98 EP XX0075

ÉCOLE POLYTECHNIQUE

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
BIBLIOTHEQUE CENTRALE
19/05/2000
COTE : .....

LMS

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité : Mécanique

par

Guy MARTIN BORRET

G2A 279
1998
MAR
b
USUEL

TITRE : Sur la Propagation de Fissure dans les Elastomères

Soutenue le 21 Décembre 1998 devant le jury composé de :

Président :	Mr A. Zaoui
Rapporteurs :	Mr A. Dragon
	Mr R. Schirrer
Examinateurs :	Mr A. Molinari
	Mr C. Stolz
	Mr J.M. Vacherand

ECOLE POLYTECHNIQUE
6001635

141137

Remerciements

Cette thèse a été réalisée au Laboratoire de Mécanique des Solides, à l'Ecole Polytechnique, à partir d'un sujet proposé par la Manufacture Française des Pneumatiques Michelin, dans l'équipe de Ky Dang Van et sous la direction de Claude Stolz.

Dans mon laboratoire d'accueil, je dois d'abord tout particulièrement remercier Didier Chicheportiche d'avoir choisi en même temps que moi de préparer une thèse sur un sujet très proche. Nos discussions furent fructueuses et m'ont permis de surmonter un sentiment d'isolement assez propre à nos sujets respectifs. Je regretterai seulement que nous n'ayons pu pleinement travailler de concert et sortir du cadre trop rigide de la thèse.

Je remercie aussi vivement les "anciens" thésards du laboratoire, Guy Lederer, Laurent Rota, Franck Moirot, Laurent Bourgeois pour avoir marqué leur passage d'une saine ambiance de camaraderie. Je remercie encore plus vivement Laurent Rota d'avoir participé à mon épanouissement personnel en partageant quelques intenses séances de cyclisme. "Mens Sana in Corpore Sano".

Je remercie aussi tous les autres thésards que j'ai pu cotoyer et avec qui des discussions de café m'ont permis d'élargir ma culture scientifique et d'essayer de combler ma curiosité : Teddy Fenchong, Renaud Masson, Nicolas Tardieu, Christophe Pinna, et comment citer tout le monde ?

Je souhaite aux nouveaux thésards beaucoup de réussites, avec une attention toute particulière à Sandrine Aubert et Marta Dragon.

Du côté des permanents du laboratoire, je remercie particulièrement Andrei Constantinescu pour les discussions engagées que nous avons pu avoir, pour m'avoir fait partager son engouement, et également pour les nombreux kilomètres, à pieds, à la nage ou en kayak, ou encore sur des rochers.

Du côté des seniors, je remercie tous ceux qui ont gravité autour de ma thèse, principalement Ky Dang Van, Habibou Maïtournam et toute mon OR.

Je remercie vivement Claude Stolz, mon directeur de thèse, qui a su me donner un second souffle au bon moment et m'a accordé toute sa confiance. "Par contre", je regretterai qu'il ne m'ait pas permis de "dépouiller mes batteries d'essais" et que le "caractère intangible de certaines de mes observations" ne lui ai pas plu....

Je remercie toute l'équipe de micromécanique de m'avoir permis de réaliser mes essais d'observations microscopiques avec rapidité et efficacité. Daniel Caldemaison et Jérome Crépin m'ont permis, au bon moment, de réaliser des essais assez complexes et d'en tirer des informations très riches.

Merci aussi à Barbara pour sa compétence, sa gentillesse et sa disponibilité. Merci aussi de sa confiance qui m'honore.

Je dois aussi remercier toute l'équipe qui m'a accueilli ou encadré chez Michelin. Le sujet qui m'a été posé fut long et difficile - dirais-je trop compliqué pour une personne ? - mais j'ai pu trouver dans ce groupe une confiance motivante, une compétence précieuse, des moyens d'essais performants, une disponibilité très appréciable. Merci donc à Jean Michel Vacherand, Luc Palgen, Philippe Johnson, Pierre Constant, Jean Coué, Bernard

Virat et Alain Barbier. Il est à la fois exaltant et difficile d'essayer d'apporter des éléments nouveaux et intéressants à un groupe déjà très au courant de ce qui se fait de mieux.

J'aborde enfin mon jury, et parmi elles les personnes qui n'ont pas encore été cité. Je remercie André Zaoui de m'avoir fait l'honneur d'être le président de mon jury. Je remercie Alain Molinari d'avoir examiné mon travail et de lui avoir donné une nouvelle ouverture.

Merci aussi à Mr Dragon pour ses conseils pour préparer mon exposé. L'attention qu'il a porté à mon mémoire me touche et me ferait presque regretter d'arrêter mon travail sur le sujet.

Enfin, je tiens à remercier Mr Schirrer pour sa contribution en tant que rapporteur. J'eusse cru que la recherche était un lieu ouvert, où le débat d'idées pourrait se faire comme au Gymnase. Je regrette que cette conception de la recherche soit si peu partagée et qu'il semble si difficile de résoudre les conflits de culture.

Table des matières

I Présentation du phénomène **11**

1 Observation type, présentation macroscopique **15**
1.1 Test Classique 15
1.2 Nature des matériaux 20
1.3 Résultats en température 21
1.4 Autres types de tests 23
1.4.1 Résultats pour d'autres géométries, test monotone 23
1.4.2 Cas d'autres sollicitations 23
1.5 Choix d'étude 24

2 Quelques observations microscopiques **25**
2.1 Introduction 25
2.2 Observation en configuration non-déformée des moustaches 25
2.2.1 Forme des moustaches 25
2.2.2 Aspect de la surface de propagation 27
2.3 Observations dynamiques sous microscope 27
2.3.1 Phénoménologie de l'apparition des moustaches 28
2.3.2 Cas de la propagation droite 31
2.3.3 Conclusion sur les observations locales 33
2.4 Résistance à la déchirabilité et rotation de fissure 33
Bibliographie 36

II Comportement des élastomères **37**

3 Préliminaires, introduction **39**
3.1 Elastomères et Calcul de Structure 39
3.2 Comment approcher le comportement ? 40
3.3 Quel comportement pour notre étude ? 41
3.4 Conclusion 42

4 Aspects expérimentaux **43**
4.1 Introduction 43
4.2 Description d'un élastomère 43
4.3 Deux exemples de matériaux 44
4.4 Quelques généralités sur le comportement des élastomères 45
4.4.1 Grandes déformations 45
4.4.2 Incompressibilité 45
4.4.3 Viscosité 45

4.4.4 Equivalence temps-température 46
4.4.5 Vieillissement 48
4.5 Aspects plus particuliers 48
4.6 Conclusions 54

5 Les comportements hyperélastiques 55
5.1 Cadre statistique standard 55
5.2 Modèles phénoménologiques 57
5.3 Les modèles non gaussiens 58
5.3.1 Présentation lagrangienne 58
5.3.2 Présentation eulérienne 59
5.3.3 Simplification de l'approche intégrale 60

6 Modélisation de l'effet Mullins 61

7 Un modèle de comportement 63
7.1 Expression de la densité d'énergie 65
7.2 Validation sur un matériau test 66
7.2.1 Résultats généraux 66
7.2.2 Modélisation de résultats expérimentaux 70

8 Implantation dans ABAQUS 75
8.1 Motivations 75
8.2 Le comportement 75
8.2.1 Position du problème 75
8.2.2 Calcul de la contrainte, cas général 3D 76
8.3 Implémentation des calculs sous ABAQUS 77
8.3.1 Première étape 77
8.3.2 Traitement de l'incompressibilité 79
8.3.3 Cas des déformations planes (DP) 81
8.3.4 Cas des contraintes planes (CP) 81
8.4 Algorithme de calcul 82
8.4.1 Algorithme de la UMAT ABAQUS 82
8.4.2 Définition des énergies 82
8.5 Validation du code 83
Bibliographie 86

III Mécanique de la Rupture, cas des élastomères 89

9 Approches énergétiques 93
9.1 Cas élastique 93
9.2 Cas anélastiques 95
9.2.1 Les modèles visco-élastiques 96
9.2.2 Les calculs d'Andrews 97
9.3 Conclusion 97

10 Approche locale en grandes déformations **99**
10.1 Introduction 99
10.2 Approche locale, cas élastique linéaire 99
10.2.1 Equivalence des approches locales et globales 100
10.2.2 Application de l'approche en petites déformations pour les grandes déformations 100
10.3 Approche locale en grandes déformations 100
10.3.1 Lois de comportement 100
10.3.2 Champ asymptotique en présence d'une fissure 102
10.3.3 Calcul direct de v_1 104
10.3.4 Termes d'ordre supérieurs 106
10.3.5 Méthode de résolution "simplifiée" 106
10.3.6 Un détour par le cas linéaire 109
10.3.7 Résumé 109
10.4 Remarques et applications 110
10.4.1 Autres calculs asymptotiques 110
10.4.2 Petites déformations / grandes déformations 116
10.5 Analyse qualitative des résultats 119
10.5.1 Singularités des tenseurs 119
10.5.2 Aspect du fond de fissure 119
10.5.3 Conservation des directions d'axe 120
10.6 Conclusion 121

11 Approche expérimentale en grandes déformations **125**
11.1 Introduction 125
11.2 Outil d'étude : la force de déchirabilité 125
11.2.1 Genèse du concept 125
11.2.2 Approche locale de Thomas 127
11.2.3 Etat des lieux récent 128
11.2.4 Eprouvettes types et calcul de T 129
11.2.5 Influence de la géométrie sur la déchirabilité 135
11.3 Analyse numérique de la déchirabilité 136
11.3.1 Introduction 136
11.3.2 Présentation des calculs 136
11.4 Sens de la courbe $T(v)$, $J_2(v)$ 148
11.4.1 Précisions apportées par le calcul de structure 148
11.4.2 Usage de $T(v)$ 148
11.4.3 Critère de Déchirabilité 149
11.5 Conclusion sur les approches expérimentales 150

12 Approche par une règle de cumul de dommage **153**
12.1 Introduction 153
12.2 Présentation du critère 153
12.2.1 Cas d'une déformation homogène 153
12.2.2 Cas général 155
12.2.3 Mise en œuvre 155
12.2.4 Cas d'une structure complexe 157
12.2.5 Cas simplifié 157
12.2.6 Synthèse 160

12.3 Présentation des calculs 161
12.3.1 Equations générales 161
12.3.2 Description de la vitesse 162
12.4 Exploitation et validation du modèle 167
12.4.1 Courbe de Lake 167
12.4.2 Notion de mesure intrinsèque 169
12.4.3 Influence des non-linéarités du comportement 171
12.4.4 Influence de la dissipation 172
12.4.5 Cas des pré-tractions 172
12.5 Conclusion 176
Bibliographie 180

IV Rotation de Fissure **185**

13 *Stick-slip et steady tearing* *189*
13.1 Présentation du phénomène 189
13.2 Nature des matériaux 191
13.3 Résultats expérimentaux 192
13.3.1 Etude directe du phénomène. 192
13.3.2 Etude sur éprouvettes contraintes. 193
13.3.3 Etude pour des sollicitations particulières. 195
13.4 Du stick-slip à la rotation de fissure 196

14 Synthèse des diverses modélisations **197**
14.1 Approches énergétiques 197
14.1.1 Le modèle de Maugis et Barquins 197
14.1.2 Influence de l'effet Mullins 199
14.1.3 Un critère énergétique 200
14.1.4 Recherche d'une anisotropie de fragilité 202
14.2 Stick-slip et cavitation 203
14.3 Modèles comparatifs 204
14.3.1 Comparaison SBR chargé - NR 205
14.3.2 Comparaison SBR chargé - SBR non chargé 206
14.4 Conclusions sur les modélisations existantes 206

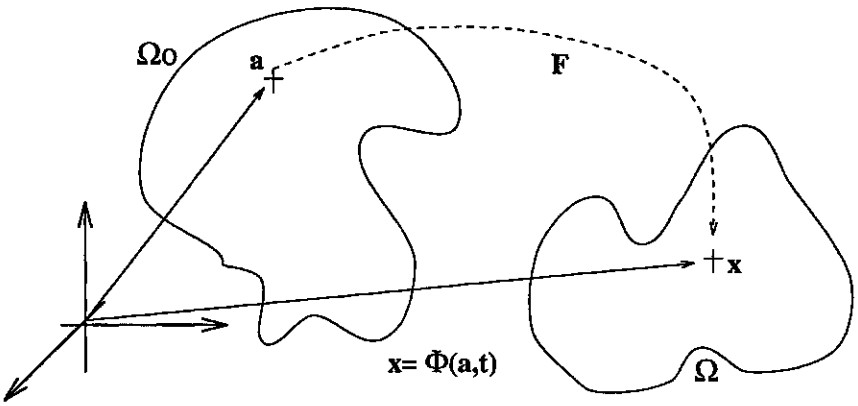
15 Quelques éléments de modélisation **207**
15.1 Préliminaires 207
15.1.1 Divers phénomènes, divers matériaux 207
15.1.2 Objectifs de modélisation 207
15.1.3 Limitations 208
15.2 Une étude expérimentale 208
15.2.1 Introduction 208
15.2.2 Matériaux et essais 208
15.2.3 Comportement des trois matériaux 210
15.2.4 Rupture homogène 213
15.2.5 Tests de déchirabilité 214
15.2.6 Quelques simulations 216
15.3 Un critère de rotation de fissure 221
15.3.1 Résultats récapitulatifs 221

15.3.2 Confinement de l'endommagement 222
Bibliographie 228

A Croissance de Défauts **235**
A.1 Introduction 235
A.2 Calcul fondamental 235
A.2.1 Présentation du modèle 235
A.2.2 Champ de déformation 236
A.2.3 Compatibilité du champ de contrainte 236
A.2.4 Exemple classique 237
A.3 Limitations pour la modélisation micro-macro 240
A.4 Conclusion 240
Bibliographie 241

B Algorithme de calcul **243**
B.1 Commentaires 243
B.2 Extraits de programme, exemple de fichier de calcul 245

Définitions, notations



Soit un système Ω qui subit une transformation Φ à partir de $t = 0$. L'état initial du système constitue la configuration de référence et est repéré par l'indice $(\ )_0$.

Nous décrirons la cinématique et l'état thermodynamique du système à partir des outils ci-après :

Cinématique

La transformation a la forme très générale $\underline{x} = \Phi(\underline{a}, t)$.

Nous noterons $\nabla()$ le gradient lagrangien, $Grad()$ le gradient eulérien, div la divergence lagrangienne, Div la divergence eulérienne.

Soit $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{\nabla}}\Phi$ l'application linéaire tangente, gradient de la transformation. On utilisera éventuellement la décomposition polaire $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}.\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{V}}.\underline{\underline{R}}$ et les quantités scalaires, vectorielles ou tensorielles suivantes :

- $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}$, $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{1}})$, tenseurs de Cauchy à droite et de Green-Lagrange ;
- $\underline{\underline{G}} = \underline{\underline{F}}.{}^t\underline{\underline{F}}$, tenseur de Cauchy à gauche ;
- $\underline{u} = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$ la vitesse ;
- $J = Det(\underline{\underline{F}})$ le jacobien ;
- $\underline{\underline{K}} = \underline{\underline{Grad}}(\underline{u})$, le gradient de vitesse ;
- $\underline{\underline{d}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} + {}^t\underline{\underline{K}})$, le taux de déformation ;
- $\underline{\underline{\omega}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{K}} - {}^t\underline{\underline{K}})$, le taux de rotation ;
- ρ la masse volumique actuelle, ρ_0 la masse volumique dans l'état de référence.

Nous pourrons utiliser la notation $\underline{\lambda}$ pour exprimer une transformation dont les axes principaux sont les axes de coordonnées, avec les élongations respectives $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, et par $\underline{\lambda} r$ le vecteur image de $\underline{r}$ par cette transformation $(\lambda_1 r_1, \lambda_2 r_2, \lambda_3 r_3)$.

En notation lagrangienne réactualisée, $\underline{\underline{F}}(t)$ est le gradient de déformation à la date t par rapport à Ω_0, et $\underline{\underline{F}}_t$ est le gradient de déformation par rapport à Ω_t. On rappelle la formule :

$$\underline{\underline{F}}_t(t').\underline{\underline{F}}(t) = \underline{\underline{F}}(t')$$

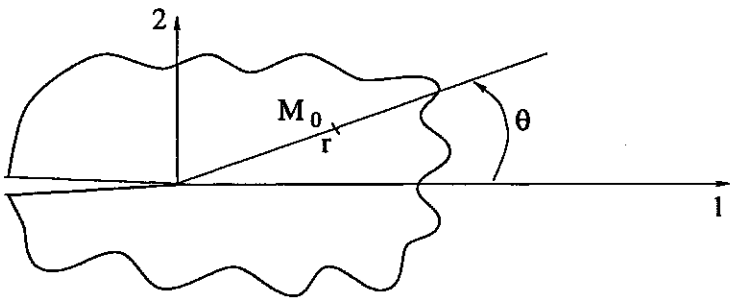
Thermoélasticité

En hyperélasticité, on notera W le potentiel.
I_1, I_2, I_3 les trois invariants principaux de $\underline{\underline{B}}$.
$\underline{\underline{\sigma}}$ le tenseur des contraintes de Cauchy.
$\underline{\underline{\tau}}$ le tenseur des contraintes de Kirchoff.
$\underline{\underline{\pi}}$ le tenseur des contraintes nominales, ou tenseur de Boussinesq.
$\underline{\underline{S}}$ le tenseur (symétrique) de Piola-Kirchoff.
T la température (dans quelques circonstances on la notera θ).

On rappelle par exemple les relations suivantes en hyperélasticité : $\begin{cases} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}}.{}^t\underline{\underline{F}} \\ \underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} \\ \underline{\underline{\tau}} = J\underline{\underline{\sigma}} \end{cases}$

Mécanique de la rupture

Nous abordons essentiellement la mécanique de la rupture en grandes déformations et en contraintes planes. Le solide sera préfissuré selon une direction droite que l'on prendra comme axe des abscisses (axe 1). L'axe perpendiculaire dans le plan sera l'axe des ordonnées (axe 2).



Calcul tensoriel

Un scalaire est noté par une lettre. Un vecteur est souligné une fois. Un tenseur d'ordre 2 est souligné 2 fois. Enfin, un tenseur d'ordre 4 est souligné 4 fois. On utilise les règles de calcul tensoriel courantes pour les tenseurs symétriques, avec la convention d'Einstein sur les indices répétés.

$$\begin{cases} \underline{n} = \underline{\underline{A}}.\underline{m} \Longleftrightarrow n_i = A_{ip}m_p \\ \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{A}}.\underline{\underline{B}} \Longleftrightarrow C_{ij} = A_{ik}B_{kj} \\ x = \underline{\underline{A}} : \underline{\underline{B}} \Longleftrightarrow x = A_{ij}B_{ij} \\ \underline{\underline{C}} = \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} : \underline{\underline{B}} \Longleftrightarrow C_{ij} = A_{ijkl}B_{kl} \\ \underline{\underline{\underline{\underline{C}}}} = \underline{\underline{A}} \otimes \underline{\underline{B}} \Longleftrightarrow C_{ijkl} = A_{ij}B_{kl} \end{cases}$$

$\underline{\underline{I}}$ et $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$ sont respectivement l'identité d'ordre 2 et l'identité d'ordre 4 sur les tenseurs symétriques.

Le matériau

Nous appellerons NR (Natural Rubber) un caoutchouc naturel, SBR (Styrene Butadiene Rubber) la famille de caoutchoucs synthétiques que nous utiliserons. Par extension, un SBR est un élément de cette famille. La plupart du temps, nous appellerons SBR un SBR chargé en particules renforçantes. Le matériau non-chargé sera appelé "SBR non-chargé".

On notera T_g la température de transition vitreuse d'un élastomère.

Bibliographie

Chaque partie comporte une bibliographie indépendante. Il peut y avoir des redondances de références d'une partie à l'autre, ce qui explique le grand nombre apparent de références citées. Chacune est rappelée dans le texte par deux nombres entre crochets. Par exemple [II.12] renvoie à la douzième référence de la partie II.

Introduction

Ce mémoire est consacré à l'étude du comportement d'élastomères dans des domaines de chargements ultimes. Son but essentiel est de caractériser tant du point de vue théorique qu'expérimental une structure en élastomère proche de la rupture. L'objet de cette recherche est de répondre au souci quotidien d'amélioration des caractéristiques de durée de vie des pneumatiques, organes complexes qui participent à la sécurité des véhicules automobiles, en proposant une démarche d'analyse et des outils adaptés à cette étude.

Les qualités demandées à un pneumatique sont de plus en plus draconiennes pour assurer non seulement cette sécurité mais aussi pour garantir la réputation du manufacturier, appelé ici caoutchoutier. Présentons tout d'abord les questions posées au caoutchoutier en terme de qualité au sens large.

Le pneu est un organe de sécurité important, dont le comportement est peu perçu par le conducteur. On peut rouler pendant très longtemps avec des pneus usés jusqu'au moment où l'on tombe sur la rare condition qui le fera éclater, ou encore avec des pneus dégonflés qui déjanteront à grande vitesse. De même, l'utilisateur qui laisse sa voiture stationner dehors toute l'année, qui percute occasionnellement un trottoir, ne voit pas les petites fissures qui apparaissent en surface ou dans la structure, comme autant de points d'amorce qui peuvent provoquer l'accident.

A l'opposé de tous les autres équipements d'un véhicule, un pneu défectueux met en cause la réputation de son manufacturier seul. L'usure normale est très lente et la loi responsabilise le conducteur en lui intimant de respecter des tolérances précises sur la dimension des sculptures de la bande de roulement. La concurrence pousse chacun des manufacturiers à augmenter le kilométrage à rupture du pneu et à préserver les propriétés mécaniques le plus longtemps possible, même après usure avancée.

Les phénomènes d'éclatement, certes rares, sont des formes d'usure beaucoup plus graves liées à des endommagements peu visibles qui se caractérisent par des phénomènes de propagation de fissure, éventuellement cachés dans l'enveloppe de la structure, principalement le flanc. En dimensionnant ses pneus, en garantissant une durée de vie en condition d'usure normale, le caoutchoutier doit aussi s'assurer que les risques d'éclatement sont rejetés à des kilométrages élevés. Certaines parties des pneus camions sont susceptibles de faire un million de kilomètres, soit un nombre impressionnant de cycles de chargement !

La compréhension des phénomènes de propagation de fissure est donc un enjeu très important. Le pneu est un assemblage de plus de 200 composants, variétés de caoutchoucs ou de câbles de renforcement, astucieusement agencés pour répondre à des impératifs de sécurité mais aussi de confort ou de rendement ; le tout cuit avec art ! La phase de recherche et développement est longue et les validations d'un nouvelle structure peuvent être fastidieuses.

On s'intéresse actuellement à tous les niveaux de la modélisation, du caoutchouc seul, constituant noyé dans le pneu, à la structure complète en cours de roulage en passant par des modèles d'interaction gomme-câble. Pendant longtemps, les méthodes d'études

sont restées expérimentales, avec des concepts peu renouvelés. Depuis quelques années, le calcul de structure est utilisé et apporte des méthodes nouvelles d'investigations rapides et fiables. Il permet au mécanicien de s'intéresser à ces matériaux - comportement, propagation de fissure, abrasion, interaction gomme-câble, fatigue, etc...

Nous souhaitons aborder plus particulièrement les propagations de fissure. Nous cherchons activement à caractériser les propagations dans le pneu directement à partir d'informations mesurées sur chaque constituant, caoutchouc ou câble. Dans un premier temps cela conduit à une réflexion sur les grandeurs caractéristiques du matériau ; dans un second temps il est nécessaire de s'intéresser à la prise en compte de ces grandeurs dans une démarche de dimensionnement. La première étape est abordée de façon pragmatique à partir d'essais de laboratoire simples et rapides, essentiellement des essais monotones de propagation de fissure. La seconde étape, plus lourde, fait intervenir de façon prépondérante le calcul de structure et les essais en fatigue. Le passage de la première à la seconde étape pose le problème récurrent de la représentativité des essais de laboratoire pour une application d'ingénieur.

Dans ce cadre, notre travail dresse une synthèse des travaux sur la propagation de fissure sous sollicitation monotone. De nombreuses études ont été réalisées depuis cinquante ans. Elles ont conduit à des succès ou des faux sens que les outils récents de la mécanique nous permettent de souligner ou corriger. Plus généralement, nous souhaitons proposer une modélisation qui permette de rassembler l'ensemble des connaissances dans un cadre cohérent. Nous exposons notre travail en quatre parties d'ampleurs inégales. Les trois premières sont relativement indépendantes. La dernière constitue une sorte de synthèse des trois précédentes.

• La **première partie** présente des résultats généraux sur la propagation de fissure dans les élastomères. Nous présentons les deux grands modes de propagation que l'on rencontre dans le cadre des essais monotones : un mode usuel de propagation droite et un mode avec branchement. **La particularité de nos matériaux réside dans le fait que les deux modes de propagation apparaissent a priori dans des essais de mode I, mais pour des plages de vitesse de sollicitation distinctes.** Nous montrons le caractère intrinsèque de ces deux modes de propagation et précisons la nature des matériaux et des types de sollicitations auxquels nous nous restreindrons. Enfin, une analyse expérimentale en microscopie nous permet de montrer qu'étudier la transition entre les deux modes de propagation revient à caractériser l'amorçage de la fissuration. Cette première partie justifie la démarche que nous suivons dans les trois parties suivantes.

• La **seconde partie** est consacrée au comportement du matériau en vue de l'étude de la propagation de fissure. Les élastomères ont un comportement complexe lequel n'est pas simplement hyperélastique comme leur étymologie voudrait nous le faire croire. La plupart des particularités du comportement, comme la viscosité, peuvent avoir une incidence directe sur les modélisations de la propagation de fissure. En restreignant notre étude aux essais monotones, nous montrons que nous pouvons ne retenir que l'incompressibilité, la viscosité et l'endommagement - terme propre aux élastomères - pour avoir une modélisation déjà exhaustive des phénomènes de propagation.

A partir d'une présentation synthétique des modélisations connues, nous proposons une loi de comportement qui rend compte de l'endommagement. L'accent est mis sur la simplicité du modèle. Nous acceptons d'avoir un comportement simplifié qui nous permet de privilégier la qualité de la description et la simplicité de son implémentation au dépens d'une fidélité des ajustements. Néanmoins, dans les cas présentés et pour les matériaux qui nous intéressent, nous montrons la remarquable précision du modèle à rendre compte de particularités importantes comme la déformation rémanente et la bi-axialité par exemple,

rarement prises en compte.

Cette partie décrit une démarche complète de construction du comportement. Nous définissons d'abord les exigences de la modélisation en rapport avec la propagation de fissure. Puis nous analysons les résultats expérimentaux qui nous permettent de montrer les particularités du comportement des élastomères. Les propriétés intéressantes sont ensuite isolées. Une étape théorique permet de proposer une loi de comportement validée pour nos résultats expérimentaux. Enfin, nous montrons comment intégrer cette loi dans un code de calcul de structure en grandes déformations incompressibles.

• La **troisième partie** constitue d'un certain point de vue le corps de la thèse. Elle trace un bilan détaillé des méthodes d'investigations de la propagation de fissure dans les élastomères, corrige quelques acquis et présente une modélisation originale qui permet d'accéder à une description plus complète des essais de propagation. Elle se divise en quatre grands chapitres qui traitent chacun indépendamment de quatre grands cadres d'étude.

- **L'approche globale** fondée sur la notion de taux de restitution d'énergie est d'abord présentée. On remarque essentiellement que le formalisme bien connu en petites déformations s'adapte facilement aux grandes déformations. Les grandes déformations ne font que compliquer les méthodes d'évaluation des quantités énergétiques. Nous présentons également des modèles de propagation de fissure viscoélastiques et montrons leurs limites. Il apparaît que pour nos matériaux une description phénoménologique simple du critère de propagation n'est pas satisfaisante. Ce cadre énergétique serait pourtant l'outil le plus simple et le plus compatible avec le calcul de structure.

- Nous abordons alors **l'approche locale** de la propagation de fissure. Il s'agit d'un domaine particulièrement mal connu dont nous devons présenter l'intégralité des résultats. De nombreux problèmes sont posés qui mériteraient d'être approfondis. Nous avons dû passer outre ces difficultés pour ne garder qu'une vision synthétique des principaux résultats. Il s'agit d'un chapitre très technique qui permet de remettre en question quelques idées préconçues. Sa portée est limitée par le choix restreint des comportements hyperélastiques définis en fonction du premier invariant des déformations.

- Les deux chapitres précédents ont défini le cadre théorique sur lequel devrait s'appuyer une démarche expérimentale. Pourtant, les protocoles expérimentaux semblent faire fi de ces résultats théoriques, principalement parce qu'ils ne peuvent pas s'adapter à la complexité du comportement des matériaux. Nous corrigeons quelques résultats et montrons qu'il est possible d'avoir une analyse plus précise des essais si l'on interprête les résultats à l'aide des calculs numériques. Il faut cependant posséder une chaîne de calcul et des lois de comportement adaptées. Pour pouvoir mener à bien une telle démarche, nous donnons les exigences de précision nécessaire à la rédaction d'un compte-rendu expérimental. Nous illustrons enfin l'importance de nos corrections sur des exemples très particuliers qui interviendront dans la dernière partie de notre travail.

- Le chapitre précédent nous permet d'avoir une idée très précise de l'influence du comportement sur les propagations de fissure. Il ne nous permet pourtant que d'avoir accès à une modélisation partielle des propagations de fissure : il faudrait aussi rendre compte des vitesses de propagation. Nous proposons un cadre théorique qui synthétise à la fois les approches actuelles de la propagation des élastomères présentées dans les deux premiers chapitres de cette partie et les différents résultats discutés

dans le troisième chapitre. Sans être forcément originale, notre approche propose des outils que nous mettons en place, des observables que l'on peut étudier.

Notre présentation est volontairement simplifiée. Nous cherchons d'abord à mettre en place un cadre conceptuel, ensuite à bien comprendre l'interaction entre les différents ingrédients de la modélisation : comportement et critère. Le cadre semi-analytique construit autour de l'approche locale permet de clairement identifier l'ensemble des variables et proposer des modélisations semi-analytiques fiables de toutes les grandeurs liées à la propagation de fissure. Il limite aussi notre étude à une étude préliminaire qui devrait être étendue aux comportements plus complexes, éventuellement obtenue par un calcul de structure adapté.

• **La dernière partie** aborde les phénomènes de propagations instationnaires qui n'entrent pas dans le cadre courant de la mécanique de la rupture. Elle permet de faire le lien entre ces phénomènes, tels qu'ils sont présentés dans la littérature, et la première partie de ce mémoire. Nous présentons quelques résultats bibliographiques. Puis nous nous attardons sur les diverses modélisations et montrons qu'elles ne sont pas adaptées. Nos démonstrations se fondent largement sur l'ensemble des résultats établis en partie III.

Pour apporter des informations nouvelles sur ce sujet difficile, nous présentons une étude expérimentale de propagation de fissure, s'intéressant à des grandeurs caractéristiques de l'amorçage de la fissure. Elle nous permet d'abord de faire une synthèse de notre travail en montrant comment s'articulent nos différents résultats autour de l'analyse de résultats d'essais, comment aussi certains dépouillements ne sont possibles qu'avec notre modélisation. Puis nous tirons quelques conclusions sur la nature des phénomènes instationnaires et proposons un modèle prédictif du mode de propagation. Ce modèle est validé sur trois matériaux mais de façon incomplète. Beaucoup d'essais du même type sur plusieurs matériaux devraient venir en renforcer l'intérêt.

Nous pourrions particulariser notre travail par deux caractéristiques essentielles.

- Nous avons jugé plus intéressant et original d'essayer de modéliser les phénomènes de propagations instationnaires que nous présentons en première partie. Il s'agit d'un sujet connu depuis longtemps, peu développé encore aujourd'hui et qui présente un fort intérêt industriel. Cela explique en partie pourquoi nous centrons notre travail sur ce sujet et pourquoi nous avons choisi de présenter de façon exhaustive le "cadre standard" de la mécanique de la rupture dans une troisième partie.

- Notre travail est avant tout transversal. Il y a une interaction très forte entre les résultats expérimentaux, les calculs analytiques et les calculs de structure.

  Cette recherche est motivée par des observations expérimentales dont notre modélisation cherche à rendre compte. Il s'agit d'une contrainte qui s'est révélée forte tant il semble délicat d'extraire du sens, de trouver des descripteurs nouveaux, à partir d'essais classiques de propagation de fissure dans les élastomères.

  Nous avons obtenu nos résultats en les fondant d'une part sur une étude théorique et analytique qui identifie les différentes variables du modèle en leur donnant un caractère pertinent et d'autre part sur une démarche expérimentale qui en donne une mesure ou une estimation permettant une meilleure compréhension des phénomènes, comme premier élément de choix ou de dimensionnement.

  Cette exigence de pertinence est obtenue parce que nous soulignons clairement les difficultés liées au comportement tant au travers de calculs analytiques qu'au travers de la mise en œuvre de calculs de structure. La confrontation des résultats théoriques et expérimentaux nous permet ausssi de cerner par exemple les limites dans lesquelles

un taux de restitution s'avère être une mesure intrinsèque des conditions d'amorçage ou de propagation.

Première partie

Présentation du phénomène

Introduction

On peut utiliser de nombreux protocoles expérimentaux pour étudier la propagation de fissure dans les élastomères. Nous en présentons un plus particulièrement dans cette partie.

Dans un premier temps, nous montrons qu'il existe différents modes de propagation de fissure. Puis nous nous arrêtons un peu sur le plus atypique. Quelques résultats issus d'autres types d'essais montrent qu'il s'agit d'un phénomène intrinsèque au matériau.

Enfin, nous réalisons une étude locale de propagation sur un banc d'essai de microscopie qui nous permet de décrire l'amorçage de la fissuration.

L'ensemble de cette présentation nous permet de tracer un plan d'étude de la propagation des fissures dans les élastomères.

Chapitre 1

Observation type, présentation macroscopique

1.1 Test Classique

On considère un élastomère de type SBR chargé par du noir de carbone. Soit une éprouvette de ce matériau, dite éprouvette lanière, de longueur utile 5cm, de largeur 2cm, d'épaisseur 2mm, présentant une pré-entaille débouchante à mi-hauteur et d'une demi-largeur d'éprouvette (voir figure (1.1-1)). Cette éprouvette est montée sur un banc d'essai de machine de traction. On réalise un essai de traction uni-axiale à température ambiante et l'on observe le déplacement pour lequel l'éprouvette rompt. Le paramètre d'étude est la vitesse de traction. Ce type de test entre couramment dans le protocole d'étude de la résistance à la déchirabilité des élastomères. Il est généralement réalisé sur des machines de traction type Instron. La vitesse de déformation et le déplacement à rupture sont adimensionnés par la longueur utile de l'éprouvette au repos et donnent la **vitesse de déformation** et la **déformation** de l'éprouvette. On relève plus précisément la **déformation à rupture.**

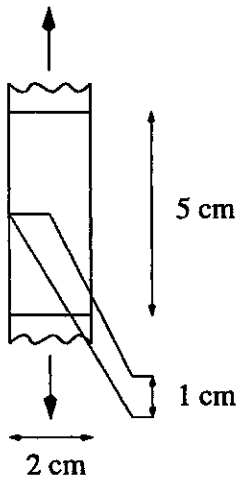


FIG. 1.1-1: Schéma de principe de l'essai de propagation de fissure sur éprouvette lanière sollicitée en traction uni-axiale.

Les élastomères sont des matériaux qui peuvent supporter de très grandes déformations : le déplacement à rupture est très important et un essai peut être assez long (cela peut durer plusieurs heures). Décrivons le déroulement d'un essai de déchirabilité.

Dans un premier temps, l'éprouvette se déforme et la fissure s'ouvre. Vers 40 % de déformation, on commence à déceler l'amorçage de la propagation par l'apparition d'une petite irrégularité en pointe de fissure. Puis, selon la vitesse, on peut observer trois déroulements types de l'essai jusqu'à la rupture.

- Le front de fissure se propage, mais l'ouverture de la fissure reste bien symétrique. En général, la vitesse de propagation est faible et n'accélère sensiblement que lorsque le ligament devient très petit.

  Quand la fissure a complètement traversé le ligament, elle coupe la lanière par la moitié. Chaque morceau se rétracte rapidement. C'est l'instant de rupture qui donne la **déformation à rupture**. Selon les matériaux, cette déformation peut aller de

50 à 250 %. Les deux morceaux d'éprouvette récupérés s'assemblent parfaitement et montrent que la propagation, vue en configuration initiale, était une propagation droite.

Le graphe (1.1-2) résume ce mode de déchirement. Les figures (1.1-3) montrent un exemple de propagation droite. Les photographies ont été prises pendant un essai sur un matériau qui supporte des déformations très élevées.

FIG. 1.1-2: Représentation schématique de l'évolution du fond de fissure dans le cas d'une propagation droite. Etat initial, ouverture avant amorçage et ouverture en cours de propagation.

- Dans le second cas, l'ouverture de la fissure ne reste pas symétrique. On remarque aussi que le trajet de propagation semble sortir du plan initial de la pré-fissure. La rupture se produit comme précédemment après propagation lente d'une fissure jusqu'au bout du ligament. Les schémas de la figure (1.1-4) montrent la légère différence avec la propagation droite.
- Enfin, le dernier mode de propagation est le plus caractéristique. Après l'amorçage, il semble apparaître une zone plate en fond de fissure, puis deux bourrelets de matière relâchée de part et d'autre de ce front plat. Ces bourrelets se développent très lentement, tout se passe comme si l'on avait deux fissures se propageant par pelage lent dans la direction de plus grande déformation macroscopique. Les deux portions relâchées peuvent prendre une extension extraordinaire, comme illustré par la photo (1.1-6). Enfin l'éprouvette rompt par une propagation catastrophique qui s'initie sur la partie plate du fond de fissure.

  Dans certains cas, une seule propagation est observée.

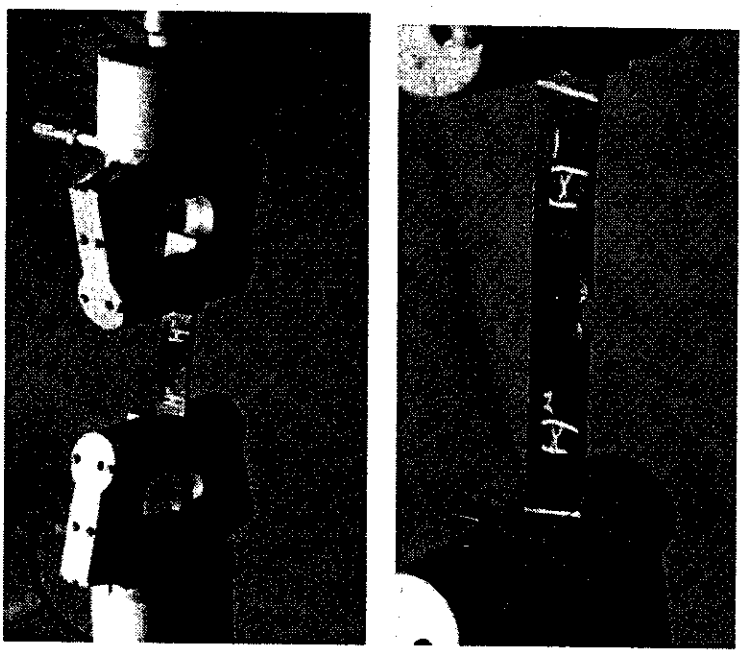
  En configuration non-déformée, ces deux fissures transverses apparaissent comme deux fissures branchées à 90° du trajet de propagation droite.

Ces trois modes de propagation sont rencontrés usuellement dans les caoutchoucs pneumatiques :

1. le premier cas pour les grandes vitesses[1] de traction ;
2. le second cas pour les vitesses de traction modérées ;
3. le dernier cas pour les faibles vitesses de traction.

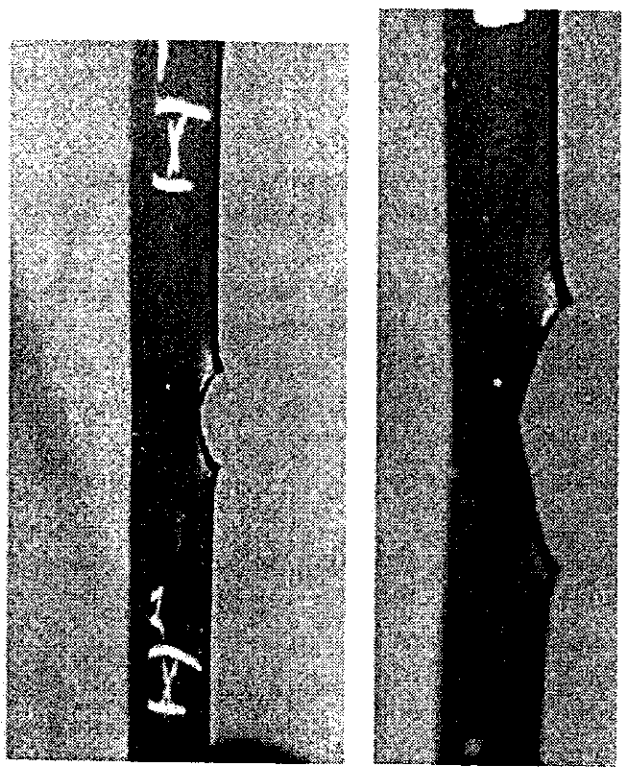
Si l'on regarde la courbe de déformation à rupture en fonction de la vitesse de déformation, on remarque toujours une allure en cloche comme sur l'exemple du graphe (1.1-8) quand les trois modes de rupture sont observés. L'optimum correspond toujours à une propagation en moustache, de même pour les vitesses plus faibles. Au delà de l'optimum, la fissure se propage encore un peu en moustache mais l'on a de plus en plus de mal à faire la distinction avec des propagations déviées. Puis, loin de l'optimum la fissuration est une fissuration droite. Sur le graphe (1.1-8), l'optimum est atteint environ à 5 $mm.s^{-1}$, soit une vitesse de déformation de 1.7 $10^{-3}s^{-1}$.

[1] Les valeurs de vitesses seront fixées plus loin sur des exemples.



(a) Eprouvette non-déformée. Les mors pneumatiques une fois serrés, l'éprouvette est dans une configuration légèrement flambée.

(b) Déformation macroscopique : 92 %. Bien après l'amorçage (22 % macro), la fissure ne semble toujours pas avoir avancé.



(c) Déformation macroscopique : 167 %. La fissuration droite est bien visible.

(d) Déformation macroscopique : 250 %.

FIG. 1.1-3: Déroulement d'un essai où une propagation droite est observée.

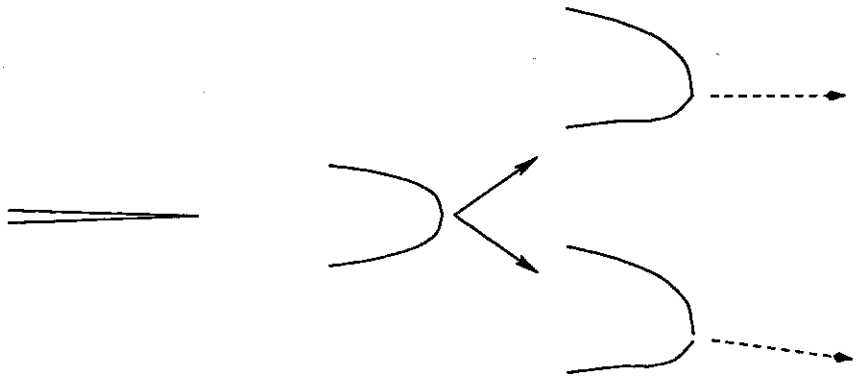


FIG. 1.1-4: Développement d'une déviation de fissure. Tout se passe comme pour une propagation droite, mais la fissure n'est pas symétrique et le trajet de propagation peut apparaître comme dévié du plan de la préfissure.

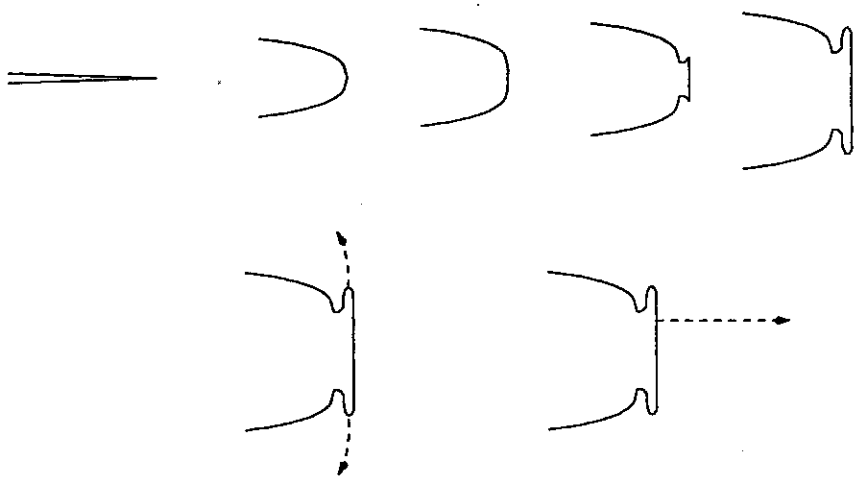


FIG. 1.1-5: Développement d'une propagation en moustache. Les flèches indiquent les sens de développement des fissures.

Les fissures branchées à 90° sont appelées des **moustaches** ou **têtes de marteau** à cause de leur forme en configuration non-déformée (figure (1.1-7)). De façon impropre, on parlera souvent de **rotation de fissure**. Les deux autres modes de propagation seront appelés **déviation** et **propagation droite** de fissure. On classera plus particulièrement les modes de propagation en deux catégories :

1. la **rotation** de fissure peut se caractériser par l'existence d'une propagation catastrophique ;
2. les **déviation** et **propagation droite** sont des modes de fissuration lente du ligament. La déviation de fissure augmente la longueur effective de propagation.

On voit clairement que la courbe expérimentale de déformation à rupture n'est pas obtenue avec une grande fiabilité. Aux vitesses rapides, on observe toujours une forte dispersion sur les résultats, associée à une grande dispersion sur l'allure de la déviation de fissure (forme, amplitude, etc...). Aux faibles vitesses, la dispersion semble moins importante. Le point le mieux défini est l'optimum.

La taille des moustaches est maximale quand on atteint l'optimum en vitesse de la déformation à rupture et décroît quand la vitesse décroît à partir de cet optimum. On peut souvent observer la tendance des moustaches à devenir dissymétriques loin de l'optimum, à avoir des amplitudes assez variables, etc... Il s'agit toujours d'observations

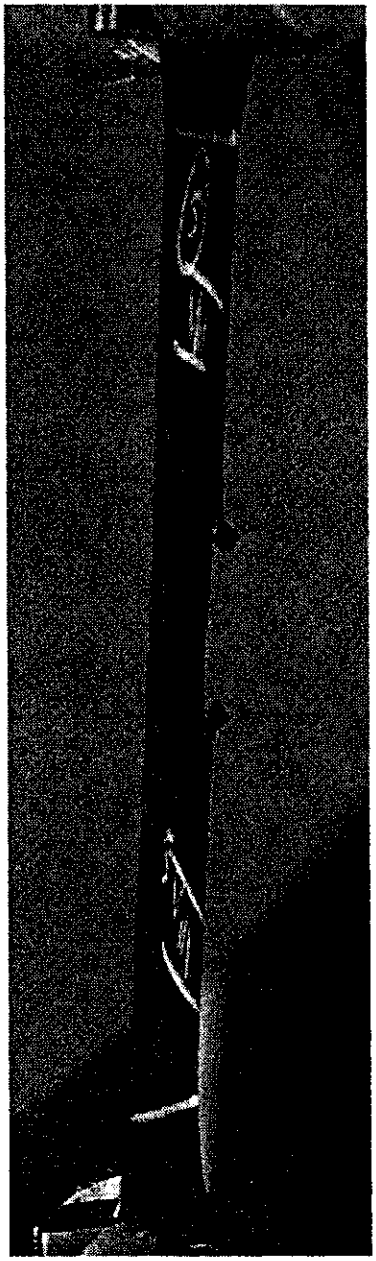


FIG. 1.1-6: Une éprouvette en cours d'essai, déformation macroscopique 125 %. On observe clairement deux petits cubes de matière relâchée en vis-à-vis qui correspondent à une moustache bien symétrique vue en configuration déformée. La rupture de cette éprouvette aura lieu beaucoup plus tard (vers 250 %) par apparition d'une fissure catastrophique démarrant quelque part sur le bord de l'éprouvette entre les deux cubes (ce que l'on pourrait appeler le fond de fissure).

plus qualitatives que quantitatives. Par exemple, la mesure de la taille des moustaches s'avère très aléatoire à l'usage et n'est pas toujours en accord avec l'impression visuelle de grande ou petite amplitude du phénomène. Certains matériaux présentent des moustaches toujours petites, de l'ordre du millimètre, et il devient difficile dans une assemblée d'éprouvettes de clairement classer les moustaches de plus grande amplitude. Au cours

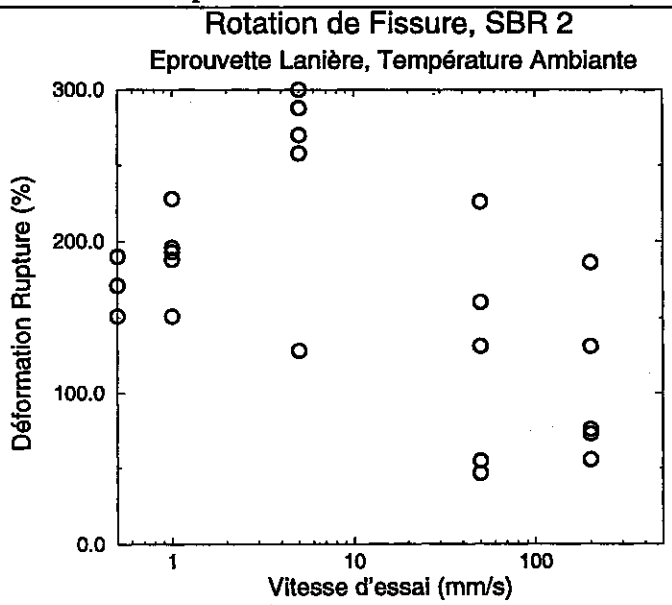


FIG. 1.1-8: Essai de traction uni-axiale sur des éprouvettes lanières pré-entaillées d'un SBR (SBR 2) chargé. Test réalisé à l'ambiante. Pour chaque vitesse, 5 essais sont réalisés. On observe d'abord une forte dispersion des résultats et la présence d'un optimum de la déformation à rupture, plutôt mal défini dans cet essai mais localisable à 5 mm/s.

d'un essai, on peut avoir l'impression visuelle que l'on observe une moustache très développée alors qu'il s'agit d'une moustache plutôt petite en configuration non-déformée. Les grandes déformations d'essais sont simplement venues perturber l'observation.

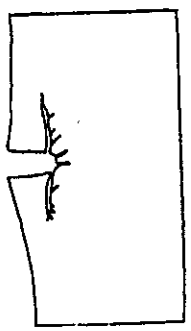


FIG. 1.1-7: Allure de la propagation de fissure pour des vitesses d'essai faibles. Cas du caoutchouc naturel.

1.2 Nature des matériaux

La rotation de fissure est un phénomène propre à un sous-ensemble bien défini d'élastomères : caoutchouc naturel, caoutchouc naturel chargé, caoutchouc synthétique chargé par du noir de carbone renforçant. Les premières observations de la rotation de fissure ont été faites par Busse [I.2] sur du caoutchouc naturel vers 1930. Les moustaches de ce matériau ont un aspect caractéristique en dents de scie, dont une représentation célèbre est donnée sur le dessin (1.1-7). Dans le cas des caoutchoucs synthétiques[2] chargés, la moustache a un aspect beaucoup plus régulier, sans branchement. Le caractère en dents de scie des fissures, obtenu par des branchements de fissures secondaires, indique que le matériau testé contient du caoutchouc naturel. La contraposée est fausse. Un caoutchouc naturel peut aussi donner des fissures sans branchement. Insistons bien sur le fait que si un caoutchouc naturel non-chargé peut donner lieu à des moustaches, seule la présence de charges renforçantes de noir de carbone permet d'observer ce phénomène pour des élastomères synthétiques. Des charges telles que la craie, l'argile ne permettent pas la

[2]Les caoutchoucs synthétiques sont apparus pendant la seconde guerre mondiale.

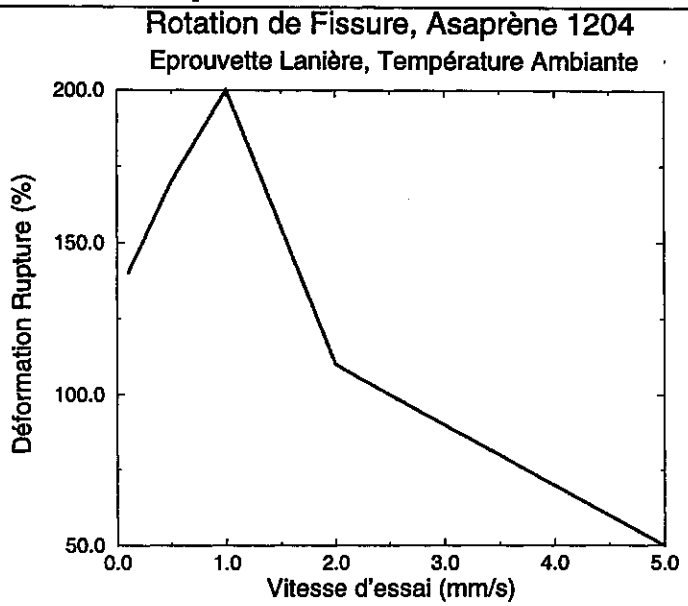


FIG. 1.2-9: Même type de graphe que (1.1-8). On donne ici le résultat d'une expérience sur un autre SBR. Il n'y a pas de test de reproductibilité. On observe notamment un optimum plus faible et une décroissance très rapide de l'allongement rupture au-delà de l'optimum. Pour une vitesse 5 fois plus grande que la vitesse optimale, la propagation est droite. Par comparaison, pour une vitesse 40 fois plus élevée que la vitesse optimale, le SBR 2 donne toujours des déviations pour le même test.

rotation. Il s'agit d'une observation cruciale, qui ajoute à l'abondante panoplie des effets spectaculaires du noir de carbone sur les propriétés des élastomères celui de la rotation de fissure.

1.3 Résultats en température

Le même type d'observation peut être réalisé en prenant la température comme variable d'essai. Dans ce cas, pour une vitesse de traction donnée, il existe une température optimale au dessus de laquelle les moustaches existent. Au dessous de cet optimum, la fissure se propage de façon déviée puis de façon droite aux très faibles températures. Les graphes (1.3-10) donnent des exemples de courbes d'allongement à rupture et des dispersions associées.

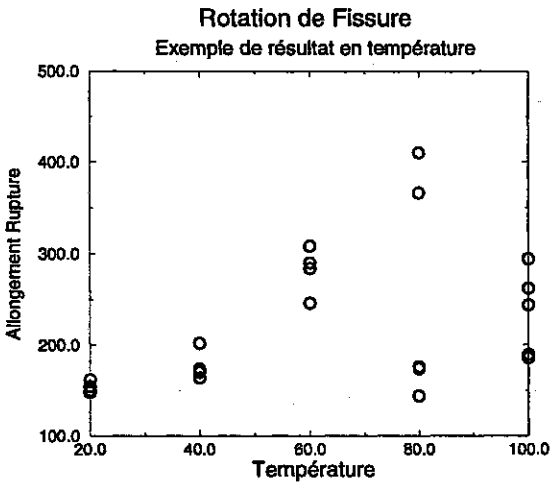
Les élastomères sont des matériaux visco-élastiques. On montre (principe d'équivalence temps-température) qu'un phénomène visco-élastique observé à une température T et caractérisé par une constante de temps τ peut être observé à la température T' à condition de modifier la constante de temps en τ' donnée par un paramètre de translation logarithmique $a_T(T')$ tel que

$$\tau' = a_T(T').\tau$$

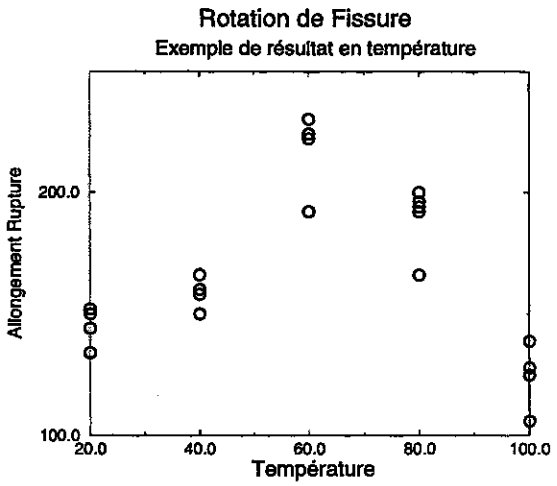
et

$$Log[a(T)] = \frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0}$$

où C_1 et C_2 sont deux constantes matériaux pour une température T_0 choisie. Cette équivalence est telle que la variable $a(T).v$, pour une vitesse v caractéristique de l'essai, est une variable réduite d'observation.



(a) Premier exemple de résultat expérimental en température. On remarque que l'optimum doit se trouver entre 60 et 80° C même si les essais deviennent malencontreusement très dispersés autour de ces deux températures.



(b) Second exemple de résultat en température. Cette série d'expériences est beaucoup plus satisfaisante que la précédente. L'optimum en vitesse est clairement atteint à 60° C.

FIG. 1.3-10: Deux résultats expérimentaux en température (deux matériaux différents), la vitesse d'essai est constante : 500 mm/min. Les résultats de gauche sont un exemple d'expérience qui devient contre toute attente très dispersive vers l'optimum, signe que l'optimum est sans doute proche de 80° C. Les résultats de droite donnent par contre l'image d'un phénomène toujours bien reproduit. Remarquons également que le matériau de gauche a atteint des niveaux de déformation rupture très élevés.

L'équivalence temps-température est connue aux petites déformations et rien n'indique qu'elle est encore valable aux grandes déformations. On cherche à l'appliquer avec des succés divers à la propagation de fissure. On peut établir que l'optimum suit une équivalence temps-température - i.e. il existe une vitesse optimale réduite $\dot{\epsilon}_0 = a_{T_0}(T)\ \dot{\epsilon}_{opt}$ à partir de laquelle on peut déduire la vitesse optimale à toute température. Il en est de même pour la vitesse de propagation de fissure - l'équivalence portant sur la vitesse. Ces deux résultats montrent qu'**un phénomène de nature visco-élastique est responsable de la rotation de fissure**.

Ce résultat permet en partie de comprendre que le niveau de température de l'essai par rapport à la température de référence T_0 du matériau doit être une variable importante. Ainsi l'élargissement de la plage d'observation de la déviation du SBR 2 par rapport à l'Asaprène 1204 (figures (1.1-8) et (1.2-9)) pourrait très bien s'expliquer par une dilatation des échelles des températures entre les deux matériaux due seulement à un écart sur T_0. Un écart de 7° C sur les T_0 peut déjà rendre compte d'un étalement d'un facteur dix de la zone de déviation. D'une façon générale cependant, on remarque toujours à l'ambiante qu'entre la vitesse optimale et la vitesse où la propagation devient toujours droite, il y a un rapport inférieur à cent. Quand on observe cette fourchette pour des matériaux dont les températures de référence T_0 peuvent être décalées de 20° ou plus, on peut juger que la distance à T_0 n'est pas le seul paramètre responsable de la largeur caractéristique de la plage des vitesses.

Remarque : *Il arrive assez souvent, à température ambiante, que la vitesse optimale de rotation de fissure soit proche de la limite inférieure des machines d'essai type Instron. Dans ce cas, l'expérience sur une seule lanière peut durer une demi-journée. Dans le cas des essais en température, le facteur limitant est le temps de mise en température : un essai ne dure jamais plus d'une demi-heure et dans ce cas un matériau peut être raisonnablement caractérisé dans la journée.*

1.4 Autres types de tests

1.4.1 Résultats pour d'autres géométries, test monotone

Dans le protocole d'étude de la résistance au déchirement des caoutchoucs, l'existence du phénomène de rotation pose un problème théorique complexe.

L'éprouvette lanière est la plus couramment utilisée dans les tests de caractérisation. La plupart des résultats que nous donnerons seront des résultats sur ce type de géométrie. Néanmoins, la rotation de fissure est observée sur d'autres éprouvettes, par exemple les éprouvettes PS. Il a également été vérifié qu'un phénomène semblable à la rotation avait lieu sur des éprouvettes axisymétriques. Dans ce cas, une fissure se propage au cœur de l'éprouvette dans le sens de la traction, comme si elle voulait former un cylindre à l'intérieur de la structure. Après rupture, deux demi-éprouvettes sont récupérées, dont l'une possède un téton plus ou moins prononcé et l'autre un trou en correspondance. Dans le cas du caoutchouc naturel, le phénomène peut devenir assez spectaculaire : l'observation en temps réel de la rotation sur l'éprouvette déformée fait apparaître un fond de fissure écaillé comme un ananas, chaque écaille étant une petite fissure branchée identique à celles de la figure (1.1-7).

Pour étudier la rotation de fissure, nous utiliserons exclusivement les éprouvettes lanières et les éprouvettes PS, en espérant pouvoir séparer par notre étude les effets de comportement du matériau des effets dus à la structure.

1.4.2 Cas d'autres sollicitations

On peut observer le même phénomène pour de nombreux autres tests. Les essais de relaxation ou de fluage sur éprouvettes entaillées donnent également des rotations de fissures. Dans le cas de la relaxation par exemple, l'apparition d'une moustache lors de l'essai fait croître de façon spectaculaire le temps de ruine de la structure. Le phénomène se produit pour des déformations de relaxation faibles ou des chargements faibles. Ces tests ne semblent plus être utilisés actuellement. On leur préfère toujours les essais monotones, beaucoup plus rapides à réaliser.

En revanche, dans la classe des tests en fatigue (malencontreusement appelés tests dynamiques par certains auteurs) on retrouve absolument le même type de phénomène.

Busse [I.2] donne un aperçu des difficultés qu'il peut y avoir pour observer la rotation en fatigue. Un test monotone fait apparaître une seule variable d'étude : la vitesse ou la température. Ces deux grandeurs sont équivalentes à la fréquence et à la température en fatigue. Mais en fatigue, on doit en outre décider des déformations minimales et maximales pour chaque cycle. Il apparaît en effet que plus la déformation minimale est élevée, plus on a de chances d'observer des moustaches. Il existe probablement un lien étroit entre la fréquence et les déformations minimale et maximale, mais ce lien n'est pas connu. En décidant de faire un test oligo-cyclique, on ajoute quand même une variable au test, soit la fréquence, soit la déformation maximale.

Toutes ces descriptions en relaxation, fluage, fatigue et sur structures variées nous font comprendre qu'il existe une propriété originale des élastomères qui leur permet d'avoir des trajets de fissuration spectaculaires dans une large gamme de circonstances : toutes ces propagations ont pour caractéristique de s'initier selon la direction de plus grande déformation moyenne ou actuelle.

L'existence d'une corrélation entre les tests en fatigue et les tests monotones n'a jamais été étudiée. La caractéristique des tests en traction monotone est avant tout les grandes déformations macroscopiques et microscopiques atteintes au cours du test. En revanche les tests de fatigue se caractérisent par un très grand nombre de cycles, sur des temps longs, mais avec des déformations macroscopiques qui peuvent être assez faibles.

Si le phénomène de rotation de fissure est relié à une caractéristique intrinsèque au matériau, quelle est cette caractéristique, comment induit-elle des trajets complexes, pourquoi ne semble-t-elle pas exister pour d'autres matériaux ?

1.5 Choix d'étude

Deux remarques s'imposent :

1. Les tests de propagation de fissure en traction monotone ont l'avantage de ne dépendre que d'un seul paramètre : la vitesse ou la température.
2. Les tests en fatigue sont plus lourds et dépendent de plus de variables. Il faut choisir la fréquence d'essai et les déformations minimales et maximales de chaque cycle. On sait en particulier que la rotation en fatigue dépend fortement du niveau de la déformation minimale.

Considérant ces deux remarques, l'objet de ce mémoire est limité à l'étude des tests de propagation en traction monotone. Il s'agit d'une première étape qui présente l'intérêt d'essayer de comprendre comment analyser plus en détail les tests de propagation en traction monotone, voire d'exercer un meilleur contrôle sur des essais qui donnent toujours l'impression à l'expérimentateur de délivrer peu d'informations par rapport "à ce qu'il voit". Une étape ultérieure serait la modélisation des essais en fatigue, éventuellement par un passage de la traction monotone à la fatigue.

Nous choisirons également d'observer la rotation de fissure grâce au test de déchirabilité - i.e. sur éprouvette lanière - mais présenterons aussi des résultats obtenus avec d'autres éprouvettes.

Chapitre 2

Quelques observations microscopiques

2.1 Introduction

Les moustaches sont toujours observées en configuration non déformée. D'une part, les mesures sont plus simples sur la configuration initiale, d'autre part l'évolution du phénomène sous l'influence de la traction monotone rend les mesures difficiles en cours d'essai. Les moyens d'observation peuvent aussi être associés à des sources de chaleur qui modifient la température de l'éprouvette autour du fond d'entaille. Nous ferons d'abord quelques commentaires sur les moustaches telles qu'on les observe après essais et sur les aspects des surfaces de fissuration. Puis nous commenterons le phénomène directement sur des observations locales en cours d'essai.

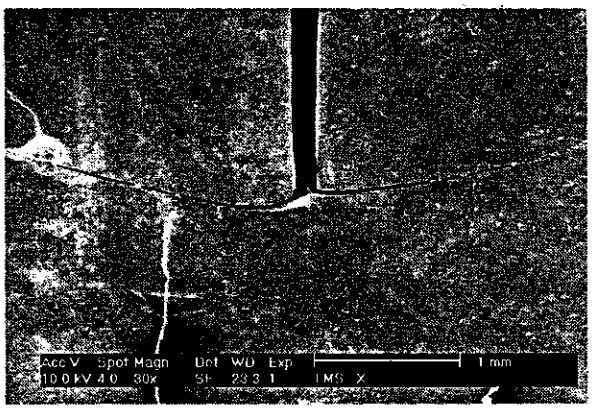
2.2 Observation en configuration non-déformée des moustaches

2.2.1 Forme des moustaches

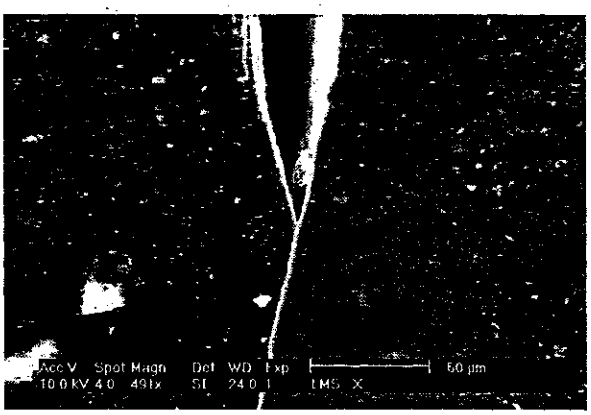
Une moustache est constituée de deux fissures qui partent quasiment à 90° de la direction de propagation droite, directement **au niveau de la pointe d'entaille**. Très localement, le phénomène est progressif. Plus précisément les deux fissures se développent de part et d'autre de la pointe selon des trajets à 85 voire 90° par rapport au plan de propagation droite. Au bout de quelques dizaines de micromètres de propagation (qui peuvent correspondre à quelques micromètres en longueur projetée sur l'axe), la fissure revient vers l'arrière, souvent en ayant tendance à continuer à se propager parallèlement à la pré-fissure mais en sens opposé. Parfois un changement de direction brutal se produit sur une demi-moustache et conduit à une déviation de fissure. Dans ce cas, on pourra quand-même dire qu'il y a eu rotation de fissure puisque les premiers instants de la propagation correspondent à une moustache.

Il semble que la dissymétrie que l'on remarque loin de l'optimum en vitesse se caractérise par une dissymétrie marquée dès l'amorçage : l'une des deux demi-moustaches part rapidement à 90° alors que l'autre continue longtemps son trajet avec un angle de moins de 90° . Vers l'optimum en vitesse, les deux demi-moustaches ont des angles de branchement très proches de 90° et restent longtemps à des angles de direction de propagation élevés, en revenant tardivement vers l'arrière.

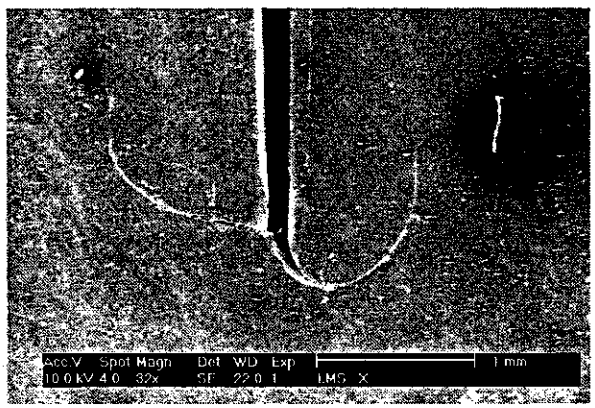
Dans chacun des cas où nous avons observé une fissure catastrophique, nous avons remarqué que l'initiation de cette fissure se faisait très près du fond de la pré-fissure. En revanche, on observe souvent que la déviation de fissure a lieu à partir d'une demi-moustache, avec un changement soudain de la direction du trajet de fissuration. Enfin,



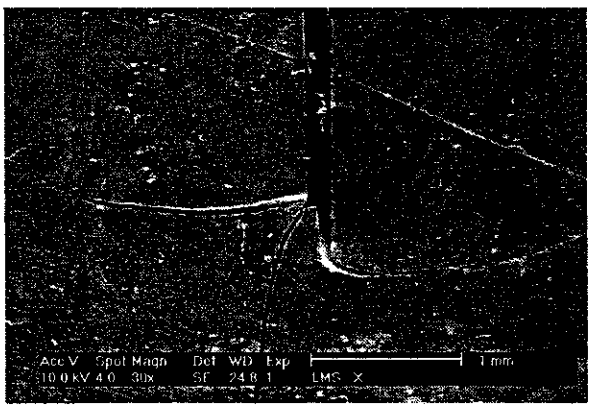
(a) Une moustache symétrique optimale.



(b) Propagation droite.



(c) Une moustache développée loin de la vitesse optimale. Dissymétrie marquée.



(d) Cas d'une moustache avec en outre le départ de la rupture catastrophique.

FIG. 2.2-1: Quelques moustaches en configuration relâchée, comparées à un test de propagation droite. Remarquer la différence d'échelle entre les photos de moustaches et celle de la propagation droite (les échelles indiquées dans les cartouches ne sont pas valables pour ce document).

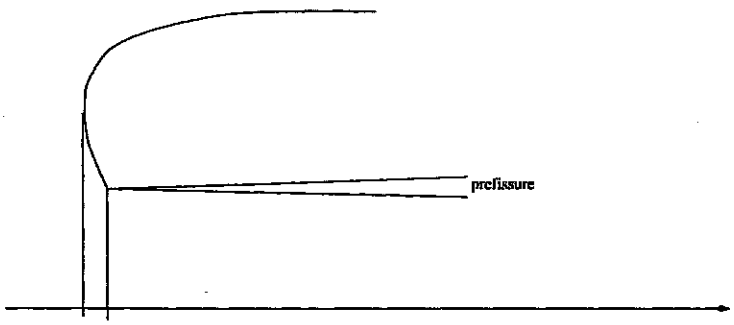


FIG. 2.2-2: Schéma d'une demi-moustache. La fissure se développe quasiment à 90° par rapport à la direction de propagation droite, puis tourne progressivement jusqu'à revenir dans une direction parallèle à la pré-fissure.

en traction monotone, aucun des modes de propagation ne conduit à l'apparition de micro-fissures, branchées à la fissure principale ou très proches. De plus, les trajets de propagation sont très réguliers (pas de tortuosité par exemple).

2.2.2 Aspect de la surface de propagation

Quelle que soit l'échelle d'observation de la surface fissurée, il est difficile de faire la distinction entre les différents modes de propagation. Dans tous les cas, on remarque que le profil de la fissure est incurvé, parfois plutôt en forme de U, parfois en forme de S. Cette constatation est souvent mentionnée dans les descriptions, mais l'on peut dire qu'elle ne préjuge d'aucun phénomène sous-jacent significatif : il s'agit d'une manifestation des effets de bord largement dépendante des défauts en cours de propagation.

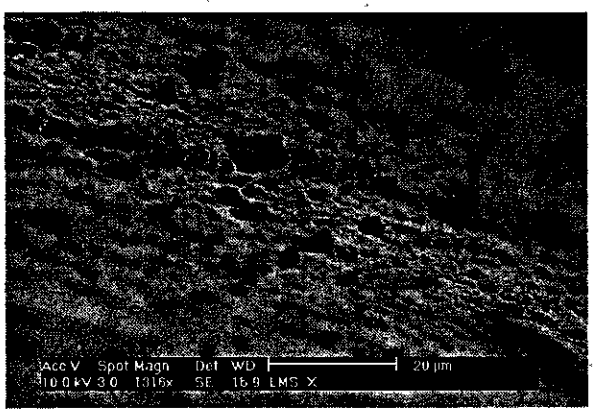
On distingue très nettement l'aspect fibreux de la surface du matériau, orienté perpendiculairement au plan de propagation. Il est impossible de distinguer directement par l'observation de surface la nature de la propagation. Dans le cas de déviations à partir d'une demi-moustache, une zone miroir initie la déviation comme elle initie la propagation dans les observations de [I.4] et peut indiquer que ce branchement tient d'un autre phénomène que le phénomène de rotation (voir la figure (2.2-3)). Ces observations montrent que, au moins loin de l'amorçage, la nature microscopique de la propagation est la même en propagation droite ou en moustache.

Dans certains cas, on observe des stries perpendiculaires à la propagation à l'amorçage, parfois très prononcées, parfois à peine visibles. Elles peuvent correspondre à des lignes de coalescence de fissures secondaires et nous en montrerons plus explicitement le sens plus loin. Les quelques éprouvettes où ces stries sont visibles sont des éprouvettes de propagation droite.

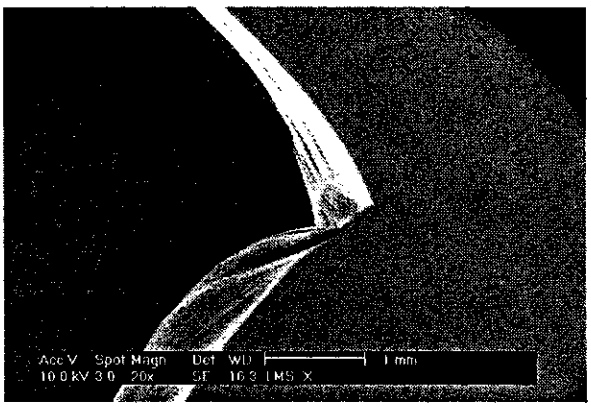
2.3 Observations dynamiques sous microscope

L'apparition d'une moustache en cours d'essai est toujours délicate à observer à l'oeil nu. La rotation de fissure semble être caractéristique de l'amorçage et l'amorçage est difficile à cerner à l'échelle macroscopique. En cours d'essai, quand la propagation va être droite, on remarque souvent que l'amorçage a eu lieu quelques brefs instants avant que la propagation ne démarre vraiment. **Dans le cas d'un développement en moustache, l'observateur passe une bonne partie de son temps à se demander si le phénomène a commencé ou non. Puis, quand le phénomène est devenu bien visible, il se demande depuis combien de temps l'amorçage a eu lieu.** Une observation à la loupe affine peut-être le jugement mais ne résout pas le problème de la détermination de l'amorçage. Un moyen d'observation plus lourd est nécessaire pour être plus précis mais n'est jamais utilisé dans la pratique : on se contente de regarder après essai l'aspect de la fissure comme nous l'avons fait ci-dessus.

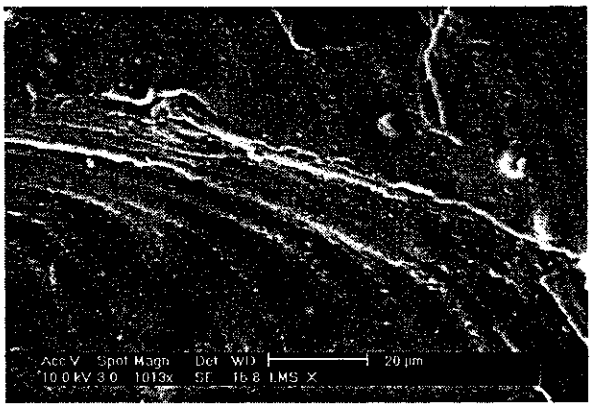
Nous avons mené des essais de traction sous microscope à balayage, en recherchant une grande finesse d'observation. Ce type d'essai doit nous permettre de préciser ce qui se passe pendant la période de propagation que l'expérimentateur voit très mal.



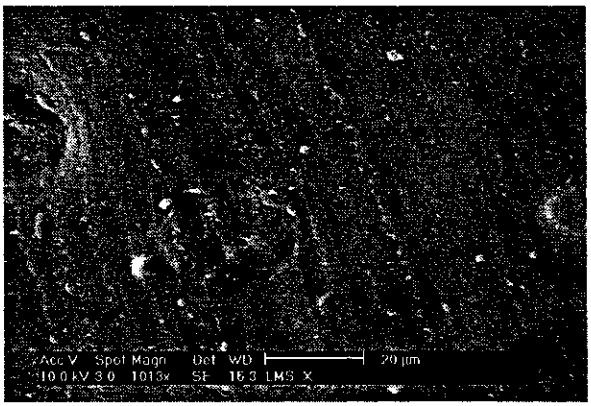
(a) Entaille découpée à la lame de rasoir, aspect de surface.



(b) Branchement d'une fissure déviée (en haut) sur une propagation en moustache (en bas).



(c) Observations des lignes de coalescence après propagation, ici la zone d'amorçage.



(d) Lignes blanches après propagation droite. Les lignes blanches ne sont donc pas l'apanage des propagations saccadées.

FIG. 2.2-3: Quelques exemples d'observations de surface. Le cartouche de chaque photo donne l'échelle d'observation.

	M3
SBR 2	100
N375	50
ZnO	2.5
Acide Stéarique	1
6PPD	2
S	1.5
CBS	1.5

TAB. 2.3-1: Composition en pce (pour cent grammes d'élastomère) du matériau M3 d'étude. La cuisson est une cuisson standard.

2.3.1 Phénoménologie de l'apparition des moustaches

Nous considérons le matériau baptisé M3 dont la formulation est donnée sur le tableau (2.3-1)[1]. Ce matériau tourne sur une très grande plage de vitesses de déformation macro-

[1]Matériau aimablement confectionné par MFPM. La matrice caoutchoutique sera notée SBR 2. Nous retrouverons cette matrice pour un autre matériau test page 44.

FIG. 2.3-4: Allure du fond de fissure en début d'essai. Déformation macroscopique 13%. Grossissement 100 environ. Vue à 45° par rapport à l'axe du fond de fissure. La propagation n'est pas amorcée. On remarque qu'à cette échelle, de nombreux défauts sont visibles. On remarque aussi vaguement une longue ligne blanche qui traverse le fond de fissure, il s'agit de la pointe de pré-entaille, découpée à la lame de rasoir.

scopique à température ambiante et donne des moustaches de très grandes amplitudes. Pour une éprouvette lanière, la vitesse de déformation optimale est voisine de $1,7\ 10^{-3}\ s^{-1}$. Par ailleurs, nous disposons d'un outil de traction sous microscope qui peut nous permettre de réaliser un essai de traction uni-axiale à vitesse imposée sur une petite éprouvette lanière. Les contraintes géométriques du montage nous ont imposé de prendre une éprouvette type lanière de longueur utile 1,5 cm, de largeur 1,5 cm avec une entaille débouchante de 4 mm à mi-hauteur. Pour cette géométrie, on suppose que la vitesse optimale est proche de la vitesse optimale sur éprouvette lanière standard[2]. Enfin, le montage n'est pas un montage de traction centré : la pointe de fissure va se déplacer sous le faisceau d'électron. Pour pouvoir observer très localement le fond de fissure sans être trop gêné par la vitesse d'avancée de la fissure, nous avons choisi une vitesse d'essai de 2 $\mu m.s^{-1}$, environ une décade en dessous de la vitesse optimale. On se limite à des grossissements inférieurs à 1 000, pour lesquels on a vérifié que le faisceau électronique ne semblait pas influencer le processus de propagation.

La pré-entaille est initialement fermée, les deux lèvres accolées. Quand l'entaille est réalisée sur une éprouvette gravée, on peut observer une légère déformation initiale de la grille qui s'étend sur une largeur de 20 à 30 μm de part et d'autre des lèvres : il s'agit de déformations rémanentes occasionnées par l'outil de découpe de la pré-fissure.

Au bout de quelques minutes, les deux lèvres de la fissure sont bien décollées et l'on observe le profil typique d'ouverture de fissure dans ces matériaux qui nous plonge directement dans le domaine des grandes déformations locales. Une légère striction au niveau de la pointe d'entaille apparaît très tôt et va naturellement devenir plus marquée au fil de l'essai. Cette striction s'étend sur une très faible région autour de la pointe de fissure, signe que de très grandes déformations sont atteintes dans une zone très locale.

[2]Cette hypothèse permet de situer la vitesse d'essai par rapport à l'optimum, elle n'est pas indispensable en soi.

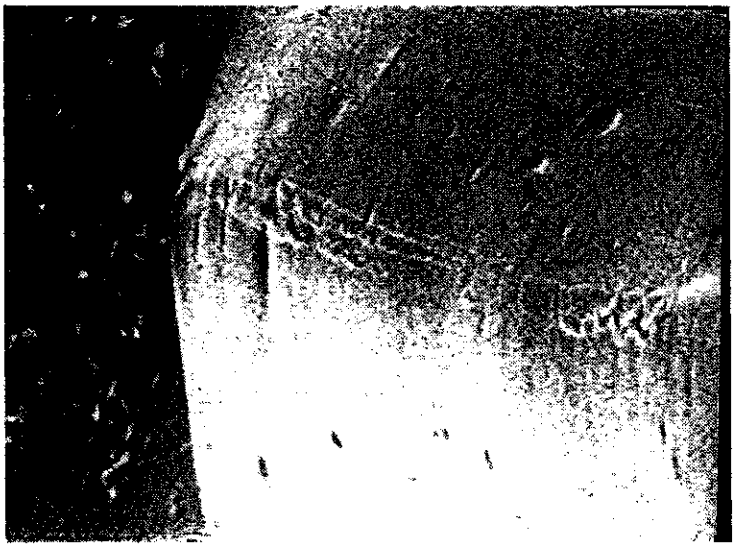


FIG. 2.3-5: Amorçage. Déformation macroscopique 19%. Sur cet exemple, on ne peut pas encore dire si la propagation va être droite ou en moustache.

Quand la fissure est bien ouverte, il devient possible d'observer le fond de fissure. On y remarque toujours deux à trois grands traits sur toute la largeur de la pré-fissure. Ce sont les empreintes de la lame de rasoir qui a permis de faire la pré-entaille (voir figure (2.3-4)).

La fissure continue de s'ouvrir pendant un temps qui peut paraître extrêmement long. En fond de fissure, on devine que les déformations deviennent très importantes. Le fond d'entaille s'étire et semble devenir légèrement fibreux. Quelques défauts apparaissent derrière une couche assez fine de polymère.

Puis, de façon assez subite, un ensemble de défauts apparaissent sur toute la largeur de la pointe de fissure, figure (2.3-5). Ces défauts sont des déchirures très superficielles qui ressembleraient un peu à des sutures. Pour nos essais, il semble que l'on puisse dire qu'elles sont toujours apparues près de l'une des faces de l'éprouvette, lieu de faible pression hydrostatique et fort cisaillement, où l'état de **contraintes planes est le mieux réalisé**. Ces sutures s'ouvrent sous l'effet de la traction et se développent plutôt selon la largeur de l'entaille. Elles coalescent et forment une sorte de longue suture si l'on regarde à une échelle moins fine : c'est ce que l'on appelle couramment la ligne blanche d'amorçage de la fissuration. Pour cet essai, ce phénomène a été observé pour une déformation macroscopique de 20%. A noter que macroscopiquement, ce point d'amorçage n'est absolument pas visible. On remarque aussi que l'amorçage ne se produit pas forcément au niveau des défauts laissés par le coup de rasoir. De même, les sutures ne semblent pas apparaître sur des défauts observés avant l'amorçage et leur coalescence suit un chemin très parallèle à la largeur de l'éprouvette. Parfois elles passent à côté d'un défaut de surface comme si elle ne le voyait pas, parfois sur un défaut de surface mais la profondeur de la coalescence est si faible que le défaut n'apparaît toujours pas. D'une façon générale, il semble bien que **le trajet de fissuration ne soit pas sensible aux défauts** que nous voyons.

Les deux bords de la suture s'écartent rapidement l'un de l'autre. On les identifie clairement pendant un certain temps comme deux lignes en fond d'entaille, un peu analogues aux traces laissées par les lames de rasoir. Puis tout s'accélère. Progressivement, d'autres coalescences apparaissent comme à l'amorçage, se développent et forment d'autres sutures qui s'écartent les unes des autres. A la différence de l'amorçage cependant, ces sutures là ne semblent pas avoir le temps de coalescer entre elles sur une très grande largeur, ce qui

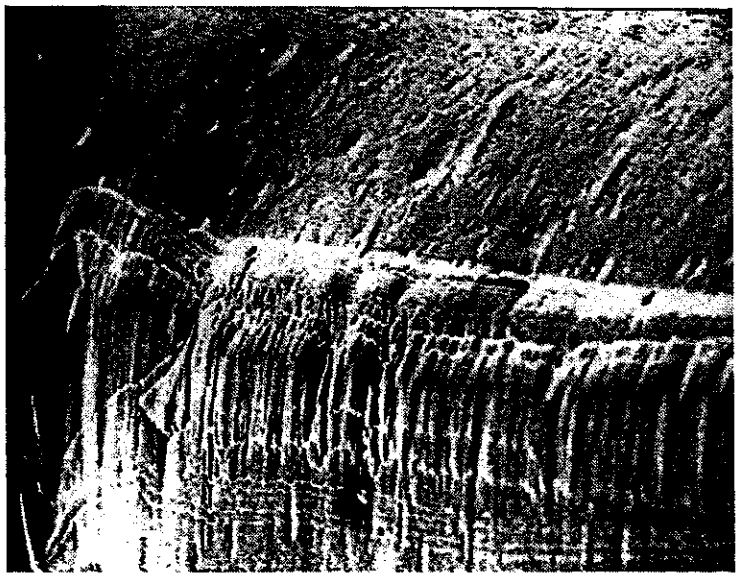


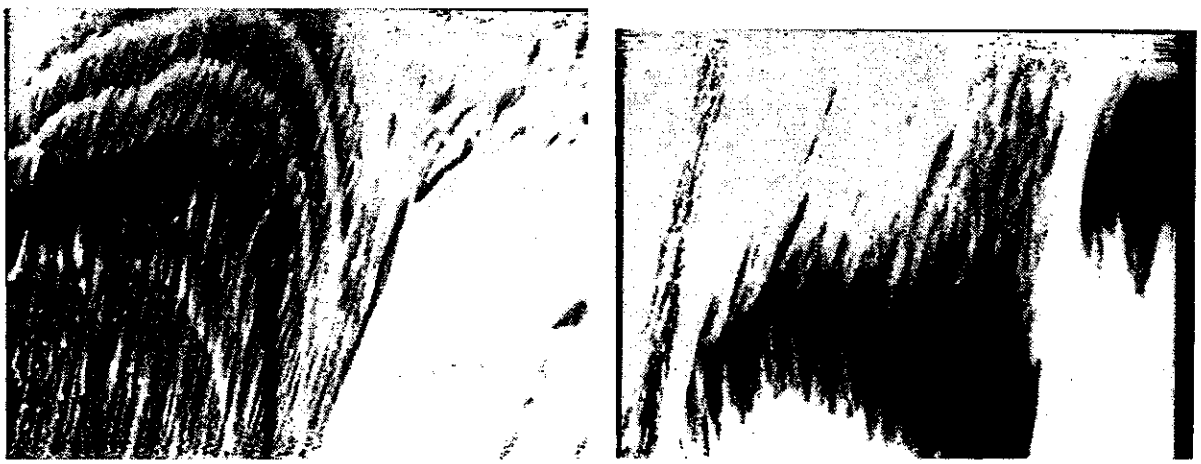
FIG. 2.3-6: Une demi-moustache. Grossissement 130. En haut, on distingue la surface initiale du fond de fissure. Au milieu, la structure alvéolaire est un bourrelet de matière relaxée qui correspond à une moustache. La zone intermédiaire très fibreuse est la région où se produit la propagation. Elle est limitée en bas par une fine ligne blanche, qui était initialement accolée à la première ligne blanche de la région supérieure. Les lignes blanches successives sont de même des lignes blanches qui étaient en vis-à-vis des lignes blanches supérieures. L'existence de lignes blanches successives marque le caractère saccadé du mécanisme.

va rapidement occasionner des irrégularités dans la vitesse de propagation de fissure sur la largeur du fond d'entaille.

