Ecole Doctorale de l'Ecole Polytechnique

Modèles d'urnes et phénomènes de seuils en combinatoire analytique

THÈSE

présentée et soutenue publiquement le 18 mars 2005

pour l'obtention du

Doctorat de l'École Polytechnique

(Spécialité : Mathématiques et Informatique)

par

Vincent Puyhaubert

Composition du jury

Rapporteurs :	Olivier Dubois
	Marc Noy
Examinateurs :	Philippe Flajolet (Directeur)
	Danièle Gardy (Président)
	Dominique Gouyou-Beauchamps
	Nicolas Pouyanne
	Jean-Marc Steyaert
	Brigitte Vallée

Projet Algorithmes, INRIA Rocquencourt

Remerciements

Dans un premier temps, je souhaite adresser mes remerciements à Philippe Flajolet, pour son encadrement exemplaire. Pendant ces trois années, j'ai eu la chance de pouvoir profiter de son immense savoir, de sa confiance mais aussi de son extrême gentillesse. De nombreux résultats de cette thèse ont vu le jour à la suite de sessions de réflexion dans son bureau, de suggestions bibliographiques parfaitement adaptées, ou tout simplement d'encouragements chaleureux. Par ailleurs, Philippe a toujours su faire preuve d'une grande disponibilité, ce qui est sans doute rare chez un scientifique de sa qualité.

Marc Noy et Olivier Dubois ont accepté immédiatement la lourde tâche de rapporteur. Je les remercie vivement de leurs lectures et de leurs commentaires. Olivier m'a par ailleurs consacré énormément de temps alors que ma thèse n'était qu'à son début. Mon premier chapitre lui est entièrement dédié tellement son aide a été précieuse lors de ces travaux.

J'ai eu la chance de rencontrer Danièle Gardy, Dominique Gouyou-Beauchamps, Nicolas Pouyanne, Jean-Marc Steayaert et Brigitte Vallée durant cette thèse ou en DEA. Leur présence à mon jury m'honore et je les remercie de l'intérêt qu'ils ont manifesté envers mes travaux.

Il va de soi que ces trois années n'auraient pas été les mêmes sans l'excellente humeur qui règne dans le projet Algo à l'INRIA Rocquencourt. Je souhaite donc naturellement remercier tous ceux qui contribuent ou ont contribué à maintenir cette ambiance : Virginie Collette, notre assistante de projet, dont l'efficacité n'a d'égale que la jovialité, le « grand chef » Bruno Salvy et Frédéric Chyzak, que remercie également pour avoir été là pour résoudre tous mes petits problèmes informatiques, Pierre Nicodème, Mireille Régnier, Philippe Dumas et tous les thésards ou ex-thésards, Marianne Durand, Ludovic Meunier, Eric Fusy et Alin Bostan, et particulièrement, mon co-bureau Julien Fayolle, Frédéric Giroire et Thomas Camara pour les savantes discussions autour de thèmes passionnants comme le clubbing ou le football qui ont égayé nos pauses déjeuner.

Je n'aurais sans doute jamais entrepris de telles études sans le soutien et les encouragements persistants de mes parents. Depuis des années, mon père et ma mère n'ont eu de cesse de me pousser de plus en plus loin dans le travail, en me donnant tout du long accès aux meilleures sources d'enseignement. Par ailleurs, ils ont toujours su me redonner confiance lorsque le moral ou la motivation flanchait. Je peux désormais les remercier de tout ce qu'ils ont fait pour moi.

Je souhaite maintenant remercier tous ceux qui, par leur présence et leur amitié, ont contribué à cette longue et glorieuse épopée : mes amis de classe préparatoire, Julien Dumont, Olivier, Thémis, David, Alain, Augustin, ainsi que Magalie, Pierre-André et tous les autres, mes amis de l'Ecole Normale Supérieure de Cachan, Davidor (malek), Sébastien Gadat, Philippe Nadeau, Tristan, Philippe Lebacque, Arnaud, Erwin, Benoit, Julien Borghetti, Olivia, Laure, Marie, Coco, Sébastien Wybo et j'en oublie. Je remercie également les joueurs de l'élite pongiste du XVème, plus particulièrement Stéphane, Pierre, Pascal, Thomas, Olivier, Jérome, Hak, Julie et Mélanie, ainsi que Bertrand et

Olivier Bernard. Je remercie pour finir le Paris Saint Germain, Children of Bodom et les « mighty heros » de Rhapsody.

