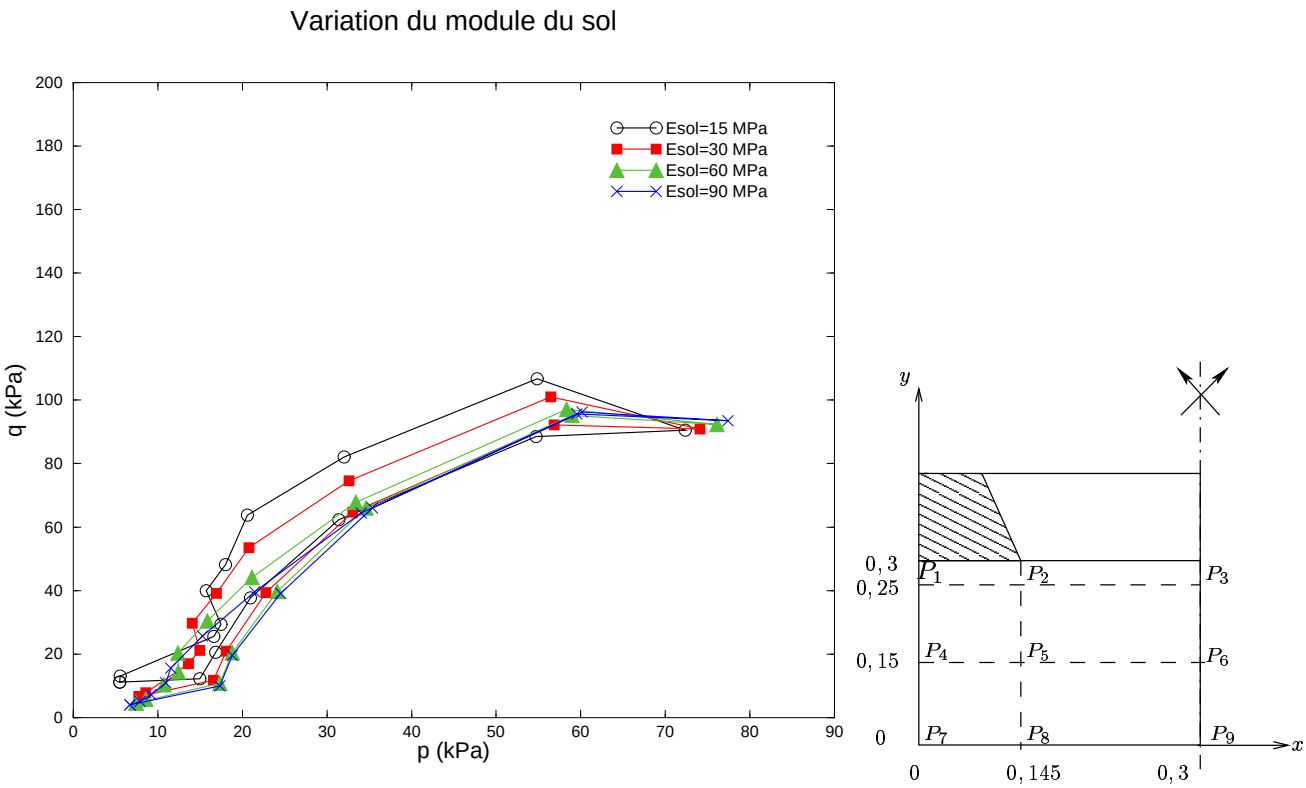


FIG. 4.28: calcul au point P_1

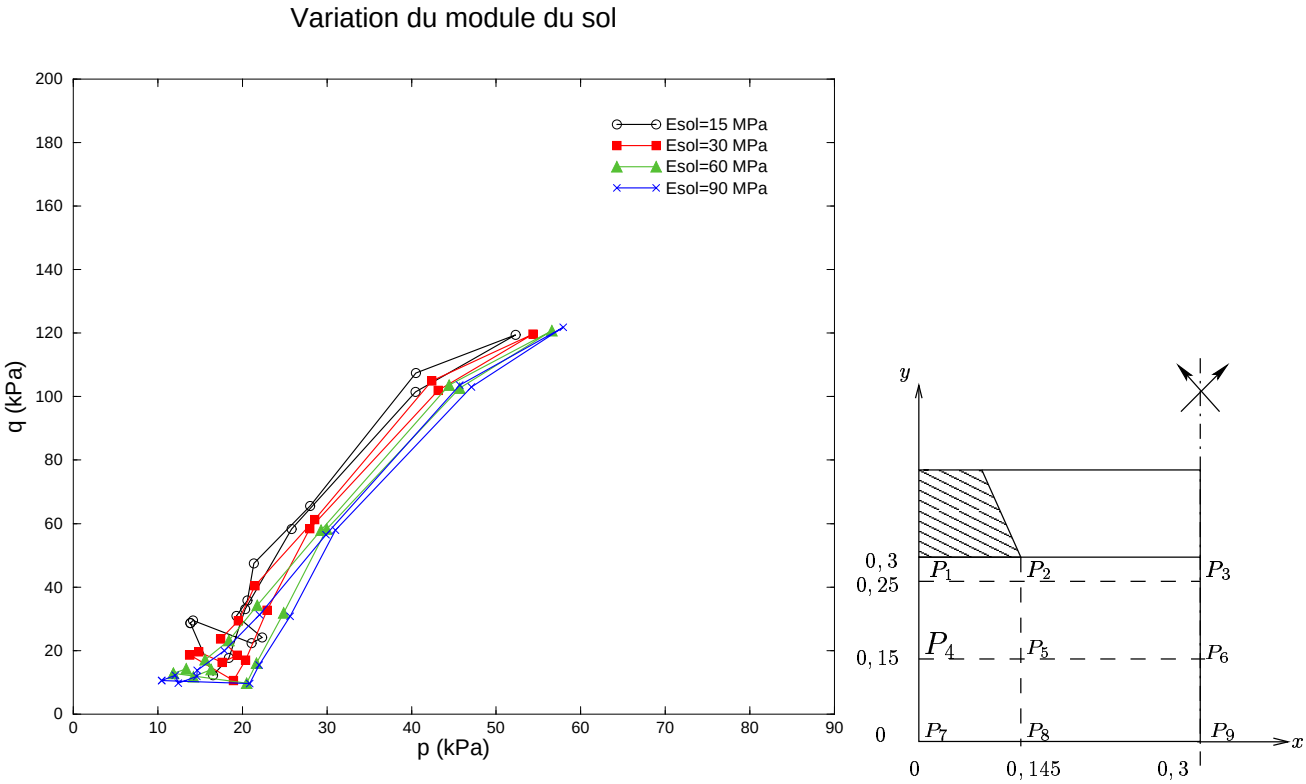


FIG. 4.29: calcul au point P_4

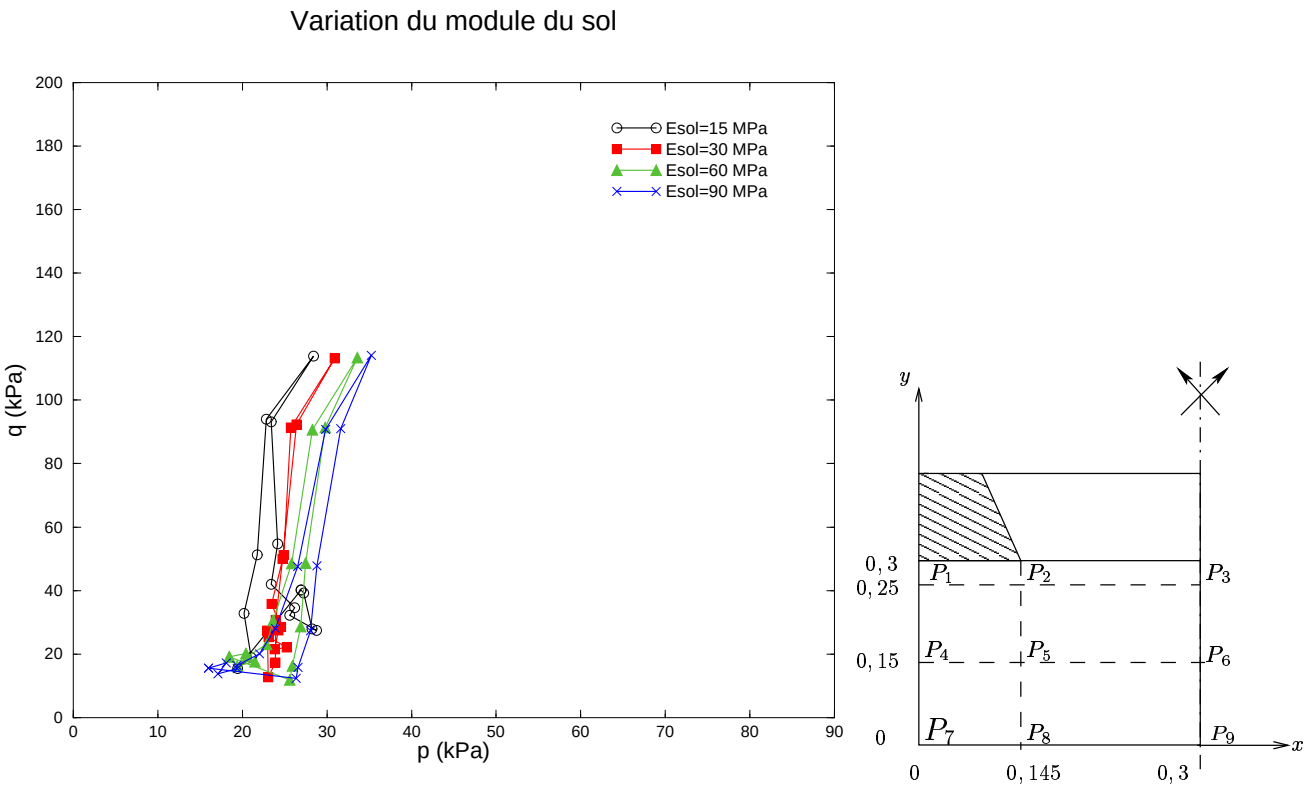


FIG. 4.30: calcul au point P_7

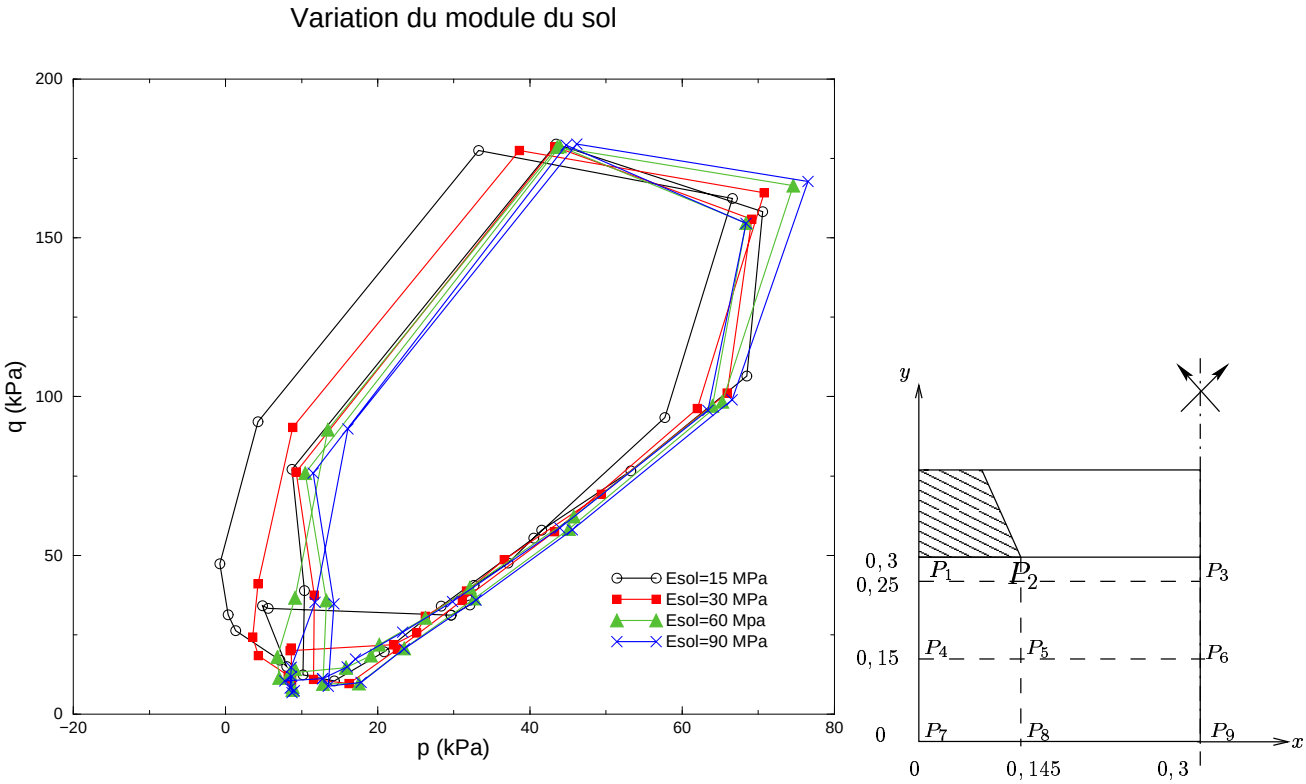


FIG. 4.31: calcul au point P_2

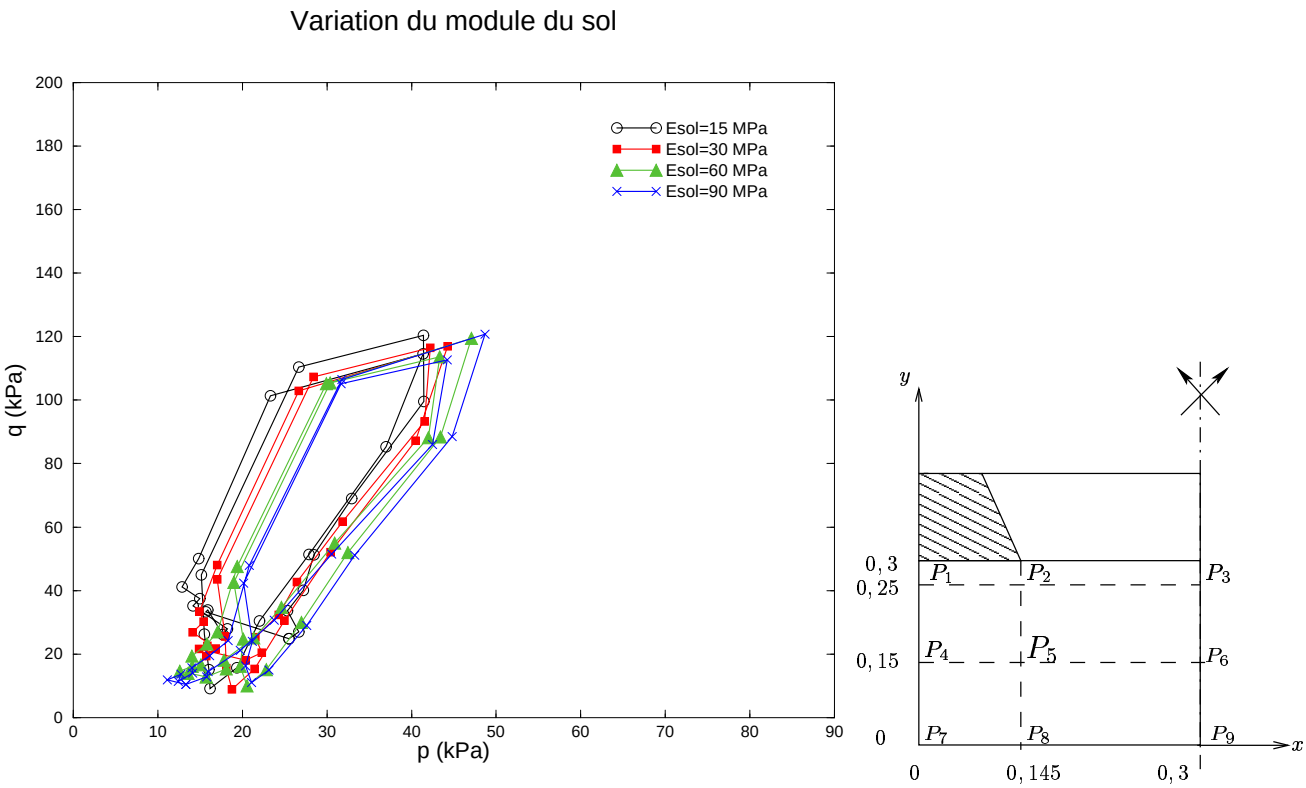


FIG. 4.32: calcul au point P_5

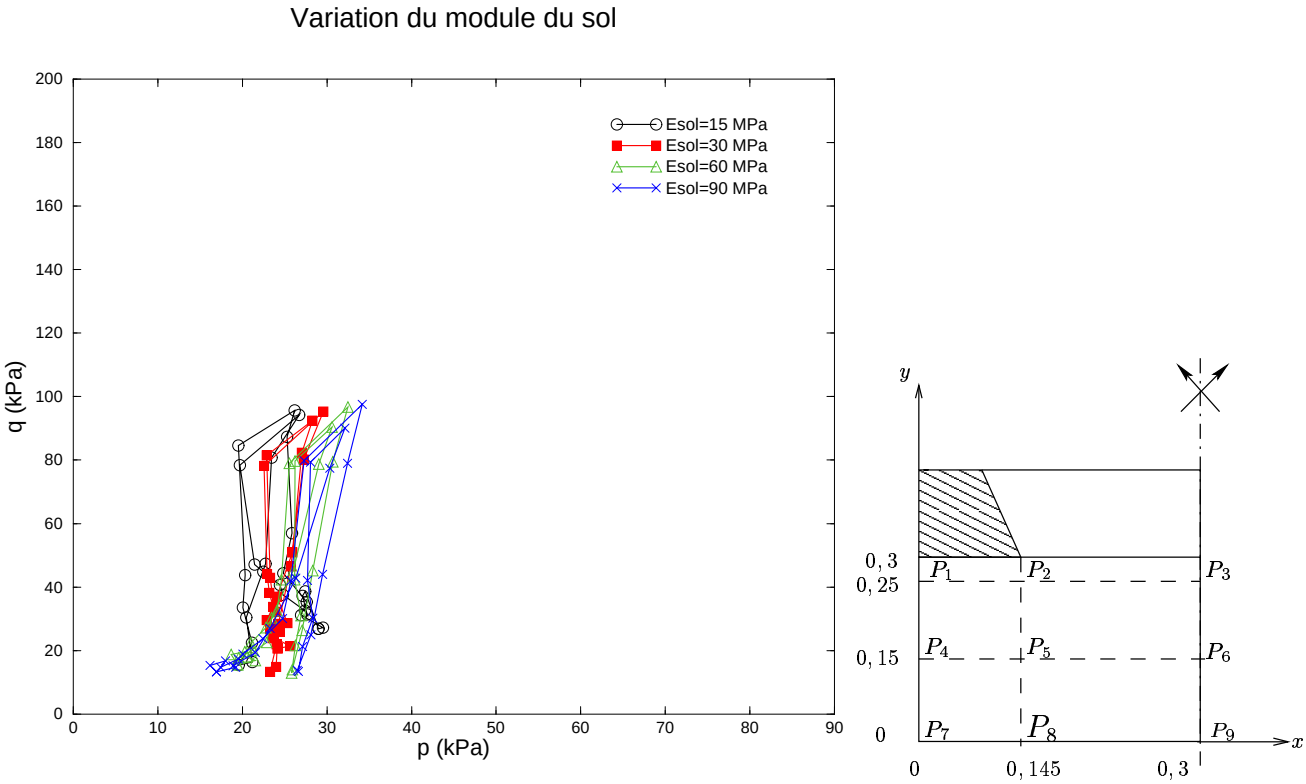


FIG. 4.33: calcul au point P_8

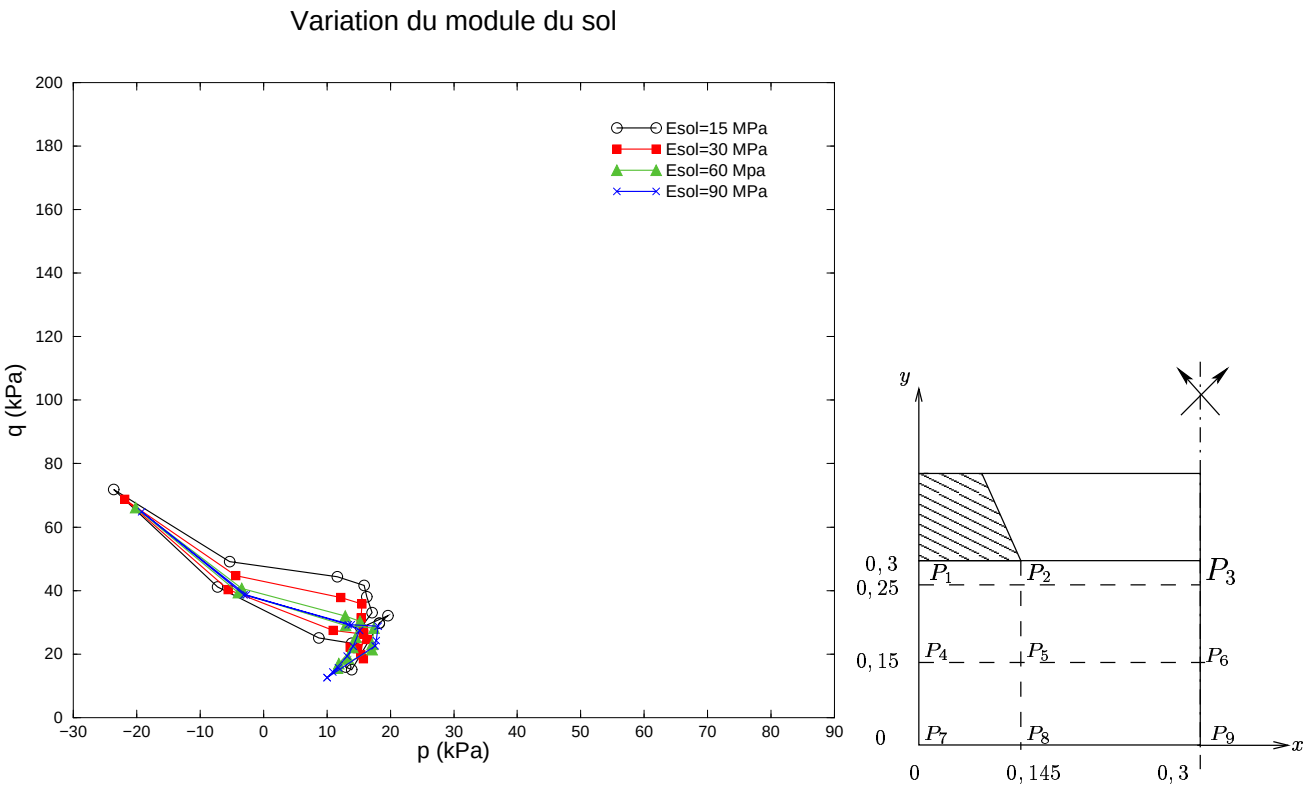


FIG. 4.34: calcul au point P_3

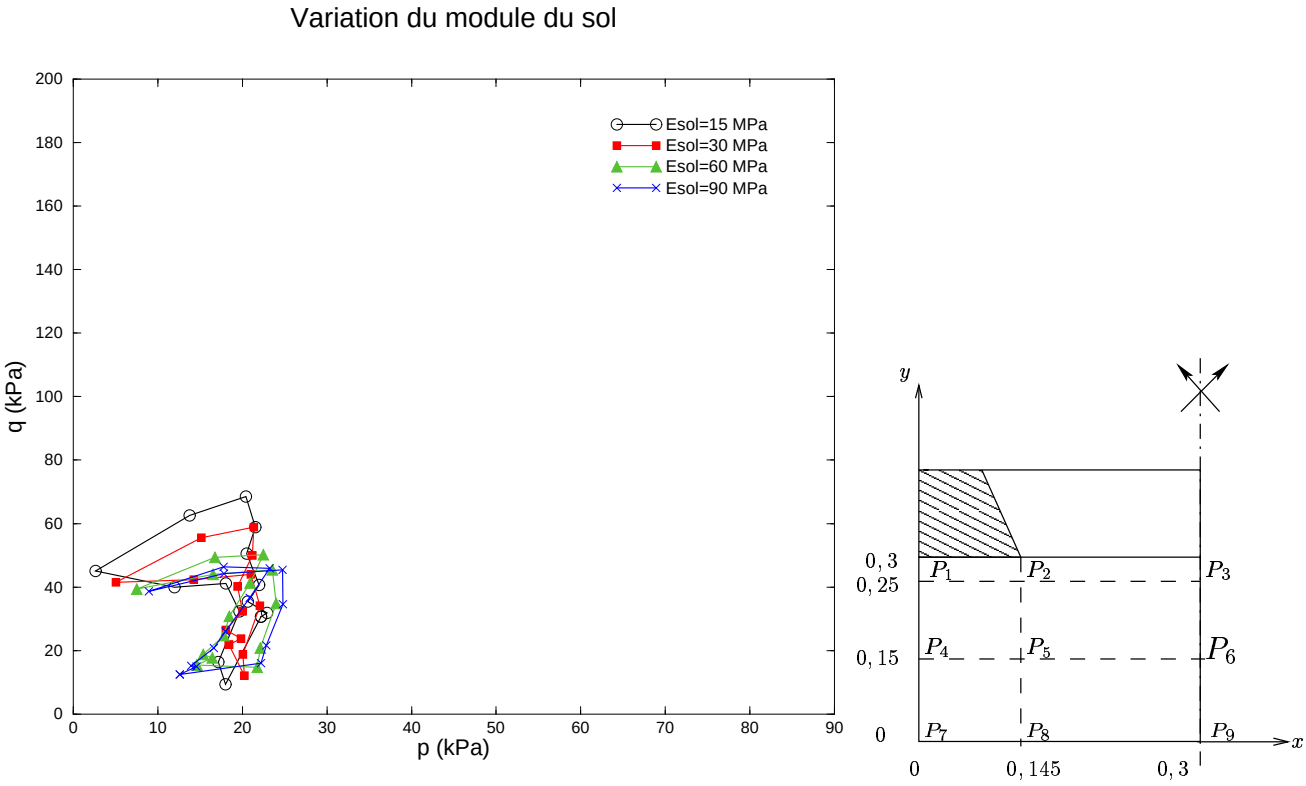


FIG. 4.35: calcul au point P_6

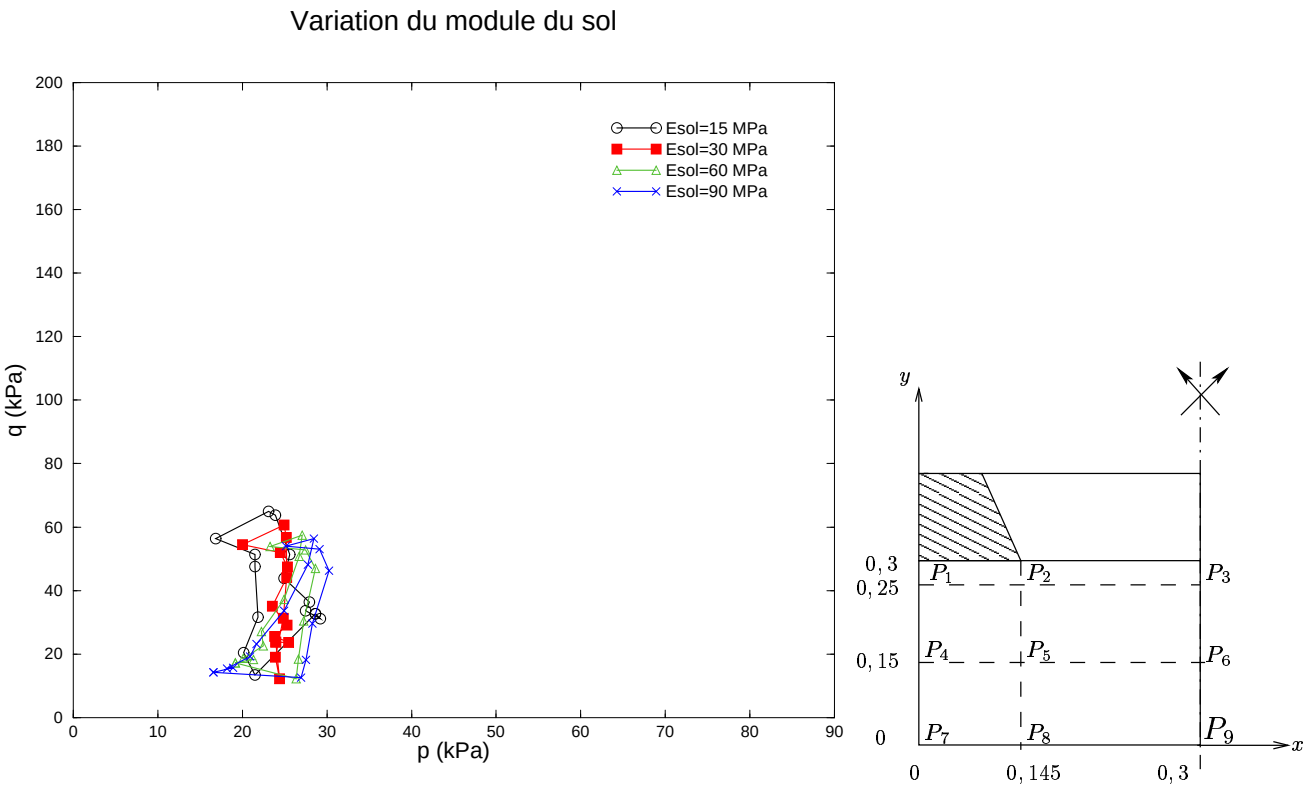


FIG. 4.36: calcul au point P_9

De façon générale on observe tout d´abord que, hormis peut-être pour les points P_7 à P_9 situés au bas de la couche de ballast, l´influence de la valeur du module de sol sur l´allure des cycles de contrainte est peu marquée.

- Concernant les points se trouvant sur *l´axe du blochet* (P_1, P_4 et P_7), nous remarquons que l´allure des cycles de contraintes est similaire, (cycles aplatis) mais que la contrainte moyenne p diminue au fur et à mesure qu´on s´éloigne du blochet tandis que la contrainte déviatorique q a presque tendance à augmenter, ce qui se traduit par une forte augmentation de la pente du cycle. Pour ces points, lorsque le module du sol augmente, nous constatons à partir des figures (4.28), (4.29) et (4.30) que la pression moyenne augmente légèrement mais que la contrainte déviatorique reste quasiment constante. Les cycles sont en quelque sorte translatés horizontalement.

- Les points situés sous les coins des blochets (P_2, P_5 et P_8) présentent quant à eux, des cycles plus "arrondis" (sauf pour le point P_8) dont l´amplitude est décroissante lorsque l´on s´éloigne du coin du blochet. De la traction apparaît au niveau du point P_2, et aussi bien la contrainte moyenne que la contrainte déviatorique diminuent lorsqu´on s´éloigne du blochet. Nous faisons le même constat que précédemment quant à l´évolution des cycles de contrainte en fonction du module d´Young du sol. En effet, les cycles gardent la même allure mais la pression moyenne augmente légè-

rement avec le module du sol.

- Enfin, les points se trouvant sur l´axe entre deux blochets successifs (P_3, P_6 et P_9) présentent des allures variables. Au niveau du point P_3, des tractions significatives apparaissent. Les valeurs maximales de p et de q sont comparables pour les trois points. Pour un même point, les cycles de contraintes sont semblables mais leurs amplitudes sont des fonctions croissantes du module du sol.

4.5.4.2. Sensibilité par rapport au module de la grave

Les courbes des figures (4.37) à (4.45) donnent pour chaque point de la grille l´évolution des cycles élastiques dans le plan (p,q) en fonction du module de la grave.

Nous observons en premier lieu que l´influence du module de la grave, qui est située sous la couche de ballast, sur les caractéristiques des cycles élastiques est bien plus marquée que celle du module du sol, plus éloigné du ballast.

