Méthodes de factorisation des équations aux dérivées partielles.

Isabelle Champagne

▶ **To cite this version:**

Isabelle Champagne. Méthodes de factorisation des équations aux dérivées partielles.. Equations aux dérivées partielles [math.AP]. Ecole Polytechnique X, 2004. Français. NNT : . pastel-00000920

HAL Id: pastel-00000920
https://pastel.hal.science/pastel-00000920

Submitted on 23 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

à présenter à

l'ECOLE POLYTECHNIQUE

pour obtenir le titre de

DOCTEUR EN SCIENCES

Spécialité

Mathématiques appliquées

soutenu par

Isabelle CHAMPAGNE

le 11 10 2004

Titre

Méthodes de Factorisation des Equations aux Dérivées Partielles

Directeur de thèse : Jacques HENRY

Jury

Président :	**Patrick JOLY**
Directeur de thèse :	**Jacques HENRY**
Rapporteurs :	**Jean-Pierre YVON**
	Tuong HA-DUONG
Examinateurs :	**Frédéric NATAF**
	Vincent PAGNEUX

Remerciements

Je tiens à remercier Patrick Joly de m'avoir accueillie au sein de son laboratoire, de m'avoir permis de passer ces trois années dans les meilleurs conditions possibles et de m'avoir soutenue tout au long de ce travail.

J'exprime toute ma gratitude à Denis Matignon pour ses conseils et ses encouragements.

Je remercie Marc Duruflé pour ses remarques constructives ainsi que pour les résultats numériques.

Merci aussi à Véronique Duwig pour son amitié inestimable, sa lecture attentive de mon manuscrit et son écoute.

Comment exprimer ma gratitude à Olivier, qui m'a soutenue et encouragée avec enthousiasme pendant toute la durée de la thèse, et qui a relu et vérifié de nombreux calculs ?

Enfin, je remercie tous les thésards des projets Ondes et Estime, en compagnie desquels j'ai passé d'inoubliables moments.

Sommaire

Introduction **vii**

I Etude du guide d'ondes cylindrique 1

1 Motivations **3**
1.1 L'équation de Riccati en acoustique . . . 3
1.1.1 Les équations du problème . . . 4
1.1.2 Ecriture modale des solutions . . . 5
1.1.2.1 Modèle continu . . . 5
1.1.2.2 Modèle discret . . . 7
1.1.2.3 Passage à la limite du modèle discret . . . 11
1.1.3 Exemple . . . 14
1.1.3.1 Détermination des fonctions propres de base . . . 15
1.1.3.2 Matrice de passage entre deux guides d'ondes . . . 16
1.2 L'équation de Riccati et le plongement invariant . . . 18
1.2.1 Modèle discret . . . 19
1.2.2 Modèle continu . . . 20
1.2.3 Lien avec l'impédance acoustique . . . 25
1.3 Une méthode de factorisation du problème de Helmholtz . . . 25
1.3.1 Factorisation du problème . . . 26
1.3.2 Résolution du problème aux deux bouts . . . 28
1.3.3 Lien avec le plongement invariant . . . 30

2 Factorisation du problème de Helmholtz **33**
2.1 Première formulation . . . 33
2.1.1 Factorisation de l'équation de Helmholtz . . . 34
2.1.2 Réciproque . . . 39
2.1.3 Propriétés de Q . . . 41
2.2 Deuxième formulation . . . 42
2.2.1 Factorisation du problème . . . 42
2.2.2 Quelques propriétés de P . . . 45
2.3 Décomposition modale . . . 46
2.3.1 Ecriture dans une base de fonctions propres . . . 47
2.3.2 Expression modale de P . . . 49

2.3.3 Expression modale de r . . . 54
2.3.4 Comparaison de Q et de P . . . 57

3 Lien avec la théorie du contrôle 65
3.1 Problème de Poisson : problème de contrôle classique . . . 65
3.1.1 Détermination des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 67
3.1.2 Lien avec l'équation de Riccati . . . 69
3.2 Problème de Helmholtz : problème de contrôle robuste . . . 71
3.2.1 Détermination des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité 72
3.2.1.1 Recherche du maximum sur w : . . . 73
3.2.1.2 Recherche du minimum sur v : . . . 74
3.2.2 Lien avec l'équation de Riccati . . . 75
3.2.2.1 Retour au problème de Helmholtz : . . . 76
3.2.2.2 Equation de Riccati sur P : . . . 77

4 Transformation homographique 79
4.1 Etude du semi-groupe non linéaire associé à l'équation de Riccati pour le problème de Helmholtz . . . 79
4.1.1 Système couplé pour l'équation de Riccati . . . 80
4.1.2 Solution stationnaire de l'équation de Riccati . . . 83
4.1.3 Diagonalisation du système précédent (cas général) . . . 85
4.1.4 Factorisation de P . . . 88
4.1.5 Reformulation . . . 90
4.1.6 Analyse des discontinuités . . . 93
4.1.7 Transformation homographique pour le cas particulier des résonances transverses . . . 96
4.1.7.1 Détermination de solutions particulières . . . 96
4.1.7.2 Diagonalisation du système différentiel . . . 98
4.1.7.3 Factorisation de P . . . 103
4.2 Equations de Riccati avec termes linéaires . . . 104
4.2.1 1-représentation . . . 105
4.2.1.1 Obtention du système différentiel linéaire associé . . . 105
4.2.1.2 Obtention du système différentiel linéaire associé . . . 106
4.2.1.3 Formule de représentation . . . 109
4.2.2 2-représentation . . . 112
4.2.2.1 Définition des intermédiaires de calcul . . . 112
4.2.2.2 Factorisation de P . . . 115
4.2.2.3 Ecriture simplifiée de P . . . 116
4.2.3 Conclusion . . . 119

II Applications et extensions 121

5 Guides avec conditions absorbantes 123
5.1 Factorisation dans un guide avec une condition absorbante . . . 123
5.1.1 Factorisation du problème . . . 124

5.1.2 Etude de l'opérateur P . . . 126
5.2 Opérateur Absorbant-to-Dirichlet . . . 130
5.2.1 Factorisation du problème de Helmholtz . . . 132
5.2.2 Détermination de solutions particulières . . . 136
5.2.3 1-représentation . . . 137
5.2.4 2-représentation . . . 142
5.2.5 Etude des résonances transversales . . . 146
5.3 Opérateur Absorbant-to-Absorbant . . . 148
5.3.1 Factorisation du problème de Helmholtz . . . 149
5.3.2 2-représentation . . . 153
5.3.3 Factorisation adjointe . . . 157

6 Factorisation du problème de Helmholtz en section variable 163
6.1 Méthode intégrale . . . 163
6.1.1 Première formulation . . . 164
6.1.2 Deuxième formulation . . . 169
6.2 Décomposition modale . . . 171
6.3 Factorisation par changement de variables . . . 175
6.3.1 Première formulation . . . 179
6.3.2 Deuxième formulation . . . 181

7 Factorisation du problème de Helmholtz pour un coude 185
7.1 Factorisation . . . 185
7.1.1 Première formulation . . . 187
7.1.2 Deuxième formulation . . . 192
7.1.3 Forme générale de la solution . . . 194
7.2 Transformation homographique . . . 197
7.2.1 Détermination de solutions particulières . . . 197
7.2.2 Système découplé pour l'équation de Riccati . . . 198
7.2.3 Diagonalisation du système précédent . . . 199
7.2.4 Exploitation des conditions aux limites . . . 202

8 Etude de guides d'ondes composés 205

A Outils mathématiques 211
A.1 Espaces de Sobolev . . . 211
A.1.1 Généralités . . . 211
A.1.2 Espaces duaux . . . 213
A.1.3 Théorème de trace . . . 214
A.2 Résolution du problème de Helmholtz . . . 214
A.2.1 Guide avec une condition absorbante . . . 215
A.2.2 Guide avec deux conditions absorbantes . . . 218
A.2.3 Tube bouché en a . . . 220

Bibliographie 222

Introduction

En acoustique sous-marine, il est primordial pour les concepteurs et les utilisateurs de sonars de connaître le champ de pression dû à une source acoustique (cf[26], [7]). Dans cette discipline, le domaine d'étude est modélisable par un guide d'ondes : en effet, la hauteur caractéristique est nettement inférieure aux ordres de grandeur dans les autres directions, et la longueur d'onde est négligeable par rapport à celles-ci. Dès lors, il importe de proposer des modélisations qui tiennent compte de ces spécificités. Les techniques numériques classiques, telles que les méthodes de différences finies ou d'éléments finis (cf [30]), vont conduire à un système d'équations faisant intervenir un très grand nombre d'inconnues, lié au nombre de mailles créées pour discrétiser le domaine : il faudra donc composer avec un temps de calcul élevé et un espace de mémoire suffisamment grand pour pouvoir stocker les données du calcul.

Ya Yan Lu (cf [20], [21], [22], [24], [23]) a proposé une alternative, tirant profit des propriétés de ce domaine étendu : il reformule le problème de départ en un "problème aux deux bouts". En d'autres termes, il transforme l'équation aux dérivées partielles initiale en un système d'équations d'évolution du premier ordre pour lesquelles la variable de temps choisie est celle de l'axe du guide. Le coeur de la démarche est l'introduction d'un opérateur aux dérivées partielles du premier ordre permettant d'écrire le problème sous forme factorisée.

L'objectif de la thèse est d'approfondir l'étude théorique de cette méthode de factorisation pour l'équation des ondes acoustiques. La méthode choisie fait appel à la technique de plongement invariant, issue de la théorie du contrôle, et permet d'obtenir un système d'équations différentielles ordinaires très proche de celui de Ya Yan Lu. En revanche, on proposera de nouveaux moyens d'approche de l'opérateur du premier ordre, également appelé impédance acoustique (cf [27]), dont une formule permettant d'étudier ses singularités plus facilement.

La propagation des ondes acoustiques en régime harmonique est régie par l'équation de Helmholtz dans le guide d'ondes, et l'on impose différentes conditions sur les bords de celui-ci. On introduit dans le domaine une frontière mobile, correspondant à une section transversale, sur laquelle on choisit une condition arbitraire de même type que les conditions sur les bords. On cherche alors à résoudre le problème dans la partie du guide comprise entre l'une de ses faces et cette frontière mobile. On fait ensuite évoluer celle-ci le long de l'axe de propagation jusqu'à ce que l'on retrouve le domaine complet. Cela permet de définir un opérateur aux dérivées partielles du premier ordre reliant la solution de l'équation à la condition arbitraire : il peut s'agir par exemple d'un opérateur

Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet. Il dépend de la position de la frontière mobile, et il vérifie une équation de Riccati, i.e. une équation différentielle avec des termes quadratiques.

L'introduction de cette impédance permet à la fois de factoriser le problème de Helmholtz et de l'écrire sous la forme d'un système découplé d'équations différentielles ordinaires ; l'une des variables est la solution du problème, l'autre est la partie affine apparaissant dans la relation liant solution et opérateur. La résolution s'effectue alors en deux temps et s'apparente à la méthode de Gauss de factorisation "LU" : en premier lieu, on résout l'équation de Riccati pour l'impédance et l'EDO de la partie affine, et ce calcul est effectué dans le même sens que le déplacement de la frontière mobile. Ensuite, on recherche la solution du système en parcourant le guide dans le sens opposé.

Pour un problème donné, la méthode de factorisation n'est pas unique : d'une part, on peut envisager d'appliquer le plongement invariant à la famille des sous-domaines complémentaires. La frontière mobile se déplacera alors dans l'autre sens et la méthode fera intervenir un autre opérateur. D'autre part, il est possible de modifier le type de condition que l'on imposera sur la frontière. Cette étude sera l'objet du chapitre VI.

Une fois le problème de départ factorisé, on va étudier l'équation de Riccati afin d'en tirer des informations sur l'impédance généralisée. Celle-ci peut admettre des singularités, ce qui se produit notamment pour un problème mal posé. Une première méthode consiste à écrire une décomposition modale dans une base de fonctions propres et à résoudre l'équation dans ce cadre ; cependant, les limites de cette démarche apparaissent dès que ses coefficients ne sont plus diagonalisables.

On va donc proposer une autre approche, inspirée de la théorie du contrôle. A cette fin, on montrera que l'opérateur est homographiquement semblable à un semi-groupe non linéaire, c'est-à-dire que son image par une transformation homographique est solution d'une équation de Lyapunov. Cette formule permet de trouver d'une manière simple les points de discontinuité, également appelés résonances de boîte. Il suffit pour cela de rechercher les éventuelles valeurs propres nulles du dénominateur de l'homographie. En outre, elle permet de continuer le calcul après avoir traversé une singularité. Il est également possible d'envisager l'étude de guides d'ondes composés.

Plan de la thèse

Ce document comporte deux parties :

Première partie : Etude du guide d'ondes cylindrique

Dans un premier temps, on étudiera un problème modèle qui permet de comprendre les enjeux de la méthode de factorisation.

Le premier chapitre résume les fondements bibliographiques de ces travaux, qu'ils s'appuient sur l'acoustique ou la théorie du contrôle.

Le deuxième présente la factorisation du problème de Helmholtz par plongement invariant pour un guide bouché de section constante, en s'inspirant d'un papier de J.Henry et d'A.Ramos sur la factorisation du problème de Poisson. Deux formulations sont envisageables, qui font apparaître un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet. Tous deux sont solutions d'une équation de Riccati et présentent des singularités, appréhendées par une décomposition modale.

Le troisième chapitre met en évidence les liens de cette méthode avec la théorie du contrôle, dont elle s'inspire.

Enfin, le quatrième chapitre explique comment obtenir une expression simplifiée de ces opérateurs en s'appuyant sur leur équation de Riccati. En s'inspirant encore de la théorie du contrôle, on montre qu'ils sont semblables à un semi-groupe non linéaire par une transformation homographique. L'obtention d'une, ou de deux, solution particulière de cette équation permet alors de connaître leur valeur en tout point du guide sans avoir à résoudre le problème de Helmholtz, et notamment de connaître leurs points de singularité. En particulier, l'expression obtenue est intrinsèque : en d'autres termes, elle s'affranchit des bases de fonctions propres de l'espace d'étude.

Deuxième partie : Applications et extensions

Cette partie est axée sur l'adaptation des résultats précédents à des géométries ou des problèmes plus complexes. Les premiers exemples proposés sont très proches du problème modèle, les suivants s'en écartent davantage.

Le cinquième chapitre modifie uniquement les conditions sur les bords du problème de départ. Des conditions absorbantes sont substituées aux conditions de type Neumann ou Dirichlet et permettent d'obtenir un problème bien posé. Plusieurs factorisations sont envisageables, qui font intervenir des opérateurs différents, solutions d'équations de Riccati avec termes linéaires. Pour chacun d'entre eux, on donnera leur formule de représentation, qu'on exploitera également pour déterminer leurs singularités.

Le sixième chapitre donne des clés pour factoriser le problème de Helmholtz dans un guide de section variable et propose trois démarches : une méthode intégrale qui repose sur une formulation variationnelle, une méthode de décomposition de l'opérateur dans une base de Hilbert-Schmidt, et une transformation du problème par un changement de variables permettant de se ramener à un guide de section constante.

Enfin, le septième chapitre explore la factorisation du problème de Helmholtz dans un guide coudé.

Première partie

Etude du guide d'ondes cylindrique

Chapitre 1

Motivations

Ce chapitre a pour but de présenter les fondements de la méthode de factorisation des EDP trouvés dans la littérature. V. Pagneux (cf [27]) a introduit la factorisation du problème de Helmholtz pour étudier les ondes acoustiques dans des guides : cette méthode fait apparaître une "impédance acoustique" très proche de l'opérateur Neumann-to-Dirichlet qui sera étudié dans le chapitre II (cf II.2), et qui relie la vitesse du fluide à sa pression.

On présentera ensuite rapidement l'outil mathématique utilisé tout au long de la thèse pour factoriser des EDP : il s'agit du plongement invariant, qui a fait l'objet de travaux de Bellman (cf [2], [5], [4]). Cette méthode a notamment été mise en oeuvre pour analyser les solutions d'équations d'ondes ; elle consiste à faire varier légèrement les dimensions du domaine et à étudier les perturbations qui en résultent.

Enfin, on présentera une factorisation du problème de Helmholtz orientée vers les simulations numériques (cf [22]).

1.1 L'équation de Riccati en acoustique

Dans cette partie, on va décrire les différents phénomènes physiques intervenant lors de la propagation d'une onde acoustique dans un guide de section variable. Une décomposition modale des inconnues du problème va permettre de résoudre celui-ci d'une manière originale : elle va faire apparaître une équation de Riccati pour l'impédance acoustique, reliant vitesse et pression du fluide. Celles-ci seront ensuite calculées en résolvant des équations différentielles ordinaires. Dans un premier temps, on va donc étudier la forme générale des solutions avant de définir l'impédance ou de chercher à écrire une équation différentielle pour celle-ci.

1.1.1 Les équations du problème

On considère un guide d'ondes Ω de section variable à symétrie radiale, constitué d'un milieu adiabatique et linéaire, et l'on étudie la propagation des ondes acoustiques dans ce milieu. On note c la célérité du son et ρ_0 la densité de l'air. On appelle z la coordonnée le long de l'axe longitudinal et r la coordonnée radiale. La section du guide est notée $S(z)$.

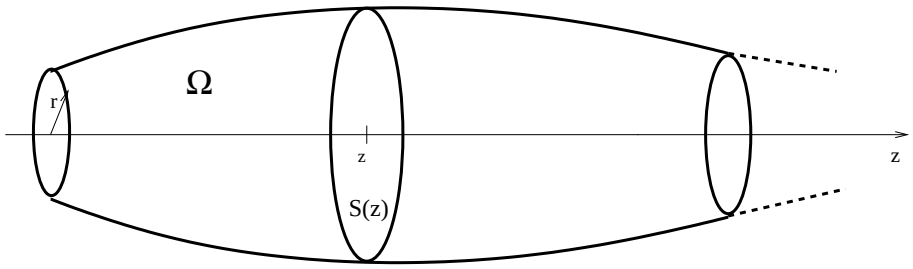


FIG. 1.1: Guide d'ondes à symétrie radiale

Les équations décrivant le phénomène de propagation font intervenir v, la vitesse de la particule, et p, la pression acoustique. Pour simplifier, on n'écrira pas le facteur de dépendance en fonction du temps $exp(j\omega t)$. Les équations de conservation de la masse et du mouvement s'écrivent :

$$\begin{cases} div \quad v = -\dfrac{j\omega}{\rho_0 c^2} p \\ j\omega v = -\dfrac{1}{\rho_0} \nabla p \end{cases}$$

En combinant ces deux équations, on obtient l' équation de Helmholtz dont p est solution :

$$(\Delta + k^2)p = 0, \text{ où } k = \frac{\omega}{c}.$$

Par ailleurs, on impose au bord du guide d'ondes une condition de type Dirichlet ou Neumann pour p, comme cela sera précisé par la suite.

Dans un premier temps, on cherche à résoudre cette équation dans $H^1(\Omega)$ grâce à une décomposition modale. A cette fin, on écrit le laplacien sous la forme :

$$\Delta u(r,z) = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}(r,z) + \Delta_\perp u(r,z),$$

où $\Delta_\perp$ représente le laplacien "transversal" pour la section $S(z)$. Or, pour z fixé, cet opérateur est diagonalisable dans $H^1(S(z))$ avec une condition de Dirichlet (cette propriété sera détaillée dans le chapitre II, 3e section), et il admet une base orthogonale de fonctions propres $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Celle-ci vérifie la relation :

$$\begin{cases} \int_{S(z)} \Psi_i(r,z)\Psi_j(r,z)dr = S(z)\delta_{i,j} \\ \Delta_\perp \Psi_i(r,z) = -\alpha_i^2(z)\Psi_i(r,z) \end{cases}$$

A présent, on va décomposer la solution p de l'équation de Helmholtz. Comme elle est dans l'espace $H^1(\Omega)$, sa trace sur la section $S(z)$, pour z fixé, appartient à $H^{\frac{1}{2}}(S(z))$. On peut donc écrire son expression dans la base des Ψ_i :

$$p(r,z) = \Sigma_{n=1}^{+\infty} P_n(z)\Psi_n(r,z) \text{ où } P_n(z) = \int_{S(z)} p(r,z)\Psi_n(r,z)dr.$$

Comme v est aussi dans H^1_{loc}, on décompose cette fonction de la même manière :

$$v(r,z) = \frac{1}{S(z)}\Sigma_{n=1}^{+\infty} U_n(z)\Psi_n(r,z)$$

On notera $U(z)$ et $P(z)$ les vecteurs-colonnes de coefficients $(U_n(z))_n$ et $(P_n(z))_n$.

1.1.2 Ecriture modale des solutions

L'étape suivante consiste à exploiter cette décomposition modale pour obtenir des équations sur les vecteurs U et P et faire apparaître l'impédance acoustique. Une première approche permet d'écrire un système différentiel couplé pour ces deux inconnues ; la méthode ne fait aucune approximation, cependant le système ne peut être exploité facilement. On proposera donc ensuite un modèle discrétisant le guide.

1.1.2.1 Modèle continu

Dans cette section, on cherche à transformer les équations de conservation en équations sur les coefficients U_n et P_n. Pour ce faire, on exploite dans un premier temps la définition des coefficients :

$$P_n(z) = \langle p, \Psi_n \rangle_{S(z)} = \int_{S(z)} p(r,z)\Psi_n(r,z)dr$$

Afin de les faire apparaître dans les équations de conservation, on multiplie les équations du problème de départ par Ψ_n et on intègre la relation obtenue sur le domaine $S(z)$. L'équation de conservation du mouvement devient ainsi :

$$\int_{S(z)} \frac{\partial p(r,z)}{\partial z}\Psi_n(r,z)dr = -\int_{S(z)} j\rho\omega v_z(r,z)\Psi_n(r,z)dr$$

On transforme cette équation grâce à la formule de Leibniz :

$$\int_{S(z)} \Psi_n(r,z)\frac{\partial p}{\partial z}(r,z)dr = \frac{d}{dz}\left(\int_{S(z)} \Psi_n(r,z)p(r,z) \quad dS\right) - \int_{S(z)} p(r,z)\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}(r,z)dr - \oint_{\partial S(z)} p(r,z)\Psi_n(r,z)R'(z)d\tau$$

où $R'(z)$ représente la dérivée du rayon du guide d'ondes et $\partial S(z)$ la frontière de la section $S(z)$. On en déduit que :

$$-\int_{S(z)} j\rho\omega v_z(r,z)\Psi_n(r,z)dr = (SP_n)'(z) - \sum_m \left(\int_{S(z)} \Psi_m(r,z)\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}(r,z)dr\right) P_m(z)dr - \sum_m \left(\oint_{\partial S(z)} \Psi_m(r,z)\Psi_n(r,z)R'(z)d\tau\right) P_m(z)$$

On pose alors :

$$\begin{cases} A_{mn}(z) = \displaystyle\int_{S(z)} \Psi_m(r,z)\frac{\partial \Psi_n}{\partial z}(r,z)dr \\ B_{mn}(z) = \displaystyle\oint_{\partial S(z)} \Psi_m(r,z)\Psi_n(r,z)R'(z)d\tau \end{cases}$$

Ceci permet de simplifier la formule précédente :

$$(SP_n)'(z) = -j\rho\omega U_n(z) + \sum_m (A_{mn} + B_{mn})(z)P_m(z)$$

C'est-à-dire :

$$P_n'(z) = -\frac{j\rho\omega}{S(z)}U_n(z) + \sum_m \frac{A_{mn}(z) + B_{mn}(z) - S'(z)\delta mn}{S(z)}P_m(z)$$

On note Θ la matrice de taille infinie d'expression :

$$\Theta(z) = \frac{1}{S'(z)}\left(A(z) + B(z)\right) - I$$

La matrice P des coefficients pour la pression est donc solution d'une équation différentielle matricielle :

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{j\rho\omega}{S}U + \frac{S'}{S}\Theta P$$

Un raisonnement analogue appliqué à l'équation $div \quad v = -\dfrac{j\omega}{\rho_0 c^2}p$ permet d'écrire que :

$$U_n'(z) = -\frac{jS}{\omega\rho}(k^2 - \alpha_n^2)P_n(z) + \frac{1}{S}\sum_m \int_{S(z)} \Psi_m(r,z)\frac{\partial \Psi_m}{\partial z}(r,z)dr\ U_m(z)$$

Ce qui s'écrit sous la forme matricielle :

$$\frac{dU}{dz} = -\frac{jS}{\omega\rho}KP + \frac{1}{S}\Xi U,$$

où K est la matrice diagonale dont le n-ième coefficient est $k^2 - \alpha_n^2$ et Ξ a pour coeffecients les produits scalaires $\int_{S(z)} \Psi_m(r,z)\frac{\partial \Psi_m}{\partial z}(r,z)dr$. On a donc obetnu un système linéaire d'équations différentielles couplées :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dz} = -\dfrac{j\rho\omega}{S}U + \dfrac{S'}{S}\Theta P \\ \dfrac{dU}{dz} = -\dfrac{jS}{\omega\rho}KP + \dfrac{1}{S}\Xi U \end{cases}$$

Une telle méthode permet d'obtenir P_n' et U_n' de manière rigoureuse ; en revanche, il est difficile de simplifier leurs expressions ou de comprendre à quel phénomène physique chaque terme est relié. On va donc approcher le modèle par un autre, plus simple, dans ce but.

1.1.2.2 Modèle discret

On va approcher le guide d'ondes par un modèle discret : un guide constitué de segments cylindriques de section constante.

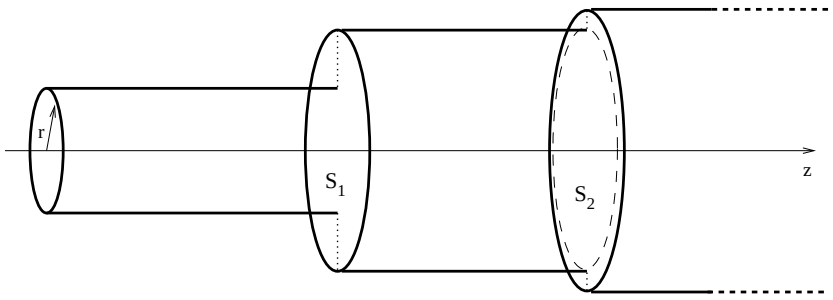


FIG. 1.2: Guide discrétisé

Lorsque l'on étudie la propagation d'une onde acoustique dans un tel milieu, il faut prendre en compte deux phénomènes : la propagation de l'onde dans un cylindre et la traversée d'une discontinuité (lorsque l'on passe d'un segment à un autre).

Dans un premier temps, on va écrire les équations sur U_n et P_n pour le cylindre de section constante. La pression de l'onde acoustique est solution de l'équation de Helmholtz :

$(\Delta + k^2)p = 0$. La décomposition de p dans la base des fonctions propres Ψ_i permet de trouver l'équation vérifiée par les coefficients de p. Comme dans ce cas la section du guide d'ondes est constante, les fonctions de base ne dépendent plus de la variable z et il est possible de dériver l'expression de p terme à terme. On a en effet :

$$\begin{cases} p(r,z) = \sum_i \Psi_i(r) P_i(z) & \dfrac{\partial p}{\partial z} = \sum_i \Psi_i(r) P_i'(z) \\ \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2}(y,z) = \Sigma_i P_i''(z)\Psi_i(r) & \dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}(y,z) = -\Sigma_i \alpha_i^2 P_i(z)\Psi_i(r) \end{cases}$$

On en déduit notamment que :

$$P_i'(z) = \int_{S(z)} \Psi_i(r) p(y,z) dr.$$

(Ces calculs seront détaillés au cours du chapitre suivant). Il est maintenant possible d'exprimer le laplacien de p dans la base des fonctions propres :

$$\Delta p(r,z) = \sum_i P_i(z) \Delta_\perp \Psi_i(r) + \sum_i \frac{d^2 P_i}{dz^2}(z) \Psi_i(r)$$

L'équation de Helmholtz s'écrit donc sous la forme :

$$-\Sigma_i k^2 P_i(z)\Psi_i(r) = \Sigma_i \left(\frac{d^2 P_i}{dz^2}(z) - \alpha_i^2 P_i(z) \right) \Psi_i(r)$$

On en déduit que :

$$-\frac{d^2 P_i}{dz^2}(z) = (k^2 - \alpha_i^2) P_i(z)$$

Les coefficients sont donc de la forme :

$$P_i(z) = A_i \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_i^2} z\right) + B_i \sin\left(\sqrt{k^2 - \alpha_i^2} z\right)$$

L'exploitation de la condition sur le bord permet de préciser les valeurs des constantes A_i et B_i.

On va maintenant évaluer les coefficients de la vitesse de propagation. Celle-ci vérifie la relation :

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -j\rho\omega v_z$$

On en déduit l'équation sur les coefficients :

$$\frac{dP_i}{dz}(z) = \sqrt{k^2 - \alpha_i^2} \left(-A_i \sin\left(\sqrt{k^2 - \alpha_i^2} z\right) + B_i \cos\left(\sqrt{k^2 - \alpha_i^2} z\right) \right) = -\frac{j\rho\omega}{S} U_i(z)$$

D'où l'expression de U_i :

$$U_i(z) = \frac{jS}{\rho\omega}\sqrt{k^2-\alpha_i^2}\left(-A_i\sin\left(\sqrt{k^2-\alpha_i^2}z\right)+B_i\cos\left(\sqrt{k^2-\alpha_i^2}z\right)\right)$$

Sans perdre de généralité, on peut écrire que :

$$P_i(0) = A_i \text{ et } U_i(0) = \frac{jS}{\rho\omega}\sqrt{k^2-\alpha_i^2}B_i$$

On pose $k_i = \sqrt{k^2-\alpha_i^2}$. On peut maintenant exprimer P_i et U_i en $z = d$ en fonction de leurs valeurs à l'origine :

$$\begin{cases} P_i(d) = P_i(0)\cos(k_i d) + U_i(0)\dfrac{\rho\omega}{jSk_i}\sin(k_i d) \\ U_i(d) = -\dfrac{\rho\omega}{jSk_i}P_i(0)\sin(k_i d) + U_i(0)\cos(k_i d) \end{cases}$$

On définit les matrices diagonales D_1, D_2, Z_c de coefficients respectifs :

$$\begin{cases} D_i^1 = \cos(k_i d), \\ D_i^2 = j\sin(k_i d), \\ Z_i = \dfrac{\rho\omega}{k_i S}. \end{cases}$$

On a alors le système suivant :

$$\begin{cases} P_i(d) = P_i(0)D_i^1 - D_i^2 U_i(0)Z_i \\ U_i(d) = -Z_i^{-1}D_i^2 P_i(0) + U_i(0)D_i^1 \end{cases}$$

En inversant ce système d'équations et en désignant par U_0, P_0, U_1, P_1 les valeurs de U et P en $z = 0$ et $z = d$ respectivement, on obtient :

$$\begin{cases} P_0 = D_1 P_1 + D_2 Z_c U_1 \\ U_0 = D_2 Z_c^{-1} P_1 + D_1 U_1 \end{cases}$$

On remarque en particulier que cette solution est valable quelle que soit la condition au bord choisie.

En introduisant l'impédance acoustique, il vient :

$$\begin{cases} Z_0 U_0 = D_1 Z_1 U_1 + D_2 Z_c U_1 \\ U_0 = D_2 Z_c^{-1} Z_1 U_1 + D_1 U_1 \end{cases}$$

On en déduit en particulier les relations suivantes :

$$\begin{cases} Z_0 = (D_1 Z_1 + D_2 Z_c)(D_2 Z_c^{-1} Z_1 + D_1)^{-1} \\ U_1 = (-D_2 Z_c^{-1}(Z_0 - Z_c) + e^{-jk_i d})U_0 \end{cases}$$

On considère maintenant le cas où le guide d'ondes présente une discontinuité en z_0 fixé. En ce point, la section passe de S_1 à S_2. On suppose que $S_1 \in S_2$. On note p_1 et v_1 la pression et la vitesse avant la discontinuité, p_2 et v_2 après la discontinuité. Sur S_1, la pression et la vitesse sont continues à la traversée de la discontinuité ; sur $S_2 - S_1$, la vitesse v_2 est nulle. En revanche les fonctions de base Ψ_i dépendent de z et aussi de la surface de la section du guide d'ondes ; elles sont donc différentes de part et d'autre de la discontinuité et on les notera respectivement Ψ_{1i} et Ψ_{2i}. Les coefficients de la vitesse et de la pression dans cette base sont donc modifiés lorsque l'onde traverse la discontinuité.

Afin de trouver la matrice de passage entre les coefficients, on écrit les relations entre p_1, v_1 et p_2, v_2 dans la base des Ψ_i. Sur la surface commune S_1, p et v sont continues, donc :

$$\begin{cases} \sum_i \Psi_{1,i}(r, z_0) P_{1,i} = \sum_i \Psi_{2,i}(r, z_0) P_{2,i} \\ \dfrac{1}{S_1} \sum_i \Psi_{1,i}(r, z_0) U_{1,i} = \dfrac{1}{S_2} \sum_i \Psi_{2,i}(r, z_0) U_{2,i} \end{cases}$$

En multipliant chacune de ces équations par une fonction de base $\Psi_{1,i}$ et en intégrant sur S_1, il vient :

$$\int_{S_1} \sum_j \Psi_{1j}(r, z_0)\Psi_{1i}(r, z_0) P_{1j} dr = \int_{S_1} \sum_j \Psi_{2j}(r, z_0)\Psi_{1i}(r, z_0) P_{2j} dr$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\sum_j P_{1j} \int_{S_1} \Psi_{1j}(r, z_0)\Psi_{1i}(r, z_0) dr = \sum_j P_{2j} \int_{S_1} \Psi_{1i}(r, z_0)\Psi_{2j}(r, z_0) dr$$

C'est-à-dire :

$$P_{1i} = \sum_j P_{2j} F_{ij}(z_0), \text{ où } F_{ij}(z_0) = \frac{1}{S_1} \int_{S_1} \Psi_{1i}(r, z_0)\Psi_{2j}(r, z_0) dr.$$

De même, la deuxième équation donne :

$$\frac{1}{S_2} \sum_i U_{2,i} \int_{S_2} \Psi_{2,i}(r, z_0)\Psi_{2,j}(r, z_0) dr = \frac{1}{S_2} \sum_i U_{2,i} \int_{S_1} \Psi_{2,i}(r, z_0)\Psi_{2,j}(r, z_0) dr$$

Comme le membre de gauche vaut $\sum_i U_{2,i}\delta_{i,j} = U_{2,j}$, on a :

$$U_{2,j} = \frac{1}{S_2}\sum_i U_{2,i}\int_{S_1}\Psi_{2,i}(r,z_0)\Psi_{2,j}(r,z_0)dr = \frac{1}{S_1}\sum_i U_{1,i}\int_{S_1}\Psi_{1,i}(r,z_0)\Psi_{2,j}(r,z_0)dr$$

On en déduit que :

$$U_{2,j} = \sum_i U_{1,i}F_{ij}(z_0)$$

On nomme F la matrice carrée de taille infinie dont les coefficients sont F_{ij}. On obtient ainsi les relations matricielles :

$$\boxed{\begin{cases} P_1 = FP_2 \\ U_2 = F^tU_1 \end{cases}}$$

On introduit l'impédance Z définie par la relation matricielle entre les coefficients :

$$\boxed{P = ZU}$$

Z est donc une matrice de taille infinie, et elle relie la pression du fluide à sa dérivée. On peut donc faire un rapprochement entre cette impédance et les opérateurs de type Neumann-to-Dirichlet qui seront utilisés au chapitre II pour factoriser le problème de Helmholtz. Les équations précédentes vont permettre de décrire la variation de cette grandeur lorsque l'onde traverse une discontinuité. En effet, le système précédent peut également s'écrire :

$$\begin{cases} Z_1U_1 = FZ_2U_2 \\ F^tU_1 = U_2 \end{cases}$$

d'où l'on tire :

$$Z_1U_1 = FZ_2F^tU_1$$

$$Z_1 = FZ_2F^t.$$

1.1.2.3 Passage à la limite du modèle discret

On reprend le modèle précédent et on fait tendre la longueur des segments cylindriques vers 0. Entre 0 et δz, , on modélise le guide d'ondes par un segment de cylindre puis une discontinuité. Comme $\dfrac{S_2 - S_1}{S_1}$ est petit, on pose

$$\epsilon = \frac{S_2 - S_1}{S_1} \simeq \frac{S'}{S}\delta z.$$

Tout d'abord, on va étudier le passage à la limite pour la propagation dans le cylindre :

On écrit la relation entre $(P_i(0), U_i(0)$ et $(P_i(\delta z), U_i(\delta z))$ et on en tire un équivalent lorsque $\delta z \to 0$.

$$\begin{cases} P_i(0) = \cos(k_i\delta z)P_i^1(\delta z) + j\sin(k_i\delta z)\dfrac{k\rho c}{k_i S}U_i^1(\delta z) \\ U_i(0) = j\sin(k_i\delta z)\dfrac{k_i S}{k\rho c}P_i^1(\delta z) + \cos(k_i\delta z)U_i^1(\delta z) \end{cases}$$

Au premier ordre on a :

$$\cos(k_i\delta z) = 1,\ \sin(k_i\delta z) = k_i\delta z.$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} P_i(0) \simeq P_i^1(\delta z) + j\delta z\dfrac{k\rho c}{k_i S}U_i^1(\delta z) \\ U_i(0) = jk_i\delta z\dfrac{k_i S}{k\rho c}P_i^1(\delta z) + U_i^1(\delta z) \end{cases}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{P_i(0) - P_i^1(\delta z)}{\delta z} = j\dfrac{\omega\rho}{S}U_i^1(\delta z) \\ \dfrac{U_i(0) - U_i^1(\delta z)}{\delta z} = j\dfrac{S}{\omega\rho}P_i^1(\delta z)k_i^2 \end{cases}$$

En passant à la limite $\delta z \to 0$, il vient :

$$\begin{cases} \dfrac{dP_i}{dx} = -\dfrac{j\omega\rho}{S}U_i^1 \\ \dfrac{dU_i}{dx} = -\dfrac{jSk_i^2}{\omega\rho}P_i^1 \end{cases}$$

On définit alors la matrice diagonale K de taille infinie dont le i-ième coefficient vaut k_i^2. On obtient alors la forme matricielle des relations précédentes :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = -\dfrac{j\omega\rho}{S}U \\ \dfrac{dU}{dx} = -\dfrac{jS}{\omega\rho}KP \end{cases}$$

On en déduit directement l'équation différentielle vérifiée par l'impédance. En effet,

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dZ}{dx}U + Z\frac{dU}{dx}.$$

En utilisant les deux relations précédentes, on obtient alors :

$$-\frac{j\omega\rho}{S}U = \frac{dZ}{dx}U - \frac{jS}{\omega\rho}ZKZU$$

Il en résulte que :

$$\frac{dZ}{dx} = -\frac{j\omega\rho}{S}I + \frac{jS}{\omega\rho}ZKZ$$

Ensuite, on incorpore la discontinuité au modèle. Les coefficients de la vitesse et de la pression vérifient les relations :

$$\begin{cases} P_i^1(\delta z) = \Sigma_j F_{ij} P_j^2(\delta z) \\ U_i^2(\delta z) = \Sigma_j F_{ji} U_j^1(\delta z) \end{cases}$$

Comme $S_2 - S_1$ est proche de 0, on peut faire l'approximation au premier ordre $F = I - \varepsilon Q$, où Q est une autre matrice de taille infinie et $\varepsilon = \dfrac{S'}{S}\delta z$. On a alors :

$$\begin{cases} P_i^1(\delta z) = P_i^2(\delta z) - \varepsilon\Sigma_j Q_{ji} P_j^2(\delta z) \\ U_i^2(\delta z) = U_i^1(\delta z) - \varepsilon\Sigma_j Q_{ji} U_j^1(\delta z) \end{cases}$$

On en déduit le système différentiel :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = \varepsilon QP = \dfrac{S'}{S}QP \\ \dfrac{dU}{dx} = -\varepsilon^t QU = -\dfrac{S'^t}{S}QU \end{cases}$$

La même approximation permet d'écrire, pour l'impédance :

$$Z^1 = (I - \varepsilon Q)Z^2(I - \varepsilon^t Q) = Z^2 - \epsilon(QZ^2 + Z^2.{}^tQ)$$

Par conséquent, il vient :

$$\frac{dZ}{dz} = QZ + ZQ^t.$$

Au total, la dérivée de chaque vecteur-colonne est la somme des deux contributions (discontinuité + propagation) :

$$\begin{cases} P' = -\dfrac{j\omega\rho}{S}U^1 + \dfrac{S'}{S}QP \\ U' = -\dfrac{jS}{\omega\rho}KP^1 - \dfrac{S'^t}{S}QU \end{cases}$$

De même, l'impédance est solution de :

$$Z' = -\frac{j\omega\rho}{S} I + \frac{jS}{\omega\rho} ZKZ + \frac{S'}{S}(QZ + Z^t Q)$$

Cette équation différentielle comporte des termes quadratiques, il s'agit donc d'une équation de Riccati. Sa forme est très proche de celles qui seront obtenues dans les chapitres II, VI et VII.

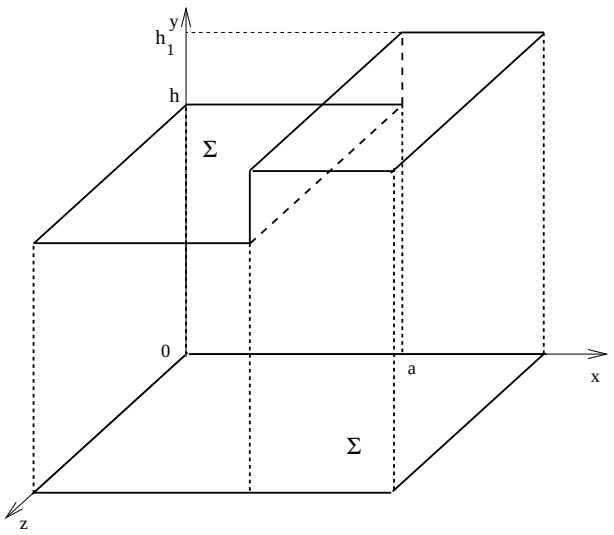
Le calcul s'effectue alors en deux temps : on commence par intégrer l'équation sur l'impédance dans le sens des z décroissants, en stockant la valeur de Z pour tout z, puis on intègre U à partir de $z = 0$ grâce à l'équation :

$$\frac{dU}{dx} = \left(-\frac{jS}{\rho\omega} KZ - \frac{S'}{S} Q^t \right) U$$

Ensuite, la pression est calculée par la relation $P = ZU$. Cette démarche est exactement la même que celle qui sera adoptée par la suite, cette fois pour des opérateurs agissant sur des fonctions.

1.1.3 Exemple

Dans ce paragraphe, on se propose d'expliciter les fonctions de base et les coefficients de l'équation de Riccati pour un cas concret : on considère un guide d'ondes constitué de deux plaques horizontales, et qui correspond au modèle discret. Entre les abscisses 0 et a, les plaques sont les plans d'équations $y = 0$ et $y = h$, puis en a le guide présente une discontinuité : l'écartement des plaques passe de h à h_2. Comme cette configuration est invariante par translation suivant la coordonnée z, on se ramène à un guide bidimensionnel.



1.1.3.1 Détermination des fonctions propres de base

Dans un premier temps, on cherche à déterminer les fonctions Ψ_i pour la partie $0 \leq x < a$. La section est alors constante et elles vérifient une équation du type :

$$\frac{\partial^2 \Psi_i}{\partial y^2} = -\alpha_i^2 \Psi_i$$

avec des conditions de Neumann sur les bords :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial y} = 0 \text{ en } y = 0 \text{ et } y = h.$$

En raison de la géométrie du domaine, Ψ_i ne dépend pas de x. On en déduit que la fonction est de la forme

$$\Psi_i(y) = A_i \cos(\alpha_i y).$$

La condition sur le bord permet de conclure que $\alpha_i = \frac{i\pi}{h}$. Pour connaître la valeur de A_i, on calcule la norme de Ψ_i. En effet, dans le paragraphe 1.1.1., on a imposé la condition :

$$S = \int_s \Psi_i(y)\Psi_i(y)dy,$$

ce qui s'écrit encore :

$$S = \int_0^h A_i^2 \cos^2\left(\frac{\pi i y}{h}\right) dy$$

c'est-à-dire :

$$h = \int_0^h \frac{A_i^2}{2}\left(1 + \cos(\frac{2i\pi y}{h})\right) dy = \begin{cases} A_0^2 h \text{ si } i = 0 \\ h\frac{A_i^2}{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$A_i = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ \sqrt{2} \text{ sinon} \end{cases}$$

Les fonctions de base sont donc :

$$\Psi_i(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ \sqrt{2}\cos\frac{i\pi y}{h} \text{ sinon} \end{cases}$$

Par conséquent, la vitesse et la pression acoustique ont pour décomposition modale :

$$\begin{cases} p(x,y) = P_0(z) + \sqrt{2} \quad \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\cos(\frac{n\pi y}{h}) \\ v(x,y) = \frac{1}{S}U_0(x) + \frac{\sqrt{2}}{S}\sum_{n=1}^{\infty} U_n(z)\cos(\frac{n\pi y}{h}) \end{cases}$$

1.1.3.2 Matrice de passage entre deux guides d'ondes

A présent, on va expliciter les coefficients de F pour la discontinuité en a. Pour $x > a$, les fonctions de base ont pour expression :

$$\Psi_{2,i}(y) = \begin{cases} 1 \text{ si } i = 0 \\ \sqrt{2}\cos\dfrac{i\pi y}{h_2} \text{ sinon} \end{cases}$$

On en déduit la forme des coefficients :

$$F_{mn} = \frac{1}{S_1}\int\int_{S_1} \Psi_{1,m}\Psi_{2,n}dS = \frac{1}{h}\int_0^h \Psi_m(y)\Psi_{2,n}(y)dy$$

Premier cas : $m = n = 0$

Dans ce cas $\Psi_0(y) = \Psi_{2,0}(y) = 1$, et :

$F_{00} = 1.$

Deuxième cas : $m = 0$, $n > 0$

On a alors :

$$F_{0n} = \frac{1}{S}\int_0^h \sqrt{2}\cos\frac{n\pi y}{h_2}dy,$$

On en déduit que :

$$F_{0n} = \frac{h_2\sqrt{2}}{hn\pi}\sin\frac{n\pi h}{h_2} = \sqrt{2}sinc\frac{n\pi h}{h_2},$$

où $sinc$ représente le sinus cardinal : $sinc\, x = \dfrac{\sin x}{x}$.

Troisième cas : $n = 0$, $m > 0$

Le coefficient vaut alors :

$$F_{m0} = \frac{1}{S}\int_0^h \sqrt{2}\cos\frac{m\pi y}{h}dy$$

Il en résulte que :

$$F_{m0} = 0$$

Quatrième cas : cas général

Dans ce cas, $n > 0$, $m > 0$, et on a la formule suivante :

$$F_{mn} = \frac{2}{h}\int_0^h \cos\frac{m\pi y}{h}\cos\frac{n\pi y}{h_2}dy = \frac{1}{h}\int_0^h \cos\left(\pi y\left(\frac{m}{h}+\frac{n}{h_2}\right)\right)+\cos\left(\pi y\left(\frac{m}{h}-\frac{n}{h_2}\right)\right)dy$$

Si $\frac{n}{h_2} = \frac{m}{h}$, alors le deuxième terme est égal à 1 et on a:

$$F_{mn} = 1 + \frac{1}{h\pi\left(\frac{m}{h}+\frac{n}{h_2}\right)}\sin(m+\frac{nh}{h_2})\pi = 1 + \frac{(-1)^m \sin\frac{nh}{h_2}\pi}{h\left(m+n\frac{h}{h_2}\right)\pi} = 1$$

Si $\frac{n}{h_2} \neq \frac{m}{h}$, le coefficient vaut :

$$F_{mn} = \frac{1}{h\pi\left(\frac{m}{h}+\frac{n}{h_2}\right)}\sin\pi h\left(\frac{m}{h}+\frac{n}{h_2}\right) + \frac{1}{h\pi\left(\frac{m}{h}-\frac{n}{h_2}\right)}\sin\pi h\left(\frac{m}{h}-\frac{n}{h_2}\right)$$

Ce qui se simplifie en :

$$F_{mn} = \frac{(-1)^m}{\pi\left(m+\frac{nh}{h_2}\right)}\sin\left(\pi n\frac{h}{h_2}\right) + \frac{(-1)^{m+1}}{\pi\left(m-\frac{nh}{h_2}\right)}\sin\left(\pi n\frac{h}{h_2}\right)$$

Après réduction au même dénominateur, il vient :

$$F_{mn} = \frac{(-1)^m}{\pi}\frac{2n\frac{h}{h_2}}{m^2 - n^2\frac{h^2}{h_2^2}}\sin n\pi\frac{h}{h_2}$$

En résumé, on a :

$$F_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{si } m = n = 0 \\ \sqrt{2} \quad sinc\left(n\pi \dfrac{h}{h_2}\right) & \text{si } m = 0, n > 0 \\ 0 & \text{si } n = 0, m > 0 \\ 1 & \text{si } n > 0, m > 0 \text{ et } \dfrac{n}{h_2} = \dfrac{m}{h} \\ \dfrac{(-1)^m}{\pi} \dfrac{2n\dfrac{h}{h_2}}{m^2 - n^2\dfrac{h^2}{h_2^2}} \sin n\pi \dfrac{h}{h_2} & \text{sinon} \end{cases}$$

Pour obtenir un guide continu dans le paragraphe précédent, on a effectué le passage à la limite $\dfrac{h_2}{h} \to 1$ pour tous les coefficients apparaissant dans l'étude. Il en est de même ici : le comportement asymptotique des $F_{m,n}$ pour $\dfrac{h_2}{h} \to 1$ va permettre de connaître l'expression de F pour un guide bidimensionnel de section variable.

Comme $\sin \dfrac{n\pi h}{h_2} \to_{\frac{h_2}{h} \to 1} 0$, il en résulte que :

$$F_{m,n} \to_{\frac{h_2}{h} \to 1} \begin{cases} 1 \text{ si } m = n \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

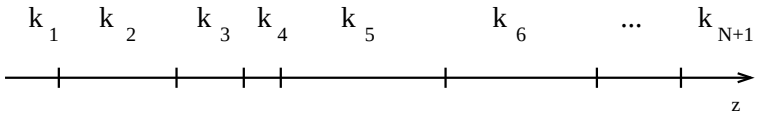
Ainsi, $\lim\limits_{\frac{h_2}{h} \to 1} F = I$.

1.2 L'équation de Riccati et le plongement invariant

A présent, on s'intéresse aux travaux de Bellman et Vasudevan (cf [4]), qui font également intervenir des équations de Riccati. Cette fois, on ne met pas l'accent sur la résolution d'un problème particulier, mais sur un outil qui peut être adapté pour traiter différentes équations : il s'agit du plongement invariant. Celui-ci est un aspect particulier des méthodes de perturbation : on ne modifie pas les données du problème, mais le domaine d'étude (on remarquera que dans le paragraphe précédent, on a également joué sur la forme du domaine). Cette méthode va être étudiée dans le cadre des ondes planes en milieu unidimensionnel. En décomposant celles-ci en ondes transmises ou réfléchies, on va pouvoir écrire une équation de Riccati pour les coefficients de réflexion et de transmission. Comme pour l'étude précédente, on va discrétiser le modèle, puis passer à la limite.

1.2.1 Modèle discret

On considère une onde plane se propageant dans un milieu unidimensionnel hétérogène, et on va supposer qu'il y a transmission et réflexion instantanées en tout point du milieu. On note respectivement $\tau(z)$ et $\zeta(z)$ les coefficients de transmission et de réflexion à l'abscisse z. On cherche à obtenir des équations fonctionnelles pour ceux-ci. A cette fin, on va discrétiser le modèle en découpant le domaine en strates de nombre d'ondes constant :



On obtiendra ainsi une suite de coefficients ζ_N et τ_N. Un passage à la limite permettra ensuite d'obtenir les équations souhaitées.

Dans un premier temps, on va calculer les coefficients de réflexion et de transmission lors du passage d'une strate à l'autre. Pour simplifier, on supposera que le domaine ne comporte que deux strates : pour $z < x$, le nombre d'ondes est $k_1 > 0$, et pour $z > x$, il vaut $k_2 > 0$.

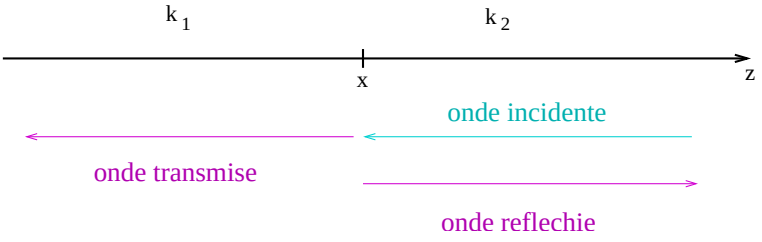


FIG. 1.3: Modèle à deux strates

On en déduit l'équation des ondes pour chaque partie du domaine :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dx^2} + k_1^2\psi = 0 \text{ si } -\infty < z < x \\ \dfrac{d^2\psi}{dx^2} + k_2^2\psi = 0 \text{ si } x < z < +\infty \\ \lim_{z\to x^-} \psi(z) = \lim_{z\to x^+} \psi(z) \\ \lim_{z\to x^-} \psi'(z) = \lim_{z\to x^+} \psi'(z) \end{cases}$$

On envoie une onde incidente se propageant dans le sens des z décroissants. La solution est de la forme :

$$\boxed{\psi(z) = \begin{cases} e^{-ik_2(z-x)} + \zeta(x)e^{ik_2(z-x)} \text{ si } x < z < +\infty \\ \tau(x)e^{ik_1(z-x)} \text{ si } -\infty < z < x \end{cases}}$$

A l'interface, ψ et ψ' doivent être continues. On en déduit les conditions de raccord suivantes :

$$\begin{cases} 1 + \zeta(x) = \tau(x) \\ -ik_2 + ik_2\zeta(x) = ik_1\tau(x) \end{cases}$$

En résolvant ce système, on trouve :

$$\begin{cases} \zeta(x) = \dfrac{k_2 - k_1}{k_1 + k_2} \\ \tau(x) = \dfrac{2k_2}{k_1 + k_2} \end{cases}$$

1.2.2 Modèle continu

On va maintenant exploiter ces résultats pour étudier un milieu continu. On suppose que le domaine est constitué de trois parties : dans la région centrale ($x_0 < z < x$), le nombre d'onde k dépend de z, et dans les deux régions extérieures, c'est une constante strictement positive. Il vaut k_0 pour $z < x_0$ et k_1 pour $z > x$. On impose en outre la condition de régularité suivante :

$$k(z + h) = k(z) + hk'(z) + o(h) \text{ pour } z > x_0.$$

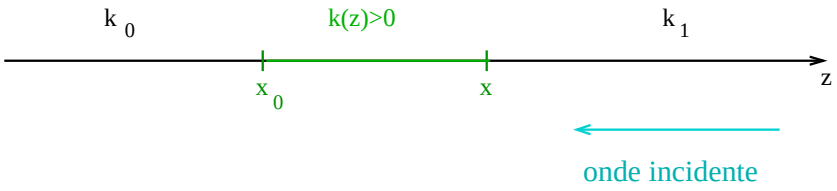


FIG. 1.4: Modèle continu

L'équation des ondes s'écrit alors :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\psi}{dz^2} + k^2(z)\psi = 0 \text{ si } x_0 < z < x \\ \dfrac{d^2\psi}{dz^2} + k_0^2\psi = 0 \text{ si } z < x_0 \\ \dfrac{d^2\psi}{dz^2} + k_1^2\psi = 0 \text{ si } x < z \\ \lim_{z\to x^-} \psi(z) = \lim_{z\to x^+} \psi(z) \\ \lim_{z\to x^-} \psi'(z) = \lim_{z\to x^+} \psi'(z) \\ \lim_{z\to x_0^-} \psi(z) = \lim_{z\to x_0^+} \psi(z) \\ \lim_{z\to x_0^-} \psi'(z) = \lim_{z\to x_0^+} \psi'(z) \end{cases}$$

On envoie une onde incidente se propageant dans le sens des z décroissants. La région centrale va réfléchir une partie de cette onde et transmettre le reste. Pour la partie droite du domaine ($z \geq x$), la solution de l'équation est composée de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\psi(x) = e^{-ik_1(z-x)} + \zeta(x)e^{ik_1(z-x)}.$$

Dans la partie gauche ($z \leq x_0$), on retrouve uniquement la partie transmise :

$$\psi(x) = \tau(x)e^{-ik_0(z-x_0)}.$$

Pour préciser les expressions des coefficients ζ et τ, on va modifier légèrement le domaine en appliquant la méthode du plongement invariant :

> **Principe du plongement invariant :** On rallonge la région centrale ($x_0 < z < x$) d'une petite longueur Δ en supposant que les propriétés de continuité s'y appliquent toujours.

Au voisinage du point d'abscisse x, l'onde incidente est $e^{-ik(x)(z-x)}$ et l'onde réfléchie a pour expression $\zeta(x)e^{ik(x)(z-x)}$. On va prolonger la région centrale jusqu'à $z = x + \Delta$ et étudier comment cela va affecter le coefficient de réflexion $\zeta(x)$.

