



**HAL**  
open science

# Advection passive par des champs de vitesse stochastiques.

Peter Horvai

► **To cite this version:**

Peter Horvai. Advection passive par des champs de vitesse stochastiques.. Physique [physics]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT: . pastel-00000712

**HAL Id: pastel-00000712**

**<https://pastel.hal.science/pastel-00000712>**

Submitted on 21 Jul 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité:  
Physique théorique

Présentée par  
**Péter Horvai**

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Sujet de la thèse:

**Advection passive par des champs de vitesse  
stochastiques**

Soutenue le 22 janvier 2004 devant le jury composé de:

M. Denis BERNARD (*rapporteur*)  
M. Luca BIFERALE (*rapporteur*)  
M. Pierre COLLET (*président du jury*)  
M. Krzysztof GAWĘDZKI (*directeur de thèse*)  
M. Jacques MAGNEN (*directeur de thèse*)  
M. Massimo VERGASSOLA (*membre du jury*)



---

En tout premier lieu mes remerciements vont à Krzysztof Gawędzki qui m'a accepté comme thésard, m'a guidé tout au long de ce travail, sur qui j'ai toujours pu compter, et qui m'a enseigné plus de choses sur les sciences que toute autre personne.

Ce travail n'aurait pas été possible sans les nombreuses occasions de collaborations et de discussions. Je mentionne, sans pouvoir être exhaustif, Jérémie Bec avec qui j'ai travaillé à l'IAS à Princeton au printemps 2003, Denis Bernard dont j'ai suivi les cours introductifs à la turbulence donnés au CEA/Saclay en 2000, Yves Le Jan et Olivier Raimond qui ont su m'initier à la théorie des processus de diffusion à l'ESI à Vienne pendant l'été 2002 et avec qui j'ai eu plusieurs discussions intéressantes plus tard; je remercie aussi Tomasz Komorowski et Jan Wehr pour des discussions et suggestions intéressantes lors de la même occasion (à l'ESI) et Massimo Vergassola pour ses explications à mes questions. Je dois mentionner encore Uriel Frisch (ne serait-ce que pour son livre! mais son influence va bien plus loin) et Antti Kupiainen qui m'accueillera dans son équipe à l'issue de cette thèse.

Dans mon travail, les invitations à séjourner dans différents instituts ont été cruciales. Sans elles, je n'aurais jamais rencontré les chercheurs avec qui j'ai eu tant de collaborations fructueuses. Je suis reconnaissant à l'Institut Erwin Schrödinger à Vienne (Autriche) et à l'Institute for Advanced Study à Princeton (États-Unis) de m'avoir accueilli, ainsi qu'aux écoles d'été des Houches en 2000 et de Cargèse en 2001 (quels cadres magnifiques!) où j'ai rencontré de nombreuses personnes, lié des amitiés, cueilli des myrtilles au pied du Mont Blanc et plongé dans les vagues de la mer Corse, et même appris des choses. Les rencontres plus brèves du Groupement de Recherche du CNRS « Structure et statistique de la turbulence: expérimentation et simulation », organisées par Fabien Anselmet, ont été très utiles également, ainsi que l'invitation mémorable en juin 2003 à Rome par le laboratoire INFM de l'université La Sapienza, sans oublier la possibilité de participer à la rencontre du réseau européen « Stirring and Mixing: the Lagrangian Approach » à l'Institut Henri Poincaré en novembre 2003.

Je dis merci à l'École Polytechnique et à Jacques Magnen pour m'avoir accueilli pendant ma thèse au Centre de Physique Théorique, ainsi qu'à Dominique Grésillon pour le soutien financier qui m'a aidé à finir cette thèse.

Enfin je remercie les rapporteurs Denis Bernard et Luca Biferale d'avoir consacré leur temps (et peut-être une partie de leurs vacances de Noël) à relire et commenter ce manuscrit, ainsi que tous les membres du jury qui ont bien voulu accepter cette charge.



# Table des matières

<b>1</b>	<b>Perspective épistémologique</b>	<b>7</b>
<b>2</b>	<b>Phénoménologie élémentaire de la turbulence</b>	<b>11</b>
2.1	Bilan énergétique . . . . .	11
2.2	Échelles . . . . .	12
2.3	Cascade . . . . .	12
2.4	Trajectoires Lagrangiennes . . . . .	13
2.5	Intermittence . . . . .	14
<b>3</b>	<b>Advection passive dans le modèle de Kraichnan</b>	<b>17</b>
3.1	Évolution des corrélateurs d'un champ passif . . . . .	17
3.2	Exemple 1: Le scalaire passif . . . . .	19
3.3	Exemple 2: Le vecteur passif . . . . .	20
3.3.1	La fonction à 1 point . . . . .	20
3.3.2	La fonction à 2 points . . . . .	21
3.4	Exemple 3: Le gradient passif . . . . .	21
3.5	Trajectoires Lagrangiennes . . . . .	22
3.6	Scalaire passif et trajectoires Lagrangiennes . . . . .	23
<b>4</b>	<b>Choix du champ de vitesse dans le modèle de Kraichnan</b>	<b>27</b>
4.1	Propriétés de covariance . . . . .	27
4.2	Spectre d'énergie . . . . .	28
4.3	Compressibilité . . . . .	29
4.4	Isotropie . . . . .	29
4.5	Brisure de parité . . . . .	30
4.6	Classification par le mouvement à 2 points . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Rôle des modes zéro</b>	<b>33</b>
5.1	Généralités . . . . .	33
5.2	Un cas d'école: le scalaire anisotrope . . . . .	35
5.3	Spectres de modes zéro reliés . . . . .	38
5.3.1	$\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\dagger$ . . . . .	38
5.3.2	Scalaire et gradient passifs . . . . .	39
<b>6</b>	<b>Flots généralisés, noyaux, solution statistique</b>	<b>41</b>
6.1	Régularisation à la Vanden-Eijnden et E . . . . .	42
6.2	Construction de Le Jan et Raimond . . . . .	44

<b>7</b>	<b>L'approche perturbative – effet de la brisure de parité</b>	<b>47</b>
7.1	Introduction . . . . .	47
7.2	Forme des modes zéro . . . . .	48
7.3	Développement perturbatif . . . . .	49
7.4	Ansatz, preuve d'existence . . . . .	51
7.5	Détermination des coefficients . . . . .	55
7.6	Cas avec brisure de parité . . . . .	55
<b>8</b>	<b>Exploitation des symétries – champ magnétique anisotrope</b>	<b>59</b>
8.1	Introduction . . . . .	59
8.2	Décomposition selon un groupe de Lie . . . . .	60
8.2.1	Généralités . . . . .	60
8.2.2	Une simplification . . . . .	61
8.3	Décomposition selon $O(d)$ (ou $SO(d)$ ) . . . . .	61
8.3.1	Les représentations qui apparaissent et leurs multiplicités . . . . .	61
8.3.2	Trouver une base explicite . . . . .	63
8.3.3	Remarques . . . . .	66
8.3.4	Récapitulatif . . . . .	67
8.3.5	Exemple d'application . . . . .	67
8.4	Restriction au cas sans divergence . . . . .	70
8.4.1	Calcul pratique des noyaux . . . . .	71
8.4.2	Transformée de Mellin . . . . .	72
8.4.3	Calcul de la base adaptée . . . . .	74
8.4.4	Exemple d'application . . . . .	76
8.5	« Rappels » sur les bases de Gröbner . . . . .	76
<b>9</b>	<b>Méthodes Lagrangiennes – Modèles corrélés en temps</b>	<b>79</b>
9.1	Description quasi-Lagrangienne . . . . .	79
9.2	Piégage en temps fini dans un champ de vitesse figé mBf . . . . .	81
9.2.1	Définition du mouvement Brownien fractionnaire . . . . .	81
9.2.2	Finitude du temps de piégage . . . . .	81
9.3	Champ quasi-Lagrangien à fluctuations lentes . . . . .	82
9.4	Article paru au JSP . . . . .	84
<b>10</b>	<b>Particules « collantes » dans le modèle de Kraichnan</b>	<b>135</b>
<b>11</b>	<b>Intermittence de la densité dans un écoulement lisse compressible</b>	<b>171</b>
11.1	Motivation physique . . . . .	171
11.2	Multifractality and intermittency . . . . .	172
11.2.1	Attractor . . . . .	172
11.2.2	Hentschel-Procaccia spectrum . . . . .	173
11.2.3	Local dimension spectrum . . . . .	175
11.2.4	Large deviations of $m_\mu(r; \mathbf{R})$ . . . . .	176
11.2.5	Large deviations of $m_{[\mu]}(r; \mathbf{R})$ . . . . .	177
11.3	Article soumis aux PRL . . . . .	179

---

<b>A</b>	<b>Implémentation en MAPLE des calculs du Chapitre 8</b>	<b>183</b>
A.1	Sources MAPLE pour le Chapitre 8 . . . . .	184
A.2	Feuille de calcul MAPLE pour la Section 8.3.5 . . . . .	196
A.3	Feuille de calcul MAPLE pour la Section 8.4.4 . . . . .	201



# Chapitre 1

## Perspective épistémologique

On décrit généralement le mouvement d'un fluide « simple » par l'équation de Navier-Stokes, connue depuis 1823, et qui prend la forme

$$\begin{aligned}\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} &= \vec{\nabla} p + \nu \Delta \vec{v} + \vec{f} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{v} &= 0\end{aligned}\tag{1.1}$$

où  $\vec{v}$  est le champ de vitesse du fluide,  $p$  est la pression,  $\nu$  est la viscosité cinématique et  $\vec{f}$  est un éventuel terme de forçage [11]. Un fluide vérifiant la deuxième équation est appelé **incompressible**, et s'il vérifie en plus la première, on le dit **Newtonien**. Ce système donne une description adéquate de l'écoulement de fluides tels que l'eau ou l'air, pourvu que la vitesse de l'écoulement reste très inférieure à la vitesse de propagation du son dans le milieu.

Bien avant que ces équations ne soient écrites, par la simple observation, on remarqua certaines propriétés des écoulements rapides, torrentiels, qui semblaient universelles. Tandis qu'un écoulement lent donne l'impression d'avoir une certaine structure spatiale et temporelle, un écoulement très rapide ressemble à un enchevêtrement de tourbillons transitoires. Un tel écoulement est appelé **turbulent**. Ce mot vient du latin *turba*: agitation d'une foule nombreuse, venant lui-même du grec  $\tau\rho\rho\beta\eta$  signifiant tumulte, désordre. Le mot **turbulence** pour désigner l'ensemble des phénomènes associés à un écoulement turbulent ne fut introduit que tardivement, en 1935 en français, en 1895 en anglais.

L'équation de Navier-Stokes présente une symétrie de transformation d'échelle, liée au fait que l'on peut exprimer le temps et les distances en des unités arbitraires. Si on considère un écoulement dans un récipient de taille  $L$  et avec vitesse typique  $v$ , alors le seul paramètre adimensionné que l'on puisse définir est le **nombre de Reynolds**  $Re = \frac{Lv}{\nu}$ . La **turbulence développée** correspond alors à la limite  $Re \rightarrow \infty$ .

C'est avec l'étude des transitions de phase et des phénomènes critiques (et aussi la théorie quantique des champs) que la notion de **point critique** est apparue. En général quand un système est à un point critique, différentes fonctions statistiques du système (e.g. auto-corrélation de spins) vérifient des **lois d'échelle** caractéristiques de ce point critique. On pense que le point  $Re^{-1} = 0$  est un point critique du système décrit par l'équation de Navier-Stokes, et on cherche généralement à décrire les lois d'échelle à ce point, par exemple pour l'auto-corrélation du champ de vitesse. Le seul résultat

quantitatif et rigoureux en la matière est la **loi des  $\frac{4}{5}$  de Kolmogorov**, qu'il établit et prouva en 1941.

On peut énoncer ce théorème ainsi (d'après Frisch [27]): Dans la limite  $Re \rightarrow \infty$ , la fonction de structure longitudinale d'ordre trois du champ de vitesse d'un écoulement turbulent homogène isotrope, prise pour des séparations  $\ell$  très petites devant l'échelle intégrale de l'écoulement, peut être exprimée en fonction du taux moyen  $\varepsilon$  de la dissipation d'énergie par unité de volume (supposé fini non nul), comme

$$\langle (\delta v_{\parallel}(\vec{r}, \vec{\ell}))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon \ell$$

Dans son célèbre article [36] datant de 1941, Kolmogorov conjectura que la fonction de structure longitudinale d'ordre  $n \in \mathbb{N}$  quelconque se comporte comme  $\ell^{n/3}$ . Très vite Landau objecta que ceci n'est possible que si le taux de dissipation de l'énergie ne fluctue pas, hypothèse improbable. De fait, Landau conjectura l'intermittence spatiale des champs de vitesse turbulents. On appelle dans ce contexte **intermittence** le fait que les exposants pour les fonctions de structure d'ordre  $n$  de la vitesse ne varient pas linéairement avec  $n$ . Ceci implique tout de suite que le champ de vitesse ne saurait être Gaussien, et que l'écart par rapport au comportement gaussien augmente forcément quand on va vers les petites échelles. En particulier la platitude et les hyper-platitudes d'ordre supérieur de la statistique des incréments de vitesse augmentent indéfiniment quand la séparation tend vers 0. Certains auteurs appellent ce dernier phénomène en soi intermittence.

Dès lors, un long effort commença pour prouver, soit théoriquement, soit expérimentalement, ou encore par simulation numérique, l'intermittence des écoulements turbulents (précisément: l'intermittence des incréments de vitesse pour des séparations dans le domaine inertiel (cf. Sect. 2.2)). La tâche s'avéra très difficile, pour les trois approches. Le consensus ne se dégagait que lentement à partir des années 70 et dans les années 80, d'abord dans des expériences [9, 4] puis des simulations numériques [33]. L'approche théorique, quant à elle, avait de la peine à parvenir à trancher la question.

Pour développer la théorie d'un problème difficile, souvent on commence par étudier des modèles plus élémentaires. On essaie alors de voir si on retrouve, au moins qualitativement, certains aspects que l'on aimerait prouver sur le système plus compliqué. C'est en partie dans une telle perspective que **Kraichnan** introduisit en 1968 [37] son fameux modèle d'**advection passive** par un champ de vitesse stochastique bruit blanc gaussien en temps.

C'est dans le cadre de ce modèle que l'on réussit pour la première fois [30, 52, 20] à prouver rigoureusement l'apparition d'intermittence, notamment pour la fonction de structure de la quantité advectée. On peut y voir un premier pas vers la démonstration de l'intermittence du champ de vitesse turbulent.

La très grande simplification de ces modèles par rapport à Navier-Stokes vient du fait qu'on se ramène à des processus stochastiques à **incréments indépendants**. L'intermittence est perçue comme un comportement non-trivial du système et on s'attend donc, intuitivement, que sa présence dans le modèle simplifié augure bien quant à sa présence dans le système plus compliqué qu'est Navier-Stokes. Il faut reconnaître cependant que personne n'a encore réussi à transposer les méthodes – ni même les idées, de façon efficace, – développées dans le cadre du modèle de Kraichnan, au problème de la turbulence développée dans les systèmes évoluant selon Navier-Stokes.

---

Indépendamment de son rôle de modèle simplifié de Navier-Stokes, l'étude de l'advection passive présente un intérêt en soi. En effet, de nombreux phénomènes physiques, tel l'advection d'un polluant dans l'air ou des algues sur la surface de l'océan, ou encore dans une certaine approximation des grains de sable par le vent ou l'eau, et aussi l'advection d'un champ magnétique faible au sein d'un liquide ou plasma conducteur, sont des cas d'advection passive. Certes, même pour les problèmes d'advection passive on travaillera avec des champs de vitesse simplifiés plutôt qu'avec celui issu directement de la solution de Navier-Stokes. Là encore, il s'agit d'un premier pas vers la compréhension de l'intermittence des quantités passivement advectées. Dans le modèle de Kraichnan de l'advection passive l'origine de l'intermittence semble être bien compris, aussi bien pour des quantités scalaires (température, densité) que vectorielles (champ magnétique, gradient de scalaire). Quant aux champs de vitesse plus réalistes en fait les expériences et simulations numériques révèlent que la statistique d'un scalaire passivement advecté est bien plus intermittente que celle du champ de vitesse advectant. Remarquons que c'est déjà le cas pour le modèle de Kraichnan où le champ de vitesse est Gaussien. On a la même situation dans le cas de la turbulence bi-dimensionnelle où le champ de vitesse n'est pas intermittent alors que le scalaire advecté l'est [18], et pour la turbulence 3D le scalaire passif est bien plus intermittent que le champ de vitesse [5, 44]. Grâce aux idées développées pour les modèles simplifiés on commence de nos jours à comprendre la situation générale [6, 19].

Notre fil conducteur sera l'étude de l'advection passive dans des champs de vitesse stochastiques. On abordera de nombreuses variantes. Le champ advecté pourra être scalaire ou vectoriel, forcé ou libre. Le champ advectant pourra être lisse ou rugueuse, bruit blanc en temps ou au contraire corrélé.



## Chapitre 2

# Phénoménologie élémentaire de la turbulence

Cette introduction a pour but de définir les concepts élémentaires de la théorie de la turbulence, auxquels on aura recours par la suite (cf. [27] pour une présentation extensive ou [14] plus proche de nos préoccupations). On les présente dans le cadre usuel d'un écoulement vérifiant l'équation de Navier-Stokes (1.1) en 3 dimensions. Il faut souligner qu'il s'agit là vraiment de *phénoménologie*, donc plutôt d'observations approximatives et d'images parlant à l'esprit, généralement admises ou utilisées, par opposition à des résultats rigoureusement établis ou vérifiés.

Pour fixer les idées, nous supposons que l'écoulement est confiné spatialement à un domaine  $\Lambda$ , par exemple un récipient, et qu'il est entretenu par un dispositif mécanique qui agite le fluide à grande échelle, par exemple une turbine ou une grille que l'on déplace dans le fluide.

### 2.1 Bilan énergétique

Partant de (1.1) on peut écrire le bilan énergétique de l'écoulement

$$\partial_t \int_{\Lambda} \frac{1}{2} \vec{v}^2 = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v} + \int_{\Lambda} \nu \vec{v} \cdot \Delta \vec{v} = \int_{\Lambda} \vec{f} \cdot \vec{v} - \nu \int_{\Lambda} (\vec{\nabla} \vec{v}) \cdot (\vec{\nabla} \vec{v})$$

exprimant le fait que l'énergie est apportée par le terme d'injection  $\vec{f}$  et dissipée par le terme de viscosité  $\nu \Delta \vec{v}$  (en particulier on néglige les effets de frottement sur la paroi). Introduisant les notations  $E(t) \equiv \int \frac{1}{2} \vec{v}(\vec{r}, t)^2 d\vec{r}$ ,  $I(t) \equiv \int \vec{f}(\vec{r}, t) \cdot \vec{v}(\vec{r}, t) d\vec{r}$  et  $D(t) \equiv \nu \int (\vec{\nabla} \vec{v}(\vec{r}, t))^2 d\vec{r}$ , on a  $\partial_t E(t) = I(t) - D(t)$ .

Si l'on maintient l'écoulement dans un régime stationnaire, ce qui reviendrait dans la pratique par exemple à faire tourner la turbine ou déplacer le réseau à vitesse constante, alors l'énergie totale de l'écoulement se stabilisera autour d'une valeur finie  $E_0$ . Une définition formelle possible de ce fait est

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T E(t) dt = E_0$$

mais en toute rigueur on ne sait pas si la limite est bien définie et on pourrait imaginer d'autres définitions inéquivalentes. Il ne s'agit ni d'un théorème démontré (en fait même

l'existence de la solution de (1.1) est un problème ouvert) ni vraiment d'une constatation expérimentale (on ne peut pas mesurer le champ de vitesse avec suffisamment de résolution spatio-temporelle pour avoir une approximation fiable de l'intégrale, d'autant plus qu'on manque de théorie sur les singularités éventuelles de  $\vec{v}$ ), juste d'une hypothèse usuelle « fondée sur l'observation ». De plus il est généralement admis que si le taux d'injection d'énergie est maintenue constante tandis que  $\nu \rightarrow 0$ , alors  $E_0$  tend vers une limite finie. On parle d'**anomalie dissipative**.

On définit le **taux moyen d'injection d'énergie**  $\varepsilon_i$  et le **taux moyen de dissipation d'énergie**  $\varepsilon_d$  de manière semblable à  $E_0$  à partir de  $I(t)$  et  $D(t)$  à la place de  $E(t)$ . On a alors  $\varepsilon_i = \varepsilon_d$  et on écrira simplement  $\varepsilon$  pour la valeur commune.

## 2.2 Échelles

Le forçage de l'écoulement par notre dispositif mécanique d'entraînement apparaît dans (1.1) comme le terme  $\vec{f}$ . Il agit à une échelle caractéristique  $\ell_f$ , appelée **échelle d'injection** (d'énergie) ou **échelle intégrale**, qui serait typiquement la taille de la turbine ou l'interstice du réseau. Dans l'espace de Fourier cela se voit comme concentration de  $\vec{f}(\vec{k})$  autour des vecteurs d'onde  $\vec{k}$  tels que  $|\vec{k}| \approx k_f = 2\pi/\ell_f$ .

La dissipation d'énergie résulte du terme de viscosité  $\nu \Delta \vec{v}$ . Il y a manifestement deux paramètres dimensionnels qui interviennent dans cette dissipation, notamment le taux moyen de dissipation  $\varepsilon$  et la viscosité  $\nu$ . Le premier a une dimension de  $\frac{L^2}{T^3}$  et le second  $\frac{L^2}{T}$ . La seule combinaison des deux qui soit une longueur est  $\ell_\nu \equiv (\nu^3/\varepsilon)^{1/4}$ , appelée **échelle dissipative** ou **échelle de Kolmogorov**. Dans la mesure où l'on peut supposer que la contribution principale à  $D(t)$  vient de cette échelle, on voit que le nombre de Reynolds à cette échelle est justement de l'ordre de 1.

Les échelles se situant entre l'échelle d'injection  $\ell_f$  et l'échelle de dissipation  $\ell_\nu$  sont appelées collectivement le **domaine inertiel**. À ces échelles, ni l'injection d'énergie ni la dissipation visqueuse ne se font directement sentir.

## 2.3 Cascade

L'image généralement donnée du domaine inertiel est la **cascade de Richardson** [47]. Dans son livre Richardson parle de vortexes de toutes les échelles. Les vortexes d'une certaine échelle sont transportés sans déformation par les vortexes beaucoup plus grands et transportent sans déformer les vortexes beaucoup plus petits. Seuls des vortexes de tailles comparables peuvent interagir entre eux non-trivialement et transférer de l'énergie entre échelles. Il en résulte une image où l'énergie cascade des vortexes plus grands vers les plus petits, d'échelle en échelle, de proche en proche. Le flux moyen d'énergie à travers les échelles est bien sûr le même que le taux moyen d'injection et de dissipation, i.e.  $\varepsilon$ .

On peut effectuer une analyse dimensionnelle pour la densité spectrale de l'énergie  $E(k) = dE_{<}(k)/dk$  (où  $E_{<}(k)$  est l'énergie contenue dans les modes Fourier  $|\vec{k}| < k$ ) qui est de dimension  $\frac{L^3}{T^2}$ . En supposant que la densité spectrale de l'énergie ne dépend que de l'échelle  $\ell = 2\pi/k$  et du flux moyen d'énergie  $\varepsilon$  (alors que, a priori, il faudrait faire intervenir les fluctuations aussi du flux, qui pourraient dépendre du mode d'injection de

l'énergie, en particulier de l'échelle d'injection  $\ell_f$ ), on a alors  $E(k) = \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$ , qui est souvent appelé le **spectre de Kolmogorov** de la cascade de Richardson.

L'image de cascade peut être appliquée à d'autres quantités que l'énergie de l'écoulement, telles l'enstrophie de l'écoulement ou bien l'énergie d'un scalaire passif transporté ou encore l'énergie magnétique d'un écoulement MHD. Dans le cas du scalaire passif, l'analogie du spectre de Kolmogorov est le spectre de Kolmogorov-Obukhov-Corrsin [45, 22]. Ce dernier s'obtient également par analyse dimensionnelle. Les paramètres pouvant a priori intervenir sont les paramètres de l'écoulement  $\varepsilon_v, L_v, \nu$  (respectivement taux d'injection d'énergie par le forçage du champ de vitesse, échelle de ce forçage, viscosité cinématique du fluide), les paramètres du scalaire  $\varepsilon_\theta, L_\theta, \kappa$  (respectivement taux d'injection d'énergie par le forçage du champ de scalaire, échelle de ce forçage, coefficient de diffusion du scalaire), et l'échelle  $\ell$  à laquelle on se place. En 3D on a anomalie dissipative pour le champ de vitesse donc  $\nu$  peut être prise nulle et n'interviendra pas dans l'analyse dimensionnelle. On admet également l'anomalie dissipative pour l'énergie du scalaire, ce qui élimine  $\kappa$ . En outre l'approche de type Kolmogorov suppose que les échelles d'injection d'énergie dans le champ de vitesse  $L_v$  et dans le scalaire  $L_\theta$  peuvent tendre vers l'infini et que la théorie à l'échelle  $\ell$  fixée aura une limite finie. On élimine donc  $L_v$  et  $L_\theta$ . Il nous reste alors  $\varepsilon_v, \varepsilon_\theta, \ell$ , de dimension  $\frac{L^2}{T^3}, \frac{\theta^2}{T}$  et  $L$  respectivement. La fonction de structure d'ordre  $N$  du scalaire est de dimension  $\theta^N$ . La seule combinaison de  $\varepsilon_v, \varepsilon_\theta, \ell$  qui soit de la bonne dimension est  $(\varepsilon_\theta \varepsilon_v^{-1/3} \ell^{2/3})^{N/2}$ . Quant au spectre d'énergie du scalaire,  $E(k)$  étant de dimension  $\theta^2 L$ , on obtient  $E_\theta(k) = \varepsilon_\theta \varepsilon_v^{-1/3} k^{-5/3}$ .

Quand le transfert de la quantité en question se fait des échelles plus grandes vers les échelles plus petites, on parle de **cascade directe**. Il arrive cependant pour certaines quantités dans certaines situations que le transfert se fasse en sens inverse, i.e. des échelles plus petites vers les échelles plus grandes. Ce processus est appelé **cascade inverse**. Des exemple de cascade inverse sont donnés par l'énergie dans un écoulement bi-dimensionnel vérifiant (1.1) ou encore par l'énergie d'un scalaire passif dans un écoulement fortement compressible. Dans le cas d'une cascade inverse, soit il y a un mécanisme de dissipation à grande échelle (par exemple frottement avec le bord pour un écoulement 2D) soit l'énergie s'accumule dans les modes de plus grande échelle et il n'y a pas d'état stationnaire du système.

## 2.4 Trajectoires Lagrangiennes

Puisque les petites structures de l'écoulement sont transportées par les grandes, il est souvent plus intéressant d'étudier non pas le mouvement absolu des particules fluides mais plutôt leur mouvement relatif. L'effet des grandes échelles se réduit alors, en première approximation, à un changement de référentiel.

La différence entre les approches Lagrangienne et Eulérienne réside en outre dans les formalismes utilisés. Tandis que dans l'approche Eulérienne on travaille avec des équations aux dérivées partielles (EDP), l'approche Lagrangienne est intrinsèquement plus près du point de vue de processus stochastiques. Tout comme en théorie des probabilités, les deux approches, bien qu'équivalentes, permettent souvent d'avoir des compréhensions complémentaires du problème et c'est tantôt l'une tantôt l'autre qui s'avère plus fructueuse.

Notons ici encore une particularité des écoulements turbulents qui concerne la sé-

paration de deux particules Lagrangiennes, c'est-à-dire la **dispersion Lagrangienne**, dans le domaine inertiel. Richardson observe [48] la séparation  $\rho(t)$  de deux ballons dans une atmosphère agitée. Il trouve expérimentalement que  $\rho^2(t)$  augmente avec le temps  $t$  comme  $t^3$  soit que  $\nu(\rho) \equiv d\langle\rho^2(t)\rangle/dt \propto \rho^{4/3}$  où  $\nu(\rho)$  apparaît comme un coefficient de diffusion effectif à l'échelle  $\rho$ . On peut retrouver ce résultat encore par l'analyse dimensionnelle. À partir d'un flux d'énergie  $\varepsilon$  et d'une distance  $\rho$  la seule combinaison ayant la dimension d'un coefficient de diffusion est  $\nu(\rho) = (\rho^4\varepsilon)^{1/3}$ . Ce qui est remarquable c'est que les deux trajectoires se séparent en loi de puissance du temps, et par conséquent deux trajectoires initialement arbitrairement proches (on suppose  $Re = \infty$  et plus particulièrement  $\ell_\nu = 0$ , sinon il faut que la séparation reste supérieure à l'échelle visqueuse) seront néanmoins séparées par une distance d'ordre 1 en un temps qui reste fini quand la séparation initiale tend vers 0. Ce comportement des trajectoires, caractéristique (du domaine inertiel) des écoulements turbulents est appelé **séparation explosive** des trajectoires. Ceci est qualitativement différent de la situation pour les systèmes dynamiques chaotiques, où la séparation est exponentielle donc deux trajectoires infiniment proches mettront infiniment longtemps à se séparer.

## 2.5 Intermittence

L'intermittence, au niveau phénoménologique, est le fait de constater des événements rares de grande intensité aux petites échelles. Sur une définition plus rigoureuse et/ou formelle les avis divergent et l'on en rencontre dans la littérature un peu selon le goût de chacun.

En général on convient que les événements rares de grande intensité doivent être de plus en plus « marqués » quand on va vers les petites échelles. Les définitions les plus simples diraient par exemple qu'une famille de variables aléatoires (centrées pour faire simple)  $(X(r))_{r \in \mathbb{R}_+}$  est intermittente si la kurtosis  $\frac{\langle X(r)^4 \rangle}{\langle X(r)^2 \rangle^2}$  tend vers l'infini quand  $r \rightarrow 0$ . On peut réécrire ceci comme

$$\left\langle \left[ \frac{X(r)^2}{\langle X(r)^2 \rangle} \right]^2 \right\rangle \xrightarrow{r \rightarrow 0} \infty$$

ce qui dit que la variance de la variable « réduite »  $\frac{X(r)^2}{\langle X(r)^2 \rangle}$  devient très grande aux petits  $r$ , en gros elle aura tendance à prendre des valeurs de plus en plus grandes aux petites échelles. Donc  $X(r)^2$  prendra des valeurs de plus en plus écartées de sa valeur moyenne  $\langle X(r)^2 \rangle$ .

On peut donner une définition plus fine dans le cas où pour tout  $r$  la variable aléatoire  $X(r)$  est positive et tous ses moments d'ordre positif existent et de plus  $\langle X(r)^n \rangle \sim r^{\xi_n}$ . On observe d'abord que  $\xi_n$  est une fonction concave de  $n$ . Ceci découle de l'inégalité de Hölder  $\langle ab \rangle \leq \langle a^p \rangle^{1/p} \langle a^q \rangle^{1/q}$  valable pour des variables aléatoires positives  $a, b$  et des réels  $p, q > 0$  tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , appliquée avec  $a = X(r)^{\frac{n}{p}}, b = X(r)^{\frac{m}{q}}$ . On a

$$r^{\xi_{\frac{n}{p} + \frac{m}{q}}} \sim \langle X(r)^{\frac{n}{p}} X(r)^{\frac{m}{q}} \rangle \leq \langle X(r)^n \rangle^{1/p} \langle X(r)^m \rangle^{1/q} \sim r^{\frac{1}{p}\xi_n + \frac{1}{q}\xi_m}$$

Ceci étant valable quand  $r \rightarrow 0$  on en déduit  $\xi_{\frac{n}{p} + \frac{m}{q}} \geq \frac{1}{p}\xi_n + \frac{1}{q}\xi_m$ , signifiant que  $\xi_n$  est concave en  $n$ . À remarquer aussi que  $\xi_0 = 0$ . On dira alors que la famille  $(X(r))_{r \in \mathbb{R}_+}$

---

est intermittente si  $\xi_n$  n'est pas linéaire. Notons que si  $X(r)$  est Gaussienne pour tout  $r$  alors elle ne peut pas être intermittente car  $\langle X(r)^{2n} \rangle = (2n - 1)!! \langle X(r)^2 \rangle^n$  pour  $r \in \mathbb{N}$ , impliquant la linéarité de  $\xi_n$ , – compte tenue de sa concavité, – pour tout  $n \in \mathbb{R}_+$ .



## Chapitre 3

# Advection passive dans le modèle de Kraichnan

En 1968 Kraichnan introduisit [37], dans le but d'étudier l'advection d'un scalaire passif par un écoulement turbulent, un modèle simplifié, devenu connu depuis sous le nom de **modèle de Kraichnan**. La même année, indépendamment de Kraichnan, Kazantsev introduisit un modèle identique [35] pour des champs magnétiques passifs, sans doute motivé par ses études sur le dynamo astrophysique.

Le modèle d'advection turbulente de Kraichnan a deux propriétés fondamentales. D'une part le champ de vitesse advectant est pris bruit blanc Gaussien en temps. L'hypothèse de Gaussienneté est importante (Majda [42] traite le cas d'un bruit décorréolé en temps, mais Poissonien au lieu de Gaussien, conduisant à un opérateur d'évolution pseudo-différentiel pour le scalaire). D'autre part la statistique du champ de vitesse est donnée indépendamment (de façon a priori) de la quantité advectée.

Kraichnan et Kazantsev remarquèrent tous les deux que le modèle était soluble exactement, au sens où les fonctions à  $N$  points du scalaire passif satisfaisaient à un système d'équations fermé.

### 3.1 Évolution des corrélateurs d'un champ passif

Une quantité tensorielle  $T$  (scalaire, vecteur, gradient ou tenseur d'ordre supérieur), advectée passivement (i.e.  $\vec{v}$  est donné indépendamment de  $T$ ) par le flot du champ de vitesse  $\vec{v}$ , en l'absence de diffusion (pour  $T$ ), vérifie une équation de transport que l'on peut écrire schématiquement

$$\partial_t T = \mathcal{D}_{\vec{v}} T \quad (3.1)$$

où  $\mathcal{D}_{\vec{v}}$  est un opérateur différentiel dépendant linéairement (pas affinel) de  $\vec{v}$ . En particulier si on suppose  $\vec{v}$  de moyenne nulle, on aura  $\langle \mathcal{D}_{\vec{v}} \rangle = 0$ , où  $\langle \cdot \rangle$  signifie, ici et dans la suite, la moyenne par rapport à la statistique du champ de vitesse. On supposera en général – sauf mention du contraire – que  $\langle \vec{v}(\vec{r}, t) \rangle = 0$  pour tout point  $\vec{r}$  et tout instant  $t$ . Pour des exemples concrets de  $\mathcal{D}_{\vec{v}}$  cf. Sect. 3.2, 3.3.

On verra dans la Section 3.6 qu'en passant à la limite où  $\vec{v}$  est Gaussien delta-corrélé en temps, (3.1) est à prendre au sens de Stratonovitch, *même si la statistique de  $\vec{v}$  n'est*

pas réversible dans le temps! La forme Itô correspondante est

$$\partial_t T = \mathcal{D}_{\vec{v}} T + \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}} \circ \mathcal{D}_{\vec{v}} \rangle_- T \quad (3.2)$$

où  $\langle \cdot \rangle_-$  signifie la moyenne sur  $\vec{v}$  à temps égaux pour les deux occurrences de  $\vec{v}$ , et divisé par le terme  $\delta(0)$  par rapport à  $\langle \cdot \rangle$  (en langage mathématique c'est le processus de variation quadratique de la martingale sous-jacente); et  $\circ$  ne signifie pas le produit de Stratonovitch mais la composition des opérateurs différentiels ( $\circ$  est non commutatif). Cette formule peut être aisément vue pour le cas où  $T$  n'est pas un champ (cas de dimension infinie) mais juste un vecteur (cas de dimension finie).

Les puissances tensorielles du champ  $T$  vérifient aussi une équation analogue à (3.1). Si on note  $T^{\otimes N}(r_1, \dots, r_N; t) \equiv T(r_1; t) \otimes \dots \otimes T(r_N; t)$ , alors

$$\partial_t T^{\otimes N} = \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} T^{\otimes N}$$

où  $\mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \equiv \sum_{n=1}^N \mathcal{D}_{\vec{v}}^n$  avec  $\mathcal{D}_{\vec{v}}^n$  étant  $\mathcal{D}_{\vec{v}}$  agissant sur le  $n^{\text{ième}}$  élément du produit tensoriel  $T^{\otimes N}$ . Là aussi la formule est à prendre en interprétation Stratonovitch pour un champ delta-corrélé en temps. La forme Itô correspondante est, comme ci-dessus

$$\partial_t T^{\otimes N} = \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} T^{\otimes N} + \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \circ \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \rangle_- T^{\otimes N}$$

ce qui donne, pour les corrélateurs, à cause de l'indépendance de  $\vec{v}$  par rapport aux  $T$  antérieurs

$$\partial_t \langle T^{\otimes N} \rangle = \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \rangle \langle T^{\otimes N} \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \circ \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \rangle_- \langle T^{\otimes N} \rangle$$

Puisqu'en général on suppose  $\vec{v}$  de moyenne nulle et que  $\mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)}$  est linéaire en  $\vec{v}$ , on a  $\langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} \rangle = 0$ , et le premier terme disparaît. Utilisant le fait que pour  $n \neq m$  les opérateurs  $\mathcal{D}_{\vec{v}}^n$  et  $\mathcal{D}_{\vec{v}}^m$  commutent puisqu'ils ne s'appliquent pas à la même copie de  $T$ , on peut encore écrire

$$\partial_t \langle T^{\otimes N} \rangle = \mathcal{M}_N \langle T^{\otimes N} \rangle \equiv \left[ \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \mathcal{D}_{\vec{v}}^m \rangle_- + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \leq N} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \circ \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \rangle_- \right] \langle T^{\otimes N} \rangle \quad (3.3)$$

Ceci aurait pu aussi être obtenu directement de (3.2) par la formule d'Itô. La formule (3.3) définit l'opérateur d'évolution  $\mathcal{M}_N$  de la fonction à  $N$  points de  $T$ , et on constate que cet opérateur d'évolution est un opérateur aux dérivées partielles d'ordre 2. De plus l'équation d'évolution (3.3) ne fait intervenir que la fonction à  $N$  points de  $T$ , elle a une forme fermée. Ce sont bien là les grands avantages du modèle de Kraichnan.

Le cas forcé peut être traité de manière semblable. On suppose le forçage bruit blanc Gaussien, indépendant du champ de vitesse, de covariance  $\langle f \otimes f \rangle_- = \chi$ . Avec le terme de forçage (3.1) devient  $\partial_t T = \mathcal{D}_{\vec{v}} T + f$  et (3.2) s'écrit alors

$$\partial_t T = \mathcal{D}_{\vec{v}} T + \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}} \circ \mathcal{D}_{\vec{v}} \rangle_- T + f$$

On doit appliquer la formule d'Itô pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_t T^{\otimes N} &= \mathcal{D}_{\vec{v}}^{(N)} T^{\otimes N} + \sum_{n=1}^N T^{\otimes N-1}(\vec{R}_1, \dots, \hat{\vec{R}}_n, \dots, \vec{R}_N) f(\vec{R}_n) \\ &\quad + \mathcal{M}_N T^{\otimes N} + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} T^{\otimes N-2}(\vec{R}_1, \dots, \hat{\vec{R}}_n, \hat{\vec{R}}_m, \dots, \vec{R}_N) \chi(\vec{R}_n, \vec{R}_m) \end{aligned}$$

Dans le cas où  $\vec{v}$  et  $f$  sont centrés, il reste, pour la moyenne de  $T^{\otimes N}$

$$\partial_t \langle T^{\otimes N} \rangle = \mathcal{M}_N \langle T^{\otimes N} \rangle + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} \langle T^{\otimes N-2} \rangle (\vec{R}_1, \dots, \vec{R}_N) \chi(\vec{R}_n, \vec{R}_m)$$

On voit alors que, aussi dans le cas où la champ scalaire est forcé par un terme en bruit blanc Gaussien en temps, indépendant du champ de vitesse et du scalaire, l'équation d'évolution de la fonction à  $N$  points du scalaire est une équation aux dérivées partielles d'ordre 2 dans la variable spatiale (et d'ordre 1 dans la variable temps) et ne fait intervenir que les fonctions à  $N$  et à  $N - 2$  points du scalaire, conduisant encore à un système fermé.

### 3.2 Exemple 1: Le scalaire passif

Commençons par un exemple simple. Le scalaire passif  $\theta$  vérifie l'équation d'évolution  $\partial_t \theta = \mathcal{D}_{\vec{v}} \theta$  avec  $\mathcal{D}_{\vec{v}} = -v_\alpha \partial_\alpha$ :

$$\partial_t \theta = -v_\alpha \partial_\alpha \theta \quad (3.4)$$

Pour  $m \neq n$  on a simplement

$$\langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \mathcal{D}_{\vec{v}}^m \rangle_- = \langle v_\alpha(\vec{r}_n) v_\beta(\vec{r}_m) \rangle_- \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta}$$

Nous supposons dorénavant la statistique du champ de vitesse invariante par translation, de sorte qu'on peut écrire

$$\langle v_\alpha(\vec{r}_n) v_\beta(\vec{r}_m) \rangle_- = D_{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) = D_{\alpha\beta}(\vec{0}) - d_{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)$$

où  $D_{\alpha\beta}$  et  $d_{\alpha\beta}$  sont définis par cette formule même. Nous avons alors

$$\langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \mathcal{D}_{\vec{v}}^m \rangle_- = [D_{\alpha\beta}(\vec{0}) - d_{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m)] \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta}$$

D'autre part pour  $n$  donné (pas de sommation!)

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \mathcal{D}_{\vec{v}}^n \rangle_- &= \langle v_\alpha(\vec{r}_n) v_\beta(\vec{r}_n) \rangle_- \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_n^\beta} + \langle v_\alpha(\vec{r}_n) (\partial_{r_n^\alpha} v_\beta(\vec{r}_n)) \rangle_- \partial_{r_n^\beta} \\ &= D_{\alpha\beta}(\vec{0}) \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_n^\beta} + [\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}} \partial_{r_n^\beta} \end{aligned}$$

Le terme  $[\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}} \partial_{r_n^\beta}$  donnera une contribution nulle dans deux circonstances courantes. Soit quand la statistique de  $\vec{v}$  est isotrope car alors on a  $[\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}} = 0$  (puisque  $[\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}}$  est un tenseur constant ( $\vec{r} = \vec{0}$ ) à un indice covariant ( $\beta$ ), c'est donc un vecteur, et le seul vecteur isotrope est  $\vec{0}$ ). Soit quand c'est la statistique de  $\theta$  qui est invariante de translation, auquel cas c'est la somme

$$\sum_{n=1}^N [\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}} \partial_{r_n^\beta} = [\partial_{r_n^\alpha} d_{\alpha\beta}(\vec{r})]_{\vec{r}=\vec{0}} \sum_{n=1}^N \partial_{r_n^\beta}$$

qui s'annule, car  $\sum_{n=1}^N \partial_{r_n^\beta} = 0$  en ce qui concerne son action sur les corrélateurs de  $\theta$ . On supposera que l'une ou l'autre des deux conditions est vérifiée. Partant de (3.3) on obtient alors

$$\mathcal{M}_N = \frac{1}{2} \sum_{1 \leq m, n \leq N} D_{\alpha\beta}(\vec{0}) \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta} - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} d_{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta}$$

Remarquons alors que l'on peut écrire

$$\sum_{1 \leq m, n \leq N} D_{\alpha\beta}(\vec{0}) \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta} = \sum_{1 \leq \alpha, \beta \leq d} D_{\alpha\beta}(\vec{0}) \left[ \sum_{n=1}^N \partial_{r_n^\alpha} \right] \left[ \sum_{m=1}^N \partial_{r_m^\beta} \right]$$

et les deux sommes entre crochets s'annulent si la statistique de  $\theta$  est homogène. On reste alors avec

$$\mathcal{M}_N = -\frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} d_{\alpha\beta}(\vec{r}_n - \vec{r}_m) \partial_{r_n^\alpha} \partial_{r_m^\beta}$$

L'opérateur à deux points peut encore se simplifier un peu. Utilisant  $\partial_{r_1^\alpha} = -\partial_{r_2^\alpha}$  découlant de l'invariance par translation, on a  $\mathcal{M}_2 = d_{\alpha\beta}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \partial_{r_1^\alpha} \partial_{r_1^\beta}$ . Si l'on introduit  $G(\vec{r}; t) \equiv \langle \theta(\vec{r}; t) \theta(\vec{0}; t) \rangle$ , alors

$$\partial_t G(\vec{r}; t) = d_{\alpha\beta}(\vec{r}) \partial_\alpha \partial_\beta G(\vec{r}; t) \quad (3.5)$$

### 3.3 Exemple 2: Le vecteur passif

Considérons maintenant le cas où le champ advecté est un champ vectoriel (eg. champ magnétique) et l'équation d'advection s'écrit

$$\partial_t T_i = -\partial_\alpha (v_\alpha T_i) + (\partial_j v_i) T_j \quad (3.6)$$

Remarquons que  $\mathcal{D}_v$  sera un opérateur matriciel. Notant  $\partial \circ v$  la composition de la dérivation avec la multiplication par  $v$  (ie.  $\partial \circ v = (\partial v) + v \partial$ ), et omettant de marquer explicitement la dépendance de  $\mathcal{D}$  par rapport à  $\vec{v}$ , on a

$$\mathcal{D}_j^i = -\delta_{ij} \partial_\alpha \circ v_\alpha + (\partial_j v_i)$$

De même,  $\mathcal{M}_N$  sera un opérateur tensoriel  $N$  fois covariant et  $N$  fois contravariant. On pourrait le noter plutôt  $\mathcal{M}_N = \mathcal{M}_{j_1 \dots j_N}^{i_1 \dots i_N}$ . Mais dans le cas particulier  $N = 1$  on écrira juste  $\mathcal{M}_j^i$  et dans le cas  $N = 2$  on utilisera la notation plus économique  $\mathcal{M}_{jj}^{ii}$ .

#### 3.3.1 La fonction à 1 point

Avant de calculer  $\mathcal{M}_2$ , on peut commencer par calculer  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_j^i = \frac{1}{2} \langle \mathcal{D}_k^i(r) \mathcal{D}_j^k(r) \rangle$ . On trouve 4 termes

$$\frac{1}{2} [\delta_{ij} (\partial_\alpha \circ v_\alpha) \circ (\partial_\beta \circ v_\beta) - (\partial_\alpha \circ v_\alpha) \circ (\partial_j v_i) - (\partial_j v_i) \partial_\beta \circ v_\beta + (\partial_k v_i) (\partial_j v_k)]$$

Les corrélateurs sur  $v$  seront ici implicites. On supposera de plus la statistique de  $v$  invariante sous translation.

On ramène l'expression précédente à une forme normale par les transformations suivantes. On expande d'abord les  $\circ$ . Ensuite on utilise l'invariance sous translation de la statistique de  $v$  qui donne l'identité

$$\langle [\partial_\alpha v_i](r) v_j(0) \rangle = -\langle v_i(r) [\partial_\alpha v_j](0) \rangle$$

ce qu'on pourrait aussi écrire comme  $\partial_\alpha \otimes 1 = -1 \otimes \partial_\alpha$  sous-entendu qu'il s'agit de l'action sur la fonction à 2 points de  $v$ . Cette dernière transformation permet de mettre toutes les dérivées, agissant sur les  $v$ , à gauche de tous les  $v$ . Au bout du compte on arrive à

$$\mathcal{M}_j^i = \frac{1}{2}\delta_{ij}(-[\partial_\beta D_{\alpha\beta}](0)\partial_\alpha + D_{\alpha\beta}(0)\partial_\alpha\partial_\beta) + \frac{1}{2}[\partial_j(D_{\alpha i} - D_{i\alpha})](0)\partial_\alpha$$

À noter que dans la formule ci-dessus on ne suppose pas  $D_{ij}$  invariante de rotation. Si la statistique de  $T$  est homogène alors bien sûr l'action de  $\mathcal{M}_j^i$  est nulle.

### 3.3.2 La fonction à 2 points

Passons à la fonction à deux points. Nous supposons désormais que la statistique de  $T$  est invariante sous translations. Les termes coïncidents contribuent à  $M_{jj}^{\bar{i}\bar{i}}$  par

$$\delta_{ij}\delta_{\bar{i}\bar{j}}D_{\alpha\beta}(0)\partial_\alpha\partial_\beta$$

On calcule aisément que le terme non coïncident donne

$$-\delta_{ij}\delta_{\bar{i}\bar{j}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\alpha}} \circ D_{\alpha\bar{\alpha}}(r) + \delta_{ij}\partial_\alpha \circ (\partial_{\bar{j}}D_{\alpha\bar{i}})(r) + \delta_{\bar{i}\bar{j}}\partial_{\bar{\alpha}} \circ (\partial_j D_{i\bar{\alpha}})(r) - (\partial_j\partial_{\bar{j}}D_{\bar{i}\bar{i}})(r)$$

On déduit alors l'opérateur d'évolution temporelle de  $G_{\bar{i}\bar{i}}(\vec{r}; t) \equiv \langle T_{\bar{i}}(\vec{r}; t)T_{\bar{i}}(\vec{0}; t) \rangle$

$$\begin{aligned} \partial_t G_{\bar{i}\bar{i}} &= M_{j\bar{j}}^{\bar{i}\bar{i}} G_{j\bar{j}} \\ &= +\partial_j\partial_{\bar{j}}[d_{j\bar{j}}G_{\bar{i}\bar{i}}] - \partial_j[(\partial_{\bar{j}}d_{j\bar{i}})G_{i\bar{j}}] - \partial_{\bar{j}}[(\partial_j d_{i\bar{j}})G_{j\bar{i}}] + (\partial_j\partial_{\bar{j}}d_{\bar{i}\bar{i}})G_{j\bar{j}} \end{aligned}$$

On a obtenu l'équation d'évolution de la fonction à 2 points. Le cas à  $N$  points est très semblable. En fait l'opérateur d'évolution de la fonction à  $N$  points est la somme sur toutes les paires de points des opérateurs à 2 points.

## 3.4 Exemple 3: Le gradient passif

L'équation d'advection du vecteur passif (type magnétique) en l'absence de dissipation a été écrite en (3.6). L'adjoint de cette équation s'écrit

$$\partial_t T_i = -v_\alpha \partial_\alpha T_i - (\partial_i v_j) T_j \quad (3.7)$$

C'est l'équation vérifiée par le gradient du scalaire passif (type température). En effet, le scalaire passif vérifie  $\partial_t \theta = -v_\alpha \partial_\alpha \theta$  et donc si on pose  $T_i = \partial_i \theta$  alors

$$\begin{aligned} \partial_t T_i &= \partial_t \partial_i \theta = \partial_i \partial_t \theta = -\partial_i (v_\alpha \partial_\alpha \theta) = -(\partial_i v_\alpha) \partial_\alpha \theta - v_\alpha \partial_\alpha \partial_i \theta \\ &= -(\partial_i v_\alpha) T_\alpha - v_\alpha \partial_\alpha T_i \end{aligned}$$

ce qui est la relation voulue.

On voit alors d'après Sect. 3.1 que si pour une quantité  $T$  vérifiant  $\partial_t T = \mathcal{D}T$  sa fonction à deux points vérifie l'EDP  $\partial_t G_2 = \mathcal{M}_2 G_2$ , alors pour une quantité  $\tilde{T}$  vérifiant  $\partial_t \tilde{T} = -\mathcal{D}^\dagger \tilde{T}$  (où  $\mathcal{D}^\dagger$  est l'adjoint de  $\mathcal{D}$ ) sa fonction à deux points vérifie l'EDP  $\partial_t \tilde{G}_2 = \mathcal{M}_2^\dagger \tilde{G}_2$ .

### 3.5 Trajectoires Lagrangiennes

La trajectoire Lagrangienne  $\vec{R}(t | \vec{r}', t')$  qui passe par  $\vec{r}'$  à l'instant  $t'$  satisfait l'équation d'évolution

$$\frac{d}{dt} \vec{R}(t | \vec{r}', t') = \vec{v}(\vec{R}(t | \vec{r}', t'), t) \quad (3.8)$$

avec la condition initiale  $\vec{R}(t' | \vec{r}', t') = \vec{r}'$ . Quand le champ de vitesse est continu en espace-temps et localement Lipschitzien en la variable spatiale, cette équation a une solution unique, assurée par le théorème de Cauchy-Lipschitz. De plus on a clairement la propriété de cocycle

$$\vec{R}(t | \vec{R}(t' | \vec{r}'', t''), t') = \vec{R}(t | \vec{r}'', t'')$$

Si on veut faire simple on considère une seule particule et l'on écrit juste  $\partial_t \vec{R} = \vec{v}(\vec{R}, t)$ . Quand  $\vec{v}$  est pris delta-corrélé en temps, on considère ici encore que c'est la limite d'un champ dont la statistique est symétrique en temps, donc (3.8) est à prendre en interprétation Stratonovitch. La forme Itô correspondante est (en écriture simplifiée)

$$\partial_t \vec{R} = \vec{v}(\vec{R}, t) + \frac{1}{2} \langle ((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}) \rangle_-(\vec{R}, t) \quad (3.9)$$

On remarque que si  $\vec{v}$  a une statistique isotrope alors le vecteur  $\langle ((\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v}) \rangle_-$  est forcément nul. Plus généralement, dans ce cas toutes les interprétations (Itô, Stratonovitch, anti-Itô, etc.) de (3.8) sont équivalentes, ce qui simplifie par exemple les simulations numériques.

De même

$$\partial_t \vec{R}^{(N)} = \vec{v}^{(N)}(\vec{R}^{(N)}, t)$$

est à prendre au sens Stratonovitch. La forme Itô correspondante est

$$\partial_t \vec{R}^{(N)} = \vec{v}^{(N)}(\vec{R}^{(N)}, t) + \frac{1}{2} \langle ((\vec{v}^{(N)} \cdot \vec{\nabla}^{(N)}) \vec{v}^{(N)}) \rangle_-(\vec{R}^{(N)}, t)$$

Pour une fonction  $f$  deux fois continument dérivable de  $\vec{R}^{(N)}$ , la formule d'Itô nous donne

$$\partial_t f = \left[ v_i + \frac{1}{2} \langle (v \cdot \nabla v)_i \rangle_- \right] \partial_i f + \frac{1}{2} \langle v_i v_j \rangle_- \partial_i \partial_j f$$

Si  $f$  est une fonction invariante de translation et aussi la statistique de  $v$  est invariante de translation, alors  $\langle (v \cdot \nabla v)(R) \rangle_-$  est indépendant de  $R$  et l'action  $\langle (v \cdot \nabla v)_i \rangle_- \partial_i$  sur  $f$  est nulle. On reste dans ce cas avec

$$\partial_t f = v_i \partial_i f + \frac{1}{2} \langle v_i v_j \rangle_- \partial_i \partial_j f$$

Il en ressort que  $f(\vec{R}^{(N)})$  est une martingale (ici on ne suppose pas nécessairement  $\vec{v}$  de moyenne nulle) ssi  $[\langle v_i \rangle \partial_i + \frac{1}{2} \langle v_i v_j \rangle_- \partial_i \partial_j] f = 0$  soit encore

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{n=1}^N \langle v_\alpha(\vec{R}_n) \rangle \partial_{R_n^\alpha} f + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n, m \leq N} D_{\alpha\beta}(\vec{R}_n - \vec{R}_m) \partial_{R_n^\alpha} \partial_{R_m^\beta} f \\ &= \sum_{n=1}^N \langle v_\alpha(\vec{R}_n) \rangle \partial_{R_n^\alpha} f - \frac{1}{2} \sum_{1 \leq n \neq m \leq N} d_{\alpha\beta}(\vec{R}_n - \vec{R}_m) \partial_{R_n^\alpha} \partial_{R_m^\beta} f \end{aligned}$$

puisque  $\sum_{n,m} D_{\alpha\beta}(\vec{0}) \partial_{R_n^\alpha} \partial_{R_m^\beta} f = 0$ .

### 3.6 Scalaire passif et trajectoires Lagrangiennes

Dans un écoulement il y a un lien naturel étroit entre le transport d'un scalaire passif et les trajectoires des particules fluides. En termes géométriques les trajectoires correspondent au flot et le scalaire passif est transporté par le flot comme un champ scalaire.

Dans un champ de vitesse continu en espace-temps et localement Lipschitzien en la variable spatiale, où donc les trajectoires Lagrangiennes sont bien définies et uniques, le scalaire passif vérifie

$$\theta(\vec{r}, t) = \theta(\vec{R}(t' | \vec{r}, t), t') \quad (3.10)$$

ce que l'on peut encore écrire

$$\theta(\vec{r}, t) = \int_{\Lambda} \theta(\vec{r}', t') \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}, t)) d\vec{r}' \quad (3.11)$$

Le terme  $\delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}, t))$  est en fait un noyau de probabilité de transition pour une trajectoire d'aller de  $\vec{r}$  à l'instant  $t$  au point  $\vec{r}'$  à l'instant  $t'$  (si  $t' < t$  alors il s'agit de transition par le flot en arrière):  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}, t))$ .

Pour plusieurs points on peut aussi écrire

$$\theta(\vec{r}_1, t) \cdots \theta(\vec{r}_N, t) = \int_{\Lambda^N} \theta(\vec{r}'_1, t') \cdots \theta(\vec{r}'_N, t') \\ K_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) d\vec{r}'_1 \cdots d\vec{r}'_N$$

Quand le flot est lisse on a simplement

$$K_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = \prod_{n=1}^N \delta(\vec{r}'_n - \vec{R}(t' | \vec{r}_n, t))$$

C'est le moment opportun d'introduire la densité de probabilité de transition conjointe de  $N$  trajectoires Lagrangiennes

$$P_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) \equiv \langle K_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) \rangle$$

Si le champ scalaire est pris indépendamment du champ de vitesse à un instant  $t'$ , alors à un instant  $t$  ultérieur on aura

$$\langle \theta(\vec{r}_1, t) \cdots \theta(\vec{r}_N, t) \rangle = \int_{\Lambda^N} \theta(\vec{r}'_1, t') \cdots \theta(\vec{r}'_N, t') P_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) d\vec{r}'_1 \cdots d\vec{r}'_N \quad (3.12)$$

Quand le champ de vitesse n'est plus localement Lipschitzien en la variable spatiale, le théorème de Cauchy-Lipschitz ne garantit plus l'unicité de la solution de (3.8). Le théorème d'existence de Péano garantit encore l'existence des trajectoires, au moins localement. De plus nous devons considérer le cas où le champ de vitesse, au lieu d'être continu, est bruit blanc Gaussien en temps. Des possibles constructions de solutions seront discutées dans la Section 6.

En nous restreignant pour le moment au cas où les trajectoires Lagrangiennes sont bien définies par (3.8) et uniques, nous voyons que (3.10) détermine complètement l'évolution du champ scalaire  $\theta$ . C'est le cas aussi pour les champs de vitesse delta-corrélés en temps, tant que (3.8) peut être interprété comme une équation différentielle stochastique conduisant à des trajectoires uniques. En particulier on a vu dans la Section 3.5 que si la statistique du champ de vitesse  $\vec{v}$  est isotrope (en plus d'être homogène), alors les trajectoires Lagrangiennes ne dépendent pas de la convention (Itô, Stratonovitch, etc.) adoptée pour (3.8). Ceci conduit à la remarque intéressante que (3.1) ne peut certainement pas être prise avec n'importe quelle convention, il y en a tout au plus une qui soit compatible avec (3.10) exprimant le transport Lagrangien de  $\theta$ .

Pour déterminer quelle est la convention imposée par (3.10), reformulons-le

$$\theta(\vec{r}, t + \Delta t) = \theta(\vec{R}(t | \vec{r}, t + \Delta t), t) \quad (3.13)$$

Introduisons

$$\overrightarrow{\Delta R} \equiv \vec{R}(t | \vec{r}, t + \Delta t) - \vec{r} \quad (3.14)$$

Clairement pour  $\Delta t = 0$  nous avons  $\overrightarrow{\Delta R} = 0$ . On admettra en outre que  $\overrightarrow{\Delta R}$  est une semi-martingale continue en  $\Delta t$ . Supposant  $\theta(\vec{r}, t)$  deux fois continument dérivable en  $\vec{r}$  on peut écrire la formule d'Itô comme le développement de Taylor à l'ordre  $\Delta t$

$$\theta(\vec{R}(t | \vec{r}, t + \Delta t), t) = \theta(\vec{r}, t) + \overrightarrow{\Delta R} \cdot \vec{\nabla} \theta(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \langle \Delta R_i \Delta R_j \rangle \partial_i \partial_j \theta(\vec{r}, t) + o(\Delta t)$$

Il est important de noter que  $\overrightarrow{\Delta R}$  doit lui aussi être développé à l'ordre  $\Delta t$ . Combinant avec (3.13) on obtient la formulation en convention Itô de l'équation d'évolution de  $\theta$

$$\begin{aligned} \partial_i \theta(\vec{r}, t) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\theta(\vec{r}, t + \Delta t) - \theta(\vec{r}, t)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{\Delta R}}{\Delta t} \cdot \vec{\nabla} \theta(\vec{r}, t) + \frac{1}{2} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta R_i \Delta R_j \rangle}{\Delta t} \partial_i \partial_j \theta(\vec{r}, t) \end{aligned}$$

Il nous reste à déterminer le développement de  $\overrightarrow{\Delta R}$  à l'ordre  $\Delta t$ . Remarquons qu'on peut écrire

$$\overrightarrow{\Delta R} = \vec{R}(t | \vec{r}, t + \Delta t) - \vec{R}(t + \Delta t | \vec{r}, t + \Delta t)$$

Considérons par exemple que notre trajectoire Lagrangienne  $\vec{R}(t | \vec{r}, t')$  vérifie (3.8) prise en convention Itô. Pour développer  $\overrightarrow{\Delta R}$  à l'ordre  $\Delta t$  il faut intégrer (3.8) en partant de  $\vec{r}$  à l'instant  $t + \Delta t$  et remonter le temps jusqu'à  $t$ . La convention Itô en avant dans le temps devient anti-Itô pour intégrer en remontant le temps, ce qui donne le développement

$$\begin{aligned} \vec{R}(t | \vec{r}, t + \Delta t) &= \vec{R}(t + \Delta t | \vec{r}, t + \Delta t) \\ &+ \int_t^{t+\Delta t} -\vec{v}(\vec{r}, s) ds + \int_t^{t+\Delta t} \langle (-\vec{v}) \cdot \vec{\nabla} (-\vec{v}) \rangle_-(\vec{r}, s) ds + o(\Delta t) \end{aligned}$$

On voit l'apparition de  $\langle \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \rangle_-$  qui est - comme nous l'avons remarqué après (3.9) - nul quand la statistique de  $\vec{v}$  est isotrope. Dans ce cas on a donc simplement  $\overrightarrow{\Delta R} =$

$\int_t^{t+\Delta t} -\vec{v}(\vec{r},s) ds + o(\Delta t)$ , ce qui donne  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{R}}{\Delta t} = -\vec{v}(\vec{r},t)$  et  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\langle \Delta R_i \Delta R_j \rangle}{\Delta t} = \langle v_i v_j \rangle_-(\vec{r},t)$ . Par conséquent

$$\partial_t \theta(\vec{r},t) = -\vec{v}(\vec{r},t) \cdot \vec{\nabla} \theta(\vec{r},t) + \frac{1}{2} \langle v_i v_j \rangle_-(\vec{r},t) \partial_i \partial_j \theta(\vec{r},t) \quad (3.15)$$

à lire en convention Itô. Mais ce n'est rien d'autre que la forme Itô correspondant à (3.4) lu en convention Stratonovitch.

On voit aisément qu'on aurait pu prendre n'importe quelle autre convention (Stratonovitch, anti-Itô, etc.) pour (3.8) et on aurait toujours abouti à (3.15) (à lire toujours en convention Itô). Il apparaît donc que pour (3.4) et plus généralement pour (3.1), seule la convention de Stratonovitch est cohérente avec l'interprétation en termes de transport Lagrangien du champ. L'autre conclusion est que quand le champ de vitesse n'a pas une statistique isotrope on ne peut pas forcément écrire l'advection sous la forme (3.1) sans terme de dérive (i.e.  $\mathcal{D}_{\vec{v}}$  n'est plus linéaire en  $\vec{v}$  mais contient aussi – pour le scalaire – un terme proportionnel à  $\langle \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \vec{v} \rangle_-$ , sauf quand (3.8) est pris en convention Stratonovitch).



## Chapitre 4

# Choix du champ de vitesse dans le modèle de Kraichnan

Rappelons de la Section 3.1 que dans le modèle de Kraichnan on considère des champs de vitesse stochastiques, delta-corrélés en temps, de statistique Gaussienne. De plus on considérera ici seulement le cas où le champ de vitesse est de moyenne nulle en tout point. Il suffit alors, pour caractériser complètement la distribution des champs de vitesse, de donner leur fonction à deux points. Si de plus sa statistique est invariante de translation, on peut écrire

$$\langle \vec{v}(t, \vec{r}) \otimes \vec{v}(t', \vec{r}') \rangle = \delta(t - t') \underline{D}(\vec{r} - \vec{r}') \quad (4.1)$$

où  $\underline{D}(\vec{r}) = \langle \vec{v}(\vec{r}) \otimes \vec{v}(\vec{0}) \rangle_{\perp}$  est le corrélateur à temps égaux du champ de vitesse. Il est commode d'écrire  $\underline{D}$  en représentation Fourier. De manière générique on a

$$\underline{D}(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} E(\vec{k}) \underline{P}(\vec{k}) \quad (4.2)$$

où  $E(\vec{k})$  est un scalaire et  $\underline{P}(\vec{k})$  est un tenseur d'ordre 2 normalisé à être de trace 1.

### 4.1 Propriétés de covariance

Le fait que  $\underline{D}$  soit une covariance implique des propriétés de réel-ité, de positivité et de symétrie.

Tout d'abord  $D_{ii}(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} E(\vec{k})$  étant réel il vient que  $E(-\vec{k}) = E(\vec{k})^*$ . De plus  $D_{ii}$  est la somme de covariances donc  $E(\vec{k}) \in \mathbb{R}_+$ . En particulier  $E(-\vec{k}) = E(\vec{k})$ .

Puisque  $D_{ij}$  est réel, on doit aussi avoir  $P_{ij}(\vec{k}) = P_{ij}(-\vec{k})^*$ . De l'autre côté,  $D_{ij}$  étant une covariance,  $E(\vec{k}) \underline{P}(\vec{k})$  doit être hermitien positif. Compte tenu de la positivité de  $E(\vec{k})$ , il vient que  $\underline{P}(\vec{k})$  est lui-même hermitien positif. En particulier il est diagonalisable et ses valeurs propres sont positives, donc s'il est non nul alors sa trace est strictement positive, en particulier non nulle, ce qui rend la normalisation à trace 1 possible (si  $\underline{P}(\vec{k}) = 0$  on peut prendre  $E(\vec{k}) = 0$ ).

L'invariance par translation de la statistique de  $\vec{v}$  donne la relation

$$D_{ij}(\vec{r}) = \langle v_i(\vec{r}) v_j(\vec{0}) \rangle_{\perp} = \langle v_i(\vec{0}) v_j(-\vec{r}) \rangle_{\perp} = D_{ji}(-\vec{r})$$

ce qui signifie que la partie paire de  $\underline{D}$  est symétrique et sa partie impaire est anti-symétrique. Compte tenu de (4.2) et de la symétrie de  $E(\vec{k})$  ceci équivaut à  $P_{ij}(\vec{k}) = P_{ji}(-\vec{k})$ . On aurait pu également obtenir ceci à partir des deux relations  $P_{ij}(\vec{k}) = P_{ij}(-\vec{k})^*$  et  $P_{ij}(\vec{k}) = P_{ji}(\vec{k})^*$  (ce dernier exprimant que  $\underline{P}$  est hermitien). On peut écrire alors  $\underline{P} = \underline{P}^s + i\underline{P}^a$  avec  $\underline{P}^s$  symétrique paire et  $\underline{P}^a$  anti-symétrique impaire, tous deux à coefficients réels.

Écrivons  $D_{ij}(\vec{r}) = D_{ij}(\vec{0}) - d_{ij}(\vec{r}) = D_{ij}(\vec{0}) - d_{ij}^s(\vec{r}) - d_{ij}^a(\vec{r})$ , où l'on a décomposé  $\underline{d}$  en partie symétrique paire et partie antisymétrique impaire. On a

$$D_{ij}(\vec{0}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} E(\vec{k}) P_{ij}^s(\vec{k}) \quad (4.3)$$

$$d_{ij}(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} (1 - e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}) E(\vec{k}) P_{ij}(\vec{k}) \quad (4.4)$$

$$d_{ij}^s(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} 2 \sin^2 \frac{\vec{k}\cdot\vec{r}}{2} E(\vec{k}) P_{ij}^s(\vec{k}) \quad (4.5)$$

$$d_{ij}^a(\vec{r}) = \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \sin(\vec{k}\cdot\vec{r}) E(\vec{k}) P_{ij}^a(\vec{k}) \quad (4.6)$$

## 4.2 Spectre d'énergie

On cherche le plus souvent à modéliser un écoulement hydrodynamique « réel ». Rappelons de la Section 2.2 que si on prend l'exemple d'un écoulement vérifiant l'équation de Navier-Stokes (1.1) en 3D, on peut distinguer – du moins pour des nombres de Reynolds suffisamment élevés – deux échelles caractéristiques, l'échelle d'injection d'énergie  $\ell_f$  et l'échelle de dissipation d'énergie, qui est l'échelle visqueuse  $\ell_\nu$ . Loin de ces échelles caractéristiques le champ de vitesse suit une loi d'échelle, certes pas exactement, notamment à cause de l'intermittence, mais ceci est une bonne première approximation. Aux échelles plus petites que  $\ell_\nu$  le champ de vitesse est lisse et les différences de vitesse pour une séparation  $r$  sont de l'ordre de  $r$ . Dans le domaine inertiel, c'est-à-dire pour  $\ell_\nu < r < \ell_f$ , les différences de vitesse suivent en gros le spectre de Kolmogorov donnant  $\Delta v(r) \propto r^{1/3}$ . Aux échelles plus grandes que  $\ell_f$  les différences de vitesse sont dominées par le terme de forçage et sont d'ordre  $r^0$  (i.e. ne dépendent pas de  $r$ ). Dans le modèle de Kraichnan on veut reproduire ces lois d'échelle pour le champ de vitesse. Dans le cas le plus simple on se contente de reproduire un seul comportement à toutes les échelles (i.e. on prend  $\ell_\nu = 0$  et  $\ell_f = \infty$ ).

On supposera que la statistique du champ de vitesse est suffisamment isotrope pour que les coefficients non nuls de  $\underline{P}(\vec{k})$  soient d'ordre  $k^0$  à la fois pour  $k$  petit et grand. En fait il serait plus judicieux de dire que ce sont les valeurs propres de  $\underline{P}(\vec{k})$  qui doivent être d'ordre  $k^0$ , ce qui signifie que tous les modes constituant la base diagonalisante de la covariance du champ de vitesse ont une énergie de l'ordre de  $E(\vec{k})$ . On supposera aussi qu'il y a suffisamment d'isotropie pour que  $E(\vec{k})$  soit du même ordre pour  $|\vec{k}|$  fixé, indépendamment de la direction de  $\vec{k}$ . Il est utile alors de définir l'énergie totale à l'échelle  $k$  comme  $E(k) = \int_{|\vec{k}|=k} E(\vec{k}) d\vec{k}$ .

On prend  $E(k) \propto k^{-1-\xi}$ , au moins pour un certain domaine de  $k$ . Ce qui nous intéressera principalement est le comportement de  $E(k)$  pour  $k$  grand, donnant le com-

portement de la covariance du champ de vitesse à petite séparation, selon les théorèmes Taubériens-Abéliens connus. Les petites échelles sont intéressantes soit si l'on veut étudier le domaine inertiel avec  $\ell_\nu = 0$  soit si c'est le domaine visqueux qui nous intéresse. Remarquons que la constante de proportionnalité entre  $E(k)$  et  $k^{-1-\xi}$  est le seul paramètre dimensionnel du modèle. Sa dimension,  $L^{2-\xi}T^{-1}$ , peut être déduite de (4.1) compte tenu de ce que la dimension de  $\delta(t-t')$  est  $T^{-1}$ .

Pour que l'intégrale dans (4.2) ainsi que celles de (4.3), (4.4), (4.5) et (4.6) soient convergentes pour  $k$  grand, il faut avoir  $\xi > 0$ , ce que l'on supposera par la suite. De plus on prendra  $E(k)$  suffisamment régulier pour  $k$  petit pour que toutes les intégrales convergent autour de  $k = 0$ . Le comportement à petit  $k$  de  $E(k)$  influence le comportement à grande séparation de la covariance du champ de vitesse, mais cela n'est pas parmi nos préoccupations.

Pour  $\xi > 0$  donné,  $d_{ij}^s$  et  $d_{ij}^a$  seront de classe  $C^\xi$ , i.e. si l'on note  $[\xi]$  la partie entière de  $\xi$  alors elles sont  $[\xi]$  fois dérivables et leur dérivée d'ordre  $[\xi]$  est Hölder continue d'exposant  $\alpha$  pour tout  $\alpha < \xi - [\xi]$ . Le tenseur  $d_{ij}^s$  étant symétrique son gradient en  $\vec{r} = \vec{0}$  s'annule, cependant il n'y a pas de raison particulière à ce que le gradient de  $d_{ij}^a$  s'annule, ni que les dérivées secondes de  $d_{ij}^s$  soient nulles en  $\vec{r} = \vec{0}$ . Il vient donc que  $d_{ij}^s(\vec{r})$  se comporte comme  $r^\xi$  pour  $0 < \xi < 2$  et comme  $r^2$  pour  $\xi > 2$ . Quant à  $d_{ij}^a(\vec{r})$  il se comporte comme  $r^\xi$  pour  $0 < \xi < 1$  et comme  $r$  pour  $\xi > 1$ .

Quand le but est de modéliser le domaine inertiel d'un champ de vitesse turbulent solution de Navier-Stokes en 3D, habituellement on choisit  $\xi$  de telle sorte que deux particules Lagrangiennes se séparent selon la loi de Richardson (cf. Sect. 2.4), i.e.  $\frac{d}{dt}\rho(t)^2 \propto \rho(t)^{4/3}$  ce qui donne, par simple analyse dimensionnelle,  $\xi = \frac{4}{3}$ .

### 4.3 Compressibilité

En général on peut définir le **degré de compressibilité** d'un champ  $\vec{v}$  comme

$$\varphi = \frac{\langle (\partial_i v_i)^2 \rangle}{\langle (\partial_i v_j)^2 \rangle} \quad (4.7)$$

Clairement  $\varphi \geq 0$  et l'inégalité de Cauchy-Schwartz (dans l'espace Fourier) implique  $\varphi \leq 1$ . On voit que la valeur  $\varphi = 0$  correspond à un champ de vitesse incompressible (sans divergence), alors que  $\varphi = 1$  correspond à un champ potentiel (irrotationnel).

Si l'on applique cette définition à chaque mode Fourier de  $\vec{v}$ , on a, compte tenu de la normalisation  $P_{ii} = 1$

$$\varphi(\vec{k}) = \frac{k_i k_j P_{ij}(\vec{k})}{k^2} = \frac{k_i k_j P_{ij}^s(\vec{k})}{k^2} \quad (4.8)$$

On considérera seulement le cas où  $\varphi$  est indépendant de  $\vec{k}$ . On vérifie alors aisément que  $\varphi$  est égal, pour tout  $\vec{r} \neq \vec{0}$ , à  $\frac{\partial_i \partial_j d_{ij}(\vec{r})}{\partial_i \partial_i d_{jj}(\vec{r})}$  de sorte qu'on peut caractériser  $\varphi$  par (4.7) même si le champ  $\vec{v}$  n'est pas lisse pour  $\xi < 2$ .

### 4.4 Isotropie

Dans un souci de simplicité, on considère en général le champ de vitesse homogène et isotrope. Le plus souvent on ajoute aussi l'invariance sous parité. Alors nécessairement

$\underline{P}$  est combinaison linéaire des tenseurs  $\delta_{ij}$  et  $\frac{k_i k_j}{k^2}$ . La positivité et la normalisation de  $\underline{P}$  impliquent qu'en fait on doit avoir une combinaison convexe des deux tenseurs positifs  $\frac{1}{d-1}[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}]$  et  $\frac{k_i k_j}{k^2}$ . Pour avoir en plus un degré de compressibilité  $\varphi = \varphi(\vec{k})$  (cf. (4.8)) indépendant de  $k$ , la seule possibilité est

$$P_{ij}(\vec{k}, \varphi) = \frac{1 - \varphi}{d - 1} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varphi \frac{k_i k_j}{k^2} \quad (4.9)$$

Dans le cas particulier où l'espace physique est unidimensionnel (i.e.  $d = 1$ ) le champ de vitesse est forcément potentiel et on prend  $P = 1$ .

## 4.5 Brisure de parité

Si l'on permet la brisure de parité, on peut aussi avoir dans  $\underline{P}$  en 3 dimensions le terme  $i\epsilon_{ijl} \frac{k_l}{k}$  et en 2 dimensions le terme  $\epsilon_{ij} k_j k_l - \epsilon_{lj} k_i k_l$ . À cause de la positivité  $\underline{P}$  est en 3D combinaison convexe de  $\frac{1}{2}[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \pm i\epsilon_{ijl} \frac{k_l}{k}]$  et  $\frac{k_i k_j}{k^2}$ . En 2D on a  $P_{ij}(k) = a[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2}] + b \frac{k_i k_j}{k^2} + c \frac{\epsilon_{ij} k_j k_l - \epsilon_{lj} k_i k_l}{k^2}$  avec  $a, b > 0$ ,  $a + b = 1$ ,  $ab > c^2$ . On peut paramétriser ces combinaisons par deux paramètres, la compressibilité  $\varphi \in [0, 1]$  et la brisure de parité  $\lambda \in [-1, 1]$ , comme

$$P_{ij}(\vec{k}, \varphi) = \begin{cases} \frac{1 - \varphi}{2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varphi \frac{k_i k_j}{k^2} + \lambda \frac{1 - \varphi}{2} i\epsilon_{ijl} \frac{k_l}{k} & \text{en 3D} \\ (1 - \varphi) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varphi \frac{k_i k_j}{k^2} + \lambda \sqrt{\varphi(1 - \varphi)} \frac{\epsilon_{ij} k_j k_l - \epsilon_{lj} k_i k_l}{k^2} & \text{en 2D} \end{cases}$$

Notons qu'en 3D le terme brisant la parité contribue à  $d_{ij}^a$ . Pour  $\xi > 1$  le gradient en  $\vec{r} = \vec{0}$  de  $d_{ij}^a$  s'exprime à partir de (4.6) comme

$$\partial_l d_{ij}^a(\vec{0}) = \lambda \frac{1 - \varphi}{2} \epsilon_{ijm} \int \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} E(\vec{k}) \frac{k_l k_m}{k}$$

L'intégrale ci-dessus est proportionnelle à  $\delta_{lm}$  avec un coefficient strictement positif (et fini si on suppose que  $E(\vec{k})$  est régularisé pour petit  $k$ ), donc  $\partial_l d_{ij}^a(\vec{0}) \propto \epsilon_{ijl}$  et  $d_{ij}^a(\vec{r}) \propto \epsilon_{ijl} r_l$  se comporte en  $r^1$  et non pas en  $r^\xi$ .

## 4.6 Classification par le mouvement à 2 points

En regardant le comportement statistique de la séparation Lagrangienne de deux particules on peut donner une classification intéressante et significative des différents comportements qualitatifs que le modèle peut présenter. De (3.12) on déduit

$$G(\vec{r}, t) = \int P^{t, t'}(\vec{r}; \vec{r}') G(\vec{r}', t') d\vec{r}'$$

où nous avons introduit la fonction de densité de probabilité de transition  $P^{t, t'}(\vec{r}; \vec{r}') \equiv \int P(\vec{r} + \vec{\rho}, \vec{\rho}; t' | \vec{r}, \vec{0}; t) d\vec{\rho}$ . Rappelons également que la fonction à deux points d'un scalaire passivement advecté évolue selon (3.5), ce qui donne alors

$$\partial_t P^{t, t'}(\vec{r}; \vec{r}') = \mathcal{M}_2 P^{t, t'}(\vec{r}; \vec{r}')$$

Ceci peut être interprété comme l'équation de Kolmogorov en arrière associée au processus stochastique qu'est la séparation Lagrangienne de deux trajectoires. Si on ne s'intéresse pas à la direction de la séparation seulement à sa grandeur, cela revient à ne considérer l'équation ci-dessus que dans le secteur invariant de rotation. Dans ce cas  $\mathcal{M}_2$  se réduit à

$$M_2 = M \equiv \tilde{D}_0 r^\xi (\partial_r^2 + \frac{a_{\xi,\varphi}}{r} \partial_r) \quad (4.10)$$

avec

$$a_{\xi,\varphi} = \frac{d + \xi}{1 + \xi\varphi} - 1, \quad (4.11)$$

Par la suite on aura besoin de l'implication simple suivante

$$a_{\xi,\varphi} < 1 \implies a_{2,\varphi} < 1.$$

Pour  $d \geq 2$  c'est une conséquence élémentaire de (4.11). Dans le cas  $d = 1$  on a forcément  $\varphi = 1$  et alors  $a_{\xi,1} = 0$  pour toute valeur de  $\xi$ . Ci-après, chaque fois que le degré de compressibilité  $\varphi$  est fixé, on écrira simplement  $a_\xi$  à la place du  $a_{\xi,\varphi}$  plus encombrant, et parfois même juste  $a$  quand il n'y a pas de possibilité de confusion.

Dans le cas  $\xi < 2$  correspondant aux champs de vitesse non-lisses, on peut passer aux nouvelles coordonnées

$$u = u(r) \equiv \frac{2}{2-\xi} \tilde{D}_0^{-1/2} r^{1-\frac{\xi}{2}}. \quad (4.12)$$

Dans ces coordonnées le générateur (4.10) devient

$$\partial_u^2 + \left( \frac{2a_\xi - \xi}{2 - \xi} \right) \frac{1}{u} \partial_u \quad (4.13)$$

et il décrit le processus de Bessel (cf. [17] pour un bref rappel) de *paramètre*  $-b_\xi$  ou de dimension effective  $d_{\text{eff}} = 2(1 - b_\xi)$  où

$$b_\xi = \frac{1 - a_\xi}{2 - \xi}. \quad (4.14)$$

En particulier

$$d_{\text{eff}} = 2 \frac{d - \xi^2 \varphi}{(2 - \xi)(1 + \xi\varphi)}.$$

Quand  $d_{\text{eff}}$  est un entier positif, le processus de Bessel correspondant décrit le comportement de la norme  $|\vec{W}(t)|$  du mouvement Brownien  $d_{\text{eff}}$ -dimensionnel  $\vec{W}(t)$ .

La théorie générale du comportement aux bords des processus de diffusion unidimensionnels a été établie par Feller dans [26]. Pour le processus de Bessel ce comportement aux bords est bien connu [17, 49] et il dépend du paramètre du processus, ou de manière équivalente de sa dimension effective. Pour  $d_{\text{eff}} \leq 0$ , le bord 0 est un point de sortie (les réalisations du processus de diffusion peuvent arriver en 0 en temps fini, mais ne peuvent pas partir de 0, ni en revenir.). Pour  $0 < d_{\text{eff}} < 2$ , le bord est un bord régulier (les réalisations peuvent aller, partir et revenir de 0 en un temps fini). Pour  $d_{\text{eff}} \geq 2$ , le bord zéro est un point d'entrée (les réalisations peuvent partir de 0, mais aucune ne peut l'atteindre en un temps fini). Les différents comportements mentionnés ci-dessus correspondent respectivement aux différents régimes du modèle de Kraichnan qui ont

champ	compressibilité	caractérisation	implications	bord
non-lisse	faible	$\wp \leq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$	$a_{\xi,\wp} \geq 1$	entrée
	intermédiaire	$\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \wp < \frac{d}{\xi^2}$	$1 > a_{\xi,\wp} > \xi - 1$ $1 > a_{2,\wp}$	régulier
	forte	$\wp \geq \frac{d}{\xi^2}$	$\xi - 1 \geq a_{\xi,\wp}$	sortie
lisse	faible	$\wp \leq \frac{d}{4}$	$a_{2,\wp} \geq 1$	naturel
	forte	$\wp \geq \frac{d}{4}$	$a_{2,\wp} \leq 1$	

TAB. 4.1 – Régimes du modèle de Kraichnan sans régularisations

été appelés dans la littérature **fortement compressible** ( $\wp \geq \frac{d}{\xi^2}$ ), **moyennement compressible** ( $\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \wp < \frac{d}{\xi^2}$ ) et **faiblement compressible** ( $\wp \leq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$ ), cf. [31, 23].

