

Ductility criterion based on ellipticity loss of the elastic-plastic tangent modulus deduced from a self consistent model

Jean-Paul Lorrain

▶ **To cite this version:**

Jean-Paul Lorrain. Ductility criterion based on ellipticity loss of the elastic-plastic tangent modulus deduced from a self consistent model. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2005. English. NNT : 2005ENAM0002 . pastel-00001207

HAL Id: pastel-00001207
https://pastel.hal.science/pastel-00001207

Submitted on 22 Apr 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Metz

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR

de

L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE

D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité: Mécanique et Matériaux

par

Jean-Paul LORRAIN

CRITERE DE DUCTILITE BASE SUR LA PERTE D'ELLIPTICITE DU MODULE TANGENT ELASTOPLASTIQUE DEDUIT D'UN MODELE AUTOCOHERENT

Soutenue le 21 janvier 2005 devant le jury composé de:

M.	F.	SIDOROFF	Professeur des univeristés à l'école centrale de Lyon	Président
MMe.	C.	REY	Professeur des univeristés à l'école centrale de Paris	Rapporteur
M.	J.P.	CORDEBOIS	Professeur au CNAM	Rapporteur
M.	X.	LEMOINE	Docteur Ingénieur au LEDEPP, ARCELOR	Examinateur
M.	M.	BERVEILLER	Professeur des universités à L'ENSAM, Metz	Directeur de thèse
M.	T.	BEN ZINEB	Maître de conférences à L'ENSAM, Metz	Co-directeur de thèse
M.	F.	ABED MERAIM	Maître de conférences à L'ENSAM, Metz	Co-directeur de thèse

---

L'ENSAM est un Grand Etablissement dépendant du ministère de l'Education Nationale, composé de huit centres :
AIX-EN-PROVENCE ANGERS BORDEAUX CHÂLONS-EN-CHAMPAGNE CLUNY LILLE METZ PARIS

Mis en page avec la classe thloria.

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier Marcel Berveiller de m'avoir permis de réaliser cette thèse au sein du Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux.

Un grand merci à Xavier Lemoine qui m'a permis grâce à ses innombrables questions et requêtes de faire un travail très intéressant durant ces trois années.

Merci à Tarak Ben Zineb et Farid Abed Meraim de m'avoir encadré pendant ces trois ans.

Merci à Mekaël Balabane pour se contribution au niveau de la résolution des problèmes numériques.

Ensuite, je voudrais remercier tous mes camarades thésards avec qui nous avons formé un groupe soudé et qui m'ont aidé à surmonter les hauts et les bas durant cette thèse.

Enfin, un grand merci à ma famille et en particulier à Pitch qui m'a soutenu moralement pendant les derniers mois de ce travail.

Pour finir, je tiens à remercier tous les compétiteurs de mon club de badminton qui m'ont permis de bien me défouler durant mes trois ans de thèse.

Table des matières

Notations générales **1**

Introduction générale

Chapitre 1
Modélisation du comportement du monocristal en grandes déformations plastiques

1.1 Introduction 10
1.2 Mécanismes de déformation 10
1.2.1 Le glissement des plans cristallins 10
1.2.2 Déformation par maclage 12
1.2.3 Déformation par transformation de phase 13
1.3 Différentes approches pour modéliser le comportement local 14
1.3.1 Systèmes de glissement 14
1.3.2 Détermination des systèmes actifs 16
1.3.3 Calcul de l'amplitude de glissement des systèmes actifs 16
1.3.4 Principaux modèles de prédiction du comportement local 18
1.3.5 Introduction de la matrice d'écrouissage et de l'écrouissage physique . . . 23
1.4 Modélisation adoptée pour le comportement du monocristal 27
1.4.1 La loi pseudo-viscoplastique 27
1.4.2 Vitesse de glissement des systèmes actifs 29
1.4.3 Loi de comportement élastoplastique pour le monocristal 29
1.4.4 Evolution des variables internes 30
1.4.5 Différentes voies d'adoucissement 32
1.4.6 Algorithme de calcul et méthode de résolution 32
1.5 Résultats préliminaires 33
1.6 Résultats quantitatifs 39
1.6.1 Identification des paramètres 39
1.6.2 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer-silicium 39

1.6.3 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer 41
1.6.4 Essais de traction sur des monocristaux de fer 42
1.6.5 Essais de cisaillement complexe sur des monocristaux de fer 45
1.7 Conclusion 45

Chapitre 2
Modèle autocohérent pour le comportement élastoplastique

2.1 Introduction 50
2.2 Modélisation de la transition d'échelles 51
2.2.1 Les modèles de Taylor-Lin et statique 51
2.2.2 Les calculs de contraintes internes d'Eshelby et de Kröner 52
2.2.3 Différentes approches autocohérentes 54
2.2.4 Introduction du tenseur de Green 54
2.2.5 Simplification de l'équation intégrale 56
2.2.6 Calcul du module tangent autocohérent 58
2.2.7 Evolution de la morphologie des grains 58
2.3 Méthode de calcul utilisée pour résoudre le modèle autocohérent 59
2.3.1 Résolution de l'aspect implicite de la méthode autocohérente 60
2.3.2 Inversion de matrices mal conditionnées 60
2.4 Résultats qualitatifs 62
2.4.1 Evolution de la forme des grains 62
2.4.2 Comparaisons entre la méthode de transition d'échelles autocohérente et celle de Taylor-Lin 63
2.5 Comparaison entre théorie et expérience pour des acier monophasés ferritiques . . 65
2.5.1 Essais rhéologiques 66
2.5.2 Textures de l'acier C1754 76
2.5.3 Surfaces de charge 80
2.5.4 Coefficients de Lankford 81
2.6 Comparaison entre théorie et expérience pour des aciers biphasés ferrite / martensite 84
2.6.1 Essais rhéologiques 85
2.6.2 Surfaces de charge 88
2.6.3 Coefficients de Lankford 90
2.7 Comparaison entre théorie et expérience pour un acier micro-allié contenant des précipités 91
2.7.1 Essais rhéologiques 92
2.7.2 Coefficients de Lankford 94
2.8 Conclusions 94

Chapitre 3
Critère de ductilité basé sur une formulation de Rice

3.1 Introduction . . . 96
3.2 Les mécanismes contrôlant la formabilité . . . 96
3.2.1 Les mécanismes associés à la plasticité . . . 96
3.2.2 Les mécanismes associés à l'endommagement . . . 98
3.2.3 Modélisation de l'endommagement . . . 99
3.3 Modélisation de la perte de ductilité . . . 102
3.3.1 Introduction - Notion de courbe limite de formage ou CLF . . . 102
3.3.2 Le modèle de Marciniak et Kuckzynski ou théorie M-K . . . 102
3.3.3 Modélisation de la striction . . . 106
3.3.4 Modélisation de la localisation de la déformation . . . 107
3.3.5 Bilan sur les critères de bifurcation . . . 108
3.3.6 Choix du modèle de perte de ductilité . . . 109
3.4 Résultats qualitatifs sur la perte de ductilité pour le monocristal . . . 109
3.4.1 Forme de la fonction déterminant minimum dans l'espace . . . 111
3.4.2 Orientation et position de la bande de localisation . . . 113
3.4.3 Influence des paramètres physiques sur la perte de ductilité . . . 114
3.4.4 Influence de la matrice d'écrouissage sur la perte de ductilité . . . 118
3.5 Influence des paramètres mécaniques sur la perte de ductilité du polycristal . . . 119
3.6 Détermination des courbes limite de formage . . . 121
3.6.1 Modèle de référence pour la simulation des courbes limite de formage . . . 124
3.6.2 Acier D1879 . . . 125
3.6.3 Acier C1754 . . . 127
3.6.4 Acier S2325 . . . 127
3.6.5 Acier D1957 . . . 130
3.6.6 Acier A159 . . . 130
3.6.7 Acier T1625 . . . 131
3.6.8 Discussion . . . 133
3.7 Conclusions . . . 133

Conclusion Générale

Bibliographie **137**

Annexes

Annexe A
Formalisme des grandes déformations

A.1 Définition des contraintes et des déformations 145
A.2 Objectivité et dérivée objective 147
A.3 Mesure de la déformation 148

Annexe B
Schémas d'intégration des lois de comportement

B.1 Comparaison des schéma d'Euler et de Runge-Kutta 149
B.2 Introduction d'un pas adaptatif 151

Annexe C
Calcul de l'équation intégrale cinématique

Annexe D
Calcul du tenseur d'interaction

Table des figures

1 Flambement et striction 4
2 Striction et couplage des mécanismes 5
3 Cavités et rupture 6
4 Courbes limite de formage en fonction d'une prédéformation 7

1.1 Lignes de glissement dans un acier ferritique 11
1.2 Schématisation du glissement des plans cristallins 11
1.3 Courbe de traction d'un monocristal 12
1.4 Exemple de macle [Kub01] 12
1.5 Définition d'une macle 12
1.6 Schématisation de la transformation Martensitique 13
1.7 Ilots Martensitiques dans un acier TRIP [Kub04] 14
1.8 Orientation d'un système de glissement par rapport au repère matériau 15
1.9 Loi puissance et vitesse de glissement 18
1.10 Influence du paramètre numérique k sur la loi tanh 28
1.11 Définition des angles d'Euler 31
1.12 Algorithme d'intégration de la loi locale 34
1.13 Evolution de la densité de dislocation lors d'un essai de laminage 35
1.14 Evolution du libre parcours moyen des dislocations lors d'un essai de laminage . . 36
1.15 Evolution de la cission critique lors d'un essai de laminage 37
1.16 Evolution des angles d'Euler lors d'un essai de laminage 38
1.17 Effet des termes d'orientation sur le comportement monocristallin 38
1.18 Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement selon différentes orientations tirés de [Rau98] 40
1.19 Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement selon différentes orientations tirés de [KN67] 43
1.20 Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de traction selon différentes orientations tirés de [PPL72] 44
1.21 Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement complexe selon différentes orientations tirés de [KN67] 46

2.1 Modélisation d'Eshelby 53
2.2 Modélisation de Kröner 53
2.3 Simplification de l'équation intégrale 56
2.4 Modèle autocohérent au sens de Hill 59
2.5 Algorithme de résolution du schéma autocohérent 61
2.6 Evolution de la morphologie d'un grain 62

2.7 Comparaison entre les modèles de Taylor-Lin et autocohérent pour un essai de traction uniaxiale . . . 63
2.8 Nuages de points pour les deux méthodes de transition d'échelles . . . 63
2.9 Evolution des contraintes et des déformations dans les grains d'un matériau biphasé 65
2.10 Micrographie des aciers ferritiques . . . 66
2.11 Orientation d'une éprouvette par rapport à la direction de laminage . . . 68
2.12 Courbes contrainte / déformation pour quelques trajets de chargement dans le cas de l'acier C1754 pour des éprouvettes orientées dans la direction de laminage . . . 69
2.13 Microstructure des dislocations . . . 70
2.14 Mesure de l'écart en aire . . . 71
2.15 Ecarts en contrainte pour l'acier C1754 . . . 72
2.16 Ecarts en aire pour l'acier C1754 . . . 72
2.17 Essai d'expansion biaxée 1/4 pour l'acier D1879 . . . 73
2.18 Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier D1879 . . . 74
2.19 Essai de traction uniaxiale pour une éprouvette orientée à 0° par rapport à la direction de laminage sur l'acier S2325 . . . 75
2.20 Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier S2325 . . . 75
2.21 Identification paramétrique pour l'acier DDQ . . . 76
2.22 Figures de pôles de l'acier C1754 dans le cas d'un essai d'expansion équibiaxée après 12% de déformation pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage 77
2.23 Figures de pôles de l'acier C1754 lors d'un essai traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage après 12% de déformation . . . 78
2.24 Figures de pôles de l'acier C1754 lors d'un essai traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction transverse après 12% de déformation . . . 79
2.25 Surfaces de charge radiales pour l'acier D1879 . . . 81
2.26 Surfaces de charge radiales pour l'acier DDQ . . . 82
2.27 Coefficient de Lankford de l'acier D1879 . . . 83
2.28 Coefficient de Lankford de l'acier S2325 . . . 83
2.29 Coefficient de Lankford de l'acier DDQ . . . 84
2.30 Micrographie de l'acier ferrito-martensitique D1957 . . . 85
2.31 Courbes contrainte / déformation pour quelques trajets de chargement dans le cas de l'acier D1957 pour des éprouvettes orientées dans la direction de laminage . . . 86
2.32 Ecarts en contrainte pour l'acier D1957 . . . 87
2.33 Ecarts en aire pour l'acier D1957 . . . 87
2.34 Essai de traction uniaxiale dans le cas d'une éprouvette orientée dans la direction de laminage pour l'acier A159 . . . 88
2.35 Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier A159 . . . 89
2.36 Surfaces de charge pour l'acier D1957 . . . 89
2.37 Coefficient de Lankford de l'acier D1957 . . . 90
2.38 Coefficient de Lankford de l'acier A159 . . . 91
2.39 Micrographie de l'acier T1625 . . . 92
2.40 Essai de traction uniaxiale dans le cas d'une éprouvette orientée dans la direction de laminage pour l'acier T1625 . . . 93
2.41 Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier T1625 . . . 93
2.42 Coefficient de Lankford de l'acier T1625 . . . 94

3.1 Schématisation de la striction . . . 97
3.2 Bande de localisation de la déformation . . . 97

3.3 Evolution de l'endommagement . . . 98
3.4 Différents faciès de rupture . . . 99
3.5 Modélisation de Marciniak et Kuckzynski . . . 103
3.6 Moment où apparaît la striction lors d'un essai de traction uniaxiale . . . 107
3.7 Relations entre les différents critères de bifurcation . . . 110
3.8 Définition des deux angles représentant l'orientation de la normale . . . 111
3.9 Evolution du déterminant normalisé au cours de la déformation en fonction de l'orientation de la normale lors d'un essai de traction uniaxiale . . . 112
3.10 Forme de la fonction déterminant et déformation à laquelle intervient la localisation en fonction de l'orientation cristallographique initiale lors d'un essai de traction uniaxiale . . . 113
3.11 Influence du paramètre lié au libre parcours moyen des dislocation g_0 . . . 114
3.12 Influence de la distance d'annihilation critique y_c . . . 115
3.13 Influence de la cission critique initiale τ_c^0 . . . 116
3.14 Influence de la taille de l'éprouvette . . . 116
3.15 Essais de traction sur des monocristaux de molybdène à différentes températures [Luf91] . . . 117
3.16 Influence de la matrice d'écrouissage sur le comportement du monocristal . . . 118
3.17 Nombre de grains ayant localisé en fonction du déterminant minimum . . . 120
3.18 Evolution du déterminant normalisé au cours de la déformation en fonction de l'orientation de la normale lors d'un essai de traction uniaxiale pour un polycristal de 100 grains . . . 121
3.19 Influence du paramètre lié au libre parcours moyen des dislocations g_0 sur le polycristal . . . 122
3.20 Influence de la distance d'annihilation critique y_c sur le polycristal . . . 122
3.21 Influence de la distance cission critique initiale τ_c^0 sur le polycristal . . . 122
3.22 Influence de la taille de grain sur le polycristal . . . 123
3.23 Définition de la cellule élémentaire dans le modèle de Cayssials [Cay00] . . . 125
3.24 Courbe limite de formage directe simulée de l'acier D1879 . . . 126
3.25 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier D1879 . . . 126
3.26 Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier C1754 . . . 127
3.27 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier C1754 . . . 128
3.28 Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier S2325 . . . 128
3.29 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier S2325 . . . 129
3.30 Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier D1957 . . . 130
3.31 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation de l'acier D1957 . . . 130
3.32 Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier A159 . . . 131
3.33 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier A159 . . . 131
3.34 Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier T1625 . . . 132

3.35 Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier T1625 132

1 Influence de la taille de grain sur les courbes limite de formage 136

A.1 Déformation d'un solide 145
A.2 Définition des différents tenseurs de contrainte 147
A.3 Comparaison des différentes mesures de déformations 148

B.1 Comparaison des deux méthodes d'intégration pour un essai de laminage 150
B.2 Comparaison des deux méthodes d'intégration pour un essai de laminage avec pas adaptatif 152

Notations générales

D'une manière générale, les lettres capitales désignent les grandeurs macroscopiques et les lettres minuscules les grandeurs microscopiques.
La dérivée par rapport au temps d'une variable X est notée $\dot{X}$. Les notations ":" pour les produits doublement contractés et "." pour les produits simplement contractés de tenseurs seront utilisées (voir dans la suite pour leur écriture).
Si les indices sont écrits explicitement, alors la notation d'Einstein s'applique (la sommation se fait sur les indices répétés 2 fois). Par exemple :

$$A_{ii} = \sum_i A_{ii}$$

Tenseurs

Les tenseurs d'ordre 4 (A_{ijkl}) et d'ordre 2 (B_{ij}) en notation indicielle n'ont, sauf exceptions, aucune des symétries usuelles. Les différentes opérations faites sur des tenseurs sont définies comme :
Produit doublement contracté :

- De deux tenseurs d'ordre 4 $B : C = B_{ijkl}C_{lkmn} = A_{ijmn}$
- D'un tenseur d'ordre 4 et un d'ordre 2 $A : B = A_{ijkl}B_{lk}$
- De deux tenseurs d'ordre 2 $B : B = B_{ij}B_{ji}$

Produit simplement contracté :

- D'un tenseur d'ordre 4 et un d'ordre 2 $A.B = A_{ijkl}B_{lm}$
- De deux tenseurs d'ordre 2 $B.B = B_{ij}B_{jk}$

Produit tensoriel

- De deux vecteurs $n \otimes m = n_i m_j$
- De deux tenseurs d'ordre 2 $A \otimes B = A_{ij}B_{kl}$

Norme d'un tenseur d'ordre 2 :

- $\|B\| = \sqrt{B_{ij}B_{ij}}$

Symbole de Kronecker δ

- $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$

Identité d'ordre 4 notée I

- $I_{ijkl} = \delta_{il}\delta_{jk}$

Inverse d'un tenseur A noté A^{-1}

- $A^{-1} : A = A : A^{-1} = I$

Principaux tenseurs utilisés

Ordre 4 :

- Module tangent d'un grain l

- Module tangent du polycristal L
- Tenseur d'élasticité C
- Tenseur de concentration de la déformation A

Ordre 2

- Contrainte de Cauchy d'un grain σ
- Contrainte nominale d'un grain n
- Contrainte de Cauchy du polycristal Σ
- Contrainte nominale du polycristal N
- Déformation logarithmique d'un grain e_{log}
- Déformation logarithmique du polycristal E_{log}
- Déformation de Cauchy d'un grain e_{Cau}
- Déformation de Cauchy du polycristal E_{Cau}
- Déformation de Green-Lagrange d'un grain e_{GL}
- Déformation de Green-Lagrange du polycristal E_{GL}
- Gradient de la vitesse d'un grain g
- Gradient de la vitesse macroscopique G

Notations mathématiques

- $\overline{X}$ signifie la moyenne volumique de X sur tout le volume considéré $\overline{X} = \frac{1}{V}\int_V X dV$
- $X_{,i}$ signifie la dérivée de X par rapport à la variable x_i
- $\boldsymbol{\delta}(x - x')$ représente la distribution de Dirac
- $\mathrm{sym}(X)$ désigne la partie symétrique du tenseur X
- $\mathrm{antisym}(X)$ désigne la partie antisymétrique du tenseur X
- $\mathrm{abs}(X)$ désigne la valeur absolue de X

Notations cristallines (associées aux systèmes de glissement)

- τ^g désigne la cission résolue sur le système de glissement g
- τ_c^g désigne la cission critique sur le système de glissement g
- ρ^g est la densité de dislocations sur le système de glissement g
- R^g et S^g sont les parties symétrique et antisymétrique du tenseur de Schmid sur le système de glissement g
- H^{gh} est la matrice d'écrouissage
- φ_1,ϕ,φ_2 désignent le triplet d'angles d'Euler permettant de définir la position du repère cristallographique d'un grain par rapport au repère global.
- φ_1',ϕ',φ_2' désignent le triplet d'angles d'Euler permettant de définir l'orientation du repère morphologique d'un grain par rapport au repère global.
- a, b et c sont les valeurs des trois demi-axes de l'ellipsoïde définissant la forme d'un grain.

Introduction générale

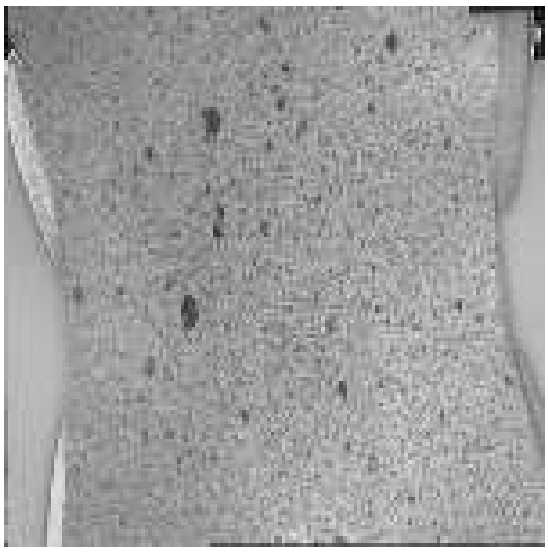
D'une manière générale, les matériaux peuvent être classé selon deux grandes catégories : les matériaux fonctionnels et les matériaux de structure. Les matériaux fonctionnels sont choisis de manière à réaliser une fonction physique particulière (optique, électromécanique,..) d'une pièce ou d'un ensemble (étanchéité, résistance à la chaleur,...). Les matériaux de structure sont, quant à eux, choisis en fonction de leurs caractéristiques mécaniques. Auparavant, la recherche ne tendait qu'à donner aux matériaux de structure qu'une résistance de plus en plus importante. Pour cela, la composition chimique ou le procédé de fabrication été modifiés pour améliorer sans cesse la résistance (présence d'une seconde phase dure, raffinement des grains, etc...). Cette amélioration de la résistance se faisait souvent au détriment de la déformabilité du matériau. De nos jours, les considérations écologiques poussent à alléger au maximum les structures. Dans cette optique, la recherche se penche sur le développement de matériaux à ductilité améliorée pour lesquels la résistance et, en même temps, les capacités de déformation sont grandes.

Les matériaux structurels représentent donc de grands enjeux économiques. Ils sont directement liés à l'existence de dizaines de milliers d'emplois en France, dans le domaine de l'extraction de la matière première jusqu'à celui de l'élaboration du produit fini. L'acier, qui est le matériau métallique le plus utilisé, représente une part importante de ces enjeux. Il est couramment utilisé dans de nombreuses applications de la vie quotidienne à commencer par l'automobile sans oublier l'électroménager, les boîtes boissons, etc... Il est toujours nécessaire de le mettre en forme. Pour cela, sa capacité à subir une déformation irréversible (ou plastique) qui le fait passer, par exemple, du stade d'une feuille d'acier à celui d'une pièce aux formes complexes est utilisée. D'un point de vue industriel, cette propriété appelée ductilité est très utilisée et étudiée. En effet, il est intéressant de connaître les possibilités de déformabilité lors de la mise en forme des matériaux. Cependant, il a été montré qu'il n'était pas possible de déformer à l'infini un matériau. Il existe des limites de formabilité qui sont très dépendantes des opérations de mise en forme ainsi que du matériau utilisé. Expérimentalement, il est observé qu'il existe différents mécanismes qui peuvent être à l'origine de cette perte de ductilité avec des conséquences plus ou moins graves pour la pièce. Ceux rencontrés le plus couramment sont :

- Le flambement et le plissement. Ils peuvent, dans certains cas, être caractérisés par la présence de "plis" non désirés au sein de la structure. Ils conduisent, par exemple, à une pièce qui ne possède plus les caractéristiques géométriques voulues ou à la présence de zones disgracieuses sur des carrosseries de voiture.
- La localisation de la déformation. Dans ce cas, il est observé que la déformation a tendance à se concentrer préférentiellement dans certaines zones du matériau dans lesquelles elle est très intense. Ce mécanisme accélère la ruine de la structure qui va se produire préférentiellement dans les zones de localisation.
- La striction. Elle se caractérise, dans le cas d'un essai de traction, par une réduction de section plus grande dans la zone de striction que dans le reste de l'éprouvette.
- L'endommagement qui, dû à la formation et au développement de cavités, est caractérisé



a) Plissement



b)Striction dans une éprouvette de titane tirée de [Vac03]

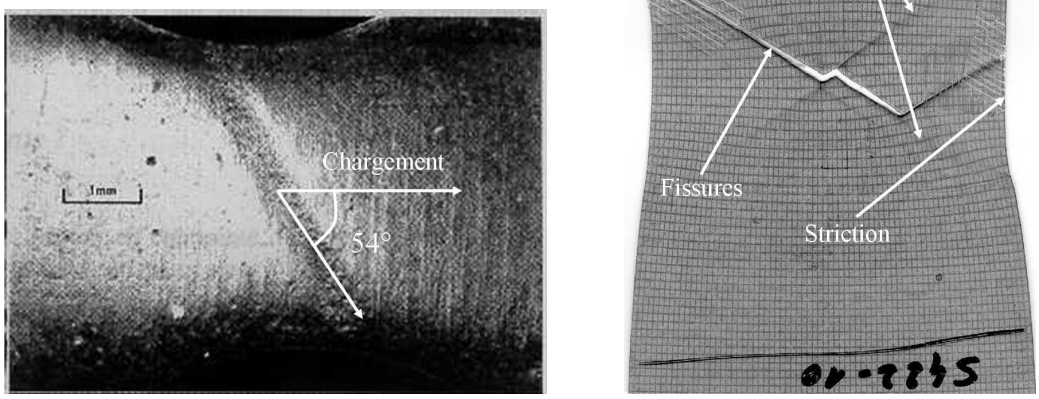
FIG. 1 – Flambement et striction

par l'altération progressive des caractéristiques mécaniques au cours de la déformation.
- La rupture. Elle est caractérisée par une fissure qui s'est propagée de part en part de l'éprouvette.

La compréhension de l'origine physique de ces mécanismes a ainsi été largement étudiée : Est-ce qu'ils sont dus au matériau ? A la géométrie de la pièce étudiée ? Au moyen de mise en forme ? A la combinaison de plusieurs de ces facteurs en même temps ? Afin de mieux les appréhender, les figures (1), (2) et (3) présentent des cas concrets dans lesquels ces différents phénomènes ont été observés.

La figure (1a) présente le flambement plastique lors de la mise en forme d'un godet. Ce mécanisme a une origine principalement liée à la structure de la pièce au sens du mécanicien, en effet il n'apparaît que pour certaines géométries. Dans le cas plus simple d'une poutre sollicitée en compression, ce flambement apparaît, pour une géométrie donnée, lorsque l'effort appliqué sur la poutre atteint une valeur critique dépendant de la section et du matériau. La figure (1b) présente ce qui est communément appelé striction pour une éprouvette de traction en titane. Concrètement, une zone dans laquelle la réduction de section est plus importante que dans le reste de l'éprouvette apparaît. Il a été montré que ce mécanisme est lié conjointement au matériau et à sa géométrie : il apparaît lorsque le durcissement provoqué par la déformation devient trop faible par rapport à l'adoucissement géométrique. Il peut donc être présent dans les matériaux se consolidant peu (aciers doux,...).

La figure (2a) présente ce qui est appelé macrobande de cisaillement lors d'un essai de traction uniaxiale. La déformation a tendance à se localiser dans une zone bien définie de l'éprouvette, cette zone étant orientée d'un angle de 54° par rapport à la direction de traction. Il a été montré que ce phénomène pouvait être entièrement imputé au matériau. La figure (2b) montre que ces mécanismes peuvent être couplés : en effet, sur cette éprouvette il y a présence de la striction ainsi que de deux bandes de cisaillement macroscopiques dont une est majoritaire. Ces bandes ont conduit à la ruine de la structure puisqu'une fissure s'est propagée le long de ces bandes à travers toute l'éprouvette.



a) Localisation de la déformation tirée de [Let00]

b) Couplage entre certains mécanismes

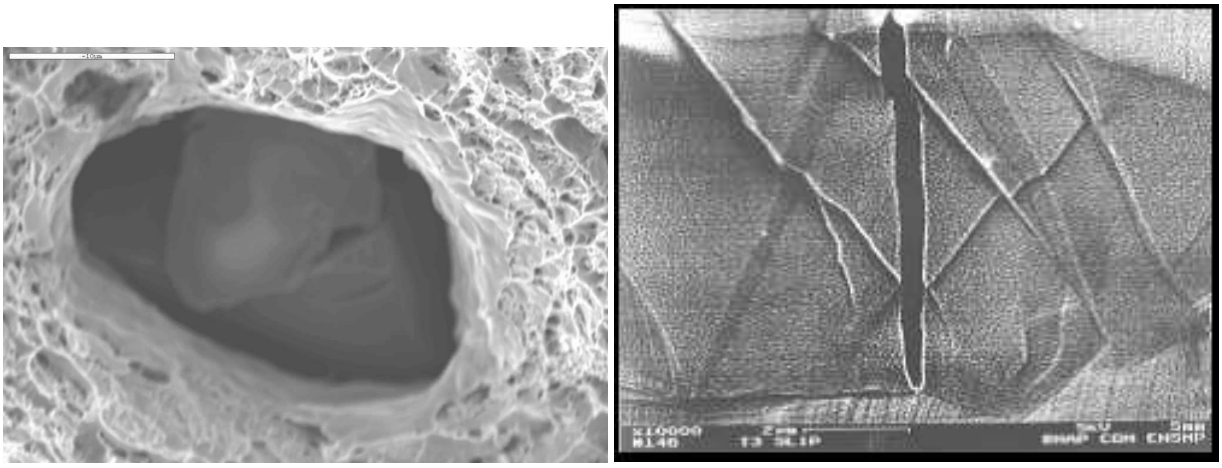
FIG. 2 – Striction et couplage des mécanismes

La figure (3) présente les effets de l'endommagement sur une éprouvette dus à la présence de cavités au sein du matériau avant la mise en forme. Ces cavités évoluent en taille, forme et fraction volumique tout au long de la mise en forme. La figure (3a) présente une cavité dans un acier bainitique. Si la proportion ou la taille de ces cavités se rapproche d'une valeur critique alors la ruine de la structure peut être atteinte comme illustré sur la figure (3b) dans le cas d'un acier austénito-ferritique.

D'une manière générale les mécanismes de perte de ductilité peuvent être classé en deux grandes catégories :

- Les mécanismes associés à la plasticité : c'est le cas de la striction, du flambement et de la localisation de la déformation,
- Les mécanismes principalement liés à l'endommagement, c'est le cas des cavités et de la rupture

Il est extrêmement difficile voire quasi-impossible de créer une approche unifiée pour modéliser l'ensemble de ces mécanismes. Dans le cadre de la collaboration entre Arcelor et le laboratoire LPMM (Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux), il a été décidé de restreindre la présente étude à la localisation de la déformation par bandes de cisaillement car c'est une préoccupation majeure d'Arcelor. Par exemple, pour fabriquer une portière de voiture il est nécessaire de réaliser des outillages extrêmement coûteux. Il faut avoir un outil numérique de prédiction pour aider à la conception. Cet outil devra être construit de façon à donner l'influence des paramètres structuraux sur la limite de ductilité (taille de grain, limite élastique,...). Elle sera, dans ce mémoire, définie comme la localisation de la déformation en bandes de cisaillement. Si il est possible de prédire le comportement du matériau lors de la mise en forme avant même d'avoir réalisé l'outillage, alors il sera envisageable d'optimiser la forme de l'outillage de manière à correspondre au mieux au cahier des charges. De grandes économies seront ainsi réalisées. A l'inverse, si un outillage est déjà disponible, il sera possible de choisir un matériau, d'après ses caractéristiques mécaniques, qui permette d'être mis en forme tout en répondant aux contraintes



a) Cavité dans un acier bainitique [PIBM03]

b) Rupture d'une éprouvette austénito-ferritique [Mci00]

FIG. 3 – Cavités et rupture

industrielles.

Au cours des différentes études liées aux problèmes de mise en forme des matériaux, il a été observé que, pour un même matériau, les déformations qu'il est possible d'obtenir avant la rupture sont très dépendantes du trajet de chargement. En effet, il a été montré que, pour du cisaillement, de très grandes déformations pouvaient être obtenues alors que ce n'est pas le cas pour la traction. Keeler [Kee65] a eu l'idée de placer sur un même diagramme les déformations principales correspondant à divers trajets de chargement. Il a remarqué qu'il était possible de tracer ainsi une courbe, appelée courbe limite de formage (ou CLF), qui est la limite entre la rupture du matériau et sa mise en forme réussie. De nos jours, ce n'est plus la rupture qui est le facteur limitant de la mise en forme mais la localisation de la déformation. C'est pour cela que les courbes limite de formage définissent maintenant la limite entre la localisation de la déformation et la pièce réussie. Pour connaître les limites de formage des études ont montré que des courbes limite de formage en trajet direct n'étaient pas suffisantes. En effet, si le matériau a subi une prédéformation la courbe limite de formage change de forme et de position. Par exemple les résultats obtenus par Haddad [Had97] sur un acier doux sont montrés sur la figure (4). La très grande sensibilité de la prédéformation vis à vis de la courbe limite de formage est nettement visible.

Il est donc intéressant de se demander comment appréhender et modéliser les mécanismes de mise en forme. Dans cette optique il va falloir réaliser un outil numérique qui ait :

- Des capacités de prédiction, c'est à dire qui soit capable d'estimer avant de construire l'outillage, si celui-ci sera apte à mettre en forme la pièce tout en répondant au cahier des charges.
- Des capacités d'aide à la conception de matériaux à ductilité améliorée grâce à la connaissance de l'influence des paramètres physiques sur la limite ductilité. En effet, par exemple, si l'effet de la taille de grain sur la ductilité est connu, il sera possible de modifier le process d'obtention du matériau de manière à obtenir une meilleure ductilité.

Il va donc falloir choisir un modèle permettant de prendre en compte ce qui se passe au sein du matériau lors de la déformation. Ensuite il faudra intégrer une loi ou un critère qui permette de détecter la perte de ductilité. Pour modéliser les différents phénomènes de perte de ductilité il existe de très nombreux travaux de recherche qui ont généralement pour but de modéliser un des

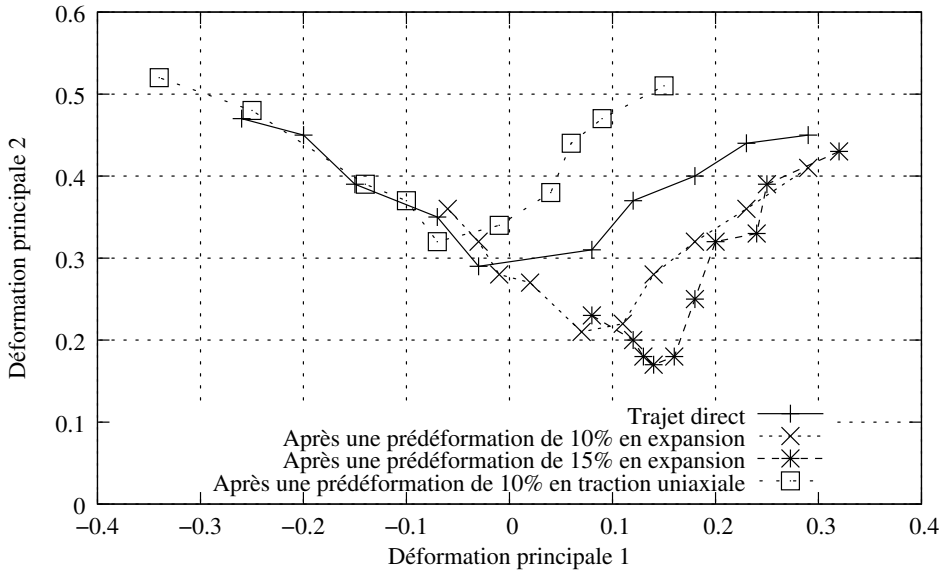


FIG. 4 – Courbes limite de formage en fonction d'une prédéformation

phénomènes déjà présentés :

- La théorie de Marciniak et Kuckzynski ou théorie M-K a pour but de modéliser la localisation de la déformation. Elle est à l'heure actuelle une des plus utilisées, elle est appliquée notamment au tracé de courbes limite de formage [Roc89], [Bar89], [Bau84], [CYD96], [CYD97], [Ram00]. Cette théorie est basé sur la présence d'une sous-épaisseur définissant un défaut géométrique dans le matériau. En plus, il est supposé que le matériau est soumis à un état de contraintes planes. Le défaut va évoluer en taille et en orientation au cours de la déformation et lorsqu'il a atteint une taille critique la localisation de la déformation sera supposée atteinte.
- Pour modéliser la striction le critère de Considère est généralement utilisé [Con85]. Ce critère a été introduit dans le cas de la traction uniaxiale et suppose que la striction débute lorsque l'effort appliqué à l'éprouvette de traction passe par un maximum. Ce critère a pour principal défaut d'être unidimensionnel.
- La localisation de la déformation peut être aussi modélisée en la considérant comme une bifurcation : cette bifurcation provient d'une singularité [Pet00] au niveau de la loi de comportement. Pour décrire cela, l'existence d'une bande de part et d'autre de laquelle certaines discontinuités des champs mécaniques sont possibles est postulée. Beaucoup de travaux pour modéliser ce phénomène ont été entrepris et une condition de localisation est lorsque la perte d'ellipticité du module tangent est atteinte [Asa83a], [HH75],[PAN83]. En utilisant cette propriété un critère simple qui permet de donner le moment où la localisation intervient est obtenu. Ce critère est appelé critère de Rice [Ric76], [RR75]. Il existe plusieurs autres critères de bifurcation comme le critère de perte d'ellipticité forte mais qui sont, dans le cas des matériaux étudiés dans ce mémoire, tous équivalents [BH91], [Ker99].

Toutes ces considérations permettent donc de préciser les grands objectifs de cette thèse :

- Développer une loi de comportement monocristalline. Pour avoir un modèle efficace, il faut que cette loi soit capable de bien prendre en compte les phénomènes qui ont lieu au niveau du grain.
- Développer un outil de transition d'échelles performant dans le but de calculer des mo-

dules tangents très proches des modules tangents réels et bien reproduire les phénomènes d'interactions entre les grains.
- Introduire un critère de ductilité dans le but de tracer des CLF à partir de l'identification de la loi de comportement.
- Faire une formulation dans le cadre des grandes déformations dans le but de simuler à terme des opérations de mise en forme qui peuvent faire subir de très grandes déformations aux matériaux sollicités.

Dans le but de répondre à ces objectifs, ce mémoire sera scindé en trois grandes parties :
- Dans le chapitre 1, la modélisation du comportement à l'échelle du grain sera présentée. Cette modélisation sera, ici, le point de départ avant d'effectuer une transition d'échelles. Pour cela, le comportement local sera défini grâce aux outils de la plasticité cristalline développés depuis de nombreuses années déjà [AR77], [Asa83a], [INN83]. A cette échelle, seront introduits les récents développements faits en matière de description de l'écrouissage en utilisant notamment les travaux de Hoc [Hoc99], Franciosi [Fra84] et Tabourot [Tab92]. L'écriture des équations se fera dans le cadre des grandes déformations dans lequel apparaîtront des termes convectifs conduisant à de l'adoucissement. Cet adoucissement textural est un des facteurs principaux déclenchant la localisation de la déformation, il est donc très important de le prendre en compte dans la modélisation. La variable interne employée sera la densité de dislocations moyenne par système de glissement en prenant en compte la création, le stockage et l'annihilation de ces dislocations. Pour valider le modèle proposé à l'échelle locale, la comparaison avec des résultats issus de la littérature pour des trajets simples ou complexes sera faite.
- Dans le chapitre 2, le passage de l'échelle locale à l'échelle du polycristal sera présenté. Pour bien tenir compte des interactions entre les grains le modèle autocohérent au sens de Hill [Hil66] écrit dans le cadre des grandes déformations d'après des travaux antérieurs notamment ceux de Berveiller et Zaoui [BZ79], Iwakuma et Nemat-Nasser [INN83] ou Lipinski [Lip93] sera introduit. Cette modélisation permettra de prendre en compte l'adoucissement textural ainsi que l'évolution morphologique des grains. La principale difficulté au niveau de ce modèle se situe dans la définition de tenseurs de concentration liant les grandeurs locales et les grandeurs macroscopiques. Les équations donnant leurs expressions ont un caractère fortement implicite et nécessitent de résoudre numériquement des intégrales elliptiques [FF85].
- Dans le chapitre 3, l'accent sera mis sur la détection de la perte de ductilité. Cette perte de ductilité est due à une singularité au niveau du module tangent [Ric76], [Pet00]. Pour la prendre en compte le critère de Rice [Ric76] sera introduit. Dans un premier temps, des résultats qualitatifs seront donnés au niveau du monocristal en se basant notamment sur les travaux de Luft [Luf91] pour valider l'influence des différents paramètres physiques du modèle sur la perte de ductilité. Ensuite la partie la plus importante à savoir la modélisation des courbes limite de formage et la comparaison par rapport aux résultats expérimentaux sera réalisée. Il sera montré ainsi que le modèle, dans son ensemble, permet de faire une avancée significative dans la prédiction de la limite de ductilité. L'accent sera aussi mis sur l'influence du changement de trajet au niveau des limites de ductilité.
- Enfin, les conclusions générales seront données.

Chapitre 1

Modélisation du comportement du monocristal en grandes déformations plastiques

Sommaire

1.1 Introduction 10
1.2 Mécanismes de déformation 10
1.2.1 Le glissement des plans cristallins 10
1.2.2 Déformation par maclage 12
1.2.3 Déformation par transformation de phase 13
1.3 Différentes approches pour modéliser le comportement local 14
1.3.1 Systèmes de glissement 14
1.3.2 Détermination des systèmes actifs 16
1.3.3 Calcul de l'amplitude de glissement des systèmes actifs 16
1.3.4 Principaux modèles de prédiction du comportement local 18
1.3.5 Introduction de la matrice d'écrouissage et de l'écrouissage physique . . 23
1.4 Modélisation adoptée pour le comportement du monocristal 27
1.4.1 La loi pseudo-viscoplastique 27
1.4.2 Vitesse de glissement des systèmes actifs 29
1.4.3 Loi de comportement élastoplastique pour le monocristal 29
1.4.4 Evolution des variables internes 30
1.4.5 Différentes voies d'adoucissement 32
1.4.6 Algorithme de calcul et méthode de résolution 32
1.5 Résultats préliminaires 33
1.6 Résultats quantitatifs 39
1.6.1 Identification des paramètres 39
1.6.2 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer-silicium 39
1.6.3 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer 41
1.6.4 Essais de traction sur des monocristaux de fer 42
1.6.5 Essais de cisaillement complexe sur des monocristaux de fer 45
1.7 Conclusion 45

1.1 Introduction

Dans le cadre d'un modèle de transition d'échelles il faut définir, en premier lieu, la manière dont est considéré le comportement du matériau à l'échelle du grain : élastique, visco-élastique, visco-plastique, élastoplastique, élasto-visco-plastique, dépendant de la température, etc... Généralement, pour définir le comportement local dans les modèles micromécaniques, les phénomènes physiques qui ont lieu au niveau du grain sont pris en compte :

- Quelle est l'orientation cristallographique et comment évolue-t-elle au cours de la déformation ?
- Quel(s) est (sont) le(s) type(s) de mécanisme(s) de déformation pris en compte (glissement des plans cristallins, maclage, transformation de phase,...) ?
- Quelles sont les variables internes et leur évolution (densité de dislocations, cission critique, fraction volumique de martensite,...) ?

Tous les paramètres associés à ces modèles micromécaniques, peuvent généralement être calculés ou mesurés ce qui représente un gros avantage par rapport aux modèles phénoménologiques dans lesquels le sens physique des paramètres est souvent difficile à interpréter. Cette modélisation micromécanique est de plus en plus développée. Elle permet aussi de suivre l'évolution des variables internes en plus de la loi contrainte/déformation. C'est pourquoi cette modélisation sera adoptée pour définir le comportement monocristallin.

1.2 Mécanismes de déformation

Une modélisation micromécanique se basant sur les phénomènes physiques qui ont lieu dans le matériau, il est important de les identifier avant de modéliser. Pour les matériaux métalliques polycristallins, la déformation peut avoir lieu selon trois mécanismes différents :

- Le glissement sur des plans cristallins,
- Le maclage,
- La transformation de phase.

1.2.1 Le glissement des plans cristallins

Lorsque le glissement des plans cristallins se produit, il a toujours lieu selon des familles de plans bien particuliers : dans le cas des matériaux cubiques centrés les directions de glissement sont celles de la famille $< 111 >$ et les plans de glissement ceux des familles $\{110\}$, $\{112\}$ plus rarement $\{123\}$. Dans le cas des matériaux cubiques à faces centrées, les directions de glissement sont $< 110 >$ et les plans $\{111\}$. La figure (1.1) montre des lignes de glissement dans un acier ferritique lors d'un essai de traction uniaxiale quasi-statique [Lor00]. Dans le cas de cet acier, ces lignes de glissement ne sont observables au microscope optique qu'après une déformation importante. En effet, elles sont d'abord très peu larges puis, plus la déformation augmente plus elle est concentrée dans ces lignes par la création de nouvelles dislocations qui les font s'élargir. Physiquement, au début de la déformation l'émergence de marches en surfaces (glide band en anglais) provenant d'une ou de quelques dislocations [Ebe01] est observée. Ensuite ces marches se groupent en "macro" marches (slip band en anglais) qui sont plus facilement visibles au microscope optique. La figure (1.2) illustre la formation de "macro" marches à partir des marches en surface. Enfin, de part sa nature, ce mode de déformation se fait à volume constant. Sur la figure (1.1) les lignes de glissement apparaîssent larges et sinueuses. Cet effet est appelé "pencil glide" et peut-être traduit par glissement en faisceau [FPZ95a]. En effet, même si la direction de glissement reste la même, la dislocation peut facilement changer de plan, c'est ce

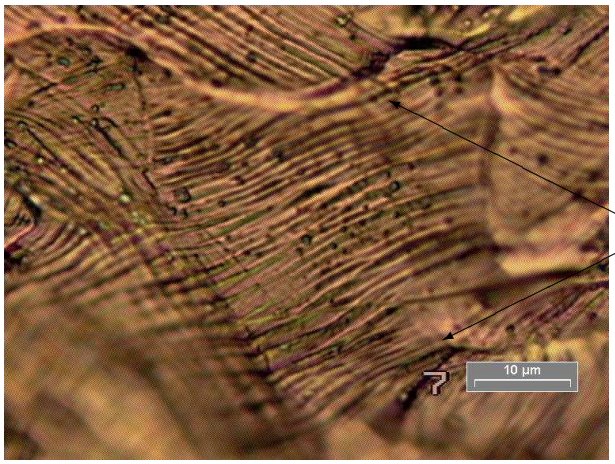


FIG. 1.1 – Lignes de glissement dans un acier ferritique

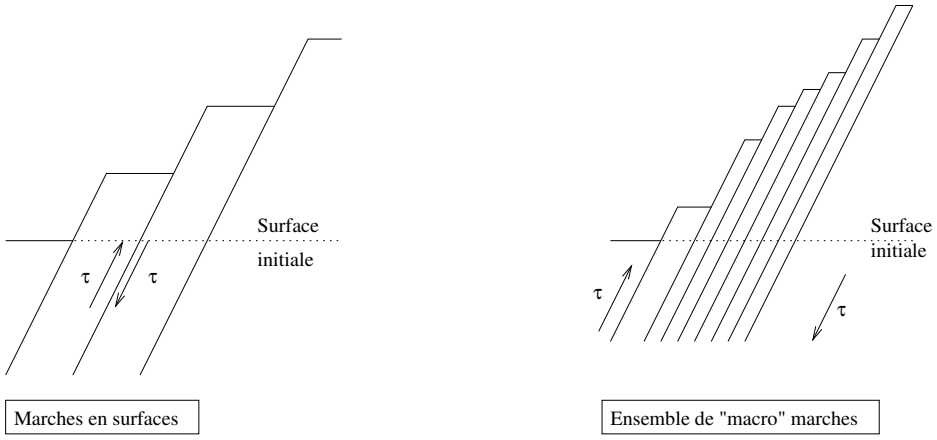


FIG. 1.2 – Schématisation du glissement des plans cristallins

qui est appelé, à l'échelle de la dislocation, le glissement dévié. Ce mécanisme de déformation est prédominant dans les aciers courants et c'est uniquement celui-là qui sera pris en compte lors de la modélisation. Lors d'un essai de traction sur un monocristal, une courbe dont la forme est décrite par la figure (1.3) est généralement observée. Sur cette figure il est montré que la déformation peut se décomposer en trois stades [FPZ95b] :

- Le stade I correspond à un stade pendant lequel un seul système de glissement est activé, ce stade n'apparaît que pour certaines orientations cristallines et est caractérisé par une pente d'écrouissage faible. L'amplitude de glissement étant proportionnelle à la contrainte appliquée. Comme il ne s'observe pas dans les polycristaux et que le but de ce mémoire est de modéliser leur comportement, il ne sera pas pris en compte dans la modélisation.
- Le stade II est le stade où apparaissent les systèmes de glissement secondaires. La pente d'écrouissage est nettement plus forte qu'au stade I (de l'ordre du module de cisaillement divisé par 200).
- Le stade III est le stade d'apparition du glissement dévié et connaît un module d'écrouissage décroissant avec la déformation.

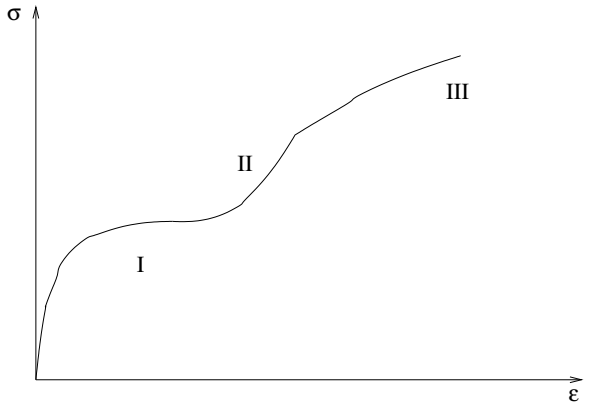


FIG. 1.3 – Courbe de traction d'un monocristal

1.2.2 Déformation par maclage

La déformation par maclage est un phénomène peu répandu dans les aciers. Elle intervient surtout pour une nouvelle classe d'acier au manganèse : les aciers TWIP (TWinning Induced Plasticity : la plasticité est induite par le maclage). Dans le cas de la structure cubique à faces centrées (CFC), qui peut être caractérisée par une séquence d'empilement du type ABCABC, elle peut-être perturbée selon une séquence CBACBA. Un schéma ABCABCBACBA est alors obtenu, c'est se qui est appelé une macle. Le maclage se manifeste donc par l'apparition d'un plan de symétrie appelé plan de macle dans le cristal. De part sa nature, cette transformation se fait, comme pour le glissement des plans cristallins, à volume constant. La figure (1.4) présente un exemple de macle photographiée par microscopie optique sur un acier TWIP [Kub01] et la figure (1.5) montre comment se réorganisent les atomes lorsqu'une macle est présente.

Sur la figure (1.4) la différenciation des macles par rapport au glissement des plans cristallins peut se faire après un polissage mécanique ou électrolytique qui ne laisse plus apparaître que les macles.

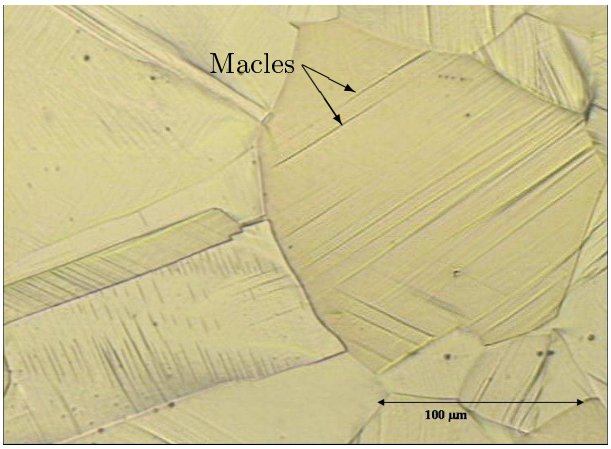


FIG. 1.4 – Exemple de macle [Kub01]

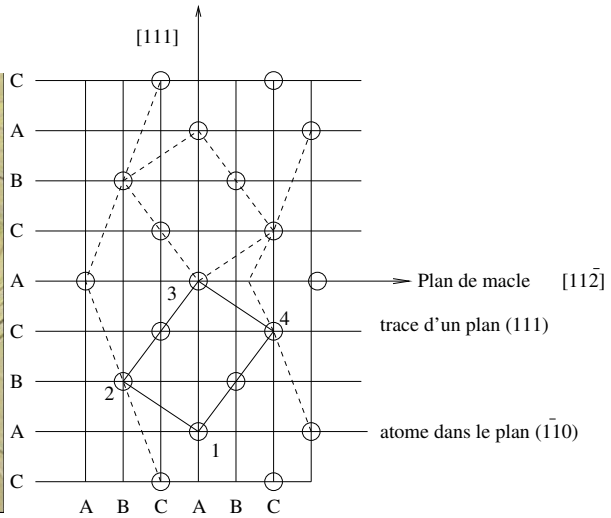


FIG. 1.5 – Définition d'une macle

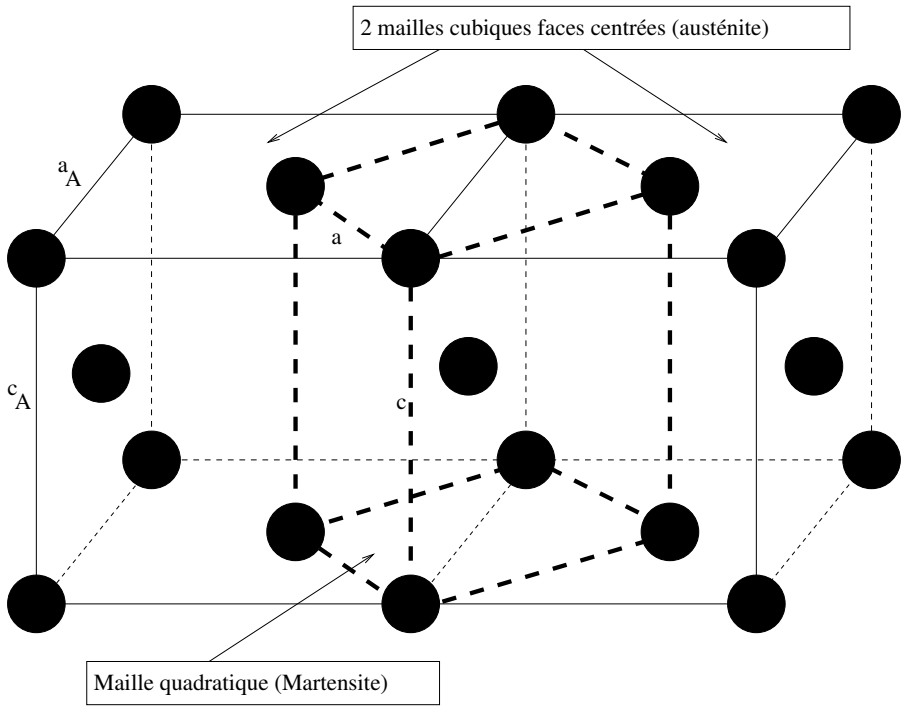


FIG. 1.6 – Schématisation de la transformation Martensitique

1.2.3 Déformation par transformation de phase

Ce type de transformation a lieu principalement dans les AMF (Alliages à Mémoire de Forme) et les aciers TRIP (TRansformation Induced Plasticity : la plasticité est induite par la transformation). C'est une propriété très utilisée dans les AMF où cette transformation peut amener à des déformations réversibles de l'ordre de 10% pour les monocristaux. Pour les aciers, la transformation n'est que partiellement réversible (sauf cas très particuliers) et est utilisée surtout pour augmenter la limite de ductilité dans le but de faciliter la mise en forme. Physiquement, la transformation martensitique est le passage d'une phase cubique à faces centrées vers une phase quadratique centrée. Elle se fait donc avec une variation de volume. La déformation induite par ce changement de volume est de l'ordre de 4% pour les aciers et négligeable dans le cas des AMF. La figure (1.6) montre comment se fait le passage de la maille Cubique Faces Centrées (CFC) austénitique vers la phase Quadratique Centrée (QC) martensitique. Pour rester clair, la manière dont se réorganisent les atomes dans la maille est uniquement présentée sur cette figure, il faut y ajouter la variation des paramètres de maille :

- Dans le cas austénitique le rapport de maille $\frac{c_A}{a_A}$ vaut 1, c_A et a_A étant représentés sur la figure (1.6)
- Dans le cas martensitique le rapport de maille $\frac{c}{a}$ vaut empiriquement 1 + 0.046%Carbone, c et a étant représentés, eux aussi, sur la figure (1.6)

La figure (1.7) présente des îlots Martensitiques dans un acier TRIP vus au microscope optique après une attaque chimique.

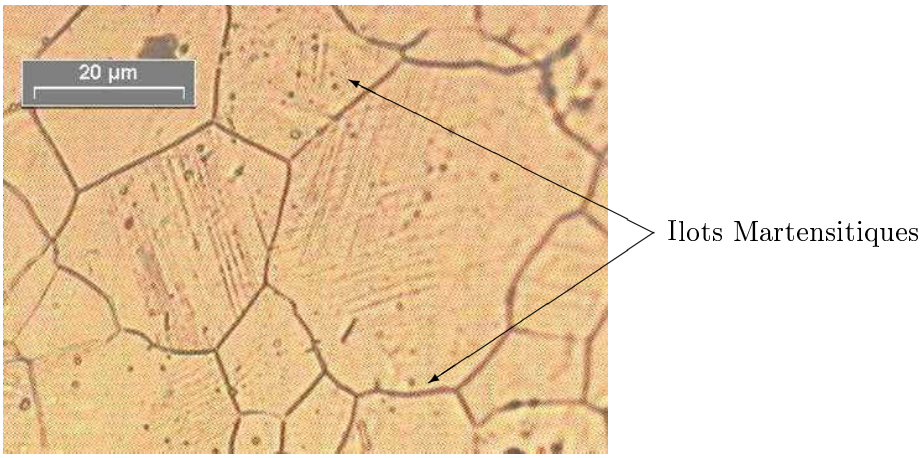


FIG. 1.7 – Ilots Martensitiques dans un acier TRIP [Kub04]

1.3 Différentes approches pour modéliser le comportement local

Cette partie propose une revue bibliographique des différentes approches qui ont déjà été développées dans le but de modéliser le comportement local. Ici ne seront présentés que des modèles dont les hypothèses et la formulation sont très différentes de celles utilisées dans la modélisation finalement adoptée. Cependant, l'étude sera restreinte aux modèles micromécaniques pour lesquels, à chaque fois, l'évolution des différentes variables internes seront précisées. L'accent sera mis sur la facilité à mesurer ces variables internes qui devront être, si possible, des quantités mesurables comme l'orientation cristallographique ou la densité de dislocations. Lors de la déformation plastique, et dans les modèles étudiés ici, les dislocations se multiplient et ne sont pas organisées de manière aléatoire. L'étude discrète de l'évolution de segments de dislocations au sein d'un matériau est une voie de recherche émergente. Elle se développe actuellement grâce aux rapides progrès de l'informatique et est appelé dynamique des dislocations, cependant il n'est possible de simuler ces phénomènes que dans de très faibles volumes de matière [MDK02]. Pour simplifier l'étude de l'évolution de l'ensemble de toutes les dislocations tout en restant proche des phénomènes physiques, généralement la densité de dislocations moyenne par système de glissement (qui est le principal mécanisme de déformation plastique dans les matériaux étudiés ici) est utilisée. Cela revient, en fait, à réaliser une opération de transition d'échelles entre l'échelle de la dislocation et celle du système de glissement. La notion de système de glissement doit être introduite, cela fait l'objet du prochain paragraphe.

1.3.1 Systèmes de glissement

Un système de glissement est défini dans le réseau cristallin par une direction de glissement $\overrightarrow{m}$ et un plan de glissement de normale $\overrightarrow{n}$. L'amplitude de glissement est notée γ. Dans le cas de la famille des cubiques centrés, 24 systèmes de glissements peuvent être définis. La figure (1.8) montre la position d'un système de glissement g par rapport au repère matériau. En annexe A, est donnée la définition du gradient des vitesses g à partir du gradient de la transformation F telle que (A.10) :

$$g = \dot{F}.F^{-1} \tag{1.1}$$

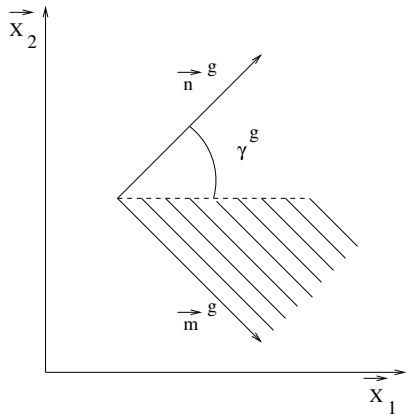


FIG. 1.8 – Orientation d'un système de glissement par rapport au repère matériau

De plus, le gradient de la transformation admet une décomposition multiplicative en une partie élastique F^e et une partie plastique F^p [Sid82] :

$$F = F^e.F^p \tag{1.2}$$

En combinant (1.1) et (1.2) les parties élastique et plastique du gradient des vitesses peuvent être déterminées :

$$\dot{F}.F^{-1} = \dot{F}^e.F^{e^{-1}} + \dot{F}^e.\dot{F}^p.F^{p^{-1}}.F^{e^{-1}} = g^e + g^p \tag{1.3}$$

La partie plastique du gradient des vitesses g^p peut s'exprimer à l'aide des vitesses de glissement de l'ensemble des systèmes h comme :

$$g^p = \sum_h \dot{\gamma}^h m^h \otimes n^h \tag{1.4}$$

La relation (1.4) donne donc le lien entre le taux de déformation plastique et la vitesse de glissement sur l'ensemble des systèmes. Le gradient de la vitesse g peut se décomposer en une partie symétrique d correspondant au taux de déformation total et une partie antisymétrique w correspondant au taux de rotation total comme :

$$g = d + w \tag{1.5}$$

d et w peuvent se décomposer, à leur tour, en une partie élastique (notée avec l'exposant e) et une partie plastique (notée avec l'exposant p) comme :

$$d = d^e + d^p \tag{1.6}$$

$$w = w^e + w^p \tag{1.7}$$

D'après les relations (1.5), (1.6), (1.7) et (1.4) il est possible d'écrire que :

$$d^p = \sum_g R^g \dot{\gamma}^g \tag{1.8}$$

$$w^p = \sum_g S^g \dot{\gamma}^g \tag{1.9}$$

Dans les relations (1.8) et (1.9) interviennent deux tenseurs R^g et S^g, appelés parties symétrique et antisymétrique du tenseur de Schmid, par système de glissement g. Ils peuvent se calculer à partir des vecteurs m et n de chaque système de glissement g comme :

$$R^g = \text{sym}\left(\vec{m}^g \otimes \vec{n}^g\right) \tag{1.10}$$

$$S^g = \text{antisym}\left(\vec{m}^g \otimes \vec{n}^g\right) \tag{1.11}$$

1.3.2 Détermination des systèmes actifs

La cission résolue τ et son taux par système de glissement g comme sont définis comme :

$$\tau^g = \sigma : R^g \tag{1.12}$$

$$\dot{\tau}^g = \hat{\sigma} : R^g \tag{1.13}$$

Dans (1.13) il a été nécessaire d'introduire la dérivée objective de la contrainte de Cauchy $\hat{\sigma}$ de façon à obtenir une écriture qui ne dépende pas du référentiel. En effet, dans le cadre des grandes déformations le tenseur gradient de la déformation F décrit la déformation mais aussi la rotation du milieu continu. Il faut donc s'affranchir de cette rotation pour avoir une loi de comportement qui ne dépende pas de l'observateur. Cette loi devra donc relier des grandeurs qui sont elles-mêmes objectives [Sid82]. Dans l'annexe A sont définies quelques dérivées objectives couramment utilisées. Ici, la dérivée corotationnelle de le contrainte de Cauchy est employée, elle est définie comme :

$$\hat{\sigma} = \dot{\sigma} - w^e.\sigma + \sigma.w^e \tag{1.14}$$

Cette dérivée est employée car elle suit la rotation du référentiel. Cependant, comme elle dépend essentiellement de la configuration de référence, le calcul se fait en lagrangien réactualisé c'est à dire qu'à chaque pas de calcul la configuration de référence sera la dernière configuration matérielle calculée.

La formulation classique de l'activité d'un système de glissement est définie par (1.15) :

$$\begin{array}{c} \tau^g < \tau_c^g \Rightarrow \dot{\gamma}^g = 0 \\ \tau^g = \tau_c^g \text{ et } \dot{\tau}^g < \dot{\tau}_c^g \Rightarrow \dot{\gamma}^g = 0 \\ \tau^g = \tau_c^g \text{ et } \dot{\tau}^g = \dot{\tau}_c^g \Rightarrow \dot{\gamma}^g \neq 0 \end{array} \tag{1.15}$$

Où τ_c^g est la cission critique pour le système de glissement g. Un système sera donc actif si les cissions résolue et critique ont les même valeurs et les mêmes taux. Il a été montré que plusieurs solutions aux équations (1.15) pouvaient exister en même temps [Fra84]. De nombreuses manières pour résoudre ces problèmes d'indétermination ont été développées, cela fait l'objet du paragraphe suivant.