L'onde réfléchie se décompose en trois parties :

Tout d'abord, lorsque l'onde incidente atteint la région centrale, une partie se réfléchit (ζ_1) et le reste est transmis (τ_1). Pour calculer ces coefficients, on fait appel aux formules du modèle discret avec $k_1 = k(x)$ et $k_2 = k(x + \Delta)$. On en déduit les coefficients suivants pour l'interface en $x + \Delta$:

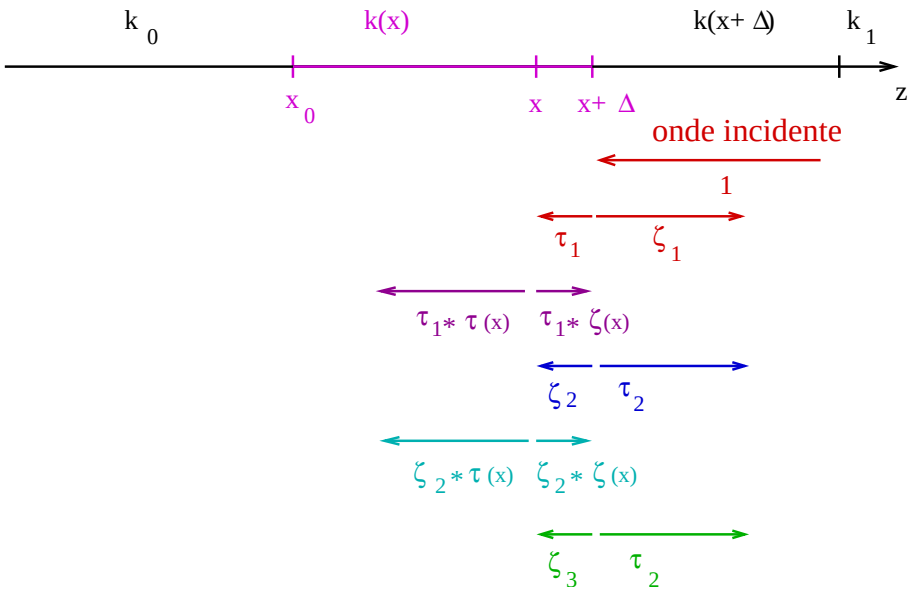


FIG. 1.5: Impact de la perturbation

$$\begin{cases} \zeta_1 = \dfrac{k(x+\Delta) - k(x)}{k(x) + k(x+\Delta)} \\ \tau_1 = \dfrac{2k(x+\Delta)}{k(x) + k(x+\Delta)} \end{cases}$$

Ensuite, l'onde transmise (τ_1), se propageant vers la gauche, atteint la limite de la partie ajoutée, c'est-à-dire l'abscisse x. Une partie est transmise en x_0 : $\tau_1 \times \tau(x)$, et $\zeta(x) \times \tau_1$ est réfléchi en x. Cette dernière composante va donc atteindre à nouveau l'abscisse $z = x+\Delta$, avec un déphasage de $e^{2ik(x)\Delta}$ dû à la traversée de la région $x < z < x + \Delta$ dans les deux sens. La partie transmise τ_2 se propage dans le sens des z croissants, dans la partie $z > x + \Delta$. La même méthode de calcul permet de calculer les coefficients de réflexion et de transmission ζ_2 et τ_2:

$$\begin{cases} \tau_2 = e^{2ik(x)\Delta} \left(\dfrac{2k(x+\Delta)}{k(x) + k(x+\Delta)} \right) \left(\dfrac{2k(x)}{k(x) + k(x+\Delta)} \right) \zeta(x) \\ \zeta_2 = e^{2ik(x)\Delta} \zeta(x) \dfrac{2k(x+\Delta)}{k(x) + k(x+\Delta)} \dfrac{-k(x+\Delta) + k(x)}{k(x) + k(x+\Delta)} \end{cases}$$

Enfin, la partie réfléchie ζ_2 repart vers l'abscisse x. Comme précédemment, la partie $\tau(x) \times \zeta_2$ est transmise vers la région centrale, tandis que la partie $\zeta(x) \times \zeta_2$ est réfléchie vers $z = x + \Delta$, qu'elle atteint avec un déphasage supplémentaire de $e^{2ik(x)\Delta}$. La partie τ_3 est transmise à la région extérieure :

$$\tau_3 = e^{4ik(x)\Delta} \zeta^2(x) \left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x) + k(x+\Delta)} \right) \left(\frac{2k(x)}{k(x) + k(x+\Delta)} \right) \frac{-k(x+\Delta) + k(x)}{k(x) + k(x+\Delta)}$$

$\zeta(x+\Delta)$ est donc la somme de ces trois contributions :

$$\zeta(x+\Delta) = \zeta_1 + \tau_2 + \tau_3.$$

Au total, on a :

$$\begin{aligned}\zeta(x+\Delta) = \; & \frac{k(x+\Delta)-k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)} + \left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\left(\frac{2k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\zeta(x)e^{2ik(x)\Delta} \\ & + \left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\left(\frac{2k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\frac{-k(x+\Delta)+k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)}\zeta^2(x)e^{4ik(x)\Delta}\end{aligned}$$

On souhaite écrire une forme simplifiée de ce coefficient de réfléxion. Pour ce faire, on va effectuer un développement limité au premier ordre. On rappelle l'hypothèse faite sur le nombre d'onde :

$$k(x+\Delta) = k(x) + \Delta k'(x) + o(\Delta)$$

Par conséquent, les principaux coefficients s'écrivent, au premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{k(x+\Delta)-k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)} = \dfrac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + o(\Delta) \\ \dfrac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)} = 1 + \dfrac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + o(\Delta) \\ \dfrac{2k(x)}{k(x)+k(x+\Delta)} = 1 - \dfrac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + o(\Delta) \\ e^{2ik(x)\Delta} = 1 + 2ik(x)\Delta + o(\Delta) \end{cases}$$

En substituant ces termes dans l'expression de $\zeta(x+\Delta)$, il vient :

$$\begin{aligned}\zeta(x+\Delta) = \; & \frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + \left(1+\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\left(1-\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\zeta(x)\left(1+2ik(x)\Delta\right) \\ & + \left(1+\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\left(-\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\left(1-\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\zeta^2(x)\left(1+4ik(x)\Delta\right) + o(\Delta)\end{aligned}$$

ce qui se développe en :

$$\zeta(x+\Delta) = \frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + \zeta(x)\left(1+2ik(x)\Delta\right) - \zeta^2(x)\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + o(\Delta)$$

On en déduit que :

$$\zeta(x+\Delta) - \zeta(x) = \frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + \zeta(x)\left(2ik(x)\Delta\right) - \zeta^2(x)\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + o(\Delta)$$

En faisant tendre Δ vers 0, on en déduit l'équation différentielle suivante pour ζ :

$$\boxed{\zeta'(x) = \frac{k'(x)}{2k(x)} + 2ik(x)\zeta(x) - \zeta^2(x)\frac{k'(x)}{2k(x)}}$$

Celle-ci comporte des termes quadratiques, il s'agit donc d'une équation de Riccati.

Une analyse similaire permet d'obtenir l'équation différentielle vérifiée par le coefficient de transmission $\tau(x)$. L'onde transmise est la somme de deux contributions :

Dans un premier temps, l'onde incidente, se propageant dans le sens des x décroissants, atteint la région centrale : la partie τ_1 est transmise en $x + \Delta$, se propage entre cette abscisse et x, puis une partie, $\tau(x)$, en est transmise vers x_0. On obtient le coefficient τ_a pour l'interface en x :

$$\tau_a = \tau(x)e^{ik(x)\Delta}\left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)$$

Une autre partie, $\zeta(x)$, est alors réfléchie vers $x + \Delta$; lorsque cette abscisse est atteinte, la partie $\dfrac{k(x)-k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}$ est réfléchie vers l'abscisse x, atteinte avec un déphasage supplémentaire de $e^{2ik(x)\Delta}$. La partie transmise est alors :

$$\tau_b = e^{ik(x)\Delta}\left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\zeta(x)e^{ik(x)\Delta}\left(\frac{k(x)-k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\tau(x)$$

On en déduit l'expresison de $\tau(x + \Delta)$:

$$\tau(x+\Delta) = \tau(x)\left(\frac{2k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\left[e^{ik(x)\Delta} + \zeta(x)e^{2ik(x)\Delta}\left(\frac{k(x)-k(x+\Delta)}{k(x)+k(x+\Delta)}\right)\right] + o(\Delta)$$

Comme précédemment, on écrit le développement limité au premier ordre pour cette expression :

$$\tau(x+\Delta) = \tau(x)\left(1+\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right)\left[1 + ik(x)\Delta - \zeta(x)(1+2ik(x)\Delta)\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right] + o(\Delta)$$

En développant, il vient :

$$\tau(x+\Delta) = \tau(x)\left(1+\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)} + ik(x)\Delta - \zeta(x)\frac{\Delta k'(x)}{2k(x)}\right) + o(\Delta)$$

On en déduit que :

$$\frac{\tau(x+\Delta)-\tau(x)}{\Delta} = \tau(x)\left(\frac{k'(x)}{2k(x)} + ik(x)\right) - \tau(x)\zeta(x)\frac{k'(x)}{2k(x)} + o(1)$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\boxed{\tau'(x) = \left(\frac{k'(x)}{2k(x)} + ik(x) - \zeta(x) \frac{k'(x)}{2k(x)} \right) \tau(x)}$$

Dans le chapitre suivant, on appliquera cette méthode de plongement invariant sur une fraction du guide. On obtiendra également une équation de Riccati, mais qui ne portera pas sur un coefficient de réflexion ou de transmission : on s'intéressera cette fois à l'opérateur reliant la solution du problème à sa dérivée, et non pas aux différentes composantes de l'onde.

1.2.3 Lien avec l'impédance acoustique

Il est cependant possible de retrouver un opérateur reliant la solution à sa dérivée à partir de ceux qui viennent d'être introduits. En effet, ceux-ci permettent d'estimer la solution de l'équation des ondes. On a, pour $x > x_0$:

$$\begin{cases} \psi(x) = 1 + \zeta(x) \\ \psi'(x) = -ik(x)(1 - \zeta(x)) \end{cases}$$

Il est alors possible de définir l'équivalent de l'impédance acoustique introduite dans la première section : soit Z qui à $\psi(x)$ associe sa dérivée $\psi'(x)$ (Z correspond à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann étudié au chapitre II). On a alors :

$$Z(x) = -ik(x) \frac{1 - \zeta(x)}{1 + \zeta(x)}$$

1.3 Une méthode de factorisation du problème de Helmholtz

Ya Yan Lu (cf [20], [21], [22], [23], [24]) propose lui aussi une méthode de résolution de l'équation des ondes apparentée au plongement invariant : en la factorisant, il transforme celle-ci en un système d'équations différentielles du premier ordre. Cette démarche fait encore intervenir un opérateur vérifiant une équation de Riccati, et permet de tirer profit de la géométrie du domaine : en effet, la longueur du guide étudié est largement supérieure à la longueur d'ondes, ce qui rend les méthodes d'éléments finis et de différences finies peu efficaces. La factorisation est beaucoup plus intéressante d'un point de vue numérique. On présentera dans un premier temps la factorisation du problème, puis la méthode de résolution mise en oeuvre, avant d'indiquer le lien avec le plongement invariant.

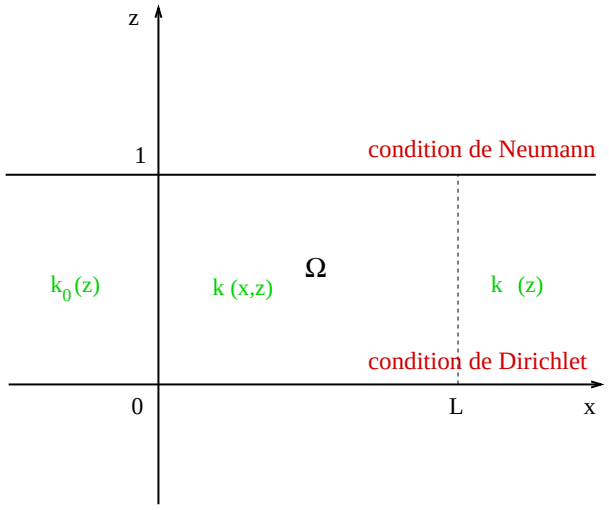


FIG. 1.6: Guide d'ondes

1.3.1 Factorisation du problème

On considère un guide d'ondes bidimensionnel

$$\mathcal{D} = \{(x, z) \ / \ -\infty < x < +\infty \text{ et } 0 < z < 1\},$$

dans lequel on cherche à résoudre le problème :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2(x,z)u = 0 \\ u(x,0) = 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,1) = 0 \end{cases}$$

On impose donc une condition de Dirichlet sur le bord inférieur et une condition de Neumann sur le bord supérieur. Le nombre d'onde k prend des valeurs différentes selon les régions du guide :

$$k = \begin{cases} k(x,z) & \text{pour } 0 < x < L \\ k_0(z) & \text{pour } x \leq 0 \\ k_\infty(z) & \text{pour } x \geq L \end{cases}$$

On suppose qu'il n'y a pas d'onde incidente venant de $x = +\infty$; ainsi, on peut résoudre le problème dans le domaine réduit :

$$\Omega = \{(x, z) \ / \ 0 < x < L \text{ et } 0 < z < 1\}$$

en imposant la condition de radiation exacte en $x = L$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}u$$

La condition que l'on imposera sur le bord $x = 0$ dépendra de la configuration choisie. En particulier, on peut envisager le cas d'une impulsion en $x = 0$ ou d'une source distribuée verticalement sur la face $x = 0$.

On écrit alors l'opérateur de Helmholtz sous la forme :

$$\Delta + k^2 I = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}\right) \text{ pour } x \geq L\,(x \to +\infty)$$

ce qui permet de caractériser la solution du problème par :

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}u \text{ pour } x \to +\infty$$

Comme on le verra au chapitre V, ceci revient à choisir les ondes se propageant vers la droite. Lorsque le nombre d'onde est constant, cette formule est exacte ; dans le cas contraire, il s'agira d'une approximation.

On introduit alors l'opérateur Dirichlet-to-Neumann :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Qu$$

Celui-ci permet de reformuler le problème comme :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x, z) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + Q\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - Q\right)$$

Si k est indépendant de x, devient :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}u$$

Ces calculs seront expliqués plus en détail en II.1.1.

Remarque 1.1 *Grâce au plongement invariant, le chapitre II va permettre d'étendre ces résultats au cas du problème non homogène et donnera une formule exacte. En effet, dans le cas général, la relation entre la solution et sa dérivée est affine :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = Qu + r$$

On étudiera également l'évolution de la partie affine r.

L'opérateur Q vérifie une équation de Riccati :

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 = \left(-\frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \text{ pour } x \leq L$$

La condition initiale pour cette équation découle de la condition de radiation en $x = L$:

$$Q(L) = i\sqrt{\frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}$$

Ainsi, on obtient un système découplé :

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} + Q^2 = \left(-\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2\right) \; ; & Q(L) = i\sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)} \; ; \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = Qu \; ; & u(0) \; ; \end{cases}$$

On obtient un système similaire au chapitre II, mais qui comporte une troisième équation tenant compte de l'évolution de la partie affine.

1.3.2 Résolution du problème aux deux bouts

On cherche à résoudre les deux équations du système simultanément. A cette fin, on introduit l'opérateur Y qui associe à la condition de Dirichlet en x la condition de Dirichlet en L :

$$Y(x)u(x,z) = u(L,z)$$

On montre que Y est solution du système :

$$\begin{cases} \dfrac{dY}{dx} = -YQ \\ Y(L) = I \end{cases}$$

Pour des raisons de stabilité, on résout l'équation d'évolution pour Y et l'équation de Riccati pour Q dans le sens des x décroissants. Il est alors possile d'évaluer $u(x,z)$; pour ce faire, on calcule $u(L,z)$ grâce à la relation :

$$u(L,z) = Y(0)u(0,z),$$

et l'on obtient alors la valeur de la solution en tout point du domaine :

$$u(x,z) = Y(0)u(0,z).$$

Cette méthode est particulièrement avantageuse lorsque l'on ne cherche à estimer la solution qu'en un nombre fini de points du domaine.

Cependant, l'opérateur Q n'est pas toujours défini en tout point du guide. En effet, si le problème

$$\begin{cases} -(\Delta + k^2(x,z))u = \mu u & x > x_\star \text{ et } x \in \mathcal{D} \\ u(x,0) = \dfrac{\partial u}{\partial z}(x,1) = 0 & x > x_\star \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = i\sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)}u & x \geq L \text{ et } 0 < z < 1 \\ u(x_\star, z) = 0 & 0 < z < 1 \end{cases}$$

admet $\mu = 0$ comme valeur propre, la solution du problème n'est pas unique et Q n'est pas défini en $x = x_\star$. D'un point de vue numérique, cela correspond à une explosion de l'approximation de Q. Une méthode de calcul classique de ces explosions consiste à chercher une solution du problème à variables séparées en introduisant une base de fonctions propres.

L'approche proposée par Ya Yan Lu pour pallier cette difficulté consiste à faire intervenir l'opérateur Neumann-to-Dirichlet $H = Q^{-1}$ ou Robin-to-Dirichlet $J_a = (Q - aI)^{-1}$, où a est une constante.

L'opérateur Neumann-to-Dirichlet vérifie l'équation de Riccati :

$$\begin{cases} \dfrac{dH}{dx} = I + H\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x,z)\right)H \\ H(L) = -i\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)\right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

La solution du problème de Helmholtz est calculée par la relation :

$$W(x)\frac{\partial u}{\partial x}(x,z) = u(L,z)$$

où l'opérateur W vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{dx} = W\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x,z)\right)H \\ W(L) = -i\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)\right)^{-\frac{1}{2}} \end{cases}$$

L'opérateur Robin-to-Dirichlet satisfait lui aussi une équation de Dirichlet :

$$\begin{cases} \dfrac{dJ_a}{dx} = I + 2aJ_a + J_a\left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x,z) + a^2\right)J_a \\ J_a(L) = \left(i\sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)} - aI\right)^{-1} \end{cases}$$

On peut retrouver la solution à partir de cet opérateur en introduisant M_a reliant la condition de Robin en x à la condition de Dirichlet en L :

$$M_a(x)\left(\frac{\partial u}{\partial x} - au\right)(x,z) = u(L,z)$$

Cet opérateur est tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{dM_a}{dx} = M_a\left(aI + \left(\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x,z) + a^2\right)J_a\right) \\ M_a(L) = \left(i\sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k_\infty^2(z)} - aI\right)^{-1} \end{cases}$$

Le principe de calcul est donc le suivant : on démontre que lorsque Q n'est pas défini en $x_\star$, alors soit $H(x_\star)$ est bien défini, soit il existe une constante a telle que $J_a(x_\star)$ est défini. Lorsque Q est bien défini, on résout le système en Q, Y et on calcule ensuite la solution ; dans le cas contraire, on calcule J_a ou H ainsi que l'opérateur associé dans un voisinage de $x_\star$. Les relations de passage d'un opérateur à l'autre sont :

$$\begin{cases} H = Q^{-1}\ ; & Q = H^{-1}\ ; \\ J_a = (Q - aI)^{-1}\ ; & J_a^{-1} + aI = Q\ ; \end{cases}$$

L'estimation numérique de la solution s'effectue en discrétisant le problème. On découpe le domaine en $m+1$ intervalles $[x_j, x_{j+1}]$ tels que :

$$0 = x_0 < x_1 < ... < x_j < ... < x_m = L,$$

et on évalue les opérateurs au point médian de chaque intervalle $x_{j-\frac{1}{2}} = \dfrac{x_{j-1} + x_j}{2}$.

1.3.3 Lien avec le plongement invariant

Comme on l'a évoqué dans le paragraphe précédent, cette factorisation de l'opérateur de Helmholtz permet de distinguer les ondes se propageant vers la droite ou vers la gauche. En les notant respectivement u^+ et u^- et en désignant par u la solution du problème, on aboutit au système suivant :

$$\begin{cases} u = u^+ + u^- \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} = iB(x)u^+ - iB(x)u^- \end{cases}$$

où B vérifie : $B(x) = \sqrt{\dfrac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2(x,z)}$. On introduit alors l'opérateur

$$\alpha(x) = \frac{B^{-1}(x)B'(x)}{2}$$

qui permet de calculer les dérivées de u^+ et de u^- :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u^+}{\partial x} \\ \dfrac{\partial u^-}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} iB(x) - \alpha(x) & \alpha(x) \\ \alpha(x) & -iB(x) - \alpha(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^+ \\ u^- \end{pmatrix}$$

On a ainsi remplacé l'équation aux dérivées partielles par un système d'équations différentielles couplées du premier ordre. Comme dans la section précédente, on définit l'opérateur de réflexion tel que :

$$R(x)u^+(x,z) = u^-(x,z),$$

et l'on démontre qu'il est solution d'une équation de Riccati :

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dx} = \alpha(x) - (iB(x) + \alpha(x))\,R - R\,(iB(x) - \alpha(x)) - R\alpha(x)R \\ R(L) = 0 \end{cases}$$

De même, l'opérateur de transmission T tel que :

$$T(x)u^+(x,z) = u^+(L,z)$$

est solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = -T\,(iB(x) - \alpha(x)(I - R(x))) \\ T(L) = I \end{cases}$$

Des opérateurs similaires apparaîtront au chapitre V, dans la transformation homographique ; celle-ci présente toutefois des spécificités : elle fait appel à des opérateurs stationnaires, qui permettent de donner une autre expression des opérateurs Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet sans passer par une décomposition modale et de déterminer rapidement leurs singularités. En outre, la méthode qui sera présentée, ainsi que le plongement invariant, permettront d'introduire d'autres opérateurs (en particulier l'opérateur Absorbant-to-Absorbant étudié au chapitre VI) et d'en donner une autre expression.

Chapitre 2

Factorisation du problème de Helmholtz

On cherche à réduire le problème de Helmholtz par une méthode de factorisation des opérateurs elliptiques du second ordre. De même que les polynômes du second degré, les opérateurs aux dérivées partielles peuvent s'écrire comme une composition d'opérateurs du premier ordre. Cette étude fait donc apparaître des opérateurs particuliers qui peuvent être rapprochés des racines des polynômes, et qui sont solution d'une équation de Riccati (cf [12], [13]).

On va présenter les principes de cette méthode à l'aide d'un cas simple : on étudie la décomposition du problème en choisissant comme domaine d'étude un cylindre de dimension n de section constante. Elle s'appuie sur la technique du plongement invariant présentée par Bellman (cf [4]) : en se limitant à une portion du domaine, on introduit un opérateur défini sur une section du cylindre. Celui-ci permet de factoriser le problème et il est solution d'une équation de Riccati. Il est de type Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet et correspond à l'impédance acoustique généralisée définie par les physiciens (cf [27]). La méthode présentée a été étudiée pour le problème de Poisson (cf [12]), mais n'avait pas été étendue au problème de Helmholtz.

Après avoir considéré deux factorisations possibles pour l'équation de Helmholtz, on étudiera plus précisément ces opérateurs sur la section par une décomposition modale. Celle-ci donnera une première approche des singularités de ces opérateurs, encore appelées "résonances de boîte". En particulier, elle permet de distinguer les résonances de chaque opérateur, et de considérer le cas où tous deux sont singuliers simultanément.

2.1 Première formulation

On définit le domaine $\Omega =]0; a[\times O \in \mathbb{R}^n$. Un point du domaine est noté (x, z) où x est la coordonnée le long de l'axe du cylindre (qui correspond aussi à la direction de propagation

de l'onde) et z représente les $n-1$ autres coordonnées. La coordonnée x va jouer le rôle du temps dans la factorisation.

On suppose que la section $O \in \mathbb{R}^{n-1}$ du cylindre est bornée, de frontière régulière. On note $\Gamma_0 = \{0\} \times O$, $\Gamma_a = \{a\} \times O$ les faces du cylindre et $\Sigma = \partial O \times]0; a[$ le bord latéral. Enfin, on appelle $\Delta_\perp$ le Laplacien par rapport à z sur une section transversale.

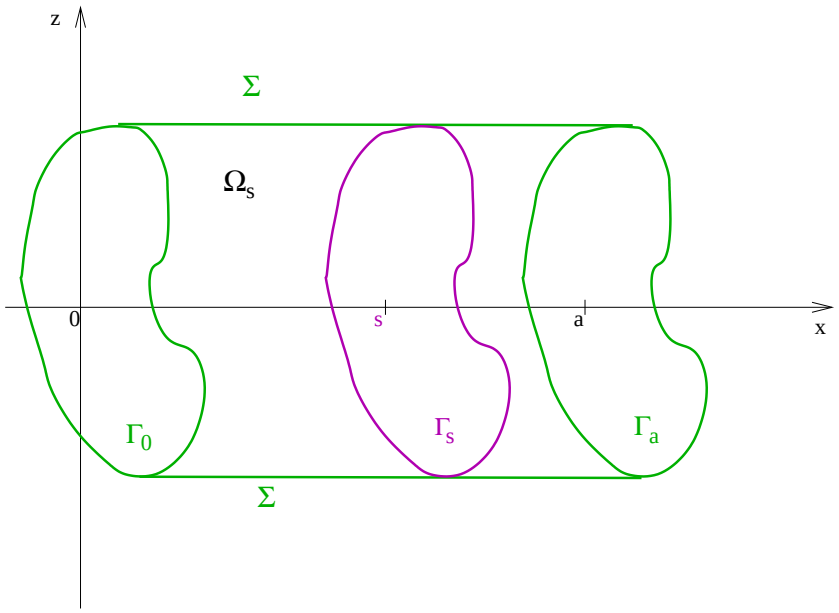


FIG. 2.1: Guide d'ondes

On étudie le problème :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta y = -\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \Delta_\perp y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ y|_{\Gamma_a} = y_1 \ ; \ -\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \end{cases}$$

où y est cherché dans l'espace $L^2(0,a;H_0^1(O)) \cap H^1(0,a;L^2(O))$, avec f élément de $L^2(\Omega)$, $y_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ et $y_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$.

2.1.1 Factorisation de l'équation de Helmholtz

La méthode de factorisation consiste à fractionner le domaine d'étude en introduisant une frontière mobile $\Gamma_s = \{s\} \times O$ sur laquelle on impose une condition de Dirichlet ou de Neumann et à définir un opérateur reliant la valeur de la solution ou de sa dérivée à

cette condition au bord, puis à déplacer cette frontière d'une extrémité à l'autre du guide. Chaque type de condition sur la frontière mobile va mener à une factorisation.

Dans un premier temps, on se restreint au domaine $\Omega_s =]0; s[\times O$ compris entre la face gauche du cylindre et la frontière mobile, et on impose une condition de type Dirichlet sur celle-ci. Γ_s est confondue initialement avec Γ_0, on la fait ensuite évoluer dans le sens des x croissants.

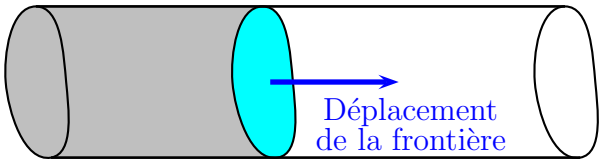


FIG. 2.2: Déplacement de la frontière

Soit f un élément de $L^2(\Omega)$. Le problème à résoudre dans le domaine restreint s'écrit :

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \quad \text{dans} \quad \Omega_s \\ y|_\Sigma = 0, \quad -\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \quad y|_{\Gamma_s} = h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O). \end{cases}$$

En fait, on définit ainsi toute une famille de problèmes de Helmholtz, indicée par les paramètres $s \in [0, a]$ et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$. En particulier, pour $s = a$ et $h = y_1$, on retrouve le problème $\mathcal{P}_0$.

On note Y_s l'espace suivant :

$$Y_s = \left\{ y \in H^1(\Omega_s) \,/\, y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in L^2(0, s; H^{-1}(O)) \right\}.$$

$\forall s \in]0, a[$ et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, on définit les opérateurs de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ vers son dual :

$Q(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ où $\gamma \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \text{ dans } \Omega_s \\ \gamma|_\Sigma = 0, \quad -\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_s} = h \end{cases}$$

$r(s) = \dfrac{\partial \beta}{\partial x}|_{\Gamma_s}$ où $\beta \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\beta = k^2\beta + f \text{ dans } \Omega_s \\ \beta|_\Sigma = 0, \quad -\dfrac{\partial\beta}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \quad \beta|_{\Gamma_s} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $Q(0)h = 0$ et $r(0) = -y_0$.

Remarque 2.1 *Ces opérateurs sont bien définis si et seulement si le problème de Helmholtz admet une solution unique, c'est-à-dire s'il est bien posé (cf Annexe). Ce n'est pas toujours le cas, car l'opérateur $\Delta + k^2$ n'est pas injectif. Si k^2 est une valeur propre pour le Laplacien, le noyau de l'opérateur de Helmholtz est une droite vectorielle ; il est alors impossible de donner un sens à Q et à r.*
Dans la suite du calcul, on supposera que le problème est bien posé. On étudiera dans la dernière section les configurations pour lesquelles il ne l'est pas : on dit alors qu'il y a résonance de boîte.

Q est donc un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann ; il agit sur des fonctions définies sur la section du guide. En outre, l'opérateur Q dépend de s : en faisant varier la longueur s de la boîte, on modifie le problème $(\mathcal{P}_{s,h})$, et on obtient donc une solution y différente.

Un argument de linéarité du problème aux limites $\mathcal{P}_{s,h}$ permet d'écrire que :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,z) = Q(x)y(x,z) + r(x,z) \tag{2.1}$$

En dérivant formellement cette relation, on obtient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{dQ}{dx}y + Q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}$$

Or, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - k^2 y - f$, alors :

$$-(\Delta_\perp + k^2 I)y - f = \frac{dQ}{dx}y + Q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}$$

ce qui est équivalent à :

$$f + \frac{\partial r}{\partial x} + Qr = -\frac{dQ}{dx}y - Q^2 y - (\Delta_\perp + k^2 I)y$$

Comme y est arbitraire (on peut en effet se donner n'importe quelle condition $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ sur Γ_s), cette relation est en fait une identité, dont chaque membre est nul, ce qui signifie que :

$$\begin{cases} f + \dfrac{\partial r}{\partial x} + Qr = 0 \\ \left(\dfrac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) \right) y = 0 \end{cases}$$

En particulier, la deuxième équation est vérifiée pour tout $y \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, on en déduit que l'opérateur :

$$\left(\frac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) \right)$$

est nul. Ceci permet d'obtenir le système découplé suivant :

$$(S) \begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) = 0 \ ; \ Q(0) = 0 \ ; \\ f + \dfrac{\partial r}{\partial x} + Qr = 0 \ ; \ r(0) = -y_0 \ ; \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} = Qy + r \ ; \ y(a) = y_1 \ . \end{cases}$$

La condition de Dirichlet nulle sur le bord latéral Σ permet d'obtenir une solution $y|_{\Gamma_s}$ appartenant à l'espace $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ presque partout.

En particulier, Q est solution d'une équation de Riccati, i.e. d'une équation différentielle avec un terme quadratique :

$$\boxed{\frac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) = 0} \qquad (2.2)$$

La méthode employée présente l'avantage d'obtenir une équation différentielle pour Q de manière intrinsèque, i.e. sans faire intervenir de base de fonctions propres.

Remarque 2.2 *Le calcul peut également être effectué sous une forme variationnelle :*

Soit $\varphi \in H_0^1(O)$. Alors, pour presque tout x dans $]0, a[$, la relation affine (2.1) s'écrit :

$$(\frac{\partial y}{\partial x}(x), \varphi) = (Q(x)y(x), \varphi) + (r(x), \varphi),$$

où $(.,.)$ représente le produit scalaire dans $L^2(O)$.

En dérivant cette relation par rapport à x, il vient :

$$(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x), \varphi) = (\frac{dQ}{dx} y, \varphi) + (Q\frac{\partial y}{\partial x}, \varphi) + (\frac{\partial r}{\partial x}, \varphi)$$

Une substitution permet d'obtenir :

$$(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x), \varphi) = (\frac{dQ}{dx} y, \varphi) + (Q^2 y, \varphi) + (Qr, \varphi) + (\frac{\partial r}{\partial x}, \varphi)$$

Or, le membre de gauche vaut, d'après la formule de Green :

$$(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x), \varphi) = (\nabla_\perp y, \nabla_\perp \varphi) - (f, \varphi),$$

car φ est nul sur le bord ∂O.

Finalement, on a :

$$(Qr, \varphi) + (\frac{\partial r}{\partial x}, \varphi) = (\nabla_\perp y, \nabla_\perp \varphi) - (f, \varphi) - (\frac{dQ}{dx} y, \varphi) - (Q^2 y, \varphi).$$

Le système découplé devient :

$$\begin{cases} (Qr, \varphi) + (\frac{\partial r}{\partial x}, \varphi) = (\nabla_\perp y, \nabla_\perp \varphi) - (f, \varphi) - (\frac{dQ}{dx} y, \varphi) - (Q^2 y, \varphi), \forall \varphi \in H_0^1(O)\,; & r(0) = -y_0\,; \\ (-\frac{\partial y}{\partial x}, \varphi) + (Qy, \varphi) = -(r, \varphi), \forall \varphi \in L^2(O)\,; & y(a) = y_1\,; \end{cases}$$

En combinant les deux dernières équations du système S, on obtient la forme factorisée du problème de Helmholtz ; en effet, on a :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + Q\right) r = -f \text{ et } \left(\frac{\partial}{\partial x} - Q\right) y = r\ ;$$

il en résulte que :

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} + Q\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - Q\right) y = f$$

Comme Q est autoadjoint (ce qui sera étudié ultérieurement), les deux facteurs sont adjoints l'un de l'autre.

En conclusion, cette méthode peut être interprétée comme une généralisation en dimension infinie de la factorisation de Gauss par blocs "LU" : la résolution se fait en deux temps. Tout d'abord, il faut résoudre l'équation de Riccati pour Q, ce qui revient à factoriser le problème. Ensuite, on résout l'équation sur r pour les x croissants, ce qui correspond à la phase de descente dans la factorisation de Gauss. Puis on intègre l'équation sur y dans le sens des x décroissants, ce qui correspond à la phase de remontée dans la factorisation.

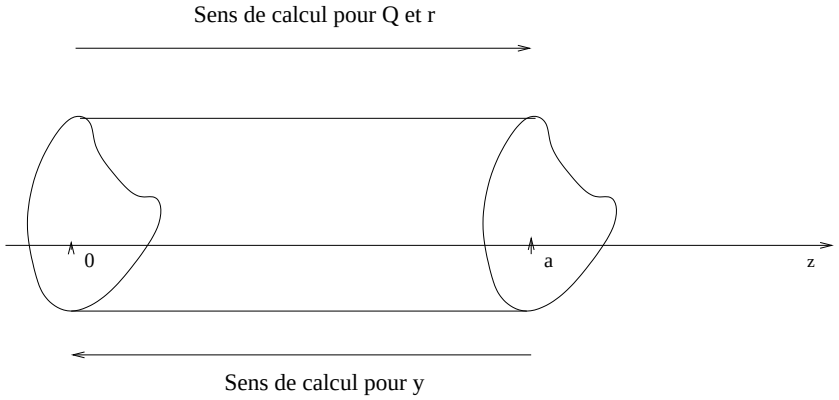


FIG. 2.3: Sens de calcul

2.1.2 Réciproque

On vient de voir que la factorisation du problème de Helmholtz permet d'obtenir un système découplé d'équations aux conditions initiales ; on va maintenant établir la réciproque, i.e. montrer comment on peut retrouver le problème de Helmholtz à partir de ce système découplé.

Lemme 2.1 *Soit* $y, r \in Y_a$ *et* $Q \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O),\, H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'\right)$ *vérifiant le système découplé:*

$$(S)\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) = 0 \ ;\ Q(0) = 0 \ ; \\ f + \dfrac{\partial r}{\partial x} + Qr = 0 \ ;\ r(0) = -y_0 \ ; \\ \dfrac{\partial y}{\partial x} = Qy + r \ ;\ y(a) = y_1 \ . \end{cases}$$

Alors y *est solution du problème de Helmholtz* $\mathcal{P}_0$.

Démonstration 2.1.1 *Pour ce faire, on utilise la relation affine* $\dfrac{\partial y}{\partial x} = Qy + r$ *et on la dérive formellement :*

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{dQ}{dx} y + Q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x}$$

L'équation différentielle sur r *permet de remplacer* $\dfrac{\partial r}{\partial x}$ *par* $-Qr - f$ *:*

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = \frac{dQ}{dx} y + Q\frac{\partial y}{\partial x} - Qr - f$$

L'équation de Riccati sur l'opérateur Q permet alors de remplacer le terme $\frac{dQ}{dx}$:

$$\frac{\partial y^2}{\partial x^2} = -Q^2 y - \Delta_\perp y - k^2 y + Q\frac{\partial y}{\partial x} - f - Qr$$

Or, $Q\frac{\partial y}{\partial x} = Q^2 y + Qr$, d'où :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -Q^2 y - \Delta_\perp y - k^2 y + Q^2 y + Qr - f - Qr$$

Ce qui se simplifie en :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - k^2 y - f$$

Finalement, on obtient :

$$-\Delta y = k^2 y + f.$$

y vérifie bien l'équation de Helmholtz ; on va maintenant prouver que les conditions aux bords du problème $\mathcal{P}_0$ sont également respectées.

Tout d'abord, $y|_\Sigma = 0$, puisque $y \in Y_s$, et $y(a) = y_1$ (condition initiale pour le système). Il reste à prouver que y vérifie la condition de Neumann sur la face gauche du cylindre :

En $x = 0$, on a : $\frac{\partial y}{\partial x}(0) = Q(0)\, y(0) + r(0)$,

avec $Q(0) = 0$ et $r(0) = -y_0$.

On en déduit que :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(0) = -y_0.$$

y est donc bien solution de $\mathcal{P}_0$.

On vient de voir que les deux systèmes sont équivalents : on a remplacé un problème aux bords par un système découplé aux conditions initiales.

2.1.3 Propriétés de Q

L'opérateur Q a été défini formellement ; on va maintenant préciser son cadre fonctionnel.

Lemme 2.2 *Pour tout $s \in [0,a]$ pour lequel le problème $\mathcal{P}_{s,h}$ est bien posé, $Q(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$.*

Démonstration 2.1.2 *Soit un tel $s \in [0,a]$ fixé, $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors le problème :*

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_s \\ \gamma|_\Sigma = 0, -\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0, \gamma|_{\Gamma_s} = h \end{cases}$$

admet une solution unique γ appartenant à Y_s.

Par conséquent, $\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}$ est dans $L^2(\Omega_s)$ et sa trace sur Γ_s appartient à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$: ainsi, $Q(s)h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$.

Lemme 2.3 *$Q(s)$ est un opérateur symétrique.*

Démonstration 2.1.3 *Soient h, $h' \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ et y, y' les éléments de Y_s solutions du problème de Helmholtz homogène tels que :*

$$Q(s)h = \frac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} \text{ et } Q(s)h' = \frac{\partial y'}{\partial x}|_{\Gamma_s}.$$

On a la relation:

$$< h, Q(s)h' >_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)\times H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'} = < y|_{\Gamma_s}, \frac{\partial y'}{\partial x}|_{\Gamma_s} >_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)\times H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'}$$

Comme y' est solution du problème de Helmholtz homogène, on a :

$$-\Delta y' = k^2 y'.$$

Le produit scalaire avec y dans $L^2(\Omega_s)$ s'écrit :

$$\int_{\Omega_s} -\Delta y' y dx dz = \int_{\Omega_s} k^2 y' y dx dz$$

En intégrant par parties, on obtient :

$$\int_{\Omega_s} \nabla y'.\nabla y dxdz - \int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial y'}{\partial n}.y d\tau = \int_{\Omega_s} k^2 y' y dxdz$$

Comme $y|_\Sigma = 0$ *et que* $\frac{\partial y'}{\partial n}|_{\Gamma_0} = -\frac{\partial y'}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0$*, il vient :*

$$\int_{\partial\Omega_s} \frac{\partial y'}{\partial n}.y d\tau = \int_{\Gamma_s} \frac{\partial y'}{\partial x} y d\tau =< y|_{\Gamma_s}, \frac{\partial y'}{\partial x}|_{\Gamma_s} >_{H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)\times H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'}$$

Finalement, on obtient :

$$< h, Q(s)h' >= \int_{\Omega_s} \nabla y.\nabla y' dxdz - \int_{\Omega_s} k^2 y'.y dxdz =< h', Q(s)h >,$$

ce qui démontre la symétrie de l'opérateur Q*.*

Remarque 2.3 *La formulation variationnelle permet de constater que l'opérateur* Q *n'est ni positif, ni négatif, et par conséquent que ni* Q*, ni* $-Q$ *ne sont coercifs.*

2.2 Deuxième formulation

Pour factoriser le problème de Helmholtz, on a choisi arbitrairement de se restreindre à la partie gauche du guide d'ondes et d'imposer une condition de type Dirichlet sur la frontière mobile. Cependant, il est tout à fait possible de factoriser le problème sur l'autre partie du guide, ou de choisir une condition différente sur la frontière mobile. La formulation obtenue aboutira encore à un système découplé, avec un opérateur solution d'une équation de Riccati.

2.2.1 Factorisation du problème

On va mettre en oeuvre la méthode de factorisation pour la famille des domaines complémentaires : on se restreint au domaine $\tilde{\Omega}_s =]s; a[\times O$ compris entre la face droite du guide et la frontière mobile Γ_s, sur laquelle on définit une condition de Neumann arbitraire. La frontière se déplace cette fois de a vers 0.

On va donc définir une famille de problèmes $\mathcal{P}'_{s,h}$ sur le domaine restreint :

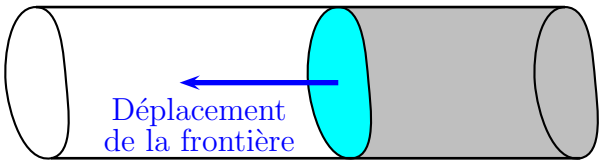


FIG. 2.4: Déplacement de la frontière mobile

$$(\mathcal{P}'_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \quad \text{dans} \quad \tilde{\Omega}_s \\ y|_\Sigma = 0, \quad y|_{\Gamma_a} = y_1, \quad \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h \in H_{00}^{'\frac{1}{2}}(O). \end{cases}$$

On note $\tilde{Y}_s$ l'espace fonctionnel :

$$\tilde{Y}_s = \left\{ y \in H^1(\tilde{\Omega}_s) \,/\, y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in L^2(s,a;H^{-1}(O)) \right\}.$$

$\forall s \in]0,a[$ et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, on définit les opérateurs de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$:

$P(s)h = \gamma|_{\Gamma_s}$ où $\gamma \in \tilde{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_s \\ \gamma|_\Sigma = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_a} = 0, \quad \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h \end{cases}$$

$r(s) = \beta|_{\Gamma_s}$ où $\beta \in \tilde{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\beta = k^2\beta + f \text{ dans } \Omega_s \\ \beta|_\Sigma = 0, \quad \beta|_{\Gamma_a} = y_1, \quad \dfrac{\partial \beta}{\partial x}|_{\Gamma_s} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $P(a) = 0$, $r(a) = y_1$.

On obtient ainsi un opérateur P qui agit sur des fonctions définies sur la section. Il s'agit cette fois d'un opérateur de type Neumann-to-Dirichet. Le calcul est toujours effectué en deux temps : tout d'abord, on résout l'équation sur P et r dans le sens des x décroissants, avant de calculer la solution y de 0 vers a :

Comme pour la formulation précédente, le caractère linéaire du problème permet d'écrire :

$$y(x,z) = P(x)\frac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma(x)}(z) + r(x) \tag{2.3}$$

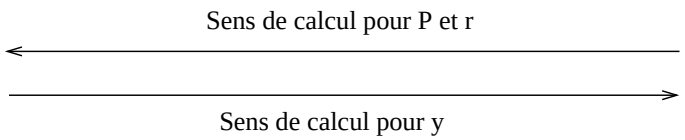


FIG. 2.5: Sens de calcul pour la factorisation adjointe

On dérive formellement cette relation :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x}$$

L'équation de Helmholtz permet d'obtenir : $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - k^2 y - f$. Alors :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - P\Delta_\perp P\frac{\partial y}{\partial x} - P\Delta_\perp r - k^2 P^2\frac{\partial y}{\partial x} - k^2 Pr + \frac{\partial r}{\partial x} - Pf$$

On en déduit que :

$$\left(-\frac{dP}{dx} + P(\Delta_\perp + k^2)P + I\right)\frac{\partial y}{\partial x} = -P(\Delta_\perp + k^2)r + \frac{\partial r}{\partial x} - Pf$$

Comme les problèmes sont indépendants, cette équation se découple pour donner le système suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - P(\Delta_\perp + k^2)P - I = 0\ ;\ P(a) = 0\ ; \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2)r = Pf\ ;\ r(a) = y_1\ ; \\ -P\dfrac{\partial y}{\partial x} + y = r\ ;\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(0) = y_0\ . \end{cases}$$

En combinant les deux dernières équations du système, on obtient la factorisation du problème de Helmholtz :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2)\right)\left(I - P\frac{\partial}{\partial x}\right)y = Pf$$

L'opérateur Neumann-to-Dirichlet vérifie donc lui aussi une équation de Riccati :

$$\boxed{\frac{dP}{dx} - P(\Delta_\perp + k^2 I)P - I = 0} \qquad (2.4)$$

De même que pour la première formulation, ce système découplé permet de retrouver le problème de Helmholtz $\mathcal{P}_0$:

Lemme 2.4 *Soit $y,\, r \in \tilde{Y}_0$ et $P \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ solution du système découplé :*

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - P(\Delta_\perp + k^2)P - I = 0 \ ; \ P(a) = 0 \ ; \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2)r = Pf \ ; \ r(a) = y_1 \\ -P\dfrac{\partial y}{\partial x} + y = r \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x}(0) = y_0 \ . \end{cases}$$

Alors y est solution du problème de Helmholtz $\mathcal{P}_0$.

Ce lemme se démontre de la même manière que pour la première formulation.

Remarque 2.4 *Comme on le verra par la suite, l'équation de Riccati sur Q peut être reliée à un problème de contrôle. Il en est de même pour P, et le problème lié à ce dernier corespond au "problème dual" du premier.*

2.2.2 Quelques propriétés de P

On va maintenant préciser le cadre fonctionnel de cet opérateur.

Lemme 2.5 *Pour tout $s \in [0, a]$ pour lequel le problème de Helmholtz est bien posé, $P(s)$ est un opérateur linéaire : $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)' \to H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$.*

Démonstration 2.2.1 *Comme précédemment, la linéarité de l'opérateur P provient de la linéarité du problème de Helmholtz ; il reste à vérifier que $P(s) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' \, , \, H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$:*

Soit un tel $s \in [0, a]$ fixé et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$. Alors le problème :

$$\begin{cases} -\Delta y = k^2 y \ \textit{dans} \ \Omega_s \\ y|_\Sigma = 0, \ -\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h, \ y|_{\Gamma_a} = 0. \end{cases}$$

a une solution unique $y \in Y_s$, ce qui signifie en particulier que $y \in H_0^1(\Omega_s)$. Par conséquent, sa trace sur Γ_s : $y|_{\Gamma_s} = P(s)h$ appartient à $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$.

Lemme 2.6 *$\forall s$, $P(s)$ est symétrique.*

Démonstration 2.2.2 *Soient h, h' deux éléments de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ et y, y' les solutions dans Y_s du problème de Helmholtz homogène telles que :*

$$P(s)h = y|_{\Gamma_s} \text{ et } P(s)h' = y'|_{\Gamma_s}.$$

On calcule le produit scalaire sur la section Γ_s :

$$< h, P(s)h' >=< \frac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}, \gamma'|_{\Gamma_s} >$$

La même formulation variationnelle que précédemment permet d'écrire que :

$$< h, P(s)h' >=< k^2\gamma, \gamma' > - \int_{\Omega_s} \nabla\gamma\nabla\gamma' =< \gamma|_{\Gamma_s}, h' >=< P(s)h, h' >$$

d'où la conclusion.

Remarque 2.5 *Comme pour la formulation précédente, on constate que l'opérateur $P(s)$ n'est ni positif, ni négatif, et qu'il n'est donc pas coercif.*

Remarque 2.6 *L'opérateur P correspond à l'impédance acoustique utilisée par les physiciens, c'est pour cette raison que l'on effectuera certains calculs en faisant appel à la deuxième formulation. En revanche, le sens de calcul et l'équation de Riccati correspondant à Q sont plus simples et plus naturels, donc la première formulation sera choisie pour beaucoup de démonstrations.*

2.3 Décomposition modale

On a vu que pour certaines longueurs du guide d'ondes, le problème de Helmholtz est mal posé, ce qui crée une singularité pour P. Il est donc essentiel de connaître un peu mieux le comportement de cet opérateur, ainsi que l'emplacement des points de singularité. Pour ce faire, on va mettre en oeuvre une méthode classique (cf [11], [25]), la décomposition modale, qui consiste à écrire les variables du problème dans une base diagonalisante pour le Laplacien transversal. Dans un premier temps, on va expliquer comment écrire les données dans cette base ; ensuite, on calculera P et on en déduira l'expression de la partie affine r.

2.3.1 Ecriture dans une base de fonctions propres

On va commencer par définir la base de fonctions propres qui permet de diagonaliser le laplacien transversal.

Lemme 2.7 *L'opérateur $\Delta_\perp$ agissant sur des fonctions définies sur la section O, associé à une condition de Dirichlet nulle sur le bord ∂O, est diagonalisable dans une base orthonormale de $L^2(O)$ et orthogonale pour $H^1(O)$.*

Démonstration 2.3.1 *L'opérateur $A : u \in \mathcal{D}(A) \subset L^2(O) \to Au \in L^2(O)$ défini par :*

$$< Au, v >_{L^2(O)\times L^2(O)} = \int_O \Delta uv dz,$$

avec $\mathcal{D}(A) = H_0^1(\Delta, O) = \{u \in H_0^1(O) \,/\, \Delta u \in L^2(O)\}$

est auto-adjoint et a une résolvante compacte, il est donc diagonalisable et ses vecteurs propres forment une base orthonormale dans $L^2(O)$. On note $(\Psi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ cette base.

Soit λ_n la suite des valeurs propres de $-\Delta_\perp$ et $\alpha_n = \sqrt{\lambda_n}$. Comme $-A$ est strictement positif, les λ_n, $n \in \mathbb{N}$ forment une suite croissante de termes positifs et qui tend vers $+\infty$.

Si $i \neq j$, on vérifie que :

$$\int_O \nabla\Psi_i \nabla\Psi_j = \lambda_i \int_O \Psi_i\Psi_j = 0$$

On en déduit que la famille $(\Psi_i)_i$ est orthogonale dans $H_0^1(O)$. La famille des Ψ_i est totale, c'est donc une base de $H_0^1(O)$.

Soit maintenant γ un élément de $L^2(0, a; H_0^1(O)) \cap H^1(0, a; L^2(O))$. Sa trace sur la section $\Gamma(x)$, pour z fixé, appartient donc à $H^{\frac{1}{2}}(O)$. On peut donc écrire sa décomposition dans la base des Ψ_i :

$$\gamma(x, z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \gamma_n(x)\Psi_n(z) \text{ où } \gamma_n(x) = \int_{\Gamma(z)} \gamma(x)\Psi_n(z)dz.$$

Comme la section du guide d'ondes est constante, les fonctions de base ne dépendent plus de la variable x et il est possible de dériver l'expression de γ terme à terme.

Lemme 2.8 *Dans le guide d'ondes cylindrique de section constante, la fonction γ d'expression $\gamma(x, z) = \sum_n \Psi_n(z)\gamma_n(x)$ dans la base orthonormée Ψ_n a pour dérivées partielles :*

$$\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2} = \sum_n \Psi_n(z)\gamma_n''(x) \text{ et } \Delta_\perp\gamma = -\sum_n \alpha_n^2\Psi_n(z)\gamma_n(x)$$

Démonstration 2.3.2 *Cela revient à démontrer que les coefficients $\gamma_n'(x)$ ont pour expression :*

$$\gamma_n'(x) = \int_S \Psi_n(z)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x,z)dz$$

$$\forall \phi \in D(\mathbb{R}), \quad \int_{\mathbb{R}} \phi(x)\gamma_n'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\gamma_n(x)dx$$

soit : $$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\gamma_n'(x)dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\int_S \Psi_n(z)\gamma(x,z)dzdx$$

Par le théorème de Fubini, on a :

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\gamma_n'(x)dx = -\int_S \Psi_n(z)\int_{\mathbb{R}} \gamma(x,z)\phi'(x)dxdz$$

Donc $$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)\gamma_n'(x)dx = \int_S \Psi_n(z)\int_{\mathbb{R}} \frac{\partial \gamma}{\partial x}\phi(x)dxdz$$

$$\int_{\mathbb{R}} \phi(x)P_n'(x)dx = \int_{\mathbb{R}}\int_S \frac{\partial \gamma}{\partial x}\phi(x)\Psi_n(z)dzdx$$

On en déduit que $\gamma_n'(x) = \int_S \Psi_n(z)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(x,z)dz$.

On trouve alors le résultat souhaité.

Il est également possible d'exprimer la condition de Neumann sur la frontière mobile dans cette base. En effet, le calcul a un sens car les solutions sont cherchées dans Y.

Lemme 2.9 *$h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ peut être décomposé dans la base de fonctions propres Ψ_n :* $h(z) = \sum_n h_n\Psi_n(z)$.

Démonstration 2.3.3 *La famille des $\Psi_n(z)$, $n \in N$ constitue une base orthonormée de $L^2(O)$ et une base orthogonale de $H_0^1(O)$. On peut d'ailleurs donner la définition suivante à ces espaces :*

$$L^2(O) = \left\{ u = \sum_n u_n\Psi_n / \sum_n |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$$H_0^1(O) = \left\{ u = \sum_n u_n\Psi_n / \sum_n (1+\lambda_n)|u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ est l'interpolé de $H_0^1(O)$ et de $L^2(O)$; il a pour définition :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(O) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n (1+\lambda_n)^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

On identifie maintenant $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ *à l'espace :* $\left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n / \sum_n (1+\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}$

Ceci nous permet d'écrire h *sous la forme :* $h(z) = \sum_n h_n \Psi_n(z)$.

2.3.2 Expression modale de P

Les résultats précédents permettent de reformuler le problème sur le domaine restreint $\mathcal{P}_{s,h}$ dans la base modale. Pour définir $P(s)h$, où $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, on a besoin de la solution $\gamma \in \tilde{Y}_s$ du problème :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_s \\ \gamma|_\Sigma = 0,\ \gamma|_{\Gamma_a} = 0,\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h. \end{cases}$$

Comme précédemment, on se limite à des valeurs de s pour lesquelles ce problème est bien défini.

Dans ce cas, on a en effet : $P(s)h = \gamma|_{\Gamma_s}$; l'expression des coefficients de γ en fonction de ceux de h permettra donc d'obtenir une écriture "matricielle"de $P(s)$.

Tout d'abord, on décompose h et γ dans la base des Ψ_n :

$$\begin{cases} \gamma(x,z) = \sum_n \gamma_n(x)\Psi_n(z) \\ h(z) = \sum_n h_n \Psi_n(z) \end{cases}$$

L'équation de Helmholtz pour γ s'écrit alors :

$$\sum_n (\alpha_n^2 \gamma_n(x) - \gamma_n''(x))\Psi_n(z) = k^2 \sum_n \gamma_n(x)\Psi_n(z)$$

Les conditions sur les bords ont pour expression :

$$\begin{cases} \sum_n \gamma_n(a)\Psi_n(z) = 0 \\ \sum_n \gamma_n'(s)\Psi_n(z) = \sum_n h_n \Psi_n(z) \end{cases}$$

La condition de Dirichlet sur le bord latéral est vérifiée par les fonctions de base. On en déduit un système différentiel pour chaque coefficient γ_n :

$$\begin{cases} (k^2 - \alpha_n^2)\gamma_n(x) + \gamma_n''(x) = 0 \quad \forall x \in]s;a[\\ \gamma_n(a) = 0 \\ \gamma_n'(s) = h_n \end{cases}$$

On va pouvoir expliciter facilement la solution en fonction de la valeur de α_n.

Premier cas : $k^2 > \alpha_n^2$

Ce cas se produit pour les premières valeurs propres du Laplacien transversal, et concerne donc un nombre fini de modes.

En posant : $\beta_n = \sqrt{k^2 - \alpha_n^2}$, on transforme l'équation différentielle sur γ_n en :

$$\gamma_n''(x) + \beta_n^2\gamma_n(x) = 0.$$

Le coefficient γ_n est de la forme :

$$\gamma_n(x) = A\cos\beta_n x + B\sin\beta_n x, \text{ où}$$

$$\begin{cases} A\cos\beta_n a + B\sin\beta_n a = 0 \\ -\beta_n A\sin\beta_n s + B\beta_n\cos\beta_n s = h_n \ \forall n \end{cases}$$

Le choix de la racine positive pour $k^2 - \alpha_n^2$ revient en fait à choisir les ondes se propageant dans le sens des x croissants. En multipliant la première équation par $\sin\beta_n s$ et la deuxième par $\cos\beta_n a$, on obtient la relation :

$$B\cos\beta_n(a-s) = \frac{h_n}{\beta_n}\cos\beta_n a$$

Si $\cos\beta_n(a-s) \neq 0$, alors $B = \dfrac{h_n\cos\beta_n a}{\beta_n\cos\beta_n(a-s)}$.

