



HAL
open science

Model of tire/road contact for the bearing noise forecast

Abdelaziz Sameur

► **To cite this version:**

Abdelaziz Sameur. Model of tire/road contact for the bearing noise forecast. Engineering Sciences [physics]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. English. NNT: . pastel-00001035

HAL Id: pastel-00001035

<https://pastel.hal.science/pastel-00001035>

Submitted on 14 Feb 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THESE
Présentée pour l'obtention du diplôme de
**DOCTEUR
DE
L'ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES**

Spécialité : Structures et Matériaux

Présentée par

Abdelaziz SAMEUR

Sujet de thèse :

**Modèle de contact pneumatique/chaussée pour la prévision
du bruit de roulement**

Soutenue le 02 Décembre 2004
devant le jury composé de :

Président: **P. GATIGNOL**
Rapporteurs: **Z.Q. FENG
M. BERENGIER**
Examineurs: **Q.C. HE
H.P.YIN**
Directeur de thèse: **D. DUHAMEL**

*A mes grands parents,
A ma mère et mon père,
A ma sœur Ghania
et mes frères Karim et Yacine,
A ma famille,
A mes amis.*

Remerciements

J'exprime tout particulièrement ma reconnaissance et mes plus sincères remerciements à *D. Duhamel* et *H.P. Yin* pour l'intérêt attentif et la rigueur qu'ils ont portés sur mon travail, pour leur disponibilité et pour leur excellent encadrement.

Je remercie également les deux directeurs successifs du laboratoire d'Analyse des Matériaux et Identification de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées *A. Ehrlacher* et *K. Sab* de m'avoir accueilli dans leur laboratoire.

Qu'il me soit permis aussi de remercier très chaleureusement *P. Gatignol*, *Z.Q. Feng*, *M. Bérengier*, *Q.C. He* qui m'ont fait l'honneur de participer au jury.

Le support financier de cette thèse a été en partie assuré par la Région d'Ile de France, que ses élus trouvent ici l'expression de ma gratitude.

Je voudrais remercier chaleureusement tous les membres du *LAMI*, doctorants, permanents et stagiaires pour l'ambiance professionnelle et amicale qui règne au laboratoire. Ils ont su au cours de ces années m'apporter leur soutien et leurs encouragements dans les moments difficiles que traverse un doctorant. Les échanges scientifiques, techniques ou amicaux ont été très formateurs pour ma vie professionnelle et ont fait de ces trois années une belle étape inoubliable de ma vie.

Je remercie de tout mon cœur ma famille, qui a su me donner sans cesse son soutien et son amour au cours de ma vie pour former ma personnalité et pour rendre possible mes études et par conséquent, ce mémoire de thèse. Merci à tous mes amis pour la motivation que leur amitié m'a apportée.

Résumé

Ces vingt dernières années les constructeurs d'automobiles ont réduit progressivement le bruit émis par les véhicules par une action portant sur les sources d'origine mécanique (réduction du bruit du moteur, meilleure conception des transmissions, amélioration des silencieux...). Il s'avère maintenant que le bruit de contact pneumatique/chaussée est la source principale des nuisances sonores à plus de 50 Km/h. La génération du bruit de contact a comme sources de nombreux phénomènes impliquant des mécanismes compliqués. L'un des principaux phénomènes étant les vibrations du pneumatique dues à la rugosité de la chaussée. Pour modéliser les vibrations du pneumatique, il faut connaître d'une part le comportement vibratoire du pneumatique et d'autre part les forces de contact. Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. Les modèles de contact avec la chaussée utilisés font appel à une modélisation simple en $2D$ et les modèles de contact existant en $3D$ sont trop lourds pour le calcul. Dans ce mémoire on apporte une contribution à l'étude des forces de contact engendrées par l'influence de la rugosité de la chaussée et ceci afin d'avoir une bonne approximation des sources de vibrations du pneumatique et prédire le bruit de roulement. On a développé un modèle semi analytique $3D$ qu'on a validé expérimentalement pour un contact ponctuel élastique et viscoélastique avec différentes formes de pointes de contact. La validation expérimentale et numérique du modèle pour un contact multipoints élastique a été abordée. On a terminé par une application de la méthode pour résoudre un problème de contact sur des profils de chaussées modèles.

Mots clés

Bruit, pneumatique, chaussée, modèle analytique, théorie du potentiel d'interaction, contact élastique, contact viscoélastique, contact multipoint, validation expérimentale, identification, modèle numérique.

Abstract

These last twenty years car manufacturers gradually reduced the noise emitted by the vehicles by an action on the sources of mechanical origin (reduction of the engine noise, better design of the transmissions and improvement of the silencers...). It proves now that the noise of tyre/road contact is the principal source of the noise at speeds greater than 50 Km/h. The generation of the contact noise has sources in many phenomena implying complicated mechanisms. One of the principal phenomena is vibrations of the tire due to the roughness of the roadway. To model the vibrations of the tire, it is necessary to know the vibration behaviour of the tire and to know the contact forces. The contact problem between a tire and a roadway is a three-dimensional dynamic contact which is difficult to model in full details. The models of contact with the roadway used call upon a simple 2D modeling and the existing models of 3D contact are too heavy to be calculated. In this thesis we make a contribution to study the contact forces generated by the influence of the roadway roughness in order to have a good approximation of the tire vibrations sources and to predict the noise. We developed a 3D semi analytical model which was validated by experiments for an elastic and viscoelastic contact with various shapes. The experimental and numerical validation of the model for an elastic multipoint contact was studied. We finished by an application of the method to solve a contact problem on a model profile of roadways.

Keywords

Noise, tyre, roadway, analytical model, theory of the interaction potential, elastic contact, viscoelastic contact, multipoint contact, numerical model, experiment, identification.

Table des matières

Introduction.....	1
1. Recherche bibliographique.....	4
1.1. Phénomènes physiques.....	5
1.1.1. Prédominance du bruit de contact pneumatique chaussée.....	5
1.1.2. Localisation des sources sur le pneumatique.....	6
1.1.3. Influence des paramètres géométriques, de la vitesse, de la température, de la pression de gonflement et du moment de torsion.....	7
1.1.4. Influence de la chaussée et des patins de gomme.....	9
1.2. Modélisation du bruit de contact pneumatique / chaussée.....	12
1.2.1. Rayonnement acoustique.....	13
1.2.2. Vibration du pneumatique.....	14
1.2.3. Phénomènes dans la zone de contact.....	18
1.2.3.1. Phénomène aéro-acoustique (Air Pumping).....	18
1.2.3.2. Modélisation du contact d'un pneumatique sur une chaussée.....	21
1.3. Conclusion.....	25
2. Contacts statique et dynamique.....	27
2.1. Etude du contact sur une corde vibrante.....	27
2.1.1. Equation du mouvement d'une corde sur appuis élastiques.....	27
2.1.2. Quelques solutions de l'équation du mouvement de la corde.....	29
2.1.2.1. Cas statique.....	29
2.1.2.2. Cas dynamique harmonique.....	30
2.1.2.3. Cas dynamique transitoire.....	31
2.1.2.4. Cas avec amortissement.....	33
2.1.3. Solution numérique de l'équation du mouvement de la corde.....	33
2.1.3.1. Résolution.....	33
2.1.3.2. Validation de la méthode numérique.....	35
2.2. Approche pseudo-dynamique.....	38
2.2.1. Principe.....	38
2.2.2. Comparaison pour une corde.....	38
2.2.3. Cas tridimensionnel.....	41
2.3. Conclusion.....	43
3. Modèles de contact ponctuels.....	44
3.1. Contact ponctuel entre objets de formes simples.....	44
3.1.1. Forme sphérique, loi de contact de Hertz.....	44
3.1.2. Forme conique.....	45
3.2. Contact ponctuel entre objets de formes quelconques.....	47

3.2.1. Théorie du potentiel d'interaction de Wilke.....	47
3.2.2. Calcul des forces de contact	52
3.2.2.1. Validation pour la sphère	52
3.2.2.2. Validation pour le cône	54
3.2.2.3. Validation pour la pyramide.....	56
3.3. Contact ponctuel viscoélastique.....	57
3.3.1. Fonction de fluage	57
3.3.2. Fonction de relaxation	58
3.3.3. Modèle rhéologique de Zener.....	59
3.3.4. Contact d'une sphère rigide avec un matériau viscoélastique.....	61
3.3.5. Généralisation aux formes quelconques.....	63
3.4. Conclusion	64
4. Validation expérimentale des modèles de contact ponctuels.....	65
4.1. Identification des caractéristiques du plot en caoutchouc.....	65
4.1.1. Identification du module d'Young par un essai de relaxation.....	65
4.1.2. Identification des temps caractéristiques du plot.....	67
4.1.3. Identification du module d'Young à partir de la loi de Hertz	69
4.2. Validation expérimentale du modèle analytique de contact élastique	71
4.2.1. Identification du coefficient c_s pour le cas d'un contact plot/sphère.....	72
4.2.2. Identification du coefficient c_c pour le cas d'un contact plot/cône.....	73
4.2.3. Identification du coefficient c_p pour le cas d'un contact plot/pyramide.....	75
4.3. Validation expérimentale du modèle de contact viscoélastique	77
4.3.1. Contact entre un plot en caoutchouc et une bille en acier	78
4.3.2. Contact entre un plot en caoutchouc et un cône en acier.....	80
4.3.3. Contact entre un plot en caoutchouc et une pyramide en acier	81
4.4. Conclusion	82
5. Etude numérique du contact élastique multipoints	84
5.1. Présentation de la modélisation	84
5.1.1. Géométries et matériaux	84
5.1.2. Maillages et éléments	85
5.1.3. Propriété du contact	86
5.2. Modélisation numérique du contact ponctuel	87
5.2.1. Contact de la demi sphère rigide avec le bloc en caoutchouc	87
5.2.2. Contact d'un cône rigide avec le bloc en caoutchouc	88
5.3. Modélisation numérique du contact double	90
5.3.1. Contact d'un bloc en caoutchouc avec deux formes rigides identiques	90
5.3.2. Contact d'un cône et d'une demi sphère rigide avec un bloc en caoutchouc	92
5.4. Modélisation numérique du contact multipoints.....	94
5.4.1. Contact entre deux cônes, deux demi sphères rigides à la même hauteur avec un bloc en caoutchouc	95
5.4.2. Contact entre deux cônes, deux demi sphères avec le bloc en caoutchouc (cônes plus haut que les sphères de 0,5 mm).....	97
5.4.3. Contact entre deux cônes, deux demi sphères avec le bloc en caoutchouc (sphères plus hautes que les cônes de 0,4 mm)	99
5.5. Conclusion	101

6. Etude expérimentale du contact élastique multipoints.....	103
6.1. Identification des caractéristiques de la plaque en caoutchouc	103
6.1.1. Identification du module d'Young par un essai de relaxation.....	103
6.1.2. Identification des temps caractéristiques du plot.....	105
6.2. Contact élastique en deux points.....	105
6.2.1. Contact entre la plaque en caoutchouc et deux sphères.....	106
6.2.2. Contact entre la plaque en caoutchouc, une sphère et un cône.....	109
6.2.2.1. Cône plus élevé que la sphère	109
6.2.2.2. Sphère plus élevée que le cône.....	112
6.2.3. Contact entre la plaque en caoutchouc et deux cônes	113
6.3. Contact élastique en trois points	115
6.3.1. Cône plus élevé que les sphères	115
6.3.2. Sphères plus élevées que le cône	118
6.4. Conclusion	120
7. Méthode de résolution du contact élastique multipoints	122
7.1. Principe de résolution	122
7.2. Comparaison avec les résultats de la méthode des éléments finis	125
7.2.1. Double contact.....	125
7.2.2. Contact multipoints.....	127
7.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux	129
7.3.1. Double contact.....	129
7.3.2. Triple contact.....	131
7.4. Conclusion	132
8. Calcul des forces pour une zone de contact se déplaçant sur des chaussées modèles	133
8.1. Principe d'évaluation du niveau sonore.....	133
8.2. Génération de chaussée modèle	134
8.3. Principe de résolution	136
8.4. Calcul des autospectres des forces de contact.....	138
8.4.1. Evolution des forces de contact le long des chaussées modèles périodiques.....	139
8.4.2. Evolution des forces de contact le long des chaussées modèles aléatoires	141
8.5. Conclusion	144

Conclusions

Bibliographie

Introduction

Le bruit de la circulation n'est pas un problème nouveau. Dès l'époque romaine, certains auteurs font état des encombrements dans les rues des agglomérations et des problèmes de bruit liés aux moyens rudimentaires de transport. Sans remonter aussi loin, l'utilisation de la paille dans les rues des villes au moyen âge avait notamment pour fonction d'amortir le bruit des attelages dans les ruelles. Cette pratique s'est maintenue dans certaines villes jusqu'au siècle dernier. C'est à partir des années cinquante que le problème du trafic routier a pris la dimension que nous lui connaissons aujourd'hui avec le développement du réseau routier et autoroutier. Des enquêtes de gêne récentes en Europe révèlent que plus de 75 % des personnes interrogées se déclarent gênées par le bruit routier et ferroviaire (supérieure à 70 *db* en période de jour et 65 *db* en période de nuit). Une directive européenne relative à la diminution du bruit du trafic à moins de 65 *db* en période de jour et à moins de 60 *db* en période de nuit a été récemment adoptée. La région Ile de France essaye de réduire ces nuisances sonores, des actions ont été imposées dès la conception d'une construction nouvelle ou d'infrastructures routières (construction de murs antibruit,...).

Ces vingt dernières années les constructeurs d'automobiles ont réduit progressivement le bruit émis par les véhicules par une action portant sur les sources d'origine mécanique (réduction du bruit de moteur, meilleure conception des transmissions, amélioration des silencieux...). Il s'avère maintenant que le bruit de contact pneumatique/chaussée est la source principale des nuisances sonores à plus de 50 *Km/h*, d'où l'intérêt de l'étude du bruit de contact.

Le bruit de contact pneumatique chaussée est un bruit large bande (de 0 à 3000 *Hz*) riche en basses et moyennes fréquences (0 à 1500 *Hz*). La génération du bruit de contact a comme sources de nombreux phénomènes impliquant des mécanismes compliqués. A l'origine du bruit de contact, il existe deux grandes familles de phénomènes qui sont les phénomènes aéro-acoustiques et les vibrations du pneumatique dues à la rugosité de la chaussée.

Pour modéliser les vibrations du pneumatique, il faut connaître d'une part les efforts de contact entre le pneumatique et la chaussée et d'autre part il faut connaître le comportement vibratoire du pneumatique. Une fois ces modélisations effectuées, il est nécessaire d'avoir un outil qui puisse évaluer le rayonnement causé par ces sources. Nous avons développé ces différents points dans le premier chapitre où on a présenté aussi l'influence des principaux paramètres (la vitesse, les paramètres géométriques, la température, ...) sur le bruit généré. L'étude bibliographique nous a permis de conclure que les sujets du rayonnement et du comportement vibratoire du pneumatique ont été bien explorés et nous nous préoccupons plus spécialement de l'étude des forces de contact entre le pneumatique et la chaussée engendrées par l'influence de la rugosité de la chaussée et ceci afin d'avoir une bonne approximation des sources de vibrations du pneumatique.

Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. On propose au chapitre II de commencer par étudier quelques situations simples comme le cas unidimensionnel d'un contact dynamique avec une corde. Nous commencerons par établir l'équation du mouvement de la corde. On proposera une solution exacte de l'équation différentielle lors d'une excitation unitaire dans le temps et dans l'espace. Connaissant la réponse de la corde dans le cas d'un déplacement imposé en statique, on la comparera à la réponse dynamique. On proposera ensuite une approche plus simple du contact fondée sur un calcul statique et on essaiera de déterminer les limites de validité de la méthode proposée. Le but étant de définir les conditions pour lesquelles les efforts induits par un déplacement donné ne diffèrent pas entre le cas statique et le cas dynamique. On abordera ensuite brièvement le même problème pour un chargement statique et dynamique sur un demi-espace.

Une simplification du problème de contact en un problème $3D$ linéaire est apportée au chapitre III. On propose un modèle de contact ponctuel entre un corps rigide, représentant la rugosité de la chaussée, et un plan élastique qui modélise le pneumatique. Le modèle est établi à partir de la théorie du potentiel d'interaction. Connaissant le volume d'interpénétration, la surface de la base du volume et le périmètre de cette surface, on peut connaître la force normale P correspondant à une interpénétration δ donnée. On validera ce modèle pour le cas de formes simples: sphérique, conique et pyramidale. Le modèle sera généralisé pour le cas d'un contact viscoélastique.

Dans le chapitre IV, une validation expérimentale sera présentée. Pour cela un dispositif expérimental sera établi. On utilisera une machine de compression *Instron*, différents points de contact en acier de forme sphérique, conique et pyramidale et un logiciel *LabView* pour l'acquisition des résultats. Pour simuler les patins de gomme du pneumatique, un plot en caoutchouc sera utilisé. On établira expérimentalement la relation entre la charge en fonction de l'interpénétration, pour chaque contact caoutchouc/différents points de contact. Après identification des caractéristiques du plot par un essai de relaxation, les résultats de notre modèle analytique seront comparés aux résultats expérimentaux pour le cas élastique et viscoélastique.

Au chapitre V, on s'intéressera au cas du contact élastique multipoints. Une modélisation par la méthode des éléments finis du contact multipoints en $3D$ sera effectuée en utilisant le logiciel de calcul *Abaqus*, la force de contact sera calculée en $3D$ à partir d'un déplacement imposé. Le pneumatique sera modélisé par un bloc ayant les caractéristiques d'un caoutchouc et la rugosité de la chaussée par des pointes de formes simples. Nous étudierons l'interaction ainsi que l'influence de la différence de hauteur entre les différentes formes de pointes en contact. On comparera les résultats numériques de chaque pointe aux résultats du modèle analytique du contact ponctuel.

Une étude expérimentale du contact élastique multipoints sera présentée au chapitre VI. Pour modéliser le pneumatique on utilisera une plaque en caoutchouc. Ses caractéristiques seront identifiées par un essai de relaxation. Avec le même dispositif expérimental utilisé pour le contact ponctuel nous étudierons l'interaction ainsi que l'influence de la différence de hauteur entre les différentes formes de pointes en contact. Tout comme pour la modélisation numérique on comparera les résultats expérimentaux de chaque pointe en contact aux résultats du modèle analytique présenté au chapitre III.

En tenant compte des résultats de la modélisation numérique et expérimentale du contact multipoint, on développera au chapitre VII une méthode itérative pour le calcul de la force de contact en fonction de l'interpénétration à partir du modèle analytique du contact ponctuel. Grâce à cette méthode on prendra en compte l'effet d'interactions entre les différentes pointes en contact. Les résultats seront comparés aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis et aux résultats expérimentaux.

Pour être plus réaliste et s'approcher le plus du problème de contact entre un pneumatique et une chaussée, au chapitre VIII, on appliquera la méthode développée et validée aux chapitres précédents pour étudier les forces entre une zone de contact se déplaçant sur des chaussées modèles. Le profil d'une chaussée réelle est de forme complexe et non uniforme, nous simplifierons cette complexité par la génération de chaussées modèles d'aspérités sphériques et de chaussées modèles d'aspérités coniques à la même hauteur et à différentes hauteurs. On abordera le cas où la distribution d'aspérités est périodique (de même dimension) et le cas où elle est aléatoire (de dimension différente). Nous étudierons l'évolution de la force de contact le long de chaque chaussée modèle ainsi que ses autospectres.

Chapitre I

Recherche bibliographique

Une des questions les plus pertinentes dans le domaine de l'environnement est le bruit du trafic routier. Des enquêtes récentes en Europe montrent que plus de 75 % de la population est gênée par cette nuisance. Les constructeurs automobiles sont parvenus progressivement à réduire plusieurs sources de bruit important sur les véhicules (Figure 1.1), voir Bérengier [7].

Les principales améliorations sont dues à

- La réduction du bruit du moteur qui dépend du régime et des rapports de boîte de vitesse.
- La réduction des transmissions mécaniques.
- La réduction du bruit émis par l'échappement.

Il s'avère maintenant que le bruit de contact pneumatique / chaussée est la source principale des nuisances sonores à plus de 50 Km/h. De plus le bruit généré par les pneumatiques augmente très vite avec la vitesse du véhicule.

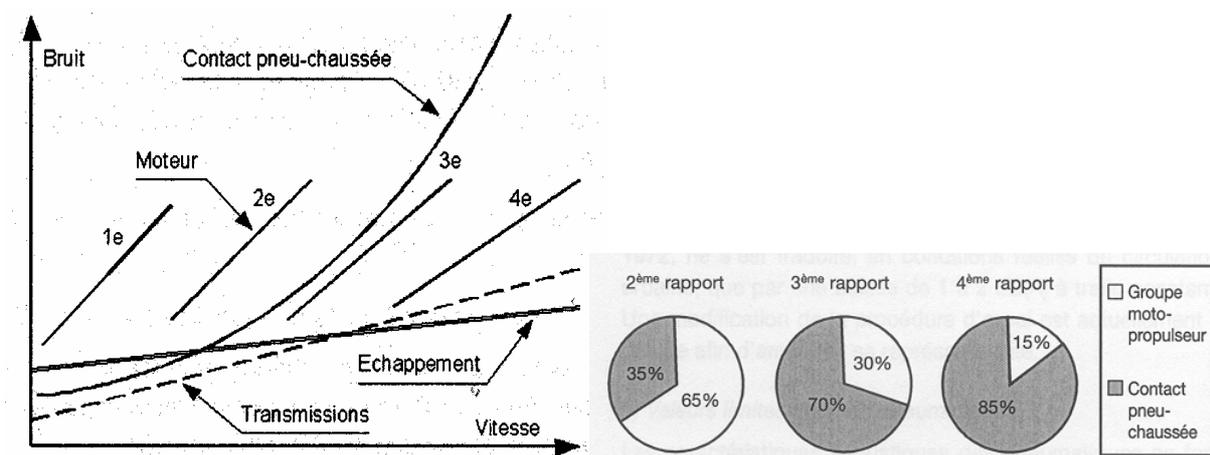


Figure 1.1 : Importance du bruit de contact pneumatique chaussée dans le bruit total émis par un VL

Le bruit de contact pneumatique chaussée provient de deux sources principales :

- La rugosité de la chaussée et la présence de rainures dans la gomme de la bande de roulement sont les sources mécaniques. Ces deux éléments sont essentiels pour l'adhérence par temps de pluie car ils permettent d'évacuer l'eau de la surface de contact. Mais ils engendrent des vibrations du pneumatique et donc une émission sonore. Ceci est dû à l'impact

de la texture de la chaussée sur les patins de gomme. Ces processus vibratoires interviennent plus particulièrement dans le domaine des basses fréquences.

- Les phénomènes "aéro-acoustiques" et plus particulièrement le phénomène d'air pumping sont des sources dues au seul fluide. L'air dans la zone de contact est emprisonné dans les rainures non communicantes du pneumatique sur la périphérie. A la sortie de la zone de contact, l'air subit une dépression brusque ce qui engendre la propagation d'une onde acoustique. Ce phénomène est dominant pour l'émission sonore dans le domaine des hautes fréquences.

1.1. Phénomènes physiques

1.1.1. Prédominance du bruit de contact pneumatique chaussée

Le bruit de contact pneumatique chaussée est la source principale des nuisances sonores des véhicules routiers. Plusieurs auteurs ont réussi à mettre en évidence son importance.

Sandberg [64] compare le niveau de bruit (moyenne énergétique sur une année) d'origine mécanique et celui du au bruit de contact pneumatique chaussée à différentes vitesses, et pour différents états de la chaussée. Les résultats sont donnés pour trois pourcentages de poids lourds différents (voir Figure 1.2). Il constate que le bruit de contact pneumatique chaussée est prédominant à plus de 50 Km/h et que le bruit augmente avec la vitesse. Le bruit est encore plus important en présence d'eau sur la chaussée. Rimondi [63] compare le niveau global du bruit en dB pour une voiture normale et pour une voiture insonorisée. On remarque sur la Figure 1.3 que la réduction du bruit des spectres au dessous de 1000 Hz correspond au bruit du moteur. Lelong [53] a effectué une étude expérimentale où il a évalué la différence entre le bruit généré par le moteur et le bruit de contact pneumatique chaussée, il a établi le tableau suivant :

$V(km/h)$	Rapport 1	Rapport 2	Rapport 3	Rapport 4	Rapport 5
20	+12	+6.4			
40		+4.8	-0.8		
60			-1.7	-5.6	
80			-2.5	-6.5	-9.5
100				-8.3	-10
120					-11

Tableau 1.1 : Différence en dB entre le bruit généré par le moteur et le bruit de contact pneumatique chaussée (vitesse, rapport engagé)

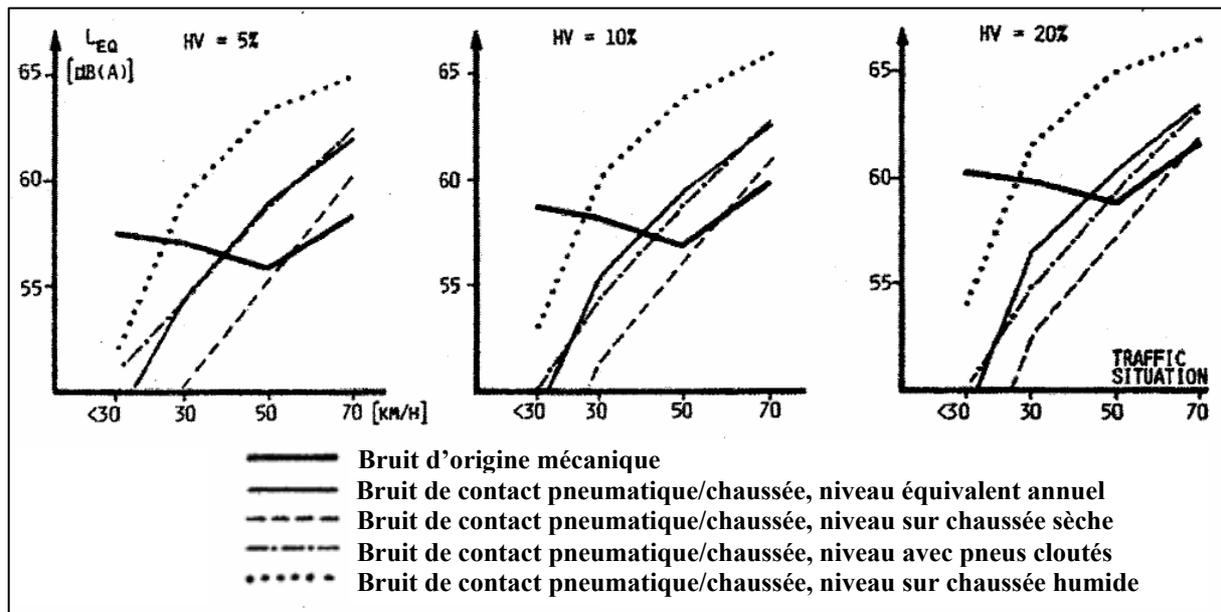


Figure 1.2 : Comparaison entre la part du bruit d'origine mécanique et celle du bruit de contact pour différents pourcentages de poids lourds dans quatre situations de roulage différentes

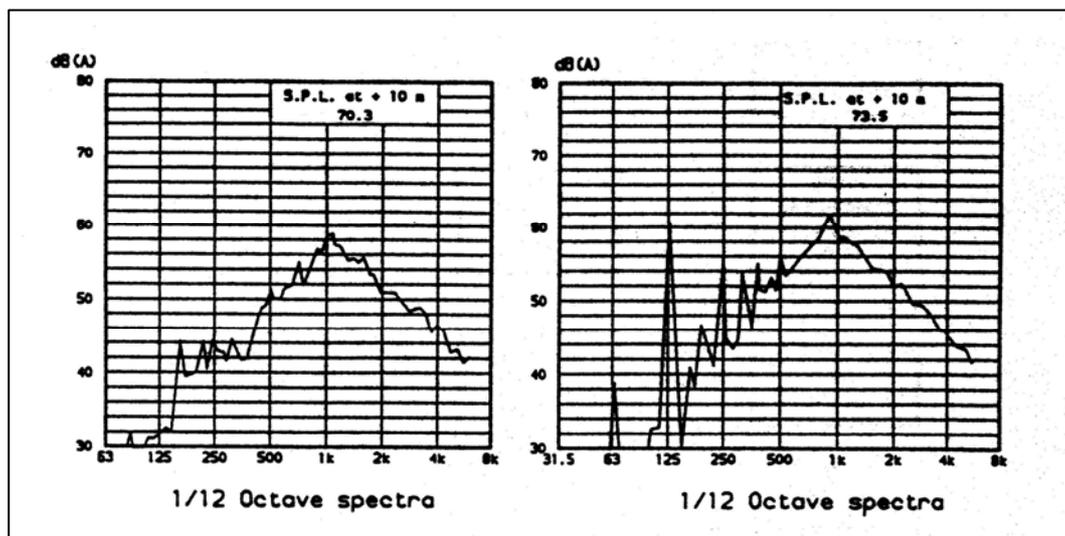


Figure 1.3 : Niveau global du bruit lors du passage d'un véhicule insonorisé (gauche) et d'un véhicule normal(droite) l

1.1.2. Localisation des sources sur le pneumatique

Afin de mieux comprendre le bruit de contact pneumatique chaussée Iwao & Yamazaki [41] se sont intéressés à la localisation des sources sur le pneumatique. L'utilisation de la méthode du déplacement par laser a permis de déterminer quatre zones émissives (voir Figure 1.4) ceci pour un pneumatique roulant à 50 Km/h. La première zone est située à l'arrière du pneumatique juste au dessus de la zone de contact au bord du pneumatique. Cette zone vibre dans la bande 400-600 Hz qui contient la première fréquence de passage des patins de gomme. La deuxième zone est placée dans la zone de contact pneumatique chaussée cette zone vibre sur une large bande (de 500 Hz à 2 KHz) et contient donc la deuxième fréquence de passage des patins. La troisième zone est placée à l'entrée de la zone de contact. La

quatrième se situe en haut du pneumatique. On garde à l'idée que l'émission acoustique d'un pneumatique est intense autour de 1000 Hz et que les vibrations des deux premières zones qui proviennent respectivement du bord du pneumatique et de la zone de contact sont les plus importantes.

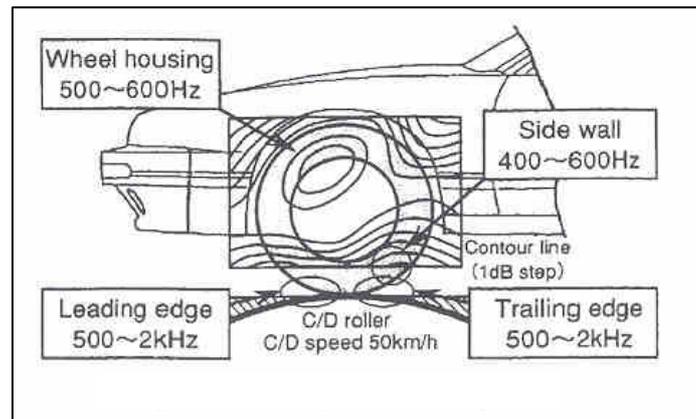


Figure 1.4 : Localisation des sources sur le pneumatique

1.1.3. Influence des paramètres géométriques, de la vitesse, de la température, de la pression de gonflement et du moment de torsion

Certains auteurs se sont intéressés à l'étude de l'influence de la vitesse, de la température, de la pression de gonflement, du moment de torsion ainsi qu'aux paramètres géométriques sur le bruit généré :

Ejsmont [19] a effectué des expériences où il a été conclu qu'une augmentation de la largeur du pneumatique de 10 mm augmente le bruit de contact de 0.3 dB. La largeur de la jante peut influencer sur le bruit d'au plus 1 dB. Il n'existe pas de corrélation entre le diamètre extérieur et le bruit émis.

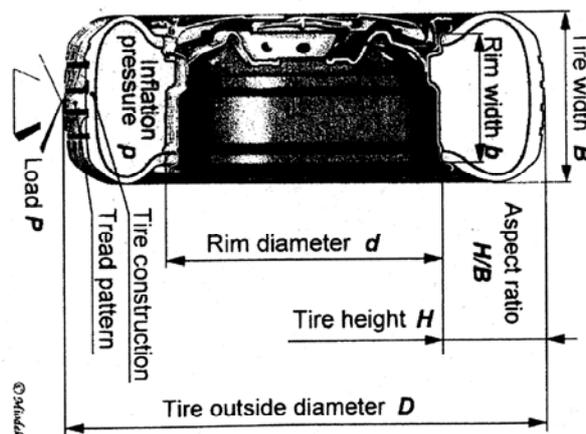


Figure 1.5 : Dimension du pneumatique

La vitesse a une grande influence sur le bruit comme on peut le voir sur la Figure 1.6 ci contre où Rimondi [63] a évalué la fonction L niveau du bruit en dB :

$$L = a + c \log_{10} V$$

a et c sont des constantes dépendant du pneumatique.

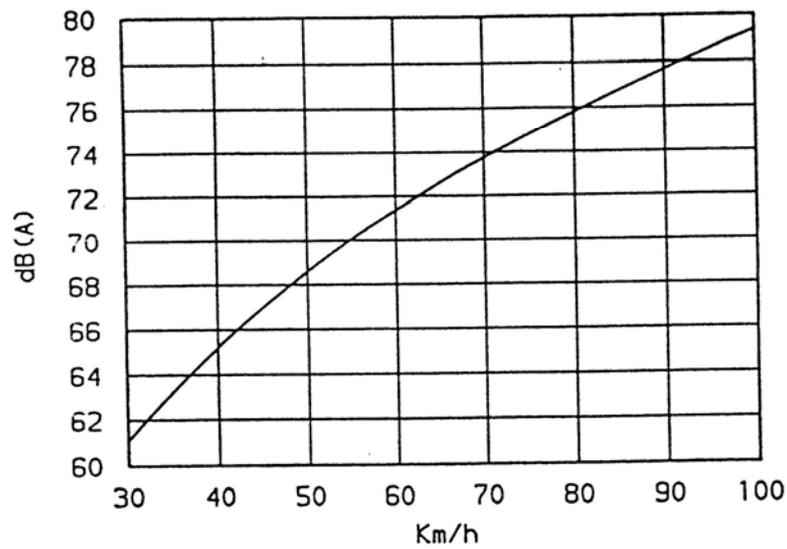


Figure 1.6 : Influence de la vitesse

La température influe aussi sur le bruit comme l'indique la Figure 1.7, où le niveau du bruit a été évalué par la relation :

$$L = B + A (T_a)^{-3}$$

A et B sont des constantes dépendant du pneumatique et T_a est la température en degré Kelvin

Pneumatique	$A 10^8$	B
Pneumatique 1 ■	2,6410	62,04
Pneumatique 2 +	2,1163	61,56
Pneumatique 3 ●	2,2824	58,80

Tableau 1. 2 : Approximation des coefficients A et B

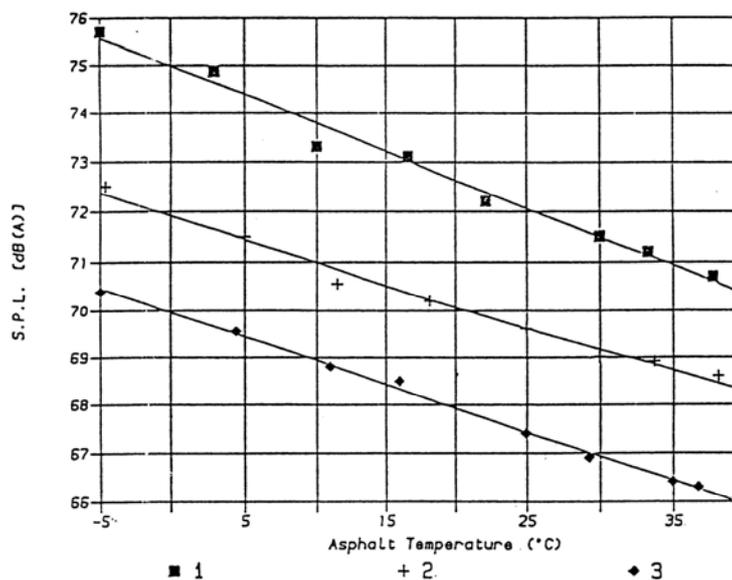


Figure 1.7 : Influence de la température

Le niveau exact du bruit change en fonction de la voiture et du pneumatique utilisés pendant les essais. Mais ces mesures donnent une idée générale. Les Figures 1.6 et 1.7 montrent les résultats de ces mesures respectivement en fonction de la vitesse et de la température. L'influence de la vitesse est bien plus forte que celle de la température qui peut éventuellement être ignorée dans une première approche du phénomène.

D'autre part Iwao & Yamazaki [41] ont effectué d'autres expériences qui leur ont permis d'étudier l'influence du moment de torsion et de la pression de gonflement. On remarque sur la Figure 1.8 que le niveau du bruit augmente avec le moment de torsion. D'autre part, l'effet de la pression interne varie avec le moment de torsion. Les résultats montrent que le niveau du bruit est minimum lorsque le moment de torsion est nul en présence d'une pression interne normale (200 kPa). Mais avec un moment de torsion non nul, le niveau du bruit augmente avec l'augmentation de la pression interne.

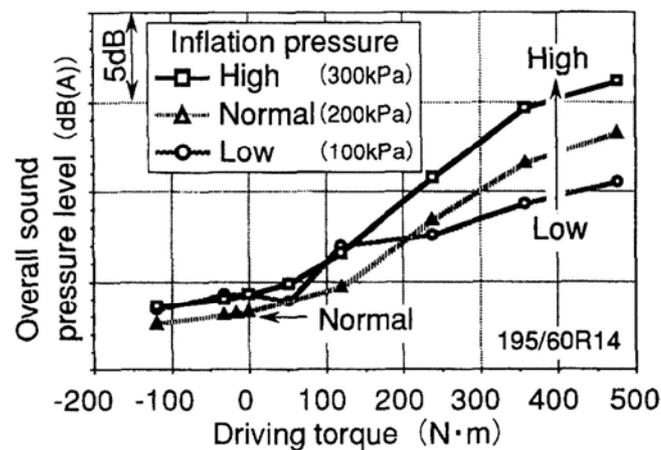


Figure 1.8 : Influence du moment de torsion et de la pression de gonflement

1.1.4. Influence de la chaussée et des patins de gomme

Différentes chaussées ont été testées par Rimondi [63] où il a été mis en évidence des écarts qui peuvent atteindre 10 dB. L'auteur rapporte les résultats de ses mesures selon la norme ISO 362. Il a utilisé un pneumatique lisse et un pneumatique avec des patins, avec différents types de chaussées (Figure 1.9). *A* est du granite et *F* est une chaussée très rugueuse. Le maximum du bruit pour la chaussée *A* vient des composantes hautes fréquences générées par les patins sur une surface lisse. Plus la rugosité augmente, plus le niveau du bruit des composantes basses fréquences augmente.

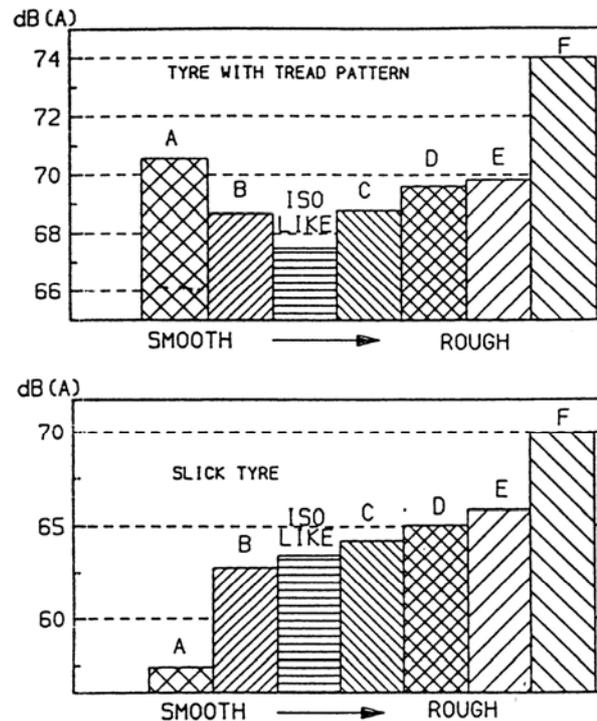


Figure 1.9 : Influence de la chaussée

Une étude sur l'influence des paramètres de la rugosité de la chaussée sur le bruit émis a aussi été effectuée par Delanne [15]. L'auteur rapporte les spectres mesurés pour un pneumatique roulant sur différentes qualités de surface de revêtement, une surface lisse, une avec une rugosité de longueur d'onde et d'amplitude de l'ordre du *mm*, micro rugueuse, et une avec une rugosité de longueur d'onde et d'amplitude de l'ordre du *cm*, macro-rugueuse. Le spectre émis sur revêtement lisse est plus riche en hautes fréquences. Ceci est expliqué par un régime de glissement instable. Tandis que le spectre émis sur revêtement rugueux est plus riche dans le domaine des basses fréquences. Le choc sur les éléments de rugosité est plus important sur revêtement rugueux. Une partie de l'excitation basse fréquence serait due à ce phénomène.

Dans Bar & Delanne [5] les auteurs concluent que les revêtements à faible granularité et très poreux à l'air minimisent le bruit de contact et que les revêtements poreux d'épaisseur 6 à 10 *cm* sont ceux qui devraient donner les meilleurs résultats. Nelson [59] a étudié l'influence de la présence d'eau sur la chaussée. Il a été établi qu'un écart de 10 *dB* pouvait être observé par rapport à une chaussée sèche. Ejsmont [18] a étudié l'influence des différents types de bande de roulement sur le niveau sonore du à la résonance de l'air, sur le niveau global pondéré en *dB* et sur le niveau sonore de l'impact des patins de gomme.

Selon les différences que l'on constate sur le bruit émis par ces différentes formes de bande de roulement Tableau 1.2, on peut tirer quelques conclusions qualitatives sur le mécanisme de génération du bruit de contact :

- Les vibrations radiales des patins de gomme peuvent être diminuées en empêchant qu'un bloc entier au bord d'attaque rentre en contact avec la chaussée. La solution apportée est d'ajouter des micro rainures.
- En ce qui concerne la résonance d'air, on peut influencer sur la fréquence en modifiant la longueur des rainures. On peut aussi diminuer leurs amplitudes en changeant leurs angles, leurs largeurs ou en faisant des courts-circuits (des rainures en courbe)

Iwao & Yamazaki [41] comparent les spectres du bruit de contact d'un pneumatique lisse et d'un pneumatique commercial (Figure 1.10). Ils ont constaté que le niveau global de pression pour le pneumatique lisse diminue considérablement dans la zone 400-600 Hz et 800-1.25 KHz qui correspondent respectivement à la première et deuxième fréquence de passage des patins.

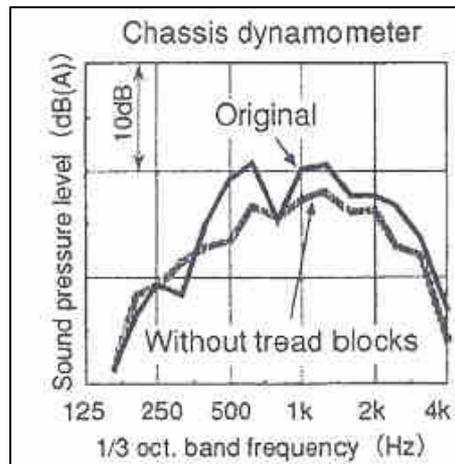


Figure 1.10 : Spectres du bruit de contact d'un pneumatique lisse et d'un pneumatique commercial

- Influence of the tread pattern variations on the A-weighted sound levels and noise spectra

CHANGES IN THE TREAD PATTERN		EFFECT ON:			
		A-WEIGHTED SOUND LEVEL	FREQUENCY SPECTRUM		
			Level of tread impact fundamental freq.	Level of air resonance-frequencies	Level of highest frequencies (4 - 16kHz)
	Increase of groove width 2 → 9 mm	↑	↑	↑	↓
	9 → 12 mm	↓	↓	●	↓
	Decrease of groove angle (relative to rolling dir.) 90 → 70°	↓	↓	↓	●
	70 → 0°	●	↓	●	●
	Addition of symmetrically diagonal grooves	●	●	●	↓
	Addition of circumferential grooves to a transverse groove pattern	↓	●	↓	↓
	Addition of microslots	↓ ●	↓	●	●
	Opening of pocket type grooves	↓	●	↓	↓
	Matching of curvilinear grooves to trailing instead of leading edge	↓	↓	●	●

↑ Increase; ↓ Decrease; ● No influence.

Tableau 1.3 : Influence du profil des patins de gomme

Nous avons vu l'importance du bruit de contact pneumatique chaussée par rapport aux autres sources du bruit du trafic routier. On a présenté l'influence des principaux paramètres sur le bruit généré. Des références plus détaillées peuvent être trouvées dans Fadavi [20] et Campanac [12]. Dans la partie qui suit on approfondira plus en détails les modélisations qui ont été faites du bruit du contact pneumatique chaussée, afin d'évaluer et d'essayer de quantifier cette nuisance sonore.

1.2. Modélisation du bruit de contact pneumatique / chaussée

Dans ce qui suit nous allons citer une partie de ce qui a été fait en ce qui concerne la modélisation du bruit de contact pneumatique chaussée. Les deux sources principales sont les phénomènes aéro-acoustiques et les vibrations du pneumatique dues à la rugosité de la chaussée. Pour modéliser le bruit d'origine mécanique, il faut connaître d'une part les efforts de contact entre le pneumatique et la chaussée qui sont la source de vibration du pneumatique, et d'autre part il faut connaître le comportement vibratoire du pneumatique. Une fois ces modélisations effectuées, il est nécessaire d'avoir un outil qui puisse évaluer le rayonnement causé par ces sources. Nous allons développer ces différents points dans cette partie.

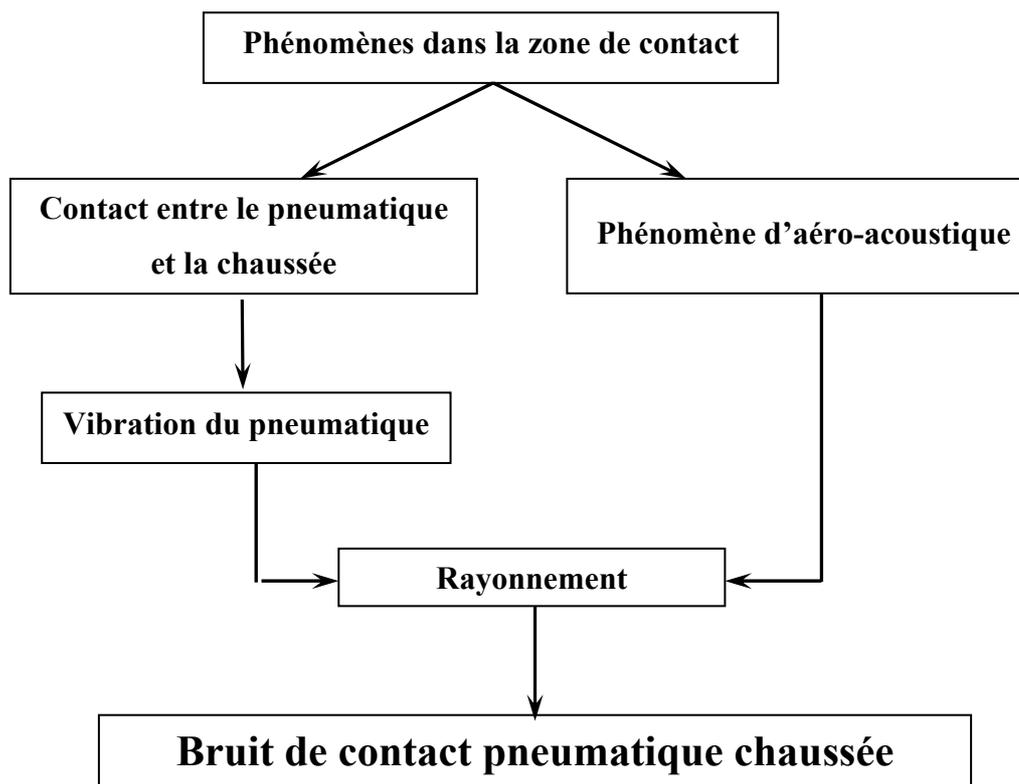


Figure 1.11 : *Bruit de contact pneumatique chaussée*

1.2.1. Rayonnement acoustique

Le rayonnement acoustique du pneumatique est souvent déterminé à partir de la connaissance de la vitesse de surface de structure. Keltie [44] se place dans une configuration $2D$ en espace libre pour l'étude acoustique de son pneumatique. A partir de la connaissance du champ de vitesse de la surface de l'enveloppe de son pneumatique et en fixant à zéro la vitesse pour deux positions méridionales de sa structure du fait de la présence de la jante, il prédit le rayonnement de sa structure. L'un des phénomènes importants qui intervient dans le rayonnement du bruit de contact pneumatique chaussée est le phénomène d'effet dièdre. Il consiste en l'amplification dans une direction privilégiée (directivité) de l'énergie rayonnée par les sources du bruit de contact. L'effet dièdre peut être appréhendé de deux façons différentes :

- Il peut être considéré comme l'effet de la présence de la chaussée sur le rayonnement du pneumatique *Méthode de Kropp*.
- Il peut être aussi considéré comme l'effet de la présence du pneumatique sur le rayonnement d'une source située sur la chaussée *Méthode Standard*.

L'effet dièdre peut être quantifié par le calcul, en rapportant la pression créée par la source en présence du pneumatique et de la chaussée à une pression de référence due à la même source. C'est cette pression de référence qui diffère selon la méthode utilisée.

La directivité de l'émission du bruit de roulement ainsi que l'amplification due à l'effet dièdre ont déjà fait l'objet de nombreuses études expérimentales et de l'élaboration de modèles. Dans Klein [46] l'auteur propose un modèle analytique en $2D$, où il estime le rayonnement dans le cas d'un cylindre infini. Il adapte aussi son modèle au cas tridimensionnel du contact d'une sphère sur une chaussée. La comparaison de l'amplification obtenue dans les deux cas permet de mettre en évidence l'effet de la largeur infinie du cylindre. C'est à dire qu'au lieu d'obtenir, pour une fréquence de 100 Hz, une amplification de 6 dB, on obtient une amplification de 13 dB. La comparaison de ces résultats avec des résultats expérimentaux met en évidence une différence importante de niveau dans le domaine des basses fréquences qui s'amointrit progressivement lorsque l'on se rapproche du domaine des amplifications maximales. L'auteur conclut que cette différence est due à la largeur infinie du cylindre qui modélise le pneumatique.

Certains auteurs ont élaborés des méthodes numériques pour évaluer l'amplification. Fadavi [20] donne une distribution de vitesse normale sur l'enveloppe du pneumatique et utilise la méthode des éléments de frontières (*logiciel Samray*). Le niveau sonore et l'amplification du bruit de roulement ont été calculés en fonction de la fréquence et du point de mesure dans les cas $2D$ et $3D$. Anfosso-Lédée [3] applique la même méthode et introduit l'effet d'absorption d'un asphalte poreux sur l'amplification, les résultats sont en accord avec les résultats expérimentaux. D'autres calculs numériques employant la méthode indirecte d'élément de frontière ont été effectués par Graf [28]. Les résultats sont en concordance avec les mesures dans le domaine de fréquence allant jusqu'à 2500 Hz. Bécot [6] a appliqué la méthode des sources équivalentes pour calculer le rayonnement en présence d'une chaussée avec une impédance donnée.

Par conséquent, le sujet du rayonnement a été bien exploré et nous nous préoccupons plus spécialement de l'étude des autres phénomènes.

1.2.2. Vibration du pneumatique

Dans cette partie on s'intéressera à l'une des sources du bruit de contact pneumatique chaussée, qui est la vibration du pneumatique. On présentera quelques travaux qui ont été faits dans le domaine pour essayer de comprendre au mieux le phénomène.

L'interférométrie holographique a été utilisée par Iwao & Yamazaki [41] pour mesurer le déplacement de la surface de la bande de roulement et du bord du pneumatique. Pour cela un pneumatique lisse a été excité par une impulsion au milieu de sa bande de roulement (Zone de contact), voir la Figure 1.12 ci dessous. Il a été observé que les vibrations sont grandes dans la bande 500-800 Hz pour le bord et au-dessus de 800 Hz pour la zone de contact. Donc les fréquences de résonance de ces zones sont différentes. Les auteurs concluent que la source principale du bruit de contact est cette excitation qui dépend de la rugosité de la chaussée. Campanac & Duhamel [13] ont estimé les vibrations du pneumatique causés par l'excitation des patins de gomme. Il a été pris en compte l'état de pré-contrainte dû à la pression, la force centrifuge, la rotation du pneumatique et le contact du pneumatique avec la chaussée, ceci afin de calculer les modes et les fréquences propres. Il a été obtenu des résultats dans le cas où les rainures du pneumatique ont été modélisées par la méthode des défauts de masse.

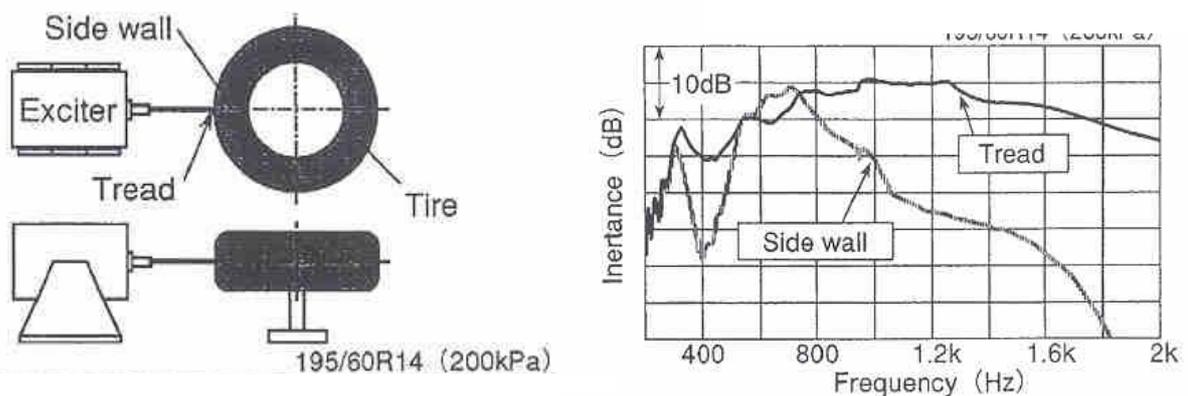


Figure 1.12 : Interférométrie holographique

Les études essayent de modéliser les vibrations du pneumatique par des modèles théoriques ou des modèles numériques. Des modèles théoriques à 2 dimensions ont été proposés par Dodge [16], Kropp [47], Heckel [35] et Dorhman [17], où le pneumatique lisse est un anneau circulaire tournant à une vitesse angulaire constante. Kropp [47] et Heckel [35] (voir Figure 1.13) ont repris les équations du modèle proposé par Boehm [8]. L'écriture des équations du mouvement suivi d'une décomposition en série de Fourier conduisent aux fréquences et aux modes propres. La vitesse et l'admittance calculées par ce modèle d'anneau circulaire sont en bon accord avec les mesures expérimentales pour les basses fréquences.

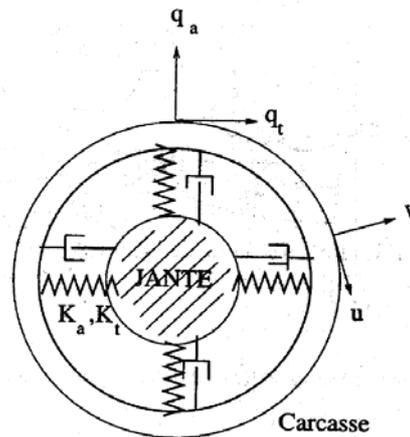


Figure 1.13 : Modèle d'anneau circulaire

Plusieurs auteurs comme Huang [39], Kung [51] et Prasad [61] ont proposé de modéliser le pneumatique en tenant compte de la présence d'une chaussée lisse. Dans ce but, ils utilisent la méthode de la réceptance pour le calcul des fréquences propres du pneumatique.

La réceptance est définie comme le rapport : $\alpha_{ij} = \frac{X}{F}$

Où X est la réponse de la déflexion d'un système A (l'anneau circulaire tournant) à un certain point i et F est la force harmonique ou le moment d'entrée au point j (système B la chaussée) (Figure 1.14).

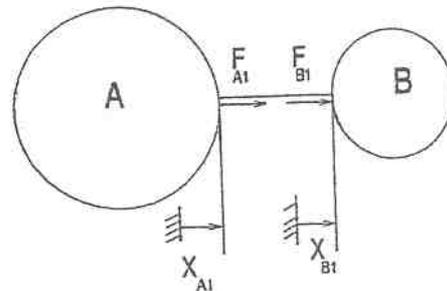


Figure 1.14 : Méthode de la réceptance

Un modèle hybride d'anneau circulaire qui inclut l'effet de l'accélération de Coriolis est proposé par Huang & Hsu [38]. Ce modèle montre que l'accélération de Coriolis pour des fréquences de rotation élevées a des effets importants sur la réponse de l'anneau circulaire.

Généralement les formulations analytiques de vibration du pneumatique utilisant la superposition modale donnent de bons résultats pour les réponses du pneumatique en basses fréquences ($f \leq 400 \text{ Hz}$). Kropp [48] décrit le comportement vibratoire du pneumatique à l'aide de modèles différents en fonction de la zone de fréquence :

- Modèle de l'anneau circulaire aux basses fréquences ($f < 400 \text{ Hz}$)
- Modèle de la plaque orthotrope ($400 < f < 2500 \text{ Hz}$)
- Modèle des deux couches ($2500 < f < 5000 \text{ Hz}$)

Aux moyennes fréquences les longueurs d'onde sont encore grandes par rapport à l'épaisseur de la carcasse du pneumatique. La constitution interne du pneumatique reste homogène.

L'influence du rayon de courbure peut être négligé. De plus les ondes qui se propagent autour du pneumatique perdent tant d'énergie lors de la propagation qu'on peut les négliger au-delà d'une certaine distance. Cela permet de modéliser la structure finie du pneumatique par un système qui semble infini, d'où un modèle possible qui est le modèle de la plaque orthotrope décrivant le mouvement de la carcasse.

Pour inclure les effets locaux dans les directions radiales et tangentielles aux hautes fréquences un modèle de pneu tridimensionnel basé sur deux couches élastique couplées a été développé par Larsson [52] et Andersson [2]. Le modèle néglige la courbure du pneu. La première plaque représente la ceinture du pneumatique tandis que la deuxième représente la bande de roulement. Ce modèle est validé en comparant les résultats obtenus avec des données mesurées sur un pneu réel. L'accord entre les résultats du modèle et les résultats de mesures est bon sur la gamme de fréquence entière jusqu'à 4 KHz. Cependant, quelques limitations fondamentales du modèle doivent être prises en compte. La courbure du pneu est seulement en partie incluse dans le modèle comme une augmentation du terme de la rigidité, le couplage entre les déplacements tangentiels et radiaux par suite de la géométrie courbée n'est pas inclus. Hamet [32] propose une formulation afin d'analyser le comportement vibratoire du pneumatique où il identifie pour cela la fonction de Green du pneumatique et l'exprime comme une superposition d'ondes dans le pneumatique. Cette méthode permet d'avoir des résultats similaires à celles des autres formulations analytiques aux basses fréquences ($f \leq 400 \text{ Hz}$) et permet d'avoir des résultats satisfaisants aux moyennes fréquences ($400 \leq f \leq 2500 \text{ Hz}$).

Une autre méthode de modélisation a été proposée où le pneumatique est modélisé par éléments finis. Dans Kung [50] il est modélisé par une coquille circulaire de révolution. Un morceau circulaire de cette coquille est maillé par des éléments non linéaires (12 degrés de liberté par élément), voir Figure 1.15. Le principe du minimum d'énergie potentielle donne la matrice de rigidité d'un élément où les termes non linéaires qui font intervenir l'effet de la pression interne et de la rotation du pneumatique, sont pris en compte. La jante est modélisée par une paire de plaques d'acier sur laquelle le pneumatique est monté. Une étude de convergence a montré que 10 éléments suffisent pour modéliser le pneumatique et la jante. L'auteur a trouvé des modes propres similaires à ceux calculés par le modèle d'anneau circulaire. Saigal [64] considère le pneumatique comme une membrane toroïdale sous une pression interne et monté sur une jante. Il maille la surface de cette membrane toroïdale avec des éléments à 4 nœuds et non linéaire à 12 degrés de liberté. Il calcule les fréquences propres de vibration du pneumatique, (Figure 1.16).