Dans le cas limite  $\xi = 2$  correspondant aux champs de vitesse spatialement lisses, on peut introduire la nouvelle coordonnée  $u = \tilde{D}_0^{-1/2} \ln r$ . Dans cette coordonnée le générateur (4.10) devient

$$\partial_u^2 + (a_2 - 1)\partial_u$$

et il décrit un mouvement Brownien avec dérive à la vitesse  $a_2 - 1$ . Dans ce cas  $r = 0$  (correspondant à  $u = -\infty$ ) est un bord naturel d'où aucune réalisation ne peut partir, ni y arriver en temps fini. La quantité  $(a_2 - 1)\tilde{D}_0^{1/2} = \frac{d-4\wp}{1+2\wp}\tilde{D}_0^{1/2}$  est l'exposant de Lyapounov du flot Lagrangien et il est non-négatif dans le régime faiblement compressible  $\wp \leq \frac{d}{4}$ , et non-positif dans le régime fortement compressible  $\wp \geq \frac{d}{4}$ , s'annulant à la rencontre des deux en  $\wp = \frac{d}{4}$ . Nous résumons cette classification dans la Table 4.1. Les trois premières lignes correspondent aux champs de vitesse non lisses avec  $\xi < 2$ . Les deux dernières aux champs lisses avec  $\xi = 2$ . Notons que pour  $d \geq 4$  le régime faiblement compressible s'étend à tout l'intervalle  $0 \leq \wp \leq 1$ , indépendamment de  $\xi$ .

La relation entre le comportement au bord du processus de diffusion  $r(t)$  décrivant la distance entre trajectoires Lagrangiennes, d'une part, et les différents régimes du flot Lagrangien d'autre part, peut être expliquée intuitivement. Si les réalisations peuvent aller en 0 sans pouvoir en revenir, alors elles y sont piégées. Ceci conduit à la coalescence des trajectoires Lagrangiennes, caractérisant le régime fortement compressible [31]. Si les réalisations peuvent aller en 0 et revenir, alors on doit spécifier explicitement le comportement de bord, car plusieurs choix sont possibles. Tel est le cas dans le régime de compressibilité intermédiaire où cette multiplicité des choix a été découverte dans [23]. Si des réalisations partant de l'intérieur de la demi-droite ne peuvent pas atteindre 0, alors il n'y a pas de possibilité de coalescence des trajectoires. Dans ce cas, correspondant au régime faiblement compressible, les trajectoires peuvent cependant se séparer même si initialement elles coïncident, conduisant à un flot Lagrangien non-déterministe [16]. Ce comportement est appelé séparation explosive des trajectoires, par opposition à la séparation exponentielle observée pour des champs de vitesse lisses (dans notre modèle le cas  $\xi = 2$ ), où des particules coïncidentes ne se séparent jamais, tout comme des particules séparées ne se touchent jamais.

# Chapitre 5

## Rôle des modes zéro

### 5.1 Généralités

Nous n'allons pas présenter ici une théorie très générale des modes zéro, telle que ce serait applicable à Navier-Stokes par exemple, car une telle théorie n'existe pas encore. On se bornera à présenter leur utilisation dans le cadre du modèle de Kraichnan, même si leur application dans des situations plus générales est possible, cf. [6, 19]. Dans ce modèle la fonction à  $N$  points d'une quantité passivement advectée vérifie une équation fermée dans le cas sans forçage. Dans le cas forcé, il y a couplage à la fonction à  $N - 2$  points, ce qui conduit en fin de compte encore à un système fermé, mais on verra justement que pour le comportement à petite échelle du cas forcé, seul les termes de degré  $N$  comptent.

Rappelons de la Section 3.1 et plus particulièrement la formule (3.3), que la fonction à  $N$  points d'une quantité tensorielle  $T$  passivement advectée vérifie l'équation aux dérivées partielles

$$\partial_t \langle T^{\otimes N} \rangle = \mathcal{M}_N \langle T^{\otimes N} \rangle$$

d'où l'on a

$$\langle T^{\otimes N}(t) \rangle = \exp(t\mathcal{M}_N) \langle T^{\otimes N}(0) \rangle$$

Si on ajoute un forçage bruit blanc Gaussien statistiquement stationnaire, on a symboliquement

$$\langle T^{\otimes N}(t) \rangle = \exp(t\mathcal{M}_N) \langle T^{\otimes N}(0) \rangle + \int_0^t ds \exp[(t-s)\mathcal{M}_N] \langle T^{\otimes N-2}(s) \rangle \otimes \chi \quad (5.1)$$

Pour étudier le comportement à grand temps de  $\langle T^{\otimes N}(t) \rangle$ , il est utile de considérer sa transformée de Laplace et de se servir du théorème Taubérien-Abélien qui dit que pour des réels  $-1 < p_N < \dots < p_1 < \infty$  les deux comportements ci-dessous de  $f$  et de sa transformée de Laplace  $\hat{f}$  impliquent l'un l'autre

$$f(t) = \sum_{i=1}^N c_i t^{p_i} + o(t^{p_N}) \quad \text{au voisinage de } t = \infty, \quad (5.2)$$

$$\hat{f}(\alpha) = \sum_{i=1}^N c_i \Gamma(p_i + 1) \alpha^{-p_i-1} + o(\alpha^{-p_N-1}) \quad \text{au voisinage de } \alpha = 0^+. \quad (5.3)$$

En effet, la transformée de Laplace de  $\langle T^{\otimes N}(t) \rangle$  fera intervenir  $(\mathcal{M}_N - \alpha)^{-1}$ , plus facile à étudier. Pour le premier terme du membre de droite de (5.1) on a

$$\int_0^\infty e^{-t\alpha} \exp(t\mathcal{M}_N) dt = -(\mathcal{M}_N - \alpha)^{-1}$$

valable quand la partie réelle de  $\alpha$  est plus grande que le maximum de la partie réelle du spectre de  $\mathcal{M}_N$ . Ensuite on peut faire un prolongement analytique en  $\alpha$  en dehors du spectre de  $\mathcal{M}_N$ . Typiquement le spectre de  $\mathcal{M}_N$  est  $\mathbb{R}_-$  et alors le comportement à grand  $t$  de  $\exp(t\mathcal{M}_N)$  est relié au comportement en  $\alpha > 0$  de  $(\mathcal{M}_N - \alpha)^{-1}$  au voisinage de  $\alpha = 0$ , selon (5.2), (5.3).

Pour le deuxième terme du membre de droite de (5.1) on procède par intégration par parties

$$\begin{aligned} J &\equiv \int_0^\infty dt e^{-t\alpha} \int_0^t ds \exp[(t-s)\mathcal{M}_N] G_{N-2}(s) \\ &= \frac{1}{\alpha} \int_0^\infty dt e^{-t\alpha} G_{N-2}(t) + \frac{1}{\alpha} \mathcal{M}_N J \end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$J = (\alpha - \mathcal{M}_N)^{-1} \int_0^\infty dt e^{-t\alpha} G_{N-2}(t)$$

Au total on a

$$\hat{G}_N(\alpha) = (\alpha - \mathcal{M}_N)^{-1} \left[ G_N(0) + \chi \otimes \hat{G}_{N-2}(\alpha) \right]$$

Nous pouvons appliquer cette formule récursivement. Notons que  $G_0 = 1$  donc  $\hat{G}_0(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$ .

De (5.2), (5.3) on voit que  $G_N(t)$  admet une limite finie non nulle pour  $t \rightarrow \infty$  ssi dans le développement en puissances de  $\alpha$  de  $\hat{G}_N(\alpha)$  au voisinage de  $\alpha = 0^+$  le terme de degré le plus bas est en  $\alpha^{-1}$ . Si  $G_N(t)$  et  $G_{N-2}(t)$  ont tous deux des limites (notées simplement  $G_N$  et  $G_{N-2}$ ) quand  $t \rightarrow \infty$  alors à l'état stationnaire on a schématiquement

$$\mathcal{M}_N G_N = \chi \otimes G_{N-2} \quad (5.4)$$

Les conditions de bord sont données par le domaine de  $\mathcal{M}_N$ , et ce dernier est donné par la connaissance de  $(\mathcal{M}_N - \alpha)^{-1}$  pour  $\alpha$  en dehors du spectre de  $\mathcal{M}_N$ ; en particulier  $\mathcal{M}_N^{-1} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} (\mathcal{M}_N - \alpha)^{-1}$  (au sens de la convergence forte des opérateurs et si la limite existe) - c'est utile quand  $\mathcal{M}_N$  n'est pas donné directement mais comme une limite d'opérateurs régularisés par exemple. Toute solution de (5.4) est la somme d'une solution particulière et des solutions de l'équation homogène (comme pour les équations différentielles ordinaires), les coefficients de ces dernières étant déterminées par les conditions de bord. L'opérateur  $\mathcal{M}_N$  étant homogène de degré  $\xi - 2$ , et si en plus  $\chi \otimes G_{N-2}$  se comporte en loi de puissance  $R^h$  au voisinage de  $R = 0$ , on peut choisir la solution particulière de (5.4) à se comporter en loi de puissance  $R^{h+2-\xi}$  au voisinage de  $R = 0$ . Cependant, les solutions de l'équation homogène (NB: on peut prendre une base de l'espace vectoriel des solutions homogènes de (5.4), i.e. des modes zéro de  $\mathcal{M}_N$ , dont tous les éléments soient des fonctions homogènes de  $\vec{R}^{(N)}$ ) peuvent se comporter en loi de puissance au voisinage de 0 avec une puissance plus petite que  $h$ . Dans ce cas il y a

de bonnes chances que dans la fonction de structure (combinaison spécifique de  $G_N$  pris en différents points) ce soit ces solutions de l'équation homogène qui l'emportent aux petites échelles. En fait, c'est seulement quand leur degré d'homogénéité est supérieur à  $h$ , ou bien quand il y a des symétries (ou des annulations accidentelles) qui rendent leurs coefficients nuls qu'elles ne sont pas dominantes.

Quand il n'y a pas d'état stationnaire, en principe il faut regarder les termes en  $\alpha^{-1}$  (voire de degré plus petit si on veut faire un développement asymptotique, et que leurs effets ne sont pas nuls dans la fonction de structure qui est une combinaison particulière). Nous ne nous étendons pas sur ce cas ici, mais une telle situation est traitée dans le Chapitre 10.

## 5.2 Un cas d'école: le scalaire anisotrope

On présentera les idées générales exposées ci-dessus sur le cas de la fonction à deux points du scalaire passif advecté par un champ de vitesse Kraichnan à statistique isotrope. L'intérêt de ce cas réside dans le fait qu'on sait le traiter explicitement, sans approche perturbative.

On suppose  $\underline{d}$  invariant sous rotation et parité, donc ayant deux composantes tensorielles, l'une proportionnelle à  $\delta_{\alpha\beta}$ , l'autre à  $r_\alpha r_\beta$ , plus précisément

$$d_{\alpha\bar{\alpha}} \equiv r^{\xi-2}(S_1 r^2 \delta_{\alpha\bar{\alpha}} + S_2 r_\alpha r_{\bar{\alpha}})$$

avec

$$S_1 \equiv D_0(d + \xi - 1 - \xi\varphi)$$

$$S_2 \equiv D_0\xi(-1 + d\varphi)$$

On a  $\delta_{\alpha\bar{\alpha}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\alpha}} = \Delta$  et  $r_\alpha r_{\bar{\alpha}}\partial_\alpha\partial_{\bar{\alpha}} = \mathcal{H} \circ (\mathcal{H} - 1)$ , où  $\Delta$  est le laplacien en dimension  $d$  et  $\mathcal{H}$  est l'opérateur d'homogénéité  $\mathcal{H} \equiv r_\alpha\partial_\alpha$ . Le Laplacien peut être écrit comme somme d'une partie radiale et d'une partie sphérique:  $\Delta = \mathcal{H}(\mathcal{H} + d - 2) + r^{-2}\Delta_S$  avec  $\Delta_S$  désignant le Laplacien sphérique. On a alors

$$\mathcal{M}_2 = r^{\xi-2}[S_1(\Delta_S + \mathcal{H}(\mathcal{H} + d - 2)) + S_2\mathcal{H}(\mathcal{H} - 1)]$$

On voit alors que l'espace vectoriel des fonctions de la forme  $\Psi(\vec{r}/r)f(r)$ , où  $\Psi(\vec{r}/r)$  est un mode propre du Laplacien sphérique, est stable sous l'action de  $\mathcal{M}_2$ . Le spectre de  $\Delta_S$  est  $-j(j + d - 2)$ ,  $j \in \mathbb{N}$ . L'action de  $\mathcal{M}_2$  peut s'écrire dans chaque secteur de moment angulaire comme

$$\mathcal{M}_{2,j} = C_0 r^\xi \left[ \partial_r^2 + \frac{a}{r} \partial_r - \frac{a}{d-1} \frac{j(j+d-2)}{r^2} \right]$$

avec  $C_0 \equiv S_1 + S_2 = D_0(d-1)(1 + \xi\varphi)$  et  $a \equiv (d-1)S_1/(S_1 + S_2) = \frac{d+\xi}{1+\xi\varphi} - 1$ . Noter que  $a \geq \frac{d+\xi}{1+\xi\varphi} - 1 = \frac{d-1}{1+\xi\varphi} \geq 0$  avec égalité ssi  $d = 1$ . On peut tout de suite écrire les degrés des modes zéro homogènes de  $\mathcal{M}_2$  dans le secteur de moment angulaire  $j$

$$\zeta_{2,j}^\pm = \frac{1}{2} \left[ 1 - a \pm \sqrt{(1-a)^2 + \frac{4a}{d-1} j(j+d-2)} \right] = \frac{1}{2} [1 - a \pm Q]$$

où l'on a introduit  $Q \equiv \sqrt{(1-a)^2 + \frac{4a}{d-1}j(j+d-2)}$ . Notons encore que pour  $j \geq 1$  on a  $j(j+d-2) \geq d-1$  et par conséquent  $Q \geq \sqrt{(1-a)^2 + 4a} = \sqrt{(1+a)^2} = 1+a$  puisque  $a \geq 0$ . Donc  $\zeta_{2,j}^+ \geq 1$  et  $\zeta_{2,j}^- \leq -a < 0$  quand  $j \geq 1$  (en particulier  $d \geq 2$ ).

Le comportement de la fonction à 2 points d'une densité passive est décrite par l'adjoint  $\mathcal{M}_{2,j}^\dagger$  de  $\mathcal{M}_{2,j}$ . Si on réécrit  $\mathcal{M}_{2,j}$  sous la forme

$$\mathcal{M}_{2,j} = C_0[r^{\xi-a}\partial_r r^a \partial_r - r^{\xi-2}\frac{a}{d-1}j(j+d-2)]$$

alors on a pour  $\mathcal{M}_{2,j}^\dagger$  (compte tenu de la mesure d'intégration  $\propto r^{d-1}dr$ )

$$\mathcal{M}_{2,j}^\dagger = C_0[r^{1-d}\partial_r r^a \partial_r r^{\xi-a}r^{d-1} - r^{\xi-2}\frac{a}{d-1}j(j+d-2)]$$

d'où l'on voit que  $\mathcal{M}_{2,j}^\dagger = r^{a-\xi+1-d}\mathcal{M}_{2,j}r^{\xi-a+d-1}$ , en particulier les degrés de ses modes zéro homogènes sont  $\zeta_{2,j}^{\pm} = \zeta_{2,j}^\pm + a - \xi + 1 - d$ .

Il est plus aisé de voir sur les modes zéro de  $\mathcal{M}_{2,j}^\dagger$  quels sont ceux autorisés au voisinage de  $r = 0$ . Ce sera important pour écrire  $(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)^{-1}$ . En effet on a

$$(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)^{-1}(u,v) = \begin{cases} \frac{\phi_{j,\alpha}(u)\psi_{j,\alpha}(v)}{C_0 v^\xi w_{j,\alpha}(v)} & \text{si } u \leq v \\ \frac{\phi_{j,\alpha}(v)\psi_{j,\alpha}(u)}{C_0 v^\xi w_{j,\alpha}(v)} & \text{si } u \geq v \end{cases}$$

où  $\phi_{j,\alpha}$  est solution de  $(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)\phi_{j,\alpha} = 0$  avec condition de bord appropriée en 0,  $\psi_{j,\alpha}$  est solution de  $(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)\psi_{j,\alpha} = 0$  avec condition de bord appropriée en  $\infty$ , et  $w_{j,\alpha}$  est le Wronskien de  $\phi_{j,\alpha}$  et  $\psi_{j,\alpha}$ . L'opérateur  $\mathcal{M}_{2,j}^\dagger$  étant homogène de degré  $\xi - 2 < 0$ , et ayant deux modes zéro, notamment  $r^{\zeta_{2,j}^{\pm}}$ , de manière générale  $\phi_{j,\alpha}$  (et  $\psi_{j,\alpha}$  aussi) se développe en série

$$\phi_{j,\alpha}(r) = c_{j,\alpha}^+ r^{\zeta_{2,j}^+} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{j,n}^+ \alpha^n r^{(2-\xi)n} \right] + c_{j,\alpha}^- r^{\zeta_{2,j}^-} \left[ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{j,n}^- \alpha^n r^{(2-\xi)n} \right]$$

et se comporte au voisinage de  $r = 0$  comme  $c_{j,\alpha}^+ r^{\zeta_{2,j}^+} + c_{j,\alpha}^- r^{\zeta_{2,j}^-}$ .

La seule question que l'on examinera ici est de savoir si  $c_{j,\alpha}^+$  et/ou  $c_{j,\alpha}^-$  peuvent être différents de 0. À cette fin on note que  $(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)^{-1}(u,v)$  décrit, vu comme fonction de  $u$ , l'état stationnaire d'une densité passive injectée à taux constant 1 en  $v$  et qui est tuée exponentiellement avec taux (i.e. demi-vie)  $\alpha$ . Quand  $\alpha > 0$  on a donc forcément un état stationnaire positif avec masse totale finie. La positivité implique que ou bien  $c_{j,\alpha}^- > 0$  ou bien  $c_{j,\alpha}^- = 0$  et  $c_{j,\alpha}^+ > 0$ . La finitude de la masse totale implique que  $\phi_{j,\alpha}(u)$  doit être intégrable au voisinage de  $u = 0$ , sans oublier l'élément d'intégration  $u^{d-1}du$  ceci implique que  $\zeta_{2,j}^{\pm} + d > 0$  sont nécessaires respectivement pour que  $c_j^\pm(\alpha)$  puissent être non-nuls. L'autre condition porte sur le flux, notamment que si flux il y a alors il doit aller de  $v$  vers 0, mais il est interdit d'avoir un flux venant de 0, car rien n'est injecté en 0. On a donc  $u^a \partial_u u^{\xi-a} u^{d-1} \phi_{j,\alpha}(u) \geq 0$  près de  $u = 0$  ce qui nécessite dans le cas  $c_{j,\alpha}^- > 0$  qu'on ait  $\zeta_{2,j}^- + \xi - a + d - 1 = \zeta_{2,j}^- \geq 0$ , et dans le cas  $c_{j,\alpha}^- = 0, c_{j,\alpha}^+ > 0$  qu'on ait  $\zeta_{2,j}^+ + \xi - a + d - 1 = \zeta_{2,j}^+ \geq 0$ .

On voit alors que pour  $j \geq 1$  la condition sur le flux n'est pas vérifiée par  $\zeta_{2,j}^- < 0$  et seul l'autre mode zéro est autorisé. En particulier il n'y a pas de transition de phase liée à

la compressibilité dans les secteurs non isotropes. Pour  $j = 0$  on a  $\zeta_{2,j}^\pm = \frac{1}{2}[1 - a \pm |1 - a|]$ , valant 0 et  $1 - a$ . La condition de masse finie n'est pas vérifiée pour  $\zeta_{2,j} = 0$  donnant  $\zeta_{2,j}^\dagger = a - \xi + 1 - d$  quand  $a - \xi + 1 \leq 0$  (i.e. dans la phase fortement compressible). La condition de flux n'est pas vérifiée pour  $\zeta_{2,j} = 1 - a$  donnant  $\zeta_{2,j}^\dagger = 2 - \xi - d$  quand  $1 - a \leq 0$  (i.e. dans la phase faiblement compressible). Cela donne les 3 phases de compressibilité habituelles dans le secteur isotrope, cf. la Table 4.1.

On se bornera ici à étudier les secteurs non isotropes. Le comportement de  $\phi_{j,\alpha}(u)$  au voisinage de  $u = 0$  impose le choix

$$\phi_{j,\alpha}(u) = u^{\frac{a+1}{2}+1-\xi-d} I_{\frac{Q}{2-\xi}} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{\alpha}{D_0}} u^{\frac{2-\xi}{2}} \right)$$

où  $I$  est la fonction de Bessel modifiée de première espèce. Au voisinage de  $\infty$  c'est  $\psi_{j,\alpha}(v)$  qui doit être intégrable ce qui impose

$$\psi_{j,\alpha}(v) = v^{\frac{a+1}{2}+1-\xi-d} K_{\frac{Q}{2-\xi}} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{\alpha}{D_0}} v^{\frac{2-\xi}{2}} \right)$$

où  $K$  est la fonction de Bessel modifiée de seconde espèce. À partir des coefficients apparaissant dans l'opérateur différentiel  $\mathcal{M}_{j,2}^\dagger$  on peut déduire que le Wronskien est  $w(v) \propto v^{a+2-2d-2\xi}$ . Utilisant les développements pour  $z \rightarrow +\infty$

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} (1 + O(\frac{1}{z})), \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} (1 + O(\frac{1}{z})),$$

pour trouver le coefficient de proportionnalité, on a alors

$$w(v) = \frac{2-\xi}{2} v^{a+2-2d-2\xi}$$

Nous pouvons maintenant développer  $(\mathcal{M}^\dagger - \alpha)^{-1}$  en  $\alpha$  petit. Le terme d'ordre le plus bas est

$$(\mathcal{M}_{2,j}^\dagger - \alpha)^{-1}(u,v) = \frac{1}{C_0 Q} \left\{ \begin{array}{ll} u^{\zeta_{2,j}^+} v^{1-\xi-\zeta_{2,j}^+} & \text{si } u \leq v \\ u^{\zeta_{2,j}^-} v^{1-\xi-\zeta_{2,j}^-} & \text{si } u \geq v \end{array} \right\} + O(\alpha)$$

compte tenu du fait que aussi  $Q/(2-\xi) \geq 1$  pour  $j \geq 1$  ( $\frac{Q}{2-\xi} \geq \frac{1+a}{2-\xi} \geq \frac{d+\xi}{(1+\xi)(2-\xi)} \geq \frac{2+\xi}{(1+\xi)(2-\xi)} \geq 1$  pour  $0 \leq \xi \leq 2$ ). Pour  $(\mathcal{M} - \alpha)^{-1}$  on a de même

$$(\mathcal{M}_{2,j} - \alpha)^{-1}(u,v) = \frac{1}{C_0 Q} \left\{ \begin{array}{ll} u^{\zeta_{2,j}^+} v^{1-\xi-\zeta_{2,j}^+} & \text{si } u \leq v \\ u^{\zeta_{2,j}^-} v^{1-\xi-\zeta_{2,j}^-} & \text{si } u \geq v \end{array} \right\} + O(\alpha)$$

Dans le cas de la décroissance libre, les relations (5.2) et (5.3) permettent seulement de dire que la fonction à deux points dans chaque secteur de moment angulaire  $j \geq 1$  décroît plus vite que  $t^{-1}$ . Il faudrait aller plus loin, faire un calcul spectral complet (effectuer une intégrale de contour de  $(\mathcal{M}_{2,j} - \alpha)^{-1}$  en la variable  $\alpha$  autour du spectre de  $\mathcal{M}_{2,j}$  i.e. la demi-droite réelle négative dans le plan complexe. En effet  $(\mathcal{M}_{2,j} - \alpha)^{-1}$

a une coupure de branche le long de cette demi-droite. Pour un exemple de tel calcul, voire le Chapitre 10).

Par contre on a directement le résultat pour le cas forcé. Le comportement asymptotique de la fonction à deux points dans le secteur de moment angulaire  $j$ , si le forçage dans ce secteur est  $\chi_j$ , s'écrit

$$F_{2,j}(r,t) = \frac{1}{C_0 Q} \left[ r^{\zeta_{2,j}^-} \int_0^r r'^{1-\xi-\zeta_{2,j}^-} \chi_j(r') dr' + r^{\zeta_{2,j}^+} \int_r^\infty r'^{1-\xi-\zeta_{2,j}^+} \chi_j(r') dr' \right] + O(t^{-1})$$

À noter que de manière générale  $\chi_j(r') \sim r'^j$  pour  $r'$  petit, et décroît très vite pour  $r'$  grand. Rappelons que  $\zeta_{2,j}^- < 0$  donc  $1 - \xi - \zeta_{2,j}^- > -1$ , par conséquent le premier terme se comporte, pour  $r$  petit, en  $r^{2-\xi+j}$ . Ceci correspond à la loi de puissance normale. Le comportement du deuxième terme dépend du signe de  $2 - \xi - \zeta_{2,j}^+ + j$ . Si ce nombre est positif alors l'intégrale converge en  $r = 0$  et le terme se comporte en  $r^{\zeta_{2,j}^+}$ , ce qui est une loi de puissance anormale. Remarquons que justement on est dans le cas  $\zeta_{2,j}^+ < 2 - \xi + j$ , donc il sera dominant. Dans le cas contraire, quand  $2 - \xi - \zeta_{2,j}^+ + j < 0$ , l'intégrale diverge en  $r = 0$  et le terme se comporte en  $r^{2-\xi+j}$ , ce qui est la loi de puissance normale. Il est intéressant de remarquer que les deux cas sont possibles. En effet  $\zeta_{2,j}^+$  se comporte, pour  $j$  grand, comme  $\sqrt{\frac{a}{d-1}} j$ , et on a  $\frac{a}{d-1} = 1 + \frac{\xi(1-d\varphi)}{(d-1)(1+\xi\varphi)}$ , donc dépendant du signe de  $1 - d\varphi$  c'est  $\zeta_{2,j}^+$  ou  $2 - \xi + j$  qui l'emporte.

## 5.3 Spectres de modes zéro reliés

### 5.3.1 $\mathcal{M}$ et $\mathcal{M}^\dagger$

Le spectre des modes zéro de  $\mathcal{M}^\dagger$  peut être relié de manière simple à celui de  $\mathcal{M}$ . On donne ici cette relation car elle est utile quand on veut relier le comportement du scalaire passif à celui de la densité passive, ou encore le comportement du vecteur passif à celui du gradient du scalaire passif.

$\mathcal{M}$  est un opérateur homogène de degré  $-\gamma = \xi - 2$ . Soit  $\tilde{\mathcal{M}} = x^\gamma \mathcal{M}_2$ , qui est un opérateur homogène de degré 0. En transformée de Mellin, il sera diagonal par blocs sur chaque secteur de degré d'homogénéité fixe. Rappelons la transformée de Mellin d'une fonction, définie pour  $c \in \mathbb{R}$

$$\hat{f}(c; \bar{x}) = \int_0^\infty f(t\bar{x}) t^{\frac{d}{2}-ic} dt$$

où  $\bar{x} = \vec{x}/|x|$ . La transformée de Mellin  $\hat{\mathcal{M}}$  de  $\tilde{\mathcal{M}}$  s'obtient en conjugant  $\tilde{\mathcal{M}}$  par la transformation  $f \rightarrow \hat{f}$ . L'opérateur  $\hat{\mathcal{M}}$  étant homogène, on peut écrire  $\hat{\mathcal{M}}(c; \bar{x}; c'; \bar{x}') = \delta(c - c') \hat{\mathcal{M}}(c)(\bar{x}; \bar{x}')$ . On peut prolonger analytiquement  $\hat{\mathcal{M}}(c)$  pour  $c \in \mathbb{C}$ . Si pour un certain  $c$  on a  $\hat{\mathcal{M}}(c)$  non inversible, alors  $h = -\frac{d}{2} + ic$  est dans le spectre de modes zéro de  $\tilde{\mathcal{M}}$ .

On voit alors que  $(\hat{\mathcal{M}}(c))^\dagger = (\hat{\mathcal{M}})^\dagger(\bar{c}) = \widehat{(\tilde{\mathcal{M}}^\dagger)}(\bar{c})$ . Donc le spectre de modes zéro de  $\tilde{\mathcal{M}}^\dagger$  contiendra  $h' = -\frac{d}{2} + i\bar{c} = -\frac{d}{2} + i[i(\bar{h} + \frac{d}{2})] = -d - \bar{h}$  et on voit aisément que celui de  $\mathcal{M}^\dagger$  contiendra  $h'' = \gamma - d - \bar{h}$ .

### 5.3.2 Scalaire et gradient passifs

On remarque que si  $G_N$  est un mode zéro de l'opérateur d'évolution  $\mathcal{M}_N$  du scalaire passif alors  $\vec{\nabla}^{\otimes N} G_N$  est un mode zéro du  $\mathcal{M}_N$  du gradient du scalaire passif, parce que

$$\partial_t \langle (\vec{\nabla} \theta)^{\otimes N} \rangle = \vec{\nabla}^{\otimes N} \partial_t \langle \theta^{\otimes N} \rangle$$

Ainsi si  $h$  est dans le spectre du scalaire passif alors  $h - N$  sera dans celui de son gradient.

Combinant avec le résultat de la section précédente on voit ainsi que  $h''' = N + \gamma - d - \bar{h}$  sera dans le spectre du vecteur passif. Notons cependant qu'on n'obtient ainsi que les modes zéro de  $\mathcal{M}_N$  (du gradient passif) restreint au secteur irrotationnel de (3.7) et le même vaut pour le champ magnétique.



## Chapitre 6

# Flots généralisés, noyaux, solution statistique

On a vu dans la Section 4.6 que la séparation de deux trajectoires Lagrangiennes peut se comporter différemment en fonction du paramètre  $\wp$  donnant le degré de compressibilité du modèle de Kraichnan. En particulier, la classification obtenue, résumée dans le Tableau 4.1, semble indiquer que dans le cas des champs de vitesse non lisses ( $\xi < 2$ ) on peut avoir **comportement explosif** des trajectoires (séparation de particules partant du même point au même instant) ou **coalescence** (particules initialement séparées, ayant des trajectoires coïncidentes à partir d'un certain moment). Ce genre de comportement est très différent de ce que l'on peut observer dans le cas des champs de vitesse Lipschitziens, en particulier les systèmes dynamiques où il y a séparation et convergence exponentielles des trajectoires: donc ni séparation explosive ni coalescence, qui restent interdites par l'unicité des trajectoires.

Dans le cas des champs de vitesse non-lisses ni l'équation (3.1) de transport d'un champ passif, ni l'équation (3.8) d'évolution des trajectoires Lagrangiennes ne sont bien définies. On doit leur donner un sens. Une façon naturelle de procéder dans ce cas est d'introduire un peu de régularisation de type visqueux pour le champ de vitesse et/ou de type diffusivité moléculaire pour le scalaire advecté. On remplace donc l'équation (3.8) par l'équation stochastique

$$\frac{d}{dt} \vec{R}_{\nu,\kappa}(t | \vec{r}', t') = \vec{v}_\nu(\vec{R}_{\nu,\kappa}(t | \vec{r}', t'), t) + \sqrt{2\kappa} \vec{\eta}(t)$$

où  $\vec{v}_\nu$  et la vitesse régularisée de façon commode,  $\kappa$  est le coefficient de diffusion du scalaire et  $\vec{\eta}$  est un bruit blanc Gaussien vectoriel. Cette équation différentielle stochastique a une unique solution forte (au sens stochastique, c'est-à-dire une fonction mesurable de  $\vec{\eta}$ ). On peut définir le noyau régularisé  $K_{\nu,\kappa}(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)$  en moyennant sur  $\vec{\eta}$  (noté par surligné)

$$K_{\nu,\kappa}(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \overline{\delta(\vec{r}' - \vec{R}_{\nu,\kappa}(t' | \vec{r}, t))}$$

Ensuite on essaye de montrer qu'en prenant la limite de régularisation zéro on a convergence du noyau dans un sens approprié qu'il faudra spécifier. La régularisation  $\kappa$  (i.e.  $\nu = 0$  et  $\kappa \rightarrow 0$ ) a été discutée par Bernard, Gawędzki et Kupiainen dans [16, 29]. Les relations entre la régularisation  $\kappa$  et la régularisation  $\nu$  (i.e.  $\kappa = 0$  et  $\nu \rightarrow 0$ ) pour les vitesses de Kraichnan ont été le sujet des travaux de E et Vanden-Eijnden [23, 24]. Pour

le même ensemble de vitesses, Le Jan et Raimond [41] ont défini directement les noyaux sans régularisation. Nous présenterons leur construction en deuxième place.

Dans les deux cas on aboutit à une notion de **flot généralisé**. Par opposition à la notion classique de flot donné par l'application bijective  $\vec{r} \mapsto \vec{R}(t' | \vec{r}, t)$ , on aura (pour chaque réalisation du champ de vitesse) un processus de Markov donné par application  $\vec{r}' \mapsto K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) d\vec{r}'$  dans l'espace des mesures de probabilité. La composition des flots

$$\vec{R}(t'' | \vec{R}(t' | \vec{r}, t), t') = \vec{R}(t'' | \vec{r}, t)$$

est remplacée par la convolution des probabilités de transition

$$\int K(\vec{r}''; t'' | \vec{r}'; t') K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) d\vec{r}' = K(\vec{r}''; t'' | \vec{r}; t)$$

à la Chapman-Kolmogorov. Le flot déterministe peut être vu comme le cas spécial du flot généralisé où  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}, t))$ .

## 6.1 Régularisation à la Vanden-Eijnden et E

Dans leur travail à la suite de [29, 41], E et Vanden-Eijnden ont discuté, pour les vitesses de Kraichnan, les différentes limites possibles où disparaissent les régularisations de l'équation (3.8), introduisant à la fois un lissage spatial du champ de vitesse à l'échelle  $\ell_\nu$  et de la diffusivité moléculaire  $\kappa$ . On s'inspire librement de [23] (où ces résultats sont annoncés sans démonstration et pas entièrement explicitement) et [24] (où des résultats plus faibles sont prouvés et par conséquent énoncés plus rigoureusement) pour les énoncés suivants. Il s'agit donc d'énoncés « vraisemblables ». Ici nous allons considérer seulement les cas où l'on prend les limites des noyaux  $K_{\nu, \kappa}(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)$  dans l'ordre  $\lim_{\kappa \rightarrow 0} \lim_{\ell_\nu \rightarrow 0}$  ou  $\lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} \lim_{\kappa \rightarrow 0}$ . Pour la possibilité de prendre les limites simultanément et le type de comportement qu'on peut alors obtenir, voir la Section 10.

Considérons d'abord la situation où l'on prend d'abord la limite  $\ell_\nu \rightarrow 0$  et ensuite la limite  $\kappa \rightarrow 0$ . On peut montrer dans le cadre du modèle de Kraichnan (isotrope, compressibilité constante) [23] qu'il existe, pour presque toute réalisation du champ de vitesse, un noyau  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)$ , (donné directement par la construction de Le Jan et Raimond, voir la section suivante) tel que pour toute fonction test  $\theta$

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} \left\langle \left[ \int d\vec{r}' \theta(\vec{r}') \{K_{\nu, \kappa}(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) - K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)\} \right]^2 \right\rangle = 0, \quad (6.1)$$

$\langle \cdot \rangle$  étant la moyenne sur l'ensemble des vitesses.

Dans la phase fortement compressible du modèle de Kraichnan, tout comme pour les champs de vitesse lisses, il existe  $\vec{R}(t' | \vec{r}, t)$  tel que l'on ait  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}, t))$ . Néanmoins, contrairement au cas lisse, les applications  $\vec{r} \mapsto \vec{R}(t' | \vec{r}, t)$  ne sont pas inversibles, mais représentent des trajectoires coalescentes. Ceci est signalé par la présence d'une contribution proportionnelle à  $\delta(\rho)$  dans la distribution

$$\left\langle \delta\left(\rho - \left| \vec{R}(t' | \vec{r}, t) - \vec{R}(t' | \vec{r}', t) \right| \right) \right\rangle$$

de la distance à temps  $t'$  entre deux particules lancées à temps  $t$  dans deux points distincts  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  [31].

Dans les phases de compressibilité faible et intermédiaire, pour des champs de vitesse non-lisses,  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)$  ne sera plus une masse de Dirac en un point, comme signalé par la forme lisse en  $\rho$  de la distribution

$$\left\langle \delta(\rho - |\vec{r}' - \vec{r}''|) K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) K(\vec{r}''; t' | \vec{r}; t) d\vec{r}' d\vec{r}'' \right\rangle$$

des distances de particules partant du même point  $\vec{r}$  en temps  $t$ . Ceci signifie que des particules lâchées du même point au même instant « ont le choix » entre plusieurs trajectoires différentes possibles.

On peut également faire tendre les régularisations vers zéro dans l'autre sens. Commencer par  $\kappa \rightarrow 0$  revient en fait simplement à prendre  $\kappa = 0$  et on tombe sur les noyaux  $K_\nu$  qu'on peut obtenir directement dans les vitesses lisses. Ils ont la forme

$$K_\nu(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \delta(\vec{r}' - \vec{R}_\nu(t' | \vec{r}; t))$$

pour un flot  $\vec{r} \mapsto \vec{R}_\nu(t' | \vec{r}; t)$  (de tels flots ont été étudiés dans le livre [38]). Il faut alors définir de manière adéquate la limite  $\lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} K_\nu$ . Ceci est un peu moins évident que dans le cas précédent. Dans le cas fortement compressible on peut énoncer l'analogie de (6.1): pour toute fonction test  $\theta$

$$\lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} \left\langle \left[ \int d\vec{r}' \theta(\vec{r}') \{K_\nu(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) - K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)\} \right]^2 \right\rangle = 0 \quad (6.2)$$

et encore une fois on peut écrire  $K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) = \delta(\vec{r}' - \vec{R}(t' | \vec{r}; t))$  (le noyau  $K$  est le même que pour la limite dans le sens inverse).

Aussi dans le cas de compressibilité faible on devrait retomber sur la même limite qu'avec la régularisation par terme de Langevin. Or  $K_\nu$ , pour  $\nu > 0$ , est toujours une distribution de Dirac, donc nécessairement on devrait écrire une version (plus) faible de (6.2). On a en fait

$$\lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} \left\langle \left[ \int d\vec{r} d\vec{r}' \theta(\vec{r}') \{K_\nu(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t) - K(\vec{r}'; t' | \vec{r}; t)\} \vartheta(\vec{r}) \right]^2 \right\rangle = 0$$

pour des fonctions test  $\theta$  et  $\vartheta$ .

En ce qui concerne le cas de compressibilité intermédiaire la situation est encore plus complexe. D'une part on sait qu'une trajectoire individuelle a plusieurs « choix », mais la distribution des distances entre les particules se comporte, dans la limite  $\ell_\nu \rightarrow 0$ , comme dans le cas coalescent. Ici on s'attend à la convergence en loi, ou pour les moments, c'est-à-dire qu'il existe des densités  $P_N^c$  telles que

$$\left\langle f(\vec{R}_\nu(t' | \vec{r}_1, t), \dots, \vec{R}_\nu(t' | \vec{r}_N, t)) \right\rangle \xrightarrow{\nu \rightarrow 0} \int f(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N) P_N^c(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t | \vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t') d\vec{r}'_1 \dots d\vec{r}'_N \quad (6.3)$$

pour toute fonction  $f$  continue bornée. Il est sans doute possible de faire un peu mieux, voir la section suivante.

## 6.2 Construction de Le Jan et Raimond

On peut aborder le problème de manière plus abstraite en partant de l'équation (3.1) pour un champ scalaire (i.e. de (3.4)). On définit la solution de cette équation de transport à partir de l'exponentielle de l'opérateur d'évolution  $\mathcal{M}_1$ , qui s'écrit formellement, en convention Itô:

$$\theta(\vec{r}, t) = \int \mathcal{T} \exp \left[ \int_t^{t'} (-\vec{v}(\cdot, s) \cdot \vec{\nabla} + \frac{D_0}{2} \Delta) ds \right] (\vec{r}, \vec{r}') \theta(\vec{r}', t') d\vec{r}'$$

où  $\mathcal{T} \exp$  désigne l'exponentielle ordonnée en temps. On peut la développer en somme de puissances de  $\vec{v}$  (dit « développement en chaos de Wiener ») pour écrire

$$\theta(\vec{r}, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{t > t_1 > \dots > t_n > t'} e^{(t-t_1) \frac{D_0}{2} \Delta} (-\vec{v}(\cdot, t_1) \cdot \vec{\nabla}) e^{(t_1-t_2) \frac{D_0}{2} \Delta} \dots \\ (-\vec{v}(\cdot, t_n) \cdot \vec{\nabla}) e^{(t_n-t') \frac{D_0}{2} \Delta} dt_1 \dots dt_n.$$

Le Jan et Raimond ont montré dans [40] que cette série, vue comme une suite de fonctions  $L^2$  sur l'espace des champs de vitesse, converge en norme  $L^2$ . De plus on aura

$$\langle \theta(\vec{r}, t)^2 \rangle \leq e^{(t-t') \frac{D_0}{2} \Delta} (\vec{r}, \vec{r}') \theta(\vec{r}', t')^2 \quad (6.4)$$

Connaître l'évolution d'un champ scalaire équivaut à la connaissance des noyaux  $K(\vec{r}', t' | \vec{r}, t)$  si on écrit que

$$\theta(\vec{r}, t) = \int K(\vec{r}', t' | \vec{r}, t) \theta(\vec{r}', t') d\vec{r}'$$

voir (3.11). On peut montrer que, sous l'hypothèse (6.4), il y a unicité des  $K$ , solutions de (3.4).

On peut aussi ajouter la diffusivité moléculaire à la construction de Le Jan et Raimond. Ceci revient à remplacer  $\frac{D_0}{2}$  par  $(\frac{D_0}{2} + \kappa)$  plus haut. De plus, dans la limite  $\kappa \rightarrow 0$  on retombe sur les noyaux construits sans diffusivité.

Avec les noyaux  $K$  bien définis pour presque toute réalisation du champ de vitesse, on peut considérer les probabilités de transition à  $N$  particules. Si on prend des particules sans interaction, on aura simplement

$$P_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = \left\langle \prod_{n=1}^N K(\vec{r}'_n; t' | \vec{r}_n; t) \right\rangle. \quad (6.5)$$

Les familles  $(P_N)_{t, t'}$  ainsi obtenues constituent, pour chaque  $N$ , une famille de probabilités de transition Markoviennes (grâce à la décorrélation temporaire des vitesses de Kraichnan). Les  $P_N$  sont symétriques sous permutation des particules: pour toute permutation  $\pi$  de  $N$  particules on a

$$P_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = P_N(\vec{r}'_{\pi_1}, \dots, \vec{r}'_{\pi_N}; t' | \vec{r}_{\pi_1}, \dots, \vec{r}_{\pi_N}; t). \quad (6.6)$$

De plus, les  $P_N$  pour différents  $N$  sont consistants entre eux, au sens où « oublier » l'une des  $N$  particules dans  $P_N$  redonne  $P_{N-1}$ :

$$\int d\vec{r}'_N P_N(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; t) = P_{N-1}(\vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_{N-1}; t' | \vec{r}_1, \dots, \vec{r}_{N-1}; t)$$

Inversement, Le Jan et Raimond ont montré [39] que, si on se donne une famille de probabilités de transition Markoviennes  $P_N$  qui correspondent à des processus de Feller (en gros diffusions avec chemins continus) et de plus les  $P_N$  sont symétriques sous permutation des particules et consistantes entre différents  $N$ , alors il existe une variable aléatoire  $(K_\omega)_{\omega \in \Omega}$  à valeurs dans les noyaux de transition, telle que (6.5) soit vérifiée par les  $P_N$  et  $K_\omega$ , où la moyenne  $\langle \cdot \rangle$  est remplacée par la moyenne par rapport à  $\omega$ , et tel qu'on ait  $K(s|t) * K(t|u) = K(s|u)$  presque sûrement. Pour chaque  $\omega$ , la famille  $(K_\omega(s|t))_{s,t}$  permet de reconstruire un champ de vitesse  $\vec{v}_\omega$ , tel que  $K_\omega$  soit solution de (3.4) pour  $\vec{v} = \vec{v}_\omega$ . Cette construction permet donc, en particulier, de récupérer les champs de vitesses et les noyaux  $K$  de Le Jan et Raimond, à partir des probabilités  $P_N$  données par les moments (6.5). Mais le schéma est plus général.

Comme Le Jan et Raimond ont montré [39], il est possible de modifier les probabilités  $P_N$ . On considère les processus Markoviens à  $N$  particules définis par  $P_N$  et, à chaque fois que deux particules se rencontrent, on remplace l'évolution ultérieure des  $N$  particules par celle de  $N - 1$  particules, de la façon évidente. Cette modification, qui remonte aux travaux d'Arratia [8], donne une nouvelle famille  $P_N^c$  de probabilités de transition Markoviennes, ayant les propriétés de Feller, symétriques et consistantes. Cette famille  $P_N^c$  est différente de la famille  $P_N$  du départ ssi les paires de particules dans le processus original peuvent se rencontrer avec probabilité positive tout en ayant le possibilité de se re-séparer ensuite. Telle est justement la situation pour les ensembles de Kraichnan dans la phase de compressibilité intermédiaire. Dans ce cas on obtient à partir des  $P_N^c$ , – qui devraient coïncider avec les densités obtenues dans la limite  $\ell_\nu \rightarrow 0$ , voir (6.3), – une nouvelle famille des noyaux  $K_\omega^c$ . On peut récupérer les noyaux originaux  $K$  à partir des noyaux  $K^c$  comme des moyennes de ces derniers conditionnées sur les vitesses:

$$K_{\vec{v}} = \mathbb{E}(K_\omega | \vec{v})$$

Notons néanmoins que pour  $N > 1$

$$K_{\vec{v}}^{\otimes N} \neq \mathbb{E}(K_\omega^{\otimes N} | \vec{v})$$

puisque les moyennes sur  $\vec{v}$  des deux côtés donnent  $P_N$  et  $P_N^c$ , respectivement. On devrait être en mesure de montrer que c'est le côté droit qu'on obtient comme limite faible de  $\lim_{\ell_\nu \rightarrow 0} K_\nu^{\otimes N}$ , au sens  $L^2$  sur l'ensemble des vitesses, en renforçant (6.3).

Dans le Chapitre 10 nous allons étudier, pour les degrés de compressibilité intermédiaires du modèle de Kraichnan, une limite spéciale du processus à deux particules en présence de viscosité et de diffusivité. Notamment dans le passage à la limite on va régler la dépendance entre  $\ell_\nu$  et  $\kappa$  d'une manière bien choisie. Cette limite conduit à des probabilités de transition  $P_2^{\text{st}}$  (« sticky ») dépendantes d'un paramètre (la « colle entre les particules ») et interpolant entre  $P_2$  et  $P_2^c$  décrits plus haut. La construction des probabilités  $P_N^{\text{st}}$  à  $N > 2$  particules (et donc des noyaux  $K_\omega^{\text{st}}$ ) reste un problème ouvert.

Notons enfin que, le fait qu'il y ait anomalie pour la fonction à 2 points de la densité passive quand  $\xi_\nu > 0$ , semble indiquer que dans ces cas  $K_\omega$  a une structure multifractale.



## Chapitre 7

# L'approche perturbative – effet de la brisure de parité

En général on ne sait pas calculer le spectre de modes zéro de l'opérateur  $\mathcal{M}_N$  de façon analytique, en l'absence de symétries suffisantes. Pour se faire une idée du spectre on peut tenter de faire un calcul perturbatif autour d'une situation avec plus de symétries. Les moyens lourds, c'est le groupe de renormalisation [2, 3]. Mais parfois on peut s'en tirer avec juste des calculs ressemblant aux calculs perturbatifs habituels de la mécanique quantique (de base). C'est cette dernière méthode qu'on illustrera ici sur l'exemple original du scalaire passif transporté par un champ de vitesse Kraichnan isotrope mais brisant la parité. La perturbation se fera autour de la situation  $\xi = 0$  où le modèle de Kraichnan se réduit à la diffusion standard.

### 7.1 Introduction

Nous aurons besoin de rappeler en détail le calcul perturbatif en l'absence de brisure de parité, tel qu'il a été élaboré en [15], que nous suivrons de près. Ajouter la brisure de parité ne fait que modifier un peu les calculs et on laisse cela pour la fin.

Nous commençons par montrer que parmi tous les modes zéro de  $\mathcal{M}_N^0 = \Delta_N$  il y en a un seul, que nous noterons par la suite  $E_0$ , qui puisse donner perturbativement pour  $\xi$  petit, un mode zéro de  $\mathcal{M}_N$  qui conduise à une loi d'échelle anormale pour la fonction de structure stationnaire d'ordre  $N$  du scalaire passif. Par la suite on calculera au premier ordre de perturbation en  $\xi$  cet exposant anormal.

Premièrement, si un mode zéro de  $\mathcal{M}_N^0$  de degré d'homogénéité plus grand que  $N$  apparaît dans la fonction de structure stationnaire du scalaire passif, alors il a pour coefficient une puissance négative de  $L$  (échelle de forçage du scalaire) donc ne peut pas être dominant dans la limite  $L \rightarrow \infty$ . Écrivons en effet très schématiquement

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = F_{\text{normal}}(x_1, \dots, x_N) + L^{\frac{2-\xi}{2}N-\sigma} F_{\text{anormal}}(x_1, \dots, x_N)$$

où  $\sigma$  est le degré de  $F_{\text{anormal}}$ . Il faut donc  $\frac{2-\xi}{2}N - \sigma \geq 0$  soit  $\sigma_{\xi=0} \leq N$ . En résumé seulement les modes zéro du laplacien de degré au plus  $N$  pourront amener, par perturbation, à des modes zéro dominants de  $\mathcal{M}_N$ .

De l'autre côté, les modes zéro de  $\Delta_N$  qui sont de degré inférieur à  $N$  s'écrivent comme somme de termes dont chacun est indépendant d'au moins une des variables,

et ne contribueront pas à la fonction de structure. En effet, considérons le corrélateur  $S = \langle \prod_j (T(x_j) - T(y_j)) \rangle$  qu'on pourrait écrire comme somme de corrélateurs de produits simples. Supposons que la valeur d'un corrélateur simple s'écrive comme la somme de termes chacun dépendant d'au plus  $N - 1$  variables:

$$\langle T(v_1)T(v_2) \dots T(v_N) \rangle = f(v_2, v_3, \dots, v_N) + \dots$$

par exemple. Dans le développement de  $S$  on peut appairer les termes ayant les mêmes  $N - 1$  dernières variables. Chaque telle paire peut s'écrire  $\langle T(x_1)T(v_2)T(v_3) \dots T(v_n) \rangle$  et  $\langle T(y_1)T(v_2)T(v_3) \dots T(v_n) \rangle$  avec  $v_i = x_i$  ou  $v_i = y_i$ . La contribution de  $f$  à ces deux corrélateurs a la même valeur, mais les deux corrélateurs apparaissent dans  $S$  avec signes opposés, la contribution de  $f$  s'annulant ainsi.

## 7.2 Forme des modes zéro

Les modes zéro du laplacien, homogènes, à symétrie sphérique et réguliers en 0 sont des polynômes. Plaçons-nous en dimension  $D$  et cherchons une fonction  $P(x)$  satisfaisant les hypothèses. On peut réécrire le laplacien comme

$$\Delta = \frac{1}{R^{D-1}} \partial_R R^{D-1} \partial_R + \frac{1}{R^2} \Delta_{S^{D-1}}$$

$R$  désignant la variable radiale et  $\Delta_{S^{D-1}}$  le laplacien sur la sphère  $S^{D-1}$ . L'homogénéité de  $P$  implique

$$P(x) = R^\sigma \tilde{P}\left(\frac{x}{R}\right)$$

où  $\sigma$  désigne le degré d'homogénéité de  $P$  (remarquons que pour la régularité en 0 il faut  $\sigma \geq 0$ ), et  $\tilde{P}$  est une fonction sur la sphère unité en dimension  $D$ . On peut écrire alors

$$0 = \Delta P = \sigma(D - 2 + \sigma)R^{\sigma-2} \tilde{P} + R^{\sigma-2} \Delta_S \tilde{P}$$

Soit

$$\Delta_S \tilde{P} = -\sigma(D - 2 + \sigma) \tilde{P}$$

Or, le spectre de  $\Delta_{S^{D-1}}$  est justement  $-n(D - 2 + n)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Sachant que  $\sigma$  doit être positif et que  $-n(D - 2 + n)$  est monotone pour  $n \geq 0$ ,  $\sigma$  est nécessairement un entier, et  $\tilde{P}$  est un mode propre correspondant de  $\Delta_{S^{D-1}}$ . On sait qu'un tel mode propre peut s'écrire comme la restriction d'un polynôme de degré  $N$  sur la sphère. On en déduit que  $P$  peut s'écrire comme un polynôme de degré  $N$ .

On montre que le seul mode propre de  $\Delta_N$  de degré  $N$ , invariant sous les rotations, translations et les permutations de ses  $N$  variables, et n'étant pas somme de fonctions dépendant chacun de moins de  $N$  variables, s'écrit comme

$$E_0(x_1, \dots, x_N) = \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_N} \prod_{(l_-, l_+) \in \pi} (x_{l_-} \cdot x_{l_+}) + [\dots] \quad (7.1)$$

où  $\mathfrak{P}_N$  désigne l'ensemble des appariements des entier  $1, \dots, N$  (partitions en  $N/2$  ensembles de deux éléments) et  $[\dots]$  représente une somme de fonctions dépendant de moins de  $N$  variables.

On utilise pour cela le premier théorème des invariants du groupe  $SO(d)$ . Il dit que tout polynôme en les coordonnées de  $N$  vecteurs, invariant sous rotation simultanée des  $N$  vecteurs, peut s'écrire comme polynôme en les produits scalaires de couples de vecteurs, et les déterminants de  $d$ -uplets de vecteurs.

On sait d'une part qu'un produit de deux déterminants peut s'exprimer avec des produits scalaires seulement. Donc on peut se ramener à une expression où dans chaque monôme on a 0 ou 1 déterminant. Maintenant, par invariance sous permutation des vecteurs, les termes avec 1 déterminant ne peuvent pas intervenir.

L'argument général est toujours le suivant. Soit  $E$  une fonction de  $N$  vecteurs, invariante sous l'action d'un sous-groupe  $G$  de  $S_N$  (groupe symétrique). Alors on a

$$E = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} E^\sigma \quad (7.2)$$

où  $|G|$  désigne le cardinal de  $G$  et  $E^\sigma$  l'action de la permutation  $\sigma$  sur  $E$  par permutation de ses arguments. En particulier si  $\sum_{\sigma \in G} E^\sigma = 0$  alors  $E = 0$ . Remarquons que si  $H$  est un sous-groupe de  $G$  alors  $E$  est invariante sous  $H$  aussi et on peut lui appliquer le même argument.

En connaissance de tout ça, le mode zéro recherché du laplacien est un polynôme en les produits scalaires de  $N$  vecteurs, symétrique sous permutation des vecteurs, et doit comporter au moins un monôme faisant intervenir tous les vecteurs. Un tel monôme s'écrit alors forcément

$$(x_{i_1} \cdot x_{i_2}) \dots (x_{i_{N-1}} \cdot x_{i_N})$$

où  $i_1, \dots, i_N$  est une permutation de  $1, \dots, N$ . Tout tel monôme se symétrise en le même polynôme, donc  $E$  s'écrit forcément comme énoncé ci-dessus.

## 7.3 Développement perturbatif

Faisons le calcul perturbatif du mode propre de  $\mathcal{M}_N$  au premier ordre en  $\xi$ . À cet ordre on peut écrire

$$\mathcal{M}_N = -\Delta_N + \xi V_N + \mathcal{O}(\xi^2) \quad (7.3)$$

avec  $V_N$  donné par

$$V_N = \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \left( \delta^{\alpha\beta} \log |x_{jk}| - \frac{1}{d-1} \frac{x_{jk}^\alpha x_{jk}^\beta}{|x_{jk}|^2} \right) \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}$$

où on a introduit  $x_{jk} \equiv x_j - x_k$ .

Soit alors  $E$  un mode zéro homogène de degré  $N$  de  $\Delta_N$  et on cherchera un mode zéro homogène de  $\mathcal{M}_N$  qui est une perturbation du premier, donc sous la forme  $F = E + \xi G + \mathcal{O}(\xi^2)$ . À l'ordre 1 en  $\xi$ , le fait que  $F$  est un mode zéro de  $\mathcal{M}_N$  s'écrit comme

$$-\Delta_N G + V_N E = 0 \quad (7.4)$$

On cherche à résoudre cette équation en  $G$ . Les solutions sont définies seulement à un mode zéro de  $\Delta_N$  près.

Écrivons le fait que  $F$  est homogène d'ordre  $N + \xi\lambda$

$$\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} \right) F = (N + \xi\lambda)F$$

soit à l'ordre 1

$$\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} \right) G = NG + \lambda E$$

Introduisons l'opérateur  $\Gamma$  défini comme

$$\Gamma : E \mapsto E' = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) G \quad (7.5)$$

où  $G$  est la solution de (7.4) en fonction de  $E$ . On remarque que bien que  $G$  soit défini par (7.4) à un mode zéro de  $\Delta_N$  près,  $E'$  est défini de manière univoque si de plus on exige qu'il soit homogène de degré  $N$ . On incorpore donc ce fait dans la définition de  $\Gamma$ . Il faudra montrer qu'on peut effectivement trouver une solution  $G$  de (7.4) tel que  $E'$  soit homogène de degré  $N$ .

Pour montrer que  $\Gamma$  est définie sans ambiguïté, l'idée est la suivante. Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux solutions de (7.4), telles que les  $E'_1$  et  $E'_2$  correspondants soient homogènes de degré  $N$ . Alors

$$E'_1 - E'_2 = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) (G_1 - G_2)$$

On note alors que d'une part  $G_1 - G_2$  est un mode zéro de  $\Delta_N$ , d'autre part  $E'_1 - E'_2$  est homogène de degré  $N$  donc  $0 = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) (E'_1 - E'_2) = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right)^2 (G_1 - G_2)$ . Or  $\sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha}$  se diagonalise sur  $\text{Ker} \Delta_N$  (parce que les restrictions des modes zéro homogènes du laplacien à la sphère unité forment un système complet de fonctions (au sens  $L_2$ ) sur la sphère. On peut prolonger une fonction quelconque sur la sphère en un mode zéro du laplacien sur tout l'espace de manière unique. En particulier on peut prolonger les restrictions des modes zéro, et les fonctions ainsi obtenues formeront alors un système complet des fonctions sur tout l'espace (pour les fonctions localement  $L_2$ ), justement à cause de l'unicité du prolongement. De plus ces fonctions seront homogènes). Donc il est impossible que  $\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right)^2 (G_1 - G_2)$  soit nul sans que  $\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) (G_1 - G_2)$  le soit.

On remarque que  $\Delta_N E' = 0$  car

$$\Delta_N E' = \Delta_N \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) G = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N + 2 \right) \Delta_N G$$

car  $\Delta_N$  est un opérateur homogène de degré  $-2$ . Ensuite on utilise (7.4) pour passer à

$$\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N + 2 \right) V_N E$$

À cette étape on utilise que  $\mathcal{M}_N$  est un opérateur homogène de degré  $\xi - 2$ , soit

$$\left[ \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha}, \mathcal{M}_N \right] = (\xi - 2) \mathcal{M}_N$$

ce qui donne à l'ordre 1 (en se rappelant (7.3))

$$\left[ \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha}, V_N \right] = -\Delta_N - 2V_N$$

On a finalement

$$\left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N + 2 \right) V_N E = \Delta_N E = 0$$

$\Gamma$  est donc un endomorphisme de l'espace vectoriel des modes zéro homogènes de degré  $N$  de  $\Delta_N$ .

Alors (7.5) signifie que  $E$  est vecteur propre de  $\Gamma$  et la valeur propre correspondante donne la dimension anormale.

On a vu que tous les modes propres de  $\Delta_N$ , homogènes de degré  $N$ , invariants sous  $SO(d)$ , s'écrivent comme (7.1). On en choisit un que l'on appellera  $E_0$ . On peut compléter cette fonction en une base des modes zéro homogènes de  $\Delta_N$  par des fonctions ne dépendant d'au moins une des variables. Dans cette base  $\Gamma$  aura la forme

$$\Gamma^a_b = \begin{pmatrix} \Gamma^0_0 & 0 \\ \Gamma^{a'}_0 & \Gamma^{a'}_{b'} \end{pmatrix}$$

Alors  $\Gamma^0_0$  est nécessairement une valeur propre de  $\Gamma$ . On peut aussi dire que la composante de  $\Gamma(E_0)$  sur  $E_0$  est valeur propre de  $\Gamma$ . Cette composante est facile à calculer car c'est le coefficient de  $\prod_{(l_-, l_+)} x_{l_-}^2$  dans  $\Gamma(E_0)$ .

Pour que, effectivement une solution de (7.4) et (7.5) existe, il faut encore que  $\Gamma$  soit diagonalisable. On ne montre pas ce fait, mais si  $\Gamma$  n'est pas diagonalisable, il y a des corrections logarithmiques au mode zéro homogène qui ne changent pas la valeur de  $\lambda$ .

## 7.4 Ansatz, preuve d'existence

On veut maintenant montrer l'existence pour tout  $E$  (mode zéro homogène de  $\Delta_N$ , de degré  $N$ , invariant sous rotation et translation et permutation des variables), d'un  $G$  convenable pour que  $E'$  obtenu de  $G$  soit homogène de degré  $N$ . On part de l'ansatz suivant:

$$G = \sum_{j \neq k} (H_{jk} \log |x_{jk}|) + H \quad (7.6)$$

où  $H_{jk}$  et  $H$  sont des polynômes homogènes de degré  $N$  invariants sous rotation. De plus  $H_{jk}$  est invariant sous permutation de ses arguments d'indice  $j, k$  d'une part et de tous ses arguments d'indices différents de  $j, k$  d'autre part.  $H$  est invariante sous permutation de tous ses arguments.

On aura alors

$$E' = \left( \sum x_j^\alpha \partial_{x_j^\alpha} - N \right) G = \sum_{j \neq k} H_{jk} \quad (7.7)$$

Substituant l'ansatz (7.6) dans (7.4) on aboutit, par identification des termes, au système:

$$\Delta_N H_{jk} = \nabla_j \cdot \nabla_k E \quad (7.8)$$

$$(d - 2 + x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) H_{jk} + \frac{1}{2(d-1)} (x_{jk}^\alpha x_{jk}^\beta \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}) E = -\frac{1}{2} x_{jk}^2 K_{jk} \quad (7.9)$$

pour tout couple d'indices  $j, k$ . Et encore

$$\Delta_N H = \sum_{j \neq k} K_{jk} \quad (7.10)$$

où  $K_{jk}$  sont des polynômes homogènes de degré  $N - 2$  invariants sous rotation et  $\nabla_{jk} = \nabla_j - \nabla_k$  et  $\nabla_j = (\partial_{x_j^\alpha})$ .

Il sera commode d'introduire les nouvelles coordonnées  $y = x_{jk}$ ,  $x = (x_j + x_k)/2$ , les autres restant les mêmes.

On montre un lemme:  $\Delta_y y^2$  est inversible sur les polynômes homogènes en  $y$  de degré  $p$  donné.

Démonstration: soit le polynôme en question  $F$  et supposons que la plus grande puissance de  $y^2$  qui le divise est  $(y^2)^\alpha$  de sorte que  $F = (y^2)^\alpha f$  où  $f$  n'est pas divisible par  $y^2$ . On peut alors écrire

$$\begin{aligned}\Delta_y(y^2 F) &= \Delta_y((y^2)^{\alpha+1} f) \\ &= (2\alpha + 2)(2\alpha + 1)(y^2)^\alpha f + 2(2\alpha + 2)(y^2)^\alpha y \cdot \nabla_y f + (y^2)^{\alpha+1} \Delta_y f \\ &= (2\alpha + 2)(2\alpha + 1)(y^2)^\alpha f + 2(2\alpha + 2)(y^2)^\alpha (p - 2\alpha - 2) f + (y^2)^{\alpha+1} \Delta_y f \\ &= (2\alpha + 2)(2\alpha + 1 + 2(p - 2\alpha - 2))(y^2)^\alpha f + (y^2)^{\alpha+1} \Delta_y f\end{aligned}$$

Maintenant soit  $\Delta_y f = 0$ , auquel cas

$$\Delta_y(y^2 F) = (2\alpha + 2)(2\alpha + 1 + 2(p - 2\alpha - 2))(y^2)^\alpha f$$

et  $(2\alpha + 2)(2\alpha + 1 + 2(p - 2\alpha - 2)) > 0$ , soit  $\Delta_y f \neq 0$  et alors  $(y^2)^{\alpha+1} \Delta_y f$  contient une plus grande puissance de  $y^2$  donc la somme ne peut pas être nulle.

Donc dans tous les cas  $\Delta_y(y^2 F) \neq 0$  et clairement il s'agit d'un endomorphisme de l'espace des polynômes homogènes en  $y$ , ce qui prouve  $\Delta_y y^2$  est inversible.

On montre maintenant que les équations (7.8) (7.9) (7.10) ont une solution satisfaisant les hypothèses.

Pour simplifier l'écriture, on introduit  $y = x_{jk}$  et le nouveau système de coordonnées  $x = (x_j + x_k)/2, y, x_3, \dots, x_N$ . On notera dans la suite

$$\begin{aligned}x_{jk} \cdot \nabla_{jk} &= 2y \cdot \nabla_y \\ x_{jk}^\alpha x_{jk}^\beta \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} &= \mathcal{O}_{jk}\end{aligned}$$

Avec ces notations (7.9) s'écrit:

$$(d - 2 + 2y \cdot \nabla_y) H_{jk} + \frac{1}{2(d-1)} \mathcal{O}_{jk} E = -\frac{1}{2} y^2 K_{jk}$$

On remarque que  $d - 2 + 2y \cdot \nabla_y$  est un opérateur homogène en  $y$  de degré 0, le système se diagonalise donc par blocs selon le degré  $p$  en  $y$ . Notant la composante de chaque fonction sur le secteur de degré d'homogénéité  $p$  en  $y$  par un  $p$  entre parenthèse, en exposant, on peut écrire

$$(d - 2 + 2p) H_{jk}^{(p)} + \frac{1}{2(d-1)} (\mathcal{O}_{jk} E)^{(p)} = -\frac{1}{2} y^2 K_{jk}^{(p-2)}$$

On divise par  $d - 2 + 2p$  et on resomme selon les  $p$ :

$$H_{jk} = \sum_p H_{jk}^{(p)} = - \sum_p \frac{(\mathcal{O}_{jk} E)^{(p)}}{2(d-1)(d-2+2p)} - \frac{1}{2} y^2 \sum_p \frac{K_{jk}^{(p-2)}}{d-2+2p} \quad (7.11)$$

À ce moment on applique  $\Delta_N$  à l'égalité ci-dessus, puis on se sert de (7.8) et on réarrange :

$$\frac{1}{2}\Delta_N y^2 \sum_p \frac{K_{jk}^{(p-2)}}{d-2+2p} = -\nabla_j \cdot \nabla_k E - \Delta_N \sum_p \frac{(\mathcal{O}_{jk}E)^{(p)}}{2(d-1)(d-2+2p)}$$

Finalement on redécompose selon le degré d'homogénéité en  $y$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\Delta_y y^2 \frac{K_{jk}^{(p)}}{d-2+2(p+2)} = \\ -(\nabla_j \cdot \nabla_k E)^{(p)} - \left( \Delta_N \sum_q \frac{(\mathcal{O}_{jk}E)^{(q)}}{2(d-1)(d-2+2q)} \right)^{(p)} - \frac{1}{2}\Delta_{\perp} y^2 \frac{K_{jk}^{(p-2)}}{d-2+2p} \end{aligned}$$

À ce moment on peut récursivement calculer (puisque  $\Delta_y y^2$  est inversible) les  $K_{jk}^{(p)}$  en partant de  $p = 0$ .

Une fois les  $K_{jk}$  connues, (7.11) donne  $H_{jk}$ . On vérifierait que par construction  $H_{jk}$  satisfait (7.8) et (7.9). Par construction il vérifie aussi les conditions de symétrie.

Finalement on peut toujours trouver une solution  $H$  de (7.10), car les  $K_{jk}$  sont homogènes de degré  $N-2$  et  $\Delta_N \sum x_i^2$  est un automorphisme des polynômes homogènes de degré donné, en vertu du lemme.

Les termes pouvant intervenir dans  $H_{jk}$  sont limités par les exigences d'invariance sous rotation et sous permutation des arguments  $j$  et  $k$  entre eux, et de tous les autres arguments entre eux. Le premier théorème des invariants donne que tout terme s'écrit avec les produits scalaires (et déterminants! si brisure de symétrie). Tout monôme en les produits scalaires devra donc être symétrisé par rapport à  $x_j, x_k$  d'une part, tous les autres indices d'autre part. Ceci laisse seulement deux termes faisant intervenir tous les indices, notamment

$$\begin{aligned} T_{jk} &\equiv (x_j \cdot x_k) \sum'_{jk} \\ U_{jk} &\equiv \sum_{m \neq n} (x_j \cdot x_m)(x_k \cdot x_n) \sum''_{jk, mn} \end{aligned}$$

où l'on a introduit

$$\begin{aligned} \sum'_{jk} &\equiv \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_N(j,k)} \prod_{(l_-, l_+) \in \pi} (x_{l_-} \cdot x_{l_+}) \\ \sum''_{jk, mn} &\equiv \sum_{\pi \in \mathfrak{P}_N(j,k,m,n)} \prod_{(l_-, l_+) \in \pi} (x_{l_-} \cdot x_{l_+}) \end{aligned}$$

où  $\mathfrak{P}_N(j_1, \dots, j_n)$  désigne l'ensemble des appariements des entiers  $\{1, \dots, N\} \setminus \{j_1, \dots, j_n\}$ . Cependant le système (7.8), (7.9) n'est pas fermé sur les deux termes  $T_{jk}$  et  $U_{jk}$ . Il suffit de rajouter deux autres termes

$$\begin{aligned} T'_{jk} &\equiv \frac{1}{2}(x_j^2 + x_k^2) \sum'_{jk} \\ U'_{jk} &\equiv \sum_{m < n} [(x_j \cdot x_m)(x_j \cdot x_n) + (x_k \cdot x_m)(x_k \cdot x_n)] \sum''_{jk, mn} \end{aligned}$$

et de remplacer (7.8) par elle-même multipliée par  $(x_j \cdot x_k)$  que nous appellerons (7.8'):

$$(x_j \cdot x_k) \Delta_N H_{jk} = (x_j \cdot x_k) \nabla_j \cdot \nabla_k E \quad (7.8')$$

pour obtenir un système fermé. Dans ce cas (7.8') et (7.9) ont un bloc indépendant sur  $T_{jk}, T'_{jk}, U_{jk}, U'_{jk}$ . Calculons les différentes expressions utiles

$$\begin{aligned} (x_j \cdot x_k) \Delta_N T_{jk} &= 0 \\ (x_j \cdot x_k) \Delta_N T'_{jk} &= 2dT_{jk} \\ (x_j \cdot x_k) \Delta_N U_{jk} &= 0 \\ (x_j \cdot x_k) \Delta_N U'_{jk} &= 4(x_j \cdot x_k) \sum_{m < n} (x_m \cdot x_n) \sum''_{jk, mn} \\ &= 2(N-2)T_{jk} \end{aligned}$$

(On remarque que dans  $\sum_{m < n} (x_m \cdot x_n) \sum''_{jk, mn}$  on a sommé avec redondance, chaque monôme apparait autant de fois qu'on peut mettre en facteur un produit scalaire, donc  $(N-2)/2$  fois). On continue:

$$\begin{aligned} (x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) T_{jk} &= 2T_{jk} - 2T'_{jk} \\ (x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) T'_{jk} &= 2T'_{jk} - 2T_{jk} \\ (x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) U_{jk} &= 2U_{jk} - 2U'_{jk} \\ (x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) U'_{jk} &= 2U'_{jk} - 2U_{jk} \end{aligned}$$

De (7.11) on voit que le degré joint en  $x_j, x_k$  de tout monôme de  $H_{jk}$  est au moins de 2, car c'est le cas pour  $\mathcal{O}_{jk}E$  et pour  $y^2$ . Donc dans (7.8') seul  $T'_{jk}$  et  $U'_{jk}$  peuvent, en tant que termes de  $H_{jk}$ , donner une contribution proportionnelle à  $T_{jk}$ .

Finalement on calcule les expressions intéressantes en  $E$ . Dans (7.8') seuls  $T_{jk}$  et  $U_{jk}$ , en tant que termes de  $E$ , peuvent donner une contribution en  $T_{jk}$ :

$$\begin{aligned} (x_j \cdot x_k) \nabla_j \cdot \nabla_k T_{jk} &= dT_{jk} \\ (x_j \cdot x_k) \nabla_j \cdot \nabla_k U_{jk} &= (x_j \cdot x_k) \sum_{m \neq n} (x_m \cdot x_n) \sum''_{jk, mn} \\ &= (N-2)T_{jk} \end{aligned}$$

Ajoutons que les coefficients de  $T_{jk}$  et de  $U_{jk}$  dans  $E$  sont 1 et 1.

Quant à (7.9), dans  $x_{jk}^2 K_{jk}$  il y a seulement des termes en  $T_{jk}$  et  $T'_{jk}$  de degré joint 2 en  $x_j, x_k$ . Donc on veut savoir la composante en  $U_{jk}$  et  $U'_{jk}$  de  $\mathcal{O}_{jk}E$ . Là aussi, à cause du  $\partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}$  seul  $T_{jk}$  et  $U_{jk}$  contribuent.

$$\begin{aligned} x_{jk}^\alpha x_{jk}^\beta \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} T_{jk} &= x_{jk}^2 \sum'_{jk} \\ &= 2T'_{jk} - 2T_{jk} \\ x_{jk}^\alpha x_{jk}^\beta \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} U_{jk} &= \sum_{m \neq n} [(x_j \cdot x_m) - (x_k \cdot x_m)][(x_j \cdot x_n) - (x_k \cdot x_n)] \sum''_{jk, mn} \\ &= 2U'_{jk} - 2U_{jk} \end{aligned}$$

Donc seul  $U_{jk}$  donne une contribution intéressante, et son coefficient dans  $E$  est 1.

## 7.5 Détermination des coefficients

Au total, (7.8') et (7.9) se résument, en posant

$$H_{jk}^{[2]} = aT_{jk} + a'T'_{jk} + bU_{jk} + b'U'_{jk}$$

où  $H_{jk}^{[2]}$  désigne les termes de degré joint 2 en  $x_j, x_k$ , et de degré 1 en toutes les autres variables, au système

$$2da' + 2(N-2)b' = -d + (N-2)$$

$$db - 2b' - \frac{1}{d-1} = 0$$

$$db' - 2b + \frac{1}{d-1} = 0$$

$$a' = -a$$

La dernière égalité vient du fait que dans (7.9) le membre de droit est divisible par  $y^2$  ce qui impose le rapport  $-1$  entre les coefficients de  $T_{jk}$  et  $T'_{jk}$ . On aurait pu aussi remarquer que  $H_{jk}$  doit être invariant sous translation, et donc  $a' = -a$  et  $b' = -b$ .

On peut résoudre ce système. Seuls  $a$  et  $b$  nous intéresseront. Ils valent

$$a = -\frac{1}{d} \left( \frac{N-2}{(d-1)(d-2)} + \frac{d+N-2}{2} \right)$$

$$b = \frac{-1}{(d-1)(d-2)}$$

Maintenant on se souvient que c'est  $E'/E$  qui nous intéresse, et pour cela il suffit de connaître, moyennant (7.7), le coefficient de  $E_0$  dans  $\sum_{j \neq k} H_{jk}$ . Ce coefficient est

$$Na + N(N-2)b$$

C'est encore l'argument de comptage redondant. Quand on somme les  $T_{jk}$  on compte chaque monôme de  $E_0$  autant de fois qu'on peut choisir un couple non ordonné  $x_j, x_k$  apparaissant dans le même produit scalaire dans ce monôme, c'est-à-dire  $2 \times N/2$ . Quand on somme les  $U_{jk}$  on compte chaque monôme de  $E_0$  autant de fois qu'on peut choisir un couple non ordonné  $x_j, x_k$  apparaissant dans deux produits scalaires différents dans ce monôme, c'est-à-dire  $2 \times N(N-2)/2$ .

Au total le coefficient de  $E_0$  dans  $E'$  est donc

$$\Gamma_0^0 = -\frac{N(d+N)}{2(d+2)} = -\frac{N}{2} - \frac{N(N-2)}{2(d+2)}$$

## 7.6 Cas avec brisure de parité

On peut maintenant employer la méthode développée au cas avec brisure de symétrie de parité de la corrélation du champ de vitesse stochastique. En 3D  $V_N$  a un terme supplémentaire

$$V'_N = \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \lambda \xi \epsilon^{\alpha\beta\gamma} \frac{x_{jk}^\gamma}{|x_{jk}|} \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}$$

avec  $0 \leq \lambda \leq 1$ .

On a déjà établi que  $E$  était un polynôme en les produits scalaires des vecteurs, même s'il y a brisure de parité, à cause de son invariance sous permutation de ses arguments et (7.2). En appliquant  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} x_{jk}^\gamma \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}$  à  $E$  tous les monômes sont transformés en somme de termes avec 1 déterminant (avec coefficient 0 éventuellement), cependant  $\epsilon^{\alpha\beta\gamma} x_{jk}^\gamma \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} E$  est invariant sous permutation de ses arguments d'indice  $j$  et  $k$ , ainsi que sous la permutation de tous ses autres arguments. Or si un monôme fait intervenir un déterminant, au moins 2 vecteurs dans ce déterminant font partie soit de l'ensemble  $\{x_j, x_k\}$ , soit de l'ensemble des autres vecteurs. Alors sous la symétrisation (7.2) un tel terme s'annule. Finalement  $V_N' E = 0$ .

Ceci montre que  $G$  satisfait exactement la même équation que dans le cas sans brisure de symétrie et donc  $G$  ainsi que  $\Gamma_0^0$  ne changent pas. À l'ordre 1 en perturbation il n'y a donc aucun changement !

Regardons aussi le cas 2D. Le terme supplémentaire dans  $V_N$  est

$$V_N'' = \sum_{1 \leq j \neq k \leq N} \lambda \xi \frac{\epsilon^{\alpha\gamma} x_{jk}^\beta x_{jk}^\gamma + \epsilon^{\beta\gamma} x_{jk}^\alpha x_{jk}^\gamma}{|x_{jk}|^2} \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta}$$

Il n'est plus vrai que  $V_N'' E = 0$ . On gardera l'ansatz (7.6), avec toutes les hypothèses complémentaires qu'on a faites. Dans le développement de (7.4) seul l'équivalent de (7.9) change, et seulement  $\mathcal{O}_{jk}$  est modifié, tout en gardant la propriété essentielle que le degré joint en  $x_j, x_k$  de tout monôme de  $\mathcal{O}_{jk} E$  est au moins 2. On peut donc refaire exactement la même analyse que dans le cas sans brisure de parité. La seule différence sera que dans  $H_{jk}$  un nouveau type de terme de degré joint 2 en  $x_j, x_k$  pourra intervenir. En dehors des termes avec seulement des produits scalaires, on peut avoir des déterminants aussi, puisque  $H_{jk}$  n'est invariant que sous permutation de  $x_j, x_k$  d'une part, et des autres vecteurs d'autre part. Donc il peut y avoir des termes avec un déterminant de  $x_j$  ou  $x_k$  avec un autre vecteur. Les analogues de  $T_{jk}$  et  $T_{jk}'$  sont

$$W_{jk} = \sum_{m,n} ([x_j, x_m](x_k \cdot x_n) + (x_j \cdot x_m)[x_k, x_n]) \sum_{jk, mn}''$$

$$W_{jk}' = \sum_{m,n} ([x_j, x_m](x_j \cdot x_n) + [x_k, x_m](x_k \cdot x_n)) \sum_{jk, mn}''$$

On recalcule le même genre d'expressions qu'avant

$$(x_j \cdot x_k) \Delta_N W_{jk} = 0$$

$$(x_j \cdot x_k) \Delta_N W_{jk}' = (x_j \cdot x_k) \sum_{m,n} (2[x_n, x_m] + 2[x_n, x_m]) \sum_{jk, mn}''$$

$$= 0$$

la dernière expression s'annulant car on somme sur  $m, n$  le déterminant  $[x_m, x_n]$ . On a aussi

$$(x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) W_{jk} = 2W_{jk} - 2W_{jk}'$$

$$(x_{jk} \cdot \nabla_{jk}) W_{jk}' = 2W_{jk}' - 2W_{jk}$$

Il faut encore calculer la contribution du nouveau terme dans  $\mathcal{O}_{jk}E$

$$\begin{aligned}
(\epsilon^{\alpha\gamma} x_{jk}^\beta x_{jk}^\gamma + \epsilon^{\beta\gamma} x_{jk}^\alpha x_{jk}^\gamma) \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} T_{jk} &= 0 \\
(\epsilon^{\alpha\gamma} x_{jk}^\beta x_{jk}^\gamma + \epsilon^{\beta\gamma} x_{jk}^\alpha x_{jk}^\gamma) \partial_{x_j^\alpha} \partial_{x_k^\beta} U_{jk} &= (\epsilon^{\alpha\gamma} x_{jk}^\beta x_{jk}^\gamma + \epsilon^{\beta\gamma} x_{jk}^\alpha x_{jk}^\gamma) \sum_{m,n} x_m^\alpha x_n^\beta \sum''_{jk,mn} \\
&= \sum_{m,n} ([x_m, x_{jk}](x_{jk} \cdot x_n) + [x_n, x_{jk}](x_{jk} \cdot x_m)) \sum''_{jk,mn} \\
&= 2W_{jk} - 2W'_{jk}
\end{aligned}$$

On pose encore

$$H_{jk}^{[2]} = aT_{jk} + a'T'_{jk} + bU_{jk} + b'U'_{jk} + cW_{jk} + c'W'_{jk}$$

On obtient, à côté et indépendamment du système qu'on a déjà obtenu pour  $a, a', b, b'$ , le système sur  $c, c'$ , à partir de la variante de (7.9)

$$\begin{aligned}
dc - 2c' + \frac{\lambda}{d-1} &= 0 \\
dc' - 2c - \frac{\lambda}{d-1} &= 0
\end{aligned}$$

Il s'en suit que  $E'$  ne change pas, car sommant sur  $j, k$ ,  $W_{jk}$  et  $W'_{jk}$  s'annulent. Donc l'exposant critique n'est pas modifié à l'ordre 1. Pour  $c$  on trouve

$$c = \frac{-\lambda}{(d-1)(d+2)}$$

et  $c' = -c$ . Il y a donc un changement dans l'expression de  $G$ , donc le mode zéro perturbé à l'ordre 1 change avec la brisure de symétrie, mais pas l'exposant anormal.

Remarquons qu'on pouvait prévoir que l'exposant critique n'allait pas changer car il est symétrique en  $\lambda$  et donc en  $\xi$  vu que le coefficient du terme brisant la parité est  $\lambda\xi$ .

Notons finalement que pour  $N = 2$  on peut calculer l'exposant du mode zéro de manière non-perturbative et ni en 2D ni en 3D l'exposant dans le secteur isotrope du scalaire n'est changé par le terme brisant la parité.



## Chapitre 8

# Exploitation des symétries – champ magnétique anisotrope dans un écoulement isotrope

Quand  $\mathcal{M}_N$  a suffisamment de symétries on peut calculer analytiquement son spectre de modes zéro. Tel est le cas pour l'opérateur d'évolution  $\mathcal{M}_2$  d'une quantité tensorielle dans un écoulement isotrope, où l'on utilise la symétrie  $SO(d)$ . On illustrera ce cas à travers le champ magnétique passif. Une autre situation où les symétries peuvent être exploitées est le cas  $\xi = 2$ . Ce sont alors les groupes  $SL(N)$  et  $SL(d)$  qui interviennent. Le cas  $d = \infty$  peut être vu aussi comme une situation à grande symétrie.