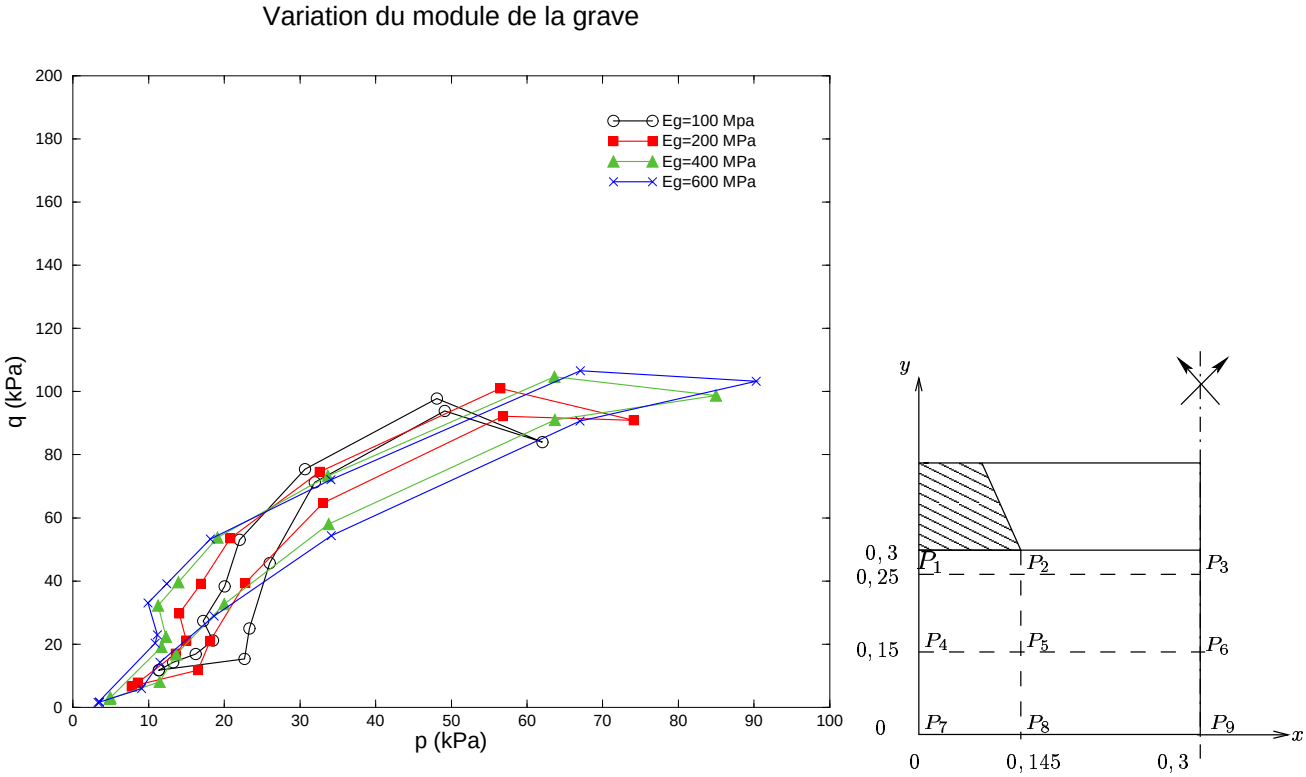


FIG. 4.37: calcul au point P_1

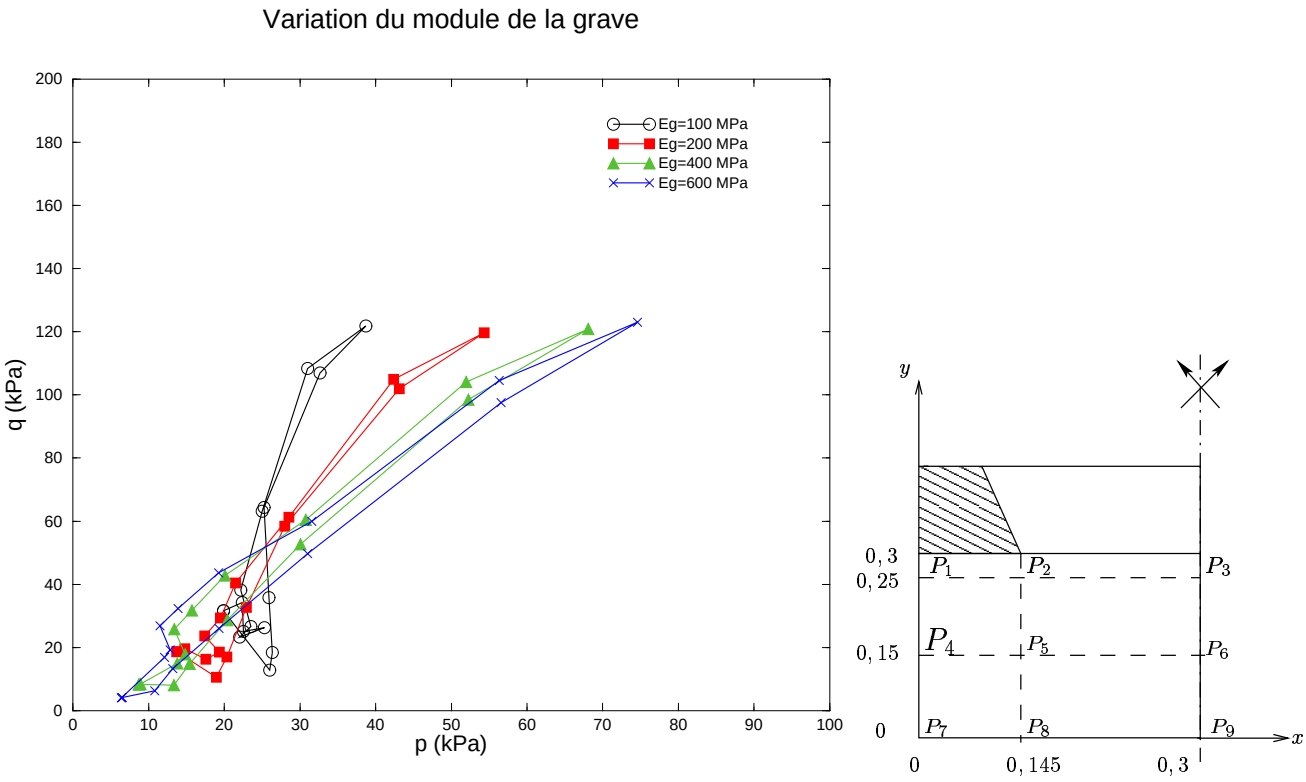


FIG. 4.38: calcul au point P_4

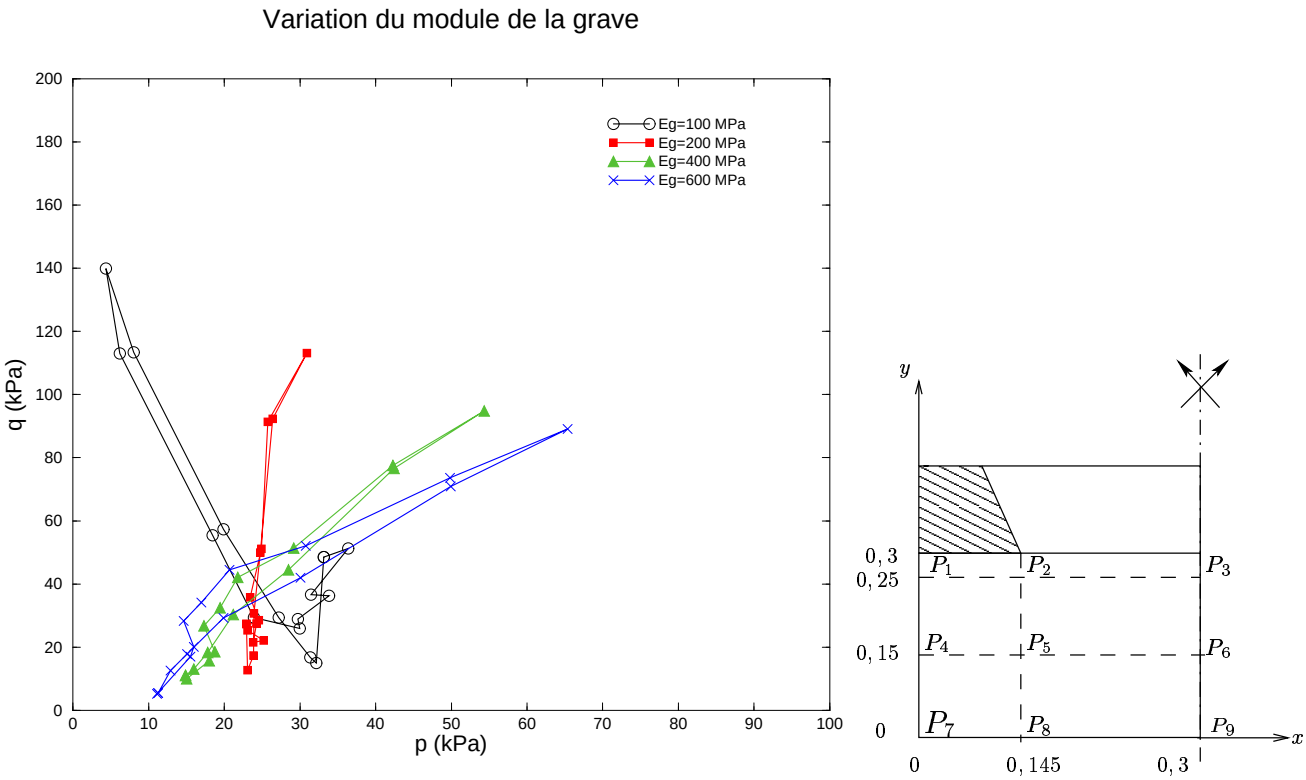


FIG. 4.39: calcul au point P_7

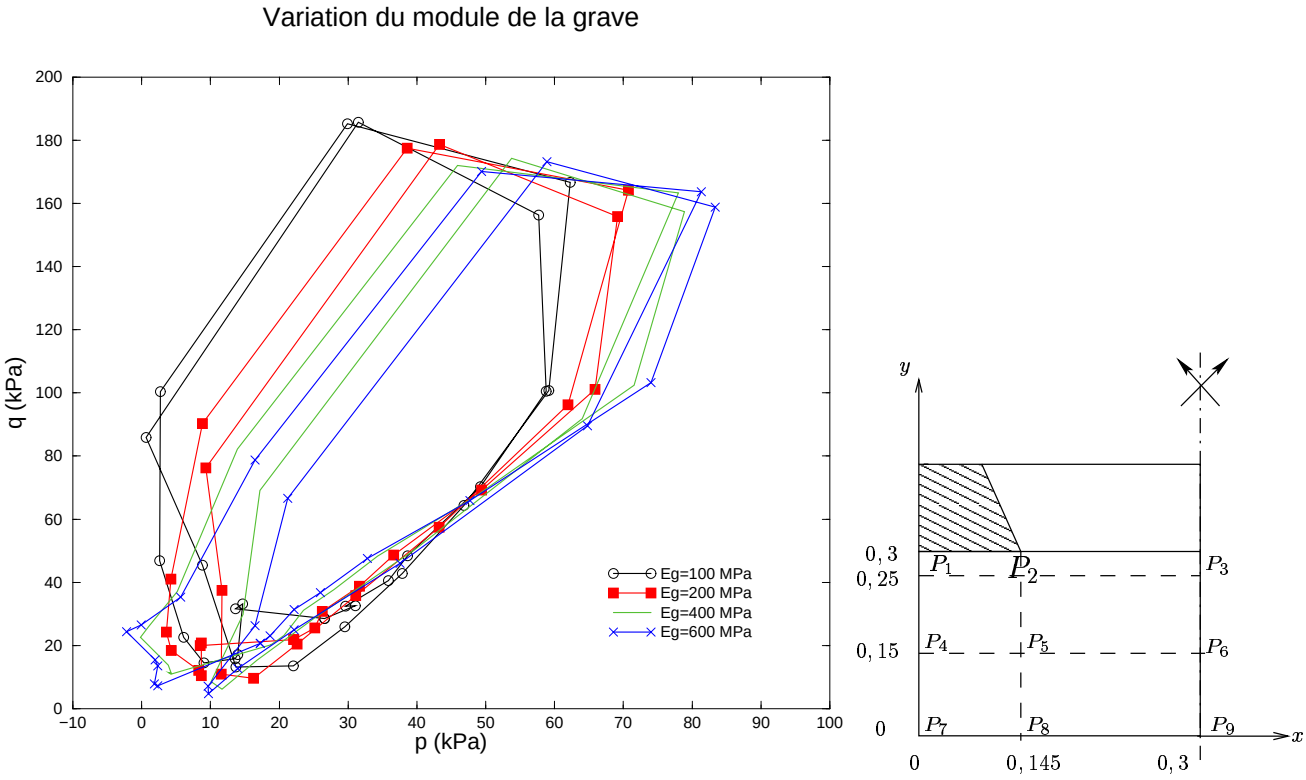


FIG. 4.40: calcul au point P_2

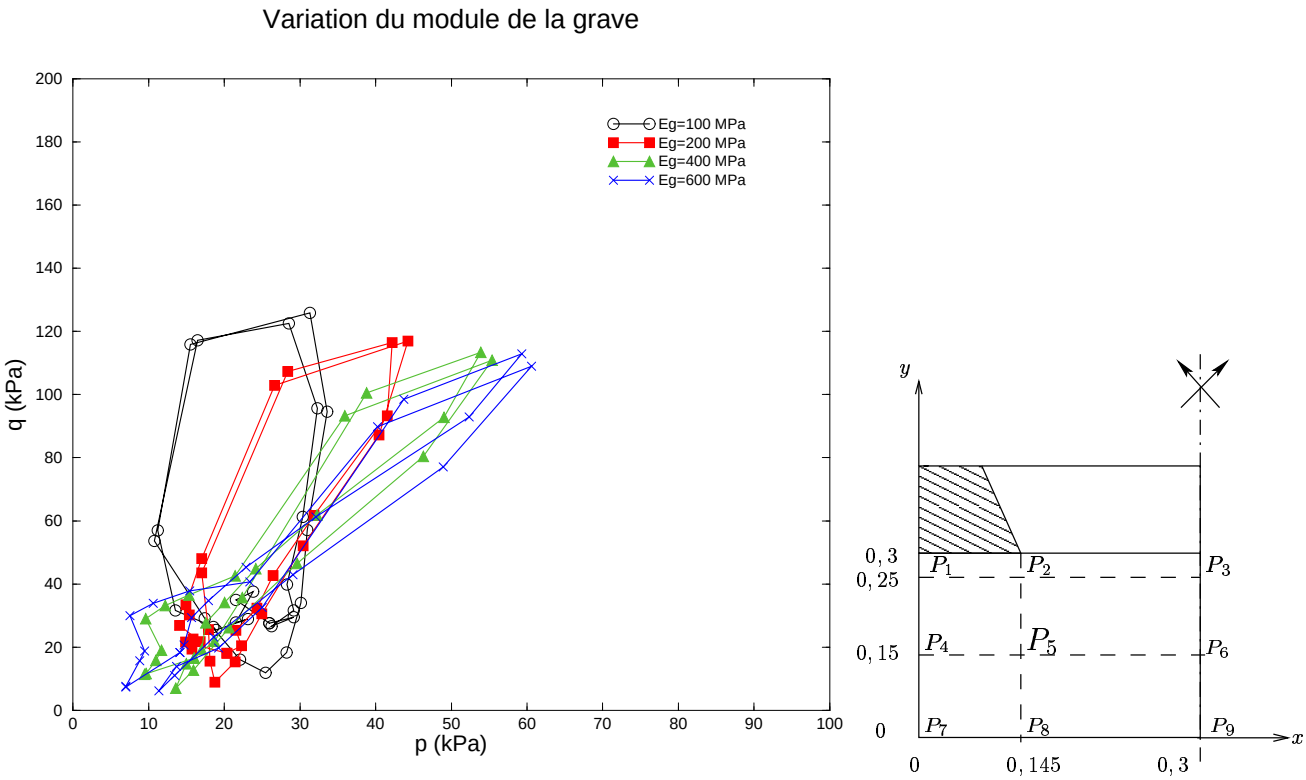


FIG. 4.41: calcul au point P_5

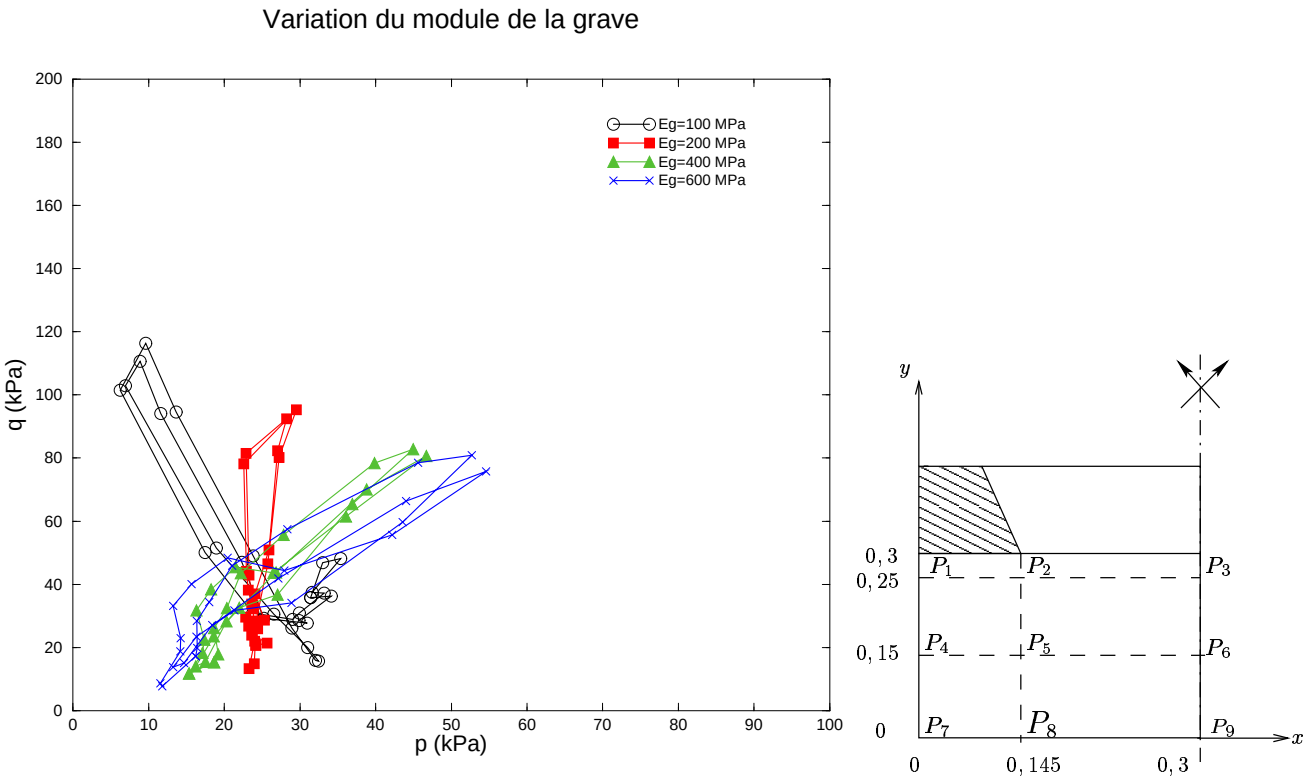


FIG. 4.42: calcul au point P_8

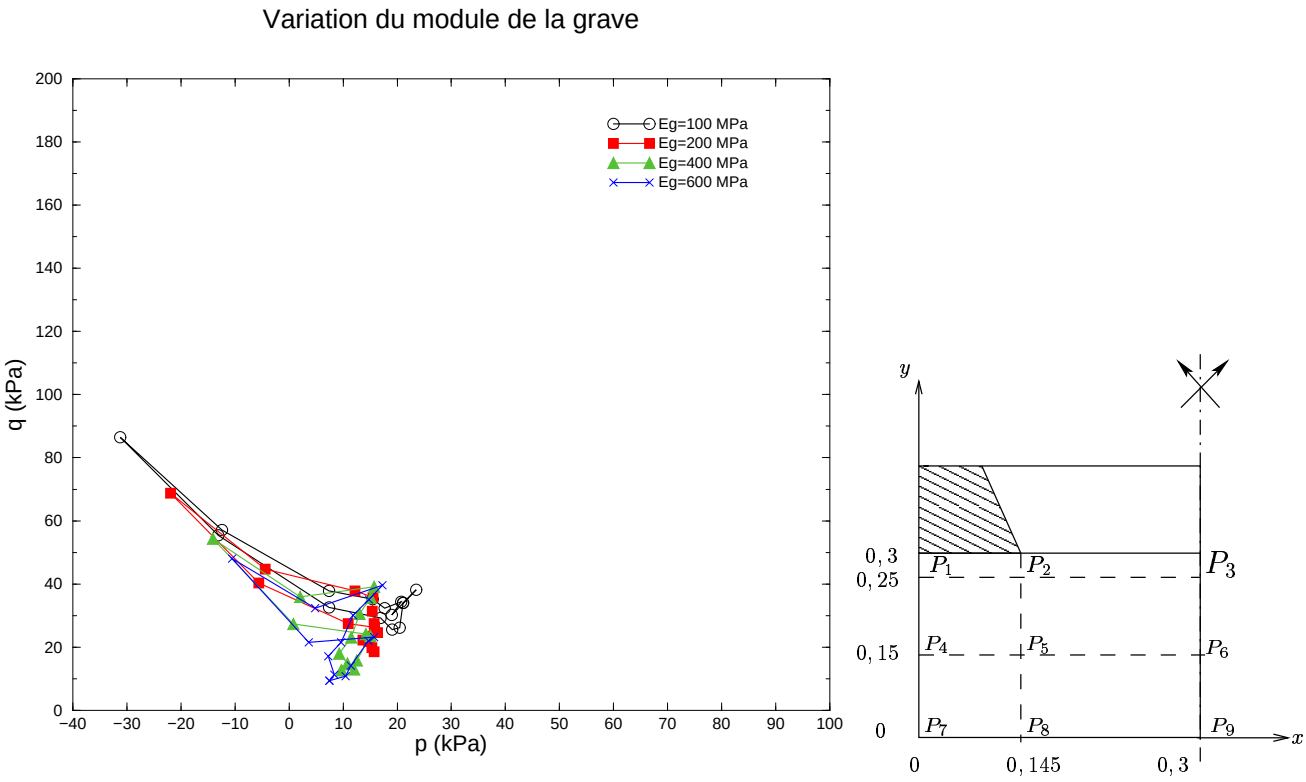


FIG. 4.43: calcul au point P_3

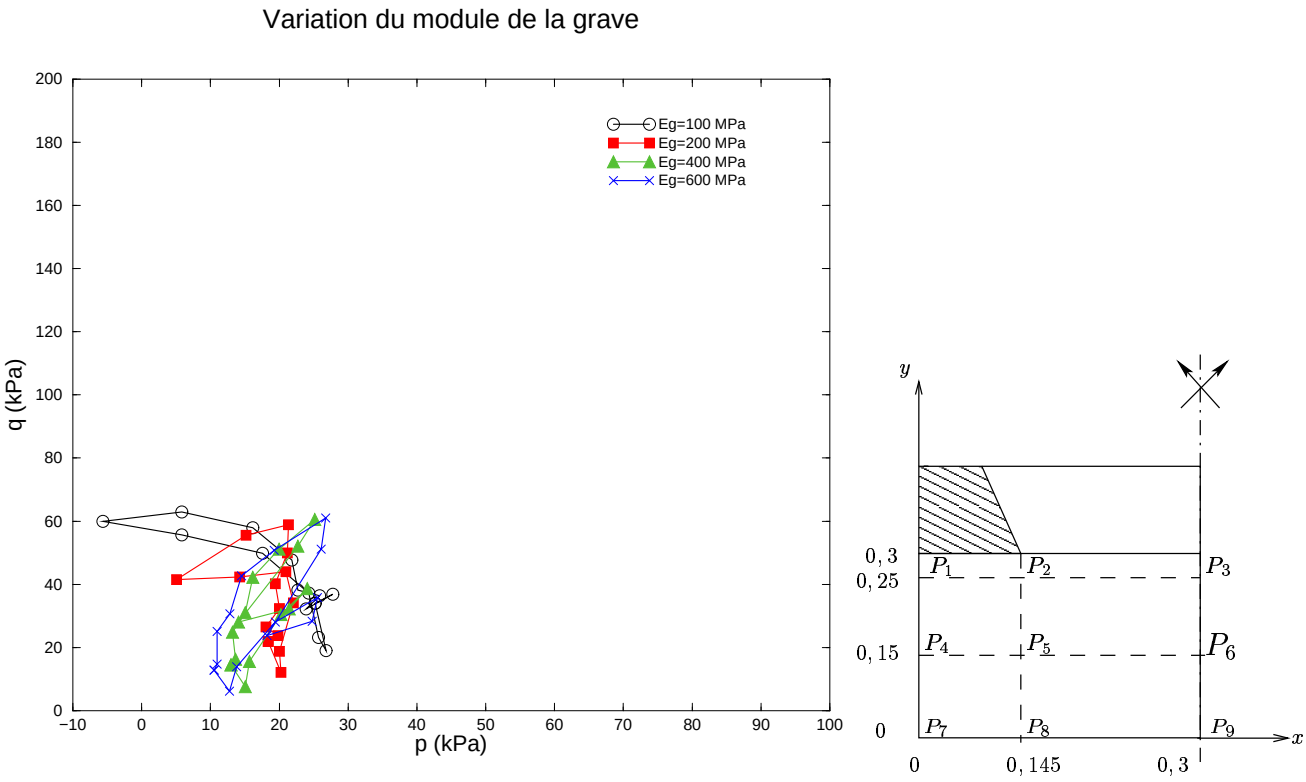


FIG. 4.44: calcul au point P_6

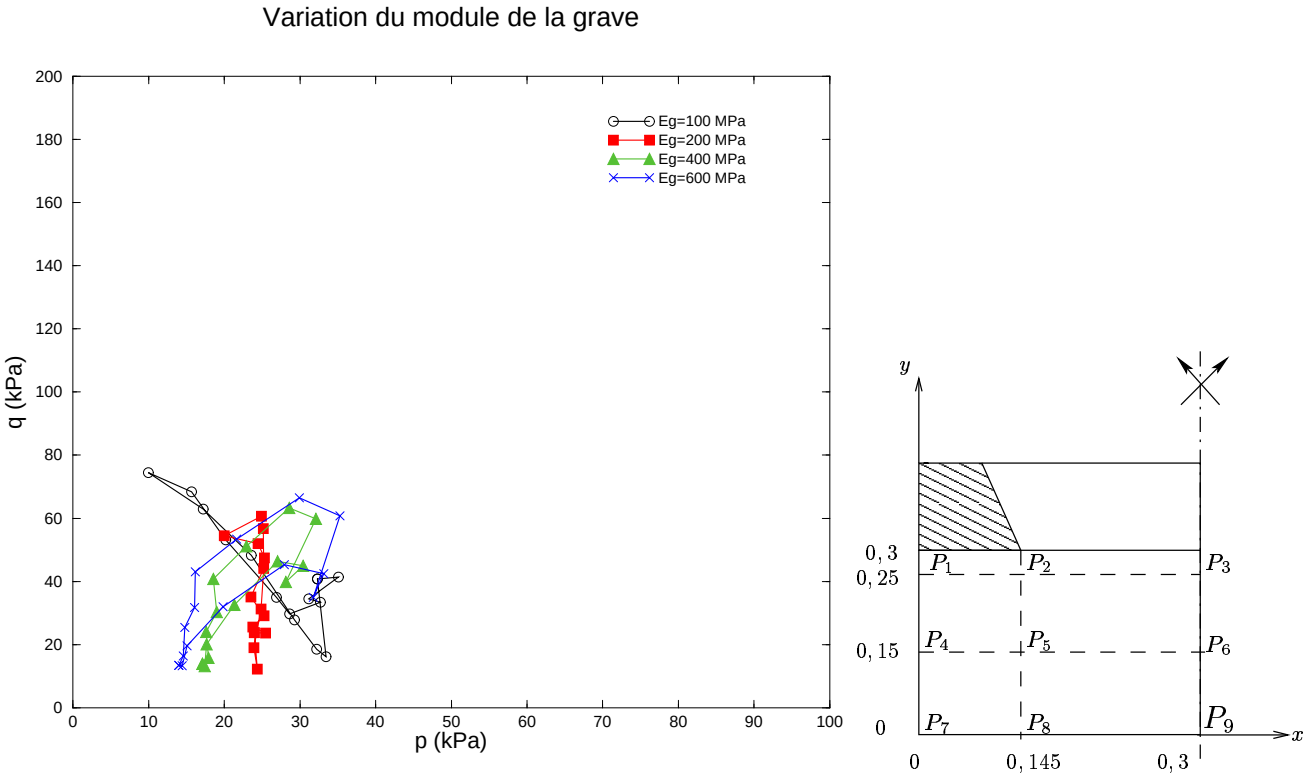


FIG. 4.45: calcul au point P_9

- Les points situés sur l´axe du blochet présentent des cycles de contraintes dont l´allure globale est plus ou moins similaire hormis la contrainte moyenne qui diminue et la contrainte déviatorique qui augmente lorsqu´on s´éloigne du blochet. La figure (4.37) relative au point P_1 montre que, lorsque le module de la grave augmente, le cycle de contraintes garde la même allure, mais qu´il est translaté horizontalement, de sorte que la pression moyenne croît significativement. La contrainte déviatorique croît légèrement. Pour le point P_4 (4.38), les cycles de contrainte subissent une "rotation" qui fait augmenter la pression moyenne mais qui maintient constante la contrainte déviatorique lorsque le module de la grave augmente. Un constat analogue est fait pour le point P_7, mais l´influence du module de la grave est encore plus prononcée.

- Sous les angles des blochets nous constatons aussi une légère traction pour le point P_2 (figure 4.40). L´allure des cycles est différente pour les points P_2, P_5 et P_8 et l´amplitude des cycles décroît lorsque l´on s´éloigne du blochet. En ce qui concerne l´influence du module de la grave sur les cycles, nous constatons que pour le point P_2, l´augmentation du module de la grave entraîne un accroissement de la contrainte moyenne et une diminution de la contrainte déviatorique (figure 4.40). Pour le point P_5, l´augmentation du module de la grave entraine un "aplatissement" des cycles, ces derniers ayant aussi tendance à "tourner" de telle sorte que la pression moyenne croît et que par contre la contrainte q décroît (figure 4.41). L´effet de la rotation est encore plus marqué pour le point P_8 (figure 4.42).

- En ce qui concerne les points situés entre deux blochets successifs (points P_3, P_6 et P_9) les allures des cycles différent d´un point à l´autre. Nous observons de la traction pour les points P_3 et P_6. Les valeurs maximales des contraintes moyennes et des contraintes déviatoriques sont comparables. Pour le point P_3, lorsque la couche de grave est de plus en plus raide, les contraintes de traction se réduisent et l´amplitude du cycle diminue (figure 4.43). On observe le même effet du module de la grave sur les cycles de contrainte du point P_6 (figure 4.44). Concernant le point P_9, lorsque le module de la grave augmente, les cycles de contrainte subissent une rotation de telle sorte que la contrainte moyenne croît et la contrainte déviatorique décroît (figure 4.45).

4.6 Conclusion

Même si la question de l´évaluation des cycles élastiques de référence engendrés en tout point d´une plate-forme ferroviaire par la charge de trafic reste encore largement ouverte compte tenu de la complexité de la structure, le travail effectué dans ce chapitre a permis

d´ores et déjà de mettre en évidence un certain nombre de conclusions :

- Le caractère véritablement tridimensionnel du problème qu´il conviendra de prendre en compte dans l´élaboration d´outils numériques dédiés au calcul de ces cycles.

- L´existence de zones dans le ballast, localisées à proximité des coins des blochets, où l´amplitude des cycles et donc l´ampleur des déformations permanentes engendrées par ces cycles peut devenir importante.

- Il s´agira en outre d´adapter la procédure de calcul au cas des charges de trafic à vitesse élevée pour lesquelles les effets dynamiques sont susceptibles de modifier les caractéristiques des cycles.

Chapitre 5

Comportement cyclique des matériaux

Sommaire

5.1 Comportement cyclique des sables 145

5.1.1 Observations expérimentales 145

5.1.2 Un modèle de comportement cyclique des sables (Dormieux, 1989) 149

5.2 Comportement cyclique du ballast et des graves non traitées 151

5.2.1 Travaux de Juan Martinez (1980) 152

5.2.2 Travaux d´Alva-Hurtado (1980, 1981) 153

5.2.3 Travaux de Profillidis (1983) 155

5.2.4 Travaux de Li et Selig (1996) 156

5.2.5 Travaux de Lekarp et Dawson (1997) 157

5.2.6 Travaux d'Ionescu et al.(1996) 158

5.2.7 Un modèle de prédiction des déformations permanentes fondé sur l´élastoplasticité 159

5.3 Un modèle de loi de comportement cyclique pour les GNT . 161

5.3.1 Description du modèle initial (Gidel et al. 2001) 161

5.3.2 Généralisations de la loi initiale 168

5.4 Conclusions 172

Le présent chapitre dresse un état des lieux relatif au comportement des géomatériaux de type sable, graves ou ballast sous chargement cyclique. Partant d´un certain nombre de données expérimentales, il passe en revue différentes modélisations proposées, en s´attachant plus particulièrement à celles décrivant le comportement de ces matériaux soumis à un grand nombre de cycles.

5.1 Comportement cyclique des sables

De nombreux chercheurs ont étudié le comportement du sable lorsqu´il est soumis à des chargements cycliques. Certains ont réalisé des essais en laboratoire et ont analysé les phénomènes observés (Luong, 1980 [48]), tandis que d´autres ont essayé d´établir des modélisations (Dormieux 1989 [21], Cambou et al., 1988 [16], Vincens et al.2003, [85]). Certains phénomènes se manifestant dans les sables, lorsqu´ils sont soumis à divers chargements cycliques, sont comparables à ceux se produisant dans le ballast ou les graves non traitées (GNT). A noter cependant que l´analyse du comportement cyclique des sables, et notamment de sa densification, est généralement faite en lien avec l´étude du phénomène de liquéfaction par accumulation progressive de la surpression interstitielle, un tel phénomène étant peu susceptible de se produire pour des matériaux de type GNT ou ballast que l´on peut considérer comme très perméables et donc drainants.

5.1.1 Observations expérimentales

5.1.1.1. Travaux de Luong (1980) [48]

Luong (1980) [48] est parmi ceux qui ont étudié le comportement des sols pulvérulents soumis à des chargements cycliques en s´intéressant plus particulièrement à l´évolution des *déformations volumiques* au cours du chargement. Lorsqu´il est soumis à des *chargements répétés radiaux* à faible nombre de cycles ($N = 1$ à 20), où la pente du cycle $\eta = q/p$ est inférieure à une valeur η_c définie comme l´état caractéristique, le sol présente un comportement de faible hystéresis pouvant devenir négligeable lorsque le nombre de cycles augmente. Si l´état caractéristique est dépassé ($\eta = \frac{q}{p} \geq \eta_c$), l´hystéresis n´apparaît plus et le chargement cyclique a pour effet d´augmenter le volume traduisant le phénomène de *dilatance* du squelette granulaire. Ce rapport entre les invariants de contrainte η_c est important pour les sables denses, par contre il est faible pour les sables lâches.

Luong attribue le comportement du sol en termes d´évolution des déformations volumiques, dans le cas d´un essai triaxial conventionnel, à la variation de la contrainte

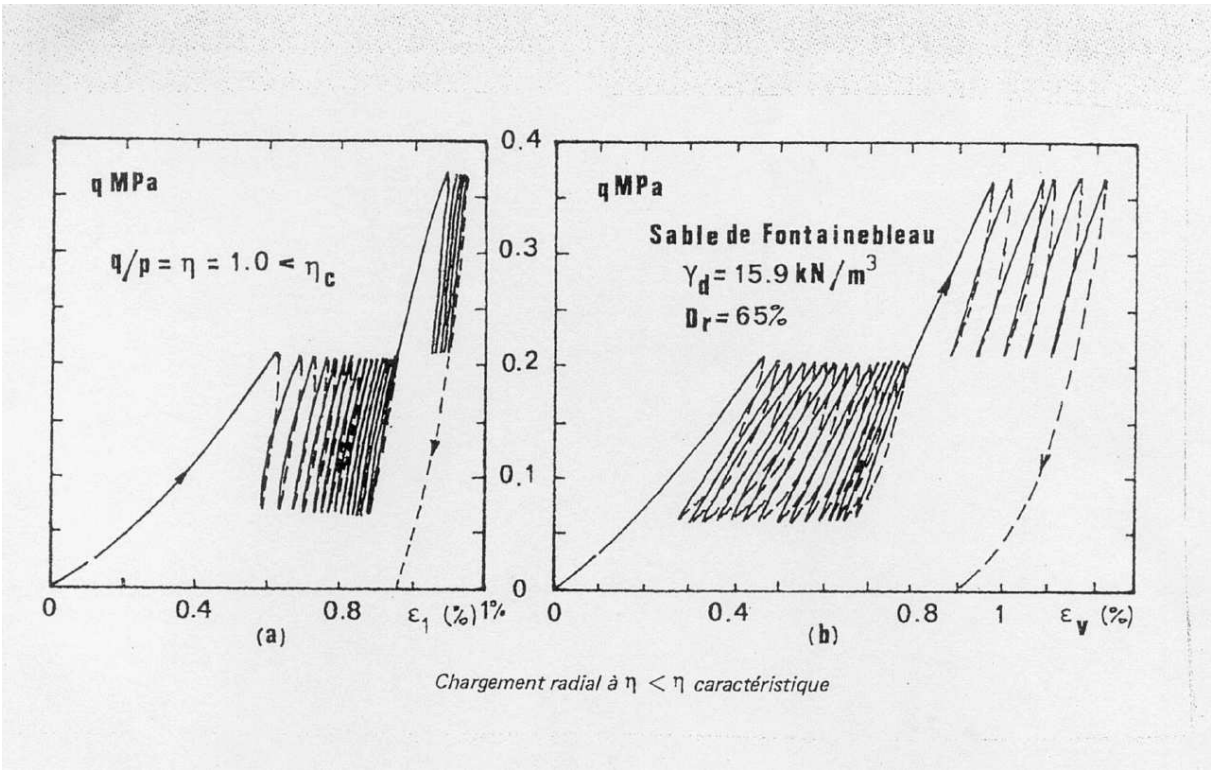


FIG. 5.1: chargement radial à $\eta < \eta_c$ (d´après Luong, 1980)

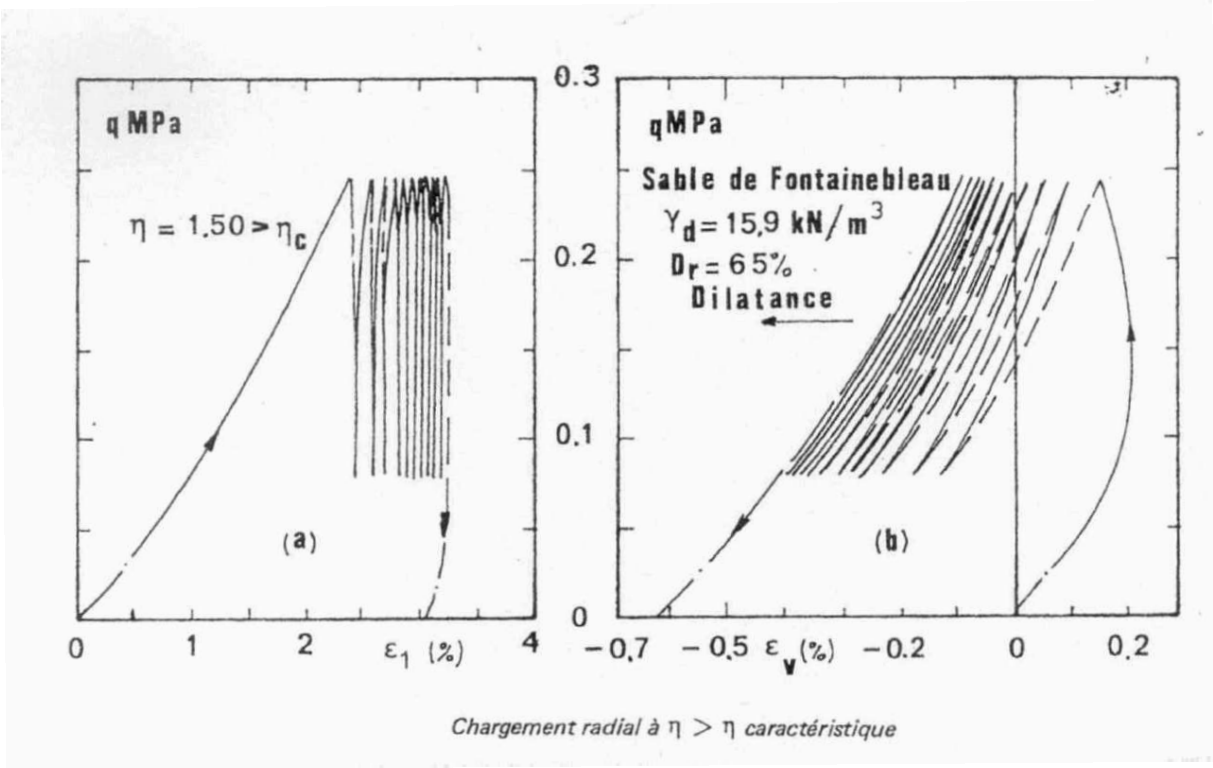


FIG. 5.2: chargement radial à $\eta > \eta_c$ (d´après Luong, 1980)

déviatorique. Si celle-ci est inférieure au seuil de l´état caractéristique, le sol manifeste une *contractance*, dans le cas opposé, il y a apparition de la *dilatance*.

Par ailleurs, dans le cas d´un sable fin saturé en conditions non drainées, un autre phénomène, qualifié de *liquéfaction*, se manifeste par une augmentation brusque de la déformation axiale ϵ_1 accompagnée d´une surpression interstitielle égalant presque la pression de confinement lorsque le déviateur tend à s´annuler. A titre d´exemple, pour une pression de confinement égale à 120 kPa, un déviateur cyclique variant de 10 à 200 kPa, la liquéfaction du sable est obtenue après 34 cycles de chargement.

Pour des états de contrainte situés loins des états caractéristiques, l´analyse phénoménologique réalisée par Luong à l´issue des essais triaxiaux cycliques menés sur le sable montre des ressemblances avec ce qui est observé dans le cas du ballast (Alva-Hurtado, 1980) ou bien dans le cas des matériaux de chaussées (Hornych et al. 2000). Cependant, aussi bien pour le ballast que pour les GNT, le nombre de cycles de chargement est de quelques millions de cycles, alors que pour les sables il n´est que de quelques dizaines ou centaines de cycles.

5.1.1.2. Travaux de Dupla et Canou (2003) [24]

Leur travail a consisté à réaliser des essais cycliques sur du sable au laboratoire, pouvant simuler des sollicitations sismiques. Leur objectif est donc de déterminer les propriétés des sables lors de la liquéfaction apparaissant à la suite d´un séisme.

Deux types d´essais ont été réalisés : des essais d´extension cyclique dans un cylindre creux à parois épaisses (figure 5.3) et des essais dans une chambre d´étalonnage.

En ce qui concerne le premier dispositif, l´essai a consisté à faire varier périodiquement la pression appliquée sur la paroi interne du cyclindre autour d'une valeur moyenne, égale à la pression appliquée sur la paroi externe maintenue constante. Cet essai bien qu´inhomogène, permet d´évaluer qualitativement l´influence des paramètres du matériau sur les déformations volumiques induites par le chargement cyclique.

Les courbes de la figure (5.4) représentent l´évolution, en fonction du nombre de cycles, de la déformation volumique de la cavité (augmentation de volume) et de celle de l´échantillon lui même, en conditions drainées. On observe une diminution progressive du volume de ce dernier (contractance), importante au départ et qui tend à décroître progressivement. Ceci est confirmé par l´analyse des courbes donnant la déformation volumique irréversible cumulée en fonction du nombre de cycles. Les différentes courbes représentées sur la figure (5.5) mettent en évidence l´influence sur une telle évolution des déformations volumiques irréversibles, du paramètre R_c, défini comme le rapport entre la demi amplitude de variation de la pression et la pression moyenne, de la pression de consolidation initiale ou bien

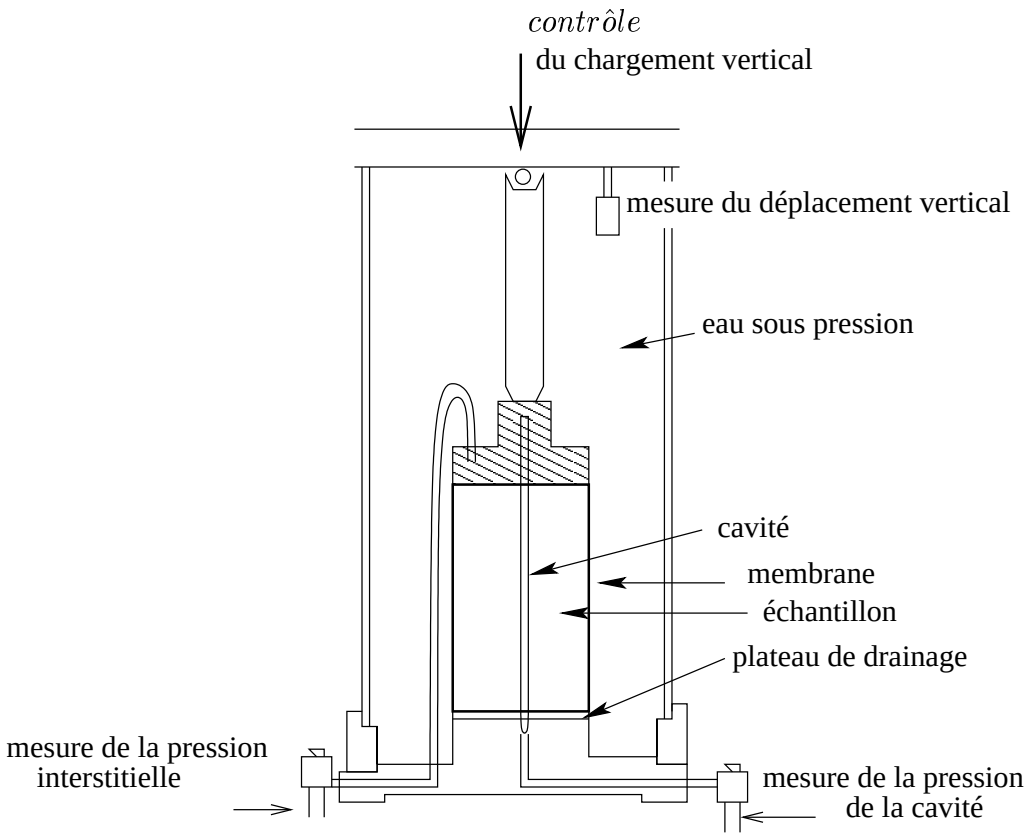


FIG. 5.3: cylindre creux (Dupla et Canou, 2003)

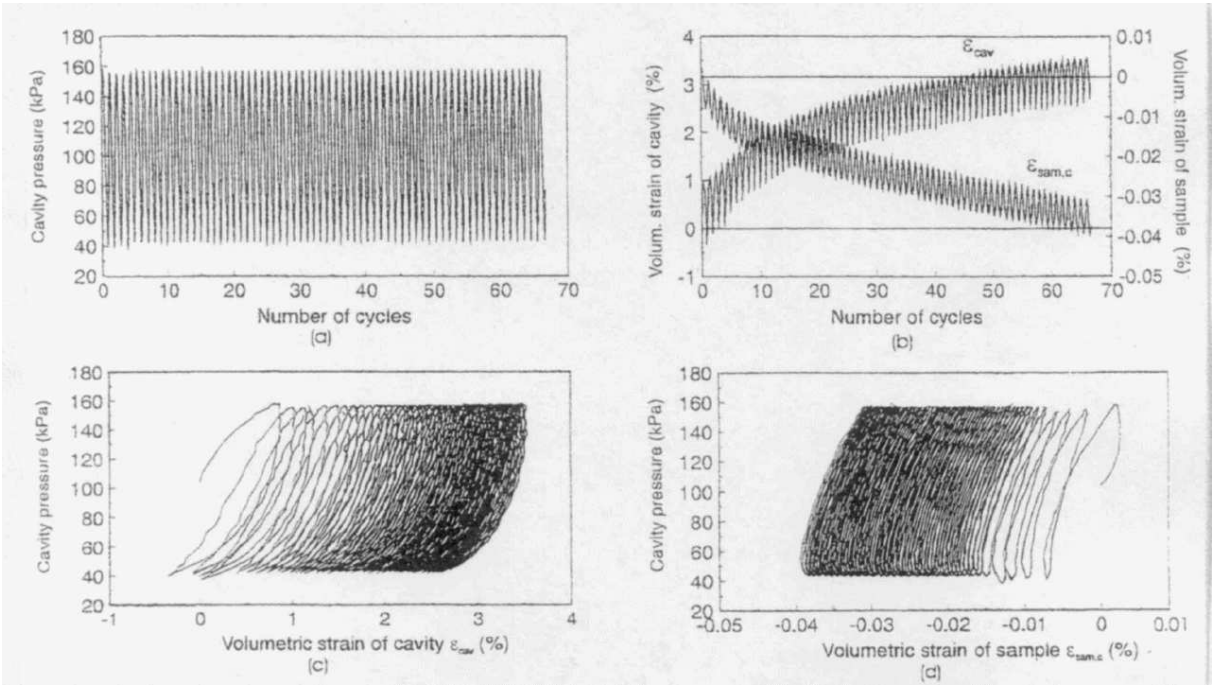


FIG. 5.4: résultats d´essais cycliques drainés à pression controlée (HCC test) (d´après Dupla et al., 2003)

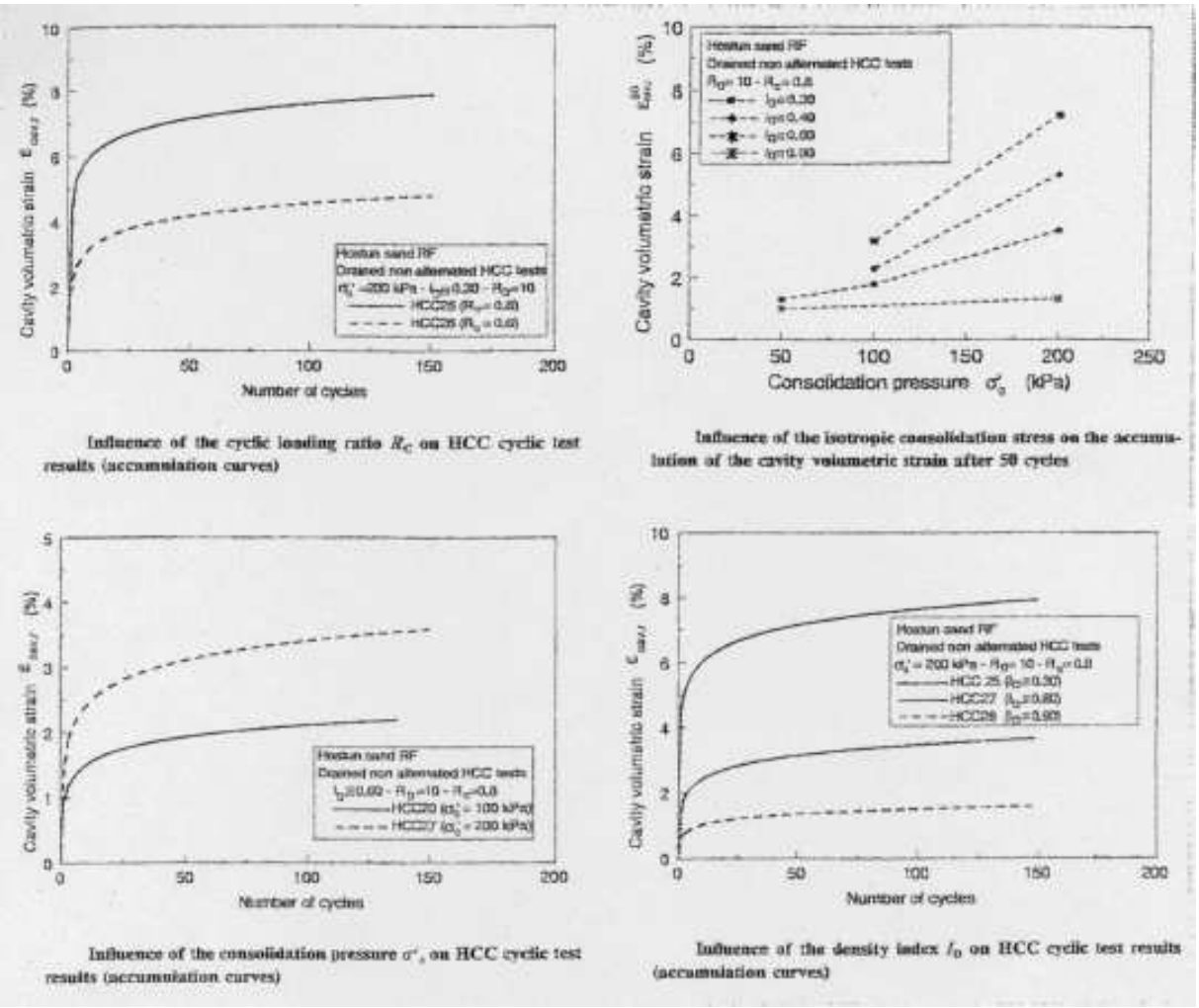


FIG. 5.5: courbes d´évolution des déformations volumiques en fonction du nombre de cycles (d´après Dupla et al., 2003)

encore de l´indice de densité initial du sable. Des résultats similaires sont observés en ce qui concerne les essais au mini pressiométre en chambre d´étalonnage.

5.1.2 Un modèle de comportement cyclique des sables (Dormieux, 1989)

Comme nous l´avons signalé au chapitre 2, les lois élastoplastiques pas-à-pas ne paraissent pas adaptées au calcul des déformations irréversibles pour un grand nombre de cycles. Nous présentons uniquement le modèle de Dormieux (1989) qui utilise une loi de comportement donnant la déformation irréversible induite par les cycles de chargement en fonction du nombre de cycles et des proprietés de ces cycles.

Dormieux (1989) [21] propose une loi de comportement cyclique pour les sables lâches.

Elle porte sur le taux d´évolution de la seule composante volumique de la déformation permanente.

$$\epsilon_v^*(N) = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^*(N)) \tag{5.1}$$

qui gouverne l´apparition de surpressions interstitielles cumulées, à l´origine du phénomène de liquéfaction. S´appuyant sur un certain nombre de données expérimentales, la loi proposée s´écrit sous la forme :

$$\frac{d\epsilon_v^*(N)}{dN} = -\alpha[\frac{\Delta q}{< p > (N)}]^\beta exp[\gamma \epsilon_v^*(N)] \tag{5.2}$$

Dans cette équation :

⋆ α, β et γ sont des constantes caractéristiques du comportement du matériau.