1.3.3 Calcul de l'amplitude de glissement des systèmes actifs

Cette partie a pour but de présenter les différentes physiques afin de calculer la vitesse de glissement des systèmes actifs. Pour chacune de ces méthodes la formulation générale ainsi que les problèmes numériques qui leur sont inhérents et qui peuvent provoquer de grandes erreurs de calcul seront présentés. D'un point de vue thermodynamique, la vitesse de glissement peut être vue comme un flux dont la force motrice est la cission réduite.

Les lois viscoplastiques

Dans le cas de la viscoplasticité, une loi puissance est généralement choisie pour calculer directement l'activité d'un système de glissement [PBF+01]. La loi (1.15) est ainsi remplacée par :

$$\dot{\gamma}^g = \dot{\gamma}_0 \text{abs}\left(\frac{\tau^g}{\tau_c^g}\right)^n \text{signe}\left(\tau^g\right) \tag{1.16}$$

Où $\dot{\gamma}_0$ est une constante et n un paramètre de sensibilité à la vitesse dont la valeur est élevée. Cette modélisation donne de bons résultats en matière de prédiction du comportement, cependant la gamme de vitesse de déformation dans laquelle ce modèle est applicable reste très restreinte. Les paramètres introduits dans cette loi ont une signification physique difficile à interpréter. Pour remédier à cela et prendre en compte le fait que les mécanismes de déformation sont thermiquement activés une loi exponentielle, tirée de la théorie de l'activation thermique de la mobilité des dislocations vis, à été introduite [Koc76], [Ber02] :

$$\dot{\gamma}^g = \dot{\gamma}_0 \left(\frac{\tau^g}{\mu}\right)^2 \exp\left(\frac{-\Delta G}{kT}\left(1 - \left(\frac{\tau^g}{\tau_c^g}\right)^p\right)^q\right) \tag{1.17}$$

Où :

- μ est le module de cisaillement,
- $\frac{-\Delta G}{kT}$ est l'énergie d'activation pour franchir les barrières de Peirls,
- k est la constante de Boltzmann,
- T est la température absolue,
- p et q sont des constantes dont les valeurs sont situées dans un intervalle borné.

Cette autre modélisation permet de trouver de bons résultats dans une large gamme de vitesse de déformation.

Il faut aussi s'assurer que les lois (1.16) et (1.17) vérifient bien la formulation classique de l'activité des systèmes de glissement. Lorsque la cission résolue atteint la cission critique τ_c la vitesse de glissement calculée doit être très grande. A l'inverse si la cission résolue est faible devant la cission critique, la vitesse de glissement doit être nulle. Ces deux conditions imposent donc à l'exposant n de la loi (1.16) d'être grand. La figure (1.9) montre qu'avec une valeur de n élevée la vitesse de glissement est quasi nulle lorsque la cission résolue est faible et très grande lorsque celle-ci atteint la cission critique. En ce qui concerne la loi (1.17), elle vérifie bien les deux conditions précédemment citées si la constante p est positive. En effet, lorsque la cission résolue est faible l'exponentielle d'un nombre négatif (qui est très petite) est calculée. Inversement lorsque la cission résolue atteint la cission critique l'exponentielle d'un nombre positif (qui est grande) est calculée. Il est à noter qu'avec ce type de formulation, il n'y a pas de notion de systèmes actifs. Tous les systèmes sont actifs mais seulement quelques-uns auront une vitesse de glissement non négligeable. De plus, contrairement au cas élastoplastique présenté plus loin, les temps de calcul pour ces lois sont particulièrement faibles.

La loi élastoplastique

Les relations (1.15) introduisent les notions de systèmes potentiellement actifs qui vérifient $\tau^g = \tau_c^g$ ainsi que ceux réellement actifs qui vérifient $\tau^g = \tau_c^g$ et $\dot{\tau}^g = \dot{\tau}_c^g$. Il faut se donner un critère de sélection des systèmes effectivement actifs parmi ceux qui sont potentiellement actifs. C'est ce qui à conduit à introduire le principe de minimisation. Concrètement, il est supposé que la combinaison de systèmes qui sera choisie comme réellement active sera celle qui minimise

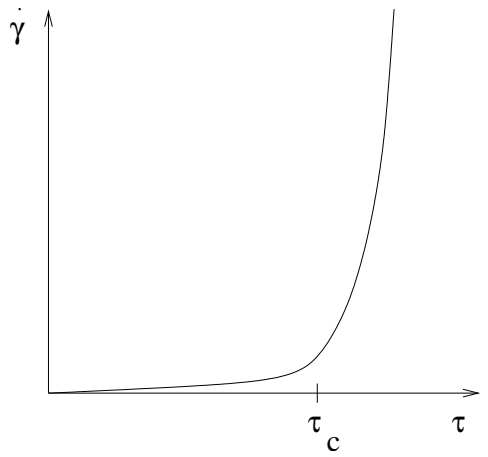


FIG. 1.9 – Loi puissance et vitesse de glissement

l'énergie de déformation. Franciosi [Fra84] définit ainsi, pour une combinaison de systèmes m, une énergie mécanique W^m comme :

$$W^m\left(d,\dot{\sigma}\right)=\dot{\sigma}^*:d-\dot{\sigma}:d^* \tag{1.18}$$

Ici d et σ correspondent au chargement imposé et d^* et σ^* au résultat du calcul en supposant que la combinaison de systèmes m est active. La combinaison de systèmes effectivement active sera donc celle, parmi toutes les combinaisons possibles, qui minimise cette énergie.

Au niveau numérique, il faut donc réaliser une analyse combinatoire : les systèmes sont considérés un par un, deux par deux, et cætera. Pour chaque cas, l'énergie de déformation est calculée et la combinaison de systèmes choisie sera celle qui en dissipe le moins. Le nombre de combinaison à tester est de $2^{n+1}-1$ si n est le nombre de systèmes vérifiant $\tau^g=\tau_c^g$, ce nombre peut vite devenir grand. Par exemple si $n=8$ il y a 1023 combinaisons à tester ! Cela risque donc d'entraîner des temps de calcul très importants.

La loi qui sera employée dans ce mémoire, inspirée de la viscoplasticité, sera présentée par la suite. Elle a la particularité d'introduire des fonctions de régularisation dans le but de transformer des lois à seuil en lois continues.

1.3.4 Principaux modèles de prédiction du comportement local

Cette partie a pour objet une revue bibliographique de quelques modélisation du comportement local. Il existe de très nombreux modèles c'est pourquoi la présentation sera limitée aux modèles dont les formulations sont très différentes de la modélisation adoptée et présentée dans la suite.

Le modèle de Cailletaud

Ce modèle consiste en une approche phénoménologique à l'échelle du système de glissement. Des notions d'écrouissage cinématique et isotrope à l'échelle locale seront ainsi introduites. Les variables internes seront ici l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope par système de glissement g notés respectivement x_g et r_g. La vitesse de glissement par système $\dot{\gamma}_g$ est donnée

par une loi puissance :

$$\dot{\gamma}_g = \left\langle \frac{\text{abs}\left(\tau_g - x_g\right) - r_g}{k} \right\rangle^n \text{sign}\left(\tau_g - x_g\right) \tag{1.19}$$

Où n et k sont des paramètres matériaux. $< y >= y$ si $y > 0$ et 0 dans les autres cas. La condition d'activation d'un système de glissement est donnée par :

$$\text{abs}\left(\tau_g - x_g\right) > r_g \tag{1.20}$$

L'évolution des variables internes est régie par les relations :

$$\dot{r}_g = h_{gh}\text{abs}\left(\dot{\gamma}_h\right),\ r_g\left(0\right) = \tau_0 \tag{1.21}$$

$$h_{gh} = g_{gh}k_1k_2\exp\left(-k_2v_h\right) \tag{1.22}$$

$$\dot{v}_g = \text{abs}\left(\dot{\gamma}_g\right),\ v_g\left(0\right) = 0 \tag{1.23}$$

$$\dot{x}_g = k_3\dot{\gamma}_g - k_4x_g\text{abs}\left(\dot{\gamma}_g\right),\ x_g\left(0\right) = \tau_0 \tag{1.24}$$

La matrice g_{gh} est la matrice d'écrouissage supposée constante, v_g est la déformation visco-plastique cumulée sur le système g et k_1, k_2, k_3 et k_4 sont des paramètres à identifier. Le principal avantage d'une telle modélisation est qu'elle nécessite de faibles temps de calcul par rapport aux approches micromécaniques exposées plus loin. Cependant, les paramètres introduits dans ce modèle phénoménologique sont des paramètres de calage qui ne sont pas des quantités physiques mesurables. De plus, la formulation est visco-plastique alors que le critère de perte de ductilité qui sera introduit par la suite n'est valable que dans le cas élastoplastique. C'est pour ces inconvénients majeurs que la loi locale ne sera pas définie à partir de cette approche.

Le modèle de Muller

Ce modèle a pour base physique la décomposition du grain en deux phases :
- Une phase molle avec l'exposant s pour soft et qui représente le cœur des cellules de dislocations,
- Une phase dure avec l'exposant h pour hard et qui représente les parois des cellules de dislocations.

La variable f qui représente la fraction volumique de la phase molle est introduite. Généralement f est choisie comme constante au cours de la déformation. Muller [Mul94] calcule la vitesse de glissement sur un système g comme une loi des mélanges appliquée aux deux phases en présence :

$$\dot{\gamma}_g = f\dot{\gamma}_g^s + \left(1 - f\right)\dot{\gamma}_g^h \tag{1.25}$$

Contrairement aux modèles plus classiques, celui de Muller introduit donc deux vitesses de glissement comme variables internes au niveau de chaque système de glissement. Par analogie aux vitesses de glissement, il est nécessaire d'introduire une cission critique pour la phase dure $\tau_{c\ g}^h$ et une pour la phase molle $\tau_{c\ g}^s$. Cette formulation permet de définir ainsi quatre matrices d'écrouissage alors que pour les approches plus classiques [AR77] il n'y en a qu'une :

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_{c\ g}^s &= H_{gh}^{ss}\dot{\gamma}_h^s + H_{gh}^{sh}\dot{\gamma}_i^h \\ \dot{\tau}_{c\ g}^h &= H_{gh}^{hs}\dot{\gamma}_h^s + H_{gh}^{hh}\dot{\gamma}_i^h \end{aligned} \tag{1.26}$$

Les matrices H^{ss} et H^{hh} sont appelées les matrices d'écrouissage local alors que H^{sh} et H^{hs} sont les matrices d'écrouissage non local. Dans ses travaux, Muller suppose que la forme des cellules

est fixe et leur orientation est donnée par le premier système de glissement qui s'active. Ensuite la transition d'échelles est réalisée grâce à la méthode autocohérente classique. Lemoine [Lem95] a développé un peu plus ce modèle en prenant en compte l'évolution de la microstructure. Il y est supposé que la forme et l'orientation des cellules de dislocations sont des variables internes. Ce modèle suppose donc qu'il y a une incompatibilité de la déformation plastique entre les parois et l'intérieur des cellules, ce qui semble inacceptable pour Peeters [Pee02]. Ce type de modélisation amène un très grand nombre de variables internes, chose qui peut être handicapante au niveau du temps de calcul. Enfin, du fait du grand nombre de variables internes, il y a beaucoup de paramètres à identifier, cela pouvant se révéler très ardu. Ces raisons ont donc poussé à choisir un autre modèle dans lequel le nombre de paramètres à identifier est plus faible qu'ici mais suffisant pour bien prendre en compte tous les phénomènes physiques de la déformation plastique.

Le modèle de Chenaoui et Sidoroff

Dans ce cas, les auteurs introduisent la notion de cristal cubique plan qui est défini comme soumis à une sollicitation plane convenablement choisie pour être compatible avec la symétrie du cristal [CSH00], [CFDS02]. Cette modélisation faite pour les cristaux cubiques faces centrées permet de se ramener à un cas plan au lieu du cas tridimensionnel classique. Ce modèle peut être décrit par une représentation géométrique simple (un polyèdre convexe) dont chacune des faces correspond à un ensemble de systèmes activés. Il a été montré [CFDS02] que chaque point de la surface de plasticité correspondait à l'activation d'un certain nombre de systèmes de glissement. Cependant, il existe des problèmes d'indétermination pour certaines configurations qui sont réglés en introduisant de la viscoplasticité et en faisant tendre son effet vers 0. Cette représentation, qui permet de simplifier grandement les calculs, n'étant pas étendue au cas général ne sera pas étudiée plus en détails ici.

Le modèle de Peeters

C'est une modélisation qui a pour but de modéliser très finement les phénomènes physiques de la déformation [PBT$^+$01], [PSK$^+$01], [PST$^+$01], [Pee02], [PKT$^+$02]. Les résultats donnés par ce modèle sont en très bon accord avec ceux de l'expérience. Contrairement aux autres modèles, ici il n'y a pas de matrice d'écrouissage. L'accent est surtout mis sur la description de l'organisation des dislocations. Les grandes lignes de ce modèles sont déduites à partir d'observations expérimentales. Aux vues des micrographies, la microstructure des dislocations peut être représentée par trois grandeurs :

- La densité de dislocations statistiquement stockées à l'intérieur des cellules, modélisée par un scalaire pour l'ensemble des systèmes et notée ρ.
- La densité de dislocations immobiles stockées dans les murs de dislocations, définie sur la famille de plans $\{110\}$, et notée ρ^{wd}.
- la densité de dislocations dites polarisées définie sur la famille de plans $\{110\}$notée ρ^{wp}

Le glissement des plans cristallins est supposé avoir lieu uniquement sur les familles $< 111 > \{110\}$ et $< 111 > \{112\}$

Evolution de la densité de dislocations immobiles dans les murs actuellement générés

La forme de cette loi est identique aux approches classiques. Il est supposé qu'il y a une ou deux familles de murs de cellules de dislocations. Ces murs de cellules sont constitués pour l'indice 1 par le plan contenant les deux systèmes ayant la plus grande vitesse de glissement

$\dot{\Gamma}$. Pour le deuxième indice est considéré le plan constitué avec les directions de glissement du système le plus actif et du troisième plus actif. Dans le cas où il n'y a pas de troisième système actif, seule la première famille de murs est prise en compte. Six familles de murs de dislocations peuvent ainsi être définies :

	Direction 1	Direction 2	Plan du mur
1	$[111]$	$[\bar{1}11]$	$(0\bar{1}1)$
2	$[111]$	$[1\bar{1}1]$	$(10\bar{1})$
3	$[111]$	$[11\bar{1}]$	$(\bar{1}10)$
4	$[\bar{1}11]$	$[1\bar{1}1]$	(110)
5	$[\bar{1}11]$	$[11\bar{1}]$	(101)
6	$[1\bar{1}1]$	$[11\bar{1}]$	(011)

(1.27)

Si Γ_A, Γ_B et Γ_C sont respectivement les vitesses de glissement des trois systèmes les plus actifs alors :

$$\dot{\rho}_1^{wd(hom)} = \frac{1}{b}\left(I^{wd}\sqrt{\rho_1^{wd}} - R^{wd}\rho_1^{wd}\right)\left(\dot{\Gamma}_B + \frac{\dot{\Gamma}_B}{\dot{\Gamma}_B + \dot{\Gamma}_C}\dot{\Gamma}_A\right) \tag{1.28}$$

$$\dot{\rho}_2^{wd(hom)} = \frac{1}{b}\left(I^{wd}\sqrt{\rho_2^{wd}} - R^{wd}\rho_2^{wd}\right)\left(\dot{\Gamma}_B + \frac{\dot{\Gamma}_C}{\dot{\Gamma}_B + \dot{\Gamma}_C}\dot{\Gamma}_A\right) \tag{1.29}$$

I^{wd} et R^{wd} sont des paramètres à identifier. Ces relations d'évolution ne sont valables que pour les murs générés au moment du calcul. Pour ceux qui ne le sont pas, l'évolution de la densité de dislocations sera définie par la suite.

Evolution de la densité de dislocations polarisées dans les murs actuellement générés

Le flux des dislocations du réseau se définit comme :

$$\Phi_i^{wp} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\dot{\gamma}_s}{b} m_s.n_i^w \tag{1.30}$$

Le vecteur n_i^w correspond au vecteur unitaire perpendiculaire au mur des dislocations. Les indices $i = 1, 2$ représentent les murs générés au pas actuel et les indices $i = 3, 4, 5, 6$ sont pour les anciens murs. Le vecteur m_s est la direction de glissement. La formulation de l'évolution de la densité de dislocations est :

$$\dot{\rho}_i^{wp} = \left(sign\left(\Phi_i^{wp}\right) I^{wp}\sqrt{\rho_i^{wd} + \mathrm{abs}\left(\rho_i^{wp}\right)} - R^{wp}\rho_i^{wp}\right)\mathrm{abs}\left(\Phi_i^{wp}\right) \tag{1.31}$$

Si un système de glissement est coplanaire au mur, alors il ne contribue pas au flux Φ_i^{wp} (le produit $m_s.n_i^w$ est nul). La loi (1.31) n'est valable, comme précédemment, que pour les murs actuellement générés. Pour les autres murs, les relations d'évolution sont données plus loin dans cette partie.

Densité de dislocations dans les murs non générés actuellement

L'annihilation homogène des dislocations déclenchée par les dislocations mobiles est définie grâce aux relations :

$$\dot{\rho}_i^{wd(hom)} = -\frac{R_{ncg}}{b}\rho_i^{wd(hom)}\left(\dot{\Gamma}_A + \dot{\Gamma}_B + \dot{\Gamma}_C\right) \tag{1.32}$$

$$\dot{\rho}_i^{wp} = -\frac{R_{ncg}}{b}\rho_i^{wp}\left(\dot{\Gamma}_A + \dot{\Gamma}_B + \dot{\Gamma}_C\right) \tag{1.33}$$

En posant :

$$\dot{\Gamma}_{new} = \dot{\Gamma}_A + \dot{\Gamma}_B + \dot{\Gamma}_C \tag{1.34}$$

Où R_{ncg} est un terme de restauration. Pour simuler l'effet des anciens murs de dislocations sur la formation des microbandes la loi suivante est introduite :

$$\dot{\rho}_i^{wd(cut-through)} = -\sqrt{\beta_1\Gamma_{new}}e^{\beta_1\Gamma_{new}}\rho_{i0}^{wd(hom)}\beta_2 \tag{1.35}$$

Où β_1 et β_2 sont des paramètres matériau. Au final, l'enlèvement des anciens murs de dislocations est la combinaison de ce qui est homogène combiné à l'effet des microbandes. Cela peut se mettre sous la forme :

$$\rho_i^{wd} = \rho_i^{wd(hom)} + \rho_i^{wd(cut-through)} \tag{1.36}$$

Evolution de la densité de dislocations dans les cellules

La loi d'évolution est semblable à (1.28) auquel l'effet dû au changement de trajet a été rajouté :

$$\dot{\rho} = \frac{1}{b}\left\langle (I\sqrt{\rho} - R\rho)\sum_{s=1}^{n}|\dot{\gamma}_s| - \psi R_2\rho\frac{\rho_{bausch}}{2\rho_{sat}^{wp}}\sum_{s=1}^{n}|\dot{\gamma}_s|\right\rangle \tag{1.37}$$

Le symbole $\langle y\rangle$ donne 0 si $y < 0$ et y si $y > 0$. Il y a trois cas possibles :

1. aucun flux n'est inversé alors $\psi = 0$
2. 1 flux est inversé $\psi = 1$ et $\rho_{baush} = \text{abs}\,(\rho_i^{wp})$
3. 2 flux sont inversés $\psi = 1$ et $\rho_{baush} = \text{abs}\,(\rho_1^{wp}) + \text{abs}\,(\rho_2^{wp})$

Le coefficient R_2 détermine l'importance de l'interaction de ces deux familles de dislocations sur les cellules. Le coefficient ρ_{sat}^{wp} est la valeur de saturation des dislocations polarisées. Quand le flux Φ_i^{wp} est inversé (changement de signe) alors les dislocations polarisées migrent vers le bord des murs et sont annihilées, (1.31) est remplacée par :

$$\dot{\rho}_i^{wp} = -R_{rev}\rho_i^{wp}\text{abs}\,(\Phi_i^{wp}) \tag{1.38}$$

Où R_{rev} est la vitesse d'annihilation des dislocations polarisées.

Cission critique

La cission critique τ_s^c par système de glissement s peut être définie en faisant intervenir la fraction volumique f des cellules comme :

$$\tau_s^c = \tau_0 + (1-f)\,\tau^{CB} + f\sum_{i=1}^{6}\left(\tau_{is}^{wp} + \tau_{is}^{wd}\right) \tag{1.39}$$

Avec :

- τ_0 cission critique initiale du cristal parfait,
- $\tau^{CB} = \alpha\mu b\sqrt{\rho}$ influence des dislocations statistiquement stockées,
- $\tau_{is}^{wp} = \alpha\mu b\left\langle\sqrt{\text{abs}\,(\rho_i^{wp})}m_s.n_i sign\,(\rho_i^{wp})\right\rangle$,
- $\tau_{is}^{wd} = \alpha\mu b\sqrt{\rho_i^{wd}}\text{abs}\,(m_s.n_i)$,

– $\tau_{is}^{CBB} = \tau_{is}^{wd} + \tau_{is}^{wp}$ est la contribution à l'écrouissage latent.

Ce modèle très riche donne d'excellents résultats. Cependant le nombre de paramètres à identifier est supérieur à dix, ce qui complique fortement le processus d'identification (il faut beaucoup d'essais expérimentaux dont certains sont difficiles et coûteux à mettre en œuvre).

Différentes approches permettant de modéliser le comportement monocristallin ont donc été présentées : deux approches relativement simplifiées qui sont les modèles de Cailletaud et celui de Chenaoui et Sidoroff ainsi que deux approches plus complexes qui sont les modèles de Muller et Peeters. Aucune de ces approches n'a été retenue pour diverses raisons :

- Le modèle de Cailletaud est un modèle phénoménologique dont les paramètres ne sont pas des quantités mesurables,
- Le modèle de Chenaoui et Sidoroff est bidimensionnel,
- Le modèle de Muller comporte un nombre extrêmement élevé de variables internes,
- Le modèle de Peeters nécessite d'identifier plus de 10 paramètres.

La partie suivante sera consacrée à la description d'une modélisation qui se situe entre ces deux extrêmes c'est à dire suffisamment simple pour identifier facilement tous les paramètres matériau introduits, mais suffisamment riche pour décrire correctement les mécanismes physiques de la déformation plastique.

1.3.5 Introduction de la matrice d'écrouissage et de l'écrouissage physique

Dans cette partie, le lien entre l'évolution de la cission critique $\dot{\tau}_c^g$ sur un système de glissement g et la vitesse de glissement plastique de l'ensemble des systèmes actifs va être donné. Pour cela, la loi d'évolution de la cission critique est supposée être de la forme :

$$\dot{\tau}_c^g = H^{gh}\dot{\gamma}^h \tag{1.40}$$

La matrice H est alors appelée matrice d'écrouissage. Différentes manières de calculer cette matrice ont été données. Soit elle peut être considérée comme constante sous la forme [Asa83a] :

$$H^{gh} = qh_0 + (1-q)h_0\delta_{gh} \tag{1.41}$$

Où q représente le ratio entre l'écrouissage latent et l'auto-écrouissage alors que h_0 représente le paramètre d'autoécrouissage. Cette représentation qui semble trop simpliste revient à supposer que, si un système est actif, alors il influera de la même manière sur tous les autres. Cette relation ne prend pas en compte le fait que l'évolution de la cission critique doit aussi être due à l'histoire du matériau et qu'elle doit arriver à saturation pour de grandes déformations. Pour rendre compte de cet effet, dans la relation (1.41) le paramètre h est pris comme variable. Son expression est dans ce cas [Asa83a], [PAN83] :

$$h = h_0 \frac{1}{\cosh^2\left(\dfrac{h_0\gamma}{\tau_s - \tau_0}\right)} \tag{1.42}$$

Où h_0 est le paramètre d'écrouissage initial, τ_0 et τ_s sont les valeurs initiales et de saturation de la cission critique, enfin le terme γ correspond à l'amplitude de glissement totale sur l'ensemble des systèmes actifs :

$$\gamma = \sum_{s=1}^{N} \mathrm{abs}\left(\gamma_s\right) \tag{1.43}$$

Physiquement, l'évolution de la cission critique doit connaître une évolution similaire à celle de la contrainte. Il faut donc obtenir des courbes d'écrouissage qui arrivent à saturation. C'est ce

que permet la relation (1.43) [Asa83a] : il y passage d'un écrouissage linéaire (1.42) vers un écrouissage saturant.

Le principal mécanisme physique responsable de l'écrouissage est les dislocations. Lors du chargement, trois phénomènes ont lieu pour les dislocations : création, stockage et annihilation. Les dislocations sont d'abord créées puis stockées. Lorsque celles-ci deviennent de plus en plus nombreuses, elles ont tendance à s'annihiler plus facilement du fait qu'elles sont plus proches les unes des autres. La combinaison de ces mécanismes aura donc pour effet que la densité de dislocations va arriver à saturation. Il est donc intéressant de modéliser ces mécanismes de manière à se rapprocher au maximum de la réalité physique. Franciosi [Fra84] a introduit l'effet des dislocations au niveau de la matrice d'écrouissage. Cette matrice est calculée dans la thèse de Berbenni [Ber02] à partir de travaux antérieurs réalisés entre autres par Franciosi [Fra84] et Tabourot [Tab92]. Seules les grandes lignes de ce calcul sont rappelées ici. La cission critique pour un système de glissement g peut se définir comme :

$$\tau_c^g = \hat{\tau^g} + \alpha\mu b\sqrt{a^{gh}\rho^h} \tag{1.44}$$

Où :

- $\hat{\tau^g}$ est la cission critique du cristal parfait sur le système de glissement g,
- b est la norme du vecteur de Bürgers,
- μ est le module de cisaillement,
- α est une constante qui peut se calculer en minimisant l'énergie libre de Gibbs d'une boucle de dislocation et qui ne dépend que du coefficient de Poisson [Aub98] dans le cas de l'élasticité isotrope. Sa valeur est proche de 0.48 pour les aciers,
- ρ^h est la densité de dislocation sur le système de glissement h,
- a^{gh} est la matrice d'anisotropie introduite par Franciosi [Fra84] puis modifiée par Hoc [Hoc99].

En différenciant par rapport au temps (sans sommation sur les indices g dans ce cas) :

$$\dot{\tau}_c^g = \frac{\alpha\mu b}{2\sqrt{a^{gk}\rho^k}} a^{gh}\dot{\rho}^h \tag{1.45}$$

Il est important de remarquer aussi que, théoriquement, il serait possible écrire :

$$\dot{\gamma}^g = \left(H^{hg}\right)^{-1}\dot{\tau}_c^h \tag{1.46}$$

Cependant, étant donné les différentes symétries de la structure cristalline cubique centrée, il y a des cas où cette matrice n'est plus inversible. C'est pourquoi le terme d'autoécrouissage est uniquement pris en compte dans le calcul de la vitesse de glissement (1.54) à l'inverse des termes d'écrouissage latent. Leurs effets sont cependant pris en compte dans le calcul de l'évolution de la cission critique comme montré dans (1.40). Il reste maintenant à introduire le lien entre le taux de densité de dislocations $\dot{\rho}^g$ créées sur un système g et la vitesse de glissement sur ce même système $\dot{\gamma}^g$. Pour cela, Essmann et Mughrabi [EM79] ont donné une loi linéaire de stockage des dislocations, qui a ensuite été modifiée pour prendre en compte le fait que des dislocations de signes opposés et très proches s'annihilent [Koc76]. Elle peut s'écrire sous la forme (sans sommation sur g dans ce cas) :

$$\dot{\rho}^g = \frac{1}{b}\left(\frac{1}{L^g} - 2y_c\rho^g\right)\dot{\gamma}^g \tag{1.47}$$

Où :

Paramètre	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
Valeur	1	1	1.15	1.15	1.05	1.1025	1.3	1.3	1.495

TAB. 1.1 – Valeurs des paramètres de la matrice d'interaction

- y_c est la distance d'annihilation critique des dislocations,
- L^g est le libre parcours moyen des dislocations sur le système g. Sa valeur est proche de la taille du grain au début de la déformation et tend vers la taille des cellules de dislocations pour de grandes déformations.

Le premier terme de (1.47) correspond à la partie stockage des dislocations et le second à leur annihilation. Cette annihilation est donc un terme d'adoucissement. Il est possible de lier la distance d'annihilation critique à la cission critique initiale τ_{c0} par la relation [EM79] :

$$y_c \simeq \frac{\mu b}{2\pi\tau_{c0}} \tag{1.48}$$

Cette équation n'est valable que pour un couple de dislocations vis de signes opposés qui s'annihilent si la contrainte dépasse celle nécessaire au mouvement des dislocations [EM79]. Elle donne un ordre de grandeur de la distance d'annihilation critique qu'il faut obtenir par identification. Quoiqu'il en soit, cette distance est toujours de l'ordre de quelques dizaines de vecteurs de Bürgers [LBZAMB05]. En ce qui concerne le libre parcours moyen des dislocations par système de glissement L^g, il peut être défini comme :

$$\frac{1}{L^g} = \frac{1}{D_{moy}} + \frac{\sqrt{\sum_{h\neq g}\rho^h}}{g_0} \tag{1.49}$$

Où :

- D_{moy} est le diamètre moyen du grain. Dans le cas d'un monocristal, la notion de diamètre de grain n'a pas de sens, aussi la valeur prise sera celle de la plus petite dimension du monocristal.
- g_0 est un paramètre de calage du modèle, il correspond au stockage des dislocations, plus celui-ci sera faible plus le nombre de dislocations stockées sera important.

Il faudra donc vérifier que la formule (1.49) permet d'obtenir des résultats proches des attentes. Cela sera fait plus loin dans ce chapitre lors de la validation qualitative du modèle. La matrice d'interaction a^{gh} doit aussi être explicitée. Elle est composée de 9 termes dont les valeurs sont données dans le tableau (1.1). Chacun de ces termes correspond au type d'interaction qu'il peut exister entre deux systèmes de glissement (si ces deux systèmes sont coplanaires ou non, colinéaires ou non, appartiennent ou non à la même famille). Ils peuvent être scindés en un groupe de systèmes de glissement facile et un autre de glissement difficile [Hoc99]. Les valeurs prises ici sont celles identifiées par Hoc [Hoc99] sur des aciers IF (sans interstitiels). Elles seront considérées comme des constantes pour tous les aciers étudiés dans ce mémoire. La numérotation employée pour différencier les 24 systèmes de glissements est donnée dans le tableau (1.2). Le tableau (1.3) donne la forme de la matrice d'interaction où les valeurs de 1 à 24 indiquent le numéro du système de glissement. Les relations (1.47) et (1.45) peuvent être combinées sous la forme (1.40) pour obtenir l'expression de la matrice d'écrouissage qui est (sans sommation sur l'indice h) :

$$H^{gh} = \frac{\alpha\mu}{2\sqrt{a^{gk}\rho^k}} a^{gh}\left(\frac{1}{L^h} - 2y_c\rho^h\right) \tag{1.50}$$

Système	n	m	Système	n	m	Système	n	m
1	$\langle 111\rangle$	$[1\bar{1}0]$	9	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[01\bar{1}]$	17	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[121]$
2	$\langle 111\rangle$	$[10\bar{1}]$	10	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[1\bar{1}2]$	18	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[21\bar{1}]$
3	$\langle 111\rangle$	$[01\bar{1}]$	11	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[12\bar{1}]$	19	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[1\bar{1}0]$
4	$\langle 111\rangle$	$[11\bar{2}]$	12	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[211]$	20	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[101]$
5	$\langle 111\rangle$	$[1\bar{2}1]$	13	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[110]$	21	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[011]$
6	$\langle 111\rangle$	$[\bar{2}11]$	14	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[10\bar{1}]$	22	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[112]$
7	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[110]$	15	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[011]$	23	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[\bar{1}12]$
8	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[101]$	16	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[\bar{1}12]$	24	$\langle 11\bar{1}\rangle$	$[2\bar{1}1]$

TAB. 1.2 – Numérotations des systèmes de glissement dans le cas de deux familles de systèmes

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	a_0	a_1	a_1	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_2	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
2	a_1	a_0	a_1	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_2	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
3	a_1	a_1	a_0	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_2	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
4	a_4	a_4	a_4	a_6	a_7	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
5	a_4	a_4	a_4	a_7	a_6	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
6	a_4	a_4	a_4	a_7	a_7	a_6	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
7	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_0	a_1	a_1	a_4	a_4	a_4	a_2	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
8	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_1	a_0	a_1	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
9	a_3	a_3	a_2	a_5	a_5	a_5	a_1	a_1	a_0	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
10	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_6	a_7	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
11	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_6	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
12	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_7	a_6	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
13	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_2	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_0	a_1	a_1	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
14	a_3	a_2	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_1	a_0	a_1	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5
15	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_1	a_1	a_0	a_4	a_4	a_4	a_3	a_3	a_2	a_5	a_5	a_5
16	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_6	a_7	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
17	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_6	a_7	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
18	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_7	a_6	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8
19	a_2	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_0	a_1	a_1	a_4	a_4	a_4
20	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_2	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_1	a_0	a_1	a_4	a_4	a_4
21	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_3	a_5	a_5	a_5	a_3	a_3	a_2	a_5	a_5	a_5	a_1	a_1	a_0	a_4	a_4	a_4
22	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_6	a_7	a_7
23	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_6	a_7
24	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_5	a_5	a_5	a_8	a_8	a_8	a_4	a_4	a_4	a_7	a_7	a_6

TAB. 1.3 – Forme de la matrice d'interaction

1.4 Modélisation adoptée pour le comportement du monocristal

Les hypothèses adoptées pour modéliser le comportement monocristallin sont les suivantes :
- Le calcul se fait dans cadre des grandes déformations et les équations sont écrites en lagrangien réactualisé (voir annexe A).
- Les déformations élastiques restent faibles devant les déformations totales (mais pas forcément leur taux).
- La déformation plastique est uniquement due au glissement des plans cristallins. Les autres modes de déformations tels que le maclage ou la transformation de phase ne sont pas pris en compte.
- Le comportement est élastoplastique, donc ne dépend pas du temps physique.
- Le lien entre le gradient des vitesses g et l'incrément de la contrainte nominale $\dot{n}$ (définie en annexe A) est donné par l'introduction un tenseur d'ordre 4 noté l sous la forme :

$$\dot{n} = l : g \text{ et } g = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{1.51}$$

La description du modèle est basée sur des travaux menés notamment par Asaro ou Nemat-Nasser à partir de la fin des années 1970 [AR77], [Asa83a], [INN83]. Puis elle est complétée avec les avancées réalisées ces dernières années dans ce domaine [Ber02], [Hoc99].

1.4.1 La loi pseudo-viscoplastique

Il serait intéressant d'avoir une loi qui ait les avantages de la viscoplasticité c'est à dire facile et rapide à utiliser tout en donnant les mêmes résultats que les modèles de référence élastoplastiques. Il est possible, par exemple, de s'inspirer de ce qui à été fait en viscoplasticité pour le transposer à l'élastoplasticité. En viscoplasticité la vitesse de glissement est reliée à la cission résolue par une fonction k fortement non linéaire par :

$$\dot{\gamma}^g = k\left(\tau^g\right)\tau^g \tag{1.52}$$

Pour utiliser une formulation indépendante du temps, il faudrait avoir une relation de la forme :

$$\dot{\gamma}^g = k^g\left(\tau^g, \tau_c^g\right)\dot{\tau}^g \tag{1.53}$$

Contrairement au cas viscoplastique, dans (1.53) les vitesses sont reliées entre elles, il y a donc indépendance vis à vis du temps physique. La fonction k^g doit vérifier certaines propriétés qui peuvent être déduites d'après (1.15) :
- k^g doit avoir une valeur nulle ou très proche de 0 si la cission résolue τ^g est inférieure à la cission critique τ_c^g,
- k^g doit rester nul ou proche de 0 lors d'une décharge même si la cission résolue reste proche de la cission critique
- k^g doit permettre la description correcte de l'écrouissage lorsque la cission résolue est proche de la cission critique et que la matériau est chargé,
- Enfin k^g doit être nul si la cission résolue est négative de manière à ne calculer que des vitesses de glissement positives. Il faudra donc définir, pour chaque système de glissement, deux sens de glissement.

Il est possible de choisir plusieurs types pour les fonctions de régularisation (exponentielle, tangente hyperbolique, etc..). La formulation adoptée est la suivante [LBZAMB05] :

$$k^g = \frac{1}{H^{gg}}\frac{1}{2}\left(1+\tanh\left(k_0\tau^g\right)\right)\frac{1}{2}\left(1+\tanh\left(k_1\left(\frac{\tau^g}{\tau_c^g}-1\right)\right)\right)\frac{1}{2}\left(1+\tanh\left(k_2\dot{\tau}^g\right)\right) \tag{1.54}$$

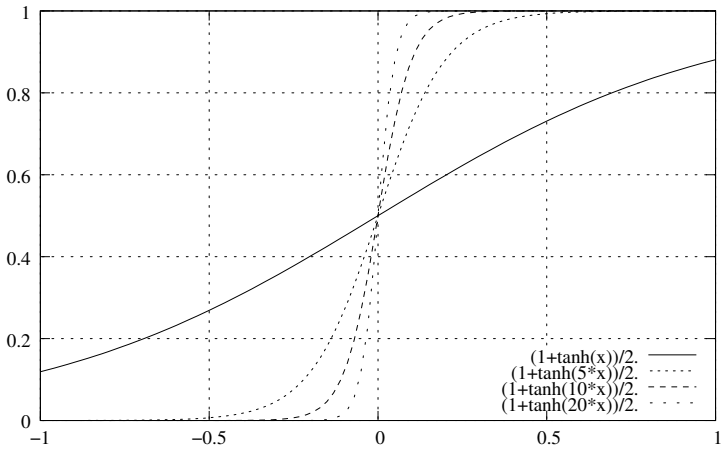


FIG. 1.10 – Influence du paramètre numérique k sur la loi tanh

Le paramètre H^{gg} est le terme d'autoécrouissage, il sera défini par la suite dans la matrice d'écrouissage. L'écrouissage latent sera, quant à lui, pris en compte dans l'évolution de la cission critique τ_c^g avec la densité de dislocations.

Il faut maintenant vérifier que l'expression (1.54) donne les mêmes résultats qu'une approche classique. Qualitativement, il est possible de remarquer que :

- Le premier terme de (1.54) est nul si la cission résolue est négative et vaut 1 si celle-ci est positive. Ceci est introduit de façon à ne définir que des vitesses de glissement positives. Il faudra donc, dans chaque cas, dédoubler le nombre de systèmes de glissement en définissant les deux sens de glissement.
- Le second terme vérifie que la cission résolue atteint la cission critique c'est à dire que la contrainte est située sur la surface de charge. Ce terme vaudra donc 0 si elle est à l'intérieur de la surface et 1 si elle se situe sur sa frontière.
- Le dernier terme vérifie si le matériau est en charge. En effet, pour qu'un système soit réellement actif, il faut que la cission résolue atteigne la cission critique et que son taux atteigne celui de la cission critique ce qui est équivalent à vérifier que le matériau est en charge.

Ces résultats n'ont qu'un sens qualitatif, il faut, de plus, vérifier que cette loi permet d'activer les "bons" systèmes de glissement. Une comparaison sera faite plus loin dans ce chapitre avec le modèle de Taylor pour des trajets de cisaillement d'après l'article de Nesterova et al. [NBT01] pour valider l'introduction de (1.54).

Il reste à donner les valeurs des paramètres purement numériques k_0, k_1 et k_2. Pour cela, il faut faire une étude paramétrique afin de modéliser au mieux un seuil lorsque les valeurs de la fonction sont proches de 0. La figure (1.10) illustre l'influence des paramètres numériques sur le résultat. Sur cette figure il est bien montré que, plus le paramètre k a une valeur importante, plus la pente à l'origine sera grande. Mais, si sa valeur est trop élevée il y a le risque de tomber dans des problèmes numériques inhérents à la loi elle-même. En prenant en compte toutes ces considérations, les paramètres numériques auront dans la suite comme valeurs :

- 1 pour k_0 et k_2 car multipliés par des termes de l'ordre d'une cission, donc potentiellement grands,
- 20 pour k_1 car multiplié par un terme plus petit que 1 et parfois proche de 0.

1.4.2 Vitesse de glissement des systèmes actifs

Dans cette partie, le lien qui existe entre la vitesse de glissement sur un système $\dot{\gamma}^g$ et ce qui est imposé comme chargement est donné. Lorsqu'un système est actif (sans sommation sur l'indice g dans ce cas) :

$$\dot{\gamma}^g = k^g \hat{\sigma} : R^g \tag{1.55}$$

De plus, la notation suivante est introduite :

$$R'^g = R^g k^g \tag{1.56}$$

La loi d'élasticité dans le cadre des grandes déformations s'écrit [Sid82] :

$$\hat{\sigma} = C : d^e - \sigma \text{ trace}\,(d) \tag{1.57}$$

Où C définit le tenseur d'élasticité. Le produit de l'équation (1.57) par R'^h donne :

$$R'^h : \hat{\sigma} = R'^h : (C : d^e - \sigma \text{ trace}\,(d)) \tag{1.58}$$

En utilisant le fait que la déformation plastique se fait à volume constant, c'est à dire trace$(d^p) = 0$, il est possible d'écrire que :

$$\text{trace}\,(d) = \text{trace}\,(d^e) + \text{trace}\,(d^p) = \text{trace}\,(d^e) \tag{1.59}$$

En combinant (1.53) et (1.58) le résultat suivant est obtenu :

$$\dot{\gamma}^h + R'^h : \sigma \text{ trace}\,(d^e) = R'^h : C : (d - d^p) \tag{1.60}$$

En combinant (1.60) et (1.59) alors :

$$\dot{\gamma}^h + R'^h : \sigma \text{ trace}\,(d) = R'^h : C : (d - d^p) \tag{1.61}$$

En introduisant (1.8) dans (1.61) il est possible de déduire que :

$$\left(\delta_{hg} + R'^h : C : R^g\right) \dot{\gamma}^h = R'^g : (C : d - \sigma \otimes \ \delta : d) \tag{1.62}$$

En posant :

$$M_{gh} = \left(\delta_{hg} + R'^h : C : R^g\right)^{-1} \tag{1.63}$$

Finalement le résultat suivant est obtenu :

$$\dot{\gamma}^g = M_{gh} R'^h : (C - \sigma \otimes \delta) : d \tag{1.64}$$

1.4.3 Loi de comportement élastoplastique pour le monocristal

Le lien entre la dérivée de la contrainte nominale $\dot{n}$ et la dérivée corotationnelle de la contrainte de Cauchy $\hat{\sigma}$ s'écrit :

$$\dot{n} = \hat{\sigma} - w^p.\sigma + \sigma.w^p + \sigma \text{ trace}\,(d) - d.\sigma - \sigma.w \tag{1.65}$$

En intégrant la loi d'élasticité dans l'équation précédente la relation suivante est obtenue :

$$\dot{n} = [C : d - d.\sigma - \sigma.w] + [-C : d^p - w^p.\sigma + \sigma.w^p] \tag{1.66}$$

En remarquant que :

$$\begin{aligned} C_{ijkl}d_{kl} &= \frac{1}{2}\left(C_{ijkl}d_{kl} + C_{ijlk}d_{kl}\right) = C_{ijkl}g_{kl} \\ d_{ik}\sigma_{kj} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{ik}\delta_{lm} + \delta_{il}\delta_{km}\right)\sigma_{mj}g_{kl} = A_1.\sigma : g \\ w_{jk}\sigma_{ki} &= \frac{1}{2}\left(\delta_{jk}\delta_{lm} - \delta_{jl}\delta_{km}\right)\sigma_{mi}g_{kl} = A_2.\sigma : g \end{aligned} \tag{1.67}$$

L'équation (1.66) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \left[C - A_1.\sigma - A_2.\sigma\right] : g \\ -\left[C : R^g + S^g.\sigma - \sigma.S^g\right]&\left[\delta_{hg} + R'^h : C : R^g\right]^{-1} : R'^h : \left[C - \sigma \otimes \delta\right] : d \end{aligned} \tag{1.68}$$

Les tenseurs A_1 et A_2 sont définis grâce à (1.67). En utilisant les symétries sur les tenseurs C et δ il est possible d'écrire que :

$$\left[C - \sigma \otimes \delta\right] : d = \left[C - \sigma \otimes \delta\right] : g \tag{1.69}$$

Ce qui permet d'arriver finalement à :

$$\begin{aligned} \dot{n} &= \left[C - A_1.\sigma - A_2.\sigma\right] : g \\ -\left[C : R^g + S^g.\sigma - \sigma.S^g\right]&\left[\delta_{hg} + R'^h : C : R^g\right]^{-1} : R'^h : \left[C - \sigma \otimes \delta\right] : g \end{aligned} \tag{1.70}$$

L'expression du module tangent l est alors donnée par :

$$\begin{aligned} l &= \left[C - A_1.\sigma - A_2.\sigma\right] \\ -\left[C : R^g + S^g.\sigma - \sigma.S^g\right]&\left[\delta_{hg} + R'^h : C : R^g\right]^{-1} : R'^h : \left[C - \sigma \otimes \delta\right] \end{aligned} \tag{1.71}$$

L'expression du module tangent élastoplastique en grandes déformations a donc été obtenue. La première ligne de (1.71) peut être vue comme la partie élastique du module tangent où il y a l'apparition de termes supplémentaires par rapport aux petites déformations. La seconde ligne, quant à elle, correspond à la partie plastique du comportement. Les termes supplémentaires liés à la formulation en grandes déformations sont ceux où interviennent la partie antisymétrique du tenseur de Schmid S et le produit $\otimes$. Ces termes, tout comme les expressions $A_1.\sigma$ et $A_2.\sigma$, sont donc des termes d'adoucissement pouvant avoir un impact sur la limite de ductilité qui sera étudiée au chapitre 3. Il est à noter que, du fait de la formulation en grandes déformations, ce tenseur ne possède pas de symétries.

Il reste maintenant à définir l'évolution des variables internes ce qui fera l'objet du prochain paragraphe. Les différents facteurs qui conduisent à de l'adoucissement et donc à la limite de ductilité introduits au niveau de la loi locale seront ensuite discutés. Enfin la comparaison des résultats obtenus avec la modélisation proposée sera réalisée sur plusieurs matériaux pour des chargements simples et complexes.

1.4.4 Evolution des variables internes

Angles d'Euler

L'orientation d'un monocristal peut être définie dans l'espace grâce à un triplet d'angles appelés angles d'Euler [HPL78]. Ces trois angles sont notés φ_1, ϕ et φ_2. Pour définir la position du repère monocristallin par rapport au repère du matériau, il est nécessaire d'effectuer trois rotations [Cle80] à partir du repère décrit par les directions normales (DN), de laminage (DL) et transverse (DT) :

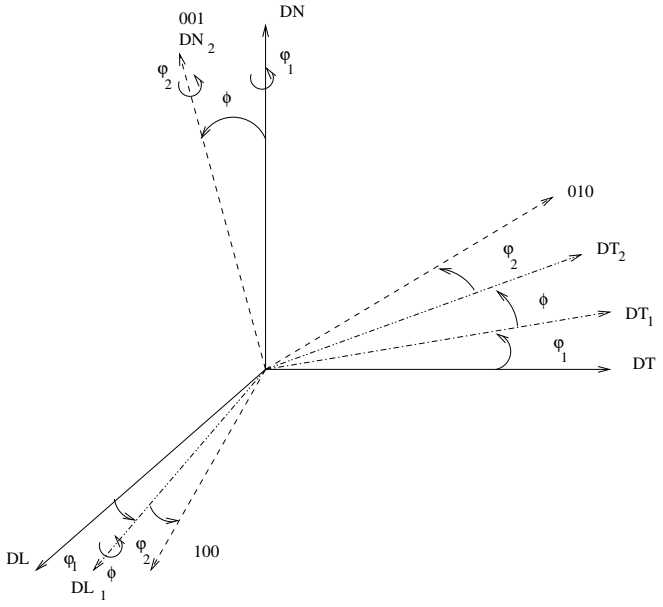


FIG. 1.11 – Définition des angles d'Euler

- Une rotation d'angle φ_1 autour de la direction normale DN qui crée le repère 1,
- Puis une rotation d'angle ϕ autour de la nouvelle direction de laminage du repère 1 DL_1 qui crée le repère 2,
- Enfin, une rotation d'angle φ_2 autour de la direction normale du repère 2 DN_2.

Ces trois opérations peuvent être représentées par la figure (1.11) tirée de Hansen et al. [HPL78], le repère du cristal est représenté grâce aux directions [001], [010] et [100]. La matrice de passage P du repère local vers le repère global a alors pour expression :

$$P = \begin{bmatrix} \cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2\cos\phi & \cos\varphi_2\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2\cos\varphi_1\cos\phi & \sin\varphi_2\sin\phi \\ -\cos\varphi_1\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1\cos\varphi_2\cos\phi & -\sin\varphi_1\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1\cos\varphi_2\cos\phi & \cos\varphi_2\sin\phi \\ \sin\varphi_1\sin\phi & -\cos\varphi_1\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \tag{1.72}$$

De plus la rotation du cristal est supposée être uniquement due à la partie élastique du taux de rotation imposé w^e [INN83], [NBT01]. La loi d'évolution d'un vecteur s peut ainsi s'écrire [INN83] :

$$\dot{s} = w^e.s \tag{1.73}$$

En combinant (1.72) et (1.73), les lois d'évolution de ces trois angles sont les suivantes [NBT01] :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -w^e_{12} - \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\left(w^e_{13}\cos\varphi_1 + w^e_{23}\sin\varphi_1\right) \\ \dot{\phi} &= w^e_{23}\cos\varphi_1 - w^e_{13}\sin\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= \frac{1}{\sin\phi}\left(w^e_{13}\cos\varphi_1 + w^e_{23}\sin\varphi_1\right) \end{aligned} \tag{1.74}$$

Il y a cependant un problème d'indétermination qui est engendré dans le cas où ϕ est nul. En effet, dans ce cas-là, la décomposition en angles d'Euler n'est plus unique et il n'est plus possible

de calculer leurs évolutions. Les lois d'évolution seront alors choisies comme :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_1 &= -\frac{w_{12}^e}{2} \\ \dot{\phi} &= w_{23}^e \cos\varphi_1 - w_{13}^e \sin\varphi_1 \\ \dot{\varphi}_2 &= -\frac{w_{12}^e}{2} \end{aligned} \tag{1.75}$$

Gradient de la transformation

Il est nécessaire de connaître au cours du chargement l'évolution de la déformation qui est liée à celle du gradient de la transformation (cf. Annexe A). Il y est donné la relation :

$$g = \dot{F}.F^{-1} \tag{1.76}$$

Ce qui est imposé au monocristal c'est g et il faut calculer l'évolution de F. A partir de (1.76) la relation suivante peut être déduite :

$$\dot{F} = g.F \tag{1.77}$$

1.4.5 Différentes voies d'adoucissement

Dans ce mémoire à la limite de ductilité des aciers est étudiée, il est donc important de connaître les différents facteurs et phénomènes qui conduisent à de l'adoucissement. Au niveau de la loi locale il a été montré que l'adoucissement pouvait être provoqué par :

- Les termes liés aux grandes déformations dans l'expression du module tangent,
- Le terme d'annihilation des dislocations,
- L'évolution des angles d'Euler.

1.4.6 Algorithme de calcul et méthode de résolution

Par souci de simplicité, le choix d'une intégration dite explicite a été fait. A chaque pas de calcul les variables y_i (où i varie de 1 au nombre de variables à calculer) sont réactualisées grâce à un schéma de la forme :

$$y_i\left(t+\Delta t\right) = y_i\left(t\right) + \Delta y_i \tag{1.78}$$

Il existe plusieurs façons de calculer Δy_i, les méthodes les plus utilisées sont les schémas d'Euler et de Runge-Kutta détaillés en Annexe B. Comme montré dans cette annexe, le schéma de Runge-Kutta d'ordre 4 donne des résultats qui ne dépendent presque pas de la taille du pas de calcul à l'inverse du schéma classique Eulérien. La précision du schéma Runge-Kutta 4 est celle du schéma Eulérien à la puissance 4. Par exemple, si la précision en Euler est de 10^{-2} alors elle sera en Runge-Kutta de 10^{-8} pour un même pas de calcul. Il paraît donc possible de faire des calculs avec de grands pas afin de gagner du temps tout en restant suffisamment précis.

En plus d'intégrer la loi de comportement grâce à une méthode performante, il est possible d'adapter le pas de calcul de manière à faire des petits pas là où il y a des brusques changements de pentes et autoriser de grands pas lorsque la pente évolue peu. Les difficultés numériques auront lieu lors du passage de l'élasticité à la plasticité lors de chargements simples, et pour les chargements complexes lorsque la plastification a lieu à nouveau (essai Bauschinger par exemple). Pour remédier à cela, il est possible de faire un calcul de prédiction dans lequel est vérifié si la contrainte atteinte en fin de pas sort de la surface de charge au début du pas et si, en même temps, l'incrément de contrainte est grand. C'est à ce moment là, en effet, qu'il y a le plus de risque d'instabilité numérique (cf. Annexe B). En conséquence, si ces deux conditions sont vérifiées au

Paramètres	τ_{c0}	ρ_0	φ_{1_0}	ϕ_0	φ_{2_0}	g_0	y_c	D
Valeur	100 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	20°	40°	60°	120	1 nm	1 mm

TAB. 1.4 – Paramètres pour les résultats qualitatifs

Système	n	m	Système	n	m	Système	n	m
1	$\langle 111\rangle$	$[1\bar{1}0]$	5	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[101]$	9	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[011]$
2	$\langle 111\rangle$	$[10\bar{1}]$	6	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[01\bar{1}]$	10	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[1\bar{1}0]$
3	$\langle 111\rangle$	$[01\bar{1}]$	7	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[110]$	11	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[101]$
4	$\langle\bar{1}11\rangle$	$[110]$	8	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[10\bar{1}]$	12	$\langle 1\bar{1}1\rangle$	$[011]$

TAB. 1.5 – Numérotations des systèmes de glissement pour une famille

même moment, le pas de calcul est diminué. La figure (1.12) donne l'algorithme employé ici pour intégrer la loi locale.

Maintenant que le modèle proposé est entièrement défini, il faut tout d'abord vérifier que de bons résultats qualitatifs en matière d'évolution des variables internes telles que la densité de dislocations ou le nombre et la nature des systèmes de glissement sont obtenus. Ensuite, la validation quantitative sera faite en comparant les simulations numériques à des résultats expérimentaux tirés de la littérature.

1.5 Résultats préliminaires

Dans cette partie, l'évolution qualitative des variables internes va être étudiée et comparée aux attentes. Pour cela est défini un jeu de paramètres proches des paramètres identifiés pour les différents aciers étudiés dans ce mémoire ainsi qu'un chargement. Les paramètres sont donnés dans le tableau (1.4), ce sont les mêmes que ceux de l'annexe B. La première chose à vérifier est l'activation des systèmes de glissement. Pour cela, les résultats obtenus par Nesterova et al. [NBT01] serviront de référence. Les auteurs ont utilisé le modèle de Taylor (qui est considéré comme une référence) pour déterminer les systèmes actifs. Ils ont, de plus, pris en compte une seule famille de systèmes de glissement à savoir $\langle 111\rangle < 110 >$. La numérotation de ces systèmes est donnée dans le tableau (1.5). Le tableau (1.6) montre que, dans chacun des cas testés, les systèmes majeurs actifs sont les mêmes pour les deux approches. Cependant dans un des cas, un des systèmes mineurs prédit par le modèle de Taylor n'est pas prédit par le modèle proposé. Cette différence peut être imputée au fait que l'activation des systèmes dépend non seulement de l'orientation cristallographique mais aussi de la matrice d'interaction entre systèmes de glissement. Cette matrice n'étant pas explicitement donnée dans [NBT01] cela peut expliquer l'erreur. Il y a, dans le modèle proposé, des systèmes dits résiduels. Il sont appelés ainsi car leur taux de glissement $\dot{\gamma}$ est au moins 100 fois plus faible que celui des systèmes majeurs et mineurs. Ces systèmes supplémentaires sont dus à l'introduction de la loi tangente hyperbolique qui est une fonction continue utilisée en lieu et place d'un seuil. Cela est assez similaire à l'élasto-visco-plasticité dans laquelle tous les systèmes sont actifs mais seulement quelques-uns ont des

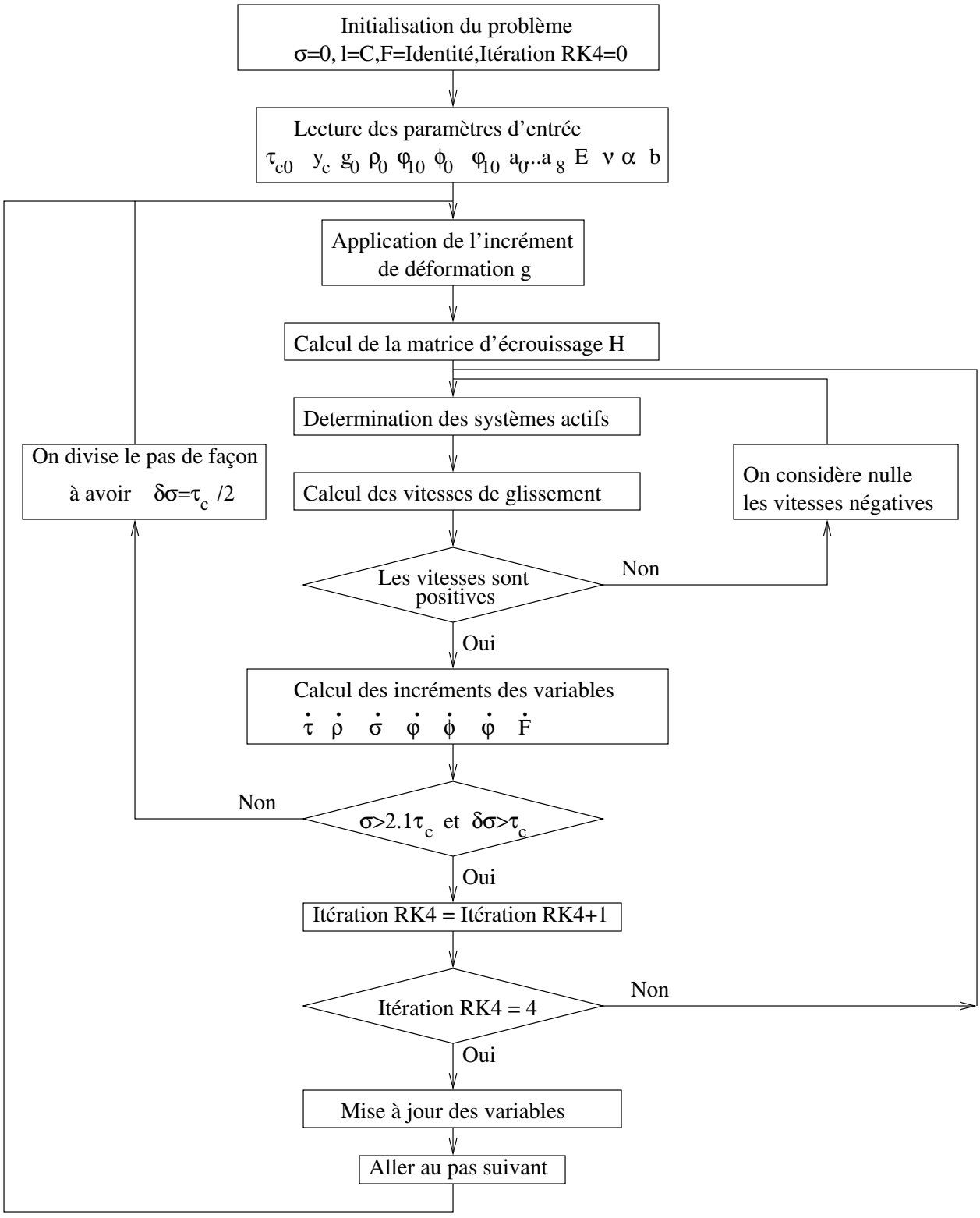


FIG. 1.12 – Algorithme d'intégration de la loi locale

Convention de laminage	Systèmes majeurs [NBT01]	Systèmes mineurs [NBT01]	Systèmes majeurs (modèle proposé)	Systèmes mineurs (modèle proposé)	Systèmes résiduels (modèle proposé)
(111) $[1\bar{2}1]$	8	2	8	2	1,4,6,7,9,10,12
(111) $[1\bar{1}0]$	10	1	10	1	3,5,6,8,11,12
(111) $[14\bar{1}5]$	10,8	1,2	10,8	1,2	3,5,6,7,12
(111) $[11\bar{5}11]$	6,8	3, 11	6,8	3	4,7,9
(001) [100]	2,3,5,6,8,9,11,12	Aucun	2,3,5,6,8,9,11,12	Aucun	Aucun

TAB. 1.6 – Comparaison entre les systèmes de glissement actifs détectés par le modèle proposé et ceux donnés dans la littérature

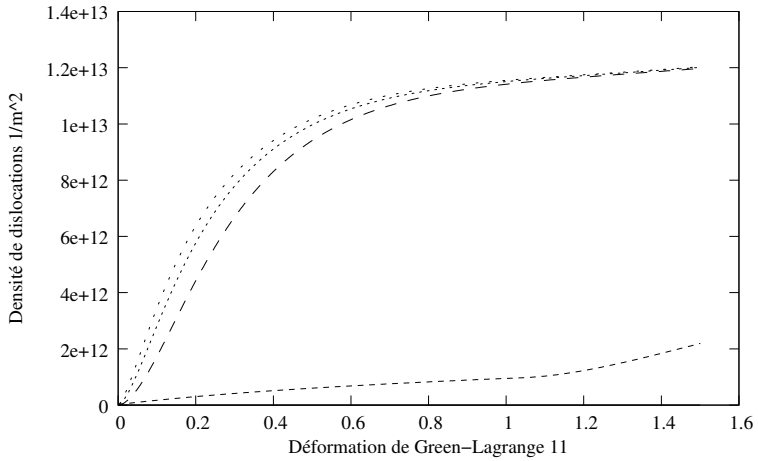


FIG. 1.13 – Evolution de la densité de dislocation lors d'un essai de laminage

amplitudes de glissement non négligeables. D'une manière générale il est possible de dire que l'utilisation d'une loi continue à la place d'une loi à seuil permet de détecter les "bons" systèmes de glissement.

Maintenant l'accent va être mis sur l'étude de l'évolution des variables propres au monocristal à savoir la densité de dislocations, le libre parcours moyen des dislocations, la cission critique et l'orientation cristallographique. La figure (1.13) présente l'évolution de la densité de dislocations lors d'un essai de laminage. L'évolution est représentée pour l'ensemble des systèmes activés au cours de la déformation ainsi que pour un des systèmes non actifs. Sur cette figure, l'accroissement de la densité de dislocations est très rapide au début du chargement puis tend à se stabiliser vers une valeur seuil. Ces résultats sont cohérents avec ceux obtenus par Peeters et al. [PBT$^+$01] pour le modèle de stockage et d'annihilation des dislocations détaillé au début de ce chapitre. De plus, la valeur maximale que peut atteindre la densité de dislocations peut être calculée. C'est lorsqu'il n'est plus possible d'en stocker soit $\dot{\rho} = 0$. Ici, les variations des densités de dislocations sont dépendantes les unes des autres. Comme la valeur seuil ne peut pas être calculée directement, d'après la figure (1.13) il est supposé que quatre systèmes de glissement sont activés de la même

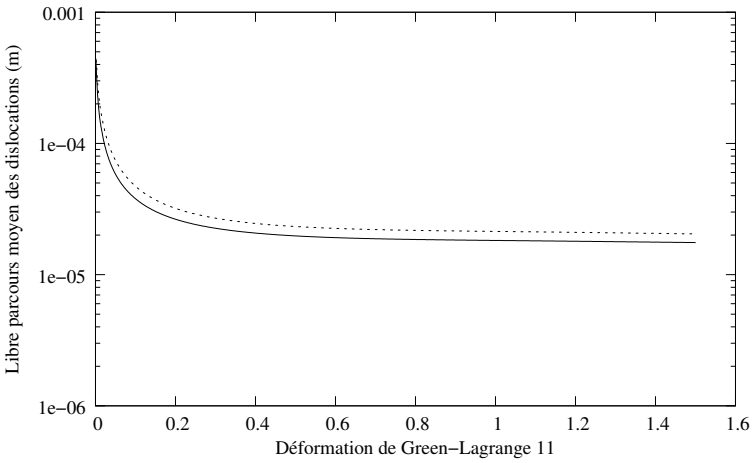


FIG. 1.14 – Evolution du libre parcours moyen des dislocations lors d'un essai de laminage

manière et que chaque système possède la même densité de dislocations. Ainsi :

$$\dot{\rho}_g = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{L^g} - 2y_c\rho^g = 0 \tag{1.79}$$

En combinant cette hypothèse et (1.49), le libre parcours moyen des dislocations sur le système actif g peut être calculé comme :

$$\frac{1}{L^g} \approx \frac{1}{D_{moy}} + \frac{\sqrt{3\rho^g}}{g_0} \tag{1.80}$$

Il faut donc résoudre une équation du second degré et le résultat suivant est obtenu :

$$\rho^g_{max} = \frac{1}{8y_c^2}\left(\frac{3}{g_0^2} - \frac{4y_c}{D_{moy}} + \frac{3}{g_0}\sqrt{\frac{3}{g_0^2} - \frac{8y_c}{D_{moy}}}\right) \approx 1.35 * 10^{13} m^{-2} \tag{1.81}$$

Le résultat trouvé est très proche de la valeur seuil calculée numériquement. La différence provient de l'hypothèse selon laquelle les densités de dislocations sur les quatre systèmes de glissement sont les mêmes. Cela permet donc de valider la façon dont est modélisée l'évolution de la densité de dislocations.