### 8.1 Introduction

Soit  $V = \mathbb{R}^d$  l'espace euclidien à  $d$  dimensions. On note  $x_1, \dots, x_d$  les coordonnées canoniques sur  $V$ . Considérons un opérateur  $\mathcal{M}$  agissant sur l'espace  $E$  des sections  $L^2$  de  $T^{\otimes 2}V$  (i.e. fonctions sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs tensorielles contravariantes d'ordre 2, de carré intégrable). On a l'isomorphisme  $E \cong L^2(\mathbb{R}^d) \otimes \mathbb{R}^d \otimes \mathbb{R}^d$ .

On fait les hypothèses suivantes sur  $\mathcal{M}$  :

- (1)  $\mathcal{M}$  est invariant de rotation, c'est-à-dire il commute avec l'action naturelle de  $SO(d)$  sur  $E$  (c'est-à-dire celle induite par l'action de  $SO(d)$  sur  $V$ ). Si de plus  $\mathcal{M}$  commute avec l'action de  $O(d)$  tout entier, alors on dit qu'il est *invariant de parité*. Dans le cas contraire on dit que  $\mathcal{M}$  *brise la parité*. NB: par parité on entend symétrie de réflexion par rapport à un hyperplan. En fait on n'envisagera la brisure de parité que pour  $d \leq 3$ .
- (2)  $\mathcal{M}$  est homogène de degré  $\zeta$ . Soit  $D$  le groupe (de Lie) des dilatations  $D = \{\mathcal{D}_\lambda | \lambda \in \mathbb{R}_+^*\}$  dont l'action sur  $E$  est définie par  $(\mathcal{D}_\lambda F)(x) = F(\lambda x)$  pour tout  $F \in E$ . On peut exprimer le fait que  $\mathcal{M}$  est homogène de degré  $\zeta$  par la relation de commutation  $\mathcal{D}_\lambda \mathcal{M} = \lambda^\zeta \mathcal{M} \mathcal{D}_\lambda$ . L'opérateur d'homogénéité  $\mathcal{H}$  engendrant l'algèbre de Lie de  $D$  agit sur  $E$  par  $x_i \partial_i$ . Avec son aide on peut réécrire la relation de commutation précédente comme  $[\mathcal{H}, \mathcal{M}] = \zeta \mathcal{M}$ .
- (3)  $\mathcal{M}$  laisse stable l'espace des fonctions sans divergence à gauche (resp. à droite),

plus précisément

$$\begin{aligned}\partial_i \circ \mathcal{M}^{\bar{i}\bar{j}}_{j\bar{j}} &= X_j^{\bar{i}} \circ \partial_j \\ \partial_{\bar{i}} \circ \mathcal{M}^{\bar{i}\bar{j}}_{j\bar{j}} &= Y_j^{\bar{i}} \circ \partial_j\end{aligned}$$

pour certains opérateurs  $X$  et  $Y$ .

- (4) Enfin  $\mathcal{M}$  commute avec  $T$  donné par  $(TF)_{\alpha\beta}(x) = F_{\beta\alpha}(-x)$  pour tout  $F \in E$ .  $T$  est une involution. Alors  $T = \{1, T\}$  muni de la composition d'opérateurs comme produit est un groupe.  $\mathcal{M}$  commute avec l'action de  $T$ . Notons que si  $F$  est la fonction à deux points d'un champ vectoriel homogène, alors  $TF = F$ . En effet  $F_{\alpha\beta}(x) = \langle v_\alpha(x)v_\beta(0) \rangle = \langle v_\alpha(0)v_\beta(-x) \rangle = F_{\beta\alpha}(-x)$ .

On introduit  $\tilde{\mathcal{M}} = x^{-\zeta}\mathcal{M}$ . Il est clair que  $\mathcal{M}$  et  $\tilde{\mathcal{M}}$  auront les mêmes modes zéro. De plus  $\tilde{\mathcal{M}}$  vérifie toujours (1) et (4) et est homogène de degré 0, autrement dit il commute avec  $D$ , ou encore  $[\mathcal{H}, \tilde{\mathcal{M}}] = 0$ . Par contre  $\tilde{\mathcal{M}}$  ne vérifie plus (3).

L'essentiel est que  $\tilde{\mathcal{M}}$  commute avec  $O(d)$  (ou  $SO(d)$ ),  $D$  et  $T$ , ce qui permettra de décomposer  $\tilde{\mathcal{M}}$  en opérateurs sur des espaces de dimension finie. Ce que signifie cette décomposition et comment l'obtenir sont l'objet de la section suivante.

## 8.2 Décomposition selon un groupe de Lie

Notons d'abord que les actions de  $D$ , de  $O(d)$  et de  $T$  sur  $E$  commutent entre elles deux-à-deux. On peut donc considérer que c'est  $D \times O(d) \times T$  qui agit sur  $E$ . On cherchera à décomposer  $E$  selon les représentations irréductibles de ce dernier groupe de Lie (ou juste  $D \times O(d)$ , selon le cas).

### 8.2.1 Généralités

De manière générale, soit  $G$  un groupe de Lie agissant sur l'espace vectoriel  $E$ . Une décomposition de  $E$  selon les composantes irréductibles sous l'action de  $G$ , si une telle décomposition existe, peut être écrite formellement comme  $E = \bigoplus_\nu \Gamma_\nu^{\oplus a_\nu}$ , avec les  $\Gamma_\nu$  des représentations irréductibles distinctes de  $G$ . Les  $\nu$  sont une façon d'indexer les représentations irréductibles, qui sera explicitée plus tard. Parfois on note cette décomposition aussi comme  $E = \bigoplus_\nu a_\nu \Gamma_\nu$ . Il faut comprendre que  $E$  est somme directe de sous-espaces isomorphes aux représentations irréductibles  $\Gamma_\nu$ , les  $a_\nu$  étant le nombre d'espaces isomorphes à  $\Gamma_\nu$  dans cette somme.

Pour être correct, il faut écrire  $E \cong \bigoplus_\nu \Gamma_\nu \otimes K^{a_\nu}$  où  $K$  est le corps de base. L'isomorphisme, que nous noterons  $\iota$ , est un  $G$ -espace isomorphisme (ie. commute avec l'action de  $G$ ), avec  $G$  agissant sur les  $\Gamma_\nu$  comme représentations irréductibles de  $G$ , et trivialement (ie. par l'identité) sur les  $K^{a_\nu}$ . On appelle  $K^{a_\nu}$  l'espace de multiplicité de la représentation irréductible  $\Gamma_\nu$  dans la décomposition de  $E$ . Pour simplifier, on le notera juste  $N_\nu$  (ie.  $N_\nu = K^{a_\nu}$ ).

Si maintenant un opérateur  $\mathcal{M}$  commute avec l'action de  $G$  sur  $E$  alors il laisse stable les  $\iota(\Gamma_\nu \otimes N_\nu)$ . De plus le lemme de Schur implique que l'action de  $\iota^{-1}\mathcal{M}\iota$  sur  $\Gamma_\nu \otimes N_\nu$  se factorise comme  $1 \otimes \mathcal{M}_\nu$ . Ce qui nous intéresse est justement de trouver ces  $\mathcal{M}_\nu$ . Dans la pratique on cherchera une base de  $\iota(\gamma_\nu \otimes N_\nu)$  pour un  $\gamma_\nu \in \Gamma_\nu$  arbitraire. Il

est clair que  $\mathcal{M}$  laisse  $\iota(\gamma_\nu \otimes N_\nu)$  stable et sa restriction dessus est (équivalente à)  $\mathcal{M}_\nu$ . Il suffira donc d'écrire l'action de (la restriction de)  $\mathcal{M}$  dans cette base, et on obtiendra une matrice  $M_\nu$  qui correspond à  $\mathcal{M}_\nu$ .

Notre programme est clair : décomposer  $E$  selon les représentations irréductibles de  $G$  ( $= D \times O(d)$  par exemple), puis trouver dans chaque composante une base adéquate et écrire l'action de  $\mathcal{M}$  dans cette base pour obtenir les matrices  $M_\nu$  des  $\mathcal{M}_\nu$ .

## 8.2.2 Une simplification

Dans notre cas, une simplification des calculs vient du fait qu'on peut écrire  $E \cong E' \otimes E''$  où l'isomorphisme est à la fois un isomorphisme de  $G = O(d) \times D$ -espaces et un isomorphisme d'espaces de Hilbert (pour les normes  $L^2$  respectives). Dans les détails, on a  $E' = L^2(\mathbb{R}_+, x^{d-1} d\lambda)$  (où  $d\lambda$  est la mesure de Lebesgue habituelle sur  $\mathbb{R}$ ) et  $E''$  est l'ensemble des sections  $L^2$  de  $S^{d-1} \times V^{\otimes 2}$  (ie. du fibré trivial de  $S^{d-1}$  par  $V^{\otimes 2}$ ).  $G$  agit sur  $E'$  comme  $D$  (qui agit de la manière induite par son action sur  $\mathbb{R}_+$ ) et sur  $E''$  comme  $O(d)$  (en formules  $(Rf)_{\alpha\bar{\alpha}}(x) = R_{\alpha\beta} R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} f_{\beta\bar{\beta}}(R^{-1}x)$  pour tout  $f \in E''$ ,  $R \in O(d)$ ,  $x \in S^{d-1}$ ). Intuitivement on pourrait dire que  $O(d) \times D$  agit sur  $E' \otimes E''$  comme  $D \otimes O(d)$ .

Si  $E'$  se décompose selon  $D$  comme  $E' \cong \bigoplus_\nu \Gamma'_\nu \otimes N'_\nu$  (cet isomorphisme sera noté  $\iota'$ ) et  $E''$  se décompose selon  $O(d)$  comme  $E'' \cong \bigoplus_\nu \Gamma''_\nu \otimes N''_\nu$  (cet isomorphisme sera noté  $\iota''$ ) alors  $E \cong \bigoplus_{\nu,\mu} \Gamma'_\nu \otimes \Gamma''_\mu \otimes N'_\nu \otimes N''_\mu$  et les  $\Gamma'_\nu \otimes \Gamma''_\mu$  seront les représentations irréductibles de  $O(d) \times D$  apparaissant dans la décomposition de  $E$ , avec espace de multiplicité  $N'_\nu \otimes N''_\mu$ .

L'action de  $D$  sur  $E'$  induit que  $\mathcal{H}$  agit sur  $E'$  comme  $x\partial$ . On remarque que  $i(x\partial + d/2)$  est un opérateur autoadjoint sur  $E'$ , donc on peut écrire  $E'$  comme somme (ou plutôt intégrale) directe des sous-espaces propres de cet opérateur. Ceci donne une décomposition de  $E'$  selon  $D$ . On a  $E' = \bigoplus_{c \in \mathbb{R}} \mathbb{C} x^{ic - \frac{d}{2}}$ . En particulier les espaces de multiplicité sont unidimensionnels. Nb. cette décomposition correspond à la transformation de Mellin.

D'après ce qui précède, on peut décomposer  $E$  comme  $E = \bigoplus_{c \in \mathbb{R}, \mu} x^{ic - \frac{d}{2}} \otimes \Gamma''_\mu \otimes N''_\mu$ . Aussi suffira-t-il dans la suite de chercher une base de  $\iota''(\gamma''_\mu \otimes N''_\mu) \subset E''$  pour  $\gamma''_\mu \in \Gamma''_\mu$  arbitraire.

Il reste à décomposer  $E''$  selon les représentations irréductibles de  $O(d)$ .

En fait l'action de  $T$  est elle aussi compatible avec cette décomposition de  $E$ . En effet  $E \cong E' \otimes E''$  en tant que  $T$ -espaces si  $T$  agit sur  $E'$  trivialement et sur  $E''$  naturellement. L'action de  $T$  sur  $E''$  commute avec celle de  $O(d)$ , donc on pourra décomposer  $E''$  selon l'action de  $O(d) \times T$ . Dans la pratique on écrira l'action de  $\mathcal{T}$  sur  $\iota''(\gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$ . Rappelons que  $\mathcal{T}^2 = 1$ , donc on peut diagonaliser par blocs son action sur  $\iota''(\gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$  selon les sous-espaces propres associés aux valeurs propres  $\pm 1$ . Si  $\tilde{\mathcal{M}}$  commute avec l'action de  $T$ , alors il laissera stable ces deux sous-espaces.

## 8.3 Décomposition selon $O(d)$ (ou $SO(d)$ )

### 8.3.1 Les représentations qui apparaissent et leurs multiplicités

Dans la suite on se servira des diagrammes de Young pour dénoter les représentations irréductibles de  $O(d)$  (cf. par ex. [28]). De la théorie des harmoniques sphériques on sait

que  $L^2(S^{d-1})$  se décompose selon  $O(d)$  de la manière

$$L^2(S^{d-1}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \boxed{1 \dots k}$$

Il nous reste donc à calculer

$$\left( \bigoplus_{k=0}^{\infty} \boxed{1 \dots k} \right) \otimes \square \otimes \square = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \left( \boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square \right)$$

ce qui revient à calculer  $\boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square$ . À l'aide des diagrammes de Young on a facilement

$$\boxed{1 \dots k} \otimes \square = \boxed{1 \dots k+1} \oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \end{array} \oplus \boxed{1 \dots k-1}$$

cependant en dimension  $d = 2$ ,  $\begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \end{array}$  est nulle pour  $k \geq 2$ , ce qui modifie la suite.

Poursuivant, on a

$$\begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \end{array} \otimes \square = \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k+1} \\ \boxed{k+2} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \ 2 \dots k} \\ \boxed{k+1 \ k+2} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \\ \boxed{k+2} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k-1} \\ \boxed{k} \end{array} \oplus \boxed{1 \dots k}$$

D'où finalement en dimension  $d \geq 3$

$$\begin{aligned} \boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square &= \boxed{1 \dots k+2} \oplus 3 \cdot \boxed{1 \dots k} \oplus \boxed{1 \dots k-2} \\ &\oplus 2 \cdot \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k+1} \\ \boxed{k+2} \end{array} \oplus 2 \cdot \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k-1} \\ \boxed{k} \end{array} \\ &\oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \ 2 \dots k} \\ \boxed{k+1 \ k+2} \end{array} \oplus \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \\ \boxed{k+2} \end{array} \end{aligned}$$

de sorte que

$$\begin{aligned} \bigoplus_{k=0}^{\infty} \boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square &= 2 \cdot \bullet \oplus 4 \cdot \square \oplus \bigoplus_{k=2}^{\infty} 5 \cdot \boxed{1 \dots k} \\ &\oplus 3 \cdot \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array} \oplus \bigoplus_{k=3}^{\infty} 4 \cdot \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k-1} \\ \boxed{k} \end{array} \oplus \bigoplus_{k=4}^{\infty} \begin{array}{c} \boxed{1 \ 2 \dots k} \\ \boxed{k+1 \ k+2} \end{array} \oplus \bigoplus_{k=3}^{\infty} \begin{array}{c} \boxed{1 \dots k} \\ \boxed{k+1} \\ \boxed{k+2} \end{array} \end{aligned}$$

( $\bullet$  symbolise la représentation triviale, ie. l'image de tout élément du groupe est l'identité sur un espace à 1 dimension.)

En dimension  $d = 2$  on a plutôt (pour  $k \geq 3$ )

$$\boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square = \boxed{1 \dots k+2} \oplus 2 \cdot \boxed{1 \dots k} \oplus \boxed{1 \dots k-2}$$

de sorte que

$$\bigoplus_{k=0}^{\infty} \boxed{1 \dots k} \otimes \square \otimes \square = 2 \cdot \bullet \oplus \bigoplus_{k=1}^{\infty} 4 \cdot \boxed{1 \dots k} \oplus 2 \cdot \begin{array}{c} \square \\ \square \end{array}$$

On vient d'obtenir la décomposition de  $E''$  selon  $O(d)$ , qu'on peut écrire schématiquement (cf. ci-dessus)

$$E'' \cong \bigoplus_{\nu} \Gamma''_{\nu} \otimes N''_{\nu}$$

### 8.3.2 Trouver une base explicite

On doit maintenant construire une base de  $\iota''(\gamma''_\nu \otimes N''_\nu) \subset E''$  où  $\gamma''_\nu \in \Gamma''_\nu$  peut être choisi de manière arbitraire. On peut construire une telle base à partir d'injections  $O(d)$ -invariantes d'un  $\tilde{\Gamma} \cong \Gamma''_\nu$  abstrait vers  $E''$ .

Commençons par une remarque. Une fonction sur  $S^{d-1}$  peut être définie comme restriction à  $S^{d-1}$  d'une fonction définie sur  $\mathbb{R}^d$ . Dans la suite ce type de définition sera implicite. Notons  $\rho$  cette restriction. Si  $f$  est une fonction sur  $\mathbb{R}^d$ , alors  $\rho(f)$  est une fonction sur  $S^{d-1}$ . On peut tout à fait définir  $g = \partial_1 f$  et obtenir ainsi une nouvelle fonction  $\rho(g)$  sur  $S^{d-1}$  (bien sûr  $\rho(g)$  dépend de  $f$  et pas seulement de  $\rho(f)$ ). On se servira de ce genre de construction dans la suite.

Pour débiter on choisit les  $\tilde{\Gamma}$  abstraits. On les réalisera comme (restriction à  $S^{d-1}$  de) fonctions sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs tensorielles, les coefficients des tenseurs étant des polynômes homogènes harmoniques. Par exemple  $\boxed{1 \dots k}$  peut être réalisé comme les polynômes harmoniques homogènes de degré  $k$  sur  $\mathbb{R}^d$  (ie. on a un tenseur d'ordre 0). On notera cet espace  $\tilde{\Gamma}_k$ .

Continuant avec cet exemple, la dimension de l'espace vectoriel des  $O(d)$ -injections de  $\tilde{\Gamma}_k$  dans  $E''$  (ie. celles qui commutent avec l'action de  $O(d)$  sur  $\tilde{\Gamma}_k$  et  $E''$ ) est la même que celle de  $N''_k$ . Pour  $d \geq 3$  et  $k \geq 2$  ceci donne 5 et on peut en expliciter une base comme suit. Pour  $p \in \tilde{\Gamma}_k$  on peut prendre les fonctions qui à  $p$  associent les tenseurs d'ordre 2 (indexés par  $\alpha$  et  $\beta$ )

$$x_\alpha x_\beta p, \quad x_\alpha \partial_\beta p, \quad x_\beta \partial_\alpha p, \quad \partial_\alpha \partial_\beta p, \quad \delta_{\alpha\beta} p$$

On vérifie que les fonctions ainsi définies sur la sphère  $S^{d-1}$  sont réellement indépendantes (si elles sont indépendantes dans une dimension  $d_0$  donnée, alors elle le seront pour toute  $d \geq d_0$ , car la restriction de ces fonctions à l'intersection de la sphère  $S^{d-1}$  avec le plan  $x_{d_0+1} = \dots = x_d = 0$  est justement ce que sont ces fonctions en dimension  $d_0$ ; ainsi dans la pratique on vérifie l'indépendance pour une dimension concrète (2, 3 ou 4) explicitement). Pour  $d = 2$  ces fonctions sont effectivement liées, et on doit chercher une famille libre. Dans la suite on traitera seulement le cas  $d \geq 3$ , les résultats pour  $d = 2$  ne seront donnés que dans un tableau récapitulatif.

Si en plus on veut que chaque vecteur de la base soit vecteur propre de  $\mathcal{T}$ , on prendra plutôt

$$x_\alpha x_\beta p, \quad x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p, \quad \partial_\alpha \partial_\beta p, \quad \delta_{\alpha\beta} p \quad \text{et} \quad x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$$

Rappelons qu'à proprement parler ce sont les restrictions de ces fonctions sur  $S^{d-1}$  qui sont dans  $E''$ . Si la somme des images de  $\tilde{\Gamma}_k$  sous ces 5  $O(d)$ -injections est  $\iota''(\Gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$ , alors les 5 images ci-dessus d'un  $p \in \tilde{\Gamma}_k$  ( $p \neq 0$ ) forment une base de  $\iota''(\gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$  pour un certain  $\gamma''_\nu$ . C'est ce qu'on a cherché.

Nous devons traiter les cas  $k < 2$  séparément, mais de manière analogue. Pour  $k = 0$  on a 2 injections

$$x_\alpha x_\beta p, \quad \delta_{\alpha\beta} p$$

et pour  $k = 1$  on en a 4

$$x_\alpha x_\beta p, \quad x_\alpha \partial_\beta p, \quad x_\beta \partial_\alpha p, \quad \delta_{\alpha\beta} p$$

Dans les calculs on choisira  $p = (x_1 + ix_2)^k$ . Profitons-en pour introduire la notation

$$z_l := x_{2l-1} + ix_{2l} \quad \text{pour } 1 \leq l \leq \lfloor d/2 \rfloor$$

Avec cette notation on a donc  $p = z_1^k$ .

Décrivons la situation pour les autres types de représentations de  $O(d)$ . Pour  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline k & & \\ \hline \end{array}$  on choisira comme représentation abstraite l'espace  $\tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  (de manière générale les indices de  $\tilde{\Gamma}$  correspondront aux longueurs des lignes des diagrammes de Young associés) défini comme image de  $V^{[k]}$  sous le foncteur de Schur  $S_{1,\dots,k-1}A_{1,k}$ . On a utilisé les notations suivantes :

- $V$  dénote la représentation standard de  $O(d)$  (ie.  $V = \mathbb{R}^d$ ).
- $V^{[k]}$  signifie les éléments de  $V^{\otimes k}$  qui sont sans trace, c'est-à-dire l'intersection des noyaux des contractions  $c_{ij}$

$$c_{ij} : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k-2}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto Q(v_i, v_j) v_1 \otimes \dots \hat{v}_i \otimes v_k$$

où  $Q$  est la forme bilinéaire définie positive par rapport à laquelle  $O(d)$  est définie (en l'occurrence le produit scalaire euclidien standard sur  $\mathbb{R}^d$ ).

- $S_\lambda$  — où  $\lambda$  est un sous-ensemble des entiers entre 1 et  $k$  — est l'opérateur de symétrisation associé au sous-groupe  $\mathfrak{S}(\lambda)$  du groupe symétrique  $\mathfrak{S}(\{1, \dots, k\})$ , c'est-à-dire

$$S_\lambda : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\lambda)} v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

De même,  $A_\lambda$  est l'opérateur d'alternation défini par

$$A_\lambda : V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes k}$$

$$v_1 \otimes \dots \otimes v_k \longmapsto \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(\lambda)} \epsilon(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma(k)}$$

où  $\epsilon(\sigma)$  est la signature de la permutation  $\sigma$ .

Les éléments de  $\tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  peuvent être vus comme des tenseurs d'ordre 1, à coefficients polynomiaux (en les  $x_i$ ) homogènes de degré  $k-1$ , car ils sont symétriques en les  $k-1$  composants tensoriels par construction.

La dimension de l'espace vectoriel des  $O(d)$ -injections de  $\tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  dans  $E''$  est la même que celle de  $N''_{k-1,1}$ . Pour  $k \geq 3$  ceci donne 4 et on peut en expliciter une base comme suit. Pour  $p \in \tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  on peut prendre les fonctions qui à  $p$  associent les tenseurs d'ordre 2 (indexés par  $\alpha$  et  $\beta$ )

$$x_\alpha p_\beta, \quad x_\beta p_\alpha, \quad \partial_\alpha p_\beta, \quad \partial_\beta p_\alpha$$

respectivement. À nouveau on peut dire que si l'image de  $\tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  sous toutes les  $O(d)$ -injections est  $\iota''(\Gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$ , alors les 4 images ci-dessus d'un  $p \in \tilde{\Gamma}_{k-1,1}$  forment une base de  $\iota''(\gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$  pour un certain  $\gamma''_\nu$ .

Pour  $k = 2$ , on a 3 injections

$$x_\alpha p_\beta, \quad x_\beta p_\alpha, \quad \partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha$$

Dans les calculs on prendra  $p \propto S_{1,\dots,k-1}A_{1,k}(z_1^{\otimes k-1} \otimes x_3)$ , par exemple

$$p = z_1^{k-1} \otimes x_3 - z_1^{k-2} x_3 \otimes z_1$$

ce qu'on peut encore écrire

$$p_\alpha = z_1^k \partial_\alpha (x_3/z_1)$$

Pour  $k = 2$  on pourra plutôt prendre  $p_\alpha = x_1^k \partial_\alpha (x_2/x_1)$ , qui est défini même pour  $d = 2$ .

Passons au cas  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & k & & \\ \hline \end{array}$ . Notons que là  $k \geq 4$  nécessairement. De plus pour  $d = 3$  la représentation  $\tilde{\Gamma}_{k-2,2}$  est nulle (cf. Remarque 3.i). On choisit comme représentation abstraite  $\tilde{\Gamma}_{k-2,2} = S_{1,\dots,k-2}S_{k-1,k}A_{1,k-1}A_{k,2}V^{[k]}$ . Les éléments de  $\tilde{\Gamma}_{k-2,2}$  (a priori des tenseurs d'ordre  $k$ ) sont par construction symétriques en les indices  $1, \dots, k-2$ , donc peuvent être vus comme des tenseurs d'ordre 2, à coefficients polynomiaux (en les  $x_i$ ) homogènes de degré  $k-2$ . Dans les calculs on prendra  $p \propto S_{1,\dots,k-2}S_{k-1,k}A_{1,k-1}A_{2,k}(z_1^{\otimes k-2} z_2^{\otimes 2})$ , par exemple :

$$p = z_1^{k-2} \otimes z_2 \otimes z_2 - z_1^{k-3} z_2 \otimes (z_1 \otimes z_2 + z_2 \otimes z_1) + z_1^{k-4} z_2^2 \otimes z_1 \otimes z_1$$

soit

$$p_{\alpha\beta} = z_1^k \partial_\alpha (z_2/z_1) \partial_\beta (z_2/z_1)$$

L'espace des  $O(d)$ -injections de  $\tilde{\Gamma}_{k-2,2}$  dans  $E''$  est unidimensionnel et on peut en prendre comme base l'injection triviale.

Pour  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & & \\ \hline k & & \\ \hline \end{array}$ . Notons que là  $k \geq 3$  nécessairement. De plus pour  $d = 3$  et  $k \geq 4$

la représentation  $\tilde{\Gamma}_{k-2,1,1}$  est nulle (cf. Remarque 3.i). On choisit comme représentation abstraite  $\tilde{\Gamma}_{k-2,1,1} = S_{1,\dots,k-2}A_{1,k-1,k}V^{[k]}$ . Les éléments de  $\tilde{\Gamma}_{k-2,1,1}$  (a priori des tenseurs d'ordre  $k$ ) sont par construction symétriques en les indices  $1, \dots, k-2$ , donc peuvent être vus comme des tenseurs d'ordre 2, à coefficients polynomiaux (en les  $x_i$ ) homogènes de degré  $k-2$ . Dans les calculs on prendra  $p \propto S_{1,\dots,k-2}A_{1,k-1,k}(z_1^{\otimes k-2} \otimes x_3 \otimes x_4)$  (sauf pour  $k = 3, d = 3$ ), par exemple :

$$p = z_1^{k-2} \otimes (x_3 \otimes x_4 - x_4 \otimes x_3) + z_1^{k-3} x_3 \otimes (x_4 \otimes z_1 - z_1 \otimes x_4) + z_1^{k-3} x_4 \otimes (z_1 \otimes x_3 - x_3 \otimes z_1)$$

soit

$$p_{\alpha\beta} = z_1^{k-3} \begin{vmatrix} z_1 & \partial_\alpha z_1 & \partial_\beta z_1 \\ x_3 & \delta_{\alpha 3} & \delta_{\beta 3} \\ x_4 & \delta_{\alpha 4} & \delta_{\beta 4} \end{vmatrix}$$

Pour  $k = 3$  (et  $d \geq 3$ ) on peut prendre

$$p_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x_1 & \delta_{\alpha 1} & \delta_{\beta 1} \\ x_2 & \delta_{\alpha 2} & \delta_{\beta 2} \\ x_3 & \delta_{\alpha 3} & \delta_{\beta 3} \end{vmatrix}$$

L'espace des  $O(d)$ -injections de  $\tilde{\Gamma}_{k-2,1,1}$  dans  $E''$  est unidimensionnel et on peut en prendre comme base l'injection triviale.

### 8.3.3 Remarques

À ce stade on fait un certain nombre de remarques

- (1) Pour  $k \leq 1$  les injections  $\tilde{\Gamma}_k \rightarrow \iota''(\Gamma_k'' \otimes N_k'') \subset E''$  ne sont pas toutes indépendantes, cependant les images forment une famille génératrice de  $\iota''(\Gamma_k'' \otimes N_k'')$ , car également  $\dim N_k$  est plus petite.

- (2) Pour  $d = 4$  la représentation  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array}$  et pour  $d = 6$  la représentation  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  ne sont pas  $SO(d)$ -irréductibles, mais seulement  $O(d)$ -irréductibles. Cependant pour  $d > 3$  on ne considère que des  $\tilde{\mathcal{M}}$  commutant avec  $O(d)$  tout entier.

- (3) Dans le cas  $d = 3$

- (i) Comme on a mentionné ci-dessus,  $\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & k & & \end{array}$  et (pour  $k > 3$ )  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & & \\ \hline k & & \end{array}$  sont

nulles (ie. représentation sur  $\{0\}$ ). Ceci parce que la somme des longueurs des deux premières colonnes du diagramme de Young est plus grande que la dimension  $d = 3$  (cf. Fulton et Harris 19.5).

- (ii)  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline k & & \end{array}$  et  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline & & \end{array}$  sont isomorphes en tant que représentations de  $SO(3)$  mais ne le sont pas en tant que représentations de  $O(3)$ . Ceci parce que les deux diagrammes sont *associés*, c'est-à-dire la somme des longueurs des premières colonnes de l'une et de l'autre est égale à la dimension  $d = 3$ , et les autres colonnes ont des longueurs deux à deux identiques entre les deux diagrammes (cf. ibid.). En particulier (pour  $k \geq 2$ ) on trouve 9 représentations indépendantes de  $SO(3)$  isomorphes à  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k \\ \hline & & \end{array}$  et on a en fait 9  $SO(3)$ -injections indépendantes  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k \\ \hline & & \end{array} \rightarrow E''$ . En plus des 5 injections déjà mentionnées, on peut en construire 4 autres avec le tenseur de Levi-Civita :

$$\epsilon_{\alpha\beta\gamma}x_\gamma p, \quad \epsilon_{\alpha\beta\gamma}\partial_\gamma p, \quad \epsilon_{\beta\gamma\delta}x_\alpha x_\gamma \partial_\delta p, \quad \epsilon_{\beta\gamma\delta}x_\gamma \partial_\delta \partial_\alpha p$$

D'autre part en tant que  $O(3)$ -représentations  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline k & & \end{array} \not\cong \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline & & \end{array}$  et on a 4 et 5  $O(3)$ -injections respectivement. En particulier si  $\tilde{\mathcal{M}}$  commute avec  $O(3)$  alors il ne couplera pas  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline k & & \end{array}$  et  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline & & \end{array}$ , mais s'il commute seulement avec  $SO(3)$  (ie. brise la parité) alors il peut mélanger ces deux.

- (iii) En tant que  $SO(3)$ -représentations  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  et  $\bullet$  sont isomorphes, mais pas en tant que  $O(3)$ -représentations. Donc comme ci-dessus, si  $\tilde{\mathcal{M}}$  brise la parité il peut mélanger les deux, et non sinon.

- (4) Dans le cas  $d \geq 4$  on ne considère que le cas où  $\mathcal{M}$  ne brise pas la parité.

Alors, pour  $d = 4$ ,  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & & \\ \hline k & & \end{array}$  et  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline & & \end{array}$  n'étant pas isomorphes en tant que  $O(4)$ -représentations,  $\mathcal{M}$  ne les mélangera pas (rappelons qu'il s'agit encore de

diagrammes associés, donc qui donnent des représentations isomorphes de  $SO(d)$  mais pas de  $O(d)$ ). Idem pour  $d = 5$  et  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline k-1 & & \\ \hline k & & \\ \hline \end{array}$  et  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-2 \\ \hline & & \\ \hline k-1 & & \\ \hline \end{array}$ .

Un certain nombre de ces remarques concernent le cas où  $\mathcal{M}$  brise la parité. On peut les résumer ainsi :

La remarque (2) dit que si  $\mathcal{M}$  brise la parité alors certains secteurs sont scindés en 2. Schématiquement si  $\Gamma$  est une représentation irréductible de  $O(d)$  alors  $\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2$  en tant que représentation de  $SO(d)$  et on a

$$\Gamma \otimes N \xrightarrow{\Gamma = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2} \Gamma_1 \otimes N \oplus \Gamma_2 \otimes N$$

et  $\mathcal{M}$  peut agir différemment sur les deux  $N$ . L'espace de multiplicité est « dédoublé ».

Les remarques (3.ii,iii) et (4) disent que si  $\mathcal{M}$  brise la parité alors certains secteurs sont mélangés. Schématiquement si  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , des représentations différentes de  $O(d)$ , sont isomorphes en tant que représentations de  $SO(d)$  alors

$$\Gamma_1 \otimes N_1 \oplus \Gamma_2 \otimes N_2 \xrightarrow{\Gamma_1 \cong \Gamma_2} \Gamma_1 \otimes (N_1 \oplus N_2)$$

et  $\mathcal{M}$  ne doit plus être diagonal par blocs selon  $N_1$  et  $N_2$ . Les espaces de multiplicité peuvent être mélangés.

Dans les deux cas il y a bien plus de possibilités pour l'action de  $\mathcal{M}$ .

### 8.3.4 Récapitulatif

Au total on a 8 secteurs différents à traiter. Il semble utile de les présenter dans le tableau récapitulatif 8.1. Les vecteurs de la base 1 sont vecteurs propres de  $\mathcal{T}$  avec valeur propre  $(-1)^k$ , ceux de la base 2 avec  $-(-1)^k$ . Pour  $SO(3)$  avec brisure de parité, on a 3 secteurs, résumés dans le tableau 8.2. Le cas de la dimension  $d = 2$  sans brisure de parité est résumé à part dans le tableau 8.3

Nous sommes maintenant en mesure de calculer l'action de  $\tilde{\mathcal{M}}$  sur  $\iota(x^{ic - \frac{d}{2}} \otimes \gamma''_\nu \otimes N''_\nu)$  et donc de connaître les  $\tilde{\mathcal{M}}_{c,i}$ . Pour simplifier, on fait le changement de variable  $h = ic - d/2$ , et on écrira  $\tilde{\mathcal{M}}_\nu(h)$  pour  $\tilde{\mathcal{M}}_{c,\nu}$  et  $M_\nu(h)$  pour la matrice  $M_{c,\nu}$  correspondant à  $\tilde{\mathcal{M}}_{c,\nu}$  dans la base issue des constructions ci-dessus. Alors  $\det M_\nu(h) = 0$  donne les valeurs de  $h$  pour lesquels  $\tilde{\mathcal{M}}$  a un mode zéro homogène de degré  $h$ . Rappelons que  $\tilde{\mathcal{M}}$  et  $\mathcal{M}$  ont les mêmes modes zéro. Cependant la connaissance simple de tous les modes zéro ne permet pas encore de savoir lesquels peuvent effectivement apparaître dans le cas où on force le champ magnétique à grande échelle, ou bien dans le cas en décroissance libre. Le comportement à petite échelle de la fonction de structure du champ magnétique serait dans ces cas déterminé par le mode zéro de plus petit degré qui apparaît effectivement. Pour le déterminer on aurait besoin d'une analyse plus fine.

### 8.3.5 Exemple d'application

Pour  $E''$  on considérera le secteur  $\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & \dots & k-1 \\ \hline k & & \\ \hline \end{array}$  avec  $k \geq 3$ ,  $d \geq 3$ . On doit considérer l'action de  $\tilde{\mathcal{M}}_{k-1,1}$  dans les deux bases, formées respectivement par les vecteurs

$$(K_{k-1,1,+}^1)_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha \quad (K_{k-1,1,+}^2)_{\alpha\beta} = \partial_\alpha p_\beta + \partial_\beta p_\alpha$$

Secteur	$k$	$d$	$p$	base 1	base 2
•	$= 0$	$\geq 2$	1	$x_\alpha x_\beta p$ $\delta_{\alpha\beta} p$	
□	$= 1$	$\geq 2$	$x_1$	$x_\alpha x_\beta p$ $x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p$ $\delta_{\alpha\beta} p$	$x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$
□ 1 .. k	$\geq 2$	$\geq 2$	$z_1^k$	$x_\alpha x_\beta p$ $x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p$ $\partial_\alpha \partial_\beta p$ $\delta_{\alpha\beta} p$	$x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$
□ □	$= 2$	$\geq 2$	$p_\alpha = x_1^2 \partial_\alpha (x_2/x_1)$	$x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha$	$x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ $\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha$
□ 1 .. k-1 k	$\geq 3$	$\geq 3$	$p_\alpha = z_1^k \partial_\alpha (x_3/z_1)$	$x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha$ $\partial_\alpha p_\beta + \partial_\beta p_\alpha$	$x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$ $\partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha$
□ 1 2 .. k-2 k-1 k	$\geq 4$	$\geq 4$	$p_{\alpha\beta} = z_1^k \partial_\alpha (z_2/z_1) \partial_\beta (z_2/z_1)$	$p_{\alpha\beta}$	
□ □ □	$= 3$	$\geq 3$	$p_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} x_1 & \delta_{\alpha 1} & \delta_{\beta 1} \\ x_2 & \delta_{\alpha 2} & \delta_{\beta 2} \\ x_3 & \delta_{\alpha 3} & \delta_{\beta 3} \end{vmatrix}$		$p_{\alpha\beta}$
□ 1 .. k-2 k-1 k	$\geq 4$	$\geq 4$	$p_{\alpha\beta} = z_1^{k-3} \begin{vmatrix} z_1 & \partial_\alpha z_1 & \partial_\beta z_1 \\ x_3 & \delta_{\alpha 3} & \delta_{\beta 3} \\ x_4 & \delta_{\alpha 4} & \delta_{\beta 4} \end{vmatrix}$		$p_{\alpha\beta}$

TAB. 8.1 – Classification des représentations de  $SO(d)$  qui interviennent pour le vecteur passif

Secteur	$k$	$p$	base 1	base 2
•	= 0	1	$x_\alpha x_\beta p$ $\delta_{\alpha\beta} p$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma p$	
□	= 1	$x_1$	$x_\alpha x_\beta p$ $x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p$ $\delta_{\alpha\beta} p$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma p$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma p$	$x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$ $\epsilon_{\alpha\gamma\delta} x_\beta x_\gamma \partial_\delta p + \epsilon_{\beta\gamma\delta} x_\alpha x_\gamma \partial_\delta p$
□ 1 .. k	≥ 2	$z_1^k$	$x_\alpha x_\beta p$ $x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p$ $\partial_\alpha \partial_\beta p$ $\delta_{\alpha\beta} p$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} x_\gamma p$ $\epsilon_{\alpha\beta\gamma} \partial_\gamma p$	$x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$ $\epsilon_{\alpha\gamma\delta} x_\beta x_\gamma \partial_\delta p + \epsilon_{\beta\gamma\delta} x_\alpha x_\gamma \partial_\delta p$ $\epsilon_{\alpha\gamma\delta} x_\gamma \partial_\beta \partial_\delta p + \epsilon_{\beta\gamma\delta} x_\gamma \partial_\alpha \partial_\delta p$

TAB. 8.2 – Classification des représentations de  $O(3)$  qui interviennent pour le vecteur passif en dimension  $d = 3$

Secteur	$k$	$p$	base 1	base 2
•	= 0	1	$x_\alpha x_\beta p$ $\delta_{\alpha\beta} p$	
□ 1 .. k	≥ 1	$z_1^k$	$x_\alpha x_\beta p$ $x_\alpha \partial_\beta p + x_\beta \partial_\alpha p$ $\delta_{\alpha\beta} p$	$x_\alpha \partial_\beta p - x_\beta \partial_\alpha p$
□ □	= 2	$p_\alpha = x_1^2 \partial_\alpha (x_2/x_1)$	$x_\alpha p_\beta + x_\beta p_\alpha$	$x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha$

TAB. 8.3 – Classification des représentations de  $SO(2)$  qui interviennent pour le vecteur passif en dimension  $d = 2$

et

$$(K_{k-1,1,-}^1)_{\alpha\beta} = x_\alpha p_\beta - x_\beta p_\alpha \quad (K_{k-1,1,-}^2)_{\alpha\beta} = \partial_\alpha p_\beta - \partial_\beta p_\alpha$$

où  $p_\alpha = z_1^k \partial_\alpha (x_3/z_1)$ .

Notons  $b_\nu^i(h) = \iota(x^h \otimes K_\nu^i)$ . Dit simplement, ce seront des fonctions sur  $\mathbb{R}^d$ , homogènes de degré  $h$ , et dont la dépendance angulaire sera donnée par  $K_\nu^i$ . On calcule l'image de chaque vecteur des deux bases par  $\tilde{\mathcal{M}}$ . Le premier vecteur de la première base est explicitement

$$(b_{k-1,1,+}^1)_{\alpha\beta}(h) = x^{h-k} z_1^k [x_\alpha \partial_\beta (x_3/z_1) + x_\beta \partial_\alpha (x_3/z_1)]$$

On sait que l'image sous  $\tilde{\mathcal{M}}$  de ce vecteur sera dans  $\langle b_{k-1,1,+}^1(h), b_{k-1,1,+}^2(h) \rangle$ , il suffit donc de résoudre pour  $a^1, a^2$  l'équation  $a^1 b_{k-1,1,+}^1(h) + a^2 b_{k-1,1,+}^2(h) = \tilde{\mathcal{M}} b_{k-1,1,+}^1(h)$  pour obtenir les coefficients  $M_\nu^{1,1}(h) = a^1$  et  $M_\nu^{2,1}(h) = a^2$  de  $M_\nu(h)$ . Et ainsi de suite.

Pour le calcul, choisissons un exemple simple.  $\tilde{\mathcal{M}}$  correspondra à un champ vectoriel advecté par un champ de vitesse sans divergence, ne brisant pas la parité :

$$\mathcal{M}^{\tilde{i}\tilde{j}} = \delta_{ij} \delta_{\tilde{i}\tilde{j}} \partial_\alpha \partial_{\tilde{\alpha}} \circ \tilde{S}_{\alpha\tilde{\alpha}}(x) - \delta_{ij} \partial_\alpha \circ (\partial_{\tilde{j}} \tilde{S}_{\alpha\tilde{i}})(x) - \delta_{\tilde{i}\tilde{j}} \partial_\alpha \circ (\partial_{\tilde{j}} \tilde{S}_{i\tilde{\alpha}})(x) + (\partial_{\tilde{j}} \partial_{\tilde{j}} \tilde{S}_{\tilde{i}\tilde{i}})(x)$$

avec

$$\tilde{S}_{ij}(x) = x^\xi (d + \xi - 1) \delta_{ij} - x^{\xi-2} \xi x_i x_j$$

On obtient une très grosse matrice. Ensuite on cherche les  $h$  qui annulent le déterminant de cette matrice, et on obtient 4 exposants de mode zéro dans chacun des secteur  $K_{k-1,1;\pm}$ :

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d-2}{d-1} a - 2(d-3+\xi) \pm \sqrt{(k-1)(k+d-3) \frac{4a}{d-1} + \left[ 2 + \frac{d-2}{d-1} a \right]^2 - 4a} \right]$$

sont communs aux deux et en plus dans le secteur  $K_{k-1,1,+}$  on a

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d-3}{d-1} a - (2d-3+\xi) \pm \sqrt{(k-1)(k+d-3) \frac{4a}{d-1} + \left[ \xi - 3 - \frac{d-3}{d-1} a \right]^2 - 4a} \right]$$

et dans le secteur  $K_{k-1,1,-}$  on a

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{d-3}{d-1} a - (2d-3+\xi) \pm \sqrt{(k-1)(k+d-3) \frac{4a}{d-1} + \left[ \xi - 1 - \frac{d-3}{d-1} a \right]^2 + 4\xi} \right]$$

On peut aussi faire le calcul pour le terme diffusif  $\mathcal{M}^{\tilde{i}\tilde{j}} = \delta_{ij} \delta_{\tilde{i}\tilde{j}} \Delta$ .

## 8.4 Restriction au cas sans divergence

L'étape suivante est de connaître l'action de  $\mathcal{M}$  sur les fonctions sans divergence à gauche et/ou à droite. En effet, on a fait l'hypothèse que  $\mathcal{M}$  (mais pas  $\tilde{\mathcal{M}}$ ) laissait ces espaces stables. On remarque que  $\text{Ker}(f_{\beta\gamma} \mapsto \partial_\beta f_{\beta\gamma}) = \text{Ker}(f_{\beta\gamma} \mapsto x_\alpha \partial_\beta f_{\beta\gamma})$  ie.

les fonctions tensorielles d'ordre 2, avec divergence à gauche identiquement nulle, sont les mêmes que celles annulées par  $\text{Div}_L$  défini par  $(\text{Div}_L f)_{\alpha\beta} = x_\alpha \partial_\gamma f_{\gamma\beta}$  (on introduit de même  $(\text{Div}_R f)_{\alpha\beta} = x_\beta \partial_\gamma f_{\alpha\gamma}$ ). On voit alors que  $\text{Div}_L$  est un opérateur sur  $E$  et il commute avec  $D$  et  $O(d)$  donc on peut procéder exactement comme pour  $\tilde{\mathcal{M}}$  pour trouver les  $(\text{Div}_L)_\nu(h)$  et leurs noyaux qu'on notera  $F_\nu^L(h)$  (on définit de manière analogue  $F_\nu^R(h)$ ). Remarquons juste que  $\text{Div}_L$  ne commute pas avec  $T$ . En effet on a  $T \circ \text{Div}_L = \text{Div}_R \circ T$  et  $T \circ \text{Div}_R = \text{Div}_L \circ T$ . On voit alors que  $F_\nu(h) \equiv F_\nu^L(h) \cap F_\nu^R(h)$  est néanmoins stable sous  $T$ .

Le calcul de ces noyaux cache quelques difficultés qu'on traitera dans la sous-section suivante. Par anticipation, on peut dire que la dimension du noyau est indépendante de  $h$  (alors que pour  $\tilde{\mathcal{M}}$  cette dimension était nulle sauf pour certaines valeurs de  $h$ ).

Il faudra se souvenir que  $F_\nu$  dépend vraiment de  $h$  (en effet si par exemple  $G_{\alpha\beta}$  est sans divergence, alors  $x^\rho G_{\alpha\beta}$  ne le sera plus en général).

Notons aussi que  $\mathcal{M}$  étant homogène de degré  $\zeta$ , il va de  $F_\nu(h)$  vers  $F_\nu(h + \zeta)$ .

Dans un premier temps on peut calculer les  $h$  pour lesquels la restriction de  $\mathcal{M}_\nu(h)$  à  $F_\nu(h)$  est de rang plus petit que  $\dim F_\nu(h)$ . Cela nous donne les exposants des modes zéro dans le cas sans divergence (à gauche et/ou à droite). Là encore nous nous heurtons au problème de déterminer lesquels des modes zéro pourront effectivement contribuer à la fonction de structure du champ magnétique (forcé ou en décroissance libre, par exemple), et donc de trouver le comportement dominant à petite échelle.

On peut aller plus loin et trouver un système d'équations différentielles d'ordre 2 vérifié par certaines fonctions construites à partir des modes zéro et leurs dérivées. Ceci fera l'objet des sections 8.4.2 à 8.4.4.

### 8.4.1 Calcul pratique des noyaux

Une note sur le calcul des noyaux. Premièrement, on peut calculer l'intersection des noyaux de  $\text{Div}_L$  et de  $\text{Div}_R$  comme noyau de l'opérateur

$$\begin{aligned} \text{Div} : E &\rightarrow E \oplus E \\ x &\mapsto (\text{Div}_L(x), \text{Div}_R(x)) \end{aligned}$$

Comme  $\text{KerDiv}$  est stable sous  $T$ , on peut chercher des bases de  $\text{KerDiv} \cap T^+$  et de  $\text{KerDiv} \cap T^-$ , où  $T^\pm$  sont les sous-espaces propres de  $T$  associés aux valeurs propres  $\pm 1$  de  $T$ . La somme de ces bases sera une base de  $\text{KerDiv}$ .

Plus important, dans la pratique on ne calcule pas le noyau de  $\text{Div}_\nu$  pour des valeurs particulières fixées de  $d, k, h$ , mais on considère que le corps de base est  $\mathbb{R}(d, k, h)$  est c'est sur ce corps qu'on calcule son noyau. La différence est que, avec cette méthode il se peut que pour certaines valeurs concrètes de  $d, k, h$  la base trouvée ne soit pas vraiment une base. En effet, construisons avec les vecteurs de la base trouvée une matrice  $B$ , dont ces vecteurs seront les colonnes. Il s'agit d'une matrice qui a  $\dim \text{KerDiv}$  colonnes et  $\dim E$  lignes, à coefficients dans  $\mathbb{R}[d, k, h]$  (a priori dans  $\mathbb{R}(d, k, h)$  mais comme, si on multiplie chaque vecteur d'une base par un scalaire non nul, on a toujours une base, on peut se ramener aisément au cas où les coefficients sont polynômiaux). La matrice  $B$  sera de rang  $r = \dim \text{KerDiv}$ , ce rang étant calculé sur  $\mathbb{R}(d, k, h)$ . Ce qui signifie que toute matrice carrée  $r \times r$  extraite de  $B$  aura pour déterminant un polynôme non nul. Le problème est qu'il se peut que tous ces polynômes (ie. les déterminants de toutes

les matrices  $r \times r$  extraites de  $B$ ) s'annulent en même temps pour certaines valeurs de  $d, k, h$ .

Pire, il se peut que le rang de  $\text{Div}_\nu$  soit plus petit pour certaines valeurs de  $d, k, h$  que dans le cas générique (la définition utile du rang est ici la taille de la plus grande matrice carrée extraite dont le déterminant est non nul). On est face au même problème que ci-dessus : des polynômes, bien que non nuls, peuvent cependant avoir des zéros communs.

Le problème principal est donc, dans les deux cas, de trouver, pour une matrice  $B$  donnée à coefficients dans  $\mathbb{R}[d, k, h]$ , la variété dans l'espace  $d, k, h$  où son rang sur  $\mathbb{R}$  est plus petit que son rang sur le corps  $\mathbb{R}(d, k, h)$ . La méthode est la suivante.

Soit  $r$  le rang générique (ie. sur  $\mathbb{R}(d, k, h)$ ) de la matrice  $B$ . On calcule les déterminants de toutes les matrices  $r \times r$  extraites de  $B$ . On obtient un ensemble de polynômes.  $\text{rg} B < r$  si et seulement si tous ces polynômes s'annulent. On cherche donc la variété correspondant à l'idéal engendré par cet ensemble de polynômes. C'est un problème classique de la géométrie algébrique, il se ramène essentiellement au calcul de la base de Gröbner de l'idéal. La plupart des logiciels de calcul formel savent donner les solutions d'un système polynômial (eg. fonction solve de Maple).

Dans tous les cas qu'on envisage ici, on trouvera une réunion de sous-espaces affines comme variété où le rang de  $B$  est plus petit que normalement. Certains n'ont pas d'intérêt (les valeurs de  $d$  ou de  $k$  sont incompatibles avec les hypothèses faites sur elles, par exemple). Il reste deux cas non triviaux concernant le rang de  $\text{Div}_\nu(h)$  :  $\square$  et  $\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \square \\ \hline \end{array}$  (par ex. pour  $\square$  on a comme un des plans affines  $h = 1 - d$ ).

On montre (**conjecture**) que ces modes zéro exceptionnels de l'opérateur divergence correspondent à des fonctions dont la divergence n'est pas véritablement nulle, mais la fonction delta de Dirac. Nous ne devons donc pas en tenir compte. La méthode pour montrer que par exemple  $\text{Div}_L G = C\delta(0)$  est de prendre une fonction test  $\Psi$  (par exemple une gaussienne) et de calculer  $(G, \text{Div}_L^\dagger \Psi)$  qui se calcule sans problème, et on aura  $(G, \text{Div}_L^\dagger \Psi) = (\Psi, \text{Div}_L G) = C\Psi(0)$ .

### 8.4.2 Transformée de Mellin

On veut ici exposer le lien entre  $\mathcal{M}_\nu(h)$  et  $\mathcal{M}$ . Ils sont essentiellement les transformées de Mellin l'un de l'autre.

Écrivons que deux fonctions définies sur  $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$  ( $\mathbb{R}^d$  est considéré comme l'espace et  $\mathbb{R}$  comme le temps), à valeurs tensorielles d'ordre 2, sont transformées de Mellin spatiales l'une de l'autre :

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \int \hat{G}_{\alpha\beta}(\hat{x}, h, t) x^h dh$$

où  $x = |\vec{x}|$  et  $\hat{x} = \vec{x}/x$ . Pour être exact, il faudrait préciser un contour d'intégration approprié à la transformation de Mellin. Ce contour est la ligne complexe  $-d/2 + ic$  où  $d$  est la dimension de l'espace et  $c$  décrit  $\mathbb{R}$ . Il sera toujours sous-entendu qu'on intègre sur ce contour.

Pour plus de simplicité supposons que  $G$  et  $\hat{G}$  se transforment selon une représentation irréductible  $\Gamma_\nu$  donnée de  $O(d)$ , plus précisément que  $G \in \iota(E' \otimes \iota''(\gamma_\nu'' \otimes N_\nu''))$  pour un certain  $\gamma_\nu'' \in \Gamma_\nu''$ . On notera  $K^i$  (pour alléger les notations on fixe  $\nu$ , et en général on ne l'écrira plus explicitement) les tenseurs formant une base de  $\iota''(\gamma_\nu \otimes N_\nu) \subset E''$ .  $\hat{G}$

peut être vu, pour  $h$  et  $t$  fixés, comme un élément de  $E''$ , et en fait, d'après l'hypothèse qu'on vient de faire, comme un élément de  $\iota''(\gamma_\nu \otimes N_\nu) \subset E''$ . On peut par conséquent l'écrire comme

$$\hat{G}_{\alpha\beta}(\hat{x}, h, t) = \hat{G}^i(h, t) K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

Alors la relation de Mellin devient

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = \int \hat{G}^i(h, t) x^h K_{\alpha\beta}^i(\hat{x}) dh = \left[ \int \hat{G}^i(h, t) x^h dh \right] K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

On peut introduire  $G^i(\vec{x}, t) = \int \hat{G}^i(h, t) x^h dh$  et on a alors

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = G^i(\vec{x}, t) K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

Supposons alors que  $G(\vec{x}, t)$  vérifie l'équation d'évolution  $\partial_t G(\vec{x}, t) = \mathcal{M}G(\vec{x}, t)$ . Avec les expressions précédemment données de  $G(\vec{x}, t)$  on peut écrire ceci d'une part comme

$$\begin{aligned} \partial_t G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) &= x^\zeta \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\gamma}(\vec{x}, \vec{\nabla}) G_{\gamma\beta}(\vec{x}, t) \\ &= x^\zeta \int \hat{G}^i(h, t) \tilde{\mathcal{M}}_{\alpha\gamma}(\vec{x}, \vec{\nabla}) (x^h K_{\gamma\beta}^i(\hat{x})) dh \\ &= x^\zeta \int \hat{G}^j(h, t) M_\nu^{ij}(h) x^h K_{\alpha\beta}^i(\hat{x}) dh \\ &= x^\zeta \left[ \int \hat{G}^j(h, t) x^h M_\nu^{ij}(h) dh \right] K_{\alpha\beta}^i(\hat{x}) \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que l'action de  $\tilde{\mathcal{M}}$  sur  $\iota(x^h \otimes \iota''(\gamma_\nu \otimes N_\nu))$  s'écrit dans la base des  $\iota(x^h \otimes K^i)$  comme la matrice  $M_\nu(h)$ .

D'autre part on a tout simplement

$$\partial_t G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t) = (\partial_t G^i(\vec{x}, t)) K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

Comparant les deux formes obtenues pour  $\partial_t G_{\alpha\beta}(\vec{x}, t)$  on obtient

$$\begin{aligned} \partial_t G^i(\vec{x}, t) &= x^\zeta \int \hat{G}^j(h, t) x^h M_\nu^{ij}(h) dh \\ &= x^\zeta M_\nu^{ij}(\mathcal{H}) \int \hat{G}^j(h, t) x^h dh \\ &= x^\zeta M_\nu^{ij}(\mathcal{H}) G^j(\vec{x}, t) \end{aligned}$$

À noter que  $M_\nu(\mathcal{H})$  est une matrice d'opérateurs.

Supposons maintenant en plus que  $G(\vec{x}, t)$  est sans divergence (à gauche et/ou à droite). Alors  $\hat{G}(\hat{x}, h, t)$  sera, pour  $h$  et  $t$  fixés, contenu dans un sous-espace de  $\iota''(\gamma_\nu \otimes N_\nu)$  engendré par des vecteurs  $b^j(h)$ . On peut écrire les coefficients des  $b^j(h)$  sur la base  $K^i$  comme des vecteurs colonnes, et former une matrice  $B(h)$  en mettant côte-à-côte ces vecteurs colonnes (ie.  $B(h)$  sera la matrice de la famille  $b^j(h)$  exprimée par rapport à la base  $K^i$ ). Alors on aura

$$\hat{G}(\hat{x}, h, t) = \hat{G}^i(h, t) K_{\alpha\beta}^i(\hat{x}) = \hat{g}^j(h, t) B^{ij}(h) K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

où les  $\hat{g}^j(h,t)$  sont les coefficients de  $\hat{G}(\hat{x},h,t)$  dans la base  $b^j$ . On aura donc

$$G_{\alpha\beta}(\vec{x},t) = \left[ \int \hat{g}^j(h,t) B^{ij}(h) x^h dh \right] K_{\alpha\beta}^i(\hat{x})$$

Comparant avec ce qui précède, on voit que

$$G^i(\vec{x},t) = \int \hat{g}^j(h,t) B^{ij}(h) x^h dh$$

On peut écrire le membre de droite comme

$$B^{ij}(\mathcal{H}) \int \hat{g}^j(h,t) x^h dh$$

et en introduisant  $g^j(\vec{x},t) = \int \hat{g}^j(h,t) x^h dh$  on a finalement

$$G^i(\vec{x},t) = B^{ij}(\mathcal{H}) g^j(\vec{x},t)$$

Si les  $G^i$  correspondent à un  $G$  sans divergence, comme on l'a supposé, alors on peut considérer  $g$  comme inconnue dans cette équation et elle sera déterminée de manière unique, de plus elle dépendra linéairement de  $G^i$  (considéré comme vecteur). On notera cette dépendance par  $B^{-1}$  (abusivement, car  $B$  est une matrice rectangulaire). On écrira donc

$$g^i(\vec{x},t) = (B^{-1})^{ij}(\mathcal{H}) G^j(\vec{x},t)$$

On peut alors, utilisant les résultats obtenus pour  $G^i(\vec{x},t)$ , calculer

$$\begin{aligned} \partial_t g^i(\vec{x},t) &= \partial_t [(B^{-1})^{ij}(\mathcal{H}) G^j(\vec{x},t)] \\ &= (B^{-1})^{ij}(\mathcal{H}) \partial_t G^j(\vec{x},t) \\ &= (B^{-1})^{ij}(\mathcal{H}) x^\zeta M_\nu^{jl}(\mathcal{H}) G^l(\vec{x},t) \\ &= (B^{-1})^{ij}(\mathcal{H}) x^\zeta M_\nu^{jl}(\mathcal{H}) B^{lm}(\mathcal{H}) g^m(\vec{x},t) \\ &= x^\zeta (B^{-1})^{ij}(\mathcal{H} + \zeta) M_\nu^{jl}(\mathcal{H}) B^{lm}(\mathcal{H}) g^m(\vec{x},t) \\ &= x^\zeta (B^{-1}(\mathcal{H} + \zeta) M(\mathcal{H}) B(\mathcal{H}))^{ij} g^j(\vec{x},t) \end{aligned}$$

On a utilisé dans l'avant-dernière égalité le fait que  $x^{-\zeta} \circ \mathcal{H} \circ x^\zeta = \mathcal{H} + \zeta$ .

Ceci montre l'intérêt d'écrire la matrice  $M$  dans une base  $B$  où ses coefficients en  $h$  sont des polynômes (plutôt que des fractions rationnelles) de degré le plus bas possible. En effet,  $M_\nu^B(\mathcal{H}) \hat{=} B^{-1}(\mathcal{H} + \zeta) M(\mathcal{H}) B(\mathcal{H})$  est ainsi une matrice d'opérateurs différentiels, et donc l'évolution temporelle des  $g^j$  est décrite par un système d'équations différentielles, de degré le plus bas possible.

### 8.4.3 Calcul de la base adaptée

Notre but est finalement de trouver une base  $b_\nu(h)$  de  $F_\nu(h) = \text{KerDiv}_\nu(h)$ , dépendante de  $h$ , telle que la matrice de  $\mathcal{M}_\nu(h) = x^\zeta \tilde{\mathcal{M}}_\nu(h) : F_\nu(h) \rightarrow F_\nu(h + \zeta)$  écrite dans les bases  $b_\nu(h)$  et  $b_\nu(h + \zeta)$ , soit à coefficients polynômiaux en  $h$ , de degré le plus bas possible.

Nous commençons par calculer une première base  $b'_\nu(h)$  de  $F_\nu(h)$ . Nous avons noté  $K_\nu^i$  les vecteurs de la base que nous avons utilisée pour calculer l'action de  $\tilde{\mathcal{M}}_\nu(h)$  et de  $\text{Div}_\nu(h)$ . On considérera  $\text{Div}_\nu(h)$  et  $b'_\nu(h)$  comme des matrices exprimées dans cette base. Nous voulons donc calculer le noyau de la matrice de  $\text{Div}_\nu(h)$ . Pour calculer le noyau de cette matrice on procède par élimination de Gauss sans fractions, et on tombe sur une matrice de  $b'_\nu(h)$ , qui aura par construction des coefficients qui sont des polynômes en  $h$ .

On cherche la matrice de  $\mathcal{M}_\nu(h) : F_\nu(h) \rightarrow F_\nu(h + \zeta)$  écrite dans les bases respectives des deux espaces, et il faut que ce soit cette matrice qui soit à coefficients polynômiaux. On cherche donc une base  $b''_\nu(h)$  de  $F_\nu(h)$  telle que  $[b''_\nu(h + \zeta)]^{-1} \mathcal{M}_\nu(h) b''_\nu(h)$  soit à coefficients polynômiaux. On voit tout de suite que  $b''_\nu = b'_\nu$  ne convient pas forcément, car  $\mathcal{M}_\nu(h) b'_\nu(h)$  est à coefficients polynômiaux, mais  $[b'_\nu(h + \zeta)]^{-1}$  peut introduire des fractions. Pour pallier cette difficulté on cherchera une base  $b''_\nu$  telle que  $b''_\nu(h)$  et  $[b''_\nu(h)]^{-1}$  soient toutes deux à coefficients polynômiaux en  $h$ . Dans le langage de l'algèbre ceci signifie que  $b''_\nu(h)$  est une base du  $\kappa[h]$ -module  $F_\nu(h) \cap R$  où nous avons défini  $R \equiv \langle (K_\nu^i)_{i=1..n} \rangle_{\kappa[h]}$  où  $\kappa$  désigne le corps  $\mathbb{Q}(d, k)^1$  et  $n$  est la cardinalité de la base  $K_\nu$ , donc la dimension de  $R$ . La notation  $\langle V \rangle_A$  désigne le  $A$ -module libre engendré par la famille de vecteurs  $V$  si  $A$  est un anneau, et l'espace vectoriel engendré si  $A$  est un corps.

On sait qu'une telle base existe car  $R \simeq (\kappa[h])^n$  est un module libre sur un anneau principal ( $\kappa[h]$  est principal), donc tous ses sous-modules sont libres. Dans la pratique, pour trouver cette base  $b''_\nu(h)$ , on doit mettre  $b'_\nu(h)$  sous forme normale de Smith, ie. écrire  $b'_\nu(h) = UDV$  où  $U$  et  $V$  sont inversibles, appartenant à  $\text{Aut}(\kappa[h]^n)$  et  $\text{Aut}(\kappa[h]^m)$  respectivement (avec  $m = \dim F_\nu(h)$ ), et  $D$  est  $n \times m$  diagonale (ie.  $d_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ )<sup>2</sup> avec  $\text{rg} D = \text{rg} b'_\nu(h) = m$ . Alors d'une part  $U$  est inversible donc ses colonnes forment une base de  $R$

$$R = \langle (\text{Col}_i U)_{i=1..n} \rangle_{\kappa[h]}$$

où  $\text{Col}_i$  désigne la  $i^{\text{ième}}$  colonne d'une matrice. D'autre part

$$\begin{aligned} F_\nu(h) &= \langle (\text{Col}_i b'_\nu(h))_{i=1..m} \rangle_{\kappa(h)} = \text{Im}(b'_\nu(h)) = \\ &= \text{Im}(UDV) = \text{Im}(\bar{U}\bar{D}V) = \langle (\text{Col}_i U)_{i=1..m} \rangle_{\kappa(h)} \end{aligned}$$

où  $\bar{D}$  est la matrice formée des  $m$  premières lignes de  $D$ , et  $\bar{U}$  est la matrice formée des  $m$  premières colonnes de  $U$ . La dernière égalité vient du fait que  $V$  et  $\bar{D}$  sont inversibles. On a maintenant

$$\begin{aligned} F_\nu(h) \cap R &= \langle (\text{Col}_i U)_{i=1..m} \rangle_{\kappa(h)} \cap \langle (\text{Col}_i U)_{i=1..n} \rangle_{\kappa[h]} \\ &= \langle (\text{Col}_i U)_{i=1..m} \rangle_{\kappa[h]} \end{aligned}$$

ce qui montre que les  $m$  premières colonnes de  $U$  conviennent comme base  $b''_\nu(h)$ .

Le dernier critère est d'avoir le plus petit degré pour la matrice de  $\mathcal{M}_\nu(h)$ . Pour ceci on cherchera (sans justifier) la base de Gröbner réduite de  $\langle b''_\nu(h) \rangle$  (base de Gröbner au sens des modules et par rapport à l'ordre de termes TOP tdeg en  $h$ ; cf. Sect. 8.5). C'est la base recherchée  $b_\nu(h)$ . Dans cette base (plus précisément dans les bases  $b_\nu(h)$ )

1.  $\mathbb{Q}(d, k)$  désigne le corps des fractions rationnelles en les variables  $d$  et  $k$  à coefficients dans  $\mathbb{Q}$  (les nombres rationnels).  $d$  est la dimension de l'espace physique et  $k$  est celui qu'on a utilisé pour indexer les diagrammes de Young associés aux représentations de  $O(d)$ .

2. Dans la forme normale de Smith on a aussi  $d_{ii} | d_{jj}$  pour  $i < j$ , mais on ne s'en sert pas.

et  $b_\nu(h + \zeta)$  la matrice de  $\mathcal{M}_\nu(h)$  aura des coefficients de degré 2 au plus en  $h$  (il s'agit d'une constatation expérimentale).

#### 8.4.4 Exemple d'application

On calcule, avec usage intensif de MAPLE, qu'en dimension  $d \geq 3$ , dans le cas sans brisure de parité, dans le secteur  $SO(d)$  représenté par le tableau de Young  $\boxed{1 \dots k}$  avec  $k \geq 2$ , restreint aux champs vectoriels sans divergence, il y a 4 exposants dans le spectre de modes zéro de  $\mathcal{M}_2$ , qui sont

$$\zeta_{2,k} = \frac{1}{2} \left[ \frac{d-3}{d-1} a + 3 - \xi - 2d \pm \sqrt{\left[ 2 - \xi \pm \sqrt{k(k+d-2) \frac{4a}{d-1} + (1-a)^2} \right]^2 - \frac{4(d-2)a[a + (d-1)(\xi-1)]}{(d-1)^2}} \right]$$

où  $a = \frac{d+\xi}{1+\xi\wp} - 1$ . Ceci est en accord avec la formule de [7] pour  $d = 3$  et  $\wp = 0$ . De plus on peut vérifier qu'il existe une base de modes zéro adaptée telle que  $\mathcal{M}_2$  s'écrive dans cette base comme un opérateur différentiel d'ordre 2. Pour les détails des calculs, le lecteur est renvoyé à la feuille de calcul MAPLE jointe et au code implémentant les calculs présentés ci-dessus.

### 8.5 « Rappels » sur les bases de Gröbner

Le but n'est pas de donner une présentation détaillée du sujet, juste d'expliquer de quoi il s'agit, et donner une idée intuitive. Un exposé très clair et élémentaire, orienté pour les applications, peut être trouvé dans [1].

Les bases de Gröbner généralisent la division euclidienne des polynômes à une variable aux polynômes à plusieurs variables. Rappelons que la division euclidienne dans le cas à une variable est la division avec reste, plus précisément la division euclidienne d'un polynôme  $p$  par un polynôme  $q$  est la formule  $p = aq + r$  où  $a$  et  $r$  sont des polynômes et  $\deg r < \deg q$ . Ceci détermine de manière unique  $a$  et  $r$ .

On remarque qu'on a utilisé un certain ordre sur les monômes, on a comparé leurs degrés. Cet ordonnancement est très important pour la définition de la division euclidienne ainsi que pour son implémentation algorithmique. Mais il n'a pas de généralisation univoque au cas des polynômes à plusieurs variables. On peut utiliser plusieurs ordres et on obtiendra des divisions différentes.

On appelle alors base de Gröbner – pour un ordre donné sur les monômes – d'un idéal polynômial  $I$ , l'ensemble  $G = \{g_1, \dots, g_n\} \subset I$  si le reste de la division de tout élément de  $I$  par  $G$  est 0, ie. si tout élément  $p \in I$  s'écrit  $p = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n$  avec  $\text{lp}(p) = \max_i (\text{lp}(a_i) \text{lp}(g_i))$  où  $\text{lp}(g)$  est le monôme d'ordre le plus élevé – selon l'ordre choisi – du polynôme  $g$ .

Pour ordonner les termes, nous avons utilisé dans le texte l'ordre  $\text{tdeg}$ , ie. 'degré total' des monômes, avec ordre lexicographique pour départager en cas d'égalité. De plus, pour les modules, on doit ordonner des vecteurs de polynômes. On a utilisé l'ordre TOP, ie. 'term over position', c'est-à-dire on compare d'abord les degrés des monômes

dominants dans chaque vecteur, et en cas d'égalité on prend celui qui est premier dans le vecteur (est à la position de plus petit indice vectoriel).

On appelle base de Gröbner réduite une base de Gröbner dont les éléments ne peuvent plus être réduits par les autres (en effectuant des divisions avec reste). Il y a unicité de la base de Gröbner réduite d'un idéal. Et d'une certaine façon elle est la base dont les éléments sont de l'ordre le plus petit possible.



## Chapitre 9

# Méthodes Lagrangiennes – Modèles corrélés en temps

Nous avons déjà évoqué (Chapitre 3) les deux manières courantes d'aborder les problèmes d'advection, l'une passant par des équations aux dérivées partielles (EDP) sur le champ advecté, l'autre passant par les trajectoires Lagrangiennes. Jusqu'à présent nous avons surtout tenté de *relier* les deux, ou bien d'utiliser l'approche Lagrangienne pour trouver la réponse à des questions qu'on pouvait poser sur les champs advectés. À présent nous allons examiner des questions qui se posent directement dans l'approche Lagrangienne. Nous le ferons dans le cadre de modèles où le champ de vitesse advectant n'est plus pris dans le modèle de Kraichnan mais possède des corrélations temporelles. Ces modèles n'admettent plus de formulation simple en terme d'EDP, cependant on peut poser essentiellement le même genre de questions sur le comportement des trajectoires Lagrangiennes que dans le cas du modèle de Kraichnan. Les questions les plus simples concernent la possibilité de comportement explosif ou coalescent des trajectoires (cf. 4.6). Une question plus quantitative est de connaître la distribution du temps de doublage de la distance entre deux particules Lagrangiennes.

Un autre point intéressant est l'introduction du système **quasi-Lagrangien**, que nous définirons dans la Section 9.1. Par la suite nous étudierons plus spécifiquement deux cas. La première étude (Sect. 9.2) se concentre sur le comportement de la séparation de deux trajectoires dans un champ de vitesse quasi-Lagrangien non-lisse, figé en temps. La deuxième (Sect. 9.3) aborde le problème du temps de doublage entre deux trajectoires, quand le champ de vitesse quasi-Lagrangien présente des corrélations temporelles dépendantes de l'échelle, dans la limite où ce temps de corrélation devient très grand. Ceci est représentatif de mes travaux en lien avec l'article joint, en plus de la section 7 dudit papier.

### 9.1 Description quasi-Lagrangienne

La description quasi-Lagrangienne d'un écoulement est le fait de passer à un système de coordonnées dont l'origine est liée à une trajectoire Lagrangienne  $\vec{R}(t) = \vec{R}(t | \vec{R}_0, 0)$  du flot. Dans les applications aux écoulements dynamiques, tel Navier-Stokes, on choisirait les axes parallèles aux axes d'un référentiel Galiléen fixé à l'avance. Dans les situations purement cinématiques que nous allons étudier ce genre de choix ne joue au-

cun rôle. Soulignons qu'il s'agit seulement d'un système de coordonnées et non d'un référentiel, en particulier les vitesses seront les mêmes que dans des coordonnées fixes (Euleriennes), plus précisément si on note  $\vec{v}^{\text{qL}}$  le champ de vitesse quasi-Lagrangien alors

$$\vec{v}^{\text{qL}}(\vec{r}, t) = \vec{v}(\vec{R}(t) + \vec{r}, t)$$

Dans la description quasi-Lagrangienne la trajectoire  $\vec{r}(t)$  d'une (autre) particule Lagrangienne vérifiera l'équation différentielle

$$\partial_t \vec{r}(t) = \vec{v}^{\text{qL}}(t, \vec{r}(t)) - \vec{v}^{\text{qL}}(t, \vec{0}) \quad (9.1)$$

Pour l'étude de la turbulence réelle (découlant de Navier-Stokes par exemple) cette description a l'avantage qu'elle permet d'étudier le système à une certaine échelle en soustrayant le mouvement d'entraînement dû aux échelles plus grandes qui n'apparaît aux échelles plus petites que comme un changement de référentiel. D'où l'intérêt croissant pour l'étude théorique mais aussi expérimentale du champ de vitesse quasi-Lagrangien, qui pourrait avoir des propriétés plus simples que le champ Eulerien.

Nous allons étudier l'évolution de la séparation de deux particules Lagrangiennes dans un champ de vitesse qui a des corrélations temporelles dépendant de l'échelle. On considère bien sûr un modèle d'advection passive, mais en plus on se donnera non pas la statistique du champ de vitesse Eulerien (i.e. en coordonnées fixes) mais sa statistique en coordonnées quasi-Lagrangiennes, plus spécifiquement dans le système quasi-Lagrangien lié à l'une des deux particules. On donne donc directement la fluctuation temporelle de la vitesse relative des deux particules. En revanche dans une description Eulerienne cette vitesse relative aurait, à une échelle donnée, des fluctuations en plus qui viendraient du mouvement d'entraînement de l'ensemble des deux particules par les vitesses aux échelles plus grandes, convertissant les fluctuations spatiales de la vitesse à l'échelle considérée en fluctuations temporelles. Il apparaît donc que se donner le champ quasi-Lagrangien est en un certain sens ce qu'on puisse faire de plus simple. En outre ce modèle devrait mieux rendre compte de la statistique d'un champ de vitesse turbulent de type Navier-Stokes où le champ de vitesse à une échelle donnée est lui-même entraîné par les vitesses aux échelles plus grandes.

On souhaite modéliser le domaine inertiel d'un écoulement turbulent, on prendra donc pour le champ de vitesse un spectre d'énergie en loi de puissance (reliée au paramètre  $\alpha$  de (9.2)) et le temps de fluctuation du champ de vitesse suivra également une loi de puissance (reliée au paramètre  $\beta$  de (9.2)). En cela on suit les modèles phénoménologiques élémentaires (cf. [27]), en particulier le point  $\alpha = 1/3$ ,  $\beta = 1/3$  correspond à la théorie de Kolmogorov.

Comme d'habitude, nous supposerons la statistique du champ de vitesse (quasi-Lagrangienne cette fois-ci) invariante sous rotation et translation, gaussienne, de moyenne nulle et avec fonction à deux points (i.e. covariance)

$$\langle \vec{v}^{\text{qL}}(t, \vec{r}) \otimes \vec{v}^{\text{qL}}(t', \vec{r}') \rangle = D_2 \int e^{-D_3 |t-t'| k^{2\beta}} \frac{e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{(\vec{k}^2 + L^{-2})^{\frac{d}{2} + \alpha}} \underline{P}(\vec{k}, \wp) \frac{d^d \vec{k}}{(2\pi)^d} \quad (9.2)$$

où  $\wp$  est le degré de compressibilité de l'écoulement,  $\underline{P}$  est donné par (4.9) et  $L$  est l'échelle intégrale du champ  $\vec{v}$ . Cette coupure est nécessaire pour que la variance de

$\vec{v}$  i.e.  $\langle \vec{v}^2(t, \vec{r}) \rangle$  soit finie. On voit cependant sur (9.1) que dans la description quasi-Lagrangienne seules des différences de vitesses à temps coïncidants interviennent, et les quantités physiques (trajectoires des particules, advection de champs passifs) seront bien définies dans la limite  $L \rightarrow \infty$ . On prendra donc  $L = \infty$ , soit  $L^{-1} = 0$ . Bref, on n'a plus de paramètre  $L$ .

## 9.2 Piégage en temps fini dans un champ de vitesse figé en mouvement Brownien fractionnaire

Le but est ici de montrer qu'une particule placée dans un champ de vitesse aléatoire, unidimensionnel, indépendant du temps, distribué comme un mouvement Brownien fractionnaire dont le paramètre (en tant que processus stochastique, i.e. son « temps ») est la coordonnée spatiale, arrivera à un point où la vitesse est nulle, en temps fini, presque sûrement par rapport à la distribution du champ de vitesse.

### 9.2.1 Définition du mouvement Brownien fractionnaire

Le mouvement Brownien fractionnaire (par la suite mBf) d'exposant de Hurst  $\gamma/2 \in ]0, 1[$  est défini comme le processus réel Gaussien centré  $(W_0(r))_{r \geq 0}$  de covariance

$$\mathbb{E}[W_0(r)W_0(s)] = \frac{c(\gamma)}{2}(r^\gamma + s^\gamma - |r - s|^\gamma) \quad (r, s \geq 0)$$

où  $c(\gamma)$  est une constante que certains auteurs choisissent différente de 1, principalement parce qu'ils partent d'une définition différente mais équivalente. En particulier on voit sur la forme de la covariance que  $W_0(0) = 0$  (presque sûrement).

On peut aussi définir le processus réel Gaussien à incréments stationnaires  $W$  (nous appellerons ce processus mBfh; 'h' comme homogène), tel que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[W(r) - W(s)] &= 0 \\ \mathbb{E}[(W(r) - W(s))^2] &= |r - s|^\gamma \end{aligned}$$

Alors clairement le processus  $W_0(r) = W(r) - W(0)$  est un mBf.

Notons enfin que si dans (9.2) nous prenons  $D_3 = L^{-1} = 0$  alors le champ de vitesse quasi-Lagrangien obtenu est bien un mBf figé en temps.

### 9.2.2 Finitude du temps de piégage

Considérons une particule lancée à un instant donné dans le champ de vitesse  $W_0(r)$ , à la position  $r_1 > 0$  et supposons que  $W_0(r_1) > 0$ . Bien que la statistique de  $W_0$  ne soit pas symétrique autour de  $r_1$  (ne serait-ce que parce que  $r = 0$  est un point distingué), le cas  $W_0(r_1) < 0$  se traite de la même manière, donc on ne s'étendra pas dessus.

On peut alors définir la première position  $r_0 > r_1$  où le champ de vitesse s'annule:

$$r_0(W_0) = \inf(r \mid r \geq r_1, W_0(r) = 0)$$

Le temps  $T(r_1; W_0)$  que met la particule pour arriver de  $r_1$  à  $r_0$  peut s'écrire simplement

$$T(r_1; W_0) = \int_{r_1}^{r_0} \frac{dr}{W_0(r)} \quad (9.3)$$

Rappelons que notre but est de montrer que  $T(r_1; W_0)$  est fini presque sûrement en  $W_0$ .

Il est connu [12, 13] qu'il existe une fonction  $L_W$  dépendant de la réalisation  $W$  de mBfh, telle que pour tout intervalle  $[r, s]$  et tout intervalle  $[u, v]$ , la mesure de Lebesgue des  $p \in [r, s]$  où  $W(p)$  est dans l'intervalle  $[u, v]$  s'exprime comme

$$\lambda(p \in [r, s] | W(p) \in [u, v]) = \int_u^v L_W([r, s], w) dw$$

où  $\lambda$  est la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}_+$ . De plus  $L$  est continue conjointement en  $s$  et  $w$ . En outre ([32]§30) il existe  $h > 0$  tel que pour tout  $R < S$ , pour presque toute réalisation  $W$ , il existe  $C_W > 0$  et  $\epsilon_W > 0$  (notons que  $C$  et  $\epsilon$  dépendent de  $R, S$  aussi, mais par cette notation on veut surtout souligner la dépendance en  $W$ ), tels que pour tout  $u, v$  avec  $|u - v| < \epsilon_W$  et tout  $[r, s] \subset [R, S]$ , on ait

$$|L_W([r, s], u) - L_W([r, s], v)| < C_W |u - v|^h \quad (9.4)$$

Si on prend  $W_0(r) = W(r) - W(0)$ , on a clairement

$$\lambda(p \in [r, s] | W_0(p) \in [u, v]) = \int_u^v L_W([r, s], W(0) + w) dw \quad (9.5)$$

et on peut écrire (9.3) comme

$$T(r_1; W_0) = \int_0^\infty \frac{L_W([r_1, r_0], W(0) + w)}{w} dw \quad (9.6)$$

Or  $L_W([r_1, r_0], W(0)) = 0$  par définition de  $r_0$  (entre  $r_1$  et  $r_0$  la vitesse  $W_0(r) = W(r) - W(0)$  ne passe jamais par 0, donc  $W(r)$  ne passe jamais par  $W(0)$ ), ce qui avec (9.4) permet d'écrire, pour un certain  $h > 0$

$$L_W([r_1, r_0], W(0) + w) = L_W([r_1, r_0], W(0) + w) - L_W([r_1, r_0], W(0)) = O(w^h)$$

pour  $w$  petit, presque sûrement en  $W$ . Cela montre que dans (9.6) l'intégrale converge près de  $w = 0$ . Remarquons par ailleurs que  $\int_0^\infty L_W([r_1, r_0], W(0) + w) dw = r_0 - r_1$  (conséquence immédiate de (9.5)), il vient que  $T(r_1; W_0)$  est presque sûrement fini.

On a prouvé donc qu'une particule lancée dans un champ de vitesse figé, en fBm, arrivera en temps fini (presque sûrement) à un endroit où le champ de vitesse est nul.

### 9.3 Dispersion Lagrangienne dans un champ de vitesse quasi-Lagrangien à fluctuations lentes

Nous voulons traiter ici le cas où le champ de vitesse fluctue lentement aux petites échelles, c'est-à-dire quand le temps caractéristique des fluctuations à l'échelle inverse  $k$ , pour  $k$  suffisamment grand, est très grand devant le temps de retournement des

tourbillons à cette même échelle (inverse). On voit de (9.2) que le temps de fluctuation du champ de vitesse est  $\tau_{\text{fl}}(k) = D_3^{-1} k^{-2\beta}$  et le temps de retournement des tourbillons est  $\tau_{\text{ed}}(k) = D_2^{-\frac{1}{2}} k^{\alpha-1}$ . Nous voulons que le quotient  $\tau_{\text{fl}}(k)/\tau_{\text{ed}}(k) = D_3^{-1} D_2^{\frac{1}{2}} k^{1-\alpha-2\beta}$  soit grand pour  $k$  grand. Il faut donc  $1 - \alpha - 2\beta > 0$ . On suppose donc dorénavant

$$\alpha + 2\beta < 1 \quad (9.7)$$

Considérons les changements d'échelle temporelle  $t \rightarrow \mu t$  et spatiale  $\vec{\rho} \rightarrow \mu^\sigma \vec{\rho}$ , (qui transforment donc les vitesses (longueur / temps) comme  $\vec{v} \rightarrow \mu^{\sigma-1} \vec{v}$ ). Sous ces changements, les différents paramètres caractérisant le champ de vitesse sont transformés comme

$$\begin{aligned} D_2 &\rightarrow \mu^{2(1-\alpha)\sigma-2} D_2 \\ D_3 &\rightarrow \mu^{2\beta\sigma-1} D_3 \end{aligned}$$

Si nous prenons  $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$ ,  $D_2$  reste invariant, seul  $D_3$  est redimensionné. Alors  $2\beta\sigma - 1 = \frac{2\beta}{1-\alpha} - 1 = \frac{2\beta+\alpha-1}{1-\alpha} < 0$  en vertu de (9.7).

