Incertitude, inertie et choix optimal : modèles de contrôle optimal appliqués au choix de politiques de réduction des émissions de gaz à effet de serre

Laurent Gilotte

▶ **To cite this version:**

Laurent Gilotte. Incertitude, inertie et choix optimal : modèles de contrôle optimal appliqués au choix de politiques de réduction des émissions de gaz à effet de serre. Mathématiques [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2004. Français. NNT : 2004ENPC0023 . pastel-00001123

HAL Id: pastel-00001123
https://pastel.hal.science/pastel-00001123

Submitted on 10 Sep 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

THESE

pour obtenir le grade de
Docteur de l'École nationale des ponts et chaussées
Spécialité : Mathématiques, Informatique

Présentée et soutenue publiquement le 7 décembre 2004
par

Laurent GILOTTE

Incertitude, inertie et choix optimal

Modèles de contrôle optimal appliqués au choix de politiques de réduction des émissions de gaz à effet de serre

Directeur de thèse :

M. Michel DE LARA

JURY

M. Luc DOYEN	Examinateur
M. Christian GOLLIER	Examinateur
M. Jean-Charles HOURCADE	Examinateur
M. Michel DE LARA	Directeur de thèse
M. Jean-Christophe PEREAU	Rapporteur
M. Gilles ROTILLON	Rapporteur

Remerciements

En premier lieu, c'est à mon directeur de thèse, Michel de Lara, que s'adressent mes remerciements. Son encadrement, son soutien et sa patience, autant par leur qualité que leur intensité, m'ont permis de mener à bien ce travail.

Jean-Christophe Pereau et Gilles Rotillon ont bien voulu s'intéresser à mes travaux et accepter d'en être rapporteurs, je leur en suis très reconnaissant.

Ma reconnaissance va également à Luc Doyen, Christian Gollier et Jean-Charles Hourcade pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Je remercie particulièrement Jean-Charles Hourcade qui m'a accueilli au CIRED, où j'ai pu trouver d'excellentes conditions de travail ainsi qu'un cadre idéal pour la part de mes réflexions relevant de l'économie du changement climatique. La compagnie quotidienne de l'équipe du CIRED m'a été plus qu'un encouragement, grâce à la stimulation intellectuelle des échanges avec les chercheurs et doctorants et la sympathie du bureau partagé au fil des ans avec Dietrich Brockhagen, Alejandro Capparós, Aïcha Ouharon, Olivier Sassi, Tarik Tazdaït et Elisabeth Tovar.

J'exprime aussi toute ma gratitude à la Fondazione Eni Enrico Mattei et aux Prof. Carlo Carraro et Marzio Galeotti qui, en m'accueillant pour un bref séjour à Milan, ont facilité l'achèvement de ce travail.

Je suis tout spécialement redevable à Khalil Hélioui et à Jean-Christophe Pereau pour leurs relectures attentives et leurs remarques, autant sur la forme que sur le contenu, ainsi qu'à Philippe Ambrosi, Valentina Bosetti, Patrice Dumas, Emeric Fortin, Vincent Gitz, Minh Ha-Duong, Jean-Marie Juhel, Pierre Matarasso et Neomal Silva.

Moins directement, mais non moins important, l'entourage familial et amical m'a donné appui et encouragements. Que tous trouvent ici l'expression de ma reconnaissance.

Ces travaux ont été financés par un contrat entre l'Institut français de l'énergie et l'Ecole nationale de ponts et chaussées, n°CC376. Le séjour à la FEEM s'est effectué dans le cadre du programme Marie Curie de la Commission européenne, contrat HPMT-CT-2001-00373.

Table des matières

Introduction générale **11**

1 Inertie, changement induit et profil de l'abattement **15**
1.1 Introduction . . . 16
1.2 Profil de l'abattement et inertie . . . 17
1.3 Les débats autour de l'inertie et du changement technique induit . . . 22
1.4 Les modèles employés: DICE et DISCERNI . . . 30
1.5 Définition des scénarios : optimum, référence, tendance . . . 34
1.6 Une proposition de représentation de l'inertie . . . 38
1.7 Conclusion. Conséquences de l'inertie pour l'instrument taxe carbone . . . 48
Annexes . . . 50
1.8 Coût marginal dynamique et instantané (dépense marginale d'abatement) . . . 50
1.9 Coût marginal et taxe carbone dans le modèle DICE . . . 51
1.10 Capital et calibration de la dynamique de l'intensité carbone . . . 53
1.11 Générations de capital, input énergétique explicite et intensité carbone . . . 54
Références . . . 57

2 Différence entre dépenses marginales des secteurs et coût marginal uniforme **61**
2.1 Introduction . . . 62
2.2 Modèles statiques de taxation optimale d'une pollution . . . 64
2.3 Conséquence de l'inertie: des coûts d'abattement instantanés différents . . . 71
2.4 Récapitulatif . . . 78
2.5 Incertitudes et inertie . . . 78
Références . . . 84

3 Effet de précaution et variation de la valeur de l'information **85**
3.1 Introduction . . . 86
3.2 The standard model of decision with learning . . . 88
3.3 Learning effect and value of information . . . 90
3.4 Extension to active learning and stochastic evolution . . . 93
3.5 Value of information as a key to the irreversibility literature . . . 95
3.6 Illustration with a modified stochastic version of DICE . . . 97
3.7 Conclusion . . . 99
3.8 Appendix: proofs . . . 101

3.9 Appendix: Comparison of arg max 102
3.10 Appendix: proofs 103
3.11 Appendix: extension of Ulph and Ulph's result 104
3.12 Appendix: Details for the numerical model 105
Références 112

4 Sensors and separability conditions for the Radner-Stiglitz Theorem 115
4.1 Introduction 116
4.2 The original problem 118
4.3 Problem restatement with sensors 119
4.4 Conditions on the information structure 122
4.5 Conditions on both the information structure and the optimization data 127
4.6 A general class of examples 129
4.7 Summary and conclusion 133
4.8 Appendix: recalls on signed measures 134
4.9 Appendix: recalls on sensors 135
4.10 Computations with sensors 139
4.11 Proofs 144
Références 146

Bibliographie 147

Annexes 153

Annexe A: code GAMS du modèle DISCERNI 153

Annexe B: code GAMS, valeur de l'information 169

Table des figures

1.1 Emissions de référence, tendancielles, et effort de réduction 17
1.2 Mécanismes de changement endogène des émissions futures. 19
1.3 Emissions et abattement optimaux, réduction par deux des émissions à 2050 . 20
1.4 Emissions fossiles de référence et optimales 21
1.5 Emissions de référence cohérentes et sans dommages 37
1.6 Changement tendanciel formulé d'après Hammit 40
1.7 Réponse symétrique et réponse nulle 44
1.8 Impact de l'inertie sur les émissions optimales 46
1.9 Emissions optimales et tendancielles, DISCERNI$_\Delta$ 47
1.10 Coût marginal instantané et dynamique, coût total 48

3.1 Expected value of information as a function of initial decision 100
3.2 Parameterization of policy before 2040 108

Liste des tableaux

1.1 Emissions (GtC) et coût d'abattement (milliards USD). 21
1.2 Emissions (GtC) avec modification tendancielle formulée d'après Hammit. . 40

3.1 Optimal abatement and investment rates under H1–4 107
3.2 Optimal initial policy with and without information 108
3.3 Initial policy is the abatement targeted for 2030 109

Es war das Beste, die Frage nach Sinn oder Unsinn einer solchen Arbeit weiterzustellen, aufzugeben und ich gab sie auf und tat so, als sei ich entschlossen, die Arbeit tatsächlich so bald als möglich anzugehn.

Thomas BERNHARD, *Beton*

Introduction générale

En 1995, T. Wigley, R. Richels et J. Edmonds publièrent dans *Nature* un article qui marqua un tournant dans les vifs débats sur la réduction des émissions des gaz à effet de serre (GES). Sur la base des résultats obtenus avec deux *modèles d'optimisation intertemporelle* des coûts de réduction, ils contestaient le bien-fondé des trajectoires d'émissions proposées par le GIEC[1] pour stabiliser les concentrations de GES dans l'atmosphère. Sans remettre en cause l'idée de stabilisation, ils exposèrent qu'un tel but ne permettait pas de définir directement la politique requise de limitation des émissions, mais qu'il posait la question de la route à suivre — le profil d'émissions et donc d'efforts de réduction — pour atteindre ce but. Aborder cette question rendait l'usage de modèles indispensable, non pas tant pour obtenir la « bonne » réponse que pour guider une intuition trop prompte à s'égarer étant donné la complexité du système dynamique naturel qui détermine les concentrations, mais aussi la complexité du système économique. C'est ce dernier aspect que le GIEC avait manifestement laissé de côté.

Certes, il n'y aurait rien eu de nouveau à utiliser un modèle pour « programmer » au mieux l'évolution d'un système énergétique sous contrainte politique, mais le travail de Wigley *et al.* illustrait la pertinence et la nécessité d'une classe de modèles alors à ses débuts, les *modèles d'évaluation intégrée*, modèles qui représentent à la fois l'économie et le climat. Nécessité mais aussi difficulté : M. Ha-Duong, M. Grubb et J.-C. Hourcade ne tardèrent pas à souligner (*Nature*, 1997) que la description de l'économie de Wigley *et al.* n'avait pas d'inertie dans son évolution, et qu'il fallait peut-être renverser leurs conclusions et préconiser des réductions à court-terme, d'autant que la cible climatique était encore incertaine. Une fois encore, l'argumentation, quoiqu'intuitive, avait dû, pour être recevable, se soutenir des résultats d'un effort de modélisation. Tout effort de justification de tel ou tel effet, supposé déterminant pour le profil de réduction, ne pouvait être validé qu'une fois incorporé dans un modèle numérique d'évaluation intégrée, fût-il sommaire.

Mais l'intuition trouve difficilement à s'exercer avec les modèles intégrés ; elle y est vite perdue dans des spécifications de paramètres, des difficultés de calibration, des problèmes de résolution numérique. Des problèmes d'interprétation aussi : il peut y avoir des sauts logiques non négligeables entre les résultats et ce qu'on prétend leur faire dire, parfois en dépit des hypothèses sous-jacentes à la construction et la résolution du modèle. Pour qui n'est pas le concepteur d'un modèle, l'intuition s'exerce d'autant moins que la documentation publiée est souvent parcellaire, allusive ou bien organisée d'une façon qui désoriente. Presqu'aucune des descriptions de modèles numériques d'évaluation intégrée qu'on a pu trouver ne précise

[1] Groupe d'experts intergouvernemental sur l'évolution du climat, IPCC en anglais.

clairement sa structure en termes d'état et de commande : quelles sont les variables d'état ? de commande ? les contraintes d'admissibilité ? les contraintes sur l'état ? C'est souvent au lecteur de s'en faire une idée après un « démontage »et un tri fastidieux — s'il en a la patience et en éprouve la nécessité.

Cet effort est pourtant indispensable si l'on veut exploiter au mieux les possibilités du modèle construit, puis faire jouer l'interprétation sur des bases solides. L'intuition sera aussi plus aisée mais restera à la peine. D'une manière ou d'une autre, c'est d'un aller-retour entre les modèles analytiques plus compacts et les exercices numérisés que les débats continueront de se nourrir. Cette thèse aura recours à l'un et l'autre type de modèles.

Deux questions, l'inertie et la résolution future des incertitudes, sont récurrentes dans les débats sur le profil des réductions et sur celui du signal qui y incite. Cette thèse, dans la lignée des travaux[2] en économie de l'environnement effectués au CIRED, les aborde mais en insitant davantage sur leurs aspects mathématiques. Faisant à cela exception, le **chapitre 1**, commence par une comparaison plus littéraire des représentations de l'inertie et du « changement technique induit » dans les modèles d'évaluation intégrée. Cette réflexion trouve son aboutissement dans la proposition d'une représentation simple et calibrée de l'inertie pour le modèle DICE (Nordhaus, 1994; Nordhaus et Boyer, 1999a). A cette occasion, la structure de commande de ce modèle est présentée de façon synthétique. C'est cet effort de réécriture qui permet de justifier la calibration proposée puis de dériver les conséquences analytiques de la modification introduite. L'inertie implique que la valeur économique d'une action de réduction doit prendre en compte les conséquences sur les coûts de réduction futurs. On trouve alors un écart entre le coût marginal *instantané* d'abattement et le coût marginal d'abattement en dynamique, lequel intégre la valeur actuelle des conséquences futures. Cet écart pose un problème potentiel pour la définition du signal-prix.

Il revient au **chapitre 2** d'aborder ce problème plus en détail en envisageant ses conséquences sectorielles. Il commence par un rappel des raisons qui fondent l'égalité des coûts marginaux entre secteurs — qui doivent s'égaliser avec le coût d'opportunité des émissions — puis propose une extension du résultat au cas dynamique avec inerties spécifiques aux secteurs. Si des inerties différentes entre secteurs ne sont pas un motif de différenciation des coûts marginaux, lequels doivent prendre en compte la valeur actualisée des effets futurs de l'action, en revanche, les coût marginaux *instantanés* (ou dépenses marginales) peuvent être différents. Pour un secteur, l'écart de sa dépense marginale au coût marginal (commun aux secteurs) sera d'autant plus important que les réductions dans ce secteur induiront des changement importants des tendances futures d'émission. Par ailleurs, c'est au niveau sectoriel que l'on va pouvoir juger si les agents économiques sont susceptibles de prendre en compte les conséquences des changement tendanciels induits par leurs efforts de réduction. Si c'était le cas, ils devraient choisir une dépense marginale plus élevée que le signal (pris égal au coût marginal), parce qu'ils anticipent l'effet de réduction de leurs coûts d'abattement futurs. Une telle hypothèse peut être raisonnable concernant le secteur de la production d'électricité : le

[2] Ainsi les thèses de MM. Ambrosi (2004), sur les implications des représentations possibles du climat et des dommages, Ha-Duong (1998a), sur la question des irréversiblités et de l'inertie, Lecocq (2000) sur les liens entre tempo de l'action et actualisation.

signal-prix est directement adressé aux producteurs d'un secteur extrêmement capitalistique qui sont habitués à prendre en compte le long terme dans leur décisions. Pour le secteur des transports individuels, elle est vraisemblablement plus discutable. Dans une seconde étape, on esquisse une analyse théorique de l'effet combiné de l'incertain et du changement induit (inertie économique). L'étude est menée pour une économie à un seul secteur et permet de discuter le contenu des hypothèses de rationalité permettant l'identification du signal-prix et du coût marginal de réduction.

Le traitement de l'incertitude et de l'information est l'objet des deux autres chapitres. Ils se placent dans le cadre de l'espérance d'utilité. La généralité des formalismes employés leur donne un champ de pertinence plus vaste que celui de l'économie du changement climatique, ou même de l'économie de l'environnement. C'est pourtant par le truchement de l'économie du changement climatique qu'on va donner ce premier aperçu de leurs problématiques.

Le **chapitre 3** propose un retour sur l'«effet d'irréversibilité», débat récurrent dans le domaine du changement climatique, qui essaye de déterminer si la politique climatique, confrontée à l'incertitude, doit faire preuve de plus de précaution (être plus stricte) lorsqu'on prévoit une amélioration future de l'information tandis que les choix présents ne pourront plus être totalement corrigés dans l'avenir. Il a été déjà établi par différents auteurs que la conclusion reste indécise sauf dans certains cas restrictifs (par exemple : irréversibilité absolue). Ce chapitre met en évidence une condition nécessaire de l'effet d'irréversibilité, qui permet de réunir dans une même généralité des conditions déjà connues mais disparates. Il commence par une analyse formelle et met en évidence que la valeur de l'information future dépend de la politique climatique choisie aujourd'hui. Nous montrons que si la valeur de l'information future augmente avec la rigueur environnementale de la politique climatique actuelle, alors il est effectivement préférable de suivre une politique plus stricte que si aucune information future n'était attendue. On retrouve dans ce cas l'effet d'irréversibilité. Dans le cas contraire, si la valeur de l'information future diminue avec la rigueur de la politique actuelle, on a alors l'effet inverse. Ce résultat très général permet de rendre compte d'une bonne part des conditions présentées dans la littérature économique pour l'effet d'irréversibilité. Le chapitre se continue par une application et une illustration numérique de cette situation avec des résultats d'un modèle d'évaluation intégrée.

Enfin, le **chapitre 4** traite de la valeur de l'amélioration des structures d'information. En économie du changement climatique cette problématique concernera la réduction des incertitudes économiques qu'on peut espérer obtenir grâce à des actions d'abattement. En effet, effectuer des efforts d'abattement nous permettra d'observer des effets économiques (*observer un signal*) qui permettront de préciser nos connaissances des coûts et options d'abattement (*réviser nos croyances* a priori), et donc de mieux orienter nos efforts d'abattement futurs. Plus l'effort d'abattement consenti aujourd'hui sera important, plus l'effet économique sera distinguable et mieux il permettra de réviser nos croyances (*amélioration de la structure d'information*) ; et nous serons en meilleure position pour prendre des décisions ultérieures appropriées (*la nouvelle structure d'information a une valeur plus importante*). La valeur d'une structure d'information est à mettre en regard du coût des réduction d'émissions supplémentaires qu'il faut consentir aujourd'hui pour bénéficier de cette structure (*coût de la structure d'in-*

formation). Dans la littérature, on parle souvent de situation d'*active learning*. En pratique, les questionnements sur les implications de l'*active learning* pour la politique climatique se sont focalisés (de façon assez paradoxale) sur l'autre versant des incertitudes : celui des incertitudes sur le climat. Mais la structure logique reste la même. Même sous cette angle, elle est encore très peu abordée dans les exercices numériques — à l'exception notable de Kelly et Kolstad (1999) — à cause des difficultés que pose la « malédiction de la dimensionalité » en programmation dynamique, et des choix d'approximations qu'elle impose. Mais les difficultés sont tout autant présentes au niveau théorique, qui est celui retenu ici.

Radner et Stiglitz (1984) ont montré que le choix d'une structure d'information était délicat du fait de la non-concavité de la valeur de l'information (il y a, au moins localement, des rendements croissants de l'amélioration de la structure d'information). Notre travail a consisté à préciser les conditions dans lesquelles ce problème de non-concavité se posait. L'enjeu est de pouvoir spécifier des problèmes d'*active learning* dans lesquel soit le problème de la non-concavité ne se pose pas, soit dans lesquels la source du problème est bien identifiée. Un premier travail par Chade et Schlee (2002) avait déjà permis d'étendre le résutat de Radner et Stiglitz et de donner des conditions plus détaillées. Mais, comme chez Radner et Stiglitz, leurs conditions portent en général sur des objets mathématiques qui dépendent à la fois de propriétés relatives au décideur (ses préférences et ses croyances a priori) et de propriétés relatives aux structures d'informations. Et lorsqu'elle échappent à cet inconvénient, elles sont peu claires et difficiles à vérifier en pratique. Ce chapitre se fonde sur la théorie des capteurs pour proposer des conditions aisément interprétables et qui séparent nettement les propriétés relatives au décideur de celles relatives aux structures d'information.

Chapitre 1

Inertie, changement induit et profil de l'abattement

Sommaire

1.1 Introduction 16
1.2 Profil de l'abattement et inertie 17
1.2.1 Transformation et inertie de l'économie 17
1.2.2 Des modèles économiques sans inertie : des pronostics improbables. 18
1.3 Les débats autour de l'inertie et du changement technique induit 22
1.3.1 Inertie et « tempo » de la politique d'abattement 23
1.3.2 Le modèle de Goulder et Mathai 24
1.3.3 Des résultats décevants 26
1.4 Les modèles employés: DICE et DISCERNI 30
1.4.1 Présentation du modèle DICE 30
1.4.2 Structure de contrôle des modèles DICE et DISCERNI 30
1.5 Définition des scénarios : optimum, référence, tendance 34
1.5.1 Scenario optimal 34
1.5.2 Scenarios de référence 34
1.5.3 Scénario tendanciel après la date t 37
1.6 Une proposition de représentation de l'inertie 38
1.6.1 DICE : un module climat plus détaillé que l'économie 38
1.6.2 L'inertie dans le modèle de Hammit 39
1.6.3 Le modèle DISCERNI 40

Un article en collaboration avec Emeric FORTIN a été tiré de ce chapitre et présenté à la 6ème conférence européenne de l'IAEE (International association for energy economics), sept. 2004, sous le titre *Optimal policy and inertia of carbon intensity trends*. Une version antérieure (*Impact du changement tendanciel des émissions sur le profil de la taxe carbone*) avait été acceptée pour le 44eme congrès de la Société canadienne de sciences économiques (SCSE, 2004).

1.6.4 Emissions tendancielles et calibration. 42
1.6.5 Premiers résultats du modèle DISCERNI 45
1.7 Conclusion. Conséquences de l'inertie pour l'instrument taxe carbone 48
Annexes 50
1.8 Coût marginal dynamique et instantané (dépense marginale d'abatement) 50
1.9 Coût marginal et taxe carbone dans le modèle DICE 51
1.9.1 Trajectoire optimale 51
1.9.2 Solution décentralisée par une taxe carbone 52
1.10 Capital et calibration de la dynamique de l'intensité carbone 53
1.11 Générations de capital, input énergétique explicite et intensité carbone 54
1.11.1 Générations de capital — modèles STARTS 54
1.11.2 Représentation explicite de l'énergie — modèles DEMETER, RICE et ENTICE . 55
1.11.3 Conclusion de l'annexe 1.11 55
Références 57

1.1 Introduction

Une des questions les plus immédiates concernant la politique de réduction des émissions de gaz à effet de serre (GES) tient à l'ampleur des réductions à effectuer à horizon de 10–20 ans. Cette problématique ne se rapporte pas seulement à la dangerosité supposée de l'accumulation des gaz à effet de serre dans l'atmosphère ; elle intervient dès lors qu'est en cause la répartition dans le temps des efforts de réduction visant à atteindre une cible climatique (concentration, vitesse d'évolution de la température). Parler de cette répartition des efforts implique enfin que l'on sache désigner, non seulement pour aujourd'hui mais aussi pour les périodes ultérieures, quel niveau de réduction est impliqué par une trajectoire d'émissions « vertueuse ».

Ces niveaux de réduction sont couramment représentés en montrant l'écart entre les émissions souhaitables et celles dites «de référence», qui sont les émissions que l'on aurait effectuées en l'absence de tout effort au cours du temps. Une trajectoire d'émissions vertueuse qui dévierait de plus en plus de la trajectoire de référence présenterait donc des réductions d'une ampleur croissante au cours du temps. Pourtant, il n'en va pas nécessairement de même des coûts de réduction, simplement parce que la trajectoire de référence n'est pas appropriée pour mesurer les efforts de réduction d'une date future, dès lors que des réductions d'émissions ont été effectuées au cours des périodes précedentes.

Ce chapitre est construit autour de cette idée, simple, évidente même pour les modélisateurs travaillant sur l'énergie, mais qui permet dans un premier temps (sections 1.2 et 1.3) un abord critique du débat actuel sur la modélisation du « changement technique induit » dans les modèles *top-down* en réactivant celui sur l'« inertie » qui l'avait précédé et dont il a fini par devenir, sans doute de façon trop étroite, une sous-partie[1]. Dans un deuxième temps, la

[1] C'est par exemple ainsi que le traitent Clarke et Weyant (2002) dans leur tour d'horizon, par ailleurs indispensable, de la modélisation du changement technique induit.

critique fait place à une proposition : une définition rigoureuse d'une référence mobile — les émissions tendancielles, — plus adéquate pour juger de l'effort d'abattement, est proposée ; enfin, une représentation de l'inertie, calibrée, non centrée sur les coûts mais sur les émissions, est introduite dans DICE, le modèle top-down le plus diffusé.

1.2 Profil de l'abattement et inertie

1.2.1 Transformation et inertie de l'économie

Un certain nombre de faits suggèrent que réduire les émissions d'*aujourd'hui* contribue à modifier aussi les émissions tendancielles pour l'avenir — et donc aussi à changer les coûts des efforts futurs nécessaires pour maintenir les émissions en-dessous d'une certain niveau (voir Figure 1.1).

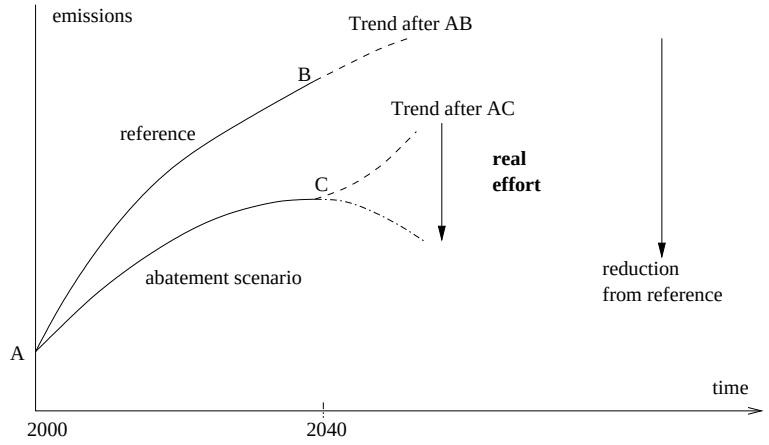

FIG. 1.1 – Emissions de référence, tendancielles, et effort de réduction.
Les émissions de référence (AB) décrivent les émissions prévues de 2000 à 2040 en l'absence de réduction des émissions. Une politique possible de réduction possible est présentée par la courbe (AC). Les émissions tendancielles après 2040 désignent les émissions qui seraient effectuées en cas d'abandon après 2040 de la politique de réduction. Lorsque l'on poursuit la politique de réduction après 2040, l'effort de réduction est donc à mesurer par rapport à la tendance résultant de la politique qui a précédé. En mesurant l'effort de réduction par rapport à la référence (AB et ensuite), on risque de le surestimer considérablement, ainsi que les coûts nécessaires pour le mettre en œuvre.

Les raisons avancées tiennent aux formes que prend la réduction. Celle-ci est possible parce que des techniques nouvelles sont employées ; parce qu'il y a mise en place de capital et d'infrastructures associés à des émissions réduites ; et parce que des changements des comportements de production et de consommation sont induits. Ces transformations ne disparaissent pas même si l'effort de réduction s'interrompt ultérieurement. En particulier, capital et infrastructures ont une durée de vie qui, dans les secteurs de l'énergie, des transports et de l'habitat, est élevée. Il en découle que, une fois que des efforts de réduction ont été engagés, les émissions que l'économie tendra spontanément à effectuer au cours des périodes qui

suivront, ces émissions seront plus faibles que les émissions dites de référence, à savoir les émissions si aucune réduction n'avait été jamais faite préalablement.

Plus précisément Grubb *et al.* (1995) rapportent plusieurs exemples sectoriels et macro-économiques où la hausse des prix de l'énergie des années soixante-dix a entraîné des transformations techniques qui ont été conservées une fois les prix redescendus. Ces transformations techniques, forcées par la nécessité, avaient fait l'objet de progrès qui les ont rendues compétitives même une fois disparue la contrainte qui les avait imposées.

La transformation de l'économie par l'effort de réduction est souvent comprise comme présentant deux aspects (voir figure 1.2).

- Le premier, la mise en place d'infrastructures, de capital, d'habitudes, qui aura des effets persistants sur les émissions du fait de leur durabilité (leur durée de vie).
  On désignera cet aspect par le terme de « durabilité du capital », capital étant pris dans une acception large[2] qui inclut le capital de production, le capital des infrastructures et des systèmes (systèmes de transports, organisation géographique des villes), le capital des ménages (habitat et équipement de chauffage, de climatisation et d'isolation) et le capital social (habitudes).
- Le second, la stimulation de changements techniques qui resteraient économiquement bénéfiques même en l'absence de contrainte climatique — autrement dit du «changement technique induit» par le mécanisme de *learning-by-doing* (Arrow, 1962).

Ces deux aspects ne sont pas véritablement séparables : capitaux, infrastructures et habitudes incorporent le changement technique. Et le changement technique induit s'effectue lui aussi progressivement puis persiste.

Dans tout ce chapitre on désignera conjointement par le terme *inertie* ces deux aspects dynamiques de l'effort d'abattement. On en donnera ensuite une définition plus précise encore : l'inertie désignera le fait que les efforts d'abattement d'une date donnée modifient l'intensité carbone de l'économie à une date ultérieure.

Cette définition reste très proche de la notion d'inertie utilisée par Grubb *et al.* (1995) ou par Lecocq *et al.* (1998). Toutefois, chez ces auteurs, l'insistance est mise avant tout sur les coûts.

En définitive, la poursuite à moyen terme de l'effort de réduction donne forme à une économie fondée sur des techniques (au sens large incluant les habitudes) qui deviennent sensiblement différentes de celles qui sous-tendent les émissions de «référence» (Hourcade, 1993).

1.2.2 Des modèles économiques sans inertie : des pronostics improbables.

En 1995, Grubb et al. affirmaient déjà que le défaut de représentation de l'inertie était une insuffisance critique pour les exercices de modélisation intégrée de la décision sous incertitudes. Cette affirmation concerne directement les modèles de la famille de DICE et RICE[3] qui

[2] Voir Lecocq *et al.* (1998) pour une taxinomie commentée des différentes formes de capital impliquées dans la réduction des émissions.

[3] Nordhaus (1994); Nordhaus et Yang (1996); Nordhaus et Boyer (1998, 1999a)

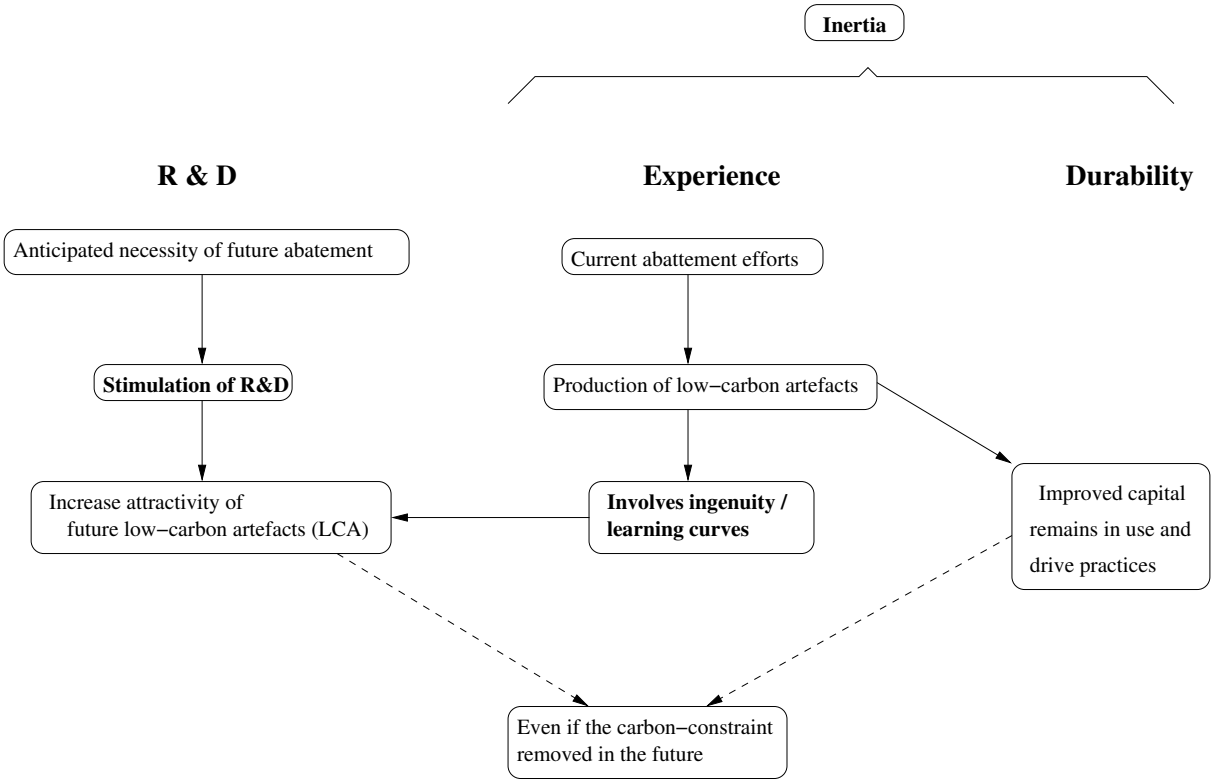

FIG. 1.2 – Mécanismes de changement endogène des émissions futures.
Les réductions d'émissions effectuées aujourd'hui contribuent aussi à réduire la tendance des émissions futures : *(a)* ces efforts s'accompagnent d'effets d'apprentissage (*learning-by-doing*) qui permettront aux méthodes et équipements peu émetteurs de devenir plus compétitfs ou attractifs dans l'avenir ; *(b)* ces efforts s'accompagnent de la mise en place de capital, d'habitudes qui ont parfois des durées de vie importantes. La R&D a une place à part en ce qu'elle est avant tout stimulée par les besoins de réductions futurs.

sont parmi les plus diffusés des modèles top-down et d'où l'inertie est totalement absente. On va voir que, de surcroît, cette insuffisance pose déjà problème dans le cadre certain.

Quelques exemples parmi d'autres d'utilisations récentes des modèles DICE ou RICE donneront une idée de leur influence[4] : en 1999, un jugement sur l'efficacité économique du protocole de Kyoto (Nordhaus et Boyer, 1999b), par les auteurs du modèle ; en 1999 et 2003 des études sur la possibilité et la stabilité de coalitions de pays autour du partage du coût de réduction des émissions (Eyckmans et Tulkens, 1999; Yang, 2003) ; tout dernièrement, une analyse de la politique d'abattement optimale pour des dommages climatiques à seuil (Keller *et al.*, 2003). Par ailleurs ils servent aussi de base pour la calibration d'applications au problème du changement climatique de travaux théoriques divers, sur le débat prix-quantités (Newell et Pizer, 2003) par exemple. Enfin, des travaux récents y intégrent le changement induit par la

[4]Surtout dans la première version, W. Nordhaus a pris le soin fastidieux de décrire avec détail l'ensemble des paramètres du modèle et sa calibration et de fournir un code informatique exploitable, téléchargeable sur sa page personnelle, ce qui rend ses résultats reproductibles — qualité assez rare en modélisation intégrée, et qui a certainement beaucoup fait pour le succès de ce modèle.

R&D, comme on le verra en section 1.3.3.

Dans tous ces travaux, la répartition dans le temps des efforts de réduction et de leurs coûts est indissociable des résultats numériques obtenus pour les questions spécifiques qu'ils abordent. Pourtant, le problème posé par l'absence de représentation du changement des émissions tendancielles ne semble pas être objet de débat.

Le comportement du modèle DICE Deux simulations opérées avec le modèle DICE permettent d'illustrer les conséquences de l'absence d'inertie.

Réduire par deux les émissions à 2050. La figure 1.3 montre comment le modèle suggère de répondre au mieux à à un objectif politique (une contrainte) de réduction par deux des émissions à 2050 : l'effort d'abattement commence de façon abrupte en 2040. Aucun effort d'abattement n'est effectué avant 2040 car ceci ne contribuerait pas à abaisser les coûts de réduction à cette date. On passe brutalement (en 10 ans) de plus de 11GtC par an à moins de 4GtC, soit en termes d'abattement de 0% à 75%.

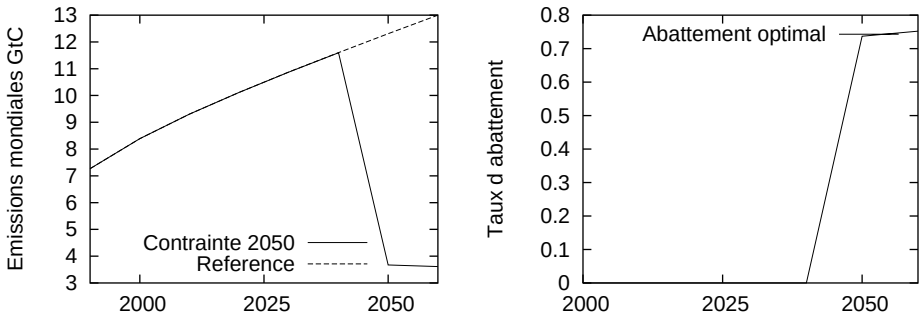

FIG. 1.3 – Émissions et abattement optimaux pour un objectif de réduction par deux des émissions à 2050. Modèle : DICE original et avec (faible) changement induit ($e = 1$ et $\zeta = 0,1$ dans Eq. 1.14 p. 41).

Les fruits de quarante ans de réductions. La figure 1.4 présente la trajectoire d'émissions optimales qui permet de stabiliser les concentrations à 550ppm ; les émissions optimales s'écartent de plus en plus de celles de référence (les émissions sans abattement) : ainsi en 2050, le décrochage est de 4.4 GtC. Correspond-il pour autant à l'effort qui devra être consenti en 2050 ? Dans DICE, c'est quasiment le cas (voir FIG 1.4 et TAB 1.1). En effet, bien que la politique menée de 2000 à 2040 ait amené à faire décrocher les émissions de 29% par rapport aux émissions de référence, les émissions tendancielles[5] pour 2050 restent quasiment[6]

[5] Pour une définition formelle des émissions de référence, optimales et tendancielles, voir section 1.5

[6] L'écart, minime, provient d'un effet indirect : les efforts d'abattement effectués de 2000 à 2040 contribuent à diminuer l'investissement et donc l'activité, ce qui entraîne mécaniquement une diminution des émissions. Tou-

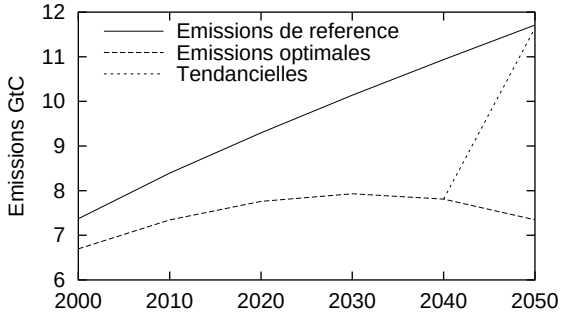

FIG. 1.4 – Emissions fossiles de référence et optimales.
La figure met en évidence l'absence d'inertie dans le modèle DICE. Elle montre la trajectoire d'émissions de référence du modèle DICE (en plein) ainsi que les émissions obtenues par une politique de réduction. Dans le cas où l'effort de réduction est s'interrompt après 40 ans, les émissions reviennent à leur niveau de référence dès la période suivante. Malgré quarante années d'efforts de réductions, l'économie décrite par DICE n'a pas subit de modifications de sa tendance d'émissions fossiles.

identiques (11.6 GtC) aux émissions de référence. Tout se passe comme si l'économie représentée par DICE se retrouvait en 2050 dans la même situation qu'en l'absence de politique d'abattement (aucune taxe carbone) entre 2000 et 2040[7].

En termes de coût, cela signifie encore qu'en dépit des efforts consentis de 2000 à 2040, la dépense d'abattement nécessaire pour amener en 2050 les émissions à leur niveau optimal $E^{\#}_{2050} = 7,35$ GtC est aussi élevée que si aucun effort n'avait précédé.

	Emissions effectuées		Tendancielles	Coûts pour réduire
	2000	2040	2050	à 7,35 GtC en 2050
Référence (E^0)	7,37	10,94	11,71	173
Optimales ($E^{\#}$)	6,70	7,81	11,64	168

TAB. 1.1 – Emissions (GtC) et coût d'abattement (milliards USD).

Nordhaus (1994, p.60, note 6) explique effectivement que son modèle diffère de la plupart des modèles énergétiques «plus réalistes» (selon ses propres termes) en ce qu'il fait l'hypothèse que le stock de capital s'ajuste rapidement (en l'espace de 10 ans) aux chocs écono-

tefois, le volume des coûts d'abattement étant très faible par rapport à celui de l'investissement, cette diminution est peu sensible. De plus, à des dates plus tardives, un effet opposé pourrait être observé : les bénéfices provenant d'une diminution des dommages climatiques se matérialiseront et permettront plus d'investissement d'où *in fine* des émissions plus élevées que dans un scénario de référence cohérent (c'est-à-dire prenant en compte les dommages mais sans internalisation).

[7]Le modèle RICE 99 — sur lequel DICE 99 est calibré — présenterait certainement le même type de comportement des émissions tendancielles, peut être même de façon encore plus exagérée. En effet, dans RICE 99, réduire les émissions a aussi pour effet de diminuer la rareté des ressources fossiles et donc de diminuer leur prix futur (hors taxe carbone). Il est donc vraisemblable que dans ce modèle, les émissions tendancielles soient plus élevées que la baseline (cette intuition n'a pas été vérifiée).

miques[8].

Une telle vitesse d'ajustement est-elle envisageable au vu des données historiques ? Elle se traduit ainsi : dans DICE, interrompre la politique de réduction après 2040 conduit à une remontée des émissions de presque 50 % en 10 ans. Même s'il est vrai que, par exemple la France a vu ses émissions doubler entre 1960 et 1972, cette évolution devient plus surprenante lorsqu'on la transpose au niveau mondial. En terme d'intensité-carbone du PIB, les résultats de DICE font apparaître un bond de 32% en 10 ans, soit 2,82% par an pendant 10 ans. Même si de telles hausses ont pu être observées, supposer leur retour dans un contexte où l'industrialisation aura déjà été effectuée et où le décrochage de l'intensité carbone et du PIB aura été provoqué semble contredire l'observation historique[9].

1.3 Les débats autour de l'inertie et du changement technique induit

Plusieurs mécanismes expliquent comment les décisions actuelles peuvent entraîner une réduction des émissions futures. Dans le cadre de la modélisation, on peut en identifier trois principaux (voir FIG 1.2) : la recherche et développement (R&D) ; l'apprentissage (*learning-by-doing*) ; et la durabilité des capitaux, équipements et des habitudes résultant des décisions actuelles. Les deux premiers (R&D et LBD) participent de la notion plus large de « changement technique induit » ; et on a expliqué comment les deux derniers composent conjointement ce que l'on désigne ici du terme d'« inertie[10] ». Le problème qui se pose au modélisateur est donc de choisir lequel (ou lesquels) d'entre eux il représentera afin d'augmenter la pertinence de son modèle[11]. Il est difficile de déterminer *a priori* lequel d'entre eux incorporer. Aussi les expériences de modélisation menées ont pu donner des résultats qui surprenaient leurs auteurs — ainsi Nordhaus (2002) lorsqu'il trouve que la R&D contribue relativement peu à modifier la trajectoire d'émissions. Dans cette section, nous allons revenir sur les résultats obtenus par

[8] Une autre justification serait envisageable : que les réductions des émissions proviennent pour l'essentiel de technologies «end of pipe» dont l'usage pourrait s'interrompre brutalement. Mais cela est en contradiction avec les chiffres du modèle : le coût moyen instantané des réductions en 2050 est ici de 39 USD/tC et le coût marginal instantané de 84 USD/tC. En comparaison, la séquestration par capture et injection a un coût évalué (pour des volumes significatifs) entre 50 et 150 USD/tC (voir Johnson et Keith, 2003; Herzog, 1999 cités par Ha-Duong et Keith, 2003). Par ailleurs la fonction de coût d'abattement du modèle DICE 99 a été calibrée à partir du modèle RICE 99, lequel n'inclut pas de séquestration mais seulement de la substitution entre capital, travail, et énergie.

[9] La thèse d'Emeric Fortin (CIRED) revient en détail sur l'évolution historique de l'intensité carbone, en particulier lors des chocs et contre-chocs pétroliers : E. Fortin, *Définir les politiques climatiques : rôle des incertitudes et leçons de la modélisation économique*, 2004, Université de Paris X Nanterre, sous la direction de Gilles Rotillon.

[10] Ce terme est malheureusement une source d'ambiguité et de confusions possibles, entre autres raisons du fait de son emploi dans la littérature sur le changement technique induit : Clarke et Weyant (2002), par exemple, discutent de l'*inertie de la diffusion* des technologies induites par la R&D ou l'apprentissage. La définition que l'on a retenue dans le travail présenté ici reprend et précise le concept proposé par Grubb *et al.* (1995).

[11] Voir Clarke et Weyant (2002) pour une discussion détaillée des différents aspects de cette question, mais limitée au cadre du « changement technique induit », c'est-à-dire aux mécanismes de la R&D et de l'apprentissage.

différents auteurs concernant la question du tempo de l'abattement selon le mécanisme qu'ils incorporent. Surtout, nous nous attacherons à interpréter leurs différences, ce qui nous amènera à conclure à l'intérêt d'une représentation de l'inertie plutôt qu'à celle du changement technique induit.

1.3.1 Inertie et « tempo » de la politique d'abattement

La controverse Wigley, Richels, Edmonds / Ha-Duong, Grubb, Hourcade

L'importance de l'inertie de l'économie pour le choix de politique d'abattement a été au cœur d'une controverse sur la nécessité de procéder rapidement à des réductions d'émissions. Grubb, Chapuis et Ha-Duong (1995) présentent un modèle où le coût de l'écart aux émissions de référence dépend non seulement de cet écart (comme dans DICE) mais aussi du taux d'évolution de cet écart depuis la période précédente. Il y a donc un coût à changer brutalement de trajectoire. Leurs simulations montrent que plus la part relative de l'inertie dans les coûts est importante, plus il est avantageux (en coût-bénéfice) de réduire les émissions : une fois «vaincue» l'inertie de l'économie, il est possible d'abattre à un coût relativement modeste. La période de «démarrage» où l'effort reste plus faible qu'en l'absence d'inertie est courte (de 5 à 15 ans).

Ha-Duong, Grubb et Hourcade (1997) ont étendu cette analyse avec un modèle comparable (le modèle DIAM) et en prenant en compte l'incertitude qui porte sur les dommages climatiques. La combination de l'inertie et de l'incertain montre qu'il est très coûteux de trop retarder l'abattement : l'obtention d'une information négative sur le climat pourra rendre souhaitable un effort très important dans l'avenir, mais, en même temps, celui-ci sera très coûteux à cause de l'inertie si les efforts d'abattement précédents ont été trop modestes. La trajectoire d'abattement optimal présente un «arbitrage» en faveur d'un effort immédiat, qui impose un coût certain plus élevé dans un premier temps mais permet de réduire considérablement le coût des aléas défavorables («hedging»).

Ce travail permettait de tempérer les résultats de (Wigley *et al.*, 1996, «WRE») qui contestaient la nécessité d'un effort de réduction immédiat[12], implicites aux scénarios de stabilisation du GIEC de 1994 (IPCC, 1994).

Ces deux exercices (Grubb *et al.*, 1995; Ha-Duong *et al.*, 1997) ont un objectif illustratif. Ils suggèrent un intervalle de valeurs plausibles pour le paramètre d'inertie du modèle[13] mais ne prétendent pas fournir de véritable calibration du comportement du modèle ou de la fonction elle-même. Une calibration est *a priori* rendue difficile parce que ce paramètre porte directement sur la fonction de coût. Il s'agit en effet d'un modèle en équilibre partiel (ce qui en soi est légitime, voir la discussion dans Grubb *et al.*, 1995, note 9) et dont

[12] Ils opposaient réductions des émissions et « actions » qui préparent à l'abattement futur, en particulier la recherche et développement et la «démonstration». Voir plus loin les commentaires sur l'importance de la R&D pour infléchir la trajectoire d'émissions (Grubb *et al.*, 1995, p.423 et note 6).

[13] Par exemple, (Ha-Duong, 1998, pp.149–150) fait apparaître un temps caractéristique de la fonction de coût, qu'il interprète comme la durée de demi-vie exponentielle du système énergétique global, supposée de l'ordre de 50 ans.

les coûts sont directement calculés en comparant la trajectoire d'émissions de référence et la trajectoire d'émissions optimale. Toutefois, il est envisageable de définir comme suit les émissions tendancielles implicites au modèle. Pour un écart x_t réalisé en période t par rapport aux émissions de référence, les émissions tendancielles $\hat{E}_{t+1}$ en période $t+1$ sont telles que l'écart à la référence en $t+1$, $x_{t+1} = E^0_{t+1} - \hat{E}_{t+1}$, minimise le coût de la trajectoire en $t+1$, $C_{t+1}(E^0_{t+1}, x_t, x_{t+1})$. Pour le coût d'accélération quadratique qu'utilisent Grubb *et al.* (1995), on aura donc $0 < x_{t+1} < x_t$, et un retour progressif à la trajectoire de référence. Plus la part de l'inertie dans le coût sera importante, plus le retour se fera lentement. Cela aurait pu permettre une calibration éventuelle du paramètre, comparable avec celle effectuée en section 1.6.4, p. 42.

Les conséquences sectorielles

Lecocq, Hourcade et Ha-Duong (1998) prolongent l'étude de l'effet combiné de l'incertitude et de l'inertie dans un modèle mondial à deux secteurs dont les inerties sont différentes (une version du modèle STARTS). Le modèle représente des générations de capital. A chacune d'elle, un facteur d'émissions est associé. L'abattement est effectué en acquérant et mettant en service du capital moins émetteur que dans le scénario de référence, ce qui implique un surcoût. L'inertie provient de la durée de vie du capital. Les résultats obtenus montrent que des efforts doivent être entrepris immédiatement dans le secteur rigide. En cas de report de cet effort, la correction de trajectoire d'émissions qui devra être faite à l'avenir aura un coût très important et devra être effectuée principalement par le secteur flexible. Ces résultats suggèrent que la distinction entre effort et action faite par WRE doit aussi s'interpréter comme une répartition de l'effort futur entre secteur flexible et secteur rigide.

Là encore, l'objet du travail est qualitatif et illustratif. Pour la calibration, les difficultés semblent plus importantes parce qu'elle concerne d'avantage de paramètres : elles porteraient sur la répartition du capital entre les deux secteurs, les durées de vie respectives, et les fonctions de coût du capital moins émetteur pour chaque secteur[14].

1.3.2 Le changement induit dans le modèle de Goulder et Mathai

Davantage que l'inertie, Goulder et Mathai (2000) s'attachent à représenter spécifiquement le « changement technique induit » via l'un ou l'autre de deux mécanismes : soit des efforts spécifiques de R&D, soit du « learning-by-doing » relatif aux efforts d'abattement (voir FIG 1.2 p.19). Dans l'un et l'autre cas, un stock de connaissance s'accroît en fonction des efforts (de R&D ou d'abattement) et ce stock diminue les coûts d'abattement ultérieurs. A chaque période, le coût d'abattement est mesuré à partir de l'écart à une trajectoire d'émissions de référence fixée, en sorte que les émissions tendancielles restent égales à celles de référence quelle que soit la politique de réduction menée auparavant. Leur représentation du changement induit est donc sans effet sur les émissions tendancielles, puisqu'elles ne sont pas

[14] La section 1.11.1, en annexe de chapitre, apporte quelques informations supplémentaires.

influencées par le stock de connaissance[15,16].

Goulder et Mathai (2000) proposent alors une étude analytique du chemin optimal d'abattement et de taxe en présence de changement induit, tel qu'il l'ont défini. Leur étude est faite en univers certain. Ils trouvent que, dans un cadre coût-efficacité, le changement induit implique toujours un profil de taxe plus bas, la taxe étant classiquement définie comme le prix implicite du carbone. Il en va de même en coût-bénéfice lorsque les dommages sont convexes. L'impact sur le chemin d'abattement dépend de la nature du changement induit. Lorsque celui-ci est obtenu par un investissement spécifique en recherche et développement, cela tend à reporter une partie de l'effort d'abattement présent vers le futur. Lorsque le changement induit est représenté par un mécanisme d'apprentissage (*learning-by-doing*, LBD par la suite), donc par les efforts d'abattement précédents, le résultat analytique est ambigu.

Les résultats des simulations numériques de Goulder et Mathai suggèrent que l'impact du changement induit est très faible en début de trajectoire. Dans les deux cas, R&Det LBD, la calibration est faite relativement à la réduction de coût offerte par le changement induit sur l'horizon 2000–2200. Ils supposent que l'introduction du changement induit amène une diminution de 30% du coût total aggrégé d'abattement sur l'horizon 2000-2200 pour un objectif de concentration de 550ppm. Ce chiffre est obtenu à partir de Manne et Richels (1992) qui obtiennent un écart de coût de 90% entre scénarios fondés sur des hypothèses technologiques différentes. Mais Goulder et Mathai corrigent ce chiffre en faisant l'hypothèse que le passage d'un scénario à l'autre suppose des dépenses de R&D non représentées par Manne et Richels et qui ont un effet d'éviction, d'où un passage de 90 à 30% (voir Goulder et Mathai, 2000, note 40 page 21)).

Il faut observer que Goulder et Mathai proposent un traitement du LBD qui le met sur le même plan que la R&D. D'abord comme ils utilisent le même chiffre de calibration pour le cas où le changement induit provient de l'apprentissage (LBD), ils font donc en réalité une interprétation assez restricitive de ce dernier, en lui attribuant un effet d'éviction du même ordre que celui causé par les dépenses de R&D.