On trouve alors :

$\gamma_n(x) = \dfrac{h_n\sin(\beta_n(x-a))}{\beta_n\cos(\beta_n(a-s))}$, soit, pour $x = s$:

$$\boxed{\gamma_n(s) = \frac{h_n}{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}\tan\left((s-a)\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\right)}$$

Ce cas correspond à un mode propagatif.

Si $\cos\beta_n(a-s)=0$ et $h_n\neq 0$, le système précédent n'a pas de solution et donc γ_n n'est pas défini. Si $h_n=0$, la solution du système précédent n'est pas unique, on ne peut donc pas définir γ_n. On constate donc que dans ce cas, l'opérateur P admet une singularité. Celle-ci se produit si et seulement si $\beta(a-s)\in(\frac{\pi}{2}+\pi\mathbb{Z})$: cette condition dépend de la longueur du cylindre, et la singularité apparaît et disparaît lorsque l'on fait varier s. Pour éviter les singularités il faudrait choisir $a-s$ inférieur au minimum des : $\frac{1}{\beta_n}(\frac{\pi}{2}+2\pi\mathbb{Z})$.

Deuxième cas : $k^2=\alpha_n^2$

Dans ce cas, $\gamma_n''(x)=0$ sur $]s;a[$, et on trouve :

$$\boxed{\gamma_n(x)=h_n(x-a)}$$

Ce cas se présente pour un coefficient au plus, lorsque $k\in\frac{\pi}{h}\mathbb{Z}$, donc pour certaines géométries seulement. Il correspond à l'apparition de fréquences de coupure (qui séparent les modes propagatifs des modes évanescents).

Troisième cas : $k^2<\alpha_n^2$

On pose $\delta_n=\sqrt{\alpha_n^2-k^2}$. On rappelle l'équation différentielle vérifiée par γ_n :

$$\gamma_n''(x)=\delta_n^2\gamma_n$$

On en déduit la forme de γ_n :

$$\gamma_n=A\cosh h_n\delta_n(x-a)+B\sinh h_n\delta_n(x-a)$$

Comme $\gamma_n(a)=0$, il vient : $A=0$.

De $\gamma_n'(s)=h_n$, on tire :

$$B=\frac{h_n}{i\delta_n\cosh\delta_n(s-a)}.$$

Comme la fonction $x\mapsto\cosh x$ ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, cette définition a toujours un sens.

Au total, on trouve :

$$\gamma_n(x)=\frac{h_n\sinh(\delta_n(x-a))}{\delta_n\cosh(\delta_n(s-a))},$$

d'où, pour $x=s$:

$$\boxed{\gamma_n(s)=\frac{h_n}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}\tanh((s-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2})}$$

Ce cas se produit pour une infinité de valeurs propres et correspond à un mode évanescent.

On en déduit la décomposition modale de P, lorsqu'il est bien défini :

$$\boxed{\begin{aligned} P(s)h &= \sum_{\alpha_n<k} \frac{h_n}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} \tan((a-s)\sqrt{k^2-\alpha_n^2})\Psi_n(z) \\ &+ 1_{\alpha_n=k} h_n (s-a)\Psi_n(z) \\ &+ \sum_{\alpha_n>k} \frac{h_n}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} \tanh((s-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2})\Psi_n(z) \end{aligned}}$$

Les points de discontinuité pour P sont donc les :

$$\boxed{a - \frac{\pi + 2\pi\mathbb{N}}{2\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}, \text{ avec } k^2-\alpha_n^2 > 0,\ \alpha_n \text{ valeurs propres de } \Delta_\perp}$$

On constate qu'ils forment un ensemble discret ; pour chacune de ces abscisses s, le problème correspondant $\mathcal{P}_{s,h}$ n'est pas bien posé.

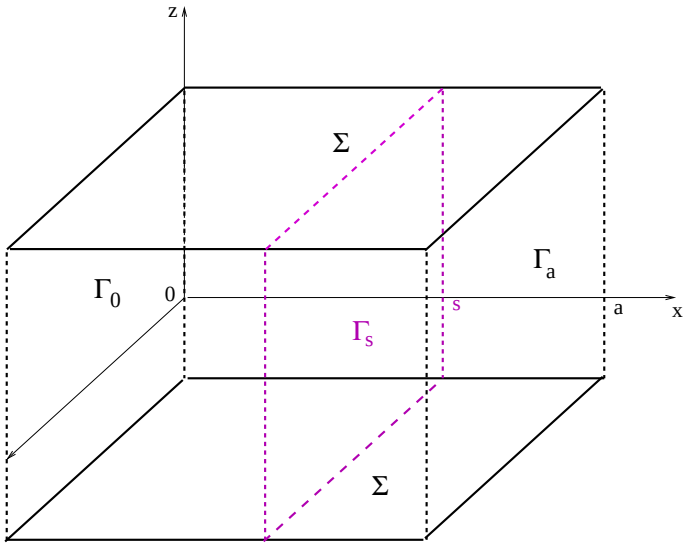
Il est clair que l'opérateur $P(s)$ a une forme diagonale pour cet exemple (on étudiera par la suite des configurations pour lesquelles ce n'est pas le cas). On notera P_n le coefficient correspondant à la fonction propre Ψ_n :

$$P_n(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} \tan((a-s)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}) \text{ si } \alpha_n < k \\ (s-a) \text{ si } \alpha_n = k \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} \tanh((s-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2}) \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

Par ailleurs, un passage à la limite faible permet de retrouver que : $\forall h,\ P(a)h = 0$.

Etude d'un exemple

On va illustrer les calculs précédents par un cas particulier qui est souvent utilisé pour les simulations numériques.
On considère un guide d'ondes de $\mathbb{R}^3$, constitué de deux plaques horizontales qui sont les plans d'équations $z = H$ et $z = -H$. On suppose que la condition imposée sur le bord d'équation $x = a$ est indépendante dela troisième coordonnée y. Comme cette configuration est invariante par translation suivant la deuxième coordonnée, on se ramène



ainsi à un guide bidimensionnel. Les fonctions propres pour le laplacien transversal avec une condition de Dirichlet nulle sur les plans $z = \pm H$ ont pour expression :

$$\Psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{H}} \sin(\frac{n\pi z}{H})$$

On note :

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{H}$$

la valeur propre associée à Ψ_n. La décomposition de l'argument γ de l'opérateur P dans la base des fonctions propres Ψ_n permet de trouver l'équation vérifiée par les coefficients de γ. On a donc obtenu un système différentiel linéaire portant sur les coefficients γ_n.

$$\begin{aligned} P(s)h &= \Sigma_{n<\frac{H\omega}{\pi}} - \sqrt{\frac{2}{H}}\frac{h_n}{\beta_n}\tan(\beta_n(a-s))\sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \\ &+ 1_{n=\frac{H\omega}{\pi}} h_n(s-a)\sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \\ &+ \Sigma_{n>\frac{H\omega}{\pi}}\sqrt{\frac{2}{H}}\frac{h_n}{\delta_n}\tanh(\delta_n(s-a))\sin\left(\frac{n\pi z}{H}\right) \end{aligned}$$

La simulation numérique suivante a été réalisée pour un guide bidimensionnel de hauteur $H = \frac{\pi}{2}$, de longueur $a = 6$, avec un nombre d'onde $k = 2\pi$. La figure 2.6 représente les modes P_1, P_2, P_3 et P_4, et les fréquences correspondantes sont :

$$\begin{cases} k_1 = 5,96\,; \\ k_2 = 4,85\,; \\ k_3 = 1,86\,; \\ k_4 \text{ est imaginaire pur.} \end{cases}$$

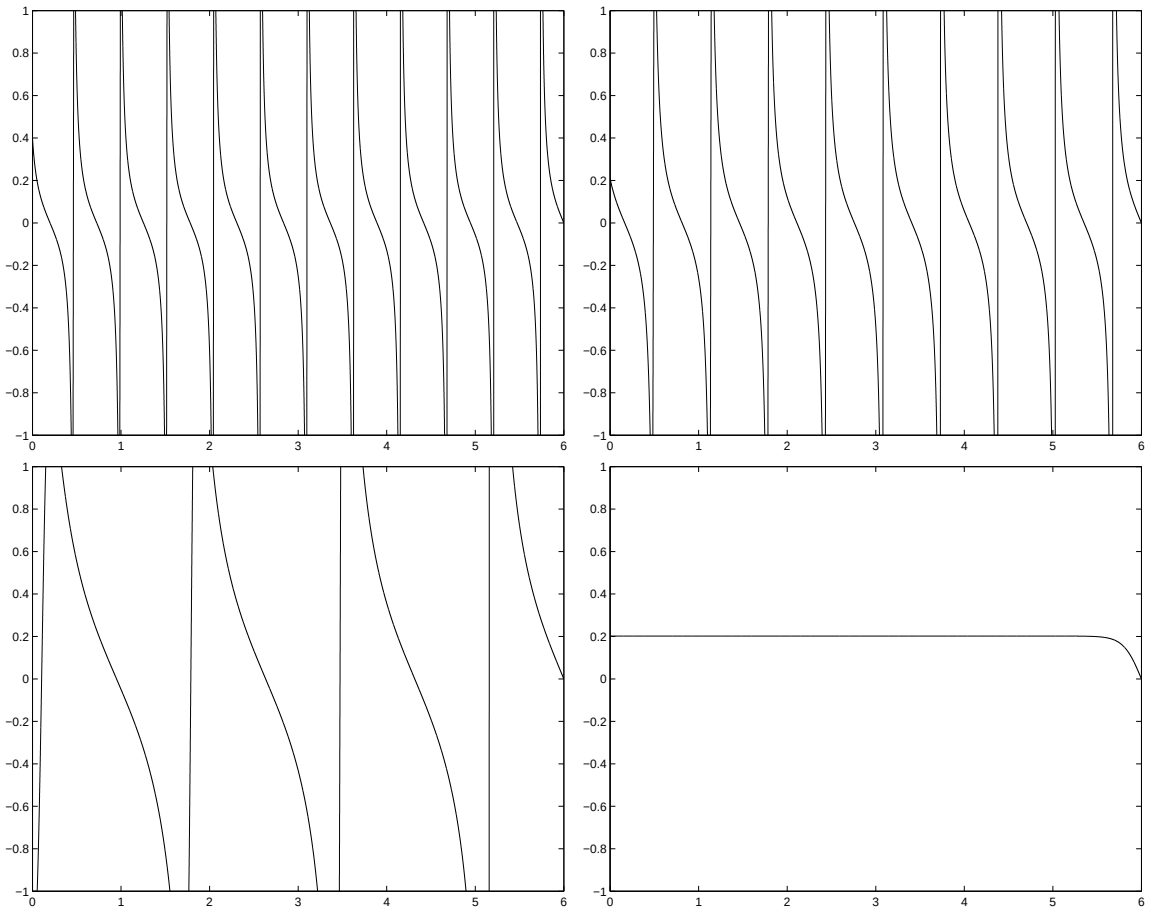


FIG. 2.6: Les quatre premiers modes pour P

On constate que les trois premiers modes de P sont de type propagatifs et qu'ils comportent plusieurs singularités, tandis que le quatrième mode est évanescent ; il disparaît rapidement. La fréquence de coupure n'apparaît pas. Par ailleurs, les singularités sont plus nombreuses pour le premier mode que pour les suivants.

2.3.3 Expression modale de r

Enfin, on s'intéresse à la décomposition modale de la partie affine r. La factorisation permet d'envisager plusieurs méthodes de calcul, par souci de simplicité on se limitera à l'équation différentielle sur r issue du système découplé :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)r = Pf\,; \\ r(a) = y_1. \end{cases}$$

Pour simplifier les calculs, on supposera que f est nul.

Comme $r(x) \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ est la trace sur Γ_s d'une fonction de $\tilde{Y}_x$, son expression et celle de sa dérivée dans la base des Ψ_n sont de la forme :

$$\begin{cases} r(x,z) = \sum_n r_n(x)\Psi_n(z)\,; \\ \dfrac{\partial r}{\partial x}(x,z) = \sum_n r_n'(x)\Psi_n(z)\,. \end{cases}$$

De la même manière, on peut écrire la condition initiale $y_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$ dans la base de fonctions propres :

$$y_1(z) = \sum_n y_1^n\,\Psi_n(z).$$

L'équation différentielle sur r prend donc la forme d'une équation scalaire sur chaque coefficient :

$$\begin{cases} r_n' - P_n(k^2 - \alpha_n^2) r_n = 0 \\ r_n(a) = y_1^n\,. \end{cases}$$

Comme pour P, la forme du coefficient r_n dépend de la valeur de α_n.

Premier cas : $k^2 > \alpha_n^2$

Ce cas correspond aux modes propagatifs. On a alors :

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} \tan\left((x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\right),$$

et l'équation différentielle sur r_n s'écrit :

$$r_n' - \sqrt{k^2-\alpha_n^2} \tan\left((x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\right) r_n = 0.$$

La solution de cette équation est de la forme :

$$r_n(x) = \frac{K}{\cos\left((x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\right)}, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Comme $r_n(a) = y_1^n$, il vient : $K = y_1^n$.

Finalement, on obtient :

$$\boxed{r_n(x) = \frac{y_1^n}{\cos\left((x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\right)}}$$

On retrouve les mêmes singularités que pour P.

Deuxième cas : $k^2 = \alpha_n^2$

Dans ce cas l'équation vérifiée par r_n devient :

$r_n'(x) = 0$, avec $r_n(a) = y_1^n$.

On conclut que :

$$\boxed{r_n(x) = y_1^n}$$

Troisième cas : $k^2 < \alpha_n^2$

Cette configuration correspond aux modes évanescents. Dans ce cas, on a :

$$P_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} \tanh\left((x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\right).$$

Le coefficient r_n vérifie donc l'équation différentielle suivante :

$$r_n' - \sqrt{\alpha_n^2 - k^2} \tanh\left((x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\right) r_n = 0.$$

Il est donc de la forme :

$$r_n(x) = \frac{K}{cosh\left((x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\right)}, \text{ où } K \text{ est une constante.}$$

Comme $r_n(a) = y_1^n$, on en déduit que : $K = y_1^n$.

r_n a donc pour expression :

$$\boxed{r_n(x) = \frac{y_1^n}{\cosh\left((x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\right)}}$$

Il s'agit effectivement d'un mode évanescent, qui disparaît rapidement.

La simulation numérique a été réalisée pour le même guide bidimensionnel que pour P avec les mêmes coefficients ; la figure 2.7 représente les quatre premiers modes propres pour r.

On retrouve les trois modes propagatifs et le quatrième mode évanescent, ainsi que l'absence de la fréquence de coupure.

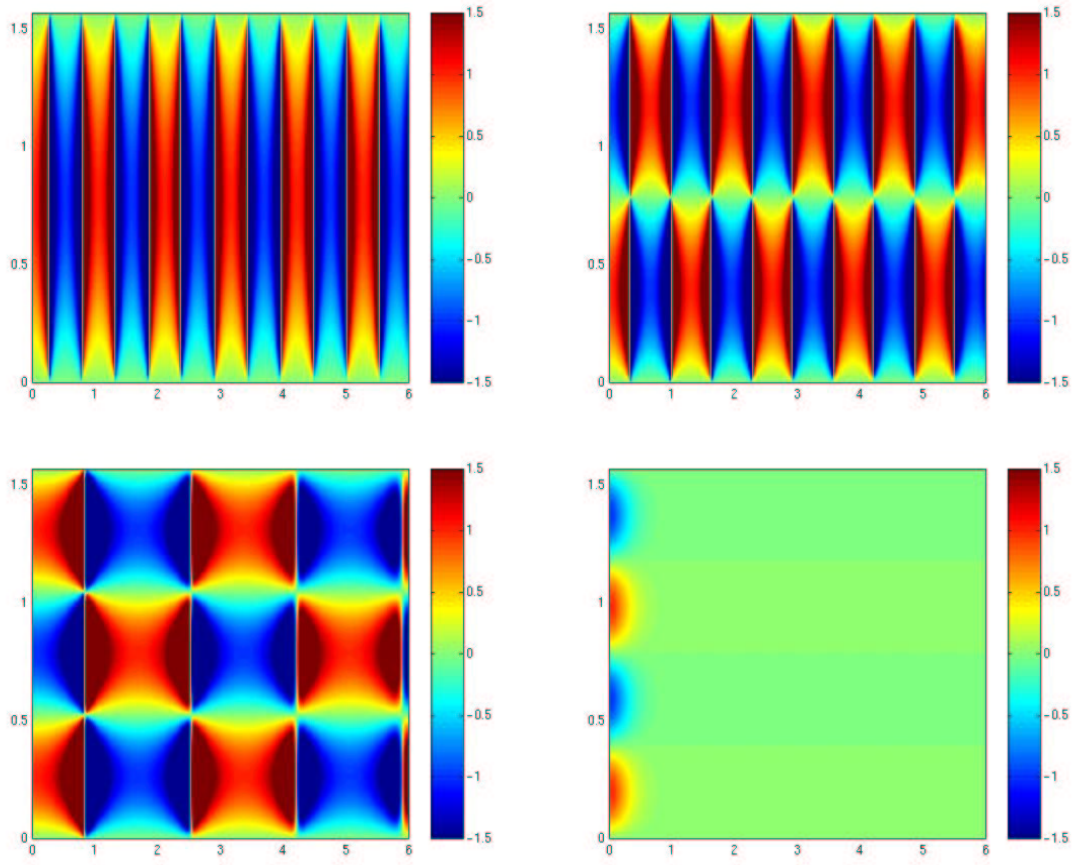


FIG. 2.7: Les quatre premiers modes pour r

2.3.4 Comparaison de Q et de P

Dans cette section, on souhaite comparer les comportements respectifs des opérateurs Neumann-to-Dirichlet et Dirichlet-to-Neumann, en particulier l'emplacement et le nombre de résonances de boîte pour chacun. Pour ce faire, on va donc étudier dans un premier temps la décomposition modale de Q.

On revient à la définition de Q : pour $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, on a : $Q(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}$, où $\gamma \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_s \\ \gamma|_\Sigma = 0,\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0,\ \gamma|_{\Gamma_s} = h \end{cases}$$

Comme dans les paragraphes précédents, on peut décomposer γ et h dans la base de fonctions propres Ψ_n :

$$\begin{cases} \gamma(x,z) = \sum_n \gamma_n(x)\Psi_n(z) \\ h(z) = \sum_n h_n \Psi_n(z) \end{cases}$$

On aboutit au système différentiel pour γ_n :

$$\begin{cases} (k^2 - \alpha_n^2)\gamma_n + \gamma_n'' = 0 \\ \gamma_n(s) = h_n \\ \gamma_n'(0) = 0 \end{cases}$$

Les solutions seront donc de la même forme que pour la première formulation, seuls les coefficients changent.

Q a également une forme diagonale, et son n-ième coefficient vaut :

$$Q_n(s) = \frac{\gamma_n'(s)}{h_n}.$$

Premier cas : $\alpha_n^2 < k^2$

Le coefficient γ_n est alors de la forme :

$\gamma_n(x) = A\cos\beta_n x + B\sin\beta_n x$, où A et B sont des constantes déterminées par les conditions sur les bords :

$$\begin{cases} \gamma_n'(0) = B = 0 \\ A\cos\beta_n s + B\sin\beta_n s = h_n \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\gamma_n(x) = \frac{h_n \cos\beta_n x}{\cos\beta_n s} \text{ si } \cos\beta_n s \neq 0.$$

Et comme $Q(s)h = \frac{\partial\gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}$, il vient :

$$Q(s)h_n\Psi_n = -\frac{h_n\beta_n \sin\beta_n s}{\cos\beta_n s}\Psi_n,$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{Q_n(s) = -\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\tan\left(\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\ s\right)}$$

On retrouve un mode propagatif.

Le cas où $\cos\beta_n s = 0$ correspond encore à des résonances de boîte, c'est-à-dire à une singularité pour Q.

On en déduit que $Q(s)$ est singulier lorsque s appartient à l'ensemble :

$$\boxed{\frac{\pi + 2\pi\mathbb{N}}{2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}, \text{ avec } k^2 - \alpha_n^2 > 0,\ s < a.}$$

Deuxième cas : $\alpha_n^2 = k^2$

Dans ce cas, $\gamma_n(x) = cste = h_n$, donc :

$$\boxed{Q_n(s) = 0}$$

Ce cas correspond toujours à une fréquence de coupure.

Troisième cas : $\alpha_n^2 > k^2$

Le coefficient de γ correspondant s'écrit :

$\gamma_n(x) A \cos i\delta_n x + B \sin i\delta_n x$, où A et B sont des constantes vérifiant :

$$\begin{cases} \gamma_n'(0) = i\delta_n B = 0 \\ \gamma_n(s) = A \cos i\delta_n s = h_n \end{cases}$$

On en déduit que $B = 0$ et $A = \dfrac{h_n}{\cos i\delta_n s}$. Par conséquent :

$$\gamma_n(x) = h_n \frac{\cosh \delta_n x}{\cosh \delta_n s}$$

On en déduit la valeur de $Q_n(s)$:

$$\boxed{Q_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2} \tanh \sqrt{\alpha_n^2 - k^2} s.}$$

Il s'agit ici d'un mode évanescent.

Par conséquent, P et Q ont le même nombre de modes propagatifs et évanescents, ainsi que la même fréquence de coupure.

Emplacement des points de singularité :

On va maintenant préciser l'étude des modes propagatifs pour comparer les abscisses pour lesquelles P et Q sont singuliers.

On a trouvé les ensembles de points de singularité suivants :

pour P : $a - \dfrac{\pi + 2\pi\mathbb{N}}{2\beta_n} \cap [0, a]$; pour Q : $\dfrac{\pi + 2\pi\mathbb{N}}{2\beta_n} \cap [0, a]$.

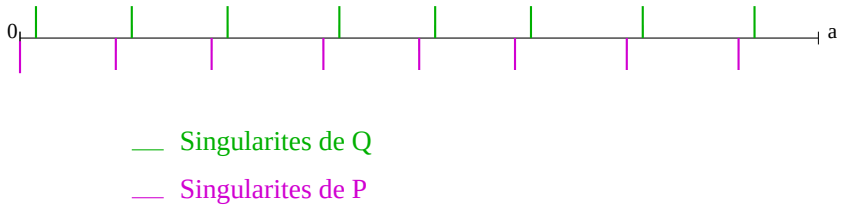


FIG. 2.8: Emplacement des singularités pour un mode donné

Pour un mode propagatif donné, les singularités ont donc même périodicité, et on observe toujours le même décalage entre une singularité pour P et une singularité pour Q. On constate également qu'il y a plusieurs singularités et que le nombre de singularités par mode décroit avec n.

La figure 2.10 montre le premier mode pour P et Q pour un guide d'ondes bidimensionnel de longueur $a = 7$, de hauteur $H = \dfrac{\pi}{2}$, et de nombre d'onde $k = 2\pi$.

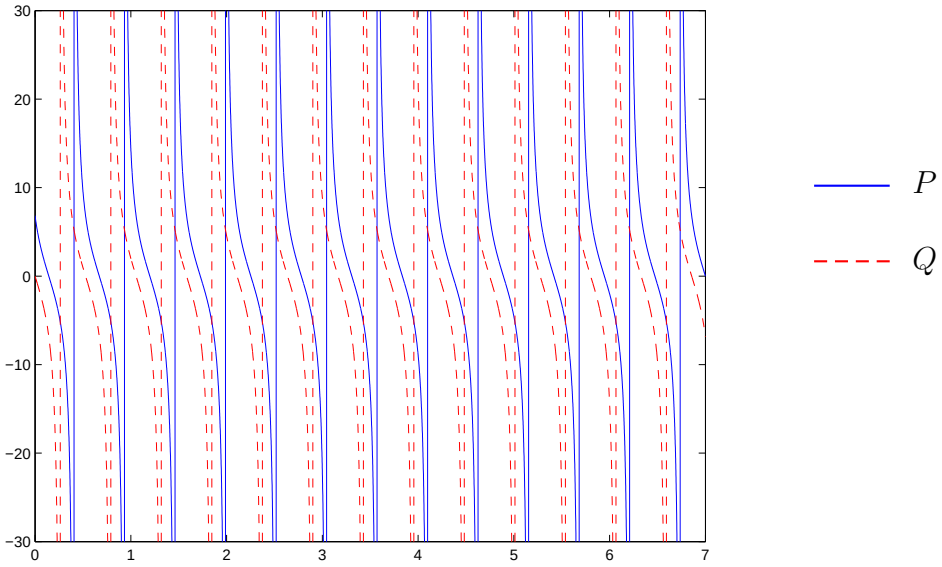


FIG. 2.9: Le premier mode de Q et de P

On va maintenant évoquer deux cas particuliers.

Cas où $Q = P^{-1}$

Les opérateurs Dirichlet-to-Neumann et Neumann-to-Dirichlet ont été définis à partir de problèmes de Helmholtz différents, portant sur des domaines complémentaires et avec des conditions aux bords distinctes. $Q = P^{-1}$ est donc un cas particulier, qui ne se produit que pour certaines longueurs de boîte.

Une condition nécessaire est que les zéros de l'un correspondent aux singularités de l'autre, et par conséquent que l'on ait la relation suivante pour chaque mode propagatif :

$$\exists\, l_n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a = \frac{\pi + 2\pi l_n}{2\beta_n}.$$

Dans ce cas, P et Q ont chacun $l_n + 1$ singularités pour le n-ième mode, déphasées de $\dfrac{\pi}{2\beta_n}$ (c'est-à-dire d'une demi-période).

La figure suivante représente le premier mode pour P et Q lorsque la boîte a la longueur ad hoc.

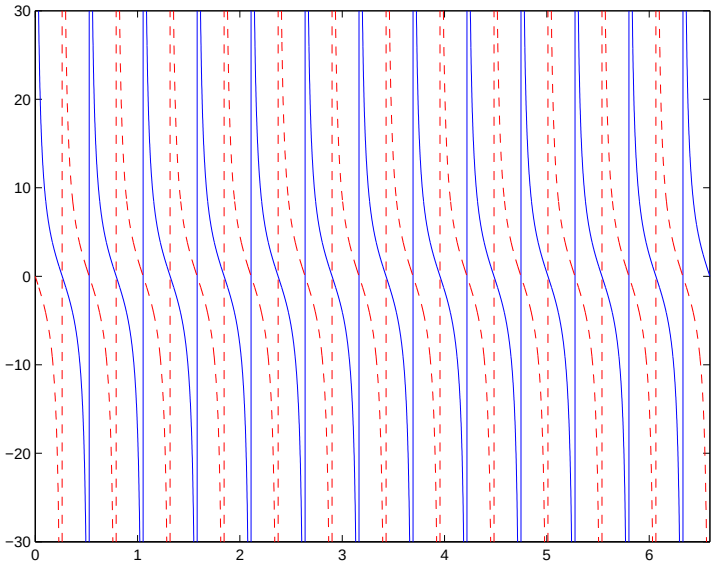


FIG. 2.10: Le premier mode de Q et de P pour le cas où $Q = P^{-1}$

Cas des singularités communes

On peut envisager de travailler avec un guide pour lequel Q et P ont des singularités communes ; il faut et il suffit pour cela que :

$$\boxed{\exists n \text{ tel que } \alpha_n < k,\ l_n \in \mathbb{N} \text{ tel que : } a = \frac{\pi + \pi l_n}{\beta_n}}$$

Dans ce cas, ces deux opérateurs auront les mêmes résonances pour le n-ième mode, mais celles des autres modes peuvent se trouver à des emplacements différents.

En effet, si l'on suppose que P et Q admettent une singularité commune pour le mode n, apparaissant à l'abscisse η, alors :

D'une part, η est une singularité pour P, ce qui signifie que :

$\exists p \in \mathbb{N}$ tel que $\eta = a - \dfrac{\pi + 2\pi p}{2\beta_n}$.

De même, Q admet une singularité en η, d'où :

$\exists q \in \mathbb{N}$ tel que $\eta = \dfrac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n}$.

On en déduit la relation :

$$a - \frac{\pi + 2\pi p}{2\beta_n} = \frac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n},$$

qui s'écrit encore :

$$a = \frac{\pi + \pi(p+q)}{\beta_n},$$

d'où le résultat.

Réciproquement, si $a \in \dfrac{\pi + \pi\mathbb{N}}{\beta_n}$, P et Q admettent au moins une singularité commune pour le mode n, dont on se propose de déterminer l'emplacement.

A cette fin, on note $l \in \mathbb{N}$ l'entier tel que $a = \dfrac{\pi + \pi l}{\beta_n}$. Une singularité commune se situera à une abscisse η vérifiant la relation :

$\eta = a - \dfrac{\pi + 2\pi p}{2\beta_n} = \dfrac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n}$, où $p, q \in \mathbb{N}$.

Comme $a \in \dfrac{\pi + \pi\mathbb{N}}{\beta_n}$, on est assuré que, pour tout $q \in \mathbb{N}$, $\dfrac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n} \in a - \dfrac{\pi + 2\pi\mathbb{Z}}{2\beta_n}$.

Le problème est donc le suivant :

trouver $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tels que :

$$\begin{cases} p + q = l \\ \dfrac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n} \in [0, a] \end{cases}$$

<u>Premier cas</u> : $l = 0$

Cela correspond à un guide de longueur :

$$a = \frac{\pi}{\beta_n}.$$

Dans ce cas, le couple $(p = 0, q = 0)$ est le seul possible. Il y a alors une seule singularité située à l'abscisse :

$$\eta = \frac{\pi}{2\beta_n}.$$

Deuxième cas : $l \geq 1$

On a alors : $a \geq \dfrac{2\pi}{\beta_n}$.
Les deux opérateurs admettent alors $l + 1$ singularités, espacées de $\dfrac{\pi}{\beta_n}$:

$$\left\{ \frac{\pi + 2\pi q}{2\beta_n}\,,\ q \in \{0, ..., l\} \right\}.$$

En particulier, les singularités les plus proches des extrémités sont :

$\eta = a - \dfrac{\pi}{2\beta_n}$ pour $p = 0$ et $q = l$;

$\eta = \dfrac{\pi}{2\beta_n}$ pour $p = l$ et $q = 0$.

Remarque 2.7 *Pour $a < \dfrac{\pi}{\beta_n}$, il n'y a aucune singularité.*

Application numérique

On s'intéresse à un guide bidimensionnel semblable à ceux qui ont été modélisés dans les simulations numériques précédentes : on suppose qu'il est de hauteur $H = \dfrac{\pi}{2}$, avec un nombre d'onde $k = 2\pi$. Les coefficients β_n ont alors pour expression :

$$\beta_n = \sqrt{k^2 - \frac{n^2\pi^2}{H^2}} = 2\sqrt{\pi^2 - n^2}, \text{ où } n \leq 2H = \pi.$$

On se propose de calculer quelques longueurs de boîte pour lesquelles P et Q admettent des singularités communes.

- Premier mode :

Dans ce cas $\beta_1 = 2\sqrt{\pi^2 - 1}$ et les valeurs possibles pour a sont $\dfrac{\pi\mathbb{N}^*}{2\sqrt{\pi^2 - 1}}$. Les plus petites valent :

$$\begin{cases} a_1 \approx 0.5274\,; \\ a_2 \approx 1.0549\,; \\ a_3 \approx 1.5823\,. \end{cases}$$

Pour ces guides, les singularités voisines seront toutes espacées de $\dfrac{\pi}{\beta_1} \approx 0.5274$.

- Deuxième mode :

La valeur corresondante de β_n est $\beta_2 = 2\sqrt{\pi^2 - 4}$, et les longueurs de boîte possibles sont décrites par $\dfrac{\pi\mathbb{N}^*}{2\sqrt{\pi^2 - 4}}$. Les premières valent :

$$\begin{cases} a_1 \approx 0.6484\,; \\ a_2 \approx 1.2967\,; \\ a_3 \approx 1.9451\,. \end{cases}$$

Pour ces guides, les singularités voisines seront toutes espacées de $\dfrac{\pi}{\beta_2} \approx 0.6484$.

- Troisième mode :

Un calcul similaire permet de donner les premières valeurs de a :

$$\begin{cases} a_1 \approx 1.6845\,; \\ a_2 \approx 3.3689\,; \\ a_3 \approx 5.0534\,. \end{cases}$$

Pour ces guides, les singularités voisines seront toutes espacées de $\dfrac{\pi}{\beta_3} \approx 1.6845$. On retrouve ainsi l'un des résultats des simulations précédentes : plus l'ordre du mode est élevé, plus les singularités sont espacées.

Chapitre 3

Lien avec la théorie du contrôle

La factorisation du problème de Helmholtz qui vient d'être présentée s'appuie dans une large mesure sur la méthode du plongement invariant, empruntée à la théorie du contrôle. Le but de ce chapitre est de montrer que ces deux approches sont étroitement liées : toutes deux aboutissent notamment à des équations de Riccati pour des opérateurs définis sur des espaces de dimension infinie(cf [18]). En fait, les solutions de problèmes d'optimisation traités comme des problèmes de contrôle classique vérifient une équation aux dérivées partielles : on étudiera dans un premier temps comment retrouver le problème de Poisson et l'équation de Riccati associée à partir du contrôle (cf [16], [9]). Pour le problème de Helmholtz ; il faut faire appel à la théorie du contrôle robuste, mais la démarche est identique. Elle fera l'objet de la seconde partie, et l'on montrera que l'on peut retrouver l'équation de Riccati correspondant à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann. Par ailleurs, ces calculs font apparaître notamment des systèmes couplés qui indiquent une méthode de résolution pour les équations dans les guides d'ondes. Le chapitre V s'inspirera donc de cette démarche.

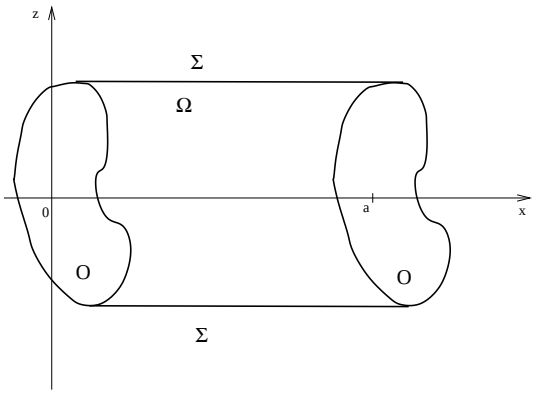
3.1 Problème de Poisson : problème de contrôle classique

Dans cette section, on rappellera tout d'abord quelques grands principes de la théorie du contrôle et son application à la résolution d'un problème d'optimisation. Ensuite, on s'attachera à l'inconnue du problème, l'état du système, ainsi qu'à l'état adjoint, qui est un intermédiaire de calcul. En étudiant les équations qui les définissent, on montrera que l'état est solution du problème de Poisson et que l'opérateur qui le relie à l'adjoint vérifie un équation de Riccati.

Le cadre de cette étude est très proche de celui du chapitre précédent : on considère un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, de forme cylindrique :

$$\Omega = [0, a] \times O,$$

où O représente la section du cylindre (c'est une surface fermée de $\mathbb{R}^{n-1}$, de bord $\partial\Omega$ régulier) ; on note Σ le bord latéral. Une variable joue un rôle particulier, celui du temps : il s'agit de x, coordonnée de l'axe du cylindre. Les autres coordonnées seront notées z.



En théorie du contrôle linéaire quadratique, on cherche à optimiser un système gouverné par une équation, appelée équation d'état :

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = Ay(x) + Bu(x) \ ; \\ z(x) = Cy(x) \ ; \end{cases}$$

où $y(x) \in \mathbb{R}^n$ représente l'état du système, $u(x) \in L^2(0, X; \mathbb{R}^m)$ est une fonction de contrôle, et $z(x) \in \mathbb{R}^p$, une sortie, avec $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$ et $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$.

Dans le cadre de ce chapitre, on se limitera à l'étude d'un cas particulier courant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = v \text{ dans } \Omega \\ y|_\Sigma = 0 \\ y(a) = y_1 \end{cases} \qquad \text{où } y \in H^1(0, a; L^2(O)) \text{ et } v \in \mathcal{U} = L^2(\Omega)$$

La solution y représente l'état du système, tandis que v est un contrôle, c'est-à-dire que c'est une donnée pouvant être librement choisie, tout en tenant compte de contraintes éventuelles. $\mathcal{U}$ représente l'espace des contrôles.

On appelle espace des contrôles admissibles l'espace :

$$\mathcal{U}_{ad} = \{v \in \mathcal{U} \ : \ y(v) \in X_{y_1}\} \text{ où } X_{y_1} = \left\{y \in L^2(0, a; H_0^1(O) \cap H^1(0, a; L^2(O))\right\}$$

On introduit alors un critère de performance du contrôle : il s'agit d'une fonction-coût, J, dépendant de l'état et du contrôle, que l'on cherche à minimiser (en général, plusieurs fonctionnelles sont envisageables).

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_\perp y(v) - \nabla_\perp \varphi|^2 dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega |v|^2 dxdz$$

Ici la fonction-coût J fait intervenir une nouvelle variable φ, qui correspond à l'état souhaité. L'opérateur $\nabla_\perp$ représente le gradient par rapport aux variables de la section. La fonctionnelle est donc constituée de deux termes : le premier permet d'évaluer l'écart entre l'état et l'état souhaité, et le second traduit le coût du contrôle.

L'état souhaité est défini sur chaque section par le système :

$$\varphi \in L^2(0,a;H_0^1(O)) \text{ tel que } \begin{cases} -\Delta_\perp \varphi(x) = f(x) \text{ dans } O \\ \varphi|_{\partial O} = 0 \end{cases}$$

où $\Delta_\perp$ représente le laplacien sur la section O.

Comme on recherche le minimum de J sur l'ensemble des contrôles admissibles, on est assuré d'avoir effectivement un extremum si cet ensemble est un fermé dans $L^2(O)$. Or, ce n'est pas le cas ici. On va donc réexprimer la fonctionnelle de manière à respecter cette condition :

$$J(v) = \tilde{J}(y) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla y|^2 \, dx\, dz - \int_\Omega fy \, dx\, dz + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_\perp \varphi|^2 \, dx\, dz$$

La deuxième fonctionnelle ($\tilde{J}(y)$) doit être minimisée sur l'ensemble des y admissibles, qui est cette fois un fermé. Elle représente en fait la fonctionnelle de l'énergie de l'équation de Poisson : on démontre en effet que y est solution du problème de Poisson.

3.1.1 Détermination des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Pour minimiser la fonctionnelle, on introduit les formes linéaires et quadratiques suivantes sur $\mathcal{U}_{ad}$ (cf [16], chapitre VII p.215) :

$$\begin{cases} \pi(v,w) = \displaystyle\int_\Omega \nabla y(v) \nabla y(w) \, dxdz \\ L(v) = -\displaystyle\int_\Omega fy(v) \, dxdz \end{cases}$$

La fonction-coût s'écrit donc sous la forme :

$$J(v) = \frac{1}{2}\,\pi(v,v) + L(v) + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla_\perp \varphi|^2 \, dxdz$$

Cette expression va maintenant permettre de calculer le gradient de J en v dans la direction de u.

Pour $u, v \in \mathcal{U}_{ad}$, on a : $J(v+\theta u) - J(v) = \frac{1}{2}\theta^2 \pi(u,u) + \theta\pi(u,v) + \theta L(u)$

On en déduit que :

$$\nabla_u J(v) = \lim_{\theta \to 0} \frac{J(v+\theta u) - J(v)}{\theta} = \pi(u,v) + L(u)$$

Soit encore :

$$\nabla_u J(v) = \int_\Omega \nabla y(v) \nabla y(u)\, dxdz - \int f y(u)\, dxdz$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\nabla_u J(v) = -\int_\Omega \Delta y(v)\, y(u)\, dxdz - \int_\Omega f\, y(u)\, dxdz = \int_\Omega -(\Delta y(v) + f)\, y(u)\, dxdz$$

On introduit alors $p \in L^2(\Omega)$ l'état adjoint défini par :

$\frac{\partial p}{\partial x} = -\Delta_\perp y(v) - f$, avec la condition initiale $p(0) = 0$.

L'expression précédente devient :

$$\nabla_u J(v) = \int_\Omega \left(\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(v) \right) y(u)\, dxdz = \int_\Omega -p \frac{\partial y}{\partial x}(u) + \frac{\partial y}{\partial x}(u) \frac{\partial y}{\partial x}(v)\, dxdz$$

Le gradient de la fonction-coût vaut donc :

$$\nabla_u J(v) = \int_\Omega \left(-p + \frac{\partial y}{\partial x}(v) \right) u\, dxdz$$

On en déduit la condition d'optimalité suivante :

$$\boxed{p = \frac{\partial y}{\partial x}(v)}$$

Elle correspond à l'état qui minimise la fonction-coût.

En injectant cette condition dans la relation définissant l'état adjoint, on trouve :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - f$$

L'état du système est donc solution du problème de Laplace.

On va maintenant montrer comment retrouver également l'équation de Riccati en étudiant plus précisément les équations portant sur l'état et son adjoint.

3.1.2 Lien avec l'équation de Riccati

L'état du système et l'état adjoint vérifient donc un système différentiel couplé :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial y}{\partial x} = -p\,, \;\; y(a) = y_1 \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\Delta_\perp y - f\,, \;\; p\,(0) = 0 \end{cases}$$

On définit Q par :

$$p(x) = Q(x)y(x)$$

(la définition de l'état adjoint donne un unique p pour un état y donné, on définit donc bien un opérateur).

Q est donc un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann, et $Q(x) \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'\right)$. En dérivant la relation précédente, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} \;=\; \frac{dQ}{dx}y + Q\frac{\partial y}{\partial x} \;=\; \frac{dQ}{dx}y + Q^2 y$$

D'autre part, $\dfrac{\partial p}{\partial x} = -\Delta_\perp y - f$

On en déduit que :

$$\left(\frac{dQ}{dx} + Q^2 + \Delta_\perp\right) y = -f$$

Dans la suite de l'étude, on se limitera à un problème de Poisson homogène, i.e. $f = 0$, ce qui est logique puisque l'opérateur Dirichlet-to-Neumann avait été défini à partir d'un problème homogène. On a alors :

$$\left(\frac{dQ}{dx} + Q^2 + \Delta_\perp\right) y = 0,$$

ce qui est valable pour tout $y \in X_{y_1}$.

Par conséquent, on a :

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + \Delta_\perp = 0$$

On retrouve bien une équation de Riccati pour Q.

Lemme 3.1 *L'opérateur Q obtenu est positif.*

Démonstration 3.1.1 *En effet, on a, pour* $y \in X_{y_1}$ *:*

$$< Q(x)y, y >_O = \int_O pydz = \int_O \frac{\partial y}{\partial x} y$$

Comme y *est nul sur le bord latéral* Σ *et que* $p(0) = 0$*, cela revient à dire que :*

$$< Q(x)y, y >_O = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n} y ds$$

En utilisant une formule de Green, il vient :

$$< Q(x)y, y >_O = \int_\Omega fy + \int_\Omega \nabla y \nabla y \, dx \, dz$$

Comme $f = 0$*, on trouve ainsi :*

$$< Q(x)y, y >_O \geq C\|y\|^2_{H_0^1(O)},$$

où C *est une constante positive, d'où la conclusion.*

Lemme 3.2 *L'opérateur* Q *est autoadjoint.*

Démonstration 3.1.2 *Soient* h, $h' \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$*.*

On définit les états $y, y' \in L^2(0, a; H_0^1(O)) \cap H^1(0, a; L^2(O))$ *et les états adjoints* $p, p' \in L^2(\Omega)$ *tels que :*

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial y}{\partial x} = -p\,, & y(x) = h \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -\Delta_\perp y\,, & p(0) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -\dfrac{\partial y'}{\partial x} = -p'\,, & y'(x) = h' \\ \dfrac{\partial p'}{\partial x} = -\Delta_\perp y'\,, & p'(0) = 0 \end{cases}$$

On constate que y *est bien solution du problème de Laplace :*

$\Delta y = 0$ *dans* Ω*.*

A l'instar des calculs effectués dans le chapitre II, on note Ω_x *la partie du domaine* Ω *comprise entre les abscisses* 0 *et* x *: ainsi,* $\Omega_x = [0, x] \times O$*. On a alors la formulation variationnelle suivante dans* Ω_x *:*

$$\int_{\Omega_x} \Delta y.y' = -\int_{\Omega_x} \nabla y \nabla y' + \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial n} y' + \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial n} y' + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial y}{\partial n} y'$$

Comme y' *s'annule sur le bord latéral, l'intégrale sur* Σ *est nulle. On en déduit que :*

$$\int_{\Omega_x} \Delta y.y' = -\int_{\Omega_x} \nabla y \nabla y' - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial x} y' + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial y}{\partial x} y'$$

Or, $\frac{\partial y}{\partial x} = p$ *s'annule sur*Γ_0*, tandis que* $\frac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_x} = Q(x)h$*. Il vient alors :*

$$\int_{\Omega_x} \Delta y.y' = -\int_{\Omega_x} \nabla y \nabla y' - \int_{\Gamma_0} p(0) y' + \int_{\Gamma_x} Q(x)h.h'$$

Finalement, on a :

$$\int_{\Omega_x} \Delta y.y' = < Q(x)h, h' >$$

Comme on a de même :

$$\int_{\Omega_x} y.\Delta y' = < Q(x)h', h >,$$

On en déduit la symétrie de Q*.*

Ainsi, on a retrouvé l'opérateur Dirichlet-to-Neumann qui apparaît lorsque l'on met en oeuvre la méthode de plongement invariant pour le problème de Poisson : on obtient la même équation de Riccati, des propriétés analogues, et il s'agit également d'une impédance.

Remarque 3.1 *Ce résultat indique une méthode de résolution possible pour une équation de Riccati : dans le cas général, on peut chercher à écrire un système différentiel linéaire pour l'argument et l'image de l'opérateur, puis à le résoudre en utilisant les méthodes classiques. Cette démarche sera utilisée dans le chapitre V.*

3.2 Problème de Helmholtz : problème de contrôle robuste

Les propriétés de l'opérateur Q introduit par le contrôle classique ne correspondent pas à celles des opérateurs du problème de Helmholtz. En effet, P, tel qu'il a été défini dans le chapitre II, n'est ni positif, ni négatif, et il est solution d'une équation de Riccati différente. On ne va donc pas chercher à interpréter le problème de Helmholtz comme un problème de contrôle classique, mais on va faire appel à une variante issue de la théorie du contrôle robuste : il s'agit de la méthode dite "du pire des cas"(cf [35]). Cependant, la démarche sera identique.

Dans un premier temps, on va présenter le problème d'optimisation correspondant.

L'équation d'état se présente sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = div_{\perp} v + \varphi + w \text{ dans } \Omega \\ y(a) = y_1 \end{cases} \quad , \quad \text{où } \varphi(x) = \int_0^x f(s)ds$$

L'état du système, y, dépend non seulement du contrôle v, mais aussi d'une autre variable, w. On dit que w est une perturbation du système au sens du contrôle robuste : c'est une deuxième variable de contrôle qui "joue contre" v. En fait, la perturbation cherche à maximiser le coût qu'on veut minimiser.

Remarque 3.2 *Le cas où w est nul représente un autre problème de contrôle possible pour le problème de Poisson :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = div_{\perp} v + \varphi \ \textit{dans } \Omega \\ y(a) = y_1 \end{cases}$$

La fonction-coût associée à ce problème de contrôle va tenir compte de cette perturbation :

$$J(v, w) = \frac{1}{2} \int_\Omega y^2 dxdz + \frac{1}{2} \int_\Omega v^2 \, dxdz - \frac{k}{2} \int_\Omega w^2 \, dxdz$$

Le terme $\dfrac{k}{2} \displaystyle\int w^2$ pénalise le travail de la perturbation, c'est-à-dire qu'il minimise le coût pour une grande perturbation. En d'autres termes, plus k est élevé, moins on autorise de grandes perturbations.

On va donc rechercher un point-selle de cette fonctionnelle :

$$\min_v \max_w J(v, w)$$

3.2.1 Détermination des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité

Pour ce faire, on sépare le problème en trois parties et on cherche les solutions respectives des trois problèmes suivants (cf [16], chapitre VII p.215) :

$$\begin{cases} \tilde{y}(v) \text{ solution de : } \dfrac{d\tilde{y}}{dx} = div_{\perp} v, \ \tilde{y}(a) = 0 \\ \hat{y}(w) \text{ solution de : } \dfrac{d\hat{y}}{dx} = w, \ \hat{y}(a) = 0 \\ \breve{y}(\varphi) \text{ solution de : } \dfrac{d\breve{y}}{dx} = \varphi, \ \breve{y}(a) = y_1. \end{cases}$$

Par linéarité du problème de contrôle, on a :

$$y(v,w) = \tilde{y}(v) + \hat{y}(w) + \breve{y}(\varphi).$$

La fonction-coût s'écrit alors :

$$J(v,w) = \frac{1}{2}\int_\Omega (\tilde{y}(v) + \hat{y}(w) + \breve{y}(\varphi))^2\, dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2\, dxdz - \frac{k}{2}\int_\Omega w^2\, dxdz$$

On cherche à l'exprimer uniquement en fonction du contrôle et de la perturbation. On commence donc par développer cette expression :

$$\begin{aligned} J(v,w) \;&= \frac{1}{2}\int_\Omega \tilde{y}(v)^2 dxdz + \int_\Omega v^2 dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \hat{y}(w)^2 dxdz - \frac{k}{2}\int_\Omega w^2 dxdz + \frac{1}{2}\int_\Omega \breve{y}(\varphi)^2 dxdz \\ &\quad + \int_\Omega \tilde{y}(v)\,\breve{y}(\varphi) dxdz + \int_\Omega \hat{y}(w)\,\breve{y}(\varphi) dxdz + \int_\Omega \tilde{y}(v)\,\hat{y}(w) dxdz \end{aligned}$$

On définit les formes quadratiques et linéaires suivantes sur $\mathcal{U}_{ad}$, ainsi qu'un terme constant, K :

$$\begin{cases} \pi(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{y}(u)\tilde{y}(v) dxdz + \int_\Omega uv dxdz\ , & \omega(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \hat{y}(u)\hat{y}(v) dxdz - k\int_\Omega uv dxdz\ , \\ L(v) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{y}(v)\breve{y}(\varphi) dxdz\ , & M(w) = \displaystyle\int_\Omega \hat{y}(w)\breve{y}(\varphi) dxdz\ , \\ \mathcal{P}(v,w) = \displaystyle\int_\Omega \tilde{y}(v)\hat{y}(w) dxdz\ , & K = \displaystyle\int_\Omega \breve{y}(\varphi)^2 dxdz\ . \end{cases}$$

On obtient ainsi l'écriture suivante :

$$J(v,w) = \frac{1}{2}\pi(v,v) + \frac{1}{2}\omega(w,w) + \mathcal{P}(v,w) + L(v) + M(w) + K$$

La recherche du point-selle s'effectue en deux temps : on commence par maximiser la fonctionnelle sur la perturbation w, avant de la minimiser sur le contrôle v.

3.2.1.1 Recherche du maximum sur w :

Comme pour le contrôle classique, on calcule le gradient de la fonction-coût par rapport à la perturbation w. On a :

$$\begin{aligned} J(v,w+\theta u) - J(v,w) \;&= \frac{1}{2}\left(\omega(w+\theta u, w+\theta u) - \omega(w,w)\right) + \mathcal{P}(v,w+\theta u) - \mathcal{P}(v,w) \\ &\quad + M(w+\theta u) - M(w) \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$J(v, w+\theta u) - J(v,w) = \frac{1}{2}\,\theta^2 \omega(u,u) + \theta\omega(w,u) + \theta\mathcal{P}(v,u) + \theta M(u)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0} \frac{J(v, w+\theta u) - J(v,w)}{\theta} &= \omega(w,u) + \mathcal{P}(v,u) + M(u) \\ &= \int_\Omega \hat{y}(u)\left(\hat{y}(w) + \tilde{y}(v) + \breve{y}(\varphi)\right) dxdz - k\int_\Omega uwdxdz\end{aligned}$$

On introduit alors l'état adjoint défini par :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = y(v)$$

Cette relation, ainsi que la définition de y : $\tilde{y}(v) + \hat{y}(w) + \breve{y}(\varphi) = y(v,w)$, permettent d'obtenir :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{J(v, w+\theta u) - J(v,w)}{\theta} = -\int_\Omega \hat{y}(u)\frac{\partial p}{\partial x} dxdz - k\int_\Omega uwdxdz$$

En intégrant par parties, il vient :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{J(v, w+\theta u) - J(v,w)}{\theta} = \int_\Omega p\,\frac{\partial \hat{y}}{\partial x}(u) dxdz - k\int_\Omega uwdxdz$$

En revenant à la définition de $\hat{y}$, on obtient la relation suivante :

$$\lim_{\theta\to 0} \frac{J(v, w+\theta u) - J(v,w)}{\theta} = \int_\Omega pudxdz - k\int_\Omega uwdxdz$$

Le gradient par rapport à w est nul lorsque : $p - kw = 0$. Ceci constitue la première condition d'optimalité.

3.2.1.2 Recherche du minimum sur v :

On calcule maintenant le gradient de la fonction-coût dans la direcion u par rapport au contrôle v. On a :

$$\begin{aligned}J(v+\theta u, w) - J(v,w) = \;& \frac{1}{2}\left(\pi(v+\theta u, v+\theta u) - \pi(u,u)\right) + \mathcal{P}(v, \theta u, w) - \mathcal{P}(v,w) \\ & + L(v+\theta u) - L(v)\end{aligned}$$

ce qui s'écrit plus simplement sous la forme :

$$J(v+\theta u,w)-J(v,w)=\frac{1}{2}\,\theta^2\pi(u,y)+\theta\pi(u,v)+\theta\mathcal{P}(u,w)+\theta L(u)$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\lim_{\theta\to 0}\frac{J(v+\theta u,w)-J(v,w)}{\theta} &= \pi(u,v)+\mathcal{P}(u,w)+L(u)\\ &= \int_\Omega \tilde{y}(u)(\tilde{y}(v)+\hat{y}(w)+\breve{y}(\varphi))dxdz+\int_\Omega uvdxdz\end{aligned}$$

En utilisant d'une part la décomposition de l'état y : $\tilde{y}(v)+\hat{y}(w)+\breve{y}(\varphi)=y(v,w)$, et d'autre part la définition de l'état adjoint : $-\dfrac{\partial p}{\partial x}=y(v)$, on obtient une expression simplifiée du gradient :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{J(v+\theta u,w)-J(v,w)}{\theta}=-\int_\Omega \tilde{y}(u)\frac{\partial p}{\partial x}dxdz+\int_\Omega uvdxdz$$

Une intégration par parties permet d'écrire cette limite sous la forme :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{J(v+\theta u,w)-J(v,w)}{\theta}=\int_\Omega p\,\frac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(u)dxdz+\int_\Omega uvdxdz$$

En faisant appel à la définition de $\dfrac{\partial \tilde{y}}{\partial x}(u)$, il vient :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{J(v+\theta u,w)-J(v,w)}{\theta}=\int_\Omega p\,div_\perp u dxdz+\int_\Omega uvdxdz$$

Enfin, les propriétés de l'état adjoint donnent :

$$\lim_{\theta\to 0}\frac{J(v+\theta u,w)-J(v,w)}{\theta}=\int_\Omega -grad_\perp p\,udxdz+\int_\Omega uvdxdz$$

On en déduit la deuxième condition d'optimalité :

$$v-grad_\perp p=0.$$

Finalement, on a obtenu deux conditions d'optimalité pour le système :

$$\boxed{\begin{cases} p-kw=0,\ y(a)=y_1,\\ v-grad_\perp p=0,\ p(0)=0.\end{cases}}$$

3.2.2 Lien avec l'équation de Riccati

Le problème de Helmholtz $\mathcal{P}_0$ étudié au chapitre précédent peut être considéré comme un problème de contrôle robuste. On va en effet vérifier que l'état du système vérifie l'équation de Helmholtz et que l'impédance qui relie cet état à l'état adjoint satisfait une équation de Riccati.

3.2.2.1 Retour au problème de Helmholtz :

Dans un premier temps, on montre que y est solution du problème de Helmholtz. Pour ce faire, on va dériver l'équation d'état en s'appuyant sur les différentes relations obtenues :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = div_\perp\, v + \varphi + w\,, \\ \varphi(x) = \displaystyle\int_0^x f(s)ds\,, \\ p - kw = 0\,, \\ v - grad_\perp\, p = 0 \end{cases}$$

D'une part, en dérivant la première équation, il vient :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = div_\perp \frac{\partial v}{\partial x} + f(x) + \frac{\partial w}{\partial x}$$

Or, $v = grad_\perp\, p$, donc $\dfrac{\partial v}{\partial x} = grad_\perp \dfrac{\partial p}{\partial x}$ et $div_\perp \dfrac{\partial v}{\partial x} = \Delta_\perp \dfrac{\partial p}{\partial x}$.

En outre, $p = kw$, donc $\dfrac{\partial w}{\partial x} = \dfrac{1}{k}\dfrac{\partial p}{\partial x}$.

On a donc, en combinant ces différentes relations :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Delta_\perp \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{k}\frac{\partial p}{\partial x} + f.$$

D'autre part, la définition de l'état adjoint $-\dfrac{\partial p}{\partial x} = y(v)$ permet d'écrire que :

$$-\Delta_\perp \frac{\partial p}{\partial x} = \Delta_\perp y$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \Delta y - \Delta_\perp y = \Delta y + \Delta_\perp \frac{\partial p}{\partial x}$$

Soit : $\Delta_\perp p' + \dfrac{1}{k}p' + f = \Delta y + \Delta_\perp p'$,

ou encore : $\boxed{\Delta y = -\dfrac{1}{k}y + f}$

y est donc solution du problème de Helmholtz.