Rappelons que l'origine de notre système quasi-Lagrangien est attachée à l'une des particules, de sorte que l'écart  $\vec{\Delta}\rho$  des deux particules est en fait la position quasi-Lagrangienne  $\vec{\rho}$  de l'autre particule.

Un moyen commode d'étudier la séparation de deux particules est d'étudier le temps de doublage de la distance initiale qui les sépare. Or on ne sait pas a priori s'il n'y a pas possibilité d'aggrégation des particules, ce qui impliquerait la possibilité que la distance entre deux particules ne double jamais, donc un temps de doublage infini. Il vaut mieux donc considérer le temps de doublage-ou-moitié, c'est à dire le temps de sortie de  $|\vec{\rho}|$  de l'intervalle  $[\frac{1}{2}|\vec{\rho}_0|, 2|\vec{\rho}_0|]$ . On notera ce temps  $t_2$ . Ce temps est presque sûrement fini et tous ses moments existent. Pour les moments négatifs on le voit du fait que la pdf de la vitesse à l'échelle  $\rho_0$  est en gros gaussienne, donc les très grandes vitesses sont très rares. En ce qui concerne les moments positifs, on voit que pour les temps plus grands que le temps caractéristique des fluctuations de la vitesse à l'échelle  $\rho_0$ , la particule subira en gros un mouvement brownien, et les moments du temps de sortie de ce dernier processus sont finis.

En résumé, nous voulons connaître les différents moments de  $t_2$ , et leur scaling en fonction de la séparation initiale  $\vec{\Delta}\rho_0 = \vec{\rho}_0$ . Nous pouvons tout de suite écrire le comportement sous changement d'échelle des moments de  $t_2$

$$\langle t_2^n(\vec{\rho}_0, D_2, D_3) \rangle = \mu^{-n} \langle t_2^n(\mu^{\frac{1}{1-\alpha}} \vec{\rho}_0, D_2, \mu^{\frac{\alpha+2\beta-1}{1-\alpha}} D_3) \rangle \quad (9.8)$$

En particulier on peut écrire

$$\langle t_2^n(\vec{\rho}_0, D_2, D_3) \rangle = |\vec{\rho}_0|^{(1-\alpha)n} f_n(D_3^{\frac{1}{1-\alpha-2\beta}} \vec{\rho}_0, D_2)$$

pour une certaine fonction  $f_n$ . On voit que le comportement de  $t_2$  aux petites échelles est lié à son comportement pour  $D_3$  petit. En plus, si on suppose que  $f_n$  se comporte en loi de puissance en son premier argument quand celui-ci est petit, alors  $\langle t_2^n(\vec{\rho}_0, D_2, D_3) \rangle$  se comporte en loi de puissance et pour  $|\vec{\rho}_0|$  petit et pour  $D_3$  petit. Si les exposants caractéristiques associés à  $|\vec{\rho}_0|$  et à  $D_3$  sont respectivement  $\zeta_n$  et  $\theta_n$ , alors ils sont liés par

$$\zeta_n = (1 - \alpha)n + (1 - \alpha - 2\beta)\theta_n \quad (9.9)$$

Remarquons tout de suite que  $\theta_n$  ne peut être 0 (et a fortiori  $> 0$ ) pour  $n > 0$  car cela impliquerait que  $\langle t_2^n(\vec{\rho}_0, D_2, D_3) \rangle$  ait une limite finie pour  $D_3 \rightarrow 0$ , c'est-à-dire dans le modèle figé. Or on s'attend à ce que dans le modèle figé  $t_2$  soit infini avec probabilité strictement positive, correspondant aux champs de vitesse où la particule est « piégée » sur une orbite telle que  $|\vec{\rho}|$  n'atteint jamais ni  $|\vec{\rho}_0|/2$  ni  $2|\vec{\rho}_0|$ . En une dimension ceci se passerait là où le champ de vitesse (relatif) s'annule. En deux dimensions on peut imaginer des orbites fermées par exemple (dans le cas incompressible) ou bien un puits circulaire dans le potentiel de vitesse (dans le cas potentiel). De semblables configurations du champ de vitesse piégeant la particule existent avec probabilité positive en toute dimension (sauf peut-être dans le cas incompressible, qui mériterait d'être élucidé d'avantage). En conclusion, pour  $n > 0$  on aura nécessairement  $\theta_n < 0$ .

Essayons de déterminer  $\theta_n$ . Pour  $n < 0$  ce sont les très petites valeurs de  $t_2$  qui donnent la contribution essentielle au  $n^{\text{ième}}$  moment de  $t_2$ . Cette partie de la fonction de densité de probabilité (PDF) de  $t_2$  doit admettre une limite quand  $D_3$  tend vers 0 car les moments négatifs sont finis même pour la théorie figée ( $D_3 = 0$ ), et que la variation de  $D_3$  ne devrait affecter considérablement que la partie de la PDF de  $t_2$  où  $t_2$  est plus grand que le temps caractéristique des fluctuations  $\tau_{\text{fl}}(\rho_0, D_3)$  et que ce dernier tend vers l'infini quand  $D_3$  tend vers 0. Donc on prévoit  $\theta_n = 0$  pour  $n < 0$ .

Pour  $n > 0$  ce sont les grands  $t_2$  qui sont importants. En particulier les  $t_2$  qui sont plus grands que le temps caractéristique de retournement des tourbillons  $\tau_{\text{ed}}(\rho_0)$ , ce dernier étant (par définition) indépendant de  $D_3$ . Dans ces cas on peut imaginer que si  $t_2$  est nettement plus grand que le temps de retournement des tourbillons, ceci est dû au fait que la particule se fait « piéger » dans le champ de vitesse. C'est-à-dire que si on figeait le champ instantané alors  $|\vec{\rho}|$  resterait indéfiniment dans l'intervalle  $[\frac{1}{2}|\vec{\rho}_0|, 2|\vec{\rho}_0|]$ , comme décrit ci-dessus. La sortie se fera alors grâce au changement temporel du champ de vitesse (en première approximation on peut dire qu'à un certain moment la configuration cesse d'être piégante). La question est donc de savoir quand le champ de vitesse adopte une forme qui ne piège plus la particule. On s'attend donc à ce que  $t_2$  soit inversement proportionnel à la vitesse de changement du champ de vitesse, c'est-à-dire qu'il varie comme  $\tau_{\text{fl}}(\rho_0, D_3)$  qui est lui-même proportionnel à  $D_3^{-1}$ . Ce qui nous donne  $\theta_n = -n$  pour  $n > 0$ .

Nous pouvons maintenant donner  $\zeta_n$  en vertu de (9.9). Pour  $n \leq 0$  on trouve  $\zeta_n = (1 - \alpha)n$ . Pour  $n > 0$  on trouve  $\zeta_n = 2\beta n$ . Ces résultats sont résumés dans le tableau 9.1.

$n$	$< 0$	$> 0$
$\zeta_n$	$(1 - \alpha)n$	$2\beta n$

TAB. 9.1 – Exposants  $\zeta_n$  des moments de  $t_2(\rho_0)$

## 9.4 Article paru au JSP

*Journal of Statistical Physics, Vol. 113, Nos. 5/6, December 2003 (© 2003)*

## Lagrangian Dispersion in Gaussian Self-Similar Velocity Ensembles

Marta Chaves,<sup>1</sup> Krzysztof Gawędzki,<sup>2,5</sup> Peter Horvai,<sup>2,3</sup> Antti Kupiainen,<sup>4</sup>  
and Massimo Vergassola<sup>1,5</sup>

*Received March 17, 2003; accepted July 10, 2003*

---

We analyze the Lagrangian flow in a family of simple Gaussian scale-invariant velocity ensembles that exhibit both spatial roughness and temporal correlations. We argue that the behavior of the Lagrangian dispersion of pairs of fluid particles in such models is determined by the scale dependence of the ratio between the correlation time of velocity differences and the eddy turnover time. For a non-trivial scale dependence, the asymptotic regimes of the dispersion at small and large scales are described by the models with either rapidly decorrelating or frozen velocities. In contrast to the decorrelated case, known as the Kraichnan model and exhibiting Lagrangian flows with deterministic or stochastic trajectories, fast separating or trapped together, the frozen model is poorly understood. We examine the pair dispersion behavior in its simplest, one-dimensional version, reinforcing analytic arguments by numerical analysis. The collected information about the pair dispersion statistics in the limiting models allows to partially predict the extent of different phases of the Lagrangian flow in the model with time-correlated velocities.

---

**KEY WORDS:** Turbulence; Lagrangian flow; scaling.

### 1. INTRODUCTION

The aim of this paper is to study the Lagrangian flow in  $d$ -dimensional random velocity fields  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r})$  with a prescribed scale-invariant statistics. The velocity ensembles that we shall consider mimic some essential properties of

---

<sup>1</sup> Observatoire de la Côte d'Azur, B.P. 4229, 06304 Nice, France.

<sup>2</sup> Laboratoire de Physique, ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France; e-mail: kgawedsk@ens-lyon.fr

<sup>3</sup> Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France.

<sup>4</sup> Department of Mathematics, Helsinki University, P.O. Box 4, 00014 Helsinki, Finland.

<sup>5</sup> Member of CNRS.

realistic velocities in developed turbulence: their spatial roughness within a large interval of scales and their temporal correlation. By definition, the Lagrangian flow is described by the ordinary differential equation

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \mathbf{v}(t, \mathbf{R}). \quad (1.1)$$

It determines the motion of hypothetical fluid particles or of small test particles suspended in the fluid. One usually distinguishes between the motion of a single particle, dominated by the velocity fluctuations on the largest scale present (the so called "sweeping effects") and the evolution of a relative separation of two particles. The latter is driven by the velocity fluctuations on scales of the order of the inter-particle distance and it is the main object of interest of the present paper. For larger groups of particles, one should similarly distinguish the motion of their barycenter from the relative motion of particles within the group. The latter is known to show quite intricate behavior related to intermittency, see ref. 14, but it will not be discussed here.

The separation  $\rho = \mathbf{R}' - \mathbf{R}$  between two fluid particles satisfies the equation

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{v}(t, \rho + \mathbf{R}(t)) - \mathbf{v}(t, \mathbf{R}(t)), \quad (1.2)$$

where  $\mathbf{R}(t)$  is a trajectory of one of the particles, a solution of Eq. (1.1) starting at time zero at  $\mathbf{R} = 0$ , for example. Upon introduction of the so called quasi-Lagrangian velocity,

$$\mathbf{v}^{qL}(t, \mathbf{r}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{r} + \mathbf{R}(t)), \quad (1.3)$$

i.e., velocity in the frame moving with a fixed fluid particle, we may rewrite Eq. (1.2) as

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathbf{v}^{qL}(t, \rho) - \mathbf{v}^{qL}(t, \mathbf{0}) \equiv \Delta \mathbf{v}^{qL}(t, \rho). \quad (1.4)$$

We shall be interested in the short- and long-time behaviors of the Lagrangian particles in the statistical ensembles where typical velocities are only Hölder continuous, the property expected in the limit of infinite Reynolds numbers.<sup>(32)</sup> In such non-Lipschitz velocities, there is a problem with solving Eqs. (1.1), (1.2), or (1.4). To avoid it, we shall first consider noisy particle trajectories that solve the stochastic equation

$$d\mathbf{R} = \mathbf{v}(t, \mathbf{R}) dt + \sqrt{2\kappa} d\mathbf{W}, \quad (1.5)$$

where  $W(t)$  is the Brownian motion in  $d$  dimensions mimicking the effect of molecular diffusivity. Noisy trajectories form a well defined Markov process even in velocity fields with poor regularity. Subsequently, the limit  $\kappa \rightarrow 0$  will be performed in selected quantities. Other regularizations may be considered.<sup>(12,13)</sup> For example, the velocity field may be smeared at short distances to mimic the effects of viscosity, the trajectory equations solved in smeared velocities and the smearing removed subsequently. Such a procedure may lead to a different limiting flow, see remarks at the end of Section 2. For definiteness, we shall consider in the present paper only the Lagrangian flows defined with the use of the Brownian noise regularization. Physically, this corresponds to the small Prandtl number situations where on small scales the molecular diffusion masks the viscous effects. The simple velocity ensembles that we shall discuss are time-reversal invariant. As a result, we shall not have to distinguish the forward and the backward evolution of trajectories and will concentrate on the first one, between, say, times zero and  $t$ .

One way to study the relative motion of pairs of fluid particles is to follow the evolution of the **pair dispersion**, i.e., of the separation distance  $\rho$  between two particles. Its statistics in a random flow may be described by the velocity-averaged probability distribution  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  of the time  $t$  dispersion  $\rho$ , given its time zero value  $\rho_0$ , in the limit when we remove the (independent) noises of the Lagrangian trajectories. Another, related, test of the relative motion of a pair of fluid particles is obtained by looking at the **exit time**:<sup>(21,6)</sup> the time  $t$  that the pair dispersion takes to evolve from  $\rho_0$  to  $\rho_1$ . In particular,  $\rho_1 = 2\rho_0$  corresponds to the **doubling time** of the pair dispersion. The statistics of the exit times may be encoded in their velocity-averaged distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  taken in the limit of vanishing noise. Unlike  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$ , the distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  may integrate to less than 1 with the missing mass determining the probability of the events when the pair dispersion does not attain the value  $\rho_1$  in finite time. The exit time is less influenced than the pair dispersion by small or large-distance cutoffs in the velocity correlations, so preferable in numerical or experimental studies.<sup>(6)</sup>

Recently, a new insight into the intricate character of the Lagrangian flow in turbulent velocities has been gained by analytic study of the Kraichnan ensemble<sup>(27)</sup> of Gaussian velocities which are decorrelated in time but exhibit scaling behavior in space, see refs. 5, 12, 23, 28, and 29. Here, we try to find out how the presence of temporal correlations of velocities influences the Lagrangian flow. We shall study the behavior of trajectory separation in a simple generalization of the Kraichnan ensemble of velocities where time correlations are reintroduced.

The paper is organized as follows. In Section 2 we recall the main facts about the Lagrangian flow in the Kraichnan model, in particular the

appearance of phases with very different trajectory behavior. Section 3 describes a Gaussian ensemble of homogeneous isotropic velocities with temporal correlations, discussed in the past in refs. 2, 10, 15, and 18 and similar in the spirit to non-isotropic shearing ensembles studied in refs. 3 and 4, see also ref. 30. We present a simple mean-field type analysis of the particle separation when such an ensemble is used to model the quasi-Lagrangian velocities. How the mean-field predictions may be substantiated further by scaling arguments is the subject of Section 4. See also refs. 16 and 17 for related rigorous results. Analytic arguments and conjectures about the behavior of trajectories in a one-dimensional version of the model with time-independent velocities are contained in Section 5. The simple geometry of this case allows for an analytic treatment. The behavior of the exit time statistics in velocity ensembles with long-time correlations is briefly studied in Section 6. The question how the behavior of pair dispersion changes when the Gaussian ensemble is used to model the Eulerian velocities is addressed in Section 7. In particular we show that in the one-dimensional time-independent case, the sweeping by large eddies in the Eulerian model speeds up the movement of a single Lagrangian particle, but it localizes pairs of particles by reducing the growth of their dispersion. Five Appendices contain more technical material. Some of the predictions of the paper are checked in one dimension by numerical simulations.

## 2. LESSONS FROM THE KRAICHNAN MODEL

The Kraichnan ensemble of turbulent velocities,<sup>(27)</sup> is a Gaussian ensemble with vanishing velocity 1-point function and with the 2-point function

$$\langle v^i(t, \mathbf{r}) v^j(t', \mathbf{r}') \rangle = D_1 \delta(t-t') \int \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{k_L^{d+\xi}} P^{ij}(\mathbf{k}, \wp) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}, \quad (2.1)$$

where  $k_L = \sqrt{k^2 + L^{-2}}$  and  $P^{ij}(\mathbf{k}, \wp) = \frac{1-\wp}{d-1} (\delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{k^2}) + \wp \frac{k^i k^j}{k^2}$ , see ref. 14 and references therein. There are two dimensionless parameters in the Kraichnan ensemble: the exponent  $\xi > 0$  and the compressibility degree  $0 \leq \wp \leq 1$ . For  $\xi \leq 2$ , the velocities smeared in time are (almost surely) Hölder continuous in space with any exponent smaller than  $\xi/2$ . For  $\xi > 2$ , they are Lipschitz (or even more regular). The compressibility degree  $\wp = 0$  corresponds to incompressible velocities,  $\wp = 1$  to gradients of a potential (in one dimension necessarily  $\wp = 1$ ). The normalization constant  $D_1$  has dimension  $length^{2-\xi}/time$ . The length  $L$  is the integral scale that sets the spatial correlation length of velocities. If  $\xi < 2$ , it may be taken to infinity in the

correlation functions involving only velocity differences  $\mathbf{v}(t, \mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{r}) \equiv \Delta \mathbf{v}(t, \boldsymbol{\rho})$ . For  $\xi = 2$ , this may still be done if  $D_1$  is rescaled when  $L \rightarrow \infty$ .

## 2.1. Possible Flow Behaviors

The Kraichnan ensemble may be used invariably to model Eulerian or quasi-Lagrangian velocities as both ensembles coincide in this case. The statistics of a single Lagrangian particle is that of a  $d$ -dimensional Brownian motion with diffusivity that blows up when  $L \rightarrow \infty$ . The two-particle separation depends only on velocity differences and its statistics has a non-trivial  $L \rightarrow \infty$  limit whenever this holds for the velocity differences. The pair-dispersion and the exit time distributions  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  and  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  may be solved analytically in this limit. The exact solutions, that describes also the short-distance asymptotics of the distributions at finite  $L$ , show several dichotomic behaviors depending on the values of parameters of the model. The first dichotomy, noticed in ref. 5, is between the

**deterministic flow** characterized by the property

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \delta(\rho) d\rho \quad (2.2)$$

which signals that the trajectories in a fixed velocity field are defined by their initial position, and the

**stochastic flow** where

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) \text{ is a measure with density.} \quad (2.3)$$

The limits of the probability distributions above (and below) should be understood in weak sense, under integrals against test functions. The behavior (2.3) means that infinitesimally close trajectories separate in a finite time and indicates that the stochasticity introduced into the Lagrangian flow by coupling it to the noise, see Eq. (1.5), survives in the limit  $\kappa \rightarrow 0$ . The Lagrangian trajectories in a fixed velocity field are not determined by initial position but form instead a stochastic process. That this is indeed what happens in the Kraichnan model was established rigorously in ref. 28. We shall call the phenomenon **spontaneous stochasticity**.<sup>6</sup>

There are further dichotomic behaviors of the Lagrangian flow in the Kraichnan model. We have chosen to characterize the other dichotomies in terms of the small  $\rho_0$  behavior of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; dt)$

<sup>6</sup> It was termed intrinsic stochasticity in ref. 12.

648

Chaves *et al.*

with  $\gamma \neq 1$  fixed, attaching to them more or less suggestive names. There is a dichotomy between the

**Lyapunov flow** such that

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt) \text{ is a measure with density,} \quad (2.4)$$

and the

**Richardson flow** where

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt) = c(\gamma) \delta(t) dt \quad \text{with } c(\gamma) > 0. \quad (2.5)$$

This dichotomy distinguishes the flows in regular velocities where the Lagrangian separation on short distances involves fixed time scales (like the inverse Lyapunov exponent), from the ones in non-regular (non-Lipschitz) velocities where the characteristic times of the Lagrangian separation become very short on short scales.

Finally, the last two dichotomies that we want to single out characterize the short distance behavior of the probability of infinite exit times. They are between the

**locally separating and locally trapping flow** where for  $\gamma > 1$

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \int \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt) \left\{ \begin{array}{l} = \\ < \end{array} \right\} 1, \text{ respectively,} \quad (2.6)$$

and

**locally recurrent and locally transient flow** where the same holds for  $\gamma < 1$ .

Roughly, with positive probability, close trajectories do not increase their distance in locally trapping flows and do not approach each other in locally transient ones.

## 2.2. Pair Dispersion

Due to the temporal decorrelation of the Kraichnan velocities, the probability distributions  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  constitute transition probabilities of a Markov process  $\rho(t)$  that in the limit  $L \rightarrow \infty$  becomes a diffusion on a half-line with the explicit generator

$$M = -D'_i \rho^{\xi-a} \partial_\rho \rho^a \partial_\rho \quad \text{for } a = \frac{d+\xi}{1+\rho\xi} - 1, \quad (2.7)$$

where  $D'_1$  is proportional to  $D_1$ . Note that the symbol of  $M$  vanishes at  $\rho = 0$ . The different behavior of such diffusion for different values of  $\xi$  and  $a$  has its origin in the singularity of  $M$  at  $\rho = 0$  which requires different treatment in different regimes. Up to the change of variables  $x = \rho^{(2-\xi)/2}$  casting the generator  $M$  into the form

$$M = \left(1 - \frac{\xi}{2}\right)^2 D' x^{1-\delta} \partial_x x^{\delta-1} \partial_x \quad \text{for } \delta = 2 \left(1 - \frac{1-a}{2-\xi}\right) \quad (2.8)$$

and a time rescaling, the Markov process  $\rho(t)$  may be identified with the well studied Bessel diffusion,<sup>(7)</sup> a natural interpolation between processes describing the radial variable in the standard diffusion in integer dimensions  $\delta$ . Various analytic formulae may be then directly carried from that case to the present situation.

For  $\xi = 2$  corresponding to smooth velocities with velocity differences linear in space, the particle dispersion probability distribution takes a log-normal form:<sup>(9, 11)</sup>

$$\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) \propto e^{-\frac{1}{4D'_1 t} (\ln(\rho/\rho_0) - \lambda t)^2} d \ln \rho, \quad (2.9)$$

where  $\lambda = \frac{d-4\varphi}{1+2\varphi} D'_1$  is the (biggest) Lyapunov exponent. It is easy to see that in this case,  $\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \delta(\rho) d\rho$ , pointing to the deterministic nature of the flow. Indeed, in velocities regular in space, trajectories are uniquely determined by their initial position and very close fluid particles separate little in a fixed time interval. Nevertheless, all moments of the pair dispersion behave exponentially in time and grow in the chaotic regime where  $\lambda > 0$ , i.e.,  $\varphi < d/4$ , whereas sufficiently small (fractional) ones decrease when  $\lambda < 0$ , i.e.,  $\varphi > d/4$ . For the second moment, one obtains:

$$\langle \rho^2(t) \rangle = e^{(2\lambda + 4D'_1)t} \rho_0^2. \quad (2.10)$$

Similar behaviors persist at small times in the Kraichnan velocities with  $\xi > 2$  and finite  $L$ , see ref. 28.

The stochastic Lagrangian flow occurs in the non-Lipschitz version with  $0 < \xi < 2$  of the Kraichnan model for weak compressibility  $\varphi < d/\xi^2$ . In terms of the parameter  $b = \frac{1-a}{2-\xi} = \frac{2-\delta}{2}$  that will be frequently used below, the latter inequality means that  $b < 1$ . In this region,  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = e^{-iM}(\rho_0, \rho) d\rho$ , where  $M$  is taken with "singular Neumann" or reflecting boundary condition at  $\rho = 0$ , see ref. 23, and

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) \propto \rho^{a-\xi} t^{b-1} e^{-\frac{\rho^{2-\xi}}{(2-\delta)^2 D'_1 t}} d\rho. \quad (2.11)$$

Note the stretched-exponential form of the distribution. In particular, one obtains for the second moment of the separation distance and large times:

$$\langle \rho^2(t) \rangle = \mathcal{O}(t^{\frac{2}{2-\xi}}). \quad (2.12)$$

This is the Kraichnan model version of the 1926 Richardson law<sup>(33)</sup> stating that in developed turbulence the mean square dispersion grows like  $t^3$ . Note that the Richardson behavior is reproduced in the Kraichnan model for  $\xi = \frac{4}{3}$ . In the limit when the initial trajectory separation  $\rho_0 \rightarrow 0$ , the power law behavior (2.12) extends to the entire time domain and  $\langle \rho^2(t) \rangle \propto t^{\frac{2}{2-\xi}}$ .

In the non-Lipschitz strongly compressible version of the Kraichnan model corresponding to  $0 < \xi < 2$  and  $\wp \geq d/\xi^2$  (or  $b \geq 1$ ),

$$\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \mathcal{P}^{\text{reg}}(t, \rho_0; \rho) d\rho + p(\rho_0; t) \delta(\rho) d\rho \quad (2.13)$$

with the regular density  $\mathcal{P}^{\text{reg}}(t, \rho_0; \rho) = e^{-tM}(\rho_0, \rho)$  where  $M$  is taken with “singular Dirichlet” or absorbing boundary condition at  $\rho = 0$ , see ref. 23, and with

$$p(\rho_0; t) = 1 - \gamma\left(b, \frac{\rho_0^{2-\xi}}{(2-\xi)^2 D_1 t}\right) \Gamma(b)^{-1}, \quad (2.14)$$

where  $\gamma(b, x) \equiv \int_0^x y^{b-1} e^{-y} dy$  is the incomplete gamma-function. When  $\rho_0 \rightarrow 0$  then the regular part of the distribution tends to 0, whereas  $p(\rho_0; t)$  tends to 1. We recover this way the deterministic behavior (2.2), with trajectories in fixed velocity realizations determined by their initial position. The presence of the singular term proportional to  $\delta(\rho)$  at finite  $\rho_0$  signals that the trajectories starting at different initial positions coalesce with positive probability.<sup>(23)</sup> The time growth of the mean distance square dispersion is different here:

$$\langle \rho^2(t) \rangle = \mathcal{O}(\rho_0^{1-a} t^{\frac{2}{2-\xi}-b}) \quad (2.15)$$

with a logarithmic correction at  $\wp = d/\xi^2$ , i.e., at  $b = 1$ .

### 2.3. Exit Time

In the Kraichnan model, the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  may also be directly controlled using the kernels  $e^{-tM_D}(\rho_0, \rho)$  where  $M_D$  denotes the generator  $M$  of (2.7) with the Dirichlet boundary condition at  $\rho_1$  (in addition to the appropriate condition at the origin when  $\rho_1 > \rho_0$ ). This is

due to the Markov property of the stochastic process  $\rho(t)$ . Since the exit times have not been discussed in the context of the Kraichnan model, we shall use the occasion to provide here and in Appendix A more details, essentially translated from the Bessel diffusion case. The distribution of the time of exit through  $\rho_1$  is given by the formula

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt) = -\partial_{n(\rho_1)} e^{-tM_D}(\rho_0, \rho) dt, \tag{2.16}$$

where  $\partial_{n(\rho_1)} = \pm D'_1 \rho^a \partial_\rho \rho^{\xi-a}|_{\rho=\rho_1}$  plays the same role as the normal derivative in the classical potential theory. The sign is that of  $(\rho_1 - \rho_0)$ . As already mentioned above, this distribution does not have to be normalized. The eventual missing mass corresponds to events where  $\rho(t)$  stays forever in the intervals  $[0, \rho_1)$  or  $(\rho_1, \infty)$  or when it gets absorbed at the origin, see below. We shall assign the infinite value of the exit time to such events. The averages of the powers of the exit time  $t$  over the realizations with  $t < \infty$  may be expressed by the kernels of the inverse powers of operator  $M_D$ :

$$\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \int_0^\infty t^n \mathcal{Q}(t; \rho_0, \rho_1) dt = -n! \partial_{n(\rho_1)} M_D^{-n-1}(\rho_0, \rho), \tag{2.17}$$

where by  $1_{\{A\}}$  we denote the characteristic functions of the events satisfying the condition  $A$ . In particular, the probability that the exit time is finite

$$\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \int_0^\infty \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt) = -\partial_{n(\rho_1)} M_D^{-1}(\rho_0, \rho). \tag{2.18}$$

The expectations (2.17) may be obtained from the characteristic function

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = -\partial_{n(\rho_1)} (M_D - i\omega)^{-1}(\rho_0, \rho) \tag{2.19}$$

involving the resolvent kernel of  $M_D$ . We shall also consider the averages conditioned on the exit times being finite:

$$\frac{\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle}{\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle} \equiv \langle t^n \rangle_c, \quad \frac{\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle}{\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle} \equiv \langle e^{i\omega t} \rangle_c. \tag{2.20}$$

For  $\xi = 2$  and  $L = \infty$ , i.e., in the smooth version of the Kraichnan model with scaling, the kernel  $e^{-tM_D}(\rho_0, \rho)$  is easily calculable by the image method and leads via Eq. (2.16) to the expression for  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$ . We give the explicit formulae in Appendix A. Let us note here that  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  has a smooth density decaying exponentially for large  $t$  and  $t^{-1}$ . It depends only on  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  so that the Lagrangian flow is Lyapunov in our terminology, see

(2.4). The total mass of the exit time distribution is given by the simple expression:

$$\int_0^\infty \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt) = \begin{cases} 1 & \text{if } \lambda \ln(\rho_1/\rho_0) \geq 0, \\ \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{\frac{\lambda}{\varphi}} & \text{if } \lambda \ln(\rho_1/\rho_0) \leq 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

The missing mass corresponds for  $\rho_1 > \rho_0$  and the negative Lyapunov exponent to the events when  $\rho(t)$  stays forever in the open interval  $(0, \rho_1)$  (the pairs of trajectories remain always close). For  $\rho_1 < \rho_0$  and the positive Lyapunov exponent, it represents the events when  $\rho(t)$  stays forever in the interval  $(\rho_1, \infty)$  (the pairs of trajectories never come close). According to the characterization from the previous subsection, see conditions (2.6), the Lagrangian flow is Lyapunov, locally separating and locally transient if  $\lambda > 0$ , i.e.,  $\varphi < d/4$  and it is locally trapping and locally recurrent if  $\lambda < 0$ , i.e.,  $\varphi > d/4$ . Finally, when  $\lambda = 0$ , i.e.,  $\varphi = d/4$ , it is locally separating and locally recurrent. Similar properties of the exit time distribution hold for  $\xi > 2$  and finite  $L$  asymptotically at short distances.

In the non-Lipschitz version of the Kraichnan model with  $0 < \xi < 2$  and  $L = \infty$ , the resolvent kernel  $(M_D - i\omega)^{-1}(\rho_0, \rho)$  may still be easily calculated in a closed form and it leads via Eq. (2.19) to a closed expression for the Fourier transform of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$ . Explicit formulae may be found in Appendix A. The density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  appears to be a smooth function decaying exponentially in large  $t$  and  $t^{-1}$  if  $\rho_1 > \rho_0$  and as a power of  $t$  and exponentially in  $t^{-1}$  if  $\rho_1 < \rho_0$ . The exit time distribution possesses the scaling property:

$$\mathcal{Q}(\mu^{\frac{1}{2-\xi}}\rho_0, \mu^{\frac{1}{2-\xi}}\rho_1; d(\mu t)) = \mathcal{Q}(t; \rho_0, \rho_1), \quad (2.22)$$

a direct consequence of the statistical scaling of the velocity differences. Relation (2.22) implies the behavior (2.5) characterizing what we have called the Richardson flows.

For  $\rho_1 > \rho_0$  the total mass of the exit time distribution is

$$\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \begin{cases} 1 & \text{for } \varphi < \frac{d}{\xi^2}, \\ \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^{1-a} & \text{for } \varphi \geq \frac{d}{\xi^2}. \end{cases} \quad (2.23)$$

Hence the exit time is almost surely finite in the weakly compressible regime whereas it is infinite with positive probability that depends only on

$\frac{\rho_1}{\rho_0}$  in the strongly compressible regime where the process  $\rho(t)$  is absorbed at the origin with the complementary probability. Such absorption corresponds to the coalescence of pairs of trajectories. We conclude that the Lagrangian flow is locally separating for  $\wp \leq d/\xi^2$  and locally trapping for  $\wp > d/\xi^2$ .

For  $\rho_1 < \rho_0$ ,

$$\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \begin{cases} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0}\right)^{a-1} & \text{for } \wp < \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}, \\ 1 & \text{for } \wp \geq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (2.24)$$

If  $\wp < \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$  (i.e., if  $a > 1$ ), the process  $\rho(t)$  remains forever in the interval  $(\rho_1, \infty)$  with probability  $1 - (\frac{\rho_1}{\rho_0})^{a-1} > 0$  whereas if  $\wp \geq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$ , it exits through  $\rho_1$  almost surely. The two situations correspond, respectively, to a locally transient and a locally recurrent Lagrangian flow.

One may summarize the properties of the Lagrangian flow in the Kraichnan model in the phase diagram, drawn in Fig. 1 for three dimensions, with five phases that we list with their characteristics (assuming for  $\xi > 2$  finite  $L$ ):

- I. deterministic, Lyapunov, locally separating, locally transient, for  $\xi > 2$  and  $\wp < d/4$ ;
- II. deterministic, Lyapunov, locally trapping, locally recurrent, for  $\xi > 2$  and  $\wp > d/4$ ;
- III. stochastic, Richardson, locally separating, locally transient, for  $0 < \xi < 2$  and  $\wp < \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$ ;

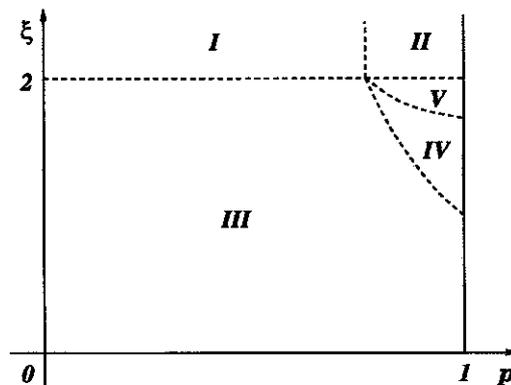


Fig. 1. Phase diagram of the Lagrangian flow for the three-dimensional Kraichnan model.

IV. stochastic, Richardson, locally separating, locally recurrent, for  $0 < \xi < 2$  and  $\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \wp < d/\xi^2$ ;

V. deterministic, Richardson, locally trapping, locally recurrent, for  $0 < \xi < 2$  and  $d/\xi^2 < \wp$ .

These phases were essentially enumerated in ref. 23 (with little stress put on the difference between phase III and IV). The characterization described above is closely related to the description of the phase diagram in ref. 28, see also ref. 12. The notable difference is that, in order to characterize the phases in the non-Lipschitz case, refs. 12 and 28 used the dichotomic behaviors of the time of exit through  $\rho_1$  in two limits: when  $\rho_1 \rightarrow 0$  with  $\rho_0$  kept constant and when  $\rho_0 \rightarrow 0$  with  $\rho_1$  kept constant. Such behaviors enter the standard classification<sup>(19,8)</sup> of the one-dimensional diffusion  $\rho(t)$  on the half-line  $[0, \infty[$  with  $\rho = 0$  being, for  $\xi > 2$ , a natural boundary and, for  $\xi < 2$ , an entrance boundary in the weakly compressible phase III, a regular boundary in the intermediate phase IV and an exit boundary in the strongly compressible phase V. The use in the present paper of the small  $\rho_0$  behavior of the exit time distribution at fixed  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  in order to characterize the phases was motivated by the fact that such behaviors were both more amenable to analytic arguments in the presence of temporal correlations of velocities and more accessible to numerical simulations.

As noticed in ref. 12, see also ref. 29, the solution for the distribution  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  corresponding to the singular Dirichlet boundary condition for  $M$  and coalescent trajectories, which pertains only to phase V if the flow is defined by adding and removing small noise, sets in already in region IV if we add no noise but first smoothen out the velocity fields at short distances and subsequently remove the smoothing. Physically, the first procedure corresponds to the vanishing Prandtl and the second one to the infinite Prandtl numbers. For  $\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \wp < \frac{d}{\xi^2}$  and well tuned Prandtl numbers, one may also obtain intermediate solutions that correspond to a “sticky” behavior of fluid particles.<sup>(24)</sup> The different limiting procedures give then rise to different boundary conditions that may be imposed on the generator  $M$  of Eq. (2.7) in the situation when  $\rho = 0$  is a regular boundary.<sup>(8,13,19)</sup>

### 3. GAUSSIAN VELOCITY ENSEMBLES WITH TEMPORAL CORRELATIONS

The temporal decorrelation of the Kraichnan velocities is a simplifying feature that is quite unphysical since realistic turbulent velocities are correlated at different times. In the present paper we attempt to study the effect of temporal correlation of velocities on the behavior of the dispersion of a pair of particles in simplest ensembles of velocities with such correlations

built in. More specifically, we shall consider the Gaussian ensembles of  $d$ -dimensional velocities with mean zero and covariance

$$\langle v^i(t, \mathbf{r}) v^j(t', \mathbf{r}') \rangle = D_2 \int e^{-|t-t'| D_3 k_L^{2\beta}} \frac{e^{i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r}-\mathbf{r}')} }{k_L^{d+2\alpha}} P^{ij}(\mathbf{k}, \wp) \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}. \quad (3.1)$$

There are three parameters in (3.1) not related to the choice of units: the spatial Hölder exponent  $\alpha$ , that we shall restrict to the interval  $(0, 1)$ , the temporal exponent  $\beta$  taken positive, and the compressibility degree  $\wp \in [0, 1]$ . Besides, there are three dimensionful parameters:  $D_2$  of dimension  $length^{2(1-\alpha)}/time^2$ ,  $D_3$  of dimension  $length^{2\beta}/time$ , and the integral length scale  $L$ . Similarly as in the Kraichnan ensemble,  $L$  may be taken to infinity for correlation functions of differences of velocities  $\Delta \mathbf{v}(t, \rho)$  whose statistics becomes scale invariant in this limit. The correlation time  $\tau_{cr}(\rho)$  of the velocity differences in ensembles given by Eq. (3.1) is equal to  $D_3^{-1} \rho^{2\beta}$  whereas the variance  $\langle (\Delta \mathbf{v}(t, \rho))^2 \rangle \equiv \Sigma(\rho)^2$  behaves as  $D_2 \rho^{2\alpha}$ .

We shall be looking at the statistics of the 2-particle separation either using Eq. (1.2) with the ensemble (3.1) governing the Eulerian velocities, or using Eq. (1.4) with the ensemble (3.1) describing the quasi-Lagrangian velocities. It should be stressed that the two choices lead to two different models of Lagrangian flow. They exhibit different behaviors even for incompressible velocities where the equal-time velocity statistics of the Eulerian and quasi-Lagrangian velocities coincide. This should be contrasted with the situation in the Kraichnan model where the Eulerian and the quasi-Lagrangian velocities had the same all-time statistics so that it did not matter which one was modeled by the Gaussian ensemble (2.1). That the situation is different in the presence of temporal correlations is due to the manner in which sweeping by large scale eddies is taken into account. The 2-particle separation  $\rho$  involves only differences  $\Delta \mathbf{v}^{qL}(t, \rho)$  of the quasi-Lagrangian velocities, see (1.4). The statistics of such differences has a regular  $L \rightarrow \infty$  limit if we use the Gaussian ensemble (3.1) for the quasi-Lagrangian velocities. In this case the sweeping by scale  $L$  eddies does not effect the pair dispersion. On the other hand,  $\rho$  cannot be expressed in terms of the Eulerian velocity differences only, due to the dependence on the reference trajectory  $\mathbf{R}(t)$ , see (1.2). As a result, if we substitute the ensemble (3.1) for the Eulerian velocities, the dispersion statistics is still effected by the scale  $L$  sweeping and behaves in a singular way in the limit  $L \rightarrow \infty$ . This singularity modifies also the short time behavior of the pair dispersion at fixed  $L$  in certain regimes, as we shall discuss below. The use of the synthetic ensemble (3.1) to describe turbulent velocities is in any case an approximation. It seems to render better the Lagrangian features of real turbulence if used to model the quasi-Lagrangian velocities.

In this case the large scale sweeping influences only the single particle statistics, but not the pair dispersion. We shall limit ourselves to this situation throughout most of this paper, dropping the subscript “ $qL$ ” on the velocities. The exception is Section 7 where we discuss what happens when the Gaussian ensemble (3.1) is used to model the Eulerian velocities.

The first idea about the Lagrangian flow in the ensembles (3.1) of quasi-Lagrangian velocities may be gained by comparing the correlation time  $\tau_{cr}(\rho)$  to the eddy turnover time  $\tau_e(\rho) = D_2^{-1/2} \rho^{1-\alpha} \propto \rho / \Sigma(\rho)$ . On the line  $\alpha + 2\beta = 1$  which, in particular, contains the Kolmogorov point  $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$  (see Fig. 2), both times have the same scale dependence. For  $\alpha + 2\beta < 1$  (domain C on Fig. 2),  $\tau_{cr}$  becomes much shorter than  $\tau_e$  at large scales and much longer at small ones. We shall see that in this domain of parameters the pair dispersion should be described at long scales (for  $L = \infty$ ) by the Kraichnan model with rapidly decorrelating velocities and at short scales by a model with velocities independent of time (frozen). For  $\alpha + 2\beta > 1$  (domains A and B on Fig. 2), the relation between the correlation times is reversed and we could expect that the frozen model controls the large scale dispersion and the decorrelated one governs the short scale behavior. A similar picture underlined the phase diagram in a simple family of scale-invariant shear flows.<sup>(3,4)</sup> We shall study the asymptotics of the Lagrangian flow using scale transformations. Such transformations induce a flow in the plane of dimensional parameters of the model whose asymptotics is controlled by fixed points, as in the field theory renormalization group.<sup>(1)</sup> The perturbative renormalization group has been previously used

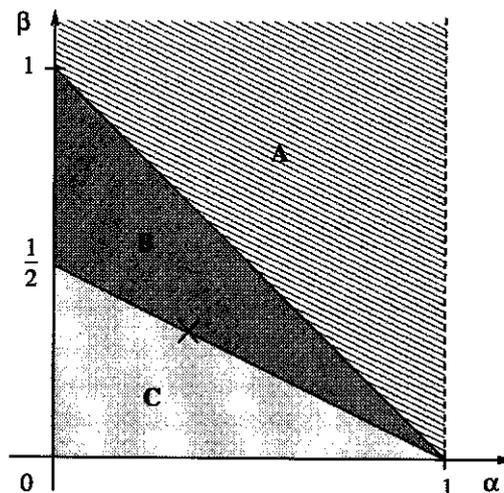


Fig. 2. Phase diagram of the three different regimes of Lagrangian flow in the time-correlated velocities discussed here. The exponent  $\alpha$  is the spatial Hölder exponent and the exponent  $\beta$  controls the behavior of correlation time as a function of scale.

in ref. 2 to analyze the related scalar advection problem in the family (3.1) of velocity ensembles around  $(\alpha, \beta) = (-1, 1)$  and there is some overlap of those results with our conclusions. The much heavier analysis of ref. 2 was concentrated, however, on the aspects of advection related to finer details of the Lagrangian flow, see also ref. 10. Our point is that the analysis of the Lagrangian dispersion may be performed, at least to a certain extent, in a straightforward and nonperturbative way.

The Kraichnan and the frozen model may be viewed as special limiting cases of the Gaussian velocity ensembles (3.1). The first one, with  $\xi = 2(\alpha + \beta)$ , is obtained when  $D_2, D_3 \rightarrow \infty$  with  $\frac{2D_2}{D_3} \equiv D_1$  kept constant as a consequence of the convergence

$$D_3 k_L^{2\beta} e^{-|k| D_3 k_L^{2\beta}} \xrightarrow{D_3 \rightarrow \infty} 2\delta(t). \quad (3.2)$$

At  $L = \infty$ , existence of the limit for the correlation functions of  $\Delta v$  requires that  $\xi < 2$ , i.e., that  $\alpha + \beta < 1$ . Note that the convergence is fast at large wave number  $k$ , i.e., at small distances, and for long times, but it becomes slow for short times and, if  $L = \infty$ , at large distances. The frozen model is obtained by taking  $D_3 \rightarrow 0$  with  $D_2 = \text{const}$ . In this case,

$$e^{-D_3 |k| k_L^{2\beta}} \xrightarrow{D_3 \rightarrow 0} 1 \quad (3.3)$$

but the convergence becomes slow at large  $k$ , i.e., at small distances, and for long times.

Using the evolution equation (1.4) for the trajectory separation vector, we obtain for the mean rate of growth of the square of pair dispersion:

$$\frac{d}{dt} \langle \rho^2(t) \rangle = 2 \int_0^t \langle \Delta \mathbf{v}(t, \rho(t)) \cdot \Delta \mathbf{v}(s, \rho(s)) \rangle ds. \quad (3.4)$$

Let us start by a naive mean-field-type approximate evaluation of the right hand side in the limit when  $\rho_0 \rightarrow 0$ . Such an evaluation should render correctly the behavior of  $\langle \rho^2(t) \rangle$  in the stochastic regime. It is obtained by rewriting Eq. (3.4) as

$$\frac{d}{dt} \langle \rho^2 \rangle = 2T \langle (\Delta \mathbf{v})^2(t, \rho) \rangle, \quad (3.5)$$

where

$$T = \frac{\int_0^t \langle \Delta \mathbf{v}(t, \rho(t)) \cdot \Delta \mathbf{v}(s, \rho(s)) \rangle ds}{\langle (\Delta \mathbf{v})^2(t, \rho(t)) \rangle}, \quad (3.6)$$

has, if smaller than  $t$ , an interpretation of the correlation time of the Lagrangian velocity difference  $\Delta v(t, \rho(t))$ . We may try to close Eq. (3.5) by assuming that  $T$  depends on the mean separation distance  $\langle \rho^2 \rangle^{1/2}$  the same way as the correlation time  $\tau_{cr}(\rho)$  on  $\rho$  if  $\tau_{cr}(\rho)$  is smaller than  $t$  or as  $t$  otherwise:

$$T \approx \min\{\mathcal{O}(\langle \rho^2 \rangle^\beta), t\}. \quad (3.7)$$

Different domains in the space of parameters correspond to different choices of the minimal value (3.7) for  $T$ . As for the other term on the right hand side of relation (3.5), we shall again ignore the velocity dependence of  $\rho(t)$  putting

$$\langle (\Delta v)^2 \rangle \approx \mathcal{O}(\langle \rho^2 \rangle^\alpha). \quad (3.8)$$

Using the above approximations for long times and  $L = \infty$ , one obtains from Eq. (3.5):

$$\langle \rho^2(t) \rangle \approx \mathcal{O}(t^{\frac{2}{1-\alpha}}) \quad \text{for } \alpha + 2\beta \geq 1 \quad (\text{domains A and B}), \quad (3.9)$$

$$\langle \rho^2(t) \rangle \approx \mathcal{O}(t^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}) \quad \text{for } \alpha + 2\beta \leq 1 \quad (\text{domain C}). \quad (3.10)$$

In the same way, we may estimate the short-time behavior in the limit  $\rho_0 \rightarrow 0$  obtaining

$$\langle \rho^2(t) \rangle \approx \mathcal{O}(t^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}}) \quad \text{for } \alpha + \beta < 1 \leq \alpha + 2\beta \quad (\text{domain B}), \quad (3.11)$$

$$\langle \rho^2(t) \rangle \approx \mathcal{O}(t^{\frac{2}{1-\alpha}}) \quad \text{for } \alpha + 2\beta \leq 1 \quad (\text{domain C}). \quad (3.12)$$

Note that, in agreement with (3.7), it is the smaller exponent that is chosen for large times and the bigger one for short times, a manifestation of a tendency of close trajectories to stay close. The region  $\alpha + \beta \geq 1$  (domain A in Fig. 2) which escapes the short-time estimates has been rigorously analyzed with the Gaussian ensemble (3.1) used to model the Eulerian velocities<sup>(18)</sup> and was conjectured to correspond to deterministic trajectories. We expect that also in the quasi-Lagrangian model the pair dispersion will concentrate in domain A at  $\rho = 0$  when  $\rho_0 \rightarrow 0$ . This is consistent with the divergence of the predicted power in the short-time Richardson law (3.12) when  $\alpha + \beta$  approaches 1 from below (i.e., from the domain B in Fig. 2). A similar divergence occurs in the weakly compressible Kraichnan model when we approach the Lipschitz regime  $\xi > 2$  from the non-Lipschitz one  $\xi < 2$ . It signals there the passage from the power law to the exponential separation (2.10) of trajectories.

#### 4. SCALING ARGUMENTS

The main aim of this note is to substantiate further the above conclusions based on the naive estimates (3.7) and (3.8). We shall also acquire an insight into the behavior of general moments of the pair dispersion and of the exit time and into the extent of the different Lagrangian flow regimes in the ensembles given by Eq. (3.1). In the study of the long- and short-time behavior of trajectories, it is convenient to consider their rescaled versions  $\mathbf{R}_\mu(t) = \mu^{-\sigma} \mathbf{R}(\mu t)$  for appropriately chosen  $\sigma$ . Since

$$\frac{d\mathbf{R}_\mu}{dt} = \mathbf{v}_\mu(t, \mathbf{R}_\mu), \quad (4.1)$$

for the rescaled velocity  $\mathbf{v}_\mu(t, \mathbf{r}) = \mu^{1-\sigma} \mathbf{v}(\mu t, \mu^\sigma \mathbf{r})$ , the path  $\mathbf{R}_\mu(t)$  is a Lagrangian trajectory for  $\mathbf{v}_\mu$ . There are special cases when the rescaled velocity differences have in the  $L \rightarrow \infty$  limit the same distribution as the original ones for an appropriate (and unique) choice of  $\sigma$ . This happens for  $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$  both on the line  $\alpha + 2\beta = 1$  and in the frozen model and for  $\sigma = \frac{1}{2-\xi}$  in the Kraichnan ensemble. We infer that in those cases the pair dispersion distribution  $\mathcal{P}$  and the exit time one  $\mathcal{Q}$  are scale-invariant:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) &= \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho), \\ \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t)) &= \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt). \end{aligned} \quad (4.2)$$

In particular, in the stochastic regime, the pair dispersion moments  $\langle \rho(t)^n \rangle$ , if finite in the  $\rho_0 \rightarrow 0$  limit, behave as  $\mathcal{O}(t^{n\sigma})$  for long times and become proportional to  $t^{n\sigma}$  for all times when  $\rho_0 \rightarrow 0$ . These conclusions fail in the deterministic regime, as we have already noticed in the Kraichnan model, see Eq. (2.15). In all regimes, the exit time moments  $\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle$  (if finite) are proportional to  $\rho_0^{n/\sigma}$  if  $\frac{\rho_1}{\rho_0} \equiv \gamma$  is kept constant.

Out of the line  $\alpha + 2\beta = 1$ , the scale invariance of the Lagrangian dispersion is broken but in a predictable way, as we shall see. The crucial observation is that the rescaled velocities  $\mathbf{v}_\mu(t, \mathbf{r})$  are distributed with the 2-point function (3.1) with  $D_i$  replaced by  $D_{i,\mu}$  and  $L$  by  $L_\mu$ , where

$$D_{2,\mu} = \mu^{2[1-(1-\alpha)\sigma]} D_2, \quad D_{3,\mu} = \mu^{1-2\beta\sigma} D_3, \quad L_\mu = \mu^{-\sigma} L. \quad (4.3)$$

For  $\mu$  tending to infinity or to zero (i.e., when exploring the long-time or the short-time behavior of the particle separation), we may choose  $\sigma$  so that the distribution of the rescaled velocity differences at  $L = \infty$  tends to the Kraichnan or to the frozen model one (with the notable exception of the  $\mu \rightarrow 0$  limit in domain A).

660

Chaves et al.

Consider first  $\mu \rightarrow \infty$  at  $L = \infty$ . Taking  $\sigma = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)}$  fixes the ratio  $\frac{2D_{2,\mu}}{D_{3,\mu}}$  with  $D_{i,\mu} \rightarrow \infty$  if  $\alpha + \beta > 1$  (domain A in Fig. 2) or if  $\alpha + 2\beta < 1$  (domain C in Fig. 2). The latter case leads to a non-singular Kraichnan ensemble of velocity differences with  $\xi = 2(\alpha + \beta)$  whereas the former one does not (it would correspond to  $\xi > 2, L = \infty$ ). We may then expect that

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) &= \mathcal{P}^{\text{Kr}}(t, \rho_0; d\rho) \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t)) &= \mathcal{Q}^{\text{Kr}}(\rho_0, \rho_1; dt) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{for } \sigma = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)} \text{ and } \alpha + 2\beta < 1 \quad (4.4)$$

where  $\mathcal{P}^{\text{Kr}}$  and  $\mathcal{Q}^{\text{Kr}}$  pertain to the Kraichnan model with  $\xi = 2(\alpha + \beta)$ . This is indeed consistent with the scaling properties of the Kraichnan model dispersion.

Taking  $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$  fixes  $D_{2,\mu}$  with  $D_{3,\mu} \rightarrow 0$  if  $\alpha + 2\beta > 1$  (domains A and B in Fig. 2). We then expect that

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) &= \mathcal{P}^{\text{fr}}(t, \rho_0; d\rho) \\ \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t)) &= \mathcal{Q}^{\text{fr}}(\rho_0, \rho_1; dt) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{for } \sigma = \frac{1}{1-\alpha} \text{ and } \alpha + 2\beta > 1, \quad (4.5)$$

where  $\mathcal{P}^{\text{fr}}$  and  $\mathcal{Q}^{\text{fr}}$  stand for the distributions of the frozen velocity model with Hölder exponent  $\alpha$ . Note again the consistency with the scaling properties of the Lagrangian dispersion in the frozen model.

Inquiring about the short-time asymptotics of the trajectory dispersion reverses the asymptotics. We should then have

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) &= \mathcal{P}^{\text{fr}}(t, \rho_0; d\rho) \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t)) &= \mathcal{Q}^{\text{fr}}(\rho_0, \rho_1; dt) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{for } \sigma = \frac{1}{1-\alpha} \text{ and } \alpha + 2\beta < 1 \quad (4.6)$$

(i.e., in domain C in Fig. 2) with the same value of the Hölder exponent  $\alpha$ , and

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) &= \mathcal{P}^{\text{Kr}}(t, \rho_0; d\rho) \\ \lim_{\mu \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t)) &= \mathcal{Q}^{\text{Kr}}(\rho_0, \rho_1; dt) \end{aligned} \right\}$$

$$\text{for } \sigma = \frac{1}{2(1-\alpha-\beta)} \quad \text{and} \quad \begin{cases} \alpha + \beta < 1, \\ \alpha + 2\beta > 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

(i.e., in domain B in Fig. 2) with  $\xi = 2(\alpha + \beta)$  for the Kraichnan model. Again, this is consistent with the scaling of the limiting distributions. In summary, the scale invariance of the statistics of the pair dispersion and of the exit time, although broken away from the  $\alpha + 2\beta = 1$  line, should be restored at long and short times.

It has to be stressed that the relations (4.4) to (4.7) are conjectural. The distributions  $\mathcal{P}$  and  $\mathcal{Q}$  are complicated nonlinear functionals of the quasi-Lagrangian velocity statistics and the conjectured relations assume their continuity in an appropriate topology, which is not obvious. In particular, since the convergence of the rescaled velocity covariances to the one of the Kraichnan model is very slow at long distances, there is a potential threat for the corresponding convergence of the rescaled distributions  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  and  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  with  $\rho_1 < \rho_0$  coming from the contribution of trajectories that venture far apart, if such contributions are important. Similarly, the slow convergence to the frozen model at short distances could create problems for the corresponding convergence of the rescaled pair dispersion and exit time distributions, for the latter if  $\rho_1 > \rho_0$ . Whether such effects invalidate some of the conclusions (4.4) to (4.7) could be, in principle, studied in perturbation theory around the Kraichnan or frozen model. The question of the convergence of rescaled dispersion distribution to the Kraichnan model one has been recently rigorously studied in refs. 16 and 17. We shall further discuss the non-uniformity of the convergence of the exit time distributions to that of the frozen model in Section 6.

An important question concerns the phase diagram of the Lagrangian flow for the model (3.1) of quasi-Lagrangian velocities. As mentioned above, domain A is expected to correspond to the deterministic Lagrangian flow. The rate of separation of close trajectories in this domain (Lyapunov or Richardson flow? locally separating or trapping? locally recurrent or transient?) is also an open problem. Inside domains B and C, we may try to use the conjectured convergence (4.4) to (4.7) of the rescaled pair dispersion and time exit distributions to characterize the nature of the

Lagrangian flow. This will require even more care since some uniformity of the limits will be needed.

First, we may argue that, inside domains B and C, weak compressibility  $\wp < \frac{d}{4(\alpha+\beta)^2}$  implies that the Lagrangian flow is stochastic. The argument assumes that the dichotomy “deterministic versus stochastic” may be still characterized as in Section 2, i.e., by the behavior of  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  in the limit  $\rho_0 \rightarrow 0$ . It goes as follows. Suppose that the relation (2.2) holds at some point inside B or C (for all  $t$ ). Then, obviously, also

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(\mu t, \mu^\sigma \rho_0; d(\mu^\sigma \rho)) = \delta(\rho) d\rho \quad (4.8)$$

for all  $\mu$ . We expect the convergence (4.4) in domain C and (4.7) in domain B, both resulting in the Kraichnan model distributions, to be uniform at short distances and hence to commute with the  $\rho_0 \rightarrow 0$  limit. We may then infer from Eq. (4.8) that (2.2) holds also for the limiting Kraichnan distribution so that  $\wp \geq d/\xi^2$  where  $\xi = 2(\alpha + \beta)$ , which implies the assertion.

The analogous argument may be applied when

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \int \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt) = \lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \int \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \gamma \rho_0; d(\mu t)) = 1 \quad (4.9)$$

leading to the predictions that inside the domains B and C, the Lagrangian flow is locally trapping if  $\wp \geq \frac{d}{4(\alpha+\beta)^2}$  and locally transient if  $\wp < \frac{d-2}{4(\alpha+\beta)} + \frac{1}{2}$ . The first claim seems somewhat more trustable since it does not involve large separations where the convergence to the Kraichnan ensemble is slowed down. Both require additionally that no mass of the exit time distribution escapes to infinity during the  $\mu$ -limits (4.4) and (4.7). This should not pose a problem since convergence to the Kraichnan model becomes very fast at long times.

In the stochastic regime, the convergence (4.4) and (4.7) should imply for the (positive) pair dispersion moments the behavior

$$\langle \rho^n(t) \rangle = \mathcal{O}(t^{\frac{n}{2(1-\alpha-\beta)}}) \quad (4.10)$$

for long times in domain C and for  $\rho_0 \rightarrow 0$  and short times in domain B, in agreement with the naive mean-field results (3.10) and (3.11). As for the behavior of the moments of the exit time through  $\gamma \rho_0$ , the relations (4.7) and (4.4) should imply that

$$\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \mathcal{O}(\rho_0^{2n(1-\alpha-\beta)}) \quad (4.11)$$

in domain B for small  $\rho_0$  and in domain C for large ones, irrespectively of the character of the Lagrangian flow. Similarly, we should obtain in domain B the convergence

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \int f(t) \mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \gamma \rho_0; dt) = f(0) \int \mathcal{Q}^{\text{Kr}}(\rho_0, \rho_1; dt) \quad (4.12)$$

characteristic of the Richardson flow in our terminology.

Similar use of the conjectured convergences (4.5) and (4.6) to the frozen model distributions in order to argue about the Lagrangian flow dichotomies and the evolution of dispersion and exit times moments poses two problems. First is the poor knowledge of the flow behavior in the frozen model, see, however, Section 5. Second, even more serious one, is the non-uniform nature of the convergence that becomes slow at small distances and long times. Nevertheless, it is still plausible that the convergence (4.5) is uniform enough as to imply that

$$\langle \rho^n(t) \rangle = \mathcal{O}(t^{\frac{n}{1-\alpha}}) \quad (4.13)$$

for long times and for sufficiently high  $n$  in the stochastic regime in domains A and B. Similarly, relations (4.5) and (4.6) may still imply that for sufficiently negative moments,

$$\langle t^n \rangle = \mathcal{O}(\rho_0^{n(1-\alpha)}) \quad (4.14)$$

in domains A and B for large  $\rho_0$  and in domain C for small ones, see Section 6. The same way, the convergence (4.12) should still hold in domain C for test functions  $f$  decaying fast at infinity and  $\mathcal{Q}^{\text{Kr}}$  replaced by  $\mathcal{Q}^{\text{fr}}$ .

Summarizing, we predict, with various level of confidence, that the (zero Prandtl number) Lagrangian flow in the quasi-Lagrangian velocity ensemble (3.1) is

deterministic  
in domain A

stochastic, Richardson, locally transient  
in domains B and C for  $\wp < \frac{d-2}{4(\alpha+\beta)} + \frac{1}{2}$ ,

stochastic, Richardson  
in domains B and C for  $\frac{d-2}{4(\alpha+\beta)} + \frac{1}{2} \leq \wp < \frac{d}{4(\alpha+\beta)^2}$ ,

Richardson, locally trapping  
in domains B and C for  $\wp \geq \frac{d}{4(\alpha+\beta)^2}$ .

The degree of confidence of the predictions depends on which of relations (4.4) to (4.7) was used in the argument and with what uniformity assumptions. The predictions are consistent with the intuition that increase of the compressibility degree  $\rho$  enhances the trapping of the fluid particles. It will be interesting to confirm (or infirm) them by further analytic arguments and by numerical simulations. Note that, in particular, we expect that in domains B and C the incompressible Lagrangian flow is stochastic, Richardson and locally transient, and that, if the dimension  $d \geq 4$ , it stays such, whatever compressibility.

## 5. ONE-DIMENSIONAL FROZEN ENSEMBLE

The frozen model was left out from the discussion of the phase diagram in the last section. Our arguments were based mainly on the convergence of the rescaled velocity ensemble (3.1) to the Kraichnan model and such convergence is, of course, absent for the frozen model. One may expect appearance of discontinuity in the character of the Lagrangian flow in the frozen model limit  $D_3 \rightarrow 0$  which is very non-uniform at short distances and long times, leading to a strong enhancement of trapping. This effect will be analyzed in the next section. Here we shall try to find out what happens in the frozen velocities which, in general, are hard to analyze. One case where some analytic results may be obtained due to the very simple geometry of the flow is the one-dimensional Gaussian model where the Lagrangian particles slide down the potential wells, getting stuck at their bottom, and where the flow preserves the order of particles. In particular, when the spatial Hölder exponent  $\alpha = \frac{1}{2}$ , the velocity 2-point function becomes

$$\langle v(x) v(y) \rangle = \int \frac{e^{ik(x-y)}}{k^2 + L^{-2}} \frac{dk}{2\pi} = \frac{1}{2} L e^{-|x-y|/L}, \quad (5.1)$$

where we have set  $D_2 = 1$  (what may be always achieved by rescaling  $v \mapsto \sqrt{D_2} v$ ). The additional simplifying feature of this case, studied already in ref. 34, is that  $v(x)$  forms a stationary Markov (Ornstein–Uhlenbeck) process with the generator

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dv^2} + \frac{v}{L} \frac{d}{dv} \quad (5.2)$$

corresponding to the Focker–Planck harmonic oscillator Hamiltonian

$$\mathcal{H} = e^{-\frac{v^2}{2L}} \mathcal{L} e^{\frac{v^2}{2L}} = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dv^2} + \frac{v^2}{2L^2} - \frac{1}{2L}. \quad (5.3)$$

The velocity  $v(x)$  with fixed  $x$  is distributed according to the invariant measure of the process

$$dv(v) = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} e^{-\frac{v^2}{L}} dv. \quad (5.4)$$

The transition probabilities of the process are

$$p(t, v_0; dv) = e^{-t\mathcal{L}}(v_0, v) dv = \frac{1}{\sqrt{\pi L(1 - e^{-2t/L})}} e^{-\frac{(e^{-t/L}v_0 - v)^2}{L(1 - e^{-2t/L})}} dv. \quad (5.5)$$

In the limit  $L \rightarrow \infty$ , the velocity difference  $\Delta v(x) = v(x) - v(0)$  becomes the one-dimensional two-sided Brownian motion  $w(x)$ . The quasi-Lagrangian Eq. (1.4) for the trajectory separation takes then the form of the steepest descent equation

$$\frac{d\rho}{dt} = w(\rho) = -\frac{d}{d\rho} \phi(\rho). \quad (5.6)$$

in the potential  $\phi(x) = -\int_0^x w(y) dy$ . The solution  $\rho(t)$  slides to the bottom of the potential well in which the initial point  $\rho_0 = \rho(0)$  is situated, i.e., to the closest zero  $\rho_+$  of  $w(\rho)$  to the right of  $\rho_0$  if  $w(\rho_0) > 0$  or  $\rho_-$  to the left of  $\rho_0$  if  $w(\rho_0) < 0$ . The only difference with the case of smooth potential with wells approximately quadratic around typical minima, is that, as we show below, the solution will arrive to the bottom of the well in a finite rather than infinite time. This is due to the roughness of the Brownian motion. After arriving at the bottom, the solution will stay locked there in subsequent times.

We may restrict ourselves to the case  $\rho_0 > 0$ . Suppose also that  $w(\rho_0) > 0$ . The first value  $\rho_+$  to the right of  $\rho_0$  such that  $w(\rho_+) = 0$  is finite with probability one. The time  $t_+$  that the solution  $\rho(t)$  of Eq. (5.6) starting at  $\rho_0$  at time zero takes to reach  $\rho_+$  is

$$t_+ = \int_{\rho_0}^{\rho_+} \frac{d\rho}{w(\rho)}. \quad (5.7)$$

666

Chaves *et al.*

Let us compute the expectation  $\langle t_+ 1_{\{w(\rho_0) > 0, \rho_+ \leq \rho_2\}} \rangle$  of times  $t_+$  over the Brownian paths  $w(\rho)$  such that  $w(\rho_0) > 0$  and  $\rho_+ \leq \rho_2$  for certain  $\rho_2 > \rho_0$ . It is equal to

$$\int_{\rho_0}^{\rho_2} d\rho \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}} \int_0^\infty \left( e^{-\frac{(w_0-w)^2}{2(\rho-\rho_0)}} - e^{-\frac{(w_0+w)^2}{2(\rho-\rho_0)}} \right) \frac{dw}{\sqrt{2\pi(\rho-\rho_0)} w} \\ \times \int_0^\infty e^{-\frac{(w+w_2)^2}{2(\rho_2-\rho)}} \frac{2 dw_2}{\sqrt{2\pi(\rho_2-\rho)}}. \quad (5.8)$$

The origin of this formula is straightforward. The probability that  $w(\rho_0)$  belongs to  $[w_0, w_0 + dw_0]$  is  $e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}}$ . The one that  $w(\rho)$  belongs to  $[w, w + dw]$  without passing through zero between  $\rho_0$  and  $\rho$  is  $(e^{-\frac{(w_0-w)^2}{2(\rho-\rho_0)}} - e^{-\frac{(w_0+w)^2}{2(\rho-\rho_0)}}) \frac{dw}{\sqrt{2\pi(\rho-\rho_0)}}$ , given that  $w(\rho_0) = w_0$ . (it is expressed by the heat kernel with the Dirichlet condition at  $w = 0$ ). Finally, the last integral on the right hand side of (5.8) is equal to the probability that the Brownian trajectory crosses zero between  $\rho$  and  $\rho_2$ , given that  $w(\rho) = w$ . In Appendix B we show that

$$\langle t_+ 1_{\{w(\rho_0) > 0, \rho_+ \leq \rho_2\}} \rangle \leq C_+ \rho_0^{1/2} \ln \frac{\rho_2}{\rho_0}, \quad (5.9)$$

where  $C_+$  is a dimensionless constant. This proves that the time  $t_+$  is almost surely finite although the unrestricted mean  $\langle t_+ 1_{\{w(\rho_0) > 0\}} \rangle$ , given by the  $\rho_2 \rightarrow \infty$  limit of (5.8) under which the last integral on the right hand side tends to one, diverges. The divergence is due to the contribution of the Brownian paths that travel far before falling back to zero. In the Ornstein–Uhlenbeck process with  $L < \infty$ , the weight of such paths is suppressed and it is not difficult to show that  $\langle t_+ 1_{\{w(\rho_0) > 0\}} \rangle$  is finite then.

Similarly, let  $w(\rho_0) < 0$  and  $0 \leq \rho_- < \rho_0$  be the first value to the left of  $\rho_0$  such that  $w(\rho_-) = 0$ . The time  $t_-$  that the solution  $\rho(t)$  of Eq. (5.6) starting at  $\rho_0$  at time zero takes to reach  $\rho_-$  is given by Eq. (5.7) with  $t_+$  replaced by  $t_-$  and  $\rho_+$  by  $\rho_-$ . The expectation value  $\langle t_- 1_{\{w(\rho_0) < 0\}} \rangle$  is given by

$$-\int_0^{\rho_0} d\rho \int_{-\infty}^0 e^{-\frac{w^2}{2\rho}} \frac{dw}{\sqrt{2\pi\rho} w} \int_{-\infty}^0 \left( e^{-\frac{(w-w_0)^2}{2(\rho_0-\rho)}} - e^{-\frac{(w+w_0)^2}{2(\rho_0-\rho)}} \right) \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi(\rho_0-\rho)}} \quad (5.10)$$

which is easily seen to be finite, e.g., by bounding the last integral by  $\sqrt{\frac{2}{\pi(\rho_0 - \rho)}} |w|$ . We infer that

$$\langle t_- 1_{\{w(\rho_0) < 0\}} \rangle = C_- \rho_0^{1/2}, \tag{5.11}$$

where  $C_-$  is another dimensionless constant.

### 5.1. Exit Time

As for the exit time that the process  $\rho(t)$  takes to grow from  $\rho_0$  to  $\rho_1 > \rho_0$ , it is finite if and only if  $\rho(t)$  is not stuck at a zero  $\rho_{\pm} < \rho_1$  of  $w(\rho)$ , i.e., if  $w$  is positive on the interval  $[\rho_0, \rho_1)$ . It is then given by the formula

$$t = \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{w(\rho)}. \tag{5.12}$$

The probability that  $t < \infty$  is given by

$$\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}} \int_0^\infty \left( e^{-\frac{(w_0 - w_1)^2}{2(\rho_1 - \rho_0)}} - e^{-\frac{(w_0 + w_1)^2}{2(\rho_1 - \rho_0)}} \right) \frac{dw_1}{\sqrt{2\pi(\rho_1 - \rho_0)}}. \tag{5.13}$$

Note that the last expression depends only on  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ , is smaller than 1/2 and tends to zero when  $\rho_0 \rightarrow 0$  with  $\rho_1$  fixed. With the complementary probability, the solution  $\rho(t)$  starting from  $\rho_0 > 0$  will never reach  $\rho_1$ , i.e., the exit time  $t$  is infinite. One may express similarly the averages of positive powers of the exit time constraint to be finite. The explicit expression may be found in Appendix C. They are finite and take the scaling form

$$\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle = C_n \tau_e^n \tag{5.14}$$

where  $C_n$  are dimensionless constants depending on the ratio  $\gamma = \frac{\rho_1}{\rho_0} > 1$  and  $\tau_e = (\rho_0/D_2)^{1/2}$  is the eddy turnover time at scale  $\rho_0$  (recall that we have set  $D_2 = 1$  above).

The bounds (C.2) for the moments  $\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle$  proven in Appendix C, which respect the above scaling, imply that the characteristic function  $\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle$  is entire in  $\omega$  and that the large  $t$  decay of the density of the distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  is at least Gaussian. Due to Eq. (5.12), the characteristic function may be expressed by the path integral

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \frac{1}{\mathcal{N}} \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}} \int e^{\int_{\rho_0}^{\rho_1} \left( \frac{i\omega}{w(\rho)} - \frac{1}{2} \dot{w}^2(\rho) \right) d\rho} \mathcal{D}W \tag{5.15}$$

over the paths  $[\rho_0, \rho_1] \ni \rho \mapsto w(\rho) \in (0, \infty)$  such that  $w(\rho_0) = w_0$ , with  $\mathcal{N}$  being an appropriate normalization factor. The expression permits to evaluate the large  $|\omega|$ -behavior along the positive imaginary axis of  $\omega$  by the semi-classical calculation. The extremal trajectory  $w(\rho)$  describes a motion of a unit mass particle climbing up in the potential  $-\frac{1}{w}$  until a total stop. It satisfies the equation

$$\frac{\sin \varphi_0}{\cos^3 \varphi_0} (\varphi + \sin \varphi \cos \varphi) = \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\rho}{\rho_0} \quad (5.16)$$

for  $\cos^2 \varphi = \frac{w(\rho)}{w(\rho_1)}$ ,  $\cos^2 \varphi_0 = \frac{w(\rho_0)}{w(\rho_1)}$  and  $\varphi$  between zero and  $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ . In particular,  $\varphi_0$  is determined by Eq. (5.16) with  $\varphi = \varphi_0$  and  $\rho = \rho_0$ . It depends only on the ratio  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ . The action of the classical trajectory is  $S_0 = |\omega|^{2/3} \rho_0^{1/3} s_0$  with a dimensionless constant  $s_0 = \frac{3\varphi_0 \sin^{1/3} \varphi_0}{2^{1/3} \cos \varphi_0}$  growing with the  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$ . The decay  $\sim e^{-S_0}$  of the characteristic function along the positive imaginary axis corresponds to the small  $t$  behavior  $\sim e^{-\frac{4}{27} \rho_0^3 t^{-2}} = e^{-\frac{4}{27} s_0^3 (\tau_0/t)^2}$  of the density of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  (up to powers of  $t$ ). One could expect that for short times the trajectories move almost ballistically:

$$\rho(t) \simeq \rho_0 + w(\rho_0) t \quad (5.17)$$

which would give  $t \simeq \frac{\rho_1 - \rho_0}{w(\rho_0)}$  and a short time tale  $\sim e^{-\frac{(\rho_1 - \rho_0)^2}{2\rho_0} t^{-2}}$  of the exit time density function. This reproduces well the power of  $t$  in the exponential but not the coefficient. The latter, divided by  $\rho_0$ , agrees only to the order  $(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1)^2$  with the correct expression  $\frac{4}{27} s_0^3$ .

For  $\omega$  on the imaginary axis, the path-integral on the right hand side of Eq. (5.15) may be re-expressed in the operator language via the Feynman-Kac formula. Using also the invariance of the Brownian motion under the scale transformations  $w(x) \mapsto |\omega|^{-1} w(|\omega|^2 x)$ , we obtain the identity

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2|\omega|^2 \rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0} |\omega|} \int_0^\infty e^{-|\omega|^2 (\rho_1 - \rho_0) \mathcal{K}_\pm(w_0, w_1)} dw_1, \quad (5.18)$$

where the operator

$$\mathcal{K}_\pm = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dw^2} \pm \frac{1}{w} \quad (5.19)$$

on the interval  $[0, \infty)$  is a 1-dimensional Schrödinger operator with Dirichlet boundary condition at zero. The signs pertain to the positive or

negative imaginary  $\omega$ -axis and result in a repulsive or an attractive potential, respectively. An explicit expression for the kernel of the exponential of  $\mathcal{K}_-$ , see Appendix D, shows the growth of the characteristic function for  $\omega = -i|\omega|$  dominated by the lowest bound state contribution  $\sim e^{-|\omega|^2(\rho_1 - \rho_0)E_0}$  with  $E_0 = -\frac{1}{2}$ . This implies the decay  $\sim e^{-\frac{1}{(\rho_1 - \rho_0)}t^2} = e^{-\frac{1}{\gamma-1}(t/\tau_0(\rho_0))^2}$  of the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for large  $t$ .

The above analytic predictions may be used to validate the numerical method to be applied later for the cases  $\alpha \neq 1/2$ , where such rigorous results are not available. The velocity field is generated by using a straightforward Fourier method, i.e., generating the Fourier modes by a standard Gaussian random number generator and transforming back to real space by Fast Fourier Transform. The resolution which we used was  $2^{20}$ . The initial separation is set at 20,000 and we measure the distribution of the time taken to reach 5 times the initial separation. The curve is shown in Fig. 3. The agreement with the superposed predictions indicates that the choice of the resolution and the initial separation are appropriate to avoid contamination by periodicity and/or discretization effects.

The time in which  $\rho(t)$  decreases from  $\rho_0$  to a positive value  $\rho_1 < \rho_0$  is finite and still determined by Eq. (5.12) if and only if  $w < 0$  on the interval  $(\rho_1, \rho_0]$ . It is easy to see that

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt) = \mathcal{Q}(\rho_1, \rho_0; dt) \tag{5.20}$$

since for  $\rho_1 < \rho_0$  the characteristic function  $\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle$  is given by the expression (5.15) with  $\rho_0$  and  $\rho_1$  interchanged.

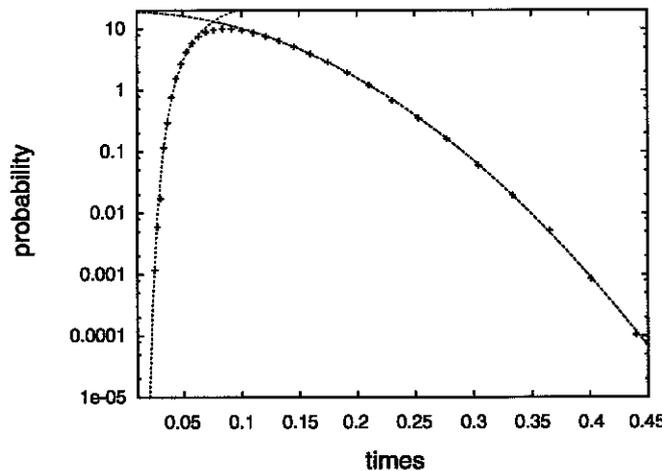


Fig. 3. The density function of the exit times for the frozen flow with  $\alpha = \frac{1}{2}$  and  $\gamma = 5$ . The dotted curves are the analytical predictions at small and large times, respectively.

The scaling property (4.2) with  $\sigma = 2$  and the fact that the exit time is infinite with a positive probability depending on  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  imply that

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt) = c(\gamma) \delta(t) dt \quad (5.21)$$

for any positive  $\gamma \neq 1$  with  $0 < c(\gamma) < 1$ . It follows that the Lagrangian flow is Richardson, locally trapping and locally transient in the terminology of Section 2.1.

## 5.2. Pair Dispersion

The pair dispersion in the model is closely related to the exit time. The reason is that the solution  $\rho(t)$  of Eq. (5.6) never changes direction. As a result, the solution that starts at  $\rho_0$  at time zero satisfies  $\rho(t) \geq \rho_1 \geq \rho_0$  or  $\rho(t) \leq \rho_1 \leq \rho_0$  if and only if it reaches  $\rho_1$  in time shorter or equal to  $t$ . It follows that

$$\int_{\rho_1}^{\infty} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \int_0^t \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; ds) \quad \text{for } \rho_1 \geq \rho_0, \quad (5.22)$$

$$\int_0^{\rho_1} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \int_0^t \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; ds) \quad \text{for } \rho_1 \leq \rho_0 \quad (5.23)$$

or that

$$\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \mp \left( \partial_\rho \int_0^t \mathcal{Q}(\rho_0, \rho; ds) \right) d\rho \quad \text{for } \rho \geq \rho_0. \quad (5.24)$$

The right hand side of Eq. (5.22) is bounded by  $\int_0^\infty \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; ds)$  which tends to zero when  $\rho_0 \rightarrow 0$  for  $\rho_1 > 0$  fixed, see Eq. (5.13). It follows that

$$\lim_{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho) = \delta(\rho) d\rho, \quad (5.25)$$

in agreement with the fact that the trajectories are determined by the initial condition. Hence the Lagrangian flow is deterministic. Note the important difference with the phase V of the Kraichnan model, see Fig. 1. There the trapping effects resulted in the coalescence of fluid particles signaled by the singular form (2.13) of the pair dispersion distribution. With the use of symmetry (5.20), the left hand side of Eq. (5.23) may be bounded by  $\int_0^\infty \mathcal{Q}(\rho_1, \rho_0; ds)$  and hence tends to zero when  $\rho_1 \rightarrow 0$  for fixed  $\rho_0 > 0$ . As a result, the distribution  $\mathcal{P}(t, \rho_0; d\rho)$  cannot have a contribution proportional to  $\delta(\rho)$  for  $\rho_0 > 0$ . It is, instead, regular in  $\rho$ . The reason is that in the

quasi-Lagrangian model of particle separation (5.6), the solutions  $\rho(t)$  are trapped with probability 1 at positive zeros of  $w$  (there is an infinity of such zeros) and never arrive at  $\rho = 0$ . This seems to be an artifact of the frozen one-dimensional model but it serves as a warning that the behavior of trajectories in the time-correlated velocities may be richer than what was observed for the Kraichnan model, with a possible occurrence of phase

#### VI. deterministic, Richardson, locally trapping, locally transient

characterized by a combination of properties that did not occur in the time-decorrelated model.

### 5.3. Case with $\alpha \neq \frac{1}{2}$

Several of the features analytically established for the one-dimensional frozen model with the Hölder exponent  $\alpha = \frac{1}{2}$  may be generalized to the case of general  $\alpha$  in the interval  $(0, 1)$ , although the absence of the Markov property in the process  $v(x)$  makes the arguments more difficult, see ref. 25. In the limit  $L \rightarrow \infty$ , the equation for the trajectory separation still has the form (5.6) with  $w(x)$ ,  $x \geq 0$ , being (upon a right choice of the normalization constant  $D_2$ ) the two-sided fractional Brownian motion (fBm), i.e., the Gaussian process with mean zero and 2-point function

$$\langle w(x) w(y) \rangle = \frac{1}{2} (x^{2\alpha} + y^{2\alpha} - |x - y|^{2\alpha}) \equiv G(x, y) \quad (5.26)$$

for  $x, y \geq 0$ . The 2-point function (5.26) is a kernel of a positive operator on the half-axis  $[0, \infty)$  that we shall denote by  $G$ . Note the scale invariance under  $w(x) \mapsto \mu^{-\alpha} w(\mu x)$  of the fBm. The basic result of ref. 31 asserts that the probability that  $w(x) < w_0$  for  $w_0 > 0$  and all  $x$  in the interval  $(0, \rho_0)$  behaves like  $\mathcal{O}((\rho_0 w_0^{-1/\alpha})^{1-\alpha})$  for large values of  $\rho_0 w_0^{-1/\alpha}$ . Similarly as for the Brownian motion, the fBm lives on continuous trajectories and has zeros in any interval  $(0, \rho_0)$  or  $(\rho_0, \infty)$ . One may again prove that, with probability 1, the solution  $\rho(t)$  of Eq. (5.6) starting at any  $\rho_0 > 0$  arrives in finite time at the closest zero  $\rho_{\pm}$  to the right or left of  $\rho_0$ , see ref. 25.

As in the case  $\alpha = \frac{1}{2}$ , the exit time  $t$  through  $\rho_1 > \rho_0$  is finite if and only if  $w > 0$  on the interval  $[\rho_0, \rho_1)$  and the probability  $\langle 1_{\{t < \infty\}} \rangle$  of such an event depends only on  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  and tends to zero when  $\rho_0 \rightarrow 0$ . It should be again possible to extract the behaviors of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for large and small time by looking at the large  $|\omega|$  behavior of

$$\langle e^{\pm|\omega|t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \langle e^{\pm|\omega| \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{d\rho}{w(\rho)}} 1_{\{w > 0 \text{ on } [\rho_0, \rho_1)\}} \rangle, \quad (5.27)$$

where the last expectation is with respect to the Gaussian measure of the fBm  $w$ . For the negative sign, this expression should be still dominated for large  $|\omega|$  by the semi-classical contribution  $\sim e^{-S_0}$ . The classical trajectory  $w(\rho) = |\omega|^{1/3} \rho_0^{(1+2\alpha)/3} (Gu)(\frac{\rho}{\rho_0})$ , where  $u$  is a function that does not vanish only on the interval  $(1, \frac{\rho_1}{\rho_0})$  and such that

$$u = (Gu)^{-2} \quad (5.28)$$

there. Note that it follows that  $w(\rho) > 0$  for  $\rho > 0$  since  $G(x, y) > 0$  except for  $x, y = 0$ . The action of the classical trajectory is  $S_0 = |\omega|^{2/3} \rho_0^{2(1-\alpha)/3} s_0$  for

$$s_0 = \int_1^{\rho_1/\rho_0} \left[ \frac{1}{(Gu)(x)} + \frac{1}{2} u(x) (Gu)(x) \right] dx. \quad (5.29)$$

Such a semi-classical dominance implies again the small time tail  $\sim e^{-\frac{4}{27} \rho_0^{2(1-\alpha)} s_0^3 t^{-2}} = e^{-\theta((\tau_e/t)^2)}$  of the density of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  (with the eddy turnover time  $\tau_e = D_2^{-1/2} \rho_0^{1-\alpha}$ ).

