



HAL
open science

Mathematical analysis and numerical simulations of a model of complex fluids

Yousra Gati

► **To cite this version:**

Yousra Gati. Mathematical analysis and numerical simulations of a model of complex fluids. domain_other. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. English. NNT: . pastel-00000883

HAL Id: pastel-00000883

<https://pastel.hal.science/pastel-00000883>

Submitted on 4 Nov 2004

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE

présentée par

Yousra GATI

pour l'obtention du titre de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NATIONALE
DES PONTS ET CHAUSSÉES**

Spécialité : **Mathématiques et Informatique**

Sujet : **Analyse mathématique et simulations numériques d'un modèle de fluides complexes**

Soutenance le 12 juillet 2004 devant le jury composé de :

Président : Bernard Lapeyre

Rapporteurs : François Castella
Marco Picasso

Examineur : Pascal Hébraud

Directeur de thèse : Claude Le Bris

À mes parents,

à ma famille.

“Les savants des temps passés et des nations révolues n’ont cessé de composer des livres. Ils l’ont fait pour léguer leur savoir à ceux qui les suivent. Ainsi demeurera vive la quête de la vérité.” Al-Khawarizmi (780-850)

...merci...

Cette thèse n'aurait pu aboutir sans la présence de plusieurs personnes, que je tiens à remercier ici :

Bernard Lapeyre, qui a accepté, à mon grand honneur, de présider mon jury de thèse.

François Castella et *Marco Picasso*, qui ont accepté de rapporter le présent mémoire et pour l'intérêt qu'ils lui ont porté.

Pascal Hébraud, qui a accepté de participer à mon jury de thèse et pour toutes ses remarques et ses conseils.

Claude Le Bris, qui a dirigé ma thèse et chez qui j'ai pu apprécier sa pédagogie et sa méthodologie. Durant toutes ces années, j'ai pu profiter de son expérience et de ses précieux conseils. Qu'il trouve ici le témoignage de ma sincère reconnaissance.

Isabelle Catto, qui m'a aidé sur la partie théorique de ma thèse. Je la remercie pour tout le temps qu'elle a pu me consacrer ainsi que pour son exigence de clarté et de rigueur qui ont été nécessaires pour mener à bien cette partie.

Éric Cancès, qui a toujours contribué à l'avancement de ma thèse avec beaucoup d'enthousiasme. J'ai beaucoup appris de son ouverture scientifique et de ses conseils judicieux.

Adel Ben Haj Yedder et *Tony Lelièvre*, pas seulement pour toute l'aide qu'ils ont pu me fournir durant la thèse, mais aussi et simplement pour avoir toujours été là pour moi.

Je tiens à remercier tous les "CERMICSiens" que j'ai connus et côtoyés durant ces années passées au CERMICS. Merci à *Anne Auger*, *Kengy Barty*, *Xavier Blanc*, *Elisabetta Carlini*, *Jean-Philippe Chancelier*, *Fabrice Cohen*, *Guy Cohen*, *Michel De Lara*, *Jean-François Delmas*, *Claude Dion*, *Alexandre Ern*, *Hervé Galicher*, *Mohamed Amin Ghorbel*, *Benjamin Jourdain*, *Mazyar Mirrahim*, *Régis Monneau*, *Nicola Moreni*, *Jennifer Proft*, *Gabriel Stolz* et *Gabriel Turinici*.

Je tiens à remercier également *Sylvie Berte* et *Khadija El Ouali* ainsi que notre ingénieur système *Jacques Daniel* pour leur efficacité et leur gentillesse.

Un grand merci à mes collègues et mes amis qui ont su créer une bonne ambiance aussi bien de travail que de détente. Merci à *Laetitia Andrieu*, *Adrien Blanchet*, *Maxime Barrault*, *Anes Dallagi*, *François Lodier* et *Antoine Gloria*. Je remercie particulièrement *Héloïse Beaugendre* et *Linda El Alaoui* pour m'avoir aidé à organiser mon pot de thèse, *Bouhari Arouna* et *Frédéric Legoll* pour les diverses discussions scientifiques enrichissantes et *Antonin Orriols* pour son amitié, son écoute et ses encouragements durant la période de fin de thèse.

J'adresse mes derniers et profonds remerciements à mes parents et à mes sœurs *Asma* et *Rania* pour leur amour, leurs encouragements et leur soutien constant ainsi qu'au reste de la famille.

Mots-clés : EDP paraboliques non linéaires, problèmes multi-échelles, rhéologie des fluides complexes, techniques de réduction de variance.

Résumé : Nous nous intéressons à l'analyse mathématique et aux simulations numériques d'un modèle de fluides non newtoniens. Nous couplons le modèle d'Hébraud et Lequeux décrivant l'écoulement de Couette plan de suspensions concentrées à l'échelle mésoscopique avec l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Outre le couplage multi-échelle, la difficulté principale de ce modèle vient du fait que l'équation mésoscopique est une équation parabolique de type Fokker-Planck non linéaire qui peut dégénérer en une équation hyperbolique. Le but de cette thèse est d'étudier des deux points de vue théorique et numérique le modèle obtenu. Ainsi, dans la première partie, nous démontrons des théorèmes d'existence et d'unicité de solutions dans des espaces fonctionnels appropriés, et dans la seconde partie, nous développons des schémas numériques pour approcher les solutions du problème. Deux méthodes (déterministe et stochastique) ont été implémentées. Des tests de réduction de variance relatifs à la méthode stochastique ont été réalisés. Finalement, le problème de calibrage des paramètres par la méthode de l'adjoint a été abordé.

Keywords : Nonlinear parabolic PDE's, multiscale problems, rheology of complex fluids, variance reduction techniques.

Abstract : We are interested in the mathematical analysis and numerical simulations of a model of non-Newtonian fluids. We couple the Hébraud-Lequeux model which describes the planar Couette flow of concentrated suspensions with the momentum conservation equation. Besides the coupling of equations, the principal difficulty of the model comes from the fact that the microscopic equation is a nonlinear parabolic equation of Fokker-Planck type that may degenerate into a hyperbolic equation. The purpose of this work is to study this model from both theoretical and numerical viewpoints. In the first part, we prove existence and uniqueness of solutions in appropriate functional spaces. In the second one, we develop numerical schemes to simulate the model. Two methods (deterministic and stochastic) have been implemented. Variance reduction techniques have been developed to reduce the noise when the stochastic method is employed. Finally, optimization techniques are used to fit the parameters of the model.

Sommaire

Introduction générale	1
1 Introduction physique	5
1.1 Cadre général et intérêt	6
1.2 Les fluides complexes	7
1.2.1 Définitions : viscosité, cisaillement et fluides complexes	7
1.2.2 Grandeurs physiques	7
1.2.3 Quelques propriétés physiques	10
1.3 Les suspensions	13
1.3.1 Rhéologie et dispositifs expérimentaux	14
1.3.1.1 L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)	15
1.3.1.2 Diffusion dynamique de la lumière (DLS), des rayons X ou des neutrons	16
1.3.2 Interactions	16
1.3.3 Comportements communs des suspensions	17
1.3.4 Modèles	20
1.3.5 Transition vitreuse - Transition pâteuse	21
1.3.6 Modèle de pièges (Bouchaud et al 1995) [2]	21
1.3.7 Modèle SGR (Sollich et al 1997) [17]	22
1.4 Notre choix : le modèle de Hébraud et Lequeux [9]	23
I Analyse Mathématique	31
2 Mathematical analysis of a nonlinear parabolic equation arising in the modelling of non-newtonian flows	33
2.1 Introduction	34
2.2 The vanishing viscosity approximation	37
2.3 The non degenerate case : $D(p_0) > 0$	47
2.4 The degenerate case : $D(p_0) = 0$	50
2.5 Steady states	55

3	On a micro–macro model for fluids	61
3.1	Introduction	62
3.2	General case $\sigma_c > 0$	63
3.2.1	\mathcal{F}_2 is Lipschitz continuous with arbitrary small Lipschitz constant	66
3.2.2	Well-definiteness of \mathcal{F}_1	67
3.2.3	\mathcal{F}_1 is Lipschitz continuous	69
3.2.4	Uniqueness of the solution	73
3.2.5	Long time existence	74
3.3	The case $\sigma_c = 0$	76
II	Résolution numérique	89
4	Simulations numériques	91
4.1	Introduction	92
4.2	Simulations numériques	94
4.2.1	Approche déterministe	95
4.2.1.1	Algorithme	99
4.2.2	Approche Stochastique	99
4.2.2.1	Algorithme	100
4.3	Résultats numériques et comparaison	102
4.3.1	Simulations de quelques expériences de rhéologie	102
4.4	Réduction de variance	108
4.4.1	Généralités	110
4.4.1.1	La méthode de <i>Brownian configuration fields</i>	110
4.4.1.2	La méthode de la variable de contrôle	110
4.4.2	Résultats	112
4.5	Conclusion	117
5	Estimation de paramètres	121
5.1	Introduction	122
5.2	Généralités	122
5.3	Equations adjointes et calcul du gradient	127
5.4	Discretisation du problème adjoint	132
5.5	<i>Check-points</i>	135
5.6	Changement de critère	137
5.6.1	Résultats numériques	139
6	Conclusions	143
A	Rappels des principaux résultats utilisés dans la partie théorique	145
A.1	Un théorème d’existence et d’unicité pour les EDP paraboliques linéaires avec second membre	146
A.2	Principe du maximum pour les EDP paraboliques linéaires	146

Introduction générale

Les exemples de fluides complexes abondent dans la nature comme dans l'industrie : des fluides tels que le sang, le plastique, le ciment, la plupart des produits cosmétiques, des produits alimentaires sont des fluides complexes. Tous ces matériaux sont étranges du fait qu'ils présentent des comportements complexes et difficile à identifier : à la fois solides, liquides, plastiques... Pour ces fluides, la relation qui lie le tenseur des contraintes au gradient de vitesse n'est pas linéaire comme c'est le cas pour les fluides newtoniens : leurs comportements ne peuvent pas être décrits par les équations de Navier-Stokes.

Les fluides complexes sont tellement variés qu'ils ne peuvent pas être décrits par un modèle générique. Des modèles adéquats pour chaque classe de fluides complexes (polymères, suspensions, ...) sont nécessaires. L'étude rhéologique de tels fluides est actuellement en pleine expansion sans doute pour leur grande utilité et leurs divers champs d'applications. Les nouvelles techniques expérimentales de rhéométrie ont permis d'élaborer un certain nombre de modèles physiques récents apportant de nouvelles questions et de véritables challenges que ce soit du point de vue de l'analyse mathématique ou du calcul scientifique. En effet, le comportement rhéologique des fluides complexes étant dicté par l'évolution de leurs structures internes, une description macroscopique de l'écoulement est insuffisante pour la prédiction de leurs propriétés rhéologiques compliquées et une modélisation sophistiquée devient ainsi nécessaire. Dans ce cadre, la modélisation micro-macro, qui couple des équations à différentes échelles, a été récemment introduite et a déjà conduit à des résultats intéressants dans le domaine des polymères.

L'objet de cette thèse est d'étudier la faisabilité de telles approches micro-macro pour un type de fluides complexes : les suspensions concentrées de particules molles. Partant du modèle mésoscopique d'Hébraud et Lequeux auquel nous ajoutons la dépendance en espace, nous construisons un système d'équations en le couplant avec les équations bilan de la mécanique des fluides. Le modèle que nous obtenons est un modèle micro-macro en une dimension décrivant l'écoulement Couette incompressible des suspensions concentrées, où le tenseur des contraintes macroscopique est calculé via l'hypothèse du champ moyen. Outre le couplage entre les équations, la difficulté principale de ce modèle vient du fait que l'équation micro est une équation de type Fokker-Planck non linéaire qui peut dégénérer (le coefficient de diffusion peut s'annuler). Nous nous proposons

(dans ce travail de thèse) d'étudier ce modèle des deux points de vues : mathématique et numérique.

Le premier chapitre donne un aperçu général des fluides complexes et des suspensions en particulier, et présente ensuite le modèle étudié. La thèse se partage alors en deux parties.

La première partie (chapitres 2 et 3) de cette thèse a été consacrée à l'analyse mathématique du modèle. Le chapitre 2 (travail fait en collaboration avec Eric Cances et Isabelle Catto) est une analyse du modèle d'Hébraud-Lequeux. Nous prouvons d'abord, sous certaines conditions initiales, que l'équation d'évolution ne peut pas dégénérer et démontrons l'existence et l'unicité d'une solution dans des espaces appropriés. Pour cela, nous avons commencé par démontrer l'existence et l'unicité d'une solution de viscosité lié au problème en utilisant le théorème du point fixe de Schauder ; ensuite nous avons conclu par passage à la limite. Quand certaines de ces conditions initiales ne sont pas vérifiées, nous analysons un cas où le modèle d'Hébraud-Lequeux peut admettre plusieurs solutions. Une étude des solutions stationnaires a été présentée, à la fin et nous avons démontré des résultats déjà cités par Hébraud et Lequeux. Dans le chapitre 3 (travail fait en collaboration avec Eric Cances, Isabelle Catto et Claude Lebris), nous nous sommes intéressés à l'étude du système d'équations couplées : nous avons prouvé l'existence et l'unicité, sous certaines conditions initiales, d'une solution au système d'équations couplées auquel nous avons ajouté un terme de diffusion artificielle. Ceci a été fait en utilisant le théorème du point fixe de Banach. Pour le cas particulier où le coefficient de diffusion est une constante (l'équation de Hébraud et Lequeux est une équation linéaire), nous avons démontré l'existence et l'unicité d'une solution au système même sans la présence du terme de diffusion artificielle.

La deuxième partie de cette thèse a porté sur la résolution numérique du modèle couplé (sans le terme de diffusion artificielle). En effet, hormis quelques cas particuliers, le système n'admet pas de solutions analytiques et le but de cette partie a donc été d'approcher la vitesse et contrainte solutions de notre système. Ceci a été fait suivant deux approches différentes : une approche déterministe et une approche stochastique. Nous avons exposé au chapitre 4 ces deux méthodes, nous avons présenté leurs résultats relatifs et nous les avons comparés en termes de temps de calculs et occupations mémoire. Quelques simulations de tests rhéologiques ont été réalisés pour exhiber certains comportements rhéologiques des suspensions concentrées que peut reproduire le modèle. Nous avons pu mettre en évidence *l'overshoot* de la vitesse et de la contrainte grâce à des tests de *start up*. Nous avons pu observer que le modèle est capable de reproduire le caractère rhéofluidifiant des suspensions en en simulant le rhéogramme. Des simulations de tests d'analyse oscillatoire ont aussi été réalisés. La dernière partie de ce chapitre concerne deux techniques de réduction de variance relatifs à l'approche stochastique. Finalement, le dernier chapitre de ce travail de thèse a porté sur le calage des paramètres

par la méthode de l'adjoint. Une technique de *check-points* a été employée afin de pouvoir exécuter le programme implémenté. Les résultats de ce dernier chapitre restent à améliorer.

Chapitre 1

Introduction physique

Ce chapitre présente un aperçu sur les fluides complexes, en particulier, les suspensions et une introduction au modèle étudié.

1.1 Cadre général et intérêt

Les fluides complexes regroupent un grand nombre de matériaux présentant un intérêt industriel (polymères fondus, pâtes alimentaires, peintures,...), environnemental (boues résiduaires, laves torrentielles, neige,...), médical (sang, mucus, liquide synovial,...)... Tous ces fluides ont des dynamiques d'écoulement fondamentalement différentes de celles, bien connues, des fluides newtoniens (eau, air, miel...). Les équations de *Navier-Stokes* sont mal adaptées pour ces fluides et en l'absence de modèle universel, plusieurs modèles ont été développés. Les fluides complexes ont en commun de posséder une microstructure qui interagit avec l'écoulement avec des temps caractéristiques comparables aux temps d'observation usuels. La simulation de leur écoulement se heurte à de nombreuses difficultés. La quasi-totalité des simulations est basée à l'heure actuelle sur une approche purement macroscopique : le tenseur des contraintes est fourni par une loi phénoménologique. De tels modèles sont limités dans la mesure où ils ne rendent pas compte de toute la variété des phénomènes observés expérimentalement en rhéologie. Pour aller au-delà, il faut inclure dans le modèle des champs de variables internes rendant compte de l'état de la microstructure dont la connaissance permet d'évaluer, à partir de considérations physiques solidement établies, le tenseur des contraintes en chaque point du fluide. La dynamique des champs de variables est quant à elle influencée par le champ des vitesses macroscopiques. On aboutit ainsi à des modèles dits "micro-macro" qui couplent les échelles microscopiques et macroscopiques. De tels modèles ont ainsi été développés ces dernières années pour les fluides polymériques et donnent déjà des résultats très prometteurs. L'objet de cette thèse sera d'étudier la faisabilité de telles approches couplées pour un type de fluides complexes, plus précisément les suspensions concentrées de particules molles tels que la laponite (argile synthétique). Nous nous intéresserons ainsi aux comportements de ces matériaux dans la phase fluide-pâte. Quelques modèles ont été introduits récemment pour décrire leurs propriétés mécaniques et l'évolution de leur microstructure. La détermination expérimentale d'une loi de comportement revient à la détermination d'une loi rhéologique reliant les composantes du tenseur des contraintes à celles du tenseur des vitesses.

Le plan de ce chapitre est le suivant. D'abord, nous commençons par une rapide introduction sur les fluides complexes et sur certains phénomènes qu'on peut rencontrer dans leur comportement. Ensuite, nous examinerons le cas particulier des suspensions où nous exposerons quelques méthodes qui ont été élaborées pour l'étude de leurs différents comportements avant d'expliquer leurs différents mécanismes. Dans la dernière partie de ce chapitre, nous tenterons d'exposer "l'origine" du modèle que nous allons étudier. Ainsi, nous commencerons par expliquer les analogies entre les systèmes pâteux et vitreux. Nous exposerons deux modèles avant de présenter celui que nous étudierons en détail. Le premier est le modèle de Bouchaud connu pour la description de la transition vitreuse.

Le deuxième est le modèle SGR pour la description de la transition pâteuse, qui est directement inspiré du précédent. Le modèle de Hébraud et Lequeux, qui nous intéresse, sera une suite de la description introduite dans le modèle SGR.

1.2 Les fluides complexes

1.2.1 Définitions : viscosité, cisaillement et fluides complexes

La viscosité d'un fluide mesure sa résistance à la déformation ou à l'écoulement. L'eau par exemple coule et s'étale facilement, ainsi c'est un fluide peu visqueux. En revanche, le miel s'écoule très lentement et c'est un fluide à viscosité élevée. Pour mesurer la viscosité on introduit une quantité du fluide entre deux plaques parallèles et on déplace l'une des plaques tout en gardant fixe la distance entre elles. Le mouvement que subit le fluide est appelé cisaillement (voir [1.1]). La couche du fluide qui est en contact avec la plaque en mouvement est entraînée; celle qui est en contact avec la plaque fixe est immobile. Chaque élément du fluide est soumis à une contrainte qui induit le mouvement du fluide. La viscosité η qui se mesure en Poiseuille $1Pl = 1Pa.s$, se déduit ainsi, de la contrainte τ et du taux du cisaillement $\dot{\gamma}$ (appelé aussi gradient de vitesse). Pour certains fluides tels que l'eau et le miel on obtient une viscosité constante $\tau = \eta\dot{\gamma}$. Ils sont dit fluides newtoniens et leurs mouvement est bien décrit par la célèbre équation de *Navier-Stokes*. Tous les autres sont appelés fluides complexes.

Dans la suite, nous commencerons par donner quelques définitions des grandeurs physiques qui nous seront indispensables pour la description et la compréhension des mécanismes des fluides complexes en général et des suspensions en particulier. Puis, nous décrirons quelques propriétés qu'on peut rencontrer dans l'étude des fluides complexes.

1.2.2 Grandeurs physiques

i. Temps caractéristique de relaxation

C'est le temps nécessaire au fluide pour évoluer vers un nouvel état d'équilibre associé aux déformations ou contraintes qui lui sont imposées. Pour un fluide newtonien par exemple, le temps de relaxation est nul, celui d'un solide est infini. En revanche, un matériau viscoélastique possède un temps de relaxation fini et non nul. Notons que ce qui importe vraiment pour caractériser le comportement des matériaux est le rapport du temps caractéristique du matériau T_c et du temps caractéristique d'observation du processus d'écoulement T_0 . Ce rapport est appelé

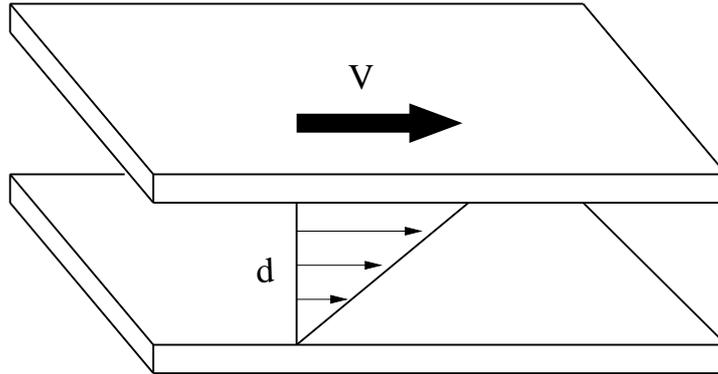


FIG. 1.1 – Dans ce cas de cisaillement simple on a $\dot{\gamma} = V/d$ et $\tau = \sigma_{xy}$ où σ est le tenseur des contraintes.

le nombre de Deborah $De = T_c/T_0$.

ii. Seuil de contrainte

Pour comprendre, laissons couler par exemple un fluide sur une surface penchée. Si ce fluide ne possède pas de seuil de contrainte (ceci est le cas d'un fluide newtonien) alors il coulera sous l'effet de la gravité, en revanche s'il possède un seuil de contrainte τ_c , alors il coulera seulement à partir d'une certaine pente suffisamment élevée pour que la contrainte due au poids du fluide excède son seuil de contrainte. Pour déterminer le seuil de contrainte, il suffira de tracer la courbe contrainte en fonction du gradient de vitesse de cisaillement fig [1.2]. Notons que le seuil de contrainte ne peut vraiment exister qu'en cas d'équilibre thermique. Dans le cas contraire, les mouvements browniens empêchent le système de se structurer et donc de résister à une quelconque déformation.

iii. Analyse oscillatoire - Module élastique et module visqueux

Quand on soumet l'échantillon du matériau à un cisaillement oscillant $\gamma = \gamma_{max} \sin(\omega t)$, la contrainte enregistrée s'exprime en régime permanent sous la forme $\tau = \tau_{max} \sin(\omega t + \varphi)$ où γ_{max} et ω sont respectivement l'amplitude de la déformation et la pulsation imposée, τ_{max} est l'amplitude de la contrainte résultante et φ est le déphasage entre la contrainte et la déformation (voir [1.3]). Quand un écoulement oscillant stationnaire est atteint, on peut alors calculer le module élastique G' et le module visqueux G'' définis par :

$$G' = \frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}} \cos\varphi \quad \text{et} \quad G'' = \frac{\tau_{max}}{\gamma_{max}} \sin\varphi.$$

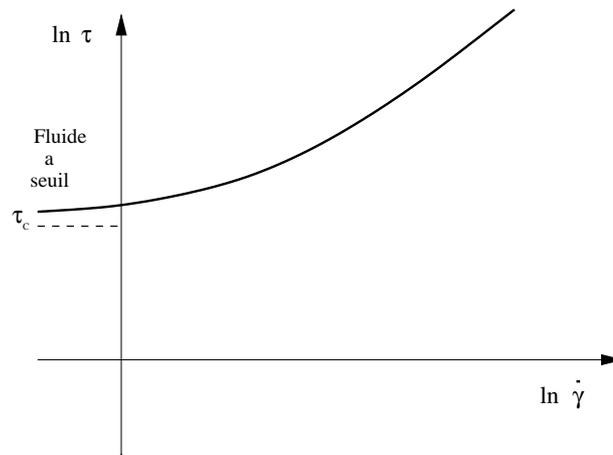
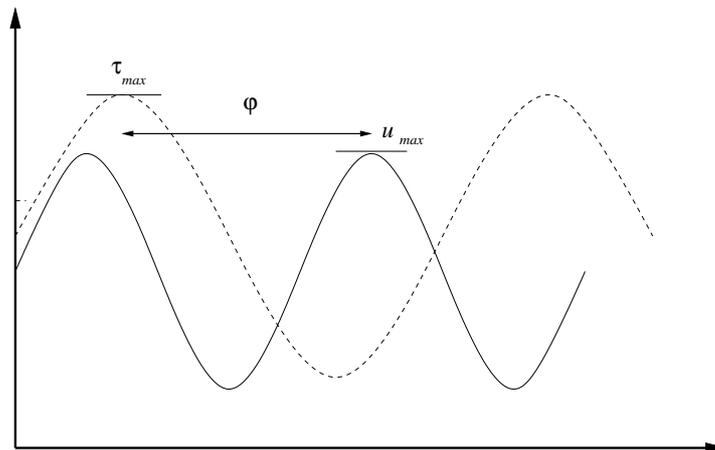


FIG. 1.2 – Détermination du seuil de contrainte.

FIG. 1.3 – Courbe représentant la variation de la vitesse et de la contrainte au cours du temps lors de l'application d'un cisaillement oscillant. Les modules G' et G'' s'expriment en fonction du déphasage ϕ et des amplitudes de la contrainte et de la déformation.

Le module élastique G' est lié à la solidité de la structure interne du matériau. Il est aussi appelé le module de stockage car il correspond à l'énergie stockée et restituée. Le module visqueux G'' est aussi appelé module de perte car il correspond à l'énergie dissipée. Ces grandeurs calculées nous permettent d'en savoir plus sur la structure interne du matériau et nous permettent de quantifier la viscoélasticité comme nous l'expliquerons plus tard. On a aussi utilisé ces grandeurs pour évaluer le seuil de contrainte (en considérant que celui-ci était atteint quand le module élastique commençait à décroître) et dans la détermination de la concentration critique d'une suspension (en deçà de laquelle elle se comporte comme un fluide

newtonien et au delà de laquelle elle présente un comportement de fluide complexe). Ainsi, pour des concentrations faibles et pour des petites déformations on obtient des petites valeurs de G' et G'' ce qui correspondrait à un comportement newtonien à faible viscosité; alors que pour les fortes concentrations, G' est plus élevé et c'est ce qui nous indiquera la formation de réseau dans le système. Enfin, une autre utilité des modules G' et G'' est celle de permettre la mise en évidence des transitions de phase (comme la gélification d'un matériau à partir d'une certaine température). On observe ainsi simultanément une variation en général très marquée du module G' et la présentation d'un pic pour G'' ou pour $\tan \varphi$.

1.2.3 Quelques propriétés physiques

i. Elasticité

Supposons qu'on applique une force à un matériau donné. Ce matériau va subir une déformation. Quand on supprime cette force, si le matériau retourne à son état initial, nous sommes en présence d'un matériau élastique. Prenons le cas d'un fluide. N'importe quelle force va engendrer un écoulement. Quand on supprime cette force, le fluide ne retourne pas à son état initial. Le fluide n'est donc pas élastique.

ii. Viscoélasticité

Ce terme désigne la présence simultanée de l'élasticité et de la viscosité. Quand on applique une déformation à un matériau viscoélastique, il se comporte dans un premier temps comme un corps élastique, puis (quand le temps dépasse le temps caractéristique du fluide) il réagit comme un fluide visqueux. En effet, lorsque une faible énergie est transmise, le matériau va commencer à stocker de l'énergie élastique et une fois que le seuil d'énergie stockée est dépassé la structure se désagrège et on observe un écoulement du matériau. Comme nous l'avons indiqué, les modules G' et G'' nous permettent d'évaluer la viscoélasticité dans un matériau. Ainsi, pour un matériau purement élastique, G' est constant et G'' est nul; pour un fluide newtonien G' est nul et G''/w est la viscosité; et pour un fluide viscoélastique en général G' est grand et G'' est faible pour des faibles valeurs de l'amplitude du cisaillement γ_0 et inversement quand γ_0 est grand. La viscoélasticité d'un matériau peut être décrite par un modèle simple, le modèle de Maxwell $\frac{1}{G} \frac{d\tau}{dt} + \frac{1}{\eta} \tau = \dot{\gamma}$, où G est le module élastique et η est la viscosité.

iii. Plasticité ou comportement de fluide à seuil

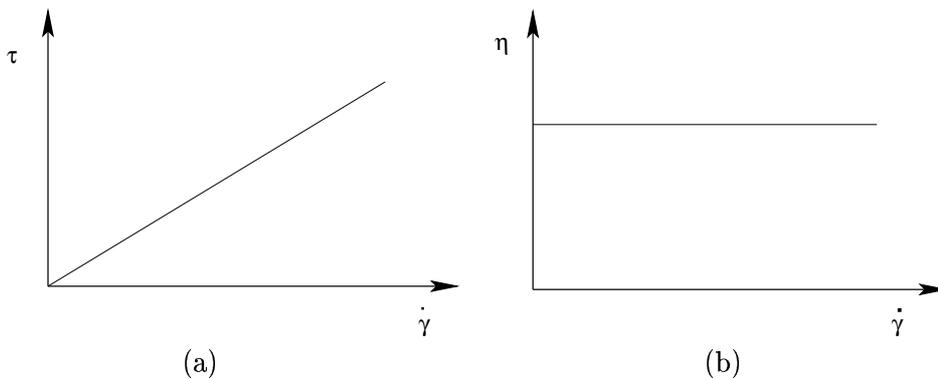
Propriété d'un fluide qui possède un seuil de contrainte au dessous duquel le matériau ne s'écoule pas et se comporte comme un solide élastique. Tel est le cas d'un fluide de Bingham qu'on modélise par $\sigma = \sigma_C + A\dot{\gamma}$, où σ représente la contrainte, σ_C la contrainte critique et A une constante positive dépendant du matériau. En effet, un fluide de Bingham nécessite une force minimale pour provoquer son écoulement et une fois la contrainte critique est atteinte ce fluide se comporte comme un fluide newtonien.

iv. Rhéofluidification

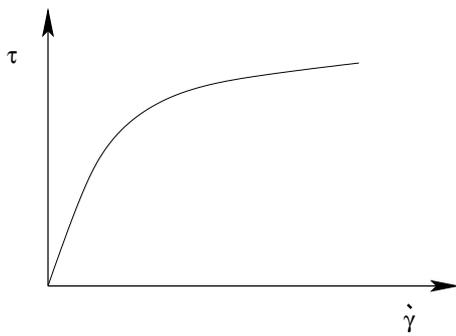
C'est sûrement la caractéristique la plus fréquemment rencontrée et ceci dans les fluides complexes en général. Un fluide est dit rhéofluidifiant si sa viscosité diminue quand on augmente le taux de cisaillement. Tel est le cas d'un dentifrice par exemple. La diminution de la viscosité est expliquée par la destruction de la microstructure. Notons que dans le cas contraire, le fluide est dit "rhéoépaississant". Le caractère rhéofluidifiant des suspensions peut en général être modélisé par une loi de puissance $\tau = a\dot{\gamma}^n$, avec a et n paramètres du matériau. Notons qu'en présence simultanée de la plasticité et de la rhéofluidification, un matériau peut être décrit par le modèle de Herschel-Bulkeley $\sigma = \sigma_C + A\dot{\gamma}^n$, où σ représente la contrainte, σ_C la contrainte critique et A et n des constantes positives dépendant du matériau.

Les allures des courbes d'écoulement (contrainte *vs* taux de cisaillement) lors d'un cisaillement simple permanent qu'on obtient pour un fluide newtonien (a), rhéofluidifiant (c) et de Bingham (e) et celles des courbes (viscosité *vs* taux de cisaillement) respectivement (b) (d) et (f), sont représentées dans ce qui suit.

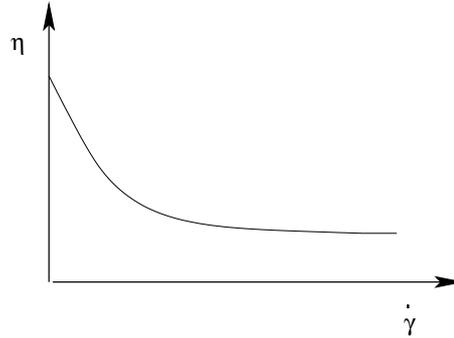
Comportement newtonien :



Comportement rhéofluidifiant :

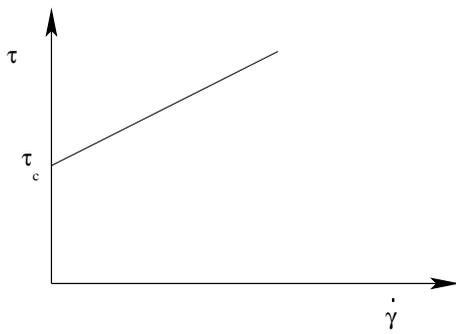


(c)

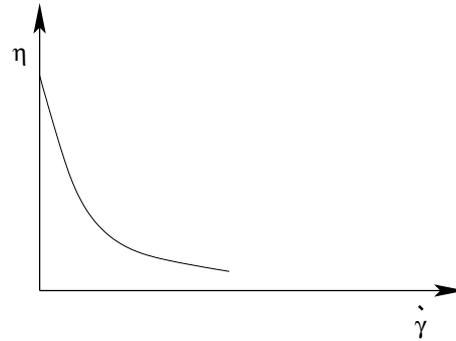


(d)

Comportement d'un fluide de Bingham :



(e)



(f)

v. Thixotropie

Lors de l'application d'un cisaillement constant, certains systèmes présentent un changement de la viscosité en fonction du temps. En effet, selon que le système se structure ou se déstructure graduellement sous l'effet du cisaillement, la viscosité peut augmenter ou diminuer. Ceci est dû au fait que ces réarrangements de structure interne ne sont pas instantanés. C'est cette propriété associée aux changements des propriétés rhéologiques avec le temps qu'on qualifera de thixotropie. Ce phénomène est présent dans beaucoup de fluides complexes et a, en général, lieu quand le fluide est rhéofluidifiant. La présence de la thixotropie dans un système implique que l'histoire de l'écoulement doit être prise en compte pour prédire son comportement. Notons que l'importance de la thixotropie dans un écoulement peut être évaluée à partir du nombre de Deborah (De est égal au rapport entre le temps caractéristique de relaxation et le temps caractéristique pour observer une déformation). En effet, elle ne peut être observée que lorsque De est de l'ordre de l'unité. En revanche, quand le nombre de Deborah est très petit devant 1 la thixotropie ne pourra pas être mise en évidence et quand il est très supérieur à 1

elle sera négligeable.

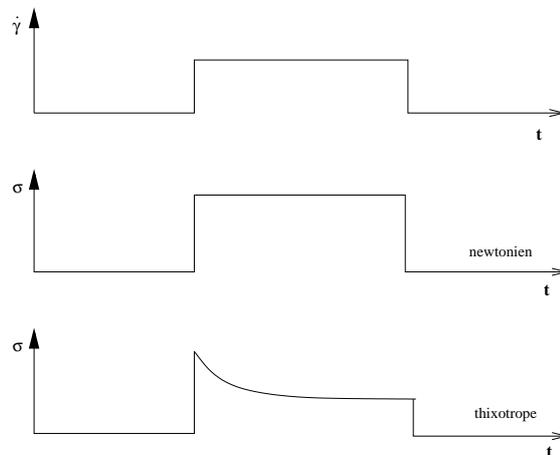


FIG. 1.4 – Schémas de l'évolution de la contrainte au cours du temps lors de l'application d'un même gradient de vitesse pour un fluide newtonien et un fluide thixotrope.

1.3 Les suspensions

Les suspensions sont des mélanges de particules solides dans un liquide [1.5]. La taille des particules est variable mais reste de très faible dimension (comprise entre quelques nanomètres et quelques dizaines de micromètres). Citons pour exemple de suspensions le ciment, les pâtes, le sang et les boues résiduelles mais les exemples les plus classiques utilisés dans la rhéométrie sont les suspensions d'argiles tel que la laponite et la bentonite, connues pour présenter des propriétés de thixotropie avec des temps caractéristiques relativement grands et des propriétés de fluides à seuil. Notons que les suspensions de particules de petite taille sont souvent désignées par le terme "colloïdes" et que la thixotropie est très présente dans ces systèmes. Notons, enfin, qu'on distingue deux types de suspensions : dures et molles, et que dans le cadre de ce travail nous nous intéresserons aux suspensions molles.

Jusqu'à un passé proche, la modélisation physique s'est focalisée sur les polymères et bien que les suspensions concentrées représentent une large gamme de fluides, peu de travaux leur ont été dédiés. Récemment, les études et les progrès faits sur la rhéologie des suspensions ont encouragé certains auteurs à proposer des modèles génériques pour essayer de prédire leurs comportements mécaniques essentiels. C'est l'une des raisons pour lesquelles nous jugeons utile de présenter en quelques mots la rhéologie, les dispositifs expérimentaux essentiels réalisés. Nous expliquerons ensuite les différentes interactions

présentes dans une suspension et enfin nous décrirons d'autres comportements non-linéaires présents dans les suspensions concentrées qui ont récemment pu être identifiés.

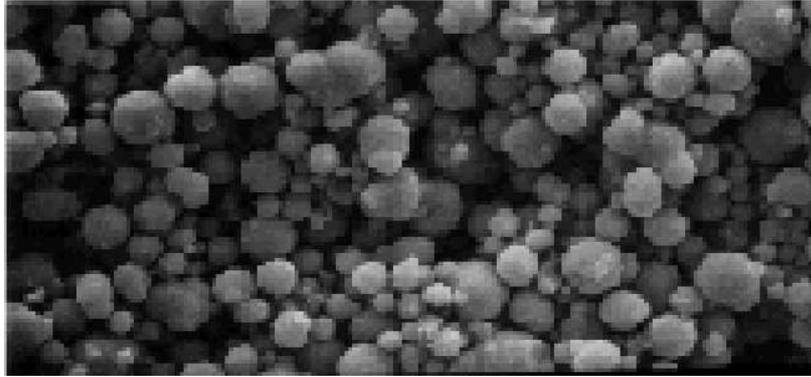


FIG. 1.5 – Suspensions

1.3.1 Rhéologie et dispositifs expérimentaux

De nombreuses techniques ont été utilisées pour comprendre les différents mécanismes des écoulements des fluides complexes ; citons pour exemple les ultrasons, la microscopie, les techniques de diffusion des neutrons ou des rayons X et la rhéométrie. Des combinaisons de ces techniques ont aussi été développées (voir par exemple [13]). En ce qui concerne la rhéométrie, la plupart des mesures sont basées sur des écoulements dans des géométries simples citons pour exemples l'écoulement Couette à cylindres concentriques et l'écoulement cône-plan fig [1.6]. Le principe de la rhéométrie reste, essentiellement, le même. Ce principe consiste à cisailier un échantillon de matériau en jouant sur les valeurs de la contrainte ou de la déformation ou de la vitesse de cisaillement et de déterminer dans chaque cas, la valeur des autres en tout instant. Bien que la rhéométrie soit simple dans ses principes, elle ne l'est pas dans la pratique. Les effets perturbateurs des mesures (tel que le glissement du matériau sur les parois du rhéomètre) sont assez fréquents et il faut en tenir compte pour l'interprétation des résultats expérimentaux. Notons que des méthodes de corrections ont aussi été développées et que la rhéométrie n'a cessé d'évoluer ces derniers temps jusqu'à devenir une discipline de recherche à part entière. Dans la suite nous expliquerons l'imagerie par résonance magnétique qui est sans doute la plus puissante des techniques à ce jour. Puis, nous décrirons aussi le principe des techniques de diffusion qui sont actuellement très utilisées.

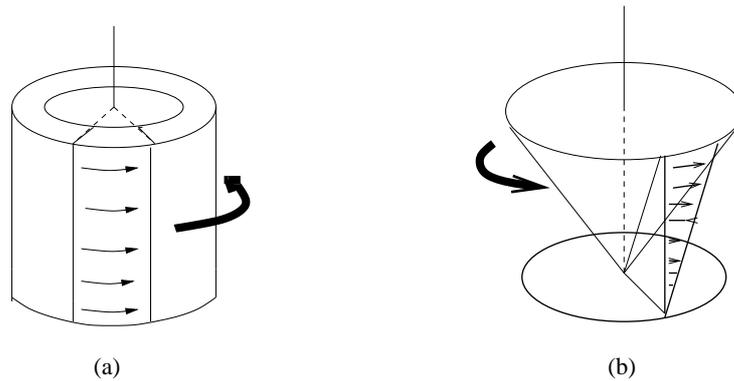


FIG. 1.6 – (a) Ecoulement Couette à cylindres concentriques, l'un tourne, l'autre est fixe
(b) Ecoulement Cône plan, le cône tourne et le plan est fixe

1.3.1.1 L'Imagerie par Résonance Magnétique (IRM)

C'est une technique de pointe qui a initialement été utilisée à des fins médicales. L'IRM comporte un aimant de grande dimension et diverses bobines. Une onde radio d'une certaine fréquence est envoyée à travers le champ magnétique, une information est ensuite recueillie à l'aide des bobines et déchiffrée. Cet appareil est précieux pour le diagnostic des blessures et des maladies car il permet d'obtenir des images détaillées de la structure interne d'un individu et ce sous n'importe quel angle. Cet appareil a été adapté ensuite pour être utilisé dans la rhéologie des fluides complexes en général, citons pour exemple les travaux de Callaghan [3] sur les polymères. Récemment, un prototype de cet instrument a été mis au point par le laboratoire LMSGC (laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil) de l'ENPC (Ecole Nationale des Ponts et Chaussées) pour être utilisé cette fois pour le "diagnostic" des matériaux du génie civil qui sont, pour la plus part, opaques. Le grand avantage de cet instrument est qu'il permet de suivre l'évolution interne (la distribution spatiale des grandeurs physiques) d'un matériau selon des plans de directions arbitraires et sans le détruire. Grâce à cette technique, Raynaud et al [16] ont pu enregistrer les profils des vitesses durant les régimes transitoires. Ainsi, ils ont pu mettre en évidence, pour des suspensions de bentonite (argile), l'existence d'une discontinuité dans le profil des vitesses associée à une valeur critique du gradient de vitesse imposée. Ce phénomène de fracturation sera défini un peu plus tard dans ce même chapitre. L'expérience de base consistait à ou bien changer subitement la vitesse appliquée ou bien à appliquer brutalement une vitesse après des temps de repos variables. Ils ont pu démontrer aussi que cette discontinuité est d'autant plus marquée (*ie* la zone non cisailée est d'autant plus grande) que le temps de repos est grand. Finalement, ils ont pu conclure à l'insuffisance des modèles de type fluides à seuil classiques pour décrire ces suspensions.

1.3.1.2 Diffusion dynamique de la lumière (DLS), des rayons X ou des neutrons

Lorsqu'un photon est projeté dans une suspension de particules, il subit un grand nombre de diffusions par les particules successives qu'il rencontre avant de ressortir dans une direction quelconque. La technique de la diffusion dynamique de la lumière consiste à utiliser cette propriété optique pour détecter le déplacement des particules. En effet, pour cela il suffit d'éclairer l'échantillon de matériau avec un faisceau de lumière (laser) et de mesurer le déplacement des particules à travers l'évolution des interférences des rayons ressortant dans une même direction. Ces données sur le mouvement individuel des particules vont être reliées au comportement mécanique macroscopique du matériau. Le principe de la diffusion des rayons X et des neutrons reste le même que la DLS et repose sur les mesures des changements de directions de la radiation propagée dus aux interactions avec les particules dans le matériau.