Mon frère et ma soeur me supportent depuis plus de 20 ans. C'est une belle performance et je ne les féliciterai jamais assez pour ça. Blandine me supporte depuis moins longtemps mais elle le fait aussi bien. A partir de maintenant, j'aurais sans doute plus de temps pour prendre autant soin d'eux qu'ils prennent soin de moi.

La dernière phrase de ces remerciement sera à la mémoire de mon grand père, Georges Tarralle, qui, j'en suis sûr, aurait été très heureux d'assister à ma soutenance.

Table des matières

Remerciements **i**

Introduction **5**

1 Bref aperçu du domaine . . . 5
1.1 Phénomènes de seuils en satisfaisabilité . . . 5
1.2 Modèles d'urnes . . . 6
1.3 Règlements de compte à Ok Corral . . . 7
2 Contributions . . . 8
2.1 Position de notre étude . . . 8
2.2 Résultats obtenus . . . 9
3 Plan de ce mémoire . . . 10

Chapitre 1 Modèles d'urnes et seuil de satisfaisabilité **13**

1.1 Seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT . . . 14
1.1.1 Définitions et introduction du problème de satisfaisabilité . . . 14
1.1.2 Transitions de phase . . . 17
1.1.3 Conjecture du seuil de satisfaisabilité . . . 19
1.1.4 Présentation des travaux déjà existants . . . 19
1.2 Généralités sur les séries génératrices . . . 23
1.2.1 Définitions et exemples . . . 24
1.2.2 Séries génératrices exponentielles . . . 25
1.2.3 Séries génératrices multivariées . . . 28
1.2.4 Bornes de cols . . . 31
1.3 Reprise des bornes existantes par séries génératrices . . . 32
1.3.1 Espérance du nombre de solutions d'une formule . . . 32
1.3.2 Impliquants premiers, définition . . . 34
1.3.3 Borne supérieure par les impliquants premiers . . . 36
1.3.4 Solutions localement maximales . . . 39
1.3.5 Borne supérieure des NPS . . . 40
1.4 Raffinement de la notion de solution localement maximales . . . 42
1.4.1 Discussions préliminaires . . . 42

1.4.2 Quelques lemmes . . . 44
1.4.3 Version faible des NPS-2 : définition et borne supérieure associée . . . 45
1.4.4 Version forte des NPS-2 : définition et série génératrice . . . 49
1.5 Discussions . . . 54

Chapitre 2 Modèles d'urnes triangulaires de Pólya-Eggenberger 55
2.1 Présentation générale des urnes de Pólya . . . 57
2.1.1 Matrices d'évolutions . . . 57
2.1.2 Urnes viables et urnes équilibrées . . . 59
2.1.3 Classification des urnes viables et équilibrées à deux boules . . . 60
2.1.4 The story so far . . . 61
2.2 Méthodes de la combinatoire analytique . . . 63
2.2.1 Série génératrice des événements . . . 63
2.2.2 Redondance des variables . . . 65
2.2.3 Méthode des caractéristiques . . . 66
2.2.4 Théorèmes de convergence en distribution . . . 69
2.3 Urne de Pólya . . . 70
2.3.1 Série génératrice des événements . . . 70
2.3.2 Espérance, écart-type et moments . . . 72
2.3.3 Loi limite locale . . . 73
2.4 Urnes triangulaires à deux couleurs de boules . . . 75
2.4.1 Série génératrice . . . 76
2.4.2 Espérance, variance et moments . . . 77
2.4.3 Loi limite locale . . . 78
2.4.4 Transformée de Mellin de la loi limite . . . 82
2.5 Urnes triangulaires à trois couleurs de boules . . . 83
2.5.1 Série génératrice . . . 84
2.5.2 Espérance et variance . . . 87
2.5.3 Expression des moments dans les cas $a \geq b$ . . . 89
2.5.4 Convergence en distribution dans le cas $a < b$ . . . 92
2.6 Discussions . . . 94