⋆ Δq est la demi amplitude de la variation de la norme du déviateur de contrainte au cours d´un cycle.

$$\Delta q = \frac{1}{2}[q^{max} - q^{min}] \quad \text{avec} \quad q = \sqrt{3/2(\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})}; \quad \underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\sigma}})\underline{\underline{I}} \tag{5.3}$$

⋆ $< p >$ (N) est la valeur moyenne sur un cycle de la contrainte moyenne $p(N) = -\frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\sigma}})$.

Il est à remarquer que la loi (5.2) ne fait intervenir que les invariants p et q de la contrainte subie par le matériau en un point donné. La figure (5.6) montre comment il est possible de déterminer Δq et $< p >$ et donc le rapport $\Delta q/ < p >$ à partir du tracé du cycle élastique dans le plan (p,q). Il est à noter que Δq ne dépend pas de N, tandis que la pression moyenne $< p >$ dépend de N, compte tenu de la "dérive" progressive du cycle élastique subi par le matériau lorsque N augmente.

Supposant $< p >$ constant, l´intégration de la relation (5.2) en tenant compte du fait que $\epsilon_v^*(N = 0) = 0$, conduit à une expression de l´accumulation de la déformation volumique en fonction de N, de la forme :

$$\epsilon_v^*(N) = -\frac{1}{\gamma}Ln[\gamma\alpha(\frac{\Delta q}{< p > (N)})^\beta N + 1] \tag{5.4}$$

c´est-à-dire à une croissance de type logarithmique.

Ce type de loi est susceptible d´être intégré dans le modèle de calcul présenté au chapitre 3. Il est cependant nécessaire de lui apporter deux modifications :

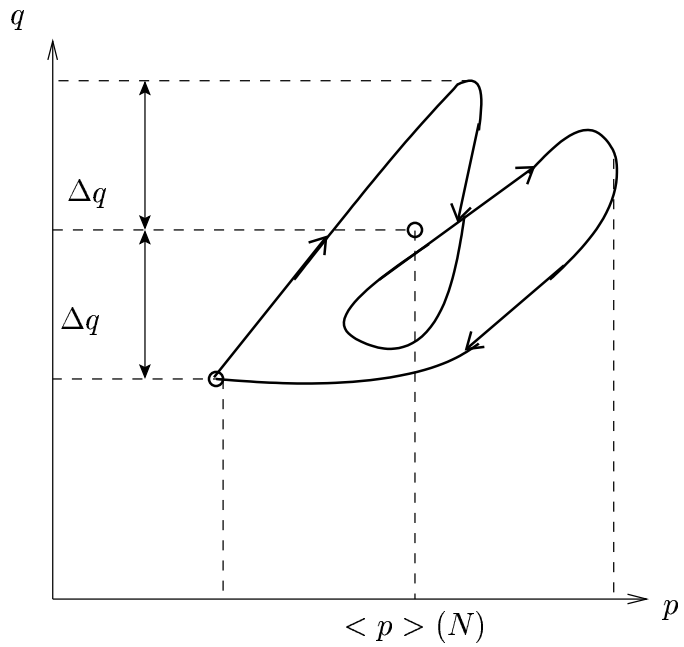


FIG. 5.6: détermination du rapport $\Delta q / < p >$ à partir de la représentation du cycle élastique dans le plan (p,q)

- La prise en compte de l´ensemble des composantes de la déformation permanente et pas seulement de sa partie volumique, seule nécessaire à la modélisation du phénomène de liquéfaction.

- L´extension de la loi à un nombre de cycles important pouvant aller jusqu´à plusieurs millions.

5.2 Comportement cyclique du ballast et des graves non traitées

Nous nous intéressons ici plus particulièrement aux travaux relatifs à l´analyse des déformations permanentes qui se manifestent dans des matériaux de chaussées routières (graves non traitées) ou de voies ferroviaires (ballast) sous l´action d´un grand nombre de cycles de chargement.

5.2.1 Travaux de Juan Martinez (1980)

Juan Martinez [50] a mené des essais triaxiaux cycliques (plus d´un million de cycles) sur des graves, en faisant varier de façon cyclique le déviateur des contraintes q et la pression de confinement p. La cellule triaxiale sur laquelle il a travaillé a pour diamètre 160 mm et pour hauteur 320 mm. Deux types d´essais ont été réalisés :

- des essais pour la détermination des déformations permanentes, où chaque éprouvette est soumise à un nombre de cycles de chargement supérieur à 100000 cycles, d´amplitude constante, afin d´analyser l´évolution du comportement du matériau en terme d´évolution de la déformation permanente en fonction du nombre de cycles de chargements ;

- des essais visant la détermination des caractéristiques élastiques du matériau, où la même éprouvette est soumise à plusieurs trajets de contrainte, mais le nombre de cycles de chargement est plus faible, de l´ordre de 200.

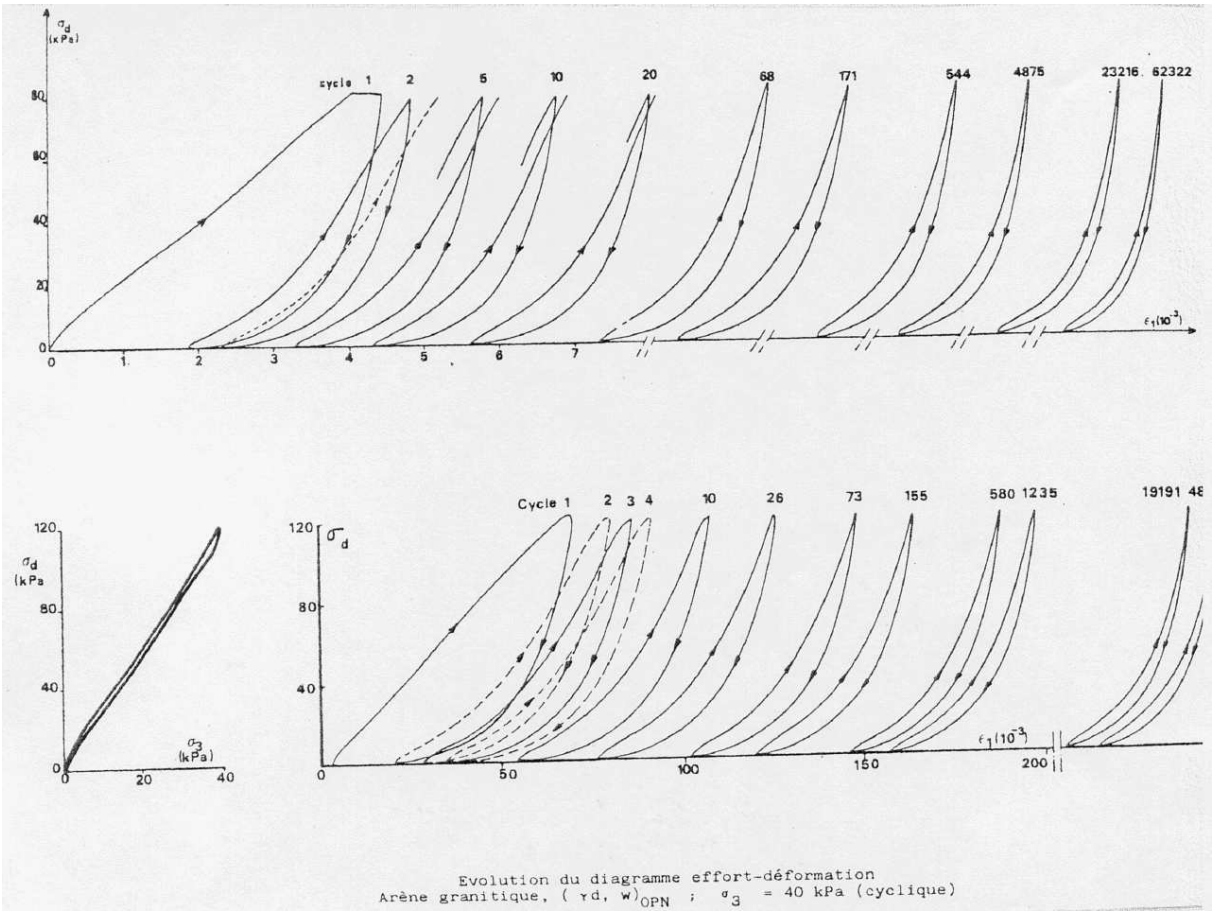


FIG. 5.7: évolution du diagramme effort-déformation dans un essai triaxial cyclique (d´après Martinez, 1980)

L´auteur a mesuré les déformations permanentes axiales et latérales. Les déformations axiales sont mesurées à l´aide de capteurs placés sur deux anneaux fixés sur le tiers central de la cellule, tandis que les déformations latérales, sont mesurées par trois capteurs à induction placés sur le plan diamétral moyen de la cellule, espacés d´un angle de 120°.

Il observe une stabilisation des déformations lorsque l´inclinaison des contraintes par le rapport q/p est faible, correspondant à un phénomène *d´accomodation* (le comportement du matériau après un certain nombre de cycles est supposé élastique). Une contractance du matériau est observée dans ce cas. Par contre, lorsque ce rapport est élevé, il observe une évolution quasi-linéaire des déformations permanentes qu´il caractérise comme un phénomène de *rochet* . Contrairement au cas précédent, une dilatance du matériau est observée.

Deux types de loi reliant les déformations permanentes axiales au nombre de cycles sont proposées : une loi puissance de la forme :

$$\epsilon_1^*(N) = aN^b \tag{5.5}$$

où le coefficient a traduit l´effet de l´amplitude des contraintes appliquées, tandis que le coefficient b traduit l´évolution à long terme des déformations permanentes, ainsi qu´une loi logarithmique telle que :

$$\epsilon_1^*(N) = a + blogN \tag{5.6}$$

qui lui paraît plus propre à des ajustements sur les données expérimentales.

Aucune loi n´est en revanche proposée pour modéliser l´évolution des déformations permanentes latérales. Il semble néanmoins au vu de quelques courbes expérimentales données par l´auteur que ces déformations (qui sont généralement positives) manifestent le même type d´évolution que les déformations axiales.

A partir des courbes donnant les évolutions des déformations permanentes axiales et latérales présentées par Martinez (1980), nous avons estimé la valeur du paramètre $\nu^* = -\frac{\epsilon_2^*}{\epsilon_1^*}$ (équation 5.30). Nous constatons que ce paramètre varie entre $0,4$ et 1.

5.2.2 Travaux d´Alva-Hurtado (1980, 1981)

Alva-Hurtado (1980) [6] a réalisé une modélisation de la voie ferrée à l´aide d´un modèle analytique *GEOTRACK* (modèle d´analyse statique), afin d´estimer la distribution des contraintes dans les couches de matériaux constituant la plate-forme et de déterminer

ensuite les trajets de contraintes. A partir de ces trajets de contrainte déterminés par le modèle de calcul, l´auteur calcule les invariants de contraintes (la pression moyenne p et le déviateur des contraintes q).

Sur la base de ces trajets de contrainte, des essais triaxiaux cycliques ont été réalisés afin de mesurer le module élastique et les déformations permanentes des matériaux constitutifs de l´infrastructure. L´appareil triaxial utilisé permet la variation de la seule contrainte déviatorique en maintenant constante la pression de confinement dans la cellule triaxiale.

Les essais triaxiaux cycliques sont réalisés à des pressions de confinement constantes comprises entre 35 et 140 kPa. Le nombre de cycles de chargement est de 100000. Les déformations permanentes volumique et verticale ont été mesurées, mais pas la déformation permanente latérale, qui a été calculée à partir des mesures des deux autres déformations permanentes.

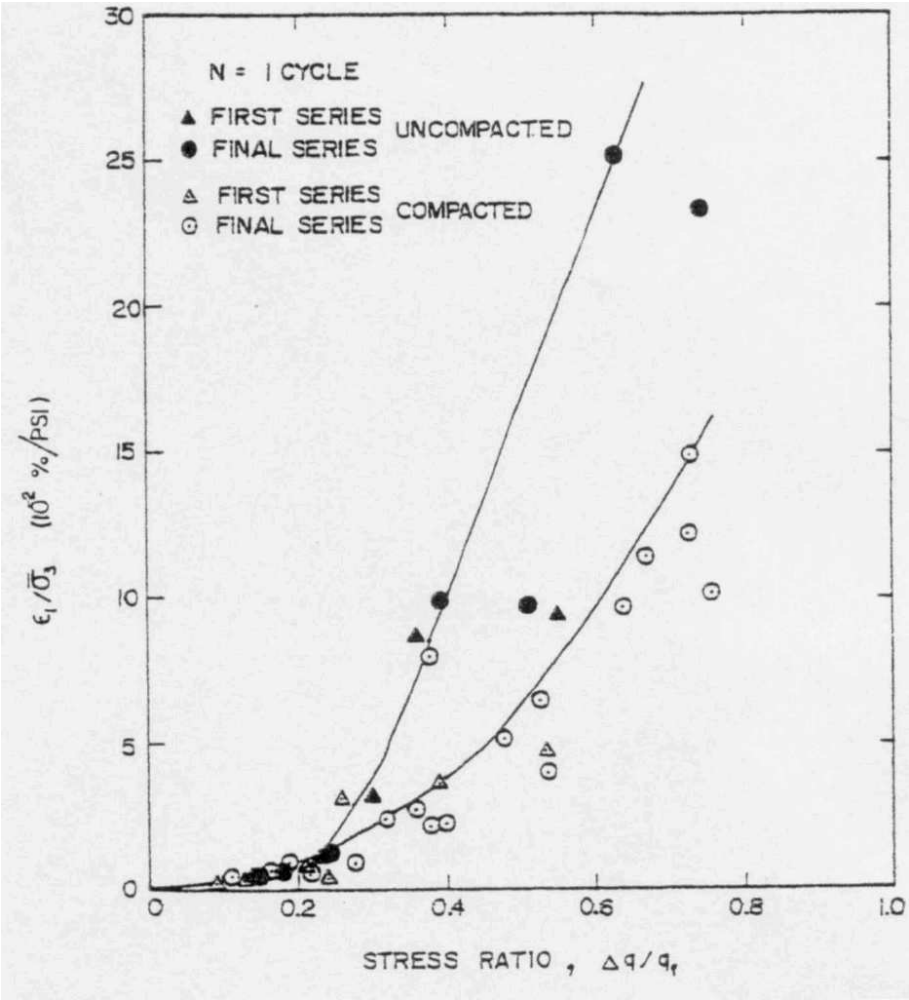


FIG. 5.8: influence des propriétés des cycles de contraintes sur la déformation axiale mesurée au triaxial (d´après Alva-Hurtado, 1980)

A travers une procédure de régression linéaire appliquée à ces essais, l´auteur propose une loi reliant la déformation axiale cumulée au nombre N de cycles appliqués et à la déformation permanente relative à l´application du premier cycle, notée $\epsilon_1^*(1)$. Alva-Hurtado schématise l´influence du chemin de contraintes sur cette déformation initiale (figure 5.8). La loi proposée a la forme suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = \epsilon_1^*(1)[1 + 0,19log(N)] \tag{5.7}$$

et qui se révèle très proche de celle proposée par (ORE ;Shenton, 1974) :

$$\epsilon_1^*(N) = \epsilon_1^*(1)[1 + 0,2log(N)] \tag{5.8}$$

Une représentation plus précise d´une telle loi d´évolution est donnée par une régression non-linéaire, qui conduit l´auteur à proposer la formule suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = (0,85 + 0,38log(N))\epsilon_1^*(1) + (0,05 - 0,09log(N))\epsilon_1^*(1)^2 \tag{5.9}$$

Ici encore, aucune loi n´est explicitement proposée pour ce qui concerne l´évolution cumulée des autres composantes de la déformation permanente.

5.2.3 Travaux de Profillidis (1983)

Profillidis (1983) [65] ne s´est pas intéressé uniquement à l´interaction entre le ballast et la structure, puisqu´il a également étudié le comportement à la fatigue des matériaux constitutifs des couches d´assise et de la plate-forme ferroviaire. Il définit la fatigue comme un phénomène de *perte de résistance* d´un matériau soumis à un chargement répété et qui induit alors à une *dégradation structurelle et progressive du matériau.*

Concernant le ballast, des essais triaxiaux à 10^5 cycles montrent que l´application du premier cycle engendre une déformation permanente très importante du ballast. Compte tenu de la granulométrie de ce matériau, cette déformation permanente est attribuée au réarrangement des grains de ballast qui aboutit à la fin, à un état quasi-stabilisé. Après l´application de ce premier cycle, le taux de déformation permanente du ballast diminue sensiblement lorsque le nombre de cycles de chargement augmente.

L´expression de la déformation permanente déduite des résultats d´essais est donnée par l´équation suivante :

$$\epsilon^*(N) = \epsilon^*(1)(1 - 0,2logN) \tag{5.10}$$

Des essais effectués par les Chemins de Fer Britanniques (dans Profillidis (1983) [65]) dans des conditions de contraintes contrôlées, ont permis de proposer une relation entre la déformation permanente du ballast et le déviateur appliqué de la forme :

$$\epsilon^*(N) = 0,082(100n - 38,2)(\sigma_1 - \sigma_2)^\alpha(1 + 0,2logN) \tag{5.11}$$

où :

α est un coefficient qui dépend du niveau de contrainte appliquée, compris entre 1 et 2 pour les contraintes faibles mais peut atteindre des valeurs jusqu´à 3 pour les contraintes élevées et n est la porosité du ballast.

5.2.4 Travaux de Li et Selig (1996)

Li et Selig [46] se sont inspirés de la loi d´accumulation des déformations permanentes proposée par Monosmith et al. (1975) [51] ainsi que Knutson et al. (1977) [41] dont l´expression est donnée par l'équation (5.5). Ils suggérent qu'un modèle qui prédit l´accumulation des déformations permanentes doit tenir compte des facteurs qui influent le plus sur le comportement cyclique du matériau, tels que : l´état de contrainte dans le matériau, le nombre de cycles de chargement, le type de matériau et son état physique.

L´amélioration apportée par Li et Selig à cette loi porte sur les expressions des facteurs a et b. Ils ont analysé des résultats d´essais existants dans la littérature tels que ceux de Monosmith et al. (1975) et Knutson et al. (1977), et en ont déduit que l´effet du déviateur des contraintes sur le coefficient a est très important, et qu´en outre l´état physique du sol du point de vue densité sèche et humidité du matériau a un effet significatif sur ce coefficient. Ils proposent alors une relation entre le coefficient a et le déviateur des contraintes. L´effet de l´état physique du matériau est pris en compte à travers le paramètre de résistance statique du sol σ_s déterminé à partir d´essais à chargements monotones et statiques. La relation proposée est de la forme :

$$a = a'(\frac{q}{\sigma_s})^m \tag{5.12}$$

En reportant l´équation (5.12) dans (5.5), nous obtenons la relation suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = a'(\frac{q}{\sigma_s})^m N^b \tag{5.13}$$

Afin d´être en mesure de prédire l´évolution des déformations permanentes axiales, les paramètres a', b et m nécessitent d´être déterminés pour divers types de matériaux. A

moins de disposer d´essais à chargements répétés, ces constantes sont difficiles à évaluer. Li et Selig ont déterminé ces paramètres en les calant à partir d´une comparaison entre une simulation de tassement de voie réalisée à partir de l´équation (5.13) et des mesures de tassement. Ils considérent que parmi ces trois paramètres, c´est a' qui est sujet à la plus grande incertitude, étant donné que peu d´observations relatives à ce paramètre existent. Ils considèrent ce paramètre comme égal à la production des déformations permanentes lorsque le sol est chargé de façon monotone jusqu´à la rupture c´est-à-dire lorsque $q/\sigma_s = N = 1$. On obtient donc $\epsilon_1^*(1) = a'$. Le coefficient b peut, quant à lui, être considéré comme constant. Il reflète le taux d´accumulation des déformations permanentes sous chargement répété.

Dans cette approche, tout comme dans l´ensemble des travaux antérieurs auxquels se réfèrent les auteurs, en proposant des améliorations, aucune mention n´est faite du caractére multiaxial des déformations permanentes. Tout se passe comme si la détermination de l´état résiduel de la structure et notamment du tassement se faisait par simple intégration des seules déformations permanentes verticales sans tenir compte des autres composantes.

5.2.5 Travaux de Lekarp et Dawson (1997)

Lekarp et Dawson (1998) [43] ont réalisé des essais triaxiaux cycliques au laboratoire afin d´étudier les déformations permanentes de graves non traitées. Ces essais ont été menés sur cinq graves différentes utilisées généralement comme matériaux de chaussées. Le nombre de cycles maximum atteint lors des essais cycliques est de 80000 cycles. L´appareillage utilisé est conçu de façon à ne pouvoir faire varier que la valeur du déviateur, la pression de confinement étant maintenue constante.

Les résultats des essais en terme d´accumulation des déformations permanentes axiales en fonction du nombre de cycle ont été comparés à ceux obtenus par Paute et al. (1988) [59] et notamment à la loi adoptée par ces derniers, du type :

$$\epsilon_1^*(N) = A(1 - N^{-B}) \tag{5.14}$$

où la constante A apparaît comme la valeur asymptotique de la déformation permanente, tteinte pour un nombre de cycles infini (Figure 5.9).

Ils proposent alors une amélioration de cette loi qui met en exergue l´effet des contraintes sur les déformations permanentes. Les résultats de leurs analyses permettent d´établir une relation entre les déformations permanentes axiales, le rapport entre les contraintes maximales et la longueur du trajet de contrainte. Elle est donnée par l´expression suivante :

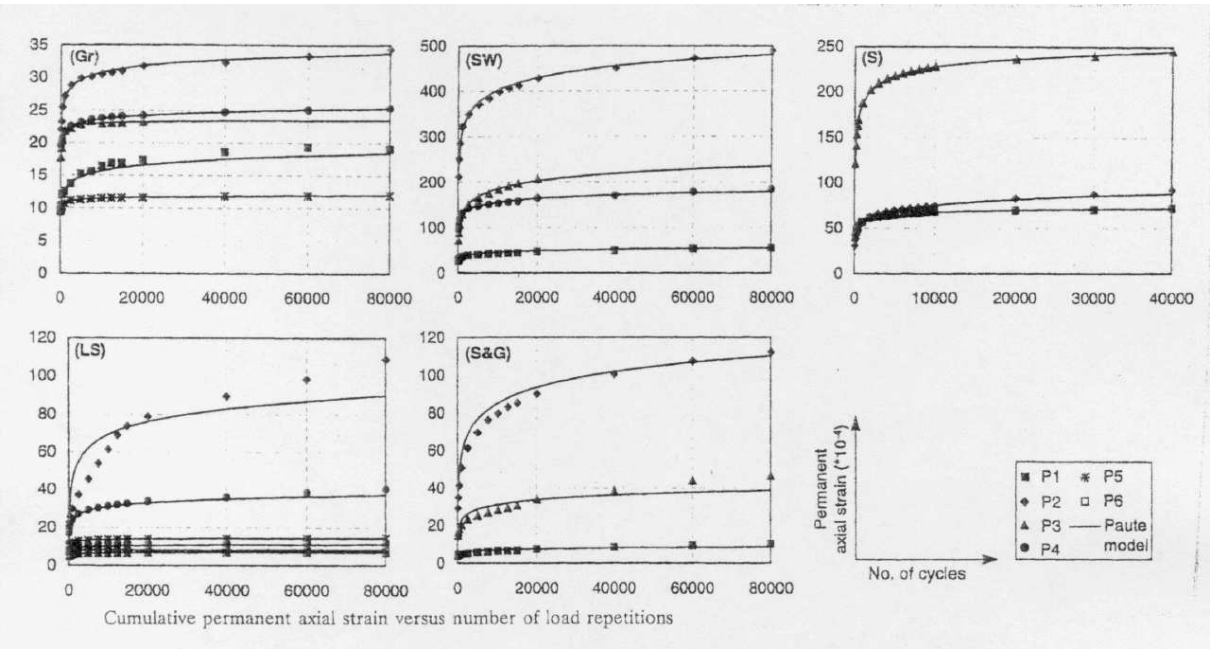


FIG. 5.9: évolution des déformations permanentes axiales en fonction du nombre de cycles de chargement (d´après Lekarp et al., 1998)

$$A = a\left(\frac{L}{p_0}\right)\left(\frac{q}{p}\right)^{b}_{max} \tag{5.15}$$

Cette relation est valable pour un nombre de cycles supérieur à 100. L est la longueur du cycle, $(q/p)_{max}$ est le rapport maximum de contrainte, tandis que a et b sont des paramètres de régression et p_0 est une pression de référence égale à 1 kPa. Cette loi est dans son esprit très proche de celle proposée par Gidel et al. (2001) que nous exposerons plus en détail dans la dernière partie de ce chapitre.

5.2.6 Travaux d'Ionescu et al.(1996)

Ionescu et al. (1996) [39] ont cherché à caractériser le ballast du point de vue mécanique en réalisant des essais de chargements statiques et cycliques sur des échantillons de ce matériau. Les essais de compression statique consistent à appliquer des contraintes axiales variant entre 0 et 950 kPa, les faces latérales de l´échantillon, placé dans une cellule, étant bloquées [1]. L´application de ces contraintes est effectuée par incréments de 50 et 100 kPa. Après avoir appliqué la charge totale, une décharge par paliers de 100 kPa est effectuée.

En soumettant le ballast à un essai cyclique, utilisant un tel dispositif expérimental, Ionescu et al. (1996) remarquent que le comportement de ce dernier est non linéaire. Les

[1] essai de type oedométrique

courbes (σ,ϵ) sont assez différentes de celles observées pour la première charge correspondant à l´essai statique. En effet, durant le premier cycle de chargement, la déformation axiale évolue rapidement et elle n´est récupérée que partiellement lors de la décharge. Après chaque cycle de chargement, un nouvel incrément de déformation plastique, qui décroît progressivement, est accumulé. Cette déformation irréversible par cycle, passe par exemple de $2,2\%$ lors du premier cycle à $0,001\%$ après 50 cycles de chargement. Il en résulte un tassement dont la variation est très rapide sur les quinze premiers cycles. Au-delà de ces quinze premiers cycles, les incréments de tassement sont relativement faibles et leur évolution est linéaire en fonction du nombre de cycles pour les échantillons non compactés. Pour les échantillons compactés, le tassement évolue dès le premier cycle selon une loi logarithmique. Sur la base de tels résultats, les auteurs proposent une relation entre le tassement résiduel et le nombre de cycles de chargement du type :

$$\delta^r = alogN + b \quad ; \quad N < X \tag{5.16a}$$

$$\delta^r = cN + d \quad ; \quad N > X \tag{5.16b}$$

Les essais permettent d´identifier les paramètres de la loi proposée. Le nombre de cycles "critique" est égal à $X = 15$, les autres paramètres étant : $a = 12,273$, $b = 21,036$, $c = 0,0037$ et $d = 35,6744$. Ainsi, le comportement du ballast à court et long terme est modélisé respectivement par les équations (5.16a) et (5.16b).

5.2.7 Un modèle de prédiction des déformations permanentes fondé sur l´élastoplasticité

Habiballah et al.(2003) [31] ont récemment tenté de modéliser les déformations permanentes des matériaux granulaires de type GNT soumis à des chargements cycliques, en se basant sur la théorie de l´adaptation en élastoplasticité. Ils partent du constat que si l´utilisation directe d´une loi élastoplastique de type incrémental n´est pas adaptée à la simulation du comportement d´une structure soumise à un chargement cyclique, au delà de quelques dizaines de cycles (voir le début de ce chapitre), des méthodes existent qui permettent de prédire ou tout au moins d´évaluer l´état asymptotique, c´est-à-dire les déformations permanentes obtenues après un grand nombre de cycles.

Reprenant une méthode développée par Zarka (1978) pour des matériaux élastoplastiques de Von Mises à écrouissage cinématique, les auteurs proposent de décrire le comportement de matériaux de type GNT par le biais d´un critère de Drücker-Prager de la forme :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) = \sqrt{\frac{1}{2}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{y}}) : (\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{y}})} - k - \alpha \leq 0 \tag{5.17}$$

Dans l´expression d´un tel critère, k et α sont deux constantes caractéristiques du matériau, qui se réfèrent respectivement à sa cohésion et son angle de frottement, $p = -1/3tr\underline{\underline{\sigma}}$ désigne la contrainte moyenne, tandis que $\underline{\underline{y}}$ est un tenseur qui représente la translation du domaine élastique dans l´espace des contraintes (écrouissage cinématique). Ce dernier est proportionnel à la déformation plastique du matériau :

$$\underline{\underline{y}} = \frac{2}{3}H(p)\underline{\underline{\epsilon}}^p \tag{5.18}$$

H désigne le module d´écrouissage, fonction de la contrainte moyenne p. La régle d´écoulement plastique est de la forme :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda}(\underline{\underline{s}} - \underline{\underline{y}}) \quad , \dot{\lambda} \geq 0 \tag{5.19}$$

c´est-à-dire qu´elle respecte la condition de normalité à la surface de charge dans le plan déviateur, mais pas dans un plan passant par l´axe des contraintes isotropes, puisque la *dilatance plastique* est nulle ($tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p) = 0$).

Sur la base d´une telle loi de comportement, les auteurs effectuent une simulation numérique des essais triaxiaux cycliques à trajets de chargement radial réalisés sur une GNT par Gidel et al. (2001). Ayant calé les différents paramètres de la loi élastoplastique et notamment l´expression donnant le module d´écouissage en fonction de p sur un certain nombre de trajets cycliques radiaux, une simulation numérique est effectuée qui permet de calculer pour n´importe quel trajet cyclique radial, caractérisé par sa pente q/p et son amplitude, la valeur asymptôtique de la déformation permanente verticale.

Une telle approche appelle plusieurs commentaires :

- Elle se limite à la détermination des seules déformations permanentes stabilisées, sans donner aucune indication sur l´évolution de ces déformations en fonction du nombre des cycles appliqué. Or, il apparaît que l´état final est fortement influencé par les contraintes résiduelles (voir chapitre 6).

- Elle fixe implicitement une relation entre les déformations permanentes latérales et axiales, puisque la condition de non dilatance plastique ($tr(\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p) = 0$) impose que les déformations latérales sont égales à l´opposé de la moitié des déformations axiales.

Comme il sera vu au paragraphe suivant, cette condition n´est en général pas "réaliste".

- Enfin, elle pourrait peut être donner lieu à un outil de simulation numérique, qui permettrait de généraliser les lois de comportement cycliques, formulées dans le cas particulier de trajets cycliques radiaux et triaxiaux de révolution, à des trajets de chargement quelconques, y compris dans des situations où les directions principales des contraintes subissent des rotations.

5.3 Un modèle de loi de comportement cyclique pour les GNT

Nous nous proposons ici d´examiner plus en détail un modèle de loi de comportement cyclique pour les GNT, déjà introduit et mis en oeuvre dans le chapitre 3. Un tel modèle nous intéresse à double titre.

a) Il a été identifié à partir de données expérimentales relatives à des essais triaxiaux cycliques réalisés sur des graves non traitées (GNT), dont on peut penser que le comportement est assez proche de celui de matériaux tels que le ballast.

b) Il décrit le comportement des matériaux pour un nombre de cycles pouvant aller jusqu´à plusieurs centaines de milliers, ce qui permet de l´utiliser dans la simulation du comportement à long terme de plates-formes de trafic.

Nous présentons tout d´abord le modèle initial tel que formulé par Gidel et al. (2001) [27], avant d´en proposer la généralisation à des trajets non radiaux d´une part, à des trajets cycliques non triaxiaux de révolution d´autre part.

5.3.1 Description du modèle initial (Gidel et al. 2001)

Gidel et al.(2001) [27] ont réalisé des essais triaxiaux à chargements répétés sur des graves non traitées (GNT). Les éprouvettes de graves sont de 160 mm de diamètre et 320 mm de hauteur. Ces dimensions conviennent pour ce type de matériaux ayant une granulométrie 0/20 mm (pouvant aller même jusqu´à $0/31,5$ mm). L´appareil triaxial est muni d´un système de chargement pneumatique permettant de faire varier de façon cyclique et de manière indépendante à la fois la pression de confinement et le déviateur, et donc de réaliser des chargements cycliques suivant plusieurs chemins de contrainte.

L´éprouvette est munie de capteurs de déplacement à induction (LVDT), permettant de mesurer les déformations axiales et radiales dans la partie centrale de celle-ci.

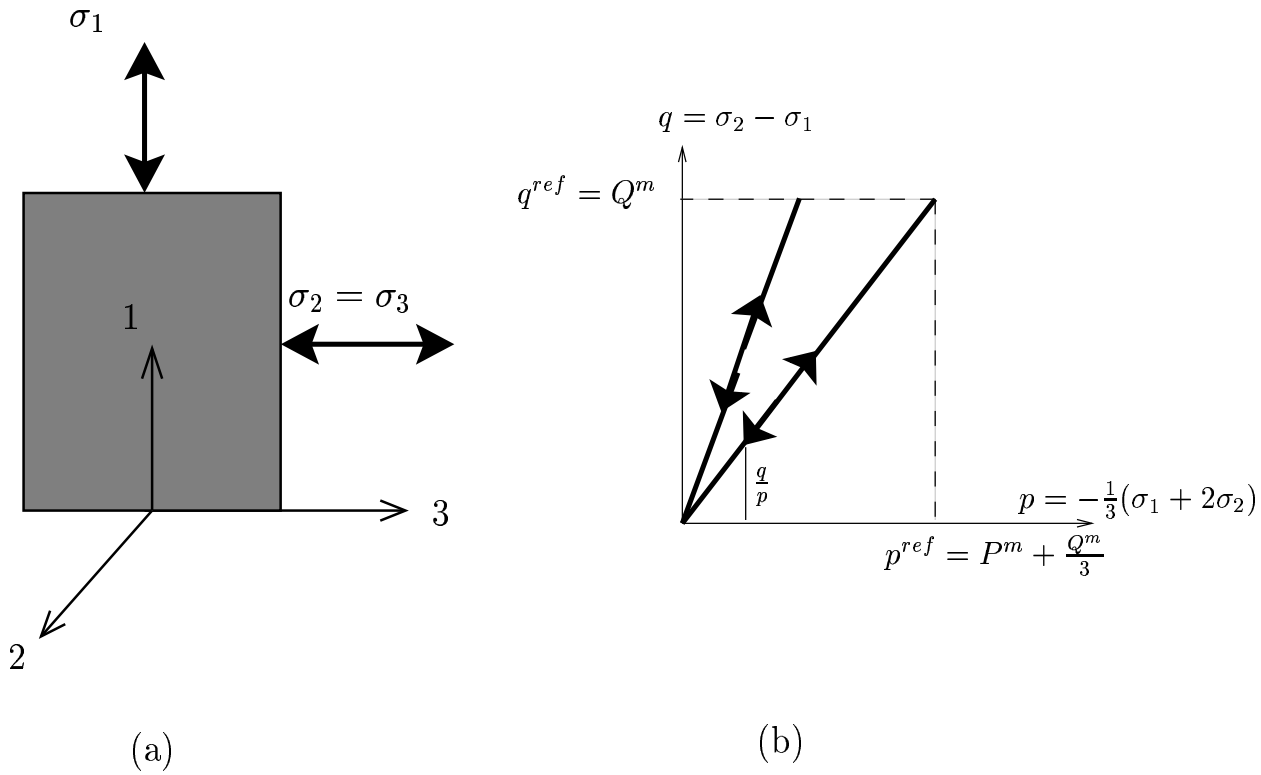


FIG. 5.10: chemins de contrainte radiaux dans le plan (p,q)

Plus précisément, désignant par σ_1 la contrainte verticale et par $\sigma_2 = \sigma_3$ la contrainte radiale (égale à l´opposé de la pression de confinement [2]), comme indiqué sur la figure (5.10(a)), et supposant que $\sigma_2 = \sigma_3 \geq \sigma_1$, les invariants ($p$,$q$) relatifs à un tel état de contrainte triaxial de révolution valent respectivement :

$$p = -\frac{1}{3}(\sigma_1 + 2\sigma_2) \tag{5.20a}$$

$$q = |\sigma_1 - \sigma_2| = \sigma_2 - \sigma_1 \tag{5.20b}$$

avec :

$$\sigma_2 = \sigma_3 = -\lambda P^m \tag{5.21a}$$

$$\lambda : 0 \leftrightarrow 1$$

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -\lambda Q^m \tag{5.21b}$$

[2]contrairement à l´usage des mécaniciens des sols, mais par souci de cohérence avec l´ensemble du document, les contraintes de traction sont comptées positivement

où P^m et Q^m désignent respectivement les valeurs maximales de la pression de confinement et du déviateur. D´où compte tenu de (5.22) :

$$p = \lambda(\frac{Q^m}{3} + P^m) \tag{5.22a}$$

$$\lambda : 0 \leftrightarrow 1$$

$$q = \lambda Q^m \tag{5.22b}$$

et donc

$$\frac{q}{p} = \frac{3}{1 + 3\frac{P^m}{Q^m}} \tag{5.23}$$

Les chemins de contrainte dans le plan (p-q) sont donc *radiaux*, leur pente variant entre 3 (compression simple : $P^m = 0$) et 0 ($Q^m = 0$). Ils sont représentés sur la figure (5.10(b)). Les coordonnées du point de chargement maximal sont :

$$p^{ref} = P^m + \frac{Q^m}{3} \quad ; \quad q^{ref} = Q^m \tag{5.24}$$

Les essais ont été réalisés pour 20000 cycles. L´*évolution des déformations permanentes* est caractérisée par une croissance rapide dès les premiers cycles, suivie d´une variation plus lente et d´une *stabilisation progressive*. Les auteurs remarquent que le niveau de déformation de l´éprouvette dépend des caractéristiques du matériau et du chargement appliqué. Leurs résultats expérimentaux montrent que les déformations permanentes augmentent lorsque la contrainte déviatorique q augmente et diminuent lorsque la contrainte moyenne p augmente. Les déformations permanentes dépendent également de la nature minéralogique du matériau, de sa teneur en eau, de sa densité et de sa granulométrie.

Généralement, la procédure employée pour étudier les déformations permanentes consiste à solliciter chaque éprouvette de matériau (ici la GNT) sous un seul niveau de contraintes. L´inconvénient de cette procédure est qu´elle entraîne un nombre d´essais relativement important, lorsque l´on veut étudier l´influence des contraintes sur l´évolution des déformations permanentes. Pour y remédier, Gidel et al. (2001) ont employé une nouvelle procédure consistant à solliciter une même éprouvette sous plusieurs niveaux de chargement successifs et croissants (figure 5.11).

Ils ont comparé ensuite l´évolution des déformations permanentes de la première et la seconde procédure et trouvent que la déformation permanente finale tend vers des valeurs comparables pour les deux types de procédures. Ils ont réalisé une campagne d´essais

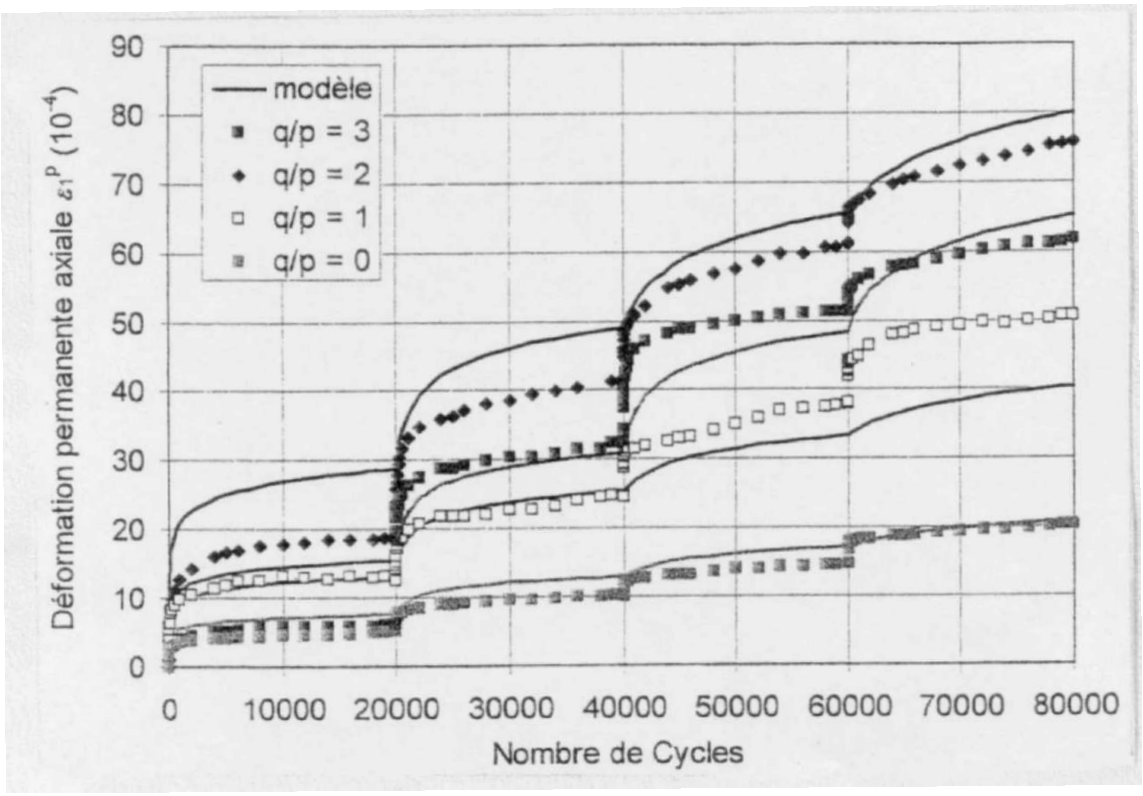


FIG. 5.11: évolution des déformations permanentes en fonction du nombre de cycles de chargement pour plusieurs niveaux de chargement [27]

triaxiaux cycliques ($N = 20000$) sur trois graves différentes et ont étudié l´effet des contraintes sur l´évolution des déformations permanentes. Ils en déduisent que l´évolution des déformations permanentes axiales dépend significativement de la pente du chemin de contraintes q/p. En effet, pour une pression moyenne fixée p, les déformations axiales sont fonction croissante du rapport q/p.

La loi d´accumulation des déformations permanentes axiales proposée par Gidel et al. (2001) [27] sur la base de la campagne d´essais décrite ci-dessus est alors la suivante :

$$\epsilon_1^*(N) = \epsilon_0^*[1 - (\frac{N}{N_0})^{-B}]f(p^{ref}, q^{ref})g(p^{ref}, q^{ref}) \tag{5.25}$$

où $\epsilon_1^*(N)$ est la *déformation permanente axiale cumulée* due à l´application de N cycles, et où :

- ⋆ B est un paramètre à valeurs positives qui traduit la vitesse avec laquelle la courbe d´évolution des déformations permanentes tend vers son asymptote $\epsilon_0^* fg$;

- ⋆ N_0 peut prendre la valeur 100 par exemple pour la grave de *Sorèze* et 1 pour la grave de *Poulmarch*. En effet pour le cas de la grave de Sorèze, les 100 premiers cycles de

chargement (correspondant à une mise en place du matériau) ont été éliminés, ce qui n´est pas le cas de la grave de Poulmarch.