1.3.2 Interactions

La complexité du comportement rhéologique macroscopique d'une suspension est fortement dépendante de sa microstructure. Il est ainsi primordial de comprendre la nature des principales forces qui interagissent dans ces systèmes ainsi que leurs effets sur le comportement mécanique. Il existe essentiellement trois types d'interactions à l'intérieur d'une suspension :

i. Interactions colloïdales

Elles sont directement liées aux propriétés du fluide et sont dues aux forces d'attractions et de répulsions entre les particules elles-mêmes. Elles tendent à amener les particules dans une configuration d'équilibre local. Quand les forces attractives l'emportent, on assiste à une aggrégation des particules. Dans le cas contraire, les particules forment un "pseudo-réseau" fig [1.7]. Il est évident que ces interactions jouent un rôle d'autant plus important que la concentration volumique des particules est grande.

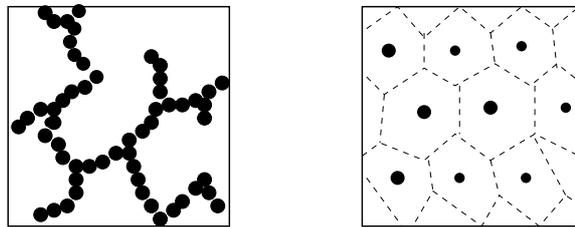


FIG. 1.7 – Schéma de particules agrégées et de particules en "pseudo-réseau".

ii. Interactions hydrodynamiques

Elles sont dues à la simple présence des particules dans un fluide. En effet, quand une particule se déplace dans un fluide, elle provoque nécessairement des perturbations du fluide qui l'entoure. Ce dernier influence à son tour les champs de vitesses des particules voisines. Ici aussi, les effets des interactions hydrodynamiques sont plus importants lors de fortes concentrations en particules.

iii. Mouvements browniens

C'est l'ensemble des mouvements aléatoires qui tendent à éloigner les particules de leurs positions initiales. Ce phénomène est lié à l'agitation thermique. Plus précisément, il est responsable de la diffusion d'énergie entre les particules et est d'autant plus significatif que la taille des particules est faible (inférieure à $1\mu\text{m}$). Le mouvement brownien, quand il est couplé avec les forces colloïdales, tend à ramener les particules vers un équilibre collectif dans le système.

1.3.3 Comportements communs des suspensions

Selon sa concentration en particules, une suspension peut avoir différents comportements rhéologiques. En effet, **à faible concentration**, une suspension coule comme un fluide newtonien sous des faibles cisaillements. En particulier, en régime transitoire, le tenseur des contraintes τ est linéaire en fonction du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ et on a $\tau = \eta \dot{\gamma}$ où η est la viscosité de la suspension. Souvent, une rhéofluidification est observée lors des forts cisaillements. Elle est mise en évidence par une inflexion dans la courbe contrainte-taux de cisaillement. Une analyse oscillatoire prouve que le système se comporte comme un liquide visqueux ($G'(w) \ll G''(w)$) pour des basses fréquences (inférieures à $1/T_0$ où T_0 est le temps caractéristique) et comme un solide élastique pour des hautes fréquences.

En augmentant la concentration volumique des particules, une suspension augmente sa résistance à l'écoulement (*ie* sa viscosité). Son temps de relaxation augmente aussi. Le domaine des basses fréquences qui engendrent un comportement linéaire diminue, celui qui donnerait lieu à des comportements de type solide élastique augmente.

A forte concentration, les particules finissent par se toucher, le solvant n'occupe plus que les interstices et on observe un embouteillage collectif des particules les unes par les autres (c'est ce qu'on appelle le "jamming"). Ces dernières exercent les unes sur les autres des interactions qui peuvent varier sensiblement au cours du temps ou en fonction de la vitesse d'écoulement. La microstructure formée peut être suffisamment solide pour ne pas se désagréger jusqu'à une certaine contrainte critique qui lui est appliquée. En effet, le comportement macroscopique est lié à l'intensité des forces entre les particules. Le système paraît comme gelé, sa viscosité augmente considérablement et il devient plus

résistant à l'écoulement. Lors de l'application d'une faible déformation, les réseaux de particules formés sont très légèrement détruits, et on observe ainsi un comportement mécanique extrêmement non linéaire avec des processus de relaxation infiniment lents, de sorte que le système garde une mémoire très longue de son histoire. En revanche, quand on applique une forte déformation, les réseaux de particules sont destructurés à chaque instant fig [1.8]. La suspension est ainsi contrainte à s'écouler et retrouve un comportement newtonien. Ces systèmes sont appelés systèmes pâteux.

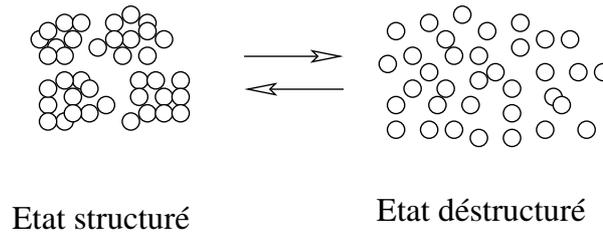


FIG. 1.8 – Structure-déstructure.

Expérimentalement, les courbes des états stationnaires sont fondamentalement différentes de celles obtenues à faible concentration. Pour des taux de cisaillement faibles et tendant à s'annuler, (notons qu' expérimentalement, les résultats ne sont vraiment pertinents qu'au dessus d'une valeur finie de $\dot{\gamma}$) le tenseur de contrainte tend vers une valeur finie qui correspond à la valeur de la contrainte critique τ_C . Ce seuil de contrainte augmente d'autant plus qu'on augmente la concentration. En revanche, on remarque qu'aux forts taux de cisaillement, le comportement n'est pas très différent de celui observé quand la concentration est faible. On remarque dans plusieurs cas, que lors des cisaillements simples, la courbe d'écoulement est approximativement celle obtenue par le modèle de Herschel-Bulkley fitté en A et avec $n = 1/3$. Lors de l'application de régimes transitoires et lors d'un soudain changement des conditions de l'écoulement, on observe généralement un *overshoot* de la contrainte (avant de se stabiliser, la contrainte dépasse la valeur finale qu'elle va atteindre). Sous l'application de déformations sinusoïdales, les variations du module de perte et de stockage en fonction de la fréquence et de la déformation correspondent à celle d'un fluide viscoélastique à seuil. Ainsi, à des faibles fréquences de cisaillement, on obtient une réponse du type solide élastique ($G'' \ll G'$). Trois types de dépendance des modules en fonction de la fréquence du cisaillement ont été observés : ou bien les deux modules augmentent en suivant une faible loi de puissance, ou bien ils restent à peu près constants ou bien G' reste à peu près constant et G'' affiche un léger minimum se situant plutôt dans la zone de fréquence faible. D'une manière générale, retenons qu'il y a un large spectre entre G' et G'' .

En résumé, les suspensions sont caractérisées par l'existence d'une valeur critique de la concentration. Elles se comportent comme des fluides newtoniens en dessous de cette concentration et présentent une phase pâteuse au delà. Pendant la phase pâteuse

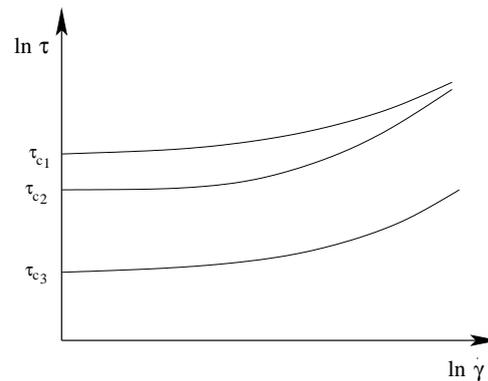


FIG. 1.9 – Allures des courbes d'écoulement contrainte *vs* taux de cisaillement pour le modèle Herschel-Bulkley avec $n = 1/3$ pour des différents seuils de contrainte.

et lors de l'application de faibles taux de cisaillement, elles se comportent comme des fluides viscoélastiques rhéofluidifiants et à seuil. Un modèle raisonnable doit contenir au minimum ces caractéristiques physiques. Dans la suite nous présentons deux autres comportements spécifiques des suspensions concentrées qui ont fait l'objet de récentes recherches.

Fracturation

Ce phénomène a été bien observé pour les suspensions concentrées eau-argile telles que la bentonite [16] et la laponite [14]. Il s'agit d'une instabilité dans l'écoulement. Plus précisément, lors de l'application d'une contrainte, on remarque que le système n'est pas cisailé dans toute son épaisseur. Ainsi, on observera une division du matériau en deux (dans certains cas plusieurs) couches distinctes, l'une cisailée l'autre au repos. Expérimentalement, ce phénomène donne lieu à une discontinuité du profil de vitesses le long du plan du cisaillement. Notons que ce phénomène affecte la qualité des mesures. Il induit par exemple des erreurs dans l'estimation de la viscosité effective du matériau. Et notons enfin qu'on a cherché à trouver des explications à la fracturation en la reliant à l'existence d'un minimum dans la courbe de l'écoulement (voir par exemple [14]) mais que ce phénomène reste en général et jusqu'à présent mal compris.

Vieillessement

Des travaux récents [7] ont pu démontrer la forte dépendance du temps de relaxation d'une suspension à son "âge". Cette dépendance se traduit par un ralentissement progressif des mouvements des particules en fonction du temps. Pour mettre en évidence le phénomène du vieillissement, l'expérience de base (fig [1.10]) consiste à cisailier fortement le système jusqu'à un certain temps t qu'on prendra comme instant de référence de

l'état initial du système. Cette procédure de fluidification va faire oublier au matériau son histoire antérieure et permettre la reproductibilité de l'expérience sur un même matériau. On arrête ensuite le cisaillement et on laisse le système évoluer spontanément pendant un temps t_w qu'on appellera temps d'attente. Ensuite, on applique un cisaillement d'amplitude faible et constante. L'expérience est refaite pour différents temps d'attente et on mesure à chaque fois la relaxation de la contrainte. Le vieillissement est mis en évidence par le fait que la dynamique du système devient d'autant plus lente que le temps d'attente est grand.

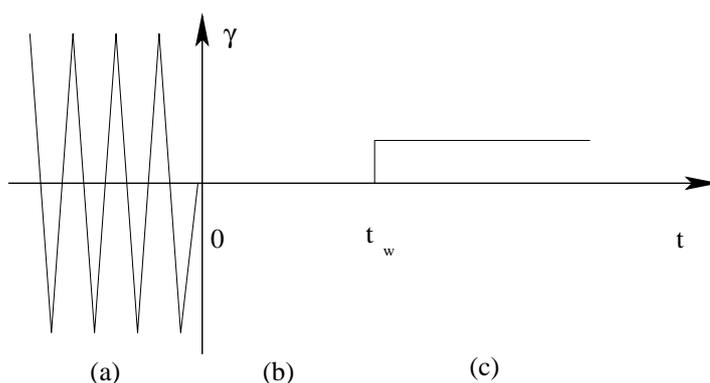


FIG. 1.10 – (a) Fluidification du matériau par l'application d'une déformation oscillante de grande amplitude. (b) Le cisaillement est arrêté pendant un certain temps d'attente t_w . (c) On applique une déformation constante et de faible amplitude.

Par cette présentation, nous avons voulu sans trop rentrer dans les détails, expliquer les différents mécanismes et leurs origines. Nous renvoyons le lecteur à [11] (chapitres 1, 6, 7, 8, 9) ainsi qu'à [5] et à [6], pour plus de détails sur les suspensions et la rhéologie en général.

1.3.4 Modèles

Comme nous allons aborder l'étude des suspensions par analogie avec les systèmes vitreux (systèmes présentant une transition vitreuse), nous expliquerons d'abord les similarités entre la transition vitreuse et la transition pâteuse. Ensuite, nous présenterons un modèle connu pour décrire la transition vitreuse et un modèle analogue à celui-ci élaboré pour décrire la transition pâteuse.

1.3.5 Transition vitreuse - Transition pâteuse

La transition vitreuse est en général définie comme la transition entre les deux états solide et liquide. Cette phase vitreuse qui est due en général à un abaissement de température se manifeste par une rigidification du système qui en même temps garde sa structure désordonnée. Ce phénomène est par exemple présent dans les liquides moléculaires tels que les verres moléculaires et les polymères amorphes. Quand on abaisse la température pour approcher cette phase, on observe un ralentissement de la dynamique *i.e* la viscosité du système augmente et les temps de relaxation deviennent longs. Ceci peut être décrit en général par la formule de Kolrausch-Williams-Watts $\phi(t) = \phi(0) \exp[-(t/T_0)^\beta]$ où ϕ est la fonction de relaxation du système, T_0 est un temps de relaxation caractéristique et β est un paramètre inférieur à 1 et dépendant de la température. Ces comportements observés (désordre structural et métastabilité) rappellent ceux présents dans les suspensions concentrées lors de la transition pâteuse [10, 12, 15]. De là est partie l'idée de l'existence d'une analogie existante entre les deux types de systèmes, et des modèles directement inspirés de ceux écrits pour les systèmes vitreux ont ainsi vu le jour. Un certain nombre de travaux sur le vieillissement et son lien avec les réponses nonlinéaires de ces suspensions [4, 7] sont venus s'ajouter aux précédents pour rendre l'idée de cette analogie entre systèmes vitreux et pâteux encore plus pertinente, et confirmer en quelque sorte l'intérêt de l'étude des suspensions concentrées en suivant les guides développés pour l'étude des systèmes vitreux. Rappelons, enfin, que malgré beaucoup de travaux effectués, aussi bien du point de vue théorique que du point de vue expérimental, sur la transition vitreuse de différentes sortes de matériaux, il n'existe toujours pas de théorie physique rigoureuse pour la décrire. Néanmoins, quelques modèles ont été élaborés.

1.3.6 Modèle de pièges (Bouchaud et al 1995) [2]

Ce modèle a été développé pour décrire la transition vitreuse observée dans les systèmes vitreux tels que les liquides moléculaires. Pour le comprendre, supposons que le matériau est divisé en plusieurs éléments. Dans un élément, chaque particule est piégée dans un puits de profondeur ε dont elle peut s'échapper sous l'effet d'une activation thermique. Dans une description de type champ moyen, considérons $P(\varepsilon, t)$ la probabilité pour qu'une particule soit piégée à l'instant t dans un puits d'énergie ε , le modèle de Bouchaud s'écrit :

$$\frac{\partial P(\varepsilon, t)}{\partial t} = -\Gamma_0 e^{-\frac{\varepsilon}{T}} P(\varepsilon, t) + \Gamma(t)\rho(\varepsilon),$$

où $\Gamma(t) = \Gamma_0 \int_0^{+\infty} \exp(-\frac{\varepsilon}{T}) P(\varepsilon, t) d\varepsilon$ est le taux moyen de sauts dans le système, $\rho(\varepsilon)$ est la densité de profondeur des puits et T un paramètre proportionnel à la température du système. Le premier terme de l'équation traduit le saut d'une particule hors de son puits de profondeur ε avec une fréquence caractéristique Γ_0 . On supposera aussi que la profondeur du nouveau puits est complètement indépendante de celle de l'ancien.

La nouvelle profondeur est choisie aléatoirement à partir d'une distribution *a priori* des profondeurs des pièges. Le deuxième terme représente ainsi le taux des sauts dans un puits de profondeur ε . Il est facile de vérifier que si P est une densité à l'instant initial alors P est une densité de probabilité (*i.e* $\int P(\varepsilon, t)d\varepsilon = 1$ et $P \geq 0$) et que la solution stationnaire de cette équation si elle existe, est égale à $P_{eq}(\varepsilon) = \frac{\Gamma}{\Gamma_0} \exp(\frac{\varepsilon}{T})\rho(\varepsilon)$.

Dans le cas où $\rho(\varepsilon) = \frac{1}{T_0} \exp(-\frac{\varepsilon}{T_0})$, le modèle décrit bien une transition vitreuse pour $T = T_0$. En effet, quand $T > T_0$ les puits de grande profondeur sont rares. Quand T tend vers T_0 , $P_{eq}(\varepsilon)$ approche d'une constante. Quand $T \leq T_0$, la probabilité pour les particules de se piéger dans un puits de grande profondeur est grande : c'est ce qui explique que la dynamique du système devient de plus en plus lente, d'ailleurs sans jamais atteindre d'équilibre puisque dans ce cas l'équation n'admet pas de solution stationnaire normalisable.

1.3.7 Modèle SGR (Sollich et al 1997) [17]

Le modèle SGR (Soft Glassy Rheology) est un modèle qui a été développé pour décrire la rhéologie des systèmes pâteux en s'inspirant directement du modèle précédent. Pour ce modèle, supposons que le matériau soit divisé en régions mésoscopiques c'est-à-dire en régions de taille suffisamment grande devant les constituants élémentaires du matériau pour qu'une déformation élastique moyenne puisse y être définie, et suffisamment petite pour qu'elle y soit homogène. Ensuite, on associe à chaque région la valeur l de la déformation locale. Quand une déformation est appliquée, les particules d'une région commencent à se déformer et emmagasinent de l'énergie élastique. Au delà d'un certain seuil de déformation l_y , elles se réarrangent pour retrouver un état moins contraint. Un réarrangement quelque part dans le matériau peut se propager et donc causer d'autres réarrangements ailleurs. L'activation du processus de sauts des particules est ainsi due aux interactions entre les particules. Le bruit causé par le couplage entre les particules joue le rôle de "température" dans les systèmes vitreux tandis que l'énergie élastique seuil joue le rôle de la profondeur du puits. On considère $P(l, \varepsilon, t)$ la probabilité pour une région piégée dans un puits de profondeur ε d'être à l'instant t soumise à une déformation l . L'évolution de P est ainsi décrite par l'équation suivante

$$\frac{\partial P(l, \varepsilon, t)}{\partial t} = -\Gamma_0 e^{-(\varepsilon - \frac{1}{2}kl^2)/T} P + \Gamma(t)\rho(\varepsilon) \delta(l) - \dot{\gamma} \frac{\partial P}{\partial l}.$$

Le premier terme de cette équation traduit les réarrangements des particules au delà d'une énergie seuil $\varepsilon - \frac{1}{2}kl^2$ (k constante élastique) avec la fréquence Γ_0 . Le deuxième traduit deux hypothèses : lors d'un réarrangement, les particules retrouvent un état non déformé (*i.e* $l = 0$) et possèdent à l'instant t une nouvelle énergie ε aléatoirement choisie à travers la distribution $\Gamma(t)$ et donc indépendante de la précédente. Le taux moyen des réarrangements dans le système est, par analogie avec le modèle de Bouchaud, donné

par

$$\Gamma(t) = \Gamma_0 \int \int \exp(-(\varepsilon - 1/2kl^2)/T) P(l, \varepsilon, t) d\varepsilon dl.$$

Enfin, le nouveau terme $\dot{\gamma} \frac{\partial P}{\partial l}$ traduit le mouvement des régions mésoscopiques entre les réarrangements. Finalement, la contrainte macroscopique τ dans le système est définie comme étant la moyenne des contraintes dans chaque région et on a

$$\tau(t) = k \int l P(l, \varepsilon, t) d\varepsilon dl.$$

Notons que dans ce contexte les paramètres T et Γ_0 n'ont pas d'interprétation physique claire.

Une étude complète de ce modèle a été présentée dans [18]. Nous nous contenterons de citer les résultats et nous renverrons le lecteur à cette référence pour plus détails. Pour $\rho(\varepsilon) = \exp(-\varepsilon)$, et grâce à une résolution exacte de l'équation on montre que ce modèle reproduit bien les comportements principaux des suspensions concentrées : d'abord, l'existence d'une transition de phase (désordre structurel et métastabilité) en $T = 1$. En effet, lors de l'application de faibles fréquences de cisaillement, on obtient : pour $T > 2$, une réponse de type fluide newtonien ; pour $1 < T < 2$, les modules G' et G'' varient comme w^{T-1} et la contrainte varie en loi de puissance $\tau \sim \dot{\gamma}^{T-1}$. Dans le cas où $T < 1$, on obtient une réponse de type fluide à seuil (Herschel-Bulkley), les modules G' et G'' prédisent le vieillissement du système et deviennent presque constants à l'approche de la phase pâteuse.

1.4 Notre choix : le modèle de Hébraud et Lequeux [9]

Le modèle de Hébraud et Lequeux a été, dans la suite du modèle SGR, développé pour la rhéologie des suspensions concentrées et vise à décrire plus explicitement les interactions entre les mouvements des particules, comme nous l'expliquerons par la suite.

Le modèle proposé par Hébraud et Lequeux est un modèle mésoscopique de champ moyen de type "couplage de mode". Par "champ moyen", on veut dire que, comme c'était le cas dans les deux modèles cités précédemment, la contrainte totale (macroscopique) est approximée par la valeur moyenne de toutes les contraintes locales qui sont calculées en chaque point mésoscopique. Reste à expliquer la théorie de "couplage de mode" (MCT). Cette théorie établie par Götze en 1989 et développée à la base pour décrire les systèmes vitreux, est en fait la plus proche description qui est directement liée à la microstructure du matériau [11]. Elle consiste à considérer que, lorsque la densité de la suspension augmente, une particule est de plus en plus emprisonnée dans une "cage" par les autres

particules. Elle doit ainsi heurter beaucoup de fois ces voisines avant de trouver une issue assez large pour s'échapper. C'est pourquoi, le saut de la particule en dehors de sa cage, diminue la possibilité pour les autres de s'échapper de la leur. La théorie du "couplage de mode" rend compte, ainsi, de l'évolution des fluctuations de densité non linéaires dans le système par un ensemble d'équations les couplant entre elles de façon non linéaire. Dans ce modèle, un terme diffusif traduira le couplage entre les mouvements des particules dans le système.

Supposons, comme précédemment, que l'échantillon de matériau est divisé en un grand nombre de blocs de taille mésoscopique portant chacun une certaine contrainte σ . Ensuite, considérons $P(\sigma, t)$ la probabilité pour un bloc d'être à l'instant t dans un état de contrainte σ . L'évolution de P est décrite par l'équation suivante (dite modèle HL dans la suite)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P}{\partial t}(\sigma, t) = -G_0 \dot{\gamma} \frac{\partial P}{\partial \sigma}(\sigma, t) + D(t) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}(\sigma, t) - \frac{H(|\sigma| - \sigma_c)}{T_0} P(\sigma, t) + \frac{1}{\alpha} D(t) \delta_0(\sigma); \\ D(t) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{|\sigma| > \sigma_c} P(\sigma, t) d\sigma. \end{array} \right.$$

Dans cette équation H désigne la fonction de Heaviside ($H(x) = 1$ si $x \geq 0$ et 0 sinon), δ désigne la masse de Dirac, G_0 est un module élastique, T_0 un temps caractéristique du matériau, σ_c une contrainte critique et α une constante positive.

Chaque terme de l'équation d'évolution ci-dessus a une interprétation physique claire :

- i. Lorsqu'un échantillon de matériau subit un taux de cisaillement $\dot{\gamma}$, la contrainte dans chaque bloc évolue en temps avec un taux de variation $G_0 \dot{\gamma}$ (élasticité linéaire de chaque bloc individuel). Ceci est modélisé par $G_0 \dot{\gamma} \frac{\partial P}{\partial \sigma}(\sigma, t)$;
- ii. Si la contrainte σ d'un bloc dépasse en module une certaine contrainte critique σ_c , ce bloc devient instable et se relaxe dans l'état de contrainte nulle. Cette relaxation se produit avec un temps caractéristique T_0 . Ceci est modélisé par le terme $\frac{H(|\sigma| - \sigma_c)}{T_0} P(\sigma, t) + \frac{1}{\alpha} D(t) \delta_0(\sigma)$;
- iii. Ce phénomène s'accompagne d'un réarrangement de tous les blocs, modélisé ici par le terme de diffusion de contrainte $D(t) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}(\sigma, t)$. D étant l'amplitude du bruit causé par la relaxation de certains blocs est ainsi proportionnelle à la densité de probabilité des blocs qui se sont réarrangés après un temps T_0 par un facteur α qui serait une mesure de l'influence d'un réarrangement sur les blocs voisins. Le paramètre α dépend donc des propriétés microscopique du matériau et représente dans un certain sens sa "fragilité mécanique". A l'exemple des équations qu'on trouve dans la théorie de couplage de mode, ce terme diffusif non-linéaire est introduit pour traduire l'importance des effets collectifs dans le système.

Enfin, la contrainte macroscopique dans le matériau est calculée via l'hypothèse du champ moyen et est donnée par

$$\tau(t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma P(\sigma, t) d\sigma.$$

Une analyse des solutions stationnaires de cette équation en l'absence de cisaillement ($\dot{\gamma} = 0$) conduit à la mise en évidence d'une valeur critique α_C du paramètre α égale à $1/2$. (Ce point sera repris dans le deuxième chapitre et nous nous contentons ici d'expliquer physiquement les résultats). Lorsque $\alpha < \alpha_C$, la solution de l'équation est donnée par $D = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a plus de diffusion dans le système ou en d'autres termes que le système est figé, avec toute les contraintes locales inférieures à la contrainte seuil τ_C . Par contre, quand $\alpha > \alpha_C$, il existe une unique solution à l'équation avec D différent de zéro. Ce qui traduit dans ce cas des continuel réarrangements dans le système.

Sous l'application d'un cisaillement constant et pour tout $\alpha > 0$, l'équation admet une unique solution stationnaire. Quand la valeur du taux de cisaillement $\dot{\gamma}$ est supérieure à $1/T_0$, la réponse obtenue est celle d'un fluide newtonien et la viscosité évolue comme $T_0 G'$. Dans le cas où $\dot{\gamma} < T_0$, on peut obtenir soit une réponse newtonienne (ce qui correspondrait à la réponse de la suspension quand elle est diluée), soit une réponse de type fluide à seuil (ce qui correspondrait à l'apparition d'un seuil de contrainte quand la concentration augmente). Pour de très petits taux de cisaillement, τ se comporte comme $G\dot{\gamma}T_0(\alpha - \alpha_C)^{-2}$ quand $\alpha > \alpha_C$, comme $G(\alpha_C - \alpha)^{1/2}$ quand $\alpha < \alpha_C$ et enfin comme $\dot{\gamma}^{1/5}$ quand α s'approche de α_C . Ces différents régimes semblent être bien en accord [3] avec les résultats de Cloitre [4] sur les perles de microgel et ceux de Mason et al [12] pour les émulsions concentrées.

Lors de l'application d'un cisaillement sinusoidal $\gamma(t) = \gamma_0 \cos \omega t$, on obtient

- i. A basse fréquence, une réponse maxwellienne quelle que soit la valeur de α et γ_0 . Plus exactement G' et G'' se comportent respectivement comme ω et ω^2 quand ω tend vers zéro.
- ii. A haute fréquence, un comportement plus complexe : G' est presque toujours constant tandis que G'' montre un maximum ω_C . Il se comporte comme ω^{-2} dans la phase pâteuse et comme $\omega^{-1/2}$ dans la phase liquide. On remarque aussi que la valeur de ω_C varie avec α qui dépend de l'amplitude de la déformation.

Ainsi une déformation périodique au cours de la phase pâteuse induit un continuel réarrangement des particules dans le système.

Le modèle d'HL reproduit bien quelques aspects de la mécanique des suspensions concentrées. En effet, il décrit d'une part l'existence d'une transition pâteuse à savoir un comportement newtonien lors de l'application d'un grand taux de cisaillement et un

comportement de fluide à seuil lors de l'application d'un petit taux de cisaillement ; et d'autre part, les caractéristiques principales de cette phase, à savoir, l'apparition d'un seuil de contrainte, lors de l'application d'un cisaillement constant ; un comportement en loi de puissance des modules élastique G' et visqueux G'' , lors de l'application d'une déformation sinusoidale, et l'existence d'un temps caractéristique qui dépend du cisaillement. Notons qu'en raison de sa complexité qui rend son utilisation difficile en dehors du régime permanent, une simplification de ce modèle a été proposée [8].

Dans ce modèle, le taux de cisaillement est supposé uniforme en espace, mais en pratique, il ne l'est pas (la composante élastique $G_0\dot{\gamma}$ génère notamment des ondes élastiques dans le fluide). Afin de mieux décrire le couplage entre l'écoulement macroscopique et l'évolution de la microstructure, nous nous plaçons dans le cas d'un écoulement de type Couette plan fig [1.11], et nous proposons donc le modèle micro-macro suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho \frac{\partial u}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial \tau}{\partial y}(y, t), \\ \frac{\partial P}{\partial t}(y, \sigma, t) = -G_0 \frac{\partial u}{\partial y}(y, t) \frac{\partial P}{\partial \sigma}(y, \sigma, t) + D(P) \frac{\partial^2 P}{\partial \sigma^2}(y, \sigma, t) \\ \quad - \frac{H(|\sigma| > \sigma_c)}{T_0} P(y, \sigma, t) + \frac{1}{T_0} \left(\int_{|\sigma'| > \sigma_c} P(y, \sigma', t) d\sigma' \right) \delta_0(\sigma) \\ \tau(y, t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma P(y, \sigma, t) d\sigma, \\ D(P)(y, t) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{|\sigma| > \sigma_c} P(y, \sigma, t) d\sigma. \end{array} \right.$$

Dans les équations ci-dessus, $u(y, t)$ désigne la composante selon e_x de la vitesse (l'écoulement étant supposé laminaire et incompressible, la vitesse du fluide est nécessairement de la forme $\vec{u} = u(y, t) e_x$, et la pression ne joue aucun rôle pour cette géométrie d'écoulement) et ρ la masse volumique du fluide. Ce système d'équations doit être complété par des conditions limites. Nous supposons que le fluide est initialement au repos, que la plaque inférieure ($y = 0$) reste immobile, tandis que la plaque supérieure ($y = L$) est mise en mouvement à la vitesse $V(t)$. On obtient donc ainsi

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(y, 0) = 0 & \text{pour tout } y \in (0, L) ; \\ P(y, \sigma, 0) = P^0(y, \sigma) & \text{pour tout } (y, \sigma) \in (0, L) \times \mathbf{R}, \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = 0 & \text{pour tout } t \in [0, T] ; \\ u(L, t) = V(t) & \text{pour tout } t \in [0, T]. \end{array} \right.$$

Comme P est une densité de probabilité, il faut en outre imposer la condition

$$\int_{\mathbf{R}} P^0(y, \sigma) d\sigma = 1, \quad \text{pour tout } y \in (0, L) \quad \text{et} \quad P^0(y, \sigma) \geq 0 \quad \text{p.p en } y \text{ et } \sigma.$$

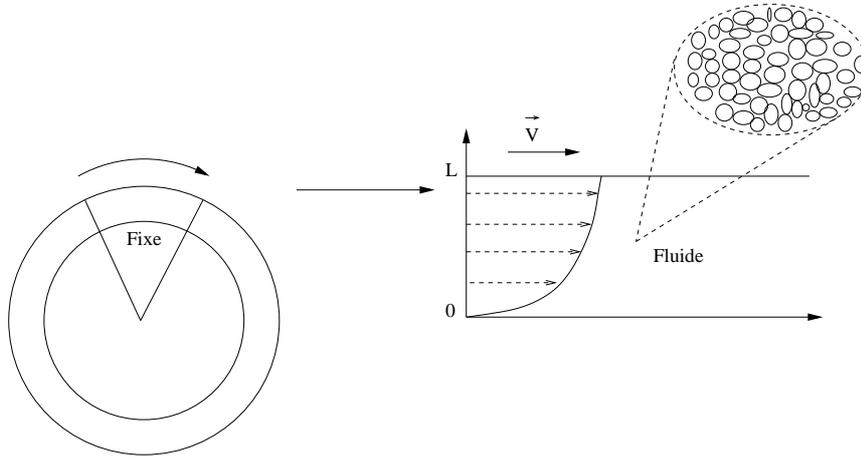


FIG. 1.11 – Écoulement de Couette plan : l'écoulement du fluide entre deux cylindres coaxiaux de rayons assez grands par rapport à la différence entre leurs deux rayons, l'un étant fixe l'autre en rotation par rapport à son axe, est assimilé à un écoulement plan.

Le modèle d'HL contient *à priori* les ingrédients basiques pour décrire les phénomènes physiques se produisant lors de l'écoulement des suspensions concentrées et est relativement capable de prédire leurs comportements. Nous estimons donc qu'il mérite d'être étudié plus en détails, d'autant plus qu'il semble soulever des problèmes mathématiques intéressants notamment en théorie des équations paraboliques. Dans la suite de ce travail, nous nous intéresserons d'abord à l'analyse mathématique du système d'équations couplées que nous venons de présenter. Ceci va se faire en deux grandes étapes : l'étude de l'équation de HL puis l'étude du système couplé. Ensuite, nous nous intéresserons à sa simulation numérique, et enfin, au calage des différents paramètres α , T_0 , G_0 et σ_C pour pouvoir ainsi conclure sur la robustesse de ce modèle.

Bibliographie

- [1] H.A. BARNES, J.F. HUTTON, K. WALTERS, *An introduction to rheology* Elsevier Amsterdam (1989).
- [2] J.P. BOUCHAUD, A. COMTET, C. MONTHUS, *On a dynamical model of glasses.* J.Phys.I 5 1521-1526 (1995).
- [3] P.T. CALLAGHAN, *Principles of Nuclear Magnetic Resonance Microscopy.* Oxford University Press, Oxford, 1991.
- [4] M. CLOITRE, R. BORREGA, L. LEIBLER *Rheological aging and rejuvenation in microgel pastes.* Phys.Rev.Lett. 85, 4819-4822 (2000).
- [5] P. COUSSOT, J.L. GROSSIORD, *Comprendre la rhéologie.* EDP sciences (2001).
- [6] P. COUSSOT, C. ANCEY *Rhéophysique des pâtes et des suspensions.* EDP sciences (1999).
- [7] C. DEREK, *Thèse de doctorat. Etude théorique et expérimentale de la rhéologie et du vieillissement dans les suspensions concentrées. Paris 7 (2001).*
- [8] C. DEREK, A. AJDARI AND F. LEQUEUX *Mechanics near a jamming transition : a minimalist model.* Faraday discuss. 112, 195-207 (1999).
- [9] P. HÉBRAUD AND F. LEQUEUX, *Mode coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials,* Phys. Rev. Lett., 81 (14), 2934-2937 (1998).
- [10] P. HÉBRAUD, *Thèse de doctorat. Propriétés mécaniques des systèmes vitreux : l'exemple des émulsions concentrées. Université Louis Pasteur (1998).*
- [11] R.G. LARSON, *The structure and rheology of complex fluids.* Oxford (1999).
- [12] T. MASON, W. WEITZ *Linear Viscoelasticity of Colloidal Hard Sphere Suspensions Near the Glass Transition.* Phys.Rev.Lett. 75, 2770-2773 (1995).
- [13] F. PIGNON, A. MAGNIN, J.M. PIAU, *Thixotropic behavior of clay dispersions : Combinations of scattering and rheometric techniques.* J.Rheol, 42(6), 573-587 (1998).
- [14] F. PIGNON, A. MAGNIN, J.M. PIAU, *Thixotropic colloidal suspensions and flows curves with minimum : Identification of flow regimes and rheometric consequences.* J.Rheol, 40(4), 573-587 (1996).
- [15] P.N. PUSEY, W. VAN MEGEN, *Observation of a glass Transition in Suspensions of spherical colloidal Particles.* Phys.Rev.Lett. 59, 2083-2086 (1987).

-
- [16] J.S. RAYNAUD, P. MOUCHERONT, J.C. BAUDEZ, F. BERTRAND, J.P. GUILBAUD, P. COUSSOT, *Direct determination by NMR of the thixotropic and yielding behavior of suspensions*. Journal of Rheology, 46, 709-732 (2002).
- [17] P. SOLLICH, F. LEQUEUX, P. HÉBRAUD, M. CATES, *Rheological of soft glassy materials*. Phys.Rev.E. 58, 738-758 (1997).
- [18] P. SOLLICH, *Rheological constitutive equation for a model of soft glassy materials*. Phys.Rev.E. 58, 738-758 (1997).

Première partie

Analyse Mathématique

Chapitre 2

Mathematical analysis of a nonlinear parabolic equation arising in the modelling of non-newtonian flows

Ce chapitre a fait l'objet d'un article soumis à SIAM Journal on Mathematical Analysis. Il présente des théorèmes d'existence et d'unicité (ou non) d'une solution au modèle d'Hébraud et Lequeux.

Mathematical analysis of a nonlinear parabolic equation arising in the modelling of non-newtonian flows

Eric Cancès^(a), Isabelle Catto^(b) and Yousra Gati^(a)

(a) *CERMICS, École Nationale des Ponts et Chaussées
6 & 8, avenue Blaise Pascal, Cité Descartes,
Champs sur Marne, 77455 Marne-La-Vallée,
Cedex 2, France.*

(b) *CEREMADE, UMR CNRS 7534, Université Paris IX-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris
Cedex 16, France.*

Abstract: The mathematical properties of a nonlinear parabolic equation arising in the modelling of non-newtonian flows are investigated. The peculiarity of this equation is that it may degenerate into a hyperbolic equation (in fact a linear advection equation). Depending on the initial data, at least two situations can be encountered : the equation may have a unique solution in a convenient class, or it may have infinitely many solutions.

2.1 Introduction

Modelling the flow of complex fluids is a very intricate problem which is far from being solved up to now. Besides studies which aim at improving phenomenological rheological models (purely macroscopic constitutive laws), only a few attempts are made to recover the rheological behavior of a complex fluid from elementary physical processes arising in its microstructure.

The mesoscopic model which has been proposed by Hébraud and Lequeux in [3] deals with simple shear flows of concentrated suspensions. It is obtained by dividing the material in a large number of mesoscopic elements (“blocks”) with a given shear stress σ (σ is a real number ; it is in fact an extra-diagonal term of the stress tensor in convenient coordinates) and by considering the evolution of the probability density $p(t, \sigma)$ which represents the distribution of stress in the assembly of blocks. Under various assumptions on the evolution of the stresses of the blocks which will be described below, the

equation for the probability density $p(t, \sigma)$ for a block to be under stress σ at time t may be written as :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p = -b(t) \partial_\sigma p + D(p(t)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p - \frac{\chi_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma_c, \sigma_c]}(\sigma)}{T_0} p + \frac{D(p(t))}{\alpha} \delta_0(\sigma) \quad \text{on } (0; T) \times \mathbb{R} \quad (2.1.1a) \\ p \geq 0 ; \quad (2.1.1b) \\ p(0, \sigma) = p_0(\sigma) , \quad (2.1.1c) \end{array} \right.$$

where for $f \in L^1(\mathbb{R})$, we denote by

$$D(f) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{|\sigma| > \sigma_c} f(\sigma) d\sigma .$$

In equation (2.1.1a), $\chi_{\mathbb{R} \setminus [-\sigma_c, \sigma_c]}$ denotes the characteristic function of the open set $\mathbb{R} \setminus [-\sigma_c, \sigma_c]$ and δ_0 the Dirac delta function on \mathbb{R} . Each term arising in the above equation (2.1.1a) (HL equation in short) has a clear physical interpretation. When a block is sheared, the stress of this block evolves with a variation rate $b(t) = G_0 \dot{\gamma}(t)$ proportional to the shear rate $\dot{\gamma}(t)$ (G_0 is an elasticity constant); in this study, the shear rate $\dot{\gamma}(t)$, and therefore the function $b(t)$, are assumed to be in $L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+)$. When the modulus of the stress overcomes a critical value σ_c , the block becomes unstable and may relax into a state with zero stress after a characteristic relaxation time T_0 . This phenomenon induces a rearrangement of the blocks and is modelled through the diffusion term $D(p(t)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p$. The diffusion coefficient $D(p(t))$ is assumed to be proportional to the amount of stress which has to be redistributed by time unit and the positive parameter α is supposed to represent the “mechanical fragility” of the material.

In all that follows, the parameters α , T_0 and σ_c are positive, and the initial data p_0 in (2.1.1c) is a given probability density; that is

$$p_0 \geq 0, \quad p_0 \in L^1(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} p_0 = 1 . \quad (2.1.2)$$

We will be looking for solutions $p = p(t, \sigma)$ in $C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$ such that σp belongs to $L_t^\infty(L_\sigma^1)$ to the nonlinear parabolic partial differential equation (2.1.1). The subscript σ refers to integration over \mathbb{R} with respect to σ , whereas the subscript t refers to time integration on $[0, T]$ for any $T > 0$. Note that the average stress in the material is given by

$$\tau(t) = \int_{\mathbb{R}} \sigma p(t, \sigma) d\sigma , \quad (2.1.3)$$

and therefore the above condition on σp ensures that the average stress is an essentially bounded function of time.

Actually in practice, the shear rate is not uniform in the flow and in order to better describe the coupling between the macroscopic flow and the evolution of the microstructure we introduce and study in a second paper [1] a micro-macro model. In this model p is also

a function of the macroscopic space variables and the average stress defined by (2.1.3) is inserted into the macroscopic equation governing the velocity of the macroscopic flow.

In order to lighten the notation and without loss of generality we assume from now on that $\sigma_c = 1$ and $T_0 = 1$. This amounts to changing the time and stress scales.

The main difficulties one encounters in the mathematical analysis come from the non-linearity in the diffusion term and also and even more from the fact that the parabolic equation may degenerate when the viscosity coefficient $D(p)$ vanishes, and this will be shown to may appear only when $D(p_0) = 0$. This difficulty is illustrated on a simplified example just below and also in Section 2.5 where we discuss the existence of stationary solutions in the case when the shear rate b is a constant.

Let us first of all look at the following simplified model which already includes the difficulties we are going to face to in the study of equation (2.1.1). We consider the equation :

$$\begin{cases} \partial_t u &= D(u(t)) \partial_{\sigma\sigma}^2 u ; \\ u(0, \sigma) &= \frac{1}{2} \chi_{]-1,1[}(\sigma) , \end{cases} \quad (2.1.4)$$

where $\chi_{]-1,1[}$ is the characteristic function of the interval $] - 1, 1[$. The initial condition is on purpose chosen in such a way that $D(u(t=0)) = 0$. The function $u = \frac{1}{2} \chi_{]-1,1[}(\sigma)$ is a stationary solution to this equation and for this solution $D(u(t))$ is identically zero. But it is not the unique solution to (2.1.4) in $C_t^0(L_\sigma^2) \cap L_t^\infty(L_\sigma^1)$. It is indeed possible to construct a so-called *vanishing viscosity solution* for which $D(u(t)) > 0$ for all $t > 0$, and there are actually infinitely many solutions to this equation. (This statement is obtained as a corollary of Lemma 2.4.2 in Section 2.4 below.)

As far as equation (2.1.1) is concerned, we show that, in the case when $D(p_0) = 0$ and $b \equiv 0$, we may have either a unique or infinitely many solutions, depending on the initial data (see Proposition 2.4.1 in Section 2.4).

On the other hand, we are able to prove the following existence and uniqueness result in the non-degenerate case when $D(p_0) > 0$:

Theorem 2.1.1 *Let the initial data p_0 satisfy the conditions*

$$p_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad p_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} p_0 = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0 < +\infty, \quad (2.1.5)$$

and assume that

$$D(p_0) > 0 .$$

Then, for every $T > 0$, there exists a unique solution p to the system (2.1.1) in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$. Moreover, $p \in L_{t,\sigma}^\infty \cap C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$, $\int_{\mathbb{R}} p(t, \sigma) d\sigma = 1$ for all $t > 0$, $D(p) \in C_t^0$ and for every $T > 0$ there exists a positive constant $\nu(T)$ such that

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) \geq \nu(T) .$$

Besides $\sigma p \in L_t^\infty(L_\sigma^1)$ so that the average stress $\tau(t)$ is well-defined by (2.1.3) in L_t^∞ .