Chapitre 3 Urne de Friedman et transition de phase à Ok Corral 95
3.1 Introduction . . . 97
3.1.1 Présentation du problème . . . 97
3.1.2 Heuristiques, récurrences et méthode des moments . . . 98
3.1.3 Processus de Kingman et modèle d'urne associé . . . 99
3.2 Modèle altruiste de Friedman . . . 101
3.2.1 Série génératrice . . . 101
3.2.2 Espérance, écart-type et moments . . . 103

3.2.3 Loi limite locale . . . 103
3.2.4 Probabilités de grandes déviations . . . 107
3.3 Probabilité de survie d'une équipe . . . 109
3.3.1 Série génératrice et probabilité de l'événement « S survivants » . . . 109
3.3.2 Probabilité de survie d'une équipe et nombres eulériens . . . 111
3.3.3 Fenêtre de transition de Ok Corral . . . 112
3.3.4 Probabilités de survie lors de duels déséquilibrés . . . 115
3.4 Moments et loi limite du nombre de survivants . . . 116
3.4.1 Expressions exactes des moments du nombre de survivants . . . 117
3.4.2 Analyse asymptotique des moments utiles définis par série génératrice . . . 121
3.4.3 Cas particulier : duel parfaitement équitable ($m = n$) . . . 124
3.5 Discussions . . . 126

Conclusion **129**

Annexe **131**
1 Session Maple pour les impliquants premiers . . . 131
2 Matrices d'ajacences de graphes . . . 133

Bibliographie **135**

Introduction

L'augmentation très rapide de la puissance de calcul des ordinateurs a permis ces dernières années de faciliter la manipulation de grandes classes d'objets informatiques. Parmi les phénomènes observés lors de simulations ou d'expériences, on a constaté notamment les comportements suivants : pour certains grands ensembles d'objets, un simple paramètre permet de tester l'apparition ou non de certaines propriétés, que ce soit en moyenne ou avec grande probabilité.

Prenons le cas des graphes et considérons un graphe à n sommets. Pour tout couple de sommets, on crée une arête avec probabilité p. On s'intéresse à la nature des composantes connexes du graphe. Lorsque $p \sim \frac{n}{2}(1+\mu)$ où μ est une constante réelle, les comportements suivants sont observés : si μ est strictement négatif, alors avec probabilité $1 - o(1)$ quand $n \to \infty$, un graphe ne contient que des composantes avec au plus un cycle. Si μ est égal à 0, la plus grande composante connexe a une taille de l'ordre de $n^{2/3}$. Enfin si μ est strictement positif, il y a une unique composante connexe de taille αn où $\mu = -(1 + \ln(1-\alpha)/\alpha)$.

De tels types de comportements des grandes structures furent ainsi appelés phénomènes de seuils et de transition de phase, par analogie avec la physique. Le rapport p/n correspond à la densité du graphe (plus il est important, plus le graphe a d'arêtes), et lorsque cette densité dépasse la valeur $1/2$, la structure du graphe change brusquement.

L'objectif initial de cette thèse était d'aborder les phénomènes de seuils du point de vue de la combinatoire analytique en usant de techniques de séries génératrices. Nos travaux nous ont alors amené à user de modèles d'urnes. Par la suite, nous avons ainsi considéré ces modèles non plus comme un outil, mais également comme un sujet d'étude et nous nous sommes naturellement intéressés à un modèle particulier introduit par Pólya et Eggenberger. Puis, nous avons appliqué certains des résultats obtenus à un problème de duel dit de « Ok Corral ». Nous allons donc dans un premier temps décrire plus précisément le cadre de nos travaux.

1 Bref aperçu du domaine

1.1 Phénomènes de seuils en satisfaisabilité

Les termes de phénomène de seuil et de transition de phase sont propres à la physique. En fonction de la température à laquelle est portée un matériau, sa structure passe par des états solides, liquides ou gazeux, avec de brusques changements au voisinage d'une certaine valeur. Les phénomènes de seuils sont complexes. Comprendre le comportement macroscopique de grandes structures rigoureusement nécessite l'étude d'une grande quantité de phénomènes microscopiques. Ces phénomènes apparaissent ainsi souvent lors de l'étude des problèmes difficiles de l'informatique.