Les fonctions f et g ont pour expressions :

$$f(p^{ref}, q^{ref}) = (\frac{l_{max}}{P_a})^n \quad \text{avec} \quad l_{max} = \sqrt{(p^{ref})^2 + (q^{ref})^2} \tag{5.26}$$

et

$$g(p^{ref}, q^{ref}) = \frac{p^{ref}}{(s + mp^{ref} - q^{ref})} \quad , p^{ref} \geq 0 \tag{5.27}$$

La première fonction exprime que la valeur absolue de la déformation permanente axiale cumulée est une fonction croissante de l´amplitude l_{max} du cycle radial. La fonction g traduit quant à elle l´influence de la proximité du point de sollicitation maximale de coordonnées (p^{ref},q^{ref}) par rapport à une *droite de "référence"* d´équation :

$$q = s + mp \tag{5.28}$$

De manière plus précise le lieu des points (p^{ref},q^{ref}) pour lesquels la fonction g prend une valeur constante est défini par l´équation :

$$q^{ref} = s + p^{ref}(m - \frac{1}{g}) \quad ; p^{ref} \geq 0 \tag{5.29}$$

qui correspond à une demi-droite de pente $m - 1/g$ et de même ordonnée à l´origine s que la droite de référence (figure 5.12).

Les auteurs s´étant principalement focalisés sur l´étude des déformations permanentes axiales $\epsilon_1^*(N)$, ils ne proposent pas de loi d´évolution spécifique pour les déformations permanentes latérales (ou radiales) $\epsilon_2^*(N)$, en fonction du nombre de cycles. Les quelques courbes expérimentales disponibles semblent néanmoins montrer que les courbes décrivant cette évolution ont la même allure que dans le cas de la déformation axiale (figure 5.13).

Ayant le même signe que les déformations axiales (compression) lorsque la pente du cycle est nulle, ces déformations changent de signe lorsque la pente du cycle augmente. De façon plus précise, introduisant le coefficient adimensionnel

$$\nu^* = -\frac{\epsilon_2^*(N)}{\epsilon_1^*(N)} \tag{5.30}$$

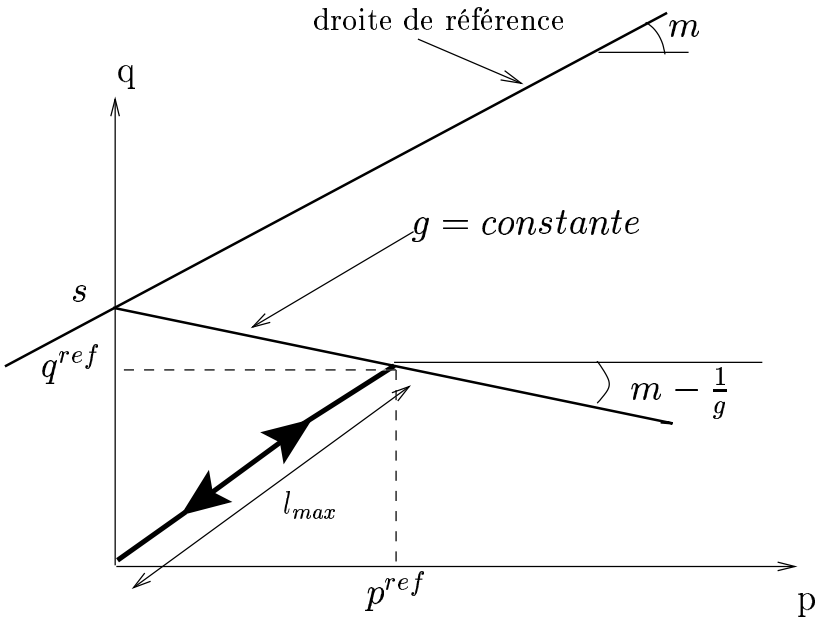


FIG. 5.12: interprétation de la loi de Gidel et al. (2001) dans le plan (p,q)

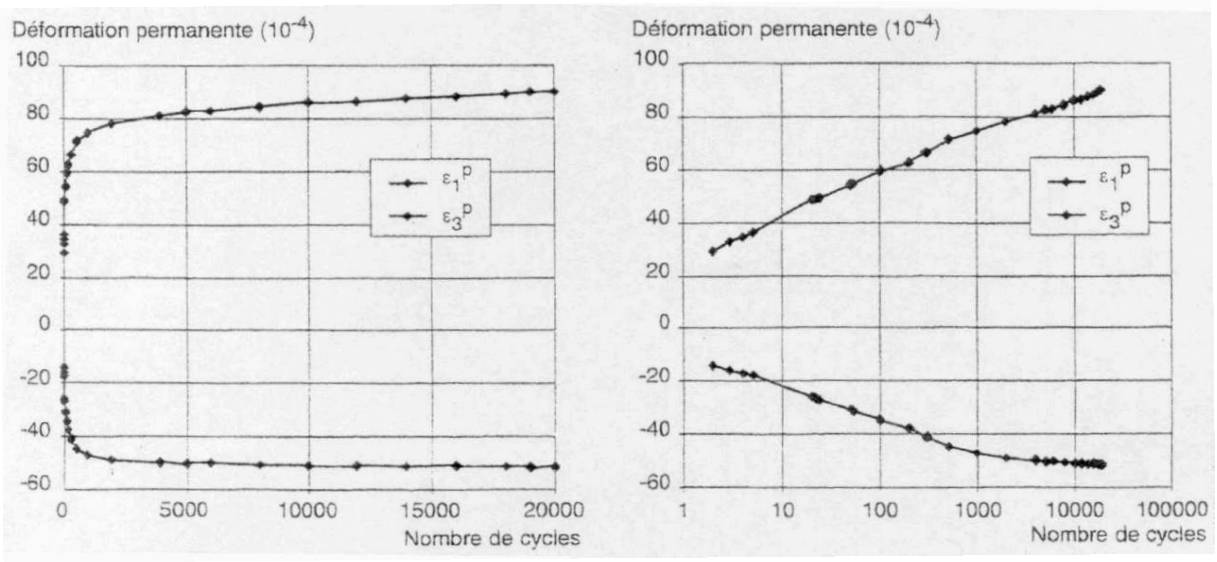


FIG. 5.13: évolution des déformations permanentes axiales et latérales en fonction du nombre de cycles de chargement [27]

analogue au coefficient de Poisson en élasticité, ce coefficient augmente avec la pente du cycle. On peut par exemple, dans une première approche, proposer une loi linéaire du type :

$$\nu^*(\frac{q^{ref}}{p^{ref}}) = -1 + \alpha(\frac{q^{ref}}{p^{ref}}) \quad , \alpha > 0 \tag{5.31}$$

qui tient compte du fait que les déformations permanentes axiales et latérales sont

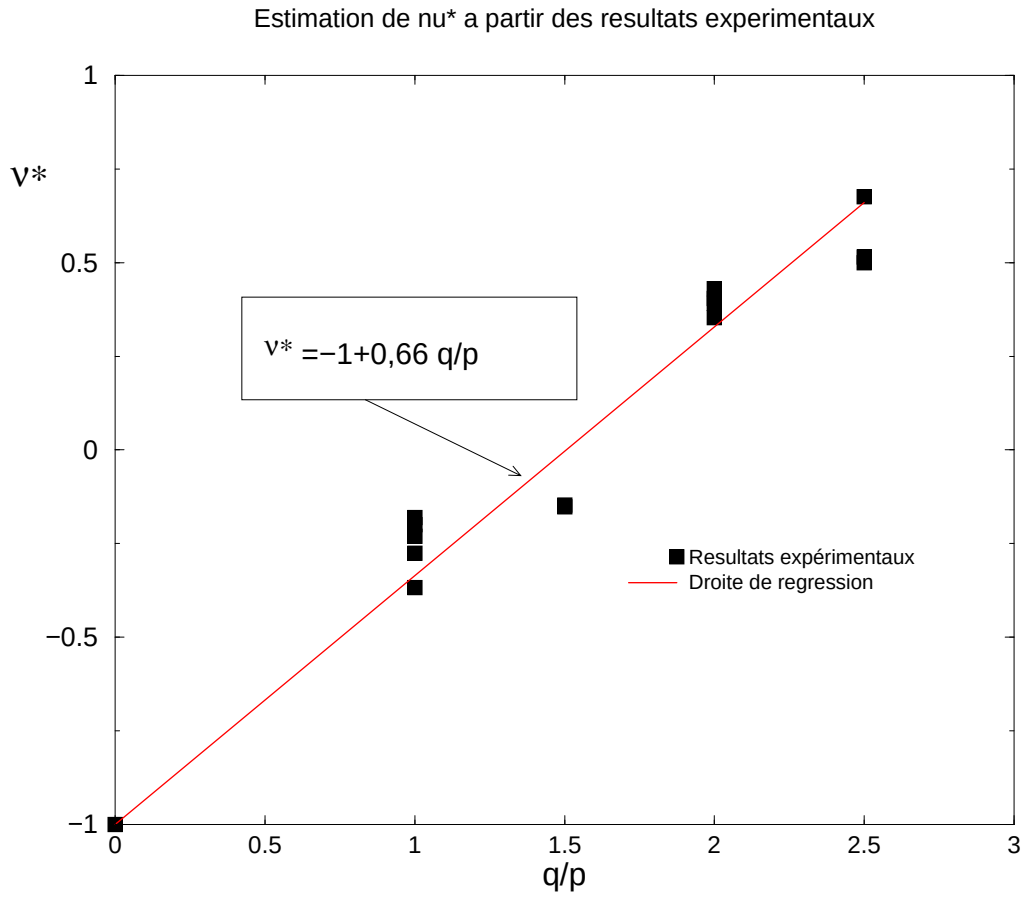


FIG. 5.14: évaluation du paramètre ν^* à partir des résultats des essais de Gidel et al. (2001) [27] sur la grave de Poulmarch

identiques ($\nu^* = -1$) dans le cas d´un chargement cyclique isotrope ($q^{ref}/p^{ref} = 0$). On trouve par exemple que pour la grave de Poulmarch étudiée par les auteurs, le coefficient α est de l´ordre de 2/3. Sur la figure (5.14), nous montrons la façon dont a été estimé ce coefficient à partir des résultats des essais de Gidel et al. (2001) sur la grave de Poumarch.

En référence aux notions de dilatance/contractance introduites classiquement pour décrire les déformations volumiques des sols sous chargement cycliques, il est intéressant d´analyser l´évolution des ces déformations. La déformation *permanente volumique* étant définie par :

$$\epsilon_v^* = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^*) = \epsilon_1^* + 2\epsilon_2^* = (1 - 2\nu^*)\epsilon_1^* \tag{5.32}$$

il apparaît que le comportement du matériau est dilatant ($\epsilon_v^* > 0$) si $\nu^* > 1/2$, soit $q^{ref}/p^{ref} > 3/2\alpha$, contractant ($\epsilon_v^* < 0$) dans le cas contraire.

5.3.2 Généralisations de la loi initiale

5.3.2.1. Extension au cas de trajets cycliques non-radiaux

Dans le cas général, le cycle de contrainte auquel le matériau est soumis localement peut notablement s´écarter du trajet cyclique radial pour lequel la loi précédente a été proposée. Ainsi dans le modèle simplifié de charge roulante étudié en chapitre 3, ce trajet cyclique est une portion de courbe dans le plan (p,q) dont les extrémités sont les points des coordonnées (p^r,q^r) et (p^{ac},q^{ac}) correspondant respectivement à l´état résiduel et à l´état le plus chargé (figure 5.15-a). Dans ce cas, il paraît raisonnable d´adopter une loi de comportement cyclique de la forme (5.25) dans laquelle :

$$l_{max} = \sqrt{(p^{ac} - p^r)^2 + (q^{ac} - q^r)^2} \tag{5.33}$$

c´est-à-dire que l_{max} représente la distance entre les points extrêmes du cycle. Par ailleurs la fonction g devient :

$$g(p^{ac}, q^{ac}) = \frac{p^{ac}}{s + mp^{ac} - q^{ac}} \tag{5.34}$$

quantifiant ainsi la proximité du point le plus chargé vis-à-vis de la droite de référence.

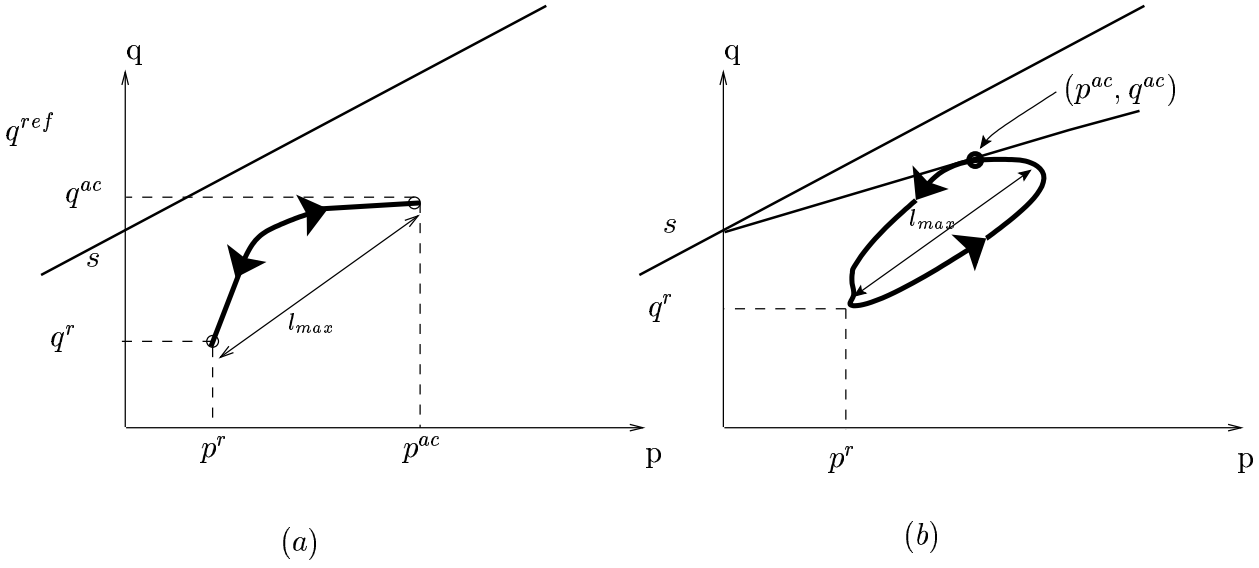


FIG. 5.15: exemples de cycles de contrainte non-radiaux

L´essai BETTER que nous traiterons au chapitre 6 relève de cycles du type de la figure (5.15-a).

Le chapitre 4 nous a montré que dans certains cas, les cycles de contrainte peuvent être représentés par des boucles fermées plus ou moins aplaties (figure 5.15-b). Il conviendra dans ce cas de définir l´amplitude du cycle l_{max}, ainsi que le point le plus sollicité du cycle (p^{ac},q^{ac}). On peut par exemple penser à prendre le point du cycle donnant la valeur maximale de la fonction g.

5.3.2.2. Extension aux trajets de contrainte non-triaxiaux de révolution

La loi de comportement cyclique donnée par l´équation (5.25) ayant été identifiée sur des sollicitations triaxiales de révolution ($\sigma_2 = \sigma_3 \geq \sigma_1$), il convient de l´étendre au cas de sollicitations cycliques *tridimensionnelles*. On suppose que cette sollicitation cyclique est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \lambda \underline{\underline{\sigma}}^{ref} \quad \lambda : 0 \leftrightarrow 1 \tag{5.35}$$

et l´on postule par $\sigma_i^{ref}, i = 1, 2, 3$, les contraintes principales de $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$, de sorte que :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{ref} = \sigma_1^{ref} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2^{ref} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3^{ref} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{5.36}$$

avec

$$\sigma_1^{ref} \leq \sigma_3^{ref} \leq \sigma_2^{ref} \tag{5.37}$$

σ_1^{ref} étant la *contrainte principale de compression* maximale. On décompose alors $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$ en parties sphérique et déviatorique :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{ref} = \underline{\underline{s}}^{ref} - p^{ref} \underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad p^{ref} = -\frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}^{ref}) \tag{5.38}$$

ainsi que le tenseur des déformations permanentes :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{*} = \underline{\underline{e}}^{*} + \frac{1}{3} \epsilon_v^{*} \underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad \epsilon_v^{*} = tr(\underline{\underline{\epsilon}}^{*}) \tag{5.39}$$

et l´on suppose que $\underline{\underline{\epsilon}}^{*}$ et $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$ sont dans le même hyper-plan passant par l´axe des tenseurs isotropes, comme indiqué sur la figure (5.17), de sorte que l´on peut écrire :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^{*} = \alpha \underline{\underline{I}} + \beta \frac{\underline{\underline{s}}^{ref}}{q^{ref}} \tag{5.40}$$

avec

$$q^{ref} = \sqrt{3/2 \underline{\underline{s}}^{ref} : \underline{\underline{s}}^{ref}} \tag{5.41}$$

d´où il résulte en particulier que $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ a les mêmes directions principales que $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$:

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \epsilon_1^* \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \epsilon_2^* \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \epsilon_3^* \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{5.42}$$

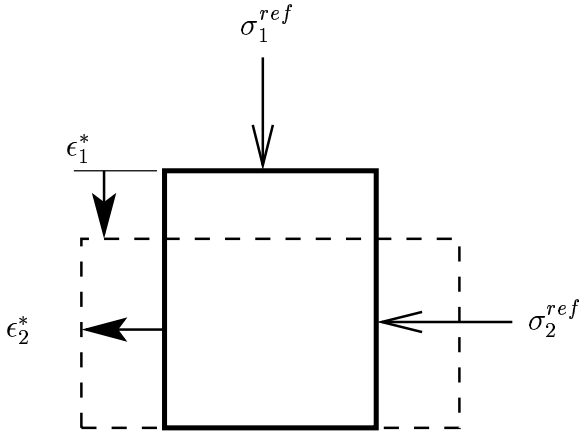


FIG. 5.16: contraintes maximales-déformations permanentes

Il nous reste alors à identifier les coefficients α et β à partir du cas particulier où les tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ sont triaxiaux de révolution, c´est-à-dire tels que :

$$\epsilon_2^* = \epsilon_3^* \geq \epsilon_1^* \quad , \quad \sigma_2^{ref} = \sigma_3^{ref} \geq \sigma_1^{ref} \tag{5.43}$$

Adoptant par exemple la loi de Gidel et al. (2001), nous avons dans ce cas :

$$\epsilon_1^*(N; p^{ref}; q^{ref}) = \epsilon_0^*(1 - N^{-B}) f(p^{ref}, q^{ref}) g(p^{ref}, q^{ref}) \tag{5.44}$$

ainsi que :

$$\epsilon_2^* = \epsilon_3^* = -\nu^*(q^{ref}/p^{ref})\epsilon_1^* \tag{5.45}$$

Or nous avons :

$$p^{ref} = -\frac{1}{3} tr(\underline{\underline{\sigma}}^{ref}) = -\frac{1}{3}(\sigma_1^{ref} + 2\sigma_2^{ref}) \tag{5.46}$$

d´où :

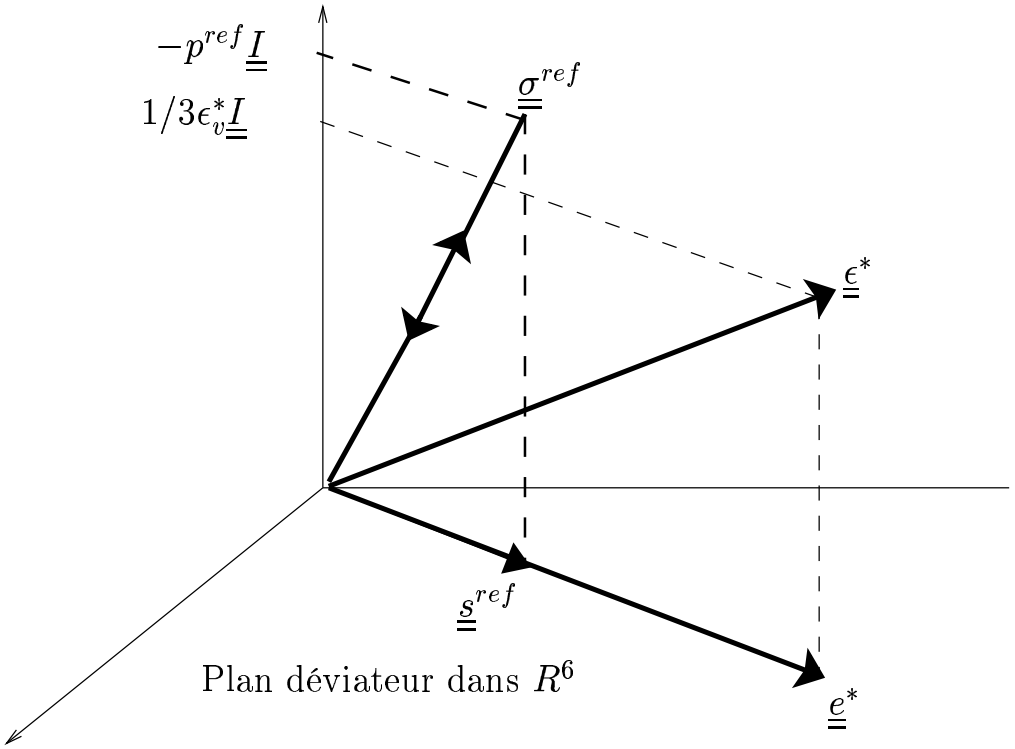


FIG. 5.17: décompositions des tenseurs $\underline{\underline{\sigma}}^{ref}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^*$ en parties déviatoriques et isotropes

$$\underline{\underline{s}}^{ref} = \frac{\sigma_1^{ref} - \sigma_2^{ref}}{3}[2e_1 \otimes e_1 - e_2 \otimes e_2 - e_3 \otimes e_3] \tag{5.47}$$

et donc d´après (5.41)

$$q^{ref} = |\sigma_1^{ref} - \sigma_2^{ref}| = \sigma_2^{ref} - \sigma_1^{ref} \tag{5.48}$$

L´équation (5.40) devient dans ce cas :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \alpha\underline{\underline{I}} + \frac{\beta}{3}[-2\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3] \tag{5.49}$$

soit par identification avec (5.42) :

$$\epsilon_1^*(N; p^{ref}; q^{ref}) = \alpha - \frac{2}{3}\beta \tag{5.50a}$$

$$\epsilon_2^* = -\nu^*\epsilon_1^* = \alpha + \frac{\beta}{3} \tag{5.50b}$$

c´est-à-dire en fin de compte

$$\alpha = \frac{(1-2\nu^*)}{3}\epsilon_1^* \quad \text{et} \quad \beta = -(1+\nu^*)\epsilon_1^* \tag{5.51}$$

Reportant ces valeurs dans (5.40), l´expression générale de la déformation permanente s´écrit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \epsilon_1^*(N; p^{ref}; q^{ref})[\frac{1-2\nu^*}{3}\underline{\underline{I}} - (1+\nu^*))\frac{\underline{\underline{s}}^{ref}}{q^{ref}}] \tag{5.52}$$

5.4 Conclusions

La revue bibliographique sur le comportement des matériaux granulaires sous sollicitations cycliques montre que qualitativement, le comportement des graves non traitées (GNT) et des ballasts est comparable à celui des sables. Par contre, le tassement des GNT et des ballasts est beacoup plus lent au cours de l´application des cycles que celui des sables. En général, les travaux de différents auteurs ont permis d´affiner la représentation du tassement induit par la sollicitation cyclique en fonction du nombre de cycles. Plus récemment, les travaux de Gidel et al. (2001), suivant en cela Lekarp et Dawson (1998), ont fourni une évaluation de la déformation accumulée au cours des cycles, mesurée à l´appareil triaxial en fonction des caractéristiques de ces cycles, dans le plan (p-q).

Nous avons généralisé le modèle de Gidel at al. (2001) à des trajets cycliques non radiaux et à des trajets non-triaxiaux de révolution et nous avons donc obtenu une formulation tridimensionnelle du tenseur des déformations permanentes valable pour des cycles de contrainte quelconque. La proposition du modèle est à discuter compte tenu du fait que certains paramètres sont à évaluer en se basant sur des résultats d´essais. Nous utilisons ce modèle pour la simulation de l´essai BETTER, exposée au chapitre 6.

Chapitre 6

Mise au point d´un outil numérique et premières simulations d´essais cycliques

Sommaire

6.1 Introduction 175

6.2 Présentation du banc d´essai BETTER 175

6.2.1 Description de l´essai 175

6.2.2 La simulation visée 177

6.3 Modèle analytique de référence 178

6.3.1 Une modélisation analytique simplifiée : le modèle "bibloc" . . . 178

6.3.2 Prise en compte de l´élastoplasticité des matériaux dans le calcul de l´état résiduel 186

6.4 Simulation numérique de l´essai BETTER 190

6.4.1 Présentation rapide du code de calcul CESAR-LCPC 190

6.4.2 Mise en place de la méthode de calcul 192

6.4.3 Modélisation numérique du bibloc 192

6.4.4 Simulation numérique de l´essai oedométrique avec prise en compte de l´élastoplasticité 194

6.5 Modélisation numérique de l´essai BETTER : premiers résultats 196

6.5.1 Paramètres physiques 196

6.5.2 Simulation de l´essai 201
6.5.3 Influence de la couche sousballast 202
6.6 Conclusion 203

6.1 Introduction

Le présent chapitre se propose de mettre en oeuvre numériquement la méthode de calcul générale exposée au chapitre 3, en s´appuyant sur un logiciel de calcul par éléments finis (CESAR) permettant d´effectuer d´une part le *calcul des cycles élastiques de référence* en tout point de la structure, d´autre part de déterminer l´évolution de *l´état résiduel* de cette structure à partir de celle du champ de *déformations permanentes*. Un outil numérique a été ainsi mis au point en vue de l´appliquer à la simulation d´un essai consistant à soumettre une section de voie ferrée ballastée, modélisée à l´échelle 1 : 3, à un chargement cyclique représentant l´action de trafic (essai BETTER : Bodin, 2001). Deux modélisations ont été retenues pour analyser un tel essai, de nature tridimensionnelle.

- Une *modélisation bidimensionnelle* (déformations planes) intégrée dans le logiciel de calcul par éléments finis.

- Une modélisation extrêmement simplifiée, dite *"bibloc"* donnant lieu à un traitement du problème par voie analytique qui, tout en fournissant une première estimation de l´évolution du tassement résiduel de la structure, permettra de valider l´outil numérique mis au point sur la modélisation bidimensionnelle.

C´est à partir des simulations faites à l´aide de ce dernier modèle que nous proposons une amélioration de la méthode de calcul qui prenne en compte la plasticité des matériaux. Plus précisément, nous montrerons comment la détermination de l´état résiduel de la structure à partir de la connaissance des déformations permanentes doit être faite en effectuant un *calcul élastoplastique* (et non plus seulement élastique) à déformations permanentes imposées.

6.2 Présentation du banc d´essai BETTER

6.2.1 Description de l´essai

Ce banc d´essai à échelle réduite (échelle 1 : 3) appelé BETTER (Ballast : Essai de Tassement Transversal à Echelle Réduite), a été mis au point par Bodin (2001) au LAMI afin d´étudier le comportement du ballast sous l´effet de sollicitation combinée. Le modèle BETTER reproduit à l´échelle 1 : 3 une portion de voie ballastée entourant une traverse bi-bloc en béton. Ce modèle de portion de voie est placé dans une caisse en bois de dimensions $1,7$ x $0,4$ x $0,5$ m, qui repose sur une dalle en acier, sur laquelle est fixé un portique supportant un vérin à paliers hydrostatiques. Le vérin est alimenté par un groupe

hydraulique asservi en force ou en déplacement.



FIG. 6.1: modèle BETTER (Bodin, 2001)

La portion de voie ballastée est constituée d´une couche de ballast à échelle 1 : 3 (micro-ballast) reposant sur une couche de matériau modélisant le comportement élastique d´une plate-forme ferroviaire (élastomère ou bois). Sur la couche de micro-ballast d´épaisseur 10 cm, repose une traverse bi-bloc en béton, qui est la reproduction à l´échelle 1 : 3 de la traverse réelle, entourée de micro-ballast jusqu´à sa surface supérieure. Les conditions aux limites qui ont été imposées au massif de ballast sont les suivantes : un plan incliné (talus) limite l´un des bords du massif (bord libre), l´autre bord constitue un plan de symétrie pour la plate-forme. Dans la direction perpendiculaire à l´axe de la voie, deux plans parallèles à la traverse délimitent le massif.

Les essais réalisés sur ce banc d´essai sont de deux types : des essais de stabilité latérale et des essais de fatigue. Les essais de stabilité latérale ont pour objectif d´évaluer le chargement latéral "limite" au delà duquel le déplacement résiduel du ballast est considéré comme important. Ce type d´esai consiste à appliquer sur la traverse un chargement ayant une composante verticale et une composante horizontale à travers un signal sinusoïdal de faible fréquence ($0,5$ Hz). La valeur de la charge horizontale est maintenue constante et la

charge verticale est variable. Le déplacement latéral élastique (déflexion) et le déplacement latéral résiduel sont ensuite mesurés.

Les essais de fatigue consistent, quant à eux, à simuler le passage d´un train sur une traverse en appliquant un signal reproduisant le passage d´un boggie. Le déplacement vertical (déflexion) et le tassement résiduel sont ensuite mesurés.

6.2.2 La simulation visée

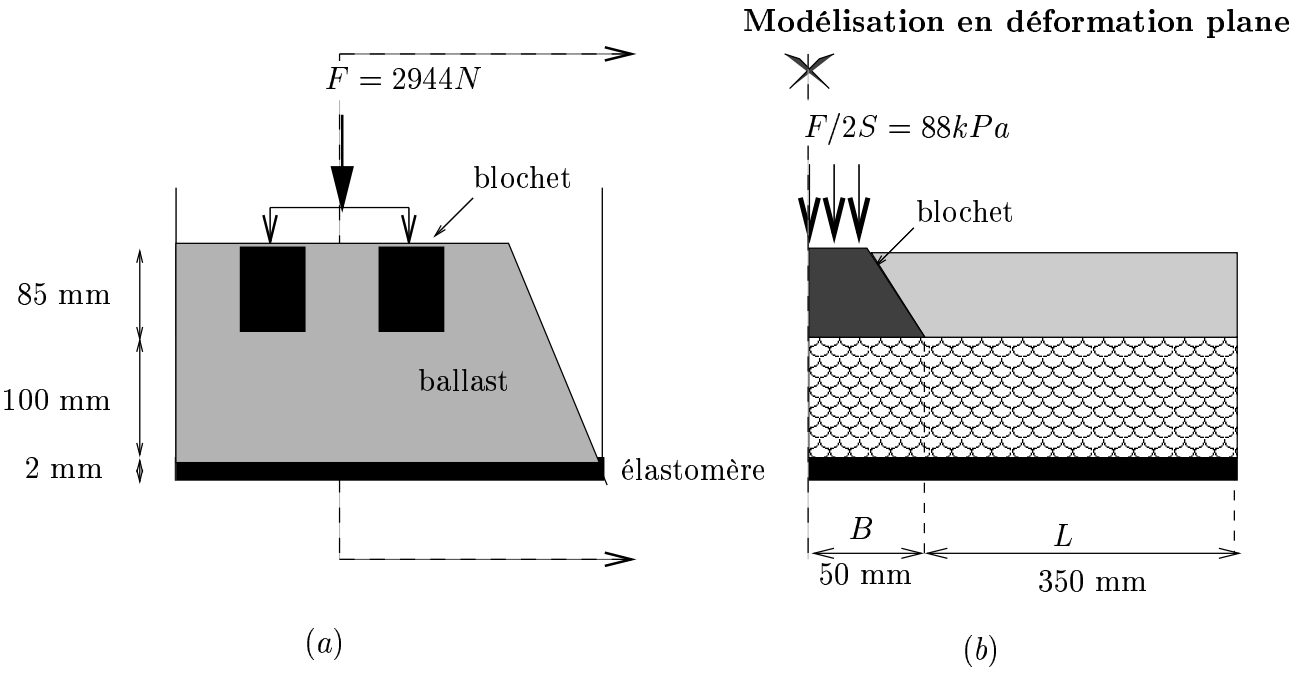


FIG. 6.2: schématisation en déformations planes de l'essai BETTER

La figure 6.2 donne une schématisation simplifiée de l'essai BETTER.

Nous avons choisi d´effectuer la simulation de l'essai BETTER référencé "Df12d" par Bodin (2001) . La configuration de cet essai étant *tridimensionnelle*, une schématisation bidimensionnelle (en *déformations planes*) a été retenue pour la simulation par éléments finis à l´aide du logiciel CESAR. La figure (6.2b) représente une telle schématisation dans un plan perpendiculaire à la traverse bi-bloc, où l´on a tenu compte de la symétrie du problème par rapport au plan contenant cette même traverse. La charge appliquée sur la traverse étant de l´ordre de 3 kN, celle-ci est représentée par une pression uniforme d´environ 88 kPa s´exerçant sur la partie supérieure du blochet à laquelle se rajoute une charge uniforme permanente d´environ 10 kPa représentant le poids du rail.

6.3 Modèle analytique de référence

6.3.1 Une modélisation analytique simplifiée : le modèle "bibloc"

Un modèle extrêmement simplifié de la structure décrite précédemment, qualifié de "bibloc", est proposé avec un double objectif.

- Fournir une solution analytique de référence permettant de valider l´outil numérique fondé sur la mise en oeuvre du logiciel CESAR.

- Donner une première estimation, ou tout au moins un ordre de grandeur du tassement résiduel de la structure en fonction du nombre de cycles.

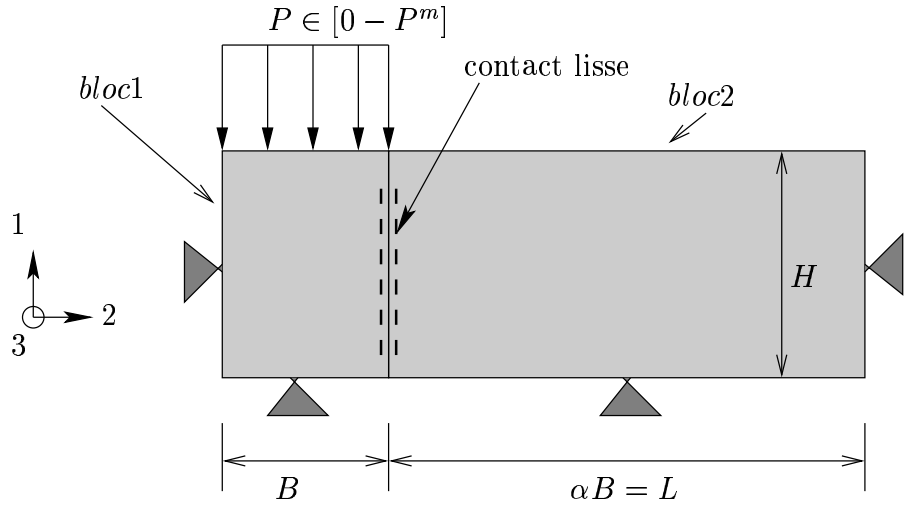


FIG. 6.3: modèle Bibloc

Dans ce modèle on ne considère que la couche de ballast d'épaisseur H située sous le blochet, soumise sur une distance B, égale à la demi-largeur de ce dernier, à une pression uniforme que l'on fait varier entre 0 et P^m, et qui correspond à l'action de ce dernier. Cette couche de ballast est découpée en deux blocs adjacents de largeurs respectives B et $\alpha B = L$ comme le montre la figure 6.3. Le contact entre les deux blocs est supposé *lisse*, de sorte que, compte tenu des conditions aux limites, les états de contrainte et de déformation sont *homogènes* dans chaque bloc. On suppose en outre pour simplifier que seul le bloc situé sous le blochet, le plus sollicité, est le siège de déformations permanentes sous l'action du chargement cyclique, le comportement du second bloc demeurant purement élastique.

La procédure de calcul développée dans le chapitre 3 est appliquée au cas de ce modèle bibloc. Elle repose sur la combinaison d'un calcul purement élastique permettant de déterminer la sollicitation cyclique en tout point de la zone située sous le blochet et d'un calcul de l'état résiduel de cette dernière à partir de la donnée des déformations permanentes

engendrées par l'application de N cycles de chargement selon la loi de comportement suivante (chapitre 5) :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^* = \epsilon_1^* [\frac{(1-2\nu^*(q^m/p^m))}{3}\underline{\underline{I}} - (1+\nu^*(q^m/p^m))\underline{\underline{s}}^m/q^m] \tag{6.1}$$

Compte tenu du fait que cet état résiduel évolue avec le nombre de cycles, la sollicitation cyclique se trouve progressivement "décalée" dans l'espace des contraintes. Il est donc nécessaire de mener le calcul de façon *incrémentale*. Plus précisément, désignant par $\underline{\underline{\sigma}}^r(N)$ l'état de contrainte résiduel, la sollicitation cyclique est de la forme :

$$[\underline{\underline{\sigma}}^r(N) \leftrightarrow \underline{\underline{\sigma}}^r(N) + \underline{\underline{\sigma}}^m(N)] \tag{6.2}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^m(N)$ représente la contrainte élastique associée à l'application de la charge maximale P^m. Dans la suite, nous appellerons *bloc* 1, la zone située sous le blochet et *bloc* 2, la zone adjacente.

Partant d´un état initial *naturel* (contraintes nulles dans les deux blocs) nous allons tout d´abord appliquer un cycle de chargement consistant à faire croître la pression P appliquée sur le bloc 1 de 0 à une valeur maximale P^m, puis à la faire décroître jusqu´à zéro.

6.3.1.1. Application d´un premier cycle de charge-décharge

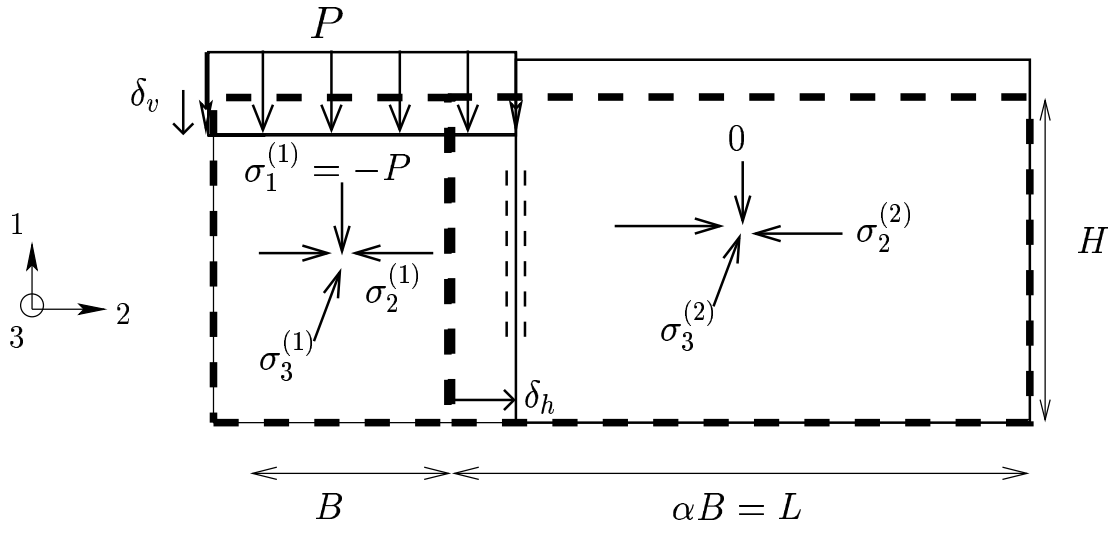


FIG. 6.4: notations relatives au modèle "bibloc"

L´ensemble des notations utilisées dans les calculs qui suivent sont données sur la figure 6.4. Compte tenu des conditions aux limites du problème et de la condition de contact lisse entre les blocs, le champ de contrainte dans le bloc n° k (=1,2) est de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{(k)} = \sigma_1^{(k)} \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2^{(k)} \underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \sigma_3^{(k)} \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{6.3}$$

avec :

$$\sigma_1^{(1)} = -P, \quad \sigma_1^{(2)} = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_2^{(1)} = \sigma_2^{(2)} = \sigma_2 \tag{6.4}$$

la dernière condition exprimant la continuité du vecteur contrainte au passage entre les blocs 1 et 2. Dans la *phase de comportement élastique*, les déformations correspondantes sont :

Pour le bloc 1 :

$$\epsilon_1^{(1)} = -\frac{\delta_v}{H} = \frac{1+\nu}{E}(-P) - \frac{\nu}{E}(-P + \sigma_2 + \sigma_3^{(1)}) \tag{6.5a}$$

$$\epsilon_2^{(1)} = \frac{\delta_h}{B} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(-P + \sigma_2 + \sigma_3^{(1)}) = \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\nu\sigma_3^{(1)}}{E} \tag{6.5b}$$

$$\epsilon_3^{(1)} = 0 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3^{(1)} - \frac{\nu}{E}(-P + \sigma_2 + \sigma_3^{(1)}) \tag{6.5c}$$

où δ_v désigne le tassement vertical (compté positivement vers le bas) du bloc 1 et δ_h le déplacement horizontal de l´interface entre blocs (figure 6.4). De ces dernières équations on tire après calculs :

$$\frac{\delta_v}{H} = \frac{P}{E}(1-\nu^2) + \frac{\nu(1+\nu)}{E}\sigma_2 \tag{6.6a}$$

$$\text{et} \quad \frac{\delta_h}{B} = \frac{\sigma_2}{E}(1-\nu^2) + \frac{\nu(\nu+1)}{E}P \tag{6.6b}$$

La contrainte horizontale σ_2 est alors déterminée en écrivant la loi de comportement dans le *bloc* 2 :

$$\epsilon_1^{(2)} = -\frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3^{(2)}) \tag{6.7a}$$

$$\epsilon_2^{(2)} = -\frac{\delta_h}{L} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_2 - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3^{(2)}) \tag{6.7b}$$

$$\epsilon_3^{(2)} = 0 = \frac{1+\nu}{E}\sigma_3^{(2)} - \frac{\nu}{E}(\sigma_2 + \sigma_3^{(2)}) \tag{6.7c}$$

soit :

$$\sigma_3^{(2)} = \nu\sigma_2 \tag{6.8a}$$

$$\text{et} \quad \sigma_2 = -\frac{E}{1-\nu^2}\frac{\delta_h}{L} \tag{6.8b}$$

D´où en définitive, l´expression des contraintes et des déformations dans *bloc* 1 en fonction de la pression P appliquée sur ce bloc :

$$\frac{\delta_h}{B} = P\frac{\nu(1+\nu)}{E}\frac{\alpha}{1+\alpha} \tag{6.9a}$$

$$\frac{\delta_v}{H} = \frac{P}{E}[(1-\nu^2) - \frac{\nu^2(1+\nu)}{1-\nu}\frac{1}{1+\alpha}] \tag{6.9b}$$

$$\sigma_2 = -\frac{P}{1+\alpha}\frac{\nu}{1-\nu} \quad \sigma_1 = -P \tag{6.9c}$$

$$\sigma_3^{(1)} = \nu(-P+\sigma_2) \tag{6.9d}$$

où l´on a posé $\alpha = L/B$

Deux situations particulières sont à noter :

a) : α=*0*. Le bloc 2 est de largeur nulle et le bloc 1 est donc sollicité en *conditions oedométriques*. Les équations précédentes deviennent dans ce cas :

$$\frac{\delta_h}{B} = 0 \quad , \quad \frac{\delta_v}{H} = \frac{P}{E}\frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu} \quad ; \quad \sigma_2 = \sigma_3^{(1)} = \frac{-\nu}{1-\nu}P \tag{6.10}$$

b) : $\alpha \to \infty$. La largeur L du bloc n° 2 devient si grande par rapport à celle du bloc 1 que tout se passe comme si son action sur ce dernier devenait négligeable. Les équations deviennent alors :

$$\frac{\delta_h}{B} = \frac{\nu(1+\nu)}{E}P \quad , \quad \frac{\delta_v}{H} = \frac{P}{E}(1-\nu^2) \quad ; \quad \sigma_2 = 0 \quad ; \quad \sigma_3^{(1)} = -\nu P \tag{6.11}$$

Le matériau constitutif du bloc 1 étant supposé obéir à un *critère de plasticité de Mohr-Coulomb*, caractérisé par une cohésion C et un angle de frottement φ, la limite d´élasticité, c´est-à-dire la valeur du chargement P, notée P^e, pour laquelle le critère de plasticité est atteint, se calcule comme suit. On observe tout d´abord que puisque α est positif et en supposant que $\nu \in [0; 0,5[$, les contraintes dans le bloc 1 sont ordonnées comme suit :

$$\sigma_1 = -P \leq \sigma_3^{(1)} \leq \sigma_2 = -\frac{P}{(1+\alpha)}\frac{\nu}{(1+\nu)} \tag{6.12}$$

de sorte que la condition de plasticité s´écrit :

$$(\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_1 + \sigma_2)\sin\varphi - 2Ccos\varphi \leq 0 \tag{6.13}$$

soit :

$$P \leq \frac{2Ccos\varphi(1-\nu)(1+\alpha)}{(\alpha+1-\nu\alpha)(1-sin\varphi)-2\nu} = P^e \tag{6.14}$$

sous réserve que la condition suivante soit satisfaite :

$$(\alpha+1-\nu\alpha)(1-sin\varphi)-2\nu > 0 \tag{6.15}$$

La phase élastoplastique de chargement correspond au cas où P dépasse la limite d´élasticité P^e pour atteindre la valeur maximale P^m. On décharge ensuite la structure en ramenant la valeur de P à zéro. On se limite ici à donner la contrainte résiduelle dans le bloc 1 au terme du premier cycle de chargement ($N = 1$).

$$\sigma_1^r(N=1) = 0 \tag{6.16a}$$

$$\sigma_2^r(N=1) = (\frac{1-sin\varphi}{1+sin\varphi} - \frac{\nu}{(1+\alpha)(1-\nu)})(P^e - P^m) \tag{6.16b}$$

$$\sigma_3^r(N=1) = [\frac{2\nu}{1-sin\varphi} - \nu(1 + \frac{\nu}{(1+\alpha)(1-\nu)})](P^e - P^m) \tag{6.16c}$$

Cet état de contrainte résiduel est pris comme état initial pour la procédure de calcul pas-à-pas schématisé sur la figure 6.11, et que nous allons mettre en oeuvre pour le modèle bibloc.