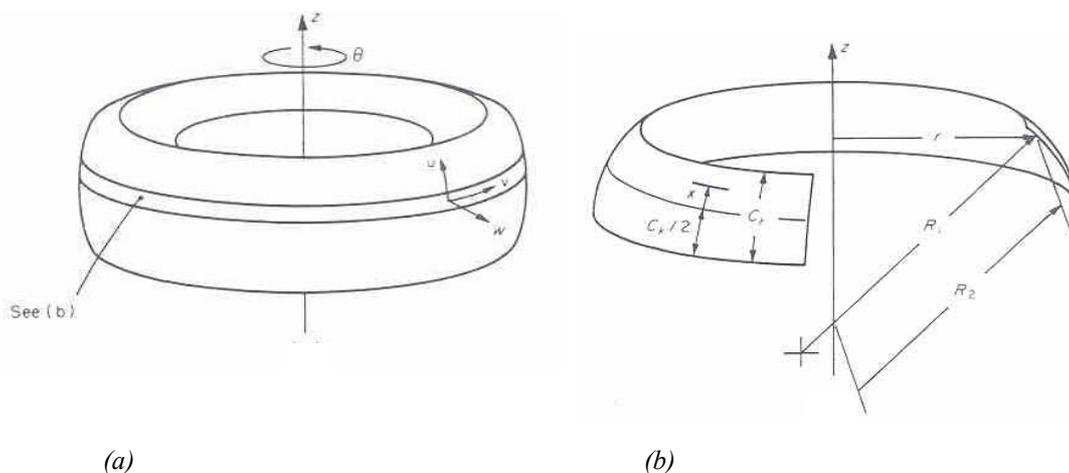


Figure 1.15 : (a) élément coque de révolution, (b) géométrie d'un élément

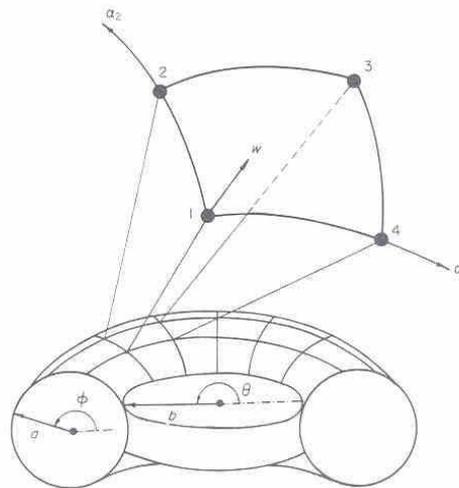


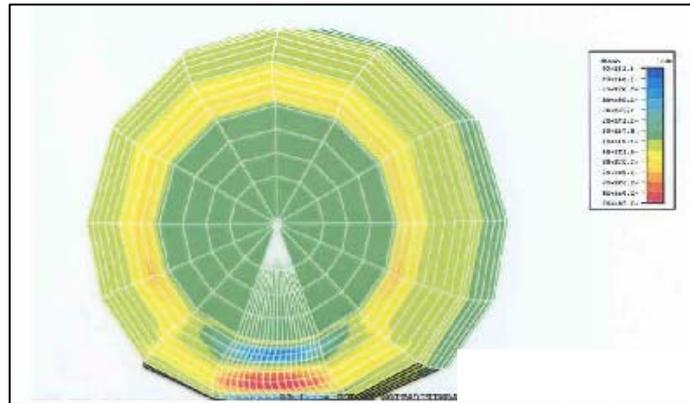
Figure 1.16 : Membrane toroïdale, modélisation du pneumatique par des éléments finis à 12 degrés de liberté

Dans Ni et al [60] les auteurs étudient l'influence de la jante sur la propagation du bruit émis, en utilisant la méthode des éléments finis. L'optimisation de la jante diminue considérablement le bruit émis. Il a été montré que l'utilisation de l'aluminium au lieu de l'acier diminue le bruit de roulement à l'intérieur du véhicule de 7 dB à 285 Hz. Nakashima & Wong [58] développent un modèle d'éléments finis en 3D. Ils utilisent les propriétés élastiques du pneumatique afin de mieux considérer la déformation du pneumatique après chargement par le poids du véhicule.

Fadavi [20] modélise les vibrations du pneumatique par la méthode des éléments finis. Il a effectué un maillage en 3D (voir Figure 1.17). Il étudie le cas d'un roulement quasistatique du pneumatique gonflé et chargé sous le poids du véhicule. La carcasse et les flancs sont constitués de caoutchouc renforcé par des fibres de tissus et d'acier et sont modélisés par des matériaux isotropes transverses. La bande de roulement est constituée d'un matériau hyperélastique. L'influence de la pression de gonflement, du chargement et de la vitesse de roulement sur la contrainte principale dans la carcasse et sur la taille de la zone de contact ont été étudiés. Il constata que ces paramètres changent plus au niveau de la zone de contact, le changement de vitesse ne change pas sensiblement ces paramètres. La diminution de la pression de gonflement diminue sensiblement la valeur de la contrainte principale dans la carcasse. Une augmentation du chargement appliqué influe sur le déplacement du bord du pneumatique.

Kim [45] modélise les vibrations d'un pneumatique par éléments finis avec des éléments de coque multicouche en utilisant Abaqus. Il calcule les modes jusqu'à 400 Hz et fait une étude de sensibilité aux différents paramètres. L'auteur s'est intéressé aussi au rayonnement acoustique en utilisant la méthode des équations intégrales.

Les modèles 3D en élément finis donnent de bons résultats dans le domaine des fréquences jusqu'à 300-400 Hz, mais malheureusement ils sont trop lourds pour le calcul au delà.

Figure 1.17 : *Modèle élément finis 3D*

1.2.3. Phénomènes dans la zone de contact

1.2.3.1. Phénomène aéro-acoustique (Air Pumping)

L'air dans la zone de contact est emprisonné dans les rainures du pneumatique non communicante en périphérie du pneumatique. A la sortie de la zone, l'air subit une dépression brusque ce qui engendre la propagation d'une onde acoustique. Ce phénomène est dominant pour l'émission sonore dans le domaine des hautes fréquences.

Les phénomènes aéro-acoustiques ont été attribués à l'air pumping par Haydn [34]. Jennewein & Bergmann [42] supposent que l'air pumping peut être la partie manquante entre le bruit généré par les vibrations mécaniques et le bruit de contact. Gagen [24] constate que la pression partielle de l'air dans les cavités du pneumatique ne vérifie pas les équations de la théorie classique de l'acoustique. Il propose une approche plus réaliste, à partir des équations d'Euler pour la pression partielle de l'air en mouvement dans les cavités. L'auteur donne une solution analytique approchée et une solution numérique. Il conclut que la vitesse de l'air sortant de la cavité dépend linéairement de la longueur de la cavité. Une autre étude a été faite par Gerrestsen [26] où il mesure la pression à 1 m d'un pneumatique lisse roulant sur une chaussée artificiellement rugueuse. Les résultats obtenus montrent que les vibrations mécaniques sont dominantes aux basses fréquences et que l'air pumping domine vers les hautes fréquences.

Une étude a été faite par Fujikawa, Koike, Oshino & Tachibana [23] sur la résonance des patins de gomme. La première partie consiste à effectuer une recherche fondamentale. Le principe étant le suivant: Un générateur de bruit permet d'envoyer le bruit dans une rainure et à l'aide d'un microphone, la distribution de la pression à l'intérieur de la rainure est mesurée (voir Figure 1.18). Le modèle étant placé sur deux types de chaussées différentes à la sortie de la rainure, l'intensité du bruit rayonné vers l'extérieur a été mesurée on utilisant deux microphones situés juste à la sortie de la rainure. Ceci permet de comparer et d'établir une relation entre la distribution de la pression acoustique dans les rainures (mesurée par un microphone à l'intérieur de la rainure) et l'intensité du bruit émis à l'extérieur. Il a été confirmé que la résonance des rainures du pneumatique au contact avec une surface est un facteur important sur le bruit émis, (voir Figure 1.19).

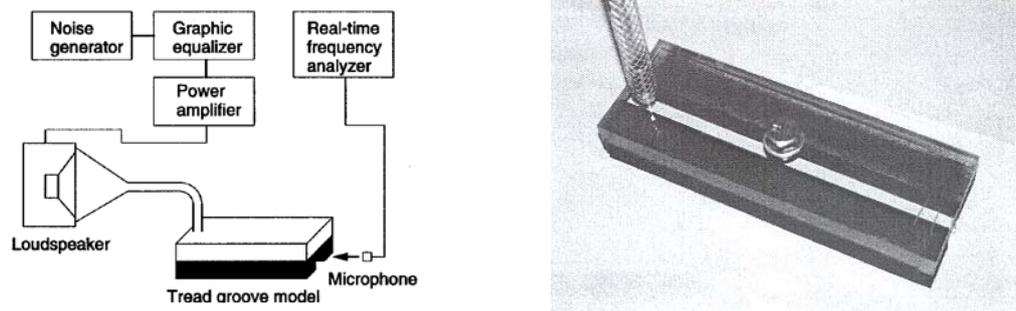


Figure 1.18 : Dispositif expérimental

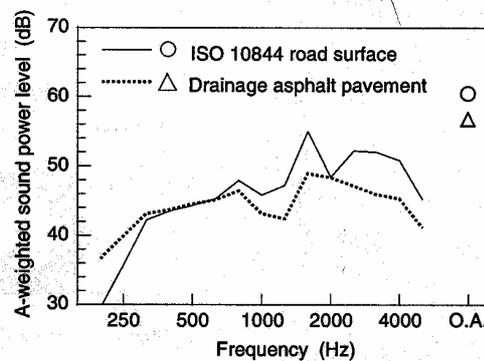


Figure 1.19 : Effet des propriétés superficielles de la chaussée sur le niveau sonore émis

La deuxième partie consistait à étudier la résonance des rainures dans le cas réel du roulement d'un pneumatique. Deux genres de pneumatiques ont été utilisés, voir le dispositif expérimental Figure 1.20. Un pneumatique est équipé d'une rainure latérale muni d'un accéléromètre et d'un capteur de pression. Le deuxième pneumatique possède à l'une de ces rainures un accéléromètre et d'un capteur de pression. L'accélération à côté du capteur de pression est aussi mesurée. Afin de prendre en compte les vibrations du capteur de pression, deux surfaces ont été utilisées (comme précédemment).

Il a été observé pour le pneumatique muni d'une seule rainure latérale et à une vitesse de roulement de 50 km/h que le niveau de pression à l'intérieur de cette rainure pouvait atteindre 600 Pa à l'entrée et à la sortie de la zone de contact et ceci sur une chaussée ISO 10844 alors que lors du roulement sur une chaussée d'enrobé drainant, pratiquement aucun changement du niveau de pression n'a été observé (pratiquement nul) Figure 1.21. Pour le pneumatique muni d'un bloc de patin de gomme, il a été observé que le niveau de pression atteignait au maximum 250 Pa lorsque le capteur se trouve au milieu de la surface de contact. Puis elle diminue (cas où la chaussée est ISO 10844) tandis que pour la deuxième chaussée en enrobé drainant, il a été observé des variations d'amplitude de pression moindre par rapport à la chaussée ISO 10844 (Figure 1.22). Les auteurs ont conclu qu'il y a bien une résonance dans les rainures du pneumatique et que les caractéristiques de la chaussée étaient un facteur important sur la génération du bruit.

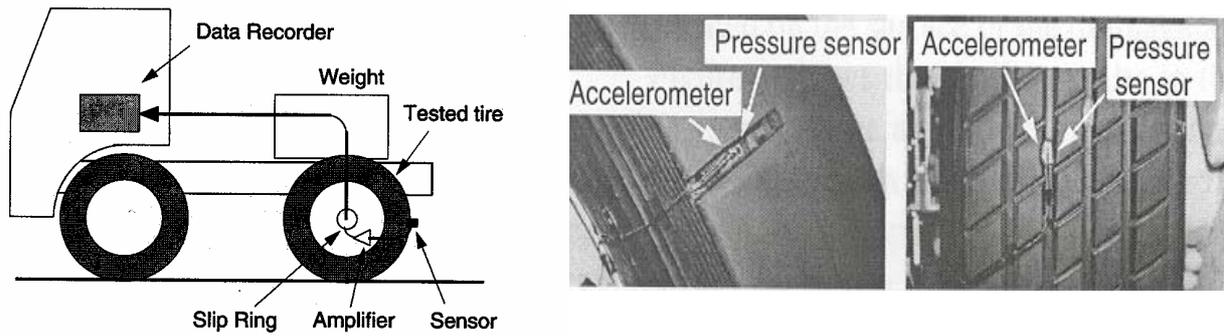


Figure 1.20 : Dispositif expérimental

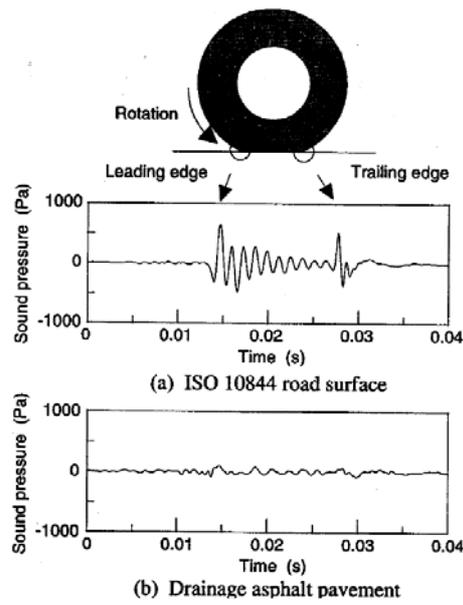


Figure 1.21 : Effet de la rugosité de la chaussée sur la pression à l'intérieur de la rainure (pneumatique avec une rainure latérale)

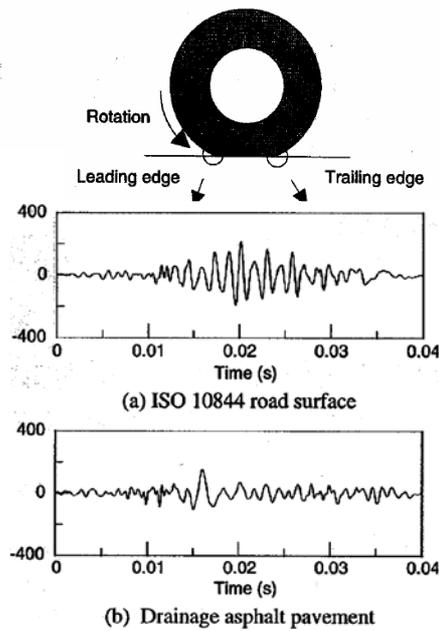


Figure 1.22 : Effet de la rugosité de la chaussée sur la pression à l'intérieur de la rainure (pneumatique commercial)

La rugosité de la chaussée et la répartition des rainures du pneumatique ont un rôle important sur le bruit émis que ce soit sur la vibration du pneumatique ou sur les phénomènes aéroacoustiques.

Pour avoir une bonne approximation des vibrations du pneumatique, il est important de bien connaître les excitations du pneumatique engendrées par l'influence de la rugosité de la chaussée. Il faut donc avoir une bonne approximation de la répartition de la charge dans la zone de contact.

1.2.3.2. Modélisation du contact d'un pneumatique sur une chaussée

Plusieurs modèles sur le comportement mécanique du contact ont été proposés. Une bonne partie est adaptée aux légers chargements et les autres modèles étudient les chargements plus grands donc avec une déformation plastique des aspérités. Archard [4] estime que la déformation plastique n'a pas de rôle déterminant, la surface de contact peut être proportionnelle à la charge même avec un contact purement élastique. Le problème de contact comme nous le considérons de nos jours a ses origines dans le dernier quart du 19^{ème} siècle, l'évaluation des tensions de contact de deux solides élastiques a été proposé par Hertz [36]. Pour exprimer la force de contact en fonction de l'interpénétration, il a fait les hypothèses suivantes :

- Le secteur de contact est elliptique.
- La surface est continue et non conforme : $a \ll R$
- Chaque solide peut être considéré comme un demi espace élastique.
- Pas de frottement entre les deux surfaces en contact.

Il aboutit à la relation suivante :

$$P = K \delta^{3/2}$$

Avec :

$$K = \frac{4E^* \sqrt{R}}{3}$$

Où P représente la charge normale appliquée, R est le rayon de courbure équivalent et δ est l'interpénétration du corps (1) dans (2).

Le modèle d'aspérité de base a été étendu pour inclure des aspects de surfaces courbées Greenwood & Tripp [30], deux surfaces rugueuses avec des aspérités mal alignées Greenwood & Tripp [31], une non uniformité des rayons de courbure des aspérités Hisakado [37], des aspérités elliptiques Bush et Al [11] et des surfaces anisotropes Mc Cool [56].

Williamson & Greenwood [69] proposent une théorie d'un contact élastique en se basant sur des surfaces approximatives, elles sont représentées par une série d'aspérités qui sont dispersées au dessus d'un plan de référence. Ils montrent comment la déformation due au contact dépend de la topographie de la surface et ils établissent un critère pour la distinction des contacts élastiques et des contacts plastiques. La théorie indique l'existence d'une dureté de contact élastique qui dépend des propriétés élastiques et de la topographie (cette dureté joue le même rôle que dans le contact plastique).

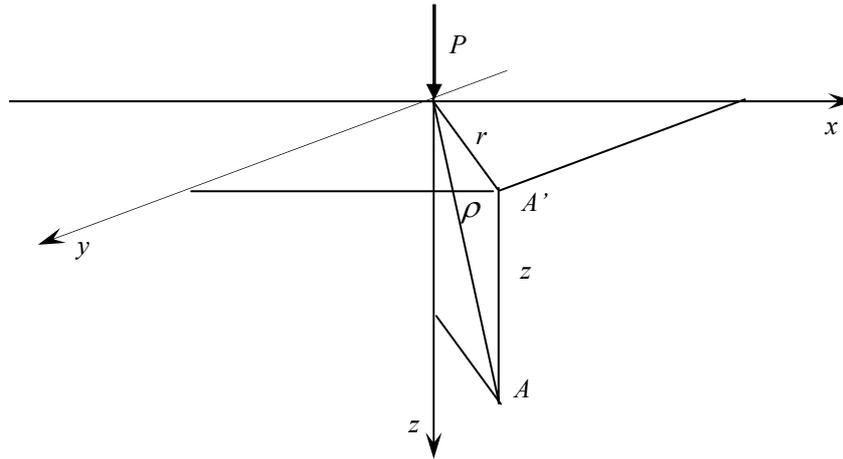


Figure 1.23 : Demi-espace soumis à une force statique

Boussinesq [9] a présenté une solution qui donne les expressions explicites de la réponse d'un demi-espace soumis à une force statique P à la surface libre (Figure 1.23). On note G le module de cisaillement élastique. ρ et r sont respectivement les distances entre la position de la force et les points A et A' :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Les déplacements et les contraintes à un certain point $A(x, y, z)$ dans le demi-espace sont donnés par :

$$u_x = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right]$$

$$u_y = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right]$$

$$u_z = \frac{P}{4\pi G} \left[\frac{z^2}{\rho^3} - \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right]$$

$$\sigma_{xx} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{x^2 - y^2}{r^2} + \frac{zy^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zx^2}{\rho^5} \right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{y^2 - x^2}{r^2} + \frac{zx^2}{\rho^3} \right] - \frac{3zy^2}{\rho^5} \right]$$

$$\sigma_{zz} = -\frac{3Pz^3}{2\pi\rho^5}$$

$$\sigma_{xy} = \frac{P}{2\pi} \left[\frac{1-2\nu}{r^2} \left[\left(1 - \frac{z}{\rho}\right) \frac{xy}{r^2} + \frac{xyz}{\rho^3} \right] - \frac{3xyz}{\rho^5} \right]$$

$$\sigma_{xz} = -\frac{3Pxz^2}{2\pi\rho^5}$$

$$\sigma_{yz} = -\frac{3P}{2\pi} \frac{yz^2}{\rho^5}$$

Plusieurs solutions ont été dérivées de la solution de Boussinesq, il est donné un excellent exposé dans le livre de Galin [25]. Sneddon [67] établit une solution du problème axisymétrique de Boussinesq qui lui a permis de déduire des formules simples donnant la profondeur de pénétration d'un pénétrateur de profil arbitraire ainsi que la charge totale nécessaire pour assurer cette pénétration.

Dans les années 60 l'intérêt du problème du contact viscoélastique a surgi, Graham [29] propose des expressions qui définissent le champ de déformation provoqué par une distribution de pression s'exerçant, pendant un temps arbitraire, sur une surface d'un corps semi infini, de nature viscoélastique homogène et isotrope. La distribution des contraintes normales de surface qui se manifestent lorsqu'un pénétrateur rigide de profil arbitraire, est appuyé à la surface d'un corps viscoélastique semi infini, est déterminée sous la forme d'une famille de solutions à un seul paramètre, correspondant au problème purement élastique.

L'une des approches pour la résolution d'un problème de contact d'une sphère rigide avec un matériau viscoélastique a été suggérée par Radok [62]. Elle consiste à remplacer les constantes élastiques par un opérateur intégral correspondant à la relation viscoélastique contrainte déformation, dans lequel $a(t)$ est une fonction monotoniquement croissante du temps t , (voir Figure 1.24).

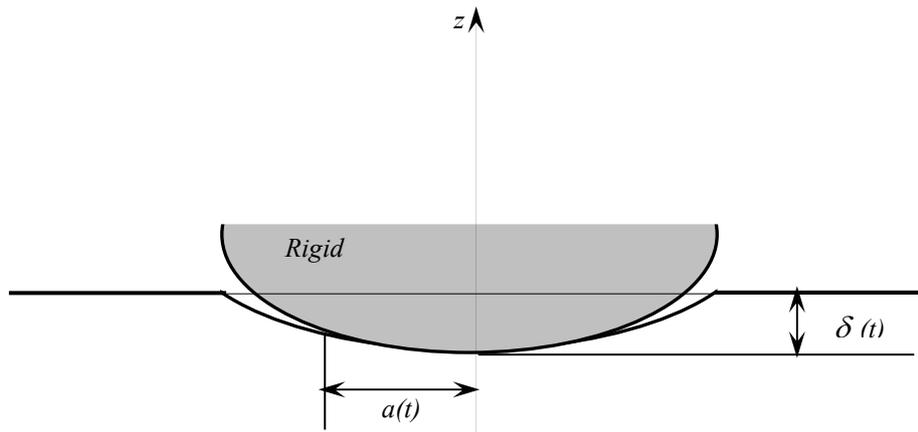


Figure 1.24 : Contact d'un poinçon de profil arbitraire avec un plan viscoélastique

La méthode de Radok mentionnée ci-dessus a été également employée par Al Khozaie et Lee [1] pour étudier le problème de contact d'un cylindre rigide lisse et d'un demi espace viscoélastique.

Hunter [40] étudie le problème de Hertz pour le cas d'un rebond d'une sphère rigide sur un demi espace viscoélastique de sorte que le rayon de contact $a(t)$ augmente de façon monotone jusqu'à un maximum et diminue alors à zéro. Il suppose que la distribution de pression demeure elliptique comme dans le cas élastique. Ting [68] présente une méthode de sorte que le problème de contact puisse être résolu pour un rayon de contact $a(t)$ arbitraire. Il suppose que le pénétrateur rigide est lisse et axisymétrique et que les solutions viscoélastiques sont exprimées en termes de solution élastique associée.

Des méthodes numériques pour la résolution du contact ont été développées, Younging & Lining [72] proposent une modélisation numérique pour un contact élastique 3D de surfaces rugueuses. Il a été constaté que le rapport calculé entre la surface de contact réelle et

la charge est en accord avec les résultats expérimentaux. Les auteurs concluent que l'interaction d'aspérités a un grand effet sur les résultats calculés, particulièrement sur la déformation de contact. Quand la charge appliquée est grande, l'interaction d'aspérités doit être considérée. La méthode des éléments finis a été utilisée par Kucharski [49] où il a modélisé le contact entre une sphère et un plan rigide. Il obtient une relation entre le poids et la surface de contact.

La surface de contact réelle, la distribution de la pression et la déformation due au contact, sont des paramètres très importants dans l'étude des mécanismes de contact.

Plusieurs auteurs proposent des modélisations du contact d'un pneumatique sur une chaussée. Buczkowski & Kliber [10] trouvent une relation entre les rigidités tangentielles et radiales du pneumatique à l'interface de la zone de contact avec les formes et les hauteurs des rugosités de la surface de la chaussée. Les hauteurs des rugosités ont été modélisées par une distribution gaussienne avec une description mécanique de contact de Hertz. Il a été ainsi trouvé des relations qui relient certaines caractéristiques mécaniques du pneumatique (raideurs tangentielle et radiale) à des paramètres statiques de la chaussée (l'écart des hauteurs de la rugosité). Fujikawa [22] propose un modèle qui calcule les forces d'excitation entre un pneumatique lisse et une chaussée rugueuse. Il suppose que le contact est un contact hertzien entre la bande de roulement et les bords des aspérités. La bande de vibration est estimée en calculant les forces d'excitation en utilisant les réponses fréquentielles de la bande de roulement. Les paramètres de la rugosité de la chaussée sont obtenus à partir du profil de la chaussée mesuré en utilisant un laser profil meter qui a permis d'évaluer l'intervalle Δx , la hauteur h_A , et le rayon r_A de chaque aspérité (comme le montre la Figure 1.25 ci contre)

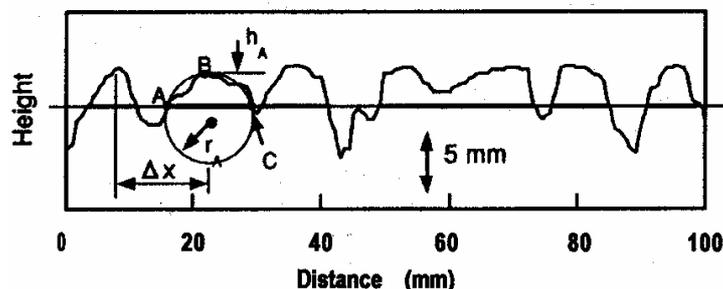


Figure 1.25 : Paramètres obtenus à partir du profil de la chaussée

Le contact est un contact de Hertz où il a été supposé ce qui suit :

- Le modèle du pneumatique est uniforme le long de la direction latérale et il est approximé par une combinaison de deux parties elliptiques et d'une ligne droite et ceci pour la bande de roulement et la ceinture Figure 1.26

- La relation entre la force de contact et l'interpénétration des patins de gomme est donnée par

la loi de Hertz:
$$F_A = \frac{4 E^* \sqrt{r_A}}{3} \delta^{3/2}$$

La vitesse de roulement est supposée constante, ainsi la position d'une aspérité quelconque est donnée par la relation : $x = V t$

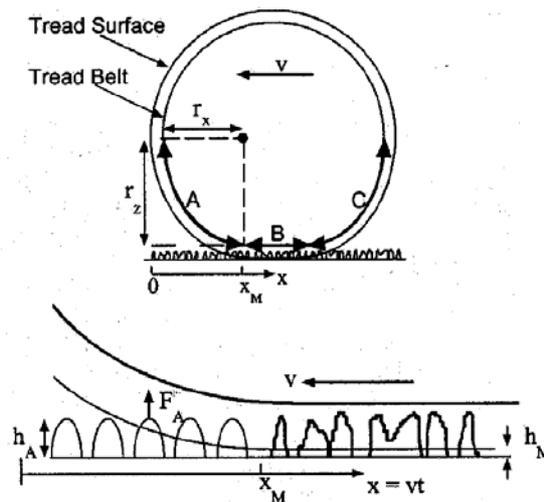


Figure 1.26 : Modèle du pneumatique

En se basant sur ces suppositions, ils obtiennent :

$$F_A = \frac{4E^* \sqrt{r_A}}{3} \left(h_A - h_B - \frac{r_z (x_M - Vt)^2}{2r_x^2} \right)^{3/2}$$

$$\sum_{i=1}^n F_{Ai} = P_M$$

Où n est le nombre d'aspérités dans la surface de contact. P_M est la force totale de contact dans la région B , et h_M est la hauteur de la ceinture dans la région B (ligne droite).

Plusieurs auteurs ont modélisé le contact entre le pneumatique et la chaussée, Kropp [48] utilise la méthode des plaques orthotropes, Hamet [33] développe un modèle en utilisant la méthode d'enveloppement. Les modèles de contact entre le pneumatique et la chaussée sont des modèles semi-analytiques simples en $2D$.

1.3. Conclusion

Il est maintenant établi que le bruit de contact pneumatique / chaussée est la source principale des nuisances sonores à plus de 50 km/h . Le contact pneumatique chaussée relève à la fois du domaine du véhicule et de celui de l'infrastructure routière. Le rôle de la chaussée a été étudié et des relations qui relient directement le bruit de roulement à la texture de la chaussée ont été établies. L'influence des principaux paramètres (paramètres géométriques, vitesses, températures, ...) a été analysé par des moyens expérimentaux.

Les mécanismes générateurs du bruit de contact pneumatique chaussée ont été identifiés et sont de deux natures principales : Vibratoire et Résonance d'air. Des modèles analytiques et numériques de comportement vibratoire du pneumatique ont abouti à des modélisations

simples qui prédisent le comportement du pneumatique et le bruit émis. Cependant la validité des modèles est limitée selon les bandes de fréquences considérées, la vitesse de roulement ou le type de chaussée. Le rayonnement a été étudié et les modèles analytiques ainsi que numériques prédisent bien les phénomènes. On ne le traitera pas durant notre recherche. Pour les effets de résonance d'air, le phénomène principal est le phénomène d'air pumping, compression et détente de l'air piégé dans les rainures du pneumatique. Ce phénomène est dominant pour l'émission sonore dans le domaine des hautes fréquences. Certains auteurs concluent que l'air pumping est la partie manquante entre le bruit généré par les vibrations mécaniques et le bruit de contact. Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. Les modèles de contact avec la chaussée utilisés font appel à une modélisation simple, cette simplification est faite de deux manières, une simplification de la géométrie de la zone de contact et une simplification des lois de contact d'un problème tridimensionnel en un problème bidimensionnel. Lors de notre étude, on s'intéressera à la résolution de ce problème complexe. On essaiera d'apporter une simplification, en développant une loi de contact en $3D$ et en simplifiant la géométrie de la zone de contact.

Chapitre II

Contacts statique et dynamique

Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. On propose de commencer par étudier quelques situations simples comme le cas unidimensionnel d'un contact dynamique avec une corde. Nous commencerons par établir l'équation de mouvement de la corde. On proposera une solution exacte de l'équation différentielle lors d'une excitation unitaire dans le temps et dans l'espace. Connaissant la réponse de la corde dans le cas d'un déplacement imposé en statique, on la comparera à la réponse dynamique. On proposera ensuite une approche plus simple du contact fondée sur un calcul statique et on essaiera de déterminer les limites de validité de la méthode proposée. Le but étant de définir les conditions pour lesquelles les efforts induits par un déplacement donné ne diffèrent pas entre le cas statique et le cas dynamique. On abordera ensuite brièvement le même problème pour un chargement statique et dynamique sur un demi-espace.

2.1. Etude du contact sur une corde vibrante

2.1.1. Equation du mouvement d'une corde sur appuis élastiques

Durant toute notre étude, on s'intéressera aux phénomènes de propagation unidimensionnels dans lesquels intervient une seule coordonnée d'espace. Soit une corde homogène, de masse linéique constante μ , tendue horizontalement le long de l'axe x avec une tension T . Nous la supposons infiniment souple et nous négligerons son poids devant les forces de tension et les forces extérieures. Au repos elle se confond avec l'axe Ox . De part et d'autre de cette position d'équilibre, on étudie les petits mouvements transversaux de cette corde dans le plan xOy , en admettant qu'un élément de corde au repos reste pendant le mouvement à la même abscisse. Pour faire cela, appliquons une faible élongation en un point quelconque de la corde suivant l'axe Oy , puis libérons-la. Soit au point d'abscisse x une faible déformation transverse dans la direction y , décrite à l'instant t par la fonction $u(x,t)$. La faible déformation signifie que la pente locale de la corde est partout petite, soit $\left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| \ll 1$. L'angle $\alpha(x)$ définit

l'inclinaison locale de la corde par rapport à l'axe Ox au point x . Considérons une portion de corde comprise entre les abscisses x et $x+dx$, voir Figure 2.1. Notons $\vec{T}(x)$ la tension au point d'abscisse x exercée par la partie droite sur la partie gauche. La relation fondamentale de la dynamique appliquée à l'élément de masse μdx entre les abscisses x et $x+dx$ donne :

$$\mu dx \vec{a} = \vec{T}(x+dx) - \vec{T}(x) + \vec{f}_{ext} dx \quad (2.1)$$

Où \vec{f}_{ext} sont les forces extérieures appliquées à la corde.

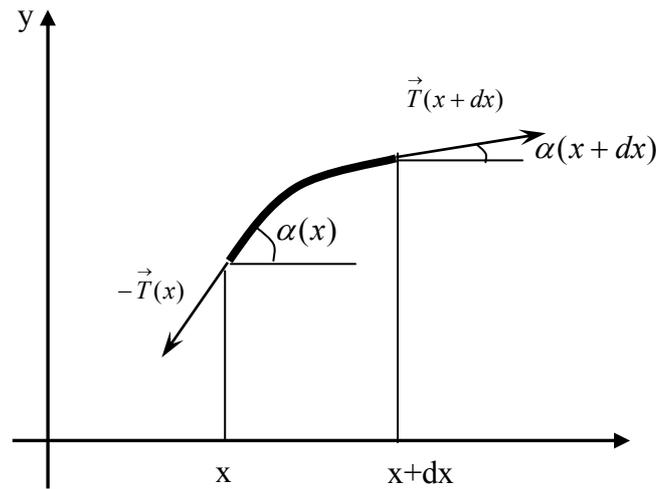


Figure 2.1: Portion de corde entre les abscisses x et $x+dx$

La relation précédente donne l'équation du mouvement de la corde

$$\mu \vec{a} = \frac{\partial \vec{T}}{\partial x} + \vec{f}_{ext} \quad (2.2)$$

Le déplacement et les forces extérieures sont nuls selon la direction x . Il en résulte que

$$\frac{\partial T_x}{\partial x} = 0 \Rightarrow T_x = \left| \vec{T} \right| \cos \alpha = cte \quad (2.3)$$

Puisque α est petit donc $T_x = \left| \vec{T} \right| = cte$. La projection de (2.2) selon la direction y donne

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial T_y}{\partial x} + f_{ext} = \frac{\partial (T \sin \alpha)}{\partial x} + f_{ext} \quad (2.4)$$

L'angle α est petit donc:

$$\sin \alpha \cong \text{tg} \alpha \cong \alpha \cong \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.5)$$

d'où

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_{ext} \quad (2.6)$$

Pour une corde reposant sur des appuis élastiques de raideur k , la force extérieure inclut un terme en ku . Si l'on tient compte de plus d'un amortissement visqueux dans la corde nous obtenons l'équation suivante :

$$\mu \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - ku - d \frac{\partial u}{\partial t} + f_{ext} \quad (2.7)$$

D'où l'équation finale :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k}{T} u - \frac{d}{T} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{T} f_{ext} \quad (2.8)$$

Avec $c = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ la célérité des ondes qui se propagent sur la corde.

2.1.2. Quelques solutions de l'équation du mouvement de la corde

2.1.2.1. Cas statique

L'équation du mouvement de la corde (2.8) en statique, pour une force ponctuelle en 0 d'amplitude f_0 , devient comme suit

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k}{T} u + \frac{f_0}{T} \delta(x) = 0 \quad (2.9)$$

En posant $\lambda_0 = \sqrt{k/T}$, la solution s'annulant à l'infini sera de la forme

$$\begin{cases} u(x) = Ae^{\lambda_0 x} & \forall x < 0 \\ u(x) = Be^{-\lambda_0 x} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

Les inconnues A et B sont déterminées à partir des conditions :

(i) $u(x)$ est continue en $x=0$

$$u(0^-) = u(0^+) \quad (2.11)$$

(ii) La force ponctuelle en $x=0$ donne :

$$u'(0^+) - u'(0^-) = -\frac{f_0}{T} \quad (2.12)$$

La solution (2.10) devient finalement

$$\begin{cases} u(x) = \frac{f_0}{2\lambda_0 T} e^{\lambda_0 x} & \forall x < 0 \\ u(x) = \frac{f_0}{2\lambda_0 T} e^{-\lambda_0 x} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Le déplacement en 0 est donné par

$$\delta_0 = \frac{f_0}{2\lambda_0 T} \quad (2.14)$$

et la relation entre la force et le déplacement en 0 est

$$f_0 = 2\lambda_0 T \delta_0 \quad (2.15)$$

2.1.2.2. Cas dynamique harmonique

Pour le cas dynamique, on commence par imposer une force harmonique de pulsation ω en $x=0$ et d'amplitude f . L'équation du mouvement de la corde devient :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k}{T} u + \frac{\omega^2}{c^2} u - i \frac{d}{T} \omega u + \frac{f}{T} \delta(x) = 0 \quad (2.16)$$

On pose

$$\lambda^2 = \frac{k}{T} - \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{d}{T} \omega \quad (2.17)$$

La solution qui s'annule à l'infini pour λ réel positif ou qui vérifie la condition de radiation pour λ complexe (soit λ de partie imaginaire positive), sera de la forme

$$\begin{cases} u(x) = A e^{\lambda x} & \forall x < 0 \\ u(x) = B e^{-\lambda x} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.18)$$

Les inconnues A et B sont déterminées à partir des conditions :

(i) $u(x)$ est continue en $x=0$

$$u(0^-) = u(0^+) \quad (2.19)$$

(ii) La force ponctuelle en $x=0$ donne :

$$u'(0^+) - u'(0^-) = -\frac{f}{T} \quad (2.20)$$

La solution (2.10) devient finalement

$$\begin{cases} u(x) = \frac{f}{2\lambda T} e^{\lambda x} & \forall x < 0 \\ u(x) = \frac{f}{2\lambda T} e^{-\lambda x} & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.21)$$

Le déplacement en 0 est donné par

$$\delta = \frac{f}{2\lambda T} \quad (2.22)$$

et la relation entre la force et le déplacement en 0 est

$$f = 2\lambda T \delta \quad (2.23)$$

On voit que la relation dynamique et la relation statique sont de mêmes formes. Ces relations sont identiques si l'on a

$$\lambda \cong \lambda_0 \quad (2.24)$$

ce qui est vérifié quand l'amortissement est faible et que

$$\frac{k}{T} \gg \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.25)$$

soit encore quand

$$\omega \ll \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (2.26)$$

donc dans le domaine des basses fréquences.

2.1.2.3. Cas dynamique transitoire

L'équation du mouvement de la corde devient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{k}{T} u - \frac{d}{T} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{T} f_{ext} \quad (2.27)$$

La réponse obtenue lors de la résolution de l'équation différentielle pour le cas d'une excitation unitaire dans le temps et dans l'espace est la fonction de Green de l'équation des ondes qui gouverne le mouvement de la corde. On s'intéresse d'abord au mouvement non amorti. La fonction de Green de l'équation de propagation d'une corde en ID est solution de :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} + \frac{k}{T} G = \frac{1}{T} \delta(x-y) \delta(t-\tau) \quad (2.28)$$

Posons $Z = x - y$ et $s = t - \tau$, l'équation se transforme en

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 G}{\partial Z^2} + \frac{k}{T} G = \frac{1}{T} \delta(Z) \delta(s) \quad (2.29)$$

Prenons la transformée de Fourier en temps de la relation précédente, nous obtenons en utilisant les résultats de la section précédente

$$\begin{cases} G(Z) = \frac{1}{2\lambda T} e^{\lambda Z} & \forall Z < 0 \\ G(Z) = \frac{1}{2\lambda T} e^{-\lambda Z} & \forall Z > 0 \end{cases} \quad (2.30)$$

avec dans le cas non amorti

$$\lambda^2 = \frac{k}{T} - \frac{\omega^2}{c^2} \quad (2.31)$$

La solution en temps est donc donnée par la transformée de Fourier inverse

$$G(Z, s) = \frac{1}{4\pi T} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\lambda(\omega)} e^{-\lambda(\omega)|Z| + i\omega s} d\omega \quad (2.32)$$

En utilisant le résultat mathématique suivant (Gradshteyn [27])

$$\int_a^{+\infty} J_0(b\sqrt{x^2 - a^2}) \cos(cx) dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - c^2}} e^{-a\sqrt{b^2 - c^2}} \quad (2.33)$$

si $0 < c < b$, on peut montrer que la fonction de Green est donnée par

$$G(Z, s) = \begin{cases} 0, & s < Z/c \\ \frac{c}{2T} J_0\left(\sqrt{\frac{k}{\mu}} \sqrt{s^2 - Z^2/c^2}\right), & s > Z/c \end{cases} \quad (2.34)$$

Lorsque la raideur k tend vers 0, on retrouve la solution classique de la fonction de Green associée à l'équation de la propagation d'une onde 1D :

$$G(x-y, t-\tau) = \frac{c}{2T} H(t-\tau - |x-y|/c) \quad (2.35)$$

Où H est la fonction d'Heaviside.

2.1.2.4. Cas avec amortissement

L'équation du mouvement de la corde amortie s'écrit alors

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d}{T} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{T} u = \frac{1}{T} f_{ext} \quad (2.36)$$

Posons

$$G_d(x-y, t-\tau) = e^{-\frac{dc^2}{2T}(t-\tau)} G(x-y, t-\tau) \quad (2.37)$$

On obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 G_d}{\partial t^2} + \frac{d}{T} \frac{\partial G_d}{\partial t} - \frac{\partial^2 G_d}{\partial x^2} + \frac{k}{T} G_d = \\ \frac{d^2 c^2}{4T^2} G_d(x-y, t-\tau) + \frac{1}{T} \delta(Z) \delta(T) \cong \frac{1}{T} \delta(Z) \delta(T) \end{aligned} \quad (2.38)$$

Si l'amortissement est faible, d est petit et on peut considérer que le second membre est égal à une force ponctuelle. Une expression approchée de la fonction de Green dans le cas d'un amortissement faible est donc donnée par la formule (2.37). Il faut pour cela que la condition suivante soit respectée.

$$\frac{d^2 c^2}{4T^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{dc^2}{2T}(t-\tau)} G(x-y, t-\tau) dx dt \ll \frac{1}{T} \quad (2.39)$$

soit approximativement après calcul et en utilisant le résultat $\int_0^z J_0(\sqrt{z^2 - x^2}) dx = \sin(z)$,

$$\frac{d^2}{8\mu k} \ll 1 \quad (2.40)$$

2.1.3. Solution numérique de l'équation du mouvement de la corde

2.1.3.1. Résolution

Pour une distribution de forces donnée par la fonction $F(y, \tau)$, le déplacement de la corde u s'exprime donc de la façon suivante

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} G(x-y, t-\tau) F(y, \tau) dy d\tau \quad (2.41)$$

En discrétisant la fonction continue $u(x,t)$ sur les domaines de définition de x et t et en posant N le nombre de pas de temps et $M(n)$ le nombre de points de contact sur la corde à l'instant n , on obtient :

$$U(x_j^{N+1}, (N+1)dt) = \sum_{n=0}^N \left[\sum_{i=1}^{M(n)} G(x_j^{N+1} - x_i^n, (N+1-n)dt) F_i^n dt \right] + \sum_{i=1}^{M(N+1)} \int_{Ndt}^{(N+1)dt} G(x_j^{N+1} - x_i^n, (N+1)dt - \tau) F_i^{(N+1)} d\tau \quad (2.42)$$

Où F_i^n est la force de contact s'exerçant au point x_i^n et au temps ndt . Posant :

$$A = \sum_{n=0}^N \left[\sum_{i=1}^{M(n)} G(x_j^{N+1} - x_i^n, (N+1-n)dt) F_i^n dt \right] \quad (2.43)$$

et

$$B = \sum_{i=1}^{M(N+1)} \int_{Ndt}^{(N+1)dt} G(x_j^{N+1} - x_i^n, (N+1)dt - \tau) F_i^{(N+1)} d\tau \quad (2.44)$$

Soit

$$B = \int_{Ndt}^{(N+1)dt} G(0, (N+1)dt - \tau) F_j^{N+1} d\tau + \sum_{i=1, x_j^{N+1} \neq x_i^n}^{M(N+1)} \int_{Ndt}^{(N+1)dt} G(x_j^{N+1} - x_i^n, (N+1)dt - \tau) F_i^{N+1} d\tau \quad (2.45)$$

A l'instant $(N+1)dt$, l'excitation au point j n'est pas encore influencée par l'excitation aux points i si $|x_i^n - x_j^{N+1}| > cdt$, ce que nous supposons dans toute la suite. La somme sur $x_i^n \neq x_j^{N+1}$ est donc nulle et

$$B = \int_{Ndt}^{(N+1)dt} G(0, (N+1)dt - \tau) F_j^{N+1} d\tau \quad (2.46)$$

Connaissant les caractéristiques de la fonction de Green, on obtient approximativement

$$B \cong \frac{c}{2T\alpha} (1 - e^{-\alpha dt}) F_j^{N+1} \quad (2.47)$$

Où

$$\alpha = \frac{dc^2}{2T} \quad (2.48)$$

Donc on aura à résoudre:

$$\mathbf{U}^{N+1} = \sum_{n=0}^N \mathbf{G}_{N+1,n} \mathbf{F}^n dt + \frac{c}{2T\alpha} (1 - e^{-\alpha dt}) \mathbf{F}^{N+1} \quad (2.49)$$

Où \mathbf{U}^{N+1} est le vecteur des déplacements aux coordonnées x_j^{N+1} à l'instant $(N+1)dt$ et \mathbf{F}^n est le vecteur des efforts à l'instant ndt . La matrice $\mathbf{G}_{N+1,n}$ est donnée par :

$$\mathbf{G}_{N+1,n} = \begin{bmatrix} G(x_1^{N+1} - x_1^n, (N+1-n)dt) & \cdot & G(x_1^{N+1} - x_{M(n)}^n, (N+1-n)dt) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ G(x_{M(N+1)}^{N+1} - x_1^n, (N+1-n)dt) & \cdot & G(x_{M(N+1)}^{N+1} - x_{M(n)}^n, (N+1-n)dt) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Le premier terme du membre de droite de (2.49) est connu. Pour la force et le déplacement à l'instant $N+1$ en chaque point soit le déplacement soit la force est connue. La relation permet de calculer les termes inconnus en chaque point en fonction des termes connus. On stocke ensuite la valeur du déplacement à l'instant $N+1$ pour l'utiliser lors des calculs aux instants ultérieurs.

2.1.3.2. Validation de la méthode numérique

- Cas statique

L'équation du mouvement de la corde (2.7) en statique avec des appuis élastiques de raideur nulle s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (2.51)$$

La solution est

$$\begin{cases} u(x) = Ax + B & \forall x < 0 \\ u(x) = Cx + D & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.52)$$

Les inconnues A, B, C et D sont déterminées à partir des conditions :

(i) $u(x)$ s'annule aux extrémités de la corde:

$$u(-L/2) = u(+L/2) = 0$$

(ii) $u(x)$ continue en $x=0$

$$u(0^-) = u(0^+)$$

(iii) déplacement imposé à $x=0$:

$$u(0) = \delta_0$$

La solution est donc donnée par

$$\begin{cases} u(x) = \delta_0 \left(1 + \frac{2x}{L}\right) & \forall x < 0 \\ u(x) = \delta_0 \left(1 - \frac{2x}{L}\right) & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.53)$$

Dans l'approche dynamique le cas statique correspond à $d=0$ et c très grand. Le test numérique est effectué avec les valeurs suivantes $L=1m$, $T=6000N$, $\mu=10^{-4}Kg/m$, $k=0$, $dt=2.10^{-6}s$, $d=0$, $\delta_0=0,001m$ et 100 pas de temps. Le résultat est donné sur la Figure 2.2. On constate un très bon accord entre les solutions numérique et analytique.

- Cas dynamique

Pour le cas dynamique, on impose un déplacement harmonique en $x=0$ avec une amplitude δ_0 . L'équation du mouvement de la corde devient :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{d}{T} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{k}{T} u = 0 \quad (2.54)$$

Avec :

$$u(0, t) = \text{Re}(\delta_0 e^{i\omega t})$$

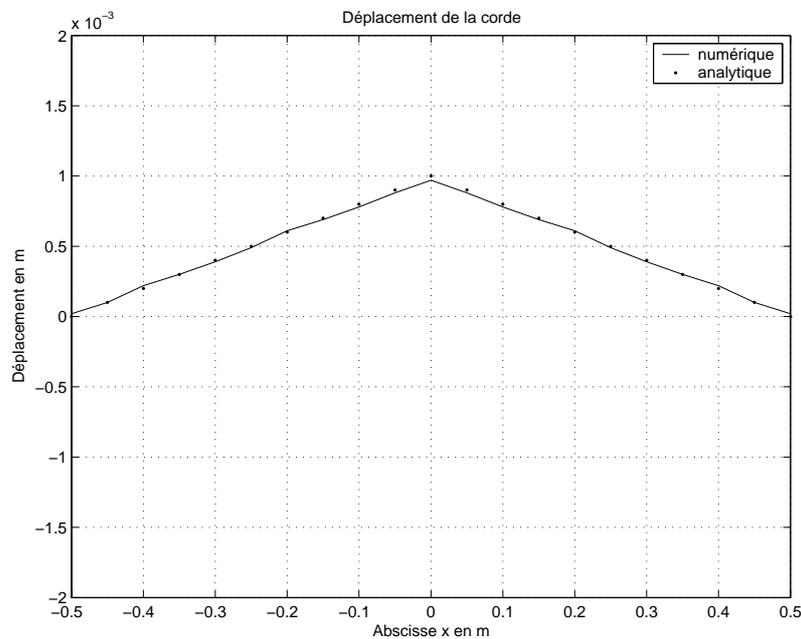


Figure 2.2: Comportement statique de la corde

Posons : $u(x,t) = \text{Re}(W(x) e^{i\omega t})$

Il devient:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} - \lambda^2 W = 0 \tag{2.55}$$

Avec : $\lambda^2 = \frac{k}{T} - \frac{\omega^2}{c^2} + i \frac{d}{T} \omega$

La solution sera de la forme :

$$\begin{cases} W(x) = A \cosh \lambda x + B \sinh \lambda x & \forall x < 0 \\ W(x) = C \cosh \lambda x + D \sinh \lambda x & \forall x > 0 \end{cases} \tag{2.56}$$

Les inconnues A, B, C et D sont déterminées à partir des conditions (i) (ii) et (iii) suivantes

(i) $W(x)$ s'annule aux extrémités de la corde:

$$W(-L/2) = W(+L/2) = 0$$

(ii) $W(x)$ continue en $x=0$

$$W(0^-) = W(0^+)$$

(iii) déplacement imposé à $x=0$:

$$W(0) = \delta_0$$

La solution (2.15) s'écrit alors :

$$\begin{cases} W(x) = \delta_0 (\cosh \lambda x + \coth(\lambda L/2) \sinh \lambda x) & \forall x < 0 \\ W(x) = \delta_0 (\cosh \lambda x - \coth(\lambda L/2) \sinh \lambda x) & \forall x > 0 \end{cases} \tag{2.57}$$

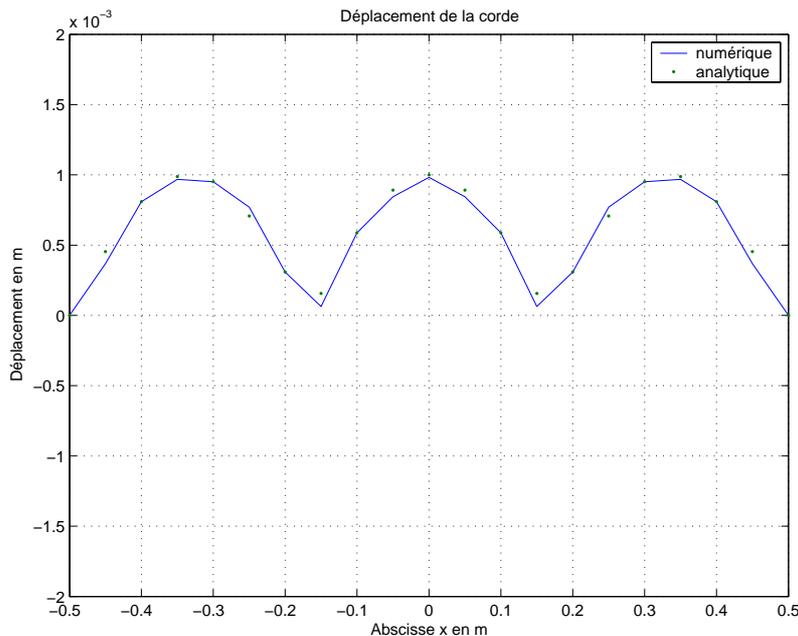


Figure 2.3: Exemple d'amplitude dans le cas dynamique

Le test est maintenant effectué avec les valeurs suivantes $L=1m$, $T=6000N$, $\mu = 6.10^{-3} kg / m$, $k=10N/m^2$, $dt=2.10^{-5}s$, $d=0$, $f=1500Hz$, $\delta_0 = 0,001m$ et 125 pas de temps. Le résultat est donné sur la Figure 2.3. On constate un bon accord entre les solutions numérique et analytique pour cette situation qui est très éloignée du cas statique.

1.1. Approche pseudo-dynamique

1.1.1. Principe

Le modèle dynamique dont la résolution numérique est décrite dans la section précédente est le modèle complet permettant une résolution exacte de l'équation de vibration de la corde. Il nécessite cependant la résolution du problème de contact pour trouver la force en chaque point. Dans des problèmes plus complexes que le cas d'une corde cette approche peut être lourde à mettre en œuvre. Nous proposons un modèle intermédiaire appelé modèle pseudo dynamique dans lequel l'équation du mouvement de la corde est l'équation élastodynamique mais avec un calcul de la force au point de contact qui est obtenu par le modèle statique, comme si localement la relation était statique. Dans le Tableau 2.1, les différents modèles reliant la force au déplacement sont indiqués

Modèle	déplacement	Force
Statique	δ_0	$2\lambda_0 T \delta_0$
Dynamique en temps	$\delta(t)$	$u(x,t) = \int \int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} G(x-y, t-\tau) F(y, \tau) dy d\tau$
Pseudo-dynamique en temps	$\delta(t)$	$2\lambda_0 T \delta(t)$
Dynamique en fréquence	$\delta(\omega)$	$2\lambda(\omega) T \delta(\omega)$
Pseudo-dynamique en fréquence	$\delta(\omega)$	$2\lambda_0 T \delta(\omega)$

Tableau 2.1 : Relation force déplacement suivant différents modèles

1.1.2. Comparaison pour une corde

La Figure 2.4 compare les solutions dynamique et pseudo-dynamique pour une force ponctuelle placée en $x=0$ et pour les paramètres suivants : $L=2m$, $T=1000N$, $\mu = 10^{-3} Kg/m$, $k=100 KN/m^2$, $d=0$, $f_0 = 1000N$. On constate un bon accord jusqu'à 500Hz puis un résultat qui se dégrade ensuite.

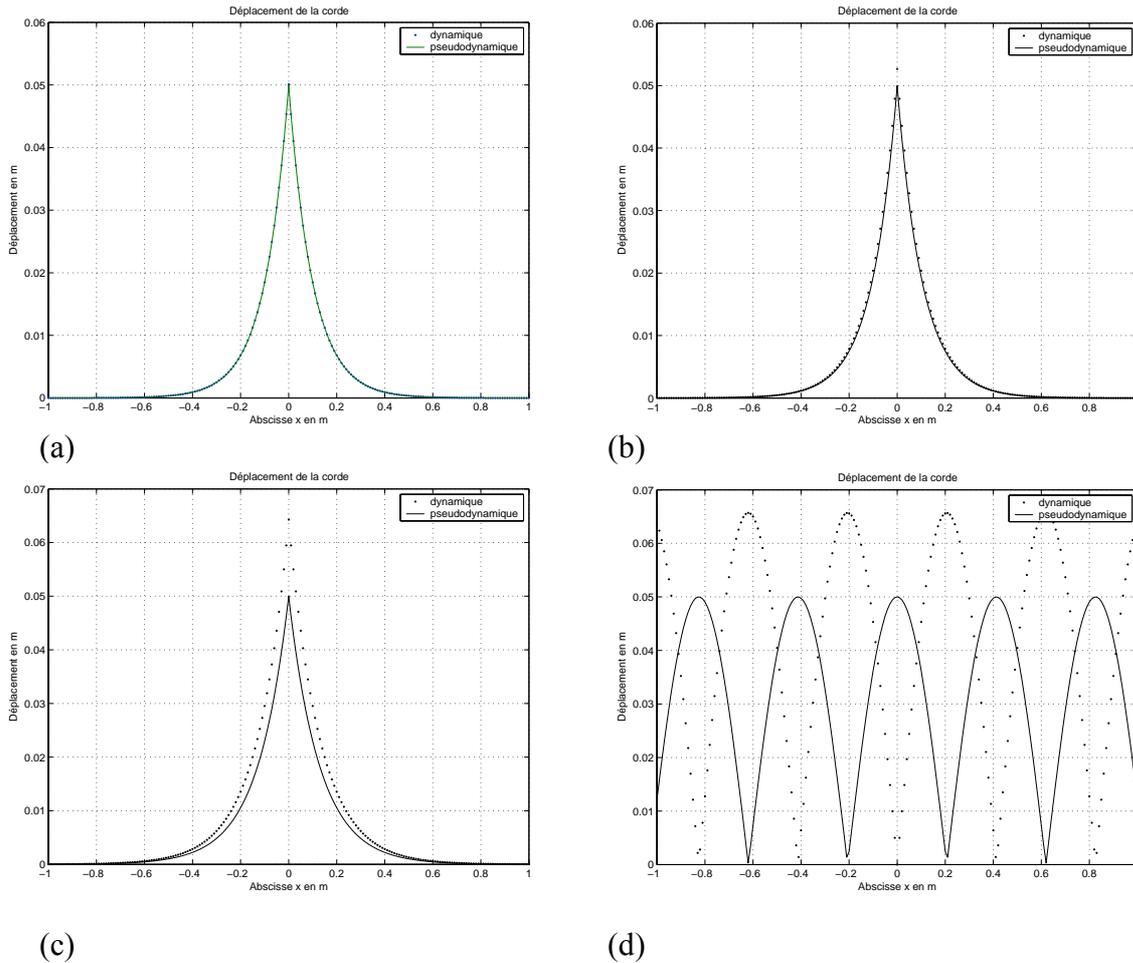


Figure 2.4: Comparaison des solutions dynamiques et pseudo-dynamique pour différentes fréquences : (a) 100 Hz, (b) 500Hz, (c) 1000Hz, (d) 2000Hz

En utilisant la formule (2.26) nous obtenons le Tableau 2.2 qui permet de déterminer la zone de validité de la solution pseudo-dynamique. La valeur du critère doit être nettement supérieure à 1 pour que la solution pseudo-dynamique soit valable.

Fréquence en Hz	$\frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{k}{\mu}}$
100	15,92
500	3,18
1000	1,59
2000	0,80

Tableau 2.2 : Critère de validité de la solution pseudo-dynamique

Un autre cas étudié correspond à la solution numérique dans laquelle le comportement de la corde est donnée par son équation dynamique mais avec une sollicitation qui n'est plus un déplacement dynamique imposé mais un effort fonction du temps qui est calculé à partir de l'interpénétration entre la force et la corde. On utilise pour cela la formule (2.15) qui relie la

force calculée en statique avec le déplacement imposé. Si à un instant donné le déplacement imposé est $\delta(t)$, on considère que la réaction de la corde génère une force égale à

$$F(t) = 2\lambda_0 T \delta(t) \quad (2.58)$$

La suite du calcul est effectuée comme dans la section 2.1.3. La solution analytique en régime harmonique avec la condition (2.58) s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} W(x) = \tanh(\lambda L / 2) \delta_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} (\cosh \lambda x + \coth(\lambda L / 2) \sinh \lambda x) & \forall x < 0 \\ W(x) = \tanh(\lambda L / 2) \delta_0 \frac{\lambda_0}{\lambda} (\cosh \lambda x - \coth(\lambda L / 2) \sinh \lambda x) & \forall x > 0 \end{cases} \quad (2.59)$$

Le test est maintenant effectué avec les valeurs suivantes $L=2m$, $T=1000N$, $\mu = 10^{-3} Kg/m$, $k=100N/m^2$, $dt=5.10^{-6}s$, $d=10^{-4}$ et $\delta_0 = 0,001m$. Le résultat est donné sur la Figure 2.5. On constate un bon accord entre les solutions numérique et analytique lorsque la fréquence est inférieure à $500Hz$ ensuite les deux solutions deviennent différentes.

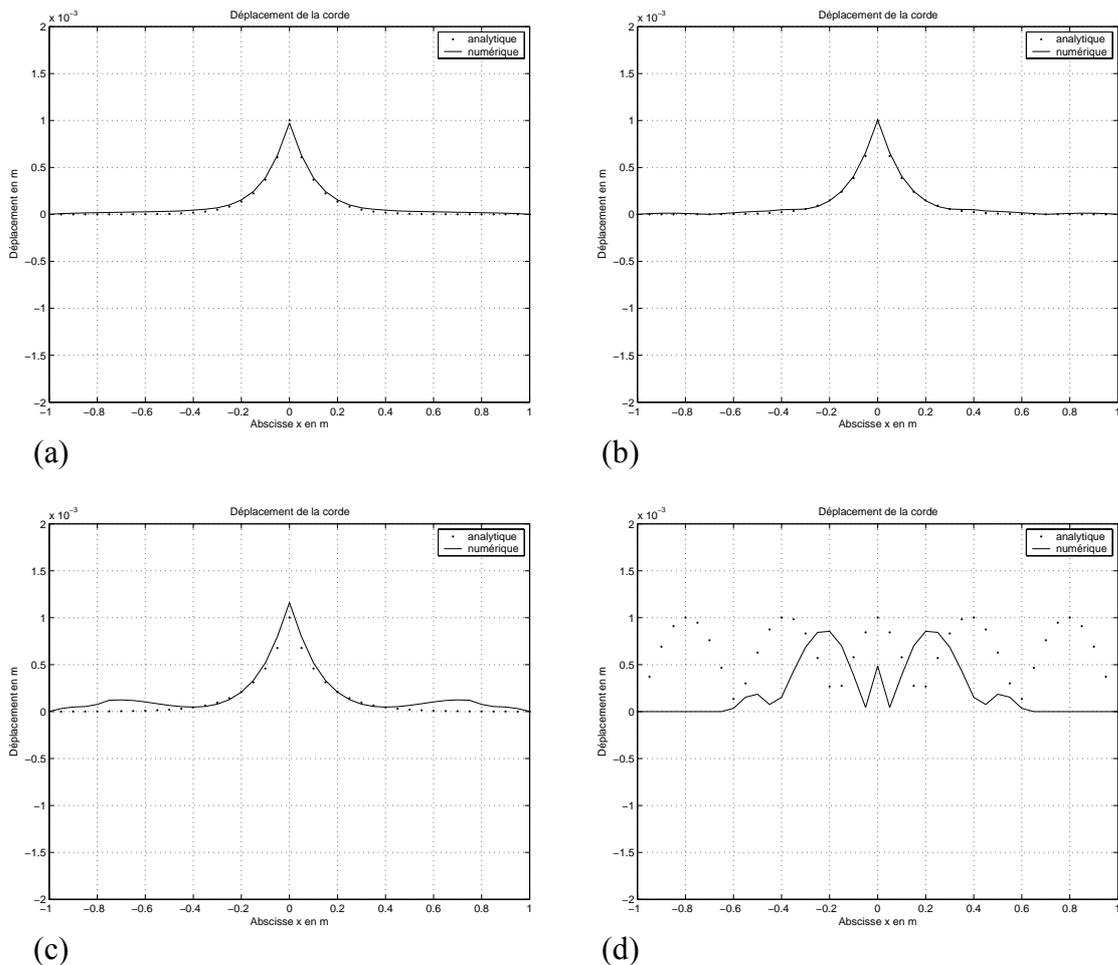


Figure 2.5: Comparaison des solutions dynamique et pseudo-dynamique pour différentes fréquences : (a) 100 Hz, (b) 500Hz, (c) 1000Hz, (d) 2000Hz.