Au bout de quelques séries de coalescences, une demi-moustache apparaît. Elle se caractérise par un petit bourrelet de matière relâchée à l'extrémité d'une zone que l'on peut désormais appeler fond de fissure, figure (2.3-6). Ce bourrelet indique que la fissure va se développer en moustache. En effet, la propagation de la fissure passe progressivement d'une étape de coalescence de sutures qui s'écartent à une étape de pelage du fond de fissure à partir du bourrelet. On observe très nettement à partir d'un certain temps un mode de propagation saccadée, alternant une ouverture de la fissure sous l'effet de la traction, et une ouverture couplée à une rupture très locale de la matière à l'interface du bourrelet et du fond de fissure. Cette rupture locale ne semble même pas entamer le fond de fissure : tout se passe comme si on pelait progressivement le fond de fissure sans jamais entamer le ligament. Des lignes blanches marquent les différents pelages en cours d'essai.

2.3.2 Cas de la propagation droite

Il est intéressant d'essayer de comparer l'amorçage d'une moustache à l'amorçage d'une propagation droite. Jusqu'à l'apparition de la ligne blanche, les observations sont en tout point les mêmes. Puis de légères différences semblent apparaître, quasiment indécelables même à l'échelle d'observation microscopique. Quelques coalescences successives permettent d'amorcer une propagation tout comme pour l'amorçage des moustaches. On note cependant que ces coalescences s'initient toujours au même endroit au centre de l'entaille (la notion de centre restant très subjective). Dans le cas des moustaches, les sutures s'écartent mais l'un des bords reste sur ce que l'on pourrait appeler un fond d'entaille qui



(a) Grossissement 1200 environ. (b) Grossissement 450 environ.

FIG. 2.3-7: Aspect très local du fond de fissure. A gauche, cas d'une propagation en moustache, à droite, cas d'une propagation droite. Dans les deux cas, on observe un réseau assez fibreux, chaque fibre ayant une épaisseur d'environ 2 μm. Dans le cas des moustaches, on observe des lignes blanches qui peuvent démontrer le caractère très saccadé du phénomène localement, ces lignes blanches n'étant pas visibles aux grossissements plus faibles. On ne les observe pas non plus en propagation droite, même si cela n'apparaît pas sur la photo. La propagation droite apparaît comme un phénomène beaucoup plus régulier.

se délocalise vers le bord du fond de fissure. Dans le cas de la propagation droite, les sutures disparaissent rapidement pour laisser la place à une zone très sombre en imagerie électronique. Cette zone délimite très bien un fond d'entaille, éventuellement en forme de U comme observé classiquement dans les études statiques après essais. Très localement au niveau de la zone de propagation, on observe le même type de progression du phénomène, par décohésion de fibres de tailles micrométriques (2 μm de large, en configuration déformée, voir (2.3-7)) qui semblent très étirées. Dans le cas de la propagation des moustaches, la décohésion semble se faire de façon saccadée alors qu'elle reste beaucoup plus régulière en propagation droite. Une observation attentive montre que la propagation reste saccadée. C'est probablement le mode de fissuration - en profondeur - qui fait que le phénomène est difficile à voir.

Les phénomènes observés restent très lents. La profondeur de la couche de matière engagée dans une étape de propagation est toujours très faible, aussi bien pour une moustache que pour une propagation droite. Il semble également que l'on puisse dire que les vitesses d'écartement des bords des coalescences restent comparables. Cependant, dans un cas **le point de propagation est toujours la pointe de fissure**, dans l'autre cas **le point de propagation se déplace vers le sommet du fond d'entaille**.

Ensuite, il apparaît que l'amorçage a lieu en surface et pas légèrement en profondeur à partir d'amorçages secondaires ; sinon il y aurait des sauts de propagation que l'on n'observe pas. On voit plutôt un stick-slip de démêlage des fibres en surface. Si le phénomène sous jacent est un phénomène de croissance de défaut, c'est à une échelle très faible.

Enfin, dans le cas de la propagation droite, il existe une transition subtile entre les différents phénomènes que nous venons de décrire et qui constituent l'ensemble de

l'amorçage, et le passage à une propagation droite visible. Dans les essais de propagation droite que nous avons réalisés, la transition s'est toujours caractérisée par la rupture d'un gros défaut de fond de fissure (une grosse fibre en travers du fond d'entaille), qui accélère très rapidement le processus.

2.3.3 Conclusion sur les observations locales

Nos observations sous traction montrent que l'amorçage peut être défini à partir de la notion de ligne blanche que l'on trouve dans certains articles. Ce phénomène intervient largement avant que l'on ne repère un amorçage à l'oeil nu à cause de la très grande lenteur du phénomène d'initiation de la propagation à partir de l'amorçage. Pourtant, nos essais montrent que la nature de la propagation est déterminée dans cette zone "sous-observable", voire directement sur les toutes premières coalescences juste après l'amorçage. Dans le cas des propagations droites, on identifie clairement un plan fixe de propagation. Dans le cas des moustaches, ce plan est mobile et se déplace rapidement vers ce que l'on pourrait appeler le bord du fond de fissure. D'autre part, les premières coalescences évoquent une propagation en mode I sur la configuration déformée, relayée progressivement par un pelage dans le cas des moustaches qui se caractérise notamment par son comportement saccadé. Il s'agit de la seule différence notable très localement. La vitesse caractéristique des phénomènes reste très lente, la taille caractéristique des fibres est toujours proche de 2 μm (difficilement mesurable), et les déformations de ces fibres semblent très élevées sans être réellement mesurables.

2.4 Résistance à la déchirabilité et rotation de fissure

Il semble que la courbe d'allongement à rupture, le type de fissuration et la taille des moustaches ou des déviations soient caractéristiques du matériau testé. Certains caoutchoucs vont présenter un optimum très marqué, d'autres des moustaches de grande amplitude, d'autres des moustaches très petites au point d'être difficilement observables sur la configuration relâchée après l'expérience. D'autres permettent d'obtenir assez facilement des moustaches symétriques même loin de l'optimum. Certains encore ont un optimum à vitesse faible ou au contraire très élevée. Enfin, on peut observer aussi le phénomène de déviation sur une grande plage de vitesse ou au contraire sur une plage très étroite. Il n'est pas établi qu'il y ait des corrélations entre toutes ces remarques. Néanmoins on peut considérer qu'**une expérience complète de fissuration donne une excellente caractérisation du matériau**[3], représentative de ses propriétés de rupture en traction monotone. La comparaison des graphes (1.1-8) et (1.2-9) illustre la variabilité des mesures d'un matériau à l'autre, pour deux matériaux dont on peut dire qu'ils tournent facilement. L'étroitesse du pic de déformation en vitesse peut être un critère de comparaison, caractérisé par exemple par la largeur de la plage d'observation. Il n'est pas établi qu'il y ait une relation entre l'intensité du pic et la plage d'observation observée sur la courbe de déformation rupture.

Nos observations microscopiques précisent bien le sens de la courbe de déformation à rupture. Le phénomène de rotation de fissure est exclusivement lié à ce qui se passe à l'amorçage. C'est-à-dire qu'une étude de la rotation doit-être d'abord une étude précise de

[3]Dans le langage courant, on dira souvent qu'un matériau tourne facilement ou difficilement selon un certain nombre de paramètres chers à l'expérimentateur. On pourra dire, par exemple, d'un caoutchouc qu'il "tourne" facilement s'il donne des moustaches bien visibles et symétriques sur une large plage de vitesses compatible avec la gamme d'essai de l'outil de traction.

l'amorçage, expérimentalement ou théoriquement. Nous verrons dans la dernière partie de ce travail que tous les matériaux ont des caractéristiques d'amorçage proches. Les déformations d'amorçage observées dans nos essais de microscopie se retrouvent aussi pour plusieurs autres matériaux testés, qu'ils donnent des rotations ou non. Mais ces déformations ne présagent pas du tout de la déformation à rupture qui elle est très variable. Dans la plage de vitesse où a lieu la rotation, la déformation à rupture dépend de la déformation à rupture sous sollicitation homogène de traction uni-axiale. Dans la plage de déviation ou propagation droite, elle dépend fortement de la vitesse de propagation, très variable d'un matériau à l'autre. La courbe de déformation à rupture contient aussi une information sur la propagation de fissure. Par exemple cette déformation va dépendre de la largeur du ligament, de la direction de déviation de la fissure, etc...

Nous verrons par exemple un matériau ne présentant que des propagations droites aux vitesses usuelles qui supportent des déformations beaucoup plus importantes qu'un autre qui au contraire tourne sur une plage très étendue.

Conclusion

La propagation de fissure dans les élastomères est un phénomène visco-élastique **qui n'existe que si à l'amorçage il n'y a pas de branchements** de fissures qui régularisent le fond de fissure vis-à-vis de la propagation droite. Sur les essais que nous avons présentés, **le branchement est défini exclusivement par le paramètre de vitesse de l'essai**. Il implique que l'étude de la propagation droite est indissociable de l'étude des **phénomènes d'amorçage**.

Cette première partie fait un état des lieux assez complet des résultats expérimentaux connus liés à la rotation de fissure. On s'aperçoit que ce phénomène a toujours été abordé à partir de dépouillement des courbes de déformations à rupture. Ces courbes indiquent à la fois la nature de la propagation, mais aussi la géométrie de l'éprouvette dans la mesure des propriétés de déchirabilité. Elles intègrent beaucoup trop de notions pour permettre d'étudier la rotation de fissure par leur intermédiaire et ne sont pas adaptées à l'étude de la propagation de fissure.

Nos observations microscopiques montrent bien que le phénomène de rotation est **déterminé dès l'amorçage**, dans une zone "sous-observable" dans les essais courants à laquelle on ne peut accéder que par des moyens d'essais lourds. Une observation importante commune aux différents modes de propagation est la **nature apparemment saccadée de l'avancée de fissure**.

Nous souhaitons pouvoir étudier la propagation de fissure pour, in fine, retrouver une courbe de déformation rupture. Cela implique de décrire la **nature de l'amorçage**, de modéliser la **vitesse de propagation** de fissure (si elle est finie) voire la **déformation d'apparition d'une fissure catastrophique**. Nous nous limiterons aux caoutchoucs synthétiques chargés, pour lesquels nous avons vu que la phénoménologie était un peu plus simple que pour les caoutchoucs naturels.

Nous essayons de suivre une démarche pragmatique. Il faut d'abord bien comprendre quel est le comportement des élastomères que nous utilisons, rechercher des particularités du comportement que l'on peut modéliser. Ensuite, nous avons choisi d'aborder les résultats connus en propagation avant de nous confronter au problème beaucoup plus complexe de l'amorçage et des explications possibles du phénomène de rotation de fissure.

Bibliographie

[1] Boonstra B.B. et Medalia A.I. - *Effect of Carbon Black Dispersion on the Mechanical Properties of Rubber Vulcanizates,* Rubb. Chem. Technol., vol 36, pp 115-142, 1963.

[2] Busse W.F. - *Tear Resistance and Structure of Rubber,* Ind. Eng. Chem. (Ind. Ed.), vol 26, pp 1194-1199, 1934.

[3] Dannenberg E.M. - *The Effect of Surface Chemical Interactions on the Properties of Filler-Reinforced Rubbers,* Rubb. Chem. Technol., vol 48-1, pp 410-444, 1975.

[4] Dutta N.K. et Tripathy D.K. - *Effect of Carbon Black Concentration of the Micro Mechanism of Fracture of Rubber Vulcanizates,* Journal of Elastomers and Plastics, vol 22, pp 136-151, April 1990.

[5] Eldred R.J. - *Effect of Oriented Platy Fillers on the Fracture Mechanism of Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 61, pp 619-629, 1988.

[6] Hamed G.R. - *Molecular Aspects of the Fatigue and Fracture of Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 67, no 3, pp 529-536, 1994.

[7] Janzen J. et Kraus G. - *Effects of Particle Size and Structure Aggregate Size in Carbon Black Reinforcement of Elastomers,* International Rubber Conference, Brighton, pp G7.1-G7.7, May 1972.

[8] Medalia A.I. - *Elastic Modulus Of Vulcanizates as Related to Carbon Black Structure,* Rubb. Chem. Technol., vol 46, pp 877-896, 1974.

[9] Meinecke E.A. et Taftaf M.I. - *Effect of Carbon Black on the Mechanical Properties of Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 61, no 3, pp 534-547, 1988.

[10] Pearson D.S. - *Recent Advances in the Molecular Aspects of Polymer Viscoelasticity,* Rubb. Chem. Technol., vol 60, pp 439-496, 1987.

[11] Studebaker M.L. et Beatty J.R. - *Effects of Componding on Dynamic Mechanical Properties of Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 47, pp 803-824, 1974.

[12] Ulmer J.D., Chirico V.E. et Scott C.E. - *The Effect of Carbon Black Type on the Dynamic Properties of Natural Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 46, pp 897-926, 1973.

Deuxième partie

Comportement des élastomères

Chapitre 3

Préliminaires, introduction

Introduction

La recherche d'une loi de comportement adaptée à l'étude d'un problème de mécanique est nécessaire à la validité et à la pertinence de l'étude elle-même.

dans une situation comme la nôtre, où l'un des phénomènes - la rotation de fissure - est mal connu, nous sommes amenés à chercher parmi les aspects du comportement celui ou ceux responsbles du phénomène à caractériser.

Pour notre étude, l'éventail des lois de comportement disponibles est malheureusement restreint, voire limité à des modèles d'intérêts équivalents. S'intéresser à l'influence d'un aspect particulier du comportement repose sur le choix et la mise au point d'un modèle adéquat, tâche souvent longue et fastidieuse.

Nous tenterons d'éviter cet écueil en nous attachant à définir un cahier des charges cernant nos objectifs afin de rester concentrer sur l'objet de notre étude. Ce cahier des charges fait appel à la modélisation du comportement des matériaux et des structures.

3.1 Elastomères et Calcul de Structure

Les élastomères sont des matériaux à comportement aux caractères fortement non-linéaires. Ces matériaux subissent des grandes déformations, leur comportement est essentiellement de nature élastique non-linéaire, voire visco-élastique.

On est obligé de travailler avec les outils fondamentaux de la mécanique, dans le cadre le plus général où les possibilités analytiques demeurent limitées, et où l'incompressibilité - pourtant si appréciable pour analyser les résultats expérimentaux - vient parfois compliquer les modèlisations numériques à mettre en oeuvre.

Depuis quelques années, les classiques du comportement hyperélastique - densité de Mooney-Rivlin ou d'Ogden - sont implantés dans les grands codes industriels. Ils permettent dans des formulations non-linéaires de tenir compte également de l'incompressibilité. Certains codes supportent aussi les calculs avec de la visco-élasticité linéaire. Le calcul de structure est fiable, robuste, parfois rapide - par exemple un calcul néo-hookéen est un calcul linéaire. Il devient possible d'aborder des thèmes de recherche jusque là cantonnés dans le domaine expérimental avec ce nouveau moyen d'étude. Malgré cela, l'usage d'un code pour dimensionner, mettre au point des cahiers des charges, n'est pas encore passé dans le domaine courant.

Entre le premier calcul par éléments finis réalisé par Lindley [II.34] en 1972 et les publications suivantes exploitant des résultats de calcul de structure, plus de 15 ans se sont écoulées. Il ne s'agit pas pour nous de critiquer cet état de fait. Il témoigne des grandes difficultés que l'on a pu rencontrer dans le passé pour faire du calcul numérique. Nous voulons simplement souligner que de nombreux résultats n'ont, jusqu'à ce jour, toujours pas été vérifiés ou même complétés. Ainsi, une part importante de cette thèse est consacrée à un travail critique sur la fiabilité de résultats antérieurs, à une clarification de la mécanique de la rupture des élastomères grâce au calcul de structure.

3.2 Comment approcher le comportement ?

De nombreuses méthodes permettent, à partir de résultats expérimentaux, de proposer une loi de comportement. Les seules contraintes à respecter sont assez vagues : premier et second principes avant toute chose, objectivité ensuite, voire isotropie. Tout cadre est bienvenu et nous pensons qu'il est important dans le cas des élastomères de faire table rase des succès passés obtenus à l'aide des comportements en petites déformations des métaux. Il faut s'adapter au matériau plutôt que de vouloir le **classer dans des cadres qui n'ont jamais été pensés pour lui**. Ainsi, nous serons amenés à rejeter des comportements type Mooney-Rivlin, qui ne pourront jamais tenir compte d'aspects très précis et très présents dans le comportement de certains élastomères (la statistique non-gaussienne ?) ; de même nous rejetterons les approches phénoménologiques telles que celles présentées dans [II.2]. Précisons quand même quelques données. Nous ne ferons pas de rappel sur la théorie des grandes déformations, encore moins sur la thermodynamique. Les lecteurs intéressés par ces aspects pourront se reporter d'abord à Beatty [II.9] pour une courte introduction, puis à Ciarlet [II.13] et Ogden [II.38] pour des résultats approfondis.

Les grandes déformations imposent des mesures de déformations non-linéaires. Nous choisissons d'utiliser dans tout notre mémoire une description simple de la déformation :

- nous utiliserons $\underline{\underline{F}}$ le tenseur gradient de transformation, et la dilatation volumique $J = Det(\underline{\underline{F}})$;
- le tenseur des dilatations sera : $\underline{\underline{C}} = {}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}$;
- le tenseur des déformations sera le tenseur de Green-Lagrange : $\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}(\underline{\underline{C}} - \underline{\underline{I}})$.

Dans le cas hyperélastique, il est possible de calculer les différentes mesures de contraintes duales des quantités ci-dessus. Nous utiliserons essentiellement :

1. le tenseur de Piola-Lagrange : $\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}}$;
2. le tenseur des contraintes de Cauchy : $\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J}\frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}}.{}^t\underline{\underline{F}}$

Dans le cas d'un matériau de comportement hyperélastique isotrope, on montre que le choix d'une densité d'énergie sous la forme :

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \tag{3.2-1}$$

est pertinent, avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} I_1 = Tr[\underline{\underline{C}}] \\ I_2 = \frac{1}{2}\left([Tr\underline{\underline{C}}]^2 - Tr[\underline{\underline{C}}^2]\right) \\ I_3 = Det[\underline{\underline{C}}] \end{array} \right. \tag{3.2-2}$$

où Tr est l'application trace. Dans le cas des matériaux incompressibles, la dilatation volumique ne travaille pas :

$$W = W(I_1, I_2) \tag{3.2-3}$$

Il s'agit d'un cadre possible d'étude dans lequel isotropie et objectivité sont automatiquement respectées, mais ce n'est pas le seul. Ainsi, Valanis et Landel [II.44] proposent plutôt de chercher les lois de comportement sous la forme :

$$W = w(\lambda_1) + w(\lambda_2) + w(\lambda_3) \tag{3.2-4}$$

où les λ_i sont les élongations principales. L'objectivité est à vérifier par ailleurs. Il s'agit d'un cadre proposé par les auteurs aux seuls fins de dépouillements expérimentaux, équivalent à (3.2-1). Notre cheminement nous amènera à privilégier un modèle type Valanis-Landel.

Dans le cas de nos matériaux, on distingue essentiellement trois méthodes pour aborder le comportement :

- les *méthodes phénoménologiques* essayent de rendre compte directement du comportement mécanique, soit par des approches mathématiques (hypothèse de séparabilité de Valanis-Landel, densité de Mooney-Rivlin, densité d'Ogden...), soit par des modèles rhéologiques (Arruda et Boyce par exemple [II.6]).
- les *méthodes mésoscopiques* s'intéressent au comportement de la chaîne isolée qu'elles tentent de généraliser par différentes hypothèses à une assemblée statistique de chaînes. Deux grandes théories sont exploitées que nous aborderons plus loin. On parle d'échelle mésoscopique pour ne pas oublier qu'il y a encore une échelle plus fine dont on peut se servir dans l'analyse du comportement : une échelle microscopique qui permet d'expliquer quelques phénomènes macroscopiques à partir des monomères. Ce type de méthode est très développé.
- enfin, les *approches micro-macro*, utilisées dans le cas des élastomères chargés, cherchent le comportement homogénéisé du matériau à partir du comportement de la matrice caoutchoutique et d'une hypothèse sur l'interaction gomme-charge. On notera récemment les tentatives de Govindjee et Simo [II.25] ou Kilian et al. [II.32]. Ce sont à notre connaissance les deux seules références qui veulent aboutir à une modélisation du comportement.

Toutes ces approches sont liées, par exemple par le comportement expérimental. Nous verrons d'ailleurs que le modèle que nous proposerons s'attardera un peu sur chacune des trois approches.

3.3 Quel comportement pour notre étude ?

La loi de comportement que nous devons utiliser est intimement liée au phénomène que nous voulons modéliser. Nous voulons nous intéresser notamment à "la rotation de fissure", phénomène mal cerné, mal quantifié si ce n'est par une vitesse d'essai ou une température. Les phénomènes du premier ordre qui doivent servir à la modélisation ne sont pas connus. Nous devons aussi rendre compte de la propagation droite, mode plus courant de fissuration.

En abordant notre étude, il nous a paru difficile de parier qu'une loi standard de comportement - Ogden ou Mooney - pourrait nous mettre sur la voie d'une modélisation de la propagation de fissure. Il faut bien constater que depuis longtemps il existe des modèles beaucoup plus complets qui peuvent avoir une incidence sur la modélisation de la propagation de fissure.

La contrepartie de ces modélisations évoluées réside dans leur complexité et notre manque d'expérience quant à leur usage. Il s'agit donc pour nous d'essayer de simplifier ces

modélisations et d'observer leurs conséquences sur la fissuration. Nous imposons quelques impératifs qui vont orienter notre démarche :

1. rendre compte au moins qualitativement de phénomènes particuliers et voir s'ils peuvent nous permettre de comprendre certaines des particularités de la fissuration ;
2. rester dans un cadre numériquement viable : lois de comportement 3D, convergence d'un code de calcul. Il est en effet illusoire de chercher une loi de comportement à partir de laquelle des calculs analytiques sont possibles en mécanique de la rupture ;
3. ne pas chercher à faire un lien direct entre le comportement et des aspects microstructuraux.
4. profiter du point précédent pour proposer une densité d'énergie avec peu de paramètres pour simplifier la démarche d'identification. De même, limiter le nombre de variables internes.

A cette dernière contrainte vient se greffer le problème du choix des essais représentatifs, que nous souhaitons limiter en ayant directement un modèle 3D fiable, ainsi que le problème de l'identification des paramètres du comportement.

Pour une structure fissurée comme une éprouvette lanière, l'amorçage est modélisé par des petites déformations globales et grandes déformations locales ; la propagation par des grandes déformations globales et parfois des très grandes déformations locales. L'état de déformation local est par ailleurs complexe et doit être bi-axial. Nous nous intéresserons uniquement à des éprouvettes de laboratoire planes pour lesquelles on peut faire l'hypothèse de contraintes planes.

Les essais que nous réaliserons seront des essais monotones. Localement, quand la fissure se propagera, il y aura quelques domaines en décharge. La plupart des essais de la littérature sont des essais sur éprouvettes globalement en relaxation. Nous les modéliserons en supposant avoir atteint l'état de relaxation par une traction quasi-statique.

Enfin, notre loi de comportement ne nous permettra pas de modéliser des essais trop complexes, par exemple trop multi-axiaux. De même, elle ne sera pas exploitable pour les essais cyclés.

3.4 Conclusion

Ces préliminaires précisent les objectifs et les limites que nous nous sommes fixés dans l'étude d'une loi de comportement. Nous allons essayer d'introduire dans notre analyse une modélisation physique du comportement qui s'attache à simplifier la démarche de validation et de recherche de paramètres, supportable par ailleurs pour un code de calcul. Il ne s'agit pas tant pour nous de fournir une loi de comportement éprouvée que d'essayer de comprendre l'incidence de certains aspects du comportement sur des phénomènes qui peuvent nous intéresser dans l'étude des modes de propagation de fissure.

Il s'agit maintenant de présenter les particularités bien connues du comportement des élastomères en insistant sur celles qui nous intéresseront, de passer en revue les modèles de comportement possibles et de proposer notre modèle et son implantation dans un code de calcul de structure.

Chapitre 4

Aspects expérimentaux

4.1 Introduction

Avant d'aborder la recherche de lois de comportements, nous présentons quelques résultats importants sur les observations expérimentales. Ces résultats seront illustrés par des valeurs prises sur des essais réalisés sur des matériaux modèles, l'un pour la rotation de fissure l'autre pour la propagation droite.

Nous nous intéresserons plus particuliérement aux élastomères à l'état amorphe que l'on retrouve dans la formulation des pneumatiques.

4.2 Description d'un élastomère

Un élastomère[1] est un ensemble de chaînes de polymères linéaires ou ramifiées dont la caractéristique est de pouvoir supporter de très grandes déformations. Pour bien comprendre sa propriété fondamentale, on peut se représenter la structure à l'état brut comme la résine d'hévéa qui fournit le caoutchouc naturel et qui est obtenue en laissant s'écouler la résine par une incision dans les troncs. Ce matériau est d'abord un fluide visco-élastique non-newtonien. On peut figer cette propriété par une cuisson prolongée notamment avec du soufre. A haute température, une réaction chimique entre le polymère et le soufre permet de créer des liaisons chimiques entre les chaînes. Ces liaisons limitent leurs mouvements relatifs : le polymère perd son aptitude à s'écouler au profit d'une aptitude à supporter de grandes déformations et garde une visco-élasticité marquée. On parle d'élastomère ou de caoutchouc pour le produit obtenu.

Chaque chaîne peut s'allonger par réorganisation des liaisons entre les monomères et passer d'une situation de repos très repliée, appelée pelote statistique, à une configuration extrême où la pelote est presque complètement étendue. Ce dépliage des chaînes se fait seulement par re-conformation des liaisons entre monomères : chaque changement de conformation nécessite de franchir une barrière de potentiel. Au delà d'une certaine température, dite de transition vitreuse (notée T_g), les changements de conformation sont aisés. Le matériau est dit dans un état caoutchoutique, il se déforme facilement. En dessous de cette température, les changements de conformation sont très difficiles. Le matériau devient vitreux. Il se déforme difficilement, ne supporte plus les grandes déformations, et son module d'Young gagne un rapport 1 000 par rapport au module dans l'état caoutchoutique.

L'élastomère seul n'est pas un produit mécaniquement très intéressant. On lui ajoute

[1] Pour plus d'informations, on pourra se reporter à [II.21, II.24].

toujours des charges, particules très fines, pour améliorer ses propriétés mécaniques. Le matériau chargé est encore appelé élastomère (ou caoutchouc). Dans le cas des caoutchoucs pneumatiques, les charges utilisées sont essentiellement des particules très fines de noir de carbone. Cet additif particulier est présent en quantité très importante dans nos élastomères, souvent 30 % en volume voire plus. Son usage s'est répandu depuis les années 20 d'abord parce qu'il a permis d'augmenter d'un facteur 2 la durée de vie des pneus par une meilleure résistance à l'abrasion. Les autres propriétés intéressantes sur lesquelles on joue avec les charges de noir de carbone sont par exemple l'accroissement du module d'Young, la plus grande résistance à la déchirabilité, une contrainte rupture plus élevée, un étalement du domaine de comportement visco-élastique, etc... Nous ne rentrerons pas dans le détail des différents types de noirs de carbone. On pourra consulter [II.8] et [II.14] pour des informations générales sur les noirs et leurs intérêts pour les caoutchoutiers.

Dans notre étude, nous distinguerons les élastomères chargés et non chargés. Par défaut, un élastomère sera toujours chargé, sinon nous le préciserons. Notre étude ne s'appliquera pas aux propergols solides qui sont des matériaux beaucoup plus chargés que nos élastomères (par exemple 80 % en volume) avec des charges beaucoup plus grosses qui confèrent au matériau un comportement assez différent du nôtre. Pour le comportement des propergols, on pourra se reporter à la thèse de Fl. Andrieux [II.3, II.4, II.5].

4.3 Deux exemples de matériaux

Nous allons illustrer la description du comportement à partir d'essais réalisés sur deux élastomères. Le premier, que l'on appellera M1 (matériau 1) ne donne pas de rotation de fissure dans la plage de vitesse de déformation d'essai pour le test classique de rotation. Le second, noté M2, présente un optimum vers 1.7 $10^{-3}s^{-1}$ pour le test de rotation déjà présenté. La composition des deux matériaux est donnée dans le tableau (4.3-1) à titre indicatif[2].

	M1	M2
SBR 1	100	
SBR 2		100
N375	50	50
ZnO	2.5	2.5
Acide Stéarique	1	1
6PPD	2	2
S	1.5	1.5
CBS	1.5	1.5
Tg (DSC)	-26	-87

TAB. 4.3-1: Composition en pce (pour cent grammes d'élastomère) des deux matériaux testés. De l'un à l'autre, seule la matrice élastomérique change. On donne aussi la température de transition vitreuse T_g de chacun et le taux de branchement I_p. On remarquera que la différence de Tg peut suffire à comprendre pourquoi M1 tourne plus difficilement que M2. Le matériau M1 est à la limite du plateau caoutchoutique aux températures usuelles.

Nous discutons du comportement de ces matériaux d'abord à partir de leur comporte-

[2]Matériaux aimablement confectionnés par MFPM. Les matrices caoutchoutiques seront notés SBR 1 et SBR 2.

ment uni-axial en traction monotone. Les résultats d'essais viendront étayer notre propos.

4.4 Quelques généralités sur le comportement des élastomères

4.4.1 Grandes déformations

Un élastomère est d'abord un matériau qui peut subir de très grandes déformations. Les valeurs typiques de déformations à rupture dépendent beaucoup de la matrice caoutchoutique, de la nature et quantité de charges, du taux de réticulation et de la nature des réticulations. Le tableau (4.4-2) fixe néanmoins quelques valeurs indicatives.

Matériaux	Déf Rupture
NR	$\epsilon_r \simeq 1000$ %
SBR	$\epsilon_r \simeq 600$ %
PU	$\epsilon_r \simeq 200$ %

TAB. 4.4-2: Quelques valeurs indicatives des déformations à rupture que l'on peut observer aux points chauds des structures pour un caoutchouc naturel, un SBR ou un polyuréthanne.

On appellera **module** (ou module d'Young) le module d'Young du matériau, mesuré dans un essai de petite déformation - ce module est parfois appelé zéro-module. En grande déformation, il est important de bien distinguer ce module du module tangent (dont nous ne nous servirons pas pour éviter toute confusion). Le module d'Young des élastomères est de l'ordre de 10 MPa.

4.4.2 Incompressibilité

Pour notre étude, nous considérerons que les élastomères chargés de charges renforçantes de noir de carbone sont des matériaux incompressibles. Il s'agit d'une situation que l'on réalise assez facilement dans les situations de faibles pressions hydrostatiques que nous rencontrerons. C'est l'une des grandes différences entre les modélisations de nos matériaux et les modélisations des propergols. Dans le cas des propergols, ce sont la taille et la nature des charges qui induisent une compressibilité du matériau. Heulliet et Dugautier [II.29] montrent que l'hypothèse d'incompressibilité n'est valable que si la pression hydrostatique n'est pas trop élevée. Pour nos essais de laboratoire, cette hypothèse sera toujours vérifiée. L'incompressibilité sera souvent à l'origine de difficultés de convergence de calculs de structure dans les cas de très grandes déformations. Pour les dépouillements expérimentaux, cela demeure une hypothèse de travail commode pour caractériser l'état de déformation des éprouvettes.

4.4.3 Viscosité

La viscosité est la troisième propriété fondamentale de nos matériaux. Nous en avons vu une explication qualitative dans la description du matériau : la viscosité est la trace du caractère non-newtonien du fluide originel. C'est une propriété qui dépend largement de la distance de la température de sollicitation à la température de transition vitreuse. Nous nous placerons toujours à des températures assez élevées par rapport à cette température de transition, de sorte que nos matériaux seront toujours dans un **état caoutchoutique** (soit $T > T_g + 50°$). C'est près de la T_g que les effets visco-élastiques sont les plus sensibles. Cependant, sur le plateau caoutchoutique, la viscosité est faible mais existe encore.

On appellera **quasi-statique** un essai pour lequel d'une part les effets d'inertie, d'autre part les effets visco-élastiques pourront être négligés. Il s'agit donc d'un essai dont la constante de temps est très faible devant la plus petite constante de temps visco-élastique.

Dans le tableau (4.4-3) nous donnons les valeurs des contraintes nominales à 200 % de déformations obtenues pour des tests de traction monotone à vitesse constante sur M1 et M2. Pour le matériau M2, considéré comme étant sur son plateau caoutchoutique, on mesure un accroissement de la contrainte de l'ordre de 9 % en moyenne par décade, pour le matériau M1 cet accroissement est de 12 %. La différence d'un matériau à l'autre est peu sensible. D'une manière générale, il s'agira quand même de savoir si cette dépendance à la vitesse de sollicitation est suffisamment importante pour que l'on soit obligé d'en tenir compte.

Matériau	Vitesse (s^{-1})	Contrainte Nominale à 200 % (MPa)
M2	$3.8\ 10^{-4}$	10.93
M2	$7.7\ 10^{-4}$	11.08
M2	$7.7\ 10^{-3}$	12.15
M2	$7.7\ 10^{-2}$	13.09
M2	$7.7\ 10^{-1}$	14.45
M2	3.8	15.23
M1	$7.7\ 10^{-4}$	12.93
M1	$7.7\ 10^{-3}$	14.43
M1	$7.7\ 10^{-2}$	16.43
M1	$7.7\ 10^{-1}$	18.38
M1	3.8	-

TAB. 4.4-3: Contraintes nominales à 200 % en Mpa.

4.4.4 Equivalence temps-température

Nous n'aborderons pas dans notre étude les aspects thermomécaniques du comportement des élastomères. L'hypothèse courante consiste à dire que dans l'essai de traction sur éprouvette fissurée que l'on cherche à modéliser, la température reste quasiment constante. Cette hypothèse résulte de deux démarches :

1. une démarche de simplification indispensable tant les aspects thermo-mécaniques sont complexes ;
2. une démarche simplificatrice basée sur l'équivalence temps-température.

On caractérise les mouvements moléculaires des élastomères par la présence de trous qui autorisent les changements de configuration des chaînes. La somme de ces trous, certes intangible, est appelée volume libre. Doolittle [II.18] relie le volume libre à la viscosité de l'élastomère par :

$$\ln \eta = B\frac{v_0}{v_f} + \ln A$$

où A et B sont des constantes, v_f le **volume libre** et v_0 le volume occupé par la matière.

On suppose une évolution linéaire du volume libre en fonction de la température :

$$f = \frac{v_0}{v} = f_0 + \alpha_f(T - T_0)$$

pour T_0 température de référence. On montre alors que :

$$\ln \frac{\eta(T)}{\eta(T_0)} = B(\frac{1}{f} - \frac{1}{f_0})$$

soit :

$$\ln \frac{\eta(T)}{\eta(T_0)} = -\frac{B}{f_0} \frac{T - T_0}{\frac{f_0}{\alpha_f} + T - T_0}$$

A partir de cette équation, on en déduit qu'il existe un facteur d'équivalence temps-température dans les élastomères donné à la température T par :

$$\log a_T = -\frac{C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0} \tag{4.4-1}$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives et T_0 une température de référence telles que :

$$\begin{cases} C_1 = \frac{B}{2.303 f_0} \\ C_2 = \frac{f_0}{\alpha_f} \end{cases}$$

Ce résultat est obtenu pour la première fois par Williams-Landel-Ferry [II.45] en 1955 et on appelle loi WLF la formule (4.4-1). Pour une température $T_0 = T_g + 50$, on admet couramment que les coefficients C_1 et C_2 valent respectivement 17,44 et 51,6. En pratique, ces facteurs varient d'un matériau à l'autre mais ne sont pas faciles à déterminer. Ils peuvent être obtenus à partir de nombreuses expériences réalisées aux petites déformations.

L'existence d'un facteur d'équivalence implique qu'il existe une variable temps réduit $\tau = a_T.t$, où t est le temps réel, à partir de laquelle on peut caractériser les phénomènes visco-élastiques à toute température. Par exemple le module d'Young E du matériau à la température T_1 mesuré dans un essai de traction uni-axiale à la vitesse de déformation $\dot{\lambda}_1$ peut être retrouvé par le même essai à la température T_2 et la vitesse de déformation $\dot{\lambda}_2$ si :

$$a_{T_1} . \dot{\lambda}_1 = a_{T_2} . \dot{\lambda}_2 \tag{4.4-2}$$

et de même pour tout autre quantité qui ne dépend que de la visco-élasticité.

A notre connaissance, il n'est pas établi que la même relation d'équivalence existe sur toute la plage de déformation supportée par le matériau. Cependant Smith [II.42] montre par exemple que la loi WLF du matériau permet d'unifier les résultats de rupture réalisés pour différentes température. De même certains auteurs ont repris l'idée de Smith pour montrer que la même équivalence existe pour la propagation de fissure, nous y reviendrons. Ces résultats permettent de justifier que la loi WLF soit caractéristique du matériau sur toute sa plage de sollicitation.

En pratique, on a coutûme d'étudier une observable liée à la viscosité à partir de la variable τ. Souvent, le fait de mettre en évidence la validité de cette variable réduite est jugé suffisant dans la modélisation. Ainsi, l'expérience est toujours le préalable qui doit préciser la forme de l'observable d'après la variable τ, cette forme étant obtenue à partir de plusieurs essais à plusieurs températures ou vitesses d'essai.

Un raisonnement simple semble justifier que l'élévation de température dans le matériau dans les cas de propagation de fissure n'est pas significatif. On sait, nous le verrons plus loin, que la propagation de fissure suit la loi WLF du matériau. On peut dire que si l'élévation de température était significative et surtout variable en fonction de la vitesse de propagation de fissure, alors on n'observerait pas l'équivalence WLF du matériau pour la propagation. Cela semble bien indiquer qu'il n'y a qu'un faible accroissement de température localement pendant la propagation. Ce type d'argument est donné par Kadir [II.35].

4.4.5 Vieillissement

Des phénomènes physico-chimiques altèrent la structure des élastomères. Dans le cas de nos matériaux, on note principalement l'influence de l'ozone sur le comportement mécanique. D'une façon plus générale, le vieillissement physico-chimique des élastomères est une composante importante dans l'étude de la tenue mécanique des structures élastomériques (par exemple pour les applications de collages [II.12]). Dans certaines circonstances les sollicitations mécaniques sont trop faibles pour faire propager des fissures, mais une propagation par dégradation chimique est possible.

Nous limitons notre étude aux essais de laboratoire, sur lesquels l'incidence des réactions chimiques dues à l'environnement sont faibles. Ainsi, nous évitons d'aborder le vieillissement des élastomères.

4.5 Aspects plus particuliers

Pour aborder les résultats plus particuliers, nous donnons sur la graphe (4.5-1) le résultat d'un essai cyclé de traction uni-axiale sur le matériau M2, à la vitesse de déformation de 7.7 10^{-2} s^{-1}. Cet essai est idéalisé sur les graphes successifs (4.5-2), (4.5-3) et (4.5-4).

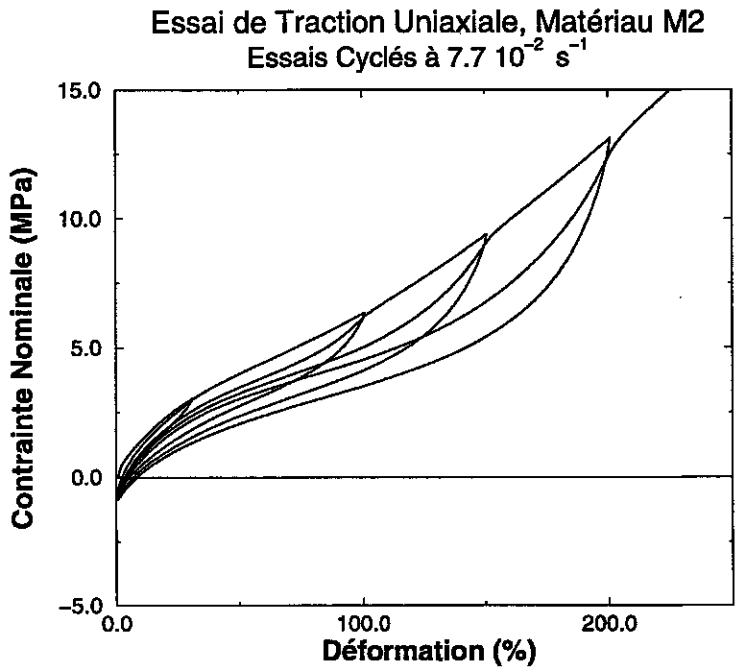


FIG. 4.5-1: Un exemple d'essai de cisaillement pur. Ici nous représentons le résultat de l'essai de traction de M2 à 7.7 10^{-2} s^{-1}. La rupture a eu lieu vers 230 % au niveau des mors. Ce type de test illustre la notion d'effet Mullins. Les graphes successifs (4.5-2), (4.5-3) et (4.5-4) explicitent cet exemple.

Un cycle de déformation à partir de l'état naturel montre que le matériau est dissipatif. On peut montrer plus précisément qu'il y a deux formes de dissipation :

1. une dissipation visqueuse ;
2. une dissipation qui existe même pour un essai quasi-statique.

On appelle effet Mullins la dissipation obtenue sur un cycle de déformation depuis l'état naturel. Selon les auteurs, l'effet Mullins est soit spécifiquement la dissipation observée

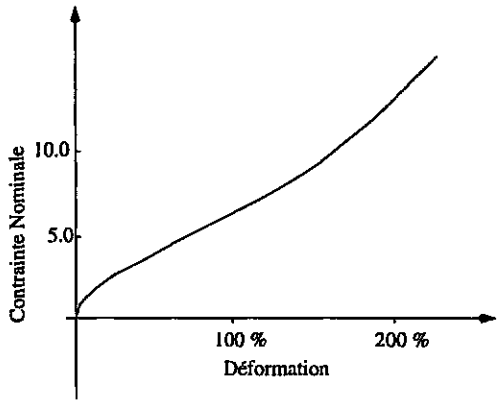


FIG. 4.5-2: Un essai de cisaillement pur sur M2. Tant que l'on ne mesure pas ce qui se passe quand on décharge l'éprouvette, on voit seulement que le matériau supporte des grandes déformations. L'essai de traction uniaxial monotone est souvent réalisé seul pour déterminer une loi de comportement hyperélastique.

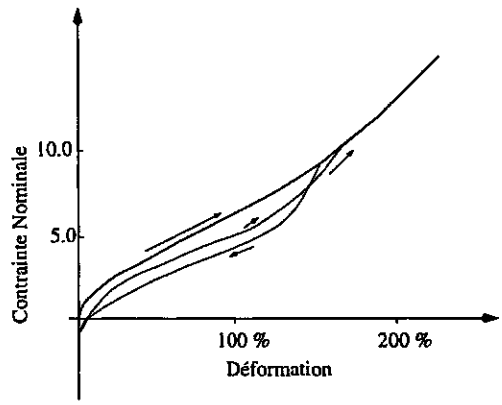


FIG. 4.5-3: Même essai que pour la figure (4.5-2), mais avec un cycle à 150 % de déformation. Les flèches indiquent le sens de parcours sur les courbes. L'effet Mullins apparaît quand on commence à décharger le matériau. Un effet essentiellement visqueux est visible quand on réalise une seconde traction. Dans ce cas, on observe que si l'on dépasse la déformation maximale du précédent cycle, on retrouve rapidement la courbe de traction de la figure (4.5-2).

en quasi-statique [II.33], soit l'ensemble des deux dissipations ci-dessus. Nous adopterons la deuxième définition, due à Kraus. Cet effet fut observé pour la première fois par Holt en 1932 [II.30] et a fait l'objet de nombreuses études par Mullins (d'où le nom donné au phénomène), puis par Bueche [II.10, II.11].

Deux formes de dissipation quasi-statique coexistent.

1. Certains matériaux ont la propriété de cristalliser sous contrainte. Il y a toutes formes de cristallisation possible selon les polymères. Dans le cas des élastomères, ce sont par exemple les caoutchoucs naturels et certains polybutadiènes qui ont tendance à cristalliser. Il s'agit d'une évolution de la microstructure qui s'ordonne sous traction. Cela se traduit dans le comportement par une dissipation que l'on intègre souvent à l'effet Mullins. Nous considérerons toujours des élastomères synthétiques qui cristallisent peu voire pas du tout sous contrainte : nous supposerons toujours qu'il

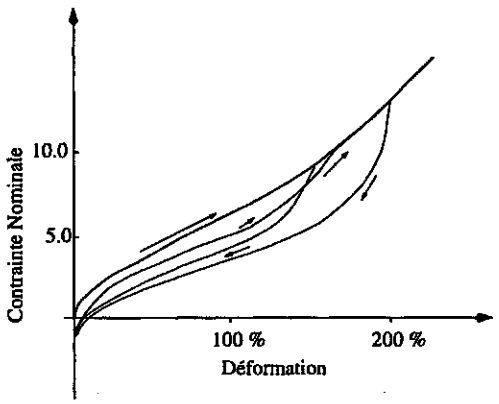


FIG. 4.5-4: Même essai que pour la figure (4.5-3), mais avec un second cycle. On peut montrer que la phase de décharge du second cycle est indépendante de l'existence du premier cycle.

n'y a pas de cristallisation. La littérature fait quand même souvent référence à des caoutchoucs naturels. Il sera nécessaire parfois de prendre en compte ce phénomène. Mais la loi de comportement que nous allons proposer ne devrait pas être utilisée pour décrire le comportement de tels matériaux. Un modèle capable de rendre compte de l'effet Mullins au sens de Kraus permet au moins phénomènologiquement de modéliser toutes les dissipations prises ensembles.

2. L'effet Mullins est aussi une caractéristique des élastomères chargés. Les études de Bueche ont permis au moins qualitativement de comprendre que le phénomène était en grande partie dû à la décohésion gomme charge sous traction. C'est un effet que l'on cherche à modéliser depuis quelques années. Nous présenterons plus loin un modèle qui donne des résultats satisfaisants.

L'effet Mullins est considéré comme un endommagement par les caoutchoutier. Il s'agit là d'une terminologie qui ne doit pas être rapprochée de l'endommagement dans les métaux. Si le phénomène ressemble plus à de la plasticité, on conserve la notion d'endommagement pour rappeler qu'il peut correspondre localement à des ruptures de chaînes ou d'interactions physiques.

Pour bien comprendre la caractéristique de l'effet Mullins, considérons l'essai complet de la figure (4.5-1). Après un premier cycle de traction, on peut réaliser un deuxième cycle. On observe alors que la contrainte nominale en traction est intermédiaire des contraintes du premier cycle en charge et décharge. Très rapidement après la fin du premier cycle, la contrainte nominale rattrape une courbe de traction qui correspond à la courbe de traction du matériau depuis l'état naturel. Une décharge redonne des contraintes plus faibles qu'à la charge par effet Mullins. On peut montrer que la deuxième décharge est bien indépendante de la première décharge. Tout se passe comme si le fait de déformer à nouveau le matériau, mais à une déformation plus grande que la déformation maximale du cycle précédent avait effacé toute trace de l'endommagement précédent. La similitude de ce résultat par rapport à la plasticité est frappante. Pourtant la dégradation de la microstructure n'est pas visible comme pour un matériau élastoplastique.

Pour nos matériaux M1 et M2, on observe à la fin de chaque cycle une déformation rémanente non-négligeable. Les résultats sont donnés dans le tableau (4.5-4). Cette déformation est rarement citée dans la littérature. On peut remarquer les valeurs importantes atteintes notamment pour M1 aux vitesses de déformations élevées. Nous essayerons de la relier au caractère anisotrope de l'endommagement. C'est cette quantité qui semble bien

M2	3.8 10^{-4} s^{-1}	4%	30.8%	5.4%	100.7%	6.8%	150.8%	7.3%	200.7%
M2	7.7 10^{-4} s^{-1}	3.1%	30.7%	4.3%	100.7%	5.5%	150.7%	6.4%	200.7%
M2	7.7 10^{-3} s^{-1}	2.4%	29.8%	3.7%	100%	4.8%	150%	6%	200%
M2	7.7 10^{-2} s^{-1}	3.5%	30.7%	5.3%	100.8%	6.9%	150.8%	8.2%	200.8%
M2	7.7 10^{-1} s^{-1}	4.2%	30.7%	6.5%	100.9%	7.9%	150.9%	9.4%	200.9%
M2	3.8 s^{-1}	4.5%	30.4%	7.2%	100.6%	8.6%	150.7%	11%	200.8%
M1	7.7 10^{-4} s^{-1}	5%	29.6%	9%	99.6%	11 %	149.6%	13.5%	199.6%
M1	7.7 10^{-3} s^{-1}	5.7%	30.6%	9.9%	100.7%	12.4%	150.7%	15.3%	200.6%
M1	7.7 10^{-2} s^{-1}	5.5%	30.8%	9.9%	100.7%	12.6%	150.7%	16.0%	200.7%
M1	7.7 10^{-1} s^{-1}	6.8%	30.8%	12.5%	100.9%	16.3%	150.9%	21%	200.9%
M1	3.8 s^{-1}	7%	30.3%	14.3%	100.5%	18.6%	150.6%	- %	186.8%

TAB. 4.5-4: Evolution de la déformation rémanente en fonction de la vitesse et de la déformation maximale (en petit caractère) au cours d'un cycle pour M1 et M2. On remarquera que la déformation rémanente est croissante de la déformation maximale et croissante de la vitesse. Le matériau M2 montre cependant un comportement inverse entre 3.8 10^{-4} s^{-1} et 7.7 10^{-2} s^{-1} ! Ce point est probablement lié à une erreur expérimentale. Les déformations sont données en pourcentage à 1 % près par excès. On remarque que la déformation rémanente de M2 est beaucoup plus faible que celle de M1.

distinguer M1 de M2. On peut estimer que M2 aura les mêmes déformations rémanentes que M1 à sa plus petite vitesse d'essai pour un essai à la vitesse de 3.8 s^{-1}. Une règle de calcul classique en caoutchouterie (une décade de vitesse pour 7° environ) montre que la différence de T_g correspondante doit-être de 45 à 50° , grandeur proche de l'écart réel entre les deux T_g.

De la même façon, on peut observer la quantité d'énergie dissipée par effet Mullins au cours d'un cycle. Le tableau (4.5-5) donne les résultats observés pour M1 et M2. La même remarque que précédemment sur l'écart à la T_g vu par la déformation rémanente peut être faite à partir de la dissipation. On note surtout la forte part de la dissipation pour chaque matériau, particulièrement aigue pour M1. Ces valeurs montrent clairement que pour nos matériaux, l'hypothèse de comportement élastique n'est pas du tout valable, même pour des cycles de déformations assez faibles (30 % par exemple).

La recouvrance de l'endommagement peut être obtenue au bout d'un temps très long à l'ambiante, de plusieurs jours à plusieurs mois selon l'élastomère. Elle peut être obtenue beaucoup plus rapidement par un traitement thermique. Nous n'aurons jamais de recouvrement dans nos essais.

Effet Mullins et accommodation.

Pour éviter les effets liés à l'effet Mullins, on réalise souvent des essais de pré-tractions successifs sur l'éprouvette d'étude. En réalisant plusieurs fois le même essai cyclé de traction sur l'éprouvette, on observe que le comportement sur un cycle finit par être quasiment le même à la charge et à la décharge. La plus grande partie de la dissipation est produite pendant le premier cycle. **On dit que l'on a accommodé le comportement du matériau.** Le choix de la déformation maximale - ou **déformation d'accommodation** est primordial pour l'étude. On voit bien qu'un même matériau n'a pas le même comportement en traction uni-axiale selon le niveau d'accommodation. D'autre part, l'accommodation n'a de sens que si tous les points de la structure subissent au cours de la sollicitation qui nous intéresse une déformation plus faible que la déformation maximale des cycles d'accommodation. Ainsi, on utilise parfois des éprouvettes accommodées pour

	30%			100%			150%			200%		
	W	H	$\frac{H}{W}$ %	W	H	$\frac{H}{W}$ %	W	H	$\frac{H}{W}$ %	W	H	$\frac{H}{W}$ %
M2 $3.8\ 10^{-4}\ s^{-1}$	.48	.13	26.7	3.3	.85	25.9	6.6	2.0	30.6	11.2	4.0	36.0
M2 $7.7\ 10^{-4}\ s^{-1}$	.49	.13	26.3	3.3	.89	26.8	6.6	2.1	31.6	11.4	4.2	37.4
M2 $7.7\ 10^{-3}\ s^{-1}$	.51	.14	26.9	3.6	.96	26.8	7.2	2.3	32.1	12.4	4.7	38.0
M2 $7.7\ 10^{-2}\ s^{-1}$	.56	.16	27.9	3.8	1.1	28.5	7.8	2.6	33.8	13.3	5.3	39.7
M2 $7.7\ 10^{-1}\ s^{-1}$	.69	.20	32.0	4.2	1.3	31.4	8.5	3.1	36.6	14.6	6.2	42.5
M2 $3.8\ s^{-1}$	.65	.23	35.8	4.4	1.5	33.9	8.9	3.5	39.1	15.4	7.0	45.1
M1 $7.7\ 10^{-4}\ s^{-1}$	.44	.19	42.3	3.0	1.2	38.7	6.4	2.7	42.2	11.7	5.6	47.8
M1 $7.7\ 10^{-3}\ s^{-1}$	.51	.23	45.0	3.4	1.4	40.9	7.2	3.2	44.8	13.1	6.6	50.5
M1 $7.7\ 10^{-2}\ s^{-1}$	.59	.26	43.7	4.0	1.7	43.4	8.4	4.0	47.6	15.1	8.0	53.1
M1 $7.7\ 10^{-1}\ s^{-1}$	.69	.33	47.8	4.6	2.2	48.3	9.6	5.1	52.7	17.3	10.	57.6
M1 $3.8\ s^{-1}$	.82	.43	53.0	5.6	3.1	54.6	11.9	7.0	59.1	-	-	-

TAB. 4.5-5: Aire W sous la courbe de première traction pour différentes élongations maxi et part de l'hystérèse H dans cette aire. Nous voyons que M2 est beaucoup moins hystérètique que M1 et que l'hystérèse évolue plus rapidement pour M1 que pour M2. Nous voyons aussi (mais il s'agit d'un résultat bien connu) que la part de l'hystérèse dans un cycle est croissante de la déformation maxi de l'histoire. Unité MPa.

faire des essais de propagation de fissure. L'accommodation est réalisée sur l'éprouvette saine - c'est-à-dire sans pré-fissure. Dans ce cas particulier, ce protocole ne peut avoir de sens que si localement on est sûr de ne pas dépasser la déformation d'accommodation. Sinon, les essais montrent que pour des déformations trop grandes le matériau va perdre la mémoire des cycles de pré-traction et revenir sur la courbe de traction depuis l'état naturel.

Le comportement obtenu sur une éprouvette accommodée, sans se méfier du comportement aux déformations trop grandes, semble faire apparaître une divergence de la contrainte au-delà d'une déformation proche de la déformation d'accommodation, conséquence de la forte croissance de la contrainte nominale près du sommet du cycle. Une loi de comportement calculée sur la partie accommodée du cycle et s'appliquant à des déformations trop grandes surestimera donc beaucoup la contrainte par rapport à la contrainte réelle.

En outre, dans le cas accommodé, l'état de repos à partir duquel on mesure les déformations n'est pas l'état naturel. On voit à partir du tableau (4.5-4) que la distance entre les deux états peut être assez grande. L'erreur que l'on peut commettre si l'on ne prend pas de précautions est analogue à celle que l'on rencontre à vouloir caractériser par un comportement élastique un matériau élasto-plastique écroui.

Nature directionnelle de l'effet Mullins

On dispose d'une plaque carrée d'élastomère. Par un procédé analogue à celui décrit par Davet [II.16], on déforme la plaque d'abord dans une direction, puis dans l'autre par des essais cyclés. La reproductibilité de ce type de test est vérifiée par ailleurs. Dans les essais réalisés, il s'agit d'un cisaillement pur : deux bords opposés sont étirés à vitesse constante, les deux bords adjacents sont maintenus pour assurer une déformation nulle orthogonalement à la traction. Un cycle est réalisé jusqu'à une déformation λ_m donnée. Puis on reproduit le même type de cycle, mais sur la plaque tournée à 90° et en choisissant une déformation maximale plus ou moins grande. Si l'endommagement est isotrope, tant que la déformation maximale du second cycle n'est pas égale à la déformation maximale

du premier cycle, le comportement sur le cycle doit être comme accommodé. En particulier le comportement sur la phase de décharge doit être proche du comportement sur la phase de décharge du premier cycle. On reporte sur le graphe (4.5-5) un résultat de cette série d'expérience. Le premier cycle de cisaillement est réalisé avec une déformation maximale de 250 %. Le second cycle sur l'axe orthogonal est choisi avec une déformation maximale de 150 %. Seules les décharges des deux cycles sont mesurées. On peut voir sur le graphe que la courbe de décharge du second cycle ne coï ncide pas avec la courbe de décharge du premier cycle. L'écart entre les deux courbes n'est pas dû à une incertitude expérimentale. Ces résultats montrent que l'endommagement dû à l'effet Mullins est un endommagement directionnel. Nous montrerons plus loin comment en tenir compte.

Ce type de résultat expérimental est assez méconnu. Mullins [II.36] est le premier a les avoir réalisés.

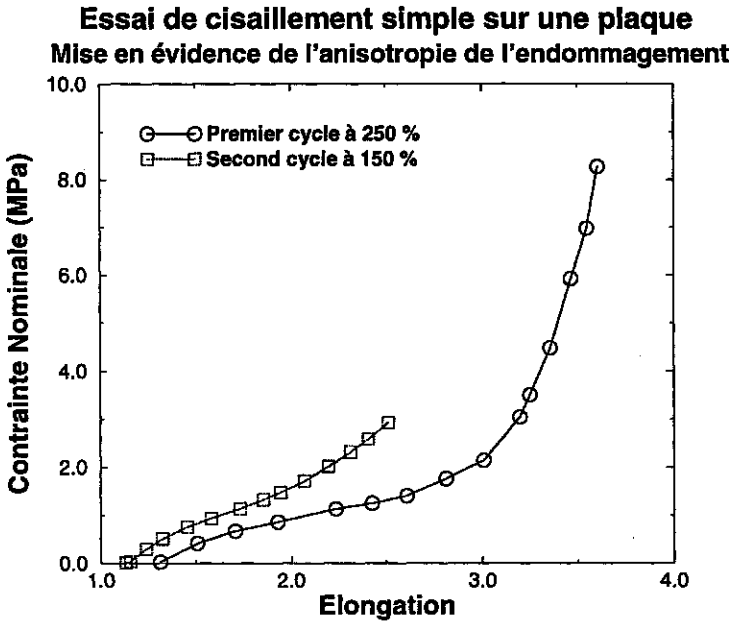


FIG. 4.5-5: Résultat de deux essais de cycle de cisaillement pur sur une plaque de caoutchouc, réalisés dans des directions orthogonales. Les déformations maximales des cycles sont choisies très différentes, celle du second cycle nettement plus faible. Ce choix permet de montrer que l'endommagement n'est pas isotrope. L'écart entre les deux courbes ne peut venir d'un flou de mesure.

Remarque : *Si l'on suppose que l'effet Mullins est lié à un phénomène d'endommagement, alors l'essai ci-dessus montre clairement que cet endommagement n'est pas isotrope.*

Par contre on pourrait constater que le deuxième cycle est proche du premier cycle perpendiculaire s'il était réalisé à la même déformation. Donc un essai proche de celui que nous proposons, interprété dans un cadre visco-élastique, montrerait plutôt le caractère isotrope du comportement !

Chicheportiche [II.12] montre un résultat plus complet. Il réalise le même type de test, mais conserve les courbes de charges. Ses résultats montrent beaucoup mieux l'anisotropie de l'endommagement mais rendent encore plus nécessaire notre remarque. En effet, dans son cas, les phases de charges des cycles sont quasiment confondus.

De même que nous avons signalé les précautions à prendre quand on utilise un matériau

accommodé, nous devons souligner l'importance d'un tel résultat. L'accommodation n'est valable que pour une sollicitation donnée. D'autre part le comportement accommodé ne peut prévoir que la contrainte selon l'axe d'étude du comportement accommodé. Dans toute autre direction le résultat ne peut-être que faux si l'on ne tient pas compte de l'effet directionnel de l'effet Mullins.

4.6 Conclusions

Nous venons de faire un état assez complet des aspects expérimentaux sur nos matériaux dans le cas d'essais monotones. Nous avons pu préciser quelques aspects importants de la modélisation - par exemple nous négligerons les effets thermiques. La plupart de nos remarques et conclusions sont connues depuis longtemps mais les modèles en rendent difficilement compte. Nous allons proposer un comportement qui essaye de reprendre quelques unes de ces caractéristiques.

Nous nous limiterons aux modèles élastiques et élastiques endommageants. Les comportements visco-élastiques ne seront pas abordés : notre étude permet de contourner cet écueil. Chicheportiche [II.12] en fait une revue bibliographique.

Chapitre 5

Les comportements hyperélastiques

5.1 Cadre statistique standard

Soit F l'énergie libre d'un volume élémentaire de caoutchouc : c'est aussi (par construction) la densité d'énergie mécanique de ce volume. F est réliée à l'énergie interne et à l'entropie par :

$$F = U - TS \tag{5.1-1}$$

Pour une extension de cet élément de matière, la force mesurée est :

$$f = \frac{\partial U}{\partial l} |_{V,T} - T\frac{\partial S}{\partial l} |_{V,T}$$

Si l'on réalise un même essai de traction à différentes températures, on constate que la courbe $F(T)$ est une droite qui, extrapolée au zéro absolue, passe par zéro. On en déduit que dans l'expression de f ci-dessus, la variation de U est négligeable : on dit que **l'énergie de déformation du système est d'origine entropique**. La recherche d'une loi de comportement pour un caoutchouc passe d'abord par une évaluation de la variation d'entropie au cours de la sollicitation. Il s'agit d'une constatation fondamentale qui relie nos méthodes macroscopiques d'évaluation du comportement à la physique statistique qui s'occupe de décrire la statistique d'évolution du caoutchouc comme ensemble de chaînes de polymère.

Le premier modèle de comportement hyperélastique est le modèle néo-hookéen, proposé par Treloar en 1940 [II.43]. Il est défini d'abord par une étude statistique. La démonstration est un grand classique des approches micro-macro que nous allons reproduire en l'augmentant de ces améliorations et variantes successives pour bien voir comment les modèles modernes s'articulent toujours autour des mêmes concepts statistiques. Les résultats que nous allons présenter sont adaptés aux caoutchoucs non-chargés, mais les lois de comportements fournis sont encore considérés valables pour les élastomères chargés, en considérant alors une micro-structure "équivalente".

On considère un élastomère non-chargé, vulcanisé, supposé hyperélastique et isotrope. Son élasticité dépend des chaînes internes, une chaîne interne étant une chaîne linéaire de monomères comprise entre deux liens physiques, ponts de réticulation ou ramifications du réseau polymèrique. Les bouts de chaînes, ou chaînes pendantes, participent à la viscosité du matériau. On néglige les chaînes pendantes et l'on suppose que chaque nœud physique du réseau suit linéairement la déformation globale (hypothèse de déplacement affine du réseau). L'hypothèse d'isotropie implique que la statistique de distribution des chaînes est isotrope. Si une chaîne est caractérisée par son nombre de monomères n et la direction

donnée par ses deux extrémités, alors la probabilité pour qu'une chaîne de n segments soit dans l'angle solide $d\Omega$ est :

$$P(n, d\Omega) = p(n)d\Omega \tag{5.1-2}$$

On peut déduire par une étude statistique que la densité d'énergie globale d'un volume élémentaire dépend de l'énergie libre due à l'allongement de chaque chaîne prise isolément par :

$$W = \int_{\Omega}\int_{n} wdn.d\Omega \tag{5.1-3}$$

où w est l'énergie élémentaire d'une chaîne, expression que nous détaillons plus loin.

Il y a deux hypothèses sous-jacentes derrière ce calcul :

1. la nature entropique du comportement élastique ;
2. il n'y a pas d'entropie de mélange qui pourrait prendre en compte notamment les effets visco-élastiques.

Dans le cas du matériau néo-hookéen, on suppose que les chaînes sont idéales, c'est-à-dire qu'**elles peuvent supporter des allongements infinis**. L'hypothèse de **déplacement affine** permet de considérer que pour chaque chaîne il y a une extrémité fixe à l'origine et une extrémité qui se déplace de façon affine avec la déformation à l'infini et se trouve à la position actuelle (x, y, z). Dans ce cas, l'énergie de déformation d'une chaîne isolée est :

$$w(x, y, z) = 3kT\frac{x^2 + y^2 + z^2}{2 < R^2 >} \tag{5.1-4}$$

où $< R^2 >$ est le rayon quadratique moyen d'une chaîne. On montre que pour une chaîne de n monomères,

$$< R^2 >= na^2 \tag{5.1-5}$$

avec a longueur d'un monomère[1].

$(x^2+y^2+z^2)/ < R^2 >$ caractérise l'état d'allongement de la chaîne. C'est une quantité indépendante du nombre de monomères. On peut noter :

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{< R^2 >} = \lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 \tag{5.1-6}$$

avec λ_x, λ_y, λ_z élongations selon les axes du repère.

Par sommation sur l'assemblée, la densité d'énergie est :

$$W(\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z) = \frac{\nu kT}{2}(\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 - 3) \tag{5.1-7}$$

où ν est le nombre de chaînes par unité de volume. Cette expression est bien indépendante du repère d'étude, avec :

$$W = \frac{\nu kT}{2}(I_1 - 3) \tag{5.1-8}$$

densité d'énergie néo-hookéenne. Elle est également indépendante de la statistique (isotrope) de répartition des chaînes. En traction uni-axiale et tant que l'on reste en petites déformations, la densité d'énergie vaut :

$$W = \frac{3\nu kT}{2}\epsilon^2 \tag{5.1-9}$$

[1]Nous confondrons toujours la notion de monomère et la notion de segment statistique, ou segment de Kuhn.

avec ϵ mesure de la déformation. En élasticité non-linéaire, on appelle module d'Young le module d'élasticité à l'origine. Dans le cas du matériau néo-hookéen par exemple :

$$E = 3\nu kT \tag{5.1-10}$$

Il est important de remarquer que dans le cas général, ce module ne présage du module d'élasticité aux déformations plus grandes.

On peut voir deux types d'extension à ce calcul, des extensions à caractère mathématique et des extensions vers des statistiques plus complexes.

5.2 Modèles phénoménologiques

La densité d'énergie néo-hookéenne est le cas le plus simple de densité d'énergie hyperélastique isotrope que l'on puisse proposer. Une extension simple de ce modèle est la densité de Mooney :

$$W(I_1, I_2) = C_1(I_1 - 3) + C_2(I_2 - 3) \tag{5.2-11}$$

Le second invariant est ajouté pour essayer de rendre compte de la non-linéarité initiale comme une perturbation du réseau idéal due aux enchevêtrements des chaînes et qui se traduit par un terme perturbateur en I_2. A notre connaissance, aucun modèle moléculaire ne justifie le terme en I_2. Les modèles moléculaires plus évolués que le modèle néo-hookéen mais qui veulent prendre en compte des défauts sur une statistique gaussienne redonnent toujours un comportement néo-hookéen, à un coefficient de proportionnalité près par rapport au modèle original. On pourra par exemple se reporter à [II.48] pour une revue rapide de ces modèles ou à [II.23] pour une analyse plus complète. Edwards et Vilgis [II.19] ont étudié un modèle moléculaire présentant les enchevêtrements comme des nœuds topologiques faibles (possibilités de glissement des chaînes). Ils montrent que dans le cas d'un modèle gaussien, les enchevêtrements modifient de façon complexe la densité d'énergie qui perd sa forme en invariants : en particulier le second invariant n'intervient pas.

Enfin, la généralisation la plus complète qui soit à partir du modèle néo-hookéen est la densité de Mooney-Rivlin :

$$W(I_1, I_2) = \sum_{i,j} C_{ij}(I_1 - 3)^i (I_2 - 3)^j \tag{5.2-12}$$

simple développement en série de la densité d'énergie par rapport à ces variables et en tenant compte de l'incompressibilité. Avant de commenter cette loi, on peut présenter aussi une variante du développement due à Ogden :

$$W = \sum_n \frac{\mu_n}{\alpha_n} \left(\sum_{i=1}^{3} \lambda_i^{\alpha_n} - 3\right) \tag{5.2-13}$$

proposée pour la première fois par Ogden [II.39]. La suite des (α_i) est une suite de puissances réelles positives. Quelques écoles se sont affrontées pour défendre l'une ou l'autre des écritures. La querelle est devenue vaine. Il y a très peu de différences de l'une à l'autre. Seule l'analyse et le dépouillement des résultats peuvent varier.

En effet, la densité d'Ogden entre dans le cadre des densités de Valanis-Landel [II.44], cadre heuristique simple préconisé précisément parce qu'il permet de remonter facilement à la densité d'énergie à partir des expériences. Dans les codes de calcul modernes, l'une ou

l'autre des lois est implantée et le choix des modèles se fait plus sur la base de l'habitude que de la nécessité de modélisation.

Pour les calculs analytiques, on retrouve aussi la famille des lois de comportement dites "Néo-Nookéenne généralisées", ou GNH :

$$W = \frac{\mu}{2b}\left[\left(1 + \frac{b}{n}\{I_1 - 3\}^n\right) - 1\right] \tag{5.2-14}$$

utilisées par Knowles et Sternberg pour l'étude des champs asymptotiques en déformation anti-plane, ou par Ball pour l'étude de la cavitation.

Toutes ces lois ont largement perdu leur caractère physique sous-jacent. Elle s'égarent vers des sommets de complication lorsqu'il s'agit de rendre compte d'essais complexes. Plus le nombre d'expériences à modéliser est grand, plus le nombre de coefficients est important. Il n'y a pas non plus unicité du choix des coefficients et l'on peut tomber dans des travers graves selon la méthode d'évaluation choisie [II.47]. Il faut aussi toujours vérifier la stabilité du comportement et cette étape complique grandement la méthode d'optimisation. Ces lacunes sont bien connues et n'empêchent pas que l'on continue à utiliser ces modèles, même avec des ajustements de coefficients à partir d'un seul type de test. Pour des expériences particulières, il est possible d'utiliser des lois spéciales, développées très spécifiquement mais rarement efficaces pour d'autres applications, comme la densité d'Alexander adaptée au comportement des néoprènes.

Ces densités, sans compter la pléthore non citée (voir [II.16]), ne peuvent pas répondre à notre cahier des charges. Elles vont dans le sens d'une complication ou d'une perte de sens et ne semblent apporter de solution aux erreurs de modélisation que par une complication extensive des modèles.

5.3 Les modèles non gaussiens

5.3.1 Présentation lagrangienne

Une chaîne de n monomères de longueur a ne peut pas s'allonger jusqu'à une longueur supérieure à na. Cela correspond à un allongement maximum $\lambda_c = \sqrt{n}$ par rapport à son rayon quadratique moyen. On montre que l'on peut prendre en compte cette longueur finie par une statistique non gaussienne donnée par la loi de Langevin (voir par exemple [II.24]). Pour simplifier les écritures, nous utiliserons la probabilité sur les extensions limites $p(\lambda_c)$ au lieu de $p(n)$. Dans ce cas, la formule (5.1-3) est modifiée en :

$$W = \alpha T \int_\Omega \int_1^{+\infty} \lambda_c^2 p(\lambda_c)\left[\beta\frac{\lambda}{\lambda_c} + \ln\frac{\beta}{sinh\ \beta}\right] d\lambda_c d\Omega \tag{5.3-15}$$

avec :

$$\begin{cases} \beta = \mathcal{L}^{-1}(\frac{\lambda}{\lambda_c}) \\ \mathcal{L}(x) = Coth[x] - \frac{1}{x} \end{cases} \tag{5.3-16}$$

$\mathcal{L}$ est la fonction de Langevin. Une hypothèse simplificatrice courante utilisée par exemple par Wu et Van der Giessen [II.46] ou Govindjee et Simo [II.25] consiste à prendre directement la longueur moyenne des chaînes pour supprimer l'intégration sur λ_c.

Cette formulation lagrangienne totale est très agréable. Elle permet d'obtenir directement l'expression de la contrainte de Piola-Lagrange sans dériver le domaine d'intégration dans une transformation quelconque caractérisée par son application tangente $\underline{\underline{F}}$:

$$\begin{cases} \underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{F}}} - p\underline{\underline{F}}^{-t} \\ = \int_\Omega \frac{\partial \lambda}{\partial \underline{\underline{F}}} \int_{\lambda_c} \lambda_c p(\lambda_c)\beta d\lambda_c . d\Omega \end{cases} \tag{5.3-17}$$

Remarquons qu'il n'est plus possible d'obtenir une formulation en invariants. Si l'isotropie est respectée, la formulation devient trop restrictive. De plus, les formulations complète ou simplifiée (une seule élongation λ_c) font apparaître une forte divergence de la contrainte ou de l'énergie pour une élongation approchant λ_c ou $< \lambda_c >$ dans une direction de sollicitation. C'est souvent une méthode de mesure de ce paramètre micro. Nous pourrons voir plus loin les erreurs engendrées par cette estimation.

En rejetant λ/λ_c vers 0, soit en faibles déformations soit pour un λ_c tendant vers l'infini, on retrouve une densité d'énergie néo-hookéenne qui montre bien que **le modèle gaussien est une approximation du modèle non-affine valable quand on est loin de l'extension limite.**

5.3.2 Présentation eulérienne

Il est également possible de calculer la contrainte de Cauchy par une expression intégrale. Si le résultat peut être obtenu directement à partir de $\underline{\underline{\pi}}$, Wu et Van der Giessen montrent que l'on peut faire le calcul sur le calcul intégral eulérien. Pour exprimer leur résultat, les auteurs ont besoin de connaître l'état de déformation du réseau polymèrique. Ainsi, si à l'état naturel le réseau est isotrope caractérisé par :

$$P(n, d\Omega) = p(n)d\Omega \tag{5.3-18}$$

sous l'effet d'une sollicitation $\underline{\underline{F}}$, le réseau se déforme est n'est plus isotrope. Dans la direction actuelle (θ, ϕ), Wu et Van der Giessen montrent que la probabilité de présence d'une chaîne de n monomères devient :

$$P(n, \theta, \phi, \underline{\underline{F}}, d\Omega) = p(n)C(\theta, \phi, \underline{\underline{F}})d\Omega \tag{5.3-19}$$

où C est la fonction dite CDOF (*Chain Direction Orientation Function*) :

$$\left\{ \begin{array}{c} C(\theta, \phi, \underline{\underline{F}}) = \frac{1}{4\pi}\lambda^3 \\ \lambda = \sqrt{\underline{n}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.\underline{n}} \\ \underline{n} \text{ vecteur unitaire, direction } (\theta, \phi) \end{array} \right. \tag{5.3-20}$$

Avec la fonction CDOF, il devient possible d'exprimer l'énergie libre par :

$$W = \int_\Omega \int_n p(n)wC(\theta, \phi, \underline{\underline{F}})dn.d\Omega \tag{5.3-21}$$

et la contrainte de Cauchy par :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \int_\Omega \int_n p(n)2\frac{Dw}{D\underline{\underline{C}}}C(\theta, \phi, \underline{\underline{F}})dn.d\Omega \tag{5.3-22}$$

où $\frac{D.}{Dt}$ est une dérivée "convective" au sens défini par Wu et Van der Giessen.

La notion d'orientation du réseau se trouve clairement définie par la fonction CDOF. Il s'agit d'une mesure réversible. La puissance cubique montre que l'orientation du réseau est très rapide sous l'effet d'une déformation. Il y a bien une densification du réseau pour supporter la plus grande déformation et une raréfaction dans les directions de compression. De tels résultats peuvent être repris ensuite dans le cadre de la mécanique de la rupture : de nombreux phénomènes sont attribués à l'orientation (irréversible ?) du réseau, comme la fragilisation du matériau sous l'effet d'une déformation transverse, voire les phénomènes de rotation de fissure.

5.3.3 Simplification de l'approche intégrale

Pour que le modèle (5.3-15) soit un modèle élastique, il est nécessaire qu'aucune chaîne ne puisse atteindre son extension limite. On suppose que toutes les chaînes ont la même extension limite $\lambda_c = \sqrt{n}$. Alors (5.3-15) devient :

$$W = \alpha T \int_\Omega \lambda_c^2 \left[\beta \frac{\lambda}{\lambda_c} + \ln \frac{\beta}{sinh\ \beta} \right] d\lambda_c d\Omega$$

L'usage de la densité d'énergie intégrale est délicate. En toute généralité il faut intégrer l'énergie ou la contrainte sur la sphère unité à chaque instant. Si cette méthode est acceptable dans un objectif de recherche, pour essayer notamment de valider les approches micro-macro, elle devient prohibitive si l'on veut l'intégrer dans un code de calcul. Une petite simplification consiste à calculer la contrainte uniquement selon les axes principaux, ce qui limite à trois les intégrations à réaliser, au lieu de 6.

Pour simplifier le modèle 3D, des solutions approchées sont utilisées, définies à partir d'approximations par points de Gauss. L'intégrale 3D est remplacée par sa somme discrète sur un ensemble de directions. La première solution retenue par James et Guth [II.31] utilise les trois directions propres de la déformation comme s'il n'y avait que trois chaînes sur le trièdre des directions propres. Dans ce cas, les contraintes principales sont données par :

$$\begin{cases} \pi_i = \frac{1}{3}\alpha^{(3)}\mathcal{L}^{-1}(\frac{\lambda_i}{\lambda_c}) - \frac{p}{\lambda_i} \\ \sigma_i = \frac{1}{3}\alpha^{(3)}\lambda_i\mathcal{L}^{-1}(\frac{\lambda_i}{\lambda_c}) - p \end{cases} \tag{5.3-23}$$

Arruda et Boyce [II.6] lui préfèrent un modèle à huit directions plus fidèle :

$$\begin{cases} \pi_i = \frac{1}{3}C^R\sqrt{N}\frac{\lambda_i}{\lambda}\mathcal{L}^{-1}(\frac{\lambda}{\sqrt{N}}) - \frac{p}{\lambda_i} \\ \text{avec } \lambda = \sqrt{\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2}{3}} \end{cases} \tag{5.3-24}$$

Ce modèle à 8 directions est peu différent des modèles déjà proposés comme celui de Flory et Rehner [II.22] (modèle tétrahédrique). On constate que l'on semble préciser le comportement sans augmenter le nombre de variables, seulement en améliorant la richesse de l'approximation du modèle micro, ce qui est plus intéressant que les modèles phénoménologiques.

Les approximations les plus connues préconisent d'augmenter le nombre de directions. Il semble acquis qu'il n'est pas vraiment nécessaire d'aller au-delà de 8 directions. Par contre, on reste toujours dans un repère lié aux directions propres, éventuellement mobile avec la déformation. En se référant par exemple à Elata et Rubin [II.20] on peut voir que le calcul des contraintes par une approximation sur huit points de Gauss mobiles n'est peut-être pas adaptée. Dans le cas élastique isotrope, 6 directions indépendantes (au sens tensoriel défini par Rubin et Elata) suffisent à caractériser l'état de déformation. D'une façon générale, il n'est pas nécessaire de se placer dans le repère des directions propres pour calculer la contrainte.

Les expressions simplifiées proposées fournissent un nouveau cadre à partir duquel on peut construire des lois de comportement plus complexes. Il semble que ces lois plus évoluées que les modèles phénoménologiques soient aussi plus fiables parce qu'ils utilisent un cadre plus adapté incluant des effets non-linéaires typiques de la loi de Langevin et pouvant aussi recevoir des termes perturbateurs. Arruda et Boyce par exemple se servent de ces lois pour les coupler à des modèles rhéologiques [II.6, II.7] pour simuler le comportement des PC et PMMA.

Chapitre 6

Modélisation de l'effet Mullins

L'effet Mullins est beaucoup moins étudié que le comportement hyperélastique dans l'optique de trouver des lois de comportement. Cet état de fait tient à un double constat :

1. pour le mécanicien, l'étude des lois de comportement hyperélastique et leur implantation, incluant le problème de l'incompressibilité, est déjà un beau problème en soi. L'effet Mullins est bien moins connu, naturellement perçu comme une complication ultérieure, parfois négligé parce que faible.
2. Le caoutchoutier de son côté connaît moins la relation entre le comportement, assimilé par exemple à un modèle de Mooney-Rivlin qui dimensionne les structures, et les phénomènes de dissipation qu'il aborde dans le cadre des problèmes d'adhérences, de réduction de bruit, d'amortissement, etc... par le biais d'une aptitude à dissiper de l'énergie.

Il y a des modèles qui tentent de reproduire l'effet Mullins. La plupart ne donnent pas des lois explicites ou 3D (voir [II.32]). A notre connaissance seul le modèle micro-macro de Govindjee et Simo se traduit effectivement par une loi de comportement exploitable dans un calcul de structure [II.25, II.26].

On se heurte dans le cas de l'effet Mullins à un vieux débat sur la nature de l'interaction gomme/charge. Notre propos n'est pas de rentrer dans la polémique. De nombreuses études essayent de préciser les phénomènes prépondérants dans l'interaction parmi les 18 proposés par Donnet et Vidal [II.17] ou les 13 recensés par Dannenberg [II.15].

Deux écoles de pensée s'opposent essentiellement. Une première s'attache à décrire l'effet Mullins par une évolution du comportement de la matrice caoutchoutique vers un comportement non-gaussien à cause de l'amplification des contraintes occasionnée par la présence des charges. C'est l'école de Mullins ou Harwood par exemple [II.28, II.37].

Actuellement, on pense plutôt que c'est le "bond rubber" (ou caoutchouc occlus) qui est responsable des dissipations. Le bond rubber est le volume de caoutchouc qui emprisonne les charges. C'est le lieu de phénomènes complexes d'interaction gomme/charge, de nature physico-chimiques : il y a par exemple des mouvements relatifs de l'élastomère à la surface de charges, éventuellement des détachements, etc... C'est l'école de Dannenberg ou Rigbi [II.15, II.40].

Pour Govindjee et Simo, il est indispensable de passer par une modélisation du "bound rubber" pour valider les hypothèses avancées. En s'aidant des théories un peu plus simples de Bueche, ils intègrent un comportement micro dissociant un réseau de chaînes qui subit seulement la présence volumique des charges et un deuxième réseau de chaînes qui est en interaction avec les charges. L'endommagement porte uniquement sur la partie de la matrice liée aux charges sous la forme d'une disparition des chaînes qui subissent une

élongation trop importante. Le paramètre d'endommagement est le scalaire :

$$\mu = Max(\lambda_i^m)$$

plus grande extension principale dans la matrice au cours du temps, calculée en tenant compte de la présence volumique des charges comme amplificateur de contraintes.

Leur modèle reproduit bien les résultats de la littérature, avec des choix de constantes microscopiques qui semblent raisonnables. Pourquoi dès lors ne pas conserver leur modèle en l'état ? D'abord il n'est pas nécessaire pour nous de conserver un modèle si évolué. D'autre part, Govindjee et Simo laissent de côté la formulation intégrale alors que leur travail pourrait prendre plus de généralité en partant d'une expression complètement tridimensionnelle. Enfin, les auteurs définissent l'endommagement comme un scalaire, donc un phénomène isotrope, sous le prétexte que le modèle non-isotrope n'est pas gérable. Or il manque un détail très délicat dans leur modélisation : la déformation rémanente.

Pour bien comprendre ce que peut apporter un endommagement anisotrope, supposons plutôt que l'endommagement soit attaché à sa direction. Dans le cas des axes principaux, il semblerait naturel d'avoir plutôt :

$$\mu_i = Max(\lambda_i^m)$$

Dans [II.41], Rivlin et Thomas développent un modèle à double réseau anisotrope. Ils supposent que lors d'une déformation, une partie du réseau de chaînes s'adapte en prenant la position déformée comme état de repos. Dans ce cas, on peut voir effectivement un effet d'adoucissement de la contrainte de traction pendant une décharge. On remarque surtout que l'état de repos à la décharge ne correspond à l'état initial que si l'endommagement est isotrope. Cette situation ne rentre pas dans le cadre de leur modèle. Ils montrent cependant qu'ils arrivent à reproduire des déformations rémanentes réalistes. On peut donc penser qu'en laissant à l'endommagement la possibilité d'être anisotrope, on pourra retrouver des déformations rémanentes.

Chapitre 7

Un modèle de comportement

Nous allons voir comment, en reprenant la plupart des idées présentées précédemment, un modèle simplifié mais fiable va émerger, lequel prendra en compte les résultats connus et déjà modélisés, mais aussi l'anisotropie éventuelle de l'endommagement.

On remarque que le comportement d'un élastomère chargé est proche de celui d'un élastomère non-chargé. De l'un à l'autre il y a une dissipation accrue, mais on se sert souvent indifféremment de la même famille de densité d'énergie pour caractériser leur comportement mécanique.

Pour rendre compte de cette idée, on suppose que le volume élémentaire d'étude est un milieu homogénéisé de densité d'énergie élastique de type caoutchoutique mais avec des constantes qui n'ont éventuellement pas de sens physique -à cause de la présence des charges. Par exemple, on peut imaginer qu'aux faibles déformations le comportement du caoutchouc chargé est de type néo-hookéen, mais sans faire le rappel de la définition microscopique du module d'Young.

Cette hypothèse nous permet de supposer que la densité d'énergie élastique est encore donnée par une intégrale comme le proposent Wu et Van der Giessen :

$$W_e = \int_\Omega \int_{\lambda_c} w\ p(\lambda_c) d\lambda_c d\Omega$$

où la densité w n'est plus simplement reliée à ce qui se passe à l'échelle de la chaîne. On souhaite cependant considérer que le calcul statistique avec une chaîne équivalente a encore un sens. Une chaîne de n monomères ne peut supporter des allongements supérieurs à $\sqrt{n}$. Plus précisément, on peut associer à l'extension de cette chaîne une force "moléculaire" entre ses extrémités :

$$f = \frac{kT}{a} \mathcal{L}^{-1}(\frac{\lambda}{\lambda_c})$$

Quand l'extension de la chaîne atteint son extension limite, la force moléculaire devient infinie. On doit supposer qu'il existe au moins un paramètre $\gamma < 1$ tel que la rupture de la chaîne a lieu au plus si :

$$\lambda = \gamma . \lambda_c$$

On fait l'hypothèse forte qu'une chaîne rompue, que ce soit au niveau d'un pont de réticulation, d'un point d'attache avec une charge ou autre devient une chaîne pendante qui ne participe plus à l'élasticité du matériau. Dans ce cas, l'expression de Wu et Van der Giessen est modifiée en :

$$W_e = \int_\Omega \int_{\lambda_c=\lambda_m}^{+\infty} w\ p(\lambda_c) d\lambda_c d\Omega \tag{7.0-1}$$

avec :

$$\lambda_m = Max[f(\lambda(\tau)), \tau < t]$$

où f est une fonction qui permet de montrer comment modifier les bornes d'intégration dans la formule de Wu et Van der Giessen endommagée. Par exemple un choix simple pourrait être :

$$f(\lambda) = \gamma\lambda$$

Mais par référence au travail de Govindjee et Simo, on peut prévoir qu'une formule comme :

$$f(\lambda) = (\gamma\lambda)^\alpha$$

avec la constante α à préciser, pourrait être adaptée afin de traduire l'amplification des contraintes due aux charges.

L'expression de W_e que nous proposons détermine à chaque instant la quantité d'énergie élastique stockée par le matériau. Pour une sollicitation donnée, la différence entre l'énergie apportée au système et W_e définit la dissipation. On pourrait essayer d'exploiter la formule générale (7.0-1) en précisant la forme de la probabilité p, et en reprenant pour w la densité d'énergie non-gaussienne (5.3-15). Comme ce type de loi de comportement ne peut nous satisfaire, nous préférons directement discrétiser la formule intégrale.

Plusieurs solutions peuvent être choisies pour cela. Nous avons parlé de la méthode de James et Guth, cités celle de Flory et Rehner ou Arruda et Boyce. Nous partons du principe que dans nos calculs de structure les directions principales évolueront très peu. Nous faisons donc le choix de discrétiser l'intégration selon des directions fixes, charge à nous éventuellement de nous arranger pour que le calcul de structure soit déjà orienté selon une direction principale. Dans le cas élastique isotrope, Rubin et Elata [II.20] montrent que l'on peut choisir 6 directions indépendantes (au sens de Rubin et Elata) qui préservent l'isotropie du matériau. Dans le cas général, un choix de directions de calcul quelconques ne peut pas préserver l'isotropie de la structure. Dans notre cas, il y a perte d'isotropie par endommagement. L'isotropie en cours d'essai ne peut être retrouvée que si l'on sollicite chaque direction jusqu'à la même déformation (par exemple une sollicitation tournante d'intensité constante). Chicheportiche [II.12] présente un modèle lié aux trois directions principales de la déformation. Nous proposons plutôt un modèle à sept directions fixes, défini plus loin.

Pour exprimer la densité d'énergie, on généralise la forme des densités d'énergie de Valanis-Landel sous la forme :

$$W_e = \sum_{i=1}^{n} p_i . w(\lambda_i, \lambda_{im})\ ,\ \lambda_i < \lambda_{im}$$

où les λ_i sont les élongations actuelles attachées aux directions $\underline{d_i}$, les λ_{im} sont les plus grandes déformations dans ces directions au cours de l'histoire et les p_i des poids d'intégration.

Tant que l'on reste dans le domaine d'élasticité défini par ($\forall i,\ \lambda_i < \lambda_{im}$), alors les contraintes sont données par :

$$\underline{\underline{\pi}} = \frac{\partial W_e}{\partial \underline{\underline{F}}}$$

Par exemple, sur un cycle de traction, l'équation ci-dessus décrit la phase de décharge. La contrainte à la charge est connue en sommet de cycle et d'une façon générale, le calcul de la contrainte effective se fait comme en plasticité, avec ici des variables internes que sont les (λ_{im}), et un domaine d'élasticité qui évolue selon la règle simple :

$$\forall i,\ \lambda_{im} = Max[\lambda_i]$$

7.1 Expression de la densité d'énergie

Ayant précisé autant que faire ce peut à quel moment il devient nécessaire de s'inspirer de ce qui précède pour proposer une loi de comportement.