6.3.1.2. Evolution de l´état résiduel

On désigne par $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*(N)$ l´incrément de déformation permanente dans le bloc 1 engendré par l´application de ΔN cycles entre N et $N + \Delta N$. Cet incrément est de la forme :

$$\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*(N) = \Delta\epsilon_1^*(N)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \Delta\epsilon_2^*(N)\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \Delta\epsilon_3^*(N)\underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3 \tag{6.17}$$

Les incréments de contraintes résiduelles correspondants sont :

$$k = 1,2 \quad \Delta\underline{\underline{\sigma}}^{r(k)} = \underline{\underline{\sigma}}^{r(k)}(N+\Delta N) - \underline{\underline{\sigma}}^{r(k)}(N) \tag{6.18}$$

avec compte-tenu des conditions d´équilibre (figure 6.5)

$$\Delta\sigma_1^{r(1)} = \Delta\sigma_1^{r(2)} = 0 \quad , \quad \Delta\sigma_2^{r(1)} = \Delta\sigma_2^{r(2)} = \Delta\sigma_2^r \tag{6.19}$$

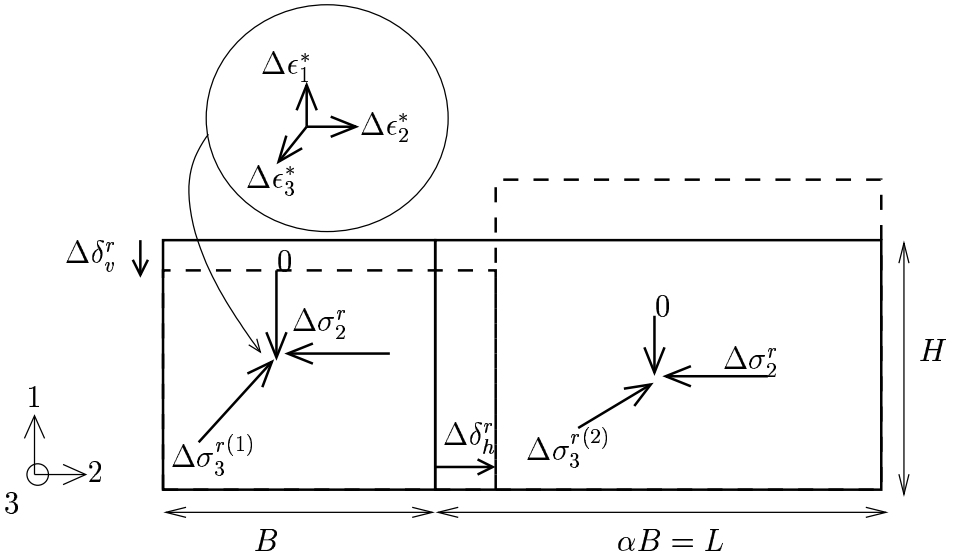


FIG. 6.5: incrément des contraintes résiduelles dû à l´incrément des déformations permanentes dans le bibloc

L´écriture de la loi de comportement élastique dans le bloc 1 donne (on omet la dépendance en N pour alléger l´écriture) :

$$\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^{r(1)} = \Delta\underline{\underline{\epsilon}}^* + \frac{1+\nu}{E}\Delta\underline{\underline{\sigma}}^{r(1)} - \frac{\nu}{E}tr(\Delta\underline{\underline{\sigma}}^{r(1)})\underline{\underline{I}} \tag{6.20}$$

soit en composantes :

$$\Delta\epsilon_1^{r(1)} = \Delta\epsilon_1^* - \frac{\nu}{E}(\Delta\sigma_2^r + \Delta\sigma_3^{r(1)}) = -\frac{\Delta\delta_v^r}{H} \tag{6.21a}$$

$$\Delta\epsilon_2^{r(1)} = \Delta\epsilon_2^* + \frac{\Delta\sigma_2^r}{E} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_3^{r(1)} = \frac{\Delta\delta_h^r}{B} \tag{6.21b}$$

$$\Delta\epsilon_3^{r(1)} = 0 = \Delta\epsilon_3^* + \frac{\Delta\sigma_3^{r(1)}}{E} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_2^r \tag{6.21c}$$

où $\Delta\delta_v^r$ et $\Delta\delta_h^r$ désignent respectivement les incréments de tassement résiduel du bloc 1 et le déplacement résiduel de l´interface entre blocs.

Le comportement élastique du bloc 2 donne par ailleurs :

$$\Delta\epsilon_2^{r(2)} = -\frac{\Delta\delta_h^r}{L} = \frac{\Delta\sigma_2^r}{E} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_3^{r(2)} \tag{6.22a}$$

$$\Delta\epsilon_3^{r(2)} = 0 = \frac{\Delta\sigma_3^{r(2)}}{E} - \frac{\nu}{E}\Delta\sigma_2^r \tag{6.22b}$$

Combinant (6.21) et (6.22), il vient en fin de compte :

$$\frac{\Delta\delta_h^r}{B} = \frac{\alpha}{1+\alpha}(\Delta\epsilon_2^* + \nu\Delta\epsilon_3^*) \tag{6.23a}$$

$$\frac{\Delta\delta_v^r}{H} = -\Delta\epsilon_1^* - \frac{\nu}{(1-\nu)(1+\alpha)}\Big[\Delta\epsilon_2^* + (1+\alpha-\alpha\nu)\Delta\epsilon_3^*\Big] \tag{6.23b}$$

ainsi que :

$$\Delta\sigma_2^r = \frac{E}{(1+\alpha)(1-\nu^2)})(\Delta\epsilon_2^* + \nu\Delta\epsilon_3^*) \tag{6.24a}$$

$$\Delta\sigma_3^{r(1)} = -\frac{E}{(1+\alpha)(1-\nu^2)}\Big[\nu\Delta\epsilon_2^* + (1+\alpha-\alpha\nu^2)\Delta\epsilon_3^*\Big] \tag{6.24b}$$

$$\Delta\sigma_3^{r(2)} = \nu\Delta\sigma_2^r \tag{6.24c}$$

6.3.1.3. Simulation analytique

Une fois le tenseur des incréments des contraintes résiduelles déterminé, nous calculons les incréments des *invariants* de contraintes résiduelles (Δp^r et Δq^r). La procédure de calcul semi-analytique consiste à calculer tout d´abord les contraintes résiduelles puis les invariants de contraintes correspondants. En utilisant la loi de comportement cyclique (6.1). L'incrément de déformation permanente correspondant à l'application de ΔN cycles de la forme (6.2) s'écrit alors :

$$\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*(N) = \Delta\epsilon_1^*[(\frac{1-2\nu^*(q^m/p^m)}{3})\underline{\underline{I}} - (1+\nu^*(q^m/p^m))\underline{\underline{s}}^m/q^m] \tag{6.25}$$

Ainsi, connaissant les valeurs des déformations permanentes, nous calculons les contraintes résiduelles au pas suivant et nous actualisons alors les valeurs des contraintes maximales afin de déterminer la position du cycle élastique.

La simulation du comportement de la structure a été faite par voie semi-analytique selon la procédure décrite précédemment avec $B = 0,05$m, $\alpha B = 0,385$m et $P^m = 61$kPa. Les caractéristiques élastiques retenues pour le matériau étant $E = 250$MPa et $\nu = 0,3$. Les caractéristiques suivantes, tirées de Gidel et al.(2001), ont été adoptées pour la loi de comportement cyclique du matériau.

$$\epsilon_0^* = -1,95.10^{-2}; b = 0,03; n = 0,588; s = 42,8kPa; m = 3,8; \nu^* = 0,4 \tag{6.26}$$

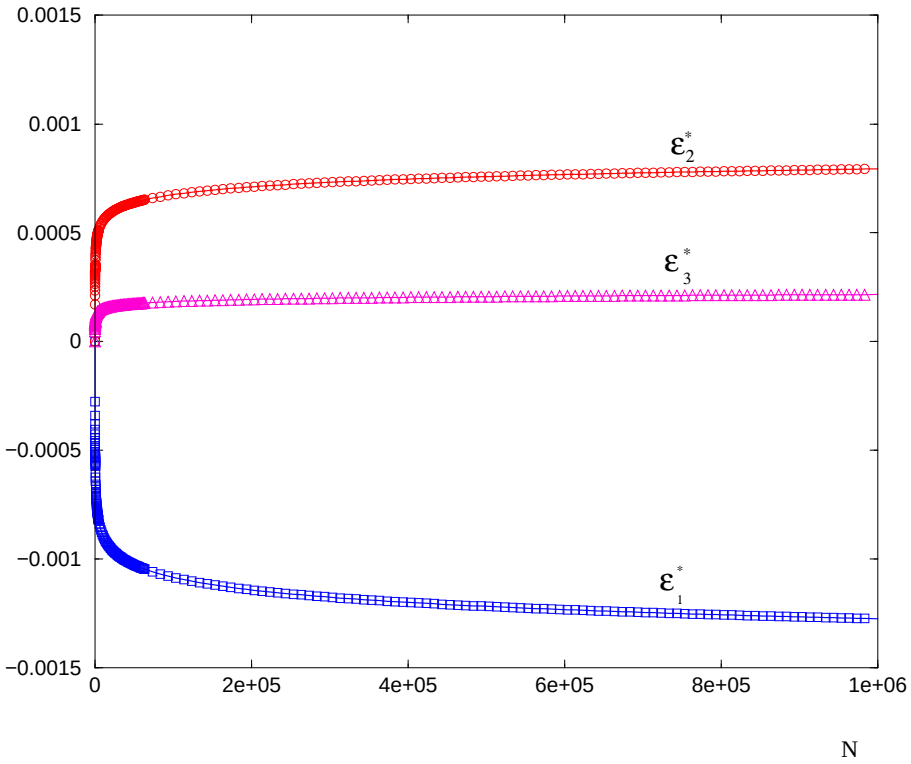


FIG. 6.6: évolution des déformations permanentes en fonction de N

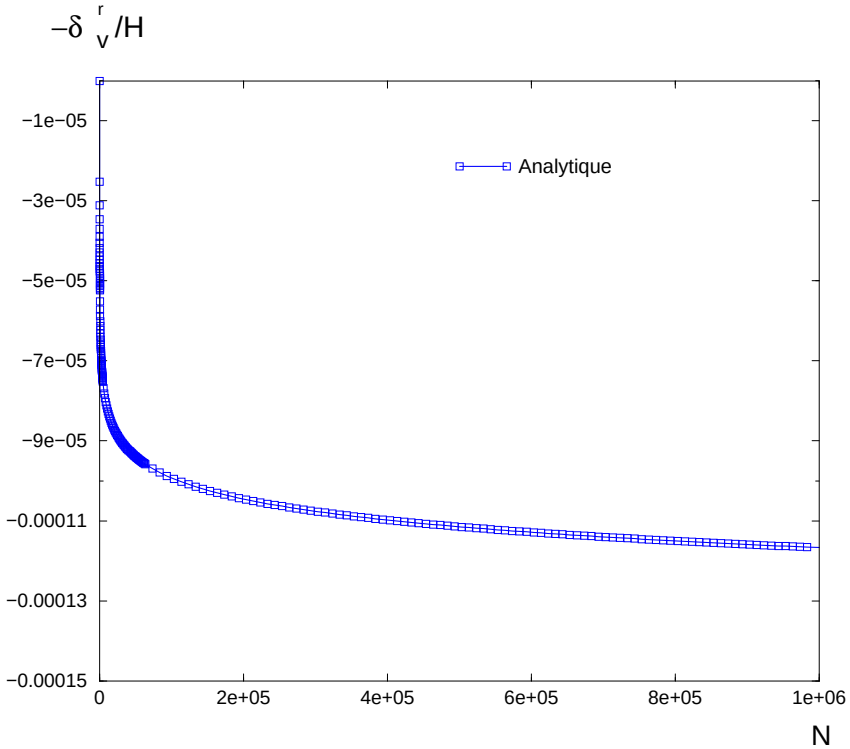


FIG. 6.7: évolution du tassement résiduel en fonction de N (modèle bibloc)

La figure 6.6 représente l´évolution des déformations permanentes dans le bloc situé sous la charge en fonction de N. On observe que la déformation permanente axiale est

négative (contraction), tandis que la déformation latérale est positive (extension), la troisième composante étant légèrement positive. L´intégration de ces déformations (de nature anélastiques) conduit au calcul du *tassement résiduel relatif* dont l´expression est :

$$\frac{\delta_v^r}{H} = -\epsilon_1^*(N) - \frac{\nu}{(1-\nu)(1+\alpha)}[\epsilon_2^*(N) + (1+\alpha(1-\nu))\epsilon_3^*(N)] \tag{6.27}$$

L´évolution de ce tassement en fonction de N est représenté sur la figure 6.7. On observe qu´il croît très rapidement dans une première phase, puis plus lentement, sans toutefois se stabiliser.

6.3.2 Prise en compte de l´élastoplasticité des matériaux dans le calcul de l´état résiduel

6.3.2.1. Nécessité d´une telle prise en compte

Les simulations analytiques ou numériques donnent fréquemment lieu à des résultats faisant notamment apparaître une courbe de tassement résiduel d´allure quelque peu chaotique. La raison de l´apparition d´un tel "phénomène" est à rechercher dans le fait que la dérive progressive des cycles de contraintes, due à l´évolution de l´état résiduel en tout point de la structure, peut conduire ces derniers à sortir du critère de plasticité des matériaux, voire même à passer de l´autre côté de la droite de référence qui intervient dans le calcul des déformations permanentes. Celles-ci peuvent alors brusquement changer de signe, en passant par des valeurs très grandes, lorsque le point de sollicitation maximale de coordonnées (p^{ac}, q^{ac}) franchit cette droite, comme le montre l´évaluation de la fonction g qui intervient dans l´expression des déformations permanentes.

$$g(p^{ac}, q^{ac}) = \frac{p^{ac}}{s + mp^{ac} - q^{ac}} \tag{6.28}$$

Il convient donc de corriger un tel comportement, physiquement irréaliste, en effectuant une *correction élastoplastique* du calcul résiduel, qui était jusqu'à présent purement élastique. La loi de comportement (3.11) du chapitre 3 doit être remplacée par une relation de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r = \underline{\underline{\sigma}}^0 + \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : (\underline{\underline{\epsilon}}^r - \underline{\underline{\epsilon}}^* - \underline{\underline{\epsilon}}^p) \tag{6.29}$$

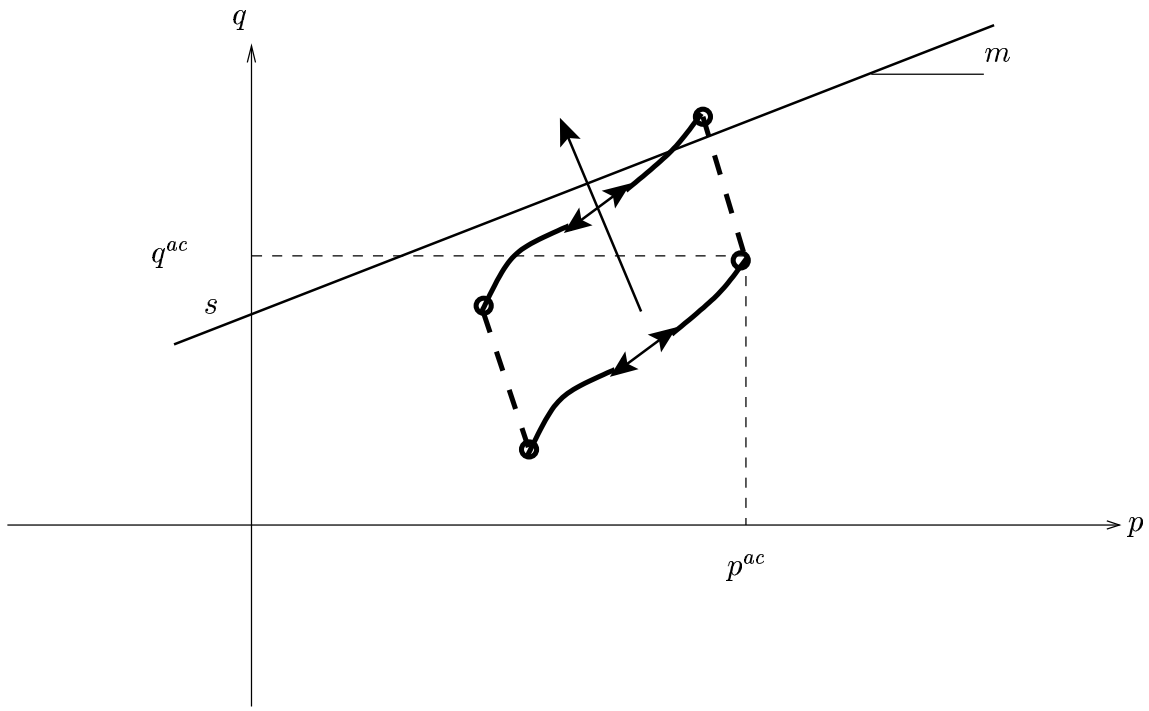


FIG. 6.8: dérive du cycle de contrainte au delà de la droite de référence

où $\underline{\underline{\epsilon}}^p$ désigne la *déformation plastique* du matériau liée au fait qu´au cours du cycle, l´état de contrainte atteint le critère de plasticité. Celle-ci est classiquement déterminée à partir du critère de plasticité (critère de Mohr-Coulomb) :

$$f(\underline{\underline{\sigma}}) \leq 0 \tag{6.30}$$

et de la règle d´écoulement plastique :

$$\dot{\underline{\underline{\epsilon}}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \tag{6.31}$$

où g désigne le potentiel plastique ($g = f$ dans le cas d´une règle d´écoulement associée).

6.3.2.2. Exemple de mise en oeuvre analytique

La démarche précédente est illustrée sur l´exemple d´une éprouvette sollicitée en conditions oedométriques, la pression P à laquelle elle est soumise variant cycliquement entre les valeurs P^- et P^+. L´état de contrainte résiduel est alors de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(N) = -P^- \underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - k(N)P^-(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{6.32}$$

avec $k(N) \in [0,1]$. Le cycle élastique de contrainte est représenté dans le plan (p,q) par un segment de droite dont les extrémités ont pour coordonnées :

$$p^r(N) = \frac{1+2k(N)}{3}P^- \quad , \quad q^r(N) = P^-(1-k(N)) \tag{6.33}$$

et

$$p^m(N) = p^r(N) + \frac{1+\nu}{3(1-\nu)}(P^+ - P^-) \quad , \quad q^m(N) = q^r(N) + \frac{1-2\nu}{1-\nu}(P^+ - P^-) \tag{6.34}$$

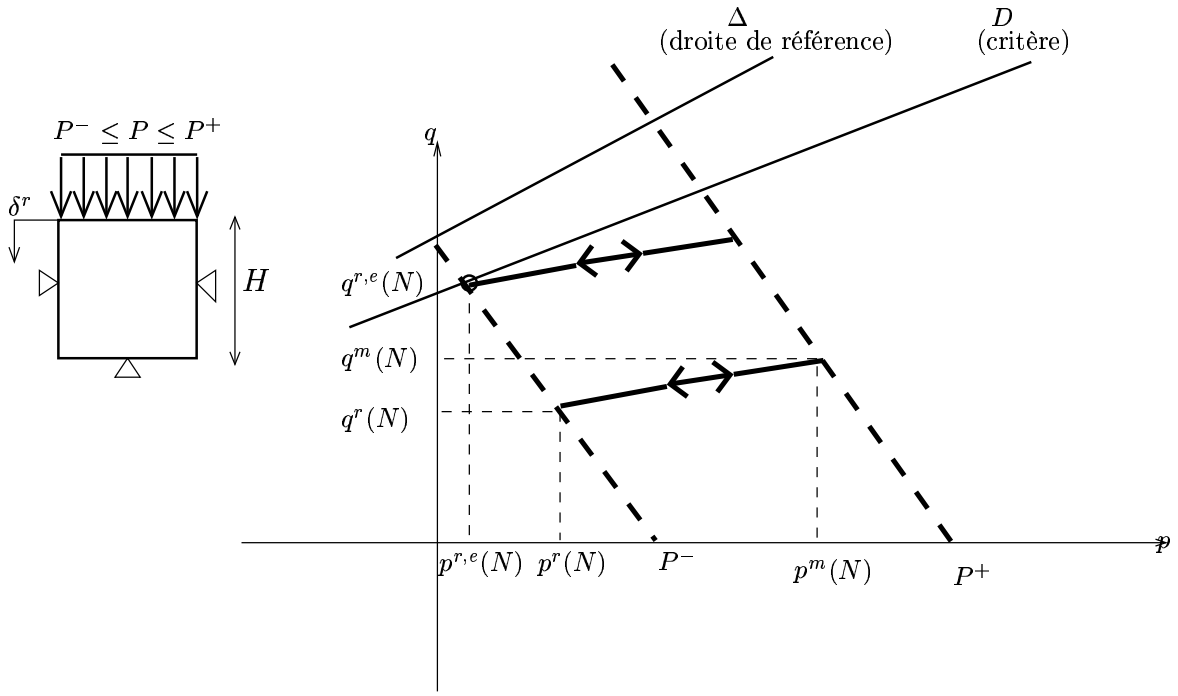


FIG. 6.9: cycle de contrainte relatif à un essai oedométrique

Le calcul de l´état résiduel consiste à effectuer un calcul élastoplastique dans lequel on impose une déformation permanente de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(N) = \epsilon^*(N)(\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \nu^*(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)) \quad \text{avec} \quad \epsilon^* < 0 \quad \text{et en supposant} \quad \nu^* < 0 \tag{6.35}$$

la contrainte initiale dans l´éprouvette étant de la forme (6.32) avec $k(N=1) = k_1$ donné. Le calcul élastique de l´état résiduel repose sur l´écriture de la relation de comportement :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^r = -\frac{\delta^r}{H}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \underline{\underline{\epsilon}}^* + \frac{1+\nu}{E}(\underline{\underline{\sigma}}^r(N) - \underline{\underline{\sigma}}^r(1)) - \frac{\nu}{E}tr((\underline{\underline{\sigma}}^r(N) - \underline{\underline{\sigma}}^r(1))\underline{\underline{I}} \tag{6.36}$$

où δ^r est le tassement résiduel. On obtient tous calculs faits :

$$\frac{\delta^r}{H} = -\epsilon^*(1 + \frac{2\nu\nu^*}{1-\nu}) \tag{6.37a}$$

$$\sigma_1^r = -P^- \tag{6.37b}$$

$$\sigma_2^r = \sigma_3^r = \frac{\nu^* E}{1-\nu}\epsilon^* - k_1 P^- \tag{6.37c}$$

Puisque $\nu^*\epsilon^* \geq 0$ et $k \in [0,1]$, nous avons :

$$\sigma_2^r = \sigma_3^r \geq \sigma_1^r \tag{6.38}$$

de sorte que :

$$p^r(N) = -\frac{1}{3}(\sigma_1^r + 2\sigma_2^r) = -\frac{2}{3}\frac{\nu^*\epsilon^*}{1-\nu}E + \frac{1+2k_1}{3}P^- \tag{6.39}$$

et

$$q^r(N) = \sigma_2^r - \sigma_1^r = \frac{\nu^*\epsilon^*}{1-\nu}E + (1-k_1)P^- \tag{6.40}$$

Le point représentatif de l´état résiduel tend donc à s´approcher de la droite D relative au critère de plasticité (figure 6.9), et dont l´équation s´écrit :

$$q = \frac{6sin\varphi}{3 - sin\varphi}(Ccotg\varphi + p) \tag{6.41}$$

où C est la cohésion du matériau et φ l´angle de frottement. Nous plaçant dans la situation où la pente du cycle élastique, égale d´après (6.34) à :

$$\frac{q^m(N) - q^r(N)}{p^m(N) - p^r(N)} = 3(\frac{1-2\nu}{1+\nu}) \tag{6.42}$$

et inférieure à la pente de la droite D :

$$3(\frac{1-2\nu}{1+\nu}) \leq \frac{6sin\varphi}{3 - sin\varphi} \tag{6.43}$$

c´est le point associé à l´état résiduel de l´éprouvette qui atteindra le premier le critère, le point correspondant, situé à l´intersection de D et de la droite des états résiduels d´équation :

$$2q + 3(p - P^-) = 0 \tag{6.44}$$

a pour coordonnées (figure 6.9) :

$$p^{r,e} = \frac{(3 - sin\varphi)P^- - 4Ccos\varphi}{3(1 + sin\varphi)} \tag{6.45a}$$

$$q^{r,e} = \frac{3}{2}(P^- - p^{r,e}) \tag{6.45b}$$

Le calcul résiduel avec prise en compte de l´élastoplasticité du matériau consiste alors à supposer que la dérive du cycle de contrainte est stoppée, ce dernier demeurant fixe. Désignant alors par $\Delta\epsilon^*$ l´incrément de déformation permanente axiale consécutif à l´application de ΔN cycles, on peut montrer que l´incrément de tassement résiduel vaut :

$$\frac{\Delta\delta^r}{H} = -\Delta\epsilon^*[1 - 2\nu^*\frac{1 - sin\varphi}{1 + sin\varphi}] \tag{6.46}$$

Cette dernière expression est obtenue par un *calcul de type "thermo"- élastoplastique*, dans lequel les déformations permanentes jouent le rôle des déformations thermiques.

La figure 6.10 donne l´évolution du tassement résiduel relatif en fonction du nombre de cycles de chargement selon que l´on prenne ou non en compte la plasticité du matériau. Pour le jeu de valeurs retenues, ce tassement est significativement moindre dans le cas élastoplastique que dans le cas élastique. La courbe relative à ce dernier calcul peut même devenir totalement chaotique lorsque, poursuivant le chargement, le cycle élastique franchit la droite de "référence".

6.4 Simulation numérique de l´essai BETTER

6.4.1 Présentation rapide du code de calcul CESAR-LCPC

Nous nous proposons de simuler l´essai décrit précédemment en nous appuyant sur le code de calcul CESAR. CESAR-LCPC est un prologiciel complet de calcul des ouvrages de Génie Civil. Il est connu, développé et validé par le Laboratoire Central des Ponts et Chaussées (LCPC). Ses principaux domaines d'application sont :

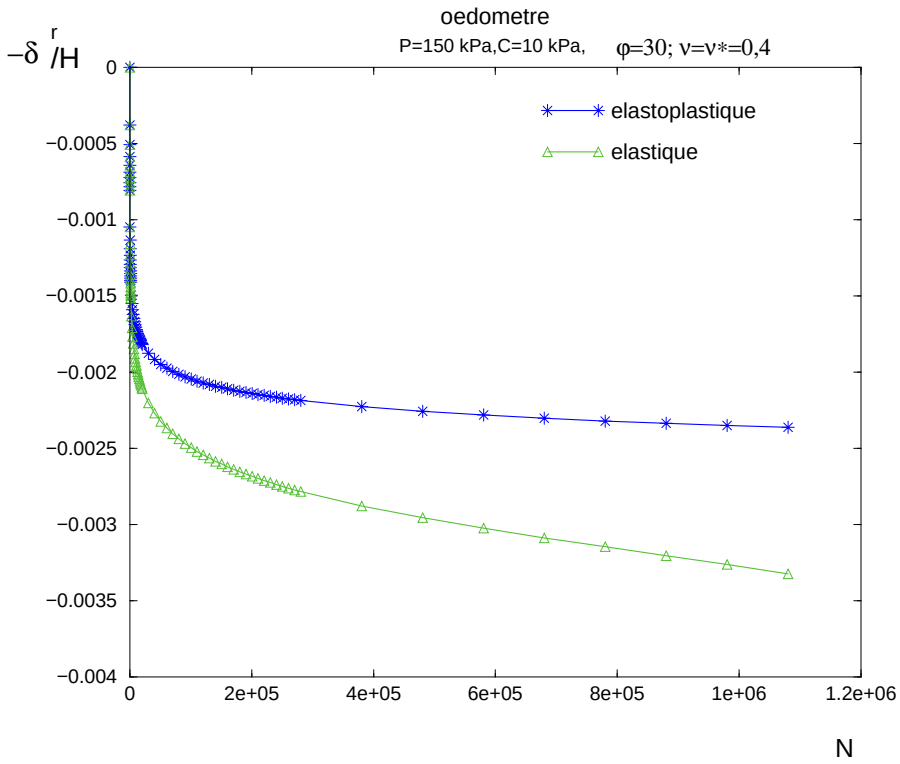


FIG. 6.10: résultat de la modélisation semi-analytique du problème de l´oedomètre pour le cas élastique et élastoplastique

- ⋆ Le dimensionnement des ouvrages souterrains : tunnels, galeries, lieux de stockage, fouilles, ...
- ⋆ Le calcul des ouvrages d'art et des structures : ponts métalliques ou en béton, barrages, bâtiments, quais, remblais ...
- ⋆ La conception des ouvrages soumis à des problèmes de diffusion : digues, diffusion de polluants, dégagements thermiques...
- ⋆ La mécanique des sols et des roches...

CESAR-LCPC désigne l'ensemble formé par les logiciels de pré- et de post-traitement MAX2D (MAX3D) et PEG2D (PEG3D) (respectivement pour les modélisations bi ou tridimensionnelles), par le solveur fondé sur la méthode des éléments finis CESAR, et par les programmes utilitaires. Ces différents programmes communiquent entre eux par l'intermédiaire d'une base de données.

Réaliser une modélisation avec CESAR-LCPC se traduit en général par l'enchaînement des étapes suivantes :

- ⋆ Utilisation des fonctionnalités de pré-traitement de MAX2D ou MAX3D pour la génération des données du solveur CESAR (maillage et jeu de données) ;
- ⋆ lancement du solveur par éléments finis CESAR pour effectuer la résolution numérique du problème étudié ;

⋆ utilisation des fonctionnalités de post-traitement de PEG2D ou PEG3D pour l'interprétation des résultats.

Nous avons utilisé, pour nos modélisations, la version 3.3 de *CESAR-LCPC*.

6.4.2 Mise en place de la méthode de calcul

Le principe de la méthode de calcul est rappelé sur l´organigramme de la figure 6.11 ci-dessous, repris de la figure 3.5 du chapitre 3, dans lequel le logiciel CESAR intervient à deux niveaux.

(a) Obtention de l´état initial de la structure, à partir duquel sont comptées les déformations permanentes et le tassement résiduel, par application d´un cycle de charge/décharge prenant en compte l´élastoplasticité des matériaux (critère de Mohr-Coulomb (C,φ)).

(b) Calcul à chaque pas de l´état résiduel engendré par les déformations permanentes et de l´état chargé.

Le développement d´un logiciel en FORTRAN a été réalisé. Ce logiciel :

- récupère les états de contraintes dans l´état chargé et dans l´état déchargé (résiduel) ;
- calcule l´incrément de déformation $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*$ avec ν^* constant ou avec ν^* donné par la relation (5.31) ;
- prépare les données qui seront injectées pour prendre en compte $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*$.

L´enchaînement entre les calculs CESAR et FORTRAN est réalisé à l´aide d´un script Unix.

6.4.3 Modélisation numérique du bibloc

Nous avons développé une méthode de calcul numérique faisant intervenir le logiciel de calcul en éléments finis *CESAR-LCPC* afin de modéliser le tassement résiduel d´un modèle bibloc soumis à un chargement cyclique. Pour ce faire, nous avons utilisé la méthode de calcul développée dans le chapitre 3. La structure "bibloc" (figure 6.3) a été modélisée au moyen du prologiciel *MAX2D* de *CESAR-LCPC*. Nous avons discrétisé cette structure par un maillage triangulaire à trois noeuds ($T3$). Compte tenu de l´homogénéité des champs de contrainte et de déformation dans les blocs, ceux-ci peuvent être discrétisés à l´aide de deux éléments $T3$.

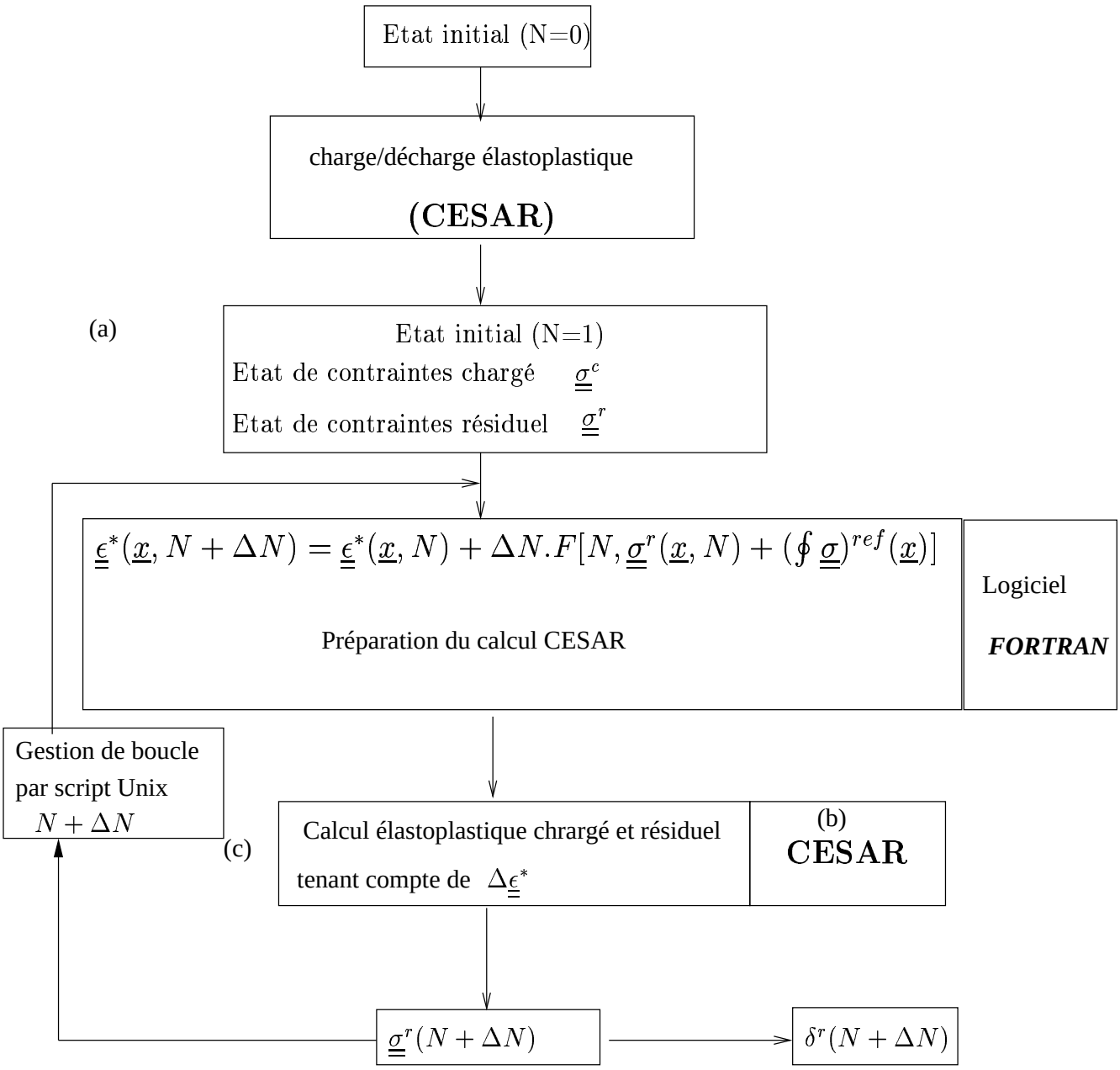


FIG. 6.11: organigramme de la procédure de calcul pas-à-pas de l´état résiduel mettant en oeuvre le prologiciel CESAR

L´action exercée par le bloc 2 sur le bloc 1 a été schématisée à l´aide d´un système de deux ensembles d´éléments de type "ressorts", agissant respectivement sur les noeuds supérieur et inférieur droits comme indiqué sur la figure 6.12.

Plus précisément, on désigne par K la raideur individuelle de chaque ressort, l sa longueur, et d l´espacement entre deux ressorts dans la direction perpendiculaire au plan de la figure. Il est facile de voir que ce système de ressorts se comporte comme le bloc 2 de

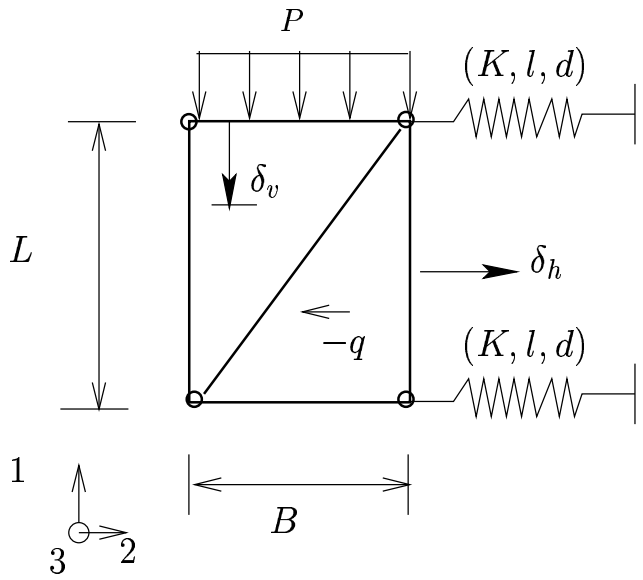


FIG. 6.12: modélisation par éléments finis du bibiloc dans CESAR : système de ressorts équivalent

hauteur H et de longueur L, si et seulement si la relation suivante est vérifiée.

$$k = \frac{K}{dl} = \frac{EH}{2L(1-\nu^2)} \tag{6.47}$$

En utilisant le jeu de données relatif au matériau et à la géométrie de la structure, proposé précédemment, nous obtenons une valeur de la raideur des ressorts qui est égale à $k = 35,7$ MN$/m^2$.

Nous constatons à partir de la figure 6.13, donnant l´évolution du tassement résiduel relatif en fonction du nombre de cycle de chargement N, que les résultats des modélisations numérique (par CESAR) et semi-analytique sont en très bon accord, ce qui tend à valider la modélisation numérique que nous avons réalisée.

6.4.4 Simulation numérique de l´essai oedométrique avec prise en compte de l´élastoplasticité

La figure 6.14 permet de comparer les résultats semi-analytiques et les résultats du calcul par CESAR. Les courbes analytiques et numériques sont pratiquement superposées, validant ainsi l´approche numérique que nous appliquons maintenant à la simulation de l´essai *BETTER* avec prise en compte des déformations plastiques à chaque incrément.

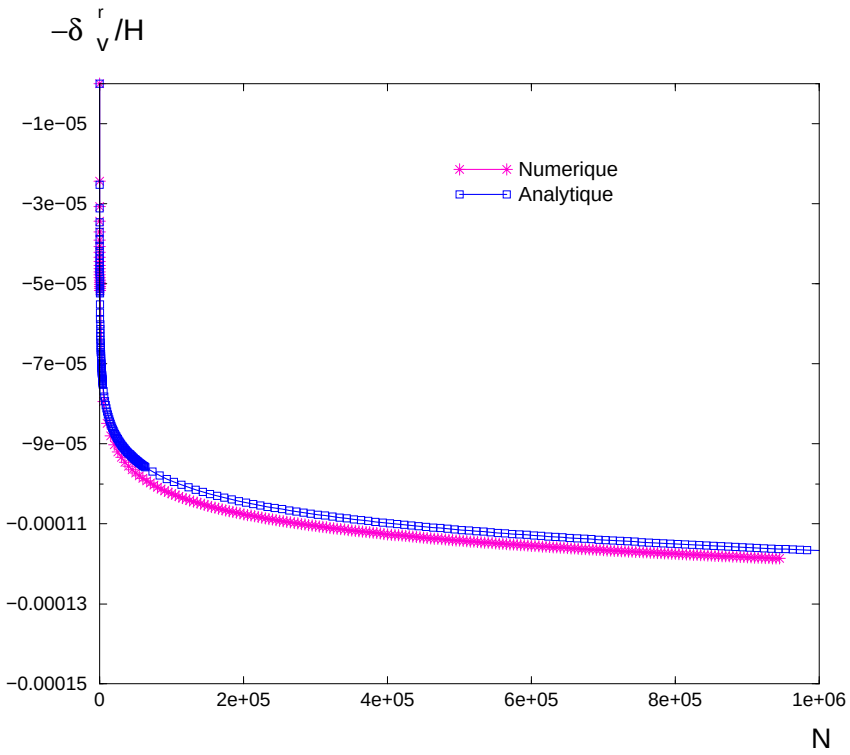


FIG. 6.13: comparaison de la modélisation CESAR et de la modélisation semi-analytique du Bibloc

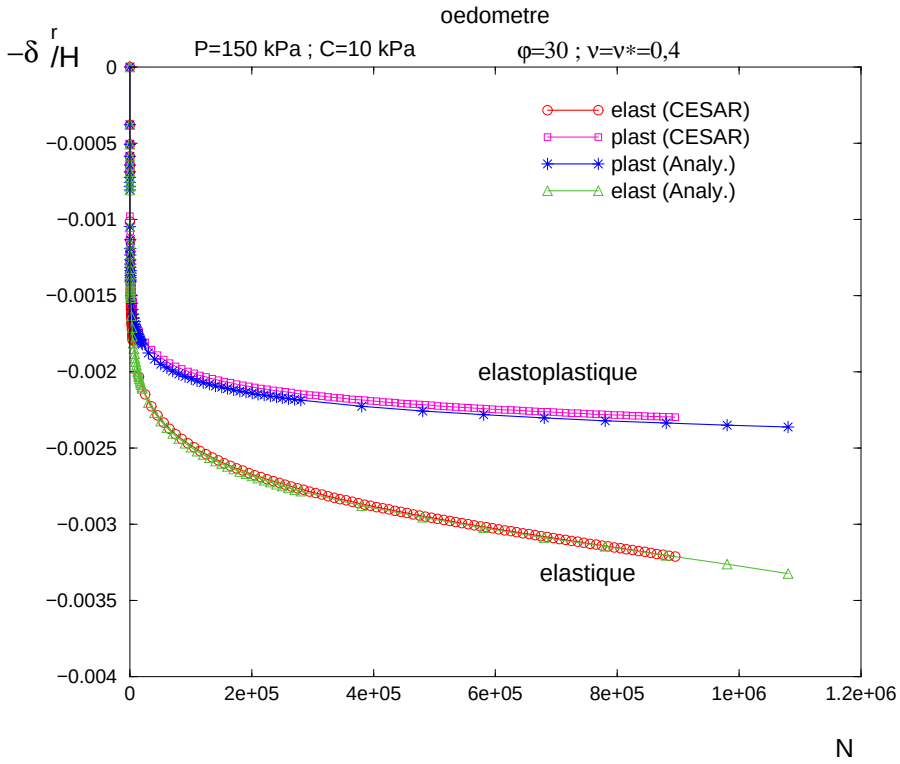


FIG. 6.14: comparaison de la modélisation CESAR et de la modélisation semi-analytique du problème de l´oedomètre

6.5 Modélisation numérique de l´essai BETTER : premiers résultats

Nous avons simulé numériquement la structure représentée sur la figure 6.2 et nous nous sommes plus particulièrement intéressés au calcul du tassement résiduel au point d´application de la charge au bout d´un million de cycles de chargement.