L'exemple qui nous intéresse particulièrement est celui des formules booléennes de type k-SAT. Une telle formule est construite sur un ensemble de n variables et formée d'une conjonction de m clauses. Des simulations numériques ont suggéré que pour de grandes valeurs de m et n, le simple

rapport m/n caractérisait avec très forte probabilité la satisfaisabilité d'une formule. Il semblerait qu'il existe pour tout entier k une constante r_k telle que, si ce rapport est supérieur (resp. inférieur) à r_k, alors la probabilité de satisfaisabilité d'une formule k-SAT aléatoire tende vers 0 (resp. 1), lorsque m et n tendent vers l'infini.

Pour cet exemple, le problème majeur rencontré, lorsque l'on cherche à prouver l'existence d'une transition de phase, est l'absence à l'heure actuelle d'une caractérisation simple du fait qu'une formule soit satisfaisable, qui s'exprimerait en terme de conditions sur les clauses par exemple. À l'heure actuelle, seuls des résultats partiels ont pu être obtenus. En particulier, une série de « bornes » au seuil de satisfaisabilité a été trouvée. On dit que r_k^- est une borne inférieure (resp. r_k^+ est une borne supérieure) au seuil de satisfaisabilité si la proportion de formules satisfaisables tend vers 1 (resp. 0) lorsque m et n tendent vers l'infini, avec $m/n \leq r_k^-$ (resp. $m/n \geq r_k^+$). En pratique, cela revient à dire que le seuil, s'il existe, est forcément compris entre toutes ces bornes.

L'étude du seuil de satisfaisabilité a un intérêt considérable du point de vue algorithmique. Il existe bien sûr des algorithmes qui permettent de décider si oui ou non une formule peut être satisfaite. Malheureusement, tous ces algorithmes fonctionnent en temps exponentiel dans le cas le pire. Des simulations ont montré cependant que la vitesse d'exécution de ces algorithmes était particulièrement rapide pour des formules dont le rapport m/n était éloigné de la valeur de seuil. Connaître la valeur exacte du seuil permettrait de déterminer précisément ces régions pour lesquelles on peut disposer de tests rapides, en pratique, de satisfaisabilité.

1.2 Modèles d'urnes

L'emploi de modèle d'urne est très ancien, puisque les premiers travaux remontent à Bernouilli et Laplace. Un ouvrage entier y est consacré, celui de Johnson et Kotz [JK77] dont l'objectif est de montrer qu'une quantité impressionnante de résultats peut être démontrée grâce à ces modèles, qui pourtant ne sont définis que par des règles simples.

D'une manière générale, un modèle d'urne peut être vu comme un simple jeu, impliquant des boules, des urnes, et bien sûr un certain nombre de règles. On effectue essentiellement deux types d'actions, piocher des boules dans les urnes ou au contraire placer des boules à l'intérieur de ces urnes. Deux modèles nous intéressent particulièrement dans notre travail : le premier est un outil qui nous sert pour le dénombrement, le second sert notamment pour les modélisations d'événements aléatoires.

Modèle de jets :

Le modèle qui fut utilisé pour obtenir des résultats combinatoires et effectuer des dénombrements part d'un principe simple : on dispose d'un ensemble de p urnes numérotées et de m boules numérotées. On souhaite déterminer le nombre de façons de jeter ces boules au hasard dans les urnes, de sorte qu'à la fin de cette suite de jets, le nombre de boules dans chacune des urnes vérifie une certaine règle. Par exemple, l'urne numéro 1 doit contenir à la fin du jet un nombre pair de boules, l'urne numéro 2 au moins 2 boules et ainsi de suite. L'analyse combinatoire de ces jets se fait naturellement par série génératrice et les résultats sont obtenus à l'aide d'arguments élémentaires.

Ce modèle est utilisé dans nos travaux sur le seuil de satisfaisabilité des formules booléennes, puisque comme nous le verrons dans la suite de cette introduction, nos résultats dans ce domaine utilisent essentiellement des arguments combinatoires.