Notre approche se fonde sur deux résultats bien connus. D'abord aux faibles déformations, la densité d'énergie de Mooney-Rivlin est souvent jugée satisfaisante pour rendre compte de certains essais. Ensuite, dans les cas uni-axiaux, une forme corrigée de la densité de Mooney-Rivlin est parfois préconisée. Pour un essai de traction uni-axiale, on peut utiliser un modèle de Mooney corrigé aux grandes déformations pour exprimer la contrainte nominale :

$$\pi = 2C_{10}(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})(1 + \frac{\beta}{\lambda})\frac{1}{1 - \frac{\lambda^2}{N}}$$

Cette expression de la contrainte est bien adaptée pour les grandes déformations seulement et pour les lois de comportement accommodées. Elle est utilisée par exemple par Halpin et Bueche [II.27] pour définir un modèle de rupture. N traduit naturellement la déformation maximale possible, pour laquelle la contrainte diverge. Nous devons la relier à notre endommagement λ_m dans cette direction. La fraction $\frac{1}{1-\frac{\lambda^2}{N}}$ est connue pour être une approximation de l'inverse de la fonction de Langevin.

C'est à partir de ces deux idées, d'une part la forme séparable de la densité d'énergie que nous préconisons, d'autre part la forme attendue de w d'après les résultats antérieurs de Wu et Van der Giessen ou Govindjee et Simo que nous proposons l'expression suivante de la densité d'énergie élastique, définie par ses dérivées par rapport aux déformations directionnelles :

$$\frac{\partial w}{\partial \lambda}(\lambda, \lambda_m) = G(\lambda - \frac{b}{\lambda^3})(1 - c[\lambda_m - 1])\left[\frac{1}{1 - \mu\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2 + a}} + R.Exp[-k(\lambda - 1)^{2n}]\right]$$

où $1 - c[\lambda_m - 1]$ est un terme proche de 1, de même que l'exponentielle.

Les directions sont choisies telles que :

$$\begin{cases} d_1 = (1,0,0) \\ d_2 = (0,1,0) \\ d_3 = (0,0,1) \\ d_4 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ d_5 = (-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ d_6 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}) \\ d_7 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \end{cases} \tag{7.1-2}$$

et les poids d'intégration sont choisis tels que l'intégration d'une forme quadratique soit exacte :

$$\begin{cases} p_1 = p_2 = p_3 = \frac{2}{15} \\ p_4 = p_5 = p_6 = p_7 = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Nous verrons plus loin qu'avec l'ensemble de ces résultats, il est tout-à-fait possible de calculer n'importe quel tenseur des contraintes pour des variables internes et un état actuel donnés.

7.2 Validation sur un matériau test

La validation est une étape importante du travail de mise au point d'une loi de comportement. C'est aussi l'étape la plus controversée parce que la tentation est forte de proposer un modèle universel tout en sachant que la validation ne peut être faite que sur des tests précis et ne peut donc s'en détacher.

La validation peut être attachée à trois besoins :

1. rendre compte d'un test donné pour ce type de test ;
2. rendre compte de plusieurs tests, mais uniquement pour cet ensemble de formes de tests ;
3. rendre compte de plusieurs tests, mais pour une application à un type de structure et un problème complexe.

Notre problème correspond plutôt au troisième point. Dans notre cas, nous restons proche du second point puisque les éprouvettes testées sont aussi celles qui peuvent permettre de valider le comportement. Simplement, la pré-fissure rend la structure plus complexe. En plus d'un comportement en traction uni-axiale ou cisaillement, les sollicitations bi-axiales doivent aussi être modélisées pour rendre compte de la structure complexe des champs en fond de fissure.

Dans le cas de la loi de comportement que nous proposons, nous espérons que la prise en compte de la forme particulière de l'endommagement à partir d'un modèle micro-macro permet déjà de mieux rendre compte de la multiaxialité des champs : le modèle reste un modèle de type phénoménologique, mais l'évolution de la microstructure ne dépend pas des constantes de la densité d'énergie obtenue.

Nous présentons d'abord quelques résultats généraux de la loi que nous proposons puis nous montrons son aptitude à reproduire un test donné.

7.2.1 Résultats généraux

La figure (7.2-1) montre l'allure d'un cycle de charge sur une éprouvette sollicitée en cisaillement pur à partir de son état naturel. On remarque, pour le choix de paramètre retenu pour l'exemple, que la non-linéarité initiale est faible (terme R petit) et la déformation rémanente bien rendue. L'influence de la loi de Langevin est peu visible à cause de la déformation maximale modérée choisie (coefficient a grand). Sur le graphe (7.2-2) on décrit ce qui se passe sur plusieurs cycles avec en outre un cycle aux déformations plus élevées. On observe d'une part le comportement trop linéaire de la courbe de charge (a trop grand pour l'exemple). D'autre part la courbe de charge du second cycle coïncide avec la décharge du premier cycle et rejoint la courbe de première traction dès que la déformation atteint la déformation maximale du cycle précédent. On observe aussi pour le second cycle un effet plus sensible de la loi de Langevin à la décharge, caractérisé par

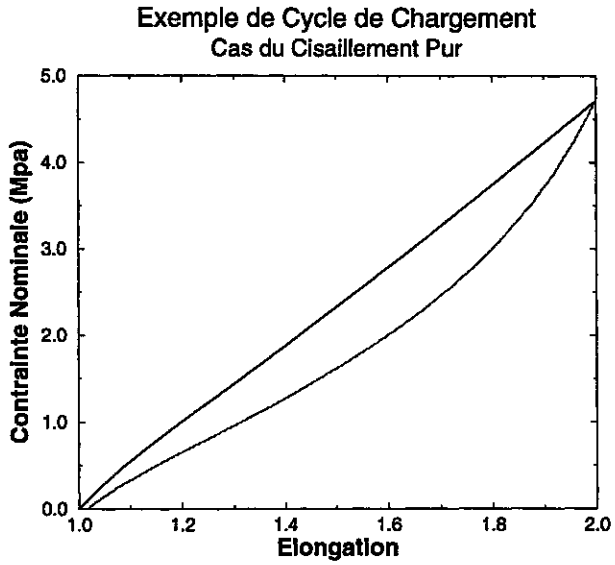


FIG. 7.2-1: Courbe de cisaillement donnée par la loi de comportement que nous proposons.

une décroissance rapide de la contrainte sur le début du cycle retour. La déformation rémanente est également croissante de la déformation maximale du cycle. De même, passé la déformation maximale du premier cycle, le comportement devient indépendant de ce premier cycle.

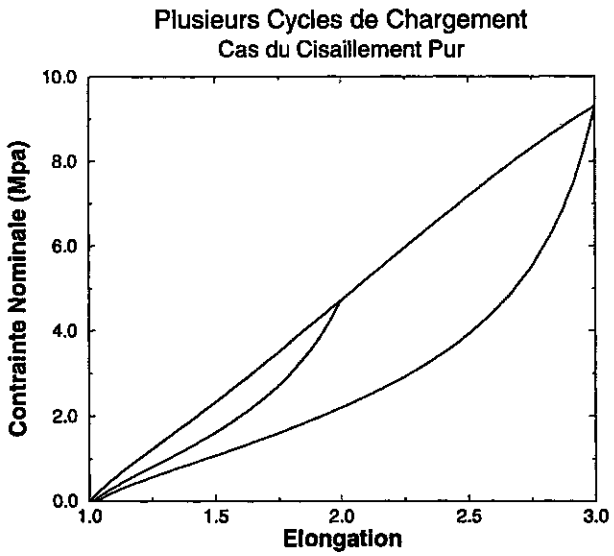


FIG. 7.2-2: Cycles de cisaillement.

Le même genre de résultat est obtenu en traction uni-axiale. Cisaillement pur et traction uni-axiale donnent toujours des contraintes proches, tout comme le ferait un modèle de Mooney avec un rapport C_2/C_1 petit. On remarque aussi que modèles anisotrope et isotrope donnent qualitativement les mêmes résultats mais le modèle anisotrope donne toujours des contraintes plus élevées (pas d'adoucissement transverse) et bien entendu pas de déformation rémanente.

En compression, le matériau présente une dissipation due à la dilatation dans les directions transverses. Un exemple de cycle est donné sur le graphe (7.2-3).

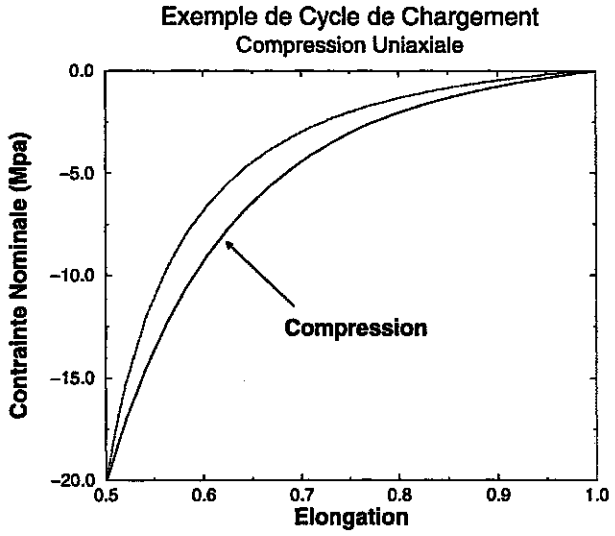


FIG. 7.2-3: Cycle de compression uni-axiale.

Le comportement bi-axial qui nous intéresse est essentiellement le comportement équi-biaxial, pour lequel on arrive à obtenir des résultats expérimentaux corrects. On peut dire que la contrainte bi-axiale est toujours plus élevée que la contrainte uni-axiale. Par rapport à un comportement de type Mooney, il est intéressant de constater que notre modèle rend compte de ce résultat grâce à l'anisotropie. En effet, si on suppose notre modèle isotrope, les contraintes équi-biaxiales restent assez proches des contraintes uni-axiales et le matériau dissipe moins. Il s'agit d'une conséquence de l'incompressibilité (voir (7.2-4)).

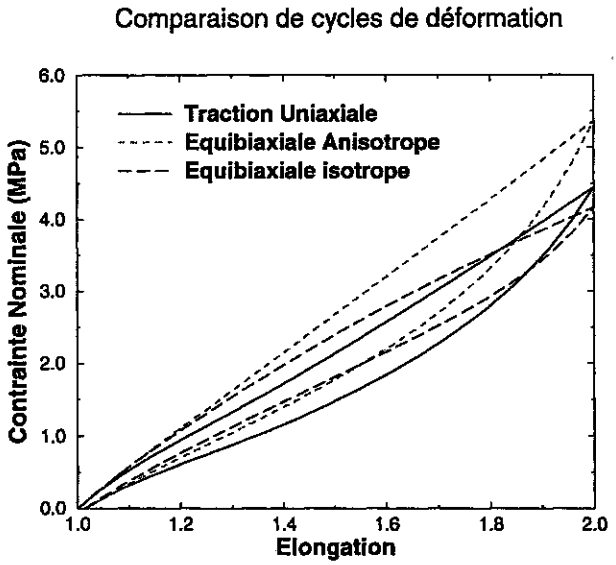


FIG. 7.2-4: Comparaison de trois cycles de déformation. Les cycles équi-biaxiaux avec comportements anisotrope et isotrope sont comparés au cycle anisotrope uni-axial.

Les essais de cisaillement pur dans deux directions transverses montrent des particularités intéressantes du modèle. Si l'on réalise un cycle de déformation transverse avec une déformation maximale plus faible que la déformation du cycle actuel, on remarque un petit effet de cet endommagement sur la courbe de première traction tant que la déformation actuelle ne dépasse pas la déformation maximale du cycle précédent. Au delà,

la mémoire du cycle précédent est effacée. Ce phénomène vient seulement de la prise en compte des directions de couplage de l'endommagement. Un modèle sans ces directions ne montreraient pas d'effet d'un cycle de pré-déformation transverse. Ce résultat qualitatif justifie l'existence de ces directions de couplage dans le modèle : les expériences montrent qu'un léger effet d'adoucissement existe. Dans le cas d'une pré-déformation transverse importante, l'effet d'adoucissement est nettement plus sensible et devient indispensable à la modélisation. L'intérêt du modèle anisotrope pour rendre compte des phénomènes dissipatifs sur le second cycle, là où un modèle isotrope donnerait seulement un comportement élastique, est donc ici mis en valeur

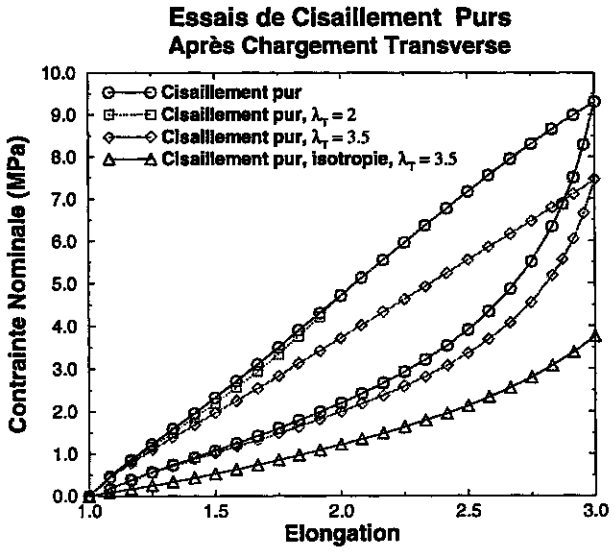
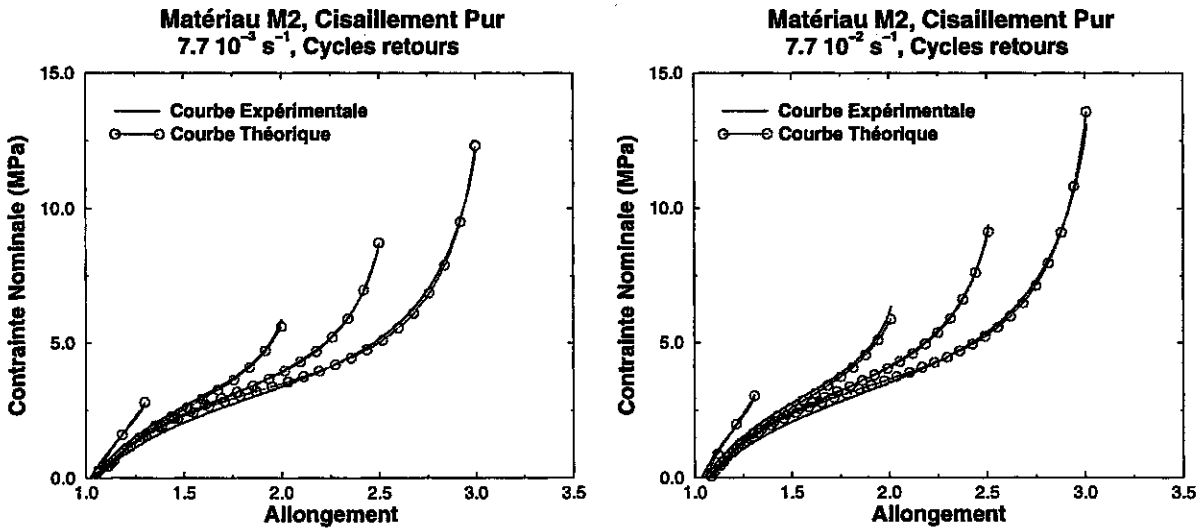


FIG. 7.2-5: Essais de cisaillement pur réalisé après un cycle de cisaillement transverse. La première courbe (ronds) est la courbe de cisaillement sans cisaillement transverse. Dans le cas d'un essai préliminaire à une déformation maximale inférieure à la déformation du cycle actuel, un léger assouplissement est visible à la charge avant d'atteindre la déformation maximale du cycle précédent. C'est un effet des directions de couplage. Sans elles, cet effet n'existe pas. Ensuite, la contrainte suit le trajet de déformation comme si le premier cycle n'existait pas. Quand on augmente la déformation maximale du cycle transverse, l'effet d'adoucissement est de plus en plus visible. Il disparaît si l'on ne prend pas en compte les directions de couplage. Enfin, on remarque la nette différence entre ces résultats et la modélisation obtenue par un modèle d'endommagement isotrope, qui non seulement assouplit beaucoup plus le matériau, mais aussi donne un matériau élastique accommodé.

L'ensemble de ces résultats permet de voir que le modèle que nous proposons permet de rendre compte d'effets non-classiques du comportement des élastomères que nous étudions. Nous avons aussi remarqué l'intérêt d'un endommagement anisotrope et de façon moins flagrante la particularité due à la prise en compte de directions de couplage. En soi, nos remarques peuvent permettre de justifier l'exploitation de notre modèle dans des études où l'effet Mullins doit se manifester. Les limitations du modèle proposé demeurent dans :

1. des difficultés à modéliser la non-linéarité initiale de la courbe de première traction ;
2. des difficultés à rendre compte de déformations rémanentes trop élevées ;
3. une limitation sur la plage de validité du modèle à cause du paramètre c.



(a) Test à 7.7 $10^{-3}\,s^{-1}$.

(b) Test à 7.7 $10^{-2}\,s^{-1}$.

FIG. 7.2-6: Tests cyclés de cisaillement pur, matériau M2. Seules les décharges des cycles successifs sont représentées et simulées. Pour chacune des vitesses de sollicitation, on observe la bonne adéquation du modèle de comportement que nous proposons.

7.2.2 Modélisation de résultats expérimentaux

Nous essayons de valider notre modèle sur des essais de traction sur les matériaux déjà présentés.

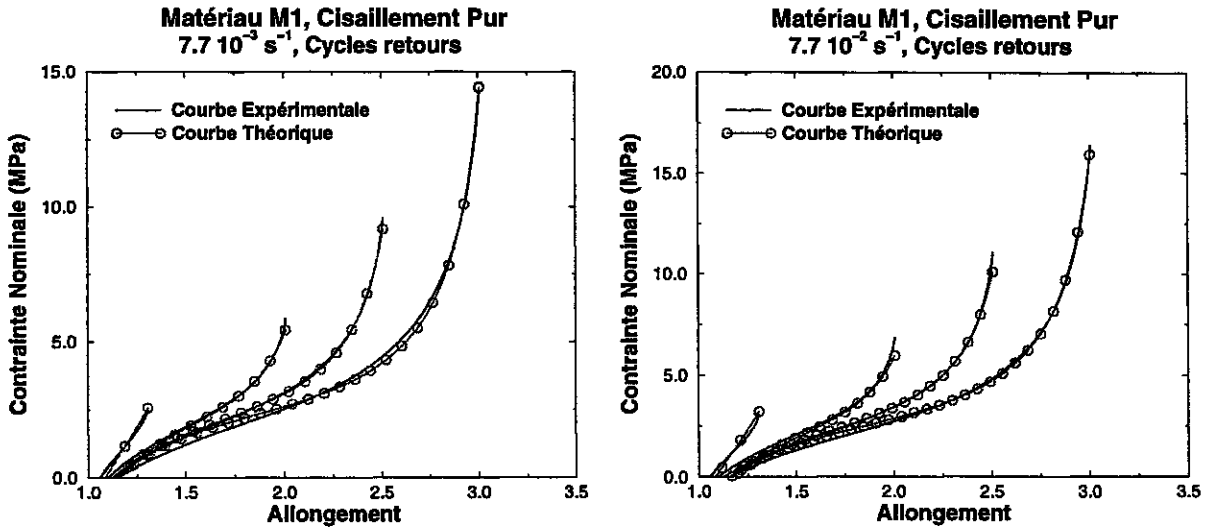
Pour le modèle que nous proposons, 8 coefficients doivent être déterminés. L'intérêt de notre modèle phénoménologique est que l'on peut postuler qu'un seul type de test peut suffire : tout se passe comme si on cherchait une fonction qui caractérise l'énergie élastique stockée par une chaîne isolée. C'est à partir de cette remarque que l'on a construit un modèle à 8 paramètres au lieu des 2 proposés par la densité de Mooney. La recherche des 8 coefficients n'est pas simple. Elle demande de bien séparer les rôles respectifs de (G, R), (a, c). On doit supposer notamment que le rôle du terme lié à R est limité aux déformations faibles. De même, c doit être assez petit pour que la densité d'énergie directionnelle reste positive sur la plage de déformation souhaitée.

7.2.2.1 Cas de la traction uni-axiale

Nous montrons des résultats d'ajustement de cycles de traction uni-axiale sur M1 et M2. De même nous essayons de reproduire les résultats des tests de cisaillement pur avec endommagement transverse présentés précédemment. Nous présentons essentiellement la façon dont notre modèle rend compte des parties déchargement des cycles.

Notre modèle a beaucoup de succès en traction uni-axiale ou cisaillement. Nous montrons sur les graphes (7.2-6) la simulation des décharges pour M2 à 7.7 10^{-3} et 7.7 10^{-2} s^{-1}. On peut voir que l'on reproduit assez bien la décharge de chaque cycle. Le modèle rend également bien compte de l'allure des cycles près de l'état de repos (légère non-linéarité), et la déformation rémanente.

Pour un matériau plus dissipatif qui présente des déformations rémanentes élevées, la modélisation devient plus difficile. Nous en donnons une illustration avec M1 sur les



(a) Test à 7.7 10^{-3} s^{-1}.

(b) Test à 7.7 10^{-2} s^{-1}.

FIG. 7.2-7: Tests cyclés de cisaillement pur, matériau M1. Pour chacune des vitesses de sollicitation, on observe la bonne adéquation du modèle de comportement que nous proposons. Le modèle rend cependant moins bien compte des déformations rémanentes et la tendance à ne pas suivre la non-linéarité s'accentue par rapport aux essais sur M2.

graphes (7.2-7). C'est d'abord la déformation rémanente que nous avons du mal à retranscrire, puis cette difficulté se propage et finit par affecter également les premiers instants de la décharge. Il est heureux que nous devions nous intéresser d'abord aux matériaux sollicités aux faibles vitesses, tels que M2. Les essais sur M1 sortent du cadre de vitesse qui nous intéresse.

7.2.2.2 Cas d'autres tests

Nous montrons également les aptitudes du modèle à rendre compte de la multiaxialité des champs en essayant de modéliser des essais tels que ceux de la figure (4.5-5), page 53. Nous avons vu que notre modèle rendait compte au moins qualitativement de certaines particularités.

Plusieurs méthodes peuvent permettre d'observer le comportement du modèle pour des chargements non-usuels. Nous pouvons essayer d'ajuster tous les résultats expérimentaux en même temps ou encore regarder ce que donne un comportement ajusté en traction uni-axiale dans le cas d'un autre chargement. La première méthode révèle l'aptitude du modèle à rendre compte de plusieurs essais. La seconde montre plus particulièrement l'aptitude du modèle à pouvoir rendre compte de phénomènes complexes à partir d'essais simples.

Pour ce type de test, nous n'avons disposé que d'un ensemble d'essais réalisé sur un matériau se prêtant peu à notre loi. Il est encore plus hystérétique que M1 et présente notamment des déformation rémanentes très importantes, supérieures à 40 % pour des déformations maximales de 250 %. En conséquence notre modèle n'arrive pas à rendre compte du comportement aux faibles déformations. Aux grandes déformations, la décharge est assez bien reproduite mais le matériau devient rapidement trop non-linéaire et le

modèle a du mal à suivre la croissance de la contrainte maximale en fin de cycle.

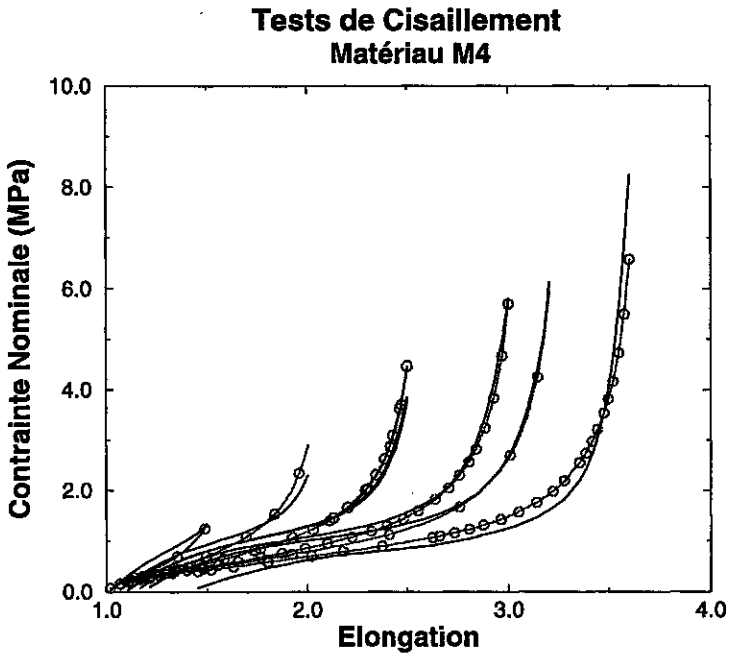


FIG. 7.2-8: Essais de cisaillement pur sur le matériau M4.

On montre dans un deuxième temps l'aptitude du modèle à ajuster des courbes d'essais de cisaillement après une première traction transverse. On observe la tendance du modèle à rendre compte correctement de la décharge loin du maximum de la courbe. De même qu'en cisaillement pur, les déformations rémanentes sont mal retranscrites. Les erreurs aux faibles et aux fortes déformations s'étendent sur une plus large plage de déformation et rendent notre modèle globalement médiocre sur toute la plage d'essai. Néanmoins, on peut dire que le modèle est assez bon quand l'accommodation est grande et la déformation maximale du cycle transverse aussi, et très mauvais dans les situations où le cycle transverse atteint une déformation très élevée et le cycle actuel des déformations modérées.

Enfin, on peut essayer de voir comment un comportement ajusté sur des essais de cisaillement pur peut rendre compte du comportement après accommodation transverse. Le résultat apparaît sur le graphe (7.2-10). On s'aperçoit que le modèle ajusté sur le cisaillement seulement commet les mêmes erreurs que le modèle ajusté directement sur les courbes après accommodation, et ce dans une mesure comparable.

En conclusion, notre modèle rend compte de particularités de certains élastomères (ceux qui nous intéressent) mais ne peut pas décrire l'ensemble de tous les phénomènes, notamment la non-linéarité en petite déformation, et les cas où les déformations rémanentes sont élevées. Cependant, il est loisible de se restreindre à des types de test, loi accommodée par exemple, pour identifier au mieux la loi à prendre en compte pour certaines situations particulères ; où identifier sur un seul cycle pour d'autres cas.

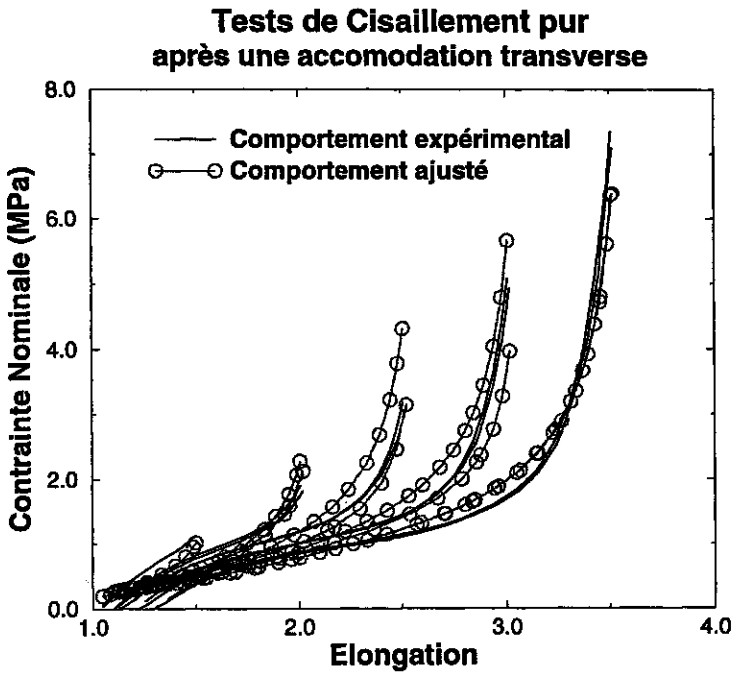


FIG. 7.2-9: Essais de cisaillement pur sur le matériau M4 après un cycle d'accommodation en cisaillement pur dans la direction transverse.

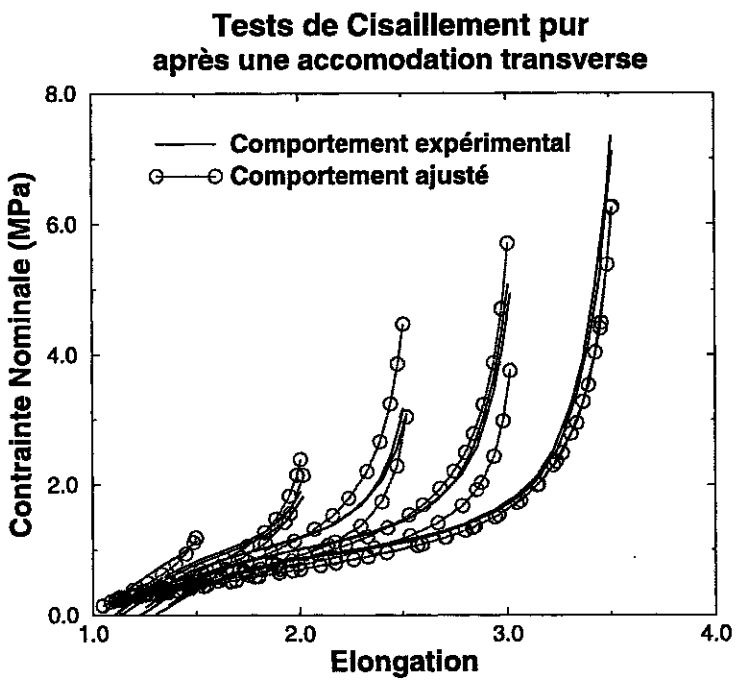


FIG. 7.2-10: Essais de cisaillement pur sur le matériau M4 après un cycle d'accommodation en cisaillement pur dans la direction transverse. On observe l'aptitude du comportement ajusté sur du cisaillement pur à rendre compte du comportement après un cycle d'accommodation transverse.

Chapitre 8

Implantation dans ABAQUS

Nous abordons la partie la plus technique de notre mémoire : la note explicative de la démarche suivie pour intégrer notre loi de comportement dans un code de calcul par éléments finis. Nous allons calculer les champs mécaniques à partir d'un modèle de comportement défini par les dérivées dans certaines directions de la densité d'énergie élastique.

8.1 Motivations

L'approche numérique est d'une grande richesse. Il devient possible de se forger une opinion sur un sujet, de regarder l'influence de la nature de la loi de comportement et de ses modifications éventuelles. Nous avons abondamment recouru à cette démarche. Pour autant, cela apparaîtra peu dans notre mémoire.

Avec des études numériques, on cerne mal la limite des modèles proposés, on voit mal l'influence des paramètres constitutifs, on manque d'une vision globale telle que seul un cadre analytique peut en donner. Le calcul de structure va cependant proposer quelques desseins que nous allons essayer d'étayer. Il permet de mettre en place des hypothèses indispensables dans la suite de notre étude.

L'outil de calcul retenu ici est ABAQUS. Ce choix résulte surtout d'une question d'opportunité. Il n'est pas de notre ressort de discuter des intérêts respectifs de codes concurrents. Nous verrons que la logique de calcul dans notre cas est extrêmement simple. Il ne s'agit donc pas pour nous de présenter une algorithmique particulière ou des astuces à ne pas manquer. Nous donnons essentiellement la définition des quantités exigées par le code et les expressions, notamment tensorielles, qui permettent de les calculer à partir des données fournies à chaque incrément.

8.2 Le comportement

8.2.1 Position du problème

On dispose d'une loi de comportement d'un matériau hyperélastique incompressible subissant une anisotropie de traction (voir chapitre (7), page 63). Cette loi s'exprime sous la forme d'une densité d'énergie dont la forme est la suivante :

$$W_e(\underline{\underline{F}}, H) = \sum_i p_i w_i$$

où $\underline{\underline{F}}$ est le gradient de déformation et H représente l'histoire du matériau depuis son état naturel. La densité d'énergie est donnée sous la forme d'une somme de densités d'énergie directionnelles :

$$w_i(\underline{\underline{F}}, H) = w(\lambda_i, \lambda_{imax})$$

où λ_i est la déformation dans la direction i et λ_{imax} la déformation maximale dans cette direction sur toute l'histoire de sollicitation. L'énergie w est une fonction de 2 variables, généralisation de la densité directionnelle d'énergie de Valanis-Landel [II.44]. Ainsi, le vecteur (λ_{imax}) représente l'histoire du trajet de chargement (H) du matériau. Le choix des directions fait partie intégrante de la modélisation. Le modèle que nous proposons en comporte sept dont les densités sont pondérées par des poids p_i fixés. Nous noterons $\underline{d}_i$ les directions de calcul données par exemple par (7.1-2) :

$$\begin{cases} \lambda_i = \sqrt{{}^t\underline{d}_i.\underline{\underline{C}}.\underline{d}_i} \\ \lambda_{imax} = Max_H \sqrt{{}^t\underline{d}_i.\underline{\underline{C}}.\underline{d}_i} = Max_H[\lambda_i] \end{cases}$$

Dans notre cas, nous ne connaissons que les dérivées directionnelles de w :

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_i} = p_i \frac{\partial w}{\partial \lambda_i}(\lambda_i, \lambda_{imax})$$

8.2.2 Calcul de la contrainte, cas général 3D

La contrainte de Piola-Kirchhoff est la mesure de contrainte naturelle associée à une densité lagrangienne de déformation :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}} &= \frac{\partial W}{\partial \underline{\underline{E}}} \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \underline{\underline{E}}} \end{aligned} \tag{8.2-1}$$

On notera que :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}} = \frac{{}^t\underline{d}_i.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{d}_i}{\lambda_i} \tag{8.2-2}$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}$ est le tenseur unité d'ordre 4. En notations indicielles :

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_{mn}} = \frac{1}{\lambda_i} d_{im}\, d_{in} \tag{8.2-3}$$

où d_{ij} est la composante j du vecteur $\underline{d}_i$. Finalement, la contrainte de Piola se calcule facilement avec :

$$\underline{\underline{S}} = \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}} \tag{8.2-4}$$

De même, on calcule la matrice jacobienne $\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}$ associée à la contrainte de Piola :

$$\begin{aligned}\underline{\underline{\underline{J}}} &= \frac{\partial \underline{\underline{S}}_1}{\partial \underline{\underline{E}}_2} \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 \lambda_i} \frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_1} \cdot \frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_2} + \\ &\quad \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \lambda_i} \frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2}\end{aligned} \tag{8.2-5}$$

Dans la suite de ce chapitre nous préciserons la provenance des indices dans les calculs par des indices globaux tels 1 et 2 ci-dessus, donnant implicitement la formulation indicielle complète des expressions tensorielles. Le calcul précédent montre que le tenseur $\underline{\underline{\underline{J}}}$ est un tenseur symétrique à 21 composantes indépendantes. L'endommagement intervient de façon particulière par $\partial^2 W_i / \partial^2 \lambda_i$:

- soit l'élongation directionnelle actuelle est l'élongation maximale dans cette direction, alors :

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 \lambda_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \lambda_i}(\lambda_i, \lambda_i)$$

- sinon,

$$\frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 \lambda_i} = \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \lambda_i}(\lambda_i, \lambda_{imax})$$

De plus, à partir de (8.2-2), on montre immédiatement que :

$$\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_{mn} \partial \underline{\underline{E}}_{pq}} = -\frac{1}{\lambda_i^3} d_{im} d_{in} d_{ip} d_{iq} \ , \ i \text{ fixé} \tag{8.2-6}$$

Ces calculs élémentaires posent les bases du calcul que nous devons implanter dans le code numérique.

8.3 Implémentation des calculs sous ABAQUS

8.3.1 Première étape

ABAQUS donne la possibilité à l'utilisateur de définir sa propre loi de comportement par la programmation en FORTRAN d'une subroutine appelée UMAT [II.1]. Moyennant un certain nombre d'entrées gérées par ABAQUS, l'utilisateur doit fournir l'ensemble des contraintes et la matrice jacobienne des contraintes vis-à-vis des déformations pour une déformation actuelle donnée. La mesure de contrainte est celle de Cauchy et le code travaille en Lagrange réactualisé. Nous devons donc calculer non pas $\underline{\underline{S}}$ mais :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} . \underline{\underline{S}} . {}^t\underline{\underline{F}} \tag{8.3-7}$$

et non pas le jacobien de $\underline{\underline{S}}$ mais le jacobien de $\underline{\underline{\sigma}}$ par rapport à la partie symétrique de l'incrément de déformation réactualisé. Soit $\underline{x}$ la position actuelle d'un élément de volume de position de référence $\underline{X}$. On suppose que cet élément subit un incrément de déplacement $\delta \underline{u}$. Le gradient de déplacement sur la configuration réactualisée est :

$$\delta \underline{\underline{L}} = \frac{\partial \delta \underline{u}}{\partial \underline{x}} = \underline{\underline{F}}_t(t + \delta t)$$

De façon plus générale, on note :

$$\underline{\underline{L}}(u) = \underline{\underline{F}}_t(t + u)$$

Le taux de déformation associé à $\delta \underline{\underline{L}}$ est :

$$\delta \underline{\underline{D}} = \frac{1}{2}(\delta \underline{\underline{L}} + {}^t\delta \underline{\underline{L}})$$

Le jacobien que nous devons calculer est :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} = \frac{\partial \delta \dot{\underline{\underline{\sigma}}}}{\partial \delta \underline{\underline{D}}}$$

A partir de (8.3-7) et en exploitant l'incompressibilité, on montre que :

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\nabla}}v + {}^t\underline{\underline{\nabla}}v.\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}.[\frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{E}}} : \dot{\underline{\underline{E}}}]{}^t\underline{\underline{F}}$$

avec, $\underline{\underline{\nabla}}v = \dot{\underline{\underline{F}}}.\underline{\underline{F}}^{-1}$, $\dot{\underline{\underline{F}}} = \dot{\underline{\underline{L}}}.\underline{\underline{F}}$ et de même $\dot{\underline{\underline{E}}} = {}^t\underline{\underline{F}}.\dot{\underline{\underline{D}}}.\underline{\underline{F}}$.

La différentiation est réalisée par rapport à la partie symétrique de $\dot{\underline{\underline{L}}}$. On déduit l'expression incrémentale :

$$\delta \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}.\delta \underline{\underline{D}} + \delta \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}.[\frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{E}}} : ({}^t\underline{\underline{F}}.\delta \underline{\underline{D}}.\underline{\underline{F}})].{}^t\underline{\underline{F}}$$

Le jacobien de la contrainte de Cauchy sur la configuration réactualisée est :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} = [\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{\sigma}}] + \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}.[\frac{\partial \underline{\underline{S}}}{\partial \underline{\underline{E}}} : ({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{F}})].{}^t\underline{\underline{F}} \tag{8.3-8}$$

On dira que les deux premiers termes sont le terme de convection de l'équation et le dernier terme le terme de transport de la configuration initiale sur la configuration actuelle. Le lecteur doit bien prendre garde au sens des actions des tenseurs d'ordre quatre sur les tenseurs d'ordre deux. Par exemple, en revenant aux composantes :

$$\underline{\underline{\sigma}}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}_{ijkl} = \sigma_{im}.I_{mjkl}$$

$$\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{\sigma}}_{ijkl} = I_{ipkl}.\sigma_{pj}$$

De même :

$$({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{F}})_{ijkl} = F_{mi}.I_{mnkl}.F_{nj}$$

Pour plus de régularité dans les écritures, on introduit l'action $\circ$ d'un tenseur d'ordre quatre sur un tenseur d'ordre deux telle que $\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \circ \underline{\underline{B}}$ est un tenseur d'ordre quatre de composantes :

$$[\underline{\underline{\underline{\underline{A}}}} \circ \underline{\underline{B}}]_{ijkl} = A_{ipkl}B_{pj}$$

De même, cette action à gauche est définie par :

$$[\underline{\underline{B}} \circ \underline{\underline{\underline{\underline{A}}}}]_{ijkl} = B_{iq} A_{qjkl}$$

Dans ce cas, la formule tensorielle (8.3-8) peut s'écrire de façon moins ambiguë :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} = [\underline{\underline{\sigma}} \circ \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \circ \underline{\underline{\sigma}}] + \frac{1}{J} \underline{\underline{F}} \circ [\frac{\partial \underline{\underline{\underline{\underline{S}}}}}{\partial \underline{\underline{E}}} : ({}^t\underline{\underline{F}} \circ \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} \circ \underline{\underline{F}})] \circ {}^t\underline{\underline{F}} \tag{8.3-9}$$

8.3.2 Traitement de l'incompressibilité

ABAQUS possède des éléments 3D qui stabilisent le schéma d'intégration dans le cas des matériaux quasi-incompressibles voire incompressibles en reprenant la pression hydrostatique comme variable supplémentaire de l'élément. Néanmoins, nous devons dans la UMAT calculer cette pression. La seule méthode disponible est une méthode de pénalisation. Pour cela, nous devons reprendre les outils classiques de traitement de l'incompressibilité. On programme de façon séparée le déviateur des contraintes obtenu par la loi de comportement et la pression hydrostatique obtenue par pénalisation. On montre que le déviateur peut-être calculé à partir de $\hat{\underline{\underline{F}}}$ définie par :

$$\hat{\underline{\underline{F}}} = \frac{\underline{\underline{F}}}{(det\underline{\underline{F}})^{\frac{1}{3}}}$$

en considérant la densité d'énergie :

$$W_{incomp}(\underline{\underline{F}}, H) = W(\hat{\underline{\underline{F}}}, \hat{H})$$

La méthode de pénalisation consiste à ajouter à cette densité d'énergie un terme hydrostatique :

$$W_{penal} = W_{incomp} + \frac{1}{D}(J-1)^2 \tag{8.3-10}$$

Pour obtenir une bonne modélisation de l'incompressibilité, on conseille de choisir D suffisamment petit pour que le terme hydrostatique soit 10^6 fois plus grand que les autres termes. D'autres formes de pénalisation sont possibles, par exemple des pénalisations en $Ln(J)$ [1]. D'après notre propre expérience, les convergences des calculs sur différents essais pour plusieurs types de pénalisations sont proches. Nous avons retenu une pénalisation quadratique en J pour cette présentation parce qu'elle donne les expressions les plus "jolies" d'une part, d'autre part parce qu'il s'agit de la généralisation la plus simple en grandes déformations d'une densité d'énergie qui découple les effets déviatoriques et hydrostatiques. La formulation complète du problème est alors :

- Calcul de la contrainte déviatorique :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{S}}_d &= \frac{\partial W_{incomp}}{\partial \underline{\underline{E}}} \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\lambda}_i} . \frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}} . \frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}}{\partial \underline{\underline{E}}} \end{aligned} \tag{8.3-11}$$

[1] Dans le cas de nos matériaux, on trouve plus couramment une pénalisation sous la forme :

$$W_{penal} = W_{incomp} - \frac{1}{D} \ln J$$

Les pénalisations en J^2 et $\ln J$ sont les deux formes les plus classiques de pénalisation polyconvexe [II.13].

où l'on montre que :

$$\frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_1}{\partial \underline{\underline{E}}_2} = \frac{1}{(det\underline{\underline{C}})^{\frac{1}{3}}}(\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} - \frac{1}{3}\hat{\underline{\underline{C}}}_1 \otimes \hat{\underline{\underline{C}}}_2^{-1})$$

- La pression est calculée par le terme pénalisant de l'énergie :

$$\underline{\underline{S}}_p = \frac{2}{D}J(J-1)\underline{\underline{C}}^{-1}$$

On en déduit l'expression de la contrainte :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{1}{J}\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{S}}_d.{}^t\underline{\underline{F}} + \frac{2}{D}(J-1)\underline{\underline{I}}$$

- De la même façon, le calcul de $\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}$ est séparé en deux calculs indépendants :

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}} &= \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_d + \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_p \\ \text{avec } \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_d &= \frac{\partial \delta \underline{\underline{\sigma}}_d}{\partial \delta \underline{\underline{D}}} \\ \text{et } \underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_p &= \frac{\partial \delta \underline{\underline{\sigma}}_p}{\partial \delta \underline{\underline{D}}} \end{aligned} \tag{8.3-12}$$

La calcul de $\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_p$ est immédiat :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_p = \frac{\partial \delta \underline{\underline{\sigma}}_{p1}}{\partial \delta \underline{\underline{D}}_2} = \frac{2J}{D}\underline{\underline{I}}_1 \otimes \underline{\underline{I}}_2$$

- Le calcul de $\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_d$ est un peu plus lourd. Il utilise le résultat de l'équation (8.3-8) :

$$\underline{\underline{\underline{\underline{J}}}}_d = [\underline{\underline{\sigma}}_d.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}} + \underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{\sigma}}_d] + \frac{1}{J}.\underline{\underline{F}}[\frac{\partial \underline{\underline{S}}_d}{\partial \underline{\underline{E}}}.({}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{\underline{\underline{I}}}}.\underline{\underline{F}})].{}^t\underline{\underline{F}}$$

où :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{\underline{S}}_{d1}}{\partial \underline{\underline{E}}_2} &= \frac{\partial^2 W_{incomp}}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2} \qquad (8.3\text{-}13) \\ &= \sum_i p_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial^2 \hat{\lambda}_i}.\frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_p}.\frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_q}.\frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_p}{\partial \underline{\underline{E}}_1}.\frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_q}{\partial \underline{\underline{E}}_2} + \\ &\quad \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\lambda}_i}.\frac{\partial^2 \hat{\lambda}_i}{\partial \underline{\underline{E}}_p \partial \underline{\underline{E}}_q}.\frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_p}{\partial \underline{\underline{E}}_1}.\frac{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_q}{\partial \underline{\underline{E}}_2} + \\ &\quad \sum_i p_i \frac{\partial W_i}{\partial \hat{\lambda}_i}.\frac{\partial \hat{\lambda}_i}{\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_p}.\frac{\partial^2 \hat{\underline{\underline{E}}}_p}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2} \qquad (8.3\text{-}14) \end{aligned}$$

Tous les termes de cette dernière équation sont connus sauf $\frac{\partial^2 \hat{\underline{\underline{E}}}_p}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2}$. On montre que :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \hat{\underline{\underline{E}}}_p}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2} &= 2\frac{\partial^2 \hat{\underline{\underline{C}}}_p}{\partial \underline{\underline{C}}_1 \partial \underline{\underline{C}}_2} \\
\text{avec } \frac{\partial^2 \hat{\underline{\underline{C}}}_1}{\partial \underline{\underline{C}}_2 \partial \underline{\underline{C}}_3} &= -\frac{1}{3(Det\underline{\underline{C}})^{\frac{1}{3}}}[\frac{\partial \hat{\underline{\underline{C}}}_1}{\partial \underline{\underline{C}}_2} \otimes \hat{\underline{\underline{C}}}_3^{-1} + \frac{\partial \hat{\underline{\underline{C}}}_1}{\partial \underline{\underline{C}}_3} \otimes \hat{\underline{\underline{C}}}_2^{-1} + \\
&\quad \hat{\underline{\underline{C}}}_1 \otimes \frac{\partial \hat{\underline{\underline{C}}}_2^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}_3}]
\end{aligned} \tag{8.3-15}$$

De plus,

$$\frac{\partial \hat{\underline{\underline{C}}}_{ij}^{-1}}{\partial \underline{\underline{C}}_{kl}} = -\frac{1}{2(Det\underline{\underline{C}})^{\frac{1}{3}}}[\hat{\underline{\underline{C}}}_{ik}^{-1}\hat{\underline{\underline{C}}}_{jl}^{-1} + \hat{\underline{\underline{C}}}_{il}^{-1}\hat{\underline{\underline{C}}}_{jk}^{-1} - \frac{2}{3}\hat{\underline{\underline{C}}}_{ij}^{-1}\hat{\underline{\underline{C}}}_{kl}^{-1}]$$

8.3.3 Cas des déformations planes (DP)

Les calculs en déformations planes ne sont qu'un cas particulier des calculs 3D où l'on sait déjà que les déformations dans la direction hors-plan sont nulles. Dans ce cas, tous les calculs que nous avons fait ci-dessus sont encore valables. Par contre il est nécessaire de prévoir un code particulier pour les déformations planes sous ABAQUS :

- d'abord les variables d'entrée et de sortie de la UMAT sont légèrement modifiées ;
- ensuite, il vaut mieux pour la rapidité des calculs éviter de laisser dans les équations les termes dont on sait qu'ils sont nuls.

On remarque que le code en Déformations Planes est au moins 3 fois plus court que le code 3D. La rapidité des calculs s'en ressent. D'autre part, la convergence du code n'est pas améliorée : les problèmes d'instabilité générés par la pénalisation se retrouvent aussi en DP.

8.3.4 Cas des contraintes planes (CP)

Le cas des contraintes planes mérite une attention plus particulière : la condition d'incompressibilité est traitée de façon directe dans les calculs. En effet, supposons que (3) soit la direction de contrainte plane. Alors l'incompressibité s'exprime sur $\underline{\underline{C}}$ par :

$$C_{33} = \frac{1}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}$$

Dans ce cas, il n'est plus nécessaire d'adimmensionaliser la déformation. On calcule directement les contraintes avec la condition d'incompressibilité ci-dessus. Le problème ne comporte plus que trois variables de calcul : C_{11}, C_{22} et C_{12}. La formule (8.2-4) est toujours valable, mais l'expression (8.2-3) est plus complexe.

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}} = \frac{1}{\lambda_i}\left[{}^t\underline{d}_i.\underline{\underline{I}}.\underline{d}_i + \frac{\partial C_{33}}{\partial \underline{\underline{C}}} d_{i3}^2\right]$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial C_{33}}{\partial C_{11}} &= -C_{33}^2 C_{22} \\
\frac{\partial C_{33}}{\partial C_{22}} &= -C_{33}^2 C_{11} \\
\frac{\partial C_{33}}{\partial C_{12}} &= C_{33}^2 C_{12}
\end{aligned}$$

De même, (8.2-5) est correcte mais l'expression de (8.2-6) est modifiée :

$$\frac{\partial^2 \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_1 \partial \underline{\underline{E}}_2} = -\frac{1}{\lambda_i}\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_1}\frac{\partial \lambda_i}{\partial \underline{\underline{E}}_2} + \frac{2}{\lambda_i}\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial \underline{\underline{C}}_1 \partial \underline{\underline{C}}_2} d_{i3}^2$$

Avec :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial^2 C_{11}} &= 2C_{33}^3 C_{22}^2 \\
\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial^2 C_{22}} &= 2C_{33}^3 C_{11}^2 \\
\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial C_{12} \partial C_{11}} &= -2C_{33}^3 C_{22} C_{12} \\
\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial C_{12} \partial C_{22}} &= -2C_{33}^3 C_{11} C_{12} \\
\frac{\partial^2 C_{33}}{\partial^2 C_{12}} &= \frac{1}{2} C_{33}^2 + 2C_{33}^3 C_{12}^2
\end{aligned}$$

Les contraintes planes sont la panacée dans les calculs sur des matériaux incompressibles. Les calculs sont d'abord plus rapides encore qu'en DP (il y a moins d'inconnues). La convergence est assurée très facilement, l'incompressibilité n'est qu'une commodité qui permet de calculer directement la pression de pénalisation à partir de la contrainte hors-plan.

Toutes les éprouvettes sur lesquelles nous allons essayer de faire du calcul seront des éprouvettes planes. Nous considérerons des essais où l'on peut aussi supposer que les sollicitations sont compatibles avec l'hypothèse des contraintes planes. Cette hypothèse ne limitera pas la portée de notre étude. En pratique, il n'y a qu'un seul essai classique pour lequel un calcul 3D est nécessaire. Nous tenterons de l'aborder par des calculs analytiques (essais sur éprouvettes dites pantalons).

8.4 Algorithme de calcul

8.4.1 Algorithme de la UMAT ABAQUS

L'implantation de notre loi de comportement dans ABAQUS est assez simple et n'occasionne aucune difficulté théorique ou numérique. Nous avons relégué en annexe (page 243) les quelques détails à connaître pour utiliser nos routines.

8.4.2 Définition des énergies

Pour un calcul de structure, la méthode de calcul que nous utilisons est complète tant que nous n'avons pas besoin de mesurer des énergies. Nous sommes dans un cadre hypo-élastique suffisant. Nous aurons quand même besoin de calculer des taux de restitutions

d'énergie dans le cadre de l'étude de la propagation de fissure. Pour cela, nous devons d'abord définir les énergies stockées et dissipées dans un processus de déformation.

L'état courant étant connu et repéré par le vecteur des élongations directionnelles $\underline{\lambda}$, et des élongations directionnelles maximales $\underline{\lambda}_m$, l'énergie élastique est simplement mesurée par l'énergie restituée pour revenir à l'état de repos repéré par le vecteur $\underline{\lambda}_0$:

$$W_e = \sum_i p_i \int_{\lambda_{i_0}}^{\lambda_i} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}(u, \lambda_{im}) du$$

L'énergie dissipée est simplement l'écart entre W_e et l'énergie apportée au système :

$$W_d = \sum_i p_i \int_1^{\lambda_{im}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}(u, u) - \int_{\lambda_{i_0}}^{\lambda_{im}} \frac{\partial W}{\partial \lambda_i}(u, \lambda_{im}) du$$

W_e et W_d ne sont pas intégrables explicitement. La connaissance de $(\underline{\lambda}_i)$ et $(\underline{\lambda}_{i_m})$ suffit pour les calculer numériquement.

Dans les cas où l'état de déformation maximum n'est pas trop important, il est possible de supposer que la position de repos après traction est l'état naturel. Cela donne une approximation satisfaisante des énergies. Dans le cas courant, cette hypothèse est fausse.

8.5 Validation du code

La validation du code est une partie technique que nous ne souhaitons pas développer dans ce mémoire. On peut noter cependant que des observations générales importantes ont pu être faites pendant cette étape qu'il est bon de rapeller ici.

Si les différents types de problèmes (CP, DP, 3D) ont effectivement été programmé, nous avons rapidement vu que les cas DP et 3D convergeaient difficilement dans le cas de structures fissurées. C'est la pénalisation qui rend le calcul instable.

Dans les cas 3D par exemple, nous n'avons vu aucune différence sensible sur la convergence entre les éléments linéaires et les éléments hybrides linéaires sensés avoir une formulation plus fiable pour les cas incompressibles.

Ces remarques expliquent que les calculs qui suivent seront toujours des calculs en CP, correspondant assez bien au mode de déformation de nos éprouvettes planes. Cela éliminera naturellement de notre étude les éprouvettes essentiellement 3D, sans conséquence importante sur nos résultats.

Un résultat de calcul de structure est donné sur la figure (8.5-1). On peut observer le comportement cyclé en traction d'une éprouvette lanière et remarquer que les points de calcul sont identiques aux points théoriques attendus. Si l'on pousse les déformations au-delà des déformations d'ajustement de la loi de comportement, on remarque d'abord que la courbe de contrainte présente une concavité attendue quand les déformations commencent à croître, puis voudrait se stabiliser (sur l'exemple vers 50 MPa, 600 %). Ce comportement est associé à une décroissance éventuelle de la densité d'énergie élastique. Une première solution à ces problèmes consiste à régulariser la loi aux grandes déformations en imposant une valeur positive minimale à $(1 - c(\lambda_m - 1))$ et une valeur maximale à $\lambda_m^2 + a$. Une seconde solution consiste à repérer l'instant où le comportement n'est plus valable est à interdire les calculs qui présentent des déformations au-delà.

La régularisation est possible et nécessaire pour fiabiliser le calcul de structure. La deuxième solution est par ailleurs également indispensable pour avoir un résultat qui ne dépende que de mesures connues et pas de la régularisation numérique.

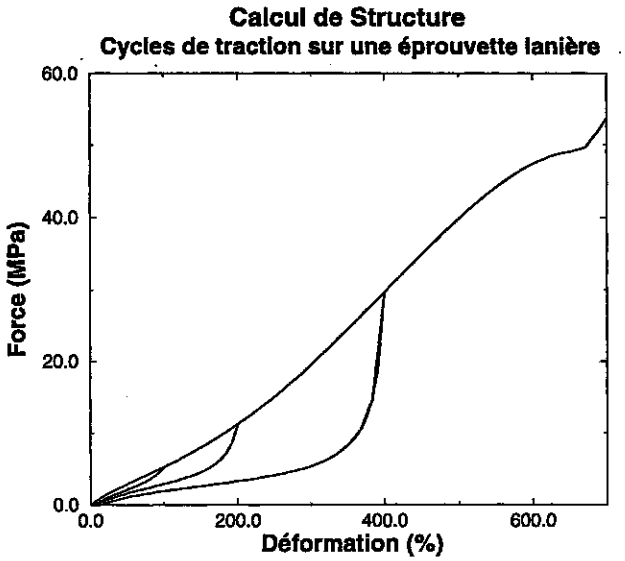


FIG. 8.5-1: Modélisation de cycles de traction sur une éprouvette lanière par le calcul de structure avec notre loi de comportement.

Dans le cas des essais en CP, la convergence est assurée jusqu'à des niveaux de déformations très élevées qui dépassent le domaine de validité de nos lois de comportement. Tant que nous vérifierons que nos calculs restent dans la gamme des déformations admissibles (le plus souvent pas plus de 600 % localement), alors le calcul convergera et sera valide. Cette vérification sera faite systématiquement et nous ne le mentionnerons plus dans la suite. Par exemple, les calculs de champs de fond de fissure que nous pourrons faire dans le cadre des études énergétiques seront soumis à cette condition.

Conclusion

Nous avons présenté les grandes lignes du comportement des élastomères et insisté sur des aspects particuliers, le plus important étant l'effet Mullins, phénomène dissipatif prépondérant dans nos matériaux.

Nous avons proposé dans cet esprit une loi de comportement qui rend compte de façon satisfaisante du comportement "hyperélastique" du matériau et de l'effet Mullins dans une gamme de déformations étendue. Cette loi est adaptée à la modélisation d'un essai quasi-statique ou non-quasistatique quand on peut négliger la visco-élasticité - comme nous le ferons pour nos essais monotones de déchirabilité. Nous avons insisté d'abord sur l'aspect fortement non-linéaire du comportement dont la loi de Langevin rend bien compte, ainsi que sur le rôle des déformations maximales (direction par direction) sur l'adoucissement global du matériau.

Notre loi de comportement est somme toute assez simple. Elle est fondée sur approche physique et s'inspire également de modélisations récentes qui ont largement contribué à moderniser l'approche du comportement de nos matériaux. Elle les simplifie en faisant un choix de directions de calculs fixes et en ne cherchant pas à conserver un sens physique aux variables. Elle permet de modéliser un comportement complexe, pertinent pour l'étude des propagations de fissure. Elle est rendu robuste grâce à un faible nombre de variables aux rôles indépendants. Ce modèle est implémenté dans un code de calcul et permet de faire des calculs en contrainte plane dans la gamme des grandes déformations, de façon compatible avec nos besoins dans le cas des fissurations en grandes déformations.

Cette première étape de notre travail rend possible une investigation numérique de la propagation des fissures en prenant en compte des effets dus au comportmeent et ceux inhérents à la structure.

Bibliographie

[1] Abaqus - *Theory Manual, ver 5.7,* HKS, 1998.

[2] Alaoui Soulimani A. - *Une Méthode Energétique de Modélisation de la Visco-élasticité Non-linéaire en Grandes Déformations,* Thèse de Doctorat, ENPC 1993.

[3] Andrieux Fl. - *Sur les Milieux Visco-Hyperélastiques Endommageables,* Thèse de l'UTC, 18 juin 1996.

[4] Andrieux Fl., Saanouni K. et Sidoroff Fr. - *Sur les Solides Hyperélastiques à Compressibilité Induite par l'Endommagement,* C. R. Acad. Sci, Sér. II, Série IIb, t 324, pp 281-288, 1997.

[5] Andrieux F. et Saanouni K. - *Modélisation du Comportement Hyper-Viscoélastique Endommageable,* pp 283-286, Génie Mécanique des Caoutchoucs et des Elastomères Thermoplastiques, Edité par C. G'Sell et A. Coupard, Apollor 1997.

[6] Arruda E.M., Boyce M.C. et Quintus-Bosz H. - *Effects of Initial Anisotropy on the Finite Strain Deformation Behavior of Glassy Polymers,* Int.J. Plas., vol 9, pp 783-811, 1993.

[7] Arruda E.M. et Boyce M.C. - *Evolution of Plastic Anisotropy in Amorphous Polymers During Finite Straining,* Int.J. Plas., vol 9, pp 697-720, 1993.

[8] Barnhart R.R. - *Rubber Compounding,* Encyclopedia Kirk-Othmer, vol 20, pp 365-468, John Wiley and Sons, New-York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, Third Ed., 1982.

[9] Beatty M.F. - *Topics in Finite Elasticity : Hyperelasticity of Rubber, Elastomers and Biological Tissues - With Examples,* Appl. Mech. Rev, vol 40 - no 12, pp 1699 - 1734, 1987.

[10] Bueche F. - *Molecular Basis of the Mullins Effect,* J. Appl. Polym. Sci., vol IV, no 10, pp 107-114, 1960.

[11] Bueche F. - *Mullins Effect and Rubber-Filler Interaction,* J. Appl. Polym. Sci., vol V, no 15, pp 271-281, 1961.

[12] Chicheportiche D. - *Etude Mécanique d'un Adhésif Polyuréthanne. Application au Collage des Pare-Brise,* Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 1998 .

[13] Ciarlet P.G. - *Three-Dimensional Elasticity,* Elsevier Science Publishers B.V., Amsterdam 1988.

[14] Dannenberg E.M. - *Carbon Black,* Encyclopedia Kirk-Othmer, Third Edition, Vol 4, pp 631-666, John Wiley and Sons, New-york, Chichester, Brisbane, Toronto, 1978.

[15] Dannenberg E.M. - *The Effect of Surface Chemical Interactions on the Properties of Filler-Reinforced Rubbers,* Rubb. Chem. Technol., vol 48-1, pp 410-444, 1975.

[16] Davet J.L. - *Sur les Densités d'Energie en Elasticité Non-Linéaire : Confrontation de Modèles et de Travaux expérimentaux,* Annales des Ponts et Chaussées, pp 2-33, Paris 1985.

[17] Donnet J.B. et Vidal A. - *Carbon Black : Surface Properties and Interactions with Elastomers,* J. Polym. Sci., no 24, pp 103-127, 1986.

[18] Doolitle A.K. - , Journal of Applied Physics, pp 1471, 1951.

[19] Edwards D.C. et Vilgis T. - *The Effect of Entanglements in Rubber Elasticity,* Polymer Papers, vol 27, pp 483-492, April 1986.

[20] Elata D. et Rubin M.B. - *Isotropy of Strain Energy Functions Which Depend Only on a Finite Number of Directional Strain Measures,* J. Appl. Mech., vol 61, pp 284-289, june 1994.

[21] Ferry J.D. - *Viscoelastic Properties of Polymers,* John Wiley and Sons Inc, New-York, Chichister, Brisbane, Toronto 1980.

[22] Flory P.J. et Rehner J. - *Statistical Mechanics of Cross-Linked Polymer Networks,* J. Chem. Phys., vol 11, no 11, pp 512-520, november 1943.

[23] Flory P.J. - *Molecular Theory of Rubber Elasticity,* Polymer Journal, vol 17, no 1, pp 1-12, 1985.

[24] Flory P.J. - *Statistical Mechanics of Chain Molecules,* Hanser Publishers, Munich, Vienna, New-York, 1989.

[25] Govindjee S. et Simo J.C. - *A Micro-Mechanically Based Continuum Damage Model for Carbon Black-Filled Rubbers Incorporating Mullins' Effect,* J. Mech. Phys. Solids, vol 39, no 1, pp 87-112, 1991.

[26] Govindjee S. et Simo J.C. - *Mullins Effect and the Strain Amplitude Dependence of the Storage Modulus,* Int. J. Sol. Struc., vol 29, no 14/15, pp 1737-1751, 1992.

[27] Halpin J.C. et Bueche F. - *Fracture of Amorphous Polymeric Solids : Reinforcement,* J. Appl. Phys., vol 35, no 11, pp 3142-3149, 1964.

[28] Harwood J.A.C., Mullins L., Payne A.R. - *Stress Softening in Natural Rubber Vulcanisates. Part II : Stress Softening Effects in Pure Gum and Filler Loaded Rubbers,* J. Appl. Polym. Sci., vol 9, pp 3011-3021, 1965.

[29] Heulliet P. et Dugautier P. - *Modélisation du Comportement Hyperélastique des Elastomères Compacts,* pp 67-103, Génie Mécanique des Caoutchoucs et des Elastomères Thermoplastique, Edité par C. G'Sell et A. Coupard, Apollor 1997.

[30] Holt W.L. - , Rubb. Chem. Technol., vol 5, p 79, 1932.

[31] James H.M. et Guth E. - *Theory of the Increase in Rigidity of Rubber During Cure,* The Journal of Chemical Physics, vol 15, no 9, pp 669-683, September 1947.

[32] Kilian H.G., Strauss M. et Hamm W. - *Universal Properties in Filler-Loaded Rubbers,* Rubb. Chem. Technol., vol 67, no 1, pp 1-16, 1994.

[33] Kraus G., Childers C.W. et Rollmann K.W. - *Stress Softening in Carbon Black Reinforced Vulcanizates. Strain Rate and Temperature Effects,* J. Appl. Polym. Sci., vol 10, pp 229-244, 1966.

[34] Lindley P.B. - *Energy for Crack Growth in Model Rubber Components,* J. Strain Analysis, vol 7, pp 132-140, 1972.

[35] Mohammed K. - *Crack Propagation in Rubbers,* PHD, Queen Mary College, London, 1980.

[36] Mullins L. - *Effect of Stretching on the Properties of Rubber.* , Rubb. Chem. Technol.., vol 21, pp 281 - 300, 1948.

[37] Mullins L. - *Softening of Rubber by Deformation,* Rubb. Chem. Technol., vol 42, pp 339-362, 1969.

[38] Ogden R.W. - *Non-Linear Elastic Deformations,* Ellis Horwood Limited Publishers, Chichister 1984.

[39] Ogden R.W. - *Large Deformation Isotropic Elasticity - On the Correlation of Theory and Experiment for Incompressible Rubber-like Solids,* Proc. R. Soc. Lond., Ser. A, vol 326, pp 565-584, 1972.

[40] Rigbi Z. - *Reinforcement of Rubber by Carbon Black,* Advances in Polymer Science, vol 35, 1981.

[41] Rivlin R.S. et Thomas A.G. - *The Effect of Stress Relaxation on the Tearing of Vulcanized Rubber,* Engineering Fracture Mechanics, vol 18, no 2, pp 389-401, 1983.

[42] Smith T.L. - *Dependence of the Ultimate Properties of a GR-S Rubber on Strain Rate and Temperature,* J. Polym. Sci., vol 32, pp 99-113, 1958.

[43] Treloar L.R.G. - *The Physics of Rubber Elasticity,* Third Edition, Clarendon Press, Oxford 1975.

[44] Valanis K.C. et Landel R.F. - *The Strain-Energy Function of a Hyperelastic Material in Terms of the Extension Ratios,* J. Appl. Phys., vol 38, no 7, pp 2997-3002, june 1967.

[45] Williams M.L., Landel R.F., Ferry J.D. - , J. Am. Chem. Soc, vol 77, p 3701, 1955.

[46] Wu P.D. et Van der Giessen E. - *On Improved Network Models for Rubber Elasticity and Their Applications to Orientation Hardening in Glassy Polymers,* J. Mech. Phys. Solids, vol 41, no 3, pp 427-456, 1993.

[47] Yeoh O.H. - *On the Ogden Strain-Energy Function,* Rubb. Chem. Technol., vol 70, no 2, pp 175-182, 1997.

[48] Ziabicki A. et Walasek J. - *Molecular Models of Polymer Networks and Constitutive Equations of Rubber Elasticity,* British Polymer Journal, vol 17, no 2, pp 116-121, 1985.

Troisième partie

Mécanique de la Rupture, cas des élastomères

Introduction

Nous nous posons le problème suivant :

Soit un solide fissuré soumis à une sollicitation quelconque à l'infini. Que peut-on dire de la tenue mécanique de ce solide ? La fissure va-t-elle se propager, éventuellement à quelle vitesse ?

Cette question est abordée uniquement dans les cas plans, avec une structure d'épaisseur finie ou infinie b. Nous présentons successivement les trois grandes méthodes d'approche du problème qui définissent la mécanique de la rupture en grandes déformations :

1. l'approche énergétique, qui considère le problème de façon très globale ;
2. l'approche locale au contraire cherche à décrire la propagation à partir des champs locaux ;
3. l'approche expérimentale , quant à elle impose ses outils et ses résultats.

Les méthodes usuelles d'étude de la propagation de fissure dans les élastomères sont essentiellement expérimentales. Un essai consiste à mesurer la vitesse de propagation d'une fissure et à la reporter sur un graphique en fonction d'une quantité caractéristique de l'énergie apportée au système - le taux de restitution d'énergie. Nous présentons d'abord la définition thermodynamique de cette grandeur, puis la définition des expérimentateurs. La confrontation des deux permet de mieux comprendre les résultats expérimentaux.

Notre travail nous amène à bien dissocier le rôle du comportement du rôle de propriétés intrinsèques à la rupture dans la mesure expérimentale de la propagation de fissure. Les calculs de structure permettent de bien modéliser les effets du comportement. Notre modélisation fournit de plus une bonne analyse de l'influence des propriétés intrinsèques.

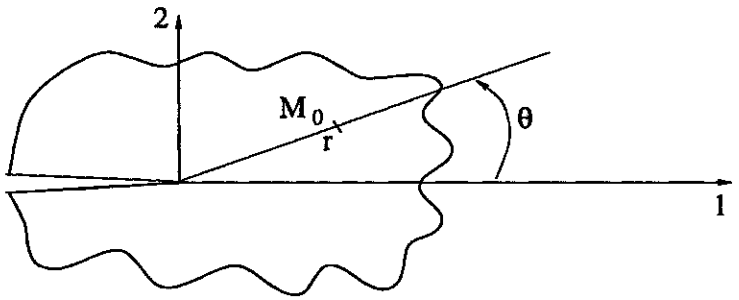


FIG. 8.5-2: Présentation du problème abordé dans cette partie. Un solide élastique fissuré est soumis à une sollicitation à l'infini. On cherche à caractériser le rôle de la fissure sur la tenue de la structure et à obtenir éventuellement des informations sur le mode d'endommagement ou de ruine : rupture catastrophique ou propagation de fissure mesurable, etc...

Chapitre 9

Approches énergétiques

L'approche énergétique est fondée sur l'expression des principes de la thermodynamique. Elle établit des conditions nécessaires que doit respecter une structure fissurée pour qu'une propagation de la fissure soit possible.

Si la démarche est rigoureuse, les bilans d'énergie ne sont pas forcément triviaux et les grandeurs qui permettent d'établir les conditions d'une propagation de fissure ne sont pas connues (résistance R, critères, etc...).

9.1 Cas élastique

Nous reproduisons dans les pages qui suivent la présentation de Williams qui nous semble être la plus claire parmi les références dédiées à nos matériaux [III.62].

Dans le cas d'un matériau élastique, la fissure qui se propage est la seule source de dissipation possible. Supposons que la fissure de longueur A se propage d'une longueur ∂A (condition nécessaire d'étude). Dans ce cas, un bilan d'énergie donne :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_d + \partial U_K$$

avec ∂U_{ext}, ∂U_{elas}, ∂U_d et ∂U_K quantités d'énergie apportée, stockée, dissipée et variation d'énergie cinétique pendant l'incrément de propagation. On appelle G la grandeur[1] définie par :

$$G = \frac{\partial U_{ext}}{b\partial A} - \frac{\partial U_{elas}}{b\partial A}\ ,\ R = \frac{\partial U_d}{b\partial A}$$

L'équation ci-dessus devient :

$$G = R + \frac{\partial U_K}{b\partial A}$$

En l'absence de propagation, l'énergie cinétique du système est identiquement nulle. Une condition nécessaire de propagation est $\frac{\partial U_K}{b\partial A} > 0$, soit $G > R$. La fissure ne peut être stable que si $G = R$ avec en outre $\frac{\partial G}{b\partial A} < \frac{\partial R}{b\partial A}$. On définit ainsi G comme le **taux de restitution d'énergie** de la structure pour la sollicitation donnée.

Le graphe (9.1-1) permet de bien cerner ce qui se passe. Supposons que la longueur de fissure A soit la seule variable d'étude. Dans le cas de l'élasticité, à la date actuelle seule la longueur actuelle de fissure décrit l'état du système. On suppose que l'on peut remonter aux différentes énergies $G(A)$ et $R(A)$. Ces deux fonctions sont supposées se comporter comme sur le graphe (9.1-1). En A_1, un léger accroissement de la longueur

[1] On rappelle que b est l'épaisseur de la structure.

de fissure augmente l'écart $G - R$, de sorte que la fissure accélère. Dans ce cas, A_1 n'est pas stable. En A_2 en revanche, un accroissement de A implique un ralentissement de la propagation de la fissure. Dans le cas quasi-statique qui nous occupe, où les variations d'énergies cinétiques sont toujours négligeables devant les variations de G, la fissure est stable en A_2. Dans le cas général, la fissure ralentit en A_2.

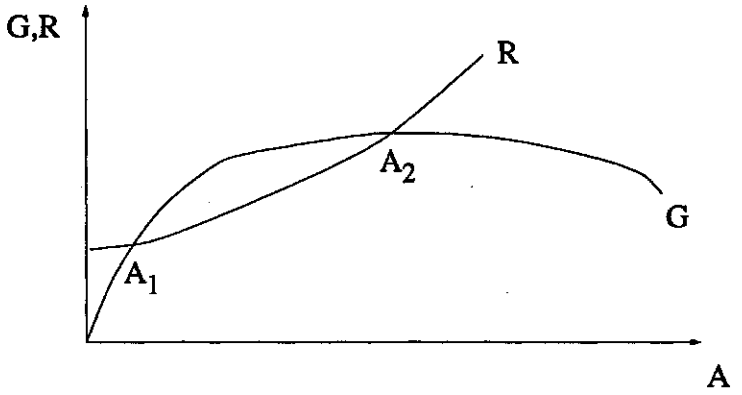


FIG. 9.1-1: Un exemple qui illustre les variations possibles de G et R. On peut montrer qu'une fissure en A_2 est stable, une fissure en A_1 instable.

L'approche thermodynamique repose sur la détermination de R. Nous ne connaissons pas de modèle phénoménologique ou physique qui permette de définir un R non-constant. Des raffinements de la présentation ci-dessus sont possibles, par exemple à partir de l'inégalité de Clausius-Duhem pour dissocier clairement les phénomènes thermiques dans le bilan, mais posent toujours le même problème crucial de la forme de R sans pouvoir y répondre. R doit-il dépendre du type de sollicitation ? Si oui, peut-on prédire cette dépendance ?

Notre présentation ne fait pas référence à l'amplitude des déformations. Le cadre standard est bien entendu le cadre des petites déformations pour un matériau élastique linéaire. Dans ce cas, on peut voir notamment que l'hypothèse de rupture fragile conduit à une fissure soit stable soit qui se propage de façon catastrophique. Entre petites et grandes déformations, ce qui change est essentiellement la façon d'estimer la quantité G.

Comme nous l'avons dit précédemment, la propagation de fissure est la seule source de dissipation pour les matériaux élastiques. On suppose toujours qu'il existe une zone d'élaboration dans laquelle se crée la fissure. Cette zone est considérée comme très petite, compatible avec les dimensions du volume élémentaire, plus petit volume pour lequel le comportement du matériau est supposé homogène. De façon habituelle, on sait que l'on peut faire un bilan d'énergie en volume en repérant la quantité d'énergie produite (ou disparue) à partir d'une mesure à la frontière (cas sans source volumique). En mécanique de la rupture, ce bilan est réalisé par l'intégrale de Rice. Le résultat est bien connu en petites déformations [III.46]. Mais il est aussi valable en grandes déformations, comme le montrent Knowles et Sternberg [III.31].

En petites déformations, on définit l'intégrale de Rice par :

$$I = \int_\Gamma \left(W.n_1 - \underline{n}.\underline{\underline{\sigma}}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial x_1} \right) da$$

où Γ est une surface entourant la fissure, $\underline{n}$ vecteur normal sortant de Γ, la fissure se propage dans la direction 1. En grandes déformations, la même intégrale est définie à partir des grandeurs lagrangiennes.

$$I = \int_{\Gamma_0} \left(W.N_1 - \underline{N}.\underline{\underline{\pi}}.\frac{\partial \underline{u}}{\partial X_1} \right) dA$$

où Γ_0 et $\underline{N}$ sont les homologues lagrangiens des quantités définies précédemment.

Le résultat fondamental dans le cas élastique est bien sûr que :

$$G = I \tag{9.1-1}$$

en petites et en grandes déformations.

9.2 Cas anélastiques

Dans les cas anélastiques, la fissure n'est plus la seule source de dissipation. Par exemple, la plasticité écrête le champ de contrainte localement et s'accompagne d'une évolution de la microstructure : ce n'est plus le même matériau qui est sollicité localement et dans lequel la fissure se propage. De même la viscosité écrête le champ de déformation localement. Comme précédemment, un bilan d'énergie conduit à :

$$\partial U_{ext} = \partial U_{elas} + \partial U_f + \partial U_d + \partial U_K$$

où ∂U_d et ∂U_f sont les quantités d'énergie dissipées dans la structure globalement et très localement en pointe de fissure, dans la mesure où ces deux quantités peuvent être distinguées.

On peut encore définir un taux de restitution noté J :

$$J = \frac{\partial U_{ext} - \partial U_{elas}}{b\partial A} = -\frac{\partial P}{b\partial A}$$

où P est l'énergie potentielle du système, avec d'autre part :

$$R = \frac{\partial U_f + \partial U_d}{b\partial A}$$

La propagation de la fissure est encore régie par le bilan :

$$J = R + \frac{\partial U_K}{b\partial A}$$

Pour une structure donnée et un type de chargement donné, un critère du type $J = G_c$ est encore plausible. Mais ce critère ne peut plus s'appliquer pour une autre structure ou une sollicitation qui modifie la dissipation volumique.

Plusieurs situations doivent être distinguées :

1. Le lieu où le comportement est anélastique est confiné en pointe de fissure. Dans ce cas, on peut penser que la dissipation engendrée par ce comportement reste caractéristique de la fissure. C'est par exemple l'échelle de la zone de dissipation évoquée en élasticité.
2. La dissipation n'est plus confinée (de taille inférieure ou égale au volume élémentaire) autour de la fissure mais reste locale (de la taille de quelques volumes élémentaires). Il existe une zone élastique qui englobe la fissure. Dans ce cas, l'intégrale de Rice est encore valable pour tout pourtour défini dans le domaine élastique et mesure alors le bilan J.

3. Enfin, la dissipation peut être globale. C'est un cas courant en visco-élasticité pour lequel on ne sait rien dire. Il peut même se compliquer, par exemple quand une plasticité locale vient s'associer à une viscosité globale.

Il n'est pas de notre ressort de faire un bilan des méthodes utilisées dans ces cas pour rendre compte des situations rencontrées. Nous nous limiterons au cas de la visco-élasticité pour lequel, pour notre problème, on trouve une bonne unité des résultats.

9.2.1 Les modèles visco-élastiques

La définition de J ci-dessus est intéressante parce qu'elle peut être associée à un dépouillement graphique des résultats expérimentaux (voir [III.62]).

Quand la dissipation est globale (i.e. cas typique de la visco-élasticité) on comprend que la dissipation en volume existe en soi, indépendamment de la présence de la fissure. Ce qui compte, c'est ce qui reste disponible très localement pour faire propager la fissure. On modifie donc la définition de J en écrivant le bilan quasi-statique sous la forme :

$$J_2 = \frac{\partial U_{ext} - \partial U_{elas} - \partial U_d}{b\partial A}$$

avec d'autre part :

$$R = \frac{\partial U_f}{b\partial A}$$

Les méthodes développées permettent d'évaluer directement cette quantité. Une première méthode est proposée par Schapery [III.48, III.49, III.50]. Elle s'adapte très bien aux matériaux visco-élastiques qui présentent une zone d'élaboration de la fissure au comportement complexe, par exemple de type crazing dans certains polymères. Le formalisme de Barenblatt permet de donner une évaluation du taux de restitution d'énergie qui régularise la contrainte dans la zone d'élaboration. Le théorème de correspondance visco-élastique permet de fournir une extension visco-élastique au calcul et d'obtenir J_2. Schapery développe ensuite des méthodes d'approximation de J et applique ses calculs avec succès à quelques matériaux aux déformations faibles à modérées. Son modèle est cependant restreint au cas de la propagation droite stationnaire.

Un modèle simplifié est proposé par Mueller et Knauss [III.42] dans le cas des petites déformations. Il peut être étendu aux grandes déformations à partir d'outils analytiques que nous présenterons plus loin. Sur le plan théorique, le modèle proposé est comparable à celui de Schapery, mais a priori beaucoup plus général. On remarque en particulier que la prise en compte des grandes déformations intervient seulement par un facteur multiplicatif et conduit aux mêmes conclusions qu'en petites déformations.

D'une manière générale, on exprime le bilan d'énergie par la formule :

$$J_2 = \alpha G f(v)$$

avec α constante du modèle, liée au comportement, G une quantité homogène à un taux de restitution, caractéristique du chargement, f une fonction décroissante de la vitesse de fissuration. Le modèle de Mueller et Knauss montre par exemple que :

$$f(v) = \frac{1}{t}\int_0^t (1 - \frac{u}{t})\frac{D(u)}{D(0)}du$$

avec, $t = \delta/v$, δ taille caractéristique, D fonction de fluage du matériau.

Les modèles utilisent alors un critère de propagation simple, analogue au critère de propagation catastrophique. On suppose que la propagation a lieu si J_2 atteint une valeur critique J_c. Dans ce cas, la propagation est caractérisée par la vitesse v telle que :

$$J_c = \alpha G f(v)$$

Un artifice de présentation permet d'écrire ce critère sous la forme :

$$G_0 = \alpha' G f(v)$$

où G_0 est le taux de restitution d'énergie à vitesse nulle. On peut montrer que dans le cas quasi-statique, le taux de restitution est astreint à rester dans l'intervalle $[G_0, G_0 \frac{D(\infty)}{D(0)}]$. La limite supérieure n'est pas significative et devrait être évaluée par un calcul dynamique complet.

Dans le cas particulier de nos matériaux, le domaine défini par $[G_0, G_0 \frac{D(\infty)}{D(0)}]$ est très faible (par exemple $[G_0, 1.2G_0]$) : le matériau flue très peu. Or on rencontre usuellement des plages de vitesse très larges, par exemple de $10^{-10} m.s^{-1}$ à $10^{-3} m.s^{-1}$ qui correspondent à une plage de taux de restitution beaucoup plus importante que celle prédite (dans un rapport de 1 à 1 000 par exemple). On voit clairement que les modèles visco-élastiques ne peuvent pas rendre compte de telles variations de vitesse, voire que vis-à-vis des vitesses constatées, tout se passe comme si le matériau demeurait élastique. L'hypothèse la plus simple pour corriger les modèles semble être de supposer qu'un critère fondé sur une constante J_c n'est pas adapté, voire que **la variation de cette constante est prépondérante devant la variation du bilan local** J_2. Cette idée sera reprise plus loin dans le cadre du modèle de propagation que nous proposons.

9.2.2 Les calculs d'Andrews

Andrews [III.2, III.3, III.4, III.13] donne une méthode de calcul du taux de restitution d'énergie qui peut tenir compte de la nature dissipative du comportement à partir d'un calcul discrétisé sur l'ensemble des points de la structure et de la variation de leur état de contrainte pendant la propagation. Nous ne développerons pas ses calculs qui deviennent naturels voire évidents quand on utilise les calculs de structure.

Andrews montre que dans le cas général on peut découpler la contribution de la structure de celle de la sollicitation dans le calcul du taux de restitution sous la forme :

$$G = k(\lambda) W(\lambda)$$

avec λ paramètre de chargement. De même dans le cas d'une propagation déviée d'un angle θ :

$$G(\theta, \lambda) = k(\theta, \lambda) W(\lambda)$$

où W est la densité d'énergie et k est fonction de la structure.

La difficulté de son modèle réside dans le calcul effectif de G à partir de l'expression proposée. Dans notre approche, nous estimerons plus loin cette quantité à partir de calculs de structure.

9.3 Conclusion

Si les bilans d'énergie sont bien calculés, la méthode énergétique fournit des conditions d'existence de la propagation. Ce sont des conditions nécessaires. A l'usage, on les suppose suffisantes.

Il nous semble que la tendance est à l'élaboration de comportements plus fins, de bilans plus justes et de meilleurs estimations de J_2. C'est bien là le domaine d'étude et le cadre d'une approche de mécanicien. Mais le point clé de ces méthodes est l'évaluation de R. En mécanique, on ne peut pas faire autre chose que de lui donner une forme a priori ou phénoménologique ou l'obtenir comme résultat d'une mesure. R ne peut être prédit théoriquement que par une approche physique "par l'intérieur". Dans le cas de nos matériaux, cette démarche existe - elle est développée par exemple par Gent [III.7, III.17] - mais elle en est encore aux balbutiements.

Chapitre 10

Approche locale en grandes déformations

10.1 Introduction

Le cadre local de la mécanique de la rupture en grandes déformations est très peu connu. Cela tient à deux caractères :

1. les spécialistes de la propagation de fissure dans les élastomères ne semblent pas connaître l'existence de résultats sur le sujet. Par exemple, Stacer et Yanyo [III.52] notent qu'il n'est pas possible d'accéder aux champs locaux en pointe de fissure dans les élastomères. **Les modèles locaux de propagation de fissure dans les élastomères utilisent simplement les champs de déformations calculés en petites déformations** ;
2. le sujet est plutôt complexe. Les équations d'équilibre sont difficiles à résoudre, même au premier ordre. Le cadre que nous allons devoir respecter pour proposer des champs asymptotiques est très restreint.

Nous allons voir que pour des lois de comportement très simples et un choix particulier de développements asymptotiques, il est possible d'exhiber des solutions locales des champs mécaniques en pointe de fissure en grandes déformations.

Nous présentons essentiellement les calculs en contraintes planes incompressibles à partir des articles de Geubelle et Knauss [III.20, III.21, III.22]. Les cas de déformations planes et déformations planes incompressibles font apparaître les mêmes types d'équation, avec les mêmes méthodes de résolution et sont traités dans les articles de Knowles et Sternberg [III.32, III.33] pour les déformations planes, par Stephenson [III.54] pour les déformations planes incompressibles.

10.2 Approche locale, cas élastique linéaire

Dans le cas de l'élasticité plane (ou anti-plane), et pour un matériau élastique linéaire sollicité en petites déformations, on peut montrer, par exemple à partir du formalisme de la fonction d'Airy, que la fissure engendre des champs mécaniques divergents dans son voisinage. La contrainte la plus singulière est donnée par :

$$\left\{\begin{array}{l} \sigma_{rr} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3\theta}{2}) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(-5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{\theta\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3\theta}{2}) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(-3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3\theta}{2}) \\ \sigma_{r\theta} = \frac{K_I}{4\sqrt{2\pi r}}(\sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3\theta}{2}) + \frac{K_{II}}{4\sqrt{2\pi r}}(\cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3\theta}{2}) \end{array}\right. \tag{10.2-1}$$

Il est également possible de remonter au champ de déformations et aux déplacements par la loi de comportement. De même en élasticité anti-plane on peut calculer les champs :

$$\begin{cases} \sigma_{31} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \sin\frac{\theta}{2} \\ \sigma_{32} = \frac{K_{III}}{\sqrt{2\pi r}} \cos\frac{\theta}{2} \end{cases}$$

L'approche locale permet d'observer que pour une sollicitation globale quelconque, il y a localement 3 types de réponse définis par les 3 constantes K_I, K_{II} et K_{III}. La linéarité du problème d'équilibre en élasticité permet de découpler ces trois modes fondamentaux.

10.2.1 Equivalence des approches locales et globales

Nous avons vu (page 95) que l'intégrale de Rice fait le lien entre un calcul global du taux de restitution d'énergie et un calcul sur un contour quelconque entourant le fond de fissure.

On peut montrer en calculant cette intégrale sur un domaine suffisamment petit pour que le développement asymptotique soit valide, qu'il y a une équivalence entre les approches locales et globales dans le cas d'une propagation droite de la fissure donnée par (cas des déformations planes) :

$$G = (1-\nu^2)\frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E} + \frac{K_{III}^2}{2\mu} \tag{10.2-2}$$

Notons que le cadre local est plus riche que le cadre global. La connaissance des facteurs d'intensité permet de remonter au type de chargement à l'infini et donne G. En revanche, G définit une famille de sollicitations possibles évoluant sur une sphère dans l'espace (K_I, K_{II}, K_{III}) donnée par (10.2-2).

10.2.2 Application de l'approche en petites déformations pour les grandes déformations

Une hypothèse courante dans le cas de nos matériaux consiste à supposer que les champs mécaniques près d'une fissure en grandes déformations sont proches des champs de petites déformations. Par exemple, on pense souvent que l'influence des grandes déformations est seulement de changer l'allure des fonctions angulaires liées à K_I et K_{II}. La singularité resterait en $\sqrt{r}$.