Par ailleurs, on observe que dans leur modèle numérique, tout l'impact des effets d'apprentissage se retrouve dans le futur lointain. Ceci s'explique facilement : d'un côté, comme leur spécification du changement induit n'a pas d'impact sur les émissions tendancielles, cela implique des taux d'abattement qui deviennent très élevés dans l'avenir. De ce fait, ce sont avant tout les efforts abattements futurs qui vont contribuer à une forte accumulation du « stock de connaissance ». De plus, ces réductions porteront sur des coûts beaucoup plus importants en volume que ceux des premières périodes, puisque correspondant à des efforts beaucoup plus importants. Au total, les effets de réduction des coûts par le changement induit se trouvent principalement dans le futur, même une fois actualisés. La calibration s'effectue sur le coût global et se trouve donc aussi dominée par les coûts futurs. On va voir que d'autres auteurs

[15]Il n'y a pas non plus d'effet indirect des efforts (de R&D ou d'abattement) via un impact sur les PIB futurs car Goulder et Mathai se placent dans le cadre d'un modèle d'équilibre partiel. Quoiqu'il en soit, on a vu (note de bas de page, p. 20) qu'avec le modèle DICE un tel effet était très secondaire.

[16]Bien que le modèle utilisé par Grubb *et al.* (1995) et Ha-Duong *et al.* (1997) soit très proche de celui de Goulder et Mathai , il ne souffre pas du même inconvénient : on a vu p. 24 qu'il était envisageable d'y définir des émissions tendancielles et que ces émissions dépendraient effectivement de la politique passées.

ont pour leur part proposé un traitement spécifique du LBD qui se fonde sur les courbes de réduction des coûts technologiques.

1.3.3 Des résultats décevants

C'est en direction d'une représentation fine du mécanisme de changement induit (ou «innovation induite») par la R&D ou le LBD qu'une partie des recherches s'est orientée. Plusieurs auteurs rappellent que la représentation de l'« innovation induite » a longtemps été évitée en raison du manque de données empiriques permettant de se faire une idée de son importance (Carraro et Hourcade, 1998; Dowlatabadi, 1998; Nordhaus, 2002). Les premiers travaux ont été entrepris dans le cadre de modèles bottom-up, comme par Messner (1995), dans le modèle MESSAGE, où le progrès technologique provient de déplacements le long de courbes d'apprentissage inspirées de données observées, en particulier sur la production d'électricité photovoltaïque (Grübler et Messner, 1998). Gerlagh et van der Zwaan (2003) représentent eux aussi le progrès technique induit via un mécanisme de learning-by-doing, mais dans un modèle top-down (DEMETER) à deux sources d'énergie (fossile et non-fossile). Enfin, le modèle DICE a fait l'objet de modifications pour y incorporer le changement induit (Nordhaus, 2002; Popp, 2003) ; contrairement aux deux autres travaux mentionnés, l'approche choisie est celle de la représentation de la R&D.

La conclusion commune à ces différents travaux est que l'effet de l'innovation induite sur la trajectoire du changement climatique est relativement modeste. En particulier, il ne justifie pas à moyen terme d'émissions notablement différentes de celles calculées sans changement induit (voir entre autres l'analyse de sensibilité de DEMETER faite par Gerlagh et van der Zwaan (2004), p. 57, Table II). Nous proposons maintenant d'envisager plus en détail les raisons de ces résultats.

Innovation induite par l'apprentissage.

Grübler et Messner (1998) proposent une représentation du changement induit via l'apprentissage effectué sur chacune des différentes technologies du système énergétique. Dans leur modèle (MESSAGE), les efforts d'abattement se traduisent par la mise en place progressive d'un système énergétique moins émetteur (que celui de référence) et permettent une diminution des coûts des technologies utilisées dans ce système. En comparant des scénarios avec ou sans apprentissage, ils concluent que la prise en compte de ce mécanisme devrait davantage inciter à plus d'«actions» immédiates (p.ex. pour créer des niches de marchés pour les technologies qui ont un potentiel d'amélioration important) plutôt qu'à des efforts d'abattement accrus. En première approche, ceci corrobore les affirmations de WRE.

Cependant, comme tout modèle bottom-up décrivant en détail des systèmes énergétiques, le modèle MESSAGE représente la longévité du stock de capital du secteur énergétique et de ses infrastructures. Une représentation explicite des technologies du système énergétique et de leur durée de vie revient *de facto* à déjà incorporer la partie de l'effet d'inertie qui est relative à la durabilité du capital du secteur énergétique.

Ce que Grübler et Messner mettent en évidence en comparant leur scénarios sans ou avec changement induit est donc un effet « pur » du changement induit par l'apprentissage, puisque l'effet de durabilité du capital est déjà présent dans les deux scénarios. On notera cependant qu'il n'y a pas dans leur modèle d'inertie de la demande, ce que que pourrait suggérer la durabilité du capital des ménages et du capital des réseaux et infrastructures autres que ceux de distribution de l'énergie.

Les résultats obtenus par R. Gerlagh et B. van der Zwaan (2003, 2004) confirment ceux de A. Grübler et S. Messner. Leur modèle, DEMETER, est un modèle d'équilibre général calculable compact. Le composite de services énergétiques qui entre dans leur fonction de production provient de deux formes d'énergie primaire, énergie fossile et énergie non-fossile, qui sont transformées par du capital structuré par générations et lié lors de son installation à l'une des deux formes d'énergie. Il en résulte un effet d'inertie dans la trajectoire de consommation d'énergie fossile (comme dans le modèle STARTS à deux secteurs, section 1.3.1). Enfin, la consommation de services énergique d'une génération (volume et partage fossile/non-fossile) dépend de l'élasticité et des prix. Le modèle incorpore la possibilité d'économies d'apprentissage sur les deux types de capitaux. Le coût d'un capital de service énergétique se déplace sur une logistique fonction du cumul des investissements réalisés, y compris avant la date initiale. Les paramètres de ces logistiques sont inspirés des observations relatives à des technologies particulières et de façon à reproduire le partage fossile/non-fossile prévalant aujourd'hui.

Leurs résultats sont clairement moins sensibles à la présence ou non d'économies d'apprentissage que d'une part, au fait que la consommation d'énergie s'adapte ou non instantanément, et d'autre part au fait qu'il y ait de la rigidité dans le partage fossile/non-fossile. Là encore, la part de l'effet d'inertie qui provient de la durabilité du capital du secteur énergétique est donc déjà prise en compte dans le scénario sans apprentissage.

Dans l'ensemble, les conclusions de ces travaux peuvent donc se reformuler ainsi : dans des modèles qui prennent déjà en compte l'inertie provenant de la durabilité du capital, l'introduction de changement induit par l'apprentissage a peu d'impact.

Innovation induite par la R&D

A l'inverse des travaux exposés au paragraphe précédent, qui introduisaient du changement technique induit par apprentissage dans des modèles présentant par ailleurs de l'inertie, les travaux de Nordhaus (2002) et Popp (2003) se sont attachés à introduire du changement induit par la R&D dans un modèle, DICE, qui par ailleurs ne présentait pas d'inertie (voir section 1.2.2). Dans le modèle développé par D. Popp (ENTICE), la réduction des émissions peut s'obtenir non seulement par accumulation de connaissances (changement technique induit), mais aussi par une diminution de l'usage du facteur énergie fossile dans la fonction de production[17].

Nordhaus (2002), comme Popp (2003), remarquent qu'à moyen terme, leurs résultats suggèrent que la R&D n'a qu'un rôle très mineur sur les trajectoires d'émission optimales. L'es-

[17] La fonction de production à deux facteurs du modèle DICE a été remplacée par une fonction de production à trois facteurs inspirée de RICE.

sentiel des réductions d'émissions reste donc obtenu par de la substitution[18]. Or dans R&DICE et dans ENTICE, pas plus que dans DICE, les efforts de réduction par substitution — pourtant les principaux — n'ont de persistance, de sorte qu'est toujours présent, même s'il est un peu atténué, l'inconvénient signalé en section 1.2.2. Dans l'économie décrite par DICE et les modèles dérivés, les efforts d'abattement passés ne permettent quasiment pas de modifier la tendance à moyen terme des émissions futures.

Conclusion et perspectives

En définitive, les résultats analysés confirment l'importance d'une représentation de l'impact des politiques d'aujourd'hui sur les coûts futurs d'abatement, à condition que cette représentation ne soit pas restreinte au seul changement technique induit, privilégié aujourd'hui par plusieurs auteurs dans des modèles où la réduction des émissions n'a pas d'effets durables (Goulder et Mathai, 2000; Nordhaus, 2002; Popp, 2003).

On peut alors s'interroger sur les raisons qui font que, semble t-il, l'insistance de Grubb *et al.* (1995) et Ha-Duong *et al.* (1997) au sujet de l'inertie n'ait pas eu plus d'écho. D'abord, l'intervalle dans lequel Grubb *et al*. et à leur suite Ha-Duong *et al*. choisissent la valeur du paramètre d'inertie de leur fonction de coût est justifié d'une façon qui ne repose pas sur une véritable calibration de cette fonction ni du comportement du modèle. Mais cet inconvénient ne constitue pas un obstacle à la compréhension de leurs remarques sur l'inertie. En fait, la réponse est peut-être fournie par l'interprétation que font Goulder et Mathai du travail de Ha-Duong *et al.* : ils y voient une tentative de représentation des économies d'apprentissage. « *In contrast [to Wigley et al.], Ha Duong* et al. *have maintained that the potential for ITC [induced technical change] justifies relatively more abatement in the near term, in light of the ability of current activities to contribute to learning by doing.* » (Goulder et Mathai, 2000, p. 2). De ce point de vue, on comprend la volonté d'aboutir à une meilleure représentation des économies d'apprentissage ou de l'autre mécanisme du changement induit, la R&D. Mais ce point de vue est restrictif et ne fait pas justice à l'argumentation développée par Grubb *et al.*, argumentation sur laquelle Ha-Duong *et al.* s'appuient (voir le début de ce chapitre). La confusion a pu provenir de la formulation très compacte du modèle de Ha-Duong *et al.* qui pose simplement que le coût des réductions d'émissions en $t+1$ dépend aussi des réductions effectuées en t. Il peut effectivement s'interpréter comme un modèle de learning-by-doing — puisque dans le cas de la durabilité comme dans le cas de l'apprentissage, la détermination est la même, voir FIG 1.2 — et ce d'autant plus qu'il ne donne pas à voir que les émissions tendancielles sont modifiées par l'effort d'abattement, alors qu'en pratique c'est là une raison de la diminution des coûts futurs. Au contraire, les abattements dont il traite se raportent à

[18] W.D. Nordhaus et à sa suite D. Popp interprètent la réduction des émissions dans les modèles DICE et RICE comme provenant de « substitution », au sens où pour avoir à la date t un certain niveau de consommation, et si on souhaite en même temps effectuer des réduction d'émissions, il est nécessaire d'avoir un stock de capital plus élevé que si on ne faisait pas cet effort de réduction. Dans RICE il s'agit explicitement de subsitution capital-énergie dans une fonction de production Cobb-Douglass ; dans DICE, l'énergie n'entre pas dans la fonction de production, mais il faut pouvoir utiliser une partie de la production effectuée pour financer les réductions d'émissions.

une référence fixe (même si on a indiqué qu'il était possible de le réécrire de façon à faire apparaître des émissions tendancielles).

On a vu que plusieurs modèles font déjà place par construction à de l'inertie, dès lors que les émissions sont associées à des générations de capital[19]. Mais, bien que l'on soit tenté de conclure à la supériorité de semblables modèles, ils sont en général trop lourds pour permettre le type d'analyse coût-bénéfice rendu possible par la relative simplicité des modèles de la famille DICE. Même DEMETER, sans doute un des modèles les plus compacts, n'inclut pas de rétroaction du climat sur l'économie ; le climat y est bien représenté, mais avec un module simplifié à l'extrême par rapport à celui intégré dans la dernière version de DICE (Nordhaus et Boyer, 1999a) ; surtout, par rapport aux modèles qui sont formulés comme un problème d'optimisation dynamique, la relative complexité de résolution inhérente à un modèle d'équilibre général calculable ne permet sans doute pas d'introduire de l'incertitude et donc d'aborder la question de l'effet conjoint de l'inertie et de l'incertain, question qui était celle de Ha-Duong *et al.* (1997). Pour des raisons pratiques comparables, ce sont aussi des modèles compacts et formulés comme des systèmes dynamiques à optimiser — en particulier ceux de la famille DICE — qui restent utilisés pour aborder nombre de questions économiques en relation avec la lutte contre le changement climatique (voir la bibliographie donnée en section 1.2.2). À notre connaissance, parmi ces modèles maniables, les seuls qui aujourd'hui offrent une représentation argumentée de l'inertie s'inspirent directement de celle introduite par Grubb et al., Ha-Duong et al. et Ha-Duong dans le modèle DIAM. Ainsi, Lecocq (2000) dans le modèle STARTS, puis Ambrosi *et al.* (2003) et Ambrosi (2004) dans le modèle RESPONSE utilisent une fonction de coût d'abattement qui dépend aussi du niveau de réduction de la période antérieure. Par rapport à DIAM, seule la forme de la fonction de coût change, tandis que le choix du paramètre d'inertie procède du même principe, en faisant référence à la durée de vie du capital.

L'objet des sections qui suivent est de proposer et d'étudier les conséquences d'une représentation de l'inertie dans le modèle *top-down* le plus diffusé, le modèle DICE, en ayant recours explicitement à la notion d'émissions tendancielles afin de lever les ambiguités qui viennent d'une représentation se rapportant directement aux coûts. Une première étape va donc consister à définir les émissions tendancielles, mais seulement après avoir présenté ce modèle.

[19] Il serait intéressant de confirmer que c'est là une explication de la différence considérable entre les résultats de DEMETER et DICE que constatent Gerlagh et van der Zwaan (2004). Pour ce faire, une première étape serait de voir comment se comportent les émissions tendancielles de DEMETER.

1.4 Les modèles employés : DICE et DISCERNI

1.4.1 Présentation du modèle DICE

Le modèle DICE (Nordhaus, 1994; Nordhaus et Boyer, 1999a) est un modèle de croissance optimale à la Ramsey-Cass-Koopmans, qui comprend un module climatique. Ce module est alimenté par les émissions de GES produites par l'activité économique et rétroagit sur celle-ci via des dommages climatiques. On peut donc le voir comme un modèle de croissance dont un des facteurs de production est le climat, ce climat ayant sa propre dynamique — comme par ailleurs le capital — et évoluant en fonction de décisions prises au niveau de l'économie. Capital, investissment, consommation et population y sont aggrégés au niveau mondial. Le modèle opère en temps discret par pas de dix ans.

Plus précisément, concernant le module climatique, on peut constater que l'interaction entre l'économie et le climat se fait par deux variables de couplage[20] :

1. les *émissions*, déterminées par le capital et l'effort de réduction, viennent modifier le climat ;
2. la *température atmosphérique moyenne globale*, variable d'état du module climatique, a un impact sur la production disponible.

Bien que DICE soit décrit avec force détail par les auteurs[21] sa structure mathématique n'est pas exposée avec beaucoup de clarté. Dans la littérature sur les modèles intégrés, les paramètres du temps sont presque systématiquement présentés sur le même plan que les commandes, les états, et les variables intermédiaires fonctions des variables d'état et de commande.

La description qui suit est donc une contribution originale, utile lorque l'on cherche des résultats analytiques (sections 1.8 et 1.9) ou que l'on veut définir avec rigueur les scénarios numériques effectués (section 1.5). On s'affranchit donc autant que possible de toute mention des paramètres, détails certes très pertinents pour l'économiste et qui ont une forte influence sur les résultats numériques, mais qui brouillent considérablement la compréhension de la structure du modèle[22].

1.4.2 Structure de contrôle des modèles DICE et DISCERNI

La description qui suit est faite pour rendre compte en une fois du modèle DICE, du modèle DISCERNI (qui incopore une représentation de l'inertie), et des différentes variantes de ces

[20]Cette désignation est empruntée à Stéphane Hallegatte (CIRED et CNRM), *The long time scales of the climate-economy feedback and the climatic cost of growth*, proposé à Environmental Modeling and Assessment, 2004.

[21]En particulier toutes les équations des paramètres fonction du temps sont décrits de façon concomitante à la dynamique. Il est vrai que la mise en équation et la calibration de ces paramètres représente un travail considérable.

[22]Une présentation exhaustive de ces paramètres se trouve dans Nordhaus (1994) et Nordhaus et Boyer (1999a) ; le code donné en annexe A comprend de fait l'ensemble de ces détails. Les parties qui proviennent du code de W.D. Nordhaus et J. Boyer ont d'ailleurs été réorganisées de façon à en faciliter la lecture.

modèles auquelles on aura recours ; le modèle DISCERNI est présenté plus loin, section 1.6.3.

Temps il y a $T+1$ pas de temps d'une longueur de π années, $t=0,\ldots,t=T$

Condition initiale A la date initiale $t=0$, l'état est un vecteur de $\mathbb{R}^7$ où l'on distingue pour la suite :
- K_0, le stock de capital ;
- σ_0, l'intensité carbone « spontanée » de l'activité économique en $t=0$, c'est à dire l'intensité carbone qui est réalisée si aucun abattement n'est effectué en $t=0,$;
- M_0, la concentration de GES dans l'atmosphère ;
- et $X_0 \in \mathbb{R}^4$ un vecteur qui rassemble d'autres états initiaux relatifs à l'environnement (concentration en carbone dans les autres couches géophysiques et températures).

Commande Le décideur doit choisir
- a_t, le taux (pourcentage) de réduction des émissions de GES ;
- et b_t, le taux d'investissement[23] en capital productif,

que l'économie effectue à chacune des périodes $t=0,\ldots,t=T$.

Domaine d'admissibilité $a_t, b_t \in [0,1]$

Dynamique Pour chaque période $t+1$, $0<t<T-1$, l'état du système économie-environnement est donné par les équations dynamiques qui décrivent l'évolution de $(K_t, \sigma_t, M_t, X_t)$.

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \pi b_t \gamma_t(K_t, X_t, a_t) \tag{1.1}$$
$$\sigma_{t+1} = \Phi_t(\sigma_t, a_t) \tag{1.2}$$
$$M_{t+1} = \alpha_m M_t + h(X_t) + \pi\beta_{\mathcal{E}t}(K_t, \sigma_t, a_t) + LU_t \tag{1.3}$$
$$X_{t+1} = g(X_t, M_t) \tag{1.4}$$

[23] La description que donnent les auteurs considère en fait le volume d'investissement, ce qui impose de recourir à une contrainte d'admissibilité dépendant de l'état (investissement plus dépenses d'abattement doivent être inférieurs à la production disponible). Il est plus pratique de considérer le taux d'investissement ce qui permet de définir un ensemble d'admissibilité indépendant du temps. Garder comme variable de commande non point le taux mais le volume d'investissement, I_t, demanderait de réécrire le problème (1.8) comme suit. Dans le problème (1.8) le volume d'investissement est égal $b_t\gamma_t(K_t, X_t, a_t)$, d'où la contrainte d'admissibilité pour (a_t, I_t),

$$I_t \leq \gamma_t(K_t, X_t, a_t)\,.$$

Enfin, la dynamique du capital est remplacée par

$$K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \pi I_t\,,$$

et l'objectif instantané devient

$$U_t(\gamma_t(K_t, X_t, a_t) - I_t)\,.$$

dynamique du capital (1.1) et définition du produit économique Le taux de déclassement δ est défini pour une période. La grandeur $\mathcal{Y}_t(\cdot)$ définit le *produit mondial disponible* pour la consommation et l'investissement, une fois déduits les coûts de l'effort d'abattement a_t et des dommages climatiques subis quand le système climatique est dans l'état X_t :

$$\mathcal{Y}_t(K_t, X_t, a_t) = F_t(K_t)(1 - D(X_t))(1 - C_t(a_t)), \tag{1.5}$$

où

- F_t est la fonction de production du capital au cours d'une année de la période t ; la paramétrisation par t vient de la dépendance en la population et en un facteur de progrès technique qui sont des paramètres du temps ;
- D est la fonction de dommage ;
- C_t est la fonction de coût d'abattement

On remarquera que l'écriture de $\mathcal{Y}$ est problématique puisqu'il n'est pas possible de séparer totalement la perte de revenu disponible résultant de l'état du climat de celle due à l'effort d'abattement. Pour les interprétations économiques, on retiendra la convention suivante[24] :

- $D(X_t)F_t(K_t)$ sont les *dommages climatiques* (la perte résultant du climat) ;
- $C_t(a_t)(1 - D(X_t))F_t(K_t)$ est le *coût d'abattement*.

dynamique de l'intensité carbone spontanée (1.2) Dans le modèle DICE d'origine, il s'agit simplement d'une fonction du temps : $\sigma_t = \sigma^0(t)$. Une contribution de ce chapitre est précisément de proposer une dynamique calibrée pour σ_t, définie comme fonction de : l'intensité spontanée précédente, de l'effort d'abattement, et du temps. Voir section 1.6.3.

dynamique de la concentration atmosphérique[25] (1.3) et définition des émissions L'équation (1.3) fait apparaître le taux de persistance dans l'atmosphère, α_m, les flux provenant des autres puits de carbone, $h(X_t)$, en fonction des concentrations atteintes dans ces puits[26], un paramètre représentant la contribution du changement d'usage des sols[27] au cours de la période, LU_t, et enfin la contribution des émissions industrielles annuelles en période t. Ces émissions sont définies par la grandeur $\mathcal{E}_t(\cdot)$ qui est fonction du stock de capital, de l'effort d'abattement, et de l'intensité carbone avant abatement.

$$\mathcal{E}_t(K_t, \sigma_t, a_t) = (1 - a_t)\sigma_t F(K_t) \tag{1.6}$$

[24] Ce choix se fonde sur l'idée suivante : lorsque les dommages sont importants, ce n'est pas seulement la productivité effective du capital qui est réduite mais aussi celle des émissions (i.e. de l'énergie fossile) ; par conséquent, le coût d'une réduction de a% des émissions est lui aussi réduit.

Le choix inverse est néanmoins formellement possible avec un raisonnement symétrique : en réduisant l'input énergétique on diminue la productivité du capital et donc la taille du produit affecté par les dommages. Il me paraît plus sujet à caution si l'on considère qu'en réalité les dommages n'affectent pas seulement de la production mais aussi du capital existant.

[25] Voir (Ambrosi, 2004, p. 184–186) pour une exposition complémentaire de celle fournie par Nordhaus et Boyer (1999a)

[26] Ces concentrations sont données par un sous-vecteur de X_t

[27] Pour une étude des possibilités ouvertes par la considération des usages des sols comme une variable de décision, voir Gitz (2004) qui expose aussi en quoi une représentation exogène des émissions de la biomasse est une simplification qui n'est pas négligeable.

où le terme $(1-a_t)\sigma_t$ correspond à l'intensité carbone effective, à savoir l'intensité carbone spontanée réduite par l'effort d'abattement.

Objectif On se donne pour objectif la maximisation de la fonction de bien-être[28] J,

$$J(a,b,K,X) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{t=0}^{T} \pi U_t\left((1-b_t)\gamma_t(K_t,X_t,a_t)\right) \tag{1.7}$$

où U_t est la valeur présente[29] de l'utilité à la date t, et où $(1-b_t)\gamma_t$ est le montant de la consommation[30] à la date t.

Récapitulatif

Le problème décrit par le modèle DICE s'écrit :

$$\max_{(a_0,b_0),\ldots,(a_T,b_T)} \sum_{t=0}^{T} \pi U_t((1-b_t)\gamma_t(K_t,X_t,a_t)) \tag{1.8}$$

avec $\forall t \in [0,T],\ a_t \in [0,1]$ et $b_t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}
K_{t+1} &= (1-\delta)K_t + \pi b_t \gamma_t(a_t,X_t,K_t)\\
\sigma_{t+1} &= \sigma^0(t+1)\\
M_{t+1} &= \alpha_M M_t + h(X_t) + \pi\beta \mathcal{E}_t(K_t,\sigma_t,a_t) + LU_t\\
X_{t+1} &= g(X_t,M_t)
\end{aligned}$$

où $\gamma_t(K_t,X_t,a_t) = F_t(K_t)(1-D(X_t))(1-C_t(a_t))$
et $\mathcal{E}_t(K_t,\sigma_t,a_t) = (1-a_t)\sigma_t F(K_t)$

avec pour conditions initiales K_0,σ_0,M_0,X_0.

La fonction D est croissante[a], C_t strictement croissante, convexe. F_t, U_t strictement croissantes concaves.

[a] différentes formes seront utilisées pour la fonction de dommages : l'absence de dommages, $D=0$; une fonction puissance (modèle original), une fonction à seuil (sigmoïde).

[28] Cette présentation laisse de côté la condition terminale.

[29] Actualisée au taux de préférence pure pour le présent. Le facteur correspondant ne dépendant que du temps, il est « capturé » par l'indexation par t de U_t.

[30] L'utilité est définie comme le logarithme de la consommation par tête. Là encore, la population ne dépendant que du temps, l'indexation par t de l'utilité permet de capturer ce paramètre.

1.5 Définition des scénarios : optimum, référence, tendance

L'exploitation et l'interprétation des résultats du modèle se fonde sur le sens donné au différents scénarios calculés. Nous proposons ici une définition cohérente du scénario de référence — ce qui n'est pas le cas habituellement — et nous y ajoutons la définition des scénarios tendanciels pour clarifier la notion d'émissions tendancielles, utilisée de façon intuitive dans les pages précédentes.

1.5.1 Scenario optimal

Le scénario optimal d'abattement et d'investissement est défini comme le résulat de la résolution du problème (1.8). On désignera par un exposant « # » un jeu de commandes optimales, les valeurs des variables d'état associées, ainsi que toutes les fonctions de ces commandes et de ces états.

1.5.2 Scenarios de référence

Scenarios de référence usuels

Il existe plusieurs façons de définir le scénario « de référence » en modélisation intégrée, ce qui peut évidemment prêter à confusion, d'autant que ceci va dépendre du type de problème résolu (problème en coût-bénéfice ou en coût-efficacité). Pour un modèle résolu en coût-bénéfice, comme DICE, on peut en proposer la définition générale suivante.

On appelera *scénario de référence* le scénario de « laissez-faire », autrement dit l'absence de politique d'internalisation des dommages climatiques.

Dans un tel scénario, les dommages ont bien lieu[31] mais l'agent représentatif ne prend pas en compte le fait qu'ils dépendent de ses propres décisions. Il les tient donc pour exogènes. Toutes les façons de calculer ce scénario ont en commun le fait que l'effort d'abattement est nul à toutes les périodes. L'idée sous-jacente est qu'en l'absence de politique d'internalisation, aucun acteur économique n'aura intérêt à réduire ses émissions.

En pratique, le calcul effectué pour obtenir le scénario dit de référence ne correspond pas toujours exactement à cette définition. W. Nordhaus, par exemple, calcule parfois le scénario de référence comme solution du problème (1.8) auquel est ajouté la contrainte $a_t = 0, \forall t$, ce qui n'est pas la même chose que l'absence d'internalisation. L'agent représentatif prend bien en compte son influence sur les dommages, mais ne peut les réduire qu'en ajustant l'investissement.

Une autre façon fréquente de calculer le scénario de référence est de résoudre le problème (1.8) en suposant d'abord qu'il n'y a pas de dommages (donc en remplaçant la fonction D par 0), puis, à partir de la trajectoire obtenue pour le climat (variable X), de calculer les dommages et de déduire les pertes de production correspondantes des consommations. La

[31] Ce qui n'est généralement pas le cas pour la référence en coût-efficacité.

rétroaction climatique n'est donc calculée qu'ensuite, comme une approximation au premier ordre. On vérifie facilement que dans ce cas aussi la commande d'abattement est nulle[32].

Un scénario de référence cohérent

Le scénario de référence, tel qu'il est défini d'ordinaire à partir des modèles intégrés, est un scénario où il n'y a pas cohérence entre d'un côté les choix d'investissements réalisés par l'agent représentatif, et d'autre part le taux de rendement du capital tel qu'il résulte de la rétroaction du climat. On va définir ici un scénario de référence, donc sans internalisation, mais qui présente cette cohérence[33].

Dans un tel scénario, l'agent représentatif fait ses choix d'investissment en fonction du rendement du capital qu'il anticipe. Comme ce rendement dépend des dommages climatiques, il a besoin d'anticiper non seulement le stock de capital futur mais aussi le climat futur. Il considère toutefois le climat comme une variable exogène à ses choix.

Pour un modèle de type DICE, on cherche donc à ce que le décideur
- anticipe à chaque date un niveau de température (et de dommages) ;
- tienne ces niveaux de température pour exogènes (i.e. indépendant de ses décisions).

Enfin, la solution obtenue doit être telle qu'à chaque date, le niveau de température (et dommages) coincident avec ceux que l'on peut calculer comme résultant des choix du décideur. C'est en ce sens qu'on parlera de cohérence.

L'information sur le climat Pour avoir la cohérence recherchée, il faut donc que le climat anticipé soit bien celui réalisé comme conséquence des choix économiques. La façon d'obtenir cette cohérence est d'introduire un autre agent dont l'objectif est de produire et diffuser une vision fondée de ce que pourra être le climat futur ; cet agent n'opère pas de choix économiques (abattement ou investissement). On peut considérer un tel agent comme représentant de la collectivité scientifique, des climatologistes, ou encore du Groupe de travail I du GIEC qui réunit et difffuse ce type de connaissances (IPCC, 2001). Pour sa prospective de l'évolution future du climat, cet agent prend comme donnés les choix économiques.

Représentation par un jeu non coopératif Formellement, on va représenter cette interaction comme un équilibre de Nash entre l'agent représentatif des choix économiques et l'agent représentatif de la prospective climatique. L'agent représentatif des choix économiques cherche à maximiser l'utilité en prenant en compte les climats futurs mais néglige l'impact de ses décisions (il n'y a pas d'internalisation spontanée) ; la communauté scientifique cherche à minimiser la déviation entre sa prévision climatique et le climat qui sera réalisé, en prenant en compte les prévisions d'investissement des décideurs économiques.

[32] Comme il n'y a pas de dommages, seule la dynamique du capital intervient, or, $\partial U/\partial a < 0$, $\partial K_{t+1}/\partial a_t < 0$, et $\partial U/\partial K > 0$.

[33] Pour une réflexion sur la rétro-action climat-économie dans le cadre d'un modèle de simulation, voir Stéphane Hallegatte, *Op.cit.*

Pour chacune des variables du sytème dynamique DICE, on désigne maintenant par Z le multiplet $(Z_t, t \in [0,T])$. Pour un schéma de commande (a,b), les conditions initiales et les équations dynamiques (1.1–1.4) définissent la trajectoire de l'état (K,σ,M,X). Elles permettent d'écrire

$$K = H(a,b,K_0,X) \tag{1.9}$$
$$X = \Gamma(a,\sigma_0,M_0,X_0,K) \tag{1.10}$$

En omettant les conditions initiales pour simplifier les notations, on peut alors définir le jeu comme

$$\begin{cases} \max_{a,b} J(a,b,K,\xi) \\ \qquad \text{avec} \quad K = H(a,b,\xi) \quad \text{où } \xi \text{ est fixé} \\ \\ \max_{\xi} \; -\|\xi - X\| \\ \qquad \text{avec} \quad X = \Gamma(a,K) \quad \text{où } a \text{ et } K \text{ sont fixés} \end{cases} \tag{1.11}$$

Il vient immédiatement[34] que $a = 0$ est solution de la maximisation de J pour tout ξ annoncé.

Finalement l'équilibre de Nash $(\overline{a},\overline{b},\overline{\xi})$ est solution de

$$\begin{cases} \overline{a} &= 0 \\ \overline{b} &= \arg\max_b J(0,b,H(0,b,\overline{\xi}),\overline{\xi}) \\ \overline{\xi} &= \Gamma(0,H(0,\overline{b},\overline{\xi})) \end{cases} \tag{1.12}$$

On désignera par scénario de référence une telle solution. En particulier, les émissisons de référence données par

$$\overline{E}_t = (1-\overline{a}_t)\overline{\sigma}_t F_t(\overline{K}_t) = \sigma_t^0 F_t(\overline{K}_t)$$

Illustration et conséquences pratiques

Ces définitions différentes se traduisent-elles en pratique par des trajectoires qui présentent entre elles des écarts notables ? Il y a lieu de penser que ce pourrait être le cas dès lors que le jeu de paramètres qui entre dans la définition des fonctions D (les dommages) et g (la dynamique du climat) conduit à un réchauffement rapide ou des dommages élevés. Ce type de situation se présente dans les analyses de sensibilité mais aussi lorsque on introduit de l'incertain[35] en supposant qu'un de ces paramètres, bien que fixe, n'est pas connu *a priori* et pourrait avoir une valeur très favorable ou très défavorable.

Dans un cas où les dommages et la température connaissent des évolutions assez soutenues, la Figure 1.5 montre que cet écart demeure modeste en comparaison du décrochage

[34] Même raisonnement qu'en note (32), à ce ceci près que les dommages ne sont pas nuls mais qu'à chaque date $D(\xi_t)$ est indépendant de a.

[35] ce qui demande évidemment un réaménagement du modèle, voir par exemple la section 3.12 en annexe du chapitre 3

qu'opèrent les émissions optimales. Outre la trajectoire optimale et la trajectoire de référence cohérente, on a représenté seulement la trajectoire de référence avec dommages supposés nuls.

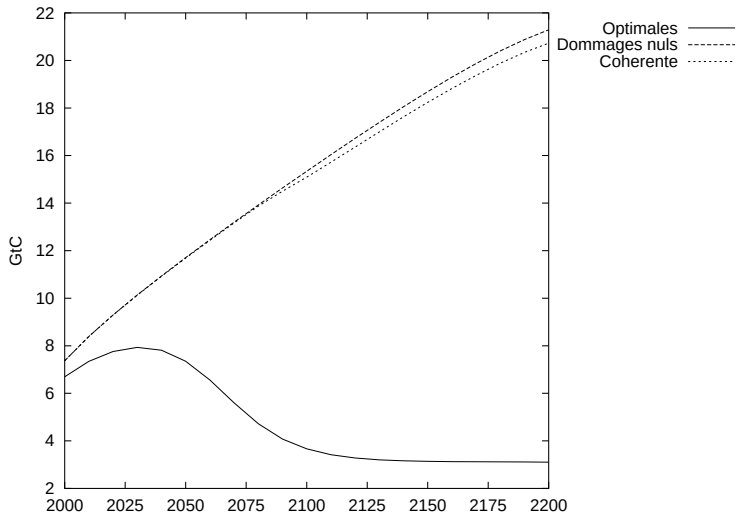

FIG. 1.5 – Emissions de référence « cohérentes » et en l'absence de dommages.
Les émissions optimales sont données pour comparaison.
Modèle : DICE-RESPONSE (modèle DICE ayant pour fonction g le module de température du modèle RESPONSE, et pour fonction de dommage D, la fonction de dommages à seuil de ce même modèle).

Au vu de ce résultat, on se contentera dans toute la suite de définir les émissions de référence à partir des émissions sans dommages. Ce choix serait éventuellement à corriger lorsque des valeurs plus pessimistes des paramètres sont employées.

1.5.3 Scénario tendanciel après la date t

Soit $(a_0,b_0),\ldots,(a_t,b_t)$ une suite de décisions suivies jusqu'à la date $t<T$ et (K_0,σ_0,M_0,X_0), $\ldots$, $(K_{t+1},\sigma_{t+1},M_{t+1},X_{t+1})$ la trajectoire d'état associée.

On appellera *scénario tendanciel après la date t*, le scénario de référence du sous-problème de (1.8) ayant $t+1$ pour phase initiale et pour condition initiale $(K_{t+1},\sigma_{t+1},M_{t+1},X_{t+1})$.

De même qu'il y a plusieurs façons de définir le scénario de référence, il y aura donc plusieurs façons de définir le scénario tendanciel : soit *(a)* en contraignant $a_{\tau>t}=0$; soit *(b)* en remplaçant D par 0 et en soustrayant ensuite $D(X_\tau)F(K_\tau)$ de la consommation ; soit *(c)* en adoptant la définition cohérente proposée plus haut. Lorsque le scénario de référence et le scénario tendanciel sont définis suivant un principe identique, il est immédiat en appliquant le principe d'optimalité de Bellman qu'après toute date t, le scénario tendanciel issu du scénario de référence suivi jusqu'à la date t coincide avec ce scénario de référence.

En désignant par la décoration $\hat{}$ les grandeurs associées au scénario tendanciel après la date t, on aura donc $(\hat{a}_{t+1},\ldots,\hat{a}_T)=(0,\ldots,0)$ en sorte que pour $\tau>t$, les *émissions tendan-*

cielles sont

$$\hat{E}_\tau = \sigma_\tau F_\tau(K_\tau). \tag{1.13}$$

En particulier, en $t+1$, les émissions tendancielles sont entièrement définies par l'état initial (σ_{t+1}, K_{t+1}) du sous-problème : $\hat{E}_{t+1} = \sigma_{t+1} F_{t+1}(K_{t+1})$. Cette propriété est tout à fait pratique : on a accès aux émissions tendancielles sans avoir à effectuer une nouvelle résolution.

Alors que l'on pourrait définir de façon analogue les émissions tendancielles dans d'autres modèles que DICE (par exemple dans ENTICE ou dans RICE) l'obtention des émissions tendancielles impliquerait une nouvelle résolution parce que les émissions (et non l'abattement) y sont une variable de commande.

1.6 Une proposition de représentation de l'inertie

1.6.1 DICE : un module climat plus détaillé que l'économie

La section 1.2.2 a montré comment le modèle DICE pouvait donner des résultats peu satisfaisants lorsqu'on lui faisait résoudre certains problèmes, comme la réduction par deux des émissions mondiales d'ici 2050. Surtout, on a illustré que la cause de cet inconvénient, l'absence d'inertie, avait un impact considérable sur la mesure des niveaux d'abattements effectués dans un scenario plus classique de stabilisation des concentrations à 550 ppm. Cet impact se retrouve nécessairement sur les coûts encourus et on peut donc supposer que le profil obtenu pour la trajectoire optimale de stabilisation est aussi fortement influencé par cette particularité du modèle.

Cependant, en ce qui concerne le problème de stabilisation à 550 ppm, le comportement du modèle est à première vue satisfaisant, au sens où la solution ne présente pas de rupture dans ses trajectoires d'abattement ou d'émissions[36] (Figure 1.4). En fait, la raison de ce bon comportement vient d'abord du module climatique de DICE. Il y a en effet un bénéfice à réduire les émissions de chaque date parce que ces émissions accroissent le *stock* de carbone dans la biosphère de façon persistante. Cela vaut la peine d'y insister : l'allure satisfaisante de la courbe d'abattement produite par DICE est une conséquence de la description relativement plus détaillée du module climatique (cinq variables d'états) par rapport au module économique (une seule variable d'état, le stock de capital).

Ce déséquilibre n'est pas immédiatement perceptible pour le lecteur des documents d'origine (Nordhaus, 1994; Nordhaus et Boyer, 2000) dans lequels les présentations confondent sous le terme de « variables endogènes » aussi bien les variables d'états que des variables intermédiaires (par exemple les émissions $\mathcal{E}$ ou le produit mondial $\mathcal{Y}$) qui sont définies comme fonction de l'état et de la commande. La modification que l'on propose vise à améliorer le module économique de DICE.

On a vu que dans le modèle DICE, un schéma de commande (une politique) suivie jusqu'à

[36] Mais comme on l'a vu de telles ruptures sont présentes au niveau des émissions tendancielles

la date t, $(a_0,\ldots,a_t,b_0,\ldots,b_t)$ avait pour conséquence à la date $t+1$ les émissions tendancielles

$$\hat{E}_{t+1} = \sigma^0_{t+1} F_{t+1}(K_{t+1})$$

La façon la plus simple de corriger ces émissions tendancielles, dont a vu par ailleurs qu'elles posaient problème, sera donc de remplacer le paramètre de l'intensité carbone spontanée par une variable d'état.

1.6.2 L'inertie dans le modèle de Hammit

On s'est inspiré d'un modèle utilisé par Hammitt (1999) et dans lequel l'auteur indique en passant représenter la *« path dependance »* du développement et de la diffusion des technologies émettrices (ou non) de CO_2 par

$$\sigma_{t+1} = \sigma^0_{t+1} \prod_{\tau=0}^{t} (1-\zeta a_\tau) \quad \zeta = 0.01.$$

Les graphiques présentés par Hammit dans son article donnent à penser que cette endogénéisation suffit déjà pour obtenir des modifications sensibles du profil optimal des coûts instantanés d'abattement (cas coût-efficacité), et dans le cas coût-bénéfice, du profil des émissions optimales. Dans ce dernier cas, la dépense marginale optimale en 2000 passe de 10 USD/tC ($\zeta = 0$) à 19 USD/tC ($\zeta = 0.01$). On pourrait s'attendre à ce que les émissions tendancielles soient elles aussi modifiées.

Des résultats intéressants. On a incorporé cette représentation de l'évolution endogène de σ dans le modèle DICE. L'équation (1.2) devient donc $\sigma_{t+1} = \frac{\sigma^0_{t+1}}{\sigma^0_t}(1-\zeta a_t)\sigma_t$. Les conséquences sur les émissions optimales et tendancielles sont présentés en Figure 1.6. Avec la valeur $\zeta = 0.01$, les résultats qu'on obtient sont en fait presque identiques à ceux d'origine ($\zeta = 0$). Le fait que Hammit obtienne une différence sensible des profil d'émissions optimales est surprenant, malgré les différences de modélisation ente DICE et son modèle (en particulier de la fonction de coût d'abattement). Il est envisageable qu'il ait en fait pris $\zeta = 0.1$.

En effet, en prenant $\zeta = 0.1$ dans nos simulations, les émissions optimales sont visiblement différentes de celles du cas $\zeta = 0$ (même si la différence reste moins prononcée que chez Hammit). L'effet sur le profil de la dépense marginale d'abattement est proche[37] des résultats mentionnés par Hammit[38]. Surtout, la modification des émissions tendancielles devient perceptible, mais elle reste faible. Avec un arrêt de la politique de réduction en 2050, le saut de l'intensité carbone du PIB mondial est tout de même de 29%.

[37] Dans un premier temps seulement. L'écart devient sensible vers 2100.

[38] Noter que Hammit semble désigner par coût marginal le coût marginal instantané, que l'on désigne parfois ici de *dépense* marginale

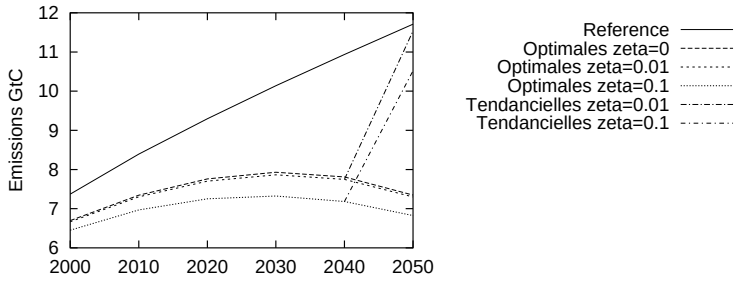

FIG. 1.6 – Emissions optimales et tendancielles, évolution de l'intensité carbone formulée d'après Hammit

	Emissions effectuées		Tendancielles
	2000	2040	2050
Référence (E^0)	7,37	10,94	11,71
Optimales avec $\zeta = 0,1$ ($E^{\#}$)	6,45	7,18	10,52

TAB. 1.2 – Emissions (GtC) avec modification tendancielle formulée d'après Hammit.

Une formulation en partie décevante. Cette représentation reste insatisfaisante pour deux raisons. D'abord, Hammit ne justifie pas la valeur du paramètre ζ ; ensuite, avec cette valeur, les émissions tendancielles de DICE ne sont modifiées que de façon qui paraît insuffisante. Certes, prendre une valeur élevée pour ζ permettrait une inertie plus importante des émissions tendancielles mais serait peut-être irréaliste à long terme. En effet, la formulation de Hammit implique que si un effort d'abattement de a% est effectué aujourd'hui, alors les émissions tendancielles sont pour toujours réduites de ζa% par rapport à la baseline. Si on prend donc une valeur plus élevée pour ζ, comme cela semble souhaitable, l'effet à long terme des abattement risque de devenir vraiment considérable, et surtout, indépendant de tout arrêt ultérieur des efforts de réductions. On aurait alors remplacé un inconvénient par son opposé. Il serait peut-être plus crédible d'envisager qu'une large partie des réductions a bien un effet durable, mais pas indéfiniment.

Enfin, Hammit n'a pas abordé les conséquences de cette représentation sur les propriétés analytiques de ses résultats. Après avoir proposé une formulation de l'inertie qui généralise celle de Hammit (section 1.6.3), notre travail a donc consisté à obtenir une justification pour les valeurs de ses paramètres, justification fondée sur des données réelles.

1.6.3 Le modèle DISCERNI

Dynamique de l'intensité carbone spontanée

A toute date $t+1$, $t > 0$, on rappelle que l'intensité carbone spontanée, σ_t correspond aux émissions unitaires de l'économie si aucun effort d'abattement n'est effectué à cette date,

$\mathcal{E}_t(K_t, \sigma_t, a_t = 0) = \sigma_t F(K_t)$. On propose de définir cette intensité carbone spontanée à toute date $t+1$, $t > 0$, comme une moyenne pondérée de

- L'intensité carbone spontanée de *référence à cette date*, σ^0_{t+1} ;
- L'intensité carbone *effective* (*i.e.* après abattement) *à la date précédente*, $(1-a_t)\sigma_t$,
  - corrigée du progrès autonome entre t et $t+1$, soit $\sigma^0_{t+1}/\sigma^0_t$;
  - et corrigée par un paramètre, ζ, correspondant à la part des efforts d'abattement a_t qui sont encore effectifs au delà d'une période.

Plus précisément, l'équation (1.2) devient :

$$\sigma_{t+1} = (1-e)\sigma^0_{t+1} + e\,\frac{\sigma^0_{t+1}}{\sigma^0_t}\,(1-\zeta a_t)\sigma_t, \tag{1.14}$$

avec $\sigma_0 = \sigma^0_0$, et $e, \zeta \in [0,1]$.

Pour bien distinguer le modèle DICE, sans inertie, de ce modèle qui introduit une variable d'état supplémentaire, on désignera ce dernier du nom de DISCERNI ([39]).

Propriétés de la dynamique de σ

Cette formulation simple a les propriétés suivantes :

- Si aucun n'effort d'abattement n'est effectué jusqu'à la date t : $a_0 = 0, \ldots, a_t = 0$, alors, l'intensité carbone spontanée en $t+1$ demeure égale à celle de référence : $\sigma_{t+1} = \sigma^0_{t+1}$. Les modèles DICE et DISCERNI partagent donc le même scénario de référence[40].

- Si après une certaine date les efforts de réduction deviennent nuls, le paramètre e va régler la vitesse à laquelle les intensités carbone spontanées vont rejoindre celles de référence ;

  Pour $e = 1$, on retrouve la formulation de Hammit ; la trajectoire de σ s'écarte définitivement de celle de σ^0 dès lors qu'il y a eu un effort d'abattement non nul ;

  Enfin, l'effet de e sur l'abattement de la date t peut se comprendre comme un effet d'actualisation. A la date $t+s$, l'intensité carbone spontanée peut s'écrire en fonction de celle de la date t actualisée au taux e^s ;

- Le paramètre ζ correspond à la part des efforts d'abattement a_t qui sont encore effectifs au delà d'une période ;

[39] Ce nom est distinctement une extension de « DICE » ; c'est aussi l'acronyme de « Double Incertitude Sur le Climat et la Réduction eNdogène de l'Intensité Carbone », le code informatique permettant, le cas échéant, une résolution avec arrivée d'information sur deux paramètres au départ incertains. Le code est joint en Annexe A.

[40] Les descriptions usuelles du scénario de référence rappellées en section 1.5.2 pour le modèle DICE, peuvent se transposer directement pour DISCERNI. Pour la description « cohérente », il faut toutefois décider du traitement que l'on fait de σ, par exemple un traitement identique à celui de la variable X (voir section 1.5.2).

– Avec $e = 0$ ou $\zeta = 0$, la dynamique est dégénérée ; on a pour tout t, $\sigma_t = \sigma_t^0$ et on retrouve alors le modèle DICE.

1.6.4 Emissions tendancielles et calibration.

Une des motivations principales de cette représentation de l'inertie est de mettre en évidence le décrochage des émissions tendancielles (par rapport à la référence) comme une explication de l'effet d'inertie, autrement dit de la contribution d'une réduction d'émission en t à diminuer les coûts d'abattement des dates ultérieures. Il était donc souhaitable d'opérer la calibration des paramètres e et ζ directement à partir du comportement des émissions tendancielles, plutôt que sur la réduction des coûts que l'on suppose devoir obtenir sur 200 ans (comme font Goulder et Mathai) ou qu'en vertu de considérations sur la durée de vie des infrastructures et du capital (comme font Ha-Duong, 1998 ou Lecocq, 2000), considérations un peu trop éloignées de la formulation retenue ici[41].

La réponse de la demande de pétrole à la baisse des prix

Il n'existe évidemment pas de données réelles permettant de se faire une idée de la conséquence d'un effort d'abattement au cours d'une période sur les émissions des périodes suivantes. En revanche, il existe des observations de l'impact des variations des prix sur l'évolution des consommations mondiales d'énergie fossile, en particulier de pétrole. Un travail économétrique de Gately (1993) sur *the imperfect price-reversibility of world oil demand* était déjà mentionné par Grubb *et al.* (1995) comme un indice de l'importance des effets d'inertie. D. Gately montre ainsi que la réponse de la demande aux baisses des prix pétroliers des années quatre-vingt ne représente qu'un cinquième de la réponse aux hausses des prix des années soixante-dix. A partir de son travail, on propose de dégager les notions de

réponse symétrique aux prix : une hausse des prix suivie d'une baisse opposée ramène la demande mondiale de pétrole à son niveau initial ; Ceci correspondrait dans l'équation (4.2) de Gately à des coefficients estimés tels que $b = a$, où b est le coefficient de régression de la demande sur le prix maximum atteint, et a le coefficient de régresion de la demande sur le cumul des baisses de prix survenues (grandeur négative) ;

réponse nulle : une hausse des prix suivie d'une baisse opposée laisse la demande au niveau qu'elle a atteint au moment de la hausse ; Ceci correspondrait dans l'équation (4.2) de Gately à un paramètre $b = 0$

réponse asymétrique : le comportement intermédiaire, que D. Gately met en évidence, soit $a = -0.092$ et $b = -0.017$ dans son équation (4.2).

Enfin ces réponses sont définies de façon relative pour prendre en compte l'effet de la croissance économique : par exemple, une réponse nulle correspond en fait à une demande qui n'a augmenté qu'à proportion de cette croissance.

[41] On s'est tout de même essayé à une réflexion en ce sens, voir la section 1.10, en annexe de ce chapitre.

A partir des résultats des tests économétriques de Gately (Gately, 1993, p.172) pour l'OCDE, on déduit que la réponse de la demande atteint $\chi = b/a$ soit 18% seulement de la réponse symétrique.

Réponse des émissions à un choc de taxe

Ces notions de réponse symétrique, asymétrique ou nulle, qui s'appliquent à la demande de pétrole, peuvent être transposées aux émissions de GES. Elles deviennent alors très proches de celle avec laquelle on a travaillé jusqu'à présent : la notion d'émissions tendancielles. Dans un cas il s'agit de la réponse à un effort d'abattement, puis à son abandon, dans l'autre de la réponse à une hausse d'un prix, puis à sa redescente. On va voir qu'on peut les faire coincider de façon exacte dans le modèle DISCERNI.

L'idée maîtresse se fonde sur la *dualité*. De façon classique, un scénario optimal des modèles DICE et DISCERNI peut se comprendre comme le comportement désirable de l'économie face à la menace du changement climatique. Ce scénario fait apparaître une séquence de prix fictifs du carbone. Par dualité, cette séquence peut être réinterprétée comme la séquence de taxes sur les émissions de carbone qu'un « planficateur bienveillant » devrait annoncer en $t = 0$ et lever à chaque date pour inciter l'économie à effectuer les efforts de réduction appropriés (voir la section 1.9 en annexe de ce chapitre). Un scénario de référence s'interprète simplement comme une séquence de taxes nulles. Enfin, un scénario tendanciel après la date t (voir définition en section 1.5.3) faisant suite à une séquence de décisions optimales $(a_0^\#, b_0^\#, \ldots, a_t^\#, b_t^\#)$ s'interprétera comme l'effet d'une suppression non anticipée des taxes carbone à partir de $t+1$.

Le scénario tendanciel après la date $t = 0$ et faisant suite à la décision optimale $a_0^\#$ peut donc s'interpréter comme un choc en première période sur le prix du carbone ; et les émissions tendancielles en $t = 1$ coincident avec la « réponse » des émissions à l'abandon de la taxe, donc à un retour du prix des énergies fossiles à leur niveau initial.