Dans ces situations on peut estimer que la longueur de la zone où le déplacement est significatif est approximativement égale à $1/\lambda_0 = \sqrt{T/k}$ et que la longueur d'onde des ondes pouvant se propager dans la corde est $c/f = \sqrt{(T/\mu)}/f$. Donc la condition de contact pseudo-dynamique s'écrit

$$\sqrt{\frac{T}{k}} \ll \frac{1}{f} \sqrt{\frac{T}{\mu}} \quad \text{soit} \quad f \ll \sqrt{\frac{k}{\mu}} \quad (2.60)$$

ce qui est aussi la condition (2.26). Elle s'interprète physiquement à partir du rapport entre la dimension de la zone de contact et la longueur d'onde. Le contact peut être décrit en statique si la zone où le déplacement est important est petite devant la longueur d'onde.

2.2.3. Cas tridimensionnel

Dans le cas tridimensionnel nous étudions le cas d'un demi-espace chargé uniformément sur la surface d'un disque de rayon a , voir Figure 2.6. Nous calculons le déplacement au centre du disque dans les cas statique et dynamique.

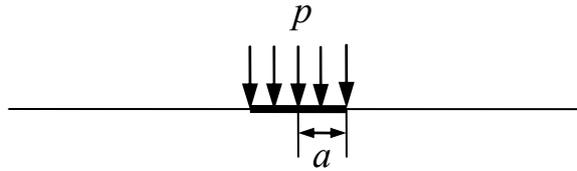


Figure 2.6: Demi-espace avec un chargement uniforme sur un disque.

La solution statique pour le déplacement au centre du disque est donnée par

$$u = 2(1 - \nu^2) \frac{pa}{E} \quad (2.61)$$

Dans le cas dynamique la solution est donnée par Miller et Pursey [57] sous la forme

$$u = \frac{pa}{\mu} \int_0^{+\infty} \frac{J_1(\zeta a k_1)}{F_0(\zeta)} \sqrt{\zeta^2 - 1} d\zeta \quad (2.62)$$

avec

$$\begin{aligned} F_0(\zeta) &= (2\zeta^2 - \eta^2)^2 - 4\zeta^2 \sqrt{\zeta^2 - \eta^2} \sqrt{\zeta^2 - 1} \\ \eta &= \frac{k_1}{k_2} \\ k_1 &= \omega \sqrt{\rho / (\lambda + 2\mu)} \\ k_2 &= \omega \sqrt{\rho / \mu} \end{aligned} \quad (2.63)$$

Les calculs sont effectués pour les valeurs suivantes des paramètres: $p = 100 \text{ N/m}^2$, $E = 10^6 \text{ Pa}$, $\nu = 0,3$ et $\rho = 2000 \text{ Kg/m}^3$. La Figure 2.7 compare les solutions statique et dynamique pour $a=0,005\text{m}$. La Figure 2.8 donne le même résultat pour $a=0,01\text{m}$. On constate que les deux solutions sont identiques pour les basses fréquences et qu'elles diffèrent ensuite lorsque la fréquence augmente. On peut estimer que les deux solutions vont commencer à être différentes pour des fréquences supérieures à 1500 Hz pour la Figure 2.7 et à 750 Hz pour la Figure 2.8, soit approximativement quand $k_1 a \approx 0,6$ ou encore pour une longueur d'onde de $0,1a$. On peut donc conclure que quand la surface de contact est petite par rapport à la longueur d'onde, il est possible de calculer les efforts de contact comme s'ils étaient donnés par une approche statique.

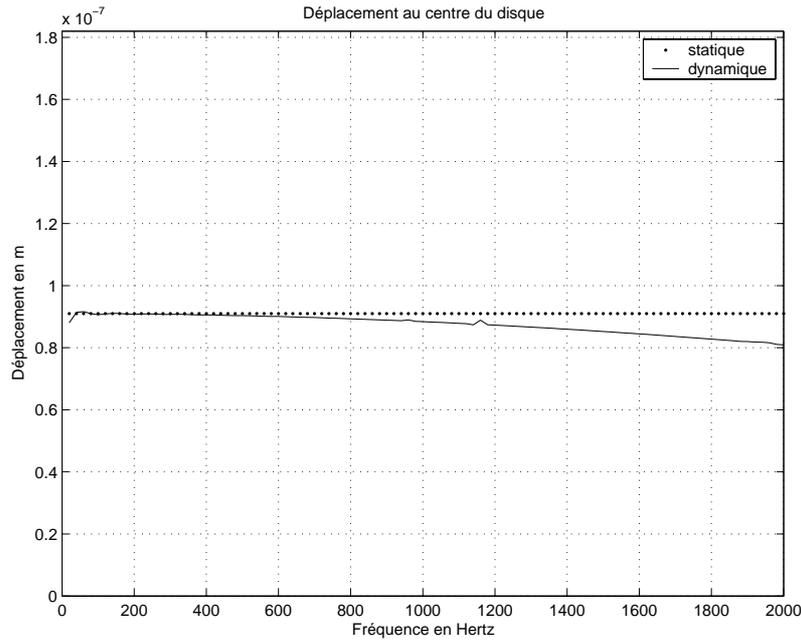


Figure 2.7: Solutions statique et dynamique pour $a=0,005\text{m}$

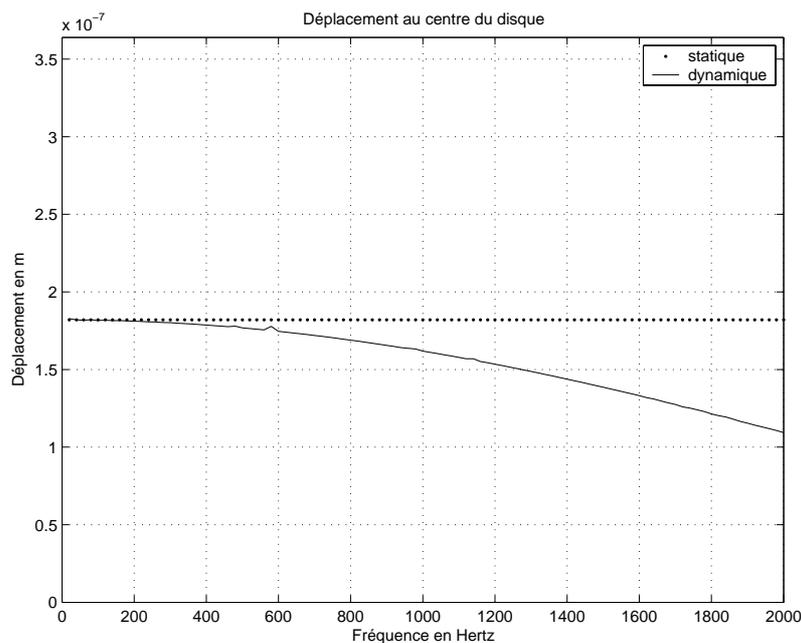


Figure 2.8: Solutions statique et dynamique pour $a=0,01\text{m}$

Ce calcul est effectué pour un module d'Young $E = 10^6 Pa$, ce qui est assez faible. Cela correspond à un caoutchouc souple. Lorsque le module augmente k diminue et le domaine de fréquence ou le rayon a pour lesquels l'approximation statique est valable sont d'autant plus grand.

2.3. Conclusion

On peut raisonnablement conclure des exemples précédents que lorsque les phénomènes de contact ont lieu dans une zone de l'espace dont les dimensions sont nettement inférieures à une longueur d'onde du phénomène vibratoire étudié, on peut considérer que le contact s'effectue comme s'il était décrit par un modèle statique. En particulier la force de contact sera décrite à partir des déformations et des interpénétrations comme si elle était obtenue en statique. Dans la suite nous utiliserons cette hypothèse pour décrire des situations de contact avec des objets de formes complexes.

Chapitre III

Modèles de contact ponctuels

Le contact $3D$ est un problème non linéaire, complexe et difficile à résoudre. Dans cette partie nous présenterons une simplification en proposant un modèle analytique simple pour l'évaluation des forces de contact. Ce modèle est établi à partir de la théorie du potentiel d'interaction. Connaissant le volume d'interpénétration, la surface de la base du volume et le périmètre de cette surface, on peut connaître la force normale P correspondant à une interpénétration δ donnée, les caractéristiques géométriques et mécaniques des surfaces en contact seront prises en considération. Nous commencerons par citer quelques travaux sur la théorie du contact, tout d'abord on présentera la théorie classique du contact de Hertz pour un contact élastique de deux surfaces régulières sphériques. Elle sera suivie par un rappel de la théorie dans le cas d'un contact de surface conique. Par la suite nous présenterons un modèle théorique de contact entre des surfaces régulières développé par Wilke [69], une généralisation de ce modèle pour le cas d'un contact de surface irrégulière et une validation pour le cas d'un contact entre une surface plane avec des formes de surfaces simples: sphérique, conique et pyramidal sera abordée.

Une fois la validation du modèle analytique effectuée, on présentera une approche pour la résolution d'un contact viscoélastique où les constantes élastiques seront remplacées par un opérateur intégral correspondant à la relation viscoélastique contrainte-déformation. A la fin de ce chapitre nous aurons élaboré un modèle analytique simple pour le cas d'un contact élastique et viscoélastique de surface irrégulière.

3.1. Contact ponctuel entre objets de formes simples

3.1.1. Forme sphérique, loi de contact de Hertz

L'une des premières études concernant l'évaluation des tensions de contact de deux solides élastiques a été proposée par Hertz (Figure 3.1). Pour exprimer la force de contact en fonction de l'interpénétration δ , il a fait les hypothèses suivantes :

- Le secteur de contact est elliptique.
- La surface est continue et non conforme : $a \ll R$
- Chaque solide peut être considéré comme un demi espace élastique.

- Pas de frottement entre les deux surfaces en contact.

Il aboutit à la relation suivante

$$P = K \delta^{3/2} \quad (3.1)$$

avec

$$K = \frac{4 E^* \sqrt{R}}{3} \quad (3.2)$$

où P représente la charge normale appliquée, R est le rayon de courbure équivalent et δ est l'interpénétration du corps (1) dans (2).

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Le rayon de l'aire de contact a est évalué d'après la relation

$$a = \left(\frac{3 P R}{4 E^*} \right)^{\frac{1}{3}}$$

Avec E^* le module d'Young équivalent

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$$

et $E_1 \nu_1 R_1$, $E_2 \nu_2 R_2$ représentent respectivement le module d'Young, le coefficient de Poisson et le rayon de courbure des solides (1) et (2).

3.1.2. Forme conique

La théorie du contact de Hertz est limitée pour les surfaces dont les profils sont lisses et continus, avec des efforts qui sont finis partout. Le problème est différent pour une surface ayant des coins carrés pointus. Les déformations doivent être suffisamment petites pour se trouver dans le domaine de la théorie linéaire de l'élasticité.

Prenons un cône en contact avec une surface plane (Johnson [43]), tel que la largeur de la bande de contact est petite comparée à la taille des deux solides. Nous pouvons employer les solutions élastiques pour un demi espace, pour le cône et la surface plane. La déformation est montrée dans la Figure 3.2 où l'on représente aussi l'allure de la pression dans la zone de contact. Si les cotés lisses du cône se prolongent au delà de la surface de contact, les pressions doivent être nulles aux bords.

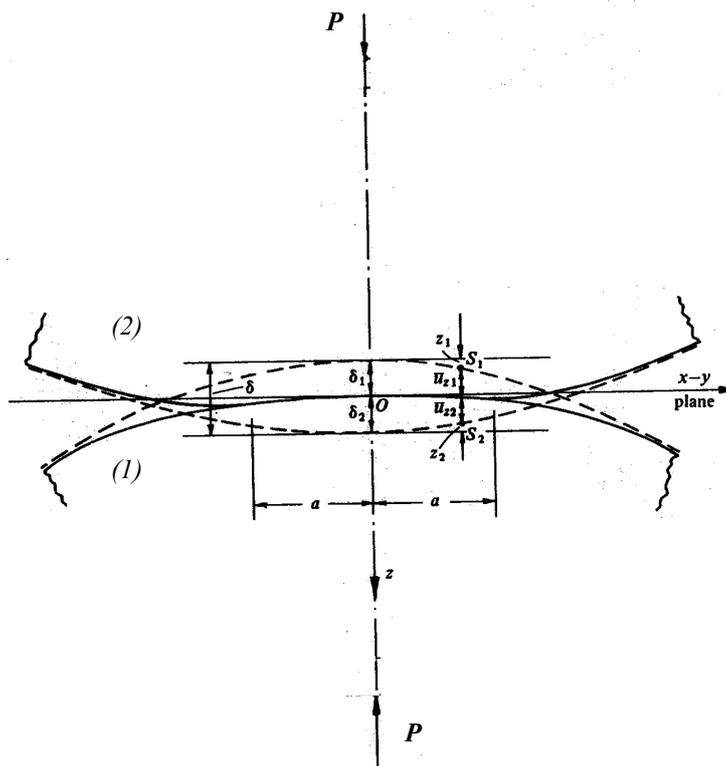


Figure 3.1 : Interpénétration entre deux sphères

L'approche classique pour trouver les efforts dans un demi espace élastique dû aux tractions extérieures est abordée par Boussinesq [9] et Cerruti [14] qui se sont servis de la théorie du potentiel. Cette approche a été reprise par Love [55], il a appliqué l'approche classique de la fonction potentielle et évalue la pression de contact par

$$p(s) = \frac{1}{2} E^* \cot \alpha \cosh^{-1}(a/s) \quad (3.3)$$

Et donc la force normale

$$P = \frac{1}{2} \pi a^2 E^* \cot \alpha \quad (3.4)$$

Il a obtenu une loi de répartition de la charge en fonction du rayon de la surface en contact a et de l'angle α du cône.

A partir de l'équation (3.4) on essayera de trouver l'expression donnant la force en fonction de l'interpénétration. Pour ce but on déterminera la relation entre le rayon de la surface en contact a et l'interpénétration δ , à partir des équations de Boussinesq [9] il en résulte que

$$\delta(s) = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{2(1-\nu)}{s} \right) \quad (3.5)$$

où G est le module de cisaillement.

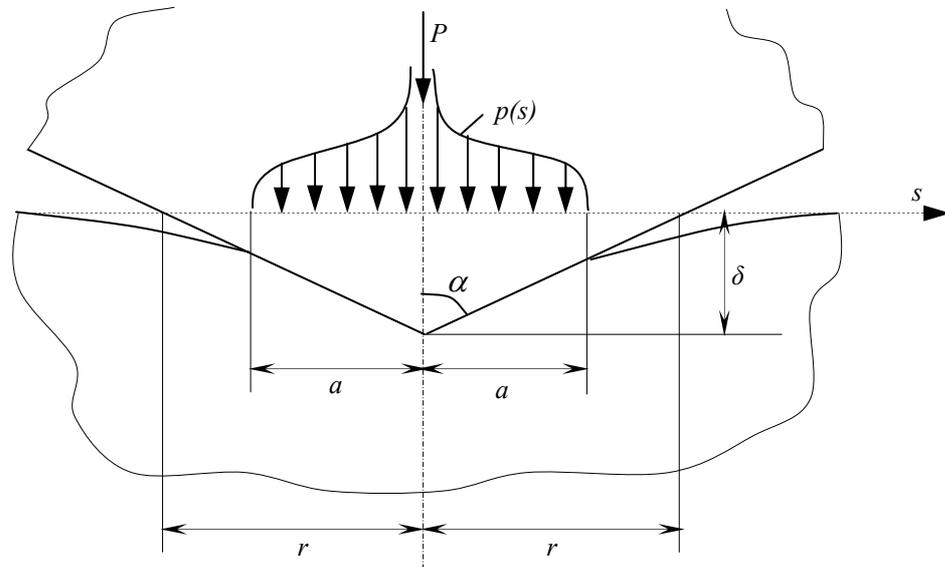


Figure 3.2 : Contact cône / surface plane

Connaissant la répartition de la charge (3.3) l'interpénétration s'écrit

$$\delta = \frac{1}{4\pi G} \int_0^a 2\pi s p(s) \left(\frac{2(1-\nu)}{s} \right) ds \quad (3.6)$$

Il devient

$$\delta = \frac{\pi}{2} a \cot \alpha \frac{(1-\nu) E^*}{2G} \quad (3.7)$$

On peut représenter la relation (3.4) sous la forme

$$P = \frac{8}{\pi} \frac{G^2}{(1-\nu)^2 E^*} \operatorname{tg} \alpha \delta^2 \quad (3.8)$$

3.2. Contact ponctuel entre objets de formes quelconques

3.2.1. Théorie du potentiel d'interaction de Wilke

Supposant deux corps en contact au point O . Oxy est le plan tangent commun avec l'axe Oz dirigé vers le corps (1) (Figure 3.3). La distance entre le point M_1 et M_2 des deux corps au voisinage du point O est égale à :

$$z_2 - z_1 \approx Ax^2 + By^2 \quad (3.9)$$

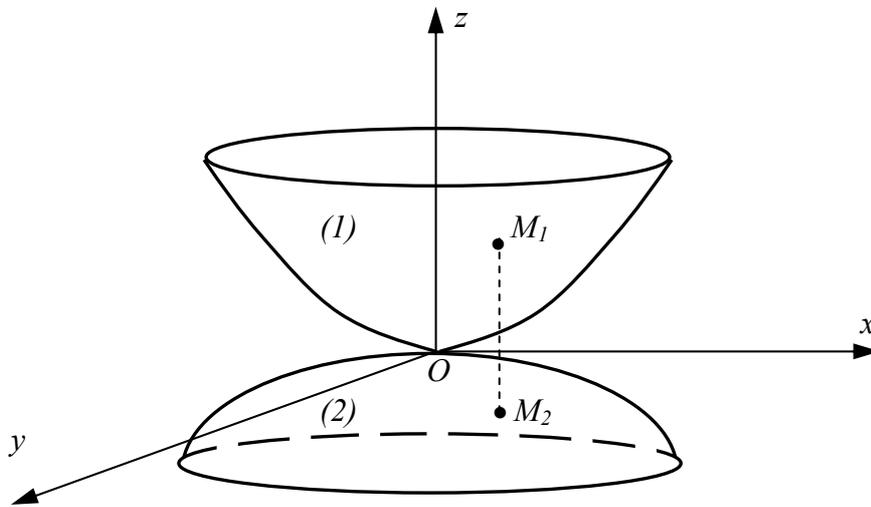


Figure 3.3 : Contact entre deux corps de formes quelconques

Les points M_1 et M_2 ont pour coordonnées (x, y, z_1) et (x, y, z_2) et appartiennent aux surfaces des corps. Les valeurs A et B sont constantes. En général on trouve un terme de la forme $2Cxy$ dans la seconde partie de l'expression (3.9) mais il peut être éliminé par un choix convenable des axes Ox et Oy .

Si le corps (1) se déplace de la distance δ dans la direction négative de l'axe Oz et si l'on suppose que les corps s'interpénètrent sans déformation on aura un domaine d'intersection Γ . Sa projection sur le plan Oxy forme la surface:

$$\sigma = \{x, y : Ax^2 + By^2 \leq \delta\}$$

Elle sera limitée par :

$$\partial\sigma = \{x, y : Ax^2 + By^2 = \delta\}$$

Trouvons trois caractéristiques des domaines en question qui joueront ultérieurement un rôle important, à savoir, le volume V de Γ , l'aire S et le périmètre p de σ .

- Le volume :

$$V = \iint_{\sigma} (\delta - Ax^2 - By^2) dx dy = \frac{\pi\delta^2}{2\sqrt{AB}} \quad (3.10)$$

- La surface :

$$S = \iint_{\sigma} dx dy = \frac{\pi\delta}{\sqrt{AB}} \quad (3.11)$$

- Le périmètre :

$$p = \frac{4\delta^{1/2}}{A^{1/2}} E_1(\sqrt{A/B}) \quad (3.12)$$

où $E_1(\sqrt{A/B})$ est l'intégrale elliptique de deuxième espèce :

$$E_1((A/B)^{1/2}) = E((1-A/B)^{1/2}) = \int_0^{\pi/2} (1 - (1-A/B)\sin^2 \varphi)^{1/2} d\varphi \quad (3.13)$$

D'après les résultats classiques de Hertz, dans le cas où la zone de contact est une ellipse de surface :

$$\sigma' = \left\{ x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

σ' est limité par la frontière $\partial\sigma'$:

$$\partial\sigma' = \left\{ x, y : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$$

La charge P et les coefficients des surfaces σ et σ' sont liés par les relations suivantes Love [54] :

$$(3.14) \quad \left\{ \begin{array}{l} A = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{2a^3} I_1(k), \quad I_1(k) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^2z^2)^3}} \\ B = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{2b^3} I_2(k), \quad I_2(k) = \int_0^{\infty} \frac{dz}{\sqrt{(1+z^2)(1+k^{-2}z^2)^3}} \\ \beta = \frac{3P(\theta_1 + \theta_2)}{2a} F_1(k), \quad F_1(k) = F(k_1) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-k_1^2 \sin^2 \varphi}} \end{array} \right.$$

où $k = \frac{b}{a} < 1$, $k_1^2 = 1 - k^2$, $\theta_i = \frac{1 - \nu_i^2}{\pi E_i}$, $i = 1, 2$, $F(k_1)$ est l'intégrale elliptique de première espèce, E_i et ν_i sont le module d'Young et le coefficient de Poisson du corps i .

On trouve

$$\frac{A}{B} = \frac{k^3 I_1(k)}{I_2(k)}$$

Il en résulte que la relation $b/a = k < 1$ ne dépend pas de P et est définie par les caractéristiques géométriques des surfaces en contact.

La force est donnée par :

$$P = \frac{2(I_1(k)I_2(k))^{1/4} \delta^{3/2}}{3(\theta_1 + \theta_2)k^{3/4}(F_1(k))^{3/2}(AB)^{1/4}} \quad (3.15)$$

Le potentiel U d'interaction des corps en contact se calcule à partir de l'expression du travail virtuel :

$$\delta U = P \delta \delta \Rightarrow U(\delta) = \frac{4(I_1(k)I_2(k))^{1/4} \delta^{5/2}}{15(\theta_1 + \theta_2)k^{3/4}(F_1(k))^{3/2}(AB)^{1/4}} \quad (3.16)$$

On peut représenter la relation (3.16) sous la forme :

$$U = f(k)V^\beta S^\gamma p^\xi \quad (3.17)$$

Où V , S et p sont définis dans (3.10), (3.11) et (3.12). En comparant les puissances de δ et de (AB) dans les expressions (3.16) et (3.17) de U , on obtient les équations :

$$\begin{cases} 2\beta + \gamma + \frac{\xi}{2} = \frac{5}{2} \\ \beta + \gamma + \frac{\xi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

On trouve :

$$\beta = 2 \text{ et } \gamma = -\frac{(3 + \xi)}{2}$$

Sachant que :

$$f(k) = \frac{4^{2-\xi} f_1(k)}{15 \pi^{(1-\xi)/2} (\theta_1 + \theta_2)} \quad (3.18)$$

Avec:

$$f_1(k) = \frac{I_1^{(1+\xi)/4} I_2^{(1-\xi)/4}}{k^{3(1-\xi)/4} F_1(k)^{3/2} E_1^\xi(\sqrt{A/B})} \quad (3.19)$$

Afin de trouver la valeur de ξ , il serait intéressant d'évaluer la fonction $f_1(k)$, et ceci afin de déterminer la valeur de ξ pour laquelle $f_1(k) \approx cst$.

On exprime $I_1(k)$ et $I_2(k)$ par les intégrales elliptiques :

$$I_1(k) = \frac{F_1(k) - E_1(k)}{1 - k^2} \quad (3.20)$$

et :
$$I_2(k) = \frac{k}{1-k^2} (E_1(k) - k^2 F_1(k)) \tag{3.21}$$

Donc :

$$f_1(k) = \frac{(1 - E_1 F_1^{-1})^{(1+\xi)/4} (E_1 F_1^{-1} - k^2)^{(1-\xi)/4}}{k^{(1-\xi)/2} (1-k^2)^{1/2} F_1 E_1^\xi (\sqrt{A/B})} \tag{3.22}$$

La fonction $f_1(k)$ reste bornée si $k \rightarrow 1$ et d'après Wittaker [71]

$$\lim_{k \rightarrow 1} I_1(k) = \frac{\pi}{4} \text{ et } \lim_{k \rightarrow 1} F_1(k) = \frac{\pi}{2}$$

On a aussi

$$\lim_{k \rightarrow 1} \sqrt{A/B} = 1 \text{ et } E_1(1) = \frac{\pi}{2}$$

Il en résulte

$$\lim_{k \rightarrow 1} f_1(k) = \frac{2^{\xi+0.5}}{\pi^{1+\xi}}$$

L'analyse numérique de la fonction (3.22) représentée sur la Figure 3.4, nous montre que la fonction $f_1(k)$ est constante pour $\xi = 0.5$ et sa valeur moyenne est de 0.36. On choisira cette valeur dans la suite de ce travail.

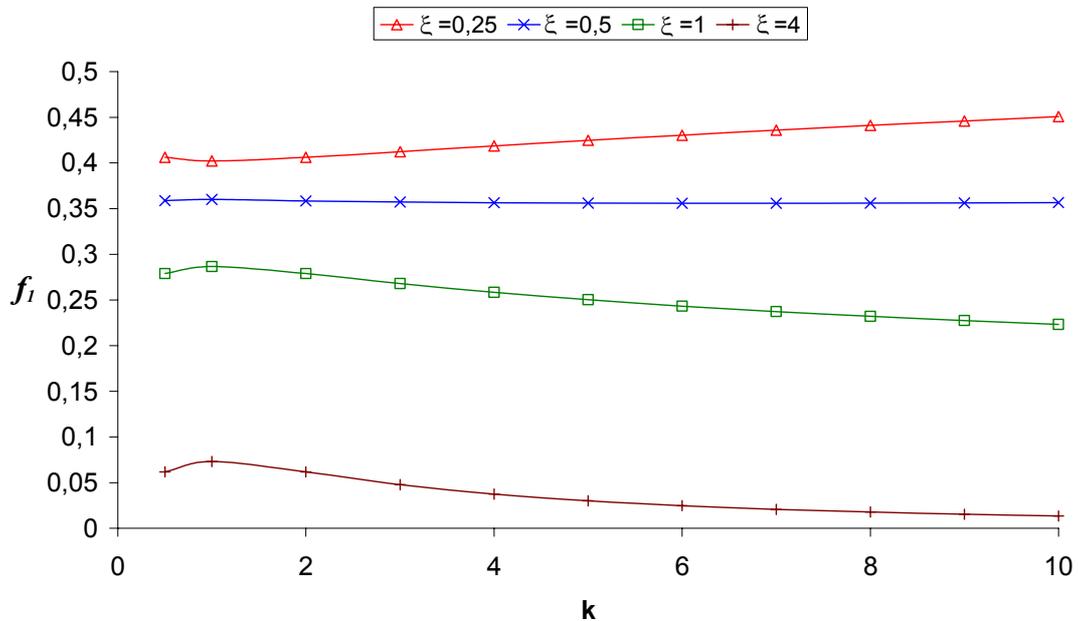


Figure 3.4 : Evolution de la fonction $f_1(k, \xi)$

Il en résulte que le potentiel U s'exprime par la formule

$$U = c \frac{8}{15\pi^{1/4}(\theta_1 + \theta_2)} \frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} \quad (3.23)$$

Où : c est une constante qui dépend uniquement de la géométrie des surfaces de contact.

D'après le développement précédent c est égal à 0,36 pour des surfaces de contact régulières et pour $\xi = 0,5$. On supposera par la suite que le potentiel s'écrit sous la même forme (3.23) pour le cas d'un contact de surface irrégulière. On identifiera analytiquement et expérimentalement la constante c afin de valider cette formule généralisée pour le cas de surfaces de formes quelconques.

3.2.2. Calcul des forces de contact

Dans le but de généraliser l'équation (3.23) pour n'importe quelle forme de surface, l'étude de trois formes de surface sera présentée. Le contact entre une surface plane (le plot en caoutchouc) et une surface sphérique, ainsi que le contact entre une surface plane et une surface conique et pyramidale d'angle α seront étudiés. On déterminera pour chaque cas la relation entre la force et l'interpénétration. Par la suite on procédera au chapitre suivant à l'identification de la constante c par des essais expérimentaux.

3.2.2.1. Validation pour la sphère

Nous allons essayer de valider et de généraliser l'expression de la fonction de force (3.24), pour n'importe quelle forme de surface. On prendra comme exemple la forme sphérique (Figure 3.5). Une fois que l'expression du volume, de la surface et du périmètre sera connu, on remplacera dans l'équation (3.23).

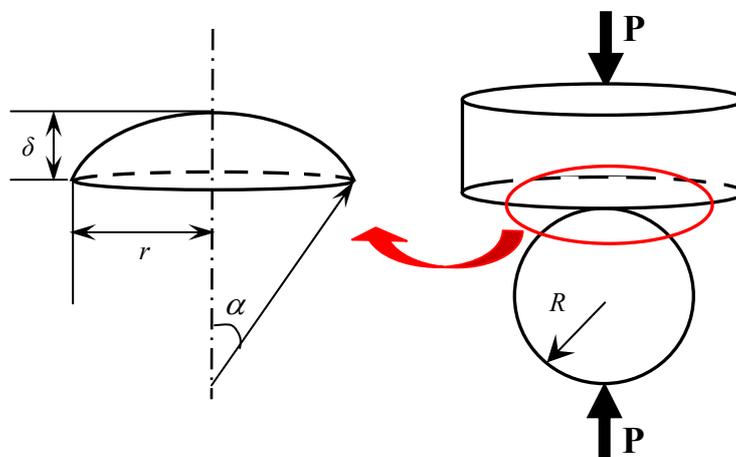


Figure 3.5 : Contact sphère / plot

L'évaluation du volume de la partie en contact est donnée par

$$V = \frac{\pi}{6} \delta (3r^2 + \delta^2)$$

La surface par

$$S = \pi r^2$$

ainsi que le périmètre p

$$p = 2\pi r$$

Où r est le rayon de la base du volume en contact.

Ils sont exprimés en fonction de α selon les expressions :

$$r = R \sin \alpha \quad \text{et} \quad \delta = R(1 - \cos \alpha)$$

On suppose que α est très petit donc

$$r = R\alpha \quad \text{et} \quad \delta = R \frac{\alpha^2}{2}$$

On trouve donc la relation entre r et δ

$$r^2 = 2R\delta$$

Le rapport entre le volume et le périmètre sur la surface nous donne :

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{\pi^{3/4}}{36} \sqrt{2} \delta^2 (3r^2 + \delta^2)^2 r^{-3} \quad (3.24)$$

On suppose que $r \ll R$, donc :

$$\delta^2 \ll r^2$$

En utilisant cette relation dans (3.23):

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{\pi^{3/4}}{2} \sqrt{R} \delta^{5/2} \quad (3.25)$$

Donc le potentiel se résume pour le cas d'un contact plan / sphère à :

$$U(\delta) = c_s \frac{4}{15} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} \delta^{5/2} \quad (3.26)$$

D'après la relation (3.16) la force d'interaction sera égale à :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2} \quad (3.27)$$

La relation (3.27) exprime la force en fonction de l'interpénétration pour le cas d'un contact entre une surface plane et une surface de forme sphérique, avec R rayon de la sphère et E^* module d'Young équivalent. La constante c_s étant une constante qu'on peut déterminer par identification à la loi de Hertz (3.1), il en résulte que :

$$c_s = \frac{2}{\pi^{3/2}} = 0.36$$

Il serait utile de connaître l'expression de la force dans le cas où on a un contact entre une surface plane et un cône ainsi que dans le cas d'un contact entre une surface plane et une pyramide. On aura une approximation de c pour différentes surfaces en contact (régulières et irrégulières), ce qui nous permettra de généraliser la loi de contact (3.23).

3.2.2.2. Validation pour le cône

On a déterminé la relation entre la force P et l'interpénétration δ dans le cas d'un contact plan/sphère. On procédera de la même manière pour un contact entre une surface conique d'angle α et une surface plane. On évaluera les expressions du volume d'interpénétration, de la surface ainsi que du périmètre de sa base.

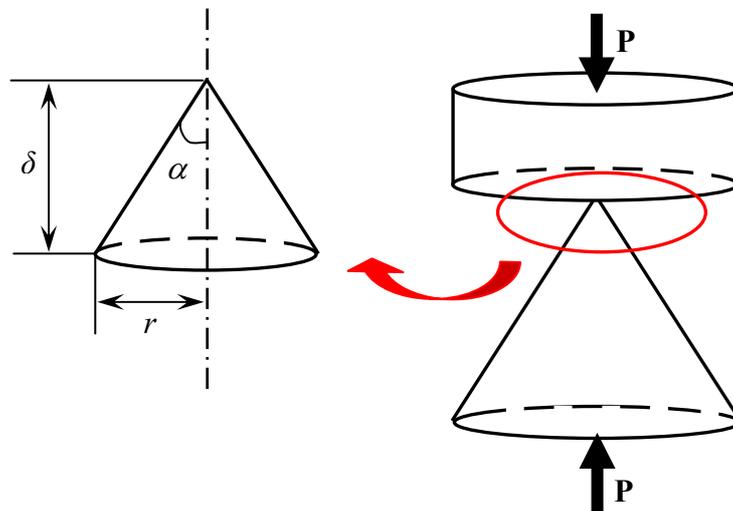


Figure 3.6 : Contact cône / plot

Le volume de la partie en contact est évalué par :

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 \delta$$

La surface de la base en contact :

$$S = \pi r^2$$

Et le périmètre de la surface S :

$$p = 2\pi r$$

Le rapport sera donc :

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{\sqrt{2}}{9} \pi^{3/4} \delta^2 r \quad (3.28)$$

La relation entre r et δ est connue :

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{r}{\delta}$$

Donc :

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{\sqrt{2}}{9} \pi^{3/4} \frac{r^3}{\operatorname{tg}^2 \alpha}$$

Le potentiel sera égale à :

$$U = c_c \frac{8}{15} \frac{\sqrt{2}}{9} E^* \pi^{3/2} \operatorname{tg} \alpha \delta^3 \quad (3.29)$$

La force exprimée en fonction de l'interpénétration :

$$P = c_c \frac{8\sqrt{2}}{45} \pi^{3/2} E^* \operatorname{tg} \alpha \delta^2 \quad (3.30)$$

On peut identifier le coefficient c_c expérimentalement (chapitre suivant) ou analytiquement par identification à la relation (3.8), la constante c_c sera donc de la forme :

$$c_c = \frac{45}{\sqrt{2} \pi^{5/2}} \frac{G^2}{(1-\nu)^2 E^{*2}}$$

Avec :

$$\frac{1}{E^*} = \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2}$$

Si l'on fait l'hypothèse que le module d'Young du corps (1) est très petit devant le module d'Young du corps (2) $E_1 \ll E_2$, il en résulte que :

$$\frac{1}{E^*} \approx \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} = \frac{(1-\nu^2)}{E}$$

Sachant que le module de cisaillement :

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Il en résulte que :

$$G = \frac{(1-\nu)}{2} E^*$$

Et donc :

$$c_c = \frac{45}{4\sqrt{2}\pi^{5/2}} \approx 0.45$$

3.2.2.3. Validation pour la pyramide

Après avoir vu le cas d'un contact entre une surface plane avec une sphère et un cône, nous étudierons le cas d'un contact d'une surface plane avec une pyramide.

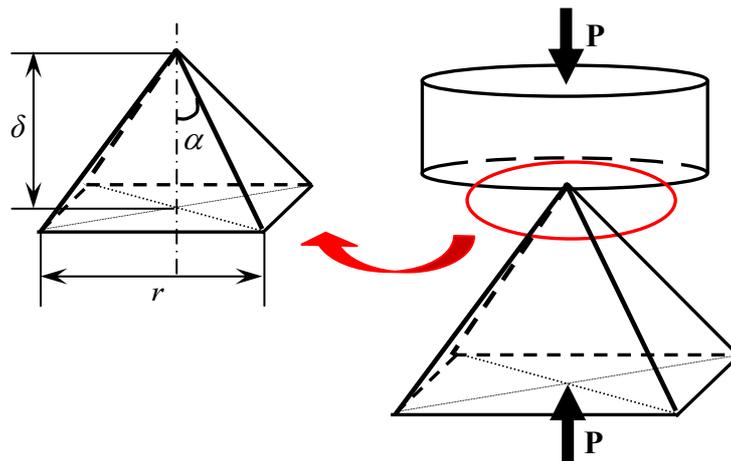


Figure 3.7 : Contact pyramide / plot

Le volume de la partie en contact est évalué par :

$$V = \frac{1}{3} r^2 \delta$$

La surface de la base en contact :

$$S = r^2$$

Et le périmètre de la surface S :

$$p = 4 r$$

Le rapport sera donc:

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{2}{9} \delta^2 r \quad (3.31)$$

La relation entre r et δ est connue:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{r}{\delta}$$

Donc :

$$\frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} = \frac{2\sqrt{2}}{9} \operatorname{tg} \alpha \delta^3$$

Le potentiel sera égal à :

$$U = c_p \frac{8}{15} \frac{2\sqrt{2}}{9} E^* \pi^{3/4} \operatorname{tg} \alpha \delta^3 \quad (3.32)$$

La force sera donc de la forme :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_p \frac{16\sqrt{2}}{45} E^* \pi^{3/4} \operatorname{tg} \alpha \delta^2 \quad (3.33)$$

Une modélisation du contact élastique entre une surface plane et différentes formes de surface régulière et irrégulière a été présentée. La force P est exprimée en fonction de l'interpénétration, des caractéristiques géométriques et mécaniques des surfaces ainsi que par une constante c que l'on a identifiée analytiquement pour le cas sphérique et conique. Il reste à valider expérimentalement les expressions (3.27), (3.30) et (3.33) et donc à identifier les constantes c_s , c_c et c_p .

3.3. Contact ponctuel viscoélastique

Pour un grand nombre de matériaux, la réponse à une sollicitation constante est évolutive dans le temps. En fait, la réponse actuelle est fonction de toute l'histoire antérieure de la sollicitation. Nous allons donner un aperçu des différentes expériences caractéristiques de la viscoélasticité, pour définir la fonction de fluage et de relaxation.

3.3.1. Fonction de fluage

Une expérience très simple permet de mettre en évidence et d'identifier le comportement différé des matériaux, elle est appelée expérience de fluage sous sollicitation uniaxiale. Elle consiste à imposer à un corps une sollicitation homogène en contrainte uniaxiale.

Pour le cas d'une traction simple d'une éprouvette de polymère et en restant dans le cadre des petites déformations, l'éprouvette initialement n'est pas chargée, elle est en équilibre (état de contrainte nul en tout point). A l'instant t_0 on impose instantanément un échelon de contrainte d'amplitude σ_0 , cette contrainte est maintenue constante. On observe la réponse uniaxiale correspondante, donc l'évolution dans le temps de la déformation longitudinale ε .

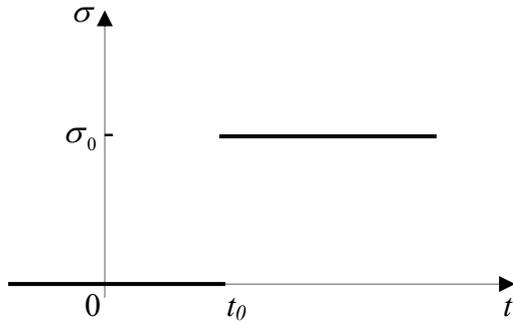


Figure 3.8 : Echelon de contrainte

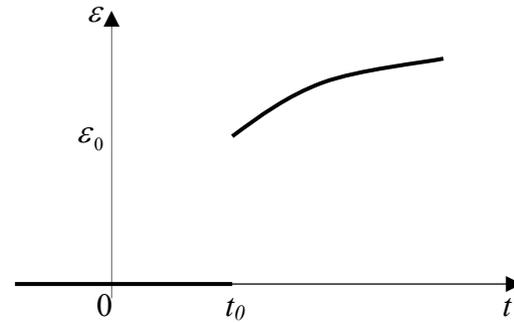


Figure 3.9 : Réponse en déformation

A l'instant t_0 une déformation ε_0 est produite qui traduit le comportement instantané du matériau. Pour $t > t_0$ la déformation continue de croître en fonction du temps (Figure 3.9). L'histoire de la contrainte σ représentée sur la Figure 3.8 s'écrit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t - t_0) \quad (3.34)$$

H : désigne la fonction échelon de Heaviside.

La réponse correspondante est décrite par la formule :

$$\varepsilon(t) = \phi(t) \sigma_0 \quad (3.35)$$

ϕ : est la fonction de fluage.

3.3.2. Fonction de relaxation

L'expérience de relaxation est l'homologue de la précédente dans laquelle la sollicitation imposée est la déformation longitudinale ε et la réponse observée est la contrainte σ .

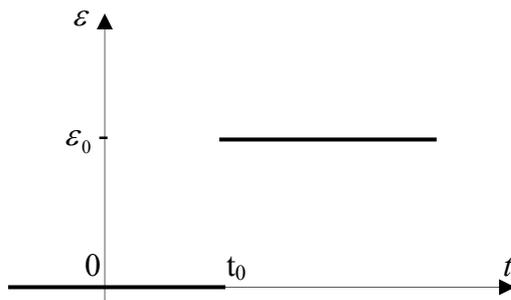


Figure 3.10 : Echelon en déformation

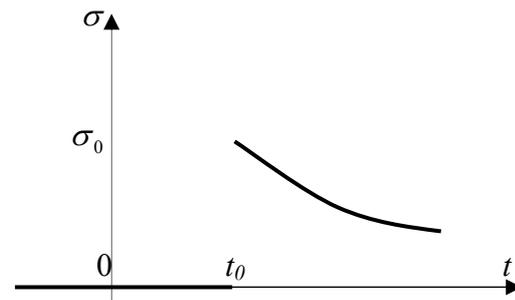


Figure 3.11 : Réponse en contrainte

Ainsi on impose l'histoire de déformation (Figure 3.10) que l'on écrit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t - t_0) \quad (3.36)$$

On observe la réponse de σ que l'on met sous la forme :

$$\sigma(t) = \psi(t) \varepsilon_0 \quad (3.37)$$

ψ : est la fonction de relaxation.

3.3.3. Modèle rhéologique de Zener

Une manière pratique d'aborder le comportement des matériaux viscoélastiques est basée sur la construction de modèles mécaniques simples. On couple un élément présentant une réponse visqueuse idéale à l'application d'une contrainte (un piston qui obéit strictement à la loi de Newton) et un élément présentant une réponse élastique idéale à l'application d'une contrainte (un ressort qui obéit strictement à la loi de Hooke). Le comportement du piston est donc caractérisé par une viscosité η et celui du ressort par un module E_i . En général, on n'obtient pas de représentation quantitative satisfaisante, mais qualitativement, le modèle permet d'appréhender les différents mécanismes mis en jeu.

Nous allons présenter dans ce qui suit le modèle de Zener (Figure 3.12) :

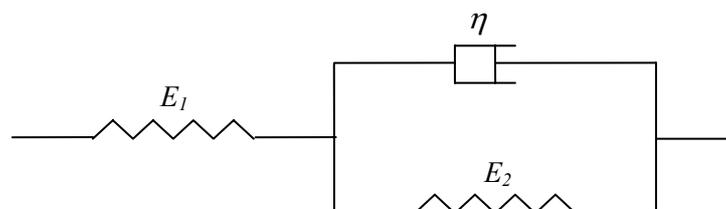


Figure 3.12 : Modèle de Zener

Le comportement s'écrit:

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \\ \sigma = E_1 \varepsilon_1 \\ \sigma = E_2 \varepsilon_2 + \eta \dot{\varepsilon}_2 \end{cases}$$

L'équation différentielle liant contraintes et déformations s'écrit alors :

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1(E_2 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}) \quad (3.38)$$

Cette équation différentielle nous permet donc de trouver la réponse à toute l'histoire de sollicitations en déformation ou en contrainte. On détermine la solution dans le cas de la relaxation et du fluage comme suit

- *Relaxation* :

En imposant une histoire de chargement sous la forme :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 H(t)$$

La réponse en contrainte vérifie donc l'équation différentielle (3.38) :

$$(E_1 + E_2)\sigma + \eta \dot{\sigma} = E_1(E_2 \varepsilon_0 H(t) + \eta \varepsilon_0 \delta_0(t)) \quad (3.39)$$

La solution de l'équation homogène s'écrit :

$$\sigma(t) = \sigma_0 e^{(-t/\tau_r)}$$

Où: $\tau_r = \frac{\eta}{E_1 + E_2}$ représente le temps de relaxation.

Une solution particulière de l'équation différentielle (3.39) s'écrit :

$$\sigma = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 H(t)$$

D'où la solution générale de la forme :

$$\sigma(t) = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \varepsilon_0 H(t) (E_1 e^{(-t/\tau_r)} + E_2) \quad (3.40)$$

Avec la condition initiale $\sigma(0) = E_1 \varepsilon_0$

- Fluage :

On impose une histoire de chargement sous la forme :

$$\sigma(t) = \sigma_0 H(t)$$

La réponse en déformation vérifie donc l'équation différentielle (3.38):

$$(E_1 + E_2)\sigma_0 H(t) + \eta \sigma_0 \delta_0(t) = E_1(E_2 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)) \quad (3.41)$$

La solution de l'équation homogène s'écrit :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 e^{(-t/\tau_f)}$$

Où : $\tau_f = \frac{\eta}{E_2}$ représente le temps de fluage

Une solution particulière de l'équation (3.41) s'exprime sous la forme :

$$\varepsilon = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \sigma_0 H(t)$$

D'où la solution générale de la forme

$$\varepsilon(t) = \frac{E_1 + E_2}{E_1 E_2} \sigma_0 H(t) \left(1 - \frac{E_1}{E_1 + E_2} e^{(-t/\tau_f)} \right) \quad (3.42)$$

Où ε_0 est déterminé par la condition initiale :

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_1}$$

3.3.4. Contact d'une sphère rigide avec un matériau viscoélastique

On a présenté les essais de relaxation et de fluage sous une sollicitation uniaxiale, ainsi que les fonctions de relaxation ψ et de fluage ϕ associées. Ces définitions peuvent être généralisées pour le cas $3D$, en exprimant les relations de contrainte et déformation en termes de composantes déviatoriques :

$$s = (\sigma - \bar{\sigma})$$

Et :

$$e = (\varepsilon - \bar{\varepsilon})$$

Avec :

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)$$

Pour un cisaillement pur, la relation contrainte déformation est de la forme

$$s = 2G e$$

où G le module de cisaillement

L'une des approches pour la résolution d'un problème de contact d'une sphère rigide avec un matériau viscoélastique a été suggérée par Radok [62]. Elle consiste à remplacer les constantes élastiques par un opérateur intégral correspondant à la relation viscoélastique contrainte déformation:

$$s(t) = \int_0^t \psi(t-t') \frac{\partial e(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.43)$$

Ou:

$$e(t) = \int_0^t \phi(t-t') \frac{\partial s(t')}{\partial t'} dt' \quad (3.44)$$

Dans le cas d'un contact purement élastique entre deux sphères, dont l'une est incompressible, la relation qui lie le rayon de la surface de contact a et l'interpénétration δ est de la forme (voir Johnson [42]):

$$a^3 = (R \delta)^{3/2} = \frac{3}{8} \left(\frac{1}{2G} \right) R P \quad (3.45)$$

Ainsi que la distribution de pression :

$$p(r) = \frac{4}{\pi R} 2G (a^2 - r^2)^{1/2} \quad (3.46)$$

En appliquant la méthode de Radok [62] qui consiste à remplacer les constantes élastiques par un opérateur intégral :

- Soit en introduisant la fonction de fluage $\phi(t)$ dans l'expression du rayon de la surface en contact (3.45) :

$$a^3 = \frac{3}{8} R \int_0^t \phi(t-t') \frac{d}{dt'} P(t') dt' \quad (3.47)$$

- Soit en introduisant la fonction de relaxation $\psi(t)$ dans l'expression de la pression (3.46) :

$$p(r,t) = \frac{4}{\pi R} \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} (a^2(t') - r^2)^{1/2} dt' \quad (3.48)$$

L'expression de la force normale appliquée s'exprimera par :

$$P(t) = \frac{8}{3R} \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} a^3(t') dt' \quad (3.49)$$

De la relation (3.45) dans le cas viscoélastique on obtient:

$$a^3(t) = (R \delta(t))^{3/2} \quad (3.50)$$

L'expression de la force devient:

$$P(t) = \frac{8R^{1/2}}{3} \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} (\delta(t'))^{3/2} dt' \quad (3.51)$$

3.3.5. Généralisation aux formes quelconques

Nous avons étudié le cas d'un contact entre une sphère rigide et un solide viscoélastique. On essaiera de généraliser aux cas conique et pyramidal, en supposant que la variation de la force P en fonction de l'interpénétration δ pour le cas d'un contact élastique s'écrit sous la forme :

$$P = 2G Q \delta^\gamma \quad (3.52)$$

Où : γ et Q dépendent de la forme de la surface de contact.

On appliquant la méthode de Radok qui consiste à remplacer les constantes élastiques par un opérateur intégral, l'expression de la force devient:

$$P(t) = Q \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^\gamma(t') dt' \quad (3.53)$$

	<i>Sphérique</i>	<i>Conique</i>	<i>Pyramidal</i>
γ	3/2	2	2
Q	$\frac{8}{3} \sqrt{R}$	$\frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \alpha$	$c_p \frac{32}{45} \sqrt{2\pi}^{3/4} \cot \alpha$

Tableau 3.1 : Paramètres γ et Q pour les différentes formes de surface de contact

En tenant compte des paramètres γ et Q définis dans le Tableau 3.1, l'expression de la force devient donc:

- Pour un contact entre une sphère rigide et un plan viscoélastique:

$$P(t) = \frac{8}{3} \sqrt{R} \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^{\frac{3}{2}}(t') dt' \quad (3.54)$$

- Pour un contact entre un cône rigide et un plan viscoélastique:

$$P(t) = \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^2(t') dt' \quad (3.55)$$

- Pour un contact entre une pyramide rigide et un plan viscoélastique

$$P(t) = c_p \frac{32}{45} \sqrt{2\pi}^{3/4} \cot \alpha \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^2(t') dt' \quad (3.56)$$

3.4. Conclusion

Dans la première partie de ce chapitre, on s'est intéressé au problème de contact élastique, à la théorie classique du contact de Hertz et à la théorie dans le cas d'un contact de corps conique a été présentée. Nous avons abordé le modèle théorique du potentiel d'interaction pour un contact entre des surfaces régulières. Par la suite nous avons généralisé le modèle pour l'évaluation des forces de contact entre une surface plane et toutes formes de surfaces (régulière et irrégulière). La validation de ce modèle pour le cas d'un contact avec des formes de surfaces simples (sphérique, conique et pyramidale) a été faite. On a terminé ce chapitre par une approche de la résolution d'un problème de contact viscoélastique à partir du modèle analytique élastique développé précédemment. Finalement, une relation entre la force normale P et l'interpénétration δ pour le cas d'un contact élastique et viscoélastique, connaissant le volume d'interpénétration, la surface de la base du volume et le périmètre de cette surface, a été développée.

Au chapitre suivant nous allons valider expérimentalement les différents modèles analytiques présentés.

Chapitre IV

Validation expérimentale des modèles de contact ponctuels

Nous avons présenté dans le chapitre précédent une méthode de calcul de la force de réaction dans le cas d'un contact ponctuel élastique et viscoélastique. On a présenté les différents modèles permettant d'avoir la force en fonction de l'interpénétration δ , tout en prenant en compte la géométrie et les caractéristiques mécaniques des surfaces en contact. Nous avons développé un modèle analytique à partir de la théorie du potentiel d'interaction pour des surfaces régulières et irrégulières, les cas de surface sphérique, conique et pyramidale en contact avec une surface plane ont été abordés plus en détail. Une validation expérimentale serait nécessaire. Dans ce but on a établi un dispositif expérimental où l'on utilise une machine de compression *Instron*, différents points de contact de forme sphérique, conique et pyramidale et un logiciel *LabView* pour l'acquisition des résultats. Pour simuler les patins de gomme du pneumatique, un plot en caoutchouc sera utilisé. Connaissant la force normale appliquée P et le déplacement de la traverse δ , on établira expérimentalement la relation entre la charge en fonction de l'interpénétration, pour chaque contact plot / différents points de contact. On commencera tout d'abord par identifier les caractéristiques mécaniques du plot en caoutchouc par un essai de relaxation. Connaissant les caractéristiques du plot et des points de contact, on essaiera de valider expérimentalement nos modèles dans le cas d'un contact élastique et viscoélastique et ainsi d'identifier et de comparer les coefficients c_s , c_e et c_p correspondant aux modèles de contact pour le cas sphérique, conique et pyramidal.

4.1. Identification des caractéristiques du plot en caoutchouc

4.1.1. Identification du module d'Young par un essai de relaxation

On réalise un essai de compression simple sur un plot en caoutchouc en utilisant une machine de compression de type Instron Figure 4.1. On charge brusquement et rapidement et on maintient une déformation constante de 8% (par blocage de la traverse).

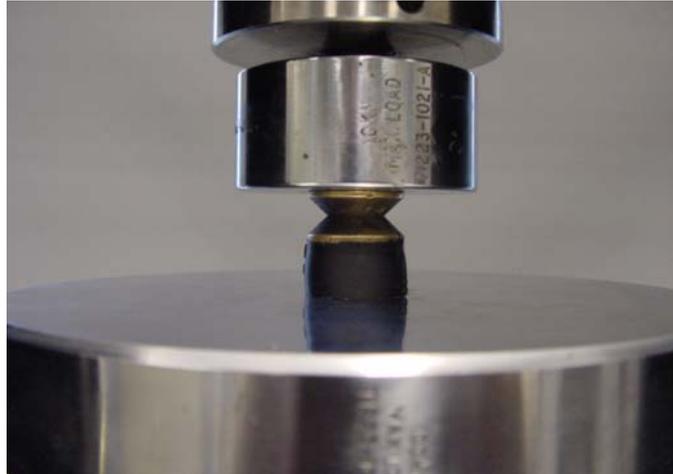


Figure 4.1: Essai de relaxation

Par l'intermédiaire d'un logiciel d'acquisition *Labview*, l'évolution de la contrainte en fonction du temps est représentée sur la Figure 4.2. On remarque une montée brusque et rapide de la contrainte à $0,93 \text{ MPa}$ pendant le temps de charge. Cette contrainte correspond à la contrainte σ_0 . Le plot a subi une déformation de l'ordre de 8% de sa hauteur initiale. Cette déformation est maintenue par blocage de la traverse pendant un temps assez grand jusqu'à ce qu'il y ait stabilisation de la contrainte $\sigma \longrightarrow \sigma_\infty$.

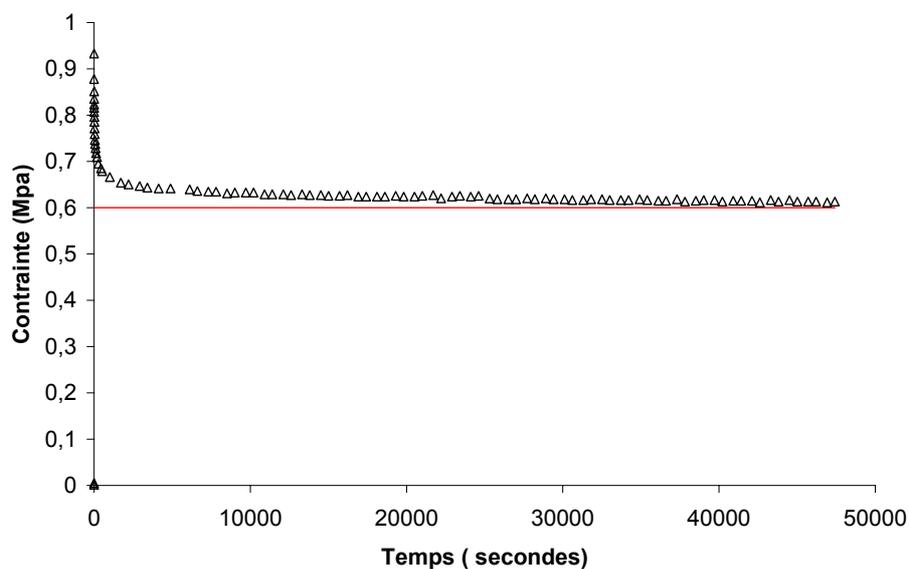


Figure 4.2: Evolution de la contrainte en fonction du temps pendant l'essai de relaxation

A partir de l'essai de relaxation, on peut identifier les caractéristiques du plot en caoutchouc ainsi donc son module d'Young statique. La déduction de la contrainte instantanée σ_0 et de la contrainte à l'équilibre σ_∞ se fera graphiquement (Figure 4.2) il en résulte :

- Contrainte instantanée : $\sigma_0 = 0,93 \text{ MPa}$
- Contrainte à l'équilibre : $\sigma_\infty = 0,6 \text{ MPa}$

Le module d'Young E_∞ statique du plot est déduit pour un temps infini:

$$E_\infty = \frac{\sigma_\infty}{\varepsilon_0} \quad (4.1)$$

Il en résulte que la valeur du module d'Young est:

$$E = E_\infty = 7,5 \text{ MPa} \quad (4.2)$$

4.1.2. Identification des temps caractéristiques du plot

Un matériau viscoélastique peut avoir plusieurs temps caractéristiques, chaque temps caractéristique intervient selon la vitesse instantanée imposée au matériau. L'identification de ces temps se fait à partir de l'essai de relaxation.

La contrainte en fonction du temps s'écrit sous la forme d'une série de Prony :

$$\sigma(t) = (A_n e^{-t/\tau_n} + A_{n-1} e^{-t/\tau_{n-1}} + \dots + A_1 e^{-t/\tau_1} + E_\infty) \varepsilon_0 \quad (4.3)$$

Pour notre matériau on a identifié quatre temps caractéristiques, l'équation (4.3) devient alors :

$$\sigma(t) = (A_4 e^{-t/\tau_4} + A_3 e^{-t/\tau_3} + A_2 e^{-t/\tau_2} + A_1 e^{-t/\tau_1} + E_\infty) \varepsilon_0 \quad (4.4)$$

Pour un temps $t \gg \tau_2, \tau_3$ et τ_4 il en résulte :

$$\sigma(t) \approx (A_1 e^{-t/\tau_1} + E_\infty) \varepsilon_0 \quad (4.5)$$

En traçant la courbe $\text{Ln}(\sigma(t) - \sigma_\infty)$ en fonction du temps, on obtient graphiquement le temps caractéristique τ_1 et l'amplitude A_1 .

On pose :

$$\sigma_1 = A_1 \varepsilon_0 e^{-t/\tau_1}$$

L'équation (4.4) peut s'écrire alors:

$$\sigma(t) = (A_4 e^{-t/\tau_4} + A_3 e^{-t/\tau_3} + A_2 e^{-t/\tau_2}) \varepsilon_0 + \sigma_1(t) + \sigma_\infty \quad (4.6)$$

Avec : σ_1 et σ_∞ sont connus.

On applique la même méthode afin de déterminer les autres temps caractéristiques et les amplitudes. Les résultats sont représentés dans le tableau 4.1 :

i	1	2	3	4
τ_i (Secondes)	33333,33	1110,00	64,94	3,37
A_i (MPa)	0,59	0,79	1,56	2,29

Tableau 4.1 : Temps caractéristiques et amplitudes du matériau viscoélastique utilisé

Après recalage de la courbe de relaxation à partir des temps caractéristiques τ_i et des amplitudes A_i , on remarque que pour $i = 2-4$ le recalage par série de prony (Figure 4.3) n'est pas suffisant. Sur la Figure 4.4 on remarque qu'il y a une bonne concordance des deux courbes, il faudrait donc prendre en considération tous les temps caractéristiques et amplitudes pour avoir un bon recalage de la courbe de relaxation.