Comme pour le problème de contrôle classique, on peut écrire nu système différentiel linéaire pour l'état et son adjoint. Pour simplifier, on se place dans le cadre du problème de Helmholtz homogène. Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \Delta_\perp p + \frac{1}{k} p$$

D'autre part, la définition de l'état adjoint donne la deuxième équation :

$$-\frac{\partial p}{\partial x} = y.$$

On a donc le système couplé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = \left(\Delta_\perp + \dfrac{1}{k}\right) p \\ \dfrac{\partial p}{\partial x} = -y \end{cases}$$

3.2.2.2 Equation de Riccati sur P :

Enfin, on va établir une équation de Riccati pour l'impédance du système en reprenant la méthode de calcul de la section précédente. A cet effet, on introduit un opérateur de type Neumann-to-Dirichlet :

$$p(x) = -P(x)y(x)$$

En dérivant cette relation, il vient :

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dP}{dx} y + P \frac{\partial y}{\partial x}$$

Autrement dit :

$$-y = \frac{dP}{dx} y + P \left(\Delta_\perp + \frac{1}{k}\right) p$$

Finalement :

$$\left(\frac{dP}{dx} + P \left(\Delta_\perp + \frac{1}{k}\right) P + I\right) y = 0$$

Comme cette équation est valable pour tous les états y, on en déduit que l'opérateur P vérifie une équation de Riccati :

$$\frac{dP}{dx} + P \left(\Delta_\perp + \frac{1}{k}\right) P + I = 0$$

On retrouve une équation du même type que celle que l'on avait obtenue par plongement invariant pour le problème de Helmholtz. Celui-ci peut donc être considéré comme un problème de contrôle robuste, et il sera possible d'utiliser les méthodes de calcul issues de cette théorie pour étudier le guide d'ondes du chapitre II.

Chapitre 4

Transformation homographique

Dans ce chapitre, on essaiera de donner une expression simplifiée pour l'opérateur Neumann-to-Dirichlet P : on va montrer que celui-ci est homographiquement semblable à un semi-groupe linéaire : en d'autres termes, il s'écrit comme une composition d'opérateurs qui ont une expression simple, indépendante d'une base de fonctions propres. Cette méthode va permettre notamment de connaître P partout si l'on connaît sa valeur en une extrémité du guide, ainsi que de calculer l'emplacement des singularités. Elle s'inspire de résultats utilisés en théorie du contrôle, qu'elle généralise (cf [32], [34], [33]). Contrairement aux méthodes classiques, elle permet d'obtenir une expression de cet opérateur indépendante de la base de fonctions propres choisies.

Le calcul s'effectue en quatre temps : on commence par transformer l'équation de Riccati en un système différentiel linéaire (cf [31]), puis on diagonalise celui-ci à l'aide de solutions particulières et on le résout. Ceci permet alors d'écrire l'opérateur sous une forme factorisée ; la dernière étape consiste en une réécriture sous la forme d'une composition de deux transformations homographiques et d'un semi-groupe.

Tout d'abord, on présentera la méthode pour l'opérateur Neumann-to- Dirichlet d'une guide cylindrique bouché et on expliquera comment cette expression permet de retrouver les résonances de boîte, puis on essaiera d'obtenir une formule plus générale, que l'on poura utiliser pour d'autres guides d'ondes.

4.1 Etude du semi-groupe non linéaire associé à l'équation de Riccati pour le problème de Helmholtz

Dans cette section, on s'intéresse à l'équation de Riccati correspondant à la deuxième factorisation (cf chapitre 2) et donc à l'opérateur Neumann-to-Dirichlet. Celui-ci est calculé dans le sens des x décroissants.

L'opérateur P que l'on cherche à expliciter est solution de l'équation de Riccati :

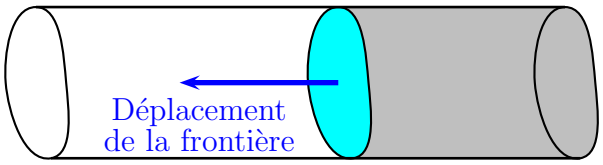


FIG. 4.1: Déplacement de la frontière mobile

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = I + P(\Delta_\perp + k^2 I)P \\ P(a) = 0 \end{cases}$$

Les coefficients de cette équation ont une forme diagonale dans la base orthonormale des fonctions propres Ψ_n pour le Laplacien transversal, ce qui va faciliter les calculs. On rappelle en particulier la relation :

$$\forall n, \quad (\Delta_\perp + k^2 I)\Psi_n = (k^2 - \alpha_n^2)\,\Psi_n$$

4.1.1 Système couplé pour l'équation de Riccati

Une méthode classique de résolution des équations de Riccati consiste à les transformer en un système différentiel linéaire (cf [31]). La première étape de la démarche va être de montrer que l'équation de Riccati peut se ramener au système suivant :

$$\begin{cases} X' = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y \\ Y' = X \end{cases}$$

Celui-ci est un système de deux équations couplées, mais que l'on peut résoudre facilement puisque le terme quadratique a disparu.

Dans un premier temps, on va introduire les opérateurs de ce système. Pour cela, on revient au problème de Helmholtz homogène.

$\forall x \in (0, a)$ et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, on définit $\gamma \in Y$ comme la solution du système :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega \\ \gamma|_\Sigma = 0,\ \gamma|_{\Gamma_a} = 0,\ \dfrac{\partial\gamma}{\partial x}|_{\Gamma_0} = h \end{cases}$$

On suppose que l'on n'est pas dans une situation de résonance et que le problème est bien posé pour tout h. On peut alors définir $X(x)$ l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$:

$$X(x)h = \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x)$$

et $Y(x)$ l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$:

$$Y(x)h = \gamma(x).$$

X et Y sont alors les opérateurs :

$$\begin{array}{l} X(x): \quad \dfrac{\partial y}{\partial x}(0) \quad \longmapsto \quad \dfrac{\partial y}{\partial x}(x) \\ Neumann \quad en \quad 0 \rightarrow Neumann \quad en \quad x \end{array}$$

$$\begin{array}{l} Y(x): \quad \dfrac{\partial y}{\partial x}(0) \quad \longmapsto \quad y(x) \\ Neumann \quad en \quad 0 \rightarrow Dirichlet \quad en \quad x \end{array}$$

On en déduit immédiatement la relation :

$$Y(x) = P(x)X(x).$$

Par ailleurs, Y vérifie la condition initiale : $Y(a) = 0$ et on a : $X(0) = I$.

Lemme 4.1 *X et Y vérifient formellement le système :*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx}(x) = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y(x) \\ \dfrac{dY}{dx}(x) = X(x) \end{cases}$$

Démonstration 4.1.1 *On sait que :*

$$X(x)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(0) = \frac{\partial \gamma}{\partial x}(x)$$

On dérive formellement cette relation :

$$\frac{dX}{dx}(x)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(0) = \frac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x)$$

Or, $\dfrac{\partial^2 \gamma}{\partial x^2}(x) = -(\Delta_\perp + k^2 I)\gamma(x)$, *où* $\gamma(x) = Y(x)\dfrac{\partial \gamma}{\partial x}(0)$

On en déduit que :

$$\frac{dX}{dx}(x)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(0) = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y(x)\frac{\partial \gamma}{\partial x}(0)$$

Comme cette relation est vraie pour tout h dans $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, on peut conclure que :

$$\frac{dX}{dx}(x) = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y(x).$$

De même, $Y(x)\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}(0) = \gamma(x)$

En dérivant formellement :

$$\frac{dY}{dx}(x)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(0) = \frac{\partial\gamma}{\partial x}(x) = X(x)\frac{\partial\gamma}{\partial x}(0)$$

D'où la relation :

$$\frac{dY}{dx}(x) = X(x).$$

On montre maintenant que ce système linéaire est équivalent à l'équation de Riccati pour $P(X)$, avec la relation $Y(x) = P(x)X(x)$.

Si l'équation de Riccati $\dfrac{dP}{dx} = I + P(\Delta_\perp + k^2 I)P$ admet une solution P sur un sous-intervalle I_0 de $(0, a)$ et si le système linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y \\ \dfrac{dY}{dx} = X \end{cases}$$

admet une solution $(X(x), Y(x))$, alors $Y(x) = P(x)X(x) \quad \forall x \in I_0$.

En effet, si l'on suppose que l'équation de Riccati

$$\frac{dP}{dx} = I + P(\Delta_\perp + k^2 I)P$$

admet une solution $P(x)$ sur un sous-intervalle I_0 de $(0, a)$ et que le système sur X, Y admet une solution, l'opérateur X vérifie :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx}(x) = -(\Delta_\perp + k^2 I)P(x)X(x) \\ X(0) = I \end{cases}$$

On définit maintenant $Y(x) = P(x)X(x)$; Y est donc continue sur I_0, dérivable et on a :

$$\frac{dY}{dx}(x) = X(x) + P(x)(\Delta_\perp + k^2 I)P(x)X(x) - P(x)(\Delta_\perp + k^2 I)Y(x) = X(x)$$

X et Y vérifient donc le système différentiel linéaire sur I_0.

Réciproquement, si X, Y sont solution du système différentiel linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = -(\Delta_\perp + k^2 I)Y \\ \dfrac{dY}{dx} = X \end{cases}$$

sur un sous-intervalle I_0 de $(0, a)$ et que X est inversible sur cet intervalle, on peut définir l'opérateur $Y(x)X(x)^{-1} = P(x)$ sur I_0 ; en particulier, il est continu, dérivable sur cet ensemble. On peut alors calculer sa dérivée :

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dP}{dx}X + P\frac{dX}{dx},$$

soit $X = \dfrac{dP}{dx}X - P(\Delta_\perp + k^2 I)PX$

Comme X est inversible, il vient :

$$\frac{dP}{dx} = I + P(\Delta_\perp + k^2 I)P.$$

P est donc solution de l'équation de Riccati sur I_0.

X et Y sont des opérateurs dépendant de x, dont la valeur en a est donnée par la relation : $Y(a) = P(a)X(a)$. Comme $P(a) = 0$, il en résulte que $Y(a) = 0$.

4.1.2 Solution stationnaire de l'équation de Riccati

On cherche maintenant une solution particulière pour l'équation de Riccati (en changeant éventuellement de condition initiale) ; celle-ci servira d'intermédiaire de calcul dans l'étape suivante. A priori, on exigera seulement qu'elle soit un opérateur inversible ; on peut donc chercher à exhiber la solution la plus simple possible. Il est donc légitime de chercher une solution stationnaire, i.e. indépendante de la variable x, ce qui revient à résoudre l'équation :

$$P(\Delta_\perp + k^2 I)P = -I,$$

où le P cherché est un opérateur de $H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)'$ vers $H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)$.

Comme les coefficients de cette équation de Riccati stationnaire sont diagonalisables dans la base de fonctions propres Ψ_n, on peut chercher une solution diagonale dans cette base.

Soit P_0 une telle solution. On note P_0^n son n-ième coefficient, c'est-à-dire que :

$$P_0\Psi_n = P_0^n\,\Psi_n \;\forall n.$$

Chacun de ces coefficients vérifie l'équation scalaire :

$$P_0^n(k^2-\alpha_n^2)P_0^n = -1$$

Autrement dit, $(P_0^n)^2 = \dfrac{1}{\alpha_n^2-k^2}$ si $k \neq \alpha_n$.

Lorsque $k \neq \alpha_n$ pour tout n (on supposera dans un premier temps que c'est effectivement le cas), cette équation a deux solutions.

On appelle β_n la solution retenue :

$$\beta_n = \begin{cases} \sqrt{\alpha_n^2-k^2} & \text{si } \alpha_n^2-k^2 > 0 \\ i\sqrt{k^2-\alpha_n^2} & \text{sinon} \end{cases}$$

On obtient donc un nombre fini de β_n prenant des valeurs complexes correspondant aux modes propagatifs, et une infinité de valeurs réelles (modes évanescents).

La solution de l'équation de Riccati stationnaire vérifie donc :

$$P_0\Psi_n = \pm\frac{1}{\beta_n}\;\forall n.$$

Pour chaque mode, deux choix sont possibles, et chacun correspond à un sens de propagation du mode ; on va donc effectuer un "tri" des solutions. Celui-ci est lié à la factorisation de Helmholtz pour un cylindre infini :

$$\Delta_\perp + k^2 I = \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\sqrt{\Delta_\perp + k^2 I}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\Delta_\perp + k^2 I}\right)$$

L'opérateur $\dfrac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\Delta_\perp + k^2 I}$ représente des ondes se propageant vers la droite. Plus précisément, si

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\sqrt{\Delta_\perp + k^2 I}\right) u = 0,$$

alors u est solution du problème de Helmholtz et u se propage dans le sens des x croissants et vérifie la condition de radiation en $x = +\infty$.

On appelle P_0 la solution suivante :

$$P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}\,\Psi_n & \text{si } \alpha_n^2-k^2 \geq 0 \\ i\dfrac{1}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}\,\Psi_n & \text{sinon} \end{cases}$$

P_0 est en fait l'opérateur Neumann-to-Dirichlet du guide d'ondes semi-infini ; sa décomposition modale permet de vérifier facilement qu'il fait gagner un degré de régularité.
Par ailleurs, on constate que P_0 est inversible.

Dans la suite des calculs, on supposera encore que $k \neq n$. Le cas où k est valeur propre pour le laplacien transversal sera étudié à la fin de la section.

4.1.3 Diagonalisation du système précédent (cas général)

Il est difficile de résoudre directement le système différentiel obtenu précédemment : les deux équations sont couplées. En revanche, si on le diagonalise, on obtient deux équations diférentielles linéaires du premier ordre totalement indépendantes l'une de l'autre, que l'on peut donc résoudre explicitement.
Pour diagonaliser le système, une méthode simple consiste à faire intervenir les solutions particulières présentées dans le paragraphe précédent.

Lemme 4.2 *Le système linéaire :*

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = -(\Delta_\perp + k^2 I)\, Y \ ; & X(0) = I \\ \dfrac{dY}{dx} = X \ ; & Y(a) = 0 \end{cases}$$

est équivalent au système diagonal :

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = P_0^{-1}\varphi \ ; & \varphi(0) - P_0^{-1}\psi(0) = I \\ \dfrac{d\psi}{dx} = -P_0^{-1}\psi \ ; & P_0\varphi(a) + \psi(a) = 0 \end{cases},$$

où $\varphi : H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' \to H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ *et* $\psi : H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' \to H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$.

Démonstration 4.1.2 *On introduit les opérateurs auxiliaires* $\varphi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ *et* $\psi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ *liés à* X *et à* Y *par les relations :*

$$\begin{cases} X = \varphi - P_0^{-1}\psi \\ Y = P_0\varphi + \psi \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} \varphi = \dfrac{1}{2}\left(X + P_0^{-1}Y\right) \\ \psi = \dfrac{1}{2}\left(-P_0 X + Y\right) \end{cases}$$

On dérive formellement φ *par rapport à* x *:*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}(\frac{dX}{dx} + P_0^{-1}\frac{dY}{dx})$$

On remplace les dérivées de X et de Y par leurs expressions :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\left(-(\Delta_\perp + k^2 I)Y + P_0^{-1}X\right)$$

En les exprimant en fonction des opérateurs auxiliaires, il vient :

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{2}\left([-(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 + P_0^{-1}]\varphi + [-(\Delta_\perp + k^2 I) - P_0^{-2}]\psi\right)$$

Or, l'opérateur P_0 est solution de l'équation de Riccati stationnaire, on en déduit que :

$$-(\Delta_\perp + k^2 I) = P_0^{-2}$$

Par conséquent, $-(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 = P_0^{-1}$, tandis que $-(\Delta_\perp + k^2 I) - P_0^{-2} = 0$.

Finalement, on a :

$$\frac{d\varphi}{dx} = P_0^{-1}\varphi.$$

De la même manière, la dérivée de ψ s'écrit :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\left(-P_0\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dx}\right)$$

On l'exprime en fonction des opérateurs X et Y :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\left(P_0(\Delta_\perp + k^2 I)Y + X\right)$$

Ensuite, on fait intervenir les opérateurs φ et ψ :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\left(P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0\varphi + P_0(\Delta_\perp + k^2 I)\psi + \varphi - P_0^{-1}\psi\right)$$

Comme $P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 = -I$ et $P_0(\Delta_\perp + k^2 I) = -P_0^{-1}$, l'expression devient :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{1}{2}\left(-\varphi - P_0^{-1}\psi + \varphi - P_0^{-1}\psi\right)$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\psi}{dx} = -P_0^{-1}\psi.$$

Remarque 4.1 *Ce changement de variables revient à diagonaliser des opérateurs. En effet, on vient de démontrer que les opérateurs :*

$$\begin{pmatrix} 0 & -(\Delta_\perp + k^2 I) \\ I & 0 \end{pmatrix} \quad et \quad \begin{pmatrix} P_0^{-1} & 0 \\ 0 & -P_0^{-1} \end{pmatrix}$$

sont semblables, et ont comme matrice de passage

$$\begin{pmatrix} I & -P_0^{-1} \\ P_0 & I \end{pmatrix}.$$

Les conditions initiales de ce système sont données par :

$$\begin{cases} \varphi(0) - P_0^{-1}\psi(0) = I \\ P_0\varphi(a) + \psi(a) = 0 \end{cases}$$

Comme l'opérateur P_0^{-1} est indépendant de la variable x, l'intégration du système en φ et ψ à partir de $\varphi(a)$ et de $\psi(0)$ donne :

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{P_0^{-1}(x-a)}\varphi(a) \\ \psi(x) = e^{-P_0^{-1}x}\psi(0) \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \varphi(0) = e^{-P_0^{-1}(a)}\varphi(a) \\ \psi(a) = e^{-P_0^{-1}a}\psi(0) \end{cases}$$

On en déduit le système suivant pour les conditions initiales :

$$\begin{cases} e^{-P_0^{-1}a}\varphi(a) - P_0^{-1}\psi(0) = I \\ P_0\varphi(a) + e^{-P_0^{-1}a}\psi(0) = 0 \end{cases}$$

Comme P_0, P_0^{-1} et $e^{-P_0^{-1}a}$ commutent, ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi(a) = \left(e^{P_0^{-1}a} + e^{-P_0^{-1}a}\right)^{-1} \\ \psi(0) = -P_0\left(I + e^{-2P_0^{-1}a}\right)^{-1} \end{cases}$$

On en déduit les expressions de φ et de ψ :

$$\boxed{\begin{cases} \varphi(x) = e^{P_0^{-1}(x-a)}\left(e^{P_0^{-1}a} + e^{-P_0^{-1}a}\right)^{-1} \\ \psi(x) = -e^{-P_0^{-1}x}P_0\left(I + e^{-2P_0^{-1}a}\right)^{-1} \end{cases}}$$

4.1.4 Factorisation de P

Revenons au problème de départ : on cherche une expression de $P(t)$ en fonction de sa valeur initiale $P(a)$. On va remplacer la condition initiale proposée au départ par une condition plus générale : on pose $P(a) = \pi$, où $\pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$. Ceci permettra d'adapter le calcul à d'autres configurations, étudiées dans la deuxième partie.

Pour estimer $P(t)$, on va utiliser les systèmes différentiels linéaires introduits précédemment. Ainsi, on va exprimer P en fonction de X et de Y, puis de ϕ et de ψ en utilisant la relation de passage :

$$\begin{cases} X = \varphi - P_0^{-1}\psi \\ Y = P_0\varphi + \psi \end{cases}$$

Une méthode simple consiste à définir un nouvel opérateur auxiliaire $W \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' \ , \ H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$:

$$W(x) = \psi(x)\,\varphi^{-1}(x)\ \forall x \in [0, a]$$

Cet opérateur permet d'écrire P sous une forme factorisée. On a en effet le résultat suivant:

Lemme 4.3 *L'opérateur Neumann-to-Dirichlet P peut s'écrire :*

$$\boxed{P(x) = (P_0 + W(x))(I - P_0^{-1}W(x))^{-1}}$$

Démonstration 4.1.3 *Pour factoriser l'expression de P, on commence par exprimer X et Y en fonction de l'opérateur auxiliaire W.*

Comme $X = \varphi - P_0^{-1}\psi$, on en déduit que :

$$X = \varphi - P_0^{-1}\psi\varphi^{-1}\varphi = (I - P_0^{-1}W)\phi$$

De même, on a :

$$Y = P_0\varphi + \psi = (P_0 + W)\phi$$

On va donc obtenir une expression de P en fonction de cet opérateur :

$$P = YX^{-1} = (P_0 + W)\varphi\left((I - P_0^{-1}W)\varphi\right)^{-1}$$

Donc :

$$P = (P_0 + W)\varphi\varphi^{-1}(I - P_0^{-1}W)^{-1}$$

Il vient :

$$P(x) = (P_0 + W(x))(I - P_0^{-1}W(x))^{-1}$$

De la définition de W, on tire directement :

$$W(x) = e^{-P_0^{-1}(x-a)}W(a)e^{-P_0^{-1}(x-a)}$$

Par ailleurs, on a :

Lemme 4.4 *W est solution de l'équation différentielle de Lyapunov:*

$$\frac{dW}{dx} = -P_0^{-1}W - WP_0^{-1}$$

Démonstration 4.1.4 *En effet, en dérivant formellement :*

$$\frac{dW}{dx} = \frac{d\psi}{dx}\varphi^{-1} - \psi\varphi^{-1}\frac{d\varphi}{dx}\varphi^{-1}$$

Le système différentiel donne :

$$\frac{dW}{dx} = -P_0^{-1}\psi\varphi^{-1} - \psi\varphi^{-1}P_0^{-1}\varphi\varphi^{-1}$$

On conclut que :

$$\frac{dW}{dx} = -P_0^{-1}W - WP_0^{-1}$$

Cette expression permet d'évaluer P en x en fonction de la valeur de W en cette abscisse. On cherche maintenant à exprimer P en fonction de sa condition initiale $P(a) = \pi$. On souhaite montrer que :

Lemme 4.5 *$P(x)$ a pour expression :*

$$\begin{aligned} P(x) = \; & [P_0 - e^{-P_0^{-1}(x-a)}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)e^{-P_0^{-1}(x-a)}] \\ & [I + P_0^{-1}e^{-P_0^{-1}(x-a)}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)e^{-P_0^{-1}(x-a)}]^{-1} \end{aligned}$$

Démonstration 4.1.5 *Pour ce faire, on va introduire l'expression explicite de W dans l'écriture précédente pour P. On a ainsi :*

$$P(x) = \left(P_0 + e^{-P_0^{-1}(x-a)}W(a)e^{-P_0^{-1}(x-a)}\right)\left(I - P_0^{-1}e^{-P_0^{-1}(x-a)}W(a)e^{-P_0^{-1}(x-a)}\right)^{-1}$$

A présent, on calcule $W(a)$ en fonction de $P(a) = \pi$; ceci permettra d'obtenir P en fonction de sa condition initiale.On écrit l'expression factorisée pour P en $x = a$:

$$P(a) = \pi = (P_0 + W(a))(I - P_0^{-1}W(a))^{-1}$$

Par conséquent, on a :

$$\pi - \pi P_0^{-1}W(a) = P_0 + W(a)$$

D'où :

$$W(a) = -(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)$$

D'où l'expression de P.

On obtient ainsi une expression de $P(x)$ en fonction d'opérateurs connus, que l'on peut calculer explicitement.

4.1.5 Reformulation

La dernière phase du calcul va consister en une réécriture de P sous la forme d'une composition d'opérateurs. Pour cela, on introduit les opérateurs de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ dans lui-même :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\pi) = (I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi) \\ \mathcal{G}(\pi) = (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1} \\ \mathcal{L}(t)(W) = e^{-P_0^{-1}(t-a)}We^{-P_0^{-1}(t-a)} \end{cases}$$

$\mathcal{L}$, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ agissent sur des opérateurs définis sur une section du guide. Ils transforment un élement de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ en un autre élément de cet espace : ils sont donc stables.

$\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ ne sont pas linéaires et ne sont pas définis pour tout élément de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$. Ce sont des transformations homographiques qui présentent des singularités liées à celles de l'opérateur Neumann-to-Dirichlet (pour que ces transformations homographiques soient bien définies, il faut que leur dénominateur soit inversible). Celles-ci seront étudiées dans la prochaine section.

Remarque 4.2 *$\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ ne dépendent pas de x.*

Par ailleurs, elles sont inverses l'une de l'autre :

Lemme 4.6 *Les opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ définis par :*

$$\mathcal{H}(\pi) = (I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi) \text{ et : } \mathcal{G}(\pi) = (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}$$

sont tels que : $\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \pi$.

Démonstration 4.1.6 *En effet, on a, d'une part :*

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \left(P_0 - (I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)\right) \left(I + P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)\right)^{-1}$$

En factorisant à gauche par $(I + \pi P_0^{-1})^{-1}$, on obtient :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 + \pi - P_0 + \pi)\ (I + P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi))^{-1}$$

ou encore :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (I + \pi P_0^{-1})^{-1} 2\pi\ (I + P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi))^{-1}$$

Par ailleurs, on a :

$$(I + \pi P_0^{-1})^{-1}\pi = (\pi^{-1}(I + \pi P_0^{-1}))^{-1}.$$

On en déduit que :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (\pi^{-1} + P_0^{-1})^{-1} 2\ (I + P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi))^{-1}$$

On factorise maintenant par $P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}$ dans le deuxième facteur :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (\pi^{-1} + P_0^{-1})^{-1} 2\ \left(P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}[(I + \pi P_0^{-1})P_0 + (P_0 - \pi)]\right)^{-1}$$

Il vient alors :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (\pi^{-1} + P_0^{-1})^{-1} 2\ \left(P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1} 2P_0\right)^{-1}$$

Or, $\left(P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})^{-1} 2P_0\right)^{-1} = \frac{1}{2} P_0^{-1}(I + \pi P_0^{-1})P_0 = \frac{1}{2} P_0^{-1}(P_0 + \pi)$, par conséquent :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (\pi^{-1} + P_0^{-1})^{-1} 2\ \frac{1}{2}(I + P_0^{-1}\pi)$$

Finalement :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (\pi^{-1} + P_0^{-1})^{-1}\ (\pi^{-1} + P_0^{-1})\pi = \pi$$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \left(I + (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}P_0^{-1}\right)^{-1} \left(P_0 - (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}\right)$$

Tout d'abord, on a :

$$(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}P_0^{-1} = \left(P_0(I + P_0^{-1}\pi)\right)^{-1} = (P_0 + \pi)^{-1},$$

ce qui permet de simplifier l'expression :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = (I + (P_0 - \pi)(P_0 + \pi)^{-1})^{-1} \left(P_0 - (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}\right)$$

On factorise par $(P_0 + \pi)^{-1}$ à l'intérieur du premier facteur :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = ([(P_0 + \pi) + (P_0 - \pi)](P_0 + \pi)^{-1})^{-1} \left(P_0 - (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}\right)$$

On en déduit que :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = (P_0 + \pi)\frac{1}{2}P_0^{-1} \left(P_0 - (P_0 - \pi)(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}\right)$$

A présent, on factorise à droite par $(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}$:

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = (P_0 + \pi)\frac{1}{2}P_0^{-1} \left([P_0(I + P_0^{-1}\pi) - (P_0 - \pi)](I + P_0^{-1}\pi)^{-1}\right)$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = (P_0 + \pi)\frac{1}{2}P_0^{-1}\, 2\pi(I + P_0^{-1}\pi)^{-1}$$

Le premier facteur s'écrit encore :

$$(P_0 + \pi)P_0^{-1}\pi = \pi + \pi P_0^{-1}\pi = \pi(I + P_0^{-1}\pi)$$

On a donc :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \pi(I + P_0^{-1}\pi)\,(I + P_0^{-1}\pi)^{-1} = \pi$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont donc des transformations homographiques inverses l'une de l'autre. En particulier, $\mathcal{H}$ s'écrit également :

$$\mathcal{H}(\pi) = P_0^{-1}(P_0 + \pi)^{-1}(P_0 - \pi)$$

En acoustique, il est appelé "matrice de réflexion", car il associe aux modes se propageant dans le sens des x croissants ceux qui se propagent dans le sens des x décroissants.

$\mathcal{L}(x)$ est en fait l'opérateur qui à M associe $M(x)$ solution de l'équation :

$$\begin{cases} \dfrac{dM}{dx}(x) + P_0^{-1}M(x) + M(x)P_0^{-1} = 0 \\ M(a) = M \end{cases}$$

$M(x)$ est solution d'une équation linéaire de type Lyapunov, et M représente sa condition initiale en a.
On constate que $\mathcal{L}$ est un semi-groupe linéaire, il n'a donc pas de singularité. Contrairement à $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$, celui-ci dépend de x.

On revient maintenant à l'expression de $P(x)$. On rappelle que :

$$\begin{aligned} P(x) = \quad & [P_0 - e^{-P_0^{-1}(x-a)}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)e^{-P_0^{-1}(x-a)}] \\ & [I + P_0^{-1}e^{-P_0^{-1}(x-a)}(I + \pi P_0^{-1})^{-1}(P_0 - \pi)e^{-P_0^{-1}(x-a)}]^{-1} \end{aligned}$$

Cette relation s'écrit alors :

$P(x) = [P_0 - \mathcal{L}(x) \circ \mathcal{H}(\pi)][I + P_0^{-1}\mathcal{L}(x) \circ \mathcal{H}(\pi)]^{-1}$, d'où :

$$\boxed{P(x) = \mathcal{G} \circ \mathcal{L}(x) \circ \mathcal{H}(\pi)}$$

Ainsi, pour connaître la solution de P en tout point du guide, il suffit de connaître sa valeur π en a : le guide étudié ici est un guide bouché, donc $\pi = 0$, mais on pourrait envisager d'autres configurations pour lesquelles le guide est un tube semi-infini au-delà de a ; dans ce cas, on aurait une valeur initiale π différente, mais la formule obtenue serait toujours valable.

La figure suivante explique le mode de calcul de P en fonction de sa condition initiale : la valeur de $P(a)$ permet d'obtenir celle de $W(a)$ au moyen d'une transformation homographique ; en appliquant ensuite un semi-groupe linéaire, on trouve alors l'expression de l'opérateur auxiliaire $W(x)$. Une seconde transformation homographique donne enfin une expression de $P(x)$.

4.1.6 Analyse des discontinuités

La formule que l'on vient d'obtenir permet de retrouver facilement les singularités de l'opérateur Neumann-to-Dirichlet. En effet, celles-ci apparaissent lorsque les transformations homographiques ne sont pas définies, c'est-à-dire lorsque leur dénominateur est singulier. On va montrer qu'on peut les caractériser de la manière suivante :

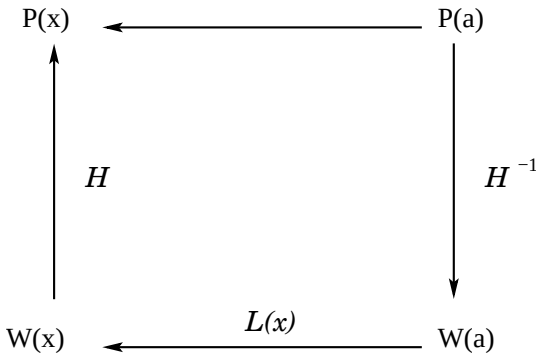


FIG. 4.2: Calcul de P

Lemme 4.7 *Les singularités de P se produisent uniquement sur des modes propagatifs et apparaissent aux abscisses suivantes :*

$$a - \frac{\pi + 2\pi\mathbb{N}}{2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}, \quad \textit{avec } k^2 - \alpha_n^2 > 0, \ \alpha_n \textit{ valeurs propres de } \Delta_\perp$$

Démonstration 4.1.7 *Pour trouver l'emplacement des singularités, on reprend le schéma de calcul de P en analysant les transformations homographiques ou le semi-groupe.*

Tout d'abord, on rappelle que $\pi = P(a) = 0$ pour le cas étudié. On en déduit que

$$\mathcal{H}(\pi) = P_0$$

et par conséquent que cet opérateur est bien défini partout.

On étudie ensuite l'effet du semi-groupe $\mathcal{L}$. Celui-ci ne présente pas non plus de discontinuités ; celles-ci vont donc être dues à la deuxième trasnformation homographique. Pour le vérifier, on revient à la décomposition en modes propres. Comme

$$\mathcal{G}(\mathcal{L}(x)\mathcal{H}(P_0)) = (P_0 - \ell(x))(I + P_0^{-1}\ell(x))^{-1}, \textit{ où}$$

$$\ell(x) = \mathcal{L}(x)(P_0) = e^{-P_0^{-1}(x-a)} P_0 e^{-P_0^{-1}(x-a)},$$

les discontinuités correspondent en fait aux valeurs propres nulles du dénominateur :

$$I + P_0^{-1}\ell(x).$$

Comme tous les opérateurs intervenant ici sont diagonaux, on peut expliciter facilement cet opérateur sur chaque fonction de base Ψ_n :

$$P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\,\Psi_n & \textit{si } \alpha_n^2 - k^2 > 0 \\ i\dfrac{1}{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}\,\Psi_n & \textit{sinon} \end{cases}$$

Premier cas : $\alpha_n^2 - k^2 > 0$ *(mode évanescent)*

Dans ce cas, on a :

$$P_0^{-1}(x-a)\Psi_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\,(x-a)\,\Psi_n$$

On en déduit que :

$$P_0 e^{-P_0^{-1}(x-a)}\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} e^{-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,(x-a)}\,\Psi_n$$

Il vient alors :

$$\ell(x)\Psi_n = \frac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} e^{-2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,(x-a)}\,\Psi_n$$

On obtient le dénominateur de $\mathcal{G}$:

$$\left(I + P_0^{-1}\ell(x)\right)\Psi_n = \left(1 + e^{-2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,(x-a)}\right)\,\Psi_n$$

La valeur propre associée à Ψ_n est donc réelle, strictement positive, donc elle ne s'annule jamais.

Deuxième cas : $\alpha_n^2 - k^2 < 0$ *(mode propagatif)*

On a alors :

$$P_0^{-1}(x-a)\Psi_n = -i\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\,(x-a)\,\Psi_n$$

On en déduit que :

$$P_0 e^{-P_0^{-1}(x-a)}\Psi_n = \frac{i}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\, e^{i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}\Psi_n$$

Par conséquent :

$$\ell(x)\Psi_n = \frac{i}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\, e^{2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}\Psi_n$$

Le dénominateur de $\mathcal{G}$ a alors pour expression :

$$\left(I + P_0^{-1}\ell(x)\right)\Psi_n = \left(1 + e^{2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}\right)\,\Psi_n$$

Dans ce cas la valeur propre associée à Ψ_n est complexe et peut s'annuler lorsque :

$$2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}(x-a) = \pi + 2\pi\mathbb{Z}$$

c'est-à-dire :

$$x - a = \frac{\pi + 2\pi\mathbb{Z}}{2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}} \text{ avec } x < a$$

d'où la conclusion.

Remarque 4.3 *On retrouve les mêmes discontinuités pour P que par le calcul direct.*

Cette analyse des singularités montrer l'intérêt de la méthode pour les calculs numériques: en effet, les discontinuités de l'opérateur P apparaissent lorsque certains opérateurs ne sont pas inversibles. Cependant, on peut calculer ceux-ci en tout point du guide, y compris à l'endroit des singularités. Par conséquent, il est possible de connaître la valeur de P juste après l'une d'entre elles. Au contraire, lorsque l'on utilise les méthodes classiques, il est difficile de déterminer sa valeur après une explosion, et bien souvent, le calcul s'arrête après une singularité.

4.1.7 Transformation homographique pour le cas particulier des résonances transverses

On a effectué les calculs en supposant qu'il n'y avait pas de fréquence de coupure, c'est-à-dire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \alpha_n \neq k.$$

Lorsqu'il en existe une, i.e. si $\exists j \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_j = k$, l 'opérateur $\Delta_\perp + k^2 I$ a une et une seule valeur propre nulle. Dans ce cas, l'opérateur $P(\Delta_\perp + k^2 I)P$ ne peut plus être de rang maximal et donc l'équation $P(\Delta_\perp + k^2 I)P = -I$ n'a plus de sens. On ne peut donc plus trouver une solution constante pour la première équation de Riccati. Ce cas particulier est lié à la géométrie du problème, plus précisément au diamètre du guide d'ondes.

4.1.7.1 Détermination de solutions particulières

Il va donc falloir trouver une solution particulière non stationnaire pour l'équation de Riccati, ce qui va modifier les définitions de $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{L}$, et par conséquent les propriétés de ces opérateurs. On va essayer de se rapprocher le plus possible du cas précédent en choisissant des valeurs propres stationnaires pour tous les modes évanescents ou propagatifs.

Lemme 4.8 *L'opérateur $P_0 \in C^1(0,a;\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)))$ défini par :*

$$P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{i}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}\,\Psi_n & si\ n<j\ , \\ (x-c)\,\Psi_j & si\ n=j \\ \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}\,\Psi_n & sinon \end{cases}$$

où $c \in \mathbb{R}$ est une constante telle que $x-a \neq 0$ sur $(0,a)$,

est solution de l'équation de Riccati

$$\frac{dP}{dx} = I + P(\Delta_\perp + k^2 I)P.$$

Démonstration 4.1.8 ***Premier cas :*** $n \neq j$

Ce cas correspond aux modes propagatifs ou évanescents. Pour les deux configurations, on a :

$$P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0\Psi_n = -\Psi_n,$$

et la conclusion est immédiate.

Deuxième cas : $n = j$

Dans ce cas, on a :

$$P_0(x)\Psi_j = (x - c)\Psi_j.$$

Comme la valeur propre de l'opérateur $\Delta_\perp + k^2 I$ associée à Ψ_j est nulle, il vient :

$$(\Delta_\perp + k^2 I)P_0(x)\Psi_j = 0$$

Par suite, on a :

$$(I + P_0(x)(\Delta_\perp + k^2 I)P_0(x))\,\Psi_j = \Psi_j$$

D'autre part :

$$\frac{dP_0}{dx}(x)\Psi_j = \Psi_j$$

Au total, on a obtenu la relation :

$$\frac{dP_0}{dx}(x)\Psi_j = \left(I + P_0(x)(\Delta_\perp + k^2 I)P_0(x)\right)\Psi_j.$$

d'où la conclusion.

Remarque 4.4 *L'opérateur ainsi obtenu a une forme diagonale et $P_0(x)$ est inversible $\forall x \in (0, a)$.*

On introduit également un opérateur auxiliaire $Q_0 \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ défini par :

$$Q_0\Psi_n = \begin{cases} -i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\,\Psi_n & \text{si } n < j \\ 0 & \text{si } n = j \\ \sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,\Psi_n & \text{sinon} \end{cases}$$

Q_0 est un opérateur diagonal, solution stationnaire de l'équation de Riccati :

$$\frac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) = 0$$

Cet opérateur sera utilisé dans le changement de variables permettant de diagonaliser le système différentiel linéaire.

4.1.7.2 Diagonalisation du système différentiel

On reprend la démarche du cas général. On a obtenu l'équivalence entre l'équation de Riccati sur P et le système différentiel linéaire du premier ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = -(\Delta_\perp + k^2 I)\,Y\ ; & X(0) = I \\ \dfrac{dY}{dx} = X\ ; & Y(a) = 0 \end{cases},$$

où $X(x) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ et $Y(x) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$; on va maintenant diagonaliser celui-ci.

On introduit les opérateurs $\varphi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ et $\psi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ tels que :

$$\begin{cases} X = \varphi - Q_0\psi \\ Y = P_0(x)\varphi + \psi \end{cases}$$

Lemme 4.9 *φ et ψ ont pour expression :*

$$\begin{cases} \varphi = \Phi X + Q_0\Phi Y \\ \psi = -P_0\Phi X + \Phi Y \end{cases},$$

où $\Phi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)) \cap \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ a pour décomposition modale :

$$\Phi\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\Psi_n & si\ n \neq j \\ \Psi_n & si\ n = j \end{cases}$$

Démonstration 4.1.9 *Une première combinaison linéaire des équations du système permet d'écrire que :*

$$X + Q_0 Y = [I + Q_0 P_0(x)]\varphi$$

Or, l'opérateur $I + Q_0 P_0(x) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ *est inversible. En effet, on a:*

$$Q_0 P_0(x)\Psi_n = \begin{cases} \Psi_n & si\ n < j \\ 0\Psi_j & si\ n = j \\ \Psi_n & si\ n > j \end{cases}$$

On en déduit que :

$$(I + Q_0 P_0(x))\Psi_n = \begin{cases} 2\Psi_n & si\ n \neq j \\ \Psi_n & sinon \end{cases}$$

Soit donc $\Phi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ *l'inverse de cet opérateur. Sa décomposition modale dans la base des* Ψ_n *est :*

$$\Phi\Psi_n = \begin{cases} \frac{1}{2}\Psi_n\ si\ n \neq j \\ \Psi_n\ sinon \end{cases}$$

Cet opérateur est également un élément de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ *et on a la relation dans cet espace :*

$$\Phi\,(I + P_0(x)Q_0) = (I + P_0(x)Q_0)\,\Phi$$

Par ailleurs, il commute avec $P_0(x)$ *et* Q_0.

Par conséquent la relation obtenue précédemment s'écrit aussi :

$$\varphi = \Phi X + \Phi Q_0 Y.$$

De la même manière, le système linéaire donne la relation :

$$Y - P_0(x) = (I + P_0(x)Q_0)\psi.$$

Les propriétés de Φ *permettent de la transformer en :*

$$\psi = \Phi Y - \Phi P_0 X.$$

Remarque 4.5 *On a obtenu les relations suivantes pour* Φ *:*

$$[I + Q_0P_0(x)]\Phi = \Phi[I + Q_0P_0(x)] = I \text{ et}$$

$$[I + P_0(x)Q_0]\Phi = \Phi[I + P_0(x)Q_0] = I.$$

Lemme 4.10 φ *et* ψ *vérifient le système différentiel diagonal :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = Q_0\varphi \\ \dfrac{d\psi}{dx} = P_0(x)(\Delta_\perp + k^2 I)\psi \end{cases}$$

Démonstration 4.1.10 *On dérive formellement l'expression de* φ *:*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Phi\frac{dX}{dx} + Q_0\Phi\frac{dY}{dx}$$

Cette dérivée s'écrit :

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)Y + Q_0\Phi X$$

mais encore, en remplaçant X *et* Y *par leurs expressions en* φ *et* ψ *:*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Phi\left(-(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 + Q_0\right)\varphi - \Phi\left(Q_0^2 + (\Delta_\perp + k^2 I)\right)\psi$$

Or, $Q_0^2 + (\Delta_\perp + k^2 I) = 0$*, alors :*

$$\frac{d\varphi}{dx} = \Phi\left(-(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 + Q_0\right)\varphi$$

On va simplifier ce coefficient :

$$-(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 = Q_0^2 P_0$$

$$-\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 = Q_0\Phi Q_0 P_0$$

Or, $\Phi(I + P_0Q_0) = I$*, donc* $\Phi Q_0 P_0 = I - \Phi$ *et*

$$-\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)P_0 + \Phi Q_0 = Q_0$$

Finalement :

$$\frac{d\varphi}{dx} = Q_0\varphi.$$

De la même manière, on dérive formellement ψ :

$$\frac{d\psi}{dx} = -\frac{dP_0}{dx}\Phi X - P_0\Phi\frac{dX}{dx} + \Phi\frac{dY}{dx}$$

c'est-à-dire :

$$\frac{d\psi}{dx} = -P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0\Phi X + P_0\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)Y$$

En développant cette expression, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dx} = \quad & -P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0\Phi\varphi + \Phi P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0Q_0\psi \\ & +P_0\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)P_0\varphi + P_0\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)\psi\end{aligned}$$

soit, après simplification :

$$\frac{d\psi}{dx} = \Phi P_0(\Delta_\perp + k^2 I)P_0Q_0\Phi\psi + P_0\Phi(\Delta_\perp + k^2 I)\psi$$

Or, $P_0Q_0\Phi = I - \Phi$, soit :

$$\frac{d\psi}{dx} = P_0(\Delta_\perp + k^2 I)\psi.$$

Les conditions initiales pour φ et ψ ont également une forme diagonale. En effet, les conditions initiales pour X et Y s'écrivent :

$$\begin{cases} \varphi(0) - Q_0\psi(0) = I \\ P_0(a)\varphi(a) + \psi(a) = 0 \end{cases} \tag{4.1}$$

L'intégration du système différentiel en X et Y donne :

$$\begin{cases} \varphi(x) = e^{Q_0(x-a)}\varphi(a) \\ \psi(x) = e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)x}\psi(0) \end{cases}$$

On en déduit notamment que :

$$\begin{cases} \varphi(0) = e^{-Q_0 a}\varphi(a) \\ \psi(a) = e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\psi(0) \end{cases}$$

Ceci permet d'écrire le système (5.1) sous la forme :

$$\begin{cases} e^{-Q_0 a}\varphi(a) - Q_0\psi(0) = I \\ P_0(a)\varphi(a) + e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\psi(0) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \varphi(a) = \left(e^{-Q_0 a} + P_0 Q_0 e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\right)^{-1} \\ \psi(0) = -P_0 \left(P_0 Q_0 + e^{-Q_0 a} e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\right)^{-1} \end{cases}$$

Par conséquent, φ et ψ ont pour expression :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \left(e^{-Q_0 a} + P_0 Q_0 e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\right)^{-1} e^{Q_0(x-a)} \\ \psi(x) = -P_0 \left(P_0 Q_0 + e^{-Q_0 a} e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\right)^{-1} e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)x} \end{cases}$$

On en déduit que $\varphi(x)$ est inversible pour tout $x \in [0, a]$. En effet, de la décomposition modale de ses coefficients :

$$e^{-Q_0 a}\Psi_n = \begin{cases} e^{i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}a}\Psi_n & \text{si } n < j \\ \Psi_n & \text{si } n = j \\ e^{-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}a}\Psi_n & \text{si } n > j \end{cases}$$

ainsi que :

$$P_0 Q_0 e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)a}\Psi_n = \begin{cases} e^{i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}a}\Psi_n & \text{si } n < j \\ 0\Psi_n & \text{si } n = j \\ e^{-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}a}\Psi_n & \text{si } n > j \end{cases}$$

on déduit la forme de la condition initiale $\varphi(a)$:

$$\varphi(a)\Psi_n = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}a}\Psi_n & \text{si } n < j \\ \Psi_n & \text{si } n = j \\ \frac{1}{2}e^{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}a}\Psi_n & \text{si } n > j \end{cases}$$

Celle-ci a donc une forme diagonale ; il en est de même pour $\varphi(x)$:

$$\varphi(x)\Psi_n = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}a}e^{-i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}\Psi_n & \text{si } n < j \\ \Psi_n & \text{si } n = j \\ \frac{1}{2}e^{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}a}e^{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}\Psi_n & \text{si } n > j \end{cases}$$

Comme cet opérateur n'a aucune valeur propre nulle, il est inversible.

4.1.7.3 Factorisation de P

On va maintenant utiliser ces opérateurs pour exprimer $P(x)$ en fonction de sa condition initiale $\pi = P(a)$. Comme pour le cas général, on définit l'opérateur $W(x) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ par :

$$W(x) = \psi(x)\varphi^{-1}(x) \; \forall x \in [0, a].$$

Il va permettre d'obtenir une expression factorisée de P. Pour ce faire, on exprime X et Y en fonction de W :

$$\begin{aligned} X &= \varphi - Q_0\psi \\ &= \varphi - Q_0\psi\varphi^{-1}\varphi \\ &= (I - Q_0 W)\,\varphi \end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} Y &= P_0\varphi + \psi \\ &= P_0\varphi + \psi\varphi^{-1}\varphi \\ &= (P_0 + W)\,\varphi \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$P = YX^{-1} = (P_0 + W)\,\varphi\varphi^{-1}(I - Q_0 W)^{-1}$$

C'est-à-dire :

$$\boxed{P(x) = (P_0(x) + W(x))(I - Q_0 W(x))^{-1}}$$

Dans un deuxième temps, on va expliciter les facteurs de cette relation. L'expression de W est semblable à celle obtenue pour le cas général :

$$W(x) = e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)(x-a)} W(a) e^{-Q_0(x-a)}$$

La condition initiale pour P s'écrit :

$$P(a) = \pi = (P_0(a) + W(a))(I - Q_0 W(a))^{-1},$$

on en tire :

$$W(a) = (I + \pi Q_0)^{-1}(\pi - P_0(a))$$

En introduisant ces différentes relations dans la forme factorisée, on obtient une expression explicite pour $P(x)$:

$$P(x) = \left[P_0(x) + e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)(x-a)}(I + \pi Q_0)^{-1}(\pi - P_0(a))e^{-Q_0(x-a)}\right] \left[I - Q_0 e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)(x-a)}(I + \pi Q_0)^{-1}(\pi - P_0(a))e^{-Q_0(x-a)}\right]^{-1}$$

La dernière étape du calcul consiste en une réécriture de P sous la forme d'une composition d'opérateurs. Comme pour le cas général, on introduit les opérateurs de $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_0^{\frac{1}{2}}(O))$ dans lui-même :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\pi) = (I + \pi Q_0)^{-1}(\pi - P_0(a)) \\ \mathcal{G}(x)(\pi) = (P_0(x) + \pi)(I - Q_0\pi)^{-1} \\ \mathcal{L}(x)(M) = e^{P_0(\Delta_\perp + k^2 I)(x-a)} M e^{-Q_0(x-a)} \end{cases}$$

$\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des transformations homographiques, mais $\mathcal{G}$ dépend de x. On trouve alors :

$$\boxed{P(x) = \mathcal{G} \circ \mathcal{L}(x) \circ \mathcal{H}(\pi)}$$

4.2 Equations de Riccati avec termes linéaires

On souhaite maintenant généraliser la méthode de la transformation homographique aux équations de Riccati comportant des termes linéaires. En effet, lorsque l'on tente de factoriser le problème de Helmholtz pour des guides de forme plus complexe, ou pour d'autres conditions sur les bords dans le cas du cylindre, on obtient une équation de Riccati de la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = J + P\Lambda P - PF^t - FP \\ P(a) = \pi \end{cases},$$

$$\text{où } \begin{cases} \pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)), \\ J \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'), \\ F \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)') \end{cases}$$

et Λ est un opérateur qui fait perdre deux degrés de régularité.

P est cherché dans $C^0(0, a; \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)))$.

Comme dans le paragraphe précédent, on va montrer que l'opérateur $P(x)$ est semblable à un semi-groupe linéaire, dont l'expression sera donnée en fonction de solutions particulières de l'équation de Riccati.
On se propose de présenter deux formules : la 1-représentation, qui fait appel à une seule solution particulière, et la 2-représentation, qui utilise deux solutions particulières. Chacune sera adaptée à des situations différentes, comme on le verra dans la deuxième partie.

Remarque 4.6 *Dans l'étude précédente, il n'y avait pas de termes linéaires, et*

$$\begin{cases} J = I \\ \Lambda = \Delta_\perp + k^2 I\,. \end{cases}$$

4.2.1 1-représentation

La démarche suivie pour la 1-représentation est très proche de celle qu'on a étudiée pour le cas simple : on va factoriser P en l'exprimant en fonction des opérateurs X et Y, puis en remplaçant ces derniers par leurs expressions en φ et ψ. Enfin, on écrira l'expression obtenue comme une composition de transformations homographiques et d'un semi-groupe.

4.2.1.1 Obtention du système différentiel linéaire associé

On rappelle la forme de l'équation de Riccati à résoudre :

$$\frac{dP}{dx} = J + P\Lambda P - PF^t - FP$$

On souhaite la remplacer par un système linéaire équivalent.

Si l'équation de Riccati $\dfrac{dP}{dx} = J+P\Lambda P-PF^t-FP$ admet une solution $P \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ sur un sous-intervalle I_0 de $(0,a)$ et si le système linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dX}{dx} = -FX + JY\ ; \quad X(a) = I\ ; \\ \dfrac{dY}{dx} = -\Lambda X + F^t Y\ ; \quad Y(0) = 0\ ; \end{cases}$$

admet une solution

$$(X(x), Y(x)) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)) \times \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$$

sur I_0, alors $X(x) = P(x)Y(x)$ pour tout x sur cet intervalle.

En effet, soient X, Y de tels opérateurs. On cherche à montrer que $P = XY^{-1}$ est solution de l'équation de Riccati. En dérivant X, on obtient :

$$\frac{dX}{dx} = \frac{dP}{dx}Y + P\frac{dY}{dx}$$

Cette expression se développe en :

$$-FX + JY = \frac{dP}{dx}Y - P\Lambda X + PF^tY,$$

soit encore :

$$-FPY + JY = \frac{dP}{dx}Y - P\Lambda PY + PF^tY,$$

Comme Y est inversible, on retrouve effectivement l'équation de Riccati pour P.

Réciproquement, soit P une solution de cette équation. On se donne Y comme solution de :

$$\frac{dY}{dx} = -\Lambda PY + F^tY$$

Alors l'opérateur $X + PY$ vérifie :

$$\frac{dX}{dx} = JY + P\Lambda PY - PF^tY - FPY - P\Lambda PY + PF^tY$$

En simplifiant, on obtient :

$$\frac{dX}{dx} = JY - FPY = JY - FX.$$

(X, Y) vérifie bien le système linéaire.

4.2.1.2 Obtention du système différentiel linéaire associé

On souhaite maintenant diagonaliser ce système linéaire. Comme dans la partie précédente, il est nécessaire d'introduire ces opérateurs auxiliaires qui vont permettre de définir le système diagonal. Cette fois, la présence des termes linéaires va requérir deux variables auxiliaires.

Tout d'abord, on introduit une solution particulière P_0 de l'équation de Riccati qui correspond à une condition initiale $\pi_0 = P_0(a)$:

$$\frac{dP_0}{dx} = J + P_0\Lambda P_0 - P_0F^t - FP_0$$

Le deuxième opérateur auxiliaire, $S \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$, est une solution de l'équation différentielle :

$$\frac{dS}{dx} = -S[-F + P_0\Lambda] - [-F^t + \Lambda P_0]S - \Lambda,$$

avec la condition initiale $S(a) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ que l'on choisira arbitrairement en fonction du problème étudié.

Ces deux opérateurs permettent de définir les nouvelles variables $\varphi \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'\right)$ et $\psi \in \mathcal{L}\left(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H^{-\frac{3}{2}}(O)\right)$:

$$\begin{cases} \varphi = -SX + (I + SP_0)Y \\ \psi = X - P_0 Y \end{cases}$$

La transformation inverse s'écrit :

$$\begin{cases} X = P_0\varphi + (I + P_0 S)\psi \\ Y = \varphi + S\psi \end{cases}$$

Les opérateurs φ et ψ permettent de diagonaliser le système différentiel. En effet,

Lemme 4.11 *Le système différentiel linéaire est équivalent au système diagonal :*

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = (F^t - \Lambda P_0)\varphi \\ \dfrac{d\psi}{dx} = (-F + P_0\Lambda)\psi \end{cases}$$

Démonstration 4.2.1 *On dérive formellement l'expression de φ :*

$$\frac{d\varphi}{dx} = -\frac{dS}{dx}X - S\frac{dX}{dx} + \left(\frac{dS}{dx}P_0 + S\frac{dP_0}{dx}\right)Y + (I + SP_0)\frac{dY}{dx}$$

On développe :

$$\begin{aligned} \frac{d\varphi}{dx} &= S(-F + P_0\Lambda)X + (-F^t + \Lambda P_0)SX + \Lambda X \\ &+SFX - SJY \\ &+(-S(-F + P_0\Lambda)P_0 - (-F^t + \Lambda P_0)SP_0 - \Lambda P_0)Y + (SJ + SP_0\Lambda P_0 - SP_0F^t - SFP_0)Y \\ &-(I + SP_0)\Lambda X + (I + SP_0)F^tY \end{aligned}$$

On obtient, après simplification :

$$\frac{d\varphi}{dx} = (-F^tS + \Lambda P_0 S)X + (F^tSP_0 - \Lambda P_0 SP_0 - \Lambda P_0 + F^t)Y$$

On remplace maintenant X et Y par φ et ψ :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= (-F^tS + \Lambda P_0 S)P_0\varphi + (-F^tS + \Lambda P_0 S)(I + P_0 S)\psi \\ &+(F^tSP_0 - \Lambda P_0 SP_0 - \Lambda P_0 + F^t)\varphi + (F^tSP_0 - \Lambda P_0 SP_0 - \Lambda P_0 + F^t)S\psi\end{aligned}$$

En développant cette relation, il vient :

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi}{dx} &= -F^tSP_0\varphi + \Lambda P_0 SP_0\varphi - F^tS\psi - F^tSP_0S\psi + \Lambda P_0 S\psi + \Lambda P_0 SP_0 S\psi + F^tSP_0\psi \\ &-\Lambda P_0 SP_0\varphi - \Lambda P_0\varphi + F^t\varphi + F^tSP_0S\psi - \Lambda P_0 SP_0 s\psi - \Lambda P_0 S\psi + F^tS\psi\end{aligned}$$

La plupart des termes s'annulent deux à deux. Il reste :

$$\frac{d\varphi}{dx} = (F^t - \Lambda P_0)\varphi.$$

De même, on dérive formellement l'expression de ψ :

$$\frac{d\psi}{dx} = \frac{dX}{dx} - P_0\frac{dY}{dx} - JY - P_0\Lambda P_0 Y + P_0F^tY + FP_0Y$$

En développant, on trouve :

$$\frac{d\psi}{dx} = -FX + JY + P_0\Lambda X - P_0F^tY - JY - P_0\Lambda P_0 Y + P_0F^tY + FP_0Y$$

Ce qui se simplifie en :

$$\frac{d\psi}{dx} = -FX + P_0\Lambda X - P_0\Lambda P_0 Y + FP_0Y$$

On exprime maintenant cette dérivée en fonction de φ et ψ :

$$\begin{aligned}\frac{d\psi}{dx} &= -FP_0\varphi - F(I + P_0S)\psi + P_0\Lambda P_0\varphi + P_0\Lambda(I + P_0S)\psi - P_0\Lambda P_0\varphi \\ &-P_0\Lambda P_0 S\psi + FP_0\varphi + FP_0S\psi\end{aligned}$$

Finalement, il vient :

$$\frac{d\psi}{dx} = (-F + P_0\Lambda)\psi$$

Il est maintenant possible de résoudre le système linéaire diagonalisé. Par abus de notation, on écrira :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \exp\left(\int_a^x (F^t - \Lambda P_0)(t)dt\right)\varphi(a) \\ \\ \psi(x) = \exp\left(\int_0^x (P_0\Lambda - F)(t)dt\right)\psi(0) \end{cases}$$

Les conditions initiales de ce système sont données par :

$$\begin{cases} P_0(0)\varphi(0) + [I + P_0(0)S(0)]\,\psi(0) = I \\ \varphi(a) + S(a)\psi(a) = 0 \end{cases}$$

4.2.1.3 Formule de représentation

On reprend la démarche mise en oeuvre pour les guides d'ondes de section constante. On exploite donc les informations données par les variables auxiliaires X et Y aux points a et x.