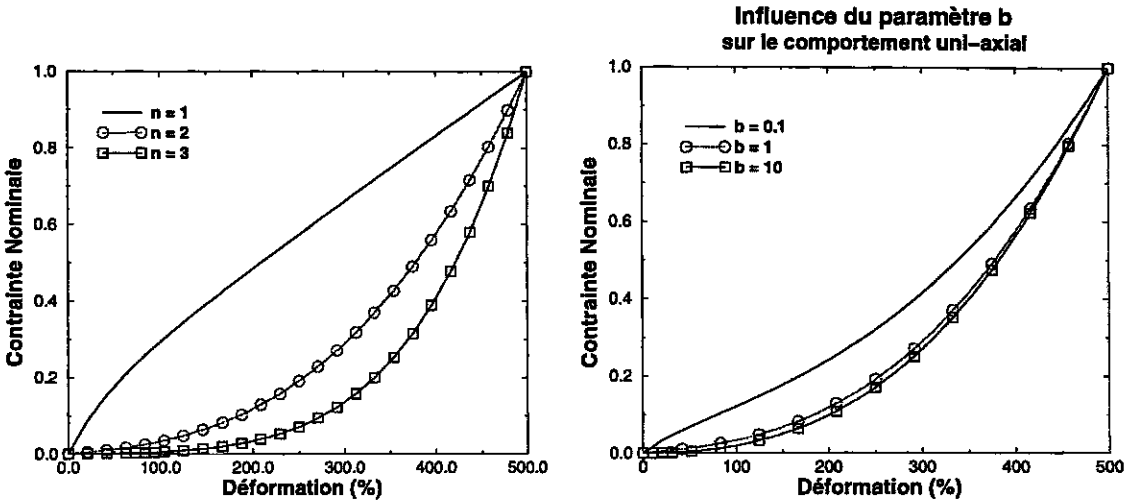
Nous allons voir que dans le cas général, ces idées sont erronées. Les champs asymptotiques en petites déformations ne sont pas applicables stricto-sensu en grandes déformations.

10.3 Approche locale en grandes déformations

10.3.1 Lois de comportement

On considère, comme Geubelle et Knauss [III.20], un matériau de type néo-hookéen généralisé (GNH) et incompressible :

$$W_n(I_1) = \frac{\mu}{2b}\left(\left[1 + \frac{b}{n}(I_1 - 3)\right]^n - 1\right) \tag{10.3-3}$$



(a) Effet de n, $b = 1$.

(b) Effet de b, $n = 2$.

FIG. 10.3-1: Evolution de la contrainte nominale en traction uni-axiale pour des matériaux GNH ; effets de n et b. La contrainte diverge d'autant plus vite que la non-linéarité est élevée. Contrainte adimensionnée à 1 à 500 %.

n définit la nature de la non-linéarité. La caractéristique principale de cette loi est de s'exprimer en fonction du premier invariant des déformations seulement, de sorte que toute loi en $(I_1 - 3)^n$ donnera les mêmes résultats dans la limite des grandes déformations.

Nous donnons sur le graphe (10.3-1) la forme de la relation contrainte-déformation pour plusieurs lois GNH en fonction de la non-linéarité n et du paramètre b. La contrainte est ramenée à une valeur unité pour la plus grande déformation représentée. Pour $n = 1$, le matériau est néo-hookéen (voir page 56). Pour des non-linéarités plus fortes, la contrainte s'écarte plus rapidement de la linéarité. Sur une plage de déformations finie, b et n ont des effets comparables sur la divergence de la courbe de comportement. Dans notre étude, nous supposerons pour simplifier que b est fixé une fois pour toute, avec de plus $b = 1$. Dans quelques cas, cette variable sera différente et nous le préciserons.

Soient (λ_1, λ_2) les extensions principales dans le plan. On peut montrer qu'en contraintes planes incompressibles, la densité d'énergie réduite :

$$\left\{ \begin{array}{c} U(I,J) = \frac{\mu}{2b}\left(\left[1 + \frac{b}{n}(I + \frac{1}{J^2} - 3)\right]^n - 1\right) \\ I = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 \\ J = \lambda_1\lambda_2 = \frac{1}{\lambda} \end{array} \right.$$

permet de trouver directement le tenseur des contraintes nominales dans le plan :

$$\underline{\underline{\pi}} = 2U_{,I}\underline{\underline{F}} + JU_{,J}\underline{\underline{F}}^{-t} \tag{10.3-4}$$

On note (y_1, y_2) les positions déformées des points en coordonnées cartésiennes. Si ϵ est l'alternateur[1], les contraintes nominales s'expriment sous la forme :

$$\pi_{\alpha\beta} = \mu A^{n-1}(y_{\alpha,\beta} - \lambda^3 \epsilon_{\alpha\mu}\epsilon_{\beta\nu} y_{\mu,\nu})$$

[1] $\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

et les contraintes de Cauchy :

$$\sigma_{\alpha\beta} = \mu A^{n-1}(y_{\alpha,\gamma}y_{\beta,\gamma} - \lambda^2\delta_{\alpha\beta})$$

avec :

$$A = \left[1 + \frac{b}{n}(I + \frac{1}{J^2} - 3)\right]$$

L'équation d'équilibre devient :

$$\frac{b(n-1)}{n}(\frac{\partial I}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \lambda^2}{\partial x_\beta})(y_{\alpha,\beta} - \lambda^3\epsilon_{\alpha\mu}\epsilon_{\beta\nu}y_{\mu,\nu}) + A(\Delta y_\alpha - \frac{\partial \lambda^3}{\partial x_\beta}\epsilon_{\alpha\mu}\epsilon_{\beta\nu}y_{\mu,\nu}) = 0 \qquad (10.3\text{-}5)$$

10.3.2 Champ asymptotique en présence d'une fissure

On suppose qu'il existe des grandes déformations au moins localement autour de la pointe de fissure. L'intensité des déformations requises sera précisée plus loin. Le formalisme de la fonction d'Airy ne peut plus convenir pour résoudre les équations d'équilibre.

On choisit de faire un développement asymptotique du champ de déplacement sous une forme hybride polaire / cartésien.

$$\begin{cases} y_1 = r^{m_1}v_1(\theta) \\ y_2 = r^{m_2}v_2(\theta) \end{cases} \qquad (10.3\text{-}6)$$

r et θ sont les coordonnées polaires au point considéré. Par des considérations de bon sens sur la forme du fond de fissure, ou à partir d'un calcul très complet comme Knowles et Sternberg [III.32], on peut montrer que :

$$\begin{cases} m_1 > 0 \\ m_2 > 0 \\ m_2 < m_1 \\ m_2 < 1 \end{cases}$$

Remarque : *Ces hypothèses impliquent que l'on a éliminé la solution identité dans l'étude ultérieure.*

Un calcul à partir de l'intégrale de Rice en grandes déformations montre que sur tout contour délimitant le fond de fissure, il existe une longueur non-nulle de ce contour où la singularité de l'énergie est en $1/r$, toute autre singularité est nécessairement en $1/r^p$ avec $p < 1$. Cela implique :

$$m_2 \geq 1 - \frac{1}{2n}$$

avec égalité pour avoir une intégrale de Rice non-nulle.

On peut montrer par une étude fastidieuse que le développement asymptotique le plus simple qui soit non-dégénéré vérifie l'hypothèse :

$$m_1 - 1 < 5 - 3m_1 - 2m_2 \qquad (10.3\text{-}7)$$

et simplifie les équations d'équilibre en :

$$(n-1)\frac{\partial I}{\partial x_\beta}y_{\alpha,\beta} + I\Delta y_\alpha = 0 \qquad (10.3\text{-}8)$$

Remarquons que cette équation "simplifiée" est une équation aux dérivées partielles qui est encore non-linéaire. On suppose que v_1 et v_2 sont continues, monotones, et même C^∞. Après un calcul complet, on montre que les deux équations de la divergence sont :

$$\left\{\begin{array}{c} B_{v_2}.Dv_1 + (n-1)[2m_1(m_2-1)B_{v_2}v_1 + \dot{B}_{v_2}\,.\,\dot{v}_1] = 0 \\ B_{v_2}.Dv_2 + (n-1)[2m_2(m_2-1)B_{v_2}v_2 + \dot{B}_{v_2}\,.\,\dot{v}_2] = 0 \\ B_{v_2} = m_2^2 v_2^2 + \dot{v}_2^2 \\ Dv_1 = m_1^2 v_1 + \ddot{v}_1 \\ Dv_2 = m_2^2 v_2 + \ddot{v}_2 \end{array}\right. \tag{10.3-9}$$

Ce sont les **équations génériques** du problème. Elles sont associées aux conditions aux limites sur les lèvres :

$$\dot{v}_\alpha\,(\pm\pi) = 0 \tag{10.3-10}$$

Il s'agit a priori d'un problème aux valeurs propres couplé. On remarque cependant que l'équation différentielle sur v_2 est découplée. On la résout par passage dans l'espace des phases :

$$\left\{\begin{array}{l} m_2 v_2 = \xi(\theta)\cos\psi(\theta) \\ \dot{v}_2 = \xi(\theta)\sin\psi(\theta) \end{array}\right.$$

L'équation en v_2 devient :

$$\left\{\begin{array}{c} m_2\xi\sin\psi = \dot{\xi}\cos\psi - \xi\,\dot{\psi}\sin\psi \\ \frac{\partial\psi}{\partial\theta} = -\frac{m_2+2m_2(n-1)[(m_2-1)\cos^2\psi+\sin^2\psi]}{1+2(n-1)sin^2\psi} \end{array}\right.$$

soit une équation découplée en ψ que l'on intègre par séparation des variables :

$$d\theta = -\frac{1+2(n-1)sin^2\psi}{m_2+2m_2(n-1)[(m_2-1)\cos^2\psi+\sin^2\psi]}d\psi$$

On remarque que l'on a toujours :

$$\frac{d\theta}{d\psi} < 0 \tag{10.3-11}$$

On suppose que la condition aux limites $v_2(\pi) = 0$ impose que $\psi(\pi) = 0$. Dans le cas général, l'équation ci-dessus s'intègre en :

$$\theta - \pi = -\psi + \frac{m_2-1}{m_2}\kappa ArcTan\,[\kappa Tan(\psi)] + j(\psi)\pi \tag{10.3-12}$$

avec :

$$\kappa = \sqrt{\frac{m_2(2n-1)}{(m_2-1)(2n-1)+1}} \tag{10.3-13}$$

et où j est un entier qui ne peut varier que si ψ traverse un angle $(2p+1)\frac{\pi}{2}$. Cette situation ne peut se produire qu'une fois sur l'intervalle puisqu'elle implique que $v_2 = 0$ et définit la direction de l'axe des abscisses sur la configuration déformée. Soit θ_0 l'angle où ψ traverse $(2p+1)\frac{\pi}{2}$. On montre qu'en θ_0 nécessairement $\psi = \frac{\pi}{2}$ (voir (10.3-11)) avec :

$$\theta_0 - \frac{\pi}{2} = -\frac{m_2-1}{m_2}\kappa\frac{\pi}{2}$$

Pour $\theta \in [-\pi, \pi]$ on a donc :

$$\begin{cases} \theta = \pi - \psi + \frac{m_2-1}{m_2}\kappa ArcTan[\kappa Tan(\psi)] \ , \ \psi \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ \theta = -\psi + \frac{m_2-1}{m_2}\kappa ArcTan[\kappa Tan(\psi)] \ , \ \psi \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases} \tag{10.3-14}$$

La condition aux limites $v_2(-\pi) = 0$ implique nécessairement que $\psi(-\pi) = \pi$. On peut remarquer qu'elle est automatiquement vérifiée. On montre alors que v_2 peut s'écrire :

$$v_2(\theta) = a_2 F(\theta, n, m_2) \tag{10.3-15}$$

avec :

$$F(\theta, n, m_2) = Cos(\psi)\left[1 - \frac{2(n-1)}{m_2(2n-1)}Cos^2(\psi)\right]^{\frac{1}{2(m_2-1)}} \tag{10.3-16}$$

Cette solution générale est donnée par Herrmann [III.27]. On peut voir facilement que v_2 est continue sur chacun des intervalles $\theta \in [-\pi, \theta_0[$ et $\theta \in]\theta_0, \pi]$. Il faut cependant vérifier la continuité en θ_0 de $\theta(\psi)$.

$$\begin{cases} \lim_{\psi \longrightarrow \frac{\pi}{2}^-} \theta_0 = \frac{\pi}{2} + \frac{m_2-1}{m_2}\kappa\frac{\pi}{2} \\ \lim_{\psi \longrightarrow \frac{\pi}{2}^+} \theta_0 = -\frac{\pi}{2} - \frac{m_2-1}{m_2}\kappa\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

On montre après quelques opérations algébriques que la seule solution m_2 qui assure la continuité de $\theta(\psi)$ autour de θ_0 est :

$$m_2 = 1 - \frac{1}{2n} \tag{10.3-17}$$

Cette non-linéarité est associée à l'angle $\theta_0 = 0$. Remarquons que l'on pouvait obtenir ce résultat beaucoup plus tôt puisque cette valeur de m_2 est la seule qui donne une intégrale de Rice finie non-nulle. Pour ce cas particulier, l'inversion de (10.3-14) est beaucoup plus facile et (10.3-16) se simplifie en :

$$\begin{cases} v_2(\theta) = af(\theta, n) \\ f(\theta, n) = (\omega(\theta, k) + k\cos\theta)^{\frac{k}{2}} \sin\frac{\theta}{2}\left[1 - 2k^2\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\omega(\theta,k)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ k = \frac{n-1}{n} \\ \omega(\theta, k) = \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta} \end{cases} \tag{10.3-18}$$

La solution générale de l'équation donnant v_2 étant connue, deux méthodes permettent de résoudre le problème complet, une méthode directe valable sur une plage étroite de non-linéarités et une méthode simplifiée (mais incomplète) valable pour toute non-linéarité.

10.3.3 Calcul direct de v_1

A partir de l'expression de v_2, il est possible de simplifier la première équation d'équilibre :

$$\ddot{v}_1 + \frac{k^2\sin\theta}{\omega(\theta, k)}\dot{v}_1 + m_1(m_1 - k)v_1 = 0 \tag{10.3-19}$$

Geubelle et Knauss [III.20] proposent une solution approchée de v_1 par la théorie WKB [III.6], avec les conditions aux limites :

$$\dot{v}_1\ (0) = 0 \quad \dot{v}_1\ (\pi) = 0 \quad v_1(0) = c$$

c constante à déterminer par le chargement à l'infini. La solution a une allure assez complexe et s'exprime sous la forme :

$$\left\{\begin{array}{c} v_1(\theta) = c.g(\theta, m_1) \\ g(\theta, m) = (\omega(\theta, k) + k\cos\theta)^{\frac{k}{2}} Q^{-\frac{1}{4}} \cos Z(\theta) \\ m_1 \approx \frac{k+\sqrt{k^2+w^2(k)}}{2} \\ w(k) = 1 + \sqrt{1 - \frac{k^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-k^2}}\right)} \\ Q(\theta, m_1) = m_1(m_1 - k) - \frac{k^2\cos\theta}{2\omega^3} - \frac{k^4\sin^2\theta}{4\omega^2} \\ Z(\theta) = \sqrt{m_1(m_1-k)}\left[\theta - \frac{k^2}{8m_1(m_1-k)}\left(2\frac{\sin\theta}{\omega} + \frac{ArcTan(\sqrt{1-k^2}Tan\theta)}{\sqrt{1-k^2}} - \theta\right)\right] \end{array}\right. \tag{10.3-20}$$

On notera que la solution qu'il détermine est paire. C'est l'hypothèse de symétrie mécanique de son problème qui le pousse à chercher ce genre de solution. Cependant, existe-t-il d'autres solutions ?

D'une façon générale, on peut rechercher v_1 vérifiant les conditions aux limites :

$$\dot{v}_1\,(-\pi) = 0 \;\; \dot{v}_1\,(\pi) = 0 \;\; v_1(0) = 1$$

Cette solution est définie à une constante multiplicative près.

Soit χ telle que $v_1 = (\omega(\theta, n) + k\cos\theta)^{\frac{k}{2}}\chi$, χ vérifie :

$$\ddot{\chi} + Q(\theta, m_1)\chi = 0$$

avec :

$$Q(\theta, m_1) = m_1(m_1 - k) - \frac{k^2\cos\theta}{2\omega^3} - \frac{k^4\sin^2\theta}{4\omega^2}$$

et les conditions aux limites :

$$\left\{\begin{array}{c} \chi(0) = [1+k]^{-\frac{k}{2}} \\ \dot{\chi}\,(-\pi) = 0 \\ \dot{\chi}\,(\pi) = 0 \end{array}\right.$$

D'après l'approximation WKB :

$$\chi(\theta) \approx AQ^{-\frac{1}{4}}\cos\int_0^\theta Q^{\frac{1}{2}} + BQ^{-\frac{1}{4}}\sin\int_0^\theta Q^{\frac{1}{2}} \tag{10.3-21}$$

Indépendamment de la condition aux limites en 0, on montre que les deux conditions de bord libre impliquent :

$$\sin\left[\int_0^\pi Q^{\frac{1}{2}}\right].\cos\left[\int_0^\pi Q^{\frac{1}{2}}\right] = 0 \tag{10.3-22}$$

Le premier cas correspond à la situation symétrique approchée par Geubelle et donnée plus haut (10.3-20) :

$$\sin\int_0^\pi Q^{\frac{1}{2}} = 0$$

Le second cas correspond à une solution complètement antisymétrique :

$$\cos\int_0^\pi Q^{\frac{1}{2}} = 0$$

Cette solution n'est pas physique. On montre par cette analyse que la seule solution approchée de v_1 est une solution symétrique.

Enfin, la condition de compatibilité du développement asymptotique (expression (10.3-7)) impose que les résultats précédents soient valables tant que n n'excède pas :

$$n \approx \frac{7}{5}$$

Au delà, les solutions en déplacement du type proposé en hypothèse ne doivent plus être valables. Si la condition de compatibilité ci-dessus est juste vérifiée, comme $m_2 < m_1$, alors la condition $6 - 2m_1 - 4m_2 > 0$ ne l'est pas encore. Cela implique immédiatement que la deuxième équation d'équilibre est inchangée de même que v_2 sous la condition $6 - 2m_1 - 4m_2 > 0$. En revanche, l'équation en v_1 devient plus complexe. A (10.3-9), il faut ajouter les termes couplés :

$$(n-1)\left[2(m_2-1)B_2\,\dot{v}_2 - \dot{B}_2\,m_2v_2\right]q - B_2\left[(6-2m_1-2m_2)q\,\dot{v}_2 - m_2v_2\,\dot{q}\right]$$

avec :

$$q = \frac{1}{m_1v_1\,\dot{v}_2 - m_2v_2\,\dot{v}_1}$$

Ces termes supplémentaires rendent le problème insoluble.

10.3.4 Termes d'ordre supérieurs

Il est possible de compléter le calcul asymptotique précédent en cherchant des termes d'ordre plus élevés. On peut montrer qu'un développement à l'ordre 2 de la solution se traduit par un terme du second ordre sur y_2 seul.

$$\begin{cases} y_1 = r^{m_1}g \\ y_2 = r^{m_2}f + r^q h \end{cases}$$

avec :

$$q = \frac{n-1+\sqrt{n^2+16n-8}}{2n}$$

et h fonction implicite donnée dans [III.20]. Le développement asymptotique au second ordre a les mêmes restrictions que le développement au premier ordre, c'est-à-dire en tenant compte de la valeur de m_2 :

$$q < 1 + \frac{1}{4n}$$

Il est limité à une plage très étroite de non-linéarités comme le montre le graphe (10.3-2). Ce développement au second ordre ne pourra pas nous servir.

10.3.5 Méthode de résolution "simplifiée"

Comment intégrer les équations quand la condition de compatibilité n'est plus vérifiée ? Nous proposons deux méthodes pour répondre à cette question :

- une méthode reposant sur une hypothèse simplificatrice intuitive ;
- une méthode avec rotation de corps solide.

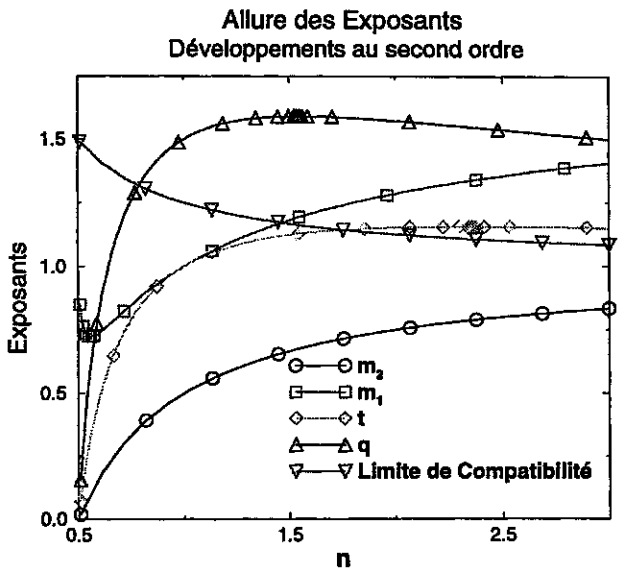


FIG. 10.3-2: Allure des différents exposants du développement au second ordre en fonction de la non-linéarité de la loi GNH. Le développement au premier ordre en (y_1, y_2) est valable tant que m_1 n'excède pas la limite de compatibilité. De même pour le développement au second ordre avec q. Sinon, seul le développement de y_2 est exact.

10.3.5.1 Hypothèse simplificatrice

Hors plan et en contraintes planes incompressibles, on observe une forte striction en fond de fissure. Cela montre que la plus grande extension λ_m est dans le plan. On suppose que l'extension transverse est négligeable devant λ_m. On peut alors écrire :

$$(\frac{\partial I}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \lambda^2}{\partial x_\beta}) \approx \frac{\partial I}{\partial x_\beta}$$

De même, si l'on suppose que l'un des déplacements domine devant l'autre, alors λ_m est liée à cette direction et le déplacement dans cette direction vérifie :

$$(n-1)\frac{\partial I}{\partial x_\beta} y_{\alpha,\beta} + I \Delta y_\alpha = 0 \tag{10.3-23}$$

On peut montrer qu'un champ du type $y = r^m v(\theta)$ solution a pour forme :

$$\begin{cases} m = 1 - \frac{1}{2n} \\ v = f(\theta - \theta_0, n) \end{cases} \tag{10.3-24}$$

où θ_0 est une constante angulaire arbitraire. Dans ce cas, on peut conclure en faisant les remarques suivantes :

Le champ de déplacement dans la direction orthogonale à la direction de y est négligeable. Donc le champ de déplacement dans une direction $\underline{n}$ quelconque est essentiellement un déplacement lié au déplacement dans la direction de y et vaut au premier ordre $r^m f(\theta - \theta_0)$ dans cette direction. S'il existe un autre domaine angulaire tel que λ_m soit associée à une autre direction, alors dans cet autre domaine la solution est du type :

$$\begin{cases} m = 1 - \frac{1}{2n} \\ v = f(\theta - \theta_1, n) \end{cases} \tag{10.3-25}$$

associée à une nouvelle direction $\underline{n}_1$. La condition de continuité des déplacements exprimée au premier ordre impose que ces directions soient les mêmes et que de plus $\theta_0 = \theta_1$, c'est-à-dire qu'il s'agit d'un seul et même domaine. Le raisonnement ci-dessus est encore valable s'il y a deux directions propres de singularités équivalentes.

On en déduit que la solution de premier ordre ci-dessus, liée au déplacement d'ouverture seulement, est valable pour tout n. Par contre, la solution liée au déplacement dans la direction orthogonale à la direction de plus grande déformation ne peut être obtenue que de façon approchée dans le cas des petites non-linéarités, et ne peut plus être calculée au-delà. Nous verrons que le déplacement d'ouverture est suffisant pour notre étude.

Notre approche "physique" du problème, reposant sur l'hypothèse de forte striction localement, permet de bien comprendre que le champ y_2 proposé est toujours valable et qu'il s'agit du développement au premier ordre du champ solution. L'approche de Stephenson formalise mieux ce résultat mais le fait disparaître noyé dans la difficulté de la mixité des modes de sollicitation.

10.3.5.2 Méthode avec rotation de corps solide

Stephenson montre que si un champ (y_1, y_2) est solution, alors toute rotation de corps solide de ce champ l'est également. C'est-à-dire que la famille complète des champs solutions est de la forme :

$$\underline{y} = \underline{\underline{Q}} \cdot \underline{y}_0 \tag{10.3-26}$$

où y_0 est une solution et $\underline{\underline{Q}}$ une rotation de corps solide. Pour $\underline{\underline{Q}}$ quelconque, on voit que le champ solution donné par (10.3-6) dégénère au premier ordre en :

$$y_i = a_i r^m v(\theta) \; i \in \{1, 2\} \tag{10.3-27}$$

Le problème se résout alors exactement comme a été résolu le problème générique en v_2 et mène à la même solution :

$$y_i = a_i r^m f(\theta, n) \; i \in \{1, 2\}$$

Il n'y a plus de restrictions sur le domaine de validité de la solution. Contrairement à notre approche "physique" de cette situation, Stephenson trouve une solution de type coin que nous avions éliminée de nos précédents calculs parce qu'elle ne rend pas compte de la réalité en fond de fissure. Cela se traduit mathématiquement par $J = 0$. En effet, remarquons que notre approche montre que l'expression de y_2 est toujours valable - mais avec la condition qu'un champ v_1 lui corresponde - alors que Stephenson recherche une solution complète (y_1, y_2) et montre que nécessairement le calcul à l'ordre 1 ne suffit pas.

Il est également possible de calculer les termes du second ordre. On montre que les solutions générales peuvent être connues directement à l'ordre 3 avec :

$$\begin{cases} y_1 = a_1 r^m f(\theta, n) + a_1 k r^t l(\theta, n) + a_2 c r^p g(\theta, n) + a_1 d r^q h(\theta, n) \\ y_2 = a_2 r^m f(\theta, n) + a_2 k r^t l(\theta, n) - a_1 c r^p g(\theta, n) + a_2 d r^q h(\theta, n) \end{cases}$$

avec m, q déjà définis précédemment, $p = m_1$ et f, g, h fonctions angulaires des développements précédents. On introduit la nouvelle fonction l définie dans [III.20], associée à sa valeur propre :

$$t = \frac{n - 1 + \sqrt{n^2 + 6n - 3}}{2n}$$

L'évolution des différents exposants en fonction de n est donnée sur le graphe (10.3-2). Les conditions de validité des développements sont les mêmes que précédemment.

Jusqu'à l'ordre 2, c'est p qui impose toujours que la non-linéarité n'excède pas 7/5, puis au troisième ordre q impose que $n < 41/52$.

La méthode par rotation de la solution ne permet donc pas d'élargir le domaine de validité des solutions. Elle sert cependant à montrer qu'aux solutions symétriques il faut ajouter les solutions avec rotation de corps solides qui peuvent s'adapter à des chargements complexes par rotation du fond de fissure.

10.3.6 Un détour par le cas linéaire

Dans le cas $n = 1$, la solution v_2 donnée par la formule (10.3-18) est toujours la solution exacte mais se simplifie en :

$$v_2(\theta, n) = \sin\frac{\theta}{2}$$

De même pour v_1 :

$$\ddot{v}_1 + m_1^2 v_1 = 0$$

qui s'intègre en $v = a\cos m\theta + b\sin m\theta$. La condition de bord libre impose alors la valeur de m :

$$m = \frac{s}{2}, \text{ s entier}$$

On vérifie que la solution la plus singulière qui ait un sens est obtenue pour $s = 2$. On note $n = 1 + \delta n$. On cherche la solution asymptotique v_1 pour n fixé, proche de 1, comme solution perturbée de la solution linéaire. Soit $v_1 = v_1^0 + \partial v$, v_1^0 l'une des solutions du cas linéaire, associée à la singularité n=1. Soit de même ∂m la perturbation de la singularité quand on perturbe n autour de 1. ∂v vérifie l'équation :

$$\partial\,\ddot{v} + \partial v = (\partial n - 2\partial m)v_1^0$$

Les conditions aux limites sur les bords de la fissure impliquent que la nouvelle solution v_1 est :

$$v_1 = a\cos(\theta) \text{ avec } m = 1 + \frac{\partial n}{2}$$

Donc que y_1 est donnée par :

$$y_1 = r^m v_1$$

Au premier ordre, seul l'ordre de la singularité est modifié. La fonction de forme angulaire n'est modifiée qu'au second ordre.

10.3.7 Résumé

Nous venons de présenter les calculs généraux qui permettent d'avoir des solutions analytiques dans diverses situations, repérées uniquement par la valeur de n. Pour récapituler nos résultats, on peut retenir que :

1. le champ y_2 est connu au premier ordre pour toute non-linéarité, donné par l'équation (10.3-18).
2. le champ y_1 est connu de façon approchée tant que n n'est pas trop grand ($\approx 7/5$).
3. les champs peuvent être calculés aux ordres supérieurs mais pour des non-linéarités très faibles.

10.4 Remarques et applications

Les calculs asymptotiques que nous venons de présenter sont des calculs "génériques" qui peuvent s'adapter à des problèmes particuliers qui n'ont pas été étudiés en grandes déformations. Ils sont également très riches d'informations que nous nous proposons de présenter.

10.4.1 Autres calculs asymptotiques

10.4.1.1 Autres modes plans de déformation

Nous avons présenté ci-dessus essentiellement les résultats de Geubelle et Knauss en contraintes planes incompressibles [III.20].

Les premiers résultats de ce genre ont été établis par Knowles et Sternberg en déformation plane. Stephenson [III.54] aborde les calculs de Knowles et Sternberg en déformation plane incompressible et le cas compressible est revu récemment par Le [III.39]. Si les premiers auteurs ont accompli un effort considérable et largement développé les résultats au second ordre, Stephenson en fait sans doute la présentation la plus claire et la plus complète dans son article. Il exhibe les solutions asymptotiques dans de nombreux cas où nous nous sommes contentés de montrer que les équations usuelles n'étaient plus valides. Il montre aussi que les déplacements de mode II pur, au sens où le déplacement transverse est impair et le déplacement d'ouverture pair, n'existent pas dans les matériaux néo-hookéens.

La particularité de tous ces calculs est la récurrence des mêmes équations différentielles, valables sur des domaines de non-linéarités similaires. Les mêmes techniques permettent de résoudre les problèmes au premier et au second ordre. Ce caractère tient d'abord au fait qu'une direction propre domine nécessairement dans les calculs, par exemple à cause de l'hypothèse $m_2 < m_1$ qui privilégie les grandeurs dans la direction d'ouverture. Il vient ensuite de l'intégrale de Rice, qui montre que m_2 est une caractéristique de l'énergie. Remarquons tout de même que les limites imposées à la validité des différents calculs sont légèrement différentes. La limitation autour de 7/5 de Geubelle correspond par exemple à 3/2 dans les calculs de Stephenson.

10.4.1.2 Cas du mode anti-plan

Le mode de déformation anti-plan est réputé "plus simple" que le mode plan parce qu'il est caractérisé par une seule fonction inconnue. Le problème est traité de façon déjà exhaustive par Knowles [III.34] et est beaucoup mieux connu que le cas plan.

De même que nous avons présenté les champs asymptotiques en fond de fissure en grandes déformations pour des matériaux GNH dans le cas plan, nous présentons les résultats équivalents en mode III. Notre présentation sera volontairement succincte.

Le cadre est le même qu'en mode plan. Pour un matériau GNH incompressible sollicité à l'infini par un déplacement anti-plan, on cherche les champs locaux à partir de la position asymptotique des points pendant la transformation :

$$u_3(r,\theta) = r^m v(\theta) \tag{10.4-28}$$

Par le même cheminement qu'en mode plan, on peut montrer le résultat suivant :

$$\begin{cases} m = 1 - \frac{1}{2n} \\ v(\theta) = a_3 f(\theta, n) \end{cases} \tag{10.4-29}$$

$f(\theta, n)$ est la même fonction angulaire que celle du champ y_2 en mode plan. Les résultats obtenus dans le cas anti-plan sont beaucoup plus riches que ceux que l'on a pu donner ci-dessus. Il est possible par exemple de déterminer des solutions avec lignes de discontinuité dans des cas de perte d'ellipticité du problème [III.44].

10.4.1.3 Cas du coin, de l'interface

10.4.1.3.1 Cas du coin. Le cas du coin est un exemple d'application immédiate des calculs asymptotiques. On suppose que la fissure est localement un secteur (voir figure (10.4-3)).

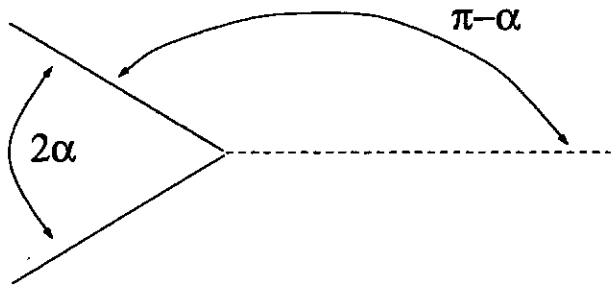


FIG. 10.4-3: Etude de la solution asymptotique dans un coin.

L'étude peut se faire exactement de la même façon que pour le problème de la fissure à partir des solutions générales (10.3-16). Dans ce cas cependant, on trouve que la singularité dépend de l'angle d'ouverture α sous la forme :

$$\frac{m_2 - 1}{m_2}\kappa = \frac{2}{\pi}(\alpha - \frac{\pi}{2}) \tag{10.4-30}$$

avec κ donné par (10.3-13). On montre en particulier qu'il n'y a plus de singularité dès que $\alpha \geq \pi/2$. Pour des angles plus faibles, la singularité dépend de α et n. Quelques exemples sont donnés sur le graphe (10.4-4).

10.4.1.3.2 Cas de l'interface. Un autre exemple d'application très important des calculs asymptotiques concerne les problèmes d'interface - étude des fissurations cohésives ou adhésives. On peut s'interroger sur la nature des champs localement à la pointe d'une fissure d'interface entre deux élastomères de type GNH ou entre un élastomère et une surface rigide. Le second cas correspond notamment aux situations rencontrées dans les problèmes de collage. Ces deux cas sont traités par Geubelle et Knauss [III.21, III.22].

Chicheportiche [III.10] s'intéresse à la situation particulière d'un joint entre deux surfaces rigides. Il montre qu'il y a perte de singularité à l'extrémité de la zone de contact du joint et du solide si l'angle d'assemblage est suffisamment faible : le problème est analogue à celui du coin, l'équation liant m_2 à l'angle α est toujours (10.4-30). Son calcul est réalisé en déformations planes incompressibles.

De l'ensemble de ces résultats apparaît essentiellement un phénomène commun : *entre deux élastomères, le moins non-linéaire présente les plus forts gradients localement et impose sa singularité. Dans le cas limite d'un substrat rigide, c'est le caoutchouc qui impose sa singularité.*

10.4.1.4 D'autres lois de comportement

Les calculs asymptotiques présentés sont valables exclusivement pour des matériaux de type GNH. On voudrait pourtant avoir des informations sur d'autres comportements

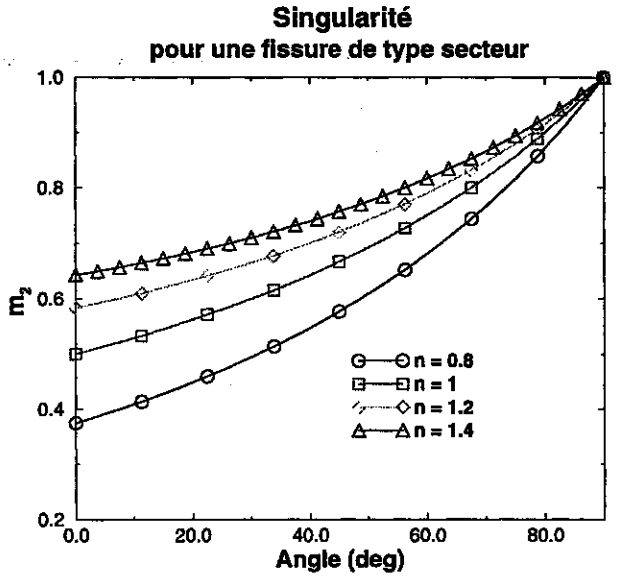


FIG. 10.4-4: Valeur de l'exposant m_2 dans le cas d'une fissure coin. Au delà de $\pi/2$, la condition $m_2 < 1$ n'est plus vérifiée : il n'y a plus de singularité. Sinon, m_2 est une quantité croissante de l'angle fait par le coin. Le comportement de l'exposant m_2 est identique à celui calculé dans le cas du joint collé. Les champs solutions sont donnés par (10.3-16).

locaux pour d'autres formes de densité d'énergie. Si le comportement étudié est fonction du premier invariant ou du premier invariant dans le domaine des grandes déformations, les résultats ci-dessus sont valables dans le domaine des grandes déformations même si le comportement n'est pas GNH.

Dans tous les autres cas, on ne peut rien dire. La démarche proposée par Knowles et Sternberg ne permet pas de dépasser le stade du calcul de la singularité par l'intégrale de Rice ou ne donne accès qu'aux solutions identiquement nulles. Prenons le cas d'une loi en second invariant :

$$W(I_2) = \frac{\mu}{2b}\left(\left[1 + \frac{b}{n}(I_2 - 3)\right]^n - 1\right) \tag{10.4-31}$$

à supposer que cette loi ait un sens. On peut montrer qu'en contraintes planes, W s'exprime encore par :

$$W(I, J) = \frac{\mu}{2b}\left(\left[1 + \frac{b}{n}(J^2 + \frac{I}{J^2} - 3)\right]^n - 1\right)$$

D'autre part, la grande différence entre une densité en second invariant par rapport à une densité en premier invariant tient au fait que le second invariant fait travailler les plus petites élongations alors que le premier invariant fait travailler les plus grandes élongations. Un calcul complet nous montre que l'on doit supposer :

$$J^2 >> \frac{I}{J^2}$$

que l'on peut justifier directement en remarquant qu'une hypothèse de striction en fond d'entaille implique que la déformation hors plan est celle qui travaille.

Un développement asymptotique tel que (10.3-6) implique alors sur les exposants :

$$6 - 4m_1 - 2m_2 > 0 \tag{10.4-32}$$

soit la même condition que celle que l'on obtient avec un GNH (inéquation (10.3-7)). De plus, l'intégrale de Rice donne une relation entre les deux exposants sous la forme :

$$m_1 + m_2 - 2 = -\frac{1}{2n} \tag{10.4-33}$$

qui implique que m_1 est plus près de 1 que m_2 quand $m_1 > 1$, situation que nous avions déjà dans le cas générique. Enfin, les équations du problèmes sont :

$$\begin{cases} (n-1)\frac{\partial A}{\partial x_1}\left[\lambda^2 F_{11} + \frac{1}{\lambda^2}F_{22}\right] + A\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\lambda^2 F_{11} + \frac{1}{\lambda^2}F_{22}\right] = 0 \\ (n-1)\frac{\partial A}{\partial x_2}\left[\lambda^2 F_{12} - \frac{1}{\lambda^2}F_{21}\right] + A\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\lambda^2 F_{12} - \frac{1}{\lambda^2}F_{21}\right] = 0 \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} (n-1)\frac{\partial A}{\partial x_1}\left[\lambda^2 F_{21} - \frac{1}{\lambda^2}F_{12}\right] + A\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\lambda^2 F_{21} - \frac{1}{\lambda^2}F_{12}\right] = 0 \\ (n-1)\frac{\partial A}{\partial x_2}\left[\lambda^2 F_{22} + \frac{1}{\lambda^2}F_{11}\right] + A\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\lambda^2 F_{22} + \frac{1}{\lambda^2}F_{11}\right] = 0 \end{cases}$$

avec $\lambda = 1/J$. En utilisant la relation entre les coefficients donnée par l'intégrale de Rice, on montre que :

$$\begin{cases} \lambda^2 F_{1\alpha} \propto r^{m_1 - 1 + \frac{1}{n}} \\ \frac{1}{\lambda^2}F_{2\alpha} \propto r^{m_2 - 1 - \frac{1}{n}} \end{cases}$$

Dans la première équation ci-dessus et d'après l'hypothèse $m_1 > m_2$, on est sûr que les termes en $\frac{1}{\lambda^2}F_{2\alpha}$ sont prépondérants. Pour la deuxième équation, les termes prépondérants ne sont pas connus a priori. Deux cas sont possibles que l'on aborde ci-dessous :

Premier cas, $\lambda^2 F_{2\alpha} << \frac{1}{\lambda^2}F_{1\beta}$. Après quelques manipulations algébriques, on trouve :

$$\begin{cases} Q\,\dot{v}_1 + 2nm_1\,\dot{Q}\,v_1 = 0 \\ Q\,\dot{v}_2 + 2nm_2\,\dot{Q}\,v_2 = 0 \end{cases}$$

Avec $Q = m_1 v_1\,\dot{v}_2 - m_2 v_2\,\dot{v}_1$. Si Q est non-nulle, alors de façon évidente :

$$\begin{cases} v_1 = a_1 Q^{-2nm_1} \\ v_2 = a_2 Q^{-2nm_2} \end{cases}$$

En reprenant la définition de Q, on montre alors que $Q = 0$, ce qui est impossible. Ce premier cas n'admet donc pas de solution.

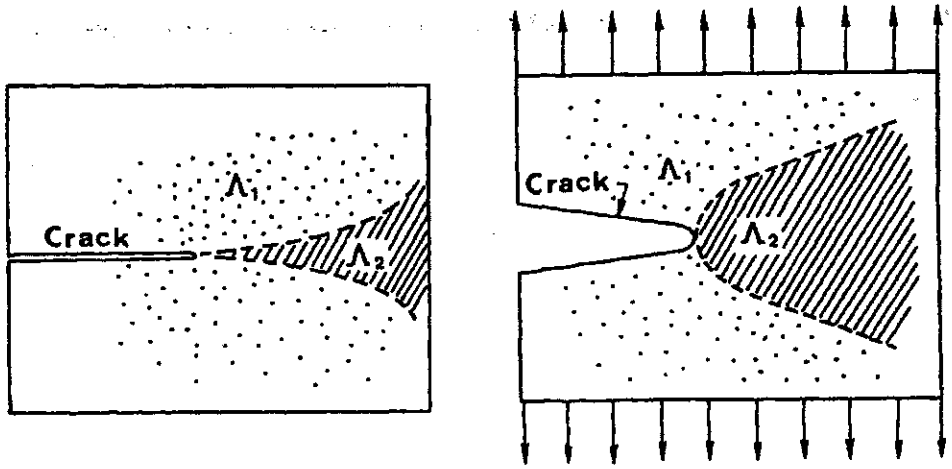
Deuxième cas, $\lambda^2 F_{2\alpha} >> \frac{1}{\lambda^2}F_{1\beta}$. Cette condition est réalisée si $m_2 < m_1 - \frac{2}{n}$. Après quelques manipulations algébriques, on trouve :

$$\begin{cases} q\,\dot{v}_2 + nm_2\,\dot{q}\,v_2 = 0 \\ (n-2)\left[-\frac{1}{n}m_2 v_2 + \dot{q}\dot{v}_2\right] + m_2^2 v_2 - \ddot{v}_2 = 0 \end{cases}$$

Avec $q = Q^2$. La première équation donne évidemment $q = \alpha v_2^{-\frac{1}{nm_2}}$, où α est une constante d'intégration. En reportant dans la seconde équation, on trouve :

$$(n-2)\left[-m_2^2 v_2 - \frac{\alpha}{nm_2}\,\dot{v}_2^2\,v_2^{-\frac{1}{nm_2}-1}\right] + nm_2(m_2^2 v_2 - \ddot{v}_2) = 0 \tag{10.4-34}$$

Les conditions aux limites sont identiques à (10.3-10). Dans ce cas, il ne semble pas possible de résoudre le système différentiel.



(a) Domaines non-déformés. (b) Domaines déformés.

FIG. 10.4-5: Définition des deux domaines d'étude des solutions asymptotiques autour d'une fissure dans le modèle de Gao.

10.4.1.5 Calculs de Gao

Gao propose une autre approche asymptotique pour accéder aux champs locaux [III.14] en déformation plane. La solution est recherchée en divisant le fond de fissure en un domaine autour de la pré-fissure et un domaine autour de l'axe de propagation droite. La solution complète est un développement raccordé au sens de Van Dycke. La loi de comportement utilisée par Gao est encore une loi en premier invariant compressible.

$$\begin{cases} W(I,K) = a\left[(\frac{I}{K^{\frac{1}{3}}})^n - 3^n\right] + b(K-1)^m K^{-l} \\ I = I_1 \\ K = I_3 \end{cases} \tag{10.4-35}$$

Gao suppose l'existence de deux zones Λ_1 et Λ_2 qui se déforment tel qu'illustré sur le graphe (10.4-5). Nous présentons seulement les corrections à apporter aux calculs de Gao dans Λ_1.

On suppose que les coordonnées lagrangiennes sont des coordonnées polaires (R, ν). La position déformée est repérée par les coordonnées polaires (r, θ). On cherche un champ déformé solution sous la forme :

$$\begin{cases} r = R^{1-\delta}\phi(\nu) \\ \theta = \frac{\pi}{2} - R^{\gamma}\psi(\nu) \end{cases}$$

Sans approximation, on montre que la contrainte de Cauchy est donnée par[2] :

$$\underline{\underline{\sigma}} = K^{-\frac{1}{2}} 2na \frac{I^{n-1}}{K^{\frac{n}{3}}} \left(\underline{\underline{B}} - \frac{I}{3}\underline{\underline{I}}\right) + 2b(K-1)^{m-1}K^{-l-\frac{1}{2}}\left[(m-l)K + l\right]\underline{\underline{I}} \tag{10.4-36}$$

Gao projette sa solution asymptotique sur les directions déformées $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta)$ avec les

[2]Attention, nous notons $\underline{\underline{\sigma}}$ la contrainte de Cauchy. Gao l'appelle $\underline{\underline{\tau}}$. Ces notations sont exactement opposées aux nôtres entre tenseurs de Cauchy et de Kirchhoff.

hypothèses :

$$\begin{cases} 2\delta - \gamma > 0 \\ R << 1 \\ K >> 1 \end{cases}$$

Il trouve :

$$\underline{\underline{\sigma}} = R^{-\lambda}\left[2nap^{n-1}q^{-2\frac{n}{3}-1}\left(\underline{\underline{B}}^{(1)} - \frac{p}{3}\underline{\underline{I}}\right) + 2sbq^{2s-1}\underline{\underline{I}}\right] \tag{10.4-37}$$

avec p, q fonctions de ν et λ, s scalaires définis par Gao et :

$$\underline{\underline{B}}^{(1)} = p\underline{e}_r \otimes \underline{e}_r - R^\gamma\phi\left[\gamma(1-\delta)\phi\psi + \phi'\psi'\right](\underline{e}_r \otimes \underline{e}_\theta + \underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_r) + R^{2\gamma}\phi^2\left(\gamma^2\psi^2 + \psi'^2\right)\underline{e}_\theta \otimes \underline{e}_\theta$$

Ce résultat est obtenu en conservant les termes prépondérants dans le développement limité de $\underline{\underline{\sigma}}$. On remarque cependant que Gao ne tient pas compte du fait que son passage à la limite par $R << 1$ implique :

$$\begin{cases} \underline{e}_r \longrightarrow \underline{e}_y \\ \underline{e}_\theta \longrightarrow -\underline{e}_x \end{cases}$$

Le développement limité sur les vecteurs $\underline{e}_r$ et $\underline{e}_\theta$ donne :

$$\underline{\underline{B}}^{(1)} = R^{2\gamma}d_{xx}\underline{e}_x \otimes \underline{e}_x + \left[p - R^{2\gamma}d_{yy}\right]\underline{e}_y \otimes \underline{e}_y + R^\gamma d_{xy}\left(\underline{e}_y \otimes \underline{e}_x + \underline{e}_x \otimes \underline{e}_y\right) \tag{10.4-38}$$

avec :

$$\begin{cases} p = (1-\delta)^2\phi^2 + \phi'^2 \\ q = \phi\left(\gamma\phi'\psi - (1-\delta)\phi\psi'\right) \\ t = \phi\left[(1-\delta)\gamma\phi\psi + \phi'\psi'\right] \\ d_{xx} = p\psi^2 + 2t\psi \\ d_{yy} = p\psi^2 - 2t\psi \\ d_{xy} = p\psi + t \end{cases}$$

Gao écrit l'équilibre du système par l'équation de la divergence exprimée dans le repère eulérien. Il ne semble pas prendre en compte la rotation du repère dans sa divergence. Notre développement sur les directions d'axes fixes nous évite cette difficulté. Cela nous conduit à écrire l'équilibre exactement comme le font Knowles et Sternberg !

Pour simplifier, notons :

$$\begin{cases} P = 2nap^{n-1}q^{-2\frac{n}{3}-1} \\ Q = 2sbq^{2s-1} \end{cases}$$

Remarque : *Par définition, on est sûr que p est toujours positive. C'est moins évident pour q. On montre facilement que q ne s'annule pas près du fond de fissure. Comme q doit être supposée continue et ne dépend que de ν, elle ne présente pas de zéros dans Λ_1. On suppose alors que la valeur de q définie par Gao est bien positive. Si ce n'est pas le cas, on doit définir q comme l'opposé de la définition de Gao, sans modifier les résultats qui suivent.*

Après quelques opérations algébriques sur les équations d'équilibre et en remarquant qu'il existe des intégrales premières évidentes à ces équations, on obtient pour $\nu \in [\nu_0, \pi]$:

$$\begin{cases} [Pd_{xy}]^{\frac{1}{\lambda-\gamma}}c_1 = cste \\ [Pd_{yy}]^{\frac{1}{\lambda-2\gamma}}c_2 = cste \\ \left[P\frac{p}{3} - Q\right]^{-\frac{1}{\lambda}}c_2 = cste \\ \left[2P\frac{p}{3} + Q\right]^{-\frac{1}{\lambda}}c_1 = cste \\ c_1 = Cos(\nu)\ ,\ c_2 = Sin(\nu) \end{cases} \tag{10.4-39}$$

A partir de ces équations, on montre facilement que $P = Q = 0$. Autrement dit, la seule solution dans de domaine Λ_1 qui ait la forme proposée par Gao est la solution triviale ! Ce résultat invalide les calculs de Gao. En effet, à supposer que les calculs de Gao soient valables dans le domaine Λ_2, leur raccordement redonne encore la solution nulle au premier ordre.

Si le développement de Gao doit donner une solution non-nulle, ce ne peut être qu'à l'ordre supérieur. En cela, la complexité de la technique de Gao perd son sens par rapport aux calculs de Knowles et Sternberg.

10.4.2 Petites déformations / grandes déformations

10.4.2.1 Raccordement au sens fort

Considérons une éprouvette fissurée. Dans le cas courant qui nous intéressera, la structure est globalement en petite ou moyenne déformation et comporte une zone de grandes déformations en fond de fissure.

Localement, l'équilibre de la structure est donnée par l'équation (10.3-8) sous les hypothèses de déformations finies :

$$(n-1)\frac{\partial I}{\partial x_\beta} y_{\alpha,\beta} + I \Delta y_\alpha = 0$$

Les solutions ont été données précédemment et sont caractérisées par deux constantes a_1 et a_2. On souhaite déterminer ces constantes locales à partir des conditions aux limites, par un raccordement avec les champs mécaniques loin du fond de fissure au sens des développements asymptotiques raccordés. Pour cela, on suppose qu'il existe une zone de faibles déformations autour et loin de la fissure. Dans cette région, l'équation d'équilibre (10.3-5) se simplifie en :

$$\Delta y_\alpha - \frac{\partial \lambda^3}{\partial x_\beta} \epsilon_{\alpha\mu} \epsilon_{\beta\nu} y_{\mu,\nu} = 0$$

dont les solutions sont les solutions de la mécanique de la rupture présentées précédemment, page 99. On constate qu'il n'est pas possible de faire un raccordement de la solution de grandes déformations sur la solution de petites déformations, par exemple au sens de Van Dycke.

En effet, les équations d'équilibre dans chaque cas sont obtenues à partir de la même équation d'équilibre (10.3-5). La première équation simplifie (10.3-5) sous l'hypothèse de grandes déformations, la seconde sous l'hypothèse de petites déformations. Elles ne proviennent pas des mêmes termes de l'équation générale. Ainsi, les solutions de petites et grandes déformations sont obtenues à partir de problèmes aux valeurs propres indépendants. On comprend alors pourquoi un raccordement au sens de Van Dycke ne soit pas possible. Il manque un terme de déformation intermédiaire qui permet de faire le lien entre les deux formes de solution et qui ne transparaît dans aucun des deux systèmes d'équations.

Une conséquence importante, mais qui ne semble pas aller de soi, est que les champs mécaniques en grandes déformations en fond de fissure ne sont pas valables si leur intensité est suffisamment faible pour qu'ils restent de petite ou moyenne déformation. De même, un champ de petite déformation n'est pas représentatif des champs mécaniques locaux s'il implique de grandes déformations locales.

10.4.2.2 Raccordement au sens faible

Si le passage au sens fort des solutions de l'élasticité classique aux solutions de grandes déformations n'est pas possible, il peut être possible au sens faible. Dans le cas des petites déformations, nous avons vu que la valeur du taux de restitution est :

$$G_{macro} = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{(1-\nu^2)E} \tag{10.4-40}$$

On peut montrer que dans le cas des grandes déformations cette intégrale vaut :

$$G_{micro} = 2\mu(\frac{b}{n})^{n-1} a_2^{2n} m_2^{2n-1} \frac{\pi}{4} \tag{10.4-41}$$

Les indices "micro" et "macro" indiquant que les contours de calculs des intégrales de Rice sont dans les domaines des petites et grandes déformations.L'intégrale de Rice est un bilan d'énergie qui ne dépend pas de l'hypothèse de petites ou grandes déformations. L'indépendance de cette intégrale sur tout contour restant dans le domaine élastique montre que :

$$G_{micro} = G_{macro}$$

Soit :

$$a_2^{2n} = \frac{1}{2\mu\left(\frac{b}{n}\right)^{n-1} m_2^{2n-1}\frac{\pi}{4}} G \tag{10.4-42}$$

où G est le taux de restitution d'énergie, mesuré par exemple à partir du champ de petites déformations. Cette expression se généralise facilement à tout matériau dont le comportement est donné en petites déformations par une densité d'énergie élastique quelconque W et le comportement en grande déformation par une quantité d'énergie de type GNH.

Plus généralement, il en est de même de tout matériau de comportement macroscopique quelconque mais dont le comportement autour de la pointe de fissure est de type GNH. Dans ce cas, à condition de bien calculer la quantité d'énergie disponible localement, mesurée par J_2 dans la structure, il est possible de remonter à l'amplitude locale a_2 par :

$$J_2 = G_{micro} \tag{10.4-43}$$

Remarque, cas anti-plan : *Dans le cas anti-plan, on montre que l'intégrale de Rice locale vaut :*

$$G = \frac{\mu}{2}\pi a_3^{2n} b^{n-1} \frac{n(2n-1)^{2n-1}(2n^2-2n+1)}{(4n^4)^n} \tag{10.4-44}$$

Le raccordement par l'intégrale de Rice est toujours valable et donne une relation du local au global légèrement différente de la relation en mode plan.

10.4.2.3 Conjecture

Notre étude ne présuppose pas de la nature du mode de chargement à l'infini. Knowles et Sternberg cherchent une solution asymptotique symétrique pour rendre compte de la symétrie particulière de leur problème. De même Geubelle et Knauss présentent d'abord les solutions symétriques avant d'aborder les cas de chargements mixtes. Notre étude souligne bien que sans faire aucune hypothèse sur la nature du chargement, les seules

solutions que nous savons exhiber sont les solutions symétriques. Par référence au cas des petites déformations, on appelle mode I ces solutions. On s'attend à ce que le mode mixte de petites déformations se traduise par des solutions sans symétrie particulière localement. Ces solutions dégénèrent toujours en solutions trivialement nulles dans notre étude. Cela nous amène à penser qu'il n'y a que du mode I localement. Mais ce n'est pas parce que le développement choisi ne met pas en évidence de solutions sans symétrie qu'il n'en existe pas. Stephenson démontre en toute généralité qu'il n'y a pas de champ de déplacement antisymétrique en fond de fissure d'un matériau néo-hookéen. Sa démonstration, valable dans le cas des déformations planes incompressibles, est complètement transposable au cas des contraintes planes incompressibles en remplaçant la pression hydrostatique par la déformation hors-plan. Pour une autre loi, on ne sait rien dire, pour un chargement mixte non plus.

On suppose donc que les chargements mixtes à l'infini sont répercutés localement par des rotations de corps solide. Ce résultat semble validé par les calculs de structure très lourds de Geubelle et Knauss.

Par un raccordement au sens faible, on peut mesurer le coefficient a_2 lié à l'ouverture de la fissure. Il contient toute l'intensité du chargement (K_I, K_{II}). Par une approche au sens faible, il n'est pas possible de déterminer le coefficient a_1. Nous avons pu réaliser une étude numérique qui semble montrer qu'une relation du type :

$$a_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{a_2}} \tag{10.4-45}$$

existe, où α dépend de la non-linéarité du comportement et de la structure étudiée. Mais nous n'avons pas pu justifier ou affiner cette proposition.

Précisons bien notre point de vue. Les coefficients a_1 et a_2 que nous utilisons sont liés respectivement aux exposants m_1 et m_2 de la première méthode d'intégration (10.3-6) - i.e. termes du second et premier ordre respectivement. Geubelle et Knauss définissent la mixité du mode par l'angle de rotation de la fissure localement, donné par un coefficient $a_{12} = a_1/a_2$ lié à la définition du développement (10.3-27) - i.e. a_1 et a_2 termes du premier ordre de y_1 et y_2 respectivement. Ils montrent le caractère assez linéaire de la relation entre a_{12} et le rapport K_{II}/K_I, peu dépendant de la non-linéarité, tant qu'on ne s'approche pas trop du mode II pur. Une extrapolation au mode II pur semble montrer qu'il existe un angle de rotation limite de l'ordre de 75° . Notre démarche s'intéresse plus particulièrement à la relation entre le terme du premier ordre (y_2) et le terme du second ordre (y_1), relation indispensable pour pouvoir tracer un champ mécanique local complet.

En résumé :

1. on ne sait pas calculer a_1 ;
2. il semble qu'une relation entre a_1 et a_2 existe sous la forme donnée par (10.4-45) ;
3. nos calculs semblent justifier qu'il n'existe que des solutions symétriques localement.

Nous proposons la conjecture suivante :

Conjecture : *En mode plan, les seuls champs de déplacement en fond de fissure pour un matériau type GNH, quelle que soit la sollicitation à l'infini, sont des champs de mode I. On généralise cette propriété à toutes les lois de comportement isotropes. En grandes déformations, le mode II pur n'existe pas, de même que tout mode mixte.*

10.5 Analyse qualitative des résultats

10.5.1 Singularités des tenseurs

Dans les cas de non-linéarités faibles ($n < 7/5$), on peut exprimer complètement une solution approchée de n'importe quelle grandeur mécanique. Dans le cas général, seule la solution d'ouverture de la fissure est bien connue. Pour chaque champ, la grandeur la plus singulière est connue explicitement :

$$\left\{\begin{array}{c} \pi_{22} = \mu(\frac{b}{n})^{n-1} a_2^{2n-1} \left[m_2^2 + g^2(\theta)\right]^{n-1} f^{2n-1}(\theta) \left[m_2 c_2 + g(\theta) c_1\right] r^{-m_2} \\ \sigma_{22} = \mu(\frac{b}{n})^{n-1} a_2^{2n} \left[m_2^2 + g^2(\theta)\right]^{n} f^{2n}(\theta) \frac{1}{r} \\ F_{22} = r^{m_2-1} a_2 f(\theta) \left[m_2 c_2 + g(\theta) c_1\right] \\ G_{22} = r^{2(m_2-1)} a_2^2 f^2(\theta) \left[m_2^2 + g^2(\theta)\right] \end{array}\right.$$

On précise :

$$\left\{\begin{array}{c} f(\theta) = (\omega(\theta,n) + k\cos\theta)^{\frac{k}{2}} \sin\frac{\theta}{2} \left[1 - 2k^2 \frac{\cos^2\frac{\theta}{2}}{1+\omega(\theta,n)}\right]^{\frac{1}{2}} \\ g(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\cos\theta+\omega}{\sin\theta} \end{array}\right.$$

On remarque notamment que la plus grande singularité des contraintes de Cauchy ne dépend pas de la nature de la non-linéarité du comportement. Dans le cas où ($n < 7/5$), on doit noter que tous les champs de contraintes et de déformations locaux ont au moins une composante singulière, mais que toutes les composantes n'ont pas la même singularité. Par exemple :

$$\left\{\begin{array}{c} G_{22} \propto r^{2(m_2-1)} \text{ mais } G_{11} \propto r^{2(m_1-1)} \\ \sigma_{22} \propto \frac{1}{r} \text{ mais } \sigma_{11} \propto r^{-1+\frac{1}{n}} \end{array}\right.$$

Ainsi, localement la norme des tenseurs que nous pouvons utiliser est :

$$\left\{\begin{array}{l} \| \underline{n} \| = | n_2 | \quad \text{(vecteurs)} \\ \| \underline{\underline{G}} \| = | G_{22} | \quad \text{(tenseurs)} \end{array}\right.$$

Il s'agit d'une simplification heureuse, puisque ce sont les seules composantes connues explicitement pour toutes les non-linéarités.

10.5.2 Aspect du fond de fissure

Pour l'étude plus particulière de la validité des champs asymptotiques, la valeur de la constante transverse a_1 reste indispensable. Il semble notamment que a_1 est liée à a_2 comme nous le signalions précédemment. Cette dépendance est obtenue à partir d'une comparaison entre calculs de structure et champs asymptotiques. Nous ne présentons pas nos résultats sur ce sujet tant notre étude est partielle et nos calculs trop grossiers par rapport aux moyens numériques que nous aurions dus mettre en œuvre. Une version modeste mais robuste de ce vaste travail a fait l'objet d'une communication à un congrès [III.41].

Dans le cas général, nous imposons a_1 et a_2 et observons qualitativement l'allure des champs asymptotiques en déformant une grille autour du fond de fissure. Le champ à l'infini est contenu dans les valeurs de a_1 et a_2. Pour les besoins de la représentation, on suppose que les champs proposés pour v_1 et v_2 sont valables pour tout n.

On observe essentiellement deux résultats. D'abord, de façon évidente, l'ouverture de la fissure est liée au rapport a_2/a_1. Plus ce rapport est élevé, plus la fissure s'ouvre. On

peut associer cette remarque à la constatation expérimentale que l'ouverture de la fissure est d'autant plus grande en mode I que la déformation à l'infini est grande. On peut l'associer aussi au fait que dans le cas du mode mixte, le mode II vient s'ajouter au mode I dans l'amplitude a_2.

Ensuite, on considère une grille carrée autour du fond de fissure et l'on regarde l'aspect du maillage déformé. En fonction de la non-linéarité n on distingue 2 types de comportement du maillage en fond de fissure, comme l'illustrent les graphes de la figure (10.5-6).

1. Pour des non-linéarités faibles, la fissure a tendance à beaucoup s'ouvrir. C'est le phénomène de "blunting" (ou émoussement) évoqué par Geubelle et Knauss, comportement bien différent de celui que nous aborderons plus loin. Les éléments de fond de fissure supportent une très grande déformation qui permet aux éléments sur le bord libre d'être très peu sollicités. Par contre, près de l'axe des abscisses, les éléments sont en forte traction uni-axiale. A noter aussi que l'ensemble de la matière semble vouloir tourner autour de la fissure.
2. Pour des non-linéarités plus importantes, le fond de fissure est divisé en trois sous domaines. Près du bord libre, les mailles sont soumises à un fort cisaillement. Près de l'axe des abscisses, les éléments semblent peu déformés par une sollicitation uni-axiale et soumis à une légère rotation qui les éloigne du fond de fissure. Entre ces deux zones, une bande étroite de faible largeur permet de passer des faibles rotations aux forts cisaillements.

On admet couramment que les lois GNH peuvent rendre compte du comportement des élastomères dans une gamme de non-linéarités comprises entre 1.2 et 1.6. Des observations locales au microscope confirment l'existence de ces trois domaines pour nos matériaux. Le graphe (10.5-7) est une prise de vue du fond de fissure d'une éprouvette lanière utilisée dans nos essais sous microscope, sollicitée en traction uni-axiale (voir page 27). La photo est prise avant amorçage. Un gravage rectangulaire a été moulé en surface dès la cuisson grâce à un moule gravé. Le réseau de lignes fait initialement 10 μm selon la hauteur et $2.5\mu m$ selon la largeur et apparaît ici en configuration déformée. On observe bien une correspondance entre cette prise de vue et les maillages déformés pour $n > 1$. Il s'agit d'une remarque strictement indicative, aucune mesure fiable n'a pu être faite à partir de ces observations.

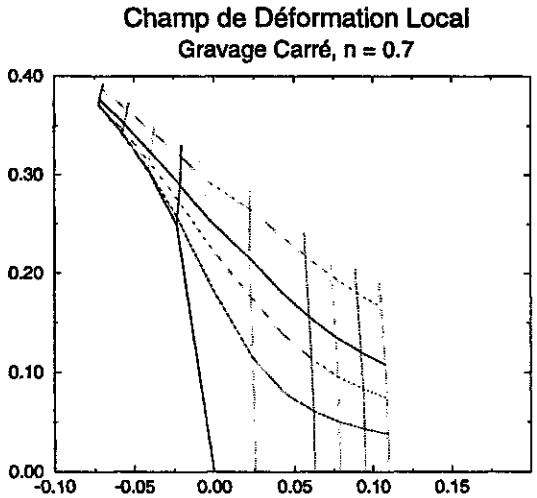
10.5.3 Conservation des directions d'axe

On note une particularité intéressante des champs aymptotiques :

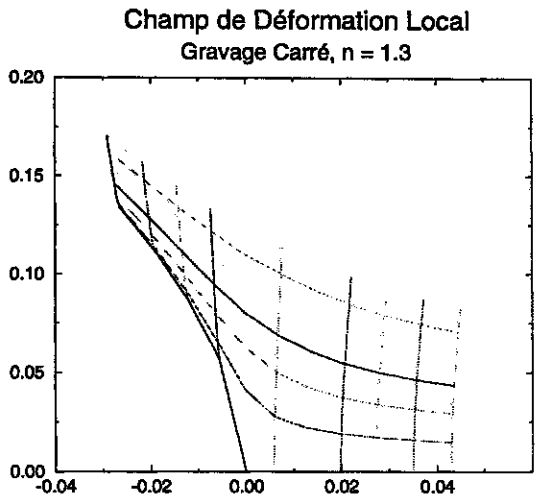
1. d'abord, dans le cas d'un chargement de mode I, l'axe de propagation droite (axe des abscisses) se conserve pendant la propagation. Il s'exprime dans les développements asymptotiques par $v_2(0) = 0$.
2. ensuite on peut regarder de même quel angle θ dans $]0, \pi[$ donne $v_1(\theta) = 0$. On peut remarquer que l'angle θ ne dépend pas de l'intensité de la sollicitation. De plus, il reste toujours proche de $\frac{\pi}{2}$ (voir le graphe (10.5-8)).

Dans le cas général, on ne peut rien dire, un cône d'angle θ n'est pas nécessairement projeté en un cône déformé de même angle, et l'angle du cône déformé n'est pas proche de l'angle du cône non-déformé. On trace sur le graphe (10.5-9) la valeur de l'angle déformée à une distance unité du fond de fissure : c'est-à-dire que l'on reporte :

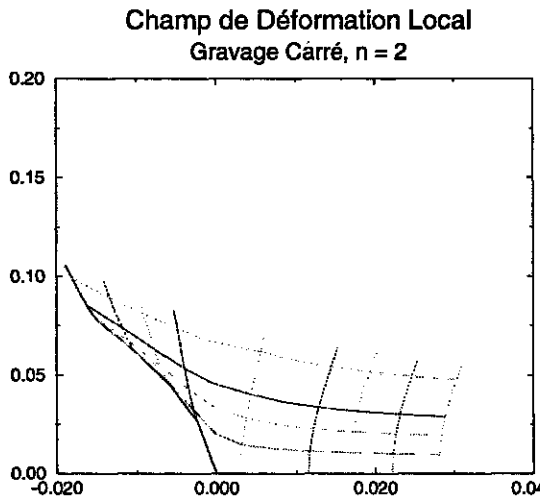
$$\theta = ArcTan(\frac{a_2 r^{m_2} v_2(\theta_0)}{a_1 r^{m_1} v_1(\theta_0)}) \qquad (10.5\text{-}46)$$



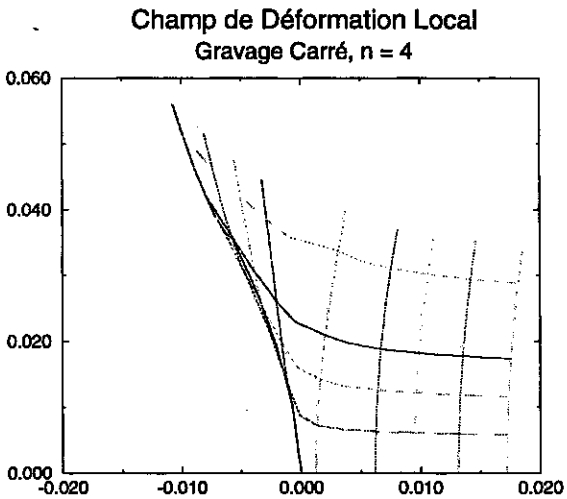
(a) n = 0.7



(b) n = 1.3



(c) n = 2



(d) n = 4

FIG. 10.5-6: Allures du fond d'entaille calculées à partir des développements asymptotiques en prenant les mêmes amplitudes de déplacement pour chaque cas. La représentation suppose que v_1 est valable à tous ordres. Pour $n = 2$ ou $n = 4$, au-delà de la limite de validité du développement de v_1, on retrouve nettement les deux zones de déformation que nous avions observées au microscope. Ces zones existent en fait dès que $n > 1$.

avec les hypothèses simplificatrices : $\begin{cases} a_1 = a_2 \\ r = 1 \end{cases}$ pour plusieurs non-linéarités où v_1 et v_2 sont connues. Près de la lanière, on observe bien une accumulation de matière, contrebalancée par un étalement près de l'angle droit. Plus on se rapproche du fond de fissure, plus cette tendance est prononcée, comme le montre le graphe (10.5-10).

10.6 Conclusion

Il est extrêmement frustrant de voir que dès que l'on sort du cadre proposé de Knowles et Sternberg, les calculs deviennent insolubles ou les solutions triviales. D'autres types de

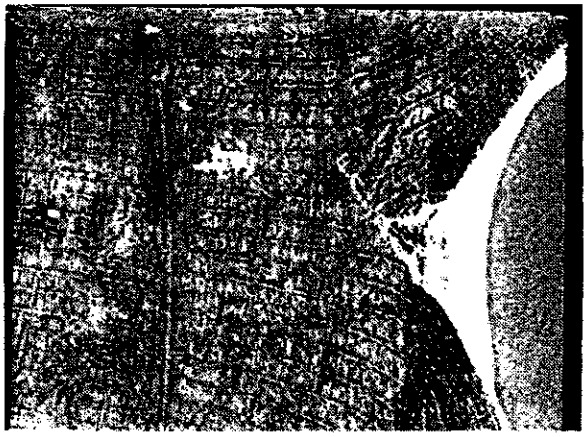


FIG. 10.5-7: Observations du maillage gravé à la surface d'une éprouvette lors des essais. Le maillage montre l'état de l'éprouvette pour une déformation macroscopique de 9 %, avant amorçage. On remarque par exemple l'existence de deux lignes de maillage toujours rectilignes au centre. Elles le resteront pendant tout l'essai qui présentera pourtant une moustache sur le bord supérieur du fond de fissure. Très localement, au niveau du défaut de fond de fissure, les déformations dans la direction de traction atteignent 100 %.

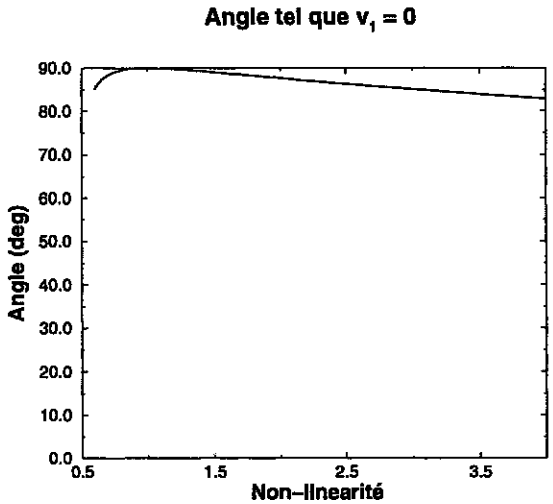


FIG. 10.5-8: Direction angulaire en configuration non-déformée qui se projette sur l'axe des ordonnées au cours de la déformation.

développement devraient être imaginés pour progresser, ceux que nous avons testés ont toujours donnés des solutions triviales.

Mais il nous semble que les résultats obtenus permettent de modifier radicalement notre approche intuitive de la mécanique de la rupture. Le cadre donné par les comportements GNH permet d'envisager une approche plus analytique de la rupture en déformations finies.

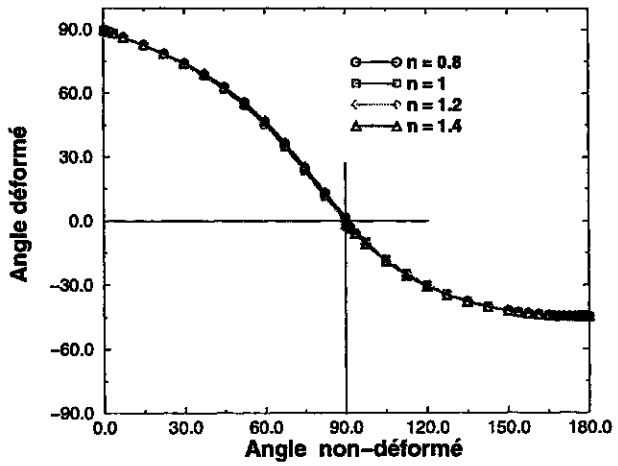


FIG. 10.5-9: On reporte l'angle polaire qui caractérise la position déformée d'un point à une distance unité du fond de fissure, en fonction de l'angle de sa position initiale. Cas où l'on suppose que $a_1 = a_2$.

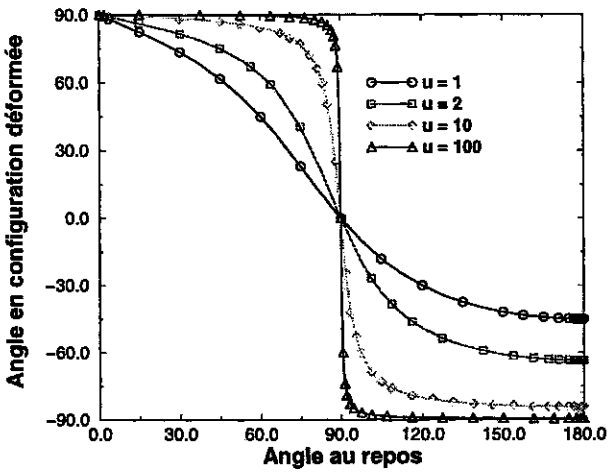


FIG. 10.5-10: On reporte l'angle polaire qui caractérise la position déformée d'un point, en fonction de l'angle de sa position initiale. Cas où l'on suppose que la position déformée du point est définie par $u = \frac{a_2 r^{m_2}}{a_1 r^{m_1}}$.

Chapitre 11

Approche expérimentale en grandes déformations

11.1 Introduction

L'analyse théorique nous a défini et proposé un cadre clair pour étudier la propagation de fissure dans les élastomères. Pourtant les développements expérimentaux divergent sensiblement de la présentation précédente, voire ignorent cette présentation fondée sur des résultats déjà anciens et bien connus. Des raisons historiques bien naturelles justifient cet état de fait.

La difficulté du sujet dans le cas des élastomères (grandes déformations mais aussi importante dissipation) a entraîné le développement d'un concept proche du taux de restitution (on pourra dire une définition d'usage du taux de restitution), mais plus simple, sur lequel sont venus se greffer beaucoup de résultats et quelques réussites. Notre étude bibliographique a permis de montrer que les idées clés utilisées n'avaient pas vraiment été validées, faute de moyens numériques.

Nous présentons d'abord notre analyse bibliographique[1] sur la mécanique de la rupture des élastomères telle qu'elle a été développée, indépendamment des investigations menées sur les matériaux en petites déformations. Puis nous abordons une réflexion critique de ces résultats, sur la base du calcul de structure et de l'analyse du chapitre précédent.

11.2 Outil d'étude : la force de déchirabilité

11.2.1 Genèse du concept

Notre présentation sera chronologique. Nous espérons par ce moyen aborder progressivement les hypothèses successives telles qu'elles sont admises encore aujourd'hui avec les validations qui en sont faites.

Depuis les années 20 au moins, on s'est intéressé à la déchirabilité des élastomères. A cette époque, la structure microscopique de ces matériaux n'était pas encore universellement admise. En 1922, Tuttle [III.60] étudie des éprouvettes entaillées et caractérise la rupture par une déformation macroscopique. A la même époque, Zimmerman [III.63] utilise une mesure du travail pour rompre l'éprouvette. Puis Ayres en 1927 considère la force à rupture. Il semble être l'un des premiers à penser que l'étude de la rupture doit être faite en regardant à une échelle locale près de la zone de propagation fortement déformée : c'est cette idée qui l'amène à utiliser des forces plutôt que des déformations ou

[1] A caractère essentiellement expérimentale.

un bilan global d'énergie. En 1934, Busse [III.8] franchit un pas important en émettant des hypothèses simplificatrices : il suppose que le matériau est un matériau idéal de haute élasticité qui reste isotrope pendant la traction. Cela implique par exemple que les propriétés à rupture sont indépendantes de la vitesse d'essai, mais aussi que le matériau a un comportement homogène isotrope. Il semble que les hypothèses de Busse soient restées très présentes par la suite dans l'étude de la propagation de fissure. Elles ont l'avantage de simplifier considérablement le cadre théorique et expérimental des études. Notons aussi que c'est dans ce même article [III.8] que la rotation de fissure semble être citée pour la première fois.

A la fin de la seconde guerre mondiale, les chercheurs du BRPRA[2] ont commencé à travailler sur l'étude de la déchirabilité, plus particulièrement sur du NR (époque des balbutiements des caoutchoucs synthétiques). Des tentatives de description étaient à l'étude avec peu de succès. Ils voulaient trouver une mesure correcte de la notion de déchirabilité, voire mettre en évidence l'aspect intrinsèque du phénomène. Dans un article de 1953 [III.47], Rivlin et Thomas remettent au goût du jour les travaux de Griffith et définissent pour la première fois sur les polymères la notion de force de déchirabilité. En s'inspirant des travaux de Griffith et à partir d'un raisonnement physique, Rivlin et Thomas notent que dans le cas des matériaux complexes tels les élastomères, la variation d'énergie élastique en cours de propagation doit être représentative de l'énergie mise en jeu pour faire avancer la fissure, en incluant tous les phénomènes dissipatifs associés à la présence de la fissure (plasticité éventuelle) et à sa propagation (visco-élasticité, endommagement...). Rivlin et Thomas définissent donc la force de déchirabilité comme variation de l'énergie élastique stockée par unité de longueur propagée :

$$T = -\frac{1}{b}\frac{\partial U_{elas}}{\partial A} \tag{11.2-1}$$

b épaisseur de la structure. Dans l'hypothèse d'un comportement élastique, la force de déchirabilité coïncide avec le taux de restitution d'énergie. Dans le cas général, la force de déchirabilité est un outil de travail très différent de l'objet thermodynamique qu'est le taux de restitution d'énergie.

Leur article de référence montre le caractère intrinsèque de la force de déchirabilité sur des élastomères non-chargés, dont le comportement est considéré comme élastique, ce qui permet de ne pas trop s'éloigner du cadre idéal figé par Busse où la définition de la force de déchirabilité est proche du taux de restitution. Leur travail prend toute sa dimension en proposant des géométries d'éprouvettes qui permettent de faire des estimations de la force de déchirabilité sans avoir recours à un travail approfondi sur la loi de comportement ou le calcul de structure. Non seulement Rivlin et Thomas proposent une quantité mesurable pour décrire la rupture, mais aussi ils fournissent un éventail de géométries[3] qui permet de vérifier le caractère intrinsèque de leur critère.

Les éprouvettes de validation de Rivlin et Thomas sont les deux géométries les plus couramment utilisées parmi les 5 que l'on peut répertorier actuellement (figure (11.2-1)). Leur choix se porte sur la valeur seuil de propagation catastrophique de la force de déchirabilité pour laquelle on obtient une valeur indépendante de la géométrie et qui est une quantité bien définie pour du NR.

Depuis cet article, il n'est plus question d'étudier autrement la déchirabilité que par le biais de la force de déchirabilité. Le pas vers les matériaux actuels est franchi par Greensmith et Thomas [III.24] un peu plus tard, qui donnent les premiers résultats ex-

[2]Britsh Rubber Producers' Research Association.

[3]En fait deux, mais d'autres viendront rapidement.

périmentaux de mesure de la force de déchirabilité avec comme variable d'étude la vitesse de propagation de fissure. Les auteurs montrent clairement qu'il existe un seuil en dessous duquel la propagation est saccadée (stick-slip) et au-dessus duquel la propagation se fait à vitesse constante. Les éprouvettes d'essais sont les éprouvettes dites pantalons, dont on peut contrôler la vitesse de déchirement en moyenne. Ils ne posent pas la question du mode de calcul de la force de déchirabilité dans les cas de propagation saccadée. Cela ne viendra que plus tard, avec par exemple [III.52]. Nous reviendrons plus précisément sur ce point dans la dernière partie de ce mémoire.

Le pas définitif vers les élastomères synthétiques chargés est franchi l'année suivante par [III.25]. Dans cet article, Greensmith applique le critère de Rivlin et Thomas aux matériaux chargés. L'auteur note que les effets intéressants des charges sont de trois ordres. Les charges contribuent à :

1. une modification de la raideur ;
2. une modification de la contrainte de rupture ;
3. l'introduction d'une anisotropie de déchirabilité.

Il ne mentionne pas l'influence de la dissipation et suppose comme acquis que le calcul élastique est valable pour les matériaux qu'il teste. En particulier, il ne vérifie pas le caractère intrinsèque de la force de déchirabilité. Ses essais sont réalisés sur plusieurs élastomères et des éprouvettes pantalons. Nous reverrons ses résultats expérimentaux plus loin dans notre étude de la rotation de fissure.

Un peu plus tard, dans la continuation des articles fondateurs du BRPRA, Mullins dans [III.43] étudie le rôle de l'hystérèsis dans les propriétés de déchirabilité des caoutchoucs. On pourrait s'attendre à une discussion de l'influence de la dissipation sur le calcul de T, mais ce point n'est pas soulevé. Dans cette étude, l'équivalence temps-température de la déchirabilité est mise en évidence dans la continuation de l'étude de l'équivalence temps-température des propriétés ruptures de T.L. Smith [III.51].

11.2.2 Approche locale de Thomas

En conclusion de leur article, Rivlin et Thomas précisent bien que le caractère intrinsèque de la force de déchirabilité n'est établi que si la forme du fond d'entaille est standardisée. Cette limitation annonce un deuxième article fondateur pour la mécanique de la rupture des élastomères. Dans [III.58], Thomas donne une correspondance entre la force de déchirabilité et le comportement local en pointe de fissure. Pour un matériau élastique jusqu'en pointe d'entaille et une fissure semi-circulaire de diamètre d, il établit que :

$$T = W_t.d \tag{11.2-2}$$

où W_t est l'énergie élastique stockée sur le bord de l'entaille correctement moyennée. Le calcul de Thomas est un calcul approché, précurseur à l'intégrale de Rice. Le raisonnement peut s'étendre à un fond de fissure de forme arbitraire, pourvu que le procédé de moyenne soit correctement établi, et donne alors une dimension caractéristique au fond de fissure, notée $< d >$ telle que :

$$T =< W_t > . < d > \tag{11.2-3}$$

Thomas vérifie son critère sur des élastomères non-chargés, avec des éprouvettes "entaillées" dont les fonds d'entaille sont semi-circulaires de rayon 1.123 cm ! Il montre qu'en considérant un comportement de type Mooney-Rivlin et en supposant que chaque élément de matière est en extension simple en fond d'entaille, alors le calcul de $W_t.d$ est en

adéquation avec un calcul global de T. Remarquons que dans le cas des grandes déformations locales, l'hypothèse d'extension simple est vérifiée localement d'après nos calculs asymptotiques.

De nombreux auteurs ont repris son calcul sur toute sorte de matériaux et l'invoquent systématiquement pour expliquer des écarts "à la normalité" selon un raisonnement qui nous semble fallacieux et implique que la grandeur intrinsèque serait plutôt W_t [III.23]. Ils interprêtent des écarts entre différents essais en discutant sur d. Ils expliquent par exemple les fortes valeurs de T dans les cas d'émoussement du fond d'entaille (que nous aborderons plus loin) au fait que l'émoussement accroît d, donc T.

Ce raisonnement est faux. Si l'émoussement peut accroître T, ce n'est pas la formule de Thomas qui l'explique mais un raisonnement physique et la formule de Rice : l'émoussement atténue la sévérité des champs locaux pour une même valeur de l'intégrale de Rice assez loin du fond de fissure, de sorte que si le critère de propagation est local, le seuil local est atteint pour un T plus grand au niveau macro. Dire que T croît dans les cas d'émoussement, c'est seulement affirmer que la propagation dépend de la sévérité des champs locaux, et préciser que par local on doit entendre une échelle de longueur de l'ordre de l'émoussement. De même, on doit discuter de la variation de d entre éprouvettes ou types de test par l'argument ci-dessus et pas par la formule de Thomas. En pratique, il s'agit d'un point de détail, i.e. le raisonnement est faux mais la conclusion peut être correcte si l'on admet que le critère est intrinsèque et ne dépend que du seul paramètre diamètre caractéristique défini par la formule de Thomas.

11.2.3 Etat des lieux récent

Dans la suite de ces travaux, le taux de restitution d'énergie est devenu un paramètre incontournable pour tous les types d'élastomères. Dans une conférence de 1994 [III.59], Thomas fait le bilan de la mécanique de la rupture appliquée aux élastomères. Les points clés du développement de la connaissance sur la déchirabilité passent selon lui par les articles fondateurs déjà cités [III.47] et [III.58]. Il est à noter que depuis le début des années 60, le critère de Rivlin et Thomas ne semble pas avoir été remis en cause. Cela témoigne surtout d'une impuissance manifeste qui provient, comme le note Stacer et co. dans [III.52], de l'impossibilité d'avoir des outils locaux à cause de la nature complexe du comportement et de l'effet conjugué des grandes déformations. Cette limitation est encore présente et justifie les nombreuses expériences réalisées sur des éprouvettes particulières qui permettent de limiter au minimum l'effort de modélisation du matériau au profit de la structure. Les regrets de Stacer témoignent d'une méconnaissance des résultats théoriques de Knowles et Sternberg. Cet état de fait courant s'explique par l'absence de diffusion des articles de Knowles et Sternberg vers les spécialistes de la rupture dans les élastomères.

Quelques auteurs se sont plus récemment intéressés au rôle de la dissipation et mentionnent explicitement que leurs calculs de G est un calcul corrigé dans lequel on ne prend que l'énergie sous la courbe de décharge des essais de traction (voir par exemple [III.16, III.29]). Ce genre d'idée suppose que l'on néglige les phénomènes locaux de la dissipation près de la pointe d'entaille. Il ne fait pas référence notamment aux calculs d'Andrews [III.2, III.3, III.4] (voir page 97). On comprend avec notre loi de comportement que cela peut-être un meilleur calcul, mais ce n'est pas sûr. On comprend surtout qu'il est indispensable de faire un calcul complet pour quantifier plus explicitement la part de la dissipation dans le taux de restitution d'énergie.

D'autres, et c'est le cas courant, supposent qu'une accommodation du comportement doit permettre de limiter l'influence de l'hystérèsis. D'après le modèle de comportement

que nous avons présenté cela ne semble pas évident. L'anisotropie induite par les prétractions peut intervenir. De même l'erreur que l'on commet en supposant que le comportement accommodé est valable en dehors de la zone d'accommodation doit modifier la mesure de la déchirabilité.

11.2.4 Eprouvettes types et calcul de T

Associé au cadre fixé par Rivlin et Thomas, il existe couramment cinq éprouvettes qui permettent de réaliser des essais où l'on peut faire une estimation de la déchirabilité. Le graphe (11.2-1) les représente. Sur les cinq, trois sont vraiment d'usage très courant et nous allons en présenter deux plus en détail. Il est intéressant de comprendre :

1. comment la valeur de T est calculée ;
2. dans quelle mesure les hypothèses de calcul sont toujours vérifiées ;
3. quel écart on doit attendre entre T et le taux de restitution d'énergie J_2 tel qu'on a pu le définir à partir des modèles visco-élastiques.

On utilise systématiquement pour chaque structure le calcul du taux de restitution obtenu sous l'hypothèse d'un comportement élastique. Les éprouvettes les plus courantes sont sollicitées en mode I (éprouvette PS - force de déchirabilité constante) et en mode III (éprouvette pantalon - force de déchirabilité fonction de la force appliquée).