The first step toward the existence proof of solutions to (2.1.1) will consist in the study of so-called vanishing viscosity approximations, which are the unique solutions to the family of equations

$$\begin{cases} \partial_t p_\varepsilon = -b(t) \partial_\sigma p_\varepsilon + (D(p_\varepsilon(t)) + \varepsilon) \partial_{\sigma\sigma}^2 p_\varepsilon - \chi_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} p_\varepsilon + \frac{D(p_\varepsilon(t))}{\alpha} \delta_0(\sigma) ; & (2.1.6a) \\ p_\varepsilon \geq 0 ; & (2.1.6b) \\ p_\varepsilon(0, \cdot) = p_0 & (2.1.6c) \end{cases}$$

(recall that we have rescaled the time and stress units to get $T_0 = 1$ and $\sigma_c = 1$). Section 2.2 below is devoted to the proof of the following

Proposition 2.1.1 (Existence and uniqueness of vanishing viscosity approximations)

Let $T > 0$ be given. We assume that the initial data satisfies the same conditions (2.1.5) as in the statement of the theorem. Then, for every $T > 0$ and $0 < \varepsilon \leq 1$, there exists a unique solution p_ε to (2.1.6) in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$. Moreover, $p_\varepsilon \in L_{t,\sigma}^\infty \cap C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$, $D(p_\varepsilon) \in C_t^0$,

$$\int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon = 1, \quad (2.1.7)$$

$$0 \leq p_\varepsilon \leq \|p_0\|_{L^\infty} + \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \sqrt{T}, \quad (2.1.8)$$

and for every $T > 0$, there exist positive constants $C_1(T, p_0)$, $C_2(T, p_0)$ and $C_3(T, p_0)$ which are independent of ε such that

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_\varepsilon \leq C_1(T, p_0), \quad (2.1.9)$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon^2 \leq C_2(T, p_0), \quad (2.1.10)$$

and

$$\int_0^T (\varepsilon + D(p_\varepsilon)) \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma p_\varepsilon|^2 \leq C_3(T, p_0). \quad (2.1.11)$$

Theorem (2.1.1) is then proved in Section 2.3 while the degenerate case is investigated in Section 2.4. Lastly, the description of stationary solutions in the constant shear rate case is carried out in Section 2.5.

2.2 The vanishing viscosity approximation

This section is devoted to the proof of Proposition 2.1.1.

We begin with the following :

Lemma 2.2.1 (Uniqueness) *Let p_0 satisfy (2.1.2). Then for every $T > 0$ and $0 < \varepsilon$, there exists at most one solution p_ε to (2.1.6) in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$. Moreover, $p_\varepsilon \in C_t^0(L_\sigma^2)$ (thus, the initial condition makes sense) and*

$$\int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon = 1, \quad (2.2.1)$$

for almost every t in $[0, T]$.

Proof of Lemma 2.2.1 : We begin with proving that every solution to (2.1.6) in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$ satisfies (2.2.1). We fix $R > 1$ and we consider a cut-off C^2 function $\phi_R = \phi_R(\sigma)$ with compact support which is equal to 1 when $0 \leq |\sigma| \leq R$ and to 0 when $|\sigma| \geq 2R$ and such that

$$|\phi'_R| \leq \frac{C}{R}, \quad (2.2.2)$$

where here and below C denotes a positive constant that is independent of R . Notice that ϕ' is equal to 0 on $]-\infty, -2R]$, on $[-R, R]$ and on $[2R, +\infty[$.

Now, we multiply (2.1.6a) by ϕ_R and integrate over $[0, t] \times \mathbb{R}$ to obtain

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(t) \phi_R - \int_{\mathbb{R}} p_0 \phi_R &= - \int_0^t b(s) \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_\varepsilon(s) \phi_R - \int_0^t (D(p_\varepsilon(s)) + \varepsilon) \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_\varepsilon(s) \phi'_R \\ &\quad - \int_0^t \int_{|\sigma| > 1} p_\varepsilon(s) \phi_R + \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(p_\varepsilon(s)) \phi_R(0). \end{aligned}$$

We bound from above the terms on the right-hand side as follows. First, we have

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t b(s) \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_\varepsilon(s) \phi_R \right| &\leq \int_0^t |b(s)| \int_{\mathbb{R}} p_\varepsilon(s) |\phi'_R| \\ &\leq \frac{C}{R} \int_0^t |b(s)| \int_{R \leq |\sigma| \leq 2R} p_\varepsilon(s) \leq \frac{C}{R}, \end{aligned}$$

thanks to (2.2.2) and using that $p_\varepsilon \in L_t^\infty(L_\sigma^1)$ and $b \in L_t^1$. Next,

$$\begin{aligned} \int_0^t (D(p_\varepsilon) + \varepsilon) \left| \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_\varepsilon \phi'_R \right| &\leq (\varepsilon + \alpha \|p_\varepsilon\|_{L_t^\infty(L_\sigma^1)}) \int_0^t \|\partial_\sigma p_\varepsilon\|_{L_\sigma^2} \|\phi'_R\|_{L_\sigma^2} \\ &\leq \frac{C\sqrt{t}}{R^{1/2}} \|\partial_\sigma p_\varepsilon\|_{L_{t,\sigma}^2} \leq \frac{C}{R^{1/2}}, \end{aligned}$$

thanks again to (2.2.2), Cauchy-Schwarz' inequality and since $\partial_\sigma p_\varepsilon$ is in $L_{t,\sigma}^2$. Finally,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(p_\varepsilon) - \int_0^t \int_{|\sigma| > 1} p_\varepsilon \phi_R &= \int_0^t \int_{|\sigma| > 1} p_\varepsilon (1 - \phi_R) \\ &\leq \int_0^t \int_{|\sigma| > R} p_\varepsilon, \end{aligned}$$

and the right-hand side goes to 0 as R goes to infinity since p_ε is in $L_t^\infty(L_\sigma^1)$. All this together yields

$$\int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon(t) = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon(t) \phi_R = \lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{\mathbf{R}} p_0 \phi_R = \int_{\mathbf{R}} p_0 = 1 ,$$

for almost every t in $[0, T]$. In particular, this implies that $D(p_\varepsilon) \leq \alpha$.

Let us now argue by contradiction by assuming that there exist two solutions p_1 and p_2 to (2.1.6a) corresponding to the same initial data p_0 . By subtracting the equations satisfied by p_1 and p_2 respectively, we obtain

$$\begin{cases} \partial_t q = -b(t) \partial_\sigma q + D(q) \partial_{\sigma\sigma}^2 p_1 + (D(p_2) + \varepsilon) \partial_{\sigma\sigma}^2 q - \chi_{\mathbf{R} \setminus [-1,1]} q + \frac{D(q)}{\alpha} \delta_0(\sigma) \\ q(0, \sigma) = 0 , \end{cases} \quad (2.2.3)$$

where $q = p_1 - p_2$. We multiply (2.2.3) by q and integrate over \mathbf{R} with respect to σ to obtain, after integrations by parts,

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} q^2 + (D(p_2) + \varepsilon) \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma q|^2 + \int_{|\sigma| > 1} q^2 = \frac{D(q)}{\alpha} q(t, 0) - D(q) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma p_1 \partial_\sigma q . \quad (2.2.4)$$

We first remark that since $\int_{\mathbf{R}} p_1 = \int_{\mathbf{R}} p_2 = 1$ thanks to (2.2.1), we get

$$|D(q)| = \alpha \left| \int_{|\sigma| < 1} q \right| \leq \alpha \sqrt{2} \|q\|_{L_\sigma^2} ,$$

with the help of Cauchy-Schwarz' inequality. Next, using the Sobolev embedding of $H^1(\mathbf{R})$ into $L^\infty(\mathbf{R})$, we bound from above the terms on the right-hand side in the following way :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{D(q)}{\alpha} q(t, 0) - D(q) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma p_1 \partial_\sigma q \right| \\ & \leq \sqrt{2} \|q\|_{L_\sigma^2} \|q\|_{L_\sigma^\infty} + \sqrt{2} \alpha \|q\|_{L_\sigma^2} \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma p_1 \partial_\sigma q| \\ & \leq \sqrt{2} \|q\|_{L_\sigma^2} (\|q\|_{L_\sigma^2}^2 + \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2}^2)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2} \alpha \|q\|_{L_\sigma^2} \|\partial_\sigma p_1\|_{L_\sigma^2} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2} \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon} \|q\|_{L_\sigma^2}^2 + \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \|q\|_{L_\sigma^2}^2 \|\partial_\sigma p_1\|_{L_\sigma^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|q\|_{L_\sigma^2}^2 + \varepsilon \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2}^2 . \end{aligned}$$

Therefore, comparing with (2.2.4) we deduce

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|q\|_{L_\sigma^2}^2 \leq \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{\alpha^2}{\varepsilon} \|\partial_\sigma p_1\|_{L_\sigma^2}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \right) \|q\|_{L_\sigma^2}^2 .$$

Finally, by applying the Gronwall lemma, we prove that $\|q\|_{L_\sigma^2}^2 \leq 0$, thus $q = 0$. The uniqueness of the solution follows. \diamond

Remark 2.2.1 *The same proof shows that if there exists a solution to (2.1.1) in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$ such that $\inf_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) > 0$, then it is unique in this space.*

We now turn to the existence part in the statement of Proposition 2.1.1. From now on we fix a positive constant $\varepsilon \leq 1$. The proof of Proposition 2.1.1 will be carried out by the Schauder fixed point theorem. For given positive constants $M(\geq \varepsilon)$ and R , we introduce $\mathcal{D}_{\varepsilon, M}$ and Y_R two closed convex subsets of respectively L_t^2 and $L_{t, \sigma}^2$ as follows :

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{\varepsilon, M} &= \{a \in L_t^2; \varepsilon \leq a \leq M\} \\ Y_R &= \{p \in L_{t, \sigma}^2; p \geq 0, \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p \leq R\}. \end{aligned}$$

To simplify notation we denote

$$\begin{cases} \varphi_\eta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \eta} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right) & \text{if } \eta > 0; \\ \varphi_0 = \delta_0. \end{cases}$$

We first prove the following

Proposition 2.2.1 *Let $T > 0$ and let $p_0 \in L^2(\mathbf{R})$ such that $p_0 \geq 0$. Then, for every a in $\mathcal{D}_{\varepsilon, M}$ and q in Y_R , there exists a unique solution p in $L_t^\infty(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$ to*

$$\begin{cases} \partial_t p(t, \sigma) = -b(t) \partial_\sigma p(t, \sigma) + a(t) \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, \sigma) - \chi_{\mathbf{R} \setminus [-1, 1]}(\sigma) p(t, \sigma) + \frac{D(q)}{\alpha} \delta_0(\sigma) & (2.2.5a) \\ p(0, \sigma) = p_0(\sigma). & (2.2.5b) \end{cases}$$

Moreover, $p \in C_t^0(L_\sigma^2)$, p is non-negative and

$$p_- \leq p \leq p_+, \tag{2.2.6}$$

with

$$p_-(t, \sigma) = e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t a}}(\sigma - \sigma' - \chi(t)) d\sigma' \tag{2.2.7}$$

and

$$\begin{aligned} p_+(t, \sigma) &= \int_{-\infty}^{+\infty} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t a}}(\sigma - \sigma' - \chi(t)) d\sigma' + \\ &+ \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(q(s)) \varphi_{\sqrt{2 \int_s^t a}}(\sigma - \chi(t) + \chi(s)) ds, \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

where $\chi(t) = \int_0^t b(s) ds$. In addition,

i. If $p_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$, then p is in $L_{t, \sigma}^\infty$ and

$$0 \leq p \leq \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{R \sqrt{T}}{\sqrt{\pi} \sqrt{\varepsilon}}. \tag{2.2.9}$$

ii. If $\int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 < +\infty$ (thus $p_0 \in L^1(\mathbf{R})$), then $|\sigma| p \in L_t^\infty(L_\sigma^1)$. More precisely, we have

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p &\leq \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 + \sqrt{T} \|b\|_{L^2(0,T)} \|p_0\|_{L^1} + \frac{2R}{3} T^{3/2} \|b\|_{L^2(0,T)} \\ &+ \frac{2}{\sqrt{\pi}} (MT)^{1/2} \|p_0\|_{L^1} + \frac{4R\sqrt{M}}{3\sqrt{\pi}} T^{3/2}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Moreover $p \in C_t^0(L_\sigma^1)$ and $D(p) \in C_t^0$.

Proof of Proposition 2.2.1 : Let us first observe that for every q in Y_R , $D(q) \in L_t^\infty$ since

$$0 \leq D(q(t)) \leq \alpha \int_{|\sigma| > 1} |\sigma| q \leq \alpha R, \quad (2.2.11)$$

for almost every t in $[0, T]$. Therefore the source term $D(q(t)) \delta_0(\sigma)$ in (2.2.5a) is in $L_t^\infty(H_\sigma^{-1})$ and the existence and the uniqueness of a solution $p \in C_t^0(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$ to the system (2.2.5) is well-known (see for example [2]). In particular, the initial condition makes sense. Owing to the fact that the source term is non -negative, the proof that $p \geq 0$ is also standard (see again [2]).

We now check the pointwise inequality (2.2.6).

This is ensured by the maximum principle with observing that p_- and p_+ given respectively by (2.2.7) and (2.2.8) are the unique solutions to the systems

$$\begin{cases} \partial_t p_- &= -b \partial_\sigma p_- + a \partial_{\sigma\sigma}^2 p_- - p_- ; \\ p_-(0, \sigma) &= p_0(\sigma), \end{cases} \quad (2.2.12)$$

and

$$\begin{cases} \partial_t p_+ &= -b \partial_\sigma p_+ + a \partial_{\sigma\sigma}^2 p_+ + \frac{D(q)}{\alpha} \delta_0(\sigma) ; \\ p_+(0, \sigma) &= p_0(\sigma), \end{cases} \quad (2.2.13)$$

respectively. We now turn to the proof of statement *i*. and assume that p_0 belongs to $L^\infty(\mathbf{R})$. Then, using the two facts that for every $\nu > 0$, $\int_{\mathbf{R}} \varphi_\nu = 1$ and $\varphi_\nu \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\nu}$, (2.2.9) is easily deduced from $p \leq p_+$ with the help of (2.2.11) and since $a \geq \varepsilon$.

Suppose now that $\int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 < +\infty$. This together with the assumption $p_0 \in L^2(\mathbf{R})$,

guarantees that $p_0 \in L^1(\mathbb{R})$ (see also below). Using (2.2.6) again, we now have

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p &\leq \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_+ \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p_0(\sigma') |\sigma| \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t a}}(\sigma - \chi(t) - \sigma') d\sigma d\sigma' \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(q(s)) \left(\int_{\mathbb{R}} |\sigma| \varphi_{\sqrt{2 \int_s^t a}}(\sigma - \chi(t) + \chi(s)) d\sigma \right) ds \\
 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} p_0(\sigma') |\sigma + \sigma' + \chi(t)| \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t a}}(\sigma) d\sigma d\sigma' \\
 &\quad + \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(q(s)) \left(\int_{\mathbb{R}} |\sigma + (\chi(t) - \chi(s))| \varphi_{\sqrt{2 \int_s^t a}}(\sigma) d\sigma \right) ds \\
 &\leq \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0(\sigma) d\sigma + |\chi(t)| \|p_0\|_{L^1} + \frac{1}{\alpha} \int_0^t |\chi(t) - \chi(s)| D(q(s)) ds \\
 &\quad + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\int_0^t a \right)^{1/2} \|p_0\|_{L^1} + \frac{2}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^t D(q(s)) \left(\int_s^t a \right)^{1/2} ds, \quad (2.2.14)
 \end{aligned}$$

since $\int_{\mathbb{R}} |\sigma| \varphi_{\nu}(\sigma) d\sigma = (2/\pi)^{1/2} \nu$ and $\int_{\mathbb{R}} \varphi_{\nu} = 1$. With the help of (2.2.11) and observing that $|\chi(t) - \chi(s)| \leq \sqrt{t-s} \|b\|_{L^2(0,T)}$, we then deduce (2.2.10).

We now use this bound to check that $p \in C_t^0(L_{\sigma}^1)$ and $D(p) \in C_t^0$. Indeed, for any t , any sequence t_n in $[0, T]$ which converges to t and $A > 1$, we have

$$\begin{aligned}
 \int_{\mathbb{R}} |p(t_n) - p(t)| &= \int_{|\sigma| \leq A} |p(t_n) - p(t)| + \int_{|\sigma| \geq A} |p(t_n) - p(t)| \\
 &\leq \sqrt{2A} \left(\int_{\mathbb{R}} |p(t_n) - p(t)|^2 \right)^{1/2} + \frac{1}{A} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| (|p(t_n)| + |p(t)|) \\
 &\leq \sqrt{2A} \left(\int_{\mathbb{R}} |p(t_n) - p(t)|^2 \right)^{1/2} + \frac{2}{A} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| |p(t)|. \quad (2.2.15)
 \end{aligned}$$

For any fixed A the first term in the right-hand side goes to 0 as n goes to infinity since $p \in C_t^0(L_{\sigma}^2)$ and then the second term is arbitrarily small as A goes to infinity. The same argument yields the continuity of $D(p(t))$ with respect to t .

◇

The following proposition aims at checking the required assumptions to apply the Schauder fixed point theorem.

Proposition 2.2.2 *Let $T_f > 0$ be given. We assume that*

$$p_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}), \quad p_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} p_0 = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0 < +\infty. \quad (2.2.16)$$

Let $0 < \varepsilon \leq 1$, $R = 1 + \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0$ and $M = 1 + 2\alpha$. We define

$$T_c = \frac{9}{25} \left[\|b\|_{L^2(0, T_f)} + \frac{2\sqrt{1+2\alpha}}{\sqrt{\pi}} \right]^{-2}. \quad (2.2.17)$$

Then, for every $T \leq \min(\frac{1}{R}; T_c)$, the function $\mathcal{T} : (a; q) \mapsto (D(p) + \varepsilon; p)$, with p being the solution to the system (2.2.5), maps $\mathcal{D}_{\varepsilon, M} \times Y_R$ into itself. Moreover \mathcal{T} is continuous and $\mathcal{T}(\mathcal{D}_{\varepsilon, M} \times Y_R)$ is relatively compact in $L^2(0, T) \times L^2_{t, \sigma}$.

Proof of Proposition 2.2.2 :

Step 1 : \mathcal{T} is well-defined.

According to Proposition 2.2.1, p is in $C_t^0(L_\sigma^1)$ and $D(p) \in C_t^0$. We now prove that with our choice for M (which ensures that $\varepsilon + D(p_0) \leq 1 + \alpha \leq M$), $D(p) + \varepsilon \in \mathcal{D}_{\varepsilon, M}$. For this, we again use the inequality $p \leq p_+$, the definition (2.2.8) of p_+ , the rough estimate $\int_{|\sigma|>1} \varphi_\nu \leq \int_{\mathbb{R}} \varphi_\nu = 1$ and (2.2.11) to obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) \leq \sup_{0 \leq t \leq T} D(p_+(t)) \leq \alpha + \alpha R T \leq 2\alpha,$$

for $T \leq \frac{1}{R}$. It only remains now to check that $\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p \leq R$. We thus go back to (2.2.10) and observe that this condition holds provided

$$T \leq \max\{t > 0; \|b\|_{L^2(0, T_f)} \sqrt{t} \left(1 + \frac{2R}{3} t\right) + \frac{2\sqrt{M}t}{\sqrt{\pi}} + \frac{4R\sqrt{M}t^{3/2}}{3\sqrt{\pi}} \leq 1\}.$$

Since we already have demanded that $t \leq T \leq \frac{1}{R}$ a sufficient condition is then

$$\sqrt{T} \left[\frac{5}{3} \|b\|_{L^2(0, T_f)} + \frac{10\sqrt{1+2\alpha}}{3\sqrt{\pi}} \right] \leq 1,$$

which reduces to $T \leq T_c$ with T_c given by (2.2.17).

Our next step will consist in establishing *a priori* bounds on p in $L_t^\infty(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$.

Step 2 : *A priori bounds.*

If we multiply equation (2.2.5a) by p and integrate by parts over \mathbb{R} with respect to σ we easily obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} p^2 + a \int_{\mathbb{R}} |\partial_\sigma p|^2 \leq \frac{D(q)}{\alpha} p(t, 0).$$

Since from the Sobolev embedding of $H^1(\mathbb{R})$ into $L^\infty(\mathbb{R})$ and the bound (2.2.11) on $D(q)$ we get

$$\begin{aligned} \left| \frac{D(q)}{\alpha} p(t, 0) \right| &\leq R \|p\|_{L^\infty} \\ &\leq R (\|p\|_{L^2_\sigma}^2 + \|\partial_\sigma p\|_{L^2_\sigma}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{R^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|p\|_{L^2_\sigma}^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|\partial_\sigma p\|_{L^2_\sigma}^2, \end{aligned}$$

we may write

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|p\|_{L^2_\sigma}^2 + (a - \frac{\varepsilon}{2}) \|\partial_\sigma p\|_{L^2_\sigma}^2 \leq \frac{R^2}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2} \|p\|_{L^2_\sigma}^2. \quad (2.2.18)$$

We recall that $a \geq \varepsilon$ and we apply the Gronwall lemma to obtain

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L^2_\sigma}^2 \leq e^{\varepsilon T} (\|p_0\|_{L^2_\sigma}^2 + \frac{T R^2}{\varepsilon}). \quad (2.2.19)$$

We now return to (2.2.18) and integrate it over $[0; T]$ to obtain

$$\varepsilon \|\partial_\sigma p\|_{L^2_{t,\sigma}}^2 \leq \|p_0\|_{L^2_\sigma}^2 (1 + \varepsilon T e^{\varepsilon T}) + \frac{T R^2}{\varepsilon} (1 + \varepsilon T e^{\varepsilon T}). \quad (2.2.20)$$

Step 3 : *The function \mathcal{T} is continuous.*

We consider a sequence $(a_n; q_n)$ in $\mathcal{D}_{\varepsilon, M} \times Y_R$ such that a_n converges to a strongly in L^2_t and q_n converges to q strongly in $L^2_{t,\sigma}$, and we denote $\mathcal{T}(a_n; q_n) = (D(p_n) + \varepsilon; p_n)$. We have to prove that p_n converges strongly to p in $L^2_{t,\sigma}$ and $D(p_n)$ converges to $D(p)$ strongly in L^2_t , with $(D(p) + \varepsilon; p) = \mathcal{T}(a; q)$.

In virtue of (2.2.19) and (2.2.20), the sequence p_n is bounded in $L_t^\infty(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$. Then, $\partial_\sigma p_n$ is bounded in $L_t^\infty(H_\sigma^{-1})$ and $\partial_{\sigma\sigma}^2 p_n$ is bounded in $L_t^2(H_\sigma^{-1})$. Since $a_n \partial_{\sigma\sigma}^2 p_n$ is bounded in $L_t^2(H_\sigma^{-1})$, $b \in L_t^2$ and $D(q_n) \delta_0$ is bounded in $L_t^2(H_\sigma^{-1})$, $\partial_t p_n$ is bounded in $L_t^2(H_\sigma^{-1})$. This together with the fact that p_n is bounded in $L_t^2(H_\sigma^1)$ implies that, up to a subsequence, p_n converges strongly towards p in $L_t^2(L_{\text{loc},\sigma}^2)$ (the convergence being weak in $L_t^2(H_\sigma^1)$) thanks to a well-known compactness result [4]. In particular, p_n converges to p almost everywhere. Thus $p \geq 0$ and by the Fatou's lemma, $\int_{\mathbb{R}} |\sigma| p \leq R$ almost everywhere on $[0; T]$. Hence p belongs to Y_R . We are going to show that the convergence is actually strong in $L^2_{t,\sigma}$.

In virtue of (2.2.9) in Proposition 2.2.1, we dispose of a uniform *a priori* bound on p_n in $L_{t,\sigma}^\infty$ (hence also on p). For the strong convergence in $L^2_{t,\sigma}$ we then argue as follows. For any fixed positive real number K , we have

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |p_n - p|^2 &\leq \int_0^T \int_{|\sigma| \leq K} |p_n - p|^2 + \int_0^T \int_{|\sigma| > K} |p_n - p|^2 \\ &\leq \int_0^T \int_{|\sigma| \leq K} |p_n - p|^2 + (\|p_n\|_{L_{t,\sigma}^\infty} + \|p\|_{L_{t,\sigma}^\infty}) \frac{2RT}{K}, \end{aligned}$$

owing to the fact that p_n and p belong to a bounded subset of $Y_R \cap L_{t,\sigma}^\infty$. We then conclude by letting n next K go to infinity.

We now prove that $D(p_n)$ converges to $D(p)$ strongly in L_t^2 . We shall actually prove that $D(p_n)$ converges to $D(p)$ strongly in L_t^1 and then use the fact that $D(p_n)$ is bounded in L_t^∞ , in virtue of (2.2.11) and because p_n lies in Y_R . Let us fix $K > 1$. Then, we have

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} \int_0^T |D(p_n) - D(p)| &= \int_0^T \left| \int_{|\sigma|>1} (p_n - p) \right| \\ &\leq \int_0^T \int_{1<|\sigma|<K} |p_n - p| + \frac{1}{K} \int_0^T \int_{|\sigma|>K} |\sigma| (|p_n| + |p|) \\ &\leq \int_0^T \int_{1<|\sigma|<K} |p_n - p| + \frac{2RT}{K}, \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

because p and p_n belong to Y_R . Since p_n converges to p strongly in $L_t^1(L_{loc,\sigma}^1)$, we conclude that $D(p_n)$ converges to $D(p)$ in L_t^1 by letting n next K go to infinity in (2.2.21).

In order to pass to the limit in the equation satisfied by p_n (thereby proving that $(D(p) + \varepsilon; p) = \mathcal{T}(a; q)$), we now observe that the strong convergence of q_n to q in $L_{t,\sigma}^2$, together with the argument in (2.2.21) above shows that $D(q_n)$ converges to $D(q)$ strongly in L_t^2 . It is then easily proved that p is a weak solution to (2.1.6a) and since p is in $L_t^2(H_\sigma^1)$ it is the unique solution to (2.2.5) corresponding to a and q . In particular, the whole sequence p_n converges and not only a subsequence.

Step 4 : $\mathcal{T}(\mathcal{D}_\varepsilon \times Y_R)$ is relatively compact.

Let $(D(p_n) + \varepsilon; p_n) = \mathcal{T}(a_n; q_n)$ be a sequence in $\mathcal{T}(\mathcal{D}_{\varepsilon,M} \times Y_R)$. We have to prove that we may extract a subsequence which converges strongly in $L_t^2 \times L_{t,\sigma}^2$. Exactly as for the proof of the continuity, the *a priori* estimates (2.2.19) and (2.2.20) ensure that the sequence p_n is bounded in $L_t^\infty(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$. Since $|\sigma|p_n$ is bounded $L_t^\infty(L_\sigma^1)$, we can mimic the argument in Step 3 above to deduce that up to a subsequence the sequence p_n converges to some p in Y_R strongly in $L_{t,\sigma}^2$ and that $D(p_n)$ converges to $D(p)$ strongly in L_t^2 . \diamond

We are now in position to conclude the proof of Proposition 2.1.1.

Let $T_f > 0$ and $0 < \varepsilon \leq 1$ being given. We are going to prove the existence of a unique solution on $[0; T_f]$.

Being given an initial data p_0 which satisfies (2.1.5), existence of a solution p_ε is ensured from Proposition 2.2.2 by applying the Schauder fixed point theorem on “short” time

interval $[0; T_1]$ with $T_1 = \min(\frac{1}{R_1}, T_c)$ and where $R_1 = 1 + \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0$. This solution is uniquely defined in virtue of Lemma 2.2.1 and we know from (2.2.1) that $\int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon(T_1) = 1$. Moreover from Proposition 2.2.1 $p_\varepsilon(T_1) \in L^\infty_\sigma$ and by construction $\int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_\varepsilon(T_1) \leq R_1$. Therefore $p_\varepsilon(T_1)$ satisfies the same conditions (2.2.16) as p_0 . Then, repeating the same argument we may build a solution to (2.1.6) with initial data $p_\varepsilon(T_1)$ on $[T_1; T_2]$ with $T_2 = \min(\frac{1}{R_2}, T_c)$, where $R_2 = R_1 + 1 = \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 + 2$. Thanks to the uniqueness result (Lemma 2.2.1), if we now glue this solution to p_ε at $t = T_1$ we obtain the unique solution to (2.1.6) on $[0; T_1 + T_2]$. It is now clearly seen that for any integer $n \geq 1$ we may build a solution to (2.1.6) on $[0; \sum_{1 \leq k \leq n} T_k]$ with $T_k = \min\left(\left(k + \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0\right)^{-1}; T_c\right)$. Since $\sum_{1 \leq k \leq n} T_k$ obviously goes to $+\infty$ together with n , existence (and uniqueness) of the solution p_ε to (2.1.6) is obtained on every time interval.

For the proof of (2.1.8) we argue as for the proof of (2.2.9) in Proposition 2.2.1. Defining p_ε^+ as in (2.2.8) with a replaced by $D(p_\varepsilon) + \varepsilon$ and $D(q)$ by $D(p_\varepsilon)$ we obtain

$$\begin{aligned} 0 &\leq p_\varepsilon \leq p_\varepsilon^+ \\ &\leq \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{D(p_\varepsilon(s))}{2 \sqrt{\varepsilon + \int_s^t D(p_\varepsilon)}} ds \\ &\leq \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \left[\sqrt{\varepsilon + \int_0^t D(p_\varepsilon)} - \sqrt{\varepsilon} \right] \\ &\leq \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{1}{\alpha \sqrt{\pi}} \sqrt{\int_0^t D(p_\varepsilon)} \\ &\leq \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} . \end{aligned}$$

Then

$$\int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon^2 \leq \|p_\varepsilon\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon ,$$

from which (2.1.10) follows gathering together (2.2.1) and (2.1.8) and, with the notation of the proposition,

$$C_2(T, p_0) = \|p_0\|_{L^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} .$$

The proof of (2.1.9) follows the same lines as the proof of (2.2.14). Indeed, we again use the pointwise inequality $p_\varepsilon \leq p_\varepsilon^+$ and replace $D(q)$ by $D(p_\varepsilon) (\leq \alpha)$ and a by $D(p_\varepsilon) + \varepsilon (\leq$

$\alpha + 1$) in (2.2.14) and use (2.2.16) to deduce

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_\varepsilon \leq \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 + \sqrt{T} \left(\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} + \|b\|_{L^2(0,T)} \right) + \frac{2}{3} T^{3/2} \left(1 + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} \right), \quad (2.2.22)$$

whence (2.1.9) with $C_1(T, p_0)$ being the quantity in the right-hand side of (2.2.22).

In order to prove (2.1.11), we multiply (2.1.6a) by p_ε , and we integrate by parts over \mathbf{R} with respect to σ to obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbf{R}} p_\varepsilon^2 + (D(p_\varepsilon) + \varepsilon) \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma p_\varepsilon|^2 + \int_{|\sigma| > 1} p_\varepsilon^2 = \frac{D(p_\varepsilon)}{\alpha} p_\varepsilon(t, 0). \quad (2.2.23)$$

We use the L^∞ bound (2.1.8) to bound the right-hand side and we integrate (2.2.23) with respect to t over $[0; T]$ to deduce (2.1.11) with

$$C_3(T, p_0) = \|p_0\|_{L^\infty} \left(\frac{1}{2} + T \right) + \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\pi}} T^{3/2},$$

using that $\|p_0\|_{L^2}^2 \leq \|p_0\|_{L^\infty} \int_{\mathbf{R}} p_0$. ◇

2.3 The non degenerate case : $D(p_0) > 0$

The main result of this section corresponds to the statement of Theorem 2.1.1 and fully describes the issue of existence and uniqueness of solutions to the HL equation (2.1.1) in the non-degenerate case. It is summarized in the following :

Proposition 2.3.1 *Let p_0 satisfy (2.1.5). We assume that $D(p_0) > 0$. Then, the HL equation (2.1.1) has a unique solution p in $C_t^0(L_\sigma^2) \cap L_t^2(H_\sigma^1)$ and p is the limit (in $L_{t,\text{loc}}^2(L_\sigma^2) \cap C_{t,\text{loc}}^0(L_\sigma^2)$) of (p_ε) when ε goes to 0 where p_ε is the vanishing viscosity solution whose existence and uniqueness is ensured by Proposition 2.1.1. Moreover, $p \in L_{t,\sigma}^\infty \cap C_t^0(L_\sigma^1)$, $\sigma p \in L_t^\infty(L_\sigma^1)$ and $\int_{\mathbf{R}} p = 1$. Furthermore, $D(p) \in C_t^0$ and for every $T > 0$ there exists a positive constant $\nu(T)$ such that*

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) \geq \nu(T). \quad (2.3.1)$$

We begin with proving the following :

Lemma 2.3.1 *We assume that p_0 satisfies (2.1.5). Then, if $D(p_0) > 0$, $D(p_\varepsilon)(t) > 0$ for every $t \in [0, T]$, with p_ε being the unique solution to (2.1.6) provided by Proposition 2.1.1 and, actually, for every $T > 0$ there exists a positive constant $\nu(T)$ such that*

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p_\varepsilon(t)) \geq \nu(T), \quad (2.3.2)$$

for every $0 < \varepsilon \leq 1$.

Remark 2.3.1 Note that this bound from below is independent of ε , but it comes out from the proof that it depends on p_0 and on the shear b .

Proof of Lemma 2.3.1 : The proof relies on the bound from below in (2.2.6) that we integrate over $|\sigma| > 1$ to obtain

$$D(p_\varepsilon(t)) \geq \alpha \int_{|\sigma|>1} p_\varepsilon^- \geq \alpha e^{-t} \int_{\mathbf{R}} p_0(\sigma') \left(\int_{|\sigma|>1} \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t (D(p_\varepsilon)+\varepsilon)}}(\sigma - \sigma' - \chi(t)) d\sigma \right) d\sigma'. \quad (2.3.3)$$

Let us define $K_\chi = [-1 - \chi(t), 1 - \chi(t)]$. The function $\sigma \mapsto \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t (D(p_\varepsilon)+\varepsilon)}}(\sigma - \sigma' - \chi(t))$ is a Gaussian probability density with mean $\sigma' + \chi(t)$ and squared width $2 \int_0^t (D(p_\varepsilon) + \varepsilon)$. Therefore, for every $\sigma' \in \mathbf{R} \setminus K_\chi$, we have

$$\int_{|\sigma|>1} \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t (D(p_\varepsilon)+\varepsilon)}}(\sigma - \sigma' - \chi(t)) d\sigma \geq \frac{1}{2},$$

which implies

$$(2.3.3) \geq \frac{\alpha}{2} e^{-T} \int_{\mathbf{R} \setminus K_\chi} p_0 = \frac{\alpha}{2} e^{-T} \int_{|\sigma+\chi(t)|>1} p_0.$$

In the zero shear case ($b \equiv 0$, thus $\chi \equiv 0$) the proof is over and

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) \geq \frac{1}{2} e^{-T} D(p_0).$$

In the general case, a strictly positive bound from below is available as long as the support of p_0 is not contained in K_χ . We thus define

$$t^* = \inf \left\{ t > 0 ; \int_{|\sigma+\chi(t)|>1} p_0 = 0 \right\}. \quad (2.3.4)$$

Then $0 < t^*$ (t^* possibly even infinite), the support of p_0 is contained in $[-1 - \chi(t^*), 1 - \chi(t^*)]$, and for every $T < \frac{t^*}{2}$, (2.3.2) holds for some positive constant $\nu_1(T)$ defined by

$$\nu_1(T) = \frac{\alpha}{2} e^{-T} \min_{0 \leq t \leq T} \int_{|\sigma+\chi(t)|>1} p_0. \quad (2.3.5)$$

It is worth emphasizing that this quantity is independent of ε . If $t^* = +\infty$, the proof is over and $\nu(T) = \nu_1(T)$ fits. Let us now examine the case when $t^* < +\infty$ and $T \geq \frac{t^*}{2}$.

We go back to (2.3.3), take t in $[\frac{t^*}{2}; T]$ and denote $x = \int_0^t (D(p_\varepsilon) + \varepsilon)$ for shortness. Then

$$\begin{aligned}
 D(p_\varepsilon(t)) &\geq \alpha e^{-T} \int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0(\sigma') \left(\int_{|\sigma|>1} \varphi_{\sqrt{2x}}(\sigma - \sigma' - \chi(t)) d\sigma \right) d\sigma' \\
 &= \alpha e^{-T} \int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0(\sigma') \left(\int_{|\sigma|>1} \frac{e^{-(\sigma-\sigma'-\chi(t))^2/4x}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} d\sigma \right) d\sigma' \\
 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-T} \int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0(\sigma') \left(\int_{-\infty}^{-1+\sigma'+\chi(t)} \frac{e^{-\sigma^2/4x}}{2\sqrt{x}} d\sigma + \int_{1+\sigma'+\chi(t)}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma^2/4x}}{2\sqrt{x}} d\sigma \right) d\sigma' \\
 &= \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-T} \int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0(\sigma') \left(\int_{\frac{1+\sigma'+\chi(t)}{2\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{1-\sigma'-\chi(t)}{2\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) d\sigma' \\
 &\geq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-T} \left(\int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0(\sigma') d\sigma' \right) \left(\int_{\frac{2-\chi(t^*)+\chi(t)}{\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{2+\chi(t^*)-\chi(t)}{\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) \\
 &\geq \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-T} \min_{t^*/2 \leq t \leq T} \left(\int_{\frac{2-\chi(t^*)+\chi(t)}{\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{2+\chi(t^*)-\chi(t)}{\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right), \quad (2.3.6)
 \end{aligned}$$

since $\int_{-1-\chi(t^*)}^{1-\chi(t^*)} p_0 = 1$ and $x \geq \int_0^{t^*/2} D(p_\varepsilon) \geq t^* \nu_1(t^*/2)/2$ thanks to (2.3.5). The proof of Lemma 2.3.1 then follows by defining

$$\nu(T) = \min(\nu_1(T); \nu_2(T)),$$

with $\nu_1(T)$ given by (2.3.5) and $\nu_2(T)$ being the positive quantity in the right-hand side of (2.3.6), that is

$$\nu_2(T) = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} e^{-T} \min_{t^*/2 \leq t \leq T} \left(\int_{\frac{2-\chi(t^*)+\chi(t)}{\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{2+\chi(t^*)-\chi(t)}{2\sqrt{2t^*}\nu_1(t^*/2)}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right).$$

◇

Proof of Proposition 2.3.1 :

We first go back to the proof of the bound (2.1.11) on $\partial_\sigma p_\varepsilon$ and more precisely we look at (2.2.23) and observe that in virtue of (2.3.1)

$$\nu(T) \int_0^T \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma p_\varepsilon|^2 \leq C_3(T, p_0). \quad (2.3.7)$$

Let now ε_n denote any sequence in $[0, 1]$ which goes to 0 as n goes to infinity. To shorten the notation we denote by p_n instead of p_{ε_n} the corresponding sequence of solutions to

(2.1.6). With the above bound (2.3.7) on p_n and (2.1.10), we know that p_n is bounded in $L_t^2(H_\sigma^1)$ independently of n . Moreover thanks to (2.2.1) and (2.1.8) p_n is bounded in $L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^\infty)$ and we also dispose of a uniform bound on $\int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_n$ in virtue of (2.1.9). Therefore arguing exactly as in the proof of Proposition 2.2.2 (Step 4) where we have proved that the mapping \mathcal{T} is relatively compact in $L_t^2 \times L_{t,\sigma}^2$ we show that p_n converges to some p strongly in $L_{t,\sigma}^2$ and $D(p_n)$ converges to $D(p)$ in L_t^2 . Then p is a solution to the initial problem (2.1.1) in $L_t^2(H_\sigma^1) \cap L_t^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^\infty)$, $\int_{\mathbf{R}} p = 1$ and $\int_{\mathbf{R}} |\sigma| p < +\infty$. Moreover,

$$\inf_{0 \leq t \leq T} D(p(t)) \geq \nu(T) .$$

This non-degeneracy condition on the viscosity coefficient ensures that there is at most one solution to (2.1.1) in $L_t^2(H_\sigma^1) \cap L_t^\infty(L_\sigma^2)$ (this follows by an obvious adaptation of the proof of Lemma 2.2.1 to this case). Therefore the limiting function p is uniquely defined and does not depend on the sequence ε_n . Moreover the whole sequence p_n converges to this unique limit and not only a subsequence. \diamond

As a conclusion of this subsection let us make the following comment which is a byproduct of Proposition 2.3.1. Let p be a solution to (2.1.1) in $C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$, then as soon as $D(p(t))$ is positive for some time t it remains so afterwards since the solution can be continued in a unique way beginning from time t .

2.4 The degenerate case : $D(p_0) = 0$

Throughout this section we assume that $D(p_0) = 0$ and therefore the support of p_0 is included in $[-1; +1]$. Assume that we dispose of a solution to (2.1.1) in $C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$. We may define $t_* \in \mathbf{R}^+ \cup \{+\infty\}$ by

$$t_* = \max \left\{ t > 0 ; \int_0^t D(p) = 0 \right\} . \tag{2.4.1}$$

According to the comment at the end of the previous section for every $t > t_*$, $D(p(t)) > 0$ while $D(p(t)) = 0$ for all t in $[0; t_*]$. On $[0; t_*[$, the HL equation (2.1.1) reads

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p = -b(t) \partial_\sigma p ; \\ p \geq 0 ; \\ p(0, \cdot) = p_0 ; \\ D(p(t)) = 0 . \end{array} \right.$$

The above system reduces to

$$\left\{ \begin{array}{l} p(t, \sigma) = p_0(\sigma - \chi(t)) ; \\ D(p(t)) = 0, \quad \text{for all } t \text{ in } [0; t_*] . \end{array} \right. \tag{2.4.2}$$

The second equation in (2.4.2) is compatible with the first one as long as

$$\int_{|\sigma+\chi(t)|>1} p_0 = 0, \quad \text{for all } t \text{ in } [0; t_*] .$$

Therefore there exists a maximal time interval $[0; T_c]$ on which the HL equation may reduce to a mere transport equation and this is for an intrinsic time T_c (possibly infinite) defined by

$$T_c = \inf \left\{ t > 0; \int_{|\sigma+\chi(t)|>1} p_0 > 0 . \right\} . \quad (2.4.3)$$

Note that T_c is completely determined by the data p_0 and b . If $T_c = +\infty$, the steady state $p(t, \sigma) = p_0(\sigma - \chi(t))$ is a solution of the HL equation for all time. We shall now exhibit circumstances under which it is not the unique solution. For convenience, we restrict ourselves to the case when $b \equiv 0$ (we then have obviously $T_c = +\infty$).

For $p_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ such that $p_0 \geq 0$, let us denote by F_{p_0} the function from \mathbb{R}^+ to \mathbb{R}^+ defined by $F_{p_0}(0) = D(p_0)$ and by

$$\forall x > 0, \quad F_{p_0}(x) = \alpha \int_{|\sigma|>1} \left(\int_{\mathbb{R}} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2x}}(\sigma - \sigma') d\sigma' \right) d\sigma .$$

Proposition 2.4.1 *Let p_0 satisfy (2.1.5) and be such that $D(p_0) = 0$, then*

i. If F_{p_0} satisfies

$$\int_0^1 \frac{dx}{F_{p_0}(x)} = +\infty, \quad (2.4.4)$$

then $p(t, \sigma) = p_0(\sigma)$ is the unique solution to (2.1.1) in $C_t^0(L_\sigma^2)$;

ii. Otherwise, (2.1.1) has an infinite number of solutions in $C_t^0(L_\sigma^2)$. The set of solutions to (2.1.1) is made of the steady state $p(t, \sigma) = p_0(\sigma)$ and of the functions $(q_{t_0})_{t_0 \geq 0}$ defined by

$$q_{t_0}(t, \sigma) = \begin{cases} p_0(\sigma) & \text{if } t \leq t_0 \\ q(t - t_0, \sigma) & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

where q is the unique solution to (2.1.1) in $C_t^0(L_\sigma^2)$ such that $D(q) > 0$ on $]0, +\infty[$. Besides,

$$p_\epsilon \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} q \quad \text{strongly in } L_{t, \text{loc}}^2(L_\sigma^2). \quad (2.4.5)$$

Lemma 2.4.1 *Let $p_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ such that*

$$p_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} p_0 = 1, \quad D(p_0) = 0.$$

The function F_{p_0} is in $C^0([0, +\infty[) \cap C^\infty(]0, +\infty[)$, and is positive on $]0, +\infty[$. In addition, $F'_{p_0} > 0$ on $]0, +\infty[$.