Bien entendu, le modèle d'urnes à jets ne se réduit pas à ce modèle très particulier. Considérons par exemple les travaux de Michael Drmota, Danièle Gardy et Bernhard Gittenberger [DGG01]. Ces auteurs présentent une généralisation du modèle d'urnes à jets qui peut éventuellement utiliser

deux couleurs de boules (noires et blanches). De la même manière que dans notre modèle, le principe consiste à jeter m boules dans des urnes, puis regarder la configuration obtenue. Les règles sont alors plus complexes dans le cas de deux couleurs puisque les auteurs s'intéressent par exemple au nombre d'urnes contenant davantage de boules noires que de blanches. Les résultats ne sont pas alors seulement de nature combinatoire mais concernent également certaines distributions limites.

Des modèles à jets plus puissants existent donc, mais nos travaux n'utilisent que celui très simple que nous venons de présenter.

Modèle à pioche

Le modèle à pioche qui nous intéresse ici a été introduit initialement par Pólya en 1923. On dispose d'une urne contenant des boules de différents couleurs. Partant d'une composition fixée, on pioche une première boule. En fonction de sa couleur, on effectue un certain nombre d'opérations qui consistent à ajouter ou retirer des boules de l'urne pour chacune des différentes couleurs. Puis on réitère le procédé.

Ce modèle apparaît naturellement en théorie des probabilités. L'urne est censée être opaque, par conséquent, sa composition est indétectable de l'extérieur. Il n'est ainsi pas permis d'imposer des règles qui tiennent compte de la composition générale de l'urne. De plus, les boules sont censées être indiscernables au toucher, ce qui garantit l'équiprobabilité de la pioche à chaque instant. L'évolution de ce modèle présente ainsi naturellement un comportement de type chaîne de Markov : la composition de l'urne à tout instant ne dépend que de l'état dans lequel elle se trouvait à l'instant précédent.

L'exemple initial de Pólya consiste à replacer la boule piochée dans l'urne en rajoutant s boules de la même couleur. Lorsqu'il l'introduit en 1923, Pólya le présente comme une modélisation de la propagation d'épidémies. Depuis, l'intérêt de la communauté scientifique envers la généralisation du modèle s'est considérablement accru. En effet, plusieurs problèmes informatiques admettent une modélisation par une urne à deux boules, lorsque les règles sont convenablement choisies. Par conséquent, toutes sortes de techniques ont été utilisées afin d'établir les propriétés probabilistes de chacune des urnes. Les techniques utilisées vont de « simples » récurrences aux processus de branchement markoviens à temps continu. Malgré cela, certaines urnes échappent encore à l'analyse.

Nos travaux dans ce domaine utilisent une méthode de Philippe Flajolet, Joaquim Gabbaró et Helmut Pekari. Ces auteurs remarquent que pour une certaine famille de modèle d'urnes dits *équilibrés*, il y a équivalence entre le dénombrement de toutes les évolutions possibles de l'urne, en partant de l'état initial, et l'étude probabiliste de la composition de l'urne. Par conséquent, l'évolution de l'urne est parfaitement codée par une série génératrice multivariée convenablement choisie, vérifiant une équation aux dérivées partielles simple. La difficulté du travail consiste alors à résoudre cette équation, puis récupérer les informations sur les coefficients de la série par l'étude des propriétés analytiques de la solution.

1.3 Règlements de compte à Ok Corral

Le shérif Wyatt Earp est sans doute l'une des figures les plus emblématiques de l'ouest américain. Le 6 octobre 1881, à Tombstone, il entrait dans la légende lors d'un duel au revolver, où lui et ses frères abattirent un groupe de hors-la-loi constitué des frères Clanton et McLaury. La scène de ce duel fut un ranch abandonné, nommé « Ok Corral ». Ce ranch est maintenant un lieu touristique « renommé » où l'on peut assister à de superbes reconstitutions du duel et affronter soi-même quatre dangereux tireurs en carton (voir le site Web de la ville).

Le modèle de duel à Ok Corral fut introduit par Williams et McIlroy récemment en 1998. Dans ce modèle, deux groupes de m et n tueurs s'affrontent. À chaque instant, un tueur sélectionné au hasard tue un membre de l'équipe adverse, et le procédé se répète jusqu'à l'élimination complète de l'un des groupes. Le nom de ce modèle fut ainsi choisi en référence à ce fameux duel de 1881.