Le calcul de l´évolution de l´état résiduel de la structure, et en particulier du tassement du blochet, a été réalisé conformément au schéma général de la figure 6.11. Plus précisément, connaissant l´état résiduel de la structure au terme de N cycles de chargement, la détermination de ce même état pour $N + \Delta N$ cycles s´effectue de la manière suivante :

- *Calcul élastoplastique* intégrant l´incrément du champ de déformations permanentes $\Delta\underline{\underline{\epsilon}}^*$ engendré par l´application de ΔN cycles ;

- *calcul élastoplastique* correspondant, à partir de l´état résiduel ainsi obtenu, à l´application du chargement maximal puis à la décharge élastique ;

- les états extrêmes de cette dernière phase de décharge élastique constituent les *états résiduel et de chargement maximal actualisés*, entre lesquels l´évolution de la structure est purement élastique.

6.5.1 Paramètres physiques

6.5.1.1. Paramètres élastiques

Afin de déterminer les valeurs des paramètres élastiques du ballast (module d´Young E et coefficient de Poisson ν), nous nous sommes basés sur les résultats expérimentaux d´Indraratna et al. (1998) [37], menés sur le ballast.

En effet, Indraratna et al. (1998) ont réalisé des essais *triaxiaux* sur du ballast à l´aide d´une cellule triaxiale de diamètre $\phi = 300$ mm afin de déterminer ses caractéristiques mécaniques (module d´Young E, coefficient de poisson ν en élasticité et son angle de frottement φ et sa cohésion C en élastoplasticité).

Indraratna et al. (1998) déterminent les paramètres élastiques initiaux qui sont des fonctions croissantes du confinement. Ils sont donnés pour une valeur de la déformation axiale de l´ordre de $2 - 3\%$. Par exemple, pour un confinement de 100 kPa, le module d´Young initial $E_i = 25$ MPa et le coefficient de Poisson est $\nu_i = 0,18$. Ces valeurs

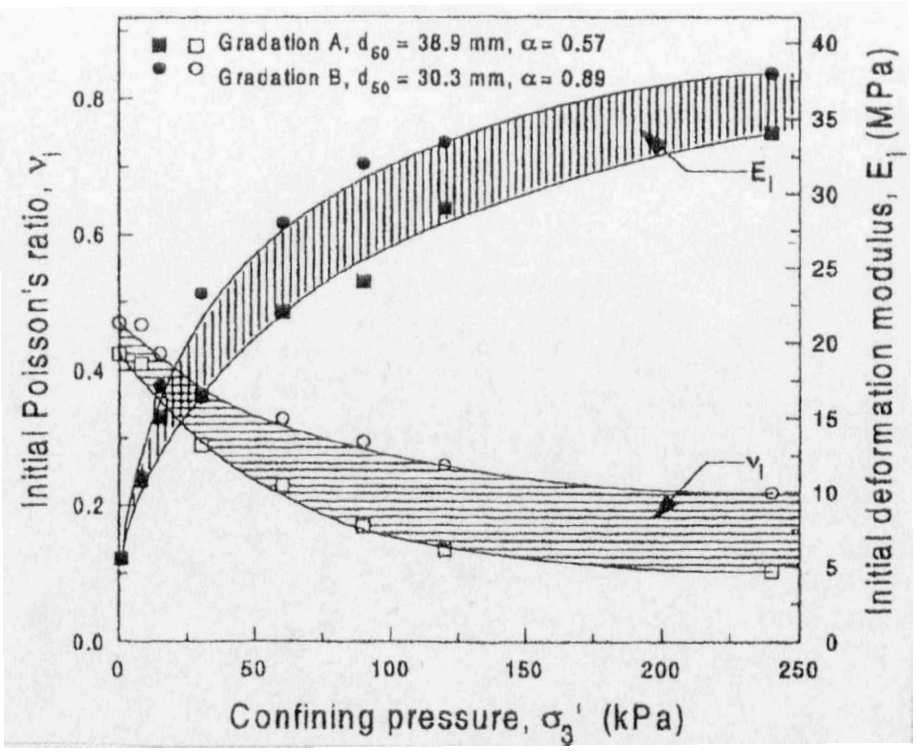


FIG. 6.15: variations du module d´Young et du coefficient de Poisson en fonction de la pression de confinement (d´après Indraratna et al. 1998)

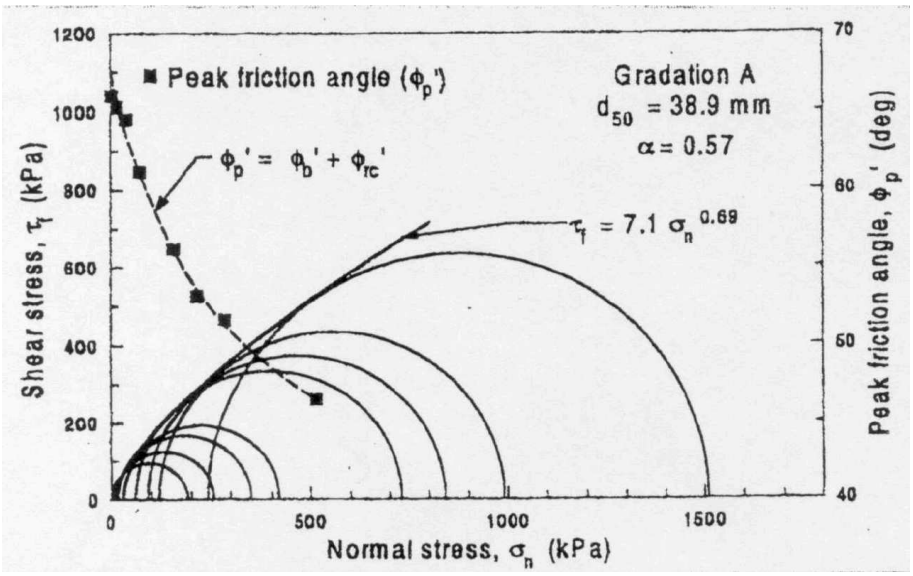


FIG. 6.16: détermination des caractéristiques de résistance d´un ballast (d´après Indraratna et al. 1998)

des paramètres nous paraissent relativement faibles comparées aux valeurs utilisées dans d´autres simulations. Pour cette raison, nous avons calé les paramètres élastiques sur les résultats de l´essai BETTER. Le module élastique est ajusté de façon à reproduire la

déflexion élastique obtenue au cours des essais (Bodin, 2001). Les simulations réalisées montrent que cet objectif est atteint lorsque ce module est de l´ordre de 50 MPa.

Les variations de E et ν en fonction de la pression de confinement appliquée sont représentées sur la figure (6.15). Ces variations mettent en évidence une forte non-linéarité élastique pour ce type de matériau, déjà observée par de nombreux auteurs et dont nous tiendrons compte dans le chapitre 7 de ce travail.

6.5.1.2. Paramètres plastiques

Les paramètres plastiques du matériau correspondent à la cohésion C et à l´angle de frottement φ du matériau.

L´autre volet du travail d´Indraratna et al. (1998) concerne la détermination des caractéristiques de résistance du ballast à partir de ces mêmes essais triaxiaux menés jusqu´à rupture. Le relevé des différentes valeurs de la contrainte verticale à la rupture en fonction de la pression de confinement permet de tracer les cercles correspondants dans le plan de Mohr, dont l´enveloppe n´est autre que la courbe intrinsèque du matériau (figure 6.16). Cette courbe est fortement incurvée, de sorte que l´angle de frottement, défini comme l´angle de pente de la tangente à la courbe, décroît rapidement avec la contrainte normale. Dans la gamme des contraintes correspondant au chargement d´une plate-forme ferroviaire, cet angle peut facilement dépasser les 40°. Les valeurs de C et φ qui sont utilisées dans notre simulation correspondent aux valeurs qui rendent minimal l´écart entre le critère de Mohr-Coulomb et le critére représenté sur la figure 6.16.

6.5.1.3. Paramètres cycliques

Pour simuler l´essai Better, nous avons intégré la loi de comportement proposée par Gidel et al. (2001) pour simuler le comportement cylique des graves non traitées (GNT), celle que nous utilisons est relative à la grave de Poulmarch (voir chapitre 5). Pour mieux adapter cette loi au cas du matériau ballast, nous avons essayé de caler ses paramètres en se basant sur l´essai référencé par Bodin “Df12d”.

Bien que le logiciel permette de faire varier la valeur du coefficient ν^* en fonction de l´état de contraintes (cf. chapitre 5), cette disposition rend les calculs fortement instables. En effet, les valeurs du rapport q/p peuvent devenir très importantes à proximité immédiate du blochet alors que, physiquement, ν^* doit être borné pour les fortes valeurs de q/p. Nous avons donc utilisé une valeur de ν^* constante et égale à $0,4$.

Les paramètres de la loi de Gidel tels que ϵ_0^* et b établis pour la grave de Poulmarch ne sont pas adaptés pour le ballast. Nous avons donc essayé de faire varier ces paramètres

de façon à obtenir la même évolution du tassement résiduel que celle obtenue par Bodin, sur une plage d´un million de cycles de chargement.

La courbe de tassement obtenue avec la loi d´accumulation des déformations permanentes possède une asymptote contrairement à la courbe obtenue par Bodin. En effet, cette dernière est composée de deux parties : la première partie est déduite des résultats d´essais (jusqu´à 25000 cycles) tandis que la deuxième partie représente la loi affine d´évolution du tassement proposée par Bodin, qui ne possède donc pas d´asymptote. Ainsi, nous avons réalisé deux calages de nos paramètres, le premier consiste à se caler sur la première partie de la courbe, le second sur la deuxième partie de la courbe de Bodin.

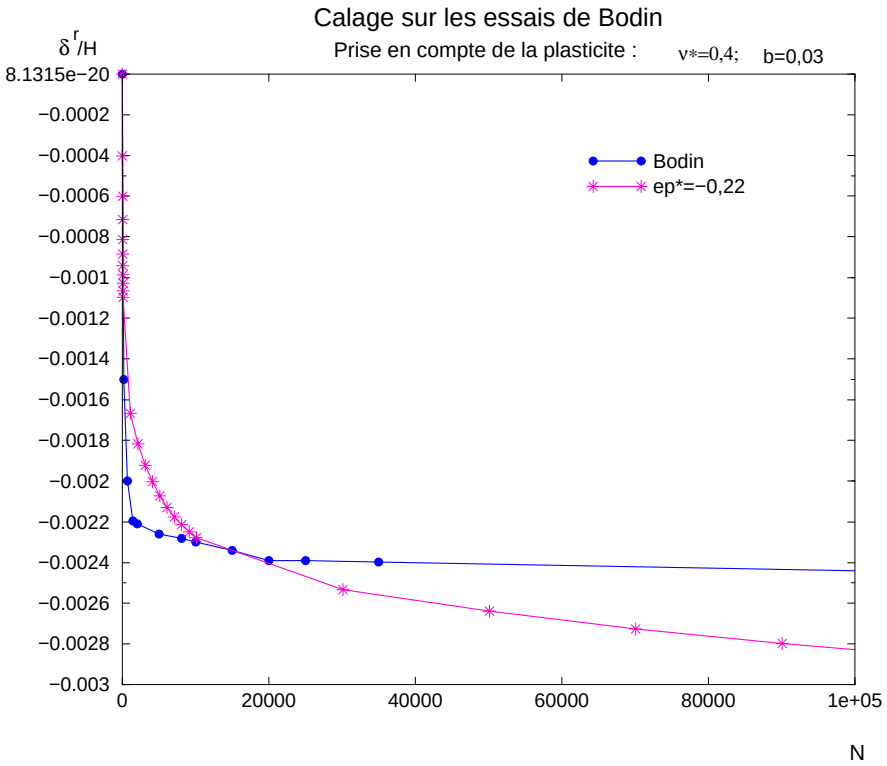


FIG. 6.17: calage des paramètres de la loi de comportement sur la $1^{ère}$ partie de la courbe expérimentale

Le calage de la courbe expérimentale de Bodin (2001) [11] est obtenu pour une valeur de b égale à $0,03$ et pour une valeur du paramètre ϵ_0^* variant entre $-0,2$ et $-0,205$. Nous constatons donc la sensibilité du modèle à la variation des paramètres de la loi de comportement cyclique.

D´après les résultats numériques obtenus visant à étudier le comportement cyclique à grand nombre de cycles du ballast, nous constatons l´importance de la connaissance des paramètres de la loi de comportement. Ces derniers devront être déterminés précisément en effectuant des essais triaxiaux cycliques sur le matériau ballast.

Il faut noter également que la simulation numérique du modèle bibloc ($\epsilon_0^* = -0,205$ et

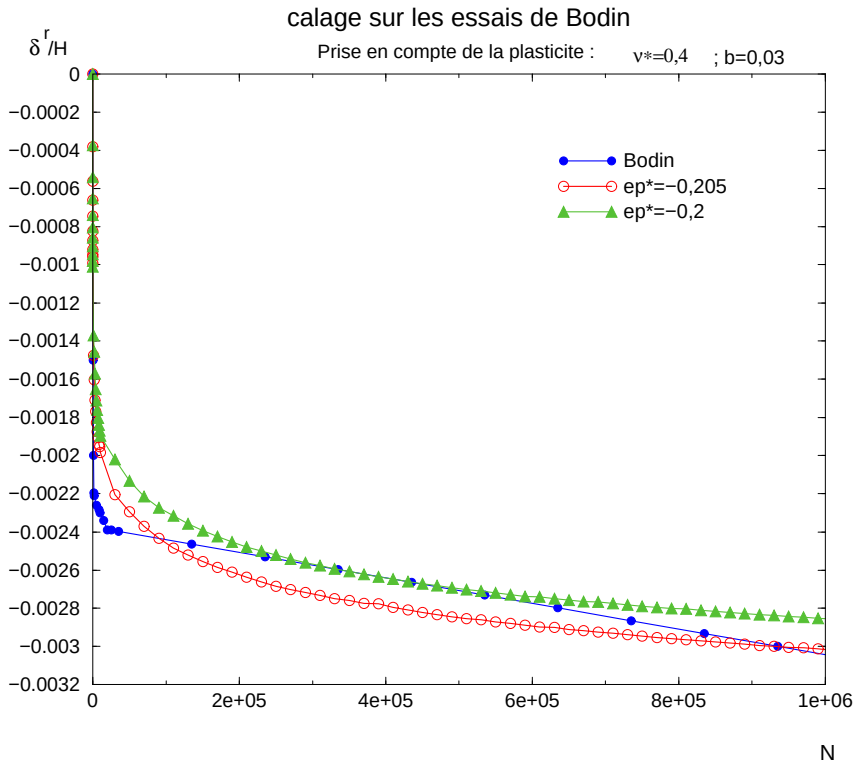


FIG. 6.18: calage des paramètres de la loi de comportement sur la $2^{\text{ième}}$ partie de la courbe expérimentale

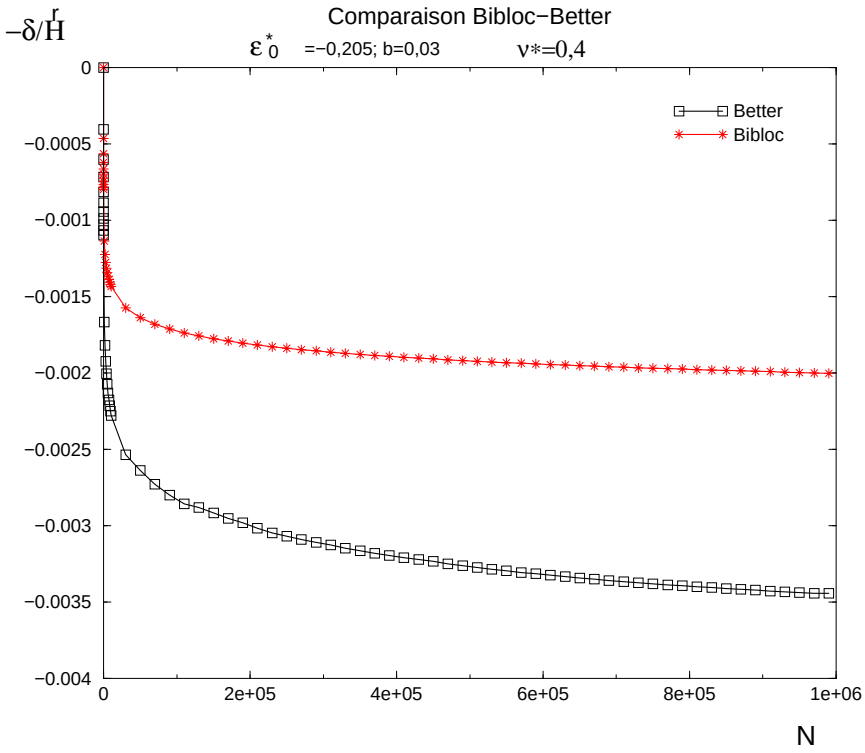


FIG. 6.19: comparaison entre le modèle bibloc et la simulation numérique de l´essai BETTER

$b = 0,03$) décrite précédemment donne un ordre de grandeur du tassement résiduel de l´essai BETTER. En effet, avec le modèle bibloc nous obtenons environ 40% de tassement en moins, que pour le modèle BETTER (voir figure 6.19). Le modèle bibloc a permis non seulement de valider la procédure de calcul numérique mais il donne aussi un ordre de grandeur du tassement induit par l'essai BETTER.

6.5.2 Simulation de l´essai

Nous avons voulu simuler quelques essais réalisés par Bodin (2001), en terme d´évolution du tassement résiduel. Malheureusement, les seuls résultats dont nous disposons pour les différentes séries d´essais, sont les déflexions élastiques ainsi que les incréments de tassement (tassement par cycle de chargement). Le seul essai complet est celui qui a servi à caler les paramétres cycliques de la loi de comportement. En effet, l´auteur calcule les incréments de tassement à partir de la mesure du tassement divisé par le nombre de cycles, cette mesure est prise en compte sur une plage linéaire après 250000 cycles. Nous avons choisi de simuler les deux séries d´essais référencées par Bodin (2001) D_f12i (i = a,b, c, et d) et B_f0bi (i = 1,2 et 3). Ces deux séries diffèrent par le type de similitude adopté (conservant les contraintes ou les accélérations), par l´angle de descente de la charge et par la valeur de la charge appliquée.

A l'issue des simulations des séries d'essais sélectionnées, nous avons calculé les incréments de tassement à partir des résultats fournis par la procédure de calcul numérique, que nous avons comparés à ceux évalués par Bodin.

Nous constatons d´après la figure 6.20, que pour le premier nuage de points correspondant à la première série (D_f12i), la dispersion des résultats des simulations numériques est faible comparée à celle obtenue pour les résultats expérimentaux. On note, pour une force de 3 kN, un point "parasite" correspondant à la simulation d'un essai qui a donné un tassement de 30% supérieur à la tendance générale. Ceci est à attribuer probablement à des problèmes numériques auxquels nous devons remédier. Concernant la deuxième série (B_f0bi), représentée par le deuxième nuage de points, nous remarquons une évolution croissante des incréments de tassement en fonction de la charge appliqué sur le blochet. Malgré une importante dispersion des résultats de Bodin, il semble que la modélisation donne des tassements plus faibles que ceux obtenus expérimentalement.

Deux dispositions adoptées dans notre simulation pourraient expliquer les écarts constatés entre modèle et essai. D´une part nous simulons dans des conditions de déformations planes, un essai qui est en fait tridimensionnel. D´autre part, le schéma de calcul proposé est quasi-statique et donc ne fait pas intervenir la fréquence de sollicitation appliquée à l´échantillon. Par ailleurs, bien que les paramètres de la loi de comportement aient été

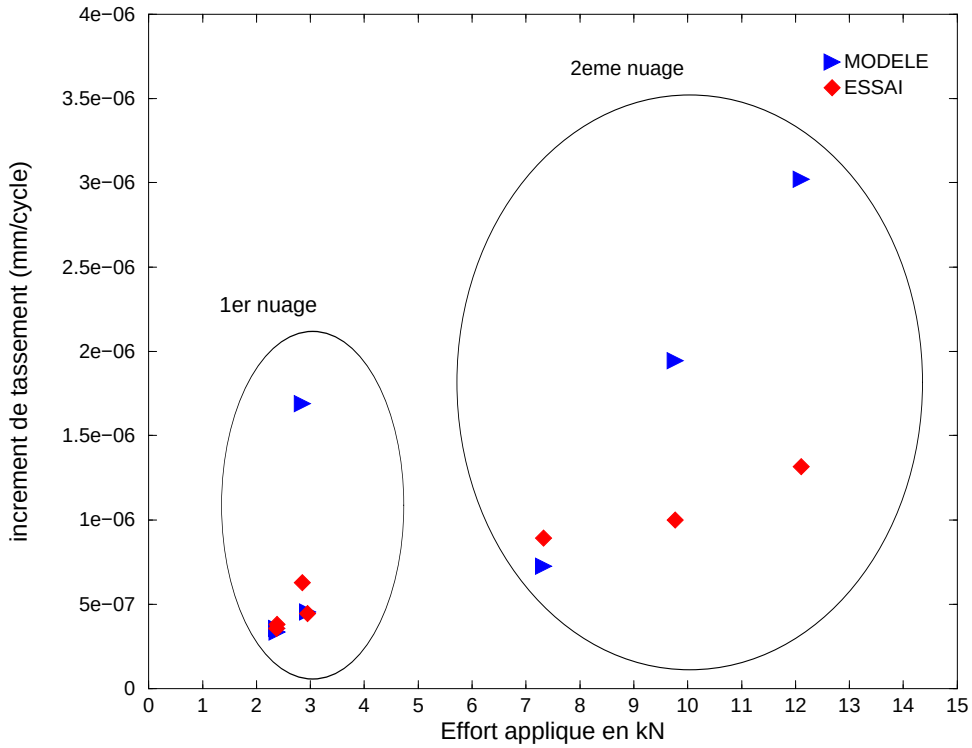


FIG. 6.20: comparaison des incréments de tassement donnés par les simulations numériques et les résultats de Bodin (2001)

calés à partir d´un essai, il subsiste cependant des incertitudes quant à l´utilisation pour le ballast d´un modèle qui a été mis au point pour des graves. Il serait souhaitable de déterminer le comportement du ballast par des essais triaxiaux cycliques, comparables à ceux utlisés pour étudier le comportement des graves.

6.5.3 Influence de la couche sousballast

Dans cette partie, nous montrons l´influence de la couche sous ballast sur le tassement résiduel. Pour ce faire, nous comparons le tassement résiduel pour un même essai (référencé "Df12d" par Bodin (2001)), mais dans un cas nous maintenons la valeur de la raideur de la couche d´élastomère à $1,5$ MPa, puis nous la faisons varier entre 5 MPa et 15 GPa qui correspond à une couche assez rigide.

La figure 6.21 montre que l´augmentation du module d´Young de la couche d´élastomère influe considérablement sur la valeur du tassement résiduel relatif qui passe de $2,86$ mm pour un module de $1,5$ MPa à $2,21$ mm pour une raideur de 15 GPa, d´où une diminution d´environ 30%. Cette tendance a été obtenue également dans l´interprétation de l´essai BETTER par Bodin (2001) qui considère que le tassement dépend surtout de la déflexion élastique, que celle-ci augmente à cause de l´effort imposé ou de la diminution de la raideur

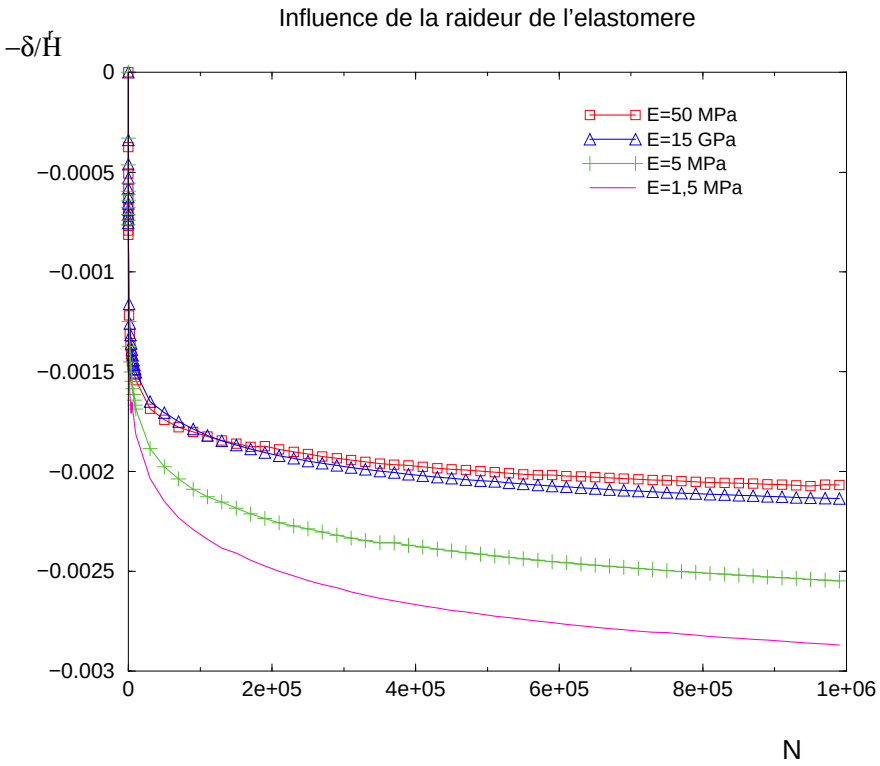


FIG. 6.21: comparaison entre les tassements résiduels obtenus pour différentes valeurs de la raideur de l´élastomère

de la couche de matériau située sous le ballast.

6.6 Conclusion

Nous avons mis au point un outil de calcul numérique visant à la prédicition du tassement résiduel d´infrastructures soumises à des chargements répétés. Nous avons validé cette procédure de calcul puis nous l´avons utilisée pour simuler l´essai BETTER, qui nous a permis de caler un certain nombre de paramètres. Nous avons aussi simulé quelques essais réalisés par Bodin (2001) et nous avons comparés nos résultats à ceux obtenus expérimentalement. Nous en déduisons que, hormis une simulation qui semble montrer une instabilité numérique d´origine encore inconnue, les autres résultats sont satisfaisants, même si, pour être plus rigoureux, il sera indispensable d´améliorer la procédure de calcul.

Chapitre 7

Prise en compte de la non-linéarité élastique des matériaux : illustration sur l´exemple de l´essai oedométrique cyclique

Sommaire

7.1 Introduction 207

7.2 Le comportement élastique non-linéaire des matériaux granulaires : le modèle de Boyce (1980) 208

7.2.1 Quelques généralités sur le comportement élastique non-linéaire 208

7.2.2 Notations préalables. Loi de Boyce 210

7.3 Un exemple illustratif : la sollicitation oedométrique cyclique 213

7.3.1 Calcul du cycle élastique 215

7.3.2 Détermination de l´état résiduel à partir des déformations permanentes 218

7.3.3 Actualisation pas-à-pas du point de chargement maximal 221

7.3.4 Formulation d´une loi de comportement cyclique 222

7.3.5 Simulation numérique 224

7.3.6 Résultats et commentaires 225

7.4 Conclusion 232

7.1 Introduction

Nous avons considéré dans les chapitres précédents que le comportement réversible des matériaux était élastique linéaire. Cette hypothèse essentielle nous a permis de simplifier considérablement la méthode de calcul proposée, puisque le cycle élastique actuel pouvait être déterminé en tout point de la structure par simple superposition à l´état de contrainte résiduel du cycle élastique de référence, calculable une fois pour toutes par un seul calcul élastique.

Or il est bien connu que les géomatériaux (sols, graves, ballast,...) qui forment l´assise d´une chaussée ou d´une voie ferrée, manifestent un comportement fortement non-linéaire lié à leur structure granulaire. Ceci est par exemple clairement mis en évidence à partir d´essais triaxiaux cycliques, tels que ceux effectués par Paute et al. (1994) [58] ou Hornych et al.(1998,2000) [35], [36] sur des graves non traitées (GNT) couramment employées en construction routière. La figure 7.1 représente une courbe-type donnant l´évolution de la contrainte axiale σ_1 en fonction de la déformation axiale ϵ_1 d´une éprouvette soumise à un tel essai. On observe une stabilisation rapide du cycle qui continue cependant à dériver lentement en raison de l´accumulation des déformations permanentes. La forme de ce cycle est celle d´une boucle presque aplatie (légère hystérésis), mais fortement incurvée, indice d´un raidissement du matériau lorsque l´on augmente la contrainte de compression axiale. D´où la difficulté à choisir un module d´élasticité pour ces matériaux qui soit constant, comme le requiert l´adoption d´un modèle élastique linéaire. Ces résultats montrent qu´il serait nécessaire de caractériser un cycle par un comportement élastoplastique. Compte tenu du faible hystéresis, un modèle, plus réaliste que le modèle linéaire, consiste à caractériser le matériau par un comportement élastique non-linéaire.

L´objet de ce chapitre est donc d´analyser les conséquences possibles sur la méthode de calcul développée dans les chapitres précédents, de la prise en compte d´une telle non-linéarité élastique. On partira pour ce faire d´un modèle particulier de loi de comportement (modèle de Boyce, 1980 [14]) bien adapté pour décrire l´élasticité non-linéaire des matériaux de type GNT. Ce modèle sera alors introduit dans la méthode de calcul proposée, mise en oeuvre sur un exemple illustratif simple qui permet de mener les calculs jusqu´au bout de façon (semi)analytique : éprouvette homogène soumise à une sollicitation oedométrique cyclique. Cet exemple nous permettra de mettre en évidence la façon dont la prise en compte du caractère non-linéaire de l´élasticité du matériau modifie, parfois de manière importante, les résultats de la simulation numérique.

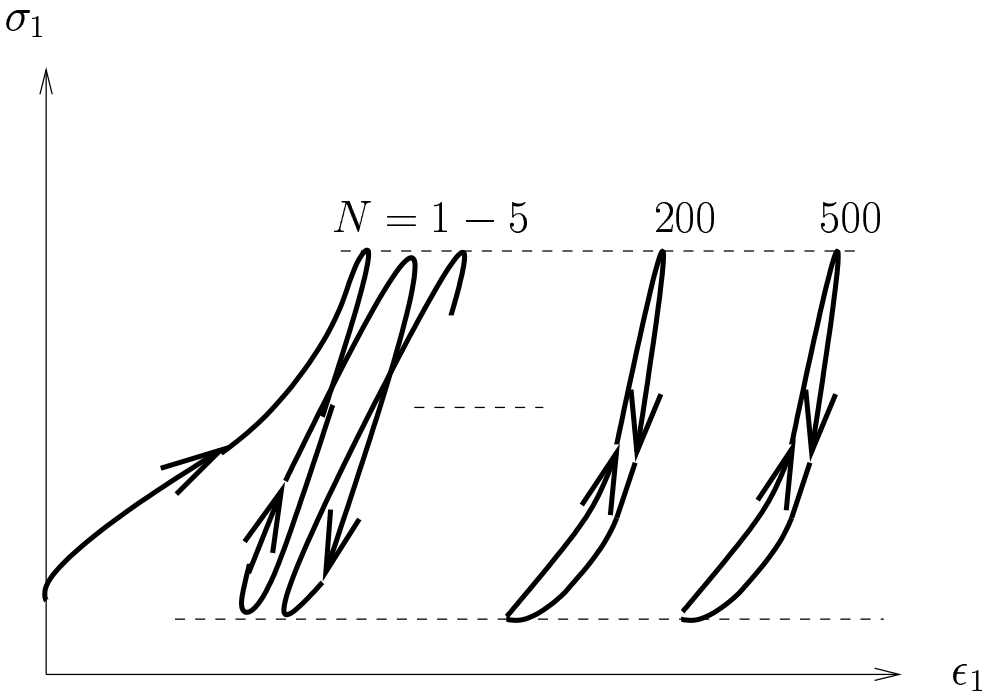


FIG. 7.1: courbe contrainte-déformation relative à un essai triaxial cyclique (d´après Hornych et al.(1998))

7.2 Le comportement élastique non-linéaire des matériaux granulaires : le modèle de Boyce (1980)

7.2.1 Quelques généralités sur le comportement élastique non-linéaire

Faisant abstraction de la non-linéarité *géométrique* liée aux grandes déformations, puisque nous nous plaçons toujours dans le cadre d´évolutions en transformations infinitésimales, le comportement élastique (linéaire ou non) d´un matériau peut être défini très simplement comme suit. On considère un volume homogène (égal à l´unité) du matériau, initialement non chargé, que l´on amène selon une évolution isotherme et quasi-statique dans un état chargé, caractérisé par la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ et la déformation $\underline{\underline{\epsilon}}$. Le caractère élastique réversible d´une telle évolution est défini par deux propriétés :

a) la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ ne dépend que de l´état de déformation final $\underline{\underline{\epsilon}}$;

b) le travail fourni pour amener un tel volume dans cet état déformé est indépendant du trajet suivi, soit :

$$\int_1 \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} = \int_2 \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} \tag{7.1}$$

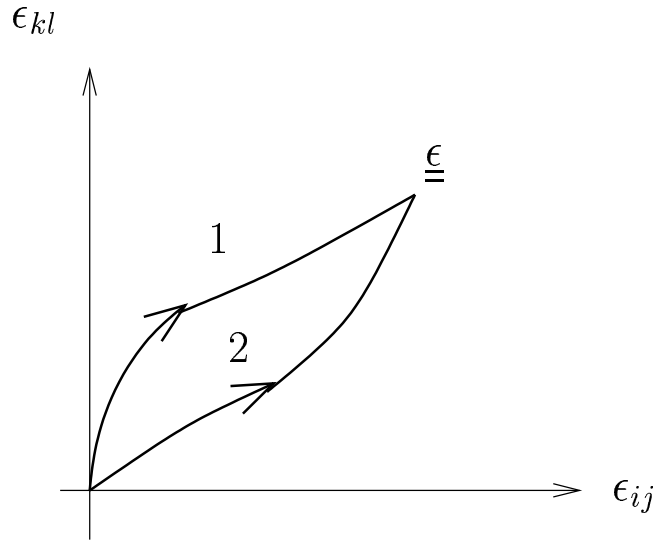


FIG. 7.2: trajets de chargement dans l´espace des déformations

où 1 et 2 se réfèrent à deux trajets différents dans l´espace des déformations (figure 7.2). Ce travail n´est autre que *l´énergie libre* (ou *potentiel élastique*) emmagasiné par le matériau et restitué à la décharge.

$$\Psi(\underline{\underline{\epsilon}}) = \int \underline{\underline{\sigma}} : d\underline{\underline{\epsilon}} \tag{7.2}$$

Il vient alors immédiatement par différentiation de (7.2) et en tenant compte de la propriété a) :

$$\underline{\underline{\sigma}}(\underline{\underline{\epsilon}}) = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{\underline{\epsilon}}) \tag{7.3}$$

qui signifie que la loi de comportement élastique, exprimée sous la forme d´une relation contrainte-déformation, est obtenue par dérivation du potentiel élastique. Une autre possibilité pour exprimer une telle loi de comportement consiste à se référer à la notion *d´énergie complémentaire*, fonction de l´état de contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$, définie par :

$$\varphi(\underline{\underline{\sigma}}) = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \Psi(\underline{\underline{\epsilon}}) \tag{7.4}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}$ et $\underline{\underline{\epsilon}}$ sont reliés par (7.3). Il vient alors immédiatement :

$$d\varphi = \underline{\underline{\epsilon}} : d\underline{\underline{\sigma}} + \underbrace{(\underline{\underline{\sigma}} - \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\epsilon}}}(\underline{\underline{\epsilon}}))}_{=0} : d\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{\epsilon}} : d\underline{\underline{\sigma}} \tag{7.5}$$

et donc

$$\underline{\underline{\epsilon}}(\underline{\underline{\sigma}}) = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(\underline{\underline{\sigma}}) \tag{7.6}$$

La déformation élastique associée à l´application d´une contrainte $\underline{\underline{\sigma}}$ est obtenue par *différentiation de l´énergie complémentaire* du matériau. C´est cette deuxième forme que nous utiliserons dans la suite.

Remarque : Le cas élastique linéaire correspond à la situation où le *potentiel élastique* est une forme *quadratique* de $\underline{\underline{\epsilon}}$:

$$\Psi = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \Rightarrow \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{7.7}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{C}}}}$ désigne le *tenseur des modules d´élasticité*. L´énergie complémentaire, qui vaut dans ce cas

$$\varphi = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \Psi = \underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} - \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} = \frac{1}{2}\underline{\underline{\epsilon}} : \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} : \underline{\underline{\epsilon}} \tag{7.8}$$

est donc égale à l´énergie libre.

7.2.2 Notations préalables. Loi de Boyce

Nous introduisons préalablement les définitions suivantes :

$$\underline{\underline{s}} = \underline{\underline{\sigma}} - p.\underline{\underline{I}} \quad : \textit{déviateur des contraintes} \tag{7.9a}$$

$$p = -\frac{1}{3}tr(\underline{\underline{\sigma}}) > 0 \quad : \textit{contrainte moyenne} \tag{7.9b}$$

$$q = (\frac{3}{2}\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{s}})^{\frac{1}{2}} \quad : \textit{contrainte déviatorique} \tag{7.9c}$$

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \underline{\underline{e}} + \frac{1}{3}\epsilon_v \underline{\underline{I}} \quad \text{avec} \quad \epsilon_v \underline{\underline{I}} \quad : \textit{tenseur des déformations linéarisées} \tag{7.9d}$$

$$\textit{avec} \quad \epsilon_v = tr(\underline{\underline{\epsilon}}) \quad : \textit{déformation volumique} \tag{7.9e}$$

$$\text{et} \quad \epsilon_q = (\frac{3}{2}\underline{\underline{e}} : \underline{\underline{e}})^{\frac{1}{2}} \quad : \textit{déformation déviatorique} \tag{7.9f}$$

Le modèle de comportement élastique non-linéaire que nous présentons ici, a été initialement proposé par Boyce (1980) [14] et adapté ensuite par Hornych et al.(2000) [36] pour décrire le comportement réversible mais non-linéaire des graves non traitées (GNT) sous chargement répété. Ce comportement peut être traduit par la relation suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(p,q) \tag{7.10}$$

où φ est *l´énergie complémentaire du matériau* (par unité de volume) qui dépend uniquement des deux premiers invariants des contraintes p et q.

Une expression telle que (7.10) correspond au cas d´un matériau *isotrope*, en ce sens que l´énergie complémentaire du matériau soumis à un état de contrainte, ne dépend que des invariants de cet état de contrainte (et plus précisément ici des deux premiers invariants), et non de l´orientation des contraintes principales. Le modèle proposé par Boyce correspond à l´expression suivante de la densité volumique d´énergie complémentaire :

$$\varphi(p,q) = \Big(\frac{p}{p_0}\Big)^{(n_i-1)}\Big(\frac{p^2}{(n_i+1)K} + \frac{q^2}{6G}\Big) \tag{7.11}$$

où n_i désigne un coefficient de non-linéarité ($0 < n_i \leq 1$) tandis que K et G peuvent s´intérpréter respectivement comme les modules de compressibilité volumique et de cisaillement du matériau, puisque dans le cas de l´élasticité *linéaire* ($n_i = 1$) l´expression (7.11) devient quadratique :

$$\varphi(p,q) = \Big(\frac{p^2}{2K} + \frac{q^2}{6G}\Big) \tag{7.12}$$

La loi de comportement (7.10) peut s´écrire sous la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = \frac{\partial \varphi}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} + \frac{\partial \varphi}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \tag{7.13}$$

où les dérivées des invariants par rapport à la constante se calculent comme suit :

$$\frac{\partial p}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{\partial}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}(-\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} : \underline{\underline{\sigma}}) = -\frac{1}{3}\underline{\underline{I}} \tag{7.14}$$

et compte tenu de la définition (7.9c) de q

$$\dot{q} = (\frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} = \frac{3\underline{\underline{s}} : \underline{\underline{\dot{s}}}}{2q} = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{s}}}{q} : \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \quad \forall \underline{\underline{\dot{\sigma}}} \Rightarrow \frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{s}}}{q} \tag{7.15}$$

D´où par identification

$$(\frac{\partial q}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}) = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{s}}}{q} \tag{7.16}$$

On obtient dès lors :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{1}{3}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\underline{\underline{I}} + \frac{3}{2q}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\underline{\underline{s}} \tag{7.17}$$

Soit en vertu des définitions (7.9d) à (7.9f)

$$\epsilon_v = -\frac{\partial \varphi}{\partial p} \tag{7.18}$$

et

$$\underline{\underline{e}} = \frac{3}{2q}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\underline{\underline{s}} = \frac{\epsilon_q}{q}\underline{\underline{s}} \Rightarrow \epsilon_q = \frac{3}{2}\frac{\partial \varphi}{\partial q} \tag{7.19}$$

L´équation de comportement (7.17) devient alors pour le modèle de Boyce caractérisé par l´expression (7.11)

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{p}{3K}\Big(\frac{p}{p_0}\Big)^{(n_i-1)}\Big[1 + (n_i-1)\frac{K}{6G}(\frac{q}{p})^2\Big]\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{\underline{s}}}{2G}\Big(\frac{p}{p_0}\Big)^{(n_i-1)} \tag{7.20}$$

Dans le cas de l´élasticité linéaire, obtenue pour $n_i = 1$, l´équation (7.20) se réduit à l´expression linéaire suivante :

$$\underline{\underline{\epsilon}} = -\frac{p}{K}\underline{\underline{I}} + \frac{\underline{\underline{s}}}{2G} \tag{7.21}$$

La loi de comportement (7.20) appelle les commentaires suivants :

- Elle montre que les tenseurs de contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ et les déformations $\underline{\underline{\epsilon}}$ ont les mêmes directions principales, ce qui correspond bien à l´hypothèse *d´isotropie* du matériau.