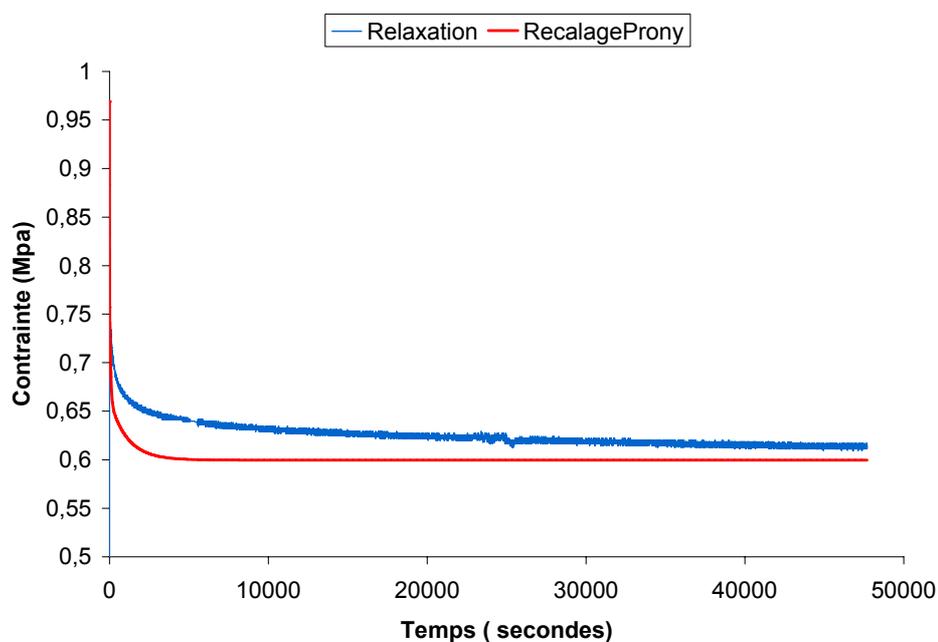


Figure 4.3: Comparaison de la courbe de relaxation et de la courbe de recalage avec $i=2-4$

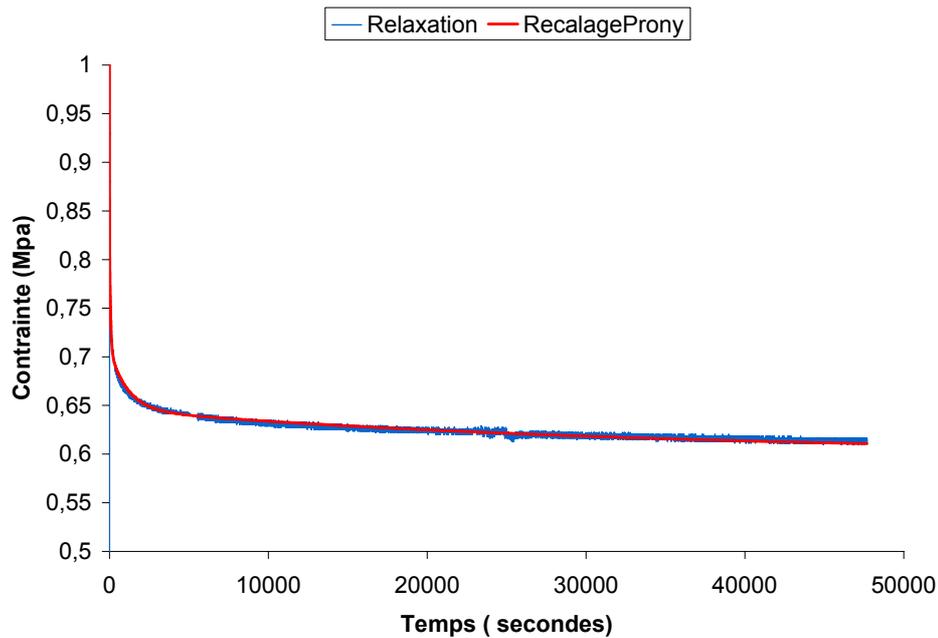


Figure 4.4: Comparaison de la courbe de relaxation et de la courbe de recalage avec $i=1-4$

4.1.3. Identification du module d'Young à partir de la loi de Hertz

On prend le même dispositif expérimental que celui utilisé pour l'essai de relaxation. On essaiera de retrouver le module d'Young du plot par identification à la loi de contact de Hertz (voir chapitre III). En prenant le solide (1) comme étant le plot en caoutchouc et le solide (2) comme étant la bille en acier, (voir Figure 4.5).

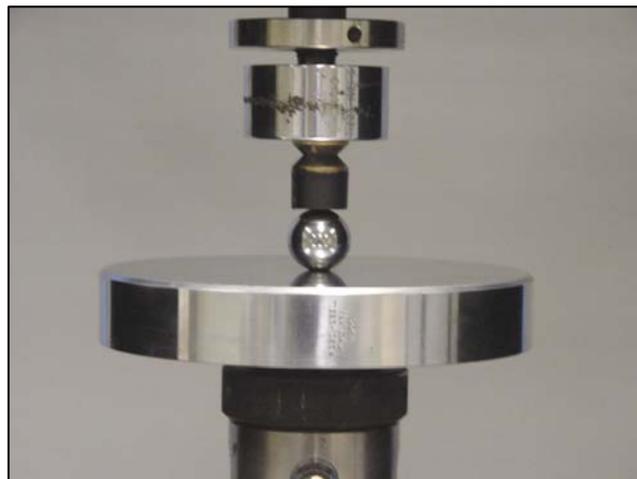


Figure 4.5: Dispositif expérimental

Le chargement s'effectue à une vitesse de $0,001 \text{ mm/s}$ et ceci afin de prendre les caractéristiques du plot en statique. La Figure 4.6 représente l'évolution de la force P en fonction de l'interpénétration δ .

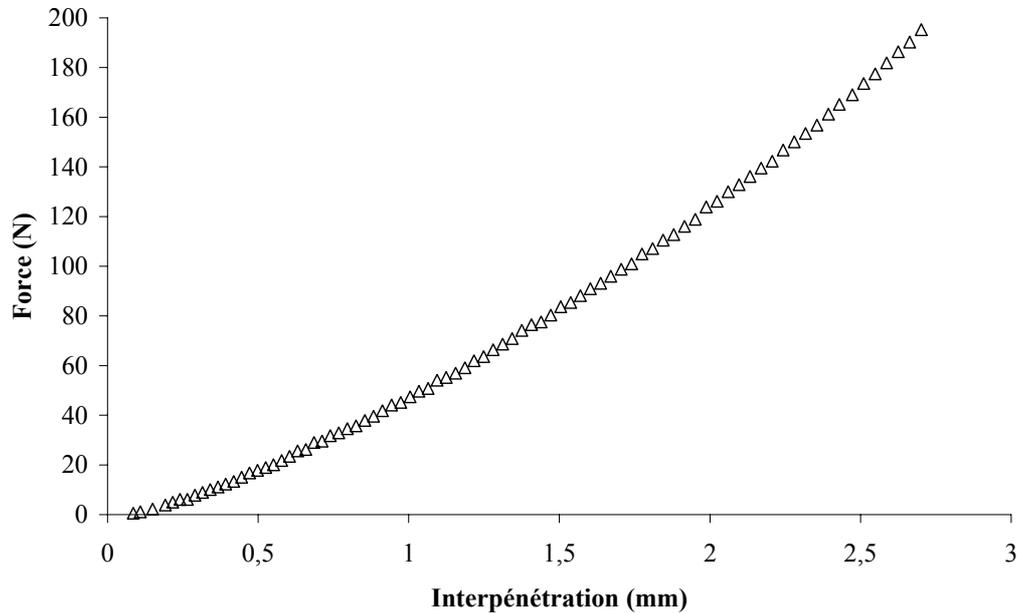


Figure 4.6: Evolution de la force en fonction de l'interpénétration pour le contact entre un plan et une sphère

D'après la loi de contact de Hertz, la relation donnant la force en fonction de l'interpénétration est de la forme:

$$P = K \delta^{3/2} \quad (4.7)$$

Où :

$$K = \frac{4 E^* \sqrt{R}}{3}$$

R est le rayon de courbure équivalent

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

Afin d'identifier le coefficient K , on trace la courbe logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration (Figure 4.7). Par régression linéaire de la courbe, on trouve une droite de la forme:

$$\ln(P) = 1,51 \ln(\delta) + 14,10 \quad (4.8)$$

Dans cette relation et dans les suivantes du même type P est exprimé en N et δ en mm .

A partir de la pente et de son ordonnée à l'origine, on peut les identifier à la relation de Hertz (4.7), on obtient :

$$\ln(K) = 14,10$$

Connaissant:

- Le rayon de courbure du plot $R_{plot} \longrightarrow \infty$
- Le rayon de la bille en acier $R_{sphere} = 0,010 \text{ m}$
- Le Module d'Young de l'acier $E_{sphere} = 210 \text{ GPa}$
- Les coefficients de Poisson $\nu_{plot} = 0,5$ et $\nu_{sphere} = 0,3$

On en déduit le module d'Young du plot en caoutchouc :

$$E_{plot} = 7,58 \text{ MPa}$$

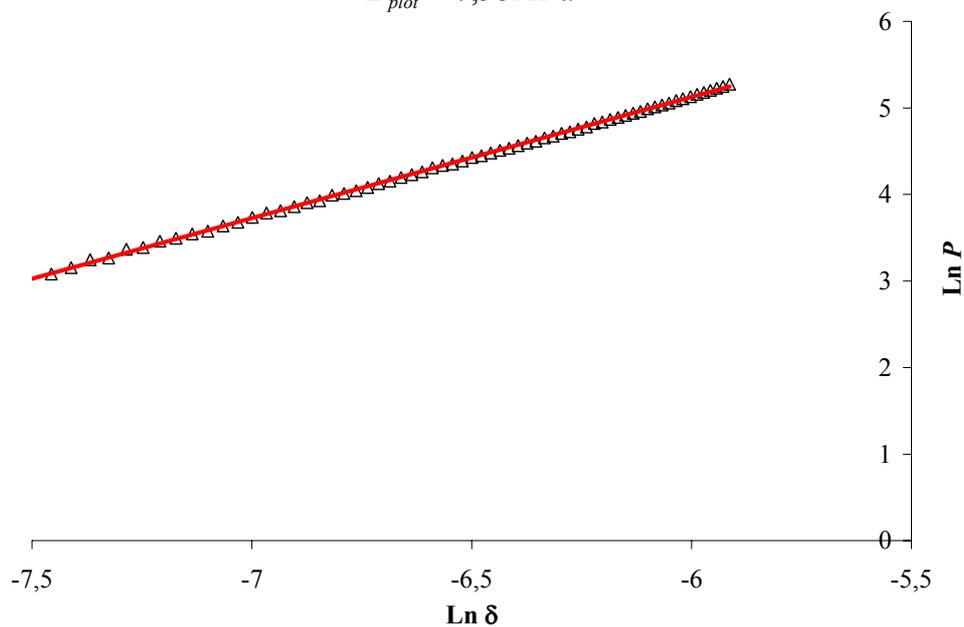


Figure 4.7: (Δ) évolution de la force en fonction de l'interpénétration à l'échelle logarithmique, (—) régression linéaire de la courbe logarithmique

On a identifié d'une part le module d'Young et les temps caractéristiques du plot en caoutchouc par un essai de relaxation et d'autre part on a identifié le module d'Young par comparaison avec la loi de contact de Hertz. D'après les résultats obtenus on peut dire que la valeur du module d'Young est de l'ordre de $7,50 \text{ MPa}$. C'est cette valeur qu'on prendra pour la suite de notre étude.

4.2. Validation expérimentale du modèle analytique de contact élastique

Dans le chapitre précédent nous avons présenté un modèle de calcul de la force normale en fonction du volume d'interaction, de la surface de sa base, du périmètre de cette surface et

d'un coefficient c pour le cas d'un contact élastique entre une surface plane et une surface sphérique (régulière), conique et pyramidale (irrégulière).

Une identification du paramètre c nous permettra de valider notre modèle, ainsi donc on aura un modèle de contact élastique généralisé pour différentes formes de contact.

La définition de la force est fondée sur la détermination d'un potentiel U et sur le principe des travaux virtuels (voir détail au chapitre précédent). Le potentiel $U(\delta)$ s'exprime par:

$$U = c \frac{8}{15\pi^{1/4}(\theta_1 + \theta_2)} \frac{V^2 p^{1/2}}{S^{7/4}} \quad (4.9)$$

Et la force sera donc :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta}$$

L'écriture généralisée du potentiel sous la forme (4.9) nous permettra d'évaluer la force de contact pour différentes surfaces régulières et irrégulières. Il a été établi au chapitre III, pour des surfaces régulières, que le coefficient c est égal à 0,36, nous avons retrouvé analytiquement cette valeur lors de l'application de notre modèle pour le cas d'un contact entre un plan et une sphère par identification à la loi de Hertz. Pour des surfaces irrégulières, nous avons appliqué le modèle pour un contact entre un plan et un cône, après identification avec le modèle analytique (voir chapitre III) pour le cas d'une surface conique, on trouve une valeur de 0,45 pour le coefficient c . L'absence de modèle analytique pour le calcul de la force pour des formes de surface pyramidale ne nous a pas permis d'avoir une valeur analytique du coefficient c pour le cas d'un contact entre un plan et une pyramide.

Dans ce qui suit, on essayera d'identifier expérimentalement le coefficient c pour les différents cas d'application de notre modèle analytique.

4.2.1. Identification du coefficient c_s pour le cas d'un contact plot/sphère

L'évaluation de la force d'interaction à partir du potentiel (4.9) a été faite au chapitre précédent, pour le cas d'un contact entre une sphère et une surface plane, la force s'écrit sous la forme:

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2} \quad (4.10)$$

D'après les résultats expérimentaux du contact entre le plot et la bille en acier (Figure 4.7) et par identification à la relation (4.10) il en résulte que:

$$c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} = e^{14.10} \quad (4.11)$$

Connaissant les caractéristiques mécaniques et géométriques des deux corps en contact, on déduit la valeur expérimentale du coefficient c_s qui sera égale à 0,34. Nous avons vu dans le chapitre précédent (voir équation (3.23)) que la valeur théorique du coefficient c_s est égale à 0,36 ce qui n'est pas très différent de la valeur expérimentale trouvée.

4.2.2. Identification du coefficient c_c pour le cas d'un contact plot/ cône

Nous avons effectués le même essai que celui du contact entre le plot et la sphère. On utilisera deux cônes en acier d'angle différents ($\alpha = 60^\circ$ et $\alpha = 45^\circ$) afin de voir l'influence de l'angle α sur la répartition de la force. Le dispositif expérimental est présenté sur la Figure 4.8

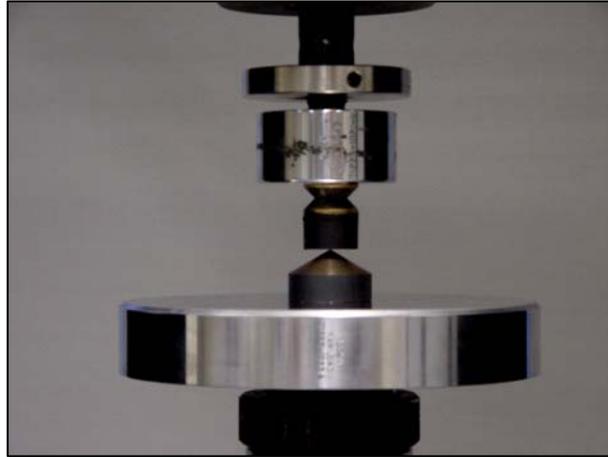


Figure 4.8: *Dispositif expérimental*

L'évolution de la force en fonction de l'interpénétration pour chaque cône en contact est donnée sur la Figure 4.9.

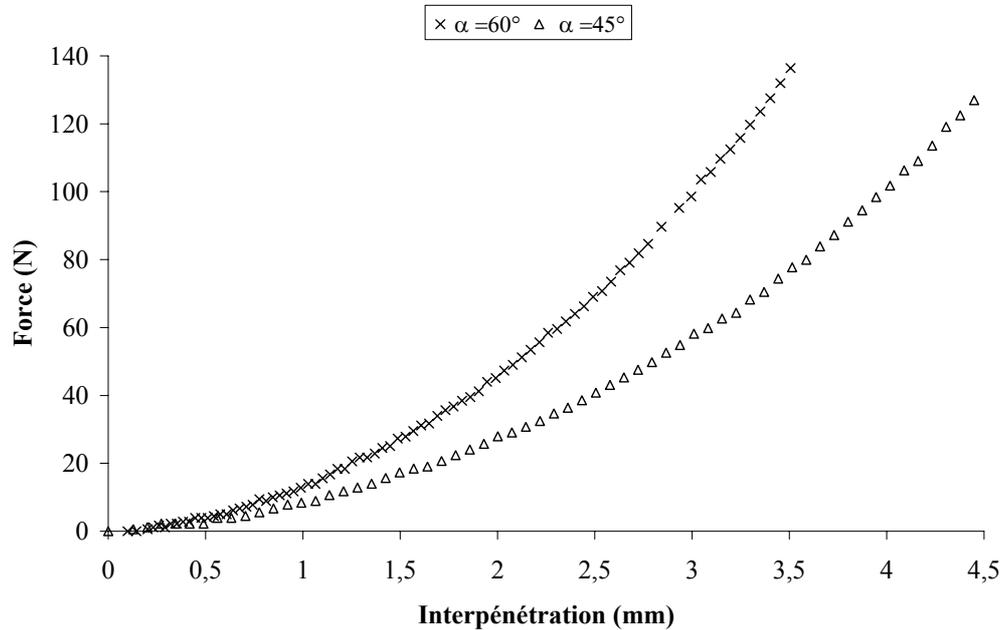


Figure 4.9: *Evolution de la force en fonction de l'interpénétration pour le contact entre un plan et un cône*

En traçant la courbe logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration (Figure 4.10) et après avoir effectué une régression linéaire pour chaque courbes $\ln P = f(\ln \delta)$, on en déduit:

En traçant la courbe logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration (Figure 4.10) et après avoir effectué une régression linéaire pour chaque courbe $\text{Ln}P = f(\text{Ln}\delta)$, on en déduit:

- Pour le cône ayant un angle $\alpha = 60^\circ$:

$$\text{Ln}(P) = 2,00\text{Ln}(\delta) + 16,15 \quad (4.12)$$

- Pour le cône ayant un angle $\alpha = 45^\circ$:

$$\text{Ln}(P) = 2,00\text{Ln}(\delta) + 15,67 \quad (4.13)$$

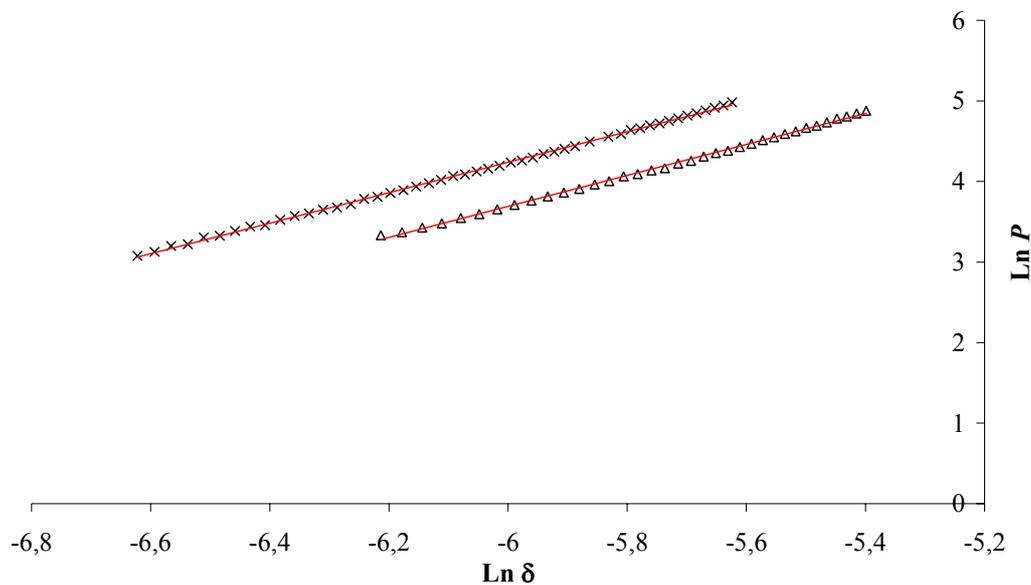


Figure 4.10: Evolution de la force en fonction de l'interpénétration à l'échelle logarithmique: (Δ) $\alpha = 45^\circ$ (×) $\alpha = 60^\circ$ et (—) régression linéaire des courbes logarithmiques

La force P peut s'écrire en fonction de l'interpénétration δ de la manière suivante :

$$(4.14) \quad \begin{cases} P = e^{16,15} \delta^2 & \text{pour : } \alpha = 60^\circ \\ P = e^{15,67} \delta^2 & \text{pour : } \alpha = 45^\circ \end{cases}$$

L'évaluation de la force à partir du potentiel (4.9), adapté au cas d'un contact entre une surface plane et un cône, est interprétée par la relation :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_c \frac{8\sqrt{2}}{45} \pi^{3/2} E^* \text{tg}\alpha \delta^2 \quad (4.15)$$

Par identification à (4.14) on déduit la valeur du coefficient c_c :

$$c_{c60^\circ} = 0,45 \quad \text{et} \quad c_{c45^\circ} = 0,43$$

La valeur du coefficient c_c ne diffère pas trop avec la variation de l'angle du cône, on peut dire que la valeur du coefficient est égale à 0,44, alors qu'analytiquement au chapitre III la valeur du coefficient c_c était égale à 0,45.

4.2.3. Identification du coefficient c_p pour le cas d'un contact plot/pyramide

Nous avons présenté au chapitre III le modèle de contact élastique dans le cas d'un contact entre un plot et une pyramide. L'expression de la force en fonction de l'interpénétration est de la forme :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_p \frac{16\sqrt{2}}{45} E^* \pi^{3/4} \operatorname{tg} \alpha \delta^2 \quad (4.16)$$

Afin d'identifier le coefficient c_p , on a repris le même dispositif expérimental (Figure 4.10) que celui utilisé pour identifier les coefficients c_s et c_c . La pyramide a un angle $\alpha = 68^\circ$.

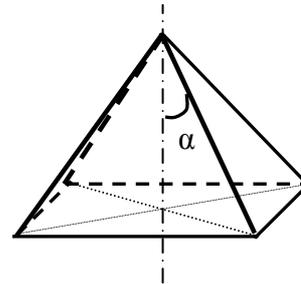
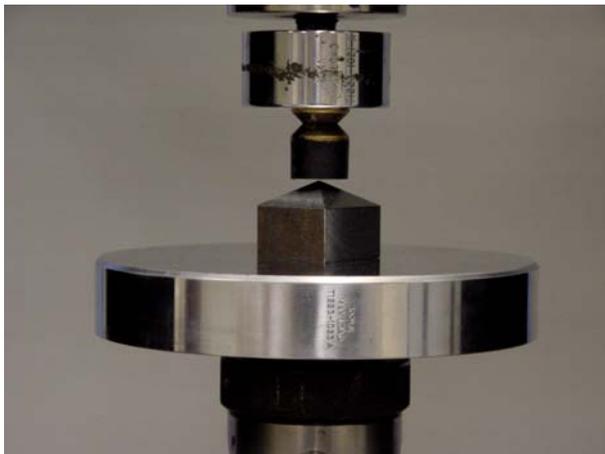


Figure 4.11: Dispositif expérimental

Après avoir tracé la courbe logarithmique (Figure 4.13) de la variation de la force en fonction de l'interpénétration (Figure 4.12), on peut écrire :

$$c_p \frac{16\sqrt{2}}{45} E^* \pi^{3/4} \operatorname{tg} \alpha = e^{16,53} \quad (4.17)$$

Il en résulte que $c_p = 0,53$.

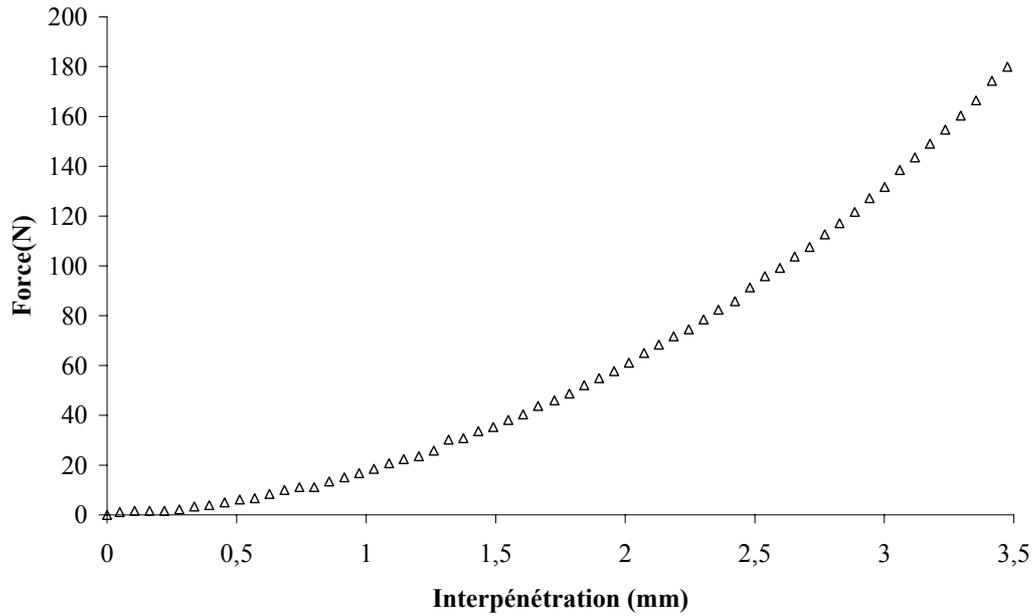


Figure 4.12: Evolution de la force en fonction de l'interpénétration pour le contact entre un plan et une pyramide

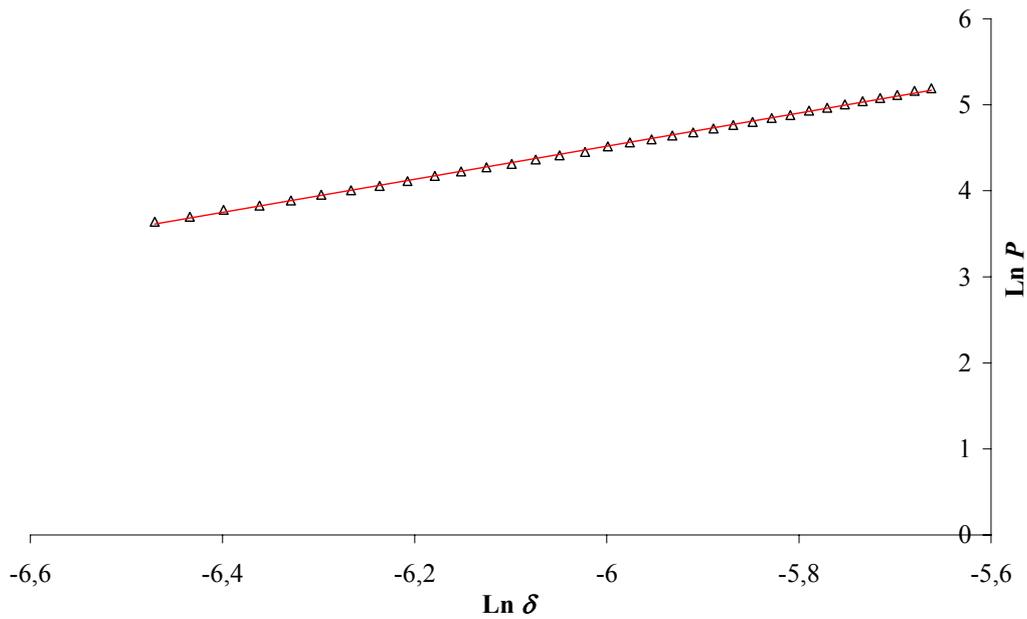


Figure 4.13: (Δ) évolution de la force en fonction de l'interpénétration à l'échelle logarithmique, (—) régression linéaire de la courbe logarithmique

Des essais de contact élastique entre un plot en caoutchouc avec différentes surfaces: sphérique, conique et pyramidale ont été effectués. Ces essais nous ont permis d'identifier le coefficient c pour chaque cas. A partir du potentiel de contact U qui s'écrit sous la forme:

$$U = c \frac{8\pi^{3/4} E^* V^2 p^{1/2}}{15 S^{7/4}}$$

On a déduit la variation de la force en fonction de l'interpénétration pour les différentes surfaces :

- *Sphérique* :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2}$$

- *Conique* :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_c \frac{8\sqrt{2}}{45} \pi^{3/2} E^* \operatorname{tg} \alpha \delta^2$$

- *Pyramidale* :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_p \frac{16\sqrt{2}}{45} E^* \pi^{3/4} \operatorname{tg} \alpha \delta^2$$

	<i>Sphérique</i>	<i>Conique</i>		<i>Pyramidale</i>
<i>c</i>	c_s	c_c		c_p
<i>Expérimentalement</i>	0,34	45°	60°	0,53
		0,43	0,45	
<i>Analytiquement</i>	0,36	0,45		-

Tableau 4.2 : Identification des coefficients c_s , c_c et c_p

Les coefficients c_s , c_c et c_p ont été identifiés expérimentalement dans ce chapitre. Sur le tableau 4.2 sont représentées les valeurs obtenues pour les différentes surfaces. On remarque qu'il n'y a pas une grande différence entre les résultats expérimentaux et les résultats analytiques.

On peut conclure que la valeur du coefficient c_s sera égale à 0,36. Pour le cas conique la valeur du coefficient c_c sera égale à 0,45 et ceci pour n'importe quel angle α . Vu l'absence d'une théorie analytique pour le contact pyramidal on peut se contenter de la validation expérimentale, la valeur du coefficient c_p sera égale à 0,53.

On peut conclure d'après les résultats du contact entre un plan et des surfaces (régulières et irrégulières) que la valeur moyenne du coefficient c est égale à 0,44.

4.3. Validation expérimentale du modèle de contact viscoélastique

Au chapitre III nous avons établi un modèle de contact viscoélastique en se basant sur une modélisation d'un contact élastique que nous avons validé précédemment pour chaque forme de surface. Le principe de la modélisation du contact viscoélastique est de remplacer les

constantes élastiques par un opérateur intégral. L'expression de la force en fonction de l'interpénétration se met sous la forme:

- Pour un contact entre une sphère rigide et un plan viscoélastique:

$$P(t) = \frac{8}{3} \sqrt{R} \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^{3/2}(t') dt' \quad (4.18)$$

- Pour un contact entre un cône rigide et un plan viscoélastique:

$$P(t) = \frac{4}{\pi} \operatorname{tg} \alpha \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^2(t') dt' \quad (4.19)$$

- Pour un contact entre une pyramide rigide et un plan viscoélastique

$$P(t) = c_p \frac{32}{45} \sqrt{2} \pi^{3/4} \cot \alpha \int_0^t \psi(t-t') \frac{d}{dt'} \delta^2(t') dt' \quad (4.20)$$

Le coefficient c_p a été identifié expérimentalement précédemment.

De la même manière que pour le cas du contact élastique nous allons effectuer des essais expérimentaux afin de valider nos modèles de contact viscoélastique.

4.3.1. Contact entre un plot en caoutchouc et une bille en acier

On procède avec le même dispositif expérimental, sauf qu'au lieu de charger à une vitesse de 0,001 mm/s, le chargement se fera à une vitesse plus élevée de l'ordre de 5 mm/s. On utilisera le même plot et la même bille en acier. Donc les caractéristiques géométriques et mécaniques seront bien connues. Le temps de l'essai ne dépasse pas plus d'une seconde, le temps caractéristique τ_4 est le temps qui se rapproche le plus de cette valeur. Pour simplifier l'expression de la contrainte (4.4), les autres temps caractéristiques ne seront pas pris en considération, l'équation (4.4) se mettra sous la forme :

$$\sigma(t) = (A_4 e^{-t/\tau_4} + E') \varepsilon_0$$

avec $E' = A_3 + A_2 + A_1 + E_\infty$

La relation entre le module de cisaillement G et le module d'Young E pour un matériau incompressible s'exprime par :

$$G = \frac{E}{3}$$

Posant :

$$\delta(t') = V t'$$

Il en résulte que l'équation (4.18) s'écrit sous la forme :

$$P(t) = \frac{8}{3} \sqrt{R} \int_0^t \frac{2}{3} (A_4 e^{-(t-t')/\tau_4} + E') \frac{d}{dt'} (V t')^{3/2} dt' \quad (4.21)$$

Il devient :

$$P(t) = \frac{8}{3} \sqrt{R} V^{3/2} \left[\frac{2}{3} E' t^{3/2} + A_4 \tau_4 t^{1/2} + \frac{i\sqrt{\pi}}{2} \tau_4^{3/2} A_4 e^{-t/\tau_4} \operatorname{erf} \left(i \sqrt{\frac{t}{\tau_4}} \right) \right] \quad (4.22)$$

Où erf est la fonction d'erreur : $\operatorname{erf}(ix) = \frac{-2}{i\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy$

Deux courbes sont représentées sur la Figure 4.14, l'évolution de la force P en fonction de l'interpénétration δ à partir des résultats expérimentaux et à partir des résultats de notre modélisation.

On remarque sur le graphique qu'il y a une bonne concordance entre les deux résultats. On peut donc conclure que notre modèle est valide pour le cas du contact viscoélastique entre une surface plane et une surface sphérique.

La Figure 4.15 représente une comparaison entre le résultat obtenu par le modèle analytique développé dans le cas du contact élastique et dans le cas du contact viscoélastique, il en résulte que la valeur de la force dans le cas du contact viscoélastique est plus grande de 24% par rapport à la valeur de la force dans le cas du contact élastique.

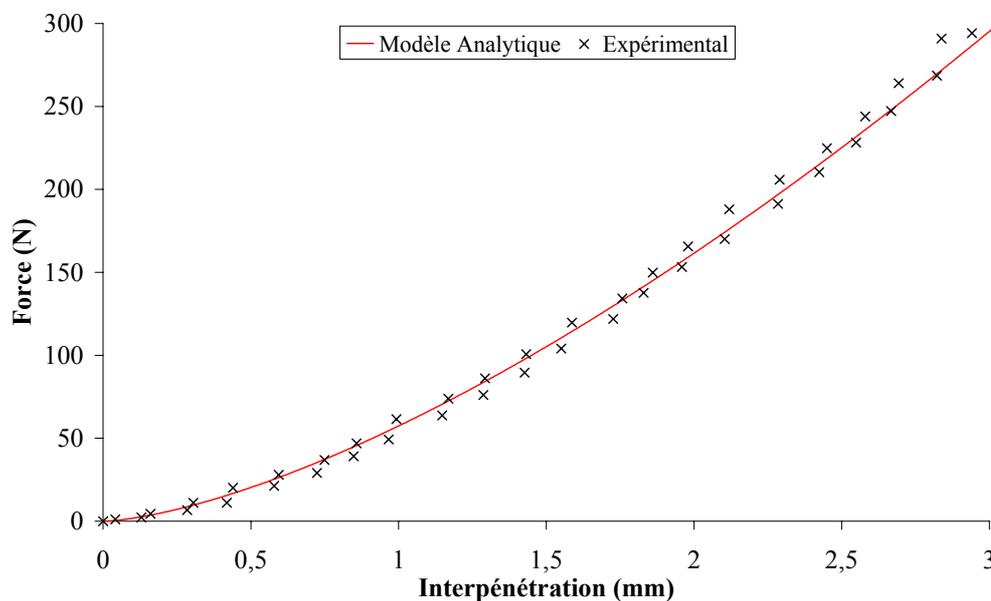


Figure 4.14: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle analytique pour le cas sphérique dans le cas d'un contact viscoélastique

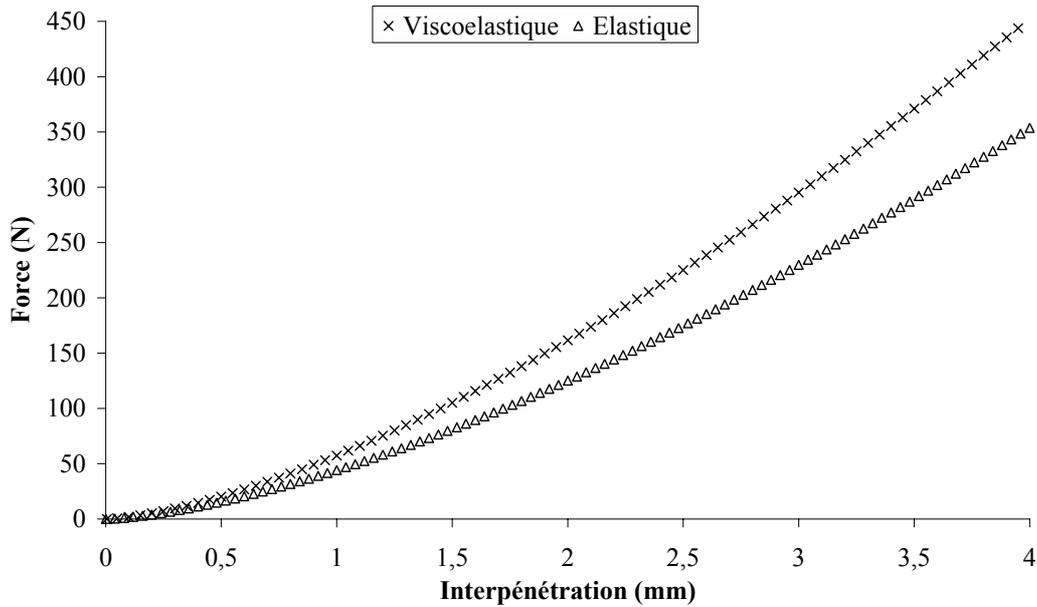


Figure 4.15: Comparaison entre les résultats du modèle analytique pour un contact élastique et un contact viscoélastique pour le cas sphérique

4.3.2. Contact entre un plot en caoutchouc et un cône en acier

Comme dans le cas de notre étude expérimentale du contact entre le plot et la sphère, on étudiera expérimentalement le cas du contact viscoélastique entre le plot et le cône. Un chargement à une vitesse de 5 mm/s est appliqué en utilisant la machine *Instron*. Les résultats sont représentés sur la courbe ci-dessous (Figure 4.16). On représente la courbe expérimentale et la courbe de la solution du modèle analytique (équation (4.19)). On remarque qu'il y a une bonne concordance des deux courbes jusqu'à une certaine valeur de $\delta \approx 0,0035 \text{ m}$. Au-delà de cette valeur cette valeur les deux courbes n'ont pas la même allure, ce qui peut s'expliquer par les faibles dimensions du plot en caoutchouc utilisé lors de l'étude.

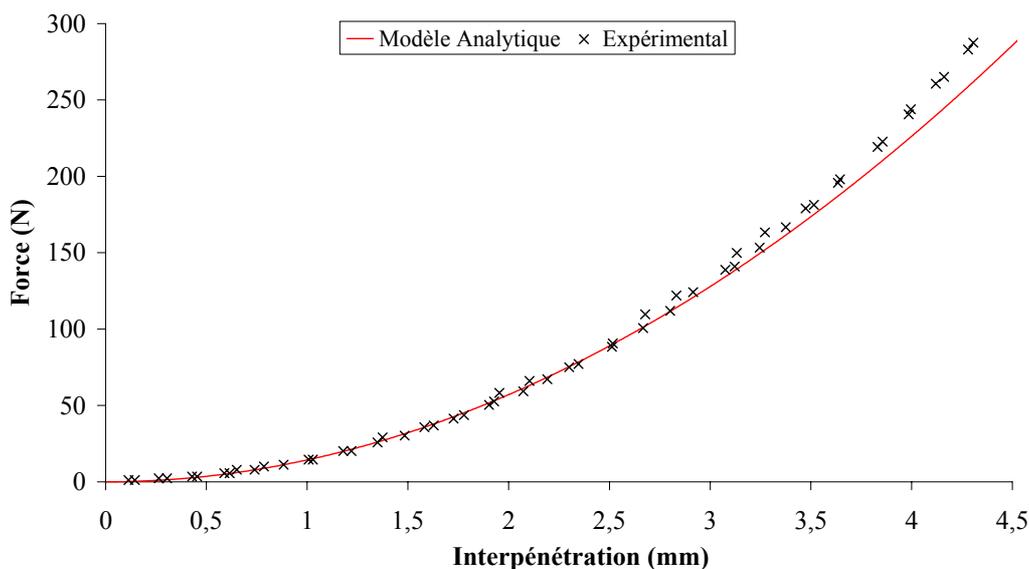


Figure 4.16: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle analytique pour le cas conique dans le cas d'un contact viscoélastique

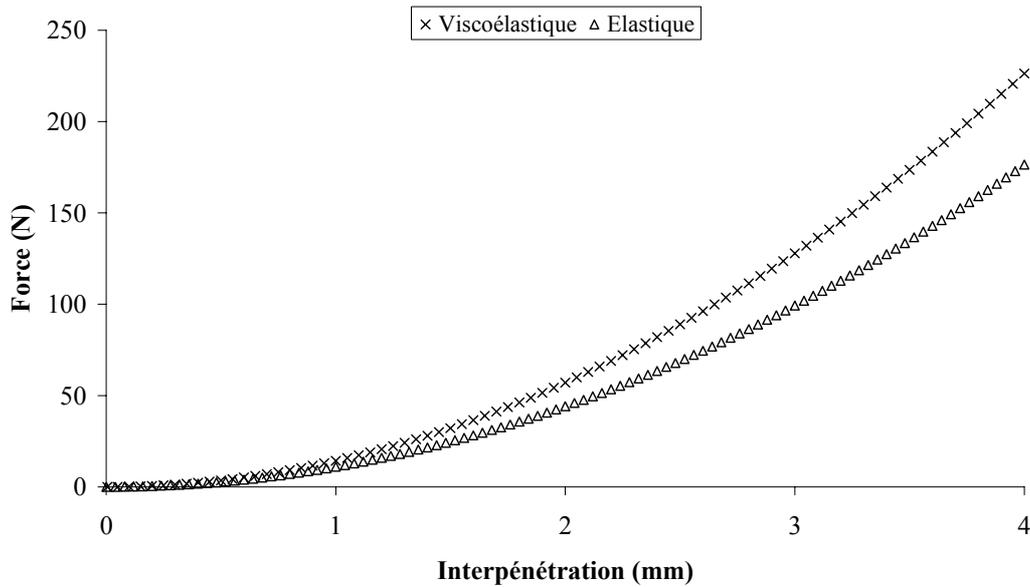


Figure 4.17: Comparaison entre les résultats du modèle analytique pour un contact élastique et un contact viscoélastique pour le cas conique

La Figure 4.17 représente une comparaison entre le résultat du modèle analytique obtenu dans le cas du contact élastique et dans le cas du contact viscoélastique. On remarque que la valeur de la force dans le cas du contact viscoélastique est plus grande de 23% que la valeur de la force dans le cas du contact élastique.

4.3.3. Contact entre un plot en caoutchouc et une pyramide en acier

On a effectué le même essai sur le plot en caoutchouc et la pyramide en acier. On applique un chargement de 5 mm/s et avec le logiciel *LabView* on exploite les résultats.

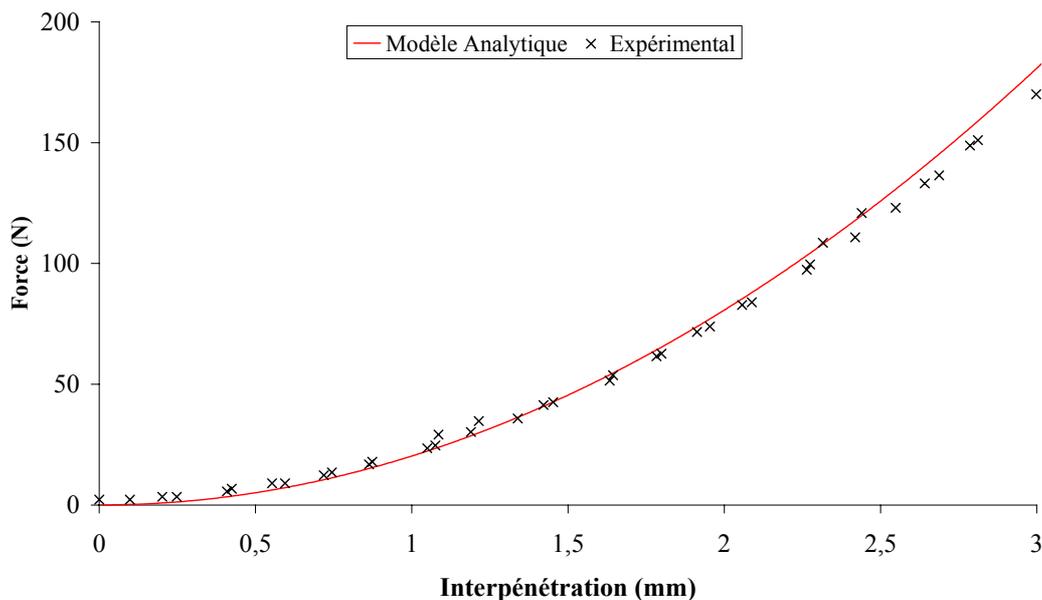


Figure 4.18: Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats du modèle analytique pour le cas pyramidal dans le cas d'un contact viscoélastique

Sur la Figure 4.18 est reportée l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration. Nous pouvons constater que la courbe expérimentale et la courbe donnant la résolution du modèle analytique du contact viscoélastique (équation (4.20)) semble avoir la même allure.

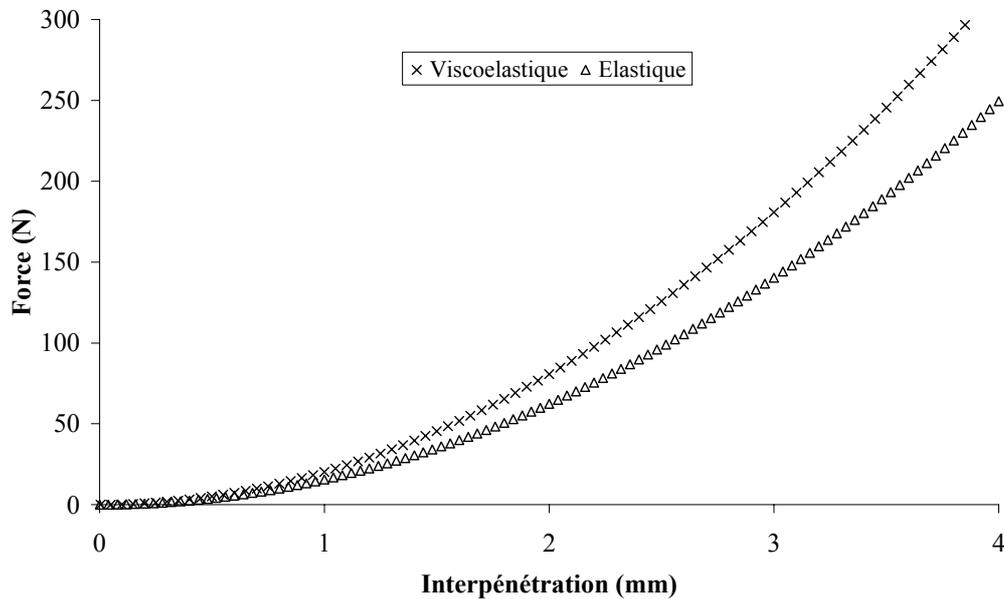


Figure 4.19: Comparaison entre les résultats du modèle analytique pour un contact élastique et un contact viscoélastique pour le cas pyramidal

Sur la Figure 4.19 nous comparons le résultat du modèle analytique du contact élastique et du contact viscoélastique. Il s'avère que pour une valeur d'interpénétration δ la force viscoélastique est 24% plus élevée que la force élastique.

4.4. Conclusion

Dans ce chapitre nous avons identifié le module d'Young et les temps caractéristiques du plot en caoutchouc qu'on a utilisés pour simuler les patins de gomme des pneumatiques. Une fois ces caractéristiques identifiées, on a effectué des essais où on a mis le plot en contact avec différentes formes de surface régulière et irrégulière: sphérique, conique et pyramidale à une vitesse de 0,001 mm/s. Ces essais ont permis d'identifier les coefficients c_s , c_c , c_p et ainsi de valider nos modèles analytiques de contact élastique présentés au chapitre III.

De la même manière que pour le contact élastique, on a effectué des essais à une vitesse de 5 mm/s avec le même plot en caoutchouc et les différentes formes de pointe. On a comparé les résultats obtenus aux résultats de nos modèles analytiques de contact viscoélastique présentés au chapitre III. Les résultats expérimentaux montrent que nos modèles sont valables. Une comparaison entre les résultats du modèle analytique de contact élastique et de contact viscoélastique montre que pour une valeur d'interpénétration δ , la force viscoélastique est plus élevée que la force élastique de 25%.

On peut donc résoudre le problème d'un contact élastique et viscoélastique entre une surface plane et différentes surfaces (régulières et irrégulières) par le modèle analytique ponctuel développé au chapitre précédent. Aux chapitres suivants, on s'intéressera au contact multipoints et à la validité du modèle ponctuel. Dans ce but une présentation d'une étude numérique (méthode des éléments finis) et d'une étude expérimentale du contact multipoints sera abordée.

Chapitre V

Etude numérique du contact élastique multipoints

Le modèle analytique du contact ponctuel élastique et viscoélastique a été développé et validé expérimentalement au chapitre précédent. Dans ce qui suit, on modélisera un contact ponctuel élastique ainsi qu'un contact avec deux et quatre pointes en $3D$ par la méthode des éléments finis. On utilisera le logiciel *Abaqus*, logiciel qu'on peut utiliser pour simuler la réponse physique de structures et de corps solides à des chargements.

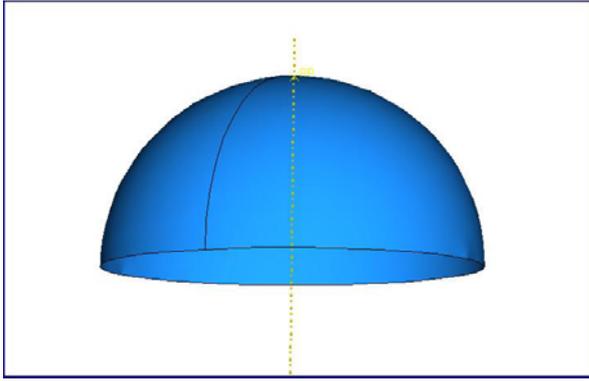
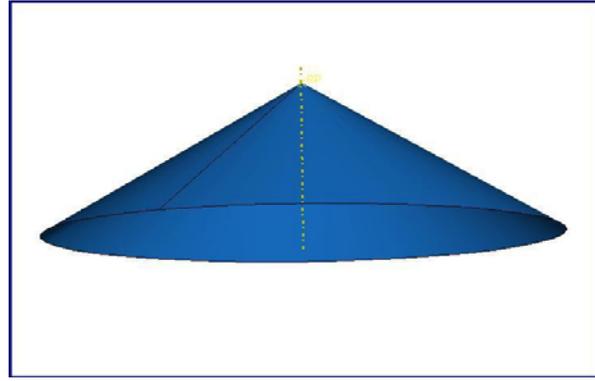
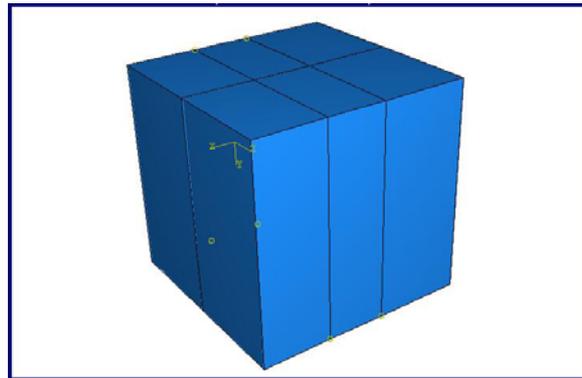
Pour notre modélisation $3D$, on commencera par présenter les géométries et les matériaux, le maillage et les éléments choisis pour chaque géométrie, ainsi que les propriétés du chargement utilisé. A partir d'un déplacement imposé, on calcule la force de contact. La comparaison des différents résultats obtenus aux résultats du modèle analytique ponctuel sera présentée. On étudiera l'effet de l'interaction et de l'influence de la différence de hauteur entre les pointes de contact.

5.1. Présentation de la modélisation

5.1.1. Géométries et matériaux

On utilisera deux formes de pointe de contact, une pointe sphérique ayant un rayon $R=0,01m$ et une pointe conique ayant un angle $\alpha = 60^\circ$ et une hauteur $h=0,01m$. Les deux pointes sont considérées comme étant des corps rigides, (Figures 5.1 et 5.2).

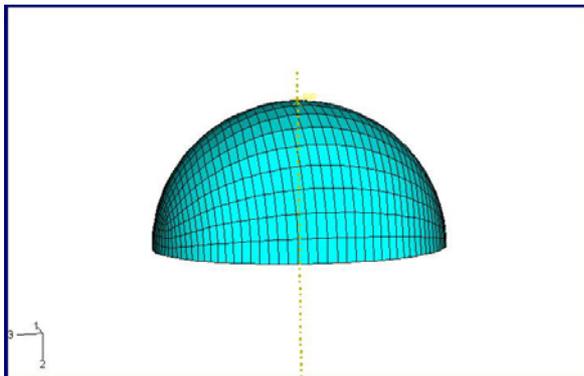
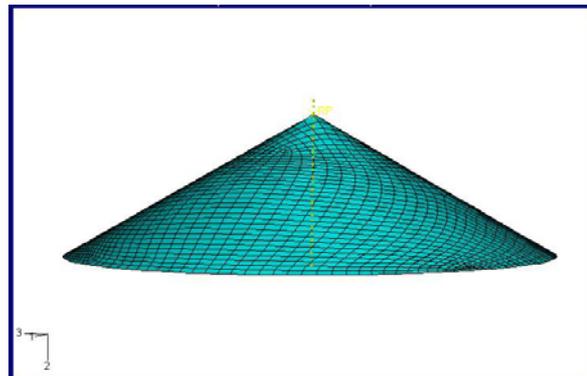
Le bloc en caoutchouc sera modélisé par un bloc cubique de côté $a=0,10 m$ (voir Figure 5.3) ayant un module d'Young $E_{bloc} = 10MPa$ et un coefficient de Poisson $\nu_{bloc} = 0,5$, caractéristiques du caoutchouc utilisé lors de l'étude expérimentale.

Figure 5.1: *Pointe de forme sphérique*Figure 5.2: *Pointe de forme conique*Figure 5.3: *Bloc cubique de côté a*

5.1.2. Maillages et éléments

On a maillé la sphère et le cône avec des éléments rigides $3D$ bilinéaire quadrilatéral à 4 noeuds $R3D4$, (voir Figures 5.4 et 5.5). Le maillage de la sphère contient 790 éléments et 836 noeuds, celui du cône contient 664 éléments et 696 noeuds.

Abaqus a une famille spéciale d'éléments, les éléments hybrides qui sont employés pour modéliser les comportements incompressibles des matériaux. Pour le maillage du bloc en caoutchouc nous avons utilisé l'un de ces éléments hybrides, $C3D8H$, élément à 8 noeuds, hybride à pression constante, linéaire hexalatéral. Ce maillage contient 10500 éléments et 13568 noeuds. Dans le but d'assurer la convergence, le maillage est plus fin au niveau de la zone de contact, (Figure 5.6).

Figure 5.4: *Maillage 3D de la pointe sphérique*Figure 5.5: *Maillage 3D de la pointe conique*

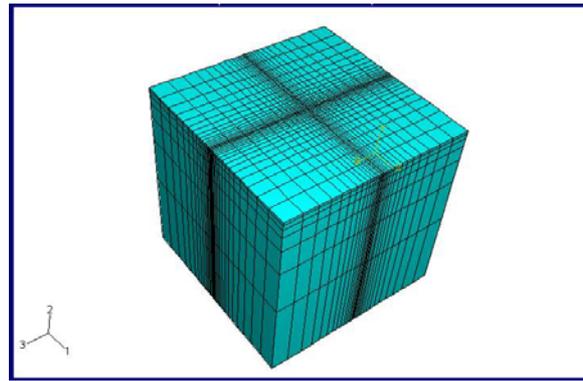


Figure 5.6: Maillage 3D du Bloc

5.1.3. Propriété du contact

Dans le code de calcul par éléments finis *Abaqus*, les lois de frottement les plus couramment utilisées sont des cas particuliers du modèle de Coulomb, (Figure 5.7). Dans le cas d'un solide rigide en contact avec un solide déformable, la loi de frottement de Coulomb s'exprime par:

Si $\|\vec{F}_T(A_1)\| < \mu \|\vec{F}_n(A_1)\|$ alors $v_g(A_1) = 0$ (contact collant)

Si $\|\vec{F}_T(A_1)\| = \mu \|\vec{F}_n(A_1)\|$ alors $v_g(A_1) \neq 0$ et $\exists \lambda \geq 0$ tel que $\vec{v}_g(A_1) = -\lambda \vec{F}_T(A_1)$ (contact glissant)

Où μ est le coefficient de frottement moyen. $F_n(A_1)$ et $F_T(A_1)$ sont les efforts de contact normal et tangentiel au point A_1 appartenant à la surface de contact. \vec{v}_g est la vitesse tangentielle de glissement.

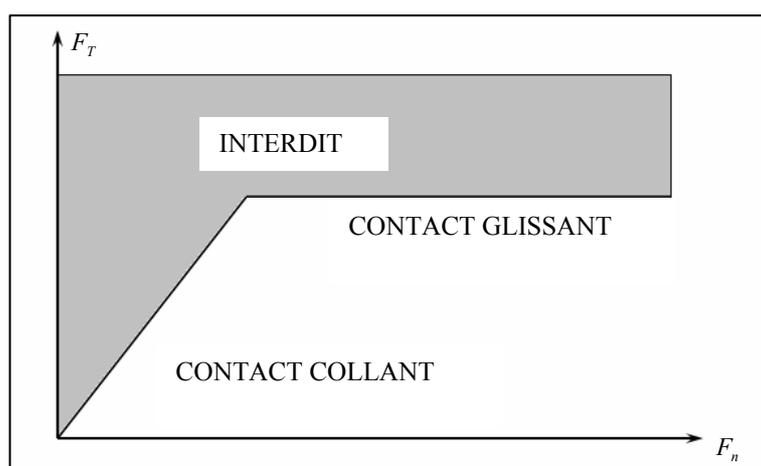


Figure 5.7: Schématisation du modèle de Coulomb

Pour notre modélisation nous avons choisi une méthode de pénalité qui permet un certain mouvement relatif des surfaces (glissement élastique).

5.2. Modélisation numérique du contact ponctuel

5.2.1. Contact de la demi sphère rigide avec le bloc en caoutchouc

Nous commencerons par étudier le cas d'un contact ponctuel entre la demi sphère rigide et le bloc incompressible. Les conditions aux limites imposées au bloc sont des conditions d'encastrement à sa base supérieure, ainsi on empêche tout déplacement ou rotation dans les trois directions (1,2,3). Pour la demi sphère, on impose un déplacement selon la direction 2 et on bloque les autres déplacements et rotations sur les autres directions.

Les Figures 5.8 et 5.9 représentent l'état du contact avant et après interpénétration de la demi sphère dans le bloc.