Maintenant, la valeur du libre parcours moyen des dislocations est étudiée. Etant donné la formule (1.49), la valeur, à un moment donné, du libre parcours moyen des dislocations varie très peu d'un système de glissement à l'autre. Sur la figure (1.14) ne seront présentés que les systèmes qui ont le plus petit et le plus grand libre parcours moyen. Physiquement, le libre parcours moyen des dislocations doit tendre, pour des grandes déformations, vers la taille des cellules de dislocations [PBT$^+$01],[Pee02]. Dans le cas présenté ici, il est possible d'utiliser les relations (1.80) et (1.81) pour avoir un ordre de grandeur de la valeur du libre parcours moyen lorsque la densité de dislocations a atteint son maximum. Le résultat trouvé est :

$$L^g \approx 15\mu m \tag{1.82}$$

Le calcul se rapproche donc fortement du résultat théorique. Cette valeur semble assez élevée par rapport à ce qui est couramment relevé expérimentalement au microscope électronique à transmission (MET). Cela est dû au choix arbitraire des paramètres , avec un jeu de paramètres

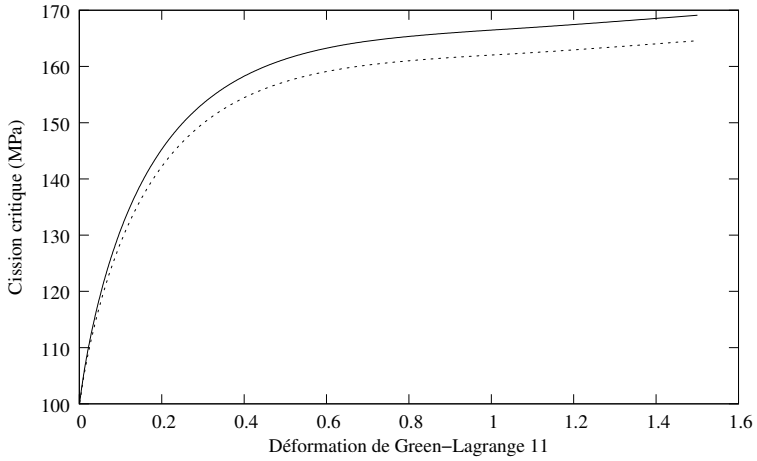


FIG. 1.15 – Evolution de la cission critique lors d'un essai de laminage

différent il aurait été possible d'obtenir des libres parcours moyens plus proches des quelques microns généralement observés. Cette figure laisse apparaître une des imperfections du modèle proposé. En effet, lors d'un trajet monotone il se forme une microstructure de dislocations dans laquelle les cellules de dislocations ont une forme allongée (sauf pour les trajets biaxés). Il faudrait donc trouver un grand écart entre les libres parcours moyens d'un système à l'autre, ce qui n'est pas le cas ici. La modélisation faite revient donc à considérer les cellules de dislocation comme des ellipses plus ou moins allongées de la même manière que dans [Mul94], [Aub98] et [Lan00], cela restant assez éloigné de la réalité physique.

Comme pour le libre parcours moyen des dislocations, est présentée l'évolution de la cission critique sur les systèmes de glissement pour lesquels sa valeur est la plus grande et la plus faible. La forme de la courbe obtenue est comparable à celle de la densité de dislocations. Ceci est logiquement lié à l'évolution de la cission critique qui est régie par la vitesse de glissement (1.45), elle-même pilotant celle de la cission critique (1.47). L'allure de l'évolution de la cission critique est montrée sur la figure (1.15) sur laquelle est montré qu'au début du chargement il y a un fort écrouissage, que celui-ci diminue à cause de l'annihilation des dislocations qui devient de plus en plus importante pour aller vers une valeur seuil. En utilisant la relation (1.44), en faisant les mêmes hypothèses que pour calculer la densité de dislocations seuil et en supposant que les termes de a^{gh} sont égaux à 1 alors :

$$\tau_{cmax} = \tau_{c0} + 2\alpha\mu b\sqrt{\rho_{max}} \approx 173\text{MPa} \tag{1.83}$$

La valeur seuil simulée est proche de celle attendue. Il ne reste plus qu'à valider l'évolution des angles d'Euler au cours du chargement. C'est l'objet de la figure (1.16). sur laquelle les angles d'Euler évoluent rapidement au début du chargement puis tendent à se stabiliser. Ces résultats peuvent être comparés à ceux obtenus par Nesterova et al. [NBT01] pour des essais de cisaillement. En effet, les auteurs ont observé que les monocristaux avaient tendance à s'orienter rapidement selon la fibre γ puis à rester dans une position dite stable. Qualitativement cet effet se retrouve donc bien.

Un effet associé aux grandes déformations dû à l'apparition de termes liés à la rotation du réseau cristallin dans l'expression du module tangent va être présenté. La définition de la cission

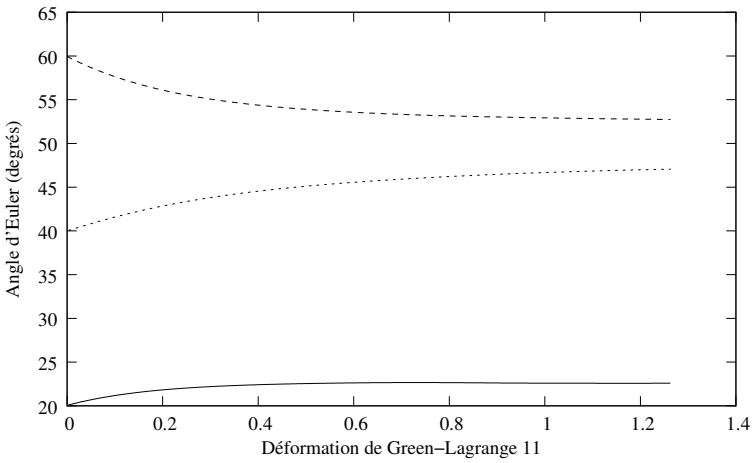


FIG. 1.16 – Evolution des angles d'Euler lors d'un essai de laminage

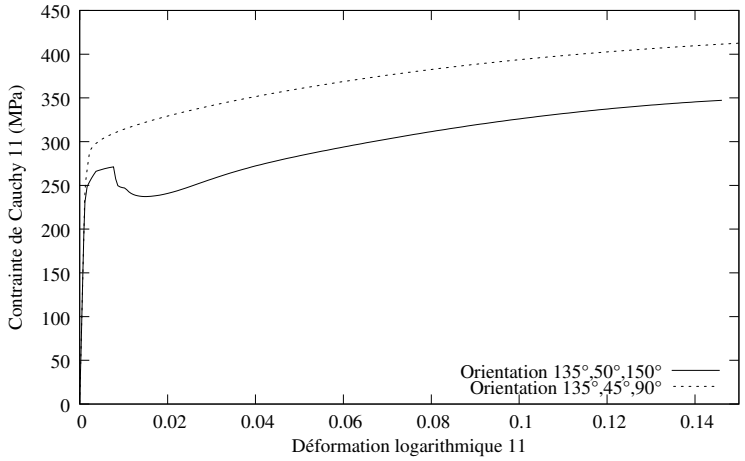


FIG. 1.17 – Effet des termes d'orientation sur le comportement monocristallin

résolue sur un système de glissement g est :

$$\tau^g = \sigma : R^g \tag{1.84}$$

En dérivant cette équation :

$$\dot{\tau}^g = \dot{\sigma} : R^g + \sigma : \dot{R}^g \tag{1.85}$$

L'expression (1.85) montre que si la rotation du réseau est suffisamment grande alors il est possible d'avoir un système de glissement qui soit actif tout en ayant une contrainte qui diminue. La figure (1.17) présente l'évolution de la contrainte lors d'un essai de traction uniaxiale pour deux orientations différentes. Il apparaît clairement que, selon l'orientation initiale, il est possible d'obtenir juste après que le matériau soit entré en plasticité une phase d'adoucissement immédiatement suivie par une phase d'écrouissage. Cela provient du fait que le réseau cristallin à tendance à beaucoup évoluer au début de la déformation avant de s'orienter dans une position stable [NBT01].

Tous ces résultats qualitatifs permettent de montrer que l'évolution de toutes les variables du modèle proposé est conforme aux attentes. Les valeurs de saturation obtenues sont proches des valeurs attendues. La partie suivante aura pour but de valider quantitativement les résultats du modèle par rapport à des résultats expérimentaux tirés de la littérature.

1.6 Résultats quantitatifs

Dans ce chapitre, une loi de comportement monocristalline a été définie. Elle a été construite de manière à représenter au mieux les phénomènes élémentaires de la déformation plastique. Il a été montré que, qualitativement, tous les éléments introduits permettaient d'obtenir des résultats intéressants. Il faut s'intéresser maintenant à la modélisation de matériaux réels. En effet, pour réaliser un modèle de transition d'échelles performant, il faut s'assurer que le comportement est bien décrit à chaque échelle. Lorsqu'est réalisée la transition d'échelles, qui peut être vue comme une moyenne pondérée, certaines erreurs peuvent être minimisées du fait qu'elles seront "noyées" dans les opérations de moyenne. Par exemple, si un comportement aberrent est calculé pour un des grains alors que pour les autres le calcul est correct, cet erreur ne sera pas visible si le polycristal comporte beaucoup de grains. De la même manière, et comme montré plus loin, la distinction entre les cissions critiques des familles de systèmes de glissement n'a d'effet visible que dans le cas monocristallin. C'est pour cela que, dans cette partie, les résultats du modèle vont être comparés aux résultats expérimentaux. La mise en œuvre d'une campagne d'essais sur des monocristaux de fer est très difficile et coûteuse en temps [Duo77], [Ter66]. Comme le but de ce mémoire est d'étudier le comportement de polycristaux, les résultats issus de différents travaux antérieurs seront utilisés. Il sera montré que la loi de comportement proposée est capable de décrire le comportement de monocristaux pour des trajets de cisaillement, de traction et complexes.

1.6.1 Identification des paramètres

Pour chacun des matériaux testés il y aura quatre paramètres à identifier si l'orientation de tous les monocristaux connue et un cinquième, qui sera le premier angle d'Euler, dans le cas où les orientations cristallographiques ne sont pas complètement définies. De plus, cette identification est aisée car les paramètres dépendent très peu les uns des autres :

- Le paramètre D_{moy} est la plus petite dimension des éprouvettes testées.
- Le paramètre du libre parcours moyen des dislocations g_0 a surtout un effet pour des petites déformations, plus il est faible plus la pente d'écrouissage dans cette zone est forte.
- La distance d'annihilation critique y_c joue surtout un rôle pour des déformations importantes, plus elle est faible plus la pente d'écrouissage est importante dans cette zone.
- La cission critique initiale τ_{c0} a un effet presque uniquement sur la limite élastique dont elle vaut environ la moitié.

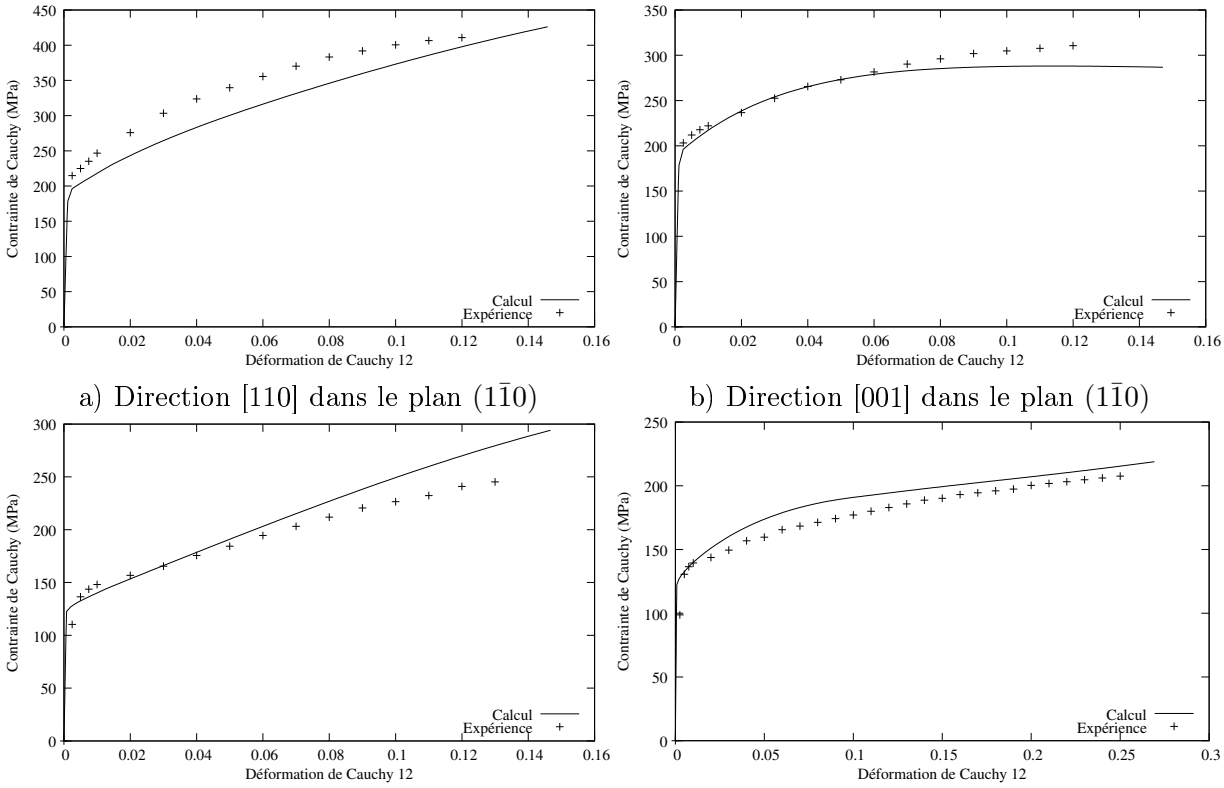
Ces observations seront reprises plus en détail au chapitre 3 lorsque la dépendance de la limite de ductilité vis à vis des paramètres matériau sera étudiée. Ces paramètres s'identifient sur des portions différentes de la courbe expérimentale ce qui permet d'avoir une identification unique. Dans le cas où le premier angle d'Euler n'est pas connu, une identification paramétrique sera réalisée pour des valeurs de cet angle de 5 en 5° tout en le considérant constant d'un essai à l'autre. L'angle choisi sera celui qui permet d'obtenir les meilleurs résultats.

Paramètres	$\tau_{c0}\{110\}$	$\tau_{c0}\{112\}$	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	110MPa	140MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	25	4.5nm	1 mm

TAB. 1.7 – Paramètres pour la comparaison théorie/expérience pour des essais de cisaillement

1.6.2 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer-silicium

Dans cette partie les résultats obtenus par ce modèle avec ceux de Rauch [Rau98] seront comparés pour des monocristaux de fer-silicium contenant 2.9% de silicium. L'auteur a réalisé des essais de cisaillement sur quatre monocristaux, chacun ayant une orientation différente. Pour valider le modèle, un jeu de paramètres qui permette de prédire le comportement du monocristal dans chaque cas va être recherché. Le tableau (1.7) donne les paramètres identifiés. Il a été nécessaire de différencier les cissions critiques initiales des deux familles de systèmes de glissement de façon à modéliser au mieux la limite élastique, cette différence ayant été mise en évidence par Orlans-Joliet [OJ89] dans sa thèse. Des résultats obtenus les conclusions suivantes peuvent être



a) Direction [110] dans le plan $(1\bar{1}0)$ b) Direction [001] dans le plan $(1\bar{1}0)$

c) Direction [112] dans le plan $(1\bar{1}0)$ d) Direction [111] dans le plan $(1\bar{1}0)$

FIG. 1.18 – Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement selon différentes orientations tirés de [Rau98]

tirées :

– Dans chacun des cas, la limite élastique est bien prédite alors qu'elle varie énormément d'un essai à l'autre. Ce bon résultat est surtout dû à la différentiation des cissions critiques entre les familles de systèmes de glissement. L'orientation cristallographique joue elle aussi

Paramètres	φ_{1_0}	$\tau_{c0}\{110\}$	$\tau_{c0}\{112\}$	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	90°	11MPa	11.5MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	280	3.25nm	0.5 mm

TAB. 1.8 – Paramètres pour les essais de cisaillement tirés de [KN67]

un rôle important mais ne permet pas de générer des écarts au niveau de la limite élastique assez importants pour se rapprocher autant de l'expérience.
- La pente d'écrouissage est, elle aussi, très bien décrite tout au long du trajet. Cependant pour des déformations de l'ordre de 8% dans la direction [001] elle a tendance à être sous-estimée. Ces résultats sont dus au fait que la plasticité cristalline prend en compte la forte dépendance de la pente d'écrouissage vis à vis de l'orientation cristallographique.
- Le modèle est apte à prendre en compte le fait que les pentes d'écrouissage varient énormément d'un essai à l'autre. Par exemple, pour les cas a) et c) l'écrouissage a une allure quasi linéaire, alors que, pour les deux autres cas, il se rapproche plus d'une parabole.
- Les valeurs des paramètres identifiés pour la validation sont en accord avec ceux identifiés par Hoc et Rey [HR00] pour des polycristaux d'acier doux. Les auteurs utilisent une loi de comportement monocristalline similaire à celle étudiée ici, cependant la vitesse de glissement est modélisée grâce à une loi puissance de la même forme que (1.16). Les valeurs des paramètres étant proches, cela permet de dire que l'approche utilisée ici donne des paramètres qui ont un sens physique.

Ces résultats permettent de considérer que le modèle de comportement monocristallin proposé est capable de prédire le comportement pour des essais de cisaillement.

1.6.3 Essais de cisaillement sur des monocristaux de fer

Dans cette partie, les résultats expérimentaux obtenus par Keh et Nakada [KN67] vont être comparés à ceux issus du modèle. Dans cet article, contrairement à la partie précédente, seule la direction de cisaillement indiquée dans le triangle standard est donnée par les auteurs. Elle ne permet de déduire que deux des trois angles d'Euler qui définissent l'orientation monocristalline. Il a donc été décidé de prendre le troisième angle d'Euler comme paramètre à identifier (même valeur pour tous les essais) et de chercher un jeu de paramètres qui permette d'avoir une bonne adéquation entre théorie et expérience. Enfin, dans certains des essais de cisaillement, il apparaît le stade I de la déformation dit stade de glissement facile. C'est un stade dont la présence n'est visible que dans le cas de monocristaux cubiques centrés [FPZ95b] et qui n'a pas été pris en compte dans le modèle proposé. Ce stade a donc été "gommé" lorsqu'il apparaissait sur les essais expérimentaux et il a été supposé que la déformation commençait directement au stade II dans lequel plusieurs systèmes de glissement sont activés. Cette hypothèse semble acceptable car le modèle proposé a pour but de modéliser le comportement de polycristaux dans lequel le stade I de la déformation n'est pas observé. Le tableau (1.8) donne le jeu de paramètres identifiés. Il est à noter que les paramètres identifiés sont très différents du cas fer-silicium, en particulier il y a un rapport d'environ 10 entre les limites élastiques des deux matériaux. Cette différence de limites élastiques va donc engendrer aussi de grands écarts au niveau des autres paramètres. De ces sept essais, dont les résultats sont consignés dans la figure (1.19), certaines conclusions peuvent être tirées :
- Tout d'abord, du fait des orientations cristallographiques choisies par les auteurs, la limite élastique varie peu d'un essai à l'autre ce qui suppose que la cission critique initiale est peu

différente entre les familles de systèmes de glissement. Cela explique pourquoi les valeurs identifiées sont très proches (respectivement 11 et 11.5 MPa pour {110} et {112}). Sur la figure (1.19), dans chacun des cas, la limite élastique est bien prédite par le modèle.
- La valeur de contrainte atteinte dans ces essais est faible, l'effet des termes d'orientations comme pour la figure (1.17) ne doit pas ou peu être observé, ce qui est bien le cas.
- En ce qui concerne les pentes d'écrouissage, à chaque fois, la pente numérique est assez proche de la pente expérimentale. Cependant pour l'essai c), dans lequel une activation puis une désactivation d'un système de glissement entraîne la formation d'un point d'inflexion ne se retrouvant pas sur la courbe expérimentale, le résultat est moins bon. D'autre part, pour l'essai d), la pente d'écrouissage au début est assez fortement surestimée alors que, au contraire, à partir de 10% de déformation elle est fortement sous-estimée. Malgré ces deux essais (c) et d)) qui concordent moins bien avec l'expérience la pente d'écrouissage est tout de même bien simulée pour toutes les orientations.
- Enfin, le niveau de contrainte calculé numériquement est toujours proche du niveau expérimental avec une erreur généralement inférieure à 10%.

Tous ces essais permettent de dire que le modèle proposé est capable de décrire le comportement de monocristaux lors d'essais de cisaillement pour différents matériaux de symétrie cubique centrée.

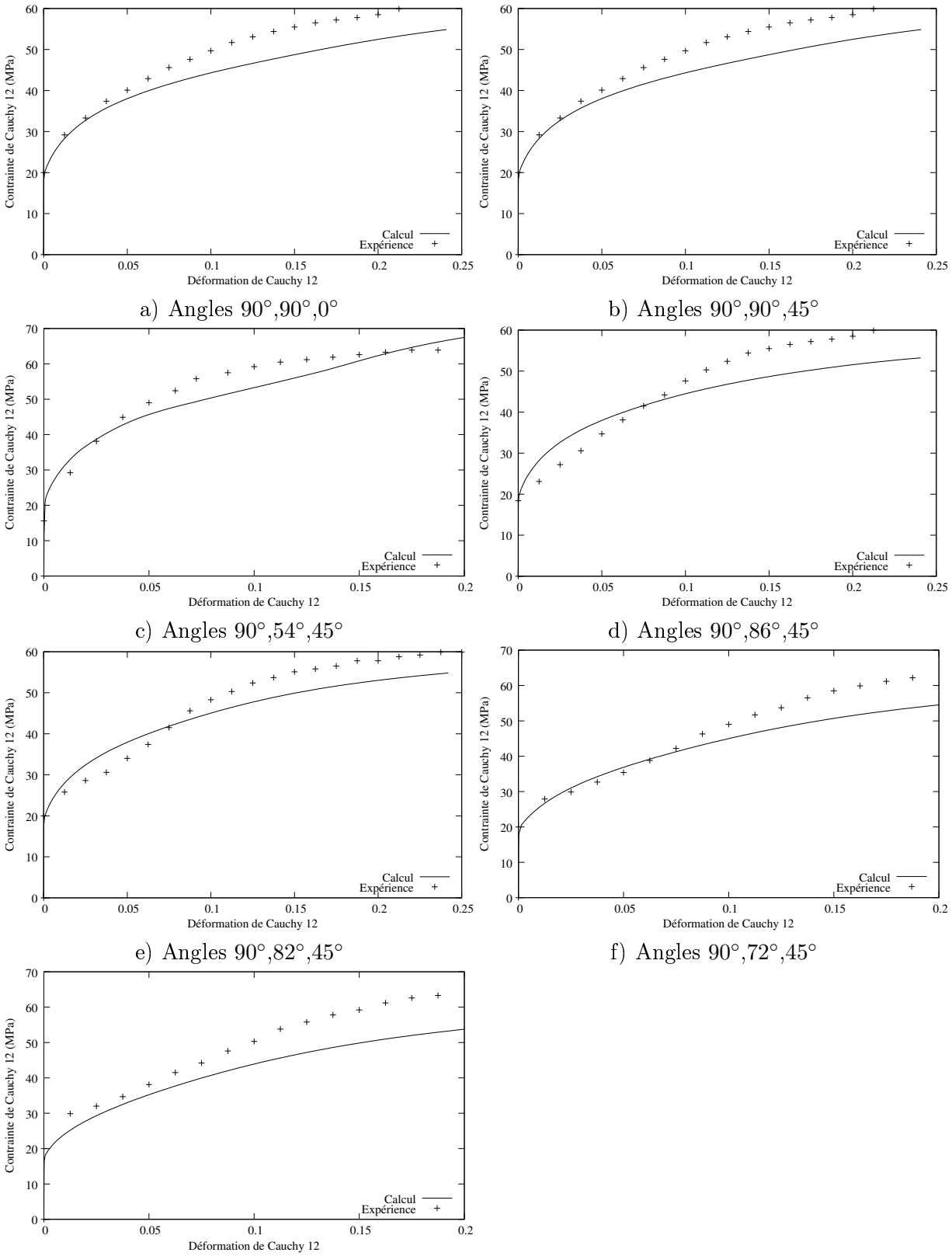
1.6.4 Essais de traction sur des monocristaux de fer

Dans cette partie, les résultats expérimentaux obtenus par Pollnow et al. [PPL72] seront comparés à ceux issus du modèle. Comme pour le cas précédent, seule la direction de traction est indiquée ce qui ne permet d'avoir accès qu'à deux des trois angles d'Euler. Le jeu de paramètres identifiés dans ce cas est donné dans le tableau (1.9).

Paramètres	φ_1	$\tau_{c0}\{110\}$	$\tau_{c0}\{112\}$	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	0°	17MPa	18MPa	$1.0.10^9\mathrm{m}^{-2}$	100	2.25nm	2 mm

TAB. 1.9 – Paramètres pour les essais de cisaillement tirés de [PPL72]

Les résultats obtenus sont consignés dans la figure (1.20). De cette figure, les conclusions suivantes peuvent être tirées :
- Pour les essais a),b),c) et d) de bons résultats pour la modélisation du comportement sont obtenus que cela soit au niveau de la prédiction de la limite élastique ou de la pente d'écrouissage. Il est à noter que, dans le cas d), la contrainte diminue puis augmente au moment de l'entrée en plasticité. Cela est dû, comme montré précédemment, au formalisme des grandes déformations qui peut générer de tels effets du fait de la rotation du réseau cristallographique.
- En ce qui concerne l'essai e), le résultat est mauvais. L'orientation du monocristal est telle que la limite élastique est plus grande que dans les autres cas, cependant elle est fortement surestimée. Cette erreur peut provenir du fait que l'orientation exacte du monocristal n'est pas connue, en effet dans les deux matériaux étudiés précédemment la limite élastique était bien modélisée. Cela induit, de la même manière, le fait que la pente d'écrouissage calculée est largement surestimée ce qui génère des erreurs supplémentaires.
- Pour l'essai f), la pente d'écrouissage est surestimée pour des faibles déformations puis sous-estimée pour de plus grandes déformation. Les écarts pour les essais e) et f) peuvent



a) Angles 90°,90°,0°

b) Angles 90°,90°,45°

c) Angles 90°,54°,45°

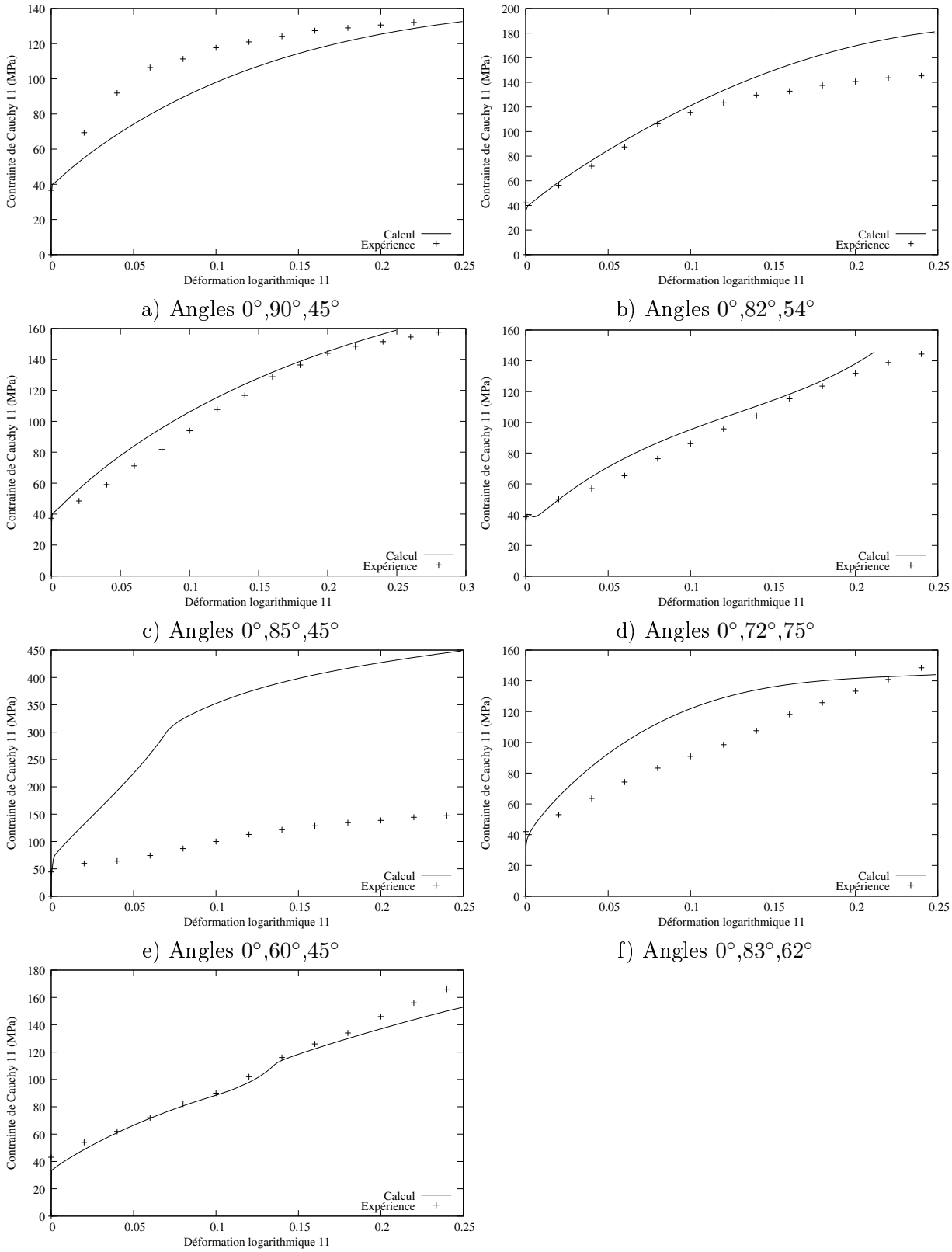
d) Angles 90°,86°,45°

e) Angles 90°,82°,45°

f) Angles 90°,72°,45°

g) Angles 90°,65°,45°

FIG. 1.19 – Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement selon différentes orientations tirés de [KN67]



a) Angles 0°,90°,45°

b) Angles 0°,82°,54°

c) Angles 0°,85°,45°

d) Angles 0°,72°,75°

e) Angles 0°,60°,45°

f) Angles 0°,83°,62°

g) Angles 0°,80°,74°

FIG. 1.20 – Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de traction selon différentes orientations tirés de [PPL72]

Paramètres	φ_1	$\tau_{c0}\{110\}$	$\tau_{c0}\{112\}$	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	65°	8MPa	9MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	350	0.75nm	1 mm

TAB. 1.10 – Paramètres pour les essais de cisaillement tirés de [KN67]

être imputés au fait que l'orientation cristallographique n'est pas entièrement connue.
- Pour l'essai g) le résultat est globalement bon, cependant un "saut" sur la courbe numérique qui correspond à l'activation puis à la désactivation d'un système de glissement est observé.

D'une manière générale il est possible de dire que le modèle proposé est apte à prédire le comportement dans le cas d'essais de traction uniaxiale.

1.6.5 Essais de cisaillement complexe sur des monocristaux de fer

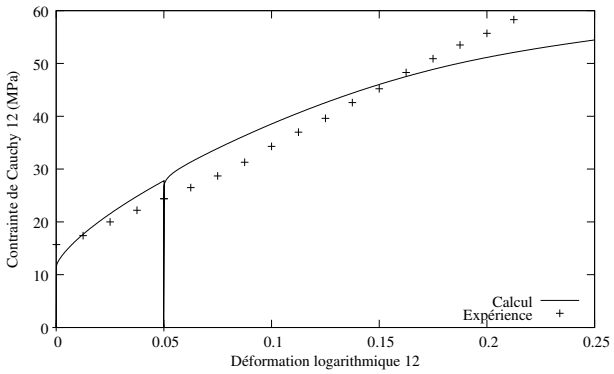
Dans cette section, les essais réalisés par Keh et Nakada [KN67] sur des monocristaux de fer seront comparés avec la simulation. Il est à noter que le matériau n'est pas le même que pour le cas du cisaillement simple. Les auteurs ont réalisé un essai de cisaillement simple suivi d'un essai de cisaillement simple dans une autre direction. Pour simuler cela, dans chacun des cas étudiés, un triplet d'angles d'Euler pour le premier trajet et un autre pour le second trajet seront définis. Comme dans les deux cas précédents seuls deux des trois angles d'Euler sont donnés par les auteurs, le troisième sera calculé a posteriori. Les paramètres identifiés sont donnés dans le tableau (1.10) : Les résultats obtenus sont consignés dans la figure (1.21). Les conclusions suivantes peuvent être données :

- Pour les cas a),b),c) et e) une bonne adéquation entre les résultats expérimentaux et calculés est observée. Cependant, au moment du changement de trajet, la zone de transition entre les régimes élastique et plastique est mal modélisée. Dans le premier trajet une microstructure de dislocations est créée et il est nécessaire de l'"effacer" avant d'en initialiser une seconde lors du deuxième chargement [Pee02]. Durant cette étape, la densité de dislocations reste constante mais leur arrangement spatial est modifié de manière à créer une nouvelle microstructure. Le modèle présenté ici ne prend pas en compte la notion de polarisation des dislocations ni celle de cellules. Cela explique ces écarts et le fait que le calcul se rapproche de l'expérience lorsque la déformation augmente.
- Pour le cas d), une mauvaise adéquation entre calcul et expérience est observée. Comme les quatre autres tests donnent de bons résultats, cette erreur peut provenir de l'hypothèse forte selon laquelle le premier angle d'Euler est considéré comme constant d'un essai à l'autre (si cet angle est modifié de 30°, le résultat obtenu se rapproche alors beaucoup plus de l'expérience).

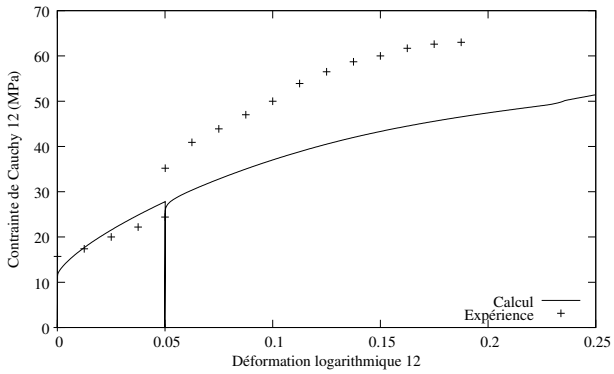
Ces résultats montrent donc que la loi de comportement locale permet aussi de prédire des chargements complexes.

1.7 Conclusion

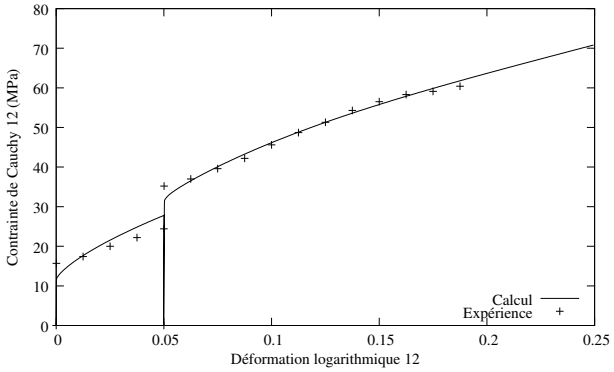
Dans ce chapitre, l'étude des phénomènes à l'origine de la déformation plastique à l'échelle d'un monocristal a été menée. Il y a été tout d'abord retenu que le principal mécanisme de la déformation plastique est, dans les matériaux étudiés ici, le glissement des plans cristallins. Grâce à une approche multi-systèmes, la vitesse de glissement des plans cristallins est calculée à partir de la loi de Schmid. L'écrouissage intracristallin est, quant à lui, régi par l'évolution de la variable



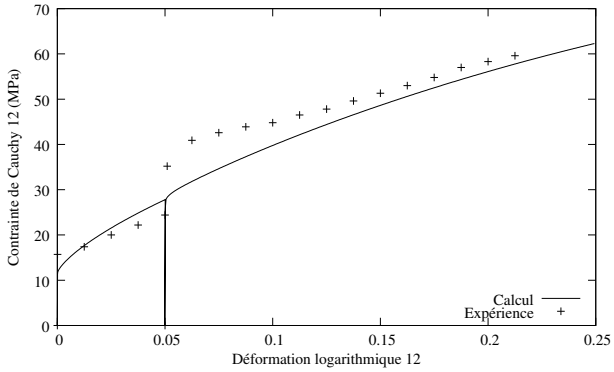
a) Angles 65°,82°,66° puis 65°,82°,66°



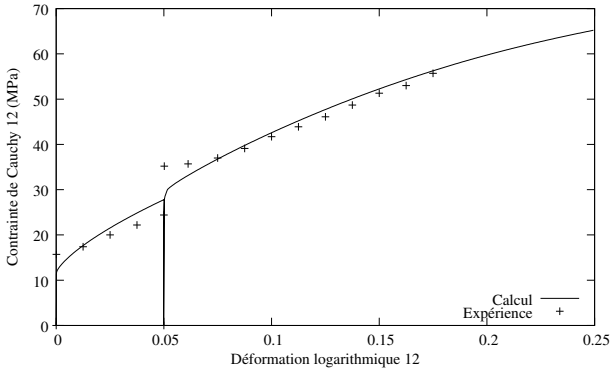
b) Angles 65°,82°,66° puis 65°,142°,10°



c) Angles 65°,82°,66° puis 65°,52°,102°



d) Angles 65°,82°,66° puis 65°,68°,80°



e) Angles 65°,82°,66° puis 65°,102°,105°

FIG. 1.21 – Comparaison entre théorie et expérience pour des essais de cisaillement complexe selon différentes orientations tirés de [KN67]

densité de dislocations moyenne par système de glissement. Cette évolution a été modélisée en prenant en compte leur création, leur stockage et leur annihilation grâce à une loi basée sur la relation d'Orowan [Oro34]. L'interaction entre les différents systèmes de glissement est prise en compte via une matrice d'anisotropie comportant neuf termes, chaque terme modélisant un type d'interaction entre systèmes de glissement.

Ce qui fait la nouveauté au niveau de la loi de comportement c'est la gestion de l'activation des systèmes de glissement. En effet, dans le cas élastoplastique la formulation classique passe par une minimisation de l'énergie entraînant l'introduction d'une analyse combinatoire extrêmement coûteuse en temps de calcul. La formulation donnée ici et inspirée de la viscoplasticité, propose de conjuguer les avantages de la viscoplasticité avec ceux de l'élastoplasticité de manière à être efficace au niveau du temps de calcul tout en étant conforme aux résultats de référence. Cette nouvelle formulation, pour être valable, doit détecter la même activation au niveau des systèmes de glissement. C'est ce qui a été montré lorsque les systèmes actifs dans le modèle proposé ont été comparés avec ceux rigoureux de Nestorava et al. [NBT01]. Il a aussi été montré que les différents paramètres du modèle avaient une forte influence sur le comportement mécanique et que leur influence était cohérente avec les attentes.

La comparaison directe avec l'expérience pour différents types de trajets a enfin été faite. Il a été montré que, dans chaque cas, il était possible d'identifier un jeu de paramètres qui permette de modéliser le comportement pour un ensemble d'orientations cristallographiques. Il est important de remarquer que les paramètres à identifier sont moins nombreux que le nombre d'essais mécaniques et que les orientations cristallographiques sont très différentes d'un essai à l'autre pour un même matériau. Pour certains des matériaux étudiés dans ce chapitre, il a été montré que des essais mécaniques étaient mal reproduits. Cette différence peut être principalement due à la mauvaise définition de l'orientation cristallographique (la valeur d'un des angles d'Euler est identifiée) ; en effet dans le matériau pour lequel les orientations cristallographiques sont complètement définies les résultats numériques sont très proches de l'expérience. Cela permet donc d'affirmer que la loi locale est apte à modéliser le comportement non seulement pour des trajets simples (traction, cisaillement) mais aussi pour des trajets complexes (cisaillement dans une direction puis cisaillement dans une autre direction).

Il est possible de passer maintenant à l'étape suivante qui est la modélisation du lien entre le comportement à l'échelle locale et celui de l'agrégat polycristallin.

Chapitre 2

Modèle autocohérent pour le comportement élastoplastique

Sommaire

2.1 Introduction 50
2.2 Modélisation de la transition d'échelles 51
2.2.1 Les modèles de Taylor-Lin et statique 51
2.2.2 Les calculs de contraintes internes d'Eshelby et de Kröner 52
2.2.3 Différentes approches autocohérentes 54
2.2.4 Introduction du tenseur de Green 54
2.2.5 Simplification de l'équation intégrale 56
2.2.6 Calcul du module tangent autocohérent 58
2.2.7 Evolution de la morphologie des grains 58
2.3 Méthode de calcul utilisée pour résoudre le modèle autocohérent . 59
2.3.1 Résolution de l'aspect implicite de la méthode autocohérente 60
2.3.2 Inversion de matrices mal conditionnées 60
2.4 Résultats qualitatifs 62
2.4.1 Evolution de la forme des grains 62
2.4.2 Comparaisons entre la méthode de transition d'échelles autocohérente et celle de Taylor-Lin 63
2.5 Comparaison entre théorie et expérience pour des acier monophasés ferritiques 65
2.5.1 Essais rhéologiques 66
2.5.2 Textures de l'acier C1754 76
2.5.3 Surfaces de charge 80
2.5.4 Coefficients de Lankford 81
2.6 Comparaison entre théorie et expérience pour des aciers biphasés ferrite / martensite 84
2.6.1 Essais rhéologiques 85
2.6.2 Surfaces de charge 88
2.6.3 Coefficients de Lankford 90
2.7 Comparaison entre théorie et expérience pour un acier micro-allié contenant des précipités 91
2.7.1 Essais rhéologiques 92
2.7.2 Coefficients de Lankford 94
2.8 Conclusions 94

2.1 Introduction

Dans cette partie, la modélisation du comportement de l'agrégat polycristallin à partir de celui de l'ensemble des grains (dont la loi de comportement à été décrite au chapitre précédent) va être étudiée. Pour cela, la loi de comportement macroscopique reliant le gradient de la vitesse macroscopique G au taux de contrainte nominale macroscopique $\dot{N}$ va être présentée. La forme de cette loi est supposée incrémentale tout comme la loi locale :

$$\dot{N} = L : G \tag{2.1}$$

Le lien entre la contrainte nominale locale et macroscopique peut être obtenue en imposant comme conditions aux limites sur la frontière d'un solide ∂V de normale $\overrightarrow{m}$:

$$\dot{n}.\overrightarrow{m} = \dot{N}.\overrightarrow{m} \tag{2.2}$$

En appliquant l'équation d'équilibre $\operatorname{div}\left({}^{T}\dot{n}\right) = 0$ par intégration volumique la relation (2.5) peut être démontrée :

$$\int_V \dot{n}_{ij} dV = \int_V \left(\dot{n}_{ik} x_j\right)_{,k} dV = \int_{\partial V} \dot{n}_{ik} x_j m_k dS = \dot{N}_{ik} \int_{\partial V} x_j m_k dS = \dot{N}_{ik} \int_V x_{j,k}\, dS = \dot{N}_{ik} \int_{\partial V} \delta_{jk} dV = V \dot{N}_{ij} \tag{2.3}$$

Si des conditions aux limites en déformation sont imposées un calcul similaire à (2.3) donne un résultat analogue en ce qui concerne le gradient des vitesses [FPZ95a]. La contrainte nominale et le gradient de la vitesse macroscopiques sont donc les moyennes volumiques de leurs homologues microscopiques (qui dépendent de la position x) soit :

$$G = \overline{g\left(x\right)} \tag{2.4}$$

$$\dot{N} = \overline{\dot{n}\left(x\right)} \tag{2.5}$$

Pour modéliser le lien qu'il y a entre les grandeurs locales et les grandeurs macroscopiques pour la contrainte et la déformation, deux tenseurs d'ordre 4, A et B, qui dépendent de la position du point x, appelés respectivement tenseur concentration du taux de déformation et tenseur concentration du taux de contrainte sont introduits. Ils sont définis par :

$$g\left(x\right) = A\left(x\right) : G \tag{2.6}$$

$$\dot{n}\left(x\right) = B\left(x\right) : \dot{N} \tag{2.7}$$

La moyenne volumique du gradient de la vitesse locale est égale au gradient de la vitesse macroscopique, ce qui implique que A et B ont certaines propriétés :

$$G = \overline{g\left(x\right)} = \overline{A\left(x\right) : G} = \overline{A\left(x\right)} : G \Rightarrow \overline{A\left(x\right)} = I \tag{2.8}$$

De la même manière :

$$\overline{B\left(x\right)} = I \tag{2.9}$$

La moyenne volumique de ces tenseurs de localisation est donc égale au tenseur identité d'ordre 4. En combinant les relations (1.51) et (2.5) :

$$\dot{N} = \overline{\dot{n}\left(x\right)} = \overline{l\left(x\right) : A\left(x\right) : G} = \overline{l\left(x\right) : A\left(x\right)} : G \tag{2.10}$$

Ce qui permet de déduire l'expression du module tangent macroscopique :

$$L = \overline{l(x) : A(x)} \tag{2.11}$$

Le tenseur B peut se calculer à partir du tenseur A en utilisant (2.7) et (1.51) :

$$\dot{n}(x) = B(x) : \dot{N} = B(x) : L : G = l(x) : A(x) : G \tag{2.12}$$

D'où

$$B(x) : L = l(x) : A(x) \tag{2.13}$$

Soit :

$$\begin{aligned} B(x) &= l(x) : A(x) : L^{-1} \\ A(x) &= l^{-1}(x) : B(x) : L \end{aligned} \tag{2.14}$$

Dans ce chapitre, les principales méthodes de transition d'échelles permettant de calculer les tenseurs de concentration vont être rappelées. La méthode de transition d'échelles retenue devra être performante et modéliser au mieux la physique. Ici, la recherche d'un nouveau modèle de transition d'échelles ne sera pas menée car ce n'est pas l'objectif de ce travail. La méthode autocohérente incrémentale au sens de Hill [Hil66] sera employée pour plusieurs raisons :

- Cette méthode, avec les faibles écarts de comportement mécanique entre les diverses phases des matériaux étudiés ici, respecte les bornes de Hashin-Strickmann [Gil97].
- Ce modèle a été largement utilisé et a montré qu'il était capable de donner de bons résultats en ce qui concerne la prise en compte des différences physiques intergranulaires en élasticité [DP02], [CLL98] comme en élastoplasticité [LKB90], [ODW04],
- Son écriture incrémentale est facile à intégrer dans un code de calcul.

Ensuite, cette méthode de transition d'échelles sera utilisée pour modéliser le comportement de polycristaux d'acier. Pour cela, les résultats du modèle seront comparés à ceux issus d'essais rhéologiques pour des aciers monophasés ferritiques avec et sans précipités ainsi que biphasés ferrito-martensitiques. Ceci sera réalisé pour des chargements simples (traction uniaxiale,...) et complexes (essais Bauschinger,...).

Il est possible de définir un critère de perte de ductilité qui ne dépend que du module tangent et du chargement. Si l'expression du module tangent est suffisamment proche de l'expérience, alors il sera possible de détecter la limite de ductilité (qui est en fait une perte d'ellipticité du module tangent). Dans cette optique, il faudra donc se donner un modèle qui reflète au mieux l'expérience et étudier si tous les phénomènes physiques pris en compte dans cette modélisation permettent de donner de bons résultats.

2.2 Modélisation de la transition d'échelles

2.2.1 Les modèles de Taylor-Lin et statique

Ces deux méthodes de transition d'échelles sont parmi les premières à avoir été introduites respectivement en 1938 pour Taylor [Tay38] et en 1949 pour le modèle statique [BB49]. Elles sont définies à partir des hypothèses les plus simples qu'il est possible de faire pour le lien qui existe entre le comportement d'un grain et celui du polycristal :

- Soit tous les grains ont le même taux de déformation à chaque instant, ce qui revient à dire que le tenseur de concentration du taux de déformation est égal à l'identité d'ordre 4 : $A(x) = I$. Cela correspond au modèle de Taylor-Lin.

– Soit tous les grains ont le même taux de contrainte à chaque instant, ce qui revient à dire que le tenseur de concentration du taux de contrainte est égal à l'identité d'ordre 4 : $B(x) = I$. Cela correspond au modèle statique (souvent confondu avec le modèle de Sachs pour lequel il est supposé que la contrainte locale est proportionnelle à la contrainte macroscopique et de telle sorte que s'active, dans chaque grain, le système ayant le facteur de Schmid le plus élevé [BBG01]).

En utilisant les relations (2.14) il est possible d'écrire que :

– Pour le modèle de Taylor :

$$A(x) = I, B(x) = l(x) : L^{-1} \tag{2.15}$$

– Pour le modèle statique :

$$A(x) = l^{-1}(x) : L, B(x) = I \tag{2.16}$$

Ces deux modèles sont appelés modèles extrêmes car ils représentent les simplifications les plus fortes qu'il est possible de faire pour modéliser la transition d'échelles. Ils correspondent aux bornes de Voigt et Reuss en élasticité. Les résultats obtenus par ces modèles sont généralement assez éloignés de l'expérience du fait de la très grande simplification des interactions. En réalité, les grains ne se déforment pas de la même manière du fait de leur orientation cristallographique différente de l'un à l'autre et de la très grande anisotropie du comportement plastique. Les incompatibilités de déformation ainsi générées vont créer des contraintes internes qui ne sont pas prises en compte dans les modèles de Taylor et statique. Le modèle de Taylor a cependant tendance à s'éloigner moins de l'expérience que le modèle statique car, lorsque la déformation augmente, l'écart en déformation d'un grain à l'autre à tendance à être plus faible que celui en contrainte [Lin97]. Cela s'explique par le fait que les grains ont tendance à s'orienter vers des positions dites stables pour des grandes déformations. La partie suivante va présenter ce qui est à la base du modèle autocohérent c'est à dire le calcul de la contrainte d'une inclusion dans un milieu infini.

2.2.2 Les calculs de contraintes internes d'Eshelby et de Kröner

Eshelby [Esh57] a calculé la solution du problème d'une inclusion subissant la déformation ϵ^p dans une matrice infinie élastique chargée uniformément à l'infini. La déformation imposée à l'inclusion est dite libre car elle ne serait pas accompagnée de contraintes si elle agissait sur un élément isolé [FPZ95a]. Ce modèle peut être schématisé par la figure (2.1). Il a été écrit dans le cadre des petites déformations et fait intervenir le lien entre la contrainte et la déformation mais non entre leurs vitesses. Donc, par analogie aux autres modèles présentés ici, seront employées la contrainte de Cauchy Σ et la déformation E en lieu et place du taux de contrainte nominale $\dot{N}$ et du gradient de la vitesse G. Les tenseurs de concentration seront donc le lien entre les contraintes et les déformations. La notion de tenseur de Green intervient dans ce modèle, il sera explicité dans la suite. Le lien entre la contrainte locale σ et la contrainte macroscopique Σ se calcule en faisant intervenir le tenseur d'Eshelby S [Esh57] comme :

$$\sigma = \Sigma + C : (I - S) : \varepsilon^p \tag{2.17}$$

Dans le cas de l'élasticité isotrope, d'une déformation plastique incompressible et d'une inclusion sphérique la relation (2.17) peut s'écrire sous la forme [BZ79] :

$$\sigma = \Sigma - 2\mu(1 - \beta)\varepsilon^p \tag{2.18}$$

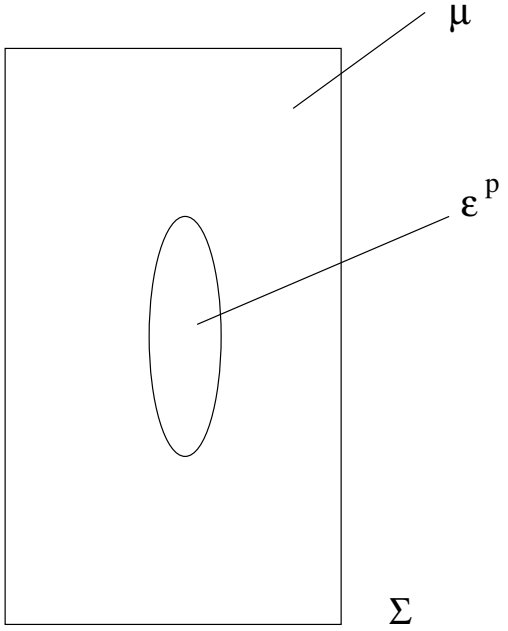


FIG. 2.1 – Modélisation d'Eshelby

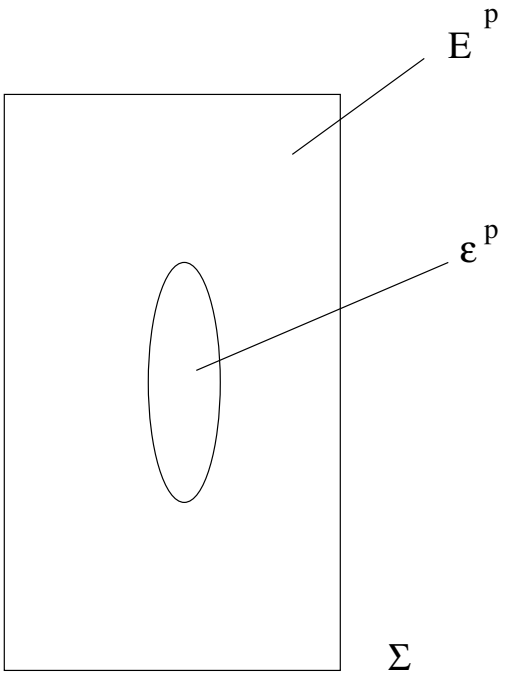


FIG. 2.2 – Modélisation de Kröner

Où μ est le module de cisaillement de la matrice et β le paramètre d'accommodation élastique ne dépendant que du coefficient de Poisson ν. Dans le cas de l'élasticité isotrope il est donné par :

$$\beta = \frac{2\,(4-5\nu)}{15\,(1-\nu)} \tag{2.19}$$

Kröner a étendu le modèle d'Eshelby au cas où la matrice est élastoplastique. Contrairement à ce qui a été fait auparavant, il est considéré que la matrice peut plastifier [BBG01]. Pour résoudre ce problème, Kröner propose de le considérer comme celui d'une inclusion d'Eshelby soumise à la déformation libre ε^p dans une matrice soumise à la déformation uniforme E^p. Cette modélisation peut-être représentée par la figure (2.2). Il a été montré que la relation de localisation peut se mettre sous la forme [BZ79] :

$$\sigma = \Sigma + 2\mu\,(1-\beta)\,(E^p - \varepsilon^p) \tag{2.20}$$

Cette modélisation impose que les déformations plastiques calculées soient très proches les unes des autres, le résultat obtenu est très semblable à celui du modèle de Taylor-Lin. Les contraintes internes ont donc tendance à être largement surestimées [BZ79], [MZ99]. Afin de mieux prendre en compte les phénomènes d'accommodation plastique entre la matrice et l'inclusion, Berveiller et al. [BZ79] ont introduit une "simple fonction scalaire d'accommodation α" dans dans la relation (2.20) qui s'écrit sous la forme :

$$\sigma = \Sigma + 2\alpha\mu\,(1-\beta)\,(E^p - \varepsilon^p) \tag{2.21}$$

Où α vaut environ :

$$\alpha \approx \frac{1}{1+\dfrac{3\mu E^p}{2\Sigma}} \tag{2.22}$$

Cette modélisation est moins générale que la modélisation au sens de Hill qui sera présentée plus tard mais a pour objectif d'améliorer les résultats obtenus par Kröner tout en restant simple à utiliser [BZ79]. Σ, E^p désignent respectivement la contrainte et la déformation plastique lors d'un essai de traction selon la direction de traction. Le paramètre β garde, quant à lui, la même expression que pour le modèle de Kröner.

Toutes ces méthodes ont comme principal défaut de fortement surestimer les contraintes internes. La principale cause vient du fait que c'est la déformation plastique qui est imposée. Elle serait libre si elle agissait sur un élément isolé, alors que cela ne correspond pas à la physique. En effet, la déformation plastique dépend de beaucoup de paramètres et notamment de l'état de contrainte. Hill [Hil66] a eu comme idée de choisir la déformation totale comme déformation libre (la déformation plastique n'a donc plus besoin d'être libre), puis de résoudre le problème d'homogénéisation ainsi posé de la même façon que précédemment et de manière incrémentale. Pour présenter la méthode autocohérente de Hill il faut d'abord introduire le tenseur de Green qui permet de calculer ce qui est appelé l'équation intégrale cinématique et qui est à la base du modèle autocohérent. Cela fera l'objet de la suite de ce chapitre.

2.2.3 Différentes approches autocohérentes

Cette partie a pour but de donner les limitations de la méthode utilisée pour modéliser le comportement de l'agrégat polycristallin. L'approche autocohérente telle qu'introduite dans ce mémoire et appelée modèle autocohérent incrémental au sens de Hill est trop "raide", c'est à dire que le module tangent calculé a tendance à surestimer la réalité physique. Cela peut être dû à l'hypothèse selon laquelle la complaisance de la matrice autour de l'inclusion est supposée uniforme alors qu'elle devrait dépendre de l'état de contrainte local [Gil95]. Pour résoudre ce problème, une nouvelle formulation appelée formulation affine a été introduite (notamment dans [MBSZ00]). Son principal avantage est qu'elle n'a pas à ce jour été mise en défaut en ce qui concerne la violation des bornes qu'il est possible de calculer dans le cas de modèles viscoplastiques. Cependant, les différences entre les modèles autocohérents sont importantes quand les phases de l'agrégat polycristallin ont des différences de propriétés extrêmes [Gil95], [Gil97],[MZ99],[MBSZ00] en terme de module tangent. Comme ce n'est pas le cas des matériaux étudiés dans ce mémoire, il sera supposé que la méthode autocohérente choisie est à même de bien reproduire le comportement. Pour cela, dans la suite de ce chapitre, toute une série de comparaisons avec des essais rhéologiques expérimentaux vont être faites. Ici, comme le but de ce mémoire est la modélisation d'un critère de perte de ductilité et non une amélioration des modèles de transition d'échelles, cela a dicté le choix du modèle autocohérent au sens de Hill car très pratique à intégrer dans un code de calcul tout en donnant de bons résultats.

2.2.4 Introduction du tenseur de Green

Dans la majorité des modèles de transition d'échelles l'état mécanique d'une phase est assimilé à celui d'une inclusion ellipsoïdale de même comportement immergée dans un milieu homogène fictif représentant le milieu environnant et soumis à des conditions homogènes à l'infini [BZ97]. La solution du problème d'inclusion s'obtient classiquement à partir des fonctions de Green. Il faut introduire le tenseur de Green noté $\boldsymbol{G}$ du milieu de référence noté L^0 qui définit le déplacement en x dû à une force unitaire f placée en x'.

Mise en équations du problème

Il faut poser toutes les hypothèses globales du problème à résoudre. Par souci de clarté, dans toute cette partie, les indices seront rappelés dans chaque équation. Il faut vérifier :

– L'équilibre quasi-statique en utilisant le premier tenseur de Piola-Kirchoff π :

$$div\left(\dot{\pi}\right) = div\left({}^{T}\dot{n}\right) = \dot{n}_{ij,i} = 0 \tag{2.23}$$

– La loi de comportement locale :

$$\dot{n}_{ij}\left(x\right) = l_{ijkl}\left(x\right) g_{lk}\left(x\right) = l_{ijkl}\left(x\right) v_{l,k}\left(x\right) \tag{2.24}$$

– Les conditions aux limites sur la surface du volume considéré ∂V :

$$v_i\left(x\right) = G_{ij} x_j \text{ sur } \partial V \tag{2.25}$$

En introduisant (2.24) dans (2.23) :

$$\left[l_{ijkl}\left(x\right) v_{l,k}\left(x\right)\right]_{,i} = 0 \tag{2.26}$$

Le module tangent est décomposé en une partie uniforme L^0 sur le volume V et une déviation $\delta l\left(x\right)$ par rapport à L^0 telle que :

$$l_{ijkl}\left(x\right) = L^0_{ijkl} + \delta l_{ijkl}\left(x\right) \tag{2.27}$$

En utilisant le fait que L^0 soit homogène c'est à dire $L^0_{ijkl,i} = 0$, le résultat suivant est obtenu :

$$L^0_{ijkl} v_{l,ki}\left(x\right) + \left[\delta l_{ijkl}\left(x\right) v_{l,k}\left(x\right)\right]_{,i} = 0 \tag{2.28}$$

La notation suivante est introduite :

$$\left[\delta l_{ijkl}\left(x\right) v_{l,k}\left(x\right)\right]_{,i} = \dot{K}_j\left(x\right) \tag{2.29}$$

Equation intégrale cinématique

Cette partie très calculatoire est complètement détaillée dans l'annexe C. Seul le résultat obtenu et les conséquences que cela implique sont données. Le point de départ qui est la définition du tenseur de Green (C.1) est rappelé :

$$L^0_{ijkl} \boldsymbol{G}_{lm,ki}\left(x, x'\right) + \delta_{jm} \boldsymbol{\delta}\left(x, x'\right) = 0 \tag{2.30}$$

En introduisant la définition du gradient des vitesses g :

$$g_{mn}\left(x\right) = v_{m,n}\left(x\right) \tag{2.31}$$

Et le tenseur de Green modifié comme :

$$\Gamma_{mnij}\left(x - x'\right) = \boldsymbol{G}_{im,jn}\left(x - x'\right) \tag{2.32}$$

L'équation intégrale cinématique peut être explicitée comme (C.26) :

$$g_{mn}\left(x\right) = g^0_{mn}\left(x\right) + \int_V \Gamma_{mnij}\left(x - x'\right) \delta l_{jikl}\left(x'\right) g_{lk}\left(x'\right) dV \tag{2.33}$$

Cette équation donne le lien entre le gradient des vitesses du milieu de référence et celui du milieu réel. La grande difficulté réside dans le fait que le tenseur de Green, mis à part quelques exceptions [BZ97], ne peut être calculé de manière analytique. Cette équation revêt un caractère implicite car la solution g dépend d'elle-même comme il est possible de le voir dans le terme intégral de (2.33). Ces difficultés de calcul ont donc nécessité de faire certaines hypothèses de manière à résoudre approximativement la relation (2.33) tout en restant proche de la physique.