Proof of Lemma 2.4.1 : It is easy to check that $F_{p_0} \in C^0([0, +\infty[) \cap C^\infty(]0, +\infty[)$, and that $F_{p_0} > 0$ on $]0, +\infty[$. Since $D(p_0) = 0$, the function p_0 is supported in $[-1, 1]$. Thus, for any $x > 0$

$$\begin{aligned}
 F_{p_0}(x) &= \alpha \int_{|\sigma|>1} \left(\int_{\mathbf{R}} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2x}}(\sigma - \sigma') d\sigma' \right) d\sigma \\
 &= \alpha \int_{-1}^1 p_0(\sigma') \left(\int_{|\sigma|>1} \frac{e^{-(\sigma-\sigma')^2/4x}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} d\sigma \right) d\sigma' \\
 &= \alpha \int_{-1}^1 p_0(\sigma') \left(\int_{-\infty}^{-1+\sigma'} \frac{e^{-\sigma^2/4x}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} d\sigma + \int_{1+\sigma'}^{+\infty} \frac{e^{-\sigma^2/4x}}{2\sqrt{\pi}\sqrt{x}} d\sigma \right) d\sigma' \\
 &= \alpha \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 p_0(\sigma') \left(\int_{\frac{1+\sigma'}{2\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt + \int_{\frac{1-\sigma'}{2\sqrt{x}}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right) d\sigma'. \tag{2.4.6}
 \end{aligned}$$

It follows that for any $x > 0$,

$$F'_{p_0}(x) = \alpha \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-1}^1 p_0(\sigma') \left(\frac{1+\sigma'}{4x^{3/2}} e^{-\frac{(1+\sigma')^2}{4x}} + \frac{1-\sigma'}{4x^{3/2}} e^{-\frac{(1-\sigma')^2}{4x}} \right) d\sigma' > 0.$$

◇

Lemma 2.4.2 *Let $\gamma \geq 0$ and $p_0 \in L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R})$ such that*

$$p_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbf{R}} p_0 = 1, \quad \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p_0 < +\infty, \quad D(p_0) = 0.$$

Let us consider the problem

$$\begin{cases} \partial_t w = D(w(t)) \partial_{\sigma\sigma}^2 w - \gamma w \\ w(0, \sigma) = p_0(\sigma). \end{cases} \tag{2.4.7}$$

- i. If F_{p_0} satisfies (2.4.4) then $p(t, \sigma) = p_0(\sigma)$ is the unique solution to (2.4.7) in $C_t^0(L_\sigma^2)$;*
- ii. Otherwise, (2.4.7) has an infinite number of solutions in $C_t^0(L_\sigma^2)$. The set of solutions to (2.4.7) is made of the steady state $w(t, \sigma) = p_0(\sigma)$ and of the functions $(v_{t_0})_{t_0 \geq 0}$ defined by*

$$v_{t_0}(t, \sigma) = \begin{cases} p_0(\sigma) & \text{if } t \leq t_0 \\ v(t - t_0, \sigma) & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

where v is the unique solution to (2.4.7) in $C_t^0(L_\sigma^2)$ such that $D(v) > 0$ on $]0, +\infty[$.

Corollary 2.4.1 *The initial data $p_0 = \frac{1}{2}\chi_{]-1,1[}$ fulfills the assumptions of the above lemma and $\int_0^1 \frac{dx}{F_{p_0}(x)} < +\infty$. Therefore there are infinitely many solutions to the equation (2.1.4) in the introduction.*

Proof of Corollary 2.4.1 : The only point to be checked is that $\int_0^1 \frac{dx}{F_{p_0}(x)} < +\infty$. With the standard notation $\operatorname{erfc}(z) \equiv \int_z^{+\infty} e^{-t^2} dt$, and by using (2.4.6) and symmetry considerations, simple calculations yield

$$\begin{aligned} F_{p_0}(x) &= \frac{2\alpha\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{x}}} \operatorname{erfc}(\sigma) d\sigma \\ &= \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \left[\operatorname{erfc}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) - \frac{1}{2}\sqrt{x}e^{-\frac{1}{x}} + \frac{1}{2}\sqrt{x} \right]. \end{aligned}$$

Since $\operatorname{erfc}(z) \sim \frac{1}{2}e^{-z^2}/z$ for z going to $+\infty$, $F_{p_0}(x) \sim \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}\sqrt{x}$ near 0 and the integrability of $1/F_{p_0}$ on $[0; 1]$ follows. \diamond

Proof of Lemma 2.4.2

Let us consider a non-negative function $D \in C^0([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$. The unique solution in $C_t^0(L_\sigma^2)$ of the problem

$$\begin{cases} \partial_t w_D = D(t)\partial_{\sigma\sigma}^2 w_D - \gamma w_D; \\ w_D(0, \sigma) = p_0(\sigma), \end{cases} \quad (2.4.8)$$

is given by

$$w_D(t, \sigma) = \begin{cases} e^{-\gamma t} p_0(\sigma) & \text{if } t \leq t^*; \\ e^{-\gamma t} \int_{\mathbb{R}} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t D(s) ds}}(\sigma - \sigma') d\sigma' & \text{if } t > t^*, \end{cases} \quad (2.4.9)$$

where $t^* = \inf \left\{ t > 0, \int_0^t D > 0 \right\}$. Any solution to (2.4.7) thus satisfies $w = w_{D(w)}$ and therefore

$$\begin{aligned} D(w(t)) &= D(w_{D(w)}(t)) \\ &= \alpha \int_{|\sigma|>1} w_{D(w)}(t, \sigma) d\sigma \\ &= \alpha e^{-\gamma t} \int_{|\sigma|>1} \left(\int_{\mathbb{R}} p_0(\sigma') \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t D(w(s)) ds}}(\sigma - \sigma') d\sigma' \right) d\sigma \\ &= e^{-\gamma t} F_{p_0} \left(\int_0^t D(w(s)) ds \right). \end{aligned}$$

It follows that the function $D(w)$ is solution in $C^0([0, +\infty[)$ to the nonlinear integral equation

$$y(t) = e^{-\gamma t} F_{p_0} \left(\int_0^t y(s) ds \right). \quad (2.4.10)$$

On the other hand, if $D \in C^0([0, +\infty[)$ is solution to (2.4.10) it is easy to check that the function w_D defined by (2.4.9) is solution to (2.4.8).

If condition (2.4.4) is fulfilled, equation (2.4.10) has a unique solution in $C^0([0, +\infty[)$ (the constant function equal to zero) and the steady state $w(t, \cdot) = p_0$ thus is the unique solution to (2.4.7) in $C_t^0(L_\sigma^2)$; otherwise, the set of solutions to (2.4.10) is made of the steady state $w(t, \cdot) = p_0$ and of the family $(y_{t_0})_{t_0 \geq 0}$ with

$$y_{t_0}(t) = \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq t_0 \\ z(t - t_0) & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

where the function z is defined on $[0, +\infty[$ by

$$\int_0^{z(t)} \frac{dx}{F(x)} = \begin{cases} \frac{1-e^{-\gamma t}}{\gamma}, & \text{if } \gamma > 0; \\ t, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Statement *ii.* is obtained by denoting by v the solution to (2.4.8) associated with the function $z(t)$. ◇

Proof of Proposition 2.4.1 :

The solution p_ϵ to equation (2.1.6) satisfies the inequalities

$$p_\epsilon^-(t, \sigma) \leq p_\epsilon(t, \sigma) \leq p_\epsilon^+(t, \sigma) \quad \text{almost everywhere}$$

where p_ϵ^- and p_ϵ^+ are defined in $C_t^0(L_\sigma^2)$ by

$$\begin{cases} \partial_t p_\epsilon^- = (D(p_\epsilon(t)) + \epsilon) \partial_{\sigma\sigma}^2 p_\epsilon^- - p_\epsilon^-; \\ p_\epsilon^-(0, \sigma) = p_0(\sigma); \end{cases} \quad \begin{cases} \partial_t p_\epsilon^+ = (D(p_\epsilon(t)) + \epsilon) \partial_{\sigma\sigma}^2 p_\epsilon^+ + \frac{D(p_\epsilon)}{\alpha} \delta_0; \\ p_\epsilon^-(0, \sigma) = p_0(\sigma). \end{cases}$$

Therefore on the one hand

$$D(p_\epsilon(t)) \geq D(p_\epsilon^-(t)) = e^{-t} F_{p_0} \left(\int_0^t (D(p_\epsilon) + \epsilon) \right) \quad (2.4.11)$$

and on the other hand

$$\begin{aligned} D(p_\epsilon(t)) \leq D(p_\epsilon^+(t)) &= F_{p_0} \left(\int_0^t (D(p_\epsilon) + \epsilon) \right) + \int_0^t \frac{D(p_\epsilon)(s)}{\alpha} \left(\int_{|\sigma|>1} \varphi \sqrt{2 \int_s^t (D(p_\epsilon) + \epsilon)} \right) ds \\ &\leq F_{p_0} \left(\int_0^t (D(p_\epsilon) + \epsilon) \right) + \frac{1}{\alpha} \int_0^t D(p_\epsilon)(s) ds. \end{aligned}$$

If (2.4.4) is not fulfilled, using (2.4.11) and the property that F_{p_0} is strictly increasing on $]0, +\infty[$, we obtain that

$$D(p_\epsilon) \geq z(t)$$

where $z(t)$ is the function defined in the proof of Lemma 2.4.2. As for any $0 < t_0 \leq T$, there exists $\eta > 0$ such that $z(t) \geq \eta$ on $[t_0, T]$ the same reasoning as in the non-degenerate case leads to the conclusion that (p_ϵ) converges up to an extraction to p in $\mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \mathbb{R})$ and in $L^2([t_0, T], L^2(\mathbb{R}))$ for any $0 < t_0 < T < +\infty$, p being a solution to (2.1.1) in $C^0(]0, +\infty[, L^2_\sigma)$ such that $D(p) > 0$ on $]0, +\infty[$. \diamond

2.5 Steady states

Throughout this section the shear rate b is assumed to be a given constant and we are looking for solutions in $L^1(\mathbb{R})$ to the following system :

$$\begin{cases} -b \partial_\sigma p + D(p) \partial_{\sigma\sigma}^2 p - \chi_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]} p + \frac{D(p)}{\alpha} \delta_0(\sigma) = 0 & \text{on } (0; T) \times \mathbb{R}; & (2.5.1) \\ p \geq 0, \int_{\mathbb{R}} p = 1; & & (2.5.2) \\ D(p) = \alpha \int_{|\sigma| > 1} p(\sigma) d\sigma. & & (2.5.3) \end{cases}$$

Our main results are summarized in the following :

Proposition 2.5.1

- i* If $b \equiv 0$, any probability density which is compactly supported in $[-1; +1]$ is a solution to (2.5.1) which satisfies $D(p) = 0$. If $\alpha \leq \frac{1}{2}$, these are the only stationary solutions (and there are infinitely many), whereas when $\alpha > \frac{1}{2}$ there exists a unique stationary solution corresponding to a positive value of D , which is explicitly given by (2.5.4) and (2.5.6) below. This solution is even and with exponential decay at infinity.
- ii* If $b \neq 0$, for any $\alpha > 0$, there exists a unique stationary solution to (2.5.1), and it corresponds to a positive value for D , which is implicitly given by (2.5.7) and (2.5.8) below. This solution has exponential decay at infinity.

Remark 2.5.1 *The statement in the above proposition is already pointed out by Hébraud and Lequeux [3].*

Proof of Proposition 2.5.1 :

The case when $b \equiv 0$

We first observe that any non-negative function p which is normalized in $L^1(\mathbb{R})$ and with support in $[-1; +1]$ is a solution to the system (2.5.1) since in that case all terms in equation (2.5.1) cancel. We now examine the issue of existence of solutions of (2.5.1) such that $D(p) > 0$. For simplicity we denote $D = D(p)$. For given constant $D > 0$, it is very easy to calculate explicitly the solutions of (2.5.1) on each of the three regions $\sigma < -1$, $\sigma \in [-1; +1]$ and $\sigma > 1$. Using compatibility conditions on \mathbb{R} and the fact that p has to be in $L^1(\mathbb{R})$ one obtains :

$$p(\sigma) = \begin{cases} \frac{\sqrt{D}}{2\alpha} e^{(1+\sigma)/\sqrt{D}} & \text{if } \sigma \leq -1, \\ \frac{1}{2\alpha} \sigma + \frac{\sqrt{D}+1}{2\alpha} & \text{if } -1 \leq \sigma \leq 0, \\ -\frac{1}{2\alpha} \sigma + \frac{\sqrt{D}+1}{2\alpha} & \text{if } 0 \leq \sigma \leq 1, \\ \frac{\sqrt{D}}{2\alpha} e^{(1-\sigma)/\sqrt{D}} & \text{if } 1 \leq \sigma. \end{cases} \quad (2.5.4)$$

The compatibility condition $D = D(p)$ happens to be then automatically satisfied and the normalization constraint $\int_{\mathbb{R}} p = 1$ imposes that D solves

$$D + \sqrt{D} = \alpha - \frac{1}{2}. \quad (2.5.5)$$

Since $D \geq 0$, we immediately reach a contradiction when $\alpha < \frac{1}{2}$, whereas when $\alpha > \frac{1}{2}$ equation (2.5.5) admits a unique positive solution; namely

$$D = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4\alpha - 1}}{2}. \quad (2.5.6)$$

The case when $b \neq 0$

First of all, we observe that if $D = 0$ every term in equation (2.5.1) but $b \partial_{\sigma} p$ vanish. Thus p has to be a non-zero constant which is in contradiction with $p \in L^1(\mathbb{R})$. So necessarily $D > 0$. For given positive constant D , we then solve (2.5.1) as above and obtain

$$p(\sigma) = \begin{cases} a_1 e^{\beta^+ \sigma} & \text{if } \sigma \leq -1, \\ a_2 e^{\frac{b}{D} \sigma} + a_2 - \frac{D}{b\alpha} & \text{if } -1 \leq \sigma \leq 0, \\ (a_2 - \frac{D}{b\alpha}) e^{\frac{b}{D} \sigma} + a_2 & \text{if } 0 \leq \sigma \leq 1, \\ a_1 e^{\beta^- \sigma} & \text{if } 1 \leq \sigma, \end{cases} \quad (2.5.7)$$

with

$$\beta^{\pm} = \frac{b}{2D} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{b^2 + 4D}{D^2}},$$

$$a_1 = \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{D^2} + \frac{4}{D}}}}{\alpha (\beta^+ e^{b/2D} - \beta^- e^{-b/2D})},$$

and

$$a_2 = \frac{D\beta^+ e^{b/2D}}{\alpha b (\beta^+ e^{b/2D} - \beta^- e^{-b/2D})}.$$

It is tedious but easy to check that this function always fulfills the self-consistency condition $D = D(p)$ and that the normalization condition $\int_{\mathbf{R}} p = 1$ reads

$$\frac{D}{b} \frac{(1 + \beta^+) + (\beta^- - 1) e^{-b/D}}{\beta^+ - \beta^- e^{-b/D}} + D = \alpha. \quad (2.5.8)$$

For any $b > 0$ (the negative values of b are dealt with by replacing σ by $-\sigma$), the left-hand side of (2.5.8) is a continuous function which goes to $+\infty$ when D goes to infinity and goes to zero when D goes to 0. This already ensures the existence of at least one steady state for any $\alpha > 0$. Moreover, setting $z = \frac{b^2}{D}$ (for example) we may rewrite the left-hand side of (2.5.8) as

$$f(z) = \frac{b^2}{z} + \frac{2b^2}{z} \left[\frac{1 + \frac{1}{2b}z \coth(z/2b) + \frac{1}{2b}(z^2 + 4z)^{1/2}}{z + (z^2 + 4z)^{1/2} \coth(z/2b)} \right].$$

Next we check that the function f is monotone decreasing (thus, the left-hand side of (2.5.8) is increasing with respect to D), whence the uniqueness result. \diamond

Acknowledgements. We would like to thank Philippe Coussot for pointing out the Hébraud-Lequeux equation to us. We also warmly thank Claude Le Bris for stimulating discussions.

References

- [1] E. CANCÈS, I. CATTO AND Y. GATI, in preparation.
- [2] M. CHIPOT, *Elements of nonlinear analysis*, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [3] P. HÉBRAUD AND F. LEQUEUX, *Mode coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials*, Phys. Rev. Lett., **81**(14), pp. 2934–2937, 1998.
- [4] J.-L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, 1969.

Chapitre 3

On a micro–macro model for fluids

Ce chapitre est une suite du précédent. Il présente des théorèmes d'existence et d'unicité pour le système couplé. Il s'agit d'une version préliminaire d'un article à soumettre.

On a micro–macro model for fluids

Eric Cancès^(a), Isabelle Catto^(b), Yousra Gati^(a) and Claude Le Bris^(a)

(a) *CERMICS, École Nationale des Ponts et Chaussées
6 & 8, avenue Blaise Pascal, Cité Descartes,
Champs sur Marne, 77455 Marne-La-Vallée,
Cedex 2, France.*

(b) *CEREMADE, UMR CNRS 7534, Université Paris IX-Dauphine,
Place du Maréchal de Lattre de Tassigny, F-75775 Paris
Cedex 16, France.*

3.1 Introduction

For given positive constants T and L , we denote $\Omega = [0; L]$ and $\Omega_T = (0; T) \times \Omega$.

Our aim is to find a solution $(u; p)$ (the suitable spaces will be made precise later) to the following system of coupled parabolic partial differential equations :

$$\begin{cases} \partial_t u - \epsilon \partial_{yy}^2 u = \partial_y \tau & \text{on } \Omega_T ; & (3.1.1a) \\ u(0, y) = u_0 & \text{on } \Omega ; & (3.1.1b) \\ u(t, 0) = 0 ; u(t, L) = V(t) & \text{for almost every } t \text{ in } (0, T) , & (3.1.1c) \end{cases}$$

where $\epsilon \geq 0$ is a viscosity parameter and V is a continuous function on \mathbb{R} such that $V \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R})$ and $V(0) = 0$. The initial data u_0 lies in $L^2(\Omega)$. The function τ arising in the right-hand side of (3.1.1a) is defined by

$$\tau = \tau(t, y) = \int_{\mathbf{R}} \sigma p(t, y, \sigma) d\sigma, \quad (3.1.2)$$

with $p = p(t, y, \sigma)$ being a density of probability which solves

$$\begin{cases} \partial_t p = -G_0 \partial_y u \partial_\sigma p + D(p(t, y)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p - \frac{\chi_{\mathbf{R} \setminus [-\sigma_c, \sigma_c]}(\sigma)}{T_0} p + \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \delta_0(\sigma) ; & (3.1.3a) \\ p \geq 0 ; & (3.1.3b) \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) , & (3.1.3c) \\ t \in [0, T], y \in [0, L], \sigma \in \mathbf{R} . & (3.1.3d) \end{cases}$$

The parameters α , T_0 and G_0 are positive, and χ_S is the characteristic function of the set S . The function $D(p)$ which appears in the right-hand side of (3.1.3a) as the viscosity

function in front of the Laplace operator and also in the source term is given through

$$D(p) = D(p(t, y)) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{|\sigma| > \sigma_c} p(t, y, \sigma) d\sigma ,$$

with $\sigma_c \geq 0$ a given parameter.

The function V which appears in the boundary condition (3.1.1c) of (3.1.1) is in $H^1(0; T)$ (thus in $C^0(0; T)$) and such that $V(0) = 0$.

In all that follows, the initial data $p_0 = p_0(y, \sigma)$ in (3.1.3) is a probability density ; that is

$$p_0 \geq 0 , \quad \int_{\mathbf{R}} p_0(y, \sigma) d\sigma = 1, \quad \text{for almost every } y \in \Omega. \quad (3.1.4)$$

The main difficulties one encounters in the mathematical analysis comes from the nonlinearity in the diffusion term and also and even more from the fact that the parabolic equation may degenerate when the viscosity coefficient $D(p)$ may vanish. Since any solution of (3.1.3) will be shown to satisfy $\int_{\mathbf{R}} p d\sigma = 1$ for almost every t and y this type of degeneracy does not occur in the special case when $\sigma_c = 0$, where $D(p(t, y))$ happens to be identically equal to $\frac{\alpha}{T_0}$. This case will be studied separately in Section 3.3. The general and most difficult case when $\sigma_c > 0$ is looked at in Section 3.2. The artificial viscosity $-\epsilon \partial_{yy}^2 u$ has been added in the equation (3.1.1) of motion for u for technical reasons : it helps to prove the existence of solutions in that case. However, without this term, such a result is beyond our reach up to now. We have devoted a previous work [1] to existence and uniqueness results for equation (3.1.3) when the variable y is frozen and when the transport coefficient $G_0 \partial_y u$ is a given time-dependent function. There we have shown that the degeneracy of the viscosity coefficient $D(p)$ may happen only if $D(p_0) = 0$, and the situation is then very intricate since in some particular cases we have exhibited multiplicity results for the solutions (see [1]). This is why in Section 3.2 just below we shall make a restrictive assumption on the function $D(p_0)$ in order to avoid this situation.

3.2 General case $\sigma_c > 0$

From now on, we assume that $\sigma_c = \epsilon = T_0 = 1$ in order to lighten the notation and without loss of generality. (This amounts to a change of scale in the time and space variables). In the following we shall denote by C a generic positive constant that may depend on the data but that is independent of t, y and σ . Also to simplify the notation we shall use the shorthands L_T^p (or L_t^p when the length of the time interval does not matter) for $L^p(0; T)$, L_y^p for $L_y^p(\Omega)$ and L_σ^p for $L_\sigma^p(\mathbf{R})$, and similarly for the H^1 spaces.

We denote

$$\mathcal{U}_T = C^0(0, T; L_y^2(\Omega)) \cap L_T^2(H_y^1(\Omega))$$

and

$$\mathcal{X}_T = C^0(0, T; L_\sigma^2(\mathbf{R})) \cap L_T^2(H_\sigma^1(\mathbf{R})) .$$

together with :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{There exists a positive constant } \eta \text{ such that} \\ \alpha \inf_{y \in \Omega} \inf_{\chi \in \mathbb{R}} \int_{|\sigma + \chi| > 1} p_0 \, d\sigma \geq \eta > 0 . \end{array} \right. \quad (3.2.4)$$

Then, there exists a unique global solution $(u; p)$ to the system (3.1.1)–(3.1.3) such that, for every $T > 0$,

$$\begin{aligned} u &\in C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) , \\ p &\in L^\infty(\Omega_T; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\Omega; \mathcal{X}_T), \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

and

$$\tau \in L^2(\Omega; L^\infty(0, T)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

Moreover, we have

$$p \in C^0(0, T; L^2(\Omega \times \mathbb{R})) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} p(t, y, \sigma) \, d\sigma = 1, \quad \text{for all } t \geq 0 \text{ and } y \in \Omega$$

and

$$\inf_{\substack{0 \leq t \leq T \\ y \in \Omega}} D(p(t, y)) \geq \frac{\eta}{2} e^{-T} .$$

Remark 3.2.1 Condition (3.2.4) is to ensure that the viscosity term $D(p)$ which appears in front of the Laplace operator in (3.1.3a) always stays positive and even bounded from below away from zero, or, in other words that the non-linear parabolic equation (3.1.3a) satisfied by p is non-degenerate at any time (see (3.2.19) in Lemma 3.2.2 below). It is satisfied for example when p_0 is a Gaussian-like function.

The existence (and uniqueness) result is proved with the help of the contraction principle mapping of Banach in the following way. We define the mapping \mathcal{F} from $L_T^2(H_{0,y}^1)$ into itself as follows. We first consider the function \mathcal{F}_1 which associates to every function u in $L_T^2(H_{0,y}^1)$ the function $\tau = \int_{\mathbb{R}} \sigma p \, d\sigma$ in $L_T^\infty(L_y^2)$, corresponding to the (unique) solution p in $L_{T,y}^\infty(L^1(\mathbb{R})) \cap L_y^\infty(\mathcal{X}_T)$ to (3.2.2). Then, we denote by \mathcal{F}_2 the mapping from $L_T^\infty(L_y^2)$ to $L_T^2(H_{0,y}^1)$, which associates to every τ in $L_T^\infty(L_y^2)$, the unique solution v (in \mathcal{U}_T) to the heat equation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v - \partial_{yy}^2 v = \partial_y \tau - \frac{V'(t)}{L} y \quad \text{on } \Omega_T ; \\ v(0, y) = u_0 ; \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 . \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (3.2.6a) \\ (3.2.6b) \\ (3.2.6c) \end{array}$$

In résumé, \mathcal{F} is defined as follows :

$$\mathcal{F} : \begin{array}{ccc} L_T^2(H_0^1(\Omega)) & \xrightarrow{\mathcal{F}_1} & L_T^\infty(L^2(\Omega)) & \xrightarrow{\mathcal{F}_2} & L_T^2(H_0^1(\Omega)) \\ u & \longmapsto & \tau & \longmapsto & v . \end{array} \quad (3.2.7)$$

The main step consists in proving the following.

Proposition 3.2.1 *For every $T > 0$, the mapping \mathcal{F} from $L_T^2(H_0^1(\Omega))$ into itself is well-defined and, for $T > 0$ small enough, it admits a unique fixed point denoted by u .*

The proof of the Proposition is organized as follows. We first check in Lemma 3.2.1 below that \mathcal{F}_2 is well-defined and that it is a Lipschitz continuous function with arbitrary small Lipschitz constant on small time interval (Section 3.2.1). Next in Section 3.2.2, we prove that \mathcal{F}_1 is well-defined, which is more intricate, and we establish in Section 3.2.3 that it is a Lipschitz continuous function. More precisely, we fix u in $L_T^2(H_0^1(\Omega))$ and we prove the following :

Proposition 3.2.2 *Let p_0 satisfy the conditions (3.2.3) together with the strict positivity condition (3.2.4). Then, for $T > 0$ small enough, there exists a unique non-negative solution p in $L^\infty(\Omega \times (0, T); L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\Omega; \mathcal{X})$ to the equation (3.1.3). Moreover,*

$$\int_{\mathbb{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma = 1 \quad \text{for every } y \in \Omega \text{ and for all } t \text{ in } [0, T],$$

and

$$\tau \in L^2(\Omega; L^\infty(0, T)) \cap C^0(0, T; L^2(\Omega)).$$

In Section 3.2.4 we show that there is at most one solution to the coupled system under the non-degeneracy assumption (3.2.19) on the initial data p_0 . Finally in Section 3.2.5 we deduce the long time existence of the (unique) solution.

3.2.1 \mathcal{F}_2 is Lipschitz continuous with arbitrary small Lipschitz constant

Lemma 3.2.1 *For every $T > 0$, the mapping \mathcal{F}_2 is Lipschitz continuous from $L_T^\infty(L^2(\Omega))$ to $L_T^2(H_0^1(\Omega))$ and the Lipschitz constant goes to 0 together with T .*

Proof of Lemma 3.2.1 : Let us first observe that the mapping \mathcal{F}_2 is well-defined. Indeed, for every function τ in $L_T^\infty(L_y^2)$, $\partial_y \tau \in L_T^\infty(H_y^{-1})$, and therefore, the existence and the uniqueness of a solution $v \in C_T^0(L^2(\Omega)) \cap L_T^2(H_0^1(\Omega))$ of the heat equation (3.2.6) is a standard result. Let now τ_1 and τ_2 be two functions in $L_T^\infty(L_y^2)$, and let us denote $v_1 = \mathcal{F}_2(\tau_1)$ and $v_2 = \mathcal{F}_2(\tau_2)$. We also set $v = v_1 - v_2$ and $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Then, v satisfies

$$\begin{cases} \partial_t v - \partial_{yy}^2 v = \partial_y \tau & \text{on } \Omega_T; & (3.2.8a) \\ v(0, y) = 0; & (3.2.8b) \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0, & (3.2.8c) \end{cases}$$

and if we apply the equation (3.2.8) to v and integrate over Ω we get

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v|^2 + \int_{\Omega} |\partial_y v|^2 = - \int_{\Omega} \tau \partial_y v. \quad (3.2.9)$$

By the Cauchy-Schwarz and the Young inequalities, for every $t \in [0; T]$,

$$\int_{\Omega} |v|^2 + \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_y v|^2 \leq \int_0^T \int_{\Omega} |\tau|^2 ,$$

and therefore

$$\|v\|_{L_T^2(H_y^1)} \leq \sqrt{T} \max(1; \sqrt{T}) \|\tau\|_{L_T^\infty(L_y^2)} . \quad (3.2.10)$$

Hence the result. ◇

3.2.2 Well-definiteness of \mathcal{F}_1

In this section (as well as in the following one), u is a given function in $L_T^2(H_0^1(\Omega))$. Equation (3.2.2) with the variable y frozen has been studied in [1]. Theorem 1.1 of [1] is recalled in the following

Proposition 3.2.3 (Pointwise existence in y) *Let $b(t, y)$ be a given function in $L_{t, \text{loc}}^2(\mathbb{R})$, for almost every y in Ω . We also assume that the initial data p_0 satisfies the conditions*

$$p_0(y, \cdot) \in L_\sigma^1(\mathbb{R}) \cap L_\sigma^\infty(\mathbb{R}), \quad p_0 \geq 0, \quad \int_{\mathbb{R}} p_0(y, \sigma) d\sigma = 1 \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0 d\sigma < +\infty , \quad (3.2.11)$$

together with

$$D(p_0(y)) > 0 ,$$

for almost every y in Ω . Then, for every $T > 0$ and for almost every y in Ω , there exists a unique solution $p = p(t, y, \sigma)$ in $L_T^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^\infty) \cap L_T^2(H_\sigma^1)$ to the equation

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t p = -b(t, y) \partial_\sigma p + D(p(t, y)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p \\ \quad - \chi_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]}(\sigma) p + \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \delta_0(\sigma) \quad \text{on } (0; T) \times \mathbb{R} ; \quad (3.2.12a) \\ p \geq 0 ; \quad (3.2.12b) \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) . \quad (3.2.12c) \end{array} \right.$$

Moreover, for almost every y in Ω ,

$$\int_{\mathbb{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma = 1 \quad \text{for all } t \geq 0 , \quad (3.2.13)$$

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|p(\cdot, y, \cdot)\|_{L_\sigma^\infty} \leq \|p_0(y, \cdot)\|_{L_\sigma^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi}} , \quad (3.2.14)$$

and $p \in C_t^0(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^2)$, $D(p(t, y)) \in C_t^0$ and for every $T > 0$ there exists a positive constant $\eta(T, y)$ such that

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p(t, y)) \geq \eta(T, y). \quad (3.2.15)$$

In addition, for almost every y in Ω , $\sigma p \in L_t^\infty(L_\sigma^1)$ so that the average stress $\tau(t, y)$ is well-defined by (3.1.2) in L_t^∞ .

With $b(t, y) = G_0 (\partial_y u + \frac{V(t)}{L})$ and demanding that the initial data p_0 satisfies the conditions (3.2.3), we get the pointwise existence and uniqueness of a solution p to (3.1.3). Next step now consists in analyzing the dependence on the variable y . The full *a priori* estimates are collected in the following lemma.

Lemma 3.2.2 *Let $T > 0$ be given. We assume that the initial data p_0 satisfies the conditions (3.2.3) of the theorem and also that*

$$\inf_{y \in \Omega} D(p_0(y)) > 0.$$

Then, if we denote by p the unique solution to (3.2.12a) given by Proposition 3.2.3, we have the following.

i. p is in $L_{T,y}^\infty(L_\sigma^1 \cap L_\sigma^\infty)$ and

$$\|p\|_{L_{T,y,\sigma}^\infty} \leq \|p_0\|_{L_{y,\sigma}^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}, \quad (3.2.16)$$

$$\sup_{y \in \Omega} \max_{0 \leq t \leq T} \|p\|_{L_\sigma^2}^2 \leq \|p_0\|_{L_{y,\sigma}^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha} \sqrt{T}}{\sqrt{\pi}}. \quad (3.2.17)$$

ii. τ is in $L_y^2(L_T^\infty)$ (hence in $L_T^\infty(L_y^2)$) and the following bound holds :

$$\left\| \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} |\sigma| p d\sigma \right\|_{L_y^2} \leq \|\sigma p_0\|_{L_y^2(L_\sigma^1)} + C(T, L, \alpha, \|V\|_{L_T^\infty}) + \sqrt{T} G_0 \|\partial_y u\|_{L_{T,y}^2}, \quad (3.2.18)$$

with $C(T, L, \alpha, \|V\|_{L_T^\infty})$ being a positive constant whose dependence on T, L, α and $\|V\|_{L_T^\infty}$ is made explicit in (3.2.21) below.

iii. If in addition p_0 satisfies the non-degeneracy condition (3.2.4), we have

$$\inf_{y \in \Omega} \min_{0 \leq t \leq T} D(p(t, y)) \geq \frac{1}{2} e^{-T} \eta, \quad (3.2.19)$$

and

$$\sup_{y \in \Omega} \int_0^T \int_{\mathbf{R}} |\partial_\sigma p|^2 dt d\sigma \leq \frac{2}{\eta} e^T \left(\|p_0\|_{L_{y,\sigma}^\infty} \left(\frac{1}{2} + T \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} T^{3/2} \right). \quad (3.2.20)$$

Proof of Lemma 3.2.2 : Let us recall the estimates we have obtained in [1] when the variable y is kept frozen. Under assumption *i.* on p_0 , we deduce from [1, Proposition 1.1, Eq.(1.8)], that p is in $L_{t,\sigma}^\infty$ for almost every y and (3.2.14) holds. Hence (3.2.16). Interpolating with (3.2.13) we immediately obtain (3.2.17).

Under assumption *ii.*, it comes out from [1, Proposition 1.1, Eq.(1.9)] that for almost every y in Ω ,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p \, d\sigma \leq \int_{\mathbb{R}} |\sigma| p_0 \, d\sigma + \sqrt{T} \left(\frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} + \|b\|_{L_T^2} \right) + \frac{2}{3} T^{3/2} \left(1 + \frac{2\sqrt{1+\alpha}}{\sqrt{\pi}} \right),$$

with $b = b(t, y) = G_0 \left(\partial_y u + \frac{V(t)}{L} \right)$. Then (3.2.18) follows immediately with

$$C(T, \alpha, \|V\|_{L_T^\infty}) = \frac{G_0 T}{L} \|V\|_{L_T^\infty} + \frac{\sqrt{TL}}{\sqrt{\pi}} \left(2\sqrt{1+\alpha} + \frac{2}{3} T (\sqrt{\pi} + 2\sqrt{1+\alpha}) \right). \quad (3.2.21)$$

We now assume that p_0 satisfies the non-degeneracy condition (3.2.4). In [1, Proof of Lemma 3.1] we have established the following. If we define

$$t^*(y) = \inf \left\{ t > 0; \int_{|\sigma + \int_0^t b(s,y) \, ds| > 1} p_0(y, \sigma) \, d\sigma = 0 \right\}, \quad (3.2.22)$$

then $0 < t^*(y)$ ($t^*(y)$ possibly infinite) the support of p_0 is contained in $[-1 - \int_0^{t^*} b(s, y) \, ds, 1 - \int_0^{t^*} b(s) \, ds]$, and for every $T < \frac{t^*(y)}{2}$,

$$\min_{0 \leq t \leq T} D(p(t, y)) \geq \frac{\alpha}{2} e^{-T} \min_{0 \leq t \leq T} \int_{|\sigma + \int_0^t b(s,y) \, ds| > 1} p_0(y, \sigma) \, d\sigma. \quad (3.2.23)$$

The assumption (3.2.4) on p_0 precisely ensures that we are in the case when $t^*(y) = +\infty$ for almost every y in Ω . Therefore (3.2.19) is an immediate consequence of (3.2.23) by using (3.2.4).

Finally (3.2.20) follows from (3.2.19) and [1, Equation (3.7)]. (This is simply obtained by multiplying (3.1.3) by p and integrate over \mathbb{R} with respect to σ and use (3.2.19) and the previous bounds.)

◇

3.2.3 \mathcal{F}_1 is Lipschitz continuous

Lemma 3.2.3 *For every $T > 0$, the mapping \mathcal{F}_1 is Lipschitz continuous from $L_T^2(H_0^1(\Omega))$ to $L_T^\infty(L^2(\Omega))$ and the Lipschitz constant is a locally bounded function with respect to T which goes to 0 together with T .*

Proof of Lemma 3.2.3 : Let u_1 and u_2 be two functions in $L_T^2(H_0^1(\Omega))$. We denote $\tau_1 = \mathcal{F}_1(u_1)$ and $\tau_2 = \mathcal{F}_1(u_2)$. We also set $v = u_1 - u_2$, $q = p_1 - p_2$ and $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Recall that, for $i = 1, 2$, $\tau_i = \int_{\mathbb{R}} \sigma p_i \, d\sigma$ with p_i being the unique solution to (3.2.2)

corresponding to u_i . We formally multiply equation (3.2.2) by σ and integrate it over \mathbb{R} with respect to σ to find

$$\begin{cases} \partial_t \tau_i + \tau_i = G_0 \left(\partial_y u_i + \frac{V(t)}{L} \right) + \int_{|\sigma| \leq 1} \sigma p_i d\sigma ; \\ \tau_i(0, y) = \int_{\mathbb{R}} \sigma p_0 d\sigma . \end{cases}$$

(The argument is made rigorous with the help of a cut-of argument as in [1]; see also Section 3.3 below.) Subtracting the equations satisfied by τ_1 and τ_2 yields

$$\begin{cases} \partial_t \tau + \tau = G_0 \partial_y v + \int_{|\sigma| \leq 1} \sigma q d\sigma ; \\ \tau(0, y) = 0 . \end{cases} \quad (3.2.24)$$

We then apply τ to (3.2.24) and integrate over Ω to obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\tau|^2 + \int_{\Omega} |\tau|^2 = G_0 \int_{\Omega} \partial_y v \tau + \int_{\Omega} \tau \left(\int_{|\sigma| \leq 1} \sigma q d\sigma \right) dy . \quad (3.2.25)$$

Since

$$\int_{\Omega} |\partial_y v \tau| \leq \frac{1}{2G_0} \|\tau\|_{L_y^2}^2 + \frac{G_0}{2} \|\partial_y v\|_{L_y^2}^2$$

and

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \tau \left(\int_{|\sigma| \leq 1} \sigma q d\sigma \right) dy \right| &\leq \sqrt{2} \int_{\Omega} \left(\int_{\mathbb{R}} |q|^2 d\sigma \right)^{1/2} |\tau| dy \\ &\leq \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |q|^2 d\sigma dy + \frac{1}{2} \|\tau\|_{L_y^2}^2 , \end{aligned} \quad (3.2.26)$$

thanks to the Cauchy-Schwarz and Young inequalities, we finally deduce that

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} |\tau|^2 \leq G_0^2 \|\partial_y v\|_{L_y^2}^2 + 2 \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |q|^2 ,$$

whence

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\tau\|_{L_y^2}^2 \leq G_0^2 \|\partial_y v\|_{L_{T,y}^2}^2 + 2 \int_0^T \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} |q|^2 . \quad (3.2.27)$$

We are now going to show that

$$\|q\|_{L_{T,y,\sigma}^2}^2 \leq C(T) \|\partial_y v\|_{L_{T,y}^2}^2 , \quad (3.2.28)$$

with $C(T)$ being a locally bounded function with respect to T . We postpone the proof of (3.2.28) for a while and pursue the argument. Inserting (3.2.28) into (3.2.27) gives

$$\sup_{0 \leq t \leq T} \|\tau\|_{L_y^2}^2 \leq (G_0^2 + 2C(T)) \|\partial_y v\|_{L_{T,y}^2}^2 , \quad (3.2.29)$$

for every t in $[0; T]$ and therefore, the mapping \mathcal{F}_1 is indeed Lipschitz continuous with Lipschitz constant $(G_0^2 + 2C(T))^{1/2}$.