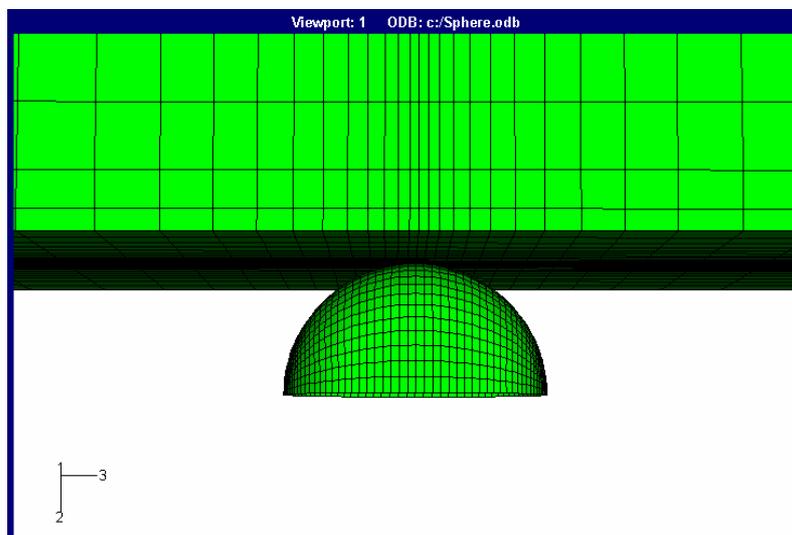


Figure 5.8: Début d'interpénétration

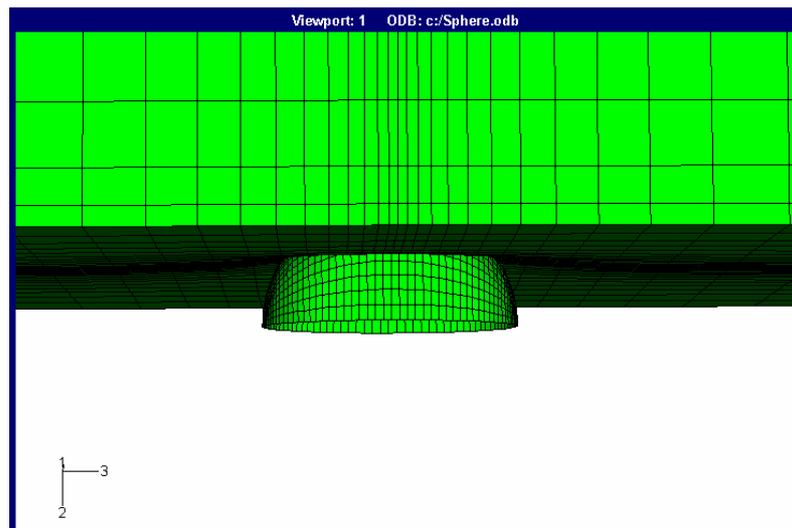


Figure 5.9: Fin d'interpénétration

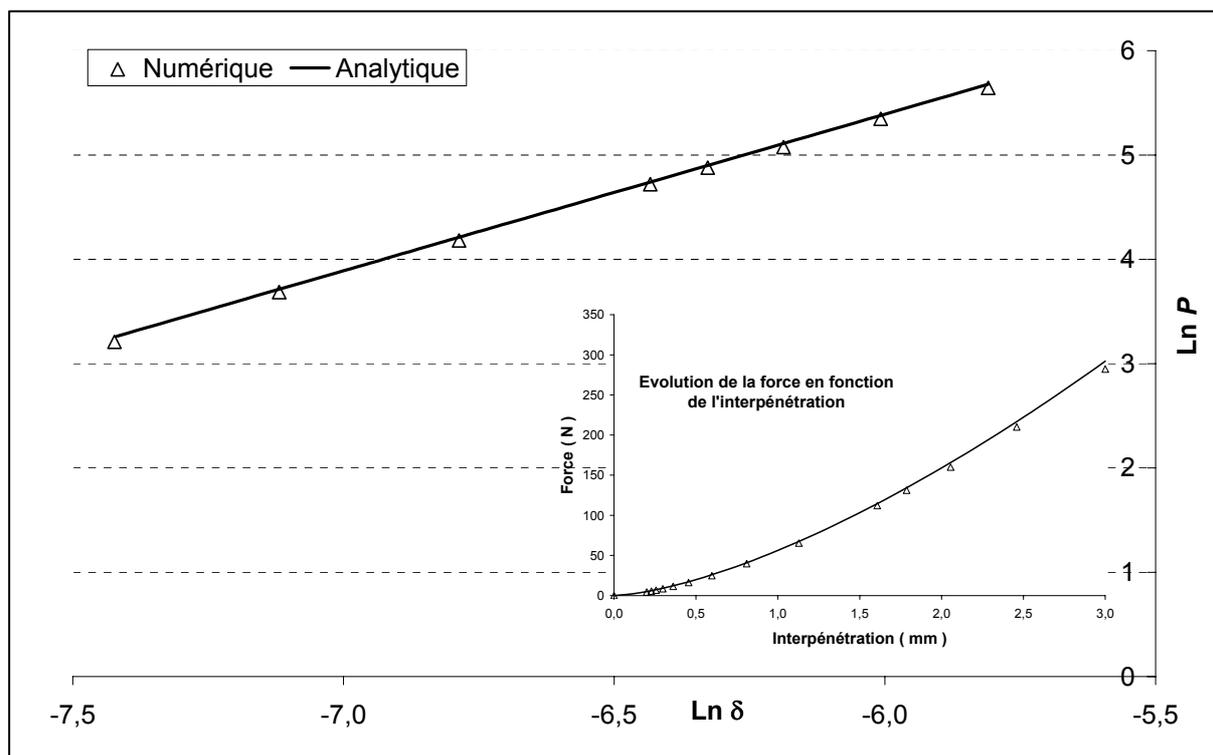


Figure 5.10: Evolution logarithmique de la force pour un contact ponctuel de forme sphérique

A la fin du calcul, on représente sur la Figure 5.10 les courbes de la force en fonction de l'interpénétration de la demi sphère dans le bloc à l'échelle normale et à l'échelle logarithmique.

En remarque qu'il y a une bonne concordance entre les résultats numériques et les résultats du modèle analytique du contact ponctuel (3.27).

Après une régression linéaire de la courbe logarithmique, on obtient une droite de la forme:

$$\text{Ln}(P) = 1,50 \text{Ln}(\delta) + 14,39 \quad (5. 1)$$

En posant $P = C_{S.Numérique} \delta^{1,5}$ pour la modélisation numérique et $P = C_{S.Analytique} \delta^{1,5}$ pour le modèle analytique (3.27), on identifie le coefficient $C_{S.Numérique} = 54,88 \text{ N/mm}^{3/2}$ et on le compare au coefficient $C_{S.Analytique} = 56,30 \text{ N/mm}^{3/2}$. Il en résulte qu'il existe une différence de 2,53 % entre les deux valeurs qui est due aux imprécisions du calcul numérique.

5.2.2. Contact d'un cône rigide avec le bloc en caoutchouc

De la même façon que pour le contact entre la demi sphère rigide et le bloc, on étudiera le contact entre le cône rigide et le bloc, (Figure 5.11). Les mêmes conditions aux limites sur le bloc et sur le cône seront imposées.

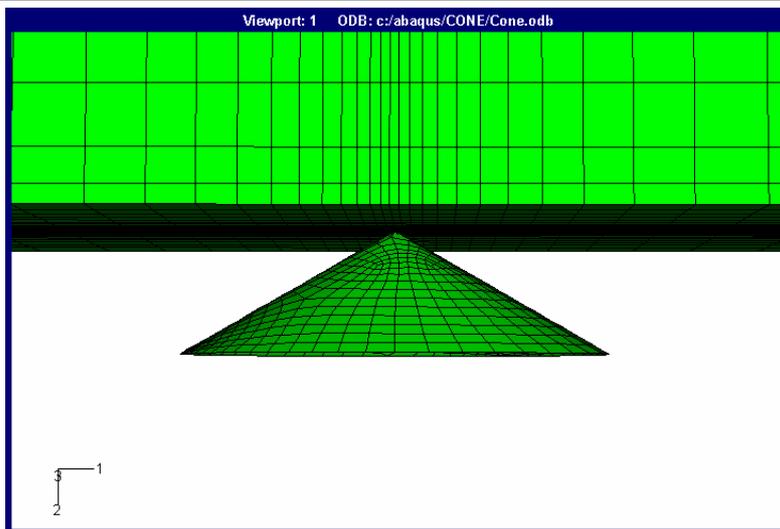


Figure 5.11: Début d'interpénétration

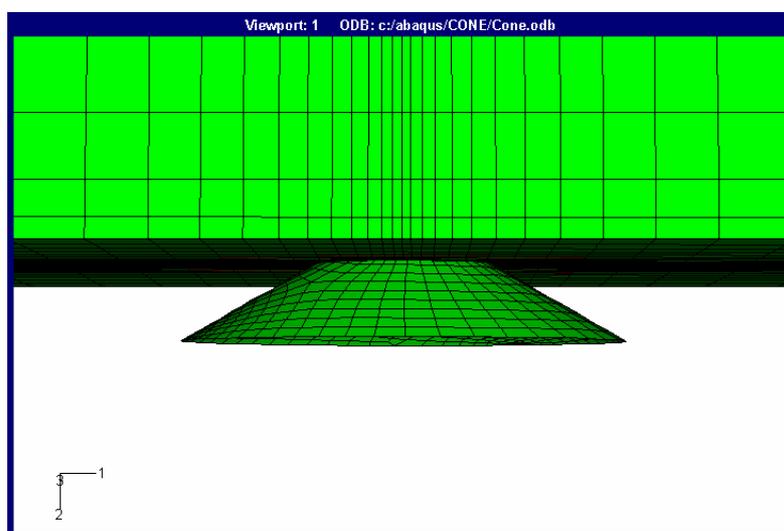


Figure 5.12: Fin d'interpénétration

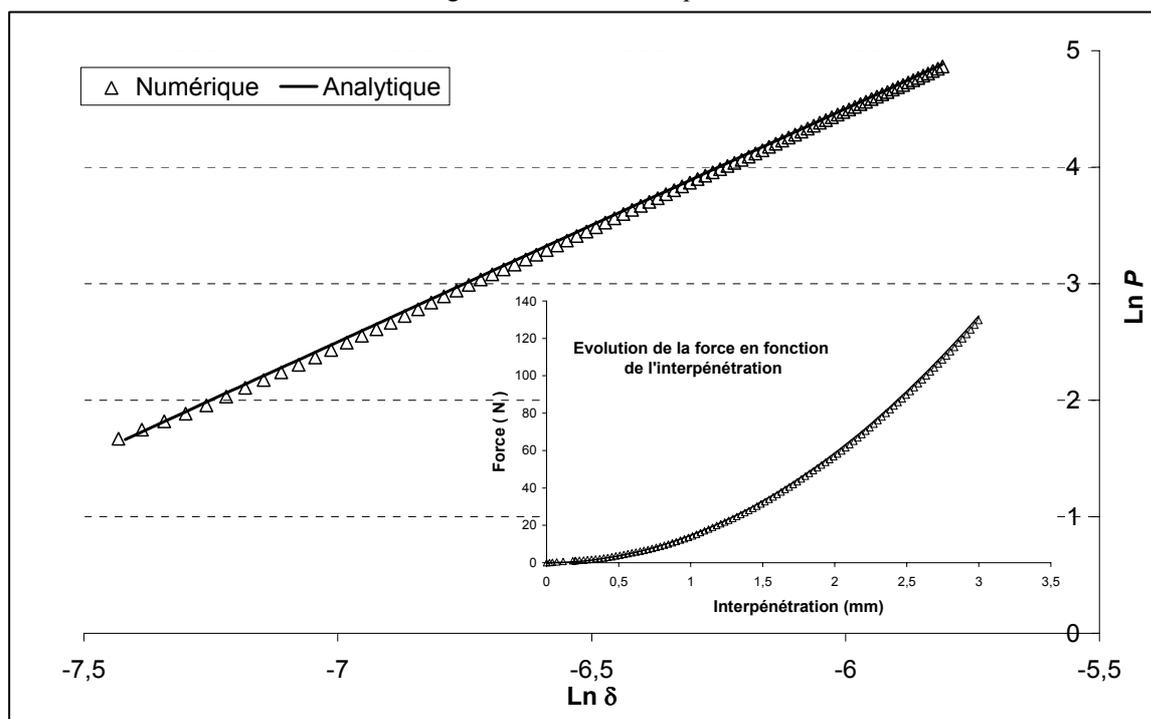


Figure 5.13: Evolution logarithmique de la force pour un contact ponctuel de forme conique

En traçant la courbe (voir Figure 5.13) donnant la force en fonction de l'interpénétration, on remarque que les résultats du modèle analytique (3.30) et les résultats de la modélisation numérique ne diffèrent pas.

Après une régression linéaire de la courbe logarithmique, on obtient une droite de la forme:

$$\ln(P) = 2,0 \ln(\delta) + 16,5 \quad (5.2)$$

Procédant de la même manière que pour le cas sphérique, où l'on suppose que la force en fonction de l'interpénétration s'écrit comme $P = C_{C.Numérique} \delta^2$ pour la modélisation numérique et $P = C_{C.Analytique} \delta^2$ pour le modèle analytique, on identifie le coefficient $C_{C.Numérique} = 14,40 \text{ N/mm}^2$ et on le compare au coefficient $C_{C.Analytique} = 14,56 \text{ N/mm}^2$. Il en résulte qu'il existe une différence de 1,10 % entre les deux valeurs.

Après la comparaison des résultats de la modélisation numérique aux résultats du modèle analytique, on peut conclure que le modèle analytique développé au chapitre III est satisfaisant pour un contact ponctuel, et ceci pour les différentes formes de pointe de contact. Par la suite, on essayera de valider numériquement notre modèle pour le cas d'un contact double et d'un contact multipoints.

Les mêmes conditions aux limites imposées pour le cas d'un contact ponctuel seront imposées pour la suite de notre étude, avec encastrement du bloc incompressible et déplacement de la forme de pointe de contact selon la *direction 2*.

5.3. Modélisation numérique du contact double

5.3.1. Contact d'un bloc en caoutchouc avec deux formes rigides identiques

On affine le maillage dans les zones de contact des deux demi sphères avec le bloc. Les deux sphères sont à la même hauteur et ont les mêmes dimensions, (Figure 5.14).

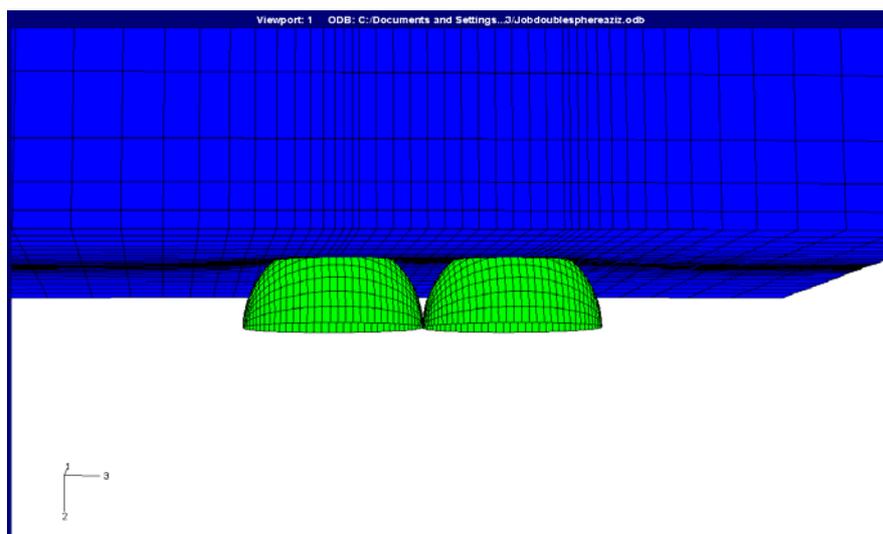


Figure 5.14: Fin d'interpénétration

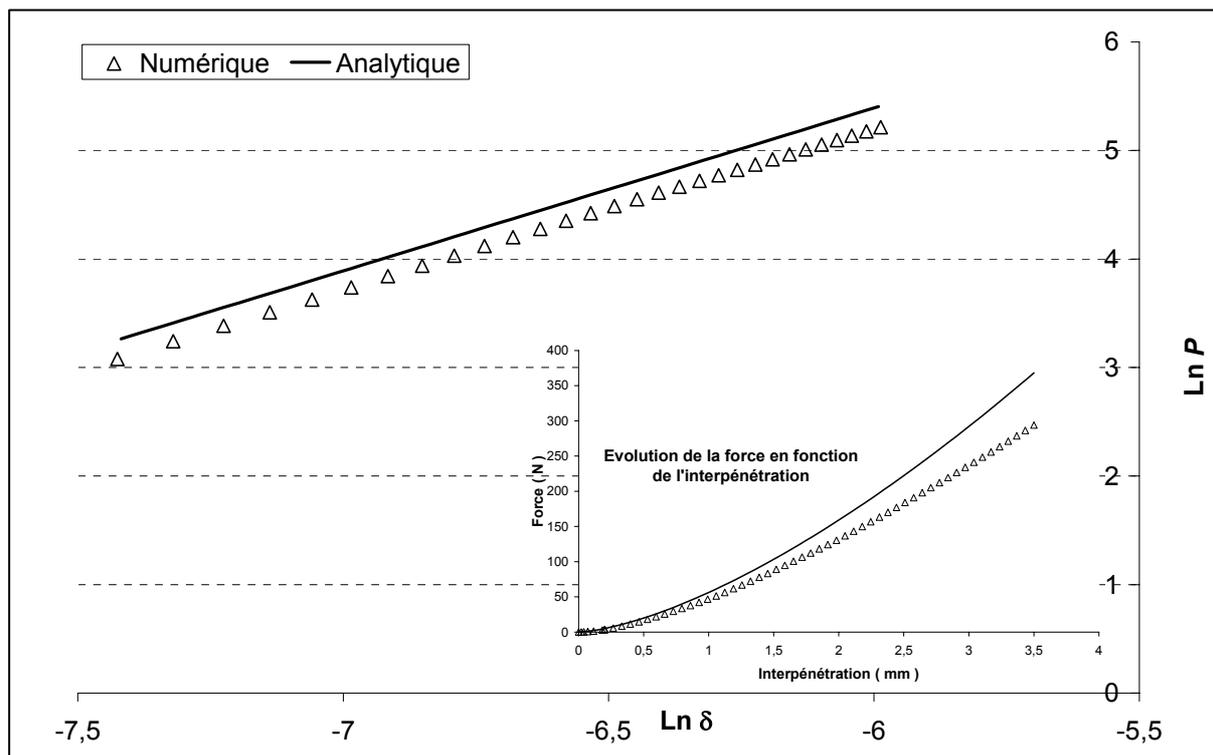


Figure 5.15: Evolution logarithmique de la force pour un contact double de forme sphérique

On remarque à partir des deux courbes représentant l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration (Figure 5.15) qu'il existe un décalage entre les courbes des résultats de la modélisation numérique et des résultats du modèle analytique (3.27) et cela pour les deux demi sphères.

Après une régression linéaire de la courbe logarithmique, on exprime la force en fonction de l'interpénétration par : $P = C_{S.Numérique} \delta^{1,49}$.

Il existe une différence de 15,63 % entre la valeur du coefficient $C_{S.Numérique} = 47,5 N/mm^{3/2}$ et la valeur du coefficient $C_{S.Analytique} = 56,30 N/mm^{3/2}$. On peut conclure que les deux demi sphères interagissent entre elles. La différence de 15,63 % est la même pour les deux demi sphères car les deux points sont à la même hauteur.

Les mêmes remarques peuvent être apportées lors de la modélisation du contact entre deux cônes et le bloc, (voir Figure 5.16). L'évolution de la force dans le cas de la résolution numérique est représentée sur la Figure 5.17, on peut l'écrire sous la forme $P = C_{C.Numérique} \delta^{2,03}$ et ceci pour les deux cônes.

La différence entre la valeur du coefficient $C_{C.Numérique} = 13,10 N/mm^2$ et la valeur du coefficient $C_{C.Analytique} = 14,56 N/mm^2$ est de 10 %. Il existe une interaction entre les deux points coniques. L'interaction du cône est moins importante que celle de l'interaction de la sphère.

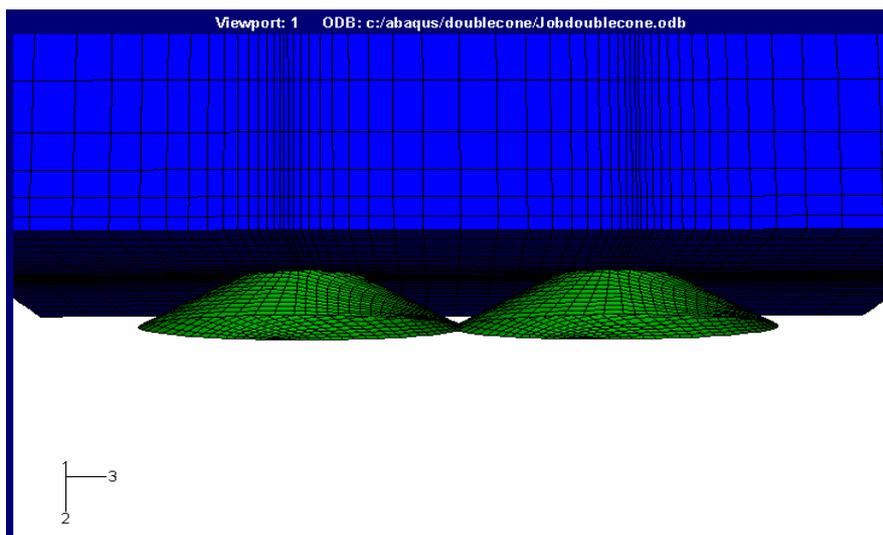


Figure 5.16: Modélisation du double contact cône bloc

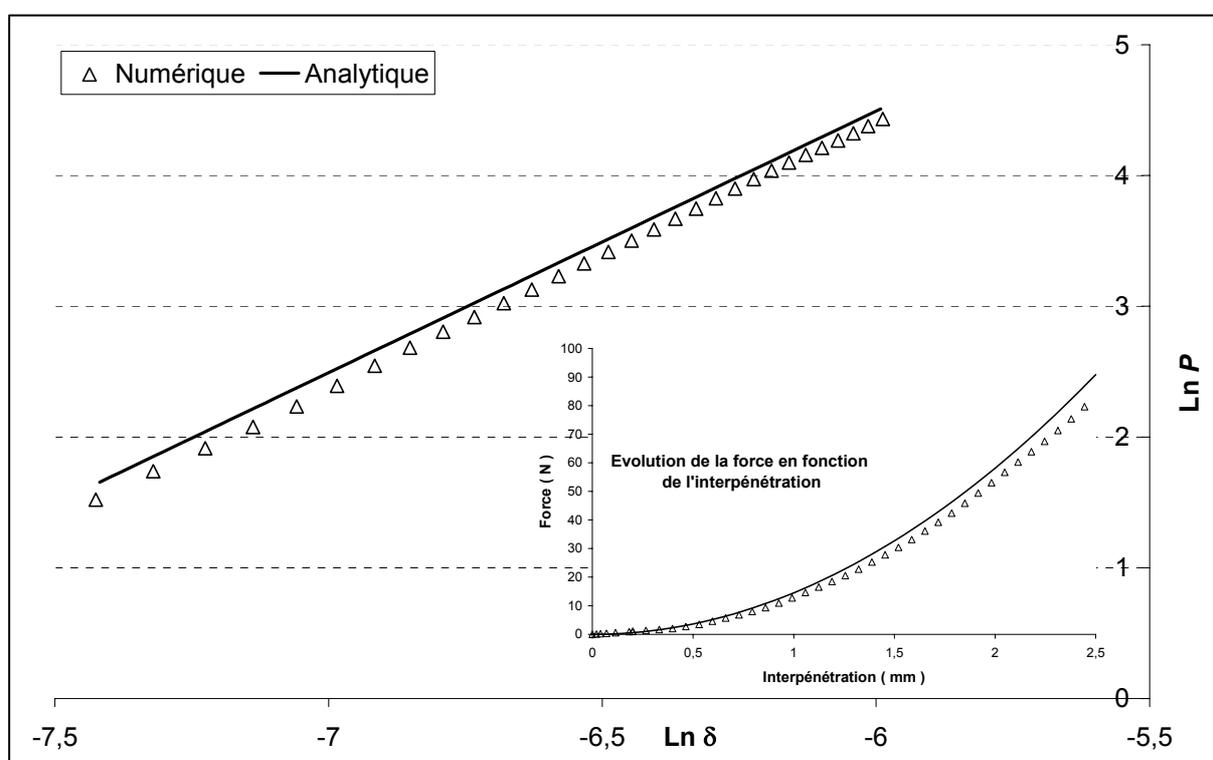


Figure 5.17: Evolution logarithmique de la force pour un contact double de forme conique

5.3.2. Contact d'un cône et d'une demi sphère rigide avec un bloc en caoutchouc

Afin de confirmer le degré d'influence d'une pointe par rapport à une autre sur l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration, on a étudié le cas où l'on a un contact double avec deux formes de pointe différentes, (voir Figure 5.18).

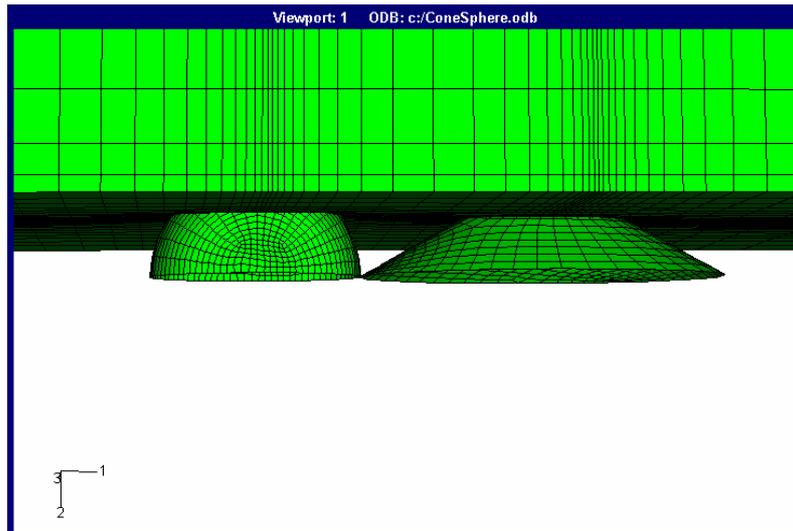


Figure 5.18: Modélisation du double contact cône, sphère et bloc

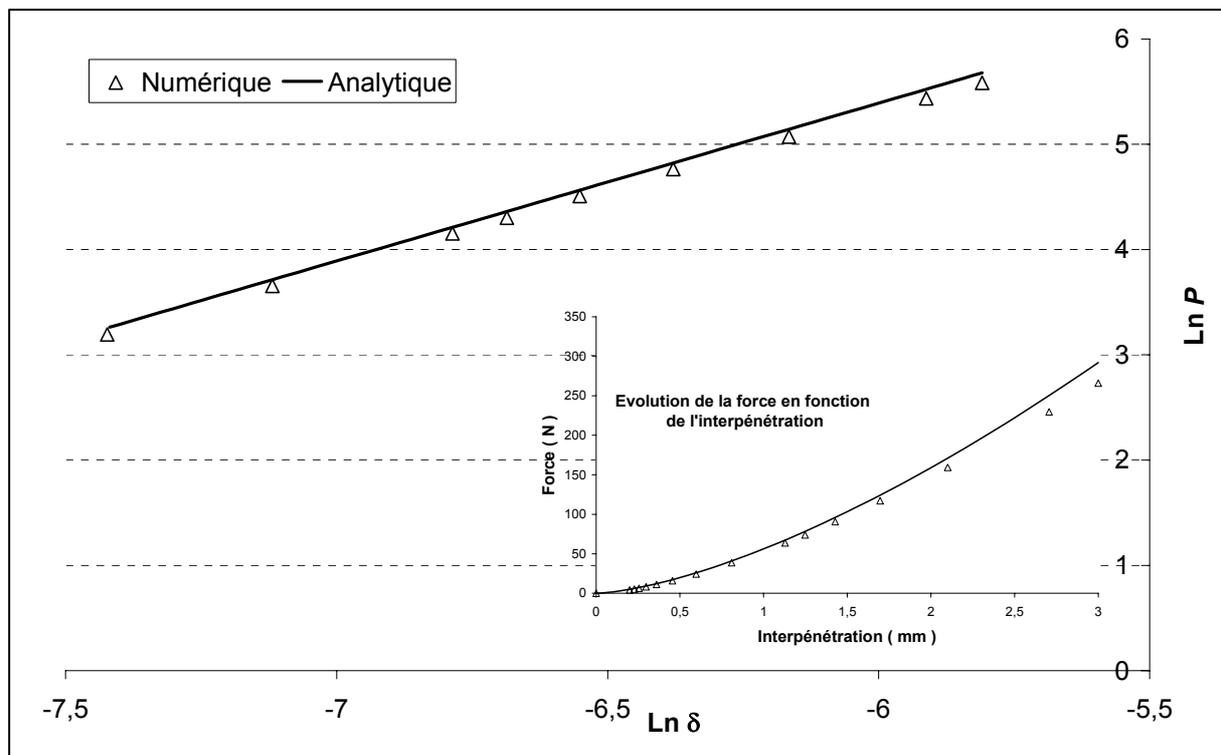


Figure 5.19: Evolution logarithmique de la force pour le cas sphérique

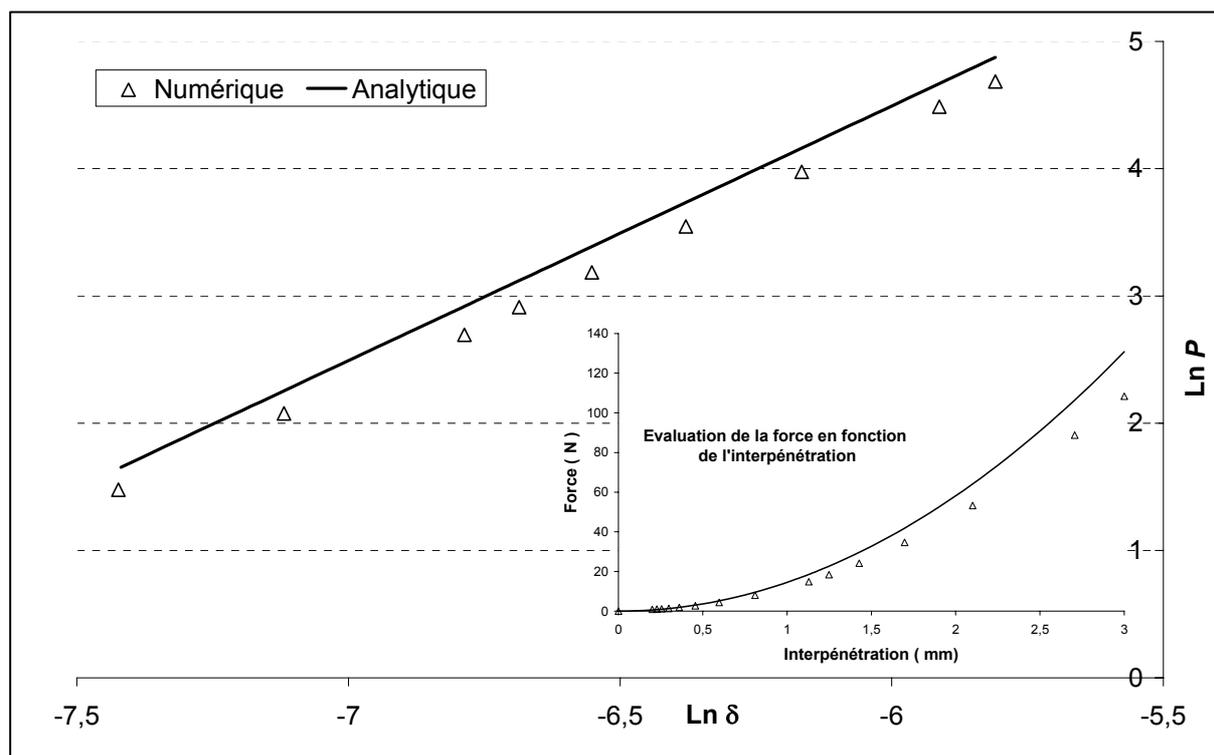


Figure 5.20: Evolution logarithmique de la force pour le cas conique

On remarque à partir des figures ci-dessus que pour le cas de la demi sphère, il existe un léger décalage entre la courbe des résultats de la modélisation numérique et la courbe des résultats du modèle analytique, alors que pour le cas conique le décalage est beaucoup plus important.

L'évolution de la force en fonction de l'interpénétration s'écrit : $P = C_{S.Numerique} \delta^{1,49}$ pour la pointe de forme sphérique et $P = C_{C.Numerique} \delta^{2,03}$ pour la pointe de forme conique.

Après identification des coefficients $C_{S.Numerique} = 52,4 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Numerique} = 11,60 \text{ N/mm}^2$, on note une différence de 6,9 % et 20,3 % en comparaison des résultats des coefficients analytiques $C_{S.Analytique} = 56,30 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Analytique} = 14,56 \text{ N/mm}^2$.

Lors de notre modélisation numérique du contact double, pour deux formes de pointe identiques et pour deux formes de pointe différentes à la même hauteur, on peut constater que l'influence de la forme de pointe sphérique reste toujours plus importante que l'influence de la forme de pointe conique sur l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration.

5.4. Modélisation numérique du contact multipoints

On s'intéressera dans cette partie à la simulation d'un contact à quatre points, deux demi sphères et deux cones ayant les mêmes caractéristiques que ceux utilisés lors de la modélisation du contact ponctuel et du double contact. Les mêmes conditions aux limites sont imposées sur le bloc, encastrement à sa face supérieure, pour les pointes on imposera un déplacement dans la *direction 2*. On étudiera plusieurs cas où on fera intervenir le paramètre de la différence de hauteur entre les points.

5.4.1. Contact entre deux cônes, deux demi sphères rigides à la même hauteur avec un bloc caoutchouc

Les quatre pointes sont à la même hauteur, (Figure 5.21). On impose un déplacement de 2 mm sur chaque pointe, à la fin de la simulation on trace les courbes donnant la force en fonction de l'interpénétration à l'échelle normale et à l'échelle logarithmique pour chaque pointe. On remarque à partir de la Figure 5.22, pour le cas de la demi sphère, qu'il existe un léger décalage entre les résultats de la simulation numérique et les résultats du modèle analytique, alors que sur la Figure 5.23, pour le cas conique, le décalage est beaucoup plus important.

Une régression linéaire des courbes logarithmiques conduit aux deux relations de $\ln(P)$ exprimées par: $\ln(P) = 1,45 \ln(\delta) + 13,96$ pour les pointes de forme sphérique et $\ln(P) = 1,98 \ln(\delta) + 16,11$ pour les pointes de forme conique.

Il en résulte que l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration s'écrit : $P = C_{S.Numérique} \delta^{1,45}$ et $P = C_{C.Numérique} \delta^{1,98}$.

Après identification des coefficients $C_{S.Numérique} = 51,44 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Numérique} = 11,42 \text{ N/mm}^2$, on note une différence de 8,6 % et 21,5 % en comparaison des résultats des coefficients analytiques $C_{S.Analytique} = 56,30 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Analytique} = 14,56 \text{ N/mm}^2$.

On obtient pratiquement les mêmes résultats que ceux obtenus lors de la simulation du double contact avec des formes de pointes différentes, l'influence de la pointe sphérique sur la pointe conique est mise en évidence.

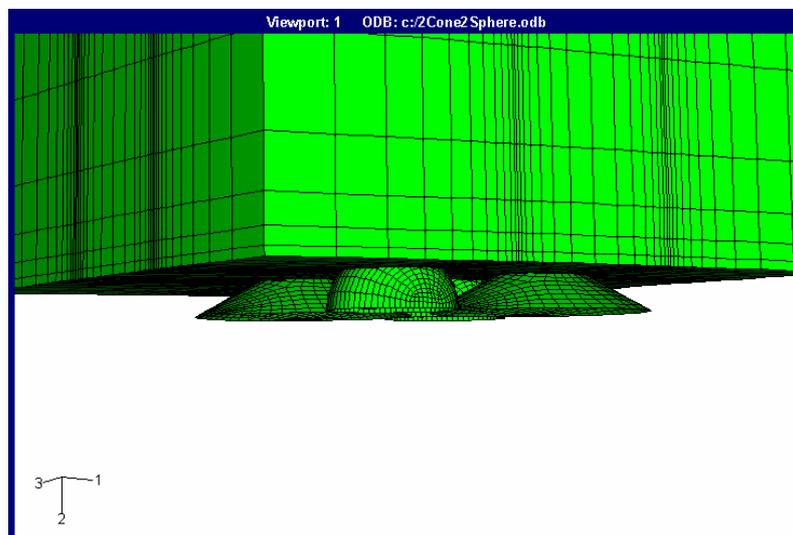


Figure 5.21: Modélisation du contact multipoints à la même hauteur

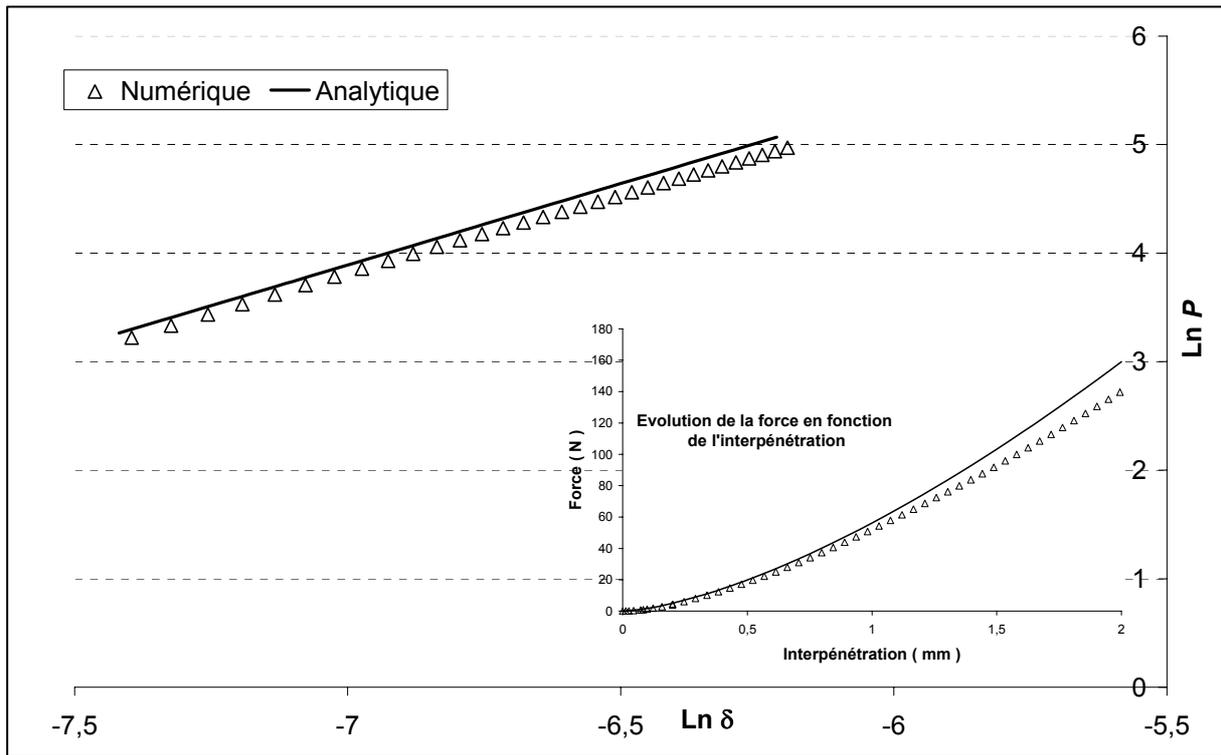


Figure 5.22: Evolution logarithmique de la force pour les pointes sphériques

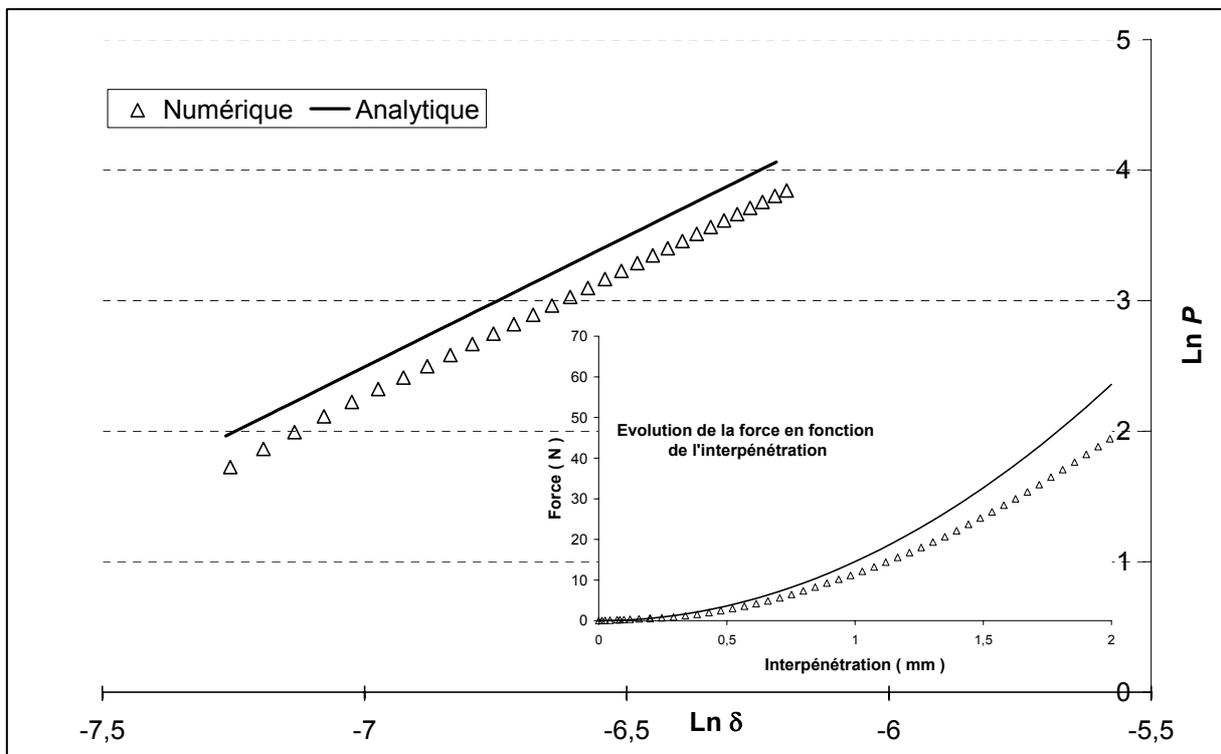


Figure 5.23: Evolution logarithmique de la force pour les pointes coniques

5.4.2. Contact entre deux cônes, deux demi sphères avec le bloc en caoutchouc (cônes plus haut que les sphères de 0,5 mm)

Dans ce cas les pointes coniques sont plus hautes que les pointes sphériques de 0,5 mm (Figure 5.24), on impose un déplacement des pointes selon la *direction 2*.

L'analyse des résultats est représentée sur les Figures 5.25 et 5.26. On remarque qu'il existe un décalage entre la courbe analytique et la courbe numérique pour les deux formes de pointe de contact, l'évolution de $Ln(P)$ en fonction de $Ln(\delta)$ s'écrit sous la forme :

$Ln(P) = 1,45 Ln(\delta) + 13,9$ pour les pointes sphériques et $Ln(P) = 1,93 Ln(\delta) + 15,9$ pour les pointes coniques. A partir de ces deux relations on pose : $P = C_{S.Numérique} \delta^{1,45}$ et $P = C_{C.Numérique} \delta^{1,93}$. Il en résulte les coefficients $C_{S.Numérique} = 49,00 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Numérique} = 12,47 \text{ N/m}^2$, on note une différence de 12,97 % et 14,34 % en comparaison avec les résultats des coefficients analytiques $C_{S.Analytique} = 56,30 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Analytique} = 14,50 \text{ N/mm}^2$.

En comparant ces résultats aux résultats obtenus dans le cas où les pointes étaient à la même hauteur, on remarque une diminution de la différence entre $C_{C.Numérique}$ et $C_{C.Analytique}$, une diminution de 21,5 % à 14,34 %, alors que la différence entre $C_{S.Numérique}$ et $C_{S.Analytique}$ augmente de 8,64 % à 12,97 %, cette augmentation est due à l'influence des pointes de forme conique sur les pointes de forme sphérique.

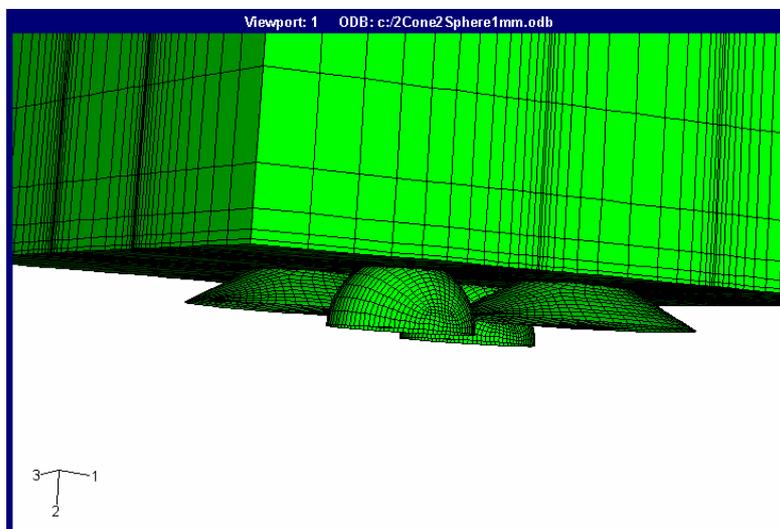


Figure 5.24: Modélisation du contact multipoints à hauteur différente

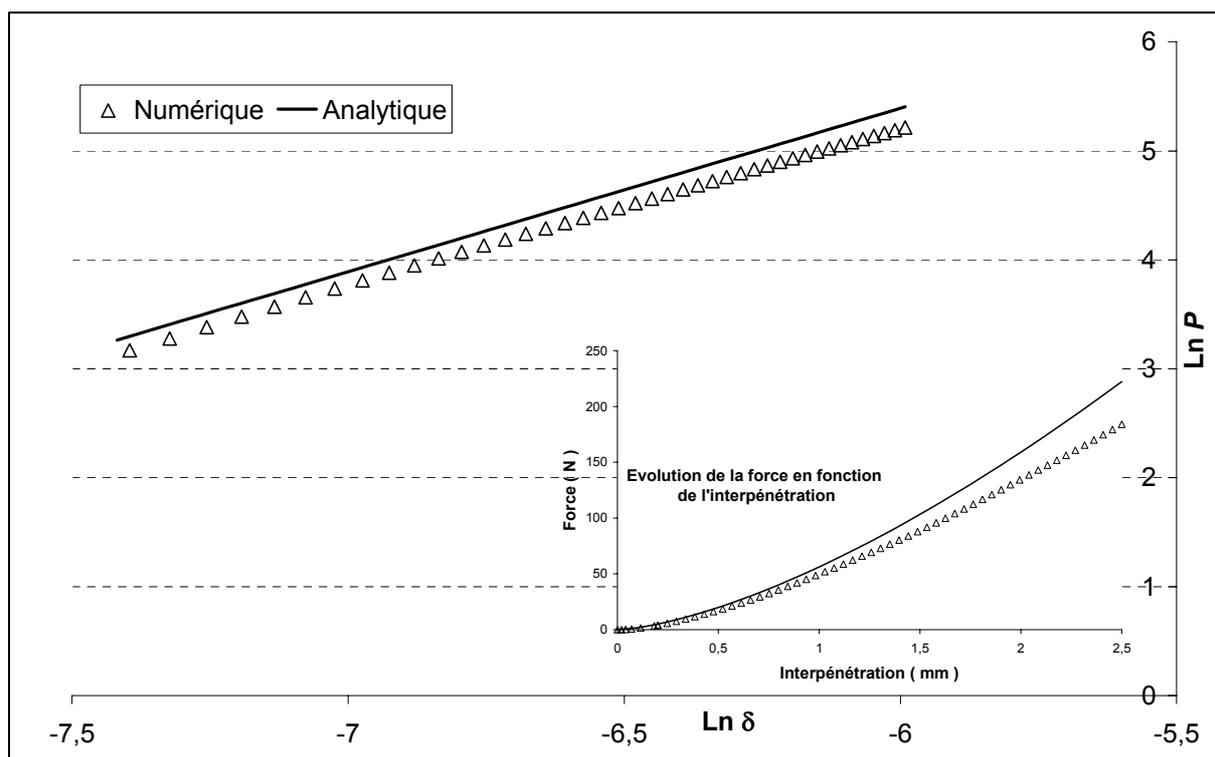


Figure 5.25: Evolution logarithmique de la force pour les pointes sphériques

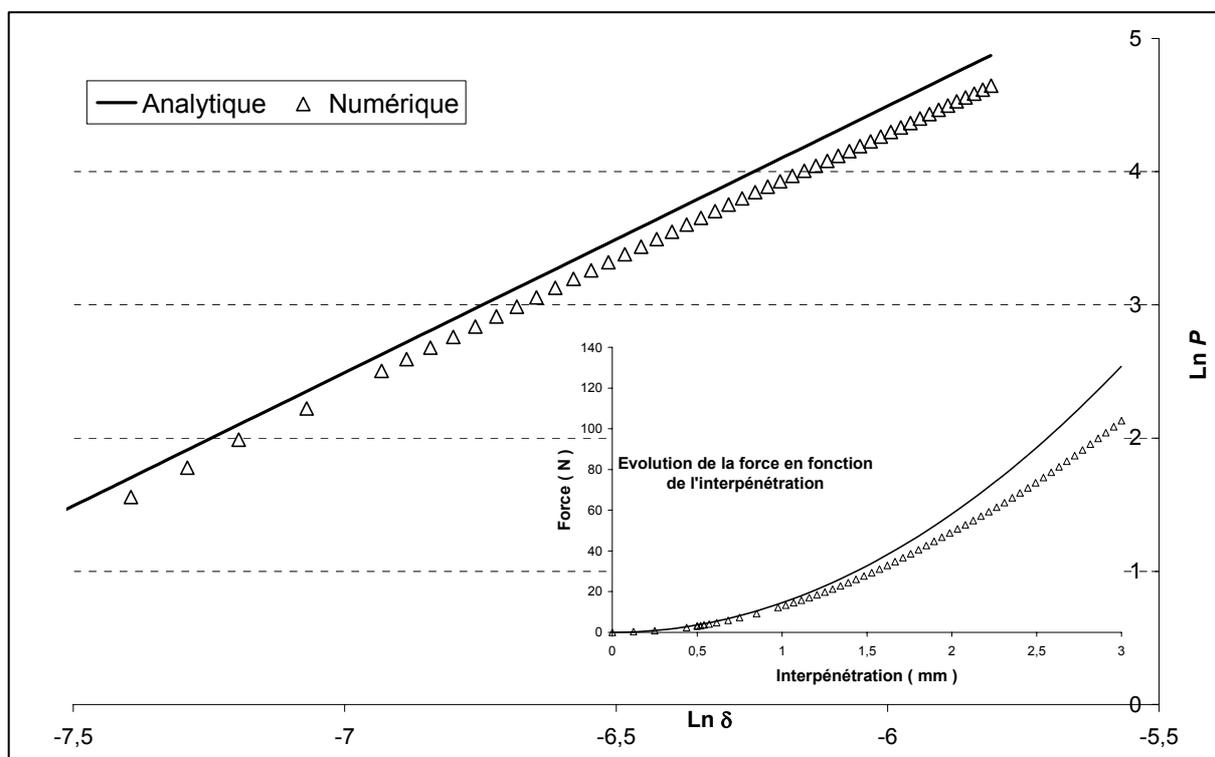


Figure 5.26: Evolution logarithmique de la force pour les pointes coniques

5.4.3. Contact entre deux cônes, deux demi sphères avec le bloc en caoutchouc (sphères plus hautes que les cônes de 0,4 mm)

On s'intéresse à l'évolution de la force dans le cas où les pointes sphériques sont plus hautes que les pointes coniques de 0,4 mm. On remarque sur les Figures 5.28 et 5.29 qu'il existe un décalage important entre la courbe numérique et la courbe analytique pour le cas des pointes coniques. A partir des courbes logarithmique, on pose $P = C_{S.Numérique} \delta^{1,46}$ et $P = C_{C.Numérique} \delta^2$ nous obtenons les coefficients $C_{S.Numérique} = 49,15 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Numérique} = 9,50 \text{ N/mm}^2$, il est à noter une différence de 12,70 % et 34,74 % en comparaison des résultats des coefficients analytiques $C_{S.Analytique} = 56,30 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Analytique} = 14,56 \text{ N/mm}^2$. On remarque que la différence sur la valeur $C_{C.Numérique}$ est plus importante que dans le cas où les formes de pointe sont à la même hauteur, il y a une augmentation de 21,5 % à 34,74 %.

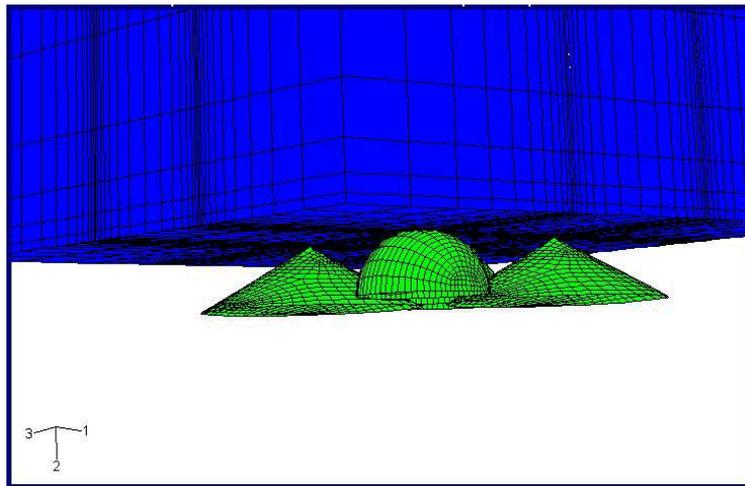


Figure 5.27: Modélisation du contact multipoints à hauteur différente

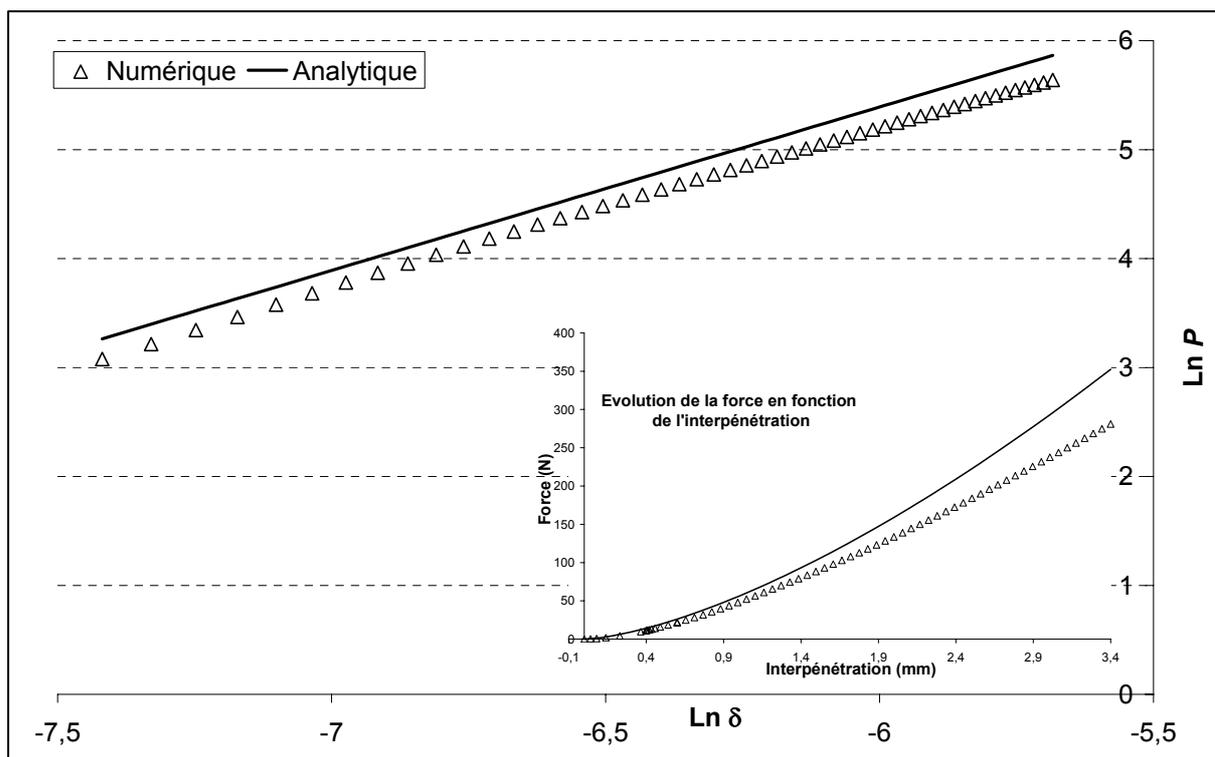


Figure 5.28: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour les demi sphères

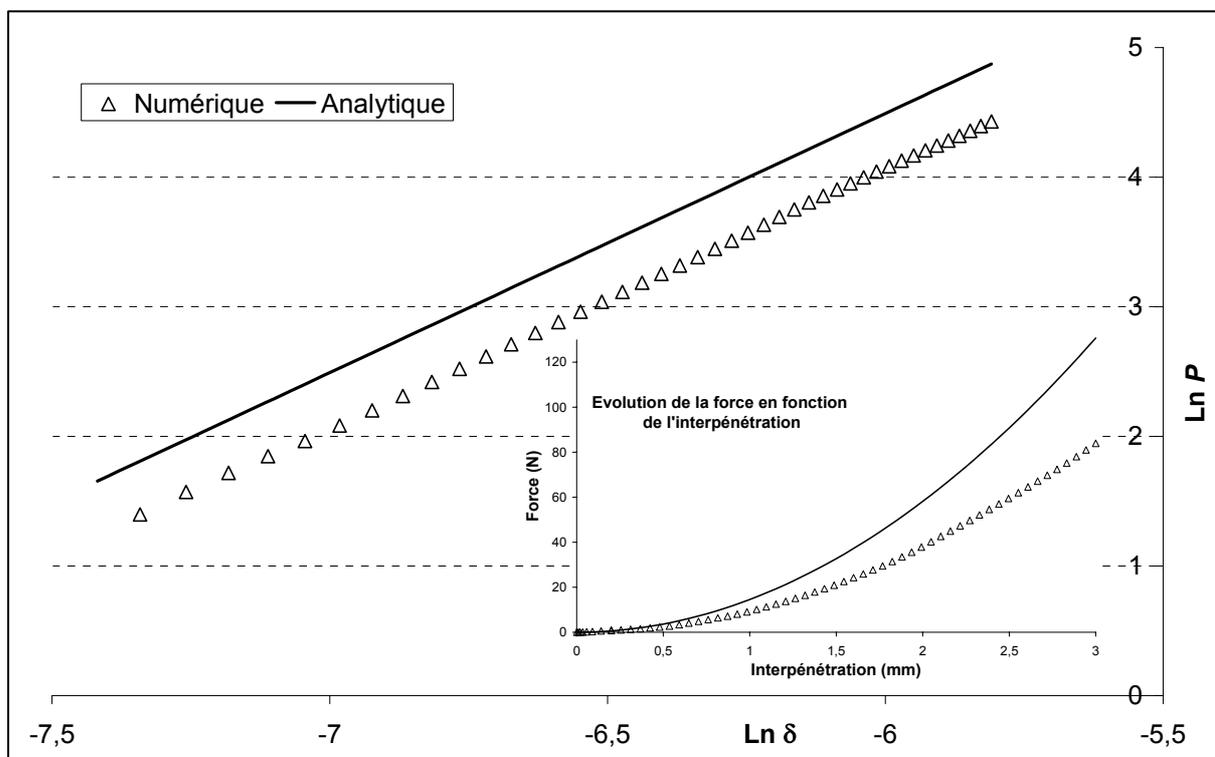


Figure 5.29: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour les cônes

5.5. Conclusion

On peut résumer les résultats de la modélisation numérique du contact dans le tableau suivant:

Contact	Formes	Valeurs de $C_{S.Numérique}$ ($N/mm^{3/2}$)	Différence entre $C_{Analytique}$ et $C_{Numérique}$ (%)
		$C_{C.Numérique}$ (N/mm^2)	
Contact ponctuel	Sphère	$C_{S.Numérique} = 54,88$	2,50 %
	Cône	$C_{C.Numérique} = 14,40$	1,10 %
Double contact	Double sphères	$C_{S.Numérique} = 47,50$	15,63 %
	Double cones	$C_{C.Numérique} = 13,10$	10,05 %
	Sphère et cône	$C_{S.Numérique} = 52,40$ $C_{C.Numérique} = 11,60$	6,90 % 20,30 %
Contact multipoints (deux sphères et deux cones)	Même hauteur	$C_{S.Numérique} = 51,44$	8,64 %
		$C_{C.Numérique} = 11,42$	21,50 %
	Cones plus hauts de 0,5mm	$C_{S.Numérique} = 49,00$	12,97 %
$C_{C.Numérique} = 12,47$		14,34 %	
Sphères plus hautes de 0,4mm	$C_{S.Numérique} = 49,15$	12,74 %	
	$C_{C.Numérique} = 9,50$	34,70 %	

Tableau 5.2 : Récapitulatif des comparaisons entre les résultats numériques et les résultats analytiques

On remarque que pour un contact ponctuel, la variation de la force en fonction de l'interpénétration ne diffère pas du modèle analytique, la différence entre $C_{Numérique}$ et $C_{Analytique}$ ne dépasse les 2 % et ceci pour n'importe quelle forme de pointe de contact.

Pour un contact double, il apparaît que les formes de pointe de contact influent sur l'évolution de la force, la pointe de forme sphérique a une plus grande influence sur la pointe de forme conique, cette influence se traduit par un changement de la valeur du coefficient $C_{Numérique}$.

Lors de la modélisation d'un contact multipoints à la même hauteur, on note les mêmes observations que pour le cas d'un double contact. Quand les sphères sont plus élevées que les cones, l'influence des pointes sphériques est importante sur l'évolution de la force aux pointes coniques. Alors que si les cones étaient plus hauts que les sphères, l'influence des pointes coniques sera moindre sur l'évolution de la force aux pointes sphériques.

La différence entre les coefficients $C_{Analytique}$ et $C_{Numérique}$ est négligeable pour le contact ponctuel, alors qu'elle est plus importante pour le cas du contact multipoints, l'estimation de la force pour le cas d'un contact ponctuel par le modèle analytique n'est plus valide, il existe des interactions entre les différentes pointes en contact qu'il faudrait prendre en considération. Au chapitre suivant on étudiera expérimentalement la validité du modèle analytique ponctuel pour le cas d'un contact multipoints.

Chapitre VI

Etude expérimentale du contact élastique multipoints

Dans cette partie nous étudierons expérimentalement le cas d'un contact élastique multipoints afin de vérifier la validité du modèle analytique développé au chapitre III. Comme pour le cas de l'étude numérique, on étudiera aussi l'interaction et l'influence de la différence de hauteur entre les pointes de contact. Pour l'étude expérimentale nous utiliserons une plaque en caoutchouc qui aura d'autres caractéristiques mécaniques que celles du plot en caoutchouc utilisé pour l'étude expérimentale du contact ponctuel. De ce fait, nous commencerons par une identification des caractéristiques de la plaque en caoutchouc par un essai de relaxation.

6.1. Identification des caractéristiques de la plaque en caoutchouc

6.1.1. Identification du module d'Young par un essai de relaxation

On réalise un essai de compression simple sur un plot ayant les mêmes caractéristiques mécaniques que la plaque en caoutchouc qu'on utilisera pour les essais. L'essai de relaxation se fera sur la machine de compression de type *Instron* Figure 6.1. On charge brusquement et rapidement et on maintient une déformation constante de 8% (par blocage de la traverse).