Les auteurs donnent alors un traitement heuristique du problème et suggèrent bon nombre de résultats intéressants, concernant l'équivalent attendu du nombre de survivants. Naturellement, deux régimes se distinguent : les duels équilibrés, pour lesquels $m - n = o\left(\sqrt{m+n}\right)$ et les duels déséquilibrés pour lesquels inversement $\sqrt{m+n} = o(m-n)$. Les résultats principaux sont alors validés dans un premier temps par une analyse remarquable de Kingman. À l'aide de simples manipulations de récurrences, il détermine la loi limite vérifiée par le nombre de survivants au duel dans chacun des deux régimes. Il met en évidence également une convergence des probabilités de survie de chacun des groupes vers une fonction d'erreur, dont résulte un phénomène de transition de phase de ces probabilités pour de grandes valeurs de m et n. Puis, en collaboration avec Volkov, cet auteur introduit un parallèle entre ce modèle de duel et une urne de type Pólya-Eggenberger généralisé. C'est précisément cette connexion qui nous a intéressé, puisqu'elle rendait possible le transfert de résultats analytiques sur les urnes au modèle du duel. « concret ».

2 Contributions

Nous allons maintenant détailler les objectifs de notre travail et mettre en évidence les résultats novateurs, dans les trois axes de recherche qui viennent d'être présentés.

2.1 Position de notre étude

La conjecture du seuil de satisfaisabilité est une question ouverte depuis plus de 20 ans. De nombreux spécialistes du domaine fournissent de gros efforts pour améliorer les bornes supérieures et inférieures. Dans ces conditions, l'objectif n'était pas de prouver en l'espace de trois ans l'existence du seuil, mais de voir si les techniques de séries génératrices, que l'on introduisait pour la première fois dans ce domaine, pouvaient fonctionner.

Dans la littérature sur le sujet, les articles de deux auteurs nous ont particulièrement intéressé, ceux de Olivier Dubois et Yacine Boufkhad. Les travaux de ces auteurs concernent des bornes supérieures au seuil de satisfaisabilité. Leur méthode consiste à majorer le nombre de formules satisfaisables, lequel ne s'exprime pas simplement, par le cardinal d'un plus gros ensemble d'objets, mais dont le calcul se fait plus simplement. Le corps de la preuve n'utilise ainsi que des méthodes de dénombrement. Or, les séries génératrices sont un outil puissant pour ce genre d'étude. Nous nous sommes donc principalement appliqués dans un premier temps à retrouver leurs résultats, pour pouvoir éventuellement les améliorer par la suite.

Dans le cadre des modèles d'urnes de Pólya-Eggenberger, nous avions à disposition une technique pouvant potentiellement s'appliquer à tous les modèles équilibrés. Pour une bonne partie de ces modèles, lorsque l'urne ne contient que deux types de boules, les lois limites étaient déjà connues. Cependant, les techniques utilisées ne permettaient pas de donner certaines informations, comme typiquement la vitesse de convergence des probabilités. Par ailleurs, il restait un modèle considéré particulièrement problématique par les auteurs ayant écrit sur le sujet, celui des urnes dites *triangulaires*.

Nos objectifs dans ce domaine étaient donc multiples : d'une part, nous avions l'ambition de traiter par notre méthode ce cas pour lequel, par exemple, la loi limite n'avait pas été identifiée, même si son existence était connue par un argument non constructif. D'autre part, nous envisagions

de reprendre le traitement des urnes déjà étudiées afin de donner des résultats supplémentaires. Au final, nous espérions arriver à classifier l'ensemble des urnes à deux couleurs de boules par une méthode uniforme, tout en apportant des précisions sur les cas déjà étudiés, puis étendre les résultats au cas d'urnes à 3 ou davantage de couleurs de boules.

Concernant le problème de Ok Corral, les travaux de Kingman présentent malgré tout quelques lacunes. Notamment, aucune expression exacte des probabilités du modèle n'est donnée, et les expressions des moments qu'il obtient ne sont valides que pour une certaine famille. Pour finir, comme pour les travaux sur les urnes de Pólya-Eggenberger, la méthode utilisée ne permet pas d'obtenir des informations sur la vitesse de convergence des probabilités. Nous avons donc envisagé d'utiliser nos méthodes pour répondre à ces questions.