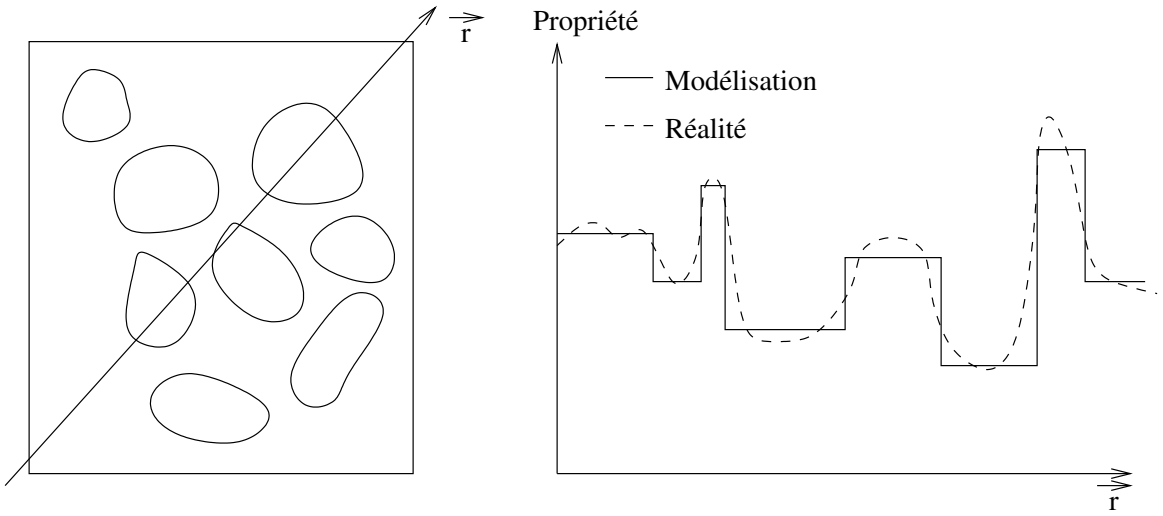


FIG. 2.3 – Simplification de l'équation intégrale

2.2.5 Simplification de l'équation intégrale

Dans cette partie, des hypothèses vont être faites de manière à simplifier l'équation intégrale. Pour cela, il est supposé que tous les champs mécaniques sont uniformes par grain. Eshelby [Esh57] a montré que, pour des comportements linéaires et des conditions d'accolement parfaits à l'interface, la solution du problème est uniforme dans l'inclusion [BZ97]. Donc, considérer que les variables sont homogènes par grain (ou par inclusion) s'accorde bien avec l'objectif d'évaluer l'état mécanique moyen par phase. Une fonction indicatrice $\theta^I(x)$ pour le volume V^I de chaque inclusion est ainsi introduite telle que :

$$\theta^I(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \in V^I \\ 0 \text{ si } x \notin V^I \end{cases} \tag{2.34}$$

Ainsi :

$$g(x) = \sum_{I=1}^{N} g^I \theta^I(x) \tag{2.35}$$

L'évolution des caractéristiques mécaniques sera donc uniforme par morceaux. La figure (2.3) montre comment sont modélisées les différentes propriétés des grains par rapport à leur valeur réelle.

$$l(x) = \sum_{I=1}^{N} l^I \theta^I(x) \tag{2.36}$$

En posant $\Delta l^I = l^I - L^0$:

$$\delta l(x) = \sum_{I=1}^{N} \Delta l^I \theta^I(x) \tag{2.37}$$

Enfin, en combinant (2.35) et (2.37), la relation suivante est obtenue :

$$\delta l(x) : g(x) = \sum_{I=1}^{N} \Delta l^I : g^I \theta^I(x) \tag{2.38}$$

La valeur g^I est donnée par la moyenne volumique de $g(x)$ sur tout le grain I soit :

$$g^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} g(x)\, dV \tag{2.39}$$

En intégrant cette relation dans (C.26) :

$$g(x) = g^0(x) + \sum_{I=1}^{N} \int_{V^I} \Gamma\left(x - x'\right) : \Delta l^I : g^I \theta^I\left(x'\right) dV^I \tag{2.40}$$

Pour connaître le gradient de la vitesse d'un grain, la relation de moyenne volumique (2.39) est appliquée à (2.40) :

$$g^I = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} g^0(x)\, dV^I + \frac{1}{V^I} \sum_{J=1}^{N} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma\left(x - x'\right) : \Delta l^J : g^J \theta^J\left(x'\right) dV^J dV^I \tag{2.41}$$

Etant donné que les conditions aux limites sont homogènes, il faut que la solution pour le milieu homogène g^0 soit homogène. Cela se traduit donc logiquement par [Lip93] :

$$\frac{1}{V^I} \int_{V^I} g^0(x)\, dV^I = g^0 \tag{2.42}$$

En posant :

$$T^{IJ} = \frac{1}{V^I} \int_{V^I} \int_{V^J} \Gamma dV^I dV^J \tag{2.43}$$

Alors :

$$g^I = g^0 + \sum_{J=1}^{N} T^{IJ} : \Delta l^J : g^J \tag{2.44}$$

Il faut maintenant simplifier cette relation en choisissant judicieusement le milieu fictif de référence. Il est possible de prendre un module tangent de référence L^0 proche du module effectif réel L^{eff}, par exemple dans le modèle autocohérent, L^0 sera choisi égal à L^{eff} [BZ79] et la relation (2.44) sera appelée l'approximation autocohérente à sites multiples. Dans le cas du modèle de Mori-Tanaka [MT73], où est considère un matériau biphasé ($N = 2$, matrice et inclusions), L^0 sera choisi comme module de la matrice L^M (phase dont la fraction volumique est la plus importante). En utilisant ce type d'approximation, dans le cas du modèle autocohérent, il est possible de supposer que les termes du tenseur d'interaction T^{IJ} pour $I \neq J$ sont négligeables devant ceux pour $I = J$. En effet, le module de référence étant le module effectif, il est possible de supposer que les interactions entre un grain et les autres sont prises en compte au sein du milieu effectif. Ce qui revient à supposer que les termes non diagonaux de le matrice T sont négligeables. Cela présente deux avantages importants :

- Tout d'abord, cela simplifie énormément l'évaluation de T^{IJ} qui est assez difficile à réaliser [FF85].
- Le gain de temps de calcul est très important car, si la valeur N est grande, il suffit de ne calculer que N tenseurs d'interactions T^{II} au lieu N^2 dans la cas du calcul complet de la matrice T.

Cette hypothèse permet de mettre (2.44) sous la forme appelée approximation autocohérente à un site :

$$g^I = g^0 + T^{II} : \Delta l^I : g^I \tag{2.45}$$

2.2.6 Calcul du module tangent autocohérent

A partir de la relation (2.45) :

$$g^0 = \left(I - T^{II} : \Delta l^I\right) : g^I \tag{2.46}$$

Soit :

$$g^I = \left(I - T^{II} : \Delta l^I\right)^{-1} : g^0 = a^{II} : g^0 \tag{2.47}$$

En appliquant la relation de moyenne volumique (2.8) à l'équation précédente :

$$G = \overline{g^I} = \overline{a^{II} : g^0} = \overline{a^{II}} : g^0 \Rightarrow g^0 = \overline{a^{II}}^{-1} : G \tag{2.48}$$

En combinant (2.47) et (2.48) :

$$g^I = a^{II} : \overline{a^{II}}^{-1} : G \tag{2.49}$$

L'expression du tenseur de concentration A est donc :

$$A^I = a^{II} : \overline{a^{II}}^{-1} \tag{2.50}$$

L'expression du module tangent autocohérent du polycristal L^{AC} sera alors :

$$L^{AC} = \overline{l^I : A^I} \tag{2.51}$$

Pour simplifier (2.51), il est possible de supposer que chaque grain I a une fraction volumique $f^I = \dfrac{V^I}{V}$, dans ces conditions :

$$A^I = a^{II} : \left(\sum_{I=1}^{N} f^I a^I\right)^{-1} \tag{2.52}$$

$$L^{AC} = \sum_{I=1}^{N} f^I l^I : A^I \tag{2.53}$$

Cette dernière relation (2.53) constitue l'expression autocohérente du module tangent à un site correspondant au modèle autocohérent tel qu'introduit par Hill [Hil65]. Elle possède un caractère fortement implicite. Le calcul du tenseur d'interaction ne peut pas se faire de façon explicite ; il faudra donc réaliser une intégration numérique. Le problème de départ constitué de N grains a été transformé en N problèmes d'une inclusion dans une matrice infinie dont le module tangent est celui du polycristal. La figure (2.4) illustre le principe de l'approximation autocohérente à un site. Le calcul du tenseur d'interaction est, quant à lui, donné en Annexe D. Il est basé sur une intégration numérique grâce à la méthode de Gauss-Legendre.

2.2.7 Evolution de la morphologie des grains

La modélisation qui a été présentée ici est écrite dans le cadre des grandes déformations. Lors d'un chargement la forme des grains évolue, généralement la déformation de ceux-ci "suit" celle qui leur est imposée. Par exemple, lors d'un essai de laminage, les grains seront allongés dans la direction du chargement. Un grain peut être représenté grâce à six variables :

– Trois demi-axes notés a, b et c qui définissent la forme de l'ellipsoïde.

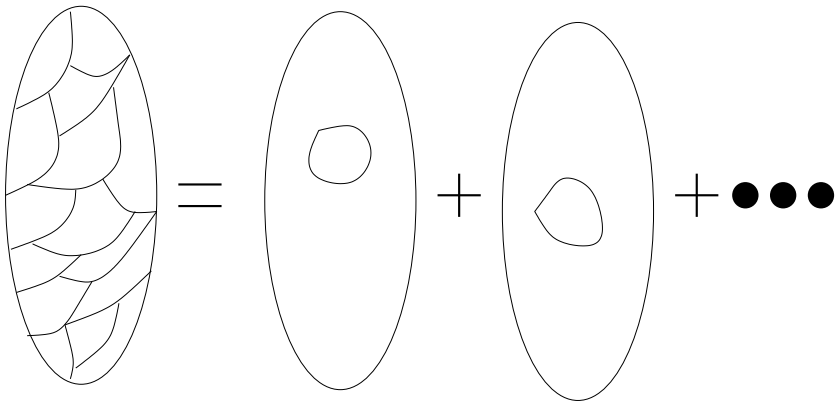


FIG. 2.4 – Modèle autocohérent au sens de Hill

– Trois angles d'Euler notés φ'_1, ϕ' et φ'_1 qui définissent la position du repère principal de l'ellipsoïde représentant le grain par rapport au repère matériel comme montré sur la figure (1.11)

L'évolution des angles d'Euler de l'ellipsoïde est supposée être due à la rotation totale imposée au grain w, par analogie avec l'évolution des angles d'Euler liés à la cristallographie :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi'}_1 &= -w_{12} - \frac{\cos\phi'}{\sin\phi'}\left(w_{13}\cos\varphi'_1 + w_{23}\sin\varphi'_1\right) \\ \dot{\phi'} &= w_{23}\cos\varphi'_1 + w_{13}\sin\varphi'_1 \\ \dot{\varphi'}_2 &= \frac{1}{\sin\phi'}\left(w_{13}\cos\varphi'_1 + w_{23}\sin\varphi'_1\right) \end{aligned} \tag{2.54}$$

Le même problème d'indétermination est engendré dans le cas où ϕ' est nul. La même hypothèse que précédemment sera choisie :

$$\begin{aligned} \dot{\varphi'}_1 &= -\frac{w_{12}}{2} \\ \dot{\phi'} &= w_{23}\cos\varphi'_1 + w_{13}\sin\varphi'_1 \\ \dot{\varphi'}_2 &= -\frac{w_{12}}{2} \end{aligned} \tag{2.55}$$

En ce qui concerne l'évolution des demi-axes de l'ellipsoïde, g_{ell} est la projection du gradient des vitesses dans le repère de l'ellipsoïde, ainsi :

$$\begin{aligned} \dot{a} &= a * g_{ell}(1,1) \\ \dot{b} &= b * g_{ell}(2,2) \\ \dot{c} &= c * g_{ell}(3,3) \end{aligned} \tag{2.56}$$

2.3 Méthode de calcul utilisée pour résoudre le modèle autocohérent

Dans cette partie, les moyens numériques mis en œuvre pour résoudre l'aspect implicite de la méthode autocohérente vont être explicités. Ensuite, les outils numériques utilisés afin de pallier aux problèmes liés à des inversions de matrices mal conditionnées seront eux aussi présentés.

2.3.1 Résolution de l'aspect implicite de la méthode autocohérente

L'approximation autocohérente à un site revêt un caractère fortement implicite, il faut donc se donner une méthode de résolution. Pour cela certaines hypothèses sont faites :

- A la première itération du premier pas du calcul tous les grains subissent la même déformation, en d'autres termes $A^I = I$ pour tous les grains.
- La solution trouvée à la fin d'une itération est celle qui est reprise au début de la suivante, ce qui suppose que la suite ainsi définie converge.
- Si le nombre d'itérations est supérieur à dix, le calcul sera considéré comment divergent et stoppé. Cette divergence intervient généralement lorsque les conditions de déformation homogène ne sont plus respectées car il faut à ce moment-là inverser des matrices non inversibles.

Pour simplifier les calculs au niveau de la loi locale un calcul est fait, à chaque pas, pour se ramener à des conditions aux limites uniquement en déformation. Pour cela, le module tangent du pas précédent est employé afin de déterminer les composantes inconnues du tenseur gradient de la vitesse. De plus, il est vérifié, à la fin du pas que les incréments de contrainte et de déformation sont bien les mêmes que ceux qui ont été imposés. Cela est assuré en vérifiant que, entre deux itérations, le module tangent macroscopique évolue peu. Cette méthode nécessite l'inversion de matrices qui peuvent être mal conditionnées dont la méthode de résolution sera présentée dans le paragraphe suivant. La figure (2.5) montre l'algorithme utilisé pour résoudre le schéma autocohérent. Dans le cas d'un changement de trajet, pour la première itération du premier pas de ce nouveau trajet, il est supposé que le module tangent macroscopique est égal au tenseur d'élasticité. Les erreurs générées par cette hypothèse seront ensuite éliminées dans les boucles d'itérations. De plus, dans la majorité des chargements complexes présentés ici, au moment de chaque changement de trajet le comportement du matériau se situe dans le domaine élastique.

2.3.2 Inversion de matrices mal conditionnées

Une matrice dont certains termes sont de plusieurs ordres de grandeurs plus grands que d'autres est appelée mal conditionnée. Ce type de matrice apparaît constamment lorsque le pilotage se fait en partie en contrainte et en partie en déformation. Pour remédier à cela, une technique numérique peut être utilisé. S'il est nécessaire d'inverser, à chaque pas n, une matrice A_n qui évolue de façon lente. En supposant que, à ce pas n son inverse notée B_n soit connue, il est possible d'écrire :

$$B_n * A_n = \text{Identité} \tag{2.57}$$

Au pas suivant, il faut calculer A_{n+1}^{-1}, en remarquant que :

$$B_n * A_{n+1} \approx \text{Identité} \tag{2.58}$$

Comme $B_n * A_{n+1}$ est proche de l'identité, son inversion peut se faire sans problèmes numériques, alors :

$$(B_n * A_{n+1})^{-1} = A_{n+1}^{-1} * B_n^{-1} \tag{2.59}$$

D'après (2.59) :

$$A_{n+1}^{-1} = (B_n * A_{n+1})^{-1} * B_n \tag{2.60}$$

Cette méthode permet d'éviter les problèmes d'inversion liés au pilotage et donc de modéliser la majorité des conditions aux limites expérimentales des essais mécaniques étudiés ici.

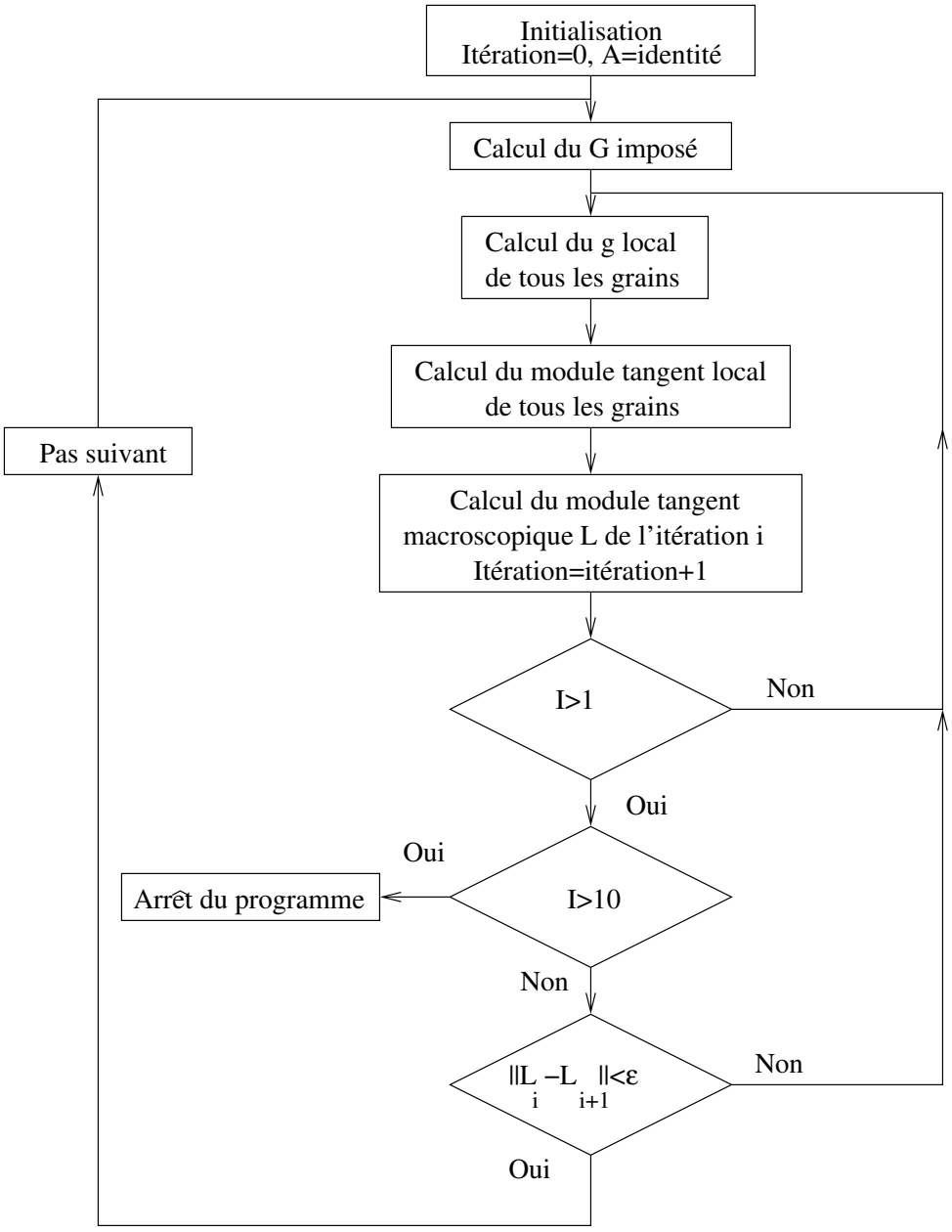
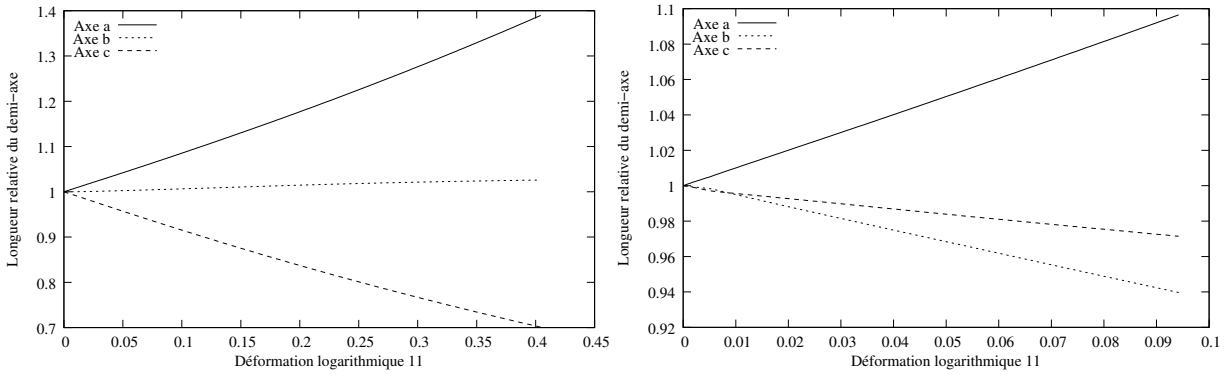


FIG. 2.5 – Algorithme de résolution du schéma autocohérent

Paramètres	τ_{c0}	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}	Grains
Valeur	80 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	80	2 nm	20 microns	100

TAB. 2.1 – Paramètres pour la validation qualitative de la transition d'échelles



a) Essai de laminage b) Essai de traction uniaxiale

FIG. 2.6 – Evolution de la morphologie d'un grain

2.4 Résultats qualitatifs

Dans cette partie l'étude qualitative des différents phénomènes physiques introduits dans le modélisation de la transition d'échelles va être menée. Il sera vérifié si l'évolution morphologique des grains se fait conformément aux attentes selon le chargement imposé. De la même manière les résultats donnés par le modèle autocohérent seront comparés avec ceux de Taylor-Lin. Puis les contraintes et les déformations locales au cours d'un chargement seront analysées pour montrer l'apport du modèle autocohérent. Il sera aussi vérifié que la contrainte moyenne et la moyenne des contraintes (qui sont calculées de manières différentes) sont bien égales.

2.4.1 Evolution de la forme des grains

Un jeu de paramètres est choisi arbitrairement puis leur influence est étudiée en les faisant varier un par un. Ces paramètres sont donnés dans le tableau (2.1). Il est à noter que les valeurs des demi-axes sont normalisées, en effet dans les calculs seul les ratio entre ces demi-axes sont utilisés. L'évolution des trois demi-axes définissant la forme de l'ellipsoïde pour un grain du polycristal dont l'orientation cristallographique est (200°, 24°, 115°) est étudiée. L'orientation morphologique de l'ellipsoïde est, quant à elle, supposée être (0°, 0°, 0°) ce qui est proche des observations expérimentales pour des tôles laminées. Enfin, il est supposé qu'au début du calcul le grain a une forme sphérique (les trois demi-axes sont égaux à 1). La figure (2.6) montre l'évolution de la valeur des trois demi-axes de l'ellipsoïde lors d'un trajet de laminage et de traction. Ces figures montrent que, qualitativement, les effets escomptés sont bien retrouvés. En effet, dans le cas du laminage (2.6a) le grain est étiré dans la direction de l'axe a correspondant à la direction de laminage et écrasé dans la direction normale (axe c). De plus, dans la direction transverse il n'y a pas de déformation du grain, ce qui correspond bien à l'expérience. En ce qui concerne la traction (2.6b), l'axe a est étiré alors que les deux autres sont écrasés, il y a une différence entre les axes b et c qui est due à l'anisotropie de la déformation plastique.

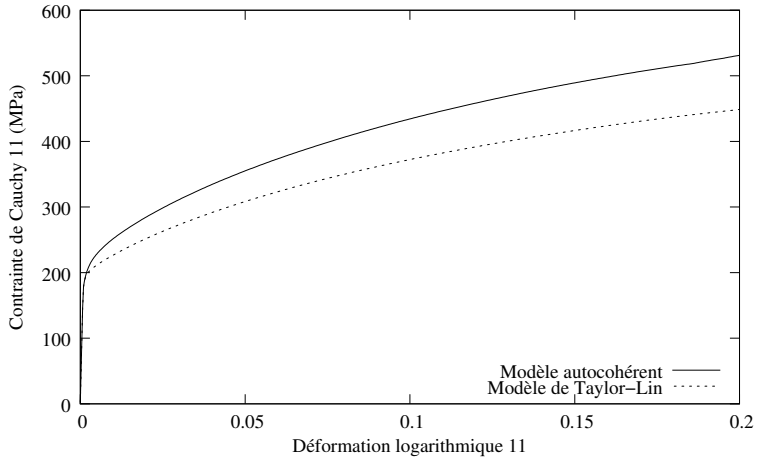
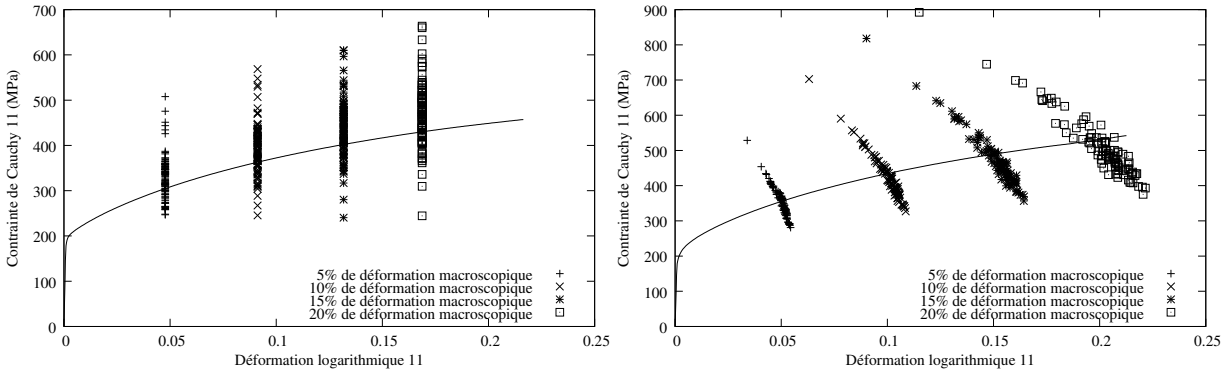


FIG. 2.7 – Comparaison entre les modèles de Taylor-Lin et autocohérent pour un essai de traction uniaxiale



a) Modèle de Taylor-Lin b) Modèle autocohérent

FIG. 2.8 – Nuages de points pour les deux méthodes de transition d'échelles

2.4.2 Comparaisons entre la méthode de transition d'échelles autocohérente et celle de Taylor-Lin

Dans ce chapitre ont été montrées quelques voies possibles pour relier le comportement de chacun des grains au comportement macroscopique. Il a été décidé d'utiliser une méthode de transition d'échelles assez complexe de manière à représenter au mieux la physique. Les apports de cette méthode par rapport à la méthode très simple de Taylor-Lin vont donc être montrés. La figure (2.7) présente la comparaison contrainte / déformation pour ces deux méthodes dans le cas d'un essai de traction uniaxiale. Il apparaît bien que la méthode autocohérente donne un résultat plus raide que la méthode de Taylor-Lin. Sur la figure (2.8) sont aussi présentés les nuages de points contrainte / déformation pour l'ensemble des grains pour une déformation macroscopique de 5, 10, 15 et 20%. Cette figure montre la très forte hypothèse physique du modèle de Taylor-Lin à savoir que tous les grains ont la même déformation à chaque instant. A l'inverse le modèle autocohérent permet de simuler des contraintes et des déformations très différentes d'un grain à l'autre. Dans le cas du modèle autocohérent, le nuage de points a tendance à s'élargir avec la déformation et qui correspond à ce qui est observé. Cependant, il apparaît que la différence de déformation entre le grain le plus déformé et le moins déformé semble faible par rapport à

Σ	$\frac{1}{V}\int_V \sigma dV$	Erreur (%)	$E_{gl}(\%)$	$\frac{1}{V}\int_V e_{gl} dV(\%)$	Erreur (%)
351.52	351.98	0.13	5.004	5.006	0.04
423.81	423.89	0.02	10.002	10.012	0.1
472.78	472.64	0.025	15.063	15.081	0.11
507.39	507.15	0.04	20.089	20.091	0.001

TAB. 2.2 – Valeurs moyenne et moyenne des valeurs pour le modèle autocohérent

Paramètres	Phase	τ_{c0}	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}	Grains
Valeur	Ferrite	105 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	10 microns	85
	Martensite	450 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	1 microns	15

TAB. 2.3 – Paramètres pour le matériau biphasé de la validation qualitative polycristalline

l'expérience. Lineau [Lin97] a mesuré, dans le cadre de sa thèse, les valeurs des déformations dans des polycristaux d'acier et les a comparées à celles données par le modèle autocohérent en petites déformations. Il y est montré que les écarts d'un grain à l'autre calculés par le modèle autocohérent sont très différents de ceux mesurés expérimentalement. Par exemple, pour une déformation macroscopique de l'ordre de 20%, les écarts en déformation d'un grain à l'autre estimés par le modèle autocohérent par Lineau sont de l'ordre de 1%. Sur la figure (2.8b) ces écarts sont nettement plus importants, ils sont de l'ordre de 8% ce qui se rapproche plus de l'expérience mais reste tout de même sous-estimé. Cette amélioration des résultats est dû au fait que les calculs se font en grandes déformations contrairement à Lineau. En effet, la partie antisymétrique du tenseur d'interaction est prise en compte dans les calculs et entraîne des écarts de comportement entre les grains plus importants. Cela montre donc un des intérêts de travailler dans ce cadre.

Le tableau (2.2) présente la différence entre la contrainte et la déformation moyennes calculées grâce à la loi de comportement et celles calculées à partir de la contrainte et de la déformation locale dans chacun des grains. Ce calcul est fait pour chacun des nuages représentés sur la figure (2.8a) qui montre que l'erreur numérique est extrêmement faible, elle est au maximum de 0.1 % !

La figure (2.9) présente les mêmes nuages de points que pour la figure (2.8b) dans le cas d'un matériau biphasé (ferrite et martensite) dont la différence de comportement entre les phases n'est due qu'à une différence entre les cissions critiques initiales et le diamètre moyen des grains. Le tableau (2.3) donne les paramètres utilisés pour faire ce calcul.

La figure (2.9) montre bien que le comportement de chacune des phases est différent de celui du polycristal. Les nuages de points tracés sont bien distincts d'une phase à l'autre pour une même déformation macroscopique (ici ont été choisies 2, 5, 9 et 12%). Enfin, comme pour le cas monophasé, les écarts en déformation d'un grain à l'autre sont importants.

Cette partie a donc montré que, qualitativement, les résultats obtenus sont proches des attentes et que le cadre des grandes déformations permet de donner des résultats plus proches de l'expérience que celui des petites déformations. L'accent va maintenant être mis sur la validation du modèle par rapport à toute une série de résultats expérimentaux (essais rhéologiques,

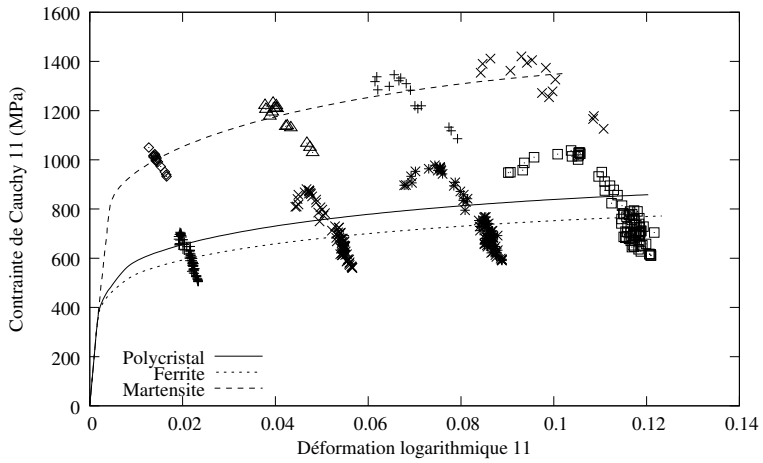


FIG. 2.9 – Evolution des contraintes et des déformations dans les grains d'un matériau biphasé

surfaces de charge, évolution de texture, coefficient de Lankford) pour différents types d'aciers (monophasés, biphasés et monophasé contenant des précipités).

2.5 Comparaison entre théorie et expérience pour des acier monophasés ferritiques

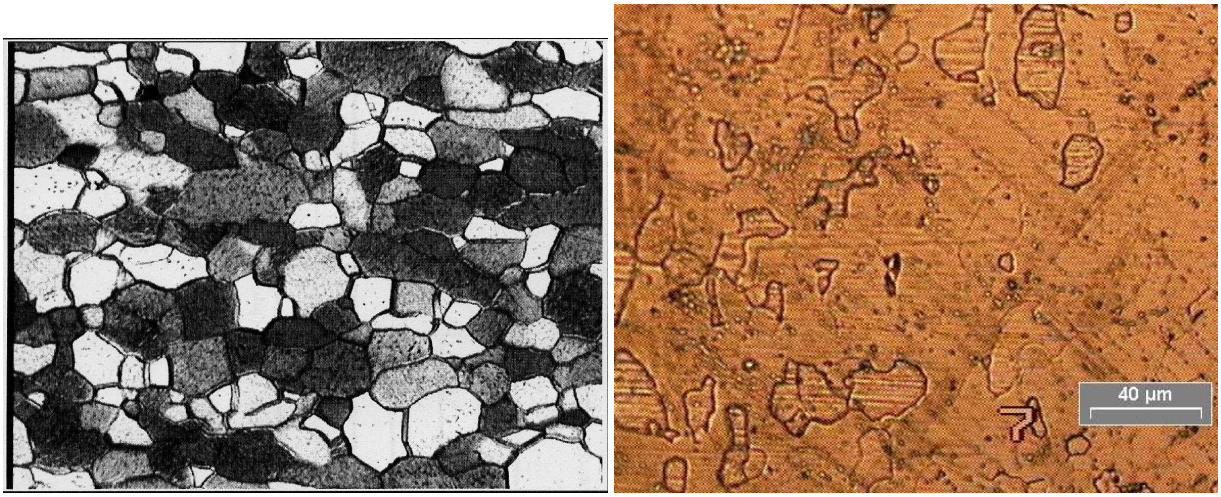
Dans cette partie, le modèle va être comparé à l'expérience pour des essais rhéologiques, des calculs de textures, des surfaces de charge et des coefficients de Lankford dans le cas d'aciers ferritiques. La majorité des essais rhéologiques ont été réalisés au LPMTM [BTB+01], [BTHT03]. Pour obtenir la texture du matériau dans son état initial la diffraction des rayons X est employée. Pour avoir un bon compromis temps de calcul / qualité du résultat, 1000 orientations cristallographiques tirées de la fonction de distribution des orientations seront choisies pour représenter la texture initiale. Une micrographie de chacun des aciers étudiés est réalisée pour mesurer la taille du grain qui est estimée à 20 microns. Quatre aciers seront étudiés, les trois premiers appelés respectivement C1754, D1879 et S2325 sont produits par Arcelor. Ce sont trois aciers issus de coulées différentes. Le quatrième appelé DDQ est produit par Nippon Steel Corporation. La composition chimique est connue seulement pour les aciers fournis par Arcelor. En ce qui concerne l'acier DDQ, sont disponibles des courbes contrainte / déformation, des surfaces de charge et des coefficients de Lankford. Ces quatre aciers ont aussi des caractéristiques mécaniques assez semblables. La figure (2.10) montre une micrographie des aciers C1754 et S2325. Il est à noter que les aciers C1754 et D1879 ont la même microstructure, leur différence provient de la méthode d'élaboration (l'acier D1879 a subi un léger skinpass alors que le C1754 non).

Caractéristique		Epaisseur	R_p 0.2%	R_m	A%	A
Valeur	Acier C1754	0.7 mm	128 MPa	295 MPa	23.8%	43.39%
	Acier D1879	0.8 mm	163 MPa	295 MPa	23.9%	43.1%
	Acier S2325	0.67 mm	149 MPa	316 MPa	25.5%	42.2%

TAB. 2.4 – Principales caractéristiques mécaniques des aciers ferritiques

	% C	% Si	% Mn	% P	% S	% N	% Al	% Ti	% Mo	% Fe
C1754	0.002	0.006	0.088	0.007	0.006	0.057	0.0047	0.071	0.003	Balance
D1879	0.0022	0.007	0.089	0.005	0.007	0.027	0.0037	0.089	0.002	Balance
S2325	0.0026	0.01	0.106	0.01	0.009	0.0038	0.043	0.076	0.003	Balance

TAB. 2.5 – Composition chimique des aciers ferritiques



a) Acier C1754 b) Acier S2325

FIG. 2.10 – Micrographie des aciers ferritiques

Les tableaux (2.4) et (2.5) donnent les principales caractéristiques mécaniques ainsi que la composition chimique des trois aciers fournis par Arcelor. R_p 0.2% désigne la contrainte après 0.2% de déformation plastique, R_m la résitance mécanique à la rupture, A% la déformatin jusqu'à laquelle la déformation reste homogène et A la déformation à la rupture.

2.5.1 Essais rhéologiques

Essais rhéologiques utilisés pour réaliser l'identification des paramètres

Pour identifier les paramètres de chacun des aciers étudiés ici, deux cas sont possibles :
- Soit un seul essai rhéologique est accessible. Alors tous les paramètres seront identifiés au mieux à partir de cet essai.
- Soit au moins deux essais rhéologiques sont accessibles. Les paramètres seront alors identi-

Acier	Essai 1	Essai 2
C1754	Traction uniaxiale	Essai Bauschinger
D1879	Traction uniaxiale	Aucun
S2325	Traction uniaxiale	Aucun
DDQ	Traction uniaxiale	Aucun
D1957	Traction uniaxiale	Essai Bauschinger
A159	Traction uniaxiale	Aucun
T1625	Traction uniaxiale	Cisaillement simple

TAB. 2.6 – Essais selon la direction de laminage utilisés pour l'identification paramétrique

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	1000	45 MPa	45 MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	90	3.25 nm	20 μm

TAB. 2.7 – Paramètres identifiés pour l'acier C1754

fiés à partir de deux trajets. Généralement, un essai de traction uniaxiale et un essai Bauschinger seront utilisés. Les paramètres seront choisis de manière à s'approcher au mieux des résultats expérimentaux pour ces deux essais. C'est à dire en minimisant l'écart entre la simulation et l'expérience tout au long du trajet de chargement pour les deux essais en même temps.

La méthodologie pour identifier ces paramètres est la même que dans le cas monocristallin. Le tableau (2.6) donne les essais employés pour réaliser l'identification des aciers étudiés.

Acier C1754

Environ 40 essais rhéologiques sont disponibles pour cet acier, comme tracer 40 courbes contrainte / déformation serait fastidieux, seulement certains résultats seront présentés sous cette forme. Cependant, pour bien se rendre compte de la qualité des résultats, ils ont été condensés sous la forme de diagrammes présentant les informations jugées pertinentes au niveau des résultats. Les paramètres identifiés pour cet acier sont consignés dans le tableau (2.7). Par souci de concision, les essais rhéologiques seront nommés avec certaines abréviations données dans le tableau (2.8). Les éprouvettes sont issues de tôles laminées, il est nécessaire de connaître l'orientation de l'éprouvette dans le plan (direction de laminage DL, direction transverse DT) par rapport à la direction du chargement. Pour cela, un angle α est introduit comme illustré par la figure (2.11). Dans la nomenclature utilisée ici, pour les essais simples, le chiffre après le type d'essai indique l'orientation par rapport à la direction de laminage. Par exemple Tu 15 signifie "Traction uniaxiale pour une éprouvette orientée à 15° par rapport à la direction de laminage". Pour les essais complexes, le nombre qui suit le premier chargement indique la déformation atteinte à la fin du premier chargement. Le deuxième nombre indique soit la position de l'éprouvette dans la tôle pour le deuxième trajet si il a eu changement de type de trajet, soit la position pour les deux trajets si ceux-ci sont de même nature. Par exemple, Cb 5 90 signifie "essai Bauschinger jusqu'à 5% de déformation pour une éprouvette orientée à 90° de la direction de

Abréviation	Signification
Tu	Traction uniaxiale
Cs	Cisaillement simple
Tp	Traction plane
Eb	Expansion biaxée
Eeb	Expansion equi-biaxée
Cb	Cisaillement Bauschinger

TAB. 2.8 – Abréviation des essais rhéologiques

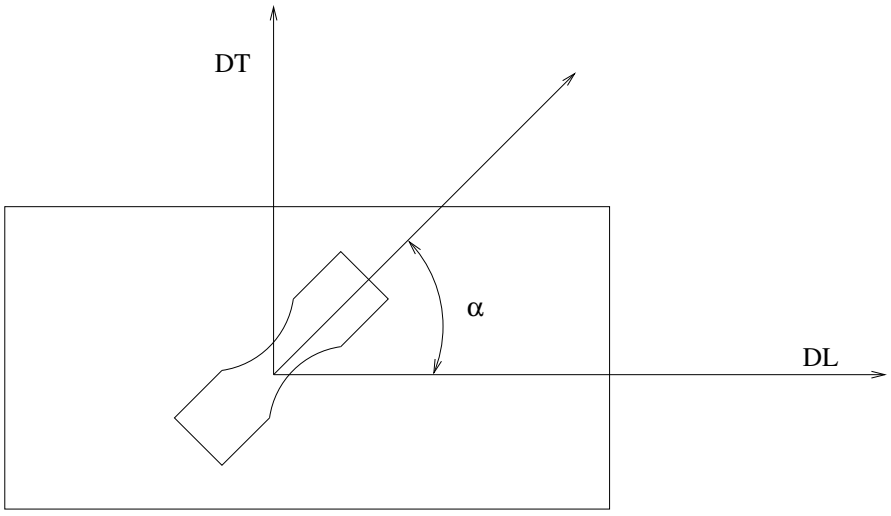


FIG. 2.11 – Orientation d'une éprouvette par rapport à la direction de laminage

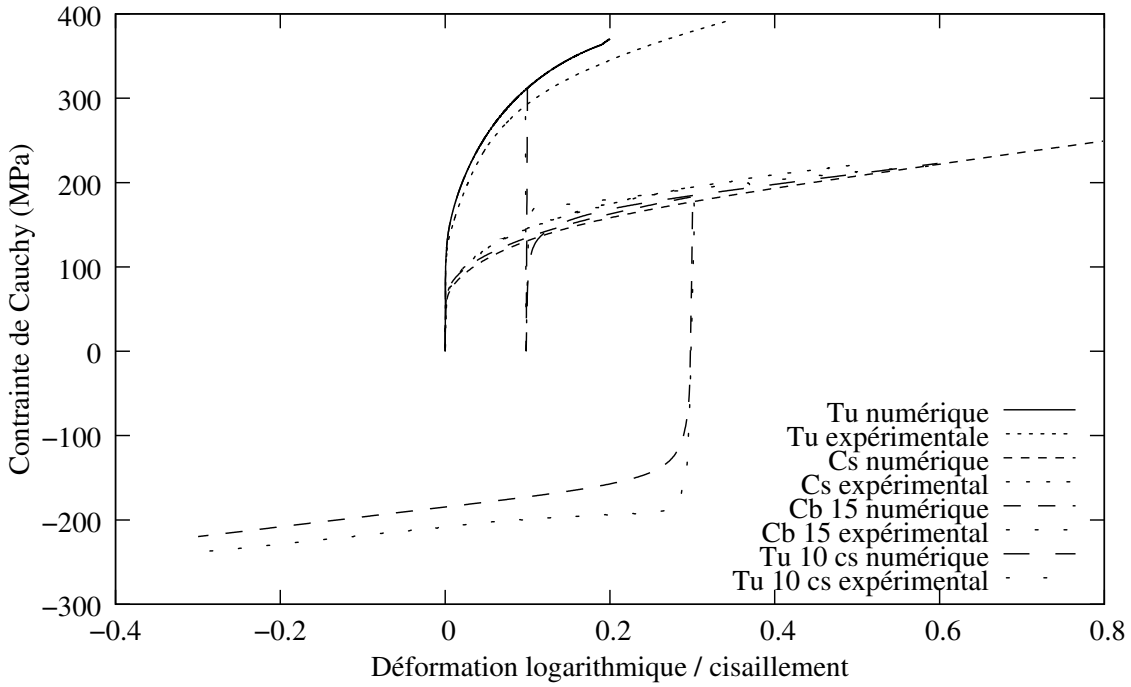
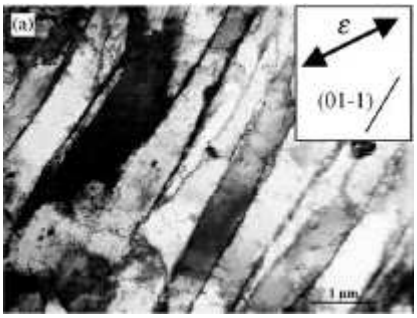


FIG. 2.12 – Courbes contrainte / déformation pour quelques trajets de chargement dans le cas de l'acier C1754 pour des éprouvettes orientées dans la direction de laminage

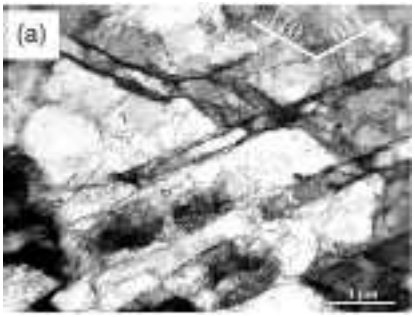
laminage". Par contre, Tu 10 cis 45 signifie "traction uniaxiale jusqu'à 10% de déformation pour une éprouvette orientée selon la direction de laminage et ensuite essai de cisaillement pour une éprouvette orientée à 45° par rapport à la direction de laminage". Dans le cas d'essais d'expansion toutes les éprouvettes sont orientées dans la direction de laminage et les deux chiffres indiquent le rapport de contrainte entre les deux axes lors du chargement. Par exemple, Eb 1/4 veut dire que le chargement se fait de 1 MPa sur l'axe 1 pour 4 MPa sur l'axe 2.

La figure (2.12) présente quelques résultats dans lesquels les éprouvettes sont orientées selon la direction de laminage. Comme le montre ce graphique, les courbes expérimentales sont assez proches des courbes calculées. Il est à noter, que, dans le cas présenté ici, quatre paramètres ont besoin d'être identifiés à savoir :

- La cission critique initiale qui est supposée être la même pour chaque système de glissement de chaque grain. Les deux familles n'ont pas été différenciées de façon à avoir un seul paramètre d'identification et non deux. Ici, comme il y a un ensemble de grains orientés plus ou moins aléatoirement, la limite élastique dépendra très peu de l'orientation de l'éprouvette par rapport à la direction de laminage. Ce qui permet de justifier ce choix. Pour l'identifier, il suffit de remarquer que, dans le cas de la traction uniaxiale, la limite élastique est de l'ordre de deux fois la cission critique initiale.
- Le paramètre lié au libre parcours moyens des dislocations. Ce paramètre est surtout influent lors des premiers stades de la déformation et génère une pente d'écrouissage d'autant plus grande qu'il est faible.
- La distance d'annihilation critique qui a un effet surtout pour des déformations importantes. Plus elle est faible, plus la pente d'écrouissage après une assez grande déformation est grande.



a) Microstructure lors d'un trajet simple [PKT+02]



b) Microstructure lors d'un trajet complexe [PBT+01]

FIG. 2.13 – Microstructure des dislocations

– La taille de grain qui peut être aisément identifiée d'après une micrographie.

La figure (2.12) montre que les zones pour lesquelles les courbes expérimentales sont mal reproduites apparaissent lorsque un changement de trajet est réalisé. Physiquement, lors du premier trajet de chargement une microstructure de dislocations est créée. Cette microstructure sera d'autant plus marquée que la déformation subie par le matériau sera grande [Pee02]. Lors du deuxième trajet, une nouvelle microstructure de dislocation est créée. Pour cela, elle doit d'abord "effacer" l'ancienne pour en créer une nouvelle. Concrètement, pendant cette phase de transition, la densité de dislocations reste constante mais leur répartition spatiale évolue pour créer la nouvelle microstructure [Pee02]. Pour illustrer cela, la figure (2.13) montre la microstructure de dislocations créée lors d'un essai de traction sur un acier doux. Ce matériau possède des caractéristiques mécaniques et métallurgiques proches de l'acier étudié ici. Sur la figure (2.13a) la présence de cellules de dislocations allongées est nettement visible. Cette figure montre ici une des limitations du modèle proposé. En effet, comme la cellule de dislocations possède une forme allongée alors le libre parcours moyen des dislocations devra être très différent d'un système de glissement à l'autre, ce qui n'est pas le cas dans le modèle proposé (voir figure (1.14)). Sur la figure (2.13b) est présentée la microstructure de dislocations pour le même matériau que précédemment lors d'un essai orthogonal (une traction uniaxiale suivie d'un cisaillement) pendant le deuxième chargement. Cette figure montre bien qu'il a fallu "effacer" l'ancienne microstructure de dislocations afin d'en créer une nouvelle. Dans le modèle proposé ici, comme la différence entre les libres parcours moyens calculés est faible, lors du deuxième trajet l'effet dû à la microstructure des dislocations n'est pas correctement reproduit. Pour améliorer la finesse du modèle à cette échelle, il faudrait donc prendre en compte l'arrangement spatial des dislocations comme dans les modèles de Peeters [Pee02] ou Teodosiu [TH95]. Au niveau des courbes contrainte / déformation cet effet lié à la microstructure se traduit par l'apparition d'un plateau au moment du deuxième trajet (sur la figure (2.12), cela se voit nettement pour l'essai Bauschinger à 15 %). Après ce plateau, la pente d'écrouissage augmente à nouveau lorsque la nouvelle microstructure de dislocations est créée. La notion de répartition spatiale des dislocations n'a été prise en compte que partiellement par le biais de la densité moyenne par plan de glissement. C'est pour cela que ce régime transitoire est mal décrit. Par contre, dès la fin de cette zone, la simulation numérique donne des résultats proches de l'expérience pour les différents types de chargement.

Pour avoir une vue globale des résultats, des critères de comparaison entre expérience et calcul numérique sont proposés. Deux critères sont ainsi définis :

– Un critère relatif qui est l'écart en contrainte maximal. Pour évaluer cet écart, lors de chaque essai rhéologique, est relevé point par point l'écart entre la courbe expérimentale

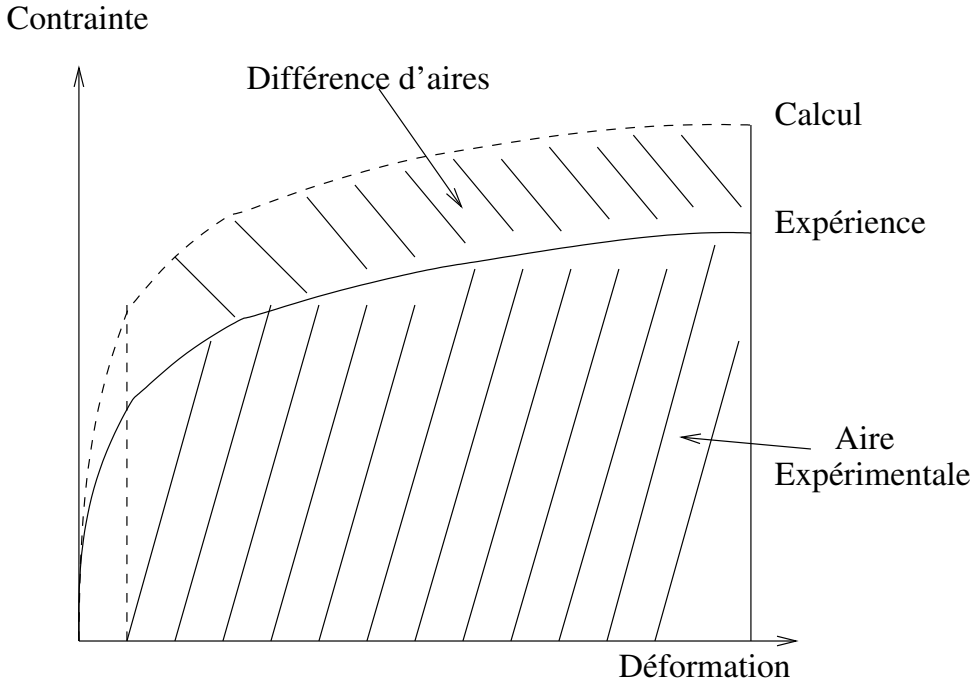


FIG. 2.14 – Mesure de l'écart en aire

et la courbe numérique. Le maximum est ensuite recherché et relevé pour chaque essai. Cet écart sera toujours mesuré à partir du moment où l'entrée en plasticité est faite. En effet si, lors d'un second trajet, la décharge numérique a lieu à 15% et expérimentalement à 14.9% il y aura un écart en contrainte de 200 MPa uniquement dû à une imprécision de mesure.

– Un critère plus global qui est l'écart en aire entre les courbes numérique et expérimentale. La différence d'aires entre les deux courbes est mesurée puis divisée par l'aire expérimentale. Pour cela est calculée, intervalle par intervalle, l'aire sous les deux courbes. Puis à chaque fois la différence entre les deux aires en valeur absolue est ajoutée. Enfin l'écart relatif est divisé par la surface expérimentale totale. La figure (2.14) illustre ce critère qui peut se mettre sous la forme :

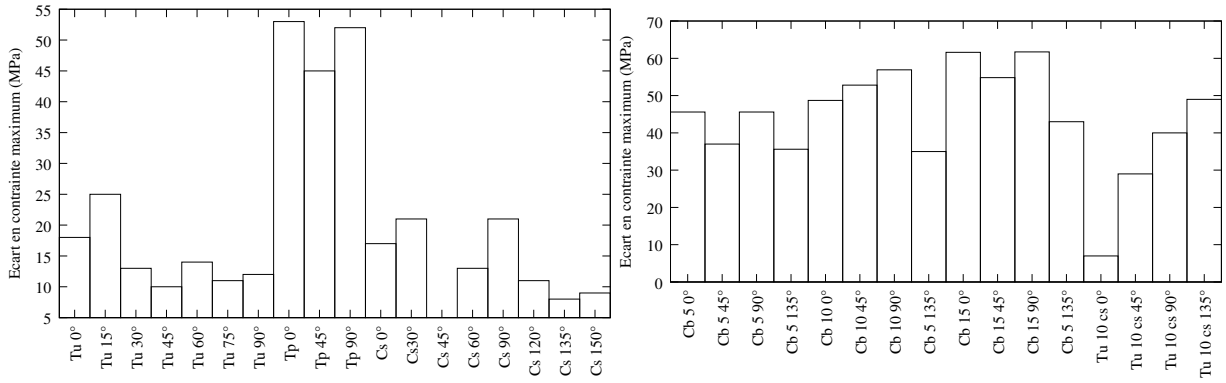
$$ecart = \frac{\int_0^{\varepsilon_{max}} |\sigma_{num} - \sigma_{exp}| d\varepsilon}{\int_0^{\varepsilon_{max}} |\sigma_{exp}| d\varepsilon} \tag{2.61}$$

Ce critère a pour but de comparer les écarts non seulement pour deux essais rhéologiques sur le même matériau mais aussi d'un matériau à l'autre.

Les histogrammes (2.15) présentent les écarts en contrainte pour tous les trajets de chargement simulés. Ces figures permettent de donner certaines conclusions :

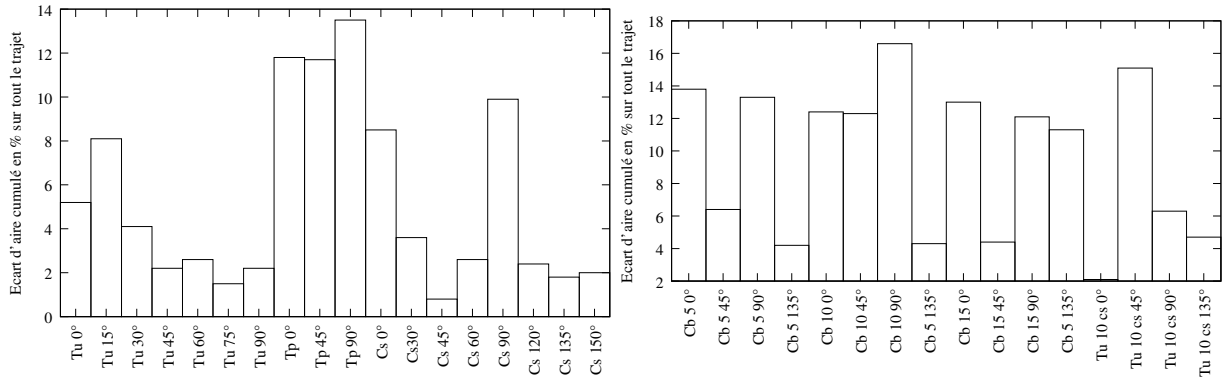
– Pour les trajets de traction et de cisaillement les écarts sont globalement assez faibles, de l'ordre de 10 à 20 MPa pour une contrainte de l'ordre de 200 MPa. Le modèle est capable de bien prédire les effets liés à la texture initiale car les écarts en contrainte sont à peu près les mêmes quelle que soit l'orientation de l'éprouvette par rapport à la direction de laminage.

– En ce qui concerne les essais de traction plane, les écarts sont nettement plus importants. Une grande partie peut être imputée au fait que les conditions aux limites sont difficiles



a) Trajets simples b) Trajets complexes

FIG. 2.15 – Ecarts en contrainte pour l'acier C1754



a) Trajets simples b) Trajets complexes

FIG. 2.16 – Ecarts en aire pour l'acier C1754

à maîtriser lors de l'essai rhéologique alors que, numériquement, cela ne pose pas de problèmes. Comme le comportement est très dépendant de ces conditions aux limites, cela explique une partie de l'écart.

- Pour les essais complexes, les écarts sont relevés lors du deuxième trajet de chargement. Comme il fallait s'y attendre, l'écart en contrainte à tendance à être nettement plus important que lors des trajets simples. Il faut, en effet, ajouter aux écarts obtenus lors du premier trajet ceux dus au régime transitoire lors de l'entrée en plasticité au cours du second trajet. Comme pour les trajets simples, cet écart est peu dépendant de l'orientation de l'échantillon, ce qui suppose que les effets liés à la texture sont bien prédits par le modèle.

La figure (2.16) présente les écarts en aire pour les mêmes essais rhéologiques que pour la figure (2.15). Ces figures montrent que :

- Les écarts en aire pour les trajets simples sont plus faibles que pour les trajets complexes. De l'ordre de 5% pour le cisaillement et la traction, et de l'ordre de 10% pour les trajets complexes et la traction plane.
- Les résultats obtenus pour des trajets simples montrent que le modèle est capable de prédire le comportement tout en prenant en compte la texture initiale. Les effets dus aux changements de trajets, sont moins bien décrits du fait de l'évolution de la microstructure des dislocations trop simplement modélisée.

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	1000	55 MPa	55 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	90	3.25 nm	20 μm

TAB. 2.9 – Paramètres identifiés pour l'acier D1879

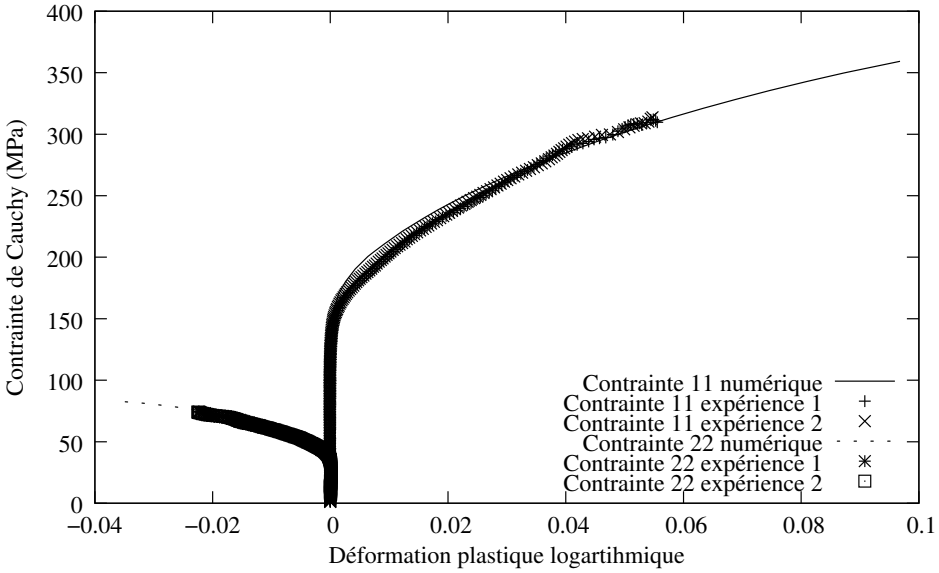
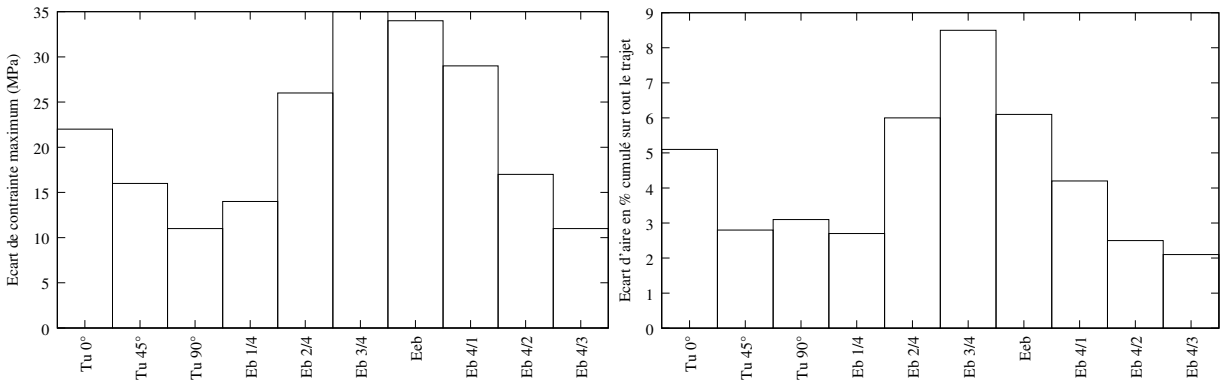


FIG. 2.17 – Essai d'expansion biaxée 1/4 pour l'acier D1879

Acier D1879

D'autres essais rhéologiques ont été réalisés sur un acier avec quasiment la même composition chimique que précédemment, comme montré dans le tableau (2.5). Cependant, dans ce cas, le matériau a subi un léger skinpass (laminage de 1%) lors de son élaboration avant d'être testé. Etant donné que les caractéristiques de l'opération de skinpass sont méconnues, ce matériau sera traité comme un deuxième acier, en ajoutant comme contrainte que seule la cission critique initiale a changé par rapport au premier acier ; comme montré dans le tableau (2.9) qui présente les paramètres identifiés dans ce cas. Pour cet acier, les essais rhéologiques effectués sont des tractions uniaxiales ainsi que des essais d'expansion. Les mêmes histogrammes que pour le cas précédent sont présentés. La figure (2.17) présente la comparaison entre expérience et simulation numérique pour le cas de l'expansion biaxée 4/1. La courbe calculée est très proche de la courbe expérimentale pour les deux axes selon lesquels le matériau est chargé. Cela montre bien que le modèle proposé est capable de prédire des chargements multiaxiaux. La figure (2.18) montre les écarts en contrainte et en aire pour les différents trajets d'expansion et de traction considérés. Globalement, les écarts en contrainte sont du même ordre de grandeur que pour l'acier C1754, par contre les écarts en aire ont tendance à être beaucoup plus faibles. D'une manière générale le modèle proposé donne, pour cet acier, des résultats satisfaisants pour les essais simples et complexes effectués.



a) Ecarts de contrainte b) Ecarts d'aire

FIG. 2.18 – Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier D1879

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	1000	60 MPa	60 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2 nm	20 μm

TAB. 2.10 – Paramètres identifiés pour l'acier S2325

Acier S2325

Dans cette partie l'acier S2325 est étudié. Pour cet acier seuls quelques essais rhéologiques simples ou complexes sont accessibles. Les paramètres identifiés pour cet acier sont donnés dans le tableau (2.10). Les paramètres identifiés sont assez peu différents de ceux trouvés pour les aciers C1754 (tableau 2.7) et D1879 (tableau 2.9). La figure (2.19) présente un des essais qui a permis de réaliser la validation du modèle. Le comportement est très bien prédit par le modèle étant donné que les paramètres ont été identifiés à partir de cet essai. Les figures (2.20a) et (2.20b) présentent les écarts en terme de contrainte et d'aires pour tous les essais réalisés sur cet acier. Il est important de remarquer que, dans ce cas, les essais simples et complexes sont donnés sur le même graphique. Ces deux figures montrent que les écarts en terme de contrainte et d'aires sont très faibles, les écarts en aire ne dépassant pas 8%. Ces bons résultats montrent que le modèle proposé est bien capable de prédire le comportement pour un troisième acier ferritique. Cependant il ne faut pas oublier que peu d'essais expérimentaux sont disponibles, cela rend donc plus facile de trouver un jeu de paramètres qui modélise bien l'ensemble des essais.

Acier DDQ

L'acier DDQ est maintenant étudié. Pour cet acier, seule la traction uniaxiale est disponible comme essai rhéologique, par contre des surfaces de charge ainsi que les coefficients de Lankford ont été mesurés expérimentalement. Le tableau (2.11) donne les paramètres identifiés pour cet acier à partir de l'essai de traction uniaxiale. La figure (2.21) montre le résultat de l'identification des paramètres pour l'essai de traction uniaxiale. Etant donné que tous les paramètres sont identifiés à partir de cette courbe, il est normal que les résultats numériques et expérimentaux soient très proches.