Let us now turn to the proof of (3.2.28). We subtract the equations (3.2.2) satisfied by p_1 and p_2 respectively to deduce that q solves

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t q = -G_0 \partial_y u_1 \partial_\sigma p_1 + G_0 \partial_y u_2 \partial_\sigma p_2 - G_0 \frac{V(t)}{L} \partial_\sigma q + D(q) \partial_{\sigma\sigma}^2 p_1 \\ \quad + D(p_2) \partial_{\sigma\sigma}^2 q - \chi_{\mathbb{R} \setminus [-1, 1]}(\sigma) q + \frac{D(q)}{\alpha} \delta_0(\sigma) ; \\ q(0, y, \sigma) = 0 , \end{array} \right.$$

for almost every y in Ω . Then, we apply (3.2.30a) to q , and integrate with respect to σ and by parts, to obtain

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbb{R}} q^2 + \int_{|\sigma|>1} q^2 + D(p_2) \int_{\mathbb{R}} |\partial_\sigma q|^2 \\ & = G_0 \partial_y v \int_{\mathbb{R}} p_2 \partial_\sigma q - D(q) \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_1 \partial_\sigma q + \frac{D(q)}{\alpha} q(t, y, 0) . \end{aligned} \quad (3.2.31)$$

By the Cauchy-Schwarz and the Young inequalities and by using the bound from below (3.2.19) on $D(p_2)$ provided by Lemma 3.2.2, we have

$$\begin{aligned} \left| \partial_y v \int_{\mathbb{R}} p_2 \partial_\sigma q \right| & \leq |\partial_y v| \|p_2\|_{L_\sigma^2} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2} \\ & \leq \frac{3G_0}{4D(p_2)} \|p_2\|_{L_\sigma^2}^2 |\partial_y v|^2 + \frac{D(p_2)}{3G_0} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2}^2 \\ & \leq \frac{3G_0}{2\eta} e^T \left(\|p_0\|_{L_{y,\sigma}^\infty} + \frac{\sqrt{\alpha T}}{\sqrt{\pi}} \right) |\partial_y v|^2 + \frac{D(p_2)}{3G_0} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2}^2 \end{aligned} \quad (3.2.32)$$

thanks to the bound (3.2.17) on p_2 in $L_{T,y}^\infty(L_\sigma^2)$ provided by Lemma 3.2.2. In a similar way, we obtain

$$\begin{aligned} |D(q) \int_{\mathbb{R}} \partial_\sigma p_1 \partial_\sigma q| & \leq |D(q)| \|\partial_\sigma p_1\|_{L_\sigma^2} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2} \\ & \leq \frac{3}{2\eta} e^T |D(q)|^2 \|\partial_\sigma p_1\|_{L_\sigma^2}^2 + \frac{D(p_2)}{3} \|\partial_\sigma q\|_{L_\sigma^2}^2 . \end{aligned} \quad (3.2.33)$$

As $\int_{\mathbb{R}} q = 0$, since $\int_{\mathbb{R}} p_1 = \int_{\mathbb{R}} p_2 = 1$, we may write

$$|D(q)| = \alpha \left| \int_{|\sigma|\geq 1} q d\sigma \right| = \alpha \left| \int_{|\sigma|\leq 1} q \right| \leq \alpha \sqrt{2} \|q\|_{L_\sigma^2} . \quad (3.2.34)$$

Thus, inserting into (3.2.33),

$$|D(q) \int_{\mathbf{R}} \partial_{\sigma} p_1 \partial_{\sigma} q| \leq \frac{3\alpha^2}{\eta} e^T \|q\|_{L^2_{\sigma}}^2 \|\partial_{\sigma} p_1\|_{L^2_{\sigma}}^2 + \frac{D(p_2)}{3} \|\partial_{\sigma} q\|_{L^2_{\sigma}}^2. \quad (3.2.35)$$

On the other hand, from the Sobolev's embedding of $H^1(\mathbf{R})$ into $L^{\infty}(\mathbf{R})$, namely

$$\|q\|_{L^{\infty}} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} (\|q\|_{L^2_{\sigma}}^2 + \|\partial_{\sigma} q\|_{L^2_{\sigma}}^2)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.2.36)$$

and with the help of Young's inequality and (3.2.34), we find

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha} |D(q)| |q(t, y, 0)| &\leq \|q\|_{L^2_{\sigma}} (\|q\|_{L^2_{\sigma}}^2 + \|\partial_{\sigma} q\|_{L^2_{\sigma}}^2)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{D(p_2)}{3} + \frac{3}{8D(p_2)} \right) \|q\|_{L^2_{\sigma}}^2 + \frac{D(p_2)}{3} \|\partial_{\sigma} q\|_{L^2_{\sigma}}^2 \\ &\leq \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{3}{4\eta} e^T \right) \|q\|_{L^2_{\sigma}}^2 + \frac{D(p_2)}{3} \|\partial_{\sigma} q\|_{L^2_{\sigma}}^2, \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

by using (3.2.19) again and the fact that $D(p_2) \leq \alpha$. Gathering together (3.2.32), (3.2.35) and (3.2.37) and comparing with (3.2.31), we have

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_{\mathbf{R}} q^2 \leq \frac{3G_0^2}{2\eta} e^T \left(\|p_0\|_{L^{\infty}_{y,\sigma}} + \frac{\sqrt{\alpha T}}{\sqrt{\pi}} \right) |\partial_y v|^2 + \left(\frac{\alpha}{3} + \frac{3}{4\eta} e^T + \frac{3\alpha^2}{\eta} e^T \|\partial_{\sigma} p_1\|_{L^2_{\sigma}}^2 \right) \|q\|_{L^2_{\sigma}}^2,$$

for all t in $[0; T]$ and almost every y in Ω . Finally, applying the Gronwall lemma, we obtain

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq T} \int_{\mathbf{R}} q^2 &\leq \frac{3G_0^2}{\eta} e^T \left(\|p_0\|_{L^{\infty}_{y,\sigma}} + \frac{\sqrt{\alpha T}}{\sqrt{\pi}} \right) \int_0^T |\partial_y v|^2 dt \times \\ &\times \exp \left(\frac{2\alpha T}{3} + \frac{3}{4\eta} T e^T + \frac{6\alpha^2}{\eta} T e^T \int_0^T \|\partial_{\sigma} p_1\|_{L^2_{\sigma}}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

We now integrate the above inequality over Ω_T and we use the bound (3.2.20) on $\partial_{\sigma} p_1$ in $L^{\infty}_y(L^2_{T,\sigma})$ granted by Lemma 3.2.2 to deduce (3.2.28) with

$$\begin{aligned} C(T) &= \frac{3G_0^2}{\eta} T e^T \left(\|p_0\|_{L^{\infty}_{y,\sigma}} + \frac{\sqrt{\alpha T}}{\sqrt{\pi}} \right) \times \\ &\times \exp \left(\frac{2\alpha T}{3} + \frac{3}{4\eta} T e^T + \frac{6\alpha^2}{\eta} T e^T C'(T) \right), \end{aligned} \quad (3.2.39)$$

with $C'(T)$ being the right-hand side of (3.2.20), namely :

$$C'(T) = \frac{2}{\eta} e^T \left(\|p_0\|_{L^{\infty}_{y,\sigma}} \left(\frac{1}{2} + T \right) + \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}} T^{3/2} \right).$$

◇

3.2.4 Uniqueness of the solution

The Banach fixed point theorem implies existence and uniqueness of the solution at least on a small time interval. In order to extend the existence result to any time period, we first establish a uniqueness result on the solutions to the system.

Proposition 3.2.4 *Let $T > 0$. There exists at most one solution $(u; p)$ to the system (3.1.1)–(3.2.2) with u in \mathcal{U} and p in $L^\infty(\Omega_T; L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty(\Omega; \mathcal{X}_T)$ such that*

$$\inf_{(t,y) \in [0,T] \times \Omega} D(p(t,y)) \geq \nu(T) > 0,$$

for some positive constant $\nu(T)$ which depends only on the data.

Proof of Proposition 3.2.4 : Let us assume by contradiction that we have two such solutions denoted by $(u_1; p_1)$ and $(u_2; p_2)$. We denote $v = u_1 - u_2$, $q = p_1 - p_2$ and $\tau = \tau_1 - \tau_2$. Let us observe that $q(t = 0) = 0$ and $\tau(t = 0) = 0$. Then v satisfies (3.2.8) and τ satisfies (3.2.24). We next use (3.2.9) and (3.2.25) in Subsection 3.2.3, together with (3.2.26) to obtain

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|v|^2 + \frac{1}{G_0} |\tau|^2) + \int_{\Omega} |\partial_y v|^2 \leq \frac{1}{G_0} \|q\|_{L^2_{y,\sigma}}^2. \quad (3.2.40)$$

Then, we integrate (3.2.40) over $[0; t]$ and we use the fact that $v(t = 0) = 0$ and $\tau(t = 0) = 0$ to obtain

$$\int_0^t \int_{\Omega} |\partial_y v|^2 \leq \frac{2}{G_0} \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} q^2. \quad (3.2.41)$$

A similar estimate on $\|q\|^2$ has already been proved in Subsection 3.2.3 and, more precisely, from the proof of (3.2.28) we infer that

$$\sup_{0 \leq s \leq t} \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} q^2(s, y, \sigma) dy d\sigma \leq C(t) \int_0^t \int_{\Omega} |\partial_y v|^2,$$

for some positive constant $C(t)$ which depends only on the data, the time interval and of $\nu(T) := \inf(\nu_1(T); \nu_2(T))$. Then, comparing with (3.2.41) we conclude that

$$\int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} q^2(t, y, \sigma) d\sigma dy \leq \frac{2C(t)}{G_0} \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} q^2(s, y, \sigma) d\sigma dy ds. \quad (3.2.42)$$

Denoting $X(t) = \int_0^t \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}} q^2 d\sigma dy ds$, (3.2.42) rewrites

$$\frac{d}{dt} X(t) \leq \frac{2C(T)}{G_0} X(t),$$

for every $t \in [0, T]$ and $X(0) = 0$. It is an easy exercise now to check that this implies that $X(t) = 0$ for every $t \in [0, T]$. Thereafter, $q = 0$ and necessarily $v = 0$ from (3.2.41). Hence $u_1 = u_2$ and $p_1 = p_2$.

The proof of Proposition 3.2.4 is over. \diamond

with

$$\begin{cases} \varphi_\nu(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} \nu} \exp\left(-\frac{x^2}{2\nu^2}\right) \quad \text{if } \nu > 0; \\ \varphi_0 &= \delta_0, \end{cases}$$

and

$$\xi(t, y) = G_0 \int_0^t \left(\partial_y u(s, y) + \frac{V(s)}{L} \right) ds .$$

Since $p_- \leq p^*$, by the maximum principle, we get the bound from below

$$\begin{aligned} & \int_{|\sigma-\chi|>1} p^*(t, y, \sigma) d\sigma \\ & \geq \int_{|\sigma-\chi|>1} p_-(t, y, \sigma) d\sigma \\ & \geq e^{-t} \int_{\mathbb{R}} p_0(y, \sigma') \left(\int_{|\sigma-\chi|>1} \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t D(p^*(s,y)) ds}}(\sigma - \sigma' - \xi(t, y)) d\sigma \right) d\sigma' \end{aligned} \quad (3.2.48)$$

for every χ in \mathbb{R} . As in [1], we introduce the interval $K_{\xi, \chi} = [-1 - \xi(t, y) + \chi, 1 - \xi(t, y) + \chi]$. The function $\sigma \mapsto \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t D(p^*(s,y)) ds}}(\sigma - \sigma' - \xi(t, y))$ is a Gaussian probability density with mean $\sigma' + \xi(t, y)$ and squared width $2 \int_0^t D(p^*(s, y)) ds$. Therefore, for every $\sigma' \in \mathbb{R} \setminus K_{\xi, \chi}$, we have

$$\int_{|\sigma-\chi|>1} \varphi_{\sqrt{2 \int_0^t D(p^*(s,y)) ds}}(\sigma - \sigma' - \xi(t, y)) d\sigma \geq \frac{1}{2},$$

which implies

$$(3.2.48) \geq \frac{1}{2} e^{-T} \int_{\mathbb{R} \setminus K_{\xi, \chi}} p_0(y, \sigma') d\sigma' = \frac{1}{2} e^{-T} \int_{|\sigma' - \chi + \xi(t, y)| > 1} p_0(y, \sigma') d\sigma' .$$

And we reach the result with the help of the assumption (3.2.4) on p_0 . \diamond

Therefore, we may apply the Banach fixed point theorem as in the proof of Proposition 3.2.1 and deduce the existence of a unique solution to the Cauchy problem (3.2.43)–(3.2.44) on $[t_0; t_0 + \tau]$ for some positive τ small enough. (Of course, this solution coincide with $(u^*; p^*)$ in virtue of the uniqueness result.) As a second step we show that this τ may be chosen independently of t_0 in $(0; t^*)$. Therefore we may build a solution beyond the time t^* and this enters in contradiction with the definition of t^* . In this attempt, we examine carefully the proof of Lemma 3.2.3, which is the crucial step for checking the assumptions of the Banach fixed point theorem on small time interval. More precisely the only modifications enter in the proofs of estimates (3.2.32), (3.2.35) and (3.2.37) as follows. Thanks to the uniform estimate given by Lemma 3.2.4, the quantity $D(p_2)$ is bounded below by $\eta \exp(-t^*)/2$ everywhere and the L^∞ and H^1 norms of p^* in the sense of (3.2.16), (3.2.17) and (3.2.20) are bounded uniformly in terms of t^* . Therefore the Lipschitz constant of \mathcal{F}_1 given by (3.2.29) is bounded uniformly in terms

of t^* whereas the Lipschitz constant of \mathcal{F}_2 is made as small as wanted thanks to (3.2.10). Thus, the condition on τ such that the composed function \mathcal{F} is a contracting mapping on $[t_0; t_0 + \tau]$ is independent of t_0 in $(0; t^*)$. Hence the result.

3.3 The case $\sigma_c = 0$

In this section, the viscosity constant ϵ is supposed non-negative. Let us emphasize the fact that in this specific case we are able to deal with the more likely physical situation when $\epsilon = 0$.

In the case when $\sigma_c = 0$, if p is a solution to (3.2.2) with $\int_{\mathbf{R}} p d\sigma = 1$, then the corresponding viscosity coefficient $D(p(t, y))$ is the constant function $\frac{\alpha}{T_0}$ for every (t, y) , and therefore p solves

$$\begin{cases} \partial_t p(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) - \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) + \frac{1}{T_0} \delta_0(\sigma) ; \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) . \end{cases}$$

Therefore p solves a linear non-degenerate parabolic equation, for which existence and uniqueness of solutions for any given transport $\partial_y u \in L^2_{t,y}$ is an easy matter (see, for example, [2]). Let us introduce the following functional spaces

$$\begin{aligned} \mathcal{U} &= C^0(\mathbf{R}^+; H^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbf{R}^+; L^2(\Omega)); \\ \mathcal{P} &= \left\{ p \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; H^1(\mathbf{R})), \sigma^k p(t, y, \sigma) \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbf{R})), \forall k \geq 1 \right\}; \\ \mathcal{T} &= C^0(\mathbf{R}^+; H^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbf{R}^+; L^2(\Omega)); \\ \mathcal{V} &= \{ V \in C^\infty(\mathbf{R}^+), V(0) = V'(0) = 0 \} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 &= \left\{ p_0 \in C^0(\mathbf{R}^+; H^1(\mathbf{R})), \sigma^k p_0(y, \sigma) \in C^0(\mathbf{R}^+; H^2(\mathbf{R})), \forall k \geq 1, \right. \\ &\quad \left. p_0 \geq 0, \forall y \in (0, L), \int_{\mathbf{R}} p_0(y, \sigma) d\sigma = 1, \int_{\mathbf{R}} \sigma p_0(y, \sigma) d\sigma = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Theorem 3.3.1 *Let $\varepsilon \geq 0$, $V \in \mathcal{V}$ and $p_0 \in \mathcal{P}_0$. Then, for every $\rho, G_0, T_0 > 0$, the*

system

$$(I_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \rho \partial_t u(t, y) = \partial_y \tau(t, y) + \epsilon \partial_{yy}^2 u(t, y) \\ \tau(t, y) = \int_{\mathbf{R}} \sigma p(t, y, \sigma) d\sigma \\ \partial_t p(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + D(p(t, y)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) \\ \quad - \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) + \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \delta_0(\sigma) \\ D(p(t, y)) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{\mathbf{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = V(t) \\ u(0, y) = 0, \quad p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) \end{array} \right.$$

admits a unique solution (u, τ, p) in $\mathcal{U} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$. Moreover, p is such that

$$\int_{\mathbf{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma = 1, \quad \text{on } \mathbf{R}^+ \times \Omega,$$

and therefore, it is the solution to (3.3.1) in \mathcal{P} .

Remark 3.3.1 Note that we do not need to impose some strict positivity assumption on the initial data p_0 but instead we will demand a symmetry type property like $\int_{\mathbf{R}} \sigma p_0 d\sigma = 0$. Moreover, our uniqueness result does not require either a sign assumption on p . We thus get as a by-product that any solution (u, p) is such that p is non-negative.

Proof of Theorem 3.3.1 : From now on we are given fixed positive parameters G_0, T_0 and ρ . The proof of Theorem 3.3.1 follows from a series of lemmatas that we now state and prove.

Lemma 3.3.1 Let $\epsilon \geq 0$ and let $(u, \tau, p) \in \mathcal{U} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$ be a solution to (I_ϵ) . Then, u is a solution to

$$(II_\epsilon) \left\{ \begin{array}{l} \partial_{tt}^2 u + \frac{1}{T_0} \partial_t u = \frac{1}{\rho} \left(G_0 + \frac{\epsilon}{T_0} \right) \partial_{yy}^2 u + \frac{\epsilon}{\rho} \partial_{t yy}^3 u ; \\ u(t, 0) = 0, \quad u(t, L) = V(t) ; \\ u(0, y) = 0, \quad \partial_t u(0, y) = 0 . \end{array} \right.$$

Lemma 3.3.2 *Let $\epsilon \geq 0$ and $V \in \mathcal{V}$. Then, the equation (II_ϵ) admits a unique solution in \mathcal{U} .*

Lemma 3.3.3 *Let $u \in \mathcal{U}$ and $p_0 \in \mathcal{P}_0$. Then, there exists one and only one solution p in \mathcal{P} to*

$$(III_\epsilon) \quad \begin{cases} \partial_t p(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + D(p(t, y)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) - \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) \\ \quad + \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \delta_0(\sigma) ; \\ D(p(t, y)) = \frac{\alpha}{T_0} \int_{\mathbf{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma ; \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) . \end{cases}$$

Lemma 3.3.4 *Let $u \in \mathcal{U}$ and $p \in \mathcal{P}$ be the respective solutions to (II_ϵ) and (III_ϵ) , and let τ be defined as in the statement of the theorem. Then, $\tau \in \mathcal{T}$, and (u, τ, p) is a solution to (I_ϵ) in $\mathcal{U} \times \mathcal{T} \times \mathcal{P}$.*

Proof of Lemma 3.3.1 : Let us first observe that if $p \in \mathcal{P}$, then we have

$$p \in C^0([0; +\infty[\times \Omega; L^1(\mathbf{R})) \quad \sigma p \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; L^1(\mathbf{R})) . \quad (3.3.1)$$

This follows from the continuous embeddings of $C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; H^1(\mathbf{R}))$ and $C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbf{R}))$ into $C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; L^\infty(\mathbf{R}))$. Then, if $p \in \mathcal{P}$,

$$(1 + \sigma^2) p \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega; L^\infty(\mathbf{R})) .$$

Therefore, for fixed (t, y) ,

$$\int_{\mathbf{R}} |p(t, y, \sigma)| d\sigma \leq \int_{\mathbf{R}} |(1 + \sigma^2) p(t, y, \sigma)| \frac{1}{1 + \sigma^2} d\sigma \leq \pi \|(1 + \sigma^2) p\|_{L^\infty} ,$$

and $p(t, y, \cdot) \in L^1(\mathbf{R})$. Moreover, if $(t_n, y_n)_{n \in \mathbf{N}}$ is a sequence in $\mathbf{R}^+ \times \Omega$ which converges towards (t, y) ,

$$\|p(t_n, y_n, \cdot) - p(t, y, \cdot)\|_{L^1_\sigma} \leq \pi \|(1 + \sigma^2) p(t_n, y_n, \cdot) - (1 + \sigma^2) p(t, y, \cdot)\|_{L^\infty} .$$

The right-hand side goes to 0 as n goes to infinity, and then $p \in C^0([0, +\infty[\times \Omega; L^1(\mathbf{R}))$. The fact that $\sigma p \in C^0([0, +\infty[\times \Omega; L^1(\mathbf{R}))$ is proved exactly the same way.

Let us now remark that $u \in \mathcal{U}$ implies that $\partial_y u(t, y) \in C^0(\mathbf{R}^+; L^2(\Omega))$, whereas, as a consequence of (3.3.1), $D(p(t, y)) \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega)$. All these regularity results allow to give a distributional sense to all terms in the equation satisfied by p ; namely

$$\begin{aligned} & \partial_t p(t, y, \sigma) + \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) \\ &= -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + D(p(t, y)) \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) + \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \delta_0(\sigma) . \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

We are now going to prove that $\int_{\mathbf{R}} p \, d\sigma = 1$ and therefore the viscosity term D has to be the constant function equal to $\frac{\alpha}{T_0}$.

Let $(\phi, \chi) \in \mathcal{D}((0, +\infty) \times \Omega) \times \mathcal{D}(\mathbf{R})$ with $0 \leq \chi \leq 1$ on \mathbf{R} and $\chi = 1$ in the vicinity of 0. Let us denote $\chi_n(\sigma) = \chi(\sigma/n)$. By multiplying (3.3.2) by the test function $\phi(t, y)\chi_n(\sigma)$ and by integrating with respect to all variables, we obtain

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \partial_t \phi(t, y) p(t, y, \sigma) \chi_n(\sigma) \, dt dy d\sigma \\
 & = G_0 \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \phi(t, y) \partial_y u(t, y) p(t, y, \sigma) \chi_n'(\sigma) \, dt dy d\sigma \\
 & \quad + \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \phi(t, y) D(p(t, y)) p(t, y, \sigma) \chi_n''(\sigma) \, dt dy d\sigma \\
 & \quad - \frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \phi(t, y) p(t, y, \sigma) \chi_n(\sigma) \, dt dy d\sigma \\
 & \quad + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \phi(t, y) \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \chi_n(0) \, dt dy
 \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Let us notice that

$$\left\{ \begin{array}{ll} 0 \leq \chi_n(\sigma) \leq 1, & \forall n \in \mathbf{N}^*, \quad \forall \sigma \in \mathbf{R}; \\ \chi_n(\sigma) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1, & \forall \sigma \in \mathbf{R}; \\ \|\chi_n'\|_{L^\infty}, \|\chi_n''\|_{L^\infty} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0. & \end{array} \right.$$

We use (3.3.1) and the dominated convergence theorem to pass to the limit with respect to n in every term of the above equality (3.3.3), and this yields

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \partial_t \phi(t, y) p(t, y, \sigma) \, dt dy d\sigma = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \partial_t \phi(t, y) \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \, dt dy \\
 & = -\frac{1}{T_0} \int_0^{+\infty} \iint_{\Omega \times \mathbf{R}} \phi(t, y) p(t, y, \sigma) \, dt dy d\sigma + \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \phi(t, y) \frac{D(p(t, y))}{\alpha} \, dt dy,
 \end{aligned}$$

thanks to the Fubini theorem. Hence

$$\int_0^{+\infty} \int_{\Omega} \partial_t \phi(t, y) D(p(t, y)) \, dt dy = 0,$$

for any function ϕ in $\mathcal{D}(\mathbf{R}^+ \times \Omega)$. Then, $\partial_t D(p(t, y)) = 0$ in the sense of distributions, and the two facts that $D(p) \in C^0(\mathbf{R}^+ \times \Omega)$ and that

$$\forall y \in \Omega, \quad D(0, y) := \frac{\alpha}{T_0} \int_{\mathbf{R}} p_0(y, \sigma) \, d\sigma = \frac{\alpha}{T_0},$$

imply that $D(p(t, y)) = \frac{\alpha}{T_0}$ on $[0, +\infty) \times \Omega$. Equivalently, we have

$$\int_{\mathbb{R}} p(t, y, \sigma) d\sigma = 1, \quad \text{on } \mathbb{R}^+ \times \Omega.$$

With the same kind of argument– multiplying Equation (3.3.2) by $\sigma \phi(t, y) \chi_n(\sigma)$, integrating over all variables and letting n go to infinity– and using (3.3), we obtain that τ satisfies

$$\partial_t \tau = G_0 \partial_y u - \frac{\tau}{T_0} \quad \text{on } \mathcal{D}'((0, +\infty) \times \Omega).$$

If we now insert this identity into the equation satisfied by u , we easily verify that u is a solution to

$$\partial_{tt}^2 u + \frac{1}{T_0} \partial_t u = \frac{1}{\rho} \left(G_0 + \frac{\epsilon}{T_0} \right) \partial_{yy}^2 u + \frac{\epsilon}{\rho} \partial_{tyy}^3 u,$$

in the sense of distributions on $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. The proof of Lemma 3.3.1 is over as soon as we have proved that $\partial_t u(0, \cdot) = 0$. Since $u \in C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)) \cap C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$ and $\tau \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$, the equation satisfied by u also holds true at $t = 0$, in the sense that

$$\partial_t u(0, \cdot) = \frac{1}{\rho} (\partial_y \tau(0, \cdot) + \epsilon \partial_{yy}^2 u(0, \cdot)) \quad \text{on } L^2(\Omega).$$

Noticing that $u(0, \cdot) = 0$, we have $\partial_{yy}^2 u(0, \cdot) \in L^2(\Omega)$. (We could then consider any initial data $u_0 \in H_0^2(\Omega)$.) The fact that $p_0 \in \mathcal{P}_0$ now gives

$$\tau(0, y) = \int_{\mathbb{R}} \sigma p_0(y, \sigma) d\sigma = 0,$$

and therefrom $\partial_y \tau(0, \cdot) = 0$. Therefore, $\partial_t u(0, \cdot) = 0$ and the proof is over. (Again, the same proof holds true under the assumption that $\int_{\mathbb{R}} \sigma p_0(y, \sigma) d\sigma$ is a constant function with respect to y , not necessarily 0.)

◇

Proof of Lemma 3.3.2 : As in Section 3.2, u is a solution to (II_ϵ) if and only the function $v(t, y) = u(t, y) - V(t) \frac{y}{L}$ is a solution to

$$\begin{cases} \partial_{tt}^2 v + \frac{1}{T_0} \partial_t v = \left(\frac{G_0 + \epsilon/T_0}{\rho} \right) \partial_{yy}^2 v + \frac{\epsilon}{\rho} \partial_{tyy}^3 v - \left(V''(t) + \frac{1}{T_0} V'(t) \right) \frac{y}{L}; \\ v(0, y) = \partial_t v(0, y) = 0 \quad \text{for all } y \in [0; L]; \\ v(t, 0) = v(t, L) = 0 \quad \text{for all } t \in [0; T], \end{cases} \quad (3.3.4)$$

in $C^0(\mathbb{R}^+; H_0^2(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$. In order to show the existence of such a solution v , we are going to expand it in Fourier series bases with respect to the space variable y . Since

$$\frac{y}{L} = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \sin\left(n\pi \frac{y}{L}\right) \quad \text{on } L^2(\Omega),$$

we are looking for a solution v to (3.3.4) of the form

$$v_n(t, y) = \sum_{n \geq 0} \omega_n(t) \sin\left(n\pi \frac{y}{L}\right),$$

and we check that the ω_n 's are solutions in $C^2(\mathbb{R}^+)$ to the following family of Cauchy problems :

$$(IV_\epsilon^n) \quad \begin{cases} \omega_n''(t) + \frac{1 + \mu_\epsilon n^2}{T_0} \omega_n'(t) + \frac{\lambda_\epsilon n^2}{T_0^2} \omega_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} f(t); \\ \omega_n(0) = 0, \quad \omega_n'(0) = 0, \end{cases}$$

with $f \in C^\infty(\mathbb{R}^+)$ defined by

$$f(t) = V''(t) + \frac{1}{T_0} V'(t),$$

and

$$\lambda_\epsilon = \frac{(G_0 + \epsilon/T_0)\pi^2 T_0^2}{\rho L^2}, \quad \mu_\epsilon = \frac{\pi^2 \epsilon T_0}{\rho L^2}.$$

For every $n \in \mathbb{N}^*$, (IV_ϵ^n) admits a unique solution given by

$$\omega_n(t) = (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \int_0^t G_n(t-s) f(s) ds,$$

where G_n is the unique solution in $C^2(\mathbb{R}^+)$ to

$$\begin{cases} G_n''(t) + \frac{1 + \mu_\epsilon n^2}{T_0} G_n'(t) + \frac{\lambda_\epsilon n^2}{T_0^2} G_n(t) = 0; \\ G_n(0) = 0, \quad G_n'(0) = 1. \end{cases}$$

Then, the solution ω_n to (IV_ϵ^n) satisfies

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |v_n(t)| \leq \frac{C}{n^3}, \quad |v_n'(t)| \leq \frac{C}{n},$$

for some positive constants C which are independent of n . We treat separately the two cases $\epsilon > 0$ and $\epsilon = 0$.

The case when $\epsilon > 0$. For n large enough (depending on T_0 , ρ , ϵ and L), the characteristic polynomial

$$z^2 + \frac{1 + \mu_\epsilon n^2}{T_0} z + \frac{\lambda_\epsilon n^2}{T_0^2}$$

has two distinct and negative square roots

$$z_n^+ = \frac{-(1 + \mu_\epsilon n^2) + \sqrt{(1 + \mu_\epsilon n^2)^2 - 4\lambda_\epsilon n^2}}{2T_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\lambda_\epsilon}{\mu_\epsilon T_0}$$

$$z_n^- = \frac{-(1 + \mu_\epsilon n^2) - \sqrt{(1 + \mu_\epsilon n^2)^2 - 4\lambda_\epsilon n^2}}{2T_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{\mu_\epsilon n^2}{T_0}.$$

We deduce that for $n \geq N$ (N large enough)

$$G_n(t) = \frac{e^{z_n^+ t} - e^{z_n^- t}}{z_n^+ - z_n^-}$$

fulfills

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |G_n(t)| \leq \frac{2}{z_n^+ - z_n^-} \leq \frac{C}{n^2}, \quad |G'_n(t)| \leq \frac{|z_n^+ + z_n^-|}{z_n^+ - z_n^-} \leq C.$$

Let us now look at the case when $\epsilon = 0$.

In this case

$$G_n(t) = e^{-t/2T_0} \frac{\sin(\nu_n t)}{\nu_n} \quad \text{with} \quad \nu_n = \frac{\sqrt{4\lambda_0 n^2 - 1}}{2T_0} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{\sqrt{\lambda_0} n}{T_0}.$$

This gives

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |G_n(t)| \leq \frac{C}{n}, \quad |G'_n(t)| \leq C,$$

and therefore

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\omega_n(t)| \leq \frac{C}{n^2}, \quad |\omega'_n(t)| \leq \frac{C}{n}.$$

These estimates can be further improved by integrating by parts as follows

$$\begin{aligned} \omega_n(t) &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi} \int_0^t e^{-(t-s)/2T_0} \frac{\sin(\nu_n(t-s))}{\nu_n} f(s) ds \\ &= (-1)^{n+1} \frac{2}{n\pi\nu_n^2} \left(f(t) - \cos(\nu_n t) e^{-t/2T_0} f(0) - \int_0^t \cos(\nu_n(t-s)) \frac{d}{ds} \left(f(s) e^{-(t-s)/2} \right) ds \right), \end{aligned}$$

hence

$$\forall n \geq N, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |\omega_n(t)| \leq \frac{C}{n^3}.$$

Finally, for every $\epsilon \geq 0$, the function v defined by the sequence

$$v(t, y) = \sum_{n=1}^{+\infty} \omega_n(t) \sin\left(n\pi \frac{y}{L}\right)$$

is in $C^0(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ and it satisfies equation (3.3.4). Therefore, the function $u(t, y) = v(t, y) + V(t) \frac{y}{L}$ is the solution to (II_ϵ) . \diamond

Proof of Lemma 3.3.3 : As a byproduct of the proof of Lemma 3.3.2 any solution p to (III _{ϵ}) is such that $D(p(t, y)) = \alpha/T_0$ is in $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. It is a standard result then that the problem

$$(IV) \quad \begin{cases} \partial_t p(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) - \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) + \frac{1}{T_0} \delta_0(\sigma) ; \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) \end{cases}$$

admits a unique solution in \mathcal{P} .

First of all we prove the uniqueness of such solution and we argue by contradiction. Let p_1 and p_2 be two solutions to (IV), and let $y_0 \in \Omega$ and $w_{y_0}(t, \sigma)$ be defined by

$$\forall (t, \sigma) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad w_{y_0}(t, \sigma) = p_1(t, y_0, \sigma) - p_2(t, y_0, \sigma) .$$

Clearly, w_{y_0} is in $C^0(\mathbb{R}^+, H^1(\mathbb{R}))$ thus in $L_{loc}^2(]0, +\infty[, H^1(\mathbb{R})) \cap C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$, w_{y_0} solves

$$(V_{y_0}) \quad \begin{cases} \partial_t w_{y_0}(t, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y_0) \partial_\sigma w_{y_0}(t, \sigma) + \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 w_{y_0}(t, \sigma) - \frac{1}{T_0} w_{y_0}(t, \sigma) ; \\ w_{y_0}(0, \sigma) = 0 . \end{cases}$$

However, it is clear from the equation that $\partial_t w_{y_0}(t, \sigma)$ is in $C^0(\mathbb{R}^+, H^{-1}(\mathbb{R}))$, hence in $L_{loc}^2(]0, +\infty[, H^{-1}(\mathbb{R}))$. As (V _{y_0}) admits a unique solution in $L_{loc}^2(]0, +\infty[, H^1(\mathbb{R})) \cap C^0(\mathbb{R}^+, L^2(\mathbb{R}))$ such that $\partial_t w \in L_{loc}^2(]0, +\infty[, H^{-1}(\mathbb{R}))$, necessarily $w_{y_0} = 0$. Hence the uniqueness.

To prove existence, let us denote

$$\chi(t, y) = G_0 \int_0^t \partial_y u(s, y) ds$$

and let us consider the function $r(t, y, \xi)$ defined by :

$$r(t, y, \xi) = e^{-\alpha\xi^2 t/T_0} \hat{p}_0(y, \xi) + \frac{1}{T_0} \int_0^t e^{-\alpha\xi^2(t-s)/T_0} e^{s/T_0} e^{i\xi\chi(s, y)} ds, \quad (3.3.5)$$

for all $(t, y, \xi) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \times \mathbb{R}$, and where $\hat{p}_0 = \mathcal{F}(p_0)$ is the Fourier transform of p_0 with respect to the σ variable. (The normalization for the Fourier transform is chosen in such a way that $\mathcal{F}(\delta_0) = 1$.) The fact that $p_0 \in \mathcal{P}$ gives $\hat{p}_0 \in C^0(\Omega \times \mathbb{R})$ and we directly check from (3.3.5) that the function $t \mapsto r(t, y, \xi)$ is C^1 , for every $(y, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R}$, and satisfies

$$\begin{cases} \partial_t r(t, y, \xi) &= -\frac{\alpha}{T_0} \xi^2 r(t, y, \xi) + e^{i\xi\chi(t, y)} ; \\ r(0, y, \xi) &= \hat{p}_0(y, \xi) . \end{cases}$$

Moreover, the solution r lives in $C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega, L^2(\mathbb{R}; \xi^2 d\xi))$. Actually, we have

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |r(t, y, \xi)|^2 d\xi \\ & \leq \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\hat{p}_0(y, \xi)|^2 d\xi + \frac{e^{2t/T_0}}{T_0^2} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) \left(\int_0^t e^{-\alpha\xi^2(t-s)/T_0} ds \right)^2 d\xi \\ & = \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) |\hat{p}_0(y, \xi)|^2 d\xi + \frac{e^{2t/T_0}}{T_0^2} \int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) \left(\frac{1 - e^{-\alpha\xi^2 t/T_0}}{\alpha\xi^2/T_0} \right)^2 d\xi < +\infty ; \end{aligned}$$

(The fact that $p_0 \in \mathcal{P}_0$ implies that $\hat{p}_0 \in L^2(\mathbb{R}; \xi^2 d\xi)$, thus $r(t, y, \cdot) \in L^2(\mathbb{R}; \xi^2 d\xi)$.) Let us now consider a sequence $(t_n, y_n)_{n \geq 1}$ in $\mathbb{R}^+ \times \Omega$ which converges towards $(t, y) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega$. We prove, by using the dominated convergence theorem, that

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) \left| e^{-\alpha\xi^2 t_n/T_0} \hat{p}_0(y_n, \xi) - e^{-\alpha\xi^2 t/T_0} \hat{p}_0(y, \xi) \right|^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 ,$$

and that

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + \xi^2) \left| \int_0^{t_n} e^{-\alpha\xi^2(t_n-s)/T_0} e^{i\chi(t_n, y_n)} ds - \int_0^t e^{-\alpha\xi^2(t-s)/T_0} e^{i\chi(t, y)} ds \right|^2 d\xi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 .$$

Let us denote $q(t, y, \sigma)$ the inverse Fourier transform with respect to ξ of the function $r(t, y, \xi)$ and let us denote

$$p(t, y, \sigma) = e^{-t/T_0} q(t, y, \sigma - \chi(t, y)) .$$

Then, we prove successively that q is in $C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega, H^1(\mathbb{R}))$ and verifies

$$\begin{cases} \partial_t q(t, y, \sigma) = \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 q(t, y, \sigma) + \delta_{-\chi(t, y)}(\sigma) \\ q(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) , \end{cases}$$

whereas $p \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega, H^1(\mathbb{R}))$ solves

$$\begin{cases} \partial_t p(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p(t, y, \sigma) + \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, y, \sigma) - \frac{1}{T_0} p(t, y, \sigma) + \delta_0(\sigma) ; \\ p(0, y, \sigma) = p_0(y, \sigma) . \end{cases}$$

It remains us to prove that for every $k \geq 1$, $p_k(t, y, \sigma) := \sigma^k p(t, y, \sigma)$ is in $C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbb{R}))$. For this, it is enough to observe that

$$\begin{cases} \partial_t p_1(t, y, \sigma) = -G_0 \partial_y u(t, y) \partial_\sigma p_1(t, y, \sigma) + \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 p_1(t, y, \sigma) - \frac{1}{T_0} p_1(t, y, \sigma) + f_1(t, y, \sigma) ; \\ p_1(0, y, \sigma) = \sigma p_0(y, \sigma) , \end{cases}$$

where

$$f_1(t, y, \sigma) = \partial_y u(t, y) p(t, y, \sigma) - \frac{2\alpha}{T_0} \partial_\sigma p(t, y, \sigma)$$

lives in $C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; L^2(\mathbb{R}))$. With $q_1(t, y, \sigma) := e^{t/T_0} p_1(t, y, \sigma + \chi(t, y))$ and $g_1(t, y, \sigma) = e^{t/T_0} f_1(t, y, \sigma + \chi(t, y))$, we have

$$\begin{cases} \partial_t q_1(t, y, \sigma) &= \frac{\alpha}{T_0} \partial_{\sigma\sigma}^2 q_1(t, y, \sigma) + g_1(t, y, \sigma) ; \\ q_1(0, y, \sigma) &= \sigma p_0(y, \sigma) , \end{cases}$$

and $g_1(t, y, \sigma)$ in $C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; L^2(\mathbb{R}))$. Thus $q_1 \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbb{R}))$ and therefore $p_1 \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbb{R}))$. We argue by induction to establish that $p_k \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; H^2(\mathbb{R}))$ for every $k \geq 2$. \diamond

Proof of Lemma 3.3.4 : Let u (respectively p) be a solution to $(II)_\epsilon$ (respectively $(III)_\epsilon$) whose existence is ensured by Lemma 3.3.2 (respectively Lemma 3.3.3). We have already established that $\sigma p \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega; L^1(\mathbb{R}))$. This guarantees that $\tau \in C^0(\mathbb{R}^+ \times \Omega)$ and that τ solves the equation

$$\partial_t \tau = G_0 \partial_y u - \frac{\tau}{T_0} \quad \text{on } \mathcal{D}'(]0, +\infty[\times \Omega) . \quad (3.3.6)$$

Since $\partial_y u \in C^0(\mathbb{R}^+; H^1(\Omega))$, $\tau \in \mathcal{T}$. Let us introduce the function

$$w(t, y) = \rho \partial_t u(t, y) - \partial_y \tau(t, y) - \epsilon \partial_{yy}^2 u(t, y) .$$

We want to show that $w = 0$. This is due to the fact that, thanks to $(II)_\epsilon$ and (3.3.6), w solves

$$\begin{aligned} \partial_t w + \frac{1}{T_0} w &= \rho \partial_{tt}^2 u + \frac{\rho}{T_0} \partial_t u - \partial_{ty}^2 \tau - \frac{1}{T_0} \partial_y \tau - \epsilon \partial_{t yy}^3 u - \frac{\epsilon}{T_0} \partial_{yy}^2 u \\ &= (G_0 + \frac{\epsilon}{T_0}) \partial_{yy}^2 u - G_0 \partial_{yy}^2 u - \epsilon \partial_{t yy}^3 u - \frac{\epsilon}{T_0} \partial_{yy}^2 u = 0 , \end{aligned}$$

together with $w(0, \cdot) = 0$. We may conclude since $w \in C^0(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$. Therefore u and τ are related by

$$\rho \partial_t u(t, y) - \partial_y \tau(t, y) - \epsilon \partial_{yy}^2 u(t, y) = 0 ,$$

and the proof of Lemma 3.3.4 is over. \diamond

References

- [1] E.CANCES, I.CATTO AND Y.GATI, *Mathematical analysis of a non linear parabolic equation arising in the modelling of non-newtonian flows.*
- [2] M. CHIPOT, *Elements of nonlinear analysis*, Birkhäuser, Basel, 2000.
- [3] P. HÉBRAUD AND F. LEQUEUX, *Mode coupling theory for the pasty rheology of soft glassy materials*, Phys. Rev. Lett., **81**(14), pp. 2934–2937, 1998.
- [4] J. L. LIONS AND E. MAGENES, *Nonhomogeneous boundary value problems and applications*, Springer-Verlag, Berlin, New York, 1972.
- [5] R.TEMAM, *Navier-Stokes equations. North-Holland, Amsterdam, 1977.*

Deuxième partie

Résolution numérique

Chapitre 4

Simulations numériques

Une partie des résultats présentés dans ce chapitre a fait l'objet d'un Proceeding soumis à International Journal for Numerical Methods in Fluids. Il s'agit de la résolution numérique du système d'équations couplées, de techniques de réduction de variance, ainsi que des résultats de simulations de quelques expériences de rhéologie.

4.1 Introduction

La mise en équation de l'écoulement des fluides complexes est un problème fort difficile, loin d'être résolu à l'heure actuelle. Parallèlement aux études visant à l'amélioration des modèles rhéologiques phénoménologiques (lois de comportement purement macroscopiques), des tentatives sont faites pour retrouver le comportement rhéologique d'un fluide complexe donné à partir des processus physiques élémentaires intervenant dans sa microstructure. La simulation numérique peut alors être utilisée pour tester et améliorer ces modèles en comparant leurs prédictions aux données expérimentales rhéométriques ; couplée avec un algorithme d'optimisation, la simulation numérique peut également être utilisée pour caler les paramètres d'un modèle.

Le but de ce travail numérique est celui de proposer, de mettre en oeuvre et de comparer des schémas numériques pour résoudre le modèle proposé dans Chapitre I. Ce modèle, rappelons-le, est un modèle micro-macro dans une dimension de l'espace décrivant un écoulement Couette des suspensions concentrées de particules molles. La simulation numérique va nous permettre en premier lieu de savoir si ce modèle réussit bien à reproduire certains comportements généraux des suspensions exposés au Chapitre I. Notons que même si nous nous focalisons ici sur ce modèle, la démarche que nous mettons en oeuvre peut s'appliquer à une large classe de modèles.

Nous nous proposons d'adimensionnaliser le système d'équations couplées. Pour cela introduisons une longueur L et un temps T , caractéristiques de la situation étudiée et posons les changements de variables $t' = t/T$, $y' = y/L$ et $\sigma' = \sigma/\sigma_C$. Nous adimensionnons τ par $\tau' = \tau/\sigma_C$, P par $P' = \sigma_C P$ et u par $u' = uT/L$. Le système d'équations couplées s'écrit ainsi comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_{y'} u'(y', t') = \partial_{y'} \tau'(y', t'), \\ \partial_{y'} P'(y', \sigma', t') = -\frac{G_0}{\sigma_C} \partial_{y'} u'(y', t') \partial_{\sigma'} P'(y', \sigma', t') + \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} D'(P') \partial_{\sigma' \sigma'}^2 P'(y', \sigma', t') \\ \quad - \frac{T}{T_0} H(|\sigma'| > 1) P'(y', \sigma', t') + \frac{T}{T_0} D'(P') \delta_0(\sigma'), \\ \tau'(y', t') = \int_{\mathbf{R}} \sigma' P'(y', \sigma', t') d\sigma', \\ D'(P')(y', t') = \int_{|\sigma'| > 1} P'(y', \sigma', t') d\sigma'. \end{array} \right.$$

Remarque 4.1.1 Le coefficient adimensionnel $\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C}$ représente le nombre de Reynolds et T/T_0 représente le nombre de Deborah. Ils seront notés dans la suite Re et De respec-

tivement. On introduit aussi les nombres adimensionnels $\lambda = \frac{G_0}{\sigma_C}$ et $\mu = \frac{\alpha}{\sigma_C^2}$. Dans toute la suite, nous nous plaçons dans le cadre des équations adimensionnées en omettant pour plus de clarté les primes, le problème qui nous intéresse est finalement :

$$\left\{ \begin{array}{l} Re \partial_t u(y, t) = \partial_y \tau(y, t), \end{array} \right. \quad (4.1.1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t P(y, \sigma, t) = -\lambda \partial_y u(y, t) \partial_\sigma P(y, \sigma, t) + \mu De D(P) \partial_{\sigma\sigma}^2 P(y, \sigma, t) \\ \quad - De H(|\sigma| > 1) P(y, \sigma, t) + De D(P) \delta_0(\sigma), \end{array} \right. \quad (4.1.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau(y, t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma P(y, \sigma, t) d\sigma, \end{array} \right. \quad (4.1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D(P)(y, t) = \int_{|\sigma|>1} P(y, \sigma, t) d\sigma. \end{array} \right. \quad (4.1.4)$$

Nous supposons que le fluide est initialement au repos, que la plaque inférieure ($y = 0$) reste immobile, tandis que la plaque supérieure ($y = 1$) est mise en mouvement à la vitesse $V(t)$. Ainsi, les conditions limites sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(y, 0) = 0 & \text{pour tout } y \in (0, 1) ; \\ P(y, \sigma, 0) = P^0(y, \sigma) & \text{pour tout } (y, \sigma) \in (0, 1) \times \mathbf{R} ; \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, t) = 0 & \text{pour tout } t \in [0, 1] ; \\ u(1, t) = V(t) & \text{pour tout } t \in [0, 1]. \end{array} \right.$$

Comme P est une densité de probabilité, il faut en outre imposer les conditions

$$\int_{\mathbf{R}} P^0(y, \sigma) d\sigma = 1, \quad \text{pour tout } y \in (0, 1)$$

et

$$P^0(y, \sigma) \geq 0, \quad \text{pour tout } y \in (0, 1).$$

Dans l'implémentation de la valeur initiale de P , nous prendrons systématiquement P une gaussienne centrée réduite. Le système micro-macro ci-dessus n'a pas, hormis dans des cas marginaux (voir Chapitre II), de solution analytique et il faut donc approcher numériquement la solution (u, P, τ) de ce système d'équations.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous commençons par expliquer la résolution numérique de l'équation de la conservation de la quantité de mouvement (4.1.1). Ensuite, deux méthodes de résolution de l'équation de Fokker-Planck sont proposées : une méthode déterministe et une méthode stochastique. Nous comparerons alors les résultats de ces deux méthodes ainsi que leur efficacité en termes de temps et coût de calcul. Enfin, deux méthodes de réduction de variance se rapportant à la méthode stochastique seront proposées, et leurs résultats seront discutés.