Formule de la calibration

Plus précisément, en période $t = 0$, un abattement $a_0 > 0$ a été incité par l'annonce d'une séquence de taxes ; l'abandon de cette séquence de taxes à partir de $t = 1$, se traduit par une intensité carbone spontanée en $t = 1$ égale à

$$\hat{\sigma}_1 = (1-e)\sigma_1^0 + e\,\frac{\sigma_1^0}{\sigma^0}\,(1-\zeta a_0)\sigma^0,$$

et le niveau des émissions tendancielles est

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = \hat{\sigma}_1 F_1(K_1)$$

Deux cas particuliers nous intéressent :

la *réponse symétrique, « S »,* qui définit le cas où en $t = 1$, les émissions sont les mêmes que si aucun choc n'avait eu lieu en $t = 0$ (aux ajustements près du sentier du croissance) ;

autrement dit l'intensité carbone est $\sigma_1^S = \sigma_1^0$. Dans DISCERNI, ce cas est obtenu avec $e = 0$ ou $\zeta = 0$, qui ramènent au modèle DICE. Les émissions sont données par $\mathcal{E}_1^S = \sigma_1^0 F_1(K_1)$;

la *réponse nulle, « N »,* qui définit le cas où entre $t = 0$ et $t = 1$, seule la croissance de l'activité est cause de la croissance des émissions ; l'intensité carbone est donc inchangée par rapport à la période précédente, mis à part la contribution du progrès autonome, σ_1^0/σ^0. En période $t = 0$, le choc avait amené un abattement a_0 d'où une intensité carbone effective de $(1-a_0)\sigma^0$. En $t = 1$, l'intensité carbone est donc $\sigma_1^N = \frac{\sigma_1^0}{\sigma^0}(1-a_0)\sigma^0$. Dans DISCERNI, ce cas est obtenu en prenant $e = 1$ et $\zeta = 1$. Les émissions sont alors $\mathcal{E}_1^N = \frac{\sigma_1^0}{\sigma^0}(1-a_0)\sigma^0 F_1(K_1)$;

Ces différentes émissions sont présentées en Figure 1.7.

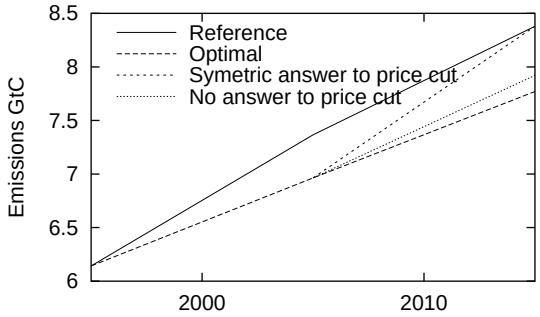

FIG. 1.7 – Réponse symétrique et réponse nulle à un contre-choc.
La trajectoire optimale est quittée suite à un abandon de la politique de réduction après une période d'application, ce qui revient à simuler un choc sur le prix des énergies fossiles.

On peut maintenant obtenir le degré de symétrie χ de la réponse des émissions $\hat{\mathcal{E}}_1$

$$\chi = \frac{\hat{\mathcal{E}}_1 - \mathcal{E}^N}{\mathcal{E}^S - \mathcal{E}^N}.$$

Il vient immédiatement l'équation de calibration de la dynamique de l'intensité carbone :

$$e\zeta = 1 - \chi. \tag{1.15}$$

Choix de la valeur de χ Peut-on légitimement indentifier le degré de symétrie obtenu à partir des coefficients de Gately et celui correspondant au comportement du modèle DISCERNI, et donc prendre $\chi = 0,18$? Plusieurs approximations sont nécessaires pour passer de l'un à l'autre : les données de Gately concernent la demande de pétrole et non celle de carbone fossile ; elles se rapportent à l'OCDE alors que l'on utilise un modèle global ; enfin, on peut supposer que le comportement des agents face aux variations des prix est différent de celui que produit une annonce de taxe, son application puis son retrait[42].

[42] Il pourrait être intéressant de consulter les résultats d'éventuelles études empiriques sur le *tax escalator* qu'avait mis en place pendant un temps le gouvernement britannique.

Pour ces différentes raisons, on a arbitrairement choisi une valeur beaucoup plus « conservatrice » pour le degré de symétrie, $\chi = 0,35$.

Choix des valeurs de e et ζ On va considérer les deux cas polaires qui sont compatibles avec la valeur retenue pour χ :

$e = 1$ **et** $\zeta = 0,65$ **: Forte inertie** On retrouve ici le modèle de Hammit, mais avec une valeur considérablement plus élevée pour ζ, comme suggéré en section 1.6.2. Comme $e = 1$, une part des efforts d'abattement de chaque période contribuera donc à écarter définitivement la trajectoire d'émission tendancielle de la trajectoire de référence.

$e = 0,65$ **et** $\zeta = 1$ **: Inertie modérée** L'ensemble des abattements a un effet qui se prolonge au delà de leur période de mise en œuvre, mais cet effet s'estompe au cours du temps.

1.6.5 Premiers résultats du modèle DISCERNI

Les résultats qui suivent sont obtenus à partir de deux variantes du modèle, paramétrage de l'inertie mis à part :

Climat et dommages de DICE c'est la variante originale du modèle DISCERNI ; elle permet une comparabilité complète avec les résultats du modèle DICE original.

Climat et dommages de RESPONSE$_\Delta$ cette variante, DISCERNI$_\Delta$, utilise des formulations différentes des fonction g et D. Le module climat g, donne une représentation plus juste de l'évolution de la tempérture au cours des prochaines décennies. Les dommages D sont définis par une fonction de dommages à seuil. La transition entre dommages faibles et dommages élevés s'opère entre 1,7 et 2,3 degrés Celsius. Ces changements conduisent à une politique optimale d'abattement plus soutenue. Ils permettent aussi des comparaisons éventuelles avec les résultats récents obtenus au CIRED avec le modèle RESPONSE.

Emissions optimales et émission tendancielles

La Figure 1.8 présente les émissions optimales du modèle DICE en traits continus et celles de DISCERNI en traits pointillés pour le paramétrage d'inertie modérée, $(e = 0,65, \zeta = 1)$. Pour chaque date t, on a aussi représenté les émissions avant abattement avec le même type de traits. La présence d'inertie amène une trajectoire optimale très différente de celle obtenue d'ordinaire avec DICE. Les émissions optimales se maintiennent autour de 7GtC sans dépasser ce niveau. L'effet est beaucoup plus considérable que celui trouvé par Goulder and Mathai (2000) avec du learning-by-doing.

De tels résultats évoquent davantage ceux que présentent un modèle comme DEMETER qui inclut à la fois durabilité et learning-by-doing. La comparaison est toutefois un peu hasardeuse car DEMETER est résolu en coût-efficacité avec une contrainte sur l'élévation de la température (2 degrés Celsius). On peut se rapprocher de leur scénario en utilisant la fonction de dommages à seuil de RESPONSE ; les résulats corresondants sont présentés en Figure 1.9. Cette fois, les résultats donnés par chacun des deux paramètrages de l'inertie sont montrés.

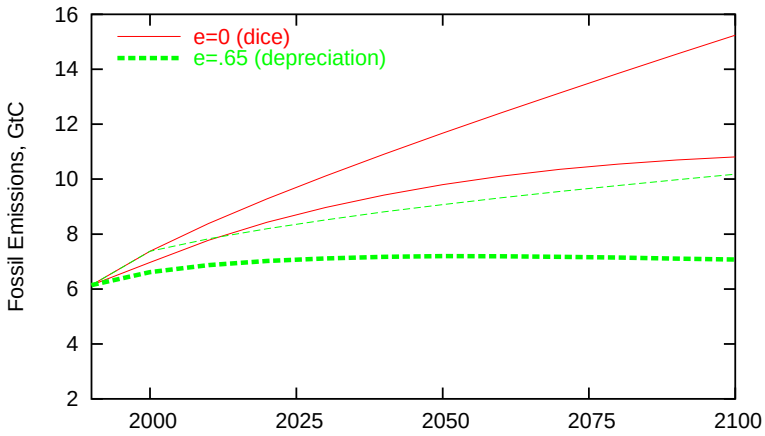

FIG. 1.8 – Impact de l'inertie sur les émissions optimales

Avec cette fonction de dommages, le problème climatique est beaucoup plus sérieux que dans le modèle DICE d'origine. Même dans la spécification sans inertie, les émissions sont réduites très fortement, mais seulement après une première phase d'augmentation. En présence d'inertie, il est là encore souhaitable de réduire les émissions de façon plus aggressive et plus anticipée, comme l'indiquaient Grubb et al. (1995). Malgré la forte différence entre émissions optimales en l'absence d'inertie de la Figure 1.8 et de la Figure 1.9, les émissions tendancielles sont quant à elles quasi identiques. En présence d'inertie, des dommages plus élevées impliquent aussi des émissions optimales plus faibles, et les émissions tendancielles sont modifiées en conséquence.

Le volet inférieur de la figure montre les taux d'abattements. Comme on pouvait s'y attendre, ils sont nettement moins excessifs lorsque l'inertie est représentée. En l'absence d'inertie, le modèle DICE indique qu'à la fin du siècle il faudrait renoncer à 80% des émissions que l'on pourrait souhaiter faire spontanément. En fait, quand les efforts de réduction effectués au cours du siècle ont un effet d'inertie, ce taux doit être réduit d'un facteur 2 à 4. En revanche, l'effort initial doit être plus soutenu, presque doublé quand l'effet d'inertie est important. Dès 2030 cependant, c'est le modèle sans inertie qui indique les taux de réduction les plus élevés.

Dépense marginale et coût marginal d'abattement

Comme exposé en section 1.8, en annexe de ce chapitre, l'inertie conduit à distinguer entre *coût marginal instantané* et *coût marginal (de long terme) de l'abattement*, ce dernier étant inférieur. Rosendahl (2004) obtient un résultat similaire dans un modèle avec apprentissage (LBD) ; voir chapitre 2, section 2.3.4. On appelera «valeur de l'effet d'inertie», la différence entre coût marginal instantané et coût marginal de long terme. Cette différence est apparente en Figure 1.10 p. 48, volet de gauche. On observe qu'en présence d'inertie, le coût marginal de long terme est plus faible qu'en l'absence d'inertie. C'est un résultat comparable à celui

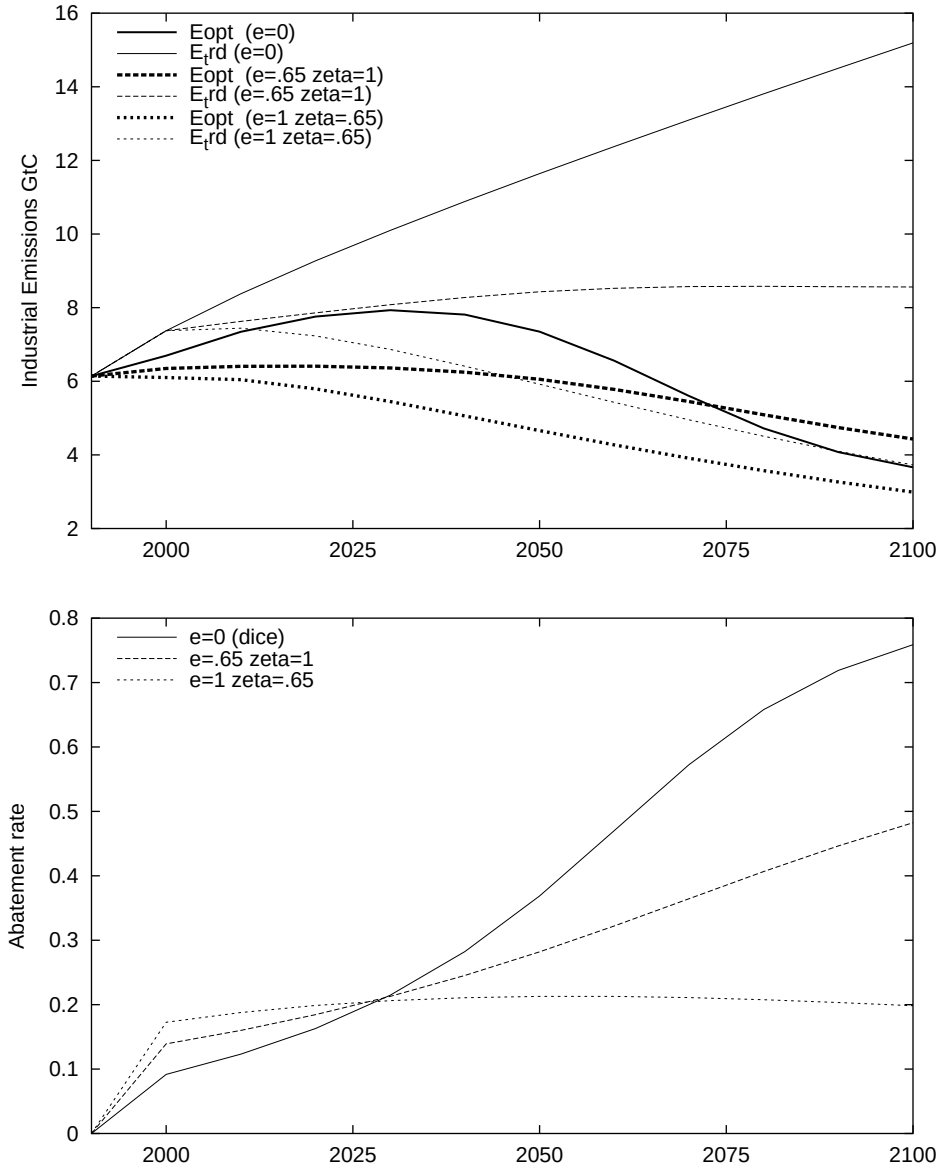

FIG. 1.9 – Emissions optimales et tendancielles, DISCERNI$_\Delta$.
Volet supérieur : emissions optimales (en traits épais) et tendancielles.
Volet inférieur : taux d'abattement (écart entre tendance et optimum).
Trois cas sont présentés : l'absence d'inertie ($e = 0$), l'inertie forte et l'inertie modérée.

de Goulder et Mathai qui obtenaient que le changement induit par du LBD amenait une taxe carbone plus basse. Cependant, si la taxe optimale semble effectivement devoir être plus basse, elle devrait en même temps inciter à plus d'efforts de réduction et donc à des coûts marginaux instantanés plus importants pendant les cinq premières décennies.

Les conséquences sur les coûts totaux (volet de droite) sont elles aussi remarquables ; elles reproduisent la configuration osbervée plus haut à propos des niveaux d'abattement : au bout de deux à trois décennies, les coûts sont plus bas que dans le modèle sans inertie.

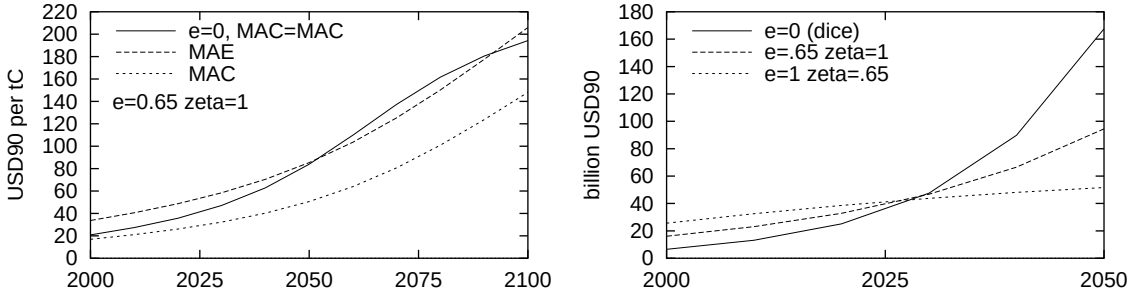

FIG. 1.10 – Coût marginal instantané et dynamique, coût total
Volet de Gauche : Coût marginal instantané et dynamique. En l'absence d'inertie, les deux son confondus (ligne pleine).
Volet de droite : coûts totaux d'abattement.

1.7 Conclusion. Conséquences de l'inertie pour l'instrument taxe carbone

Dans le modèle DICE d'origine, la définition de la taxe ne posait pas de problème. Elle est identifiée au coût d'opportunité du carbone avec lequel doit s'égaliser le coût marginal d'abattement à l'optimum. Il n'y a pas à l'optimumpas de différence entre coût marginal de long terme et coût marginal instantané. Voir annexe 1.9.

De la même façon, dans le modèle avec inertie, on peut définir la taxe optimale par le coût d'opportunité du carbone, donc égale au coût marginal de long terme de l'abattement (voir annexe 1.9). Cela suppose évidemment que l'agent représentatif (celui qui est taxé et prend les décisions d'abattement et d'investissement) prend bien en compte la dynamique de l'intensité carbone. Il décide alors de lui-même de fournir un effort d'abattement tel que son coût marginal instantané est supérieur à la taxe, d'un facteur qui pourrait devoir être de l'ordre de deux.

Dans la réalité, peut-on supposer que les agents économiques prennent en compte le changement induit, et avec quelles conséquences pour le choix de la taxe carbone optimale ? Cette hypothèse est cruciale : en effet, s'ils ne *prennent pas en compte le changement induit*, ils choisissent alors un niveau d'abattement tel que leur dépense marginale s'égalise à la taxe.

L'effort d'abattement serait alors insuffisant (environ 20 USD/tC au lieu de 40 USD/tC en première période). La validité pratique de cette hypothèse dépend de l'interprétation qu'on fait des causes de l'inertie. On en rappelle ici deux.

L'inertie de l'appareil productif. Elle provient de la *durée de vie du capital industriel*, qui peut être très importante (40 ans pour une centrale nucléaire). Investir aujourd'hui dans du capital industriel «sans émissions» a un effet à long terme sur les émissions ; donc aussi sur la rentabilité future de ce capital si par exemple la taxe carbone doit être élevée à l'avenir. La rationalité des anticipations est alors envisageable comme une approximation du comportement des investisseurs.

L'inertie des modes de vie et des infrastructures associées. Elle provient de *la rétroaction entre des décisions individuelles très nombreuses* (choix de mode de déplacement, de lieu d'habitation, et des technologies associées) *et l'évolution du capital d'infrastructures* de transports et d'urbanisme et son implantation géographique. Ces décisions individuelles suscitent des «rendements croissants» d'adoption (externalités de réseau) à long terme. Dans cette seconde interprétation, le changement induit pourrait être en partie de la nature d'une externalité. L'anticipation de l'effet d'inertie au moment des choix individuels par les agents (ou les marchés) paraît donc beaucoup moins crédible. Il faut alors recourir à un mécanisme de correction supplémentaire, par exemple sous forme de signal-prix.

Le chapitre suivant revient sur ces questions avec un modèle analytique plus classique.

Annexes

1.8 Coût marginal dynamique et instantané (dépense marginale d'abatement)

From Eq. 1.5, the abatement expense at time t can be defined as what is substracted from available output, $AE(a) = C(a)F(K)(1-D(X))$. Rescaled per unit of emission we obtain the *Marginal Abatement Expense* for the last unit of emissions removed at time t :

$$MAE = \frac{1}{\sigma}C'(a)(1-D(X)) \tag{1.16}$$

In the cost-benefit structure defined by the original DICE model, it comes easily that the shadow price of carbon is equal to the MAE[43] :

$$\frac{\partial \gamma_t}{\partial a_t} / \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial a_t}(\#) = -\frac{\mu_t^{\#}\beta}{\pi v_t'(\#)}$$

where μ_t is the negative shadow value (in welfare units) associated with the concentration M_{t+1}. The left hand side simplifies into the *MAE*, and the right hand side defines the shadow price of emissions (in consumption units).

This is no longer the case when carbon intensity is endogenous : the shadow price of carbon is now equal to the MAE minus the value of the marginal decrease in future carbon intensity brought by a marginal decrease in emissions today :

$$MAE(\#) + \frac{\xi_t^{\#}}{\pi v_t'(\#)}\frac{\partial \Phi_t}{\partial a_t} / \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial a_t}(\#) = -\frac{\mu_t^{\#}\beta}{\pi v_t'(\#)}$$

where ξ_t is the negative shadow value associated with the carbon intensity σ_{t+1}.

The shadow price of carbon can in turn be interpreted as the carbon tax that allows to decentralize the optimal policy. When carbon intensity is endogenous, this assumes that the representative agent takes into account the effect of abatement on future carbon intensity. The marginal abatement *cost* (MAC) that the agent shall equalize with the tax is a 'long term' cost that differs from the static MAE : $MAC < MAE$, the difference being equal to the value of the marginal decrease of the future carbone intensity.

[43] Assuming an interior solution

1.9 Coût marginal et taxe carbone dans le modèle DICE

1.9.1 Trajectoire optimale

On définit une trajectoire optimale de commande (respectivement d'état) comme solution du problème (respectivement comme engendrée par la solution du problème) qui s'écrit

$$\max_{(a_0,b_0),\ldots,(a_T,b_T)} \sum_{t=0}^{T} \pi U_t((1-b_t)\mathcal{Y}_t(a_t,X_t,K_t) \tag{1.17}$$

$$\text{avec} \quad K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \pi b_t \mathcal{Y}_t(a_t,X_t,K_t) \tag{1.18}$$

$$M_{t+1} = \alpha_M M_t + h(X_t) + \pi\beta \mathcal{E}_t(a_t,K_t) \tag{1.19}$$

$$X_{t+1} = \Theta(X_t,M_t) \tag{1.20}$$

On notera $(\lambda_t,\ \mu_t,\ \nu_t)$, $t<T$, les multiplicateurs de Lagrange associés aux équations dynamiques à la date t. Une solution intérieure $(a^\#,b^\#,\lambda^\#,\mu^\#,\nu_t^\#)$ vérifie alors les conditions du premier ordre en a_t et b_t qui s'écrivent : pour tout $t<T$,

$$0 = \frac{\partial \mathcal{Y}_t}{\partial a_t}((1-b_t)\pi U_t'(\cdot) + \lambda_t \pi b_t + \pi\beta \frac{\partial \mathcal{E}_t{}^t}{\partial a_t}\mu_t$$
$$0 = (-U_t'\pi + \lambda_t \pi)\mathcal{Y}_t$$

On en déduit $U_t'(\#) = \lambda_t^\#$, résultat classique qui dit qu'à l'optimum l'utilité marginale de la consommation est égale à la valeur fictive[44] du (stock de) capital productif (en période suivante). Et aussi

$$\frac{\partial \mathcal{Y}_t{}^\#}{\partial a_t} \Big/ \frac{\partial \mathcal{E}_t{}^\#}{\partial a_t} = -\frac{\beta\mu_t^\#}{U_t'(\#)}$$

Le terme de gauche correspond à la *perte de revenu disponible* résultant d'une réduction unitaire des émissions. En exprimant les dérivées par rapport à a de la production et des émissions on retrouve bien le coût marginal instantané de l'abattement[45], $\frac{1}{\sigma^0}C'(a)(1-D(X))$. Quant au terme de droite, il est proportionnel à la valeur fictive de la concentration atmosphérique en carbone en $t+1$. Le facteur de correction $-\beta$ permet de l'interpréter comme le coût social marginal des émissions en t, et la division par l'utilité marginale de passer d'un coût social à un coût d'opportunité en numéraire. On a donc égalité à l'optimum entre le coût marginal instantané de l'abattement et le coût d'opportunité du carbone.

$$\frac{1}{\sigma^0}C'(a^\#)(1-D(X^\#)) = -\beta\frac{\mu_t^{\#m}}{U_t'(\#)},$$

On pourrait retrouver un résultat comparable dans le cadre coût efficacité.

[44] L'objectif étant exprimé en utilité et non en numéraire, les prix fictifs sont en fait des «valeurs sociales fictives». Il faut les corriger par l'utilité marginale pour obtenir des grandeurs homogènes à des prix.

[45] mesuré par tonne de carbone

1.9.2 Solution décentralisée par une taxe carbone

On suppose maintenant que le décideur (l'agent représentatif)
- paye une taxe τ_t sur ses émissions de CO_2 à la date t ;
- reçoit un transfert forfaitaire T_t à la date t ;
- tient le climat pour exogène, $\overline{\theta}_t$.

Le revenu disponible est maintenant défini par la fonction $\tilde{\gamma}$

$$\tilde{\gamma}_t(a_t, K_t) = \gamma_t(a_t, K_t, \overline{\theta}_t) - \tau_t \mathcal{E}_t(a_t, K_t) + T_t \tag{1.21}$$

Avec cette écriture, le transfert et la taxe sont reçus/perçus simultanément, en sorte que l'effet revenu de la taxe peut être exactement compensé par un transfert, et réciproquement, que le transfert peut être exactement financé par le produit de la taxe.

Le problème de l'agent représentatif est maintenant le suivant

$$\begin{aligned} &\max_{(a_0,b_0),\ldots,(a_T,b_T)} \sum_{t=0}^{T} \pi U_t((1-b_t)\tilde{\gamma}_t(a_t, K_t) \\ &\quad \text{avec} \quad K_{t+1} = (1-\delta)K_t + \pi b_t \tilde{\gamma}_t(a_t, K_t) \end{aligned}$$

Une solution intérieure (a^*, b^*) doit alors vérifier des conditions du premier ordre qui conduisent facilement à $\partial\tilde{\gamma}_t/\partial a_t = 0$ soit

$$\frac{1}{\sigma^0} C'(a^*)(1 - D(\overline{\theta}_t)) = \tau_t$$

et les conditions du premier ordre en K s'écrivent

$$\lambda^*_{t-1} = (1-\delta)\lambda^*_t + \pi U'_t((1-b^*_t)\tilde{\gamma}_t(a^*_t, K^*_t))\left(\frac{\partial \gamma_t}{\partial a_t}(a^*_t, K^*_t, \overline{\theta}_t) - \tau_t \frac{\partial \mathcal{E}_t}{\partial a_t}(a^*_t, K^*_t)\right) \tag{1.22}$$

On vérifie enfin que lorsque l'agent représentatif est confronté (ou attend) un climat $\overline{\theta}^{\#}$, un niveau de taxe $\tau^{\#}_t$ et un niveau de transfert $T^{\#}_t$ définis à partir de la solution optimale (voir section 1.9.1) comme

$$\begin{cases} \overline{\theta}_t = \theta^{\#}_t & \\ \tau^{\#}_t & = -\beta \dfrac{\mu^{\#m}_t}{U'_t(\#)} \\ T^{\#}_t & = \tau^{\#}_t \mathcal{E}_t(a^{\#}_t, K^{\#}_t) \end{cases} \tag{1.23}$$

alors, le vecteur $(a^*, b^*, K^*, \lambda^*) = (a^{\#}, b^{\#}, K^{\#}, \lambda^{\#})$ est solution du problème de l'agent représentatif ; en particulier
- les équations du premier ordre en a, b et K sont bien vérifiées.
- $\mathcal{E}_t(a^*, K^*) = \mathcal{E}_t(a^{\#}, K^{\#})$ en sorte que les transferts sont exactement financés par les prélèvements ;
- Par conséquent $\tilde{\gamma}_t(a^*_t, K^*_t) = \gamma_t(a^{\#}_t, K^{\#}_t, \theta^{\#}_t)$ et K^* vérifie bien l'équation dynamique du capital.

– Par définition de (a^*, b^*), le climat engendré par ces décisions à partir des équations dynamiques Eq. (1.18–1.20) est bien celui attendu par l'agent ($\theta^{\#}$).

On dit que la «taxe carbone optimale», $\tau^{\#}$ (et les transferts correspondants !) et l'annonce du climat optimal permet de décentraliser la solution optimale.

On pourrait vérifier que DISCERNI se réécrit de façon comparable, à ceci près que la taxe optimale théorique reste définie par le coût marginal d'abattement et diffère donc de la dépense marginale.

1.10 Capital et calibration de la dynamique de l'intensité carbone

On envisage ici une autre façon de déterminer le paramètre e dans l'équation (1.14). D'après les équations (1.6) et (1.14) qui décrivent émissions effectives et intensité carbone spontanée, à la date $t+1$, les émissions tendancielles (c'est à dire avant l'abatement a_{t+1}) sont données par

$$\overline{E}_{t+1} = (1-e)\sigma^0_{t+1}F_{t+1}(K_{t+1}) + e\sigma_t\frac{\sigma^0_{t+1}}{\sigma^0_t}(1-\zeta a_t)F_{t+1}(K_{t+1}) \tag{1.24}$$

qui met en évidence que les émissions tendancielles sont produite par l'activité économique[46] $F_{t+1}(K_{t+1})$. Ce produit économique est composé de deux parts auxquelles s'appliquent différentes intensités carbone.

– Une part e, qui bénéficie des efforts passés et reprend l'intensité carbone tendancielle de la période précédente, σ_t, ainsi qu'une fraction ζ de l'effort d'abattement a_t effectué précédemment[47]. Elle bénéficie aussi du progrès autonome σ_{t+1}/σ_t.
– Une part $(1-e)$, à laquelle s'applique l'intensité carbone de référence, σ^0_{t+1} et ne bénéficie donc que du progrès autonome.

Cette interprétation conserve du modèle DICE original l'idée que les émissions sont liées à la production plutôt qu'au capital. Il peut alors sembler naturel d'identifier

– d'un côté, la part de la production de $t+1$ qui reprend l'intensité carbone de la production précédente (en t)
– avec de l'autre, la part de la production totale en $t+1$ qui «continue» la production ancienne.

On aurait alors $e = F_t(K_t)/F_{t+1}(K_{t+1})$. La production «nouvelle», $F_{t+1}(K_{t+1}) - F_t(K_t)$, correspond bien à une part $1-e$. Proprement réécrite, la dynamique de σ_{t+1} (Eq. (1.14)) ferait donc apparaître le terme $\frac{F_t(K_t)}{F_{t+1}((1-\delta)K_t+\pi b_t \gamma_t(K_t,a_t,\theta_t))}$ à la place de e.

Cela compliquerait toutefois notablement les résultats analytiques qui permettent d'interpréter les conséquences d'une intensité carbone endogène et non plus exogène. Le solveur

[46] hors dommages et coût d'abattement

[47] Dans cette part e on pourrait encore distinguer *(a)* une part $1-\zeta$ qui ne reprend l'intensité carbone tendancielle précédente mais sans bénéficier de l'effort d'abattement précédent, et *(b)* une part ζ qui en bénéficie encore totalement : $\sigma(1-\zeta a) = (1-\zeta)\sigma + \zeta\sigma(1-a)$

utilisé (MINOS5 sous GAMS) pourrait aussi vraisemblablement être mis en difficulté, ou très ralenti. Ceci est suggéré par la durée de résolution du modèle (sur un ordinateur de bureau) déjà assez coûteuse une fois que l'on rajoute des incertitudes.

En première approche on pourrait toutefois faire de e un paramètre du temps, et fixer sa valeur à partir du résultat obtenu pour $F_t(K_t)/F_{t+1}(K_{t+1})$ avec le scénario de référence. Il se trouve que avec le modèle DICE et ses dérivés, les résltats montrent que le stock de capital est relativement indépendant du scénario ; il en va donc certainement de même pour ce ratio. Enfin, en remarquant que ce ratio n'est autre que l'inverse du taux de croissance de l'économie, ceci suggère un $e(t)$ qui augmente au cours du temps puisque la croissance, elle, décélère.

Cependant, cette interprétation à l'inconvénient de considérer que la nouvelle production ne bénéficie pas d'effets d'apprentissage (LBD) permettant de réduire son intensité carbone, mais uniquement des effets de durabilité du capital. Par référence au schéma proposé en début de chapitre, seule la troisième source de modification tendancielle des émissions est considérée. On a donc écarté cette méthode de calibration, mais il pourrait être intéressant de la mener jusqu'au bout.

1.11 Générations de capital, input énergétique explicite et intensité carbone

1.11.1 Générations de capital — modèles STARTS

Cette section sert d'annexe au sections 1.3.1 et 1.6.4 de ce chapitre.

Plutôt qu'une description directe de l'évolution de l'intensité carbone, une démarche naturelle serait de vouloir attacher explicitement un facteur d'émissions de carbone à chaque génération de capital et de déduire l'intensité carbone de la structure du stock de capital en service. Lecocq (2000) puis Lecocq et al. (1998) et enfin Gilotte et Simon (2000) on développé une version du modèle STARTS à générations de capital auxquelles sont attachés des facteurs d'émission. La calibration d'un tel modèle pose quelques difficultés, tant pour les données initiales que pour la fonction définissant le surcoût du capital moins émetteur que celui de référence (voir Gilotte et Simon, 2000).

Un autre inconvénient des modèles STARTS sectorisés est qu'ils n'offrent pas la possibilité de faire des réductions à une période donnée autrement que par de l'investissement en capital peu émetteur à la période précédente : il y a donc systématiquement un décalage de 10 ans entre la dépense d'abattement et son effet sur les émissions[48]. Cela rend difficile la comparabilité avec la version originale de DICE qui souffre précisément de l'inconvénient inverse (l'abattement est effectif à la date de dépense mais n'a plus aucun effet ensuite). Il serait envisageable de rajouter la possibilité d'un abattement a effet instantané, mais la calibration deviendrait encore plus délicate.

[48]Le stock de capital à chaque date est une contrainte du modèle. Il n'est donc pas possible de réduire les émissions en renoncant à de la croissance.

1.11.2 Représentation explicite de l'énergie — modèles DEMETER, RICE et ENTICE

Le modèle DEMETER, voir[49] van der Zwaan et al. (2002) et Gerlagh et al. (2003; 2003), résoud en partie ce problème en représentant des générations de capital, et en spécifiant pour chacune d'entre elles une fonction de production CES du capital et de l'énergie. La consommation d'énergie (pour la production) devient explicite comme dans RICE ou ENTICE. La dépense d'investissement faite à la date t détermine le volume de capital qui entre en service en $t+1$. De même, les dépenses de maintenance et les investissements en capacités énergétiques (fossile et non-fossile) en t déterminent les inputs énergétiques en $t+1$. A la date $t+1$, l'input en énergie fossile peut révéler un effort d'abattement : si cet input est inférieur à celui obtenu par un scénario de référence sans contrainte ou rétroaction environementale (en se donnant pour départ la date t et les variables d'état à cette date).

Le coût d'abattement a donc trois composantes possibles :

- un surinvestissement en capital productif en t pour compenser en $t+1$ un plus faible input en énergie dans la fonction de production ;
- un surcoût d'investissement et maintenance en t pour compenser par un input non-fossile la diminution de l'input fossile en $t+1$;
- une éventuelle perte de production en $t+1$ due à un plus faible input énergétique total.

et enfin les conséquences propagées sur la consommation au-delà de la date $t+1$ (toujours mesurées par rapport à un scénario qui n'incluerait pas de contrainte/rétroaction climatique mais cette fois avec pour date de départ $t+1$).

Mais on se heurte alors à un autre inconvénient : comme dans RICE ou ENTICE, il n'y a pas de variable de commande correspondant explicitement à un «effort d'abattement». Surtout, il n'est pas possible de connaître l'effort d'abattement de chaque période t à partir du seul scénario prenant en compte la contrainte ou la rétroaction climatique. Pour le connaître, il devient nécessaire de calculer les émissions tendancielles (voir section 1.5.3) de chaque date t *étant données les commandes optimales jusqu'en* $t-1$. Il faudrait donc calculer autant de scénarios tendanciels qu'il y a de périodes dans le modèle. Il en va de même pour des modèles comme RICE ou ENTICE. Un tel travail est simple mais fasitidieux et il est à remarquer que les modélisateurs ne le font jamais. Il se contentent en général de la comparaison entre les émissions du scénario de référence et celles du scénario optimal.

1.11.3 Conclusion de l'annexe 1.11

La représentation de l'inertie proposée dans ce chapitre permet d'obtenir facilement et sans recalcul de scénarios les émissions tendancielles en t, quand les commandes sont données jusqu'en $t-1$, comme on l'a exposé en section 1.5.3. C'est un avantage important pour la présentation des émissions calculées numériquement (section 1.6.5) et surtout pour l'obtention de résultats analytiques reliant coût ou dépense marginal d'abatement et taxe carbone

[49] Il est malheureusement nécessaire de prendre connaissance de l'ensemble des références indiquées pour comprendre la structure du modèle. Elle n'est pas explicitée de façon exhaustive dans l'une ou l'autre.

(section 1.9). De tels résultats ne sont pas envisageables avec des modèles où l'énergie est un facteur de production explicite. Enfin la calibration du changement endogène de l'intensité carbone est grandement facilitée (section 1.6.4).

Références

Philippe AMBROSI. *Amplitude et calendrier des politiques de réduction des émissions face aux risques climatiques : leçons des modèles intégrés*. Thèse de doctorat, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 2004.

Philippe AMBROSI, Jean-Charles HOURCADE, Stéphane HALLEGATTE, Franck LECOCQ, Patrice DUMAS, et Minh HA-DUONG. Optimal control models and elicitation of attitudes towards climate change. *Environmental Modeling and Assessment*, 8 (3), 135–147, 2003. Special Issue on Modeling the economic response to global climate change.

Kenneth J. ARROW. The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, 29, 155–173, 1962.

Carlo CARRARO et Jean-Charles HOURCADE. Climate modelling and policy strategies. The role of technical change and uncertainty. *Energy Economics*, 20 (5/6), 463–471, 1998.

Leon E. CLARKE et John P. WEYANT. Modeling induced technological change : An overview. Dans Grübler *et al.* (2002), chap. 12, p. 320–363.

Hadi DOWLATABADI. Sensitivity of climate change mitigation estimates to assumptions about technical change. *Energy Economics*, p. 1–24, 1998.

J. EYCKMANS et H. TULKENS. *Simulating with RICE Coalitionally Stable Burden Sharing Agreements for the Climate Change Problem*. Nota di Lavoro 71.99, FEEM, Milano, 1999.

Dermot GATELY. The imperfect price-reversibility of world oil demand. *Energy Journal*, 14 (4), 163–182, 1993.

Reyer GERLAGH et Bob VAN DER ZWAAN. Gross world product and consumption in a global warming model with endogenous technological change. *Resource and Energy Economics*, 25, 35–57, 2003.

—. A sensitivity analysis of timing and costs of greenhouse gas emission reductions. *Climatic Change*, 65, 39–71, 2004.

Reyer GERLAGH, Bob C. C. VAN DER ZWAAN, M. W. HOFKES, et G. KLAASSEN. *Impacts of CO_2 taxes in an economy with niche markets and learning-by-doing*. Rap. tech. ECN-C–03-086, Vrije Universiteit Amsterdam / IVM, 2003.

Laurent GILOTTE et Benoît SIMON. *Prospective du système des transports terrestres face aux objectifs et mesures du Protocole de Kyoto*. CIRED, 2000. Etude réalisée pour l'ADEME dans le cadre du PREDIT "Recherches stratégiques". Centre international de recherche sur l'environnement et le développement.

Vincent GITZ. *Usage des terres et politiques climatiques globales*. Thèse de doctorat, École nationale du génie rural et des eaux et forêts, Paris, 2004.

Lawrence H. GOULDER et Koshy MATHAI. Optimal CO_2 abatement in the presence of induced technical change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 39, 1–38, 2000.

Michael J. GRUBB, Thierry CHAPUIS, et Minh HA-DUONG. The economics of changing course : implications of adaptability and inertia for optimal climate policy. *Energy Policy*, 23 (4/5), 417–432, 1995.

Arnulf GRÜBLER et Sabine MESSNER. Technological change and the timing of mitigation measures. *Energy Economics*, 20, 495–512, 1998.

Arnulf GRÜBLER, Nebojša NAKIĆENOVIĆ, et William D. NORDHAUS (sous la dir. de). *Technological change and the environment*. Resources For the Future, 2002.

Minh HA-DUONG. *Comment tenir compte de l'irréversibilité dans l'évaluation intégrée du changement climatique ?*. Thèse de doctorat, École des hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 1998. URL `http ://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/35/05/`.

Minh HA-DUONG, Michael J. GRUBB, et Jean-Charles HOURCADE. Influence of socioeconomic inertia and uncertainty on optimal CO_2-emission abatement. *Nature*, 390, 270–274, 1997.

Minh HA-DUONG et David KEITH. Carbon storage : the economic efficiency of storing CO_2 in leaky reservoirs. *Clean Technology and Environmental Policy*, 5 (2/3), 2003. Special issue on Technologies for Sustainable Development.

James K. HAMMITT. Evaluation endpoints and climate policy : Atmospheric stabilization, benefit-cost analysis and near-term greenhouse-gas emissions. *Climatic Change*, 41, 447–468, 1999.

Howard J. HERZOG. *The economics of CO_2 separation and capture*. Rap. tech., MIT Energy Laboratory, 1999. URL `http ://web.mit.edu/energylab/www/hjherzog/publications.html`. Presented at Second Dixy Lee Ray Memorial Symposium, Washington, DC.

Jean-Charles HOURCADE. Modelling long-run scenarios : methodology lessons from a prospective study on a low CO_2 intensive country. *Energy Policy*, 21 (3), 309–326, 1993.

IPCC. *Climate Change 1994, Radiative Forcing of Climate Change and An Evaluation of the IPCC IS92 Emission Scenarios*. Cambridge University Press, 1994.

—. *Climate Change 2001 : the scientific basis*. Cambridge University Press, 2001. URL `http ://www.ipcc.ch/`. Contribution of the Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.

Tim L. JOHNSON et David W. KEITH. Fossil electricity and CO_2 sequestration : How natural gas prices, initial conditions and retrofits determine the cost of controlling CO_2 emissions. *Energy Policy*, Proof available online (18 march 2003), 2003. URL `http ://www.sciencedirect.com`.

Klaus KELLER, Benjamin M. BOLKER, et David F. BRADFORD. Uncertain climate thresholds and optimal economic growth. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2003. Article in Press.

Franck LECOCQ. *Distribution spatiale et temporelle des coûts de politiques publiques sous incertitudes. Théorie et pratique dans le cas de l'effet de serre*. Thèse de doctorat, ENGREF, Paris, 2000.

Franck LECOCQ, Jean-Charles HOURCADE, et Minh HA-DUONG. Decision making under uncertainty and inertia constraints : sectoral implications of the when flexibility. *Energy Economics*, 20, 539–555, 1998.

Alan S. MANNE et Richard RICHELS. *Buying Greenhouse Insurance : The Economic Cost of CO_2 Emissions Limits*. MIT Press, 1992.

Sabine MESSNER. *Endogeneized Technological Learning in an Energy Systems Model*. Iiasa working paper, International Institute of Applied System Analysis, 1995.

Richard G. NEWELL et William A. PIZER. Regulating stock externalities under uncertainty. *Journal of Environmental Economics and Management*, 45, 416–432, 2003.

William D. NORDHAUS. *Managing the Global Commons*. MIT Press, 1994.

—. Modeling induced innovation in climate-change policy. Dans Grübler *et al.* (2002), chap. 8, p. 182–209.

William D. NORDHAUS et J. BOYER. *Roll the DICE Again : The Economics of Global Warming*. 1998. URL `http ://www.econ.yale.edu/ nordhaus/homepage/dicemodels.htm`. Yale University.

—. *Warming the world : economic models of climate change*. MIT Press, 1999a.

William D. NORDHAUS et Joseph BOYER. *Warming the World : Economics Models of Global Warming*. MIT press, 2000. URL `http ://www.econ.yale.edu/ nordhaus/homepage/dice_section_I.html`.

William D. NORDHAUS et Joseph G. BOYER. Requiem for Kyoto : an economic analysis of the Kyoto protocol. *Energy Journal*, Special Issue (The costs of the Kyoto Protocol : a multi-model evaluation), 93–130, 1999b.

William D. NORDHAUS et Zili YANG. A regional dynamic general-equilibrium model of alternative climate-change strategies. *American Economic Review*, 86 (4), 741–765, 1996.

David POPP. ENTICE : endogenous techological change in the DICE model o f global warming. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2003. Article in Press.

Knut Einar ROSENDAHL. Cost-effective environmental policy : implications of induced technological change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 48, 1099–1121, 2004.

T. M. L. WIGLEY, Richard RICHELS, et Jae A. EDMONDS. Economic and environmental choices in the stabilization of atmospheric CO_2 concentrations. *Nature*, 379 (6562), 240–243, 1996.

Zili YANG. Reevaluation and renegotiation of climate change coalitions — a sequential closed-loop game approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1563–1594, 2003.

Bob C. C. VAN DER ZWAAN, Reyer GERLAGH, Gert KLAASEN, et Leo SCHRATTENHOLZER. Endogenous technological change in climate change modelling. *Energy economics*, 24, 1–19, 2002.

Chapitre 2

Différence entre dépenses marginales des secteurs et coût marginal uniforme

Sommaire

2.1 Introduction 62
2.2 Modèles statiques de taxation optimale d'une pollution 64
2.2.1 Équilibre partiel, en premier rang 64
2.2.2 Équilibre général 67
2.3 Conséquence de l'inertie: des coûts d'abattement instantanés différents 71
2.3.1 Représentation de l'inertie 72
2.3.2 Le laisser-faire 73
2.3.3 Optimum de Pareto: des coûts marginaux instantanés différents. 73
2.3.4 Quelles conséquences pour le signal-prix ? 74
2.3.5 La place des imperfections de marché 77
2.4 Récapitulatif 78
2.5 Incertitudes et inertie 78
2.5.1 Incertitude sur le climat 79
2.5.2 Objectif du planificateur 79
2.5.3 Comportement du décideur sectoriel 81
2.5.4 Conclusion et pistes futures 82
Références 84

La question posée par l'IFE (Institut français de l'énergie) était de savoir si des différences sectorielles pouvaient justifier des signaux-prix différents dans le cadre de la politique de lutte contre le changement climatique où inertie et incertain jouent un rôle important. L'introduction et la section 2.2 rappellent l'argumentaire justifiant l'imposition d'une taxe uniforme, ou

Ce chapitre reprend et développe une contribution rédigée avec Michel de Lara pour un rapport à l'Institut français de l'énergie, Juin 2004.

plus généralement l'égalité des coûts marginaux d'abattement des différents acteurs. La section 2.3 reprend cette analyse dans un cadre dynamique (deux périodes) avec deux secteurs, ce qui conduit à insiter sur le fait qu'il faut avoir recours à une extension de la notion de «coût marginal» dès lors que les coûts d'abattements instantanés dépendent non plus seulement de la décision d'abattement à cet instant mais aussi des décisions antérieures comme dans le cas de l'inertie (voir chapitre 1). En effet, les coûts marginaux d'abattement *instantanés* optimaux ne sont plus nécessairement égaux entre secteurs. Enfin, la section 2.5 esquisse le traitement de l'incertain en l'introduisant dans un problème d'incitation d'un secteur qui présente de l'inertie.

2.1 Introduction

Un constante de l'analyse économique des problèmes environnementaux est
– l'égalité des coûts marginaux d'abattements entre les secteurs ;
– l'égalité de la taxe environmentale[1]
– et donc l'uniformité de la taxe entre les secteurs.

Nous commençons par rappeler le cadre d'analyse qui a produit ce résultat, ceci afin d'éclairer les raisons ou hypothèses spéciales qui ajoutées à ce cadre, servent parfois d'arguments à des demandes de différenciation.

Le cadre est celui de l'analyse *coût-bénéfice* d'un problème d'externalité : des activités économiques ont pour conséquences des nuisances qui réduisent le bien-être de la société, mais que les pollueurs ne prennent pas en compte, par exemple parce qu'ils ne payent pas le coût de ces nuisances. Le problème est alors de déterminer le niveau optimal de nuisance auquel la société doit se limiter et les instruments économiques qui permettent d'atteindre cet objectif.

Un autre cadre est envisageable, celui de l'analyse *coût-efficacité*, qui décrit un problème de contingentement : les activités économiques ont pour conséquence des nuisances dont le volume total est contingenté. Le problème est alors d'effectuer les réductions à moindre coût et de déterminer les instruments économiques qui permettent d'y parvenir. Toutefois, les conclusions que l'on obtient dans le premier cadre s'appliquent aussi dans le second dès lors qu'elles concernent l'efficacité (au sens de coût total minimal) des instruments économiques, laquelle est recherchée dans les deux cas. C'est en particulier le cas des résultats sur l'unicité (ou non) de la taxe carbone.

Enfin, dans ces deux approches, les considérations d'équité sont en général séparables du problème posé, au sens où les conséquences redistributives des instruments économiques peuvent être compensées «par ailleurs» en effectuant des transferts forfaitaires entre les diffé-

[1]Tout ce chapitre est centré autour de l'instrument fiscal, qui permet d'envisager la question de la différenciation du signal plus facilement que les permis négociables. Il existe évidemment d'autres possibilités d'intervention de la puissance publique pour corriger le problème d'inefficacité dû à la présence d'externalités, et en particulier les permis d'émissions négociables, que l'on vient de citer. Pour une présentation et une comparaison des différents instruments voir par exemple Pearce et Turner (1990); Bontems et Rotillon (1998); Beaumais et Chiroleu-Assouline (2001).

rents agents. Dans les faits, cette question est évidemment centrale dans les demandes éventuelles de différenciation, voir d'exemption du signal-prix.

Justifications pour un niveau unique de taxe incitative

L'idée de la taxation d'une pollution et de l'application d'un niveau unique de taxe à l'ensemble des activités qui produisent une pollution homogène se fonde sur les notions d'*incitation* et d'*efficacité*.

Incitation. Un agent économique —par exemple une entreprise— qui émet une pollution aura intérêt à réduire celle-ci s'il doit acquitter une taxe proportionnelle à son niveau d'émission ; ceci suggère que la taxe peut être utilisée comme un instrument d'incitation pour réduire la pollution à un niveau choisi par la puissance publique.

Efficacité. Plus précisément, l'agent économique a intérêt à réduire sa pollution jusqu'au niveau où la réduire d'une unité supplémentaire lui coûte aussi cher qu'acquitter la taxe sur cette unité de pollution. On s'explique alors simplement que si la puissance publique appliquait deux taxes environnementales différentes à deux entreprises, il serait possible de diminuer la somme des coûts techniques[2] permettant d'atteindre le même niveau de dépollution que celui obtenu grâce à ces taxes. Par exemple en demandant à l'entreprise la plus taxée d'augmenter sa pollution d'une unité et à la moins taxée de diminuer encore la sienne d'une unité. Ce faisant, on diminue le coût de la dépollution puisque la dépense technique supplémentaire que doit effectuer l'entreprise la moins taxée est inférieure à l'économie de frais de dépollution que réalise l'entreprise la plus taxée. On peut y parvenir en corrigeant les incitations qu'elles recoivent, et pour cela, augmenter la taxe la plus faible et diminuer la plus forte. En fait, tant que les niveaux de taxe sont distincts, on aura intérêt à les rapprocher pour diminuer le coût technique total.

C'est donc le souci d'efficacité économique — ici, la recherche de l'obtention à moindre coût de la réduction de pollution — qui amène à choisir un niveau de taxe commun à toutes les activités auxquelles sont imputables un même type de pollution. La démonstration de ce résultat fondamental est rappelée dans la section 2.2.1 en équilibre partiel, puis en équilibre général dans la section 2.2.2. Ces deux sections présentent en fait un cadre plus complet que cet exposé succinct et traitent dans le même temps de la définition du niveau «optimal» de pollution.

[2] On considère ici la somme des coûts techniques de réduction et non pas la somme des dépenses effectuées par les entreprises, dépenses qui incluent le paiement de la taxe ; d'un point de vue global, le produit de la taxe n'est pas un coût dans la mesure où il peut être réinjecté dans l'économie (on s'abstrait ici de la question du coût d'opportunité des fonds publics).

2.2 Modèles statiques de taxation optimale d'une pollution

2.2.1 Équilibre partiel, en premier rang

Cette partie suit de près la présentation donnée par[3] Picard (1990, p.490 et seq.), "pollution d'un lac par des entreprises appartenant aux riverains".

Les entreprises. Il y a n entreprises. Les entreprises utilisent un seul input pour la fabrication : le numéraire, mais ont le choix dans un continuum de technologies plus ou moins polluantes. Pour une production donnée y_j, l'usine j a un coût total de production $C_j(y_j, q_j)$ d'autant plus bas qu'elle effectue une pollution q_j plus élevée, ceci jusqu'à un certain point $\hat{q}_j$ supposé pour simplifier indépendant de y_j (continuer d'augmenter la pollution ne fait plus diminuer le coût) :

$$C_y(\cdot) > 0, \qquad C_q(\cdot) < 0 \quad \text{pour} \quad q_j < \hat{q}_j, \qquad \text{et} \quad C_q(\cdot) = 0 \quad \text{pour} \quad q_j \geq \hat{q}_j$$

Définition du coût marginal d'abattement : c'est la variation du coût de production lorsque l'on diminue la pollution à la marge, soit $-C_q(\cdot)$.