Il vient d'être montré que le modèle proposé était capable de reproduire le comportement en terme de courbes contrainte / déformation pour quatre aciers ferritiques différents. Il est intéressant valider ce modèle sur d'autres types de résultats tels que l'évolution des textures ou

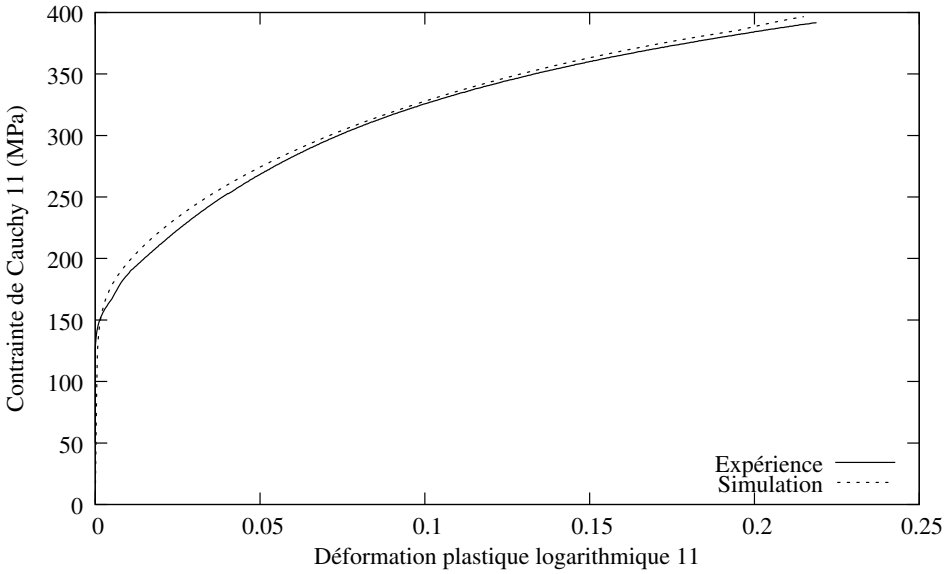
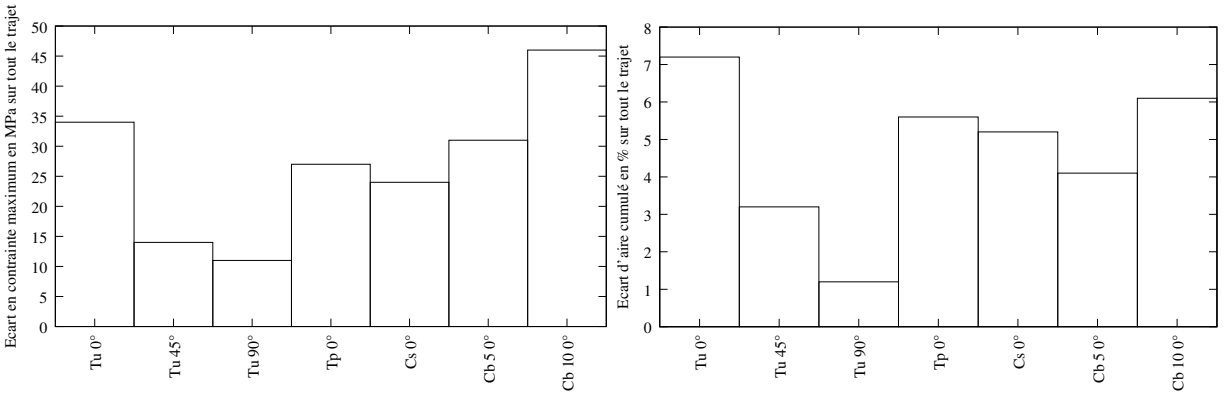


FIG. 2.19 – Essai de traction uniaxiale pour une éprouvette orientée à 0° par rapport à la direction de laminage sur l'acier S2325



a) Ecarts de contrainte b) Ecarts d'aire

FIG. 2.20 – Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier S2325

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	1000	65 MPa	65 MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	60	9 nm	20 μm

TAB. 2.11 – Paramètres identifiés pour l'acier DDQ

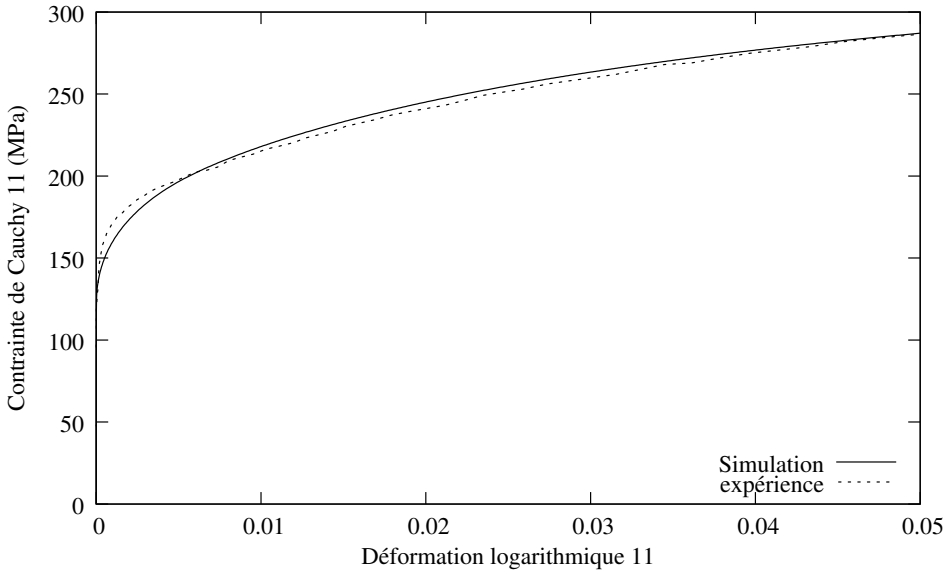


FIG. 2.21 – Identification paramétrique pour l'acier DDQ

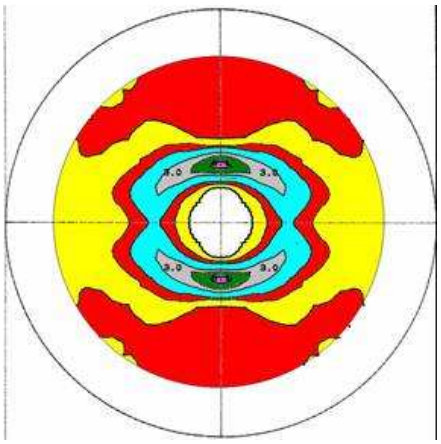
les coefficients de Lankford.

2.5.2 Textures de l'acier C1754

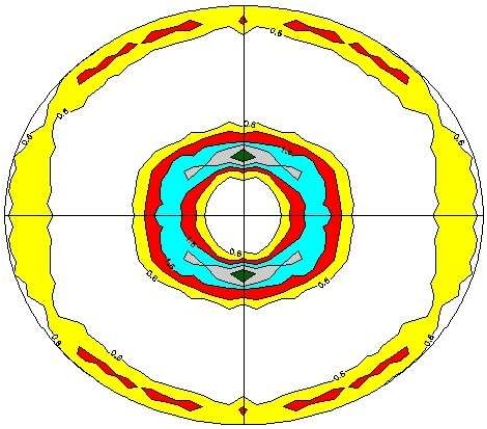
Dans ce paragraphe, les textures obtenues selon différents chargements monotones vont être comparées à l'expérience. Ces trajets sont l'expansion biaxée et la traction plane pour des éprouvettes orientées dans la direction de laminage ainsi que la traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction transverse. 1000 orientations cristallographiques tirées de la fonction de distribution des orientations sont utilisées pour représenter la texture dans le but d'obtenir un bon compromis entre temps de calcul et qualité du résultat. Ici, vu le faible nombre de grains, seule une validation qualitative de l'évolution texturale est recherchée en étudiant la position des pics d'intensité sur les figures de pôles. La figure (2.22) présente les figures de pôles obtenues après 12% d'expansion biaxée pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage. Sur cette figure, les pics d'intensités sont bien aux mêmes endroits sur les figures de pôles numériques et expérimentales, cependant l'intensité des pics est nettement plus faible dans le cas numérique. Cette différence est le pendant de ce qui a été montré lorsque les nuages de points contrainte / déformation ont été étudiés : le modèle proposé sous-estime les écarts de déformation entre les différents grains. Il en va de même en ce qui concerne la rotation élastique (qui est à l'origine de l'évolution texturale) ce qui explique pourquoi l'intensité des pics est sous-estimée.

Les résultats sont identiques pour les simulations de la traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage (2.23) et une dans la direction transverse (2.24) : les pics d'intensité sont aux bons endroits mais leur intensité est sous-estimée.

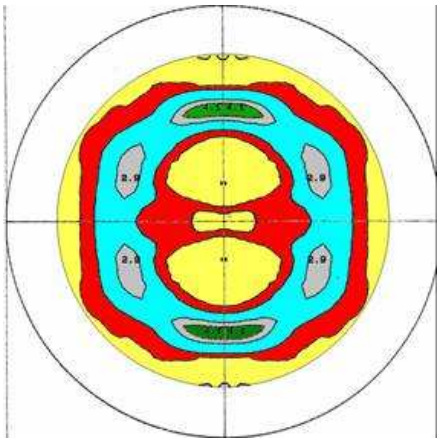
Il vient d'être montré que les simulations de l'évolution de la texture donnent de bons résultats qualitatifs pour les cas testés. La partie suivante va s'intéresser à la prédiction des surfaces de charge pour les comparer à l'expérience.



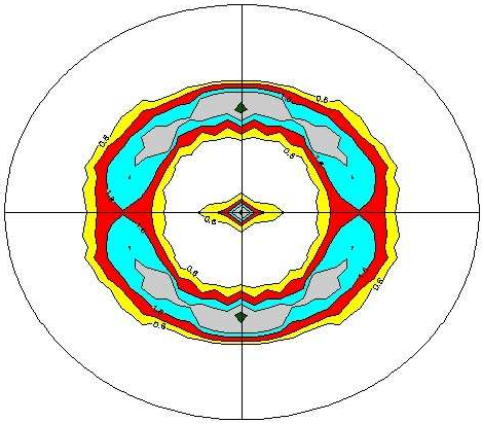
a) Figure de pôles 110 expérimentale



b) Figure de pôles 110 numérique

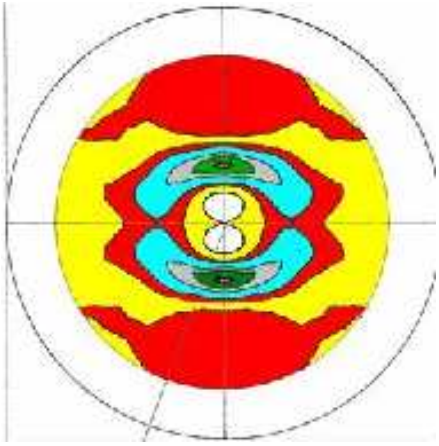


c) Figure de pôles 200 expérimentale

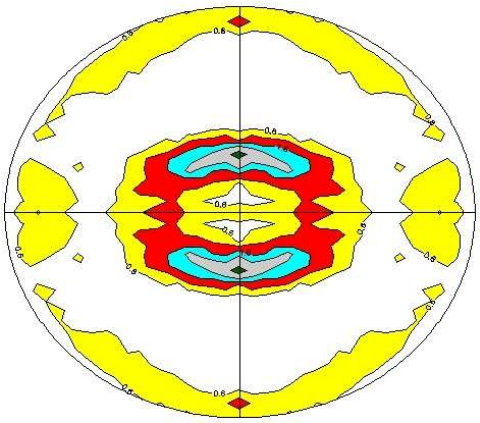


d) Figure de pôles 200 numérique

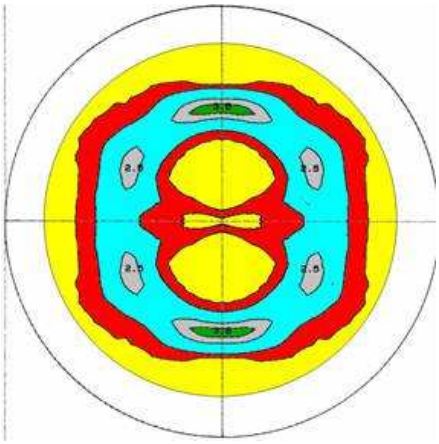
FIG. 2.22 – Figures de pôles de l'acier C1754 dans le cas d'un essai d'expansion équibiaxée après 12% de déformation pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage



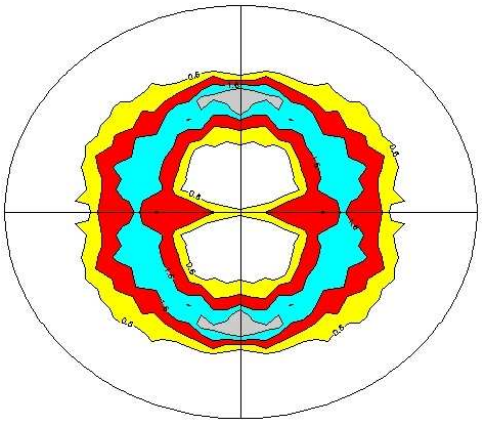
a) Figure de pôles 110 expérimentale



b) Figure de pôles 110 numérique

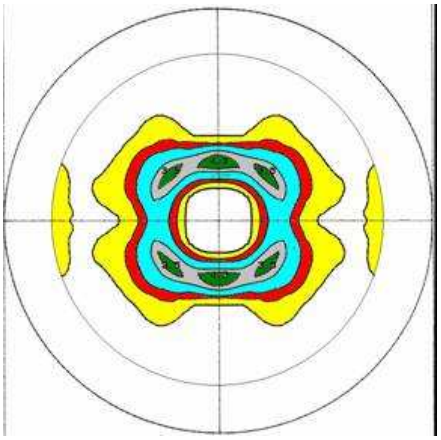


c) Figure de pôles 200 expérimentale

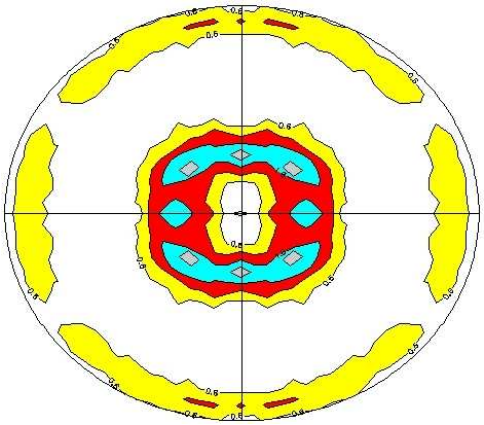


d) Figure de pôles 200 numérique

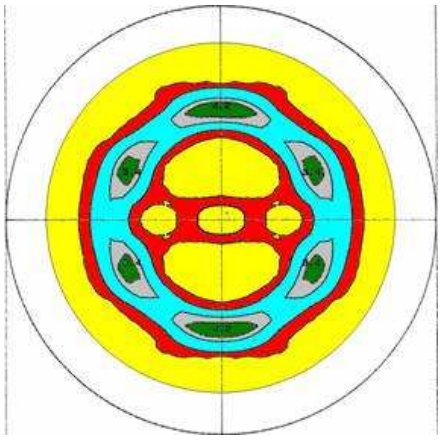
FIG. 2.23 – Figures de pôles de l'acier C1754 lors d'un essai traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage après 12% de déformation



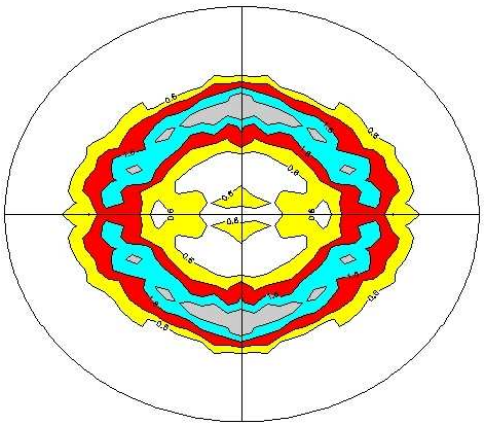
a) Figure de pôles 110 expérimentale



b) Figure de pôles 110 numérique



c) Figure de pôles 200 expérimentale



d) Figure de pôles 200 numérique

FIG. 2.24 – Figures de pôles de l'acier C1754 lors d'un essai traction plane pour une éprouvette orientée dans la direction transverse après 12% de déformation

2.5.3 Surfaces de charge

Dans cette partie les surfaces de charge obtenues par le modèle seront comparées aux mesures expérimentales. Les résultats expérimentaux sont disponibles uniquement pour les aciers D1879 et DDQ d'après les travaux de Kuwabara et al. [KIK98].

Acier D1879

Ici, les surfaces de charge obtenues pour l'acier D1879 sont présentées. Ces surfaces de charge sont tracées à iso-dissipation dont la valeur est calée à partir de la traction uniaxiale pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage. Concrètement, dans le cas de la traction uniaxiale, pour une déformation plastique de ε_0 l'énergie de déformation W_{def} est calculée comme :

$$W_{def} = \int_0^{\varepsilon_0} \sigma d\varepsilon \tag{2.62}$$

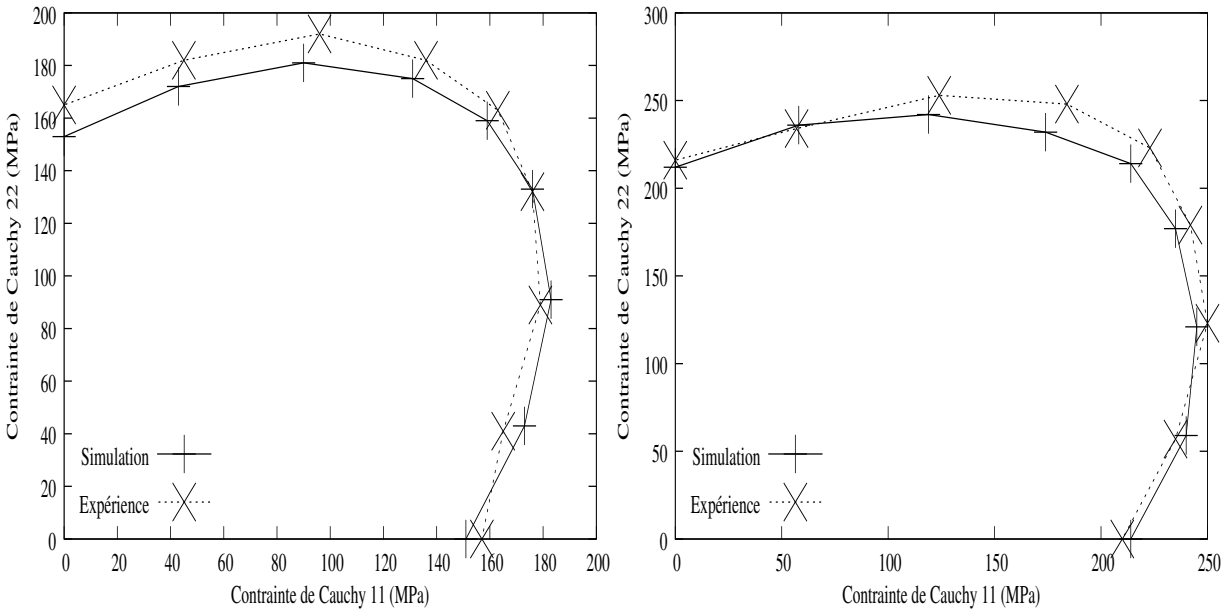
Ensuite, pour chaque essai, la déformation ε_{essai} qui vérifie la relation (2.63) est identifiée :

$$\int_0^{\varepsilon_{essai}} \sigma d\varepsilon = W_{def} \tag{2.63}$$

La contrainte correspondant à cette déformation, et en particulier le couple σ_{11}, σ_{22}, est relevée. En répétant cette opération pour chacun des essais d'expansion et ceux de traction uniaxiale pour des éprouvettes orientées à 0° et 90° par rapport à la direction de laminage, les surfaces de charge sont obtenues. La figure (2.25) présente les surfaces de charge obtenues à 0.2% et 2% de déformation plastique. Ces surfaces de charge numériques sont très proches des surfaces de charge expérimentales. A 2% de déformation la surface numérique est plus proche de celle expérimentale que pour 0.2%. Cela peut s'expliquer par le fait que, lors du passage entre élasticité et plasticité, il y a une zone transitoire durant laquelle les grains entrent en plasticité les uns après les autres. Dans le modèle proposé, à l'échelle locale, le stade I de la déformation des monocristaux n'est pas pris en compte. Comme il intervient au moment du changement de régime cela explique pourquoi il y a un écart légèrement supérieur pour la surface de charge à 0.2%. La forme de la surface de charge est très dépendante de la texture initiale. L'écart entre calcul et expérience est à peu près constant quel que soit le trajet. Cela montre donc que la modélisation adoptée pour représenter la texture (1000 orientations cristallographiques) permet de bien représenter la texture réelle.

Acier DDQ

Les surfaces de charge, comme pour le cas de l'acier D1879, ont été tracées sur la figure (2.26). Elles sont ici aussi tracées à iso-dissipation calée sur l'essai de traction uniaxiale dans la direction de laminage. Sur cette figure, les surfaces de charge prédites numériquement sont proches des surfaces de charge expérimentales. Cependant, cet écart a tendance à augmenter avec la déformation, et ce, surtout pour des chargements de type expansion équibiaxée car les paramètres ont été identifiés uniquement sur l'essai de traction uniaxiale dans la direction de laminage. Il vient d'être montré que la modélisation adoptée donnait de bons résultats en matière de prédiction des surfaces de charge. La partie suivante va s'intéresser au calcul des coefficients de Lankford.



a) 0.2% de déformation plastique en TU b) 2% de déformation plastique en TU

FIG. 2.25 – Surfaces de charge radiales pour l'acier D1879

2.5.4 Coefficients de Lankford

Ce coefficient a été introduit pour décrire l'anisotropie de la déformation plastique lors d'un trajet de traction uniaxiale. Il est défini, dans le cas d'un essai de traction selon la direction 1 comme :

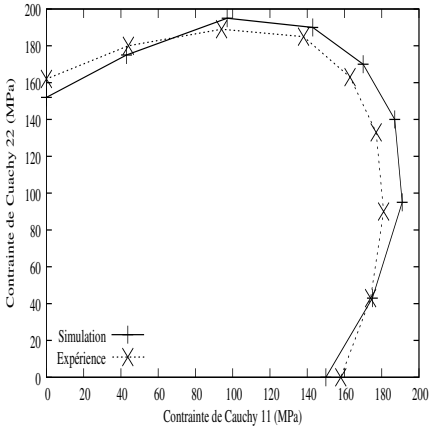
$$r = \frac{\varepsilon^p_{22}}{\varepsilon^p_{33}} \tag{2.64}$$

Ce coefficient va dépendre de l'orientation de l'éprouvette par rapport à la direction de laminage, il est donc possible de définir des coefficients à 45° ou à 90° comme pour les essais rhéologiques. Ce coefficient étant fortement dépendant de la texture, il a été décidé d'utiliser 5000 orientations cristallographiques pour définir la texture au lieu des 1000 employées précédemment (les courbes macroscopiques contrainte / déformation pour 5000 grains sont quasiment confondues avec celles pour 1000).

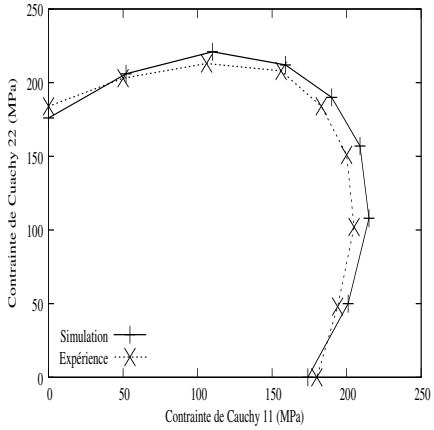
Acier D1879

La figure (2.27) présente les résultats obtenus par le calcul comparés aux résultats expérimentaux pour le coefficient de Lankford de l'acier D1879. Contrairement aux cas précédents, les résultats numériques sont éloignés des résultats issus de l'expérience. Il peut y avoir plusieurs raisons à cela :

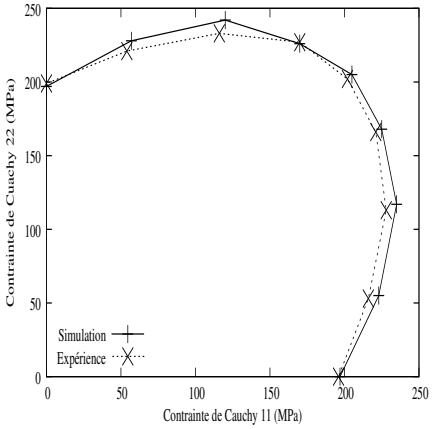
- Ce coefficient est difficile à calculer. En effet, seuls ε^p_{11} et ε^p_{22} sont mesurables, la valeur ε^p_{33} étant déduite en supposant que la déformation plastique se fait sans changement de volume. Cela peut donc induire des erreurs.
- Ce coefficient dépend assez fortement du nombre de grains choisis pour modéliser l'agrégat polycristallin, il est possible que 5000 grains ne soient pas suffisants. Cependant augmenter le nombre de grains risquerait d'entraîner des temps de calculs très importants.
- La texture cristallographique utilisée et qui sert à modéliser la texture réelle peut n'être



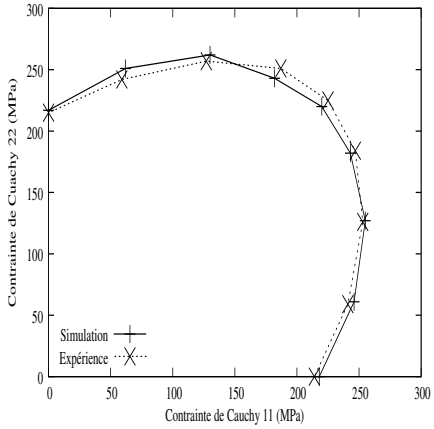
a) 0.05% de déformation plastique en TU



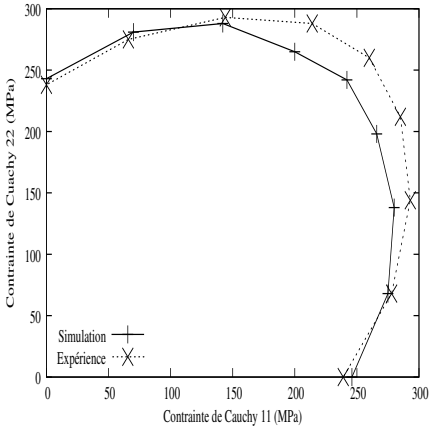
b) 0.2% de déformation plastique en TU



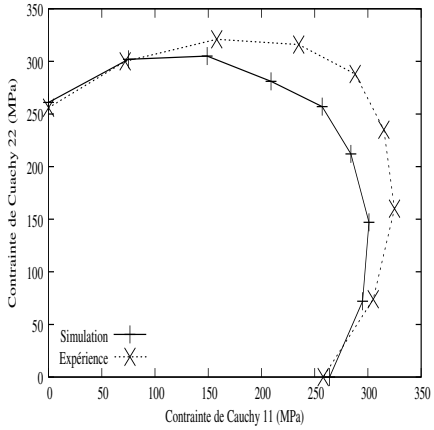
c) 0.5% de déformation plastique en TU



d) 1% de déformation plastique en TU



e) 2% de déformation plastique en TU



f) 3% de déformation plastique en TU

FIG. 2.26 – Surfaces de charge radiales pour l'acier DDQ

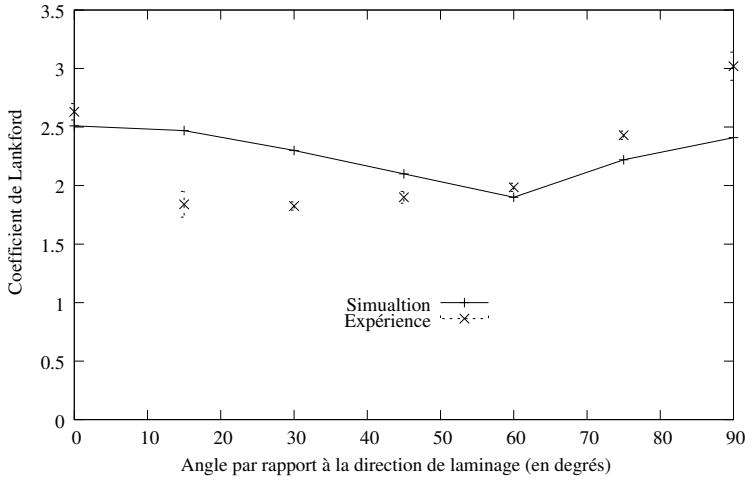


FIG. 2.27 – Coefficient de Lankford de l'acier D1879

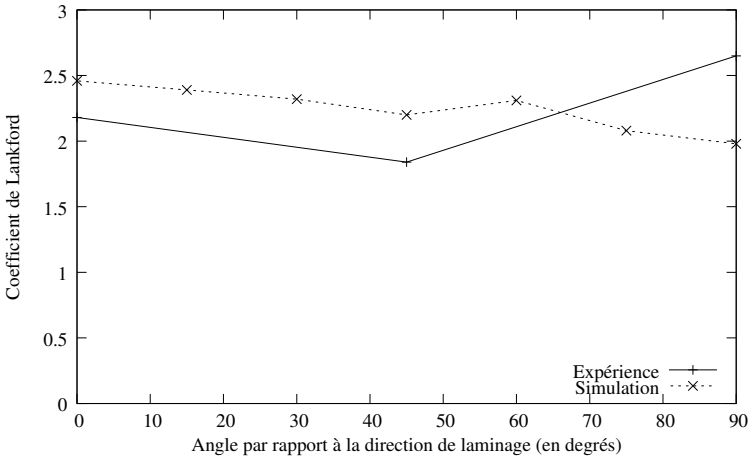


FIG. 2.28 – Coefficient de Lankford de l'acier S2325

pas assez représentative et donc peut générer des erreurs dans le calcul du coefficient de Lankford.

Acier S2325

La figure (2.28) présente la comparaison des résultats obtenus par le calcul à ceux issus de l'expérience pour le coefficient de Lankford de l'acier S2325. Cette figure montre que les valeurs du coefficient de Lankford sont du même ordre de grandeur que celles calculées même si ne sont disponibles, dans ce cas, que trois mesures expérimentales. Les écarts entre la simulation et l'expérience peuvent être imputés aux mêmes causes que pour le cas de l'acier D1879.

Acier DDQ

La figure (2.29) présente les résultats obtenus par le calcul à ceux issus de l'expérience pour le coefficient de Lankford de l'acier DDQ. Contrairement aux autres cas, les résultats de la

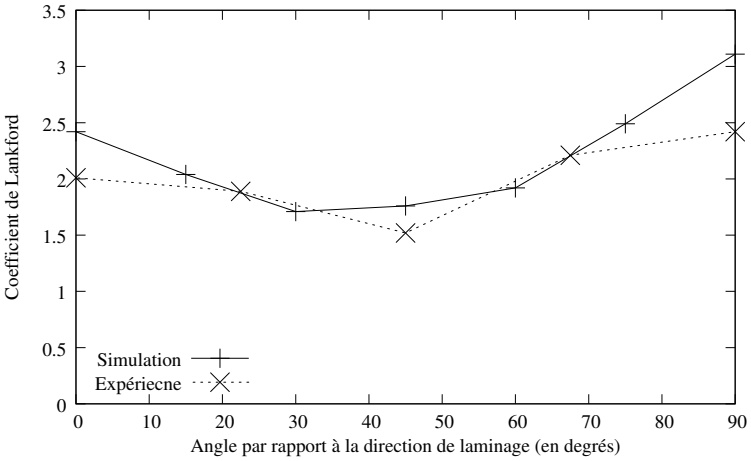


FIG. 2.29 – Coefficient de Lankford de l'acier DDQ

Caractéristique		Epaisseur	R_p 0.2	R_m	A %	A
Valeur	Acier D1957	1 mm	520 MPa	707 MPa	11.78%	17.55%
	Acier A159	0.75 mm	415 MPa	600 MPa		24.3 %

TAB. 2.12 – Principales caractéristiques mécaniques des aciers ferrito-martensitiques

simulation sont nettement plus proches des mesures expérimentales.

Cette partie vient donc de présenter la validation du modèle pour le cas d'aciers ferritiques. Cette validation a été faite non seulement pour des courbes contrainte / déformation mais aussi pour des textures, des surfaces de charge et des coefficients de Lankford. La partie suivante va s'intéresser à des aciers avec une microstructure biphasée ferrito-martensitique.

2.6 Comparaison entre théorie et expérience pour des aciers biphasés ferrite / martensite

Dans cette partie, le même type de comparaisons que dans la partie précédente pour deux aciers ferrito-martensitiques dont les caractéristiques mécaniques sont assez proches vont être faites. Le premier est fabriqué par Arcelor et appelé D1957. Pour cet acier la composition chimique ainsi qu'une quarantaine d'essais rhéologiques sont accessibles. Le second est aussi fabriqué par Arcelor et s'appelle A159. Il a été réalisé une micrographie de l'acier D1957 de manière à connaître la taille de grain de chacune des phases comme le montre la figure (2.30). La taille des grains identifiée est de l'ordre de 10 microns pour la phase ferritique et de 1 micron pour la phase martensitique. La taille de grains sera la même pour l'acier A159 car il est mis en forme, avec une composition chimique similaire, de la même manière que l'acier D1957. Les tableaux (2.12) et (2.13) donnent les principales caractéristiques mécaniques ainsi que la composition chimique de ces deux aciers.

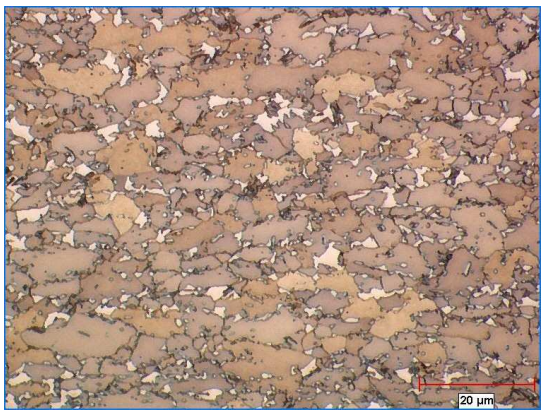


FIG. 2.30 – Micrographie de l'acier ferrito-martensitique D1957

	% C	% Si	% Mn	% P	% S	% N	% Al	% Ti	% Nb	% Fe
D1957	0.121	0.354	1.43	0.012	<0.001	0.0039	0.03	0.01	0.001	Balance
A159	0.114	0.365	1.48	0.013	0.005	0.0042	0.036	0.003	0.001	Balance

TAB. 2.13 – Composition chimique des aciers ferrito-martensitiques

2.6.1 Essais rhéologiques

Acier D1957

L'acier considéré comporte deux phases, il y a donc deux fois plus de paramètres à identifier. Comme les mécanismes de déformation de la martensite sont mal connus, il est supposé que les paramètres entre les deux phases sont identiques à l'exception de la cission critique initiale (qui sera supérieure pour la martensite) et de la taille de grain. La cission critique initiale, pour les mêmes raisons que dans le cas monophasé, sera prise identique sur chaque famille de systèmes de glissement. Le tableau (2.14) donne les paramètres identifiés. La figure (2.31) présente les résultats obtenus pour plusieurs chargements, les éprouvettes étant toutes orientées selon la direction de laminage. Les résultats donnés sur cette figure montrent que :

- Les trajets simples (traction et cisaillement) sont très bien prédits par le modèle tout au long du trajet de chargement.
- Les effets dus au changement de trajet sont nettement moins prononcés que pour le cas de l'acier C1754 du fait de la présence de martensite. Cela induit que la microstructure des dislocations initiale est plus isotrope donc son évolution aussi. C'est pourquoi le modèle est capable de mieux prendre en compte cet effet que dans le cas des aciers ferritiques.

Paramètres	Phase	Grains	τ_{c0}	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	Ferrite	850	180 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	10 μm
	Martensite	150	550 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	1 μm

TAB. 2.14 – Paramètres identifiés pour l'acier D1957

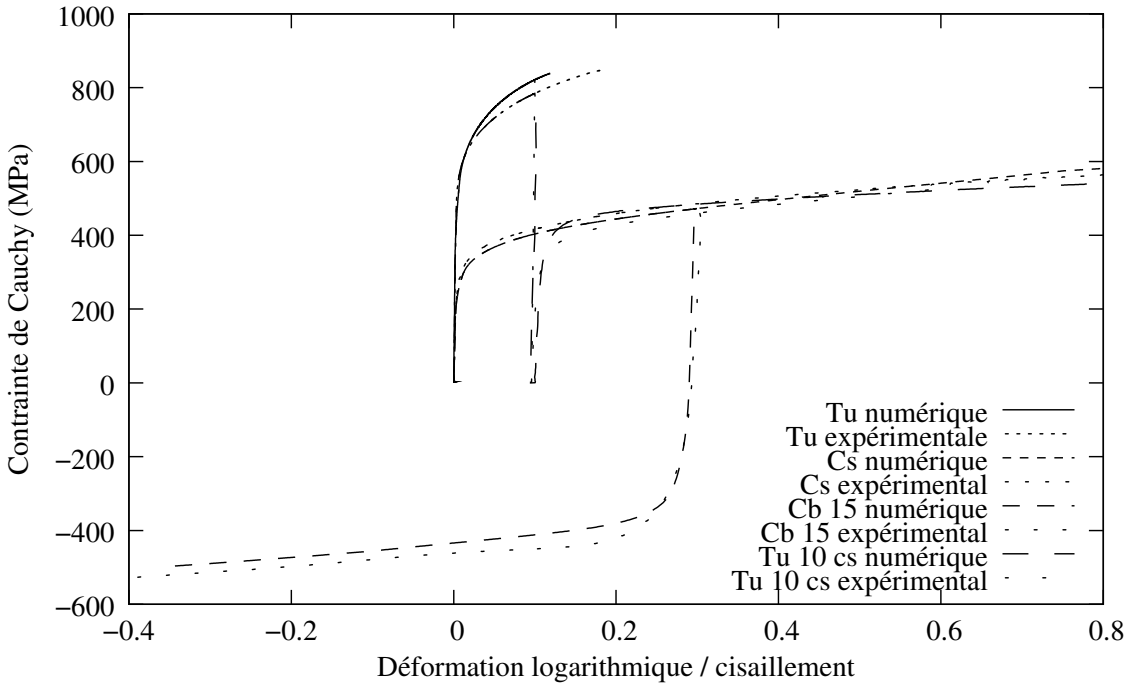


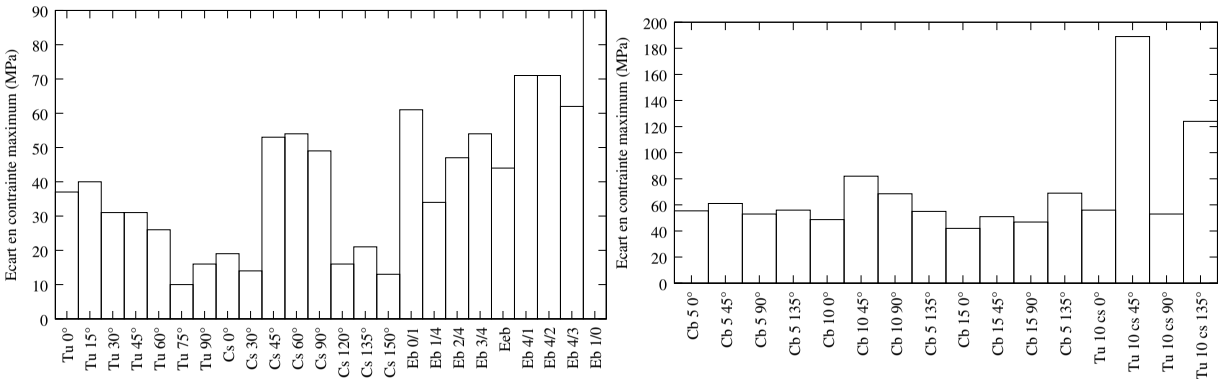
FIG. 2.31 – Courbes contrainte / déformation pour quelques trajets de chargement dans le cas de l'acier D1957 pour des éprouvettes orientées dans la direction de laminage

De la même manière que précédemment, toute une série d'essais rhéologiques réalisés sur cet acier est disponible. Les mêmes graphiques pour les écarts en aire et en contrainte vont être tracés. Il est à noter que, dans ce cas, tous les essais ont été faits sur le même acier. Les figures (2.32) et (2.33) montrent les écarts en aire et en contrainte mesurés pour tous les trajets de chargement. Ces différents histogrammes montrent que :

- Les écarts en contrainte pour les trajets simples sont de l'ordre de 50 MPa, ce qui semble correct étant donné que les valeurs de contraintes sont grandes. Les écarts en aire pour ces mêmes trajets sont très faibles. Ils sont tous inférieurs à 7% et généralement de l'ordre de 3 à 4 %.
- En ce qui concerne les trajets complexes, les écarts sont plus importants pour les mêmes raisons que pour l'acier C1754. Quasiment tous les essais ont un écart d'aire inférieur à 10 %. L'écart en contrainte très important mesuré pour l'essai "Tu 10 cis 45" provient du fait que le chargement de cisaillement expérimental est légèrement décalé en déformation par rapport au chargement numérique (dans la partie élastique un écart de déformation de 0.1% entraîne une erreur de 200 MPa!).

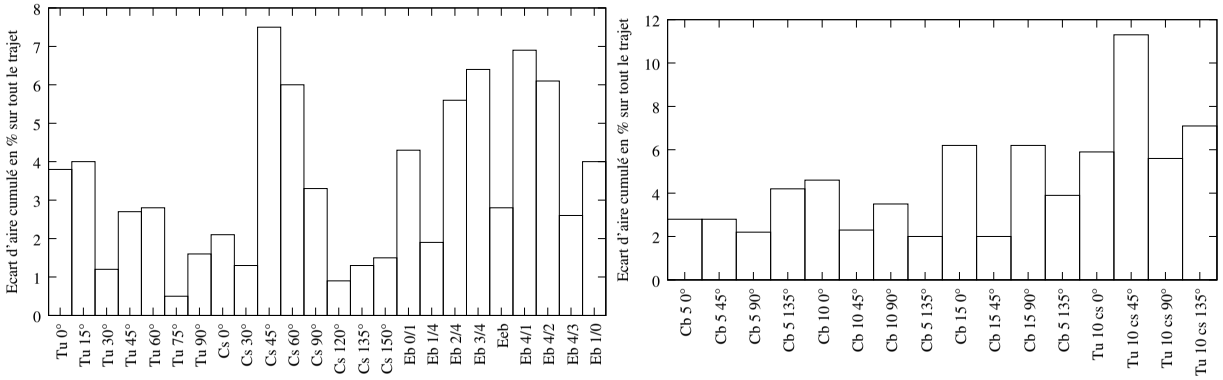
Acier A159

Dans cette partie, l'acier A159 est étudié. Cet acier possède une microstructure ainsi que des caractéristiques mécaniques proches de l'acier D1957. La principale différence se trouve au niveau de la limite élastique qui est sensiblement plus faible que pour l'acier D1957. Pour cet acier, seuls quelques essais rhéologiques simples ou complexes sont disponibles. Les paramètres identifiés pour les simulations numériques sont donnés dans le tableau (2.15). La figure (2.34) présente l'essai qui a permis de réaliser l'identification des paramètres. Cette figure montre la



a) Trajets simples b) Trajets complexes

FIG. 2.32 – Ecarts en contrainte pour l'acier D1957



a) Trajets simples b) Trajets complexes

FIG. 2.33 – Ecarts en aire pour l'acier D1957

Paramètres	Phase	Grains	τ_{c0}	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	Ferrite	850	105 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	10 μm
	Martensite	150	450 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	120	2.4 nm	1 μm

TAB. 2.15 – Paramètres identifiés pour l'acier A159

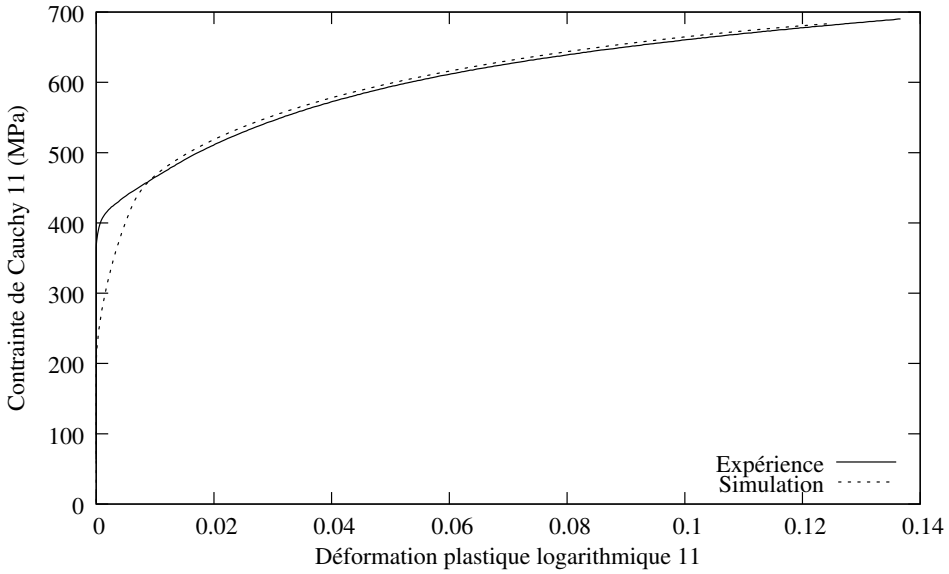


FIG. 2.34 – Essai de traction uniaxiale dans le cas d'une éprouvette orientée dans la direction de laminage pour l'acier A159

bonne prédiction du comportement par le modèle sauf au moment de l'entrée en plasticité. Sur la courbe de simulation il y a deux zones avec des fortes pentes avant l'entrée en plasticité. La première pente correspond à l'élasticité des deux phases alors que la seconde correspond au moment où les grains ferritiques commencent à plastifier alors que les grains martensitiques sont encore dans leur domaine d'élasticité. C'est la présence de ces deux zones qui génère les écarts observés entre expérience et simulation au début du chargement.

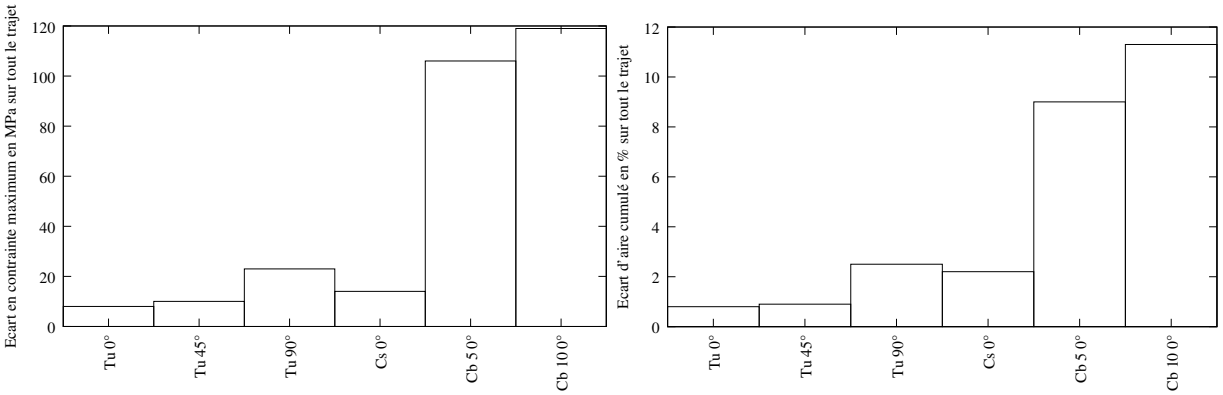
Les figures (2.35a) et (2.35b) présentent les écarts en terme de contrainte et d'aire pour tous les essais réalisés sur cet acier. Comme pour le cas de l'acier S2325 il y a peu d'essais mais suffisamment pour valider le modèle. Ici aussi les résultats expérimentaux sont proches des résultats numériques. Cependant les écarts en terme d'aire sont plus importants surtout pour les trajets complexes. Cette différence est due au fait que, lors du deuxième trajet, le moment où la plastification intervient à nouveau est surestimé par rapport à l'expérience ce qui implique une erreur constante de l'ordre de 10% au niveau du calcul de la contrainte.

Comme pour le cas monophasé, il est intéressant de valider le modèles pour d'autres types de résultats comme les surfaces de charge ou les coefficients de Lankford. Cela fera l'objet des paragraphes suivants.

2.6.2 Surfaces de charge

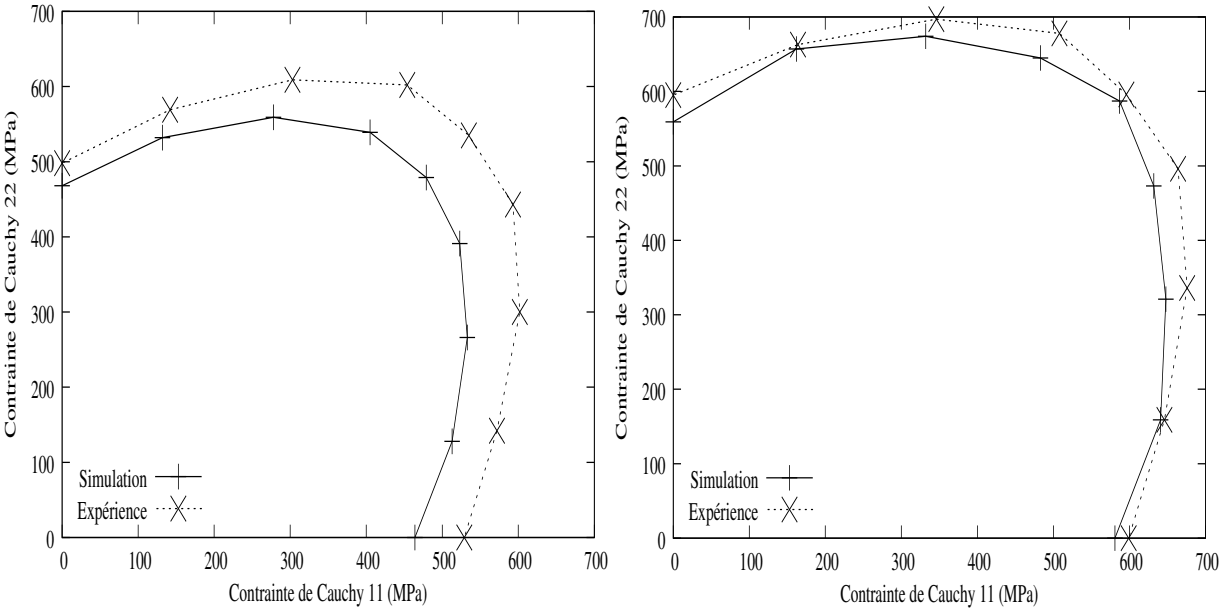
Seules les surfaces de charge pour l'acier D1957 sont disponibles, des résultats seront donc uniquement présentés pour cet acier. Comme pour les aciers ferritiques, les surfaces de charge sont tracées à iso-dissipation dont la valeur de référence est celle de la traction uniaxiale pour une éprouvette orientée dans la direction de laminage. La figure (2.36) présente les surfaces de charge obtenues après 0.2 et 0.8% de déformation plastique. Les surfaces de charge ne sont pas mesurées pour de grandes déformations plastiques car la machine d'essai ne permet pas d'imposer de contraintes suffisantes pour générer de telles déformations. Cette figure montre que :

– La surface de charge à 0.2% est assez mal décrite par le modèle. La déformation a lieu dans



a) Ecarts de contrainte b) Ecarts d'aire

FIG. 2.35 – Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier A159



a) 0.2% de déformation plastique en TU b) 0.8% de déformation plastique en TU

FIG. 2.36 – Surfaces de charge pour l'acier D1957

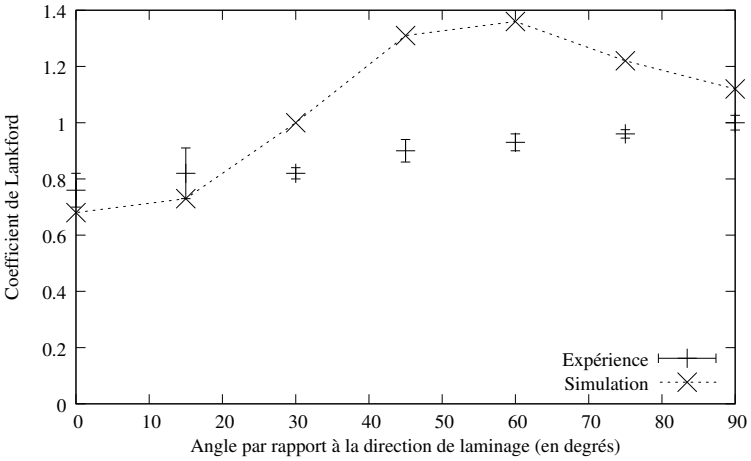


FIG. 2.37 – Coefficient de Lankford de l'acier D1957

un régime transitoire pour lequel les grains de ferrite entrent les uns après les autres en plasticité alors que les grains de martensite sont encore dans le régime élastique. Cet écart important peut d'ailleurs s'observer sur la figure (2.34). L'hypothèse forte qui a été prise est que le comportement plastique de la martensite est le même que celui de la ferrite à l'exception de la cission critique initiale. De plus, les contraintes internes dues à la présence des deux phases n'ont pas été prises en compte. C'est pourquoi l'entrée en plasticité est mal gérée.

– Pour la surface de charge à 0.8%, le stade transitoire est franchi et la surface de charge simulée est très proche de la surface de charge expérimentale.

Il vient donc d'être montré que le modèle était capable de prédire correctement les surfaces de charge dès que la zone transitoire est franchie. La partie suivante va s'intéresser à la prédiction des coefficients de Lankford.

2.6.3 Coefficients de Lankford

Acier D1879

Le figure (2.37) donne le coefficient de Lankford calculé comparé au coefficient de Lankford expérimental. Les textures sont, ici aussi, modélisées avec 5000 orientations cristallographiques. Le résultat numérique est proche du résultat expérimental comme pour le cas des aciers ferritiques. Ce bon résultat est dû au fait que l'anisotropie plastique est très peu marquée car le coefficient de Lankford est proche de 1.

Acier A159

Le figure (2.38) présente le coefficient de Lankford calculé comparé au coefficient de Lankford expérimental. Comme pour l'acier D1879 le résultat numérique est très proche du résultat expérimental, et ceci, pour les mêmes raisons que citées précédemment.

Cette partie vient de montrer que le modèle proposé était capable de bien modéliser le comportement d'aciers biphasés en matière de courbes contrainte / déformation, de surfaces de charge et de coefficient de Lankford. La partie suivante va s'intéresser à un acier dont la microstructure est différente des aciers étudiés jusqu'à présent : c'est un acier micro-allié contenant des

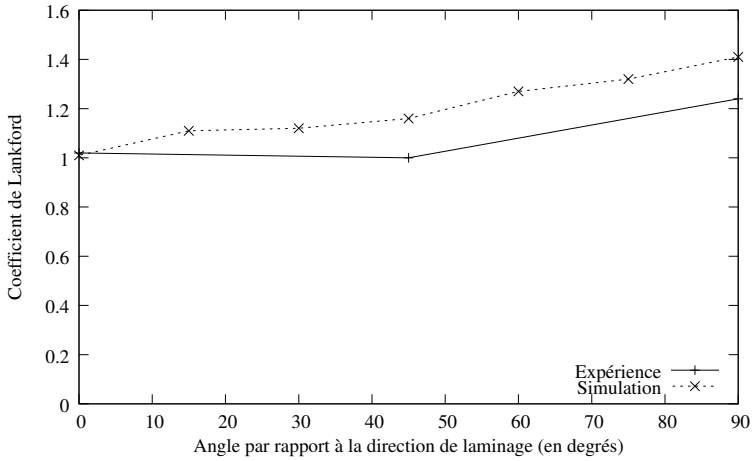


FIG. 2.38 – Coefficient de Lankford de l'acier A159

Caractéristique	Epaisseur	R_p 0.2	R_m	A %	A
Valeur	0.77 mm	375 MPa	463 MPa	16.3%	25.7%

TAB. 2.16 – Principales caractéristiques mécaniques de l'acier T1625

précipités.

2.7 Comparaison entre théorie et expérience pour un acier micro-allié contenant des précipités

Dans cette partie un acier micro-allié dont les principales caractéristiques mécaniques et chimiques sont données dans les tables (2.16) et (2.17) est étudié. La figure (2.39) présente une micrographie de cet acier fourni par Arcelor et appelé T1625.

Les précipités, dans cet acier, ont pour conséquence de générer des contraintes internes autour d'eux, contraintes qui ont tendance à durcir le matériau. Pour prendre en compte le fait que cet acier comporte des précipités, supposés non cisaillables, la notion de cission effective τ_{eff} est introduite. Cette cission s'écrit sous la forme :

$$\tau^g_{eff} = \tau^g - \tau^g_\mu \tag{2.65}$$

Où τ_μ exprime la contrainte interne due aux précipités. Son expression dans le cas de précipités sphériques et en élasticité isotrope est donnée par [Ber02], [BFLB04] :

$$\tau^g_\mu = 2\mu f \kappa \alpha R^g : R^h \gamma^h \tag{2.66}$$

% C	% Si	% Mn	% P	% S	% N	% Al	% Ti	% Nb	% Fe
0.0497	0.005	0.42	0.012	0.008	0.0042	0.025	0.017	0.058	Balance

TAB. 2.17 – Composition chimique de l'acier T1625

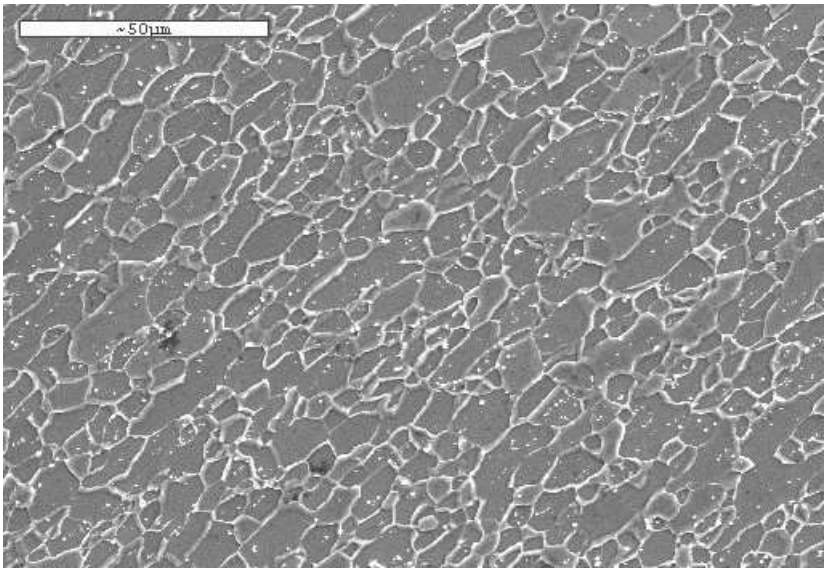


FIG. 2.39 – Micrographie de l'acier T1625

Où κ est un terme d'accommodation plastique qui vaut 1 dans le cas d'une accommodation élastique comme c'est le cas ici. α est un paramètre élastique dont la valeur est proche de 0.6 [Ber02]. f est la fraction volumique de précipités. La condition de consistance s'écrit alors :

$$\dot{\tau}^g_{eff} = \dot{\tau}^g_c = H^{gh}\dot{\gamma}^h \tag{2.67}$$

Qui peut mettre sous la forme :

$$\dot{\tau}^g = H^{gh}\dot{\gamma}^h + 2\mu f \alpha R^g : R^h \dot{\gamma}^h \tag{2.68}$$

L'introduction des précipités non cisaillables peut donc être vue ici comme la modification de la matrice d'écrouissage par l'ajout d'un terme de durcissement. Une nouvelle matrice d'écrouissage H' peut ainsi être définie comme :

$$H'^{gh} = H^{gh} + 2\mu f \alpha R^g : R^h \tag{2.69}$$

Il y aura donc, dans ce cas, un nouveau paramètre à identifier qui est la fraction volumique de précipités.

2.7.1 Essais rhéologiques

Comme pour les autres aciers, il a fallu identifier certains paramètres qui sont donnés dans le tableau (2.18). La figure (2.40) présente, quant à elle, l'essai qui a servi à les identifier. Il est à noter que cet acier présente un palier de Lüders que le modèle n'est pas à même de simuler avec la modélisation proposée. Un jeu de paramètres a donc été cherché pour concorder avec l'expérience dès le palier de Lüders franchi.

La figure (2.41) présente les écarts en contrainte et en aire pour tous les essais rhéologiques simulés. Les essais rhéologiques sont, ici aussi, très bien modélisés avec un assez faible écart entre simulation et expérience. La loi introduite pour tenir compte de l'effet des précipités semble donner de bons résultats dans ce cas.

Le paragraphe suivant va être consacré à la prédiction des coefficients de Lankford.

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}	f
Valeur	1000	125MPa	125MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	100	3.5nm	20μm	0.0005

TAB. 2.18 – Paramètres identifiés pour l'acier T1625

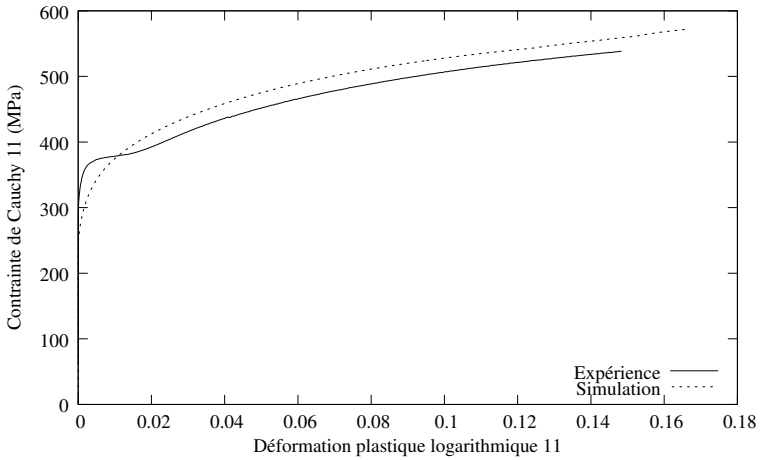
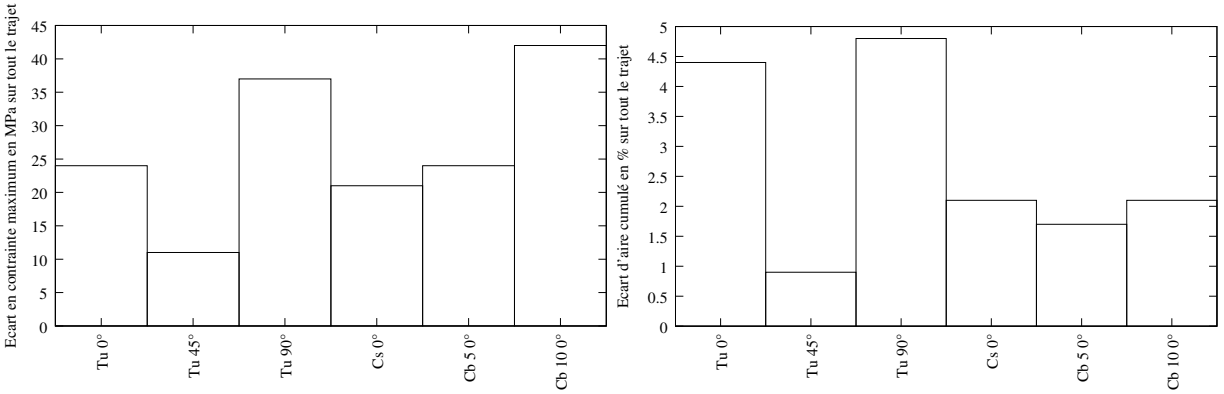


FIG. 2.40 – Essai de traction uniaxiale dans le cas d'une éprouvette orientée dans la direction de laminage pour l'acier T1625



a) Ecarts de contrainte b) Ecarts d'aire

FIG. 2.41 – Ecarts en aire et en contrainte pour l'acier T1625

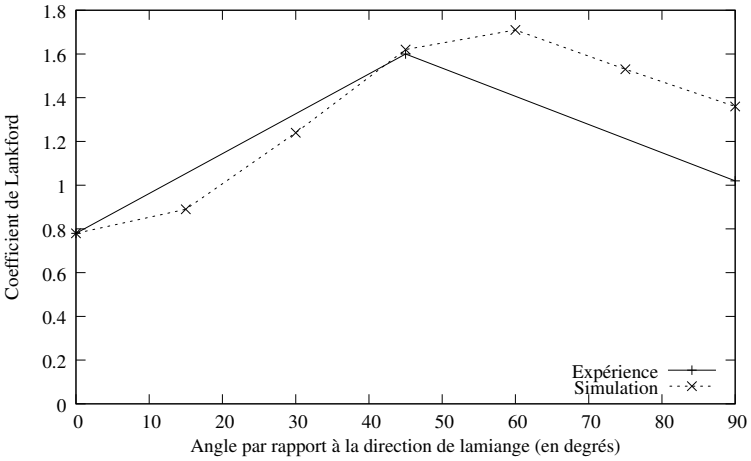


FIG. 2.42 – Coefficient de Lankford de l'acier T1625

2.7.2 Coefficients de Lankford

Le figure (2.42) donne le coefficient de Lankford calculé comparé au coefficient de Lankford expérimental. Comme pour les autres aciers, la simulation numérique donne de bons résultats.

2.8 Conclusions

Dans ce chapitre le lien entre le comportement local de l'ensemble des grains et le comportement de l'agrégat polycristallin a été étudié. Il a été montré qu'il y avait beaucoup de modèles permettant de réaliser une transition d'échelles. Le modèle autocohérent au sens de Hill a été adopté car il donne un bon compromis entre qualité du résultat et facilité à implémenter. Il a été montré que la modélisation ainsi réalisée permettait de reproduire le comportement polycristallin pour des trajets simples et complexes, et cela avec un seul jeu de quatre ou cinq paramètres pour une quarantaine d'essais rhéologiques. Le modèle est capable de rendre compte de l'évolution de la texture, du coefficient de Lankford et de la surface de charge. Tous ces résultats montrent donc que ce modèle permet de prédire le comportement des aciers. En effet, il a été possible de donner des résultats pour sept aciers dont les microstructures et les caractéristiques mécaniques sont très différentes. Il est maintenant intéressant d'étudier si la localisation de la déformation associée à la perte d'ellipticité du module tangent élastoplastique est apte à prédire quand et comment se produit ce phénomène.