- Il importe de préciser que la déformation linéarisée $\underline{\underline{\epsilon}}$ est calculée à partir d´une configuration où le matériau est dans un état initial *naturel*, c´est-à-dire soumis à un état de contrainte nul.

La principale application envisagée par Boyce pour ce modèle est l´analyse par éléments finis des structures de chaussées contenant une couche de matériaux granulaires ou dans

des situations incluant des chargements repétés. Dans les analyses par éléments finis incorporant les caractéristiques non-linéaires des matériaux, il est nécessaire d´utiliser une procédure itérative ou incrémentale afin de s´assurer que la raideur de chaque élément est cohérente avec la contrainte qui s´y applique. Dans les analyses itératives, les coefficients de raideur peuvent être calculés à partir du module sécant.

7.3 Un exemple illustratif : la sollicitation oedométrique cyclique

Nous nous proposons d´illustrer sur un exemple simple, traitable par voie analytique ou semi-analytique, comment la procédure générale de prévision du comportement résiduel à long terme d´une structure soumise à un chargement cyclique repété, mise au point dans le présent travail, est modifiée du fait de la prise en compte de la *non-linéarité élastique* des matériaux.

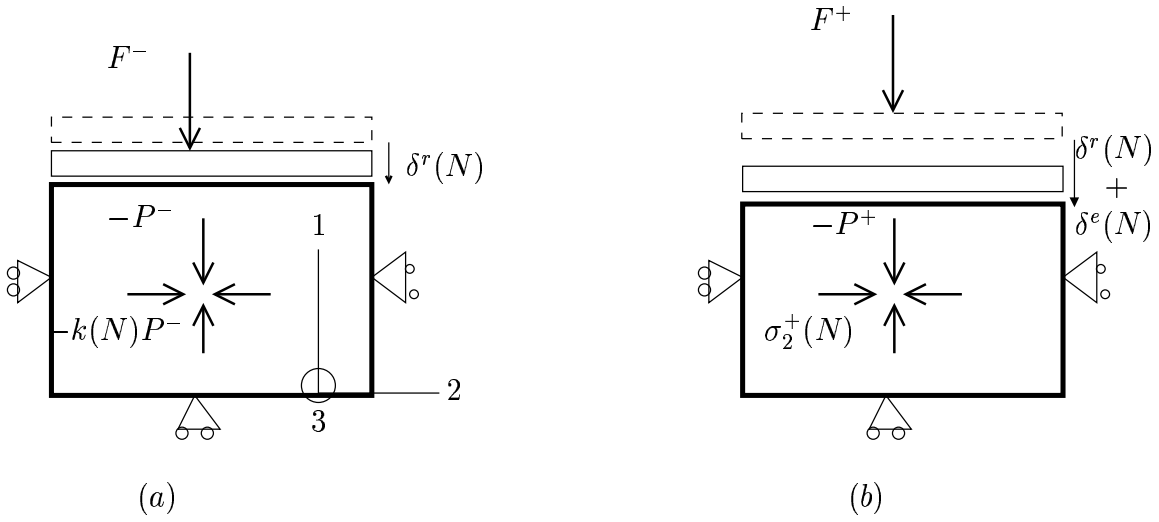


FIG. 7.3: éprouvette de matériau homogène placée dans un oedomètre et soumise à un chargement cyclique

La figure (7.3) schématise un essai oedométrique, dans lequel une éprouvette de matériau de section transversale S et de hauteur H est placée dans une boite cylindrique, munie d´un piston indéformable exerçant un effort vertical F sur l´éprouvette. F varie de façon cyclique entre une valeur minimale F^-, qui représente la charge permanente, et une valeur maximale F^+. Le schéma (a) de la figure (7.3) représente *l´état résiduel* du système consécutif à l´application de N cycles de chargement. Il est caractérisé par un paramètre adimensionnel $k(N)$, compris entre 0 et 1, qui définit le rapport entre la contrainte résiduelle latérale $\sigma_2^r(N) = \sigma_3^r(N)$ et la contrainte résiduelle axiale $\sigma_1^r(N) = -P^- = -F^-/S$.

Le tassement résiduel est noté $\delta^r(N)$.

Le schéma (b) de la figure (7.3) décrit quant à lui, l´état de la structure soumise à la charge maximale $F^+ = P^+S$. L´évolution entre ces deux configurations peut être considérée comme purement élastique, comme il a été précisé auparavant, les déformations permanentes produites sur un cycle de chargement étant négligeables comparées à l´amplitude des déformations élastiques.

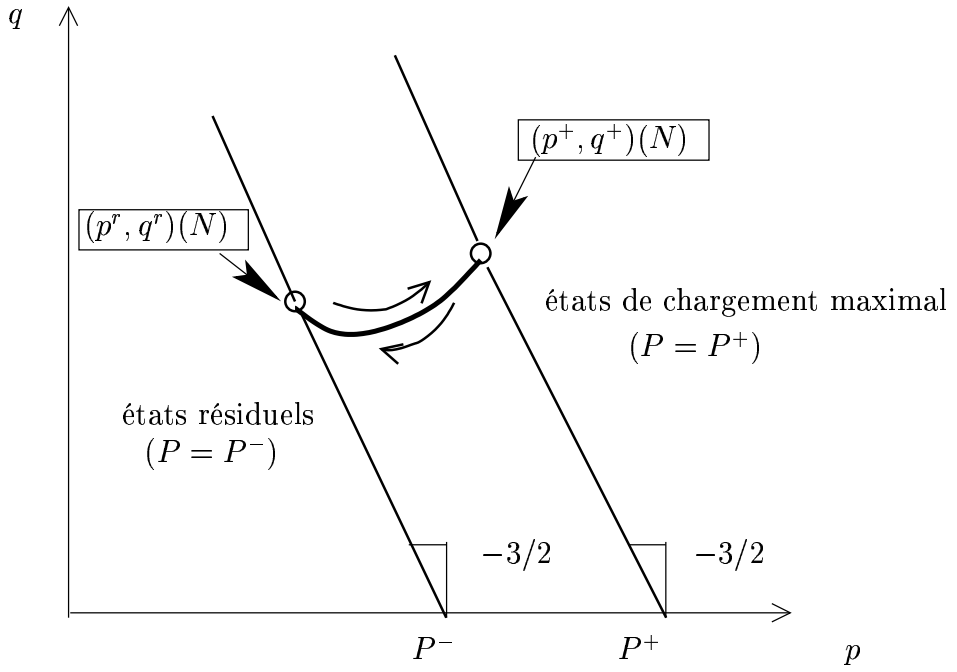


FIG. 7.4: cycles élastiques dans le plan (p,q)

Ce type de chargement élastique peut être décrit par un arc de courbe tracé dans le plan (p,q) (figure 7.4). Les coordonnées des points extrêmes sont :

- Pour *l´état résiduel* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^r(N) = -P^-[\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + k(N)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)] \tag{7.22}$$

d´où

$$p^r(N) = -\frac{\sigma_1^r(N) + 2\sigma_2^r(N)}{3} = \frac{P^-}{3}(1 + 2k(N)) \tag{7.23a}$$

$$\text{et} \quad q^r(N) = \sigma_2^r(N) - \sigma_1^r(N) = (1 - k(N))P^- \geq 0 \tag{7.23b}$$

- Pour *l´état de chargement maximal* :

$$\underline{\underline{\sigma}}^+(N) = -P^+\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2^+(N)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{7.24}$$

et donc

$$p^+(N) = \frac{P^+ - 2\sigma_2^+(N)}{3} \tag{7.25a}$$

$$q^+(N) = \sigma_2^+(N) - P^+ \tag{7.25b}$$

Il est à noter que ces points extrêmes sont situés sur deux droites d'équations respectives :

$$q + 3/2p = 3/2P^{\pm} \tag{7.26}$$

mais que contrairement au cas élastique linéaire, le trajet de chargement (cycle élastique) n´est pas le segment de droite reliant ces points.

7.3.1 Calcul du cycle élastique

Soit $[\delta]^e(N)$ le tassement élastique non linéaire correspondant à la variation de la charge appliquée entre F^- et F^+, c´est-à-dire à partir d´un état initial résiduel $(p^r,q^r)(N)$. L´éprouvette de matériau étant soumise à un essai oedométrique, la déformation correspondante s´écrit :

$$[\underline{\epsilon}]^e(N) = -\frac{[\delta]^e(N)}{H}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 \quad , [\delta]^e \geq 0 \tag{7.27}$$

qui peut encore s´écrire :

$$[\underline{\epsilon}]^e(N) = \underline{\underline{\epsilon}}^+(N) - \underline{\underline{\epsilon}}^r(N) \tag{7.28}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}^+$ (respectivement $\underline{\underline{\epsilon}}^r$) représente la déformation élastique produite par l´application de (p^+,q^+) (respectivement (p^r,q^r)) à l´échantillon de matériau à partir d´un état *naturel* (contrainte nulle). L´équation (7.20) suppose que, en dépit de l´élasticité non-linéaire du matériau, les trois configurations représentées sur la figure (7.5) peuvent être déduites les unes des autres à partir de *transformations infinitésimales*. Il résulte alors de la loi de comportement (7.10) que :

$$[\underline{\underline{\epsilon}}]^e(N) = \frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}(p^+,q^+) - \frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}(p^r,q^r) = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial\underline{\underline{\sigma}}}\right] \tag{7.29}$$

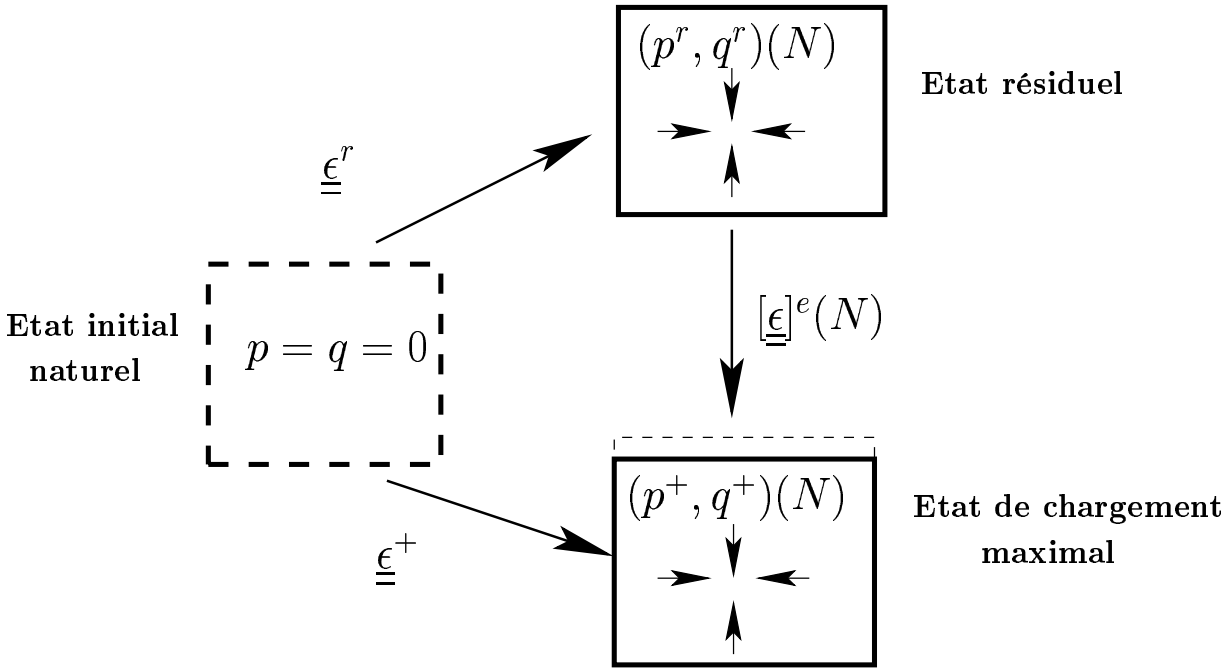


FIG. 7.5: définition de $[\underline{\underline{\epsilon}}]^e$,$\underline{\underline{\epsilon}}^+$ et $\underline{\underline{\epsilon}}^r$

Il vient alors d´après (7.17)

$$[\underline{\underline{\epsilon}}]^e = -\frac{1}{3}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial p}\Big]\underline{\underline{I}} + \frac{3}{2}\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial q}\frac{\underline{\underline{s}}}{q}\Big] \tag{7.30}$$

Les différents états de contrainte étant à symétrie de révolution, c´est-à-dire de la forme :

$$\underline{\underline{\sigma}}^{r,+}(N) = \sigma_1^{r,+}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \sigma_2^{r,+}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{7.31}$$

Les déviateurs de contrainte correspondants sont :

$$\underline{\underline{s}}^{r,+}(N) = \frac{2(\sigma_1^{r,+} - \sigma_2^{r,+})}{3}[\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 - \frac{1}{2}(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3)] \tag{7.32}$$

$$\text{Puisque} \quad \sigma_2^{r,+} \geq \sigma_1^{r,+} \quad \text{alors} \quad q = \sigma_2^{r,+} - \sigma_1^{r,+} \tag{7.33}$$

$$\text{et donc} \quad \frac{3\underline{\underline{s}}}{2q} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 1/2(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{7.34}$$

En combinant les équations (7.27), (7.30) et (7.34), nous obtenons :

$$[\delta]^e/H = \Big[\frac{\partial\varphi}{\partial p}\Big] = 3/2\Big[\frac{\partial\varphi}{\partial q}\Big] \tag{7.35}$$

où :

$$\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p,q) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(n_i-1)} \frac{p}{K}\left[1 + \frac{(n_i-1)K}{6G}\left(\frac{p}{q}\right)^2\right] \tag{7.36}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial q}(p,q) = \left(\frac{p}{p_0}\right)^{(n_i-1)} \frac{q}{3G} \tag{7.37}$$

En explicitant les équations (7.35), (7.36) et (7.37) et en posant $x = q^+/p^+$ nous obtenons les expressions suivantes :

$$[\delta]^e/H = \left(\frac{p^+}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{p^+}{K}\right)\left[1 + \frac{(n_i-1)K}{6G}x^2\right] - \left(\frac{p^r}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{p^r}{K}\right)\left[1 + \frac{(n_i-1)K}{6G}\left(\frac{q^r}{p^r}\right)^2\right] \tag{7.38}$$

$$[\delta]^e/H = \left(\frac{p^+}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{q^+}{3G}\right) - \left(\frac{p^r}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{q^r}{3G}\right) \tag{7.39}$$

Ces équations permettent d´élaborer une procédure simple de détermination des coordonnées (p^+,q^+) du point le plus chargé du cycle comme fonction de l´état résiduel défini par (p^r,q^r) et de la charge maximale imposée P^+. Cette procédure consiste à augmenter progressivement la valeur de $[\delta]^e/H$ à partir de zéro, jusqu´à croiser la droite d´équation $q + 3/2p = 3/2P^+$ sur laquelle est localisé le point de chargement maximal.

On pose :

$$A = [\delta]^e/H + \left(\frac{p^r}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{p^r}{K}\right)\left[1 + \frac{(n_i-1)K}{6G}\left(\frac{q^r}{p^r}\right)^2\right] \tag{7.40}$$

et

$$B = [\delta]^e/H + \left(\frac{p^r}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{q^r}{3G}\right) \tag{7.41}$$

Les équations (7.38) et (7.39) deviennent alors :

$$\left(\frac{p^+}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{p^+}{K}\right)\left[1 + \frac{(n_i-1)K}{6G}x^2\right] = A \tag{7.42}$$

et

$$\left(\frac{p^+}{p_0}\right)^{(n_i-1)}\left(\frac{q^+}{3G}\right) = B \tag{7.43}$$

d´où, par division membre à membre de ces deux équations, l´équation du second degré en x est la suivante :

$$x^2 - \frac{3A}{B(n_i-1)}x + \frac{6G}{K(n_i-1)} = 0 \tag{7.44}$$

dont la solution positive est :

$$x = -\frac{A}{B(n_i-1)} + \left[(\frac{A}{B(n_i-1)})^2 - \frac{6G}{K(n_i-1)}\right] \tag{7.45}$$

puisque $0 < n_i \leq 1$.

La procédure permettant de déterminer le point de chargement extrême (p^+,q^+) à partir de l´état de contrainte résiduel (p^r,q^r) et de la valeur maximale du chargement $F^+ = P^+S$ est alors la suivante : les équations (7.40) et (7.41) permettant de calculer les coefficients A et B en fonction de (p^r,q^r) et de $[\delta]^e/H$, l´équation (7.45) donne la valeur du rapport $q^+/p^+ = x$, et donc en reportant cette dernière dans les équations (7.42) et (7.43) les valeurs de p^+ et q^+ en fonction notamment de (p^r,q^r) et de la déformation élastique $[\delta]^e/H$. Il suffit donc d´augmenter progressivement cette dernière jusqu'à ce que le trajet parcouru par le point (p^+,q^+) atteigne la droite d´équation :

$$q + 3p/2 = 3P^+/2 \tag{7.46}$$

qui constitue le lieu des états de contrainte en équilibre avec le chargement maximal P^+.

7.3.2 Détermination de l´état résiduel à partir des déformations permanentes

On se donne l´expression des déformations permanentes qui est nécessairement de la forme :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^*(N) = \epsilon_1^*(N)\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + \epsilon_2^*(N)(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{7.47}$$

La *déformation résiduelle* calculée entre la configuration initiale (état résiduel pour $N = 1$ cycle) et la configuration résiduelle au terme de N cycles peut être écrite comme suit :

$$\underline{\underline{\epsilon}}^r(N) = -\frac{\delta^r(N)}{H}\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 = \underline{\underline{\epsilon}}^*(N) + [\underline{\underline{\epsilon}}^e(N) - \underline{\underline{\epsilon}}^e(N=1)] \tag{7.48}$$

où $\underline{\underline{\epsilon}}^e(N)$ (resp. $\underline{\underline{\epsilon}}^e(N=1)$) désigne la déformation élastique due à l´application des contraintes résiduelles $(p^r(N),q^r(N))$ (resp.$(p^r(N=1),q^r(N=1))$) à partir d´un *état initial naturel* (figure 7.6)

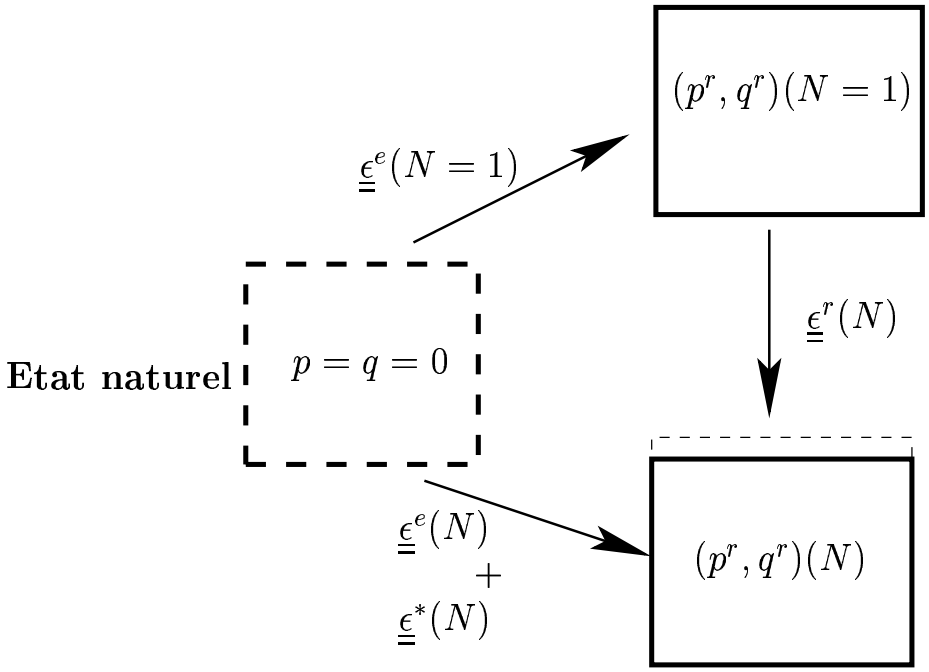


FIG. 7.6: états résiduels de l´éprouvette à l´instant initial ($N = 1$) et au terme de N cycles

On a en vertu de (7.17)

$$\underline{\underline{\epsilon}}^e(N=1) = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} = -\frac{1}{3}\frac{\partial \varphi}{\partial p}\big(p^r(1), q^r(1)\big) + \frac{3}{2q^r(1)}\frac{\partial \varphi}{\partial q}\big(p^r(1), q^r(1)\big)\underline{\underline{s}}^r(1) \tag{7.49}$$

ainsi que l´expression équivalente pour $\underline{\underline{\epsilon}}^e(N)$, avec

$$\frac{3\underline{\underline{s}}^r(1)}{2q^r(1)} = \frac{3\underline{\underline{s}}^r(N)}{2q^r(N)} = -\underline{e}_1 \otimes \underline{e}_1 + 1/2(\underline{e}_2 \otimes \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \otimes \underline{e}_3) \tag{7.50}$$

Il vient alors en tenant compte de (7.47), (7.48), (7.49) et (7.50)

$$\frac{\delta^r(N)}{H} = -(\epsilon_1^* + 2\epsilon_2^*)(N) + \Big(\frac{\partial \varphi}{\partial p}(p^r, q^r)(N) - \frac{\partial \varphi}{\partial p}(p^r, q^r)(1)\Big) \tag{7.51a}$$

$$\frac{\delta^r(N)}{H} = (\epsilon_2^* - \epsilon_1^*)(N) + 3/2\Big(\frac{\partial \varphi}{\partial q}(p^r, q^r)(N) - \frac{\partial \varphi}{\partial q}(p^r, q^r)(1)\Big) \tag{7.51b}$$

Ces relations peuvent être écrites *sous forme incrémentale* :

$$\frac{\Delta\delta^r(N)}{H} = -(\Delta\epsilon_1^* + 2\Delta\epsilon_2^*) + A^r(N)\Delta p^r + B^r(N)\Delta q^r \tag{7.52a}$$

$$\frac{\Delta\delta^r(N)}{H} = (\Delta\epsilon_2^* - \Delta\epsilon_1^*) + 3/2(B^r(N)\Delta p^r + C^r(N)\Delta q^r) \tag{7.52b}$$

où $\Delta(*) = (*)(N + \Delta N) - (*)(N)$ et

$$\begin{aligned} A^r(N) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2}(p^r, q^r)(N) \\ B^r(N) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \partial q}(p^r, q^r)(N) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q \partial p}(p^r, q^r)(N) \\ C^r(N) &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2}(p^r, q^r)(N) \end{aligned} \tag{7.53}$$

En tenant compte du fait que le point de coordonnées $(p^r,q^r)(N)$ se trouve toujours sur la droite d´équation

$$q^r + 3/2 p^r = 3/2 P^- \tag{7.54}$$

on déduit la relation incrémentale suivante

$$\Delta q^r + 3/2 \Delta p^r = 0 \tag{7.55}$$

La solution du système linéaire formé par les équations (7.52) et (7.55) est :

$$\begin{aligned} \Delta q^r &= -3\Delta p^r/2 = \frac{-3\Delta \epsilon_2^*}{2A^r/3 - 2B^r + 3C^r/2} \\ \frac{\Delta \delta^r}{H} &= -(\Delta \epsilon_1^* + 2\Delta \epsilon_2^*) + \frac{(2A^r - 3B^r)\Delta \epsilon_2^*}{\frac{2A^r}{3} - 2B^r + \frac{3C^r}{2}} \end{aligned} \tag{7.56}$$

Ces relations nous permettent d´actualiser les contraintes résiduelles et le tassement résiduel correspondant entre N et $N+\Delta N$ cycles. Dans le cas de *l´élasticité linéaire* ($n_i = 1$), l´énergie complémentaire s´écrivant comme une forme quadratique des invariants des contraintes.

$$\varphi(p, q) = \frac{p^2}{2K} + \frac{q^2}{6G} \tag{7.57}$$

les coefficients valent

$$A^r = 1/K, B^r = 0, C^r = 1/3G \tag{7.58}$$

et les équations (7.56) se réduisent à :

$$\begin{aligned} \Delta q^r &= -3\Delta p^r/2 = \frac{-E\Delta\epsilon_2^*}{1-\nu} \\ \frac{\Delta\delta^r}{H} &= -\Delta\epsilon_1^* - \frac{2\nu}{1-\nu}\Delta\epsilon_2^* \end{aligned} \tag{7.59}$$

où E et ν sont respectivement le module d´Young et le coefficient de Poisson du matériau.

7.3.3 Actualisation pas-à-pas du point de chargement maximal

Contrairement au cas de l´élasticité linéaire où le cycle élastique actuel est obtenu par simple translation du cycle élastique initial, de sorte qu´ayant déterminé l´état résiduel de la structure, l´état le plus chargé est obtenu en lui superposant le résultat d´un calcul élastique effectué une fois pour toutes, il est nécessaire dans le cas d´un comportement élastique non-linéaire de procéder à l´actualisation pas-à-pas de l´état de chargement maximal, indépendamment de celle effectuée pour l´état résiduel.

La même procédure incrémentale peut être appliquée afin d´actualiser le point soumis au chargement maximal (p^+,q^+) entre N et $N+\Delta N$. En effet, les incréments des invariants de contraintes correspondants sont donnés par la relation suivante, analogue à (7.59)

$$\Delta q^+ = -3\Delta p^+/2 = \frac{-3\Delta\epsilon_2^*}{2A^+/3 + 2B^+ + 3C^+/2} \tag{7.60}$$

où :

$$\begin{aligned} A^+(N) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p^2}(p^+,q^+)(N) \\ B^+(N) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial p\partial q}(p^+,q^+)(N) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial q\partial p}(p^+,q^+)(N) \\ C^+(N) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial q^2}(p^+,q^+)(N) \end{aligned} \tag{7.61}$$

Cette procédure incrémentale est schématisée sur la figure (7.7). Il est à noter qu´une telle procédure permet seulement d´actualiser les extrémités du cycle de contrainte et non la totalité du cycle représenté par un arc de courbe joignant ces extrémités.

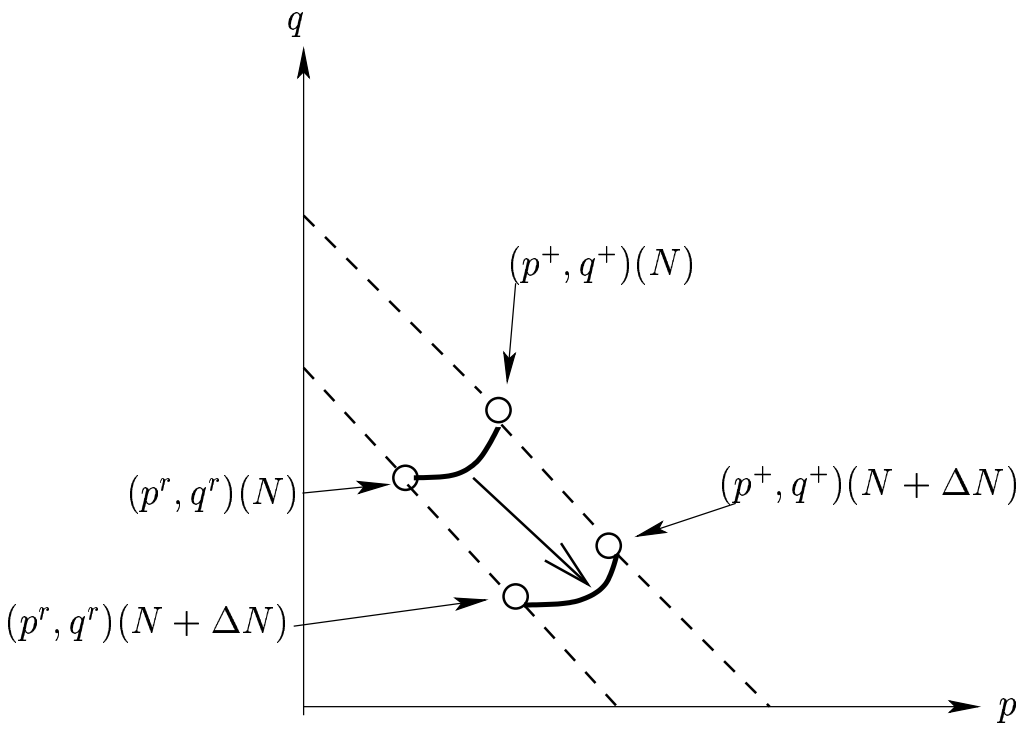


FIG. 7.7: procédure d´actualisation pas-à-pas des points extrêmes du cycle élastique de contraintes

7.3.4 Formulation d´une loi de comportement cyclique

L´expression de la loi de comportement cyclique du matériau reliant les déformations permanentes engendrées par l´application d´une sollicitation cyclique, aux caractéristiques du cycle élastique, est identique à celle retenue dans le cas élastique linéaire : elle ne fait intervenir que les *extrémités du cycle*, indépendamment du trajet suivi entre ces deux extrémités. Elle peut donc se mettre sous la forme suivante pour ce qui est de la déformation permanente axiale :

$$\epsilon_1^* = \mathcal{F}[N; (p^r, q^r)(N); (p^+, q^+)(N)] \tag{7.62}$$

le calcul de l´incrément de déformation axiale entre N et $N + \Delta N$ s´effectue en considérant que les caractéristiques du cycle élastique ne sont pas modifiées, c´est-à-dire égales à celles déterminées au bout de N cycles. Soit :

$$\Delta\epsilon_1^* = \mathcal{F}[N + \Delta N; (p^r, q^r)(N); (p^+, q^+)(N)] - \mathcal{F}[N; (p^r, q^r)(N); (p^+, q^+)(N)] \tag{7.63}$$

Tout comme dans le cas linéaire, une loi de comportement particulière est adoptée dans ce qui suit, qui dérive directement de celle formulée par Gidel et al.(2001) sur la base

d´essais triaxiaux cycliques menés sur des échantillons de graves non-traitées utilisées comme matériaux de chaussées. Cette loi est donnée par l´expression analytique suivante traduisant la variation de la déformation permanente axiale (c´est-à-dire selon la direction où les contraintes de compression sont les plus importantes)

$$\epsilon_1^* = \epsilon_0^*(1 - N^{-B}) f(p^+ - p^r, q^+ - q^r) g(p^+, q^+) \quad N \geq 1 \tag{7.64}$$

où f est une fonction de l´amplitude du cycle des contraintes élastiques.

$$f(p^+ - p^r, q^+ - q^r) = \left(\frac{l_{max}}{100}\right)^n \quad \text{avec} \quad l_{max} = \sqrt{(p^+ - p^r)^2 + (q^+ - q^r)^2} \tag{7.65}$$

Les contraintes étant exprimées en kPa et :

$$g(p^+, q^+) = \frac{p^+}{s + mp^+ - q^+} \tag{7.66}$$

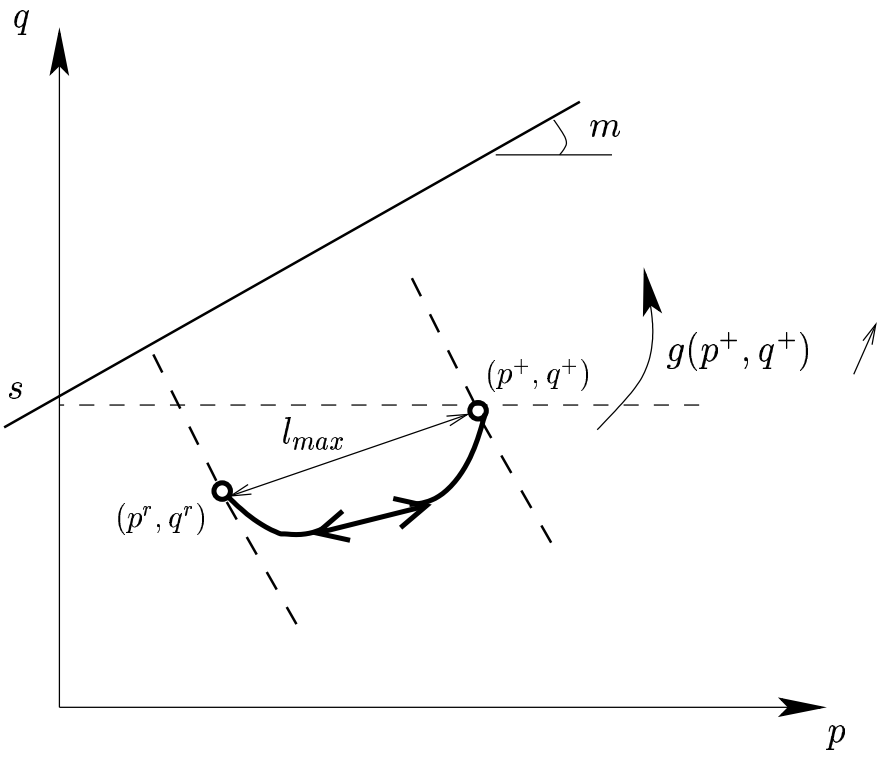


FIG. 7.8: interprétation de la loi de comportement cyclique définie par les équations (7.64) à (7.66)

Nous proposons par ailleurs la relation simplifiée suivante entre les déformations permanentes latérales et axiales.

$$\epsilon_2^* = \epsilon_3^* = -\nu^* \epsilon_1^* \tag{7.67}$$

où ν^* est pris constant. Comme ϵ_1^* est négative (contraction), la déformation permanente volumique, égale à

$$tr(\underline{\underline{\epsilon}}^*) = \epsilon_1^* + 2\epsilon_2^* = (1 - 2\nu^*)\epsilon_1^* \tag{7.68}$$

est positive (matériau dilatant) lorsque $\nu^* > 1/2$, et négative (matériau *contractant*) lorsque $\nu^* < 1/2$. Les incréments de déformations permanentes produites par l´application de cycles de chargements répétés entre N et $N + \Delta N$ sont calculés en supposant que les contraintes maximales et résiduelles ainsi que les fonctions f et g, caractérisant respectivement l´amplitude du cycle et sa position, restent constants durant cet intervalle. Cette hypothèse conduit aux relations incrémentales suivantes :

$$\begin{cases} \Delta\epsilon_1^* = \epsilon_0^*(N^{-B} - (N + \Delta N)^{-B}) f[(p^+ - p^r, q^+ - q^r)(N)] g[(p^+, q^+)(N)] \\ \text{et} \\ \Delta\epsilon_2^* = \Delta\epsilon_3^* = -\nu^* \Delta\epsilon_1^* \end{cases} \tag{7.69}$$

7.3.5 Simulation numérique

La procédure numérique dont les différents éléments ont été exposés dans les paragraphes précédents a été employée pour simuler le comportement à long terme de l´éprouvette de matériau soumise à un chargement cyclique dans des conditions d´essais oedométriques. Elle peut être décrite comme suit :

- *L´état initial de la structure* et plus particulièrement l´état de contrainte en équilibre avec l´application de la charge minimale P^-, est spécifié en se fixant la valeur de $k(N = 1) = k_1$ où $k(N)$ est le rapport entre la contrainte latérale σ_2 et la contrainte verticale σ_1, les déformations permanentes et le tassement résiduel correspondants étant pris égaux à zéro. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} p^r(N = 1) &= \frac{1 + 2k_1}{3} P^- \\ q^r(N = 1) &= (1 - k_1) P^- \geq 0 \\ \epsilon_1^*(N = 1) &= \epsilon_2^*(N = 1) = 0 \quad , \quad \delta^r(N = 1) = 0 \end{aligned} \tag{7.70}$$

- *Un calcul élastique non-linéaire* préliminaire, décrit dans la section (7.3.1), est effectué afin de déterminer les caractéristiques du premier cycle élastique (amplitude et

position), et en particulier le point le plus chargé correspondant $(p^+,q^+)(N=1)$, à partir de l´état résiduel initial de la structure $(p^r,q^r)(N=1)$ et de la charge maximale appliquée P^+. Les valeurs initiales des fonctions f et g correspondantes données par (7.65 et 7.66) sont déterminées à partir de ce calcul.

- Supposant maintenant que les déformations permanentes, le tassement résiduel et les points extrémités des cycles élastiques soient connus au terme de N cycles de chargement, les composantes du tenseur déformations permanentes associées à l´application de $N+\Delta N$ cycles de chargement sont calculées comme suit :

$$\epsilon_i^*(N+\Delta N) = \epsilon_i^*(N) + \Delta\epsilon_i^* \quad , i=1,2 \tag{7.71}$$

où les incréments des déformations permanentes sont calculés à partir de la discrétisation (7.69) de la loi de comportement cyclique.

- Le point le plus chargé du cycle est ensuite actualisé comme suit

$$\begin{cases} p^+(N+\Delta N) = p^+(N) + \Delta p^+ \\ q^+(N+\Delta N) = q^+(N) + \Delta q^+ \end{cases} \tag{7.72}$$

où les incréments des invariants des contraintes sont calculés à partir des équations (7.60) et (7.61), de même que les contraintes résiduelles et le tassement résiduel par les relations :

$$\begin{cases} p^r(N+\Delta N) = p^r(N) + \Delta p^r \\ q^r(N+\Delta N) = q^r(N) + \Delta q^r \\ \delta^r(N+\Delta N) = \delta^r(N) + \Delta\delta^r \end{cases} \tag{7.73}$$

où les incréments correspondants sont calculés à partir de l´équation (7.56).
Cette procédure détaillée sur la figure (7.9) est poursuivie en passant au pas suivant, jusqu´à atteindre le nombre de cycles prescrit.

7.3.6 Résultats et commentaires

Les données suivantes ont été introduites dans l´algorithme précédent.

- Niveaux de chargement minimal et maximal : $P^- = 100$ kPa, $P^+ = 200$ kPa.

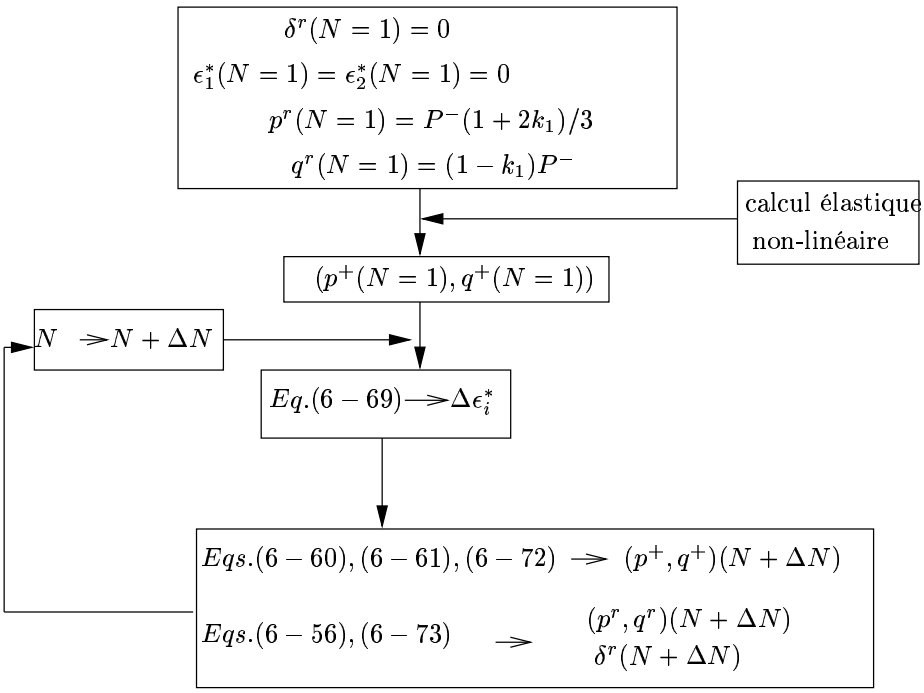


FIG. 7.9: schéma de calcul itératif

- Paramètres du modèle de Boyce : $K = 40MPa$, $G = 20$ MPa, $n_i = 0,284$, $p_0 = 150$ kPa.

- Paramètres de la loi de comportement cyclique : $\epsilon_0^* = -0,0195$, $B = 0,03$, $n = 0,588$, $s = 42,8$ kPa, $m = 3,8$, $\nu^* = 0,4$.

Partant de ce jeu de données particulier, nous avons entrepris deux études paramétriques consistant à faire varier séparément le coefficient de non-linéarité n_i d´une part, l´état initial de l´éprouvette d´autre part à travers le coefficient k_1. Nous présentons successivement ces deux études.

7.3.6.1. Influence du coefficient de non linéarité n_i

La valeur du coefficient k_1 est fixée à $0,2$, de sorte que l´état initial de l´éprouvette est :

$$p^r(N=1) = 46,7\text{kPa} \quad , q^r(N=1) = 80\text{kPa} \tag{7.74}$$

Les courbes des figures 7.10 et 7.11 représentent la variation des contraintes verticales (σ_1) et latérale (σ_2) en fonction du tassement élastique imposé à l´éprouvette lors du cycle élastique initial. On observe tout d´abord sur la figure 7.10 que, les niveaux extrêmes de la contrainte σ_1 étant bien évidemment égaux à $-P^-$ et $-P^+$, le tassement final de l´éprouvette décroit lorsque la non-linéarité augmente (n_i décroit), mettant ainsi en

évidence un "raidissement" du matériau. De plus, contrairement au cas linéaire ($n_i = 1$), la courbe "contrainte-déformation" s´incurve légèrement. La figure 7.11 présente quant-à-elle l´évolution de la contrainte latérale σ_2. Il apparaît que la contrainte de compression $-\sigma_2^{+}$ qui s´exerce sur le bord latéral de l´éprouvette lorsque le niveau de chargement maximal P^+ est atteint, diminue avec la non-linéarité du matériau.

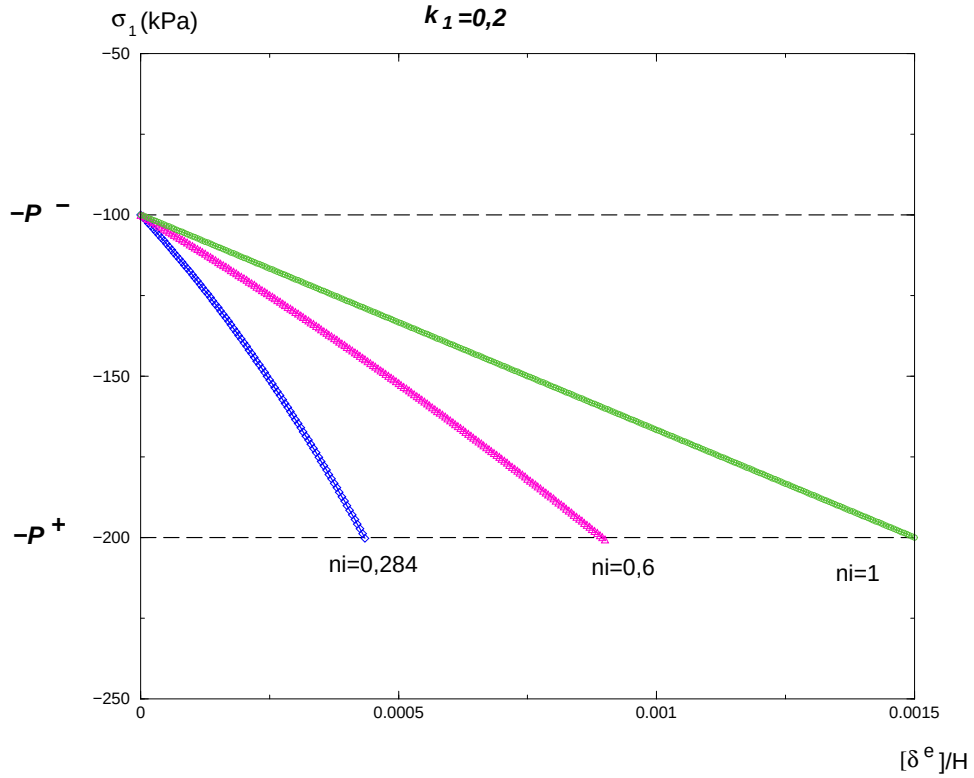


FIG. 7.10: variation de la contrainte verticale σ_1 en fonction du tassement élastique de l´éprouvette pour différentes valeurs de n_i

Partant du même état résiduel initial représenté par le point A dans le plan (p,q) (figure 7.12), les cycles de contrainte initiaux sont toutefois relativement peu sensibles à la non-linéarité élastique. La pente moyenne de ces cycles décroît légèrement avec n_i, les états de chargement maximal étant représentés par les points B ($n_i = 0,284$), C ($n_i = 0,6$) et D ($n_i = 1$).