11.2.4.1 Cas des éprouvettes PS

Les éprouvettes PS sont des rectangles d'élastomère de longueur très supérieure à la largeur, entaillés à mi-largeur sur une longueur importante. Elles sont testées en mode I, le plus souvent en encastrant les deux bords de traction dans des mors à serrage pneumatique ou mécanique. Les essais sont réalisés en traction monotone, en relaxation ou fluage (couramment plutôt traction et relaxation). Dans le cas de la relaxation, on observe longtemps après l'amorçage les temps de passage de la fissure sur des graduations prédéfinies sur l'éprouvette. On en déduit la vitesse de propagation de la fissure, assez constante sur une grande longueur de lanière. Chicheportiche [III.10] montre plus précisément qu'il y a un ralentissement sensible de la vitesse dans les premiers millimètres après l'amorçage. La déformation de relaxation choisie est associée à une densité d'énergie élastique stockée W_0 et un petit calcul montre que :

$$T = W_0 l_0 \tag{11.2-4}$$

où l_0 est la hauteur au repos de l'éprouvette. Les vitesses mesurées peuvent aller de 10^{-6} cm/s à quelques centimètres par seconde. Nous détaillons le calcul de (11.2-4) dans un cas plus compliqué plus loin. Il est réalisé sous les hypothèses :

1. d'un comportement élastique ou visco-élastique ;
2. d'une propagation droite ;
3. d'un essai de relaxation.

L'estimation de W_0 peut se faire de deux façons :

1. soit en faisant le même essai avec une éprouvette saine et une vitesse de traction très faible. A partir de la courbe force-déplacement, on peut déterminer W_0.
2. soit en faisant comme précédemment, mais sur une gamme de déformation large. On estime alors les coefficients de la loi de Mooney-Rivlin associée, qui permettent ensuite d'avoir accès à W_0 pour toute une plage de déformations.

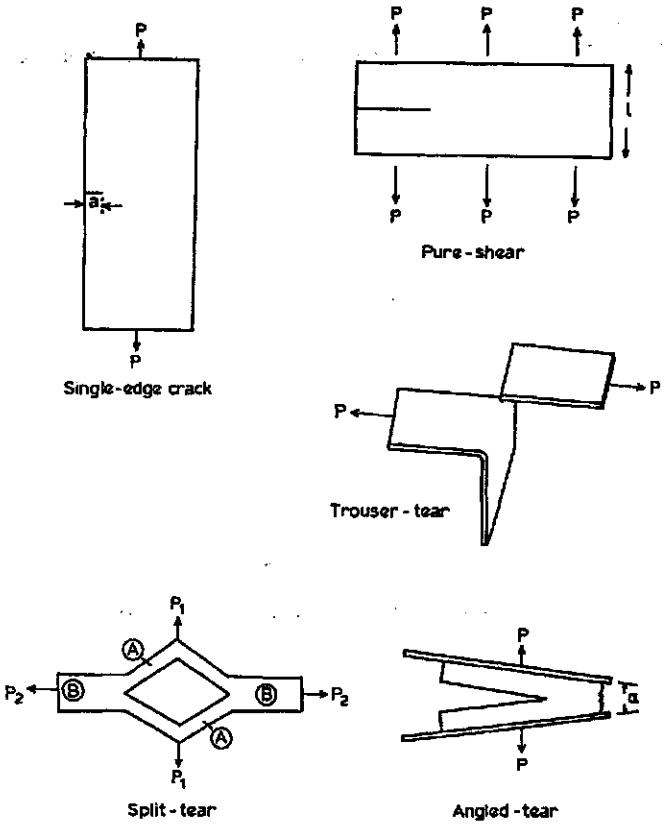


FIG. 11.2-1: Les 5 éprouvettes les plus courantes pour étudier la déchirabilité des élastomères. Les déchirabilités sont données par les formules suivantes (λ déformation macroscopique d'essai, t épaisseur) :

- Single edge crack test piece, ou éprouvette lanière :

$$T = 2K(\lambda)W_0(\lambda)\ ,\ K(\lambda) = \frac{\pi}{\sqrt{\lambda}}$$

- Pure shear test piece, ou épouvette PS :

$$T = W_0(\lambda)l_0$$

- Trouser tear test piece, ou éprouvette pantalon :

$$T = 2\frac{P}{t}$$

- Split tear test piece :

$$T = \frac{\lambda_A^2 + \lambda_B^2}{2t}\left(\sqrt{P_1^2 + P_2^2} - P_2\right)$$

λ_A (resp λ_B) extension de la branche A (resp B).

- Angled tear test piece :

$$T = 2\frac{P}{t}\sin\frac{\alpha}{2}$$

Il est à noter que souvent la densité d'énergie n'est pas obtenue à partir d'une vitesse infiniment lente, mais simplement d'une vitesse usuelle faible. Il reste toujours une contribution visqueuse à la densité obtenue, mais non-mesurée. Dans certains cas, T donnée par (11.2-4) est encore utilisée pour la traction uni-axiale, ce qui est faux (hypothèse de déplacement imposé non-vérifiée). Nous nous proposons, à partir de cette éprouvette qui

donne des calculs simples, de bien montrer la différence entre les différentes mesures de déchirabilités déjà définies.

On peut bien penser que pour les matériaux peu dissipatifs comme les SBR non-chargés, la formule (11.2-4) est correcte et coïncide également assez bien avec le taux de restitution d'énergie. Dans le cas des SBR chargés, ou du NR qui cristallise, il se produit des phénomènes d'endommagement qui perdurent même pour des vitesses très faibles et peuvent représenter une part non-négligeable de l'énergie fournie (plus de 20 % par exemple). Le cas du matériau M2, présenté en exemple dans la partie comportement de notre étude, donne une estimation de la part de l'hystérèsis que l'on peut obtenir même à des vitesses très faibles : pour la plus petite vitesse présentée, le test à 200 % dure plusieurs heures. Il s'agit en outre d'un endommagement global qui vient s'ajouter aux endommagements locaux provoqués par la présence de la fissure.

Notre présentation permet de définir trois mesures de déchirabilité :

1. dans le cas le plus courant, on reprend la définition littérale de Rivlin et Thomas. L'énergie élastique est cependant considérée comme étant la courbe de première traction ou la courbe de traction accommodée sur l'éprouvette PS saine.

2. un cas jugé plus fiable, utilisé par exemple par Kadir et Thomas [III.29] reprend la définition littérale de Rivlin et Thomas et associe l'énergie élastique à l'aire sous la courbe de décharge des essais de traction depuis l'état naturel. Ce calcul est peu différent du calcul précédent avec comportement accommodé. Dans ce cas cependant, on admet l'existence d'une dissipation mais l'on ne remet pas en cause la formule (11.2-4).

3. la définition que nous proposons s'appuie plus rigoureusement sur le bilan d'énergie séparant bien les contributions des différentes énergies à J_2 dans le cas dissipatif, ce qui est possible à partir d'un calcul de structure.

Le graphe (11.2-2) illustre notre propos. Il montre trois façons de calculer T à partir des 2 premières possibilités ci-dessus, de (11.2-4) et des différentes façons de mesurer W_0.

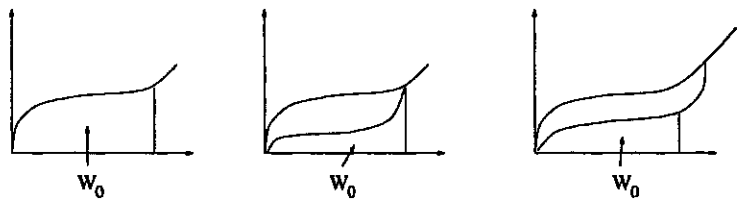


FIG. 11.2-2: Différentes estimations de W_0 dans (11.2-4).

En général, les auteurs qui ne précisent pas leur mode de calcul utilisent la première estimation de T mais ne prennent pas toujours la peine de dire si le comportement est accommodé ou non et éventuellement comment il a été accommodé. De même on ne sait jamais si c'est bien la courbe de charge à vitesse quasi nulle (par exemple $10^{-5}s^{-1}$) qui est ajustée ou une courbe à vitesse usuelle encore assez loin de la vitesse nulle (essai quasi-statique, voir page 45). Dans le cas dissipatif, nous reprenons la démonstration de la formule (11.2-4).

On distingue généralement trois zones dans les éprouvettes PS (voir figure (11.2-3)). On repère pour chaque zone son énergie élastique stockée W_e et son énergie dissipée sur toute l'histoire W_d. La zone A est considérée comme au repos à l'amorçage, soit :

$$W^0_{e,A} = 0 \ , \ W^0_{d,A} = 0$$

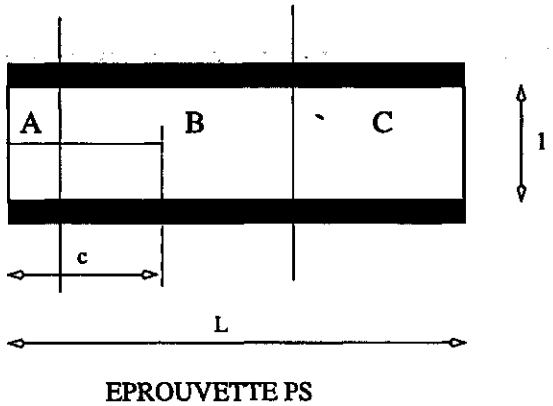


FIG. 11.2-3: Définition des différents domaines impliqués dans le calcul de la déchirabilité pour une éprouvette PS.

La zone B est une zone de déformation complexe qui se transporte dans la propagation. Elle est repérée par les énergies :

$$W^0_{e,B} \ , \ W^0_{d,B}$$

La zone C est une zone en déformation de cisaillement pur :

$$W^0_{e,C} \ , \ W^0_{d,C}$$

Soit une première propagation de dc. L'effet local de l'endommagement apparaît et modifie légèrement l'état de déformation en B, mais de façon faible. On suppose que la zone C n'est pas affectée par l'effet local de l'endommagement, de même que A. Alors, une portion dc de B est transportée en A. La portion précédente de A est inchangée. La nouvelle portion de largeur dc a une dissipation non-nulle :

$$W^1_{e,A} = 0 \ , \ W^1_{d,A} = w_{d,B}.dc$$

La zone B est quasiment transportée en une zone semblable.

$$W^1_{e,B} \approx W^0_{e,B} \ , \ W^1_{d,B} \approx W^0_{d,B}$$

La zone C est simplement plus courte de dc mais reste en cisaillement pur.

$$W^1_{e,C} = W^0_{e,C} - w_{e,C}dc \ , \ W^1_{d,C} = W^0_{d,C} - w_{d,C}dc$$

Le bilan d'énergie avant rupture est :

$$W^0_e = W^0_{e,B} + W^0_{e,C}$$

$$W^0_d = W^0_{d,B} + W^0_{d,C}$$

Après rupture :

$$W^1_e \approx W^0_{e,B} + W^0_{e,C} - w_{e,C}.dc$$

$$W^1_d \approx w_{d,B}.dc + W^0_{d,B} + W^0_{d,C} - w_{d,C}.dc$$

Soit un taux de restitution d'énergie :

$$J_2 \approx w_{e,C} + w_{d,C} - w_{d,B} \tag{11.2-5}$$

On peut également écrire, par analogie avec le calcul en élasticité :

$$J_2 \approx W_{e0}.l_0 + W_{d0}.l_0 - w_{d,B} \tag{11.2-6}$$

où les termes W_{e0} et W_{d0} sont les quantités respectivement stockée et dissipée par unité de volume dans la zone de cisaillement pur loin de la pointe de fissure. $w_{d,B}$ est une quantité dissipée qui doit être plus grande que $W_{d0}.l_0$.

Pendant la propagation, le même raisonnement que ci-dessus s'applique. La principale différence doit tenir à $w_{d,B}$. En effet, après une propagation longue, d'une largeur au moins équivalente à la largeur de B, $w_{d,B}$ doit devenir une constante. Par contre, juste après l'amorçage, $w_{d,B}$ doit être croissant (la frontière gauche de B se propage vers le fond de fissure initial et reste dans une zone moins déformée qu'en C du fait de l'ouverture de la fissure avant l'amorçage). En définitive, le taux de restitution d'énergie dans le cas dissipatif doit être d'abord décroissant puis tendre vers une constante. Cette constante est plus petite que la constante du calcul élastique à cause du rôle de $w_{d,B}$. La rapidité de convergence du taux de restitution vers une constante peut nous renseigner sur la largeur de la zone B.

De la même façon, la force de déchirabilité est :

$$T \approx W_{e0}.l_0 \tag{11.2-7}$$

avec égalité loin de l'amorçage. On retrouve bien la formule (11.2-4), mais cette fois-ci avec W_e définie par l'aire sous la courbe de décharge. C'est bien la grandeur utilisée dans le second cas de figure proposé.

Ces calculs sont valables tant que l'on peut supposer que la région A reste au repos pendant l'état naturel. Nous verrons notamment que la relation $T = W_0 l_0$ est valable pour une éprouvette PS sollicitée en cisaillement pur ou en traction uni-axiale[4]. Dans le cas élastique, si à la région A peut être associée une densité d'énergie élastique W_A, alors le taux de restitution est modifié en :

$$T = [W_0 - W_A]l_0 \tag{11.2-8}$$

cette formule se démontre comme précédemment et sera validée numériquement plus loin.

La comparaison de T et J_2 sur ce cas particulier doit nous faire réfléchir sur le caractère intrinsèque de l'une ou l'autre des deux grandeurs. La seule grandeur représentative de la fissure seule est J_2 ; T inclut en plus de la dissipation par propagation de la fissure les termes de dissipation globale.

11.2.4.2 Cas des éprouvettes pantalons

Dans les cas courants, les essais sur éprouvettes PS sont souvent comparés aux essais sur éprouvettes pantalons. Partant du principe que le taux de restitution d'énergie est une quantité intrinsèque au matériau, cela semble légitime. L'objet de l'article de référence de Rivlin et Thomas [III.47] consiste précisément à montrer le caractère intrinsèque de G par la comparaison de ces deux types d'éprouvettes. Avec nos matériaux, tous les auteurs ne semblent pas retrouver les résultats de Rivlin et Thomas. Par exemple, Gent et Kim dans [III.16] n'hésitent pas à comparer deux essais sur éprouvettes PS et pantalon pour lesquelles ils trouvent :

$$T_{Pantalon} = 2T_{PS} \tag{11.2-9}$$

[4]Une éprouvette PS est toujours sollicitée en cisaillement pur. Nous ne connaissons pas de mors adaptés à la traction uni-axiale sur ces éprouvettes. Le calcul de structure nous permet d'imaginer ce type de test.

Leur explication de cet écart est symptomatique et se fonde sur le critère local de Thomas. Ils indiquent d'abord que la vitesse de propagation de la déchirure est dix fois plus grande avec les éprouvettes pantalons que PS. Mais ils signalent ensuite que T varie peu sur la plage de vitesse de propagation considérée. Leur interprétation se dirige rapidement vers la nature du fond d'entaille et s'attarde sur le faux-sens courant de l'expression locale de Thomas [III.58] dont nous avons discuté précédemment. Pourtant, beaucoup d'autres raisons peuvent être évoquées sans remettre en cause l'intérêt de T. Par exemple, il faut revoir le calcul de la déchirabilité en regardant l'influence de la visco-élasticité et inclure la dissipation. De même, les hypothèses aboutissant au calcul de $T_{Pantalon}$ ne sont peut-être pas vérifiées. Enfin, la mécanique de la rupture fragile nous enseigne qu'en petites déformations, mode I et mode III ne sont pas équivalents. Ainsi, s'il est difficile de parler de mode de propagation avec nos matériaux, on peut au moins admettre que les éprouvettes PS mènent à des séparations en traction des lèvres de la fissure, alors que les éprouvettes pantalons les séparent plutôt en cisaillement. Ce type d'interprétation est redoutable. Il mène les auteurs à occulter le vrai problème du sens de T en se dirigeant vers des quantités locales non mesurables à partir desquelles tout s'explique mais seulement "avec les mains". Enfin, nous aurons l'occasion plus loin de relever une autre particularité du protocole expérimental utilisé par Gent et Kim qui pourra convaincre que les mesures ne sont de toute façon pas significatives du matériau mais seulement de la structure.

Dans quelle mesure le calcul non-dissipatif du taux de restitution intervient-il dans l'écart constaté ? Quelle est la valeur correcte de J pour les éprouvettes pantalons et celle de T ? Peut-on modifier les résultats pour avoir une base de comparaison sérieuse ? Le premier calcul de T pour les éprouvettes pantalons est dû à Rivlin et Thomas dans [III.47]. Ils montrent qu'une bonne estimation de T est :

$$T = 2\frac{F}{t} \tag{11.2-10}$$

où t est l'épaisseur de l'éprouvette, F la force mesurée sur une jambe. Cette formule est correcte sous les hypothèses :

1. d'un comportement élastique ;
2. d'une faible déformation des jambes de l'éprouvette.

La démonstration de ce résultat suit la même démarche que le calcul pour les éprouvettes PS. Une estimation visco-élastique du calcul de Rivlin et Thomas n'est possible de la même façon que pour les éprouvettes PS. Pour les éprouvettes pantalons, la dissipation dépend de la vitesse de déformation près de la fissure comme pour les éprouvettes PS. Une estimation de G dans ce cas est également :

$$J_2 = 2\frac{F}{t} - w_d \tag{11.2-11}$$

où w_d est une quantité provenant de la dissipation. Ce résultat est obtenu en gardant l'hypothèse (2) du calcul de Rivlin et Thomas. De même la déchirabilité est mesurée par :

$$T = 2\frac{F}{t} \tag{11.2-12}$$

Les formules données pour T dans la littérature sont donc correctes aussi bien pour les éprouvettes PS que pantalons, à condition de prendre la bonne définition de la densité élastique d'énergie. On peut voir en particulier que dans les comparaisons usuelles entre

PS et Pantalon, le calcul de T pour les PS est généralement faux. Notons que la correction à apporter ne peut pas corriger l'écart constaté par Gent et Kim [III.16] : elle semble au contraire augmenter l'erreur.

Les éprouvettes pantalons ont pour avantage d'être testées en contrôlant la vitesse de déchirement (éventuellement en moyenne comme nous le verrons plus loin) ou la force appliquée et de ne laisser transparaître le comportement que par la mesure de F. Il s'agit notamment d'un type d'éprouvette que l'on ne peut pas tester en relaxation et pour lequel les calculs de la déchirabilité et du taux de restitution d'énergie incluent le déplacement des mors.

11.2.5 Influence de la géométrie sur la déchirabilité

Des études plus complètes sur la nature intrinsèque de T ont été réalisées sur plusieurs classes de matériaux depuis le premier article de Greensmith. Nous reproduisons figure (11.2-4) un résultat expérimental cité par Lake [III.38]. Trois types d'éprouvettes sont testées. Les résultats, reportés sur un graphe (c, T) (et pas (c, J_2) pour nous) en échelle logarithmique sur la vitesse, semblent assez bien se répartir autour d'une courbe unique. Il semble que l'on ait tendance à observer une dispersion plus marquée aux basses vitesses de propagation. Un écart de 0.5 $kJ.m^{-2}$ doit pouvoir être obtenu facilement pour des vitesses un peu plus faibles que celles testées. Remarquons qu'à vitesse équivalente, les éprouvettes PS ont des déchirabilités toujours un peu plus grandes que les pantalons. Ce résultat va à l'encontre de l'observation de Gent et Kim. Par contre, la courbe de Lake nous fait comprendre qu'avec un facteur 10 sur la vitesse comme l'annoncent les auteurs, on peut gommer l'erreur entre les deux éprouvettes et espérer des résultats proches, ce qui n'est pas le cas.

Du fait de l'échelle logarithmique, les écarts constatés sont relativement importants quand on les regarde par rapport à la variable déchirabilité. Une erreur de 0.1 $kJ.m^{-2}$ peut impliquer un facteur d'erreur 5 à 10 sur la vitesse prédite. Par contre, un facteur 2 ou 3 sur la vitesse fait très peu varier la déchirabilité.

Le graphe (11.2-4) correspond à un SBR vulcanisé non-chargé. Les résultats sur élastomères chargés ou qui cristallisent sous contraintes font apparaître très nettement d'autres difficultés que nous aborderons plus loin. Néanmoins, il est pressenti que ce type de résultat est encore valable. Kadir et Thomas [III.29] font une validation de leur mesure de T par la courbe de décharge et trouvent une bonne concordance.

En général, nous avons largement ressenti un flou sur la nature des résultats. Une confusion courante semble exister qui permet d'utiliser indifféremment l'une ou l'autre des mesures de T et de la juger intrinsèque.

Les échelles logarithmiques écrantent énormément les incertitudes sur les résultats. Pour les éprouvettes pantalons, on peut avoir un contrôle a priori de la vitesse de propagation mais l'hypothèse de non-déformation des jambes des éprouvettes est à vérifier dans chaque cas. Un calcul de structure est nécessaire pour vérifier la plage d'admissibilité de cette hypothèse. Nous ne l'avons pas fait à cause de la nature tridimensionnelle du calcul. Moyennant une remarque que nous ferons plus loin sur la méthode de contrôle de l'essai, on peut accepter l'idée que les éprouvettes pantalons permettent d'avoir une vitesse de propagation assez précise. Pour les éprouvettes PS, la détermination de la vitesse de propagation se fait en cours d'essai.

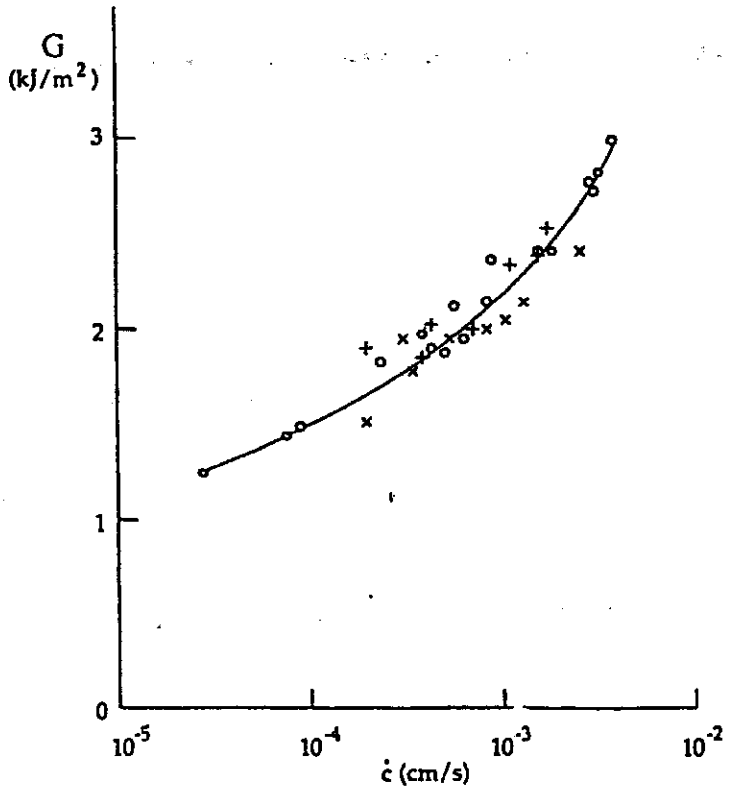


FIG. 11.2-4: Caractère intrinsèque de la déchirabilité. D'après Lake [III.38]. Trois nuages de points pour des essais de propagation de fissure sur trois géométries d'éprouvettes différentes semblent tomber sur une courbe maîtresse. o : éprouvettes PS ; + éprouvettes Split Tear ; x éprouvettes Lanière.

11.3 Analyse numérique de la déchirabilité

11.3.1 Introduction

Nous avons bien insisté sur le fait qu'il y a une nette différence entre le taux de restitution d'énergie J_2 et la déchirabilité T, particulièrement pour les matériaux chargés (donc dissipatifs) que nous utilisons. Certains auteurs que nous avons cités cherchent des définitions plus fines de la déchirabilité mais leur démarche est limitée par le fait qu'ils veulent une quantité directement calculable sur des courbes d'essai, essentiellement les courbes de contrainte/déformation de l'éprouvette testée. Pour interprêter au mieux les résultats disponibles, on peut tenter d'utiliser le calcul de structure. C'est cette démarche que nous souhaitons mettre en place. Elle nous permet d'illustrer l'intérêt de notre loi de comportement et de souligner l'influence de la dissipation dans l'étude de la déchirabité.

Nous souhaitons d'abord mesurer l'écart entre le taux de restitution d'énergie et la déchirabilité. Nous devons plus particulièrement voir si le changement de définition de T à J_2 est sensible. Si c'est le cas, comment résoudre le conflit que l'on pourrait rencontrer entre un T expérimentalement intrinsèque et un J_2 théoriquement intrinsèque ?

11.3.2 Présentation des calculs

Les calculs sont réalisés sur une éprouvette PS entaillée sur une longueur 1/4. Le choix de ce type d'éprouvette est motivé par le grand nombre de résultats expérimentaux connus

sur cette géométrie. La longueur d'entaille est arbitraire mais correspond à une situation où l'hypothèse $T = W_0 h_0$ est valable pour une longueur de propagation appréciable. Les calculs sont réalisés avec l'hypothèse des contraintes planes. Le matériau d'essai est essentiellement le matériau "M2" déjà présenté, en choisissant comme comportement de référence dans nos calculs celui ajusté à 7.7 $10^{-2}s^{-1}$ par la densité d'énergie que nous avons présentée précédemment[5].

Les éprouvettes font 157 mm de long, 13 mm de large et 2 mm d'épaisseur. Elles sont modélisées par un maillage en quadrangle grossier loin de l'entaille et fin et régulier près du fond d'entaille. L'axe de propagation de la fissure est pris comme axe de symétrie du problème. Dans un premier temps, différents maillages ont été testés. Nous avons retenu celui qui permettait de faire des calculs sur une longueur de propagation assez longue avec une bonne fiabilité sur le résultat, en respectant localement les contraintes liées à la validité de la loi de comportement (déformations dans le domaine acceptable pour la loi proposée[6].). Des contraintes sur le temps de calcul, l'espace mémoire et surtout l'espace disque ont également du être prises en compte. Le maillage retenu a pour caractéristique :

2880 éléments, 3007 nœuds, 11 520 points d'intégration (largeur de bande 58). Taille des éléments de fond d'entaille : 0.3125 x .101563 mm. Longueur de propagation possible 9.375 mm par pas de 0.3125 mm.

Les calculs sont réalisés sous ABAQUS avec **la loi de comportement proposée page 65**. On **impose d'abord une déformation globale de relaxation** de l'éprouvette, puis on relâche successivement les nœuds de fond de fissure selon le **trajet de propagation droite**. A chaque étape de libération d'un nœud, on sauvegarde la déformée de toute la structure. A la fin du calcul, à partir des positions déformées on calcule les différentes énergies par une méthode de Romberg dont on peut gérer la précision[7]. Nous avons pu vérifier que le calcul de l'énergie pouvait être réalisé en ne connaissant que la position déformée quand l'équilibre après relâchement d'un nœud est réalisé. Les situations intermédiaires modifient le domaine d'endommagement mais le domaine à l'équilibre en rend bien compte. Les calculs sous ABAQUS sont réalisés en double précision. On peut imposer une précision suffisamment grande sur le calcul des énergies point de Gauss par point de Gauss (10^{-9}) pour avoir une précision suffisante sur chaque énergie globale de la structure (10^{-5}). Ces grandes précisions de calcul permettent (péniblement) d'estimer des taux de restitution à 3 près! Pour calculer G à 3.10^{-2} près, il faut imposer une précision par point de Gauss de 10^{-11}. Si le besoin s'en fait sentir, notre méthode permet d'accéder à une précision de 10^{-3} à faible coût, simplement en choisissant 10^{-12} au lieu de 10^{-11} au début de la méthode. Dans certains cas, la méthode de Romberg échoue à donner cette précision : on accepte alors d'avoir une erreur plus grande sur le taux de restitution. Ces situations sont rapidement détectées par des oscillations anormales (en dents de scie) du taux de restitution sur le trajet de propagation.

La méthode de calcul ci-dessus est à la fois rapide et très efficace. Pour le maillage choisi, on arrive à faire propager une fissure par 30 libérations de conditions aux limites (environ 10 mm) et à calculer l'énergie en moins de 30 minutes sur une HP8000 (180 MHz) et une place mémoire de l'ordre de 70 Mo. Le même calcul à partir d'une énergie définie directement dans la UMAT prendrait de l'ordre de 10 heures avec une précision moins grande sur les énergies et devrait être relancé si la précision d'étude n'était pas assez grande. De plus, la place mémoire nécessaire serait élevée plutôt à 100 Mo minimum.

Par ces remarques un peu techniques, nous voulons faire comprendre qu'il est tout-à-

[5]figure (7.2-6), page 70.
[6]voir page 83.
[7]pour la définition des énergies, voir page 83.

fait possible d'utiliser le calcul de structure pour analyser la propagation de fissure. Une réflexion importante sur la stratégie à suivre a dû être mise en place pour que l'étude à suivre soit faite dans des délais raisonnables. Actuellement, un ensemble de calculs qui étudie l'effet d'une variable ou d'une sollicitation ne prend pas plus de deux jours.

Le maillage retenu nous permet de calculer des taux de restitution d'énergie sur environ 10mm avec une précision meilleure que 2 % pour des déformations de relaxation inférieures à 50 %, précision jugée suffisante pour notre étude, estimée en comparant des calculs sur maillages plus grossiers et plus fins. Quelques calculs sont réalisés avec des déformations de relaxation plus élevées. La précision est dans ce cas plus faible mais nous la considérons toujours suffisante. La longueur de propagation maximale est compatible avec les expériences courantes. Chicheportiche par exemple [III.10] réalise des expériences de propagation sur des distances plus faibles (durée des essais : environ 100h).

De nombreux calculs peuvent illustrer les différences entre les modes de calcul de T. Nous n'étudierons pas toutes les possibilités et nous nous restreindrons à celles qui peuvent préciser des idées générales ou les conséquences de pratiques courantes.

Nous aborderons successivement :

1. le calcul de J_2 et son évolution pendant la propagation ;
2. l'influence de la déformation de relaxation choisie ;
3. l'influence de la vitesse d'ajustement du comportement ;
4. l'influence d'une accommodation ;
5. l'influence d'une pré-traction transverse ;
6. l'influence d'une traction transverse maintenue.

Si les essais asssociés à ces calculs sont simples et clairs, les méthodes de dépouillement sont par contre souvent inexactes ou partiellement expliquées. On peut constater par exemple que les pré-tractions sur éprouvettes PS imposent un taux de restitution, celles sur éprouvettes pantalons plutôt une vitesse de propagation. Certaines études ne mentionnent qu'un seul point d'analyse alors que notre présentation montre d'abord que la déchirabilité doit être considérée comme une courbe $T(v)$. D'autre part certains points, comme la nature de la loi de comportement utilisée ou le mode de calcul de T, ne sont pas spécifiés ou semblent erronnés.

Notre calcul de taux de restitution ne peut pas nous donner de renseignement sur la vitesse de propagation. Il nous est seulement possible **d'analyser les différents modes de calcul de T** et certainement pas par exemple l'existence d'un critère J_c. Cela nous donne aussi une idée de la **contribution du comportement au bilan d'énergie, sans savoir si la situation calculée est effectivement supportable** par la structure. Nos calculs reproduisent quand même assez bien la méthode d'étude usuelle qui consiste à associer un T hyperélastique à une vitesse de propagation.

11.3.2.1 Calculs préliminaires de validation

Pour valider notre méthode de calcul et vérifier en même temps les formules analytiques de calcul de la déchirabilité dans le cas élastique, nous montrons quelques résultats sur éprouvettes PS pour un matériau néo-hookéen.

Nous validons d'abord la formule $T = W_0 h_0$ dans le cas d'une relaxation pour un essai de traction uni-axiale sur la figure (11.3-5). On observe une légère décroissance de la déchirabilité en fonction de la longueur propagée. Cela peut-être attribué au caractère fini de la structure, responsable de légers effets de bords. Cependant, cette décroissance est infime et le calcul de structure approche le calcul analytique à mieux que 0.5 %.

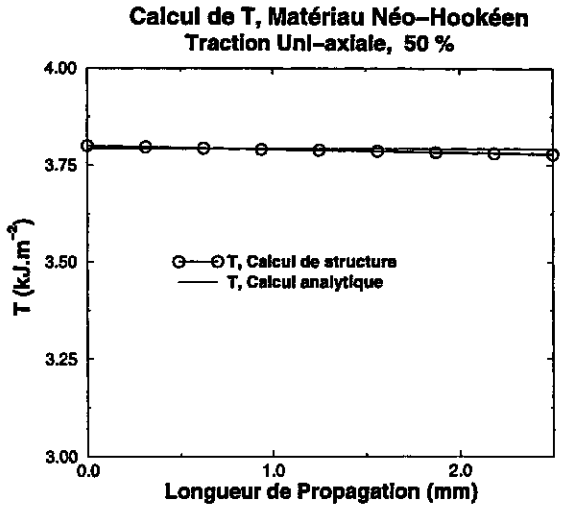


FIG. 11.3-5: Calcul de la déchirabilité en fonction de la longueur de propagation pour une épouvette PS sollicitée en relaxation à 50 % de déformation uni-axiale. Matériau néo-hookéen.

Le même type de calcul est réalisé en cisaillement pur et donne la même précision et la même faible décroissance de la déchirabilité. Nous montrons sur le graphe (11.3-6) une validation de la formule (11.2-8), page 133. On observe le très bon accord des deux résultats. Ces résultats **valident la formule analytique du calcul du taux de restitution d'énergie pour un matériau hyper-élastique dans le cas d'une éprouvette PS.**

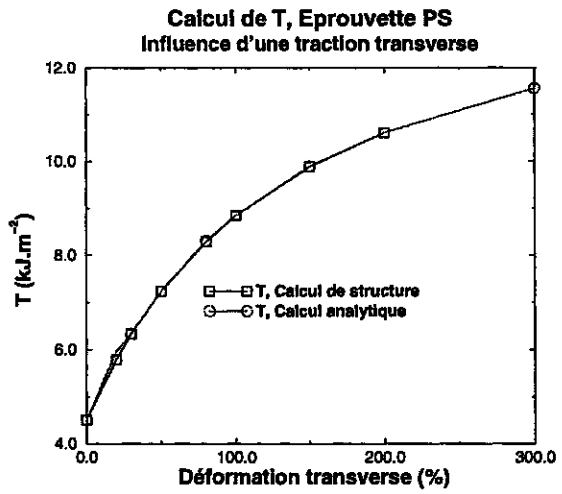


FIG. 11.3-6: Calcul de la déchirabilité en fonction de la déformation de pré-traction transverse pour une épouvette PS sollicitée en relaxation à 50 % de déformation uni-axiale. Matériau néo-hookéen.

Dans le cas des épouvettes lanières, le taux de restitution d'énergie est donné par :

$$G = 2K(\lambda)W_0(\lambda)c \tag{11.3-13}$$

avec λ extension globale de l'éprouvette et $K(\lambda) = \pi/\sqrt{\lambda}$, c longueur de la fissure. Cette formule est correcte si la longueur de fissure est petite devant la largeur de l'éprouvette. Dans nos essais présentés en première partie de ce mémoire, la longueur de fissure n'est pas négligeable et il faut corriger cette expression. Nous montrons sur le graphe (11.3-

7) la forme de $K(\lambda)$ pour deux lois de comportement. Il ne s'agit plus d'une fonction universelle, probablement à cause des effets de bords particuliers à chaque comportement.

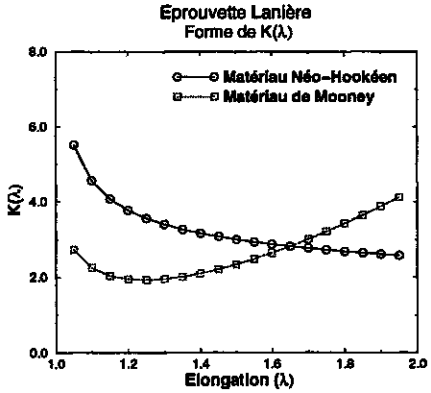


FIG. 11.3-7: Forme de $K(\lambda)$ (voir formule (11.3-13)) pour une épouvette lanière quand la fissure a pour largeur la moitié de la largeur de l'éprouvette. On observe que K n'est plus une fonction de l'extension maximale seule (comme pour les fissures courtes) et **dépend du comportement choisi.**

11.3.2.2 Allure de J_2

Nous considérons désormais des essais de relaxation sur éprouvettes PS pour un matériau dont le comportement est donné par notre modèle de comportement ajusté sur le matériau M2 à 7.7 $10^{-2}s^{-1}$. Le graphe (11.3-8) présente les différentes définitions des énergies T et J_2 telles que nous les avons présentées précédemment :

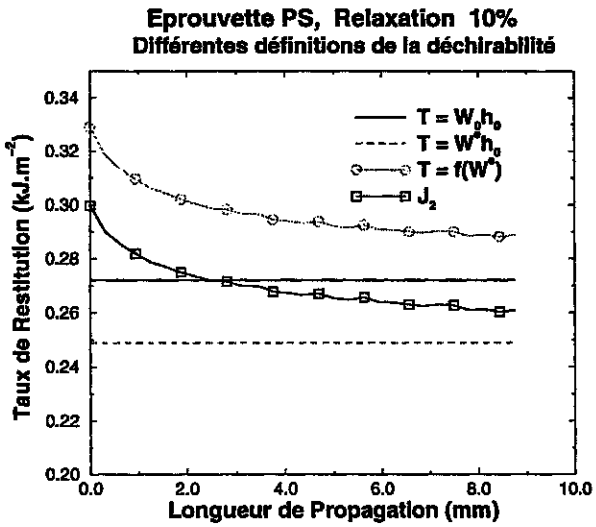
1. la définition de T à partir de la première traction, $T = W_0 h_0$;
2. la définition de T à partir de la courbe de décharge, $T^e = W^e h_0$;
3. la définition de T à partir de la densité d'énergie élastique du matériau dissipatif, $T_f = f(W^e)$;
4. enfin J_2.

Dans un premier temps, on peut confirmer la validité de la formule :

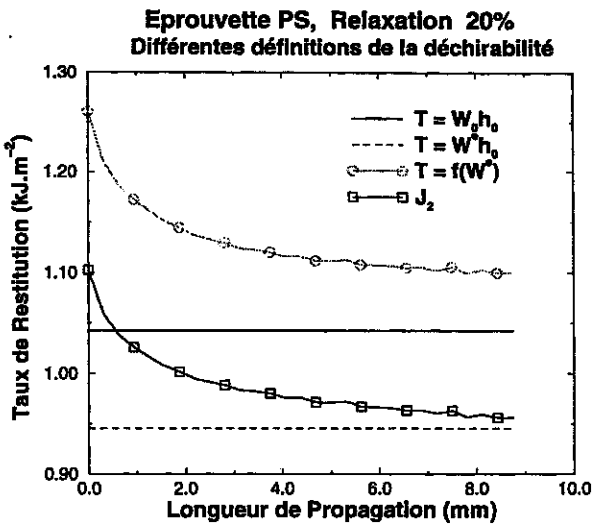
$$T = W_0 h_0 \tag{11.3-14}$$

dans le cas d'un matériau élastique défini à partir de notre loi de comportement. Cette première valeur de T fournit les mesures de référence de notre étude. On peut vérifier aussi que l'éprouvette est bien en cisaillement pur dans la zone de déformation homogène, c'est-à-dire que W_0 est bien calculée à la déformation macroscopique d'essai pour une éprouvette saine en cisaillement pur. La mesure T^e est forcément plus petite que T, également constante par construction. T^e se déduit de T en enlevant la dissipation dans la partie en cisaillement pur de l'éprouvette. Le rapport de T à T^e est donc seulement significatif de la dissipation en volume dans la zone de déformation homogène. La mesure T_f est avant tout une curiosité dont nous ne reparlerons pas dans la suite. Elle permet de bien souligner la différence entre la variation d'énergie élastique stockée, définition initiale de Rivlin et Thomas, et les autres mesures représentées.

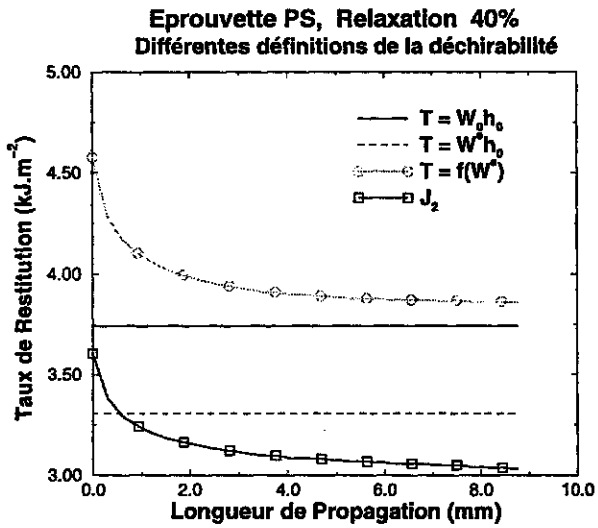
J_2 est une quantité décroissante de la longueur de propagation. Elle est d'abord rapidement décroissante dans les deux à trois premiers millimètres de la propagation puis



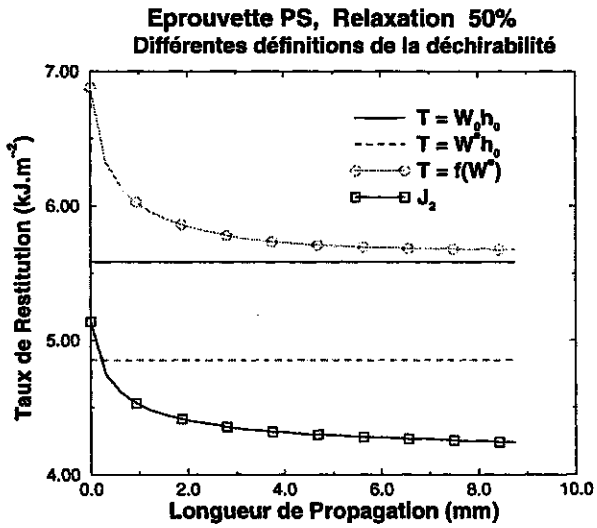
(a) Propagation à 10 % de relaxation.



(b) Propagation à 20 % de relaxation.



(c) Propagation à 40 % de relaxation.



(d) Propagation à 50 % de relaxation.

FIG. 11.3-8: Allure des différentes définitions de déchirabilité dans des tests de propagation de fissure pour des éprouvettes PS en relaxation.

lentement décroissante. Au delà de 6 mm, la décroissance devient du même ordre que celle observée précédemment avec le comportement néo-hookéen (voir graphe (11.3-5)). Il doit donc s'agir d'un effet de structure.

Elle atteint une valeur stabilisée après 8 à 10 mm de propagation à peu près indépendamment de la déformation de relaxation choisie. Cette décroissance est surtout très marquée dans les 2 mm qui suivent l'amorçage. Nous dirons que la valeur stationnaire, soit la valeur de référence "stabilisée", est mesurée à 8 mm de propagation.

De la comparaison de T, T^e et J_2 on peut tirer quelques remarques supplémentaires. Aux faibles déformations d'essai (moins de 30 % dans le cas présenté), J_2 est une quantité d'abord élevée par rapport aux deux autres mesures. Il faut quelques millimètres pour trouver une situation plus intuitive où $J_2 < T$. On vérifie pourtant que dans ce cas la

formule $T = W_0 h_0$ est valable. On peut expliquer ce résultat à partir de T_f. En effet, il est facile de voir qu'au moins à l'amorçage on a toujours $T < T_f$. Aux faibles déformations, notre loi de comportement rend peu compte de la dissipation. Dans ce cas, on rencontre des situations en petites déformations où la contribution de la variation de la dissipation à J_2 est faible et donne $T < J_2$ à l'amorçage. Cette situation reste quand même très liée à la nature dissipative du matériau qui rend la propagation non-autocohérente à l'amorçage et disparaît quand la déformation s'élève. Loin de l'amorçage, on trouve toujours $J_2 < T^e < T$. L'écart entre T^e et T est lié à la dissipation globale. L'écart entre J_2 et T^e est donc lié plus spécifiquement à la dissipation locale autour de la fissure. On doit remarquer que plus la déformation d'essai est grande, plus l'écart entre J_2 et T^e est accru. Dans le cas de la loi de comportement que nous utilisons, jugée peu dissipative, les écarts entre les différentes mesures sont assez faibles dans la gamme de déformations utilisée et sont représentées sur le graphe (11.3-9). Par exemple, pour une déformation d'essai de 60 %, l'écart entre J_2 et T est de 30 %, la partie liée à la dissipation dans la région homogène est de l'ordre de 16 %. Nous avons souvent remarqué un écart équivalent entre (T et T^e) et entre (T^e et J_2). Cette règle donne une bonne idée de la correction à apporter à T. Ce constat est seulement qualitatif pour des matériaux ayant une dissipation usuelle. Pour des matériaux fortement hystérétiques et présentant une forte non-linéarité aux grandes déformations, l'écart entre (T^e et J_2) peut-être nettement plus important.

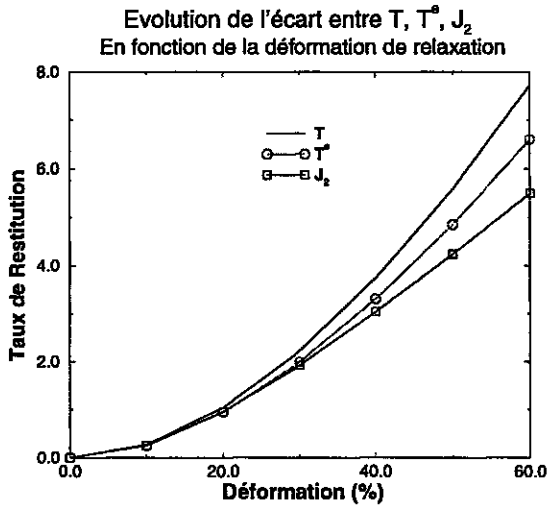


FIG. 11.3-9: Evolution de l'écart entre les 3 mesures de déchirabilité en fonction de la déformation d'essai.

Ainsi, plus le matériau est dissipatif, plus l'écart entre T et J_2 est important, cet écart venant soit de la dissipation en volume, soit de la dissipation locale. A l'amorçage, T et J_2 sont proches, les phénomènes dissipatifs n'ont pas encore beaucoup modifié l'état mécanique du fond de fissure.

11.3.2.3 Influence de l'identification de la loi de comportement

Comme nous l'avons déjà évoqué, la déchirabilité devrait être estimée à partir de la densité d'énergie quasi-statique (voir la définition page 45). En pratique, la densité d'énergie est définie à partir d'un essai de traction ou cisaillement à vitesse usuelle non-nulle. Par exemple, dans certains cas (notamment pour les lanières) on évalue la densité d'énergie sur un test de traction uni-axiale et l'on fait propager une fissure dans l'éprouvette pré-fissurée avec encore la même vitesse de traction uni-axiale (i.e. pas en relaxation).

Quelle est l'erreur commise en prenant une traction non-quasistatique ?

On considère des éprouvettes PS du matériau M3 sollicitées à quatre vitesses caractéristiques espacées d'une décade. On regarde l'écart entre les quatre mesures de J_2 pendant la propagation. Les résultats sont présentés sur le graphe (11.3-10). L'échelle utilisée accentue les écarts entre les quatre courbes. On remarque d'abord que J_2 est une fonction croissante de la vitesse de sollicitation. L'écart entre les courbes est manifeste de 7.7 10^{-4} s^{-1} à 7.7 10^{-3} s^{-1}, puis beaucoup moins net de 7.7 10^{-3} s^{-1} à 7.7 10^{-1} s^{-1}.

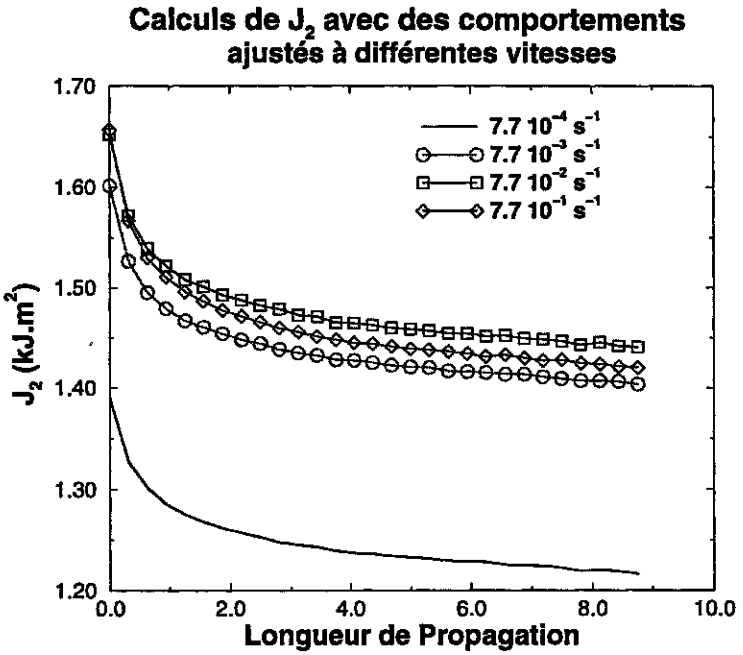


FIG. 11.3-10: Calcul de J_2 à partir de lois de comportement ajustées à plusieurs vitesses non-quasistatiques. Matériau M3

A l'amorçage, on constate un écart de 15 % entre les deux courbes aux plus petites vitesses, et seulement 3 % entre celle à 7.7 10^{-3} s^{-1} et la vitesse la plus élevée. Loin de l'amorçage, ces écarts deviennent respectivement de 16 % et 1.5 %, à peu près constants pendant toute la phase de décroissance forte de J_2. A partir de ces résultats, on peut considérer que l'erreur due à l'écart par rapport à un essai quasi-statique est peu significative.

Un autre résultat intéressant permet de mesurer l'écart entre des calculs de structure réalisés avec des lois de comportement d'un même matériau ajustées à différentes vitesses. Notre méthode de calcul de J_2 découple le calcul de structure du calcul du taux de restitution. Nous reprenons les quatre calculs précédents et recalculons J_2 avec une loi commune, par exemple celle à 7.7 10^{-2} s^{-1}. Les résultats sont donnés sur le graphe (11.3-11) pour le matériau M2, avec une relaxation à 40 %.

On constate la grande proximité des courbes obtenues. Elles restent, comme précédemment, ordonnées dans le sens des vitesses croissantes. Mais l'écart entre les calculs à la plus petite et à la plus grande vitesse n'excède pas 1.4 % à l'amorçage et 2.7 % après 8 mm de propagation. On peut vérifier au contraire que le même type de calcul comparant deux lois de comportement de matériaux différents donnerait facilement des erreurs supérieures à 10 %, voire 20 %. Ce type de résultat est une autre façon de relativiser l'influence de la vitesse sur J_2. Il montre que le champ de déformation - dans le cadre de comportement que nous avons proposé - dépend peu de la vitesse d'ajustement et est caractéristique du matériau.

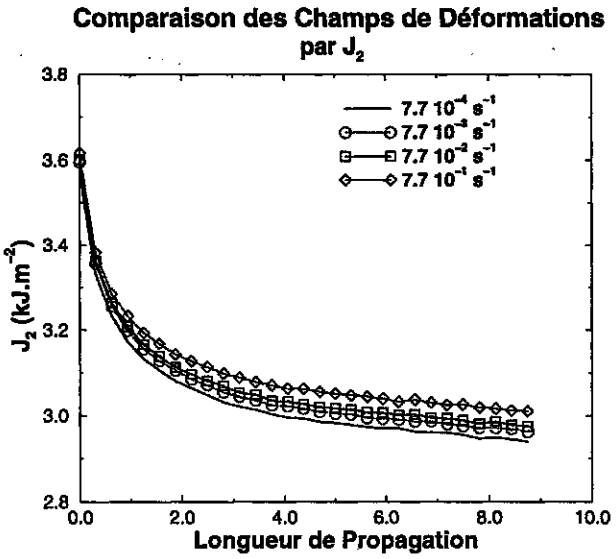


FIG. 11.3-11: Comparaison des calculs de structure réalisés avec des lois de comportement d'un même matériau ajustées à différentes vitesses à partir d'une norme de type J_2. Matériau M2.

11.3.2.4 Influence d'une accommodation

L'accommodation a pour but de limiter l'effet Mullins. C'est un protocole qui a déjà été présenté dans la première partie de cette étude (page 51), avec toutes les limitations associées. Dans le cas d'un comportement accommodé, on peut estimer que la relation $T = W_0 h_0$ est valable parce que le matériau semble élastique dans la plage de déformations macroscopiques considérée. Ce raisonnement est faux dans la mesure où il existe des grandes déformations locales. Il devient probablement correct si l'accommodation est faite à des déformations qui dépassent les grandes déformations locales.

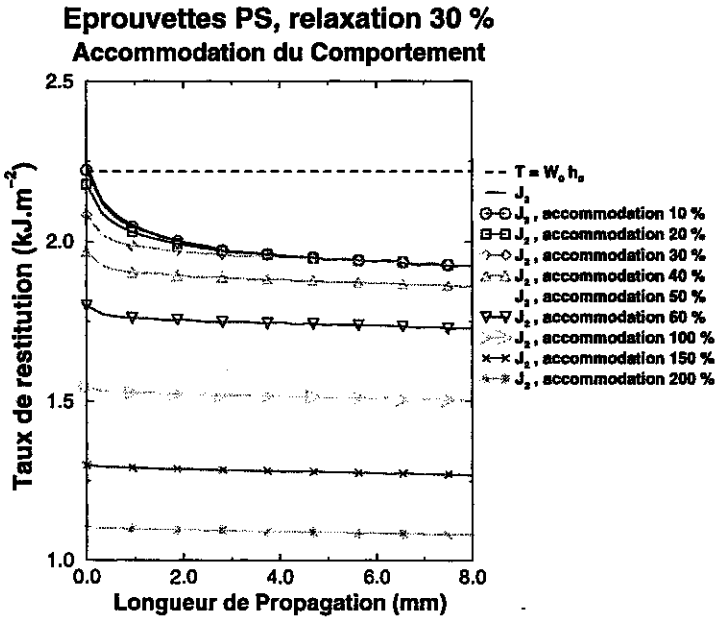


FIG. 11.3-12: Essai de propagation de fissure sur éprouvette en relaxation à 30% de déformation macroscopique. Influence d'une accommodation sur le taux de restitution d'énergie J_2.

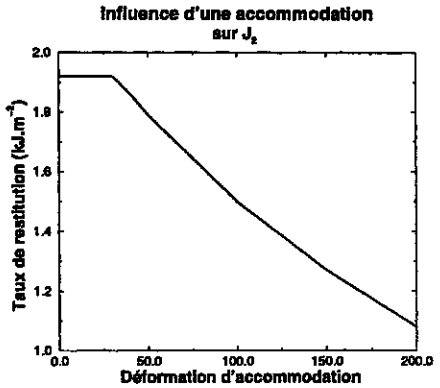


FIG. 11.3-13: Essai de propagation de fissure sur éprouvette en relaxation à 30% de déformation macroscopique. Evolution de la valeur stationnaire de J_2 en fonction de la déformation d'accommodation. Sur cet exemple, on a approximativement :

$$J_2(\epsilon_m) = J_2(0) - 0.05\epsilon_m$$

avec ϵ_m déformation d'accommodation exprimée en %.

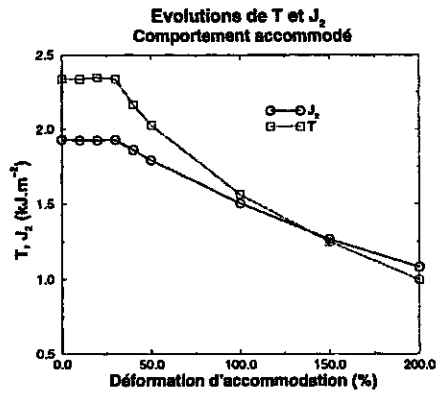


FIG. 11.3-14: Essai de propagation de fissure sur éprouvette en relaxation à 30% de déformation macroscopique. Comparaison de T et J_2 dans des essais avec accommodation. Un peu après 150 % d'accommodation, T et J_2 coincident.

Le graphe (11.3-12) montre l'influence d'une accommodation sur le calcul de J_2. Tant que l'accommodation reste petite devant la déformation de relaxation (cas d'école sans application pratique), J_2 est peu modifiée. Plus on se rapproche de la déformation d'accommodation (i.e. 10 puis 20 puis 30 %), plus J_2 est faible à l'amorçage et s'approche rapidement de la valeur limite aux grandes longueurs de propagation de l'essai sans accommodation. On peut interpréter ce résultat dans le cas du comportement que nous proposons d'abord par le fait que dans la zone de déformation homogène il n'y a pas de mémoire de l'accommodation (déformation de relaxation plus grande que la déformation d'accommodation), et que localement en fond de fissure, cette mémoire apparaît par une légère modification de l'état local qui disparaît quand la fissure avance et se trouve loin de son point d'origine, dans une région qui a été sollicitée à la déformation de relaxation.

Pour des accommodations plus importantes, J_2 devient très sensible au niveau de prédéformation choisi. La décroissance de J_2 à l'amorçage s'atténue également beaucoup. On peut aussi vérifier (non représenté) que J_2 s'approche bien de la déchirabilité T mesurée

par $T = W_0 h_0$, W_0 grandeur accommodée - avec égalité quand la zone où les déformations sont plus grandes que l'accommodation devient très confinée.

On voit donc à partir de ce résultat que T ou J_2 dépendent fortement du protocole expérimental choisi pour accommoder le comportement. Pour autant, entre un essai sans accommodation et un essai avec une accommodation à 200 %, l'erreur est inférieure à 50 % pour notre exemple et reste tout-à-fait compatible avec des observations comme celles données sur le graphe (11.2-4) (page 136).

Il est difficile de confronter ces résultats à ceux de la littérature. Comme nous le mentionnions précédemment, nous manquons souvent d'éléments clés pour comprendre comment est mesuré le taux de restitution. Un article de Lake et al. [III.37] peut cependant être analysé. Les auteurs rapportent des résultats avec pré-déformation assez complets sous forme de courbes $G(v)$. On observe que pour un T donné, plus la pré-déformation est importante, plus la vitesse de propagation est élevée. Les courbes obtenues d'une pré-déformation à l'autre sont parallèles avec une bonne approximation. Mais on ne peut pas savoir dans quelle mesure l'influence de la pré-déformation n'est pas simplement de réduire T par effet d'accommodation, de sorte qu'une même vitesse corresponde à deux T caractéristiques d'un même état local.

11.3.2.5 Influence d'une pré-traction transverse

Des essais de traction transverse (c'est-à-dire une pré-traction selon le plan de la pré-fissure) sont parfois réalisés pour essayer de révéler des phénomènes de "fibrage" dans le matériau, comme nous le verrons plus loin. Nous regardons ici l'incidence de ce type de protocole sur la mesure de J_2.

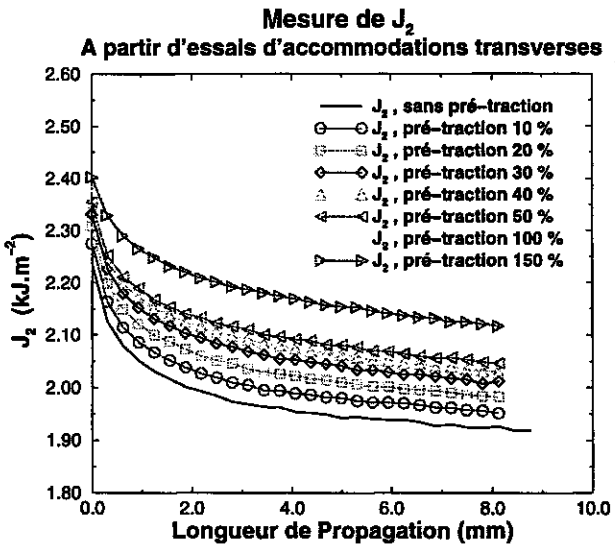


FIG. 11.3-15: Calculs de J_2 à partir d'éprouvettes ayant subi une pré-traction dans la direction de propagation de fissure. Déformation d'essai 30 %.

Le résultat de ces calculs est donné sur le graphe (11.3-15). Il est peu intuitif. J_2 est d'autant plus élevé que la pré-traction est importante. L'écart n'est cependant que de 2.5 % à l'amorçage entre le calcul sans pré-traction et le calcul avec pré-traction à 150 %, et 9 % après 8 mm de propagation.

Il s'agit d'une particularité qui dépend explicitement de la nature de la loi de comportement que nous proposons. Un modèle en contrainte plane sans couplage entre les directions donnerait moins d'influence de la première sollicitation sur le champ transverse.

On pourrait dans ce cas retrouver une décroissance du taux de restitution en fonction de la pré-déformation, comme l'illustre le graphe (11.3-16). De même, un modèle d'endommagement isotrope assouplirait le matériau dans toutes les directions en quantité égale et permettrait de faire décroître plus sensiblement le taux de restitution.

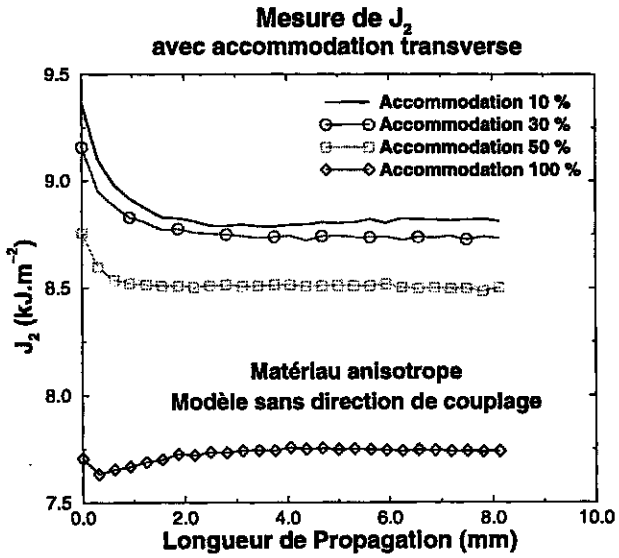


FIG. 11.3-16: Calculs de J_2 à partir d'éprouvettes ayant subi une pré-traction dans la direction de propagation de fissure, modèle à 3 directions. Le modèle à trois directions anisotrope découple les endommagements dans le cas d'une déformation homogène. Le comportement choisi ici ne correspond pas à un matériau modèle. Il s'agit du comportement de M3 pour lequel on a retiré les directions de couplage dans le calcul. Dans le cas d'une accommodation transverse de 100 %, J_2 passe par un minimum après l'amorçage. Il ne s'agit pas d'une incertitude sur le calcul.

11.3.2.6 Influence d'une traction transverse

Un autre type de test similaire au précédent consiste à réaliser l'essai en maintenant la déformation transverse pendant la propagation. La nature de la sollicitation est complètement différente de la précédente.

Nous avons vu que dans le cas des essais de validation de la formule (11.2-8) pour des matériaux néo-hookéens, le taux de restitution d'énergie croît avec la déformation transverse. Ce résultat est encore valable avec notre loi de comportement, comme l'illustre la figure (11.3-17). Le taux de restitution croît très vite en fonction de la déformation transverse, pour des petites valeurs de déformation transverse. On peut penser que, de même que pour un matériau néo-hookéen, l'accroissement est borné, mais très loin des déformations d'usage.

De même, la déformation transverse augmente la décroissance de J_2 en fonction de la longueur de propagation. Cela traduit l'augmentation des effets dissipatifs par ce procédé, à cause de la sollicitation des directions de calcul transverses en extension.

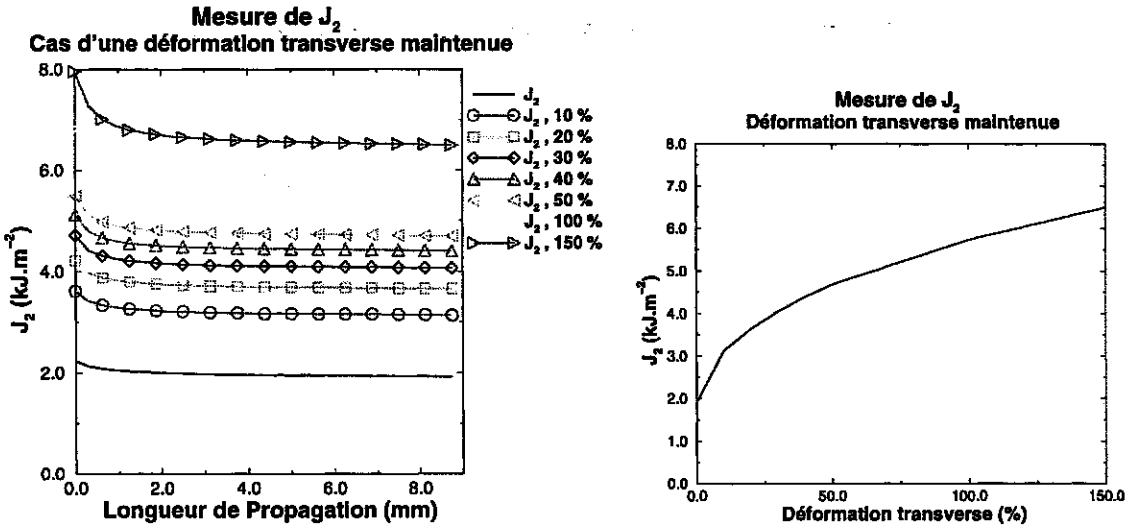


FIG. 11.3-17: Influence d'une déformation transverse (maintenue) sur J_2.

11.4 Sens de la courbe $T(v)$, $J_2(v)$

11.4.1 Précisions apportées par le calcul de structure

Nos calculs permettent seulement de préciser la différence entre J_2 et T. Ils ne préjugent pas d'un critère de propagation de fissure ni d'une vitesse de propagation. Ils sont réalisés dans des états de déformation macroscopique qui ne sont peut-être pas supportables par la structure.

Nous voyons d'abord qu'il y a une différence très nette entre T et J_2. Cette différence dépend beaucoup de l'histoire de la structure. **Nos calculs soulignent l'importance d'avoir accès à un comportement étendu du matériau et d'avoir une connaissance précise de son passé.** Mais dans le cas courant de matériaux accommodés à des déformations usuelles, T varie peu et reste très différent de J_2. On peut penser que les différences de mesures d'un utilisateur à un autre, liées aux différences possibles de protocoles d'essais peuvent être noyées dans les erreurs expérimentales de mesure de la vitesse de propagation.

On peut ensuite conclure que T ne doit pas être une mesure intrinsèque de la déchirabilité, mais que les expériences de validation ne peuvent pas le montrer. D'abord les éprouvettes d'essais ont des sollicitations proches, les déformations d'essais sont toujours faibles et les déformations d'accommodation à peine plus élevées, de sorte que ces essais conduisent à des mesures de T qui dépendent à peu près identiquement de la dissipation.

11.4.2 Usage de $T(v)$

La courbe $T(v)$ rend compte uniquement de la propagation stationnaire des fissures. La vitesse est mesurée après plusieurs millimètres de propagation.

Nos calculs permettent de remonter à une modélisation de T et J_2 dans la partie instationnaire de la propagation où l'on observe une décroissance de J_2. Chicheportiche [III.10] montre bien la forte décroissance de la vitesse de propagation en fonction de la longueur de propagation de la fissure. Ses résultats démontrent que la courbe $T(v)$ ne peut décrire les premiers millimètres de propagation. Par contre, on ne sait pas si les courbes $J_2(l, v)$ - l longueur de propagation de la fissure - que l'on peut associer à ses essais sont

décrites par une même courbe $J_2(v)$. Si cela était, alors J_2 serait représentatif de la vitesse de fissuration, donc représentatif de l'état local pour la fissuration.

Nous faisons cette hypothèse pour la suite de notre travail : *J_2 est un paramètre pertinent pour décrire l'état local du fond de fissure vis-à-vis de la modélisation de la propagation, même dans la partie instationnaire du phénomène.*

11.4.3 Critère de Déchirabilité

Relation T, J_2. Nous nous plaçons dans la situation usuelle d'essais sur éprouvettes PS accommodées. Pour ces éprouvettes, nos calculs montrent que le passage de T à J_2 peut être donné par :

$$T = J_2\,[1 + \alpha(\lambda, \lambda_m)] \tag{11.4-15}$$

où α est un facteur correctif qui ne dépend que de la dissipation. Tant que les vitesses de propagation de fissure sont faibles, on peut considérer que seul l'endommagement quasi-statique intervient dans la correction et correspond bien à notre calcul de structure. Si les vitesses de propagation sont trop rapides, α doit intégrer en outre une dissipation visqueuse.

D'après nos résultats, nous savons que :

1. la fonction α est croissante de λ ;
2. la fonction α est décroissante de λ_m dès que $\lambda < \lambda_m$, avec la propriété :

$$\alpha \longrightarrow 0 \text{ si } \lambda_m \longrightarrow +\infty$$

Critère $J_2(v)$. J_2 est la quantité locale que nous supposons représentative pour les phénomènes de propagation. Dans l'hypothèse de comportement quasi-statique global, J_2 est la grandeur qui explique la nature visco-élastique de la propagation. Elle pourrait être modélisée par le modèle de Schapery ou de Mueller et Knauss (voir page 96).

Nos calculs montrent cependant la faible correction à apporter à T pour obtenir J_2. Si cette correction va dans le bon sens pour atténuer la large plage de variation de T en fonction de la vitesse, on a encore un éventail trop large de déchirabilités en fonction de la vitesse par rapport à ce que peut autoriser un modèle comme celui de Schapery.

Critère $J_2 = G_c$. La compréhension du passage de T à J_2 nous donne-t-elle des indices sur un critère de propagation de fissure ? Si l'on suppose qu'à l'instant de la propagation on a toujours $J_2 = G_c$ - G_c paramètre matériau - alors T est donnée par :

$$T = G_c\,[1 + \alpha(\lambda, \lambda_m)] \tag{11.4-16}$$

Avec une accommodation usuelle, on peut supposer :

$$\alpha = \beta(\lambda - 1) \tag{11.4-17}$$

Si l'on suppose en outre que la vitesse de propagation varie comme $\exp\lambda$, alors la courbe $T(v)$ est linéaire dans un diagramme logarithmique. Cette intuition nous montre qu'un critère standard donne déjà naturellement une forme convenable à la courbe $T(v)$. Mais ce type de modèle ne convient pas puisque la vitesse doit apparaître dans J_2.

$J_2(\lambda_m)$. J_2 ne voit que ce qui se passe localement, à l'échelle des très grandes déformations. On peut donc penser que :

$$J_2 = T_{|\lambda_m \longrightarrow +\infty} \tag{11.4-18}$$

Cette valeur limite est non-calculable avec notre loi de comportement. Nos calculs de structure montrent plutôt que l'on obtient rapidement $T = J_2$ dès que l'accommodation est importante, mais loin encore des déformations limites supportables par le matériau (voir graphe (11.3-14)). Ce résultat révèle deux phénomènes :

1. dans un premier temps, pour des accommodations faibles, on réduit les dissipations locales et globales, mais il reste localement des zones qui subissent des déformations au delà de l'accommodation au passage de la fissure. Dans le cas de critères en $J_2 = G_c$ ou $T = T_c$, on doit seulement voir dans la décroissance de J_2 ou T une conséquence de l'assouplissement du matériau qui implique qu'il faut atteindre des déformations plus élevées pour un même état local.

2. dans un second temps, toutes les dissipations sont négligeables puisque les calculs élastiques et dissipatifs coïncident. Pourtant, T et J_2 continuent de décroître. A notre échelle d'étude, on peut dire que cela correspond à une situation où l'on endommage suffisamment le matériau pour modifier le comportement du volume élémentaire d'étude. En affectant la zone confinée, on est sûr que le critère de fissuration doit aussi être affecté.

Ces deux remarques montrent que la correction de T à J_2 ne suffit pas à intégrer tous les effets particuliers du comportement dans la modélisation. Il y a une interaction entre le critère et l'évolution du comportement.

Nous ne pouvons que faire état des manquements des modélisations sur ce sujet.

11.5 Conclusion sur les approches expérimentales

L'approche expérimentale est prépondérante dans l'analyse de la déchirabilité des élastomères. Notre présentation est succincte et sera complétée plus loin par des résultats qui intéressent la rotation de fissure.

Dans un premier temps, nous avons présenté l'outil d'étude et montré qu'il ne semblait pas y avoir eu de réflexion sur la notion de déchirabilité dans le cas de nos matériaux souvent très dissipatifs. Ce constat fait écho à quelques remarques que l'on retrouve dans la littérature.

Nos calculs de structure viennent valider les approches actuelles tout en précisant, à partir d'une étude bibliographique sur les méthodes énergétiques, la nature de la quantité à utiliser. Si l'objet déchirabilité se trouve mieux défini et que la quantité énergétique que l'on veut manipuler apparaît avec beaucoup plus de clarté grâce à nos calculs, nous montrons aussi que l'erreur entre T et J_2 est peu significative dans un cadre usuel d'essais expérimentaux.

Par contre, nous voyons que dans le cadre d'une recherche de critère intrinsèque de propagation de fissure, de comparaison de résultats sur différentes éprouvettes, la connaissance de J_2 peut devenir indispensable.

L'approche énergétique de la fissuration donne un cadre où l'on doit s'intéresser au rapport entre la dissipation et la vitesse de propagation. Nous avons déjà vu les lacunes des modèles standards (Schapery, Mueller et Knauss), souligné le couplage endommagement / critère de propagation sans avoir de résultats expérimentaux pour approfondir ce sujet. On peut penser que ces lacunes pourront être comblées par des calculs de structure plus réalistes.

Nous proposons dans le prochain chapitre de nous intéresser à une autre difficulté évoquée dans nos calculs : la relation entre l'histoire de la sollicitation et la propagation

de fissure, ou comment évoluent les propriétés intrinsèques de la rupture en fonction de la sollicitation - en marge des évolutions du comportement.

Chapitre 12

Approche par une règle de cumul de dommage

12.1 Introduction

La partie précédente nous a permis de réflechir aux outils d'études de la déchirabilité des élastomères. Notre validation numérique a souligné le rôle de l'endommagement dans le calcul du taux de restitution d'énergie. Nous avons vu également qu'en précisant la notion de déchirabilité, nous ne simplifions pas la recherche d'un critère de propagation en terme énergétique.

Les approches par taux de restitution d'énergie critique de la propagation des fissures dans les élastomères sont trop peu performantes et la prise en compte de l'endommagement n'y change rien. Nous montrons la nécessité de déterminer un critère qui dépende de l'histoire des sollicitations.

Il apparaît également que la phase "instationnaire" de la propagation est assez longue (plusieurs millimètres) pour ne pas être négligeable. C'est d'ailleurs dans cette zone qu'est définie la notion de rotation de fissure, laquelle détermine l'existence ou non de la propagation droite.

Nous proposons dans ce chapitre une approche complètement différente des approches courantes. Notre analyse aborde une réflexion générale sur la description de la fissuration, **de l'amorçage à la propagation**. Le cadre que nous présentons est très simplifié mais donne déjà des idées qualitatives voire quantitatives sur des notions intéressantes en propagation que les approches en taux de restitution ne permettent pas d'atteindre. Il trouve son inspiration dans la question suivante :

Supposons qu'une sollicitation préliminaire à un essai de propagation de fissure ne modifie pas le comportement mécanique du matériau. Doit-on faire évoluer le critère de propagation pour tenir compte de cette sollicitation et éventuellement comment ?

Ce problème est rendu délicat parce qu'en pratique il n'est pas possible d'isoler les évolutions respectives du comportement et du critère dans les études de propagation.

12.2 Présentation du critère

12.2.1 Cas d'une déformation homogène

Il existe de nombreux modèles moléculaires établissant des critères de propagation de fissure. Le plus répandu est le modèle de Lake et Thomas qui donne le taux de restitution d'énergie seuil pour une vitesse de propagation de fissure nulle [III.35]. Il s'intéresse à une

situation de sollicitation éloignée des taux de restitution usuels (facteur 100 à 1 000), où les effets visco-élastiques sont négligeables. Certains modèles qui intègrent des processus moléculaires dépendent de la vitesse de sollicitation et sont beaucoup moins répandus. On pourra se reporter à Kausch pour une revue plus complète [III.30].

Pour mettre en évidence les effets peu marqués de l'histoire sur les chargements monotones, il est nécessaire de réaliser des essais de chargements cycliques ou répétés. Cette idée nous conduit naturellement à caractériser la rupture avec une loi de dommage cumulé. Nous nous intéressons plus particulièrement à ce type de formulation du problème de rupture. De même que l'on utilise couramment la règle de Miner pour la fatigue cyclique des métaux, on suppose que la rupture d'une éprouvette déformée de façon homogène est régie par une fonction de cumul de dommage :

$$\left\{ \begin{array}{c} D(\underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}) = \int_0^t \dot{D}\left(\underline{\underline{\sigma}}(u), \underline{\underline{\epsilon}}(u)\right) du \\ \text{Rupture} \iff D = 1 \end{array} \right. \tag{12.2-1}$$

Ce type d'approche est utilisé par exemple par Mac Kenna et Penn pour modéliser la rupture d'éprouvettes de PMMA et PE [III.40], avec :

$$\left\{ \begin{array}{c} \dot{D} = \frac{1}{t_b} \\ \frac{t_b}{t_0} = \exp - \left[\frac{a\sigma}{RT}\right] \end{array} \right.$$

Les auteurs montrent la bonne adéquation de leur modèle avec des essais à chargement constant ou taux de chargement constant. Ils estiment que les essais à taux constant ne sont pas significatifs de la nature additive du cumul, parce que la majeure partie de D est obtenue aux derniers instants juste avant la rupture. Nous dirions plutôt qu'il s'agit là d'un phénomène lié au modèle qui est déjà une bonne façon d'expliquer le passage d'un essai à chargement constant à un essai à taux de chargement constant.

En fatigue, le modèle ne rend pas compte des observations. Les travaux d'Halpin et Polley [III.26] peuvent permettre de comprendre que dans un cycle de déformation, il peut y avoir une zone d'endommagement $\dot{D} > 0$ et une zone de restauration $\dot{D} < 0$. Le modèle de Mac Kenna et Penn ne rend compte que de la partie endommageante.

Svistkov [III.55, III.56, III.57] développe également des modèles de rupture à partir d'une approche statistique et obtient une formulation en fonction d'endommagement. Ses études s'appliquent à des élastomères et permettent de retrouver des résultats expérimentaux de Gent et Park [III.18]. Les fonctions de cumul choisies sont beaucoup plus phénoménologiques que celle de Mac Kenna et Penn. Elles s'appliquent bien à l'étude de Gent et Park mais nous ne connaissons pas leur valeur pour d'autres tests.

Précision : *La modélisation de Svistkov est intrinsèquement beaucoup plus riche que l'approche de Mac Kenna et Penn. Elle montre que la règle de Miner s'obtient à partir d'un modèle probabiliste simple sur la rupture des chaînes partant de la chaîne isolée à une assemblée de chaînes comme pour la modélisation du comportement néo-hookéen. Il serait intéressant, dans une description moléculaire des phénomènes de rupture, de conserver le plus longtemps possible les variables de rupture associées à une chaîne isolée. De même que nous avons rapidement laissé de côté le modèle néo-hookéen, nous avons préféré présenter notre approche directement à partir de la règle de Miner.*

On peut voir, par exemple à partir des expériences de Smith [III.51] que dans la gamme des faibles vitesses ou hautes températures, les deux fonctions de cumul définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{t_b}{t_0} = \exp - \left[\frac{a\sigma}{RT}\right] \\ \frac{t_b}{t_1} = \exp - \left[\frac{a\epsilon}{RT}\right] \end{array} \right.$$

sont aussi valables.

12.2.2 Cas général

A tout point d'une structure qui subit un trajet de chargement, on suppose que l'on peut associer une fonction de dommage D telle que :

$$D(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}) = \int_0^t \dot{D}\ (\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}(u), \underline{\underline{\epsilon}}(u))du \tag{12.2-2}$$

expression locale associée à un Volume Elémentaire Représentatif (VER) autour de $\underline{x}$. Il s'agit d'une généralisation de (12.2-1) au cas d'une déformation non-homogène. Le passage de l'un à l'autre devrait faire l'objet d'une modélisation micro-macro, à partir d'un défaut. Habituellement, le cadre d'étude est celui de la cavitation [III.5, III.15, III.28]. On montre, mais l'on ne rentrera pas dans les détails, que le modèle micro-macro de cavitation ne permet pas de justifier (12.2-1) à partir de (12.2-2) et réciproquement. Cet état de fait est rarement évoqué dans les modèles. Cela implique que l'on ne peut pas établir de lien entre le critère micro et le critère macro par cette théorie (voir en annexe, page 235.).

On postule que **le critère local est de même nature que le critère global**. On espère par cette hypothèse pouvoir tenir compte de la forme du comportement local. Le choix proposé par Mac Kenna et Penn pour la fonciton D est du type :

$$D(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}, t) = \int_0^t \dot{D}\ (\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}(u))du$$

Elle est déterminée par des essais à chargement ou taux de chargement constant. Nos essais se déroulent plutôt à déplacement ou taux de déplacement constant. D'autre part, nos lois de comportement ne présentent pas d'effets visqueux et la modélisation de l'effet Mullins fait intervenir des variables internes de type déformation. Cela nous incite à prendre plutôt une forme :

$$D(\underline{x}, \underline{\underline{\sigma}}, \underline{\underline{\epsilon}}, t) = \int_0^t \dot{D}\ (\underline{x}, \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, u))du$$

Dans le cas d'essais monotones, cette expression est équivalente à une expression en contrainte par l'intermédiaire de la loi de comportement. Pour les essais de propagation, la partie du matériau qui nous intéresse (i.e. celle qui rompra plutôt que celle qui a rompu ou ne rompra jamais) est en chargement monotone (mais non-constant).

12.2.3 Mise en œuvre

Soit une structure Ω soumise à un trajet de chargement $\mathcal{E}$. A toute date t, on connaît l'état mécanique en tout point. On définit le champ d'endommagement D par :

$$D(\underline{x}, t, \mathcal{E}) = \int_0^t \dot{D}\ (\underline{x}, \underline{\underline{\epsilon}}(\underline{x}, u, \mathcal{E}))du$$

Un point rompra à la date t_c si et seulement si :

$$D(\underline{x}, t_c, \mathcal{E}) \geq 1$$

Remarquons que ce modèle donne une dépendance de la rupture en fonction du temps caractéristique de la sollicitation. C'est-à-dire par exemple que deux tractions uni-axiales

sur un VER à deux vitesses différentes ne donneront pas la même déformation à rupture. Nous en verrons un exemple plus loin. Il s'agit d'une particularité très intéressante : un matériau élastique peut présenter une rupture de type visco-élastique au sens large.

Dans le cas d'un chargement uni-axial, la formule précédente trouve sa justification directement dans les essais de Mac Kenna et Penn. On peut proposer un cumul donné par :

$$D(\underline{x}, t, \mathcal{E}) = \int_0^t t_0 \exp - \left[\frac{c\epsilon(\underline{x}, u)}{RT}\right] .du \tag{12.2-3}$$

Dans le cas de chargements 3D se posent les problèmes de définitions de ϵ et D : D doit-il rester scalaire, doit-on considérer une norme sur $\underline{\underline{\epsilon}}$, éventuellement laquelle ? Notre étude n'a pas permis de trancher sur ce point. Il nous est apparu qu'il y avait peu de différences entre le choix élémentaire de la norme canonique sur $\underline{\underline{\epsilon}}$ et d'un scalaire D et d'autres choix, par exemple une norme en plus grande des valeurs propres de $\underline{\underline{\epsilon}}$.

Interprétation : *Une autre façon d'écrire le taux de cumul à une température donnée est :*

$$\dot{D} = \mu_0 \exp\left(\frac{\epsilon}{\alpha}\right) \tag{12.2-4}$$

formule que nous utiliserons plutôt que (12.2-3). On peut exprimer μ_0 sous la forme :

$$\mu_0 = \frac{1}{\alpha} \exp\left(-\frac{\epsilon_0}{\alpha}\right) \tag{12.2-5}$$

Le graphe (12.2-1) montre l'évolution de la déformation à rupture pour un test homogène à taux de déformation constant en fonction des paramètres α et ϵ_0.

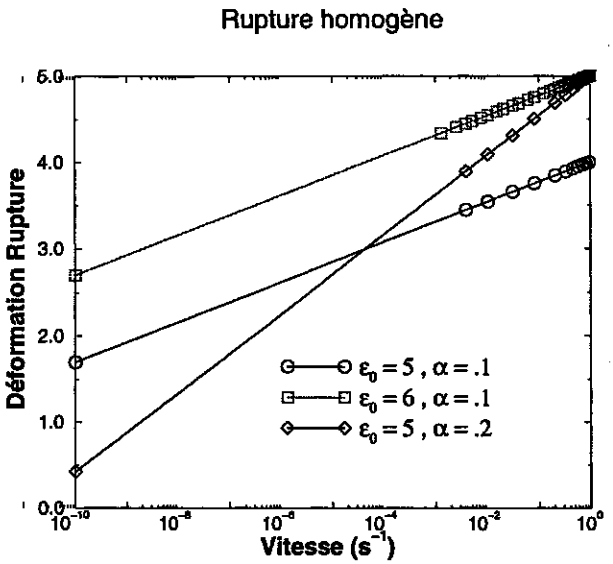


FIG. 12.2-1: Interprétation des paramètres de D dans le cas d'un essai à taux de déformation constant.

On remarque que ϵ_0 caractérise un niveau de déformation à rupture à une vitesse donnée (ici $1s^{-1}$) et α la variation de ce niveau en fonction de la vitesse. On dira que α est la **susceptibilité** *à la vitesse du niveau de rupture.*

Les essais de rupture homogène sur éprouvettes haltères montrent que ϵ_0 est très variable de 200 à 600 % pour nos matériaux, et α par contre plus constant, autour de 0.1.

12.2.4 Cas d'une structure complexe

La formulation générale de ce type de problème couple en une seule densité d'énergie le comportement et la fonction D :

$$W_{endo} = [1 - F(D)]W_{mat} + F(D)W_{penal}$$

où :

$$\begin{cases} F \ : [0,1] \longrightarrow [0,1] \\ F(0) = 0 \ , \ F(1) = 1 \end{cases}$$

est une fonction continue monotone de l'endommagement (par exemple, $F(D) = D^n$). La densité d'énergie pénalisante correspond à un matériau de raideur négligeable par rapport au matériau sain, avec par exemple :

$$W_{penal} = \mu(I_1 - 3) \ , \ \mu << 1$$

Une pénalisation plus fiable permettrait plutôt de traduire le passage du matériau sain à l'absence de matériau par une formulation en taux de cisaillement (de type fluide) ; elle devrait éventuellement être couplée à une formulation variationnelle particulière des éléments.

Nous avons rencontré de nombreuses difficultés à utiliser cette méthode :

1. des problèmes de convergence apparaissent quand une partie du matériau commence à rompre (D non-négligeable). Dans ce cas, le matériau devient visco-élastique et sa visco-élasticité dépend de la pénalisation.
2. les éléments qui vont rompre sont déjà en grandes déformations et le changement de comportement les amène à supporter de très grandes déformations où la formulation variationnelle ne semble plus adaptée.
3. des problèmes courants de règle de maillage ; le résultat dépend de la façon de mailler la structure en fond de fissure.
4. la précision des calculs impose des pas de temps extrêmement petits quand on approche de la rupture d'un point chaud. Cela s'explique par la forme de la vitesse de cumul, qui varie très vite au moment d'atteindre le critère.

12.2.5 Cas simplifié

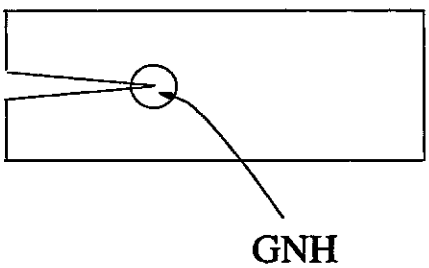


FIG. 12.2-2: Modélisation simplifiée de la propagation de fissure dans une éprouvette PS. On suppose qu'au moins localement le comportement GNH est représentatif des champs mécaniques locaux.

Nous préférons nous restreindre à des situations où l'on a un meilleur contrôle sur les calculs. On espère par cette simplification comprendre comment opère le couplage entre les champs et obtenir des résultats significatifs au moins qualitativement.

On considère une éprouvette fissurée plane, PS ou lanière. Cette éprouvette est soumise à une sollicitation telle qu'il existe une zone de grandes déformations localement. Plusieurs hypothèses peuvent permettre de modéliser le comportement local.

1. On considère que la structure est constituée d'un matériau GNH. Dans ce cas, localement les champs mécaniques sont donnés par les développements asymptotiques précédents (voir page 100), paramétrés par un taux de restitution d'énergie G.
2. Si le matériau est dissipatif, on suppose qu'il existe une zone de grandes déformations où le matériau a un comportement GNH, et qu'il est dissipatif ailleurs. Dans ce cas, le comportement local est encore donné par les développements asymptotiques, mais paramétrés par J_2.
3. On suppose en outre le matériau visco-élastique localement. On fait l'hypothèse que cela ne modifie pas la forme des champs asymptotiques, seulement leur amplitude.

Nous nous intéressons essentiellement au premier type de modèle qui fait intervenir le moins de paramètres. Le deuxième type pourra être considéré dans la discussion.