Chapitre 3

Critère de ductilité basé sur une formulation de Rice

Sommaire

3.1 Introduction 96
3.2 Les mécanismes contrôlant la formabilité 96
3.2.1 Les mécanismes associés à la plasticité 96
3.2.2 Les mécanismes associés à l'endommagement 98
3.2.3 Modélisation de l'endommagement 99
3.3 Modélisation de la perte de ductilité 102
3.3.1 Introduction - Notion de courbe limite de formage ou CLF 102
3.3.2 Le modèle de Marciniak et Kuckzynski ou théorie M-K 102
3.3.3 Modélisation de la striction 106
3.3.4 Modélisation de la localisation de la déformation 107
3.3.5 Bilan sur les critères de bifurcation 108
3.3.6 Choix du modèle de perte de ductilité 109
3.4 Résultats qualitatifs sur la perte de ductilité pour le monocristal . 109
3.4.1 Forme de la fonction déterminant minimum dans l'espace 111
3.4.2 Orientation et position de la bande de localisation 113
3.4.3 Influence des paramètres physiques sur la perte de ductilité 114
3.4.4 Influence de la matrice d'écrouissage sur la perte de ductilité 118
3.5 Influence des paramètres mécaniques sur la perte de ductilité du polycristal 119
3.6 Détermination des courbes limite de formage 121
3.6.1 Modèle de référence pour la simulation des courbes limite de formage . 124
3.6.2 Acier D1879 125
3.6.3 Acier C1754 127
3.6.4 Acier S2325 127
3.6.5 Acier D1957 130
3.6.6 Acier A159 130
3.6.7 Acier T1625 131
3.6.8 Discussion 133
3.7 Conclusions 133

3.1 Introduction

L'objectif fondamental de ce travail est de relier la ductilité à la microstructure et aux mécanismes de déformation afin d'identifier des concepts pour le design d'aciers améliorés. Dans cette optique, les deux précédents chapitres ont eu pour but de définir un cadre permettant d'atteindre finement le comportement macroscopique élastoplastique dans le cadre des grandes déformations. Il a été montré que cette modélisation était apte à bien reproduire le comportement mono- et polycristallin. Il est intéressant de coupler ce modèle de comportement avec un critère de perte de ductilité. L'objectif de ce chapitre sera donc de passer en revue les principaux mécanismes qui limitent la mise en forme comme par exemple la perte de ductilité. Ces différents mécanismes vont tout d'abord être présentés en mettant l'accent sur leur origine physique. Puis, les différentes voies possibles pour les modéliser seront présentées. Ensuite, un critère de limite de ductilité correspondant à la perte d'ellipticité du module tangent élastoplastique sera choisi. Ce sera celui de Rice introduit dans les années 70 [Ric76] [SJ75], [RR75]. Il sera employé pour étudier l'influence des différents paramètres physiques du modèle sur la ductilité de manière qualitative. Enfin, des courbes limite de formage seront tracées pour les comparer aux résultats expérimentaux pour des aciers mono- et biphasés.

3.2 Les mécanismes contrôlant la formabilité

Dans cette partie, les différents mécanismes physiques qui peuvent limiter la formabilité sont rappelés. Par souci de clarté, chaque mécanisme sera décrit comme si il était totalement découplé des autres. Il est bien évident que la plasticité peut avoir un effet sur l'endommagement et réciproquement [Ham00]. Les mécanismes qui ont lieu dans le domaine élastique comme le flambement élastique ne seront pas présentés car ils ne font pas partie du cadre de l'étude. Comme exposé dans l'introduction générale ces mécanismes peuvent être associés soit à la plasticité soit à l'endommagement.

3.2.1 Les mécanismes associés à la plasticité

Il y en a trois principaux :

- Les mécanismes qui ont une origine liée principalement à la structure comme le flambement et le plissement. Ce mécanisme ne sera pas étudié ici car la modélisation proposée ne permet pas de décrire de notion de géométrie.
- Les mécanismes qui ont leur origine liée en même temps au matériau et à sa géométrie. C'est la striction. Beaucoup de travaux ont été réalisés pour savoir à quel moment, lors de la mise en forme, de tels phénomènes apparaîssaient [BSMT96], [CYD96], [CYD97], [CM00], [HAV00]. Pour les mêmes raisons que pour les mécanismes de flambement (notion de géométrie), la striction ne sera pas étudiée ici.
- Les mécanismes dont l'origine peut être entièrement imputée au matériau. C'est la localisation de la déformation en bandes de cisaillement (qui sera appelée simplement localisation dans la suite). C'est une perte d'unicité de la solution, c'est à dire que plusieurs réponses du matériau considéré comme un système sont possibles. Cela apparaît lorsque le module tangent de la loi de comportement comporte une singularité [Pet00]. Beaucoup d'auteurs la considèrent comme l'apparition d'une frontière de part et d'autre de laquelle il n'y a plus continuité des champs mécaniques [AR77], [Asa83a], [CA81], [Pei83], [PAN83], [Ric76], [RR75], [SJ75], [Ste96]. Elle peut être représenté par le schéma (3.2). Physiquement cette localisation se traduit par la création de familles de lignes de glissement macroscopiques.

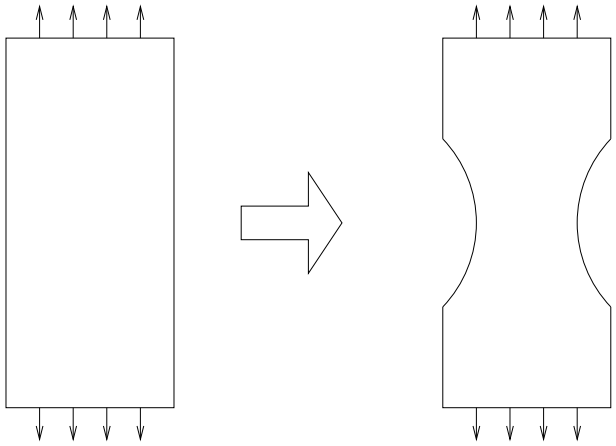


FIG. 3.1 – Schématisation de la striction

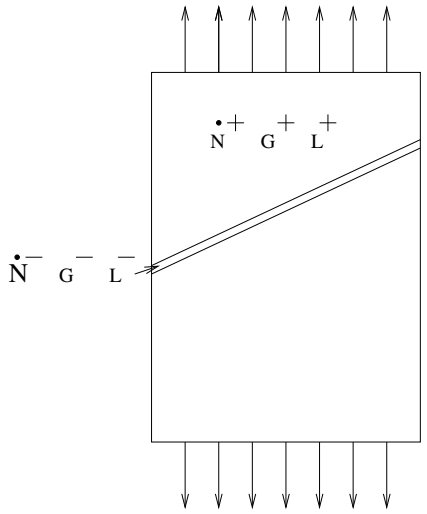


FIG. 3.2 – Bande de localisation de la déformation

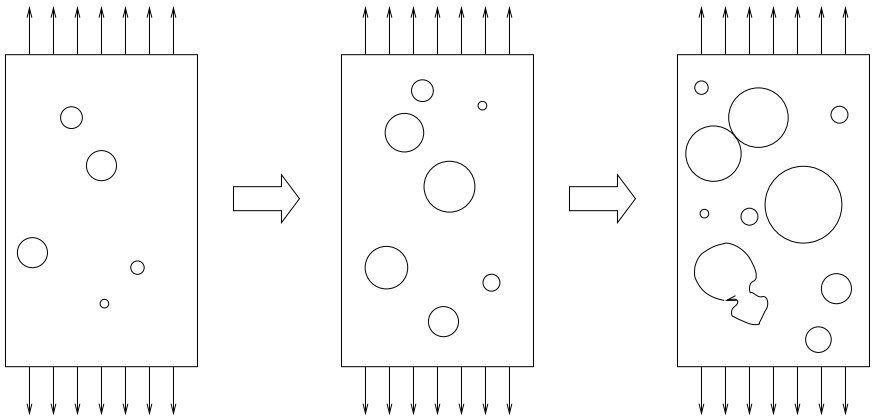
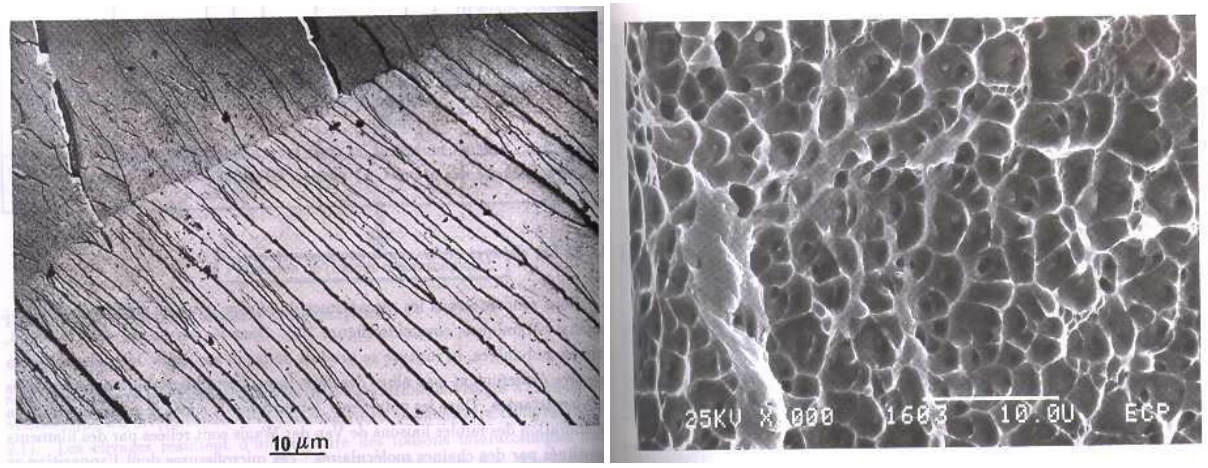


FIG. 3.3 – Evolution de l'endommagement

Ces familles de lignes sont générées par la concentration de lignes de glissement dans certaines régions de l'éprouvette. Elles se propagent et arrivent à créer des macrobandes de cisaillement, deux sont généralement observées dont une est souvent majoritaire.

3.2.2 Les mécanismes associés à l'endommagement

Lors de la déformation, certains matériaux ont tendance à s'endommager de manière continue. Ce mécanisme peut être, dans certains cas, prédominant par rapport aux mécanismes de localisation de la déformation. C'est pour cela qu'il peut sembler intéressant de découpler les phénomènes d'endommagement de ceux de localisation. Les phénomènes d'endommagement sont à l'origine de la mécanique de l'endommagement continu [Mud00], [Rou00], [SGBD96]. L'endommagement d'un matériau peut être vu comme la germination, la croissance et la coalescence de cavités. Concrètement, ces cavités sont créées autour d'hétérogénéités de la matière comme des précipités ou des joints de grains. La figure (3.3) présente l'évolution des cavités durant la mise en forme. Sur cette figure, il est supposé que le matériau vierge possède un certain nombre de microcavités, elles croissent pendant que d'autres se créent et enfin arrivent à coalescence. De nombreux modèles ont été développés pour décrire l'évolution de l'endommagement durant la déformation ; certains d'entre eux prennent en compte l'évolution de la fraction volumique de cavités [BG00], [BSMT96], [Gur77], [HSP00], [MBM98], [PL90], [PB00], [Rou00]. D'autres font intervenir un tenseur d'endommagement (possédant généralement une à trois variables). Ce tenseur permet de définir des tenseurs de déformation et de contrainte ainsi qu'un module tangent dits endommagés [Bez98], [CYD96], [CYD97], [Des00], [HZWC00], [Ham00], [LPW85], [SH00], [Tai88]. Dans ces différents modèles d'endommagement, la plasticité peut ou non intervenir pour modéliser l'évolution de la (ou des) variable(s) définie(s) pour caractériser cet endommagement : on parlera alors de modèles couplés ou découplés [CYD96], [Des00], [SH00]. Enfin, une autre classe de modèles se base sur le fait qu'une hétérogénéité au sein du matériau existe dès le début de la mise en forme et cela permet de proposer une modélisation de l'évolution de l'endommagement [Roc89], [Bar89], [Bau84], [CYD96], [CYD97], [Lem85], [Ram00], [Tai88]. Lorsque l'endommagement devient trop important il y a ruine de la structure. Cela se traduit généralement par la création d'une fissure qui se propage de façon plus ou moins rapide. La mécanique linéaire et non linéaire de la rupture est issue de l'étude de ces mécanismes [Mia95]. Les mécanismes de rupture peuvent être classés en deux grandes catégories [FPZ95b], [Ham00] :



a) Rivières de clivage [FPZ95b] b) cupules[PIBM03]

FIG. 3.4 – Différents faciès de rupture

- La rupture brutale. Elle est observée suite à un chargement monotone et est due à l'apparition de microdéfauts dans le matériau. Il y a deux principaux types de rupture brutale : soit la rupture se fait par clivage (rupture fragile) soit la rupture est ductile. Dans le cas de la rupture par clivage les microdéfauts se créent selon les plans atomiques les plus denses et se propagent quasi-instantanément dans tout le matériau. La rupture ductile présente un faciès sous forme de cupules dues à l'évolution des cavités. De plus, la déformation plastique observée dans les grains proches de la zone de rupture est très intense.
- La rupture différée. Dans ce cas, il y a création de microdéfauts générés par des sollicitations cycliques [Ham00] ou par d'autres phénomènes dépendants du temps tels que le fluage, la corrosion,... [FPZ95b].

Il existe aussi d'autres types de rupture comme la rupture intergranulaire [FPZ95b]. Cependant, ce type de rupture n'apparaît pas pour les matériaux étudiés ici. La figure (3.4) présente en a) des rivières de clivages et en b) des cupules. Dans ce mémoire il n'est pas prévu de prendre en compte la modélisation des mécanismes de ruine des matériaux. Ils sont présentés sans les prendre en compte dans la modélisation. Elle a, pour les aciers bas carbone, une influence assez importante pour des chargements de type expansion mais est négligeable pour les trajets tels que la traction ou le rétreint.

Il a été montré que les phénomènes qui conduisent à la localisation de la déformation ont : soit une source dite plastique qui sera largement explicitée par la suite, soit une source liée à l'endommagement dont les grandes voies de modélisation vont être données dans ce paragraphe.

3.2.3 Modélisation de l'endommagement

Dans cette partie, quelques moyens pour prendre en compte l'endommagement d'un matériau vont être explicités. Le travail présenté dans ce chapitre a pour but de présenter le couplage du modèle autocohérent en grandes déformations avec le critère de Rice. Il est évident que l'endommagement peut intervenir comme facteur aggravant de la perte de ductilité, c'est pourquoi quelques indications sont données en vue d'un couplage futur entre la loi de comportement élastoplastique proposée et l'endommagement. En ce qui concerne l'endommagement deux grandes écoles existent : soit est introduit une fraction volumique de cavités f soit un tenseur d'endommagement D.

Le modèle de Gurson et ses dérivés

C'est un modèle basé sur l'évolution de la fraction volumique de cavités [BG00], [BSMT96], [Gur77], [HSP00], [PB00], [MBM98], [Rou00], [PL90]. Ce modèle part du principe qu'à l'origine il y a, dans le matériau, une certaine fraction volumique de cavités qui évolue au cours de la déformation. La fraction volumique initiale a été mesurée pour certains matériaux [Bar89]. Le modèle de Gurson définit ainsi une surface de charge de la forme :

$$\Phi = \frac{\sigma_{eqVM}^2}{\sigma_0^2} + 2f\cosh\left(\frac{3\sigma_h}{2\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \tag{3.1}$$

Où σ_{eqVM} est la contrainte équivalente au sens de Von Mises, σ_0 est la limite élastique, σ_h est la contrainte hydrostatique et f est la fraction volumique de cavités. Comme montré dans (3.1) ce modèle est très dépendant de la pression hydrostatique. Les résultats obtenus étant dans certains cas éloignés des résultats expérimentaux, Tvergaard [Tve81] a modifié cette loi en rajoutant trois coefficients q_1, q_2 et q_3 de telle sorte que la surface de charge soit :

$$\Phi = \frac{\sigma_{eqVM}^2}{\sigma_0^2} + 2q_1f\cosh\left(\frac{3q_2\sigma_h}{2\sigma_0}\right) - 1 - q_3f^2 = 0 \tag{3.2}$$

Généralement, les constantes sont prises telles que : $q_2 = 1$, $q_1^2 = q_3 = 2.25$. La fraction volumique de cavités évolue au cours du chargement, pour modéliser son évolution il est introduit trois fractions de cavités :

- La fraction de cavités nucléées f_n,
- La fraction de cavités qui s'accroissent f_{cr},
- La fraction de cavités qui coalescent f_{co},

De telle sorte que :

$$\dot{f} = \dot{f}_n + \dot{f}_{cr} + \dot{f}_{co} \tag{3.3}$$

La fraction volumique de cavités créées peut être considérée comme égale à la variation de volume du matériau ne dépendant que de la déformation plastique ε^p :

$$\dot{f}_n = (1-f)\,\mathrm{trace}\,(\dot{\varepsilon}^p) \tag{3.4}$$

Pour les cavités qui grandissent une relation phénoménologique est adoptée :

$$\dot{f}_{cr} = \frac{f_N}{s_N\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_{eqVM}^p - \varepsilon_N}{s_N}\right)^2\right)\dot{\varepsilon}_{eqVM}^p \tag{3.5}$$

Les paramètres de la relation (3.5) ont été identifiés dans le cas de feuilles d'acier [CN80], leurs valeurs sont :

$$\begin{gathered} f_N = 0.04 \\ 0.01 \leq s_N \leq 0.1 \\ 0.3 \leq \varepsilon_N \leq 0.7 \end{gathered} \tag{3.6}$$

Il faut aussi définir la loi d'évolution de la fraction volumique de cavités qui coalescent. La forme générale de la loi d'évolution est :

$$\begin{gathered} f \geq f_c \Rightarrow \dot{f}_{co} = A\dot{\varepsilon}_{eqVM}^p \\ f < f_c \Rightarrow \dot{f}_{co} = 0 \end{gathered} \tag{3.7}$$

Le paramètre A suit une évolution de la forme :

$$A = \frac{f_u - f_c}{\Delta\varepsilon_{eqVM}} \tag{3.8}$$

Où f_u représente la fraction volumique ultime de cavités à la rupture et $\Delta\varepsilon_{eqVM}$ est l'incrément de déformation équivalente qui conduit à la rupture ductile. Enfin, pour compléter la modélisation, il faut intégrer à ce modèle la loi de comportement choisie qui peut être phénoménologique comme micromécanique. Ce modèle a déjà été employé pour prédire des CLF avec de bons résultats [BSMT96], [MBM98].

Le modèle de Lemaitre

Ce modèle [Lem85], [Des00] est écrit dans le cadre des petites déformations, la contrainte de Cauchy σ et de déformation ε seront employées. Un tenseur d'endommagement D qui ne dépend que d'un scalaire d_h est défini tel que :

$$d_h = \frac{\eta}{3}\text{trace}\,(D) \tag{3.9}$$

La forme de D pour un matériau à élasticité isotrope est telle que :

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & 0 \\ 0 & D_2 & 0 \\ 0 & 0 & D_3 \end{bmatrix} \tag{3.10}$$

Les composantes de ce tenseur peuvent se déduire à partir du module d'Young du matériau sain E, de celui du matériau endommagé $\tilde{E}$ et des coefficients de Poisson correspondant ν, $\tilde{\nu}$ comme :

$$\begin{aligned} D_1 &\approx 1 - \frac{\tilde{E}}{E} \\ D_2 = D_3 &\approx 1 - \frac{\tilde{E}}{E}\frac{1+\nu}{1+3\tilde{\nu}-2\nu} \end{aligned} \tag{3.11}$$

Cela permet de définir un tenseur de contraintes $\tilde{\sigma}$, dit endommagé, à partir du calcul de l'énergie de Gibbs pour le cas de l'élasticité linéaire isotrope :

$$\tilde{\sigma} = \text{dev}\,(H.\text{dev}\,(\sigma)\,.H) + \frac{\sigma_h}{1 - \frac{\eta}{3}\text{trace}\,(D)}\delta \tag{3.12}$$

Où :

$$H_{ij} = \frac{1}{\sqrt{1 - D_{ij}}} \tag{3.13}$$

La déformation ε est décomposée en une partie plastique et en une partie élastique telles que :

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \tag{3.14}$$

La loi d'élasticité est maintenant définie en utilisant comme tenseur de contrainte effectif le tenseur de contrainte endommagé.

$$\varepsilon^e = \frac{1+\nu}{E}\tilde{\sigma} - \frac{\nu}{E}\text{trace}\,(\tilde{\sigma})\,\delta \tag{3.15}$$

La loi de plasticité choisie ici est la suivante :

$$\dot{\varepsilon}^p = \frac{3}{2}\frac{\mathrm{dev}\left(H.\left(\mathrm{dev}\left(\tilde{\sigma}\right) - X\right).H\right)}{\left(\tilde{\sigma} - X\right)_{eqVM}}\dot{\lambda} \tag{3.16}$$

Où X représente la variable d'écrouissage. Enfin la variable d'endommagement suit une évolution de la forme :

$$\dot{D}_{ij} = \left(\frac{Y}{S}\right)^s |\dot{\varepsilon}^p|_{ij} \text{ si } p > pc \tag{3.17}$$

Y représente la densité d'énergie élastique, p est la déformation plastique cumulée, pc est la déformation plastique cumulée à partir de laquelle commence l'endommagement, et s, S sont des paramètres matériaux. Le modèle de Lemaitre couple donc plasticité et endommagement, il a été utilisé par Cho et al. [CYD96] qui ont comparé cette approche avec la théorie M-K et le modèle de Gurson. Il ont montré que, pour la prédiction de CLF, le modèle de Lemaitre est le plus proche de l'expérience, celui de M-K est assez éloigné alors que celui de Gurson est entre les deux.

Il existe d'autres modèles de couplage entre endommagement et plasticité. Il est possible, par exemple, définir une surface de charge endommagée comme dans le modèle de Rousselier [Rou81], [Mia95]. Il est aussi possible utiliser d'autres approches qui sont plus ou moins proches du modèle de Lemaitre ou de Rousselier :

- Le modèle de Bamman-Chiesa-Johnson [MM00] qui définit un module tangent supplémentaire d'endommagement et a une formulation basée sur le second invariant des contraintes J_2. Il comporte deux paramètres à définir expérimentalement.
- Celui de Gologanu et Leblond [PB00] qui utilise aussi une surface de charge endommagée ; l'endommagement n'étant dû qu'à la fraction volumique de cavités. Il comporte huit paramètres à déterminer qui dépendent du matériau, de la forme des cavités et de la triaxialité des contraintes.
- Celui de Saanouni [SH00], [Ham00] qui utilise une formulation proche de celle de Lemaitre et utilise le second invariant des contraintes. Il comporte cinq paramètres à identifier.

Dans la partie suivante, les différentes voies de modélisation de la perte de ductilité ainsi que le critère retenu vont être présentés.

3.3 Modélisation de la perte de ductilité

3.3.1 Introduction - Notion de courbe limite de formage ou CLF

La limite de ductilité caractérise la formabilité d'un matériau, c'est la déformation maximale que peut subir le matériau tout en ayant au final une pièce correcte du point de vue industriel en matière de géométrie ou de tenue en service. La limite de ductilité dépend très fortement du type de chargement imposé au matériau. Par exemple, dans le cas du cisaillement, il est possible d'obtenir une très grande déformation avant que celle-ci ne se localise. A l'inverse, dans un trajet de type traction plane, la localisation est atteinte généralement pour une faible déformation. L'histoire du matériau et du chargement jouent un rôle important dans les problèmes de limite de ductilité qui peuvent modifier de manière significative la forme de la CLF du matériau "vierge". Quelques-uns des très nombreux modèles de la littérature donnant les limites de ductilité des matériaux pour un trajet donné vont être détaillés. Il sera montré pourquoi le modèle de Rice [Ric76], [RR75] est choisi et appliqué au tracé de CLF.

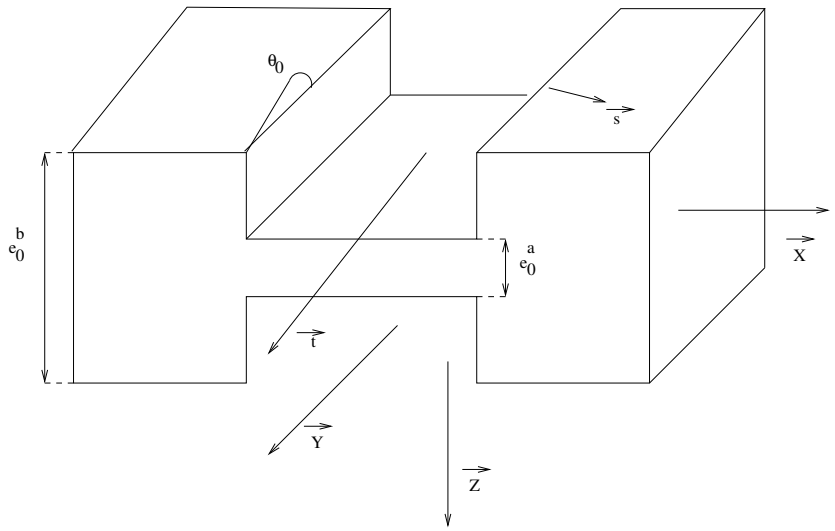


FIG. 3.5 – Modélisation de Marciniak et Kuckzynski

3.3.2 Le modèle de Marciniak et Kuckzynski ou théorie M-K

Ce modèle est à, l'heure actuelle, l'un des plus utilisés pour déterminer des CLF ; il peut se trouver dans de très nombreux travaux [Roc89], [Bar89], [Bau84], [CYD96], [CYD97], [Ram00]. Le point départ est l'hypothèse de la présence d'un défaut géométrique dans le matériau, représenté par une zone de sous-épaisseur par rapport au reste du matériau supposé être sous la forme d'une plaque. Il est supposé, en plus, que le matériau est soumis à un état de contraintes planes. Cela est illustré par la figure (3.5). La notation couramment utilisée lorsque ce modèle est employé est la suivante :

- Les grandeurs avec un sous-indice 0 sont définies dans la configuration initiale,
- Les grandeurs sans sous-indice sont définies dans la configuration courante,
- Tous les points qui se trouvent hors de la zone du défaut ont un indice ^{b},
- Tous les points qui se trouvent dans de la zone du défaut ont un indice ^{a},
- e définit l'épaisseur de la plaque,
- I,II et III représentent les trois directions principales du tenseur de déformation,
- Le cadre des petites déformations est employé, la contrainte de Cauchy σ et la déformation ε seront employées.

Le défaut est incliné d'un angle θ par rapport à l'axe $\overrightarrow{Y}$. Il est caractérisé par un paramètre géométrique T tel que :

$$T = \frac{e^b}{e^a} = \frac{e_0^b \exp\left(\varepsilon_{III}^b\right)}{e_0^a \exp\left(\varepsilon_{III}^a\right)} = T_0 \exp\left(\varepsilon_{III}^b - \varepsilon_{III}^a\right) \tag{3.18}$$

Les conditions de continuité des efforts dans le trièdre $\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{Z}\right)$ se réduisent à :

$$\begin{aligned} \sigma_{ss}^a e^a &= \sigma_{ss}^b e^b \\ \sigma_{st}^a e^a &= \sigma_{st}^b e^b \end{aligned} \tag{3.19}$$

De la relation (3.19), il est possible de déduire :

$$\frac{\sigma_{ss}^a}{\sigma_{ss}^b} = \frac{e^b}{e^a} = T \tag{3.20}$$

Cela montre bien une concentration de contraintes dans la zone du défaut due à l'hétérogénéité géométrique du matériau. Pour illustrer ce modèle, il va être appliqué à une loi de comportement simple, de type Wagoner et Wang [WW83] donnée par :

$$\sigma_{eqH} = K\left(\varepsilon_{pcum} + \varepsilon_0\right)^{n_1} \dot{\varepsilon}_{pcum}^{n_2} \tag{3.21}$$

Où K, n_1 et n_2 sont des constantes intrinsèques au matériau, σ_{eqH} désigne la contrainte équivalente au sens de Hill [Hil48] et ε_{pcum} la déformation plastique cumulée. Dans le cas de contraintes planes ($\sigma_{ZZ} = \sigma_{XZ} = \sigma_{YZ} = 0$), σ_{eqH} est donnée par la relation :

$$\sigma_{eqH}^2 = F\sigma_{YY}^2 + G\sigma_{XX}^2 + H\left(\sigma_{XX} - \sigma_{YY}\right)^2 + 2L\sigma_{XY}^2 \tag{3.22}$$

Généralement les coefficients de Hill sont calculés, soit à partir de trois coefficients de Lankford r mesurés sur des éprouvettes inclinées de 0°, 45° et 90° par rapport à la direction de laminage d'une tôle r_0, r_{45}, r_{90}, soit à partir des limites élastiques σ^e correspondants à ces directions $\sigma_0^e, \sigma_{45}^e$ et σ_{90}^e, soit à partir d'une combinaison des deux. Ces relations peuvent se retrouver dans de nombreux travaux [WHS99]. En ce qui concerne l'évolution de l'orientation du défaut, elle est donnée par :

$$\tan\left(\theta + d\theta\right) = \tan\theta \frac{1 + d\varepsilon_I^a}{1 + d\varepsilon_{II}^a} \tag{3.23}$$

Les équations d'équilibre (3.19) permettent d'écrire que :

$$\frac{\sigma_{st}^b}{\sigma_{ss}^b} = \frac{\sigma_{st}^a}{\sigma_{ss}^a} \tag{3.24}$$

Les équations de changement de repère pour passer de $\left(\overrightarrow{s}, \overrightarrow{t}, \overrightarrow{Z}\right)$ à $\left(\overrightarrow{X}, \overrightarrow{Y}, \overrightarrow{Z}\right)$ sont maintenant appliquées :

$$\begin{array}{c} \sigma_{ss}^b = \sigma_{XX}^b \cos^2\theta + \sigma_{YY}^b \sin^2\theta + 2\sigma_{XY}^b \sin\theta\cos\theta \\ \textit{eront} \quad \sigma_{tt}^b = \sigma_{XX}^b \sin^2\theta + \sigma_{YY}^b \cos^2\theta - 2\sigma_{XY}^b \sin\theta\cos\theta \\ \sigma_{st}^b = \sigma_{XY}^b\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) + \left(\sigma_{YY}^b - \sigma_{XX}^b\right)\sin\theta\cos\theta \end{array} \tag{3.25}$$

La combinaison de (3.25) avec (3.24) donne :

$$\frac{\sigma_{XY}^b}{\sigma_{XX}^b} = A_1 \frac{\sigma_{XY}^a}{\sigma_{XX}^a} + A_2 \tag{3.26}$$

Avec :

$$A_1 = \frac{\sin\theta\cos\theta}{\beta\sin^2\theta - \cos^2\theta}\ ,\ A_2 = -\beta A_1 \tag{3.27}$$

Et $\beta = \dfrac{\sigma_I}{\sigma_{II}}$ est le rapport entre les contraintes principales. En écrivant la condition de compatibilité le long de la bande b ; c'est à dire que l'incrément de déformation tangentielle est le même de part et d'autre de la bande :

$$d\varepsilon_{tt}^a = d\varepsilon_{tt}^b \tag{3.28}$$

La relation suivante est ainsi obtenue [Bar89] :

$$\frac{A_3 \dfrac{d\varepsilon_{pcum}^b}{d\varepsilon_{pcum}^a}}{\dfrac{\sigma_{XX}^b}{\sigma_{eqH}^b}} = \sin^2\theta - H\cos^2\theta + \frac{\sigma_{YY}^b}{\sigma_{XX}^b}\left((F+H)\cos^2\theta - H\sin^2\theta\right) - 2L\frac{\sigma_{XY}^b}{\sigma_{XX}^b}\sin\theta\cos\theta \tag{3.29}$$

Où :

$$A_3 = \frac{(1-\beta H)\sin^2\theta + ((F+H)\beta - H)\cos^2\theta}{\sqrt{1-2H\beta+(F+H)\beta^2}} \tag{3.30}$$

En combinant (3.30), (3.28), (3.27), (3.24) alors [Bar89], [Bau84] :

$$\frac{\left(\cos^2\theta+\beta\sin^2\theta\right)^2}{1+(F+H)\beta^2-2H\beta} = \frac{B_1\left(\frac{d\varepsilon^a_{pcum}}{\varepsilon^b_{pcum}}\right)^2+B_2}{B_3} \tag{3.31}$$

Avec :

$$\begin{aligned}
&B_1 = B_4B_8A_3^2 - B_6B_5A_3^2\\
&B_2 = B_5B_7^2 - B_4B_9^2\\
&B_3 = B_8B_7^2 - B6B_9^2\\
&B_4 = \left(\sin^2\theta - 2A_1\sin\theta\cos\theta\right)^2\\
&B_5 = \left(\cos^2\theta - 2A_1\sin\theta\cos\theta\right)^2\\
&B_6 = F+H+2LA_1B_7 = (F+H)\cos^2\theta - H\sin^2\theta - 2LA_1\sin\theta\cos\theta\\
&B_8 = 1+2LA_1\\
&B_9 = \sin^2\theta - H\cos^2\theta - 2LA_2\sin\theta\cos\theta
\end{aligned} \tag{3.32}$$

En utilisant (3.31) avec la loi de comportement (3.22) pour chaque région :

$$\frac{\sigma^a_{nn}}{\sigma^a_{eqH}} = T\left(\frac{\varepsilon_0+\varepsilon^b_{pcum}}{\varepsilon_0+\varepsilon^a_{pcum}}\right)^{n_1}\left(\frac{d\varepsilon^b_{pcum}}{\varepsilon^a_{pcum}}\right)^{n_2}\sqrt{\frac{B_1\left(\frac{d\varepsilon^a_{pcum}}{\varepsilon^b_{pcum}}\right)^2+B_2}{B_3}} \tag{3.33}$$

Enfin en appliquant la loi de normalité par l'intermédiaire du multiplicateur plastique λ :

$$d\varepsilon^p_{ij} = d\lambda\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma_{ij}}\ ,\ d\lambda = \frac{d\varepsilon^p_{eq}}{\sigma_{eqH}} \tag{3.34}$$

Où Φ désigne la surface de charge, finalement :

$$d\varepsilon^b_{III} = -\left(H_6\sqrt{\frac{B_1\left(\frac{d\varepsilon^a_{pcum}}{\varepsilon^b_{pcum}}\right)^2+B_2}{B_3}} + H_7\frac{d\varepsilon^a_{pcum}}{\varepsilon^b_{pcum}}\right)d\varepsilon^b_{pcum} \tag{3.35}$$

Avec comme paramètres :

$$\begin{aligned}
&H_1 = \sin^2\theta - H\cos^2\theta\\
&H_2 = (F+H)\cos^2\theta - H\sin^2\theta\\
&H_3 = -2L\sin\theta\cos\theta\\
&H_4 = H_1\cos^2\theta + H_2\sin^2\theta + 2K_0\sin\theta\cos\theta\,(H_2-H_1) + H_3\sin\theta\cos\theta - H_3K_0\left(\sin^2\theta-\cos^2\theta\right)\\
&H_5 = H_1\cos^2\theta + H_2\sin^2\theta - H_3\sin\theta\cos\theta\\
&H_6 = G\cos^2\theta + F\sin^2\theta + 2K_0\sin\theta\cos\theta\,(F-G) - \left(G\sin^2\theta+F\cos^2\theta\right)\frac{H_4}{H_5}\\
&H_7 = \frac{A_3\left(G\sin^2\theta+F\cos^2\theta\right)}{H_5}\\
&K_0 = \frac{\sin\theta\cos\theta\,(\beta-1)}{\cos^2\theta\beta\sin^2\theta}
\end{aligned} \tag{3.36}$$

Finalement, la relation qui existe entre la troisième déformation principale et la déformation plastique cumulée est :

$$d\varepsilon^a_{III} = \frac{1 - H + F\beta}{\sqrt{1 + (F + H)\,\beta^2 - 2H\beta}} d\varepsilon^a_{pcum} \tag{3.37}$$

Ce modèle étant défini, il faut illustrer comment se fait son implémentation. Généralement l'intégration numérique se fait grâce à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 de façon incrémentale. La grandeur dont on suit plus particulièrement l'évolution est le ratio des incréments de déformation $\frac{d\varepsilon^a_{pcum}}{d\varepsilon^b_{pcum}}$. C'est lorsque ce ratio atteint une valeur critique que l'instabilité locale est atteinte. Généralement la valeur choisie est de l'ordre de 0.1. Ce modèle est largement utilisé et il a prouvé sa capacité à prédire des CLF directes [Bar89], [CYD96], [Tai88]. Cependant, mathématiquement lorsque $\beta = \text{cotan}^2\theta$, à un instant donné, A_2 n'est plus défini et il n'est plus possible de calculer les valeurs des différents paramètres. Malgré ces bons résultats certaines réserves peuvent être données :

- Ce modèle est valable seulement en deux dimensions,
- L'aspect physique de l'endommagement n'est pas pris en compte,
- Il suggère la présence d'un défaut initial ce qui n'est pas forcement le cas, de plus la valeur initiale de ce défaut à un impact considérable sur les résultats. Ce paramètre peut donc être considéré comme un paramètre de calage.
- Enfin, la valeur choisie pour définir l'instabilité locale a une énorme influence sur la CLF obtenue, il serait possible de parler, au même titre que pour le défaut initial, de paramètre de calage.

C'est pour ces raisons que ce modèle ne sera pas étudié plus en détail et que celui présenté plus loin dans ce mémoire lui sera préféré.

3.3.3 Modélisation de la striction

La striction est un phénomène qui est dû à la fois à la géométrie de l'éprouvette et au matériau. Elle apparaît lorsque la réduction de section qui génère un adoucissement géométrique n'est plus compensée par l'écrouissage qui crée un durcissement structural. Dans le cas d'un essai de traction uniaxiale, il y a striction lorsque l'effort appliqué à l'éprouvette atteint un maximum :

$$\delta F_t = 0 \tag{3.38}$$

Cela peut être schématisé par la figure (3.6). Pour simplifier l'écriture, le calcul se fait dans un cas unidimensionnel pour une éprouvette de forme parallélépipédique de volume V, de section S et de longueur l. En utilisant la définition de la contrainte de Cauchy (donnée en annexe A) et en la différenciant :

$$\sigma = \frac{F_t}{S_t} \tag{3.39}$$

$$\delta F_t = \sigma \delta S_t + S_t \delta\sigma \tag{3.40}$$

En utilisant la conservation de volume :

$$\delta V = l_t \delta S_t + S_t \delta l_t = 0 \tag{3.41}$$

Cela revient à écrire :

$$\frac{\delta S_t}{S_t} = -\frac{\delta l_t}{l_t} = -\delta\varepsilon \tag{3.42}$$

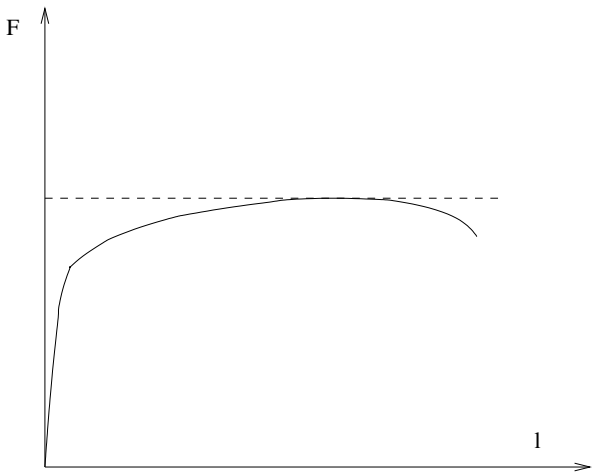


FIG. 3.6 – Moment où apparaît la striction lors d'un essai de traction uniaxiale

En combinant (3.38), (3.40) et (3.42) :

$$\frac{\delta\sigma_t}{\sigma_t} = -\frac{\delta S_t}{S_t} = \delta\varepsilon \tag{3.43}$$

La relation finale qui s'appelle le critère de Considère [Con85] est donc :

$$\frac{\delta\sigma}{\delta\varepsilon} = \sigma \tag{3.44}$$

Cette relation montre que la limite de ductilité est atteinte lorsque la pente d'écrouissage atteint une valeur critique, c'est la notion d'écrouissage critique [Asa83b]. Ce calcul a été fait dans un cas unidimensionnel, le paragraphe suivant propose de modéliser la localisation avec un critère tridimensionnel.

3.3.4 Modélisation de la localisation de la déformation

La localisation doit être vue comme une bifurcation : cette bifurcation provient d'une singularité [Pet00] au niveau de la loi de comportement. De nombreux travaux pour la modéliser ont été entrepris et une condition de localisation est une perte d'ellipticité du module tangent [Asa83a], [HH75], [PAN83]. C'est à dire qu'une bande de localisation, dont le principe est évoqué sur la figure (3.2), est créée. Au travers de cette bande, il y a perte de la continuité de certaines des composantes des champs mécaniques (contrainte et déformation), la continuité n'étant pas nécessaire pour vérifier les équations de champs. Cependant ces discontinuités doivent avoir une forme bien précise comme montré dans la suite de ce paragraphe. Ce calcul a été fait par Rice [Ric76], [RR75] mais peut se trouver sous d'autres formes [AR77], [Pei83], [PAN83], [Pet00]. Il faut d'abord vérifier les équations de champs à savoir :

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\left(\dot{N}^T\right) = 0 \\ &G = \operatorname{grad}(V) \end{aligned} \tag{3.45}$$

Ainsi que la loi de comportement :

$$\dot{N} = L : G \tag{3.46}$$

Il faut rajouter à cela les conditions aux limites en déformation ou en contrainte. Aucune force de volume n'est supposée agir sur le système. Seront notées avec un indice + toutes les grandeurs en dehors de la bande et avec un − celles dans la bande de localisation.

La condition cinématique du saut du gradient des vitesses qui régit la forme qu'il peut avoir est :

$$[G] = G^+ - G^- = \kappa \otimes \lambda \tag{3.47}$$

Où κ définit le vecteur amplitude du saut et λ la normale à la bande de localisation. Cette expression est obtenue à partir du théorème de Maxwell [Ker99].

Il faut, pour vérifier l'équilibre, qu'il y ait continuité de la contrainte de part et d'autre de la bande. Cela revient à dire que la projection du tenseur taux de contrainte est la même de part et d'autre de la bande :

$$\dot{N}^{T+}.\lambda = \dot{N}^{T-}.\lambda \Rightarrow \left[\dot{N}^T\right].\lambda = 0 \tag{3.48}$$

En appliquant la loi de comportement (3.45) dans (3.48) :

$$\left(L^+ : G^+\right)^T.\lambda = \left(L^- : G^-\right)^T.\lambda \tag{3.49}$$

En intégrant (3.47) dans (3.49) :

$$\left(L^+ : \left(G^- + \kappa \otimes \lambda\right)\right)^T.\lambda = \left(L^- : G^-\right)^T.\lambda \tag{3.50}$$

Soit :

$$\left(L^+ : \kappa \otimes \lambda\right)^T.\lambda = \left(\left(L^- - L^+\right) : G^-\right)^T.\lambda \tag{3.51}$$

Pour rester au plus proche de la physique il faut se placer au moment où la bande de localisation apparaît. A ce moment là, il est possible d'admettre que la loi de comportement dans et hors de la bande soit la même c'est à dire $L^+ = L^- = L$. Donc (3.51) devient :

$$\left(L : \kappa \otimes \lambda\right)^T.\lambda = L_{jikl}\kappa_k\lambda_l\lambda_j = 0 \tag{3.52}$$

Cette équation admet deux grandes familles de solutions :

- Soit tous les κ_k sont nuls, alors l'amplitude des sauts est nulle donc il n'y a pas bifurcation, il y a continuité des champs mécaniques en tout point du matériau.
- Soit au moins un des κ_k est non nul, à ce moment là il y a un système d'équations liées. Le système d'équations (3.52) admet une infinité de solutions. Il est alors possible d'écrire cette condition sous la forme :

$$\det\left(L_{jikl}\lambda_l\lambda_j\right) = 0 \tag{3.53}$$

Une relation simple qui ne dépend que du module tangent a donc été obtenue [AR77], [Ric76], [RR75], [Pei83], [PAN83], [Pet00], la contrainte et la déformation interviennent uniquement dans l'écriture du module tangent. C'est cette relation qui sera appliquée pour connaître le moment où la localisation intervient en fonction des caractéristiques mécaniques du matériau.

Cette relation est analogue à la formulation en petites déformations, cependant pour que le calcul reste valide il faut utiliser la contrainte nominale à la place de la contrainte de Cauchy de manière à avoir une dérivation objective ; en fait les effets de rotation matérielle sont "cachés" dans le calcul du module tangent du fait de l'utilisation de la contrainte nominale et du gradient des vitesses.

3.3.5 Bilan sur les critères de bifurcation

Le paragraphe précédent a permis de définir un critère de bifurcation, il en existe cependant d'autres. Le tableau (3.1) donne les différents types de bifurcations. La perte de positivité du travail du second ordre est aussi appelée critère de Hill. Le critère de perte d'ellipticité forte utilisé par exemple par Neilsen et Schreyer [NS93] décrit une instabilité locale [BH91] [Ker99] et non globale comme celui de Rice [Ric76]. Le critère de point limite définit une borne supérieure [Ker99] séparant écrouissage positif et négatif.

Critère	Définition	Auteur	Mode
perte de positivité	$\dot{\sigma} : \dot{\epsilon} = 0$	Hill [Hil58]	diffus
du travail du second ordre	$\det(\mathrm{sym}\,(L)) = 0$		ou localisé
point limite	$\dot{\sigma} = 0$		diffus
(seuil de radoucissement)	$\det(L) = 0$		ou localisé
perte d'ellipticité forte	$\det(n.\mathrm{sym}\,(L).n) = 0$	Bigoni et al. [BH91]	localisé
perte d'ellipticité	$\det(n.L.n) = 0$	Rice [Ric76]	localisé

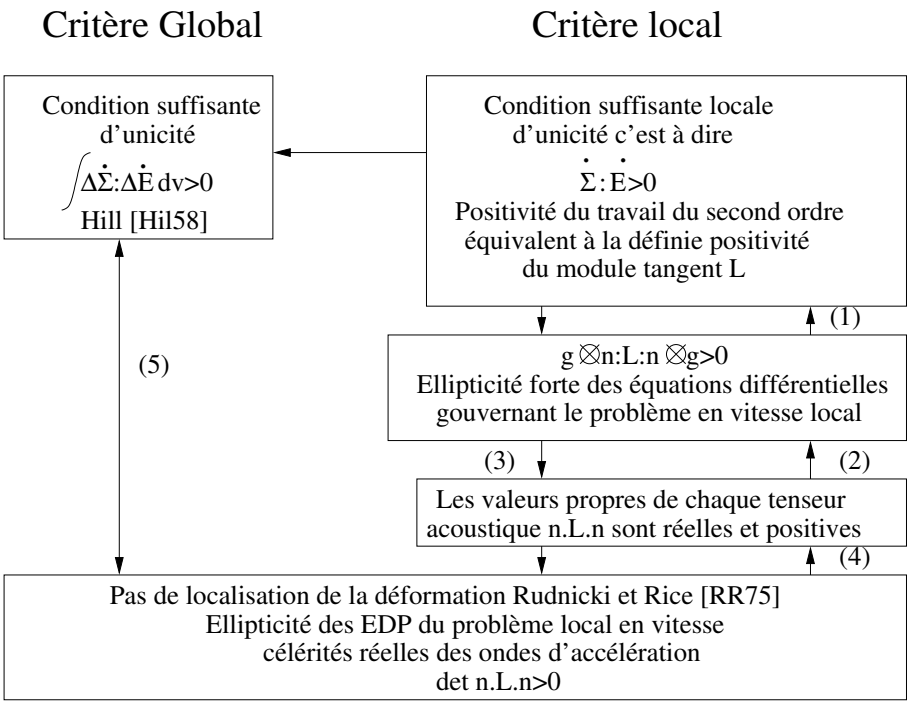
TAB. 3.1 – Différents types de bifurcation d'après [Ker99]

Il existe des relations d'implication et d'équivalence pour ces différents critères [Ker99],[BH91]. La figure (3.7) montre cela. Ici, tous ces critères de bifurcation sont équivalent puisque le calcul se fait dans le cadre de la plasticité associée et que toutes les valeurs propres des tenseurs acoustiques sont positives (cette affirmation provient d'essais effectués sur un certain nombre de cas tests qui ont montré que les valeurs propres étaient toujours réelles et positives). Donc utiliser le critère de Rice comme condition de bifurcation est légitime pour les matériaux étudiés dans ce mémoire.

3.3.6 Choix du modèle de perte de ductilité

Dans cette partie les grandes voies possibles de modélisation de la perte de ductilité ont été montrées. Ici, un critère simple valable pour tous les types de chargement doit être donné. Cela conduit donc logiquement à utiliser le critère de Rice qui ne dépend que du module tangent macroscopique, la modélisation macroscopique pourra par la suite être complétée en ajoutant l'effet dû à l'endommagement. Dans les aciers étudiés ici, l'endommagement a un effet sur la limite de ductilité uniquement sur les trajets de type expansion (cet effet est très faible) et non sur les autres types de trajets comme de la traction uniaxiale ou du rétreint. Il sera donc possible d'avoir des résultats sur les CLF qui ne sont pas trop entachés d'erreurs.

Dans la suite, l'influence des paramètres matériau tels que la cission critique initiale ou la distance d'annihilation critique sur le moment où la perte de ductilité intervient sera étudiée. Pour cela, l'étude sera d'abord menée sur le monocristal en montrant, en plus, l'influence très forte de l'orientation cristallographique sur la perte de ductilité. Ensuite, le cas polycristallin sera envisagé en faisant la même étude que pour le monocristal. Enfin, des CLF seront tracées et comparées à l'expérience ou à un modèle de référence [Cay00].



(1) Pour un movement plan isochore
(2) Pour une plasticité associée
(3) Seulement si toutes les valeurs propres de n.L.n sont réelles
(4) Pour une plasticité associée
(5) Pour une plasticité associée, une cinématique contrainte sur toute la frontière du corps et des conditions homogènes avant bifurcation

FIG. 3.7 – Relations entre les différents critères de bifurcation

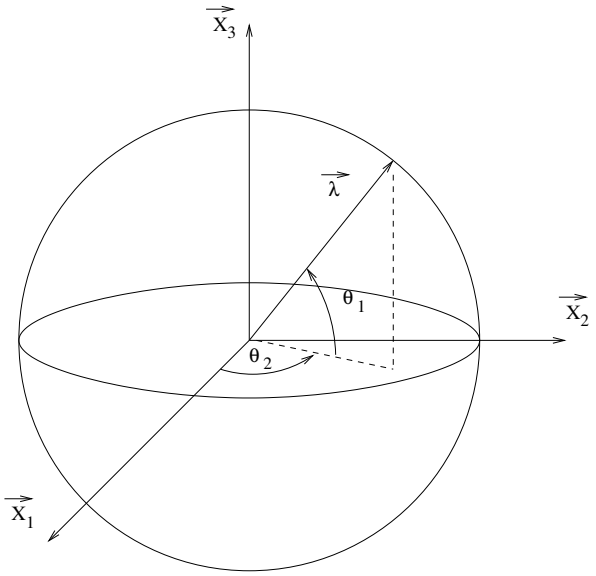


FIG. 3.8 – Définition des deux angles représentant l'orientation de la normale

3.4 Résultats qualitatifs sur la perte de ductilité pour le monocristal

Lors de la transition d'échelles, il est possible que certains phénomènes soient masqués par les effets de moyenne. C'est pourquoi le fait d'étudier l'effet des paramètres matériau d'abord à l'échelle du monocristal permet de s'affranchir de ces problèmes. Ces effets seront ensuite comparés à ceux obtenus dans le cas d'un polycristal pour étudier s'il y a des effets propres au mono ou au polycristal.

3.4.1 Forme de la fonction déterminant minimum dans l'espace

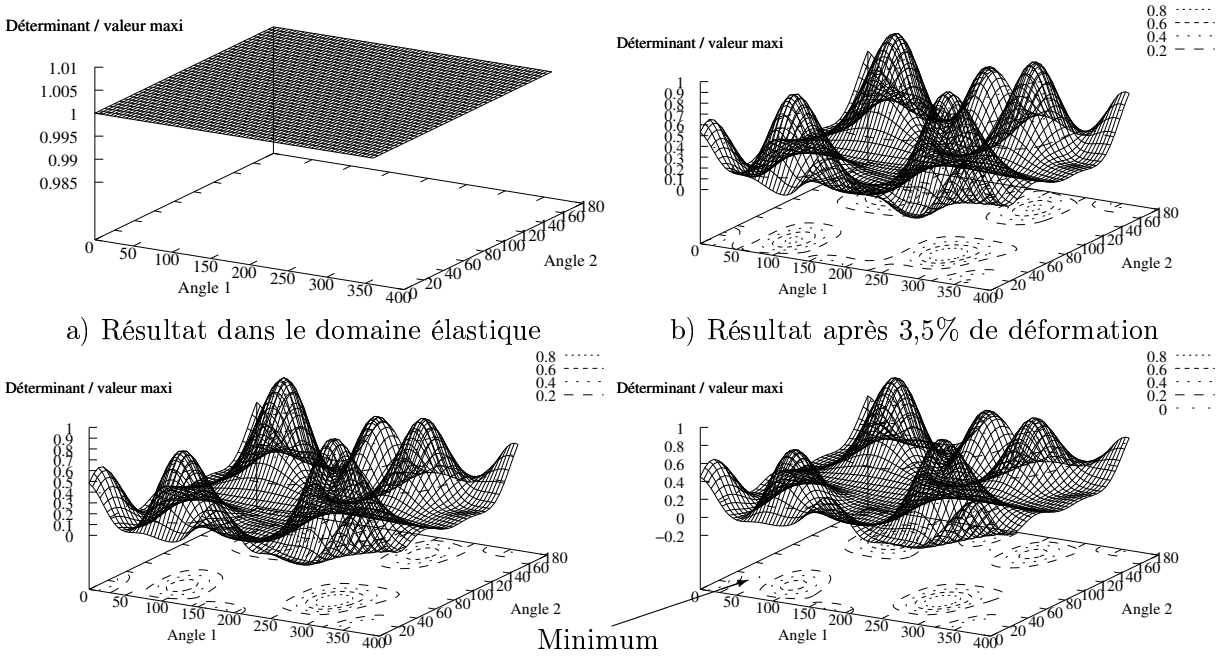
Pour prédire le moment où la perte de ductilité intervient, la relation (3.53) est utilisée. Il faut, à chaque pas de calcul, s'assurer si cette relation est vérifiée pour au moins une orientation ν . La solution la plus simple consiste à balayer l'ensemble de l'espace des orientations. A titre d'exemple, la figure (3.9) présente l'évolution, au cours de la déformation, du déterminant $\det\left(L_{jikl}\lambda_l\lambda_j\right)$ où la direction λ décrit tout l'espace lors d'un essai de traction uniaxiale sur un monocristal dont les paramètres matériaux ont été choisis comme indiqué dans le tableau (3.2).

Paramètres	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	φ_{1_0}	ϕ_0	φ_{2_0}	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	55 MPa	50 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	148°	128°	156°	80	2 nm	1 mm

TAB. 3.2 – Paramètres pour la validation qualitative de la perte de ductilité du monocristal

L'orientation de la normale est définie par deux angles, l'un variant de 0° à 180° et l'autre de 0° à 360° comme montré sur la figure (3.8). Les calculs du déterminant ont été réalisés pour un pas de cinq degrés sur chaque angle et le résultat est présenté en trois dimensions. Les résultats

ont été normalisés à 1, c'est à dire que la valeur du déterminant est divisée en tout point par la valeur maximale calculée.



a) Résultat dans le domaine élastique

b) Résultat après 3,5% de déformation

c) Résultat après 8,5% de déformation

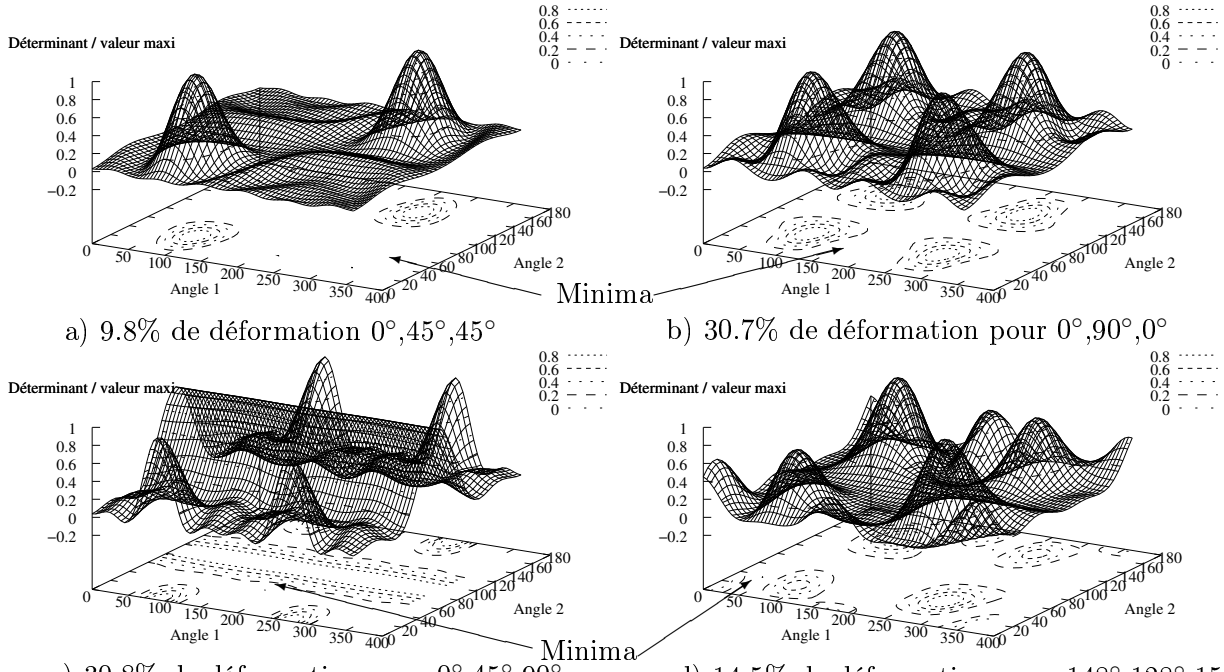
d) Résultat après 14,5% de déformation

FIG. 3.9 – Evolution du déterminant normalisé au cours de la déformation en fonction de l'orientation de la normale lors d'un essai de traction uniaxiale

La figure (3.9) permet de tirer les conclusions suivantes :

- Premièrement, dans le cas élastique isotrope, la valeur du déterminant est la même quelle que soit l'orientation de la normale, ce qui est conforme aux attentes.
- Dès les premiers stades de la déformation, la valeur du déterminant varie énormément d'une direction à l'autre. Il y a des zones dans lesquelles le déterminant a des valeurs faibles comparées aux valeurs maximales. Pour déterminer ces zones, il est obligatoire de faire une analyse systématique, car le résultat possède plusieurs minima locaux ce qui interdit d'utiliser des techniques de minimisation telle que celle du gradient conjugué.
- La forme générale du résultat, pour un trajet monotone, n'est pas modifiée lors du chargement, cependant les zones de minimum des figures b), c) et d) ont tendance à être de plus en plus larges avec des valeurs de plus en plus faibles.
- Enfin, aux alentours de 14,5% de déformation deux directions pour lesquelles le déterminant atteint une valeur négative sont obtenues, ce qui correspond au moment où la localisation de la déformation intervient. Par souci de clarté, une seule sera indiquée dans chacun des cas testés. La direction de la normale va très fortement dépendre de l'orientation du monocristal du fait de la très grande anisotropie du comportement associée à l'orientation cristallographique.

La figure (3.10) présente plusieurs essais de traction sur des monocristaux dont l'orientation cristallographique est indiquée sur chaque figure. La très forte dépendance de la direction de localisation vis à vis de l'orientation cristallographique est bien observée ; la valeur de la déformation logarithmique à partir de laquelle le critère est vérifié varie beaucoup elle aussi. Dans la partie suivante l'orientation et la position de la bande vont être étudiées. Il faut bien noter que les deux angles qui définissent la bande peuvent être différents pour deux essais alors que



a) 9.8% de déformation 0°,45°,45°

b) 30.7% de déformation pour 0°,90°,0°

c) 30.8% de déformation pour 0°,45°,90°

d) 14,5% de déformation pour 148°,128°,156°

FIG. 3.10 – Forme de la fonction déterminant et déformation à laquelle intervient la localisation en fonction de l'orientation cristallographique initiale lors d'un essai de traction uniaxiale

l'angle entre la bande et la direction de chargement sont identiques. Dans chacun des quatre cas représentés sur la figure (3.10), par souci de simplicité, seule une des zones de l'espace dans lesquelles il y a un déterminant négatif est montrée. Pour les orientations particulières choisies ici, il apparaît une multiplicité des zones de minimum dues aux symétries liées à la structure cubique centrée.

3.4.2 Orientation et position de la bande de localisation

Dans cette partie l'étude de l'orientation de la bande de localisation ainsi que sa trace dans le plan du chargement vont être étudiés et comparés aux résultats classiquement obtenus.

Si θ_1 et θ_2 sont les angles qui définissent la normale à la bande de cisaillement notée n_{loc} alors :

$$n_{loc} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_1)\cos(\theta_2) \\ \sin(\theta_2) \end{pmatrix} \tag{3.54}$$

Lors d'un essai de traction uniaxiale dans la direction de laminage appelée 1, l'angle formé par la normale au plan de localisation et la direction de chargement noté θ_{loc} se calcule en remarquant que :

$$\overrightarrow{X_1}.\overrightarrow{n_{loc}} = ||\overrightarrow{X_1}||.||\overrightarrow{n_{loc}}||\cos\left(\overrightarrow{X_1}, \overrightarrow{n_{loc}}\right) \tag{3.55}$$

D'où :

$$\theta_{loc} = \arccos(\cos(\theta_1)\cos(\theta_2)) \tag{3.56}$$

La tableau (3.3) regroupe les différentes normales qui vérifient le critère de Rice pour les quatre orientations cristallines de la figure (3.10). Ce tableau montre que la bande de localisation forme un angle d'environ 45° avec la direction de chargement dans tous les cas. Cette bande est en fait

située sur un cône dont le demi-angle au sommet est de 45°, chose qui est en accord avec les travaux de Hanus [Han99].

Il faut aussi étudier la position de la trace du plan de localisation par rapport au chargement. Dans le plan de la tôle, l'orientation de la trace du plan de localisation est donnée par la formule :

$$\theta_{pos} = \arccos\left(\sin\left(\theta_1\right)\right) \tag{3.57}$$

Les valeurs de cet angle pour les différents monocristaux étudiés ici sont consignés dans le tableau (3.3). Dans le cas d'un matériau isotrope, on devrait trouver la valeur classique de 54° (ou 125° par symétrie). Cette valeur se retrouve pour certains des monocristaux testés mais pas pour tous du fait que le comportement monocristallin est très anisotrope. Il faudra étudier la position de cette bande dans le cas du polycristal, pour lequel le comportement est beaucoup moins anisotrope, et vérifier si la bande de localisation est bien inclinée de 54° dans le plan de la tôle.

Cette partie a donc montré deux choses importantes en ce qui concerne les bandes de localisation :

- La normale qui vérifie le critère de Rice est située, pour l'ensemble des cas testés, sur un cône dont le demi-angle au sommet est 45°, ce qui correspond aux attentes.
- La trace de la bande de localisation est inclinée de 54° par rapport à la direction de sollicitation dans certains cas mais pas sur tous du fait de la très grande anisotropie du comportement monocristallin.

3.4.3 Influence des paramètres physiques sur la perte de ductilité

Dans la suite, l'influence des différents paramètres physiques du modèle sur la perte de ductilité va être étudiée à savoir :

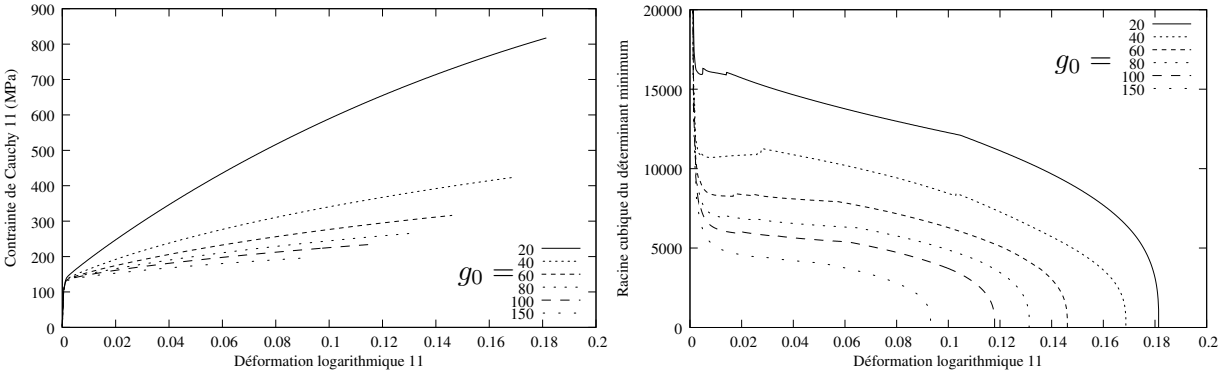
- Le paramètre lié au libre parcours moyen des dislocations g_0,
- La distance d'annihilation critique y_c,
- La cission critique initiale τ_c^0,
- La taille de grain qui doit être identifiée comme celle de l'éprouvette puisqu'elle ne comporte qu'un seul grain.

Pour cela, les paramètres du tableau (3.2) seront utilisés et un paramètre sera modifié en gardant les autres constants. Lorsque le déterminant est calculé, la valeur obtenue est homogène à un module tangent au cube. Pour obtenir des valeurs plus conventionnelles, il suffit de calculer la racine cubique du déterminant. Le résultat sera alors homogène à un module tangent et plus commode à étudier. Les figures (3.11) à (3.14) permettent de donner les conclusions suivantes :

- Pour chacun des cas testés la valeur minimale décroît fortement et rapidement ce qui correspond à l'entrée en plasticité, puis la décroissance continue mais de façon plus "lente". Enfin, lorsque la perte de ductilité est sur le point d'être atteinte la décroissance se fait plus rapide pour obtenir des valeurs négatives qui sont les limites de validité du modèle proposé.
- Plus le paramètre lié au libre parcours moyen des dislocations est grand, plus le libre parcours moyens des dislocations est important. Donc le matériau pourra moins se consolider (3.11a) et la ductilité sera moins importante (3.11b).
- L'effet de la distance d'annihilation critique est similaire à celui du libre parcours moyen des dislocations, en effet si un matériau a une distance d'annihilation critique faible alors il peut stocker de plus en plus de dislocations donc sa résistance à la déformation augmente (3.12a), par la même occasion sa ductilité aussi (3.12b). Il est à noter que son effet est très sensible sur la limite de ductilité alors qu'il l'est moins sur la loi de comportement.