On définit l'opérateur $W \in \mathcal{L}(H^{-\frac{3}{2}}(O), H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)') \cap \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$ comme :

$$W(x) = \psi(x)\varphi^{-1}(x).$$

Cela permet d'écrire les opérateurs X et Y sous la forme :

$$X(x) = [P_0(x) + (I + P_0(x)S(x))W(x)]\varphi(x) \text{ et } Y(x) = [I + S(x)W(x)]\varphi(x).$$

Comme $P(x) = XY^{-1}$, il vient :

$$\boxed{P(x) = [P_0(x) + (I + P_0(x)S(x))W(x)][I + S(x)W(x)]^{-1}}$$

Cette forme factorisée va permettre d'exprimer P en fonction de sa valeur initiale $\pi = P(a)$. En effet, on a :

$$W(x) = e^{\int_a^x (-F + P_0\Lambda)(t)dt}\, W(a)\, e^{\int_a^x (-F^t + \Lambda P_0)(t)dt},$$

où $W(a)$ s'écrit simplement en fonction de $P(a)$.

De la relation $\pi = [\pi_0 + (I + \pi_0 S(a))W(a)]\,[I + S(a)W(a)]^{-1}$, on tire :

$$\pi_0 + (I + \pi_0 S(a)W(a) = \pi + \pi S(a)W(a),$$

d'où la formule :

$$W(a) = [I + (\pi - \pi_0)S(a)]^{-1}[\pi - \pi_0]$$

On en déduit que :

$$W(x) = e^{\int_a^x (-F + P_0\Lambda)(t)dt} \; [I + (\pi - \pi_0)S(a)]^{-1}[\pi - \pi_0] \; e^{\int_a^x (-F^t + \Lambda P_0)(t)dt}$$

Finalement, on obtient :

$$\begin{aligned} P(x) = \; & [P_0(X) + (I + P_0(x)S(x))e^{\int_a^x (-F+P_0\Lambda)(t)dt} \; [I + (\pi - \pi_0)S(a)]^{-1}[\pi - \pi_0] \; e^{\int_a^x (-F^t+\Lambda P_0)(t)dt}] \\ & [I + S(x)e^{\int_a^x (-F+P_0\Lambda)(t)dt} \; [I + (\pi - \pi_0)S(a)]^{-1}[\pi - \pi_0] \; e^{\int_a^x (-F^t+\Lambda P_0)(t)dt}]^{-1} \end{aligned}$$

On introduit alors les opérateurs :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)M = e^{\int_a^x (-F+P_0\Lambda)(t)dt} \; M \; e^{\int_a^x (-F^t+\Lambda P_0)(t)dt} \\ \mathcal{H}(\pi)(x) = [I + (P_0(x) - \pi)S(x)]^{-1}[\pi - P_0(x)] \\ \mathcal{G}(\pi)(x) = [P_0(x) + (I + P_0(x)S(x))\pi][I + S(x)\pi]^{-1} \end{cases}$$

Lemme 4.12 $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \pi$
$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \pi$

Démonstration 4.2.2 *Soit π un opérateur. On souhaite calculer $\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi)$. Par hypothèse, on a :*

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = [P_0 + (I + P_0S)(I + (P_0 - \pi)S)^{-1}(\pi - P_0)][I + S(I + (P_0 - \pi)S)^{-1}(\pi - P_0)]^{-1}$$

On extrait $\pi - P_0$ de chaque facteur :

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \; & \{P_0(\pi - P_0)^{-1} + (I + P_0S)[I + (P_0 - \pi)S]^{-1}\} \, (\pi - P_0)(\pi - P_0)^{-1} \\ & \{(\pi - P_0)^{-1} + S[I + (P_0 - \pi)S]^{-1}\}^{-1} \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \{P_0(\pi - P_0)^{-1} + (I + P_0S)[I + (P_0 - \pi)S]^{-1}\} \, \{(\pi - P_0)^{-1} + S[I + (P_0 - \pi)S]^{-1}\}^{-1}$$

On fait la même chose avec $[I + (P_0 - \pi)S]^{-1}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = \; & \{P_0(\pi - P_0)^{-1}[I + (P_0 - \pi)S] + (I + P_0S)\} \, [I + (P_0 - \pi)S]^{-1} \\ & [I + (P_0 - \pi)S] \, \{(\pi - P_0)^{-1}[I + (P_0 - \pi)S] + S\}^{-1} \end{aligned}$$

Il reste :

$$\mathcal{G}\circ\mathcal{H}(\pi) = \{P_0(\pi - P_0)^{-1}[I + (P_0 - \pi)S] + (I + P_0S)\}\{(\pi - P_0)^{-1}[I + (P_0 - \pi)S] + S\}^{-1}$$

On développe cette expression :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = [P_0(\pi - P_0)^{-1} - P_0S + I + P_0S][(\pi - P_0)^{-1} - S + S]^{-1}$$

Celle-ci se simplifie en :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = (P_0(\pi - P_0)^{-1} + I)(\pi - P_0)$$

Finalement :

$$\mathcal{G} \circ \mathcal{H}(\pi) = P_0 + \pi - P_0 = \pi$$

Réciproquement, soit π un opérateur. On cherche à montrer que $\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \pi$. On a :

$$\mathcal{H}\circ\mathcal{G}(\pi) = \{I + [P_0 - (P_0 + (I + P_0S)\pi)(I + S\pi)^{-1}]S\}^{-1}\{[P_0 + (I + P_0S)\pi][I + S\pi]^{-1} - P_0\}$$

En factorisant par $(I + S\pi)^{-1}$ dans chaque facteur, il vient :

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \quad & \{I + [P_0(I + S\pi) - P_0 - (I + P_0S)\pi](I + S\pi)^{-1}S\}^{-1} \\ & \{P_0 + (I + P_0S)\pi - P_0(I + S\pi)\}(I + S\pi)^{-1}\end{aligned}$$

Ceci permet de simplifier l'expression :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \{I - \pi(I + S\pi)^{-1}S\}^{-1}\,\pi\,(I + S\pi)^{-1}$$

On introduit π dans le premier facteur :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \{\pi^{-1}[I - \pi(I + S\pi)^{-1}S]\}^{-1}\,(I + S\pi)^{-1}$$

Il vient :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = [\pi^{-1} - (I + S\pi)^{-1}S]^{-1}(I + S\pi)^{-1}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = \{(I + S\pi)[\pi^{-1} - (I + S\pi)^{-1}S]\}^{-1}$$

C'est-à-dire :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = [(I + S\pi)\pi^{-1} - S]^{-1}$$

Au total, on a :

$$\mathcal{H} \circ \mathcal{G}(\pi) = [\pi^{-1} + S - S]^{-1} = \pi$$

Les transformations homographiqes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont donc inverses l'une de l'autre. On obtient l'écriture suivante pour P :

$$\boxed{P(x) = \mathcal{N}(x)\left(\mathcal{L}(\mathcal{M}(\pi)(a))\right)}$$

Cet opérateur se calcule donc de la même manière que pour le cas particulier.

Remarque 4.7 *Cas particulier : on choisira généralement la condition initiale $S(a) = 0$ pour S. Cela permet en effet de simplifier les calculs pour la première étape :*

$$\mathcal{H}(\pi) = W(a) = \pi - \pi_0$$

4.2.2 2-représentation

On souhaite cette fois obtenir le même type de formules, mais en exprimant l'opérateur Neumann-to-Dirichlet en fonction de deux solutions particulières. Comme précédemment, on introduira l'intermédiaire de calcul S, mais celui-ci va disparaître de la formule finale.

Tout d'abord, on a besoin de deux solutions particulières de l'équation de Riccati. Soient P_0 et $P_1 \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$ ces solutions. Ces opérateurs vérifient :

$$\frac{dP}{dx} = J + P\Lambda P - PF^t - FP,$$

avec les conditions initiales $P_1(a)$ et $P_0(a) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$.

4.2.2.1 Définition des intermédiaires de calcul

Le principe de cette représentation repose sur la comparaison des différentes solutions de l'équation de Riccati. On introduit donc l'opérateur $T(x) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$ défini par :

$$T(x) = P(x) - P_0(x).$$

De même, on définit $T_1(x) \in \mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$ par la relation :

$$T_1(x) = P_1(x) - P_0(x).$$

Lemme 4.13 *T est solution de l'équation différentielle :*

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dx} = T\Lambda T + T[-F^t + \Lambda P_0] + [-F + P_0\Lambda]T \\ T(a) = \pi - P_0(a) \end{cases}$$

Démonstration 4.2.3 *On dérive formellement l'opérateur T :*

$$\frac{dT}{dx} + \frac{dP}{dx} - \frac{dP_0}{dx} = J + P\Lambda P - PF^t - FP - J - P_0\Lambda P_0 + P_0F^t + FP_0$$

Il reste :

$$\frac{dT}{dx} = P\Lambda P - P_0\Lambda P_0 - TF^t - FT$$

Or, les termes quadratiques valent également :

$$P\Lambda P - P_0\Lambda P_0 = T\Lambda T + P_0\Lambda P + P\Lambda P_0 - 2P_0\Lambda P_0$$

On en déduit que :

$$\frac{dT}{dx} = T\Lambda T + P_0\Lambda P - P_0\Lambda P_0 + P\Lambda P_0 - P_0\Lambda P_0 - TF^t - FT$$

Finalement :

$$\frac{dT}{dx} = T\Lambda T + P_0\Lambda T + T\Lambda P_0 - TF^t - FT$$

Remarque 4.8 *T_1 est solution de :*

$$\begin{cases} \dfrac{dT_1}{dx} = T_1\Lambda T_1 + T_1[-F^t + \Lambda P_0] + [-F + P_0\Lambda]T_1 \\ T_1(a) = P_1(a) - P_0(a) \end{cases}$$

Soit $S \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ solution de :

$$\frac{dS}{dx} = -S[-F + P_0\Lambda] - [-F^t + \Lambda P_0]S - \Lambda,$$

avec une condition initiale $S(a)$ que l'on choisira arbitrairement.

Lemme 4.14 *Si $T(x)$ est inversible pour tout x et que de plus S et T sont des solutions respectives de ces deux équations pour des conditions initiales vérifiant : $S(a) = T^{-1}(a)$, alors pour tout x, on a : $S(x) = T^{-1}(x)$.*

Démonstration 4.2.4 *On appelle Z l'opérateur inverse de T ; Z vérifie la relation :*

$$ZT = TZ = I.$$

En dérivant cette relation, il vient :

$$\frac{dZ}{dx} = -Z\frac{dT}{dx}T^{-1} = -Z\frac{dT}{dx}Z$$

En utilisant l'équation différentielle vérifiée par T, on obtient :

$$\frac{dZ}{dx} = -ZT\Lambda TZ - Z[P_0\Lambda - F]TZ - ZT[\Lambda P_0 - F^t]Z$$

c'est-à-dire :

$$\frac{dZ}{dx} = -\Lambda - Z[P_0\Lambda - F] - [\Lambda P_0 - F^t]Z$$

Ainsi, Z vérifie la même équation de Lyapunov que S. Comme celle-ci a une unique solution pour toute condition initiale $S(a) \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ donnée, on en déduit que si $S(a) = Z(a) = T^{-1}(a)$, alors

$$S(x) = Z(x) = T^{-1}(x) \quad \forall x \leq a.$$

On définit maintenant S_1 l'opérateur solution de l'équation :

$$\frac{dS_1}{dx} = -S_1[-F + P_0\Lambda] - [-F^t + \Lambda P_0]S_1 - \Lambda$$

avec la condition initiale $S_1(a) = (\pi_1 - \pi_0)^{-1}$. On en déduit que pour tout x,

$$S_1(x) = (P_1(x) - P_0(x))^{-1}.$$

Pour que les opérateurs S et S_1 existent bien, il faut que $\pi - \pi_0$ et $\pi_1 - \pi_0$ soient inversibles.

4.2.2.2 Factorisation de P

On peut maintenant définir l'opérateur $R \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$ par :

$$R(x) = S(x) - S_1(x).$$

R est un intermédiaire de calcul qui va permettre d'écrire P sous une forme factorisée. Pour ce faire, on a besoin d'exprimer R de deux façons différentes :

Lemme 4.15 *L'opérateur R est solution de l'équation de Lyapunov :*

$$\begin{cases} \dfrac{dR}{dx} = -R[P_0\Lambda - F] - [\Lambda P_0 - F^t]R \\ R(a) = (\pi - \pi_0)^{-1}(\pi_1 - \pi)(\pi_1 - \pi_0)^{-1} \end{cases}$$

En outre, R a comme expression :

$$R(x) = (P(x) - P_0(x))^{-1}\ (P_1(x) - P(x))\ (P_1(x) - P_0(x))^{-1}$$

Démonstration 4.2.5 *D' une part, la dérivation de R donne :*

$$\frac{dR}{dx}(x) = \frac{dS}{dx}(x) - \frac{dS_1}{dx}(X)$$

En explicitant chaque dérivée, il vient :

$$\frac{dR}{dx}(x) = -(S - S_1)[-F + P_0\Lambda] - [-F^t + \Lambda P_0](S - S_1),$$

d'où la conclusion.

D'autre part, R a pour expression :

$$R(x) = (P(x) - P_0(x))^{-1} - (P_1(x) - P_0(x))^{-1}$$

En factorisant par $[P(x) - P_0(x)]^{-1}$, on obtient :

$$R(x) = [P(x) - P_0(x)]^{-1}\ [I - (P(x) - P_0(x))(P_1(x) - P_0(x))^{-1}$$

De même, on factorise à droite par $[P_1(x) - P_0(x)]^{-1}$:

$$R(x) = [P(x) - P_0(x)]^{-1}\ [P_1(x) - P_0(x) - P(x) + P_0(x)]\ [P_1(x) - P_0(x)]^{-1}$$

d'où le résultat.

On a vu dans le chapitre précédent que l'équation de Lyapunov admet une solution unique, celle-ci est de la forme :

$$R(x) = G(x)R(a)H(x),$$

où G et H sont les semi-groupes associés respectivement à $-F^t + \Lambda P_0$ et $-F + P_0\Lambda$.

On va maintenant exploiter les résultats du lemme pour transformer l'expression de P. De la forme factorisée de R, on tire :

$$P_1(x) - P(x) = P(x)R(x)(P_1(x) - P_0(x)) - P_0(x)R(x)(P_1(x) - P_0(x))$$

c'est-à-dire :

$$P(x)[I + R(x)(P_1(x) - P_0(x))] = P_1(x) + P_0(x)R(x)[P_1(x) - P_0(x)]$$

donc :

$$P(x) = [P_1 + P_0 R\,(P_1 - P_0)]\,[I + R\,(P_1 - P_0)]^{-1}$$

On va maintenant exprimer $P(x)$ en fonction de π. Comme $R(a) = (\pi - \pi_0)^{-1}(\pi_1 - \pi)(\pi_1 - \pi_0)^{-1}$, on a :

$$R(x) = G(x)(\pi - \pi_0)^{-1}(\pi_1 - \pi)(\pi_1 - \pi_0)^{-1}H(x)$$

On en déduit que :

$$\begin{array}{|ll|}\hline P(x) = & [P_1 + P_0\,G(x)(\pi - \pi_0)^{-1}(\pi_1 - \pi)(\pi_1 - \pi_0)^{-1}H(x)\,(P_1 - P_0)] \\ & [I + G(x)(\pi - \pi_0)^{-1}(\pi_1 - \pi)(\pi_1 - \pi_0)^{-1}H(x)\,(P_1 - P_0)]^{-1} \\ \hline\end{array}$$

4.2.2.3 Ecriture simplifiée de P

On pose alors :

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(W) = G(-F^t + \Lambda P_0, x, a)W(a)H(-F + P_0\Lambda, x, a) \\ \mathcal{J}(W) = (W - P_0(x))^{-1}(P_1(x) - W)(P_1(x) - P_0(x))^{-1} \\ \mathcal{K}(W) = [P_1(x) + P_0(x)W(P_1(x) - P_0(x))][I + W(P_1(x) - P_0(x))]^{-1} \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ est un opérateur linéaire et $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ sont des transformations homographiques. $\mathcal{J}$ agit sur des éléments de $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$ et a pour espace image $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O), H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)')$ tandis que $\mathcal{K}$ agit de $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O), H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)')$ vers $\mathcal{L}(H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)', H^{\frac{1}{2}}_{00}(O))$:

$$\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)) \quad \underset{\mathcal{K}}{\overset{\mathcal{J}}{\rightleftarrows}} \quad \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$$

Remarque 4.9 *En particulier, on a :*

$R(x) = \mathcal{J}(P)(x)$ *et* $P(x) = \mathcal{K}(R)(x)$.

Pour pouvoir exprimer P en fonction de $\mathcal{J}$ et $\mathcal{L}$, on a besoin du résultat intermédiaire :

Lemme 4.16 *Les opérateurs* $\mathcal{J}$ *et* $\mathcal{K}$ *sont tels que :*

$$\forall \pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)) \ , \ \mathcal{K} \circ \mathcal{J}(\pi) = \pi$$

$$\forall \pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)') \ , \ \mathcal{J} \circ \mathcal{K}(\pi) = \pi$$

Démonstration 4.2.6 *Soit* $\pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$. *On souhaite montrer que* $\mathcal{K} \circ \mathcal{J}(\pi) = \pi$ *:*

On a :

$$\begin{aligned} \mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = \ & [P_1 + P_0(\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)(P_1 - P_0)^{-1}(P_1 - P_0)] \\ & [I + (\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)(P_1 - P_0)^{-1}(P_1 - P_0)]^{-1} \end{aligned}$$

ce qui se simplifie en :

$$\mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = [P_1 + P_0(\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)]\ [I + (\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)]^{-1}$$

ou encore :

$$\mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = [(P_1 - \pi) + \pi + P_0(\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)]\ [I + (\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)]^{-1}$$

On pose $\mathcal{X} = (\pi - P_0)^{-1}(P_1 - \pi)$. *On a alors :*

$$\mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = (P_1 + P_0\mathcal{X})(I + \mathcal{X})^{-1}$$

Or, $P_1 = \pi + (\pi - P_0)\mathcal{X}$. *On en déduit que :*

$$\mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = [\pi + \pi\mathcal{X}][I + \mathcal{X}]^{-1} = \pi(I + \mathcal{X})(I + \mathcal{X})^{-1}$$

D'où $\mathcal{K}\left(\mathcal{J}(\pi)\right) = \pi$.

Réciproquement, soit $\pi \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O), H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$. *On veut montrer que* $\mathcal{J} \circ \mathcal{K}(\pi) = \pi$.

Par hypothèse, on a :

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\mathcal{K}(\pi)) = \; & [(P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} - P_0]^{-1} \\ & [P_1 - (P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}]\,[P_1 - P_0]^{-1}\end{aligned}$$

On commence par simplifier le premier facteur :

$$\begin{aligned}&[(P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} - P_0] \\ &= [P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0) - P_0(I + \pi(P_1 - P_0))](I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$[(P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} - P_0] = (P_1 - P_0)(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}$$

On exprime ensuite le deuxième :

$$\begin{aligned}&P_1 - (P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} = \\ &(P_1(I + \pi(P_1 - P_0)) - (P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0)))\,(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}\end{aligned}$$

En développant, il vient :

$$P_1 - (P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} = [P_1\pi(P_1 - P_0) - P_0\pi(P_1 - P_0)]\,(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}$$

Par suite :

$$P_1 - (P_1 + P_0\pi(P_1 - P_0))(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} = (P_1 - P_0)\pi(P_1 - P_0)(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}$$

L'opérateur $\mathcal{J} \circ \mathcal{K}(\pi)$ *a donc pour expression :*

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}(\pi)) = (I + \pi(P_1 - P_0))(P_1 - P_0)^{-1}\,(P_1 - P_0)\pi(P_1 - P_0)(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}\,(P_1 - P_0)^{-1}$$

Après simplification, il reste :

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}(\pi)) = (I + \pi(P_1 - P_0))\pi(P_1 - P_0)(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1}(P_1 - P_0)^{-1}$$

Or, $(P_1 - P_0)(I + \pi(P_1 - P_0))^{-1} = [I + (P_1 - P_0)\pi]^{-1}(P_1 - P_0)$. *Il vient alors :*

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}(\pi)) = (I + \pi(P_1 - P_0)))\pi[I + (P_1 - P_0)\pi]^{-1}(P_1 - P_0)(P_1 - P_0)^{-1}$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{J}(\mathcal{K}(\pi)) = (I + \pi(P_1 - P_0))[I + \pi(P_1 - P_0)]^{-1}\pi = \pi$$

d'où la conclusion.

Pour conclure, on va simplifier l'expression de P à l'aide de ces transformations homographiques. On a :

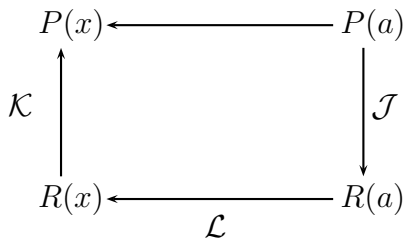
$P(x) = \mathcal{K}(R)(x)$, où $R(x) = \mathcal{L}(x)(R)$.

En outre, $R(x) = \mathcal{J}(P)(x)$.

On en déduit que :

$$\boxed{P(x) = \mathcal{K} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{J}(\pi)(x)}$$

En conclusion, P est calculé de la même manière que pour la 1-représentation :



4.2.3 Conclusion

Ainsi, on a obtenu deux formules de représentation possibles pour les opérateurs solutions d'une équation de Riccati. Celles-ci sont adaptées à différentes configurations, ce que le chapitre suivant permettra d'illustrer.

D'une manière générale, la 2-représentation permet de mener les calculs plus simplement : en effet, la différence des deux solutions particulières peut se simplifier. Dans le cas du guide cylindrique, deux choix étaient possibles pour chaque valeur propre de P_0, on obtenait donc les deux solutions simultanément, et la deuxième était l'opposée de la première. Cependant, on n'est pas toujours assuré de trouver deux solutions particulières ; le cas des résonances transversales suggère la difficulté d'en trouver une seule dans des configurations plus complexes. Dans ce cas, il faut utiliser la 1-représentation.

Deuxième partie

Applications et extensions

Chapitre 5

Guides avec conditions absorbantes

Dans ce chapitre, on va présenter des applications directes des résultats de la première partie afin de montrer comment les exploiter. On va étudier un guide cylindrique semblable à celui des chapitres précédents, mais pour lequel on va modifier les conditions aux limites d'abord sur une, puis deux faces du cylindre. On obtiendra ainsi des équations de Riccati avec des termes linéaires, mais dont les coefficients ont une forme simple. Ceci va permettre de mettre en oeuvre les formules de 1- et 2-représentation et de les comparer. Par ailleurs, on va voir que le même problème peut être factorisé de plusieurs façons différentes, en faisant intervenir différents opérateurs.

Dans un premier temps, on va factoriser le problème de Helmholtz pour un guide avec une condition absorbante et étudier l'opérateur Neumann-to-Dirichlet qui en résulte. On s'intéressera ensuite à une factorisation faisant apparaître un opérateur "Absorbant-to-Dirichlet" pour un guide avec deux conditions absorbantes, et enfin à des opérateurs de type "Absorbant-to-Absorbant" pour la même géométrie. Ceux-ci permettront notamment d'étudier le raccordement de deux guides d'ondes, ou de décomposer le domaine en plusieurs guides (cf [10]).

5.1 Factorisation dans un guide avec une condition absorbante

Dans cette partie, on s'intéresse à un guide cylindrique identique à celui du chapitre II, mais pour lequel la condition de Dirichlet sur la face droite a été remplacée par une condition absorbante. On va factoriser le problème de Helmholtz en reprenant la deuxième formulation, qui fait apparaître un opérateur de type Neumann-to-Dirichlet calculé dans le sens des x décroissants. Le changement de condition sur la face ne va modifier ni le cadre fonctionnel, ni le type d'opérateur, ni l'équation de Riccati obtenue ; en revanche, la condition initiale pour P est différente, ce qui aura pour effet de modifier les propriétés de cet opérateur et surtout de le rendre régulier.

Comme pour le chapitre II, le domaine d'étude est un cylindre $\Omega =]0, a[\times O \in \mathbb{R}^n$, où la section O est bornée, de frontière régulière, et dont les faces sont $\Gamma_0 = \{0\} \times O$ et $\Gamma_a = \{a\} \times O$. On note $\Sigma = \partial O \times]0, a[$ le bord latéral du cylindre.

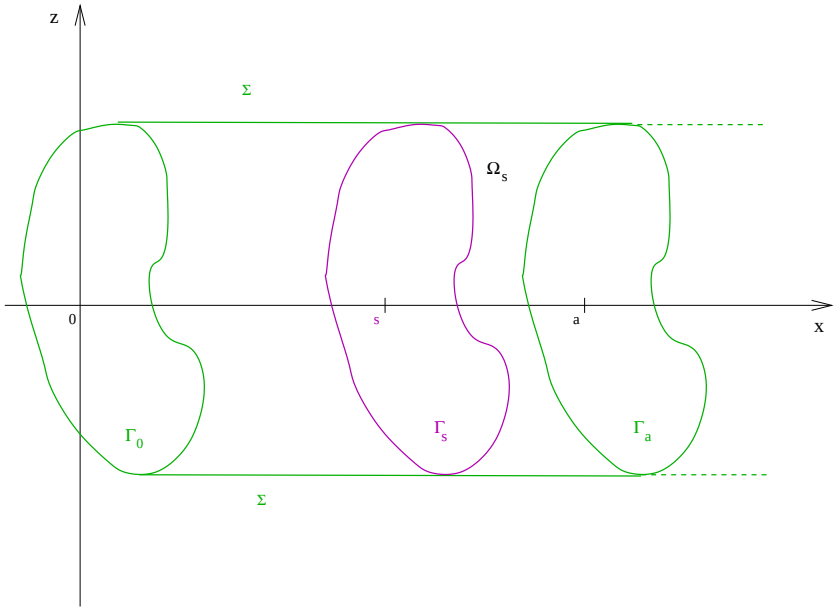


FIG. 5.1: Guide cylindrique avec une condition de radiation

Le problème étudié est le suivant :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{H}, \end{cases}$$

où $y_0, \mathcal{H} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, $f \in L^2(\Omega)$, et où y est cherché dans l'espace $L^2(0, a; H_0^1(O)) \cap H^1(0, a; L^2(O))$. ($\dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{H}$ est la condition absorbante : l'onde est sortante en $x = a$).

Avec de telles conditions sur les bords, le problème est maintenant bien posé et il admet une solution unique (cf Annexe).

5.1.1 Factorisation du problème

Comme pour le cas classique, on commence par introduire une frontière mobile $\Gamma_s = \{s\} \times O$, sur laquelle on impose une condition de Neumann arbitraire, et l'on étudie la famille de problèmes sur les domaines réduits $\Omega_s = [s, a] \times O$:

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega_s, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{H}, \end{cases}$$

La frontière se déplace dans le sens des x décroissants. On note Y_s l'espace :

$$Y_s = \{y \in H^1(\Omega_s) \ / \ y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in L^2(0, s; H^{-1}(O))\}.$$

$\forall s \in]0, a[$ et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, on définit l'opérateur P de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$:

$P(s)h = \gamma|_s$, où $\gamma \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \text{ dans } \Omega_s, \\ \gamma|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + ik\gamma|_{\Gamma_a} = 0, \end{cases}$$

ainsi que $r(s) = \beta|_s$, où $\beta \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \beta = k^2 \beta + f \text{ dans } \Omega_s, \\ \beta|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x}|_{\Gamma_s} = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + ik\beta|_{\Gamma_a} = \mathcal{H}. \end{cases}$$

Remarque 5.1 *Comme le problème $\mathcal{P}_{s,h}$ est bien posé (cf Annexe), ces opérateurs sont toujours définis.*

La condition absorbante est la condition sur la frontière "fixe", commune à tous les sous-domaines. On va voir qu'elle n'a pas d'influence sur la factorisation et que l'équation de Riccati obtenue est la même que pour le tube bouché du chapitre II. Seules les conditions initiales pour le système découplé vont changer.

La linéarité du problème aux limites permet d'écrire que :

$$y(s) = P(s)\frac{\partial y}{\partial x}(s) + r(s).$$

En la dérivant formellement et en menant le calcul comme précédemment, on trouve :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - P\left(\Delta_\perp + k^2 I\right) P\frac{\partial y}{\partial x} - Pf + \frac{\partial r}{\partial x}$$

On retrouve les mêmes calculs que dans le cas classique. Le problème se découple, on obtient une équation de Riccati pour P :

$$\frac{dP}{dx} - P\left(\Delta_\perp + k^2 I\right) P - I = 0$$

Cette équation est celle que l'on a obtenue pour le tube bouché et le cadre fonctionnel est le même. On va calculer la condition initiale pour P :

Soit $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ quelconque, $P(a)h$ est la trace en a d'une fonction γ qui vérifie la condition absorbante :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(a) = -ik\gamma(a),$$

ainsi que la condition de Neumann :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(a) = h.$$

On en déduit que :

$$\gamma(a) = -\frac{h}{ik} = P(a)h.$$

Par conséquent, on a :

$$\boxed{P(a) = -\frac{1}{ik} I}$$

De la même manière, r est solution de l'équation différentielle du premier ordre :

$$\frac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)r = Pf,$$

avec la condition initiale :

$$\frac{\partial r}{\partial x}(a) + ikr(a) = \mathcal{H}.$$

5.1.2 Etude de l'opérateur P

On va maintenant étudier les propriétés de l'opérateur P ainsi défini. En appliquant la formule de représentation du chapitre V, on va pouvoir l'expliciter rapidement et en déduire qu'il est régulier.

Lemme 5.1 *$P(s)$ est un opérateur symétrique.*

Démonstration 5.1.1 *Soient $h, h' \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ et γ, γ' les éléments de Y_s solutions du problème de Helmholtz homogène tels que :*

$$P(s)h = \gamma|_{\Gamma_s} \text{ et } P(s)h' = \gamma'|_{\Gamma_s}.$$

On écrit la formulation variationnelle du problème dont γ est solution :

$$-\int_{\Omega_s} \Delta\gamma.\gamma' = k^2 \int_{\Omega_s} \gamma.\gamma'$$

La formule de Green permet d'écrire que :

$$-\int_{\Omega_s} \Delta\gamma.\gamma' = \int_{\Omega_s} \nabla\gamma\nabla\gamma' - \int_{\Sigma} \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma' + \int_{\Gamma_s} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma' - \int_{\Gamma_a} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma'$$

Comme γ' s'annule sur le bord latéral Σ, le deuxième terme est nul. Le troisième vaut :

$$\int_{\Gamma_s} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma' = < P(s)h, h' >$$

Enfin, le dernier terme a pour expression :

$$\int_{\Gamma_a} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma' = -ik \int_{\Gamma_a} \gamma\gamma'$$

On en déduit que :

$$< P(s)h, h' > = -\int_{\Omega_s} \Delta\gamma\gamma' - \int_{\Omega_s} \nabla\gamma\nabla\gamma' - ik \int_{\Gamma_a} \gamma\gamma'$$

On trouve de même :

$$< h, P(s)' > = -\int_{\Omega_s} \Delta\gamma\gamma' - \int_{\Omega_s} \nabla\gamma\nabla\gamma' - ik \int_{\Gamma_a} \gamma\gamma'$$

d'où la symétrie de l'opérateur P.

Lemme 5.2 *L'opérateur Neumann-to-Dirichlet défini dans le paragraphe précédent n'admet aucune singularité dans le guide.*

Démonstration 5.1.2 *Pour démontrer ce lemme, on va appliquer les résultats du chapitre V.*

L'opérateur P s'exprime sous la forme factorisée suivante :

$$P(x) = \mathcal{H} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{H}^{-1}(P(a))$$

où $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}^{-1}$ sont les transformations homographiques :

$$où \begin{cases} \mathcal{H}(Z) = (I + ZP_0^{-1})^{-1}(P_0 - Z)\,, \\ \mathcal{H}^{-1}(Z) = (P_0 - Z)(I + P_0^{-1}Z)^{-1}\,, \\ P(a) = -\dfrac{1}{ik}I\,. \end{cases},$$

On rappelle que P_0 est une solution particulière de l'équation de Riccati ; on a choisi une solution stationnaire, diagonale dans la base de fonctions propres Ψ_n :

$$\forall \psi_n,\ P_0\psi_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\Psi_n \text{ si } \alpha_n^2 > k^2 \\ \dfrac{i}{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}\Psi_n \text{ sinon} \end{cases}$$

On note p_n la valeur propre de P associée à Ψ_n et on pose : $q_n = p_n^{-1}$. Le cas où $\alpha_n = k$ ne se produit que pour certaines configurations liées aux dimensions de la section et correspond au cas des résonances transversales (cf chapitre V). Il ne sera pas traité ici.

Il en résulte que les coefficients des transformations homographiques ne dépendent pas de x et qu'ils ont une forme diagonale ; il sera donc facile de les expliciter.

Comme $P(a) = -\dfrac{1}{ik}I$, son image par $\mathcal{H}^{-1}$ est :

$$\mathcal{H}^{-1}(P(a)) = \left(I - \frac{1}{ik}P_0^{-1}\right)^{-1}\left(P_0 + \frac{1}{ik}I\right)$$

C'est-à-dire :

$$\mathcal{H}^{-1}(P(a)) = \left(-P_0^{-1} + ikI\right)^{-1}(I + ikP_0)$$

On va maintenant écrire sa décomposition modale. On a, d'une part :

$$(I + ikP_0)\,\Psi_n = \left(1 + \frac{ik}{q_n}\right)\Psi_n$$

et d'autre part :

$$\left(-P_0^{-1} + ikI\right)^{-1}\Psi_n = (ik - q_n)^{-1}\Psi_n$$

On en déduit que :

$$\mathcal{H}^{-1}(P(a))\,\Psi_n = \frac{q_n + ik}{q_n(ik - q_n)}\,\Psi_n$$

On étudie ensuite l'effet du semi-groupe. On rappelle que :

$$e^{-P_0^{-1}(x-a)}\Psi_n = e^{-q_n(x-a)}\Psi_n$$

Par conséquent, on obtient :

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{H}^{-1}(P(a))\Psi_n = e^{-P_0^{-1}(x-a)}\circ\mathcal{H}^{-1}(P(a))\circ e^{-P_0^{-1}(x-a)}\Psi_n = e^{-2q_n(x-a)}\frac{q_n+ik}{q_n(ik-q_n)}\Psi_n$$

Pour simplifier les notations, on note $Z(x)$ cet opérateur et ζ_n ses valeurs propres. On a :

$$\zeta_n = e^{-2q_n(x-a)}\frac{q_n+ik}{q_n(ik-q_n)}$$

On explicite l'image de $Z(x)$ par la seconde transformation homographique en écrivant sa décomposition modale. Le dénominateur de l'homographie a pour expression :

$$\left(I+P_0^{-1}Z(x)\right)^{-1}\Psi_n = (1+q_n\zeta_n)^{-1}\Psi_n$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left(I+P_0^{-1}Z(x)\right)^{-1}\Psi_n = \frac{ik-q_n}{ik-q_n+(ik+q_n)e^{-2q_n(x-a)}}\Psi_n$$

Le numérateur vaut :

$$\left(P_0-Z(x)\right)\Psi_n = \left(\frac{1}{q_n}-e^{-2q_n(x-a)}\frac{q_n+ik}{q_n(-q_n+ik)}\right)\Psi_n$$

ce qui se simplifie en :

$$\left(P_0-Z(x)\right)\Psi_n = \frac{-q_n+ik-e^{-2q_n(x-a)}(q_n+ik)}{q_n(-q_n+ik)}\Psi_n$$

Au total, on obtient :

$$\left(P_0-Z(x)\right)\left(I+P_0^{-1}Z(x)\right)^{-1}\Psi_n = \frac{-q_n+ik-e^{-2q_n(x-a)}(q_n+ik)}{q_n(-q_n+ik)}\frac{-q_n+ik}{-q_n+ik+(ik+q_n)e^{-2q_n(x-a)}}\Psi_n$$

Soit finalement :

$$P(x)\Psi_n = \frac{-q_n+ik-e^{-2q_n(x-a)}(q_n+ik)}{q_n\left(-q_n+ik+(ik+q_n)e^{-2q_n(x-a)}\right)}\Psi_n$$

La transformation homographique a donc permis d'expliciter P dans une base de fonctions propres. On va pouvoir conclure rapidement : l'opérateur admet une singularité lorsque le dénominateur de la seconde homographie a une valeur propre nulle, c'est-à-dire lorsque :

$$\mathcal{D}(x) = q_n[-q_n+ik+(ik+q_n)e^{-2q_n(x-a)}]$$

s'annule.

Premier cas : $\alpha_n^2 > k^2$

Dans ce cas q_n *est réel et* $\mathcal{D}(x)$ *s'écrit :*

$$\mathcal{D}(x) = -q_n^2[1 - e^{-2q_n(x-a)}] + ikq_n[1 + e^{-2q_n(x-a)}]$$

La partie imaginaire de $\mathcal{D}(x)$ *est strictement positive, donc* $\mathcal{D}(x)$ *ne s'annule pas et* P *n'admet pas de singularité pour ces vecteurs propres.*

Deuxième cas : $\alpha_n^2 < k^2$

q_n *est alors imaginaire pur, on pose :* $q_n = i\mu_n$ *(où* $\mu_n \neq 0$*). On a alors :*

$$\mathcal{D}(x) = -\mu_n(k - \mu_n) - \mu_n(k + \mu_n)e^{-2i\mu_n(x-a)}$$

Comme μ_n *ne peut pas être égal à* k *(sinon* $k^2 = \mu_n^2 = k^2 - \alpha_n^2$*),* $\mathcal{D}(x)$ *s'annule lorsque :*

$$\frac{-\mu_n + k}{\mu_n + k} = e^{-2i\mu_n(x-a)}$$

Comme $\dfrac{-\mu_n + k}{\mu_n + k}$ *est réel, les seules valeurs possibles sont -1 et 1. Or, on a :*

$$\frac{-\mu_n + k}{\mu_n + k} = -1 \Longleftrightarrow \mu_n + k = \mu_n - k,$$

ce qui n'est pas possible puisque $k \neq 0$*.*

De même, on a :

$$\frac{-\mu_n + k}{\mu_n + k} = 1 \Longleftrightarrow k + \mu_n = k - \mu_n,$$

ce qui est également impossible.

$\mathcal{D}(x)$ *ne s'annule donc jamais, ce qui signifie que* P *n'a pas de singularité.*

5.2 Opérateur Absorbant-to-Dirichlet

Dans toute la suite du chapitre, on étudie un guide cylindrique avec une condition absorbante sur chaque face. La première constatation est qu'il n'y a pas unicité de la factorisation : il est en effet possible de définir différentes impédances, et donc d'aboutir à plusieurs écritures du problème de Helmholtz.

On va s'intéresser dans un premier temps à l'opérateur "Absorbant-to-Dirichlet', qui à une condition absorbante associe la trace de la solution du problème. On favorise ce calcul

car l'équation de Riccati dont il est solution possède au moins deux solutions particulières évidentes : elle permet donc parfaitement d'appliquer les deux formules de représentation et de les comparer. On pourra en déduire dans quel cas il est plus judicieux d'appliquer l'une ou l'autre.

On considère un cylindre $\Omega =]0, a[\times O \subset \mathbb{R}^n$ semblable aux guides des études précédentes, et on impose une condition absorbante sur chacune de ses faces.

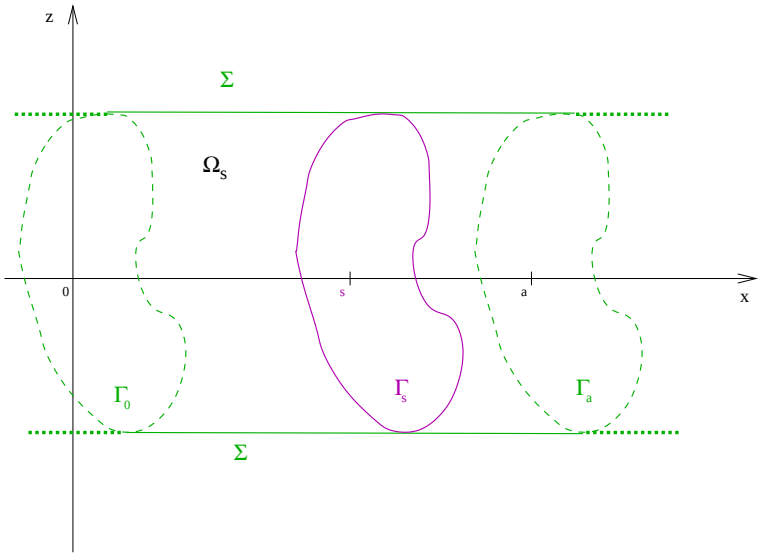


FIG. 5.2: Guide d'ondes avec des conditions absorbantes

Le but de cette section est de retrouver, à l'aide des formules de représentation, qu'il n'y a pas de résonances dans le cylindre, ce qui correspond à l'absence de singularités pour l'impédance. Celle-ci ne sera plus un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet, mais un opérateur "Absorbant-to-Dirichlet".

Le problème à résoudre est le suivant :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_0} = \mathcal{H} \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{G}, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}$, $\mathcal{G} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, et où y est cherché dans $L^2(0,a;H_0^1(O)) \cap H^1(0,a;L^2(O))$. Le problème est bien posé, il a une solution unique (cf Annexe).

5.2.1 Factorisation du problème de Helmholtz

On introduit une frontière mobile $\Gamma_s = \{s\} \times O$, sur laquelle on impose une condition absorbante arbitraire $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, et on considère la famille de problèmes dans les domaines réduits $(s, a) \times O$:

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega_s, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = 0, \end{cases}$$

La frontière Γ_s va se déplacer de a vers 0.

Pour tout $s \in [0, a]$, on définit alors l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$:

$P(s)h = \gamma|_s$, où γ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \\ \gamma|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} - ik\gamma|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + ik\gamma|_{\Gamma_a} = 0, \end{cases}$$

ainsi que $r(s) = \beta|_s \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, où β est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \beta = k^2 \beta + f \\ \beta|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - ik\beta|_{\Gamma_s} = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + ik\beta|_{\Gamma_a} = \mathcal{G}, \end{cases}$$

Comme $\mathcal{P}_{s,h}$ est bien posé (cf Annexe), $P(s)h$ et $r(s)$ sont toujours définis. $P(s)$ est donc cherché dans $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$; c'est un opérateur qui fait gagner un cran de régularité, et il est de la forme "Absorbant-to-Dirichlet".

Par linéarité du problème, il vient :

$$y(s) = P(s)[\frac{\partial y}{\partial x} - iky](s) + r(s).$$

Pour obtenir une forme factorisée du problème de Helmholtz, on va suivre la démarche habituelle qui consiste à dériver la relation affine, puis à exprimer chaque terme de l'équation obtenue en fonction de la solution y et de la partie affine r. Cependant, on va essayer ici d'obtenir une relation en r et en $\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky$ afin de faire apparaître la condition arbitraire h.

La relation affine se dérive en :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] + P[\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ik\frac{\partial y}{\partial x}] + \frac{\partial r}{\partial x}$$

Or, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - k^2 y - f$, donc :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(\Delta_\perp + k^2 I)y - P(ik\frac{\partial y}{\partial x}) - Pf + \frac{\partial r}{\partial x}$$

On remplace y par $P[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] + r$:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(\Delta_\perp + k^2 I)P[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(ik\frac{\partial y}{\partial x}) - P(\Delta_\perp + k^2 I)r - Pf + \frac{\partial r}{\partial x}$$

Cette expression s'écrit également :

$$(I + ikP)\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(\Delta_\perp + k^2 I)P[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(\Delta_\perp + k^2 I)r - Pf + \frac{\partial r}{\partial x}$$

On applique l'opérateur $ik(I + ikP)$ à l'application affine :

$$(I + ikP)iky = ik(I + ikP)P[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] + ik(I + ikP)r$$

C'est-à-dire :

$$(I + ikP)iky = (ikP - k^2P^2)[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] + ik(I + ikP)r$$

En soustrayant ces deux expressions, il vient :

$$\begin{aligned}(I + ikP)[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] = \quad & \frac{dP}{dx}[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - P(\Delta_\perp + k^2 I)P[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] \\ & -(ikP - k^2P^2)[\frac{\partial y}{\partial x} - iky] - (ikI - k^2 P)r - P(\Delta_\perp + k^2 I)r - Pf + \frac{\partial r}{\partial x}\end{aligned}$$

Si l'on regroupe les termes en y et ceux en r, cette relation devient :

$$\left[\frac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I\right][\frac{\partial y}{\partial x} - iky] = -\frac{\partial r}{\partial x} + P\Delta_\perp r + ikr + Pf$$

Cette relation est en fait une identité. Dans ce cas, on trouve un système d'équations découplées, et chaque membre de l'équation est nul. Comme on peut se donner n'importe quelle condition $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ sur le bord Γ_s, la relation :

$$\left[\frac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I\right] h = 0$$

peut s'écrire :

$$\frac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I = 0.$$

On obtient alors le système suivant :

$$\begin{cases} y = P[\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky] + r \\ \dfrac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I = 0 \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} = P\Delta_\perp r + ikr + Pf \end{cases}$$

A présent, on se propose de déterminer les conditions initiales pour ce système.

Soit $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ quelconque, $P(a)h$ est la trace en a de la solution γ du problème homogène associé à $(\mathcal{P}_{s,h})$. Par définition, γ vérifie la condition de radiation :

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x}(a) = -ik\gamma(a).$$

Par conséquent, on a :

$$[\frac{\partial \gamma}{\partial x} - ik\gamma](a) = -2ik\gamma(a).$$

Par ailleurs, $h = [\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky](a)$; la relation précédente s'écrit alors :

$$h = -2ikP(a)h$$

Finalement, il vient :

$$P(a) = -\frac{1}{2ik}I.$$

De la même manière, sur la face droite du cylindre, la partie affine r vérifie la condition de radiation :

$$\frac{\partial r}{\partial x}(a) + ikr(a) = \mathcal{G}$$

D'autre part, pour $s = a$, la condition de radiation sur la face gauche s'écrit :

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x} - ikr\right)(a) = 0$$

En combinant ces équations, il vient :

$$r(a) = \frac{i}{2k}\mathcal{G}$$

On aboutit donc au système suivant :

$$\begin{cases} y = P[\dfrac{\partial y}{\partial x} + iky] + r \ ; & \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky(0) = \mathcal{H} \\ \dfrac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I = 0 \ ; & P(a) = -\dfrac{I}{2ik} \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} = P\Delta_\perp r + ikr + Pf \ ; & r(a) = \dfrac{i\mathcal{G}}{2k} \end{cases}$$

Comme pour la factorisation de type Neumann-to-Dirichlet du tube bouché, le calcul s'effectue en deux temps : on commence par calculer P et r dans le sens des x décroissants, puis on calcule y dans le sens des x croissants.

On peut maintenant écrire le problème de Helmholtz sous sa forme factorisée. La première et la dernière équation s'expriment :

$$\left(I - P(\frac{\partial}{\partial x} + ikI)\right) y = r;$$
$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - P\Delta_\perp - ikI\right) r = Pf.$$

En combinant ces deux équations, on obtient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} - P\Delta_\perp - ikI\right)\left(I - P(\frac{\partial}{\partial x} + ikI)\right) y = Pf$$

Dans cette équation de Riccati, on retrouve le même terme quadratique que dans l'équation correspondant au problème de Poisson. En revanche, on voit apparaître des termes linéaires. Par ailleurs, P n'a plus la même signification que dans le problème de départ, puisqu'il ne s'agit plus ici d'un opérateur Dirichlet-to-Neumann. Avant d'étudier plus précisément son expression, on va donner une de ses propriétés :

Lemme 5.3 *$P(x)$ est un opérateur symétrique.*

Démonstration 5.2.1 *Soient γ, $\gamma' \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ et γ, γ' les éléments de Y_x solutions du problème de Helmholtz homogène tels que :*

$$P(x)h = \gamma|_{\Gamma_x} \text{ et } P(x)h' = \gamma'|_{\Gamma_x}.$$

La formulation variationnelle du problème pour γ s'écrit :

$$-\int_{\Omega_x} \Delta\gamma.\gamma' = k^2 \int_{\Omega_x} \gamma.\gamma'$$

En appliquant la formule de Green au membre de gauche, il vient :

$$\int_{\Omega_x} \nabla\gamma\nabla\gamma' - \int_{\Sigma} \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma' - \int_{\Gamma_a} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma' + \int_{\Gamma_x} \frac{\partial\gamma}{\partial x}\gamma' = k^2 \int_{\Omega_x} \gamma.\gamma'$$

Comme γ' s'annule sur le bord latéral, l'intégrale sur Σ est nulle. En remplaçant les dérivées partielles par les conditions aux limites du problème homogène dans les termes de bord, on trouve :

$$\int_{\Omega_x} \nabla\gamma\nabla\gamma' + ik \int_{\Gamma_a} \gamma.\gamma' + \int_{\Gamma_x} h.P(x)h' = k^2 \int_{\Omega_x} \gamma.\gamma'$$

On en déduit que :

$$< h, P(x)h' >= k^2 \int_{\Omega_x} \gamma.\gamma' - ik \int_{\Gamma_a} \gamma.\gamma' - \int_{\Omega_x} \nabla\gamma\nabla\gamma'$$

Un calcul similaire permet de retrouver que :

$$< P(x)h, h' >= k^2 \int_{\Omega_x} \gamma.\gamma' - ik \int_{\Gamma_a} \gamma.\gamma' - \int_{\Omega_x} \nabla\gamma\nabla\gamma'$$

On en déduit la symétrie de P.

5.2.2 Détermination de solutions particulières

A présent, on souhaite obtenir les formules de représentation de l'opérateur Absorbant-to-Dirichlet en utilisant son équation de Riccati. Pour ce faire, on a besoin d'une ou de deux solutions particulières, que l'on va déterminer dans cette section. On rappelle que ces opérateurs vérifient :

$$\frac{dP}{dx} - P\Delta_\perp P - 2ikP - I = 0.$$

Comme les coefficients de cette équation sont constants, il semble judicieux de chercher une solution stationnaire. Soit P_0 une telle solution ; elle vérifie donc :

$$-P_0\Delta_\perp P_0 - 2ikP_0 - I = 0.$$

Tous les coefficients de cette équation ont une forme diagonale dans une base de fonctions propres du laplacien transversal $(\Psi_n)_n$. On commence donc par chercher P_0 sous une forme diagonale.

On écrit la décomposition de P_0 dans la base des Ψ_n :

$$P_0\Psi_n = p_n\Psi_n \,\forall n$$

L'équation de Riccati va devenir une équation scalaire pour chaque valeur propre p_n :

$$-\alpha_n^2 p_n^2 + 2ikp_n + 1 = 0$$

$\forall n$, si $\alpha_n^2 \neq k^2$, cette équation a deux solutions :

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} \pm \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} \pm \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

Le cas où $\alpha_n^2 = k^2$ correspond aux résonances transversales et sera traité ultérieurement ; on supposera donc par la suite que $\alpha_n^2 \neq k^2$.

Dans cette expression, on doit donc choisir le signe, ce qui correspond comme dans le problème de base à un "tri" des ondes.

Cela signifie qu'il existe une infinité de solutions particulières convenables. Dans un premier temps, on choisira pour P_0 uniquement le signe $+$, ce qui correspond à des ondes se propageant dans le sens des x croissants :

$$P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

P_1 sera l'opérateur :

$$P_1\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} - \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} - \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

5.2.3 1-représentation

On se propose ici de déterminer les singularités éventuelles de P en utilisant la 1-représentation : il s'agit de la transformation homographique qui utilise une solution particulière de l'équation de Riccati. La 2-représentation, qui fait appel à deux solutions particulières, sera étudiée ultérieurement.

On commence par écrire l'équation de Riccati sous la forme :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} = I + P\Delta_\perp P + (ikI)P + P(ikI) \\ P(a) = -\dfrac{1}{2ik}I \end{cases}$$

Pour mettre en oeuvre la 1-représentation, on a besoin de déterminer un opérateur auxiliaire, S, défini par une équation de Lyapunov, avec une condition initiale arbitraire. Cet opérateur vérifie donc :

$$S' = -S(ikI + P_0\Delta_\perp) - (ikI + \Delta_\perp P_0)S - \Delta_\perp$$

Et on choisit comme condition initiale : $S(a) = 0$.

Les coefficients de cette équation ont pour décomposition modale :

$$\forall n,\ -(ikI + P_0\Delta_\perp)\Psi_n = -(ikI + \Delta_\perp P_0)\Psi_n = \begin{cases} \sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\,\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ i\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}\,\Psi_n \text{ sinon} \end{cases}$$

On va chercher S sour une forme diagonale, en décomposant cet opérateur dans la base des ψ_n :

$$S(x)\Psi_= s_n(x)\Psi_n\ \forall n.$$

On obtient donc des équations différentielles scalaires pour les coefficients s_n :

$$s_n'(x) - 2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}s_n(x) - \alpha_n^2 = 0\ ; s_n(a) = 0.$$

On en déduit que $s_n(x)$ est de la forme :

$$s_n(x) = \frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\left(e^{2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}(x-a)} - 1\right)$$

Il est maintenant possible d'écrire la transformation homographique pour P ; on a la formule suivante :

$$P(x) = \mathcal{N}(x)(\mathcal{L}(\mathcal{M}(P(a))), \text{ où}$$

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x)(Z) = e^{(ikI + \Delta_\perp P_0)(x-a)} Z e^{(P_0\Delta_\perp + ikI)(x-a)} \\ \mathcal{M}(x)(Z) = S(x) - (I - ZP_0)^{-1}Z \\ \mathcal{N}(Z)(x) = (S(x) - Z)(I + P_0(S - Z))^{-1} \end{cases}$$

La première étape du calcul consiste à évaluer $\mathcal{M}(P(a))$. Celui-ci a une expression simple :

$$\mathcal{M}(P(a)) = S(a) - (I - P(a)P_0)^{-1}P(a)$$

Comme $S(a) = 0$ et $P(a) = -\frac{1}{2ik}I$, cette relation s'écrit aussi :

$$\mathcal{M}(P(a)) = (I + \frac{1}{2ik}P_0)^{-1}\frac{1}{2ik}I$$

c'est-à-dire :

$$\mathcal{M}(P(a)) = (2ik + P_0)^{-1}$$

Cet opérateur est toujours bien défini. En effet :

Lemme 5.4 *L'opérateur $P_0 + 2ikI$ est inversible.*

Démonstration 5.2.2 *On va exprimer cet opérateur sur chaque fonction de base. On a :*

$$(P_0 - 2ik)\Psi_n = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_n^2}(\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} + ik(2\alpha_n^2 + 1)) & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \frac{1}{\alpha_n^2}(i\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} + ik(2\alpha_n^2 + 1)) & \Psi_n \text{ sinon} \end{cases}$$

Cet opérateur est donc inversible si et seulement si aucune de ses valeurs propres n'est nulle.

Premier cas : $\alpha_n > k$

Dans ce cas, la valeur propre associée à Ψ_n a une partie réelle non nulle, $\frac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}$, donc elle n'est pas nulle.

Deuxième cas : $\alpha_n < k$

La valeur propre est alors un imaginaire pur, qui est nul si et seulement si :

$$\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} = -k(2\alpha_n^2 + 1)$$

c'est-à-dire :

$$k^2 - \alpha_n^2 = 4\alpha_n^4 k^2 + 4\alpha_n^2 k^2 + k^2$$

ou encore :

$4\alpha_n^2 k^2 + 4k^2 + 1 = 0$, *ce qui est impossible.*

$P_0 + 2ikI$ n'a donc pas de valeur propre nulle, et son inverse s'écrit :

$$(P_0+2ikI)^{-1}\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n^2}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)} & \Psi_n \ si\ \alpha_n > k \\ \dfrac{-i\alpha_n^2}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}+k(2\alpha_n^2+1)} & \Psi_n \ si\ \alpha_n < k \end{cases}$$

On peut alors calculer l'image de $\mathcal{M}(P(a))$ par le semi-groupe $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(P_0+2ik)^{-1}\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n^2 e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{-i\alpha_n^2 e^{2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}+k(2\alpha_n^2+1)} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

La dernière étape du calcul consiste à calculer l'image de cet opérateur par la transformation homographique $\mathcal{N}$. On choisit ici de se limiter à la recherche de singularités pour P, donc à l'étude des valeurs propres du dénominateur de $\mathcal{N}$.