4.2 Simulations numériques

Supposons que l'intervalle de temps $[0; 1]$ soit divisé en ndt pas de temps. On notera $t^n = n\Delta t$, avec $\Delta t = 1/ndt$, $n \in 1, \dots, ndt$. La solution approchée de notre système va être calculée en ces temps discrets. Divisons de la même manière l'intervalle de l'espace $[0; 1]$ en ndy pas d'espace. Nous avons de même $y_k = k\Delta y$ avec $\Delta y = 1/ndy$ et $k = 1, \dots, ndy$. Supposons ensuite que $\sigma \in [-\sigma_{max}; \sigma_{max}]$ et discrétisons aussi cet intervalle en nds pas. Notons qu'il est en effet légitime de restreindre le domaine de σ puisque $P(t, y, \sigma)$ est une fonction de $H^1(\mathbb{R})$ et décroît vers 0 quand $|\sigma|$ tend vers l'infini (voir Chapitre II). Notons $\Delta\sigma = 2\sigma_{max}/nds$, et $P_s = s\Delta\sigma$ avec $s = 1, \dots, nds$. Dans ce qui suit, u^n , $P^{n+1/2}$, u_k et $u_{k+1/2}$ désignent respectivement les approximations de $u(t^n)$, $P(t^n + \Delta t/2)$, $u(k\Delta y)$ et $u(y_k + \Delta y/2)$.

Nous allons tout d'abord expliquer comment discrétiser l'équation de la conservation de la quantité mouvement. La formulation variationnelle de l'équation (4.1.1) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u, \tau) \in L^2(0, 1; H^1(0; 1)) \times L^2(0, 1; L^2(0; 1)) \text{ vérifiant} \\ u(0, t) = 0, u(L, t) = V(t) \text{ et tel que} \\ \text{Re } \frac{d}{dt} \int_0^1 u v = - \int_0^1 \tau \frac{dv}{dy}, \quad \text{pour tout } v \in H_0^1(0; 1). \end{array} \right. \quad (4.2.1)$$

Dans le but de résoudre cette équation par une méthode d'éléments finis en espace qui soit efficace et pas très coûteuse, nous choisissons une discrétisation \mathbb{P}_1 en u et \mathbb{P}_0 en τ (voir fig [4.1]) ; ceci nous conduit au système algébrique suivant :

$$\text{Re } \frac{d}{dt} M U(t) = - L T(t) - A V(t)$$

où M est la matrice $(M_{i,j})_{1 \leq i, j \leq ndy-1}$ et $M_{ij} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j = \Delta y \text{ tridiag}(1/6, 2/3, 1/6)$, A est le vecteur $(A_k)_{1 \leq k \leq ndy-1}$ avec $A_k = 0$ si $k \neq 0$ et $A_k = 1$ sinon, et L est la matrice $(L_{j,k})_{1 \leq j, k \leq ndy-1}$ avec $L_{jk} = \int_0^1 \varphi_j' \chi_k = \text{tridiag}(0, 1, -1)$. Les fonctions φ et χ sont respectivement les fonctions de \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_0 . Enfin le vecteur $U(t)$ est égal à $(u_k(t))_{1 \leq k \leq ndy-1}$ et $T(t)$ est égal à $(\tau_k(t))_{1 \leq k \leq ndy-1}$.

Discrétisons maintenant ce système dynamique en temps par un schéma d'Euler explicite avec un pas de temps constant Δt :

$$U^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{\text{Re}} M^{-1} \cdot B^n \quad (4.2.2)$$

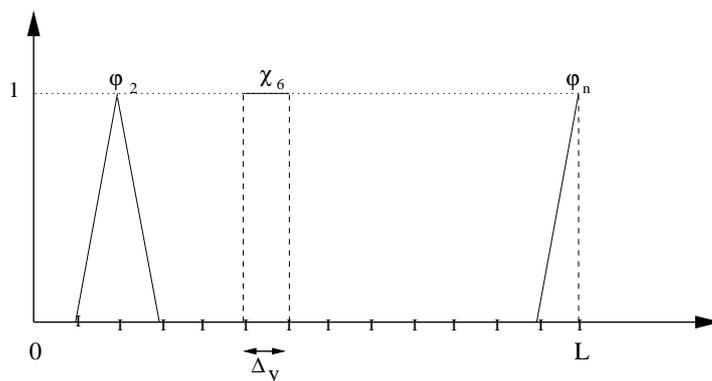


FIG. 4.1 – Fonctions de base dans la méthode des éléments finis

avec $B^n = -LT(n\Delta t) - AV(n\Delta t)$; le vecteur $T(n\Delta t)$ est obtenu par collocation en les points du maillage de coordonnées $(k + 1/2) \Delta y$:

$$T_k(n\Delta t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma P_h((k + 1/2) \Delta y, \sigma, n \Delta t) d\sigma. \quad (4.2.3)$$

Il reste maintenant à expliquer comment calculer l'intégrale ci-dessus et résoudre l'équation d'évolution sur P , deux questions qui sont intimement corrélées. Pour ce faire, nous commençons par fixer en espace l'équation. Ensuite, nous suivons deux approches, l'une déterministe, l'autre stochastique. Dans l'approche déterministe, nous allons avoir recours aux méthodes classiques de résolution des équations aux dérivées partielles. Dans la seconde approche, il s'agit d'écrire un schéma basé sur l'interprétation probabiliste de l'équation de l'évolution et de calculer le tenseur des contraintes par la méthode de *Monte-Carlo*.

4.2.1 Approche déterministe

Dans l'approche déterministe, l'intégrale (4.2.3) est approchée par une somme de Riemann sur l'intervalle $[-\sigma_{max}, \sigma_{max}]$:

$$T_k(n\Delta t) = \sum_{s=1}^{nds} (s \Delta \sigma) P((k + 1/2) \Delta y, s \Delta \sigma, n \Delta t); \quad (4.2.4)$$

Supposons connues à l'instant t^n les valeurs de $\partial_y u_k^n$ et $P_{k,s}^n$, notre but est de construire $P_{k,s}^{n+1}$. Commençons par discrétiser en temps l'équation d'évolution sur P par une méthode de *splitting*. L'idée de base de cette méthode est de regarder l'opérateur différentiel de l'évolution comme étant la somme de I opérateurs L_i , $i \in \{1, \dots, I\}$ de structure plus

simple. Ces opérateurs sont en général choisis de manière à ce qu'ils aient un sens physique spécifique. Pour traiter par exemple un opérateur d'évolution de type advection-diffusion, on choisira de le diviser en deux pour faire apparaître le phénomène de transport et celui de la chaleur. Chacun des opérateurs sera ensuite intégré en temps et donnera lieu à une équation beaucoup moins compliquée. La valeur de la solution est ainsi calculée à travers des valeurs intermédiaires. Chacune de ces valeurs est obtenue en résolvant un problème relatif à un seul des opérateurs L_i . Pour le splitting en temps de l'équation d'évolution en P , nous diviserons le problème en trois sous-problèmes : advection, diffusion et sources. En effet, nous remarquons que notre équation peut s'écrire symboliquement

$$\partial_t P = \mathcal{A}(t) \cdot P + \mathcal{D}(t) \cdot P + \mathcal{S} \cdot P,$$

où $\mathcal{A}(t) = -\lambda \partial_y u(t) \partial_\sigma$ est un opérateur d'advection, $\mathcal{D}(t) = \mu De D \partial_{\sigma\sigma}^2$ un opérateur de diffusion, et $\mathcal{S} = -De H(|\sigma| > 1) + De \left(\int_{|\sigma'| > 1} \bullet(\sigma', y, t) d\sigma' \right) \delta_0(\sigma)$ un opérateur de type "sources", de telle sorte que

$$P(y, \sigma, t) = \mathbf{T} \exp \left(\int_0^t (\mathcal{A}(s) + \mathcal{D}(s) + \mathcal{S}) ds \right) \cdot P(y, \sigma, 0),$$

où \mathbf{T} désigne le *time ordering operator*, puis d'utiliser une formule d'intégration en temps et une formule de Trotter pour approcher respectivement l'intégrale et l'exponentielle d'opérateurs qui ne commutent pas (l'opérateur sources, par exemple, ne commute pas avec l'opérateur de diffusion).

Un schéma de *Strang splitting* [4] en temps donne

$$P(y, \sigma, (n+1)\Delta t) = e^{\frac{\Delta t}{2}\mathcal{S}} e^{\mathcal{A}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{D}(\Delta t)} e^{\mathcal{A}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\frac{\Delta t}{2}\mathcal{S}} \cdot P(y, \sigma, n\Delta t), \quad (4.2.5)$$

mais bien d'autres schémas de discrétisation peuvent être ainsi construits. L'intérêt de la formulation (4.2.5) est qu'elle est équivalente au schéma suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t P_1 = -De H(|\sigma| > 1) P_1 + De \left(\int_{|\sigma'| > 1} P_1 \right) \delta_0(\sigma) & P_1(y, \sigma, 0) = P(y, \sigma, n\Delta t), \\ \partial_t P_2 = -\lambda \partial_y u(y, t) \partial_\sigma P_2 & P_2(y, \sigma, 0) = P_1(y, \sigma, \frac{\Delta t}{2}), \\ \partial_t P_3 = \mu De D(y, t) \partial_{\sigma\sigma}^2 P_3 & P_3(y, \sigma, 0) = P_2(y, \sigma, \frac{\Delta t}{2}), \\ \partial_t P_4 = -\lambda \partial_y u(y, t) \partial_\sigma P_4 & P_4(y, \sigma, 0) = P_3(y, \sigma, \Delta t), \\ \partial_t P_5 = -De H(|\sigma| > 1) P_5 + De \left(\int_{|\sigma'| > 1} P_5 \right) \delta_0(\sigma) & P_5(y, \sigma, 0) = P_4(y, \sigma, \frac{\Delta t}{2}), \\ P(y, \sigma, (n+1)\Delta t) = P_5(y, \sigma, \frac{\Delta t}{2}). \end{array} \right.$$

Tout se passe donc comme si on traitait séparément chacune des composantes (advection, diffusion, sources) de l'opérateur d'évolution ; ceci permet de mettre en oeuvre les schémas classiques de l'analyse numérique associés à ces trois équations élémentaires, la variable σ étant discrétisée sur la même grille uniforme que celle qui sert à calculer l'intégrale (4.2.3).

Remarque 4.2.1 *Le schéma de splitting nous permet de traiter séparément les problèmes d'advection, sources et diffusion et nous permet donc d'utiliser un schéma adéquat à chacun de ces problèmes et notamment d'utiliser selon notre choix des schémas explicites ou implicites en temps.*

Explicitons maintenant, les différents schémas utilisés pour traiter chaque problème :

i. Advection

Ici, nous commençons par “geler” à chaque itération en temps le terme $\partial_y u$. C'est-à-dire qu'à t^n nous utiliserons le terme de transport $\partial_y u^n$ pour le calcul de P^{n+1} .

Le schéma *upwind* est utilisé pour discrétiser l'équation d'advection comme suit ;

$$\frac{P_{k,s}^{n+1} - P_{k,s}^n}{\Delta t} = \begin{cases} -\frac{a_k^n}{\Delta\sigma} (P_{k,s+1}^n - P_{k,s}^n), & a_k^n < 0 \\ -\frac{a_k^n}{\Delta\sigma} (P_{k,s}^n - P_{k,s-1}^n), & a_k^n > 0 \end{cases} \quad (4.2.6)$$

où $a_k^n = \lambda (U_{k+1}^n - U_k^n) / \Delta y$. Ce schéma peut s'écrire sous la forme

$$P_{k,s}^{n+1} = P_{k,s}^n - \frac{\Delta t}{2\Delta\sigma} a_k^n (P_{k,s+1}^n - P_{k,s-1}^n) + \frac{\Delta t}{2\Delta\sigma} |a_k^n| (P_{k,s+1}^n - 2P_{k,s}^n + P_{k,s-1}^n).$$

Ce schéma est en fait un schéma d'Euler centré auquel on a ajouté le terme $\frac{\Delta t}{2\Delta\sigma} |a_k^n| (P_{k,s+1}^n - 2P_{k,s}^n + P_{k,s-1}^n)$ qui est une approximation de $\partial_{\sigma\sigma}^2 P$ au point $P_{k,s}^n$. Ce terme est une viscosité artificielle qui est ajoutée pour rendre le schéma plus stable. Le schéma *upwind* est stable sous la condition

$$\left| a_k^n \frac{\Delta t}{\Delta\sigma} \right| \leq 1 \quad k = 1, \dots, ndy \quad \text{et} \quad n = 1, \dots, ndt.$$

Notons enfin qu'il est clair d'après le schéma que $P^{n+1} \geq 0$ si $P^n \geq 0$.

ii. Diffusion

Pour traiter le problème de la diffusion nous avons choisi deux méthodes selon la valeur de $\mu De D_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2}$. Ainsi, pour $\mu De D_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} < \frac{1}{2}$, nous appliquons le schéma d'Euler explicite en temps pour trouver :

$$P_{k,s}^{n+1} = P_{k,s}^n + \mu De D_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} (P_{k,s+1}^n - 2P_{k,s}^n + P_{k,s-1}^n). \quad (4.2.7)$$

rappelons que ce schéma est stable sous la condition $\mu De D_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} < \frac{1}{2}$ et qu'il préserve le principe du maximum discet.

Dans le cas où $\mu De D_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} \geq \frac{1}{2}$, nous appliquons d'abord la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 en σ pour trouver :

$$M \frac{d}{dt} P(t) = -\mu De K D(t) P(t),$$

où $M = (M_{i,j})_{1 \leq i,j \leq nds-1}$ avec $M_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j$, $K = (K_{i,j})_{1 \leq i,j \leq nds-1}$ avec $K_{i,j} = \int_0^1 \varphi_i' \varphi_j'$. Nous discrétisons ensuite cette équation en temps par un schéma d'Euler implicite comme suit

$$(M + \mu De \Delta t D^n K) P_k^{n+1} = M P_k^n. \quad (4.2.8)$$

Ici nous approximons D^{n+1} par D^n que nous approchons par la somme des $P_{k,s}^n$ où l'indice s correspond à des valeurs de $|\sigma|$ supérieures à 1.

iii. Sources

Le dernier problème sources peut être résolu analytiquement. En effet, selon la valeur de σ le problème peut s'écrire comme suit

$$\begin{cases} \partial_t P = -De P & \text{quand } |\sigma| > 1, \\ \partial_t P = 0 & \text{quand } |\sigma| \leq 1 \text{ et } \sigma \neq 0, \\ \partial_t P = De \int_{|\sigma|>1} P(t, y, \sigma) d\sigma & \text{quand } \sigma = 0. \end{cases}$$

Pour le cas $\sigma = 0$, nous remarquons le fait que P est une densité de probabilité en tout point y et en tout temps $t \in [0; T]$ (voir Chapitre II). Ainsi, pour $P_{k,s}^n$ donné, nous approchons la solution du problème sources comme suit :

$$\begin{cases} P_{k,s}^{n+1} = P_{k,s}^n e^{-\Delta t De} & \text{si } |s \Delta \sigma| > \sigma_c \\ P_{k,s}^{n+1} = P_{k,s}^n & \text{si } 0 < |s \Delta \sigma| \leq \sigma_c \\ P_{k,0}^{n+1} = \frac{1}{\Delta \sigma} - \sum_{s \neq 0} P_{k,s}^{n+1} \end{cases} \quad (4.2.9)$$

Remarquons que σ_{max} doit être choisi suffisamment grand pour que la solution numérique soit nulle au voisinage de $-\sigma_{max}$ et de σ_{max} , ce afin que le calcul ait un sens.

Pour plus de détails sur les méthodes et schémas numériques utilisés dans cette section nous renvoyons le lecteur à [13].

4.2.1.1 Algorithme

Le schéma général de l'algorithme de résolution du problème est le suivant :

- **Etape 1** Initialiser u , p et τ .
- **Etape 2** Pour $n = 1$ jusqu'à ndt ,
calculer la vitesse u^{n+1} avec (4.2.2)
calculer p^{n+1} avec (4.2.5) à l'aide de (4.2.6), (4.2.9) et (4.2.7) ou (4.2.8)
calculer τ^{n+1} avec (4.2.4)
- **Etape 3** Fin.

4.2.2 Approche Stochastique

Venons-en maintenant à l'approche stochastique. Cette approche n'est pas nécessaire pour le cas 1D que nous traitons, mais présente l'avantage de pouvoir être appliquée en dimension supérieure : dans la version 3D du modèle, la variable σ est un tenseur symétrique 3×3 et vit donc dans un espace vectoriel de dimension 6 ; il est alors intéressant d'avoir recours à une méthode stochastique. Les techniques de simulation stochastiques présentent une alternative efficace aux méthodes déterministes. Ces méthodes sont puissantes et ont déjà fait leurs preuves pour la résolution des équations non linéaires issues de la dynamique des polymères (voir [9–11]). En effet, dans le domaine des polymères, ces techniques ont été combinées avec des méthodes d'éléments finis pour calculer la position des haltères, à partir desquelles la contrainte est obtenue par une méthode de Monte-Carlo : c'est ce qu'on appelle la méthode *CONNFESSIT* (Calculation of Non-Newtonian Flow : Finite Elements and Stochastic Simulation Techniques). La simulation stochastique que nous présentons est directement inspirée des idées de la méthode *CONNFESSIT*.

Le principe de l'approche stochastique que nous présentons est de reconnaître dans l'équation d'évolution de P l'équation de Fokker-Planck d'un certain processus stochastique, puis d'utiliser un schéma numérique de résolution d'équations différentielles stochastiques (ici avec sauts) pour simuler le processus en question. En effet, dans le cas qui nous occupe, le processus stochastique associé à l'équation d'évolution de P est un processus de diffusion non linéaire au sens de McKean (voir [14]) avec sauts (voir [7] pour

une introduction aux processus de sauts ainsi qu'aux méthodes de Monte-Carlo pour les équations de diffusions et de transport) se produisant au taux $De = \frac{T}{T_0}$ quand $|\sigma| > 1$. En pratique, on place donc en chaque point $(k + 1/2)\Delta y$ de l'espace réel N "particules" (qui s'interprètent comme des blocs dans la formulation d'Hébraud et Lequeux) et on fait évoluer leur état de contrainte selon la loi

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } |\Sigma_{k,i}^n| < 1 \text{ alors } \Sigma_{k,i}^{n+1} = \Sigma_{k,i}^n + \lambda((U_{k+1}^n - U_k^n)/\Delta y) \Delta t + \nu_k^n \sqrt{\Delta t} G_{k,i}^n, \\ \text{sinon } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \omega_{k,i}^n \in [0, De \Delta t] \text{ alors } \Sigma_{k,i}^{n+1} = 0, \\ \text{sinon } \Sigma_{k,i}^{n+1} = \Sigma_{k,i}^n + \lambda((U_{k+1}^n - U_k^n)/\Delta y) \Delta t + \nu_k^n \sqrt{\Delta t} G_{k,i}^n, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.2.10)$$

où $i \in 1, \dots, N$, $\Sigma_{k,i}^n$ désigne l'état de contrainte à l'instant $n\Delta t$ de la i -ième particule placée au point $(k + 1/2)\Delta y$, $\nu_k^n = \sqrt{2\mu De D_k^n}$ avec $D_k^n = \frac{1}{N} \text{Card}\{i; |\Sigma_{k,i}^n| > 1\}$ et $G_{k,i}^n$ et $\omega_{k,i}^n$ sont deux variables aléatoires tirées respectivement selon la loi gaussienne centrée et réduite et la loi uniforme sur $[0, 1]$. Dans cette interprétation probabiliste, la solution P de l'équation aux dérivées partielles 4.1.2 est représentée à chaque instant et en chaque point de l'espace par une somme de masses de Dirac comme suit

$$P_{k,s}^n \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\Sigma_{k,i}^n}.$$

L'intégrale (4.2.3) peut alors être approchée par la moyenne empirique

$$T_k(n\Delta t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_{k,i}^n. \quad (4.2.11)$$

4.2.2.1 Algorithme

Le schéma général de l'algorithme de résolution du problème est le suivant :

- **Etape 1** Initialiser u , Σ et τ .
- **Etape 2** Pour $n = 1$ jusqu'à ndt ,
 Pour $k = 1$ jusqu'à ndy ,
 calculer la vitesse u^{n+1} avec (4.2.2)
 Pour $i = 1$ jusqu'à N ,
 tirer une *v.a* suivant la loi normale centrée réduite,
 si $|\sigma| < 1$, calculer Σ^{n+1} avec (4.2.10)
 sinon tirer une *v.a* $w_{k,i}^n$ suivant la loi uniforme
 si $w \in [0; De \Delta t]$ alors $\Sigma^{n+1} = 0$,
 sinon calculer Σ^{n+1} avec (4.2.10)
 calculer τ^{n+1} avec (4.2.11)
- **Etape 3** Fin.

Puisque nous sommes en train d'utiliser une méthode de Monte-Carlo pour le calcul de la contrainte, u et τ sont deux variables aléatoires. Il est donc nécessaire de calculer une moyenne de chacune de ces variables (notons \bar{u} la moyenne de u et $\bar{\tau}$ la moyenne de τ). Ainsi, nous allons refaire le calcul J fois (J est donc le nombre de tests de Monte-Carlo) en prenant à chaque calcul N particules. Ce qui veut dire que nous allons répéter J fois l'algorithme 4.2.2.1. A chaque fois, nous allons stocker les valeurs de la vitesse et de la contrainte en tout temps et à chaque point du maillage en y . Ensuite, nous calculons leurs moyennes et leurs variances respectives. Ces valeurs vont nous permettre d'estimer l'intervalle de confiance relatif à la vitesse et à la contrainte.

Dans le cas général, considérons une suite de variables aléatoires X_1, \dots, X_J indépendantes et identiquement distribuées admettant une espérance m et une variance σ^2 . La méthode de Monte-Carlo nous permet d'approcher l'espérance m et la variance σ^2 respectivement

par la moyenne empirique $\bar{m} = \frac{1}{J} \sum_{i=1}^J X_i$ et la variance empirique $s^2 = \frac{1}{J-1} \sum_{i=1}^J (X_i - \bar{m})^2$.

Pour une valeur de J assez grande, le théorème de la limite centrale nous permet de conclure que la variable aléatoire $\sqrt{J}(\bar{m} - m)/\sigma$ suit une loi normale centrée réduite. Plus précisément, on a

$$\mathbb{P}(m \in [\bar{m} - t \frac{s}{\sqrt{J}}, \bar{m} + t \frac{s}{\sqrt{J}}]) \approx 2N(t),$$

avec $N(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{-\frac{x^2}{2}}$. Pour un niveau de confiance $N(t)$ choisi, (en général égal à 0,95 ce qui correspond à $t \simeq 1,96$), l'erreur commise (*i.e* $m - \bar{m}$) est de l'ordre de σ/\sqrt{J} .

Dans notre cas les calculs de la vitesse et de la contrainte développés à chaque test sont indépendants. Les variables u et τ de chaque test sont donc indépendantes et identiquement distribuées. L'intervalle de confiance est ainsi égal à $[\bar{u} - 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var}(u)}{J}}, \bar{u} + 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var}(u)}{J}}]$,

pour u et $[\bar{\tau} - 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var}(\tau)}{J}}, \bar{\tau} + 1,96 \sqrt{\frac{\text{Var}(\tau)}{J}}]$, pour τ . Autrement dit, il y a une probabilité de 95 pourcent que les valeurs de la vitesse et de la contrainte obtenues par un seul calcul test appartiennent à l'intervalle de confiance trouvé.

Remarque 4.2.2 *Des tests de vérification de la vitesse de convergence de notre algorithme ont été effectués. Pour un nombre de tests égal à 10, nous avons effectué des calculs en prenant $N = 250$ puis $N = 1000$. Nous obtenons des variances de u et τ 4 fois plus élevée pour $N = 250$ que pour $N = 1000$ comme le montrent par exemple à $t = 5$ les figures [4.8]. Les intervalles de confiance sont donc 2 fois plus petits quand $N = 1000$. La vitesse de convergence de notre algorithme semble être de l'ordre de $O(\frac{1}{\sqrt{N}})$ pour un nombre fixé d'expériences.*

4.3 Résultats numériques et comparaison

Afin de comparer les deux méthodes que nous venons de présenter, nous avons mis en œuvre numériquement une série de tests de *start up* : partant d'un fluide au repos, on accélère progressivement la plaque supérieure jusqu'à une vitesse limite V_{max} . Pour les figures [4.2], [4.3],[4.4] et [4.5] nous avons pris $\rho = \alpha = 1$, $G_0 = \sigma_c = 2$, $T_0 = 0.5$, $L = V_{max} = 1$, $T = 10$ (ce qui correspond à $De = 20$, $Re = 5 \cdot 10^{-3}$, $\lambda = 1$ et $\mu = 0.25$), $ndy = 200$, $ndt = 10000$; pour l'approche déterministe $\sigma_{max} = 5$ et $nds = 1000$ et pour l'approche stochastique $N = 1000$. Nous suivons l'évolution au cours du temps de la vitesse et de la contrainte donnés par chacun des codes déterministes et stochastiques. Les deux méthodes sont bel et bien équivalentes et donnent les mêmes profils de la vitesse et de la contrainte au cours du temps. Nos programmes sont écrits en Fortran 77. Les calculs ont été effectués sur un Pentium IV (2.4 Ghz et 512 Mb de Ram) sous Linux. Le temps de calcul nécessaire pour la méthode déterministe est de 1h27 en temps CPU et nécessite environ 14.8 Mb de mémoire Ram allouée ; pour la méthode stochastique il est de 25 minutes en temps CPU en prenant $N = 250$ et de 1h 35 en prenant $N = 1000$ et nécessite environ 15 Mb de mémoire. Les courbes obtenues par la méthode stochastique sont bruitées. Ce bruit dépend bien sûr des valeurs de N et du nombre de tests J . Plus elles sont grandes, moins les courbes sont bruitées, plus les variances de u et τ sont réduites...mais plus le temps de calcul est grand. Cependant, la méthode stochastique est fortement appréciée pour sa simplicité et la facilité de son implémentation. Les résultats de cette méthode peuvent être beaucoup améliorés grâce à des méthodes de réduction de variance comme nous le verrons dans la suite de ce chapitre.

4.3.1 Simulations de quelques expériences de rhéologie

Pour mettre en évidence la nature de l'écoulement du matériau, nous nous sommes proposé de faire une série d'expériences de *start up* : nous imposons à chaque fois une vitesse V à la plaque supérieure et nous calculons la contrainte sur la plaque à l'aide de notre code déterministe. Nous traçons ensuite la courbe donnée par contrainte *vs* la vitesse de cisaillement (voir figure [4.9]). Pour ces tests, nous avons pris $G_0 = \sigma_C = 2$, $T_0 = 0.5$, $\alpha = \rho = L = 1$, $ndt = 10000$, $ndy = 200$, $nds = 1000$ et différentes valeurs de V_{max} allant de 0.001 à 0.5. La figure [4.9] (appelé rhéogramme) montre clairement qu'il s'agit d'un matériau rhéofluidifiant : on en déduit que la viscosité décroît lorsque le cisaillement augmente ; *i.e* le matériau se liquéfie lorsqu'on augmente le cisaillement. (voir [1] ou [3] pour une introduction à la rhéologie).

Un test d'analyse oscillatoire a aussi été réalisé. Nous imposons une vitesse oscillatoire $V(t) = V_{max} \sin(\omega t)$ en L . Les profils de la vitesse et de la contrainte en L sont illustrés dans la figure [4.10] pour des paramètres physiques égales à $\rho = 1$, $G_0 = 0.5$, $\sigma_C = 3$, $T_0 = 0.5$ et $\alpha = 0.25$ pour $L = 1$, $\omega = 3$ et $V_{max} = 0.5$. Une série de tests a ensuite été réalisée pour des valeurs de ω égales à 8, 9, 17, 21, 29, 33 et 38 pour suivre l'évolution

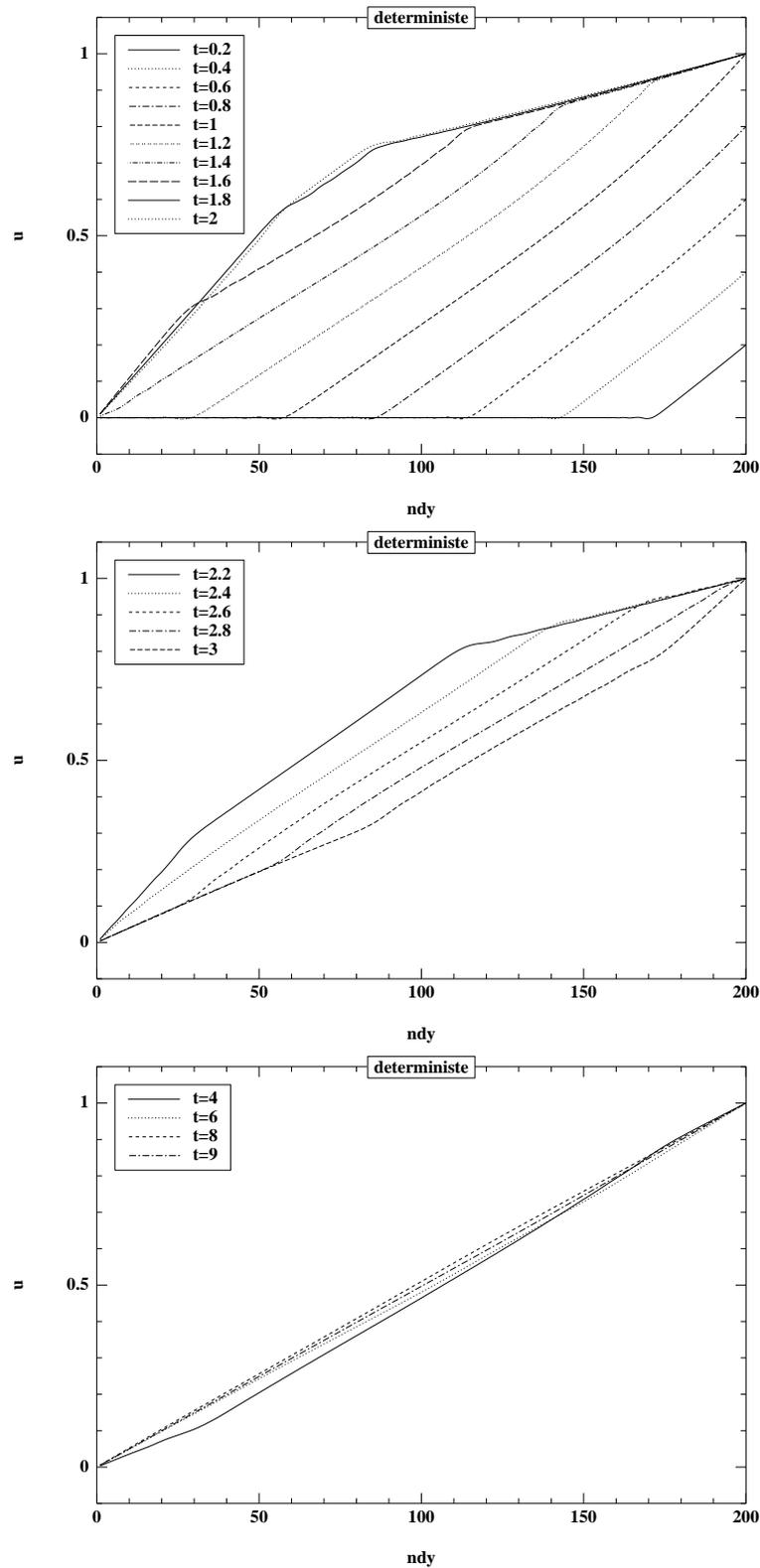


FIG. 4.2 – Variation du profil de vitesse lors d'un *start-up* montrant la propagation d'ondes élastiques aux premiers instants (en haut), puis leurs amortissement sous l'effet de la relaxation de la microstructure (Overshoot).

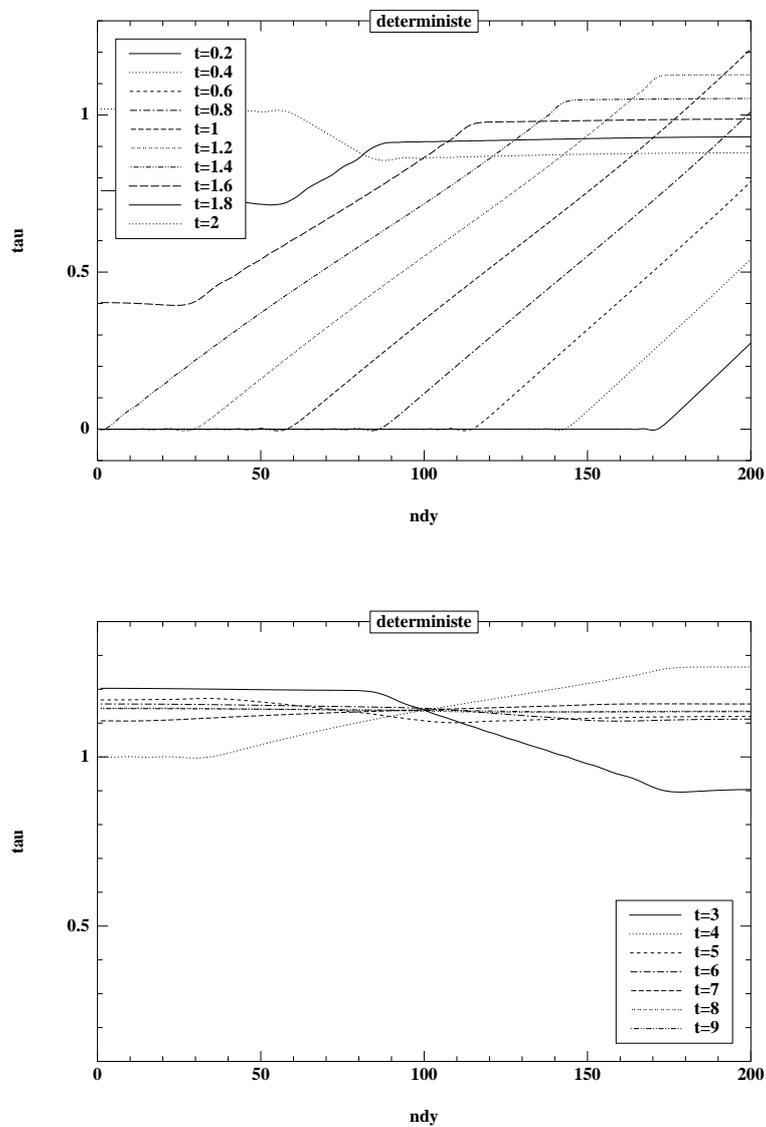


FIG. 4.3 – Variation en temps du profil de la contrainte associée.

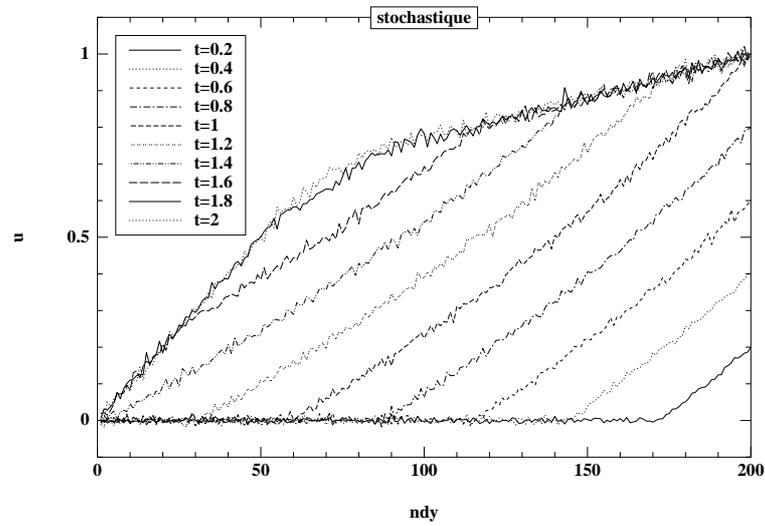


FIG. 4.4 – Même expérience que 4.2 obtenue en utilisant l'approche stochastique et montrant la variation du profil de vitesse lors d'un *start-up* .

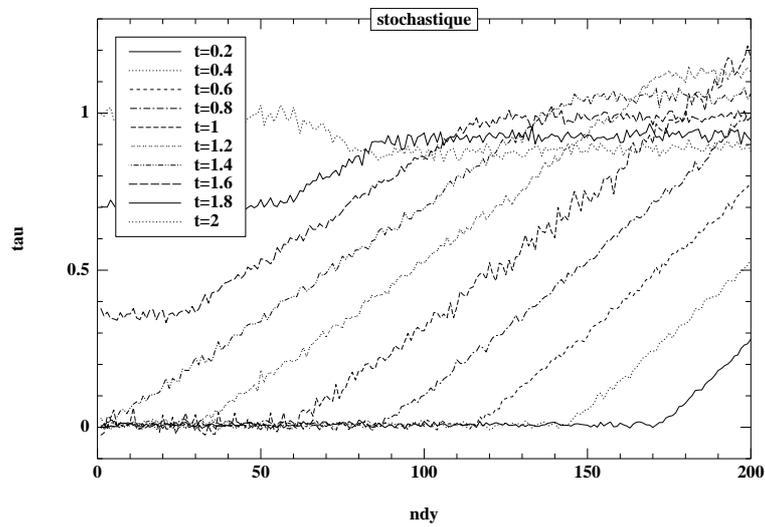


FIG. 4.5 – Variation du profil de la contrainte associée (approche stochastique).

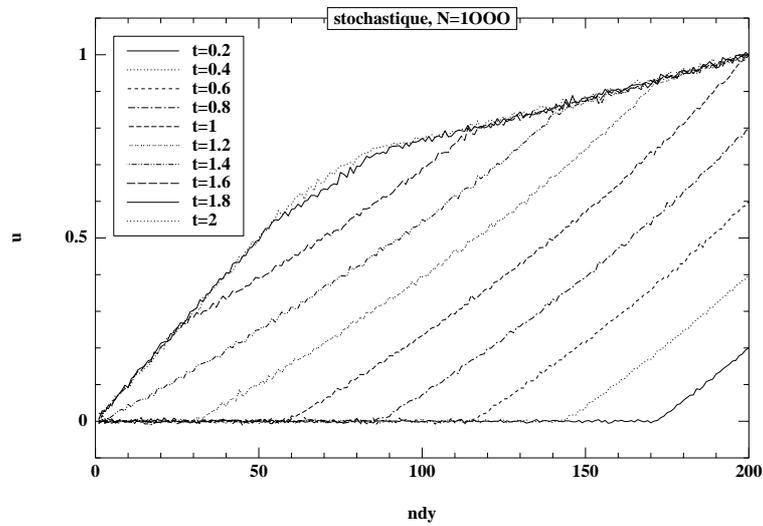


FIG. 4.6 – Même expérience que 4.2 obtenue en utilisant l’approche stochastique et montrant la variation du profil de vitesse lors d’un *start-up* avec un nombre de particule égal à mille. Les profils obtenus sont plus “lisses” que 4.4.

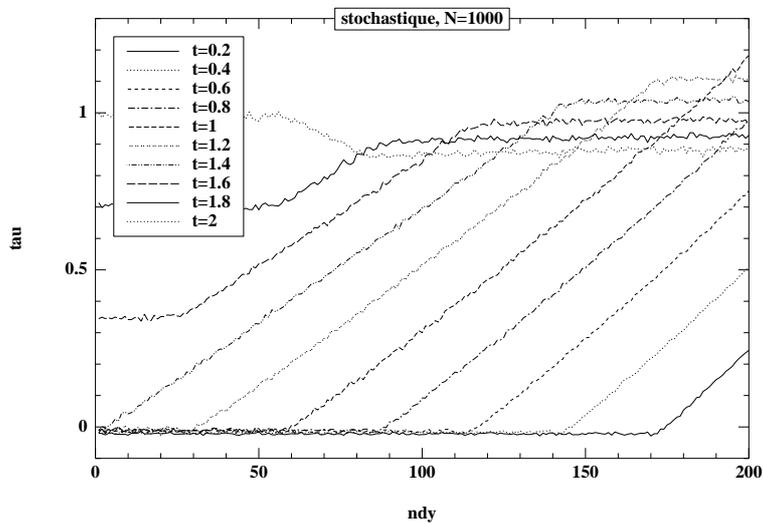


FIG. 4.7 – Variation du profil de la contrainte associée. Les profils obtenus sont plus “lisses” que 4.5.