With the use of the scale invariance of the fBm, one may also absorb the  $|\omega|$ -dependence of the characteristic function into the length of the  $\rho$ -interval in Eq. (5.27):

$$\langle e^{\pm|\omega|t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \langle e^{\pm \int_{\rho_0}^{\rho_1} \frac{dp}{w(\rho)}} 1_{\{w > 0 \text{ on } [\rho'_0, \rho'_1]\}} \rangle, \quad (5.30)$$

where  $\rho'_i = |\omega|^{1/(1-\alpha)} \rho_i$ . For the positive sign in Eq. (5.30) and  $\alpha = \frac{1}{2}$ , we have used the Feynman-Kac formula in order to extract the extensive behavior of the right hand side for large  $|\omega|$ . For other values of  $\alpha \in (0, 1)$  such a formula is not available but the expectation (5.30) may be viewed as the partition function of a one-dimensional continuous spin system with long-range 2-spin interactions decaying as *distance*<sup>-2(1+ $\alpha$ )</sup> and with partially confining (as opposed to the case with negative sign) single-spin potential. It is plausible that the extensive behavior of the partition function  $\sim e^{-|\omega|^{1/(1-\alpha)} (\rho_1 - \rho_0) E_0}$  for large  $|\omega|$  with free energy density  $E_0 < 0$  persists for such systems. Such a behavior would result in the long-time tail  $\sim e^{-\alpha \left( \frac{1-\alpha}{|\rho_1 - \rho_0| E_0} \right)^{(1-\alpha)/\alpha} t^{1/\alpha}} = e^{-\theta((t/\tau_e)^{1/\alpha})}$  of the density of the distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$ . The validity of this prediction is confirmed by Figs. 4 and 5 where we present the density functions of the exit times for the two cases  $\alpha = 0.4$  and  $0.75$ . The numerical simulations are realized by the same method previously validated in the case  $\alpha = \frac{1}{2}$ . It requires for  $\alpha \neq \frac{1}{2}$  more care in the choice of parameters to maximize the scaling window.

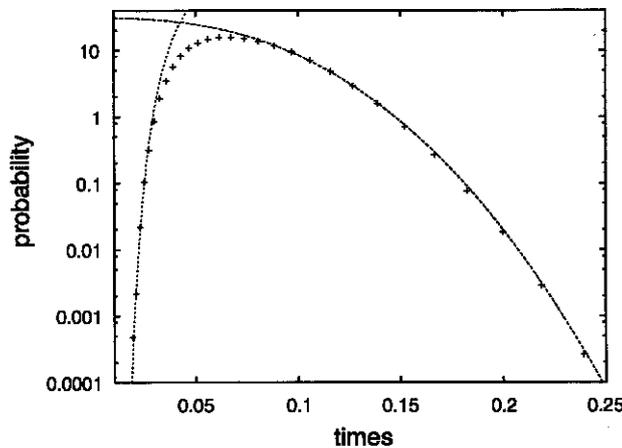


Fig. 4. The density function of the exit times for the  $1d$  frozen velocities with  $\alpha = 0.4$  and  $\gamma = 5$ . The dotted curve is a fit of the form  $e^{-\text{const. } t^{1/\alpha}}$ .

The statistics of the time of exit through  $\rho_1 < \rho_0$  is again obtained from that for  $\rho_1 > \rho_0$  by interchanging  $\rho_0$  and  $\rho_1$  and the pair dispersion probability distribution is still given by Eq. (5.24). The remarks about the phase VI type behavior of Lagrangian flow carry over from the case  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

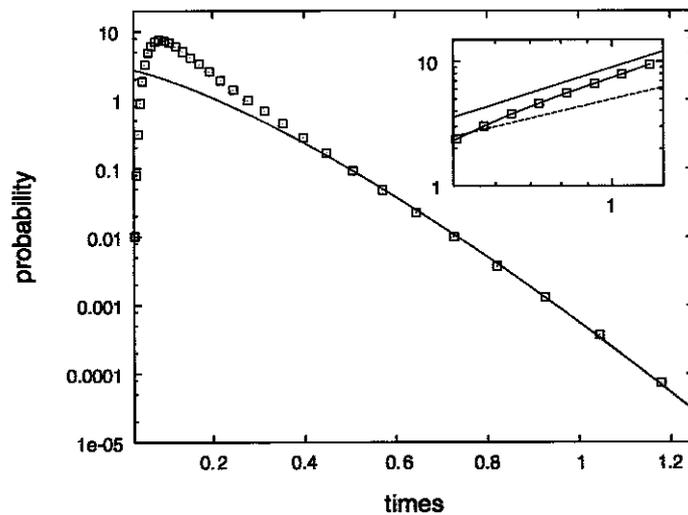


Fig. 5. The density function of the exit times for the  $1d$  frozen velocities with  $\alpha = 3/4$  and  $\gamma = 5$ . The solid curve is a fit of the form  $e^{-\text{const. } t^{1/\alpha}}$ . Since the curve gives the visual impression of an exponential decay, we also show in the inset the log log vs log plot and compare the slopes 0.75 and 1 to validate the former.

## 6. EFFECT OF LONG TIME VELOCITY CORRELATIONS

The presence of permanent trapping of trajectories in one-dimensional frozen ensemble, leading to events with infinite exit time through  $\rho_1 = \gamma\rho_0$ , should also occur in higher-dimensional frozen ensembles obtained by setting  $D_3 = 0$  in Eq. (3.1). It is plausible that, at least in the presence of compressibility, the sets of velocities trapping trajectories in a given region have positive probability. If, however, one reintroduces finite temporal correlations of velocities by taking positive  $D_3$  in (3.1), the particles will eventually be released from traps after the time evolution changes the velocity field configuration, i.e., after time of order  $\tau_{cr}(\rho) = D_3^{-1}\rho^{2\beta}$  for traps of size  $\rho$ . If for  $D_3 > 0$  the exit times are finite so that  $\int_0^\infty \mathcal{Q}(dt) = 1$ , then the missing mass  $1 - \int_0^\infty \mathcal{Q}(dt) > 0$  for  $D_3 = 0$  should be built from the long-time tails of the density of  $\mathcal{Q}$  at positive  $D_3$ , as the latter is taken to zero. Loosely speaking, we may then expect that for fixed  $\rho_0, \gamma$ , and  $D_2$ ,

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; dt) \approx \mathcal{Q}^\infty(\gamma; d(t/\tau_{cr})) \quad \text{for } t/\tau_{cr} \gg 1. \quad (6.1)$$

with  $\tau_{cr} = \tau_{cr}(\rho_0)$  and the density of  $\mathcal{Q}^\infty$  having a (Poissonian) exponential tail. Let us concentrate on the one-dimensional situation where the frozen exit-time density function is expected to have a stretched exponential tail  $\sim e^{-\sigma((t/\tau_e)^{1/\alpha})}$  with the scale set by the eddy turnover time  $\tau_e = D_2^{-1/2}\rho_0^{1-\alpha}$ . Note that the latter attains the value of order  $\tau_{cr}^{-1}$  for  $t = \tau'$  with  $\tau'/\tau_e = \mathcal{O}((\ln(\tau_{cr}/\tau_e))^\alpha) = \mathcal{O}(|\ln D_3|^\alpha)$ . The “minimal” scenario would be that the frozen density function passes into the form of (6.1) around  $t = \tau'$ . More precisely, we may postulate the convergence

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; dt) 1_{\{t < \tau'\}} \xrightarrow{D_3 \rightarrow 0} \mathcal{Q}^{\text{fr}}(\rho_0, \gamma\rho_0; dt) \\ \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(s\tau_{cr})) 1_{\{s \geq \tau'/\tau_{cr}\}} \xrightarrow{D_3 \rightarrow 0} \mathcal{Q}^\infty(\gamma; ds) \end{aligned} \quad (6.2)$$

in a strong enough sense. The above relations imply that the large exit time behavior becomes self-similar for small  $D_3$ , with the characteristic scale equal to  $\tau_{cr}$ , with no intermediate regime between the frozen type behavior and the self-similar tail. It is also possible that a different intermediate regime sets in between times of order  $\tau'$  and  $\tau_{cr}$ , with  $\tau'$  depending differently on  $D_3$ .

The minimal scenario would make explicit the large  $t$  non-uniformity of the conjectured convergence of the exit time distributions, see (4.5) and (4.6). Recall that the conjecture was based on the scaling relation that may be rewritten as the identity

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(\rho_0^{1-\alpha}t))|_{D_3} = \mathcal{Q}(1, \gamma; dt)|_{D_3(\rho_0)} \quad (6.3)$$

Lagrangian Dispersion in Gaussian Self-Similar Velocity Ensembles

675

for  $D_3(\rho_0) = \rho_0^{1-\alpha-2\beta} D_3$  and  $D_2$  unchanged, see (4.3). When  $\rho_0 \rightarrow \infty$  in domains A and B and  $\rho_0 \rightarrow 0$  in domain C then  $D_3(\rho_0) \rightarrow 0$  so that we fall into the situation considered in the scenario (6.2). The latter becomes then the assertion that

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(\rho_0^{1-\alpha}t)) 1_{\{t < \tau(\rho_0)\}} &\xrightarrow{\rho_0 \rightarrow \infty} \mathcal{Q}^{\text{fr}}(1, \gamma; dt) \\ \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(D_3^{-1}\rho_0^{2\beta}s)) 1_{\{s \geq D_3(\rho_0)\tau(\rho_0)\}} &\xrightarrow{\rho_0 \rightarrow 0} \mathcal{Q}^\infty(\gamma; ds) \end{aligned} \tag{6.4}$$

for  $\tau'(\rho_0) = \mathcal{O}(|\ln \rho_0|^\alpha)$ .

One of the consequences of such a limiting behavior would be a bifractal scaling with  $\rho_0 \rightarrow \infty$  or  $\rho_0 \rightarrow 0$  of the moments of the exit time. Indeed,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty t^n \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; dt) &= \rho_0^{(1-\alpha)n} \int_0^{\tau(\rho_0)} t^n \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(\rho_0^{1-\alpha}t)) \\ &\quad + D_3^{-n} \rho_0^{2\beta n} \int_{D_3(\rho_0)\tau(\rho_0)}^\infty s^n \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma\rho_0; d(D_3^{-1}\rho_0^{2\beta}s)). \end{aligned} \tag{6.5}$$

In the regime of extreme values of  $\rho_0$ , the first term on the right hand side behaves like  $\rho_0^{(1-\alpha)n} \int_0^\infty t^n \mathcal{Q}^{\text{fr}}(1, \gamma; dt)$  if we assume (6.4) with a sufficiently strong convergence. Similarly the second term would behave like  $D_3^{-n} \rho_0^{2\beta n} \int_{D_3(\rho_0)\tau(\rho_0)}^\infty s^n \mathcal{Q}^\infty(\gamma; ds)$ . If the density of  $\mathcal{Q}^\infty(\gamma; ds)$  is integrable at zero, the first term dominates for negative  $n$  and the second one for positive  $n$  when it behaves as  $\mathcal{O}(\rho_0^{2\beta n})$ . The ‘‘minimal’’ scenario (6.2) would then imply that

$$\langle t^n \rangle = \begin{cases} \mathcal{O}(\rho_0^{n(1-\alpha)}) & \text{for } n \leq 0, \\ \mathcal{O}(\rho_0^{2\beta n}) & \text{for } n \geq 0 \end{cases} \tag{6.6}$$

for large  $\rho_0$  in domains A and B and for small  $\rho_0$  in domain C. Such a bifractal behavior is, of course, consistent with the earlier conjecture (4.14). The missing mass in the frozen case would be given by  $\int_0^\infty \mathcal{Q}^\infty(\gamma; ds)$ . Even in the presence of an intermediate regime in the exit time distribution, the scaling (6.6) should set in for  $|n| \gg 1$ . The convexity (concavity) of the large (small)  $\rho_0$  exponent as a function of  $n$ , together with its vanishing at  $n = 0$ , would then impose the behavior (6.6) for all  $n$ .

We have tested the scenario (6.2) numerically. The one-dimensional velocity field with temporal correlations was obtained again using the

Fourier method. Each Fourier mode  $v_k(t)$  was generated by integrating the corresponding Ornstein–Uhlenbeck differential equation:

$$dv_k(t) = -\frac{v_k(t)}{\tau(k)} dt + \left(\frac{2E(k)}{\tau(k)}\right)^{1/2} dw_k(t), \quad (6.7)$$

where  $\tau(k)$  scales as  $k^{-2\beta}$ , the energy spectrum of the field is  $E(k) \propto k^{-1-2\alpha}$  and  $dw_k(t)$  is a standard Brownian motion. The stochastic differential equations (6.7) were integrated by using a simple Euler scheme of order  $\frac{1}{2}$ .<sup>(26)</sup> The parameters of the flow were  $\alpha = 0.75$  and  $\beta = 0.3$ . The exit times for six different initial separations were measured. The density functions  $Q(\rho_0, 1.05\rho_0; t)$  of their distributions are shown in Fig. 6. According to (6.4), by plotting  $\rho_0^{1-\alpha} Q$  versus  $\rho_0^{\alpha-1} t$  all the curves should collapse at small exit times, as confirmed in Fig. 7. Furthermore, the prediction (6.4) at large exit times is verified in Fig. 8 by collapsing the long-time parts of the curves by plotting  $\rho_0^{2\beta} Q$  versus  $\rho_0^{-2\beta} t$ . Note that the curves for the two smallest values of  $\rho_0$  are not collapsing, in agreement with the previous arguments predicting that the asymptotic behavior sets in at large  $\rho_0$ 's. The simulations are consistent with the absence of an intermediate regime but do not really allow to exclude such a possibility.

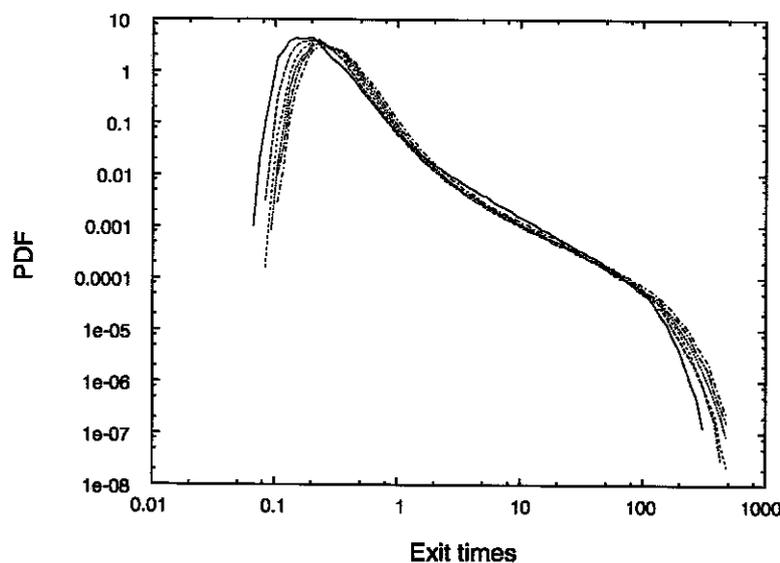


Fig. 6. The density function  $Q$  of the exit times for the flow with  $\alpha = 0.75$ ,  $\beta = 0.3$ , and  $\gamma = 1.05$  at six initial separations  $\rho_0 = 400, 800, 1200, 1500, 1800, 2100$ . The resolution is 32768.

Lagrangian Dispersion in Gaussian Self-Similar Velocity Ensembles

677

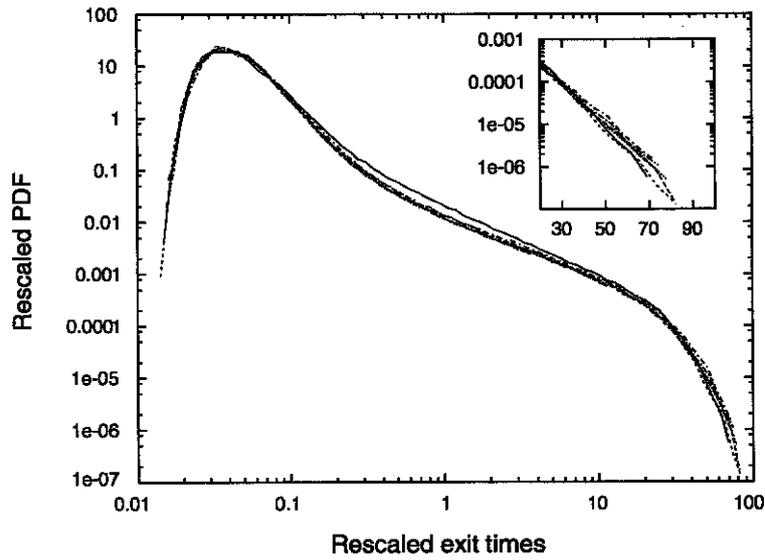


Fig. 7. The same density function as in the previous figure but plotted now as  $\rho_0^{1-\alpha} Q$  vs.  $\rho_0^{\alpha-1} t$  to display the collapse at small exit times.

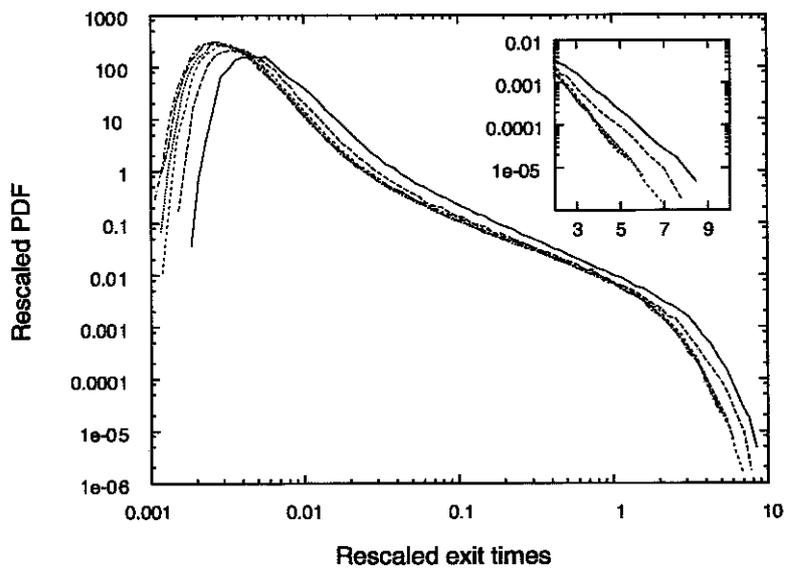


Fig. 8. The same density function as in the previous figure but plotted now as  $\rho_0^{2\beta} Q$  vs.  $\rho_0^{-2\beta} t$  to display the collapse at large exit times.

## 7. EULERIAN GAUSSIAN VELOCITIES: SWEEPING EFFECTS

Let us discuss how the Lagrangian flow changes if the Gaussian velocity ensemble 3.1 is used to model the Eulerian velocities rather than the quasi-Lagrangian ones. As already mentioned, the main difference is that, unlike for the Kraichnan model, the separation of two trajectories is not any more a function of velocity differences only and it is strongly influenced by large-scale eddies or the so called sweeping. This effect grows with growing integral scale  $L$  and we shall attempt to study its large  $L$  asymptotics. It seems to be stronger for small values of  $\beta$ , i.e., for velocities that are almost frozen at small distances.

The r.m.s. value of velocity in the ensemble (3.1) is proportional to  $L^\alpha$ , i.e., it becomes large for large  $L$ . On the other hand, the r.m.s. equal-time velocity differences on scales much smaller than  $L$  are of the order  $distance^\alpha$ . In particular, on the scales  $\sim L^\alpha$  they are of the order  $L^{\alpha^2} \ll L^\alpha$ . Rewriting the trajectory equation (1.1) as<sup>7</sup>

$$\mathbf{R}(t) = \int_0^t \mathbf{v}(s, \mathbf{0}) ds + \int_0^t [\mathbf{v}(s, \mathbf{R}(s)) - \mathbf{v}(s, \mathbf{0})] ds, \quad (7.1)$$

we may expect that, for fixed  $t$ , the first integral is of the order  $L^\alpha$  and the second of the order  $L^{\alpha^2} \ll L^\alpha$ . For bounded times, the first integral should then give the contribution of order  $L^\alpha$  to the solution and the second one, with  $\mathbf{R}(s)$  replaced by the approximation  $\sim L^\alpha$ , the term of the order  $L^{\alpha^2}$ . More precisely, let us observe that the Gaussian process with the components  $L^{-\alpha} \mathbf{v}(t, \mathbf{0})$  and  $L^{-\alpha^2} [\mathbf{v}(t, L^\alpha \mathbf{r}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{0})]$  converges in law when  $L \rightarrow \infty$  to the  $t$ -independent Gaussian process  $(\mathbf{v}_0, \mathbf{w}(\mathbf{r}))$  with the 2-point functions

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_0 \mathbf{v}_0 \rangle &= D_2 \int \frac{1}{k_1^{d+2\alpha}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}, \\ \langle \mathbf{w}(\mathbf{r}) \mathbf{w}(\mathbf{r}') \rangle &= D_2 \int \frac{(1 - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}})(1 - e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'})}{k^{d+2\alpha}} \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^d}, \\ \langle \mathbf{v}_0 \mathbf{w}(\mathbf{r}) \rangle &= 0. \end{aligned} \quad (7.2)$$

Note the independence of  $\mathbf{v}_0$  and  $\mathbf{w}(\mathbf{r})$ . It is then natural to conjecture that the following convergence in law takes place:

<sup>7</sup> In principle, we should add the noise to the trajectory but it does not play any role on the scales that will be discussed.

$$L^{-\alpha}R(t) \xrightarrow{L \rightarrow \infty} v_0 t, \tag{7.3}$$

$$L^{-\alpha^2} \left[ R(t) - \int_0^t v(s, \theta) ds \right] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \int_0^t w(v_0 s) ds. \tag{7.4}$$

In the frozen case or if  $\alpha \leq \beta$  or  $\alpha > \beta > \alpha(1 - \alpha)$ , the limits describe the leading terms in the single trajectory statistics for large  $L$ . For  $\beta \leq \alpha(1 - \alpha)$ , one should also take into account the term coming from  $\int_0^t [v(s, \theta) - v(0, 0)] ds$  which is of order  $L^{\alpha - \beta}$ . The dominant term of order  $L^\alpha$  in  $R(t)$  describes the ballistic motion with the random velocity of the largest scale eddies that sweep the Lagrangian particle along. In Appendix E we prove convergence (7.3) in the frozen one-dimensional model with  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

How does the presence of large scale  $L$  in Eulerian velocities influence the Lagrangian particle separation? Let us try to understand this in the one-dimensional frozen model. We shall consider two particle trajectories  $x(t)$  and  $x(t) + \rho(t)$  starting at time zero at zero and  $\rho_0 > 0$ , respectively, and we shall try to estimate the behavior of their separation  $\rho(t)$ . First notice that  $\rho(t) \geq 0$ , i.e., the order of the particles on the line will never change. For large  $L$ , the dominant events are when the velocities of the particles and at the points between them are all of the order  $L^\alpha$  and of the same sign during the time interval  $(0, t)$ . Let us suppose that they are positive, see Fig. 9 (the case of negative velocities can be treated in a symmetric way).

The crucial fact resulting from the one-dimensional geometry where the particle order is preserved by the flow is the magic identity

$$\int_0^{\rho_0} \frac{d\rho}{v(\rho)} = \int_{x(t)}^{x(t) + \rho(t)} \frac{d\rho}{v(\rho)}. \tag{7.5}$$

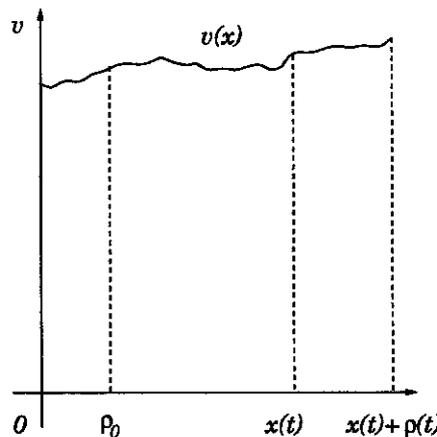


Fig. 9. Positions of two right-moving particles in 1d frozen velocity.

The left hand side is the time  $\Delta t$  that the first particle starting at time zero at  $\rho = 0$  takes to reach the initial position  $\rho_0$  of the second one. The right hand side is the time that the second particle takes to go from the time  $t$  position  $x(t)$  of the first particle (at which it arrives earlier) to its own time  $t$  position  $x(t) + \rho(t)$ . The best way to understand that the above times are equal is by releasing the second particle after the delay  $\Delta t$  so that both particles move subsequently together. The delay changes nothing in the movement of the second particle since the velocity field is frozen. The delayed particle will then be at position  $x(t)$  at time  $t$  (together with the first particle) and at position  $x(t) + \rho(t)$  at time  $t + \Delta t$ , which shows that it takes time  $\Delta t$  to travel from  $x(t)$  to  $x(t) + \rho(t)$ . Identity (7.5) may be also established more formally by noticing that the time derivative of its right hand side vanishes. Writing for large  $L$

$$x(t) = L^\alpha v_0 t + \mathcal{O}(L^{\alpha^2}), \quad v(x(t)) = L^\alpha v_0 + L^{\alpha^2} w(v_0 t) + \mathcal{O}(L^{\alpha^3}), \quad (7.6)$$

see relations (7.3) and (7.4), and anticipating that  $\rho(t) = \mathcal{O}(1)$ , Eq. (7.5) may be approximated as

$$\frac{\rho_0}{L^\alpha v_0} = \frac{\rho(t)}{L^\alpha v_0 + L^{\alpha^2} w(v_0 t)} + \mathcal{O}(L^{\alpha^3 - 2\alpha}) \quad (7.7)$$

from which we infer that

$$\rho(t) - \rho_0 = L^{\alpha^2 - \alpha} \rho_0 v_0^{-1} w(v_0 t) + \mathcal{O}(L^{\alpha^3 - \alpha}). \quad (7.8)$$

The process  $w(x)$  is the fBm with the 2-point function (5.26) (up to normalization). The precise conjecture would then assert the convergence in law

$$L^{\alpha(1-\alpha)} [\rho(t) - \rho_0] \xrightarrow{L \rightarrow \infty} \rho_0 v_0^{\alpha-1} w(t). \quad (7.9)$$

Note that the above calculations indicate that not only a single particle motion, but also the separation of trajectories in the Eulerian frozen one-dimensional velocity ensemble are dominated by the scale  $L$  velocities, i.e., by the large eddy sweeping. The effect on the pair dispersion is, however, inverse to that on the single particle motion. Whereas the latter one becomes very fast for large  $L$ , the trajectory separation becomes essentially frozen to the initial value in a localization-type effect. It would be interesting to know if such localizing tendency persists in the more general Eulerian Gaussian ensembles (3.1).

That the sweeping modifies the pair separation statistics for finite  $L$  may be seen in the following way. There is a competition between two

types of contributions to the dynamics of the pair dispersion  $\rho(t)$ . The first comes from the configurations where the velocity differences at distances of order  $\rho(t)$  are much smaller than the velocity of each particle. The second one from the opposite regime. The two contributions may be separated if we fix the initial velocity  $v(0)$  of the first particle, with  $v(0) < D_2^{1/2} \rho_0^\alpha$  corresponding to the first regime and  $v(0) > D_2^{1/2} \rho_0^\alpha$  to the second one. Denote by  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0))$  the conditional distribution of the exit times for fixed  $v(0)$ . In particular,  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | 0)$  is the quasi-Lagrangian distribution studied in the  $L \rightarrow \infty$  limit in the previous section. As long as  $\rho_0, \rho_1 \ll L$  and  $v(0) \ll D_2^{1/2} L^\alpha$ , the conditional distribution should be approximately  $L$ -independent and, consequently, it should satisfy the scaling identity

$$\mathcal{Q}(\mu^\sigma \rho_0, \mu^\sigma \rho_1; d(\mu t) | \mu^{\sigma-1} v(0)) \simeq \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0)) \quad (7.10)$$

for  $\sigma = \frac{1}{1-\alpha}$ . We infer that

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0)) \simeq \mathcal{Q}(1, \gamma; d(\rho_0^{\alpha-1} t) | \rho_0^{-\alpha} v(0)). \quad (7.11)$$

where, as usually,  $\gamma = \frac{v(0)}{\rho_0}$ . Deep in the regime  $v(0) < D_2^{1/2} \rho_0^\alpha$  the distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0))$  is then essentially quasi-Lagrangian. As for the opposite regime, we may use the magic formula (7.5) with  $\rho(t) = \gamma \rho_0$ . Deep in that regime, the fluctuations of  $v(\rho)$  in both integrals are small and Eq. (7.5) reduces to the approximate identity

$$v(x(t)) \simeq \gamma v(0) \quad (7.12)$$

from which  $\rho_0$  dropped out and which states that the exit time  $t$  is the first time when the velocity on the trajectory of the first particle reaches the value  $\gamma v(0)$ . In the scaling regime, we obtain then

$$\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0)) \simeq \mathcal{Q}^{\text{sc}}(\gamma; d(v(0)^{1-1/\alpha} t)) \quad (7.13)$$

which is consistent with (7.11) in the crossover region  $v(0) = \mathcal{O}(\rho^\alpha)$ . Even for  $v(0) \gtrsim D_2^{1/2} L^\alpha$  where the scaling breaks, the  $\rho_0$ -independence of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt | v(0))$  persists so that the contribution of the region  $v(0) > D_2^{1/2} \rho_0^\alpha$  to the moments of exit time is approximately  $\rho_0$ -independent for fixed  $\gamma$ . On the other hand, the contribution of the quasi-Lagrangian regime  $v(0) < D_2^{1/2} \rho_0^\alpha$  to the  $n$ th-moment is approximately proportional to

$$\int_0^{D_2^{1/2} \rho_0^\alpha} dv(0) \int t^n \mathcal{Q}(\rho_0, \gamma \rho_0; dt | v(0)) \simeq D_2^{1/2} \rho_0^{\alpha+n(1-\alpha)} \int t^n \mathcal{Q}(1, \gamma; dt | 0). \quad (7.14)$$

682

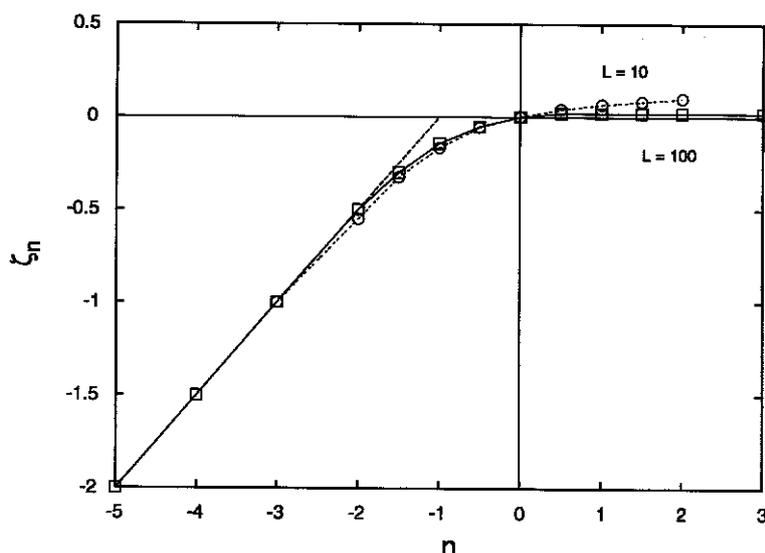
Chaves *et al.*

Fig. 10. Scaling exponents of exit-time moments in Eulerian 1d simulations for two different box sizes. Illustration of the sweeping effects.

It dominates for small  $\rho_0$  if  $n < -\frac{\alpha}{1-\alpha}$ . Altogether, we then expect that in the frozen one-dimensional Eulerian model and for small  $\rho_0$ ,

$$\langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \mathcal{O}(\rho_0^{\zeta_n}) \quad \text{with} \quad \zeta_n = \begin{cases} \alpha + n(1-\alpha) & \text{for } n \leq -\frac{\alpha}{1-\alpha}, \\ 0 & \text{for } n \geq -\frac{\alpha}{1-\alpha}, \end{cases} \quad (7.15)$$

i.e., again a bifractal situation. The prediction seems to be confirmed, at least for large  $|n|$ , by numerical simulations, see Fig. 10 where the the scaling exponents for two sizes of the periodic box are plotted.

## APPENDIX A

We gather here several explicit formulae for the exit time distribution in the Kraichnan model and discuss in more detail some of their properties mentioned in the main text.

For  $\xi = 2$  and  $L = \infty$ , i.e., in the smooth case with scaling,

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt) &= \frac{|\ln(\rho_1/\rho_0)|}{\sqrt{4\pi D_1' t^3}} e^{-\frac{1}{4D_1' t} (\ln(\rho_1/\rho_0) - \lambda t)^2} dt \\ &= \frac{|\ln(\rho_1/\rho_0)|}{\sqrt{4\pi D_1' t^3}} e^{\frac{\lambda \ln(\rho_1/\rho_0)}{2D_1'}} e^{-\frac{1}{4D_1' t} \ln^2(\rho_1/\rho_0) - \frac{\lambda^2}{4D_1'} t} dt, \end{aligned} \quad (\text{A.1})$$

Lagrangian Dispersion in Gaussian Self-Similar Velocity Ensembles

683

as given by Eq. (2.16) with the use of the explicit expression for the Dirichlet heat kernel

$$e^{-iM_D(\rho_0, \rho)} = \frac{1}{\sqrt{4\pi D'_1 t \rho}} \left( e^{-\frac{1}{4D'_1 t} (\ln(\rho/\rho_0) - \lambda t)^2} - e^{\frac{\lambda}{D'_1} \ln(\rho_1/\rho_0) - \frac{1}{4D'_1 t} (\ln(\rho\rho_0/\rho_1^2) - \lambda t)^2} \right). \tag{A.2}$$

Note the decay  $\sim e^{-\frac{1}{4D'_1 t} \ln^2(\rho_1/\rho_0)}$  of the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for small  $t$  and its exponential tail  $\sim e^{-\frac{\lambda^2}{4D'_1} t}$  for large  $t$  indicating the non-Gaussian character of small and large fluctuations of  $t$ . For the conditional moments of the exit time, one obtains:

$$\begin{aligned} \langle t^n \rangle_c &= \frac{|\lambda|}{\sqrt{\pi D'_1}} \left( \frac{|\ln(\rho_1/\rho_0)|}{|\lambda|} \right)^{n+\frac{1}{2}} e^{\frac{\lambda \ln(\rho_1/\rho_0)}{2D'_1}} K_{|n+\frac{1}{2}|} \left( \frac{|\lambda \ln(\rho_1/\rho_0)|}{2D'_1} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{|n-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}} \frac{(|n-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}+k)!}{k! (|n-\frac{1}{2}|-\frac{1}{2}-k)!} \left( \frac{D'_1}{\lambda^2} \right)^k \left( \frac{|\ln(\rho_1/\rho_0)|}{|\lambda|} \right)^{n-k}, \end{aligned} \tag{A.3}$$

where the first expression with the Bessel function holds for all real  $n$  and the second one for integer  $n$ . The unconditioned moments diverge for  $n > 0$  if  $\lambda \ln(\rho_1/\rho_0) < 0$  due to the finite probability of infinite exit times. The conditional characteristic function has the form:

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_c = \left( \frac{\rho_1}{\rho_0} \right)^{\pm \frac{\lambda}{D'_1} \left( \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - i \frac{D'_1 \omega}{\lambda^2}} \right)}, \tag{A.4}$$

where the square root is taken with the positive real part and the sign is that of  $\lambda \ln(\rho_1/\rho_0)$ . The decay  $\sim e^{-|\ln(\rho_1/\rho_0)| \sqrt{|\omega|/D'_1}}$  at large  $|\omega|$  along the positive imaginary axis and the presence of the singularity at  $\omega = -i \frac{\lambda^2}{4D'_1}$  reflect the small and large  $t$  behavior of the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$ .

For  $0 < \xi < 2$  and  $L = \infty$ , i.e., in the non-smooth case with scaling,

$$\begin{aligned} (M_D - i\omega)^{-1}(\rho_0, \rho) &= \frac{1}{D'_1} \mathcal{W}^{-1} \rho^{a-\xi} f_{\mp}(\rho_1)^{-1} \\ &\begin{cases} f_{\mp}(\rho_0)(f_{\pm}(\rho) f_{\mp}(\rho_1) - f_{\mp}(\rho) f_{\pm}(\rho_1)) & \text{for } \rho_0 \leq \rho, \\ f_{\mp}(\rho)(f_{\pm}(\rho_0) f_{\mp}(\rho_1) - f_{\mp}(\rho_0) f_{\pm}(\rho_1)) & \text{for } \rho_0 \geq \rho \end{cases} \end{aligned} \tag{A.5}$$

on the interval  $[0, \rho_1]$  with the upper sign pertaining to the weakly compressible  $\varphi < \frac{d}{\xi^2}$  region and the lower one to the strongly compressible one

684

Chaves *et al.*

$\varphi \geq \frac{d}{\xi^2}$ . Functions  $f_{\pm}$  are the two independent solutions of the eigenfunction equation  $(M - i\omega) f = 0$  expressed by the Bessel functions:

$$f_{\pm}(\rho) = \rho^{\frac{1-a}{2}} J_{\pm b} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D'_1}} \rho^{2-\xi} \right) \quad (\text{A.6})$$

and

$$\mathcal{W} = \rho^a (f_{\pm}(\rho) \partial_{\rho} f_{\mp}(\rho) - f_{\mp}(\rho) \partial_{\rho} f_{\pm}(\rho)) \quad (\text{A.7})$$

is their  $\rho$ -independent Wronskian. The eigenfunction  $f_+$  ( $f_-$ ) satisfies the singular Dirichlet (Neumann) condition at the origin imposed by the limit when the trajectory noise is turned off for weak (strong) compressibility, see ref. 23. Equation (2.19) implies that

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \frac{f_{\mp}(\rho_0)}{f_{\mp}(\rho_1)}. \quad (\text{A.8})$$

For  $\omega \rightarrow 0$  the eigenfunction  $f_-$  reduces to a constant whereas  $f_+$  becomes proportional to  $\rho^{1-a}$  resulting in relation (2.23).

For the conditional characteristic function, one obtains

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_c = \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\mp \frac{a-1}{2}} \frac{J_{\mp b} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D'_1}} \rho_0^{2-\xi} \right)}{J_{\mp b} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D'_1}} \rho_1^{2-\xi} \right)}. \quad (\text{A.9})$$

The moments of the exit times may be derived from this expression by expanding the right hand side in powers of  $\omega$ . In particular, one obtains for the conditional average of the exit time the result:

$$\langle t \rangle_c = \frac{(\rho_1/\rho_0)^{2-\xi} - 1}{(2-\xi)(2-\xi \mp (1-a)) D'_1} \rho_0^{2-\xi} \quad (\text{A.10})$$

which reproduces in the  $\xi \rightarrow 2$  limit the  $n = 1$  version of Eq. (A.3). The higher order moments  $\langle t^n \rangle_c$  are proportional to  $\rho_0^{n(2-\xi)}$  if  $\frac{\rho_1}{\rho_0}$  is kept constant. The decay  $\propto e^{-\sigma(\sqrt{|\omega|})}$  of the absolute value of the right hand side of Eq. (A.9) at large positive or negative  $\omega$  guarantees that the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  has a smooth density. Since the latter is zero for negative  $t$ , it must vanish with all derivatives at  $t = 0$ . More exactly, the decay  $\sim e^{-b_1 \sqrt{|\omega|}}$  of the characteristic function (A.9) along the positive imaginary axis of  $\omega$ , with  $b_1 = 2(2-\xi)^{-1} (D'_1)^{-1/2} (\rho_1^{(2-\xi)/2} - \rho_0^{(2-\xi)/2})$ ,

signals the behavior  $\sim e^{-\frac{b_1^2}{4t}}$  of the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for small  $t$ . The analyticity properties of the right hand side of (A.9) imply the exponential decay  $\sim e^{-b_2 t}$  of the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for large  $t$ , with the rate  $b_2 = \frac{1}{4}(2-\xi)^2 D_1' \rho_1^{\xi-2} x_0^2$  where  $x_0$  is the (real) zero of  $J_{\mp b}(z)$  closest to the origin. In this respect, the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  behaves similarly for weak and for strong compressibility, the main difference between the two cases consisting in the missing mass in the latter case.

For  $\rho_1 < \rho_0$ , the statistics of the time of exit through  $\rho_1$  is related to the resolvent kernel of the generator  $M_D$  on the interval  $[\rho_1, \infty)$ . For  $0 < \xi < 2$ , the latter is given by a formula like (A.5) but with the overall minus sign, the cases  $\rho_0 \leq \rho$  and  $\rho_0 \geq \rho$  interchanged, and the functions  $f_{\mp}, f_{\pm}$  replaced by the Hankel functions

$$f^{(i)}(\rho) = \rho^{\frac{1-a}{2}} H_b^{(i)} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D_1'}} \rho^{2-\xi} \right) \tag{A.11}$$

for  $i = 1, 2$ , respectively. The square root in the argument of the Hankel functions should be taken with the positive imaginary part so that it is the eigenfunction  $f^{(1)}$  which has a stretched exponential decay for large  $\rho$ . For the characteristic function of the exit time, Eq. (2.19) gives:

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \frac{f^{(1)}(\rho_0)}{f^{(1)}(\rho_1)}. \tag{A.12}$$

When  $\omega \rightarrow 0$ , the eigenfunction  $f^{(1)}$  becomes proportional to  $\rho^{1-a}$  if  $a > 1$ , i.e., if  $b < 0$  or  $\wp < \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$  and to a constant if  $a \leq 1$ , i.e., if  $b \geq 0$  or  $\wp \geq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$ , resulting in relation (2.24).

The conditional characteristic function is given by the expression

$$\langle e^{i\omega t} \rangle_c = \left( \frac{\rho_0}{\rho_1} \right)^{\frac{1-a}{2}} \frac{H_b^{(1)} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D_1'}} \rho_0^{2-\xi} \right)}{H_b^{(1)} \left( \frac{2}{2-\xi} \sqrt{\frac{i\omega}{D_1'}} \rho_1^{2-\xi} \right)}. \tag{A.13}$$

Again, its absolute value decays as  $e^{-\sigma(\sqrt{|\omega|})}$  for large  $|\omega|$  implying that  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  has a smooth density that vanishes with all derivatives at the origin. More exactly, the decay  $\sim e^{-b_1 \sqrt{|\omega|}}$  of (A.13) along the positive imaginary axis, where  $b_1$  is as for  $\rho_1 > \rho_0$  but with  $\rho_0$  and  $\rho_1$  interchanged, implies again the behavior  $\sim e^{-\frac{b_1^2}{4t}}$  of the density of the exit time distribution  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  for small  $t$ . Since  $H_b^{(1)}(z)$  is a combination of  $z^{\pm b}$  with coefficients that are entire functions of  $z^2$  (for non-integer  $b$ ), it follows that

686

Chaves et al.

$\langle e^{t\omega} \rangle_c$  has the  $n$ th derivative over  $\omega$  at the origin if (and only if)  $n < |b|$ . That implies that for  $\rho_1 < \rho_0$  the density of  $\mathcal{Q}(\rho_0, \rho_1; dt)$  has a power decay for large  $t$ , unlike for  $\rho_1 > \rho_0$  where it decayed exponentially. This leads to even more non-Gaussian large deviations of the exit time.

## APPENDIX B

We shall establish here the estimate (5.9) on the average time, given by Eq. (5.8), that the trajectory takes to reach the first zero of the Brownian motion  $w(\rho)$  between  $\rho_0$  and  $\rho_2$ . To this end, let us note that for  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-\frac{(w+w_2)^2}{2(\rho_2-\rho)}} \frac{\sqrt{2} dw_2}{\sqrt{\pi(\rho_2-\rho)}} &\leq \sqrt{2} e^{-\frac{w^2}{4(\rho_2-\rho)}} \\ &\leq \sqrt{2} \left( \frac{\rho_2}{\rho_2-\rho} \right)^\delta e^{-\frac{w^2}{4(\rho_2-\rho)}} \\ &\leq \sqrt{2} (4\delta)^\delta e^{-\delta} \frac{\rho_2^\delta}{w^{2\delta}}, \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

where the last inequality follows from  $xe^{-x} \leq e^{-1}$ . Employing the bound (B.1) for  $0 < \delta < 1/2$  and extending the integral over  $\rho$  in (5.8) to infinity with the use of the identity

$$\int_{\rho_0}^\infty \left( e^{-\frac{(w_0-w)^2}{2(\rho-\rho_0)}} - e^{-\frac{(w_0+w)^2}{2(\rho-\rho_0)}} \right) \frac{d\rho}{\sqrt{2\pi(\rho-\rho_0)}} = w_0 + w - |w_0 - w|, \quad (\text{B.2})$$

we obtain

$$\begin{aligned} &\langle t_+ 1_{\{w(\rho_0) > 0, \rho_+ \leq \rho_2\}} \rangle \\ &\leq \sqrt{2} (4\delta)^\delta e^{-\delta} \rho_2^\delta \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}} \int_0^\infty \frac{(w_0 + w - |w_0 - w|) dw}{w^{1+2\delta}} \\ &= \frac{(2\delta)^\delta e^{-\delta} \Gamma(1-\delta)}{\sqrt{\pi} \delta(1-2\delta)} \rho_0^{1/2-\delta} \rho_2^\delta. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

The minimization over  $\delta$  gives the inequality (5.9).

## APPENDIX C

The constraint moments of the exit time (5.12) in the frozen one-dimensional model with  $\alpha = \frac{1}{2}$  and  $L = \infty$  take the form

Lagrangian Dispersion in Gaussian Self-Similar Velocity Ensembles

687

$$\begin{aligned}
 \langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle &= n! \int_{\rho_0 \leq \rho' \leq \dots \leq \rho^{(n)} \leq \rho_1} d\rho' \dots d\rho^{(n)} \int_0^\infty e^{-\frac{w_0^2}{2\rho_0}} \frac{dw_0}{\sqrt{2\pi\rho_0}} \\
 &\cdot \prod_{i=1}^n \int_0^\infty \left( e^{\frac{-(w^{(i-1)} - w^{(i)})^2}{2(\rho^{(i)} - \rho^{(i-1)})}} - e^{\frac{-(w^{(i-1)} + w^{(i)})^2}{2(\rho^{(i)} - \rho^{(i-1)})}} \right) \frac{dw^{(i)}}{\sqrt{2\pi(\rho^{(i)} - \rho^{(i-1)})} w^{(i)}} \\
 &\cdot \int_0^\infty \left( e^{\frac{(w^{(n)} - w_1)^2}{2(\rho_1 - \rho^{(n)})}} - e^{\frac{(w^{(n)} + w_1)^2}{2(\rho_1 - \rho^{(n)})}} \right) \frac{dw_1}{\sqrt{2\pi(\rho_1 - \rho^{(n)})}} \tag{C.1}
 \end{aligned}$$

with  $\rho^{(0)} \equiv \rho_0$  and  $w^{(0)} \equiv w_0$ . It is easy to show that the expression on the right hand side is finite. Indeed, bounding the last integral by  $\sqrt{\frac{2}{\pi(\rho_1 - \rho^{(n)})}} w^{(n)}$  as in estimating (5.10) and proceeding further the same way, we obtain the inequality

$$\begin{aligned}
 \langle t^n 1_{\{t < \infty\}} \rangle &\leq \frac{1}{\pi} \left(\frac{2}{\pi}\right)^{n/2} \sqrt{\rho_0} n! \int_{\rho_0 \leq \rho' \leq \dots \leq \rho^{(n)} \leq \rho_1} \frac{d\rho' \dots d\rho^{(n)}}{\sqrt{(\rho' - \rho_0) \dots (\rho_1 - \rho^{(n)})}} \\
 &\leq \frac{2^n}{\sqrt{2\pi}} \frac{n!}{(n-1)!!} \left(\frac{\rho_1}{\rho_0} - 1\right)^{\frac{n-1}{2}} \rho_0^{\frac{n}{2}}, \tag{C.2}
 \end{aligned}$$

where the last line results from the inductive calculation of the  $\rho^{(i)}$  integrals.

APPENDIX D

This appendix is devoted to the spectral analysis of the operator  $\mathcal{K}_-$  given by Eq. (5.19) and pertaining to the long-time behavior of the  $d = 1$ ,  $\alpha = \frac{1}{2}$  exit times. The two eigen-solutions of  $\mathcal{K}_-$  corresponding to an eigenvalue  $\lambda$  may be expressed by the Whittaker functions

$$\psi_\lambda(w) = M_{\frac{1}{\sqrt{-2\lambda}}, \frac{1}{2}}(2\sqrt{-2\lambda} w), \quad \varphi_\lambda(w) = W_{\frac{1}{\sqrt{-2\lambda}}, \frac{1}{2}}(2\sqrt{-2\lambda} w). \tag{D.1}$$

The spectrum of  $\mathcal{K}_-$  on the positive half-line and with the Dirichlet boundary condition at the origin is composed of the half-line  $[0, \infty)$  (continuous spectrum) and of discrete negative eigenvalues  $E_n = -\frac{1}{2n^2}$  for  $n = 1, 2, \dots$  corresponding to the bound states in the attractive potential. The eigenfunctions in the spectrum are  $\psi_E(w)$  where in (D.1) for  $E > 0$  we choose the square root with positive imaginary part and for  $E = E_n$  the positive one. These functions vanish at zero. They are imaginary and

688

. Chaves et al.

oscillating at infinity for  $E > 0$ . For  $E = E_n$ , they are real and decaying exponentially. In the latter case, the two eigen-solutions (D.1) become proportional and may be expressed by the Laguerre polynomials, similarly as for the three-dimensional Schrödinger operator in the attractive Coulomb potential:

$$\begin{aligned} M_{n, \frac{1}{2}} \left( \frac{2}{n} w \right) &= \frac{(-1)^{n-1}}{n!} W_{n, \frac{1}{2}} \left( \frac{2}{n} w \right) \\ &= \frac{2}{n^2} w e^{-\frac{1}{2}w} L_{n-1}^1 \left( \frac{2}{n} w \right) = \frac{1}{n!} e^{z/2} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (z^n e^{-z}) \Big|_{z=\frac{2}{n}w}. \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

The resolvent kernel of  $\mathcal{K}_-$  takes the form

$$(\mathcal{K}_- - \lambda)^{-1}(w_0, w_1) = \frac{2}{\mathcal{W}} \begin{cases} \psi_\lambda(w_0) \varphi_\lambda(w_1) & \text{for } w_0 \leq w_1, \\ \varphi_\lambda(w_0) \psi_\lambda(w_1) & \text{for } w_0 \geq w_1, \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

with the Wronskian

$$\mathcal{W} = \varphi_\lambda(w) \partial_w \psi_\lambda(w) - \psi_\lambda(w) \partial_w \varphi_\lambda(w) = 2 \sqrt{-2\lambda} / \Gamma(1 - \frac{1}{\sqrt{-2\lambda}}), \quad (\text{D.4})$$

where in the expression for the resolvent the square roots are taken positive for  $\lambda$  sufficiently negative and continued analytically to the other values of  $\lambda$  outside the spectrum. The discrete eigenvalues  $E_n$  appear as poles in the right hand side of (D.3) with the residue

$$-\sqrt{-2E_n} \psi_{E_n}(w_0) \overline{\psi_{E_n}(w_1)} \quad (\text{D.5})$$

originating in the zeros of the Wronskian. Along the positive axis of  $\lambda$ , the right hand side of (D.3) has a cut

$$\frac{\pi i}{E} (1 - e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{2E}}})^{-1} \psi_E(w_0) \overline{\psi_E(w_1)}. \quad (\text{D.6})$$

It follows that the spectral density of  $\mathcal{K}_-$  has the form

$$\nu(E) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{-2E_n} \delta(E - E_n) + \frac{1}{2E} (1 - e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{2E}}})^{-1} \quad (\text{D.7})$$

and that

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty e^{-|\omega|^2(\rho_1-\rho_0)\mathcal{K}_-(w_0, w_1)} dw_1 \\ &= \sum_{n=1}^\infty e^{\frac{|\omega|^2(\rho_1-\rho_0)}{2n^2}} \frac{1}{n} M_{n, \frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n}w_0\right) \int_0^\infty M_{n, \frac{1}{2}}\left(\frac{2}{n}w_1\right) dw_1 \\ & \quad - \int_0^\infty dw_1 \int_0^\infty \frac{e^{-|\omega|^2(\rho_1-\rho_0)E}}{2E(1-e^{-\frac{2\pi}{\sqrt{2E}}})} M_{\frac{1}{\sqrt{2E}}, \frac{1}{2}}(2i\sqrt{2E}w_0) M_{\frac{1}{\sqrt{2E}}, \frac{1}{2}}(2i\sqrt{2E}w_1) dE. \end{aligned} \tag{D.8}$$

Substituting this expression to Eq. (5.18), one can see that the contribution of the ground state of  $\mathcal{K}_-$  dominates for  $\omega = -i|\omega|$  and large  $|\omega|$  so that

$$\langle e^{i\omega t} 1_{\{t < \infty\}} \rangle = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi\rho_0}|\omega|} e^{\frac{|\omega|^2(\rho_1-\rho_0)}{2}} (1 + \mathcal{O}(|\omega|^{-2})). \tag{D.9}$$

**APPENDIX E**

As an illustration to Section 7, we shall prove here the convergence (7.3) for the one-dimensional frozen case of the Gaussian ensemble (3.1) of Eulerian velocities with  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Using the scaling properties of the frozen velocities, both  $x(t)$  and  $v_0$  may be realized on the same probability space corresponding to the velocity process  $\tilde{v}(x)$  with  $L = 1$ . This is done by setting

$$x(t) = L\tilde{x}(L^{-\frac{1}{2}}t), \quad v_0 = \tilde{v}(0), \tag{E.1}$$

where  $\tilde{x}(t)$  is the Lagrangian trajectory in the field  $\tilde{v}(x)$  such that  $\tilde{x}(0) = 0$ . We shall prove the (stronger) convergence (3.1) in the  $L^2$ -norm on the probability space of  $\tilde{v}$ :

$$\langle [L^{\frac{1}{2}}\tilde{x}(L^{-\frac{1}{2}}t) - \tilde{v}(0) t]^2 \rangle \xrightarrow{L \rightarrow \infty} 0. \tag{E.2}$$

If  $\tilde{v}(0) > 0$  then  $\tilde{x}(t) > 0$  and, symmetrically, if  $\tilde{v}(0) < 0$  then  $\tilde{x}(t) < 0$ . The contributions of the two cases to the expectation (E.2) are equal so let us study the case  $\tilde{v}(0) > 0$ . It will be more convenient to estimate the expectations of the exit time  $\tilde{t}(x)$  of  $\tilde{x}$  through  $x > 0$  related to  $\tilde{x}(t)$  by the identity

$$1_{\{\tilde{x}(t) \geq x\}} = 1_{\{\tilde{t}(x) \leq t\}}. \tag{E.3}$$

690

Chaves et al.

Since  $\tilde{r}(x) = \int_0^x \frac{dy}{\tilde{v}(y)}$  if  $\tilde{v} > 0$  on  $[0, x)$  and is infinite otherwise, we have easy bounds

$$1_{\{\tilde{v}_{\min} \geq x/t\}} \leq 1_{\{\tilde{r}(x) \leq t\}} \leq 1_{\{\tilde{v}_{av} \geq x/t\}} \quad (\text{E.4})$$

with  $\tilde{v}_{\min}$  being the minimum of  $\tilde{v}$  on the interval  $[0, x]$  and  $\tilde{v}_{av} = \frac{1}{x} \int_0^x \tilde{v}$  its average value. Now, with the use of the identity (E.3) and integration by parts, the  $L^2$ -norm on the left hand side of (E.2) may be rewritten as

$$4 \int_0^\infty x \langle 1_{\{\tilde{r}(L^{-\frac{1}{2}x}) \leq L^{-\frac{1}{2}t}\}} \rangle dx - 4t \int_0^\infty \langle 1_{\{\tilde{r}(L^{-\frac{1}{2}x}) \leq L^{-\frac{1}{2}t}\}} \tilde{v}(0) \rangle dx + t^2 \langle \tilde{v}(0)^2 \rangle. \quad (\text{E.5})$$

From the explicit expressions for the Gaussian field expectations, it follows that, for  $\tilde{v}_{\min}$  and  $\tilde{v}_{av}$  standing now for the minimum and the mean of  $\tilde{v}$  on the interval  $[0, L^{-\frac{1}{2}x}]$ ,

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle 1_{\{\tilde{v}_{\min} \geq x/t\}} \rangle = \lim_{L \rightarrow \infty} \langle 1_{\{\tilde{v}_{av} \geq x/t\}} \rangle = \langle 1_{\{\tilde{v}(0) \geq x/t\}} \rangle, \quad (\text{E.6})$$

so that also

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \langle 1_{\{\tilde{r}(L^{-\frac{1}{2}x}) \leq L^{-\frac{1}{2}t}\}} \rangle = \langle 1_{\{\tilde{v}(0) \geq x/t\}} \rangle \quad (\text{E.7})$$

and similarly with the insertion of  $\tilde{v}(0)$ . It is also easy to show a uniform in  $L$  bound  $\langle 1_{\{\tilde{v}_{\min} \geq x/t\}} \rangle \leq e^{-C(x/t)^2}$ . From the Dominated Convergence Theorem, the limit of (E.5) is then equal to the expression

$$4 \int_0^\infty x \langle 1_{\{\tilde{v}(0) \geq x/t\}} \rangle dx - 4t \int_0^\infty \langle 1_{\{\tilde{v}(0) \geq x/t\}} \tilde{v}(0) \rangle dx + t^2 \langle \tilde{v}(0)^2 \rangle \quad (\text{E.8})$$

which vanishes in a Gaussian ensemble. Generalization of this proof to the case with  $\alpha \neq 0$  does not pose much problem.

## ACKNOWLEDGMENTS

The work of MC was supported by the Fundação para a Ciência e a Tecnologia Grant: PRAXIS XXI/BD/21413/99. K.G., P.H., A.K., and M.V. are grateful to the Erwin Schrödinger Institute in Vienna and the Institute for Advanced Study in Princeton where parts of the work on the paper were done. K.G. acknowledges the support of the von Neumann Fund and M.V. the Ralph E. and Doris M. Hansmann Membership at the

IAS. A.K. and M.V. were also supported by the European Union under the Contracts FMRX-CT98-0175 and HPRN-CT-2000-00162, respectively.

## REFERENCES

1. D. J. Amit, *Field Theory, the Renormalization Group, and Critical Phenomena* (World Scientific, Singapore, 1984).
2. N. V. Antonov, Anomalous scaling regimes of a passive scalar advected by the synthetic velocity field, *Phys. Rev. E* **60**:6691–6707 (1999).
3. M. Avellaneda and A. J. Majda, Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport, *Commun. Math. Phys.* **133**:381–429 (1990).
4. M. Avellaneda and A. J. Majda, Mathematical models with exact renormalization for turbulent transport, II: Fractal interphases, non-Gaussian statistics, and sweeping effects, *Commun. Math. Phys.* **146**:139–204 (1992).
5. D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen, Slow modes in passive advection, *J. Stat. Phys.* **90**:519–569 (1998).
6. G. Boffetta, A. Celani, A. Crisanti, and A. Vulpiani, Pair dispersion in synthetic fully developed turbulence, *Phys. Rev. E* **60**:6734–6741 (1999).
7. A. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae* (Birkhäuser, Boston, 1996).
8. L. Breiman, *Probability* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1968).
9. M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev, Statistics of a passive scalar advected by a large-scale 2D velocity field: Analytic solution, *Phys. Rev. E* **51**:5609–5627 (1995).
10. M. Chertkov, G. Falkovich, and V. Lebedev, Nonuniversality of the scaling exponents of a passive scalar convected by a random flow, *Phys. Rev. Lett.* **76**:3707–3710 (1996).
11. M. Chertkov, I. Kolokolov, and M. Vergassola, Inverse versus direct cascades in turbulent advection, *Phys. Rev. Lett.* **80**:512–515 (1998).
12. W. E and E. Vanden Eijnden, Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **97**:8200–8205 (2000).
13. W. E and E. Vanden Eijnden, Turbulent Prandtl number effect on passive scalar advection, *Physica D* **152-153**:636–645 (2001).
14. G. Falkovich, K. Gawędzki, and M. Vergassola, Particles and fields in fluid turbulence, *Rev. Modern Phys.* **73**:913–975 (2001).
15. A. Fannjiang, Phase diagram for turbulent transport: Sampling drift, eddy diffusivity, and variational principles, *Physica D* **136**:145–174 (2000). Erratum: *Physica D* **157**:166–168 (2001).
16. A. Fannjiang, Richardson's laws for relative dispersion in colored-noise flows with Kolmogorov-type spectra, arXiv:math-ph/0209007.
17. A. Fannjiang, Convergence of passive scalars in Ornstein-Uhlenbeck flows to Kraichnan's model, arXiv:math-ph/0209011.
18. A. Fannjiang, T. Komorowski, and S. Peszat, Lagrangian dynamics for a passive tracer in a class of Gaussian Markovian flows, *Stochastic Process. Appl.* **97**:171–198 (2002).
19. W. Feller, The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations, *Ann. Math.* **55**:468–519 (1952).
20. U. Frisch, A.azzino, and M. Vergassola, Intermittency in passive scalar advection, *Phys. Rev. Lett.* **80**:5532–5535 (1998).
21. O. Gat and R. Zeitak, Multiscaling in passive scalar advection as stochastic shape dynamics, *Phys. Rev.* **57**:5511–5519.

22. K. Gawędzki, Turbulent advection and breakdown of the Lagrangian flow, in *Intermittency in Turbulent Flows*, J. C. Vassilicos, ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 2001), pp. 86–104.
23. K. Gawędzki and P. Horvai, Sticky behavior of fluid particles in the compressible Kraichnan model, arXiv:nlin.CD/0309027.
24. P. Horvai, Sticky behavior of fluid particles in the Kraichnan model with intermediate compressibility, in preparation.
25. P. Horvai, T. Komorowski, and J. Wehr, in preparation.
26. P. E. Kloeden and E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations* (Springer, Berlin, 1992).
27. R. H. Kraichnan, Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence, *Phys. Fluids* 11:945–963 (1968).
28. Y. Le Jan and O. Raimond, Integration of Brownian vector fields, *Ann. Probab.* 30: 826–873 (2002).
29. Y. Le Jan and O. Raimond, Flows, coalescence and noise, arXiv:math.PR/0203221.
30. A. J. Majda and P. R. Kramer, Simplified models for turbulent diffusion: Theory, numerical modelling, and physical phenomena, *Phys. Rep.* 314:237–574 (1999).
31. G. M. Molchan, Maximum of a fractional Brownian motion: Probabilities of small values, *Commun. Math. Phys.* 205:97–111 (1999).
32. L. Onsager, Statistical hydrodynamics, *Nuovo Cimento Suppl.* 2 6:279–287 (1949).
33. L. F. Richardson, Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph, *Proc. Roy. Soc. London Ser. A* 110:709–737 (1926).
34. E. Vanden Eijnden, Statistical description of turbulence. Application to anomalous transport in plasmas, Ph.D. thesis, Université Libre de Bruxelles (1997).

## Chapitre 10

# Un nouveau type de comportement dans le modèle de Kraichnan compressible: particules « collantes »

Comme mentionné dans la section 4.6 et résumé dans le tableau 4.1, dans la phase de compressibilité intermédiaire du modèle de Kraichnan la condition de bord à séparation zéro pour l'équation décrivant la dispersion Lagrangienne est régulière, ce qui laisse a priori une liberté de choix dans la condition de bord effective à imposer. Les conditions de bord qui sont compatibles avec la nature Markovienne du processus sont les conditions appelées sticky, ou réflexion lente. On montre que ce genre de condition de bord peut effectivement apparaître dans la limite  $\kappa, \ell_\nu \rightarrow 0$  si cette limite est prise de manière appropriée.

L'article présenté a été accepté pour publication au Journal of Statistical Physics.

## Sticky behavior of fluid particles in the compressible Kraichnan model

Krzysztof Gawędzki<sup>\*,1</sup> and Péter Horvai<sup>1,2</sup>

January 14, 2004

\* member of C.N.R.S.

<sup>1</sup>Laboratoire de Physique, ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon, France

<sup>2</sup>Centre de Physique Théorique, École Polytechnique, 91128 Palaiseau, France

### Abstract

We consider the compressible Kraichnan model of turbulent advection with small molecular diffusivity and velocity field regularized at short scales to mimic the effects of viscosity. As noted in [5], removing those two regularizations in two opposite orders for intermediate values of compressibility gives Lagrangian flows with quite different properties. Removing the viscous regularization before diffusivity leads to the explosive separation of trajectories of fluid particles whereas turning the regularizations off in the opposite order results in coalescence of Lagrangian trajectories. In the present paper we re-examine the situation first addressed in [6] in which the Prandtl number is varied when the regularizations are removed. We show that an appropriate fine-tuning leads to a sticky behavior of trajectories which hit each other on and off spending a positive amount of time together. We examine the effect of such a trajectory behavior on the passive transport showing that it induces anomalous scaling of the stationary 2-point structure function of an advected tracer and influences the rate of condensation of tracer energy in the zero wavenumber mode.

### Contents

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
1.1	The Kraichnan model . . . . .	3
1.2	Regularizing effects . . . . .	3
1.3	Statistics of fluid particles . . . . .	4
1.4	Lagrangian dispersion . . . . .	5
1.5	Initial classification of boundary behaviors . . . . .	5
1.6	Main result . . . . .	7
<b>2</b>	<b>The stochastic process viewpoint</b>	<b>8</b>
2.1	Natural scale and speed measure . . . . .	8
2.2	Approximate calculations . . . . .	9
2.3	Limit of the natural scale . . . . .	10
2.4	Limit of the speed measure . . . . .	11
2.5	Convergence on the natural scale . . . . .	12
2.6	Conjecture . . . . .	13
<b>3</b>	<b>The linear operator viewpoint</b>	<b>14</b>
3.1	Derivation of the boundary condition at zero . . . . .	14
3.2	Interpretation of the boundary condition . . . . .	15

<b>4 The sticky process</b>	<b>16</b>
4.1 Transition probabilities . . . . .	16
4.2 Long time asymptotics . . . . .	18
4.3 Consequences for the tracer transport . . . . .	20
<b>5 Exact limit of the stationary 2-point tracer structure function</b>	<b>21</b>
<b>6 Conclusions</b>	<b>23</b>
<b>A Briefly on one-dimensional diffusion processes</b>	<b>24</b>
<b>B A pathological case of convergence</b>	<b>25</b>
<b>C Asymptotic behavior of eigenfunctions</b>	<b>26</b>
<b>D Spectral analysis of <math>N_\mu</math></b>	<b>27</b>
<b>E Conservation of probability</b>	<b>29</b>
<b>F Estimates of functions <math>f_1</math> and <math>f_2</math></b>	<b>29</b>
<b>G Exact speed measure at zero</b>	<b>32</b>

## 1 Introduction

Certain qualitative features of transport of scalar or vector quantities by highly turbulent flows may be understood using drastically simplified models where the back-reaction of the transported quantity on the velocity dynamics is ignored (passive advection) and the hydrodynamical velocities are replaced by a simple synthetic random velocity ensemble. In recent years much attention has been attracted by the study of passive advection in a Gaussian ensemble of time-decorrelated velocities, first considered by Kraichnan [15] and Kazantsev [14]. The model has led to a new understanding of the statistical intermittency of advected quantities and of the interplay between fluid compressibility and transport properties, see [7] and references therein. The passive advection by a  $d$ -dimensional velocity field  $\vec{v}(t, \vec{r})$  is intimately related to the behavior of the Lagrangian trajectories (i.e. trajectories of fluid particles) perturbed by noise. Such trajectories satisfy the stochastic ordinary differential equation

$$\frac{d}{dt} \vec{R}(t) = \vec{v}(t, \vec{R}(t)) + \sqrt{2\kappa} \vec{\eta}(t), \quad (1)$$

where  $\vec{\eta}(t)$  is a  $d$ -dimensional white noise independent of velocity (and of noises of other particles) and  $\kappa > 0$  is the (molecular) diffusivity. The advection of a passive tracer  $\theta(t, \vec{r})$  is governed by the advection-diffusion equation

$$\partial_t \theta + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} \theta - \kappa \vec{\nabla}^2 \theta = f, \quad (2)$$

where  $f(t, \vec{r})$  is a source or forcing term. In the absence of forcing (i.e. for  $f = 0$ ) the passive tracer is carried along the particle trajectories so that

$$\theta(t, \vec{r}) = \overline{\theta(0, \vec{R}(0; t, \vec{r}))}. \quad (3)$$

Here  $\vec{R}(t'; t, \vec{r})$  denotes a particle trajectory that passes through point  $\vec{r}$  at time  $t$  and the overline stands for the average with respect to the noise  $\vec{\eta}(t)$ . Note that the forward tracer evolution is described by Lagrangian trajectories going backwards in time. Similarly, in the presence of the source, the tracer evolves according to the equation

$$\theta(t, \vec{r}) = \overline{\theta(0, \vec{R}(0; t, \vec{r}))} + \int_0^t \overline{f(s, \vec{R}(s; t, \vec{r}))} ds. \quad (4)$$

This way, in random velocities, the statistics of advected quantities like  $\theta$  is linked to the statistical properties of (noisy) trajectories. The present article exploits this relation in yet another situation in the Kraichnan model of turbulent advection.

### 1.1 The Kraichnan model

The Kraichnan model describes advection by a stochastic velocity field  $\vec{v}(t, \vec{r})$  with Gaussian mean-zero statistics, stationary and decorrelated in time, homogeneous and isotropic in space and with fixed compressibility degree  $\varphi$  characterizing the relative strength of the incompressible and potential components of the velocity. As in any centered Gaussian ensemble, the statistics of velocities is totally characterized by the 2-point function  $\langle \vec{v}(t, \vec{r}) \otimes \vec{v}(t', \vec{r}') \rangle$ . In what follows, we shall need the statistics of the equal-time velocity differences that is determined by the reduced expression

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \langle (\vec{v}(t, \vec{r}) - \vec{v}(t', \vec{r}'))^{\otimes 2} \rangle &= \delta(t - t') D_0 \int \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}')}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} \vec{P}(\vec{k}, \varphi) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \\ &\equiv \delta(t - t') \vec{d}(\vec{r} - \vec{r}'). \end{aligned} \quad (5)$$

The rank 2 tensor  $\vec{d}(\vec{r}' - \vec{r})$  is the second order spatial structure function of the velocity field. The rank 2 tensor  $\vec{P}(\vec{k}, \varphi)$ , invariant under rotations and of trace 1, is taken to be

$$P_{ij}(\vec{k}, \varphi) = \frac{1 - \varphi}{d - 1} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \varphi \frac{k_i k_j}{k^2}$$

with  $0 \leq \varphi \leq 1$ . The coefficient  $\varphi$  is equal to  $\frac{\partial_i \partial_j d_{ij}(\vec{r})}{\partial_i \partial_i d_{jj}(\vec{r})}$  (summation convention!) for all  $\vec{r} \neq 0$ , so that it is meaningful to characterize  $\varphi$  as the ratio  $\frac{\langle (\partial_i v_i)^2 \rangle}{\langle (\partial_i v_j)^2 \rangle}$  even though the velocity field is not smooth for  $\xi < 2$ . The value  $\varphi = 0$  corresponds to an incompressible velocity field, whereas  $\varphi = 1$  to a potential (e.g. irrotational) one. Note however that if the physical space is one dimensional (case  $d = 1$ ) then necessarily  $\varphi = 1$  because a one-dimensional velocity field is always potential. One simply takes  $P = 1$  in this case.

The spatial velocity structure function  $\vec{d}(\vec{r})$  scales in  $|\vec{r}|$  with power  $\xi$ . We shall take  $\xi$  between 0 and 2. This choice guarantees that the typical velocity realizations are non-Lipschitz. More exactly, they are Hölder-continuous with exponent  $\frac{1}{2}\xi'$  for any  $\xi' < \xi$  (the realistic turbulent velocities are believed to have Hölder exponent  $\leq \frac{1}{3}$  in the limit of infinite Reynolds numbers [19]). Note that the (positive) constant  $D_0$  in (5) has the dimension  $\frac{(\text{length})^{2-\xi}}{\text{time}}$ .

### 1.2 Regularizing effects

Real flows are always regularized at small scales by viscous effects. That is, the velocity field is smooth and the power law scaling with  $\xi < 2$  is observed only at distances much larger than the **viscous cutoff scale**  $l_\nu$  that becomes very small only for high Reynolds numbers (if the integral scale of turbulence is kept fixed). The small  $\vec{r}$  behavior  $\propto |\vec{r}|^\xi$  of  $\vec{d}(\vec{r})$  above comes from the the slow decay at large  $\vec{k}$  of its Fourier transform (the term under the integral sign in (5)). We shall mimic the effect of viscosity in the present model by introducing an ultraviolet regulator and replacing  $\vec{d}(\vec{r})$  by

$$\vec{d}(\vec{r}; l_\nu) \equiv D_0 \int \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} \vec{P}(\vec{k}, \varphi) f(l_\nu |\vec{k}|) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} \quad (6)$$

where the function  $f$  is taken positive, smooth, decreasing, fast decaying at infinity and with  $f(0) = 1$ ,  $f'(0) = 0$ . The viscosity  $\nu$  itself may be defined as

$$\nu = D_0 l_\nu^\xi \quad (7)$$

which is the only combination of  $D_0$  and  $l_\nu$  of dimension  $\frac{(\text{length})^2}{\text{time}}$ .

Another regularizing effect in real flows comes from finite molecular diffusivity. The tracer field  $\theta(t, \vec{r})$  passively transported by the flow will be smoothed by diffusion, see (3). In typical velocities, this smoothing effect becomes important at scales much smaller

than the diffusive cutoff scale  $l_\kappa$ . Beneath this scale diffusion dominates advection. We modeled molecular diffusivity by adding white noise terms to the fluid particle velocities (independent ones for different particles, see (1)). In the Kraichnan model, the scale  $l_\kappa$  beneath which diffusion dominates advection may be expressed in terms of  $\kappa$ ,  $D_0$  and  $l_\nu$ , with  $l_\kappa = 0$  corresponding to  $\kappa = 0$ . The expression may be inverted to calculate  $\kappa$  in terms of  $D_0, l_\kappa, l_\nu$ . Later on we shall specify such a relation in the case when  $l_\kappa \ll l_\nu$ , see (28). This will provide an expression for the Prandtl number  $Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}$ .

### 1.3 Statistics of fluid particles

Even in a simple random velocity ensemble, the statistics of the Lagrangian flow may be quite complicated. It may be studied by looking at the joint  $N$ -particle probability density functions (PDFs) defined by

$$P_N^{t',t}(\vec{r}_1, \dots, \vec{r}_N; \vec{r}'_1, \dots, \vec{r}'_N) = \left\langle \overline{\prod_{n=1}^N \delta(\vec{r}'_n - \vec{R}(t'; t, \vec{r}_n))} \right\rangle. \quad (8)$$

Here, as before, the overline denotes the average over the (independent) white noises and  $\langle \dots \rangle$  stands for the velocity ensemble average. In the Kraichnan model, due to the temporal decorrelation of velocities, the PDFs (8) are Markovian and they define a consistent hierarchy of  $N$ -particle stationary Markov processes that contains the complete information about the statistics of the Lagrangian flow and of the velocities themselves [17]. In this paper we shall be interested uniquely in the behavior of the separation of a pair of Lagrangian particles. The main object of our interest will be the PDF of finding their time  $t$  separation equal to  $\vec{r}$ , given that their time  $t'$  separation is equal to  $\vec{r}'_0$ :

$$P^{t,t'}(\vec{r}, \vec{r}') = \left\langle \overline{\delta(\vec{r}' - R(t'; t, \vec{r}) + R(t'; t, \vec{0}))} \right\rangle.$$

In stationary, time-reversal invariant velocity ensembles, such as the Kraichnan model,  $P^{t,t'}$  depends only on  $|t - t'|$  and we shall use the notation  $P^{|t-t'|}$ .

The PDF  $P^{t,t'}(\vec{r}, \vec{r}')$  governs the free decay of the 2-point function of the passive tracer, evolving according to equation (2)<sup>1</sup> with  $f = 0$ . If at time zero the tracer is distributed independently of the velocity field and the trajectory noises, with a homogeneous 2-point function  $\langle \theta(0, \vec{r}) \theta(0, \vec{r}') \rangle = F(0, \vec{r}' - \vec{r})$ , then at a later time  $t$  its 2-point function is given by

$$F(t, \vec{r}) = \int F(0, \vec{r}') P^{t,0}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (9)$$

as follows from (3). Similarly, if the scalar source  $f$  is a random field with mean zero and 2-point function

$$\langle f(t, \vec{r}) f(t', \vec{r}') \rangle = \delta(t - t') \chi(\vec{r} - \vec{r}') \quad (10)$$

and it is independent of the velocity field, the trajectory noises and the initial scalar distribution, then the evolution of the tracer 2-point function is described by the relation

$$F(t, \vec{r}) = \int F(0, \vec{r}') P^{t,0}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' + \int_0^t ds \int \chi(\vec{r}') P^{t,s}(\vec{r}, \vec{r}') d\vec{r}' \quad (11)$$

as follows from (4) by taking averages.

Our aim is to describe the particle pair separation in Kraichnan velocities at large scales, much larger than the cutoff scales  $l_\nu$  and  $l_\kappa$ . The effective description will depend on the Prandtl number and on the scales involved. Instead of maintaining the cutoffs finite, we want to give an effective large scale theory without cutoffs but with some specific boundary condition at vanishing separation. Such a theory should give rise to the same behavior at the large scales of interest. An alternative way of doing this is by taking the cutoffs  $l_\nu$  and  $l_\kappa$  to zero in a fashion that preserves large scale behavior and to examine the boundary condition that arises in this limiting process.

<sup>1</sup>In the Kraichnan velocity that is white in time, Eq. (2) should be interpreted as a Stratonovich stochastic differential equation, see e.g. Sect. II.C.3 of [7].

### 1.4 Lagrangian dispersion

As first derived in [15], the time evolution of the scalar 2-point function of the tracer in the Kraichnan ensemble of velocities is governed by the differential equation

$$\partial_t F = \mathcal{M}_{\nu,\kappa} F$$

where  $\mathcal{M}_{\nu,\kappa}$  is a partial differential operator which can be written in terms of the velocity structure function  $\vec{d}$  and diffusivity  $\kappa$  as

$$\mathcal{M}_{\nu,\kappa} \equiv d_{ij}(\vec{r}; l_\nu) \partial_i \partial_j + 2\kappa \vec{\nabla}^2.$$

It follows that the separation PDF takes the heat kernel form

$$P^t(\vec{r}_0, \vec{r}) = e^{\mathcal{M}_{\nu,\kappa} t}(\vec{r}_0, \vec{r}). \quad (12)$$

As we shall be only interested in distances between two particles, usually called the **Lagrangian dispersion**, and not in the angular distribution of the particle separation, we may project (12) to the rotationally invariant sector. This is done by restricting the action of operator  $\mathcal{M}_{\nu,\kappa}$  to functions of the radial variable  $r = |\vec{r}|$  only.  $\mathcal{M}_{\nu,\kappa}$  is a rotationally invariant operator and it maps functions of  $r$  to functions of  $r$ . We shall denote by  $M_{\nu,\kappa}$  its restriction to such functions. It is easy to show that

$$M_{\nu,\kappa} = \tilde{D}_0 [f_1(r) \partial_r^2 + f_2(r) \partial_r] \quad (13)$$

with the coefficient functions  $f_{1,2}(r) \equiv f_{1,2}(r; l_\nu, l_\kappa)$  expressed in terms of the spatial velocity structure function  $\vec{d}$  by

$$\tilde{D}_0 f_1(r) = d_{ij}(\vec{r}; l_\nu) \frac{r_i r_j}{r^2} + 2\kappa \quad (14)$$

$$\tilde{D}_0 f_2(r) = \frac{1}{r} d_{ij}(\vec{r}; l_\nu) (\delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2}) + 2 \frac{d-1}{r} \kappa \quad (15)$$

for any  $\vec{r}$  such that  $|\vec{r}| = r$ . For detailed calculation of the values of  $f_1$  and  $f_2$  see Appendix F. It turns out that, for  $r$  much larger than the cut-off scales  $l_\kappa, l_\nu$ , the function  $f_1$  is asymptotically proportional to  $r^\xi$  and the function  $f_2$  to  $r^{\xi-1}$ . We choose the constant  $\tilde{D}_0$  proportional to  $D_0$ , see (5), so that  $r^{-\xi} f_1(r) \rightarrow 1$  when  $r \rightarrow \infty$ .

In order to turn  $M_{\nu,\kappa}$  into a true operator on the half-line  $\mathbb{R}_+$ , we also have to specify its domain  $\mathcal{D}(M_{\nu,\kappa})$ . This boils down to the choice of the boundary condition to impose at zero. The domain of  $M_{\nu,\kappa}$ , as long as  $\kappa$  is positive, is some locally  $H^2$  Sobolev space. For its rotationally invariant elements this implies that their gradient vanishes at  $\vec{r} = 0$  resulting in the Neumann boundary condition  $\partial_r|_{r=0} = 0$  for  $M_{\nu,\kappa}$ . This way equation (12) reduces in the rotationally invariant sector to the heat kernel expression for the particle distance PDF

$$P^t(r_0, r) = e^{t M_{\nu,\kappa}}(r_0, r), \quad (16)$$

where  $M_{\nu,\kappa}$  is the second order differential operator on the half-line of  $r \geq 0$  given by (13), taken with the Neumann boundary condition at  $r = 0$ . We may view the right hand side of (16) as the transition probability density of a Markov process  $r(t)$  that describes the distance between two noisy Lagrangian particles in the random flow and treat the underlying diffusion process with the adapted tools, see Appendix A. Alternatively, we may interpret (16) as describing kernels of a semigroup of operators and apply to it the usual analysis toolkit. Both methods will be developed.

### 1.5 Initial classification of boundary behaviors

The possible boundary behaviors at the origin of the one-dimensional diffusion process  $r(t)$  describing the inter-particle distance in the absence of regularizations (i.e. for  $l_\nu, l_\kappa = 0$ ) may be easily classified [6]. In this case the generator (13) of the process reduces to the operator

$$M \equiv M_{0,0} = \tilde{D}_0 r^\xi (\partial_r^2 + \frac{\alpha_{\xi,p}}{r} \partial_r) \quad (17)$$

with

$$a_{\xi, \varphi} = \frac{d + \xi}{1 + \xi \varphi} - 1, \quad (18)$$

see Appendix F. Let us note in passing for later use that we have the implication

$$a_{\xi, \varphi} < 1 \implies a_{2, \varphi} < 1.$$

For  $d \geq 2$  this is a simple consequence of (18). In the case  $d = 1$  recall that  $\varphi = 1$  and then  $a_{\xi, 1} = 0$  for any value of  $\xi$ . Below, whenever the value of the compressibility degree  $\varphi$  is understood, we shall write  $a_\xi$  instead of the more unwieldy  $a_{\xi, \varphi}$  and sometimes simply  $a$  if no confusion may arise.

In the case  $\xi < 2$  corresponding to spatially rough flows, we can introduce the new coordinate

$$u = u(r) \equiv \frac{2}{2 - \xi} \tilde{D}_0^{-1/2} r^{1 - \frac{\xi}{2}}. \quad (19)$$

In this coordinate the generator (17) becomes

$$\partial_u^2 + \left( \frac{2a_\xi - \xi}{2 - \xi} \right) \frac{1}{u} \partial_u \quad (20)$$

and it describes the Bessel process (see [2] for a brief *résumé*) of parameter  $-b_\xi$  or effective dimension  $d_{\text{eff}} = 2(1 - b_\xi)$  where

$$b_\xi = \frac{1 - a_\xi}{2 - \xi}. \quad (21)$$

If  $d_{\text{eff}}$  is a positive integer then the corresponding Bessel process describes the behavior of the norm  $|\tilde{W}(t)|$  of the  $d_{\text{eff}}$ -dimensional Brownian motion  $\tilde{W}(t)$ .