φ_1	Φ	φ_2	θ_1	θ_2	θ_{loc}	θ_{pos}
148°	28°	156°	35°	35°	48°	125°
			215°	145°	48°	55°
0°	90°	0°	30°	30°	45°	125°
			35°	150°	135°	125°
			145°	30°	135°	125°
			145°	150°	45°	125°
			215°	30°	135°	55°
			215°	150°	45°	55°
			325°	30°	45°	55°
			325°	150°	135°	55°
0°	45°	90°	0°	45°	45°	90°
			0°	135°	135°	90°
			45°	0°	45°	135°
			45°	180°	135°	135°
			135°	0°	135°	135°
			135°	180°	45°	135°
			180°	45°	135°	90°
			180°	135°	45°	90°
			225°	0°	135°	45°
			225°	180°	45°	45°
			315°	0°	45°	45°
			315°	180°	135°	45°
			360°	45°	45°	90°
			360°	135°	135°	90°
0°	45°	45°	40°	150°	132°	130°
			140°	150°	48°	130°
			220°	30°	132°	50°
			320°	30°	48°	50°

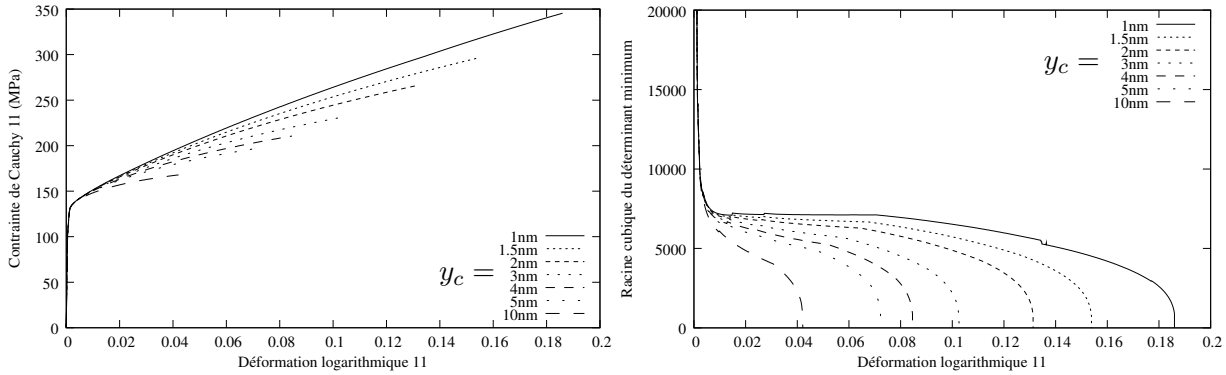
TAB. 3.3 – Orientation de la bande de localisation pour le monocristal



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

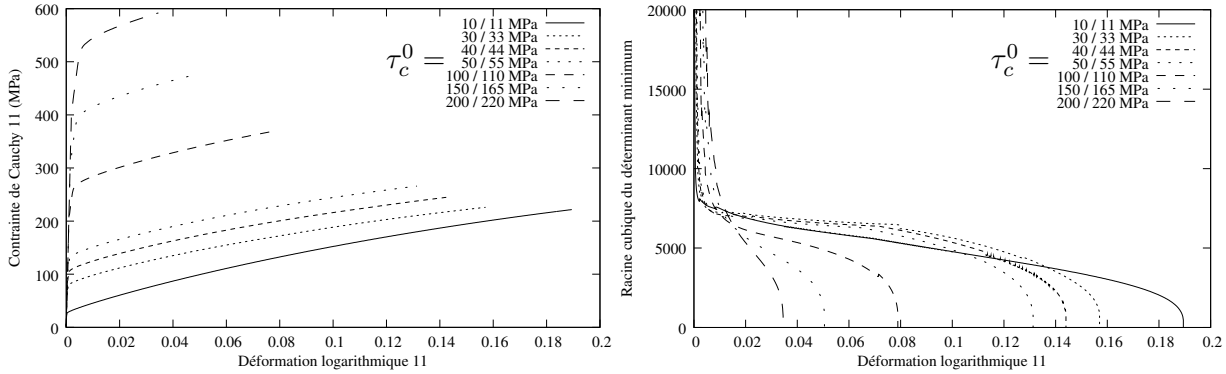
FIG. 3.11 – Influence du paramètre lié au libre parcours moyen des dislocation g_0



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

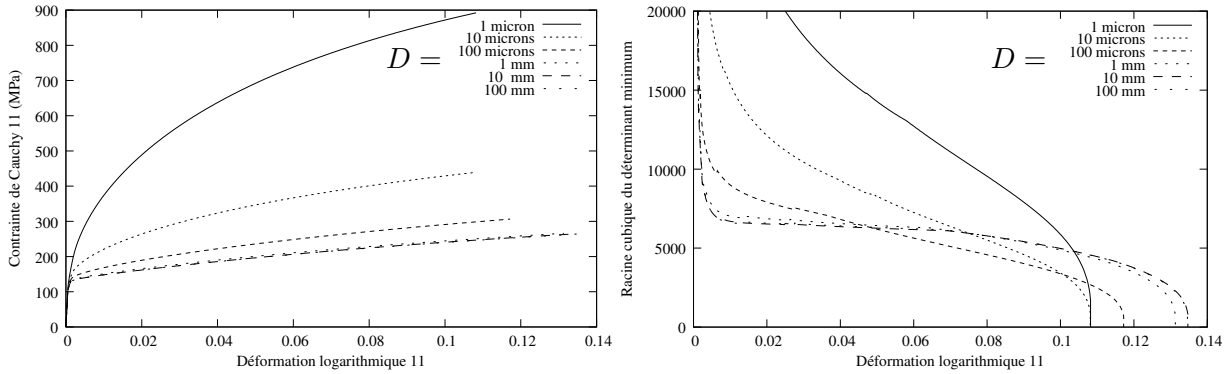
FIG. 3.12 – Influence de la distance d'annihilation critique y_c



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

FIG. 3.13 – Influence de la cission critique initiale τ_c^0



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

FIG. 3.14 – Influence de la taille de l'éprouvette

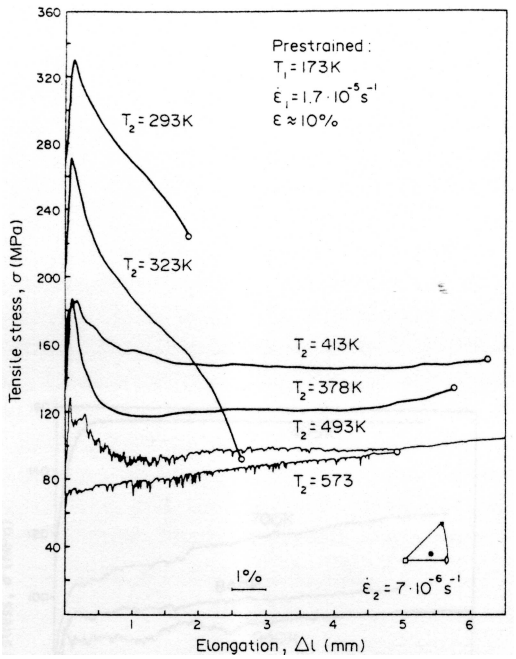


FIG. 3.15 – Essais de traction sur des monocristaux de molybdène à différentes températures [Luf91]

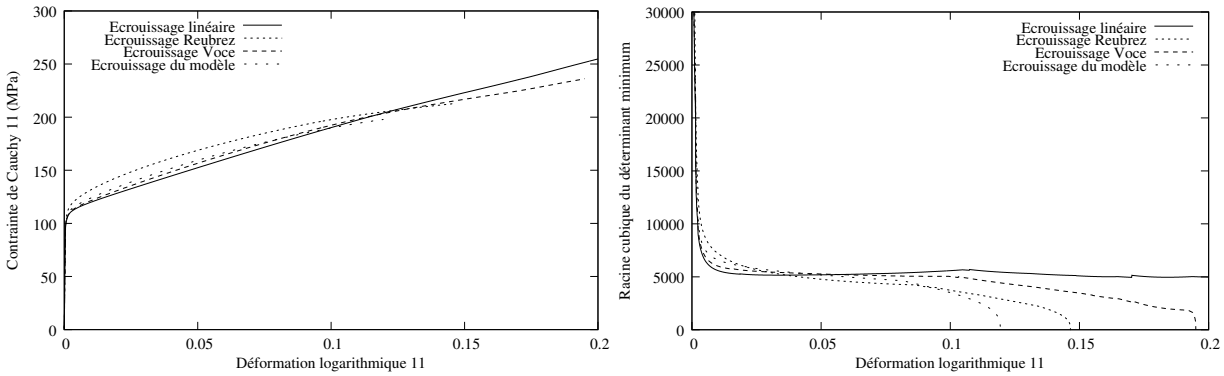
- L'influence de la cission critique peut être comparée aux travaux de Luft [Luf91] qui a réalisé des essais de traction sur des monocristaux de Molybdène qui ont la même "physique" de l'écoulement plastique que les aciers. Les résultats obtenus sont montrés sur la figure (3.15). Il y est montré que plus l'essai est fait à une température faible, plus la limite élastique augmente et plus la ductilité diminue. Si, il est admis que l'effet de la température a une prédominance au niveau de la variation de la limite élastique alors la même influence que dans les travaux de Luft (3.13a et b) est retrouvée.
- L'effet de la taille de l'éprouvette est le même que celui escompté : plus le grain est fin plus le matériau est dur (3.14a) et moins il a la possibilité de se déformer (3.14b).

Tous ces résultats permettent de valider qualitatitivement l'influence des paramètres physiques sur le comportement. D'autres tests avec des orientations cristallographiques différentes ont été menés et l'influence des paramètres physiques va toujours dans le même sens, ce qui correspond bien aux attentes.

3.4.4 Influence de la matrice d'écrouissage sur la perte de ductilité

Dans cette partie, l'influence de la forme de la matrice d'écrouissage sur la perte de ductilité du monocristal est étudiée. Pour cela, quatre types d'écrouissage différents sont définis comme :

- L'écrouissage linéaire défini par $H^{gh}_{lin} = h * a^{gh}$ où h est un paramètre à identifier,
- L'écrouissage Reubrez défini par $H^{gh}_{reu} = \dfrac{h_1}{\left(\tau^g_c - \tau^g\right)^{h_2}} a^{gh}$ où h_1 et h_2 sont des paramètres à identifier,
- L'écrouissage Voce défini par $H^{gh}_{voc} = h_1 \dfrac{h_2 - \tau^g_c}{(h_2 - \tau^g)} a^{gh}$ où h_1 et h_2 sont des paramètres à identifier,



a) Comportement en traction uniaxiale

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

FIG. 3.16 – Influence de la matrice d'écrouissage sur le comportement du monocristal

– L'écrouissage comme défini dans ce mémoire par $H^{gh} = \dfrac{\alpha\mu}{2\sqrt{a^{gk}\rho^k}} a^{gh}\left(\dfrac{1}{L^h} - 2y_c\rho^h\right)$ où y_c et g_0 (qui intervient dans le calcul du libre parcours moyens des dislocations) sont des paramètres à identifier.

La figure (3.16a) présente les résultats en contrainte / déformation pour des essais de traction uniaxiale sur un monocristal dont l'orientation cristallographique est donnée dans le tableau (3.2). Les paramètres des lois d'écrouissage linéaire, Reubrez et Voce ayant été calés de manière à se rapprocher du résultat donné par la loi d'écrouissage employée ici. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux consignés dans le tableau (3.2). La figure (3.16b) présente l'évolution de la valeur du déterminant minimum au cours de la déformation. Ces deux figures montrent que :

– Les quatre types d'écrouissage employés permettent de donner des résultats assez similaires en ce qui concerne les courbes contrainte / déformation. Cependant, les pentes d'écrouissage calculées pour les écrouissages linéaire, Reubrez et Voce semblent ne pas évoluer assez rapidement au cours de la déformation pour se rapprocher de l'expérience. En effet, expérimentalement, il est observé que la pente d'écrouissage (pour les aciers étudiés ici) ne fait que décroître durant un trajet monotone et cette tendance n'est pas bien simulée par ces trois modèles.
– Mis à part l'écrouissage linéaire, il est possible de vérifier le critère de Rice pour les trois autres cas. Les déformations pour lesquelles ce critère est vérifié ne sont pas les mêmes du fait que les pentes d'écrouissage ne sont pas identiques. En effet, pour le trajet monotone simulé ici, dire que la localisation est atteinte revient à dire que la pente d'écrouissage a atteint une valeur critique qui dépend de la loi de comportement [Asa83b], [HH75]. C'est pour cela que, aux vues des pentes d'écrouissage simulées, la loi d'écrouissage de Voce prédit une déformation de localisation plus précoce que celle de Reubrez.
– Seul le modèle d'écrouissage proposé semble être en mesure de modéliser le fait que la pente d'écrouissage arrive à saturation pour des déformations faibles. La déformation pour laquelle le critère de localisation est vérifié est donc plus faible que dans tous les autres cas.

Paramètres	Grains	τ_{c0} [110]	τ_{c0} [112]	ρ_0	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	100	80 MPa	80 MPa	$1.0.10^9$ m^{-2}	100	3 nm	20 μm

TAB. 3.4 – Paramètres pour la validation qualitative de la perte de ductilité du polycristal

3.5 Influence des paramètres mécaniques sur la perte de ductilité du polycristal

Comme pour le monocristal, un jeu de paramètres matériau est choisi. Les paramètres mécaniques vont varier autour de ce jeu de manière à observer leur influence et étudier la présence ou non d'effets propres au polycristal générés par la transition d'échelles. Ces paramètres sont consignés dans le tableau (3.4). L'influence des différents paramètres mécaniques sur la perte de ductilité du polycristal est étudiée, à savoir :

- Le paramètre lié au libre parcours moyen des dislocations g_0,
- La distance d'annihilation critique y_c,
- La cission critique initiale τ_c^0,
- la taille de grain D_{moy}.

La texture sera définie à l'aide de 100 orientations cristallographiques de manière à obtenir une texture qui se rapproche de celle d'un acier ferritique comme ceux étudiés au chapitre 2 tout en ayant un temps de calcul faible. Pour détecter le moment où intervient la perte de ductilité deux méthodes sont possibles :

- Soit le critère de Rice est appliqué à chacun des grains pour connaître le moment où la localisation est atteinte. Il faudra cependant se donner un critère supplémentaire qui sera la fraction volumique de grains pour lesquels le critère de Rice est vérifié. En effet, le fait qu'un grain ait localisé n'entraîne pas forcément la localisation du polycristal. Cela suppose donc d'introduire un critère qui ne sera plus absolu alors que le critère de départ l'est.
- Soit le critère est appliqué au module tangent effectif du polycristal pour simuler la localisation de la déformation. A cette condition là, le critère reste absolu et très simple à mettre en pratique.

La figure (3.17) montre la fraction volumique de grains ayant localisé par rapport à la valeur du déterminant minimum lors d'un essai de traction pour un polycristal de 100 grains. Le moment où la localisation est atteinte macroscopiquement correspond à peu de choses près au moment où l'ensemble des grains a localisé. Cela justifie donc le fait d'utiliser le critère pour le module tangent du polycristal. La figure (3.18) montre les résultats obtenus lors d'un essai de traction uniaxiale sur un polycristal de 100 grains et permet de donner les conclusions suivantes :

- Dans le cas de l'élasticité le même résultat que pour le cas monocristallin est retrouvé ce qui correspond aux attentes. En effet, l'élasticité est supposée linéaire et isotrope donc indépendante de l'orientation.
- La forme du déterminant en fonction de l'orientation de la normale apparaît aussi complexe que pour le monocristal, cependant on observe que les variations d'une orientation à l'autre sont nettement moins importantes probablement dû à l'effet de moyenne sur l'ensemble des grains. Les zones de minima ont tendance à être plus "grandes" que dans le cas monocristallin.
- L'évolution de la forme de la fonction déterminant en fonction de la déformation est telle que les zones de minima ne se déplacent que peu pendant le chargement. Comme dans le cas monocristallin, il est possible de trouver, à un moment donné, une orientation telle que

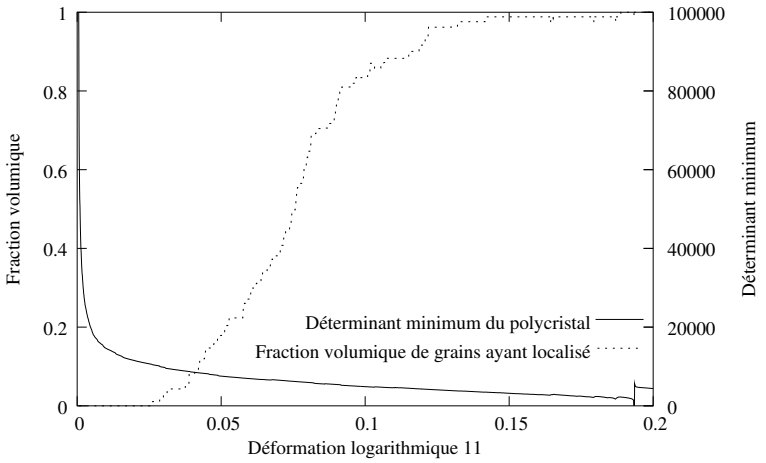


FIG. 3.17 – Nombre de grains ayant localisé en fonction du déterminant minimum

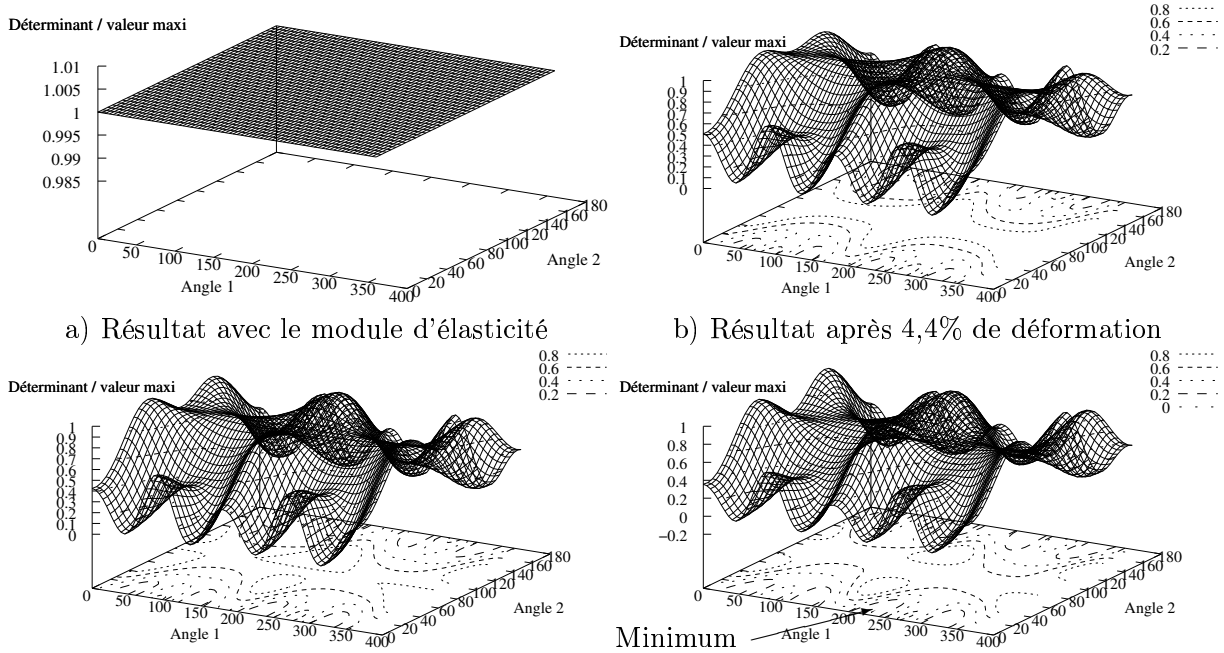
le déterminant devienne négatif et qui correspond à la limite de ductilité.

L'influence des différents paramètres mécaniques sur la perte de ductilité est, d'une manière générale la même que pour le cas du monocristal. Les conclusion suivantes peuvent être données :

- L'influence du paramètre de libre parcours moyen des dislocations est la même que pour le monocristal mais semble moins marquée. Cela est dû au fait que la taille de grain dans l'essai de référence est très différente de celle dans le cas du monocristal ce qui a un effet très important sur le calcul du libre parcours moyen des dislocations.
- L'influence de la distance d'annihilation critique est, elle aussi, la même que pour le monocristal avec un effet moins marqué pour les mêmes raisons que pour le paramètre g_0.
- L'influence de la cission critique initiale est moins marquée que pour le cas du monocristal, l'effet de moyenne attendu en faisant une transition d'échelles est là aussi bien observé.
- L'influence de la taille de grain est moins importante que celle des autres paramètres, le fait que plus le grain est fin plus le comportement du matériau est dur et moins il est ductile est aussi observé.
- D'une manière générale, les effets des paramètres matériau sur la limite de ductilité et le comportement mécanique sont les mêmes que pour le monocristal. Cependant, ces effets sont nettement moins importants. Cela s'explique par le fait que le polycristal est fait d'un certain nombre de monocristaux dont le comportement est très différent d'une orientation cristallographique à l'autre, comme cela a été montré au chapitre 1. Comme l'effet des paramètres (plus ou moins prononcé) dépend de l'orientation cristallographique, cet effet se trouve donc forcément atténué par rapport au cas monocristallin du fait des relations d'homogénéisation.

L'influence du trajet de chargement, qui est un élément fondamental à étudier pour simuler les processus de mise en forme, le sera dans le prochain paragraphe. C'est en effet cette influence qui est à l'origine du tracé des CLF.

Il faut, en dernier lieu, étudier la position de la bande de localisation pour vérifier si les résultats sont là aussi proches des attentes. Pour cela, un essai de traction uniaxiale est réalisé pour chacun des aciers étudiés au chapitre 2 et les angles θ_{loc} et θ_{pos} sont calculés. Comme pour le cas monocristallin la normale est bien située sur un cône dont le demi-angle au sommet est 90°. De plus, pour chacun des aciers étudiés, au moment où la perte de ductilité est atteinte deux bandes sont crées et orientées à environ 54° (ou 125° par symétrie) de la direction de chargement.



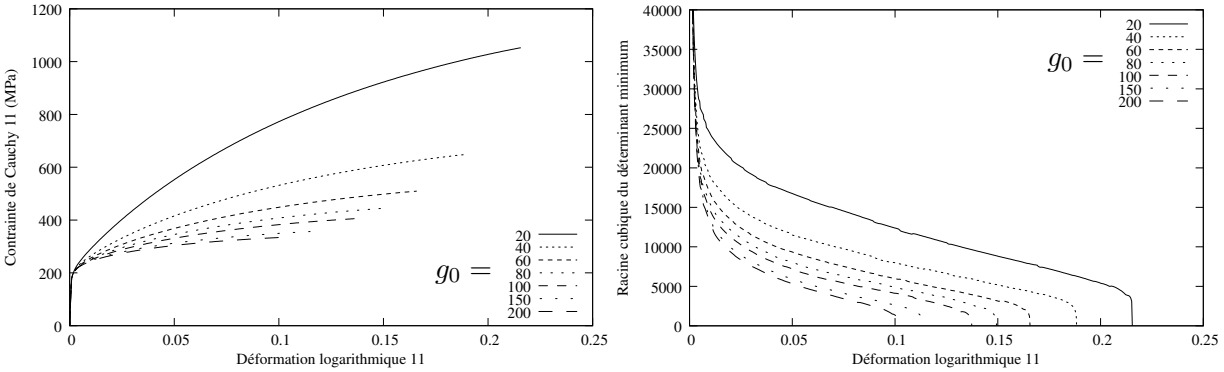
a) Résultat avec le module d'élasticité

b) Résultat après 4,4% de déformation

c) Résultat après 9,4% de déformation

d) Résultat après 13,8% de déformation

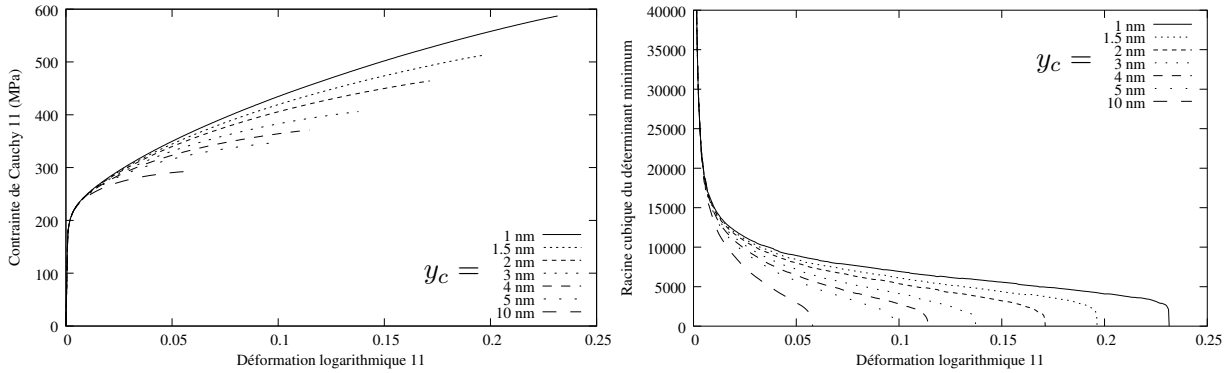
FIG. 3.18 – Evolution du déterminant normalisé au cours de la déformation en fonction de l'orientation de la normale lors d'un essai de traction uniaxiale pour un polycristal de 100 grains



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

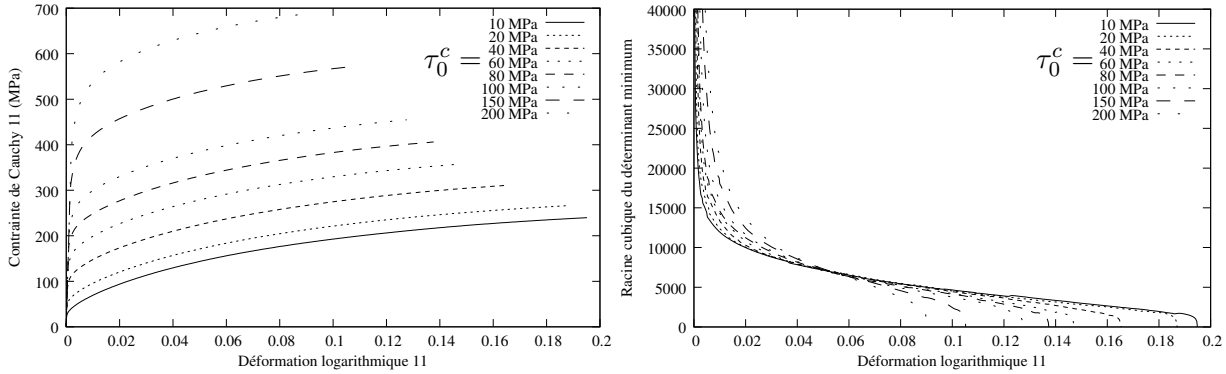
FIG. 3.19 – Influence du paramètre lié au libre parcours moyen des dislocations g_0 sur le polycristal



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

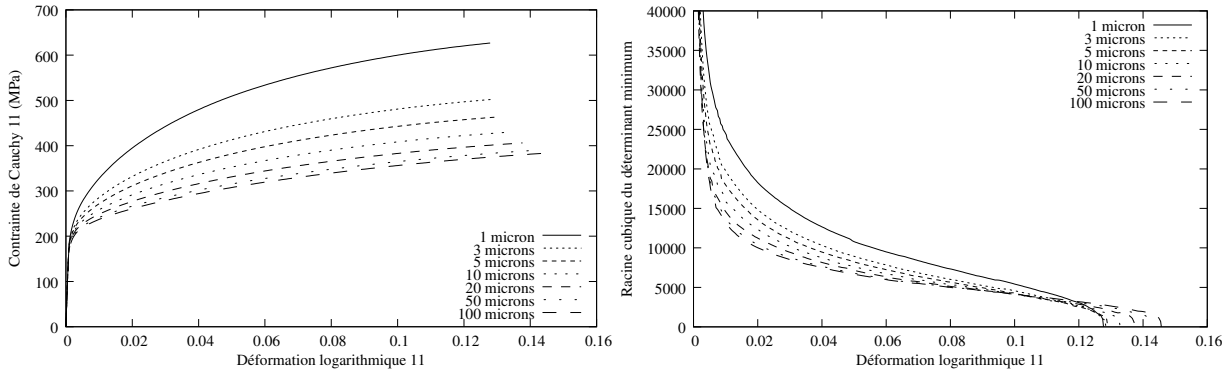
FIG. 3.20 – Influence de la distance d'annihilation critique y_c sur le polycristal



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

FIG. 3.21 – Influence de la distance cission critique initiale τ_c^0 sur le polycristal



a) Comportement en traction

b) Evolution de la valeur minimale du déterminant

FIG. 3.22 – Influence de la taille de grain sur le polycristal

Acier	θ_1	θ_2	θ_{loc}	θ_{pos}
C1754	38°	26°	45°	128°
	142°	26°	135°	128°
	218°	154°	45°	52°
	322°	154°	135°	52°
D1879	39°	155°	135°	129°
	141°	156°	45°	129°
	219°	25°	135°	51°
	320°	23°	45°	50°
DC04	40°	158°	135°	130°
	140°	158°	45°	130°
	220°	22°	135°	50°
	319°	21°	45°	49°
A159	38°	159°	137°	52°
	139°	154°	47°	131°
	218°	22°	137°	52°
	319°	26°	47°	49°
T1625	33°	145°	133°	123°
	149°	148°	43°	121°
	213°	35°	133°	57°
	328°	31°	43°	58°

TAB. 3.5 – Orientation de la bande de localisation pour le polycristal

Les légères différences rencontrées proviennent du fait que la valeur de 54° est valable pour le cas isotrope alors que les matériaux étudiés sont légèrement anisotropes. De plus, pour chacun des aciers, il y a quatre orientations qui vérifient le critère de Rice mais leurs traces ne correspondent qu'à deux bandes dans le plan de la tôle.

Cette partie vient donc de montrer que l'effet des paramètres matériau est bien reproduite par le modèle et que les bandes de localisation sont orientées conformément aux attentes pour les matériaux et le mode de chargement étudiés ici.

3.6 Détermination des courbes limite de formage

Ici, les CLF obtenues par la simulation vont être comparées à des courbes de référence. Une comparaison qualitative sera faite avec les travaux de Haddad [Had97] qui a étudié l'effet d'une prédéformation sur les CLF. Pour tracer ces courbes, les conditions aux limites imposées le sont uniquement en contrainte pour le premier chargement dans le cas d'une courbe directe, ou pour le second chargement dans le cas d'une courbe brisée. Le tenseur $\dot{N}$ imposé est de la forme :

$$\dot{N} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.58}$$

Où ρ varie entre -1 et 1. Pour chacune des valeurs de ρ les déformations principales obtenues, lorsque le critère de ductilité est vérifié, sont relevées puis placées dans un graphique.

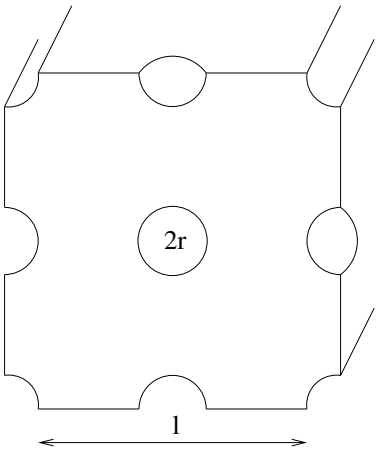


FIG. 3.23 – Définition de la cellule élémentaire dans le modèle de Cayssials [Cay00]

3.6.1 Modèle de référence pour la simulation des courbes limite de formage

Contrairement à la validation mono- et polycristalline, il n'y a pas d'essais expérimentaux pour la mesure de CLF disponibles. Pour remédier à cela, le modèle de Cayssials [Cay00] validé par Arcelor sur de nombreux aciers sera considéré comme une référence.

Tout d'abord la loi de comportement est supposée viscoplastique, isotrope, incompressible et écrite dans le cadre des petites déformations :

$$\sigma = K\varepsilon^n \dot{\varepsilon}^m \tag{3.59}$$

Où n est l'exposant d'écrouissage alors que m le paramètre de sensibilité à la vitesse. La perte de stabilité locale est atteinte lorsque la condition suivante est vérifiée :

$$x = \frac{\partial \dot{\varepsilon}_3^0}{\partial \varepsilon_3^0} \frac{1}{\dot{\bar{\varepsilon}}^0} > k \tag{3.60}$$

Avec :

$$\alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x = 0 \tag{3.61}$$

Les coefficients α, β et γ dépendent du trajet de chargement et des coefficients m et n. Dans le cas d'un trajet de traction plane, la relation (3.60) devient :

$$x = \frac{1}{m}\left(a\left(\varepsilon_1 1 - n\right)^3 + b\left(\varepsilon_1 1 - n\right)^2 + c\left(\varepsilon_1 1 - n\right)\right) > k \tag{3.62}$$

La paramètre k est déterminé à partir de la théorie de l'endommagement. En supposant que le matériau contient des cavités de même rayon r qui sont régulièrement réparties dans tout le matériau, cela permet de définir une cellule élémentaire de longueur l comme montré sur la figure (3.23). La coalescence est atteinte lorsque la valeur l atteint une valeur critique l_c qui peut être mesurée expérimentalement et qui est comprise entre 0.025 et 0.08 mm. En appelant e l'épaisseur et en supposant que la variable D varie linéairement en fonction du temps la valeur de k peut être calculée et vaut :

$$k = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{t}{l_c} \tag{3.63}$$

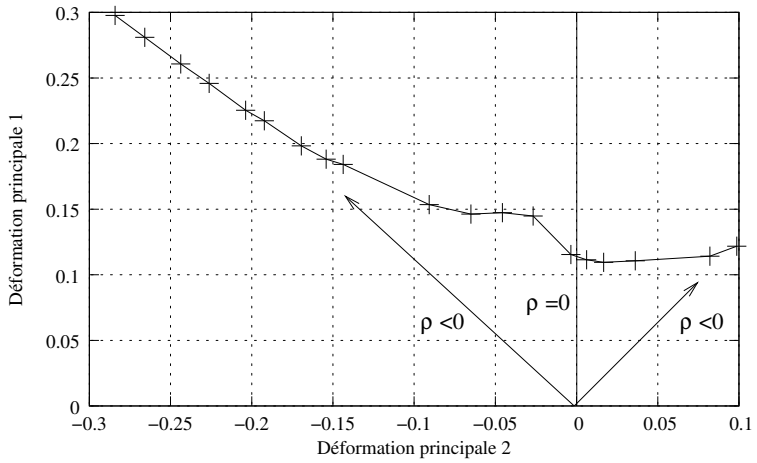


FIG. 3.24 – Courbe limite de formage directe simulée de l'acier D1879

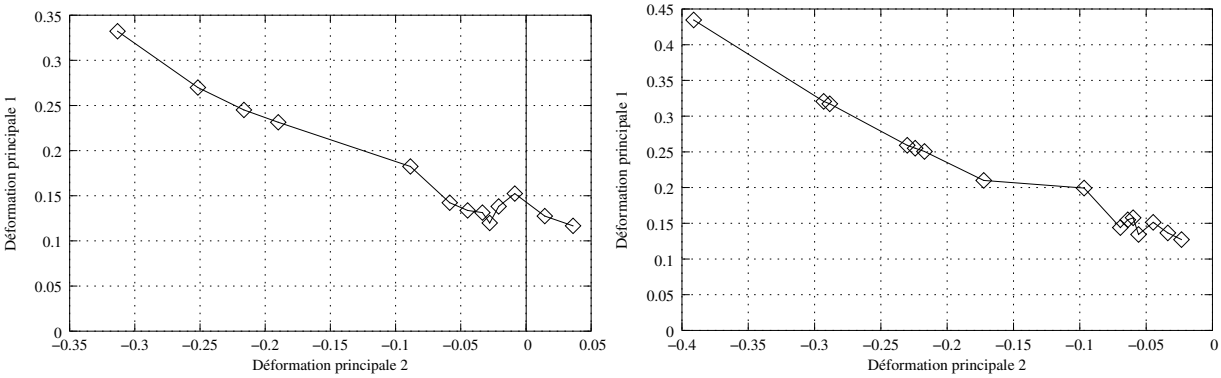
En combinant (3.60) et (3.63) la déformation ε_{11}^c à partir de laquelle la localisation est atteinte peut être calculée. Cayssials a ensuite étendu son étude à d'autres trajets de chargement en faisant intervenir le coefficient de Lankford r. Les résultats obtenus en employant l'approche de Cayssials vont être comparés à ceux obtenus avec le critère de Rice. Il est à noter que le modèle de Cayssials n'est valable que pour tracer des CLF en trajet direct (pas de prédéformation), en trajet brisé il ne donne pas de résultats satisfaisants.

3.6.2 Acier D1879

Ici, la courbe limite de formage obtenue à partir du matériau vierge est présentée sur la figure (3.24). Ce type de graphique est appelé CLF directe. Contrairement aux autres aciers, il n'y a pas de résultats de comparaison accessibles. Un avis qualitatif sur la forme de la courbe obtenue peut seulement être donné :

- Pour le trajet de traction plane ($\rho = 0$) le critère de localisation est vérifié pour la déformation la plus faible ce qui correspond à ce qui est relevé expérimentalement [Had97].
- Pour des trajets de type rétreint ($\rho < 0$), l'évolution de la déformation de localisation est quasi-linéaire ce qui est aussi habituellement observé. Lorsque ρ s'approche de -1, le chargement est équivalent à du cisaillement pour lequel la déformation de localisation ne peut être théoriquement atteinte, ce qui est aussi prédit par le calcul.
- Pour des trajets de type expansion ($\rho > 0$), l'allure de la courbe est horizontale comme observé. Il est à noter que, pour ce type de trajet, l'endommagement peut avoir un effet très pénalisant sur la limite de ductilité qui peut être nettement diminuée. Dans les aciers étudiés ici, Arcelor a mis en évidence que l'endommagement n'était pas suffisamment important pour agir de manière notable sur la limite de ductilité. Ce qui permet, dans une première approche de négliger son effet.

Les figures (3.25) a) et b) présentent les CLF obtenues après une déformation de 5% et 10% en traction. Elles sont appelées CLF en trajet brisé. Comme pour le cas direct, il n'y pas de résultats de comparaison disponibles, il faudra se limiter à des résultats qualitatifs. Ces courbes ne sont quasiment jamais obtenues expérimentalement car elles sont très longues, coûteuses et difficiles à obtenir. Haddad à montré que la CLF, lors d'un second trajet de chargement, se déplace dans le sens du premier trajet. Par exemple, pour la traction comme c'est le cas ici (où ρ reste à peu



a) Après 5% de traction b) Après 10% de traction

FIG. 3.25 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier D1879

près constant et vaut -0.5), la courbe doit donc être décalée vers la gauche et vers le haut par rapport au cas direct. C'est bien ce qui est observé sur les figures (3.25) a) et b), pour le cas b) la courbe limite de formage est plus décalée du fait de la prédéformation plus importante. Ces trois CLF montrent donc, pour cet acier, que les résultats obtenus sont qualitativement proches des attentes.

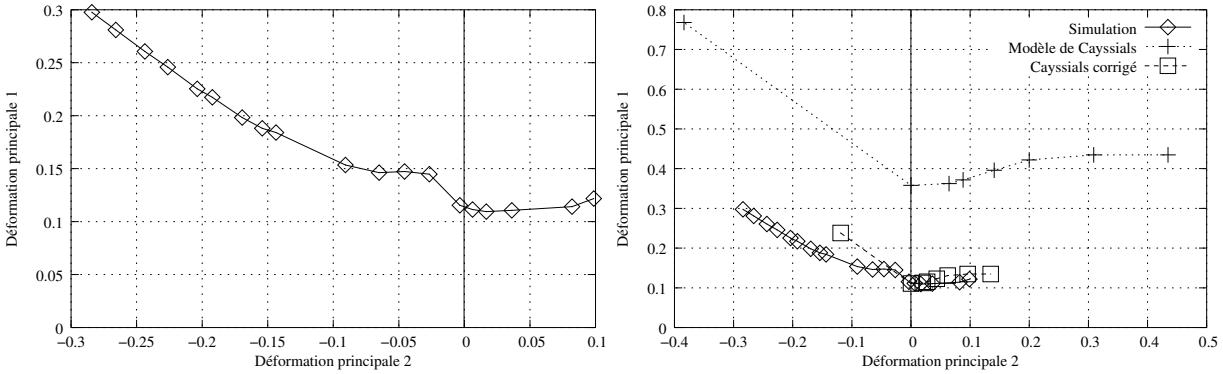
3.6.3 Acier C1754

La figure (3.26a) présente la CLF calculée pour l'acier C1754 en trajet direct. Il y a une très grande différence entre la courbe de simulation et la courbe expérimentale qui est principalement due aux méthodes de mesure de la déformation :

- En ce qui concerne la simulation, la déformation de localisation est atteinte lorsque le critère de Rice est vérifié c'est à dire au moment où la déformation n'est plus homogène dans l'éprouvette. Cette définition est relativement sévère.
- Pour tracer les points expérimentaux de CLF, un essai jusqu'à la rupture est réalisé. Le profil de déformation est déterminé à partir de grilles tracées sur l'éprouvette. Le point de CLF est obtenu en interpolant le profil (auquel la zone de rupture a été supprimée) et en cherchant le maximum. Cette méthode donne des valeurs surestimées

Les points de CLF sont donc obtenus de deux manières très différentes, ce qui génère de grands écarts. Pour comparer des choses comparables, il est proposé de modifier la CLF de référence de manière à faire coïncider le point correspondant à la traction uniaxiale avec Ag% (moment où l'effort appliqué à l'éprouvette atteint un maximum). Les autres points étant déduits par homothétie. En ayant fait cette transformation les CLF de référence modifiée et expérimentale peuvent maintenant être comparées et, dans ce cas, les résultats de simulation sont très proches des résultats de référence modifiés. Cette modification n'est acceptable qu'en première approche et nécessite une étude plus approfondie (qui ne sera pas menée ici) de manière à être validée.

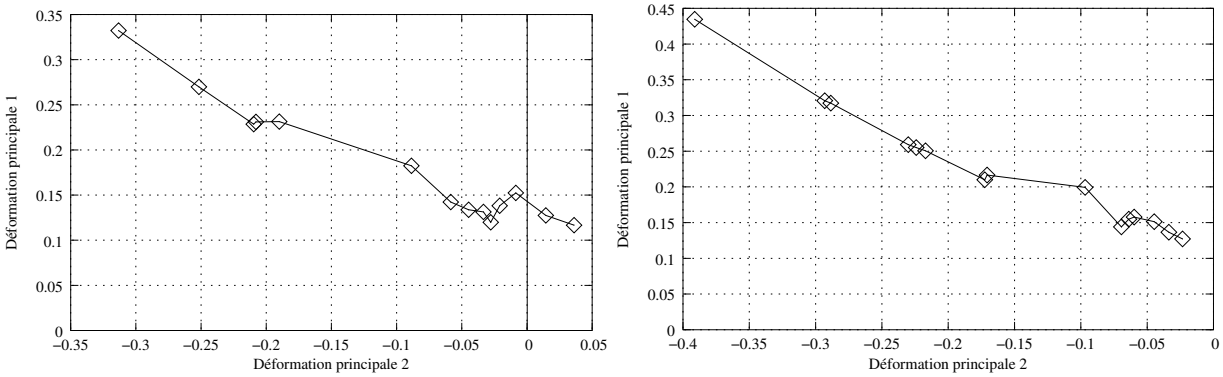
Les figures (3.27) a) et b) présentent les CLF obtenues après des prédéformations de 5 et 10 % respectivement. Les mêmes observations que pour l'acier D1879 peuvent être faites à savoir que la courbe limite de formage est déplacée dans le sens du premier trajet de chargement.



a) Courbe limite de formage simulée

b) Courbe limite de formage simulée par rapport à la courbe de référence corrigée

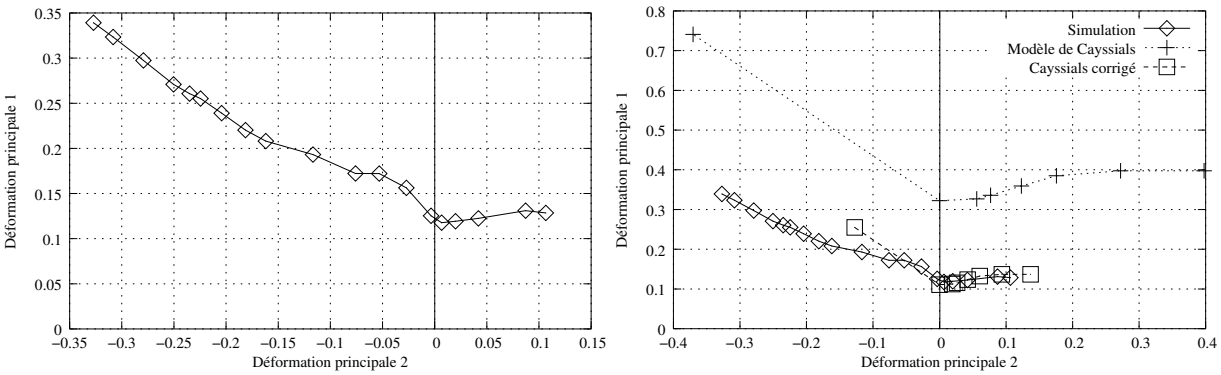
FIG. 3.26 – Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier C1754



a) Après 5% de traction

b) Après 10% de traction

FIG. 3.27 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier C1754



a) Courbe limite de formage simulée

b) Courbe limite de formage simulée par rapport à la courbe de référence corrigée

FIG. 3.28 – Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier S2325

3.6.4 Acier S2325

La figure (3.28a) présente la CLF en employant le modèle proposé alors que la figure (3.28b) présente la courbe de référence corrigée de la même manière que pour le cas précédent. Comme pour le cas de l'acier C1754 les résultats corrigés sont assez proches de ceux du modèle proposé.

La figure (3.29) présente des CLF après différentes prédéformations : 5 % de traction uniaxiale pour a), 10 % pour b) et 10 % d'expansion équibiaxée pour c). De la même manière que précédemment, pour cet acier aussi, les CLF sont décalées dans le sens du premier trajet, que cela soit pour la traction uniaxiale ($\rho \approx -0.5$) ou l'expansion équibiaxée ($\rho = 1$)

3.6.5 Acier D1957

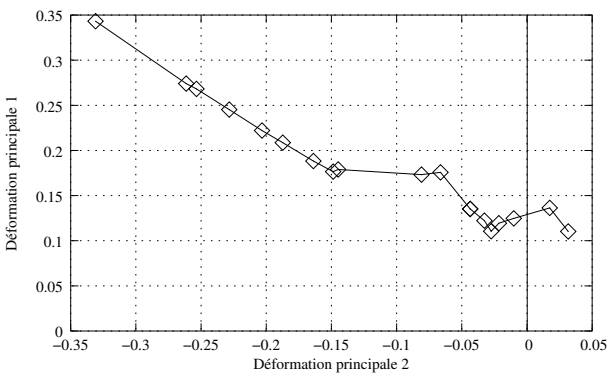
Après avoir présenté les résultats pour des aciers monophasés ferritiques, les mêmes simulations pour les aciers biphasés D1957 et A159 ont été faites. La figure (3.30a) présente la CLF obtenue avec le critère de Rice. Comme pour le cas des aciers monophasés la courbe de référence est corrigée pour se ramener au point Ag% en traction uniaxiale. Contrairement aux cas précédents la courbe simulée est assez éloignée de la courbe de référence et surestime les déformations au moment où la localisation intervient. Cet écart provient du fait que les différences de comportement entre les deux phases ne sont pas assez marquées numériquement par rapport à l'expérience.

La figure (3.31) présente des CLF obtenues après différentes prédéformations en traction uniaxiale de 5% pour a) et 10 % pour b). Pour cet acier biphasé les CLF sont décalées, comme pour les autres cas, dans le sens du premier trajet.

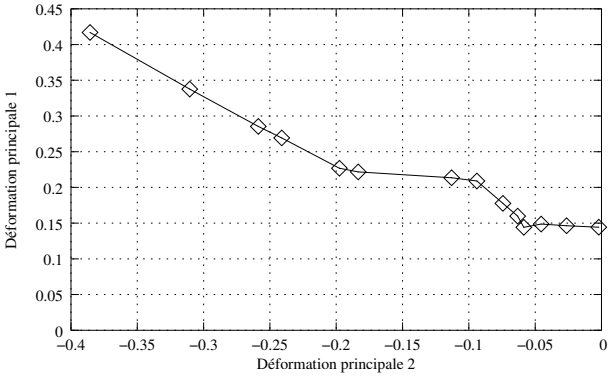
3.6.6 Acier A159

La figure (3.32a) présente la CLF obtenue avec le critère de Rice alors que la figure (3.32b) présente la courbe à partir du modèle de Cayssials corrigée pour l'acier A159. De la même façon que précédemment la courbe corrigée est assez éloignée de la courbe simulée, et ce, pour les mêmes raisons.

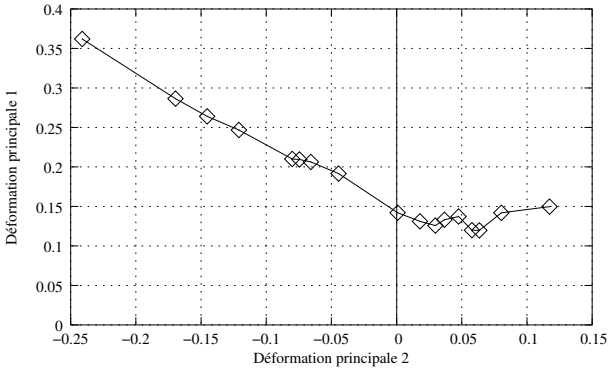
La figure (3.33) présente des CLF obtenues après différentes prédéformations en traction uniaxiale de 5% pour a) et 10 % pour b) pour l'acier A159. Comme pour les autres aciers, les CLF sont modifiées dans le sens du trajet de prédéformation.



a) Après 5% de traction

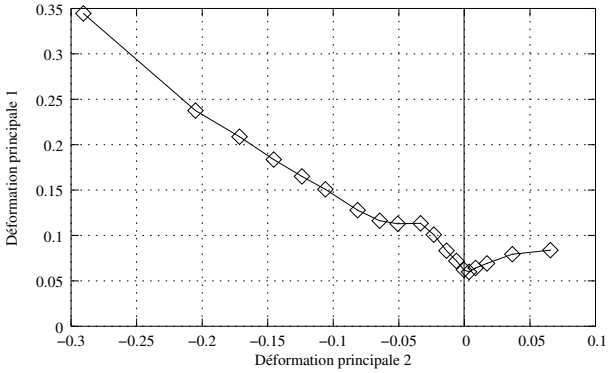


b) Après 10% de traction

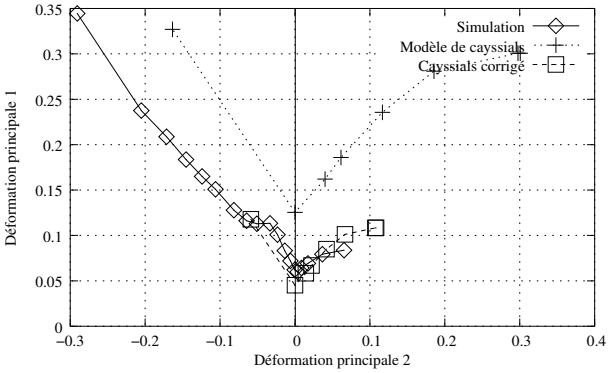


c) Après 10% d'expansion biaxée

FIG. 3.29 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier S2325

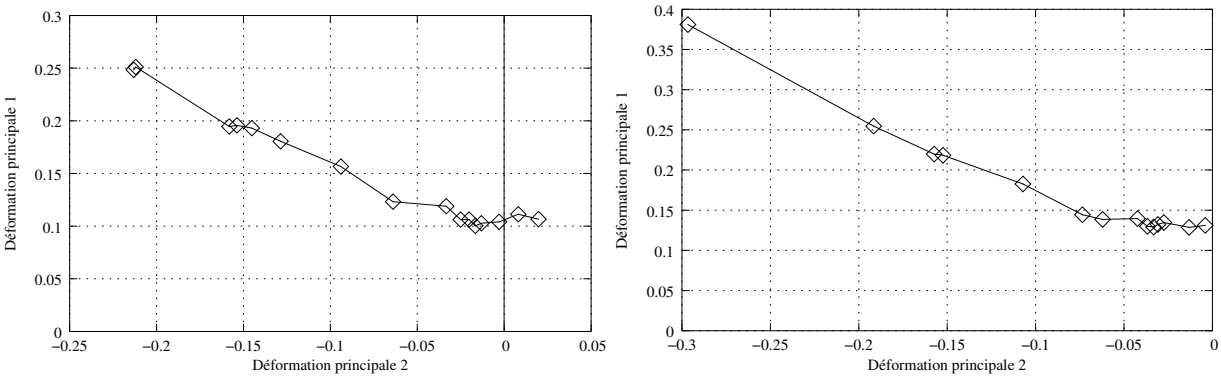


a) Courbe limite de formage simulée



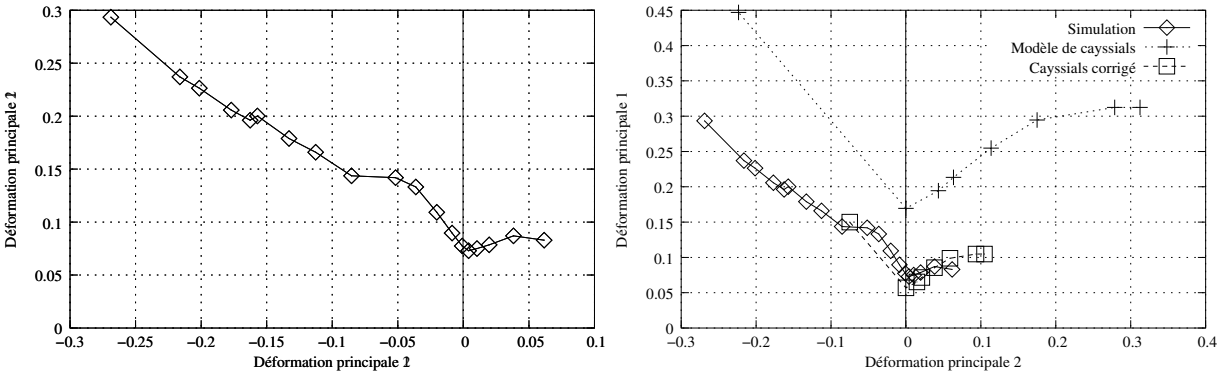
b) Courbe limite de formage simulée par rapport à la courbe de référence corrigée

FIG. 3.30 – Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier D1957



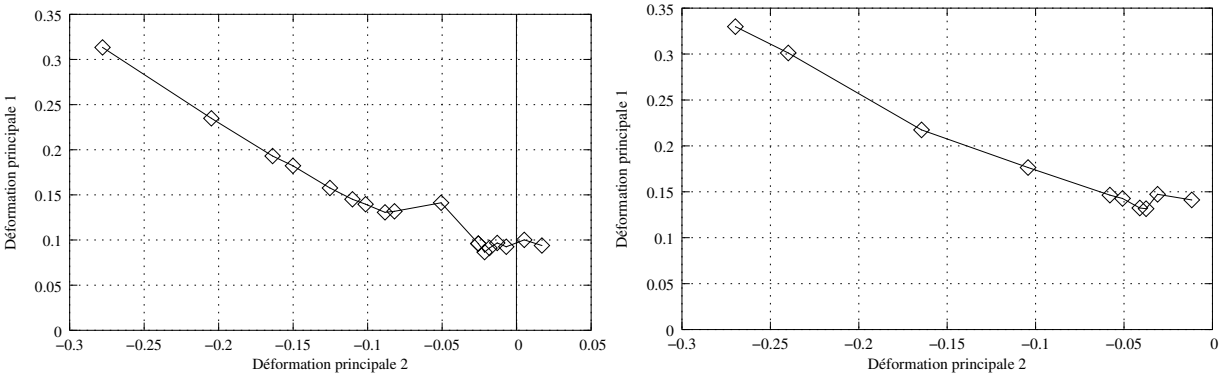
a) Après 5% de traction b) Après 10% de traction

FIG. 3.31 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation de l'acier D1957



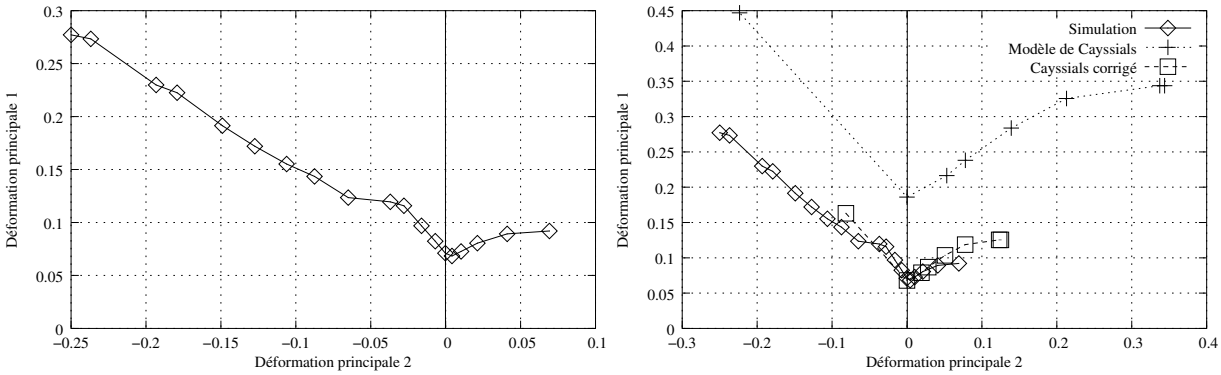
a) Courbe limite de formage simulée b) Courbe limite de formage simulée par rapport à la courbe de référence corrigée

FIG. 3.32 – Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier A159



a) Après 5% de traction b) Après 10% de traction

FIG. 3.33 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier A159



a) Courbe limite de formage simulée

b) Courbe limite de formage corrigée par rapport au modèle de Cayssials

FIG. 3.34 – Courbes limite de formage simulée et corrigée d'après Cayssials [Cay00] de l'acier T1625

3.6.7 Acier T1625

Les résultats obtenus en ce qui concerne le tracé de CLF dans le cas d'aciers mono- et biphasés ont été montrés. Le cas d'un matériau monophasé contenant des précipités va maintenant être étudié, c'est le cas de l'acier T1625. La figure (3.34a) présente la courbe limite de formage obtenue avec le critère de perte d'ellipticité alors que la figure (3.34b) présente la courbe corrigée à partir du modèle de Cayssials pour l'acier A159. De la même manière que pour les autres cas, la courbe corrigée est très proche de la courbe de simulation.

La figure (3.35) présente des CLF obtenues après différentes prédéformations en traction uniaxiale de 5% pour a), 10 % pour b) et en expansion équibiaxée de 10 % pour c) pour l'acier A159. Comme pour les autres aciers, les CLF sont modifiées dans le sens du trajet de prédéformation.

3.6.8 Discussion

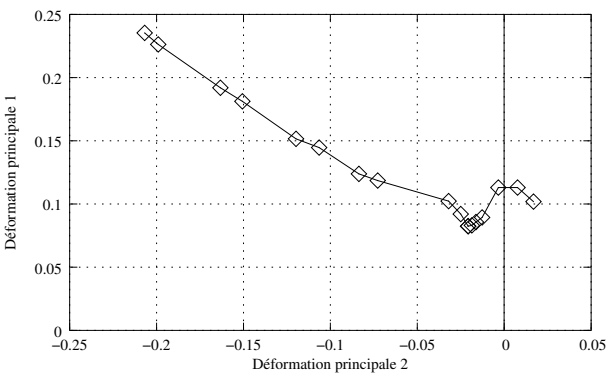
Les paragraphes précédents ont eu pour but de comparer les simulations de CLF par rapport à un modèle de référence. De grandes tendances peuvent être mises en évidence :

- A défaut de pouvoir comparer directement avec des résultats expérimentaux en utilisant la modélisation adoptée, les courbes calculées sont très éloignées des courbes de référence. La principale différence semblant être due à la méthode de mesure expérimentale des CLF.
- Lorsque les courbes sont corrigées de manière à les faire coïncider pour la traction uniaxiale, les deux modèles donnent des résultats très proches.
- L'effet d'une prédéformation est très bien modélisé de façon qualitative : les CLF sont décalées, dans chaque cas, selon le trajet de prédéformation.

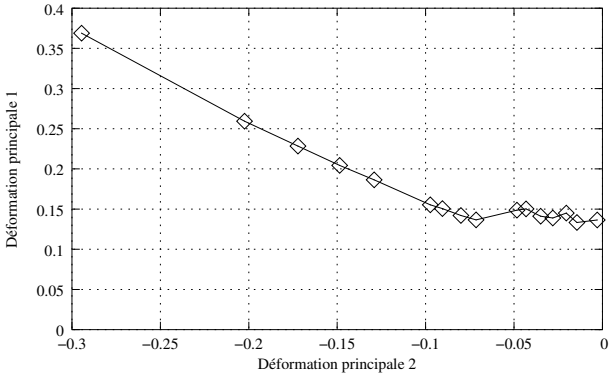
3.7 Conclusions

Dans ce chapitre un critère de perte de ductilité a été introduit. Pour cela, le critère de Rice a été adjoint à la loi de comportement développée et validée dans les deux premiers chapitres. Ce critère a été sélectionné parce qu'il est très simple à mettre en œuvre et permet de détecter la perte d'ellipticité du module tangent élastoplastique.

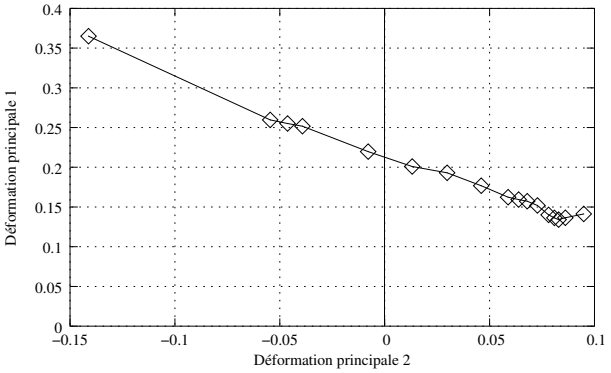
Dans un premier temps, l'influence des paramètres mécaniques sur la perte de ductilité a été montrée. Cette influence est nettement plus marquée pour les monocristaux que pour les



a) Après 5% de traction



b) Après 10% de traction



c) Après 10% d'expansion biaxée

FIG. 3.35 – Courbes limite de formage simulées après une prédéformation en traction uniaxiale de l'acier T1625

polycristaux mais va dans le même sens pour les deux cas. Lorsque cette limite de ductilité est atteinte, les normales au plan de localisation se situent sur un cône dont le demi-angle au sommet est de 45° dans le cas de la traction uniaxiale. De plus, dans le cas d'un essai de traction, la trace de ces bandes est inclinée d'un angle à peu près égal à 54° pour l'ensemble des aciers étudiés dans le chapitre 2. Ensuite, les courbes limite de formage pour quelques uns des aciers étudiés au précédent chapitre ont été tracées et comparées à un modèle de référence. Il est apparu que les résultats obtenus étaient très éloignés des résultats de référence dus à des différences de mesure de la déformation. Cependant, l'insertion d'un facteur correctif permet d'obtenir de bons résultats. L'utilisation d'un tel facteur est soumise à caution et acceptable uniquement dans un premier temps pour valider qualitativement le modèle, il faut cependant étudier les diverses sources d'erreurs.

Conclusion Générale

L'objectif principal de ce travail de thèse a été de déterminer l'influence de la microstructure, de la texture et des mécanismes de déformation sur la ductilité des aciers polycristallins et polyphasés. Dans cette perspective, des outils de transition d'échelles : loi de comportement du monocristal incluant la densité de dislocations, transition autocohérente classique en grandes déformations avec changements de trajets, ont été développés afin d'être introduits dans le critère de Rice basé sur la perte d'ellipticité du module tangent. Une telle démarche a déjà été signalée par Iwakuma et Nemat-Nasser [INN83] mais la déformation maximale atteinte dans leur modèle ne dépassait pas le % contrairement aux résultats de ce travail. Il convient de signaler le contexte général des résultats obtenus :

- Peu d'études portant simultanément sur une loi de comportement déduite d'une approche micromécanique et sur un critère de localisation sont disponibles dans la littérature.
- Les paramètres qu'il est nécessaire d'identifier portent exclusivement sur le mécanisme de déformation et l'écrouissage intracristallin (taille de grain, paramètre de libre parcours moyen des dislocations, distance d'annihilation critique et cission critique initiale). Aucun paramètre n'est directement associé au critère de Rice.
- Malgré les écarts "bruts" entre les calculs prédictifs (qui fournissent des prédictions très conservatives) et les "mesures" expérimentales correspondant à une localisation bien "avancée" (qu'il est possible d'expliquer et de corriger par une méthode proposée dans la thèse), on peut considérer que le modèle global proposé correspond assez bien à la réalité physique des mécanismes et évolutions microstructurales présentes.