On suppose aussi que

$$C_{yy}(\cdot) > 0 \quad \text{et} \quad C_{yq}(\cdot) < 0 \ (\text{pour} \quad q_j < \hat{q}_j).$$

La première hypothèse correspond aux rendements décroissants de production, la seconde exprime qu'à niveau de production donné, le coût marginal de production se réduit quand on augmente la pollution. Enfin on suppose encore que plus la pollution est élevée, moins cela coûte cher de la réduire unitairement, autrement dit,

$$C_{qq}(\cdot) < 0\,.$$

Les entreprises visent à maximiser leur profit qui s'écrit

$$\Pi_j = p_j y_j - C_j(y_j, q_j) \tag{2.1}$$

où p_j est le prix du bien vendu par j [4]

Les riverains. Il y a m riverains.

$$Q = \sum_{j=1}^{n} q_j$$

[3] Ainsi que des des commentaires de cours de Sylviane Gastaldo (Romain Pirard, communication personnelle).

[4] On retrouve une formulation plus habituelle dans l'étude du changement climatique en introduisant le niveau d'abattement $a_j \in [0,1]$ avec $q_j = (1-a_j)\hat{q}_j$ pour $q_j < \hat{q}_j$.

est la pollution subie par les riverains, dont l'utilité s'écrit

$$U_i = v_i(Q) + M_i$$

où M_i est la quantité de numéraire dont dispose l'agent i. La quantité $-v_i'(Q) > 0$ représente la disponibilité marginale à payer de i pour une diminution unitaire de la pollution. En effet, sur une courbe d'indifférence, on a

$$0 = dU_i = v_i'(Q)dQ + dM_i$$

La richesse totale dont dispose l'agent i est constituée par ses revenus R_i plus la part qu'il perçoit des profits des entreprises polluantes. On désigne par θ_{ji} la part de l'agent i dans les profits de l'entreprise[5] j, avec $\forall(i,j)\theta_{ji} \geq 0$ et $\forall j, \sum_i \theta_{ji} = 1$.

Finalement l'utilité de l'agent i s'écrit :

$$U_i(y,q) = v_i(Q) + R_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ji}\Pi_j \tag{2.2}$$

Optimums de Pareto et optimum de production/pollution

Comme les utilités sont mesurées en numéraire, transférer du revenu est équivalent à transférer de l'utilité. On pourra donc caractériser les optimums de Pareto en maximisant la somme des utilités. Un optimum particulier se définira ensuite par la répartition du numéraire entre les agents.

On se donne donc l'objectif

$$W = \sum_{i=1}^{m} U_i\,.$$

En réexprimant la pollution et les profits, un optimum de Pareto est solution de :

$$\max_{(q_j,y_j)_{j=1\ldots n}} \sum_{i=1}^{m} \left(v_i(\sum_{j=1}^{n} q_j) + R_i \right) + \sum_{j=1}^{n} p_j y_j - \sum_{j=1}^{n} C_j(y_j,q_j) \tag{2.3}$$

Les conditions du premier ordre que doit satisfaire un optimum de Pareto $(y_j^*, q_j^*)_{j=1\ldots n}$ sont

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial C_j}{\partial y_j}(y_j^*,q_j^*) & = & p_j \text{ pour tout } j = 1,\ldots,n \\ \dfrac{\partial C_j}{\partial q_j}(y_j^*,q_j^*) & = & \displaystyle\sum_{i=1}^{m} v_i'(Q^*) \text{ pour tout } j = 1,\ldots,n \\ & & \text{avec} \quad Q^* = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} q_j^* \end{array} \right. \tag{2.4}$$

[5] L'agent i est considéré comme un actionnaire de l'entreprise j, mais n'est pas en charge de sa gestion ; il n'y a donc pas internalisation de ses préférences en matière de pollution dans les choix de l'entreprise (voir l'objectif de l'entreprise en (2.1)).

La deuxième condition s'interprète comme l'égalité des coûts marginaux de réduction de la pollution des entreprises, dont le niveau est égalisé avec la somme des disponibilités marginales à payer pour réduire la pollution. Cette condition correspond très étroitement à celle de Bowen Lindahl et Samuelson qui caractérise le niveau optimal de production d'un bien public : la pollution est un bien public indésirable dont on veut réduire la quantité.

Équilibre sans intervention publique (laisser-faire)

En l'absence d'intervention, chaque entreprise choisit le niveau de pollution $\hat{q}_j$ et le niveau de production $\hat{y}_j$ qui maximisent sont profit Π_j (voir équation 2.1) et qui vérifient donc :

$$\begin{cases} p_j &= \dfrac{\partial C_j}{\partial y_j}(\hat{y}_j, \hat{q}_j) \\ 0 &= \dfrac{\partial C_j}{\partial q_j}(\hat{y}_j, \hat{q}_j) \end{cases} \tag{2.5}$$

Le laisser-faire est sous-optimal

À l'optimum de Pareto, le coût marginal de réduction, $-C_q(y_j^*, q_j^*)$ est strictement positif (voir la deuxième équation 2.4) ce qui implique que q_j^* est plus petit que $\hat{q}_j$ puisque $C_q(\cdot) = 0$ pour $q_j \geq \hat{q}_j$. D'autre part les couples (y_j^*, q_j^*) et $(\hat{y}_j, \hat{q}_j)$ vérifient tous deux l'équation

$$p_j = \frac{\partial C_j}{\partial y_j}(y_j, q_j).$$

Cette équation définit une courbe croissante dans le plan (y_j, q_j) qui représente l'ensemble des combinaisons production-pollution pour lesquelles le coût marginal $\frac{\partial C_j}{\partial y_j}$ est égal à p_j. Comme $C_{yq} < 0$, on en conclut que y_j^* est nécessairement plus petit que $\hat{y}_j$.

A l'optimum, la pollution et la quantité de biens produits sont plus faibles que dans la situation de laisser-faire. Quelle incitation ou quelle contrainte donner aux entreprises pour qu'elles prennent en compte les coûts sociaux de leur activité dans leur coûts de production ?

Le principe pollueur-payeur et la taxation optimale

En comparant les conditions en laisser-faire (équations (2.5)) et à l'optimum de Pareto (équations (2.4)), on voit qu'à l'optimum de Pareto la condition du premier ordre en q_j est comme si les entreprises payaient le facteur de production «pollution» à un prix égal à $-\sum v_i'(Q^*) > 0$, alors qu'en laisser-faire, il ne leur coûte rien.

Pour établir cette condition d'optimalité, la puissance publique peut choisir d'imposer une taxe uniforme t^* sur le volume de pollution effectué par les entreprises :

$$t^* = -\sum_{i=1}^{m} (v_i'(Q^*). \tag{2.6}$$

Le profit vaut alors

$$\Pi_j = p_j y_j - C_j(y_j, q_j) - t^* q_j.$$

Les niveaux de production et de pollution qui maximisent le profit doivent alors vérifier :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial C_j}{\partial y_j}(y_j, q_j) &= p_j \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n \\ \dfrac{\partial C_j}{\partial q_j}(y_j, q_j) &= -t^* \text{ pour tout } j = 1, \ldots, n \end{cases} \tag{2.7}$$

Si l'autorité publique choisissait une taxe d'un niveau différent $t \neq t^*$, la deuxième condition ne serait plus obtenue. En particulier, ceci arriverait si elle choisissait des taxes différentes suivant les entreprises polluantes. En conclusion, *les entreprises doivent être confrontées au même prix (à la même taxe) pour leurs pollutions et celle-ci doit être fixée au niveau «optimal» t^*.*

Des hypothèses informationnelles très fortes. Remarquons que le planificateur doit connaître les fonctions de production de chaque entreprise pour calculer le niveau de pollution optimal et le niveau de taxe qui permet de l'atteindre.

2.2.2 Équilibre général

D'après Baumol et Oates (1988).

- $i = 1, \ldots, n$ individus
- $j = 1, \ldots, m$ biens et ressources (y compris par exemple le travail et la terre)
- $k = 1, \ldots, h$ entreprises
- x_{ij} quantité de bien ou ressource j consommée par l'individu i
- y_{kj} quantité de bien ou ressource j produite ou utilisée par l'entreprise k. Par convention les inputs sont négatifs et les outputs positifs.
- r_j quantité totale de la ressource j disponible pour la communauté
- s_k externalité (émissions) causée par l'entreprise k.
- $z = \sum s_k$ émission totale dans la communauté
- $U^i(x_{i1}, \ldots, x_{im}, z)$ fonction d'utilité de l'individu i
- $f^k(y_{k1}, \ldots, y_{km}, s_k, z) \leq 0$ ensemble de production de l'entreprise k.

On suppose que :

1. l'ensemble de consommation de chaque individu [6] est un fermé, convexe, borné inférieurement et contenant le vecteur nul ;

[6] c'est-à-dire l'ensemble des paniers de consommations physiquement possibles pour l'individu, sachant que ceci comprend la quantité de travail (ou loisir) qu'on lui attribue, etc.

2. les fonctions d'utilités U^i sont deux fois différentiables, quasi-concaves[7], et croissantes en chacun des x ;
3. les contraintes qui définissent l'ensemble de production de chaque entreprise sont deux fois différentiables et définissent un ensemble de production convexe (pas de rendements croissants).

Optimum de Pareto de l'économie avec externalité

Pour trouver un optimum de Pareto, on maximise l'utilité de l'un des individus, par exemple l'individu 1, en exigeant que les autres n'encourent pas de pertes par rapport à des niveaux d'utilité arbitrairement choisis (et réalisables), et en exigeant que les contraintes de disponibilité des ressources et de production soit satisfaites.

En posant $x = (x_{ij})$, $y = (y_{kj})$, $s = (s_j)$, le problème s'écrit :

$$\max_{x,y,s} U^1(x_{11},\ldots,x_{1m},z) \tag{2.8}$$

sous les contraintes

$$\left\{\begin{array}{rcll} U^i(x_{i1},\ldots,x_{im},z) & \geq & U^{*i} & i=2,\ldots,n \\ f^k(y_{k1},\ldots,y_{km},s_k,z) & \leq & 0 & k=1,\ldots,h \\ \sum_{i=1}^{n} x_{ij} - \sum_{k=1}^{h} y_{kj} & \leq & r_j & j=1,\ldots,m \\ x & \geq & 0 & \\ s & \geq & 0 & \end{array}\right. \tag{2.9}$$

On construit le Lagrangien

$$L(x,y,s,\lambda,\mu,\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_i \lambda_i \left[U^i(\cdot) - U^{*i}\right] - \sum_k \mu_k f^k(\cdot) + \sum_j \omega_j \left(r_j - \sum_i x_{ij} + \sum_k y_{kj}\right)$$

avec $\lambda_1 = 1$.

[7] On dit qu'une fonction f a valeurs dans $\mathbb{R}$ est quasi-concave sur un sous-ensemble S de $\mathbb{R}^n$ si pour tout réel a, l'ensemble

$$P_a = \{x \in S | f(x) \geq a\}$$

est concave.

Conditions du premier ordre. On utilise la notation

$$U^i_j = \frac{\partial U^i}{\partial x_{ij}}(\cdot),\ f^k_j = \frac{\partial f^k}{\partial y_{kj}}(\cdot)$$

et ainsi de suite.

Les conditions nécessaires du premier ordre (Karush, Kuhn et Tucker) que doit vérifier tout optimum de Pareto[8] sont l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}^n_+$, $\mu \in \mathbb{R}^h_+$ et $\omega \in \mathbb{R}^m_+$ tels que :

$$(x_{ij}) \quad \begin{cases} \lambda_i U^i_j - \omega_j & \leq & 0 \\ x_{ij}(\lambda_i U^i_j - \omega_j) & = & 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

$$(y_{kj}) \quad \mu_k f^k_j + \omega_j = 0 \tag{2.11}$$

$$(s_k) \quad \begin{cases} -\mu_k f^k_s + \sum_i \lambda_i U^i_z - \sum_l \mu_l f^l_z & \leq & 0 \\ s_k(-\mu_k f^k_s + \sum_i \lambda_i U^i_z - \sum_l \mu_l f^l_z) & = & 0 \end{cases} \tag{2.12}$$

Ces conditions sont obtenues en combinant les conditions sur le gradient du Lagrangien avec les conditions de complémentarité sur x et sur s pour éliminer les multiplicateurs associés. Enfin on a les autres conditions de complémentarité :

$$\begin{cases} \lambda_i \left(U^i(\cdot) - U^{*i}\right) & = & 0 \\ \mu_k f^k(\cdot) & = & 0 \\ \omega_j \left(r_j - \sum_i x_{ij} + \sum_k y_{kj}\right) & = & 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

REMARQUE. Par rapport au cas traité à la section précédente (équilibre partiel) on remarque qu'en plus des conditions d'efficacité on a aussi des contraintes et des conditions de distribution, p.ex. (2.13) qui permettent de sélectionner un optimum de Pareto particulier. Les conditions d'efficacité et de distribution sont liées et il n'y a plus de raisons *a priori* pour que tous les optima de Pareto aient en commun une même valeur des émissions s_k.

Interprétation. L'interprétation des conditions (2.12) n'est plus aussi immédiate qu'en équilibre partiel car elles font intervenir les multiplicateurs associés aux contraintes de production et aux contraintes sur les niveaux d'utilité. Pour retrouver l'interprétation classique on va

[8] lesquels se distinguent par les paramètres U^{*i}

d'abord faire l'hypothèse (plausible) qu'il existe un bien utilisé par tous les individus et toutes les entreprises en quantité non nulle, par exemple le travail (ou le loisir) et que sa productivité marginale est non nulle dans chaque entreprise ; il peut donc jouer le rôle de numéraire et on va lui attribuer l'indice $j = 1$.

On peut alors réécrire la condition (2.12) pour toute entreprise k :

$$\begin{cases} -\frac{f_s^k}{f_1^k} + \sum_i \frac{U_z^i}{U_1^i} - \sum_l \frac{f_z^l}{f_1^l} & \leq & 0 \\ s_k(-\frac{f_s^k}{f_1^k} + \sum_i \frac{U_z^i}{U_1^i} - \sum_l \frac{f_z^l}{f_1^l}) & = & 0 \end{cases} \tag{2.14}$$

Dans le cas d'une entreprise qui cause une pollution strictement positive à l'optimum ($s_k > 0$), on va expliciter comment l'équation

$$\frac{f_s^k}{f_1^k} = \sum_i \frac{U_z^i}{U_1^i} - \sum_l \frac{f_z^l}{f_1^l} \tag{2.15}$$

s'interprète comme étant la condition de Bowen, Lindahl et Samuelson (BLS) qui exprime qu'à l'optimum le coût marginal d'abattement de l'entreprise doit être égal à la somme des disponibilités marginales à payer pour la réduction de la pollution, et que ce coût marginal est donc le même pour toutes les entreprises qui polluent.

Le terme de gauche, $\frac{f_s^k}{f_1^k}$, est le taux marginal de substitution (TMS) technique du numéraire aux émissions polluantes, autrement dit la quantité supplémentaire de numéraire qui permettrait à l'entreprise de réduire les émissions d'une unité, en gardant les autres productions et les autres inputs constants. Il s'agit donc de son coût marginal de dépollution mesuré en numéraire.

Dans le premier terme de droite on trouve pour chaque individu, $\frac{U_z^i}{U_1^i}$, qui est le TMS du numéraire à l'externalité, autrement dit ce qu'il serait prêt à céder en numéraire pour une diminution marginale de la pollution — ce premier terme est donc la somme des disponibilités à payer des individus ; ces disponibilités sont mesurées en numéraire.

Dans le second terme on trouve pour chaque entreprise, $-\frac{f_z^k}{f_1^k}$; en supposant que la pollution globale que l'entreprise subit (et pas seulement ce qu'elle émet) exerce un effet négatif sur sa production, ce terme correspond à la quantité de numéraire qu'économiserait l'entreprise s'il y avait une réduction marginale de la pollution globale. Ce terme est négatif dans le cas où l'entreprise produit mieux lorsque la quantité de pollution qu'elle subit est plus importante. Là encore il s'agit de disponibilité marginale à payer pour une réduction de la pollution.

Finalement le terme de droite représente la somme des disponibilités à payer pour une réduction marginale de la pollution. L'équation (2.15) indique par conséquent que le coût marginal de dépollution de chaque entreprise s'égalise avec la somme des disponibilités marginales à payer. Celle-ci étant indépendante de l'entreprise, on a *égalisation des coûts marginaux d'abattement parmi toutes les entreprises polluantes.*

Équilibre de marché avec taxes et compensations

On cherche à montrer que le laisser-faire est sous-optimal et que la mise en place d'une taxe permet de retrouver les conditions d'optimalité obtenues au paragraphe 2.2.2.

Intuition du résultat. À l'équilibre de marché, il existe un système de prix $p \in \mathbb{R}_+^m$ tels que soient simultanément vérifiées les conditions du premier ordre et les contraintes correspondant aux programmes de chaque entreprise et de chaque agent, ainsi que les contraintes de ressources de l'économie.

Dans le cas d'une entreprise, le résultat classique est que le TMS technique est égal au rapport du prix des biens. En l'absence d'intervention, l'entreprise ne paye pas l'externalité s_k qu'elle crée. Elle va utiliser cette «ressource» au maximum, c'est-à- dire jusqu'à ce que sa productivité s'annule : la condition (2.15) n'est plus vérifiée puisque le terme de gauche devient nul, alors que celui de droite est *a priori* positif. Le laisser-faire est donc sous-optimal.

Comme en équilibre partiel, l'imposition d'une taxe sur le volume de pollution des entreprises permettrait de retrouver la condition souhaitée.

Démonstration de Baumol et Oates. Baumol et Oates étudient directement l'équilibre de marché qui se réalise lorsque l'on applique une taxe sur les émissions, et que par ailleurs l'on effectue des transferts compensatoires vers les individus et les entreprises (ceci afin de pouvoir réaliser les conditions de distribution). Le but est de déterminer les conditions que doit remplir ce système fiscal (taxes et compensations) pour amener le marché à atteindre un optimum de Pareto donné.

Ils montrent ensuite que si l'on prend une taxe unique définie fonctionnellement comme dans BLS, on peut alors identifier l'ensemble des équations (CPO et contraintes) qui décrivent l'optimum de Pareto et celles qui décrivent l'équilibre de marché. Si chacun de ces systèmes à une solution unique, ce doit être la même et on peut alors identifier les solutions, donc en particulier les multiplicateurs (pour l'optimum de Pareto) et les prix (pour l'équilibre de marché)[9].

2.3 Conséquence de l'inertie : des coûts d'abattement instantanés différents

Dans toute cette section, on va considérer un agent (représentant la collectivité) qui récupère le profit de la production des biens produits par deux secteurs. Deux périodes de production ont lieu, $t = 1$ et $t = 2$, qui ont pour conséquence une accumulation de pollution. Les effets de cette pollution ne sont sensibles qu'en fin de deuxième période. Les fonctions de coût, $C^{jt}(\cdot)$ sont spécifiées comme au paragraphe 2.2.1 (on omet l'indice sectoriel j dans les notations suivantes) :

[9] à un facteur multiplicatif près

$$C^t_{y_t}(\cdot) > 0, \qquad C^t_{q_t}(\cdot) < 0 \quad \text{pour} \quad q_t < \hat{q}_t, \qquad \text{et} \quad C^t_{q_t}(\cdot) = 0 \quad \text{pour} \quad q_t \geq \hat{q}_t$$

On se donne comme objectif collectif la maximisation du bien-être actualisé.

$$\max_{q,y} \sum_{j=1}^{2} \sum_{t=1}^{2} \frac{1}{(1+\delta)^{t-1}} \left(p^{jt} y^{jt} - C^{jt}(\cdot) \right) + v \left(\sum_j \sum_t q^{jt} \right) \tag{2.16}$$

Le programme de chaque secteur est de maximiser la valeur actuelle de ses profits des périodes $t = 1, 2$. Il n'est pas tenu compte de l'externalité. Pour le secteur j, l'objectif est donc

$$\max_{(q_j, y_j)} \sum_t \frac{1}{(1+\delta)^{t-1}} \left(p^{jt} y^{jt} - C^{jt}(\cdot) \right) \tag{2.17}$$

En supposant que le coût de production de seconde période, $C^{j2}(\cdot)$, soit fonction seulement de (y^{j2}, q^{j2}) et soit donc indépendant des décisions de première période q^{j1}, on retrouverait alors les mêmes résultats que dans le cadre statique de la section 2.2.1. A l'optimum de production et de pollution, tout se passerait comme si à chaque date, chaque entreprise devait payer sur la pollution qu'elle produit une taxe égale à la disponibilité marginale à réduire la pollution totale. On va revenir sur cette hypothèse pour mettre en évidence un effet d'inertie.

2.3.1 Représentation de l'inertie

Les réflexions sur l'inertie exposées détaillées dans le Chapitre 1 invitent a considérer que les efforts d'abattement mis en œuvre «aujourd'hui» vont aussi avoir un effet sur les coûts d'abattement futurs. On va donc supposer que le coût de production de seconde période du secteur j est aussi fonction de q^{j1} et s'écrit

$$\text{coût de production en } t = 2, \quad C^{j2}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) \quad \text{avec} \quad \frac{\partial C^{j2}}{\partial q^{j1}} \geq 0.$$

La nouvelle condition signifie que plus les émissions ont été réduites en période $t = 1$, plus le coût de production en $t = 2$ est faible pour un niveau de production et d'émissions données[10] (y^{j2}, q^{j2}).

[10] A titre d'exemple, on pourrait envisager qu'une entreprise qui a réduit sa pollution de première période à un niveau q strictement inférieur à $\hat{q}$ — son niveau préféré en l'abscence d'incitation — a son coût de production en deuxième période qui s'écrit maintenant :

$$C^{j2}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) \stackrel{\text{def}}{=} C^j(y^{j2}, \frac{q^{j2}}{q^{j1}} \hat{q}_j)$$

Autrement dit, pour produire y à coût minimal, elle peut se contenter de maintenir la pollution à son niveau réduit de première période.

2.3.2 Le laisser-faire

En l'absence d'incitation, les secteurs ne réduisent pas leur niveau de pollution car ceci impliquerait un coût en première période. En effet, les conditions du premier ordre de maximisation du profit des secteurs sont :
pour tout j

$$p^{j1} = \frac{\partial C^{j1}}{\partial y^1}(y^{j1}, q^{j1}) \tag{2.18}$$

$$p^{j2} = \frac{\partial C^{j2}}{\partial y^2}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) \tag{2.19}$$

et

$$0 = \frac{\partial C^{j1}}{\partial q^1}(y^{j1}, q^{j1}) + \frac{1}{(1+\delta)^{t-1}}\frac{\partial C^{j2}}{\partial q^1}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) \tag{2.20}$$

$$0 = \frac{\partial C^{j2}}{\partial q^2}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) \tag{2.21}$$

D'où immédiatement, $q^t = \hat{q}^t$ étant rappelé que $\frac{\partial C^t}{\partial q^t}(\cdot) = 0$ pour $q^t \geq \hat{q}^t$. Comme la pollution n'a pas de coût d'opportunité, aucune réduction n'est effectuée par les entreprises.

2.3.3 Optimum de Pareto : des coûts marginaux instantanés différents.

Les conditions en y sont identiques. Les conditions en q deviennent :

$$0 = \frac{\partial C^{j1}}{\partial q^1}(y^{j1}, q^{j1}) + \frac{1}{(1+\delta)}\frac{\partial C^{j2}}{\partial q^1}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) - \frac{1}{(1+\delta)}\nu'\left(\sum_{j,t} q^{jt}\right) \tag{2.22}$$

$$0 = \frac{\partial C^{j2}}{\partial q^2}(y^{j2}, q^{j2}, q^{j1}) - \nu'\left(\sum_{j,t} q^{jt}\right) \tag{2.23}$$

Comme précédemment, en comparant les conditions des l'optimum de Pareto et du laisser-faire, on interprète pour chaque secteur j le terme $(1+\delta)^{-1}\nu'\left(\sum_{j,t} q^{jt}\right)$ comme la taxe par unité d'émission qui permet d'internaliser le coût de la pollution. Ce terme est égal à la disponibilité marginale à payer pour réduire la pollution (disponibilité mesurée pour le niveau de pollution optimal.)

1. *La taxe est donc la même pour chaque secteur.* Dans ce modèle, l'inertie n'est donc pas un motif de différenciation ; en effet on a supposé que l'agent prenait en compte l'effet de son choix en $t = 1$ sur son coût en $t = 2$.
2. Le niveau de taxe croit avec le taux d'actualisation.

3. En dernière période (équation 2.23), le niveau d'émissions polluantes q^{j2} est choisi de façon à ce que le coût marginal de réduction de la pollution effectué à cette période (coût marginal instantané) soit égal à la taxe. C'est le résultat que l'on connaît en statique.
4. En 1ere période (équation 2.22), la condition du premier ordre fait apparaître un nouveau terme qui vient s'ajouter au coût marginal instantané : l'effet d'inertie marginal. Il correspond à la diminution du coût d'abattement de deuxième période, lorsque le niveau d'émissions de première période est réduit à la marge. Cette diminution de coût est prise en compte «en valeur présente».
   La somme des deux termes correspond à la variation marginale du coût total en valeur présente. On propose de parler de coût marginal total, ou de coût marginal de long terme.

   $$\textit{Cm total = Cm instantané + effet d'inertie marginal}$$

5. En première période, le niveau d'émissions polluantes q^{j1} est choisi de façon à ce que le coût marginal total (coût marginal instantané plus effet d'inertie marginal) soit égal à la taxe.

   $$\textit{Taxe = Cm total}$$

6. Le coût marginal d'abattement instantané n'est donc pas égal à la taxe. Comme le terme d'inertie marginal est négatif, le niveau d'émission q^{j1} optimal est tel que le *coût marginal de réduction est plus élevé que la taxe.*
7. Réciproquement, *si on connaît l'effort optimal de dépollution que devrait fournir l'entreprise, on sait que la taxe optimale corespondante est plus faible que le coût marginal instantané correspondant à cet effort.*

Toutes choses étant égales par ailleurs, entre deux entreprises identiques dont l'une peut bénéficier de l'effet d'inertie et l'autre pas, celle qui a un effet d'inertie va choisir en première période un niveau de pollution plus faible (et donc un coût marginal d'abattement instantané plus élevé) parce qu'elle prend en compte l'effet de réduction de son coût d'abattement en deuxième période.

2.3.4 Quelles conséquences pour le signal-prix ?

L'inertie comme effet externe

Le résulat que l'on vient de mettre en évidence, à savoir la différence entre coût marginal instantané et dynamique pose problème dès lors qu'il y a des motifs de supposer qu'un secteur ne prendra pas en compte correctement les effets de son abattement sur ses coûts futurs. La taxe[11] ne permettrait pas de l'inciter à effectuer les niveaux de réduction suffisants. L'hypothèse que l'on avait évoquée en conclusion du Chapitre 1, est que l'effet d'inertie peut être de la nature d'une externalité lorsqu'il concerne un secteur où il dépend des décisions de nombreux agents, comme dans le secteur des transports. Cette idée est aussi très présente dans la littérature traitant des économies d'apprentissage (*learning-by-doing*), phénomène que

[11] Prise en $t = 1$ comme égale à la disponibilité à payer $-(1+\delta)^{-1}v'(\Sigma_{jt}q^{jt})$ mesurée à l'optimum de pollution.

l'on a présenté au Chapitre 1 comme une des composantes de l'inertie (FIG 1.2, p. 19). Dans son article fondateur, Arrow (1962) insiste déjà sur la possibilité d'une divergence entre optimum privé et optimum social du fait de ces économies d'apprentissage, ce qui se comprend simplement : tous les utilisateurs futurs en bénéficient, alors que seuls les utilisateurs actuels contribuent à cet effet et ne sont pas nécessairement rétribués pour cela.

Intruments correctifs

L'hypothèse selon laquelle un secteur ne prendrait pas (du tout) en compte l'effet de ses efforts actuels sur ces coûts futurs revient à dire qu'en première période ($t = 1$) le laisser-faire est caractérisé dans ce secteur par les équations (2.5) et non par les équations (2.18) et (2.20). La comparaison avec les conditions du premier ordre définissant la production et la polllution optimale du secteur (section 2.3.3) invite à considérer qu'une taxe sur la pollution augmentée de l'effet d'inertie de ce secteur[12] permettrait de corriger à la fois l'externalité environnementale et l'externalité due à l'inertie. Au total, la taxe sur la pollution serait composée de deux taxes, l'une correspondant à la taxe Pigouvienne classique, l'autre spécifique au secteur et égale à son effet d'inertie. On conclurait alors à une différentiation des signaux-prix entre les secteurs.

Toutefois, il est en général préférable de chercher quel instrument spécifique (*une autre* taxe, normes, subvention, etc.) permettrait de remédier aux effets externes relatifs à l'inertie, plutôt que d'envisager comment la taxe sur la pollution devrait être modifiée en l'absence d'une telle politique spécifique. Ces autres modalités d'internalisation pourraient éviter d'avoir à gérer les effets redistributifs d'une trop forte ponction fiscale sur les activités émettrices.

Dans des travaux récents portant sur le changement induit par l'apprentissage et sa prise en compte dans la politique de lutte contre le changement climatique, les auteurs semblent pourtant aller dans le sens d'un signal-prix plus élevé pour prendre en compte l'inertie (Rosendahl, 2004; Gerlagh et van der Zwaan, 2004).

Taxe carbone différenciée selon les pays, Rosendahl (2004)

En reprenant le modèle de Goulder et Mathai (2000) qu'il étend à deux agents, Rosendahl (2004) insite lui aussi sur le fait qu'en présence de changement technique induit par l'apprentissage (LBD), les coût marginaux d'abattement instantanés (*current marginal costs*) sont en général différents entre les agents puisque « les effets de l'apprentissage ne seront identiques que par accident[13] ».

Il revient alors sur la contradiction apparente avec le résultat très affirmé de l'économie de l'environnement selon lequel les coûts marginaux d'abatement doivent s'égaliser *à chaque instant du temps*. Ce résultat reste bien entendu valable « dès lors que les réductions des coûts futurs offertes par l'abatement présent sont prises en compte » dans le calcul du coût marginal,

[12] $(1+\delta)^{-1}\partial C^{j2}/\partial q^1$

[13] Trad. propre, comme pour les autres citations.

ce qui en soi est implicite à la formulation théorique dans son acception la plus générale[14]. Cependant l'insistance habituelle sur l'égalisation à chaque instant du temps semble, selon l'auteur, avoir suscité une vision conventionnelle, simplifié et erronée du résultat théorique. Il y aurait donc souvent confusion entre l'égalité des coûts marginaux *à chaque instant du temps* et l'égalité des coûts marginaux *instantanés*.

Comme à l'égalité entre agents du coût marginal optimal est associée l'unicité de la taxe optimale incitative, laquelle doit être la même pour tous, c'est finalement sur cette unicité que Rosendahl s'interroge en discutant la possibilité que les effets d'apprentissage dont bénéficie un acteur soient, au moins en partie, « externes » à cet acteur. Lorsque ce dernier est une entreprise « représentative » d'un secteur, ceci est concevable puisque la littérature sur l'effet d'apprentissage (voir p.ex. Grübler et Messner, 1998) explique la décroissance du coût des technologies par le volume total des installations de la technologie. L'ensemble des entreprises contribuent à l'accumulation de connaissances par apprentissage, et chacune bénéficie du stock auquel toutes ont contribué. En sorte que l'apprentissage est bien pour partie un effet externe à l'entreprise représentative. Dans ce cas, Rosendahl interprête les conditions du premier ordre qu'il obtient en concluant que la taxe optimale sur les émissions doit être augmentée pour internaliser la part externe des effets d'apprentissage. Sans cette incitation supplémentaire, le niveau d'abattement serait trop faible. L'auteur conclut finalement à des taxes sur les émissions de gaz à effet de serre différentes suivant les régions du monde — plus forte pour les pays de l'Annexe B mois forte pour ceux hors Annexe B —- dans la mesure où les effets d'apprentissage sont spécifiques aux régions.

L'auteur créé peut-être à son tour de l'ambiguité en n'insistant pas assez sur le fait que ce qu'il désigne comme « taxe carbone »est en fait composée de *deux taxes*. La première vise à faire prendre en compte le coût du dommage environnemental, la seconde à faire prendre en compte les avantages externes des effets d'apprentissage, externalité qui est d'une nature très différente. Surtout, il passe assez rapidement sur les autres possibilités d'internalisation des effets d'apprentissage, mentionne en passant d'autres instruments possibles (subventions aux réductions, ou avatages fiscaux sur les technologies propres) mais conteste qu'ils soient plus appropriés en pratique[15].

Taxe carbone plus élevée que le prix fictif du carbone, Gerlagh et van der Zwaan (2004)

Gerlagh et van der Zwaan (2004) constatent que dans un modèle comme DEMETER (pour une présentation succinte voir Chapitre 1 ; section 1.3.3), qui inclut des effets d'apprentissage,

> « Comme les investissements dans la production d'énergie non-fossile diminuent les coûts futurs de la production énergétique, le prix fictif des investissements est inférieur aux coûts immédiats, c'est à dire inférieur à la consommation renon-

[14] Par exemple une étude de Gilotte et Simon (2000) utilise bien cette définition étendue du coût marginal (*ibid.* p. 54) dans une modélisation à deux secteurs où l'effet futur de l'abattement provient non pas de changement induit mais des durées de vie du capital industriel et du parc automobile des ménages.

[15] Il donne un argument qu'il emprunte à un autre article (Kverndokk *et al.*, 2004), d'après lequel une subvention aux technologies peu émettrices de GES pourrait avoir un effet décourageant sur les innovateurs, si ces derniers venaient à craindre que leur technologie ne bénéficie pas de la subvention.

> cée[16]. L'écart entre le prix fictif et les coûts immédiats peut être interprété comme étant la subvention aux investissements qui permet d'internaliser les effets d'apprentissage. »(p.47)

Ils expliquent ensuite qu'il y a plusieurs raisons d'éviter l'usage de subventions et de préférer recourir à des[17] taxes carbone plus élevées qui servent alors un double objectif : « elles internalisent l'effet externe du changement climatique et dans le même temps, elles stimulent l'essor de sources d'énergie non-fossile. »

2.3.5 La place des imperfections de marché

Problèmes informationnels, de rationalité, et marché du crédit

Des problèmes peuvent se poser si on a des «imperfections» de marché, par exemple :
- un secteur ne connaît pas correctement les effets de son abattement sur ses coûts futurs (problème informationnel) ;
- ou n'anticipe pas correctement le niveau de la taxe en deuxième période ;
- ou subit une contrainte budgétaire instantanée qui ne lui permet pas de faire le surcroît d'effort d'abattement souhaitable en première période, par exemple parce qu'il n'a pas accès au crédit (i.e. le marché du crédit est imparfait).

Externalités

Enfin, une autre hypothèse a été évoquée, suggérant que l'effet d'inertie peut être de la nature d'une externalité lorsqu'il concerne un secteur où il dépend des décisions de nombreux agents, comme dans le secteur des transports.

Intruments correctifs

En économie, la réponse est en général de chercher quels instruments spécifiques permettraient de remédier aux imperfections détectées, et non pas de voir comment la taxe doit être modifiée en l'absence d'une telle politique (qui peut consister en *une autre* taxe ou subvention).

Dans le cas où le changement induit est de la nature d'une externalité, il se trouve que la valeur des économies de carbone est égale à la somme de la réduction marginale des dommages et de la réduction des coûts futurs d'abattement. Le premier terme, la réduction marginale des dommages, est égal entre les secteurs, il correspond à la taxe carbone «classique». Le second terme, la réduction des coûts futurs, est spécifique au secteur considéré. S'il n'est pas pris en compte par les décideurs du secteurs, il est alors possible de l'internaliser au moyen d'une taxe portant sur les émissions, taxe spécifique au secteur. Au bout du compte, la taxe carbone

[16] à la marge. Note du trad.

[17] Les auteurs ne précisent si ils utilisent le pluriel parce qu'ils ont en vue une famille de taxes indexées par le temps ou bien des secteurs ou des pays différents.

incitative (somme de la taxe carbone classique et de la taxe spécifique au secteur) est donc potentiellement différente d'un secteur à l'autre.

2.4 Récapitulatif

Premier résultat :

- Le coût marginal de long terme est le même pour tous les secteurs, égal au dommage marginal. *C'est la taxe carbone classique*.

Deuxième résultat :

- Pour chaque secteur, il y a un *écart entre dépense marginale d'abattement et coût marginal de long terme*.
- Cet écart est *propre à chaque secteur* et égal à son «effet d'inertie» : la réduction marginale des coûts futurs d'abattement du secteur provoquée par le changement induit.

Troisième résultat :

- Lorsque le changement induit d'un secteur est de la nature d'une externalité, la taxe carbone classique ne suffit pas pour inciter les agents du secteur à des efforts de réductions suffisants. Il faut donc leur transmettre un signal incitatif supplémentaire, par exemple sous forme de signal-prix.
- Ce signal prix supplémentaire est égal à la valeur de l'effet d'inertie du secteur.
- **Il s'ensuit une différenciation des taxes incitatives entre les secteurs :** égale au dommage marginale plus l'effet d'inertie sectoriel (lorsque celui-ci doit être internalisé).

Concernant les transports,

- Il est vraisemblable que les ménages et une part significative des entreprises de transport routier ne prennent pas en compte le changement induit (externalité).
- Il serait souhaitable d'appliquer au secteur des transports une taxe carbone plus élevée que le prix international du carbone (mais est-ce praticable ?)
- Si cela n'est pas possible, il convient d'envisager d'autres moyens de transmettre ce signal-prix. Par exemple aux collectivités locales, responsables d'une part importante de l'investissement en infrastructure, de la gestion des transports collectifs, et de l'évolution des tissus urbains. Ce point est discuté dans le chapitre suivant.

2.5 Incertitudes et inertie

Cette section pose les premières étapes pour aborder l'idée selon laquelle la combinaison des incertitudes (climatiques ou technologiques) et de l'«inertie économique» (au sens où il y a du changement induit, voir premier chapitre) a pour conséquence qu'il est préférable de différencier la taxation environnementale, c'est à dire de l'adapter à chaque secteur selon le degré d'inertie qu'il présente, cela même dans l'hypothèse où le changement induit serait bien internalisé.

On propose d'étudier une famille de modèles à deux périodes qui permet d'aborder cette question et de distinguer entre les conséquences de l'incertitude suivant qu'elle porte sur les coûts d'abattement ou sur le climat.

On s'intéresse à des problèmes d'abattement optimal et d'incitation dans l'incertain, avec levée de l'incertitude lors de la deuxième période de décision.

2.5.1 Incertitude sur le climat

On suppose que le décideur central est confronté à cette incertitude, et qu'il doit «faire internaliser» un dommage climatique incertain via le signal-prix qu'il transmet aux agents qui effectuent les émissions (qui eux ne regardent que leurs coûts sans prise en compte des dommages climatiques). C'est le type de problème qui se pose pour un État qui souhaite faire effectuer les «bons» abattements par les différents secteurs de son économie.

Incitation optimale d'un secteur

On considère la structure de contrôle suivante : la commande u est scalaire ; elle représente par exemple le niveau d'émissions ou le taux d'abattement. L'état est initialement

$$\xi_0 = (x_0, y_0),$$

puis donné par

$$\xi_{t+1} = \Xi(\xi_t, u_t) = (f(x_t, u_t), g(y_t, u_t))$$

la composante x correspond à l'état de l'environnement, tandis que la composante y correspond au changement technique induit (c'est par exemple ce que Goulder et Mathai appellent le stock de connaissance).

Les fonctions objectifs instantanées sont supposées ne dépendre de l'état que en la composante y, $l_t(y_t, u_t)$. Ceci justifiera que le secteur ne prend pas en compte l'effet sur l'environnement.

La différence entre l'objectif du secteur ou du planificateur se traduira par la présence ou non de la fonction objectif terminale. Celle-ci correspond aux impacts environnementaux et ne dépend de l'état que en la composante x, $\varphi(x_2, \gamma)$. (Cette dernière restriction simplifiera beaucoup la présentation quand on considérera plusieurs secteurs).

2.5.2 Objectif du planificateur

Le planificateur prend en compte la conséquence future φ de l'état final (contenu dans) x_2, conséquence qui dépend d'une variable aléatoire γ. Il obtiendra de l'information sur l'aléa avant son choix de u_1.

$$\max_{u_0} l_0(u_0) + \mathbb{E} \max_{u_1(s)} l_1(u_1, y_1) + \mathbb{E}\left[\varphi(x_2, \gamma) \mid s\right] \tag{2.24}$$

Pour alléger les équations en un optimum $(u_0^\#, u_1^\#(s))$, on notera :

$$\frac{\partial l_1}{\partial u}^\# \quad \text{pour} \quad \frac{\partial l_1}{\partial u_1}(u_1^\#(s), x_1^\#) \tag{2.25}$$

$$\nabla_y l_1{}^\# \quad \text{pour} \quad \nabla_y l_1(u_1^\#(s), y_1^\#) \tag{2.26}$$

$$\nabla_x \varphi^\# \quad \text{pour} \quad \nabla_x \varphi(g f x_1^\#, u_1^\#(s)), \gamma) \tag{2.27}$$

$$\frac{\partial g}{\partial u_0}^\# \quad \text{pour} \quad \frac{\partial g}{\partial u}(y_0, u_0^\#) \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_1}^\# \quad \text{pour} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_1^\#, u_1^\#(s)) \tag{2.29}$$

$$\frac{\partial f}{\partial u_0}^\# \quad \text{pour} \quad \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0^\#) \tag{2.30}$$

$$\nabla_x f^\# \quad \text{pour} \quad \nabla_x f(x_1^\#, u_1^\#(s)) \tag{2.31}$$

Les conditions du premier ordre d'un optimum intérieur $(u_0^\#, u_1^\#(s))$ s'écrivent :

$$\text{pour tout s} \quad -\frac{\partial l_1}{\partial u}^\# = \mathbb{E}[\nabla_x \varphi^\# \mid s]^T \frac{\partial f}{\partial u_1}^\# \tag{2.32}$$

$$-\frac{\partial l_0}{\partial u}(u_0^\#) - \mathbb{E}\nabla_y l_1{}^{\#T} \frac{\partial g}{\partial u_0}^\# = \mathbb{E}\left\{\nabla_x g^\# \mathbb{E}[\nabla_x \varphi^\# \mid s]\right\}^T \frac{\partial f}{\partial u_0}^\# \tag{2.33}$$

L'équation (2.33) est obtenue de la façon suivante : on définit la fonction de Bellman

$$V(x_1, y_1) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E} \max_{u_1(s)} l_1(u_1, y_1) + \mathbb{E}\left[\varphi(x_2, \gamma) \mid s\right] \tag{2.34}$$

et $u_0^\#$ comme solution de

$$O = \frac{\partial l_0}{\partial u} + \nabla_x V(f(x_0, u_0^\#))^T \frac{\partial f}{\partial u}(x_0, u_0^\#) + \nabla_y V(f(x_0, u_0^\#))^T \frac{\partial g}{\partial u}(y_0, u_0^\#) \tag{2.35}$$

puis $\nabla_x V$ s'obtient par le théorème de l'enveloppe (dérivée d'un maximum par rapport à un paramètre).

Interprétation

En interprétant les fonctions l comme le bien-être (croissant) permis par le niveau d'émission u ; φ comme le bien-être futur dans l'état du climat x_2, alors l'équation (2.32) exprime l'égalité entre le coût marginal et l'espérance de bénéfice marginal d'une réduction du niveau d'émission u_1.

L'équation (2.33) exprime l'égalité entre l'espérance de bénéfice marginal (membre de droite) et le *coût marginal d'abattement (de long terme)* d'une réduction du niveau d'émission

u_0 (membre de gauche). Le second terme de ce dernier correspond à l'espérance de l'effet de la réduction en $t = 0$ sur le coût marginal d'abattement en $t = 1$. Cet effet est incertain, puisque le niveau de réduction qui sera effectivement choisi en $t = 1$ dépendra de l'information (aléatoire) reçue alors.

Observation importante

Dans un contexte d'arrivée d'information dans le futur, le caractère incertain des dommages climatiques se transmet aussi à l'effet du changement induit parce que le niveau optimal d'abattement futur devient une variable aléatoire.

2.5.3 Comportement du décideur sectoriel

Objectif sans intervention

$$\max_{u_0,u_1} l_0(u_0) + l_1(u_1, y_1) \tag{2.36}$$

Les conditions du premier ordre du comportement sectoriel $(\hat{u}_0, \hat{u}_1)$ s'écrivent :

$$0 = \frac{\partial l_1}{\partial u_1}(\hat{u}_1, \hat{y}_1) \tag{2.37}$$

$$0 = \frac{\partial l_0}{\partial u_0}(\hat{u}_0) + (\nabla_y l_1(\hat{u}_1, \hat{y}_1))^T \left(\frac{\partial g}{\partial u}(y_0, \hat{u}_0)\right) \tag{2.38}$$

$$\tag{2.39}$$

On notera qu'on a supposé que le secteur prend en compte le progrès technique, d'où le second terme de Eq. (2.38)

Définition de la taxation

A chaque date $t = 0, 1$, le planificateur peut prélever une taxe de taux τ_t qui s'applique à (une conséquence de) la décision u_t prise par le secteur. Soit e_t une fonction strictement monotone de u_t qui correspond à la conséquence taxée de la décision u ([18]).

En présence de taxe, l'objectif du secteur devient alors

$$\max_{u_0,u_1} l_0(u_0) - \tau_0 e_0(u_0) + l_1(u_1, y_1) - \tau_1 e_1(u_1) \tag{2.40}$$

[18] Par exemple, si u est un taux d'abattement, e_t est du type $u \mapsto E(1-u)$ où E_t sont les émissions tendancielles avant abattement. Si u est le niveau d'émission, e_t est l'identité.

Rationalité parfaite et taxation dépendante de l'information.

On suppose que
- en $t = 1$, le planificateur choisit le taux de taxation selon l'information reçue ;
- le planificateur annonce en $t = 0$ le schéma de taxation qu'il va suivre : $(\tau_0, \tau_1(s))$. Autrement dit : il annonce la taxe en $t = 0$ et des niveaux possibles de taxation en $t = 1$ assortis de probabilités d'occurence.
- Le décideur sectoriel est parfaitement rationnel au sens où son objectif est le suivant :

$$\max_{u_0} l_0(u_0) - \tau_0 e_0(u_0) + \mathbb{E} \max_{u_1(s)} l_1(u_1, y_1) - \tau_1(s) e_0(u_1) \tag{2.41}$$

Les conditions du premier ordre d'une solution intérieure $(\hat{u}_0, \hat{u}_1(s))$ à ce problème sont :

$$\text{pour tout s,} \quad -\frac{\partial l_1}{\partial u}(\hat{u}_1, \hat{y}_1) = \tau_1(s) e_1'(\hat{u}_1) \tag{2.42}$$

$$-\frac{\partial l_0}{\partial u}(\hat{u}_0) - \mathbb{E}\nabla_y l_1(\hat{u}_1, \hat{y}_1)^T \frac{\partial g}{\partial u}(y_0, \hat{u}_0) = \tau_0 e_0'(\hat{u}_0) \tag{2.43}$$

Dans ces conditions il est possible de décentraliser l'optimum $\tau_0 e'(\hat{u}_0)$ défini par (2.32) et (2.33) en annonçant au secteur le schéma de taxation :

$$\text{pour tout s,} \quad \tau_1(s) = \frac{1}{e'(u_1^\#(s))} \mathbb{E}[\nabla_x \varphi^\# \mid s]^T \frac{\partial f}{\partial u_1}^\# \tag{2.44}$$

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \frac{1}{e'(u_0^\#)} \mathbb{E}\left\{ \nabla_x f^\# \mathbb{E}[\nabla_x \varphi^\# \mid s] \right\}^T \frac{\partial f}{\partial u_0}^\# \\ &= \frac{1}{e'(u_0^\#)} \mathbb{E}\left\{ \nabla_x f^\# \nabla_x \varphi^\# \right\}^T \frac{\partial f}{\partial u_0}^\# \end{aligned} \tag{2.45}$$

assorti des probabilités de réalisation de s.

Interprétation

Le résultat précédent est une généralisation au cadre stochastique de la définition habituelle de la taxe environnementale : elle doit être égale à l'espérance du bénéfice marginal de la réduction d'émissions.

2.5.4 Conclusion et pistes futures

En présence d'incertitudes et d'information future, pour décentraliser l'optimum, le décideur doit pouvoir annoncer, non pas un *sentier* de taxation (*la* taxe à chaque date du futur),

mais, un *schéma* de taxation — schéma dont la réalisation sera un sentier particulier selon l'information reçue (la taxe à chaque date du futur en fonction de la réalisation d'un aléa).

Quant au décideur sectoriel, lui doit être capable de comprendre cette annonce et de la traiter correctement, à savoir résoudre un problème d'optimisation dynamique dans l'incertain.

En conservant ces hypothèses très fortes, on obtiendrait sans difficulté un résultat identique en considérant plusieurs secteurs (toujours sous l'hypothèse que chaque secteur prend en compte le changement induit). Cependant, l'hypothèse d'un responsable politique qui annoncerait une politique aléatoire est problématique.

Le type de problème à poser pourrait être le suivant : sachant que le décideur est contraint d'annoncer une politique déterministe, comment celle-ci se définit-elle (optimum de «second rang») ? Lorsqu'il y a plusieurs secteurs, la possibilité d'annoncer des taxes différenciées selon les secteurs lui permet-elle d'améliorer son objectif ?

Références

Kenneth J. ARROW. The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, 29, 155–173, 1962.

William J. BAUMOL et Wallace E. OATES. *The Theory of Environmental Policy*. Cambridge University Press, 1988. Second Édition.

Olivier BEAUMAIS et Mireille CHIROLEU-ASSOULINE. *Économie de l'environnement*. Bréal, 2001.

Philippe BONTEMS et Gillles ROTILLON. *Économie de l'environnement*. Éditions La Découverte, Paris, 1998.

Reyer GERLAGH et Bob VAN DER ZWAAN. A sensitivity analysis of timing and costs of greenhouse gas emission reductions. *Climatic Change*, 65, 39–71, 2004.

Laurent GILOTTE et Benoît SIMON. *Prospective du système des transports terrestres face aux objectifs et mesures du Protocole de Kyoto*. CIRED, 2000. Etude réalisée pour l'ADEME dans le cadre du PREDIT "Recherches stratégiques". Centre international de recherche sur l'environnement et le développement.

Lawrence H. GOULDER et Koshy MATHAI. Optimal CO_2 abatement in the presence of induced technical change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 39, 1–38, 2000.

Arnulf GRÜBLER et Sabine MESSNER. Technological change and the timing of mitigation measures. *Energy Economics*, 20, 495–512, 1998.

Snorre KVERNDOKK, Knut Einar ROSENDAHL, et Thomas F. RUTHERFORD. Climate policies and induced technological change : Which to choose, the carrot or the stick ? *Environmental and Resource Economics*, 27, 21–41, 2004.

David W. PEARCE et Kerry R. TURNER. *Economics of Natural Resources and the Environment*. Harvester Wheatsheaf, 1990.

Pierre PICARD. *Eléments de microéconomie*. Montchrestien, 2e éd., 1990.

Knut Einar ROSENDAHL. Cost-effective environmental policy : implications of induced technological change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 48, 1099–1121, 2004.

Chapitre 3

Effet de précaution et variation de la valeur de l'information

Sommaire

3.1 Introduction 86
3.2 The standard model of decision with learning 88
3.2.1 The decision problem 88
3.2.2 Information structure 89
3.2.3 Subsequent value of the information structure 89
3.3 Learning effect and value of information 90
3.3.1 How value of information enters the decision problem 90
3.3.2 Comparison of initial and subsequent values of information 91
3.3.3 Comparison of optimal solutions; the learning effect 92
3.4 Extension to active learning and stochastic evolution 93
3.5 Value of information as a key to the irreversibility literature 95
3.5.1 Epstein's Theorem and the value of information 95
3.5.2 Linear dynamics and costs; ' all or nothing ' decision set 96
3.5.3 Value of information in Ulph and Ulph, 1997 96
3.6 Illustration with a modified stochastic version of DICE 97
3.6.1 The climate-economy system 97
3.6.2 The decision problem 98
3.6.3 How policy affects the value of information on the climate 99
3.7 Conclusion 99
3.8 Appendix: proofs 101

Ce chapitre rapporte un article écrit avec Michel DE LARA et présenté dans des versions antérieures au 43eme congrès de la Société canadienne de sciences économiques (SCSE,2003), et à la 12eme conférence annuelle de l'EAERE (European association of environmental and resource economists), 2003.