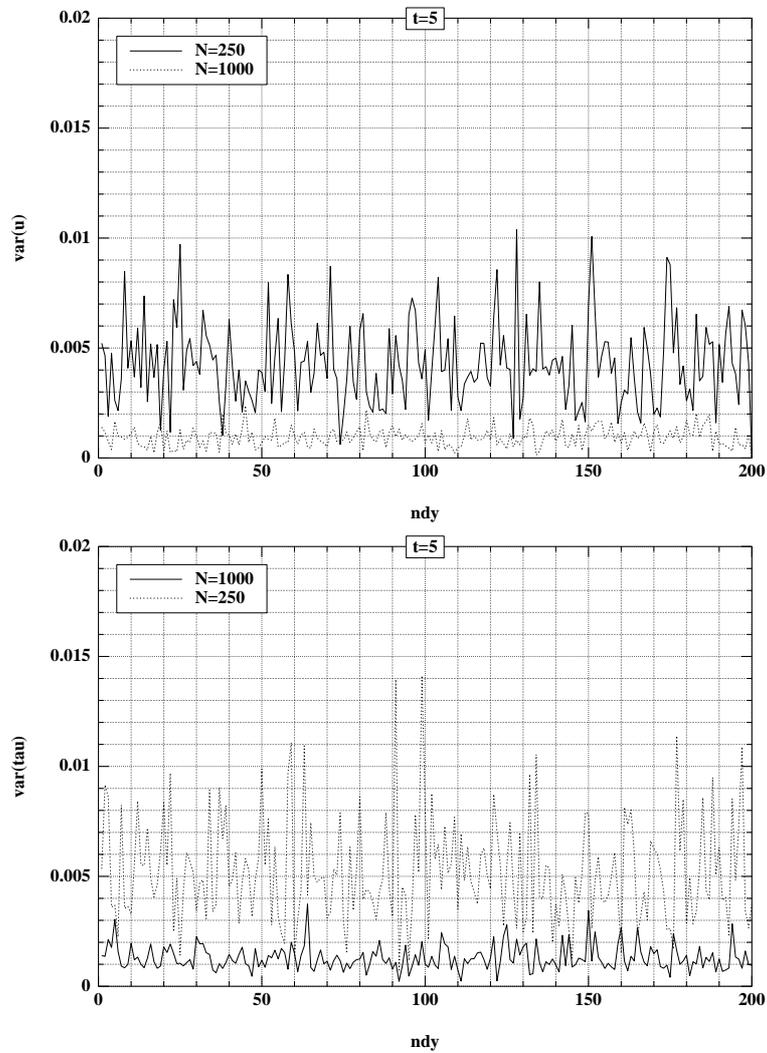


FIG. 4.8 – Profils de la variance pour la vitesse (en haut) et la contrainte (en bas) vs l'espace à $t=5$ pour des simulations avec 250 et 1000 particules. Les variances sont à peu près quatre fois plus grande avec 250 qu'avec 1000 particules.

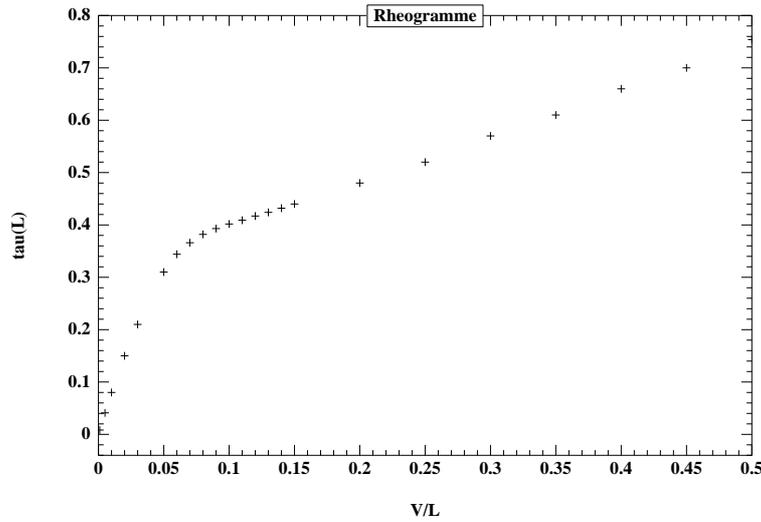


FIG. 4.9 – Rhéogramme.

du module élastique et le module visqueux. Les résultats obtenus sont reproduits par la figure [4.11].

Remarque 4.3.1 *Des tests correspondant aux vrais paramètres physiques n'ont pas pu être réalisés essentiellement à cause de la condition CFL $|\lambda \partial_y u_k^n \frac{\Delta t}{\Delta \sigma}| < 1$, nécessaire pour la convergence des schémas. Le paramètre G_0 serait de l'ordre de 10^3 et σ_C de l'ordre de 10^{-2} pour le cas des émulsions ce qui nous oblige à prendre un pas de temps très petit.*

Remarque 4.3.2 *Bien que nous ne pouvons pas réaliser des simulations qui correspondent pas aux vrais paramètres physiques, les résultats de simulations présentés nous indiquent que le modèle est capable de reproduire certains comportements rhéologiques des suspensions concentrées.*

4.4 Réduction de variance

Le but du travail qui suit est de réduire le bruit des solutions de u et τ données par l'approche stochastique, causé par le mouvement brownien. Ceci va nous permettre d'obtenir des profils de vitesse et de contrainte plus réguliers, de réduire leurs variances et de diminuer le temps de calcul.

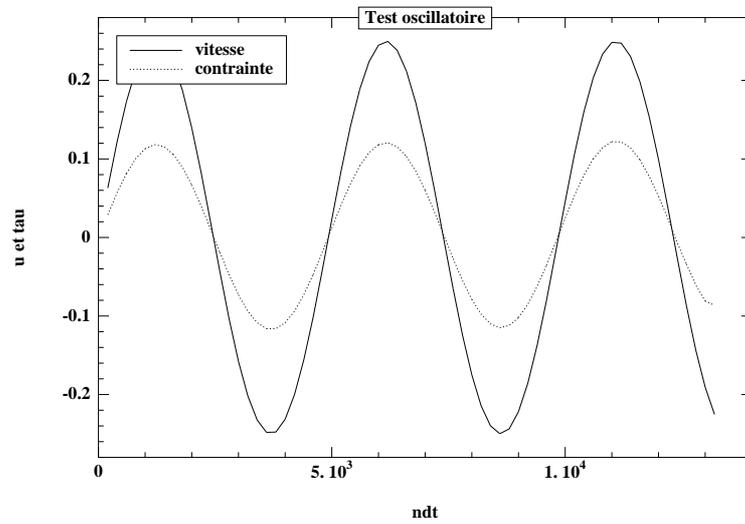


FIG. 4.10 – Evolution de la vitesse et de la contrainte en L lors de l'application d'une vitesse oscillatoire.

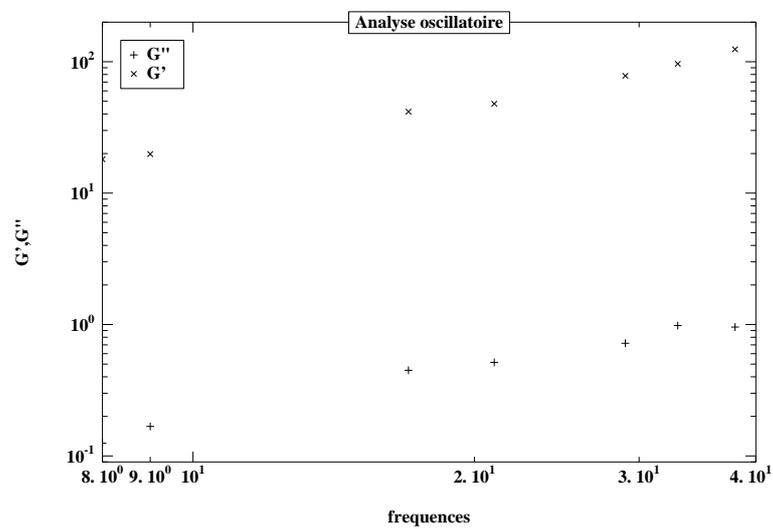


FIG. 4.11 – Modules : élastique G' , perte G'' .

4.4.1 Généralités

Une conséquence importante de l'approche stochastique est l'utilisation des techniques de réduction de variance. Plusieurs de ces techniques sont connues et utilisées par exemple dans le domaine de la finance (voir [8]) et récemment dans le domaine des polymères (voir par exemple [6]). Le but de ces techniques est de diminuer la valeur de la variance afin d'améliorer la convergence des résultats. Dans le cadre de ce travail, nous chercherons à diminuer les variances de la vitesse u et de la contrainte τ en nous inspirant du travail fait dans le cas des fluides polymériques dans [2, 5, 12]. Nous présentons deux méthodes : la méthode de *Brownian configuration fields* et la méthode de la variable de contrôle.

4.4.1.1 La méthode de *Brownian configuration fields*

L'idée de base de cette technique est de corrélérer le mouvement brownien en espace. Pour ceci, on considère qu'au temps initial, toutes les particules portant le même indice i de σ ont la même valeur. Ensuite, on considère, à chaque itération en temps, que toutes les particules portant le même indice i et se trouvant aux différents points k , $k \in \{1, \dots, ndy\}$ de l'espace subissent le même mouvement brownien.

Le schéma général de l'algorithme de résolution du problème est le suivant :

- **Etape 1** Initialiser u , Σ et τ .
- **Etape 2** Pour $n = 1$ jusqu'à ndt ,
calculer la vitesse u^{n+1} avec (4.2.2)
Pour $i = 1$ jusqu'à N ,
tirer une *v.a* suivant la loi normale centrée réduite,
Pour $k = 1$ jusqu'à ndy ,
 si $|\sigma| < 1$, calculer Σ^{n+1} avec (4.2.10)
 sinon tirer une *v.a* $w_{k,i}^n$ suivant la loi uniforme
 si $w_{k,i}^n \in [0; De \Delta t]$ alors $\Sigma^{n+1} = 0$,
 sinon calculer Σ^{n+1} avec (4.2.10)
calculer τ^{n+1} avec (4.2.11)
- **Etape 3** Fin.

4.4.1.2 La méthode de la variable de contrôle

Dans le cas général, soient X et Y deux variables aléatoires et supposons qu'on veuille calculer l'espérance de la variable X . Nous avons l'égalité suivante

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(X - Y) + \mathbb{E}(Y).$$

La méthode des variables de contrôle consiste à trouver une variable de contrôle Y dont l'espérance se calcule explicitement et telle que $\text{Var}(X - Y)$ soit plus petite que $\text{Var}(X)$. Quand tel est le cas, pour approcher l'espérance de X , il suffit d'approcher l'espérance de $X - Y$ avec des simulations stochastiques.

Notons qu'afin de réduire la variance, la variable de contrôle Y doit être fortement corrélée avec X . Comme $\mathbb{E}(Y)$ est calculée analytiquement, on a

$$\text{Var}(X - Y + \mathbb{E}(Y)) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y) - 2\text{Cov}(X, Y).$$

Il est clair que pour diminuer la variance, nous avons tout intérêt à avoir une covariance positive et la plus grande possible. La $\text{Cov}(X, Y)$ traduit la manière dont ces deux variables sont corrélées. Plus la corrélation est proche de 1, plus la covariance est positivement grande et plus nous avons une chance de diminuer la variance. Cette forte corrélation, dans notre cas, sera assurée par l'utilisation du même tirage de variables aléatoires lors du calcul de X et de Y .

Dans notre cas, la méthode de la variable de contrôle consiste à trouver une représentation alternative de l'espérance de τ_k^n comme suit :

$$\tau_k^n = \mathbb{E}(\Sigma_k^n - \tilde{\Sigma}_k^n) + \mathbb{E}(\tilde{\Sigma}_k^n),$$

où $\mathbb{E}(\tilde{\Sigma}_{k,i}^n)$ est facile à calculer et tel que $\text{Var}(\Sigma_k^n - \tilde{\Sigma}_{k,i}^n) < \text{Var}(\Sigma_k^n)$. Comme c'était le cas dans [2], nous prenons $\tilde{\Sigma}_{k,i}^n$ égale à Σ_k^n à l'équilibre (ie quand $u = 0$). L'équation vérifiée par $\tilde{\Sigma}_{k,i}^n$ est discrétisée de la même façon que l'équation dévolution sur $\Sigma_{k,i}^n$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } |\tilde{\Sigma}_{k,i}^n| < 1 \text{ alors } \tilde{\Sigma}_{k,i}^{n+1} = \tilde{\Sigma}_{k,i}^n + \tilde{\nu}_k^n \sqrt{\Delta t} G_i^n, \\ \text{sinon } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } \omega_{k,i}^n \in [0, De \Delta t] \text{ alors } \tilde{\Sigma}_{k,i}^{n+1} = 0, \\ \text{sinon } \tilde{\Sigma}_{k,i}^{n+1} = \tilde{\Sigma}_{k,i}^n + \tilde{\nu}_k^n \sqrt{\Delta t} G_i^n, \end{array} \right. \end{array} \right. \quad (4.4.1)$$

où $\tilde{\nu}_k^n = \sqrt{2\mu De \tilde{D}_k^n}$ avec $\tilde{D}_k^n = \frac{1}{N} \text{Card}\{i; |\tilde{\Sigma}_{k,i}^n| > 1\}$ et où G_i^n et $\omega_{k,i}^n$ désignent respectivement une variable aléatoire suivant la loi normale centrée réduite et une variable aléatoire suivant la loi uniforme; $\tilde{\Sigma}_{k,i}^n$ est initialisée de la même manière que $\Sigma_{k,i}^n$ et à chaque itération en temps n , la variable aléatoire G_i^n utilisée pour calculer $\tilde{\Sigma}_{k,i}^n$ selon 4.4.1 est la même que celle utilisée pour calculer $\Sigma_{k,i}^n$ selon 4.2.10.

Il est clair que

$$\mathbb{E}(\tilde{\Sigma}_k^n) = 0.$$

Ainsi

$$T_k(n\Delta t) \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Sigma_{k,i}^n - \tilde{\Sigma}_{k,i}^n. \quad (4.4.2)$$

Le schéma général de l'algorithme de résolution du problème est le suivant :

- **Etape 1** Initialiser u , Σ et τ et lire les données physiques.
- **Etape 2** Pour $n = 1$ jusqu'à ndt ,
calculer la vitesse u^{n+1} avec (4.2.2)
Pour $i = 1$ jusqu'à N ,
tirer une $v.a$ suivant la loi normale centrée réduite,
 Pour $k = 1$ jusqu'à ndy ,
 calculer Σ^{n+1} avec (4.2.10)
 calculer $\tilde{\Sigma}^{n+1}$ avec (4.4.1)
 calculer τ^{n+1} avec (4.4.2)
- **Etape 3** Fin.

4.4.2 Résultats

Les figures [4.12] [4.13] [4.14] et [4.15] montrent d'abord que nous obtenons des courbes de vitesse et contrainte plus "lisses" en utilisant la méthode de *Brownian configuration fields* et encore plus lisses quand on applique en plus la méthode de la variable de contrôle. La technique de *Brownian configuration fields* nous permet de réduire la variance de la vitesse u . Les tests numériques développés montrent en revanche que la variance de la contrainte τ est en général légèrement supérieure à celle obtenue par le code original. Lorsque cette méthode est combinée avec la méthode de la variable de contrôle, les fluctuations spatiales de la vitesse et de la contrainte sont ainsi fortement réduites au début du calcul et le deviennent de moins en moins à la fin comme le montre la figure 4.14. Ceci est tout à fait normal car notre solution s'éloigne au fur et à mesure de son état à l'équilibre. Notons que ce choix n'est toujours pas le bon. Dans notre cas la dépendance des qualités des résultats de réduction de variance n'est pas assez clair. Dans le cas pour les polymères par exemple (voir [2]), ce choix est de moins en moins bon pour des temps caractéristiques de plus en plus élevés. Il y a des cas où on obtient une variance plus élevée que celle donnée par le code initial et il faut envisager dans ce cas de prendre une autre variable de contrôle liée physiquement plus au problème, prendre par exemple la solution stationnaire comme variable de contrôle. Pour les figures obtenues, nous avons pris $\alpha = G_0 = \rho = 1$, $\sigma_C = 2$, $L = 0.5$, $T = 6$, $V_{max} = 0.2$, $N = 800$, $ndt = 5000$ et $ndy = 200$. Le nombre d'expériences est égal à 10. Notre programme est écrit en Fortran 77 et les calculs ont été développés sur un Pentium IV (2.4 Ghz et 512 Mb Ram) sous Linux. Le temps de calcul nécessaire ici pour le code initial (sans réduction de variance) est d'environ 1h42 en temps CPU et nécessite environ 7.5 Mb de mémoire allouée, pour le code avec la méthode de *Brownian configuration fields* il est d'environ 47 min en temps CPU et nécessite environ 7.5 Mb de mémoire et pour le code avec *Brownian configuration fields* et la méthode de la variable de contrôle il est d'environ 1h20 en temps CPU et nécessite environ 10 Mb de mémoire allouée.

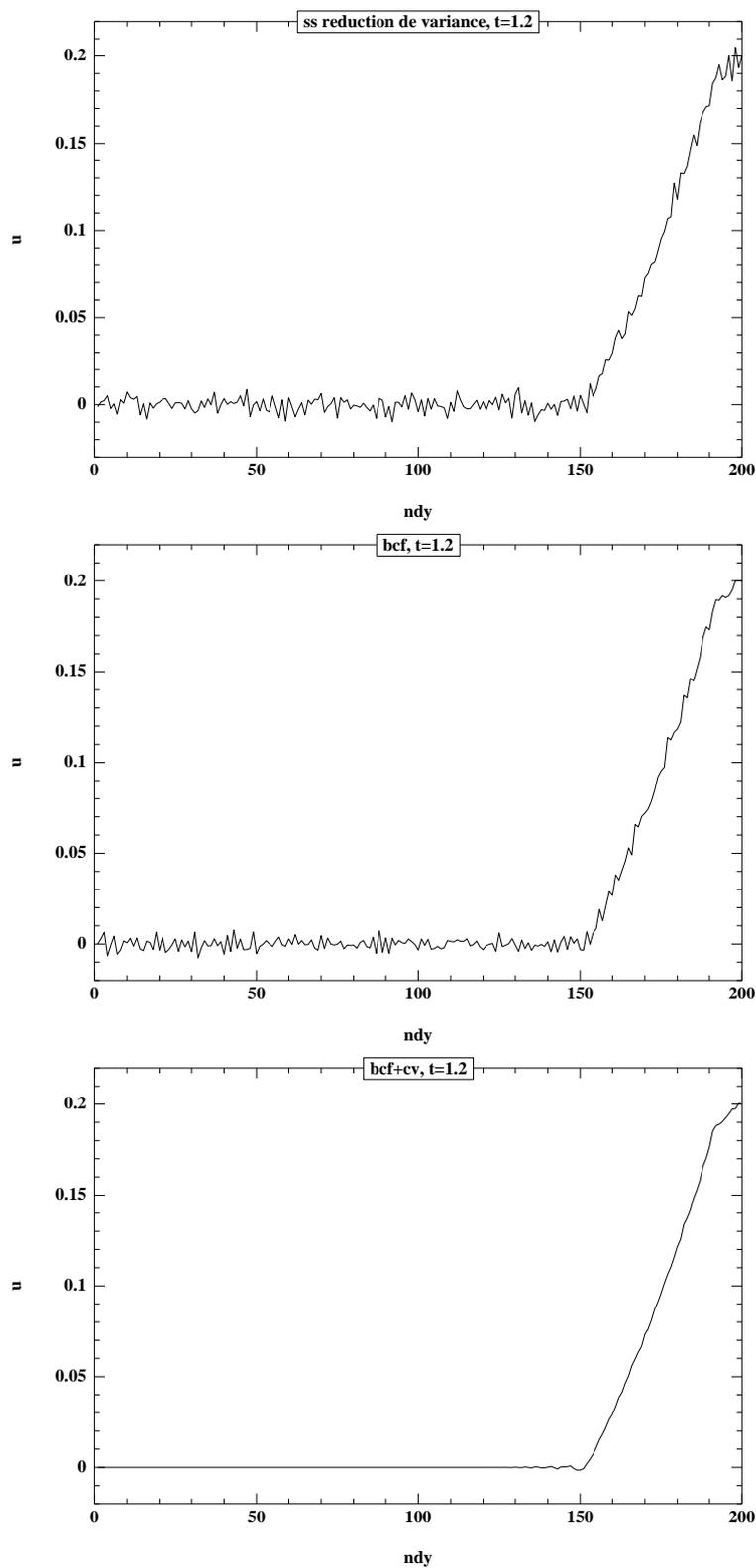


FIG. 4.12 – Profils de de la vitesse u (vs l'espace) à $t = 1.2$ pour des simulations sans réduction de variance (en haut), avec la méthode de Brownian configuration fields (BCF) (au milieu) et avec la méthode de Brownian configuration fields et la méthode de variable de contrôle (BCF+CV) (en bas).

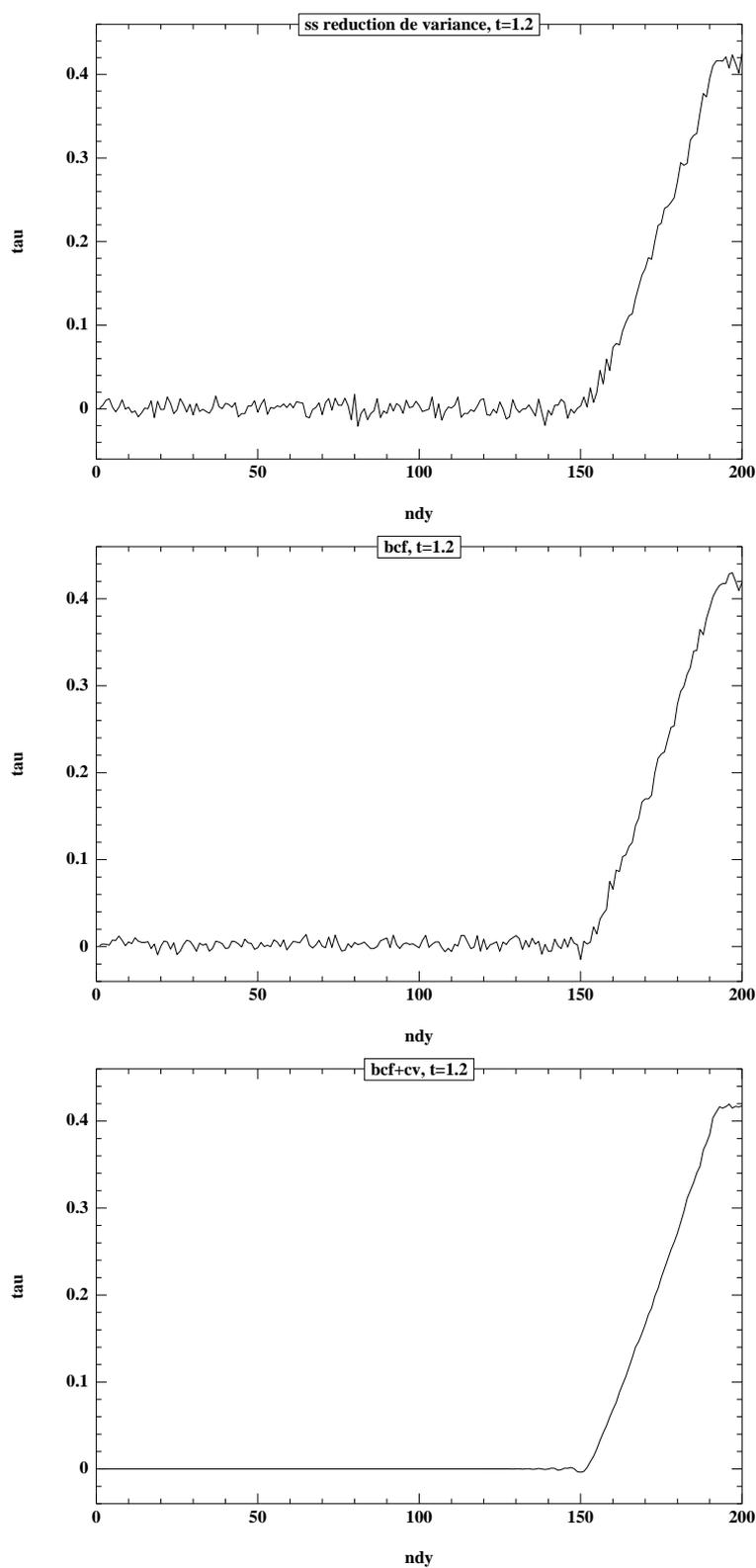


FIG. 4.13 – Profils des variances de la contrainte τ associée (vs l'espace) à $t = 1.2$ pour des simulations sans réduction de variance, avec la méthode de Brownian configuration fields (BCF) (en haut) et avec la méthode de Brownian configuration fields (au milieu) et la méthode de variable de contrôle (BCF+CV) (en bas).

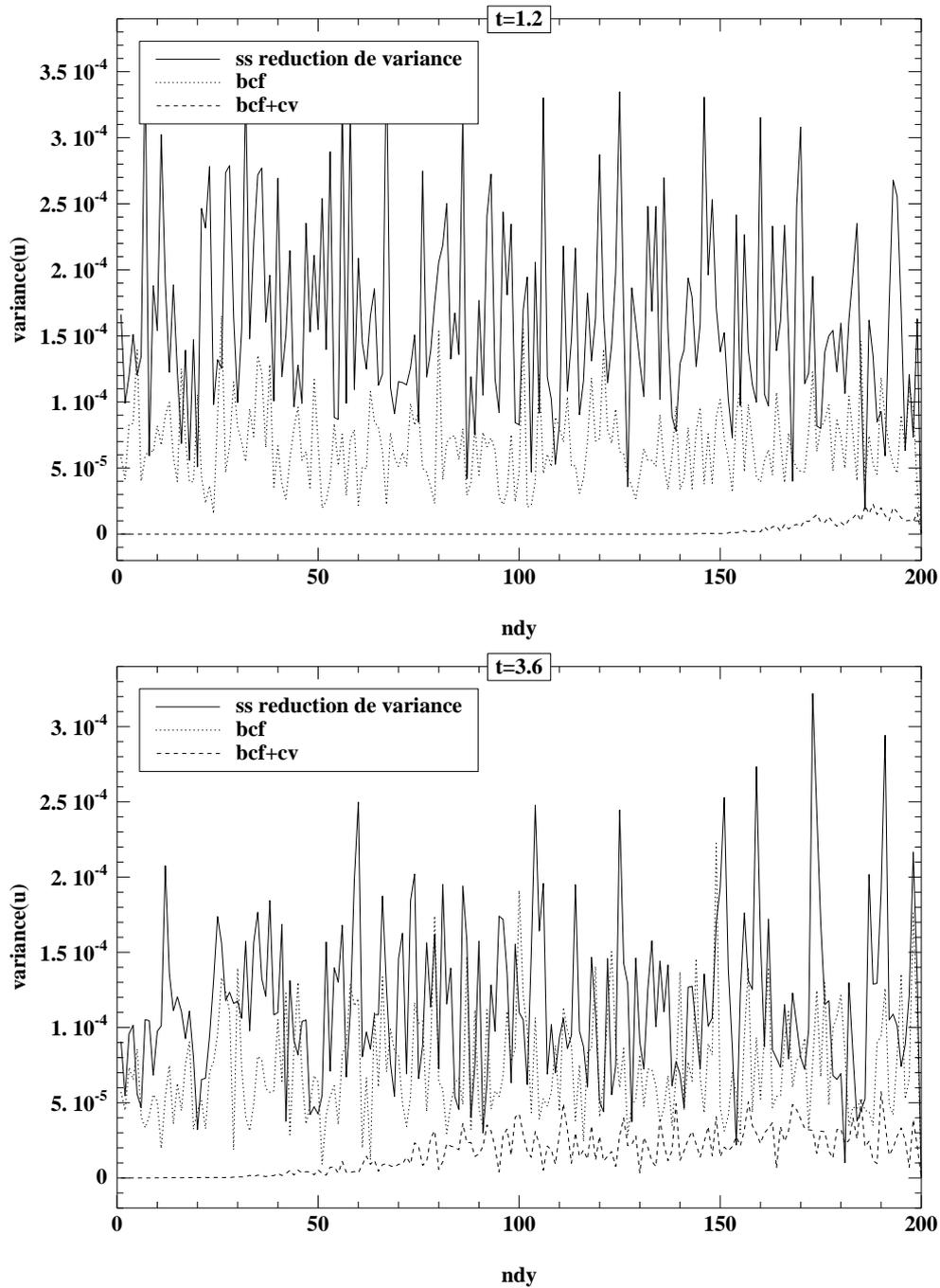


FIG. 4.14 – Profils des variances de la vitesse u (vs l'espace) à $t = 1.2$ (en haut) et à $t = 3.6$ (en bas) pour des simulations sans réduction de variance, avec la méthode de Brownian configuration fields (BCF) et avec la méthode de Brownian configuration fields et la méthode de variable de contrôle (BCF+CV).

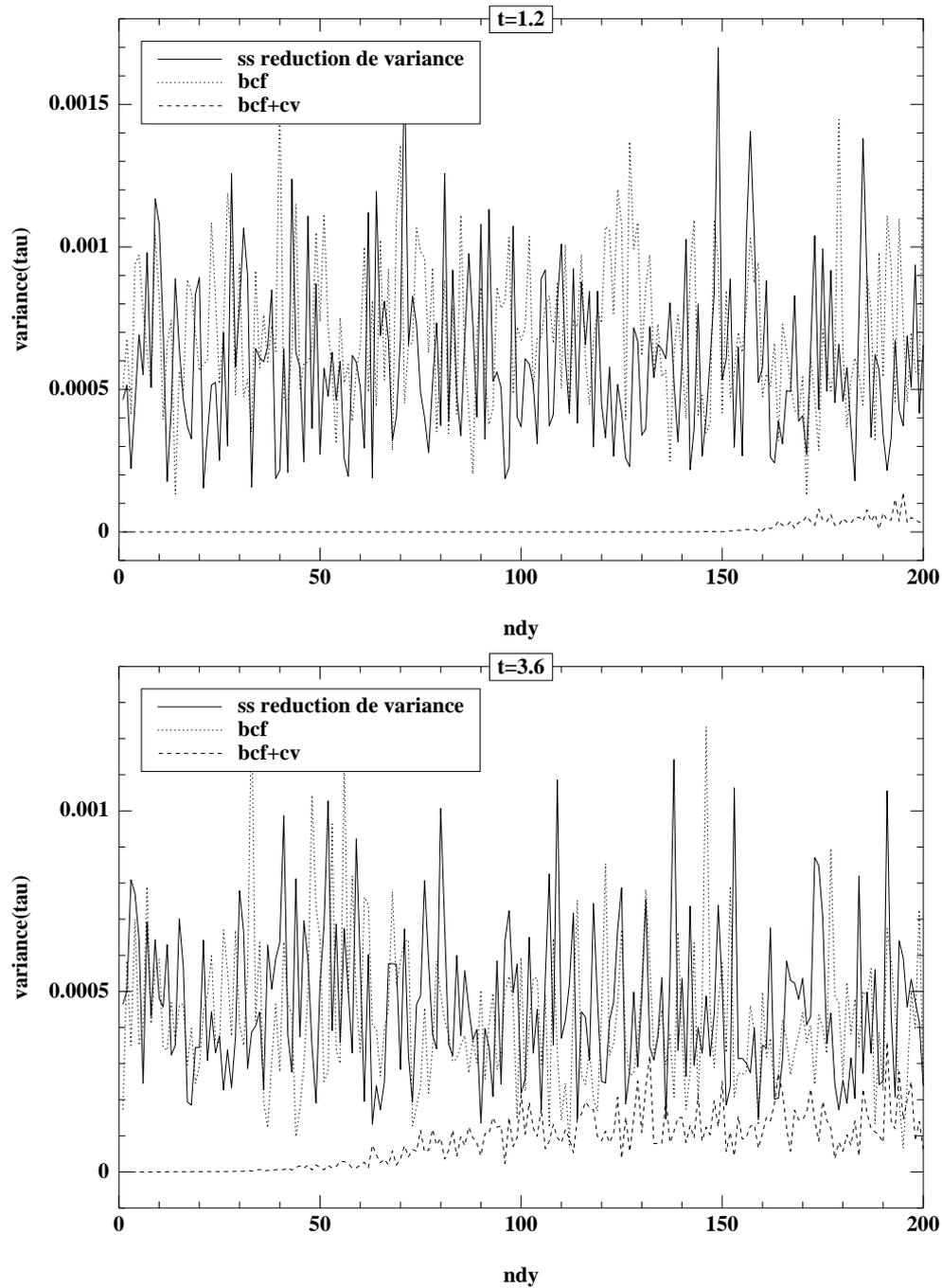


FIG. 4.15 – Profils des variances de la contrainte associée τ (vs l'espace) à $t = 1.2$ (en haut) et à $t = 3.6$ (en bas) avec des simulations sans réduction de variance, avec la méthode de Brownian configuration fields (BCF) et avec la méthode de Brownian configuration fields et la méthode de variable de contrôle (BCF+CV).

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté deux manières (déterministe et stochastique) de résoudre numériquement le système d'équations couplées proposé au Chapitre I. Nous avons mis en oeuvre puis comparé les résultats donnés par ces deux méthodes. Nous avons pu, grâce à notre code déterministe réaliser certaines simulations d'importantes expériences de rhéologie. Nous avons ainsi pu observer quelques comportements rhéologiques des suspensions concentrées que peut reproduire le modèle à savoir un overshoot dans le profils de la vitesse et de la contrainte, un comportement rhéofluidifiant et un spectre large des modules élastique et visqueux. Dans le cas de l'approche stochastique, nous avons présenté deux techniques pour améliorer les résultats et réduire le temps de calcul puis nous avons présenté et comparé les résultats relatifs à chacune de ces méthodes.

Bibliographie

- [1] H.A. BARNES, J.F. HUTTON, K. WALTERS, *An introduction to rheology* Elsevier Amsterdam (1989).
- [2] J. BONVIN, M. PICASSO, *Variance reduction methods for CONNFFESSIT-like simulations* J. Non-Newtonian Fluid Mechanics, 84, 191-215 (1999).
- [3] P. COUSSOT, J.L. GROSSIORD, *Comprendre la rhéologie*. EDP sciences, (2001).
- [4] E. HAIRER, C. LUBICH, G. WANNER *Geometric numerical integration Structure-Preserving algorithms for Ordinary Differential Equations*. Springer, (2001).
- [5] M.A. HULSEN, A. P. G. VAN HEEL, B.H.A.A. VAN DEN BRULE. *Simulation of viscoelastic flows using Brownian configuration fields*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 70, 79-101 (1997).
- [6] B. JOURDAIN, C. LE BRIS, T. LELIÈVRE *On a variance reduction technique for micro-macro simulations of polymeric fluids*. J. Non-Newtonian Fluid Mech, à paraître.
- [7] B. LAPEYRE, E. PARDOUX, R. SENTIS. *Introduction aux Méthode de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*. Springer Verlag, (1998).
- [8] B. LAPEYRE, A. SULEM, D. TALAY. *Understanding Numerical Analysis for Financial Models*. A paraître.
- [9] M. LASO, H.C. OTTINGER, *Calculation of viscoelastic flow using molecular models : the CONNFFESSIT approach*, J. Non-Newtonian Fluid Mechanics, 47, 1-20 (1993).
- [10] M. LASO, H.C. OTTINGER, M. PICASSO, *2D time-dependent Viscoelastic flow calculations using CONNFFESSIT*. AIChE Journal, 43-4, 877-892 (1997).
- [11] H. C. OTTINGER *Stochastic Processes in Polymeric Fluids : Tools and Examples for developing Simulation Algorithms*. Springer Berlin, (1996).
- [12] H.C. OTTINGER, B.H.A.A. VAN DEN BRULE, M.A. HULSEN. *Brownian configuration fields and variance reduction CONNFFESSIT*. J. Non-Newtonian Fluid Mech., 70, 255-261 (1997).
- [13] A. QUARTERONI, A. VALLI. *Numerical approximation of partial differential equations*. Springer, (1997).
- [14] A.S. SZNITMAN. *Topics in propagation of chaos*. Ecole d'Eté de Probabilités de Saint-Flour XIX-1989, Lecture Notes in Math., 1464, 165-251, Springer, (1991).

Chapitre 5

Estimation de paramètres

Dans ce chapitre, nous nous proposons d'étudier le problème du calage des paramètres par la méthode de l'adjoint.

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude du problème d'identification des paramètres. Notre motivation est de caler les paramètres α , G_0 , σ_C et T_0 de notre modèle de telle sorte que sa solution soit la plus proche possible des résultats expérimentaux d'Imagerie par Résonance Magnétique réalisés sur la bentonite par l'équipe du LMSGC¹ (voir [5]). Faute de pouvoir effectuer des calculs avec de vrais données physiques (voir remarque 4.3.1), nous prenons une vitesse (ou contrainte) fournie par le code pour des paramètres arbitraires fixés pour nous et nous essayons de caler les paramètres pour retrouver cette vitesse (ou contrainte) choisie. Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous allons commencer par expliquer la position du problème et les notions de base qui nous seront utiles dans la suite de notre étude. Ensuite, nous expliquerons le calcul et la résolution numérique des équations adjointes associées à notre problème et grâce auxquelles nous pouvons calculer la dérivée du critère en vue d'appliquer un algorithme d'optimisation d'ordre 1. Nous détaillerons les difficultés que nous avons rencontrées dans l'exécution du code implémenté et les méthodes auxquelles nous avons eu recours pour nous en affranchir. Deux critères ont été considérés. Le premier critère est relatif à la vitesse et les calculs effectués dans ce cas ne donnent pas de bons résultats. Le deuxième est relatif à la contrainte et conduit à des résultats plus satisfaisants.

5.2 Généralités

Dans cette partie, on expose le problème d'estimation de paramètres dans le cas général et on donne un aperçu sur la façon de le résoudre.

Commençons par définir un problème d'estimation de paramètres. Etant donné une observation p_{phys} , il s'agit de trouver un paramètre α ($\alpha \in \mathbb{A}_{ad}$ où \mathbb{A}_{ad} est l'ensemble sur lequel on minimise le critère) tel que $p(\alpha)$ soit le plus proche possible (en un sens à définir) de p_{phys} et où $p(\alpha)$ est la solution de l'équation d'état du problème dépendant du paramètre α . La formulation d'un problème d'estimation de paramètres repose sur une fonctionnelle $J(\alpha)$ à valeur réelle dite "fonction coût" ou critère qui minimise l'écart entre $p(\alpha)$ et p_{phys} ; par exemple $J(\alpha)$ peut être l'écart au sens de la norme L^2 . Un problème d'estimation de paramètre en général, est ainsi donné par

$$\text{Trouver } \alpha \in \mathbb{A}_{ad} \text{ tel que : } \quad J(\alpha) = \inf_{a \in \mathbb{A}_{ad}} J(a).$$

¹Laboratoire des Matériaux et des Structures du Génie Civil de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées.

La fonctionnelle J dépend implicitement de α à travers le terme $p(\alpha)$ avec p lié à α par une équation qu'on appelle équation d'état. Plaçons-nous dans le cas où l'équation d'état admet une unique solution p dans un certain espace H . Pour résoudre ce problème, nous pouvons par exemple utiliser des algorithmes d'optimisation basés sur des méthodes de descente (plus précisément, basé sur la recherche d'une direction de descente). Ce type de méthodes consiste à construire itérativement, à partir d'un point de départ arbitrairement choisi dans l'espace de minimisation, une suite minimisante a_1, \dots, a_n, \dots tel que $\liminf_{n \rightarrow \infty} \nabla J(a_n) = 0$. Pour passer de a_n à a_{n+1} , ces algorithmes doivent savoir non seulement les valeurs numériques de J aux points a_n , mais en plus la valeur du gradient de J en ces points et parfois même la valeur du hessien de J en ces points. La résolution du problème d'optimisation se décompose alors en deux parties bien distinctes. La première (on l'appellera dans la suite indifféremment algorithme d'optimisation ou optimiseur) est celle qui fait évoluer a_n . Autrement dit c'est la partie qui nous donne la valeur de a_{n+1} quand on est en a_n à partir d'informations nécessaires (valeur du critère, gradient du critère,...) en a_n . L'autre est celle qu'on appelle simulateur et elle se charge de calculer les informations en tout point a_n choisi par la partie précédente. L'algorithme d'optimisation lui-même s'effectue essentiellement en deux étapes : le calcul d'une direction, puis la recherche linéaire. La première étape consiste à trouver une nouvelle direction de descente d et la deuxième à trouver $t > 0$ tel que $a_n + td$ soit meilleur que a_n au sens du critère J .

Le schéma général d'un algorithme d'optimisation par une méthode de descente est le suivant :

- Etape 1 Choisir a_0 .
- Etape 2 Test d'arrêt : $\|\nabla J(a_n)\| \leq \varepsilon$.
- Etape 3 Calcul d'une direction de descente d_n .
- Etape 4 Calcul d'un pas de descente t_n .
- Etape 5 $a_{n+1} = a_n + t_n d_n$.
- Etape 6 $n=n+1$, aller à l' Etape 2.

Remarque 5.2.1 *Les algorithmes évolutionnaires dits d'ordre 0 constituent une alternative aux méthodes déterministes de type gradient. Ces algorithmes ne nécessitent que l'évaluation de la fonction coût à minimiser (ce qui les rend moins exigeants) mais requièrent en revanche un grand nombre d'évaluations de fonction ce qui les rend très lents surtout quand la fonction à optimiser est coûteuse en temps de calcul. Ceci est le cas dans le problème que nous traitons et c'est pour cette raison que ces méthodes ont été écartées.*

Des méthodes de recherche linéaire comme de calcul de direction sont connues dans la littérature. Citons pour exemples de recherche linéaire la règle de Wolfe ou encore la règle de Goldstein et Price. Pour le calcul de la direction, citons les méthodes de gradient

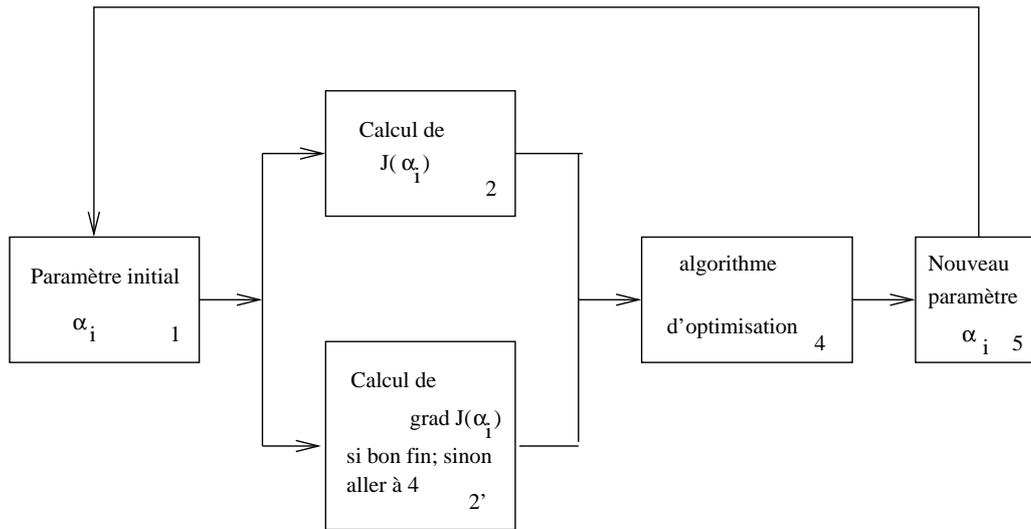


FIG. 5.1 – Schéma de la boucle d'optimisation.

conjugué, les méthodes de type Newton (cette dernière est plus coûteuse car elle nécessite la valeur du hessien du critère)... Pour une présentation complète de ces méthodes, on renvoie à [1]. Un certain nombre de bibliothèques de programmes d'optimisation existent (Modulopt [3], Neos [4]...) et on y trouve souvent l'optimiseur qui convient au problème que l'on veut résoudre. Nous allons donc nous concentrer dans le cadre de ce chapitre sur le calcul du gradient de la fonctionnelle coût.