2.2 Résultats obtenus

Dans le premier chapitre, nous donnons d'abord de nouvelles preuves de trois bornes supérieures déjà obtenues l'une par Franco, les deux autres par Dubois et Boufkhad. La borne de Franco est une borne facile, qui n'est recalculée qu'en guise de mise en place d'un point de vue combinatoire.

Ces bornes sont obtenues par une majoration de la probabilité de satisfaisabilité. L'idée générale est de borner cette probabilité par l'espérance de variables aléatoires convenablement choisies. Nous reprenons tel quel ces idées. L'originalité de notre approche consiste à utiliser les modèles d'urnes et les séries génératrices pour simplifier le calcul de ces espérance.

Le calcul de l'espérance effectué par Dubois et Boufkhad revient à calculer le cardinal de certains sous-ensembles de formules, construites sous une certaine forme (voir le lemme 1.5 par exemple). Nous montrons que la construction d'une telle formule se ramène à un modèle d'urne à jets particulier. Nous en déduisons principalement le calcul de l'espérance du nombre d'impliquants premiers d'une formule 3-SAT aléatoire, et l'espérance du nombre de formules localement maximales (NPS) d'une formule k-SAT aléatoire.

Les formules par série génératrice que nous obtenons sont remarquablement simples : l'une ne fait intervenir qu'une somme, l'autre s'exprime sous forme close. Ces expressions contrastent ainsi fortement avec les expressions originales, qui faisaient toutes deux intervenir une double somme. Les bornes supérieures découlent alors naturellement de nos formules par des bornes de col triviales.

Nous raffinons ensuite la notion de solution localement maximale de Dubois et Boufkhad et définissons deux versions de NPS-2. Pour ces deux définitions, nous calculons l'espérance du nombre de ces solutions pour une formule 3-SAT aléatoire. Pour ces cas particuliers, aucun dénombrement n'avait à ce jour pu être effectué. Par nos méthodes, nous obtenons à nouveau des formules très simples puisqu'elles s'expriment toutes les deux sous forme close. Les travaux de cette partie concluent sur le théorème 1.9, qui donne en corollaire la meilleure majoration connue, à ce jour, par série génératrice de la probabilité de satisfaisabilité.

Pour les urnes de Pólya-Eggenberger, nos travaux traitent le cas particulier des urnes triangulaires. À l'aide de la méthode de Flajolet-Gabarró-Pekari, nous traitons entièrement le cas des urnes à deux couleurs de boules, pour lequel on ne savait presque rien. Dans un premier temps, nous introduisons ce modèle dans le cadre de l'évolution des populations. Nous considérons alors la variable aléatoire donnant le nombre de boules de la première couleur. Nos contributions personnelles incluent par la suite une expression exacte des probabilités, de l'équivalent asymptotique de tous les moments entiers et surtout un théorème de convergence locale qui identifie au passage précisément la loi limite (théorème 2.8). Nous calculons finalement la transformée de Mellin de la loi limite, ce qui fournit les valeurs asymptotiques des moments d'ordre fractionnaire.

Nous traitons ensuite le cas des urnes triangulaires à trois types de boules. Ce cas particulier

n'a jusqu'à aujourd'hui jamais été étudié. Notre étude révèle une classification en trois cas, qui se distinguent par des évolutions distinctes du nombre de boules de la seconde couleur (proposition 2.9). Dans un des cas, la croissance du nombre de ces boules a une vitesse propre, dans les deux autres, la vitesse est imposée par celle des boules de la première couleur. Nous donnons, pour ces deux derniers cas une expression simple des moments de la variable donnant le nombre de boules de la seconde couleur, dont résulte une convergence en distribution. Dans le cas restant, nous montrons un résultat de même nature mais la loi limite est cette fois identifiée par une expression intégrale de sa fonction caractéristique.

Nous nous intéressons pour finir au problème de Ok Corral. Dans le cadre de ce problème, un modèle particulier d'urne est étudié. On savait déjà que la composition de cette urne avait une distribution limite gaussienne. Grâce à notre méthode, nous montrons un résultat plus fort de convergence locale des probabilités (théorème 3.1), ainsi qu'une expression de la fonction de grande déviation.