Précision : *Pour notre présentation, il n'est pas nécessaire d'insister sur la différence entre T et J_2. Si l'on s'intéresse à la modélisation de l'état stationnaire, une étude en T ou J_2 est équivalente à condition que loin de l'amorçage, la valeur stationnaire de J_2 coïncide avec celle de T. Une étude de l'amorçage de la propagation fera peu de différence entre T et J_2 puisqu'à l'amorçage T et J_2 sont proches dans le cas réel et les champs mécaniques sont identiques.*

Bien distinguer T et J_2 avec la loi de comportement endommageante devient nécessaire si l'on cherche à montrer la différence quantitative entre les vitesses calculées à partir de T et celles calculées par J_2 - T et J_2 estimées pour le même matériau à partir de la loi de comportement endommageante - et si l'on cherche aussi à montrer une différence de phénoménologie de l'amorçage à la propagation stationnaire.

Dans la suite, nous noterons G le taux de restitution pour signaler que les études en T ou J_2 seront équivalentes.

Pour une sollicitation donnée, on peut accéder aux champs mécaniques dans la zone de grandes déformations par l'expression (10.4-42) (page 117). Seule la plus grande composante des déformations est connue complètement quand la sollicitation est caractérisée par un taux de restitution G. Dans ce cas, il est légitime de supposer que la norme à utiliser dans le domaine des grandes déformations est du type :

$$\epsilon_{local} = \epsilon_{22}$$

puisque l'on a au moins :

$$\epsilon_{local} \approx \epsilon_{22}$$

et de même on choisit D scalaire. D'autre part, si la sollicitation est essentiellement uniaxiale, l'endommagement dans une zone loin de la fissure peut encore être caractérisé par le scalaire D lié à ϵ_{hom}, plus grande déformation principale. Comme nous n'avons pas accès aux champs de moyennes déformations, on suppose que la norme de la déformation qui intervient dans D est :

$$\epsilon = Max[\epsilon_{hom}, \epsilon_{local}] \tag{12.2-6}$$

Le champ d'endommagement D diverge à l'approche du fond de fissure. Sa divergence est plus marquée que celle des autres champs mécaniques et s'exprime en $\exp \frac{1}{r^\alpha}$. C'est ce qui explique la dépendance du calcul de structure en fonction du maillage. Pour copier le

calcul de structure et éviter cette difficulté, on dispose une grille carrée de nœuds autour du fond de fissure (figure (12.2-3)). On introduit une longueur de grille δ. On suppose que δ est un **paramètre physique propre au matériau, indépendant de la sollicitation.** On pense par exemple que ce paramètre peut être relié à la taille moyenne des motifs que nous avons observés pendant nos essais de microscopie, soit 1 à 2 μm (voir page 32).

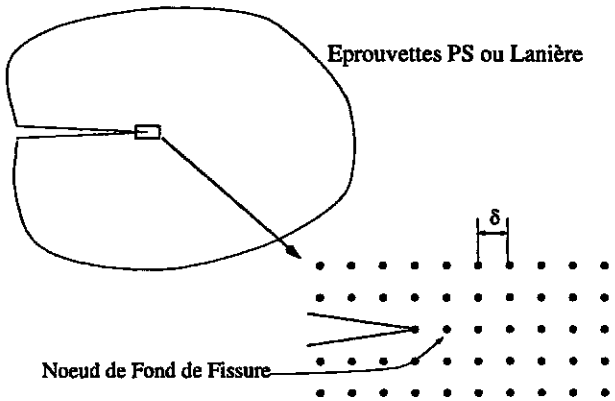


FIG. 12.2-3: Mise en œuvre du critère. On dispose une grille régulière de nœuds autour de la pointe de fissure de l'éprouvette. A chaque nœud, on calcule l'endommagement au cours de la sollicitation.

Précision : *Nous pouvons estimer la taille du domaine où la déformation due à la fissure l'emporte dans la formule (12.2-6) :*

$$r_f = \left[\frac{a_2(G(\lambda), n)h_r(n)}{\lambda}\right]^{2n} \tag{12.2-7}$$

où $h_r(n)$ est une fonction de la non-linéarité du matériau GNH définie à partir du tenseur des déformations de Green-Lagrange calculé par les développements asymptotiques de Geubelle et Knauss :

$$h_r(n) = h(0, n) = (1+k)^{\frac{k}{2}}\sqrt{1-k^2}\ ,\ k = 1 - \frac{1}{n}$$

Remarquons que r_f ne fait pas intervenir les paramètres de la fonction de cumul de dommage. Il s'agit d'une propriété du champ asymptotique. r_f doit servir notamment de valeur de référence pour estimer le paramètre δ du modèle, avec l'hypothèse $\delta << r_f$. La variation de r_f en fonction de λ pour une non-linéarité donnée est représentée sur la figure (12.2-4).

On peut montrer que $r_f \propto l_0$, où l_0 est l'unité de longueur caractéristique du taux de restitution d'énergie. Par exemple, l_0 est la hauteur de l'éprouvette PS au repos; $l_0 = c$ longueur de la fissure de l'éprouvette lanière. Une condition nécessaire à notre étude est :

$$\delta < r_f < l_0 \tag{12.2-8}$$

Cette équation impose une taille caractéristique d'essai raisonnablement grande. Nous n'étudierons pas plus cette condition. Elle sera en pratique toujours vérifiée dans nos essais. En revanche, elle nous montre que l'on ne doit pas essayer de décrire des essais sur éprouvettes de longueur caractéristique infinitésimale, par exemple une éprouvette lanière avec une fissure très courte, ou une PS de hauteur tendant vers 0, comme cela se pratique parfois. Il en est de même pour les éprouvettes pantalons, dont on contraint souvent le

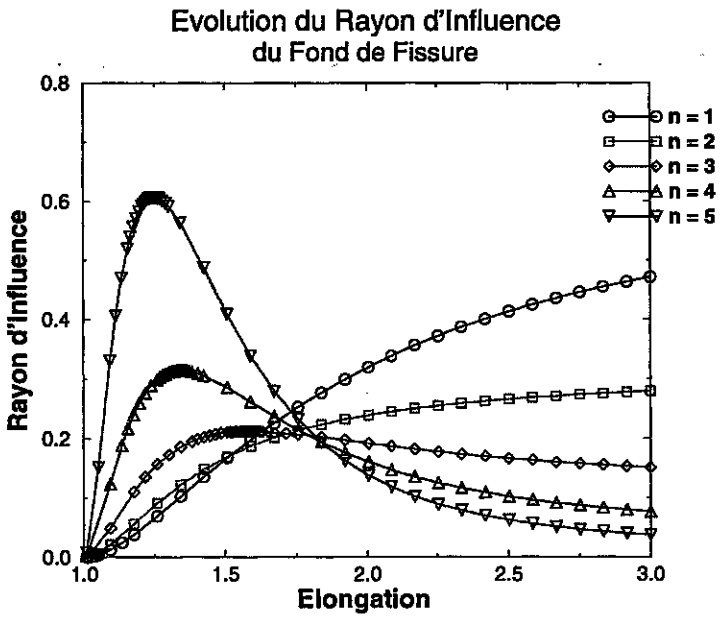


FIG. 12.2-4: Rayon d'influence du fond de fissure pour plusieurs non-linéarités. On observe quelle est la taille du domaine sur le trajet de propagation droite où la déformation due au fond de fissure reste supérieure à la déformation homogène à l'infini. Cette distance est une grandeur physique, indépendante de la taille caractéristique δ. L'ordonnée est rapportée à la hauteur au repos d'une éprouvette PS.

trajet de propagation en réduisant leur extension latérale ou leur épaisseur.

Quelle que soit la sollicitation, on peut voir que c'est toujours le nœud le plus près du fond de fissure sur le trajet de propagation droite qui atteint le critère en premier. Ce nœud est appelé nœud de fond de fissure (voir la figure (12.2-3)). On suppose qu'à cet instant, la fissure se propage et que ce nœud devient le nouveau fond de fissure. L'ouverture de la fissure peut être supposée brutale ou progressive. On peut montrer que cela modifie seulement quantitativement les résultats, souvent dans une mesure faible. Nous présenterons donc seulement des calculs avec ouverture brutale de la fissure (qui donnent les équations les plus simples).

Le calcul est répété de façon incrémentale, propagation après propagation. C'est toujours le nœud de fond de fissure qui atteint le critère de rupture au pas suivant.

12.2.6 Synthèse

A partir de l'approche utilisée par Mac Kenna et Penn ou Svistkov, nous avons construit un modèle de propagation de fissure. Ce modèle utilise d'abord les résultats du calcul asymptotique de Geubelle et Knauss, d'autre part l'hypothèse d'existence d'un champ d'endommagement. Le cadre d'étude est un cadre semi-analytique où l'on se donne la sollicitation à l'infini, et où l'on recherche les temps successifs de rupture aux nœuds de fond de fissure.

Le schéma (12.2-5) présente la façon dont s'effectue la modélisation. La variable de contrôle est le taux de restitution d'énergie, soit G dans notre analyse hyperélastique, soit J_2 dans le cas général. G est relié au mode de chargement par la loi de comportement, de sorte qu'il est équivalent (en hyperélasticité) de contrôler l'une ou l'autre variable. G

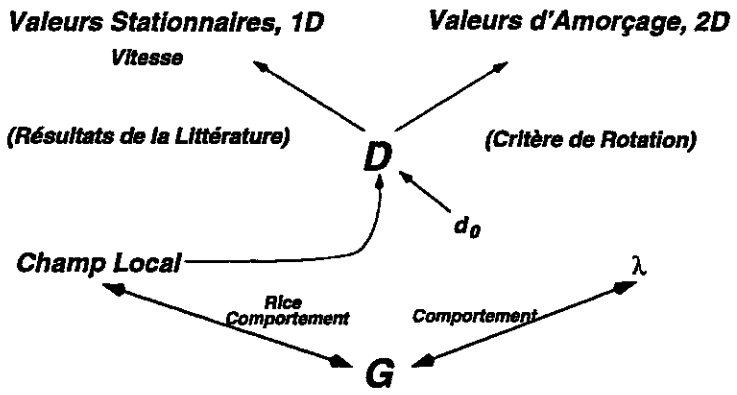


FIG. 12.2-5: Articulation du comportement et du champ d'endommagement dans le modèle simplifié de propagation de fissure.

donne ensuite accès aux champs locaux. Cette première étape est l'étape de comportement. C'est là que vont intervenir l'influence d'une accommodation ou d'autres sollicitations préliminaires dans la rupture de l'éprouvette.

Le champ de déformation local permet de calculer le champ d'endommagement dans la structure. Un champ d'endommagement initial (d_0) peut exister, par exemple comme conséquence de pré-tractions.

La littérature fait essentiellement état de résultats entre une vitesse stationnaire ou moyenne de propagation de fissure et un taux de restitution. C'est ce que nous allons étudier ici. Dans un second temps, nous pourrons regarder plus particulièrement ce qui se passe à l'amorçage, instant où le phénomène de rotation apparaît.

Le cadre proposé permet d'accéder à une distinction très claire entre l'influence d'une modification du comportement et l'évolution des propriétés intrinsèques de déchirabilité du matériau.

12.3 Présentation des calculs

12.3.1 Equations générales

Soit $G(t)$ l'évolution du taux de restitution d'énergie, correspondant à une sollicitation donnée (relaxation, traction uni-axiale, etc...). On suppose avoir réussi à calculer une succession de points du réseau qui atteignent le critère les uns après les autres. On suppose aussi que ces points furent tous sur le trajet de propagation droite et ont rompu quand ils étaient en position de nœud de fond de fissure. Les temps successifs de libération sont donnés par la suite des $(t_i)_{\{i=1,n-1\}}$. La date t_n est définie comme le premier instant suivant où un point de la structure qui n'a pas encore rompu atteint le critère, c'est-à-dire :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{n-i}}^{t_{n-i+1}} \mu_0 \exp \frac{\epsilon(x+(i-1)\delta, y, G(u), u)}{\alpha} du = 1$$

Comme mentionné précédemment, on suppose que chaque libération est brutale et l'état d'équilibre suivant immédiatement atteint. On montre que le nœud de fond de fissure est toujours le nœud le plus fragile au pas suivant, c'est-à-dire que l'équation ci-dessus se simplifie en :

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{t_{n-i}}^{t_{n-i+1}} \mu_0 \exp \frac{\epsilon(i\delta, 0, G(u), u)}{\alpha} du = 1 \qquad (12.3\text{-}9)$$

Un calcul semi-analytique permet d'extraire la valeur t_n. On peut ainsi définir la propagation de fissure par la suite des t_i, associée au trajet de chargement caractérisé par $G(t)$.

Dans la suite, nous nous intéressons essentiellement aux éprouvettes PS. Quand cela ne sera pas précisé, les calculs seront faits avec :

1. une éprouvette PS : $h_0 = 1$ (mm) ;
2. un comportement GNH : $\mu = 1$ (MPa), $b = 1$, $n = 3$;
3. des paramètres d'endommagement : $\epsilon_0 = 4$, $\alpha = 0.15$;
4. une taille de la grille : $\delta = 10^{-3}$ (mm) ;
5. toutes les intégrations sont réalisées par la méthode de Romberg, avec une erreur maximale de 10^{-7}, précision non-superflue pour cette étude ;
6. la plupart des recherches de zéro peuvent se faire par dichotomie, en s'appuyant sur le caractère monotone des fonctions testées et souvent un encadrement connu des zéros. Les zéros sont déterminés à mieux que 10^{-3} près, valeur minimale acceptable.

L'essai standard est un essai de relaxation. Il est paramétré par :

1. une déformation de relaxation ϵ_r ;
2. une vitesse de chargement $\dot{\epsilon}$.

On représente sur le graphe (12.3-6) les trois classes de résultats que l'on peut obtenir pour un essai de relaxation. En fonction de la longueur de propagation, on représente l'élongation atteinte au cours de l'essai et la vitesse de propagation. La vitesse au nœud i est calculée par le temps de parcours de δ du nœud i au nœud $i+1$. On peut définir :

1. une situation d'**amorçage tardif**. Le premier nœud atteint le critère longtemps après que le chargement de relaxation soit atteint. Dans ce cas, la vitesse de propagation semble constante dès l'amorçage.
2. une situation d'**amorçage précoce**. Le premier nœud atteint le critère avant la fin de la période de mise en charge. L'état de relaxation est atteint peu après, la vitesse devient alors constante.
3. une situation de **traction monotone**. De nombreux points atteignent le critère avant la fin de la mise en charge. Pour ceux-là, tout ce passe comme si le matériau était en traction monotone. La traction monotone rentre dans ce cas particulier, avec ϵ_r tendant vers l'infini. La vitesse de propagation est rapidement croissante.

On s'intéresse plus particulièrement à la modélisation de la vitesse de propagation et à la définition de l'amorçage.

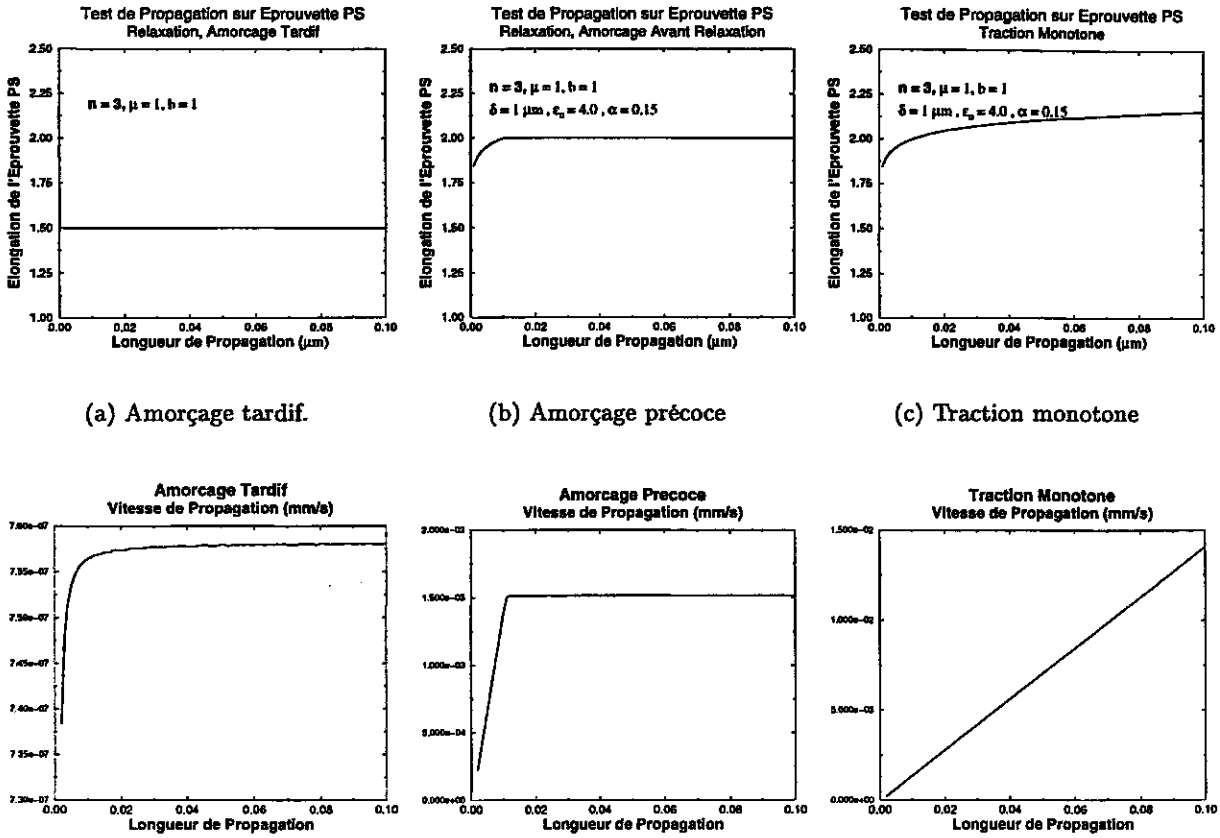
12.3.2 Description de la vitesse

12.3.2.1 Calcul stationnaire

Dans les cas d'amorçage tardif et précoce, une vitesse constante de propagation est constatée dès que l'on arrive à la déformation de relaxation. Nous cherchons à la calculer par une méthode directe, plus rapide que la méthode incrémentale par recherche de la suite des t_i.

Définition D-1 (CALCUL STATIONNAIRE) *Nous appellerons* **Calcul Stationnaire** *une méthode directe de calcul des grandeurs à l'état stationnaire.*

⋆



(a) Amorçage tardif. (b) Amorçage précoce (c) Traction monotone

FIG. 12.3-6: Les 3 cas possibles d'essais de propagation de fissure en relaxation. Ce classement est réalisé par rapport à l'amorçage. Dans les situations d'amorçage tardif et précoce, on peut voir qu'une vitesse stationnaire existe. Le cas monotone est un cas particulier d'amorçage précoce, où la déformation de relaxation est rejetée à l'infini. La vitesse de chargement est $10^{-3}s^{-1}$.

Plaçons-nous loin de l'amorçage. On peut supposer qu'il existe une longueur au delà de laquelle le cumul de dommage devient négligeable, c'est-à-dire que le champ homogène ne participe pas à l'endommagement global de la structure. Cela revient à supposer l'existence d'un entier p tel que l'équation (12.3-9) soit peu différente de :

$$\sum_{i=1}^{p} \mu_0 \exp(\frac{\epsilon(i\delta, \theta = 0)}{\alpha})[t_{n-i+1} - t_{n-i}] = 1$$

Très loin de l'amorçage, dans le cas de la propagation stationnaire (si elle existe) p est constant et la suite des t_i est arithmétique de raison ∂t. Le problème discret stationnaire est :

$$\mu_0 \left(\sum_{i=1}^{p} \exp(\frac{\epsilon(i\delta, \theta = 0)}{\alpha}) \right) \partial t = 1$$

Si c est la vitesse de propagation de la fissure, alors :

$$c = \mu_0 \delta \left(\sum_{i=1}^{p} \exp(\frac{\epsilon(i\delta, \theta = 0)}{\alpha}) \right) \tag{12.3-10}$$

Pour déterminer p, **on regarde ce qui se passe quand on plonge directement un maillage dans un champ de déformation fissuré** donné par nos calculs asymptotiques . On définit la zone d'influence du fond de fissure par un paramètre p tel qu'au delà, le cumul engendré par la présence du fond de fissure pendant l'intervalle de temps ∂t soit négligeable. Si d_p est un endommagement considéré comme négligeable, alors p est donné par :

$$\alpha\delta^{\frac{1}{2n}} = \frac{a(G,n)}{\ln d_p}\left[\frac{1}{p^{\frac{1}{2n}}} - 1\right] \tag{12.3-11}$$

Si ϵ_h est le champ de déformation homogène dans l'éprouvette PS loin du fond de fissure, le calcul de la vitesse est donné par (12.3-10) et (12.3-11) tant que le cumul de dommage dans la zone de déformation homogène est négligeable, c'est-à-dire :

$$\mu_0 \exp\frac{\epsilon_h}{\alpha}t << d_p$$

Dans le cas où :

$$\mu_0 \exp\frac{\epsilon_h}{\alpha}t = d_0 \tag{12.3-12}$$

est non-négligeable, les équations ci-dessus sont modifiées en :

$$c = \frac{\mu_0}{1-d_0}\delta\left(\sum_{i=1}^{p_0}\exp(\frac{\epsilon(i\delta,0)}{\alpha})\right) \tag{12.3-13}$$

avec :

$$\alpha\delta^{\frac{1}{2n}} = \frac{a(G,n)}{\ln\frac{d_p}{1-d_0}}\left[\frac{1}{p_0^{\frac{1}{2n}}} - 1\right] \tag{12.3-14}$$

On remarque que l'effet de l'endommagement homogène est d'une part de réduire la taille du domaine d'infuence, donnée par p; et d'autre part de façon moins évidente, d'accélérer la vitesse de la fissure. La durée de vie d'une éprouvette entaillée ne peut pas excéder la durée de vie d'une éprouvette saine à mode de chargement identique. En effet, on peut montrer que la vitesse de fissuration devient infinie quand on approche la durée de vie.

Pour bien voir l'influence de l'endommagement homogène, on peut remarquer que la formule de calcul de la vitesse stationnaire donnée par (12.3-10) est une formule approchée que l'on peut, par construction, modifier en :

$$c = \mu_0\delta\left(\sum_{i=1}^{\infty}\exp(\frac{\epsilon(i\delta,\theta=0)}{\alpha})\right) \tag{12.3-15}$$

On peut constater ainsi qu'un endommagement homogène modifie la vitesse en :

$$c_{d_0} = \frac{c}{1-d_0}$$

Précision : *Ce résultat est valable au premier ordre si l'endommagement homogène varie peu pendant la propagation sur p_0 nœuds. C'est-à-dire si :*

$$\mu_0 p_0 \exp\left[\frac{\epsilon_h}{\alpha}\right]\frac{\delta}{c_{d_0}} << d_0$$

Cette condition est toujours réalisée.

L'étude de la propagation stationnaire nous permet de dissocier deux effets concommittants dans la propagation de fissure. Un effet propre à la fissure assure une vitesse de propagation caractéristique de cette fissure, vitesse minimale de propagation, seule vitesse stationnaire. Un endommagement homogène permet de faire propager des fissures plus rapidement et rend le matériau plus fragile (domaine d'influence de la pointe de fissure plus petit). De même, l'endommagement homogène permet d'atteindre des vitesses de propagation plus élevées dans un essai classique quand le temps de l'expérience se rapproche de la durée de vie de l'éprouvette homogène.

En première estimation, on peut voir que l'influence d'un endommagement homogène est faible même quand on approche de la durée de vie. Par exemple, pour un endommagement de l'ordre de la demi-vie ($d_0 = \frac{1}{2}$), la vitesse est seulement multipliée par 2. En pratique, nous avons toujours été confrontés à des situations où l'endommagement homogène n'influe pas sur la vitesse.

L'ensemble de ces résultats analytiques nous donne une vision assez claire de la propagation de fissure dans les éprouvettes PS. On constate notamment que la notion de vitesse stationnaire est relative à une accéleration très lente de la propagation par le seul effet de la déformation à l'infini. Il peut se produire des situations où la vitesse augmente de façon notable pendant la phase de relaxation. Ce cas est bien maîtrisé par la connaissance de d_0.

12.3.2.2 Validation du calcul de la vitesse

Dans un premier temps, on vérifie que la vitesse stationnaire donnée par (12.3-10) est bien indépendante de la vitesse de chargement de l'éprouvette. Ce résultat est vérifié sur le graphe (12.3-7). On observe à la fois l'indépendance attendue de la vitesse par rapport au chargement et une conséquence très intéressante du modèle : plus la vitesse de chargement est faible, plus l'amorçage est atteint pour des déformations faibles. Dans le cas des très faibles vitesses, on peut obtenir un essai de traction uni-axiale. Ce résultat semble confirmer que les essais de relaxation doivent être réalisés après une phase de mise en charge avec une vitesse de chargement élevée, qui "gèle" l'amorçage de la fissure.

Ensuite, on peut vérifier sur quelques exemples que le calcul stationnaire donne bien la même vitesse que celle estimée par un calcul direct. On observe d'abord une légère accélération de la vitesse de propagation dans le calcul direct. Cette accélération porte en général sur la cinquième décimale au plus et n'est pas visible en cours d'essai. Cela justifie bien l'existence d'une vitesse stationnaire. La précision de l'approximation par le calcul direct est excellente et dépend du choix de d_p qui fixe la variable de sommation p. Plus on prend en compte des faibles cumuls (par un d_p faible), plus l'approximation est correcte. Avec un d_p de 10^{-5}, la précision est meilleure que 0.006 % et passe à 0.02 % et 0.06 % pour un d_p de 10^{-4} et 10^{-3}. Ces erreurs sont compatibles avec l'accéleration lente de la fissure. Elles dépendent peu de la valeur des coefficients qui paramètrent le problème. En effet, l'indice de sommation p dépend de tous les paramètres pertinents pour le calcul de la vitesse et fixe l'erreur globale sur la vitesse quand celle-ci est stationnaire.

Un graphe comme (12.3-6) montre que la vitesse de propagation stationnaire est atteinte très rapidement dès l'instant de relaxation de l'éprouvette pour un amorçage précoce. On doit rapprocher ces observations de la remarque de Mac Kenna et Penn : le cumul D devient non-négligeable très peu de temps avant la rupture. Pour prolonger ce résultat, on peut regarder si la vitesse stationnaire peut rendre compte de la vitesse de

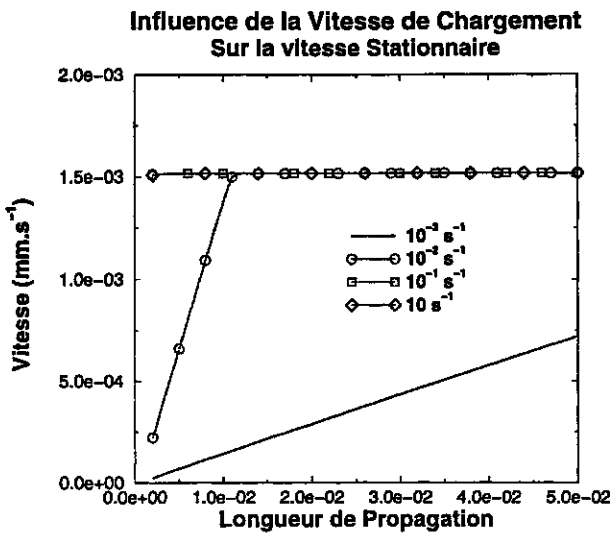


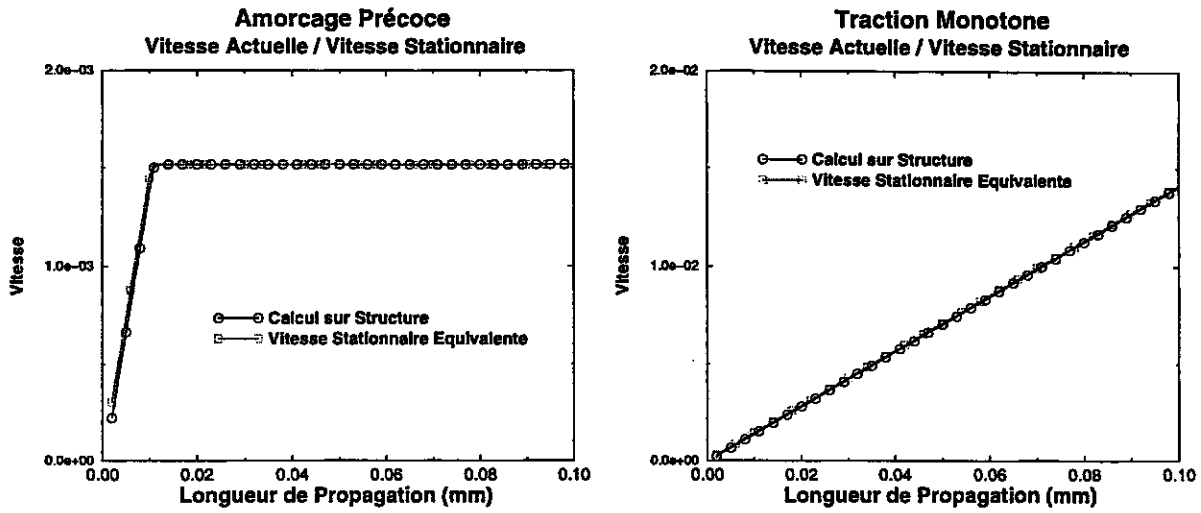
FIG. 12.3-7: Influence de la vitesse de chargement sur la vitesse stationnaire. Quand la vitesse de chargement est faible, l'amorçage est précoce. L'essai peut devenir un essai de traction monotone si la propagation devient très longue avant la relaxation. Dans ce cas, il n'y a pas de vitesse stationnaire. Quand la vitesse augmente, l'amorçage est de plus en plus tardif. On constate que dès que l'éprouvette est en relaxation, la vitesse stationnaire est atteinte et ne dépend pas de la vitesse de chargement.

propagation instantanée dans un essai monotone. Ce type de résultat est illustré sur le graphe (12.3-8). Il montre que la vitesse stationnaire estime bien la vitesse instantanée. L'erreur commise sur l'approximation ne dépasse pas 2% avec un d_p de 10^{-5} après une propagation de quelques unités. Par contre, à l'amorçage la vitesse est toujours assez faible et s'écarte de la vitesse stationnaire dans les cas d'amorçages tardifs. On peut en voir un exemple sur les graphes d'amorçage tardif de (12.3-6) : l'éprouvette est déjà en relaxation mais la vitesse à l'amorçage s'écarte de 30 % par défaut de la vitesse stationnaire.

12.3.2.3 Influence des paramètres

L'ensemble des variables du modèle est donné page 162. On peut essayer de montrer l'influence de chacune sur la vitesse de propagation à partir de la formule (12.3-10).

1. **effet de α** : plus α est grand, plus la vitesse est élevée. Pour une susceptibilité vraiment forte, la propagation a en outre tendance à être accélérée. Dans la plupart des cas - i.e. pour une susceptibilité faible - l'accélération est faible et porte sur la cinquième décimale au plus. Pour α fort au contraire, l'accélération est très nette et l'hypothèse de propagation stationnaire n'est plus vérifiée.
2. **effet de δ** : plus δ est petit, plus la vitesse de propagation est rapide au point que l'on peut se retrouver facilement en traction monotone. Dans le cas des δ élevés, la fissure se propage à des vitesses qui peuvent devenir très faibles. On peut comprendre ce résultat en notant que notre critère de propagation s'applique directement à la distance δ sans se préoccuper de ce qui se passe à des distances plus faibles du fond de fissure. Le cumul dépend localement de $1/\delta^{\frac{1}{2n}}$, d'autant plus fort que δ est petit mais dans une mesure non-linéaire qui explique le résultat observé.
3. **effet de b** : le paramètre b a un rôle dans le comportement qu'il n'est pas facile de cerner. Pour la déformation, il s'agit d'un paramètre de "saturation" qui intervient



(a) Amorçage précoce.

(b) Traction monotone

FIG. 12.3-8: Comparaison de la vitesse de propagation actuelle avec la vitesse stationnaire à la déformation actuelle dans les cas particuliers où la vitesse n'est pas stationnaire. On observe une bonne approximation des résultats numériques par la vitesse stationnaire. Ces résultats montrent le peu d'influence des effets d'histoire sur la vitesse. Calculs correspondant aux cas d'amorçage précoce et de traction monotone de (12.3-6).

dans la pente de l'asymptote de a_2^{2n} par rapport à λ^n. On remarque que plus b est grand, plus cette pente est grande et occasionne de grandes déformations localement, et plus la vitesse de propagation est grande au point de se retrouver facilement en traction monotone.

4. **effet de la déformation macroscopique** : le résultat est évident, plus la déformation de relaxation est faible, plus les vitesses de propagation sont faibles et stationnaires.
5. **effet de la non-linéarité** : plus la non-linéarité est faible, plus les déformations locales sont grandes pour une même déformation macroscopique. On constate donc que l'on se retrouve facilement en traction monotone.

Enfin, l'effet de μ_0 est visible directement sur l'équation (12.3-10). On observe clairement que si α donne une information sur l'évolution de la vitesse en fonction de la sollicitation, μ_0 décale seulement les vitesses vers les petites ou les fortes valeurs. La relation liant μ_0 à ϵ_0 montre que pour une même déformation de relaxation fixant G, plus la déformation ϵ_0 est élevée, plus la vitesse de propagation est faible.

12.4 Exploitation et validation du modèle

12.4.1 Courbe de Lake

Essayons de montrer dans quelle mesure notre modèle peut reproduire la courbe de Lake donnée sur la figure (11.2-4). Le dépouillement de ce type de résultat est possible à partir de la formule (12.3-10). Si l'on suppose le comportement connu de type GNH, il est possible de rechercher $(\delta, \epsilon_0, \alpha)$ ajustant au mieux une courbe $G(c)$. On choisit plusieurs

lois GNH et l'on regarde s'il est possible de retrouver la courbe expérimentale. Pour simplifier l'étude, on suppose que $b = 1$ dans la loi.

μ	n	δ	ϵ_0	α	$\alpha.\delta^{\frac{1}{2n}}$	$\mu_0.\delta$
1.0	1.2	$1.0\ 10^{-03}$	19.136	1.974	.1110	$1.887\ 10^{-08}$
1.0	1.3	$1.0\ 10^{-03}$	15.772	1.471	.1032	$7.638\ 10^{-09}$
1.0	1.5	$1.0\ 10^{-03}$	11.452	.9235	$9.235\ 10^{-02}$	$1.508\ 10^{-09}$
1.0	2.0	$1.0\ 10^{-03}$	6.662	.4081	$7.258\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.0	2.5	$1.0\ 10^{-03}$	4.727	.2409	$6.052\ 10^{-02}$	$1.972\ 10^{-13}$
1.0	3.0	$1.0\ 10^{-03}$	3.724	.1647	$5.208\ 10^{-02}$	$2.114\ 10^{-15}$
1.0	2.0	$1.0\ 10^{-02}$	3.969	.2294	$7.254\ 10^{-02}$	$1.705\ 10^{-11}$
1.0	2.0	$5.0\ 10^{-03}$	4.673	.2729	$7.258\ 10^{-02}$	$1.722\ 10^{-11}$
1.0	2.0	$1.0\ 10^{-03}$	6.662	.4081	$7.258\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.0	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	10.537	.7258	$7.258\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.5	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	9.490	.6559	$6.559\ 10^{-02}$	$1.728\ 10^{-11}$
1.4	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	9.662	.6672	$6.672\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.3	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	9.849	.6797	$6.797\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.2	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	10.054	.6934	$6.934\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
1.1	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	10.282	.7087	$7.087\ 10^{-02}$	$1.724\ 10^{-11}$
1.0	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	10.537	.7258	$7.258\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
.9	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	10.825	.7451	$7.451\ 10^{-02}$	$1.721\ 10^{-11}$
.8	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	11.156	.7674	$7.674\ 10^{-02}$	$1.720\ 10^{-11}$
.7	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	11.542	.7935	$7.935\ 10^{-02}$	$1.722\ 10^{-11}$
.6	2.0	$1.0\ 10^{-04}$	12.002	.8248	$8.248\ 10^{-02}$	$1.726\ 10^{-11}$

TAB. 12.4-1: Quelques résultats de recherche de coefficients de la loi de cumul de dommage adaptés à la modélisation de la courbe expérimentale (11.2-4).

On constate que l'on arrive assez bien à ajuster la courbe de Lake. Pour un choix raisonnablement large de non-linéarités, la courbe $G(c)$ est obtenue avec des erreurs quadratiques comparables, légèrement décroissantes quand la non-linéarité s'élève.

Le jeu de coefficients choisi est très important pour retrouver les valeurs des coefficients de la fonction de dommage attendue. Par exemple, les faibles non-linéarités ont tendance à nous donner des déformations à rupture et des susceptibilités (ϵ_0, α) très élevées. Par contre, les champs obtenus avec $n = 2.5$ ou $n = 3$ nous donnent des valeurs proches des valeurs attendues.

On doit surtout remarquer que pour une même non-linéarité et le même module, il y a seulement deux variables découplées pour rendre compte de la courbe :

1. $\alpha\delta^{\frac{1}{2n}}$. L'invariance de cette quantité montre que c'est essentiellement la singularité de fond de fissure qui gère la vitesse de propagation.
2. $\mu_0\delta$. Cette variable permet de retrouver la déformation rupture dans la loi de cumul, donc la translation en vitesse de la courbe $G(c)$.

De même, $\alpha.\delta^{\frac{1}{2n}}$ est une quantité qui ne varie pas en fonction du module : la susceptibilité à la vitesse est plus affectée par la forme de la loi que par son intensité. D'après ces résultats :

- La non-linéarité qu'il faut prendre en compte pour calculer une enveloppe $G(c)$ avec des valeurs de la fonction de cumul réalistes semble être de l'ordre de 3. Cette valeur élevée doit rendre compte de la nature visco-élastique du comportement local et

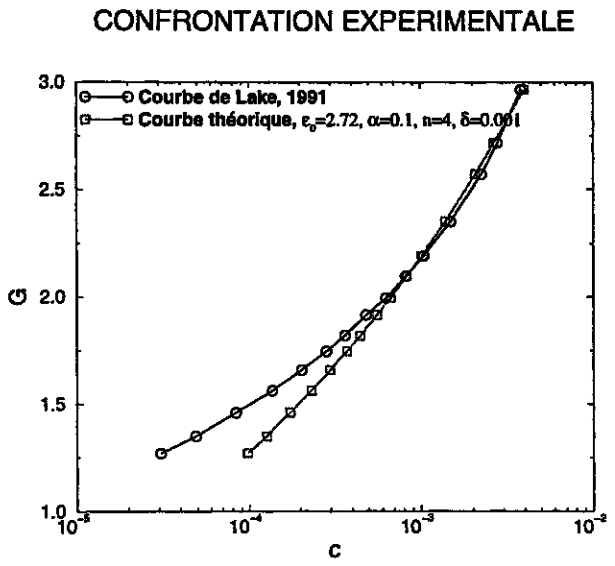


FIG. 12.4-9: Courbe expérimentale de Lake approchée par un ajustement théorique donné par (12.3-10). Dans ce cas, le comportement est supposé connu, donné par une loi de type GNH dont les coefficients sont imposés. (en particulier, $\mu = 1$ et $b = 1$). On constate que l'ajustement est assez fidèle puisque l'on commet au plus une erreur de 50 % aux faibles vitesses. On remarque également que l'on est capable d'obtenir des ajustements de qualité équivalente avec d'autres choix de non-linéarités - ici $n = 4$.

surtout de **l'écart entre le champ asymptotique réel et le champ asymptotique mesuré avec une loi GNH adaptée aux faibles déformations** (n=1.2 à 1.6).

- La richesse donnée par les coefficients $\alpha.\delta^{\frac{1}{2n}}$ et $\mu_0.\delta$ doit permettre de rester dans un cadre large, rendant compte par exemple de la propagation de fissure mais peut-être aussi des essais rupture type éprouvette haltère (ne faisant pas apparaître de microstructure).

12.4.2 Notion de mesure intrinsèque

On montre dans la littérature que T est une quantité intrinsèque. Nous avons vu aussi le faible écart entre T et J_2 dans un dépouillement expérimental, tel que l'un comme l'autre pouvait être effectivement considéré comme intrinsèque. Quelles informations nous donne notre modèle sur la courbe $T(c)$?

Nous devons d'abord choisir une mesure pertinente, soit T, soit J_2. Comme nous nous intéressons à la propagation stationnaire, il n'y a pas de différence de l'une à l'autre, à condition que la mesure de T soit correcte et donne loin de l'amorçage $T = J_2$, que l'on assimilera à G.

Le fait que G soit une mesure pertinente du type de sollicitation nous permet de mesurer aussi la déformation locale. On peut écrire d'une façon très générale :

$$c = f(G) \tag{12.4-16}$$

où f par exemple est donnée par la formule (12.3-10). Ce résultat implique que le taux de restitution caractérise la propagation de fissure. En particulier, on retrouve par cette

expression l'indépendance de la courbe $G(c)$ en fonction de la taille d'éprouvette, mais aussi de sa forme si l'éprouvette est sollicitée en mode plan.

Commentaire : *De façon plus générale, nous avons montré que la vitesse était une caractéristique de l'amplitude de sollicitation plutôt que d'un effet d'histoire : c'est-à-dire qu'à un G donné correspond une vitesse de propagation. Cela permet d'affirmer que pour des éprouvettes ou des essais pour lesquels on n'a pas stationnarité de G, la relation $G(c)$ que l'on pourrait définir pour ce type d'essai est très proche de la relation établie en relaxation sur une éprouvette PS.*

Les éprouvettes pantalons sont sollicitées en mode antiplan. La nature complètement différente du mode de sollicitation peut nous donner une justification plus fiable du caractère intrinsèque de la courbe expérimentale $G(c)$. Nous avons donné dans le cadre de l'approche locale à la fois les développements asymptotiques de mode plan et antiplan. Pour chacun, nous avons accès à la valeur la plus singulière de la déformation qui interviendra sous la forme :

$$\begin{cases} a_2^{2n} = \frac{1}{\pi b}\frac{1}{(\frac{b}{n})^{n-1}}\frac{1}{m_2^{2n-1}}G \\ a_3^{2n} = \frac{4}{n\pi}\frac{1}{m_2^{2n-1}}\frac{b^{1-n}}{2n^2-2n+1}G \end{cases}$$

Localement, la déformation en mode III n'a pas la même intensité qu'en mode I. Le rapport entre les deux champs locaux peut être exprimé par la correction à apporter pour qu'en mode III le taux de restitution ait le même effet qu'en mode I :

$$\begin{cases} G_{III} = \gamma G_I \\ \gamma = \sqrt{n}\left[\frac{2n^2-2n+1}{4b}\right]^{\frac{1}{2n}} \end{cases}$$

L'allure de γ est donnée sur le graphe (12.4-10). On peut voir que pour des valeurs usuelles de la non-linéarité, la différence entre G_{III} et G_I est faible. Pour une non-linéarité de 1.5, $\gamma \approx 1$ et approche 2 pour $n = 3$.

La courbe $G_{III}(c)$ ne coïncide donc pas avec $G_I(c)$. Mais elle peut être obtenue simplement par une translation de $\log\gamma$ selon $\log G$. Dans le cas par exemple où $n = 3$, la courbe $G_{III}(c)$ est au-dessus de $G_I(c)$, le rapport de l'une à l'autre étant approximativement 2. Est-ce vraiment un hasard ? Le fait est qu'aux milieux de toutes les erreurs et incertitudes que nous avons pu noter précédemment sur la notion de taux de restitution d'énergie dans la littérature, la correction que nous donnons entre les deux éprouvettes est exactement celle observée par Gent et Kim [III.16] !

Nous avons donc montré que dans le cas des essais classiques la courbe $G(c)$ est caractéristique des essais plans. D'autre part, les essais sur éprouvettes pantalons peuvent donner la même courbe si l'on accepte de dire que le comportement représentatif localement est donné par une non-linéarité élevée. Enfin, les essais monotones, comme la propagation sur éprouvette pantalon à vitesse constante donne une courbe proche de la courbe précédente.

On en déduit que notre modèle peut rendre compte du caractère intrinsèque de $G(c)$. Une partie de la démonstration repose sur (12.4-16), une autre sur la forme du critère (cumul sur les derniers instants), une dernière sur le fort écrantement de l'amplitude des déformations par les non-linéarités de comportement (n=3).

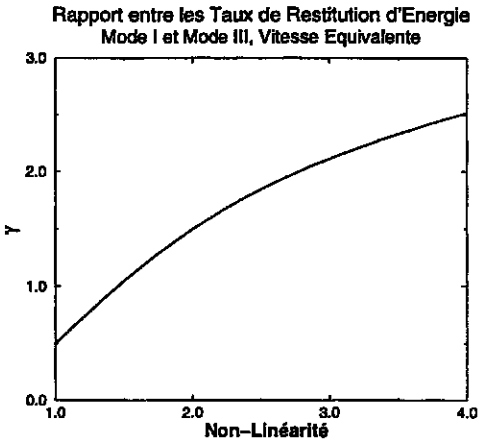


FIG. 12.4-10: Allure du facteur correctif γ qui rend compte des écarts d'observations entre les essais sur éprouvettes PS et les essais sur éprouvettes pantalons.

12.4.3 Influence des non-linéarités du comportement

Nous n'avons pas introduit de viscosité dans notre calcul. Comment apparaît-elle dans les résultats? La dépendance du critère au temps d'exposition à la déformation est la première forme de "viscosité" qui intéresse plus particulièrement la rupture. Elle permet de caractériser la rupture dans les cas homogènes. Le fond de fissure a également un effet particulier de "multiplicateur de la sollicitation" qui apparaît par les grandes déformations locales, atténuées par la viscosité, elle-même noyée dans notre analyse dans l'erreur en loi de comportement.

Un matériau non-chargé est beaucoup moins dissipatif qu'un matériau chargé. Il est également beaucoup moins visco-élastique et se rapproche plus du matériau néo-hookéen. En contre-partie, l'absence de charge le rend apte à supporter de plus grandes déformations.

Considérons un matériau caractérisé par son comportement néo-hookéen et $\epsilon_0 = 8$, $\alpha = 0.15$. On suppose qu'une fois chargé, ses caractéristiques sont données par : $n = 3$, $\epsilon_0 = 6$, $\alpha = 0.15$. Les courbes $G(c)$ sont données sur le graphe (12.4-11).

On observe d'abord que **le paramètre prépondérant qui fixe l'ordre de grandeur de la vitesse de propagation est la non-linéarité**. Plus la non-linéarité est faible, plus les vitesses sont élevées et varient rapidement en fonction du taux de restitution. Les non-linéarités élevées, qui traduisent une divergence forte de la contrainte aux grandes déformations ou un adoucissement des déformations par la viscosité permettent de ramener les vitesses de propagation à des valeurs observables. Si l'on suppose qu'une non-linéarité caractérise une classe de matériau (par exemple n=1 pour les caoutchoucs non-chargés), les paramètres de la fonction d'endommagement ne modifient plus beaucoup l'ordre de grandeurs des vitesses. Pour une même classe de matériau, plus ϵ_0 est élevée et plus les vitesses sont faibles pour un même taux de restitution. De même, plus α est grand plus une même gamme de vitesse est couverte par une large plage de taux de restitution.

Ces remarques nous permettent de mieux interpréter les résultats d'ajustement de la courbe de Lake. La non-linéarité à choisir localement doit être représentative de la divergence de la contrainte aux grandes déformations. L'approximation du comportement par la loi de Langevin nous permet de comprendre que plus la déformation est grande localement, plus la non-linéarité est élevée. **Les valeurs de n que l'on peut retenir caractérisent un comportement asymptotique moyen du matériau aux grandes**

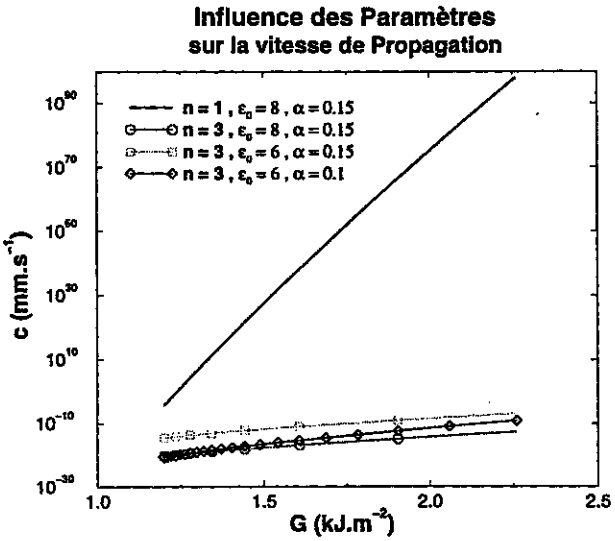


FIG. 12.4-11: Influence des paramètres de comportement et de cumul sur la vitesse de propagation de fissure.

déformations près de la rupture. Elles intégrent éventuellement l'écrantement des déformations par la viscosité.

12.4.4 Influence de la dissipation

Nous montrons sur le graphe (12.4-12) l'influence de la dissipation sur la vitesse de propagation d'une fissure dans un essai de relaxation sur une éprouvette PS. Le calcul est réalisé en supposant qu'il n'y a pas d'effet de la dissipation sur le champ local avant l'amorçage, puisque la dissipation se manifeste en réduisant le taux de restitution selon une loi phénomènologique dépendant de la longueur de propagation :

$$J_2 = G(\lambda)(1 - aTanh\frac{l}{l_0})$$

avec a coefficient arbitraire entre 0 et 1 fixant l'écart entre G et J_2 supposés être les mesures élastique et dissipative du taux de restitution pour la déformation de relaxation λ ; l_0 longueur arbitraire caractérisant la vitesse de décroissance de J_2.

La vitesse de propagation dépend peu de la dissipation à l'amorçage. Puis, comme attendu, elle décroît en suivant la décroissance du taux de restitution. Notre modèle permet naturellement de rendre compte de ce phénomène. Il s'agit en fait d'une simple conséquence du caractère pertinent du taux de restitution pour notre étude, hypothèse présentée en page 149.

12.4.5 Cas des pré-tractions

Nous avons déjà présenté des calculs numériques de taux de restitution d'énergie dans les cas avec accommodation ou pré-traction transverse et observé plus particulièrement l'effet du comportement sur le bilan d'énergie. Nous regardons maintenant comment se comporte notre modèle sur ces exemples particuliers. Il est intéressant de constater que **notre modèle de cumul de dommage rend compte précisément de l'évolution des propriétés intrinsèques du matériau lorsque l'on réalise des expériences sans s'attacher à décrire l'évolution conjointe du comportement.**

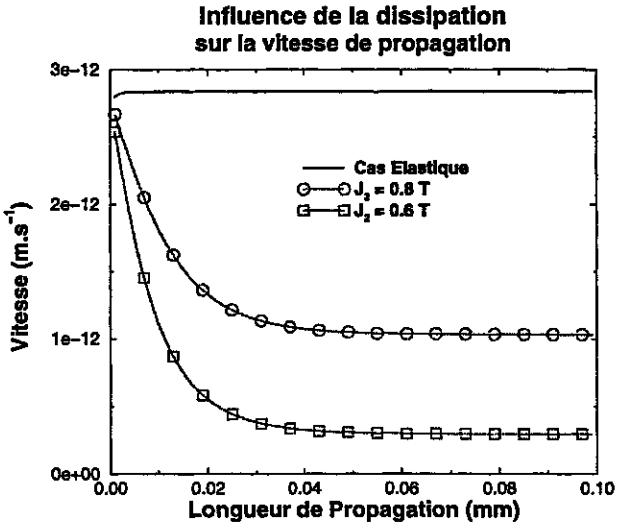


FIG. 12.4-12: Modélisation de l'effet de la dissipation sur la vitesse de propagation de fissure en cours d'essai. Cas d'un essai de propagation en relaxation sur une éprouvette PS. Les courbes sont repérées par la valeur stabilisée de J_2.

Les résultats que nous connaissons sur l'incidence des différentes pré-tractions sont essentiellement donnés pour des caoutchoucs qui cristallisent sous contraintes. Lake [III.37] donne par exemple des résultats graphiques complets comme sur la figure (12.4-15) pour un NR et un ENR. Il mentionne que les résultats sont similaires pour un SBR, mais avec des effets moins prononcés (pour tous les types d'essais). Gent et Kim [III.18] quant à eux donnent des résultats sur un SBR, mais beaucoup moins clairs.

12.4.5.1 Pré-tractions non-maintenues

Supposons d'abord que l'on exerce une sollicitation d'accommodation sur le matériau à tester. Dans notre modèle, cette sollicitation contribue à modifier la loi de comportement et engranger un pré-endommagement d_0.

Nous avons vu qu'en première approximation le pré-endommagement fait évoluer la vitesse comme :

$$c_{d_0} = \frac{c}{1 - d_0} \tag{12.4-17}$$

Dans un diagramme $(\ln T, \ln c)$, la droite initiale est translatée vers les $\ln c$ plus élevés. De même, nos calculs de J_2 montrent que plus l'accommodation est importante, plus J_2 décroît et coincïde avec le calcul de T accommodé. Une évolution simple mais réaliste donne :

$$T^* = [1 - \beta\epsilon_m]T \tag{12.4-18}$$

au moins pour une accommodation au delà de la déformation de relaxation. Dans le cas des calculs que nous avons présentés, $\beta \approx 0.5$. L'effet d'une accommodation est donc de translater la courbe précédente vers les petits $\ln T$ (voir le graphe (12.4-13)).

Ce type d'expérience est réalisé par Gent et Kim sur un SBR. Ils trouvent que l'accommodation (jusqu'à 250 % de déformation) ne modifie pas la valeur de G. On doit noter cependant que les auteurs ne semblent pas modifier leur mesure du taux de restitution en fonction de l'accommodation. Une accommodation endommage peu le matériau tant qu'elle n'approche pas d'une déformation de rupture. Dans les deux formules précédentes,

l'effet de l'accommodation est seulement de faire évoluer le comportement du matériau (i.e. action sur l'équation (12.4-18) uniquement). Gent et Kim ne tiennent pas compte de cette évolution et obtiennent toujours le même taux de restitution pour chaque essai, caractéristique du même état de déformation global. Cela implique que l'état local de la structure n'est pas modifié par l'accommodation - du moins dans le cas des essais de Gent et Kim parce que l'accommodation est réalisée à des déformations faibles par rapport à la déformation de rupture (250 % pour une déformation rupture de l'ordre de 400 %).

Notre résultat corrige celui de Gent et Kim et permet de bien comprendre ce qui se passe. Cependant, nous obtenons le même type de conclusion sur l'état local, à savoir qu'une accommodation n'a pas d'influence sur l'état local (Gent et Kim, conclusion par rapport à une anisotropie induite du volume élémentaire représentatif), ou ne modifie pas le critère local (notre modèle). Notre conclusion est plus précise puisque nous montrons que **le champ mécanique local suit bien l'accommodation du comportement** mais qu'une **pré-traction rapide à un niveau de déformation usuel ne modifie pas suffisamment le critère de propagation pour être mesurable.**

Enfin, on remarque la différence significative de comportement entre les caoutchoucs synthétiques et les caoutchoucs chargés pour ce type d'essai sur un graphe donné par Gent et Kim. Par le même protocole, ils montrent que les caoutchoucs naturels ont un taux de restitution qui décroît rapidement en fonction de la déformation d'accommodation. Ce type de résultat montre bien que l'on ne peut pas exactement comparer des résultats sur un SBR et un caoutchouc naturel. Notre modèle semblerait indiquer qu'il faut ajouter de la plasticité au critère alors qu'il n'y en a pas dans les SBR. L'approche de Gent et Kim permettrait plutôt de conclure à un effet d'orientation dans les caoutchoucs naturels qui n'existe pas dans le SBR.

12.4.5.2 Pré-tractions dans la direction du déchirement

Ce type d'essai doit donner le même type de résultat que précédemment. D'une part la pré-traction fait évoluer le d_0, souvent dans une mesure faible. D'autre part, le taux de restitution est légèrement modifié. Il évolue beaucoup moins vite que dans le cas accommodé, comme le montrent nos calculs de J_2, soit lentement croissant, soit lentement décroissant. On comprend alors que l'on fait peu évoluer la relation $G(c)$.

Ce résultat correspond aux observations de Gent et Kim [III.18]. Lake et al. [III.37] font le même type d'essais sur des caoutchoucs naturels. Ils observent un fort effet de la pré-traction pour ces matériaux. On retrouve qualitativement leur résultat si l'on fait l'hypothèse, comme pour l'accommodation, d'une décroissance forte de G en fonction de la déformation transverse, par exemple à cause de la plasticité du matériau. Les auteurs notent que le phénomène se retrouve aussi dans les SBR, mais dans une mesure faible. Les calculs de Gent et Kim présentent encore le même type d'erreur que précédemment. La densité d'énergie ne fait pas apparaître l'influence de la pré-déformation transverse. Dans ce cas cependant, on voit que l'erreur commise sur la mesure de G est faible.

12.4.5.3 Pré-tractions maintenues

Les pré-tractions maintenues ne correspondent pas du tout au même type de sollicitation. Dans ce cas en effet, il s'agit seulement d'un essai avec une sollicitation complexe. On n'agit pas sur d_0, ni sur la loi de comportement. Ces essais peuvent être réalisés avec des éprouvettes PS que l'on maintient entre les mors dans une configuration étirée longitudinalement. D'après notre modèle, nous devons encore obtenir la courbe $G(c)$ avec ce procédé.

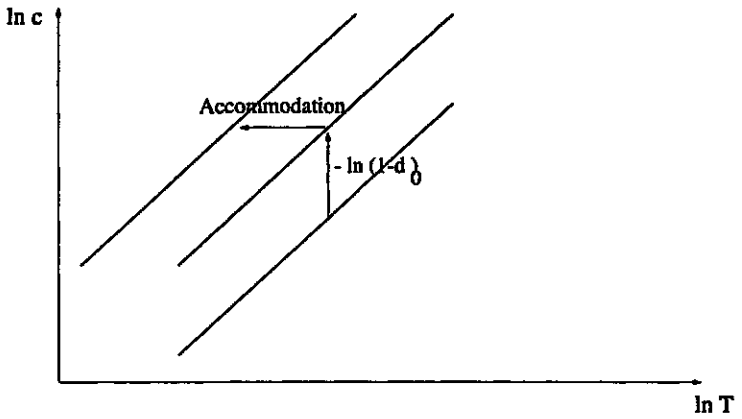


FIG. 12.4-13: Influence d'une prétraction sur la courbe $T(c)$, d'après notre modèle. Deux effets découplés d'endommagement et d'accommodation translatent la courbe de façon indépendante.

Gent et Kim ne retrouvent pas ce résultat. On doit cependant préciser leur protocole expérimental. Dans un premier temps, les auteurs utilisent une seule loi de comportement pour tous les essais. Ainsi, ils ne tiennent pas compte des sollicitations transverses d'accommodation dans leur estimation de G. Dans le cas présent, c'est bien la loi sans accommodation qui est valable. Cependant, on peut montrer que dans le cas des éprouvettes PS, le taux de restitution est donné par :

$$T = [W_0 - W_A]h_0$$

même avec une déformation transverse constante, résultat vérifié numériquement, page 139 (voir aussi page 133). Les auteurs estiment que la quantité W_0 à utiliser est toujours la densité mesurée à partir du test de comportement (sans pré-traction). Ils négligent en cela l'énergie emmagasinée par la déformation transverse, en invoquant implicitement un principe de linéarité. Regardons l'incidence de ce mode de calcul dans un cas simple.

Supposons que le matériau soit un GNH, de comportement simplifié :

$$W = (I_1 - 3)^n$$

On appelle λ_0 l'extension dans la direction de traction, λ_p l'extension maintenue dans la direction transverse. Pour ce cas, notre modèle donne :

$$T = (\lambda_0^2 + \lambda_p^2 + \frac{1}{\lambda_0^2\lambda_p^2} - 3)^n - (\lambda_p^2 + 2\frac{1}{\lambda_p} - 3)^n$$

alors que Gent et Kim aboutissent à T^* sur lequel repose leur mesure :

$$T^* = (\lambda_0^2 + \frac{1}{\lambda_0^2} - 2)^n$$

Nous montrons sur le graphe (12.4-14) comment évolue T^* en fonction de la pré-traction quand λ_p varie et en supposant que le matériau GNH a une non-linéarité $n = 1$ ou $n = 3$. Si l'on suppose notre modèle juste, alors on remarque que la méthode de calcul de Gent et Kim doit donner un taux de restitution fortement décroissant de la déformation transverse. Sur le graphe (12.4-14), la décroissance est très importante. Ce paramètre est contrôlé par la non-linéarité de la loi de comportement. Les résultats de Gent et Kim feraient état d'une allure de T^* à deux vitesses, d'abord fortement, puis lentement décroissante. Il semble que

nous ne puissions retrouver que la première partie de la courbe. Notre modèle n'est plus valable si la déformation transverse est très importante. Il peut s'agir d'une faiblesse du modèle liée à la simplicité de la loi de comportement, voire la mise en évidence d'un manque dans le cas de chargements multi-axiaux.

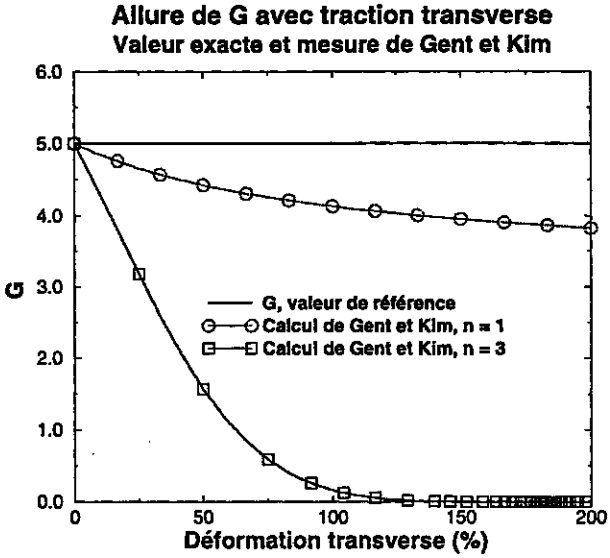


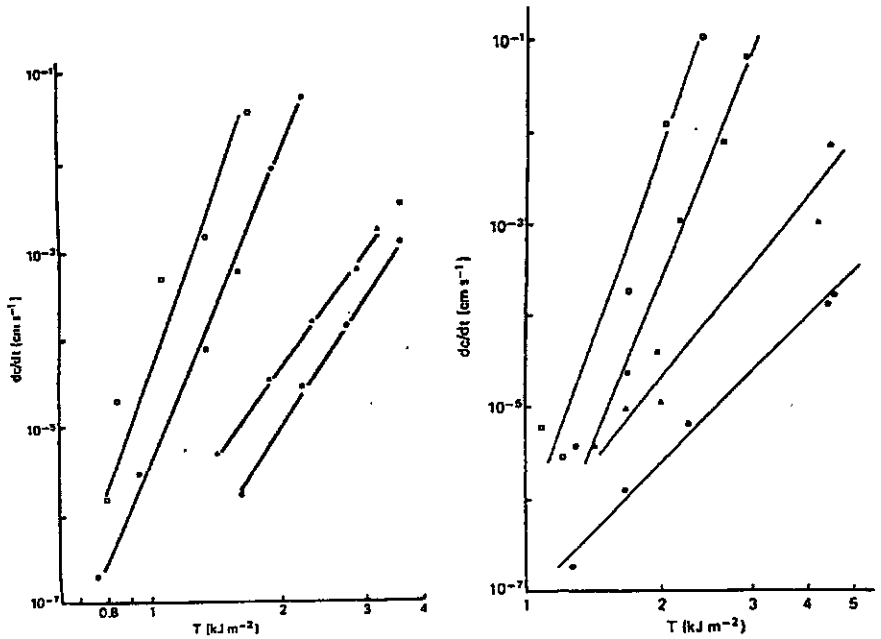
FIG. 12.4-14: Correction des résultats de Gent et Kim [III.18] dans le cas des essais avec une déformation maintenue dans la direction de déchirement. Si l'on suppose que le taux de restitution d'énergie est constant pour ce type d'essai et que Gent et Kim calculent mal le taux de restitution, alors les deux résultats sont cohérents.

12.5 Conclusion

Le modèle que nous proposons résout les problèmes que nous avions signalés dans les précédents chapitres. Il permet de synthétiser les approches énergétiques et les approches locales dans le cas d'essais sur éprouvettes standards.

Nous avons d'autre part montré à partir d'un cadre simplifié qu'il était possible de décrire une propagation de fissure en dissociant bien toutes les variables - comportement, structure et variables d'endommagement. Ce cadre privilégie un comportement simple pour pouvoir exploiter les développements asymptotiques. Nous pouvons intégrer au moins qualitativement beaucoup plus de résultats expérimentaux et les interpréter. La grande cohérence de notre modèle permet également de préciser les variables importantes dans les essais. Par exemple on montre bien l'influence négligeable de la vitesse de chargement dans les essais de propagation de fissure en relaxation ; également l'incidence faible des modifications des propriétés intrinsèques de rupture dans les essais sur matériaux accommodés. De même, le caractère intrinsèque du taux de restitution trouve un cadre naturel dans notre approche. On comprend que le paramètre énergétique pertinent pour caractériser la sollicitation est une mesure intrinsèque parce que le cumul de l'endommagement prend toute son importance aux derniers instants. Ainsi, les erreurs éventuelles dans les résultats expérimentaux peuvent trouver leur justification dans l'erreur de mesure entre T et J_2.

Nous avons vu la bonne aptitude de notre modèle à rendre compte de courbes $G(c)$, mieux que les précédents modèles présentés. Sa plus grande limitation tient au choix du



(a) NR (b) ENR

FIG. 12.4-15: Courbes expérimentales de Lake et al. [III.37] qui rendent compte de l'influence de pré-tractions maintenues sur les courbes $c(T)$ de deux caoutchoucs naturels. Une courbe correspond à un essai avec pré-déformation. Les droites se décalent vers les hautes vitesses et les basses valeurs de T en fonction de l'intensité de la déformation transverse. Les déformations d'essais sont de 200, 250, 300 et 350 %.

comportement. Il nous faut une représentation locale du comportement de type GNH qui rende les champs proches des champs réels. Cela ne peut se faire que si l'on choisit bien la non-linéarité en pointe de fissure, laquelle est différente de celle représentant le comportement dans toute la structure. Cette difficulté pourrait être résolue soit par des calculs de structure soit par des développements asymptotiques étendus à des comportements autres que GNH.

Mécanique de la rupture, conclusions

Cette partie nous a permis de faire un état détaillé des différentes études de la propagation de fissure dans les élastomères. Nous avons pu souligner dans quelle mesure de nombreux problèmes de fond ou des manques d'interprétations claires existent. Notamment, nous avons étudié la pertinence de la notion de taux de restitution, proposé une meilleure estimation de la vitesse de propagation. Il reste à chercher des extensions des développements asymptotiques à d'autres comportements et surtout il convient de demander plus d'informations sur les protocoles expérimentaux et les résultats obtenus.

La mécanique de la rupture s'articule autour de trois approches : locale, énergétique et expérimentale. Dans le cas de nos matériaux, c'est l'approche expérimentale qui est essentiellement connue et développée. Elle a jusqu'à présent fait l'économie des résultats théoriques, négligeant par nécessité les phénomènes dissipatifs. Nous avons montré l'intérêt de bien distinguer l'objet déchirabilité T (utilisé dans les dépouillements expérimentaux) de ce que l'on devrait appeler taux de restitution d'énergie J_2. Il résulte de notre analyse qu'il n'est bien souvent pas possible de reprendre les résultats exprimés en T par manque de clarté ou d'informations sur la mise en place du protocole expérimental. Notre travail s'appuie largement sur la loi de comportement proposée dans la partie II et nous montrons qu'il pourrait être nécessaire d'avoir un modèle de comportement encore plus fiable, par exemple pour estimer la dissipation visqueuse.

Nous proposons un modèle de propagation de fissure qui prend correctement en compte les principaux résultats de la littérature dans un cadre unifié. Notre présentation a volontairement simplifié la forme des comportements élastique et visco-élastique (afin d'exploiter les développements asymptotiques connus), limité le couplage entre comportement et cumul de dommage à un endommagement brutal avec avancée brutale de la fissure. Il serait possible de modifier certaines de ces hypothèses fortes, mais au détriment d'une identification des variables du modèle et de leur rôle sur la propagation de fissure - ce que nous n'avons pas souhaité faire.

Nous avons exploité les principaux articles de la littérature qui se rattachent à notre sujet. Cela nous montre d'abord la généralité du cadre que nous proposons qui s'appuie pourtant sur un modèle extrêmement simple de règle de cumul de dommage. Cela nous permettra, dans la dernière partie de notre travail, d'aborder la rotation de fissure avec une idée claire des résultats connus et de leurs conditions de validité. Nous essayerons de montrer également plus concrètement ce que peut apporter notre modélisation en plus d'une simple étude à caractère énergétique.

Bibliographie

[1] Ahagon A. et Gent A.N. - *Treshold Fracture Energies for Elastomers,* J. Polym. Sci., vol 13, pp 1903-1911, 1975.

[2] Andrews E.H. - *A Generalized Theory of Fracture Mechanics,* J. Mater. Sci., vol 9, pp 887-894, 1974.

[3] Andrews E.H. et Billington E.W. - *Generalized Fracture Mechanics, Part 2,* J. Mater. Sci., vol 11, pp 1354-1361, 1976.

[4] Andrews E.H. et Fukahori Y. - *Generalized Fracture Mechanics, Part 3,* J. Mater. Sci., vol 12, pp 1307-1319, 1977.

[5] Ball J.M. - *Discontinuous Equilibrium Solutions and Cavitation in Non-Linear Elasticity,* Phil. Trans. R. Soc. London, A 306, pp 557-611, 1982.

[6] Bender C.M. et Orszag S.A. - *Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers,* International Student Edition, London, Paris, 1978.

[7] Bhowmick A.K., Gent A.N. et Pulford C.T.R. - *Tear Strength of Elastomers under Treshold Conditions,* Rubb. Chem. Technol., vol 56, pp 226-232, 1983.

[8] Busse W.F. - *Tear Resistance and Structure of Rubber,* Ind. Eng. Chem. (Ind. Ed.), vol 26, pp 1194-1199, 1934.

[9] Capps R.N. - *Effect of Cure Systems and Reinforcing Fillers on Dynamic Mechanical Properties of Chlorobutyl Elastomers for Potential Vibration-Control Applications,* Rubb. Chem. Technol., vol 59, pp 103-122, 1986.

[10] Chicheportiche D. - *Etude Mécanique d'un Adhésif Polyuréthanne. Application au Collage des Pare-Brise,* Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 1998 .

[11] De D. et Gent A.N. - *Tear Strength of Carbon-Black-Filled Compounds,* Rubb. Chem. Technol., vol 69, no 5, pp 834-850, 1996.

[12] Dutta N.K. et Tripathy D.K. - *Effect of Carbon Black Concentration of the Micro-Mechanism of Fracture of Rubber Vulcanizates,* J. Elas. and Plast., vol 22, pp 136-151, April 1990.

[13] Fukahori Y. - *Fracture Mechanics of Viscoelastic Media,* Thèse, Queen Mary College, London, 1976.

[14] Gao Y.C. - *Elastostatic Crack Tip Behavior for Rubber-Like Material,* Theoretical and Applied Fracture Mechanics, vol 14, pp 219-231, 1990.

[15] Gent A.N. et Lindley P.B. - *Internal Rupture of Bonded Rubber Cylinders in Tension,* Proc. Roy. Soc. London,vol A 249, p 195, 1958.

[16] Gent A.N. et Kim H.J. - *Tear Strength of Stretched Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 51, pp 35-44, 1978.

[17] Gent A.N. et Tobias R.H. - *Treshold Tear Strength of Elastomers,* J. Polym. Sci., vol 20, pp 2051-2058, 1982.

[18] Gent A.N. et Park B. - *Failure Processes in Elastomers at or Near a Rigid Spherical Inclusion,* J. Mater. Sci., vol 19, pp 1947-1956, 1984.

[19] Gent A.N. et Lai S.M. - *Interfacial Bonding, Energy Dissipation and Adhesion,* J. Polym. Sci., Part B, Polymer Physics, vol 32, pp 1543-1555, 1994.

[20] Geubelle P.H. et Knauss W.G. - *Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : I . Homogeneous Case,* J. Elas., vol 35, pp 61-98, 1994.

[21] Geubelle P.H. et Knauss W.G. - *Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : II . Special Bimaterial Case,* J. Elas., vol 35, pp 99-137, 1994.

[22] Geubelle P.H. et Knauss W.G. - *Finite Strains at the Tip of a Crack in a Sheet of Hyperelastic Material : III . General Bimaterial Case,* J. Elas., vol 35, pp 139-174, 1994.

[23] Glucklich J. et Landel R.F. - *The Tearing Test as a Means for Estimating the Ultimate Properties of Rubber,* J. Appl. Polym. Sci., vol 20, pp 121-137, 1976.

[24] Greensmith H.W. et Thomas A.G. - *Rupture of Rubber. III Determination of Tear Properties,* J. Polym. Sci., vol 18, pp 189-200, 1955.

[25] Greensmith H.W. - *Rupture of Rubber, IV. Tear Properties of Vulcanizates Containing Carbon Black,* J. Polym. Sci., vol 21, pp 175-187, 1956.

[26] Halpin J.C. et Polley H.W. - *Observations on Fracture of Viscoelastic Bodies,* Rubb. Chem. Technol., vol 41-2, pp 1168-1181, 1968.

[27] Herrmann J.M. - *An Asymptotic Analysis of Finite deformations near the Tip of an Interface-Crack,* J. Elas., vol 21, no 3, pp 227-270, 1985.

[28] Hou H.S. et Abeyaratne R. - *Cavitation in Elastic and Elastic Plastic Solids,* J. Mech. Phys. Solids, vol 40, no 3, pp 571-592, 1992.

[29] Kadir A. et Thomas A.G. - *Tear Behavior of Rubbers over a Wide Range of Rates,* Rubb. Chem. Technol., vol 54, pp 15-23, 1981.

[30] Kausch H.H. - *Polymer Fracture,* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, London, Paris, Tokyo, 1986.

[31] Knowles J.K. et Sternberg E. - *On a Class of Conservation Laws in Linearized and Finite Elastostatics,* Arch. Rat. Mech. Anal., vol 44, no 3, pp 187-211, 1972.

[32] Knowles J.K. et Sternberg E. - *An Asymptotic Finite-Deformation Analysis of the Elastostatic Field Near the Tip of a crack,* J. Elas., vol 3, no 2, pp 67-107, 1973.

[33] Knowles J.K. et Sternberg E. - *Finite-Deformation Analysis of the Elastostatic Field Near the Tip of a Crack : Reconsideration of Higher Order results,* J. Elas., vol 4, no 3, pp 201-233, 1974.

[34] Knowles J.K. - *The Finite Anti-Plane Shear Field Near the Tip of a Crack for a Class of Incompressible Elastic Solids,* J. Elas., vol 13, no 5, pp 611-639, 1977.

[35] Lake G.J. et Thomas A.G. - *The Strength of Highly Elastic Materials,* Proc. Roy. Soc., A, vol 300, pp 108-119, 1967.

[36] Lake G.J. et Yeoh O.H. - *Effect of Crack Tip Sharpness on the Strength of Vulcanized Rubbers,* J. Polym. Sci., Part B : Polymer Physics, vol 25, pp 1157-1190, 1987.

[37] Lake G.J., Samsuri A., Teo S.C. et Vaja J. - *Time-Dependent Fracture in Vulcanized Elastomers,* Polymer, vol 32, no 16, pp 2963-2975, 1991.

[38] Lake G.J. - *Fatigue and Fracture of Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 68, no 3, pp 435-466, 1995.

[39] Le K.C. - *On the Singular Elastostatic Field Induced by a Crack in a Hadamard Material,* Mech. Appl. Math., vol 45, pt 1, pp 101-118, 1992.

[40] Mac Kenna G.B. et Penn R.W. - *Time-Dependent Failure in Polymethylmethacrylate and Polyethylene,* Polymer, vol 21, pp 213-220, 1980.

[41] Martin Borret G. et Chicheportiche D. - *Champs Mécaniques en Fond de Fissure dans un Elastomère. Comparaison MEF / Calculs Analytiques,* Colloque Apollor, 3-4 novembre 1997, A paraître.

[42] Mueller H.K. et Knauss W.G. - *Crack Propagation in a Linearly Viscoelastic Strip,* J. Appl. Mech., vol 15, no 2, pp 483-488, june 1971.

[43] Mullins L. - *Rupture of Rubber. IX. Role of Hysteresis in the Tearing of Rubber,* Trans. Inst. Rub. Ind., vol 35, pp 213-222, 1959.

[44] Ouakka A. - *Approche Stationnaire en Mécanique Non-Linéaire,* Thèse de l'ENPC, Paris 1993.

[45] Quigley C.J. et Parks D.M. - *The Finite Deformation Field Surrounding a Mode I Plane Strain Crack in a Hyperelastic Incompressible Material Under Small-Scale Non-Linearity,* Int. J. Frac., vol 65, pp 75-96, 1994.

[46] Rice J.R. - *A Path Independant Integral and the Approximation Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks,* J. Appl. Mech., vol 35, pp 379-386, 1968.

[47] Rivlin R.S. et Thomas A.G. - *Rupture of Rubber. I. Characteristic Energy for Tearing,* J. Polym. Sci., vol X, no 3, pp 291-318, 1953.

[48] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, I,* Int. J. Frac., vol 11, no 1, pp 141-159, 1975.

[49] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, II,* Int. J. Frac., vol 11, no 3, pp 369-388, 1975.

[50] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media, III,* Int. J. Frac., vol 11, no 4, pp 549-562, 1975.

[51] Smith T.L. - *Dependence of the Ultimate Properties of a GR-S Rubber on Strain Rate and Temperature,* J. Polym. Sci., vol 32, pp 99-113, 1958.

[52] Stacer R.G., Yanyo L.C. et al. - *Observations on the Tearing of Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 58, pp 421-435, 1984.

[53] Stacer R.G., Von Meerwall E.D. et Kelley F.N. - *Time-Dependent Tearing of Carbon Black-Filled and Strain-Cristallizing Vulcanizates,* Rubb. Chem. Technol., vol 58, pp 913-923, 1985.

[54] Stephenson R.A. - *The Equilibrium Field near the Tip of a Crack for Finite Plane Strain of Incompressible Elastic Materials,* J. Elas., vol 12, pp 65-99, 1982.

[55] Svistkov A.L. et Komar L.A. - *Use of the Statistical Thermofluctuational Strength Theory for Describing the Conditions of Adhesional and Cohesional Fracture of the Elastomer Matrix of a Solid Spherical Particle,* Polym. Sci., vol 33, no 11, pp 2242-2249, 1991.

[56] Svistkov A.L. - *Modeling of the Fracture of Particulate-Filled Elastomer Taking into Account the Characteristic Size ol Filler,* Polym. Sci., vol 36, no 3, pp 412-418, 1994.

[57] Svistkov A.L., Lebedev S.N. et Komar L.A. - *Simulation of Scale and Time Phenomena of Damage Initiation in Elastomers Binders of Filled Composites,* Advances in Fracture Research, Proceedings of the Ninth International Conference on Fracture, 1-5 April 1997, Sydney, Australia, vol 2, pp 833 - 840, Pergamon .

[58] Thomas A.G. - *Rupture of Rubber. II. The Strain Concentration at an Incision,* J. Polym. Sci., vol 18, pp 177-188, 1955.

[59] Thomas A.G. - *The Development of Fracture Mechanics for Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 67, no 3, pp G50-G60, 1994.

[60] Tuttle - , India Rubber World, vol 67, p 150, 1922.

[61] Ulmer J.D., Chirico V.E. et Scott C.E. - *The Effect of Carbon Black Type on the Dynamic Properties of Natural Rubber*, Rubb. Chem. Technol., vol 46, pp 897-926, 1973.

[62] Williams J.G. - *Fracture Mechanics of Polymers*, Ellis Horwood Series in Engineering Science, Chichester, 1987.

[63] Zimmerman - , Rubber Age, vol 12, p 130, 1922.

Quatrième partie

Rotation de Fissure

Introduction

Nous avons fait une présentation complète du comportement des élastomères chargés et présenté une synthèse des outils et résultats sur la propagation de fissure dans ces matériaux - principalement ceux qui ne cristallisent pas sous contraintes.

Les approches courantes de la fissuration - hyperélastiques ou visco-élastiques - décrivent les phénomènes stationnaires. En tenant compte de l'endommagement, nous avons redéfini la mesure de déchirabilité mais nous nous sommes encore intéressés au cas stationnaire.

Notre modèle de cumul de dommage nous donne des informations plus complètes que les modèles courants. Il nous permet de décrire l'ensemble de la propagation, notamment la partie instationnaire après l'amorçage. Il nous permet aussi d'aborder les essais monotones, tel le test de déchirabilité sur éprouvette lanière présenté en première partie.

Nous montrons d'abord que des phénomènes de propagations complexes sont connus depuis longtemps dans nos matériaux, dont la rotation de fissure est un cas particulier ; de même, des phénomènes de même nature existent pour d'autres élastomères. Une synthèse des résultats connus nous montre d'abord que la plupart des modélisations proposées ne peuvent rendre compte de ces phénomènes. Une démarche expérimentale est ensuite élaborée. Elle repose sur les possiblités offertes par notre travail en terme de comportement et d'observables associées à la fissuration - cela nous permet aussi de tester notre modèle d'amorçage ! Un premier ensemble de conclusions donne quelques indices qui pourraient servir aux formulateurs d'élastomères. Nous proposons enfin une modélisation s'attachant à décrire la vitesse de transition entre rotation et propagation droite dans l'essai de déchirabilité. La validation à l'heure actuelle en est cependant trop partielle pour être considérée comme concluante.

Chapitre 13

Stick-slip et steady tearing

13.1 Présentation du phénomène

La partie précédente a présenté la mécanique de la rupture des élastomères dans le cas de la propagation de fissures de mode I. Or il est très vite apparu qu'un essai de propagation de fissure ne menait pas toujours à des situations idéales que sont les propagations droites stationnaires.

Greensmith [IV.11] fait la première étude détaillée de la propagation de fissure dans les caoutchoucs synthétiques chargés. Nous avons déjà signalé cette référence précédemment : elle fait le passage entre les études de déchirabilité sur caoutchoucs non-chargés et caoutchoucs chargés. Mais il note aussi que sur une plage de vitesse intermédiaire, la propagation de fissure est saccadée - succession de phases d'arrêt et de phases de courtes propagations rapides. On appellera par la suite stick-slip ce mode de propagation, terme issu de la comparaison (visuelle) du phénomène avec le stick-slip rencontré dans l'adhésion.

Ainsi, si l'on réalise un essai sur éprouvette pantalon à vitesse imposée, on peut observer deux types de propagation, correspondant au graphe (13.1-1) :

1. une propagation stationnaire (steady). Pour imposer une vitesse de propagation, il est nécessaire de maintenir une force constante.
2. une propagation saccadée (stick-slip). La vitesse de propagation ne peut être imposée qu'en moyenne. La propagation avance par saccades, de points d'arrêts en courtes propagations très rapides. La force appliquée fluctue entre une valeur maximale atteinte lentement à partir d'un point d'arrêt et une valeur minimale atteinte très rapidement pendant la propagation rapide jusqu'au nouveau point d'arrêt.

Quand la propagation est stationnaire, la mesure T est bien définie. Elle est donnée par exemple pour une éprouvette pantalon par :

$$T = 2\frac{F}{t}$$

avec F force appliquée à une jambe de l'éprouvette et t épaisseur de l'éprouvette. Dans le cas d'une propagation en stick-slip, on veut encore appliquer cette expression, mais quelle mesure de F choisir ? Greensmith prend une moyenne entre la plus petite et la plus grande des forces mesurées pendant le stick-slip pour définir T. Dans ce cas, à condition de définir la vitesse de propagation comme la vitesse moyenne de propagation, Greensmith donne ses résultats expérimentaux par exemple comme ceux de la figure (13.1-2). Il observe deux types de comportements fondamentaux :

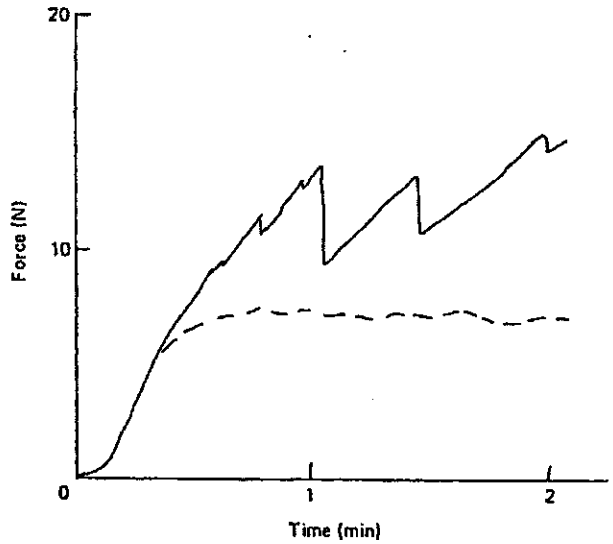


FIG. 13.1-1: Essais de propagation de fissure à vitesse constante avec une éprouvette pantalon. Quand on mesure la force appliquée, on trouve soit une force constante à partir d'une certaine longueur de propagation, soit au contraire des fluctuations de cette force, associées localement à une propagation en stick-slip.

1. Pour des caoutchoucs qui cristallisent ou non (matériaux X, D), la courbe $T(c)$ est monotone avec T défini comme la moyenne des déchirabilités, même avec l'existence du stick-slip.
2. Pour des charges renforçantes (matériau A), dans la gamme de vitesses moyennes où a lieu le stick-slip, la déchirabilité est plutôt décroissante en fonction de la vitesse. Le matériau B est un bon intermédiaire entre charge non-renforçante (D) et très renforçante (A) où la déchirabilité est décroissante de la vitesse, mais où l'on voit apparaître de nouveau une zone de propagation stationnaire aux plus faibles vitesses.

Les essais de Greensmith avec charge peu renforçante ne semblent pas permettre d'observer de stick-slip. Dans le cas des essais sur matériaux chargés avec du noir renforçant, Greensmith parle plutôt de *"knotty tearing"*, ou propagation en épine, pour bien exprimer qu'il y a une grande extension latérale de la fissure aux points d'arrêt. Kadir et Thomas [IV.14, IV.21] montrent le rapport entre le mode de propagation et la surface de fissuration. Dans le cas des caoutchoucs non-chargés, on doit distinguer trois régions sur la courbe T(c).

1. aux fortes vitesses, la propagation est stationnaire. La surface de fissuration associée est lisse.
2. aux vitesses moyennes, la propagation est en stick-slip. La surface de fissuration est rugueuse. Les rugosités sont visibles à l'oeil et sont autant de petites stries perpendiculaires à la direction de propagation qu'il y a de phases de stick-slip. On peut même observer entre deux stries une portion de surface lisse, associée à une petite propagation stationnaire.
3. aux faibles vitesses, la propagation redevient stationnaire. Une observation au microscope optique montre cependant que la surface de fissuration est encore constituée de micro-rugosités.

On définit ces rugosités comme étant un émoussement (blunting) du fond de fissure, responsable du phénomène de propagation saccadée. La relation de cause à effet n'est

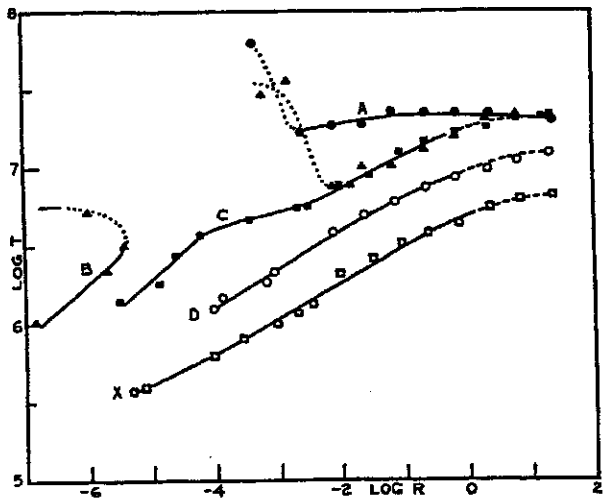


FIG. 13.1-2: Résultats de Greensmith [IV.11] pour un SBR. La matrice est identique pour chaque matériau. X, D sont la matrice SBR seule (différence dans le degré de vulcanisation). B et C la matrice chargée avec un noir peu renforçant et pas renforçant. A enfin est chargé d'un noir très renforçant.

pas établie, mais on attribue couramment le stick-slip à la création d'un émoussement et jamais l'émoussement à l'existence de points d'arrêt dans la propagation.

Les résultats de Kadir et Thomas nous permettent de reprendre les essais de Greensmith et de constater que les matériaux qui semblent ne pas avoir de propagation en stick-slip peuvent en présenter une, mais non observable macroscopiquement, sur la plage des vitesses intermédiaires où la courbe $G(c)$ présente un plateau. Pour ce cas, il faut encore reprendre les travaux de Gent et Kim [IV.8] et noter que ces auteurs se sont placés dans une plage où les essais de propagation de fissure peuvent être très particuliers.

Enfin, pour Greensmith [IV.11], le phénomène de stick-slip est du même ordre entre caoutchoucs synthétiques et caoutchoucs naturels, avec des vitesses caractéristiques différentes et une plage d'observation beaucoup plus large pour le NR. Ces essais ne permettent pas de retrouver la propagation stationnaire aux faibles vitesses pour ces matériaux.

13.2 Nature des matériaux

Malgré les résultats de Greensmith ou de Kadir et Thomas ci-dessus, l'usage veut que l'on associe (presque exclusivement) les phénomènes de stick-slip aux caoutchoucs chargés ou aux caoutchoucs qui cristallisent sous contrainte.