A cette occasion, il est possible de synthétiser tous les facteurs physiques pouvant avoir un effet sur la localisation :

- Adoucissement géométrique pris en compte par le formalisme des grandes déformations,
- Adoucissement mécanique par la prise en compte de termes convectifs dans la formulation grandes déformations,
- Adoucissement textural associé à la transformation des textures par la déformation plastique,
- Adoucissement physique par l'annihilation des dislocations.

Toutes ces physiques jouent un rôle essentiel tant pour les chargements simples que pour les trajets complexes.

Ces bons résultats peuvent être améliorés, toute une série d'avancées sont possibles :

- En ce qui concerne la loi de comportement locale, la notion de répartition spatiale des dislocations n'est pas prise en compte. Pour remédier à cela, la notion de polarisation des dislocations pourrait être intégrée comme dans les travaux de Peeters [Pee02]. Cependant ce modèle possède beaucoup de paramètres à identifier. Il faudrait donc essayer de le simplifier pour qu'il soit plus facilement utilisable.
- En ce qui concerne la prédiction de la localisation, il faudrait introduire dans le modèle l'effet de l'endommagement qui joue un rôle important dans le cas de trajets de type

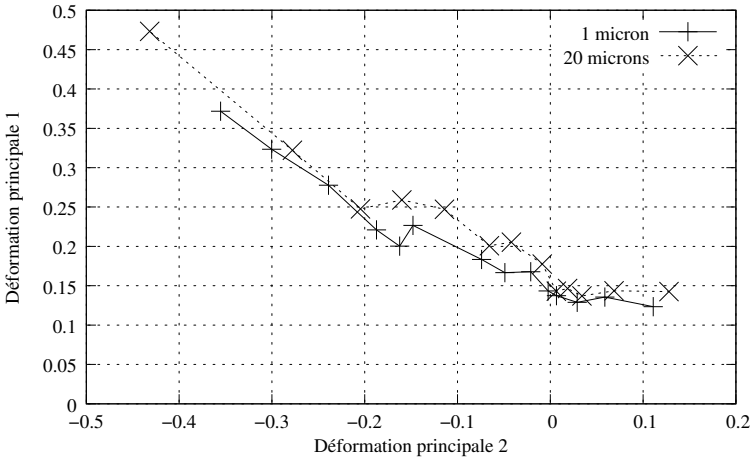


FIG. 1 – Influence de la taille de grain sur les courbes limite de formage

expansion.

- Pour introduire un effet de structure dans le modèle, il faudrait implémenter la loi de comportement dans un code de calcul par éléments finis en supposant que chaque élément soit un polycristal. Ensuite, la direction de localisation sur cette éprouvette pourrait être étudiée.
- La loi de comportement peut aussi être implémentée dans un code d'éléments finis pour modéliser l'emboutissage, chose qui est de plus en plus à l'ordre du jour avec les progrès incessants de l'informatique.
- La figure (1) présente les courbes limites de formage obtenues en jouant sur la taille de grain sans prendre en compte l'effet Hall-Petch. Cette figure montre que plus la taille de grain est grande plus la ductilité est élevée. Cependant, les courbes ont tendance à se chevaucher ce qui implique que le moment de détection de la perte de ductilité est très difficile à appréhender. Il faut donc, par exemple, augmenter le nombre de pas de calcul pour détecter plus finement la perte d'ellipticité. Ce graphique montre le premier pas vers la conception de nouveaux aciers : il est possible de savoir à l'avance l'influence des paramètres métallurgiques et quantifier cet effet.

Bibliographie

[AR77] R.J. Asaro and J.R. Rice. Strain localization in ductile single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 25 :309–338, 1977.

[Asa83a] R.J. Asaro. Crystal plasticity. *Journal of Applied Mechanics*, 50 :921–934, December 1983.

[Asa83b] R.J. Asaro. Micromechanics of crystals and polycrystals. *Advances in Applied Mechanics*, 23 :1–115, 1983.

[Aub98] I. Aubert. *Effet de l'hétérogénéisation plastique sur le comportement macroscopique lors de chargements complexes.* PhD thesis, Université de Metz, 1998.

[Bar89] F. Barlat. *Forming limit diagrams : Concepts, methods and applications*, chapter Forming limit diagrams - Predictions based on some microstructural aspects of materials, pages 275–301. R.H. Wagoner, K.S. Chan, S.P. Keeler - The Minerals, Metals and Materials Society, 1989.

[Bau84] B. Baudelet. Prediction of forming limit diagrams for deep drawing. *Agard lecture series*, 137(3) :1–22, 1984.

[BB49] S.B. Batdorf and B. Budiansky. A mathematical theory of plasticity based on the concept of slips. Technical report, Technical note 1871, NACA, 1949.

[BBG01] M. Bornert, T. Bretheau, and P. Gilormini. *Homogénéisation en mécanique et matériaux 2 - Comportements non linéaires et problèmes ouverts.* Hermes science, 2001.

[Ber02] S. Berbenni. *Elastoplasticité des matériaux polycristallins : Modélisation micromécanique et physique. Application au comportement dynamique et à l'effet bake-hardening.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2002.

[Bez98] S. Bezzina. Investigation of failure analysis due to damage in metal forming process. *Simulation of material processing : Theory, methods and applications*, pages 961–966, 1998.

[BFLB04] S. Berbenni, V. Favier, X. Lemoine, and M. Berveiller. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels having different microstructures. *Materials Science and Engineering*, A 372 :128–136, 2004.

[BG00] H. Baaser and D. Groos. Crack analysis in ductile cylindrical shells using gurson's model. *International Journal of Solids and Structures*, 37 :7093–7104, 2000.

[BH91] D. Bigoni and T. Hueckel. Uniqueness and localization - I associative and non-associative elastoplasticity. *International Journal of Solids and Structures*, 26(2) :197–213, 1991.

[BSMT96] M. Brunet, F. Sabournin, and S. Mguil-Touchal. The prediction of necking and failure in 3D. sheet forming analysis using damage variable. *Journal de Physique IV, colloque C6, supplément au Journal de Physique III*, 6 :473–481, 1996.

[BTB+01] S. Bouvier, V. Tabacaru, M. Banu, C. Maeir, C. Girjob, H. Haddadi, and C. Teodosisu. Selection and identification of elastoplastic models for the materials used in benchmark. Technical report, Digital Die Design Systems (3DS) Contract IMS 1999 000051, 18 Months Progress Reeport, November 2001.

[BTHT03] S. Bouvier, C. Teodosisu, H. Haddadi, and V. Tabacaru. Anisotropic work-hardening behavior of structural steels aluminium alloys at large strains. *Journal de Physique IV*, 105 :215–222, 2003.

[BZ79] M. Berveiller and A. Zaoui. An extension of the self-consistent scheme to plastically flowing polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 26 :325–344, 1979.

[BZ97] M. Berveiller and A. Zaoui. Modélisation de la déformation plasique de polycristaux. *Techniques de l'ingénieur, traité Matériaux Métalliques*, M48 :1–11, 1997.

[CA81] Y.W. Chang and R.J. Asaro. An experimental study of shear localization in aluminium-copper single crystals. *Conference on sheet metal stamping for automotive application*, pages 241–257, 1981.

[Cay00] F. Cayssials. The new version of the Cayssials FLC model. Rapport interne Arcelor, 2000.

[CFDS02] A. Chenaoui, K. Fathallah, A. Dogui, and F. Sidoroff. Le monocristal à déformation imposée. *Quatrièmes Journées Scientifiques et Techniques en Mécanique et Matériaux, 25-26 octobre 2002, Monastir (Tunisie)*, pages 19–27, 2002.

[Cle80] A. Clement. *Etude quantitative des textures de déformations et de leur évolution.* PhD thesis, Université de Toulouse, 1980.

[CLL98] B. Clausen, T. Lorentzen, and T. Leffers. Self-consistnet modelling of the plastic deformation of F.C.C. polycrystals and its implications for diffraction measurements of internal stresses. *Acta Materialia*, 46 :3087–3098, 1998.

[CM00] J.P. Cordebois and L. Mouric. Behaviour laws and necking prediction. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 363–371, 2000.

[CN80] C.C. Chu and A. Needleman. Void nucleation effect in biaxially stretched sheets. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 102 :249–256, 1980.

[Con85] A. Considère. Mémoire sur l'emploi du fer et de l'acier dans les constructions. *Annales des Ponts et Chaussées*, 9 :574–775, 1885.

[CSH00] A. Chenaoui, F. Sidoroff, and A. Hihi. The texture evolution of planar polycrystal. *Journal of the Mecahnics and Physics of Solids*, 48 :2559–2584, 2000.

[CYD96] C.L. Chow, L.G. Yu, and M.Y. Demeri. Prediction of forming limit diagrams with damage analysis. *Conference on sheet metal stamping for automotive application*, pages 73–80, 1996.

[CYD97] C.L. Chow, L.G. Yu, and M.Y. Demeri. A unified damage approach for predicting forming limit diagrams. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 119 :346–353, 1997.

[Des00] R. Desmorat. Strain localization and unilateral conditions for anisotropic induced damage model. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 71–79, 2000.

[DP02] M.R. Daymond and H.G. Priesmeyer. Elastoplastic deformation of ferritic steel and cementite studied by neutron diffraction and self-consistent modelling. *Acta Materialia*, 50 :1613–1626, 2002.

[Duo77] M.D. Duong. *Relaxation de la contrainte dans les monocristaux de fer de haute pureté contenant des quantités contrôlées de carbone.* PhD thesis, Université Pierre et Marie Curie - Paris 6, 1977.

[Ebe01] A. Eberhardt. Cours de DEA MMSP. Faculté de Metz, 2001.

[EM79] U. Essmann and H. Mughrabi. Annihilation of dislocations during tensile and cyclic deformations and limit of dislocation densities. *Philosophical Magazine A*, 40(6) :731–756, 1979.

[Esh57] J.D. Eshelby. The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion and related problems. *Proceedings of London Royal Society*, A241 :376–396, 1957.

[FF85] O. Fassi-Fehri. Le problème de la paire d'inclusions plastiques et hétérogènes dans une matrice anisotrope - applications à l'étude du comportement des matériaux composites et de la plasticité. Thèse d'état de l'université de Metz, 1985.

[FPZ95a] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux : Tome 1.* Editions Hermès, 1995.

[FPZ95b] D. François, A. Pineau, and A. Zaoui. *Comportement mécanique des matériaux : Tome 2.* Editions Hermès, 1995.

[Fra84] P. Franciosi. *Etude théorique et expérimentale du comportement élastoplastique de monocristaux métalliques se déformant par glissement : Modélisation pour un chargement complexe quasi-statique.* PhD thesis, Université Paris Nord, 1984.

[Gil95] P. Gilormini. Insuffisance de l'extension classique du modèle autocohérent au comportement non linéaire. *Compte Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 320 série IIb :115–122, 1995.

[Gil97] P. Gilormini. Une insuffisance de plusieurs extensions du modèle autocohérent au comportement des milieux hétérogènes non linéaires. *La Revue de Métallurgie-CIT/Science et Génie des Matériaux*, 94 :1081–1087, 1997.

[Gur77] A.L. Gurson. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : part I - yield criteria and flow rules in ductile porous media. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 99 :2–15, 1977.

[Had97] A. Haddad. *Contribution à la détermination des courbes limite de formage en contraintes et en déformations à partie de la théorie 3G.* PhD thesis, Université de Savoie, 1997.

[Ham00] Y. Hammi. *Simulation numérique de l'endommagement dans les procédés de mise en forme.* PhD thesis, Université de Compiègne, 2000.

[Han99] J.L. Hanus. *Contribution à l'étude de la localisation des déformations dans les matériaux et structures élasto- (visco)-linéaires.* PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.

[HAV00] A. Haddad, R. Arrieux, and P. Vacher. Use of two behavior laws for the determination of the forming limit stress diagram of a thin steel : results and comparisons. *Journal of Materials Processing Technology*, 106 :49–53, 2000.

[HH75] R.J. Hill and J.W. Hutchinson. Bifurcation phenomena in the plane tension test. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :239–264, 1975.

[Hil48] R. Hill. A theory of the yielding and plastic flow of anisotropic materials. *Proceedings of Royal London Society*, A241 :405–417, 1948.

[Hil58] R. Hill. A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 6(3) :236–249, 1958.

[Hil65] R. Hill. Continuum micro-mechanics of elastoplastic polycristals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 13 :89–101, 1965.

[Hil66] R. Hill. Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 14 :95–102, 1966.

[Hoc99] T. Hoc. *Etudes expérimentale et numérique de la localisation de la déformation dans un acier doux*. PhD thesis, Ecole Centrale Paris, 1999.

[HPL78] J. Hansen, J. Pospiech, and K. Lucke. *Tables for texture analysis of cubic crystals*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[HR00] T. Hoc and C. Rey. Effect of the free surface on strain localization in mild steel. *Scripta Materialia*, 42(11) :1053–1053, 2000.

[HSP00] B.G. Hildebrand, S.G. Sterling, and M.A. Price. An evaluation of three material models used in the finite element simulation of sheet stretching process. *Journal of Materials Processing Technology*, 103 :57–64, 2000.

[HZWC00] A.M. Habraken, L.H. Zhang, X.C. Wang, and S. Cescotto. A new elastic-visco-plastic damage model for annealed aluminium. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 71–79, 2000.

[INN83] T. Iwakuma and S. Nemat-Nasser. Finite elastic-plastic deformation of polycrystalline metals and composites. Technical Report 83-3-51, Earthquake Research Laboratory, March 1983.

[Kee65] S.P. Keeler. Determination of the forming limits in automotive stamping. *Sheet Metal Industries*, 42(461) :683–691, 1965.

[Ker99] V. Keryvin. *Contribution à la modélisation de l'endommagement localisé*. PhD thesis, Université de Poitiers, 1999.

[KIK98] T. Kuwabara, S. Ikeda, and K. Kuroda. Measurement and analysis of differential work hardening in cold rolled steel sheet under biaxial tension. *Journal of Materials Processing Technology*, 80-71 :517–523, 1998.

[KN67] A.S. Keh and Y. Nakada. Plasticity of iron single crystal. *Canadian Journal of Physics*, 45 :1101–1120, 1967.

[Koc76] U.F. Kocks. Laws for work-hardening and low-temperature creep. *American Society of Magazine Editors : Journal of Engineering Material and Technology*, 98 :76–85, 1976.

[Kub01] R. Kubler. Comportement en mise en forme des aciers twip. Technical Report 19046/2001, ARCELOR, 2001.

[Kub04] R. Kubler. *Modélisation du comportement des aciers à effet TRIP : approches micromécanique et semi-phńoménologique*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2004.

[Lan00] L. Langlois. *Evolutions propres de la microstructure de dislocations et conséquences sur le comportement élastoplastique des métaux*. PhD thesis, Université de Metz, 2000.

[LB89] P. Lipinski and M. Berveiller. Elastoplasticity of micro-inhomogeneous metals at large strains. *International Journal of Plasticity*, 5 :149–172, 1989.

[LBZAMB05] J.P. Lorrain, T. Ben-Zineb, F. Abed-Meraim, and M. Berveiller. BCC single crystal ductility loss modeling. *International Journal of Forming Processes*, 8(2), 2005.

[Lem85] J. Lemaitre. A continuum damage mechanics model for ductile fracture. *Journal of Engineering Materials and Technology*, 107 :83–89, 1985.

[Lem95] X. Lemoine. *Analyse micromécanique de la formation des cellules de dislocations sur le comportement des aciers*. PhD thesis, Université de Metz, 1995.

[Let00] N. Letouzé. Etude par diffraction de rayons X de la distribution et de la quantité de déformation induite lors d'opérations de mise en forme. Technical report, Projet de fin d'études ENSAM, accès confidentiel, 2000.

[Lin97] C. Lineau. *Analyse expérimentale de la déformation plastique d'un polycristal d'acier. Comparaison avec les simulations de modèles polycristallins*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1997.

[Lip93] P. Lipinski. Modélisation du comportement des métaux, en transformations élasto-plastiques finies, à partir de méthodes de transition d'échelles. Thèse d'état de l'université de Metz, 1993.

[LKB90] P. Lipinski, J. Krier, and M. Berveiller. Elastoplasticité des métaux en grandes transformations : Comportement global et évolution de la structure interne. *Revue de Physique Appliquée*, 25 :361–388, 1990.

[Lor00] J.P. Lorrain. Comportement dynamique des matériaux hétérogénes. Technical report, Projet de fin d'études ENSAM, accès confidentiel, 2000.

[LPW85] H. Lee, K. Peng, and J. Wang. An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming analysis of metal plates. *Engineering Fracture Mechanics*, 35(36) :5205–5236, 1985.

[Luf91] A. Luft. Microstructural processes of plastic instabilities in strenghtened metals. *Progress in Material Science*, 35 :97–204, 1991.

[MBM98] S. Mguil, M. Brunet, and F. Morestin. Comparison between experimental and theoretical forming limit diagrams of aluminium sheets. *Simulation of Material Processing : Theory, methods and applications*, pages 739–744, 1998.

[MBSZ00] R. Masson, M. Bornert, P. Suquet, and A. Zaoui. An affine formulation for the prediction of the effective properties of nonlinear composites and polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :1203–1227, 2000.

[Mci00] L. Mcirdi. *Comportement et endommagement sous sollicitation mécanique d'un acier austénito-ferritique moulé vieilli*. PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers, 2000.

[MDK02] R. Madec, B. Devincre, and L.P. Kubin. Simulation of dislocations patterns in multislip. *Scripta Materialia*, 47(10) :698–695, 2002.

[Mia95] D. Miannay. *Mécanique de la rupture*. Les éditions de la physique, 1995.

[MM00] R.D. McGuinty and D.L. McDowell. Multiscale modelling concepts for finite deformation of polycristalline steels. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 29–39, 2000.

[Mor90] J. Morreale. Rapport final. contrat n°M24/N90 A403, 1990.

[MT73] T. Mori and K. Tanaka. Average stress in matrix stored and average elastic energy of materials with misfitting inclusions. *Acta Metallurgica*, 21 :571–574, 1973.

[Mud00] F. Mudry. Some examples of the use of continuous damage and fracture mechanics in the steel industry. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 89–94, 2000.

[Mul94] D. Muller. *Influence de l'écrouissage non local et de l'hétérogénéisation intragranulaire sur le comportement des aciers polycristallins.* PhD thesis, Université de Metz, 1994.

[MZ99] R. Masson and A. Zaoui. Self-consistent estimates for the rate-dependent elastoplastic behavior of polycristalline materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 47 :1543–1568, 1999.

[NBT01] E.V. Nesterova, B. Bacroix, and C. Teodosiu. Microstructure and texture evolution under strain-path changes in low-carbon interstitial-free steel. *Metallurgical and Materials Transactions A*, 32A :2527–2538, October 2001.

[NNH93] S. Nemat-Nasser and M. Hori. *Micromechanics : overall properties of heterogeneous materials.* North-Holland, 1993.

[NS93] M.K. Neilsen and H.L. Schreyer. Bifurcations in elastic-plastic materials. *International Journal of Solids and Structures*, 30(4) :521–544, 1993.

[ODW04] E.C. Oliver, M.R. Daymond, and P.J. Withers. Interphase and intergranular stress generation in carbon steels. *Acta Materialia*, 52 :1937–1951, 2004.

[OJ89] B. Orlans-Joliet. *Déformation plastique de monocristaux de structure cubique centrée en compression plane.* PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris et Ecole Nationale Supérieure des Mines de Saint Etienne, 1989.

[Oro34] E. Orowan. Zur kristallplastizitat I : Tief temperatur-plastizitat und beckersche formel. *Zeitung fur Physik*, 89 :605–613, 1934.

[PAN83] D. Peirce, R.J. Asaro, and A. Needleman. Material rate dependance and localized deformation in crystalline solids. *Acta Metallurgica*, 31(12) :1951–1976, 1983.

[PB00] A. Pineau and J. Besson. Some new trends in modelling ductile rupture of structural alloy. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 281–292, 2000.

[PBF+01] A. Paquin, S. Berbenni, V. Favier, X. Lemoine, and M. Berveiller. Micromechanical modeling of the elastic-viscoplastic behavior of polycrystalline steels. *International Journal of Plasticity*, 17(9) :1267–1302, 2001.

[PBT+01] B. Peeters, B. Bacroix, C. Teodosiu, P. Van Houtte, and E. Aernoudt. Work-hardening/softening behaviour of B.C.C. polycrystals during changing strain paths : 2. TEM observations of dislocation sheets in an IF steel during two-stage strain paths and their representation in terms of dislocation densities. *Acta Materialia*, 49 :1621–1632, 2001.

[Pee02] B. Peeters. *Multiscale Modelling of the Induced Plastic Anisotropy in IF Steel During Sheet Forming.* PhD thesis, Katholieke Universiteit Leuven, 2002.

[Pei83] D. Peirce. Shear band bifurcation in ductile single crystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 31(2) :133–153, 1983.

[Pet00] H. Petryk. General condition for uniqueness in material with multiple mechanisms of inelastic deformation. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 48 :367–396, 2000.

[PIBM03] R. Pesci, K. Inal, M. Berveiller, and R. Masson. Distribution des contraintes dans l'acier bainitique 16MND5. Analyse expérimentale et modélisation polycristalline. *Mécaniques et Industries*, 4(4) :457–465, 2003.

[PKT+02] B. Peeters, S.R Kalidindi, C. Teodosiu, P. Van Houtte, and E. Aernoudt. A theoretical investigation of the influence of dislocation sheets on evolution of yield surfaces in single-phase B.C.C. polycrystals. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 50 :783–807, 2002.

[PL90] G. Perrin and J.B. Leblond. Analytical study of a hollow sphere made of plastic porous material and subjected to hydrostatic tension - application to some problems in ductile fracture of metals. *International Journal of Plasticity*, 6 :677–699, 1990.

[PPL72] D. Pollnow, R. Pennelle, and D. Lacombe. Etude des propriétés mécaniques et du taux de consolidation de monocristaux de fer déformés à température ambiante. *Mémoires Scientifiques Revue Métallurgique*, LXX(10) :703–714, 1972.

[PSK+01] B. Peeeters, M. Seefeldt, S.R Kalidindi, P. Van Houtte, and E Aernoudt. The incorporation of dislocation sheets into a model for plastic deformation of B.C.C. polycrystals and its influence on r-values. *Materials Science and Engineering*, A319-321 :188–191, 2001.

[PST+01] B. Peeters, M. Seefeldt, C. Teodosiu, S.R Kalidindi, P. Van Houtte, and E. Aernoudt. Work-hardening/softening behaviour of B.C.C. polycrystals during changing strain paths : 1. an integrated model based on substructure and texture evolution and its prediction of the stress-strain behavior of an IF steel during two-stage strain path. *Acta Materialia*, 49 :1607–1619, 2001.

[PTVF92] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling, and B. P. Flannery. *NUMERICAL RECIPES in FORTRAN The art of Scientific Computing Second edition.* Cambridge, 1992.

[Ram00] J.A.H. Ramaekers. A criterion for local necking. *Journal of Materials Processing Technology*, 103 :165–171, 2000.

[Rau98] E.F. Rauch. Plastic anisotropy of sheet metals determined by simple shear tests. *Materials Science and Engineering*, A241 :179–183, 1998.

[Ric76] J.R. Rice. The localization of plastic deformation. *14^{th} International Congress of Theoretical and Appplied Mechanics*, pages 207–220, 1976.

[Roc89] A. Barata Da Rocha. *Forming limit diagrams : Concepts, methods and application*, chapter Theoretical forming limit diagrams of anisotropic sheets - Linear and nonlinear strain path, pages 183–201. R.H. Wagoner, K.S. Chan, S.P. Keeler - The Minerals, Metals and Materials Society, 1989.

[Rou81] G. Rousselier. *Three dimensionnal constitutive relations and ductile fracture*, chapter Finite deformation constitutive relations including ductile fracture damage, pages 331–355. S. Nemat Nasser, Amsterdam, 1981.

[Rou00] G. Rousselier. New results with simple continuum damage mechanics model. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 293–303, 2000.

[RR75] J.W. Rudnicki and J.R. Rice. Condition for the localization of deformation in pressure-sensitive dilatant materials. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :371–394, 1975.

[SGBD96] N. Schluter, F. Grimpe, W. Bleck, and W. Dahl. Modeling of the damage in ductile steels. *Computational Materials Science*, 7, 1996.

[SH00] K. Saanouni and Y. Hammi. Numerical simulation of damage in metal forming process. *Actes de Continuous Damage and Fracture à Cachan*, pages 353–361, 2000.

[Sid82] F. Sidoroff. Cours sur les grandes déformations - Ecole d'été de Sophia-Antipolis. Technical Report 51/1982, GRECO, septembre 1982.

[SJ75] S. Stören and J.R.Rice. Localized necking in thin sheets. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 23 :421–441, 1975.

[Ste96] P. Steinmann. On localisation analysis in multisurface hyperelastoplasticity. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 1996 :1691–1713, 1996.

[Tab92] L. Tabourot. *Loi de comportement élastoviscoplastique du monocristal en grandes déformations*. PhD thesis, Université de Grenoble, 1992.

[Tai88] W.H. Tai. Prediction of limit strains in sheet metal using a plastic damage model. *International Journal of Mechanical Sciences*, 17(2) :119–126, 1988.

[Tay38] G.I. Taylor. Plastic strain in metals. *Journal of the Institute of Metals*, 61 :307–324, 1938.

[Ter66] F. Terasaki. *Contribution à l'étude du mécanisme de la rupture par clivage des monocristaux de fer pur*. PhD thesis, Faculté des sciences de l'université de Paris - Centre d'Orsay, 1966.

[TH95] C. Teodosiu and Z. Hu. Evolution of the intragranular microstructure at moderate and large strains : modelling, and computational signifiance. In *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications*, pages 173–182. S.F. Shen, P.R. Dawson, Editions, 1995.

[Tve81] V. Tvergaard. Influence of voids on shear band instabilities under plane strain conditions. *International Journal of Fracture*, 17 :389–407, 1981.

[Vac03] P. Vacher. Apport des techniques de corrélation d'images en mécanique : Analyse des déformations et numérisation 3D. Habilitation à diriger des recherches de l'université de Savoie, 2003.

[WHS99] H.C. Wu, H.K. Hong, and Y.P. Siao. Anisotropic plasticity and application to sheet metal. *International Journal of Mechanical Sciences*, 41 :703–724, 1999.

[WW83] R.H. Wagoner and N.M. Wang. Operant strain rate sensitivity during tensile necking. *Metallurgical Transactions*, 14A :2395–2406, 1983.

Annexe A

Formalisme des grandes déformations

A.1 Définition des contraintes et des déformations

Les grandes déformations étant un formalisme spécifique, il est nécessaire d'en introduire les grandes lignes. Tout ce qui est écrit dans cette annexe est tiré du cours de Sidoroff [Sid82]. La première chose à noter est, que, les configurations matérielles initiales et actuelles doivent être différenciées. La figure (A.1) illustre la déformation d'un solide entre sa configuration de référence C_0 et sa configuration actuelle C_t :

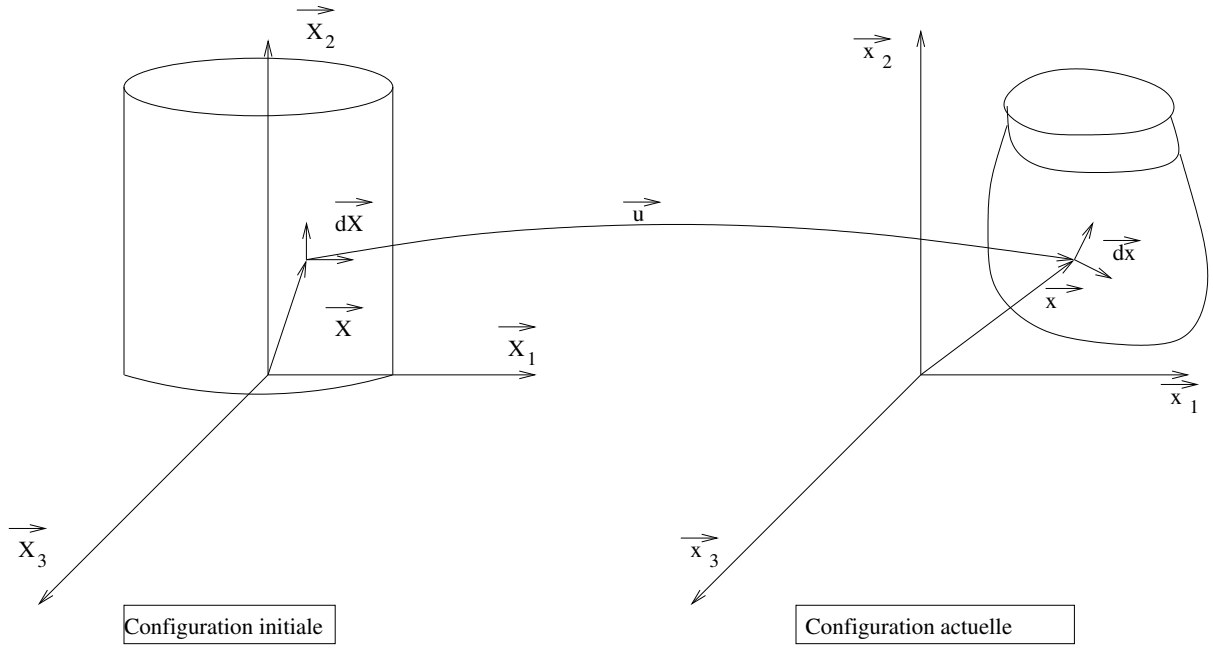


FIG. A.1 – Déformation d'un solide

Cette figure permet, en premier lieu, d'introduire le vecteur déplacement $\overrightarrow{u}$ entre la position initiale $\overrightarrow{X}$ et la position actuelle $\overrightarrow{x}$ comme (A.1) :

$$\overrightarrow{x} = \overrightarrow{X} + \overrightarrow{u} \tag{A.1}$$

Afin de définir la déformation d'un solide, est introduit un tenseur d'ordre 2, F, appelé gradient

de la transformation liant la configuration initiale à la configuration actuelle (A.2) :

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \tag{A.2}$$

Le fait d'utiliser un tel formalisme permet de décrire différents tenseurs de transformation. Pour cela, les variations de longueurs et d'angles sont prises en compte par l'intermédiaire de produits scalaires. Ainsi, dans la configuration de référence peut être défini le tenseur de Cauchy-Green droit C_{cg} et dans la configuration actuelle celui de Cauchy-Green gauche B_{cg} comme :

$$\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{\delta x} = \overrightarrow{dX}.C_{cg}.\overrightarrow{\delta X} \tag{A.3}$$

$$\overrightarrow{dX}.\overrightarrow{\delta X} = \overrightarrow{dx}.B_{cg}^{-1}.\overrightarrow{\delta x} \tag{A.4}$$

En combinant (A.2) et (A.3) puis (A.2) et (A.4) la relation suivante est obtenue :

$$C_{cg} = F^T.F \tag{A.5}$$

$$B_{cg} = F.F^T \tag{A.6}$$

Cependant ces deux tenseurs de déformations ne sont pas très pratiques à utiliser. Pour définir la notion de déformation correspondant à une variation de distance relative le tenseur de Green-Lagrange E dans la configuration de référence (description dite "Lagrangienne") et le tenseur d'Euler-Almansi A dans la configuration actuelle (description dite "Eulérienne") à partir de la différence de produits scalaires sont introduits comme :

$$\overrightarrow{dx}.\overrightarrow{\delta x} - \overrightarrow{dX}.\overrightarrow{\delta X} = 2\overrightarrow{dX}.E.\overrightarrow{\delta X} = 2\overrightarrow{dx}.A.\overrightarrow{\delta x} \tag{A.7}$$

En combinant (A.7) , (A.6), (A.5), (A.4) et (A.3) l'expression de ces tenseurs est donnée par :

$$E = \frac{1}{2}\left(C - I\right) = \frac{1}{2}\left(F^T.F - I\right) \tag{A.8}$$

$$A = \frac{1}{2}\left(I - B^{-1}\right) = F^{-1T}.E.F^{-1} \tag{A.9}$$

En introduisant le tenseur gradient de la transformation, le gradient de la vitesse G peut être défini comme :

$$G = \dot{F}.F^{-1} \tag{A.10}$$

D'une manière générale, il faut, pour chaque comparaison entre le calcul numérique et les résultats expérimentaux comparer les mêmes contraintes et déformations. Cela fait l'objet de la dernière partie de cette annexe. De la même manière que pour les déformations, à partir de la figure (A.2) quatre tenseurs de contraintes différents peuvent être définis :

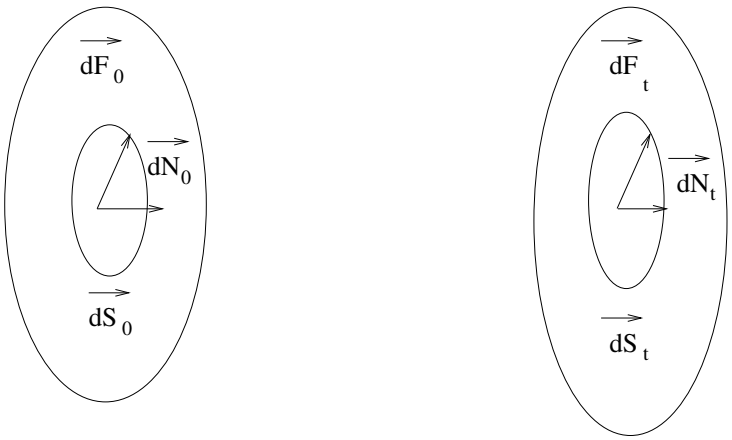


FIG. A.2 – Définition des différents tenseurs de contrainte

- $n = \dfrac{dF_t}{dS_0}$ définit le tenseur de contrainte nominale,
- $S = \dfrac{dF_0}{dS_0}$ définit le deuxième tenseur de contrainte de Piola-Kirchoff,
- $\sigma = \dfrac{dF_t}{dS_t}$ définit le tenseur de contrainte de Cauchy,
- $k = \dfrac{dF_0}{dS_t}$ définit le tenseur de contrainte de Kirchoff.

Il est intéressant de noter que seuls le tenseur de Cauchy (Eulérien) et le second tenseur de Piola-Kirchoff (Lagrangien) ont un sens physique. Afin de pouvoir comparer ce qui est comparable le tenseur de contrainte de Cauchy sera utilisé lors des confrontations entre simulation numérique et expérience.

A.2 Objectivité et dérivée objective

Pour travailler en grandes déformations, le premier postulat est d'avoir une loi de comportement objective c'est à dire indépendante du référentiel. Il faut donc que la loi de comportement relie des grandeurs elles-mêmes objectives. Il est évident qu'une loi écrite dans la configuration initiale est objective car tous les tenseurs définis dans ce repère sont objectifs. De la même manière, il est nécessaire d'introduire la notion de dérivée objective. En effet, un tenseur objectif n'a pas forcément sa dérivée objective. Il existe plusieurs façons de définir une dérivation objective :

- La dérivée convective contravariante $M_{cont} = \dot{M} - G.M - M.G^T$,
- La dérivée convective covariante $M_{cov} = \dot{M} + G^T.M + M.G$,
- La dérivée de Truesdell $M_{tr} = \dot{M} - G.M - M.G^T + M.trace\,(G)$,
- La dérivée de Jaumann $\hat{M} = \dot{M} - W.M - M.W^T$.

Toutes ces dérivées sont reliées par la relation :

$$M_{cont} = M_{tr} - M.trace\,(d) = \hat{M} - D.M - M.D = M_{cov} - 2\,(D.M + M.D) \tag{A.11}$$

Avec

$$D = \frac{G + G^T}{2} \tag{A.12}$$

A.3 Mesure de la déformation

Comme il a précédemment été montré, la méthode utilisée pour mesurer la déformation va fortement influer sur la valeur de celle-ci. Ici, les résultats du modèle proposé seront comparés le plus possible avec ceux issus de la littérature, aussi il faudra toujours comparer les mêmes déformations entre elles. Le problème ne se pose pas en ce qui concerne la contrainte car la seule qui sera employée est la contrainte de Cauchy. Dans la configuration de référence (Lagrangienne) la déformation E_α est définie comme :

$$E_\alpha = \frac{1}{2\alpha}\left(C_{dil}^{\alpha} - I\right) \tag{A.13}$$

Avec :

$$E_0 = ln\left(C_{dil}\right) \tag{A.14}$$

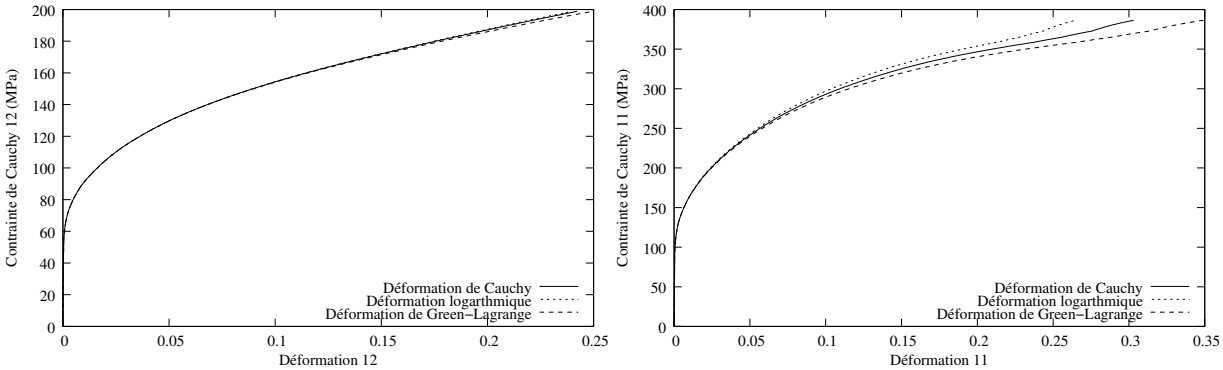
Et C_{dil} appelé tenseur des dilatations et défini comme :

$$C_{dil} = F.F^T \tag{A.15}$$

Si dans le cas unidimensionnel, l_0 est la longueur initiale de l'éprouvette et l sa longueur à l'instant t, les trois déformations les plus couramment utilisées sont :

- E_0 dite déformation logarithmique, en unidimensionnel $\ln\left(\frac{l}{l_0}\right)$. C'est cette déformation qui est utilisée pour les essais de traction et d'expansion biaxée ainsi que pour le tracé des CLF.
- $E_{\frac{1}{2}}$ dite déformation de Cauchy, en unidimensionnel $\frac{l-l_0}{l_0}$. C'est cette déformation qui est utilisée pour les essais de cisaillement simple, Bauschinger et cisaillement après une traction uniaxiale.
- E_1 dite déformation de Green-Lagrange, en unidimensionnel $\frac{1}{2}\left(\left(\frac{l}{l_0}\right)^2 - 1\right)$.

La figure (A.3) présente les résultats obtenus en faisant un essai de cisaillement ou de traction sur un polycristal de 100 grains dans lequel les paramètres d'écrouissage ont été choisis arbitrairement :



a) Essai de cisaillement b) Essai de traction

FIG. A.3 – Comparaison des différentes mesures de déformations

Comme le montre cette figure jusqu'à environ 10% de déformation les trois mesures de déformations donnent des résultats quasi-identiques. Pour des déformations plus importantes, l'écart ne cesse d'augmenter. Il sera donc très important de bien identifier quelle est la déformation mesurée dans chaque essai expérimental.

Annexe B

Schémas d'intégration des lois de comportement

Dans cette partie, est présenté ce qui a dicté le choix de la méthode d'intégration numérique de la loi de comportement locale.

B.1 Comparaison des schéma d'Euler et de Runge-Kutta

La description des intégrations Eulérienne et Runge Kutta 4 est tirée du livre de Press et al. [PTVF92]. Lorsqu'il est nécessaire d'intégrer une équation différentielle du type :

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i\left(x, y_1, ..., y_n\right) \tag{B.1}$$

Où $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ est un vecteur dans lequel sont placées toutes les variables du problème à calculer. Dans le cas de ce mémoire le vecteur y contiendra :

- Le gradient de la transformation F,
- Les trois angles d'Euler $\varphi_1, \phi, \varphi_2$,
- La densité de dislocations par système de glissement ρ^g,
- La cission critique par système de glissement τ_c^g,
- La contrainte σ,
- Dans le cas du polycristal les trois demi-axes de l'ellipsoïde définissant la forme du grain a, b, c et les trois angles d'Euler définissant l'orientation de l'ellipsoïde $\varphi_1', \phi', \varphi_2'$.

En notant $\overline{y} = y$, la méthode d'intégration d'Euler s'écrit sous la forme :

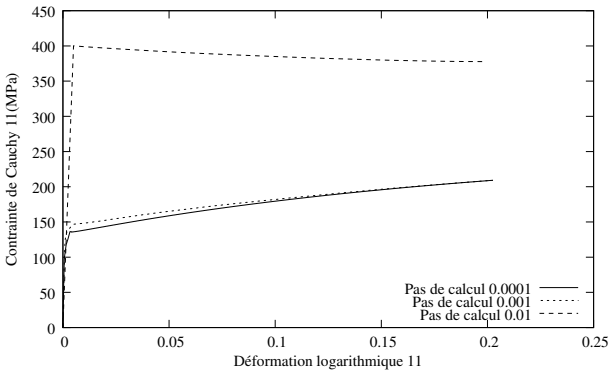
$$\overline{y_{n+1}} = \overline{y_n} + h\overline{f}\left(x_n, \overline{y_n}\right) \tag{B.2}$$

Où h représente le pas d'intégration. Cette méthode a pour avantage d'être fiable et de converger plus le pas de temps est faible. Elle est, de plus, exacte si le pas de temps est infiniment petit. La méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 "ressemble" à quatre intégrations Eulériennes à différents moments, pour cela quatre vecteurs incréments $\overline{k_1}$, $\overline{k_2}$, $\overline{k_3}$ et $\overline{k_4}$ sont calculés comme :

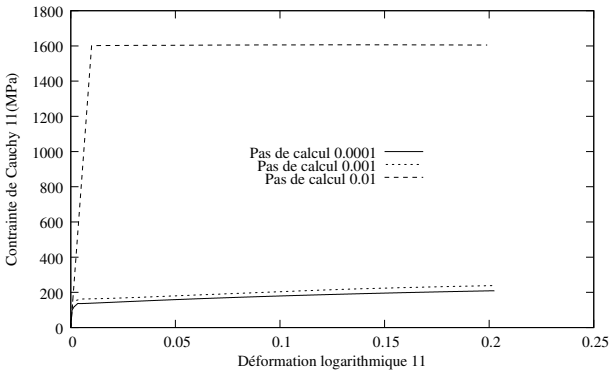
$$\begin{aligned}
\overline{k_1} &= h\overline{f}\left(x_n, \overline{y_n}\right) \\
\overline{k_2} &= h\overline{f}\left(x_n + \tfrac{h}{2}, \overline{y_n} + \tfrac{\overline{k_1}}{2}\right) \\
\overline{k_3} &= h\overline{f}\left(x_n + \tfrac{h}{2}, \overline{y_n} + \tfrac{\overline{k_2}}{2}\right) \\
\overline{k_4} &= h\overline{f}\left(x_n + h, \overline{y_n} + \overline{k_3}\right)
\end{aligned} \tag{B.3}$$

Paramètres	τ_{c0}	ρ_0	φ_{1_0}	ϕ_0	φ_{2_0}	g_0	y_c	D_{moy}
Valeur	100MPa	$1.0.10^9 \mathrm{m}^{-2}$	20°	40°	60°	120	2nm	1 mm

TAB. B.1 – Paramètres pour la comparaison entre Euler et Runge-Kutta 4



Résultats avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4



Résultats avec la méthode Eulérienne

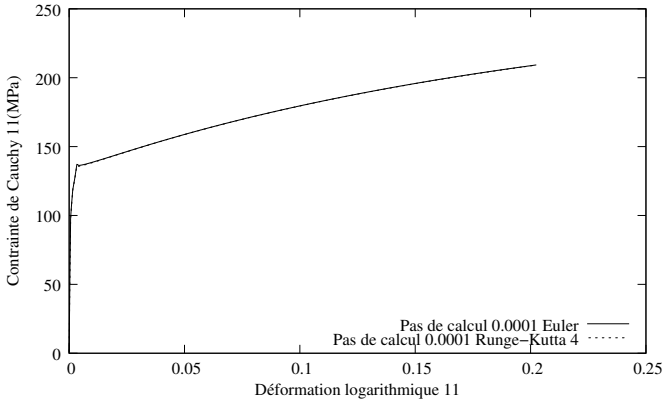


FIG. B.1 – Comparaison des deux méthodes d'intégration pour un essai de laminage

Au final la mise à jour de la variable $\overline{y_n}$ est donnée par :

$$\overline{y_{n+1}} = \overline{y_n} + \frac{1}{6}\left(\overline{k_1} + 2\overline{k_2} + 2\overline{k_3} + \overline{k_4}\right) \tag{B.4}$$

Cette méthode est, souvent, plus fiable que la méthode Eulérienne et permet de donner de meilleurs résultats tout en augmentant le pas de temps. Pour vérifier quantitativement l'apport de la méthode de Runge-Kutta, les résultats que donnent les deux méthodes vont être comparés sur des cas tests de laminage. Un jeu de paramètres est défini arbitrairement afin de faire des calculs, ils sont donnés dans le tableau (B.1). Les résultats sont consignés dans la figure (B.1). Des trois figures mentionnées ci-dessus plusieurs choses peuvent être déduites :

- Pour un faible pas de calcul les deux méthodes donnent un résultat identique ce qui correspond aux attentes.
- Dès que le pas de temps est augmenté, dans les deux cas le résultat tend à s'éloigner de la solution pour un faible pas. Cependant cet écart croît moins vite par la méthode de

Runge-Kutta.
- Intuitivement, il semble évident que ces écarts sont dus à la mauvaise gestion du passage entre élasticité et plasticité. Il semble donc être intéressant d'introduire un pas de calcul adaptatif ou du moins qui se réduise de lui-même au moment du passage élastique/plastique.

En conclusion, le fait d'adopter une méthode d'intégration de type Runge-Kutta d'ordre 4 donne de meilleurs résultats mais qui sont très loin d'être satisfaisants. La prochaine partie va montrer si l'ajout d'un pas adaptatif permet de remédier à ce genre de problèmes.

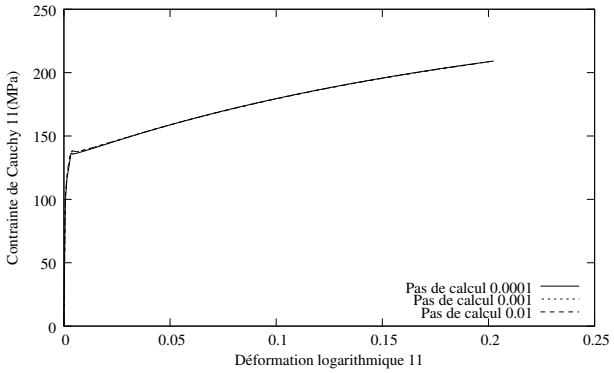
B.2 Introduction d'un pas adaptatif

Le but de l'introduction d'un pas adaptatif est de permettre le passage "en douceur" du régime élastique au régime plastique. Pour cela, il faut utiliser le fait que la plastification intervient si la cission résolue atteint la cission critique, et que son incrément atteint celui de la cission critique. Afin de savoir si la surface de charge est atteinte il est possible vérifier que la contrainte équivalente au sens de Von Mises dépasse deux fois la cission résolue. A ce moment là la contrainte est située sur la surface de charge. Pour éviter de faire de trop grandes erreurs numériques il faut s'assurer que le pas de calcul soit suffisamment petit. Pour cela, le critère retenu est que l'incrément de contrainte prédit par le schéma Eulérien doit être inférieur à la cission critique. En résumé, le schéma du pas adaptatif peut être défini comme :

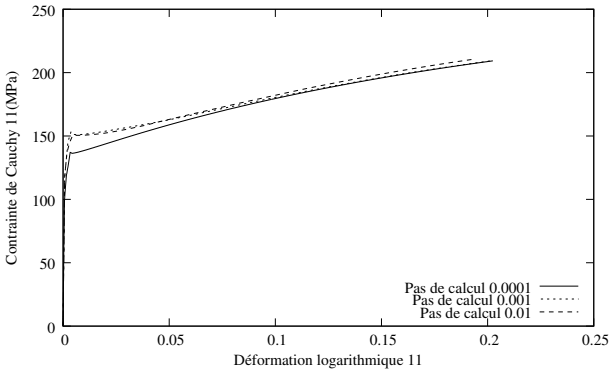
$$\text{Si } \sigma > 2.1\tau_c \text{ et } \delta\sigma > \tau_c \text{ alors } g \Leftarrow g * \frac{\tau_c}{2\delta\sigma} \tag{B.5}$$

A chaque pas de calcul, un test de prédiction dans lequel est vérifié s'il n'y a pas de risque de faire un pas trop grand est réalisé. Si nécessaire le pas est diminué. La relation (B.5) permet, en fait, de choisir le plus grand pas acceptable lors du calcul tout en étant assuré, lors du passage élastique/plastique, de faire des petits pas. Ce qui est présenté ici n'est pas un "vrai" pas adaptatif car le pas de calcul ne peut augmenter. Des calculs, non présentés ici, ont été fait pour essayer d'agrandir aussi le pas de calcul mais les instabilités numériques générées ont été si nombreuses que cette solution a été abandonnée ; une façon de contourner le problème est d'imposer un grand pas de calcul. La figure (B.2) présente les résultats obtenus avec les mêmes paramètres que dans la partie précédente, l'adaptation du pas de calcul ayant été ajoutée. De ces trois figures, les conclusions suivantes peuvent être tirées :
- Pour un faible pas de calcul les deux méthodes donnent un résultat identique comme précédemment.
- Les écarts entre les résultats pour différents pas de calcul sont nettement plus faibles que dans le cas précédent.
- Avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 les résultats sont confondus pour les trois pas de calcul, il y a donc, dans ce cas, quasi indépendance entre la taille du pas de calcul et le résultat.

En conclusion de cette partie, il a été montré que l'intégration numérique grâce à la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 et l'introduction d'un pas adaptatif permet de faire des calculs rapidement tout en minimisant l'erreur numérique. Cela est d'autant plus intéressant dans le cas de l'introduction de la loi dans un code d'éléments finis dans lequel chaque élément ne se déforme pas de la même manière. En effet, en étant pratiquement indépendant du pas de calcul, une grande partie des erreurs numériques est ainsi supprimée.



Résultats avec la méthode de Runge-Kutta d'ordre 4



Résultats avec la méthode Eulérienne

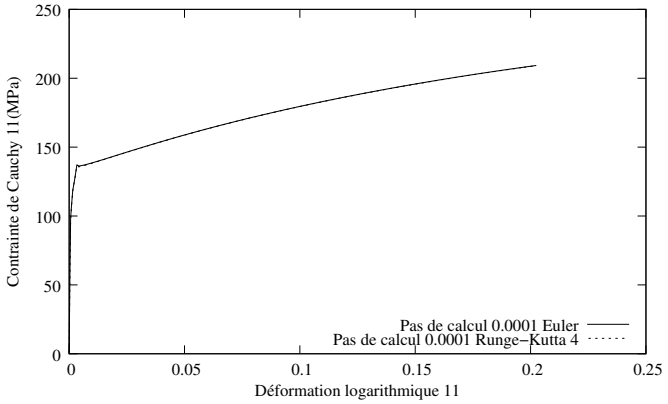


FIG. B.2 – Comparaison des deux méthodes d'intégration pour un essai de laminage avec pas adaptatif

Annexe C

Calcul de l'équation intégrale cinématique

Ici l'équation qui lie le gradient des vitesses réel à celui du milieu fictif homogène va être calculée. Toute cette partie est fortement inspirée du travail réalisé par Morreale [Mor90] dans une note interne Arcelor, ces calculs peuvent aussi se trouver sous diverses formes notamment dans [Ber02], [Aub98], [LB89], [LKB90]. Le tenseur de Green peut être défini grâce à la relation :

$$L^0_{ijkl}\boldsymbol{G}_{lm,ki}\left(x,x'\right)+\delta_{jm}\boldsymbol{\delta}\left(x,x'\right)=0 \tag{C.1}$$

Dans le cas d'un milieu infini l'écriture de la précédente relation peut être simplifiée en écrivant que [NNH93] :

$$\boldsymbol{G}_{lm,ki}\left(x,x'\right)=\boldsymbol{G}_{lm,ki}\left(x-x'\right) \tag{C.2}$$

Ce qui permet de réécrire la relation (C.1) sous la forme :

$$L^0_{ijkl}\boldsymbol{G}_{lm,ki}\left(x-x'\right)+\delta_{jm}\boldsymbol{\delta}\left(x-x'\right)=0 \tag{C.3}$$

L'opérateur de Lamé Λ ainsi que son opérateur adjoint Λ^+ sont définis comme [Lip93] :

$$\Lambda_{jl}=L^0_{ijkl}\partial_k\partial_i \tag{C.4}$$

$$\Lambda^+_{jl}=\Lambda_{lj}=L^0_{klij}\partial_k\partial_i \tag{C.5}$$

En utilisant le tenseur de Green $\boldsymbol{G}^+$ associé à Λ^+ l'équation (C.3) devient :

$$L^0_{klij}\boldsymbol{G}^+_{lm,ki}\left(x-x'\right)+\delta_{jm}\boldsymbol{\delta}\left(x-x'\right)=0 \tag{C.6}$$

En multipliant la relation (C.1) par $v_j\left(x'\right)$, (2.28) par $\boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)$ et en les soustrayant :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)L^0_{ijkl}v_{l,ki}\left(x'\right)+\boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)\dot{K}_j\left(x'\right)-v_j\left(x'\right)L^0_{klij}\boldsymbol{G}^+_{lm,ki}\left(x-x'\right)=\\ v_j\left(x'\right)\delta_{jm}\boldsymbol{\delta}\left(x-x'\right)\end{aligned} \tag{C.7}$$

Cette équation est maintenant intégrée sur tout le volume du polycristal. En remarquant que [Aub98] :

$$v_m\left(x\right)=\int_V\delta_{jm}\boldsymbol{\delta}\left(x-x'\right)v_j\left(x'\right)dV \tag{C.8}$$

En utilisant (C.8) dans (C.7) intégrée sur tout le volume V le résultat suivant est obtenu :

$$\int_V \left(\boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,ki}\left(x'\right) + \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) \dot{K}_j\left(x'\right) - v_j\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,ki}\left(x-x'\right) \right) dV = v_m\left(x\right) \quad \text{(C.9)}$$

Eu utilisant théorème de la divergence appliqué à $\int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,ki}\left(x'\right) dV$:

$$\int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,ki}\left(x'\right) dV = - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,k}\left(x'\right) dV + \int_{\partial V} \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,k}\left(x'\right) n_i dS \quad \text{(C.10)}$$

Et appliqué à $-\int_V v_j\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,ki}\left(x-x'\right) dV$:

$$- \int_V v_j\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,ki}\left(x-x'\right) dV = - \int_{\partial V} v_j\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) n_i dS + \int_V v_{j,i}\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) dV \quad \text{(C.11)}$$

En remarquant que :

$$- \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,k}\left(x'\right) dV = - \int_V \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) L^0_{klij} v_{j,i}\left(x'\right) dV \quad \text{(C.12)}$$

Alors en utilisant (C.12) il est possible d'écrire que :

$$- \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,k}\left(x'\right) dV + \int_V v_{j,i}\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) dV = - \int_V \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) L^0_{klij} v_{j,i}\left(x'\right) dV + \int_V v_{j,i}\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) dV = 0 \quad \text{(C.13)}$$

La relation (C.9) peut être mise sous la forme :

$$\int_{\partial V} \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) L^0_{ijkl} v_{l,k}\left(x'\right) n_i dS - \int_{\partial V} v_j\left(x'\right) L^0_{klij} \boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right) n_i dS + \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) \dot{K}_j\left(x'\right) dV = v_m\left(x\right) \quad \text{(C.14)}$$

En explicitant $\dot{K}_j$ et en faisant une intégration par parties :

$$\int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) \dot{K}_j\left(x'\right) dV = \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) \left[\delta l_{ijkl}\left(x'\right) v_{l,k}\left(x'\right)\right]_{,i} dV = \int_V \left(\boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right) \delta l_{ijkl}\left(x'\right) v_{l,k}\left(x'\right) \right)_{,i} dV - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right) \delta l_{ijkl}\left(x'\right) v_{l,k}\left(x'\right) dV \quad \text{(C.15)}$$

En appliquant, une nouvelle fois, le théorème de la divergence à $\int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)\dot{K}_j\left(x'\right)dV$ le résultat obtenu est :

$$\int_V \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)\dot{K}_j\left(x'\right)dV = \int_{\partial V} \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)n_i dS - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.16)}$$

Finalement, en combinant (C.14) et (C.16) :

$$v_m\left(x\right) = \int_{\partial V} \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)L^0_{ijkl}v_{l,k}\left(x'\right)n_i dS - \int_{\partial V} v_j\left(x'\right)L^0_{klij}\boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right)n_i dS + \int_{\partial V} \boldsymbol{G}^+_{jm}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)n_i dS - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.17)}$$

En utilisant le fait que le milieu est supposé infini, la condition aux limites pour le tenseur de Green peut être appliquée [Aub98]

$$\lim_{x-x'\to\infty} \boldsymbol{G}^+\left(x-x'\right) = 0 \quad \text{(C.18)}$$

Alors (C.17) devient :

$$v_m\left(x\right) = -\int_{\partial V} v_j\left(x'\right)L^0_{klij}\boldsymbol{G}^+_{lm,k}\left(x-x'\right)n_i dS - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.19)}$$

La première intégrale du second membre de cette équation est la solution du problème homogène. En appelant $v^0_m\left(x\right)$ cette solution :

$$v_m\left(x\right) = v^0_m\left(x\right) - \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.20)}$$

La définition du gradient de la vitesse est :

$$g_{mn}\left(x\right) = v_{m,n}\left(x\right) \quad \text{(C.21)}$$

En remarquant que dans l'intégrale de la formule (C.20) seul le terme $\boldsymbol{G}^+_{jm,i}\left(x-x'\right)$ dépend de la position x alors :

$$g_{mn}\left(x\right) = g^0_{mn}\left(x\right) + \int_V \boldsymbol{G}^+_{jm,in}\left(x-x'\right)\delta l_{ijkl}\left(x'\right)v_{l,k}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.22)}$$

Pour revenir maintenant au tenseur de Green associé à Λ le résultat montré par Lipinski [Lip93] est utilisé :

$$\boldsymbol{G}^+_{nm}\left(x-x'\right) = \boldsymbol{G}^+_{mn}\left(x'-x\right) \quad \text{(C.23)}$$

Le tenseur de Green a la propriété intéressante [NNH93] issue du théorème de le réciprocité :

$$\boldsymbol{G}^+_{mn}\left(x'-x\right) = \boldsymbol{G}_{nm}\left(x-x'\right) \quad \text{(C.24)}$$

Enfin en introduisant le tenseur de Green modifié comme :

$$\Gamma_{mnij}\left(x-x'\right) = \boldsymbol{G}_{im,jn}\left(x-x'\right) \quad \text{(C.25)}$$

La relation suivante, appelée généralement équation intégrale cinématique, peut être donnée :

$$g_{mn}\left(x\right) = g^0_{mn}\left(x\right) + \int_V \Gamma_{mnij}\left(x-x'\right)\delta l_{jikl}\left(x'\right)g_{lk}\left(x'\right)dV \quad \text{(C.26)}$$

Annexe D

Calcul du tenseur d'interaction

Le tenseur t^{II} introduit dans le chapitre 2 doit être défini pour être calculé. Ce travail peut se trouver dans la thèse de Fassi-Fehri qui a explicité ce tenseur. Ici, il sera non seulement explicité mais l'approximation numérique qui permet de le calculer sera aussi donnée. Dans le cas d'un grain elliptique de demi-axes a, b et c ce tenseur est donné par [FF85] :

$$t^{II}_{klmj} = \frac{abc}{3} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \left(L^{AC}_{mnkp} \phi_{pq} \phi_{nr} \chi_q \chi_r \right)^{-1} \chi_t \phi_{lt} \chi_u \phi_{ju} \sin\theta d\theta d\varphi \tag{D.1}$$

Avec :

$$\chi = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\sin\varphi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \tag{D.2}$$

Et

$$\phi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a}{b} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{c} \end{pmatrix} \tag{D.3}$$

Pour calculer l'intégrale (D.1) la méthode numérique dite de Gauss-Legendre est utilisée. Il faut d'abord réaliser les deux changements de variables suivants :

$$\begin{aligned} x &= -1 + \frac{1}{2\pi}\theta \\ y &= -1 + \frac{1}{\pi}\varphi \end{aligned} \tag{D.4}$$

(D.1) peut donc se mettre sous la forme :

$$t^{II}_{klmj} = \frac{abc\pi^2}{3} \int_{-1}^{1} \int_{-1}^{1} f(x,y)\, dxdy \tag{D.5}$$

Pour calculer (D.5) il faut écrire que :

$$\int_1^{-1} \int_1^{-1} f(x,y)\, dxdy = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} w_i w_j f(x_i, y_j) \tag{D.6}$$

Cela revient donc à faire une moyenne pondérée par les poids w_i de la fonction à intégrer aux points choisis. Les points d'intégrations choisis sont les racines du polynôme de Legendre de

l'ordre du nombre de points choisis. Cette méthode d'intégration permet de calculer les valeurs exactes d'un polynôme dont le degré est le double du nombre des points d'intégration. Neuf points d'intégration sont nécessaires (ce qui revient à approximer la fonction à intégrer par un polynôme de degré 18 en x et y) car au-delà les valeurs numériques calculées sont identiques à celles trouvées avec neuf points. Le polynôme de Legendre d'ordre 9 vaut :

$$Legendre_9(x) = \frac{12155}{128}x^9 - \frac{6435}{32}x^7 + \frac{9009}{64}x^5 - \frac{1155}{32}x^3 + \frac{315}{128}x \tag{D.7}$$

Ses racines valent :

$$\begin{aligned} x_1 = -x_6 &= -0.968160239507626 \\ x_2 = -x_7 &= -0.836031107326636 \\ x_3 = -x_8 &= -0.613371432700590 \\ x_4 = -x_9 &= -0.324253423403809 \\ x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{D.8}$$

La formule qui permet de donner la valeur du poids w_i est la suivante :

$$w_i = \int_{-1}^{1} \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx \tag{D.9}$$

En appliquant cette équation les valeurs numériques des racines sont :

$$\begin{aligned} w_1 = w_6 &= 0.081274388361574 \\ w_2 = w_7 &= 0.180648160694857 \\ w_3 = w_8 &= 0.260610696402935 \\ w_4 = w_9 &= 0.312347077040003 \\ w_5 &= 0.330239355001260 \end{aligned} \tag{D.10}$$

Cette dernière relation permet de définir complètement la méthode utilisée pour modéliser la transition d'échelles.

Résumé

Cette thèse a pour but de modéliser un critère de perte de ductilité. Pour cela, ce travail a été fait en trois étapes. Dans un premier temps, le comportement à l'échelle locale (qui est celle d'un grain ou d'un monocristal) est modélisé par une loi micromécanique écrite dans le cadre des grandes déformations. L'écrouissage étant quant à lui pris en compte par une matrice dont la variable interne est la densité de dislocations moyenne par système de glissement. Cette modélisation est apte à reproduire le comportement de monocristaux de ferrite ou d'alliage fer-silicium pour des trajets simples et complexes. Dans un deuxième temps la transition d'échelles entre le comportement local et celui d'un agrégat polycristallin est réalisée grâce au schéma autocohérent au sens de Hill. A cette étape il est montré que la modélisation adoptée est capable de prédire le comportement pour des aciers monophasés, biphasés et monophasés contenant des précipités pour des trajets simples et complexes. De plus, le modèle donne aussi de bons résultats dans le calcul du coefficient de Lankford et des surfaces de charge ainsi que pour la prédiction de l'évolution des textures. La troisième étape consiste à introduire un critère de perte de ductilité basé sur la perte d'ellipticité du module tangent élastoplastique, c'est le critère de Rice. Ce critère est ensuite utilisé pour tracer des courbes limite de formage et il est montré que de bons résultats sont obtenus.

Mots-clés: ductilité, micromécanique, modélisation, plasticité cristalline

Abstract

The aim of this phd thesis is to model a ductility loss criterion. Do do that, this work has been done in three steps. In a first time, the behavior at the local scale (which is the one of a grain or a single crystal) has been modeled by a micromechanical law written in the large strain framework. Hardening is, has for it, taken into account by a matrix which internal variable is the mean dislocation density on a slip system. This modelisation is able to reproduce the behavior of ferrite and iron-silicium alloy single crystals for simple and complex loading paths. In a second time, the scale transition between the local behavior and the one of a polycristalline agregate is realized thanks to the self-consistent scheme at the sense of Hill. It is shown that, at this step, the adopted model is able to predict the behavior for single-phase, dual-phase ferrite and martensite and single-phase with precipitates steels for simple and complex loading paths. In plus, this model gives also good results for calculus of Lankford coefficients and yield surfaces and also for predicting texture evolution. The third step consists in the introduction of a ductility loss criterion based on the ellipticity loss of the elastic-palstic tangent modulus, this is Rice's criterion. This criterion is used to plot forming limit diagrams and it is shown that good results can be given.

Keywords: ductility, micromechanical, modeling, crystalline plasticity