3.9 Appendix: Comparison of arg max 102
3.10 Appendix: proofs 103
3.11 Appendix: extension of Ulph and Ulph's result 104
3.12 Appendix: Details for the numerical model 105
3.12.1 Summarized description of the modified DICE model 105
3.12.2 Parameterization of the controls in time steps 0 to 3 107
3.12.3 Optimal initial policies with and without learning 108
3.12.4 Computed value of information 109
3.12.5 Detailed modifications to the original DICE model 110
3.12.6 Code files 111
Références 112

3.1 Introduction

In relation to information, two issues are recurrent in the applied literature dealing with climate change[1]. Firstly, the degree to which the emissions of greenhouse gases should be reduced today will hinge on our assumption on the extent of our future knowledge about the climate. Secondly, how much should we be ready to pay now through, for example, investment in scientific research, in order to acquire information in the future?

The second of these questions relates to the *value of information*, or more explicitly the *value of an information structure*[2]. It is a familiar concept in the economics of uncertainty, which has been used for example in order to try and set an upper-bound to the value of a substantial research program to reduce climate-related uncertainties (Manne et Richels, 1992).

As for the first question, it is central to the theoretical literature on irreversibility and uncertainty [3] and relates to the ' irreversibility effect ' (Henry, 1974a). This effect states roughly that, when there is a source of irreversibility in the system we control, then the learning effect[4] is precautionary. Most of the literature on the subject looks for conditions under which the effect holds. In one of the seminal papers, Arrow and Fisher (1974), noted the "increasing concentration of carbon dioxide in the global atmosphere" as an application for the reasoning. However, most of the theoretical findings, including theirs', can hardly be used to help and interpret the results of integrated-assessment models (IAM) of climate and economics such as DICE (Nordhaus, 1994). In effect, analytical models usually involve simplifications that are extreme in regard to the climate change issue. For instance, environment is always captured by a scalar variable that follows a linear dynamic, whereas in DICE 98 (Nordhaus et

[1] See for example Manne et Richels (1992); Nordhaus (1994).

[2] We shall keep the terminology *expected value of information* for the case where the value of the information structure is a random variable, see section 3.4.

[3] Arrow et Fisher (1974); Henry (1974a,b); Freixas et Laffont (1984); Kolstad (1996); Ulph et Ulph (1997)

[4] By learning effect we refer to how the first-period optimal decision is modified when the decision maker considers that information will arrive in the future.

Boyer, 2000) the environment is a five-component vector with a non-linear dynamic for the atmospheric temperature.

Moreover, as Ulph et Ulph (1997) noted, it is not possible to conclude in advance and "as a matter of principle" about the direction of the learning effect for the climate change issue. This would require the condition identified by Epstein (1980), which is not met even in the "simplest model of global warming" that they set out. It implies that, in complex numerical models that embed irreversibility sources, the direction of the learning effect may depend on the data. Moreover, it may depend on the prior beliefs of the decision maker. This idea is reinforced by more recent results by Gollier *et al.* (2000). In a two-period setting close to Ulph and Ulph's, they show that the irreversibility effect is guaranteed for all risks if the utility function belongs to a restrictive class.

Concepts that can be used for interpreting (rather than conjecturing) the behaviour of complex models were sought. We found promising to follow Ha-Duong (1998), who proposed to rely on how, in the second-period problem, the value of information is modified by the initial decision. He argues it should be a better guide than the notion of quasi-option value, which is traditional to the irreversibility literature since introduced by Arrow and Fisher (1974). Moreover, results about quasi-option value do not hold in the general case (Hanemann, 1989). Ha-Duong implements this idea with a particular model: the initial decision is taken in a set of two elements (high or low abatement), uncertainty is described by two states of nature (dangerous or benign). Once the initial decision has been taken, he looks at the value of getting perfect information before the next decision and points that this value of information depends on the initial decision; the irreversibility effect takes place when the value of information, as a function of the initial decision, is greater for high initial abatement than for low initial abatement.

Until recently, the irreversibility literature had not really taken advantage of the observation that, once an initial decision is made, the value of information can be defined as a function of that decision. Conrad (1980) emphasized the value of future information from the point of view of the next generation but did not make this dependency explicit. Hanemann (1989) calls it value of information conditional on the initial decision[5], but even in the case where the set of admissible decisions is a real interval, he considers this value only for some particular initial decisions (the optimal decisions with and without information). More recently, however, Rouillon (2001) defined for a particular model of climate-change the value of information as a function of the greenhouse gases (GHG) concentration. He found in one of his cases that, when this value of information (after the initial decision) is a monotone function of the pollution stock, then the optimal emission levels with and without information can be ordered.

We show that this result is in fact very general and ties together different pieces of the literature on uncertainty and irreversibility. It can also be applied properly in integrated assessment models with few modifications and thus connects two themes of the climate change literature, namely, the value of information and the irreversibility effect.

Section 3.2 presents a standard model of sequential decision under uncertainty. Practically all the specific models studied in the irreversibility literature from Arrow and Fisher to

[5]We shall avoid this terminology, which can be confusing. See footnote 2.

Gollier *et al.* can be seen as particular instance of our model. Formally it is not restricted to environmental problems. We define the ' subsequent ' value of information as the value of the information structure once the initial decision has been taken. In section 3.3, we show that, when value of information is a (partially) monotone function of the initial decision, then the optimal initial decisions with or without information can be compared. With two different information structures, the same result applies to the value of exchanging one information structure for the other. The result does not require any convexity conditions. It is extended in section 3.4 to sequential decision problems including endogenous risk, active learning and stochastic dynamic. Section 3.5 shows how our result unifies and provides an interpretation for the conditions for the irreversibility effect that are given in the literature. Finally, section 3.6 uses Nordhaus' DICE model to provide a practical application.

3.2 The standard model of decision with learning

3.2.1 The decision problem

We consider in this section a rather general model of optimal control under uncertainty, where decisions are taken at two periods of time, namely, at $t = 0$ and at $t = 1$. The decision maker aims at maximizing the expected present benefit

$$\max_{u_0,u_1} \mathbb{E}\left[l_0(u_0) + l_1(u_1, x_1, \gamma)\right] \tag{3.1}$$
$$\text{s.c.} \quad x_1 = f(x_0, u_0) \quad \text{and} \quad u_t \in \mathcal{U}_t(x_t),\ t = 0, 1.$$

$x_t \in \mathbb{R}^n$ is the *state of the system* at time t, which depends on the decisions u_t through the dynamics f; its initial value x_0 is known; the decision u_t must be chosen in a admissible set $\mathcal{U}_t \subset \mathbb{R}^{m_t}$ that, in all generality, depends on t and on the state x_t. We make the restriction that the initial decision is a scalar ($\mathcal{U}_0 \subset \mathbb{R}$, i.e. $m_0 = 1$). Finally $l_t(\cdot)$ is the benefit of decision u_t when the system is in the state x_t. The function l_1 depends on γ, a parameter unknown at time $t = 0$ that we represent as a random variable over a probability space[6] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, where the $\omega \in \Omega$ are the *states of the nature*. Note that, at this stage, randomness appears only through γ, though the dynamics may be taken as stochastic as we shall see in section 3.4.

We could actually write this standard model into a more compact form[7] as it is the current practice in the literature on irreversibility and decision under uncertainty. However, the ex-

[6] In the irreversibility literature Ω is a finite set of the possible values of γ, $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$, and $\mathbb{P}$ is the prior used by the decision maker at time $t = 0$.

[7] Namely as

$$\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0,\, u_1 \in \mathcal{D}(u_0)} \mathbb{E}\left[l_0(u_0) + L(u_1, u_0, \gamma)\right]$$
$$\text{where} \quad L(u_1, u_0, \gamma) \overset{\text{def}}{=} l_1(u_1, f(x_0, u_0), \gamma)$$
$$\text{and} \quad \mathcal{D}(u_0) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{U}_1(f(x_0, u_0)).$$

plicit distinction between state and control is convenient for handling the general model with stochastic dynamics presented in section 3.4.

In what follows, we shall always assume that, for the problems we consider, the *sup* is attained and we shall use the notation *max*.

3.2.2 Information structure

The decision maker eventually obtains information at time $t = 1$. A rather general way to describe information is to assume the reception at time $t = 1$ of a signal[8] that allows to improve on the law $\mathbb{P}_\gamma$ of the random variable γ by conditioning: in this case, Φ is a random variable (over the same sample space as γ) so that when the decision maker observes Φ, she uses the conditional probability law $\mathbb{P}_\gamma^\Phi$ of γ knowing Φ. More generally, information is a σ-algebra (the one generated by the signal, $\sigma(\Phi)$ in the case hereabove).

' No information ' at time $t = 1$ can be represented by a constant signal over Ω or, equivalently, by the trivial σ-algebra $\{\Omega, \emptyset\}$. In the following, we shall denote by $\perp$ a non-informative structure.

At time $t = 1$, the decision maker receives a given realization $\Phi(\omega)$ of the signal Φ before her choice u_1. For any state x_1, the decision u_1 can be seen as a function from Ω to $\mathcal{U}_1(x_1)$ and should be measurable with respect to the σ-algebra induced by the signal function Φ. We denote this requirement by $u_1 \preccurlyeq \Phi$:

$$u_1 \preccurlyeq \Phi \iff \sigma(u_1) \subset \sigma(\Phi)\,. \tag{3.2}$$

For the problem with information structure Φ, define the ' expected optimal benefit in state $x_1 = x$ ' as the value function at $t = 1$:

$$V_\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x),\, u_1 \preccurlyeq \Phi} \mathbb{E}\left[l_1(u_1, x, \gamma) \mid \Phi\right]\right] \tag{3.3}$$

which allows to rewrite the decision problem (3.1) at $t = 0$ as:

$$\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\Phi(f(x_0, u_0))\right]. \tag{3.4}$$

3.2.3 Subsequent value of the information structure

After any initial decision u_0, the decision maker knows from the deterministic dynamics f what subsequent state of the system, x_1, will enter her new decision problem at time $t = 1$. If she thinks she will not learn about γ (information structure $\perp$) , she may be ready to pay to obtain information from a signal Φ. When buying Φ, she does not know which information

[8] The irreversibility literature (for instance Freixas et Laffont, 1984; Kolstad, 1996) relies on a description of information through partitions. However partitions are less general in the non-finite case.

she will receive, but she will be able to move from the expected benefit $V_\perp(x_1)$ to the expected benefit $V_\Phi(x_1)$. Let us define therefore[9]

$$I_\Phi(x) \stackrel{\text{def}}{=} V_\Phi(x) - V_\perp(x) \tag{3.5}$$
$$= \mathbb{E}\left(\max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x),\, u_1 \preccurlyeq \Phi} \mathbb{E}\left[l_1(u_1, x, \gamma) \mid \Phi \right] \right) - \max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x)} \mathbb{E}\left[l_1(u_1, x, \gamma) \right]$$

as the *subsequent value of the information* structure Φ when the system will be in state x in $t = 1$. This value is clearly always non-negative.

The definition makes clear that the value of the information is a function of the state of the system. In applications (Manne et Richels, 1992; Nordhaus, 1994), the value of information is usually defined before decision u_0 has been taken ; therefore it can be considered to depend on x_0.

In order to distinguish between these two notions, *initial* value of information will refer to the usual definition, and *subsequent* value of information to definition by (3.5). In the following, we shall indifferently use the expressions ‘ value of information ’ or ‘ value of the information structure ’.

More generally, when the state of the system in $t = 1$ is $x_1 = x$, the value of having an information structure Ψ rather than the information structure Φ is:

$$\Delta_{\Psi\Phi}(x) \stackrel{\text{def}}{=} I_\Psi(x) - I_\Phi(x) \tag{3.6}$$

If Ψ is finer[10] than Φ, this value is also positive.

3.3 Learning effect and value of information

3.3.1 How value of information enters the decision problem

From (3.4) applied to the non-informative structure $\perp$, the program of the non-informed decision maker writes:

$$\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0, u_0)) \right] \tag{3.7}$$

From (3.4) and (3.7) and the definition of the subsequent value of information in (3.5), the initial decision problem with information structure Φ writes:

$$\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0, u_0)) + I_\Phi(f(x_0, u_0)) \right] \tag{3.8}$$

Comparing programs (3.7) and (3.8), it appears that the decision maker who expects information optimizes the same objective as the uninformed decision maker *plus* the value of

[9] With general utility functions (instead of benefit functions), the value of information is measured in utility units. Equivalent or compensating variations in monetary values can also be defined (Laffont, 1989).

[10] Meaning that the σ-algebra induced by Φ is included in the one induced by Ψ.

the information, which depends on her initial decision. Her optimal decision can achieve a trade-off: it can be suboptimal from the point of view of the non-informed decision maker but compensate for this by an increase of the value of information.

Note also that I_Φ, the subsequent value of information, depends on the initial decision even though there is no active learning, i.e. what one expects to learn does not depends on u_0.

More generally, replacing the information structure Φ by the the information structure Ψ leads to a reformulation of the problem (3.4) as

$$\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\Phi(f(x_0,u_0)) + \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0)) \right].$$

3.3.2 Comparison of initial and subsequent values of information

Before comparing first period optimal decisions with and without future information, it is easier to compare the subsequent values of information resulting from these decisions. The *initial* value of information enters the comparison laid out in the following proposition (the proof is in Appendix 3.8).

PROPOSITION 1 — *Denote by I^0 the* initial *value of acquiring the information structure Φ before any decision u_0 is made:*

$$I^0 \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0,u_0)) + I_\Phi(f(x_0,u_0)) \right] - \max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0,u_0)) \right]. \tag{3.9}$$

Let $u_0^\perp$ be an optimal solution of (3.7), the problem without learning, and u_0^Φ be an optimal solution of (3.8), the problem with learning. Then,

$$I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp)) \leq I^0 \leq I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi)). \tag{3.10}$$

This comparison generalizes the relation between the initial value of information and the option value given by Hanemann (1989), who defines option value as $I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi)) - I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp))$ for a family of problems where $I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp)) = 0$.

The hereabove inequalities show that a decision maker who knows she will receive information in the future *chooses her first decision so as to increase the value of information*, whereas a decision maker who neglects the fact that she will receive information makes a decision that reduces the value she would be ready to pay for information.

We next derive sufficient conditions for the comparison of initial optimal decisions, a problem at the centre of the literature on irreversibility and uncertainty.

3.3.3 Comparison of optimal solutions; the learning effect

From Proposition 1, we obtain immediately:

$$\forall u > u_0^{\perp},\ I_\Phi(f(x_0,u)) < I_\Phi(f(x_0,u_0^{\perp})) \Rightarrow u_0^\Phi \leq u_0^{\perp}.$$

Hence, *a practical sufficient condition for comparison of optimal solutions is to know that* $u_0 \mapsto I_\Phi(f(x_0,u_0))$ *is a strictly decreasing or a strictly increasing function*[11].

DÉFINITION 2 — *The difference between* u_0^Φ *and* $u_0^{\perp}$ *is the learning effect.*

More generally we have the following, which is our main result.

PROPOSITION 3 — *Let* Φ *and* Ψ *be two information structures (not necessarily comparable in the sense that one is finer than the other).*

Let u_0^Φ *be any optimal initial decision with information structure* Φ*, that is*

$$u_0^\Phi \in \arg \max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} [l_0(u_0) + V_\Phi(f(x_0,u_0))],$$

and let u_0^Ψ *be any optimal initial decision with information structure* Ψ*:*

$$u_0^\Psi \in \arg \max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} [l_0(u_0) + V_\Psi(f(x_0,u_0))].$$

If the value of substituting Ψ *for* Φ*,* $u_0 \mapsto \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$*, is a strictly decreasing function, then*

$$u_0^\Psi \leq u_0^\Phi.$$

The result is immediate from (3.13) in Appendix[12].

[11] Note here that we adopt the following terminology: a function f defined on an ordered set is *increasing* if $x \geq y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$, and is *strictly increasing* if $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$; the same convention holds for decreasing and strictly decreasing functions.

[12] Freixas and Laffont (1984) give sufficient conditions for the monotonicity of $\Delta_{\Psi\Phi}$ in a setting where the dynamics is reduced to $x_{t+1} = u_t$ and where the state of the system does not enter the benefits l_t but only the admissibility set. However, they do not provide the interpretation of Δ in terms of value of substituting information structures. Kolstad (1996) obtains necessary and sufficient conditions for a problem which is actually a sub-case of Freixas and Laffont though this does not appear at first glance from his notations but has to be derived from his hypotheses.

The results holds in fact under the weaker assumption that $u_0 \mapsto \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$ is strictly decreasing (respectively strictly increasing) when $u_0 < u_0^{\Psi}$ (respectively when $u_0 > u_0^{\Psi}$.)

A more general proposition can be made for non-strictly decreasing (or increasing) functions.

PROPOSITION 4 — *If the value of substituting Ψ for Φ, $u_0 \mapsto \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$, is a decreasing function, then comparisons are still possible under the form*

$$\sup\arg\max_{u_0\in\mathcal{U}_0(x_0)} [l_0(u_0)+V_{\Psi}(f(x_0,u_0))] \leq \sup\arg\max_{u_0\in\mathcal{U}_0(x_0)} [l_0(u_0)+V_{\Phi}(f(x_0,u_0))]\,.$$

The proof derives from Proposition 8, see appendix section 3.9.

As a consequence, if u_0^{Φ} is unique, it is sufficient that $u_0 \mapsto \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$ be decreasing to conclude that $u_0^{\Psi} \leq u_0^{\Phi}$.

Before applications in Sections 3.5 and 3.6, the following definition relates the comparison of u_0^{Φ} and $u_0^{\perp}$ to the 'irreversibility effect' and more generally to the 'precautionary effect of the learning'.

DÉFINITION 5 — *Precautionary effect of learning*
In the case where

1. *l_0 is an increasing function (*i.e. *increasing u_0 yields benefits in $t=0$)*
2. *$u_0 \mapsto l_1(u_1, f(x_0,u_0),\gamma))$ is a decreasing function (*i.e. *u_0 implies some future costs)*

then a decision $u_0^{\Phi} \leq u_0^{\perp}$ is said to be 'more precautionary' than $u_0^{\perp}$ and the learning effect from Φ is said to be 'precautionary'. This is also refered to as the 'irreversibility effect'in some specific cases.

3.4 Extension to active learning and stochastic evolution

Possible extensions of the standard case appear in the literature. This section shows that the main result still apply in the general, extended case.

Stochastic dynamic. From period $t=0$ on, the state of the system $\tilde{x}_t$ is a random variable. Its evolution may depend on an other random variable w_t: $\tilde{x}_{t+1} = f(\tilde{x}_t, u_t, w_t)$. The model in Conrad (1980) is an occurrence of stochastic dynamic in the irreversibility literature.

Endogenous risk An example of endogenous risk can be found in Gjerde et al. (1999) where the law of the date of a climate catastrophe depends on the emission reductions. Endogenous risk arises when the random variable γ depends on the previous decisions, u_0 and u_1. In stochastic control theory, γ is treated as a state variable. Endogenous risk is thus viewed as a particular case of stochastic dynamic.

Active learning Active learning (or dependent learning) takes place when the initial decision can modify the signal the decision maker will receive. It means that in addition to ω, Φ depends on u_0, or more generally on $\tilde{x}_1$ (then the modification is also random). Rouillon (2001) studies a model of active learning in climate change economics and uses the variations of the value of information to conclude about the irreversibility effect.

Comparison in the general model

Consider the problem :

$$\max_{u_0,u_1} \mathbb{E}\left[l_0(u_0,\tilde{x}_0)+l_1(u_1,\tilde{x}_1)\right]$$
$$\text{s.c.} \quad \tilde{x}_1 = f(\tilde{x}_0,u_0,w_0) \quad \text{and} \quad u_t \in \mathcal{U}_t(y_t), t=0,1$$

where w_t is a random variable (r.v.) and y_t a non-stochastic subcomponent of $\tilde{x}_t$, so that the decision maker knows the admissible set $\mathcal{U}(y_1)$ when she makes her choice[13] u_1.

At time $t=1$, when the state of the system is the r.v. $\tilde{x}$, the information structure Φ delivers a signal that depends on $\tilde{x}$. We denote by $\Phi_{\tilde{x}}$ the corresponding signal function $\Phi_{\tilde{x}} : \omega \mapsto s(\omega,\tilde{x}(\omega))$. The decision-problem can be written as:

$$\max_{u_0\in\mathcal{U}_0(y_0)} \mathbb{E}\left[l_0(u_0,\tilde{x}_0)+V_\Phi(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))\right].$$
$$\text{with} \quad V_\Phi(\tilde{x}) \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[\max_{u_1\in\mathcal{U}_1(y),\, u_1\preccurlyeq\Phi_{\tilde{x}}} l_1(u_1,\tilde{x}) \mid \Phi_{\tilde{x}}\right].$$

As in previous section, the decision problem with information can be put under the form:

$$\max_{u_0\in\mathcal{U}_0(x_0)} \mathbb{E}\left[l_0(u_0,\tilde{x}_0)+V_\perp(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))+I_\Phi(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))\right]$$

and the comparisons of initial decisions now rely on the expectation of I_Φ or $\Delta_{\Psi\Phi}$ as follows.

PROPOSITION 6 — *If $u_0 \mapsto \mathbb{E}\left[\Delta_{\Psi\Phi}(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))\right]$ is monotone, comparison of the optimal decisions for the general problems with information structure Φ and Ψ will be possible. Precise conditions are the same as in Proposition 3.*

[13] It is sufficient to assume that the decision maker gets full information at time $t=1$ on a stochastic subcomponent $\tilde{y}_1$; then this information, $\tilde{y}_1$ should be explicitly included for conditioning the problem, even in the case where no additional information arrives.

It is self-explanatory that $\mathbb{E}I_{\Phi}(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))$ is the expected value of information after decision u_0, and $\mathbb{E}\Delta_{\Psi\Phi}(f(\tilde{x}_0,u_0,w_0))$ the expected value of exchanging the information structure Φ for Ψ. It is also possible to define the value of information conditional on a realization of w_0 or of $\tilde{x}_1$.

3.5 Value of information as a key to the irreversibility literature

A goal of the literature on irreversibility and uncertainty consists in identifying hypotheses or conditions under which the ' irreversibility effect ' holds. Two kinds of conditions can be examined. A first thread follows Epstein (1980) and concentrates on determining the direction of the learning effect for all possible random vectors γ over a finite sample set and for all comparable information structures. As Ulph and Ulph (1997) noted, this restricts the conclusion to limited classes of problems, for example those later identified by Gollier et al. (2000). An other thread looks for specific problems where the irreversibility effect is verified when Epstein conditions do not apply. This for example the case in Ulph and Ulph (1997).

Though monotonicity of the value of information is only necessary for the irreversibility effect, it turns out that Epstein necessary and sufficient conditions imply a monotone value of information. Besides, many of the specific (necessary) conditions found in the litterature also do. In particular, we have already seen (section 3.3.2) that Proposition 1 generalizes Hanemann's statement on the quasi-option value (Hanemann, 1989) and that Proposition 3 provides an interpretation for the conditions examined by Freixas and Laffont (1984) for a simple model (section 3.3.3). We shall see it is also the case for many others, and moreover, this monotonicity is often intuitive without fully-fledged mathematical demonstration.

3.5.1 Epstein's Theorem and the value of information

Epstein (1980) gave necessary and sufficient conditions that allow to conclude about the direction of the learning effect for all prior beliefs. We show that they also imply a monotone value of information.

For any distribution law ρ on Ω, let us define

$$J(x,\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x)} \mathbb{E}_{\rho}(l_1(u_1,x,\gamma)) = \max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x)} \int_{\Omega} l_1(u_1,x,\gamma(\omega))\rho(d\omega) \tag{3.11}$$

Epstein's Theorem states that initial decisions may be compared for any comparable information structures (one being more informative than the other) when $\frac{\partial J}{\partial x}(x,\rho)$ exists and is convex or concave in ρ varying among discrete probability laws.

We show that Epstein's assumptions, extended to non-discrete probability and without necessarily differentiability in the first decision argument, are sufficient conditions for the value of information to be monotone and therefore to ensure the comparison of initial decisions.

PROPOSITION 7 — *Assume that*

1. *for any* $u_+ \geq u_-$, $J(f(x_0,u_+),\rho) - J(f(x_0,u_-),\rho)$ *is convex (concave) in* ρ,
2. Ψ *is finer than* Φ.

Then the value of substituting Ψ *for* Φ, $u_0 \mapsto \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$, *is an increasing (a decreasing) function.*

Thus, initial decisions may be compared (see the remarks following Proposition 3). The proof is in appendix.

3.5.2 Linear dynamics and costs; ' all or nothing ' decision set

The seminal literature as well as more recent contributions often considers linear dynamics and costs, which imply all or nothing decisions, or hinges directly on a binary decision set (see for instance Arrow et Fisher, 1974; Henry, 1974a; Ha-Duong, 1998; Fisher, 2000 and Henry, 1974b, part 2). With a binary decision set, the monotonicity of the value of information becomes trivial. Moreover, the direction of variation is easily determined under the hypothesis of total irreversibility, *i.e.* when one of the two possible initial decisions affects the state or the second period cost so that it does not depend any longer on the second period decision. This is for example the case with the model of Arrow and Fisher (1974).

3.5.3 Value of information in Ulph and Ulph, 1997

The model examined in (Ulph et Ulph, 1997) can be rewritten with our formalism as follows

$$\max_{u_0} \left[l_0(u_0) + \mathbb{E} \max_{u_1 \preccurlyeq \Phi} \left[l_1(u_1) - \mathbb{E}[\gamma \mid \Phi] D(\delta x_1 + u_1) \right] \right] \tag{3.12}$$
$$\text{with} \quad x_{t+1} = \delta x_t + u_t \quad \text{and} \quad u_t \in [0, A_t],$$

where u are greenhouse gases (GHG) emissions, x GHG concentrations, l_t utilities, and D a damage function. A_t is the unrestricted level of emissions[14]. Functions l_t are assumed to be strictly increasing and strictly concave, and D strictly increasing and strictly convex. The r.v. γ is assumed to be non-negative.

The authors compare $u_0^\perp$, the initial decision without information, and $u_0^\top$, the initial decision with perfect information structure (for example $\Phi = \gamma$). With our notations, their theorem 3 states that:

if $(u_0^\perp, u_1^\perp)$ is such that $u_1^\perp = 0$, then $u_0^\top \leq u_0^\perp$.

[14] Ulph and Ulph do not make this hypothesis which is benign for the problem considered (greenhouse gases emissions cannot be infinite) and simplifies the demonstration.

Two features are essential to this result. On the one hand, the assumption that the optimal policy, $u_1^{\perp} = 0$, is a corner solution in second period. On the other hand, the shape of the the payoff, which is linear in the random variable.

We show (see Annex 3.11 for the proof) that, under their hypothesis and their condition $u_1^{\perp} = 0$, the conclusion about the irreversibility effect can be generalized to any information structure Φ because the second-period value of this information structure can be shown to be a decreasing function for $u_0 \geq u_0^{\perp}$.

This generalized result can even been obtained intuitively, because, under their conditions, monotonicity of the value of information becomes intuitive. Ulph and Ulph's condition implies that when the GHG concentration in $t = 1$, x_1, is above a certain level $\delta x_0 + u_0^{\perp}$, then it is optimal to cut emissions to zero in $t = 1$ when no information is available. Therefore, if information is obtained when we are in the situation x_1, it might open the opportunity to emit. The value of the information is then equal to the benefit of additional emissions in $t = 1$ minus the expected additional damages. From the envelope theorem, these expected additional damages are strictly increasing at the margin for a small increase of the concentration x_1, whereas benefits do not depend directly of the concentration level. As a consequence, the value of information diminishes and the irreversibility effect applies.

3.6 Illustration with a modified stochastic version of DICE

Here we produce a numerical illustration with a stochastic version of the standard integrated assessment model DICE 98 (Nordhaus et Boyer, 2000). Such a model is already complex compared to the analytical ones present in the literature. But it will appear that, strikingly, the value of information after initial policy choice behaves in a way that can support intuition.

The model is a stochastic optimal-growth model of the world economy. It is designed to maximize the discounted expected value of utility from consumption. The decisions variables are the rate of investment and the rate of emissions reductions in greenhouse gases. The model operates in time steps of 10 years. Perfect information about the uncertain climate parameter arrives in 2040. A simple adaptation of the original model ensures compatibility with the analytical framework of section 3.4. We make a parameterization of the paths of investment and abatement from now till 2030–2039 with a unique scalar. This scalar, the abatement rate targeted for 2030–2039, summarizes and entirely defines the policy choice in the initial period.

3.6.1 The climate-economy system

The dynamic evolution of the climate-economy system can be represented with the relation: $z_{i+1} = g(z_i, v_i, \gamma)$ where $i \in \{0, 1, \ldots, T\}$ is the 10-year interval spanning from year $2000 + 10i$ to year $2009 + 10i$; $v_i \in [0,1] \times [0,1]$ is the couple of controls, which are the rate of reduction of greenhouse gases and the investment rate in time step i; $z_i \in \mathbb{R}^6$ is the state of the climate-economy system in the beginning of period i comprising the stock of capital; concentrations of carbon in three reservoirs (atmosphere; biosphere and surface ocean; deep ocean);

and oceanic and atmospheric global mean temperature rises with respect to pre-industrial times.

The temperature components of z are stochastic. Uncertainty enters their dynamics through the *climate sensitivity* γ. This random variable is equal to the atmospheric temperature rise for a permanent doubling of the carbon concentration in the atmosphere. The r.v. γ is constant through time with values 2.5 °C, 3.5 °C and 4.5 °C and remains unobserved until year 2040. In the first step $i = 0$, the true atmospheric temperature rise with respect to pre-industrial times is also uncertain.

The detailed climate-economy equations are slightly changed from the original version of DICE. The temperature increase equation is an updated calibration that provides a better description of warming over forthcoming decades. A threshold damage function replaces the original quadratic one. Both modifications are taken from Ambrosi et al. (2003). The full description for the original DICE model can be found in Nordhaus (Nordhaus, 1994; Nordhaus et Boyer, 2000).

3.6.2 The decision problem

At each time step i, a control v_i and a state of the system z_i result in a discounted random utility $L_i(v_i, z_i)$. In fact we have two notions of time. The first notion, the time steps, describes the natural time in the original problem. The second notion describes the decision periods. In accordance with the framework of section 3.4, there are two decisions period $t \in \{0;1\}$. The initial period, $t = 0$, covers the time steps before learning, $i = 0, \dots, 3$; the next period, $t = 1$, covers the time steps $i = 4, \dots, T$. The decisions u_t define the controls v_i as follows. The initial decision $u_{t=0} \in [0,1]$ is the level of abatement targeted for 2030; it parameterizes the investment and abatement path for time steps $i < 4$ through a function φ from $[0,1]$ into $\mathbb{R}^6$: $(v_i)_{i\in\{0,\dots,3\}}$ is taken equal to $\varphi(u_{t=0})$. The next decision, $u_{t=1} \in [0,1]^{2(T-3)}$, is the vector of investment and abatement rates for $i \geq 4$: $(v_i)_{i\in\{4,\dots,T\}} = u_{t=1}$. Details for the parameterization of the initial policy are in Appendix 3.12.

The decision problem is

$$\begin{aligned} \max_{u_0} \ & \mathbb{E}\left\{ \sum_{i<4} L_i(v_i, z_i) + \mathbb{E}\left[\max_{u_1 \preccurlyeq \gamma} \sum_{i=4}^{T} L_i(v_i, z_i) \;\middle|\; \gamma \right] \right\} \\ \text{with} \quad & (v_0, \dots, v_3) = \varphi(u_0) \\ & (v_4, \dots, v_T) = u_1 \in [0,1]^{2(T-3)} \\ & z_{i+1} = g(z_i, v_i, \gamma) \end{aligned}$$

where the path of controls before information is constrained to belong to the family of curves defined by φ. This decision problem clearly pertains[15] to the framework described in sec-

[15] With $\tilde{x}_0 = (z_0, \gamma)$ and $\tilde{x}_1 = (z_4, \gamma)$ so that $f(\tilde{x}_0, u_0, \gamma) = [g(\dots, (g(\tilde{x}_0, v_0, \gamma), \dots) \dots, v_3, \gamma); \gamma]$. Similarly l_0 and l_1 are defined through L_i and compositions of g.

tion 3.4 but as far we know it is out of bounds for the rest of the analytical literature about irreversibility, learning and climate change.

3.6.3 How policy affects the value of information on the climate

The figure 3.1 page 100 plots the expected value of information as a function of the initial policy. Available initial decisions range from no effort until 2030 (0% emissions reduction) to targeting the maximum effort in 2030 (100% reduction). Three cases are presented corresponding to three different probability distributions for γ: optimistic case, centered case and pessimistic case (see Appendix 3.12).

In all cases, the expected value of information is strictly decreasing. Consistently, in all cases, the prospect of learning the true value of γ in 2040 is an opportunity to make initially less reduction efforts ($u_0^{\top}$) than in the never-learn situation ($u_0^{\perp}$). This is also consistent with the simulations made by Ulph and Ulph (1997). If no certainty can ever[16] be obtained about the future evolution of the climate, the more cautious emission policy $u_0^{\perp}$ would be preferred. Here, the learning effect is not precautionary.

In an analytical framework with a linear dynamic, Gollier et al. (2000) showed that logarithmic utility implies that the structure of information has no effect on the initial decision. They wondered whether this was the explanation for the little or nonexistent learning effect found in earlier results by Nordhaus (1994), Manne and Richels (1992) and others[17]. Our model departs from Nordhaus' DICE only with some specifications of the dynamics (see section 3.6.1). But the utility function of the model is logarithmic as it is in DICE. However, the ' learning effect ' (the difference between $u_0^{\perp}$ and $u_0^{\top}$) ranges from 9 to 21%. In terms of abatement costs this is even larger due to the specification of the abatement costs in DICE as a power function (with an exponent greater than 2). Clearly, learning has an effect on decision which is not negligible. Thus, our findings answer the question raised by Gollier *et al.* and show that the weak learning effect found by Nordhaus is also determined by his choice of a particular dynamic and not solely by his logarithmic objective function.

3.7 Conclusion

This article explored the role of the value of an information structure in analyzing general, sequential decision problems. The difference between value of future information before and after an initial decision is taken was made explicit. The monotonicity of the latter, the *subsequent value of information*, is sufficient for making a conclusion about the direction of the learning effect. Many of the conditions given in the literature as sufficient or as necessary and sufficient for the irreversibility effect can be understood as guarantees for this monotonicity.

[16] Kelly and Kolstad (1999) suggest that certainty on the true value of the climate sensitivity with less than 5% rejection might be available only after 2090.

[17] Ulph and Ulph used a quadratic specification for their numerical simulations and found that, for most parameter values, learning made little difference.

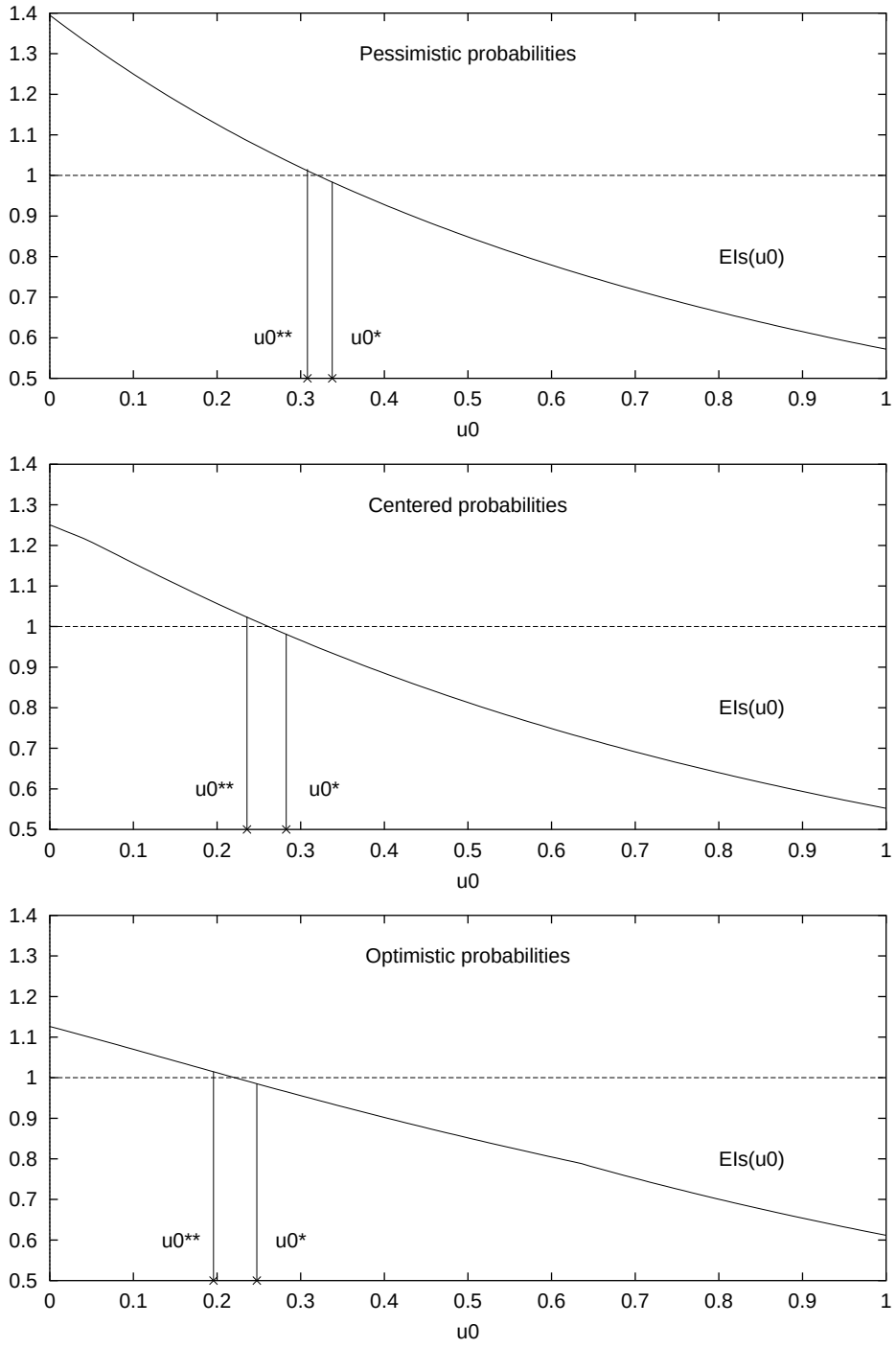

FIG. 3.1 – Variations of the expected value of information, EIs(u0), with u_0.
In each case, the expected value of information has been normalized with $\mathbb{E}I^0$, the expected value of information before any decision is made. Note that this normalization is different in each case.

The present analysis shares a common limitation with the irreversibility literature: the initial decision is assumed to be scalar. But extension is readily available in theory. As long as the set of admissible initial decisions can be ordered even incompletely, Topkis' theorem (Topkis, 1978) leads to a similar conclusion. Extension to multi-scalar decisions would help the interpretation of empirical integrated assessment models. For example in the original DICE model (Nordhaus et Boyer, 2000), assuming that information arrives in 2040, the initial decision vector has eight components (four abatement and investment decisions). However, the difficulty is to find a meaningful order over the decision set.

For communication with policy-makers, there is a practical advantage in analyzing the learning effect in terms of growing or strictly decreasing value of information because value of information is a relatively self-explanatory concept (Ha-Duong, 1998). Finally, the intuitive simplicity of the notion of value of information also suggests application in experimental economics. It should be possible to design experimental tests of rationality under uncertainty that are based on how and whether individuals modify their estimation of the value of improved future knowledge as a consequence of their current decisions.

3.8 Appendix: Proof of Proposition 1

By definition, the initial value of information is

$$I^0 \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0,u_0)) + I_\Phi(f(x_0,u_0)) \right]}^{\jmath_\Phi \stackrel{\text{def}}{=}} - \underbrace{\max_{u_0 \in \mathcal{U}_0(x_0)} \left[l_0(u_0) + V_\perp(f(x_0,u_0)) \right]}_{\jmath_\perp \stackrel{\text{def}}{=}} .$$

Since $u_0^\perp$ is an optimal solution of the problem without information and since u_0^Φ is an optimal solution of the problem with information, we have, on the one hand,

$$\jmath_\perp = l_0(u_0^\perp) + V_\perp(f(x_0,u_0^\perp)) \geq \underbrace{l_0(u_0^\Phi) + V_\perp(f(x_0,u_0^\Phi))}_{\imath_\Phi - I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi))}$$

so that $\imath_\Phi - \imath_\perp \leq I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi))$.

On the other hand,

$$\imath_\Phi = l_0(u_0^\Phi) + V_\perp(f(x_0,u_0^\Phi) + I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi)) \geq \underbrace{l_0(u_0^\perp) + V_\perp(f(x_0,u_0^\perp))}_{\jmath_\perp} + I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp))$$

so that $\imath_\Phi - \imath_\perp \geq I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp))$. Combining both inequalities, we obtain

$$I_\Phi(f(x_0,u_0^\perp)) \leq I^0 = \jmath_\Phi - \jmath_\perp \leq I_\Phi(f(x_0,u_0^\Phi))$$

which is Proposition 1.

Similarly we obtain easily:

$$\Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0^{\Phi})) \leq \jmath_{\Psi} - \jmath_{\Phi} \leq \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0^{\Psi})) \tag{3.13}$$

where u_0^{Ψ} (respectively u_0^{Φ}) is any optimal initial decision for the problem with the information structure Ψ (respectively Φ). Note that, without specific hypothesis on the relative informativeness of Φ and Ψ, Δ can assume negative values and $\jmath_{\Psi} - \jmath_{\Phi}$ can be negative.

3.9 Appendix: Comparison of arg max

We recall here results on comparison between the arg max of two optimization problems. They may be seen as particular instances of results from a general theory with supermodular functions or functions with increasing differences as developed in Topkis (1998).

PROPOSITION 8 — *Let $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$, let $g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ and $h : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$. We denote*

$$\mathcal{D}_g \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{u\in\mathcal{D}} g(u) \subset \mathcal{D} \quad \textit{and} \quad \mathcal{D}_{g+h} \stackrel{\text{def}}{=} \arg\max_{u\in\mathcal{D}} (g+h)(u) \subset \mathcal{D}\ ,$$

and we assume that $\mathcal{D}_g \neq \emptyset$ and $\mathcal{D}_{g+h} \neq \emptyset$.

1. *If h is strictly increasing on $]-\infty, \sup \mathcal{D}_g]$, then*

$$\sup \mathcal{D}_g \leq \inf \mathcal{D}_{g+h}\,.$$

2. *If h is increasing on $]-\infty, \sup \mathcal{D}_g]$, then*

$$\sup \mathcal{D}_g \leq \sup \mathcal{D}_{g+h}\,.$$

3. *If h is strictly decreasing on $[\inf \mathcal{D}_g, +\infty[$, then*

$$\sup \mathcal{D}_{g+h} \leq \inf \mathcal{D}_g\,.$$

4. *If h is decreasing on $[\inf \mathcal{D}_g, +\infty[$, then*

$$\inf \mathcal{D}_{g+h} \leq \inf \mathcal{D}_g\,.$$

Proof. We prove the first statement, the others being minor variations.

Let $u_g^\sharp \in \mathcal{D}_g$. For any $u \in \mathcal{D}$, we have $g(u) \leq g(u_g^\sharp)$. For any $u \in]-\infty, u_g^\sharp[$, we have $h(u) < h(u_g^\sharp)$ if h is strictly increasing. Thus

$$u \in]-\infty, u_g^\sharp[\Rightarrow g(u) + h(u) < g(u_g^\sharp) + h(u_g^\sharp).$$

We conclude that $\mathcal{D}_{g+h} \subset [u_g^\sharp, +\infty[$, so that

$$\mathcal{D}_{g+h} \subset \bigcap_{u_g^\sharp \in \mathcal{D}_g} [u_g^\sharp, +\infty[= [\sup \mathcal{D}_g, +\infty[.$$

This proves that $\sup \mathcal{D}_g \leq \inf \mathcal{D}_{g+h}$. □

The proof of Proposition 3 is a straightforward consequence with $u_0 \mapsto l_0(u_0) + V_\Phi(f(x_0,u_0)) + \Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$ as function g and $u_0 \mapsto -\Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$ as function h.

Freixas et Laffont (1984) propose a similar proof for a case with simplified dynamics and criteria (see section 3.3.3).

3.10 Appendix: Proof of Proposition 7

Let $\mathcal{P}(\Omega)$ be the set of all distributions on Ω, the states of the world. By classical arguments (Breiman, 1993, p. 77) (as soon as Ω is a complete separable metric space for instance), there exists a regular conditional probability of $\mathbb{P}$ given Φ, denoted by $\mathbb{P}^\Phi : \Omega \times \mathcal{F} \to [0,1]$ and characterized by:

1. $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}^\Phi(\omega,\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega)$;
2. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\omega \hookrightarrow \mathbb{P}^\Phi(\omega,\cdot)$ is measurable with respect to Φ;
3. for all bounded random variable Z, $\mathbb{E}(Z \mid \Phi)(\omega) = \int_\Omega Z(\omega')\mathbb{P}^\Phi(\omega, d\omega')$, for $\mathbb{P}$-almost ω.

The sensor[18] associated to $\mathbb{P}$ and Φ is the random measure $S^\Phi \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ defined by

$$\forall M \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(\Omega)), \quad S^\Phi(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\omega \in \Omega, \quad \mathbb{P}^\Phi(\omega,\cdot) \in M\}. \tag{3.14}$$

Equivalently, S^Φ is also the image of the measure $\mathbb{P}$ by the mapping

$$\omega \in \Omega \hookrightarrow \mathbb{P}^\Phi(\omega,\cdot) \in \mathcal{P}(\Omega). \tag{3.15}$$

It is shown in Artstein and Wets (1993) that

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x),\, u_1 \preccurlyeq \Phi} \mathbb{E}\left[l_1(u_1,x,\gamma) \mid \Phi\right]\right) &= \int_\Omega \mathbb{P}(d\omega)\left(\max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x),\, u_1 \preccurlyeq \Phi} \int_\Omega l_1(u_1,x,\gamma(\omega'))\mathbb{P}^\Phi(\omega,d\omega')\right) \\
&= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS^\Phi(\rho)\left(\max_{u_1 \in \mathcal{U}_1(x)} \int_\Omega l_1(u_1,x,\gamma(\omega'))\rho(d\omega')\right) \\
&= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS^\Phi(\rho) J(x,\rho).
\end{aligned}$$

[18] A sensor is a probability law on the set $\mathcal{P}(\Omega)$ of all distributions on the states of the world, *i.e.* an element of $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, the Borel space of probability measures on $\mathcal{P}(\Omega)$. Following Artstein (1999), an information structure can be defined by a sensor since it governs which posterior beliefs will be materialized at the time of decision. Chapter 4 offers more recalls and developments on sensors. See especially section 4.9 page 135.

Thus, by (3.6) and (3.5), we have

$$\begin{aligned}\Delta_{\Psi\Phi}(x) &= \mathbb{E}\left(\max_{u_1\in\mathcal{U}_1(x),\, u_1\preccurlyeq\Psi}\mathbb{E}\left[l_1(u_1,x,\gamma)\mid\Psi\right]\right)-\mathbb{E}\left(\max_{u_1\in\mathcal{U}_1(x),\, u_1\preccurlyeq\Phi}\mathbb{E}\left[l_1(u_1,x,\gamma)\mid\Phi\right]\right)\\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS^{\Psi}(\rho)J(x,\rho)-\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS^{\Phi}(\rho)J(x,\rho)\,.\end{aligned}$$

Still following Artstein and Wets (1993) and Artstein (1999), we have that if Ψ is finer than Φ, then S^{Ψ} is more refined than S^{Φ} in the sense that for all $\phi:\mathcal{P}(\Omega)\to\mathbb{R}$ convex,

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)}\phi(\rho)dS^{\Psi}(\rho)\geq\int_{\mathcal{P}(\Omega)}\phi(\rho)dS^{\Phi}(\rho)\,. \tag{3.16}$$

Thus, under the assumptions, the value of substituting Ψ for Φ, $u_0\mapsto\Delta_{\Psi\Phi}(f(x_0,u_0))$, is an increasing (a decreasing) function.

3.11 Appendix: Variations of the value of information in Ulph and Ulph, 1997

We express $\dfrac{dI_\Phi}{dx_1}=\dfrac{dV_\Phi}{dx_1}-\dfrac{dV_\perp}{dx_1}$ for the problem (3.12).

Denote by $\hat{u}_1(x_1)$ the optimal feedback without information:

$$\hat{u}_1(x_1)\stackrel{\text{def}}{=}\arg\overbrace{\max_{u_1\geq 0}\left[l_1(u_1)-\mathbb{E}\gamma D(u_1+\delta x_1)\right]}^{V_\perp(x_1)}.$$

Unicity of the arg max results from the strict concavity of the mapping $u_1\mapsto l_1(u_1)-\mathbb{E}\gamma D(u_1+\delta x_1)$ since, by assumption, l_1 is strictly concave, D is strictly convex, and $\gamma\geq 0$.

Denoting $x_1^\perp\stackrel{\text{def}}{=}\delta x_0+u_0^\perp$, we have then $u_1^\perp=\hat{u}_1(x_1^\perp)$ by definition. From Euler's characterization of the maximum of a concave function, the assumption $u_1^\perp=0$ implies that $l'(0)-\delta\mathbb{E}\gamma D'(\delta x_1^\perp)\leq 0$. Now, for any $x_1\geq x_1^\perp$, we have

$$l'(0)-\delta\mathbb{E}\gamma D'(\delta x_1)\leq l'(0)-\delta\mathbb{E}\gamma D'(\delta x_1^\perp)\leq 0$$

since $-D'$ is decreasing (D is convex). Thus, by Euler's condition, $\hat{u}_1(x_1)=0$. Replacing in $V_\perp(x_1)$ and differentiating with respect to x_1, we obtain

$$\frac{dV_\perp}{dx_1}(x_1)=-\mathbb{E}\left[\gamma\right]\delta D'(\delta x_1).$$

We now turn to $\frac{dV_\Phi}{dx_1}(x_1)$. Let

$$u_1^\Phi(x_1)\stackrel{\text{def}}{=}\arg\max_{u_1\preccurlyeq\Phi} l_1(u_1)-\mathbb{E}[\gamma\mid\Phi]D(u_1+\delta x_1)$$

which is a random variable.

By the Danskin theorem (see Clarke, 1990)), we have that

$$\frac{d}{dx_1}\max_{u_1 \preccurlyeq \Phi} l_1(u_1) - \mathbb{E}[\gamma \mid \Phi] D(u_1 + \delta x_1) = -\mathbb{E}[\gamma \mid \Phi]\delta D'(\delta x_1 + u_1^{\Phi}(x_1))\,.$$

By differentiating under the integral sign, we get that

$$\frac{dV_\Phi}{dx_1}(x_1) = \mathbb{E}\big[-\mathbb{E}[\gamma \mid \Phi]\delta D'(\delta x_1 + u_1^{\Phi}(x_1))\big]$$

Finally,

$$\begin{aligned}
\frac{dI_\Phi}{dx_1}(x_1) &= \mathbb{E}\big[-\mathbb{E}[\gamma \mid \Phi]\delta D'(\delta x_1 + u_1^{\Phi}(x_1))\big] + \mathbb{E}\left[\gamma\right]\delta D'(\delta x_1) \\
&= \mathbb{E}\big[-\mathbb{E}[\gamma \mid \Phi]\delta D'(\delta x_1 + u_1^{\Phi}(x_1))\big] + \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\left[\gamma \mid \Phi\right]\big]\,\delta D'(\delta x_1) \\
&= \mathbb{E}\big[\mathbb{E}\left[\gamma \mid \Phi\right](D'(\delta x_1) - D'(\delta x_1 + u_1^{\Phi}(x_1)))\big]
\end{aligned}$$

which is non-positive since $u_1^{\Phi}(x_1, s) \geq 0$ and D is convex. Therefore $u_0 \mapsto I_\Phi(\delta x_0 + u_0)$ is decreasing for all u_0 greater than $u_0^{\perp}$: the value of information diminishes with initial GHG emissions above their optimal level without information.

3.12 Appendix: Details for the numerical model

3.12.1 Summarized description of the modified DICE model

The model solve the following problem.

$$\max_{v_0,\ldots,v_{d-1}} \mathbb{E}\left\{\sum_{i=0}^{d-1} L_i(v_i, z_i) + \mathbb{E}\left[\max_{(v_d,\ldots,v_T)\preccurlyeq\gamma} \sum_{i=d}^{T} L_i(v_i, z_i) \;\middle|\; \gamma\right]\right\} \tag{3.17}$$

$$\text{with} \quad z_{i+1} = g(z_i, v_i, \gamma) \tag{3.18}$$

The time horizon is $T = 40$. Time step $i = 0$ corresponds to the period 2000–2009. The date of arrival of information, d, belongs to $\{0, \ldots, T+1\}$.