Il semble en effet plus facile d'observer le stick-slip sur des matériaux chargés. Le phénomène est observé sur des plages de vitesse usuelles (souvent) et le stick-slip est beaucoup plus marqué. De nombreux auteurs ne se proccupent pas de l'existence du stick-slip pour les caoutchoucs synthétiques non-chargés, alors que les premières études de propagation de fissure en terme de déchirabilité butent sur le phénomène avec des matériaux non-chargés.

Pourtant, rien ne permet d'affirmer que deux phénomènes de nature complètement différente induisent un stick-slip soit dans les caoutchoucs chargés ou cristallisables, soit dans les caoutchoucs non-chargés qui ne cristallisent pas. Il semble beaucoup plus naturel

d'imaginer qu'un seul et même phénomène soit à l'origine du stick-slip pour tous les matériaux, **phénomène de faible extension spatiale pour les matériaux non-chargés et de forte extension spatiale pour les matériaux chargés de charges renforçantes.**

13.3 Résultats expérimentaux

Il n'y a pas à proprement parler de bibliographie sur le stick-slip. Les études de propagation de fissure s'attardent sur ce phénomène et proposent des explications mais ne cherchent pas à le modéliser.

On peut distinguer trois types d'approches du phénomène.

13.3.1 Etude directe du phénomène.

Par étude directe nous entendons une étude où des résultats expérimentaux sur le stick-slip sont acquis. Il y a d'abord les résultats fondamentaux, comme l'existence d'un stick-slip aussi bien sur des matériaux chargés que non-chargés (Greensmith ou Kadir et Thomas). Ensuite il y a les travaux de Kadir et Thomas qui montrent clairement le lien entre l'observation macroscopique et l'aspect de la surface de propagation. Ces auteurs indiquent également que le passage du stick-slip à la propagation stationnaire est brutal quand on fait varier la vitesse de propagation. De plus, en faisant varier l'épaisseur des éprouvettes, ils montrent que la branche correspondant à la propagation stationnaire est inchangée. Les pentes des branches de moyenne et faible vitesses décroissent avec l'épaisseur. Mais les vitesses limites des trois zones d'observation sont inchangées.

Mullins [IV.22] montre qu'il existe une équivalence temps-température pour la propagation de fissure, avec cependant une loi WLF qui s'éloigne de la loi standard par un facteur 1.4 sur $\log a_T$. Cet écart n'est pas très important et l'on peut supposer que cela indique simplement que l'équivalence WLF pour ce matériau s'éloigne des propriétés universelles données par Williams Landel et Ferry. Greensmith et al. [IV.12] précisent bien qu'il existe une équivalence temps-température qui démontre le caractère visco-élastique du phénomène. Ils ne cherchent pas à savoir si les paramètres WLF universels sont valables ou non. Kadir et Thomas [IV.14] montrent de façon plus surprenante qu'il existe une courbe maîtresse de propagation stationnaire des quatre matériaux qu'ils testent, à condition de prendre comme référence des températures $T_0 = T_g + 20°$ au lieu de $T_0 = T_g + 50°$ dans la loi WLF universelle. Ils expliquent ce résultat par une chute de la T_g de 30° sous l'effet de la pression hydrostatique.

De et Gent [IV.5] présentent également des résultats à partir d'une étude moléculaire. Ils montrent que :

1. pour des essais à vitesse de propagation imposée mais à température variable, la même température optimale[1] est obtenue avec des ponts peroxide ou des ponts sulfure.
2. le domaine de rotation est plus étroit avec des ponts peroxide.

Il est difficile de traduire leurs résultats en une interprétation mécanique mais leur travail est d'un grand intérêt pour le caoutchoutier. De et Gent viennent enfin préciser une conception empirique sur l'influence des ponts de vulcanisation sur le phénomène par une étude rigoureuse.

[1] La température optimale est définie par la déformation à rupture maximale dans le test de déchirabilité, voir page 15.

Une étude originale est menée par Stacer et Yanyo [IV.29]. Les auteurs essaient de justifier une méthode de calcul de T dans les cas de stick-slip. Pour une éprouvette pantalon sollicitée à vitesse constante, la force fluctue. Doit-on plutôt choisir un calcul avec la plus petite force mesurée dans un stick-slip, au contraire la plus grande, ou encore la moyenne des deux comme cela se fait usuellement ? Ils s'intéressent alors à une statistique sur les valeurs T_{min} et T_{max} - T_{min} et T_{max} plus petite et plus grande valeurs mesurées dans une phase de stick-slip. Leurs résultats montrent que T_{min} a une statistique en cloche (gaussienne) qui implique qu'il doit s'agir d'une propriété matériau qui transparaît derrière les inhomogénéïtés de l'éprouvette et les erreurs de mesures. Par contre, T_{max} ne suit pas une statistique analogue. Cela implique que s'il y a une propriété physique sous-jacente à l'amorçage, il doit s'agir d'une propriété différente. Cela ne peut être une distribution qui correspond à un amorçage sur un défaut comme pour une rupture d'éprouvette (il faudrait une distribution inversée). Les auteurs concluent que pour interprêter leurs résultats il est nécessaire de supposer :

1. qu'il n'y a qu'un seul défaut constitué par le fond d'entaille ;
2. qu'il y a création d'une structure orientée.

De et Gent [IV.5] font une observation très intéressante sur la courbe $T(c)$. Si l'on reporte sur un graphe (θ, T)[2] d'une part le résultat bi-univoque $T(\theta)$ de la propagation stationnaire, puis les deux courbes $T_{min}(\theta)$ et $T_{max}(\theta)$, il semble que la courbe $T_{min}(\theta)$ prolonge naturellement la courbe $T(\theta)$ de propagation stationnaire, la courbe $T_{max}(\theta)$ les rejoignant à la transition entre stick-slip et propagation stationnaire. Ce résultat est déjà évoqué par Greensmith [IV.11].

13.3.2 Etude sur éprouvettes contraintes.

Les autres études sont beaucoup moins crédibles. En effet, le stick-slip est considéré comme un phénomène "anormal" [IV.29] qu'il faut contourner pour observer les caractéristiques de déchirabilité du matériau dans la plage de vitesse correspondante.

Gent et Henry ont proposé pour cela de prendre des éprouvettes contraintes, c'est-à-dire des éprouvettes pantalons sur lesquelles on a collé, de part et d'autre du trajet de propagation droite, des feuilles de cuivre précisément pour obliger la propagation à rester droite. On note que si dans le cas non contraint, la fissure se développe en dents de scie, alors plus les plaques de cuivre sont rapprochées, plus les dents de scie sont petites au point que la propagation devient stationnaire quand l'écartement des plaques est quasi-nul. Au lecteur le soin de juger ce que l'on observe effectivement avec des expériences menées sur ces éprouvettes. Il est coutumier de comparer la déchirabilité de ces éprouvettes avec celle d'autres éprouvettes non-contraintes. Pourtant, on doit admettre que l'expérience porte sur une structure qui transmet les propriétés matériaux au travers d'effets de structure non-contrôlés, particulièrement quand les feuilles sont quasi-collées[3].

Une autre méthode consiste à tracer au cutter le trajet de propagation droite sur l'éprouvette avant essai, par exemple sur des PS. C'est avec ce type d'éprouvette que Gent et Kim trouvent $T_{Pantalon} = 2T_{PS}$, résultat déjà évoqué page 134. Si ce résultat doit être considéré comme anormal, c'est certainement parce que le coup de cutter modifie la nature de la propriété que l'on évalue.

Les observations sur éprouvettes contraintes montrent que T décroît quand l'écartement des feuilles de cuivre tend vers 0, au point de s'approcher de la valeur mesurée sur

[2] θ température d'essai.
[3] voir notre précision sur ce point, page 159.

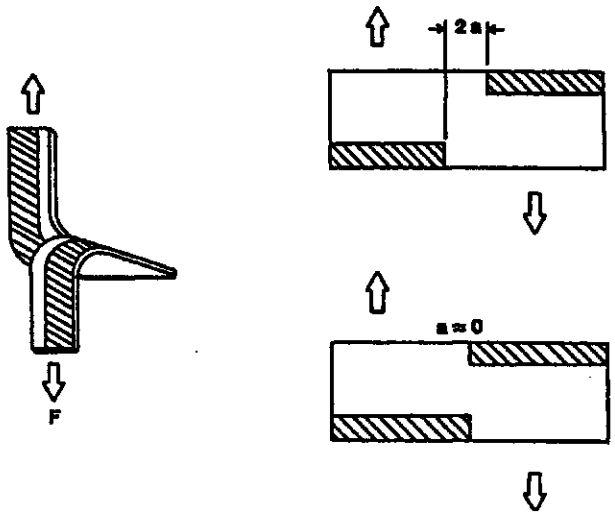


FIG. 13.3-3: Une éprouvette lanière contrainte pour éviter la propagation en stick-slip. Ce type d'éprouvette a été proposé par Gent et Henry pour observer la propagation de fissure même sur la plage d'existence de la rotation, mais sans la rotation de fissure !

le matériau non-chargé. On doit tempérer cette comparaison qui pousse les auteurs à dire que l'effet des charges est d'augmenter le paramètre dimensionnel du fond de fissure d dans le calcul de Thomas (page 127).

On peut peut-être faire un rapprochement avec les essais sur des éprouvettes dont le fond de fissure est très aigu, où l'on trouve une très forte réduction de T quand on impose un d très petit [IV.16]. Notons que ce dernier article est le seul où l'on peut se faire une idée de la forme du "blunting" en cours de propagation à partir d'une photo de microscopie. Les essais de [IV.16] consistent à provoquer des micro-propagations (appelées "small-scale tearings") par une découpe du fond de fissure avec une lame de rasoir sur l'éprouvette déformée. Rien ne permet d'affirmer que le phénomène local lié au découpage soit de même nature que le processus (autonome) de propagation de fissure.

Quelques voies sont explorées pour préciser l'effet des charges sur la rupture. L'observation très locale n'est pas utilisée en cours d'essai (sans doute à cause de la difficulté des grandes déformations). L'observation après essai est courante. Cependant, on en trouve peu de compte-rendus dans la littérature, mis généralement sous forme d'articles de nature trop partielle pour l'étude qui nous intéresse (purement descriptifs).

L'équivalence WLF : On peut se demander, par exemple à la suite des travaux de Mullins [IV.22] pourquoi la loi d'équivalence temps température dans la propagation de fissure n'est pas la loi WLF standard. L'interprétation courante s'attache à reprendre l'estimation de Thomas et à proposer que W_t comme d suivent une équivalence propre.

Gent et Henry arrivent à retrouver une équivalence temps-température de type WLF quand la propagation est contrainte, ce qui les amène à l'interprétation donnée ci-dessus que l'émoussement suit sa propre équivalence. Avec ces mêmes éprouvettes, Stacer et al. [IV.30] montrent qu'il existe une transition d'une équivalence de type WLF à une équivalence de type Arrhénius vers $T_g + 100°$.

Nos commentaires sur le modèle de Thomas ou la loi standard nous permettent de comprendre qu'il s'agit d'un faux problème. Seule la démonstration de l'équivalence est importante dans ces articles, comme signe d'une propriété visco-élastique.

13.3.3 Etude pour des sollicitations particulières.

Nous verrons plus loin qu'une grande partie des modèles cherchent un explication de la rotation de fissure aux travers de phénomènes micro-structuraux. Une méthode pour le démontrer utilise des essais qui provoquent une anisotropie en fond de fissure[4]. On imagine plusieurs type d'expériences, telles celles sur lesquelles nous avons déjà discuté. Par exemple dans le cas des éprouvettes PS on peut imaginer différentes expériences comme effectuer des essais de propagation dans différentes conditions :

1. essai de propagation sur éprouvette PS entaillée ;
2. essai de propagation sur une éprouvette PS pré-tendue, entaillée perpendiculairement à la pré-traction ;
3. essai de propagation sur une éprouvette PS pré-tendue, entaillée parallèlement à la pré-traction ;
4. essai de propagation sur une éprouvette PS maintenue en pré-traction et entaillée parallèlement à cette pré-traction.

En pratique, des essais sur éprouvettes pantalons et éprouvettes split tear sont également réalisés. Notre principale difficulté quand nous analysons ce type de résultat de la littérature est leur domaine de confiance. Nous nous rattachons aux commentaires que nous avons faits précédemment sur nos calculs de structure et sur les protocoles de la littérature. Nous avons montré par exemple qu'il devait être possible de "redresser" les résultats de Gent et Kim [IV.8] dans le dernier cas d'essai (voir page 174).

Deux articles se distinguent et peuvent nous donner des informations très utiles. Lake [IV.17] note qu'il n'y a pas de propagation stationnaire dans le cas des élastomères qui cristallisent. En effet, ceux-ci présentent essentiellement des ruptures de type catastrophique sous l'effet de la formation d'une zone fortement cristallisée en fond de fissure, qui permet d'apparenter la rupture de ces matériaux à de la rupture fragile. En revanche, sous l'effet d'une pré-traction importante (au-delà de 200%), une propagation stable de fissure devient possible, avec cependant une vitesse de propagation variant comme T^{16}, c'est-à-dire encore proche d'une rupture catastrophique. Précisons que Lake mentionne explicitement que cette situation ne se présente que dans les cas d'élastomères qui cristallisent sous contrainte et chargés au noir de carbone. Ainsi, on peut se demander si elle se produit aussi pour des élastomères qui cristallisent, mais non-chargés.

Si l'on effectue une pré-traction importante dans la direction de propagation, on peut observer un passage du cas saccadé (pas de pré-traction) au cas stationnaire (forte pré-traction) avec en outre une réduction du sixième du taux de restitution. On note que l'on aurait une réduction du douzième avec une pré-traction maintenue. D'après Lake, des résultats similaires sont obtenus par Hirakawa et Kida (mais dans un rapport non-publié), avec des réductions de l'ordre du dixième pour du NR, et un peu moins pour du SBR.

A partir de l'article de Gent et Kim [IV.8], il est possible d'avoir des informations précieuses sur les effets de pré-traction. En effet, on relève les cas suivants :

1. Pour un SBR chargé ou non-chargé, l'effet d'un "pre-stretching" est quasi-nul. En revanche, dans le cas du NR, cet effet est très important, avec une nette différence selon que le "pre-stretching" est parallèle ou perpendiculaire à la direction de propagation.
2. Dans le cas d'une déformation transverse maintenue, on constate une décroissance très nette de G en fonction du paramètre de déformation transverse. Dans leur article,

[4] Le terme d'anisotropie est utilisé ici au sens d'une orientation locale du réseau macromoléculaire.

Gent et Kim prennent comme unité de longueur une unité de longueur déformée et montrent que le résultat peut être prédit si l'on tient compte de la déformation transverse. Ré-interprété et corrigé par nos calculs, ce résultat tendrait à montrer qu'à nouveau, il n'y a pas d'effet sensible de la déformation transverse sur la relation entre G et le critère de propagation (voir page 174).

Ce que l'on conçoit essentiellement avec l'article de Gent et Kim, c'est qu'il y a une grande différence entre le comportement de déchirabilité du NR et des SBR chargés. La recherche d'une correspondance entre les deux phénomènes ne va pas de soi et la présence d'une anisotropie induite par la traction n'est pas visible par une pré-traction.

13.4 Du stick-slip à la rotation de fissure

Les résultats de la littérature peuvent finir par nous faire croire que la propagation en stick-slip est un trait caractéristique des caoutchoucs chargés ou qui cristallisent. Or il s'agit bien d'un phénomène qui existe dans les caoutchoucs synthétiques non-cristallisables.

Quand on revient sur l'interprétation des premiers résultats de Greensmith, on s'aperçoit que dans la plage d'existence du stick-slip, le taux de restitution moyen d'un matériau chargé est plutôt croissant quand la vitesse moyenne de propagation décroît, ce qui évoque un retard de plus en plus prononcé entre les forces d'arrêt et d'amorçage (essai à vitesse imposée). Il est associé à une rugosité plus marquée de la surface de fissuration, comme peuvent le montrer les résultats de Kadir et Thomas.

Il y a une similarité très forte entre les observations de propagation en épine dans l'essai sur éprouvette pantalon et le phénomène que nous observons en première traction sur les éprouvettes lanières (décrit en première partie de ce mémoire).

Nous faisons l'hypothèse que le phénomène de stick-slip que nous venons de présenter n'est rien d'autre que le phénomène de rotation de fissure, observé dans un cadre expérimental particulier (la traction uni-axiale plutôt que la relaxation) différent du cadre courant présenté en première partie de cette étude. Dans les cas qui nous intéressent, le phénomène de blunting prend une telle ampleur que la régularisation de la singularité implique qu'il ne peut plus y avoir qu'une seule phase de stick-slip, suivie d'une propagation catastrophique.

Notre présentation semble conduire de façon évidente à ce résultat. Nous en faisons cependant une hypothèse de travail, tant la littérature présente la propagation en épine comme un phénomène très particulier et unique, réservé aux caoutchoucs chargés et aux essais sur éprouvettes pantalons sollicitées à vitesse constante.

Chapitre 14

Synthèse des diverses modélisations

Parmi les articles qui s'intéressent à la rotation de fissure, très peu proposent une modélisation ou ont au moins proposé des éléments de compréhension du phénomène. De ce fait, si des modélisations existent, elles sont plus ou moins fondées.

14.1 Approches énergétiques

14.1.1 Le modèle de Maugis et Barquins

14.1.1.1 Allure de la courbe $G(c)$

Le modèle le plus adéquat dans un cadre d'étude mécanique est le modèle de Maugis et Barquins. Pour essayer de comprendre quelques particularités de compte-rendus d'essais, revenons sur un problème élémentaire : la distinction entre essai de propagation de fissure à déplacement imposée, à force imposée ou à vitesse de propagation imposée dans le cas d'un matériau visco-élastique.

Soit w l'énergie de surface intrinsèque au matériau. De façon usuelle en LEFM, on a le critère de propagation :

$$G > w \Longrightarrow \text{propagation} \tag{14.1-1}$$

Comme nous l'avons vu, ce critère est étendu au cas de l'élasticité en grandes déformations. Dans ce cas, la vitesse de propagation de la fissure n'est pas définie. Dans le cas visco-élastique, Maugis et Barquins [IV.20, IV.19] proposent d'associer à $G - w$ une vitesse de propagation telle que $G - w = w\Phi(v)$, où v est la vitesse de propagation de la fissure. Ce modèle repose essentiellement sur les hypothèses que :

1. la variation d'énergie cinétique est négligée ;
2. la dissipation reste locale, avec une vitesse de déformation localement très élevée.

Dans ce cas, Φ est liée aux propriétés visco-élastiques du matériau, découplée des propriétés élastiques et surtout de la géométrie et des conditions aux limites. Le lecteur non convaincu par cette formule peut se reporter au graphe (11.2-4) (page 136) et estimer l'expression de Φ éventuelle. Nous avons déjà proposé ce type de loi à l'issue de nos calculs de structure, mais avec une petite nuance. Nous avons montré que si l'on prend en compte l'endommagement, alors :

$$T = J_2(v)(1 + \alpha) \tag{14.1-2}$$

où α dépend de l'endommagement pour des essais de relaxation et des vitesses de propagation faible, et dépend en outre de la vitesse pour des propagations rapides. Aux faibles vitesses, nous avons supposé que les effets visqueux étaient confinés à J_2. Si l'on suppose

qu'un critère de propagation est $J_2 = G_c$, alors notre modèle devient très proche de celui de Maugis et Barquins.

Dans notre cas, w est usuellement notée T_0, force de déchirabilité seuil. Cette quantité est largement étudiée par Gent notamment. L'un des enjeux de la physique des polymères dans le cas de la rupture est précisément de relier cette quantité à des caractéristiques moléculaires (voir par exemple à ce sujet [IV.1, IV.2, IV.9, IV.15]). Nous ne développerons pas ici ce sujet. Les situations qui nous intéressent concernent des forces de déchirabilité bien au dessus de la déchirabilité seuil, dans des situations où T est essentiellement liée à des phénomènes complexes loin de l'élasticité idéale, associant notamment des effets de viscosité ($\Phi >> 1$).

Le graphe (11.2-4) nous permet par exemple de vérifier que Φ est bien indépendante de la géométrie de l'éprouvette. Dans le cas du polyuréthanne, Maugis et Barquins montrent en outre que Φ est de la forme $v^{0.6}$ sur cinq décades de vitesse, fonction croissante. Ils vérifient également son indépendance par rapport à la géométrie ou les conditions aux limites. Supposons pourtant un instant que l'on puisse avoir Φ fonction décroissante sur un intervalle de vitesse $[v_c, v_2]$, comme sur le graphe (14.1-1). Considérons deux types de tests :

Pour un test à G imposé on peut rencontrer les situations suivantes :

1. $G < T_0$, pas de propagation ;
2. $T_0 < G < G_c$, vitesse v correspondante ;
3. $G > G_c$, saut de vitesse jusqu'à v_1.

Dans ce cas, on peut contrôler un test de propagation de fissure en terme de taux de restitution d'énergie en observant une propagation stationnaire. On remarque qu'il s'agit du cas du test sur éprouvette pantalon contrôlé en force.

Pour un test à vitesse imposée la situation est plus complexe.

1. soit la vitesse imposée est plus faible que v_c, alors la propagation est stationnaire.
2. soit la vitesse imposée est plus grande que v_2, dans ce cas encore, la propagation est stationnaire.
3. soit enfin, la vitesse imposée est comprise dans $[v_c, v_2]$, Dans ce cas, la propagation est sur la branche instable de la courbe $G(v)$. La propagation est une propagation saccadée qui suit un cycle d'hystérésis entre les deux branches stables de la courbe, tel que la vitesse moyenne de propagation de la courbe soit $\bar{v} = v$. Il s'agit du cas typique des essais sur éprouvettes pantalons sollicitées en vitesse de propagation.

Un test où l'on impose une force croissante entraînera d'abord un propagation à vitesse continuement croissante jusqu'à G_c où l'on observera un saut de vitesse. Dans le cas des essais en vitesse, on a en revanche un phénomène de propagation saccadée, dit de stick-slip.

14.1.1.2 Commentaires

Le modèle de Maugis et Barquins est tout-à-fait adapté pour rendre compte des propagations saccadées de certains essais de propagation sur éprouvettes pantalons. Mais dans quelle mesure peut-il être valable pour notre étude ?

Il y a une confusion entre le phénomène de stick-slip (phénomène d'abord défini en adhésion caractérisé par un G également), et son pendant observé dans la propagation de fissure des élastomères, appelé stick-slip (par analogie précisément avec l'adhésion, terme proposé par Greensmith et Thomas). Le passage d'un phénomène à l'autre n'est pas évident. Par exemple, Maugis estime que la courbe $G(v)$ est telle que la vitesse observée

dans le cas des essais à force imposée au delà de G_c est proche de la vitesse des ondes de Rayleigh. Or nous avons besoin d'une telle instabilité pour des vitesses de propagation très faibles. Cela implique que la relation $G(c)$ ne peut pas être la même en adhésion (objet de la modélisation des auteurs) ou en propagation de fissure.

Aucun modèle ne vient étayer l'hypothèse d'une branche de résistance négative. Il ne semble pas possible de la vérifier autrement que par des essais de rotation de fissure. Si l'on s'arrête sur le passage de l'essai à G imposé ou v imposée, on observe également (voir graphe (14.1-1)) :

1. la courbe expérimentale $G(c)$ est une courbe continue, croissante dans le cas d'un matériau non-chargé, décroissante continue dans la zone de stick-slip. Or le modèle de Maugis et Barquins donnerait une courbe $G(c)$ passant de G_c à la vitesse v_c à la valeur G_a, nécessairement plus faible pour v_2. Il s'agit d'une incompatibilité forte puisque la relation $G_a < G_c$ est la raison d'être du modèle.
2. de même, dans le cas d'un essai à G imposé, on devrait passer brutalement d'un essai à vitesse faible inférieure à v_c à un essai à vitesse très rapide de propagation catastrophique. Or on ne reporte pas dans la littérature de telles observations, ni d'observations d'un saut de vitesse dans les essais sur éprouvettes pantalons à vitesse imposée.

Enfin, ce type de modèle est inadapté pour trois types d'observations :

1. il convient pour décrire la propagation stationnaire mais pas l'amorçage, cas typique de notre problème.
2. il ne permet pas d'expliquer l'état de surface des fissures. Cela ne semble pas très grave à première vue. Or il semble que la forme de la courbe $G(c)$ dans la zone de stick-slip s'explique mieux par le développement d'une surface émoussée en cours de propagation que par un phénomène lié à la dissipation dans le matériau.
3. enfin, dans le cas des éprouvettes pantalons, les taux de restitution T_{min} et T_{max} ne sont pas constants et évoluent en fonction de la vitesse. Avec le modèle de Maugis et Barquins, ils seraient forcément égaux à G_a et G_c.

14.1.2 Influence de l'effet Mullins

Nous nous sommes essentiellement intéressés dans notre travail à l'influence de l'effet Mullins sur la définition du taux de restitution. Si la dissipation d'origine visqueuse (caractère croissant de $G(c)$ ou branche de résistance négative) ne semble pas pouvoir être responsable du phénomène de stick-slip, quel rôle peut jouer l'effet Mullins ?

Notre modèle local montre la relation de bijection entre G et c. Si l'on remplace G par J_2 dans notre modèle, on ajoute en outre un effet de l'endommagement dans les essais de relaxation qui ralentit la fissure jusqu'à ce que J_2 retrouve une valeur constante. Nos calculs ont montré qu'il faut une longueur de propagation importante (plusieurs mm) avant d'atteindre cette valeur, de sorte que la fissure ralentit beaucoup aux premiers instants de la propagation, puis pendant encore une distance assez grande. Une accommodation atténue fortement l'influence de l'effet Mullins sur J_2. La littérature use abondamment d'essais sur éprouvettes accommodées à des déformations modérées un peu plus importantes que les déformations d'essais. Mais le phénomène de stick-slip est toujours observé. Il ne semble pas y avoir de résultats expérimentaux avec des déformations d'accommodations proches de la déformation à rupture des éprouvettes.

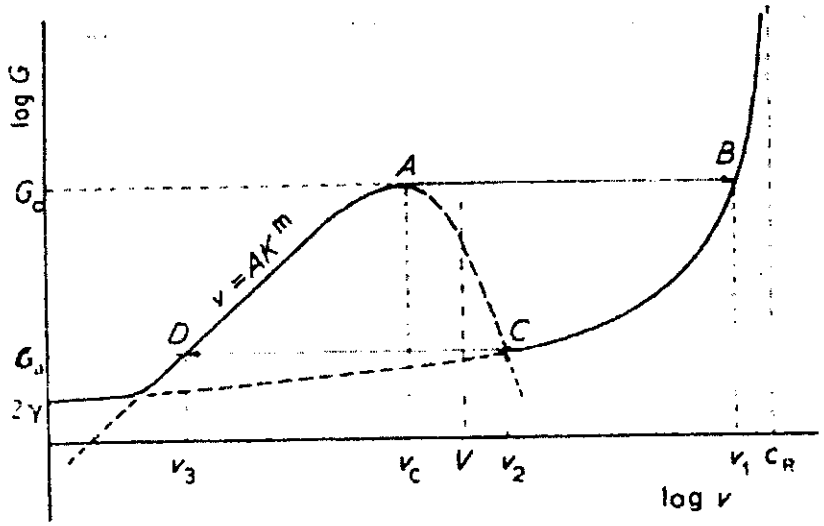


FIG. 14.1-1: Allure de la courbe $G(c)$ selon Maugis [IV.20]. Il existe une zone dite de résistance négative pour laquelle le taux de restitution G est décroissant de la vitesse de propagation de fissure c. Pour un essai à G imposé, tant que $G < G_c$, la fissure se propage à la vitesse $v < v_c$. Au-dessus de $G(c)$, la vitesse saute vers des valeurs proches de la vitesse des ondes dans le matériau c_R. Pour un essai contrôlé en vitesse, en dessous de v_c ou au-dessus de v_2, la vitesse est stationnaire et égale à la vitesse imposée. Entre v_c et v_2, soit sur la branche négative, la propagation suit le cycle d'hystérèse (A,B,C,D) tel que la vitesse soit en moyenne la vitesse imposée.

La décroissance de J_2 est d'autant plus marquée que les déformations sont importantes et s'accompagne d'un ralentissement d'autant plus important de la vitesse de fissuration. Ce phénomène est bien visible expérimentalement [IV.4].

Notre modèle ne nous a cependant pas permis de mettre en évidence une instabilité dans la relation $G(c)$ ou $J_2(c)$.

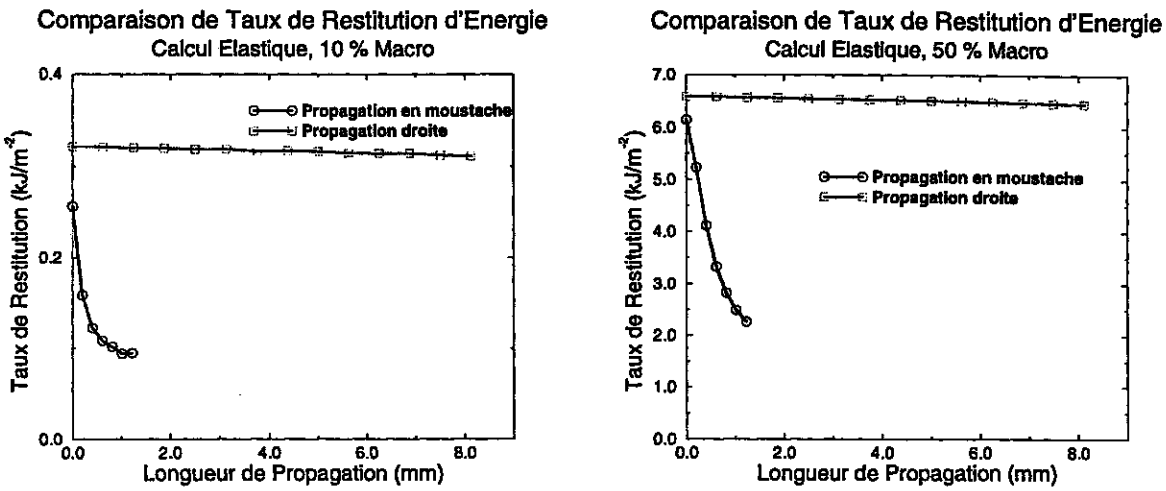
14.1.3 Un critère énergétique

Une autre approche standard de la rotation de fissure consiste à assimiler le phénomène de rotation de fissure au branchement en mode mixte dans les métaux. Pour cet exemple particulier, on sait que le critère de branchement est purement local, donné par $K_{II}^* = 0$ - i.e. la fissure se propage en restant toujours en mode I localement [IV.18].

Ce type de critère ne peut pas s'appliquer avec nos matériaux puisque nous ne connaissons que des solutions locales de mode I et que de plus nous n'avons pas de solutions perturbées après branchement.

Malgré cet exemple formateur en petite déformation, on cherche encore des critères de rotation de fissure en taux de restitution d'énergie. A chaque direction θ en fond de fissure, on peut associer au taux de restitution d'énergie $G(\theta)$ correspondant à la propagation dans cette direction, à supposer que cela soit possible. Si l'on suppose que la propagation est régie par un critère de type catastrophique $G(\theta) = G_c$, peut-on obtenir des situations où le critère soit atteint d'abord pour θ non-nul ?

Dans le cas simple hyperélastique, nous avons pu observer numériquement que le maximum de $G(\theta)$ est toujours obtenu pour $\theta = 0$. Le graphe (14.1-2) montre par exemple



(a) Propagation à 10 % de relaxation

(b) Propagation à 50 % de relaxation

FIG. 14.1-2: Evolution des taux de restitution en fonction de la longueur de propagation pour un trajet de propagation droite et un trajet en moustache. Eprouvettes PS.

l'évolution de G au cours de la propagation à 0 ou 90° pour deux déformations d'essais.

Dans le cas général visco-élastique, il y a une indétermination. En effet, le taux de restitution et la vitesse de propagation sont liées et il est nécessaire de connaître en outre la vitesse de propagation avant de faire le calcul du taux de restitution. Il n'y a pas de modèle qui autorise cette démarche et la méthode des éléments finis ne le permet pas non plus. Ainsi donc, si la rotation de fissure peut s'expliquer par ce type de phénomène, nous n'avons pas de moyen de le savoir. Il faut d'abord trouver un modèle théorique de propagation déviée !

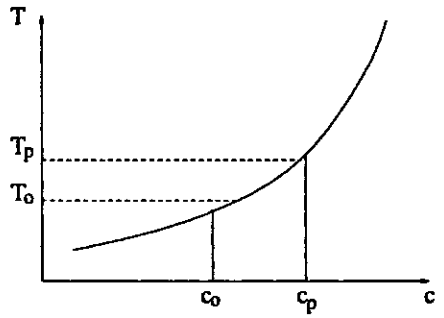


FIG. 14.1-3: Dans le cas visco-élastique, il est indispensable de connaître les vitesses de propagation dans les directions droites et perpendiculaires, ainsi que les taux de restitution d'énergie critiques associés pour voir la direction de rotation. Le graphe donne un exemple de situation où le taux de restitution d'énergie dans la direction perpendiculaire (T_p) est bien plus élevé que le taux de restitution d'énergie dans la direction droite (T_o), mais comme la vitesse de propagation déviée (c_o) est plus faible que dans la direction droite (c_p), un critère simple en taux de restitution donnera une propagation perpendiculaire.

Notre modèle de cumul de dommage pourrait éventuellement permettre d'accéder à une vitesse dans le cas des propagations déviées si on l'intégrait dans un calcul de structure.

Mais si l'on veut s'en servir pour modéliser la propagation, on ne peut plus revenir ensuite à des approches énergétiques.

14.1.4 Recherche d'une anisotropie de fragilité

14.1.4.1 Cadre standard

Une explication standard de la rotation de fissure suppose que le matériau en fond de fissure devient anisotrope vis-à-vis de la rupture. Le cas critique imaginé par certains auteurs [IV.8, IV.13] consiste à dire que le matériau de fond de fissure devient "fibreux". On doit comprendre par là que les chaînes en pointe de fissure sont en tellement grandes déformations qu'elles sont alignées selon la plus grande déformation.

Cette inspiration peut venir d'abord de l'étude du crazing observé dans certains matériaux (PMMA par exemple) [IV.27] qui a motivé par exemple les travaux de Schapery sur la propagation de fissure dans les matériaux visco-élastiques [IV.24, IV.25, IV.26]. Elle vient aussi d'une extrapolation aux distances nanométriques (taille des pelotes d'élastomères) des déformations de fond de fissure. Quelques auteurs essaient de trouver une preuve indirecte de cette orientation par des essais avec sollicitation complexe.

Lake [IV.17] voudrait par exemple conclure de ses résultats qu'il faut rattacher la propagation saccadée à la formation d'une anisotropie de structure au fond d'entaille. Pourtant, le point faible de son article est précisément qu'il part de l'a priori qu'il doit s'agir d'une anisotropie de structure induite pour revenir à ce résultat en conclusion, après avoir passé en revue des éléments qui ne sont pas en désaccord avec ces hypothèses mais qui doivent être interprétés plus rigoureusement, notamment à partir du cadre de la mécanique de la rupture.

De même, Gent et Kim [IV.8] tout comme Lake et al. [IV.17] admettent qu'une telle anisotropie induite est surtout marquée pour des caoutchoucs naturels, beaucoup moins visibles avec des SBR. On peut voir notamment que notre modèle de cumul de dommage peut rendre compte des résultats de Lake ou Gent et Kim sans aller chercher d'interprétation moléculaire, de constante de temps, ou d'anisotropie induite. Cela montre que ces essais ne peuvent pas permettre de conclure.

14.1.4.2 Approche locale

On peut essayer de justifier plus avant la notion de fibrage en fond de fissure. Dans l'hypothèse d'une déformation affine des chaînes, Wu et Van der Giessen [IV.31] donnent l'expression de la répartition des chaînes dans la configuration déformée à partir de la fonction CDOF (voir page 59). Dans le cas d'un matériau isotrope, la répartition des chaînes à l'état naturel est isotrope. La répartition déformée est donnée dans l'angle solide $d\Omega$ par :

$$\begin{cases} P(n,\theta,\phi,\underline{\underline{F}},d\Omega) = p(n)C(\theta,\phi,\underline{\underline{F}})d\Omega \\ C(\theta,\phi,\underline{\underline{F}}) = \frac{1}{4\pi}\lambda^3 \\ \lambda = \sqrt{{}^t\underline{n}.{}^t\underline{\underline{F}}.\underline{\underline{F}}.\underline{n}} \\ \underline{n} \text{ vecteur unitaire, direction } (\theta,\phi) \end{cases}$$

Ces relations montrent la très forte orientation du réseau macro-moléculaire sous l'effet de la déformation. Elle semble confirmer la notion de fibrage. Pourtant, elle ne contient pas d'irréversibilité dans le phénomène de fibrage et ne reflète que l'influence des grandes déformations. Une façon commode pour quantifier l'incidence de cette orientation induite consiste à utiliser le modèle de Lake et Thomas [IV.15]. Les auteurs supposent que pour

rompre une chaîne de n monomères, il faut porter chacune des liaisons entre monomères à la limite de leur énergie de rupture. C'est-à-dire que l'énergie nécessaire pour casser une chaîne est ne, avec e énergie d'une liaison entre monomères. Généralisée à une assemblée (tout comme nous l'avons fait pour calculer la densité d'énergie née-hookéenne), on montre que l'énergie nécessaire pour casser les chaînes coupant une surface plane d'aire unitaire est :

$$E = \sqrt{\frac{2}{3\pi}} N \frac{l}{2} n^{\frac{3}{2}} e \tag{14.1-3}$$

avec l longueur d'un segment statistique, N nombre de chaînes par unité de volume.

L'équation (14.1-3) donne le taux de restitution critique G_0 à partir duquel une vitesse de propagation "nulle" devient possible. Elle est validée par de nombreuses références, telles celles de Gent [IV.1, IV.2, IV.9].

On peut voir que cette expression ne dépend que de l'état naturel isotrope de la macrostructure. Pour qu'une direction de déformation se trouve privilégiée, il faut nécessairement introduire des effets irréversibles de la déformation sur la microstructure. On peut en imaginer de multiples formes, illustrées par exemple par la loi de comportement que nous proposons.

Cette piste n'a cependant pas pu être poursuivie. En effet, G_0 est au moins deux ordres de grandeur plus petit que les taux de restitution des essais de propagation à vitesse usuelle (de 40 à 90 $J.m^{-2}$). Il est valable seulement dans la mesure où les effets visco-élastiques peuvent être négligés dans le bilan énergétique. Sa validation par Gent montre que dans les essais qui nous intéressent, les effets visqueux prédominent. C'est-à-dire que (14.1-3) n'est plus du tout valable! Or, il n'y a pas de modèle local adapté aux vitesses de sollicitation usuelles.

14.2 Stick-slip et cavitation

La cavitation est un phénomène particulier qui rattache les élastomères aux fluides. Dans des essais de rupture particuliers, Gent et Lindley [IV.6] montrent que la ruine des éprouvettes est due à la formation de bulles. Gent et Tompkins [IV.7] proposent une modélisation du phénomène à partir d'une instabilité de la croissance d'une micro-cavité quand le matériau est néo-hookéen. A peu de choses près, la modélisation du phénomène est adoptée telle quelle. On montre qu'une micro-cavité peut s'étendre jusqu'à l'infini si elle est soumise à une pression hydrostatique P telle que :

$$P = \frac{5}{2}\mu \tag{14.2-4}$$

avec μ module de cisaillement du matériau. Nous montrons en annexe quelques détails de cette modélisation.

La cavitation est parfois évoquée pour rendre compte de la rotation de fissure. L'idée de la modélisation n'est pas très claire mais il nous semble qu'il se dégage deux types d'explication.

La première forme de modèle est très simpliste. Il est supposé que le phénomène d'émoussement est lié à la croissance de cavités en fond de fissure pendant la propagation. Quigley et Parks [IV.23] étudient par exemple l'orientation de ces cavités à l'aide des développements asymptotiques. On peut chercher en vain des raisons pour que les cavités induisent des rotations ou non.

Une modélisation beaucoup plus riche est proposée par Kadir et Thomas [IV.14]. Ils proposent d'expliquer le passage d'une propagation saccadée à une propagation stationnaire par le passage d'un mode de rupture par cavitation à un mode de rupture "fragile". D'après eux, si la vitesse de propagation est grande, les chaînes en fond de fissure sont sollicitées à des vitesses très élévées et sont figées dans leur état vitreux. Par contre, si la vitesse de propagation est faible, il devient possible que ces chaînes restent dans leur état caoutchoutique et que la propagation de fissure soit régie par la cavitation.

La théorie de Kadir et Thomas est séduisante. Elle rend possible une approche numérique du problème. Nous allons pourtant voir qu'elle n'est pas adaptée au phénomène.

Nos observations de traction sous microscope font état d'un amorçage de la "ligne blanche" plutôt sur les bords du fond de fissure (voir page 30), c'est-à-dire là où la solution de contrainte plane est la mieux respectée. Si la pression hydrostatique était un paramètre important pour la propagation saccadée, on devrait s'attendre à un amorçage plutôt au milieu du fond de fissure, là où la pression hydrostatique est la plus forte. Kadir et Thomas nous mettent également sur la voie d'une telle remarque puisqu'ils montrent qu'il n'y a pas d'effet de l'épaisseur de l'éprouvette sur la vitesse limite d'observation de la propagation saccadée.

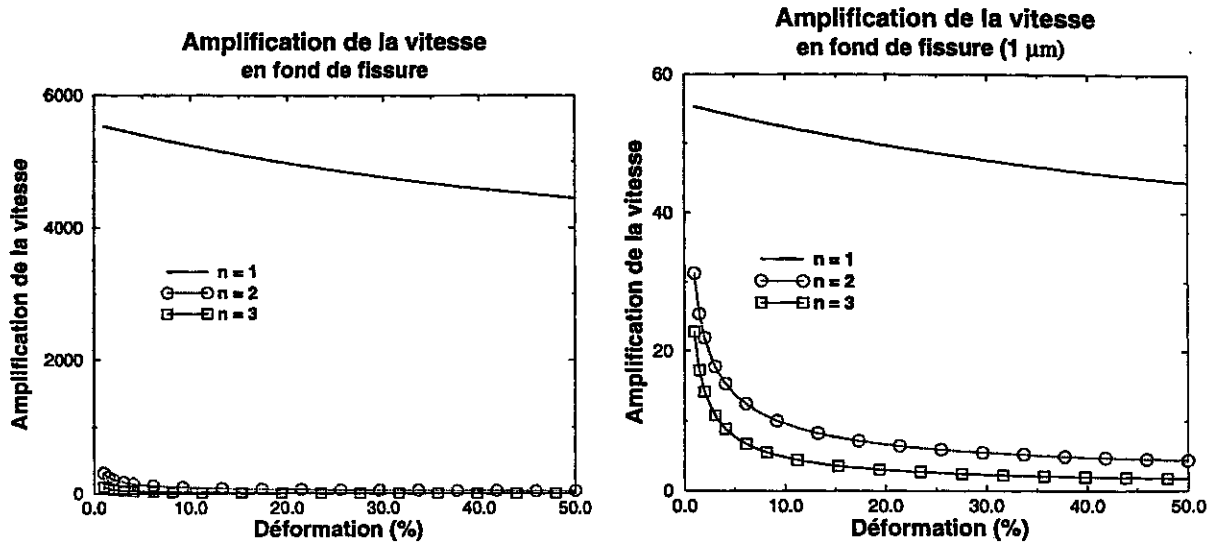
Dans le cas particulier de la rotation de fissure, nous avons montré que nous devions nous concentrer sur l'amorçage de la propagation, soit dans une situation où il n'y a pas encore de vitesse de propagation. On peut essayer de faire une projection de la vitesse de déformation macroscopique aux dimensions pertinentes pour les chaînes. Le résultat est donné sur le graphe (14.2-4) pour une longueur de $1nm$ compatible avec la taille d'une pelote statistique et $1\mu m$ compatible avec la taille d'un volume élémentaire. Trois matériaux GNH sont choisis, du néo-hookéen au matériau fortement non-linéaire. Nous avons déjà vu que le matériau fortement non-linéaire ($n = 3$) rendait bien compte de vitesses de propagation faible et d'un amortissement de l'effet de fond de fissure par la divergence de la contrainte aux grandes déformations. Le cas d'étude le plus critique est le matériau néo-hookéen. Dans ce cas, à la déformation d'amorçage que nous avons mesurée lors de nos essais sous microscope (20 %), l'amplification de la vitesse macroscopique est de l'ordre de 5 000. Cette amplification chute rapidement pour un matériau plus non-linéaire (n = 2 ou 3). Si la vitesse de déformation est de l'ordre de $10^{-3}s^{-1}$, alors localement la vitesse n'excède pas $1s^{-1}$, loin d'une vitesse où le matériau est dans l'état vitreux. A des vitesses de déformations 100 fois plus élevées, il n'y a plus de rotation de fissure et les vitesses sont encore faibles.

La cavitation est un phénomène macroscopique. A l'échelle d'un volume élémentaire représentatif, l'amplification devient très faible. Elle justifie qu'il n'y ait pas de matériau à l'état vitreux localement, mais aussi que le comportement du matériau puisse être considéré comme élastique (essai par essai) s'il est fortement non-linéaire par ailleurs.

Enfin, la cavitation devrait être associée à l'apparition de petites cavités sur le trajet de propagation. Or ce sont des stries que l'on observe, s'étendant sur toute l'épaisseur de l'éprouvette. Le "blunting" est donc plutôt un **front** qui se développe et se propage qu'un ensemble de micro-cavités qui croissent et font propager la fissure.

14.3 Modèles comparatifs

Les modèles comparatifs sont des tentatives d'explication grossières, pour lesquelles on n'arrive pas forcément à définir un modèle. Nous avons pu notamment rencontrer des modèles tautologiques que nous ne prendrons pas la peine d'expliquer ici.



(a) Amplification de la vitesse de déformation à $1nm$ du fond de fissure.

(b) Amplification de la vitesse de déformation à $1\mu m$ du fond de fissure.

FIG. 14.2-4: Amplification de la vitesse de déformation par le fond de fissure dans le cas de trois matériaux GNH de non-linéarités faibles, intermédiaires et fortes. On regarde dans quelle mesure cette amplification peut rendre le matériau vitreux localement.

14.3.1 Comparaison SBR chargé - NR

Une première façon d'expliquer la rotation de fissure dans les caoutchoucs synthétiques s'appuie sur l'idée que l'on a bien compris ce qui se passe dans le caoutchouc naturel (au moins qualitativement).

Quand le matériau cristallise sous contrainte, on imagine bien qu'il se crée une zone plastique en fond de fissure, zone dure que la fissure a intérêt à contourner. L'apparition de cette zone dure est associée à une constante de temps telle que si la fissure va trop vite, elle peut se propager dans son plan. On suppose alors que la présence de charge dans un SBR crée sous traction une microstructure analogue à la zone plastique du NR, que la fissure aura intérêt à contourner. Cette modélisation, proposée dès le début par Greensmith n'est certainement pas exploitable. Il semble que l'on n'ait jamais mis en évidence une telle microstructure, ensuite que rien ne permet de nous mettre sur la voie de la détermination de la constante de temps.

Une autre tentative d'explication s'arrête sur le constat que la propagation en épine n'existe pas pour les caoutchoucs non-chargés. On estime alors que les phénomènes dissipatifs (viscosité, hystérèsis) induisent le phénomène. Nous avons vu pourtant que les caoutchoucs synthétiques non-chargés présentent une propagation en stick-slip, cas moins spectaculaire de propagation instationnaire mais que nous avons relié au phénomène de propagation en moustache. Cela implique d'abord que la comparaison entre caoutchouc synthétique et caoutchouc naturel n'a pas lieu d'être, ensuite que les phénomènes non-linéaires n'ont pas pour effet de provoquer une propogation en épine mais seulement de rendre macroscopique le phénomène de propagation saccadée, voire de le ramener à des plages d'essais plus faciles à observer.

14.3.2 Comparaison SBR chargé - SBR non chargé

La deuxième façon de chercher des explications s'appuie sur une comparaison entre caoutchoucs synthétiques chargés et non-chargés. Dans ce cas, on suppose que les phénomènes de propagation saccadée n'existent pas dans les matériaux non-chargés, et l'on veut croire à un effet spécifique de la charge (échelle du chimiste) ou à une explication mécanique en terme de dissipation. Il s'agit encore d'une méthode comparative, qui recoupe la méthode précédente et dont les hypothèses de départ sont fausses.

14.4 Conclusions sur les modélisations existantes

Un consensus existe actuellement autour d'une explication physique du phénomène par la notion de fibrage. Il laisse de côté des résultats connus et établis de longue date au profit d'une description plaisante qui n'est pas détaillée et pas suffisamment étayée.

Nous avons essentiellement analysé les différentes approches du problème et cette analyse n'a pas permis d'extraire des modèles ni des résultats nouveaux ni des éléments importants et convaincants nécessaires à la modélisation. Nous proposons de replacer cette étude dans le contexte général d'analyse des conditions d'amorçage et de propagation des fissure en quasistatique.

Chapitre 15

Quelques éléments de modélisation

15.1 Préliminaires

15.1.1 Divers phénomènes, divers matériaux

Nous avons passé en revue de nombreux résultats et éléments d'étude de la propagation de fissure. Nous avons montré en première partie de ce mémoire qu'une condition nécessaire est l'existence d'un mode de propagation quasi-statique. Cela nous a permis de replacer le phénomène de rotation de fissure dans l'ensemble des phénomènes de propagations quasi-statiques.

Nous avons d'autre part montré que l'émoussement du fond de fissure ou l'apparition d'une délocalisation du fond de fissure dès l'amorçage dans le test de déchirabilité était une seule et même chose. Enfin, notre analyse bibliographique indique que la rotation de fissure, les propagations saccadées ou en épines dans les caoutchoucs chargés ou non-chargés sont les manifestations d'un même phénomène, avec des amplitudes différentes, voire des vitesses caractéristiques différentes.

15.1.2 Objectifs de modélisation

Nous souhaiterions pouvoir trouver une explication du phénomène de rotation, voire une modélisation, au moins pour le test sur éprouvette lanière. Nous pourrions imaginer, pour un matériau donné, calculer un G_c sur l'essai de déchirabilité et regarder si l'on sait modéliser la rotation sur une autre expérience. Cela serait une modélisation matériau par matériau, qui exige d'avoir un essai de référence pour la rotation de fissure. C'est exactement ce qui existe actuellement avec le test de déchirabilité. Ce type d'étude n'apporte aucune information sur le phénomène. A court terme, nous préférons essayer de trouver des messages qui permettent d'**opérer une pré-sélection sur les matériaux avant essai.**

Il s'agirait d'**avoir des éléments de réponses qui s'appliquent à tous les élastomères** plutôt qu'à une classe très restreinte - un seul SBR ou une seule charge, etc...

Enfin, nous cherchons à savoir s'il peut y avoir une explication mécanique à la rotation. Il ne s'agit pas tant de définir une grandeur supplémentaire, comme G_c, à partir d'un essai de déchirabilité que de **regarder si à partir de quantités définies pour d'autres tests on peut obtenir une explication du phénomène.**

15.1.3 Limitations

Nous avons bien montré en première partie que la rotation de fissure est liée à la notion d'amorçage, très loin des propagations stationnaires. La description de l'amorçage est toujours beaucoup plus difficile que la description des propagations stationnaires et ne semble pas avoir été étudiée dans la littérature.

- Le rayon de fond de pré-fissure est différent du rayon d'auto-propagation. Dans le cas des élastomères, il n'est pas vraiment possible de laisser la fissure se propager sur une courte distance, puis de lancer un essai de rotation de fissure. L'évolution complexe du comportement peut permettre de comprendre pourquoi. Le rayon à l'amorçage va avoir une incidence directe sur la singularité des contraintes en fond de fissure, mais nous n'avons aucun résultat à ce sujet.
- Il n'y a aucune raison de croire qu'un modèle de propagation droite stationnaire puisse dégénérer en un modèle d'amorçage fiable. Il n'y pas non plus de motif valable de penser que ce modèle dégénéré contienne une explication de la rotation de fissure. Prenons un exemple homologue pour illustrer notre propos : la compression d'une poutre droite est toujours possible quelle que soit la charge appliquée pour la comprimer, du moins en théorie. On sait bien pourtant qu'au delà d'une charge critique, la poutre flambe pour une raison qui n'est pas contenue dans les champs mécaniques de la poutre comprimée. Le critère de branchement en mode mixte et en petites déformations, déjà évoqué page 200, illustre notre propos.

Nous supposerons cependant qu'il ne faut pas remettre en cause les modélisations de la propagation de fissure que nous avons présentées. Par exemple, nous ne devons pas chercher à faire évoluer le modèle de cumul de dommage que nous avons proposé.

15.2 Une étude expérimentale

15.2.1 Introduction

Nous nous proposons d'aborder la rotation de fissure à partir d'une étude de cas. Nous avons choisi trois matériaux constitués de trois matrices caoutchoutiques différentes et dont on regarde les propriétés de déchirabilité par des essais de rotation de fissure. A partir d'un ensemble étendu d'essais, nous reprenons le cheminement suivi dans ce mémoire pour comparer les trois matériaux et voir comment peuvent s'articuler les différents aspects de notre travail. Cette synthèse nous permet de présenter des résultats nouveaux et intéressants sur la rotation de fissure et de mettre en avant des particularités appréciables de notre modèle par cumul de dommage.

15.2.2 Matériaux et essais

Nous disposons de trois matériaux dont les compositions sont données dans le tableau (15.2-1). Ils sont constitués de trois élastomères différents, identiques pour les autres constituants. Ces matériaux ont été choisis parmi une dizaine à notre disposition à partir des résultats d'un test de déchirabilité sur éprouvette lanière. Pour ne pas risquer de les confondre avec les trois matériaux M1, M2 et M3 déjà rencontrés, nous les appellerons matériaux A, B et C (Mat A, Mat B, Mat C).

Le test de déchirabilité montre que Mat A ne tourne pas sur la plage de vitesse usuelle accessible à température ambiante (vitesse de déformation inférieure à 7 $10^{-5}s^{-1}$). Mat

	Mat A	Mat B	Mat C
SBR 3	100		
PB 1		100	
SBR 2			100
N375	50	50	50
ZnO	2.5	2.5	2.5
Acide Stéarique	1	1	1
6PPD	2	2	2
S	0.7	1.3	1.5
CBS	0.7	1.3	1.5
Tg (DSC en ° C)	-73	-94	-87

TAB. 15.2-1:

B présente une rotation de fissure jusqu'à une vitesse de déformation de 1.4 $10^{-3}s^{-1}$, et Mat C jusqu'à 1.4 $10^{-2}s^{-1}$.

On observe d'abord le comportement mécanique de ces matériaux. On réalise des essais cyclés de cisaillement pur sur éprouvettes PS, à différentes vitesses de déformations. Pour chaque éprouvette, cinq cycles successifs sont réalisés à 30, 100, 150, 200 et 230 %. Ces essais sont réalisés à cinq vitesses différentes compatibles avec la plage d'observation de la rotation de fissure : 7.7 $10^{-4}s^{-1}$, 7.7 $10^{-3}s^{-1}$, 7.7 $10^{-2}s^{-1}$, 7.7 $10^{-1}s^{-1}$ et 7.7 s^{-1}. La température des essais est contrôlée à 25 (+0.5)° C. Nous cherchons d'abord à comparer le comportement des trois matériaux et à en tirer des conclusions pour la rotation de fissure. Puis nous montrons que notre loi de comportement permet de modéliser les essais de chaque matériau.

L'essai standard de déchirabilité sur éprouvette lanière est réalisé sur les trois matériaux. On note le faciès de rupture et la déformation à rupture de l'éprouvette.

Le même type d'essai de déchirabilité est effectué sur des éprouvettes lanières préfissurées par des entailles courtes. Nous avons vu en effet que les pré-entailles des éprouvettes lanières sont trop larges pour vérifier la formule analytique de calcul de G :

$$G = \frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} W_0 c$$

Nous avons choisi des pré-entailles d'un quart de la largeur d'éprouvettes, compatibles avec la notion de fissure courte, compatibles aussi avec la limitation donnée par le modèle de cumul de dommage sur la dimension caractéristique de l'essai (voir page 159). Pour ces essais, on note le faciès de rupture et la déformation à rupture.

Enfin, l'essai de déchirabilité est réalisé également avec des éprouvettes PS entaillées au quart. Pour ces essais, il n'est pas possible d'atteindre les déformations à rupture. On repère seulement le mode de fissuration et l'on arrête l'essai vers 100 % de déformation macroscopique.

Les essais de déchirabilité sont tous réalisés à température ambiante, environ 22° .

Les essais de déchirabilité sur lanières à entailles courtes et sur éprouvettes PS sont couplés à une observation au microscope optique. On détermine pour chaque essai la déformation d'amorçage, définie en première partie de ce mémoire comme l'instant d'apparition de la ligne blanche. Le grossissement d'étude est de 40. Le moyen d'éclairage est placé derrière un épais double vitrage qui évite l'échauffement local du matériau. Les essais sur éprouvettes PS sont réalisés dans une enceinte isotherme qui limite les possiblités de réglage de l'orientation du microscope. On choisit d'observer le fond de fissure pendant l'essai non pas perpendiculairement mais avec une incidence d'environ 80° . Les essais sur

éprouvettes lanières sont réalisés sans enceinte de protection et le microscope est monté sur un bras articulé qui permet d'être très près de l'éprouvette et de pouvoir modifier l'incidence d'observation du fond de fissure pendant l'essai. L'éclairage est plus puissant quand le microscope est rapproché : l'observation sur éprouvette lanière est beaucoup plus satisfaisante.

La plupart des essais sont très lents. La détermination de l'amorçage se fait toujours par excès. Plus l'essai est lent et plus l'instant où l'on peut repérer la ligne blanche est difficile à définir. Il faudrait un microscope de grossissement 3 à 4 fois plus important pour être plus précis. Notre choix permet cependant de couvrir une grande plage de vitesses de déformation : la difficulté est de pouvoir toujours accommoder en fond de fissure malgré la vitesse de traction qui le déplace rapidement et l'éloigne aussi du plan de vision nette. Quand les vitesses sont très rapides, il devient difficile de déplacer le microscope avec le bras articulé et d'agir sur le réglage de profondeur en même temps. Pour les essais sur éprouvettes PS, les déplacements sont moins importants. Le microscope est monté sur un système mécanique et il est facile d'agir sur la mollette de commande des moteurs tout en réglant la profondeur d'accommodation. On peut évaluer à 5 % par excès l'erreur sur l'amorçage que l'on peut commettre pour les éprouvettes PS, et pour les lanières de 2 % aux faibles vitesses à 4 % aux vitesses les plus élevées.

Pour certains essais, souvent dans le cas d'une rotation, il semble que la détermination de l'instant d'amorçage soit très précise et valide la qualité des autres mesures.

Notre premier objectif est de comparer les vitesses caractéristiques des trois types d'éprouvette, matériau par matériau, puis d'essayer d'extraire des renseignements de l'étude de l'amorçage, grâce notamment à notre modèle d'amorçage.

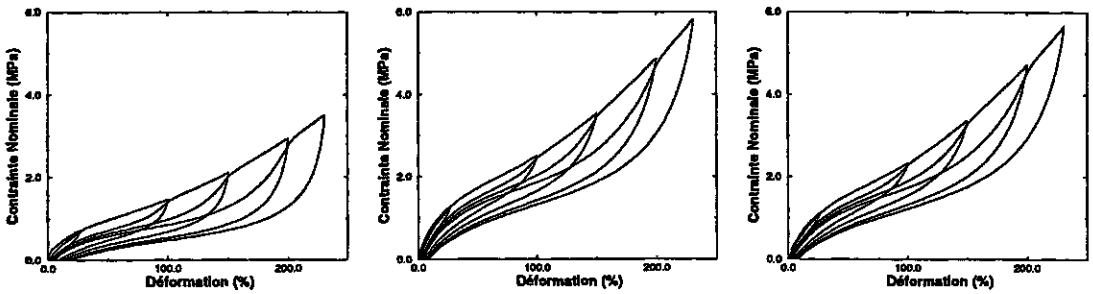
Enfin, pour chaque matériau on réalise des essais de rupture d'éprouvettes haltères en traction uni-axiale à vitesse de déformation constante. Les essais sont réalisés à température ambiante et à plusieurs vitesses compatibles avec les essais de comportement et de propagation de fissure. Ils doivent nous permettre de regarder si le niveau moyen de déformation à rupture sur éprouvette haltère est significatif pour la courbe de déformation à rupture de l'essai de déchirabilité ou de la déformation locale à l'amorçage.

15.2.3 Comportement des trois matériaux

Nous donnons sur le graphe (15.2-1) la courbe de comportement obtenue à 7.7 $10^{-2}s^{-1}$ pour les trois matériaux. On remarque que Mat A est beaucoup moins raide que Mat B et Mat C, mais présente un taux de dissipation beaucoup plus élevé. Mat B et Mat C semblent par contre avoir des comportements très proches.

Contrainte nominale à 200 %. La contrainte nominale à 200 % est un bon indicateur de la raideur globale du matériau et permet de mesurer l'évolution de la contrainte en fonction de la vitesse. Le tableau (15.2-2) résume nos mesures. Les trois matériaux ont des évolutions comparables des contraintes. La dépendance en vitesse du comportement de Mat C semble plus faible aux faibles vitesses, mais entre 7.7 $10^{-2}s^{-1}$ et 7.7 s^{-1}, il revient à un taux de croissance comparable aux deux autres matériaux. A noter que l'éprouvette testée à 7.7 $10^{-1}s^{-1}$ a rompu peu avant le sommet du cycle à 200 % et qu'un deuxième essai n'a pu être réalisé à 25 ° C et devient comparable à l'essai à 7.7 $10^{-2}s^{-1}$. Enfin, il est clair que les trois matériaux sont encore dans un état caoutchoutique même aux plus grandes vitesses de déformation. En particulier, il n'est pas possible de dire que Mat A est localement vitreux dans nos essais.

Déformation Rémanente. Les déformations rémanentes des trois matériaux pour chaque essai sont données sur les figures (15.2-2) Les déformations rémanentes sont bien



(a) Cycles de cisaillement pur, matériau A

(b) Cycles de cisaillement pur, matériau B

(c) Cycles de cisaillement pur, matériau C

FIG. 15.2-1: Comparaison des comportements en cisaillement pur des trois matériaux étudiés. Eprouvettes PS, vitesse de déformation 7.7 $10^{-2}s^{-1}$, température 25° C.

	Mat A	Mat B	Mat C
7.7 $10^{-4}s^{-1}$	2.60	4.10	4.50
7.7 $10^{-3}s^{-1}$	2.78 +6.9 %	4.33 +5.6 %	4.59 +2.0 %
7.7 $10^{-2}s^{-1}$	2.92 +5.0 %	4.85 +12. %	4.70 +2.3 %
7.7 $10^{-1}s^{-1}$	3.19 +9.0 %	5.25 +8.0 %	-
7.7 s^{-1}	3.76 +18. %	5.50 +4.7 %	5.74

TAB. 15.2-2: Contraintes nominales à 200 % des trois matériaux en fonction de la vitesse du cycle et évolution en %.

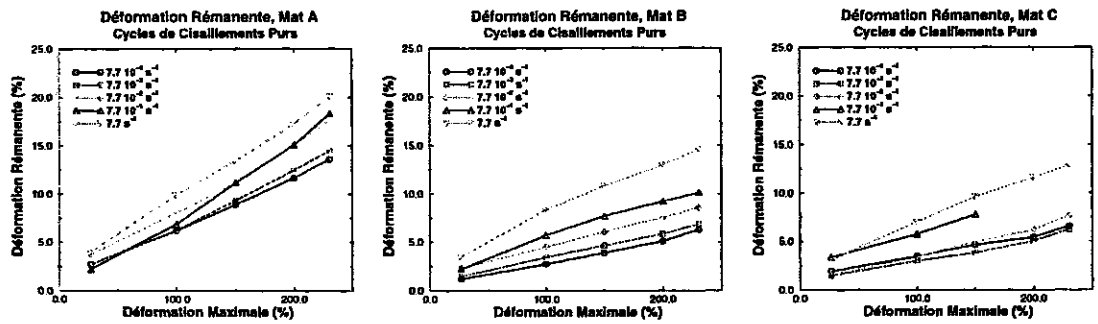


FIG. 15.2-2: Mesures des déformations rémanentes des trois matériaux à la fin de chaque cycle et pour chaque vitesse d'essai.

entendu croissantes en fonction de la vitesse et de la déformation maximale - linéairement par rapport à cette dernière variable. Elles sont comparables pour les matériaux B et C et restent assez faibles, de l'ordre de 12% pour le cycle le plus rapide à la plus grande déformation maximale. Comparativement, le matériau A atteint 10% de déformation dès 150 % et dépasse les 20 % pour le cycle le plus critique. Aux plus faibles vitesses et pour les plus petits cycles, les déformations sont faibles et les erreurs expérimentales peuvent expliquer que les mesures ne soient pas monotones en vitesse.

Dissipation. Le matériau A est relativement dissipatif alors que Mat B et Mat C le sont très peu. En valeur absolue, les énergies dissipée et stockée sont beaucoup plus importantes pour chaque cycle pour les matériaux Mat B et Mat C que pour Mat A.

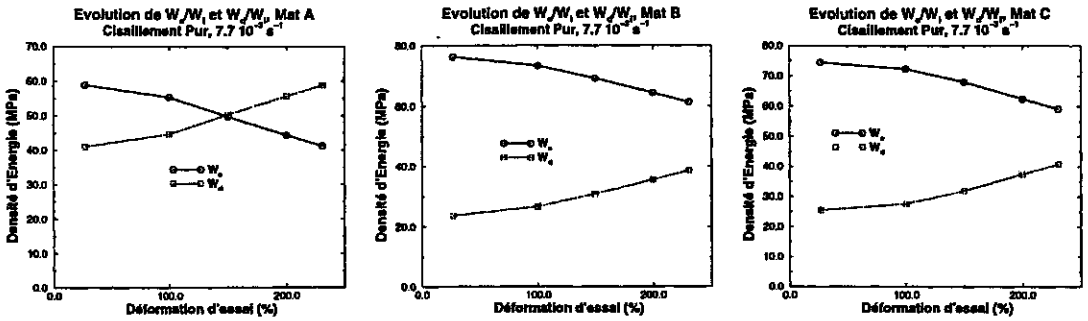
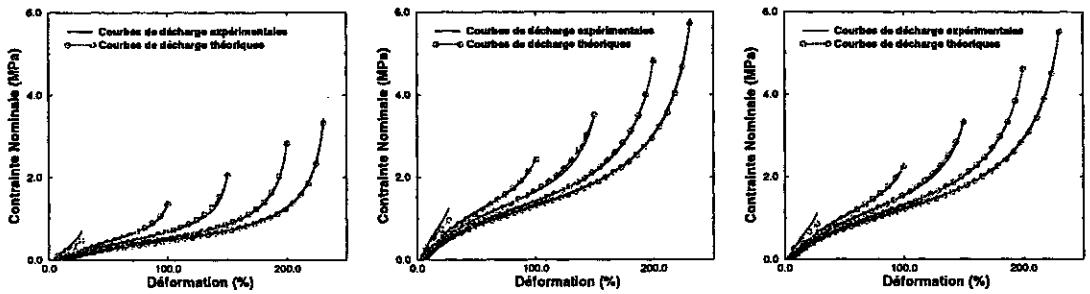


FIG. 15.2-3: Proportions des énergies stockée et dissipée par cycle de cisaillement pur pour les trois matériaux. Vitesse d'essai 7.7 $10^{-3}s^{-1}$.



(a) Mat A (b) Mat B (c) Mat C

FIG. 15.2-4: Modélisation du comportement des trois matériaux avec notre loi de comportement endommageante. Vitesse d'essai 7.7 $10^{-2}s^{-1}$.

Il s'agit d'un effet de raideur. Il est plus intéressant de regarder les valeurs relatives des énergies par rapport à l'énergie apportée à la structure pour chaque cycle. Ce type de résultat est illustré sur le graphe (15.2-3). On remarque dans ce cas que Mat A a un niveau de dissipation beaucoup plus important que les autres. Pour ce matériau, l'énergie dissipée par cycle est plus importante que l'énergie stockée même aux plus faibles vitesses dès que les déformations deviennent suffisamment grandes (au delà de 100 %). Les matériaux B et C ont encore des taux de dissipations proches.

Modélisation du comportement. On peut tester la qualité de la loi de comportement que nous proposons pour chacun des trois matériaux. On sait déjà que le caractère peu non-linéaire de chacun aux faibles déformations, les faibles déformations rémanentes atteintes sauf aux plus hautes vitesses sont des indices favorables pour exploiter notre modèle de comportement. On peut observer en effet la très bonne simulation que nous obtenons, qui se caractérise par exemple aux plus grandes déformations par des erreurs faibles, inférieures à 2 % en contrainte dans tous les cas. C'est pourtant au maximum des cycles que nous commettons le plus d'erreur sur l'estimation des contraintes. Les déformations rémanentes sont également bien approchées tant qu'elles ne dépassent pas 15 % (voir figures (15.2-4)) .

Conclusions. Ces trois matériaux sont représentatifs du comportement usuel des élastomères et des vitesses de rotation caractéristiques. Ils ne présentent pas de particularité qui pourrait se rattacher à la rotation de fissure. Nous avons d'autre part montré l'aptitude de notre modèle de comportement à reproduire des cycles de cisaillement pur à

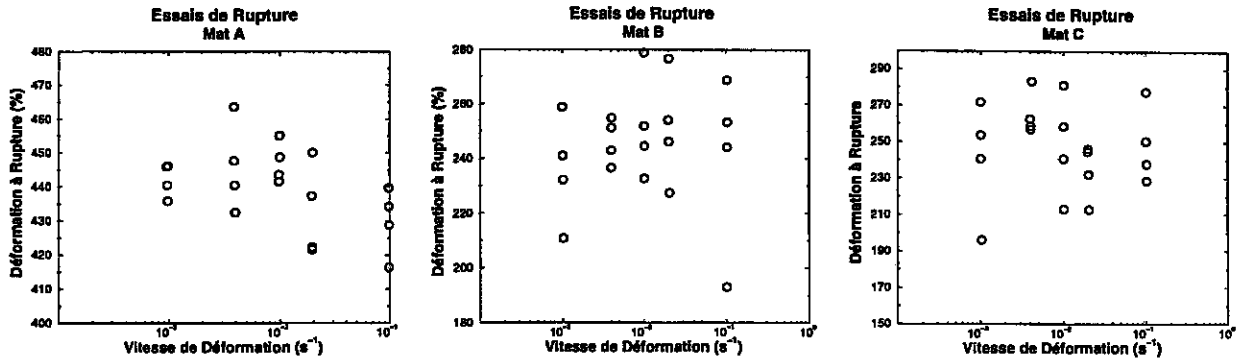


FIG. 15.2-5: Résultats des essais de rupture sur éprouvettes haltères en traction uni-axiale à taux de déformation constant.

différentes vitesses d'essais et pour différents niveaux de déformation.

La **température de transition vitreuse ne suffit pas** à comprendre comment classer les trois matériaux vis-à-vis de la rotation ; **de même leur raideur, leur niveau de dissipation** ou **les déformations rémanentes.** Il nous semble cependant que le taux de dissipation soit un bon indicateur de la distance du matériau à sa T_g pour les phénomènes visco-élastiques. Ainsi, il semble que l'on puisse dire que **les matériaux qui présentent des taux de dissipation élevés ont des vitesses de rotation de fissure très faibles.** Cette hypothèse s'accorde bien avec le cas d'autres matériaux que nous avons pu tester par ailleurs.

Enfin, les matériaux B et C ont des comportement très proches et présentent des vitesses caractéristiques proches, ce qui semble nous mettre sur la voie d'**une justification mécanique de la rotation de fissure.**

15.2.4 Rupture homogène

Les résultats des essais de rupture sur éprouvettes haltères en traction uni-axiale sont donnés sur le graphe (15.2-5). La dispersion des points mesurés est une caractéristique inévitable de la rupture homogène. Il est très difficile de pouvoir justifier de l'existence d'une loi donnant la déformation à rupture à partir de nos essais. On peut au moins repérer les niveaux de déformations moyens atteints par chaque matériau :

1. Matériau A : 424 %;
2. Matériau B : 250 %;
3. Matériau C : 244 %.

Là encore on ne peut que constater la proximité des déformations à rupture moyennes entre Mat B et Mat C. Les niveaux de déformation atteints par Mat A sont beaucoup plus élevés. Nous verrons que cela aura des implications sur les déformations d'amorçage et les courbes de déchirabilité. Un ajustement au sens des moindres carrés montre que les courbes log-linéaires les plus proches des nuages de points sont :

- Mat A : $\epsilon_A = 424.4 - 3.26 \ln \dot{\epsilon}$;
- Mat B : $\epsilon_B = 249.7 + 1.03 \ln \dot{\epsilon}$;
- Mat C : $\epsilon_C = 244.5 - 0.64 \ln \dot{\epsilon}$.

déformations exprimées en % et $\dot{\epsilon}$ vitesse de déformation exprimée en s^{-1}.

15.2.5 Tests de déchirabilité

Trois essais de déchirabilité ont été réalisés. Nous reportons sur le tableau (15.2-3) les vitesses limites d'observation du phénomène de rotation de fissure. Ces essais sont cohérents entre eux et indiquent que les vitesses de déformation caractéristiques sont très proches. En comparant les résultats de Mat B et Mat C pour les éprouvettes PS et les lanières à fissures courtes, il semble que les vitesses d'observations soient légèrement plus élevées avec les lanières.

	Mat A	Mat B	Mat C
PS	$< 7.7\ 10^{-5} s^{-1}$	$7.7\ 10^{-3} - 3.8\ 10^{-2} s^{-1}$	$3.8\ 10^{-3} - 7.7\ 10^{-3} s^{-1}$
Lanières, fissures courtes	$< 2.0\ 10^{-4} s^{-1}$	$1.4\ 10^{-2} - 2.8\ 10^{-2} s^{-1}$	$2.8\ 10^{-2} - 1.4\ 10^{-1} s^{-1}$
Lanières, fissures longues	$< 1.4\ 10^{-4} s^{-1}$	$1.4\ 10^{-3} - 1.4\ 10^{-2} s^{-1}$	$1.4\ 10^{-2} - 1.4\ 10^{-1} s^{-1}$

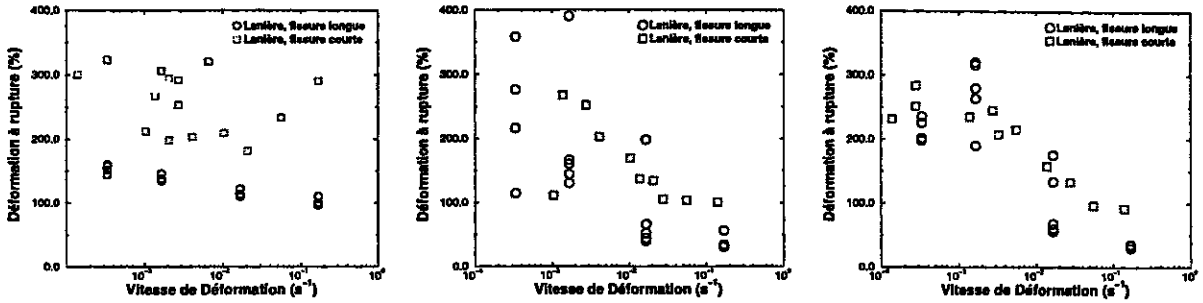
TAB. 15.2-3: Vitesses limites d'existence du phénomène de rotation de fissure pour les trois types d'éprouvettes d'essais.

Les courbes de déchirabilité sont données sur les graphes (15.2-6) pour les éprouvettes lanières. On remarque d'abord que les nuages de points des expériences sur le matériau A sont nettement distincts. Les essais sur lanières à fissures longues donnent peu de dispersion[1] et les déformations à rupture avec des fissures courtes sont beaucoup plus élevées que les déformations pour les fissures longues. Il s'agit d'une manifestation simple de l'influence de la longueur du ligament sur la déformation à rupture. Nous avons pu en effet remarquer que les vitesses de propagation de fissure pour le matériau A étaient très faibles. La différence de 5 mm de ligament entre les deux types d'essais se concrétise par un accroissement de 150 % de la déformation macroscopique à rupture.

Les résultats des essais pour Mat B et Mat C sont par contre très similaires. On remarque d'abord que nous n'observons pas la branche croissante de la courbe de déchirabilité [telle que présentée en première partie, page 20] pour le matériau B - peut-être est-on juste à l'optimum à $10^{-3} s^{-1}$. Pour Mat C l'optimum est bien visible, vers $10^{-3} s^{-1}$. La grande extension des vitesses d'observation de la rotation de fissure pour ces deux matériaux nous permet de préciser que **des rotations de fissures interviennent de façon reproductible après l'optimum**, à des vitesses pouvant être élevées. L'existence d'une rotation de fissure explique la proximité des résultats des deux types d'éprouvettes. En effet, la ruine de l'éprouvette quand la fissure tourne est due à une fissuration catastrophique qui voit peu la largeur du ligament. C'est essentiellement l'existence de la moustache et le champ de déformation homogène dans le ligament après rotation qui contrôlent la rupture. Les déformations à rupture des matériaux B et C dans le cas d'une rotation sont beaucoup trop faibles par rapport aux déformations mesurées dans les essais sur éprouvettes haltères. Cela montre la prédominance de l'existence d'une fissure dans le phénomène de rupture, même si l'on semble pouvoir dire que la rotation régularise les champs mécaniques à l'endroit où s'initie la propagation catastrophique.

Les niveaux de déformation à rupture atteints par les matériaux B et C sont usuels et comparables. Mat A présente par contre des déformations à rupture spectaculaires pour un matériau qui ne donne que des propagations droites. Cette propriété est à rapprocher du niveau de déformation à rupture des essais sur éprouvettes haltères. On remarque aussi un renversement des niveaux de déformations à rupture entre les essais avec fissures courtes ou longues. Dans le cas des essais avec fissures courtes, Mat A présente des déformations à rupture comparables voire plus élevées que les deux autres matériaux. Mais dans le cas

[1] L'une des raisons du choix de ces éprouvettes est précisément leur aptitude à donner la plus faible dispersion dans les essais de déchirabilité.



(a) Mat A (b) Mat B (c) Mat C

FIG. 15.2-6: Résultats des essais de déchirabilité pour chaque matériau. On compare matériau par matériau les résultats avec fissures courtes et longues.

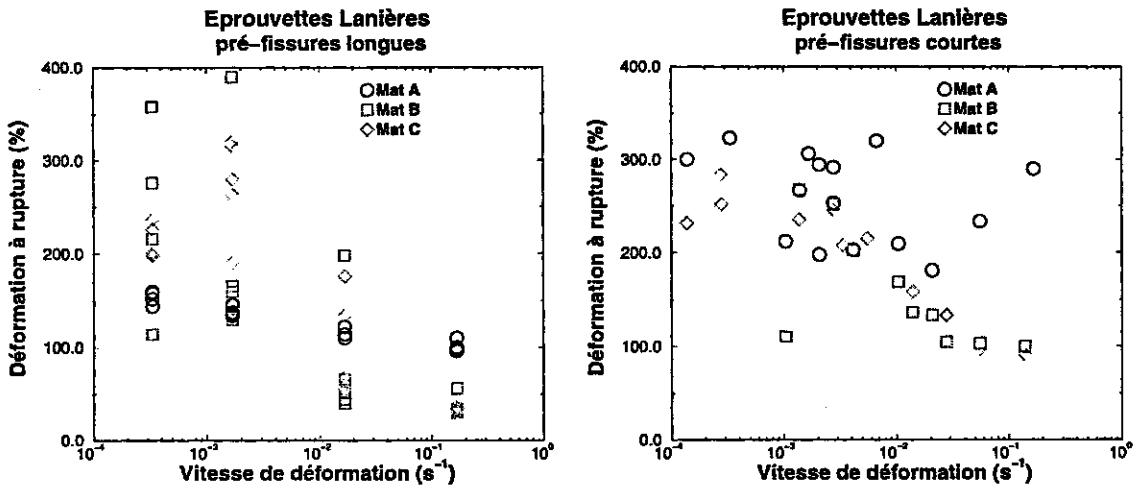
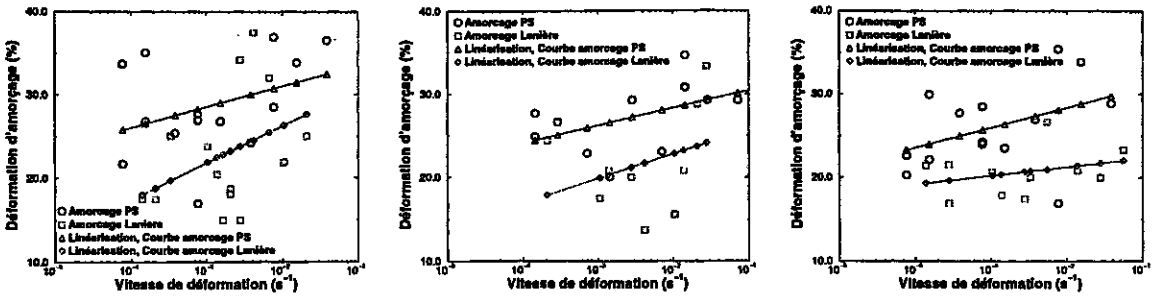


FIG. 15.2-7: Résultats des essais de déchirabilité. On compare les résultats de chaque matériau pour les essais avec fissures courtes et longues.

des essais avec fissures longues, les déformations à rupture de Mat A sont nettement plus faibles que celles de Mat B et Mat C, sauf à la plus grande vitesse d'essai. Ce phénomène, lié à la largeur du ligament, montre toute **la difficulté qu'il peut y avoir à essayer de caractériser une propriété globale de propagation de fissure - amorçage et propagation - sur une éprouvette pour extrapoler à des structures plus complexes.**

Enfin, certains essais sur éprouvettes PS ont eu un déroulement très particulier. Dans un premier temps, nous avons observé l'amorçage de la fissuration et le début de la formation d'une moustache. Puis une propagation droite s'est produite, très rapide et sur plusieurs centimètres, mais s'est arrêtée avant de couper l'éprouvette. Il s'agit d'une **illustration de l'effet d'échelle** que nous avons pressenti précédemment : on peut considérer que ces essais donnent un stick-slip de propagation et il faut une longue éprouvette PS pour voir la différence d'échelle entre un stick-slip dans nos matériaux et un stick-slip dans les matériaux non-chargés. Un seul stick-slip a pu être obervé : les essais sur éprouvette PS sont arrêtés assez tôt.

Amorçage. On peut enfin reporter les résultats de nos observations de l'instant



(a) Mat A (b) Mat B (c) Mat C

FIG. 15.2-8: Comparaison pour chaque matériau des déformations à l'amorçage des essais sur éprouvettes PS et éprouvettes lanières à fissure courte.

d'amorçage pour les éprouvettes PS et les lanières à fissure courte, figure (15.2-8). On remarque d'abord que les résultats pour chaque type d'éprouvette donnent un nuage de points très dispersé. On retrouve localement une dispersion similaire à celle donnée par les essais de rupture homogène, mais avec une plage de déformations moins large, due notamment au fait que l'on mesure une quantité macroscopique plutôt que locale.

De plus, les déformations mesurées sont faibles et du même ordre pour les trois matériaux. Une analyse plus précise montre que les nuages de points des essais sur éprouvettes PS sont en moyenne 5 % au dessus des essais sur lanières. D'autre part, les mesures sur le matériau A sont aussi environ 5 % au dessus des déformations d'amorçage des autres matériaux. Pour Mat A, la distinction entre les déformations sur PS et lanières est moins franche que pour Mat B et Mat C.

Enfin, on montre le caractère légèrement croissant de la déformation d'amorçage en fonction de la vitesse d'essai. Il s'agit d'un résultat important qui permet de **mettre en doute les explications en terme de "fibrage" du matériau.**

Les courbes log-linéaires les plus proches au sens des moindres carrés sont données par :

- Matériau A :

$$\epsilon_{PS} = 35.92 + 1.07 \ln \dot{\epsilon}$$

$$\epsilon_{Lan} = 35.03 + 1.91 \ln \dot{\epsilon}$$

- Matériau B :

$$\epsilon_{PS} = 32.48 + 0.90 \ln \dot{\epsilon}$$

$$\epsilon_{Lan} = 28.64 + 1.26 \ln \dot{\epsilon}$$

- Matériau C :

$$\epsilon_{PS} = 33.12 + 1.04 \ln \dot{\epsilon}$$

$$\epsilon_{Lan} = 23.30 + 0.45 \ln \dot{\epsilon}$$

15.2.6 Quelques simulations

Nous pouvons essayer de rendre compte de deux résultats expérimentaux :

1. modélisation des déformations d'amorçage ;
2. modélisation des courbes de déchirabilité.

15.2.6.1 Déformations d'amorçage

On s'intéresse plus particulièrement à deux types de résultats : le passage de l'amorçage sur éprouvette PS à l'amorçage sur éprouvette lanière d'une part, d'autre part la modélisation des résultats d'amorçage sur l'une ou l'autre des géométries.

De l'amorçage sur éprouvette PS à l'amorçage sur éprouvette lanière. On doit remarquer d'abord que les taux de restitution d'énergie des deux éprouvettes sont proches pour un même niveau de déformation :

$$G_{PS} = W_0 h_0 \ , \ G_{Lan} = K W_1 c$$

On reporte sur le graphe (15.2-9) ces deux mesures en fonction de la déformation. Pour une même déformation globale, le taux de restitution des éprouvettes PS est toujours plus faible sur la plage de déformations qui nous intéresse pour l'amorçage, dans une mesure lentement croissante de la déformation d'étude mais à peu près indépendamment de la loi de comportement.

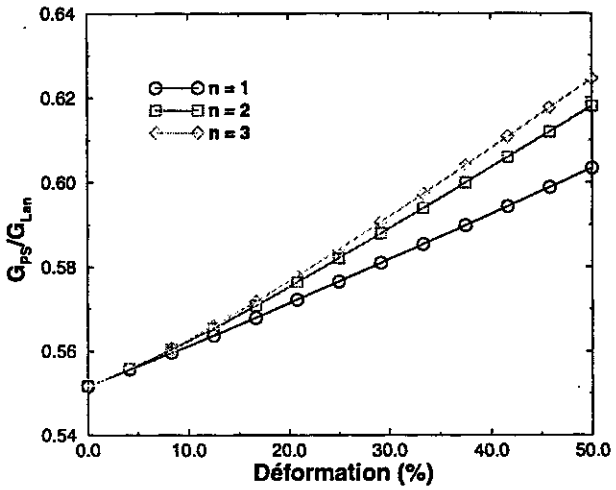


FIG. 15.2-9: Rapport des taux de restitution d'énergie des éprouvettes PS et lanières aux faibles déformations macroscopiques.

Si l'on suppose connu les résultats sur éprouvettes PS, on peut essayer de retrouver les résultats sur éprouvettes lanières en supposant que pour chaque vitesse d'essai on peut définir un G_c.

Si l'on cherche par contre à utiliser notre modèle de cumul de dommage pour prédire l'amorçage - défini comme l'instant où le nœud de fond de fissure atteint le critère de rupture - alors on cherche d'abord à reproduire les courbes de déformations d'amorçage et l'on obtient incidemment le passage de l'éprouvette PS à l'éprouvette lanière, **sans faire l'hypothèse d'un G_c.**

On donne sur le graphe (15.2-10) un exemple fictif : avec notre loi de cumul de dommage, on définit une courbe d'amorçage pour éprouvette PS, puis l'on déduit les courbes pour éprouvettes lanières avec l'un ou l'autre des deux modèles ci-dessus. Cet exemple est choisi parce qu'il est compatible avec les résultats pour Mat A. Il montre la proximité des résultats obtenus par notre modèle par rapport à un passage direct d'une courbe à l'autre par le taux de restitution. Cette proximité tient naturellement à la pertinence du taux de restitution dans notre étude. Le faible écart constaté caractérise les effets d'histoire. D'autre part, ce modèle donne un écart entre les déformations sur PS et lanière de l'ordre de 6 à 8 %, compatible avec les 5 % relevés précédemment.

Le passage d'une éprouvette à une autre pour la déformation d'amorçage semble donc être essentiellement constitutif de la forme des structures et de leur mode de chargement. Le taux de restitution d'énergie suffit à l'expliquer. Par contre, il ne dit rien sur la forme de la courbe de déformation d'amorçage.

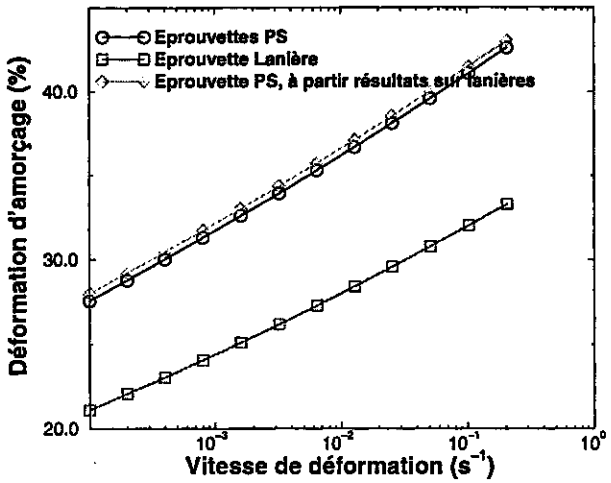


FIG. 15.2-10: Passage d'une courbe d'amorçage sur éprouvettes lanière à une courbe d'amorçage sur éprouvette PS. La méthode la plus simple suppose qu'il existe un critère $G_c(v)$, une seconde méthode exploite notre modèle de propagation de fissure.