En utilisant le logiciel d'acquisition *Labview*, l'évolution de la contrainte en fonction du temps est représentée sur la Figure 6.2. On remarque une montée brusque et rapide de la contrainte à 1,18 MPa pendant le temps de charge. Cette contrainte correspond à la contrainte σ_0 . Le plot a subi une déformation de l'ordre de 8% de sa hauteur initiale. Cette déformation est maintenue par blocage de la traverse pendant un temps assez grand jusqu'à ce qu'il y ait stabilisation de la contrainte $\sigma \longrightarrow \sigma_\infty$.



Figure 6.1: Essai de relaxation

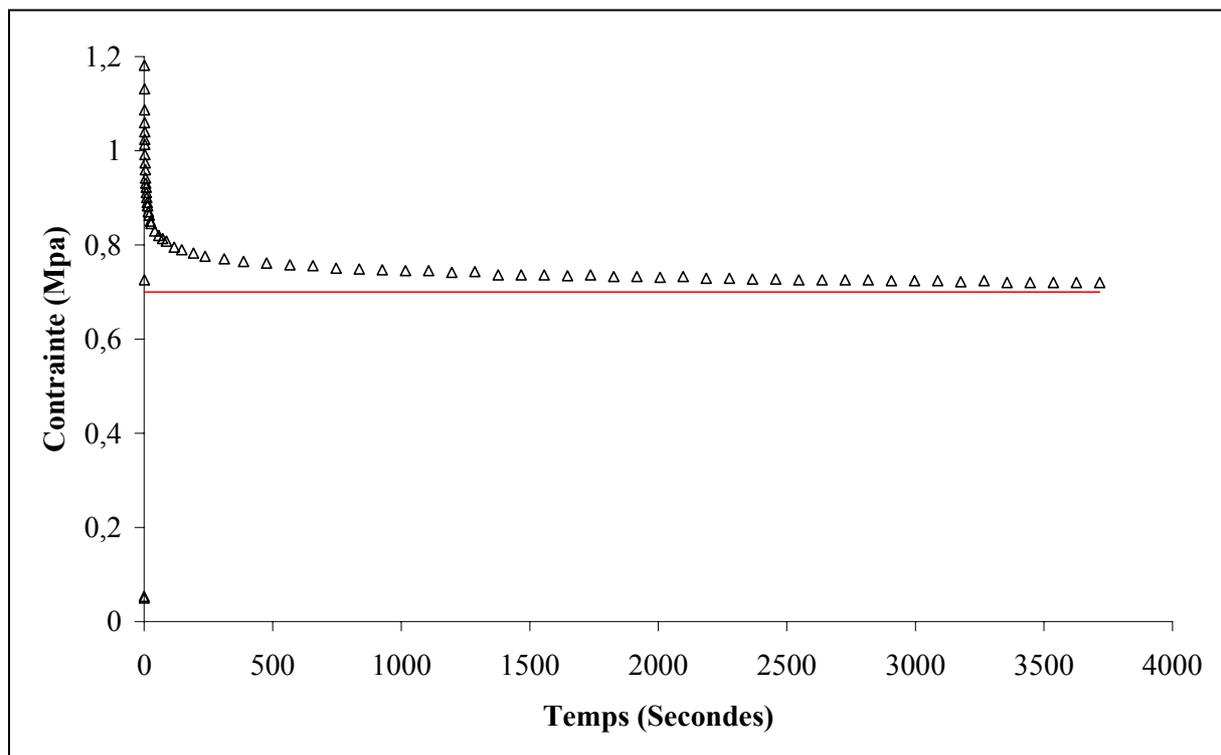


Figure 6.2: Evolution de la contrainte en fonction du temps pendant l'essai de relaxation

A partir de l'essai de relaxation, on peut identifier les caractéristiques de la plaque en caoutchouc. La déduction de la contrainte instantanée σ_0 et de la contrainte à l'équilibre σ_∞ se fera graphiquement, (Figure 6.2). Il en résulte la contrainte instantanée $\sigma_0 = 1,18 \text{ MPa}$ et la contrainte à l'équilibre $\sigma_\infty = 0,74 \text{ MPa}$.

Il en résulte que la valeur du module d'Young est:

$$E = E_{\infty} = 9,25 \text{ MPa}$$

6.1.2. Identification des temps caractéristiques du plot

Un matériau viscoélastique peut avoir plusieurs temps caractéristiques, chaque temps caractéristique intervient selon la vitesse instantanée imposée au matériau. L'identification de ces temps se fait à partir de l'essai de relaxation.

Pour notre matériau on a identifié 4 temps caractéristiques, la contrainte s'exprime donc:

$$\sigma(t) = (A_4 e^{-t/\tau_4} + A_3 e^{-t/\tau_3} + A_2 e^{-t/\tau_2} + A_1 e^{-t/\tau_1} + E_{\infty}) \varepsilon_0 \quad (6.1)$$

Les résultats sont représentés dans le tableau 6.1:

i	1	2	3	4
τ_i (secondes)	2.10^3	83,33	16,13	0,38
A_i (MPa)	0,88	1,25	2,88	5,26

Tableau 6.1 : Temps caractéristiques et amplitudes du matériau viscoélastique utilisé

On a identifié les caractéristiques mécaniques du caoutchouc, qu'on utilisera par la suite, par un essai de relaxation. D'après les résultats obtenus on peut conclure que la valeur du module d'Young est de l'ordre de 10 MPa.

6.2. Contact élastique en deux points

Nous étudierons plusieurs cas de figure, contact avec deux pointes sphériques, entre deux pointes coniques et enfin entre une pointe conique et une pointe sphérique. La distance entre les deux pointes est de 30 mm. Nous essayerons de voir l'influence de chaque pointe sur l'autre ainsi que l'influence de la hauteur sur l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration, nous comparerons les résultats expérimentaux aux résultats du modèle analytique développé au chapitre III.

6.2.1. Contact entre la plaque en caoutchouc et deux sphères

On utilisera une plaque en caoutchouc, plaque pour laquelle on a identifié les caractéristiques mécaniques précédemment. Pour les formes de pointe de contact, on se servira de deux sphères en acier de même rayon $R=0,0085\text{ m}$ et de deux capteurs de force sous chaque forme de contact, (Figure 6.3). Il est à noter que la première sphère est plus haute de la deuxième sphère de $0,2\text{ mm}$, (Figure 6.4).

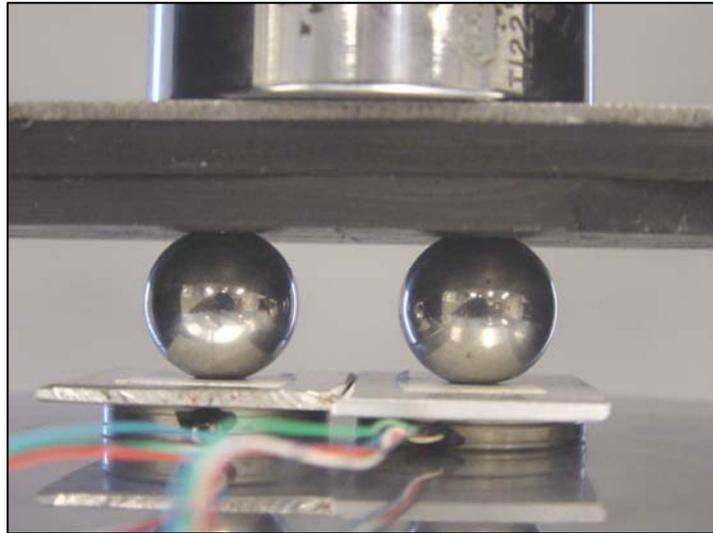


Figure 6.3: Dispositif expérimental

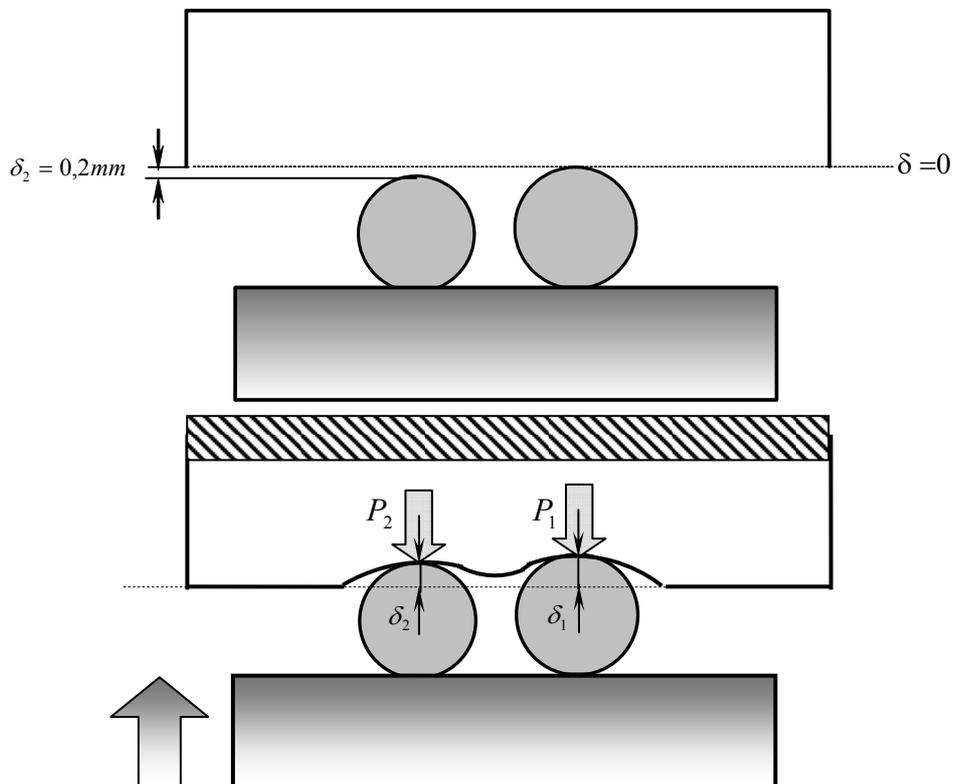


Figure 6.4: Conditions initiales

Un chargement quasi-statique à une vitesse de 0,001 mm/s est appliqué. A partir des résultats obtenus, on trace la courbe logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour chaque sphère, les figures sont représentées ci dessous.

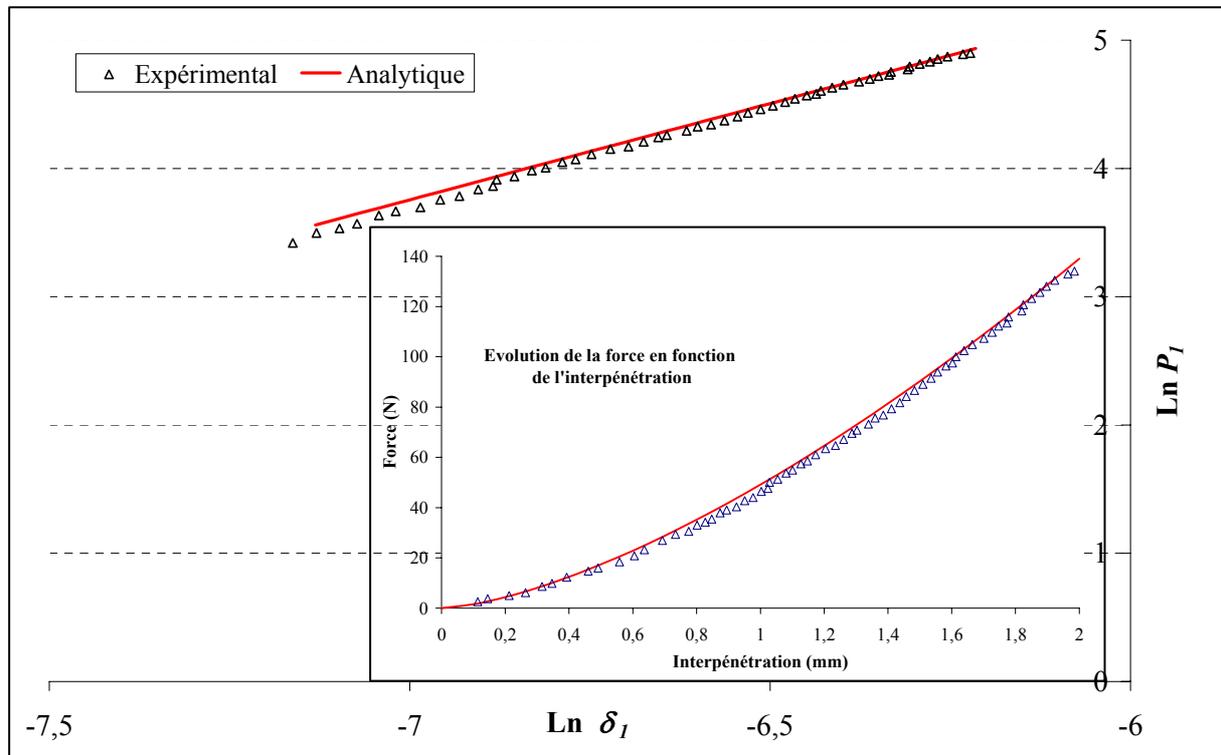


Figure 6.5: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la 1^{ère} sphère

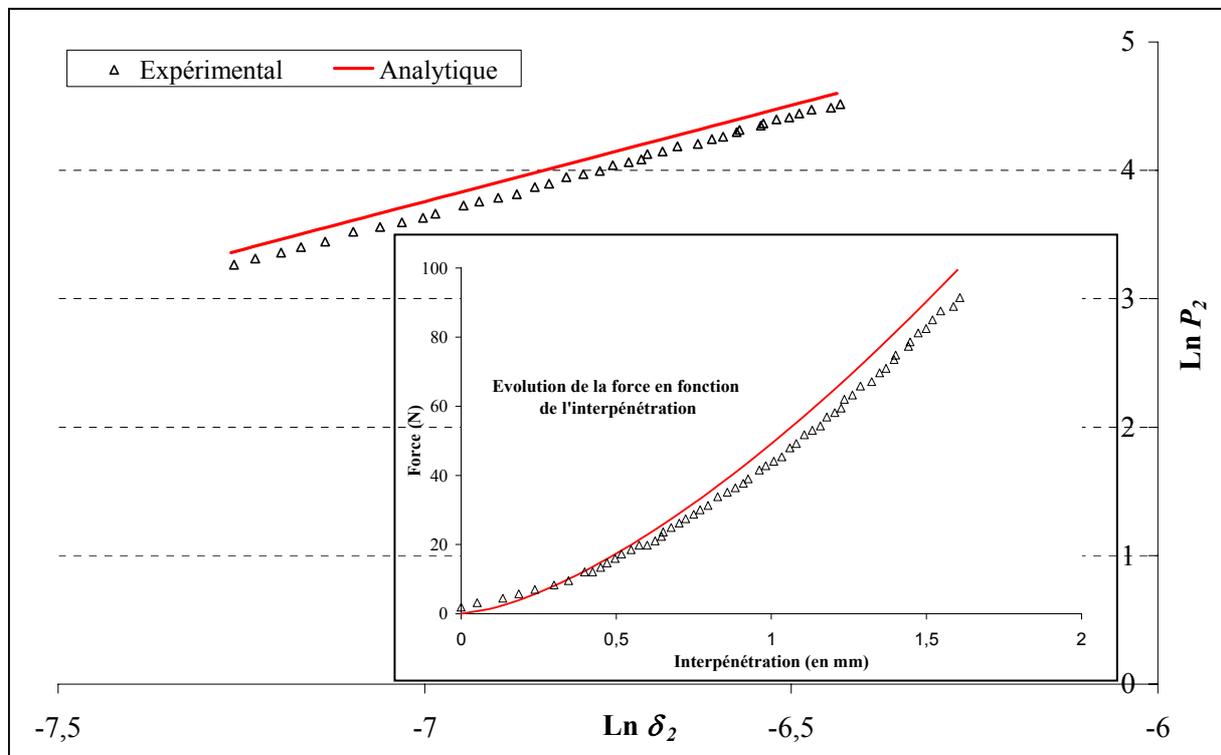


Figure 6.6: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la 2^{ème} sphère

Par régression linéaire de la courbe, on trouve une droite de la forme:

$$1^{\text{re}} \text{ sphère : } \quad \quad \quad \text{Ln}(P_1) = 1.49 \text{Ln}(\delta_1) + 14.25 \quad (6.2)$$

$$2^{\text{me}} \text{ sphère : } \quad \quad \quad \text{Ln}(P_2) = 1.52 \text{Ln}(\delta_2) + 14.32 \quad (6.3)$$

Si on pose : $P_1 = C_{S_1, \text{Expérimental}} \delta_1^{\gamma_1}$ et $P_2 = C_{S_2, \text{Expérimental}} \delta_2^{\gamma_2}$ et on trace : $P_i = f(\delta^{\gamma_i})$, (Figures 6.7 et 6.8). A partir de la pente des équations (6.2) et (6.3), on peut identifier $\gamma_1 = 1,49$ et $\gamma_2 = 1,52$.

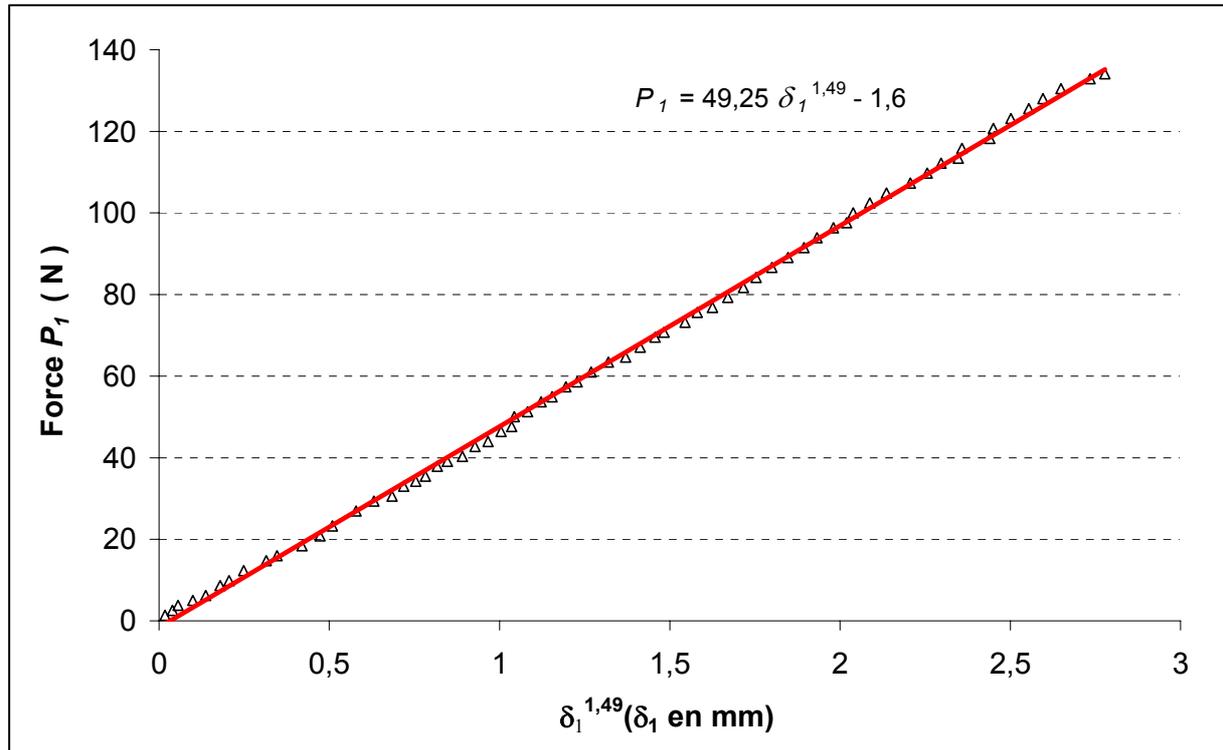


Figure 6.7: Identification du coefficient $C_{S_1, \text{Expérimental}}$

Il en résulte que $C_{S_1, \text{Expérimental}} = 49,25 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{S_2, \text{Expérimental}} = 44,61 \text{ N/mm}^{3/2}$.

Le modèle analytique développé au chapitre III donne la force en fonction de l'interpénétration sous la forme :

$$P = c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2} \quad (6.4)$$

Connaissant les caractéristiques du caoutchouc et les caractéristiques géométrique et mécanique des pointes en contact, on trouve: $C_{S, \text{Analytique}} = 49,35 \text{ N/mm}^{3/2}$.

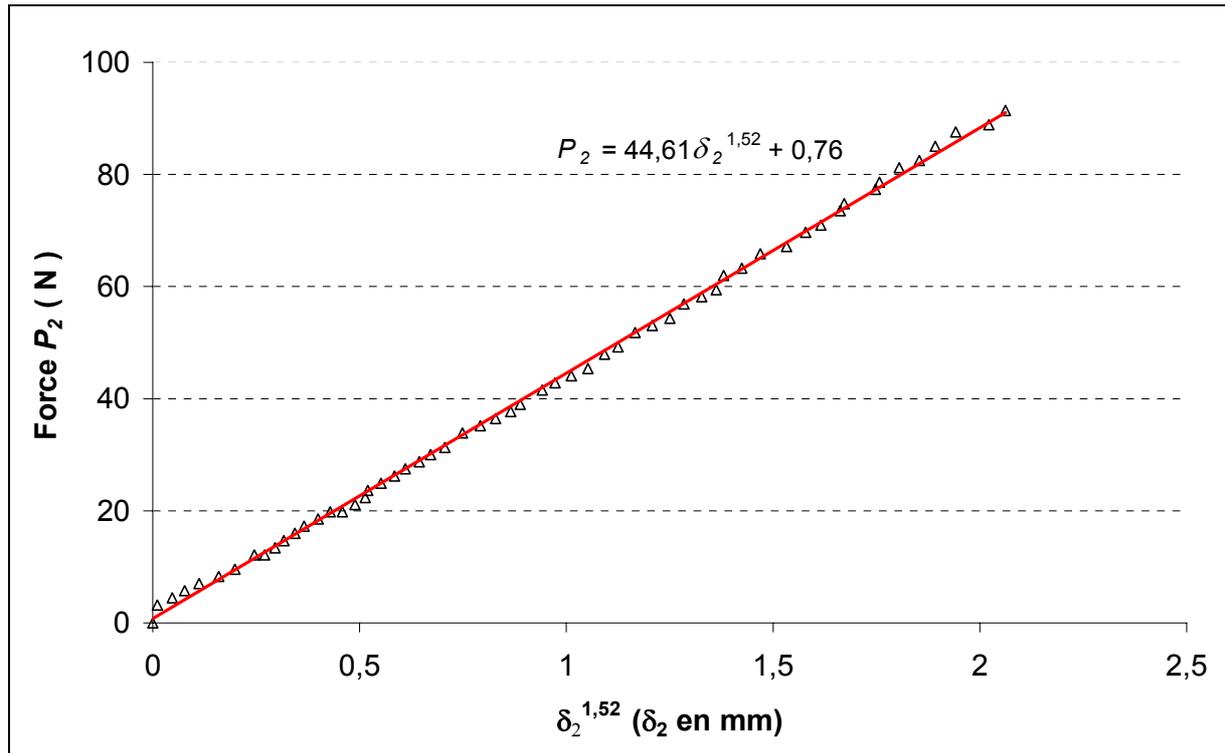


Figure 6.8: Identification du coefficient $C_{S_2\text{Expérimental}}$

En comparant les résultats expérimentaux $C_{S_1\text{Expérimental}}$ et $C_{S_2\text{Expérimental}}$ avec la valeur analytique, on trouve respectivement une différence de 0,5% et 9,41% sur la valeur du coefficient C . On remarque que la différence est plus importante pour le cas de la sphère la moins élevée.

La Figure 6.5 montre que la courbe expérimentale coïncide avec la courbe analytique et de la Figure 6.6 on remarque qu'il existe un décalage entre les deux courbes, ceci peut être expliqué par l'existence d'une interaction entre les deux billes. La première bille étant plus haute que la seconde donc la deuxième bille subit l'influence de la première, l'influence se traduit par un changement de la valeur du coefficient C .

6.2.2. Contact entre la plaque en caoutchouc, une sphère et un cône

6.2.2.1. Cône plus élevé que la sphère

Le modèle analytique pour un contact ponctuel d'une forme conique s'écrit :

$$P = \frac{\partial U}{\partial \delta} = c_c \frac{8\sqrt{2}}{45} \pi^{3/2} E^* \text{tg}\alpha \delta^2 \quad (6.5)$$

L'identification du facteur c_c a été faite (voir chapitre IV), il s'avère que $c_c = 0,45$. Comme pour le cas d'un contact entre deux sphères et la plaque en caoutchouc, nous procéderons de la

même manière pour le cas d'un contact entre la plaque, une sphère et un cône (même cône que celui utilisé au chapitre IV). Le cône est plus haut que la sphère de 1 mm, (Figure 6.9).

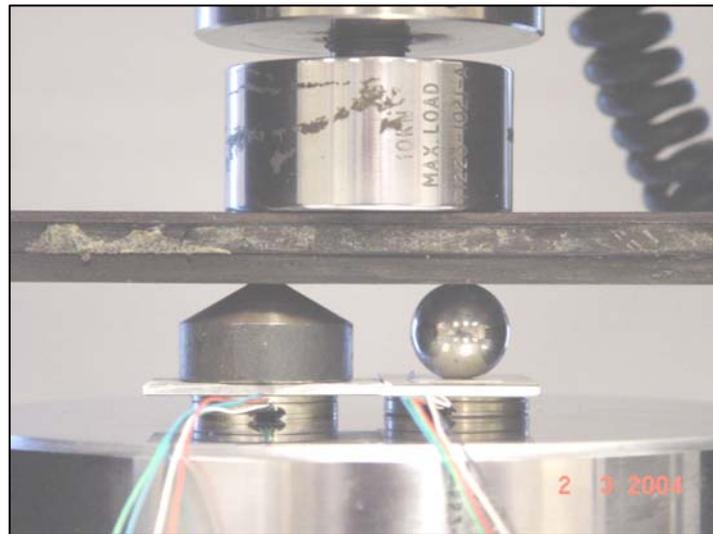


Figure 6.9: Dispositif expérimental

On trace l'évolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration, pour les deux pointes de contact, le cône et la sphère, (figures ci-dessous).

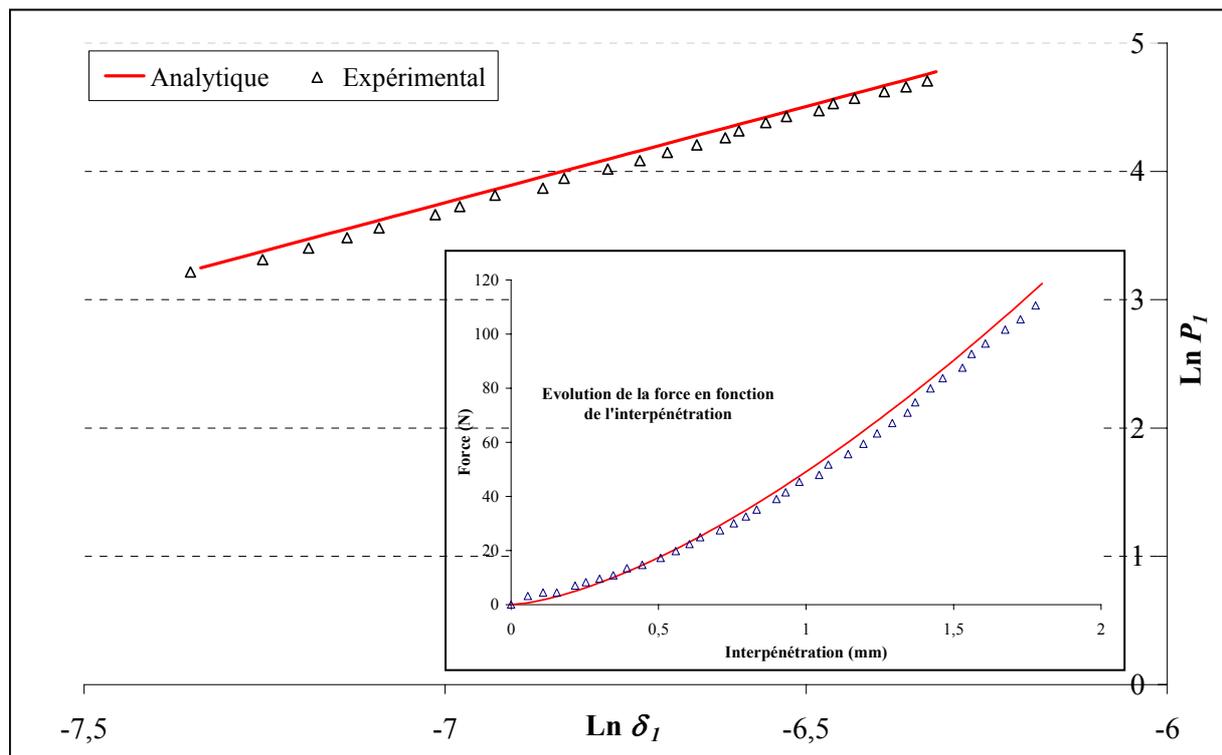


Figure 6.10: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère

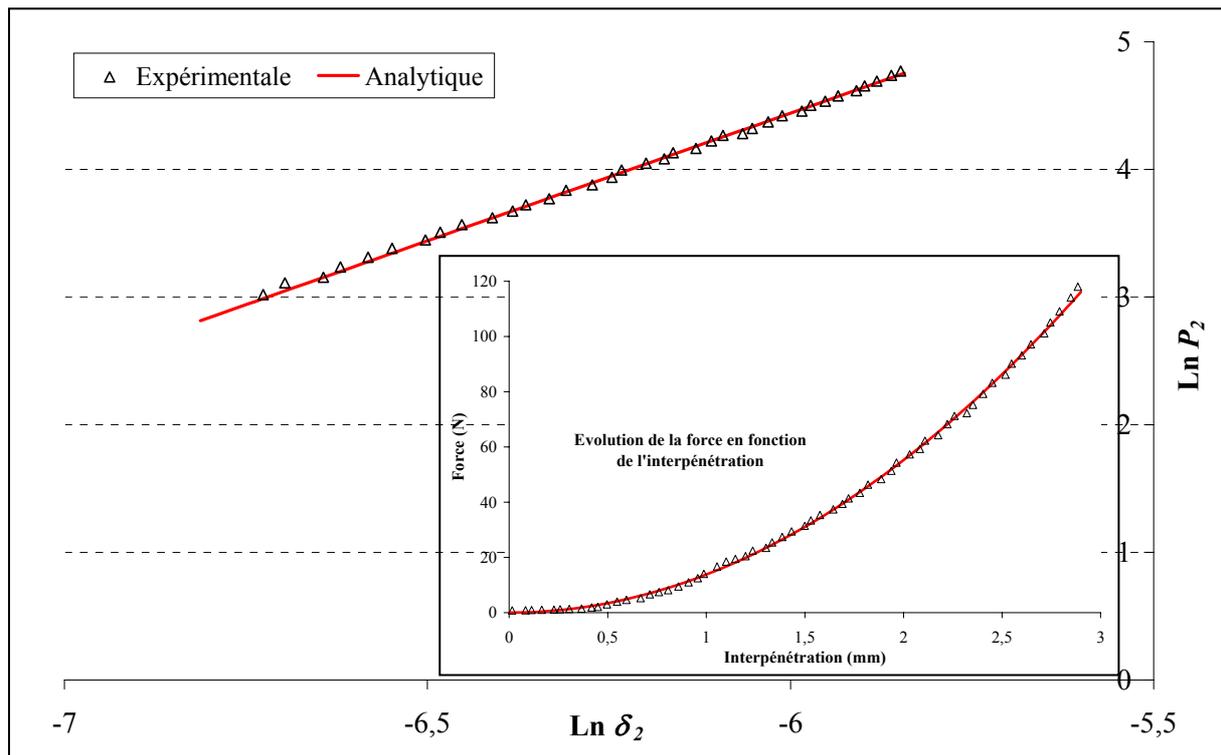


Figure 6.11: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le cône

Par régression linéaire de la courbe, on trouve une droite, pour la pointe sphérique :

$$\text{Ln}(P_1) = 1,52 \text{Ln}(\delta_1) + 14,35 \quad (6.6)$$

Et pour la pointe conique :

$$\text{Ln}(P_2) = 1,96 \text{Ln}(\delta_2) + 16,20 \quad (6.7)$$

On remarque à partir des Figures 6.10 et 6.11 qu'il y a une bonne concordance entre les résultats expérimentaux et analytiques pour le cas conique et qu'il existe un décalage des courbes pour le cas sphérique, ceci est dû à la différence de hauteurs entre le cône et la sphère. Si on pose: $P_1 = C_{S.Expérimental} \delta^{\gamma_1}$ et $P_2 = C_{C.Expérimental} \delta^{\gamma_2}$, à partir de la pente des équations (6.6) et (6.7), on peut identifier $\gamma_1 = 1,52$ et $\gamma_2 = 1,96$. On trace les courbes $P_i = f(\delta^{\gamma_i})$ et on identifie les coefficients $C_{S.Expérimental}$ et $C_{C.Expérimental}$. Il en résulte que $C_{S.Expérimental} = 45,73 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Expérimental} = 14,62 \text{ N/mm}^2$.

Connaissant les caractéristiques du caoutchouc et les caractéristiques géométriques et mécaniques des pointes en contact, on trouve pour le cas sphérique $C_{S.Analytique} = 49,35 \text{ N/mm}^{3/2}$ et pour le cas conique $C_{C.Analytique} = 13,83 \text{ N/mm}^2$. En comparant avec les résultats expérimentaux, il en résulte une différence de 7,27% et 5,71% respectivement pour le cas sphérique et conique.

Tout comme pour le cas d'un contact avec deux sphères, on constate une différence plus importante pour la pointe la moins élevée. On peut aussi remarquer que l'influence du cône sur la sphère n'est pas très importante malgré qu'il existe une différence de hauteur cinq fois plus grande que celle du cas des deux sphères en contact.

6.2.2.2. Sphère plus élevée que le cône

Il serait intéressant d'étudier le cas où la sphère est plus élevée que le cône, pour cela on prend le même dispositif expérimental et on surélève la sphère de 0,4 mm par rapport au cône.

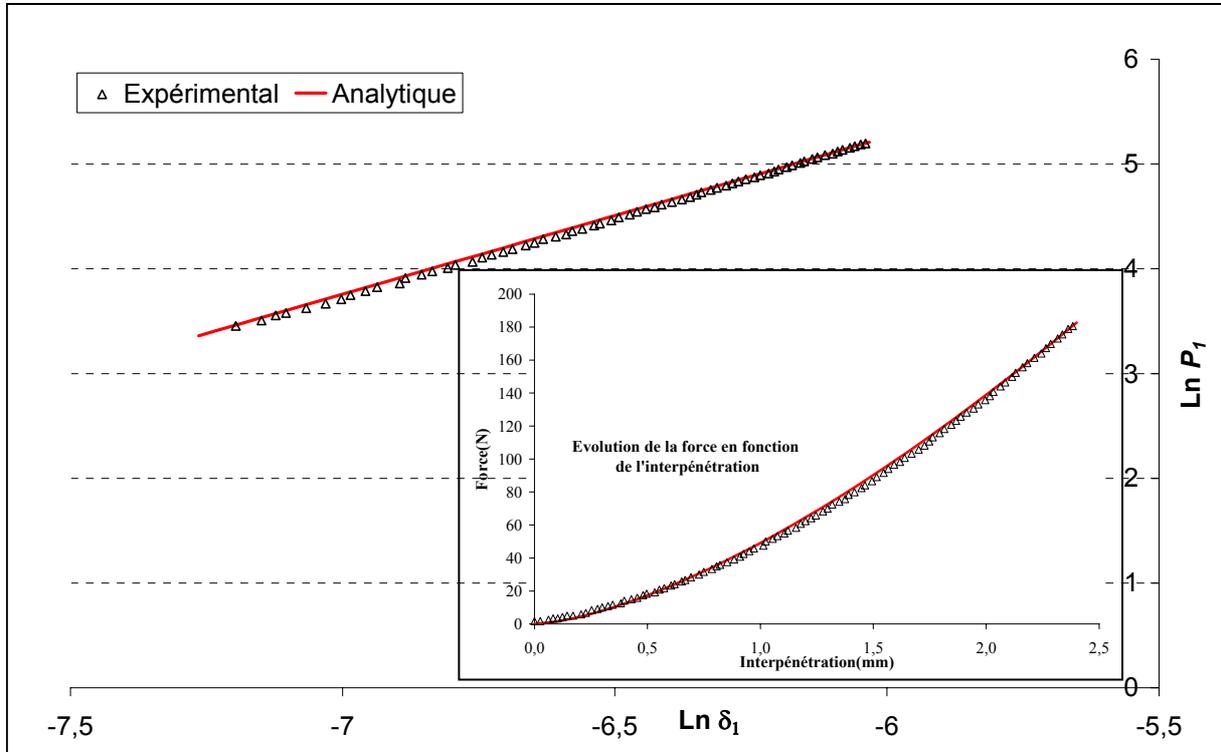


Figure 6.12: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère

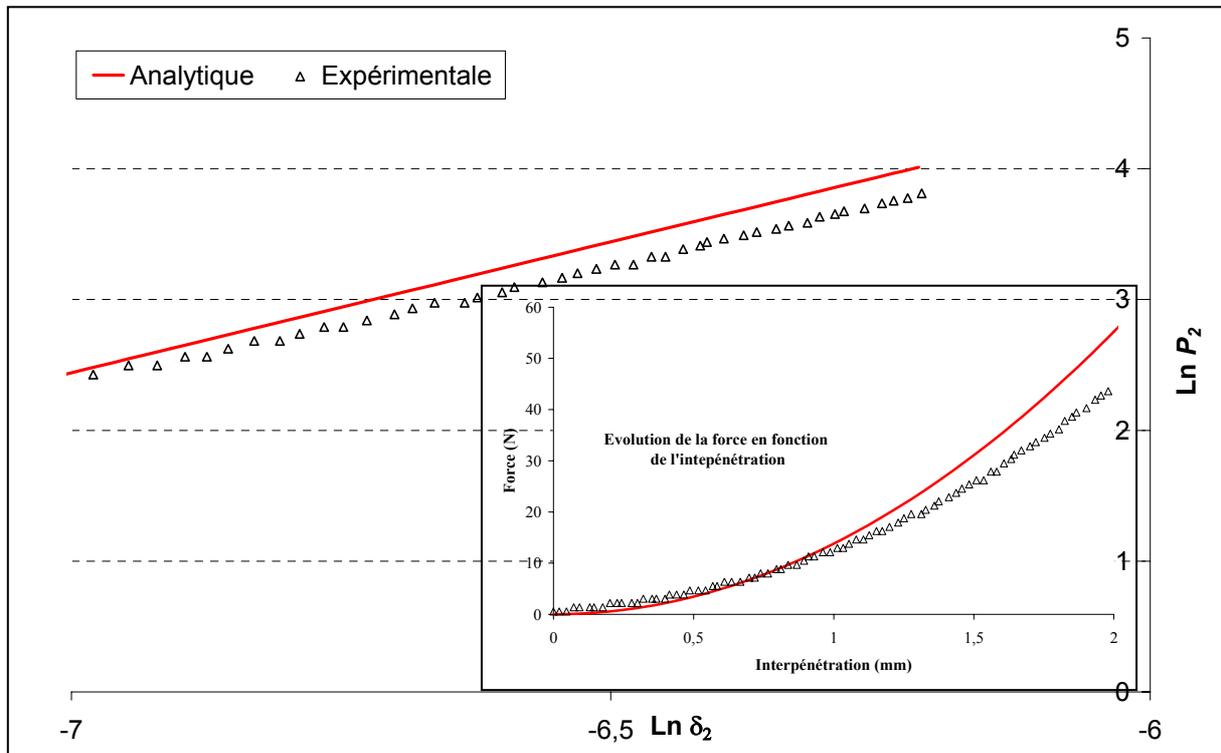


Figure 6.13: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le cône

Après une régression linéaire des courbes, on trouve une droite pour la pointe sphérique :

$$\ln(P_1) = 1,52 \ln(\delta_1) + 14,41 \tag{6.8}$$

Et pour la pointe conique

$$\ln(P_2) = 1,95 \ln(\delta_2) + 15,84 \tag{6.9}$$

On remarque sur les Figures 6.12 et 6.13 qu'il y a un décalage important pour le cas conique entre la courbe expérimentale et la courbe analytique. Le contact entre la plaque et la sphère influe considérablement sur l'évolution de la force entre la plaque et le cône.

Tout comme pour les cas précédents, on pose : $P_1 = C_{S.Expérimental} \delta^{1,52}$ et $P_2 = C_{C.Expérimental} \delta^{1,95}$.

A partir des courbes $P_i = f(\delta^{1,52})$ on identifie les coefficients $C_{S.Expérimental} = 48,27 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Expérimental} = 11,00 \text{ N/mm}^2$. La comparaison de ces valeurs avec les résultats du modèle analytique $C_{S.Analytique} = 49,35 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.Analytique} = 13,83 \text{ N/mm}^2$, montre qu'il y a une différence de 2,11% et 20,2 % respectivement pour le cas sphérique et conique.

6.2.3. Contact entre la plaque en caoutchouc et deux cones

Dans cette partie on étudiera le cas d'un contact entre la plaque et deux cones. Deux cones de 60° en acier ont été utilisés. La différence de hauteur entre les deux cones est de 0,5 mm.

Les Figures 6.14 et 6.15 représentent l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration à l'échelle logarithmique pour les deux cones. On remarque qu'il existe une bonne concordance des résultats expérimentaux avec les résultats analytiques pour le premier cône (le cône le plus élevée) tandis que pour le deuxième cône, il existe un décalage entre la courbe expérimentale et la courbe analytique.

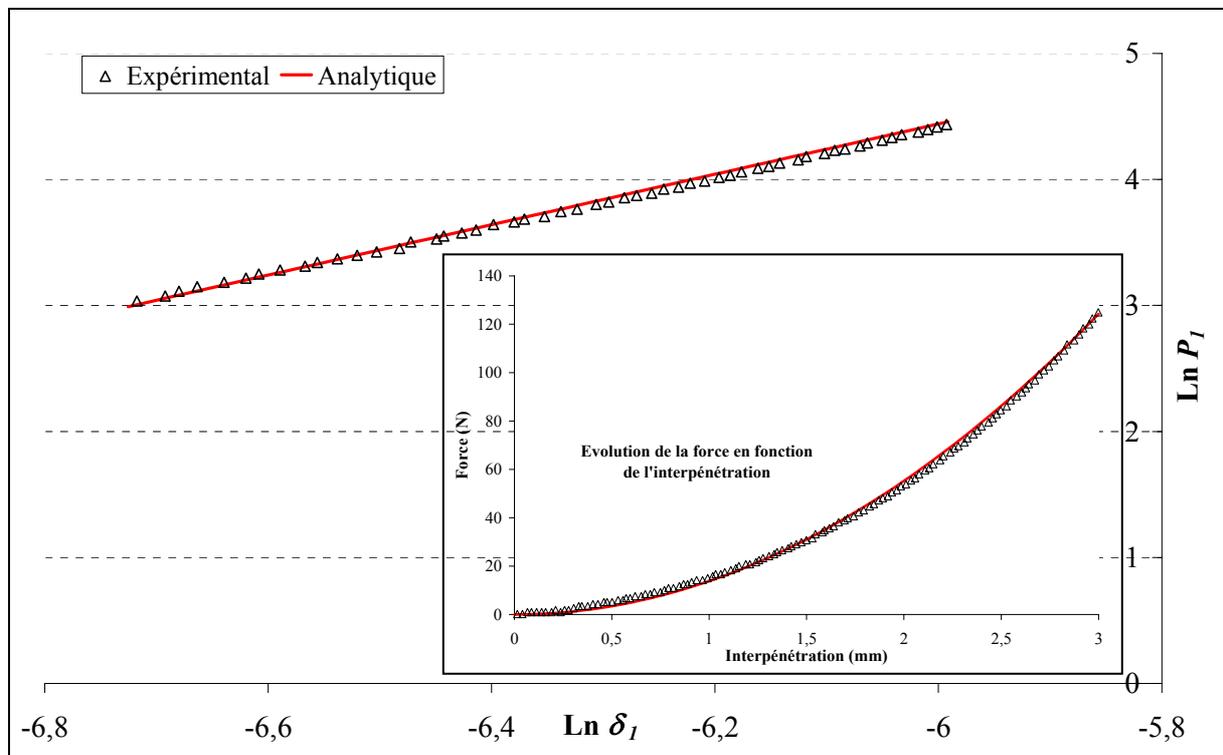


Figure 6.14: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le 1^{ere} cône

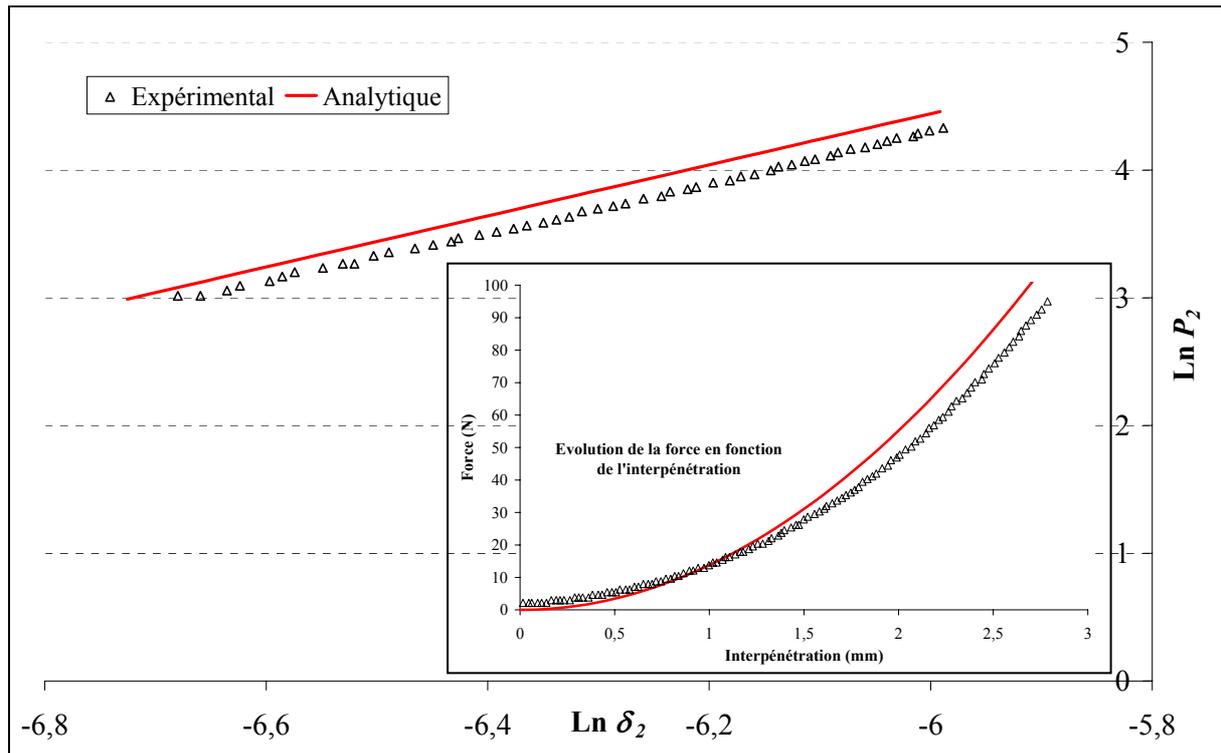


Figure 6.15: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le 2^{ème} cône

De même que pour les cas précédents, après une régression linéaire des deux courbes on obtient les deux droites, pour le 1^{ère} cône :

$$\ln(P_1) = 1,94 \ln(\delta_1) + 16,01 \tag{6.10}$$

Pour le 2^{ème} cône :

$$\ln(P_2) = 1,95 \ln(\delta_2) + 15,96 \tag{6.11}$$

Posons $P_1 = C_{C_1,Expérimental} \delta^{\gamma_1}$ et $P_2 = C_{C_2,Expérimental} \delta^{\gamma_2}$, après identification des valeurs expérimentales des coefficients $C_{C_1,Expérimental} = 14,36 \text{ N/mm}^2$ et $C_{C_2,Expérimental} = 12,60 \text{ N/mm}^2$, il en résulte qu'il existe une différence de 3,80 % et 8,90 % entre les valeurs expérimentales et la valeur $C_{C,Analytique} = 13,83 \text{ N/mm}^2$.

On remarque que dans le cas où le cône est plus élevé que les autres pointes, l'influence du cône est la même sur n'importe quelle forme de pointe, qu'elle soit sphérique ou conique on enregistre une différence de 7,3 % à 8,9 % sur la valeur du coefficient $C_{C,Analytique}$.

Par contre, dans le cas où la sphère est plus élevée que les autres pointes, on remarque une différence de 9,41% sur la valeur du coefficient $C_{S,Analytique}$ dans le cas où la pointe est sphérique et une différence de 20 % sur la valeur du coefficient $C_{C,Analytique}$ dans le cas où la pointe est conique.

6.3. Contact élastique en trois points

On a montré que pour le cas d'un contact à deux points, les paramètres de différence de hauteurs et la forme des pointes de contact influent sur l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration. Cette influence se traduit par un changement de la valeur du coefficient C , variation qui peut atteindre les 20% par rapport aux valeurs des résultats du modèle analytique du contact ponctuel. Il serait intéressant de voir le cas où l'on a trois points de contact et voir si le paramètre de la hauteur et de la forme influent de la même manière que pour le cas d'un contact double. On utilisera la même plaque en caoutchouc que celle utilisée précédemment, deux sphères en acier, un cône et des capteurs de force. Deux cas seront étudiés, le cas où le cône sera plus élevé que les deux sphères et le cas où les sphères seront plus élevées que le cône.

6.3.1. Cône plus élevé que les sphères

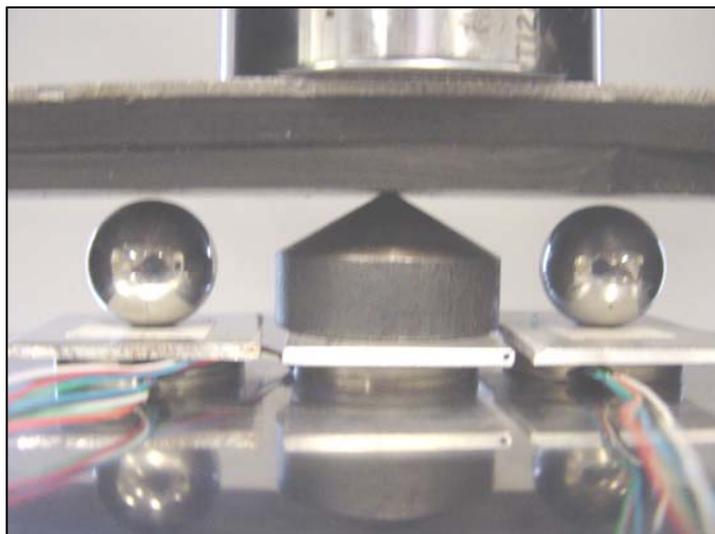


Figure 6.16: *Dispositif expérimental*

On utilisera le même dispositif expérimental, (Figure 6.16). On charge à une vitesse de 0,001 mm/s et on trace l'évolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration, pour les trois points en contact, (Figures 6.17, 6.18 et 6.19). Après une régression linéaire des courbes, on trouve les droites pour les pointes de contact

- Sphérique 1:

$$\ln(P_1) = 1,46 \ln(\delta_1) + 13,84 \quad (6.12)$$

- Conique :

$$\ln(P_2) = 1,95 \ln(\delta_2) + 16,14 \quad (6.13)$$

- Sphérique 2:

$$\ln(P_3) = 1,47 \ln(\delta_3) + 13,90 \quad (6.14)$$

La sphère 1 et la sphère 2 ont les mêmes caractéristiques mécaniques et géométriques, de rayon $R=0,0085\text{ m}$ et un module d'Young $E=210\text{ GPa}$. La sphère 1 est plus élevée que la sphère 2 de $0,2\text{ mm}$ et le cône est plus élevé de $0,8\text{ mm}$ de la sphère 1.

On remarque sur les graphiques qu'il y a un décalage entre la courbe expérimentale et la courbe du résultat du modèle analytique du contact ponctuel pour les deux sphères, tandis que pour le cas conique il y a une bonne concordance des deux courbes. A partir des équations de droites (6.12), (6.13) et (6.14) on pose $P_i = C_{i\text{Expérimental}} \delta_i^{\gamma_i}$ et on identifie les valeurs expérimentales des coefficients $C_{S_1\text{Expérimental}} = 43,3\text{ N/mm}^{3/2}$, $C_{C.\text{Expérimental}} = 14,08\text{ N/mm}^2$ et $C_{S_2\text{Expérimental}} = 43,2\text{ N/mm}^{3/2}$. Il en résulte qu'il existe une différence de $12,4\%$, $1,80\%$ et $12,2\%$ entre les valeurs expérimentales et analytiques $C_{S.\text{Analytique}} = 49,4\text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C.\text{Analytique}} = 13,83\text{ N/mm}^2$. Comme pour le cas d'un contact double, on remarque que la hauteur influe sur le coefficient $C_{i\text{Expérimental}}$. Il varie pour les pointes les moins élevées et reste quasiment égal à la valeur analytique pour la pointe la plus élevée.

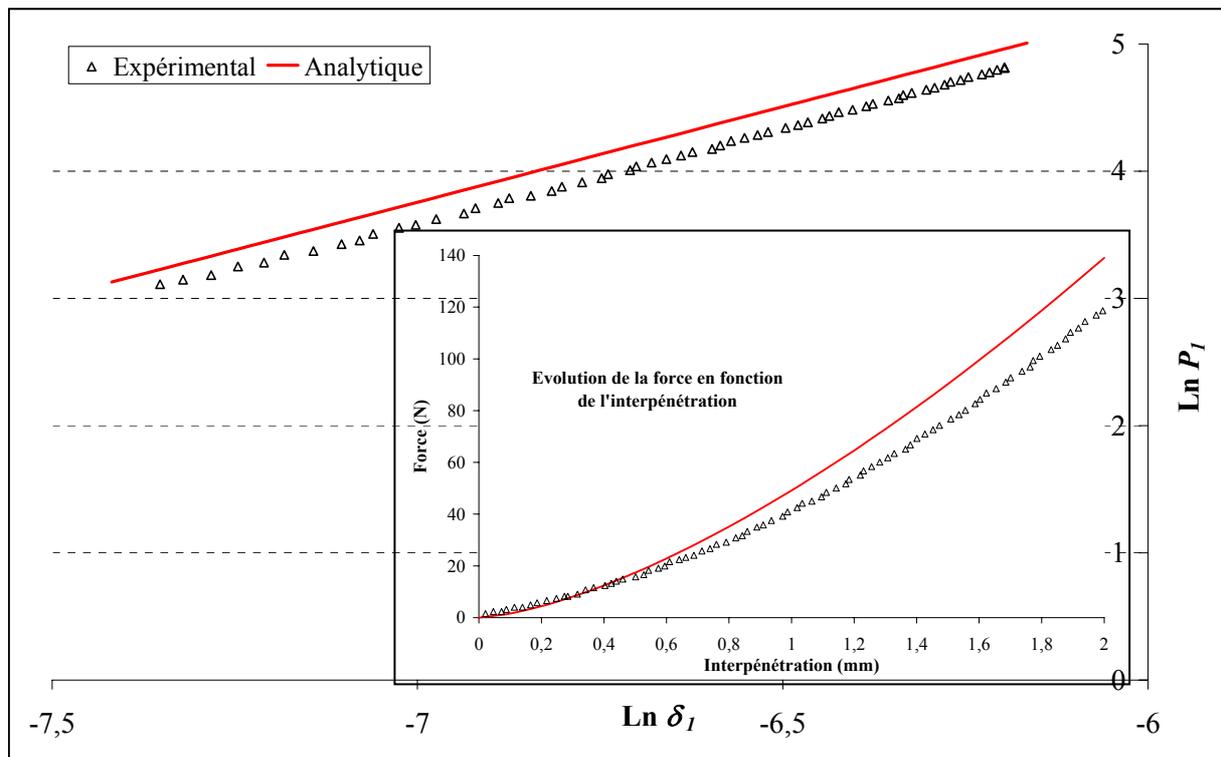


Figure 6.17: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère 1

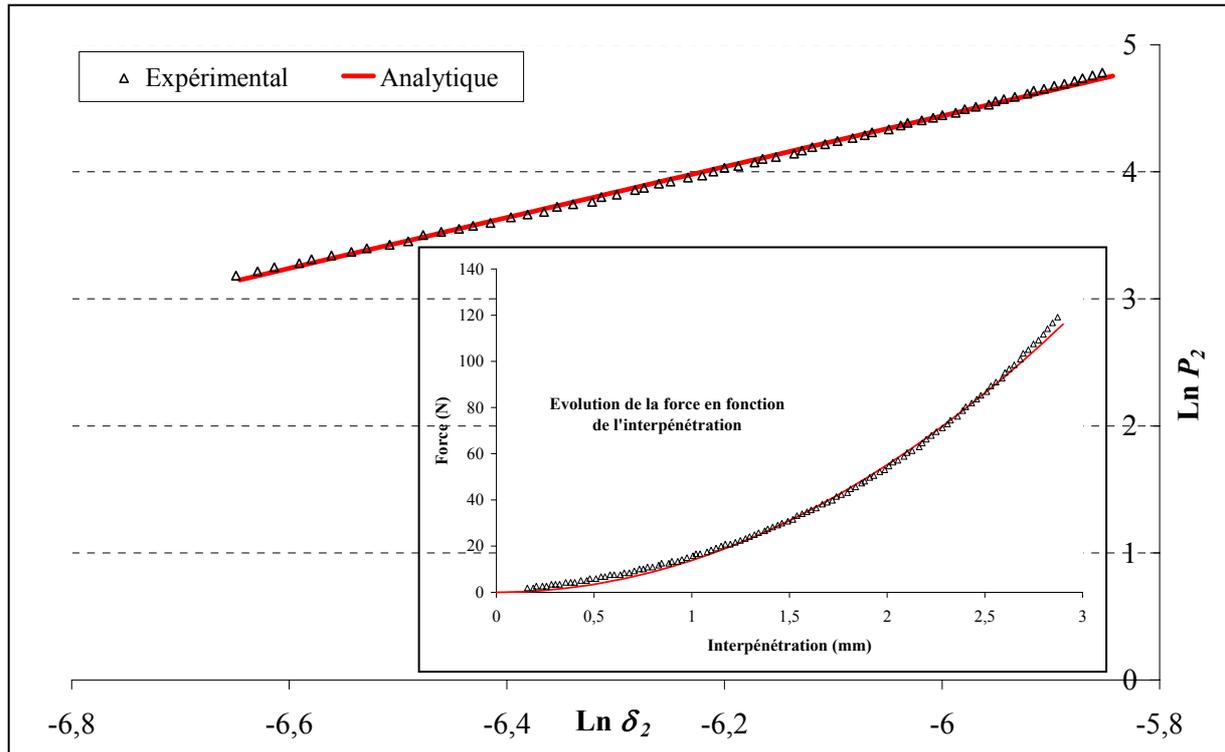


Figure 6.18: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le cône

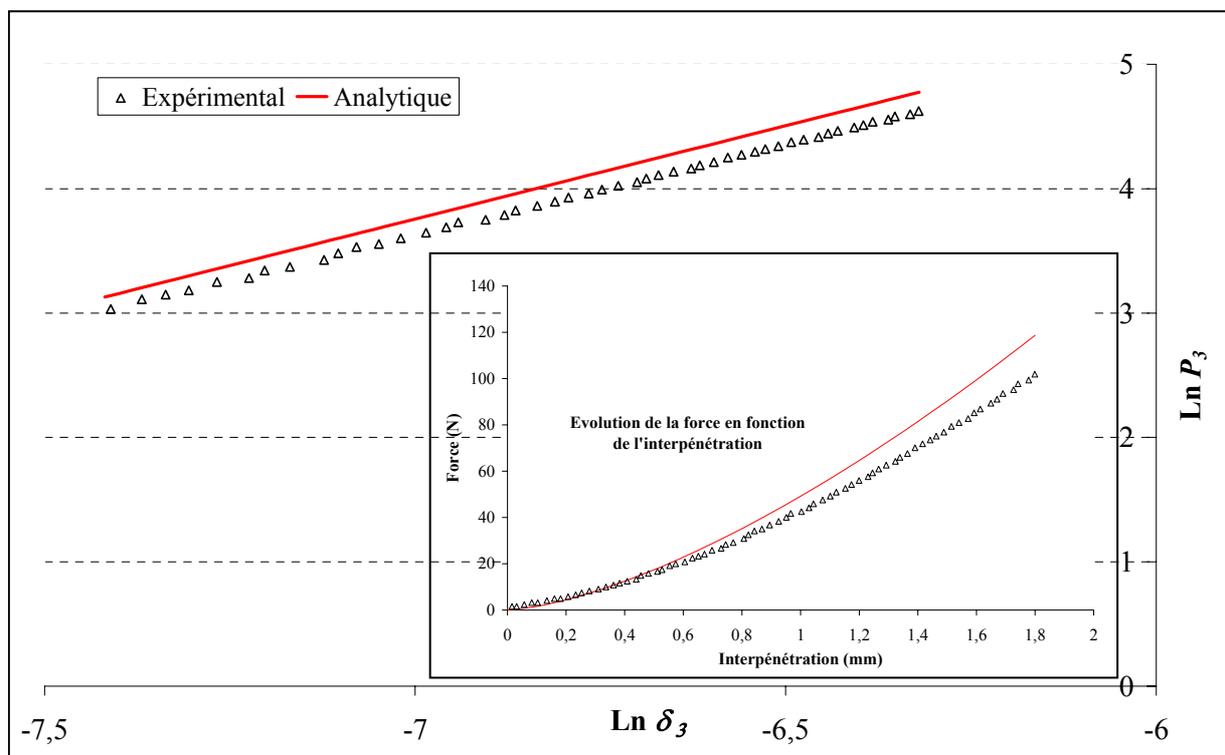


Figure 6.19: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère 2

6.3.2. Sphères plus élevées que le cône

On applique la même méthode, sauf qu'on surélève les deux sphères par rapport au cône. La sphère 1 sera plus élevée que le cône de 0,4 mm et plus élevée que la sphère 2 de 0,2 mm.