The general theory of the boundary behaviors of one-dimensional diffusion processes was laid down by Feller in [8]. For the Bessel process, the boundary behavior at zero is well known [2, 20] and it depends on the parameter or equivalently the effective dimension of the process. For  $d_{\text{eff}} \leq 0$ , zero is an exit boundary point (the realizations may arrive at zero in a finite time, but they cannot come back from zero nor start there). For  $0 < d_{\text{eff}} < 2$ , zero is a regular boundary point (the realizations can go to and leave zero in finite time). For  $d_{\text{eff}} \geq 2$ , zero is an entrance boundary (the realizations may start from zero, but no realization goes to zero in finite time). The different boundary behaviors enumerated above correspond respectively to the regimes in the Kraichnan model that were coined **strongly compressible** ( $\varphi \geq \frac{d}{2}$ ), **of intermediate compressibility** ( $\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \varphi < \frac{d}{2}$ ) and **weakly compressible** ( $\varphi \leq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$ ), see [11, 5].

In the limiting case  $\xi = 2$  corresponding to spatially smooth flows, we may introduce the new coordinate  $u = \tilde{D}_0^{-1/2} \ln r$ . In this coordinate the generator (17) becomes

$$\partial_u^2 + (a_2 - 1) \partial_u$$

and it describes the one-dimensional Brownian motion viewed in the frame moving with speed  $-(a_2 - 1)$  (i.e. the Brownian motion with a drift). In this case  $r = 0$  (corresponding to  $u = -\infty$ ) is a natural boundary point with no realizations that attain it or leave it in finite time. The quantity  $(a_2 - 1) \tilde{D}_0^{1/2} = \frac{d-4\varphi}{1+2\varphi} \tilde{D}_0^{1/2}$  is the Lyapunov exponent of the Lagrangian flow and it is non-negative in the weakly compressible regime  $\varphi \leq \frac{d}{4}$ , and non-positive in the strongly compressible one  $\varphi \geq \frac{d}{4}$ , vanishing at their common point  $\varphi = \frac{d}{4}$ . We sum up this classification in Table 1. The first three lines correspond to rough velocity fields with  $\xi < 2$ . The last two correspond to smooth ones with  $\xi = 2$ . Note that for  $d \geq 4$  the weakly compressible regime extends to the whole interval  $0 \leq \varphi \leq 1$ .

The relationship between the boundary behavior of the one-dimensional diffusion process  $r(t)$  describing the distance between Lagrangian trajectories, on the one hand, and the different regimes of the Lagrangian flow, on the other hand, may be explained intuitively. If the realizations can go to zero but cannot come back, then they are trapped

flow	compressibility	characterization	implications	boundary
rough	weak	$\varphi \leq \frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2}$	$a_{\xi,\varphi} \geq 1$	entrance
	intermediate	$\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \varphi < \frac{d}{\xi^2}$	$1 > a_{\xi,\varphi} > \xi - 1$ $1 > a_{2,\varphi}$	regular
	strong	$\varphi \geq \frac{d}{\xi^2}$	$\xi - 1 \geq a_{\xi,\varphi}$	exit
smooth	weak	$\varphi \leq \frac{d}{4}$	$a_{2,\varphi} \geq 1$	natural
	strong	$\varphi \geq \frac{d}{4}$	$a_{2,\varphi} \leq 1$	

Table 1: Regimes of the unregularized Kraichnan model

there. This implies coalescence of Lagrangian trajectories that characterizes the strong compressibility regime, as first observed in [11]. If realizations can go to and come back from zero, then one has to specify further the boundary behavior. There may be (and, as we find, there are indeed) different possible behaviors of Lagrangian trajectories when they meet. This is what happens for intermediate compressibility, as first noted in [5]. If realizations starting from inside the half-line can never reach zero then no trapping is possible. In this situation, corresponding to weak compressibility, the realizations may, however, enter from zero if  $\xi < 2$  meaning that the Lagrangian trajectories separate explosively leading to a non-deterministic Lagrangian flow [1]. For  $\xi = 2$  the realizations can neither collapse to zero nor explode from it. In smooth flows, different trajectories remain separated indefinitely in the future and the past, although they may behave chaotically, with small separations growing exponentially in time.

## 1.6 Main result

In any case, the regulated generator  $M_{\nu,\kappa}$  of Eq. (13) taken with Neumann boundary condition at zero gives rise to a diffusion process  $r(t)$  on the half-line describing the statistics of the Lagrangian dispersion. We would like to know how this process behaves in the limit when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ .

The cases of the weakly and strongly compressible regimes where the limiting dispersion process does not depend on the way in which the limit is taken seem to have been treated adequately [11, 5]. In these cases only one process is possible in the limit and it corresponds either to instantaneous reflection of trajectories when they meet (for weak compressibility) or to coalescence of trajectories upon the first hit (for strong compressibility).

In ref. [5, 6] it was argued that, in the intermediate regime, the possible limiting processes are described by the unregulated generators  $M$  of Eq. (17) with boundary conditions at zero depending on the way the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  is taken. Our analysis confirms this picture but differs from [6] in specific conclusions (the nature of the limiting boundary conditions and the form of the limiting procedures that lead to them). Upon the fine-tuning (29) of  $l_\nu$  and  $l_\kappa$ , we find in the limit the so called **sticky** or **slowly reflecting** boundary conditions [2, 21] parametrized by the amount of “glue”  $\lambda \in [0, \infty]$ .

The sticky behavior can be pictured intuitively in the following way. For simplicity let us consider just the case of Brownian motion on the half-line. Concerning ordinary reflected Brownian motion, it is a well known fact that, if it hits the end-point 0 of the half-line at some instant  $t$ , then for any instant  $t' > t$  it will hit again 0 between  $t$  and  $t'$  an infinite number of times almost surely, but still the cumulated time spent at zero is zero almost surely. Slowly reflected Brownian motion returns also almost surely an infinite number of times after the first hit of the boundary, but the cumulated time spent at zero (technically speaking the Lebesgue measure of those instants in  $[t, t']$  when the particle is at zero) will be proportional to the time spent in an infinitesimal neighborhood  $(0, dx)$  of 0 (not containing 0!), the proportionality constant being  $\lambda/dx$ . Remarkably, however, for any  $\lambda < \infty$ , the trajectory will almost surely never remain at 0 for an

uninterrupted strictly positive time-interval. The two extreme values of  $\lambda$  are  $\lambda = 0$  and  $\lambda = \infty$ . In the first case zero time is spent at zero and, in fact, one recovers the ordinary (instantaneous) reflection. The second case with infinite time spent at zero corresponds to absorption (more precisely, adsorption) at zero. Transposed to the case of Lagrangian dispersion, this means that particles upon hitting each other either have no interaction (case  $\lambda = 0$ ), or they will tend to stay together for some positive amount of cumulated time (case  $0 < \lambda < \infty$ ), or they stick together permanently (case  $\lambda = \infty$ ).

We shall give strong general arguments in favor of the convergence of the particle dispersion to the sticky process and shall prove the convergence for specific quantities. To analyze the effect of stickiness on the passive transport, we shall construct and analyze the behavior of the transition probabilities of the sticky dispersion process that govern, in the appropriate  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  limit, the evolution of the 2-point correlation function of advected tracer in the homogeneous and isotropic situation. It appears that the presence of stickiness induces anomalous scaling of the stationary 2-point structure function of the forced tracer and that it influences the rate of tracer energy condensation in the constant mode. For the two extreme cases of instantaneous reflection and absorption, not only the particle dispersion process but the entire family of the consistent  $N$ -particle Markov processes has been constructed in [16, 17]. In the sticky case, the existence and the uniqueness of such a construction is still an open problem and is not discussed further here. Let us only note that ref. [18] may be interpreted as providing such a construction for the limiting case of the one-dimensional flow with  $\xi = 0$ .

Let us recapitulate the situation that we are dealing with. We are studying the intermediate compressibility regime of the Kraichnan model of passive advection with velocity field smoothed at scales smaller than  $l_\nu$  and with molecular diffusivity  $\kappa$  dominant on scales smaller than  $l_\kappa$ . We shall be looking at the 2-point function of the advected tracer in the isotropic sector or, alternatively, at the PDF of the distance between two noisy Lagrangian trajectories. We want to know how those objects evolve in the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ . The remainder of the paper is organized as follows. In Sect. 2 we shall discuss the probabilistic aspects of the problem studying the one-dimensional diffusion process describing the inter-particle distance. The analytic approach based on the spectral analysis of the generator of the process will be developed in Sect. 3. The analysis of the limits  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  in those sections is based on approximate calculations. In Sect. 4, we study the sticky limiting behavior of the trajectories obtained this way in more detail and we analyze its implications for the tracer transport. To confirm the approximate analysis of the first sections, we rigorously show in Sect. 5 that, in the intermediate compressibility regime, the stationary 2-point structure function of the forced tracer indeed converges when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  in the fine-tuned way to the one corresponding to the sticky behavior of Lagrangian trajectories. Finally, in Conclusions, we summarize the obtained results and mention some open problems that they raise. Appendices contain more technical material relevant for the main text.

## Acknowledgements

The authors thank for hospitality the Erwin Schrödinger Institute in Vienna and the Institute for Advanced Study at Princeton where parts of this work were done. They are grateful to Y. Le Jan and O. Raimond for numerous explanations and discussions and to W. E and E. Vanden-Eijnden for helpful exchanges. K.G. acknowledges the support of the von Neumann Fund during his stay at the IAS.

## 2 The stochastic process viewpoint

### 2.1 Natural scale and speed measure

In the intermediate compressibility regime, zero is a regular boundary for the unregularized operator  $M$  of Eq. (17) according to the Feller criteria. That is, if  $M$  is viewed as the generator of a stochastic process  $r(t)$  on  $\mathbb{R}_+$  then the realizations of the process

may hit zero and come back from it, with positive probability. In order to completely describe the process, one needs to specify a boundary condition for  $M$  at zero. On the other hand, for  $l_\nu, l_\kappa$  finite, the regularized generator  $M_{\nu,\kappa}$  of Eq. (13) should be taken with Neumann boundary condition at zero. As we have discussed above, this is because the problem on the half-line arose as the rotationally invariant sector of a non-degenerate problem defined on the  $d$ -dimensional space.

To see what boundary condition is obtained when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ , it is useful to study the natural scale and the speed measure (see Appendix A) of the process  $r(t)$  with positive  $l_\nu, l_\kappa$  and to determine their behavior in the aforementioned limit. The natural scale  $S(r)$  is the (positively oriented) coordinate in which the generator of the diffusion  $r(t)$  is without drift so that  $S(r(t))$  is a martingale (there is of course an equivalence class of such coordinates, related by affine transformations).  $S(r)$  is strictly increasing and continuous in  $r$ , so that the function  $s([r_1, r_2]) \equiv S(r_2) - S(r_1)$  defined on intervals can be extended to a measure on  $\mathbb{R}_+$  absolutely continuous w.r.t. the Lebesgue measure). The measure  $ds$  is sometimes called the natural scale measure. Often it is more practical to work with the density of a measure than the measure itself. For a measure  $d\mu$  and a coordinate  $r$  on  $\mathbb{R}_+$  we denote by  $\mu(r)$  the density of  $d\mu$  with respect to  $r$ . In the case of  $ds$  we have in particular  $s(r) = \frac{dS(r)}{dr}$ .

In terms of the functions  $f_1(r), f_2(r)$  entering the generator  $M_{\nu,\kappa}$  one can choose for the density with respect to  $r$  of the natural scale measure

$$s(r) = \exp\left(-\int_{r_0}^r \frac{f_2(r')}{f_1(r')} dr'\right) \quad (22)$$

where  $r_0 > 0$  is an arbitrary point of the open half-line  $\mathbb{R}_+^*$ . It is easily checked that in the corresponding coordinate  $S$ , the process becomes driftless (no first order derivative):

$$M_{\nu,\kappa} = \tilde{D}_0 f_1(r) s(r)^2 \partial_S^2 \equiv \tilde{D}_0 m(S)^{-1} \partial_S^2.$$

We shall define the speed measure as the measure  $dm$  with density  $m(S)$  with respect to the coordinate  $S$ . For convenience, we have multiplied the speed measure by  $2\tilde{D}_0$  with respect to the conventions of Appendix A in order to avoid such factors in later expressions. The diffusion process  $S(t) = S(r(t))$  is then a (random, i.e. realization dependent) re-parametrization of the Brownian motion  $W(\tau)$ , i.e.  $S(t) = W(\tau(t))$ , with

$$2\tilde{D}_0 \frac{dt}{d\tau} = m(S)|_{S=W(\tau)}.$$

For later use we also calculate the density of the speed measure with respect to the coordinate  $r$ :

$$m(r) = m(S) \frac{dS}{dr} = [f_1(r)s(r)]^{-1} = \frac{1}{f_1(r)} \exp\left(\int_{r_0}^r \frac{f_2(r')}{f_1(r')} dr'\right) \quad (23)$$

with the same  $r_0$  as for the natural scale above.

We expect that the process obtained in the  $l_\kappa, l_\nu \rightarrow 0$  limit corresponds to the natural scale and the speed measure that are appropriate limits of the same objects for  $l_\kappa, l_\nu$  finite. In the next subsections, we shall analyze those limits in an approximate way.

## 2.2 Approximate calculations

We should know the dependence of functions  $f_1$  and  $f_2$  on the regularization scales  $l_\nu, l_\kappa$ . If  $l_\nu < l_\kappa$  then the smoothing of the velocity field is only significant at scales where it is already not the advection but the diffusion term that dominates, that is to say, the smoothing of the velocity plays no role and we may take  $l_\nu = 0$  immediately. This case goes without difficulties and has been studied in [10], see also [5]. The case which is interesting for us is the other one, when  $l_\kappa < l_\nu$ . In this case we feel the diffusivity between 0 and  $l_\kappa$ , then we feel the smoothing of the velocity field between  $l_\kappa$  and  $l_\nu$  and

finally above  $l_\nu$  we are in the genuine Kraichnan regime with some scaling exponent  $\xi$  of the second order velocity structure function.

In the present section, the calculations will be made by replacing functions  $f_1, f_2$  by functions glued piecewise from pure powers, representing the different scaling behaviors in different subintervals. The gluing is done so that the function  $f_1$  stays continuous. That the model functions obtained this way are indeed correct approximations of functions  $f_1, f_2$  for the regularized Kraichnan model is shown in Appendix F. Thus for  $r > l_\nu$  we shall take  $f_1(r)$  and  $f_2(r)$  as in the (scale-invariant) Kraichnan model, that is  $f_1(r) = r^\xi$  and  $f_2(r) = a_\xi r^{-1} f_1(r)$  with  $a_\xi$  defined in (18). For  $l_\kappa < r < l_\nu$  the functions  $f_1, f_2$  will behave as in the smooth Kraichnan model (i.e. for  $\xi = 2$ ), and we have to match them at  $l_\nu$  with the values already given above (approximately; what matters, as we shall see, is only the order of magnitude and the ratio of the functions). Thus we shall take  $f_1(r) = r^2 l_\nu^{\xi-2}$  and  $f_2(r) = a_2 r^{-1} f_1(r)$ . In the same way for  $r < l_\kappa$  the functions  $f_1$  and  $f_2$  will be like in the pure diffusive case which, incidentally, is the same as the Kraichnan model with  $\xi = 0$ . With the same kind of matching as above, but now at  $l_\kappa$ , we get  $f_1(r) = l_\kappa^2 l_\nu^{\xi-2}$  and  $f_2(r) = (d-1)r^{-1} f_1(r)$  there. Table 2 sums up our choices for the approximate versions of  $f_1$  and  $f_2$ .

Scale	$f_1(r)$	$r f_2(r)/f_1(r)$
$r \in [0, l_\kappa]$	$l_\kappa^2 l_\nu^{\xi-2}$	$d-1$
$r \in [l_\kappa, l_\nu]$	$r^2 l_\nu^{\xi-2}$	$a_2$
$r \in [l_\nu, \infty]$	$r^\xi$	$a_\xi$

Table 2: Approximate versions of functions  $f_1$  and  $f_2$

With the pure power choices for  $f_1$  and  $f_2$ , it is straightforward to calculate the natural scale and the speed measure on the intervals  $[0, l_\kappa]$ ,  $[l_\kappa, l_\nu]$  and  $[l_\nu, \infty)$ . Let us first evaluate the ubiquitous subexpression  $s(r) = \exp(-\int_{r_0}^r f_2(r')/f_1(r') dr')$ . We see that in each of the above intervals,  $f_2(r')/f_1(r') = a/r'$  with some  $a$  constant on the interval, so the integral evaluates to logarithms. Again, results are summed up in Table 3.

Scale	$s(r)$	$m(r)$
$r \in [0, l_\kappa]$	$(r_0/l_\nu)^{a_\xi} (l_\nu/l_\kappa)^{a_2} (l_\kappa/r)^{d-1}$	$r_0^{-\xi} (l_\nu/r_0)^{a_\xi - \xi} (l_\kappa/l_\nu)^{a_2 - 2} (r/l_\kappa)^{d-1}$
$r \in [l_\kappa, l_\nu]$	$(r_0/l_\nu)^{a_\xi} (l_\nu/r)^{a_2}$	$r_0^{-\xi} (l_\nu/r_0)^{a_\xi - \xi} (r/l_\nu)^{a_2 - 2}$
$r \in [l_\nu, \infty]$	$(r_0/r)^{a_\xi}$	$r_0^{-\xi} (r/r_0)^{a_\xi - \xi}$

Table 3: Densities of the natural scale and speed measures

### 2.3 Limit of the natural scale

It is easy to see that if we maintain  $r_0 > 0$  fixed, then the density  $s(r)$  of the natural scale measure tends pointwise to

$$s_0(r) \equiv r_0^{a_\xi} r^{-a_\xi}. \quad (24)$$

Recall that  $s(r) = \frac{dS(r)}{dr}$ . Thus  $S(r)$  has to be the integral of  $s(r)$ , but we have the freedom to choose the constant of integration. We adopt the choice

$$S(r) \equiv \int_0^{r_0} s_0(r') dr' + \int_{r_0}^r s(r') dr'.$$

This definition has the advantage that, for  $r > l_\nu$ , the value of  $S(r)$  is independent of  $l_\kappa, l_\nu$ , because  $s(r) = s_0(r)$  there. In fact we have

$$S(r) = S_0(r) \equiv \int_0^r s_0(r') dr' = \frac{1}{1-a_\xi} r_0^{a_\xi} r^{1-a_\xi} \quad \text{if } r \geq l_\nu. \quad (25)$$

In particular, in the limit  $l_\kappa, l_\nu \rightarrow 0$ , the natural scale function becomes equal to  $S_0(r)$  for  $r > 0$ . Note that  $S_0(0) = 0$ , observe, however, that if  $d \geq 2$  then  $S(0) = -\infty$  as long as  $l_\kappa$  is positive since in that case the integral  $\int_{l_\kappa}^r s(r') dr'$  diverges as  $r$  goes to zero. Relation (25) may be inverted to give

$$r(S) = [(1 - a_\xi)r_0^{-a_\xi} S]^{1-1/a_\xi} \geq l_\nu \quad \text{if} \quad S \geq \frac{1}{1 - a_\xi} r_0^{a_\xi} l_\nu^{1-a_\xi}. \quad (26)$$

## 2.4 Limit of the speed measure

Let us now calculate the speed measure of each of the intervals  $[0, l_\kappa]$ ,  $[l_\kappa, l_\nu]$  and for the sake of completeness  $[l_\nu, R]$  for arbitrary  $R > l_\nu$ .

For  $[0, l_\kappa]$  we get

$$\begin{aligned} m([0, l_\kappa]) &= \int_0^{l_\kappa} m(r) dr = \int_0^{l_\kappa} \frac{1}{l_\nu^{2\xi} l_\nu^{\xi-2}} \left(\frac{l_\nu}{r_0}\right)^{a_\xi} \left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^{a_2} \left(\frac{r}{l_\kappa}\right)^{d-1} dr \\ &= \frac{r_0^{-a_\xi}}{d} l_\nu^{(a_\xi+1-\xi)+(1-a_2)} l_\kappa^{a_2-1}. \end{aligned}$$

In the intermediate compressibility regime,  $a_\xi + 1 - \xi > 0$  and  $1 - a_2 > 0$ , hence we have a positive power of  $l_\nu$  and a negative power of  $l_\kappa$ . Depending on the way in which  $l_\nu, l_\kappa$  go to zero,  $m([0, l_\kappa])$  can tend to zero, infinity or some fixed constant. For the finite limit one should have  $l_\nu^{(a_\xi+1-\xi)+(1-a_2)} \propto l_\kappa^{1-a_2}$ , i.e.

$$l_\kappa \propto l_\nu^{1 + \frac{a_\xi+1-\xi}{1-a_2}} \quad (27)$$

The exponent of  $l_\nu$  being greater than 1, this relation is compatible with the condition  $l_\kappa \ll l_\nu$  in the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ . In a moment we shall explain how the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  taken with condition (27) corresponds to the sticky boundary condition. For now let us simply give some equivalent formulations of (27). From (14), it can be seen that  $2\kappa = \tilde{D}_0 f_1(0)$ . Within our current modeling of  $f_1$ , we have  $f_1(0) = l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2$  so that

$$\kappa = \frac{1}{2} \tilde{D}_0 l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2. \quad (28)$$

We shall use this equation to fix the relation between  $\kappa$  and  $l_\kappa$  also in the exact approach. Recalling definition (7), we see that the Prandtl number  $Pr \equiv \frac{\nu}{\kappa}$  is proportional to  $(l_\nu/l_\kappa)^2$  for  $l_\kappa \ll l_\nu$  so that imposing relation (27) is equivalent to

$$\kappa \propto l_\nu^{\xi+2 \frac{a_\xi+1-\xi}{1-a_2}} \quad \text{or} \quad Pr \propto l_\nu^{-2 \frac{a_\xi+1-\xi}{1-a_2}}.$$

In particular  $\kappa$  goes to zero while  $Pr$  goes to infinity when  $l_\nu$  goes to zero.

The calculation of the speed measure of the interval  $[l_\kappa, l_\nu]$  is performed similarly:

$$\begin{aligned} m([l_\kappa, l_\nu]) &= \int_{l_\kappa}^{l_\nu} m(r) dr = \int_{l_\kappa}^{l_\nu} \frac{1}{r^2 l_\nu^{\xi-2}} \left(\frac{l_\nu}{r_0}\right)^{a_\xi} \left(\frac{r}{l_\nu}\right)^{a_2} dr \\ &= \frac{r_0^{-a_\xi}}{a_2 - 1} l_\nu^{a_\xi - a_2 + 2 - \xi} (l_\nu^{a_2-1} - l_\kappa^{a_2-1}). \end{aligned}$$

Now, since in the intermediate compressibility regime  $a_2 - 1 < 0$ , in the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  it will be  $l_\kappa^{a_2-1}$  that dominates  $l_\nu^{a_2-1}$  so that

$$m([l_\kappa, l_\nu]) \approx \frac{r_0^{-a_\xi}}{1 - a_2} l_\nu^{(a_\xi+1-\xi)+(1-a_2)} l_\kappa^{a_2-1}.$$

We are in exactly the same situation as above and the same conclusions hold.

Finally the speed measure of the interval  $[l_\nu, R]$  for some arbitrary  $R > l_\nu$  is

$$\begin{aligned} m([l_\nu, R]) &= \int_{l_\nu}^R m(r) dr = \int_{l_\nu}^R r^{-\xi} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{a\xi} dr \\ &= \frac{r_0^{-a\xi}}{a\xi + 1 - \xi} \left(R^{a\xi+1-\xi} - l_\nu^{a\xi+1-\xi}\right) \approx \frac{r_0^{-a\xi}}{a\xi + 1 - \xi} R^{a\xi+1-\xi} \end{aligned}$$

and it tends to a finite limit when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ .

At this point we may describe explicitly the speed measure  $dm_0$  obtained as the weak limit of speed measures for positive  $l_\nu, l_\kappa$  when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  in such a way that

$$l_\nu^{(a\xi+1-\xi)+(1-a_2)} l_\kappa^{a_2-1} \rightarrow \lambda \quad (29)$$

for some  $\lambda \in [0, +\infty]$  (note that  $\lambda$  has dimension  $(\text{length})^{a\xi+1-\xi}$ ). On the open half-line of  $r > 0$  the density of  $dm_0$  is

$$m_0(r) = r_0^{-a\xi} r^{a\xi-\xi}. \quad (30)$$

Besides,  $dm_0$  has a mass at zero, given by

$$m_0(\{0\}) = \lim_{l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0} (m([0, l_\kappa]) + m([l_\kappa, l_\nu])) = \frac{d+1-a_2}{(1-a_2)d} r_0^{-a\xi} \lambda. \quad (31)$$

It is convenient to characterize the "stickiness" of the boundary at  $r = 0$  by the quantity  $\bar{\lambda} \equiv m_0(\{0\})/[r^\xi m_0(r)]_{r=0}$  which we shall call the **glue parameter**. We obtain

$$\bar{\lambda} = \frac{d+1-a_2}{(1-a_2)d} \lambda \quad (32)$$

This relation will be compared to the value produced by another approach in the next section, and finally to the exact result (62) calculated using the precise forms of  $f_1, f_2$  instead of the approximate versions of Table 2.

## 2.5 Convergence on the natural scale

Here we shall show that the operations of changing coordinates from the original scale  $r$  to natural scale  $S$  and of taking the weak limit of the speed measure  $dm$  when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  commute. Observe that for  $d = 1$  the natural scale coincides with the original one so we shall be preoccupied here only by the case  $d \geq 2$ .

In the preceding subsection we computed the limit of  $m(r)$ , working on the original scale  $r$ . Here we shall pass first to the natural scale  $S$  and then take the limit of  $m(S)$  and finally check that the result agrees with that of the preceding subsection. This is in order to exclude that we are in the kind of pathological case presented in Appendix B. A priori such a situation could arise here because the notions of weak convergence on the original scale and on the natural scale do not coincide.

The density of the speed measure w.r.t. the natural scale  $S$  is  $m(S) = m(r)s^{-1}(r)$ . From (26) it is clear that for any  $S > 0$  we can take  $l_\nu$  sufficiently small to have  $r(S) > l_\nu$  and thus  $m(r) = m_0(r)$  and  $s(r) = s_0(r)$  so that  $m(S) = m_0(r)s_0^{-1}(r) = m_0(S_0)$ . Hence the trivial convergence of the density of the speed measure on the open half-line of positive  $S$  to  $m_0(S_0)$  in agreement with the result of the preceding subsection.

We still have to see what happens for  $S < 0$  and to show that the limit  $m_0(S_0)$  of the density of the speed measure has a Dirac delta term at  $S_0 = 0$ . Let us evaluate for  $S < 0$  the asymptotic behavior of  $r(S)$  as  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ . Observe that  $S(l_\nu) = \int_0^{l_\nu} s_0(r') dr' > 0$ . So if  $S < 0$  then  $r(S) < l_\nu$ . Now

$$\begin{aligned} S(l_\kappa) &= \int_0^{l_\nu} s_0(r') dr' - \int_{l_\kappa}^{l_\nu} s_0(r') dr' \\ &= \frac{1}{1-a\xi} r_0^{a\xi} l_\nu^{1-a\xi} - \frac{1}{1-a_2} r_0^{a\xi} l_\nu^{1-a\xi} \left[1 - \left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^{1-a_2}\right] \rightarrow 0 \end{aligned}$$

when  $l_\nu \rightarrow 0$  with  $l_\kappa < l_\nu$  since both  $1 - a_\xi$  and  $1 - a_2$  are positive. This shows that for  $S < 0$  fixed, we must have  $r(S) < l_\kappa$  asymptotically. Let us explicitly treat the case  $d > 2$ . The case  $d = 2$  is only a bit different because of the logarithmic divergences. For  $r < l_\kappa$ ,

$$\begin{aligned} S(r) &= S(l_\kappa) - \int_r^{l_\kappa} s(r') dr' \\ &= S(l_\kappa) - \frac{1}{2-d} r_0^{a_\xi} l_\nu^{a_2 - a_\xi} l_\kappa^{d-1-a_2} (l_\kappa^{2-d} - r^{2-d}). \end{aligned}$$

Suppose that  $r = o(l_\kappa)$  (consistency will be checked) so that  $l_\kappa^{2-d} = o(r^{2-d})$ . Recalling that  $S(l_\kappa) \rightarrow 0$ , we infer that, for fixed  $S < 0$ ,

$$\begin{aligned} r(S) &\sim \left[ (2-d) r_0^{-a_\xi} l_\nu^{a_\xi - a_2} l_\kappa^{1-d+a_2} S \right]^{\frac{1}{2-d}} \\ &= \left[ (d-2) r_0^{-a_\xi} (-S) \right]^{-\frac{1}{d-2}} \left[ l_\nu^{1-a_\xi} (l_\kappa/l_\nu)^{1-a_2} \right]^{\frac{1}{d-2}} l_\kappa. \end{aligned}$$

We immediately check that  $r(S) = o(l_\kappa)$  so that our estimates are consistent, as promised. It can also be seen that this asymptotics for  $r(S)$  is uniformly valid on  $(-\infty, S]$  for any  $S < 0$ . Now we may write

$$\begin{aligned} m(S) &= [m(r) s^{-1}(r)]_{r=r(S)} \\ &\sim \left[ (d-2)^{-(d-1)} r_0^{a_\xi} (l_\kappa/l_\nu)^{1-a_2} l_\nu^{1-a_\xi} \right]^{\frac{2}{d-2}} l_\nu^{-\xi} (-S)^{-[2+\frac{2}{d-2}]}. \end{aligned}$$

We infer that  $m(S)$  decays as a power of  $-S$  when  $S \rightarrow -\infty$ , fast enough to be integrable. We also see that the coefficient in front of the power of  $-S$  goes to zero when  $l_\nu \rightarrow 0$  with  $l_\kappa < l_\nu$ .

We still have to show that  $m_0(S)$  has a Dirac delta contribution at zero. This can now be seen because

$$\int_{-\infty}^{S(l_\nu)} m(S) dS = \int_0^{l_\nu} m(r) dr$$

and we have shown that the right hand side has the limit given by (31). On the other hand we have just seen that for any  $S < 0$

$$\int_{-\infty}^S m(S') dS' \rightarrow 0$$

and also that  $S(l_\nu) > 0$  and  $S(l_\nu) \rightarrow 0$ . This permits to conclude that  $m_0(S_0)$  has a Dirac delta contribution at  $S_0 = 0$  with the coefficient  $m_0(\{0\})$ . An analogous reasoning for the case  $d = 2$  gives the same result regarding the (weak) convergence of the measure  $dm$  on the natural scale. The limit measure coincides with the limiting speed measure in the  $r$  coordinate re-expressed in the limiting natural scale coordinate  $S_0$ .

## 2.6 Conjecture

It is legitimate to expect that the process  $r(t)$  converges in an appropriate sense to the one corresponding to the limit natural scale function  $S_0 \geq 0$  given in (25), and the speed measure with density

$$m_0(S_0) = r_0^{-a_\xi/b_\xi} [(1 - a_\xi) S_0]^{-2+\frac{1}{b_\xi}} + m_0(\{0\}) \delta(S_0).$$

Such a process is, in the natural scale coordinate  $S_0$ , a reparametrization of the Brownian motion  $|W(\tau)|$  instantaneously reflecting at zero:  $S_0(t) = |W(\tau(t))|$ , see Appendix A. Away from zero,  $2\tilde{D}_0 \frac{dt}{d\tau} = m_0(S_0)|_{S_0=|W(\tau(t))|}$ . At zero, the reparametrized process spends time proportional to  $m_0(\{0\})$  times the local time at zero of  $|W(\tau)|$  (although never an uninterrupted open interval of time). This is the “sticky” or “slowly reflecting” boundary behavior [3, 20] with the glue parameter  $\tilde{\lambda} \propto m_0(\{0\})$ , see (32). The extreme cases  $\tilde{\lambda} = 0$  and  $\tilde{\lambda} = \infty$  correspond, respectively, to instantaneous reflection and total absorption of the process at zero.

This was our first argument for the sticky boundary behavior.

### 3 The linear operator viewpoint

Our next argument is based on the study of the (generalized) eigenfunctions of the operator  $M_{\nu,\kappa}$  of Eq. (13) in the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ . If we take  $f_1, f_2$  composed as above from pure powers, then we are able to calculate exactly the eigenfunctions and trace their limiting behavior. This argument is somewhat more shaky because it needs some explicit, not totally realistic (though representative), form of the functions  $f_1$  and  $f_2$  (before, such a representation was really required to hold only approximately).

#### 3.1 Derivation of the boundary condition at zero

Let us consider the differential operator  $\tilde{D}_0^{-1}M_{\nu,\kappa} = f_1(r)\partial_r^2 + f_2(r)\partial_r$  with the approximate form of functions  $f_1$  and  $f_2$  given in Table 2. Thus for  $r > l_\nu$  we take  $f_1(r) = r^\xi$  and  $f_2(r) = a_\xi r^{-1}f_1(r)$  so on the interval  $[l_\nu, \infty]$  a pair of linearly independent eigenfunctions corresponding to the eigenvalue  $-E$  of  $\tilde{D}_0^{-1}M_{\nu,\kappa}$  is

$$\Phi_E^\pm(r) = r^{\frac{1-a_\xi}{2}} J_{\pm b_\xi}(\sqrt{E} r^{\frac{2-\xi}{2}})$$

where  $b_\xi$  is given by (21) and  $J_b$  is the Bessel function of the first kind of parameter  $b$ . Note that these eigenfunctions are independent of  $l_\nu, l_\kappa$ . When we impose at zero a boundary condition<sup>2</sup> in general the eigenfunctions of the operator with boundary condition will form a one dimensional linear subspace of the two dimensional linear space spanned by  $\Phi_E^\pm$ . That is, if the linear combination  $\tilde{c}_E^+ \Phi_E^+ + \tilde{c}_E^- \Phi_E^-$  is an eigenfunction verifying the boundary condition at zero, then  $\tilde{c}_E^+/\tilde{c}_E^-$  is fixed (depending on  $E$  and the boundary condition, of course). In part we shall proceed in the opposite way. First we calculate  $\tilde{c}_E^+/\tilde{c}_E^-$  for  $l_\nu, l_\kappa$  finite. Next we deduce the effective boundary condition at zero that would give the same quotient if  $l_\nu, l_\kappa$  were zero. Finally we look at the limit of  $\tilde{c}_E^+/\tilde{c}_E^-$  when  $l_\kappa, l_\nu \rightarrow 0$ , and deduce the "limit" of the effective boundary condition.

First of all we give explicitly a generating pair of eigenfunctions of  $\tilde{D}_0^{-1}M_{\nu,\kappa}$  associated with the eigenvalue  $-E$ , on each of the intervals  $[0, l_\kappa], [l_\kappa, l_\nu], [l_\nu, \infty]$ . We shall denote these six functions  $g_1^\pm, g_2^\pm, g_3^\pm$  respectively. Because at zero we have the Neumann boundary condition, on  $[0, l_\kappa]$  we give only the corresponding eigenfunction:

$$g_1^-(r) = C_1 r^{\frac{2-d}{2}} J_{-\frac{2-d}{2}}(\sqrt{E/\kappa} r) \quad \text{with} \quad C_1 = 2^{-\frac{2-d}{2}} \Gamma\left(1 - \frac{2-d}{2}\right) (E/\kappa)^{\frac{2-d}{4}}$$

(the normalization was chosen for later convenience). On  $[l_\kappa, l_\nu]$  we may set

$$g_2^\pm(r) = r^{\gamma_\pm(E, l_\nu)} \quad \text{where} \quad \gamma_\pm(E, l_\nu) = \frac{1 - a_2 \pm \sqrt{(1 - a_2)^2 - 4l_\nu^{2-\xi} E}}{2}$$

(recall that  $1 - a_2 > 0$  in the intermediate compressibility regime). Finally on  $[l_\nu, \infty]$  we take

$$g_3^\pm(r) = 2^{\pm b_\xi} \Gamma(1 \pm b_\xi) E^{\mp \frac{b_\xi}{2}} \Phi_E^\pm(r).$$

In order to construct the eigenfunction of  $M_{\nu,\kappa}$  on the whole half-line  $[0, \infty]$ , we have to find the correct linear combinations of the generating pairs on each sub-interval by matching the functions and their derivatives at each border point. Formally, if we have to match  $c_i^+ g_i^+ + c_i^- g_i^-$  with  $c_j^+ g_j^+ + c_j^- g_j^-$  at  $r$ , then, in matrix notation, we should have

$$\begin{pmatrix} g_i^+(r) & g_i^-(r) \\ g_i^{+\prime}(r) & g_i^{-\prime}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j^+(r) & g_j^-(r) \\ g_j^{+\prime}(r) & g_j^{-\prime}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_j^+ \\ c_j^- \end{pmatrix}$$

where  $g'(r) \equiv \partial_r g(r)$ . That is to say,

$$\begin{pmatrix} c_j^+ \\ c_j^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_j^+(r) & g_j^-(r) \\ g_j^{+\prime}(r) & g_j^{-\prime}(r) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_i^+(r) & g_i^-(r) \\ g_i^{+\prime}(r) & g_i^{-\prime}(r) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_i^+ \\ c_i^- \end{pmatrix}.$$

<sup>2</sup>Exactly one, given as  $L[\Phi_E] = 0$  where  $L$  is an operator that can be expressed as the limit at zero of some finite linear combination of derivatives of order 0 or higher, with not necessarily constant coefficients.

Now, because on  $[0, l_\kappa]$  we take  $g_1^-$  as the eigenfunction, it follows that, by making the above described matchings, we get on  $[l_\nu, \infty]$  the linear combination  $c_E^+ g_3^+ + c_E^- g_3^-$  with

$$\begin{pmatrix} c_E^+ \\ c_E^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_3^+(l_\nu) & g_3^-(l_\nu) \\ g_3^{+'}(l_\nu) & g_3^{-'}(l_\nu) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_2^+(l_\nu) & g_2^-(l_\nu) \\ g_2^{+'}(l_\nu) & g_2^{-'}(l_\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^+(l_\kappa) & g_2^-(l_\kappa) \\ g_2^{+'}(l_\kappa) & g_2^{-'}(l_\kappa) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} g_1^-(l_\kappa) \\ g_1^{-'}(l_\kappa) \end{pmatrix}. \quad (33)$$

Note that

$$\frac{\tilde{c}_E^+}{\tilde{c}_E^-} = \frac{\Gamma(1+b_\xi)}{\Gamma(1-b_\xi)} \left(\frac{4}{E}\right)^{b_\xi} \frac{c_E^+}{c_E^-}.$$

For a general matrix  $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  its inverse is  $\frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ . We use this formula to rewrite (33), but since we are only interested in the ratio  $c_E^+/c_E^-$ , we get rid of the  $\frac{1}{ad-bc}$  factor. Thus

$$\begin{pmatrix} c_E^+ \\ c_E^- \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} g_3^-(l_\nu) & -g_3^-(l_\nu) \\ -g_3^{+'}(l_\nu) & g_3^{+'}(l_\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^+(l_\nu) & g_2^-(l_\nu) \\ g_2^{+'}(l_\nu) & g_2^{-'}(l_\nu) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_2^-(l_\kappa) & -g_2^-(l_\kappa) \\ -g_2^{+'}(l_\kappa) & g_2^{+'}(l_\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^-(l_\kappa) \\ g_1^{-'}(l_\kappa) \end{pmatrix}. \quad (34)$$

This gives an explicit formula for  $c_E^+/c_E^-$  for  $l_\nu, l_\kappa$  finite. In Appendix C we show that if we take  $l_\nu, l_\kappa$  to zero in a way that the limit (29) exists (notation  $l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0$ ) then

$$\lim_{l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0} \frac{c_E^+}{c_E^-} = -\frac{d+1-a_2}{(1-a_2)(1-a_\xi)d} \lambda E. \quad (35)$$

It is not difficult to identify the boundary condition implied by this relation. Recall that the eigenfunctions of  $\tilde{D}_0^{-1} M_{\nu, \kappa}$  associated to the eigenvalue  $-E$  are of the form  $\Phi_E(r) = c_E^+ g_3^+(r) + c_E^- g_3^-(r)$  for  $r > l_\nu$ , (that is for  $r > 0$  if  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ ). Furthermore we see that

$$\begin{aligned} g_3^-(0) &= 1, & r^{a_\xi} g_3^{-'}(r)|_{r=0} &= 0, \\ g_3^+(0) &= 0, & r^{a_\xi} g_3^{+'}(r)|_{r=0} &= 1 - a_\xi. \end{aligned}$$

From this we conclude that  $\Phi_E$  verifies

$$\Phi_E(0) = c_E^- \quad \text{and} \quad r^{a_\xi} \Phi_E'(r)|_{r=0} = (1 - a_\xi) c_E^+. \quad (36)$$

For convenience let us denote  $\tilde{D}_0 r^{a_\xi} \partial_r \equiv F$  and, as before,  $M_{0,0} \equiv M$ . Now (36) with (35) imply that

$$\tilde{D}_0^{-1} (F \Phi_E)(0) = -\tilde{\lambda} E \Phi_E(0)$$

where  $\tilde{\lambda}$  is given by (32). Since  $\Phi_E$  is an eigenvector of  $\tilde{D}_0^{-1} M$  with eigenvalue  $-E$ , we obtain

$$(F \Phi_E)(0) = \tilde{\lambda} (M \Phi_E)(0). \quad (37)$$

This last form may be read as an independent of  $E$  boundary condition that all  $\Phi_E$  verify. It becomes then *the* boundary condition for  $M$ . Note that the coefficient  $\tilde{\lambda}$  is in  $[0, +\infty]$ . We introduce thus the operator  $M_{\tilde{\lambda}}$  which is the version of  $M$  with the domain  $\mathcal{D}(M_{\tilde{\lambda}})$  corresponding to the boundary condition (37). In the next subsection we shall show that  $M_{\tilde{\lambda}}$  is the Kolmogorov backwards generator of a sticky process whose glue parameter is equal to  $\tilde{\lambda}$ .

### 3.2 Interpretation of the boundary condition

To see that boundary condition (37) corresponds to a slowly reflecting boundary, we may calculate the mass at zero of the speed measure of the diffusion process generated by  $M_{\tilde{\lambda}}$ . The speed measure may be defined, up to a multiplicative constant, as the measure  $dm$  with respect to which the generator  $M_{\tilde{\lambda}}$  is self-adjoint [21]. It is straightforward to see

that for  $r > 0$  we may take for the density of the speed measure with respect to  $r$  (recall notation of Sect. 2)

$$m(r) = r^{\alpha\epsilon - \epsilon}. \quad (38)$$

We have in particular the relation  $m(r)M = \tilde{D}_0 \partial_r \circ r^{\alpha\epsilon} \partial_r$ . Here, as in the following, if we write  $M$  instead of  $M_{\tilde{\lambda}}$ , we mean not the operator with a specified domain but only the corresponding differential expression. Let us denote the  $L^2$  scalar product with respect to the measure  $dm$  by  $(\cdot, \cdot)_m$ . For  $M_{\tilde{\lambda}}$  to be symmetric with respect to  $dm$ , we need that  $(g_1, M g_2)_m = (M g_1, g_2)_m$  for any  $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(M_{\tilde{\lambda}})$ . Using (38) for the density of  $dm$  on the open half-line  $(0, \infty)$ , and putting in a separate term the effect of a possible mass of  $dm$  at zero, this may be written as

$$g_1(0)(M g_2)(0) m(\{0\}) + \int_{0^+}^{\infty} g_1(r)(M g_2)(r) m(r) dr = \\ (M g_1)(0)g_2(0) m(\{0\}) + \int_{0^+}^{\infty} (M g_1)(r)g_2(r) m(r) dr \quad (39)$$

where the limit  $0^+$  in the integrals indicates that the integral is over the open half-line  $(0, \infty)$ . The integral on the left hand side may be rewritten using integration by parts as

$$\int_{0^+}^{\infty} g_1(r)(M g_2)(r) m(r) dr = \\ g_1(0)(F g_2)(0) - (F g_1)(0)g_2(0) + \int_{0^+}^{\infty} (M g_1)(r)g_2(r) m(r) dr.$$

We then see that (39) holds if and only if

$$[(M g_1)(0) m(\{0\}) - (F g_1)(0)] g_2(0) = g_1(0) [(M g_2)(0) m(\{0\}) - (F g_2)(0)]$$

(strictly speaking the above expression is defined in the limit  $r \rightarrow 0$ ). This condition may only be verified for all  $g_1, g_2 \in \mathcal{D}(M_{\tilde{\lambda}})$  if, for all  $g \in \mathcal{D}(M_{\tilde{\lambda}})$ ,  $([m(\{0\})M - F]g)(0) = 0$ . Recalling the boundary condition (37), this amounts to the equality

$$m(\{0\}) = \tilde{\lambda}, \quad (40)$$

We infer this way that the speed measure of  $M_{\tilde{\lambda}}$  has a finite mass at zero, which means that  $M_{\tilde{\lambda}}$  describes a process that is slowly reflecting at zero. From (40) and (38) we see that the glue parameter of the slow reflection is  $\tilde{\lambda}$ .

More generally, the speed measure found in this section is coherent with the one we got from the stochastic process treatment. Compare (30), (31) with (38), (40), respectively, to see that the two speed measures are proportional (the second equals  $\tau_0^{\alpha\epsilon}$  times the first one).

## 4 The sticky process

Now that we know the effective time evolution operator on large scales, we may inquire how the corresponding transition probabilities of the Lagrangian dispersion and other related quantities look like, what is their long time behavior and the induced effect on tracer transport.

### 4.1 Transition probabilities

The transition probabilities  $P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr')$  for the process with generator  $M_{\tilde{\lambda}}$  are given by the self-adjoint exponential operators  $e^{tM_{\tilde{\lambda}}}$  defined in  $L^2(m(dr))$ . It will be, however, more convenient to use the more standard  $L^2(dr)$  conventions for the kernels and explicitly write the contribution due to the atomic term of  $dm$ . In such notation,

$$P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr') = e^{tM_{\tilde{\lambda}}}(r, r') dr' + \tilde{\lambda} [e^{tM_{\tilde{\lambda}}}(r, \rho) \rho^{\epsilon - \alpha\epsilon}]_{\rho=0} \delta(r') dr'. \quad (41)$$

The term concentrated at zero assures the conservation of probability  $\int P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr') = 1$  as is shown in Appendix E. Its presence implies that sticky trajectories spend together positive time. In particular, the mean of the time that two trajectories starting at moment zero at distance  $r$  spend together up to moment  $t$  is  $\tilde{\lambda} \int_0^t [e^{sM_{\tilde{\lambda}}}(r, \rho) \rho^{\xi-\alpha\xi}]_{\rho=0} ds$ .

To compute the kernel  $e^{tM_{\tilde{\lambda}}}(r, r')$ , it will be more convenient to work with Schrödinger type operators. To this end, we shall first change variables by setting  $u = \frac{2}{2-\xi} \tilde{D}_0^{-1/2} r^{\frac{2-\xi}{2}}$ . Recall from (20) that this transforms  $M$  to the generator of a Bessel process of parameter  $-b$  with  $b$  given by (21) (to ease the notation, we drop the subscript  $\xi$ ). After passing to the new variable, we conjugate  $M$  by the multiplication by  $u^{b-\frac{1}{2}}$  and finally multiply it by  $-1$  to obtain the differential operator  $N$  of the form

$$N \equiv -\partial_u^2 + \frac{b^2 - \frac{1}{4}}{u^2}.$$

The boundary condition (37) imposed on  $M_{\tilde{\lambda}}$  becomes for  $N$  the condition

$$u^{1-2b} \partial_u u^{b-\frac{1}{2}} \varphi(u)|_{u=0} = -\mu C_b^{-1} u^{b-\frac{1}{2}} N \varphi(u)|_{u=0} \quad (42)$$

where  $C_b = 2^{2b-1} \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(1-b)}$  is introduced for convenience, and

$$\mu = \frac{(2-\xi)^{2b-1} \Gamma(b)}{\Gamma(1-b)} \tilde{D}_0^{b-1} \tilde{\lambda}$$

is a positive constant proportional to  $\tilde{\lambda}$ . We shall denote by  $N_\mu$  the operator  $N$  with this boundary condition. Note for later use the relationship

$$e^{tM_{\tilde{\lambda}}}(r, r') dr' = u(r)^{b-\frac{1}{2}} e^{-tN_\mu}(u(r), u(r')) u(r')^{\frac{1}{2}-b} du(r') \quad (43)$$

The spectral properties of the operator  $N_\mu$  are studied in detail in Appendix D. Here we rely on those results. The spectrum of  $N_\mu$  is  $\mathbb{R}_+$ . The (generalized) eigenfunction  $\varphi_{\mu, E}(u)$  of this operator, associated to the eigenvalue  $E \geq 0$ , may be taken as

$$\varphi_{\mu, E}(u) = u^{\frac{1}{2}} \left[ J_{-b}(\sqrt{E}u) - \mu E^{1-b} J_b(\sqrt{E}u) \right]. \quad (44)$$

The (scalar) spectral measure corresponding to this choice (of normalization) of the eigenfunctions is

$$d\nu_\mu(E) = \frac{dE}{2(1 - 2\mu E^{1-b} \cos(b\pi) + \mu^2 E^{2(1-b)})}. \quad (45)$$

The kernel of the exponential of the operator  $N_\mu$  may be written using spectral calculus as

$$\exp(-tN_\mu)(u, v) = \int_0^\infty e^{-tE} \varphi_{\mu, E}(u) \varphi_{\mu, E}(v) d\nu_\mu(E). \quad (46)$$

An important aspect of the flow is the behavior of two particles released at the same point at the same time. The evolution of the inter-particle distance of such a pair is described by the  $r \rightarrow 0$  limit of  $P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr')$ . Substituting (46) into (43) and that in turn into (41), we obtain:

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow 0} P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr') &= \frac{2^b}{\Gamma(1-b)} \left( \int_0^\infty e^{-tE} E^{-\frac{b}{2}} \varphi_{\mu, E}(u(r')) d\nu_\mu(E) \right) u(r')^{\frac{1}{2}-b} du(r') \\ &\quad + \frac{2(2-\xi)^{2b-1} \tilde{D}_0^{b-1}}{\Gamma(1-b)^2} \tilde{\lambda} \left( \int_0^\infty e^{-Et} E^{-b} d\nu_\mu(E) \right) \delta(r') dr'. \end{aligned} \quad (47)$$

The first term on the right hand side is the regular contribution absolutely continuous w.r.t.  $dr'$ . It describes the probability that a pair of particles starting together at time zero are separated at time  $t$  by some finite distance  $r'$  with  $dr'$  precision. Presence of such a term indicates that the sticky Lagrangian flow should be stochastic in each

velocity realization, just as the instantaneously reflecting flow corresponding to  $\tilde{\lambda} = 0$ . The second term on the right hand side of (47) is concentrated at  $r' = 0$  and describes the probability that two trajectories starting together will be together at time  $t$ . It is absent for  $\tilde{\lambda} = 0$ . Recall, however, from [11] that in the strongly compressible phase  $\varphi > \frac{d}{\xi^2}$  one has  $\lim_{r \rightarrow 0} P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr') = \delta(r') dr'$  signaling that the Lagrangian flow is deterministic there. Appearance of both regular and singular contributions to (47) in the sticky flow is one of the indications of a hybrid nature of this case.

In the special instance of  $\mu = 0$  or  $\mu = \infty$ , corresponding to instantaneously reflecting or absorbing boundary at  $r = 0$ , the integral in (46) may be calculated explicitly. We make the change of variables  $E = z^2$  and then use Weber's formula, Eq. (6.633.2) of [12], to obtain

$$\begin{aligned} \exp(-tN_0)(u, v) &= \int_0^\infty e^{-tE} u^{\frac{1}{2}} J_{-b}(\sqrt{E}u) v^{\frac{1}{2}} J_{-b}(\sqrt{E}v) \frac{dE}{2} \\ &= u^{\frac{1}{2}} v^{\frac{1}{2}} \int_0^\infty e^{-tz^2} J_{-b}(zu) J_{-b}(zv) z dz = \frac{\sqrt{uv}}{2t} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{4t}\right) I_{-b}\left(\frac{uv}{2t}\right) \end{aligned}$$

where  $I_{-b}$  is the modified Bessel function of the first kind of index  $-b$ . Analogously,

$$\begin{aligned} \exp(-tN_\infty)(u, v) &= \int_0^\infty e^{-tE} u^{\frac{1}{2}} J_b(\sqrt{E}u) v^{\frac{1}{2}} J_b(\sqrt{E}v) \frac{dE}{2} \\ &= \frac{\sqrt{uv}}{2t} \exp\left(-\frac{u^2 + v^2}{4t}\right) I_b\left(\frac{uv}{2t}\right). \end{aligned}$$

We then have

$$\exp(tM_0^\infty)(r, r') = \frac{1}{\tilde{D}_0(2-\xi)t} r^{\frac{1-\alpha\xi}{2}} r'^{\frac{\alpha\xi+1-2\xi}{2}} \exp\left(-\frac{r^2-\xi+r'^2-\xi}{\tilde{D}_0(2-\xi)^2t}\right) I_{\pm b}\left(\frac{2(rr')^{\frac{2-\xi}{2}}}{\tilde{D}_0(2-\xi)^2t}\right). \quad (48)$$

It can be easily shown that these results are in agreement with the well known transition probabilities of the Bessel process with reflecting or absorbing boundary at zero [2].

Some other quantities of interest are the hitting times  $H_{r'}$  at some point  $r'$ , in particular, the doubling and halving times of the inter-particle distance, see e.g. [4], Sect. 2C. Their expectations are given by the following formulae (with notations of Appendix A)

$$\mathbb{E}_r(e^{-\alpha H_{r'}}) = \frac{r^{\frac{\xi-2\alpha\xi}{4}} \phi_{\mu, -\alpha}\left(\frac{2\tilde{D}_0^{-1/2}}{2-\xi} r^{\frac{2-\xi}{2}}\right)}{r'^{\frac{\xi-2\alpha\xi}{4}} \phi_{\mu, -\alpha}\left(\frac{2\tilde{D}_0^{-1/2}}{2-\xi} r'^{\frac{2-\xi}{2}}\right)} \quad \text{if } r < r'$$

and

$$\mathbb{E}_r(e^{-\alpha H_{r'}}) = \frac{r^{\frac{\xi-2\alpha\xi}{4}} \psi_{-\alpha}\left(\frac{2\tilde{D}_0^{-1/2}}{2-\xi} r^{\frac{2-\xi}{2}}\right)}{r'^{\frac{\xi-2\alpha\xi}{4}} \psi_{-\alpha}\left(\frac{2\tilde{D}_0^{-1/2}}{2-\xi} r'^{\frac{2-\xi}{2}}\right)} \quad \text{if } r > r'$$

where  $\phi_{\mu, -\alpha}$  is the solution of the differential equation  $(N + \alpha)\phi = 0$  that verifies the boundary condition (42) at zero and  $\psi_{-\alpha}$  is the solution that tends to zero at infinity. We refer here to Appendix A and Appendix D, in particular to formula (63) of the former and formulae (68) and (69) of the latter.

## 4.2 Long time asymptotics

The sticky transition probability densities  $P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr')$  of the inter-particle distance determine the behavior of the passive tracer 2-point function obtained in the corresponding limit  $l_\kappa, l_\nu \rightarrow 0$ . The free decay of the tracer 2-point function is described directly by the transition probability  $P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr')$ . Indeed, for an initial tracer distribution with a homogeneous isotropic 2-point correlation function  $F(0, r)$ , at time  $t$  the tracer distribution will be

$$F(t, r) = \int_0^\infty F(0, r') P_{\tilde{\lambda}}^t(r; dr'), \quad (49)$$

as follows from (9). Thus the long time decay of the tracer 2-point function is determined by the large  $t$  asymptotics of  $e^{tM_{\lambda}}(r, r')$ . Similarly, with isotropic forcing as in (10) and, for simplicity, no tracer at time zero,

$$F(t, r) = \int_0^t ds \int_0^{\infty} \chi(r') P_{\lambda}^2(r; dr'), \quad (50)$$

as follows from (11). Thus the long time behavior of the forced tracer 2-point function is determined by the large  $t$  asymptotics of  $\int_0^t e^{sM_{\lambda}}(r, r') ds$ . We shall assume fast decay for large  $r$  of both  $F(0, r)$  in the unforced case and of  $\chi(r)$  in the forced one.

As before, it will be more convenient to study instead of  $M_{\lambda}$  the operator  $N_{\mu}$ . To obtain the large  $t$  behavior of  $e^{-tN_{\mu}}(u, v)$  or of  $L_{\mu}(t; u, v) \equiv \int_0^t e^{-sN_{\mu}}(u, v) ds$ , we may consider their Laplace transforms given for  $\alpha > 0$  (where  $\alpha$  is the variable conjugate to  $t$ ) by the resolvent kernel

$$(N_{\mu} + \alpha)^{-1}(u, v) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha t} e^{-tN_{\mu}}(u, v) dt$$

and by  $\frac{1}{\alpha}(N_{\mu} + \alpha)^{-1}(u, v)$ , respectively. By the well known Tauberian-Abelian theorem, for any real numbers  $-1 < p_N < \dots < p_1 < \infty$ , the following behaviors of the function  $f(t)$  and of its Laplace transform  $\hat{f}(\alpha)$  are equivalent

$$(i) \quad f(t) = \sum_{i=1}^N c_i t^{p_i} + o(t^{p_N}) \quad \text{near } t = \infty,$$

$$(ii) \quad \hat{f}(\alpha) = \sum_{i=1}^N c_i \Gamma(p_i + 1) \alpha^{-p_i - 1} + o(\alpha^{-p_N - 1}) \quad \text{near } \alpha = 0^+.$$

The resolvent  $(N_{\mu} + \alpha)^{-1}$  of  $N_{\mu}$  is studied in Appendix D. It can be written like in (70) (except for the change of sign of  $\alpha$ ) and expanded in  $\alpha$  for  $\alpha$  small to all orders  $\leq 0$ . It is easy to see that, for  $\mu < \infty$ , in the numerator of (70) only the leading term is of order strictly smaller than zero and there is exactly one term of order zero. More exactly, one obtains:

$$\begin{aligned} (N_{\mu} + \alpha)^{-1}(u, v) &= G_{\mu, -\alpha}(u, v) \\ &= C_b (uv)^{\frac{1}{2}-b} \frac{\alpha^{-b}}{1 + \mu\alpha^{1-b}} - \frac{1}{2b} \min(u, v)^{\frac{1}{2}-b} \max(u, v)^{\frac{1}{2}+b} + o(\alpha^0) \\ &= C_b (uv)^{\frac{1}{2}-b} \sum_{0 \leq n \leq \frac{1}{1-b}} (-\mu)^n \alpha^{n(1-b)-b} - \frac{1}{2b} \min(u, v)^{\frac{1}{2}-b} \max(u, v)^{\frac{1}{2}+b} + o(\alpha^0). \end{aligned}$$

This permits to infer the expansions

$$e^{-tN_{\mu}}(u, v) = C_b (uv)^{\frac{1}{2}-b} \sum_{0 \leq n < \frac{1}{1-b}} \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(b - n(1-b))} t^{b-n(1-b)-1} + o(t^{-1+\epsilon}) \quad (51)$$

for any  $\epsilon > 0$ , and

$$\begin{aligned} L_{\mu}(t; u, v) &= C_b (uv)^{\frac{1}{2}-b} \sum_{0 \leq n \leq \frac{1}{1-b}} \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(1 + b - n(1-b))} t^{b-n(1-b)} \\ &\quad - \frac{1}{2b} \min(u, v)^{\frac{1}{2}-b} \max(u, v)^{\frac{1}{2}+b} + o(1). \end{aligned} \quad (52)$$

They give the large  $t$  asymptotics relevant for the study of the long time behavior of the tracer 2-point function in the decaying and forced regime, respectively.

### 4.3 Consequences for the tracer transport

Substituting the expansion (51) into (43) and then into (41), one infers from (49) that the dominant terms in the free decay of the tracer 2-point function are  $r$ -independent:

$$F(t, r) = \left(\frac{2-\xi}{2}\right)^{2b-1} \tilde{D}_0^{b-1} C_b \sum_{0 \leq n < \frac{b}{1-b}} \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(b-n(1-b))} t^{b-n(1-b)-1} \cdot \left( \int_0^\infty r'^{a-\xi} F(0, r') dr' + \tilde{\lambda} F(0, 0) \right) + o(t^{-1+\epsilon}).$$

Similarly, from (52), (43), (41) and, finally, (50), we infer that in the forced situation

$$F(t, r) = \left(\frac{2-\xi}{2}\right)^{2b-1} \tilde{D}_0^{b-1} C_b \sum_{0 \leq n \leq \frac{b}{1-b}} \frac{(-\mu)^n}{\Gamma(1+b-n(1-b))} t^{b-n(1-b)} \cdot \left( \int_0^\infty r'^{a-\xi} \chi(r') dr' + \tilde{\lambda} \chi(0) \right) - \frac{1}{\tilde{D}_0(1-a)} \left( r^{1-a} \int_0^r r'^{a-\xi} \chi(r') dr' + \int_r^\infty r'^{1-\xi} \chi(r') dr' + \tilde{\lambda} r^{1-a} \chi(0) \right) + o(1). \quad (53)$$

It is interesting to notice that the number of terms appearing in this expansion is variable depending on the value of the integer part of  $\frac{b}{1-b}$ . In particular if  $n(1-b) - b = 0$ , i.e.  $b = 1 - \frac{1}{n+1}$  for some natural number  $n$ , then there is a supplementary term of order 0 in the forced 2-point function.

For  $\tilde{\lambda} = 0$ , the result (53) reduces to the one worked out in [11]. The physics of the solutions with  $0 < \tilde{\lambda} < \infty$  is not very different from the one for  $\tilde{\lambda} = 0$  described in Sect. 3.2 and 3.3 of [11]. The tracer “energy” with density  $\frac{1}{2}\theta^2$  is dissipated but, in the forced case, also building up in the constant mode growing like  $t^b$ . Non-zero  $\tilde{\lambda}$  brings subleading terms in this buildup proportional to  $t^{b-n(1-b)}$ . In the stationary state the mean tracer energy density  $\langle \frac{1}{2}\theta^2 \rangle$  is infinite. The rate of pumping of the constant mode  $\propto t^{b-1}$  goes, however, to zero. The tracer energy dissipation rate equal to  $-\frac{1}{2}MF(t)|_{r=0}$  approaches at long times the stationary value equal to the injection rate  $\frac{1}{2}\chi(0)$  and the stationary state exhibits a **direct energy cascade**. The tracer 2-point structure function approaches the stationary form

$$S_2(t, r) = 2(F(t, 0) - F(t, r)) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{2}{\tilde{D}_0} \left[ \int_{0 < r' < r'' < r} r''^{-a_\xi} r'^{a_\xi - \xi} \chi(r') dr' dr'' + \frac{1}{1-a_\xi} \tilde{\lambda} r^{1-a_\xi} \chi(0) \right]. \quad (54)$$

For small  $r$  the integral on the right hand side scales as  $r^{2-\xi}$  while the term multiplying  $\tilde{\lambda}$  is proportional to  $r^{1-a_\xi}$ . Since  $1 - a_\xi < 2 - \xi$ , a non-zero  $\tilde{\lambda}$  has an important effect. It changes the normal small  $r$  scaling  $\propto r^{2-\xi}$  of the 2-point structure function occurring for  $\tilde{\lambda} = 0$  to the **anomalous scaling** proportional to the zero mode  $r^{1-a_\xi}$  of  $M$ .

Let us also briefly mention the case  $\tilde{\lambda} = \infty$ , i.e. the one with absorbing boundary condition and coalescence of trajectories that was not covered above (the limits  $t \rightarrow \infty$  and  $\tilde{\lambda} \rightarrow \infty$  do not commute!). Using (48), the transition probabilities take in this case the form

$$P_\infty^t(r; dr') = e^{tM_\infty}(r, r') dr' + \left[ 1 - \gamma(b, \frac{r^{2-\xi}}{(2-\xi)^2 \tilde{D}_0 t}) \Gamma(b)^{-1} \right] \delta(r') dr',$$

the same as in the strongly compressible phase, see Eq. (2.26) of [11]. The coefficient of  $\delta(r')$  is obtained simply by calculating the missing mass of  $e^{tM_\infty}(r, r')$ . For large time  $t$ , the 2-point function of the forced tracer becomes:

$$F(t, r) = \left( t - \frac{1}{(2-\xi)^{2b(1-b)} \Gamma(1+b)} \tilde{D}_0^{-b} t^{1-b} r^{1-a} + \frac{1}{(2-\xi)^{2(1-b)} \tilde{D}_0^{-1}} r^{2-\xi} \right) \chi(0) + \frac{1}{(1-a)\tilde{D}_0} \left( \int_0^r r'^{1-\xi} \chi(r') dr' + r^{1-a} \int_r^\infty r'^{a-\xi} \chi(r') dr' \right) + o(1).$$

The behavior of this solution is similar to that of the strongly compressible phase analyzed in Sect. 3.4 of [11] and quite different from the one for finite  $\tilde{\lambda}$ . The scalar energy builds up linearly in time in the constant mode in an **inverse cascade** process and there is no persistent dissipation. At difference with the solution in the strongly compressible phase, however, the tracer 2-point structure function does not reach a stationary regime due to the contribution proportional to the zero mode  $r^{1-a}$  growing in time like  $t^{1-b}$ .

## 5 Exact limit of the stationary 2-point tracer structure function

In the main part of the paper we have used in the calculations the approximate forms of functions  $f_1$  and  $f_2$  instead of their exact versions. The question arises whether such calculations reproduce the actual behavior of the limiting dispersion process, up to finite renormalization of the glue parameter  $\tilde{\lambda}$ . Besides, one would like to have exact expressions for some quantities, like the mass at zero of the limiting speed measure or the limiting stationary 2-point structure function of the tracer. It turns out that it is indeed possible to obtain precise formulae and that the asymptotic behavior of the integrals that we calculated approximately differs from the exact one by a (finite, non-zero) multiplicative renormalization.

In what follows, we shall need detailed information about functions  $f_{1,2}(r; l_\nu, l_\kappa)$  and their ratio  $f_2(r; l_\nu, l_\kappa)/f_1(r; l_\nu, l_\kappa)$  that is described in Appendix F. In particular we prove there the positivity for  $r > 0$  and the scaling properties

$$f_1(r; l_\nu) = l_\nu^\xi f_1(\frac{r}{l_\nu}; 1), \quad f_2(r; l_\nu) = l_\nu^{\xi-1} f_1(\frac{r}{l_\nu}; 1) \quad (55)$$

of functions  $f_{1,2}(r; l_\nu) \equiv f_{1,2}(r; l_\nu, 0)$ . We also establish two decompositions. The first one:

$$f_1(\rho; 1) = \tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\star(\rho) = \tilde{C}_0 \rho^2 + \rho^4 f_1^\star(\rho) \quad (56)$$

$$f_2(\rho; 1) = a_2 \tilde{C}_0 \rho f_2^\star(\rho) = a_2 \tilde{C}_0 \rho + \rho^3 f_2^\star(\rho) \quad (57)$$

with  $\lim_{\rho \rightarrow 0} f_{1,2}^\star(\rho) = 1$  will be used for small  $\rho$ . The second one:

$$f_1(\rho; 1) = \rho^\xi f_1^\diamond(\rho) = \rho^\xi + \rho^{\xi-2} f_1^\diamond(\rho) \quad (58)$$

$$f_2(\rho; 1) = a_\xi \rho^{\xi-1} f_2^\diamond(\rho) = a_\xi \rho^{\xi-1} + \rho^{\xi-3} f_2^\diamond(\rho) \quad (59)$$

with  $\lim_{\rho \rightarrow \infty} f_i^\diamond(\rho) = 1$  will be employed for large  $\rho$ . The coefficients  $a_2$  and  $a_\xi$  are given by (18). The above decompositions are used in Appendix F to establish bounds (83) to (85) on the ratio  $f_2(r; l_\nu, l_\kappa)/f_1(r; l_\nu, l_\kappa)$ . Given such bounds, it is immediate to see that there exists a constant  $B'$  such that, for any  $r > 0$  and any  $0 < l_\kappa < l_\nu < 1$ , the density  $s(r)$  of the natural scale measure given by (22) is comprised between  $1/B'$  times and  $B'$  times the approximate expressions listed in Table 3. Using additionally estimates (81) to (82) from Appendix F, one infers that the same statement holds for the density  $m(r) = [f_1(r)s(r)]^{-1}$  of the speed measure. It is now easy to show the convergence of  $s(r)$  and  $m(r)$  to  $s_0(r)$  and  $m_0(r)$  given by (24) and (30) for  $r > 0$ . Controlling what happens around  $r = 0$  will be the main difficulty.

After the above preparation, we pass to the main topic of this section: the proof of convergence, when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$ , of the stationary 2-point structure function of the forced passively advected tracer. We shall show that, under the condition (29) with  $\lambda < \infty$ , the limit exists and corresponds to the structure function computed directly at  $l_\nu, l_\kappa = 0$  with the sticky boundary condition at zero, see (54). Besides, we shall establish a precise relation between  $\lambda$  and the glue parameter  $\tilde{\lambda}$  of the boundary condition (37).

For  $l_\nu, l_\kappa$  positive, the stationary 2-point structure function is the unique solution vanishing at zero together with its first derivative of the equation  $M_{\nu,\kappa} S_2 = 2\chi$ . It is

given by the relation:

$$S_2(r) = \frac{2}{D_0} \int_0^r s(r'') dr'' \int_0^{r''} m(r') \chi(r') dr' = \frac{2}{D_0} \int_{0 < r' < r'' < r} s(r'') m(r') \chi(r') dr' dr''.$$

The last integral may be cut up into six pieces according to the positions of  $r', r''$  with respect to  $l_\kappa, l_\nu$ . The bounds given for  $s(r)$  and  $m(r)$  indicate that in each domain the dominant behavior of the contribution to  $S_2(r)$  is estimated correctly by using the rough forms in Table 3, up to multiplication by a constant bounded independently of  $l_\kappa, l_\nu$  and  $r$ . We get the following behaviors. The domain  $l_\nu < r' < r''$  gives a contribution behaving at lowest order like  $r^{2-\xi}$  for small  $r$  and like  $r^{1-a_\xi}$  for large  $r$ . Domains  $l_\kappa < r' < l_\nu < r''$  and  $r' < l_\kappa < l_\nu < r''$  both give terms of order  $l_\nu^{2-\xi+a_\xi-a_2} l_\kappa^{a_2-1} r^{1-a_\xi}$ . Finally the contribution from domains  $r'' < r' < l_\nu$  is always subdominant compared to the former ones. This suggests that the limiting value of  $S_2(r; l_\nu, l_\kappa)$  will depend on the limit of  $l_\nu^{2-\xi+a_\xi-a_2} l_\kappa^{a_2-1}$  as  $l_\nu, l_\kappa$  go to zero. The only task left is to calculate the limit of  $S_2(r; l_\nu, l_\kappa)$  for  $l_\nu^{2-\xi+a_\xi-a_2} l_\kappa^{a_2-1} \rightarrow \lambda$  with  $\lambda < \infty$ .

We already know that the domains with  $0 < r'' < r' < l_\nu$  will give vanishing contributions (supposing that the others give a finite one). Let us turn to the other three ones. The easiest to handle is  $l_\nu < r'' < r' < r$ . Because of the bounds on  $s(r)$  and  $m(r)$  we can immediately use the Dominated Convergence Theorem to obtain

$$\begin{aligned} \lim_{l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0} \int_{l_\nu < r' < r'' < r} s(r''; l_\nu, l_\kappa) m(r'; l_\nu, l_\kappa) \chi(r') dr' dr'' = \\ \int_{0 < r' < r'' < r} s(r''; 0, 0) m(r'; 0, 0) \chi(r') dr' dr'' = \int_{0 < r' < r'' < r} r''^{-a_\xi} r'^{a_\xi - \xi} \chi(r') dr' dr''. \end{aligned}$$

Finally we turn to the two remaining domains covering the region  $0 < r' < l_\nu < r'' < r$ . The corresponding integral factorizes:

$$\begin{aligned} \int_{0 < r' < l_\nu < r'' < r} s(r''; l_\nu, l_\kappa) m(r'; l_\nu, l_\kappa) \chi(r') dr' dr'' \\ = \left[ \int_{l_\nu}^r s(r''; l_\nu, l_\kappa) dr'' \right] \left[ \int_0^{l_\nu} m(r'; l_\nu, l_\kappa) \chi(r') dr' \right]. \end{aligned}$$

To the first factor, one may again apply the Dominated Convergence Theorem to obtain

$$\begin{aligned} \lim_{l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0} \int_{l_\nu}^r s(r''; l_\nu, l_\kappa) dr'' \\ = \int_0^r s(r''; 0, 0) dr'' = \int_0^r \left( \frac{r_0}{r''} \right)^{a_\xi} dr'' = \frac{1}{1-a_\xi} r_0^{a_\xi} r^{1-a_\xi}. \end{aligned}$$

Control of the second factor, that converges to the mass at zero of the limiting speed measure multiplied by  $\chi(0)$ , is the crucial element of the argument and it requires technical work. We postpone it to Appendix G. We prove there that for  $\lambda < \infty$ ,

$$\lim_{l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0} \int_0^{l_\nu} m(r'; l_\nu, l_\kappa) \chi(r') dr' = r_0^{-a_\xi} Y \lambda \chi(0) \quad (60)$$

with

$$\begin{aligned} Y = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} \tilde{C}_0 \right)^{-\frac{a_2+1}{2}} B\left(\frac{d}{2}, \frac{1-a_2}{2}\right) \\ \cdot \exp \left[ - \int_0^1 \rho \frac{[f_2^\bullet(\rho) - a_2 f_1^\bullet(\rho)]}{\tilde{C}_0 f_1^\bullet(\rho)} d\rho - \int_1^\infty \frac{f_2^\heartsuit(\rho) - a_\xi f_1^\heartsuit(\rho)}{\rho^3 f_1^\heartsuit(\rho)} d\rho \right] \quad (61) \end{aligned}$$

where  $l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0$  denotes the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  under condition (29) and  $B(x, y)$  is the Euler Beta function. The constant  $Y$  is positive. The mass at zero of the limiting speed measure is then equal to  $r_0^{-a_\xi} Y \lambda$  which should be contrasted with the approximate formula (31). Given the above result, the contribution of the region  $0 < r' < l_\nu < r'' < r$  to  $S_2(r)$  becomes

$$\frac{2Y}{\bar{D}_0(1-a_\xi)} \lambda r^{1-a_\xi} \chi(0).$$

The final outcome is the relation:

$$\lim_{l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0} S_2(r) = \frac{2}{\bar{D}_0} \left( \int_{0 < r' < r'' < r} r''^{-a_\xi} r'^{a_\xi - \xi} \chi(r') dr' dr'' + \frac{Y}{1-a_\xi} \lambda r^{1-a_\xi} \chi(0) \right)$$

which agrees with expression (54) of Sect. 4.3 if we put  $\tilde{\lambda} = Y\lambda$ . This means that the structure function obtained in the  $l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0$  limit coincides with the one that is obtained directly using the sticky process with the generator  $M_{\tilde{\lambda}}$  for the value

$$\tilde{\lambda} = Y\lambda \quad (62)$$

of the glue parameter. Note that the effect of using the exact versions of  $f_1, f_2$  instead of the approximate versions of table Table 2 manifests itself only in the change of the proportionality constant between  $\lambda$  and the glue parameter  $\tilde{\lambda}$ , i.e. in a finite multiplicative renormalization of  $\tilde{\lambda}$ .

In view of all that has been said, it is natural to expect that the entire Lagrangian pair dispersion process behaves in the  $l_\nu, l_\kappa \xrightarrow{\lambda} 0$  limit as the diffusion process with the generator  $M_{\tilde{\lambda}}$  for the glue parameter  $\tilde{\lambda}$  given by (62). In particular, such a process is equivalent in the coordinate (19) to the Bessel process of parameter  $-b_{\xi, \varphi}$  with a sticky behavior at zero.

## 6 Conclusions

We have analyzed in this article the small viscosity, small diffusivity behavior of the Lagrangian dispersion in the Kraichnan model with intermediate compressibility degree  $\frac{d-2}{2\xi} + \frac{1}{2} < \varphi < \frac{d}{2}$ . In this interval, the Lagrangian trajectories may separate fast due to the spatial roughness of velocities but may also come close due to the trapping effects of compressibility. As first suggested in [5, 6], we have discovered different possible asymptotic regimes of the Lagrangian flow, depending on the limiting behavior of the Prandtl number when the viscous and diffusive cut-off scales  $l_\nu$  and  $l_\kappa$  are taken to zero. This arbitrariness reflects the frustration of the particles unable to choose between opposites trends of life. Specifically, we have argued that there are different limits of the dispersion process depending on the behavior of the combination

$$l_\nu^{a_\xi+2-\xi-a_2} l_\kappa^{a_2-1} = \text{const. } l_\nu^{a_\xi+1-\xi} (Pr)^{\frac{1-a_\xi}{2}}$$

of the cutoff scales. If this combination goes to zero when  $l_\nu$  and  $l_\kappa$  are sent to zero, the resulting dispersion process is that of trajectories instantaneously reflecting off each other upon hitting. If it goes to infinity, the trajectories coalesce when they meet, behaving similarly as in the strongly compressible regime. Finally, if the above combination goes to a finite limit  $\lambda$  when  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  (which sends to infinity the Prandtl number at a specific pace) then the resulting dispersion process exhibits the sticky or slowly reflecting behavior with  $\lambda$  proportional to the amount of "glue" keeping the particles together. Such a behavior leaves a visible imprint on the passive advection of tracers in the subleading contributions to the tracer energy condensation in the zero wave number and, even more dramatically, by generating anomalous scaling of the stationary 2-point structure function of the tracer. The analysis in the main part of the paper was based on approximate calculations of the asymptotic behavior of the natural scale and speed measure of the Lagrangian dispersion process and of the eigenfunctions of its generator. To set the results

on a firmer ground we have also shown rigorously that the finite  $l_\nu, l_\kappa$  stationary 2-point structure function of the tracer converges, under the limit  $l_\nu, l_\kappa \rightarrow 0$  with finite  $\lambda$ , to the stationary structure function obtained directly from the sticky dispersion process. This argument allowed to fix exactly the proportionality constant between  $\lambda$  and the value of the glue parameter. Undoubtedly, with a little more work controlling the convergence of resolvents of  $M_{\nu,\kappa}$  to that of  $M_\lambda$  one should be able to prove, along the lines of [9] that the laws of the dispersion processes for positive  $l_\nu, l_\kappa$  converge to the law of the sticky process.

The main open problem, untouched by our analysis, is the construction of  $N$ -particle processes corresponding to the sticky behavior of the two-particle dispersion. In particular it would be interesting to know whether the amount of two-particle glue is the only parameter that labels possible Lagrangian flows in the moderately compressible phase of the Kraichnan model. The Dirichlet form approach used in [18] in the 1-dimensional  $\xi = 0$  case to tackle such questions is unavailable in the other instances, at least in its classical form, due to the lack of symmetry of the generators of the  $N$ -particle processes. Further open questions of fundamental importance concern possible occurrence of sticky Lagrangian flows in more realistic velocity ensembles exhibiting fully developed turbulence.

## Appendices

### A Briefly on one-dimensional diffusion processes

We collect here some facts, used in the main text, about one-dimensional diffusion processes. The reader may wish to consult the relevant literature (e.g. [3, 20]) for an extensive treatment.

Let  $X(t)$  be a stochastic diffusion process on  $\mathbb{R}_+$ . The Kolmogorov backwards evolution operator  $P^t$  of the process, acting on bounded continuous functions  $f$  defined on  $\mathbb{R}_+$ , is given by

$$(P^t f)(r) = \mathbb{E}_r f(X(t)) = \int f(r') P^t(r, dr')$$

where we define  $\mathbb{E}_r f(X(t)) \equiv \mathbb{E}(f(X(t)) | X(0) = r)$ . The measures  $P^t(r, dr')$  giving the kernels of operators  $P^t$  are the transition probabilities of the process. The family  $(P^t)_{t \in \mathbb{R}_+}$  forms a one-parameter semigroup whose generator  $\partial_t P^t|_{t=0}$  we shall denote by  $M$ . In general  $M$  is a second order differential operator. The transition probabilities verify the PDE

$$\partial_t P^t(r, dr') = M(r) P^t(r, dr').$$

Any regular diffusion process may be derived from Brownian motion by an adequate change of variables defined in terms of the natural scale and the speed measure associated to the process. The natural scale is defined as the unique, up to affine transformations, continuous strictly increasing function  $S$  such that  $S(X(t))$ , i.e.  $X(t)$  considered in the new spatial coordinate  $S$ , is a martingale.  $S$  is called the natural scale and  $\varrho(r) = \frac{dS(r)}{dr}$  the density of the natural scale measure with respect to the coordinate  $r$  on  $\mathbb{R}_+$ .

If the range of  $S$  is the whole real line then the process  $S(X(t))$ , for  $X(0)$  fixed, has the same distribution as an appropriately time-changed Brownian motion starting from  $S(X(0))$ . This means that if  $W$  is a Brownian motion starting from  $S(X(0))$ , then  $S(X(t))$  has the same law as  $W(\tau(t))$  for some function  $\tau(t) = \tau(t; W)$  which depends also on the realization of the Brownian path. Let us denote by  $L(\tau, S; W)$  the local time of the Brownian path  $W$  at the point  $S$  up to instant  $\tau$ . Formally,  $L(\tau, S; W) = \int_0^\tau \delta(S - W(\sigma)) d\sigma$ . The speed measure of the process  $X(t)$  is defined as the unique positive measure  $dm(S)$  on  $\mathbb{R}$  such that the relation between  $t$  and  $\tau$  may be written as

$$\tau(t; W) = \inf \left\{ \sigma : \int L(\sigma, S; W) dm(S) > t \right\}$$

or, equivalently,

$$t(r; W) = \int L(r, S; W) dm(S).$$

Intuitively, the speed measure expresses how much time the (time-changed) Brownian motion needs to advance "one step" at a given point in space. The larger the (density of the) speed measure at some point, the slower the (time-changed) Brownian motion advances.

The generator  $M$  of the Kolmogorov backward evolution semigroup may be written in terms of the densities  $m(S) = \frac{dm(S)}{dS}$  or  $m(r) = \frac{dm(r)}{dr}$  and  $s(r)$  as

$$M = \frac{1}{2m(S)} \partial_S^2 = \frac{1}{2m(r)} \partial_r \circ \frac{1}{s(r)} \partial_r.$$

Similarly, if the range of  $S$  is a positive half-line, which may be chosen as  $\mathbb{R}_+$ , then analogous statements hold with the Brownian motion  $W$  replaced by the Brownian motion reflecting at zero, i.e. by  $|W(t)|$ . In any case, the behavior of the process at the boundary point  $r = 0$  may be classified according to Feller's criteria expressible in terms of the natural scale and the speed measure. When  $r = 0$  is a regular boundary point, the behavior of the process at this point depends on the its mass  $m(\{0\})$  w.r.t the speed measure and is reflected in the boundary condition for the generator  $M$ .

Finally let us recall from [13] the following formula for hitting probabilities of some process  $X_t$ . Denote by  $H_{r'}$  the hitting time of the process at some point  $r'$ . Then for  $\alpha > 0$

$$\mathbb{E}_r(e^{-\alpha H_{r'}}) = \frac{\phi(r)}{\phi(r')} \quad (63)$$

where  $\phi$  is the solution of  $(M - \alpha)\phi = 0$  that verifies the correct boundary condition either on the left (i.e. at 0 if the process is defined on the half-line) if  $r < r'$  or on the right (i.e. at infinity if the process is defined on the half-line) if  $r > r'$ .

## B A pathological case of convergence

Let  $L$  be an arbitrary length and  $l$  a small scale that we shall send to zero. A diffusion process may be specified by giving its natural scale and its speed measure. Consider such a process on  $\mathbb{R}_+$  whose natural scale is

$$S(r) = \begin{cases} l - L + \frac{l}{L}r & \text{for } r \in [0, l], \\ r & \text{for } r \in [l, \infty) \end{cases}$$

so that the density of the natural scale measure w.r.t.  $r$  is

$$s(r) = \begin{cases} \frac{l}{L} & \text{for } r \in [0, l], \\ 1 & \text{for } r \in [l, \infty). \end{cases}$$

Let us take for (the density w.r.t.  $r$  of) the speed measure

$$m(r) = \begin{cases} \frac{l}{L} & \text{for } r \in [0, l], \\ 1 & \text{for } r \in [l, \infty). \end{cases}$$

We see that taking the limit  $l \rightarrow 0$  for  $r > 0$  we get  $s_0(r) = 1$  corresponding to  $S_0(r) = r$ , however  $\lim_{l \rightarrow 0} S(0) = -L$ . This is not very different from the case studied in the Sect. 2, where  $S(0) = -\infty$  as long as there is finite regularization. For the limit of the speed measure we get  $m_0(r) = L\delta(r) + 1$ .