Lemme 5.5 *L'opérateur Absorbant-to-Dirichlet P n'a pas de singularités.*

Démonstration 5.2.3 *On va vérifier que l'opérateur $I+P_0(S-\mathcal{L}[(P_0+2ik)^{-1}])$ n'a pas de valeur propre nulle. Comme cet opérateur a une forme diagonale, il suffit de l'évaluer sur chaque fonction propre Ψ_n:*

Premier cas : $\alpha_n > k$

L'équation $\{I+P_0(S-\mathcal{L}[(P_0+2ik)^{-1}])\}\,\Psi_n = 0$ s'exprime aussi :

$$\frac{\alpha_n^2}{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}(e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}-1) - \frac{\alpha_n^2 e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)} = \frac{-\alpha_n^2}{ik+\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}$$

En réduisant au même dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} &e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}\left(-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right) - \left(\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right) \\ &= \frac{-2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\left(\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right)}{ik+\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}\left(-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right)=\frac{\left(\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right)\left(-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik\right)}{ik+\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}$$

Or, le numérateur du second membre se développe comme suit :

$$\left(\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right)\left(-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik\right)=-\alpha_n^2(1+2k^2)-2ik\alpha_n^2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}$$

Il vient alors :

$$e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}\left(-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}+ik(2\alpha_n^2+1)\right)=\frac{-\alpha_n^2\left((1+2k^2)+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\right)}{ik+\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}$$

c'est-à-dire :

$$e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}=\frac{-\alpha_n^2\left((1+2k^2)+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\right)}{\left(-ik-\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\right)\left(\sqrt{\alpha_n^2-k^2}-ik(2\alpha_n^2+1)\right)}$$

Le dénominateur du second membre est l'adjoint du numérateur calculé précédemment, on peut donc écrire directement l'équation sous la forme :

$$e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}(x-a)}=-\alpha_n^2\frac{(1+2k^2)+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{(1+2k^2)-2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}$$

Pour que cette équation ait des solutions, il faut que la partie imaginaire du second membre soit nulle, puisque le membre de gauche est réel. Or, cette partie imaginaire ne s'annule jamais, donc cette égalité n'est jamais vérifiée.

Deuxième cas : $\alpha_n < k$

Un calcul analogue permet de prouver que le dénominateur de $\mathcal{N}$ admet une valeur propre nulle si et seulement si :

$$e^{2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}(x-a)}=\frac{(1+2k^2)-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{(1+2k^2)+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}$$

Le membre de gauche de cette équation est un nombre complexe de module 1, tandis que celui de droite est réel. On a donc, nécessairement :

$$\frac{(1+2k^2)-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{(1+2k^2)+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}=\pm 1$$

Si $(1+2k^2)+2k\sqrt{k^2-\lambda_n}=(1+2k^2)-2k\sqrt{k^2-\lambda_n}$, il vient :

$4k\sqrt{k^2-\lambda_n}=0$, *ce qui est impossible ;*

Si $(1+2k^2)+2k\sqrt{k^2-\lambda_n}=-(1+2k^2)+2k\sqrt{k^2-\lambda_n}$, alors :

$2(1+2k^2) = 0$ *: absurde.*

Cela signifie que $I + P_0(S-\pi)$ n'a pas de valeur propre nulle, donc que P n'admet aucune singularité.

Ce calcul a permis d'illustrer la 1-représentation pour des équations de Riccati présentant des termes linéaires. Il a été possible d'effectuer tous les calculs à la main grâce à la forme diagonale des opérateurs, cependant cette démarche est plutôt longue. On va voir que la 2-représentation est plus efficace.

5.2.4 2-représentation

Dans cette partie, on souhaite mettre en oeuvre la 2-représentation pour retrouver l'absence de résonances et comparer cette méthode avec la 1-représentation. Cette fois, on fait appel à deux solutions particulières, et l'on utilise les propriétés de l'équation pour choisir deux solutions stationnaires. On reprend donc le calcul de telles solutions, et on définit les opérateurs diagonaux P_0 et P_1 par :

$$\begin{cases} P_0\psi_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases} \\ P_1\psi_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} - \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} - \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases} \end{cases}$$

Si la solution u du problème de Helmholtz vérifie :

$$u = P_0\left(\frac{\partial u}{\partial x} + iku\right)$$

alors elle se propage vers la droite, tandis que P_1 correspond aux ondes se propageant vers la gauche.

La différence des deux solutions de l'équation de Riccati, utilisée dans la transformation homographique, a donc une expression simple :

$$(P_1 - P_0)\Psi_n = \begin{cases} -\dfrac{2}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ -\dfrac{2i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ sinon} \end{cases}$$

Comme dans la méthode précédente, la formule de 2-représentation fait appel à des opérateurs auxiliaires qui sont des intermédiaires de calcul, mais qui n'apparaissent pas dans le résultat final. On peut donc appliquer immédiatement la formule de l'homographie :

$P(x) = \mathcal{K}(\mathcal{L}(\mathcal{J}(P(a))))$, où :

$$\begin{cases} \mathcal{J}(P(a)) = (P(a) - P_0(a))^{-1}(P_1(a) - P(a))(P_1(a) - P_0(a))^{-1} \\ \mathcal{L}(W) = e^{-\int_a^x (ikI + \Delta_\perp P_0)(s)ds} \, We^{-\int_a^x (ikI + P_0\Delta_\perp)(s)ds} \\ \mathcal{K}(W) = (P_1(x) + P_0(x)W(P_1(x) - P_0(x)))\,(I + W(P_1(x) - P_0(x)))^{-1} \end{cases}$$

(On rappelle que cette expression de $\mathcal{L}$ est un abus de notation).

Tout d'abord, on va expliciter $\mathcal{J}(P(a))$ dans la base de fonctions propres Ψ_n. L'utilisation de différences des solutions va permettre d'obtenir une expresison plus simple. Un calcul sur chaque fonction de base montre que :

$$\mathcal{J}(P(a))\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-\alpha_n^2}{2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} - i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} + i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{i\alpha_n^2}{2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2} - (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2} + (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

En outre, on vérifie que cet opérateur est bien inversible, car le dénominateur $P(a) - P_0$ n'a pas de valeur propre nulle.

En effet, soit $\alpha_n > k$ et la racine est réelle. Dans ce cas la partie imaginaire des valeurs propres de $P(a) - P_0$ ne s'annule que si :

$$k^2 = \frac{\alpha_n^2}{2}$$

Alors la partie réelle de cette valeur propre vaut :

$$-\frac{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} = -\frac{1}{2}$$

Elle ne s'annule donc pas.

Soit $\alpha_n < k$ et la racine est complexe, la valeur propre associée est alors un imaginaire pur qui s'annule si et seulement si :

$$\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} = k - \frac{\alpha_n^2}{2k},$$

c'est-à-dire :

$$k^2 - \alpha_n^2 = k^2 + \frac{\alpha_n^4}{4k^2} - \alpha_n^2$$

Ce qui implique que :

$$\frac{\alpha_n^4}{4k^2} = 0 : \text{ absurde.}$$

$P(a) - P_0$ n'a donc aucune valeur propre nulle, il est inversible.

L'opérateur $\mathcal{L}$ est lui aussi diagonal, on peut donc l'expliciter facilement. Tout d'abord, on a :

$$-(ikI + P_0\Delta_\perp)\Psi_n = -(ikI + \Delta_\perp P_0)\Psi_n = \sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\Psi_n \; \forall n$$

Il vient :

$$e^{-\int_a^x (ikI + P_0\Delta_\perp)(s)ds}\,\Psi_n = e^{-\int_a^x (ikI + \Delta_\perp P_0)(s)ds}\,\Psi_n = \begin{cases} e^{(x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}\,\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ e^{i(x-a)\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}\,\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

Soit finalement :

$$\mathcal{L}(x)\mathcal{J}(P(a))\,\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-\alpha_n^2 e^{2(x-a)\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}}{2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} - i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} + i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}\,\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{i\alpha_n^2 e^{2i(x-a)\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}}{2\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2} - (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2} + (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}\,\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \end{cases}$$

Il est maintenant possible d'évaluer le dénominateur de $\mathcal{K}(\mathcal{L}(x)\mathcal{J}(P(a)))\,\Psi_n$, noté $\mathcal{D}_n$:

$$\mathcal{D}_n = \begin{cases} 1 + \dfrac{-\alpha_n^2 e^{2(x-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}}{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} - i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} + i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})} \dfrac{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} & \text{si } \alpha_n > k \\ 1 + \dfrac{i\alpha_n^2 e^{2i(x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}}{2\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} \dfrac{-\dfrac{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{\alpha_n^2} - (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{\alpha_n^2} + (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})} \dfrac{2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{\alpha_n^2} & \text{si } \alpha_n < k \end{cases}$$

Les discontinuités se produisent lorsque $\mathcal{K}(\mathcal{L}(x)\mathcal{J}(P(a)))$ n'est pas défini, c'est-à-dire lorsque ce dénominateur admet une valeur propre nulle.

Premier cas : $\alpha_n > k$

$\mathcal{D}_n$ s'annule si et seulement si :

$$1 - e^{2(x-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} \frac{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} - i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{-\dfrac{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} + i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})} = 0$$

ce qui se simplifie en :

$$e^{2(x-a)\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} = \frac{\sqrt{\alpha_n^2-k^2} - i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{\sqrt{\alpha_n^2-k^2} + i(\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}$$

On constate que la partie imaginaire du second membre est non nulle, alors que l'autre membre est un réel pur : l'équation n'est jamais vérifiée.

Deuxième cas : $\alpha_n < k$

La condition devient alors :

$$e^{2i(x-a)\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} = \frac{\sqrt{k^2-\alpha_n^2} + (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}{\sqrt{k^2-\alpha_n^2} - (\dfrac{1}{2k} - \dfrac{k}{\alpha_n^2})}$$

Comme précédemment, on en déduit la condition nécessaire suivante :

$$\sqrt{k^2-\alpha_n^2} - (\frac{1}{2k} - \frac{k}{\alpha_n^2}) = \pm\left(\sqrt{k^2-\alpha_n^2} + (\frac{1}{2k} - \frac{k}{\alpha_n^2})\right)$$

On obtient dans un des cas $\sqrt{k^2-\alpha_n^2}=0$, absurde, et dans l'autre : $k^2=\dfrac{\alpha_n^2}{2}$, ce qui implique que $k^2 \leq \alpha_n^2$. $\mathcal{D}_n$ ne peut donc pas s'annuler.

Ainsi, on a retrouvé l'absence de singularités pour l'opérateur P. La méthode de 2-représentation est plus rapide et plus agréable à mettre en oeuvre que la précédente ; lorsque l'on pourra exhiber deux solutions particulières de l'équation de Riccati, on la préfèrera donc à l'autre méthode. On va maintenant étudier un cas particulier qui nécessite l'utilisation de la 1-représentation.

5.2.5 Etude des résonances transversales

Dans cette section, on traite le cas où $\exists n \in \mathbb{N} \ / \ \alpha_n^2 = k^2$, c'est-à-dire que k^2 est valeur propre du laplacien transversal. Cela implique que l'équation :

$$\alpha_n^2 p_n^2 - 2ikp_n - 1 = 0$$

admet une solution unique pour cette valeur de n :

$$p_n = \frac{ik}{\alpha_n^2} = \frac{i}{k}$$

On notera m cette valeur de n. Par suite, $P_0\Psi_m = P_1\Psi_m$, et l'opérateur $P_1 - P_0$ ne sera pas inversible. Comme on ne peut pas exhiber facilement une autre solution particulière de l'équation de Riccati, on devra se contenter d'une seule solution stationnaire pour mettre en oeuvre la transformation homographique ; on définit alors l'opérateur $P_0 \in \mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O))$ par :

$$P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{1}{\alpha_n^2}\sqrt{\alpha_n^2 - k^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \\ \dfrac{ik}{\alpha_n^2} + \dfrac{i}{\alpha_n^2}\sqrt{k^2 - \alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{i}{k} \quad \Psi_m \textit{ si } n = m \end{cases}$$

Comme cet opérateur, de même que les coefficients de l'équation de Riccati, a une forme diagonale, l'expression de la transformation homographique pour les vecteurs Ψ_n, où $n \neq m$, est la même que pour le cas général. On va donc se limiter à l'étude du m-ième coefficient pour la 1-représentation.

Dans un premier temps, on va calculer la valeur propre s_m de l'opérateur S :

L'équation différentielle vérifiée par ce coefficient, $s_m'(x) - 2\sqrt{\alpha_m^2 - k^2} - \alpha_m^2 = 0$, devient :

$$\begin{cases} s'_m(x) = \alpha_m^2 = k^2 \\ s_m(a) = 0 \end{cases}$$

On en déduit que :

$$s_m(x) = k^2(x-a).$$

De même, l'opérateur $P_0 + 2ikI$ a comme valeur propre :

$$(P_0 + 2ik)\Psi_m = \frac{i(2k^2+1)}{k}\Psi_m$$

Comme cette valeur propre n'est pas nulle, l'opérateur $P_0 + 2ikI$ reste inversible :

$$(P_0 + 2ik)^{-1}\Psi_m = \frac{-ik}{2k^2+1}\Psi_m$$

Ensuite, on évalue l'effet de l'opérateur $\mathcal{L}$. Comme $-(P_0\Delta_\perp + ikI)\Psi_m = 0$, on a :

$$\mathcal{L}(P_0 + 2ik)^{-1}\Psi_m = \frac{-ik}{2k^2+1}\Psi_m$$

On a alors :

$$\left(S(x) - \mathcal{L}(P_0 + 2ik)^{-1}\right)\Psi_m = \left(k^2(x-a) + \frac{ik}{2k^2+1}\right)\Psi_m$$

Par conséquent, il vient :

$$P_0\left(S(x) - \mathcal{L}(P_0 + 2ik)^{-1}\right)\Psi_m = \frac{i}{k}\left(k^2(x-a) + \frac{ik}{2k^2+1}\right)\Psi_m$$

c'est-à-dire :

$$P_0\left(S(x) - \mathcal{L}(P_0 + 2ik)^{-1}\right)\Psi_m = (ik(x-a) - \frac{1}{2k^2+1})\Psi_m$$

On en déduit que :

$$\left(1 + P_0(S(x) - \mathcal{L}(P_0 + 2ik)^{-1})\right)\Psi_m = \left(\frac{2k^2}{2k^2+1} + ik(x-a)\right)\Psi_m$$

La valeur propre associée à Ψ_m a une partie réelle qui ne s'annule jamais, donc elle nést jamais nulle : on en déduit que l'opérateur P n'admet pas de singularités dans le cas des résonances transversales.

Conclusion

Ainsi, cet exemple illustre comment utiliser les formules de représentation : lorsqu'il est possible d'exhiber deux solutions particulières pour l'équation de Riccati, il est préférable

d'avoir recours à la formule de 2-représentation. En revanche, ce n'est pas toujours le cas, en particulier lorsqu'il y a des résonances transversales. La formule de 1-représentation s'avère alors indispensable.

A présent, on va étudier une autre méthode de factorisation du problème.

5.3 Opérateur Absorbant-to-Absorbant

On considère le même guide d'ondes cylindrique ouvert aux deux extrémités que précédemment, mais on s'intéresse à un autre opérateur : on cherche maintenant à étudier l'opérateur "Absorbant-to-Absorbant", qui à la condition de radiation de gauche associe celle de droite. Cet opérateur intervient notamment lorsque l'on raccorde deux guides d'ondes : la section à l'interface est tantôt considérée comme la face droite de la partie gauche, ou comme la face gauche de la partie droite. Une utilisation possible est donc la décomposition de domaines (cf [10]).

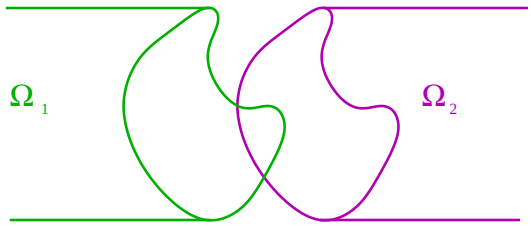


FIG. 5.3: Interface

La condition sur le bord du cylindre Ω_1 sera du type :

$$\frac{\partial y}{\partial x} + iky = h_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)',$$

tandis que celle du cylindre Ω_2 sera :

$$\frac{\partial y}{\partial x} - iky = h_2 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'.$$

Il est donc souhaitable de pouvoir passer facilement de l'une à l'autre.

On s'intéresse donc au problème de Helmholtz dans ce cylindre :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_0} = \mathcal{H} \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{G}, \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{G}$ $\mathcal{H} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ et où y est cherché dans $L^2(0,a;H_0^1(O)) \cap H_0^1(0,a;L^2(O))$.

5.3.1 Factorisation du problème de Helmholtz

Comme précédemment, on introduit une frontière mobile $\Gamma_s = \{s\} \times O$, sur laquelle on impose une condition absorbante $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, et on se restreint au domaine réduit $\tilde{\Omega}_s = [s, a] \times O$. On obtient alors la famille de problèmes :

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \tilde{\Omega}_s, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{G} \ , \end{cases}$$

Pour tout $s \in [0, a]$ et tout $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, le problème est bien posé et il admet donc une solution unique. Par ailleurs, la frontière mobile va se déplacer de a à 0.

Pour tout $s \in [0, a]$, on définit alors l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers lui-même :

$P(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + ik\gamma|_s$, où γ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \\ \gamma|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + ik\gamma|_{\Gamma_a} = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} - ik\gamma|_{\Gamma_s} = h, \end{cases}$$

$r(s) = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + ik\beta|_s$, où β est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \beta = k^2 \beta + f \\ \beta|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + ik\beta|_{\Gamma_a} = \mathcal{G} \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - ik\beta|_{\Gamma_s} = 0, \end{cases}$$

A la différence des factorisations précédentes, on obtient cette fois un opérateur stable : $P(s)$ est cherché dans $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$. En outre, le caractère bien posé du problème (cf Annexe) permet de conclure que $P(s)$ et $r(s)$ seront toujours définis.

Par linéarité du problème, il vient :

$$P(s)\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right](s) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right)(s) - r(s)$$

De même que pour la factorisation précédente, on va dériver, puis transformer cette relation, de manière à obtenir une équation en $\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky$ et en r.

La dérivée de la relation affine vaut :

$$\frac{dP}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right] + P\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - ik\frac{\partial y}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + ik\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}$$

Or, y est solution de l'équation de Helmholtz, donc :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\Delta_\perp y - k^2 y - f$$

Il en résulte que :

$$\frac{dP}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right] + P\left(-(\Delta_\perp + k^2 I)y - ik\frac{\partial y}{\partial x}\right) - Pf = -(\Delta_\perp + k^2 I)y - f + ik\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial r}{\partial x}$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\frac{dP}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right] - P(\Delta_\perp + k^2 I)y + (\Delta_\perp + k^2 I)y - P\left(ik\frac{\partial y}{\partial x}\right) - ik\frac{\partial y}{\partial x} = Pf - f - \frac{\partial r}{\partial x}$$

Pour continuer les calculs, on a besoin d'exprimer y et $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ en fonction de $\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky$.

On a d'une part :

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) = 2iky,$$

c'est-à-dire :

$$y = \frac{1}{2ik}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right)\right]$$

On utilise la relation affine pour écrire que :

$$\frac{\partial y}{\partial x} + iky = P\left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) + r,$$

Finalement :

$$y = \frac{1}{2ik}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) - \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) + r\right]$$

De la même manière, on a :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right)\right]$$

En introduisant la relation affine dans cette formule, il vient :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right) + r\right]$$

On va remplacer y et $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ par ces formules dans la relation précédente :

$$\begin{aligned}
&\frac{dP}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right]-P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+r\right]\\
&+(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+r\right]\\
&-P\left(ik\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+r\right]\right)-ik\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+r\right]\\
&=Pf-f-\frac{\partial r}{\partial x}
\end{aligned}$$

On regroupe tous les termes en y dans le membre de gauche, et ceux en r dans le second membre :

$$\begin{aligned}
&\frac{dP}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right]-P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)\right]\\
&+(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)-\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)\right]-P\left(ik\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)\right]\right)\\
&-ik\frac{1}{2}\left[P\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right)\right]\\
&=Pf-f-\frac{\partial r}{\partial x}+P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+P\frac{ik}{2}r-(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+\frac{ik}{2}r
\end{aligned}$$

Ce qui se simplifie en :

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{dP}{dx}-P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P-I\right]+(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}\left[P-I\right]-P\left(\frac{ik}{2}\left[P+I\right]\right)-\frac{ik}{2}\left[P+I\right]\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right]\\
&=Pf-f-\frac{\partial r}{\partial x}+P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+P\frac{ik}{2}r-(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+\frac{ik}{2}r
\end{aligned}$$

On développe :

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{dP}{dx}-P\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}P+\frac{1}{2ik}P(\Delta_\perp+k^2I)+\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}P-\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}\right.\\
&\quad\left.-P\frac{ik}{2}P-P\frac{ik}{2}-\frac{ik}{2}\left[P+I\right]\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x}-iky\right]\\
&=Pf-f-\frac{\partial r}{\partial x}+P(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+P\frac{ik}{2}r-(\Delta_\perp+k^2I)\frac{1}{2ik}r+\frac{ik}{2}r
\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes quadratiques, linéaires et constants :

$$\left\{\frac{dP}{dx} - P\frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik}P - \frac{ik}{2}P^2 + \frac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + k^2 I) - P\frac{ik}{2} + \frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik}P \right.$$
$$\left. -\frac{ik}{2}P - \frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik} - \frac{ik}{2}I]\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right]$$
$$= Pf - f + \frac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)\frac{1}{2ik}r - P\frac{ik}{2}r + (\Delta_\perp + k^2 I)\frac{1}{2ik}r - \frac{ik}{2}r$$

On va essayer de simplifier chaque terme. Le terme quadratique vaut :

$$-P\frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik}P - \frac{ik}{2}P^2 = -P\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik} + (\frac{k}{2i} + \frac{ik}{2})I\right)P = -\frac{1}{2ik}P\Delta_\perp P$$

Le terme constant se simplifie en :

$$-\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I) - \frac{ik}{2}I = \frac{ik}{2}(\Delta_\perp + k^2 I) - \frac{ik}{2}I = -\frac{1}{2ik}\Delta_\perp$$

Le premier terme linéaire se réécrit :

$$\frac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + k^2 I) - P\frac{ik}{2} = P\left(\frac{\Delta_\perp}{2ik} + \frac{k}{2i}I - \frac{ik}{2}I\right) = \frac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + 2k^2 I)$$

Le second terme linéaire devient :

$$\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)P - \frac{ik}{2}P = \left(\frac{\Delta_\perp}{2ik} - ikI\right)P = \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)P$$

On simplifie à présent les termes du second membre :

$$-P(\Delta_\perp + k^2 I)\frac{1}{2ik}r - P\frac{ik}{2}r = P\left(\frac{i\Delta_\perp}{2k}\ \frac{ik}{(\ 2} - \frac{ik}{2})I\right)r = \frac{i}{2k}P\Delta_\perp r$$

D'autre part, on a :

$$(\Delta_\perp + k^2 I)\frac{1}{2ik}r - \frac{ik}{2}r = \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r$$

La relation devient alors :

$$\left\{\frac{dP}{dx} - \frac{1}{2ik}P\Delta_\perp P + \frac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + 2k^2 I) + \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)P - \frac{1}{2ik}\Delta_\perp\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right]$$
$$= Pf - f - \frac{\partial r}{\partial x} - \frac{i}{2k}P\Delta_\perp r - \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r$$

Cette relation est en fait une identité ; on obtient alors le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - \dfrac{1}{2ik}P\Delta_\perp P + \dfrac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + 2k^2 I) + \dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)P - \dfrac{1}{2ik}\Delta_\perp = 0\ ; & P(a) = 0\ ; \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} + \dfrac{i}{2k}P\Delta_\perp r + \dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r = Pf - f\ ; & r(a) = \mathcal{G}\ ; \\ P(s)\left[\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky\right](s) = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x} + iky\right)(s) + r(s)\ ; & \dfrac{\partial y}{\partial x}(0) - iky(0) = \mathcal{H}. \end{cases}$$

P vérifie donc une équation de Riccati avec des termes linéaires, mais dont tous les coefficients ont une forme diagonale dans la base des Ψ_n. En particulier, le terme quadratique est le même que celui de l'opérateur Dirichlet-to-absorbant, à un coefficient multiplicatif près :

$$\boxed{\dfrac{dP}{dx} - \dfrac{1}{2ik}P\Delta_\perp P + \dfrac{1}{2ik}P(\Delta_\perp + 2k^2 I) + \dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)P - \dfrac{1}{2ik}\Delta_\perp = 0}$$

Remarque 5.2 *On aurait pu choisir $\tilde{P} = P - I$ comme inconnue.*

Enfin, on va exprimer le problème de Helmholtz sous sa forme factorisée. Pour ce faire, on va combiner les deux dernières relations du système découplé :

$$\begin{cases} r = -\left[P(\dfrac{\partial}{\partial x} - ikI) - (\dfrac{\partial}{\partial x} + ikI)\right] y \\ (I - P)f = -\left[\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{i}{2k}(\Delta_\perp + 2k^2 I) - \dfrac{i}{2k}(\Delta_\perp + 2k^2 I)\right] r \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2k}(\Delta_\perp + 2k^2 I) - \frac{i}{2k}(\Delta_\perp + 2k^2 I)\right]\left[P(\frac{\partial}{\partial x} - ikI) - (\frac{\partial}{\partial x} + ikI)\right] y = (I - P)f$$

5.3.2 2-représentation

Cette section permet à la fois d'illustrer la transformation homographique pour une équation de Riccati avec termes linéaires et de vérifier que l'opérateur Absorbant-to-Absorbant n'a pas de singularités.

Tout d'abord, on doit trouver deux solutions particulières de l'équation de Riccati. La forme de celle-ci suggère de rechercher des solutions stationnaires et diagonales.

Soit P_0 une telle solution. P_0 vérifie donc :

$$-P_0\Delta_\perp P_0 + P_0(\Delta_\perp + 2k^2 I) + (\Delta_\perp + 2k^2 I)P_0 - \Delta_\perp = 0$$

On décompose cet opérateur dans la base habituelle de fonctions propres :

$$\forall n,\ P_0\Psi_n = p_n\Psi_n$$

On en déduit une équation scalaire sur les coefficients p_n :

$$\alpha_n^2 p_n^2 + 2(2k^2 - \alpha_n^2)p_n + \alpha_n^2 = 0\,\forall n.$$

Pour tout n, cette équation a deux solutions :

$$p_n = \begin{cases} \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 \pm 2k\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2} \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 \pm 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2} \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

Le choix du signe + ou − correspond à un tri des ondes.

On exhibe deux solutions particulières, P_0 et P_1, dont la décomposition modale est :

$$\begin{cases} P_0\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 + 2k\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 + 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases} \\ P_1\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 - 2k\sqrt{k^2 - \alpha_n^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-2k^2 + \alpha_n^2 - 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases} \end{cases}$$

On en déduit la formule de 2-représentation pour P :

$$P(x) = \mathcal{K} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{J}(P(a))(x), \text{ où}$$

$$\begin{cases} \mathcal{J}(Z) = (Z - P_0)^{-1}(P_1 - Z)(P_1 - P_0)^{-1} \\ \mathcal{L}(x)Z = e^{-\frac{1}{2ik}\left(\Delta_\perp(P_0 - I) - 2k^2 I\right)(x-a)} Z(a) e^{-\frac{1}{2ik}\left((P_0 - I)\Delta_\perp - 2k^2 I\right)(x-a)} \\ \mathcal{K}(Z) = \left[P_1 + P_0 Z(P_1 - P_0)\right]\left[I + Z(P_1 - P_0)\right]^{-1} \end{cases}$$

Comme P est nul en a, on en déduit l'expression simplifiée de $\mathcal{J}(P(a))$:

$$\mathcal{J}(P(a)) = -P_0^{-1}P_1(P_1 - P_0)^{-1}$$

On va écrire la décomposition modale de cette opérateur. Tout d'abord, on a :

$$(P_1 - P_0)\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-4k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{\alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-4ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

L'opérateur $P_0^{-1}P_1$ a également une forme diagonale dans la base des Ψ_n :

$$P_0^{-1}P_1\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

On en déduit la décomposition modale de $\mathcal{J}(P(a))$:

$$\mathcal{J}(P(a))\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{\alpha_n^2}{4k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}\dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{\alpha_n^2}{4ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}\dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

A présent, on cherche à composer cet opérateur avec le semi-groupe $\mathcal{L}$. A cette fin, on va écrire les coefficients de $\mathcal{L}$ dans la base des Ψ_n ; on a:

$$(P_0 - I)\Psi_n = \begin{cases} \dfrac{-2k^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ \dfrac{-2k^2+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

On en déduit que :

$$(\Delta_\perp(P_0 - I) - 2k^2 I)\Psi_n = \begin{cases} -2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ -2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

Et par conséquent :

$$e^{-\dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp(P_0 - I) - 2k^2 I)(x-a)}\Psi_n = \begin{cases} e^{-i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\,(x-a)}\Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ e^{\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,(x-a)}\Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

Finalement, on a :

$$\mathcal{L}\circ\mathcal{J}(P)(x)\Psi_n = \begin{cases} e^{-2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\,(x-a)}\dfrac{\alpha_n^2}{4k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}\dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n < k \\ e^{2\sqrt{\alpha_n^2-k^2}\,(x-a)}\dfrac{\alpha_n^2}{4ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}\dfrac{-2k^2+\alpha_n^2-2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2ik\sqrt{\alpha_n^2-k^2}} & \Psi_n \text{ si } \alpha_n > k \end{cases}$$

Les singularités de P correspondent donc aux x pour lesquels $I+\mathcal{L}\circ\mathcal{J}(P)(x)(P_1-P_0)$ admet une valeur propre nulle.

Premier cas : $\alpha_n < k$

Cette condition est vérifiée si et seulement si il existe une valeur de n pour laquelle l'équation suivante est satisfaite :

$$1+e^{-2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\,(x-a)}\frac{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}=0$$

ce qui s'écrit encore :

$$e^{-2i\sqrt{k^2-\alpha_n^2}\,(x-a)}=-\frac{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}$$

Comme pour l'étude précédente, le membre de gauche est un nombre complexe de module 1, tandis que celui de droite est réel. On en déduit la condition nécessaire suivante :

$$\frac{-2k^2+\alpha_n^2+2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}{-2k^2+\alpha_n^2-2k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}}=\pm 1$$

Soit le quotient vaut 1, et dans ce cas la condition se réduit à :

$$4k\sqrt{k^2-\alpha_n^2}=0,$$

ce qui est impossible. Le quotient ne peut donc valoir que -1. On a alors :

$$-4k^2+2\alpha_n^2=0,$$

ce qui est équivalent à :

$$\alpha_n^2=2k^2.$$

Cette condition est absurde puisque $\alpha_n < k$. Il n'y a donc pas de singularités dans ce cas.

Second cas : $\alpha_n > k$

L'opérateur admet une singularité si et seulement si l'équation suivante est satisfaite :

$$1 + e^{2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\,(x-a)} \frac{-2k^2 + \alpha_n^2 - 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{-2k^2 + \alpha_n^2 + 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}} = 0$$

c'est-à-dire :

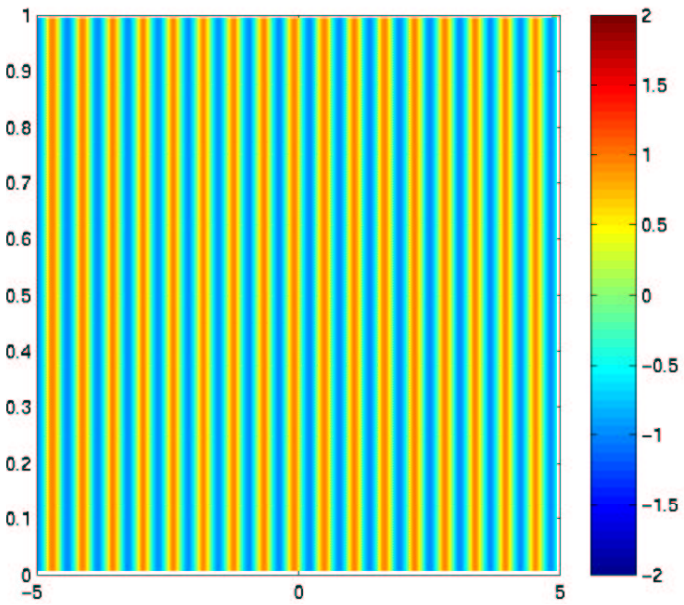
$$-e^{-2\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}\,(x-a)} = \frac{-2k^2 + \alpha_n^2 - 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}{-2k^2 + \alpha_n^2 + 2ik\sqrt{\alpha_n^2 - k^2}}$$

Comme la partie imaginaire du second membre n'est jamais nulle, cette condition ne peut pas être vérifiée.

On en déduit que l'opérateur Absorbant-to-Absorbant n'a pas de singularité. La figure suivante illustre cette propriété : elle représente la valeur du rapport

$$\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x} - iku}{\dfrac{\partial u}{\partial x} + iku}$$

dans un guide de longueur 6.



5.3.3 Factorisation adjointe

Comme pour le tube bouché, il est tout à fait possible de factoriser le problème sur l'autre partie du guide, en imposant l'autre condition absorbante sur la frontière mobile. Ce choix

aboutira à une autre forme factorisée du problème de Helmholtz et à un système découplé différent. En particulier, l'opérateur solution d'une équation de Riccati va vérifier une propriété intéressante : on va voir qu'il est l'image de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann par la transformation de Cayley.

On note $\Omega_s = [0, s] \times O$ le domaine complémentaire de $\tilde{\Omega}_s$ et on se restreint à ce domaine réduit. La frontière mobile va se déplacer de 0 vers a.

On définit donc la famille de problèmes $\mathcal{P}_{s,h}$ sur les sous-domaines Ω_s :

$$(\mathcal{P}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega_s, \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_s} = h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_0} = \mathcal{H}. \end{cases}$$

On note Y_s l'espace fonctionnel :

$$Y_s = \{y \in H^1(\Omega_s) / y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in L^2(0, s; H^{-1}(O))\}$$

On définit alors l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers lui-même :

$Q(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} - ik\gamma|_s$, où $\gamma \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \\ \gamma|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} + ik\gamma|_{\Gamma_s} = h \ ; \ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x} - ik\gamma|_{\Gamma_0} = 0, \end{cases}$$

$r(s) = \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - ik\beta|_s$, où $\beta \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \beta = k^2 \beta + f \\ \beta|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} + ik\beta|_{\Gamma_s} = 0 \ ; \ \dfrac{\partial \beta}{\partial x} - ik\beta|_{\Gamma_0} = \mathcal{H}, \end{cases}$$

$Q(s)$ est encore cherché dans $\mathcal{L}(H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)', H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)')$. Comme le problème est bien posé (cf Annexe), $Q(s)$ et $r(s)$ seront toujours définis.

Q est la transformée de Cayley de l'opérateur Dirichlet-to-Neumann (cf [6], [17]).

La linéarité du problème donne :

$$Q(s)\left[\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right] + r(s) = \left(\frac{\partial y}{\partial x} - iky\right)(s)$$

Cette relation se dérive en :

$$\frac{dQ}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]+Q\left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}+ik\frac{\partial y}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-ik\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}$$

Or, $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}=-\Delta_\perp y-k^2y-f$, donc :

$$\frac{dQ}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]+Q\left(-(\Delta_\perp+k^2I)y+ik\frac{\partial y}{\partial x}-f\right)=-(\Delta_\perp+k^2I)y-f-ik\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial r}{\partial x}$$

Comme pour la première formulation, on cherche à obtenir une relation en $\dfrac{\partial y}{\partial x}+iky$ et en r. On va donc exprimer y et $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ en fonction de $\dfrac{\partial y}{\partial x}+iky$. Tout d'abord, on a :

$$y=\frac{1}{2ik}\left([\frac{\partial y}{\partial x}+iky]-[\frac{\partial y}{\partial x}-iky]\right)=\frac{1}{2ik}\left([\frac{\partial y}{\partial x}+iky]-Q[\frac{\partial y}{\partial x}+iky]-r\right)$$

De la même manière, $\dfrac{\partial y}{\partial x}$ s'écrit :

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{1}{2}\left([\frac{\partial y}{\partial x}+iky]+[\frac{\partial y}{\partial x}-iky]\right)=\frac{1}{2}\left([\frac{\partial y}{\partial x}+iky]+Q[\frac{\partial y}{\partial x}+iky]+r\right)$$

On introduit ces deux expressions dans la relation précédente :

$$\begin{aligned}
&\frac{dQ}{dx}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]-Q\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}[\frac{\partial y}{\partial x}+iky]+Q\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}Q[\frac{\partial y}{\partial x}+iky]+Q\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}r\\
&+Q\frac{ik}{2}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]+Q\frac{ik}{2}Q\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]+Q\frac{ik}{2}r-Qf=-\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]\\
&+\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}Q\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]+\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}r-f-\frac{ik}{2}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]-\frac{ik}{2}Q\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]-\frac{ik}{2}r-\frac{\partial r}{\partial x}
\end{aligned}$$

On regroupe tous les termes en y dans le membre de gauche, et ceux en r dans le second membre :

$$\begin{aligned}
&\left\{\frac{dQ}{dx}-Q\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}+Q\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}Q+Q\frac{ik}{2}+\frac{ik}{2}Q^2\right.\\
&\left.+\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}-\frac{(\Delta_\perp+k^2I)}{2ik}Q+\frac{ik}{2}I+\frac{ik}{2}Q\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x}+iky\right]\\
&=-\frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp+k^2I)r-\frac{ik}{2}Qr+Qf+\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp+k^2I)r-f-\frac{ik}{2}r-\frac{\partial r}{\partial x}
\end{aligned}$$

A présent, on va simplifier cette équation. Le terme quadratique s'écrit :

$$Q\frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik}Q + \frac{ik}{2}Q^2 = Q\frac{(\Delta_\perp + k^2 I)}{2ik}Q + Q\left(\frac{-k^2}{2ik}I\right)Q = \frac{1}{2ik}Q\Delta_\perp Q$$

Le terme constant vaut :

$$\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I) + \frac{ik}{2}I = \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I) - \frac{1}{2ik}k^2 I = \frac{1}{2ik}\Delta_\perp$$

Le premier terme linéaire se simplifie en :

$$-\frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + k^2 I) + \frac{ik}{2}Q = \frac{1}{2ik}Q\left(-(\Delta_\perp + k^2 I) - k^2 I\right) = -\frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + 2k^2 I)$$

Le second terme linéaire a la forme suivante :

$$-\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)Q + \frac{ik}{2}Q = -\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)Q$$

Les termes du second membre ont pour expression :

$$\frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + k^2 I)r + \frac{ik}{2}Qr = \frac{1}{2ik}Q\left(\Delta_\perp + k^2 I - k^2 I\right)r = \frac{1}{2ik}Q\Delta_\perp r$$

ainsi que :

$$-\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)r + \frac{ik}{2}r = -\frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r$$

On en déduit l'expression simplifiée pour la relation :

$$\begin{aligned}&\left\{\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{2ik}Q\Delta_\perp Q - \frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + k^2 I) - \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)Q + \frac{1}{2ik}\Delta_\perp\right\}\left[\frac{\partial y}{\partial x} + iky\right]\\ &= -\frac{\partial r}{\partial x} - \frac{1}{2ik}Q\Delta_\perp r + \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r + Qf - f\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\partial y}{\partial x} + iky = h$ est choisi arbitrairement dans l'espace $H^{\frac{1}{2}}_{00}(O)'$, cette relation est en fait une identité, dont chaque membre est nul. On en déduit le système découplé :

$$\begin{cases}\dfrac{dQ}{dx} + \dfrac{1}{2ik}Q\Delta_\perp Q - \dfrac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + k^2 I) - \dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)Q + \dfrac{1}{2ik}\Delta_\perp = 0; & Q(0) = 0;\\ Qf - f = \dfrac{\partial r}{\partial x} + -dps\dfrac{1}{2ik}Q\Delta_\perp r + \dfrac{1}{2ik}(\Delta_\perp + 2k^2 I)r; & r(0) = \mathcal{H};\\ Q\left[\dfrac{\partial y}{\partial x} + iky\right] + r = \left(\dfrac{\partial y}{\partial x} - iky\right); & \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{G};\end{cases}$$

Comme pour la première formulation, l'opérateur Q vérifie une équation de Riccati avec des termes linéaires, mais dont les coefficients ont une forme diagonale dans la base des Ψ_n :

$$\frac{dQ}{dx} + \frac{1}{2ik}Q\Delta_\perp Q - \frac{1}{2ik}Q(\Delta_\perp + k^2 I) - \frac{1}{2ik}(\Delta_\perp + k^2 I)Q + \frac{1}{2ik}\Delta_\perp = 0$$

Pour finir, on va factoriser le problème de Helmholtz. A cette fin, on va réécrire les deux dernières équations sous la forme :

$$\begin{cases} r = -\left[Q(\dfrac{\partial}{\partial x} + ikI) - (\dfrac{\partial}{\partial x} - ikI)\right] y \\ (I-Q)f = -\left[\dfrac{\partial}{\partial x} - \dfrac{1}{2ik}(Q\Delta_\perp - (\Delta_\perp + 2k^2 I))\right] r \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2ik}(Q\Delta_\perp - (\Delta_\perp + 2k^2 I))\right]\left[Q(\frac{\partial}{\partial x} + ikI) - (\frac{\partial}{\partial x} - ikI)\right] y = (I-Q)f$$

Chapitre 6

Factorisation du problème de Helmholtz en section variable

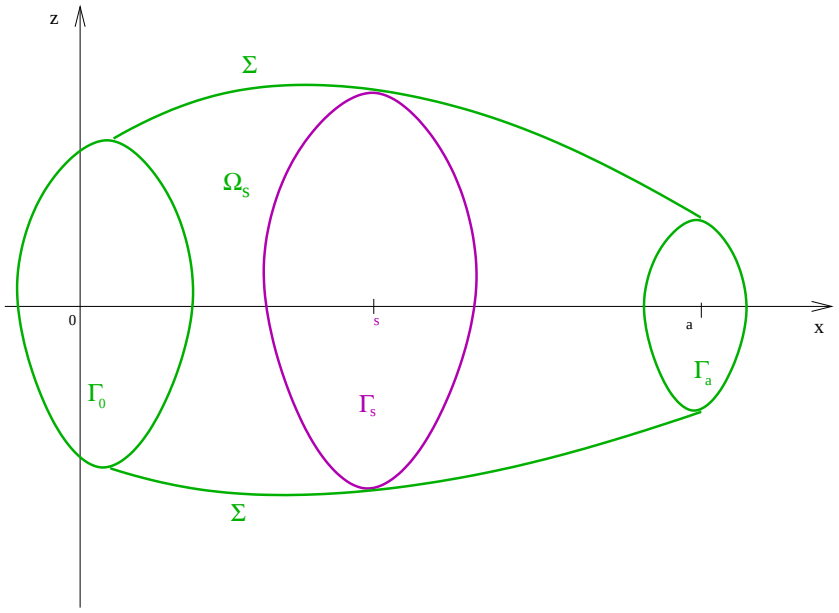
En acoustique ou en électromagnétisme, de nombreux problèmes concernent la propagation d'ondes dans un guide non uniforme, c'est-à-dire dans un guide dont la section transverse varie. Pour cette configuration, les méthodes dont le but est d'expliciter la solution par une décomposition modale sont instables (cf [11]). La factorisation du problème par plongement invariant permet d'éviter cette difficulté, cependant la variation de la section ne permet pas d'appliquer la méthode sans prendre de précautions.

Le but de ce chapitre est d'expliquer comment adapter cette factorisation à un guide dont les sections sont homothétiques. On présentera trois démarches : la première repose sur une formulation variationnelle, la deuxième consiste à réécrire les équations dans une base de Hilbert-Schmidt. Enfin, la troisième consiste à transformer le problème de départ par un changement de variables afin de se ramener à un guide de section constante.

6.1 Méthode intégrale

On appelle $\Omega \in \mathbb{R}^n$ le guide étudié et on choisit une direction particulière (x) pour ce domaine, correspondant à la direction de propagation de l'onde. Cet axe est l'équivalent de l'axe du cylindre. On désigne par z les autres coordonnées et par Γ_x la section du guide à l'abscisse x. On suppose que cette section est toujours une partie bornée de $\mathbb{R}^{n-1}$ et que sa frontière, $\partial\Gamma_x$, est régulière. Enfin, on suppose que le guide étudié se situe entre $x = 0$ et $x = a$, et que l'on peut écrire Ω comme : $\Omega = \cup_{0\leq x\leq a}\Gamma_x$. On appelle Σ le bord latéral du domaine, et on le suppose également régulier.

On choisit d'étudier une configuration aussi proche que possible du cas cylindrique : on s'intéresse au problème de Helmholtz dans le guide Ω, pour lequel on impose une condition de Dirichlet sur le bord latéral Σ et une autre condition du même type sur la face droite,



ainsi qu'une condition de Neumann sur la face gauche. Le problème à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega, \\ y|_\Sigma = 0,\ y|_{\Gamma_a} = y_1,\ -\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \end{cases}$$

où f élément de $L^2(\Omega)$, $y_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)$ et $y_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_a)'$. y est cherché dans l'espace :

$$\begin{aligned} Y = \{ \quad & y/p.p.\ s \in [0,a],\ \frac{\partial y}{\partial s}(s) \in L^2(\Gamma_s), \nabla_\perp y(s) \in L^2(\Gamma_s), \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \in H^{-1}(\Gamma_s) \\ & \int_0^a \|\frac{\partial y}{\partial s}(s)\|^2_{L^2(\Gamma_s)} ds < +\infty \ \text{ et } \ \int_0^a \|\nabla_\perp y(s)\|^2_{L^2(\Gamma_s)} ds < +\infty \} \end{aligned}$$

(Y est l'équivalent de $L^2(0,a;H_0^1(O)) \cap H^1(0,a;L^2(O))$ utilisé dans le cas cylindrique ; en outre, $\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)'$)

Le problème n'est pas toujours bien posé et n'admet donc pas toujours une unique solution.

La première méthode va tenter de se conformer autant que possible à la démarche suivie pour l'étude du guide cylindrique.

6.1.1 Première formulation

Comme pour l'étude du guide droit, on fractionne le domaine d'étude en introduisant une frontière mobile $\Gamma_s =$ à l'abscisse s sur laquelle on impose une condition de Dirichlet

arbitraire, et l'on étudie la famille de problèmes $\mathcal{P}_{s,h}$ sur les domaines réduits $\Omega_s = \cup_{0\leq x\leq s}\Gamma_x$:

$$(\mathcal{P}_{s,h})\begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega_s, \\ y|_\Sigma = 0,\ y|_{\Gamma_s} = h \in H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s),\ -\dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \end{cases}$$

La frontière mobile Γ_s est initialement confondue avec Γ_0, on la fait ensuite évoluer dans le sens des x croissants jusqu'à Γ_a :

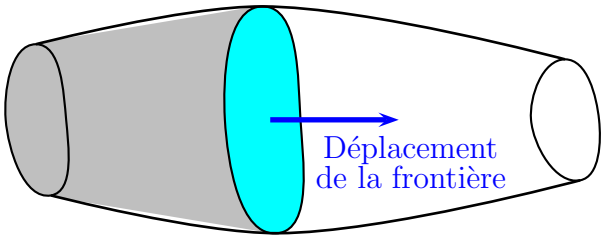


FIG. 6.1: Déplacement de la frontière

On note Y_s la restriction de Y à Ω_s.

Pour tout $s \in [0, a]$ et $h \in H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)$ pour lesquels $(\mathcal{P}_{s,h})$ est bien posé, on définit l'opérateur $Q(s)$ de $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)$ vers son dual $H^{\frac{1}{2}}_{00}(\Gamma_s)'$:

$Q(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}$, où $\gamma \in Y_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_s, \\ \gamma|_\Sigma = 0,\ \gamma|_{\Gamma_s} = h,\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_0} = 0, \end{cases}$$

ainsi que $r(s) = \beta|_{\Gamma_s}$, où $\beta \in Y_s$ est solution de :

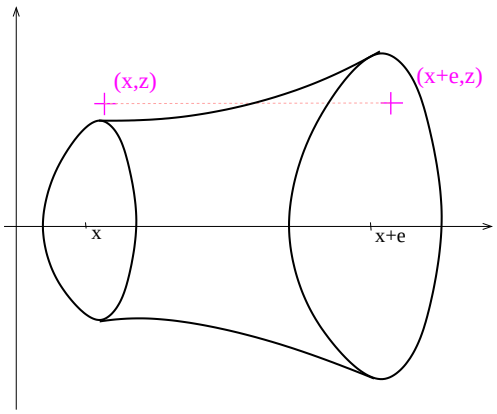
$$\begin{cases} -\Delta\beta = k^2\beta + f \text{ dans } \Omega_s, \\ \beta|_\Sigma = 0,\ \beta|_{\Gamma_s} = 0,\ -\dfrac{\partial \beta}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0, \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $Q(0) = 0$ et $r(0) = -y_0$.

Comme $\mathcal{P}_{s,h}$ est linéaire, on a la relation affine :

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x) = Q(x)y(x) + r(x).$$

On souhaite pouvoir dériver cette expression. Dans le cas d'une section constante, cela revenait à évaluer la différence $Q(x+\epsilon)y(x+\epsilon,z) - Q(x-\epsilon)y(x-\epsilon,z)$ pour tout z, avec ϵ suffisamment petit. Lorsque la section est variable, il est possible que $(x+\epsilon,z)$ soit à l'intérieur du domaine pour tout $\varepsilon > 0$, mais sur le bord ou à l'extérieur du domaine pour $\varepsilon \leq 0$:



Il faut alors renoncer à cette évaluation locale. On va donc introduire une fonction dans la relation précédente et l'intégrer sur le domaine. On définit donc une fonction $k(z)$ sur un voisinage de Γ_s suffisamment grand, telle que $k(z)$ ne dépend pas de x : $k \in H^1(\Gamma)$, où $\Gamma = \cup_x \Gamma_x$. Il vient :

$$\int_{\Gamma_x} k \frac{\partial y}{\partial x}(x)\, dz = \int_{\Gamma_x} k(Q(x)y(x) + r(x))\, dz$$

On dérive cette expression par rapport à x :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k \frac{\partial y}{\partial x}\, dz = \frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k(Q(x)y(x) + r(x))\, dz$$

Comme Γ_x dépend de x, la dérivée de chaque terme est la somme de la dérivée sous l'intégrale et d'un terme tenant compte de la variation du domaine. On note $\partial\Gamma_x$ le bord de la section. On a la formule générale, pour toute f :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} f(x,z)dz = \int_{\Gamma_x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,z)dz + [f(x,z)]_{\partial\Gamma_x}\Gamma'_x$$

ce qui s'écrit encore:

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} f(x,z)dz = \int_{\Gamma_x} \frac{\partial f}{\partial x}(x,z)dz + \int_{\partial\Gamma_x} f|_{\partial\Gamma} \tan(e_1,\tau)d\Gamma,$$

où e_1 est le vecteur directeur unitaire de l'axe du guide, et τ est le vecteur unitaire tangent à Σ dans le plan passant par l'axe des x. On appelle n le vecteur normal sortant dans le plan contenant Γ_X pour le même point de Γ_x. On applique maintenant cette formule à l'intégrale du membre de gauche :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k(z)\frac{\partial y}{\partial x}(x,z)dz = \int_{\Gamma_x} k(z)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dz + \int_{\partial\Gamma_x} k(z)\frac{\partial y}{\partial x}\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

De même, l'intégrale de l'autre membre s'écrit :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k(z)(Q(x)y+r(x))dz = \int_{\Gamma_x} k(z)(\frac{dQ}{dx}y+Q\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x})dz+\int_{\partial\Gamma_x} k(z)(Qy+r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

On en déduit que :

$$\int_{\Gamma_x} k(z)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dz = \int_{\Gamma_x} k(z)(\frac{dQ}{dx}y + Q\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial r}{\partial x})dz + \int_{\partial\Gamma_x} k(Qy - \frac{\partial y}{\partial x} + r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

Comme y est nul sur Σ, sa dérivée tangentielle est nulle également. La dérivée de y par rapport à x est liée à la dérivée normale :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\tan(e_1,\tau)\frac{\partial y}{\partial n}$$

Il en résulte que :

$$\int_{\Gamma_x} k(z)\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}dz = \int_{\Gamma_x} k(z)(\frac{dQ}{dx}y+Q\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial r}{\partial x})dz+\int_{\partial\Gamma_x} k(Qy+\frac{\partial y}{\partial n}\tan(e_1,\tau)+r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

Comme par ailleurs

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -f - (\Delta_\perp + k^2 I)y \text{ et } \frac{\partial y}{\partial x} = Qy + r,$$

la relation précédente devient :

$$\begin{aligned}&\int_{\Gamma_x} k(z)(\frac{dQ}{dx}y + Q^2y + Qr + \frac{\partial r}{\partial x} + f + (\Delta_\perp + k^2 I)y)dz \\ &+ \int_{\partial\Gamma_x} k(Qy + \frac{\partial y}{\partial n}\tan(e_1,\tau) + r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma = 0\end{aligned} \tag{6.1}$$

Comme cette relation est vérifiée pour toute fonction test k, on en déduit que l'intégrale sur Γ_x et celle sur $\partial\Gamma_x$ sont nulles (on choisit d'abord $k \in \mathcal{D}(\Gamma_x)$, c'est-à-dire nul sur $\partial\Gamma_x$, on en tire la nullité de l'intégrale sur Γ_x, puis de celle sur $\partial\Gamma_x$). Ainsi,

$$\int_{\Gamma_x} k(z)(\frac{dQ}{dx}y + Q^2y + Qr + \frac{\partial r}{\partial x} + f + (\Delta_\perp + k^2 I)y)dz = 0 \quad \forall k,$$

ce qui implique que :

$$(\frac{dQ}{dx} + Q^2 + (\Delta_\perp + k^2 I))y = -Qr - \frac{\partial r}{\partial x} - f$$

Comme y est choisi de manière arbitraire, le problème se découple en deux équations :

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dx} + Q^2 + \Delta_\perp + k^2 I = 0 \\ Qr + \dfrac{\partial r}{\partial x} + f = 0 \end{cases}$$

On décompose maintenant la frontière Σ en deux parties : Σ^+ désigne l'ensemble des points pour lesquels le champ de dérivation horizontal entre dans le domaine, Σ^- désigne ceux pour lesquels il est sortant.

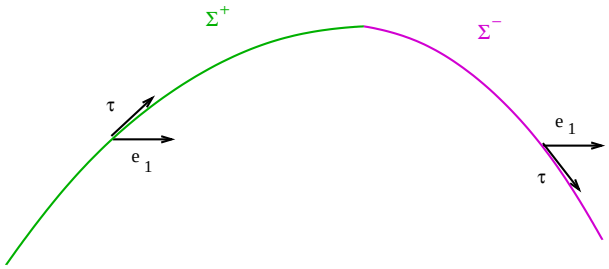


FIG. 6.2: Décomposition de la frontière

En exploitant de même l'intégrale sur $\partial\Gamma_x$ de la relation (6.1), on peut écrire de manière formelle que :

$$Qy + \tan(e_1, \tau)\frac{\partial y}{\partial n} = -r \text{sur } \Sigma^+.$$

La relation précédente étant une identité valable pour tout $y \in Y_s$, elle se décompose en :

$$r = 0 \text{ sur } \Sigma^+ \text{ et } T_{\Gamma_x^+} \circ Q + \frac{\partial}{\partial n}\tan(e_1, \tau) = 0 \text{ sur } \Sigma^+,$$

où $T_{\Gamma_x^+}$ est l'opérateur trace sur $\partial\Gamma_x$.

Au total, on obtient le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial x} = Qy + r, \quad y(a) = y_1 \\ y|_{\Sigma^-} = 0 \\ \dfrac{dQ}{dx} + Q^2 + \Delta_\perp + k^2 I = 0, \quad Q(0) = 0 \\ Qr + \dfrac{\partial r}{\partial x} + f = 0 \\ r|_{\Sigma^+} = 0, \quad r(0) = -y_0 \\ T_{\Gamma_x^+} \circ Q + \tan(e_1, \tau)\dfrac{\partial}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Sigma^+ \end{cases}$$

6.1.2 Deuxième formulation

On va mettre en oeuvre la même méthode pour la famille des sous-domaines complémentaires : on se restreint au domaine $\tilde{\Omega}_s = \cup_{s\leq x\leq a}\Gamma_s$ compris entre la face droite du guide et la frontière mobile Γ_s, sur laquelle on impose une condition de Neumann arbitraire. La frontière va se déplacer cette fois dans le sens des x décroissants :

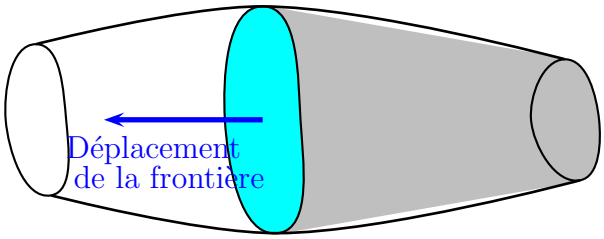


FIG. 6.3: Déplacement de la frontière

On définit ainsi une famille de problèmes $\tilde{\mathcal{P}}_{s,h}$ sur $\tilde{\Omega}_s$:

$$(\tilde{\mathcal{P}}_{s,h})\begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \tilde{\Omega}_s, \\ y|_\Sigma = 0,\ \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)',\ y|_{\Gamma_a} = y_1, \end{cases}$$

On note $\tilde{Y}_s$ la restriction de Y à $\tilde{\Omega}_s$.