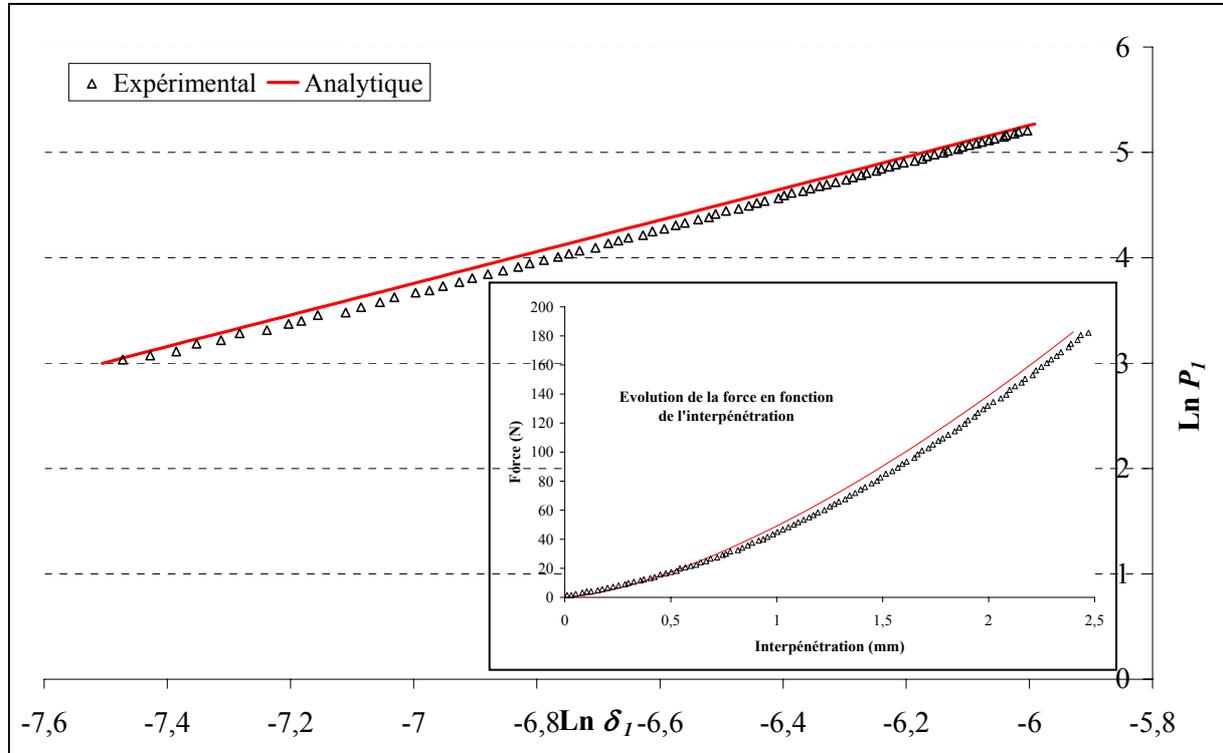


Figure 6.20: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère 1

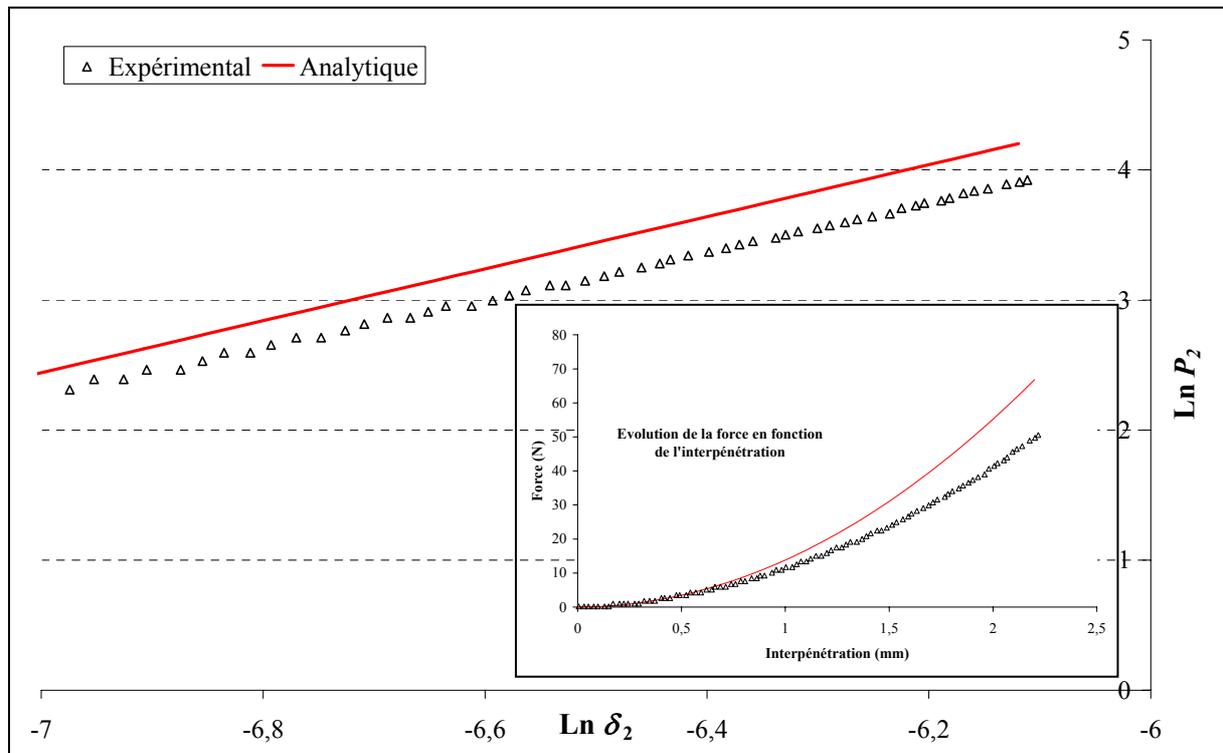


Figure 6.21: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour le cône

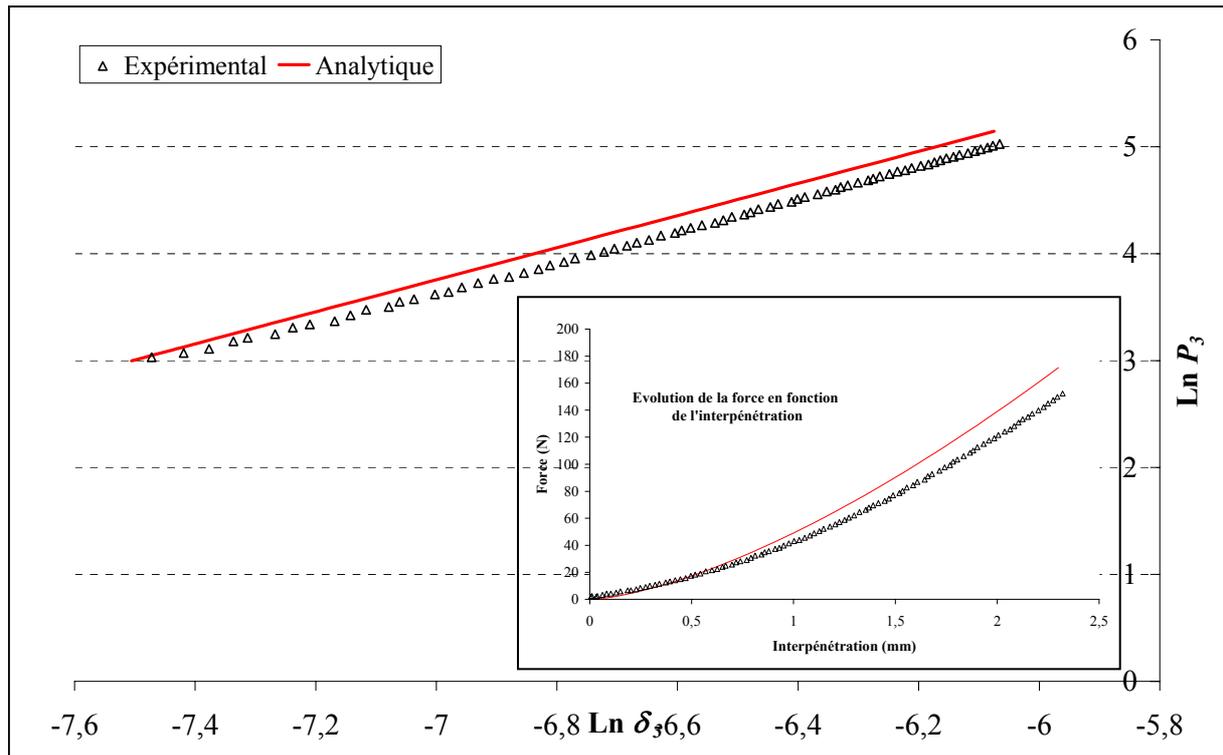


Figure 6.22: Evolution logarithmique de la force en fonction de l'interpénétration pour la sphère 2

On obtient les droites pour les pointes:

- Sphérique 1:

$$\ln(P_1) = 1,53 \ln(\delta_1) + 14,35 \quad (6.15)$$

- Conique :

$$\ln(P_2) = 1,93 \ln(\delta_2) + 14,34 \quad (6.16)$$

- Sphérique 2:

$$\ln(P_3) = 1,47 \ln(\delta_3) + 13,89 \quad (6.17)$$

En posant $P_i = C_{i\text{Expérimental}} \delta^{y_i}$ et en identifiant les valeurs expérimentales des coefficients $C_{S_1\text{Expérimental}} = 46 \text{ N/mm}^{3/2}$, $C_{C\text{Expérimental}} = 11,00 \text{ N/mm}^2$ et $C_{S_2\text{Expérimental}} = 44,3 \text{ N/mm}^{3/2}$, respectivement de la sphère 1, du cône et de la sphère 2, il en résulte qu'il existe une différence de 6,75 %, 20,40 % et 10,16% entre les valeurs expérimentales des coefficients $C_{i\text{Expérimental}}$ et les valeurs analytiques $C_{S\text{Analytique}} = 49,4 \text{ N/mm}^{3/2}$ et $C_{C\text{Analytique}} = 13,83 \text{ N/mm}^2$.

On remarque que pour le cas où la pointe est conique, la différence sur la valeur du coefficient C est plus importante que la différence sur la valeur du coefficient C du cas sphérique. Comme pour le cas d'un double contact, l'influence de la sphère quand elle est plus élevée que le cône est plus importante que l'influence du cône quand il est plus élevé que les sphères.

6.4. Conclusion

On peut résumer les résultats obtenus dans le tableau suivant :

<i>Contact double</i>			<i>Contact Triple</i>		
Forme de pointe	Différence de hauteur (mm)	Différence entre $C_{Analytique}$ et $C_{Expérimental}$ (%)	Forme de pointe	Différence de hauteur (mm)	Différence entre $C_{Analytique}$ et $C_{Expérimental}$ (%)
Sphère 1 Sphère 2	$h_{Sphère1}-h_{Sphère2}=0,2$	0,50 % 9,41%	Sphère 1 Cône 1 Sphère 2	$h_{Sphère1}-h_{Sphère2}=0,2$	12,40% 1,80%
Cône 1 Sphère 1	$h_{Cône1}-h_{Sphère1}=1$	5,71% 7,27%		$h_{Cône1}-h_{Sphère1}=0,8$	12,20%
Sphère 1 Cône 1	$h_{Sphère1}-h_{Cône1}=0,4$	2,11% 20,20%	Sphère 1 Cône 1 Sphère 2	$h_{Sphère1}-h_{Sphère2}=0,2$	6,80% 20,40%
Cône 1 Cône 2	$h_{Cône1}-h_{Cône2}=0,5$	3,80% 8,90%		$h_{Sphère1}-h_{Cône1}=0,4$	10,60%

Tableau 5.1 : Récapitulatif des comparaisons entre les résultats expérimentaux et les résultats analytiques

En comparant les résultats expérimentaux avec les résultats de notre modèle de contact ponctuel, on peut dire que la force en fonction de l'interpénétration obéit à la même loi :

$$P = C \delta^\gamma \quad (6. 18)$$

Où :

$\gamma = 1,5$ pour une pointe sphérique et $\gamma = 2$ pour une pointe conique.

Le coefficient $C_{Expérimental}$ semble être différent par rapport à la valeur du coefficient $C_{Analytique}$, ce changement est plus important pour la pointe la moins élevée. Pour la pointe la plus élevée il n'y a pas une grande différence entre la valeur expérimentale et la valeur analytique du coefficient C , la force en fonction de l'interpénétration évolue de la même façon que donc le cas d'un contact ponctuel.

On a vu que la différence de hauteur influe sur le coefficient C de la forme de pointe de contact la plus basse et cette influence est plus importante quand on est dans le cas où la sphère est plus élevée que le cône, il se trouve que dans ce cas, on peut atteindre une variation de 20 % sur la valeur du coefficient C , que ce soit dans le cas d'un double ou d'un triple contact.

Pour le cas d'un contact entre deux sphères (l'une plus élevée que l'autre) on trouve une différence de 10 % entre la valeur expérimentale et analytique du coefficient C .

Lorsque le cône est plus élevé, la différence entre la valeur analytique et expérimentale du coefficient C atteint les 10 % et ceci sur n'importe quelle forme de pointe (conique ou sphérique) et pour les deux cas double et triple contact.

Pour des pointes ayant la même hauteur, on remarque qu'il existe une influence sur l'évolution de la force aux points de contact, l'influence des sphères sur les cônes est plus importante que l'influence des cônes sur les sphères.

Nous avons vu lors de l'étude expérimentale, comme lors de l'étude numérique que le paramètre de la hauteur influait sur l'évolution de la force, l'influence des formes sphériques sur les formes coniques était plus importante quand les sphères étaient plus hautes que les cônes.

Cette influence se traduit par une variation de la valeur du coefficient C , sachant que :

$C_{S.Analytique} = c_s \frac{2}{3} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R}$ et $C_{C.Analytique} = c_c \frac{8\sqrt{2}}{45} \pi^{3/2} E^* \operatorname{tg} \alpha$, cette variation peut être due à un changement des coefficients c_s et c_c .

Il est établi que le modèle analytique du contact ponctuel développé au chapitre III n'est plus valide pour la résolution d'un contact multipoints. On développera au chapitre suivant une méthode itérative pour le calcul de la force de contact en fonction de l'interpénétration, cette méthode corrige le modèle analytique ponctuel à chaque instant de chargement pour prendre en considération l'interaction et la différence de hauteur entre les différentes formes de pointes de contact.

Chapitre VII

Méthode de résolution du contact élastique multipoints

Le contact multipoints a été étudié par la méthode des éléments finis et expérimentalement aux chapitres précédents. Il s'avère que la force en fonction de l'interpénétration ne semble pas évoluer exactement d'après la loi de puissance du contact ponctuel développée au chapitre III. Cette différence est due à l'existence d'une interaction entre les pointes en contact, elle dépend de la forme et de la hauteur de celles-ci.

Nous présenterons dans ce chapitre une méthode de résolution pour tenir compte de l'effet de cette interaction. Les résultats seront comparés aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis et aux résultats expérimentaux.

7.1. Principe de résolution

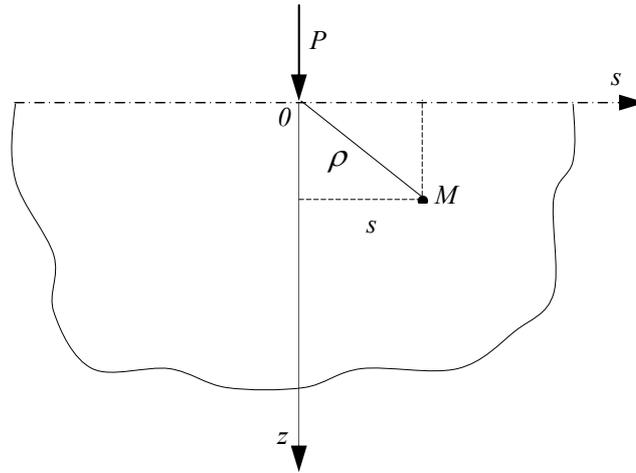
Nous commencerons tout d'abord par présenter une méthode de calcul de la déformation d'un solide soumis à une force concentrée. Le déplacement en un point M d'un solide produit par une force normale concentrée P au point O , (voir Figure 7.1) peut être calculé d'après les équations de Boussinesq (voir Johnson [43])

$$u = \frac{P}{4\pi G} \left(\frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right) \quad (7.1)$$

Où : G est le module de cisaillement et ν est le coefficient de poisson.

Si on s'intéresse à la surface du solide ($z = 0$) l'équation (7.1) devient de la forme:

$$u = \frac{P}{2\pi G} \frac{(1-\nu)}{s} \quad (7.2)$$

Figure 7.1: Force normale concentrée P agissant sur un solide semi infini

Dans le cas où il existe N forces concentrées aux points de coordonnées x_j le déplacement de la surface du solide aux points de coordonnées x_i dû aux autres forces que P_i sera calculé d'après le principe de superposition:

$$u_i = \sum_{\substack{j=1,N \\ j \neq i}} \frac{P_j}{2\pi G} \frac{(1-\nu)}{|x_j - x_i|} \quad (7.3)$$

Connaissant les forces de contact en tout point j on peut connaître le déplacement de la surface du solide en tout point i .

Aux chapitres précédents nous avons présenté un modèle analytique du contact ponctuel, il a été établi que l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration dépend de la forme des pointes en contact, elle évolue selon une loi de puissance de la forme:

$$P = K(\delta)^\gamma \quad (7.4)$$

Pour le cas d'une pointe sphérique: $K = 24 \cdot 10^{-2} \pi^{3/2} E^* \sqrt{R}$ et $\gamma = 3/2$, alors que pour le cas d'une pointe conique $K = 8 \cdot 10^{-2} \pi^{3/2} E^* \operatorname{tg} \alpha$ et $\gamma = 2$.

Le principe de notre méthode pour la résolution du problème de contact multipoints est de prendre les mêmes lois de puissance mais en prenant en considération la déformation u_i du solide engendrée par les forces P_j . On corrigera l'interpénétration de la pointe i , de ce fait l'effet de l'interaction entre les pointes en contact sera pris en considération, l'équation (7.4) deviendra de la forme

$$P_i = K_i (\delta_i - u_i)^{\gamma_i} \quad (7.5)$$

où u_i est calculé à l'aide de l'équation (7.3).

Mettant l'équation (7.3) sous la forme

$$u_i = \sum_{j=1}^N T_{ij} P_j \quad (7.6)$$

Avec

$$T_{ij} = \frac{1}{2\pi G} \frac{(1-\nu)}{|x_j - x_i|} \quad (7.7)$$

La résolution du contact multipoints revient à résoudre le système d'équations non linéaires avec $i = 1:N$

$$F_i = P_i - K_i (\delta_i - \sum_{j=1}^N T_{ij} P_j)^{\gamma_i} = 0 \quad (7.8)$$

Dans ces équations K_i , γ_i et δ_i sont connus, T_{ij} sont calculés à l'aide de l'équation (7.7) et P_i sont les inconnus.

Pour résoudre le système d'équations, nous avons utilisé la méthode itérative de Newton Raphson, en posant \mathbf{F} vecteur des fonctions F_i et \mathbf{P} vecteur des valeurs P_i . Au voisinage de \mathbf{P} , chaque fonction F_i peut être développée par la série de Taylor :

$$F_i(\mathbf{P} + d\mathbf{P}) = F_i(\mathbf{P}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial F_i}{\partial P_j} dP_j + O(d\mathbf{P}^2) \quad (7.9)$$

La matrice des dérivées partielles apparaissant dans l'équation est la matrice jacobienne \mathbf{J}

$$J_{ij} = \frac{\partial F_i}{\partial P_j} = \delta_{ij} + K_i \gamma_i T_{ij} (\delta_i - \sum_{k=1}^N T_{ik} P_k)^{\gamma_i - 1} \quad (7.10)$$

L'équation (7.9) en notation matricielle s'écrit

$$\mathbf{F}(\mathbf{P} + d\mathbf{P}) = \mathbf{F}(\mathbf{P}) + \mathbf{J} d\mathbf{P} + O(d\mathbf{P}^2) \quad (7.11)$$

En négligeant les termes d'ordre $d\mathbf{P}^2$ et en mettant $\mathbf{F}(\mathbf{P} + d\mathbf{P}) = 0$, on obtient un système d'équations linéaires

$$\mathbf{J} d\mathbf{P} = -\mathbf{F} \quad (7.12)$$

les corrections sont alors ajoutées au vecteur de solution

$$\mathbf{P}^{n+1} = \mathbf{P}^n + d\mathbf{P} \quad (7.13)$$

Afin de valider notre méthode itérative, nous avons comparé les résultats obtenus d'une part avec les résultats de la modélisation par la méthode des éléments finis et d'autre part avec les résultats de l'étude expérimentale.

7.2. Comparaison avec les résultats de la méthode des éléments finis

Nous avons tracé l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration obtenue par trois méthodes différentes. La première étant la méthode analytique du contact ponctuel développé au chapitre III, chaque pointe en contact est considérée comme étant rigide et indépendante par rapport aux autres, cette méthode ne tient pas compte de l'interaction entre les différentes pointes en contact. La seconde est la méthode des éléments finis étudiée au chapitre V. La troisième est la méthode itérative, à chaque itération on calcule la déformation du bloc en caoutchouc de dimension infinie pour prendre en considération l'interaction entre les différentes pointes en contact.

On présentera tout d'abord le cas du double contact puis nous aborderons le cas d'un contact multiples.

7.2.1. Double contact

Les mêmes configurations que celles étudiées au chapitre V seront traitées. L'étude de deux sphères à la même hauteur en contact avec un bloc en caoutchouc est représentée sur la Figure 7.2 ainsi que le contact entre le bloc en caoutchouc avec deux formes de pointes différentes (sphérique et conique) pour trois cas différents : même hauteur (voir Figure 7.3.), sphère plus élevée que le cône d'un millimètre (voir Figure 7.4.) et cône plus élevé que la sphère d'un millimètre, (voir Figure 7.5.). On remarque sur ces figures que pour une interpénétration donnée la force calculée par la méthode analytique est plus importante que celle calculé par les autres méthodes, ceci semble cohérent car la méthode analytique ne prend pas en considération l'interaction entre les différentes pointes en contact. Les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et par la méthode itérative ne diffèrent pas trop, il n'existe pas plus de 4% de différence entre les deux résultats, cette différence est moindre pour les petites interpénétrations, elle augmente avec l'augmentation de l'interpénétration. On peut dire que cette différence est due probablement au fait que le bloc est supposé infini lors de la résolution par la méthode itérative, ce qui doit influencer sur la déformation du bloc au niveau de la pointe voisine. Cela peut provenir aussi de la résolution par la méthode des éléments finis, le maillage du bloc ne doit pas être assez fin dans la zone de contact, donc le calcul de la force ne sera pas très précis, ce qui explique que la force calculée est moindre par rapport à la force calculée par la méthode itérative (la précision de la méthode des éléments finis est lié à la capacité de la machine de calcul), c'est l'un des inconvénients de la méthode des éléments finis.

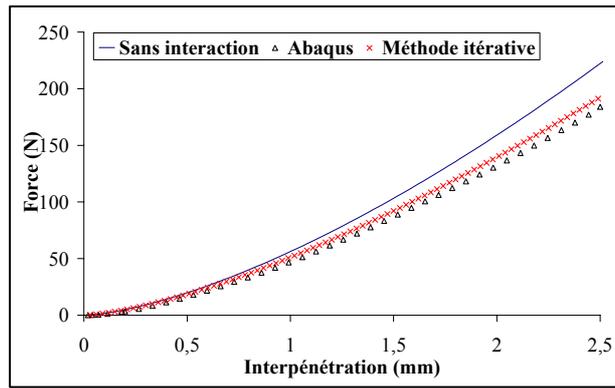


Figure 7.2: Comparaison de l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration pour le cas d'un double contact sphérique à la même hauteur

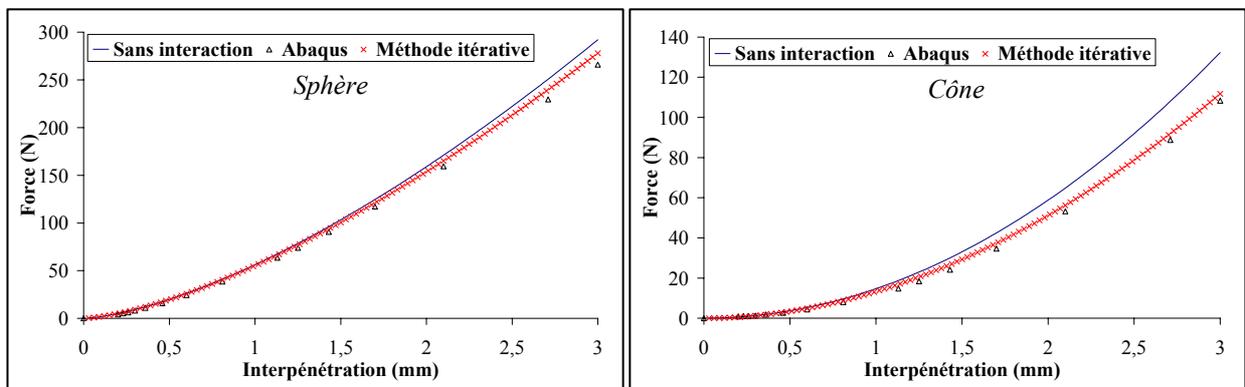


Figure 7.3: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère et du cône à la même hauteur

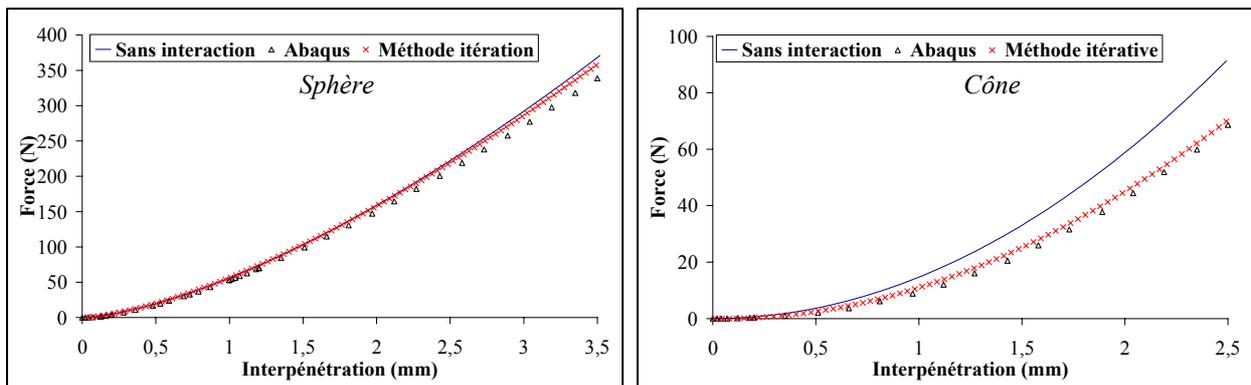


Figure 7.4: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère plus élevée que le cône d'un 1 mm

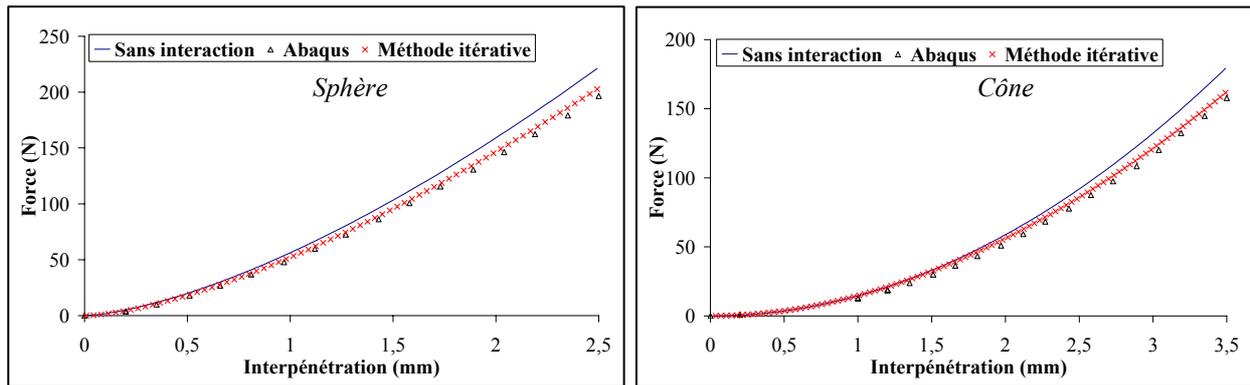


Figure 7.5: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère moins élevée que le cône d'un 1 mm

7.2.2. Contact multipoints

Tout comme pour le double contact, on a repris les mêmes configurations que celles étudiées au chapitre V. Le contact multipoints entre le bloc et différentes pointes a été étudié: quatre sphères (voir Figure 7.6), quatre cônes (voir Figure 7.7), deux sphères et deux cônes à la même hauteur (voir Figure 7.8), deux sphères plus élevées que deux cônes de 0,4 mm (voir Figure 7.9) et deux cônes plus élevées que deux sphères de 0,5 mm, (voir Figure 7.10). On constate les mêmes observations que celles du double contact, l'effet de l'interaction entre les différentes pointes en contact est visible, la force calculée par la méthode analytique du contact ponctuel reste toujours plus élevée que celle calculée par les autres méthodes. On note une différence qui ne dépasse pas les 4% entre les résultats obtenus par la méthode des éléments finis et par la méthode itérative.

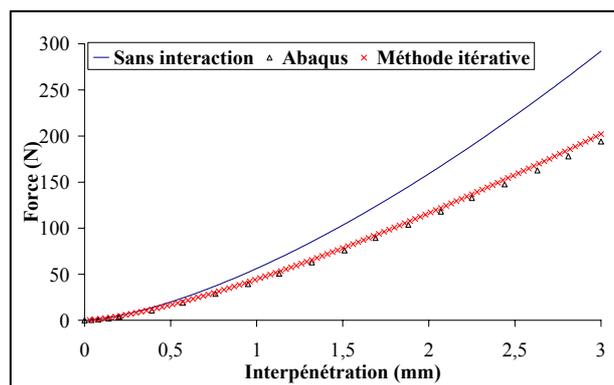


Figure 7.6: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact entre quatre sphères à la même hauteur

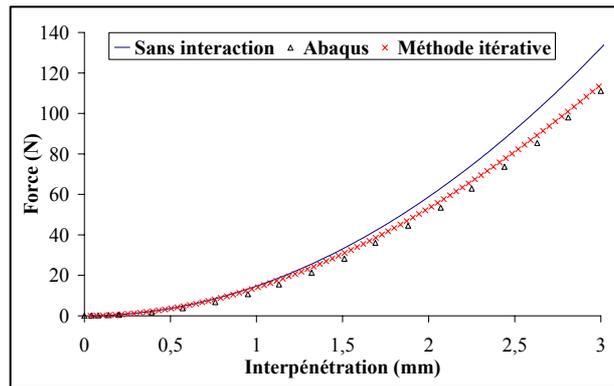


Figure 7.7: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact entre quatre cones à la même hauteur

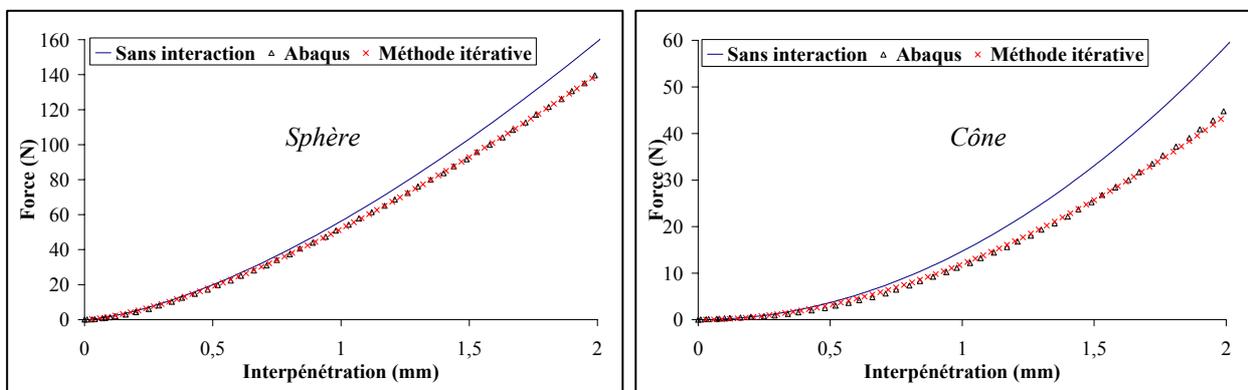


Figure 7.8: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact entre deux sphères et deux cones à la même hauteur

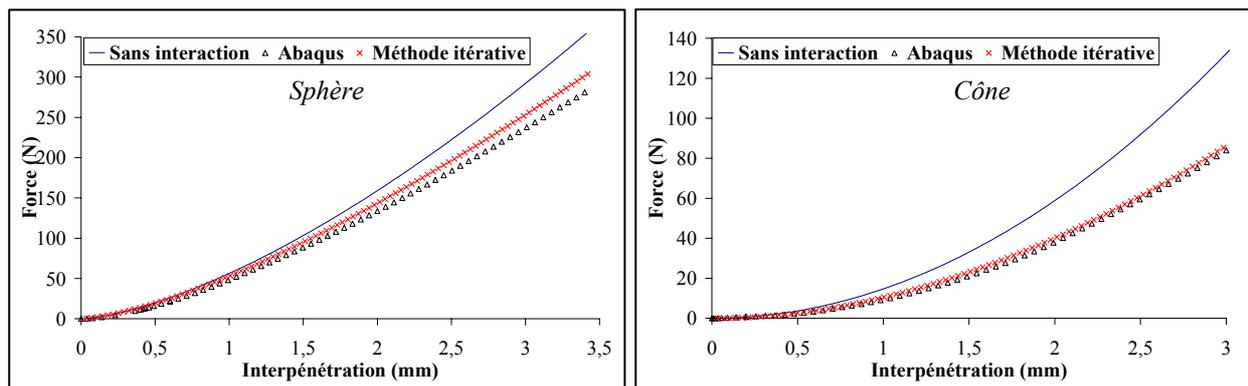


Figure 7.9: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de deux sphères plus élevées que deux cones de 0,4 mm

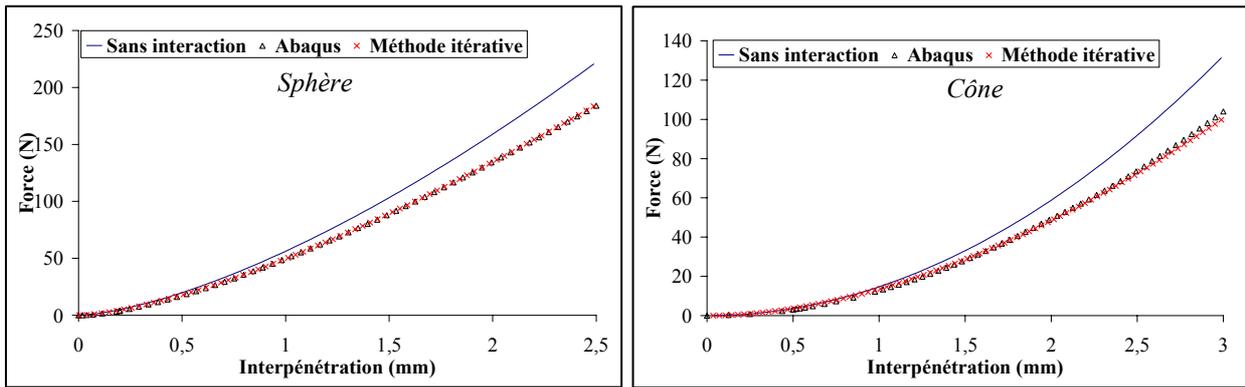


Figure 7.10: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de deux sphères moins élevées que deux cônes de 0,5 mm

7.3. Comparaison avec les résultats expérimentaux

Dans cette partie, on comparera l'évolution de la force en fonction de l'interpénétration obtenue par la méthode itérative aux résultats obtenus lors de l'étude expérimentale et par la méthode analytique. Pour ce fait, on a repris les mêmes configurations étudiées au chapitre VI pour le cas d'un double et triple contact.

7.3.1. Double contact

Le dispositif expérimental présenté au chapitre VI ne nous a pas permis d'avoir des pointes de contact exactement à la même hauteur. Les configurations étudiées au chapitre VI seront traitées, le contact du bloc en caoutchouc avec: deux sphères ayant une différence de hauteur de 0,2 mm (voir Figure 7.11), une sphère plus élevée qu'un cône de 0,4 mm (voir Figure 7.12) et une sphère moins élevée qu'un cône d'un millimètre, (voir Figure 7.13). On remarque sur ces figures que pour une interpénétration donnée la force calculée par la méthode analytique est plus élevée que celle calculée par la méthode itérative, elle est aussi plus élevée par rapport à la force mesurée expérimentalement quand la pointe est plus basse et elle est quasiment égale quand la pointe est plus haute, ce qui est valable pour n'importe quelle forme de pointe en contact. Les résultats obtenus expérimentalement et par la méthode itérative ne diffèrent pas trop, il y a une différence maximale de 6% entre les deux résultats, cette différence est moindre pour les petites interpénétrations, elle augmente avec l'augmentation de l'interpénétration. Par contre, dans le cas où le cône est plus élevé que la sphère (Figure 7.13.) on observe une différence maximale de 9,5% sur la pointe conique, la force mesurée expérimentalement est plus élevée que la force calculée par la méthode itérative, cette différence est due probablement à la faible dimension du plot (10 mm de hauteur) utilisé lors de l'étude expérimentale. Cette différence est enregistrée pour une interpénétration maximale de 3 mm, ce qui fait 30% de la hauteur du plot. La différence entre les deux forces n'excède pas les 3% si on ne dépasse pas une interpénétration de 20% de la hauteur du plot.

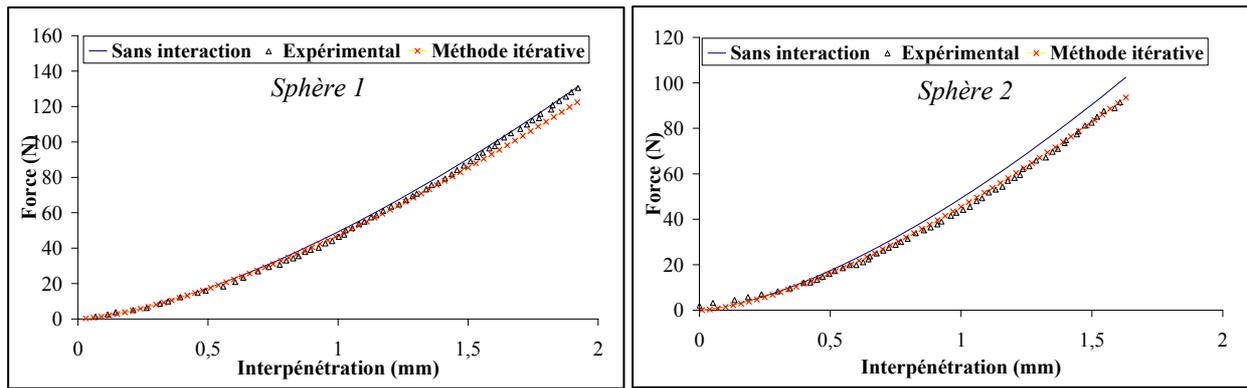


Figure 7.11: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère 1 plus élevée que la sphère 2 de 0,2 mm

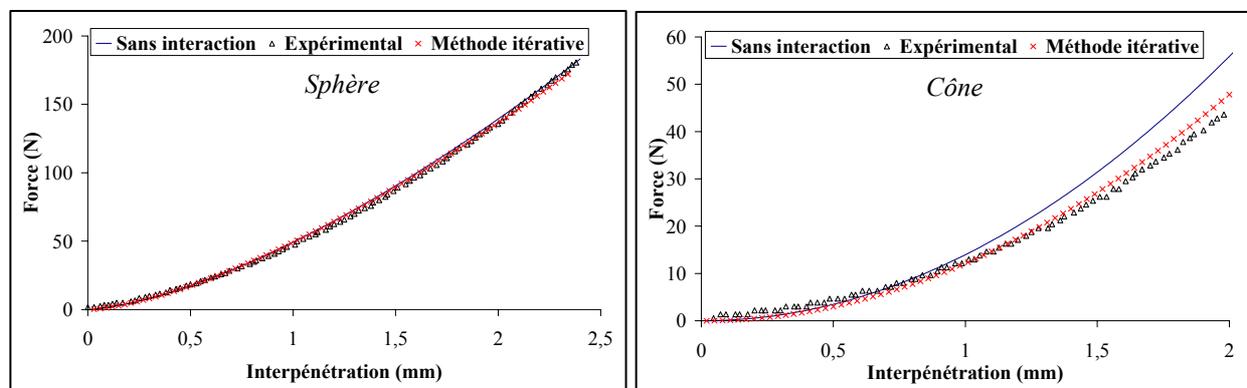


Figure 7.12: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère plus élevée que le cône de 0,4 mm

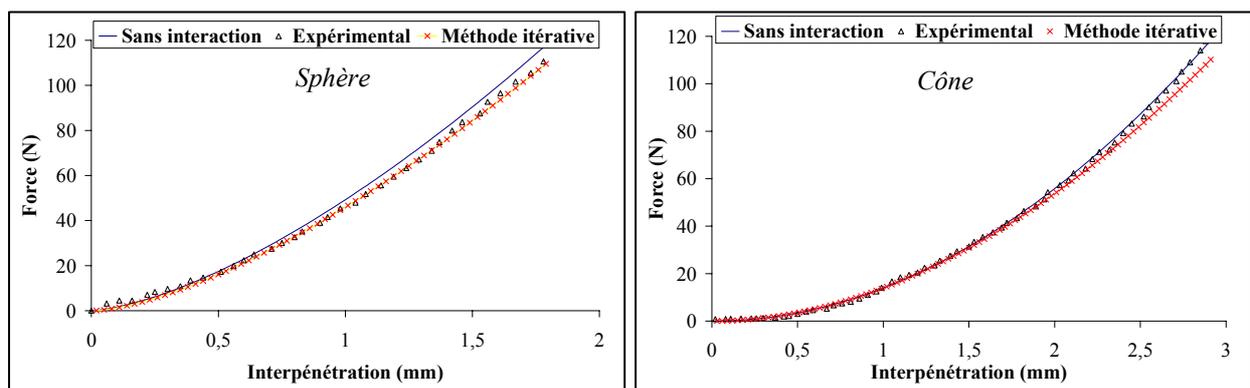


Figure 7.13: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère moins élevée que le cône de 1 mm

7.3.2. Triple contact

La méthode itérative a été appliquée pour le contact du bloc en caoutchouc avec trois points de contact : deux sphères et un cône pour deux configurations différentes. Le premier cas où la sphère 1 est plus élevée que le cône de $0,4 \text{ mm}$ et la sphère 2 est plus élevée que le cône de $0,2 \text{ mm}$ est représenté sur la Figure 7.14, le deuxième cas étudié est le cône plus élevé que la sphère 2 d'un millimètre et de $0,8 \text{ mm}$ par rapport à la sphère 1, (voir Figure 7.15). On peut apporter les mêmes remarques observées pour le cas d'un double contact, pour une interpénétration donnée la force calculée par la méthode analytique reste plus élevée que celle calculée par la méthode itérative, elle reste aussi plus élevée par rapport à la force mesurée expérimentalement quand la pointe est plus basse et elle est quasiment égale quand la pointe est plus haute. Les résultats obtenus expérimentalement et par la méthode itérative ne diffèrent pas trop, il y a une différence maximale de 6% entre les deux résultats, cette différence est moindre pour les petites interpénétrations, elle augmente avec l'augmentation de l'interpénétration. Par contre, dans le cas où le cône est plus élevé que les deux sphères (Figure 7.15) on observe une différence maximale de 18% sur la pointe conique, la force mesurée expérimentalement est plus élevée que la force calculée par la méthode itérative, pour les mêmes raisons que le cas du double contact, cette différence est due probablement aux faibles dimensions du plot (10 mm de hauteur) utilisé lors de l'étude expérimentale, cette différence est enregistrée pour une interpénétration maximale de 3 mm . La différence entre les deux forces n'excède pas les 6 % si on ne dépasse pas une interpénétration de 20% de la hauteur du plot.

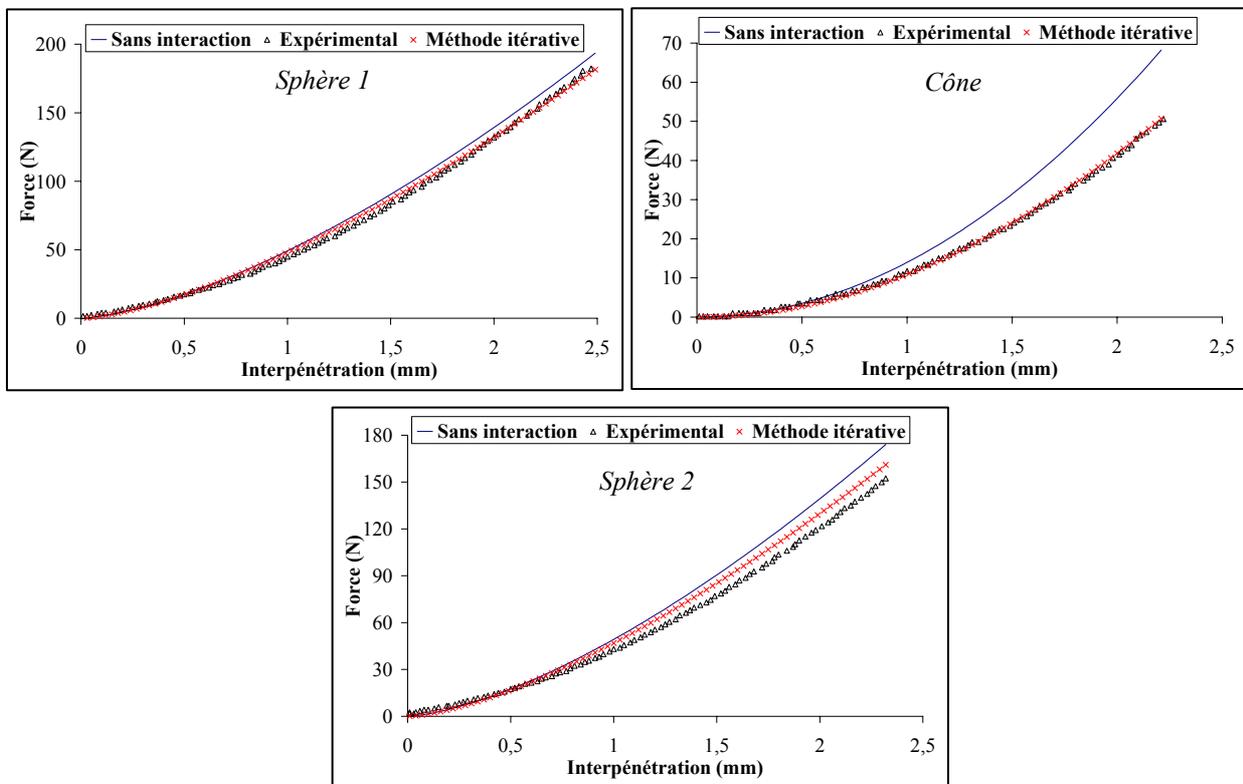


Figure 7.14: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère 1 plus élevée que le cône de $0,4 \text{ mm}$ et plus élevée de la sphère 2 de $0,2 \text{ mm}$

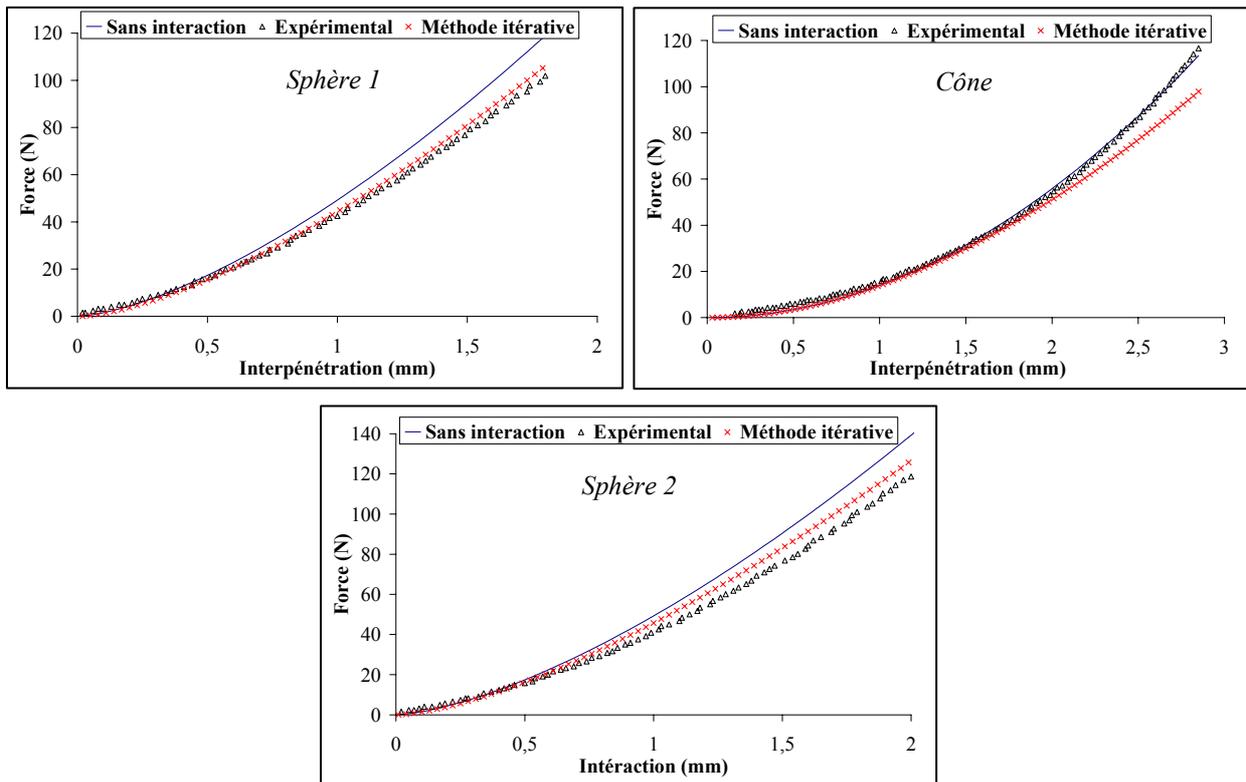


Figure 7.15: Comparaison de l'évolution de la force pour le cas d'un contact de la sphère 1 moins élevée que le cône de 0,8 mm et plus élevée de la sphère 2 de 0,2mm

7.4. Conclusion

Le modèle analytique du contact ponctuel développé au chapitre III ne prend pas en considération l'interaction entre les points en contact. Nous avons développé dans ce chapitre une méthode afin d'améliorer ce modèle analytique.

L'analyse des résultats obtenus montre qu'il existe une différence de 4 % avec les résultats de la modélisation par éléments finis présentée au chapitre V et une différence de 6 % avec les résultats expérimentaux présentés au chapitre VI. On peut conclure que la méthode itérative développée est valide et que l'effet de l'interaction est bien pris en considération lors de l'évaluation de la force de contact sur chaque pointe.

Les modèles numériques de contact existant en 3D sont trop lourds pour le calcul. Il nous a fallu plus de trois heures pour résoudre un contact en quatre points par la méthode des éléments finis. La méthode de résolution, basée sur la méthode de Newton Raphson, d'un contact avec une cinquantaine d'aspérités demande un temps de calcul qui prend seulement quelques secondes, (Tableau 7.1).

Méthodes de calcul	ABAQUS	Modèle semi-analytique
Temps de calcul	180 à 220 mn	< 10s

Tableau 7.1 : Comparaison des temps de calcul

Dans le chapitre suivant nous allons appliquer cette méthode pour le cas d'un déplacement d'une surface lisse sur une surface ayant plusieurs pointes. La procédure de calcul de la force de contact ainsi que l'analyse des autospectres des forces dans la zone de contact sera abordé.

Chapitre VIII

Calcul des forces pour une zone de contact se déplaçant sur des chaussées modèles

Le rayonnement et le comportement vibratoire d'un pneumatique ont été bien explorés. Dans le but de prévoir le niveau sonore généré par la vibration d'un pneumatique, il est nécessaire d'avoir un bon modèle d'évaluation des sources d'excitation. Pour cela, dans ce chapitre, on utilisera la méthode développée et validée aux chapitres précédents pour calculer les forces de contact entre un bloc en caoutchouc se déplaçant sur des chaussées modèles de différentes formes. On étudiera le cas où les aspérités seront distribuées de manière périodique et le cas où la distribution se fera aléatoirement à la même et à différentes hauteurs. On terminera par une étude des autospectres des forces de contact le long de chaque chaussée modèle.

8.1. Principe d'évaluation du niveau sonore

Pour évaluer le niveau sonore généré par les vibrations d'un pneumatique, il faut connaître d'une part, la fonction de transfert du pneumatique H_{pneu} pour déterminer, à partir des forces de contact, les champs de vitesse sur la surface extérieure du pneumatique, et d'autre part, la fonction de transfert du fluide H_{fluide} pour calculer la pression acoustique au point z en utilisant la vitesse du bord du pneumatique (voir figure 8.1).

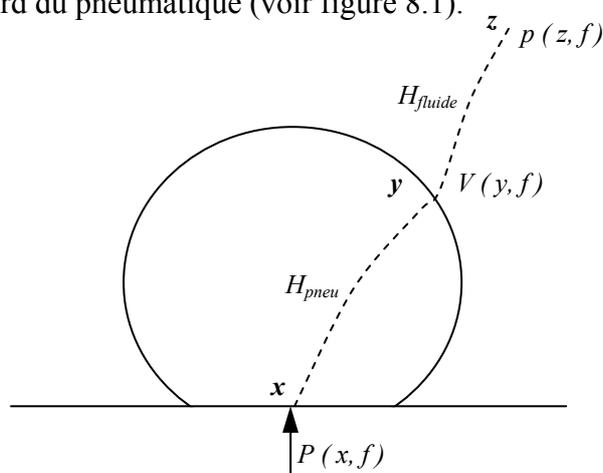


Figure 8.1: Calcul de la pression au point z lors d'une excitation au point x

Pour une fréquence donnée f , la relation donnant la vitesse au point y du bord du pneumatique quand le pneumatique est excité au point x dans la zone de contact par une force $P(x, f)$ s'écrit sous la forme

$$V(y, f) = \int_{S^c} H_{pneu}(y, x, f) P(x, f) dy \quad (8.1)$$

où S^c est la surface de la zone de contact.

Pour une fréquence donnée f , la pression acoustique au point z de l'espace autour du pneumatique en utilisant la vitesse du bord du pneumatique $V(y, f)$ s'écrit schématiquement

$$p(z, f) = \int_{S^p} H_{fluide}(z, y, f) V(y, f) dy \quad (8.2)$$

où S^p est la surface du pneumatique.

On peut déduire la fonction de transfert totale, qui lie pour une fréquence donnée f , le bruit au point z de l'espace en fonction de la force d'excitation au point x de la zone de contact. Des relations (8.1) et (8.2), on peut écrire

$$p(z, f) = \int_{S^c} \int_{S^p} H_{fluide}(z, y, f) H_{pneu}(y, x, f) P(x, f) dx dy \quad (8.3)$$

La fonction de transfert totale est définie par la relation

$$p(z, f) = \int_{S^c} H_{totale}(z, x, f) P(x, f) dx \quad (8.4)$$

Pour avoir une idée plus juste du bruit rayonné, il faut estimer $\sqrt{E(|p(z, f)|^2)}$ où E représente l'espérance

$$E(|p(z, f)|^2) = E\left(\int_{S^c} \int_{S^c} H_{totale}(z, x, f) P(x, f) H_{totale}^*(z, x', f) P^*(x', f) dx dx'\right) \quad (8.5)$$

où on peut écrire aussi l'espérance sous la forme

$$E(|p(z, f)|^2) = \int_{S^c} \int_{S^c} H_{totale}(z, x, f) H_{totale}^*(z, x', f) E(P(x, f) P^*(x', f)) dx dx' \quad (8.6)$$

L'estimation de $\sqrt{E(|p(z, f)|^2)}$ revient à évaluer d'une part la fonction de transfert totale $H_{totale}(z, x, f)$ et d'autre part à évaluer l'interspectre et l'autospectre des forces de contact $P(x, f)$. La fonction de transfert totale a été calculée et étudiée en détail dans Fadavi [20]. Par la suite, on s'intéressera uniquement à l'étude des forces de contact, elles seront calculées pour plusieurs profils de chaussée modèle d'aspérités sphériques et coniques distribuées d'une manière périodique et aléatoire.

8.2. Génération de chaussée modèle

Le profil d'une chaussée réelle est de forme complexe et non uniforme, nous simplifierons cette complexité par une distribution périodique et aléatoire (Figures 8.2 et 8.3) de N aspérités

sur une surface S . Le principe étant de créer une ligne L d'aspérités sphériques ou coniques, ces aspérités seront positionnées l'une devant l'autre et chaque aspérité sera définie par une base de 15 mm de diamètre pour la chaussée périodique et de diamètre compris entre 10 et 20 mm pour la chaussée aléatoire. De la même manière, on crée ligne après ligne et on les superpose l'une sur l'autre jusqu'à atteindre une largeur $l = 12\text{ cm}$ avec N aspérités.

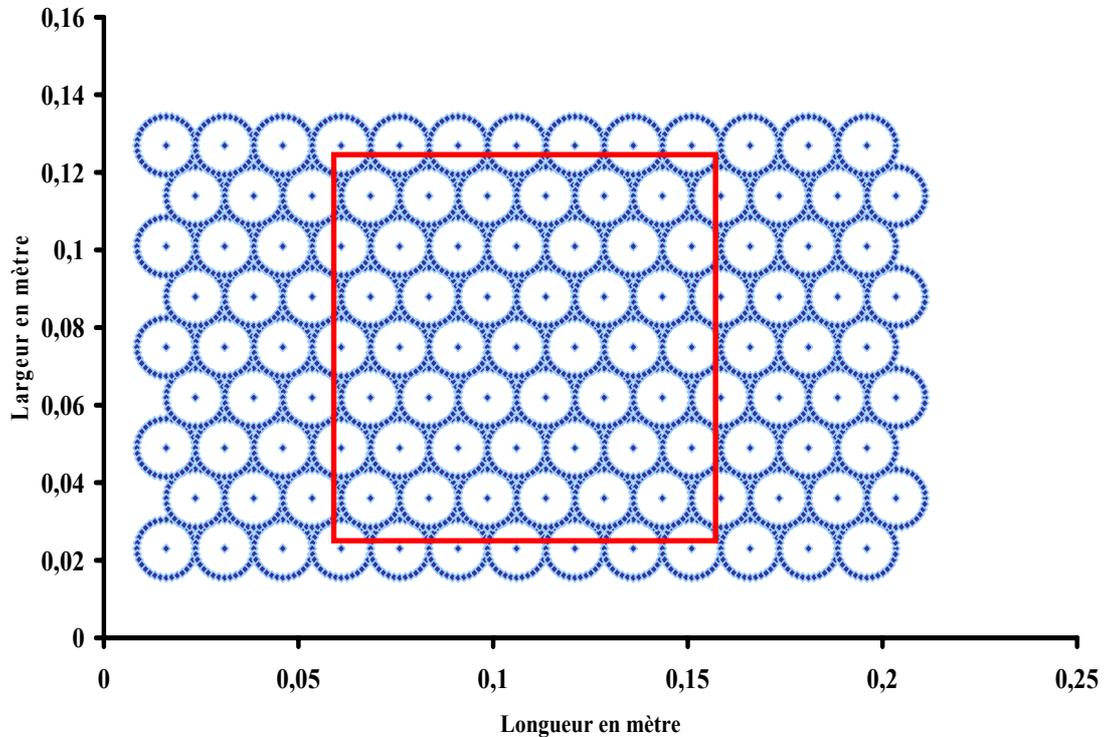


Figure 8.2: Chaussée modèle d'aspérités périodiques

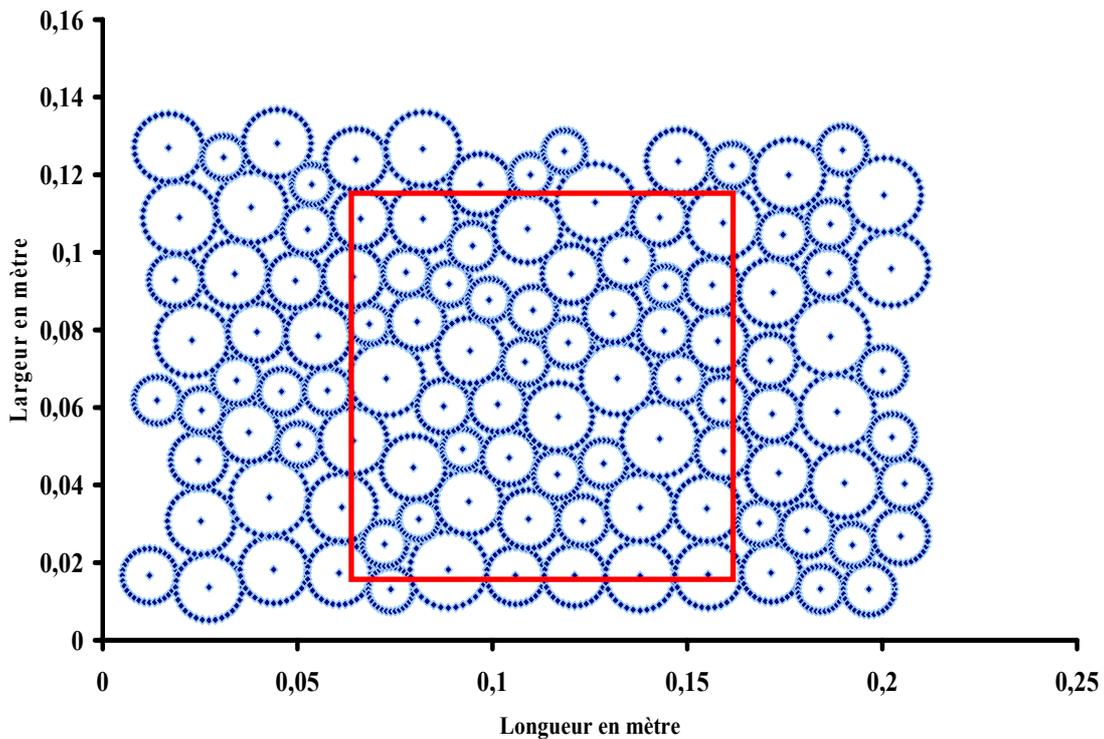


Figure 8.3: Chaussée modèle d'aspérités aléatoires

8.3. Principe de résolution

Des chaussées modèles sont mises en contact avec un bloc ayant les caractéristiques d'un caoutchouc, un module d'Young $E=10^7 Pa$ et un coefficient de Poisson $\nu=0,5$. On étudiera le cas où les chaussées ont des aspérités à la même hauteur et le cas où il y a une différence de hauteur comprise entre $[0 - 1 mm]$. A partir de la méthode itérative développée au chapitre VII, on calcule pour chaque modèle de chaussée les forces de contact générées sur chaque aspérité, on considérera pour cela que la zone de contact est un carré de surface $10 \times 10 cm$ (voir Figures 8.2, 8.3 et 8.4), le calcul se fera uniquement pour les aspérités situées dans cette zone de contact, les autres aspérités ne seront pas prises en considération lors du calcul. Le déplacement du bloc sur les chaussées est effectué jusqu'à ce que l'on atteigne une charge totale de $2000 N$, ce qui correspond à la valeur approchée de la charge appliquée sur un pneumatique.