Variables

Controls		
v_i	a_i	GHG reduction rate
	b_i	investment rate
State variables		
z_i	K_i	Capital stock
	$M_i \in \mathbb{R}^3$	Stocks of carbon in 3 reservoirs
	$\theta_i \in \mathbb{R}^2$	Mean temperature rises for atmosphere and ocean
γ	r.v. $\in \{L,C,H\}$	Climate sensitivity
Intermediary, transfer variable		
	Y	Available economic output

Relations

Output	$Y_i = F_i(K_i)(1-C_i(a_i))(1-D(\theta_i))$	(3.19)
Capital accumulation	$K_{i+1} = G(K_i, b_i Y_i)$	(3.20)
Carbone cycle	$M_{i+1} = H(a_i, K_i, M_i)$	(3.21)
Reduced-form climate model	$\theta_{i+1} = \Theta(\theta_i, M_i, \gamma)$	(3.22)
Discounted utility	$L_i(z_i, v_i) = U_i((1-b_i)Y_i)$	
Admissibility domain for b_i	$b_i \in [0, 1-\varepsilon]$	
Admissibility domain for a_i	$a_i \in [0,1] \quad (C_i(1) < 1 \quad \text{for all} \quad i)$	

The dynamics summarized by function g in Eq. (3.18) is composed with the four relations (3.19–3.22).

Detailed functional forms can be found in Nordhaus (1994) or Nordhaus and Boyer (2000) except for two modifications from Ambrosi *et al.* (2003) — function Θ in Eq. (3.22) and damage function D in Eq. (3.19) — that are reproduced in section 3.12.5 below.

Random variable Three different distributions are used for the random variable $\gamma \in \{L,C,H\}$

	Climate sensitivity γ		
Probability	L(2.5 °C)	C(3.5 °C)	H(4.5 °C)
optimistic	2/3	1/3	1/3
centered	1/3	2/3	1/3
pessimistic	1/3	1/3	2/3

3.12.2 Parameterization of the controls in time steps 0 to 3

The goal is to compute the value of information in 2040 ($d = 4$) as a function of a scalar policy decision describing abatement and investment choices from 2000 to 2039. We chose the abatement rate targeted for 2030 as the key policy decision. The problem is to chose a sensible parameterization of investment and abatement before and up to 2030 with this scalar. We propose one that approximates for $i \in \{0,\dots,3\}$ the optimal trajectories of the model under the different hypotheses available on the climate sensitivity. Afterwards, the parameterization allows to describe a wider range of trajectories, including non-optimal ones (bad policy choices) in a coherent and continuous manner.

For calibration purposes, we have therefore computed the numerical optimal values for $(v_i)_{i\in\{0\dots3\}}$ in problem (3.17) under four different hypotheses :

- H1: no uncertainty ($d = 0$) and $\gamma = L$
- H2: no uncertainty ($d = 0$) and $\gamma = C$
- H3: no uncertainty ($d = 0$) and $\gamma = H$
- H4: information in 2040 ($d = 5$). $\gamma \in \{L,C,H\}$, pessimistic probabilities (see above) are used.

The GAMS code for solving numerically problem (3.17) is 'dice_response_art.gms' provided in attachement. See also section 4.11.2. The numerical model has actually $i = -1$ as first time step corresponding to 1990–1999, but abatement is fixed to $a_{-1} = 0$. Investment is fixed as well with value $b_{-1} = 0.250$. We obtain the following results, displayed below in Table 3.1

	Abatement rate in year				Investment rate in year			
	2000	2010	2020	2030	2000	2010	2020	2030
Hypothesis	a_0	a_1	a_2	a_3	b_0	b_1	b_2	b_3
H1	0.059	0.075	0.093	0.115	0.239	0.232	0.228	0.225
H2	0.092	0.123	0.163	0.215	0.239	0.231	0.227	0.224
H3	0.138	0.194	0.266	0.361	0.238	0.231	0.226	0.223
H4	0.121	0.168	0.230	0.310	0.238	0.231	0.226	0.224

TAB. 3.1 – Optimal abatement and investment rates under H1–4

The parameterization chosen, $\varphi : u_0 \mapsto (a_i, b_i)_{i\in\{0\dots3\}}$, is defined by

$$a_i = \varphi_i^a(u) = \lambda u + \mu u i + \nu u i^2$$
$$\text{with} \quad \lambda = 0.3006 \quad \mu = 0.0724 \quad \nu = 0.0256$$

and

$$b_i = \varphi_i^b$$
$$\text{with} \quad \varphi_0^b = 0.239 \quad \varphi_1^b = 0.231 \quad \varphi_2^b = 0.227 \quad \varphi_3^b = 0.224$$

Both parameterizations are chosen to approximate the optimal numerical solutions of problem (3.17) with $d = 0$ under hypotheses H1–H4. Figure 3.2 displays how φ approximates the optimal decisions in Table 3.1.

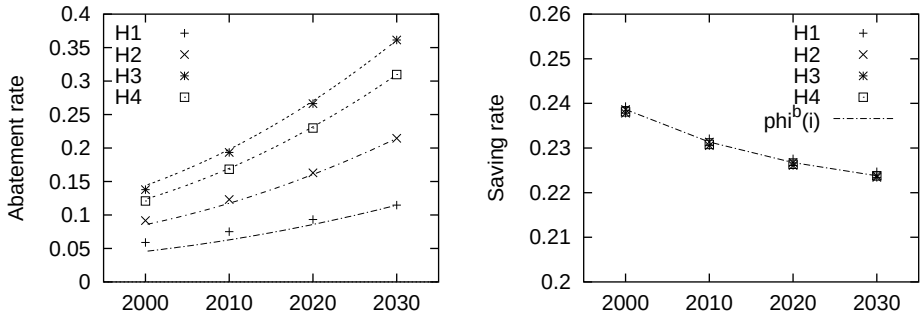

FIG. 3.2 – Parameterization of policy before 2040

The left panel of figure 3.2 shows as dots the optimal abatement rates a_i in time steps $i = 0,\ldots,3$ under hypotheses H1–4. The lines trace the corresponding parameterizations φ^a where u_0 assume in turn the preceding values of a_3 in hypotheses H1–4.

The right panel of Figure 3.2 displays the optimal investment rates b_i for $i = 0\ldots3$ under hypotheses H1–H4 and the parametrization φ_i^b as a line. Note that it depends only of the time step and not of u.

3.12.3 Optimal initial policies with and without learning

After parameterization, the problem is simplified into

$$\max_{0\le u_0\le 1} \mathbb{E}\left\{\sum_{i<4} L_i(\varphi_i(u_0),z_i) + \mathbb{E}\left[\max_{(v_4,\ldots,v_T)\preccurlyeq\gamma} \sum_{i=4}^{T} L_i(v_i,z_i) \;\middle|\; \gamma\right]\right\} \tag{3.23}$$
$$\text{with} \quad z_{i+1} = g(z_i,\varphi_i(u_0),\gamma) \quad \text{for} \quad i<d$$
$$\text{and} \quad z_{i+1} = g(z_i,v_i,\gamma) \quad \text{for} \quad i\ge d$$

This problem is solved with MINOS 5 using the GAMS code 'u0opt_dicersp.gms'.For each probability distribution, we obtain the following optimal values for u_0 with information arrival in 2040 or without arrival of information.We have computed the *initial* value of information, I^0 (the difference between the optimal value of the objective with $d = 0$ and with $d = 4$)

Optimal abatement target in 2030 with and without learning

Probability distribution	Information in 2040 u_0^{**}	Never learn u_0^{*}	Initial value of information (in utility units)
Optimistic	0.196	0.248	462
Centered	0.236	0.283	284
Pessimistic	0.308	0.338	193

TAB. 3.2 –

The values for u_0^{**} and u_0^{*} are reported into Figure 1 of the main paper.

3.12.4 Computed value of information

By definition,

$$I_s(u_0) = \mathbb{E}\left[\max_{(v_d,\ldots,v_T)\preccurlyeq\gamma} \sum_{i=d}^{T} L_i(v_i,z_i) \;\middle|\; \gamma\right] - \max_{(v_d,\ldots,v_T)} \mathbb{E}\sum_{i=d}^{T} L_i(v_i,z_i) \tag{3.24}$$

with $z_{i+1} = g(z_i, v_i, \gamma)$ for $i \geq d$

and the r.v. z_d determined by z_0, γ and u_0 through:

$$z_{i+1} = g(z_i, \varphi_i(u_0), \gamma) \quad \text{for} \quad i < d$$

We screen $[0,1]$ for values of u_0. For each value of u_0, the problems in Eq. 3.24 are solved with MINOS 5 using the GAMS code 'vlrinfo_dicersp.gms'.

An extract of the results is given in the next table.

Value of information as a function of initial policy

	Probability distribution		
	pessimistic	centered	optimistic
Initial policy	Value of information		
u_0	*(in utility units)*		
0.000	269	355	520
0.051	255	343	507
0.101	241	328	494
0.152	228	314	481
0.202	217	300	467
0.253	206	286	454
0.303	196	274	441
0.354	187	262	428
0.404	178	250	416
0.455	170	240	404
0.505	163	230	392
0.556	156	220	381
0.606	150	212	370
0.657	143	203	359
0.707	138	195	346
0.758	132	188	333
0.808	127	181	322
0.859	122	174	311
0.909	118	167	300
0.960	114	161	290
1.000	110	157	283

TAB. 3.3 – Initial policy is the abatement targeted for 2030

3.12.5 Detailed modifications to the original DICE model

These modifications are taken and reproduced from Ambrosi *et al.* (2003)

Reduced-form climate model

We detail here the Eq. (3.22): $\theta_{i+1} = \Theta(\theta_i, M_i, \gamma)$

$$\theta_{i+1} = \Sigma(\gamma)\,\theta_i + \sigma_1 \begin{bmatrix} F_i(M_i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

where

- $\theta_i = {}^t(\theta_i^{At}, \theta_i^{Oc})$ is the vector of global mean temperature rise (°C) with respect to pre-industrial times for the atmosphere and the ocean.
- $F_i(M_i)$ is the radiative forcing defined by

  $$F_i(M_i) = F_{2X} \log(M_i^{\text{atm}}/280)/\log 2$$

  where M_i^{atm}, subcomponent of M_i, is the CO_2 atmospheric concentration in time step i. M_{PI} is the CO_2 atmospheric concentration at pre-industrial times, set at 280 ppm. F_{2X} is the instantaneous radiative forcing for an atmospheric concentration of $2 \times M_{PI}$, set at 3.71 W.m^{-2}.
- the transfer matrix $\Sigma(\gamma)$ is

  $$\Sigma(\gamma) = \begin{bmatrix} 1-\sigma_1(F_{2X}/\gamma+\sigma_2) & \sigma_1\sigma_2 \\ \sigma_3 & 1-\sigma_3 \end{bmatrix}$$

  with coefficient values σ_1 =0.479 C.W^{-1}.m^{-2}, σ_2 =0.109 C^{-1}.W.m^{-2}, σ_3 =0.131 and γ is the climate sensitivity.

Damage function

We detail here the function D of Eq. (3.19) that defines the damages in share of GWP.

$$D(\theta_i) = b(\theta_i^{At} - \theta_0^{At}) + \frac{d}{1+\exp\left[\frac{K+Z-2(\theta_i^{At}-\theta_0^{At})}{K-Z}\ln\left(\frac{2-e}{e}\right)\right]}$$

where $b = 0.005\,^\circ\text{C}^-1$ is the linear trend of the damage; $d = 0.03$ is the magnitude of the jump ; $e = 0.1$ controls the steepness of the jump ; $K = 1.3\,^\circ$C and $Z = 2.7\,^\circ$C are the temperatures where the non-linear transition begins and ends.

3.12.6 Code files

The code files are provided in Appendix B.

– 'dice_response_art.gms' solves problem (3.17). Results are in table 3.1. Two runs were made. One, with information in 2000, gives the solutions with H1,H2,H3 (see section). The other, with information in 2040, gives the solution with H4.
– 'u0opt_dicersp.gms' solves problem (3.23). Results are in table 3.2. Six runs were made, two for each probability distribution (information in 2040 and never learn)
– 'vlrinfo_dicersp.gms' solves the problems in Eq. (3.24) and computes value of information. Three runs were made, one for each probability distribution. Each run loops 100 values for initial policy and solves the problems in Eq. (3.24) with each. Table 3.3 displays an extract of the results.

Note that the time step $i = 0$ corresponding to 2000–2009 in this document is matched in the GAMS code by the second element of the set "T" and therefore referred by '2' and so forth.

Références

Philippe AMBROSI, Jean-Charles HOURCADE, Stéphane HALLEGATTE, Franck LECOCQ, Patrice DUMAS, et Minh HA-DUONG. Optimal control models and elicitation of attitudes towards climate change. *Environmental Modeling and Assessment*, 8 (3), 135–147, 2003. Special Issue on Modeling the economic response to global climate change.

Kenneth J. ARROW et Anthony C. FISHER. Environmental preservation, uncertainty, and irreversibity. *Quarterly Journal of Economics*, 88, 312–319, 1974.

Zvi ARTSTEIN. Gains and costs of information in stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 85, 128–152, 1999.

Zvi ARTSTEIN et Roger J.-B. WETS. Sensors and information in optimization under stochastic uncertainty. *Mathematic of Operation Research*, 18 (3), 1993.

L. BREIMAN. *Probability*. Classics in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, second éd., 1993.

Frank H. CLARKE. *Optimization and nonsmooth analysis*, t. 5 de *Classics in Mathematics*. SIAM, 1990.

Jon M. CONRAD. Quasi-option value and the expected value of information. *Quarterly Journal of Economics*, 94, 813–820, 1980.

L. G. EPSTEIN. Decision making and temporal resolution of uncertainty. *International Economic Review*, 21, 269–283, 1980.

Anthony C. FISHER. Investment under uncertainty and option value in environmental economics. *Resource and Energy Economics*, 22, 197–204, 2000.

Xavier FREIXAS et Jean-Jacques LAFFONT. The irreversibility effect. Dans *Bayesian Models in Economic Theory*, sous la dir. de Marcel BOYER et R. KIHLSTRÖM, chap. 7, p. 105–114. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

Jon GJERDE, Sverre GREPPERUD, et Snorre KVERNDOKK. Optimal climate policy under the possibility of a catastrophe. *Resource and Energy Economics*, 21, 289–317, 1999.

Christian GOLLIER, Bruno JULLIEN, et Nicolas TREICH. Scientific progress and irreversibility : an economic interpretation of the “precautionary principle”. *Journal of Public Economics*, 75, 229–253, 2000.

Minh HA-DUONG. Quasi-option value and climate policy choices. *Energy Economics*, 20, 599–620, 1998.

W. M. HANEMANN. Information and the concept of option value. *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 183–190, 1989.

Claude HENRY. Investment decisions under uncertainty : The “irreversibility effect”. *American Economic Review*, 64 (6), 1006–1012, 1974a.

—. Option values in the economics of irreplaceable assets. *Review of Economic Studies*, 41, 89–104, 1974b.

David L. KELLY et Charles D. KOLSTAD. Bayesian learning, growth, and pollution. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 23, 491–518, 1999.

Charles D. KOLSTAD. Fundamental irreversibilities in stock externalities. *Journal of Public Economics*, 60, 221–233, 1996.

Jean-Jacques LAFFONT. *The economics of uncertainty and information*. MIT Press, Cambridge, 1989. Published in France under the title *Cours de théorie microéconomique. II. Économie de l'incertain et de l'information* by Economica, Paris, 1986. Translated by John P. Bonin and Hélène Bonin.

Alan S. MANNE et Richard RICHELS. *Buying Greenhouse Insurance : The Economic Cost of CO_2 Emissions Limits*. MIT Press, 1992.

William D. NORDHAUS. *Managing the Global Commons*. MIT Press, 1994.

William D. NORDHAUS et Joseph BOYER. *Warming the World : Economics Models of Global Warming*. MIT press, 2000. URL `http ://www.econ.yale.edu/ nordhaus/homepage/dice_section_I.html`.

Sébastien ROUILLON. Catastrophe climatique irréversible, incertitude et progrès de la connaissance. *Revue Économique*, 52 (1), 61–90, 2001.

Donald M. TOPKIS. Minimizing a submodular function on a lattice. *Operations Research*, 26, 305–321, 1978.

—. *Supermodularity and Complementarity*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1998.

Alistair ULPH et David ULPH. Global warming, irreversibility and learning. *Economic Journal*, 107 (442), 636–650, 1997.

Chapitre 4

Sensors and separability conditions for the Radner-Stiglitz Theorem

Sommaire

4.1 Introduction . . . 116
4.2 The original problem . . . 118
4.2.1 The economic problem . . . 118
4.2.2 The Radner-Stiglitz result . . . 119
4.2.3 The Chade and Schlee result . . . 119
4.3 Problem restatement with sensors . . . 119
4.3.1 The optimization problem data . . . 119
4.3.2 The information structure data . . . 120
4.3.3 Problem statement . . . 121
4.4 Conditions on the information structure . . . 122
4.4.1 Main result . . . 122
4.4.2 Conditions for nullity of the infinitesimal information distance variation . . . 123
4.4.3 Discontinuity of the posterior beliefs at $\theta = 0$ . . . 125
4.5 Conditions on both the information structure and the optimization data . . . 127
4.5.1 Main result . . . 127
4.5.2 Conditions for nullity of the infinitesimal information square distance variation 127
4.6 A general class of examples . . . 129
4.6.1 The two-states, two-signals case . . . 130
4.6.2 The two-states, continuous signals case . . . 131
4.7 Summary and conclusion . . . 133
4.8 Appendix: recalls on signed measures . . . 134
4.9 Appendix: recalls on sensors . . . 135

Ce chapitre rapporte un article écrit avec Michel DE LARA.

4.9.1 Definition . . . 135
4.9.2 Example: sensor induced by a sub-σ-field . . . 136
4.9.3 Example: sensor induced by an event . . . 137
4.9.4 Example: sensor defined by conditional laws . . . 137
4.9.5 Example: sensor defined by conditional laws (finite case) . . . 138
4.9.6 Example: sensor defined by conditional laws (density case) . . . 138
4.9.7 Orders on sensors . . . 139
4.10 Computations with sensors . . . 139
4.10.1 Sensor induced by an event . . . 139
4.10.2 Sensor defined by conditional laws (density case) . . . 140
4.10.3 Example: sensor defined by conditional laws (finite case) . . . 142
4.10.4 Sensors for a family of Gaussian information structures . . . 142
4.10.5 Value of information for quadratic utility functions . . . 143
4.10.6 Sensor for a two-state case (CS, example 2) . . . 143
4.11 Proofs . . . 144
4.11.1 Proof of Proposition 10 . . . 144
4.11.2 Proof of Proposition 12 . . . 145
Références . . . 146

4.1 Introduction

Though costless information always improve the expected payoff of a decision-maker that faces uncertainty, Radner and Stiglitz (1984) identified a rather general class of decision problems for which the marginal value of small amount of information is zero. "It implies that if there is some amount of information that has a positive net value, then value cannot be a concave function of the amount of information, *i.e.* there must be increasing returns to information over some range " (Radner and Stiglitz, 1984).

This 'nonconcavity' of the value of information received further clarifications in a recent article by Chade and Schlee (2002). They extended the Radner-Stiglitz result (henceforth RS) in several directions. They provide conditions for nonconcavity in a general, non-finite framework. When the information structures can be represented with density functions, Chade and Schlee (henceforth CS) also identify a class of problems where the result holds and for which the sufficient conditions required from the decision-maker's preferences and beliefs and those required from the information structures are separated. Indeed, whether information exhibits or not increasing returns depends on preferences, beliefs and on the characteristics of improvement of the information. The original RS theorem had the drawback to impose restrictions «jointly on the information structure and on the decision-maker's utility function and prior beliefs» (Chade and Schlee, 2002).

Some examples given by CS illustrate two kind of situations where the marginal value of information is non zero: when a 'small improvement' of the information quality provokes

a great modification of the a posteriori beliefs; and when a small modification of the a posteriori beliefs brings a great change in the decision strategies. The conditions they propose aim at preventing these cases. However, their technicity sometimes let interpretation aside, in particular concerning the respective roles of the preferences and of the improvement of information structures. They also chose to drop one of the original RS hypothesis in order to ensure clarity: in CS, the admissibility domain of the decision does not any longer depend on the information structure. However, most of their results would hold without this restriction but to the cost of more notations.

The present paper makes use of sensors (also called random measures) for providing new and easier-to-handle conditions that clearly separate and interpret the role of the preferences and of the characteristics of the information structure improvements. In effect, for such problems where initially the decision-maker balances the cost of a better information structure against its benefits, it proves useful to have a description of the information structure that is more « amenable to mathematical analysis and manipulation » (Artstein, 1999) and allows to better understand the role that information plays. For this purpose, Artstein and Wets suggested to make use of sensors (Artstein et Wets, 1993). These are probability measures defined on a space of probability measures, i.e. random measures in the vocabulary of the statistics litterature. Our reformulation with sensors of the general, non-finite RS problem proves easy even when the admissibility domain depends on the information. Moreover it makes natural to characterize "how fast" information improves by using a norm on signed measures. Applying the sensors to the RS theorem conducted us to study their properties in a way that extend the work initiated by Artstein and Wets.

The main results of this paper are twofold. Firstly, new conditions are provided for the extended RS theorem. A restrictive condition on how fast information improves will guarantee a zero marginal value of information with all utility functions. Loosely speaking, we require that the marginal improvement from the noninformative information structure is also noninformative. Conversely, a looser condition on how fast information can improve will be associated with a relatively strict condition on the preferences. In this manner, conditions on preferences and on information are clearly separated and their respective roles are clarified. The general conditions on the information data are related to how fast does the mean distance between the prior and the revised beliefs increase.

Secondly, the understanding and identification of which families of information structures will exhibit nonconcave value is improved. We provide a simple and nonpathological example of information structures for which the various conditions proposed by RS or CS are not met, or cannot be checked easily. Besides, intuition could have been misleading in suggesting that the marginal value of information is non zero because the posterior beliefs do not converge towards the prior. However, it is trivial that this example satisfies the strictest sufficient condition we propose on information data. We hope that this may help and identify some «appropriate functional form restrictions to impose on information acquisition problems», as CS invited to do.

The paper is organised as follows. Section 4.2 sets out briefly the extended, non-finite RS decision-problem and the original RS theorem. Section 4.3 restates the problem with the use

of sensors and explicits the correspondance with the formulation in section 4.2. Section 4.4 gives the strict condition limiting 'how fast' the information can improve and still exhibit nonconcavity of the value of information. Section 4.5 gives a condition on preferences that allow faster improvement in information and still nonconcavity of its value. Section 4.6 studies the two-states class, either with two signals or with a continuum of signals ; we also revisit examples given by CS as illustrations of our conditions. Section 4.7 concludes and, finally, the appendix provides proofs as well as recalls on sensors and new insights on their properties.

4.2 The original problem

4.2.1 The economic problem

We consider a decision maker who faces an uncertain state of the world and chooses an action so as to maximize her expected payoff.

Let Ω denote the set of the states of the world, endowed with a σ-algebra $\mathcal{F}$ and with probability μ that represents the prior beliefs of the decision maker. She chooses an action in a measurable space $\mathcal{U}$ after observing a signal in a measurable space $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$. An information structure is here a conditional distribution of the signal given the state of the world. Radner and Stiglitz consider the case of a family of information structures indexed by θ belonging to the parameter set $\Theta = [0,1]$. Let therefore $(Q_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ be a family of measurable families $Q_\theta = \{Q_\theta(dy \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ of probability measures on $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$. The value of the index $\theta = 0$ will always correspond to a *noninformative information structure in the sense that* $Q_0(dy \mid \omega)$ *is independent of* ω.

Given the state $\omega \in \Omega$, the action $u \in \mathcal{U}$ and the parameter $\theta \in \Theta$, the payoff to the decision maker is $L(u, \omega, \theta)$, where $L : \mathcal{U} \times \Omega \times \Theta \to \mathbb{R}$ is a measurable function. Constraints on the decisions are captured via a family $(\mathcal{U}_\theta)_{\theta\in\Theta}$ of subsets of the decision set $\mathcal{U}$. Note that the dependence of L in θ usually refers to the cost (of having acquired) the information structure θ. The choice of θ by the decision-maker is the first part of a broader problem where the choice of action u, here studied, is the second part. A simple and useful case, mentionned by CS, is where $L(u, \omega, \theta)$ can be written as $w(u, \omega) - C(\theta)$.

The decision maker selects a strategy $u : \mathbb{Y} \to \mathcal{U}_\theta$ as a solution of the following optimization problem

$$\sup_{u:\mathbb{Y}\to\mathcal{U}_\theta} \int_{\mathbb{Y}} \int_{\Omega} Q_\theta(dy \mid \omega)\mu(d\omega)L(u, \omega, \theta) \tag{4.1}$$

where the integral is supposed to be well defined (take L nonnegative for instance). Thus, an optimal strategy $u^\sharp_\theta$ may depend upon $y \in \mathbb{Y}$, but not upon $\omega \in \Omega$.

4.2.2 The Radner-Stiglitz result

When both Ω and $\mathbb{Y}$ are finite sets, Radner and Stiglitz (1984) study the behaviour near $\theta = 0$ of the function

$$V(\theta) = \sum_{y \in \mathbb{Y}} \sup_{u(y) \in \mathcal{U}_\theta} \sum_{\omega \in \Omega} Q_\theta(y \mid \omega) \mu(\omega) L(u, \omega, \theta) .$$

They prove that

$$\limsup_{\theta \downarrow 0} \frac{V(\theta) - V(0)}{\theta} \leq 0$$

under assumptions on how $L(\cdot, \cdot, \theta)$ and $\mathcal{U}_\theta$ depend upon θ and, especially, if

(A0) there exist optimal decisions $u_\theta^\sharp(y)$ which are both flat and continuous at $\theta = 0$, that is such that $u_0^\sharp(\cdot)$ is constant and, for all $y \in \mathbb{Y}$, $u_\theta^\sharp(y) \to_{\theta \downarrow 0} u_0^\sharp$,

(A1) for all $y \in \mathbb{Y}$ and $\omega \in \Omega$, $\theta \hookrightarrow Q_\theta(y \mid \omega)$ is differentiable.

4.2.3 The Chade and Schlee result

As Chade and Schlee (2002) state it, since the condition (A0) of Radner and Stiglitz "imposes conditions jointly on the information structure *and* the decision maker's utility function and prior beliefs, it is not entirely satisfactory".

Chade and Schlee generalize Radner and Stiglitz results to the case where Ω and $\mathbb{Y}$ are not necessarily finite sets, with an assumption similar to condition (A0). They identify a class of problems where the result still holds and for which condition (A0) is the consequence of separate assumptions on the payoff function (strictly concave in the decision) and on the the information structures. However, this requires some highly technical assumptions.

4.3 Problem restatement with sensors

We present here how the introduction of sensors provides a powerful tool for computing variations of the expected payoff and for giving conditions which disentangle the information structure *and* the decision maker's characteristics.

In what follows, we shall consider, on the one hand, the family of all optimization problems for all distributions and, on the other hand, information structure data consisting of subfamilies of distributions.

4.3.1 The optimization problem data

The *optimization problem data* is a family $\Lambda = (\Lambda_\theta)_{\theta \in [0,1]}$, where each Λ_θ is a set of measurable functions on Ω. Such a family characterizes the optimization problem, without consideration of information questions.

The economic interpretation is as follows. For the payoff function L in paragraph 4.2.1, the associated family Λ is defined for each θ by $\Lambda_\theta = \{L(u,\cdot,\theta), u \in \mathcal{U}_\theta\}$. Any $\lambda \in \Lambda_\theta$ is the utility of the decision maker for an admissible control u:

$$\lambda \in \Lambda_\theta \iff \exists u \in \mathcal{U}_\theta\,, \quad \forall \omega \in \Omega\,, \quad \lambda(\omega) = L(u,\omega,\theta)\,. \tag{4.2}$$

The choice of a control u can thus be interpreted as the choice of a payoff function λ over the states of the world $\omega \in \Omega$.

Let $\mathcal{P}(\Omega)$ be the Borel space of probability measures on Ω. We define the function $\psi_\theta : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ by

$$\forall \rho \in \mathcal{P}(\Omega)\,, \quad \psi_\theta(\rho) \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\lambda \in \Lambda_\theta} \int_\Omega \lambda(\omega) d\rho(\omega)\,.$$

For any $\rho \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\psi_\theta(\rho)$ represents the maximum expected utility for the distribution ρ on the states of the world. In what follows, ρ will typically represents the a posteriori beliefs of the decision-maker once a certain signal has been observed.

When required (section 4.5 below), a condition relating to the preferences of the decision-maker will be given as a characterization of ψ_θ.

Example. Consider the payoff function of the linear prediction problem in RS, $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathcal{U}_\theta = \mathbb{R}$ and $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2 - C(\theta)$, where $C(\theta)$ is the cost of obtaining information structure θ. Λ_θ consists of quadratic functions in ω, and we have

$$\psi_\theta(\rho) = -\inf_u \int (u-\omega)^2 d\rho(\omega) - C(\theta) = [\int \omega d\rho(\omega)]^2 - \int \omega^2 d\rho(\omega) - C(\theta)\,. \tag{4.3}$$

4.3.2 The information structure data

On the reception of a signal, the decision maker amends her prior beliefs and deduces that the state of the world is distributed according to a posterior distribution. Relying on an information structure therefore amounts to be uncertain about the posterior distribution which will be drawn randomly among the set $\mathcal{P}(\Omega)$ of all distributions on the states of the world, with respect to the unconditional law for the signals.

A sensor is a probability law on the set $\mathcal{P}(\Omega)$ of all distributions on the states of the world. It is an element of $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, the Borel space of probability measures on $\mathcal{P}(\Omega)$ (for the recalls on sensors, we refer the reader to the Appendix). Following Artstein (1999), an information structure can be defined by a sensor since it governs which posterior beliefs will be materialized at the time of decision.

The *data on information structures* is a prior $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ of the decision-maker, and a family $(Q_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ of measurable families $Q_\theta = \{Q_\theta(dy \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ of probability measures on $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$. To this pair, we naturally associate a family $(S_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ of sensors (see paragraph 4.9.4), with the two following properties:

1. $(S_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ consists of balanced sensors with respect to μ (see Definition 18) which, in a sense, means that "$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\rho = \mu$", for all θ;

2. $S_0 = \delta_\mu$, that is $S_0(\{\mu\}) = 1$: with probability 1 the posterior belief that will be obtained thanks to S_0 is equal to the prior μ. Thus the index $\theta = 0$ corresponds to a noninformative sensor.

From the conditional distribution $Q_\theta(dy \mid \omega)$ of the signal given the state of the world and from the prior μ, we obtain the unconditional law $\nu_\theta(dy)$ of the signal and the conditional distribution $P_\theta(d\omega \mid y)$ of the state of the world given the signal. The sensor S_θ weighs the $P_\theta(d\omega \mid y)$ according to probability $\nu(dy)$.

Sections 4.10.4 and 4.10.6 in appendix display what are the sensors for two examples: the linear prediction theorem from RS and CS and a two-states case from CS.

4.3.3 Problem statement

For all $\theta \in [0,1]$, we define the *value mapping* as the function $J_\theta : \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega)) \to \mathbb{R}$ over the sensors such that

$$\forall S \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega)), \quad J_\theta(S) \overset{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\psi_\theta(\rho).$$

An interesting property of the value mapping J_θ is linearity: $J_\theta(\alpha_1 S_1 + \alpha_2 S_2) = \alpha_1 J_\theta(S_1) + \alpha_2 J_\theta(S_2)$ for any $(S_1, S_2) \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ and $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Notice that the value mapping J_θ may easily be defined not only on $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ but on the finite signed measures on $\mathcal{P}(\Omega)$, where the above equality holds for any linear combination and not only convex combinations.

It is shown by Artstein and Wets (1993) that the supremum value of the optimization problem (4.1) coincides with the *payoff of the information structure* parameterized by θ as defined by

$$V(\theta) \overset{\text{def}}{=} J_\theta(S_\theta).$$

Note that, since $S_0 = \delta_\mu$, we have

$$V(0) = J_0(S_0) = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_0(\rho)\psi_0(\rho) = \psi_0(\mu). \tag{4.4}$$

Our goal is to give general conditions relating separately to the family of sensors $(S_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ or to the family of functions $(\psi_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ and ensuring that

$$(\text{NPMPI}) \qquad \limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{V(\theta) - V(0)}{\theta} \leq 0. \tag{4.5}$$

We abbreviate this property as NPMPI for *nonpositivity of the marginal payoff of information*.

4.4 Conditions on the information structure for nonpositivity of the marginal payoff of information

Our main results on nonpositivity of the marginal payoff of information are related to the *information distance* $\int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|$ associated to the sensor S_θ. It measures the mean distance between the prior and the possible revised beliefs (belonging to the support of S_θ). For the definition of the total variation norm $\|\rho-\mu\|$, see the recalls on signed measures, appendix 4.8. Explicit computation of the information distance is given for the examples at the end of this section.

4.4.1 Main result

DÉFINITION 9 — *We define the* infinitesimal information distance variation *by*

$$\text{IIDV} \overset{\text{def}}{=} \limsup_{\theta\downarrow 0} \frac{\int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|}{\theta}\,. \tag{4.6}$$

Our first main result is Proposition 10, whose proof is given in appendix 4.11.1.

PROPOSITION 10 — *Assume that*

1. Λ_0 *consists of bounded functions and is such that*

$$\forall\lambda\in\Lambda_\theta \qquad \exists\overline{\lambda}\in\Lambda_0 \qquad \lambda\le\overline{\lambda} \tag{4.7}$$

2. *the infinitesimal information distance variation is zero, that is*

$$\text{IIDV}=0\,, \tag{4.8}$$

then NPMPI *(4.5) holds true.*

The interpretation is as follows. The first condition puts inocuous requirements on the preferences: boundedness means here that for any decision u, the application $\omega\hookrightarrow L(u,\omega,0)$ is bounded (but utility is not necessarily bounded in u); the domination of each set Λ_θ by an element of Λ_0 is obtained as soon as $\partial L/\partial\theta\le 0$, which is true for economic problems where the index θ orders increasingly costly information structures.

The second condition explicits how much the revised beliefs ρ can depart from the prior μ. A small increase of information keeps revised beliefs almost certainly close to the prior.

It keeps the mean distance between the prior and the possible revised beliefs small compared to the increase in the index of information quality θ. This property remains true for any other indexation $\theta' \in [0,1]$ of the information structure family that is deduced from θ by any transformation $f : \theta \mapsto \theta'$, continous in 0 and such that $f(0) = 0$.

Finally, any family of increasingly informative information structures that meets (4.8) will generally exhibit the unwelcome property of non-concavity of the value of information. We shall see that it includes cases that one could have thought immune to that problem.

We now turn to consider special cases, where condition (4.8) can be obtained from conditions on densities. These conditions may be easier to verify in practice than those proposed by CS in their special cases (see their corollaries 1, 2, 3 and also corollary 5 where preferences and information are disentangled).

4.4.2 Conditions for nullity of the infinitesimal information distance variation

Here, we show how nullity of the infinitesimal information distance variation may result from properties of densities or of atomic measures.

Generalities in the density case

Let $(Q_\theta)_{\theta\in[0,1]}$ be a family of measurable families $Q_\theta = \{Q_\theta(dy \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ of probability measures on $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$. Assume that there exists a common measure η on $(\mathbb{Y}, \mathcal{Y})$ such that, for all $\theta \in [0,1]$, for all $\omega \in \Omega$, $Q_\theta(dy \mid \omega)$ has a density $q_\theta(y \mid \omega)$ with respect to η, that is

$$\forall \omega \in \Omega, \quad Q_\theta(dy \mid \omega) = q_\theta(y \mid \omega)\eta(dy).$$

Example. This covers the classical case of density with respect to Lebesgue measure $Q_\theta(dy \mid \omega) = q_\theta(y \mid \omega)dy$, and with respect to the so called counting measure $\eta\{y\} = 1$ when $\mathbb{Y}$ is finite.

For each θ, let us introduce the unconditional density of the signal as in (4.57):

$$q_\theta(y) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega q_\theta(y \mid \omega')\mu(d\omega'), \quad \forall y \in \mathbb{Y}. \tag{4.9}$$

The unconditional law of the signal is

$$\nu_\theta(dy) \stackrel{\text{def}}{=} q_\theta(y)\eta(dy). \tag{4.10}$$

Signals likely to be observed belong to the complementary set of

$$\mathbb{Y}^\theta \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \mathbb{Y},\ q_\theta(y) = 0\}. \tag{4.11}$$

Let $S_\theta \overset{\text{def}}{=} S^{Q_\theta}$ be the sensor associated to Q_θ as given by (4.51) in appendix:

$$\begin{cases} P_\theta(d\omega \mid y) \overset{\text{def}}{=} \dfrac{q_\theta(y \mid \omega)}{q_\theta(y)}\mu(d\omega) & \text{for} \quad y \in \mathbb{Y}\backslash\mathbb{Y}^\theta \\ S_\theta(\{P_\theta(d\omega \mid y), y \in A\backslash\mathbb{Y}^\theta\}) \overset{\text{def}}{=} \nu_\theta(A)\,, \quad \forall A \in \mathcal{Y}\ . \end{cases}$$

Note that $\nu_\theta(\mathbb{Y}^\theta) = 0$, so that there is no point in defining $P_\theta(d\omega \mid y)$ for $y \in \mathbb{Y}^\theta$: the support of S_θ is $\{P_\theta(d\omega \mid y)\,,\, y \in \mathbb{Y}\backslash\mathbb{Y}^\theta\}$. However, because θ varies, we cannot restrict $\mathbb{Y}$ to $\mathbb{Y}\backslash\mathbb{Y}^\theta$ by ignoring a subset of ν_θ-measure zero.

By equation (4.60) in Lemma 23 in appendix, we have the following expression for IIDV:

$$\text{IIDV} = \limsup_{\theta\downarrow 0} \int_{\mathbb{Y}\times\Omega} \eta(dy)\mu(d\omega)\frac{\mid q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) \mid}{\theta}\,. \tag{4.12}$$

Assume that $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ is differentiable at $\theta = 0$ for $d\eta(y) \otimes d\mu(\omega)$-almost all $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$. Let us denote by $q_0'(y \mid \omega)$ the derivative. Since $q_0(y \mid \omega)$ does not depend upon ω (noninformative information structure in $\theta = 0$), we can write

$$\frac{\mid q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) \mid}{\theta} = \frac{\mid q_\theta(y \mid \omega) - q_0(y \mid \omega) + q_0(y) - q_\theta(y) \mid}{\theta}$$

so that, under technical conditions ensuring the validity of the Lebesgue theorem and also that $q_0'(y)$ exists, we generally have that

$$\text{IIDV} = \int_{\mathbb{Y}\times\Omega} \eta(dy)\mu(d\omega) \mid q_0'(y \mid \omega) - q_0'(y) \mid\ . \tag{4.13}$$

Thus, generally, IIDV is zero if and only if $q_0'(y \mid \omega)$ does not depend upon ω, for all $y \in \mathbb{Y}$. This means that at $\theta = 0$, the infinitesimal variations of information structure is not informative ($q_0'(y \mid \omega)$ does not depend upon ω).

Practical conditions for the finite case

Here, we rigorously develop the above argument in the finite case. Assuming differentiability at $\theta = 0$, a condition required by RS, we will be able to propose a modified version of the RS theorem where the conditions on 'flatness' only apply to the family of information structures and not to the optimal decisions.

By definition (4.9) of $q_\theta(y)$, we have

$$q_\theta(y) = \sum_\omega \mu(\omega) q_\theta(y \mid \omega)\,. \tag{4.14}$$

PROPOSITION 11 — *With the notations above, assume that*

1. *Ω is finite with prior measure μ such that $\mu\{\omega\} > 0$, $\forall \omega \in \Omega$;*
2. *$\mathbb{Y}$ is finite (with counting measure);*
3. *$\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ is differentiable at $\theta = 0$ for all $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$.*

Then $\theta \hookrightarrow q_\theta(y)$ as defined by (4.14) is differentiable at $\theta = 0$ for all $y \in \mathbb{Y}$. Denoting

$$q_0'(y \mid \omega) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{d\theta}_{|\theta=0} q_\theta(y \mid \omega) \quad \textit{and} \quad q_0'(y) \overset{\text{def}}{=} \frac{d}{d\theta}_{|\theta=0} q_\theta(y)\,, \tag{4.15}$$

we have

$$\text{IIDV} = \sum_{y \in \mathbb{Y}} \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) |q_0'(y \mid \omega) - q_0'(y)|\,. \tag{4.16}$$

Thus, IIDV *is zero if and only if $q_0'(y \mid \omega)$ does not depend upon ω, for all $y \in \mathbb{Y}$.*

Proof. By (4.14), we have $q_0'(y) = \sum_\omega \mu(\omega) q_0'(y \mid \omega)$.

Since $q_0(y \mid \omega)$ does not depend upon ω (noninformative information structure in $\theta = 0$), we have

$$q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) = q_\theta(y \mid \omega) - q_0(y \mid \omega) + q_0(y) - q_\theta(y)$$

and thus

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) |q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y)|}{\theta} = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) |q_0'(y \mid \omega) - q_0'(y)|\,. \tag{4.17}$$

On the other hand, we have by (4.63),

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \|\rho - \mu\| = \sum_y \sum_\omega \mu(\omega) |q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y)|$$

We then easily obtain the expression of IIDV.

Since $\mu\{\omega\} > 0$, $\forall \omega \in \Omega$, IIDV is zero if and only if $q_0'(y \mid \omega) = q_0'(y)$ for all $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$. Together with the expression $q_0'(y) = \sum_\omega \mu(\omega) q_0'(y \mid \omega)$, this gives the last result. □

The condition for nullity of IIDV requires that the initial variation in the conditional probability of observing a signal y should be independent of the state of the world. This guarantees that the information does not improve too fast as expressed by condition (4.8).

4.4.3 Discontinuity of the posterior beliefs at $\theta = 0$

When the posterior beliefs do not converge to the prior as θ tends to 0, one may expect that such a discontinuity would imply a strictly positive marginal value of information, since for any $\theta \neq 0$, some signals allow to significantly revise the prior. However, this is not necessarily the case and the following examples illustrate firstly a situation (from CS' example 2) where discontinuity prevents to conclude about null marginal value of information using conditions from CS or from us, and secondly situations where in spite of discontinuity of the posteriors, null marginal value is still obtained thanks to null IIDV.

Discontinuity and positive IIDV

Firstly, consider the example 2 in Chade and Schlee, where $\Omega = \{s_L, s_H\}$, $\mu\{s_L\} = 1/2$, $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2\}$ and

$$\begin{cases} q_\theta(y_2|s_L) = 1 \\ q_\theta(y_2|s_H) = 1-\theta \end{cases}$$

As Chade and Schlee pointed, the posterior belief after signal y_1 is δ_{s_H} and does not converge to the prior $\frac{\delta_{s_H}+\delta_{s_L}}{2}$. Because of this, this simple case does not verify their necessary conditions for null marginal value. It does not either verify our conditions since IIDV $=1$ as the following computation shows. From subsection 4.10.6 in appendix, we have

$$\begin{aligned} \int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\| &= \frac{\theta}{2}\|\delta_{s_H}-\mu\| + (1-\frac{\theta}{2})\|(\frac{1-\theta}{2-\theta})\delta_{s_H} + \frac{1}{2-\theta}\delta_{s_L} - \mu\| \\ &= \frac{\theta}{2} + (1-\frac{\theta}{2})\left(|(\frac{1-\theta}{2-\theta}) - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{2-\theta} - \frac{1}{2}|\right) \quad \text{by (4.39)} \\ &= \frac{\theta}{2} + (1-\frac{\theta}{2})\frac{\theta}{2-\theta} = \theta\,. \end{aligned}$$

Therefore, IIDV $=1$.

Discontinuity and null IIDV

As in CS example 6, we give a more general formulation of the example above and consider now that

$$\begin{cases} q_\theta(y_2|s_L) = 1 \\ q_\theta(y_2|s_H) = g(\theta), \quad \text{with } g(0)=1,\ 0 \le g(\theta) < 1 \text{ for } \theta > 0. \end{cases} \tag{4.18}$$

Direct calculation gives $\int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\| = 1-g(\theta)$.

Now, whenever $g'(0)=0$, (for instance $g(\theta)=1-\theta^\alpha$ with $\alpha>1$), we have $q_0'(y_2|s_L) = 0 = q_0'(y_2|s_H)$ and thus IIDV $=0$ by Proposition 11. However, there is still no continuity of the posterior beliefs in 0. Indeed, we have $P_\theta(d\omega \mid y_1) = \delta_{s_H} \not\to_{\theta\downarrow 0} \mu$. But since the sensor S_θ weighs the probability measure $P_\theta(d\omega \mid y_1) = \delta_{s_H}$ with probability $\nu\{y_1\} = g(\theta)/2$, the discontinuity does not prevent $\int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|$ to grow slowly with θ.

This very simple example does not fall under any of the practical conditions of CS (corollary 1, 2, 3 and 5). The new conditions we propose allowed to conclude that and explain why, even when there is no continuity of the posterior beliefs, the nonconcavity in the value of information may happen.

4.5 Conditions on both the information structure and the optimization data for nonpositivity of the marginal payoff of information

In this section, we allow a looser condition on how fast information can improve but have to put a more significant restriction on the preferences in order to obtain NPMPI.

4.5.1 Main result

We define the *infinitesimal information square distance variation* by

$$\text{IISDV} \overset{\text{def}}{=} \limsup_{\theta \downarrow 0} \frac{\int_{\mathscr{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|^2}{\theta}. \tag{4.19}$$

Our second main result is the following proposition.

PROPOSITION 12 — *Assume that*

1. *there exists* $l : \Omega \to \mathbb{R}$ *measurable bounded and* $k \geq 0$ *such that*

$$\forall \theta \in [0,1], \quad \forall \rho \in \mathscr{P}(\Omega)^1, \quad \psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) - \int_\Omega l(\omega) d[\rho-\mu](\omega) \leq k\|\rho-\mu\|^2 \tag{4.20}$$

2. *the infinitesimal information square distance variation is zero, that is*

$$\text{IISDV} = 0, \tag{4.21}$$

then NPMPI *(4.5) holds true.*

4.5.2 Conditions for nullity of the infinitesimal information square distance variation

Generalities in the density case

With the notations of the previous section and the expression (4.60) in Lemma 23 in appendix, we have that

$$\text{IISDV} = \limsup_{\theta \downarrow 0} \left(\theta \times \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^\theta} \frac{\eta(dy)}{q_\theta(y)} \left[\int_\Omega \left| \frac{q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y)}{\theta} \right| \mu(d\omega) \right]^2 \right).$$

Assume that $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ is differentiable at $\theta = 0$ for $d\eta(y) \otimes d\mu(\omega)$-almost all $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$. Denoting by $q_0'(y \mid \omega)$ the derivative, we generally have that, under technical conditions,

$$\lim_{\theta \downarrow 0} \int_{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}^\theta} \frac{\eta(dy)}{q_\theta(y)} \left[\int_\Omega \mid \frac{q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y)}{\theta} \mid \mu(d\omega) \right]^2 = \int_{\mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}^0} \frac{\eta(dy)}{q_0(y)} \left[\int_\Omega \mid q_0'(y \mid \omega) - q_0'(y) \mid \mu(d\omega) \right]^2,$$

where this last term is finite. Thus, we generally have that

$$\text{IISDV } = 0.$$

We rigorously develop this argument in the finite case.

Practical conditions for the finite case

In the finite case, when all the signals are observed, regularity of the conditional law and the condition on the preferences given in Proposition 12 will often be sufficient for marginal zero value of information.

PROPOSITION 13 — *Assume that*

1. Ω *and* $\mathbb{Y}$ *are finite;*
2. $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ *is differentiable at* $\theta = 0$ *for all* $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$*;*
3. $\forall y \in \mathbb{Y}, \quad q_0(y) > 0$*, where* $q_0(y)$ *is defined by (4.14).*

Then IISDV *is zero.*

Proof. By (4.61), we have

$$\frac{\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \|\rho - \mu\|^2}{\theta} = \sum_{y \in \mathbb{Y} \setminus \mathbb{Y}^\theta} \frac{\theta k_\theta(y)^2}{q_\theta(y)} \tag{4.22}$$

with

$$k_\theta(y) \overset{\text{def}}{=} \frac{\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) |q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y)|}{\theta} \tag{4.23}$$

and where $\mathbb{Y}^\theta$ is given by (4.11). In the expression (4.22), we have

- $q_\theta(y) \to_{\theta \downarrow 0} q_0(y) > 0$ since $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ is differentiable hence continuous;
- $k_\theta(y) \to_{\theta \downarrow 0} \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\omega) |q_0'(y \mid \omega) - q_0'(y)|$ by (4.17), so that $\theta k_\theta(y)^2 \to_{\theta \downarrow 0} 0$;
- $\mathbb{Y}^\theta = \emptyset$ for θ close to 0, since $\forall y \in \mathbb{Y}$, $q_0(y) > 0$ and by continuity of $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$, together with the fact that $\mathbb{Y}$ is finite.

Thus, $\frac{\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|^2}{\theta}$ goes to zero as $\theta \downarrow 0$, that is IISDV $= 0$. □

We now focus on the case where some signals are not likely to be observed from the non-informative information structure (else CS Corollary 5 may apply easily when preferences are strictly concave).

PROPOSITION 14 — *Assume that*

1. Ω *and* $\mathbb{Y}$ *are finite;*
2. $\theta \hookrightarrow q_\theta(y \mid \omega)$ *is differentiable at* $\theta = 0$ *for all* $(\omega, y) \in \Omega \times \mathbb{Y}$*;*
3. $\forall y \in \mathbb{Y}^0$ *as defined in (4.11),* $q_0'(y \mid \omega)$ *does not depend upon* ω *and the common value* $q_0'(y)$ *differs from zero.*

Then IISDV *is zero.*

Proof. The proof follows the line of that of Proposition 13 except for those $y \in \mathbb{Y}^0$.

When $y \in \mathbb{Y}^0$, we have $k_\theta(y) \to_{\theta \downarrow 0} 0$ by assumption and also $q_\theta(y) \sim_{\theta \downarrow 0} \theta q_0'(y)$, since $q_0'(y) \neq 0$. Thus $\frac{\theta k_\theta(y)^2}{q_\theta(y)} \to_{\theta \downarrow 0} 0$. □

Let us go back to the example of subsection 4.4.3.We compute

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|^2 &= \frac{1-g(\theta)}{2}\|\delta_{s_H}-\mu\|^2 + (\frac{1+g(\theta)}{2})\|(\frac{g(\theta)}{1+g(\theta)})\delta_{s_H} + \frac{1}{1+g(\theta)}\delta_{s_L} - \mu\|^2 \\
&= \frac{1-g(\theta)}{2} + (\frac{1+g(\theta)}{2})\left(|(\frac{g(\theta)}{1+g(\theta)}) - \frac{1}{2}| + |\frac{1}{1+g(\theta)} - \frac{1}{2}|\right)^2 \\
&= \frac{1-g(\theta)}{2} + (\frac{1+g(\theta)}{2})\left(\frac{1-g(\theta)}{1+g(\theta)}\right)^2 = \frac{1-g(\theta)}{1+g(\theta)}.
\end{aligned}$$

Thus, IISDV $= \frac{-g'(0)}{2}$ if $g(\theta)$ is differentiable at $\theta = 0$ and $g(0) = 1$. This is coherent with the hereabove Proposition 14. Indeed, the signal y_1 is not observed with the noninformative information structure ($q_0(y_1) = 0$) and we have $q_0'(y_1 \mid s_L) = 0$ and $q_0'(y_1 \mid s_H) = 1 - g'(0)$. These latter terms coincide if and only if $g'(0) = 1$ if and only if IISDV $= 0$.

4.6 A general class of examples

We develop here two families of examples of information structures where the application of sensors makes possible to directly compute the IIDV. The value of information is also directly calculated in the case of a quadratic utility function. This computations allow a direct treatement of many of the examples in CS.

4.6.1 The two-states, two-signals case

This section provides an extension of the examples given in the previous sections and in CS as well (examples 2 and 6). We consider information structures with two states of the world and two signals.

Information structures with null marginal value

PROPOSITION 15 — *Assume that*

1. $\Omega = \{s_L, s_H\}$ *and the prior belief is* $\mu = \beta_H \delta_{s_H} + \beta_L \delta_{s_L}$, *with* $\beta_H + \beta_L = 1$,
2. $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2\}$ *and the family of information structures is given by the conditional laws* $q_\theta(y_1|s_L)$ *and* $q_\theta(y_1|s_H)$.