Pour tout $s \in [0,a]$et $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)'$ pour lesquels $(\tilde{\mathcal{P}}_{s,h})$ est bien posé, on définit l'opérateur de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Gamma_s)$:

$P(s)h = \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s}$, où $\gamma \in \tilde{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \tilde{\Omega}_s, \\ \gamma|_\Sigma = 0,\ \dfrac{\partial \gamma}{\partial x}|_{\Gamma_s} = h,\ \gamma|_{\Gamma_a} = 0, \end{cases}$$

$r(s) = \beta|_{\Gamma_s}$, où $\beta \in \tilde{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\beta = k^2\beta + f \text{ dans } \tilde{\Omega}_s, \\ \beta|_\Sigma = 0,\ \dfrac{\partial \beta}{\partial x}|_{\Gamma_s} = 0,\ \beta|_{\Gamma_a} = y_1, \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $P(a) = 0$ et $r(a) = y_1$.

L'argument habituel de linéarité du problème aux limites permet de conclure que :

$$y = P\frac{\partial y}{\partial x} + r$$

Afin de pouvoir dériver cette expression, on introduit la même fonction $k(z)$ définie sur un voisinage de Γ_x, et on intègre sur Γ_x :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} yk dz = \frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k(P\frac{\partial y}{\partial x} + r)dz$$

Comme pour la première formulation, on va exploiter la formule de dérivation de l'intégrale pour chaque membre de l'égalité. Ainsi, le membre de gauche devient :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} yk dz = \int_{\Gamma_x} k\frac{\partial y}{\partial x}dz + \int_{\partial\Gamma_x} ky\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

Le second membre se transforme en :

$$\frac{d}{dx}\int_{\Gamma_x} k(P\frac{\partial y}{\partial x} + r)dz = \int_{\Gamma_x} k(\frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x})dz + \int_{\partial\Gamma_x} k(P\frac{\partial y}{\partial x} + r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

Comme dans le cas précédent, l'intégrale sur Γ_x et celle sur $\partial\Gamma_x$ sont nulles. Il vient :

D'une part, $\displaystyle\int_{\Gamma_x} k\frac{\partial y}{\partial x}dz = \int_{\Gamma_x} k(\frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial r}{\partial x})dz$

En remplaçant dans cette expression $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ par $-f - (\Delta_\perp + k^2 I)y$ et y par $P\dfrac{\partial y}{\partial x} + r$, on obtient :

$$\int_{\Gamma_x} k\frac{\partial y}{\partial x}dz = \int_{\Gamma_x} k(\frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - Pf - P(\Delta_\perp + k^2 I)P\frac{\partial y}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)r + \frac{\partial r}{\partial x})dz$$

On en déduit que :

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{dP}{dx}\frac{\partial y}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)P\frac{\partial y}{\partial x} - Pf - P(\Delta_\perp + k^2 I)r + \frac{\partial r}{\partial x}$$

Comme dans le cas précédent, cette équation se découple pour donner le système :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - P(\Delta_\perp + k^2 I)P - I = 0 \\ \dfrac{\partial r}{\partial x} - P(\Delta_\perp + k^2 I)r - Pf = 0 \end{cases}$$

La deuxième intégrale devient :

$$\int_{\partial\Gamma_x} ky\tan(e_1,\tau)d\Gamma = \int_{\partial\Gamma_x} k(P\frac{\partial y}{\partial x} + r)\tan(e_1,\tau)d\Gamma$$

Or, y vérifie la condition sur le bord latéral :

$y|_\Sigma = 0$

Ainsi, si l'on choisit $\dfrac{\partial y}{\partial x} = 0$, on a aussi :

$r|_\Sigma = 0.$

Il reste alors :

$$\int_{\partial\Gamma_x} \left(T_{\partial\Gamma_x} k + T_{\partial\Gamma_x} \circ \frac{\partial}{\partial x} \right) y \tan(e_1, \tau) = 0$$

On en déduit que $T_{\partial\Gamma_x} \circ P = 0$ sur Σ^+.

On retrouve ainsi le système découplé, avec une équation supplémentaire sur Σ^+ permettant de déterminer les conditions initiales pour P.

Pour chaque formulation, on retrouve les équations correspondant au guide droit pour l'intérieur du domaine. On obtient en outre une nouvelle équation sur le bord latéral, donnant l'information supplémentaire nécessaire.

6.2 Décomposition modale

Dans ce paragraphe, on s'efforcera de donner une formulation plus explicite de la factorisation, en s'inspirant davantage de la démarche adoptée par les physiciens. On va réécrire la deuxième formulation en décomposant les fonctions utilisées dans des bases de fonctions propres du laplacien transversale. L'équation de Riccati obtenue sera effectivement très proche de celle du chapitre I (première section). Il s'agit ici de calculs formels, car on ne cherchera pas le sens précis de la convergence des séries.

Pour x fixé on définit la base de fonctions propres du laplacien transversal par : $(\Psi_i(x))_i$ telles que :

$$\begin{cases} -\Delta_\perp \Psi_i = \lambda_i \Psi_i = \alpha_i^2 \Psi_i \text{ dans } \Gamma_x \\ \Psi_i|_{\partial\Gamma_x} = 0 \text{ (condition de Dirichlet sur le bord)} \end{cases}$$

Remarque 6.1 *Les fonctions de base dépendent de x.*

On exprime dans cette base les différentes fonctions apparaissant dans la formulation :

$$\begin{cases} y(x,z) & = & \displaystyle\sum_i y_i(x)\Psi_i(x,z) \\ \dfrac{\partial y}{\partial x}(x,z) & = & \displaystyle\sum_i \omega_i(x)\Psi_i(x,z) \\ r(x,z) & = & \displaystyle\sum_i r_i(x)\Psi_i(x,z) \\ f(x,z) & = & \displaystyle\sum_i f_i(x)\Psi_i(x,z) \end{cases}$$

Comme la section est variable, les fonctions de base dépendent de x.

P se décompose lui aussi dans la base de Hilbert-Schmidt $\{\Psi_i\}_i \otimes \{\Psi_j\}_j$:

$$P(x) = \sum_{i,j} P_{ij}(x)\Psi_i \otimes \Psi_j$$

Dans la suite des calculs, on notera Π la matrice infinie des coefficients P_{ij} de P sur la base Ψ_i.

Tout d'abord, la relation $y = P\dfrac{\partial y}{\partial x} + r$ s'écrit :

$$\sum_i y_i\Psi_i = \sum_{i,j} P_{ji}\omega_j\Psi_i + \sum_i r_i\Psi_i$$

On va également reformuler l'équation de Riccati :

$$\frac{dP}{dx} - P(\Delta_\perp + k^2 I)P - I = 0.$$

Pour ce faire, on exprime chacun de ces opérateurs dans la base des $\Psi_i \otimes \Psi_j$. L'identité s'écrit sous la forme :

$$I = \sum_i \Psi_i \otimes \Psi_i$$

On va ensuite décomposer le terme quadratique. On a :

$$P(\Delta_\perp + k^2 I)P = \sum_{i,j}[(\sum_{q,l} P_{ql}\Psi_q \otimes \Psi_l)(\Delta_\perp + k^2 I)(\sum_{r,s} P_{rs}\Psi_r \otimes \Psi_s), \Psi_i \otimes \Psi_j]\Psi_i \otimes \Psi_j$$

Ce qui se simplifie en :

$$P(\Delta_\perp + k^2 I)P = -\sum_{i,j}(\sum_q (\lambda_q - k^2)P_{iq}P_{qj})\Psi_i \otimes \Psi_j$$

La dérivée de P vaut :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\sum_{i,j} P_{ij}(x)\,(\Psi_i \otimes \Psi_j)(x,z)\right)$$

Pour développer cette expression, il faut tenir compte des variations des fonctions propres en fonction de la section, et donc de x :

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{i,j} \frac{dP_{ij}}{dx}\Psi_i \otimes \Psi_j + \sum_{i,j} P_{ij}\frac{\partial}{\partial x}((\Psi_i \otimes \Psi_j)(x,z))$$

Finalement, on obtient :

$$\frac{dP}{dx} = \sum_{i,j} \frac{dP_{ij}}{dx}(\Psi_i \otimes \Psi_j) + \sum_{i,j} P_{ij}\left(\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} \otimes \Psi_j\right)(x,z) + \sum_{i,j} P_{ij}\left(\Psi_i \otimes \frac{\partial \Psi_j}{\partial x}\right)(x_1,z)$$

On va décomposer $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial x}$ dans la base des Ψ_i :

On pose : $\dfrac{\partial \Psi_i}{\partial x} = \sum_j F_{ji}\Psi_j$ où $F_{ij} = \displaystyle\int_{\Omega_x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x}\Psi_i dz$

On a alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_i \otimes \Psi_j) = (\sum_k F_{ki}\Psi_k) \otimes \Psi_j + \Psi_i \otimes (\Sigma_k F_{kj}\Psi_k) = \sum_k F_{ki}\Psi_k \otimes \Psi_j + \sum_k F_{kj}\Psi_i \otimes \Psi_k$$

On en déduit que :

$$\sum_{i,j} P_{ij}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_i \otimes \Psi_j) = \sum_{i,j,k} P_{kj}F_{ik}\Psi_i \otimes \Psi_j + \sum_{i,j,k} P_{ik}F_{jk}\Psi_i \otimes \Psi_j$$

Finalement, il vient :

$$\sum_{i,j} P_{ij}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_i \otimes \Psi_j) = \sum_{i,j,k}(P_{kj}F_{ik} + P_{ik}F_{jk})\Psi_i \otimes \Psi_j$$

Le terme $\sum_k P_{kj}F_{ik}$ correspond au coefficient (i,j) du produit matriciel ΠF^t ; $\sum_k P_{ik}F_{jk}$ correspond au coefficient (i,j) du produit $F\Pi$. On en déduit que :

$$\sum_{i,j} P_{ij}\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_i \otimes \Psi_j) = \Pi F^t + F\Pi.$$

Au total, l'équation de Riccati devient :

$$\sum_{i,j}(\frac{dP_{ij}}{dx} + \sum_q (\lambda_q - k^2)P_{iq}P_{qj} - \delta_{ij} + (\Pi F^t + F\Pi)_{ij})\Psi_i \otimes \Psi_j = 0$$

On note Λ la matrice diagonale dont le q-ième terme vaut $-\lambda_q + k^2$. On vérifie alors que :

$$\sum_q (-\lambda_q + k^2)P_{iq}P_{qj} = (\Pi\Lambda\Pi)_{ij}.$$

On obtient la relation matricielle suivante :

$$\frac{d\Pi}{dx} = \Pi\Lambda\Pi + I - \Pi F^t - F\Pi$$

On retrouve bien l'équation vérifiée par l'impédance acoustique (cf [27]).

Application : Calcul des coefficients de F

On considère donc un guide d'ondes bidimensionnel dans le plan (x, z), délimité par les frontières $(z = 0)$ et $(z = h(x))$. Dans un premier temps, on diagonalise le Laplacien transversal ; on cherche donc les fonctions propres de :

$$\begin{cases} -\dfrac{\partial^2 \Psi_i}{\partial z^2} = \lambda_i \Psi_i \\ \Psi_i = 0 \text{ en } (z = 0) \text{ et } (z = h(x)) \end{cases}$$

Le problème à résoudre est donc un problème de type Dirichlet. On trouve :

$$\Psi_i(x, z) = \sqrt{\frac{2}{h(x)}} \sin(\frac{i\pi z}{h(x)}), \text{ avec } \lambda_i = (\frac{i\pi}{h})^2$$

On a alors :

$$y(x, z) = \sum_i \sqrt{\frac{2}{h(x)}} y_i(x) \sin(\frac{i\pi z}{h(x)})$$

On constate en particulier que dans ce cas, les fonctions de base dépendent des deux variables x et z, comme cela était prévu. La dérivée par rapport à x s'exprime :

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2} h'(x)}{h^{\frac{3}{2}}(x)} (\frac{i\pi z}{h(x)} \cos(\frac{i\pi z}{h(x)}) + \frac{1}{2} \sin(\frac{i\pi z}{h(x)}))$$

On constate que cette dérivée partielle fait apparaître les fonctions de base pour le problème de Neumann.

On calcule maintenant les coefficients de la matrice F. Par définition, on a :

$$\begin{aligned} F_{ij} &= \int_{\Omega_x} \frac{\partial \Psi_j}{\partial x} \Psi_i dz \\ &= \int_0^{h(x)} -\frac{2h'(x)}{h^2(x)} [\frac{j\pi z}{h(x)} \cos(\frac{j\pi z}{h(x)}) + \frac{1}{2} \sin(\frac{j\pi z}{h(x)})] \sin(\frac{i\pi z}{h(x)}) dz \end{aligned}$$

Si $i = j \neq 0$, alors :

$$F_{ii} = \frac{h'(x)}{2h(x)}$$

Si $i \neq j$, alors

$$F_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{h'(x)}{h(x)} \frac{2ij}{i^2 - j^2}$$

6.3 Factorisation par changement de variables

Une troisième méthode consiste à se ramener à un guide cylindrique en faisant une homothétie sur chaque section : on va donc effectuer un changement de variables. Pour simplifier, on suppose que le guide est tridimensionnel, qu'il présente un axe de symétrie et qu'aucune section n'est réduite à un point.

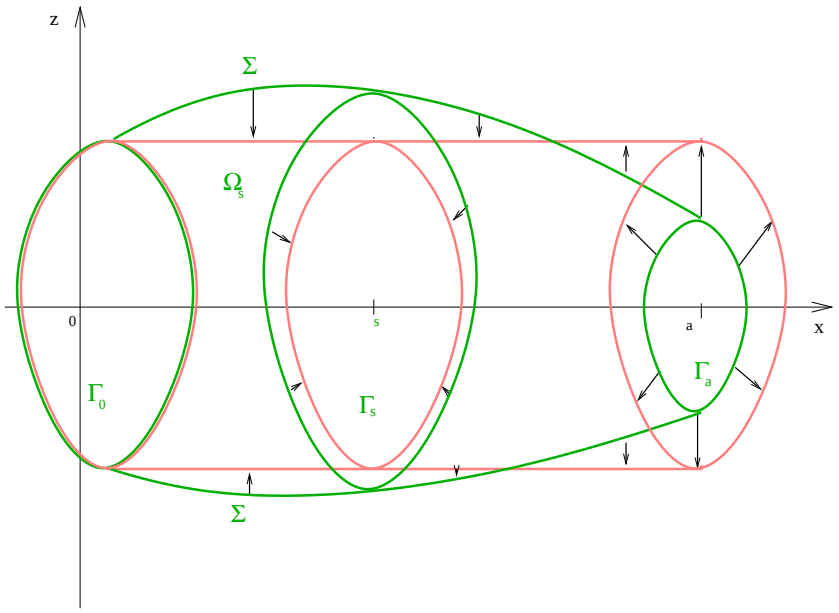


FIG. 6.4: Transformation du guide par affinité

On note x la variable de l'axe et z_1, z_2 les variables transversales. La section est notée Γ_x ou $\Gamma(x)$. On fait l'hypothèse suivante : les sections du guide sont homothétiques, c'est-à-dire que :

$$\boxed{\forall x \in [0,a],\ \exists h(x) \in \mathbb{R} \text{ tel que } \Gamma(x) = h(x) \times \Gamma_0\,,}$$

et on suppose que h est une fonction continue, dérivable sur $[0,a]$. En particulier, soit $(\Psi_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ la base de fonctions propres associée au laplacien transversal avec une condition de Dirichlet pour la section Γ_0 : alors les $(\Psi_n(\frac{z}{h(x)}))_n$ constituent une base de fonctions propres pour $\Delta_\perp$ avec condition de Dirichlet sur Γ_x.

L'application suivante est une bijection :

$$\begin{array}{lcl} \Gamma_0 & \to & \Gamma(x) \\ (z_1,z_2) & \mapsto & (h(x)z_1, h(x)z_2) \end{array}$$

En outre, une fonction y de $H^1(\Omega)$ peut se décomposer comme :

$$y(x,z) = \sum_n y_n(x)\Psi_n(\frac{z}{h(x)}) = \sum_n y_n(x)\Psi_n(g(x)z)$$

On notera :

$$\boxed{g(x) = \frac{1}{h(x)}}$$

Ceci permet d'introduire le changement de variables $\mathcal{F}$:

$$\begin{pmatrix} x \\ z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X = x \\ Z_1 = \dfrac{z_1}{h(x)} \\ Z_2 = \dfrac{z_2}{h(x)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X = x \\ Z_1 = z_1 g(x) \\ Z_2 = z_2 g(x) \end{pmatrix}$$

Les coefficients de la matrice jacobienne sont :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial x} = 1 & \dfrac{\partial Z_1}{\partial x} = z_1 g'(x) = Z_1 \dfrac{g'(X)}{g(X)} & \dfrac{\partial Z_2}{\partial x} = z_2 g'(x) = Z_2 \dfrac{g'(X)}{g(X)} \\ \dfrac{\partial X}{\partial z_1} = 0 & \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_1} = g(x) = g(X) & \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_1} = 0 \\ \dfrac{\partial X}{\partial z_2} = 0 & \dfrac{\partial Z_1}{\partial z_2} = 0 & \dfrac{\partial Z_2}{\partial z_2} = g(x) = g(X) \end{cases}$$

Enfin, soit u un élément de $H^1(\Omega)$. ses dérivées partielles ont pour expression :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial X}\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z_1}\frac{\partial Z_1}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial x}$$

C'est-à-dire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial X} + \dfrac{g'(X)}{g(X)}\left(Z_1\dfrac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\dfrac{\partial u}{\partial Z_2}\right) \\ \dfrac{\partial u}{\partial z_1} = g(X)\dfrac{\partial u}{\partial Z_1} \\ \dfrac{\partial u}{\partial z_2} = g(X)\dfrac{\partial u}{\partial Z_2} \end{cases}$$

A l'aide de ces formules, on va pouvoir écrire le laplacien dans le nouveau système de coordonnées. Par définition, on a :

$$\begin{aligned}\Delta u &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z_2^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'(X)}{g(X)}(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2})\right] + \frac{\partial}{\partial z_1}\left(g(X)\frac{\partial u}{\partial Z_1}\right) + \frac{\partial}{\partial z_2}\left(g(X)\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\end{aligned}$$

En développant, il vient :

$$\begin{aligned}\Delta u = \; & g^2(X)\left[\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right] + \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'(X)}{g(X)}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\right] \\ & + \frac{g'(X)}{g(X)}\left(Z_1\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1 \partial X} + Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2 \partial X}\right) + \left(\frac{g'(X)}{g(X)}\right)^2\left(Z_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + 2Z_1Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1 \partial Z_2} + Z_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right) \\ & + \left(\frac{g'(X)}{g(X)}\right)^2\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\end{aligned}$$

On regroupe alors les différents termes :

$$\begin{aligned}\Delta u = \; & \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2}\left[g^2(X) + Z_1^2\left(\frac{g'(X)}{g(X)}\right)^2\right] + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\left[g^2(X) + Z_2^2\left(\frac{g'(X)}{g(X)}\right)^2\right] \\ & + 2\frac{g'(X)}{g(X)}\left[Z_1\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1 \partial X} + Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2 \partial X}\right] + 2\left(\frac{g'(X)}{g(X)}\right)^2 Z_1Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1 \partial Z_2} \\ & + \frac{g''(X)}{g(X)}\left[Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right] \\ & = \Delta_{X,Z_1,Z_2} u\end{aligned}$$

Dans le nouveau système de coordonnées, le guide d'ondes est un cylindre de section constante. On va donc écrire le problème aux limites dans ce système et le factoriser.

On note $\hat{\Omega}$ l'image de Ω par le changement de variables $\mathcal{F}$, $\hat{\Gamma}_x$ celle de Γ_x et $\hat{\Sigma}$ celle de Σ. $\hat{\Omega}$ est le cylindre $[0,a] \times \Gamma_0 = [0,a] \times \hat{\Gamma}_0$. On posera également :

$$F(X,Y,Z) = f(x,y,z),$$

et on notera u la solution du problème dans le nouveau système de coordonnées. On désignera par $\hat{Y}$, $\hat{Y}_s$ et $\hat{Y}_s'$ respectivement l'image de Y, Y_s et Y_s' par $\mathcal{F}$. Le problème à résoudre devient :

$$(\hat{\mathcal{P}}_0)\begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2} u = k^2 u + F \text{ dans } \hat{\Omega} \\ u|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad u|_{\hat{\Gamma}_a} = y_1, \quad \dfrac{\partial u}{\partial X} + \dfrac{g'(X)}{g(X)}\left(Z_1\dfrac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\dfrac{\partial u}{\partial Z_2}\right)|_{\hat{\Gamma}_0} = -y_0\,, \end{cases}$$

où $y_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}'_s)$, $y_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)$ et u est cherché dans $\hat{Y}$.
On constate que la condition de Neumann sur le bord gauche est remplacée par une condition faisant intervenir une dérivée oblique, que l'on notera δ :

$$\boxed{\delta u = \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'(X)}{g(X)}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)}$$

Remarque 6.2 *En mécanique, δ correspond à la dérivée particulaire, avec x comme variable de temps pour un champ de vitesses radial lié à la dilatation de Γ_s.*

Avant de continuer les calculs, on a besoin d'un résultat supplémentaire :

Lemme 6.1 $\forall u \in \hat{Y},\ \delta \circ \delta u = \Delta_{X,Z_1,Z_2} u - g^2(X)\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right)$

Démonstration 6.3.1 *Par définition, pour $u \in \hat{Y}$, on a :*

$$\begin{aligned}\delta \circ \delta u = \ & \frac{\partial}{\partial X}\left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\right] + \frac{g'}{g}Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}\left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\right] \\ & + \frac{g'}{g}Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\left[\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\right]\end{aligned}$$

Ce qui se développe en :

$$\begin{aligned}\delta \circ \delta u = \ & \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{g''g - g'^2}{g^2}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right) + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Z_2}\right) \\ & + \frac{g'}{g}Z_1\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1\partial X} + \left(\frac{g'}{g}\right)^2\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + Z_1Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1\partial Z_2}\right) \\ & + \frac{g'}{g}Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2\partial X} + \left(\frac{g'}{g}\right)^2\left(Z_1Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1\partial Z_2} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2} + Z_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right)\end{aligned}$$

En regroupant les différents termes, il vient :

$$\begin{aligned}\delta \circ \delta u = \ & \frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \left(\frac{g'}{g}\right)^2\left(Z_1^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + Z_2^2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right) + 2\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial X\partial Z_2}\right) \\ & + 2\left(\frac{g'}{g}\right)^2 Z_1Z_2\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1\partial Z_2} + \frac{g''}{g}\left(Z_1\frac{\partial u}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial u}{\partial Z_2}\right)\end{aligned}$$

Finalement, on obtient :

$$\delta \circ \delta u = \Delta_{X,Z_1,Z_2} u - g^2(X) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2} \right)$$

6.3.1 Première formulation

On va maintenant pouvoir appliquer la méthode de plongement invariant sur le cylindre $\hat{\Omega}$ pour le problème $(\hat{\mathcal{P}}_0)$:

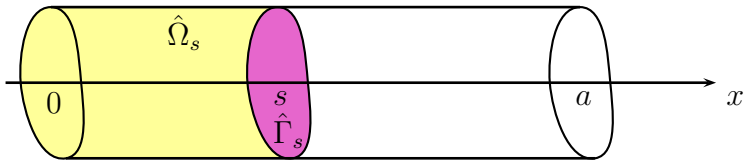


FIG. 6.5: Méthode de plongement invariant sur $\hat{\Omega}$

On introduit une frontière mobile $\hat{\Gamma}_s$ à l'abscisse s, sur laquelle on impose une condition de Dirichlet arbitraire, ce qui permet de définir une famille de problèmes sur les sous-domaines $\hat{\Omega}_s = [0, s] \times \hat{\Gamma}_0$:

$$(\hat{\mathcal{P}}_{s,h}) \begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2} u = k^2 u + F \text{ dans } \hat{\Omega}_s \\ u|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad u|_{\hat{\Gamma}_s} = h, \quad \delta u|_{\hat{\Gamma}_0} = -y_0 \,, \end{cases}$$

où $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_0)$. La frontière mobile va ensuite se déplacer dans le sens des x croissants. Pour tout $s \in [0, a]$ pour lequel le problème est bien posé, on définit les opérateurs de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)'$:

$Q(s)h = \delta\gamma|_{\hat{\Gamma}_s}$, où $\gamma \in \hat{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2} \gamma = k^2 \gamma \text{ dans } \hat{\Omega}_s \\ \gamma|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad -\delta\gamma|_{\hat{\Gamma}_0} = 0, \quad \gamma|_{\hat{\Gamma}_s} = h \end{cases}$$

$\omega(s) = \delta\beta|_{\hat{\Gamma}_s}$, où $\beta \in \hat{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2} \beta = k^2 \beta + F \text{ dans } \hat{\Omega}_s \\ \beta|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad \delta\beta|_{\hat{\Gamma}_0} = -y_0, \quad \beta|_{\hat{\Gamma}_s} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $Q(0)h = 0$, $\omega(0) = -y_0$

Le problème aux limites $\hat{\mathcal{P}}_{s,h}$ étant linéaire, on en déduit que :

$$\delta u(X,Y,Z) = Q(X)u(X,Y,Z) + \omega(X,Y,Z)$$

On calcule l'image par δ de cette relation :

$$\delta \circ \delta u = \delta(Qu) + \delta\omega$$

c'est-à-dire :

$$\Delta u - g^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right) = \frac{dQ}{dX}u + Q\frac{\partial u}{\partial X} + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)(Qu) + \delta\omega$$

Comme u est solution du problème de Helmholtz, cette formule équivaut à :

$$\begin{aligned}-k^2u - F - g^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right) = \ & \frac{dQ}{dX}u + Q\delta u - Q\left[\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\right]u \\ & + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)(Qu) + \delta\omega\end{aligned}$$

On introduit à nouveau la relation affine pour remplacer le terme en δu dans le second membre :

$$\begin{aligned}-k^2u - F - g^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial Z_2^2}\right) = \ & \frac{dQ}{dX}u + Q^2u + Q\omega - Q\left[\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\right]u \\ & + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)Qu + \delta\omega\end{aligned}$$

On a donc :

$$\left[\frac{dQ}{dX} + Q^2 - Q\left(\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\right) + \left(\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\right)Q + k^2I + g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right]u$$
$$= -F - Q\omega - \delta\omega$$

Comme u est arbitraire (puisque h est un élément quelconque de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)$), cette relation est en fait une identité. Comme pour le cas cylindrique, on obtient donc un système découplé :

$$\begin{cases} \dfrac{dQ}{dX} + Q^2 + g^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial Z_1^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right) + k^2I + \left(\dfrac{g'}{g}(Z_1\dfrac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\dfrac{\partial}{\partial Z_2})\right)Q - Q\left(\dfrac{g'}{g}(Z_1\dfrac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\dfrac{\partial}{\partial Z_2})\right) = 0, & \\ & Q(0) = 0, \\ \delta\omega + Q\omega = -F, & \omega(0) = -y_0, \\ \delta u - Qu = \omega, & u(a) = y_1, \end{cases}$$

On en déduit la forme factorisée du problème :

$$-(\delta + Q)(\delta - Q)u = F.$$

On trouve une forme proche de la relation trouvée pour le guide d'ondes de section constante. La dérivée horizontale a été remplacée par une dérivée oblique, l'équation de Riccati fait apparaître le terme $g^2(\frac{\partial^2 y}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial Z_2^2})$ qui correspond au Laplacien transversal dans le cas cylindrique. En outre, on voit apparaître des termes linéaires tenant compte des variations de la section : la forme de l'équation est donc très proche de celle trouvée pour l'impédance acoustique dans le premier chapitre.

Remarque 6.3 *La formule de l'équation de Riccati pour Q n'est pas autoadjointe. En effet, on a :*

$$\left(\frac{g'}{g}(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2})\right)^\star = -\left(\frac{g'}{g}(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2})\right) - 2\frac{g'}{g}I$$

On peut alors mettre l'équation sous la forme :

$$\frac{dQ}{dx}+2\frac{g'}{g}Q+Q^2+g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)+k^2I+\left(\frac{g'}{g}(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2})\right)Q+Q\left(\frac{g'}{g}(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2})\right)=0$$

dont la solution est autoadjointe.

6.3.2 Deuxième formulation

A présent, on va appliquer la méthode de factorisation à la famille des sous-domaines complémentaires : on impose une condition faisant intervenir la dérivée particulaire sur la frontière mobile $\hat{\Gamma}_s$, et on se restreint à $\hat{\Omega}'_s = [s, a] \times \hat{\Gamma}_0$. La frontière va se déplacer de a vers 0.

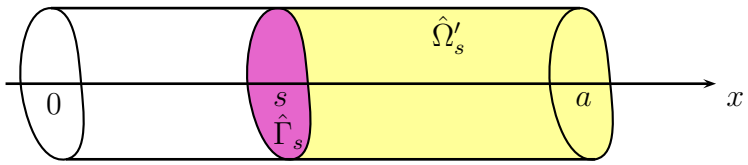


FIG. 6.6: Méthode de plongement invariant sur $\hat{\Omega}$

On étudie la famille de problèmes $(\hat{\mathcal{P}}'_{s,h})$:

$$(\hat{\mathcal{P}}'_{s,h}) \begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2} u = k^2 u + F \text{ dans } \hat{\Omega}'_s \\ u|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad u|_{\hat{\Gamma}_a} = y_1, \quad \delta u|_{\hat{\Gamma}_s} = h\,, \end{cases}$$

où $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)'$.

Pour tout $s \in [0, a]$ pour lequel le problème est bien posé, on définit les opérateurs de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)'$ vers $H_{00}^{\frac{1}{2}}(\hat{\Gamma}_s)$:

$P(s)h = \gamma|_{\tilde{\Gamma}_s}$ où $\gamma \in \hat{Y}'_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2}\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \hat{\Omega}'_s \\ \gamma|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad \gamma|_{\hat{\Gamma}_a} = 0, \quad \delta\gamma|_{\hat{\Gamma}_s} = h \end{cases}$$

$r(s) = \beta|_{\tilde{\Gamma}_s}$ où $\beta \in \hat{Y}_s$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta_{X,Z_1,Z_2}\beta = k^2\beta + F \text{ dans } \hat{\Omega}'_s \\ \beta|_{\hat{\Sigma}} = 0, \quad \beta|_{\hat{\Gamma}_a} = y_1, \quad \delta\beta|_{\hat{\Gamma}_s} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales $P(a) = 0$, $r(a) = y_1$.

Le même argument de linéarité du problème aux limites permet d'écrire que :

$$u(X, Y, Z) = P(X)\delta u(X, Y, Z) + r(X, Y, Z)$$

En appliquant δ à cette relation, il vient :

$$\delta u = \delta(P\delta u) + \delta r$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\delta u = \frac{dP}{dX}\delta u + P\frac{\partial}{\partial X}\delta u + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)P\delta u + \delta r \quad (*)$$

Le lemme préliminaire permet d'expliciter le terme $\dfrac{\partial}{\partial X}\delta u$:

$$\frac{\partial}{\partial X}\delta u = \delta \circ \delta u - \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1} + Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\delta u$$

Il en résulte que :

$$\frac{\partial}{\partial X}\delta u = \Delta u - g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)u - \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\delta u$$

Comme u est solution du problème de Helmholtz, cette relation devient :

$$\frac{\partial}{\partial X}\delta u = -k^2 u - F - g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)u - \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\delta u$$

En introduisant la relation affine, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial X}\delta u = -k^2 P\delta u - k^2 r - F - g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)P\delta u - g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)r - \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\delta u$$

En substituant cette expression dans $(*)$, il vient :

$$\begin{aligned}\delta u = \ & \frac{dP}{dx}\delta u - P\left(k^2+g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right)P\delta u - P\left(k^2+g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right)r \\ & -P\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)\delta u + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)P\delta u + \delta r - PF\end{aligned}$$

On regroupe alors les termes en δu et en r :

$$\begin{aligned}&\left[\frac{dP}{dx} - P\left(k^2+g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right)P - P\frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right) + \frac{g'}{g}\left(Z_1\frac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\frac{\partial}{\partial Z_2}\right)P - I\right]\delta u \\ &= P\left(k^2+g^2\left(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right)r - \delta r + PF\end{aligned}$$

Comme précédemment, on obtient le système découplé suivant :

$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dx} - P\left(k^2+g^2\left(\dfrac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial Z_2^2}\right)\right)P - P\dfrac{g'}{g}\left(Z_1\dfrac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\dfrac{\partial}{\partial Z_2}\right) + \dfrac{g'}{g}\left(Z_1\dfrac{\partial}{\partial Z_1}+Z_2\dfrac{\partial}{\partial Z_2}\right)P - I = 0, & \\ & P(a) = 0, \\ \delta r - P\left(k^2+g^2(\dfrac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial Z_2^2})\right)r = PF, & r(a) = y_1, \\ u - P\delta u = r, & \delta u(0) = -y_0, \end{cases}$$

En combinant les deux dernières équations, on peut alors écrire le problème sous sa forme factorisée :

$$\left(\delta - P\left(k^2+g^2(\frac{\partial^2}{\partial Z_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z_2^2})\right)\right)(I - P\delta)\,u = PF$$

On va donc pouvoir utiliser les formules de 1- et de 2-représentation présentées au chapitre V. En pratique, toute la difficulté consistera à trouver des solutions particulières. En effet, les coefficients des équations de Riccati trouvées dans le cas de la section variable dépendent en général de x, on ne pourra donc plus chercher de solutions stationnaires.

Chapitre 7

Factorisation du problème de Helmholtz pour un coude

Dans ce chapitre, on étudiera à nouveau des guides de section constante, mais qui forment un coude. Cette configuration trouve une application directe en optique : dans cette discipline, il est parfois nécessaire de faire dévier l'onde incidente.

On va présenter les deux factorisations du problème de Helmholtz ; de même que celui-ci, les opérateurs Dirichlet-to-Neumann et Neumann-to-Dirichlet seront exprimés en coordonnées polaires. Cependant, ils vérifieront une équation de Riccati sans termes linéaires très semblable à celle du guide droit. On donnera ensuite une base de fonctions propres pour le laplacien transversal sur la section. Celle-ci permettra d'écrire une décomposition modale de la solution. Enfin, on adaptera les formules de représentation pour les deux opérateurs.

7.1 Factorisation

On va présenter tout d'abord la factorisation du problème de Helmholtz dans un guide coudé. La méthode de plongement invariant s'applique de façon analogue pour le guide droit ou pour le coude : comme dans le deuxième chapitre, on va introduire une frontière mobile et étudier la famille de problèmes induits dans l'un des sous-domaines ainsi définis, puis déplacer la frontière d'une extrémité à l'autre du guide. La principale modification est due à l'utilisation des coordonnées polaires pour cette configuration, ce qui affectera l'expression des opérateurs utilisés.

On considère un guide d'ondes bidimensionnel constitué d'une partie circulaire de section constante reliée à deux parties droites. On désigne un point du domaine par ses coordonnées polaires (r, θ), où r est la distance du point au centre de courbure du guide te θ, l'angle formé avec la direction horizontale. On note θ_f l'angle total du coude, R_1 son rayon intérieur et $R_1 + H$ son rayon extérieur. H représente donc la largeur transversale. On appelle O la section transversale du guide. Ainsi, le guide est l'ensemble des points

(r, θ) tels que $R_1 \leq r \leq R_1 + H$ et $0 \leq \theta \leq \theta_f$. En d'autres termes, le domaine d'étude est :

$$\Omega = [0, \theta_f] \times O \in \mathbb{R}^2.$$

Pour ce type de coordonnées, on retrouve ainsi un domaine cylindrique.

On appelle $\Gamma_0 = \{0\} \times O$ et $\Gamma_f = \{\theta_f\} \times O$ les faces du coude, et $\Sigma =]0, \theta_f[\times \partial O$ la frontière latérale.

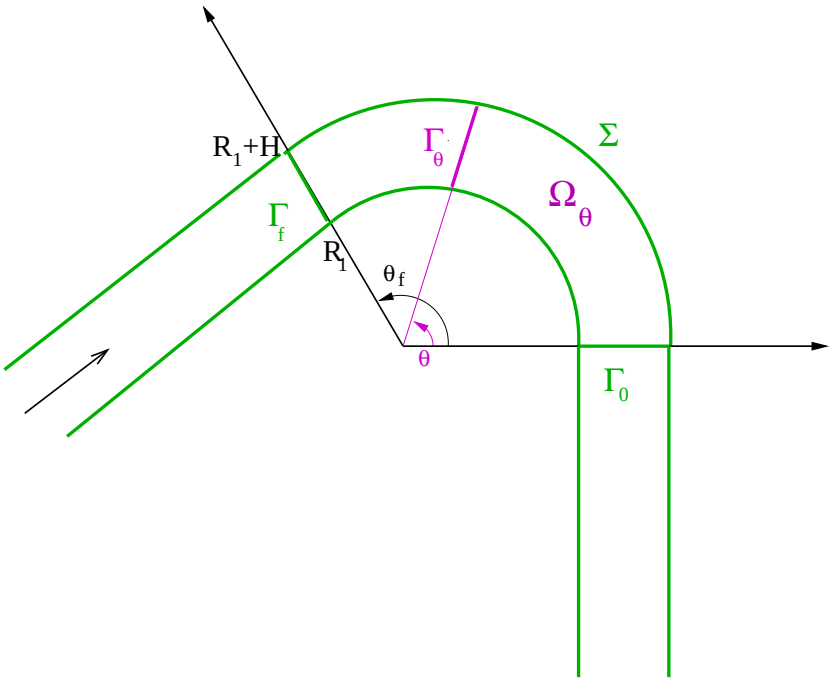


FIG. 7.1: Guide d'ondes formant un coude

On cherche à résoudre le problème :

$$(\mathcal{P}_0) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega \ , \\ \partial_r y|_\Sigma = 0, \quad y|_{\Gamma_0} = y_0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta y|_{\Gamma_f} = y_1 \ , \end{cases}$$

où y est cherché dans l'espace $L^2(0, \theta_f; H^1(O)) \cap H^1(0, \theta_f; L^2(O))$, avec f un élément de $L^2(\Omega)$, $y_0 \in H^{\frac{1}{2}}(O)$ et $y_1 \in H^{\frac{1}{2}}(O)'$.

La condition de Dirichlet en Γ_0 signifie que le tube est bouché en Γ_0.

Les figures suivantes (8.2 et 8.3) représentent la solution dans un coude avec une condition de Neumann sur le bord Γ_f, une condition de Dirichlet sur le bord Γ_0 et sur Σ. Le rayon

extérieur du guide est de 15, le rayon intérieur, 10, et le centre de courbure se situe en $(0,0)$.θ_f vaut $\frac{\pi}{6}$ et l'onde est générée par un point source de coordonnées cartésiennes (-4, 11). Les fréquences sont respectivement 1 et 1,05, et l'on a représenté le premier mode de la solution. La première figure montre le cas des résonances transversales ; la solution est réelle pure. La seconde illustre le cas général. Dans les deux cas on constate que la solution s'annule sur la face droite du guide.

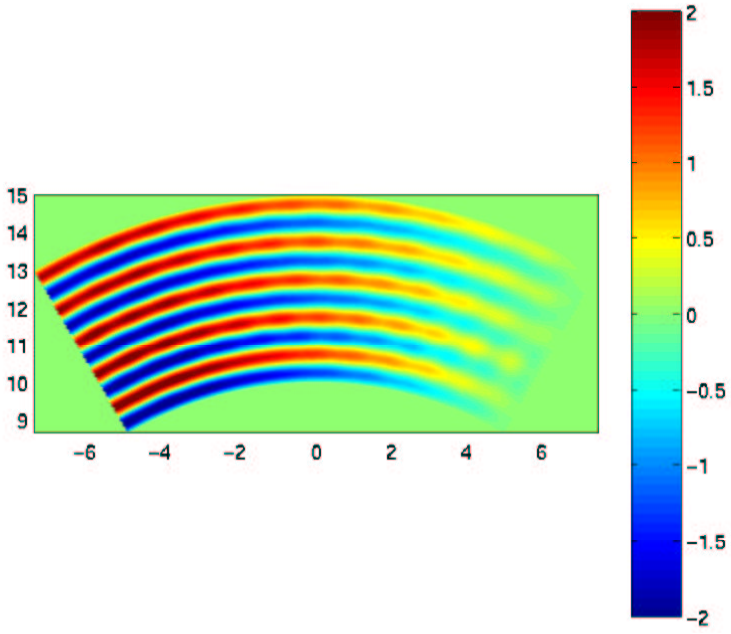


FIG. 7.2: Solution avec les résonances transversales

7.1.1 Première formulation

Dans un premier temps, on va adapter la méthode de factorisation faisant intervenir un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann. A cette fin, on introduit une frontière mobile $\Gamma_\zeta = [R_1, R_1 + H] \times \{\zeta\}$ sur laquelle on impose une condition de Dirichlet arbitraire, et on se restreint au domaine $\Omega_\zeta = O \times [\zeta, \theta_f]$ (cf [28], [29]) compris entre la face gauche du coude et cette frontière mobile. Γ_ζ est confondue initiallement avec Γ_f, on la fait ensuite évoluer vers Γ_0, i.e. dans le sens des θ décroissants.

On définit ainsi une famille de problèmes de Helmholtz, indicée par $\zeta \in [0, \theta_f]$ et $h \in H^{\frac{1}{2}}(O)$:

$$(\mathcal{P}_{\zeta,h}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \Omega_\zeta \\ \partial_r y|_\Sigma = 0, \quad \frac{1}{r}\partial_\theta y|_{\Gamma_f} = y_1, \quad y|_{\Gamma_\zeta} = h \in H^{\frac{1}{2}}(O) \end{cases}$$

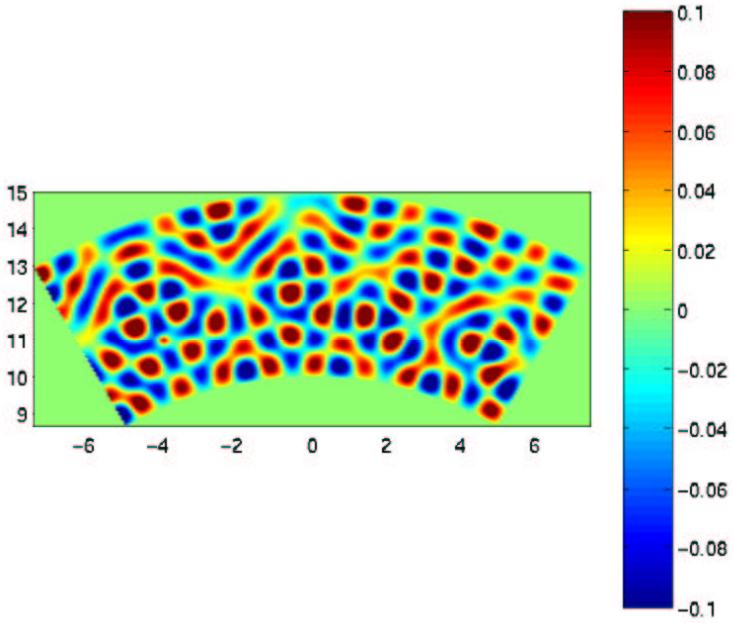


FIG. 7.3: Solution pour le cas général

On note Y_ζ l'espace suivant :

$$Y_\zeta = \left\{ y \in H^1(\Omega_\zeta) \,/\, y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \in L^2(\zeta, \theta_f; H^1(O)') \right\}$$

$\forall \zeta \in [0, \theta_f]$ et $h \in H^{\frac{1}{2}}(O)$, on définit les opérateurs de $H^{\frac{1}{2}}(O)$ vers son dual :

$Q(\zeta)h = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \gamma}{\partial \theta}|_{\Gamma_\zeta}$ où $\gamma \in Y_\zeta$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\gamma = k^2\gamma \text{ dans } \Omega_\zeta \\ \partial_r\gamma|_\Sigma = 0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta\gamma|_{\Gamma_f} = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_\zeta} = h \end{cases}$$

$\omega(\zeta) = \beta|_{\Gamma_\zeta}$, où $\beta \in Y_\zeta$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta\beta = k^2\beta + f \text{ dans } \Omega_\zeta \\ \partial_r\beta|_\Sigma = 0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta\beta|_{\Gamma_f} = y_1, \quad \beta|_{\Gamma_\zeta} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $Q(\theta_f) = 0$, $\omega(\theta_f) = y_1$.

Q est donc un opérateur de type Dirichlet-to-Neumann, et il agit sur des fonctions définies sur la section.

Remarque 7.1 *Comme pour le guide droit bouché, le problème $\mathcal{P}_0$ n'est pas toujours bien posé. Pour certaines valeurs de θ, il admet en effet plusieurs solutions et dans ce cas Q et ω ne seront pas définis. Dans la suite du calcul, on choisira ζ tel que le problème $\mathcal{P}_{\zeta,h}$ est bien posé. On verra que les valeurs pour lesquelles il ne l'est pas correspondent encore à des résonances de boîte.*

Un argument de linéarité du problème aux limites permet d'écrire que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta}(r,\theta) = Q(\theta)y(r,\theta) + \omega(r,\theta)$$

En dérivant formellement cette relation par rapport à θ, il vient :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = \frac{dQ}{d\theta}y + Q\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta}$$

On exploite maintenant l'équation de Helmholtz pour transformer le terme $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$:

$$-k^2 y - f = \Delta y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -k^2 r y - rf - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

La relation précédente devient :

$$\frac{dQ}{d\theta}y + Q\frac{\partial y}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -k^2 r y - rf - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

Comme $\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} = Qy + \omega$, on obtient :

$$\frac{dQ}{d\theta}y + QrQy + Qr\omega + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} = -k^2 r y - rf - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

ce qui s'écrit encore :

$$\left(\frac{dQ}{d\theta} + QrQ + k^2 r + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) y = -Qr\omega - \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - rf$$

Comme y est arbitraire, cette relation est en fait une identité, ce qui permet de la transformer en un système découplé :

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial y}{\partial \theta} = Qy + \omega \ , \ y(0) = y_0 \ , \\ \dfrac{1}{r}Qr\omega + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \omega}{\partial \theta} = -f \ , \ \omega(\theta_f) = y_1 \ , \\ \dfrac{dQ}{d\theta} = -QrQ - k^2 rI - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) \ , \ Q(\theta_f) = 0 \ , \end{cases}$$

Q est donc solution de l'équation de Riccati :

$$\boxed{\dfrac{dQ}{d\theta} = -QrQ - k^2 rI - \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)}$$

En combinant les deux premières équations du système, on obtient la forme factorisée du problème :

$$\left(\frac{1}{r}Qr + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - Q\right) y = -f$$

Comme pour le guide droit, le calcul s'effectue en deux temps : on commence par résoudre l'équation de Riccati sur Q et calculer ω en déplaçant la frontière dans le sens des θ décroissants, puis on intègre l'équation sur y dans l'autre sens.

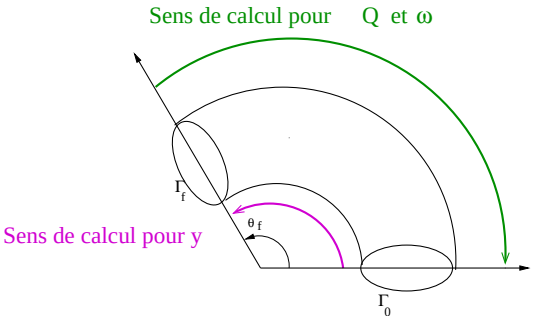


FIG. 7.4: Guide d'ondes formant un coude

Lemme 7.1 *$Q(\zeta)$ est un opérateur symétrique.*

Démonstration 7.1.1 *Soient $h, h' \in H^{\frac{1}{2}}(O)$ et γ, γ' les éléments de Y_ζ solutions du problème de Helmholtz homogène tels que :*

$$Q(\zeta)h = \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma}{\partial \theta}|_{\Gamma_\zeta} \text{ et } Q(\zeta)h' = \frac{1}{r}\frac{\partial \gamma'}{\partial \theta}|_{\Gamma_\zeta}$$

On écrit la formulation variationnelle du problème dont γ est solution :

$$-\int_{\Omega_\zeta} \Delta\gamma.\gamma' = k^2 \int_{\Omega_\zeta} \gamma.\gamma'$$

Or, d'après la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega_\zeta} \Delta\gamma.\gamma' = -\int_{\Omega_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma' + \int_{\partial\Omega_\zeta} \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma'$$

Le terme de bord se décompose en :

$$\int_{\partial\Omega_\zeta} \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma' = -\int_{\Gamma_\zeta} \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma' + \int_{\Gamma_f} \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma' + \int_{\Sigma} \frac{\partial\gamma}{\partial r}\gamma'$$

Or, la dérivée normale sur le bord latéral vaut, au signe près, la dérivée partielle par rapport à r. Celle de γ est nulle, l'intégrale sur Σ l'est donc également. En outre on a, par hypothèse :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}|_{\Gamma_f} = 0,$$

l'intégrale sur Γ_f s'annule aussi. On en déduit que :

$$\int_{\partial\Omega_\zeta} \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma' = -\int_{\Gamma_\zeta} \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma' = < Q(\zeta)h, h' >$$

Par conséquent, il vient :

$$< Q(\zeta)h, h' > = k^2 \int_{\Omega_\zeta} \gamma\gamma' - \int_{\Omega_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma'$$

Par un calcul analogue, on obtient :

$$< h, Q(\zeta)h' > = k^2 \int_{\Omega_\zeta} \gamma\gamma' - \int_{\Omega_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma'$$

On en déduit la symétrie de $Q(\zeta)$.

7.1.2 Deuxième formulation

A présent, on va factoriser le problème sur l'autre partie du guide en déplaçant la frontière mobile dans le sens des θ croissants. La formulation qui en découle fait alors intervenir l'opérateur Neumann-to-Dirichlet.

Pour ce faire, on introduit une frontière Γ_ζ en $\theta = \zeta$, sur laquelle on impose cette fois une condition de Neumann arbitraire.On se restreint alors au domaine $\tilde{\Omega}_\zeta = [0, \zeta] \times O$. On s'intéresse donc à la famille de problèmes :

$$\left(\tilde{\mathcal{P}}_{\zeta,h}\right) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \text{ dans } \tilde{\Omega}_\zeta \\ \partial_r y|_\Sigma = 0, \quad y|_{\Gamma_0} = y_0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta y|_{\Gamma_\zeta} = h \in H'^{\frac{1}{2}}(O) \end{cases}$$

On note $\tilde{Y}_\zeta$ l'espace :

$$\tilde{Y}_\zeta = \left\{ y \in H^1(\tilde{\Omega}_\zeta) \,/\, y|_\Sigma = 0 \text{ et } \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} \in L^2(0, \zeta; H^{-1}(O)) \right\}$$

$\forall \zeta \in [0, \theta_f], h \in H^{\frac{1}{2}}(O)'$, on définit les opérateurs de $H^{\frac{1}{2}}(O)'$ vers $H^{\frac{1}{2}}(O)$:

$P(\zeta)h = \gamma|_{\Gamma_\zeta}$ où $\gamma \in \tilde{Y}_\zeta$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \gamma = k^2 \gamma \text{ dans } \tilde{\Omega}_\zeta \\ \partial_r \gamma|_\Sigma = 0, \quad \gamma|_{\Gamma_0} = 0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta \gamma|_{\Gamma_\zeta} = h \end{cases}$$

$\omega(\zeta) = \beta|_{\Gamma_\zeta}$, où $\beta \in \tilde{Y}_\zeta$ est solution de :

$$\begin{cases} -\Delta \beta = k^2 \beta + f \text{ dans } \tilde{\Omega}_\zeta \\ \partial_r \beta|_\Sigma = 0, \quad \beta|_{\Gamma_0} = y_0, \quad \dfrac{1}{r}\partial_\theta \beta|_{\Gamma_\zeta} = 0 \end{cases}$$

avec les conditions initiales : $P(0) = 0$, $\omega(0) = y_0$.

P est donc un opérateur de type Neumann-to-Dirichlet.

Le même argument de linéarité du problème aux limites permet d'écrire l'identité :

$$y(r, \theta) = P(\theta)\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta}|_{\Gamma_\theta}(r, \theta) + \omega(r, \theta)$$

On dérive formellement cette relation par rapport à θ :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{dP}{d\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + P\frac{1}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} + \frac{d\omega}{d\theta}$$

Or, l'équation de Helmholtz permet d'écrire que :

$$-k^2 y - f = \Delta y = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2}$$

On en déduit que :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 y}{\partial \theta^2} = -k^2 r y - r f - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial y}{\partial r}\right)$$

La relation obtenue précédemment s'écrit donc :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{dP}{d\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + P\left(-k^2 r I - \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) y - Prf + \frac{d\omega}{d\theta}$$

Comme $y = P\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \omega$, il vient :

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{dP}{d\theta}\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) P\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} - P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)\omega - Prf + \frac{d\omega}{d\theta}$$

On a donc :

$$\left(-\frac{dP}{d\theta}\frac{1}{r} + I + P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) P\frac{1}{r}\right)\frac{\partial y}{\partial \theta} = -Prf + \frac{d\omega}{d\theta} - P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)\omega$$

Comme précédemment, $\frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta}$ est arbitraire ; il est encore possible d'écrire cette identité sous la forme d'un système découplé :

$$\begin{cases} y = P \circ \frac{1}{r}\frac{\partial y}{\partial \theta} + \omega \ , \ \frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f) = y_1 \ , \\ Prf = \frac{d\omega}{d\theta} - P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)\omega \ , \ \omega(0) = y_0 \ , \\ \frac{1}{r}\frac{dP}{d\theta} \circ \frac{1}{r} = \frac{1}{r}I + \frac{1}{r}P\left(k^2 r I + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) P \circ \frac{1}{r} \ , \ P(0) = 0 \ , \end{cases}$$

Les deux premières équations permettent d'écrire la forme factorisée du problème :

$$\left(\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} - P(k^2 I + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)\left(I - P \circ \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) y = Pf.$$

Lemme 7.2 *$P(\zeta)$ est un opérateur symétrique.*

Démonstration 7.1.2 *Soient $h, h' \in H^{\frac{1}{2}}(O)'$ et γ, γ' les éléments de $\tilde{Y}_\zeta$ solutions du problème de Helmholtz homogène tels que :*

$$P(\zeta)h = \gamma|_{\Gamma_\zeta} \text{ et } P(\zeta)h' = \gamma'|_{\Gamma_\zeta}$$

On écrit la formulation variationnelle du problème dont γ est solution :

$$-\int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \Delta\gamma.\gamma' = k^2 \int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \gamma.\gamma'$$

Or, d'après la formule de Green, on a :

$$\int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \Delta\gamma.\gamma' = -\int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma' + \int_\Sigma \frac{\partial\gamma}{\partial n}\gamma' - \int_{\Gamma_0} \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma' + \int_{\Gamma_\zeta} \frac{1}{r}\frac{\partial\gamma}{\partial\theta}\gamma'$$

Comme pour la première formulation, l'intégrale sur Σ s'annule ; il en est de même pour $\gamma'|_{\Gamma_0}$. On en déduit que :

$$-\int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \delta\gamma\gamma' = \int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma' + < h, P(\zeta)h' >$$

Par conséquent, il vient :

$$< h, P(\zeta)h' > = k^2 \int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \gamma\gamma' - \int_{\tilde{\Omega}_\zeta} \nabla\gamma\nabla\gamma' = < P(\zeta)h, h' >$$

On en déduit la symétrie de $P(\zeta)$.

7.1.3 Forme générale de la solution

On cherche à préciser l'expression de la solution y. Pour ce faire, on souhaite se conformer autant que possible à la démarche suivie dans la troisième partie du chapitre II, et qui consiste à écrire une décomposition modale des solutions du problème $(\mathcal{P}_{s,h})$. On choisit donc de déterminer les solutions à variables séparées, c'est-à-dire sous la forme :

$y(r,\theta) = f(r)g(\theta)$, où $f \in H_0^1(O)$, $g \in H^1(0,\theta_f)$.

On rappelle que pour $h \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, $y = P(\theta)h$ est la solution du problème :

$$\begin{cases} -\Delta y = k^2 y \text{ dans } \tilde{\Omega}_\zeta \\ \partial_r y|_\Sigma = 0\,,\ y|_{\Gamma_0} = 0\,,\ \dfrac{1}{r}\partial_\theta y_{\Gamma_\zeta} = h \end{cases}$$

lorsque celui-ci est bien posé.