Une fois les forces P_i calculées (i représente le nombre d'aspérités dans la zone de contact), on suppose que chaque aspérité i est isolée et on calcule les rayons a_i des bases des volumes d'aspérités sphérique en contact par la formule:

$$a_i = \left(\frac{3P_i R}{4E^*} \right)^{1/3} \quad (8.7)$$

Pour les bases des volumes d'aspérités coniques en contact les rayons a_i sont calculés par la formule:

$$a_i = \left(\frac{2P_i}{\pi E^* \cot \alpha} \right)^{1/2} \quad (8.8)$$

Par la suite, on calcule les pressions de contact pour les aspérités sphériques comme suit:

$$p_i(r) = p_0(1 - (r/a)^2)^{1/2} \quad (8.9)$$

et pour les aspérités coniques la pression est exprimée par:

$$p_i(r) = \frac{1}{2} E^* \cot \alpha \cosh^{-1}(a/r) \quad (8.10)$$

où R est le rayon des aspérités sphériques, α l'angle des aspérités coniques, E^* le module d'Young équivalent et p_0 la pression maximale qui est exprimée par:

$$p_0 = \frac{3P_i}{2\pi a_i^2}$$

On observe sur les figures suivantes les surfaces des bases des aspérités ainsi que les surfaces (de rayon a) des volumes d'aspérités en contact pour les chaussées modèles d'aspérités

sphériques avec une distribution périodique (Figure 8.4) et une distribution aléatoire (Figure 8.5).

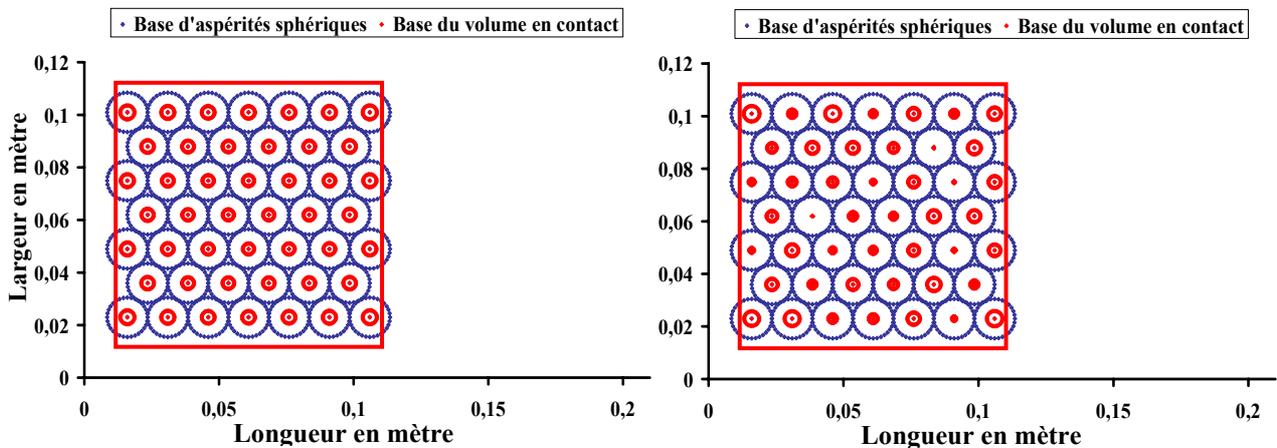


Figure 8.4: Surface de la base du volume en contact pour des chaussées modèles périodiques d'aspérités sphériques ayant la même hauteur (a) et des hauteurs différentes (b)

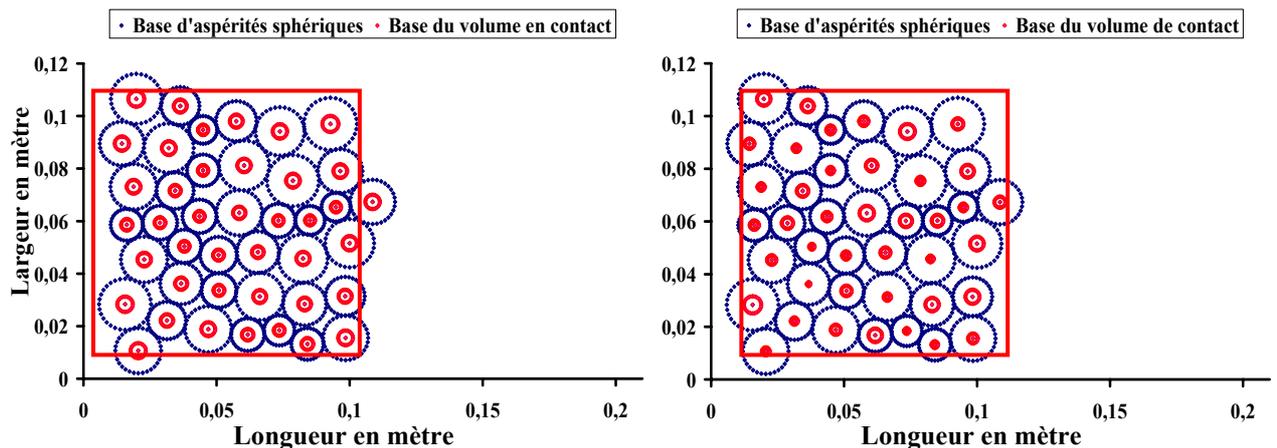


Figure 8.5: Surface de la base du volume en contact pour les chaussées modèles aléatoires d'aspérités sphériques ayant la même hauteur (a) et des hauteurs différentes (b)

Une fois que les pressions de contact sont connues sur toutes les aspérités, on déplace la zone de contact le long de la chaussée de Δx et on refait les mêmes calculs (forces de contact, rayon a et pressions) sur les i nouvelles aspérités. Nous présenterons, dans la suite, l'évolution de la force de contact en fonction du temps sur une petite surface (2) de $1 \times 1 \text{ mm}$ située au milieu de la zone de contact pour les chaussées d'aspérités distribuées périodiquement et sur trois différentes petites surfaces (1), (2) et (3) de $1 \times 1 \text{ mm}$ pour les chaussées d'aspérités distribuées aléatoirement, (voir la Figure 8.7).

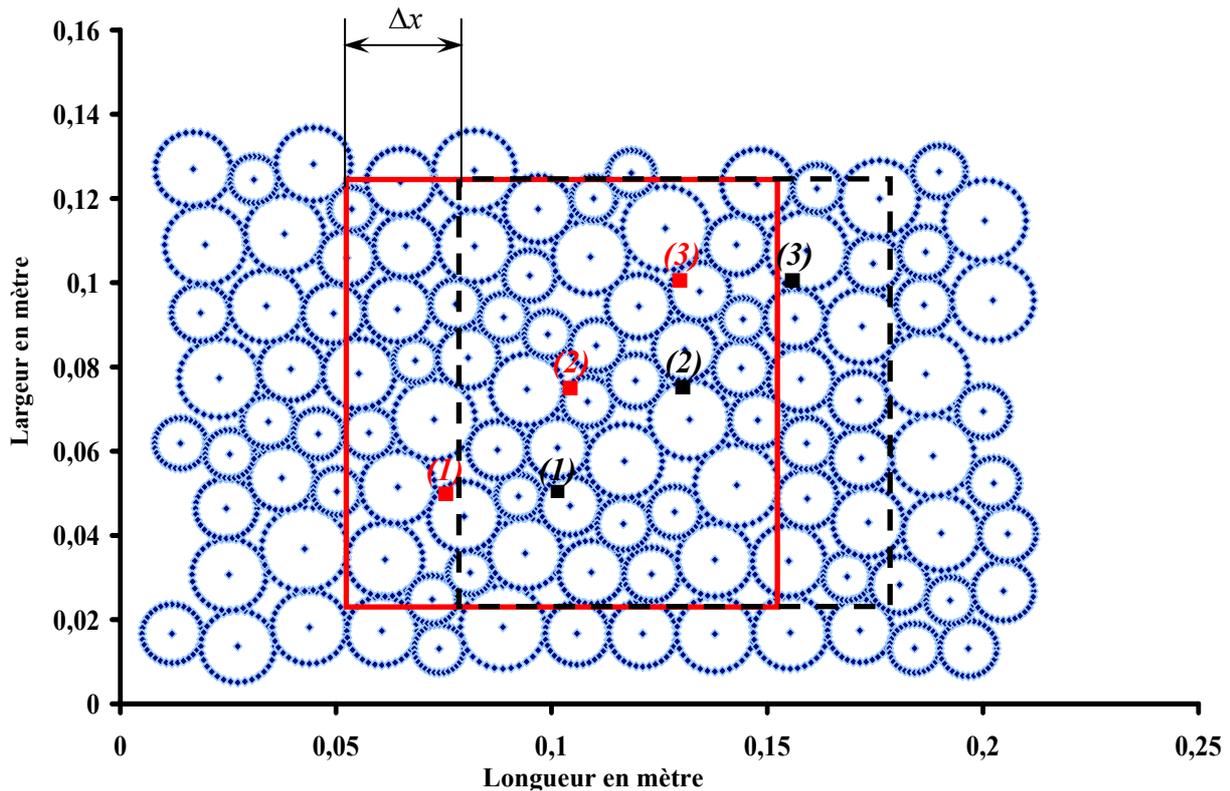


Figure 8.6: Définition des surfaces (1), (2) et (3)

8.4. Calcul des autospectres des forces de contact

Le déplacement de la zone de contact sur les chaussées modèles se fera pour une valeur $\Delta x = 1 \text{ mm}$. On prendra l'angle α des aspérités coniques égale à 60° . L'intervalle de temps entre deux positions est égal à $\Delta t = \Delta x / V$. Le bloc en caoutchouc a un module d'Young $E = 10^7 \text{ Pa}$ et un coefficient de Poisson $\nu = 0,5$, il pénètre sur les chaussées modèles avec une certaine valeur jusqu'à atteindre une charge de 2000 N (voir Tableau 8.1). On a choisi une vitesse $V = 20 \text{ m/s}$ pour présenter l'évolution de la force de contact dans le domaine du temps.

Chaussées modèles d'aspérités	Même hauteur			Hauteurs aléatoires		
	Sphériques	Coniques	Sphériques et coniques	Sphériques	Coniques	Sphériques et coniques
Interpénétration (mm)	2,06	2,87	2,36	2,53	3,77	2,84
Δh (mm)	0			1	2	1

 Tableau 8.1 : Valeur des interpénétrations sur chaque chaussées modèles pour atteindre une charge de 2000 N

8.4.1. Evolution des forces de contact le long des chaussées modèles périodiques

On présente l'évolution de la force de contact dans le domaine du temps sur la surface (2) de dimension $1 \times 1 \text{ mm}$ définie précédemment sur la Figure 8.6. L'évolution de la force f_2 sur les chaussées modèles périodiques avec des aspérités sphériques et coniques à la même et à hauteurs différentes est représentée sur les Figures 8.7 et 8.8. On remarque qu'il y a plus de points pour les cas sphériques, ce qui est cohérent vu les faibles dimensions de la surface (2), plus les surfaces en contact sont grandes plus le nombre de points augmente.

Sur les Figures 8.9 et 8.10 sont représentés les autospectres des forces au milieu de la zone de contact pour les chaussées modèles périodiques d'aspérités sphériques et coniques.

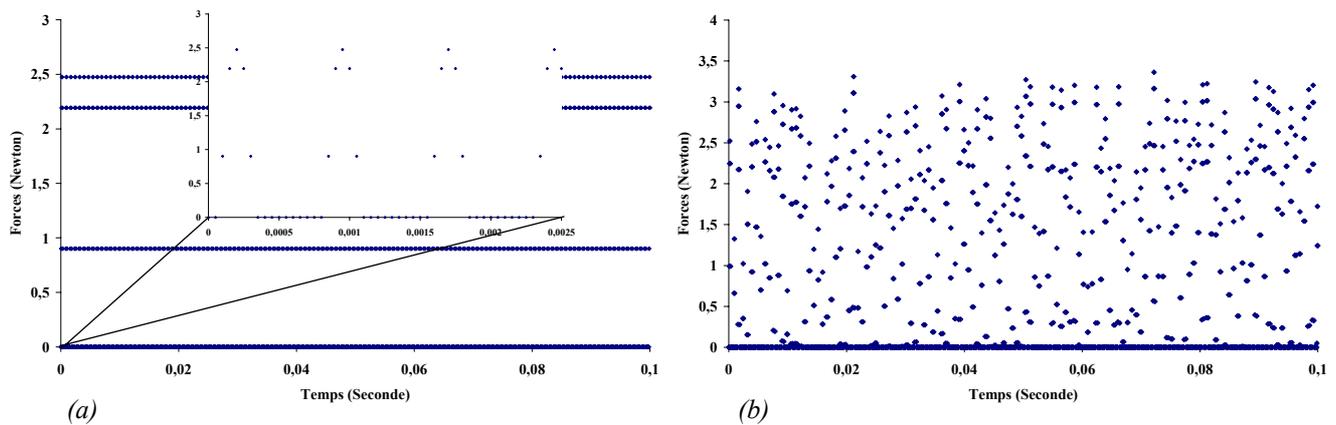


Figure 8.7: Evolution de la force $f_2(t)$ pour le cas sphérique, (a) à la même hauteur, (b) à hauteur différentes

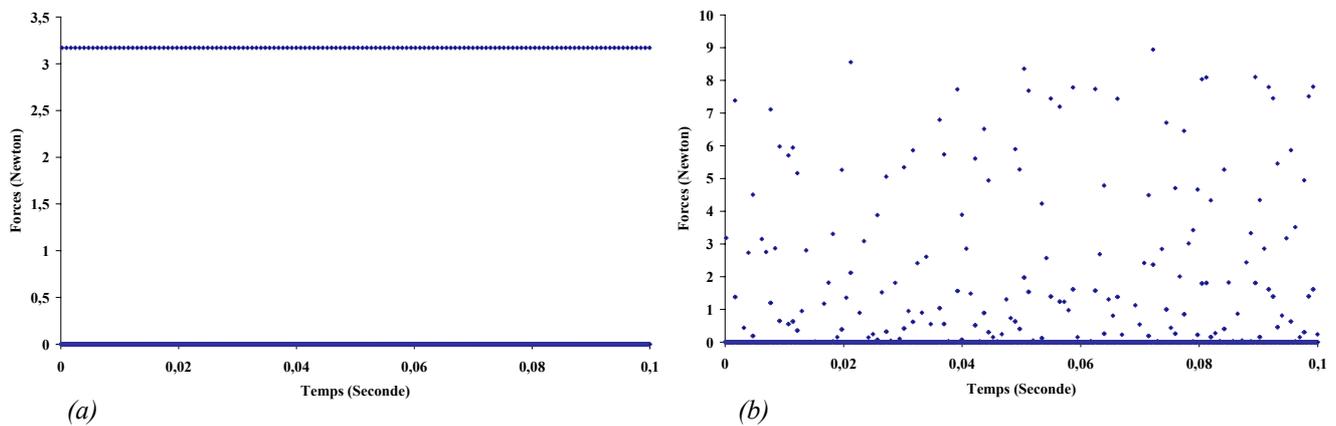


Figure 8.8: Evolution de la force $f_2(t)$ pour le cas sphérique, (a) à la même hauteur, (b) à hauteur différentes

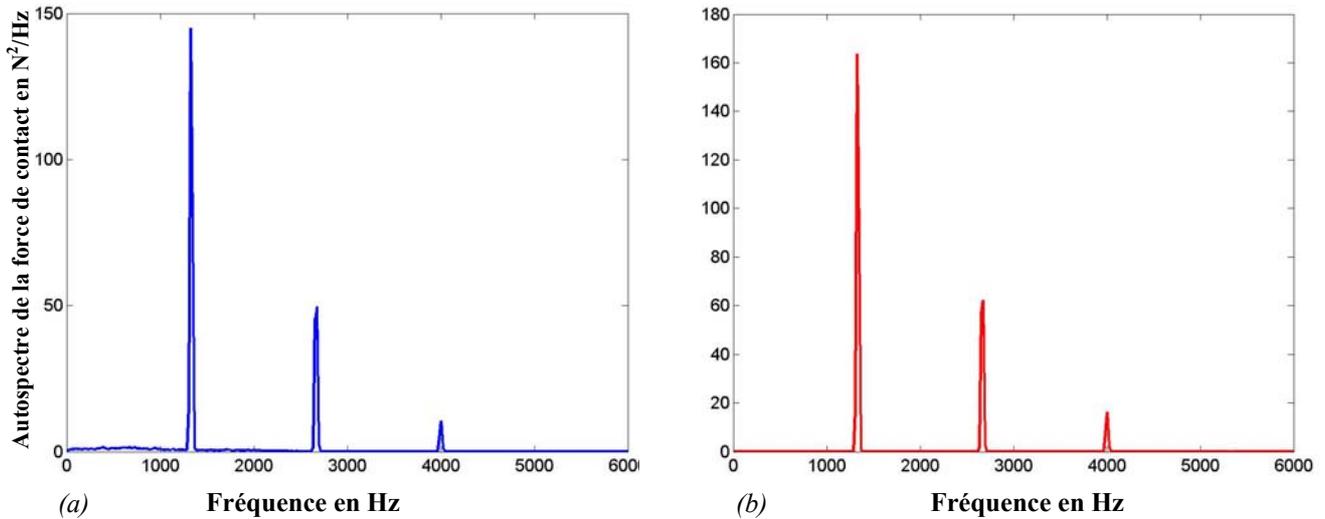


Figure 8.9: Autospectres des forces de contact sur une chaussée périodique constituée d'aspérités sphériques, (a) à la même hauteur, (b) à hauteurs différentes

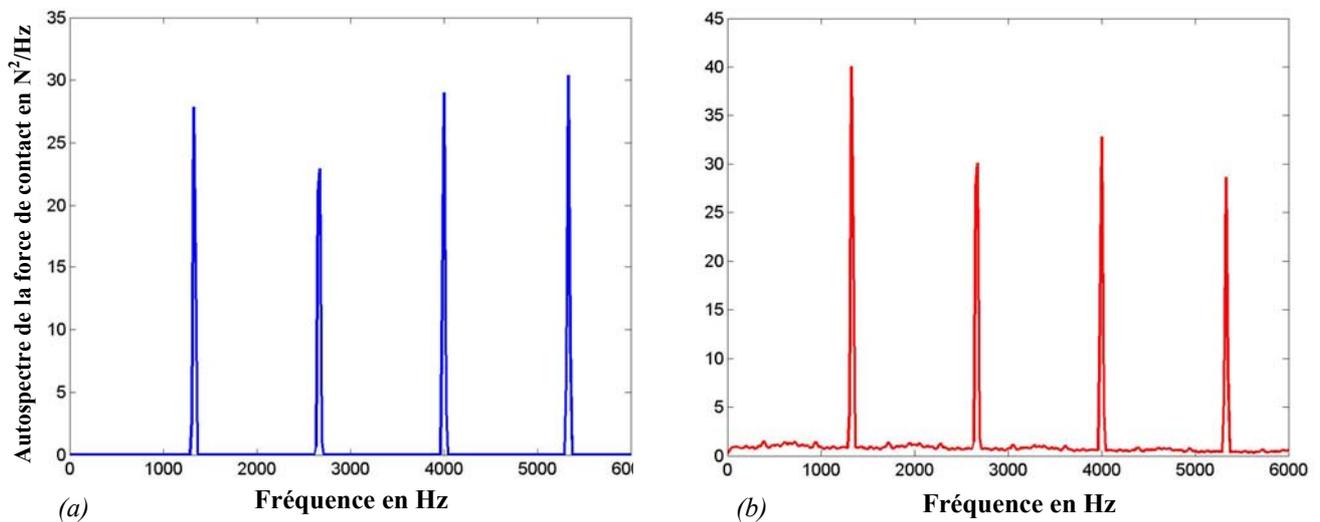


Figure 8.10: Autospectres des forces de contact sur une chaussée périodique constituée d'aspérités coniques, (a) à la même hauteur, (b) à hauteurs différentes

Les autospectres des forces de contact sur les chaussées d'aspérités sphériques à la même et à hauteurs différentes ont la même allure, plus la fréquence augmente plus les niveaux des forces ont tendance à s'atténuer. On remarque aussi que les niveaux sont importants pour les mêmes fréquences périodiques, ce qui est valable aussi sur les chaussées d'aspérités coniques à la même et à hauteurs différentes, par contre, on n'observe pas d'atténuation des niveaux de force.

8.4.2. Evolution des forces de contact le long des chaussées modèles aléatoires

Comme pour le cas des chaussées modèles d'aspérités périodiques, on étudie le cas du contact sur des chaussées modèles d'aspérités aléatoires à la même et à différentes hauteurs.

On présentera uniquement l'évolution de la force de contact dans le domaine du temps (Figure 8.11) sur les trois surfaces définies précédemment (1), (2), (3) pour la chaussée modèle d'aspérités sphériques distribuées aléatoirement à la même hauteur, pour les autres chaussées modèles les figures des évolutions de la force ne seront pas présentées car elles sont similaires. Sur les Figures 8.12 et 8.13 sont calculés les autospectres des forces de contact f_1 , f_2 et f_3 respectivement des surfaces (1), (2) et (3) pour les chaussées modèles d'aspérités sphériques et coniques distribuées aléatoirement. Sur la Figure 8.14 est représentée les autospectres des forces pour une chaussée ayant des aspérités coniques et des aspérités sphériques distribuées aléatoirement. On note que la surface (2) se situe au centre de la zone de contact et les surfaces (1) et (3) sont symétriques par rapport au centre, (voir Figure 8.6).

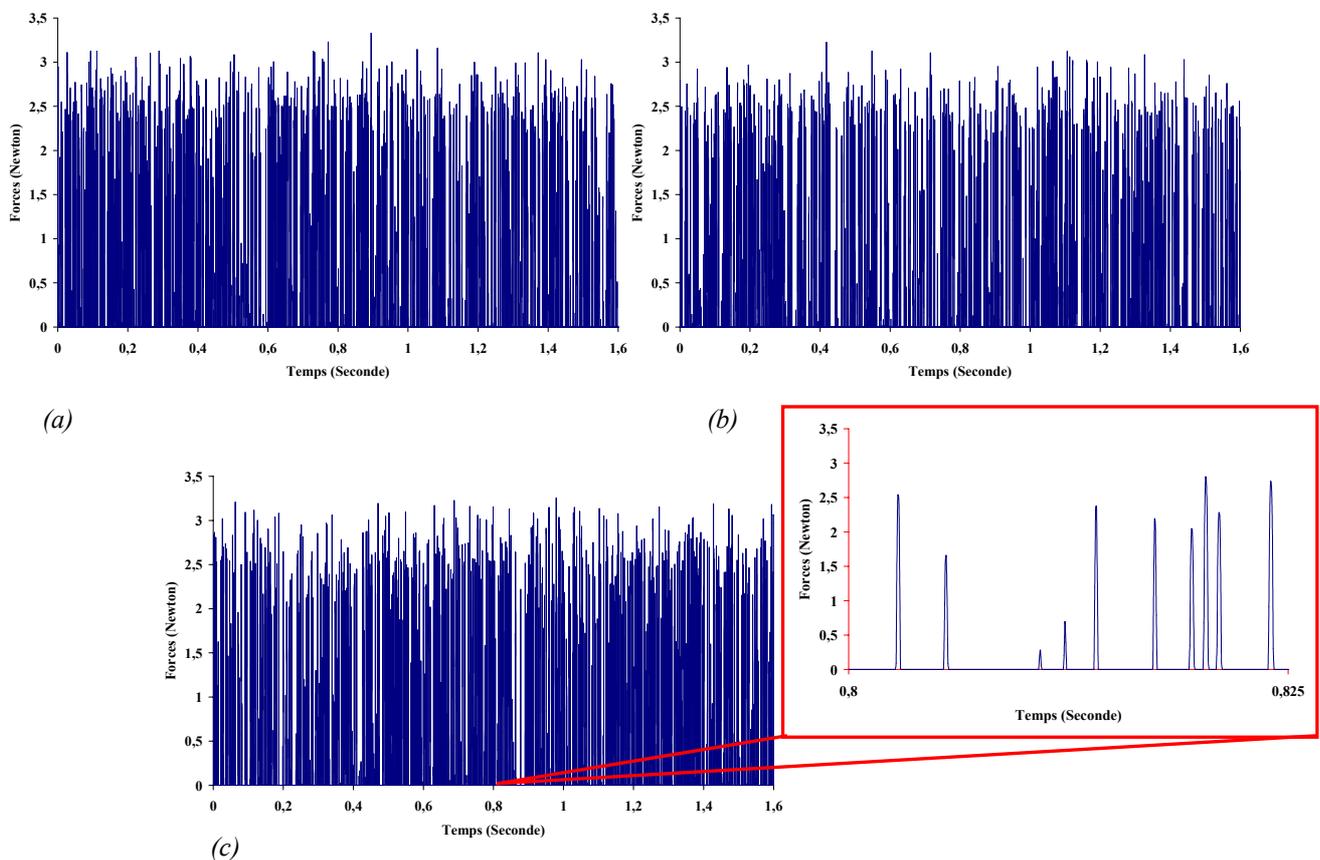


Figure 8.11: (a) Evolution de la force $f_1(t)$, (b) Evolution de la force $f_2(t)$, (c) Evolution de la force $f_3(t)$ sur une chaussée modèle d'aspérités sphériques distribuées aléatoirement à la même hauteur

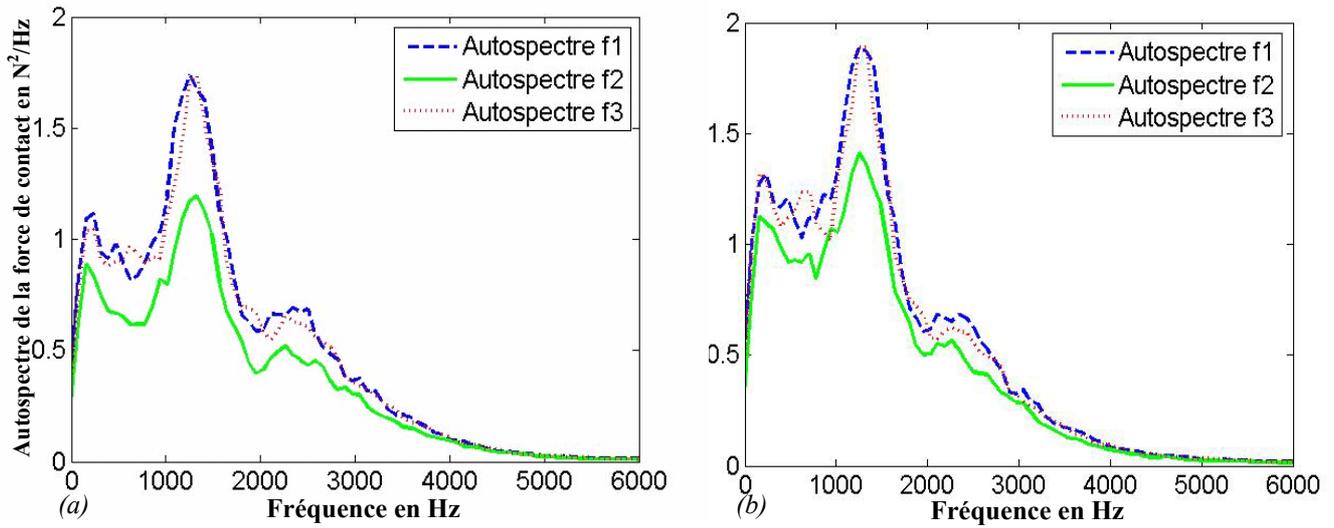


Figure 8.12: Autospectres des forces de contact sur une chaussée modèle d'aspérités sphériques distribuées aléatoirement. (a) à la même hauteur, (b) à hauteurs différentes

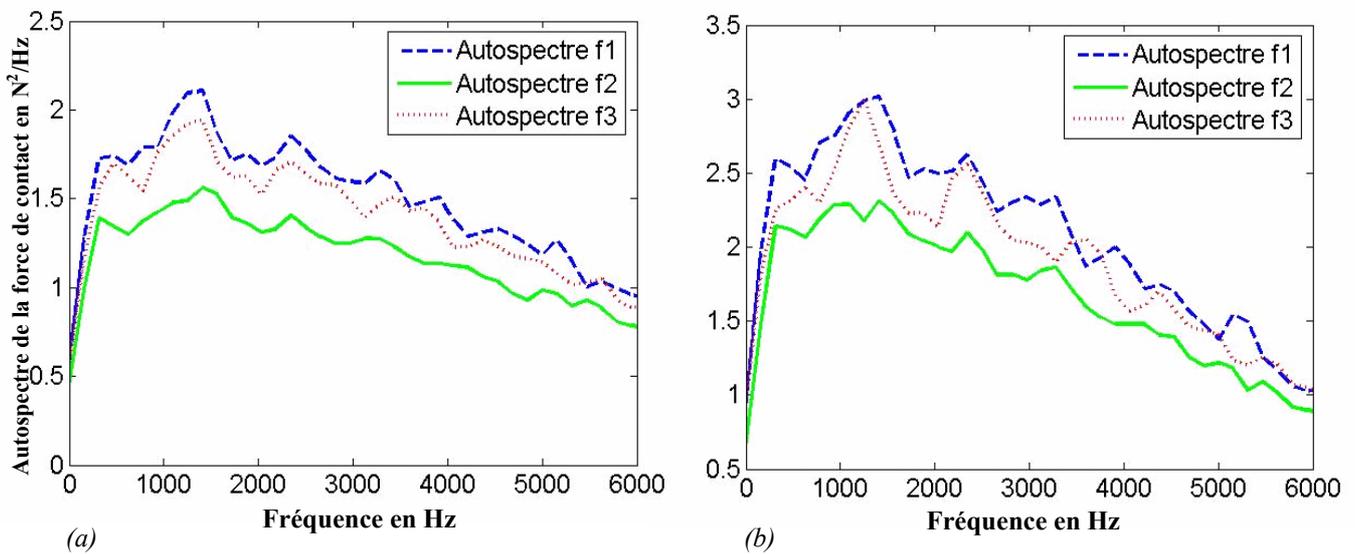


Figure 8.13: Autospectres des forces de contact sur une chaussée modèle d'aspérités coniques distribuées aléatoirement. (a) à la même hauteur, (b) à hauteurs différentes

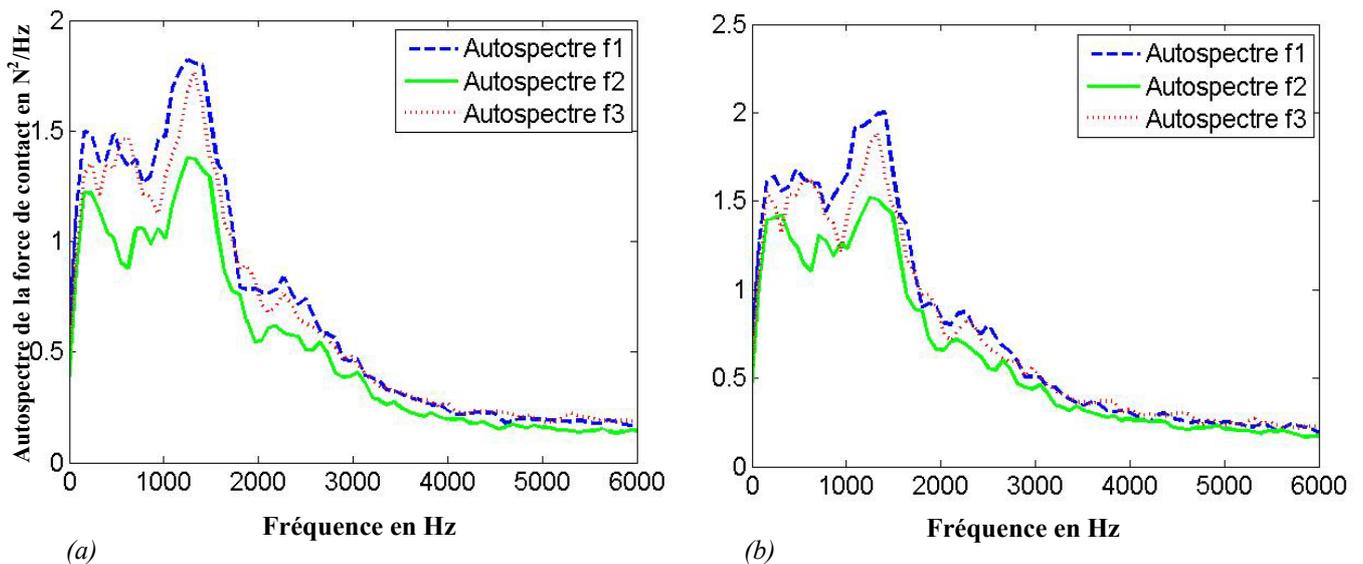


Figure 8.14: Autospectres des forces de contact sur une chaussée modèle d'aspérités sphériques et coniques distribuées aléatoirement. (a) à la même hauteur, (b) à hauteurs différentes

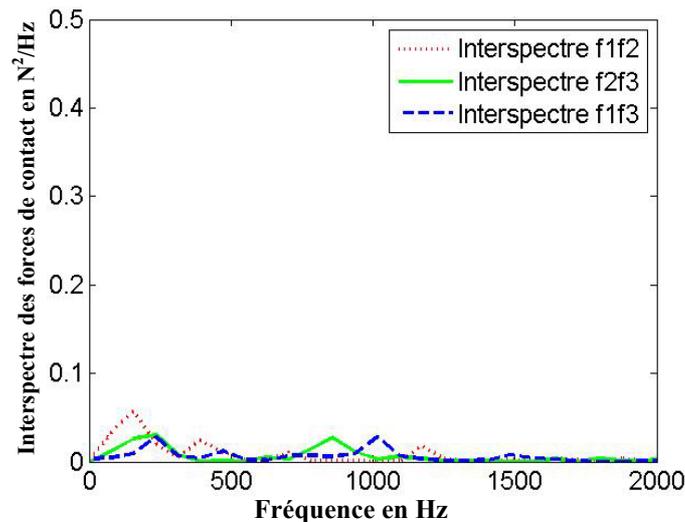


Figure 8.15: Interspectres des forces de contact sur une chaussée modèle d'aspérités sphériques distribuées aléatoirement à la même hauteur

Pour un profil de chaussée réel, les forces de contact sont maximums sur les bords et minimums au centre de la zone de contact (Johnson [43]). L'analyse des autospectres des forces de contact montre qu'on obtient bien un niveau plus important pour les surfaces situées proche des bords de la zone de contact et un niveau moins important pour la surface située au centre de la zone de contact. Les niveaux pour les autospectres des forces f_1 et f_3 sont approximativement les mêmes sur les chaussées modèles, ce qui est cohérent car les deux surfaces (1) et (3) sont bien symétriques. On remarque que les niveaux sont maximums entre 1000 et 1500 Hz et qu'ils sont plus élevés sur les chaussées d'aspérités à hauteurs différentes. On note aussi que le niveau est plus élevé sur les chaussées d'aspérités coniques, il est moyen sur les chaussées d'aspérités sphériques et coniques et il est plus faible sur les chaussées d'aspérités sphériques. Quand la rugosité devient plus importante le niveau du bruit augmente, ce qui correspond aux résultats de Rimondi [63]. Quand la fréquence augmente on remarque que le niveau des autospectres s'atténue plus vite pour les chaussées sphériques, alors que pour les chaussées coniques l'atténuation est plus lente.

En comparant les résultats des autospectres des forces sur les chaussées sphériques avec les autospectres des forces sur les chaussées sphériques distribuées périodiquement, on observe que le niveau maximal est atteint pour la même fréquence entre 1000 et 1500 Hz. Pour les chaussées périodiques le diamètre des aspérités sphériques est de 15 mm, alors que pour les chaussées aléatoires le diamètre moyen des aspérités sphériques est de 15 mm, on peut dire qu'il existe une relation directe entre les diamètres des aspérités et la fréquence pour laquelle le niveau est plus important.

Les résultats des interspectres (Figure 8.15) sont cohérents, le niveau est faible car les sources d'excitation sont éloignées.

8.5. Conclusion

Au chapitre précédent, on a développé une méthode pour résoudre un contact élastique multipoints (pour deux, trois et quatre aspérités) qu'on a validé expérimentalement et

numériquement. Dans cette partie nous avons appliqué cette méthode pour résoudre un problème de contact sur un profil de chaussée d'aspérités périodiques et aléatoires. Nous avons commencé par développer une méthode de génération de profil de chaussée avec des aspérités à la même hauteur et à hauteurs différentes. On a considéré la zone de contact d'une surface carrée de dimension $10 \times 10 \text{ cm}$ se déplaçant sur la chaussée. Les calculs de la force ainsi que le rayon a de la base du volume des aspérités en contact et les pressions ont été faits sur les aspérités situées dans la zone de contact, puis on a déplacé cette zone le long des chaussées modèles de Δx et à chaque fois on effectue les mêmes calculs sur les nouvelles aspérités. On a représenté les résultats obtenus sur trois surfaces de $1 \times 1 \text{ mm}$ situées sur la zone de contact et on a choisi une vitesse $V = 20 \text{ m/s}$ pour étudier l'évolution des forces de contact en fonction du temps sur les surfaces considérées. La comparaison des autospectres des forces de contact sur les chaussées modèles étudiées montre l'intérêt d'utiliser un profil de chaussée d'aspérités aléatoires pour se rapprocher le plus de la réalité du phénomène de contact. On a obtenu des résultats qualitativement corrects.

Conclusions

Pour modéliser les vibrations du pneumatique, il faut connaître d'une part les efforts de contact entre le pneumatique et la chaussée et d'autre part il faut connaître le comportement vibratoire du pneumatique. Une fois ces modélisations effectuées, il est nécessaire d'avoir un outil qui puisse évaluer le rayonnement causé par ces sources. Le comportement vibratoire et le rayonnement ont été bien explorés dans des études antérieures. Dans ce mémoire nous nous sommes intéressés plus spécialement à l'étude des forces de contact engendrées par l'influence de la rugosité de la chaussée et ceci afin d'avoir une bonne approximation des sources de vibrations du pneumatique pour la prévision du bruit de roulement. Les modèles de contact avec la chaussée utilisés jusqu'à présent font appel à une modélisation simple en $2D$ et les modèles de contact existant en $3D$ sont considérés comme trop lourds pour le calcul.

Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. Dans le chapitre II, on a proposé une approche plus simple du contact fondée sur un calcul statique et on a abordé brièvement le même problème pour un chargement statique et dynamique sur un demi-espace. On a conclu que lorsque les phénomènes de contact ont lieu dans une zone de l'espace dont les dimensions sont nettement inférieures à une longueur d'onde du phénomène vibratoire étudié, on peut considérer que le contact s'effectue comme s'il était décrit par un modèle statique. En particulier la force de contact sera décrite à partir des déformations et des interpénétrations comme si elle était obtenue en statique. C'est l'hypothèse que nous avons utilisée pour la suite de notre étude pour décrire des situations de contact avec des objets de formes complexes.

Au chapitre III, nous avons présenté une simplification du contact en proposant un modèle analytique simple en $3D$ pour l'évaluation des forces de contact entre une surface plane et une surface régulière, ce modèle a été établi à partir de la théorie du potentiel d'interaction. Connaissant le volume d'interpénétration, la surface de la base du volume et le périmètre de cette surface, on a pu connaître la force normale P correspondant à une interpénétration δ donnée. Par la suite nous avons généralisé ce modèle pour le cas d'un contact entre une surface plane et une surface irrégulière. Nous avons validé ces modèles pour des surfaces simples: sphérique, conique et pyramidal. On a terminé ce chapitre par une approche de la résolution d'un problème de contact viscoélastique à partir du modèle analytique élastique développé précédemment.

Une validation expérimentale du modèle de contact analytique développé pour le cas élastique et viscoélastique a été présentée au chapitre IV. Connaissant la force normale appliquée P et le déplacement de la traverse δ , on a établi expérimentalement la relation entre la charge en fonction de l'interpénétration pour chaque contact plot/différents points de contact. Ces essais ont permis de valider le modèle analytique de contact élastique pour le cas sphérique, conique et pyramidal. De la même manière que pour le contact élastique, on a effectué des essais à une

vitesse élevée avec le même plot en caoutchouc et les différentes formes de pointe. On a comparé les résultats obtenus aux résultats du modèle analytique de contact viscoélastique. Les résultats expérimentaux montrent que notre modèle est valable. Une comparaison entre les résultats du modèle analytique de contact élastique et de contact viscoélastique montre que pour une valeur d'interpénétration δ la force viscoélastique est plus élevée que la force élastique de 25%.

Au chapitre V, on a modélisé par la méthode des éléments finis un contact ponctuel élastique ainsi qu'un contact avec deux et quatre points. On a utilisé pour cela le logiciel *Abaqus*. A partir d'un déplacement imposé, on a calculé la force de contact. Nous avons comparé les différents résultats obtenus aux résultats du modèle analytique ponctuel. Pour un contact ponctuel, la variation de la force en fonction de l'interpénétration ne diffère pas des résultats du modèle analytique de plus de 2 % et ceci pour n'importe quelle forme de pointe de contact (sphérique ou conique). Pour un contact double, il apparaît que les formes de pointe de contact influent sur l'évolution de la force, la pointe de forme sphérique a une plus grande influence sur la pointe de forme conique. Lors de la modélisation d'un contact multipoints à la même hauteur, on a noté les mêmes observations que pour le cas d'un double contact. Quand les sphères sont plus élevées que les cônes, les pointes sphériques influent sur l'évolution de la force aux pointes coniques. Alors que si les cônes étaient plus hauts que les sphères, l'influence des pointes coniques sera moindre sur l'évolution de la force aux pointes sphériques. Le modèle analytique développé est moins précis pour l'estimation de la force pour le cas d'un contact multipoints, il existe des interactions entre les différentes pointes en contact qu'il faudrait prendre en considération.

Nous avons étudié expérimentalement au chapitre VI la validité de l'application du modèle analytique ponctuel lors d'un contact élastique multipoints. On a étudié le cas d'un double et d'un triple contact. On a remarqué qu'il n'existe pas une grande différence sur la pointe de contact la plus élevée, par contre il existe une différence sur la pointe de contact la moins élevée, cette différence est plus importante quand les pointes sont de formes coniques, elle peut atteindre 20%. Comme pour le cas de l'étude numérique, on a observé les mêmes remarques et on a abouti à la même conclusion, l'existence de l'interaction entre les pointes de contact.

Au chapitre VII, nous avons développé une méthode pour tenir compte de l'effet de cette interaction qu'on a résolu par la méthode itérative de Newton Raphson. Les résultats sont comparés aux résultats obtenus par la méthode des éléments finis et aux résultats expérimentaux. L'analyse des résultats obtenus montre qu'il existe une différence de 4 % avec les résultats de la modélisation par éléments finis et une différence de 6 % avec les résultats expérimentaux. La méthode itérative développée est valide et l'effet de l'interaction est bien pris en considération lors de l'évaluation de la force de contact sur chaque pointe. Les modèles numériques de contact existant en 3D sont trop lourds pour le calcul. Il nous a fallu plus de trois heures pour résoudre un contact en quatre points par la méthode des éléments finis. La méthode de résolution, basée sur la méthode de Newton Raphson, d'un contact avec une cinquantaine d'aspérités demande un temps de calcul de seulement quelques secondes.

On a terminé au chapitre VIII par une application de la méthode itérative pour résoudre un problème de contact sur des profils de chaussée de différentes formes. Nous avons développé une méthode de génération de profil de chaussée avec des aspérités périodiques et aléatoires à la même et à hauteurs différentes. On a supposé que la zone de contact est une surface carrée qu'on a déplacée le long des chaussées modèles d'une distance Δx et à chaque fois on a

calculé sur les nouvelles aspérités les forces de contact, le rayon du volume d'aspérité en contact ainsi que les pressions sur les nouvelles aspérités. L'étude des autospectres des forces de contact sur les différentes chaussées modèles montre qu'on a obtenu des résultats qui se rapprochent qualitativement aux résultats expérimentaux effectués sur des cas réels de contact entre un pneumatique et une chaussée.

On peut à partir de ce travail, suggérer trois développements pour les recherches futures:

Le modèle analytique de contact ponctuel a été validé expérimentalement pour le cas d'un contact élastique et viscoélastique. La généralisation du modèle pour un contact multipoints en élasticité a été validée expérimentalement et numériquement. Il serait intéressant d'étudier le cas d'un contact multipoint en viscoélasticité et prendre en compte le frottement ainsi que les efforts tangentiels.

Une campagne d'essai serait nécessaire pour mesurer les forces de contact dynamique lors d'un roulement d'un pneumatique sur une chaussée et ceci afin de les comparer aux résultats obtenus en quasi statique.

Il serait opportun d'appliquer notre méthode de résolution de contact sur des profils de chaussées réels avec une approximation de chaque rugosité par une forme simple (sphérique, conique et pyramidale).

Bibliographie

- [1]-Al Khozaie S.M. & Lee E.H. *Influence of material compressibility in the viscoelastic contact problem*. Division of Applied Mathematics, Brown University, 1962.
- [2]-Andersson P. *High frequency tyre vibrations*. Report F02-04, Chalmers University of Technology, 2002.
- [3]-Anfosso-Lédée F., Klein P., Fadavi A. & Duhamel D. *Tyre/Road noise horn effect: 2D modelling by analytical and numerical models*. International congress on sound and vibration 7 th, July 2000.
- [4]-Archard J. F. *Elastic deformation and laws of friction*. Proc.R.Soc. London, Ser.A, pp.190-205, 1957.
- [5]-Bar P. & Delanne Y. *Réduire le bruit de contact pneumatique chaussée*. Presse de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1991.
- [6]-Bécot F.X. *Tyre noise over impedance surfaces efficient application of the equivalent sources method*, Phd thesis. INSA Lyon, 2003.
- [7]-Bérengrier M. & al. *Influence de la couche de roulement de la chaussée sur le bruit du trafic routier. Note d'information*. CFTR, 2001.
- [8]-Boehm F. *Mechanik des gurtelreifens*. ING-Arch, 35, pp 82, 1966.
- [9]-Boussinesq J. *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Paris :Gauthier-Villars,1885.
- [10]-Buczowski R. & Kliber M. *A Stochastic model of rough surfaces for finite element contact analysis*. Computer methods in applied mechanics and engineering, N169, pp. 43-59, 1998.
- [11]-Bush & Al, *The elastic contact of a rough surface*. Wear, Vol 35, pp. 87-111,1975.
- [12]-Campanac P.H. *Modélisation des vibrations d'un pneumatique roulant sur une chaussée*. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.
- [13]-Campanac P. & Duhamel D. *Modeling of tire vibration*. Inter Noise, 1999.
- [14]-Cerruti V. Roma, Acc. Licei, Mem. Fis. Mat, 1882.
- [15]-Delanne Y. *Les enrobés drainants : analyse de leurs propriétés vis à vis du bruit de roulement et de l'adhérence des pneumatiques des véhicules de tourisme*. Bulletin de liaison du LCPC, 162, pp. 33-43, 1989.

- [16]-Dodge R. N. *The dynamic stiffness of a pneumatic tire model*. Society of automotive engineers. Department of Engineering Mechanics, University of Michigan, 1965
- [17]-Dorhman C. R. *Dynamics of tyre wheel suspension assembly*. Journal of Sound and Vibration, N 210, pp. 627-642, 1988.
- [18]-Ejsmont J. A, Sandberg U. & Taryma S. *Influence of tread pattern on tyre /road noise*. Society of Automotive Engineers, 1985.
- [19]-Ejsmont J.A. *Tire dimensional influences on tyre / road noise*. Inter Noise. Vol 1, pp.93, 1997.
- [20]-Fadavi A. *Modélisation numérique des vibrations d'un pneumatique et de la propagation du bruit de contact*. Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2002.
- [21]-Fadavi A., Duhamel D., Klein P. & Anfosso-Lédée F. *Tire/road noise: comparison of 2D and 3D models for horn effect*. Inter Noise 2000, August 2000.
- [22]-Fujikawa T., Oshimo Y., Koike H. & Tachibana H. *Generation of tyre/ road noise. Part1: tire vibration caused by road roughness*. Inter Noise, 1999.
- [23]-Fujikawa T., Oshimo Y. Koike H. & Tachibana H. *Generation of tyre/ road noise. Part2: Pipe resonance in tread groove of tire*. Inter Noise, 1999.
- [24]-Gagen M.J. *Novel acoustic sources from squeezed cavities in car tires*. Journal of the Acoustical Society of America, 1999.
- [25]-Galín L.A. *Contact problems in the theory of elasticity*. Translated by Mrs. Moss, H. North Carolina State College, 1961.
- [26]-Gerrestsen E., Roo D.F. & Salomons E. *State of the art in tyre / road noise modeling*. Inter noise, vol 1 , pp. 87 , 1997.
- [27]-Gradshteyn I.S. & Ryzhik I.M. *Table of integrals, series and products*. Academic Press, Inc, 1979.
- [28]-Graf R.A.G. & al. *On the horn effect of a tyre /road interface. Part 1: Experiment and computation*. Journal of Sound and Vibration, pp 417-431, 2002.
- [29]-Graham G.A.C. *The contact problem in the linear theory of viscoelasticity*. International Journal of Engineering Science, 3, 27, 1965.
- [30]-Greenwood J.A. & Tripp J.H. *The elastic contact of rough spheres*. ASME Journal Applied Mechanics, Vol 34, pp. 153-159, 1967.
- [31]-Greenwood J.A. & Tripp J.H. *The contact of two nominally flat rough surfaces*. Proceeding Institution Mechanical Engineering, vol 185, pp. 625-633, 1969.
- [32]-Hamet J.F. *Propagating wave formulation of tire vibration using the orthotropic plate model*. Inter-noise 2002, 2002.

- [33]-Hamet J.F. & Klein P. *Road texture and tire noise*. Inter-noise 2000, Nice, 2000.
- [34]-Haydn R.E. *Road side noise from the interaction of a rolling tyre with the road surface*. Proceeding of the Purdue Noise Control Conference, 1971.
- [35]-Heckel M. *Tyre noise generation*. Wear 113, pp 157-170, 1986.
- [36]-Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper (On the contact of elastic solids)*. J.Reine und Angewandte Mathematik, 92,156-171, 1882.
- [37]-Hisakado T. *Effects of surfaces roughness on contact between solid surfaces*. Wear , vol 28, pp 217-234, 1974.
- [38]-Huang S.C. & Hsu B.S. *In plane dynamics of tires on the road based on a experimentally verified rolling ring model*. Vehicule System Dynamics, N 21 , pp 242-267, 1992.
- [39]-Huang S.C. *The vibration of rolling tyres in ground contact*. Journal of Vehicule Design. vol 13 N 1, 1992.
- [40]-Hunter S.C. *The Hertz problem for a rigid spherical indenter and a viscoelastic half-space*. Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 8, 219-234, 1960.
- [41]-Iwao K. & Yamazaki A. *Study on the mechanism of tyre /road noise*. JSAE Review, 17, pp139-144, 1996.
- [42]-Jennewein M. & Bergmann M. *Investigation concerning tyre / road noise sources and possibilities of noise reduction*. Proceeding of The Institution of The Mechanical Engineers, 1985.
- [43]-Johnson K.L. *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985.
- [44]-Keltie R.F. *Analytical model of the truck tire vibration sound mechanism*. Journal of the Acoustical Society of America, 71(2), pp 359-367,1982.
- [45]-Kim G.J. *Wave propagation in tyres and the resultant noise radiation*. Phd thesis, Institute of Sound and Vibration research, University of Southampton, 1998.
- [46]-Klein P. *Effet dièdre : Etude du modèle de Kropp*. Rapport MMA 9807, INRETS.
- [47]-Kropp W. *Structure born sound on a smooth tyre*. Applied Acoustics, pp. 181-192, N 26, 1989.
- [48]-Kropp W. *Ein model zur beschreibung des rollgeraussches eines unprofilierten Gutelreifens auf rauher strabenoberlache*. VDI, Reihe11: Schwingungstechnik N.166 1992.
- [49]-Kucharski S., Polijaniuk A., Klimczak & Kaczmarek J. *Finite elements model for the contact of rough surfaces*. Wear 177, pp.1-13, 1994.
- [50]-Kung L.E. *Radial vibration of pneumatic radial tires*. General Tire Inc, 1987.

- [51]-Kung L.E., Sodel W. & Yang T.Y. *Free vibration of a pneumatic tire wheel unit using a ring on a elastic foundation and a finite element model*. Journal of Sound and Vibration, 107, pp.181-194.1986.
- [52]-Larsson K. *Modelling of dynamics contact : Exemplified on the tyre road interaction*. Chalmers university of technology, 2002.
- [53]-Lelong J. *Vehicule noise emission: evaluation of tyre / road and motor noise contribution*. Inter Noise, 1999.
- [54]-Love A.E.H. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge University Press, 1927.
- [55]-Love A.E.H. *Boussinesq's problem for a rigid cone*. Quarterly Journal of Mathematics (Oxford series), 10,161, 1939.
- [56]-Mc Cool J.I. *Predicting Microfractures in Ceramics via a microcontact model*. ASME Journal of Tribology, vol 108, p.380-386, 1968.
- [57]-Miller G. F. & Pursey. H. *The field and radiation impedance of mechanical radiators on the free surface of a semi-infinite isotropic solid*. Proceeding of the royal society of London, Ser A 223, 521-541, 1954.
- [58]-Nakashima Y. & Wong J.Y. *A three dimensional tire model by the finite element method*. Journal of Terramechanic, vol 30, N1, pp 21-34, 1993.
- [59]-Nelson P.M. *Rubber tyre noise generation*. Transport and Road Research Laboratory, Old Washington Road, Crowthorne, Breks RG11 65u (U.K) , 1986.
- [60]-Ni J.E., Synder D.S., Walton G.F., Mallard N.E., Barron.G.E., Howell.J.T. & Alljundi.B.N. *Radiated noise from tire wheel vibration*. Tire Science and Technology, TSTCA, vol 25, N 1, pp 29-42, 1997.
- [61]-Prasad G.M. & Sodel W. *Calculation of natural frequencies and modes of tires in road contact by utilizing eigenvalues of the axisymmetric non contacting tire*. Journal of Sound and Vibration, 70, pp 573-584, 1980.
- [62]-Radok J.R.M. *Viscoelastic stress analysis*. Q.App. Math., 15,198, 1957.
- [63]-Rimondi G. *Tire contribution in the context of automobile noise reduction "Tire Science and Technology"*. TSTCA, vol 23, N 3, pp 189-208, 1995.
- [64]-Saigal S, Yang T.Y, Kim H.W & Sodel W. *Free vibration of a tire as a toroidal membrane*. Journal of Sound and Vibration, 107(1), pp 71-82, 1986.
- [65]-Sandberg U. *Will tire/road noise limit future vehicle noise reduction?*. Inter noise1982, 1982.

- [66]-Sandberg U. *A new porous pavement with extended acoustical lifetime and usefull even on low speed roads*. Swedish National Road and Transport Research Institut, Inter noise1997, Vol 1, 1997.
- [67]-Sneddon I.N. *The relation between load and penetration in the axisymmetric Boussinesq problem for a punch of arbitrary profile*. International Journal of Engineering Science, 3, 47-57, 1965.
- [68]-Ting T.C.T. *The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half space*. Journal of Applied Mechanics, 33, 845, 1966.
- [69]-Williamson J.B.P. & Greenwood J.A. *Contact of nominally flat surfaces*. Proc. R . Soc . London, Ser.A, pp 300-319, 1966.
- [70]-Wilke V.G. *Document interne*, 1998.
- [71]-Wittaker E.T., Watson G.N. *A course of modern analysis*. Cambridge University Press, 1927.
- [72]-Younguing J. & Linqing Z. *A full solution for the elastic contact of three dimensional real rough surface*. Wear 157, pp 151-161, 1992.

Résumé

Ces vingt dernières années les constructeurs d'automobiles ont réduit progressivement le bruit émis par les véhicules par une action portant sur les sources d'origine mécanique (réduction du bruit du moteur, meilleure conception des transmissions, amélioration des silencieux...). Il s'avère maintenant que le bruit de contact pneumatique/chaussée est la source principale des nuisances sonores à plus de 50 Km/h. La génération du bruit de contact a comme sources de nombreux phénomènes impliquant des mécanismes compliqués. L'un des principaux phénomènes étant les vibrations du pneumatique dues à la rugosité de la chaussée. Pour modéliser les vibrations du pneumatique, il faut connaître d'une part le comportement vibratoire du pneumatique et d'autre part les forces de contact. Le problème de contact entre un pneumatique et une chaussée est un contact dynamique tridimensionnel qui est difficile à modéliser dans toute sa généralité. Les modèles de contact avec la chaussée utilisés font appel à une modélisation simple en $2D$ et les modèles de contact existant en $3D$ sont trop lourds pour le calcul. Dans ce mémoire on apporte une contribution à l'étude des forces de contact engendrées par l'influence de la rugosité de la chaussée et ceci afin d'avoir une bonne approximation des sources de vibrations du pneumatique et prédire le bruit de roulement. On a développé un modèle semi analytique $3D$ qu'on a validé expérimentalement pour un contact ponctuel élastique et viscoélastique avec différentes formes de pointes de contact. La validation expérimentale et numérique du modèle pour un contact multipoints élastique a été abordée. On a terminé par une application de la méthode pour résoudre un problème de contact sur des profils de chaussées modèles.

Mots clés Bruit, pneumatique, modèle analytique, théorie du potentiel d'interaction, contact élastique, contact viscoélastique, contact multipoint, validation expérimentale, identification, modèle numérique, chaussée.

Abstract

These last twenty years car manufacturers gradually reduced the noise emitted by the vehicles by an action on the sources of mechanical origin (reduction of the engine noise, better design of the transmissions and improvement of the silencers...). It proves now that the noise of tyre/road contact is the principal source of the noise at speeds greater than 50 Km/h. The generation of the contact noise has sources in many phenomena implying complicated mechanisms. One of the principal phenomena is vibrations of the tire due to the roughness of the roadway. To model the vibrations of the tire, it is necessary to know the vibration behaviour of the tire and to know the contact forces. The contact problem between a tire and a roadway is a three-dimensional dynamic contact which is difficult to model in full details. The models of contact with the roadway used call upon a simple $2D$ modeling and the existing models of $3D$ contact are too heavy to be calculated. In this thesis we make a contribution to study the contact forces generated by the influence of the roadway roughness in order to have a good approximation of the tire vibrations sources and to predict the noise. We developed a $3D$ semi analytical model which was validated by experiments for an elastic and viscoelastic contact with various shapes. The experimental and numerical validation of the model for an elastic multipoint contact was studied. We finished by an application of the method to solve a contact problem on a model profile of roadways.

Keywords Noise, tyre, analytical model, theory of the interaction potential, elastic contact, viscoelastic contact, multipoint contact, numerical model, experiment, identification, roadway.