Ce qui serait le plus naturel pour calculer le gradient du critère J en un point a serait de le calculer par différences finies comme suit

$$\nabla J = \lim_{\Delta\alpha \rightarrow 0} \frac{J(a + \Delta\alpha) - J(a)}{\Delta\alpha}.$$

Cette méthode présente en général deux inconvénients majeurs. D'une part, elle est très sensible au pas de discrétisation et donc aux erreurs numériques; d'autre part, elle devient d'autant plus lente que la taille de la variable α est grande. Ainsi, si α est un vecteur $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ dans \mathbb{R}^n , on doit calculer le gradient par rapport à chacune des directions α_i , $i \in \{1, \dots, n\}$. La méthode de l'adjoint permet de s'affranchir de ces deux inconvénients. Deux manières de calculer le gradient par la méthode de l'adjoint existent : calculer le gradient à partir des adjoints des équations d'états déjà discrétisés ou calculer le gradient en discrétisant l'adjoint des équations continues (notre choix s'est porté sur cette dernière méthode). Une autre alternative pour calculer le gradient du critère est l'utilisation des outils de différentiation automatique. Ces méthodes permettent de calculer le gradient à partir d'un programme informatique calculant $J(a)$. Le principe de ces outils est de différencier "ligne par ligne" les sources du programme pour construire le programme calculant ∇J . Même si la construction du programme calculant ∇J peut

être immédiate, l'utilisation de ce programme peut être très coûteuse en mémoire vive. Un travail de post-traitement est en général nécessaire pour éliminer les variables temporaires inutiles dans certains cas et qui peuvent consommer beaucoup de mémoire vive. Citons pour exemple de ces outils le logiciel de différentiation automatique "Odysée" [2].

Pour être plus concrets et pour plus de clarté, commençons par traiter un problème simple d'estimation de paramètres. Donnons-nous par exemple comme équation d'état l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t p(t, \sigma) = \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 p(t, \sigma) \\ p(0, \sigma) = p^0, \end{cases} \quad (5.2.1)$$

avec $t \in [0; T]$, $\sigma \in \mathbb{R}$ et α est un réel strictement positif. Prenons maintenant, comme fonction coût

$$J(p(\alpha)) = \frac{1}{2} \|p(\alpha) - p_{phys}\|_{L^2_{t,y}}^2.$$

Introduisons la notion d'état adjoint qui va nous permettre de calculer le gradient du critère. Ecrivons d'abord le lagrangien \mathcal{L} lié à ce problème en introduisant q et q^0 les multiplicateurs des contraintes :

$$\mathcal{L}(\alpha, p, q) = \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t p - \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 p) q + \int_{\mathbb{R}} (p(0, \sigma) - p^0) q(0, \sigma) + J(p).$$

En dérivant formellement le lagrangien par rapport à la variable q , nous retrouvons l'équation d'état sur p . La dérivée du lagrangien par rapport à p va nous conduire à l'équation adjointe, et celle par rapport à α à la dérivée de la fonctionnelle coût par rapport au contrôle α . Explicitons la dérivée du lagrangien par rapport à p . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha, p + \bar{p}, q) &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t(p + \bar{p}) - \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2(p + \bar{p})) q \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} (p(0, \sigma) + \bar{p}(0, \sigma) - p^0) q(0, \sigma) + J(p + \bar{p}) \\ &= \mathcal{L}(\alpha, p, q) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t \bar{p} - \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 \bar{p}) q \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \bar{p}(0, \sigma) q(0, \sigma) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \bar{p} (p - p_{phys}) + \frac{1}{2} \|\bar{p}\|^2. \end{aligned}$$

Intégrons ensuite par parties les deux termes $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_t \bar{p} q$ et $\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \partial_{\sigma\sigma}^2 \bar{p} q$ respectivement par rapport au temps et à la variable σ pour trouver

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha, p + \bar{p}, q) &= \mathcal{L}(\alpha, p, q) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} (\partial_t q + \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 q) \bar{p} \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}} \bar{p}(T, \sigma) q(T, \sigma) + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \bar{p} (p - p_{phys}) + \frac{1}{2} \|\bar{p}\|^2. \end{aligned}$$

La dérivée du lagrangien par rapport à p se déduit facilement de cette dernière équation et $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p} = 0$ s'exprime par

$$\begin{cases} \partial_t q + \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 q + p_{phys} - p = 0 \\ q(T, \sigma) = 0, \end{cases} \quad (5.2.2)$$

et on retrouve alors l'équation adjointe associée au problème 5.2.1. Notons que l'équation que vérifie l'adjoint p est une équation linéaire et rétrograde. Cette méthode utilisée dans ce cas simple sera exactement la même pour notre problème d'équations couplées (5.3.1)-(5.3.2)-(5.3.3)-(5.3.4). Néanmoins, le calcul dans notre cas sera plus compliqué. Ceci vient bien sûr du fait que nous avons affaire à un système d'équations couplées mais aussi du caractère non linéaire de la diffusion dans l'équation d'évolution en p . Nous nous contenterons dans ce chapitre de donner directement le résultat pour notre problème.

Explicitons l'expression de la dérivée du critère par rapport à la variable de contrôle α . On a

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} \nabla J &= \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \{J(p(\alpha + \bar{\alpha})) - J(p(\alpha))\} \\ &= \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \|p(\alpha + \bar{\alpha}) - p_{phys}\|^2 - \frac{1}{2} \|p(\alpha) - p_{phys}\|^2 \right\} \\ &= \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \|p(\alpha + \bar{\alpha}) - p(\alpha)\|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_{\mathbf{R}} (p(\alpha + \bar{\alpha}) - p(\alpha)) (p(\alpha) - p_{phys}) \right\} \\ &= \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|p(\alpha + \bar{\alpha}) - p(\alpha)\|^2 \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \bar{\alpha} \partial_{\alpha} p (\partial_t q + \alpha \partial_{\sigma\sigma}^2 q) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

$$\begin{aligned} &= \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|p(\alpha + \bar{\alpha}) - p(\alpha)\|^2 \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \bar{\alpha} q (-\partial_{t\alpha}^2 p + \alpha \partial_{\alpha\sigma\sigma}^3 p). \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

L'égalité 5.2.3 est obtenue en remplaçant dans l'équation de l'état adjoint 5.2.2 et 5.2.4 est obtenue grâce à des intégrations par parties. En dérivant l'équation d'état par rapport à α et en remplaçant dans cette dernière égalité, on obtient :

$$\bar{\alpha} \nabla J = \lim_{|\bar{\alpha}| \rightarrow 0} \frac{1}{2} \|p(\alpha + \bar{\alpha}) - p(\alpha)\|^2 - \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \bar{\alpha} \partial_{\sigma\sigma}^2 p q.$$

Le premier terme de cette dernière égalité étant d'ordre 2, on en déduit alors que la dérivée du critère par rapport à α est donnée par :

$$\nabla J = \int_0^T \int_{\mathbf{R}} \partial_{\sigma} p \partial_{\sigma} q.$$

Remarque 5.2.2 Notons que cette façon de retrouver l'équation adjointe est formelle et non rigoureuse mathématiquement mais constitue une manière assez simple de les retrouver.

5.3 Equations adjointes et calcul du gradient

Pour plus de clarté, rappelons notre système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t u(y, t) = \partial_y \tau(y, t), \quad (5.3.1) \\ \partial_t P(y, \sigma, t) = -\frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y u(y, t) \partial_{\sigma} P(y, \sigma, t) + \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} D(P) \partial_{\sigma\sigma}^2 P(y, \sigma, t) \\ \quad - \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) P(y, \sigma, t) + \frac{T}{T_0} D(P) \delta_0(\sigma) \quad (5.3.2) \\ \tau(y, t) = \int_{\mathbf{R}} \sigma P(t, y, \sigma) d\sigma, \quad (5.3.3) \\ D(P)(y, t) = \int_{|\sigma| > 1} P(t, y, \sigma) d\sigma, \quad (5.3.4) \end{array} \right.$$

où H désigne la fonction de Heavyside. Ce système est complété par les conditions initiales et les conditions aux bords suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(0, y) = 0 & \text{pour tout } y \in (0, L) ; \\ P(0, y, \sigma) = P^0(y, \sigma) & \text{pour tout } (y, \sigma) \in (0, L) \times \mathbf{R} ; \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(t, 0) = 0 & \text{pour tout } t \in [0, T] ; \\ u(t, L) = V(t) & \text{pour tout } t \in [0, T], \end{array} \right.$$

où V est une fonction dans $L^2(0; T)$ et $P^0(y, \sigma)$ est une densité de probabilité quel que soit $y \in [0, L]$. Disposant de codes qui approchent la solution (u, P, τ) de ce système d'équations (voir chapitre IV), notre but est de caler les paramètres α , σ_C , T_0 et G_0 . Rappelons la signification physique de chacun de ces paramètres : G_0 représente un module élastique, T_0 est un temps caractéristique de relaxation, σ_C est une contrainte

critique et α un coefficient lié à la fragilité mécanique spécifique au matériau étudié. La variable de contrôle, dans notre cas, est le vecteur constitué par ces quatre paramètres et sera noté X dans toute la suite. Nous avons commencé par nous fixer un (u_{phys}, τ_{phys}) (généralisé par le code pour des valeurs de α, σ_C, T_0 et G_0 fixés); ensuite nous avons choisi comme critère :

$$J_1(u(X)) = \frac{1}{2} \|u(X) - u_{phys}\|_{L^2_{t,y}}^2. \quad (5.3.5)$$

Nous n'avons pas obtenu des bons résultats avec ce critère en u . Les valeurs du gradient à calculer sont très petites et donc très sensibles aux erreurs numériques. Faute de trouver des paramètres avec lesquels les calculs donneraient des valeurs de gradient plus importantes et qui tourneraient en un temps raisonnable, nous avons essayé de caler les paramètres par rapport à τ_{phys} en choisissant comme critère :

$$J_2(\tau(X)) = \frac{1}{2} \|\tau(X) - \tau_{phys}\|_{L^2_{t,y}}^2. \quad (5.3.6)$$

Les résultats dans ce cas sont acceptables pour α, σ_C et G_0 mais restent mauvais pour le calcul du gradient par rapport à T_0 . Il semble que la pertinence des résultats obtenus est fortement reliée à l'ordre de grandeur de la valeur du gradient à calculer. En effet, les calculs ne donnent pas de bons résultats dès que les valeurs à retrouver sont très petites (typiquement dès qu'elles sont inférieures à 10^{-6}).

Intéressons-nous tout d'abord au premier critère et notons v la variable adjointe de u , q l'adjoint de P et θ celui de τ . Le lagrangien de notre problème est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(X, u, P, \tau, v, q, \theta) = & J_1(u) + \int_0^T \int_0^L \left(\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t u(y, t) - \partial_y \tau(y, t) \right) v \\ & + \int_0^L u(0, y) v(0, y) + \int_0^T u(t, 0) v(t, 0) \\ & + \int_0^T (u(t, L) - V(t)) V(t, L) \\ & + \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbf{R}} \left(\partial_t P + \frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y u \partial_\sigma P - \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} D \partial_{\sigma\sigma}^2 P \right. \\ & \quad \left. + \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) P - \frac{T}{T_0} D(P) \delta_0(\sigma) \right) q \\ & + \int_0^L \int_{\mathbf{R}} (P(0, y, \sigma) - P^0) q(0, y, \sigma) + \int_0^T \int_0^L (\tau - \int_{\mathbf{R}} \sigma P) \theta. \end{aligned}$$

Il suffit maintenant de dériver le lagrangien par rapport au vecteur formé par u, P et τ

et de prendre égale à 0 cette dérivée, pour retrouver les équations adjointes comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} u - u_{phys} - \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v - \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (\partial_\sigma P q) = 0, \\ v(T, y) = 0, \quad , y \in [0; L] \\ v(t, L) = 0, \quad , t \in [0; T] \\ v(t, 0) = 0; \quad , t \in [0; T] \end{array} \right. \quad (5.3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t q = - \frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y u \partial_\sigma q + \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q \\ \quad - \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} D(P) \partial_{\sigma\sigma}^2 q - \sigma \theta \\ \quad + \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) (q - q(t, y, 0)) \\ q(T, y, \sigma) = 0; \quad y \in [0, L], \quad \sigma \in \mathbf{R}; \end{array} \right. \quad (5.3.8)$$

avec

$$\theta = - \partial_y v. \quad (5.3.9)$$

Une fois les équations adjointes établies, notre but est maintenant d'exprimer le gradient de la fonction coût par rapport à chacun des paramètres, à l'aide des solutions u , P et τ du problème initial et des états adjoints v , q et θ . Explicitons tout d'abord, la dérivée du critère par rapport au paramètre G_0 . On a

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial G_0} \bar{G}_0 &= \lim_{\bar{G}_0 \rightarrow 0} J_1(u(G_0 + \bar{G}_0)) - J_1(u(G_0)) \\ &= \lim_{\bar{G}_0 \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^L |u(G_0 + \bar{G}_0) - u(G_0)|^2 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^T \int_0^L (u(G_0 + \bar{G}_0) - u(G_0)) (u(G_0) - u_{phys}) \right\}. \end{aligned}$$

Le premier terme étant un terme d'ordre 2 et $\lim_{\bar{G}_0 \rightarrow 0} u(G_0 + \bar{G}_0) - u(G_0) = \bar{G}_0 \partial_{G_0} u$, nous avons donc

$$\frac{\partial J_1}{\partial G_0} \bar{G}_0 = \int_0^T \int_0^L \bar{G}_0 \partial_{G_0} u (u(G_0) - u_{phys}).$$

D'après 5.3.7, nous avons

$$\frac{\partial J_1}{\partial G_0} \bar{G}_0 = \int_0^T \int_0^L \bar{G}_0 \partial_{G_0} u \left(\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v + \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (q \partial_\sigma P) \right). \quad (5.3.10)$$

Intégrons, ensuite, par parties le premier terme par rapport à t et le deuxième par rapport à y et explicitons le terme $\partial_t \partial_{G_0} u$ en dérivant l'équation (5.3.1) par rapport à G_0 comme suit

$$\partial_t \partial_{G_0} u = \frac{\sigma_C T^2}{\rho L^2} \partial_{G_0} \partial_y \tau = \frac{\sigma_C T^2}{\rho L^2} \int_{\mathbf{R}} \sigma \partial_{G_0} \partial_y P.$$

De même dérivons (5.3.2) par rapport à G_0 pour expliciter le terme $\partial_{G_0} \partial_y u \partial_\sigma P$ et remplaçons dans (5.3.10). Après simplification, nous obtenons :

$$\partial_{G_0} J_1(u(X)) = \frac{1}{\sigma_C} \int_0^T \int_0^L \partial_y u \int_{\mathbf{R}} q \partial_\sigma P.$$

De même que précédemment, la dérivée du critère par rapport à α s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \alpha} \bar{\alpha} &= \int_0^T \int_0^L \bar{\alpha} \partial_\alpha u (u(\alpha) - u_{phys}) \\ &= \int_0^T \int_0^L \bar{\alpha} \partial_\alpha u \left(\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v + \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (q \partial_\sigma P) \right). \end{aligned}$$

Nous intégrons ensuite, par parties le premier terme par rapport à t et le deuxième terme par rapport à y pour trouver

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha} \bar{\alpha} = -\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \int_0^T \int_0^L \bar{\alpha} \partial_t \partial_\alpha u v - \frac{G_0}{\sigma_C} \int_0^T \int_0^L \int_{\mathbf{R}} q \partial_\alpha \partial_y u \partial_\sigma P. \quad (5.3.11)$$

Nous dérivons ensuite l'équation d'état (5.3.1) et (5.3.2) par rapport à α pour expliciter respectivement les termes $\partial_t \partial_\alpha u$ et $\partial_\alpha \partial_y u \partial_\sigma P$. Après simplification, la dérivée de notre fonctionnelle coût par rapport à α s'exprime par

$$\partial_\alpha J_1(u(X)) = \frac{T}{T_0} \frac{1}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L \left(\int_{|\sigma|>1} P \right) \left(\int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q \right). \quad (5.3.12)$$

Venons-en maintenant à la dérivée par rapport à T_0 . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial T_0} \bar{T}_0 &= \int_0^T \int_0^L \bar{T}_0 \partial_{T_0} u (u(T_0) - u_{phys}) \\ &= \int_0^T \int_0^L \bar{T}_0 \partial_{T_0} u \left(\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v + \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (\partial_\sigma P q) \right). \end{aligned}$$

Nous intégrons par parties le premier terme par rapport à t et le deuxième par rapport à y . Ensuite, nous dérivons les équations d'état (5.3.1) et (5.3.2) par rapport à T_0 pour expliciter les termes $\partial_t \partial_{T_0} u$ et $\partial_y \partial_{T_0} u$. Enfin, nous remplaçons dans (5.3.13) et nous simplifions pour trouver

$$\begin{aligned} \partial_{T_0} J_1(u(X)) &= \frac{T}{T_0^2} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q - \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L \int_{|\sigma|>1} q P \\ &\quad + \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L D(P) q(y, 0, t). \end{aligned}$$

Le gradient de J_1 par rapport à σ_C est égal à :

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_C} \bar{\sigma}_C &= \int_0^T \int_0^L \bar{\sigma}_C \partial_{\sigma_C} u (u(\sigma_C) - u_{phys}) \\ &= \int_0^T \int_0^L \bar{\sigma}_C \partial_{\sigma_C} u \left(\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v + \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (\partial_\sigma P q) \right). \\ &= - \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \int_0^T \int_0^L \bar{\sigma}_C \partial_t \partial_{\sigma_C} u v \\ &\quad - \int_0^T \int_0^L \bar{\sigma}_C \frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y \partial_{\sigma_C} u \int_{\mathbf{R}} (q \partial_\sigma P). \end{aligned} \quad (5.3.13)$$

La dernière égalité est obtenue grâce à une intégration par parties du premier terme par rapport à t et du second terme par rapport à y . Nous dérivons, ensuite, les équations d'état par rapport à σ_C pour trouver une formulation des termes $\partial_t \partial_{\sigma_C} u$ et $\partial_y \partial_{\sigma_C} u$ que nous introduisons dans (5.3.13) pour trouver après simplification :

$$\begin{aligned} \partial_{\sigma_C} J_1(u(X)) &= - \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L \partial_t u v - \frac{G_0}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L \partial_y u \int_{\mathbf{R}} q \partial_\sigma P \\ &\quad - \frac{T}{T_0} \frac{2\alpha}{\sigma_C^3} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q. \end{aligned}$$

En résumé, nous avons

$$\frac{\partial J_1}{\partial G_0} = \frac{1}{\sigma_C} \int_0^T \int_0^L \partial_y u \int_{\mathbf{R}} q \partial_\sigma P, \quad (5.3.14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial T_0} &= \frac{T}{T_0^2} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q - \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L \int_{|\sigma|>1} q P \\ &\quad + \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L D(P) q(y, 0, t), \end{aligned} \quad (5.3.15)$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} \int_0^T \int_0^L D(P) \left(\int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q \right), \quad (5.3.16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_1}{\partial \sigma_C} &= -\frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L \partial_t u v - \frac{G_0}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L \partial_y u \int_{\mathbf{R}} q \partial_\sigma P \\ &\quad - \frac{T}{T_0} \frac{2\alpha}{\sigma_C^3} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q. \end{aligned} \quad (5.3.17)$$

Remarquons que tout comme le calcul des états adjoints, le calcul du gradient de la fonctionnelle coût exige que nous ayons la valeur de u en tout temps et en tout point de l'espace et la valeur de P en tout temps, en tout point de l'espace et en tout point de σ . En d'autres termes, nous devons sauvegarder les trajectoires de u et de P lors de l'exécution du calcul du problème direct, pour les utiliser ensuite dans le calcul des états adjoints et dans le calcul du gradient. Ceci va poser un problème dans notre cas, étant donné la grande taille des tableaux, impossibles à stocker par les ordinateurs à notre disposition (bi Pentium III- 800 Mhz, 1.5 Gb Ram et 15 Gb de disque dur). Pour plus de précision, le code direct pour le calcul des solutions des équations d'état nécessite une discrétisation en temps de l'ordre de 10^4 , en espace de l'ordre de 10^2 et en σ de l'ordre de 10^3 ; la taille de la trajectoire de P à sauvegarder est de l'ordre de 10^9 . Nous expliquerons plus tard, dans ce même chapitre, comment s'affranchir de ce problème par une méthode de *check-points* au prix d'augmenter le temps de calcul et de perdre en précision. Avant ça, expliquons comment simuler numériquement les solutions v , q et θ de notre problème adjoint. Les dérivées de notre critère par rapport à chacune des variables G_0 , α , T_0 et σ_C sont calculées par des sommes de Riemann sur $[0, T] \times [0, L] \times \mathbb{R}$.

5.4 Discrétisation du problème adjoint

Le but de cette partie est de simuler le problème adjoint (5.3.7) - (5.3.8) - (5.3.9) qui, en fait, ressemble à notre système d'équations d'état. Nous allons ainsi utiliser à peu près les mêmes méthodes et schémas pour la résolution du problème adjoint que ceux

utilisés pour le calcul des équations d'état : nous commençons par résoudre l'équation (5.3.7) ; ensuite nous fixons (5.3.8) en espace et nous appliquons la méthode de *splitting* d'opérateurs.

Remarque 5.4.1 *Comme nous avons affaire à un système d'équations retrogrades en temps, nous commençons par poser le changement de variable $t' = T - t$ pour retrouver des équations "directes" en temps (ie de 0 à T). L'indice n fera référence au temps direct.*

Remarque 5.4.2 *Dans ce qui suit, nous gardons les mêmes notations que dans le Chapitre IV.*

Regardons d'abord l'équation (5.3.7) et notons $Y(t', y) = \int_{\mathbf{R}} \partial_{\sigma} P q$. Une application de la méthode des éléments finis \mathbb{P}_1 en v et \mathbb{P}_0 en Y conduit au système algébrique suivant

$$\frac{d}{dt'} M \mathcal{V}(t') = - \frac{G_0 T^2}{\rho L^2} L Y(t') + \frac{T^2 \sigma_C}{\rho L^2} M (U_{phys}(t') - U(t')),$$

où le vecteur $\mathcal{V}(t') = (v_k(t'))_{1 \leq k \leq ndy-1}$ et $Y(t')$ est le vecteur $(y_k(t'))_{1 \leq k \leq ndy-1}$. En appliquant à ce système un schéma d'Euler explicite en temps, on obtient

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t c_k^n - \Delta t (u_{phys_k}^n - u_k^n), \quad (5.4.1)$$

avec $c_k^n = \frac{G_0 T^2}{\rho L^2} M^{-1} L Y^n$ et $y_k^n = \frac{1}{2} \sum_{s=2}^{nds} (P_{k,s}^n - P_{k,s-1}^n) (q_{k,s}^n + q_{k,s-1}^n)$.

La solution de l'équation en θ est simplement approchée par différences finies comme suit :

$$\theta_k^n = \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{dy}. \quad (5.4.2)$$

Venons en maintenant à l'approche de la solution q de l'équation d'évolution de l'adjoint de P . Comme c'était le cas dans la simulation de l'équation d'évolution en P (Chapitre IV), nous commençons par fixer cette équation en espace. Nous appliquons, ensuite, la méthode de *splitting* d'opérateurs à l'opérateur différentiel d'évolution sur q . En effet, nous le regardons comme étant la somme d'opérateurs que nous voudrions traiter séparément. Le problème initial sera ainsi divisé en quatre sous-problèmes indépendants. Supposons données à l'instant $n\Delta t$ les valeurs de $q_{k,s}^n$, $P_{k,s}^n$ et $\partial_y u_k^n$, notre but est de calculer $q_{k,s}^{n+1}$. Nous avons donc

$$q(y, \sigma, (n+1)\Delta t) = e^{\mathcal{N}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{S}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{A}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{D}(\Delta t)} e^{\mathcal{A}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{S}(\frac{\Delta t}{2})} e^{\mathcal{N}(\frac{\Delta t}{2})} \cdot q(y, \sigma, n\Delta t), \quad (5.4.3)$$

où $\mathcal{S}(t')$, $\mathcal{D}(t')$ et $\mathcal{A}(t')$ sont respectivement les opérateurs sources, diffusion et advection des trois problèmes suivants :

$$\partial_{t'} q = \frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y u \partial_\sigma q,$$

$$\partial_{t'} q = \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} D(P) \partial_{\sigma\sigma}^2 q,$$

$$\partial_{t'} q = -\frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) (q - q(t', y, 0)) + \sigma \theta,$$

enfin $\mathcal{N}(t')$ est le nouvel opérateur correspondant au problème suivant

$$\partial_{t'} q = -\frac{\alpha}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q.$$

Comme c'était le cas dans le Chapitre IV, nous utilisons le schéma de *upwind* en temps

pour approcher le problème d'advection ; pour le problème de diffusion, nous utilisons un schéma d'Euler explicite ou la méthode des éléments finis en σ et un schéma d'Euler implicite en temps selon que la valeur $\frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \frac{\Delta t}{\Delta \sigma^2} D(P_{k,s}^n)$ soit inférieure ou supérieure à $1/2$.

Le problème sources peut être résolu analytiquement et est ainsi approché par

$$\begin{cases} q_{k,s}^{n+1} = q_{k,s}^n + \Delta t \sigma \theta_k^{n+1} & \text{si } |\sigma| \leq 1 \\ q_{k,s}^{n+1} = q_{k,s}^n (1 - \frac{T}{T_0} \Delta t) + (\frac{T}{T_0} q_{k,0}^n + \sigma \theta_k^n) \Delta t & \text{sinon,} \end{cases} \quad (5.4.4)$$

avec $q_{k,0}^{n+1}$, correspondant à la valeur de q à l'instant $(n+1)\Delta t$ au nœud y et au point $\sigma = 0$.

Enfin, quand $|\sigma| > 1$, le nouveau terme est équivalent à $\partial_t q = \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma p \partial_\sigma q$, autrement il est nul. Ce problème est approché par :

$$q_{k,s}^{n+1} = q_{k,s}^n - \Delta t H_k^{n+1}, \quad \text{Si } |\sigma| > 1 \quad (5.4.5)$$

avec

$$H_k^{n+1} = \frac{T}{T_0} \frac{\alpha \Delta \sigma}{\sigma_C^2} \sum_2^{nd\sigma-1} (P_{k,s}^{n+1} - P_{k,s-1}^{n+1}) (q_{k,s}^{n+1} - q_{k,s-1}^{n+1}).$$

Le schéma général de l'algorithme de résolution du problème adjoint est le suivant :

- **Etape 1** Initialiser u , p et τ
- **Etape 2** Calculer le problème direct et stocker les trajectoires
- **Etape 3** Initialiser v , q et θ .
- **Etape 4** Pour $n = ndt$ jusqu'à 0.
 - calculer v^{n+1} avec 5.4.1
 - calculer q^{n+1} avec 5.4.3
 - calculer θ^{n+1} avec 5.4.2
 - calculer le gradient de J .

L'exécution de ce programme tel quel n'est pas possible à cause de la grande taille des trajectoires à sauvegarder, comme nous l'avons déjà précisé. Nous avons alors eu recours à la méthode de *check-points*. Commençons par expliquer le principe de cette méthode.

5.5 *Check-points*

Le problème principal de l'exécution du code adjoint est la taille de la trajectoire (à sauvegarder) créée par la simulation du problème direct, et nécessaire à l'évaluation de l'adjoint et donc du gradient du critère. Cette trajectoire, dans notre cas, ne peut pas être sauvegardée en mémoire vive. La stocker dans des fichiers implique l'utilisation d'une grande quantité de mémoire disque et dans notre cas, la taille de ces fichiers excède largement les capacités mémoire des ordinateurs à notre disposition (15 Go). Pour résoudre ce problème, nous avons donc été amenés à utiliser un schéma de *check-points*. L'idée de base d'un schéma de *check-points* consiste à diviser le problème de l'évaluation de l'adjoint en petits problèmes ; en d'autres termes nous allons calculer l'adjoint par morceaux.

L'évaluation du modèle direct s'effectue de manière directe en temps (*ie* de 0 à T) alors que le calcul de l'adjoint se fait de manière rétrograde (*ie* de T à 0). Toute la trajectoire du problème direct doit ainsi être conservée, puisqu'elle nous sera nécessaire pour le calcul de l'adjoint. La place mémoire étant insuffisante pour garder cette trajectoire, nous allons juste sauvegarder des points k ($k \in 0, \dots, K$) de cette trajectoire de temps en temps au cours de l'exécution du modèle direct. Ces instants particuliers appelés *check-points* vont nous permettre de reconstruire un à un les différents morceaux de la trajectoire du modèle direct. Chaque morceau reconstruit va nous servir au calcul de l'adjoint et du gradient de l'adjoint sur cet intervalle de temps (voir [5.2]). Le calcul complet de l'adjoint est ainsi réalisé sur un espace de mémoire limité .

Si l'avantage de cette technique est de réduire la place mémoire occupée pour le calcul de l'adjoint, l'inconvénient est celui d'augmenter le temps de calcul. En effet, cette technique implique une exécution supplémentaire du problème direct. Notons que des

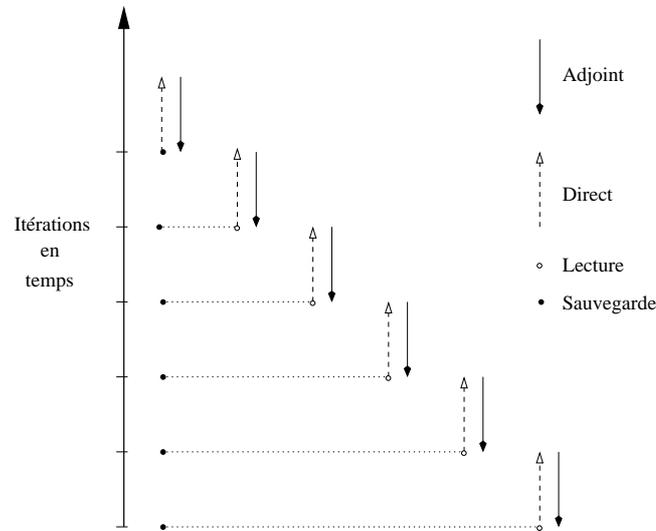


FIG. 5.2 – Schéma d'un check-points

travaux ont été développés par Griewank pour améliorer cette technique en cherchant une partition optimale entre coût en mémoire et coût en temps de calcul pour le calcul de l'adjoint. Un autre inconvénient de cette technique est celui d'influencer l'exactitude des calculs. En effet, dès qu'on stocke dans un fichier la solution du problème direct (dans notre cas il s'agit de stocker u , τ et p à des instants uniformément répartis en temps), on perd en précision. Ce problème est bien évidemment d'autant plus important que les valeurs à retenir sont petites.

Le schéma général de l'algorithme de *check-points* est le suivant :

- **Etape 1** Calculer le problème direct et sauver l'état aux instants T/k ($k \in 0, \dots, K-1$).
- **Etape 2** Pour $k = K-1$ jusqu'à 0.
lire l'état à l'instant k et initialiser le problème direct
calculer le problème direct sur $[k, k+1]$
calculer le problème adjoint sur $[k, k+1]$
calculer le gradient sur $[k, k+1]$.
- **Etape 3** Fin

Remarque 5.5.1 *Il est utile de vérifier que si on part d'un point k et qu'on calcule les solutions sur l'intervalle $[k, k+1]$, la valeur trouvée en $k+1$ correspond bien à celle déjà stockée lors de l'exécution du programme direct à partir de l'instant initial.*

Grâce à la technique de *Check-points*, nous sommes maintenant capables d'exécuter le programme du calcul de l'adjoint et du gradient du critère. Nous avons lancé plusieurs tests mais nous n'avons pas trouvé de bons résultats : les valeurs du gradient du critère données par la méthode de l'adjoint ne sont pas assez proches de celles données par la méthode des différences finies. L'erreur numérique semble être très importante par rapport à la valeur du gradient du critère. Le programme est écrit en Fortran 77, les calculs ont été effectués sur un Pentium III (800 Mhz et 1.5 Gb Ram) sous Linux. Le temps de calcul du programme direct est variable selon les paramètres. Il nécessite 6.4 Mb de mémoire RAM et met environ 4h en temps CPU mais peut atteindre 10h en temps CPU. Celui du calcul du gradient par la méthode de l'adjoint avec la méthode de *Check-points* nécessite 550 Mb de mémoire RAM, le temps que met le programme pour tourner est d'environ 11h en temps CPU et peut atteindre 28h en temps CPU. Faute de trouver des paramètres (α , G_0 , T_0 et σ_C) donnant un gradient de critère plus grand (les calculs que nous avons réussi à effectuer donnent des valeurs du gradient du critère de l'ordre de 10^{-8}) et avec lesquels le programme implémenté tournerait en un temps raisonnable, nous avons testé le deuxième critère J_2 . Même si les résultats obtenus par ce dernier critère ne pourront pas être exploitables actuellement (les résultats physiques donnés par l'IRM correspondent à des profils de vitesses), cela nous permet de valider le code écrit et tout le travail numérique que nous venons de présenter.

5.6 Changement de critère

Supposons que nous ayons à disposition les valeurs de la fonction τ_{phys} qui correspondrait à des mesures expérimentales du champ des contraintes. Notre but serait maintenant, de caler la contrainte τ solution du problème par rapport à ce τ_{phys} . Notre critère est ainsi donné par :

$$J_2(\tau(X)) = \frac{1}{2} \|\tau(X) - \tau_{phys}\|_{L^2_{t,y}}. \quad (5.6.1)$$

Les équations adjointes sont calculées exactement de la même manière que dans 5.3 et ne sont pas beaucoup différentes de celles trouvées précédemment avec le critère J_1 . En effet, rien ne change dans la dérivée du lagrangien à part le terme $u - u_{phys}$ qui est remplacé par $\tau - \tau_{phys}$. Les équations adjointes sont à présent données par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\rho L^2}{T^2 \sigma_C} \partial_t v + \frac{G_0}{\sigma_C} \int_{\mathbf{R}} \partial_y (\partial_\sigma Pq) = 0, \\ v(T, y) = 0, \\ v(t, L) = 0, \\ v(t, 0) = 0; \end{array} \right. \quad (5.6.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t q + \frac{G_0}{\sigma_C} \partial_y u \partial_\sigma q - \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} H(|\sigma| > 1) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q \\ - \frac{T}{T_0} H(|\sigma| > 1) (q - q(t, y, 0)) + \frac{T}{T_0} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} D(P) \partial_{\sigma\sigma}^2 q + \sigma \theta = 0 \\ q(T, y, \sigma) = 0; \end{array} \right. \quad (5.6.3)$$

avec

$$\theta = -\partial_y v - \tau + \tau_{phys}. \quad (5.6.4)$$

Nous gardons les mêmes schémas que ceux utilisés précédemment pour approcher les équations adjointes. Pour être plus précis tout reste identique à part 5.4.1 et 5.4.2 qui deviennent respectivement

$$v_k^{n+1} = v_k^n + \Delta t c_k^n, \quad (5.6.5)$$

avec $c_k^n = \frac{G_0 T^2}{\rho L^2} M^{-1} L Y^n$ (pareil qu'avant, nous avons juste enlevé le terme $u - u_{phys}$) et

$$\theta_k^n = \frac{v_{k+1}^n - v_k^n}{dy} - \tau_k^n + \tau_{phys_k}^n \quad (5.6.6)$$

(ici, nous avons juste ajouté le terme $\tau - \tau_{phys}$). Par un même calcul que précédemment, nous exprimons la dérivée du critère J_2 par rapport à chacune des variables grâce aux états adjoints. Nous trouvons :

$$\frac{\partial J_2}{\partial G_0} = \frac{1}{\sigma_C} \int_0^T \int_0^L \partial_y u \int_{\mathbf{R}} q \partial_\sigma P, \quad (5.6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_2}{\partial T_0} &= \frac{T}{T_0^2} \frac{\alpha}{\sigma_C^2} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q - \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L \int_{|\sigma|>1} q P \\ &+ \frac{T}{T_0^2} \int_0^T \int_0^L D(P) q(y, 0, t), \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \alpha} = \frac{1}{\sigma_C^2} \frac{T}{T_0} \int_0^T \int_0^L D(P) \left(\int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q \right), \quad (5.6.9)$$

$$\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_C} = -\frac{T}{T_0} \frac{2\alpha}{\sigma_C^3} \int_0^T \int_0^L D(P) \int_{\mathbf{R}} \partial_\sigma P \partial_\sigma q. \quad (5.6.10)$$

5.6.1 Résultats numériques

Pour les résultats présentés ci dessous, nous prenons comme τ_{phys} la solution donnée par le code pour les paramètres suivants :

G_0	α	T_0	σ_C
10	10	3	3

Les paramètres de simulation sont : $\rho = 1$, $V_{max} = 0.7$, $T = 1.5$, $L = 0.5$, $ndt = 50000$, $ndy = 200$, $nds = 2000$ avec $\sigma_{max} = 5$. Les calculs sont effectués sur la même machine que précédemment. Le temps nécessaire pour effectuer ces tests numériques est très variable selon les paramètres : comme tout à l'heure, il est de l'ordre de 4h en temps CPU pour le programme direct et de 11h en temps CPU pour le calcul du gradient mais peut atteindre 10h en temps CPU pour le programme direct et 28h en temps CPU pour celui du calcul du gradient (ceci est le cas quand $\sigma_C = 2$ par exemple). Les tableaux ci-dessous présentent dans l'ordre la dérivée du critère par rapport à G_0 , α , σ_C et T_0 donnés en différents points et par les deux méthodes : différences finies (D.F) et par la méthode de l'adjoint (M.A) ainsi que l'erreur relative de la méthode de l'adjoint.

G_0	1	3	5	15	18	20
∇J_2 par D.F	-0.03759	-0.02762	-0.0176	0.0117	0.0182	0.0222
∇J_2 par M.A	-0.03755	-0.0276	-0.0179	0.0124	0.0189	0.0221
Erreur relative	0.1	0.07	1.7	5.9	3.84	0.45

α	1	3	5	15
∇J_2 par D.F	$-3.925 \cdot 10^{-5}$	$-3.224 \cdot 10^{-5}$	$-2.458 \cdot 10^{-5}$	$2.826 \cdot 10^{-5}$
∇J_2 par M.A	$-3.763 \cdot 10^{-5}$	$-2.948 \cdot 10^{-5}$	$-2.062 \cdot 10^{-5}$	$3.332 \cdot 10^{-5}$
Erreur relative	4	8.56	16.11	17.9

σ_C	2.5	3.5	4	4.5	5
∇J_2 par D.F	-0.009326	0.0283	0.0114	0.01435	0.0157
∇J_2 par M.A	-0.0097	0.00594	0.00962	0.0118	0.0128
Erreur relative	4	12.87	15.61	17.77	18.47

T_0	2	4	6
∇J_2 par D.F	$-1.302 \cdot 10^{-6}$	$2.586 \cdot 10^{-8}$	$1.213 \cdot 10^{-8}$
∇J_2 par M.A	$-2.9262 \cdot 10^{-6}$	$8.822 \cdot 10^{-8}$	$7.6453 \cdot 10^{-7}$
Erreur relative	-	-	-

Les résultats numériques obtenus par rapport à ce dernier critère sont plus satisfaisants par rapport aux paramètres G_0 , α et σ_C mais restent mauvais pour le paramètre T_0 , sans doute parce que la valeur du gradient du critère est assez faible par rapport aux erreurs numériques.

Remarque 5.6.1 *Dans tous les tests développés et présentés dans ce chapitre, nous avons bien vérifié la convergence des résultats du code direct donnant les valeurs de u , τ et P , ainsi que la convergence des résultats du gradient du critère donné par la méthode des différences finis.*

Bibliographie

- [1] J. F. BONNANS, J. C. GILBERT, C. LEMARÉCHAL, C. SAGASTIZÁBAL, *Optimization numérique : Aspects théoriques et pratiques* Springer, 1997.
- [2] C. FAURE, Y. PAPEGAY, *Odyssée User's Guide Version 1.7* Rapport technique. Inria RT-0224, 1998.
- [3] PROJET ESTIME- INRIA ROCQUENCOURT. , *A library for solving optimization problems and testing optimization routines.* [http ://www-rocq.inria.fr/estime/modulopt/](http://www-rocq.inria.fr/estime/modulopt/)
- [4] *Neos server for Optimization.* [http ://www-neos.mcs.anl.gov/neos/](http://www-neos.mcs.anl.gov/neos/)
- [5] J.S. RAYNAUD, P. MOUCHERONT, J.C. BAUDEZ, F. BERTRAND, J.P. GUILBAUD, P. COUSSOT, *Direct determination by NMR of the thixotropic and yielding behavior of suspensions.* Journal of Rheology, 46, 709-732 2002.

Chapitre 6

Conclusions

Le travail de cette thèse a permis de répondre à plusieurs questions concernant le modèle micro-macro d'équations couplées construit à partir du modèle d'Hébraud et Lequeux pour les suspensions concentrées, notamment l'existence de solutions et la capacité du modèle à reproduire certains comportements complexes de ces matériaux.

Afin de compléter cette étude, plusieurs axes peuvent être explorés, autant sur la partie théorique que sur la partie numérique. En ce qui concerne la partie théorique, il serait intéressant de démontrer l'existence et l'unicité du système, dans le cas où le coefficient de diffusion est différent d'une constante, sans le terme de diffusion artificiel, en faisant tendre ce dernier vers 0. Pour la partie numérique, il serait intéressant d'étudier l'analyse numérique des schémas implémentés. D'autres expériences de rhéologie peuvent être testés. On pourra alors mieux conclure sur la validité du modèle et en savoir plus éventuellement sur ses limites à reproduire certains résultats dans le but de l'améliorer. En ce qui concerne le calage des paramètres, d'autres méthodes peuvent être implémentées et ainsi comparées entre-elles.

Une autre question qu'on pourrait se poser est la manière d'écrire une version 2d du modèle étudié. Pour cela, il faut comprendre comment traduire le terme d'advection dans l'équation d'Hébraud et Lequeux en fonction des symétries dans la géométrie qui va être prise, mais aussi comment on pourrait traduire le coefficient de diffusion dans l'équation.

Annexe A

Rappels des principaux résultats utilisés dans la partie théorique

Le Théorème de point fixe de Schauder

Soit E un espace de Banach, C convexe fermé de E et T une application continue de C dans C telle que $T(C)$ soit relativement compact. Alors T admet un point fixe.

Lemme de compacité

Soient X_0 , X et X_1 trois espaces de Banach avec X_0 et X_1 réflexifs et tel que

$$X_0 \subset X \subset X_1,$$

l'injection de X dans X_1 étant continue et celle de X_0 dans X étant compacte. Si une fonction u vit dans $L^2(0, T; X_0)$ et sa dérivée par rapport au temps u' appartient à $L^2(0, T; X_1)$, alors u est compacte dans $L^2(0, T; X)$.

Lemme de continuité

Soient V , H et V' trois espaces de hilbert tel que V' est le dual de V et

$$V \subset H \subset V'.$$

Si une fonction u vit dans $L^2(0, T; V)$ et sa dérivée par rapport au temps u' appartient à $L^2(0, T; V')$, alors u est continue presque partout dans $L^2(0, T; H)$.

A.1 Un théorème d'existence et d'unicité pour les EDP paraboliques linéaires avec second membre

Soit Ω un domaine de \mathbb{R} , T un réel strictement positif, a, b et c des fonctions dans $L^\infty((0, T) \times \Omega)$, $f \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))$ et $u^0 \in L^2(\Omega)$. Alors, le problème

$$\begin{cases} \partial_t u + a(t, x) \partial_x u + b(t, x) \partial_{xx}^2 u + c(t, x) u = f(t, x) \\ u(0, x) = u^0 \end{cases} \quad (\text{A.1.1})$$

admet une solution unique dans $C^0(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; H^1(\Omega))$ au sens de H^1 dans Ω et au sens des distributions dans $[0; T]$.

A.2 Principe du maximum pour les EDP paraboliques linéaires

Considérons u_1 la solution du problème (A.1.1) avec $u(0, x) = u_1^0$ et $f = f_1$ et u_2 la solution de ce problème avec $u(0, x) = u_1^0$ et f_2 et supposons que

$$u_1^0 \leq u_2^0, \quad \text{et} \quad f_1 \leq f_2.$$

On a alors

$$u_1 \leq u_2.$$