Let us now pass to the natural scale first. Then  $m(S) = \frac{m(r)}{s(r)} = 1$  for all  $S$ . Thus  $m_0(S) = 1$ . This is of course incompatible with the previous result.

The explanation of this phenomenon is the following. To the right of  $l$  the process is just Brownian motion. To the left of  $l$  it is Brownian motion on a segment of length  $L$  (with reflecting left end) "squeezed" into the segment  $[0, l]$ . Thus when we take  $l$  to zero, the limiting process will be a Brownian motion on  $\mathbb{R}_+$  which "sees" an additional segment of length  $L$  to its left. This is of course a non-Markovian boundary condition.

## C Asymptotic behavior of eigenfunctions

Starting from formula (34) we calculate the limit of  $c_E^+/c_E^-$  when  $l_\kappa, l_\nu \rightarrow 0$ . We assume that  $l_\kappa < l_\nu$ , but not necessarily  $l_\kappa \ll l_\nu$ . The calculation can be done in the usual way by expanding  $c_E^+/c_E^-$  in a multivariate power series. First we expand every term in (34) to the **minimal orders** in  $l_\nu, l_\kappa$ . That is, we expand the expressions into a power series (and possibly powers of logarithms) in  $l_\nu, l_\kappa$  and keep all the terms such that there is no term of smaller order simultaneously in  $l_\nu$  and in  $l_\kappa$ .

We list below the expansion to minimal orders in  $l_\kappa, l_\nu$  of all terms appearing in (34):

$$\begin{aligned}
g_1^-(l_\kappa) &\sim 1 & g_1^-(l_\kappa) &\sim -\frac{E}{d} l_\nu^{2-\xi} l_\kappa^{-1} \\
\gamma^- &\sim \frac{E}{1-a_2} l_\nu^{2-\xi} & \gamma^+ &\sim 1-a_2 \\
g_2^-(l_\kappa) &= (l_\kappa)^{\gamma^-} & g_2^-(l_\kappa) &= \gamma^-(l_\kappa)^{\gamma^- - 1} \sim \frac{E}{1-a_2} l_\nu^{2-\xi} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} \\
g_2^+(l_\kappa) &= (l_\kappa)^{\gamma^+} \sim l_\kappa^{1-a_2} & g_2^+(l_\kappa) &= \gamma^+(l_\kappa)^{\gamma^+ - 1} \sim (1-a_2) l_\kappa^{-a_2} \\
g_2^-(l_\nu) &= (l_\nu)^{\gamma^-} \sim e^{\frac{E}{1-a_2} l_\nu^{2-\xi} \ln l_\nu} \sim 1 & g_2^-(l_\nu) &= \gamma^-(l_\nu)^{\gamma^- - 1} \sim \frac{E}{1-a_2} l_\nu^{1-\xi} \\
g_2^+(l_\nu) &= (l_\nu)^{\gamma^+} \sim l_\nu^{1-a_2} & g_2^+(l_\nu) &= \gamma^+(l_\nu)^{\gamma^+ - 1} \sim (1-a_2) l_\nu^{-a_2} \\
g_3^-(l_\nu) &\sim 1 & g_3^-(l_\nu) &\sim -\frac{(2-\xi)^2 E}{4(1-\xi+a_\xi)} l_\nu^{1-\xi} \\
g_3^+(l_\nu) &\sim l_\nu^{1-a_\xi} & g_3^+(l_\nu) &\sim (1-a_\xi) l_\nu^{-a_\xi}
\end{aligned}$$

Note that  $(l_\kappa)^{\gamma^-}$  cannot be further expanded without any additional hypothesis on the relative behaviors of  $l_\nu$  and  $l_\kappa$  because both the base and the exponent go to zero and one depends on  $l_\kappa$  the other on  $l_\nu$ . All we can say is that  $l_\kappa^\epsilon = o((l_\kappa)^{\gamma^-})$  for any  $\epsilon > 0$ , and  $(l_\kappa)^{\gamma^-} < 1$  when  $l_\kappa < 1$ . We shall keep  $(l_\kappa)^{\gamma^-}$  as it is in the expansions.

Calculations to minimal order with expansions into multivariate power series are a little trickier than with univariate expansions. Even if the coefficients of some but not all monomials in the expansion simplify to zero at intermediate stages then possibly higher order terms should be taken into account because they could give rise to terms of minimal order<sup>3</sup>. This precaution is implicit in the computations. However, as long as there is only one term of minimal order (and it does not simplify out), no special care is needed.

After having determined above the behavior of each term, we may now calculate the sub-products of (34) to minimal order. First evaluate

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} g_3^-(l_\nu) & -g_3^-(l_\nu) \\ -g_3^+(l_\nu) & g_3^+(l_\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^+(l_\nu) & g_2^-(l_\nu) \\ g_2^+(l_\nu) & g_2^-(l_\nu) \end{pmatrix} \\
&\sim \begin{pmatrix} -(1-a_2) l_\nu^{-a_2} & -\left[ \frac{(2-\xi)^2}{4(1-\xi+a_\xi)} + \frac{1}{1-a_2} \right] E l_\nu^{1-\xi} \\ (a_\xi - a_2) l_\nu^{1-a_2-a_\xi} & -(1-a_\xi) l_\nu^{-a_\xi} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

It is straightforward to check that every coefficient is different from zero, except for  $a_\xi - a_2$  which may be equal to zero. So there the expansion has to be pushed further, but

<sup>3</sup>Take for example the sum of two polynomials  $(X+XY+Y^2)+(-X+Y^2)$ . The sum of the minimal order expansions is  $(X+Y^2)+(-X+Y^2)=2Y^2$  but the minimal order expansion of the sum is of course  $XY+2Y^2$ .

since each following term is of higher order both in  $l_\nu$  and in  $l_\kappa$ , we may simply replace  $(a_\xi - a_2)l_\nu^{1-a_2-a_\xi}$  by  $O(l_\nu^{1-a_2-a_\xi})$ . Next evaluate

$$\begin{pmatrix} g_2^-(l_\kappa) & -g_2^-(l_\kappa) \\ -g_2^+(l_\kappa) & g_2^+(l_\kappa) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_1^-(l_\kappa) \\ g_1^-(l_\kappa) \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \left[ \frac{1}{1-a_2} + \frac{1}{d} \right] E l_\nu^{2-\xi} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} \\ -(1-a_2) l_\kappa^{-a_2} \end{pmatrix}.$$

Again, it is straightforward to check that every coefficient is different from zero. We may multiply together (exactly) the preceding two subexpressions to arrive at

$$\begin{pmatrix} c_E^+ \\ c_E^- \end{pmatrix} \propto \begin{pmatrix} -\frac{d+1-a_2}{d} E l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} + \left[ 1 + \frac{(2-\xi)^2(1-a_2)}{4(1-\xi+a_\xi)} \right] E l_\nu^{1-\xi} l_\kappa^{-a_2} \\ O \left( l_\nu^{3-a_2-a_\xi-\xi} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} \right) + (1-a_2)(1-a_\xi) l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2} \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Now all the terms are of minimal order. Additionally, we have

$$l_\nu^{3-a_2-a_\xi-\xi} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} = l_\nu^{1-a_\xi} (l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-}) = o(l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-}), \quad (65)$$

$$l_\nu^{1-\xi} l_\kappa^{-a_2} = l_\nu^{a_\xi+1-\xi} (l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2}) = o(l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2}). \quad (66)$$

Let us first suppose that  $l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} = o(l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2})$ . In this case  $c_E^+/c_E^-$  goes to zero. This is so even if in (64) the expansion for  $c_E^+$  cancels out, meaning that the expansion should be pushed further. Indeed, subsequent terms in the expansion are of higher order thus asymptotically smaller. On the other hand, there can be no cancellation in the expansion of  $c_E^-$  because (65) and the hypothesis of the present paragraph combine to  $l_\nu^{3-a_2-a_\xi-\xi} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-} = o(l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2})$ .

Conversely, if we suppose  $l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2} = o(l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-})$ , then  $c_E^+/c_E^-$  goes to  $\infty$ . This even if in (64) the expansion for  $c_E^-$  cancels out, meaning that the expansion should be pushed further. Once again, subsequent terms in the development are of higher order thus asymptotically smaller. And now it is in the development of  $c_E^+$  that there can be no cancellation because (66) and the hypothesis of the present paragraph combine to  $l_\nu^{1-\xi} l_\kappa^{-a_2} = o(l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-})$ .

In consequence, if  $c_E^+/c_E^-$  should have a finite non-zero limit, then  $l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-}$  and  $l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2}$  must be of the same order. In particular they are much bigger than the other two terms so there are no cancellations in (64). Also it is easy to see that in this case  $l_\kappa$  cannot decrease faster than some power of  $l_\nu$ . If we write  $l_\nu^{-a_\xi} l_\kappa^{-a_2} = O(l_\nu^{2-\xi-a_2} l_\kappa^{-1} (l_\kappa)^{\gamma^-})$  then, using  $(l_\kappa)^{\gamma^-} = O(1)$ , we have  $l_\nu^{\frac{2-\xi-a_2+a_\xi}{1-a_2}} = O(l_\kappa)$ . This implies  $(l_\kappa)^{\gamma^-} \sim 1$ . We may then conclude that

$$\frac{c_E^+}{c_E^-} \sim -\frac{d+1-a_2}{(1-a_2)(1-a_\xi)d} E l_\nu^{2-\xi-a_2+a_\xi} l_\kappa^{a_2-1}.$$

This expression has a finite limit if and only if  $l_\nu^{2-\xi-a_2+a_\xi} l_\kappa^{a_2-1}$  goes to some finite limit  $\lambda$ , just as in (29). We obtain this way formula (35). In fact our proof shows that (35) is valid also if  $\lambda$  is zero or infinite.

## D Spectral analysis of $N_\mu$

The (operator valued) spectral measure for the operator  $N_\mu$  may be evaluated with the help of the formula

$$E_\mu(\mathcal{B}) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{B}} [G_{\mu, \alpha+i\epsilon} - G_{\mu, \alpha-i\epsilon}] d\alpha$$

where  $G_{\mu, \alpha}$  is the resolvent

$$G_{\mu, \alpha} \equiv (N_\mu - \alpha)^{-1}$$

and  $\mathcal{B}$  is a (Borel) subset of  $\mathbb{R}$ . The kernel  $G_{\mu,\alpha}(u, v)$  of  $G_{\mu,\alpha}$  is determined by demanding that for each  $v \in \mathbb{R}_+$ , as a function of  $u \in \mathbb{R}_+$ , it is in the domain of  $N_\mu$  and that it satisfies the equation

$$(N(u) - \alpha) G_{\mu,\alpha}(u, v) = \delta(u - v). \tag{67}$$

To calculate  $G_{\mu,\alpha}(u, v)$  we note that for  $u \neq v$  we simply have  $(N(u) - \alpha)G_{\mu,\alpha}(u, v) = 0$ . Viewed as a function of  $u$ ,  $G_{\mu,\alpha}(u, v)$  verifies at zero the boundary condition (42) and should go to zero at infinity. A solution of  $(N_\mu - \alpha)\phi(u) = 0$  satisfying the correct boundary condition at zero is

$$\phi_{\mu,\alpha}(u) = u^{\frac{1}{2}} [I_{-b}(\sqrt{-\alpha}u) + \mu(-\alpha)^{1-b}I_b(\sqrt{-\alpha}u)], \quad \alpha \notin \mathbb{R}_+. \tag{68}$$

Here  $I_{\pm b}$  is the modified Bessel function of parameter  $\pm b$ . The square-root is taken with its principal definition. Similarly, the solution of  $(N - \alpha)\psi(u) = 0$  decaying at infinity is

$$\psi_\alpha(u) = u^{1/2}K_b(\sqrt{-\alpha}u), \quad \alpha \notin \mathbb{R}_+ \tag{69}$$

where  $K_b$  is the modified Bessel function of the second kind of parameter  $b$ . With the correct matching at  $u = v$  to assure that (67) is satisfied, we obtain

$$G_{\mu,\alpha}(u, v) = \begin{cases} \frac{\phi_{\mu,\alpha}(u)\psi_\alpha(v)}{w_{\mu,\alpha}} & \text{if } u \leq v, \\ \frac{\psi_\alpha(u)\phi_{\mu,\alpha}(v)}{w_{\mu,\alpha}} & \text{if } u \geq v \end{cases} \tag{70}$$

where  $w_{\mu,\alpha}$  is the Wronskian of  $\phi_{\mu,\alpha}$  and  $\psi_\alpha$ , i.e.

$$w_{\mu,\alpha} \equiv \phi'_{\mu,\alpha}(z)\psi_\alpha(z) - \phi_{\mu,\alpha}(z)\psi'_\alpha(z)$$

which is independent of  $z$ . To evaluate the Wronskian, we may use the asymptotic expansions for  $z \rightarrow +\infty$

$$I_\nu(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}(1 + O(\frac{1}{z})), \quad K_\nu(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}e^{-z}(1 + O(\frac{1}{z})),$$

see Eq. 8.451.6,7 of [12]. The result is

$$w_{\mu,\alpha} = 1 + \mu(-\alpha)^{1-b}.$$

Next we have to calculate the discontinuity in  $G_{\mu,\alpha}(u, v)$  along the cut for  $\alpha \in \mathbb{R}_+$ . It will be convenient to write  $-(\alpha \pm i0) = e^{\mp\pi i}\alpha$ . This will automatically give the correct determination of every function. For  $u < v$

$$G_{\mu,\alpha \pm i0}(u, v) = \frac{1}{1 + \mu\alpha^{1-b}e^{\mp\pi i(1-b)}} u^{1/2} [I_{-b}(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}u) + \mu e^{\mp\pi i(1-b)}\alpha^{1-b}I_b(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}u)] v^{1/2} K_b(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}v).$$

Now we employ the general formula

$$K_\nu(z) = \frac{\pi I_{-\nu}(z) - I_\nu(z)}{2 \sin \nu\pi} \quad \text{for } \nu \notin \mathbb{Z},$$

see Eq. 8.485 of [12], to get

$$G_{\mu,\alpha \pm i0}(u, v) = \frac{1}{1 + \mu\alpha^{1-b}e^{\mp\pi i(1-b)}} u^{1/2} [I_{-b}(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}u) + \mu e^{\mp\pi i(1-b)}\alpha^{1-b}I_b(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}u)] v^{1/2} \frac{\pi}{2 \sin b\pi} [I_{-b}(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}v) - I_b(e^{\mp\frac{\pi i}{2}}\sqrt{\alpha}v)].$$

The relations

$$I_\nu(e^{\frac{\pi i}{2}}z) = e^{\frac{\pi i}{2}\nu}J_\nu(z), \quad I_\nu(e^{-\frac{\pi i}{2}}z) = e^{-\frac{\pi i}{2}\nu}J_\nu(z)$$

following from Eqs. 8.406.1 and 8.476.1 of [12] permit to move the determination from the function argument to a multiplicative coefficient. The final expression is

$$G_{\mu, \alpha \pm i0}(u, v) = \frac{\pi}{2 \sin b\pi} \frac{1}{1 + \mu \alpha^{1-b} e^{\mp \pi i(1-b)}} \cdot u^{1/2} \left[ e^{\mp \frac{\pi}{2} b} J_{-b}(\sqrt{\alpha} u) + \mu e^{\mp \pi i(1-b)} \alpha^{1-b} e^{\mp \frac{\pi}{2} b} J_b(\sqrt{\alpha} u) \right] \cdot v^{1/2} \left[ e^{\mp \frac{\pi}{2} b} J_{-b}(\sqrt{\alpha} v) - e^{\mp \frac{\pi}{2} b} J_b(\sqrt{\alpha} v) \right].$$

It is now easy to calculate the discontinuity  $G_{\mu, \alpha+i0} - G_{\mu, \alpha-i0}$  and to get for  $\alpha = E \in \mathbb{R}_+$

$$dE_\mu(u, v) = \frac{dE}{2(1 - 2\mu E^{1-b} \cos b\pi + \mu^2 E^{2(1-b)})} \varphi_{\mu, E}(u) \varphi_{\mu, E}(v) \quad (71)$$

where  $\varphi_{\mu, E}(u)$  given by (44) is the (generalized) eigenfunction of  $N_\mu$  associated with the eigenvalue  $E$ . This corresponds to the scalar spectral measure (45).

## E Conservation of probability

We shall show here that the transition measures  $P_\lambda^t(r; dr')$  of the sticky process given by (41) are normalized, i.e. that  $\int P_\lambda^t(r; dr') = 1$ . This is clearly the case for  $t = 0$  since  $P_\lambda^0(r; dr') = \delta(r - r') dr'$ . But

$$\frac{d}{dt} \int e^{tM_\lambda}(r, r') dr' = \int M^\dagger(r') e^{tM_\lambda}(r, r') dr' = -F(r') [e^{tM_\lambda}(r, r') m(r')^{-1}]_{r'=0}$$

where  $M^\dagger = m(r)M \circ m(r)^{-1} = \partial_r \circ F \circ m(r)^{-1}$  with  $m(r) = r^{a\epsilon - \xi}$  and  $F = \tilde{D}_0 r^{a\epsilon} \partial_r$  is the formal adjoint of  $M$  w.r.t. the  $L^2(dr)$  scalar product. The expression on the right hand side has the interpretation of the mean flux of the probability current through  $r' = 0$ . It should be balanced by the rate of change of probability to stay at  $r' = 0$ . Using the relations

$$e^{tM_\lambda}(r, r') m(r')^{-1} = e^{tM_\lambda}(r', r) m(r)^{-1}$$

and the fact that  $e^{tM_\lambda}(r, r')$  satisfies as a function of  $r$  the boundary condition (37), we infer that

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int e^{tM_\lambda}(r, r') dr' &= -\tilde{\lambda} M(r') e^{tM_\lambda}(r', r) m(r)^{-1} \Big|_{r'=0} \\ &= -\tilde{\lambda} M(r') \left( e^{tM_\lambda}(r, r') m(r')^{-1} \right) \Big|_{r'=0} \\ &= -\tilde{\lambda} m(r')^{-1} M^\dagger(r') e^{tM_\lambda}(r, r') \Big|_{r'=0} \\ &= -\tilde{\lambda} \frac{d}{dt} m(r')^{-1} e^{tM_\lambda}(r, r') \Big|_{r'=0}. \end{aligned}$$

It follows then from (41) that the time derivative of  $\int P_\lambda^t(r; dr')$  vanishes so that the normalization of  $P_\lambda^t(r; dr')$  does not change in time.

## F Estimates of functions $f_1$ and $f_2$

We present bounds showing in which sense the approximations given for functions  $f_1$  and  $f_2/f_1$  in Table 2 are correct.

The functions  $f_{1,2}(r; l_\nu, l_\kappa)$  were defined by (14) and (15) with  $\kappa$  given by (28). Let us examine their behavior for  $\kappa = 0$  setting  $f_{1,2}(r; l_\nu) \equiv f_{1,2}(r; l_\nu, 0)$ . Let us first show that  $f_{1,2}(r; l_\nu)$  are positive for  $r > 0$ . Note that (6) implies that

$$d_{ij}(\vec{r}; l_\nu) = D_0 \int \frac{2 \sin^2 \frac{\vec{k} \cdot \vec{r}}{2}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} \vec{P}(\vec{k}, \varphi) f(l_\nu |\vec{k}|) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} = \tilde{D}_0 \int T_{ij}(\vec{k}) d\vec{k}$$

where  $T(\vec{k})$  is a positive ( $r$ -dependent) matrix. On the other hand, (14) and (15) may be written as

$$f_1(r) = \int T_{ij}(\vec{k}) \frac{r_i r_j}{r^2} d\vec{k}, \quad f_2(r) = r^{-1} \int T_{ij}(\vec{k}) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) d\vec{k}$$

for any vector  $\vec{r}$  such that  $|\vec{r}| = r$ . Positivity of  $T$  implies

$$T_{ij}(\vec{k}) r_i r_j \geq 0, \quad T_{ij}(\vec{k}) \left( \delta_{ij} - \frac{r_i r_j}{r^2} \right) \geq 0$$

and for  $r > 0$  it is not hard to see that strict equalities hold except for a set of  $\vec{k}$  of measure zero. Hence positivity of  $f_{1,2}(r; l_\nu)$ .

In order to study the behavior of  $f_{1,2}(r; l_\nu)$  for small and large  $r$  it will be convenient to express them in terms of the function

$$g(r; l_\nu) = \int \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} f(l_\nu |\vec{k}|) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}.$$

Note that  $g$  is a smooth even function (i.e. all its derivatives of odd order vanish at 0) of  $r \geq 0$ . By scaling,

$$g(r; l_\nu) = l_\nu^\xi g\left(\frac{r}{l_\nu}; 1\right).$$

Around zero

$$g(\rho; 1) = C_0 \rho^2 + O(\rho^4) \quad \text{with} \quad C_0 = \int \frac{f(|\vec{k}|)}{|\vec{k}|^{d+\xi-2}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d}. \quad (72)$$

Rewriting

$$g(\rho; 1) = \rho^\xi \int \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}/\rho}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} f(|\vec{k}|/\rho) \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d},$$

we infer that around infinity

$$g(\rho; 1) = C_\infty \rho^\xi + O(\rho^{\xi-2}) \quad (73)$$

with

$$C_\infty = \int \frac{1 - e^{i\vec{k} \cdot \vec{\rho}/\rho}}{|\vec{k}|^{d+\xi}} \frac{d\vec{k}}{(2\pi)^d} = \frac{\Gamma(\frac{2-\xi}{2})}{2^{d+\xi-2} \pi^{\frac{d}{2}} \xi \Gamma(\frac{d+\xi}{2})}.$$

The spatial covariance  $\vec{d}(\vec{r}; l_\nu)$  given by (6) may be expressed in terms of the function  $g$ :

$$\begin{aligned} d_{ij}(\vec{r}; l_\nu) = D_0 & \left[ \left( \frac{1-\wp}{d-1} \delta_{ij} + \frac{\wp d-1}{d-1} \frac{r_i r_j}{r^2} \right) g(r; l_\nu) \right. \\ & \left. + \frac{\wp d-1}{d-1} \left( \delta_{ij} - d \frac{r_i r_j}{r^2} \right) r^{-d} \int_0^r (r')^{d-1} g(r'; l_\nu) dr' \right]. \quad (74) \end{aligned}$$

Indeed, by rotational covariance,  $d_{ij}$  has to be a combination of  $\delta_{ij}$  and  $\frac{r_i r_j}{r^2}$ . To show that the coefficient functions are correctly represented above, it is enough to note that  $d_{ii}$  and  $\partial_i d_{ij}$  are, in virtue of (6), expressible in terms of  $g$  and of its  $r$ -derivative  $g'$  as  $d_{ii} = D_0 g$  and  $\partial_i d_{ij} = D_0 \wp \frac{r_j}{r} g'$  and that the same relations may be recovered from (74). Now using definitions (14) and (15) we obtain:

$$\frac{\bar{D}_0}{D_0} f_1(r; l_\nu) = \frac{1-\wp}{d-1} g(r; l_\nu) + \frac{\wp d-1}{d-1} \left( g(r; l_\nu) - \frac{d-1}{r^d} \int_0^r r'^{d-1} g(r'; l_\nu) dr' \right), \quad (75)$$

$$\frac{\bar{D}_0}{D_0} f_2(r; l_\nu) = \frac{1-\wp}{r} g(r; l_\nu) + \frac{\wp d-1}{r^d} \int_0^r r'^{d-1} g(r'; l_\nu) dr'. \quad (76)$$

Functions  $f_{1,2}(r; l_\nu)$  inherit from  $g(r; l_\nu)$  the scaling property (55). Relations (75), (76) and expansions (72) and (73) permit now to write the decompositions (56) to (59) with

$\tilde{C}_0 = \frac{1+2p}{d+2} C_0 D_0 / \tilde{D}_0$  and similar coefficient in (58) and (59) fixed to 1 by setting  $\tilde{D}_0 = \frac{1+2p}{d+2} C_\infty D_0$ . Moreover the positivity of functions  $f_{1,2}(r; 1)$  and their smoothness imply that there exists some constant  $B > 0$  such that for all  $0 \leq \rho \leq 1$

$$\frac{1}{B} < f_i^\clubsuit(\rho) < B \quad i = 1, 2, \quad (77)$$

$$-B < f_i^\spadesuit(\rho) < B \quad i = 1, 2 \quad (78)$$

and for all  $1 \leq \rho < \infty$ ,

$$\frac{1}{B} < f_i^\diamond(\rho) < B \quad i = 1, 2, \quad (79)$$

$$-B < f_i^\heartsuit(\rho) < B \quad i = 1, 2. \quad (80)$$

Let us come back to functions  $f_{1,2}(r; l_\nu, l_\kappa)$  with  $0 < l_\kappa, l_\nu < 1$ . To obtain bounds for  $f_1$ , we write for  $l_\nu < r$

$$f_1(r; l_\nu, l_\kappa) = r^\xi f_1^\diamond\left(\frac{r}{l_\nu}\right) + 2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2$$

and infer that

$$r^\xi \frac{1}{B} < f_1(r; l_\nu, l_\kappa) < r^\xi (B + 2). \quad (81)$$

Similarly, the decomposition

$$f_1(r; l_\nu, l_\kappa) = \tilde{C}_0 l_\nu^{\xi-2} r^2 f_1^\clubsuit\left(\frac{r}{l_\nu}\right) + 2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2$$

gives for  $l_\kappa < r < l_\nu$  the bounds

$$l_\nu^{\xi-2} r^2 \frac{\tilde{C}_0}{B} < f_1(r; l_\nu, l_\kappa) < l_\nu^{\xi-2} r^2 (\tilde{C}_0 B + 2)$$

and for  $r < l_\kappa$ ,

$$2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2 < f_1(r; l_\nu, l_\kappa) < l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2 (\tilde{C}_0 B + 2). \quad (82)$$

This shows that  $f_1(r; l_\nu, l_\kappa)$  is bounded above and below by its approximate version of Table 2 multiplied or divided by a constant.

Function  $f_2$  may be estimated similarly resulting in  $O(1)$  bounds for  $r f_2 / f_1$ . We need however (in particular in Appendix G) the following more precise estimates for that ratio:

$$\text{for } l_\nu < r : \quad \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{a_\xi}{r} \right| < C \frac{l_\nu^\xi}{r^{1+\xi}} \quad (83)$$

$$\text{for } l_\kappa < r < l_\nu : \quad \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{a_2}{r} \right| < C \left[ \frac{r}{l_\nu^2} + \frac{l_\kappa^2}{r^3} \right] \quad (84)$$

$$\text{for } r < l_\kappa : \quad \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{d-1}{r} \right| < C \frac{r}{l_\kappa^2} \quad (85)$$

for some constant  $C$  which may be chosen independent of  $r, l_\nu, l_\kappa$ . To establish (83) we use the decompositions (58) and (59) to write for  $l_\nu < r$

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{a_\xi}{r} \right| &= \left| \frac{l_\nu^{\xi-1} f_2\left(\frac{r}{l_\nu}; 1\right) + 2 \frac{d-1}{r} l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2 - \frac{a_\xi}{r} \left[ l_\nu^\xi f_1\left(\frac{r}{l_\nu}; 1\right) + 2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2 \right]}{l_\nu^\xi f_1\left(\frac{r}{l_\nu}; 1\right) + 2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2} \right| \\ &= \left| \frac{l_\nu^2 r^{\xi-3} \left[ f_2^\heartsuit\left(\frac{r}{l_\nu}\right) - a_\xi f_1^\heartsuit\left(\frac{r}{l_\nu}\right) \right] + 2 \frac{d-1-a_\xi}{r} l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2}{r^\xi f_1^\diamond\left(\frac{r}{l_\nu}\right) + 2l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2} \right| < \frac{B[1 + |a_\xi|] + 2|d-1-a_\xi|}{\frac{1}{B}} \frac{l_\nu^\xi}{r^{1+\xi}} \end{aligned}$$

where the inequality follows from the bounds (79) and (80). In the same manner for  $l_\kappa < r < l_\nu$ , using the decompositions (56), (57) and the bounds (77) and (78), we obtain

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{a_2}{r} \right| &= \left| \frac{l_\nu^{\xi-4} r^3 \left[ f_2^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) - a_2 f_1^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) \right] + 2 \frac{d-1-a_2}{r} l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2}{\tilde{C}_0 l_\nu^{\xi-2} r^2 f_1^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) + 2 l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2} \right| \\ &< \left[ \frac{r}{l_\nu^2} + \frac{l_\kappa^2}{r^3} \right] \frac{B[1 + |a_2|] + 2|d-1-a_2|}{\frac{\tilde{C}_0}{B}}. \end{aligned}$$

Finally for  $r < l_\kappa$ ,

$$\begin{aligned} \left| \frac{f_2(r; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r; l_\nu, l_\kappa)} - \frac{d-1}{r} \right| &= \left| \frac{\tilde{C}_0(a_2 - d + 1) l_\nu^{\xi-2} r + l_\nu^{\xi-4} r^3 \left[ f_2^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) - (d-1) f_1^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) \right]}{\tilde{C}_0 l_\nu^{\xi-2} r^2 f_1^\bullet\left(\frac{r}{l_\nu}\right) + 2 l_\nu^{\xi-2} l_\kappa^2} \right| \\ &< \frac{r}{l_\kappa^2} \frac{\tilde{C}_0 |d-1-a_2| + B[1 + |d-1|]}{2}. \end{aligned}$$

Let us end this Appendix by listing the scaling forms of the tensor  $\vec{d}$  and of functions  $f_{1,2}$ . Since  $g(r; 0) = C_\infty r^\xi$ , we infer from (74) that

$$d_{ij}(\vec{r}; 0) = \frac{\tilde{D}_0}{d-1} \left[ \left( \frac{d+\xi}{1+\xi\varphi} - 1 \right) \delta_{ij} + \frac{\xi(\varphi d - 1)}{1+\xi\varphi} \frac{r_i r_j}{r^2} \right] r^\xi$$

and that  $f_1(r; 0) = r^\xi$  and  $f_2(r; 0) = a_\xi r^{\xi-1}$ , in agreement with the scaling form (17) of the generator  $M$ .

## G Exact speed measure at zero

Here we prove the convergence (60), establishing the exact value of the mass at zero of the limiting speed measure. Using (23)), we have

$$\int_0^{l_\nu} m(r'; l_\nu, l_\kappa) \chi(r') dr' = \int_0^{l_\nu} \frac{\chi(r')}{f_1(r'; l_\nu, l_\kappa)} \exp\left(-\int_{r'}^{r_0} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr''\right) dr'.$$

The integral in the exponential may be split into four terms:

$$\begin{aligned} \int_{r'}^{r_0} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' &= \int_{r'}^{l_\kappa} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' \\ &+ \int_{l_\kappa}^{\sqrt{l_\kappa l_\nu}} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' + \int_{\sqrt{l_\kappa l_\nu}}^{l_\nu} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' + \int_{l_\nu}^{r_0} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr''. \end{aligned}$$

We begin by calculating the last three terms as they do not depend on  $r'$ . The last one gives

$$\int_{l_\nu}^{r_0} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' = a_\xi \ln \frac{r_0}{l_\nu} + \int_1^{\frac{r_0}{l_\nu}} \frac{\rho^{\xi-3} \left[ f_2^\heartsuit(\rho) - a_\xi f_1^\heartsuit(\rho) \right] + 2 \frac{d-1-a_\xi}{\rho} \left( \frac{l_\kappa}{l_\nu} \right)^2}{\rho^\xi f_1^\diamond(\rho) + 2 \left( \frac{l_\kappa}{l_\nu} \right)^2} d\rho$$

and we know from (83) that the integrand on the right is dominated by  $C\rho^{-(1+\xi)}$  (as soon as  $l_\nu < 1$ ), so we may use the Dominated Convergence Theorem to conclude that

$$\lim_{l_\nu, \frac{r_0}{l_\nu} \rightarrow 0} \left( \int_{l_\nu}^{r_0} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' - a_\xi \ln \frac{r_0}{l_\nu} \right) = \int_1^\infty \frac{f_2^\heartsuit(\rho) - a_\xi f_1^\heartsuit(\rho)}{\rho^\xi f_1^\diamond(\rho)} d\rho.$$

As for the other two,

$$\begin{aligned} & \int_{l_\kappa}^{\sqrt{l_\kappa l_\nu}} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' \\ &= a_2 \ln \sqrt{\frac{l_\nu}{l_\kappa}} + \int_1^{\sqrt{l_\nu/l_\kappa}} \frac{\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^2 \rho^3 \left[ f_2^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) - a_2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) \right] + 2 \frac{d-1-a_2}{\rho}}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 2} d\rho \end{aligned}$$

with the integrand on the right dominated by  $C[(\frac{l_\kappa}{l_\nu})^2 \rho + \rho^{-3}] < 2C\rho^{-3}$ , see (84), so we may conclude that

$$\begin{aligned} \lim_{l_\nu, \frac{l_\kappa}{l_\nu} \rightarrow 0} \left( \int_{l_\kappa}^{\sqrt{l_\kappa l_\nu}} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' - a_2 \ln \sqrt{\frac{l_\nu}{l_\kappa}} \right) \\ = \int_1^\infty \frac{2(d-1-a_2)}{\rho(\tilde{C}_0 \rho^2 + 2)} d\rho = \frac{d-1-a_2}{2} \ln \frac{\tilde{C}_0 + 2}{\tilde{C}_0}. \end{aligned}$$

Similarly,

$$\begin{aligned} & \int_{\sqrt{l_\kappa l_\nu}}^{l_\nu} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' \\ &= a_2 \ln \sqrt{\frac{l_\nu}{l_\kappa}} + \int_{\sqrt{l_\kappa/l_\nu}}^1 \frac{\rho^3 \left[ f_2^\bullet(\rho) - a_2 f_1^\bullet(\rho) \right] + 2 \frac{d-1-a_2}{\rho} \left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^2}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet(\rho) + 2 \left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^2} d\rho \end{aligned}$$

where the integrand on the right is bounded by  $C[\rho + (\frac{l_\kappa}{l_\nu})^2 \rho^{-3}] < 2C\rho$ , see (84). Hence

$$\lim_{l_\nu, \frac{l_\kappa}{l_\nu} \rightarrow 0} \left( \int_{\sqrt{l_\kappa l_\nu}}^{l_\nu} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' - a_2 \ln \sqrt{\frac{l_\nu}{l_\kappa}} \right) = \int_0^1 \frac{\rho \left[ f_2^\bullet(\rho) - a_2 f_1^\bullet(\rho) \right]}{\tilde{C}_0 f_1^\bullet(\rho)} d\rho.$$

What remains to be evaluated is

$$\begin{aligned} & \int_0^{l_\nu} \frac{\chi(r')}{f_1(r'; l_\nu, l_\kappa)} \exp \left( - \int_{r'}^{l_\kappa} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' \right) dr' \\ &= \frac{1}{l_\nu^{\frac{d-2}{2}} l_\kappa} \int_0^{l_\nu/l_\kappa} \frac{\chi(l_\kappa \rho)}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 2} \exp \left[ - \int_\rho^1 \frac{\tilde{C}_0 a_2 \rho' f_2^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho'\right) + 2 \frac{d-1}{\rho'}}{\tilde{C}_0 \rho'^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho'\right) + 2} d\rho' \right] d\rho. \end{aligned}$$

Let us show that the Dominated Convergence Theorem applies once more. The following estimates are sufficient. For  $0 < \rho < 1$ ,

$$\left| \frac{\chi(l_\kappa \rho)}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 1} \right| < \chi(0), \quad \left| \frac{\tilde{C}_0 a_2 \rho f_2^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + \frac{d-1}{\rho}}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 1} - \frac{d-1}{\rho} \right| < C\rho.$$

The first inequality is a consequence of  $\chi(r) < \chi(0)$  for any  $r > 0$ , and of the positivity of  $f_1^\bullet$ . The second one is obtained by rewriting (85) using (56) and (57). For  $1 < \rho < l_\nu/l_\kappa$ , we use

$$\left| \frac{\chi(l_\kappa \rho)}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 1} \right| < \frac{\chi(0)}{\frac{\tilde{C}_0}{B} \rho^2}, \quad \left| \frac{\tilde{C}_0 a_2 \rho f_2^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + \frac{d-1}{\rho}}{\tilde{C}_0 \rho^2 f_1^\bullet\left(\frac{l_\kappa}{l_\nu} \rho\right) + 1} - \frac{a_2}{\rho} \right| < C \left[ \left(\frac{l_\kappa}{l_\nu}\right)^2 \rho + \frac{1}{\rho^3} \right].$$

Here, the first inequality follows from (77) and the second one is obtained by rewriting (84) with the use of (56) and (57). We then have

$$\begin{aligned} & \lim_{l_\nu, \frac{l_\kappa}{l_\nu} \rightarrow 0} l_\nu^{\frac{d-2}{2}} l_\kappa \int_0^{l_\nu} \frac{\chi(r')}{f_1(r'; l_\nu, l_\kappa)} \exp \left( - \int_{r'}^{l_\kappa} \frac{f_2(r''; l_\nu, l_\kappa)}{f_1(r''; l_\nu, l_\kappa)} dr'' \right) dr' \\ &= \int_0^\infty \frac{\chi(0)}{\tilde{C}_0 \rho^2 + 2} \exp \left[ - \int_\rho^1 \frac{\tilde{C}_0 a_2 \rho' + 2 \frac{d-1}{\rho'}}{\tilde{C}_0 \rho'^2 + 1} d\rho' \right] d\rho \\ &= 2^{\frac{2d-3}{2}} (\tilde{C}_0 + 2)^{\frac{d-1-a_2}{2}} \tilde{C}_0^{-\frac{d}{2}} B\left(\frac{d}{2}, \frac{1-a_2}{2}\right) \chi(0) \end{aligned}$$

where  $B(x, y)$  is the Euler Beta function. Gathering all terms, in particular the powers of  $l_\nu$  and  $l_\kappa$  that combine to  $l_\nu^{(a_\xi+1-\xi)+(1-a_2)l_\kappa^{a_2-1}}$ , we obtain the result (60) with  $Y$  given by (61).

## References

- [1] Bernard, D., Gawędzki, K., Kupiainen, A.: "Slow modes in passive advection", *J. Stat. Phys.* **90** (1998), 519-569
- [2] Borodin, A., Salminen, P.: "Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae", Birkhäuser, Boston 1996
- [3] Breiman, L.: "Probability", Addison-Wesley, Reading MA 1968
- [4] Chaves, M., Horvai, P., Gawędzki, K., Kupiainen, A., Vergassola, M.: "Lagrangian dispersion in Gaussian self-similar ensembles", arXiv:nlin.CD/0303031, to appear in *J. Stat. Phys.*
- [5] E, W., Vanden-Eijnden, E.: "Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport", *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, **97** (2000), 8200-8205
- [6] E, W., Vanden-Eijnden, E.: "Turbulent Prandtl number effect on passive scalar advection", *Physica D* **152-153** (2001), 636-645
- [7] Falkovich, G., Gawędzki, K., Vergassola, M.: "Particles and fields in fluid turbulence", *Rev. Mod. Phys.* **73** (2001), 913-975
- [8] Feller, W.: "The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations", *Ann. Math.* **55**, 468-519 (1952)
- [9] Freidlin, M. I., Wentzell, A. D.: "Necessary and Sufficient Conditions for Weak Convergence of One-Dimensional Markov Processes", in: "The Dynkin Festschrift, Markov processes and their Applications" (ed. Freidlin, M.I.), pp. 95-109, Birkhäuser, Boston, 1994
- [10] Gawędzki, K., unpublished
- [11] Gawędzki, K., Vergassola, M.: "Phase transition in the passive scalar advection", *Physica D* **138** (2000), 63-90
- [12] Gradshteyn, I.S. Ryzhik, I.M.: "Table of Integrals: Series, and Products" Academic Press, New York 1980
- [13] Itô, K., McKean, H. P.: "Diffusion Processes and Their Sample Paths", Springer, Berlin 1965
- [14] Kazantsev, A. P.: "Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid". *Sov. Phys. JETP* **26** (1968), 1031-1034
- [15] Kraichnan, R. H.: "Small-scale structure of a scalar field convected by turbulence", *Phys. Fluids* **11** (1968), 945-963
- [16] Le Jan, Y., Raimond, O.: "Integration of Brownian vector fields", *Ann. Probab.* **30** (2002), 826-873
- [17] Le Jan, Y., Raimond, O.: "Flows, coalescence and noise", arXiv:math.PR/0203221, to appear in *Ann. Probab.*
- [18] Le Jan, Y., Raimond, O.: "Sticky flows on the circle", arXiv:math.PR/0211387
- [19] Onsager, L.: "Statistical hydrodynamics". *Nuovo Cim. Suppl.* **6** (1949), 279-287

- [20] Rogers, L. C. G., Williams, D.: "Diffusions, Markov Processes and Martingales". Cambridge University Press, Cambridge 2000
- [21] Revuz, D., Yor, M.: "Continuous Martingales and Brownian Motion", Springer, Berlin 1991

## Chapitre 11

# Intermittence de la densité dans un écoulement lisse compressible

On considère un écoulement compressible dans un domaine borné de l'espace. Quand le champ de vitesse est lisse en la variable spatiale, on a en fait affaire à un système dynamique. Dans ce langage la compressibilité correspond à la nature dissipative du système. Cette analogie implique qu'aux temps longs les particules Lagrangiennes se concentreront sur un attracteur (dépendant du temps, dans notre point de vue de flot). Sous les mêmes hypothèses que pour les systèmes dynamiques on s'attend à ce que la densité limite des particules soit une mesure de type SRB (Sinai-Ruelle-Bowen; cf. [53]) avec une densité régulière dans les directions instables du flot. Les propriétés multi-fractales de telles mesures peuvent être caractérisées par le spectre de dimensions introduit par Hentschel et Procaccia [34]. Nous montrons que ces dimensions peuvent être directement reliées aux grandes déviations des taux d'étirement de l'écoulement. La fonction de grandes déviations (appelée fonction de Cramér ou fonction d'entropie) des taux d'étirement est connue pour le modèle de Kraichnan et a une forme analytique simple. Ceci nous a permis de calculer exactement dans ce modèle le spectre de Hentschel-Procaccia de la distribution de masse asymptotique, qui se révèle assez riche, signalant une très forte intermittence. Les calculs théoriques ont également été confirmés par des simulations numériques.

Nous commencerons par montrer l'intérêt physique du problème, pour ensuite présenter les fondements de l'analyse multi-fractale (sous forme de la première moitié d'un article long en préparation, écrit en anglais). Finalement le lien entre taux d'étirements du flot et la structure multi-fractale de la densité advectée, ainsi qu'une application au modèle de Kraichnan lisse, seront donnés dans un article joint, soumis aux *Physical Review Letters*.

### 11.1 Motivation physique

En première apparence le modèle ne s'applique qu'à un fluide dont on ne peut pas négliger la compressibilité (NB: la compressibilité est importante, sinon une densité initialement uniforme le resterait indéfiniment), ce qui arrive typiquement dans les écoulements à nombre de Mach de l'ordre de 1, et même dans ce cas le degré de compressibilité du fluide reste autour de quelques pour cents. Or dans un fluide dense (où le libre parcours

moyen est très petit devant la taille du système) tel l'eau ou l'air dans des conditions atmosphériques, le degré de compressibilité local du fluide diminue fortement avec la densité locale du fluide, de sorte que même en première approximation on ne pourra pas parler de concentration du fluide sur un attracteur qui exhibe une structure fractale à travers plusieurs échelles. Le modèle s'appliquerait donc surtout à des systèmes sans pression, tel les nuages de gaz ou de poussière interstellaires.

En fait son champ d'application est bien plus large, car il suffit de considérer des problèmes d'advection où la dynamique du traceur advecté est compressible, alors que le champ de vitesse advectant peut très bien être incompressible. Un exemple typique est l'advection de particules inertielles [43] (telles les gouttelettes d'eau dans un nuage). Dans la limite où ces particules ont une petite inertie (plus précisément à petit nombre de Stokes), leur dynamique se simplifie à une advection passive dans un champ de vitesse effectif qui peut être donné en fonction du champ de vitesse du fluide dans lequel elles sont suspendues [25, 10]. Un aspect intéressant de ce système est que, même si le fluide est incompressible, le champ de vitesse effectif obtenu sera compressible. Cela s'explique aisément. Si les particules sont plus denses que le fluide ambiant, elles seront éjectées des tourbillons par la force centrifuge. Si au contraire les particules sont moins denses que le fluide ambiant alors elles iront vers le cœur des tourbillons sous l'effet de la poussée d'Archimède centripète.

Un autre exemple simple d'advection compressible est celle de particules flottant sur la surface d'un liquide [51] (par exemple des algues uni-cellulaires sur l'océan). Là encore, même si le liquide est incompressible, les particules seront advectées par la projection du champ de vitesse parallèlement à la surface du liquide, et ce champ effectif n'a plus de raisons d'être incompressible (il suffit que le gradient vertical de la composante verticale de la vitesse du liquide soit non nul).

## 11.2 Multifractality and intermittency

### 11.2.1 Attractor

We shall denote the (effective) advecting velocity field by  $\mathbf{v}$ . The velocity may of course depend on position  $\mathbf{r} \in \mathcal{M}$  and time  $t$ , and it may be deterministic as well as stochastic. The passive density field  $\rho$  is advected by the a priori given velocity field  $\mathbf{v}$  according to the equation

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (11.1)$$

The case when  $\mathbf{v}$  is compressible corresponds to a dissipative dynamical system for  $\rho$ , so that in general  $\rho$  should tend to be concentrated asymptotically on some (time dependent) attractor set.

Instead of starting the system at an initial instant  $t_0$  with some initial condition  $\rho(t_0) = \rho_0$  and looking at the large time asymptotic evolution of  $\rho(t)$ , it is more convenient to let tend the initial instant  $t_0$  to  $-\infty$  while maintaining  $\rho(t_0) = \rho_0$ , and consider the  $t_0 \rightarrow -\infty$  limit of  $\rho(t)$  for  $t$  fixed. In more physical terms, what we are looking for is the distribution of Lagrangian particles at time  $t$  if those particles were released with uniform distribution at time  $-\infty$ . For simplicity we can take  $\rho_0 = 1$  and define what

we shall call the **attractor measure** as

$$\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}(t) \equiv \lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \Phi_*^{\mathbf{v}}(t_0, t) 1 \quad (11.2)$$

where  $\Phi_*^{\mathbf{v}}(t, 0) 1$  is the image of the uniform density on  $\mathcal{M}$ , transported by the flow  $\Phi^{\mathbf{v}}$  of  $\mathbf{v}$ , between instants  $t_0$  and  $t$ . We assume that the limit in (11.2) above exists. In general, for dissipative systems, that is for compressible velocity fields  $\mathbf{v}$ , the attractor measure  $\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}(t)$  will be singular with respect to the natural Lebesgue measure (induced by the metric) on  $\mathcal{M}$ . Its support is some fractal set, and is usually called the **attractor set** of the system. It has been proven only in some special cases, but it is believed to hold for a wide range of systems, that  $\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}$  is an SRB measure for the dynamical system verified by  $\rho$  [53].

Although usually the attractor set has a self-similar fractal structure, the attractor measure itself need not display purely self-similar properties. In our case, as we shall see, self-similarity is broken at least in the mean, but perhaps also for individual realizations of the velocity field  $\mathbf{v}$ . Indeed the distribution of  $\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}$  on the attractor set has large fluctuations (in function of the realization of  $\mathbf{v}$ ) that break strict scale invariance even on small scales, giving rise instead to an intermittent picture.

### 11.2.2 Hentschel-Procaccia spectrum

The multifractality of some measure  $\mu$  may be characterized through its Hentschel-Procaccia spectrum for dimensions [34, 50, 46]. First we define the integrated mass  $m_{\mu}(r; \mathbf{R})$  of  $\mu$  inside the ball  $\mathcal{B}_r(\mathbf{R})$  of radius  $r$  centered at  $\mathbf{R} \in \mathcal{M}$ :

$$m_{\mu}(r; \mathbf{R}) \equiv \int_{\mathcal{B}_r(\mathbf{R})} \mu(d\mathbf{y}). \quad (11.3)$$

Then the **Hentschel-Procaccia spectrum** for dimensions of the measure  $\mu$  is defined as

$$HP_{\mu}(q) \equiv \frac{1}{1-q} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \int_{\mathcal{M}} m_{\mu}(r; \mathbf{R})^{q-1} \mu(d\mathbf{R})}{\log r}. \quad (11.4)$$

For a monofractal distribution  $HP_{\mu}(q)$  would be independent of  $q$ . When  $HP_{\mu}(q)$  is not constant, we say that  $\mu$  has a **multifractal** structure.

For convenience we also introduce the notation

$$\xi_{\mu}(p) \equiv -p HP_{\mu}(p+1) \quad (11.5)$$

Note also, that when (11.4) is applied to  $\mu = \rho_{\infty}^{\mathbf{v}}$ , the term

$$\int_{\mathcal{M}} m_{\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}}(r; \mathbf{R})^{q-1} \rho_{\infty}^{\mathbf{v}}(d\mathbf{R})$$

can be interpreted as the Lagrangian mean of  $m_{\rho_{\infty}^{\mathbf{v}}}(r; \mathbf{R})^{q-1}$ .

Let us now consider, instead of a fixed measure  $\mu$ , a random variable taking values in the space of measures on  $\mathcal{M}$ . For sake of clarity we shall denote this random variable by  $[\mu]$ , while keeping  $\mu$  for individual realizations of  $[\mu]$ . We can define by analogy with (11.4) a **stochastic Hentschel-Procaccia spectrum** as

$$HP_{[\mu]}(q) \equiv \frac{1}{1-q} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \langle \int_{\mathcal{M}} m_{\mu}(r; \mathbf{R})^{q-1} \mu(d\mathbf{R}) \rangle_{\mu}}{\log r} \quad (11.6)$$

where  $\langle \cdot \rangle_\mu$  denotes averaging over  $\mu$ . This kind of quantity is usually considered in the study of turbulent flows, and one would call  $HP_{[\mu]}(q)$  the intermittency spectrum of  $[\mu]$ . When  $HP_{[\mu]}(q)$  is not a constant function of  $q$ , then the random variable  $[\mu]$  is qualified as **intermittent**.

For convenience we also introduce the notation

$$\xi_{[\mu]}(p) \equiv -p HP_{[\mu]}(p+1) \quad (11.7)$$

We should note here that  $\xi_{[\mu]}(p)$  as well  $\xi_\mu(p)$  are concave functions of  $p$  as a consequence of Hölder's inequality; and if the total mass of  $\mu$  is finite (or, in the stochastic case, almost surely finite) then they are non-decreasing functions in  $p$ .

In the present paper our goal is to calculate  $HP_{[\rho_\infty^v]}(q)$  for a stochastic velocity field  $\mathbf{v}$  whose flow  $\Phi^v$  is a stationary process with independent increments.

By analogy with disordered systems, we may call  $HP_{[\mu]}$  the **annealed** spectrum of  $[\mu]$  while  $HP_{[\mu]}^{\text{qu}} \equiv \langle HP_\mu \rangle_\mu$  would be the **quenched** spectrum. We have the convexity inequality  $HP_{[\mu]}(q) \geq HP_{[\mu]}^{\text{qu}}$  for  $q \geq 1$  and the opposite inequality for  $q \leq 1$ . We believe that in general, for  $[\mu] = [\rho_\infty^v]$ , strict inequality holds (except for  $q = 1$ ).

In order to see this one may define more generally what could be called the **replica Hentschel-Procaccia spectrum** of  $[\mu]$ , or the associated  $\xi$  function as

$$\xi_{[\mu]}(p, n) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log \langle \left[ \int_{\mathcal{M}} m_\mu(r; \mathbf{R})^p \mu(d\mathbf{R}) \right]^n \rangle_\mu}{\log r}$$

$$HP_{[\mu]}(q, n) \equiv \frac{1}{1-q} \xi_{[\mu]}(q-1, n)$$

Clearly  $HP_{[\mu]}(q) = HP_{[\mu]}(q, 1)$  and  $HP_{[\mu]}^{\text{qu}}(q) = [\partial_n HP_{[\mu]}(q, n)]_{n=0}$ . Equality of the two would require  $\xi_{[\mu]}(p, n)$  to be linear in  $n$  between  $n = 0$  and  $n = 1$ , which we believe is not the case for any  $p \neq 0$ , except perhaps for some special systems having some sort of self-averaging property. One could imagine a large system whose local behaviors are independent in regions separated by distances of order unity. Even then, one should pass to the thermodynamic (infinite system) limit first and take  $r$  to 0 second.

We shall now estimate  $\xi_{[\mu]}(p, n)$  in terms of  $\xi_{[\mu]}(\bullet, 1)$ . The easy one uses Minkowski's inequality. For  $n \geq 1$

$$\left[ \int_{\mathcal{M}} m_\mu(r; \mathbf{R})^p \mu(d\mathbf{R}) \right]^n \leq \int_{\mathcal{M}} m_\mu(r; \mathbf{R})^{pn} \mu(d\mathbf{R})$$

implying  $\xi_{[\mu]}(p, n) \geq \xi_{[\mu]}(pn, 1)$ . We can also obtain an (other) inequality in the opposite sense for  $n \geq 1$  integer. Write

$$\begin{aligned} \left[ \int_{\mathcal{M}} m_\mu(r; \mathbf{R})^p \mu(d\mathbf{R}) \right]^n &= \int_{\mathcal{M}^n} \prod_{i=1}^n m_\mu(r, \mathbf{R}_i)^p \mu(d\mathbf{R}_i) \\ &\geq \int_{\substack{\mathbf{R}_1 \in \mathcal{M} \\ \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n \in \mathcal{B}_{r/2}(\mathbf{R}_1)}} \prod_{i=1}^n m_\mu(r, \mathbf{R}_i)^p \mu(d\mathbf{R}_i) \geq \int_{\mathbf{R}_1 \in \mathcal{M}} m_\mu\left(\frac{r}{2}, \mathbf{R}_1\right)^{pn} \prod_{i=2}^n \mu(d\mathbf{R}_i) d\mathbf{R}_1 \\ &= \int_{\mathcal{M}} m_\mu\left(\frac{r}{2}; \mathbf{R}\right)^{pn+n-1} \mu(d\mathbf{R}) \end{aligned}$$

We get  $\xi_{[\mu]}(p, n) \leq \xi_{[\mu]}(pn + n - 1, 1)$ .

This last inequality shows that, if  $\xi_{[\mu]}(p', 1)$  saturates for  $p'$  big (i.e. it becomes a constant independent of  $p'$ ; we shall see that this is the case for some systems), then a linear dependence  $\xi_{[\mu]}(p, n) = n \xi_{[\mu]}(p, 1)$  is impossible for  $p > 0$  for  $n$  sufficiently big and in fact  $\xi_{[\mu]}(p, n)$  has to be bounded from above for  $n$  big. Intuitively this is so because saturation of  $\xi_{[\mu]}(p', 1)$  is due to – as we shall see later – realizations such that  $\int_{\mathcal{M}} m_{\mu}(r; \mathbf{R})^{p'} \mu(d\mathbf{R})$  is of order unity (more precisely the fact that the probability of such realizations decays slowly, as a power law in  $r$ ), and then  $\xi_{[\mu]}(p', n)$  saturates for the same reason.

### 11.2.3 Local dimension spectrum

A more geometric characterization of the multifractality of some measure  $\mu$  is given by the Hausdorff dimensions of sets where the local dimension (to be defined shortly) of  $\mu$  is constant. This is usually called in the literature the  **$f(\alpha)$ -spectrum** of  $\mu$  or the  **$f_{\mu}(\alpha)$ -spectrum** for dimensions.

We begin by defining the quantity

$$d_{\mu}(r; \mathbf{R}) \equiv \frac{\log m_{\mu}(r; \mathbf{R})}{\log r} \quad (11.8)$$

and define the **local dimension**  $d_{\mu}(\mathbf{R})$  of the measure  $\mu$  at the point  $\mathbf{R}$  as

$$d_{\mu}(\mathbf{R}) \equiv \begin{cases} \lim_{r \rightarrow 0} d_{\mu}(r, \mathbf{R}) & \text{if the limit exists} \\ \text{undefined} & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11.9)$$

This means that the mass of  $\mu$ , inside a ball centered at  $\mathbf{R}$  and having a small radius  $r$ , behaves just like the volume of a ball of radius  $r$  in a  $d_{\mu}(\mathbf{R})$ -dimensional Euclidian space.

Now one can consider the sets

$$K_{\mu}(h) \equiv \{\mathbf{R} \mid d_{\mu}(\mathbf{R}) = h\} \quad (11.10)$$

Note that these sets are invariant under the evolution of the smooth dynamical system because a smooth map preserves the local dimension.

The **local dimension spectrum** is defined as the Hausdorff dimension of these sets. Using standard notation, this is written as

$$f_{\mu}(h) \equiv \dim_{\mathcal{H}} K_{\mu}(h)$$

where  $\dim_{\mathcal{H}}$  stands for Hausdorff dimension.

Recall that the  $\alpha$ -Hausdorff measure  $m_{\mathcal{H}}(Z, \alpha)$  of some set  $Z$  (subset of a finite metric space) is defined as

$$m_{\mathcal{H}}(Z, \alpha) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}_{\varepsilon}(Z)} \sum_{G \in \mathcal{G}} (\text{diam } G)^{\alpha} \quad (11.11)$$

where  $\mathcal{C}_{\varepsilon}(Z)$  is the set of all countable covers  $\mathcal{G}$  of  $Z$  by sets  $G \in \mathcal{G}$  whose diameter  $\text{diam } G$  is less than  $\varepsilon$ .

It can be shown that there is a critical value  $\alpha_0$  of  $\alpha$  such that for  $\alpha < \alpha_0$  the  $\alpha$ -Hausdorff measure of  $Z$  is  $\infty$ , and for  $\alpha > \alpha_0$  the  $\alpha$ -Hausdorff measure of  $Z$  is 0. Then  $\alpha_0$  is called the Hausdorff dimension of the set  $Z$ , denoted as  $\dim_{\mathcal{H}} Z$ .

Note that if  $Z$  is non-empty, then every cover of  $Z$  must contain at least one set, and clearly for any  $\alpha < 0$  we must have  $m_{\mathcal{H}}(Z, \alpha) = \infty$ , implying that  $\dim_{\mathcal{H}} Z \geq 0$ .

It would not be too difficult to generalize the above definition of the local dimension spectrum to the case of a random measure, but it is not the appropriate quantity to use in that case and we shall give in (11.20) an alternative definition.

Note that in the case when  $[\mu]$  is the attractor measure of a random dynamical system corresponding to the flow of a time-decorrelated stochastic velocity field, the local dimension spectrum of almost every realization coincides. This is a simple consequence of Kolmogorov's 0-1 law. Indeed, the attractor measure for each realization can be written

$$\rho_{\infty}^{\nu} = \lim_{N \rightarrow \infty} \prod_{n=0}^N \Phi_*^{\nu}(-(n+1), -n) 1$$

where the product sign actually stands for (time ordered) composition of maps. But the local dimension spectrum of  $\rho_{\infty}^{\nu}$  is independent of the first arbitrary number of terms in this product, which is exactly the condition under which Kolmogorov's 0-1 law applies.

### 11.2.4 Large deviations of $m_{\mu}(r; \mathbf{R})$

Both the Hentschel-Procaccia spectrum and the local dimension spectrum of a measure can be related to the asymptotic behaviour of the distribution of  $\log m_{\mu}(r; \mathbf{R})$  when  $r$  goes to 0.

Let us define  $S_{\mu}(r, h)$  as the disintegration of  $\mu$  with respect to the level sets of  $d_{\mu}(r; \mathbf{R})$ , meaning that for any continuous function  $g(h)$

$$\int_{\mathcal{M}} g(d_{\mu}(r; \mathbf{R})) \mu(d\mathbf{R}) = \int g(h) S_{\mu}(r, h) dh \tag{11.12}$$

In particular if we introduce the sets

$$K_{\mu}(r; h, dh) \equiv \{\mathbf{R} \mid d_{\mu}(r; \mathbf{R}) \in [h, h + dh]\}$$

then

$$\mu(K_{\mu}(r; h, dh)) = S_{\mu}(r, h) dh$$

Now define

$$S_{\mu}(h) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log S_{\mu}(r, h)}{\log r} \tag{11.13}$$

supposing that the above limit exists. This can be interpreted as a large deviations form for the distribution of  $\log m(r; \mathbf{R})$  as  $\log(1/r) \rightarrow \infty$ .

The Hentschel-Procaccia spectrum may be computed from  $S_{\mu}(h)$  as follows. Using (11.12) with  $f(h) = r^{ph}$  in the definition (11.4) of the Hentschel-Procaccia spectrum, we get

$$\xi_{\mu}(p) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\int e^{(\log r)[ph + \frac{\log S_{\mu}(r, h)}{\log r}]} dh}{\log r}$$

Then as  $\log r$  goes to  $-\infty$  the integral above is dominated by the minimum of  $ph + \frac{\log S_\mu(r,h)}{\log r}$ . Using (11.13) we get

$$\xi_\mu(p) = \min_h [ph + S_\mu(h)] \tag{11.14}$$

meaning that  $\xi_\mu$  is the Legendre transform of  $S_\mu$ . Note that we then also have the inverse Legendre transform relationship

$$S_\mu(h) = \max_p [\xi_\mu(p) - ph] \tag{11.15}$$

Also the local dimension spectrum can be deduced from  $S_\mu(h)$ . For this we give a very naive estimate of (11.11) where  $Z = K_\mu(h)$ . We argue that

$$\inf_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}_\varepsilon(K_\mu(h))} \sum_{G \in \mathcal{G}} (\text{diam } G)^\alpha \approx \inf_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}_\varepsilon(K_\mu(\varepsilon;h,dh))} \sum_{G \in \mathcal{G}} (\text{diam } G)^\alpha$$

is a good approximation. Furthermore we argue that on the right hand side above we can take a cover  $\mathcal{G}$  by balls of radius  $\varepsilon/2$ . Now the mass of  $\mu$  inside each such ball is approximately  $(\varepsilon/2)^h$ , and a finite fraction of points inside that ball is also in  $K_\mu(\varepsilon; h, dh)$ . So that the number of balls needed to cover  $K_\mu(\varepsilon; h, dh)$  is approximately  $S_\mu(\varepsilon/2, h)/(\varepsilon/2)^h$ , which gives the estimate

$$\inf_{\mathcal{G} \in \mathcal{C}_\varepsilon(K_\mu(\varepsilon;h,dh))} \sum_{G \in \mathcal{G}} (\text{diam } G)^\alpha \approx \frac{S_\mu(\varepsilon/2, h)}{(\varepsilon/2)^h} (\varepsilon/2)^\alpha$$

Now for small  $\varepsilon$  we have  $S_\mu(\varepsilon/2, h) \approx (\varepsilon/2)^{S_\mu(h)}$ . We deduce that the critical value of  $\alpha$  is  $h - S_\mu(h)$ . That is, we get

$$f_\mu(h) = \dim_{\mathcal{H}} K_\mu(h) = h - S_\mu(h) \tag{11.16}$$

which can be also written, using (11.15), as

$$f_\mu(h) = h + \min_p [ph - \xi_\mu(p)] = \min_p [ph - \xi_\mu(p - 1)]$$

This is in agreement with the result obtained for some special cases ([46, 21]), saying that  $\xi_\mu(p - 1)$  and  $f_\mu(h)$  are Legendre transforms of each other.

Note also that  $\xi_\mu(-1)$  has a special meaning. Comparing (11.14) and (11.16), we see that

$$-\xi(-1) = \max_h f_\mu(h)$$

### 11.2.5 Large deviations of $m_{[\mu]}(r; \mathbf{R})$

Let us turn the case of a random measure  $[\mu]$ . We shall denote by  $\Omega$  the probability space underlying the random variable  $[\mu]$ . By analogy with the non-random case, we define  $S_{[\mu]}(r, h)$  as the disintegration of  $[\mu]$ , viewed as a measure over  $\mathcal{M} \times \Omega$ , with respect to the level sets of  $d_{\mu(\omega)}(r; \mathbf{R})$ . In particular (11.12) becomes

$$\left\langle \int_{\mathcal{M}} f(d_\mu(r; \mathbf{R})) \mu(d\mathbf{R}) \right\rangle_\mu = \int f(h) S_{[\mu]}(r, h) dh \tag{11.17}$$

$S_{[\mu]}(h)$  is defined just as in (11.13)

$$S_{[\mu]}(h) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\log S_{[\mu]}(r, h)}{\log r} \tag{11.18}$$

Just as in the non-random case, we can deduce

$$\xi_{[\mu]}(p) = \min_h [ph + S_{[\mu]}(h)] \tag{11.19}$$

meaning that  $\xi_{[\mu]}$  is the Legendre transform of  $S_{[\mu]}$ .

However we have not defined the local dimension spectrum for a random measure. Instead, we will state as a definition of the **stochastic  $f(\alpha)$ -spectrum**

$$f_{[\mu]}(h) \equiv h - S_{[\mu]}(h) \tag{11.20}$$

and try to interpret  $f_{[\mu]}(h)$ .

From (11.18) and then (11.12) and (11.17) we see that

$$r^{S_{[\mu]}(h)} \approx S_{[\mu]}(r; h) = \langle S_{\mu}(r; h) \rangle_{\mu}$$

Now if for each realization  $\mu$  we want to cover the set  $K_{\mu}(r; h, dh)$  by balls of radius  $r$ , we have seen that we need approximately  $S_{\mu}(r; h)/r^h$  such balls. Thus the average number  $N_{[\mu]}(r; h)$  of balls needed for the covers is just  $r^{S_{[\mu]}(h)-h}$ .

If  $S_{[\mu]}(h) - h > 0$ , then this average number goes to 0 as  $r \rightarrow 0$ , meaning that for most realizations the set  $K_{\mu}(r; h, dh)$  is empty. In consequence the sets  $K_{\mu}(h)$  have to be empty almost surely implying  $f_{\mu}(h) = -\infty$ . This however means that almost surely  $S_{\mu}(h) \neq S_{[\mu]}(h)$  whenever  $f_{[\mu]}(h) < 0$ . But then also  $HP_{\mu}(q) \neq HP_{[\mu]}(q)$  for the corresponding  $q$ .

On the other hand, if  $S_{[\mu]}(h) - h < 0$  then the average number of balls needed for the covers goes to  $\infty$ . We also know by Kolmogorov's 0-1 law that (if it converges, then)  $\log N_{\mu}(r; h) / \log(1/r)$  has an almost sure limit (i.e. independent of the realization), which then should be the fractal dimension of  $K_{\mu}(h)$ . However we expect that large deviations-type fluctuations of  $N_{\mu}(r; h)$  when  $\log(1/r) \rightarrow \infty$  cause that

$$\frac{\log N_{\mu}(r; h)}{\log(1/r)} \underset{\text{a.s.}}{\approx} \frac{\langle \log N_{\mu}(r; h) \rangle_{\mu}}{\log(1/r)} < \frac{\log \langle N_{\mu}(r; h) \rangle_{\mu}}{\log(1/r)}$$

with strict inequality holding even in the limit  $\log(1/r) \rightarrow \infty$ . In particular sets  $K_{\mu}(h)$  should be almost surely empty even for some (small) positive values of  $f_{[\mu]}(h)$ . More generally, we expect even for  $f_{[\mu]}(h) > 0$  to have  $f_{\mu}(h) \neq f_{[\mu]}(h)$ , and in consequence also the corresponding portions of  $HP_{\mu}(q)$  and  $HP_{[\mu]}(q)$  should differ. This however still remains only a conjecture and the question needs further investigation, either theoretically or possibly by numerical simulations.

## 11.3 Article soumis aux PRL

## Intermittent distribution of tracers advected by a compressible random flow

J er mie Bec,<sup>1,2</sup> Krzysztof Gaw dzki,<sup>3,1</sup> and P eter Horvai<sup>4,1,3</sup><sup>1</sup>*Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton, New Jersey 08540, USA.*<sup>2</sup>*Lab. G.-D. Cassini, Observatoire de la Côte d'Azur, BP4229, 06904 Nice Cedex 4, France.*<sup>3</sup>*CNRS, Laboratoire de Physique, ENS-Lyon, 46 Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 7, France.*<sup>4</sup>*Centre de Physique Théorique,  cole Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France.*

Multifractal properties of a tracer density passively advected by a compressible random velocity field are characterized. A relationship is established between the statistical properties of mass on the dynamical fractal attractor towards which the trajectories converge and large deviations of the stretching rates of the flow. In the framework of the compressible Kraichnan model, this result is illustrated by analytical calculations and confirmed by numerical simulations.

We are interested in the passive transport of a scalar density by smooth-in-space compressible random flows in a  $d$ -dimensional bounded domain  $\Lambda$ . During transport, the density develops strong inhomogeneities. Our goal is to describe quantitatively their fine structure arising at asymptotically large times. Compressible flows are physically relevant not only at large Mach numbers. For instance, the dynamics of a suspension of finite-size (inertial) particles in an incompressible flow may be approximated in the limit of short Stokes times by that of simple tracers in an effective compressible flow [1, 2]. Another application is to the advection of particles floating on the surface of an incompressible fluid [3].

A smooth passive density field  $\rho(t, \mathbf{x})$  evolves in the velocity field  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  according to the continuity equation

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (1)$$

which preserves the total mass that we shall assume for convenience normalized to one. If the initial density at time  $t_0$  is uniform and if the flow is compressible and sufficiently mixing, then the solution  $\rho(t)$  of (1) will approach, when  $t_0$  tends to  $-\infty$ , a singular limit  $\rho_*(t)$  which is a measure with support on the dynamical attractor towards which the Lagrangian trajectories converge. For random velocities, the measure  $\rho_*(t)$  and the dynamical attractor depend on the velocity realization. We shall consider stationary velocity ensembles where the statistics of  $\rho_*(t)$  does not depend on  $t$ . For convenience, we shall restrict our study to  $\rho_* \equiv \rho_*(0)$ . One expects the measure  $\rho_*$  to have roughly a local product structure with a smooth density along the unstable manifolds of the flow and a fractal-like structure in the transverse directions (such measures are called SRB [4]).

The **Lagrangian average** defined by

$$\langle F \rangle \equiv \overline{\int_{\Lambda} F(\mathbf{x} | \mathbf{v}) \rho_*(\mathbf{x} | \mathbf{v}) d\mathbf{x}},$$

where the overline denotes the expectation with respect to the velocity ensemble, samples points in  $\Lambda$  according to the density  $\rho_*$  of the asymptotic tracer distribution on the random attractor. It determines an invariant measure  $\mu_*$  of the random dynamical system defined on the product of the physical space  $\Lambda$  and the space of the velocity realizations.

We are interested in the small-scale statistics of the mass distribution associated to the measure  $\rho_*$ . Denote by  $\mathcal{B}_r(\mathbf{x})$  the ball of radius  $r$  around the point  $\mathbf{x}$  and introduce the quantities

$$m_r(\mathbf{x}) \equiv \int_{\mathcal{B}_r(\mathbf{x})} \rho_*(\mathbf{y}) d\mathbf{y}, \quad h_r(\mathbf{x}) \equiv \frac{\ln m_r(\mathbf{x})}{\ln r}.$$

The **local dimension** at  $\mathbf{x}$ , defined if the limit exists as  $h(\mathbf{x}) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} h_r(\mathbf{x})$ , characterizes the small-scale distribution of mass associated to the limiting density  $\rho_*$ . A more global assessment is provided by the Hentschel-Proccaccia spectrum for dimensions [5, 6] of  $\rho_*$ :

$$HP(n | \rho_*) \equiv \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \int_{\Lambda} m_r(\mathbf{x})^{n-1} \rho_*(\mathbf{x}) d\mathbf{x}}{(n-1) \ln r} \quad (2)$$

for real  $n$ . In particular,  $HP(0 | \rho_*)$  is the fractal dimension of the support of  $\rho_*$ ,  $HP(1 | \rho_*)$  is known as the information (or capacity) dimension and  $HP(2 | \rho_*)$  as the correlation dimension. For random flows, one may define the **quenched version** of the Hentschel-Proccaccia spectrum  $HP_{\text{qu}}(n) \equiv \overline{HP(n | \rho_*)}$  and the **annealed version**  $HP_{\text{an}}(n)$  where the velocity average is taken under the logarithm in the numerator on the right-hand side of (2). One has  $(n-1)HP_{\text{qu}}(n) \geq (n-1)HP_{\text{an}}(n)$  and  $HP_{\text{qu}}(1) = HP_{\text{an}}(1)$  (if exists). If the moments of  $m_r(\mathbf{x} | \mathbf{v})$  with respect to the invariant measure  $\mu_*$  exhibit the small  $r$  scaling

$$\langle m_r^n \rangle \sim r^{\xi_n}, \quad (3)$$

then  $HP_{\text{an}}(n+1) = \xi_n/n$ . There are various aspects of behavior (3). First, a non-linear dependence of the scaling exponents  $\xi_n$  implies **intermittency** in the mass distribution and, in particular, the presence of non-Gaussian tails in the probability density function (PDF) of  $m_r$ . Second, this behavior suggests that the PDFs of  $h_r$  take, for small radii, the large deviations form  $e^{(\ln r) S(h)}$  with the rate function  $S(h)$  and the scaling exponents  $\xi_n$  related by the Legendre transform:  $S(h) = \max_n [\xi_n - nh]$ . Third, the (annealed) fractal dimensions  $f(h)$  of the random sets on which the local dimension  $h(\mathbf{x})$  is equal to  $h$  (the **multifractal spectrum**), is expected to be equal to  $h - S(h)$ .

The aim of this letter is to relate quantitatively the dimensional spectrum  $HP_{an}(n)$  to the large deviations of the stretching rates of the flow (sometimes also called finite-time Lyapunov exponents). We note here that in [2] a similar relation was discussed for  $n = 1$  and, in a qualitative way, for large  $n$ .

Let  $X(t, x)$  denote the Lagrangian trajectory passing at time zero through point  $x$ . The matrix  $W(t, x) \equiv (\partial_j X^i(t, x))$  describes the flow linearized around the trajectory  $X$ . The eigenvalues of the positive matrix  $W^T W$  may be written, arranged in non-increasing order, as  $e^{2t\sigma_1}, \dots, e^{2t\sigma_d}$  with  $\sigma_i \equiv \sigma_i(\tau, x|v)$  called the stretching rates of the flow. The limits

$$\lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \sigma_i(t)$$

exist almost surely with respect to the invariant measure  $\mu_*$  and are constant if the latter is ergodic. They define the Lyapunov exponents of the flow. This is the content of the Multiplicative Ergodic Theorem [7]. As argued in [8], if the exponents  $\lambda_i$  are all different then the PDF of the stretching rates takes the large deviation form

$$e^{-tH(\sigma_1, \dots, \sigma_d)} \theta(\sigma_1 - \sigma_2) \dots \theta(\sigma_{d-1} - \sigma_d) \quad (4)$$

for large  $t$  with convex rate function  $H$  attaining its minimum, equal to zero, at  $\sigma_i = \lambda_i$ .

If the top Lyapunov exponent  $\lambda_1$  is negative, then the attractor measure  $\rho_*$  is expected to be atomic with trivial mass statistics. For  $\lambda_1 > 0$ , Ledrappier and Young [9] showed under rather general assumptions that the local dimension  $h$  is almost surely equal to the Lyapunov dimension  $d_L = j + \delta$  where  $0 < \delta \leq 1$  is such that  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j + \delta\lambda_{j+1} = 0$ . The above statement implies that

$$HP_{qu}(1) = HP_{an}(1) = d\xi_n/dn|_{n=0} = d_L. \quad (5)$$

The Lyapunov dimension  $d_L$  was introduced by Kaplan and Yorke [10] and may be heuristically interpreted as the dimension of objects keeping a constant volume during the time evolution. Eq. (5) gives only partial information about the mass scaling as compared to the full set of exponents  $\xi_n$ .

To relate the mass distribution in small balls to the fluctuations of the stretching rates, we focus on the two-dimensional case. The expected smoothness of  $\rho_*$  in the

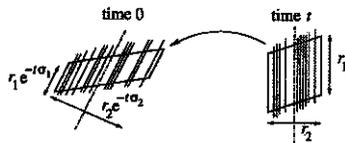


FIG. 1: Two-dimensional sketch of the backward-in-time evolution between times  $t$  and 0 of a small parallelogram of length  $r_1$  in the direction of the unstable manifold and  $r_2$  in the direction perpendicular to it.

unstable direction leads us to consider small parallelograms with one side of size  $r_1$  parallel to the unstable manifold and with extension  $r_2$  in the direction perpendicular to it. We expect that the moments of the mass  $m_{r_1, r_2}$  in such parallelograms obey

$$\langle m_{r_1, r_2}^n \rangle \sim r_1^n r_2^{\xi_n - n} \quad (6)$$

for small  $r_1, r_2$  as long as  $\xi_n - n \geq 0$ . When  $\xi_n < n$ , we expect (6) to be replaced for  $r_2 > r_1$  by

$$\langle m_{r_1, r_2}^n \rangle \sim r_1^{\xi_n} r_2^0. \quad (7)$$

This may be viewed as analogous to the stretching in one direction of a fractal set of dimension  $D$ , while contracting it in the other one. In the expanding direction, the set will behave (down to a scale depending on the stretching) as if projected on a line, so it will have dimension  $\min(1, D)$ . In the other direction it will have the complementary dimension  $D - \min(1, D) = \max(D - 1, 0)$ .

Let us consider such a parallelogram at  $t > 0$  and let us look at its pre-image at time zero. While the direction parallel to the unstable manifold is exponentially contracted backward-in-time with a rate given by the largest stretching rate  $\sigma_1$ , the other direction typically expands with an exponential rate  $\sigma_2$ . Hence the time-zero pre-image of the original parallelogram is (approximately) another parallelogram as sketched in Fig. 1. Conservation of mass and stationarity of the statistics lead to the relation

$$\langle m_{r_1, r_2}^n \rangle \approx \langle m_{r_1 e^{-t\sigma_1}, r_2 e^{-t\sigma_2}}^n \rangle.$$

If there is a sufficiently rapid loss of memory in the Lagrangian dynamics (i.e. if the invariant measure is sufficiently mixing) then the expectation on the right-hand side should factorize for large  $t$  (such a factorization holds for all  $t$  in the Kraichnan model discussed below). In such situation, using the large deviation form (4) of the PDF of the stretching rates, we infer that

$$\langle m_{r_1, r_2}^n \rangle \sim \int_{\sigma_1 \geq \sigma_2} \langle m_{r_1 e^{-t\sigma_1}, r_2 e^{-t\sigma_2}}^n \rangle e^{-tH(\sigma_1, \dots, \sigma_2)} d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Consistency of the above relation with the scaling (6) requires that

$$1 \sim \int_{\sigma_1 \geq \sigma_2} e^{-t[n\sigma_1 + (\xi_n - n)\sigma_2 + H(\sigma_1, \sigma_2)]} d\sigma_1 d\sigma_2.$$

Since  $t$  is assumed large, a saddle-point argument implies then the following relation between the scaling exponents  $\xi_n$  and the rate function  $H$  of the stretching rates:

$$\min_{\sigma_1 \geq \sigma_2} [n\sigma_1 + (\xi_n - n)\sigma_2 + H(\sigma_1, \sigma_2)] = 0. \quad (8)$$

Alternative formulations are

$$\xi_n = n - \max_{\sigma_1 \geq \sigma_2} \frac{1}{\sigma_2} [n\sigma_1 + H(\sigma_1, \sigma_2)] = \min_{h \geq 0} [hn + S(h)]$$

for  $S(h) = \min_{\sigma > 0} \sigma^{-1} H((h-1)\sigma, -\sigma)$ . These formulae are valid for  $\xi_n \geq n$ . Similarly, from (7) we may get the formula valid for  $\xi_n \leq n$

$$\xi_n = - \max_{\substack{\sigma_1 \geq \sigma_2 \\ \sigma_1 < 0}} \frac{1}{\sigma_1} H(\sigma_1, \sigma_2). \quad (9)$$

It is easily checked from (8) that  $(d\xi_n/dn)|_{n=0} = 1 - \lambda_1/\lambda_2$  which coincides, in our settings, with formula (5). Also from (8) one may deduce that

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \langle |R(t)|^{-\xi_1} \rangle = 0,$$

for  $R(t) = W(t, \mathbf{x})R_0$ , meaning that the generalized Lyapunov exponent of order  $-\xi_1$  vanishes. This is a known result for stochastic flows of diffeomorphisms, see [11]. Relation (8) can be extended to dimensions higher than two using similar arguments.

To illustrate the small-scale properties of the mass distribution, we focus in the sequel on transport by a random compressible velocity field chosen in the framework of the Kraichnan model [12]. For the domain  $\Lambda$  we take a periodic box. The velocity  $\mathbf{v}$  is taken centered Gaussian, with covariance

$$\overline{v^i(\mathbf{x} + \boldsymbol{\ell}, t + \tau) v^j(\mathbf{x}, t)} = 2(D_0 \delta^{ij} - d^{ij}(\boldsymbol{\ell})) \delta(\tau),$$

where, for small separations  $\boldsymbol{\ell}$ , the function  $d^{ij}$  satisfies

$$d^{ij}(\boldsymbol{\ell}) = \frac{D_1}{2} [(d+1-2\varphi) \delta^{ij} \ell^2 + 2(\varphi d - 1) \ell^i \ell^j + o(\ell^2)]$$

assuring local isotropy. The parameter  $\varphi$ , called the compressibility degree, is chosen in the interval  $[0, 1]$ . Its extreme values correspond, respectively, to incompressible and to potential velocity fields. For such velocity ensembles, the distribution of the stretching rates is explicitly known [8, 13]. The corresponding rate function takes the simple form

$$H = \frac{1}{C_1} \left[ \sum_{i=1}^d (\sigma_i - \lambda_i)^2 + C_2 \left( \sum_{i=1}^d (\sigma_i - \lambda_i) \right)^2 \right].$$

$C_1 \equiv 4D_1(d + \varphi(d-2))$ ,  $C_2 \equiv (1 - \varphi d)/(\varphi(d-1)(d+2))$ . The Lyapunov exponents are  $\lambda_j = D_1[d(d-2j+1) - 2\varphi(d+(d-2)j)]$ . In the two-dimensional case, the largest Lyapunov exponent is negative when  $\varphi > 1/2$ . For  $\varphi < 1/2$ , the exponents for the mass distribution obtained from (8) and (9) read

$$\xi_n = \begin{cases} \frac{2n + \sqrt{(1+2\varphi)^2 - 8\varphi n}}{1+2\varphi} - 1 & \text{if } n \leq n_{cr}, \\ \xi_{\infty} & \text{if } n \geq n_{cr} \end{cases} \quad (10)$$

where the critical moment  $n_{cr}$  and the saturation exponent  $\xi_{\infty}$  are given by

$$\begin{cases} n_{cr} = \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{2\varphi}} \\ \xi_{\infty} = 2n_{cr} - 1 \end{cases} \quad \text{if } 0 < \varphi \leq 1/6, \\ n_{cr} = \xi_{\infty} = \xi_1 = \frac{2-4\varphi}{1+2\varphi} \quad \text{if } 1/6 \leq \varphi < \frac{1}{2}.$$

The two different behaviors are illustrated in Fig. 2. In both cases, the events contributing to the saturation of the exponents are those for which a mass of order unity is concentrated inside the small ball.

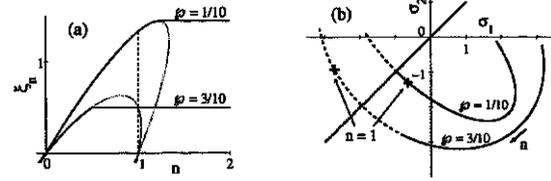


FIG. 2: (a) Ellipses in the  $(n, \xi_n)$  plane corresponding to the unconstrained minimum in (8). Dotted parts refer to situations when either the minimum is reached for  $\sigma_1 < \sigma_2$  or  $\xi_n < n$ . Two values of  $\varphi$  are represented to illustrate both the case  $\varphi < 1/6$  and  $\varphi > 1/6$ . (b) Location where the minimum is reached in the  $(\sigma_1, \sigma_2)$  plane.

Numerical simulations confirm the values of the scaling exponents obtained explicitly for the compressible Kraichnan model. To distinguish the two cases, two different values of the compressibility degree are investigated ( $\varphi = 1/10 < 1/6$  and  $\varphi = 3/10 > 1/6$ ). The velocity field  $\mathbf{v}$  is generated by the superposition of nine independent Gaussian modes and the density is approximated by considering a large number of Lagrangian tracers. The exponents obtained numerically after averaging over  $10^5$  turnover times and for  $N = 10^5$  tracers are shown in Fig. 3. Although statistical convergence of the average is quite slow, these expensive simulations are in a rather good agreement with the theory, in particular with the saturation of the exponents after the critical order.