L´influence de la non-linéarité élastique sur l´ampleur de la dérive du cycle élastique est en revanche tout à fait significative. Cette dérive diminue pour ce qui concerne l´état résiduel (points A', E' et F'), tandis qu´elle augmente pour les points de chargement maximal (D', C' et B').

Dans tous les cas, la pente moyenne des cycles élastiques décroît en fonction de N, devenant même négative pour une valeur de N suffisamment importante et une non-linéarité élastique suffisamment prononcée (cycle $F'B'$).

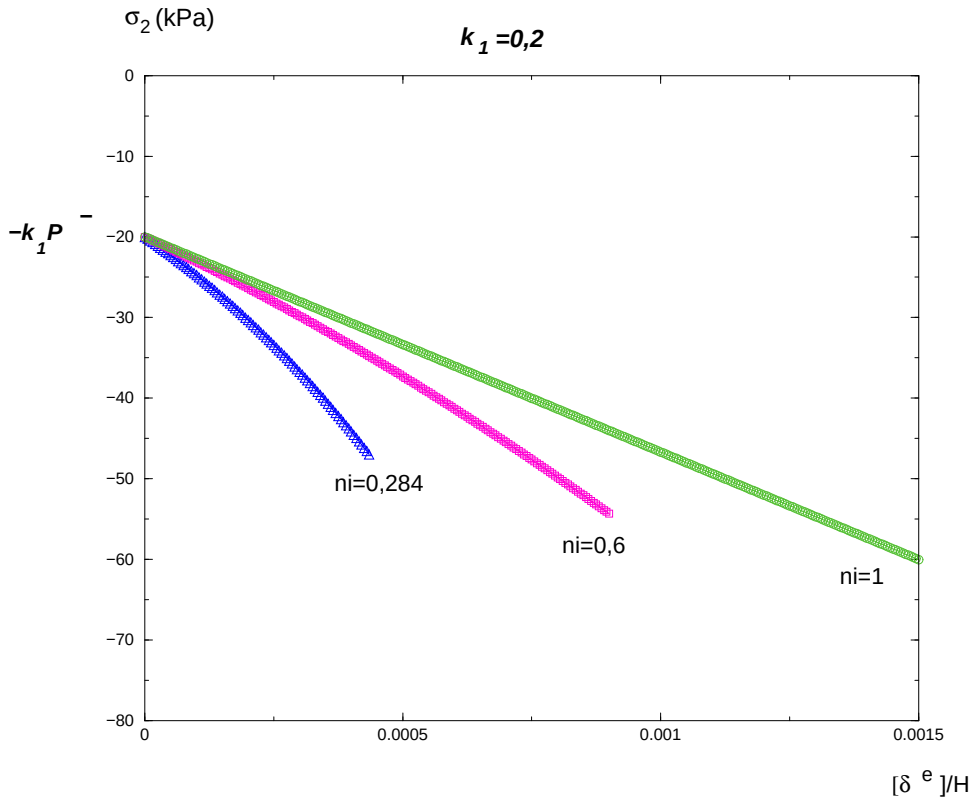


FIG. 7.11: variation de la contrainte latérale σ_2 en fonction du tassement élastique de l´éprouvette pour différentes valeurs de n_i

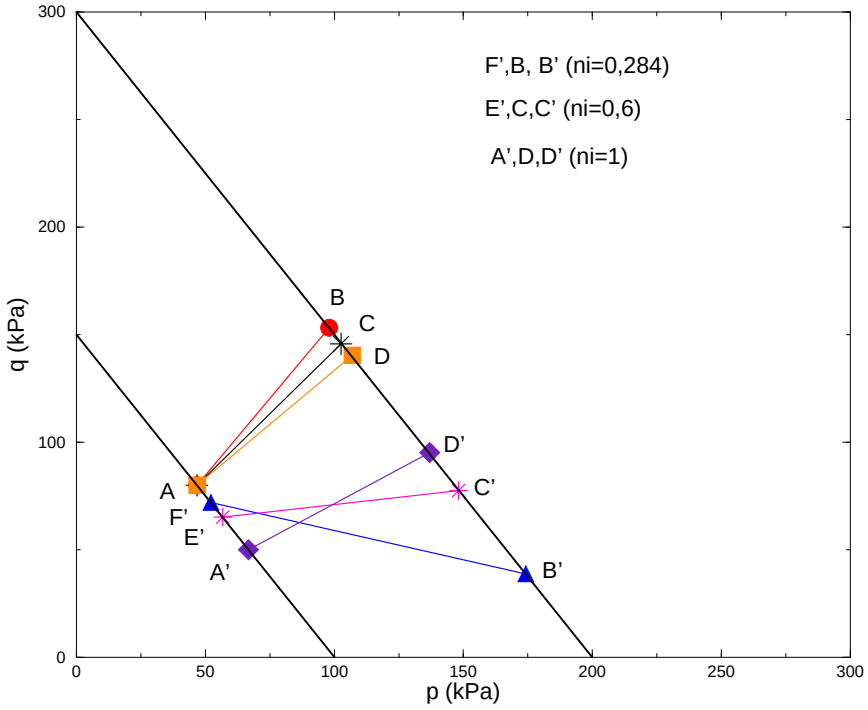


FIG. 7.12: cycles de contraintes initiaux ($N = 1$) et intermédiaires ($N = 42000$) en fonction de n_i ($k_1 = 0,2$)

La figure 7.13 montre enfin les différentes courbes donnant l´évolution du tassement relatif résiduel $\delta^r(N)/H$ en fonction du nombre de cycles de chargement appliqués, pour différentes valeurs du coefficient de non linéarité n_i. On observe que, toutes choses étant égales par ailleurs, et pour le jeu de paramètres choisi, le tassement résiduel augmente significativement avec la non-linéarité élastique. Cet effet doit être attribué non pas à la loi de comportement cyclique elle-même qui n´est nullement affectée par une telle non-linéarité mais à la dérive des cycles élastiques et tout particulièrement des points de chargement maximal. En effet, la dérive plus importante de ces points dans le cas non-linéaire (figure 7.12) accentue leur éloignement de la droite de référence et induit une diminution corrélative de la fonction g (et donc du taux de production des déformations permanentes). Cet effet est semble-t-il plus que compensé par l´augmentation de l´amplitude du cycle et donc de la valeur de la fonction f. A cet effet de la non-linéarité du matériau sur la position et l´amplitude du cycle élastique, s´ajoute l´influence de cette même non-linéarité sur le calcul du tassement résiduel par intégration des déformations permanentes.

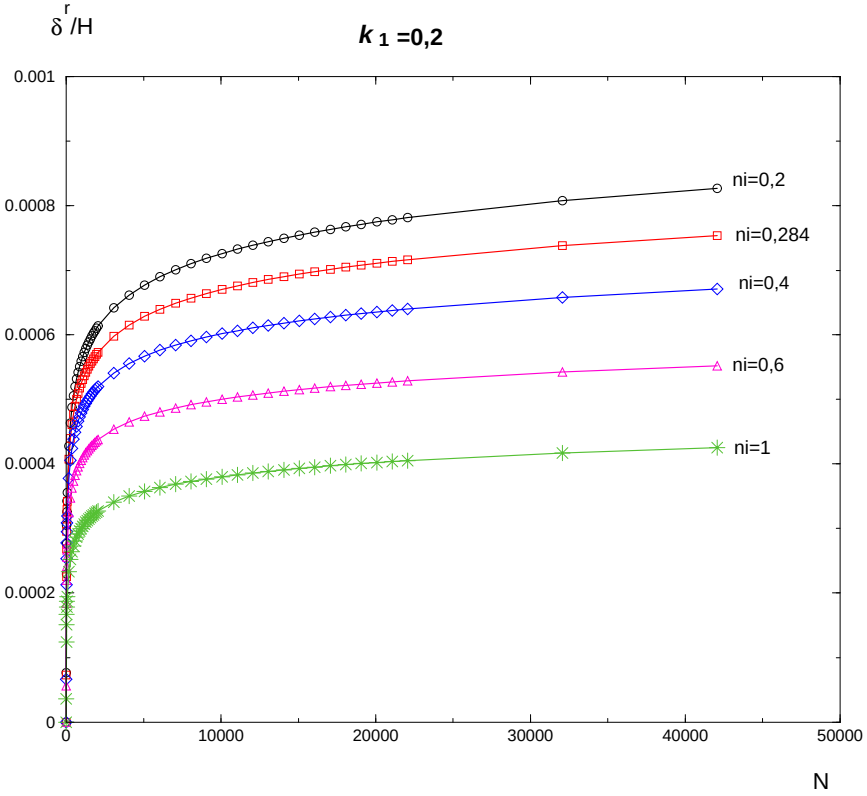


FIG. 7.13: courbes d´évolution du tassement résiduel pour différentes valeurs de n_i

7.3.6.2. Influence de l´état initial

Ayant fixé la valeur du coefficient de non-linéarité n_i à $0,284$, nous étudions l´influence de l´état initial, caractérisé par la valeur du coefficient k_1 sur différents aspects du comportement cyclique de l´éprouvette.

Les calculs ont été effectués pour diverses valeurs de k_1 comprises entre 0 et $0,6$.

Les courbes des figures 7.14 et 7.15 représentent la variation des contraintes verticales (σ_1) et latérales (σ_2) en fonction du tassement élastique imposé à l´éprouvette lors du cycle élastique initial. On observe tout d´abord sur la figure 7.14 que les niveaux extrêmes de la contrainte verticale (σ_1) sont égaux à $-P^-$ et $-P^+$. Le tassement final de l´éprouvette augmente lorsque l´état initial est de plus en plus proche d´un état purement uniaxial (contrainte latérale initiale nulle $k_1 = 0$).

La figure 7.15 présente quant à elle, l´évolution de la contrainte latérale σ_2. On constate que la contrainte de compression $-\sigma_2^+$ qui s´exerce sur le bord latéral de l´éprouvette est une fonction croissante de k_1. En effet, plus k_1 est important plus la contrainte latérale initiale est importante, ce qui influe sur la valeur de la contrainte latérale maximale σ_2^+. Nous remarquons par ailleurs, que la courbe s´incurve au fur et à mesure que k_1 croit.

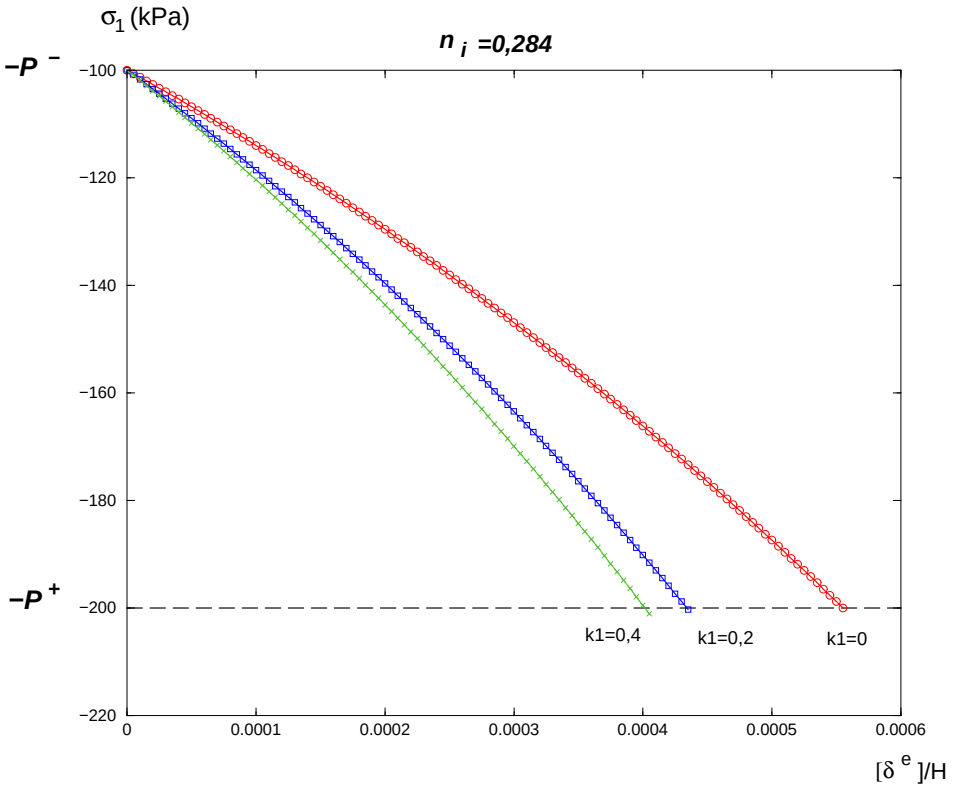


FIG. 7.14: variation de la contrainte verticale σ_1 avec k_1

Partant d´états initiaux représentés par les points A, C et E dans le plan (p,q) (figure 7.16), les cycles de contraintes (AB, CD et EF) sont assez sensibles à l´état initial (à travers k_1). La pente de ces cycles décroît sensiblement avec k_1, les états de chargements

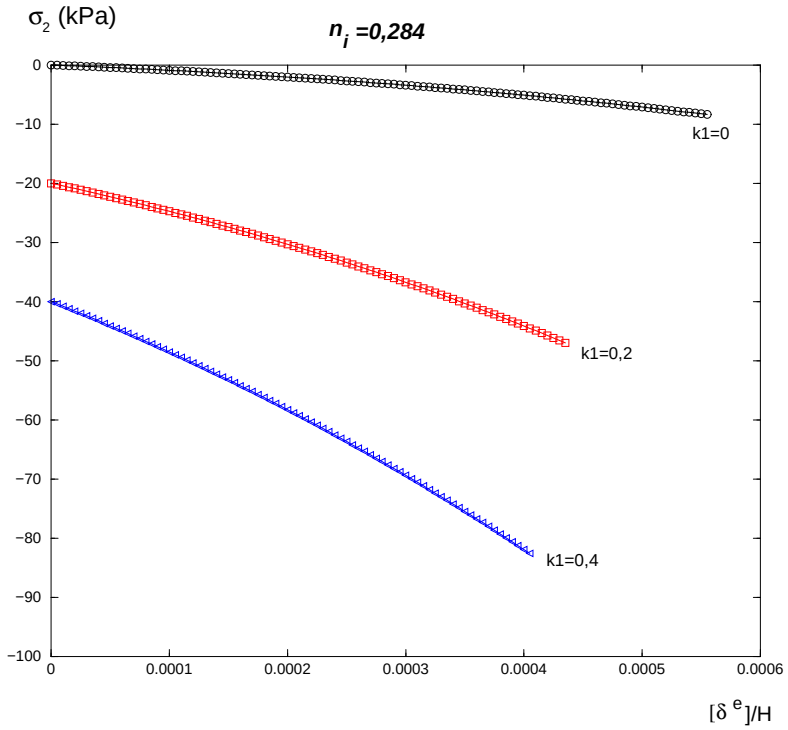


FIG. 7.15: variation de la contrainte horizontale σ_2 avec k_1

maximaux sont représentés par les points $B(k_1 = 0)$, $D(k_1 = 0,2)$ et $F(k_1 = 0,4)$.
L´influence de l´état initial sur la dérive du cycle de contrainte est relativement importante. Cette dérive est notablement plus importante pour les points de chargements maximaux (B', D' et F') que pour l´état résiduel (A', C' et E').
Dans tous les cas, la pente de ces cycles décroît en fonction de N, devenant même rapidement négative.

La figure 7.17 montre enfin les différentes courbes donnant l´évolution du tassement relatif résiduel $\delta^r(N)/H$ en fonction du nombre de cycles de chargements appliqués N, pour différentes valeurs du coefficient k_1 traduisant l´état de contrainte initial de l´éprouvette. On remarque que, toutes choses étant égales par ailleurs, et pour le jeu de paramètres sélectionné, le tassement résiduel augmente fortement lorsqu´on se rapproche d´un état de contrainte initial purement uniaxial ($k_1 = 0$). Cet effet peut être attribué au fait que lorsque k_1 augmente l´ampleur de la dérive du cycle de contrainte initial est importante (figure 7.16), nous avons donc un éloignement de la droite de référence. Il s´ensuit une diminution du taux de production des déformations permanentes et donc une décroissance du tassement résiduel. D´après ce que l´on observe, l´effet de l´augmentation de l´amplitude du cycle (valeur de f) n´est pas significatif.

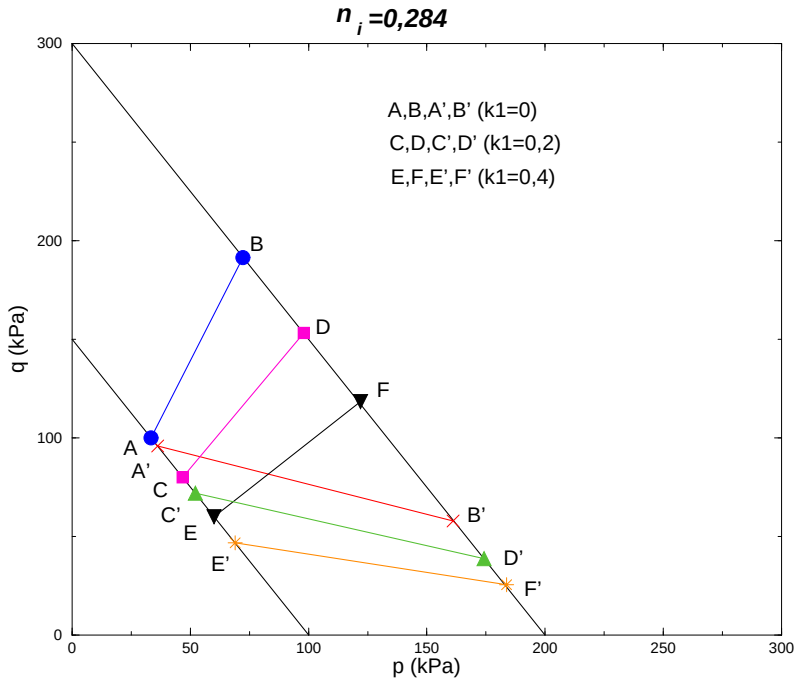


FIG. 7.16: cycles de contraintes initiaux ($N = 1$) et intermédiaires ($N = 42000$) en fonction de k_1 ($n_i = 0,284$)

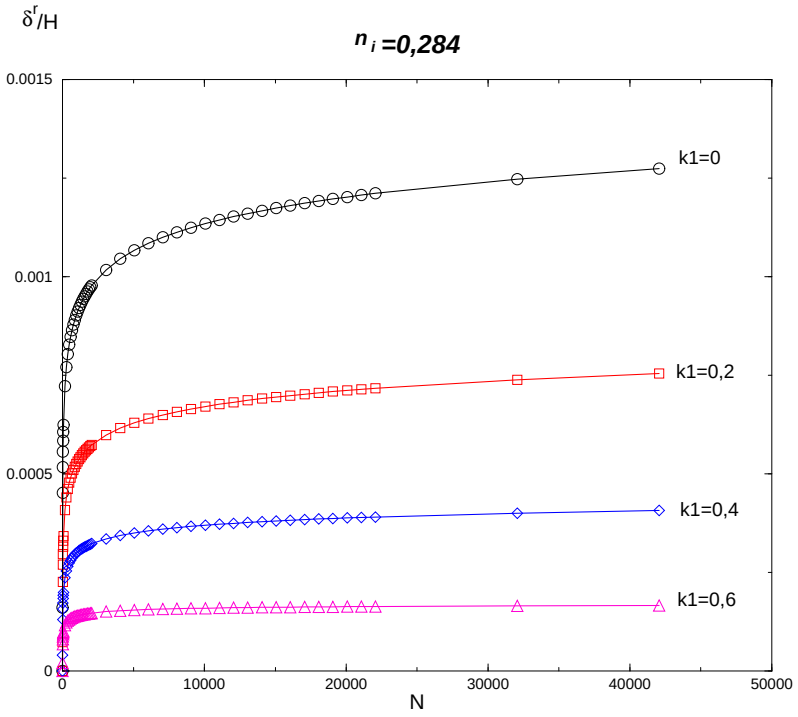


FIG. 7.17: courbes d´évolution du tassement résiduel pour différentes valeurs de k_1

7.4 Conclusion

Nous avons montré à partir de l´exemple illustratif de la sollicitation oedométrique cyclique d´une éprouvette de matériau, que l´élasticité non-linéaire de ce dernier joue un

rôle très important dans *la prédiction du tassement résiduel* de la structure chargée de façon *cyclique*. En effet, cette non-linéarité a un effet sur la procédure de calcul selon deux modes. Tout d´abord, en modifiant les caractéristiques des cycles de contrainte engendrés par les chargements répétés, en termes d´amplitude et de position, qui interviennent directement dans l´expression de la loi de comportement cyclique à travers les fonctions f et g respectivement.

Ensuite, en altérant significativement la valeur du tassement résiduel calculé à partir de l´intégration de la distribution des déformations permanentes. Il s´ensuit que, quelle que soit la méthode employée pour prédire la réponse de la plate-forme soumise à un chargement répété de trafic, celle-ci doit tenir compte de l´élasticité non-linéaire. L´intégration d´une telle loi d´élasticité non-linéaire dans une procédure de calcul telle que celle développée au chapitre 5, qui repose sur deux types de calcul élastique effectués par un code éléments finis, tel que CESAR (calculs *élastique cyclique* et *élastique résiduel*), implique de profondes modifications de ces calculs en recourant à une méthode "incrémentale" consistant à actualiser simultanément à chaque pas ($N \rightarrow N + \Delta N$) l´état résiduel de la structure et son état de chargement maximal. La différence avec un calcul élastique linéaire classique résidera dans la nécessité d´actualiser les matrices de rigidité tangentes de la structure dans ses états résiduel et chargé.

Chapitre 8

Conclusions et perspectives

Nous avons proposé dans le présent travail une méthode fondée sur une approche de type *calcul des structures* dont nous avons montré la faisabilité en vue de prédire le tassement résiduel des plates-formes de transport soumises à des chargements répétés de trafic. Nous avons illustré la mise en oeuvre de cette méthode sur des modèles simplifiés tels que celui de la plate-forme soumise à une charge roulante, ainsi que sur des modèles plus complexes tels que le modèle BETTER.

Un aspect important du schéma de calcul proposé, consiste à pouvoir déterminer les cycles de contrainte élastiques dans les couches de matériaux constituant l´infrastructure de transport, induits par le passage des convois. Pour ce faire, nous avons réalisé une modélisation d´un tronçon de voie à l´aide du code de calcul en éléments finis PLAXIS. Cette modélisation réalisée en élasticité linéaire nous a permis de voir les allures et les amplitudes des cycles élastiques, même s´il n´était pas possible d´utiliser ce logiciel pour la détermination de l´état résiduel de l´infrastructure.

Par ailleurs, nous avons eu recours à la formulation d´une loi de comportement cyclique des matériaux, étant donné que notre méthode de calcul repose sur la spécification d´une telle loi qui exprime l´évolution des *déformations permanentes* accumulées dans les matériaux au fur et à mesure de l´application des chargements cycliques. Nous nous sommes donc inspirés des études antérieures qui nous paraissaient traiter de la même problématique que celle qui nous préoccupe. La loi de comportement cyclique qui convient le mieux, c´est-à-dire celle qui décrit l´évolution des déformations permanentes accumulées dans les matériaux lors des chargements cycliques, nous a semblé être celle proposée par Gidel et al. (2000). Formulée pour les matériaux de chaussées, elle relie le taux d´accumulations des déformations permanentes axiales au nombre de cycles de chargement et aux caractéristiques des cycles. Cette loi initialement identifiée à partir de trajets de contraintes radiaux, a été généralisée afin de l´adapter à des trajets non-radiaux et/ou non-triaxiaux de révolution.

Une formulation tensorielle a ainsi été proposée qui met en jeu un paramètre ν^* reliant les déformations permanentes latérales à la déformation axiale. Ce paramètre apparaît comme une fonction croissante de la pente du cycle de contraintes.

Cette loi cyclique, étendue à la prise en compte de trajets cycliques non radiaux, a été alors incorporée à la procédure générale. Un outil de calcul numérique, mettant en oeuvre un code éléments finis, a ainsi été mis au point, qui prend également en compte l´élastoplasticité des matériaux. Nous avons tout d´abord validé notre procédure de calcul sur des modèles simplifiés tels que l´essai oedométrique cyclique ou une modèlisation simplifiée de l´essai BETTER (modèle *bibloc*), pour lesquels nous avons déterminé au préalable les solutions semi-analytiques. Puis, nous avons procédé aux simulations numé-

riques en modélisant l´essai BETTER proprement dit. Pour caler les paramètres de la loi de comportement cyclique ainsi que le module d´Young du ballast, nous avons sélectionné un essai réalisé par Bodin (2001) et nous l´avons simulé puis calé nos paramètres sur ses résultats. Par la suite, nous avons simulé d´autres essais et nous avons comparé nos résultats à ceux obtenus expérimentalement.

Il est à noter que l´essai réalisé est tridimensionnel alors que la modélisation numérique que nous avons effectuée est en *déformations planes*, d´où une première raison pouvant expliquer les écarts entre les résultats. Une deuxième raison pouvant expliquer l´écart entre les résultats expérimentaux et les prédictions fournies par la simulation numérique, est relative au fait que cette dernière ne prend pas en compte les effets dynamiques qui entrent vraissemblablement en jeu lorsque la fréquence d´application du chargement cyclique devient importante.

Par ailleurs, nous avons réalisé une étude qui nous a permis de mettre en évidence l´effet de l´élasticité non-linéaire du matériau sur son comportement cyclique, en utilisant le modèle de Boyce (1980). En effet, nous avons constaté que l´hypothèse d´élasticité linéaire pour modéliser le comportement réversible à court terme des matériaux, pouvait éventuellement conduire à sous-estimer le tassement résiduel de la structure. Cette étude n´a été illustrée que sur l´exemple de l´essai oedométrique cyclique, mais il serait intéressant dans un futur proche de modéliser l´infrastructure de transport, en tenant compte de cet aspect qu´il conviendrait d´intégrer dans un code de calcul par éléments finis.

Il est évident que la procédure de calcul numérique développée reste à perfectionner, puisque certains problèmes sont apparus pendant les simulations. De même, des améliorations relatives à la prise en compte des phénomènes dynamiques d´une part, à l´élasticité non-linéaire des matériaux d´autre part sont à introduire. Il nous semble néanmoins que, dans les années à venir, l´effort principal doit porter sur la formulation de lois de comportement cycliques qui soient réellement représentatives des matériaux, et des sollicitations cycliques parfois complexes auxquelles ils sont soumis. Une question difficile reste par exemple la généralisation de ces lois à des cycles pour lesquels les directions principales des contraintes subissent des rotations, ce qui correspond à la configuration réelle d´une charge roulante. De telles questions ne pourront être résolues qu´à partir de campagnes d´essais systématiques consistant à solliciter de façon homogéne des éprouvettes de matériaux.

Bibliographie

[1] *Documentation sur le LMGC, Laboratoire de Mécanique et de Génie Civil, Montpellier*. 1993.

[2] M. Abdelkrim. Characterization of long term behaviour of granular materials under repeated loading with application to infrastructure design. In Michael Long Trevor L.L. Orr, editor, *Proceedings of the 15th European Young Geotechnical Engineers Conference*, pages 179–185. The institution of engineers of Ireland, July 2003.

[3] M. Abdelkrim, G. Bonnet, and P. de Buhan. A computational procedure for predicting the long term residual settlement of a platform induced by repeated traffic loading. *Computers and geotechnics*, (30) :463–476, January 2003.

[4] M. Abdelkrim and P. de Buhan. An illustrative model for assessing the influence of elastic non-linearity on the residual behaviour of a plateform subject to traffic loading. In Geoffroy H. Sauzéat C. Di Benedetto H., Doanh T., editor, *Deformation Characteristics of Geomaterials*, pages 1019–1026. Balkema, September 2003.

[5] J. Alias. *La voie ferrée*. Eyrolles Paris, Août 1984.

[6] J.E.D Alva-Hurtado. *A methodology to predict the elastic and inelastic behavior of railroad ballast*. PhD thesis, University of Massachusetts USA, 1980.

[7] J.E.D. Alva-Hurtado and E.T. Selig. Permanent strain behavior of railroad ballast. *International Journal of Rock Mechanics and Mining science and geomechanics*, 20(3) :543–546, June 1981.

[8] W.F. Anderson and A.J. Key. Model testing of two-layer railway track ballast. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, pages 317–323, April 2000.

[9] D. Aubry. Comportement du ballast soumis à des chargements dynamiques répétés. *ECP-CRSA/SNCF*, page 62.

[10] M. Balsan. *Pour un modèle mathématique de la voie ferrée moderne*. PhD thesis, ENPC-Paris, 1981.

[11] V. Bodin. *Comportement du ballast des voies ferrées soumises à un chargement vertical et latéral.* PhD thesis, ENPC-Paris, 2000.

[12] V. Bodin, K. Sab, Ph. Tamagny, and P.E. Gautier. Modélisation par éléments finis d'une portion de voie ferrée ballastée. In *Simulations, Virtuel et Grands projets industriels*, volume XXVI, pages 1–27. Forum IPSI pour la formation et l'information, 2002.

[13] V. Bodin, Ph. Tamagny, K. Sab, and P.E. Gautier. Fréquence critique de sollicitation lors du tassement à grand nombre de cycles d'un milieu granulaire. In *Actes des journées scientifiques du LCPC*, pages 291–296. Colloque physique et mécanique des matériaux granulaires, septembre 2000.

[14] H.R. Boyce. A non-linear model for the elastic behaviour of granular materials under repeated loading. In *International Symposium on Soils under Cyclic and Transcient loading, Swansea 1980*, pages 285–294, January 1980.

[15] D.M. Burmister. The general theory of stresses and displacements in layered soil systems. *Journal of applied physics*, III :296–302, 1944.

[16] B. Cambou and K. Jafari. Modèle de comportement des sols non cohérents. *Revue Française de Géotechnique*, (44) :43–55, Juillet 1988.

[17] CERAM. Rapport sur la simulation expérimentale du comportement du ballast soumis au passage de tgv. *CERAM*, page 53, 1992.

[18] J. Chai and N. Miura. Traffic-load-induced permanent deformation of road on soft subsoil. *Journal of geotechnical and geoenvironmental engineering*, pages 907–916, 2002.

[19] A.G. Correia. *Unboung granular materials-laboratory testing, Conference on In-situ Testing and modelling.* Balkema, January 1999.

[20] L-M. Cottineau, P. Hornych, K. Sab, and B. Ortu. Essais de caractérisation et de tassement à grand nombre de cycles d'un ballast recyclé. *Essais industriels*, (24) :19–22, 2003.

[21] L. Dormieux. *Influence de la houle sur la stabilité d'un massif sous-marin.* PhD thesis, ENPC, 1989.

[22] L. Dormieux, J.L. Auriault, and O. Coussy. Pore pressure generation in a seabed subjected to a wave loading. *European Journal of Mechanics A/Solids*, 12(6) :773–801, 1993.

[23] J.M. Duncan and Ch.Y. Chang. Nonlinear analysis of stress and strain in soils. *Journal of soil mechanics and foundation division-Procceding of the ASCE*, pages 1629–1651, 1970.

[24] J.C. Dupla and J. Canou. Cyclic pressuremeter loading and liquefaction properties of sands. *Soils and foundations, Japenese Geotechnical Society*, 43(2) :17–31, Avril 2003.

[25] G Gazetas. Analysis of machine foundation vibration : state of the art. In *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, volume 2, pages 1–60. Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, New York, USA, January 1983.

[26] G. Gazetas. *Foundation vibration.* Van NostrandReinhold, 1991.

[27] G. Gidel, P. Hornych, J.J. Chauvin, D. Breysse, and A. Denis. Nouvelle approche pour l'étude des déformations permanentes des graves non traitées à l'appareil triaxial à chargements répétés. *Bull. de liaison du Labo. des P. et Ch.*, (233) :5–21, Juillet-Août 2001.

[28] S. Guezouli. *Comportement des chaussées souples : Modélisation et simulation numérique.* PhD thesis, Ecole Centrle de Nantes, 1994.

[29] N. Guérin. *Approche expérimentale et numérique du comportement du ballast des voies de chemin de fer.* PhD thesis, ENPC, 1996.

[30] N. Guérin, K. Sab, and P. Moucheront. Identification expérimentale d'une loi de comportement de tassement du ballast. *Canadian Geotechnical Journal*, (36) :523–532, 1999.

[31] T. Habiballah, C. Chazallon, and C. Petit. Simplified method based on plasticity for the permanent strains of unbound granular materials for flexible pavements. In Geoffroy H. Sauzéat C. Di Benedetto H., Doanh T., editor, *Deformation characteristics of Geomaterials*, pages 1051–1056. Balkema, September 2003.

[32] B. Halphen and J. Salençon. *Elasto-plasticité.* Presses de l'école des Ponts et Chaussées-Paris, 1987.

[33] J.V. Heck. *Modélisation des déformations reversibles et permanentes des enrobés bitumineux-Application à l´orniérage des chaussées.* PhD thesis, Université de Nantes, 2001.

[34] P. Hornych, J.F. Corte, and J.L. Paute. Etude des déformations permanentes sous chargements répétés de trois graves non traitées. *Bull. de liaison du Labo. des P. et Ch.*, (184) :45–55, Mars-Avril 1993.

[35] P. Hornych, A. Kazai, and J.M. Piau. Study of the resilient behaviour of unbound granular materials. In *Bearing capacity of Roads and Airfields-Norvège*, pages 1–11, 1998.

[36] P. Hornych, A. Kazai, and A. Quibel. Modelling a full scale experiment of two flexible pavement structures with unbound granular bases. In *Proceedings Unbound aggregates in road construction, Nottingham-UK*, pages 359–367, 2000.

[37] B. Indraratna, D. Ionescu, and H.D. Christie. Shear behaviour of railway ballast based on large-scale triaxial tests. *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engieneering-ASCE*, pages 439–449, 1998.

[38] B. Indraratna and W. Salim. Deformation and degradation mechanics of recycled ballast stabilised with geosynthetics. *Soils and Foundations*, 43(4) :35–46, August 2003.

[39] D. Ionescu, B. Indraratna, and D. Christie. Laboratory evaluation of the behavior of railway ballast under static and repeated loads. In *7th Australia New Zealand Conf. on Geomech.*, pages 86–91. Inst. of Engrg., Adelaide, Australia, 1996.

[40] P. Jouve and M. Elhannani. Application des modèles non linéaires au calcul des chaussées souples. *Bull. de liaison Labo. P. et Ch.*, (190) :39–55, mars-avril 1994.

[41] R.M. Knutson, M.R. Thompson, T. Mullin, and S.D. Tayabji. Materials evaluation study : ballast and foundation materials research program. (FRA-OR D-77-02), 1977.

[42] Z. Krakutovski. Etude de la dégradation géométrique des voies ferrées. Master's thesis, ENPC-Université de Paris XII- SNCF Direction de la recherche et de la technologie, Avril-Septembre 2000.

[43] F. Lekarp and A. Dawson. Modelling permanent deformation behaviour of unbound granular materials. *Construction and building materials*, 12(1) :9–18, November 1997.

[44] R.W. Lentz and G.Y. Baladi. Simplified procedure to characterize permanent strain in sand subjected to cyclic loading. In *International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading, Swansea*, pages 89–142, 1980.

[45] D. Li and E.T. Selig. Cumulative plastic deformations for fine-grained subgrade soils. *Journal of Geotechnical Engineering*, pages 1006–1013, December 1996.

[46] D. Li and E.T. Selig. Method for railway track foundation design.ii : application. *J. Geotech. Eng.*, 124(4) :323–329, 1998.

[47] J. Li. Nonlinear elastic behavior of subgrade soils under traffic loading. *Geotechnical Engineering for transportation infrastructure*, pages 1321–1327, 1999.

[48] M.P. Luong. Phénomènes cycliques dans les sols pulvérulents. *Revue Française de Geotechnique*, (10) :39–53, 1980.

[49] G.R. Martin and W.D. Liam Finn. Fundamentals of liquefaction under cyclic loading. *Journal of the geotechnical engineering division*, pages 423–438, 1975.

[50] J. Martinez. *Contribution au dimensionnement des chaussées souples. Comportement des matériaux et méthode de calcul.* PhD thesis, INSA Rennes, 1980.

[51] C.L. Monosmith, N. Ogawa, and C.R. Freeme. Permanent deformation characteristics of subsoil due to repeated loading. *Transp. Res. Rec.*, (537) :1–17, 1975.

[52] J.J. Moreau. Application des algorithmes "contact dynamics" aux milieux granulaires. 14ème Congrès Français de Mécanique, Toulouse, 1999.

[53] J.R. Morgan. The response of granular materials to repeated loading. In *A.R.R.B proceedings*, volume 3, pages 1178–1193, 1966.

[54] ORE, D117, RP18, and 25. The behaviour of the track bed structures under repeated loading. *Utrecht-The Netherlands*, 1981.

[55] X. Oviedo. *Etude du comportement du ballast par un modèle micromécanique : application aux opérations de maintenance de la voie ferrée ballastée.* PhD thesis, ENPC-Paris, Mai 2001.

[56] A. Pannegeon. Simulations expérimentales du comportement du ballast ferroviaire sous chargement. Master's thesis, ENPC-Paris, 1993.

[57] J.W. Pappin and S.F. Brown. Resilient stress-strain behaviour of cruched rock. In *International symposium on Soils under Cyclic and transient Loading-Swansea*, pages 169–177, 1980.

[58] J.L. Paute, P. Hornych, and J.P. Benaben. Comportement mécanique des graves non traitées. *Bull. de liaison Labo. P. et Ch.*, (190) :27–38, Mars-Avril 1994.

[59] J.L. Paute, P. Jouve, J. Martinez, and E. Ragneau. Modèle de calcul pour le dimensionnement des chaussées souples. *L.C.P.C.*, (156) :21–36, 1988.

[60] J.L. Paute, J. Marignier, and B. Vidal. Le triaxial à chargements répétés pour l'étude des graves non traitées. *Bull. de liaison Labo. P. et Ch.*, (190) :19–26, Mars-Avril 1994.

[61] A. Pecker. *Dynamique des sols*. Presses de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées-Paris, 1984.

[62] A. Pecker, J.H. Prevost, and L. Dormieux. Analysis of pore pressure generation and dissipation in cohesionless materials during seismic loading. *Jl. Earthquake Eng.*, 5(4) :441–64, 2001.

[63] A. Ponter. The analysis of classically loaded creeping structures for short cycle times. *Int. J. Solids Structures*, 12 :809–25, 1976.

[64] H.G. Poulos and E.H Davis. Elastic solutions for soil and rock mechanics. *Centre for Geotechnical Research*, 1991.

[65] V. Profillidis. *La voie et sa fondation Modélisation mathématique*. PhD thesis, ENPC-Paris, 1983.

[66] L. Raad, D. Weichert, and A. Haidar. Shakedown and fatigue of pavements with granular bases. Number 1227, pages 159–172. Transportation Research Record.

[67] G.P. Raymond and J.R. Davies. Triaxial tests on dolomite railroad ballast. *Journal of the Geotechnical Engineering division*, pages 737–751, June 1978.

[68] G.P. Raymond and D.R. Williams. Repeated load triaxial tests on dolomite ballast. *Journal of the Geotechnical Engineering division*, 104 :1013–29, July 1978.

[69] G. Sauvage. Railway track vertical static behaviour. *INRETS/LTN*, pages 1–20, 1993.

[70] R. Sauvage and G. Larible. La modélisation par "éléments finis" des couches d'assises de la voie ferrée. *Revue Générale des Chemins de Fer*, (101) :475–484, Septembre 1982.

[71] E. Schultze and G. Coesfeld. Elastic properties of ballast. pages 323–327.

[72] E. Selig and J.M. Waters. *Track geotechnology and substructure management*. Thomas Telford publications, 1994.

[73] I. Shahrour and Y. Meimon. Application of the homogenization method to the calculation of marine foundations subjected to periodic loads. pages 601–608, Swansea, 1992. NUMOG IV.

[74] I. Shahrour and Y. Meimon. Calculation of marine foundations subjected to repeated loads by means of the homogenization method. *Computers and Geotechnics*, (17) :93–106, 1995.

[75] M.J. Shenton. Ballast deformation and track deterioration. pages 175–187.

[76] M.J. Shenton. Deformation of railway ballast under repeated loading conditions. *Railroad Track Mechanics and technology, Pergamon Press*, pages 405–430, 1978.

[77] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. de Brost, and C. Esveld. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. part1 :formulation of the boundary value problem. *Eur. J. Mech. A/Solids*, (18) :749–768, 1999.

[78] A.S.J. Suiker, C.S. Chang, R. de Brost, and C. Esveld. Surface waves in a stratified half space with enhanced continuum properties. part2 :analysis of the wave characteristics in regard to high-speed railway tracks. *Eur. J. Mech. A/Solids*, (18) :769–784, 1999.

[79] A.S.J. Suiker, A.V Metrikine, and R. de Brost. Comparison of wave propagation characteristics of the cosserat continuum model and corresponding discrete lattice models. *International journal of Solids and Structures*, (38) :1563–1583, 2001.

[80] A.S.J. Suiker, A.V Metrikine, and R. de Brost. Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part1 : analysis of body waves and eigenmodes. *Journal of Sound and Vibration*, 1(240) :1–18, 2001.

[81] A.S.J. Suiker, A.V Metrikine, and R. de Brost. Dynamic behaviour of a layer of discrete particles, part2 : response to uniformly moving, harmonically vibrating load. *Journal of Sound and Vibration*, 1(240) :19–39, 2001.

[82] S.P. Timoshenko, R. Pint, and C. Lafitte. *Résistance des matériaux*, volume 2. Dunod, Paris, 1990.

[83] H.A.M. Van Eekelen. Fatigue models for cyclic degradation of soils. In *International symposium on Soils under Cyclic and transient Loading*, pages 447–450, 1980.

[84] Brinkgreve R.B.J. Vermeer P.A.et al. *PLAXIS, Finite Element Code for Soil and Rock Analyses version 7*. A.A.Balkema-Rotterdam-Brookfield, 1998.

[85] E. Vincens, Ph. Dubujet, and B. Cambou. Cyclic behaviour of soils a prediction of permanent deformations. In Geoffroy H. Sauzéat C. Di Benedetto H., Doanh T., editor, *Deformation Characteristics of Geomaterials*, pages 1027–1034. Balkema, September 2003.