Then, IIDV *has the following expression, indifferently for* $i = 1$ *or* $i = 2$*:*

$$\text{IIDV} = 2\beta_H\beta_L \limsup_{\theta \downarrow 0} \frac{|q_\theta(y_i|s_L) - q_\theta(y_i|s_H)|}{\theta}. \tag{4.24}$$

Proof. Firstly, let us compute $q_\theta(y) = \beta_L q_\theta(y \mid s_L) + \beta_H q_\theta(y \mid s_H)$ and

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mu(d\omega) \mid q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) \mid &= \beta_L \mid q_\theta(y \mid s_L) - q_\theta(y) \mid + \beta_H \mid q_\theta(y \mid s_H) - q_\theta(y) \mid \\ &= 2\beta_L\beta_H \mid q_\theta(y \mid s_L) - q_\theta(y \mid s_H) \mid . \end{aligned}$$

In fact, since $q_\theta(y_1 \mid s_L) + q_\theta(y_2 \mid s_L) = 1$ and idem for s_H, we have that

$$\int_\Omega \mu(d\omega) \mid q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) \mid = 2\beta_L\beta_H \mid q_\theta(y_1 \mid s_L) - q_\theta(y_1 \mid s_H) \mid = 2\beta_L\beta_H \mid q_\theta(y_2 \mid s_L) - q_\theta(y_2 \mid s_H) \mid .$$

By equation (4.60), we get for $i = 1$ or $i = 2$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \|\rho - \mu\| &= \int_{\mathbb{Y}} \eta(dy) \int_\Omega \mu(d\omega) \mid q_\theta(y \mid \omega) - q_\theta(y) \mid \\ &= 2\beta_L\beta_H \mid q_\theta(y_i \mid s_L) - q_\theta(y_i \mid s_H) \mid \int_{\mathbb{Y}} \eta(dy) \\ &= 2\beta_L\beta_H \mid q_\theta(y_i \mid s_L) - q_\theta(y_i \mid s_H) \mid . \end{aligned}$$

□

Thus, from (4.12), if $\lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1}{\theta} |q_\theta(y_1|s_L) - q_\theta(y_1|s_H)| = 0$, then, the marginal value of information will be nonpositive for all meaningful preferences and information pricings. This is true even if one of the signals is not likely to be observed with the noninformative information structure, an uncomfortable property for applying CS proposals.

Value of information with a quadratic utility

PROPOSITION 16 — *Assume the same general two-state, two-signals information structure as in Proposition 15. If* $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2$*, we have, for* $i = 1$ *or* $i = 2$*:*

$$V(\theta) - V(0) = \beta_H^2 \beta_L^2 (s_H - s_L)^2 \frac{|\, q_\theta(y_i|s_L) - q_\theta(y_i|s_H)\,|^2}{q_\theta(y_1) q_\theta(y_2)}. \tag{4.25}$$

Proof. By (4.69) and (4.63) in Lemma 24, we have

$$\begin{aligned}
V(\theta) - V(0) &= \frac{[\beta_H s_H (q_\theta(y_1|s_H) - q_\theta(y_1)) + \beta_L s_L (q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y_1))]^2}{q_\theta(y_1)} \\
&+ \frac{[\beta_H s_H (q_\theta(y_2|s_H) - q_\theta(y_2)) + \beta_L s_L (q_\theta(y_2|s_L) - q_\theta(y_2))]^2}{q_\theta(y_2)} \\
&= \beta_H^2 \beta_L^2 (s_H - s_L)^2 [\frac{|\, q_\theta(y_1|s_L) - q_\theta(y_1|s_H)\,|^2}{q_\theta(y_1)} + \frac{|\, q_\theta(y_2|s_L) - q_\theta(y_2|s_H)\,|^2}{q_\theta(y_2)}] \\
&= \beta_H^2 \beta_L^2 (s_H - s_L)^2 \,|\, q_\theta(y_i|s_L) - q_\theta(y_i|s_H)\,|^2 \, \frac{q_\theta(y_1) + q_\theta(y_2)}{q_\theta(y_1) q_\theta(y_2)} \\
&= \beta_H^2 \beta_L^2 (s_H - s_L)^2 \,|\, q_\theta(y_i|s_L) - q_\theta(y_i|s_H)\,|^2 \, \frac{1}{q_\theta(y_1) q_\theta(y_2)}.
\end{aligned}$$

□

4.6.2 The two-states, continuous signals case

This case generalizes the examples 4 and 5 in RS. With general conditional densities of the signal, we provide the formula for the mean information distance.

PROPOSITION 17 — *Assume that*

1. $\Omega = \{s_L, s_H\}$ *and the prior belief is* $\mu = \beta_H \delta_{s_H} + \beta_L \delta_{s_L}$*, with* $\beta_H + \beta_L = 1$,
2. $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$ *and the family of information structures is given by the conditional densities* $q_\theta(y|s_L)$ *and* $q_\theta(y|s_H)$*.*

Then, IIDV *has the following expression*

$$\text{IIDV} = 2\beta_H \beta_L \limsup_{\theta \downarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{|\, q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y|s_H)\,|}{\theta}. \tag{4.26}$$

If $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2$, we have

$$V(\theta) - V(0) = \beta_L^2 \beta_H^2 (s_H - s_L)^2 \int_{\{y|q_\theta(y)>0\}} dy \frac{|\, q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y|s_H)\,|^2}{q_\theta(y)}. \tag{4.27}$$

Proof. By paragraph 4.9.6 in the appendix, we have:

$$\left\{ \begin{array}{rcl} Q_\theta(dy \mid s_L) & = & q_\theta(y|s_L)dy \\ Q_\theta(dy \mid s_H) & = & q_\theta(y|s_H)dy \\ \nu_\theta(dy) & = & \beta_L q_\theta(y|s_L) + \beta_H q_\theta(y|s_H))dy \stackrel{\text{def}}{=} q_\theta(y)dy \\ P_\theta(d\omega \mid y) & = & \beta_L \frac{q_\theta(y|s_L)}{q_\theta(y)} \delta_{s_L} + \beta_H \frac{q_\theta(y|s_H)}{q_\theta(y)} \delta_{s_H} \end{array} \right. \tag{4.28}$$

Thus, by (4.38),

$$\begin{array}{rcl} \|P_\theta(d\omega \mid y) - \mu\| & = & \|\beta_L (\frac{q_\theta(y|s_L)}{q_\theta(y)} - 1)\delta_{s_L} + \beta_H (\frac{q_\theta(y|s_H)}{q_\theta(y)} - 1)\delta_{s_H}\| \\ & = & \dfrac{\beta_L \mid q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y) \mid + \beta_H \mid q_\theta(y|s_H) - q_\theta(y) \mid}{q_\theta(y)} \\ & = & 2\beta_L \beta_H \dfrac{|\, q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y|s_H)\,|}{q_\theta(y)} \end{array}$$

and

$$\begin{array}{rcl} \displaystyle\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \|\rho - \mu\| & = & \displaystyle\int_0^{+\infty} q_\theta(y)dy \|P_\theta(d\omega \mid y) - \mu\| \\ & = & \displaystyle 2\beta_L \beta_H \int_{-\infty}^{+\infty} dy \mid q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y|s_H) \mid . \end{array}$$

If $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2$, we have by (4.62):

$$\begin{array}{rcl} V(\theta) - V(0) & = & \displaystyle\int_{\{y|q_\theta(y)>0\}} \frac{dy}{q_\theta(y)} [\beta_L s_L (q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y)) + \beta_H s_H (q_\theta(y|s_H) - q_\theta(y))]^2 \\ & = & \beta_L^2 \beta_H^2 (s_H - s_L)^2 \displaystyle\int_{\{y|q_\theta(y)>0\}} dy \frac{|\, q_\theta(y|s_L) - q_\theta(y|s_H)\,|^2}{q_\theta(y)}. \end{array}$$

□

Signal with moving support

Consider the case where

$$q_\theta(y|s_L) = \mathbf{1}_{[0,1]}(y) h(y) \quad \text{and} \quad q_\theta(y|s_H) = q_\theta(y - \theta|s_L) \tag{4.29}$$

with h of class C^1 on $[0,1]$ satisfying $h \geq 0$ and $\int_0^1 h(y)dy = 1$.

We compute by (4.57) and (4.61)

$$\begin{aligned} q_\theta(y) &= \beta_L \mathbf{1}_{[0,1]}(y)h(y) + \beta_H \mathbf{1}_{[0,1]}(y-\theta)h(y-\theta) \\ \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\| &= 2\beta_H\beta_L\left(\int_0^\theta h(y)dy + \int_\theta^1 \mid h(y)-h(y-\theta)\mid dy + \int_{1-\theta}^1 h(y)dy\right) \end{aligned}$$

so that

$$\text{IIDV} = 2\beta_H\beta_L\left(h(0) + \int_0^1 \mid h'(y)\mid dy + h(1)\right) \tag{4.30}$$

Now, if $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2$, we have by (4.62)

$$V(\theta)-V(0) = \beta_L^2\beta_H^2(s_H-s_L)^2\left(\int_0^\theta \frac{h(y)^2}{q_\theta(y)}dy + \int_\theta^1 \frac{\mid h(y)-h(y-\theta)\mid^2}{q_\theta(y)}dy + \int_{1-\theta}^1 \frac{h(y)^2}{q_\theta(y)}dy\right)$$

so that

$$\limsup_{\theta\downarrow 0}\frac{V(\theta)-V(0)}{\theta} = \beta_L^2\beta_H^2(s_H-s_L)^2(h(0)+h(1))\,. \tag{4.31}$$

Example 4 in CS

As a special application of (4.29) consider the case $h(y)=1$, $\beta_H=\beta_L=1/2$. Then, by (4.30) and (4.31):

$$\text{IIDV} = 1\,, \quad \limsup_{\theta\downarrow 0}\frac{V(\theta)-V(0)}{\theta} = 2\beta_L^2\beta_H^2(s_H-s_L)^2\,. \tag{4.32}$$

Both IIDV and marginal value of information are positive.

Example 5 in CS

Another special application is the case where $h(y)=6y(1-y)$ and $\beta_H=\beta_L=1/2$, for which, by (4.30) and (4.31):

$$\text{IIDV} = 3\int_0^1 y(1-y)dy > 0\,, \quad \limsup_{\theta\downarrow 0}\frac{V(\theta)-V(0)}{\theta} = 0\,. \tag{4.33}$$

Here, in spite of a positive IIDV, the marginal value of information is null.

4.7 Summary and conclusion

This paper developed and made use of the theory of sensors to draw new insights on the conditions that imply nonconcavity in the value of information, evidenced by Radner and Stiglitz

(1984). The new conditions provided allow to separate the respective roles of the decision-maker's preferences and prior beliefs on the one side, and of the structure of information on the other side.

In particular, it identifies and provides simple examples of information structures that will yield nonconcavity with any preferences and prior beliefs. Some examples show that the Radner-Stiglitz nonconcavity issue can arise with all utility functions in cases where it would not have been expected, *i.e.* when a marginal improvement from a noninformative structure results in large changes in the distribution of posterior beliefs. This reinforces the suggestion by Chade and Schlee (2002) that nonconcavity is difficult to rule out in economic models.

4.8 Appendix: recalls on signed measures

We follow Halmos (1974).

By the Jordan decomposition, any signed measure σ on Ω may be written as the difference between two measures, the upper variation σ_+ and the lower variation σ_-. The total variation of σ is the measure

$$|\sigma| \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_+ + \sigma_- . \tag{4.34}$$

The total variation norm of σ is

$$\|\sigma\| \stackrel{\text{def}}{=} \sigma_+(\Omega) + \sigma_-(\Omega) . \tag{4.35}$$

A signed measure σ is finite if $\|\sigma\| < +\infty$.

For any bounded measurable function φ on Ω, we denote

$$| \varphi |_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{\omega\in\Omega} | \varphi(\omega) | . \tag{4.36}$$

We have for any finite signed measure σ:

$$| \int_\Omega \varphi(\omega) d\sigma(\omega) | \leq \int_\Omega | \varphi(\omega) | d|\sigma|(\omega) \leq | \varphi |_\infty \|\sigma\| . \tag{4.37}$$

Let $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ be measurable and integrable with respect to μ. Then $\varphi d\mu$ is a finite signed measure such that

$$\|\varphi d\mu\| = \int_\Omega | \varphi | d\mu . \tag{4.38}$$

As a particular case,

$$\| \sum_i \alpha_i \delta_{x_i} \| = \sum_i | \alpha_i | . \tag{4.39}$$

4.9 Appendix: recalls on sensors

We follow here Artstein et Wets (1993); Artstein (1999).

Let $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ be a probability space, where Ω is a Borel space (see Bertsekas et Shreve (1996), any complete separable metric space Ω is Borel) and $\mathcal{F}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{B}_\Omega$.

Let $\mathcal{P}(\Omega)$ be the Borel space of probability measures on Ω, with its Borel σ-field. For all $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ measurable, and for all $\rho \in \mathcal{P}(\Omega)$, we define

$$\langle \rho, \varphi \rangle_\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Omega \varphi(\omega) d\rho(\omega) . \tag{4.40}$$

4.9.1 Definition

Let $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ be the Borel space of probability measures on $\mathcal{P}(\Omega)$ with the Borel σ-field $\mathcal{B}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega)))$. For all $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$ measurable, and for all $S \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$, we define

$$\langle S, \phi \rangle_{\mathcal{P}(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\mathcal{P}(\Omega)} \phi(\rho) dS(\rho) . \tag{4.41}$$

DÉFINITION 18 — *A sensor is an element of $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$. A sensor S is balanced with respect to $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$ if for all $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}_+$ measurable,*

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \int_\Omega \varphi(\omega) d\rho(\omega) = \int_\Omega \varphi(\omega) d\mu(\omega) . \tag{4.42}$$

We denote by $B(\mu) \subset \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ the set of balanced sensors with respect to μ.

LEMME 19 — *If S is balanced with respect to $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$, and l is a bounded measurable function on Ω, we have*

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \int_\Omega l(\omega)[\rho - \mu](d\omega) = 0 . \tag{4.43}$$

Proof. We have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \int_\Omega l(\omega)\rho(d\omega) &= \int_\Omega l(\omega)\mu(d\omega) \\
&\quad \text{since } S \text{ is balanced} \\
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \int_\Omega l(\omega)\mu(d\omega) &= \left(\int_\Omega l(\omega)\mu(d\omega)\right) \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\mathbf{1}(\rho) \\
&= \left(\int_\Omega l(\omega)\mu(d\omega)\right) \\
&\quad \text{since } S \text{ is a probability.}
\end{aligned}$$

□

4.9.2 Example: sensor induced by a sub-σ-field

Let $\mathcal{G}$ be a sub-σ-field of $\mathcal{F}$. There exists a *regular conditional probability of μ given $\mathcal{G}$*, denoted by $\mu^{\mathcal{G}} : \mathcal{F} \times \Omega \to [0,1]$, and characterized by (see (Bertsekas et Shreve, 1996, p. 139)):

1. $\forall \omega \in \Omega$, $\mu^{\mathcal{G}}(\cdot, \omega) \in \mathcal{P}(\Omega)$;
2. $\forall A \in \mathcal{F}$, $\omega \hookrightarrow \mu^{\mathcal{G}}(A, \omega)$ is $\mathcal{G}$-measurable;
3. for any random variable X such that $\mathbb{E}|X| < +\infty$, $\mathbb{E}(X \mid \mathcal{G})(\omega) = \int_\Omega X(\omega')\mu^{\mathcal{G}}(d\omega', \omega)$, μ-a.s.

DÉFINITION 20 — *The sensor associated to μ and $\mathcal{G}$ is the random measure $S^{\mathcal{G}} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ defined by*

$$\forall M \in \mathcal{B}(\mathcal{P}(\Omega)), \quad S^{\mathcal{G}}(M) \stackrel{\text{def}}{=} \mu\{\omega \in \Omega, \quad \mu^{\mathcal{G}}(\omega, \cdot) \in M\}. \tag{4.44}$$

Equivalently, $S^{\mathcal{G}}$ is also the image of the measure μ by the mapping

$$\omega \in \Omega \hookrightarrow \mu^{\mathcal{G}}(\omega, \cdot) \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{4.45}$$

and thus, for all measurable $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$,

$$\left\langle S^{\mathcal{G}}, \phi \right\rangle_{\mathcal{P}(\Omega)} = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} \phi(\rho) dS^{\mathcal{G}}(\rho) = \int_\Omega \phi(\mu^{\mathcal{G}}(\omega, \cdot)) d\mu(\omega). \tag{4.46}$$

4.9.3 Example: sensor induced by an event

As a straightforward application of the above definition of a sensor associated to a sub-σ-field, let us consider the case when $\mathcal{G} = \{A, A^c, \emptyset, \Omega\}$ is generated by $A \in \mathcal{F}$ with $0 < \mu(A) < 1$. Let μ_A (resp. μ_{A^c}) denote the conditional measure of μ with respect to A (resp. to A^c):

$$\mu_A = \frac{\mathbf{1}_A}{\mu(A)}\mu. \tag{4.47}$$

Then

$$S^{\mathcal{G}} = \mu(A)\delta_{\mu_A} + \mu(A^c)\delta_{\mu_{A^c}}. \tag{4.48}$$

4.9.4 Example: sensor defined by conditional laws

For any measurable family $\{Q(dy \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ of probability measures on $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$, there exists a measurable family $\{P(d\omega \mid y), y \in \mathcal{Y}\}$ of probability measures on $(\Omega, \mathcal{F})$ and a probability measure ν on $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ such that (see (Bertsekas et Shreve, 1996, p. 135))

$$Q(dy \mid \omega)\mu(d\omega) = P(d\omega \mid y)\nu(dy). \tag{4.49}$$

The probability measure ν on $(\mathcal{Y}, \mathcal{Y})$ is given by

$$\nu(dy) = \int_\Omega Q(dy \mid \omega)\mu(d\omega). \tag{4.50}$$

DÉFINITION 21 — *The sensor S^Q associated to the family $\{Q(dy \mid \omega), \omega \in \Omega\}$ is defined by:*

$$\forall A \in \mathcal{Y}, \quad S^Q(\{P(\cdot \mid y), y \in A\}) \stackrel{\text{def}}{=} \nu(A). \tag{4.51}$$

Equivalently, S^Q is also the image of the measure ν by the mapping

$$y \in \mathcal{Y} \hookrightarrow P(\cdot \mid y) \in \mathcal{P}(\Omega) \tag{4.52}$$

and thus, for all measurable $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}_+$,

$$\left\langle S^Q, \phi \right\rangle_{\mathcal{P}(\Omega)} = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} \phi(\rho) dS^Q(\rho) = \int_{\mathcal{Y}} \phi(P(\cdot \mid y)) d\nu(y). \tag{4.53}$$

Notice that S^Q is balanced with respect to μ since

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\int_\Omega \varphi(\omega)d\rho(\omega) &= \int_{\mathcal{Y}}\int_\Omega \varphi(\omega)P(d\omega\,|\,y)d\nu(y)\\ &= \int_{\mathcal{Y}}\int_\Omega \varphi(\omega)Q(dy\,|\,\omega)d\mu(\omega)\\ &= \int_\Omega \varphi(\omega)d\mu(\omega)\,,\end{aligned}$$

since $\int_{\mathcal{Y}} Q(dy\,|\,\omega)=1$.

4.9.5 Example: sensor defined by conditional laws (finite case)

If Ω and $\mathcal{Y}$ are finite, we denote

$$\mu=\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\delta_\omega \quad\text{and}\quad Q(dy\,|\,\omega)=\sum_{y\in\mathcal{Y}} q(y\,|\,\omega)\delta_y \tag{4.54}$$

and we introduce $\mathcal{Y}^0\subset\mathcal{Y}$ such that

$$y\in\mathcal{Y}^0 \iff \mu\{\omega\in\Omega\,,\,q(y\,|\,\omega)=0\}=1\,. \tag{4.55}$$

For such $y\in\mathcal{Y}^0$, $P(d\omega\,|\,y)$ cannot be defined but this causes no problem since $y\in\mathcal{Y}^0 \iff \nu\{y\}=0$. We have:

$$\left\{\begin{aligned}\nu\{y\} &= \textstyle\sum_{\omega\in\Omega} q(y\,|\,\omega)\mu\{\omega\}\,,\quad \forall y\in\mathcal{Y}\\ P(d\omega\,|\,y) &= \sum_{\omega\in\Omega}\frac{q(y\,|\,\omega)\mu(\omega)}{\nu(y)}\delta_\omega\,,\quad \forall y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}^0\\ S(\{P(d\omega\,|\,y)\}) &= \nu(y)\,,\quad \forall y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}^0\,.\end{aligned}\right. \tag{4.56}$$

4.9.6 Example: sensor defined by conditional laws (density case)

If there exists a measure η on $(\mathcal{Y},\mathcal{Y})$ such that, for all $\omega\in\Omega$, $Q(dy\,|\,\omega)$ has a density $q(y\,|\,\omega)$ with respect to $\eta(dy)$, then we put

$$q(y)\stackrel{\text{def}}{=}\int_\Omega q(y\,|\,\omega)\mu(d\omega)\,. \tag{4.57}$$

With the same definition of $\mathcal{Y}^0$ as in (4.55), we have

$$\left\{\begin{aligned}\nu(dy) &= q(y)\eta(dy)\\ P(d\omega\,|\,y) &= \tfrac{q(y|\omega)}{q(y)}\mu(d\omega)\,,\quad \forall y\in\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}^0\\ S(\{\tfrac{q(y|\omega)}{q(y)}\mu(d\omega),y\in A\}) &= \nu(A)\,,\quad \forall A\in\mathcal{Y}\cap(\mathcal{Y}\setminus\mathcal{Y}^0)\,.\end{aligned}\right. \tag{4.58}$$

4.9.7 Orders on sensors

Let S_1 and S_2 belong to $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$. We say that the sensor S_2 is more refined than the sensor S_1, and denote $S_1 \preceq S_2$ if, for all $\phi : \mathcal{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$ convex,

$$\langle S_1, \phi \rangle_{\mathcal{P}(\Omega)} = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} \phi(\rho) dS_1(\rho) \leq \langle S_2, \phi \rangle_{\mathcal{P}(\Omega)} = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} \phi(\rho) dS_2(\rho) \,. \tag{4.59}$$

S_2 is more refined than the sensor S_1 if and only if S_i is the distribution of a $\mathcal{P}(\Omega)$-valued random variable σ_i $(i = 1, 2)$ with $\mathbb{E}(\sigma_2 - \sigma_1 \mid \sigma_1) = 0$.

4.10 Computations with sensors

For the notations, we refer to the appendix 4.8 on signed measures.

4.10.1 Sensor induced by an event

LEMME 22 — *Let S be the sensor associated to an event A as given by (4.9.3). We have*

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \|\rho - \mu\| = 4\mu(A)\mu(A^c)$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \|\rho - \mu\|^2 = 1$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) (\int_\Omega \omega[\rho - \mu](d\omega))^2 = \frac{(\int_A \omega\mu(d\omega))^2}{\mu(A)} + \frac{(\int_{A^c} \omega\mu(d\omega))^2}{\mu(A^c)} - (\int_\Omega \omega\mu(d\omega))^2 .$$

Proof. By (4.48), we have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho) \|\rho - \mu\| &= \mu(A)\|\mu_A - \mu\| + \mu(A^c)\|\mu_{A^c} - \mu\| \\
&= \mu(A)\|\frac{1}{\mu(A)}\mathbf{1}_A\mu - \mu\| + \mu(A^c)\|\frac{1}{\mu(A^c)}\mathbf{1}_{A^c}\mu - \mu\| \\
&= \mu(A)\int |\frac{1}{\mu(A)}\mathbf{1}_A - 1| d\mu + \mu(A^c)\int |\frac{1}{\mu(A^c)}\mathbf{1}_A - 1| d\mu \quad \text{by (4.38)} \\
&= \mu(A)[\mu(A)|\frac{1}{\mu(A)} - 1| + \mu(A^c)] + \mu(A^c)[\mu(A^c)|\frac{1}{\mu(A^c)} - 1| + \mu(A)] \\
&= 4\mu(A)\mu(A^c) ,
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho-\mu\|^2 &= \mu(A)[\mu(A)|\frac{1}{\mu(A)}-1|^2+\mu(A^c)]+\mu(A^c)[\mu(A^c)|\frac{1}{\mu(A^c)}-1|^2+\mu(A)]\\ &= \mu(A^c)^2+\mu(A)\mu(A^c)+\mu(A)^2+\mu(A)\mu(A^c)\\ &= (\mu(A)+\mu(A^c))^2=1\,,\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)(\int_\Omega \omega[\rho-\mu](d\omega))^2 &= \mu(A)(\frac{1}{\mu(A)}\int_A \omega\mu(d\omega)-\int_\Omega \omega\mu(d\omega))^2\\ &+ \mu(A^c)(\frac{1}{\mu(A^c)}\int_{A^c} \omega\mu(d\omega)-\int_\Omega \omega\mu(d\omega))^2\\ &= \frac{1}{\mu(A)}(\int_A \omega\mu(d\omega))^2+\frac{1}{\mu(A^c)}(\int_{A^c} \omega\mu(d\omega))^2-(\int_\Omega \omega\mu(d\omega))^2\,.\end{aligned}$$

□

4.10.2 Sensor defined by conditional laws (density case)

Let $S\in\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Omega))$ be the sensor associated to the family $\{Q(dy\mid\omega),\omega\in\Omega\}$ as defined in Definition 21. Assume that $Q(dy\mid\omega)$ has a density $q(y\mid\omega)$ with respect to a measure η as in paragraph 4.9.6. To accomodate for the case where some of the signals are not likely to be observed[2], we define

$$\mathbb{Y}^0=\{y\in\mathbb{Y},\mu\{\omega\in\Omega\,,q(y\mid\omega)=0\}=1\}\,.$$

LEMME 23 — *We have*

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho-\mu\| = \int_{\mathbb{Y}}\eta(dy)\int_\Omega \mid q(y\mid\omega)-q(y)\mid\mu(d\omega) \tag{4.60}$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho-\mu\|^2 = \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0}\frac{\eta(dy)}{q(y)}\left[\int_\Omega \mid q(y\mid\omega)-q(y)\mid\mu(d\omega)\right]^2 \tag{4.61}$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)(\int_\Omega \omega[\rho-\mu](d\omega))^2 = \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0}\frac{\eta(dy)}{q(y)}\left[\int_\Omega \omega(q(y\mid\omega)-q(y))\mu(d\omega)\right]^2 \tag{4.62}$$

[2] we cannot remediate to such a problem by reducing the set of signals when we have a *family* of sensors

Proof. By (4.50), we have

$$\nu(\mathbb{Y}^0) = \int_\Omega Q(\mathbb{Y}^0 \mid \omega)\mu(d\omega) = \int_\Omega \int_{\mathbb{Y}^0} \eta(dy) q(y \mid \omega)\mu(d\omega) = 0$$

by definition of $\mathbb{Y}^0$.

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho - \mu\| &= \int_{\mathbb{Y}} \nu(dy)\|P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)\| \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \nu(dy)\|P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)\| \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)\|\frac{q(y \mid \omega)}{q(y)}\mu(d\omega) - \mu(d\omega)\| \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)\|(\frac{q(y \mid \omega)}{q(y)} - 1)d\mu(\omega)\| \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy) \int_\Omega |\ \frac{q(y \mid \omega)}{q(y)} - 1\ | \mu(d\omega) \quad \text{by (4.38)} \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \eta(dy) \int_\Omega |\ q(y \mid \omega) - q(y)\ | \mu(d\omega) \\
&= \int_{\mathbb{Y}} \eta(dy) \int_\Omega |\ q(y \mid \omega) - q(y)\ | \mu(d\omega)\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho - \mu\|^2 &= \int_{\mathbb{Y}} \nu(dy)\|P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \nu(dy)\|P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)\|\frac{q(y \mid \omega)}{q(y)}\mu(d\omega) - \mu(d\omega)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)\|(\frac{q(y \mid \omega)}{q(y)} - 1)d\mu(\omega)\|^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)[\int_\Omega |\ \frac{q(y \mid \omega)}{q(y)} - 1\ | \mu(d\omega)]^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \frac{\eta(dy)}{q(y)}[\int_\Omega |\ q(y \mid \omega) - q(y)\ | \mu(d\omega)]^2\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)(\int_\Omega \omega[\rho - \mu](d\omega))^2 &= \int_{\mathbb{Y}} \nu(dy)(\int_\Omega \omega(P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)))^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \nu(dy)(\int_\Omega \omega(P(d\omega \mid y) - \mu(d\omega)))^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} q(y)\eta(dy)(\int_\Omega \omega(\frac{q(y \mid \omega)}{q(y)}\mu(d\omega) - \mu(d\omega)))^2 \\
&= \int_{\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0} \frac{\eta(dy)}{q(y)}\left[\int_\Omega \omega(q(y \mid \omega) - q(y))\mu(d\omega)\right]^2\,.
\end{aligned}$$

□

4.10.3 Example: sensor defined by conditional laws (finite case)

As a straightforward application of the hereabove Lemma 23, we obtain the following expressions.

LEMME 24 — *If Ω and $\mathbb{Y}$ are finite, we have*

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho-\mu\| = \sum_{y\in\mathbb{Y}}\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\mid q(y\mid\omega)-q(y)\mid \tag{4.63}$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)\|\rho-\mu\|^2 = \sum_{y\in\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0}\frac{[\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\mid q(y\mid\omega)-q(y)\mid]^2}{q(y)} \tag{4.64}$$

$$\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS(\rho)(\int_\Omega \omega[\rho-\mu](d\omega))^2 = \sum_{y\in\mathbb{Y}\setminus\mathbb{Y}^0}\frac{[\sum_{\omega\in\Omega}\mu(\omega)\omega(q(y\mid\omega)-q(y))]^2}{q(y)}. \tag{4.65}$$

4.10.4 Sensors for a family of Gaussian information structures

We consider the information structures of the linear prediction problem in RS and in CS, example 3.

The signal space is a continuum $\mathbb{Y}=\mathbb{R}$, the prior is a normalized Gaussian $\mu=N(0,1)$ and the conditional distribution $Q_\theta(dy\mid\omega)$ of the signal given the state of the world is Gaussian with mean $\theta\omega$ and variance $1-\theta^2$:

$$Q_\theta(dy\mid\omega)=N(\theta\omega,1-\theta^2). \tag{4.66}$$

We then compute the unconditional law $\nu_\theta(dy)$ of the signal by (4.50)

$$\nu_\theta(dy)=\int N(\theta\omega,1-\theta^2)N(0,1)(d\omega)=N(0,1)(dy) \tag{4.67}$$

and the conditional distribution $P_\theta(d\omega\mid y)$ of the state of the world given the signal by (4.49):

$$P_\theta(d\omega\mid y)=N(\theta y,1-\theta^2). \tag{4.68}$$

Thus, the support of the sensor S_θ consists of Gaussian probabilities, and S_θ weighs $N(\theta y,1-\theta^2)$ according to probability $N(0,1)(dy)$ as in (4.51).

4.10.5 Value of information for quadratic utility functions

PROPOSITION 25 — *For $\Omega \subset \mathbb{R}$ compact, $\mathcal{U}_\theta = \mathbb{R}$ and $L(u,\omega,\theta) = -(u-\omega)^2$, we have:*

$$V(\theta) - V(0) = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\int_\Omega \omega(\rho-\mu)(d\omega)]^2 . \tag{4.69}$$

Proof. By (4.3), we have

$$\begin{aligned}\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) &= [\int \omega d\rho(\omega)]^2 - \int \omega^2 d\rho(\omega) - [\int \omega d\mu(\omega)]^2 - \int \omega^2 d\mu(\omega) \\ &= -\int \omega^2(\rho-\mu)(d\omega) + 2[\int \omega d\mu(\omega)][\int \omega(\rho-\mu)(d\omega)] + [\int_\Omega \omega(\rho-\mu)(d\omega)]^2 .\end{aligned}$$

Denoting $l(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} -\omega^2 + 2[\int \omega' d\mu(\omega')]\omega$, we have that $\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho) \int_\Omega l(\omega)[\rho-\mu](d\omega) = 0$ by Lemma 19. Thus,

$$V(\theta) - V(0) = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu)] = \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\int_\Omega \omega(\rho-\mu)(d\omega)]^2 .$$

□

With the Gaussian information structures of section 4.10.4, we have

$$\begin{aligned}V(\theta) - V(0) &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\int_\Omega \omega(\rho-\mu)(d\omega)]^2 \\ &= \int_{\mathbb{Y}} \nu_\theta(dy)[\int \omega d[P_\theta(d\omega \mid y) - \mu](\omega)]^2 \quad \text{by (4.53)} \\ &= \int_{\mathbb{Y}} N(0,1)(dy)[\int \omega d[N(\theta y, 1-\theta^2) - N(0,1)](\omega)]^2 \quad \text{by (4.66)-(4.67)-(4.68)} \\ &= \int_{\mathbb{Y}} N(0,1)(dy)[\theta y]^2 = \theta^2 .\end{aligned}$$

4.10.6 Sensor for a two-state case (CS, example 2)

For illustration, consider the example 2 in CS where there are two states of the world, $\Omega = \{s_L, s_H\}$.

The prior belief is given by $\mu\{s_L\} = 1/2$ and there are two signals $\mathbb{Y} = \{y_1, y_2\}$ with conditional probabilities depending on a parameter $\theta \in [0,1]$ so that $q_\theta(y_2|s_L) = 1$ and $q_\theta(y_2|s_H) = 1-\theta$. The unconditional law of the signal is given by Bayes's rule: $\nu\{y_1\} = q_\theta(y_1|s_L)\mu\{s_L\} + q_\theta(y_1|s_H)\mu\{s_H\} = \theta/2$. As well, the conditional distribution of the state of the world given the signal is characterized by

$$p_\theta(s_L|y_1) = \frac{q_\theta(y_1|s_L)\mu\{s_L\}}{\nu\{y_1\}} = 0 \quad \text{and} \quad p_\theta(s_L|y_2) = \frac{q_\theta(y_2|s_L)\mu\{s_L\}}{\nu\{y_2\}} = \frac{1}{2-\theta} .$$

Knowing y_1, the state of the world is distributed according to

$$P_\theta(d\omega \mid y_1) = p_\theta(s_L|y_1)\delta_{s_L} + p_\theta(s_H|y_1)\delta_{s_H} = \delta_{s_H}$$

and knowing y_2 to $(\frac{1-\theta}{2-\theta})\delta_{s_H} + \frac{1}{2-\theta}\delta_{s_L}$.

The sensor S_θ weighs the probability measure $P_\theta(d\omega \mid y_1) = \delta_{s_H}$ with probability $\nu\{y_1\} = \theta/2$ and $P_\theta(d\omega \mid y_2) = (\frac{1-\theta}{2-\theta})\delta_{s_H} + \frac{1}{2-\theta}\delta_{s_L}$ with probability $\nu\{y_2\} = 1-\theta/2$. Thus, the family of sensors associated with the information structures indexed by θ is given by the probability distributions S_θ over $\mathcal{P}([0,1])$ defined by:

$$S_\theta(\{\delta_{s_H}\}) = \frac{\theta}{2} \quad \text{and} \quad S_\theta(\{(\frac{1-\theta}{2-\theta})\delta_{s_H} + \frac{1}{2-\theta}\delta_{s_L}\}) = 1 - \frac{\theta}{2}. \tag{4.70}$$

4.11 Proofs

4.11.1 Proof of Proposition 10

Let $\theta \in [0,1]$, $\rho \in \mathcal{P}(\Omega)$ and $\varepsilon > 0$. There exists $\lambda^\star \in \Lambda_\theta$ such that

$$\psi_\theta(\rho) = \sup_{\lambda\in\Lambda_\theta} \int_\Omega \lambda(\omega) d\rho(\omega) \leq \int_\Omega \lambda^\star(\omega) d\rho(\omega) + \varepsilon.$$

We have

$$\begin{aligned}
\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) &= \sup_{\lambda\in\Lambda_\theta} \int_\Omega \lambda(\omega) d\rho(\omega) - \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \int_\Omega \lambda(\omega) d\mu(\omega) \\
&\leq \int_\Omega \lambda^\star(\omega) d\rho(\omega) - \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \int_\Omega \lambda(\omega) d\mu(\omega) + \varepsilon \\
&\leq \int_\Omega \overline{\lambda}^\star(\omega) d\rho(\omega) - \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \int_\Omega \lambda(\omega) d\mu(\omega) + \varepsilon \quad \text{with} \quad \overline{\lambda}^\star \in \Lambda_0 \quad \text{by} \quad (4.7) \\
&\leq \int_\Omega \overline{\lambda}^\star(\omega) d\rho(\omega) - \int_\Omega \overline{\lambda}^\star(\omega) d\mu(\omega) + \varepsilon \quad \text{since} \quad \overline{\lambda}^\star \in \Lambda_0 \\
&\leq \int_\Omega \overline{\lambda}^\star(\omega) d[\rho-\mu](\omega) + \varepsilon \\
&\leq \mid \int_\Omega \overline{\lambda}^\star(\omega) d[\rho-\mu](\omega) \mid + \varepsilon \\
&\leq \int_\Omega \mid \overline{\lambda}^\star(\omega) \mid d \mid \rho-\mu \mid (\omega) + \varepsilon \\
&\leq \sup_{\omega\in\Omega} \mid \overline{\lambda}^\star(\omega) \mid \|\rho-\mu\| + \varepsilon \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \mid \lambda \mid_\infty \|\rho-\mu\| + \varepsilon.
\end{aligned}$$

Since this holds for all $\varepsilon > 0$, this also holds for $\varepsilon = 0$, so that

$$\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) \leq \sup_{\lambda\in\Lambda_0} \mid \lambda \mid_\infty \|\rho-\mu\|.$$

Then

$$\begin{aligned} V(\theta)-V(0) &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\psi_\theta(\rho) - \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_0(\rho)\psi_0(\rho) \\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) \\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu)] \\ &\leq \sup_{\lambda\in\Lambda_0} |\lambda|_\infty \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|. \end{aligned}$$

4.11.2 Proof of Proposition 12

By Lemma 19, we have that $\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\int_\Omega l(\omega)d[\rho-\mu](\omega) = 0$. Using the first assumption, we deduce that

$$\begin{aligned} V(\theta)-V(0) &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\psi_\theta(\rho) - \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_0(\rho)\psi_0(\rho) \\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) \\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)[\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu)] \\ &= \int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\left[\psi_\theta(\rho) - \psi_0(\mu) - \int_\Omega l(\omega)d[\rho-\mu](\omega)\right] \\ &\leq k\int_{\mathcal{P}(\Omega)} dS_\theta(\rho)\|\rho-\mu\|^2. \end{aligned}$$

Thus,

$$\limsup_{\theta\downarrow 0}\frac{V(\theta)-V(0)}{\theta} \leq k\,\mathrm{IISDV}.$$

Références

Zvi ARTSTEIN. Gains and costs of information in stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 85, 128–152, 1999.

Zvi ARTSTEIN et Roger J.-B. WETS. Sensors and information in optimization under stochastic uncertainty. *Mathematic of Operation Research*, 18 (3), 1993.

Dimitri P. BERTSEKAS et Steven E. SHREVE. *Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case*. Athena Scientific, Belmont, Mass., 1996.

Hector CHADE et Edward E. SCHLEE. Another look at the Radner-Stiglitz nonconcavity in the value of information. *Journal of Economic Theory*, 107, 421–452, 2002.

P. R. HALMOS. *Measure Theory*. Springer Verlag, New York, 1974.

R. RADNER et J.E. STIGLITZ. A nonconcavity in the value of information. Dans *Bayesian Models in Economic Theory*, sous la dir. de M. BOYER et R. E. KIHLSTROM, p. 33–52. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1984.

Bibliographie

Bibliographie

Philippe AMBROSI. *Amplitude et calendrier des politiques de réduction des émissions face aux risques climatiques : leçons des modèles intégrés*. Thèse de doctorat, École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 2004.

Philippe AMBROSI, Jean-Charles HOURCADE, Stéphane HALLEGATTE, Franck LECOCQ, Patrice DUMAS, et Minh HA-DUONG. Optimal control models and elicitation of attitudes towards climate change. *Environmental Modeling and Assessment*, 8 (3), 135–147, 2003. Special Issue on Modeling the economic response to global climate change.

Kenneth J. ARROW. The economic implications of learning by doing. *Review of Economic Studies*, 29, 155–173, 1962.

Kenneth J. ARROW et Anthony C. FISHER. Environmental preservation, uncertainty, and irreversibity. *Quarterly Journal of Economics*, 88, 312–319, 1974.

Zvi ARTSTEIN. Gains and costs of information in stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 85, 128–152, 1999.

Zvi ARTSTEIN et Roger J.-B. WETS. Sensors and information in optimization under stochastic uncertainty. *Mathematic of Operation Research*, 18 (3), 1993.

William J. BAUMOL et Wallace E. OATES. *The Theory of Environmental Policy*. Cambridge University Press, 1988. Second Édition.

Olivier BEAUMAIS et Mireille CHIROLEU-ASSOULINE. *Économie de l'environnement*. Bréal, 2001.

Dimitri P. BERTSEKAS et Steven E. SHREVE. *Stochastic Optimal Control : The Discrete Time Case*. Athena Scientific, Belmont, Mass., 1996.

Philippe BONTEMS et Gillles ROTILLON. *Économie de l'environnement*. Éditions La Découverte, Paris, 1998.

L. BREIMAN. *Probability*. Classics in applied mathematics. SIAM, Philadelphia, second éd., 1993.

Carlo CARRARO et Jean-Charles HOURCADE. Climate modelling and policy strategies. The role of technical change and uncertainty. *Energy Economics*, 20 (5/6), 463–471, 1998.

Hector CHADE et Edward E. SCHLEE. Another look at the Radner-Stiglitz nonconcavity in the value of information. *Journal of Economic Theory*, 107, 421–452, 2002.

Frank H. CLARKE. *Optimization and nonsmooth analysis*, t. 5 de *Classics in Mathematics*. SIAM, 1990.

Leon E. CLARKE et John P. WEYANT. Modeling induced technological change : An overview. Dans Grübler *et al.* (2002), chap. 12, p. 320–363.

Jon M. CONRAD. Quasi-option value and the expected value of information. *Quarterly Journal of Economics*, 94, 813–820, 1980.

Hadi DOWLATABADI. Sensitivity of climate change mitigation estimates to assumptions about technical change. *Energy Economics*, p. 1–24, 1998.

L. G. EPSTEIN. Decision making and temporal resolution of uncertainty. *International Economic Review*, 21, 269–283, 1980.

J. EYCKMANS et H. TULKENS. *Simulating with RICE Coalitionally Stable Burden Sharing Agreements for the Climate Change Problem*. Nota di Lavoro 71.99, FEEM, Milano, 1999.

Anthony C. FISHER. Investment under uncertainty and option value in environmental economics. *Resource and Energy Economics*, 22, 197–204, 2000.

Xavier FREIXAS et Jean-Jacques LAFFONT. The irreversibility effect. Dans *Bayesian Models in Economic Theory*, sous la dir. de Marcel BOYER et R. KIHLSTRÖM, chap. 7, p. 105–114. Elsevier Science Publishers B.V., 1984.

Dermot GATELY. The imperfect price-reversibility of world oil demand. *Energy Journal*, 14 (4), 163–182, 1993.

Reyer GERLAGH et Bob VAN DER ZWAAN. Gross world product and consumption in a global warming model with endogenous technological change. *Resource and Energy Economics*, 25, 35–57, 2003.

—. A sensitivity analysis of timing and costs of greenhouse gas emission reductions. *Climatic Change*, 65, 39–71, 2004.

Reyer GERLAGH, Bob C. C. VAN DER ZWAAN, M. W. HOFKES, et G. KLAASSEN. *Impacts of CO_2 taxes in an economy with niche markets and learning-by-doing*. Rap. tech. ECN-C–03-086, Vrije Universiteit Amsterdam / IVM, 2003.

Laurent GILOTTE et Benoît SIMON. *Prospective du système des transports terrestres face aux objectifs et mesures du Protocole de Kyoto*. CIRED, 2000. Etude réalisée pour l'ADEME dans le cadre du PREDIT "Recherches stratégiques". Centre international de recherche sur l'environnement et le développement.

Vincent GITZ. *Usage des terres et politiques climatiques globales*. Thèse de doctorat, École nationale du génie rural et des eaux et forêts, Paris, 2004.

Jon GJERDE, Sverre GREPPERUD, et Snorre KVERNDOKK. Optimal climate policy under the possibility of a catastrophe. *Resource and Energy Economics*, 21, 289–317, 1999.

Christian GOLLIER, Bruno JULLIEN, et Nicolas TREICH. Scientific progress and irreversibility : an economic interpretation of the "precautionary principle". *Journal of Public Economics*, 75, 229–253, 2000.

Lawrence H. GOULDER et Koshy MATHAI. Optimal CO_2 abatement in the presence of induced technical change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 39, 1–38, 2000.

Michael J. GRUBB, Thierry CHAPUIS, et Minh HA-DUONG. The economics of changing course : implications of adaptability and inertia for optimal climate policy. *Energy Policy*, 23 (4/5), 417–432, 1995.

Arnulf GRÜBLER et Sabine MESSNER. Technological change and the timing of mitigation measures. *Energy Economics*, 20, 495–512, 1998.

Arnulf GRÜBLER, Nebojša NAKIĆENOVIĆ, et William D. NORDHAUS (sous la dir. de). *Technological change and the environment*. Resources For the Future, 2002.

Minh HA-DUONG. *Comment tenir compte de l'irréversibilité dans l'évaluation intégrée du changement climatique ?*. Thèse de doctorat, École des hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 1998a. URL `http ://tel.ccsd.cnrs.fr/documents/archives0/00/00/35/05/`.

—. Quasi-option value and climate policy choices. *Energy Economics*, 20, 599–620, 1998b.

Minh HA-DUONG, Michael J. GRUBB, et Jean-Charles HOURCADE. Influence of socioeconomic inertia and uncertainty on optimal CO_2-emission abatement. *Nature*, 390, 270–274, 1997.

Minh HA-DUONG et David KEITH. Carbon storage : the economic efficiency of storing CO_2 in leaky reservoirs. *Clean Technology and Environmental Policy*, 5 (2/3), 2003. Special issue on Technologies for Sustainable Development.

P. R. HALMOS. *Measure Theory*. Springer Verlag, New York, 1974.

James K. HAMMITT. Evaluation endpoints and climate policy : Atmospheric stabilization, benefit-cost analysis and near-term greenhouse-gas emissions. *Climatic Change*, 41, 447–468, 1999.

W. M. HANEMANN. Information and the concept of option value. *Journal of Environmental Economics and Management*, 14, 183–190, 1989.

Claude HENRY. Investment decisions under uncertainty : The "irreversibility effect". *American Economic Review*, 64 (6), 1006–1012, 1974a.

—. Option values in the economics of irreplaceable assets. *Review of Economic Studies*, 41, 89–104, 1974b.

Howard J. HERZOG. *The economics of CO_2 separation and capture*. Rap. tech., MIT Energy Laboratory, 1999. URL `http ://web.mit.edu/energylab/www/hjherzog/publications.html`. Presented at Second Dixy Lee Ray Memorial Symposium, Washington, DC.

Jean-Charles HOURCADE. Modelling long-run scenarios : methodology lessons from a prospective study on a low CO_2 intensive country. *Energy Policy*, 21 (3), 309–326, 1993.

IPCC. *Climate Change 1994, Radiative Forcing of Climate Change and An Evaluation of the IPCC IS92 Emission Scenarios*. Cambridge University Press, 1994.

—. *Climate Change 2001 : the scientific basis*. Cambridge University Press, 2001. URL `http ://www.ipcc.ch/`. Contribution of the Working Group I to the Third Assessment Report of the Intergovernmental Panel on Climate Change.

Tim L. JOHNSON et David W. KEITH. Fossil electricity and CO_2 sequestration : How natural gas prices, initial conditions and retrofits determine the cost of controlling CO_2 emissions. *Energy Policy*, Proof available online (18 march 2003), 2003. URL `http ://www.sciencedirect.com`.

Klaus KELLER, Benjamin M. BOLKER, et David F. BRADFORD. Uncertain climate thresholds and optimal economic growth. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2003. Article in Press.

David L. KELLY et Charles D. KOLSTAD. Bayesian learning, growth, and pollution. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 23, 491–518, 1999.

Charles D. KOLSTAD. Fundamental irreversibilities in stock externalities. *Journal of Public Economics*, 60, 221–233, 1996.

Snorre KVERNDOKK, Knut Einar ROSENDAHL, et Thomas F. RUTHERFORD. Climate policies and induced technological change : Which to choose, the carrot or the stick ? *Environmental and Resource Economics*, 27, 21–41, 2004.

Jean-Jacques LAFFONT. *The economics of uncertainty and information*. MIT Press, Cambridge, 1989. Published in France under the title *Cours de théorie microéconomique. II. Économie de l'incertain et de l'information* by Economica, Paris, 1986. Translated by John P. Bonin and Hélène Bonin.

Franck LECOCQ. *Distribution spatiale et temporelle des coûts de politiques publiques sous incertitudes. Théorie et pratique dans le cas de l'effet de serre*. Thèse de doctorat, ENGREF, Paris, 2000.

Franck LECOCQ, Jean-Charles HOURCADE, et Minh HA-DUONG. Decision making under uncertainty and inertia constraints : sectoral implications of the when flexibility. *Energy Economics*, 20, 539–555, 1998.

Alan S. MANNE et Richard RICHELS. *Buying Greenhouse Insurance : The Economic Cost of CO_2 Emissions Limits*. MIT Press, 1992.

Sabine MESSNER. *Endogeneized Technological Learning in an Energy Systems Model*. Iiasa working paper, International Institute of Applied System Analysis, 1995.

Richard G. NEWELL et William A. PIZER. Regulating stock externalities under uncertainty. *Journal of Environmental Economics and Management*, 45, 416–432, 2003.

William D. NORDHAUS. *Managing the Global Commons*. MIT Press, 1994.

—. Modeling induced innovation in climate-change policy. Dans Grübler *et al.* (2002), chap. 8, p. 182–209.

William D. NORDHAUS et J. BOYER. *Roll the DICE Again : The Economics of Global Warming*. 1998. URL `http ://www.econ.yale.edu/ nordhaus/homepage/dicemodels.htm`. Yale University.

—. *Warming the world : economic models of climate change*. MIT Press, 1999a.

William D. NORDHAUS et Joseph BOYER. *Warming the World : Economics Models of Global Warming*. MIT press, 2000. URL `http ://www.econ.yale.edu/ nordhaus/homepage/dice_section_I.html`.

William D. NORDHAUS et Joseph G. BOYER. Requiem for Kyoto : an economic analysis of the Kyoto protocol. *Energy Journal*, Special Issue (The costs of the Kyoto Protocol : a multi-model evaluation), 93–130, 1999b.

William D. NORDHAUS et Zili YANG. A regional dynamic general-equilibrium model of alternative climate-change strategies. *American Economic Review*, 86 (4), 741–765, 1996.

David W. PEARCE et Kerry R. TURNER. *Economics of Natural Resources and the Environment*. Harvester Wheatsheaf, 1990.

Pierre PICARD. *Eléments de microéconomie*. Montchrestien, 2e éd., 1990.

David POPP. ENTICE : endogenous techological change in the DICE model o f global warming. *Journal of Environmental Economics and Management*, 2003. Article in Press.

R. RADNER et J.E. STIGLITZ. A nonconcavity in the value of information. Dans *Bayesian Models in Economic Theory*, sous la dir. de M. BOYER et R. E. KIHLSTROM, p. 33–52. Elsevier Science Publishers, Amsterdam, 1984.

Knut Einar ROSENDAHL. Cost-effective environmental policy : implications of induced technological change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 48, 1099–1121, 2004a.

—. Cost-effective environmental policy : implications of induced technological change. *Journal of Environmental Economics and Management*, 48, 1099–1121, 2004b.

Sébastien ROUILLON. Catastrophe climatique irréversible, incertitude et progrès de la connaissance. *Revue Économique*, 52 (1), 61–90, 2001.

Donald M. TOPKIS. Minimizing a submodular function on a lattice. *Operations Research*, 26, 305–321, 1978.

—. *Supermodularity and Complementarity*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1998.

Alistair ULPH et David ULPH. Global warming, irreversibility and learning. *Economic Journal*, 107 (442), 636–650, 1997.

T. M. L. WIGLEY, Richard RICHELS, et Jae A. EDMONDS. Economic and environmental choices in the stabilization of atmospheric CO_2 concentrations. *Nature*, 379 (6562), 240–243, 1996.

Zili YANG. Reevaluation and renegotiation of climate change coalitions — a sequential closed-loop game approach. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 27, 1563–1594, 2003.

Bob C. C. VAN DER ZWAAN, Reyer GERLAGH, Gert KLAASEN, et Leo SCHRATTENHOLZER. Endogenous technological change in climate change modelling. *Energy economics*, 24, 1–19, 2002.