Dans un premier temps, on exprime le laplacien pour une fonction à variables séparées :

$$\Delta y(r,\theta) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}(f(r)g(\theta))\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(f(r)g(\theta)\right)$$

C'est-à-dire :

$$\Delta y(r,\theta) = \left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r)\right)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta)$$

L'équation de Helmholtz s'écrit alors :

$$\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + k^2 f(r)\right)g(\theta) + \frac{1}{r^2}f(r)g''(\theta) = 0$$

Si $f(r) \neq 0$ et $g(\theta) \neq 0$, on peut écrire cette relation sous la forme :

$$r^2\frac{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + k^2 f(r)}{f(r)} = -\frac{g''(\theta)}{g(\theta)}$$

Comme cette identité est valable pour tout $r \in (R_1, R_1 + H)$ et tout $\theta \in (0, \theta_f)$, chaque membre de la relation est en fait une fonction constante. On en déduit qu'il existe une constante λ réelle telle que :

$$\begin{cases} r^2\dfrac{f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + k^2 f(r)}{f(r)} = \lambda \\ -\dfrac{g''(\theta)}{g(\theta)} = \lambda \end{cases}$$

ce qui se simplifie en :

$$\begin{cases} r^2\left(f''(r) + \frac{1}{r}f'(r) + k^2 f(r)\right) = \lambda f(r) \\ g''(\theta) = -\lambda g(\theta) \end{cases}$$

On résout tout d'abord l'équation différentielle sur f. On a :

$$r^2 f''(r) + r f(r) + k^2 r^2 f(r) = \lambda f(r)$$

En posant $z = kr$ et $\phi(z) = f(r)$, il vient :

$$\frac{df}{dr} = k\frac{d\phi}{dz} \text{ et } \frac{d^2 f}{dr^2} = k^2\frac{d^2\phi}{dz^2}$$

On en déduit une équation différentielle pour ϕ :

$$r^2 k^2\phi''(z) + rk\phi'(z) + k^2 r^2\phi(z) = \lambda\phi(z)$$

C'est-à-dire :

$$z^2\phi''(z) + z\phi'(z) + (z^2 - \lambda)\phi(z) = 0$$

Cette équation est en fait l'équation différentielle vérifiée par les fonctions de Bessel de première espèce J_λ et de deuxième espèce Y_λ (cf [1], chapitre IX). Ces fonctions sont holomorphes sur $\mathbb{C} - \mathbb{R}^-$, J_λ et Y_λ sont linéairement indépendantes quel que soit λ, et elles vérifient la relation suivante :

$$Y_\lambda(z) = \frac{J_\lambda(z)\cos(\lambda\pi) - J_{-\lambda}(z)}{\sin(\lambda\pi)}$$

La fonction ϕ est donc une combinaison linéaire de ces deux fonctions ; on a :

$\phi(z) = AJ_\lambda(z) + BY_\lambda(z)$, où A et B sont deux réels.

Finalement, f est de la forme :

$$f(r) = AJ_\lambda(kr) + BY_\lambda(kr).$$

Remarque 7.2 *Les fonctions de Bessel $(J_\lambda)_\lambda$ et $(Y_\lambda)_\lambda$ engendrent $L^2(O)$. On peut donc exprimer les fonctions de cet espace comme des combinaisons linéaires de fonctions de Bessel.*

On résout ensuite l'équation portant sur g. On rappelle que :

$$g''(\theta) = -\lambda g(\theta)$$

Il existe des constantes réelles α, β et θ_0 telles que :

$$g(\theta) = \begin{cases} \alpha\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\theta) & \text{si } \lambda > 0 \\ \alpha(\theta - \theta_0) & \text{si } \lambda = 0 \\ \alpha\cos i\sqrt{-\lambda}\theta + \beta\sin i\sqrt{-\lambda}\theta & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

On en déduit la forme générale de y :

$$y(r,\theta) = \begin{cases} (AJ_\lambda(kr) + BY_\lambda(kr))\left(\alpha\cos(\sqrt{\lambda}\theta) + \beta\sin(\sqrt{\lambda}\theta)\right) & \text{si } \lambda > 0 \\ (\alpha AJ_\lambda(kr) + BY_\lambda(kr))\,(\theta - \theta_0) & \text{si } \lambda = 0 \\ (AJ_\lambda(kr) + BY_\lambda(kr))\left(\alpha\cos i\sqrt{-\lambda}\theta + \beta\sin i\sqrt{-\lambda}\theta\right) & \text{si } \lambda < 0 \end{cases}$$

L'exploitation des conditions aux limites permettra d'affiner cette représentation.

7.2 Transformation homographique

La décomposition des solutions du problème dans une base de fontions de Bessel a permis d'obtenir une première estimation de P ainsi que de ses singularités. On souhaite en donner également une expression simplifiée, indépendante du choix d'une base. Pour ce faire, on va avoir recours à la transformation homographique. Cette fois, la variable de temps n'est plus l'abscisse x, mais l'angle θ. En revanche, l'équation de Riccati ne comporte pas de termes linéaires, ce qui va permettre de s'appuyer sur les calculs de la première partie du chapitre V, tout en les adaptant.

Dans un premier temps, on va donc rechercher des solutions particulières de l'équation de Riccati. On transformera ensuite celle-ci en un système différentiel linéaire, que l'on diagonalisera. Enfin, une écriture sous forme factorisée permettra d'exprimer l'opérateur Neumann-to-Dirichlet en fonction d'un semi-groupe non linéaire.

7.2.1 Détermination de solutions particulières

La première étape de la transformation homographique consiste à rechercher des solutions particulières des équations de Riccati :

$$\frac{dP}{d\theta}\frac{1}{r} = I + P\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)P\frac{1}{r}$$

$$\frac{dQ}{d\theta} = -QrQ - k^2 rI - \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Comme les coefficients de ces équations sont indépendants de la variable θ, il est raisonnable de chercher des solutions stationnaires (donc qui ne dépendent pas de θ). Par souci de simplicité, on va chercher une solution constante de l'équation sur Q :

$$Q_0 r Q_0 + k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0$$

Par analogie avec le guide cylindrique, on commence par calculer l'image des fonctions de Bessel par l'opérateur $k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right)$ (celles-ci constituent en effet une base de fonctions propres pour $H^1(O)$, cf [28] et [15]).

On pose :

$$f_\lambda(r) = Y'_\lambda(kR_1)J_\lambda(kr) - J'_\lambda(kR_1)Y_\lambda(kr).$$

Cette fonction a pour image :

$$k^2 r f_\lambda(r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)f_\lambda(r) = k^2 r f_\lambda(r) + f'_\lambda(r) + r f''_\lambda(r)$$

Ce qui s'écrit encore :

$$k^2 r f_\lambda(r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) f_\lambda(r) = \frac{1}{r} r^2 \left(k^2 f_\lambda(r) + \frac{1}{r} f'_\lambda(r) + f''_\lambda(r)\right)$$

Par définition des fonctions de base, on en déduit que :

$$k^2 r f_\lambda(r) + \frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) f_\lambda(r) = \frac{1}{r}\lambda f_\lambda(r)$$

Q_0 doit donc vérifier la relation :

$$Q_0 r Q_0 f_\lambda(r) = -\frac{\lambda}{r} f_\lambda(r)$$

f_λ est fonction propre de rQ_0rQ_0, donc de rQ_0 avec $\sqrt{-\lambda}$ comme valeur propre :

$$Q_0 f_\lambda(r) = \frac{\sqrt{-\lambda}}{r} f_\lambda(r),$$

où $\sqrt{-\lambda}$ représente une racine, réelle ou complexe, de $-\lambda$. (on vérifie que si $f_\lambda \in H^{\frac{1}{2}}(O)$, son image appartient bien à $H^{\frac{1}{2}}(0)'$.) On a alors :

$$Q_0\, r\, Q_0 f = \frac{\sqrt{-\lambda}}{r} f_\lambda(r).$$

On a donc défini un opérateur en donnant l'image de chaque fonction propre. Contrairement au cas du guide droit, on n'a plus nécessairement un opérateur diagonal.

On constate en outre que si 0 n'est pas une valeur possible pour λ, l'opérateur Q_0 trouvé est inversible. On supposera par la suite que c'est effectivement le cas.

7.2.2 Système découplé pour l'équation de Riccati

Pour résoudre l'équation de Riccati, on va la transformer en un système différentiel linéaire. A cette fin, on introduit les opérateurs auxiliaires

$$X(\theta) \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(O)', H^{\frac{1}{2}}(O)'\right) \text{ et } Y(\theta) \in \mathcal{L}\left(H^{\frac{1}{2}}(O)', H^{\frac{1}{2}}(O)\right)$$

tels que :

$$\begin{cases} X(\theta) : \dfrac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f) \to \dfrac{1}{r}\partial_\theta y(\theta)\ , \\ Y(\theta) : \dfrac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f) \to y(\theta)\ , \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} X : \text{Neumann en } \theta_f \rightarrow \text{Neumann en } \theta \ , \\ Y : \text{Neumann en } \theta_f \rightarrow \text{Dirichlet en } \theta \ . \end{cases}$$

On a la relation : $Y(\theta) = P(\theta)X(\theta)$.

Comme $P(0) = 0$, il vient : $Y(0) = 0$; d'autre part $X(\theta_f) = I$.

On trouve :

$$Y'(\theta)(\frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f)) = \frac{d}{d\theta}Y(\theta)(\frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f)) = \frac{dy(\theta)}{d\theta} = rX(\theta)(\frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f))$$

D'autre part :

$$X'(\theta)(\frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f)) = \frac{1}{r}\partial_\theta^2 y(\theta) = -(k^2 rI + \partial_r(r\partial_r))y(\theta) = -(k^2 rI + \partial_r(r\partial_r))Y(\theta)(\frac{1}{r}\partial_\theta y(\theta_f))$$

On obtient donc le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} X' \\ Y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) \\ rI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \text{ avec } \begin{pmatrix} X(\theta_f) = I \\ Y(0) = 0 \end{pmatrix}.$$

Ce système permet de retrouver l'équation de Riccati que P vérifie. En effet, s'il admet un couple (X, Y) solution sur un sous-intervalle I_0 de $(0, \theta_f)$ où X inversible sur I_0, on a :

$Y' = P'X + PX'$, ce qui s'écrit :

$$rX = P'X + P\left(-k^2 rI - \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)Y = P'X + P\left(-k^2 rI - \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)PX$$

Soit : $\left(P' - P\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right)P - rI\right)X = 0$

Comme X est inversible sur I_0, on a sur cet intervalle :

$$P' = rI + P\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)P.$$

7.2.3 Diagonalisation du système précédent

Il est difficile de résoudre directement le système différentiel obtenu précédemment : les deux équations sont couplées. En revanche, si on le diagonalise, on obtient deux équations diférentielles linéaires du premier ordre totalement indépendantes l'une de l'autre, que l'on peut donc résoudre explicitement.

Pour diagonaliser le système, une méthode simple consiste à faire intervenir la solution particulière présentée dans le paragraphe précédent.

Pour simplifier, on traite dans un premier temps le cas où λ ne prend jamais la valeur nulle ; dans ce cas, l'opérateur Q_0 est inversible.

Lemme 7.3 *Le système linéaire :*

$$\begin{cases} X' = -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) PY \ ; & X(\theta_f) = I \ ; \\ Y' = rX \ ; & Y(0) = 0 \ ; \end{cases}$$

est équivalent au système diagonal :

$$\begin{cases} \phi' = rQ_0\phi \ ; & \phi(\theta)f) - Q_0\psi(\theta_f) = I \ ; \\ \psi' = -rQ_0\psi \ ; & Q_0^{-1}\phi(0) + \psi(0) = 0 \ ; \end{cases}$$

Démonstration 7.2.1 *On commence par montrer que les matrices*

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) \\ I & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} rQ_0 & 0 \\ 0 & -rQ_0 \end{pmatrix}$$

sont semblables et que la matrice de passage s'écrit :

$$\begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}$$

En effet, on a les relations matricielles :

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) \\ rI & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) Q_0^{-1} & -\left(k^2 rI + \dfrac{\partial}{\partial r}(r\dfrac{\partial}{\partial r})\right) \\ rI & -rQ_0 \end{pmatrix}$$

et d'autre part :

$$\begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Q_0 r & 0 \\ 0 & -rQ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 r & Q_0 r Q_0 \\ rI & -rQ_0 \end{pmatrix}$$

De la définition de Q_0 :

$$\frac{1}{r} Q_0 r Q_0 + k^2 I + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) = 0,$$

on tire :

$$\frac{1}{r}Q_0 r = -\frac{1}{r}\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)Q_0^{-1},$$

et par conséquent :

$$Q_0 r Q_0 = -\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) :$$

On en déduit que :

$$\begin{pmatrix} -\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)Q_0^{-1} & -\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) \\ rI & -rQ_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 r & Q_0 r Q_0 \\ rI & -rQ_0 \end{pmatrix}$$

On obtient donc la relation matricielle:

$$\begin{pmatrix} 0 & -\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right) \\ rI & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_0 r & 0 \\ 0 & -rQ_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}$$

On introduit alors les opérateurs $\phi(\theta)$ et $\psi(\theta)$ liées à X et Y par la relation :

$$\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix},$$

c'est-à-dire :

$$\begin{cases} X = \phi - Q_0\psi \\ Y = Q_0^{-1}\phi + \psi \end{cases}$$

Comme Q_0 ne dépend pas de θ, on a également :

$$\begin{pmatrix} \frac{d\phi}{d\theta} \\ \frac{d\psi}{d\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & -Q_0 \\ Q_0^{-1} & I \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{dX}{d\theta} \\ \frac{dY}{d\theta} \end{pmatrix}$$

Le système différentiel $\begin{cases} X' = -\left(k^2 rI + \frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial}{\partial r})\right)Y \\ Y' = rX \end{cases}$ *est donc remplacé par :*

$$\begin{pmatrix} \phi' \\ \psi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 r & 0 \\ 0 & -rQ_0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \phi \\ \psi \end{pmatrix}.$$

A présent, on se propose de préciser les conditions initiales de ce système. Celles-ci sont données par :

$$\begin{cases} \phi(\theta_f) - Q_0\psi(\theta_f) = I \\ Q_0^{-1}\phi(0) + \psi(0) = 0 \end{cases}$$

L'intégration du système différentiel en ϕ et ψ permet d'écrire que :

$$\begin{cases} \phi(\theta) = e^{Q_0 r\theta}\phi(0) \\ \psi(\theta) = e^{-rQ_0(\theta-\theta_f)}\psi(\theta_f) \end{cases}$$

On a en particulier :

$$\begin{cases} \phi(\theta_f) = e^{Q_0 r\theta_f}\phi(0) \\ \psi(0) = e^{rQ_0\theta_f}\psi(\theta_f) \end{cases}$$

On en déduit le système :

$$\begin{cases} e^{Q_0 r\theta_f}\phi(0) - Q_0\psi(\theta_f) = I \\ Q_0^{-1}e^{Q_0 r\theta_f}\phi(0) + e^{rQ_0\theta_f}\psi(\theta_f) = 0 \end{cases}$$

Ces relations s'écrivent :

$$\begin{cases} \psi(\theta_f) = -\left(I + e^{rQ_0\theta_f}\right)^{-1} Q_0^{-1} \\ \phi(0) = 0e^{-Q_0 r\theta_f}\left(I + Q_0 e^{-rQ_0\theta_f} Q_0^1\right)^{-1} \end{cases}$$

7.2.4 Exploitation des conditions aux limites

Revenons au problème de départ : on cherche une expression de $P(\theta)$ en fonction de sa valeur initiale $P(0)$.

On va remplacer la condition initiale proposée au départ par une condition plus générale : on pose $P(0) = \pi$, où π peut être considéré comme une variable. On précisera ultérieurement à quel espace cet opérateur appartient.

Pour estimer $P(\theta)$, on va utiliser les systèmes différentiels linéaires introduits précédemment. On commence par exploiter les informations données par les variables auxiliaires X et Y. Il existe une relation en $\theta = 0$: $Y(0) = \pi X(0)$.

On introduit un nouvel opérateur :

$$W(\theta) = \psi(\theta)\phi^{-1}(\theta).$$

On calcule sa dérivée :

$$\begin{aligned}\frac{dW}{d\theta} &= \psi'\phi^{-1} - \psi\phi^{-1}\phi'\phi^{-1} \\ &= -Q_0 r\psi\phi^{-1} - \psi\phi^{-1}rQ_0\phi^{-1} \\ &= -Q_0 rW - WrQ_0\end{aligned}$$

W est donc solution d'une équation différentielle linéaire de type Lyapunov :

$$\frac{dW}{d\theta} = -Q_0 rW - WrQ_0$$

Cette équation a une solution explicite de la forme :

$$W(\theta) = e^{-Q_0 r(\theta)}W(0)e^{-rQ_0(\theta)}$$

On va maintenant exprimer les opérateurs X et Y en fonction de W :

$$X = \phi - Q_0\psi = \phi - Q_0\psi\phi^{-1}\phi = (I - Q_0 W)\phi$$

De même, on a :

$$Y = Q_0^{-1}\phi + \psi = Q_0^{-1}\phi + \psi\phi^{-1}\phi = (Q_0^{-1} + W)\phi$$

On en déduit l'expression de P :

$$\begin{aligned}P &= YX^{-1} = (Q_0^{-1} + W)\phi((I - Q_0 W)\phi)^{-1} \\ &= (Q_0^{-1} + W)\phi\phi^{-1}(I - Q_0 W)^{-1} \\ &= (Q_0^{-1} + W)(I - Q_0 W)^{-1}\end{aligned}$$

Par cette expression on peut donc évaluer P en un angle quelconque en fonction de W pour cet angle. L'expression de W en fonction de sa valeur initiale va permettre d'obtenir P en fonction de sa valeur en $\theta = 0$. A cet effet, on calcule $W(0)$ en fonction de π en utilisant la relation obtenue précédemment :

$$\pi = P(0) = (Q_0^{-1} + W(0))(I - Q_0 W(0))^{-1}$$

On en déduit que :

$$\pi - \pi Q_0 W(0) = Q_0^{-1} + W(0)$$

C'est-à-dire :

$$\pi - Q_0^{-1} = (I + \pi Q_0)W(0)$$

On obtient :

$$W(0) = -(I + \pi Q_0)^{-1}(Q_0^{-1} - \pi)$$

On en déduit l'expression de P :

$$\begin{aligned} P(\theta) &= (Q_0^{-1} - e^{-Q_0 r(\theta)}(I + \pi Q_0)^{-1}(Q_0^{-1} - \pi)e^{-rQ_0(\theta)}) \\ &\quad (I + Q_0 e^{-Q_0 r(\theta)}(I + \pi Q_0)^{-1}(Q_0^{-1} - \pi)e^{-rQ_0(\theta)})^{-1} \end{aligned}$$

On pose :

$$\begin{cases} \mathcal{H}(\pi) = (I + \pi Q_0)^{-1}(\pi - Q_0^{-1}) \\ \mathcal{G}(\pi) = (Q_0^{-1} - \pi)(I + Q_0\pi)^{-1} \\ \mathcal{L}(\theta)(W) = e^{-Q_0 r\theta} W(0) e^{-rQ_0\theta} \end{cases}$$

$\mathcal{L}$ est un semi-groupe linéaire ; pour $\theta \in (0, \theta_f)$, $\mathcal{L}(\theta)$ est l'opérateur qui à ω associe $W(\theta)$ solution de l'équation différentielle linéaire :

$$\begin{cases} \dfrac{dW}{d\theta}(\theta) = -Q_0 r W(\theta) - W(\theta) r Q_0 \\ W(0) = \omega \end{cases}$$

Les opérateurs $\mathcal{H}$ et $\mathcal{G}$ sont des transformations homographiques qui vérifient la propriété :

$$\forall\, \pi,\ \mathcal{H}(\mathcal{G}(\pi)) = \mathcal{G}(\mathcal{H}(\pi))$$

Avec ces notations, P s'écrit :

$$\begin{aligned} P(\theta) &= \mathcal{G}\left(e^{-Q_0 r(\theta)}(I + \pi Q_0)^{-1}(Q_0^{-1} - \pi)e^{-rQ_0(\theta)}\right) \\ &= \mathcal{G}\left(\mathcal{L}(\theta)[(I + \pi Q_0)^{-1}(Q_0^{-1} - \pi)]\right) \\ &= \mathcal{G}\left(\mathcal{L}(\theta)(\mathcal{H}(\pi))\right) \end{aligned}$$

Chapitre 8

Etude de guides d'ondes composés

Jusqu'alors, les formules de représentation ont surtout été utilisées pour déterminer les points de singularité de l'impédance. Dans ce chapitre, on va présenter une autre application possible de la transformation homographique, réservée à des guides d'ondes plus complexes, c'est-à-dire à des guides composés de plusieurs parties. On peut envisager par exemple un guide pour lequel le nombre d'onde est différent d'une partie à l'autre, ou encore un cylindre prolongé par un guide de section variable. Dans ce cas, la formule de représentation va permettra d'obtenir une expression globale pour l'impédance dans l'ensemble du guide lorsque l'on connaît sa valeur dans certaines parties du domaine.

On s'intéresse à la configuration suivante : on suppose que le guide étudié est constitué de deux parties adjacentes, Ω_a et Ω_b. On note x la coordonnée le long de l'axe du guide, commun à chaque sous-domaine, et z les autres coordonnées. On désigne par Γ_x la section transversale du domaine à l'abscisse x, et l'on suppose que Ω_a est la partie comprise entre les abscisses 0 et a, tandis que Ω_b est celle comprise entre a et b. Ainsi, on a :

$\Omega_a = \cup_{0\leq x\leq a}\Gamma_x$ et $\Omega_b = \cup_{a\leq x\leq b}\Gamma_x$.

On note Z l'impédance pour la partie $x \geq a$ du domaine . Celle-ci vérifie une équation de Riccati du type :

$$\frac{dZ}{dx} = J + Z\Lambda Z - ZF^t - FZ$$

Hypothèses : On suppose connue la valeur en a $Z_{a,b}$ de l'impédance pour la deuxième partie du guide, Ω_b. On dispose également d'une solution particulière de l'équation de Riccati dans Ω_a. On la note Z_0, et on suppose que $Z_0(a) = 0$; Z_0 est donc l'impédance d'un tube bouché en a.

On cherche à évaluer l'impédance du domaine complet sur Ω_a et à l'exprimer en fonction de $Z_{a,b}$. A cette fin, on va reprendre la formule de 1-représentation donnée au chapitre V :

$Z(x) = \mathcal{G} \circ \mathcal{L} \circ \mathcal{H}(\zeta)(a)$, où

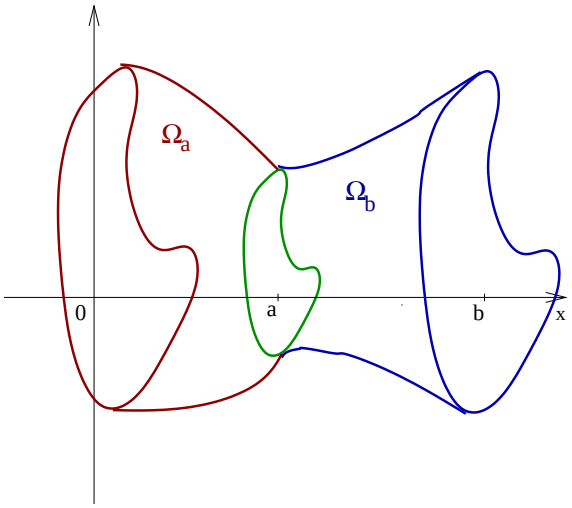


FIG. 8.1: Guide d'ondes composé

$\zeta = Z(a)$ est la valeur de l'impédance en a, et

$$\begin{cases} \mathcal{G}(x) \ : \ T & \to [Z_0(x) + (I + Z_0(x)S(x))T(x)]\,[I + S(x)T(x)]^{-1} \\ \mathcal{H}(x) \ : \ T & \to [I + Z_0(x) - T(x)S(x)]^{-1}\,[T(x) - Z_0(x)] \\ \mathcal{L}(x) \ : \ T & \to e^{\int_a^x (-F + Z_0\Lambda)(s)ds} T e^{\int_a^x (-F^t + \Lambda Z_0)(s)ds} \end{cases}$$

Dans cette formule, $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont des homographies qui transforment un opérateur (Z, par exemple) en un autre opérateur appartenant au même espace, et $\mathcal{L}$ est un semi-groupe linéaire. On a également introduit un opérateur auxiliaire S, vérifiant une équation de Lyapunov :

$$\frac{dS}{dx} = -S[-F + Z_0\Lambda] - [-F^t + \Lambda Z_0]S - \Lambda \text{ pour } x \in]0, a[,$$

et dont le choix de la condition initiale $S(a)$ est laissé à l'utilisateur.

Par souci de simplicité, on privilégiera la condition nulle :

$$S(a) = 0.$$

Par hypothèse, la valeur de l'impédance en a est $Z_{a,b}$:

$$\zeta = Z(a) = Z_{a,b}$$

On en déduit son image par la première transformation homographique :

$$\mathcal{H}(Z_{a,b}) = [I + 0 - Z_{a,b}S(a)]^{-1}\,[Z_{a,b} - Z_0(a)]$$

C'est-à-dire :

$$\mathcal{H}(Z_{a,b}) = I.Z_{a,b} = Z_{a,b}$$

On compose alors par le semi-groupe $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}(x)(\mathcal{H}(Z_{a,b})) = e^{\int_a^x(-F^t+\Lambda Z_0)(s)ds} Z_{a,b} e^{\int_a^x(-F+Z_0\Lambda)(s)ds}$$

En particulier, cet opérateur est $Z_{a,b}$ en a. Enfin, on obtient l'expression de Z en calculant l'image du résultat précédent par la seconde transformation homographique :

$$\begin{aligned} Z(x) = \quad & \left[Z_0(x) + (I + Z_0(x)S(x))\, e^{\int_a^x(-F^t+\Lambda Z_0)(s)ds} Z_{a,b} e^{\int_a^x(-F+Z_0\Lambda)(s)ds}\right] \\ & \left[I + S(x) e^{\int_a^x(-F^t+\Lambda Z_0)(s)ds} Z_{a,b} e^{\int_a^x(-F+Z_0\Lambda)(s)ds}\right] \end{aligned}$$

On constate que la valeur de l'impédance pour la partie gauche du guide ne dépend que d'opérateurs définis sur Ω_a et de la valeur $Z_{a,b}$ sur la surface commune : elle ne dépend ni de l'impédance dans Ω_b, ni de la forme du guide Ω_b. En d'autres termes, si l'on remplace le demi-guide Ω_b par un autre tube ayant une impédance différente mais dont la valeur en a est encore $Z_{a,b}$, l'impédance de la partie gauche Ω_a ne sera pas modifiée.

Conclusion

Dans ce travail, on a introduit une manière innovante d'aborder la résolution du problème de Helmholtz dans les guides d'ondes. Cette démarche s'appuie sur la méthode de plongement invariant et fait jouer un rôle majeur à l'opérateur Dirichlet-to-Neumann ou Neumann-to-Dirichlet, qui apparaît dans de nombreux problèmes d'analyse numérique (cf ensta). Elle permet d'étudier celui-ci sous un angle nouveau : en écrivant l'équation de Riccati dont il est solution, il est possible d'en obtenir une formule de représentation simplifiée et de traiter ses singularités.

La première partie est entièrement consacrée à la présentation de la méthode pour une configuration simple, c'est-à-dire pour un tube cylindrique bouché à une extrémité. On a envisagé deux formulations, qui font intervenir une frontière mobile se déplaçant d'un bout à l'autre du domaine, et qui permet d'étudier le problème induit dans le sous-domaine compris entre cette frontière et une des deux faces du cylindre. Il serait également possible d'imaginer une factorisation utilisant deux frontières mobiles et la partie du guide comprise entre ces deux sections, en faisant évoluer chacune d'entre elles du point médian du guide vers une extrémité.

Par ailleurs, l'un des buts de cette partie était de démontrer l'existence et l'unicité de la solution de l'équation de Riccati, afin de caractériser entièrement l'impédance par son équation d'évolution. Compte tenu des difficultés mentionnées au chapitre V, on a retenu une méthode itérative qui s'appuie fortement sur les propriétés du problème modèle. Il reste à généraliser ce résultat à des équations de Riccati comportant des termes linéaires.

La deuxième partie s'est donné pour objectif de traiter des cas plus complexes : ainsi, la méthode a été mise en oeuvre pour des guides avec des conditions absorbantes, ce qui a permis d'étudier la résolution d'équations de Riccati avec des termes linéaires et de rechercher dans ce cadre les singularités grâce aux formules de représentation. Elle a également été adaptée pour des guides coudés, utilisés notamment en optique. Enfin, on a présenté trois façons de traiter les guides de section variable. Dans ce cas, il est possible d'obtenir une équation de Riccati pour l'impédance et d'exprimer celle-ci à l'aide des transformations homographiques, toutefois il est difficile d'exhiber les solutions particulières nécessaires, même en prenant un cas particulier. Une extension envisageable serait l'étude d'un guide à faibles variations de section (modèle souvent retenu en acoustique sous-marine). L'impédance peut alors être développée en série, ce qui rappelle les séries de Bremmer utilisées dans différents travaux sur le plongement invariant (cf [2], [3]).

Ainsi, ce travail permet de résoudre le problème de Helmholtz en l'écrivant sous forme factorisée et en faisant apparaître un opérateur d'impédance, dont on peut donner l'expression en étudiant son équation de Riccati.

Annexe A

Outils mathématiques

A.1 Espaces de Sobolev

A.1.1 Généralités

Dans cette partie, on se contentera de rappeler des résultats et de donner des références bibliographiques.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière $\partial\Omega$, et $\mathcal{D}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact. On note $L^2(\Omega)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles telles que :

$$L^2(\Omega) = \left\{ f : \Omega \mapsto \mathbb{R} \,/\, f \text{ mesurable et } \int_\Omega |f|^2(x)dx < +\infty \right\}.$$

La norme de cet espace est :

$$\|f\|_{L^2(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f|^2(x)dx \right]^{\frac{1}{2}}$$

Le produit scalaire associé est :

$$(f,g)_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\bar{g}(x)dx.$$

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On appelle espace de Sobolev $H^p(\Omega)$ l'espace des fonctions f dans $L^2(\Omega)$ telles que leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre p appartiennent à $L^2(\Omega)$; en d'autres termes :

$$H^p(\Omega) = \{ f \in L^2(\Omega) \,/\, \alpha \in \mathbb{N}^n \,, |\alpha| \leq p \,, D^\alpha f \in L^2(\Omega) \}.$$

C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|f\|_{H^p(\Omega)} = \left\{ \sum_{\alpha\,,|\alpha|\leq p} \|D^\alpha f\|^2_{L^2(\Omega)} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Par ailleurs, $H^1_0(\Omega)$ est la fermeture dans $H^1(\Omega)$ de l'ensemble des fonctions de $\mathcal{D}(\Omega)$. C'est donc l'espace :

$$H^1_0(\Omega) = \{f \in L^2(\Omega) \,/\, \forall i \in \{1, ..., n\} \ , \ \partial_i f \in L^2(\Omega) \ \text{ et } \ f|_{\partial\Omega} = 0\},$$

et il a pour norme :

$$\|f\|_{H^1_0(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^2 dx + \int_\Omega |\nabla f(x)|^2 dx \right]^2$$

Soit maintenant s un réel quelconque. L'espace de Sobolev à exposant fractionnaire $H^s(\Omega)$ est l'interpolé d'ordre $\frac{s}{n}$ de $L^2(\Omega)$ et de $H^n(\Omega)$ pour $n > s$ (cf [19] p.6-7-8). Soit $A \in \mathcal{L}(H^n(\Omega))$ l'opérateur symétrique tel que :

$$(Au, v)_{H^n(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} \ \forall u, v \in H^n(\Omega).$$

Comme $L^2(\Omega)$ est compact dans $H^n(\Omega)$ et A est symétrique, alors, celui-ci est diagonalisable dans une base ω_n orthogonale à la fois pour $L^2(\Omega)$ et $H^n(\Omega)$:

$$A\omega_n = \Lambda_n \omega_n \ \forall n$$

On caractérise alors $H^n(\Omega)$ par :

$$H^n(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n \,/\, \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|^2_{H^n(\Omega)} < +\infty \right\}$$

Cela permet de donner la définition suivante pour $H^s(\Omega)$:

$$H^s(\Omega) = \left\{ u = \sum_n u_n \omega_n \,/\, \sum_n |u_n|^2 \|\omega_n\|^{2\frac{s}{n}}_{H^n(\Omega)} \|\omega_n\|^{2(1-\frac{s}{n})}_{L^2(\Omega)} < +\infty \right\}$$

Soit alors $(\Psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la base orthonormée de $L^2(\Omega)$ constituée des vecteurs propres du Laplacien sur Ω avec condition de Dirichlet sur $\partial\Omega$ et $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres associées. Dans cette base, les espaces usuels ont pour définition équivalente :

$$L^2(O) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n \,/\, \sum_n |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$$H^1_0(O) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n \,/\, \sum_n (1 + \lambda_n)|u_n|^2 < +\infty \right\}$$

$H_{00}^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ est le demi-interpolé de $H_0^1(\Omega)$ et de $L^2(\Omega)$ (cf [19], théorème 11.7 p. 72). On a la caractérisation suivante :

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(O) = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n \,/\, \sum_n (1+\lambda_n)^{\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

Enfin, pour $s \in \mathbb{R}^+$, on désigne par $H_0^s(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}$ dans $H^s(\Omega)$.

Pour s, s' non demi-entiers, l'interpolé entre $H_0^s(\omega)$ et $H_0^{s'}(\Omega)$ d'ordre θ (avec $\theta \in]0,1[$), est $H^{\theta s+(1-\theta)s'}$, sauf si $\theta s + (1-\theta)s'$ est un demi-entier (cf [19], théorème 11.6 p.70).

A.1.2 Espaces duaux

On note $H^s(\Omega)'$ le dual de l'espace $H^s(\Omega)$; c'est l'espace des formes linéaires continues sur $H^s(\Omega)$.

Théorème A.1 *Théorème de représentation de Riesz-Fréchet : pour tout $\varphi \in H^s(\Omega)'$, il existe un unique $f \in H^s(\Omega)$ tel que :*

$$< \varphi, v >_{H^s(\Omega)' \times H^s(\Omega)} = (f, v)_{H^s(\Omega)} \; \forall v \in H^s(\Omega).$$

On identifie $L^2(\Omega)$ à son dual, mais on n'identifie pas $H_0^1(\Omega)$ et son dual.

On note $H^{-s}(\Omega)$ le dual de $H_0^s(\Omega)$. On montre que $H^{-s}(\Omega) = H^s(\Omega)'$ pour $s \in [0, \frac{1}{2}[$.

Cas particulier : On désigne par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$.

Pour $s > 0$, on a le schéma :

$$H^s(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-s}(\Omega)$$

avec injections continues et denses.

Si l'on applique le théorème de représentation de Riesz à la base des Ψ_n, on obtient la caractérisation suivante pour $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$:

$$H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)' = \left\{ u = \sum_n u_n \Psi_n \,/\, \sum_n (1+\lambda_n)^{-\frac{1}{2}} |u_n|^2 < +\infty \right\}$$

Remarque A.1 *$H^{-\frac{1}{2}}(\Omega)$ est le dual de $H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, mais pas celui de $H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ (cf [19], remarque 12 p. 78).*

A.1.3 Théorème de trace

Soit Ω un cylindre de $\mathbb{R}^n$:

$\Omega = \cup_{0 \leq x_1 \leq a} \Gamma_{x_1}$, où Γ_{x_1} ouvert régulier de $\mathbb{R}^{n-1}$.

Un point de Ω est noté $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ou (x_1, z) par abus de notation. Soit $b \in [0, a]$. L'application trace de $\mathbb{R}^n$ sur Γ_b :

$\gamma : f \longmapsto (z \mapsto f(b, z))$

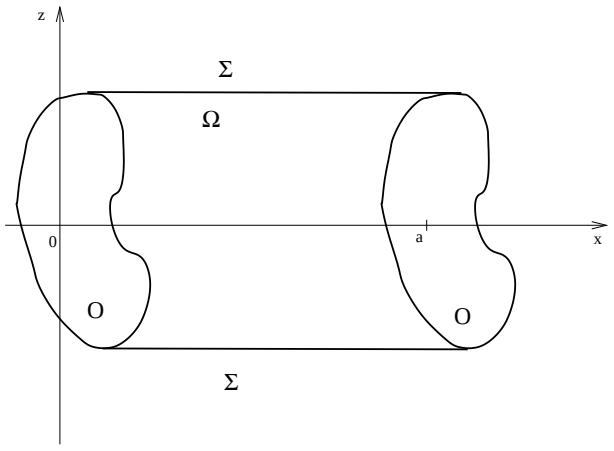
est bien définie pour $f \in H^s(\Omega)$ et $s > \frac{1}{2}$ et continue de $H^s(\Omega)$ vers $H^{s-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. De plus, γ est surjective (cf [19], théorème 3.2 p.25).

A.2 Résolution du problème de Helmholtz

Dans cette seconde partie, on s'intéresse au caractère bien posé ou non des différents problèmes présentés : il s'agit ici d'étudier l'existence et l'unicité des solutions du problème de Helmholtz pour un guide d'ondes avec différentes conditions aux bords. Les deux premiers cas correspondent aux configurations du chapitre VI, le troisième au guide cylindrique bouché qui fait l'objet de toute la première partie et plus précisément du chapitre II. On présentera tout d'abord un outil utilisé tout au long de ce paragraphe : l'alternative de Fredholm.

Alternative de Fredhom : Soit E un espace de Banach, $A \in \mathcal{L}(E)$ un isomorphisme et $K \in \mathcal{L}(E)$ un opérateur compact. Alors :

- ou bien pour tout $f \in \mathcal{L}(E)$ l'équation $Au - Ku = f$ admet une solution unique,
- ou bien l'équation homogène admet $n(> 0)$ solutions linéairement indépendantes.



A.2.1 Guide avec une condition absorbante

On souhaite démontrer que le problème $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P})\begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \ \text{ dans } \Omega\ ; \\ y|_\Sigma = 0\ ;\ \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0\ ;\ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{H}\ ; \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $y_0, \mathcal{H} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, et y est cherché dans $V = H^1(0,a;L^2(O)) \cap L^2(0,a;H_0^1(O))$,

admet une solution unique.

Soit $\varphi \in V$. Alors la formulation variationnelle du problème s'écrit :

$$\int_\Omega \Delta y \bar{\varphi} + k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = -\int_\Omega f\bar{\varphi}$$

D'après la formule de Green, on a :

$$-\int_\Omega \nabla y \nabla\bar{\varphi} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} + k^2\int_\Omega y\bar{\varphi} = -\int_\Omega f\bar{\varphi}$$

Le terme de bord vaut :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} = \int_\Sigma \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} + \int_{\Gamma_a} \frac{\partial y}{\partial x}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial x}\bar{\varphi}$$

Comme $\bar{\varphi}$ s'annule sur le bord latéral, l'intégrale sur Σ est nulle. On en déduit que :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} = \int_{\Gamma_a} \mathcal{H}\bar{\varphi} - ik\int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} y_0\bar{\varphi}$$

Finalement, il vient :

$$\int_\Omega \nabla y\nabla\bar{\varphi} - k^2\int_\Omega y\bar{\varphi} + ik\int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} = \int_\Omega f\bar{\varphi} + \int_{\Gamma_a}\mathcal{H}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} y_0\bar{\varphi}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(y,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega \nabla y\nabla\bar{\varphi} - k^2\int_\Omega y\bar{\varphi} + ik\int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} \\ b(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f\bar{\varphi} + \int_{\Gamma_a}\mathcal{H}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} y_0\bar{\varphi} \end{cases}$$

On définit (théorème de Riesz) l'application linéaire A sur V et le vecteur $B \in V$ tels que :

$$\begin{cases} A: & V \to V \\ & y \mapsto Ay \text{ tel que } (Ay, v)_V = a(y, v)\, \forall v \in V \\ B \in V \text{ tel que } (B, \varphi)_V = b(\varphi)\, \forall \varphi \in V \end{cases}$$

Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$Ay = B \tag{A.1}$$

On va montrer que A est un isomorphisme. Pour ce faire, on va le décomposer comme la somme d'un opérateur coercif C et d'un opérateur compact K :

$A = C + K$, avec

$$\begin{cases} C: & V \to V \\ & y \mapsto Cy \text{ tel que } (Cy, v)_V = \displaystyle\int_\Omega \nabla y \nabla v + \int_\Omega yv + ik \int_{\Gamma_a} yv \\ K: & V \to V \\ & y \mapsto Ky \text{ tel que } (Ky, v)_V = -(k^2+1) \displaystyle\int_\Omega yv \end{cases}$$

Tout d'abord, on prouve que C est coercif :

D'une part, C est continu. D'autre part, pour $y = v$, on a :

$$|(Cy, y)_V|^2 = (y, y)_V^2 + k^2 \int_{\Gamma_a} |y|^2 \geq (y, y)_V^2,$$

d'où le résultat.

On montre ensuite que K est compact :

D'après le théorème de Rellich, $V \hookrightarrow L^2(\Omega)$ est une injection compacte. Soit alors $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans V, on peut donc en extraire une sous-suite convergente dans $L^2(\Omega)$. Pour cette sous-suite, on a, avec $v \in V$ quelconque :

$$(K(y_n - y_m), v)_V = -(k^2+1) \int_\Omega (y_n - y_m)v$$

On en déduit que :

$$|(K(y_n - y_m), v)_V| \leq (k^2+1)\|y_n - y_m\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}$$

Et par conséquent :

$$|(K(y_n - y_m), v)_V| \leq (k^2+1)\|y_n - y_m\|_{L^2(\Omega)}\|v\|_V$$

Il en résulte que :

$$\|K(y_n - y_m)\|_V \leq (k^2+1)\|y_n - y_m\|_{L^2(\Omega)}$$

Or, (y_n) est de Cauchy dans $L^2(\Omega)$, donc Ky_n est de Cauchy dans V. Cela signifie que cette sous-suite converge, K est donc compact.

D'après l'alternative de Fredholm, on en déduit que A est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif.

A est effectivement injectif :

En effet, soit $y \in V$ tel que $Ay = 0$. On en déduit que $(Ay, \varphi) = 0 \ \forall \varphi \in V$.

Cela signifie que :

$$\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = -ik \int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi}$$

Lorsque $y = \varphi$, le membre de gauche est réel, celui de droite est imaginaire pur. Ils sont donc tous les deux nuls, d'où :

$$\int_{\Gamma_a} |y|^2 = 0$$

On en déduit que :

$y = 0$ sur Γ_a.

Par conséquent on a, pour tout $\varphi \in V$:

$$\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = 0 \tag{A.2}$$

Cette relation est vérifiée en particulier pour les fonctions φ de classe C^∞ s'annulant sur le bord de Ω, il vient alors :

$\Delta y + k^2 y = 0$ au sens des distributions.

y est donc un élément de $H^1(\Delta; \Omega)$.

Une intégration par parties de (A.2) donne :

$$\int_\Omega \Delta y \bar{\varphi} + k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = \int_{\Gamma_a \cup \Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial n} \bar{\varphi}$$

Or, y vérifie $\Delta y + k^2 y = 0$ au sens des distributions, donc au sens $L^2(\Omega)$; on en déduit que :

$$\frac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_a \cup \Gamma_0.$$

y vérifie donc les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} y = 0 \text{ sur } \Gamma_a \ ; \\ \dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_a \ ; \\ \Delta y + k^2 y = 0 \text{ dans } \Omega \ . \end{cases}$$

Donc, d'après le théorème de continuation unique (cf [14], annexe B), $y \equiv 0$ sur Ω.

Par conséquent, A est injectif, et c'est un isomorphisme.
On en déduit que le problème (A.1), et donc $(\mathcal{P})$, admet une solution unique : on dit qu'il est bien posé.

A.2.2 Guide avec deux conditions absorbantes

On souhaite démontrer que le problème $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \ \text{ dans } \Omega \ ; \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} - iky|_{\Gamma_0} = \mathcal{H} \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x} + iky|_{\Gamma_a} = \mathcal{G} \ ; \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $\mathcal{H}, \mathcal{G} \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$ et y est cherché dans $V = H^1(0,a;L^2(O)) \cap L^2(0,a;H_0^1(O))$,

admet une solution unique.

On met en oeuvre la même démarche que pour le cas précédent. Soit donc φ un élément quelconque de V. La formulation variationnelle du problème devient, après avoir appliqué la formule de Green :

$$-\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} + k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = -\int_\Omega f\bar{\varphi}$$

Cette fois, le terme de bord s'écrit :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} = \int_{\Gamma_a} \frac{\partial y}{\partial x}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} \frac{\partial y}{\partial x}\bar{\varphi}$$

L'intégrale sur Σ est nulle pour la même raison que dans le premier cas. En remplaçant les dérivées partielles par les conditions sur les deux faces, il vient :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} = \int_{\Gamma_a} \mathcal{G}\bar{\varphi} - ik\int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} \mathcal{H}\bar{\varphi} - ik\int_{\Gamma_0} y\bar{\varphi}$$

On obtient finalement :

$$\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} + ik \int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} + ik \int_{\Gamma_0} y\bar{\varphi} = \int_\Omega f\bar{\varphi} + \int_{\Gamma_a} \mathcal{G}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} \mathcal{H}\bar{\varphi}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(y,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} + ik \int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} + ik \int_{\Gamma_0} y\bar{\varphi} \\ b(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f\bar{\varphi} + \int_{\Gamma_a} \mathcal{G}\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_0} \mathcal{H}\bar{\varphi} \end{cases}$$

On définit l'application linéaire A sur V et le vecteur $B \in V$ tels que :

$$\begin{cases} A : \ V \to V \\ \qquad y \mapsto Ay \text{ tel que } (Ay, v)_V = a(y,v) \, \forall v \in V \\ B \in V \text{ tel que } (B, \varphi)_V = b(\varphi) \, \forall \varphi \in V \end{cases}$$

Comme précédemment, on décompose A sous la forme $A = C + K$, avec

$$\begin{cases} C : \ V \to V \\ \qquad y \mapsto Cy \text{ tel que } (Cy, v)_V = \displaystyle\int_\Omega \nabla y \nabla v + \int_\Omega yv + ik \int_{\Gamma_a} yv + ik \int_{\Gamma_0} yv \\ K : \ V \to V \\ \qquad y \mapsto Ky \text{ tel que } (Ky, v)_V = -(k^2+1) \displaystyle\int_\Omega yv \end{cases}$$

C vérifie la minoration :

$$|(Cy, y)_V| \geq Re(Cy, y) \geq (y, y)_V^2$$

On en déduit que C est coercif. Par un raisonnement analogue à celui du paragraphe précédent, on vérifie que K est compact. Ainsi, A est un isomorphisme si et seulement s'il est injectif.

Pour vérifier ce point, soit $y \in V$ vérifiant $Ay = 0$; alors, pour tout $\varphi \in V$, $(Ay, \varphi) = 0$. Cela signifie que :

$$\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = -ik \int_{\Gamma_a} y\bar{\varphi} - ik \int_{\Gamma_0} y\bar{\varphi}$$

En pariculier, si $\varphi = y$, le membre de gauche est réel, celui de droite, imaginaire pur. Il en résulte que :

$$\int_{\Gamma_a} |y|^2 + \int_{\Gamma_0} |y|^2 = 0.$$

Comme chacun des termes est positif, les deux intégrales sont nulles, et :

$y = 0$ sur $\Gamma_0 \cup \Gamma_a$.

Le même argument que pour la configuration précédente permet d'obtenir :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial y}{\partial n} = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ y = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \\ \Delta y + k^2 y = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

Le principe de continuation unique permet également de conclure que $y \equiv 0$ dans Ω, donc que A est injectif. Ainsi, le problème admet une solution unique, et il est donc bien posé.

A.2.3 Tube bouché en a

On souhaite démontrer que le problème $(\mathcal{P})$:

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} -\Delta y = k^2 y + f \ \text{ dans } \Omega \ ; \\ y|_\Sigma = 0 \ ; \ \dfrac{\partial y}{\partial x}|_{\Gamma_0} = y_0 \ ; \ y|_{\Gamma_a} = y_1 \ ; \end{cases}$$

où $f \in L^2(\Omega)$, $y_0 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)'$, $y_1 \in H_{00}^{\frac{1}{2}}(O)$, et y est cherché dans $V = H^1(0,a;L^2(O)) \cap L^2(0,a;H_0^1(O))$,

est mal posé pour certaines valeurs de k, c'est-à-dire qu'il n'admet pas toujours une solution.

A cette fin, on écrit comme précédemment la formulation variationnelle du problème en utilisant un élément φ de V :

$$-\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} + k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = -\int_\Omega f\bar{\varphi}$$

Le terme de bord a pour expression :

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial y}{\partial n}\bar{\varphi} = -\int_{\Gamma_a} y_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \int_{\Gamma_0} y_0 \bar{\varphi}$$

On obtient finalement :

$$\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} = \int_\Omega f\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_a} y_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \int_{\Gamma_0} y_0 \bar{\varphi}$$

On pose :

$$\begin{cases} a(y,\varphi) = \displaystyle\int_\Omega \nabla y \nabla \bar{\varphi} - k^2 \int_\Omega y\bar{\varphi} \\ b(\varphi) = \displaystyle\int_\Omega f\bar{\varphi} - \int_{\Gamma_a} y_1 \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x} + \int_{\Gamma_0} y_0 \bar{\varphi} \end{cases}$$

On définit l'application linéaire A sur V et le vecteur $B \in V$ tels que :

$$\begin{cases} A : \ V \to V \\ \qquad y \mapsto Ay \text{ tel que } (Ay, v)_V = a(y,v) \, \forall v \in V \\ B \in V \text{ tel que } (B, \varphi)_V = b(\varphi) \, \forall \varphi \in V \end{cases}$$

Le problème à résoudre s'écrit alors :

$$Ay = B \tag{A.3}$$

A s'écrit encore sous la forme $A = C + K$, où

$$\begin{cases} C : V \to Vy \mapsto Cy \text{ tel que } (Cy, v)_V = \displaystyle\int_\Omega \nabla y \nabla v + \int_\Omega yv \\ K : V \to Vy \mapsto Ky \text{ tel que } (Ky, v)_V = -(k^2+1) \displaystyle\int_\Omega yv \end{cases}$$

$(Cy, v)_V$ est en fait le produit scalaire $(y, v)_V$ dans V : C est donc l'identité.

K est compact (voir démonstration précédente), continu, symétrique, donc autoadjoint et diagonalisable dans une base orthogonale de vecteurs propres $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (cf [8]). On note $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres associées. La compacité de K indique que $\lambda_n \to_{n\to+\infty} 0$. On décompose alors y et B dans cette base :

$$\begin{cases} y &= \displaystyle\sum_n y_n w_n \\ B &= \displaystyle\sum_n B_n w_n \end{cases}$$

Si y est solution du système, alors il vérifie le sytème d'équations scalaires :

$$\forall n, \ (1 - (1+k^2)\lambda_n) y_n = B_n,$$

S'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1 - (1+k^2))\lambda_n = 0$, alors :

• soit l'un de ces n est tel que $B_n \neq 0$, et dans ce cas il n'existe pas de solution au problème ;

• soit $B_n = 0$ pour tout n, dans ce cas l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension n et il n'y a pas unicité (on vient de retrouver l'alternative de Fredholm).

Ceci prouve que le problème est mal posé.

Bibliographie

[1] Milton Abramowitz and Irene A. Stegun, editors. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Dover Publications Inc., New York, 1992. Reprint of the 1972 edition.

[2] E. Angel and R. Bellman. *Dynamic Programming and Partial Differential Equations*. Academic Press, 1971.

[3] Xavier Antoine and Helene Barucq. Microlocal diagonalization of strictly hyperbolic pseudodifferential systems and application to the design of radiation conditions in electromagnetism. *SIAM J. Appl. Math.*, 61(6):1877–1905 (electronic), 2001.

[4] Richard Bellman and Ramabhadra Vasudevan. *Wave propagation*, volume 17 of *Mathematics and its Applications*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1986. An invariant imbedding approach.

[5] Richard E. Bellman and Stuart E. Dreyfus. *Applied dynamic programming*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1962.

[6] M. Sh. Birman and M. Z. Solomjak. *Spectral theory of selfadjoint operators in Hilbert space*. Mathematics and its Applications (Soviet Series). D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987. Translated from the 1980 Russian original by S. Khrushchëv and V. Peller.

[7] C. Allan Boyles. Coupled mode solution for a cylindrically symmetric oceanic waveguide with a range and depth dependent refractive index and a time varying rough sea surface. *J. Acoust. Soc. Am.*, 73(3):800–805, 1983.

[8] Haïm Brezis. *Analyse fonctionnelle*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983. Théorie et applications. [Theory and applications].

[9] M. C. Delfour and M. Sorine. The linear-quadratic optimal control problem for parabolic systems with boundary control through a Dirichlet condition. In *Control of distributed parameter systems, 1982 (Toulouse, 1982)*, pages 87–90. IFAC, Laxenburg, 1983.

[10] B. Despres. *Méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes de propagation d'ondes en régime harmonique ; le théorème de Borg pour l'équation de Hil vectorielle*. Thèse de doctorat, Université Paris IK Dauphine, 1991.

[11] C. Hazard and E. Luneville. Multimodal Approach and Optimum Design in Non Uniform Waveguides. *Journées Européennes sur les Méthodes Numériques en Electromagnétisme*, 2002.

[12] J. Henry and Angel Ramos. Factorization of Second Order Elliptic Boundary Value Problems by Dynamic Programming. submitted.

[13] Jacques Henry and Angel Ramos. A Direct Study of the Riccati Equation Appearing in a Factorization Method of Second Order Elliptic oundary Value Problems by Dynamic Programming. submitted.

[14] Patrick Joly. *Introduction à l'analyse mathématique de la propagation d'ondes en régime harmonique*. http://www-rocq.inria.fr/ondes/harmonique.ps.gz, 1994-1995. Support de cours.

[15] P.E. Krasnushkin. On waves incurved tubes. *Uch.Zap.Mosk.Gos.Univ*, 75, 1945.

[16] Bernard Larrouturou and Pierre-Louis Lions. *Méthodes mathématiques pour les sciences de l'ingénieur : optimisation et analyse numérique*. Cours de l'Ecole Polytechnique, Département de Mathématiques Appliquées. 1996.

[17] P. Levy-Bruhl. *Introduction à la théorie spectrale*. Dunod, Paris, 2003.

[18] J.-L. Lions. *Contrôle optimal de systèmes gouvernés par des équations aux dérivées partielles*. Avant propos de P. Lelong. Dunod, Paris, 1968.

[19] J.-L. Lions and E. Magenes. *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*. Travaux et Recherches Mathématiques, No. 17. Dunod, Paris, 1968.

[20] Ya Yan Lu. One-way large range step methods for Helmholtz waveguides. *J. Comput. Phys.*, 152(1):231–250, 1999.

[21] Ya Yan Lu. Alternative single scatter approximation for one-way wave propagation. In *Mathematical and numerical aspects of wave propagation (Santiago de Compostela, 2000)*, pages 934–938. SIAM, Philadelphia, PA, 2000.

[22] Ya Yan Lu and Joyce McLaughlin. The Riccati Method for the Helmholtz Equation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(3):1432–1446, 1996.

[23] Ya Yan Lu and Joyce McLaughlin, 2003.

[24] Y.Y. Lu, J. McLaughlin and J. Huang. Local orthogonal transformation and one-way methods for acoustics waveguides. *Wave Motion*, 34:193–207, 2001.

[25] E. Luneville, J-M. Krieg and E. Giguet. An Original Approach to Mode Converter Optimum Design. *IEEE transactions on Microwave Theory and Techniques*, 46(1), 1998.

[26] Sherman W. Marcus. A generalized impedance method for application of the parabolic approximation to underwater acostics. *J. Acoust. Soc. Am.*, 90(1):391–398, 1991.

[27] V. Pagneux, N. Amir and J. Kergomard. A Study of Wave Propagation in Varying Cross-section Waveguides by modal Decomposition - Part I. Theory and Validation. *J. Acoust. Soc. Am.*, 100(4), 1996.

[28] Vincent Pagneux and Simon Felix. Sound propagation in rigid bends : a multimodal approach. *J. Acoust. Soc. Am.*, 110(3), 2001.

[29] Vincent Pagneux and Simon Felix. Muldimodal analysis of acoustic propagation in three-dimensional bends. 2002.

[30] P.-A. Raviart and J.-M. Thomas. *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*. Collection Mathématiques Appliquées pour la Maîtrise. [Collection of Applied Mathematics for the Master's Degree]. Masson, Paris, 1983.

[31] William T. Reid. *Riccati differential equations*. Academic Press, New York, 1972. Mathematics in Science and Engineering, Vol. 86.

[32] Michel Sorine. Sur l'équation de Riccati stationnaire associée au problème de contróle d'un système parabolique. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 287(6):A445–A448, 1978.

[33] Michel Sorine. Sur le semi-groupe non linéaire associé à l'équation de Riccati. *Rapport de Recherche INRIA*, 1981.

[34] Michel Sorine and Pavel Winternitz. Superposition laws for solutions of differential matrix Riccati equations arising in control theory. *IEEE Trans. Automat. Control*, 30(3):266–272, 1985.

[35] Gilead Tadmor. Worst-case design in the time domain: the maximum principle and the standard H_∞ problem. *Math. Control Signals Systems*, 3(4):301–324, 1990.