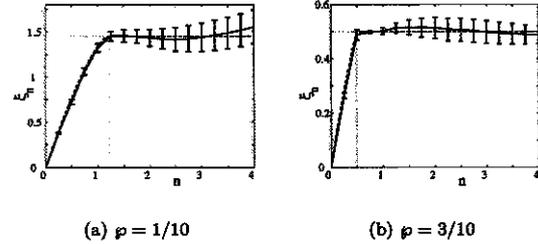


FIG. 3: Scaling exponents  $\xi_n$  for the mass distribution associated to the advection of a density field by a Kraichnan velocity field. For two different degrees of compressibility, the exponents obtained match those predicted by theory which are represented as dashed lines.

The determination of the exponents may be improved for positive integer orders  $n$  by considering only  $n+1$  particles. This method allows to perform very long time averages (here of the order of  $10^8$  turnover times) required for good convergence of the statistics at small scales. As shown in Fig. 4, for  $\varphi = 3/10$ , the moments clearly scale

over several decades. For the lower value of compressibility  $\varphi = 1/10$ , convergence is slower because of the smaller probability for the tracked particles to come close together.

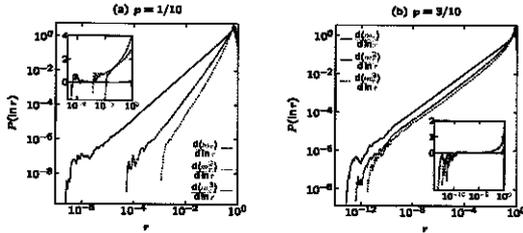


FIG. 4: For  $n + 1$  particles ( $n = 1, 2$  and  $3$ ) the distribution of the maximum of the distances of the reference particle to the other  $n$  particles is represented. It can be shown that this PDF is proportional to  $d\langle m_r^n \rangle / d \ln r$ . The insets show the difference with small- $r$  asymptotes with slopes given by the theoretical exponents.

Finally, let us mention that, for integer orders, the exponent  $\xi_n$  for the Kraichnan model can be linked to the homogeneity degree of the stationary single-time density correlation function

$$\mathcal{F}_{n+1} \equiv \overline{\rho(\mathbf{0})\rho(\mathbf{x}_1)\cdots\rho(\mathbf{x}_n)}.$$

The  $n^{\text{th}}$  order moment of  $m_r$  may be written as

$$\langle m_r^n \rangle = \int_{B_r(\mathbf{0}) \times \cdots \times B_r(\mathbf{0})} \mathcal{F}_{n+1}(\mathbf{0}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) d\mathbf{x}_1 \dots d\mathbf{x}_n. \quad (11)$$

In the stationary regime of the Kraichnan model  $\mathcal{F}_{n+1}$  is a zero mode of the operator

$$M_{n+1}^\dagger \equiv \sum_{0 \leq k, \ell \leq n} \partial_{x_k} \partial_{x_\ell} [(D_0 \delta^{ij} - d^{ij}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_\ell)) \cdot]$$

We need not write these zero modes explicitly. The homogeneity degree of the isotropic solution of lowest de-

gree can be found simply by requiring its positivity and imposing on it certain continuity and integrability conditions. The branch  $n < n_{\text{cr}}$  in (10) is obtained by requiring the solution to be continuous at  $\mathbf{x}_1 = \dots = \mathbf{x}_n$ . On this subspace,  $M_{n+1}^\dagger$  is degenerate, owing to the fact that collinear points remain collinear when transported by the (linearized) flow. If in addition we restrict  $M_{n+1}^\dagger$  to the rotationally invariant sector, it becomes an ordinary second-order homogenous differential operator. It has two scaling solutions. The one with exponent  $\xi_n - nd$  gives, through (11), the non-saturated ( $n < n_{\text{cr}}$ ) branch of (10). Such a solution breaks down when the corresponding zero mode ceases to be integrable at small  $\mathbf{x}_i$  which may occur if the restriction of the zero mode to the collinear sector is not integrable near 0, i.e.  $\xi_n - nd \leq -1$ . This gives  $n_{\text{cr}}$  and  $\xi_\infty$  in the case  $\varphi < 1/6$ . Another scenario is if the zero mode has a non-integrable singularity around the collinear geometry. This gives  $n_{\text{cr}}$  and  $\xi_\infty$  in the case  $\varphi > 1/6$ .

An important open question not touched upon by this paper concerns the case of rough-in-space velocity fields appearing in the limit of very high Reynolds numbers. That problem cannot be formulated in terms of stretching rates but the relationship with density correlations and zero modes still holds.

We are grateful to D. Dolgopyat, U. Frisch, K. Khanin, Y. Le Jan and O. Raimond for interesting and motivating discussions. J.B. acknowledges the support of the National Science Foundation under agreement No. DMS-9729992 and of the European Union under contract HPRN-CT-2000-00162. K.G. thanks the von Neumann Fund at IAS in Princeton for the grant. Part of the numerical simulations were performed in the framework of the SIVAM project at the Observatoire de la Côte d'Azur.

When this work was essentially finished, we learned from A. Fouxon that he has also derived the relationship (8) between the scaling exponents of mass and the large deviations of the stretching rates.

- [1] T. Elperin, N. Kleorin and I. Rogachevskii, Phys. Rev. Lett. **77**, 5373 (1996).
- [2] E. Balkovsky, G. Falkovich and A. Fouxon, Phys. Rev. Lett. **86**, 2790 (2001).
- [3] J. Schumacher and B. Eckhardt, Phys. Rev. E **66**, 017303 (2002).
- [4] L.-S. Young, J. Stat. Phys. **108** (2002), 733.
- [5] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, Physica D **8**, 435 (1983).
- [6] Ya. Pesin, *Dimensional theory in dynamical systems* (Univ. Chicago Press, Chicago, 1997).
- [7] L. Arnold, *Random Dynamical Systems* (Springer, Berlin Heidelberg, 1998)

- [8] E. Balkovsky and A. Fouxon, Phys. Rev. E **60** (1999), 4164.
- [9] F. Ledrappier and L.-S. Young, Commun. Math. Phys. **117**, 529 (1988).
- [10] J.L. Kaplan and J.A. Yorke, in Lecture Notes in Math. **730** (Springer, Berlin, 1979) p. 204.
- [11] P.H. Baxendale, in *Spatial stochastic processes*, edited by K. Alexander and J. Watkins, Progress in Probability **19** (Birkhäuser, Boston, Basel, Berlin, 1991), p. 189.
- [12] R. H. Kraichnan, Phys. Fluids **11**, 945 (1968)
- [13] G. Falkovich, K. Gawędzki and M. Vergassola, Rev. Mod. Phys. **73** 913 (2001).

## Annexe A

# Implémentation en MAPLE des calculs du Chapitre 8

Dans cette annexe nous présentons, à titre indicatif, une implémentation des algorithmes décrits au Chapitre 8. L'implémentation rend explicite les détails techniques sur lesquels nous avons pu glisser dans le texte. En outre, il a fallu surmonter des difficultés importantes concernant le temps de calcul ou la taille des formules, et aussi pour aboutir à des formules compréhensibles par des humains. Pour ces raisons, cette implémentation est un apport important au matériel traité dans le Chapitre 8, et nous le mettons en annexe ici.



```

end:
## Search in 'expr' for variables with index 'ind'
##
##
search_vars := proc(expr, ind)
#
# if not type(expr, algebraic)
# then ERROR("Sorry", expr, "is not algebraic.");
# elif not type(ind, symbol)
# then ERROR("Sorry", index is not a symbol", ind)
# fi;
#
# if type(expr, numeric) or type(expr, symbol)
# then RETURN(NULL);
# fi;
#
# if type(expr, '+' ) or type(expr, '*' ) or type(expr, '^')
# then RETURN(op(map(search_vars, [op(expr)], ind))
# fi;
#
# if type(expr, indexed)
# then if op(0, expr) = delta then RETURN(NULL)
# elif op(1, expr) <> ind then RETURN(NULL)
# else RETURN(op(0, expr))
# fi;
# fi;
#
# ERROR(expr, "is of unknown type", whattype(expr));
RETURN(NULL);
end:
## Create set of all indexing symbols and numbers in 'expr'
##
##
all_indexes := proc(expr)
#
# if not type(expr, algebraic)
# then ERROR("Sorry", expr, "is not algebraic.");
# fi;
#
# if type(expr, numeric) or type(expr, symbol)
# then RETURN({});
# fi;
#
# if type(expr, '+' ) or type(expr, '*' ) or type(expr, '^')
# then RETURN('union'(op(map(all_indexes, [op(expr)])))
# fi;
#
# if type(expr, indexed)
# then RETURN({op(expr)})
# fi;
#
# ERROR(expr, "is of unknown type", whattype(expr));
RETURN(NULL);
end:
## Create explicit values of some deltas,
## and add index commutation rules.
## !! NOTE that explicit deltas must be called
## before contract or contract.fast
## on all indices that intervene in the contraction !!
explicit_deltas := proc(indices)

```

```

then ERROR("Not homogeneous", expr)
fi;
RETURN(op(1, dege));
fi;
#
# if type(expr, '*')
# then RETURN('+' [op(map(deg_hom, [op(expr)], var))])
# fi;
#
# We suppose the exponent to be constant
# if type(expr, '^')
# then RETURN(op(2, expr) * deg_hom(op(1, expr), var))
# fi;
#
# if type(expr, symbol)
# then if expr = var
# then RETURN(1)
# fi;
# RETURN(0);
# fi;
#
# if type(expr, indexed)
# then if op(0, expr) = var
# then RETURN(1)
# fi;
# RETURN(0);
# fi;
#
# ERROR("Degree of homogeneity of", expr,
# "of unknown type", whattype(expr),
# "in", var,
# "is 0");
RETURN(0);
end:
## Search in 'expr' occurrences of delta with one index 'ind',
## and return sequence of co-occurring indices
##
##
search_delta := proc(expr, ind)
#
# if not type(expr, algebraic)
# then ERROR("Sorry", expr, "is not algebraic.");
# elif not type(ind, symbol)
# then ERROR("Sorry", index is not a symbol", ind)
# fi;
#
# if type(expr, numeric) or type(expr, symbol)
# then RETURN(NULL);
# fi;
#
# if type(expr, '+' ) or type(expr, '*' ) or type(expr, '^')
# then RETURN(op(map(search_delta, [op(expr)], ind))
# fi;
#
# if type(expr, indexed)
# then if op(0, expr) <> delta then RETURN(NULL)
# elif op(1, expr) = ind then RETURN(op(2, expr));
# elif op(2, expr) = ind then RETURN(op(1, expr));
# WE. delta[ind, ind] is correctly treated
# else RETURN(NULL); # delta but ind does not occur
# fi;
# fi;
#
# ERROR(expr, "is of unknown type", whattype(expr));
RETURN(NULL);

```

```

local nums,syms, # numerical and symbolic indexes
    i,j; # loop variables
global delta;
# unprotect(delta); # Only here may delta be modified
if not (type(indices,list) or type(indices,set))
then ERROR("You have to give a list or set of indices")
fi;
# nums := select(x->type(x,numeric),indices);
# syms := select(x->type(x,symbol),indices);
for i in nums
do for j in nums
do if i = j
then delta[i,j] := 1
else delta[i,j] := 0
fi;
od;
od;
for i in nums
do for j in syms
do delta[j,i] := delta[i,j]
od;
od;
for i in syms
do for j in syms
do if convert(i,string) > convert(j,string)
then delta[i,j] := delta[j,i]
fi;
od;
od;
for i in syms do
delta[i,i] := delta_i1
od;
# protect(delta); # delta can not be modified outside this function
end;

## Contract on index 'ind' in expression 'expr', in dimension 'dim'
##
## Contract_n := proc(L,ind,dim)
local n; # stores successive stages of contraction
    coinds, # coinds = other indices (co-occurring to ind)
    coind,dlt,
    n, # loop variables
    cfs, # list of coefficients
    terms, # list of terms
    p; # progressive construction temporary variable
# NB. delta[i,ind] = delta[ind,i] etc. are implicit because
# explicit_deltas was executed on intervening indices.
# L := expr;
# coinds := [search_delta(L,ind)];
if nops(coinds) >= 1
then
coind := coinds[1];

```

```

dlt := delta[ind,coind];
cfs := [coeffs(collect(L,dlt),dlt,'terms')];
terms := [terms];
p := 0;
for n from 1 to nops(terms) do
if terms[n] = dlt^2
then p := p + dim * cfs[n]
elif terms[n] = dlt
then p := p + subs{ind = coind, cfs[n]}
elif terms[n] = 1
then
if nops(coinds) >= 2
then p := p + contract_n(cfs[n],ind,dim)
else p := p + contract_v(cfs[n],ind,dim)
fi
fi;
else ERROR("Bad term", terms[n])
od;
RETURN(p);
else
RETURN(contract_v(L,ind,dim))
fi;
end;

contract_v := proc(L,ind,dim)
local # L, # stores successive stages of contraction
    indvars, # indvars = variables having index 'ind'
    vind,
    n, # loop variables
    v, # looping sequence elements
    cfs, # list of coefficients
    terms, # list of terms
    p; # progressive construction temporary variable
# indvars := [search_vars(L,ind)];
# if nops(indvars) >= 1
then
v := indvars[1];
vind := v[ind];
cfs := [coeffs(collect(L,vind),vind,'terms')];
terms := [terms];
p := 0;
for n from 1 to nops(terms) do
if terms[n] = vind^2
then p := p + v^2 * cfs[n]
elif terms[n] = v
then p := p + vind * cfs[n]
elif terms[n] = 1
then
if nops(indvars) >= 2
then p := p + contract_v(cfs[n],ind,dim)
else p := p + cfs[n]
fi
fi
else ERROR("Bad term", terms[n])
fi;
od;
RETURN(p);
else
RETURN(L)
fi;
end;
##

```

```

bl,d),
b2,d)
;
# RETURN(unapply(x^(2-xi)*M,a1,a2));
# At this point b1 and b2 are eliminated due to the contractions
# a1 and a2 are eliminated by unapply
end:

## This is the action of $x_{[a1]} \backslash \text{partial}_{[b1]}$ on $G(b1,a2)$
## that is divergence of the first component (L = left),
## multiplied by $x_{[a1]}$ to get a result in the space of second rank tensors.
## Notice that a1d_L commutes with O(d) and has homogeneity degree 0
## so that it preserves every subspace of the O(d)M decomposition.
## Also the multiplication by $x_{[a1]}$ does not change de kernel
## of the operation, ie. we can still find divergence free functions.
##
allD L := proc(G)
local a1, a2, # indexing vars eliminated in final unapply
b1; # indexing variable eliminated by contractions
# explicit_deltas({a1,a2,b1,op(all_indexes(G(a1,a2)))});
# unapply(x[a1] * contract_fast(der(G(b1,a2),x[b1]),
b1,d),
a1,a2);
end:
##
## This is the divergence of the second component (R = right)
allD R := proc(G)
local a1, a2, # indexing vars eliminated in final unapply
b1; # indexing variable eliminated by contractions
# explicit_deltas({a1,a2,b1,op(all_indexes(G(a1,a2)))});
# unapply(x[a2] * contract_fast(der(G(a1,b1),x[b1]),
a1,a2);
end:
##
## We also define the laplacian
allL := proc(G)
local a1, a2, # indexing vars eliminated in final unapply
b1; # indexing variable eliminated by contractions
# explicit_deltas({a1,a2,b1,op(all_indexes(G(a1,a2)))});
# unapply(x^2 * contract_fast(der(der(G(a1,a2),
x[b1]),
b1,d),
a1,a2);
end:
#####
## We define constants, tensors we will use and some relations
#####

```

```

## This is an efficient way of contracting indices in 'expr'
## in case 'expr' is a sum of many terms. In fact algebra
## is very non-linear in the size of 'expr', and cutting
## up 'expr' into small pieces that may be treated
## independently speeds things up incredibly.
contract_fast := proc(expr,ind,dim)
local I;
#
# L := subs(delta_ij = dim, expr);
# L := contract_n(L,ind,dim);
# if has(L,ind) # 'ind' still occurs => contraction failed
then ERROR("contraction in", ind, "uncomplete.")
fi; # ERROR is more visible than WARNING
#
RETURN(L);
end:
#####
## From this point on things are specific
## to the vector advection problem.
##
## We begin by defining some differential operators
## using our tensor notation manipulating functions.
##
#####
## 'altM' is the differential operator expressing the stochastic
## action of the velocity field on the two point function of the
## advected vector field. This procedure codes the action of M
## on 'G'. The return value is x^(2-xi)*(M G) viewed as a
## function of the tensor indices. The argument is a tensor 'G'
## also given as a function of it's tensor indices
## ie. G : (a1,a2) -> expression in variables indexed by a1,a2
##
altM := proc(G)
local M, # the real M, before multiplying for homogeneity degree 0
a1,a2, # indexing variables unapplied before procedure returns
b1,b2; # indexing variables which must be eliminated
# before procedure returns, due to contractions
#
# explicit_deltas([a1,a2,b1,b2,1,2,3]); # introduce simplifications
# introduce simplifications
# explicit_deltas([a1,a2,b1,b2,op(all_indexes(G(a1,a2)))]);
# in case G should not depend on one of it's indexes ...
#
M :=
contract_fast(der(
contract_fast(der(
S(b1,b2)*G(a1,a2),x[b1]),
b1,d),x[b2]),
b2,d)
- contract_fast(der(
contract_fast(der(
S(b1,a2),x[b2])*G(a1,b2),
b1,d),x[b1]),
b1,d)
- contract_fast(der(
contract_fast(der(
S(a1,b2),x[b1])*G(b1,a2),
b1,d),x[b2]),
b2,d)
+ contract_fast(
contract_fast(der(der(S(a1,a2),x[b1]),x[b2])*G(b1,b2),

```

```

# explicit_deltas(all_indexes(expr(a,b)));
#
L := expand(expr(a,b));
L := map(x->it_list(coeff(L,x),charterms(a,b));
L := map(x->combine(factor(to_Z(x)),power),L);
RETURN(L);
end;

## This is the matrix who's columns
## are the coefficient vectors of the 'basename' [i],
## as defined above (comment to Bvect)
##
Bmat := proc(basename)
local B, Bcharterms;
# B := eval(convert(basename,symbol));
Bcharterms := ''.basename.'charterms';
# linalg[concat](op(map(Bvect,B,Bcharterms)));
end;

## This is just the procedure that uses coefficients
## of some tensor products in expr to determine it's components
## on the 'basename'[i] tensors, as described above.
## There is a check to see if the components add up to the whole.
#
Bcomps := proc(expr,basename)
local B, #the basis
Bcharterms, Bmat, # B will be substituted by appropriate letter
comps, # the components
dif, # possible difference when reconstructing from components
a,b; # indexing symbols

# B := eval(convert(basename,symbol));
Bcharterms := ''.basename.'charterms';
Bmat := ''.basename.'mat';
#
comps := convert(simplify(
evalm(Bmat^(-1) &* Bvect(expr,Bcharterms))),
list);
## From here on check if components found add up to expr
##
explicit_deltas([a,b,op(all_indexes(expr(a,b))),
map(x->op(all_indexes(x(a,b))),B)];
dif := simplify(
combine(expand(to_Z(expr(a,b) -
'+'(op(sip((x,y)->x*y(a,b),
compB,B))))),
power));
if dif <> 0 then ERROR("Incomplete decomposition", dif) fi;
# RETURN(comps);
end;

#####
## These functions will be used to verify independence of
## subsequently defined tensor families
#####
#

```

```

## Constants of the velocity field
##
S := (a,b) -> S1(x) * x^2 * delta[a,b]
+S2(x) * x[a] * x[b]
;
S1 := x -> Sc[1] * x^(xi-2);
S2 := x -> Sc[2] * x^(xi-2);

## Weight vectors of the fundamental representation of SO(d)
##
z1 := x[1] + I*x[2];
z2 := x[3] + I*x[4];
to_Z := v -> subs(x[2] = -I*(z1 - x[1]),
x[4] = -I*(z2 - x[3]), v);

## Before we go further we will need some functions
##
#####
## The following functions will be used to manipulate the
## tensorial bases. Mainly computing coefficients of some
## tensor in a basis given by some other tensors.
##
#####
## This is a classic
## binop(...binop(t,1[1]),...,1[n])
it_list := proc(binop,t,1) ## !GENERIC
local T,L;
T := t;
L := 1;
while nops(L) > 0 do
T := binop(T,op(1,L));
L := subsop(1=NULL,L);
od;
RETURN(T);
end;

## Calculate coefficients of some tensor products in 'expr'.
## For example if we have a set of products who's coefficients
## characterize uniquely each G[i] (ie. the 5 vectors
## of coefficients calculated for the 5 G[i] are linearly independent),
## then for any element in the span of the G[i] it suffices
## to calculate the coefficients of these products,
## and multiply by the inverse of the matrix
## giving the coefficients of the G[i]. In other words we have a linear
## map from Span(G[i] : i=1..5) to the vector space of possible coefficient
## vectors, the map being of rank 5, that is injective.
##
Bvect := proc(expr,charterms)
local L, # temp
a,b; # index symbols

```

```

## Returns the monomials occurring in the polynomial 'poly'
##
terms := proc(poly::polynom) ## !GENERIC
local F,
    p, # set of variables defining coefficient field
    real_indets, # used to store converted forms of 'poly'
    t; # indeterminates of 'poly' minus those in F
t;
# Process optional argument: variables defining the coefficient field
if nargs > 1 then
    F := convert(args[2], set);
    if member(false, map(type, F, symbol))
    then ERROR("Optional argument must be a symbol or list of symbols",
        "but got", args[2], "converted to", F)
    fi;
else F := {}
fi;
#
P := expand(poly);
real_indets := indets(p) minus F;
D := collect(p, real_indets, 'distributed');
coeffs(p, real_indets, 't');
[];
end;

## Calculate the coefficient of the monomial 'term'
## in the polynomial 'poly', where coefficients are in the field
## C(F), 'F' being a set of variables.
##
multicoeff := proc(poly::polynom, term::monomial) ## !GENERIC
local P,
    nargs, # set of variables defining coefficient field
    real_vars; # receives collected form of 'poly'
    real_vars; # list of the variables of 'poly' that are not in 'F'
# Process optional argument: variables defining the coefficient field
if nargs > 2 then
    F := convert(args[3], set);
    if member(false, map(type, F, symbol))
    then ERROR("Optional argument must be a symbol or list of symbols",
        "but got", args[3], "converted to", F)
    fi;
else F := {}
fi;
#
P := expand(poly);
real_vars := convert(indets(p) minus F, list);
if nops(real_vars) = 0 # 'p' has no variables, meaning it is constant
then if term = 1 # the coefficient of 1 is the const term,
    then RETURN(p) # i.e. all 'p'
    else RETURN(0) # any other monomial has coeff 0
    fi
fi;
P := collect(expand(poly), real_vars, 'distributed');
readlib(coeffay); # remember table avoids unnecessary re-reading
coeffay[p, real_vars=[0$nops], map2(degree, term, real_vars)];
end;

## Replace x^2 and it's powers by the sum of coordinate squares
## (i.e. apply Pythagore's theorem).
##
elim_x2 := proc(poly, dim)
local i, # loop variable
    p, s, pb;
p := expand(poly);
# if not type(p, polynom)
then ERROR("Substitution only in polynoms, but got", p)
fi;
# if degrees(p, x) < 2
then RETURN(p)
fi;
s := add(x[i]^2, i=1..dim);
pb := coeff(p, x, 0) + x*coeff(p, x, 1);
RETURN(pb+s*elim_x2((p-pb)/x^2, dim));
end;

## Convert the matrix 'M' to a vector by stacking it's columns
##
matrix2vector := proc(M)
local i; # loop variable
# linalg[stackmatrix] (seq(linalg[submatrix](M, 1..linalg[rowsdim](M), i..i),
i=1..linalg[colsdim](M)));
end;

## 'B' is a list of second order tensors in functional representation
## (i.e. B {a,b} is B(a,b)). We calculate the elements of each tensor
## for i <= a, b <= dim, we do the substitution 'hubs' (which will set
## the value of 'h') and we put that in a column vector. Finally
## we put these columns side by side to obtain the return matrix 'M'.
basis2concretetmatrix := proc(basis, hubs, divk, dim)
local B; # intermediate transforms of 'basis'
# explicit_deltas({$.dim});
#
B := basis;
print(B);
B := linalg[matrix] (dim^2, nops(B), (i,j) -> B[j] [1+ixem(i-1, dim),
1+iquo(i-1, dim)]);
print(B);
B := subs(hubs, evalm(B));
print(B);
B := map(combine, map(expand, evalm(B/divk)), power);
print(B);
B := map(elim_x2, evalm(B), dim);
print(B);
end;

blockmatrix := proc(r, c, f)
local i, j;
# linalg[concat] (seq(linalg[stackmatrix] (seq(f(i,j), i=1..r)), j=1..c));
end;

## 'M' is a matrix with polynomial matrix elements.
## We calculate it's rank over R or R(F) if an Optional
## second argument 'F' is specified. 'F' should be a variable or list
## or set of variables.

```

```

## In contrast, linalg[rank] would calculate the rank of 'M'
## over R[X] where X would be the set of 'all' indeterminates of 'M'
##
polyrank := proc(M)
local F,
  allpoly, # set of variables defining coefficient field
  allterms, # set of matrix elements of 'M'
  eM, # union of all the terms in all the polynomials 'allpoly'
  eM, # (block)matrix where polynomials of M
  # # are expanded to monomial vectors

# Process optional argument: variables defining the coefficient field
if nargs > 1 then
F := convert(args[2], set);
if member(false, map(type, F, symbol))
then ERROR("Optional argument must be a symbol or list of symbols",
fi,
else F := {}
fi,
fi,

#
allpoly := convert(evalm(M), set);
allterms := convert('union'(op(map(terms, allpoly, P))), list);
eM := blockmatrix(linalg[cowdim](M), linalg[coldim](M),
(i,j)->linalg[matrix](nops(allterms), 1,
map2(multicoeff,
M[i,j], allterms, F)
));
print(eM);
RETURN(linalg[rank](eM));
end;

#####
## The invariant tensor families
#####
#####
## Young (k) for k >= 2, d >= 3 ##
G0 := z1^k;
G := [0$5];
G[1] := x[a]*x[b]/(x^2) * G0;
G[2] := x[a]*der(G0, x[b]);
G[3] := x[b]*der(G0, x[a]);
G[4] := x^2 * der(der(G0, x[a]), x[b]);
G[5] := delta[a,b] * G0;

# G[i] should be homogeneous of degree h
for i from 1 to nops(G) do
G[i] := unapply(combine(x^(h-k)*G[i], power), a, b)
od;

if polyrank(basis2concretetmatrix(G, h=2+k, z1^(k-2), 3), k) < nops(G)
then ERROR("The chosen basis for Young(k) is not free")
fi;

Gcharterms := (a, b) ->
[[x[a], x[b]],
[x[a], delta[1,b]],
[x[b], delta[1,a]],
[delta[1,a], delta[1,b]],
[delta[a,b]]
]
;

```

```

Gmat := Bmat("G");

## In 2D case G is not free, rather it has rank 4.
## This case is not yet implemented. We just verify that
## G2d is a spanning set, implying rank 4.
##
polyrank(basis2concretetmatrix(G, h=2+k, z1^(k-2), 2), k); ## gives 4

G2d := [op(G[1..3]), G[5]];
if polyrank(basis2concretetmatrix(G2d, h=2+k, z1^(k-2), 2), k) < nops(G2d)
then ERROR("The chosen basis for Young(k) is not free in 2D")
fi;

## Definition of the 3rd order Levi-Civita tensor
##
LC3 := array(1..3, 1..3, 1..3, antisymmetric);
LC3[1,2,3] := 1;

## 3D case with parity braking terms
##
G3d := [0$9];
G3d[1] := G0*x[a]*x[b] / (x^2);
G3d[2] := der(G0, x[b])*x[a];
G3d[3] := der(G0, x[a])*x[b];
G3d[4] := der(der(G0, x[a]), x[b]) * x^2;
G3d[5] := G0*delta[a,b];
G3d[6] := add(LC3[a,b,c] * G0*x[c] / x, c=1..3);
G3d[7] := add(LC3[a,b,c] * der(G0, x[c]) * x, c=1..3);
G3d[8] := add(add(LC3[b,c,e]*x[c]*der(der(G0, x[e])*x[a] / x, e=1..3), c=1..3);
G3d[9] := add(add(LC3[b,c,e]*x[c]*der(der(G0, x[e])*x[a]) * x, e=1..3), c=1..3);
# G3d[10] := add(add(LC3[a,c,e]*x[c] * der(G0, x[e])*x[b] / x, e=1..3), c=1..3);

# G3d[i] should be homogeneous of degree h
for i from 1 to nops(G3d) do
G3d[i] := unapply(combine(x^(h-k)*G3d[i], power), a, b)
od;

polyrank(basis2concretetmatrix(G3d[6..nops(G3d)], h=1+k, z1^(k-2), 3), k);

## Special treatment is needed for Young(0) and Young(1)
##
## Young(0) ##
G_k00 := z1^0;
G_k0 := [0$2];
G_k0[1] := x[a]*x[b]/(x^2) * G_k00;
G_k0[2] := delta[a,b] * G_k00;

# G_k0[i] should be homogeneous of degree h
for i from 1 to nops(G_k0) do
G_k0[i] := unapply(combine(x^(h-0)*G_k0[i], power), a, b)
od;

G_k0charterms := (a, b) ->
[[x[a], x[b]],

```



```

od;
Fcharterms := (a,b) ->
[[delta[3,a],delta[4,b]]
];
Fmat := Bmat("F");
## Young(1,1,1) ; exists for d >= 3 ##
F_k10 := (a,b) -> x[1]^1 * x[2] * x[3] *
  linalg[det](linalg[matrix](3,3,[
    [der(x[1],x[a])/x[1],der(x[1],x[b])/x[1],1],
    [der(x[2],x[a])/x[2],der(x[2],x[b])/x[2],1],
    [der(x[3],x[a])/x[3],der(x[3],x[b])/x[3],1]]));
);
F_k1 := [0$1];
F_k1[1] := F_k10(a,b);
for i from 1 to nops(F_k1) do
  F_k1[i] := unapply(combine(
    expand(x^(h-1)*F_k1[i]),power),a,b)
od;
F_k1charterms := (a,b) ->
[[delta[2,a],delta[3,b]]
];
F_k1mat := Bmat("F_k1");
## This procedure reduces the action of the differential
## operator 'operator' to a matrix multiplication in the
## function space defined by 'basis'.
##
## 'operator' is the differential operator to use
## 'basis' is a function list/table, defining the function space
## 'projector' gives the components of a function on 'basis'.
##
## make_matrix_new := proc(operator,basename)
  _local
  basis;
  projector;
  basis := eval(convert(basename,symbol));
  projector := expr -> Bcomp(expr,basename);
  linalg[concat](op(map(projector@operator,basis)));
end;
#####
## Matrices diagonalizing by blocks the T operator
## (see main text Sect. 8.1(4) and 8.3.4)
## in the different bases of SO(d) representations
## and associated change of basis function.
## For each basis B, B_12 is a 2 component list, such that
## B_12[1] is the range or list (must be compatible with calling
## convention of linalg[submatrix]) of the (indices of the) vectors
## of the basis B that are in the (-1)^k subspace of T,
## while B_12[2] gives the vectors that are in the -(-1)^k subspace.
#####

```

```

## Simple change of bases : vectors of new base expressed in old
## are the columns of Bpbase
##
conj := x -> evalm(Bpbase^(-1) &* x &* Bpbase);
Opbase := linalg[transpose](linalg[matrix](5,5,
[[ 1, 0, 0, 0, 0],
[ 0, 1, 0, 0, 0],
[ 0, 1, 1, 0, 0],
[ 0, 0, 0, 1, 0],
[ 0, 0, 0, 0, 1]]));
;
G_12 := [1..4,[5]];
G_k0pbase := linalg[transpose](linalg[matrix](2,2,
[[ 1, 0],
[ 0, 1]]));
;
G_k0_12 := [[1,2],[1]];
G_k1pbase := linalg[transpose](linalg[matrix](4,4,
[[ 1, 0, 0, 0],
[ 0, 1, 1, 0],
[ 0, 0, 0, 1],
[ 0, 1, -1, 0]]));
;
G_k1_12 := [1..3,[4]];
Hpbase := linalg[transpose](linalg[matrix](4,4,
[[ 1, 1, 0, 0],
[ 0, 0, 1, 1],
[ 1, -1, 0, 0],
[ 0, 0, 1, -1]]));
;
H_12 := [[1,2],[3,4]];
H_k1pbase := linalg[transpose](linalg[matrix](3,3,
[[ 1, 1, 0],
[ 1, -1, 0],
[ 0, 0, 1]]));
;
H_k1_12 := [[1],[2,3]];
Epbase := linalg[matrix](1,1,
[[1]]);
;
E_12 := [[1],[1]];

```

```

elif nops(poly_list) = 1
then RETURN(poly_list[1])
else RETURN(gcdm(subop(1=NULL,
2=gcd(poly_list[1],poly_list[2]),
poly_list {}))
fi;
end;

## if 'vec' has coefficients that are rational expressions
## than 'vec' is multiplied by the lcm of the (reduced form)
## denominators of it's coefficients, thus making it to
## a vector of polynomials.
vect_normalize := proc(vec)
local V; # temp
V := evalm(lcm(op(map(denom,convert(vec,list))) * vec);
evalm(1/gcdm(V)*V);
end;

## Calculates a matrix who's columns
## form a basis of the kernel of 'mat'.
kspace := proc(mat)
local K; # will contain a list of basis vectors of the kernel
K := convert(linalg[kernel](mat),list); # thus K is a list of vectors
K := map(vect_normalize,K);
linalg[concat](linalg[matrix](linalg[coldim](mat),0,[]).op(K));
# correct even if nops(K)=0
end;

## A simple translation of a the variable 'var'
## by 'dist' in every coefficient of the matrix 'mat'
decal := proc(mat,shift)
subs(shift, evalm(mat))
end;

## 'operator' is a matrix E -> E'
## 'space' specifies a basis of a subspace F of E.
## 'operator' is supposed to send F into F' = decal(F,h,decalage).
## We compute a matrix of 'operator' reduced to F -> F'.
act_on_space := proc(operator, space, shift)
linalg[linsolve](decal(space, shift),
evalm(operator &* space)
)
end;

#####
## Gröbner related functions
#####
## converts a matrix to a list of polynomials, each polynomial

```

```

Fpbase := linalg[matrix](1,1,
[[1]
]);
F_12 := [[0],[1]];
F_k1pbase := linalg[matrix](1,1,
[[1]
]);
F_k1_12 := [[],[1]];

#####
## Different rank calculations of matrices of polynomials
#####
## This procedure takes a rectangular matrix 'M' as its argument.
## It calculates its rank over the rationals (in the variables
## appearing in 'M') and then returns the 'set' of the
## determinants of all minor square matrices of 'M' who's
## dimension is the rank of 'M'.
minor_dets := proc(M)
local rk, # rank of M
ci,xi, # set of column-sets and row-sets of minors
Cx, # loop on above sets
Fl, # list of determinant polynomials
#
PL := NULL;
rk := linalg[rank](M);
print(rk);
xi := combinat[choose](linalg[rowdim](M),rk);
ci := combinat[choose](linalg[coldim](M),rk);
print(xi,ci);
for c in ci do
for x in xi do
PL := xL,factor(linalg[det](linalg[submatrix](M,convert(x,list),
convert(c,list))));
od;
end;
RETURN({PL});
end;

#####
## Functions to manipulate matrix operators
## (our differential operators reduced to matrix ones)
#####
gcdm := proc(poly_array)
local poly_list; # convert poly_list to list
poly_list := convert(poly_array,list); # in case it was vector
if nops(poly_list) = 0
then RETURN(0)

```

```

## corresponding to a column vector of the matrix, where the
## vectors of the canonical basis are considered as independent
## variables
##
module2poly := proc(mat,b_indets:symbol)
local i,c, # number of rows and columns in mat
basis_indets, # a1,e2,... indeterminates corresponding
L, # incrementally built up list
i, # loop variable
x := linalg[rowdim](mat);
c := linalg[coldim](mat);
basis_indets := [seq(e.i,i=1..r)];
b_indets := basis_indets;
L := NULL;
for i from 1 to c do
L := L, '+'[op(zip('*',convert(linalg[col](mat,i),list),basis_indets))];
od;
RETURN(L);
end;
##
## the inverse of module2poly, converts a list of polynomials
## -- where 'basis_indets' are the indeterminates corresponding
## to the elements of the canonical basis -- to a matrix in which
## each column vector corresponds to a polynomial of the list
poly2module := proc(poly_list,basis_indets)
local r,c, # number of rows and columns
x := nops(basis_indets);
c := nops(poly_list);
linalg[matrix](r,c,(i,j)->coeff(poly_list[j],basis_indets[i]));
end;
##
## Create an appropriate termorder for the application of gbasiss.
## First the polynomial algebra A is defined in which we shall work.
## 'var' is the variable with respect to which we want to calculate
## the Gröbner basis of the list of polynomials 'poly_list'.
## other vars will constitute a set of variables which generate
## the base field of rational expressions.
## 'basis_indets' have to be treated specially to do calculations
## equivalent to calculating Gröbner bases for modules (see Help).
##
make_termorder := proc(poly_list,basis_indets,no_frac_vars)
alg_def, # poly_algebra argument
A, # the poly_algebra
TD; # term-order description
#
all_vars := 'union'(op(map(indets,poly_list)))
union(convert(basis_indets,set)
union(convert(no_frac_vars,set);
# maybe not all basis indets appear in poly_list
# even 'no_frac_vars' may be missing in trivial cases
other_vars := all_vars minus
convert(basis_indets,set) minus
convert(no_frac_vars,set);
alg_def := op(all_vars),
op(map(x->'rational'-x,other_vars));
print(alg_def);
A := Ore_algebra[poly_algebra](alg_def);

```

```

#
print(all_vars,other_vars,no_frac_vars,basis_indets);
if nops(no_frac_vars) = 0
then TD := tdeg(op(basis_indets))
else TD := lexdeg(no_frac_vars,basis_indets)
fi;
termorder(A,eval(TD),basis_indets);
end;
##
## Finally we calculate an adequate basis for the restriction
## of differential equations to an invariant subspace
## -- defined by 'basis' -- of a greater functional space.
## This basis is such that the restricted operator is still
## a differential operator of degree not higher than the
## original one (with a little chance ...)
##
restriction_basis := proc(basis,h)
local U,V,V1,V2,V3,T,GB,
basis_indets;
#
linalg[smith](linalg[transpose](basis),h,'U','V');
V1 := linalg[transpose](map(factor,evalm(V^(-1))));
V2 := linalg[concat](linalg[rowdim](V1),0,[]);
# correct even if op()=NULL
op(map(vect_normalize,
map2(linalg[col],V1,[1..linalg[coldim](basis)])));
V3 := module2poly(V2,'basis_indets');
T := make_termorder(V3,basis_indets);
GB := inter_reduce(gbasis(V3,T),T);
map(factor,poly2module(GB,basis_indets));
end;
#####
## Typical application
#####
if false then
for B in ['G_k0',"G_k1","G","H_k1","H","E","F_k1","F"] do
# B := "G";
Bbase := 'B','base';
B12 := 'B','12';
Mat := conjp(make_matrix_new(altM,B));
Mat1 := linalg[submatrix](Mat,B_12[1],B_12[1]);
Mat2 := linalg[submatrix](Mat,B_12[2],B_12[2]);
Div_L := conjp(make_matrix_new(altD_L,B));
Div_L1 := linalg[submatrix](Div_L,1..linalg[rowdim](Div_L),B_12[1]);
Div_L2 := linalg[submatrix](Div_L,1..linalg[rowdim](Div_L),B_12[2]);
Div_R := conjp(make_matrix_new(altR,B));
Div_R1 := linalg[submatrix](Div_R,1..linalg[rowdim](Div_R),B_12[1]);
Div_R2 := linalg[submatrix](Div_R,1..linalg[rowdim](Div_R),B_12[2]);
Div_LR1 := linalg[stackmatrix](Div_L,Div_R);
Div_LR2 := linalg[stackmatrix](Div_L2,Div_R2);
Lact := conjp(make_matrix_new(altL,B));
nodiv_L := map(factor,kspace(Div_L));
nodiv_R := map(factor,kspace(Div_R));
nodiv_LR := map(collect,map(expand,kspace(Div_LR)),h,factor);
nodiv_LR1 := map(collect,map(expand,kspace(Div_LR1)),h,factor);
nodiv_LR2 := map(collect,map(expand,kspace(Div_LR2)),h,factor);
with(Groebner);
nodiv_LR_base := restriction_basis(nodiv_LR,h);

```



## A.2 Feuille de calcul MAPLE pour la Section 8.3.5

## ■ Basic setup, initialization

```
[ > restart;
  > nodebug:=true;

                                     nodebug := true
  > read "gen-tensor-2t":
  We choose an angular momentum sector (corresponding to a specific type of Young diagramme)
  Choices are : G, G_k0, G_k1, H, E and F corresponding respectively to
  yng(k), yng(0), yng(1), yng(k,1), yng(k,2) and yng(k,1,1)
  > B := "H":
     Bpbase := ``.B.`pbase`;
     B_12 := ``.B.`_12`;

                                     Bpbase := Hpbase
                                     B_12 := [[1, 2], [3, 4]]
```

## ■ Operation of AltM and AltL

## ■ Generic actions of AltM and AltL

```
> Mat := simplify(conjp(make_matrix_new(altM,B))):
Mat_b1 := linalg[submatrix](Mat,B_12[1],B_12[1]);
linalg[submatrix](Mat,B_12[1],B_12[2]);
linalg[submatrix](Mat,B_12[2],B_12[1]);
Mat_b2 := linalg[submatrix](Mat,B_12[2],B_12[2]);

Mat_b1 :=
[Sc1 + Sc1 d ξ + Sc1 ξ k + 2 Sc2 d h + Sc1 h2 - Sc1 ξ - 2 Sc1 h - Sc1 d + Sc2 h2 + Sc1 ξ h
+ Sc2 d ξ + Sc2 ξ h + Sc1 d h - 4 Sc2 d - Sc1 k2 - Sc1 d k + Sc2 d2 - 4 Sc2 h, -Sc2 d ξ k
- Sc1 ξ k h + 7 Sc2 + 5 Sc2 ξ k - Sc2 ξ2 k + Sc1 ξ k2 - Sc1 ξ2 k + 2 Sc2 d k + Sc2 k h + Sc2 ξ2
- Sc2 ξ k h - Sc1 ξ + Sc1 ξ h + Sc2 d ξ + Sc2 ξ h - 5 Sc2 ξ - 2 Sc2 d - Sc2 h + Sc2 k2 - 8 Sc2 k
+ Sc1 ξ2]

[-(ξ - 2) Sc1, -3 Sc1 + 6 Sc2 + Sc2 ξ2 + Sc1 d ξ - Sc1 ξ k + 2 Sc2 d h + Sc1 h2 - Sc1 ξ - 2 Sc1 h
+ Sc1 d + Sc2 h2 + 2 Sc1 ξ h + 2 Sc2 d ξ + 2 Sc2 ξ h + Sc1 d h - 5 Sc2 ξ - 5 Sc2 d - Sc1 k2
- Sc1 d k + Sc2 d2 - 5 Sc2 h + Sc1 ξ2 + 4 Sc1 k]

      [ 0  0 ]
      [ 0  0 ]
      [ 0  0 ]
      [ 0  0 ]

Mat_b2 :=
[-2 Sc2 ξ + 4 Sc2 + Sc1 + Sc1 d ξ + Sc1 ξ k + 2 Sc2 d h + Sc1 h2 - Sc1 ξ - 2 Sc1 h - Sc1 d
+ Sc2 h2 + Sc1 ξ h + Sc2 d ξ + Sc2 ξ h + Sc1 d h - 4 Sc2 d - Sc1 k2 - Sc1 d k + Sc2 d2 - 4 Sc2 h,
-Sc2 d ξ k - Sc1 ξ k h - 3 Sc2 + 3 Sc2 ξ k - Sc2 ξ2 k + Sc1 ξ k2 - Sc1 ξ2 k + 2 Sc2 d k + Sc2 k h
- Sc2 ξ2 - Sc2 ξ k h + 2 Sc1 ξ k + Sc1 ξ - Sc1 ξ h - Sc2 d ξ - Sc2 ξ h + 3 Sc2 ξ + 2 Sc2 d + Sc2 h
+ Sc2 k2 - 2 Sc2 k - Sc1 ξ2]
```

```
[-(ξ-2)Sc1, -3Sc1+4Sc2+Sc2ξ2+Sc1dξ-Sc1ξk+2Sc2dh+Sc1h2-3Sc1ξ
-2Sc1h+Sc1d+Sc2h2+2Sc1ξh+2Sc2dξ+2Sc2ξh+Sc1dh-5Sc2ξ-5Sc2d
-Sc1k2-Sc1dk+Sc2d2-5Sc2h+Sc1ξ2+4Sc1k]
```

```
> Lapl := conjp(make_matrix_new(altL,B));
```

$$Lapl := \begin{bmatrix} -(k-h+1)(k+d+h-1), 0, 0, 0 \\ 2, -(-h+k-1)(k+d-3+h), 0, 0 \\ 0, 0, -(k-h+1)(k+d+h-1), 0 \\ 0, 0, 2, -(-h+k-1)(k+d-3+h) \end{bmatrix}$$

### Finding the zero mode exponents

```
> axi := (d+xi)/(1+xi*P)-1;
```

$$axi := \frac{d+\xi}{1+\xi P} - 1$$

```
[ give the expression of the coefficients Sc1, Sc2 in terms of d, ξ, aξ.
```

```
> Sca :=
convert(subs(P=solve(axi=a,P), [d+xi-1-xi*P, xi*(d*P-1)]), parfrac
,a);
```

$$Sca := \left[ d+\xi + \frac{-d-\xi}{1+a}, -d-\xi + \frac{d(d+\xi)}{1+a} \right]$$

```
[ and finally find the roots of the determinant
```

```
> det_b1 := simplify(eval(subs(Sc=Sca, linalg[det](Mat_b1))));
```

```
det_b2 := simplify(eval(subs(Sc=Sca, linalg[det](Mat_b2))));
```

```
> zms_b1 := simplify([solve(det_b1,h)]);
```

```
zms_b2 := simplify([solve(det_b2,h)]);
```

$$zms\_b1 := \left[ -\frac{1}{2}(-5d-\xi+3a+3+2d^2+d\xi-da-\sqrt{-6\xi+9+4dak^2-6a\xi} \right. \\ + 12d\xi-16da+8ak-18d+9a^2-6da^2+14a-2ad^2\xi+a^2d^2+\xi^2-2d\xi^2 \\ + 8da\xi-6d^2\xi+2d^2a+d^2\xi^2+4d^2ak-12akd-4ak^2+9d^2)/(d-1), -\frac{1}{2}(-5d \\ -\xi+3a+3+2d^2+d\xi-da+\sqrt{-6\xi+9+4dak^2-6a\xi+12d\xi-16da+8ak \\ -18d+9a^2-6da^2+14a-2ad^2\xi+a^2d^2+\xi^2-2d\xi^2+8da\xi-6d^2\xi+2d^2a+d^2\xi^2 \\ +4d^2ak-12akd-4ak^2+9d^2})/(d-1), -\frac{1}{2}(6+2d^2+2d\xi-2\xi-8d-da+2a- \\ \sqrt{4+4dak^2-4da+8ak-8d+4a^2-4da^2+4a+a^2d^2+4d^2ak-12akd \\ -4ak^2+4d^2})/(d-1), -\frac{1}{2}(6+2d^2+2d\xi-2\xi-8d-da+2a+\sqrt{4+4dak^2 \\ -4da+8ak-8d+4a^2-4da^2+4a+a^2d^2+4d^2ak-12akd-4ak^2+4d^2})/( \\ d-1) \left. \right]$$

$$zms\_b2 := \left[ -\frac{1}{2}(-5d-\xi+3a+3+2d^2+d\xi-da-\sqrt{2\xi+4dak^2-6a\xi-4d\xi} \right. \\ - 8da+8ak-2d+9a^2-6da^2+6a-2ad^2\xi+a^2d^2+\xi^2-2d\xi^2+8da\xi+2d^2\xi$$

$$\begin{aligned}
& + 2d^2a + d^2\xi^2 + 4d^2ak - 12akd - 4ak^2 + d^2 + 1) / (d-1), -\frac{1}{2}(-5d - \xi + 3a + 3 \\
& + 2d^2 + d\xi - da + \sqrt{2\xi + 4dak^2 - 6a\xi - 4d\xi - 8da + 8ak - 2d + 9a^2 - 6da^2} \\
& + 6a - 2ad^2\xi + a^2d^2 + \xi^2 - 2d\xi^2 + 8da\xi + 2d^2\xi + 2d^2a + d^2\xi^2 + 4d^2ak - 12akd \\
& - 4ak^2 + d^2 + 1) / (d-1), -\frac{1}{2}(6 + 2d^2 + 2d\xi - 2\xi - 8d - da + 2a - \sqrt{4 + 4dak^2} \\
& - 4da + 8ak - 8d + 4a^2 - 4da^2 + 4a + a^2d^2 + 4d^2ak - 12akd - 4ak^2 + 4d^2) / ( \\
& d-1), -\frac{1}{2}(6 + 2d^2 + 2d\xi - 2\xi - 8d - da + 2a + \sqrt{4 + 4dak^2 - 4da + 8ak - 8d} \\
& + 4a^2 - 4da^2 + 4a + a^2d^2 + 4d^2ak - 12akd - 4ak^2 + 4d^2) / (d-1) \Big]
\end{aligned}$$

[ Finally we calculate the zero modes of the Laplacian

```

> detL_b1 :=
  linalg[det](linalg[submatrix](Lapl, B_12[1], B_12[1])) :
detL_b2 :=
  linalg[det](linalg[submatrix](Lapl, B_12[2], B_12[2])) :
> simplify([solve(detL_b1, h)]);
  simplify([solve(detL_b2, h)]);

```

$$[1 + k, -k - d + 1, k - 1, -k - d + 3]$$

$$[1 + k, -k - d + 1, k - 1, -k - d + 3]$$

We now show that for  $\xi = 0$  the solutions in  $h$  of  $det\_b1$  (resp.  $det\_b2$ ) are the same as those of  $detL\_b1$  (resp.  $detL\_b2$ ). This is potentially interesting for perturbative calculations.

```

> simplify(subs(signum=factor@signum,
  simplify(subs(a=axi, xi=0, [zms_b1, zms_b2]),
    assume=real)),
  assume=RealRange(3, infinity));
[[k-1, -k-d+1, 1+k, -k-d+3], [k-1, -k-d+1, 1+k, -k-d+3]]

```

### Verification of human readable form for zero modes of AltM in the H sector i.e. Young(k,1)

[ We introduce the expressions of what should be the human readable forms of the above found solutions, when calculations were done for the H (i.e. Young(k,1) representation

```

> sqc := 4*a*k*(k+d-2)/(d-1);

```

$$sqc := 4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1}$$

```

> sq1 := sqc + ((d-2)/(d-1)*a+2)^2 - 4*a;

```

$$sq1 := 4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left( \frac{(d-2)a}{d-1} + 2 \right)^2 - 4a$$

```

> sq2 := sqc + (xi-3 - (d-3)/(d-1)*a)^2 - 4*a;

```

$$sq2 := 4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left( \xi - 3 - \frac{(d-3)a}{d-1} \right)^2 - 4a$$

```

> sq3 := sqc + (xi-1 - (d-3)/(d-1)*a)^2 + 4*xi;

```

$$sq3 := 4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left( \xi - 1 - \frac{(d-3)a}{d-1} \right)^2 + 4\xi$$

```

> pt1 := (d-2)/(d-1)*a - 2*(d-3+xi);
      pt1 :=  $\frac{(d-2)a}{d-1} - 2d + 6 - 2\xi$ 
> pt2 := (d-3)/(d-1)*a - (2*d-3+xi);
      pt2 :=  $\frac{(d-3)a}{d-1} - 2d + 3 - \xi$ 
> s1 := (pt1+sqrt(sq1))/2;
      s1 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-2)a}{d-1} - d + 3 - \xi + \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\frac{(d-2)a}{d-1} + 2\right)^2 - 4a}$ 
> s2 := (pt1-sqrt(sq1))/2;
      s2 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-2)a}{d-1} - d + 3 - \xi - \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\frac{(d-2)a}{d-1} + 2\right)^2 - 4a}$ 
> s3 := (pt2+sqrt(sq2))/2;
      s3 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-3)a}{d-1} - d + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\xi - 3 - \frac{(d-3)a}{d-1}\right)^2 - 4a}$ 
> s4 := (pt2-sqrt(sq2))/2;
      s4 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-3)a}{d-1} - d + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\xi - 3 - \frac{(d-3)a}{d-1}\right)^2 - 4a}$ 
> s5 := (pt2+sqrt(sq3))/2;
      s5 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-3)a}{d-1} - d + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \xi + \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\xi - 1 - \frac{(d-3)a}{d-1}\right)^2 + 4\xi}$ 
> s6 := (pt2-sqrt(sq3))/2;
      s6 :=  $\frac{1}{2} \frac{(d-3)a}{d-1} - d + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \xi - \frac{1}{2} \sqrt{4 \frac{ak(k+d-2)}{d-1} + \left(\xi - 1 - \frac{(d-3)a}{d-1}\right)^2 + 4\xi}$ 
> test_root := (poly, root, indet) ->
  simplify(subs(indet=root, poly));
      test_root := (poly, root, indet) -> simplify(subs(indet = root, poly))
> test_root(det_b1, s1, 'h');
  test_root(det_b1, s2, 'h');
  test_root(det_b1, s3, 'h');
  test_root(det_b1, s4, 'h');
  test_root(det_b2, s1, 'h');
  test_root(det_b2, s2, 'h');
  test_root(det_b2, s5, 'h');
  test_root(det_b2, s6, 'h');
0
0
0
0
0
0
0
0
0
0

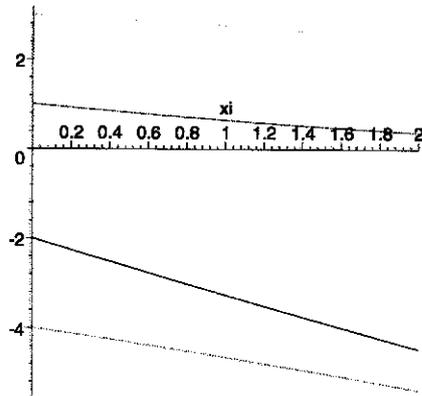
```

 Plot of results

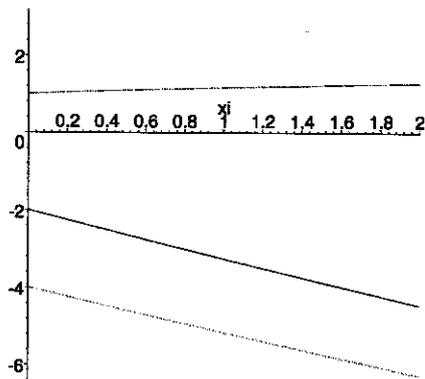
```
> Digits := 50;
```

*Digits := 50*

```
> plot(subs(a=axi,P=0,d=3,k=2,zms_b1),xi=0..2);
```



```
> plot(subs(a=axi,P=0,d=3,k=2,zms_b2),xi=0..2);
```



```
> # END
```

## A.3 Feuille de calcul MAPLE pour la Section 8.4.4

## ■ Basic setup, initialization

```
[ > restart;
  > nodebug:=true;
                                     nodebug := true
  > read "gen-tensor-2t":
  We choose an angular momentum sector (corresponding to a specific type of Young diagramme)
  Choices are : G, G_k0, G_k1, H, E and F corresponding respectively to
  yng(k), yng(0), yng(1), yng(k,1), yng(k,2) and yng(k,1,1)
  > B := "G":
      Bpbase := ``.B.`pbase`;
                                     Bpbase := Gpbase
```

## ■ Calculation of divergence free space

■ We calculate the  $Div_L$  and  $Div_R$  operators, as well as  $Div_{LR}$ , the combination of them

```
[ > Div_L := conjp(make_matrix_new(altD_L,B));
                                     Div_L :=
                                     [ -1+h+d  -k(-h+k)      0      h-k  k(-h+k)
                                     [  0      1/2 h+1/2 d  -1/2(k-1)(k-2-h)  1/2  -1+1/2 h+1/2 d
                                     [  0      0      0      0      0      0
                                     [  0      0      0      0      0      0
                                     [  0      1/2 h+1/2 d  -1/2(k-1)(k-2-h)  1/2  -1+1/2 h+1/2 d
                                     > Div_R := conjp(make_matrix_new(altD_R,B));
                                     Div_R :=
                                     [ -1+h+d  -k(-h+k)      0      h-k  -k(-h+k)
                                     [  0      1/2 h+1/2 d  -1/2(k-1)(k-2-h)  1/2  1-1/2 h-1/2 d
                                     [  0      0      0      0      0      0
                                     [  0      0      0      0      0      0
                                     [  0      -1/2 h-1/2 d  1/2(k-1)(k-2-h)  -1/2  -1+1/2 h+1/2 d
                                     [ The kernel of Div_LR will be the intersection of the kernels of Div_L and Div_R.
                                     > Div_LR := linalg[stackmatrix](Div_L,Div_R):
                                     linalg[rank](Div_LR);
                                     3
```

■ We look for possible degenerescence : kernel of bigger dimension than in generic case

```
[ > with(Groebner):
  > PL := minor_dets(Div_LR);
  PL := { k(-h+k)(-1+h+d), -k(-h+k)(-1+h+d), k(-h+k)(d+h)(-1+h+d),
         1/2(-2+h+d)k(-h+k)(k-1)(k-2-h), -1/2(-2+h+d)(-h+k)(k-1)(k-2-h),
```

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}(-2+h+d)(-h+k)(-k+h+d), -k(-h+k)^2(-k+h+d), \\
& \frac{1}{2}(-2+h+d)(-h+k)(-k+h+d), \frac{1}{2}(-2+h+d)(-1+h+d)(k-1)(k-2-h), \\
& -k(-h+k)(d+h)(-1+h+d), k(-h+k)^2(-k+h+d), -k^2(-h+k)^2(k-1)(k-2-h), \\
& -\frac{1}{2}(-2+h+d)k(-h+k)(k-1)(k-2-h), \frac{1}{2}(-2+h+d)(-h+k)(k-1)(k-2-h), \\
& -\frac{1}{2}(d+h)(-1+h+d)(-2+h+d), -\frac{1}{2}(-2+h+d)(-1+h+d)(k-1)(k-2-h), \\
& -k(-h+k)^2(k-1)(k-2-h), k(-h+k)^2(k-1)(k-2-h), \\
& -\frac{1}{2}(-2+h+d)(-1+h+d), \frac{1}{2}(-2+h+d)(-1+h+d), k^2(-h+k)^2(k-1)(k-2-h), 0, \\
& -k(-h+k)(-1+h+d)(k-1)(k-2-h), k(-h+k)(-1+h+d)(k-1)(k-2-h), \\
& \frac{1}{2}(d+h)(-1+h+d)(-2+h+d)
\end{aligned}$$

```

> rgb := factor(torder_gbasis(convert(PL,list),
                                lexdeg(['h'], convert(indets(PL)
                                minus {'h'},list))));

```

```

rgb := [k(k-1)(d+k-1)(d+k-2), -h+hd+kd-2k+2-3d+d^2+k^2,
        -k(k-1)(-h+k), h^2-h-d^2-2kd-2k^2+3d+4k-2]

```

```

> solve(convert(PL,set));

```

```

{d=-h+2, k=0, h=h}, {d=-h+2, h=h, k=h}, {h=h, d=-h+1, k=h},
{h=1-d, k=1, d=d}

```

We see that degenerescence can occur in four cases:  $k=0$ ,  $k=1$ ,  $k=1-d$  and  $k=2-d$ .

However we are considering only the case  $2 \leq k$  so all these cases are irrelevant.

### We find a basis for the divergence free space

```

> nodiv_LR := map(collect, map(expand, kspace(Div_LR)), d, factor);
nodiv_LR :=

```

$$\begin{bmatrix}
(h-k)d+(-h+k)^2 & (-h+k)(k-1)(k-2-h) \\
-1+h+d & 0 \\
0 & -1+h+d \\
-d^2+(1-2h)d-h(h-1) & (k-1)(k-2-h)d+(h-1)(k-1)(k-2-h) \\
0 & 0
\end{bmatrix}$$

We calculate a better basis for the divergence free space, in which we expect  $altM$  to act as a matrix whose coefficients are polynomials in  $h$  as opposed to just rational functions as one would expect.

```

> nodiv_LR_base := restriction_basis(nodiv_LR, 'h');

```

$$nodiv\_LR\_base := \begin{bmatrix}
0 & -(-h+k)(d-2) \\
-(k-1)(k-2-h) & d-3+k \\
-d+k-h & -1 \\
k(k-1)(k-2-h) & -d^2+3d-kd-hd-k^2+3k-2+2h \\
0 & 0
\end{bmatrix}$$

```

> map(degree, nodiv_LR_base, 'h');

```

$$\begin{bmatrix} -\infty & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ -\infty & -\infty \end{bmatrix}$$

[ We need to check if the basis found is not degenerate for specific values of the parameters

```
> minor_dets(nodiv_LR_base);
solve(%);
```

```
{(-1+h+d)(d-2), 0, -(-h+k)(d-2)(k-1)(k-2-h),
(k-1)(k-2-h)(d-2)(-1+h+d), (-h+k)(d-2)k(k-1)(k-2-h),
-(-h+k)(d-2)(-k+h+d), (d-2)(d+h)(-1+h+d)}
{k=k, h=k, d=-k+1}, {h=h, k=1, d=-h+1}, {h=h, k=k, d=2}
```

[ We have degenerescence in three cases:  $k=1$ ,  $k=1-d$  and  $d=2$ . Since we are concerned only with the case  $2 \leq k$  the first two are irrelevant. Since we deal only with the case  $3 \leq d$  the third is also irrelevant.

## ■ Operation of AltM and AltL generally, and reduction to divergence free spaces

### ■ Generic actions

```
> Mat := simplify(conjp(make_matrix_new(altM,B)));
```

```
Mat :=
```

```
[2 Sc2 d h - Sc1 k2 + Sc1 h2 + Sc1 d ξ + Sc2 d2 + Sc2 h2 + Sc1 d h - 3 Sc2 d - 2 Sc1 h - 2 Sc1 k
- 2 Sc1 d + 2 Sc1 ξ - Sc1 d k - Sc1 ξ2 - 3 Sc2 h + 2 Sc2 + 2 Sc1 k ξ,
-2 k (Sc1 ξ2 + Sc1 ξ h - Sc2 k - 2 Sc2 d + Sc2 d ξ + Sc2 ξ h - 2 Sc1 ξ - Sc2 h - Sc1 k ξ),
k (ξ - 4) (ξ - 2) (k - 1) Sc2, -4 Sc2 + 4 Sc2 ξ - Sc2 ξ2 - 2 Sc2 ξ h + 2 Sc2 h + 2 Sc2 k
- Sc2 d ξ + 2 Sc2 d + 4 Sc1 ξ - 2 Sc1 ξ h + 2 Sc1 k ξ - 2 Sc1 ξ2, 0]
[-(ξ - 2) Sc1, Sc2 d ξ + Sc2 ξ h + Sc1 ξ h + Sc2 h2 - 4 Sc2 d - 2 Sc1 h + 2 Sc1 k - 2 Sc1 ξ
- Sc1 k2 + Sc1 h2 + Sc2 d2 - 4 Sc2 h + 2 Sc2 d h + Sc1 d ξ + Sc1 d h - Sc1 d k, -(k - 1) (-Sc2 k
- Sc1 k ξ - Sc2 h + 8 Sc2 - 5 Sc2 ξ + Sc2 d ξ + Sc1 ξ2 + Sc2 ξ2 + Sc2 ξ h + Sc1 ξ h - 2 Sc2 d),
-Sc1 ξ - Sc2, 0]
[0, -2 (ξ - 2) Sc1, -Sc1 k2 + 6 Sc1 k - Sc1 d k - 2 Sc1 k ξ + 6 Sc2 + 2 Sc1 d - 5 Sc2 ξ - 8 Sc1
+ 2 Sc2 d h + 2 Sc1 ξ h + 2 Sc2 d ξ + 2 Sc2 ξ h + Sc1 h2 + Sc2 d2 + Sc1 d ξ + Sc1 d h - 5 Sc2 h
- 5 Sc2 d - 2 Sc1 h + Sc2 h2 + Sc2 ξ2 + Sc1 ξ2, 0, 0]
[(ξ - 1) (ξ - 2) Sc1, 2 ξ k (ξ - 2) Sc1, ξ k (ξ - 2) (k - 1) Sc1, 6 Sc2 + 2 Sc1 ξ h + Sc1 d h
+ 2 Sc1 d ξ - Sc1 d k + 2 Sc2 ξ h + 2 Sc2 d h + 2 Sc2 d ξ - 2 Sc1 h + 2 Sc1 k - 5 Sc2 h + Sc2 d2
- Sc1 k2 + Sc2 ξ2 + Sc2 h2 - 5 Sc2 d - 5 Sc2 ξ + 2 Sc1 ξ2 - 6 Sc1 ξ + Sc1 h2, 0]
[0, 0, 0, 0, -2 Sc2 ξ + Sc2 d ξ + Sc2 ξ h + Sc1 ξ h + Sc2 h2 - 4 Sc2 d - 2 Sc1 h + 2 Sc1 k
- 2 Sc1 ξ - Sc1 k2 + Sc1 h2 + Sc2 d2 - 4 Sc2 h + 2 Sc2 d h + Sc1 d ξ + Sc1 d h - Sc1 d k + 4 Sc2]
```

```
> Lapl := conjp(make_matrix_new(altL,B)) ;
Lapl := 
$$\begin{bmatrix} -(-h+k+2)(k+d+h), & 0, & 0, & 0, & 0 \\ 2, & -(-h+k)(k-2+h+d), & 0, & 0, & 0 \\ 0, & 4, & -(k-2-h)(k-4+d+h), & 0, & 0 \\ 2, & 0, & 0, & -(-h+k)(k-2+h+d), & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 0, & -(-h+k)(k-2+h+d) \end{bmatrix}$$

```

### Reduction to divergence free subspaces

```
> ndm :=
map(factor@simplify,act_on_space(Mat,nodiv_LR_base,h=h+xi-2));
ndm :=

$$\begin{aligned} & [Sc_2 d^2 + 2 Sc_2 d h + Sc_2 d \xi + 2 Sc_1 d + Sc_1 d \xi - Sc_1 k^2 - 3 Sc_2 d - Sc_1 d k + 2 Sc_2 k - 4 Sc_1 \\ & + Sc_1 d h + Sc_1 h^2 - 3 Sc_2 h + Sc_1 \xi h + Sc_2 h^2 + 4 Sc_1 k + Sc_2 \xi h - Sc_1 k \xi - Sc_2 \xi k, \\ & (\xi - 2)(Sc_1 + Sc_2)] \\ & [-Sc_2 k(\xi - 2)(k - 1), Sc_2 d^2 - Sc_1 d k + 2 Sc_2 d h - 3 Sc_2 d + 2 Sc_1 d \xi + Sc_1 d h + Sc_2 d \xi \\ & - Sc_1 k^2 + Sc_1 h^2 + Sc_2 \xi h + Sc_1 k \xi + Sc_2 h^2 - 2 Sc_2 k + 2 Sc_2 + Sc_2 \xi k + Sc_1 \xi h - 3 Sc_2 h \\ & - Sc_2 \xi - 2 Sc_1 \xi] \end{aligned}$$


$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

```

We now verify that each element of  $ndm$  is a polynomial in  $h$  and compute their degrees. This means that expressed in the basis of functions corresponding to  $nodiv\_LR\_base$  the operator  $altM$  (and thus  $M$ ) acts as a second order differential operator with matrix coefficients.

```
> map(type,ndm,polynom(anything,h));
map(degree,ndm,h);
```

$$\begin{bmatrix} true & true \\ true & true \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Here we introduce the parameter  $a_\xi$  which is better suited for expressing formulas than the compressibility degree  $P$ .

```
> axi := (d+xi)/(1+xi*P)-1;
```

$$axi := \frac{d+\xi}{1+\xi P} - 1$$

give the expression of the coefficients  $Sc_1, Sc_2$  in terms of  $d, \xi, a_\xi$ .

```
> Sca :=
convert(subs(P=solve(axi=a,P),[d+xi-1-xi*P,xi*(d*P-1)]),parfrac,
a);
```

$$Sca := \left[ d + \xi + \frac{-d - \xi}{1 + a}, -d - \xi + \frac{d(d + \xi)}{1 + a} \right]$$

and finally find the roots of the determinant

```
> zms :=
simplify([solve(eval(subs(Sc=Sca,linalg[det](ndm)),h)]));
```

$$zms := \left[ -\frac{1}{2}(3 + 3a + 2d^2 - 5d - \xi + d\xi - da - \sqrt{-8a\xi - 4ak^2 + 5d^2 - 10d + 8ak} + 4akd^2 + 9a^2 + 2d\sqrt{(\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4daka^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2})} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d)) + 5 + 6a + 4dak^2 - 12dak - 2\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 8d\xi + \xi^2 - 8da - 4d^2a\xi - 4d^2\xi - 2d\xi^2 + 2d^2a + d^2a^2 \\
& + d^2\xi^2 + 12da\xi - 6da^2 - 4\xi)) / (d - 1), -\frac{1}{2}(3 + 3a + 2d^2 - 5d - \xi + d\xi - da + \sqrt{(-8a\xi - 4ak^2 + 5d^2 - 10d + 8ak + 4akd^2 + 9a^2 + 2d\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 5 + 6a + 4dak^2 - 12dak - 2\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 8d\xi + \xi^2 - 8da - 4d^2a\xi - 4d^2\xi - 2d\xi^2 + 2d^2a + d^2a^2 + d^2\xi^2 + 12da\xi - 6da^2 - 4\xi)) / (d - 1), -\frac{1}{2}(3 + 3a + 2d^2 - 5d - \xi + d\xi - da - \sqrt{(-8a\xi - 4ak^2 + 5d^2 - 10d + 8ak + 4akd^2 + 9a^2 - 2d\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 5 + 6a + 4dak^2 - 12dak + 2\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 8d\xi + \xi^2 - 8da - 4d^2a\xi - 4d^2\xi - 2d\xi^2 + 2d^2a + d^2a^2 + d^2\xi^2 + 12da\xi - 6da^2 - 4\xi)) / (d - 1), -\frac{1}{2}(3 + 3a + 2d^2 - 5d - \xi + d\xi - da + \sqrt{(-8a\xi - 4ak^2 + 5d^2 - 10d + 8ak + 4akd^2 + 9a^2 - 2d\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 5 + 6a + 4dak^2 - 12dak + 2\sqrt{((\xi - 2)^2(-4ak^2 + d^2a^2 + 4dak^2 - 2a + 1 + d^2 + 4da + a^2 - 12dak - 2da^2 - 2d^2a + 4akd^2 + 8ak - 2d))} + 8d\xi + \xi^2 - 8da - 4d^2a\xi - 4d^2\xi - 2d\xi^2 + 2d^2a + d^2a^2 + d^2\xi^2 + 12da\xi - 6da^2 - 4\xi)) / (d - 1) \Big]
\end{aligned}$$

[ Finally we calculate the zero modes of the Laplacian

```

> ndl :=
  map(factor, simplify(act_on_space(Lapl, nodiv_LR_base, h=h-2)));
  map(degree, %, h);

```

$$ndl := \begin{bmatrix} -(k-2-h)(k-2+h+d) & -2 \\ 0 & -(-h+k)(k+d+h) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -\infty & 2 \end{bmatrix}$$

```

> simplify([solve(linalg[det](ndl), h)]);

```

$$[k-2, -d-k+2, k, -k-d]$$

[ We now show that the solutions in  $h$  of  $ndm$  for  $\xi = 0$  are the same as those of  $ndl$ . This is potentially interesting for perturbative calculations.

```

> simplify(subs(signum=factor@signum,
  simplify(subs(a=axi, xi=0, zms),
    assume=real)),
  assume=RealRange(2, infinity));

```

$$[k, -k-d, k-2, -d-k+2]$$

### ■ Verification of human readable form for G in the nodiv\_LR sector

We introduce the expression of what should be the human readable form of the above found solution, when calculations were done for the nodiv\_LR sector of the G representation

```
> s1 := -1/2*(-(d-3)/(d-1)*a+2*d+xi-3 -
  sqrt(-4*a*(a+(d-1)*(xi-1))*(d-2)/(d-1)^2 +
  (2-xi + sqrt(k*(k+d-2)*4*a/(d-1)+(1-a)^2))^2);
```

$$s1 := \frac{1}{2} \frac{(d-3)a}{d-1} - d - \frac{1}{2} \xi + \frac{3}{2}$$

$$+ \frac{1}{2} \sqrt{-4 \frac{a(a+(d-1)(\xi-1))(d-2)}{(d-1)^2} + \left(2 - \xi + \sqrt{4 \frac{k(d+k-2)a}{d-1} + (1-a)^2}\right)^2}$$

```
> simplify(subs(h=s1,subs(Sc=Sca,linalg[det](ndm))));
```

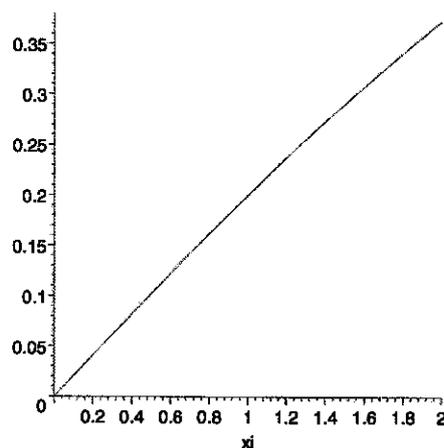
0

### ■ Plot of results

```
> Digits := 50;
```

*Digits := 50*

```
> plot(subs(a=axi,P=0,d=3,k=2,zms[3]),xi=0..2);
```



```
> # END
```

## Bibliographie

- [1] W. W. Adams and Ph. Loustau. *An Introduction to Gröbner Bases*, volume 3 of *Graduate Studies in Mathematics*. Am. Math. Soc., 1994.
- [2] L. Ts. Adzhemyan, N. V. Antonov, and Vasil'ev A. N. Renormalization group, operator product expansion, and anomalous scaling in a model of advected passive scalar. *Phys. Rev. E*, 58:1823, 1998.
- [3] L.Ts. Adzhemyan, N.V. Antonov, V.A. Barinov, Yu.S. Kabrits, and A.N. Vasil'ev. Anomalous exponents in the rapid-change model of the passive scalar advection in the order  $\epsilon^3$ . *Phys. Rev. E*, 63:025303(R), 2001.
- [4] F. Anselmet, Y. Gagne, E. J. Hopfinger, and R. A. Antonia. High-order velocity structure functions in turbulent shear flow. *J. Fluid Mech.*, 140:63–89, 1984.
- [5] A. Antonia, R., E. Hopfinger, Y. Gagne, and F. Anselmet. Temperature structure functions in turbulent shear flows. *Phys. Rev. A*, 30:2704–2707, 1984.
- [6] I. Arad, L. Biferale, A. Celani, I. Procaccia, and M. Vergassola. Statistical conservation laws in turbulent transport, 2001.
- [7] I. Arad, L. Biferale, and I. Procaccia. Nonperturbative spectrum of anomalous scaling exponents in the anisotropic sectors of passively advected magnetic fields. *Phys. Rev. E*, 61:2654, 2000.
- [8] R. A. Arratia. *Brownian motion on the line*. PhD thesis, University of Wisconsin, Madison, 1979.
- [9] C. W. van Atta and J. Park. Statistical self-similarity and inertial subrange turbulence. In M. Rosenblatt and C. W. van Atta, editors, *Statistical Models and Turbulence*, volume 12 of *Lect. Notes in Phys.*, pages 402–426. Springer, Berlin, 1972.
- [10] E. Balkovsky, G. Falkovich, and A. Fouxon. Intermittent distribution of inertial particles in turbulent flows. *Phys. Rev. Lett.*, 86:2790, 2001.
- [11] G. K. Batchelor. *An Introduction to Fluid Dynamics*. Cambridge Univ. P., 1967.
- [12] S. M. Berman. Gaussian processes with stationary increments: Local times and sample function properties. *Ann. Math. Statist.*, 41:1260–1272, 1970.
- [13] S. M. Berman. Local nondeterminism and local times of Gaussian processes. *Indiana Univ. Math. J.*, 23:69–94, 1973/74.
- [14] D. Bernard. Turbulence for (and by) amateurs. Lectures on Statistical Turbulence SPhT-T00/093, CEA/Saclay, SPhT, France, Sète, France; Saclay, France, jul–aug 2000. arXiv:cond-mat/0007106.
- [15] D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen. Anomalous scaling in the  $N$ -point functions of a passive scalar. *Phys. Rev. E*, 54(3):2564–2572, 1996.

- [16] D. Bernard, K. Gawędzki, and A. Kupiainen. Slow modes in passive advection. *J. Stat. Phys.*, 90:519–569, 1998.
- [17] A. Borodin and P. Salminen. *Handbook of Brownian Motion: Facts and Formulae*. Birkhäuser, Boston, 1996.
- [18] A. Celani, A. Lanotte, A. Mazzino, and M. Vergassola. Universality and saturation of intermittency in passive scalar turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 84(11):2385–2388, 2000.
- [19] A. Celani and M. Vergassola. Statistical geometry in scalar turbulence. *Phys. Rev. Lett.*, 86(3):424–427, 2001.
- [20] M. Chertkov, G. Falkovich, I. Kolokolov, and V. Lebedev. Normal and anomalous scaling of the fourth-order correlation function of a randomly advected scalar. *Phys. Rev.*, E 52:4924–4941, 1995.
- [21] P. Collet, J. Lebowitz, and A. Porzio. The dimension spectrum of some dynamical systems. *J. Stat. Phys.*, 47:609–644, 1987.
- [22] S. Corrsin. On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence. *J. Appl. Phys.*, 22:469–473, 1951.
- [23] W. E and E. Vanden-Eijnden. Generalized flows, intrinsic stochasticity, and turbulent transport. *Proc. Nat. Ac. Sci. USA*, 97(15):8200–8205, 2000.
- [24] W. E and E. Vanden-Eijnden. Turbulent Prandtl number effect on passive scalar advection. *Physica D*, 152–153:636–645, 2001.
- [25] T. Elperin, N. Kleorin, and I. Rogachevskii. Self-excitation of fluctuations of inertial particle concentration in turbulent fluid flow. *Phys. Rev. Lett.*, 77:5373, 1996.
- [26] W. Feller. The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations. *Ann. Math.*, 55:468–519, 1952.
- [27] Uriel Frisch. *Turbulence*. Cambridge Univ. P., 1995.
- [28] W. Fulton and J. Harris. *Representation Theory, A First Course*, volume 129 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1991.
- [29] K. Gawędzki. Turbulent advection and breakdown of the Lagrangian flow. In J. C. Vassilicos, editor, *Intermittency in Turbulent Flows*, pages 86–104. Cambridge University Press, 2001.
- [30] K. Gawędzki and A. Kupiainen. Anomalous scaling of the passive scalar. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3834–3837, 1995.
- [31] K. Gawędzki and M. Vergassola. Phase transition in the passive scalar advection. *Physica D*, 138:63–90, 2000.
- [32] D. Geman and J. Horowitz. Occupation densities. *Ann. Probab.*, 8(1):1–67, 1980.
- [33] S. Grossmann, D. Lohse, and A. Reeh. Different intermittency for longitudinal and transversal turbulent fluctuations. *Physics of Fluids*, 9:3817–3825, 1997.
- [34] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia. The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors. *Physica*, 8D:435–444, 1983.
- [35] A. P. Kazantsev. Enhancement of a magnetic field by a conducting fluid. *Sov. Phys. JETP*, 26(5):1031–1034, 1968.
- [36] A. N. Kolmogorov. Dissipation of energy in locally isotropic turbulence. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 32:16–18, 1941. (reproduit dans *Proc. R. Soc. Lond. A* 434, 15–17 (1991)).

- 
- [37] Robert H. Kraichnan. Small scale structure of a scalar field convected by turbulence. *Phys. Fluids*, 11(5):945–953, 1968.
- [38] H. Kunita. *Stochastic Flows and Stochastic Differential Equations*. Cambridge University Press, 1990.
- [39] Y. Le Jan and O. Raimond. Flows, coalescence and noise. [arXiv:math.PR/0203221](https://arxiv.org/abs/math.PR/0203221) to appear in *Ann. Probab.*
- [40] Y. Le Jan and O. Raimond. Solutions statistiques fortes des équations différentielles stochastiques. *C. R. Acad. Sci. Sér. I-Math.*, 327:893–896, 1998.
- [41] Y. Le Jan and O. Raimond. Integration of Brownian vector fields. *Ann. Probab.*, 30:826–873, 2002.
- [42] A. J. Majda and P. R. Kramer. Simplified models for turbulent diffusion: theory, numerical modelling, and physical phenomena. *Physics Reports*, 314:237–254, 1999.
- [43] M. R. Maxey. The gravitational settling of aerosol particles in homogeneous turbulence and random flows. *J. Fluid Mech.*, 174:441–465, 1987.
- [44] F. Moisy, H. Willaime, J.S. Andersen, and P. Tabeling. Passive scalar intermittency in low temperature helium flows. *Phys. Rev. Lett.*, 86:4827–4830, 2001.
- [45] A. M. Obukhov. Structure of the temperature field in a turbulent flow. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Geogr. Geofiz.*, 13:58–69, 1949.
- [46] Ya. Pesin. *Dimension theory in dynamical systems*. Univ. Chicago Press, Chicago, 1997.
- [47] L. F. Richardson. *Weather Prediction by Numerical Process*. Cambridge Univ. P., 1922.
- [48] L. F. Richardson. Atmospheric diffusion shown on a distance-neighbour graph. *Proc. R. Soc. Lond, A* 110:709–737, 1926.
- [49] L. C. G. Rogers and D. Williams. *Diffusions, Markov Processes and Martingales*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [50] J. Schmeling and H. Weiss. An overview of the dimension theory of dynamical systems, 2000.
- [51] J. Schumacher and B. Eckhardt. Clustering dynamics of Lagrangian tracers in free-surface flows. *Phys. Rev. E*, 66:017303, 2002.
- [52] B. I. Shraiman and E. D. Siggia. Anomalous scaling of a passive scalar in turbulent flow. *C. R. Acad. Sci.*, 321:279–284, 1995.
- [53] L.-S. Young. What are SRB measures, and which dynamical systems have them? *J. Statist. Phys.*, 108(5-6):733–754, 2002.



### **Résumé de la thèse:**

L'objet principal de cette thèse est d'étudier divers aspects de l'évolution d'un champ scalaire ou vectoriel, transporté par un champ de vitesse dont la statistique est donnée indépendamment du champ advecté. Ce faisant, on est amené également à étudier les courbes intégrales du champ de vitesse, appelées trajectoires Lagrangiennes.

Après une introduction synthétique, plusieurs modèles et problèmes sont abordés. Notre modèle principal – baptisé après R. H. Kraichnan – suppose des champs de vitesse gaussiens delta-corrélés en temps. Sont étudiés les cas où la structure spatiale du champ de vitesse est soit lisse soit brownien fractionnaire (multidimensionnel). Un modèle où le champ de vitesse est corrélé en temps est également abordé. Parmi les problèmes étudiés sont les secteurs anisotropes de la quantité advectée, l'apparition d'intermittence spatiale, ou encore différents passages à la limite dans la statistique du champ de vitesse.

### **Thesis abstract:**

The principal aim of this thesis is to study various aspects of the evolution of some scalar or vector field, advected by a velocity field whose statistics is given independently of the advected field. As a byproduct, we also come to study integral curves of the velocity field, known as Lagrangian trajectories.

After a comprehensive introduction, several models and problems are approached. Our main model – named after R. H. Kraichnan – uses velocity fields that are Gaussian delta-correlated in time. The cases, where the spatial structure of the velocity field is either smooth or is a (multidimensional) fractional Brownian motion, are studied. A model of correlated in time velocity fields is also considered. Among problems studied, one finds the anisotropic sector of the advected quantity, emergence of spatial intermittency, and taking different limits of the velocity field statistics.