Prédiction de l'amorçage. On cherche plus spécifiquement à rendre compte de la déformation d'amorçage pour une vitesse de déformation donnée. Rappelons d'abord que cela consiste à résoudre le problème :

$$\int_0^{t_c} \mu_0 \exp \frac{\epsilon(\delta, 0, G(u))}{\alpha} du = 1$$

où la vitesse de déformation intervient dans la variable de contrôle G, taux de restitution d'énergie - caratéristique également de la structure (voir page 161).

On peut chercher les variables matériaux rendant compte des courbes expérimentales soit dans l'espace réel - ce sont alors n, ϵ_0, α, δ - soit dans l'espace réduit des variables indépendantes du modèle - n, μ_0, $\alpha.\delta^{\frac{1}{2n}}$. Dans le premier cas, on peut également essayer de choisir le niveau de déformation caractéristique des essais de rupture homogène comme valeur de ϵ_0.

C'est cette dernière méthode que nous préférons exploiter. L'une des difficultés est que l'on peut proposer plusieurs courbes théoriques passant dans le nuage de points des essais et dont on peut dire qu'elles rendent compte des essais. En effet, on peut se permettre de ne pas proposer la courbe la plus proche au sens des moindres carrés par exemple, tant la propriété que l'on veut caractériser est par nature imprécise. Nous donnons des exemples de courbes théoriques obtenues pour les matériaux Mat A et Mat B sur les graphes (15.2-11) et (15.2-12). Le matériau C est mis à l'écart, notre modélisation ne peut pas le distinguer de Mat B.

15.2.6.2 Courbe de déchirabilité

La courbe de déchirabilité est une mesure beaucoup plus complexe qui intègre l'information de l'amorçage et de la vitesse de propagation de la fissure. Posons le problème

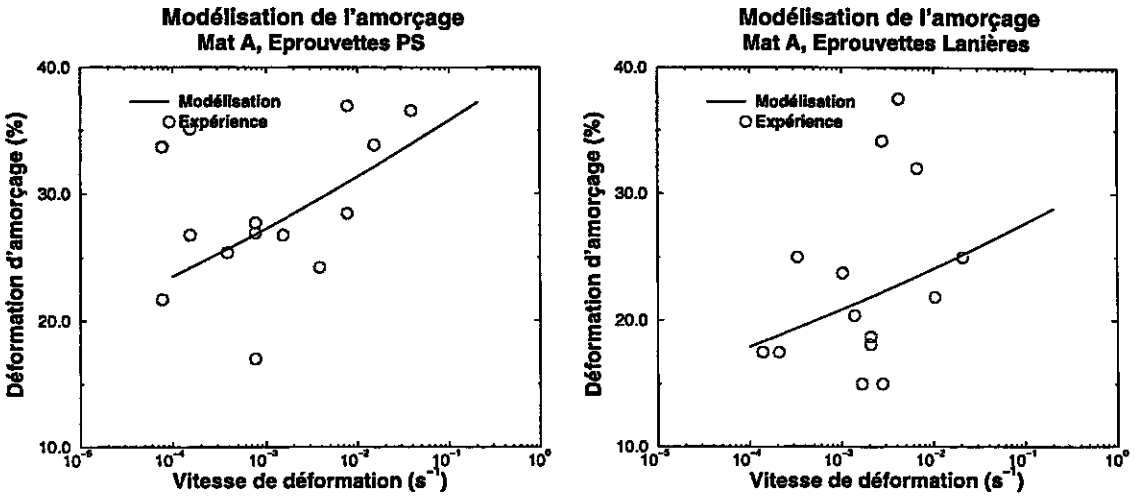


FIG. 15.2-11: Modélisation de l'amorçage pour Mat A. n = 3, ϵ_0 = 425 %, $\alpha = 0.1$, $\delta = 10^{-3}$.

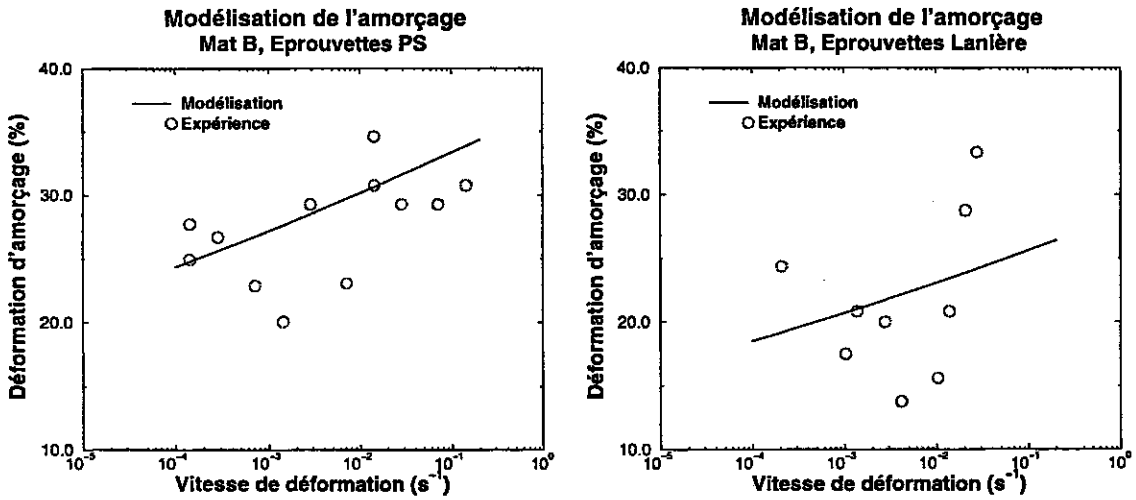


FIG. 15.2-12: Modélisation de l'amorçage pour Mat B. n = 3, ϵ_0 = 250 %, $\alpha = 0.05$, $\delta = 10^{-2}$.

de façon générale. Soit une éprouvette lanière de largeur L comportant une pré-fissure de longueur a_0.

Dans un essai de traction ou cisaillement pur monotone, l'amorçage se produit au temps t_0 après le début de l'essai. Au temps t, la déformation macroscopique est donnée par $\epsilon(t)$, la longueur de fissure est $a(t)$ et le taux de restitution permet de calculer la vitesse de fissuration v si l'on connaît la courbe $G(v)$, voire plus généralement $G(v, a(t))$.

Supposons que l'on sache calculer la courbe inverse $v = v(G, a(t))$. Alors l'équation différentielle qui régit la propagation de fissure est :

$$\frac{da}{dt} = v[G(\epsilon(t)), a(t)] \tag{15.2-1}$$

On peut obtenir un modèle en supposant que l'on peut approcher la courbe de déchirabi-

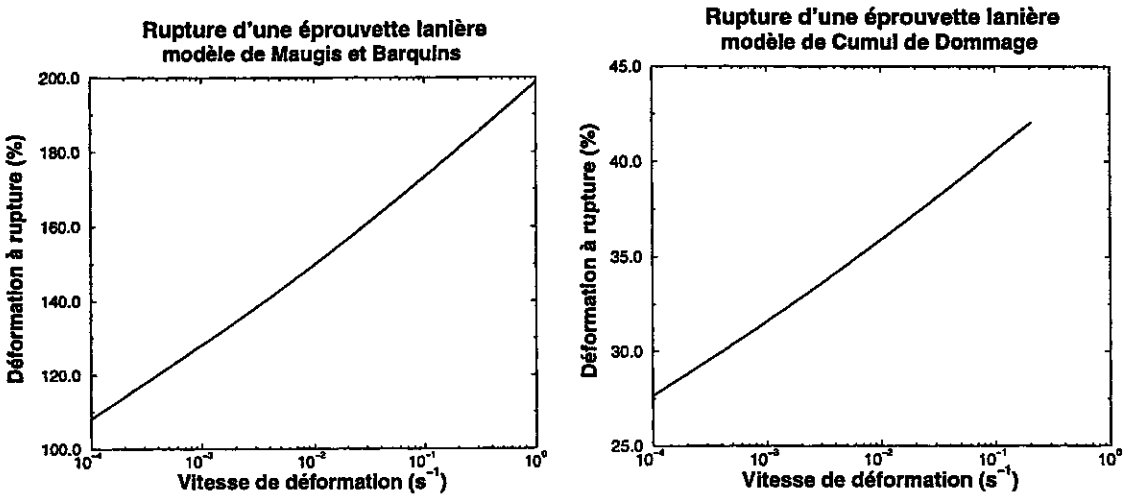


FIG. 15.2-13: Modélisation de la déformation à rupture d'une éprouvette lanière dans le domaine d'existence de la propagation droite.

lité par le modèle phénoménologique de Maugis et Barquins :

$$G = T_0(1 + \alpha v^n) \approx T_0 \alpha v^n \tag{15.2-2}$$

Dans le cas simple d'une éprouvette lanière où l'on néglige les effets de bords, l'équation précédente se simplifie en :

$$a(t)^{-\frac{1}{n}} \frac{da}{dt} = \left[\frac{K(t).W_0(t)}{T_0 \alpha}\right]^{\frac{1}{n}} \tag{15.2-3}$$

soit encore :

$$\frac{n}{n-1}\left[a(t)^{1-\frac{1}{n}} - a_0^{1-\frac{1}{n}}\right] = \int_{t_0}^{t} \left[\frac{K(u).W_0(u)}{T_0 \alpha}\right]^{\frac{1}{n}} du \tag{15.2-4}$$

où t_0 repère l'instant d'amorçage, par exemple donné par l'expérience ou notre modèle. La déformation à rupture de l'éprouvette dans un essai à vitesse de déformation constante $\dot{\epsilon}$ est donnée par l'instant où $a(t) = L$.

Une autre façon d'aborder ce problème consiste à utiliser notre modèle de propagation dès l'amorçage, en regardant à quel moment le nœud situé à la position L va atteindre le critère.

Chacune des deux méthodes néglige les effets de bords et ne peut s'intéresser qu'aux propagations droites. Pour utiliser notre modèle dans les cas de fissures déviées ou de rotation, il faudrait disposer de modèles asymptotiques décrivant les champs de déformations pour ces modes de propagation.

Nous montrons sur les graphes (15.2-13) des exemples de simulation de la déformation à rupture des éprouvettes lanières. Le modèle de Maugis et Barquins est choisi pour rendre compte de déformations à rupture usuelles mais ne permet pas de rendre compte de l'amorçage. Notre modèle est choisi pour bien reproduire les déformations d'amorçage de Mat A mais ne permet pas d'obtenir des déformations à rupture usuelles. Il s'agit d'un calcul qui illustre que le comportement GNH à l'amorçage n'est pas adapté pour rendre compte de la propagation de fissure et que le rayon de fond de fissure à l'amorçage devrait être pris en compte.

Aucune des modélisations ne permet de rendre compte de la décroissance de la déformation à rupture en fonction de la vitesse de déformation. Une étude plus complète, où l'on se propose de prendre en compte l'influence plus précise de la longueur de fissure sur le calcul du taux de restitution (incluant les effets de bords), ne nous a pas permis de retrouver des déformations à rupture décroissantes de la vitesse.

Enfin, peut-on rendre compte de la variation de la déformation à rupture avant l'optimum ? Nous avons montré la faible influence de la taille du ligament à partir de nos résultats expérimentaux. Une modélisation grossière est possible à partir de notre modèle si l'on suppose que la rotation régularise le fond de fissure dès l'amorçage. Dans ce cas, notre modélisation fait peu de différence entre la déformation à rupture de l'essai sur éprouvette saine et la déformation à rupture après rotation. **Cela montre essentiellement qu'il faudrait prendre en compte plus précisément la perturbation occasionnée par le fond de fissure juste après la rotation sur le champ local.** Ainsi, nous avons une modélisation capable de décrire l'amorçage d'une part, la propagation stationnaire d'autre part mais à condition de choisir un comportement spécifique pour chacun des phénomènes.

15.3 Un critère de rotation de fissure

15.3.1 Résultats récapitulatifs

Nous avons montré que le phénomène de rotation de fissure est commun à plusieurs matériaux et plusieurs modes de sollicitation. Le phénomène de stick-slip observé dans les caoutchoucs non-chargés est comparable au phénomène de propagation en épine dans les matériaux chargés, dont une manifestation particulière est le phénomène de rotation de fissure pour certaines éprouvettes sollicitées de façon monotone. Quelques essais sur éprouvette PS que nous avons décrits précédemment semblent valider ce rappochement et notre interprétation des résultats de Greensmith et Kadir et Thomas.

Le phénomène de rotation de fissure doit d'abord être présenté comme une **croissance du rayon de fond de fissure pendant la propagation** que l'on appelle plus précisément un émoussement - même si ce terme semble indiquer un profil irrégulier contraire à l'expérience. Il semble exister une compétition entre une propagation de fissure - mode normal de propagation - et cette évolution du profil. Le stick-slip correspond à une faible évolution du rayon local ou à une croissance qui affecte peu la progression de la fissure. La propagation en épine correspond à une forte évolution du rayon. On peut imaginer par exemple que **l'évolution du rayon de fond de fissure induit rapidement une perte de singularité qui retarde beaucoup la progression de la fissure et développe un peu plus la tendance à l'émoussement.**

Enfin, une caractéristique de la rotation de fissure est sa grande constance. Nos expériences permettent de souligner un peu mieux l'intérêt de cette remarque. Nous avons bien montré l'importance de l'amorçage dans la rotation de fissure. Mais nous avons pu mesurer aussi **la grande variabilité de l'état local pour une même vitesse de sollicitation, sans perturber l'observation de la rotation de fissure.** Nous avons aussi vu l'effet de la vitesse de déformation sur l'amorçage. Cela nous amène à porter l'accent plutôt sur l'**importance des grandeurs locales en vitesse** qui suivent bien localement l'évolution de la vitesse d'essai.

Nous avons déjà montré que les modèles connus de propagation en épine ne rendaient pas compte du phénomène. Que nous reste-t-il ? Il existe quelques indices, sans doute très importants. Le phénomène est commun à plusieurs matériaux, pour plusieurs types de

sollicitations. Il se produit seulement dans un domaine de faible vitesse pour le matériau, où les effets visco-élastiques sur le comportement sont faibles, mais où également l'effet Mullins est le plus faible, ce qui remet en cause l'intérêt de la dissipation pour le phénomène[2]. Nous avons vu aussi que la rotation était une caractéristique de l'amorçage dans les essais monotones sur nos matériaux. Enfin, il ne semble pas y avoir d'influence de la pression hydrostatique sur la plage d'existence en vitesse des propagations saccadées.

Nous manquons de résultats expérimentaux qui puissent nous permettre d'extraire plus d'informations sur le phénomène. Les expériences de Kadir montrant l'influence de la pression hydrostatique sur le mode de propagation sont l'exemple type d'essais qui apportent une information précieuse au mécanicien. De même nos expériences sur l'amorçage au microscope électronique (voir page 25), ou celles qui donnent les courbes de déformation d'amorçage - page 215 - sont des tentatives originales pour essayer d'apporter des informations nouvelles. Mais ces informations ne semblent pas suffire à comprendre le phénomène et nous voyons mal comment en obtenir d'autres.

Il y a probablement une explication mécanique au phénomène. Mais nous n'avons pas pu repérer de résultat expérimental remarquable - par exemple une discontinuité sur les déformations d'amorçage - qui mette l'accent sur un paramètre caractéristique. Nous faisons l'hypothèse que notre analyse a permis d'observer toutes les variables mécaniques. Notre démarche de modélisation consiste à essayer de **construire une variable mécanique qui évolue comme le phénomène de rotation** et qui lie entre elles les variables mécaniques identifiées.

Dans un essai de traction uni-axiale sur éprouvette lanière, il y a deux particularités de la rotation de fissure dont nous pourrions essayer de rendre compte :

1. l'existence ou non d'une moustache ;
2. la taille de la moustache, quand elle existe.

Pour simplifier, nous supposons que pour les matériaux étudiés, il existe une plage de rotation de fissure en vitesse. Nous voulons seulement définir une vitesse de sollicitation caractéristique où le phénomène est observable. Le problème de la taille de la moustache ou l'explication des trois branches des courbes expérimentales de Greensmith (page 190) résulte d'une analyse plus fine que la nôtre, où l'on cherche à calculer la vitesse de croissance du défaut, à regarder dans quelle plage cette vitesse de croissance est un frein observable à la propagation.

15.3.2 Confinement de l'endommagement

Soit une éprouvette fissurée soumise à une sollicitation caractérisée par son taux de restitution d'énergie.

On définit le confinement de l'endommagement au temps t pour le niveau d'endommagement d_s ($d_s < 1$) et pour le chargement $\{G(u), u \leq t\}$ comme le domaine de l'éprouvette où l'endommagement est plus grand que d_s. La projection de ce domaine sur la direction de propagation droite, mesurée à partir du fond de fissure, sera la longueur du domaine. Dans le cas de chargements de mode I, on définira également la largeur comme la demi-longueur du domaine projeté sur une direction perpendiculaire à la direction droite.

Nous reprenons les définitions du chapitre de présentation du modèle de cumul de dommage, page 153, avec les mêmes hypothèses sur la méthode de propagation de fissure et les mêmes valeurs caractéristiques des différentes quantités de comportement et d'endommagement (voir page 162).

[2]De même l'accommodation du comportement atténue les effets d'une dissipation mais n'empêche pas la propagation saccadée, sauf à atteindre des déformations d'accommodation très proches des déformations à rupture.

Le domaine d'endommagement est défini au temps t par :

$$\{(x,y), \mu_0(\sum_{i=1}^{p} \int_{t_{i-1}}^{t_i} \exp \frac{\epsilon(x+(p-i)\delta, y, G(u))}{\alpha} du + \int_{t_p}^{t} \exp \frac{\epsilon(x,y,G(u))}{\alpha} du) > d_s\} \tag{15.3-5}$$

On peut s'intéresser à deux domaines particuliers, de définitions plus simples :

1. le domaine stationnaire existe dans le cas des essais de relaxation et est donné par :

$$\{(x,y), \mu_0 \sum_{i=1}^{p} \left[\exp \frac{\epsilon(x+i\delta, y, G)}{\alpha}\right] \frac{\delta}{c} > d_s\}$$

   où c est la vitesse stationnaire de propagation, et p un paramètre défini page 164.

2. le domaine de confinement à l'amorçage vérifie l'équation :

$$\mu_0 \int_0^{t_c} \exp \left[\frac{\epsilon(x,y,G(u))}{\alpha}\right] du > d_s \text{ , avec } \mu_0 \int_0^{t_c} \exp \left[\frac{\epsilon(\delta,0,G(u))}{\alpha}\right] du = 1$$

Nous nous intéressons plus particulièrement au domaine à l'amorçage et à son évolution au cours de la propagation.

15.3.2.1 Forme et dimension du domaine de confinement

Les déformations sont définies en un point donné à partir du tenseur des dilatations calculé par les développements asymptotiques. La norme des déformations est plus particulièrement donnée par :

$$C_{22}(r,\theta,G,n) = \left[\frac{a_2(G,n)h(\theta,n)}{r^{\frac{1}{2n}}}\right]^2 \tag{15.3-6}$$

ce qui montre qu'avant amorçage les lignes d'iso-confinement sont données par :

$$\frac{h(\theta,n)}{r^{\frac{1}{2n}}} = Cste \tag{15.3-7}$$

et ne dépendent que du comportement du matériau. En particulier, le domaine de confinement est limité par la ligne d'iso-confinement attachée à la valeur d_s.

Si à l'amorçage toute la structure est en grande déformation, on peut montrer que localement l'amplification de la vitesse de déformation est linéaire au point (r,θ) pour une éprouvette PS, de valeur :

$$\dot{\epsilon}_\mu = \gamma \frac{h(\theta,n)}{r^{\frac{1}{2n}}} \dot{\epsilon} \tag{15.3-8}$$

avec :

$$\gamma = \left(\frac{h_0}{\pi n m_2^{2n-1}}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

Dans ce cas, l'enveloppe du domaine de confinement est donné par :

$$\begin{cases} \frac{h(\theta,n)}{r^{\frac{1}{2n}}} = u \\ \text{u solution de } \frac{\delta^{\frac{1}{2n}}}{h(0,n)} u = \ln\left[1 + \frac{\gamma\dot{\epsilon}}{\frac{\mu_0}{d_s}\alpha}\right] \cdot \frac{1}{\ln\left[1+\frac{\gamma\dot{\epsilon}\mu(\delta,0)}{\mu_0\alpha}\right]} \end{cases}$$

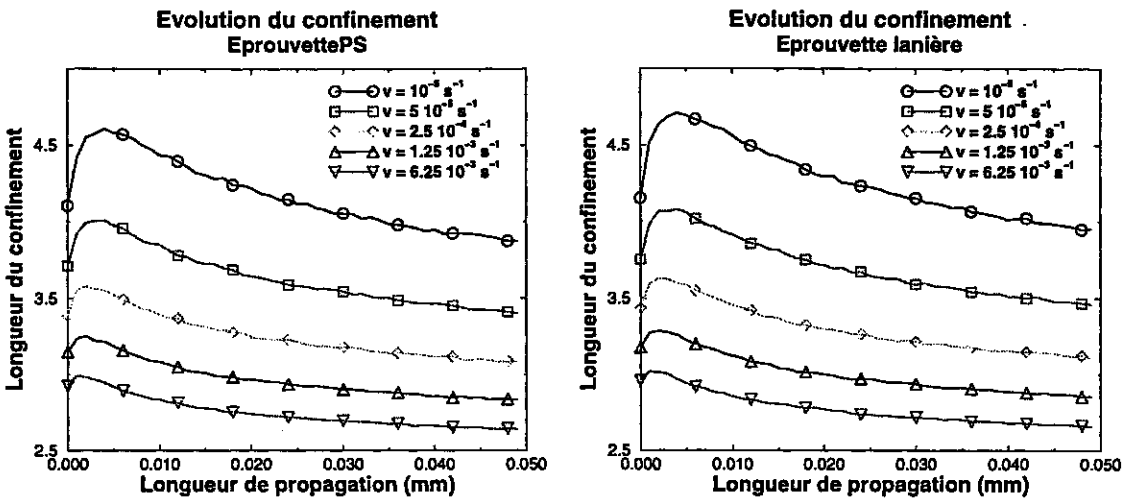


FIG. 15.3-14: Evolution de la longueur du domaine de confinement dans le cas d'essais à taux de déformation constant, pour des éprouvettes PS et Lanières. Longueurs adimensionnées par la distance caractéristique δ.

Une étude semi-analytique montrerait que le domaine à l'amorçage est d'autant plus étroit que la vitesse de déformation est élevée. Dans le cas particulier des moyennes et petites déformations qui nous intéressent, il n'y a pas d'expression analytique simple. On montre le même type de résultat pour le domaine stationnaire.

Nous nous intéressons plus particulièrement à la longueur du domaine d'endommagement. Le graphe (15.3-14) montre l'évolution du confinement pendant la propagation pour plusieurs essais à taux de déformation macroscopique constant, sur éprouvettes PS et lanière. Cette longueur est adimensionnée par la taille caractéristique δ.

On observe d'abord la décroissance de la taille du domaine en fonction de la vitesse de chargement. On montre d'autre part que pour une vitesse imposée, cette taille passe par un maximum au bout de deux à cinq propagations, avant de décroître lentement vers un. Il s'agit d'une observation générale qui ne dépend pas du choix des paramètres d'étude.

Dans le cas d'une relaxation, avec amorçage tardif, cette variable évolue de même de façon décroissante de la déformation de relaxation choisie; mais croissante au cours de la propagation jusqu'à la valeur stationnaire, comme illustré par le graphe (15.3-15). Cela nous permet de bien comprendre l'évolution du domaine dans le cas d'un taux de chargement uniforme : la phase de croissance du domaine à l'amorçage est liée au cumul aux faibles déformations (avant l'amorçage) qui n'est pas encore affecté par la croissance des déformations locales; ensuite seulement la décroissance du domaine sous l'effet des déformations intervient de façon prépondérante et se manifeste pendant toute la propagation.

15.3.2.2 Proposition de critère

Il apparaît que le confinement évolue avec la vitesse comme évoluerait une variable caractéristique de la rotation de fissure. Il relie également par une expression complexe, en général non-explicite, le comportement, l'histoire du matériau et les propriétés à rupture - première forme de visco-élasticité.

On peut voir également que le confinement renvoie à la définition du problème couplé de propagation de fissure, page 157, que nous avons volontairement simplifié pour mieux

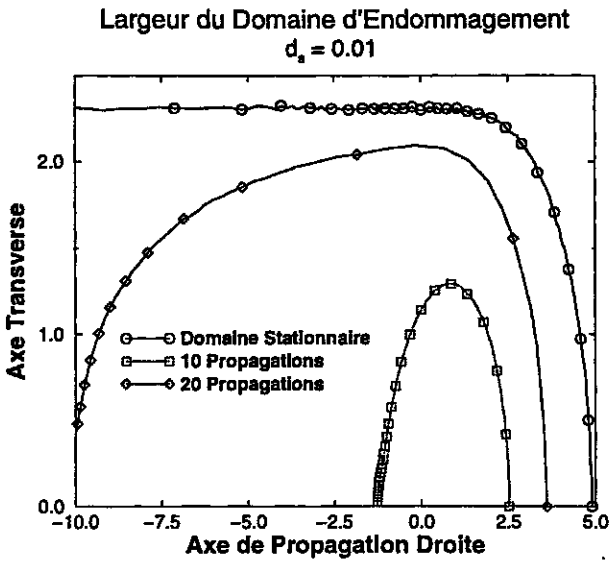


FIG. 15.3-15: Evolution du domaine d'endommagement vers le domaine stationnaire dans le cas d'une propagation en relaxation. Cas d'un amorçage tardif. Longueurs adimensionnées par la distance caractéristique δ. Déformation de relaxation : 50 %, vitesse de chargement : $10^{-3}\ s^{-1}$.

souligner le rôle des variables d'études. Dans la formulation générale, l'endommagement est responsable d'un adoucissement du matériau, adoucissement rendu visco-élastique par la forme du critère. Faisons l'hypothèse très simplificatrice que dans le domaine de confinement, la raideur du matériau GNH soit réduite d'un facteur f, ($f > 1$). L'amplitude des déformations locales est donnée sans endommagement par a_2. Avec endommagement, elle est donnée par $a_2 f^{\frac{1}{2n}}$. L'endommagement est donc responsable d'une plus grande ouverture de la fissure qui s'étend dans toute la zone de confinement.

Dans le cas général, on peut supposer que l'émoussement du fond de fissure, caractérisé par un rayon de courbure ρ, est relié au confinement et à la vitesse de propagation - peut-être indépendant du niveau de déformation local, contenu implicitement dans le confinement.

$$\rho = \rho(L, v) \tag{15.3-9}$$

avec L longueur du domaine de confinement. Dans le cas particulier de l'essai de déchirabilité, il n'y a pas encore propagation , c'est-à-dire que la vitesse est identiquement nulle à chaque essai et pour chaque matériau. On fait donc l'hypothèse que le confinement contient toute l'information sur le phénomène. Dans ce cas, le critère le plus simple qui rende compte de la rotation de fissure à l'amorçage est :

$$(L_{d_s} > L_0) \Longrightarrow \text{rotation de fissure} \tag{15.3-10}$$

où L_{d_s} est la longueur du domaine de confinement pour le confinement d_s et L_0 une longueur caractéristique. De même on suppose que L_0 ne dépend pas du matériau (ce qui renverrait par exemple à une condition sous-jacente de type mathématique plutôt que physique).

15.3.2.3 Validation du modèle

Notre modélisation doit d'abord permettre de classer les matériaux. Notre choix de modélisation du comportement, par exemple, est beaucoup trop simpliste pour être quan-

titatif. De même, le critère est le plus simple que l'on puisse proposer par notre démarche.

Considérons d'abord le matériau B. On suppose que l'on observe une rotation de fissure sur éprouvette PS jusqu'à $10^{-3}s^{-1}$. Cette hypothèse permet de déterminer la grandeur L_0. Si l'on regarde alors pour quelle vitesse de déformation le même matériau donnera des rotations avec des éprouvettes lanières, on trouve environ $4.10^{-3}s^{-1}$, compatible avec le facteur de 2 à 10 donné par l'expérience. Si l'on compare ensuite les matériaux B et C, notre analyse donne exactement les mêmes domaines d'existence parce que nous ne sommes pas capables de distinguer ces matériaux.

Enfin, la vitesse limite d'observation de la rotation pour le matériau A est donnée de même en dessous de $10^{-10}s^{-1}$. Il s'agit probablement d'une vitesse sous-estimée[3].

Le modèle semble donc pouvoir rendre compte de nos observations sur les trois matériaux, **au moins d'en préserver le classement.**

15.3.2.4 Commentaires

L'usage de ce modèle semi-analytique est trop simple pour être démonstratif et nous manquons d'éléments de validation supplémentaires qu'il serait nécessaire de définir. Il apparaît d'abord que nous devons nous intéresser à la bonne variable, la croissance du rayon de courbure du fond de fissure. Il semble aussi que nous ayons pris en compte chacune des variables mécaniques entrant en jeu dans l'observation. Sur deux matériaux assez éloignés en vitesse caractéristique nous donnons également la bonne relation d'ordre.

La rotation de fissure est présentée comme un phénomène complexe qui marie les grandes déformations à rupture, la visco-élasticité, le comportement et une distance caractéristique du matériau de façon complexe. Si chaque variable peut avoir un effet monotone sur la rotation de fissure, l'intensité de leur manifestation est très variable. On montre par exemple l'intérêt relativement faible de la non-linéarité dans la plage admise (autour de 3). Par contre, la déformation à rupture moyenne décale de façon exponentielle les vitesses caractéristiques, de même que α, qui s'oppose à la déformation. Enfin, la taille caractéristique du matériau semble avoir un effet assez linéaire. Toutes ces informations donnent un cadre qualitatif délicat d'où ne semble pas sortir une recette miracle.

Par exemple, il ne s'agit pas d'avoir des matériaux qui supportent de très grandes déformations comme le matériau A. Pour qu'un matériau comme Mat A présente des rotations à rupture dans des plages de vitesse compatibles avec les expériences, il faudrait qu'il ait une taille caractéristique nettement plus élevée, ou un paramètre α plus grand. Il n'est pas évident que ces trois variables soient découplées pour un matériau réel.

Les problèmes qui peuvent subsister sont liés à la robustesse de la méthode :

1. quel d_s choisir ? Nous pensons qu'une quantité intégrale plus intrinsèque devrait être définie, mais laquelle ?
2. Comment déterminer les coefficients caractéristiques pour le "modèle simplifié" ? Il s'agit d'une difficulté réelle qui montre qu'il peut être nécessaire de revenir à un modèle numérique et un comportement réel.

[3]La vitesse estimée est à la limite du calculable avec le choix de coefficients pour Mat A. La vitesse effective peut être beaucoup plus faible. Cependant, notre modèle doit sous-estimer la vitesse vraie. Seul un classement des matériaux peut être accessible par notre modélisation.

Conclusion

Les phénomènes de rotation de fissure présentés en première partie sont spectaculaires. Ils sont souvent présentés comme atypiques, particularités des essais monotones de déchirabilité sur des élastomères tels le NR ou les caoutchoucs synthétiques chargés de charges renforçantes. Nous avons montré qu'il devait être relié au phénomène de propagation saccadée que l'on rencontre dans une large gamme d'essais et beaucoup d'autres matériaux, tels les caoutchoucs non-chargés.

La plupart des modélisations existentes sont qualitatives et n'ont jamais été menées à terme. Nous avons montré, soit par un argument numérique soit à partir de la mise en correspondance de la rotation de fissure et des propagations saccadées, qu'elles ne sont pas adaptées.

Nous avons mené des essais classiques de propagation de fissure sur plusieurs matériaux en nous intéressant plus particulièrement à la transition entre rotation de fissure et propagation droite. La particularité de nos expériences vient de l'observation de l'amorçage. Une confrontation directe des résultats est étayée par la mise en œuvre de nos propres travaux, ce qui nous permet de valider notre modèle de comportement et notre modèle d'amorçage.

Notre cheminement s'avère assez démonstratif et présente la rotation de fissure comme un phénomène lié à la vitesse de croissance du rayon de courbure du fond de fissure. Cette croissance est modélisée dans notre approche à partir de la notion de confinement, propre à notre modèle de cumul de dommage et qui rend compte des propriétés ultimes du matériau en fonction du chargement, et de la vitesse actuelle de propagation de fissure. Dans le cas particulier de l'amorçage, seul abordable par notre étude, notre modèle est cohérent avec l'ensemble des résultats connus. Nous montrons à partir des matériaux d'essais que nous obtenons les bonnes relations d'ordre entre les matériaux.

Notre validation doit porter sur des essais sur beaucoup d'autres matériaux avant que l'on ne puisse dire que le modèle de prédiction de la rotation de fissure soit valable : les difficultés portent d'abord sur la détermination du comportement GNH local puis sur l'application du critère de rotation, associée à une constante universelle que seule une étude extensive permet pour l'instant de définir. Le choix d'une modélisation simplifiée porte l'accent sur les variables significatives du phénomène, ici la non-linéarité du comportement et le niveau moyen de déformation à rupture. Une modélisation étendue, s'appuyant sur un modèle visco-élastique de comportement, pourrait permettre de simplifier la recherche du comportement représentatif du matériau en fond de fissure.

Bibliographie

[1] Ahagon A. et Gent A.N. - *Threshold Fracture Energies for Elastomers,* J. Polym. Sci., vol 13, pp 1903-1911, 1975.

[2] Bhowmick A.K., Gent A.N. et Pulford C.T.R. - *Tear Strength of Elastomers under Treshold Conditions,* Rubb. Chem. Technol., vol 56, pp 226-232, 1983.

[3] Busse W.F. - *Tear Resistance and Structure of Rubber,* Ind. Eng. Chem. (Ind. Ed.), vol 26, pp 1194-1199, 1934.

[4] Chicheportiche D. - *Etude Mécanique d'un Adhésif Polyuréthanne. Application au Collage des Pare-Brise,* Thèse de Doctorat, Ecole Polytechnique, 1998 .

[5] De D. et Gent A.N. - *Tear Strength of Carbon-Black-Filled Compounds,* Rubb. Chem. Technol., vol 69, no 5, pp 834-850, 1996.

[6] Gent A.N. et Lindley P.B. - *Internal Rupture of Bonded Rubber Cylinders in Tension,* Proc. Roy. Soc. London,vol A 249, p 195, 1958.

[7] Gent A.N. et Tompkins D.A. - *Nucleation and Growth of Gas Bubbles in Elastomers,* J. Appl. Phys., vol 40, no 6, pp 2520-2525, may 1969.

[8] Gent A.N. et Kim H.J. - *Tear Strength of Stretched Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 51, pp 35-44, 1978.

[9] Gent A.N. et Tobias R.H. - *Treshold Tear Strength of Elastomers,* J. Polym. Sci., vol 20, pp 2051-2058, 1982.

[10] Greensmith H.W. et Thomas A.G. - *Rupture of Rubber. III Determination of Tear Properties,* J. Polym. Sci., vol 18, pp 189-200, 1955.

[11] Greensmith H.W. - *Rupture of Rubber, IV. Tear Properties of Vulcanizates Containing Carbon Black,* J. Polym. Sci., vol 21, pp 175-187, 1956.

[12] Greensmith H.W., Mullins L. et Thomas A.G. - *Rupture of Rubber,* Trans. Soc. Rheo., vol IV, pp 179 - 189, 1960.

[13] Hamed G.R. - *Molecular Aspects of the Fatigue and Fracture of Rubber,* Rubb. Chem. Technol., vol 67, no 3, pp 529-536, 1994.

[14] Kadir A. et Thomas A.G. - *Tear Behavior of Rubbers over a Wide Range of Rates,* Rubb. Chem. Technol., vol 54, pp 15-23, 1981.

[15] Lake G.J. et Thomas A.G. - *The Strength of Highly Elastic Materials,* Proc. Roy. Soc., A, vol 300, pp 108-119, 1967.

[16] Lake G.J. et Yeoh O.H. - *Effect of Crack Tip Sharpness on the Strength of Vulcanized Rubbers,* J. Polym. Sci., Part B : Polymer Physics, vol 25, pp 1157-1190, 1987.

[17] Lake G.J., Samsuri A., Teo S.C. et Vaja J. - *Time-Dependent Fracture in Vulcanized Elastomers,* Polymer, vol 32, no 16, pp 2963-2975, 1991.

[18] Leblond J.B. et Amestoy M. - *Sur l'Universalité de la Relation Liant les Facteurs d'Intensité de Contrainte d'une Fissure juste avant et juste après un Changement de Direction,* C. R. Acad. Sci, Sér. II, Série II, t 300, no 14, pp 643-646, 1985.

[19] Maugis D. et Barquins M. - *Fracture Mechanics and the Adherence of Viscoelastic Bodies,* J. Phys. D : Appl. Phys., vol 11, pp 1989-2023, 1978.

[20] Maugis D. - *Review Subcritical Crack-Growth, Surface Energy, Fracture Toughness, Stick-Slip and Embrittlement,* J. Mater. Sci., vol 20, pp 3041-3073, 1985.

[21] Mohammed K. - *Crack Propagation in Rubbers,* PHD, Queen Mary College, London, 1980.

[22] Mullins L. - *Rupture of Rubber. IX. Role of Hysteresis in the Tearing of Rubber,* Trans. Inst. Rub. Ind., vol 35, pp 213-222, 1959.

[23] Quigley C.J. et Parks D.M. - *The Finite Deformation Field Surrounding a Mode I Plane Strain Crack in a Hyperelastic Incompressible Material Under Small-Scale Non-Linearity,* Int. J. Frac., vol 65, pp 75-96, 1994.

[24] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media I,* Int. J. Frac., vol 11, no 1, pp 141-159, 1975.

[25] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media II,* Int. J. Frac., vol 11, no 3, pp 369-388, 1975.

[26] Shapery R.A. - *A Theory of Crack Initiation and Growth in Viscoelastic Media III,* Int. J. Frac., vol 11, no 4, pp 549-562, 1975.

[27] Schirrer R. - *Les Craquelures dans les Polymères,* Introduction à la Mécanique des Polymères, Edité par C. G'sell et J.M. Haudin, Institut National Polytechnique de Lorraine, pp 395-411, 1995.

[28] Smith T.L. - *Dependence of the Ultimate Properties of a GR-S Rubber on Strain Rate and Temperature,* J. Polym. Sci., vol 32, pp 99-113, 1958.

[29] Stacer R.G., Yanyo L.C. et al. - *Observations on the Tearing of Elastomers,* Rubb. Chem. Technol., vol 58, pp 421-435, 1984.

[30] Stacer R.G., Von Meerwall E.D. et Kelley F.N. - *Time-Dependent Tearing of Carbon Black-Filled and Strain-Cristallizing Vulcanizates,* Rubb. Chem. Technol., vol 58, pp 913-923, 1985.

[31] Wu P.D. et Van der Giessen E. - *On Improved Network Models for Rubber Elasticity and Their Applications to Orientation Hardening in Glassy Polymers,* J. Mech. Phys. Solids, vol 41, no 3, pp 427-456, 1993.

Conclusion

Nous avons abordé la propagation de fissures dans les élastomères synthétiques chargés, essentiellement dans le cadre des essais monotones (relaxation, traction). Nous avons étudié plus particulièrement le phénomène de propagation instationnaire dont une illustration spectaculaire est la rotation de fissure présentée en première partie. L'originalité du sujet, la faible bibliographie sur le phénomène explique notre démarche, approfondissant un peu les particularités du comportement ou les modélisations actuelles de la propagation de fissure (outils théoriques, moyens expérimentaux, moyens numériques) pour rassembler des outils performants et essayer de faire une synthèse adaptée à l'étude de la propagation de fissure.

La première partie a présenté le mode de propagation de fissure "en moustache" qui a motivé notre travail. Une étude de microscopie originale nous a permis de proposer un cadre d'analyse ou de réflexion fondé sur le fait que :
la propagation de fissure existe s'il n'y a pas de rotation de fissure,
la rotation de fissure étant, dans le cas des essais monotones sur éprouvettes lanières, une spécificité de l'amorçage. Ce cadre explique que nous nous soyons d'abord intéressés aux propagations droites stationnaires avant d'aborder l'amorçage et les propagations instationnaires.

A partir de cas particuliers représentatifs de nos matériaux d'essais, nous avons fait une revue complète des caractéristiques principales des élastomères. Les aspects particuliers importants pour notre travail ont été isolés, principalement l'endommagement et la viscosité. Le caractère visco-élastique des élastomères a progressivement disparu d'abord à cause de la complexité du sujet, ensuite parce que la rotation de fissure se produit à de très faibles vitesses où l'on peut penser que les effets visqueux apparaissent peu. Notre analyse bibliographique nous amène rapidement à privilégier des modélisations telles celle de Govindjee et Simo, dont nous simplifions l'expression. Nous précisons également la notion d'endommagement et montrons que cela nous permet de rendre compte des déformations rémanentes dans les essais cycliques.

L'étude de la propagation de fissure se trouve grandement compliquée par la nature complexe du comportement des élastomères. Il y a un décalage entre les résultats théoriques - approche énergétique globale ou approche locale - et ceux accessibles par les études expérimentales. Les modèles énergétiques les plus adaptés à notre étude seraient les modèles visco-élastiques en grandes déformations. Nous avons montré que ceux qui existent ne sont pas adaptés et souligné qu'il fallait faire un effort pour préciser le critère de propagation.

L'approche locale est peu développée et méconnue et nous en avons fait une synthèse complète. Il s'agit d'un domaine qui mériterait plus d'attention parce que porteur d'idées fortes sur les modes de propagation en grande déformation et qu'il permet d'aborder ce sujet avec des outils nouveaux, analytiques et rigoureux.

L'approche expérimentale enfin a de longue date imposé ses moyens d'études et se trouve en décalage par rapport aux moyens numériques actuels. Nous avons précisé la

notion de déchirabilité et quelques calculs de structure - exploitant notre loi de comportement - ont permis de la définir par rapport à la notion plus intrinsèque de taux de restitution d'énergie. En même temps que nous montrons que l'on peut corriger les mesures actuelles de déchirabilité au moins dans les essais plans, nous précisons qu'il faudrait avoir une caractérisation étendue du comportement et des indications précises sur les sollicitations appliquées au matériau depuis son état naturel. Nous montrons par exemple que l'accommodation ne permet pas de réduire les effets dissipatifs en préservant l'élasticité du matériau. Elle adoucit globalement le matériau, réduit notablement la dissipation, parfois jusqu'au point où l'on est sûr qu'elle modifie le critère de rupture.

Le modèle de cumul de dommage que nous proposons fait une synthèse simple et claire des principaux résultats en intégrant naturellement les notions d'endommagement, d'histoire de sollicitation ou de taux de restitution d'énergie. Notre analyse est volontairement simplifiée pour pouvoir utiliser l'approche locale, ce qui nous permet de bien définir l'ensemble des variables du modèle et de mesurer leur rôle. Nous montrons par exemple la bonne cohérence du modèle avec les résultats d'essais usuels, son aptitude à pouvoir modéliser aussi une courbe de déchirabilité. Il permet surtout d'accéder à une description complète de la propagation, de la mise en charge à la propagation stationnaire en passant par l'amorçage : en particulier notre modélisation peut décrire des quantités directement observables dans les expériences et nous incite à développer des méthodes plus fines pour s'intéresser par exemple plus particulièrement à l'amorçage.

De nombreuses extensions pourraient être envisagées, soit en bénéficiant de l'extension des modèles supports - comportement visco-élastique, développements asymptotiques sur une gamme étendue de comportement - soit en ayant recours à des calculs de structure - mais à condition de maîtriser les singularités de fond de fissure. Il est également possible de modifier notre règle de cumul de dommage : dans ce cas, il faudrait d'abord réfléchir à des expériences précisant bien les hypothèses importantes du modèle ou les caractéristiques principales que la règle doit respecter.

Les phénomènes de propagation stationnaire sont les plus connus et les plus adaptés à une démarche de modélisation par la mécanique de la rupture telle que nous l'avons présentée pour les grandes déformations. Mais dans une démarche de dimensionnement à la rupture, les propagations instationnaires peuvent devenir prépondérantes et justifient que l'on en cherche une explication directement, passant outre sur les limites des modèles. Notre travail a d'abord permis de mettre à jour la relation entre le phénomène de rotation de fissure et la notion plus générale de stick-slip, relation complètement oubliée depuis Greensmith et Thomas. C'est essentiellement sur cette précision que s'appuie notre démarche.

Des expériences originales, rendues exploitables grâce à notre modèlisation de l'amorçage, permettent de formuler un ensemble de conclusions qui peuvent déjà répondre à des besoins de "formulateurs". La conclusion la plus intéressante et la plus prometteuse est sans doute la nature mécanique du phénomène. L'analyse de nos essais permet aussi de mesurer le chemin accompli grâce à notre travail.

Notre modélisation de la rotation de fissure est partielle. Elle s'intéresse à une vitesse caractéristique mais ne permet pass d'accéder à la forme de la moustache par exemple. Elle n'est de plus pas suffisamment validée : d'autres essais sur d'autres matériaux devraient venir renforcer notre base de donnée d'exemples. Remarquons cependant que la variable complexe que nous associons au phénomène couple de façon originale l'ensemble des variables caractéristiques - variables de comportement, variable de microstructure, variables caractéristiques de la résistance à la rupture. Pour s'appuyer sur des essais réels, ce modèle mériterait aussi d'être précisé par une approche plus complète : une modéli-

sation visco-élastique du comportement associée à une modélisation visco-élastique de la propagation de fissure viendrait par exemple améliorer le transfert entre le comportement local dont nous nous servons pour modéliser l'amorçage ou la propagation et le comportement réel du matériau. Des expériences plus précises que celles sur lesquelles nous nous sommes appuyées devraient aussi permettre de s'intéresser à la relation phénoménologique entre rayon de courbure de fond de fissure (rayon d'auto-propagation ou d'amorçage) pour préciser et élargir le champ de modélisation aux phénomènes de stick-slip en général. De même, une refléxion à partir de matériaux modèles, comme des élastomères à base de silicone et transparents, pourraient nous donner beaucoup plus d'informations locales.

La difficulté de notre sujet a rendu ce travail complexe, s'intéressant à de multiples sujets connexes à la rotation de fissure au point que les phénomènes de propagation stationnaire ont largement été abordés dans ce mémoire : l'étude complète de la propagation visco-élastique en grandes déformations est déjà un sujet qui mériterait d'être développé. L'unité de notre travail réside plus dans le besoin de constituer un état des lieux adapté à l'usage de la mécanique pour modéliser les propagations de fissure dans les élastomères que dans une démarche linéaire compliquant les modèles jusqu'à trouver une "bifurcation" vers les rotations de fissure. Nous avons obtenu nos principaux résultats en nous appuyant d'une part sur une étude théorique et analytique qui précise le sens à donner aux différentes variables du modèle - et surtout reste dans le domaine du calculable, d'autre part sur une démarche expérimentale qui en donne une première mesure. Soulignons que la synthèse dont ce mémoire est la trace montre la nécessité d'aborder le comportement de ces matériaux avec des outils nouveaux et maîtrisés en les appuyant sur des expériences adaptées.

Annexe A

Croissance de Défauts

A.1 Introduction

Le modèle de cavitation est partout présent dans les études de rupture des élastomères. Notre mémoire ne pouvait pas aborder la propagation de fissure sans citer le phénomène. Pour autant, ce qui suit n'a pas sa place dans le corps de notre mémoire : le modèle de cavitation s'est révélé inadapté aux deux endroits où notre travail aurait pu s'y rattacher.

1. La cavitation était pressentie comme responsable possible de la rotation de fissure. Nous avons montré que cette hypothèse est fausse (voir page 203).
2. Pour essayer de régulariser notre fonctionnelle rupture vis-à-vis des singularités de fond de fissure, nous avons essayé de faire un passage micro-macro qui devait nous permettre de lui donner une forme plus locale.

La cavitation dans les élastomères a été étudiée pour la première fois par Gent en 1958 [IV.5]. Il s'agit d'un phénomène d'apparition de micro-bulles dans des éprouvettes sollicitées mécaniquement, pouvant conduire à sa ruine. La modélisation est relativement simple et se cantonne dans la littérature à l'étude de la stabilité d'un micro-défaut baigné dans un solide néo-hookéen. Les constatations usuelles sont en tout point comparables à celles que l'on peut faire dans le cas de la cavitation dans les fluides.

Nous présentons ici le cas le plus simple d'une sollicitation hydrostatique et d'une comportement hyperélastique. Le cas de sollicitations plus complexes ou de lois de comportements élasto-plastiques par exemple est abordé dans [IV.11] et [IV.4]. Les principaux résultats de la cavitation présentés ci-dessous sont encore valables pour ces deux cas plus complexes, essentiellement à cause du rôle joué par l'incompressibilité dans les calculs.

A.2 Calcul fondamental

A.2.1 Présentation du modèle

Soit un domaine matériel sphérique Ω constitué d'un élastomère de loi de comportement donné et d'une cavité en son centre. Le rayon de la sphère est B, celui de la cavité A (A<B). La cavité simule un défaut dans la matière (particule sans interaction avec la gomme par exemple).

La surface extérieure de la sphère est sollicitée par une contrainte de traction caractérisée par la pression P. La cavité est libre de contrainte. On cherche le champ de déformation et le champ de contrainte du problème.

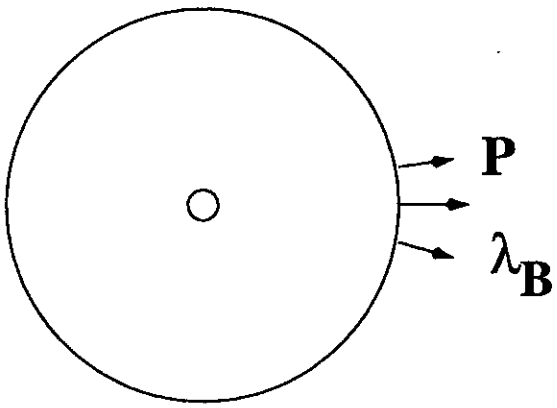


FIG. A.2-1: Modèle de croissance de défaut : un domaine matériel sphérique constitué d'élastomère avec une petite cavité sphérique.

A.2.2 Champ de déformation

Soit une tranche de rayon R en configuration non-déformée. Sous sollicitation, cette tranche est transportée au rayon r. On note

$$r = \lambda(R).R$$

λ est la bonne variable d'étude du problème. On remarque que la connaissance de λ détermine complètement le champ de déformation. Par exemple, le gradient de déformation est donné en coordonnées sphériques par :

$$\underline{\underline{F}} = Diag(\lambda_r, \lambda_\theta, \lambda_\phi)$$

avec :

$$\lambda_\theta = \lambda_\phi = \lambda \ , \ \lambda_r = \frac{1}{\lambda^2}$$

L'expression de l'incompressibilité entre deux tranches de rayon R et B impose que :

$$\lambda^3(R) = 1 + \frac{B^3}{R^3}(\lambda^3(B) - 1)$$

On constate donc que le champ de déformation est parfaitement défini indépendamment de la loi de comportement. Il s'agit d'une particularité classique de l'incompressibilité. On constate aussi qu'il ne dépend que de la connaissance des déformations sur l'un des bords du système indépendamment des autres conditions aux limites. Notamment, connaissant λ_B, le champ de déformation en R ne dépend que de R et pas du rayon de la cavité.

A.2.3 Compatibilité du champ de contrainte

On considère un matériau de loi de comportement très générale. On cherche l'expression du champ de contrainte du problème. Nous notons :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^d - p\underline{\underline{I}}$$

où $\underline{\underline{\sigma}}^d$ est le déviateur des contraintes. p est le champ scalaire de pression hydrostatique qui permet de réaliser l'incompressibilité. Equation d'équilibre :

$$div\underline{\underline{\sigma}} = 0$$

Le problème étant à symétrie sphérique, l'équation ci-dessus devient :

$$\frac{d(\sigma_{rr}^d - p)}{dr} + \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^d - \sigma_{\theta\theta}^d) = 0$$

On intégre l'équation de la divergence pour obtenir une intégrale première entre A et B :

$$(\sigma_{rr}^d - p)_{|b} - (\sigma_{rr}^d - p)_{|a} + \int_a^b \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})dr = 0$$

Les conditions aux limites en contraintes aux bords montrent que :

$$(\sigma_{rr}^d - p)_{|b} - (\sigma_{rr}^d - p)_{|a} = P$$

Donc :

$$P = -\int_a^b \frac{2}{r}(\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})dr$$

Soit encore :

$$P = -\int_a^b \frac{2}{r}(\sigma_{rr}^d - \sigma_{\theta\theta}^d)dr \qquad \text{(A.2-1)}$$

C'est **l'équation de compatibilité** du problème. Avec la variable d'étude λ, cette équation s'écrit :

$$P = \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \frac{2}{\lambda(\lambda^3 - 1)}(\sigma_{rr}^d - \sigma_{\theta\theta}^d)d\lambda \qquad \text{(A.2-2)}$$

Dans le cas général, l'équation de compatibilité a donc la forme :

$$P = P(\lambda(B), B/A)$$

Il n'y a par exemple pas d'échelle intrinsèque dans ce modèle. On remarquera que la compatibilité est obtenue par comparaison d'un terme déviatorique et d'un terme de pression.

A.2.4 Exemple classique

L'exemple le plus classique, si ce n'est le seul, de l'importance de la condition de compatibilité est le cas de la croissance d'une bulle dans un matériau néo-hookéen infini (B est rejeté à l'infini). Dans ce cas, on montre que si E est le module d'Young du matériau :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{5}{2} - \frac{2}{\lambda(A)} - \frac{1}{2\lambda^4(A)} \qquad \text{(A.2-3)}$$

avec $\mu = E/3$.

Dans ce cas, on voit clairement que la limite $P/\mu = 5/2$ est atteinte pour un gonflement infini de la bulle : il y a cavitation. C'est le modèle de base de Gent. On note la pression critique $P_c = \frac{5}{2}\mu$; c'est une pression qu'il n'est pas possible de dépasser sans faire apparaître de cavitation. On remarque que pour une pression de 90 % de P_c, notée P_r, la cavité est dilatée d'une facteur de l'ordre de 8.1. Cela implique notamment que l'élastomère au bord de la cavité subit une déformation équi-biaxiale de 710 %!!! Il y a probablement déjà eu des ruptures occasionnées par les fortes déformations de la matrice.

Le même calcul analytique est possible avec le modèle de Mooney-Rivlin :

$$\frac{P}{\mu} = \frac{5}{2} - \beta + 2\beta\lambda(A) - \frac{2}{\lambda(A)} - \frac{\beta}{\lambda^2(A)} - \frac{1}{2\lambda^4(A)}$$

avec $\beta = C_{01}/C_{10}$. Dans ce cas, la limite en pression n'existe plus. La cavité peut croître régulièrement à l'infini. On distingue quand même deux régimes de gonflement :

- un régime très lent de dilatation où il faut appliquer une pression importante ;
- un régime quasi-linéaire de dilatation, dépendant du terme perturbateur C_{01}.

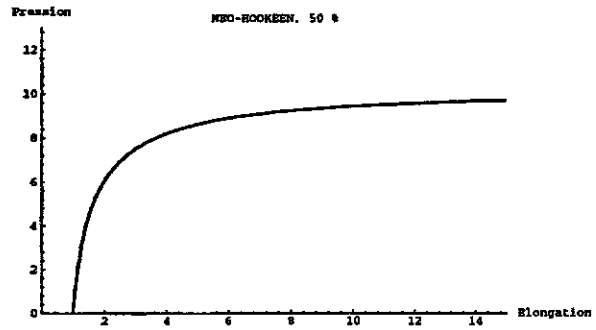
Définissons toujours $P_c = 5\mu/2$ et considérons β comme terme perturbateur. Alors, avec $\beta = 0.1$, P_r est atteinte pour une déformation équibiaxiale de 185 %, resp. 467 % avec $\beta = 0.01$. On s'aperçoit donc que le choix de la loi de comportement à une grande influence sur le mode de cavitation : très tardif et brutal avec le comportement néo-hookéen, toujours contrôlé mais avec un changement de régime plus précoce en déformation avec le comportement de Mooney. Les valeurs des déformations données dans nos exemples numériques nous montrent qu'il est nécessaire d'utiliser une loi de comportement fiable aux grandes déformations. Il semble donc douteux de modéliser la cavitation dans les élastomères à partir du comportement néo-hookéen voire du comportement de Mooney.

Nous prenons comme exemple le comportement expérimental du matériau M2 (voir page 44.). Nous considérons 5 lois de comportement, toutes jugées convenables pour ce matériau :

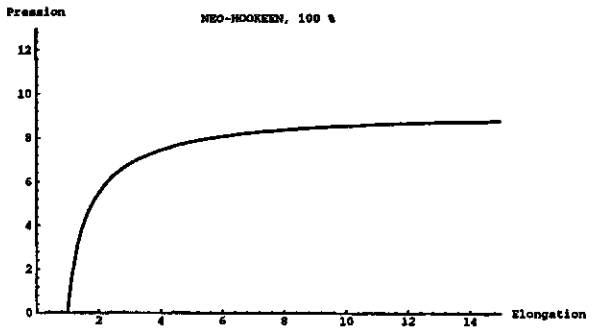
1. néo-hookéen ajusté jusqu'à 50 % : $C_{01} = 4.11$;
2. Mooney ajusté jusqu'à 50 % : $C_{01} = 0.293, C_{10} = 17.61$;
3. néo-hookéen ajusté jusqu'à 100 % : $C_{01} = 3.717$;
4. Mooney ajusté jusqu'à 100 % : $C_{01} = 2.032, C_{10} = 1.374$;
5. loi de comportement endommageante (voir la partie II, chapitre (7), page 63.

Les résultats sont présentés sur 6 graphes, d'abord séparément puis tous ensembles. Les quatre modélisations avec les lois classiques de type Mooney-Rivlin donnent sensiblement la même allure de cavitation. Si les comportements de Mooney ne présentent pas de pression P_c, on constate quand même un changement de comportement très fort entre les faibles déformations et les fortes déformations (il y a une quasi-saturation). L'effet du second invariant permet également d'accroître la limite de pression où le changement de régime intervient. Sur les 4 graphes obtenus avec les modèles classiques, on note donc la relative imprécision de la prédiction de la pression critique selon le protocole d'ajustement choisi. Cela peut tenir à la fois au manque de pertinence de ces lois en biaxial (l'ajustement est réalisé en uniaxial seulement), couplé à leur faiblesse bien connue aux grandes déformations. La loi dite réelle est ajustée sur une plus grande plage de déformation et rend mieux compte des non-linéarités aux grandes déformations. Elle est ajustée jusqu'à des déformations de 250 % environ (élongation 350 %) et semble valable au moins jusqu'à des élongations de 600 % (au delà, nous avons déjà remarqué qu'il est nécessaire de la régulariser). Dans ce cas, on observe numériquement l'existence d'une pression critique pour une élongation faible, de l'ordre de 300 %, dans la gamme de déformation où le comportement est bien modélisé. La pression critique est proche de la pression critique définie à partir de la loi néo-hookéenne ajustée jusqu'à 50 %. Il s'agit d'une coïncidence. L'élongation critique est par contre raisonnablement supportable (300 %) par l'élastomère. La courbe obtenue implique qu'il n'est pas possible d'obtenir des pressions plus grandes que P_c dans le cas des essais quasi-statiques : il y a bien cavitation.

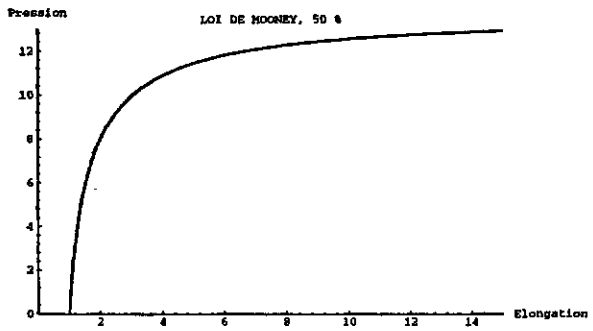
L'évolution de la pression critique pour plusieurs lois réelles ajustées à différentes vitesses d'essai est cependant très importante et montre que P_c est très sensible à la variation de chaque coefficient. On ne retrouve pas, par exemple, d'évolution log linéaire de P_c en fonction de la vitesse. On observe notamment que l'élongation où la pression



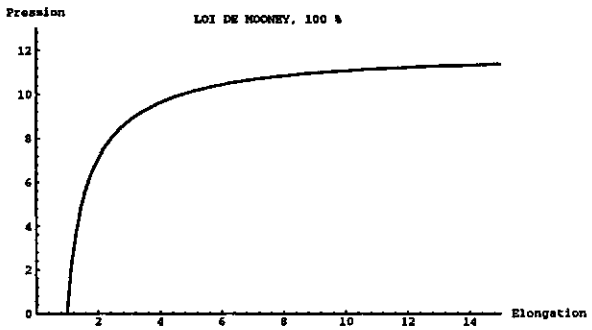
(a) Modélisation de la cavitation. Modèle néo-hookéen ajusté jusqu'à 50 %.



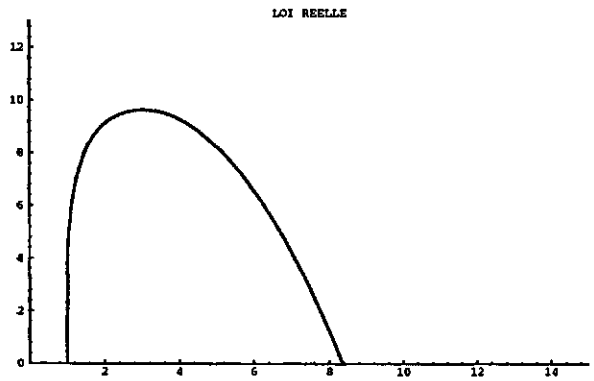
(b) Modélisation de la cavitation. Modèle néo-hookéen ajusté jusqu'à 100 %.



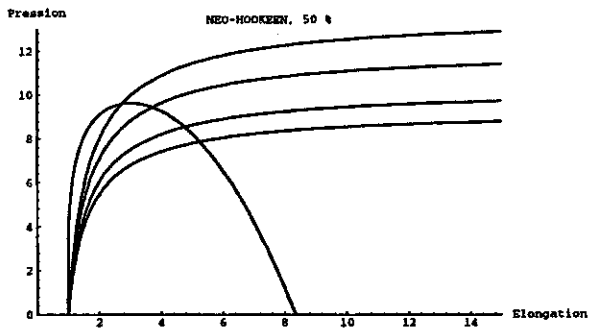
(c) Modélisation de la cavitation. Modèle de Mooney ajusté jusqu'à 50 %.



(d) Modélisation de la cavitation. Modèle de Mooney ajusté jusqu'à 100 %.



(e) Modélisation de la cavitation. Loi de comportement réelle.



(f) Ensemble des résultats pour toutes les lois testées.

FIG. A.2-2: Gonflement de la cavité pour plusieurs lois de comportement. On remarque sur le dernier graphe (A.2(f)) que les résultats ne concordent pas.

devient optimale pour une vitesse d'étude 10 fois plus élevée que la vitesse d'ajustement des graphes (A.2-2) est de 1951 %!!!

Enfin, on peut essayer de reprendre les calculs ci-dessus avec un matériau GNH. On montre alors que pour qu'une pression de cavitation existe, il faut que la non linéarité soit telle que :

$$n < \frac{3}{2}$$

Dans nos études de propagation de fissure, nous avons montré qu'une non-linéarité $n = 3$ par exemple modélisait bien les essais de propagation. Pour de telles non-linéarités, la nature de la rupture ne peut pas être une cavitation. Mais jusqu'à présent, il était équivalent de faire varier n ou b dans les calculs. Dans le cas de la cavitation, le choix de la variable devient cruciale. Si nous avions décidé de faire varier b, alors nous aurions toujours obtenu une cavitation, éventuellement pour des déformations irréalistes.

A.3 Limitations pour la modélisation micro-macro

Reprenons trois grandes remarques déjà présentées.

1. D'abord le champ de déformation est déterminé par l'incompressibilité seulement et une condition au limite sur l'un des bords. Il n'y a pas d'effet du comportement. Ce résultat est un résultat général, valable également sur des géométries plus complexes.
2. Ensuite il y a un fort effet du choix de la loi de comportement et de la méthode d'ajustement des coefficients sur la modélisation de la pression critique, voire sur l'existence d'une pression critique.
3. Ensuite, ce qui se passe à une tranche R donnée (en terme de champ de déformation et de déviateur des contraintes) ne dépend pas de ce qui se passe ou à pu se passer dans des tranches de rayons plus petits, du moins si l'on choisit de travailler à partir des conditions aux limites sur le bord extérieur du domaine.

La deuxième remarque, étayée par les valeurs élevées du champ de déformation équibiaxiale nécessaire pour obtenir une cavitation, nous incite à croire que la pression hydrostatique n'est pas le paramètre prépondérant de la cavitation des polymères : il peut exister d'autres phénomènes de rupture très locale qui font croître la cavité par "érosion" des bords et qui interviennent bien avant d'atteindre la pression dite de «cavitation». Dans ce cas, on doit invoquer une croissance du rayon de la cavité en même temps qu'une croissance de celle-ci par dilatation propre. Or on constate que plus le rayon de la cavité est grand, plus l'équilibre de la sphère creuse est difficile à réaliser si l'on contrôle seulement la déformation de la surface extérieure.

Les deux autres remarques nous limitent également dans une démarche de passage micro-macro de la rupture connaissant le critère macro. A part la pression hydrostatique, toutes les grandeurs mécaniques ne dépendent que des conditions aux limites à l'infini. En particulier, la description de la contrainte déviatorique, du champ de déformation ou de l'énergie stockée (qui ne dépend que du déviateur dans le cas incompressible) ne font appel qu'à la distance au rayon extérieur et pas à la taille de la cavité. Par exemple, pour décrire la rupture d'une tranche R à partir d'un critère en énergie critique, déformation critique, contrainte déviatorique critique ou autre, il n'est pas nécessaire de connaître l'état du matériau contenu dans la sphère de rayon R. Ce résultat est indépendant de la nature de la loi de comportement, pourvu que le matériau soit rhéologiquement simple et incompressible. Cela implique essentiellement qu'il n'est pas possible de déduire un modèle mécanique de rupture microscopique. Le passage micro-macro doit se faire par des modèles physiques.

A.4 Conclusion

Il nous semble clair à la lumière de nos calculs que le phénomène de cavitation dans les élastomères n'est pas dû à un phénomène de croissance mécanique de défaut. Il faut sans

doute aller chercher des explications physiques plus complexes d'endommagement local couplé à une croissance mécanique, permettant de limiter l'effet loi dans le phénomène au profit d'une cinétique d'érosion.

D'autre part, nous voyons bien que le modèle de cavitation n'est pas adaptée pour faire un passage micro-macro. Il s'agit pourtant du seul modèle type de passage micro-macro. Il faut sans doute avoir recours à des modèles physiques pour fixer d'une part les échelles caractéristiques, d'autre part pour régulariser notre critère vis-à-vis des singularités géométriques.

Dans un article récent [IV.10], Gent reconnaît que la cavitation est un sujet académique : cette courte annexe essaie de montrer que ce modèle contient en soi beaucoup trop de difficultés. Une approche thermodynamique contenant un peu plus d'informations sur la résistance à la rupture du matériau et une approche quasi-incompressible pourraient résoudre certaines difficultés inhérentes au modèle. Ce travail dépassait largement le cadre de ce mémoire.

Bibliographie

[1] Ball J.M. - *Discontinuous Equilibrium Solutions and Cavitation in Non-Linear Elasticity,* Phil. Trans. R. Soc. London, A 306, pp 557-611, 1982.

[2] Chang Y.W., Gent A.N. et Padovan J. - *Expansion of a Cavity in a Rubber Block Under Unequal Stresses,* Int. J. Frac., vol 60, pp 283-291, 1993.

[3] Cho K. et Gent A.N. - *Cavitation in Model Elastomeric Composites,* J. Mater. Sci., vol 23, pp 141-144, 1988.

[4] Chung D.T., Horgan C.O. et Abeyaratne R. - *A Note on a Bifurcation Problem in Finite Plasticity Related to Void Nucleation,* Solids Structures, vol 23, no 7, pp 983-988, 1987.

[5] Gent A.N. et Lindley P.B. - *Internal Rupture of Bonded Rubber Cylinders in Tension,* Proc. Roy. Soc. London,vol A 249, p 195, 1958.

[6] Gent A.N. et Tompkins D.A. - *Nucleation and Growth of Gas Bubbles in Elastomers,* J. Appl. Phys., vol 40, no 6, pp 2520-2525, may 1969.

[7] Gent A.N. et Park B. - *Failure Processes in Elastomers at or Near a Rigid Spherical Inclusion,* J. Mater. Sci., vol 19, pp 1947-1956, 1984.

[8] Gent A.N. et Byoungkyeu P. - *Compression of Rubber Layers Bonded Between Two Parallel Rigid Cylinders or Between Two Rigid Spheres,* Rubb. Chem. Technol., vol 59, pp 77-83, 1986.

[9] Gent A.N. et Hwang Y.C. - *Elastic Behavior of a Rubber Layer Bonded Between Two Rigid Spheres,* Rubb. Chem. Technol., vol 61, pp 630-638, 1988.

[10] Gent A.N. - *Cavitation in Rubber : a Cautionary Tale,* Rubb. Chem. Technol., vol 63, pp G49-G53, 1990.

[11] Hou H.S. et Abeyaratne R. - *Cavitation in Elastic and Elastic Plastic Solids,* J. Mech. Phys. Solids, vol 40, no 3, pp 571-592, 1992.

Annexe B

Algorithme de calcul

B.1 Commentaires

L'implémentation d'une loi de comportement sous ABAQUS passe par la programmation de la routine fortran UMAT qui renvoie la contrainte et le jacobien pour un état du matériau décrit par des descripteurs gérés par ABAQUS (voir Partie II, chapitre (8).). Cette routine est appelée pour calculer contrainte et jacobien point de Gauss après point de Gauss, chaque point de Gauss ayant une histoire et une déformation propre. Comme l'histoire dépend du modèle, l'utilisateur doit aussi définir et réactualiser les descripteurs qui expriment l'histoire du point d'intégration, soit $(\hat{H})$ pour nous.

Comme ABAQUS gère des tableaux différents pour les trois types de problèmes (3D, DP et CP), nous avons réalisés trois routines UMAT indépendantes optimisant chaque type de calcul. La routine en DP n'est que la routine 3D allégée des termes nuls. Nous n'en parlerons plus dans la suite. Les routines 3D et CP sont nettement différentes à cause du traitement de l'incompressibilité. Néanmoins, leur architecture est toujours la même.

L'algorithme de la routine est élémentaire :

1. Initialisation ;
2. Calcul des élongations directionnelles ;
3. On regarde si des directions sont sur la frontière plastique ;
4. On calcule les contraintes directionnelles $\partial W_i/\partial \lambda_i$ affectées de leurs poids ;
5. Calcul de la contrainte de Piola déviatorique (3D) ou de la contrainte de Piola (CP) ;
6. Transport de cette contrainte sur la configuration actuelle ;
7. Ajout du terme de pénalisation (cas 3D) ;
8. Calcul des dérivées directionnelles secondes ;
9. Calcul de $\partial \underline{\underline{S}}/\partial \underline{\underline{E}}$;
10. Calcul du terme de convection ;
11. Transport du jacobien sur la configuration actuelle.

Ces différentes étapes peuvent être agrémentées de calculs intermédiaires pour faciliter la lecture. Ainsi, si la routine CP est quasi-directe, la routine 3D passe par les calculs intermédiaires du tenseur $\partial W/\partial \hat{\underline{\underline{E}}}$ par exemple, ou de $\partial \lambda_i/\partial \hat{\underline{\underline{E}}}_1 \partial \hat{\underline{\underline{E}}}_2$. Cela ne permet pas de gagner un temps substantiel, mais d'éviter d'avoir des formules de transport de plus d'une page !

Enfin, notons que tous nos calculs ont d'abord été écrits symboliquement par MATHEMATICA. Le résultat de chaque calcul formel a été transporté dans la routine UMAT

directement. Cela nous a permis d'optimiser la forme des calculs et de réduire les sources d'erreur à des erreurs dans les équations tensorielles globales. Par contre, notre méthode implique que les programmes réalisés sont très longs, à cause des nombreuses définitions de variables intermédiaires. Nous espérons gagner largement en temps de calcul, place mémoire et lisibilité. On peut estimer qu'environ 80 % de la place des subroutines est utilisée à transporter nos calculs d'une configuration lagrangienne à une configuration eulérienne. Le cadre de la UMAT est très bien adapté aux formulations eulériennes isotropes(lagrange réactualisé).

Si deux doléances nous étaient permises nous souhaiterions :

1. pouvoir programmer un comportement en formulation lagrangienne, éventuellement avec anisotropie ;
2. avoir accès à des formulations non-locales, c'est-à-dire connaître l'état des autres points de Gauss à l'instant de calcul en un point donné. Nous avons dû utiliser une méthode très artificielle pour contourner cette difficulté (dans une situation non présentée dans ce mémoire), alors qu'il s'agit juste de donner accès à des tableaux qui existent déjà dans le code.

Notons qu'il s'agit de limitations qui ne sont en aucun cas propres à ABAQUS. Les contrariétés que nous avons subies illustrent bien la nouveauté de certains aspects du comportement que nous avons modélisé.

La routine UMAT doit être appelée à partir de 11 constantes utilisateurs et 7 variables par point de Gauss (CONSTANT=13, DEPVAR=7). Dans le cas des contraintes planes, cinq variables internes sont nécessaires (DEPVAR = 5). Les 8 premières constantes sont les données matériaux de la loi de comportement :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \lambda} &= G(\lambda - \frac{b}{\lambda^3})(1 - c[\lambda_m - 1]) \\ &\left(\frac{1}{1 - \mu\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2 + a}} + R.Exp[-k(\lambda - 1)^{2n}]\right)\end{aligned} \tag{B.1-1}$$

- Constante 1 : G, G est en Mpa ;
- Constante 2 : a ;
- Constante 3 : b ;
- Constante 4 : c ;
- Constante 5 : R ;
- Constante 6 : k ;
- Constante 7 : n ;
- Constante 8 : μ, en général $\mu = 1$.

Par commodité et sans modifier la qualité de l'approximation aux déformations testées, la loi ci-dessus a été régularisée en :

$$\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial \lambda} &= G(\lambda - \frac{b}{\lambda^3})(1 - c[\lambda_m - 1]) \\ &\left(\frac{1}{1 - \mu\frac{\lambda^2}{\lambda_m^2 + a}} + R.[1 - k(\lambda - 1)^{2n}]\right)\end{aligned} \tag{B.1-2}$$

Avec cette loi, on peut vérifier que les calculs par éléments finis ne posent pas de problèmes de convergence dans les cas courants.

Les constantes 9 et 10 sont les poids respectifs des directions des axes et des directions des médiatrices des octants supérieurs. En CP, la constante 11 repère si le calcul est élastique endommageant (1) ou élastique réversible (0). Dans les cas 3D ou DP, cette constante est la variable D de pénalisation pour l'incompressibilité. Nous conseillons $D = 10^{-6}$ au moins. Le calcul élastique n'a pas été intégré dans ces 2 routines : nous nous en sommes très peu servis et le besoin ne s'en est pas fait sentir.

Notre programme exploite peu les possibilités de la UMAT. Pour gagner du temps, nous avons restreint les calculs à la recherche des solutions d'équilibres. Le calcul des énergies, également possible, est programmé en post-traitement. Le gain constaté entre un calcul avec estimation de l'énergie et calcul sans cette estimation est de l'ordre de 10, notamment parce que notre densité d'énergie n'est pas explicitement intégrable. De même un calcul couplant l'endommagement et le comportement pour simuler la propagation de fissure est réalisable (voir page 157). Nous nous sommes heurtés dans ce cas à des problèmes sévères de convergence à cause des très grandes déformations atteintes par les éléments qui rompent.

B.2 Extraits de programme, exemple de fichier de calcul

Ci-dessous le début du programme en contraintes planes et un exemple de fichier de calcul ABAQUS[1].

L'en-tête du programme :

```
**
**LOI DE COMPORTEMENT SEULE
**
** CONSTANTS = 11
** 8 CSTES MATERIAUX
** 2 POIDS D'INTEGRATION
** ELASTIQUE (0) OU NON (1)
** LE NOMBRE DE VARIABLES DEPENDANTES EST 5
**     * DEPVAR
**     * 5
**
      SUBROUTINE UMAT(STRESS,STATEV,DDSDDE,SSE,SPD,SCD,
     C    RPL,DDSDDT,DRPLDE,DRPLDT,STRAN,DSTRAN,TIME,DTIME,
     C    TEMP,DTEMP,PREDEF,DPRED,CMNAME,NDI,NSHR,NTENS,
     C    NSTATEV,PROPS,NPROPS,COORDS,DROT,PNEWDT,CELENT,
     C    DFGRD0,DFGRD1,NOEL,NPT,LAYER,KSPT,KSTEP,KINC)
C
                INCLUDE 'ABA_PARAM.INC'
C
       PARAMETER (ZERO=0.0D0,ONE=1.0D0,TWO=2.0D0,THREE=3.0D0)
       PARAMETER (FOUR=4.0D0,FIVE=5.0D0,EIGHT=8.0D0,XNINE=9.0D0)
       PARAMETER (TEN=10.0D0)
```

[1]Les «**» distinguent des lignes de commentaires pour ABAQUS.

```
              PARAMETER (NDIR = 5)

      CHARACTER*8 CMNAME

      DIMENSION STRESS(NTENS),STATEV(NSTATEV),
     C   DDSDDE(NTENS,NTENS),DDSDDT(NTENS),DRPLDE(NTENS),
     C   STRAN(NTENS),DSTRAN(NTENS),TIME(2),PREDEF(1),DPRED(1),
     C   PROPS(NPROPS),COORDS(3),DROT(3,3),DFGRD0(3,3),DFGRD1(3,3)

      LOGICAL CHARGE(NDIR)
      DIMENSION XL(NDIR),XLM(NDIR),D2W(NDIR),
     C   XP(NDIR),XPidir(NDIR)


C ------------------------------------------------------------------
C NOTA :
C ----
C
C NOUS PROGRAMMONS ICI LE COMPORTEMENT CP
C INCOMPRESSIBLE (NSHR=1, NDI=2). LA CONDITION D'INCOMPRESSIBILITE
C EST OBTENUE PAR UN CALCUL DIRECT.
C CE  PROGRAMME NE S'APPLIQUE PAS AU CAS 3D OU DP.
C VOIR LES AUTRES PROGRAMMES POUR CES CAS LA.
C
C LA LOI DE COMPORTEMENT EST UNE LOI DE COMPORTEMENT
C HYPERELASTIQUE AVEC ENDOMMAGEMENT. ELLE COMPORTE 8
C VARIABLES DE MATERIAUX ET 2 VARIABLES DE PONDERATION.
C LE MODELE DONNE UNE DENSITE D'ENERGIE :
C
C  W= pi.w(lambda_i)
C  AVEC lambda_i ELONGATION DANS LA DIRECTION i,
C  ON MONTRE QUE 7 DIRECTIONS PEUVENT SUFFIRE POUR LA
C  MODELISATION : (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1),
C  (1,1,1), (-1,1,1), (1,-1,1), (-1,-1,1)
C
C  LES POIDS D'INTEGRATIONS CONSEILLES SONT
C  2/15, 2/15, 2/15, 3/20, 3/20, 3/20, 3/20 DANS CET
C  ORDRE. ATTENTION  POUR RESPECTER L'ISOTROPIE
C  LE PROGRAMME AFFECTE AUTOAMTIQUEMENT LA
C  MEME PONDERATION AUX DIRECTIONS PRINCIPALES
C  ET AUX DIRECTIONS COUPLEES.
C  SI VOUS CHANGEZ DE PONDERATIONS, VOUS DEVEZ
C  EN OUTRE VERIFIER QUE LES COEFFICIENTS MATERIAUX
C  SONT TOUJOURS CORRECTS.
C
C  ON CONNAIT SEULEMENT LA DERIVATION
C  dw/dlambda_i=G(lambda_i-b/lambda_i^3)
C           (1-c(lambda_imax-1)
C       (1/(1-mu lambda_i^2/(lambda_imax^2+a))+
```

```
C        R exp(-k(lambda_i-1)^(2n)))
C
C  LES pi SONT LES 7 VARIABLES DE PONDERATION, ET
C  G,a,b,c,R,k,n,mu SONT LES VARIABLES DU MODELE , DANS CET ORDRE
C
C  ON SAUVEGARDE DANS STATEV A LA POSITION
C  i LA VALEUR DE lambda_imax
C
C  CE PROGRAMME NECESSITE DE DEFINIR DANS LES
C  PROPRIETES LES 8 VARIABLES MATERIAUX
C  PUIS LES 2 VARIABLES DE PONDERATION
C  AVEC *DEPVAR, ON DEFINIT EN OUTRE LA LONGUEUR
C  DE STATEV, SOIT 7 (7 DIRECTIONS DE CALCUL)
C
C
C  CE PROGRAMME UTILISE UN SCHEMA IMPLICITE DE CALCUL
C  LA VARIABLE DE DEFORMATION D'ENTREE EST DFGRD1, AVEC
C  LAQUELLE :
C   - ON RECALCULE LES lambda_imax. ON REPERE DANS CHARGE(I)
C     SI LA SOLLICITATION ENDOMMAGE DANS LA DIRECTION I OU
C     NON.
C   - ON CALCULE ALORS LA CONTRAINTE DE CAUCHY. POUR PLUS DE
C     DETAILS, VOIR NOTRE RAPPORT OU LES CALCULS DE M. O'GRADY.
C
C
C   UN DETAIL DE PROGRAMMATION :
C   ----------------------------
C   ABAQUS A CHOISI DE
C   SAUVEGARDER LES CONTRAINTES ET DEFORMATIONS SOUS
C   FORME VECTORIELLE AVEC LE CHOIX SUIVANT :
C    SIGMA=(SIGMA_11,SIGMA_22,SIGMA_12)
C
C       LA DIRECTION DE CP EST TOUJOURS LA DIRECTION 3
C
C   PRECISIONS IMPORTANTES , CAS DES CP :
C   -------------------------------------
C   EN CP, 5 DIRECTIONS DE CALCULS SUFFISENT,
C   AVEC LES POIDS
C
C   0.133333 POUR LES 3 DIRECTIONS D'AXES
C   0.15     POUR LES 2 DIRECTIONS DIAGONALES
C
C  AVEC *DEPVAR, ON DEFINIT LA LONGUEUR
C  DE STATEV, SOIT 5 (5 DIRECTIONS DE CALCUL)
C  EN EFFET, LES DIRECTIONS DE COUPLAGES 6
C  ET 7 SONT EQUIVALENTES (RESP.) AUX DIRECTIONS 5 ET 4 EN CP.

C ------------------------------------------------------------------
C FIN DES COMMENTAIRES
```

```
C ------------------------------------------------------------------

C  CETTE ROUTINE CONVIENT SEULEMENT POUR DES ELEMENTS CP.

C   DEFINITION DES VARIABLES DU MODELE
C        VARIABLES MATERIAUX
        G=PROPS(1)
        a=PROPS(2)
        b=PROPS(3)
        c=PROPS(4)
        bR=PROPS(5)
        bk=PROPS(6)
        bn=PROPS(7)
        xmu=PROPS(8)

        EPS=1.D-1

C        VARIABLES D'INTEGRATION
           XP(1)=PROPS(9)
           XP(2)=PROPS(9)
           XP(3)=PROPS(9)
           XP(4)=PROPS(10)
           XP(5)=PROPS(10)

C CALCUL AVEC ENDOMMAGEMENT ?
                XENDO=PROPS(11)

...


C ------------------------------------------------------------------
C               FIN DU CALCUL DE LA MATRICE JACOBIENNE .....
C ------------------------------------------------------------------

800        FORMAT('ERREUR DANS UMAT')
810    FORMAT('LE DEVIATEUR A UNE COMPOSANTE DE PRESSION !!!!')
820    FORMAT('ABAQUS S ARRETE DANS UMAT')
830    FORMAT('VEUILLEZ REVOIR VOTRE PROGRAMME')

        RETURN
        END
```

Un job ABAQUS :

```
*HEADING
**
TEST DE TRACTION-CHARGE-DECHARGE
**
*RESTART, WRITE, FREQ=5
```

```
*PREPRINT, MODEL=YES, ECHO=YES
*NODE, NSET=NOEUDS
1,0.,0.
2,1.,0.
3,1.,1.
4,0.,1.
*NSET, NSET=FIXE
1
*NSET, NSET=HAUT
3,4
*NSET, NSET=BAS
1,2
*ELEMENT,TYPE=CPS4,ELSET=UMAT
1,1,2,3,4
*SOLID SECTION,ELSET=UMAT,MATERIAL=UMAT
**
*MATERIAL, NAME=UMAT
*USER MATERIAL,CONSTANTS=11
1.70 , 0.837 , 0., 0.127, 7.66, 0.714 , .054 , 1. ,
0.133333,0.15,1.
*DEPVAR
5
**
*STEP,NLGEOM, INC=200
PAS1
*STATIC
.05,1,0.0001,.05
*BOUNDARY, OP=NEW
FIXE,PINNED
BAS,YSYMM
HAUT,2,,8.
*EL PRINT, FREQ=0
*NODE PRINT, FREQ=0
*PRINT, FREQ=0
*END STEP
**
*STEP,NLGEOM, INC=200
PAS2
*STATIC
.05,1,0.0001,.05
*BOUNDARY, OP=NEW
FIXE,PINNED
BAS,YSYMM
HAUT,2,,0.
*EL PRINT, FREQ=0
*NODE PRINT, FREQ=0
*PRINT, FREQ=0
*END STEP
**
```

On précise ci-dessous quelques variables d'entrée/sortie de la UMAT. Ces variables sont imposées par le code. Même si quelques-unes seulement nous servent, toutes doivent-être définies. Les quantités STRESS, STATEV, DDSDDE, SSE, SPD et SCD sont réactualisées par la routines, les autres définissent l'état du point de Gauss.

1. STRESS est un vecteur contenant les contraintes de Cauchy calculé par l'utilisateur. L'ordonnancement des contraintes est le suivant :
   - cas général :
   $$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23})$$
   - CP :
   $$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{12})$$
   - DP :
   $$(\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12})$$
2. STATEV est un vecteur contenant les variables internes associées au point de Gauss, soit pour nous les déformations maximales pour chaque direction de calcul (associé à DEPVAR dans le fichier .inp).
3. DDSDDE est le tenseur jacobien, ordonné en matrice comme STRESS est ordonné en vecteur, nul en entrée et calculé par l'utilisateur.
4. SSE est l'énergie élastique stockée, réactualisée par l'utilisateur (inutilisé).
5. SPD est la dissipation plastique au point de Gauss, réactualisée par l'utilisateur (inutilisé).
6. SCD est la dissipation visqueuse, réactualisée (inutilisé).
7. STRAN est un vecteur contenant le champ de déformation au début de l'incrément. En grandes déformations, seules les déformations logarithmiques principales sont données. Comme les directions principales ne sont pas connues, ce vecteur est sans intérêt pour nous (inutilisé).
8. DSTRAN est l'incrément de déformation (inutilisé).
9. TIME est un vecteur contenant le temps au début de l'incrément et le temps total (inutilisé).
10. DTIME est l'incrément de temps (inutilisé).
11. CMNAME est le nom du matériau (inutilisé).
12. NSTATEV est le nombre de variables internes déclarées par *DEPVAR, définissant la longueur de STATEV.
13. DFGRD0 est le gradient de déformation au début de l'incrément.
14. DFGRD1 est le gradient de déformation à la fin de l'incrément.

Notre loi de comportement étant élastique, la donnée de DFGRD1 nous suffit pour recalculer toutes les grandeurs de déformations dont nous avons besoin et pour réactualiser STATEV. Nous pouvons aussi limiter les difficultés liées à l'incompressibilité en gardant toujours l'état de référence non-déformé, même si la philosophie d'ABAQUS est eulérienne.

Adresses WEB

Quelques caoutchoutiers :

- http://www.michelin.com/, le serveur du groupe Michelin ;
- http://www.bridgestone-firestone.com/, le serveur du groupe Bridgestone-Firestone ;
- http://www.pirelli.com/net/net.htm, le serveur du groupe Pirelli ;
- http://www.goodyear.com/, le serveur du groupe Goodyear ;
- http://www.hutchinson.fr/somgf.htm, le serveur du groupe Hutchinson.

Quelques centres techniques et de recherche :

- http://me.mit.edu/research/mcboyce.html, le serveur de M.Boyce ;
- http://www.cc.berkeley.edu/~sanjay, le serveur de S. Govindjee ;
- http://aae.uiuc.edu.Profs/Geubelle.html, le serveur de P. Geubelle ;
- http://www.physics.uakron.edu/pdept.docs/faculty/evm/evm.html, le serveur de E. Von Meerwall ;
- http://www.polymer.uakron.edu/index.html, le serveur de Harwood et Hamed ;
- http://www.lrccp.com, le serveur du LRCCP ;

Calculs numériques :

- http://www.hks.com, HKS, le serveur d'ABAQUS ;
- http://www.dci.clrc.ac.uk/Activity/HSL+152, une page sur la bibliothèque de calcul Harwell ;
- http://www.nr.com, les numerical recipes.

Recherches d'information :

- http://www.polymers.com/dotcom/home.html, tout sur les polymères ;
- http://www.elsevier.com/inca/homepage/about/contentsdirect/Menu.shtml, recevoir les sommaires de revue par mail ;