Annexe A : code GAMS du modèle DISCERNI

```
* discerni040702.gms
*
* Double
*  Incertitude
*   Sur le
*    Climat
*     Et la
*      Reduction
*      eNdogene de l
*        Intensite carbone

* A (very) modified Dice model with
*                - new climate module (from dice_response_art.gms)
*                - threshold damage function (from dice_response_art.gms)
*                - endogenous carbon intensity
*                - uncertainty on climate sensitivity
*                - uncertainty on the degree of answer to a price cut
*
* The 'degree of symetry of the answer' to a price cut is directly
* related to the parameters of the law of motion of carbon intensity.
*
* Initial inertia is known ; will be different in the future from datenyin
* Future value unknown but will be learnt in datekn <= datenyin
* Before datekn,  future returns on current abatement are  uncertain.
*
* The model is the same as discerni040617
* Only few changes:
*              - datenyin is introduced
*              -  new eq. LLBD with fixed value for inertia before datenyin
*
* A (very) modified Dice model with
*                - new climate module (from dice_response_art.gms)
*                - threshold damage function (from dice_response_art.gms)
*                - endogenous carbon intensity
```

```
*                - uncertainty on climate sensitivity
*                - uncertainty on the degree of answer to a price cut
*
* The 'degree of symetry of the answer' to a price cut is directly
* related to the parameters of the law of motion of carbon intensity.
*
* (Ramsey/Cass/Koopmans growth model with
*  climate externalities and uncertainties)
*
* ---------------------------------------------------------------
* Copyright (C) 2004 CNRS
*
* This program is free software; you can redistribute it and/or modify
* it under the terms of the GNU General Public License as published by
* the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or
* (at your option) any later version.
*
* This program is distributed in the hope that it will be useful,
* but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
* MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
* GNU General Public License for more details.
*
* You should have received a copy of the GNU General Public License
* along with this program; if not, write to the Free Software
* Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.

*---------------------------------------------------------------
* CREDITS:
*  see file 'credits_discerni.txt'
*---------------------------------------------------------------

$Ontext
The new temperature dynamic provides a better description of the *short term*
 (4--5 decades) atmospheric temperature rise than original dice. Equilibrium
temperature are identical. Exogenous forcing due to other ghgs has been removed

Threshold damage function (S-shaped). Transition from low to high damages
occurs between 1.7 and 2.3 degrees of rise. Damage function is calibrated so
 that the expected damage from concentration doubling is equal to the value
 obtained with  the more standard, quadratic function 0.006 (T-T0)^2 and are
 comparable before
$Offtext


*-----------------------------------------------------------------
* INSTRUCTIONS things to set up
```

```
*
*    dateinfo : date of availability of the information on the climate
*    datekn   : idem for information on the inertia of the emission trends
*               Examples:
*                (* 2000 Full knowledge)
*                (* 2040 Information in 2040  uncertainty before)
*                * 2390 neverlearn (default choice)
*    p1(s1)    :probability distribution on climate sensitivity
*              select or modify one of the cases proposed
*    p2(s2)    :probability distribution on inertia
*-----------------------------------------------------------------------


SETS  T         Time steps  (1990 2000...2380)          /1*40/
      TFIRST(T) First step
      TLAST(T)  Last step
* remplacer par des chiffres 1*10 p.ex.
      s1        possible climate sensitivity  /L,C,H/
      s2        possible  inertia             /D,M,F/
      s(s1,s2)  Ensemble des possibles  /(L,C,H).(D,M,F)/
;

tfirst(t) = yes$(ord(t) eq 1);
tlast(t)  = yes$(ord(t) eq card(t));
alias (s1,ss1);
alias (s2,ss2);
alias (t,u);
DISPLAY TFIRST, TLAST;


SCALARS

* Booleans for choice of scenario (YES 1 / NO 0)
* Pour faire differentes resolutions a la suite
 DDC      Boolean for damages from climate change       /1/
 DSE      Boolean for emission constraint               /0/
 DSM      Boolean for concentration constraint          /0/

 delta    step length                                   /10/

 tinit    initial date                                  /1990/
 dateinfo date of arrival of info on climate           /2390/
 tinfo    date of arrival of info on climate (ordinal)  **computed
 datekn   date of arrival of info on in inertia        /2390/
 tkn      date of arrival of info on inertia (ordinal)  **computed
 datenyin date of change in the inertia parameter      /2040/
```

```
 tny      --- idem (ordinal)

* parameters for the objective
 SRTP     Initial rate of social time preference per year /.03/
 DR       Decline rate of social time preference per year /.0025719/

* parameters for the production function
 LL0      1990 world population millions                  /5632.7/
 GL0      Growth rate of population per decade            /.157/
 DLAB     Decline rate of pop growth per decade           /.2220/

 A0       Initial level of total factor productivity      /.01685/
 GA0      Initial growth rate for technology per decade   /.055/
 DELA     Decline rate of technol. change per decade      /.0016/

 GAMA     Capital elasticity in production function       /.30/
* for calibration purpose (not used any longer?)
 Q0       1990 world gross output trill 90 US dollars     /21.08/

* parameters for the damage function
 beta       linear trend                                  /0.005/
 seuil_inf  temperature where transition begins           /1.7/
 seuil_sup  temp where transition ends                    /2.3/
 ampl       steepness  (e)                                /0.1/
 slt        size of the non linear jump  (d)               /0.04/

* parameters for the abatement costs
 COST10   Intercept control cost function                 /.045/
 COST2    Exponent of control cost function               /2.15/
 dmiufunc Decline in cost of abatement function (per decade) /.26/
 decmiu   Change in decline of cost function                 /.02/

* parameters for the law of motion of capital stock
 K0       1990 value capital trill 1990 US dollars        /47/
 DK       Depreciation rate on capital per year           /.10/


* reference exogenous carbon intensity of production
 SIG0     CO2 emissions-GWP ratio                         /.272/
 GSIGMA   Growth of sigma per decade                      /-.13/
 desig    Decline rate of decarbonization                 /.016/
 desig2   Quadratic term in decarbonization               /-.00052/

* parameters for the carbon cycle
 Atmo_PI  Preindustrial atmospheric  concentration(1E9 tC) *computed
 Atmo_80   atmo concentration in 1980 (1E9 tC)             *computed
```

```
 Atmo_ini Concentration in atmosphere 1990 (1E9 tC)       /758.19133/
 Bio_ini  Concentration in biosphere + oc. sup 1990 (1E9 tC) /792.59567/
 Oc_ini   concentration in deep oc. 1990 (1E9 tC)         /19230/
 ET0      C Emiss from deforest (bill tons per dec)       /11.28/
 Ctrans11 Carbon cycle transition matrix                  /0.66616/
 Ctrans21 Carbon cycle transition matrix                  /0.33384/
 Ctrans31 Carbon cycle transition matrix                  /0/
 Ctrans12 Carbon cycle transition matrix                  /0.27607/
 Ctrans22 Carbon cycle transition matrix                  /0.60897/
 Ctrans32 Carbon cycle transition matrix                  /0.11496/
 Ctrans13 Carbon cycle transition matrix                  /0/
 Ctrans23 Carbon cycle transition matrix                  /0.00422/
 Ctrans33 Carbon cycle transition matrix                  /0.99578/

* parameters for the climate module
 Tini_sup80      global mean  atmo. temp. rise  from preindustrial to 1980
                                                          /0.8249988/
 Tini_low80      global mean  oceanic temp. rise  from preindustrial to 1980
                                                          /0.3005746/
 forc     Radiative forcing for 2xCO2                          /3.71/
 C1       Transfert coeff.                                  /0.4791321/
 C2       Transfert coeff.                                  /0.1093887/
 C3       Transfert coeff.                                  /0.1313768/

* Initial values pour la premiere periode
*  La date de  premiere decision est 1990 et est deja passee
 I0       tx investissement initial d apres run sans dommages /0.25190/

* Pour resolution en cout efficacite
 Mmax         Niveau de conc Atmo a ne pas depasser (fixer ensuite)  /550/

* Encore utilise lors de calibrations ? A enlever ?
 B1    compteur de boucle                                    /1/

* Pour le solveur
coefopt1     Scaling coefficient in the objective function  /.3485/
coefopt2     Scaling coefficient in the objective function  /5197484.6/
coefopt3                                                    /0.03/
;

tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;
tkn=(datekn-tinit)/delta+1;
tny=(datenyin-tinit)/delta+1;
Atmo_PI=280/0.471;
Atmo_80=338.4/0.471;
```

```
*^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

PARAMETERS
*  for the objective function
  R(T)          Instantaeous rate of social time preference
  RR(T)         Average utility social discount rate
*  for the production function
  L(T)          Level of population and labor
  AL(T)         Level of total factor productivity
  GA(T)         Growth rate of productivity from 0 to T
  GL(T)         Growth rate of labor 0 to T
* parameters for the law of motion of endogenous carbon intensity
*   calibration: KMU*ZETA = 1- reponse au price cut
*                reponse totalement symetrique: 1-1
*                pas de reponse               : 1-0
*                35 p.cent de reponse         : 0.65
*
*        KMU ou ZETA 0 correspond a Nordhaus
*        KMU (1-0.72) correspond approx a la part du nouveau capital
ZETA(s2)    Part des abattements dont l effet  persiste
KMU(s2)     weighting of adapted carbon intensity
*   Before datekn ANS assume the central value
ANS(s2)     Answer to a price cut
/D 0.25,
 M 0.35,
 F 1/
*  probabilities for answer to price cut
  P2(s2)    Probability distribution
/D 0.39,
 M 0.55,
 F 0.06/
*  Refeference exogenous carbon intensity
  SIGMA(T)      CO2-emissions output ratio
  GSIG(T)       Cumulative improvement of energy efficiency
*  Abatement cost function
  gcost1
  cost1(t)         cost function for abatement
  correc(t)     Facteur de correction du cout pour recalibration
*  for the carbon cycle
  ETREE(T)      Emissions from deforestation
*  Climate module
*   -Probability distributions on climate sensitivity
* P1(s1)   Certainty /L 0,  C 1,  H 0/
  p1(s1) Central Probability distribution /L 0.167, C 0.666, H 0.167/
 temp2x(s1)     Climate senstivity /L 2.5, C 3.5, H 4.5/
*  En fait il serait plus malin de les definir sur s tout entier
```

```
  lam(s1)        Climate response parameter
  Tini_sup(s1)   global mean  atmo. temp. rise in 1990 wrt PI
  Tini_inf(s1)   global mean  oc. temp. rise in 1990 wrt PI
*  For cost-efficiency and calibration runs
  Ecible(T)     Niveau de la contrainte d emissions
*
p  Probabilite des etats du monde
;

*  for the objective function
R(T)=srtp*EXP(-DR*10*(ORD(T)-1));
RR("1")=1;
LOOP(T,
RR(T+1)=RR(T)/((1+R(T))**10);
);

*  for the production function
GL(T) = (GL0/DLAB)*(1-exp(-DLAB*(ord(t)-1)));
L(T)=LL0*exp(GL(t));
ga(T)=ga0*EXP(-dela*10*(ORD(T)-1));
al("1") = a0;
LOOP(T,
al(T+1)=al(T)/((1-ga(T)));
);

*  for carbon intensity
KMU(s2)= (1-ANS('M'))**0.5;
ZETA(s2)= (1-ANS(s2))/KMU(s2);
*  reference carbon intensity
gsig(T)=gsigma*EXP (  -desig*10*(ORD(T)-1) - desig2*10* ((ord(t)-1)**2)  )   ;
sigma("1")=sig0;
LOOP(T,
sigma(T+1)=(sigma(T)/((1-gsig(T+1))));
);

*  for the abatement cost function
correc(t) = 1;
gcost1(T)=dmiufunc*EXP(-decmiu*10*(ORD(T)-1));
cost1("1")=cost10;
LOOP(T,
cost1(T+1)=cost1(T)/((1+gcost1(T+1)));
);

*  for the carbon cycle
ETREE(T) = ET0*(1-0.1)**(ord(T)-1);
```

```
*  For cost-efficiency and calibration runs
Ecible(t) = 100;

*  Climate module
lam(s1) = forc/temp2x(s1);
Tini_sup(s1) = (1 - C1*(lam(s1)+C2)) * Tini_sup80
             + C1*C2*Tini_low80 + C1*forc*log(Atmo_80/Atmo_PI)/log(2);
Tini_inf(s1) = C3*Tini_sup80+(1-C3)*Tini_low80;

*  probabilites des etats du monde
*  Table p(s);

*  probabilites des etats du monde
p(s(s1,s2))=p1(s1)*p2(s2);

*^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

VARIABLES

*objective
 J                        Expectation of discounted utility

*control
* a(t,s(s1,s2))             Abatement (percent of emissions)
 a                        abat
 Itx(T,*,*)                 Saving rate (percent of output)

* state variables
 Atmo(t,s1,s2)               conc. atmo date t (GtC)
 Bio(t,s1,s2)                conc. biosphere + oc. sup date t (GtC)
 Oc(t,s1,s2)                 conc. deep ocean  date t (GtC)
 T_sup(t,s1,s2)              global mean temp. rise  atmo.(C)
 T_inf(t,s1,s2)              global mean temp. rise  oc.(C)
 K(T,s1,s2)                  Capital stock trill US dollars
 IET(T,s1,s2)                Intensite carbone tendancielle (tC par kUSD)

*intermediate variables
 Y(T,s1,s2)                  Output trill USD (Tera USD or 10**12)
 E(T,s1,s2)                 CO2- emissions bill t (Gt or 10**9)

*presentation variables

  C(T,s1,s2)                 Consumption trill US dollars
* CPC(T,s1,s2)               Per capita consumption thousands US dol
* PCY(t,s1,s2)               Per capita income thousands US dol
* S(T,s1,s2)                 Savings rate as fraction of GWP
```

```
  RI(T,s1,s2)                   Real interest rate per annum
;

POSITIVE VARIABLES Atmo,Bio,Oc,T_sup,T_inf, a,Itx, K, Y, IET ;

*  Upper and Lower Bounds: General conditions imposed for stability
Atmo.lo(t,s)    = Atmo_ini/2;
Atmo.up(t,s)    = Atmo_ini*50;
Bio.lo(t,s)     = Bio_ini/2;
Bio.up(t,s)     = Bio_ini*5;
Oc.lo(t,s)      = Oc_ini/2;
Oc.up(t,s)      = Oc_ini*2;
T_sup.up(t,s)   = 15;
T_inf.up(t,s)   = 15;
Y.lo(t,s)       = 1;
K.lo(T,s)       = 1;
*   Admissibility set for policy variables
a.lo(t,s)       = 0.000001;
* Current setting is for optimal policy.
* Include "a.fx(t,s) = .0" for no-control run.
a.up(t,s)       = 1;
Itx.up(t,s)     = 0.9999;

* Starting point for policy variables - for the solver
Itx.l(t,s)      = 0.23;
a.l(t,s)        = 0.5;

* Initial values of the state variables
Atmo.fx(tfirst,s)  = Atmo_ini;
Bio.fx(tfirst,s)   = Bio_ini;
Oc.fx(tfirst,s)    = Oc_ini;
T_sup.fx(tfirst,s(s1,s2)) = Tini_sup(s1);
T_inf.fx(tfirst,s(s1,s2)) = Tini_inf(s1);
K.fx(TFIRST,s)     = K0;
IET.fx(tfirst,s)   = sigma(tfirst);

* Values in 1st decision period for the policy variables:
*   No abatement in decade 1990.
*   The value for Itx is taken from a run without damages
*   ---> CORRIGER! (en thie il faudrait prendre la valeur obtenue
*        avec un *scenario de reference coherent sous incertitudes*
*        ...mais ca ne ferait pas grande difference)
a.fx(tfirst,s)     = 0;
Itx.fx(tfirst,s)   = I0;

* Pour ne pas se poser de probleme quand on annule une proba
```

```
loop(s,
if( p(s)=0,
Itx.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.23;
a.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.001;
* si l info est a  linfini les proba nulles ne posent pas de pb
);
);

*^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

EQUATIONS

   UTIL      Objective function

*   dynamics
   KK                  Capital balance equation
   carbone1       Ccycle atmo
   carbone2       Ccycle biosphere+surface oc.
   carbone3       Ccycle deep oc.
   tempatmo       Global mean atmo. temp rise
   tempoc         Global mean oc. temp. rise
   LLBD           Law of motion for pre-abatement carbon intensity

*   intermediary
   YY             Output equation
   EE             Emissions process

*   terminal condition
 KC     Terminal condition for K

*  constraints (in cost-efficiency analyses)
 STM    stabilisation of concentration
 STE    stabilisation of emissions

*    Measurability of controls wrt information on climate
 meas_itx(t,s1,ss1,s2)           meas. of investment
 meas_a(t,s1,ss1,s2)             meas. of abatement

*    Measurability of controls wrt information on inertia
 inrt_itx(t,s1,ss2,s2)           meas. of investment
 inrt_a(t,s1,ss2,s2)             meas. of abatement

*    presentation
   CC             Consumption equation
**   CPCE   Per capita consumption definition
**  PCYE(T)   Per capita income definition
```

```
**  SEQ(T)    Savings rate equation
   RIEQ   Interest rate equation
;

*^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

* Measurability of controls
$Ontext
*  Preferable de tout egaliser a un seul commun a tous p.ex. s('L',s2)
*  ca limitera pas mal le nombre  d equations
meas_a(t,s1,ss1,s2)$(ord(t)<tinfo)..    a(t,s1,s2)=e=a(t,ss1,s2);
meas_itx(t,s1,ss1,s2)$(ord(t)<tinfo)..  Itx(t,s1,s2)=e=Itx(t,ss1,s2);

inrt_a(t,s1,ss2,s2)$(ord(t)<tkn)..     a(t,s1,s2)=e=a(t,s1,ss2);
inrt_itx(t,s1,ss2,s2)$(ord(t)<tkn)..   Itx(t,s1,s2)=e=Itx(t,s1,ss2);
$Offtext
meas_a(t,s1,ss1,s2)$(ord(t)<tinfo)..    a(t,s1,s2)=e=a(t,'L',s2);
meas_itx(t,s1,ss1,s2)$(ord(t)<tinfo)..  Itx(t,s1,s2)=e=Itx(t,'L',s2);

inrt_a(t,s1,ss2,s2)$(ord(t)<tkn)..     a(t,s1,s2)=e=a(t,s1,'F');
inrt_itx(t,s1,ss2,s2)$(ord(t)<tkn)..   Itx(t,s1,s2)=e=Itx(t,s1,'F');


UTIL..          J =E=   SUM((T,s), p(s)* 10*RR(T)*L(T)
                                  * LOG( (1-Itx(T,s))*Y(T,s) /L(T))/coefopt1
                                      )
                                       + coefopt2;

KK(T,s)..         K(T+1,s) =L= (1-DK)**10 *K(T,s) + 10*Itx(T,s)*Y(T,s);

KC(TLAST,s)..     .02*K(TLAST,s) =L= Itx(TLAST,s)*Y(TLAST,s);

carbone1(t+1,s)..    Atmo(t+1,s)  =e= Ctrans11*Atmo(t,s) + Ctrans12*Bio(t,s)
                                     + E(t,s);

carbone2(t+1,s)..    Bio(t+1,s)   =e= Ctrans21*Atmo(t,s)
                                     +Ctrans22*Bio(t,s)
                                     +Ctrans23*Oc(t,s);

carbone3(t+1,s)..    Oc(t+1,s)    =e= Ctrans32*Bio(t,s)+Ctrans33*Oc(t,s);

tempatmo(t+1,s(s1,s2))..    T_sup(t+1,s) =e= (1-C1*(lam(s1)+C2))*T_sup(t,s)
                         + C1*C2*T_inf(t,s)
                         + C1*forc*log(Atmo(t,s)/Atmo_PI)/log(2);

tempoc(t+1,s)..      T_inf(t+1,s) =e= C3*T_sup(t,s)+(1-C3)*T_inf(t,s);
```

```
LLBD(t+1,s(s1,s2)).. IET(T+1,s) =E= (1-KMU(s2)) * SIGMA (T+1)
                          + KMU(s2)*SIGMA(T+1)/SIGMA(T)*
                            IET(T,s) *
                         (1 -
                           ( ZETA('M')$(ord(t)<tny) +ZETA(s2)$(ord(t)>=tny) )*
                             a(T,s)
                         );

YY(T,s(s1,s2))..
  Y(T,s) =E= AL(T) * L(T)**(1-GAMA) * K(T,s)**GAMA *
            (1 - correc(t) * cost1(t) * a(T,s)**cost2  ) *
 ( 1 -  DDC * ( beta * ( T_sup(t,s)-Tini_sup(s1) )
        + slt/( 1 + exp( log((2-ampl)/ampl)  *
                    ( seuil_inf + seuil_sup -2 * ( T_sup(t,s)-Tini_sup(s1)) )
                       /(seuil_sup-seuil_inf)
                      )
               )
              )
);

 EE(T,s)..          E(T,s) =E= 10*IET(T,s) * (1-a(T,s))*
                               AL(T)*L(T)**(1-GAMA)*
                               K(T,s)**GAMA + ETREE(T);

* constraints

STM(T,s)..   Atmo(t,s) =L= Mmax/0.471 + (1 - DSM) * 10000;
STE(T,s)$(ord(t)>1)..   E(t,s) =L= Ecible(t) + ( 1 - DSE ) * 10000;

* presentation

 CC(T,s)..          C(T,s) =E= Y(T,s)*(1-Itx(T,s));
* SEQ(T)..         S(T) =e= I(T)/(.001+Y(T));
RIEQ(T,s)..       RI(T,s) =E= GAMA*Y(T,s)/K(T,s)- (1-(1-DK)**10)/10  ;
* CPCE(T,s)..       CPC(T,s) =e= C(T,s)/L(T);
* PCYE(T)..        PCY(T) =e= Y(T)*1000/L(T);

*^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^^

* Solution options
option iterlim = 99900;
option reslim = 99999;
option solprint = on;
option limrow = 0;
```

```
option limcol = 0;

model CO2 /all/;
CO2.scaleopt = 1;


Scalar
DGY             Total Discounted GWP until 2200
;

Parameters
* Attention ce serait plus malin d'en faire des variables de presentation
*  (qui ne servent pas : mais effet sur le temps de resolution)
J_t         Time t utility in s.o.w. s. Discounted
CPC         Consommation per capita
log_cpc     Log of cpc
facteur(t)       weighting and discounting factor
Year(t)          Beginning of time step
Tax         Carbon tax (USD per tC)
MAE         Marginal abatement expense (cout marginal immediat)
Dom         Dommages
Em          Effective Emissions yc deforestation (annuelles)
Eind        Effective industrial emissions (annuelles)
E_unc       Chemin d emissions sans decrochage (annuelles)
E_ny        Chemin d emissions avec decrochage
Atmo_ppm    Concentration atmospherique en ppm
AC          Abatement Cost (annuel)
CAC         Cout abatement cumule en valeur actuelle
DAC              Discounted abatement cost 2000-2200 (en ref a baseline)
SCA              Surcout d abattement par rapport a ref;
;
DAC =0;
SCA =0;


*$include iner_cert.gms

*$include i2040.gms

$include  kn_40.gms

* Info 2040 on climate and  future inertia known from the beginning
*    sans recalibration de la fonction de cout
 DDC  = 1;
 DSE  = 0;
 DSM  = 0;
```

```
 dateinfo =2040;
 datekn   =2000;
tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;
tkn=(datekn-tinit)/delta+1;

a.l(t,s)        = 0.5;
Itx.l(t,s)      = 0.23;
a.fx(tfirst,s)  = 0;
Itx.fx(tfirst,s)  = I0;

* Pour ne pas se poser de probleme quand on annule une proba
loop(s,
if( p(s)=0,
Itx.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.23;
a.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.001;
* si l info est a  linfini les proba nulles ne posent pas de pb
);
);

solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;
* solve CO2 maximizing J using nlp ;

$include pres_cte.inc
* DAC=   DGY_bench-DGY ;
* SCA =  DAC - CAAI;

file i4010  /Cl2040-In_kn.res/;

put i4010;
i4010.nd = 5;
i4010.ap = 0;
*i4010.nz = 0;
*i4010.nr = 2;
put '# Changement endogene'/;
put '#chemin d emissions optimal'/;
put '# fct cout originale'  /;

$include out_unc.inc

putclose i4010;


*-----------------------------------
```

```
* Climate known from beginning and  future inertia learned in 2040
*    sans recalibration de la fonction de cout
 DDC  = 1;
 DSE  = 0;
 DSM  = 0;

 dateinfo =2000;
 datekn   =2040;
tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;
tkn=(datekn-tinit)/delta+1;

a.l(t,s)        = 0.5;
Itx.l(t,s)      = 0.23;
a.fx(tfirst,s)  = 0;
Itx.fx(tfirst,s)  = I0;



* Pour ne pas se poser de probleme quand on annule une proba
loop(s,
if( p(s)=0,
Itx.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.23;
a.fx(t,s)$(ord(t)>=min(tinfo,tkn))=0.001;
* si l info est a  linfini les proba nulles ne posent pas de pb
);
);

solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;
* solve CO2 maximizing J using nlp ;

$include pres_cte.inc
* DAC=   DGY_bench-DGY ;
* SCA =  DAC - CAAI;

file incIN  /Cl_kn-In40.res/;

put incIN;
incIN.nd = 5;
incIN.ap = 0;
*incIN.nz = 0;
*incIN.nr = 2;
put '# Changement endogene'/;
put '#chemin d emissions optimal'/;
```

```
put '# fct cout originale'  /;

$include out_unc.inc

putclose incIN;
```

Annexe B : code GAMS pour le calcul des variations de la valeur de l'information

GAMS code for solving numerically problem (3.17)

Note that in the GAMS code the time step $i = 0$ corresponding to 2000–2009 is matched by the second element of the set "T" and therefore referred by '2' and so forth.

```
1   * dice_response.gms
2
3   * A modified Dice model with
4   *                   - new corrected climate module
5   *                   - and a threshold damage function
6   *                   - uncertain climate sensitivity
7   *                   - arrival of perfect information
8   * plus other modifications for consistency with the new temperature module
9   * (Ramsey/Cass/Koopmans growth model with climate externalities and uncertainties)
10
11  * Copyright (C) 2003 ENPC
12  *
13  * This program is free software; you can redistribute it and/or modify
14  * it under the terms of the GNU General Public License as published by
15  * the Free Software Foundation; either version 2 of the License, or
16  * (at your option) any later version.
17  *
18  * This program is distributed in the hope that it will be useful,
19  * but WITHOUT ANY WARRANTY; without even the implied warranty of
20  * MERCHANTABILITY or FITNESS FOR A PARTICULAR PURPOSE.  See the
21  * GNU General Public License for more details.
22  *
23  * You should have received a copy of the GNU General Public License
24  * along with this program; if not, write to the Free Software
25  * Foundation, Inc., 675 Mass Ave, Cambridge, MA 02139, USA.
26
27  * CREDITS:
28  * Growth model (calibration and code)  from William D. Nordhaus and Joseph Boyer
```

```
29  * Carbon cycle is  from William D. Nordhaus.  Code is from Philippe Ambrosi.
30  * Temperature evolution comes from S.H. Schneider. Calibration and code
31  *  from Philipe Ambrosi.
32  * Damage function from Patrice Dumas and Minh Ha-Duong. Calibration and code
33  *  from Philippe Ambrosi
34  * Other contributions by (REMOVED for reviewing !)
35
36
37  $Ontext
38  The new temperature dynamic provides a better description of the *short term*
39   (4--5 decades) atmospheric temperature rise than original dice. Equilibrium
40  temperature are identical. Exogenous forcing due to other ghgs has been removed
41
42  Threshold damage function (S-shaped). Transition from low to high damages occurs
43  between 1.7 and 2.3 degrees of rise. Damage function is calibrated so that the
44  expected damage from concentration doubling is equal to the value obtained with
45   the more standard, quadratic function 0.006 (T-T0)^2 and are comparable before
46  $Offtext
47
48
49  ****************************************************************
50  ** INSTRUCTIONS for use
51  **
52  **    dateinfo : date of availability of the information on the climate
53  **               Examples:
54  **                * 2000 Full knowledge
55  **                * 2040 Information in 2040  uncertainty before
56  **                * 2390 neverlearn
57  **    probability distribution: three cases are proposed (select one or modify!)
58  **                central
59  **                pessimistic
60  **                optimistic
61  ****************************************************************
62
63
64  SETS  T                 Time steps  (1990 2000...2380)          /1*40/
65        TFIRST(T)         First step
66        TLAST(T)          Last step
67        s                 State of the world                        /L,C,H/
68  ;
69
70  tfirst(t) = yes$(ord(t) eq 1);
71  tlast(t)  = yes$(ord(t) eq card(t));
72  alias (s,ss);
73  DISPLAY TFIRST, TLAST;
74
```

```
 75  SCALARS
 76   delta    step length                                    /10/
 77   tinit    initial date                                   /1990/
 78   dateinfo date of arrival of info                        /2000/
 79   tinfo    date of arrival of info (ordinal)              **computed
 80
 81   SRTP     Initial rate of social time preference per year /.03/
 82   DR       Decline rate of social time preference per year /.0025719/
 83
 84   GL0      Growth rate of population per decade            /.157/
 85   DLAB     Decline rate of pop growth per decade           /.2220/
 86
 87   A0       Initial level of total factor productivity      /.01685/
 88   GA0      Initial growth rate for technology per decade   /.055/
 89   DELA     Decline rate of technol. change per decade      /.0016/
 90   DK       Depreciation rate on capital per year           /.10/
 91   GAMA     Capital elasticity in production function       /.30/
 92
 93   SIG0     CO2 emissions-GWP ratio                         /.272/
 94   GSIGMA   Growth of sigma per decade                      /-.13/
 95   desig    Decline rate of decarbonization                 /.016/
 96   desig2   Quadratic term in decarbonization               /-.00052/
 97
 98   Atmo_PI  Preindustrial atmospheric  concentration(1E9 tC) *computed
 99   Atmo_80   atmo concentration in 1980 (1E9 tC)             *computed
100   Atmo_ini Concentration in atmosphere 1990 (1E9 tC)       /758.19133/
101   Bio_ini  Concentration in biosphere + oc. sup 1990 (1E9 tC) /792.59567/
102   Oc_ini   concentration in deep oc. 1990 (1E9 tC)         /19230/
103   Ctrans11 Carbon cycle transition matrix                  /0.66616/
104   Ctrans21 Carbon cycle transition matrix                  /0.33384/
105   Ctrans31 Carbon cycle transition matrix                  /0/
106   Ctrans12 Carbon cycle transition matrix                  /0.27607/
107   Ctrans22 Carbon cycle transition matrix                  /0.60897/
108   Ctrans32 Carbon cycle transition matrix                  /0.11496/
109   Ctrans13 Carbon cycle transition matrix                  /0/
110   Ctrans23 Carbon cycle transition matrix                  /0.00422/
111   Ctrans33 Carbon cycle transition matrix                  /0.99578/
112
113  ** TEMPERATURE
114   Tini_sup80      global mean  atmo. temp. rise  from preindustrial to 1980
115                                                            /0.8249988/
116   Tini_low80      global mean  oceanic temp. rise  from preindustrial to 1980
117                                                            /0.3005746/
118
119  **TEMPERATURE DYNAMIC
120   forc     Radiative forcing for 2xCO2                          /3.71/
```

```
 C1       Transfert coeff.                                  /0.4791321/
 C2       Transfert coeff.                                  /0.1093887/
 C3       Transfert coeff.                                  /0.1313768/

 Q0       1990 world gross output trill 90 US dollars     /21.08/
 LL0      1990 world population millions                  /5632.7/
 K0       1990 value capital trill 1990 US dollars        /47/

**DAMAGE FUNCTION
 beta       linear trend                                  /0.005/
 seuil_inf  temperature where transition begins           /1.7/
 seuil_sup  temp where transition ends                    /2.3/
 ampl       steepness  (e)                                /0.1/
 slt        size of the non linear jump  (d)               /0.04/

 COST10   Intercept control cost function                 /.045/
 COST2    Exponent of control cost function               /2.15/
 ET0      C Emiss from deforest (bill tons per dec)       /11.28/
 dmiufunc Decline in cost of abatement function (per decade) /.26/
 decmiu   Change in decline of cost function                /.02/
 coefopt1     Scaling coefficient in the objective function  /.3485/
 coefopt2     Scaling coefficient in the objective function  /5197484.6/
 coefopt3                                                    /0.03/
;

tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;
Atmo_PI=280/0.471;
Atmo_80=338.4/0.471;


PARAMETERS
  L(T)          Level of population and labor
  AL(T)         Level of total factor productivity
  SIGMA(T)      CO2-emissions output ratio
  R(T)          Instantaeous rate of social time preference
  RR(T)         Average utility social discount rate
  GA(T)         Growth rate of productivity from 0 to T
  GL(T)         Growth rate of labor 0 to T
  gcost1
  GSIG(T)       Cumulative improvement of energy efficiency
  ETREE(T)      Emissions from deforestation
  cost1(t)         cost function for abatement

** Probability distributions * to be chosen between
$Ontext
** central
```

```
  p(s)          Central Probability distribution
/L 0.167,
 C 0.666,
 H 0.167/
$Offtext
**$Ontext
** pessimistic
  p(s)          Pessimistic Probability distribution
/L 0.167,
 C 0.167,
 H 0.666/
**$Offtext
$Ontext
** optimistic
  p(s)          Optimistic Probability distribution
/L 0.666,
 C 0.167,
 H 0.167/
$Offtext
  temp2x(s)     Climate senstivity
/L 2.5,
 C 3.5,
 H 4.5/
  lam(s)        Climate response parameter
  Tini_sup(s)   global mean  atmo. temp. rise in 1990 wrt PI
  Tini_inf(s)   global mean  oc. temp. rise in 1990 wrt PI
;

GL(T) = (GL0/DLAB)*(1-exp(-DLAB*(ord(t)-1)));
L(T)=LL0*exp(GL(t));

ga(T)=ga0*EXP(-dela*10*(ORD(T)-1));
al("1") = a0;
LOOP(T,
al(T+1)=al(T)/((1-ga(T)));
);

gsig(T)=gsigma*EXP (  -desig*10*(ORD(T)-1) - desig2*10* ((ord(t)-1)**2)  )   ;
sigma("1")=sig0;
LOOP(T,
sigma(T+1)=(sigma(T)/((1-gsig(T+1))));
);

gcost1(T)=dmiufunc*EXP(-decmiu*10*(ORD(T)-1));
cost1("1")=cost10;
LOOP(T,
```

```
213  cost1(T+1)=cost1(T)/((1+gcost1(T+1)));
214  );
215
216  ETREE(T) = ET0*(1-0.1)**(ord(T)-1);
217
218  R(T)=srtp*EXP(-DR*10*(ORD(T)-1));
219  RR("1")=1;
220  LOOP(T,
221  RR(T+1)=RR(T)/((1+R(T))**10);
222  );
223
224  lam(s) = forc/temp2x(s);
225  Tini_sup(s) = (1 - C1*(lam(s)+C2)) * Tini_sup80
226               + C1*C2*Tini_low80 + C1*forc*log(Atmo_80/Atmo_PI)/log(2);
227  Tini_inf(s) = C3*Tini_sup80+(1-C3)*Tini_low80;
228
229
230  VARIABLES
231
232  **objective
233   J                          Expectation of discounted utility
234
235  **control
236   a(t,s)                     Abatement (percent of emissions)
237   Itx(T,s)                   Saving rate (percent of output)
238
239  ** state variables
240   Atmo(t,s)                  conc. atmo date t (GtC)
241   Bio(t,s)                   conc. biosphere + oc. sup date t (GtC)
242   Oc(t,s)                    conc. deep ocean  date t (GtC)
243   T_sup(t,s)                 global mean temp. rise  atmo.(C)
244   T_inf(t,s)                 global mean temp. rise  oc.(C)
245   K(T,s)                     Capital stock trill US dollars
246
247  **intermediate variables
248   Y(T,s)                     Output
249
250  **presentation variables
251    E(T,s)                   CO2- emissions bill t
252    C(T,s)                   Consumption trill US dollars
253  * CPC(T,s)                 Per capita consumption thousands US dol
254  * PCY(t,s)                 Per capita income thousands US dol
255  * S(T,s)                   Savings rate as fraction of GWP
256   RI(T,s)                   Real interest rate per annum
257  ;
258
```

```
259  POSITIVE VARIABLES Atmo,Bio,Oc,T_sup,T_inf, a,Itx, K, Y ;
260
261  **  Upper and Lower Bounds: General conditions imposed for stability
262  Atmo.lo(t,s)    = Atmo_ini/2;
263  Atmo.up(t,s)    = Atmo_ini*50;
264  Bio.lo(t,s)     = Bio_ini/2;
265  Bio.up(t,s)     = Bio_ini*5;
266  Oc.lo(t,s)      = Oc_ini/2;
267  Oc.up(t,s)      = Oc_ini*2;
268  T_sup.up(t,s)   = 5;
269  T_inf.up(t,s)   = 5;
270  a.lo(t,s)       = 0.0001;
271  a.up(t,s)       = 1;
272  Itx.up(t,s)     = 0.9999;
273  Y.lo(t,s)       = 1;
274  K.lo(T,s)       = 1;
275  ** Starting point for the solver
276  Itx.l(t,s)      = 0.23;
277  a.l(t,s)        = 0.5;
278
279  ** Emissions control policy. Current setting is for optimal policy.
280  ** Reinstate equation "a.fx(t,s) = .0" for no-control run.
281  ** a.fx(t,s)=.0;
282
283  ** Initial values
284  ** No abatement in decade 1990.
285  a.fx(tfirst,s)     =0;
286  Atmo.fx(tfirst,s)  = Atmo_ini;
287  Bio.fx(tfirst,s)   = Bio_ini;
288  Oc.fx(tfirst,s)    = Oc_ini;
289  T_sup.fx(tfirst,s) = Tini_sup(s);
290  T_inf.fx(tfirst,s) = Tini_inf(s);
291  K.fx(TFIRST,s)     = K0;
292
293
294  EQUATIONS
295
296     UTIL      Objective function
297
298  **   dynamics
299     KK(T,s)             Capital balance equation
300     carbone1(t,s)       Ccycle atmo
301     carbone2(t,s)       Ccycle biosphere+surface oc.
302     carbone3(t,s)       Ccycle deep oc.
303     tempatmo(t,s)       Global mean atmo. temp rise
304     tempoc(t,s)         Global mean oc. temp. rise
```

```
305
306  **   intermediary
307     YY(T,s)             Output equation
308
309  **   terminal condition
310   KC(T,s)     Terminal condition for K
311
312  **    Measurability of controls wrt information
313      meas_itx(t,s,ss)           meas. of investment
314      meas_a(t,s,ss)             meas. of abatement
315
316  **    presentation
317     EE(T,s)             Emissions process
318     CC(T,s)             Consumption equation
319  **   CPCE(t,s)   Per capita consumption definition
320  **  PCYE(T)   Per capita income definition
321  **  SEQ(T)    Savings rate equation
322     RIEQ(T,s)   Interest rate equation
323  ;
324
325
326  ** Equations of the model
327
328  meas_a(t,s,ss)$(ord(t)<tinfo)..           a(t,s)=e=a(t,ss);
329  meas_itx(t,s,ss)$(ord(t)<tinfo)..         Itx(t,s)=e=Itx(t,ss);
330
331  UTIL..          J =E=   SUM((T,s), p(s)* 10*RR(T)*L(T)
332                                    * LOG( (1-Itx(T,s))*Y(T,s) /L(T))/coefopt1
333                                        )
334                                         + coefopt2;
335
336  KK(T,s)..         K(T+1,s) =L= (1-DK)**10 *K(T,s) + 10*Itx(T,s)*Y(T,s);
337
338  KC(TLAST,s)..     .02*K(TLAST,s) =L= Itx(TLAST,s)*Y(TLAST,s);
339
340  carbone1(t+1,s)..    Atmo(t+1,s)  =e= Ctrans11*Atmo(t,s) + Ctrans12*Bio(t,s)
341            + 10*SIGMA(T)*(1-a(T,s))*AL(T)*L(T)**(1-GAMA)*K(T,s)**GAMA + ETREE(T) ;
342
343  carbone2(t+1,s)..    Bio(t+1,s)   =e= Ctrans21*Atmo(t,s)
344                                        +Ctrans22*Bio(t,s)
345                                        +Ctrans23*Oc(t,s);
346
347  carbone3(t+1,s)..    Oc(t+1,s)    =e= Ctrans32*Bio(t,s)+Ctrans33*Oc(t,s);
348
349  tempatmo(t+1,s)..    T_sup(t+1,s) =e= (1-C1*(lam(s)+C2))*T_sup(t,s)
350                           + C1*C2*T_inf(t,s)
```

```
351                          + C1*forc*log(Atmo(t,s)/Atmo_PI)/log(2);
352
353   tempoc(t+1,s)..      T_inf(t+1,s) =e= C3*T_sup(t,s)+(1-C3)*T_inf(t,s);
354
355   YY(T,s)..
356     Y(T,s) =E= AL(T) * L(T)**(1-GAMA) * K(T,s)**GAMA *
357                (1 - cost1(t) * a(T,s)**cost2 ) *
358    ( 1 - ( beta * ( T_sup(t,s)-Tini_sup(s) )
359           + slt/( 1 + exp( log((2-ampl)/ampl)  *
360                         ( seuil_inf + seuil_sup -2 * ( T_sup(t,s)-Tini_sup(s)) )
361                            /(seuil_sup-seuil_inf)
362                         )
363                  )
364         )
365   );
366
367   ** presentation
368    EE(T,s)..          E(T,s) =E= 10*SIGMA(T)*(1-a(T,s))*AL(T)*L(T)**(1-GAMA)*
369                                     K(T,s)**GAMA + ETREE(T);
370    CC(T,s)..          C(T,s) =E= Y(T,s)*(1-Itx(T,s));
371   ** SEQ(T)..         S(T) =e= I(T)/(.001+Y(T));
372   RIEQ(T,s)..        RI(T,s) =E= GAMA*Y(T,s)/K(T,s)- (1-(1-DK)**10)/10  ;
373   ** CPCE(T,s)..       CPC(T,s) =e= C(T,s)/L(T);
374   ** PCYE(T)..        PCY(T) =e= Y(T)*1000/L(T);
375
376
377   ** Solution options
378   option iterlim = 99900;
379   option reslim = 99999;
380   option solprint = on;
381   option limrow = 0;
382   option limcol = 0;
383
384   model CO2 /all/;
385
386   CO2.scaleopt = 1;
387
388   solve CO2 maximizing J using nlp ;
389   * solve CO2 maximizing J using nlp ;
390   * solve CO2 maximizing J using nlp ;
391
392   ** Display of results
393   display Y.l, Itx.l,  a.l, E.l, T_sup.l;
394
395
396   Parameters
```

```
J_t(t,s)        Time t utility in s.o.w. s. Discounted
CPC(T,s)        Consommation per capita
log_cpc(t,s)    Log of cpc
facteur(t)      weighting and discounting factor
Year(t)         Beginning of time step
;
J_t(t,s)        = 10*RR(T)*L(T) * LOG( (1-Itx.l(T,s))*Y.l(T,s) /L(T) );
CPC(T,s)        = (1-Itx.l(T,s))*Y.l(T,s) /L(T) ;
log_cpc(t,s)    = LOG( (1-Itx.l(T,s))*Y.l(T,s) /L(T) );
facteur(t)      = 10*RR(T)*L(T);
Year(t)         = 1990 +10*(ord(t)-1);


file aiyres /aiy_dicersp.res/;

put aiyres;
aiyres.nd = 5;
aiyres.ap = 1;
*aiyres.nz = 0;
*aiyres.nr = 2;

** put '# file aiy_dicersp.res' /;
put '#'                     /;
put '# Optimal controls and output' /;
put '#'                     /;
put '# Info in'  ' '  dateinfo  ' '  /;
put '#'                     /;
put '#'                     /;
loop(s,
        put '#'  ' '   s.tl,  ' '    temp2x(s)  ' '  /;
        put 'Year'  ' '   'Reduc'   ' '  'Itx'  ' '  'Y' /;
        loop (t, put Year(t),
                             ' ',  a.l(t,s),
                             ' ',  Itx.l(t,s),
                             ' ',  Y.l(t,s)
              /;  );
        put /;
        put /;
);
put /;

putclose aiyres;
```

Solving problem (3.23) : Modifications to the GAMS code

The line numbers refer to those in the above GAMS code.

Change 1 : insert after line 79

```
 periode1      date of period 1                                  /2040/
 tperiode1     date of periode 1 (ordinal)                      **computed
*Coefficients for parameterization of abatement in period 0
 ag                                                            /0.30056/
 bg                                                            /0.07245/
 cg                                                            /0.02556/
```

Change 2 : insert after line 146

```
tperiode1 = (periode1-tinit)/delta+1;
```

Change 3 : insert after line 235

```
 u0(s)                     Abatement target for 2030
```

Change 4 : Replace line 259 by :

```
POSITIVE VARIABLES Atmo,Bio,Oc,T_sup,T_inf, a,Itx, K, Y, u0 ;
```

Change 5 : Delete lines 275–277 and insert :

```
u0.up(s)        = 1;
**starting point for the solver
Itx.l(t,s)$(ord(t)  >= tperiode1)      = 0.23;
a.l(t,s)$(ord(t) >= tperiode1)      = 0.2;

** parameterisation of  investment before  2040
 Itx.fx('1', s)     =  0.25018;
 Itx.fx('2', s)     =  0.23864;
 Itx.fx('3', s)     =  0.23135;
 Itx.fx('4', s)     =  0.22675;
 Itx.fx('5', s)     =  0.22379;

**Arbitrary strategy for s.o.w. with zero probability
loop(s,
if( p(s)=0,
Itx.fx(t,s)$(ord(t)>=tperiode1)=0.23;
a.fx(t,s)$(ord(t)>=tperiode1)=0.001;
u0.fx(s)$(tinfo <=2)=0.001;
);
);
*$
```

Change 6 : insert after line 314

```
   meas_u(s,ss)     measurability constraint on target choice
   chemin(t,s)      parameterisation of  abattement before  2040
```

Change 7 : insert after line 329

```
 meas_u(s,ss)$(tinfo> 2)..                u0(s)=e=u0(ss);
 chemin(t,s)$(ord(t)<tperiode1 AND ord(t)>1)..
               a(t,s) =e=  ag*u0(s)
                         + bg*u0(s)*(ord(t)-1)
                         + cg*u0(s)* (ord(t)-1)**2;
```

Change 8 : insert after line 401

```
cost(t,s)       Abatement costs
Jopt            objective value
V_info          Bellman value function in 2040
```

Change 9 : insert after line 407

```
cost(t,s)       = y.l(t,s)*(cost1(t)*(a.l(t,s)**cost2));
Jopt            = sum((t,s), p(s) *  J_t(t,s) ) ;
V_info          = sum((t,s)$(ord(t) >= tperiode1), p(s) * J_t(t,s)) ;
```

Change 10 : Delete lines 409 et seq. and replace by :

```
file sortie /u0opt_loi.res/;

put sortie;
sortie.nd = 5;

put '# fichier u0opt_loi.res' /;
put '#'                      /;

put '# climate sensitivity'  ' ' ;
loop(s, put temp2x(s) ' ' );
put /;
put '# probability'  ' ' ;
loop(s, put p(s) ' ');
put //;
put //;

put '# Info in'  ' '  dateinfo  ' '  /;
put /;
```

```
put '# Optimal initial policy (abatement target for 2030)' /;
put '# s';
loop(s,  put   ' '   s.tl;)
put '# u0'/;
loop(s,  put  ' '   ' '   u0.l(s) ;)
 put /;
 put /;

put '# Objective value' /;
put '# J'                     /;
put Jopt
put /;
put /;

putclose sortie;
```

Solving problems in Eq. (3.24) : Modifications to the GAMS code

These modifications add up to those described in the preceding section. Line numbers still refer to those in the GAMS code, section 4.11.2.

Change 11 : insert after line 67

```
       dec               screening of admissible initial policies /1*101/
```

Change 12 : insert after line 143

```
         u0             policy in initial period    /0/
```

Change 13 : Remove Change 3, Change 4, Change 6 and Change 7.
Remove also the first line of Change 5 as well as the near last line :

```
 u0.fx(s)$(tinfo <=2)=0.001
```

Change 14 : insert after line 285

```
**  parameterization of abatement by  u0 in initial period
a.fx(t,s)$(ord(t)<tperiode1 AND ord(t)>1) = ag*u0 + bg*u0*(ord(t)-1) + cg*u0* (
ord(t)-1)**2;
```

Change 15 : replace line 380 by

```
option solprint = off
```

Change 16 : remove lines 388 to 393

Change 17 : insert after Change 8

```
EV_info    Value fonction in next period with learning
EV_bot     Value fonction in next period without learning
Iinfo      Value of information
```

Change 18 : Delete from line 403 to the end, including Changes 9 and 10 and insert :

```
file vinfo /vinfo.res/;
vinfo.nd = 5;
vinfo.ap = 1;

file howexit /exitstat.res/;
howexit.nd = 5;
howexit.ap = 1;


put vinfo
put '# Climate sensitivity'  ' ' ;
loop(s, put temp2x(s) ' ' );
put /;
put '# proba distribution'  ' ' ;
loop(s, put p(s) ' ');
put //;
put //;
put '# u0'
    ' '  'Iinfo'
    ' '  'EV_s'
    ' '  'EV_bar'/;
putclose vinfo;
*********************************************************
loop(dec,
** if( ord(dec)>40,

** Recompute equations depending of dec
u0= (ord(dec)-1) /(card(dec)-1);
a.fx(t,s)$(ord(t)<tperiode1 AND ord(t)>1) = ag*u0 + bg*u0*(ord(t)-1) + cg*u0* (ord(t)-1)**2;


*$***Solve with learning**********

dateinfo= 2040;
tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;
```

```
solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;

put howexit
put u0  ' '  dateinfo  ' '   CO2.modelstat;
putclose howexit;

J_t(t,s)        = 10*RR(T)*L(T) * LOG( (1-Itx.l(T,s))*Y.l(T,s) /L(T) );
Year(t)         = 1990 +10*(ord(t)-1);
Jopt            = sum((t,s), p(s) *  J_t(t,s) ) ;
EV_info         = sum((t,s)$(ord(t) >= tperiode1), p(s) * J_t(t,s)) ;
**$


*****Solve without learning*********

dateinfo= 2390;
tinfo=(dateinfo-tinit)/delta+1;

solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;
solve CO2 maximizing J using nlp ;

put howexit
put u0  ' '  dateinfo  ' '   CO2.modelstat;
putclose howexit;

J_t(t,s)        = 10*RR(T)*L(T) * LOG( (1-Itx.l(T,s))*Y.l(T,s) /L(T) );
EV_bot          = sum((t,s)$(ord(t) >= tperiode1), p(s) * J_t(t,s)) ;
Iinfo           = EV_info-EV_bot;
**$

put vinfo
put  u0 ' ' Iinfo ' ' EV_info ' ' EV_bot / ;
putclose vinfo;
**);
** endif

);
** endloop(dec
```

Incertitude, inertie et choix optimal : Modèles de contrôle optimal appliqués au choix de politiques de réduction des émissions de gaz à effet de serre

Nous proposons une représentation calibrée de l'inertie économique pour le modèle DICE. Les résultats suggèrent une action de réduction des gaz à effet de serre nettement plus forte et plus précoce. Ceci conduit à distinguer entre coût marginal d'abattement dynamique et statique et à s'interroger sur le niveau du signal-prix incitatif. L'incertitude est abordée d'abord sous l'aspect de l'« effet d'irréversibilité » pour lequel on introduit un formalisme qui permet de synthétiser la littérature existante et d'obtenir une nouvelle condition suffisante. Enfin, la théorie des capteurs permet d'aborder la question de la valeur marginale de l'information et d'obtenir pour le théorème de Radner et Stiglitz des conditions distinctes et simples sur les familles de structures d'information et sur l'utilité de l'agent.

Mots clefs : Modélisation intégrée, Inertie, Emissions tendancielles, Valeur de l'information, Effet d'irréversibilité, Capteurs, Mesures aléatoires, Radner-Stigliz, Décision face au risque

Risk, inertia and optimal decision-making: Optimal control models and applications to the policy choice of greenhouse gases emissions abattement

I propose a calibrated description of the economic inertia for the DICE model. Results suggest that greater efforts of abattement should be undertaken. Further, dynamic and static marginal abatement costs differ, which fosters a discussion about the level of the price-signal. The 'irreversibility effect' is my first topic concerning decision-making under risk. The formalism proposed ties together many conditions that are scattered in the literature. A new sufficient condition about the value of information is obtained. Secondly, information structures are represented as a family of 'random measures' (sensors) and marginal value of information is studied. New conditions for the Radner-Stiglitz theorem are obtained and imposed separately on the family of information structures and on the utility function.

Keywords: Integrated modelling and assessment, Inertia, Emissions tendencies, Value of information, Irreversibility effect, Sensors, Random measures, Radner-Stigliz, Decision-making under uncertainty