Ces résultats sont ensuite utilisés pour obtenir des renseignements sur les probabilités de déroulement des duels de Ok Corral. Nous donnons alors des expressions de la probabilité de survie de chacune des issues du duel. Nos travaux montrent en particulier que ces probabilités se relient aux nombres eulériens et nous en déduisons des équivalents asymptotiques précis avec termes d'erreur optimaux, ce qui permet de préciser un résultat de Kingman (théorème 3.5).

À l'aide de nos expressions exactes, nous donnons par ailleurs des expressions de tous les moments qui font intervenir des suites célèbres de nombres, comme les nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce, ou la fonction Q de Ramanujan. Au final, nous retrouvons la totalité des principaux résultats du premier article de Kingman [Kin99] par une méthode directe, tout en ajoutant des précisions.

3 Plan de ce mémoire

Ce mémoire s'organise en trois chapitres qui peuvent dans une large mesure être lus séparément. Le troisième chapitre nécessite cependant une lecture préliminaire de la partie 2.2, qui introduit la méthode de Flajolet-Gabarró-Pekari pour l'étude des urnes de Pólya-Eggenberger.

Le premier chapitre est consacré au phénomène de seuil des formules k-SAT. Il résume les définitions et contributions majeures au domaine depuis l'introduction de la conjecture. La partie 1.3 présente nos nouvelles preuves aux bornes de Dubois et Boufkhad, qui font l'objet d'un article publié :

> « Generating function and the satisfiability threshold » publié dans le journal *Discrete mathematics and theoretical computer sciences.* [Puy04].

La partie 1.4 introduit notre nouvelle notion de NPS-2 et présente le calcul de l'espérance du nombre de telles solutions pour une formule 3-SAT aléatoire.

Le second chapitre est consacré aux urnes triangulaires. Il introduit en particulier le modèle général, les principaux résultats, un aperçu des travaux qui restent à effectuer pour terminer la classification. Par la suite, nous présentons la technique algébrique de Flajolet-Gabarró-Pekari qui sera également utilisée dans le dernier chapitre. La suite du chapitre traite le cas des urnes triangulaires à deux couleurs de boules avant de traiter le cas des urnes à trois couleurs. Ce chapitre fait l'objet d'un article en préparation

> « Triangular urns of dimension 2 and 3. » par Vincent Puyhaubert et Philippe Flajolet.

Pour finir, le dernier chapitre est consacré au problème de Ok Corral. Après avoir introduit le problème, nous traitons un exemple d'urne initialement introduit par Friedman, avant d'appliquer

les résultats aux modèles de duels en question. Les travaux de ce chapitre seront également publiés dans l'article en préparation :

« Analytic combinatorics at Ok Corral. » par Vincent Puyhaubert et Philippe Flajolet.

Chapitre 1

Modèles d'urnes et seuil de satisfaisabilité

Sommaire

1.1 Seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT 14
1.2 Généralités sur les séries génératrices 23
1.3 Reprise des bornes existantes par séries génératrices 32
1.4 Raffinement de la notion de solution localement maximales 42
1.5 Discussions 54

Le problème k-SAT, qui consiste à déterminer si oui ou non une formule booléenne à k littéraux par clause est satisfaisable, est, pour $k \geq 3$, l'un des problèmes difficiles parmi les plus classiques de l'informatique théorique. Il est également célèbre pour sa transition de phase : les grandes formules vérifient une loi du type « tout ou rien » en ce sens que suivant la valeur d'un simple paramètre de contrôle, la « densité » des formules, elles sont soit presque toutes satisfaisables, soit presque toutes non satisfaisables. Le phénomène a été constaté expérimentalement depuis longtemps et pourtant, il n'a toujours pas été complètement validé par l'analyse. La principale difficulté rencontrée est que, jusqu'à maintenant, il n'existe pas de caractérisation simple du fait qu'une formule k-SAT soit satisfaisable. Seuls des résultats partiels ont été obtenus, en particulier de nombreuses bornes supérieures et inférieures au seuil de satisfaisabilité (ce sont des valeurs de la densité pour lesquelles seulement une partie du phénomène a pu être prouvée par l'analyse).

La littérature sur le sujet est cependant extrêmement abondante, puisque la question est ouverte depuis plus de vingt ans et que le problème est essentiel en complexité. Les méthodes employées jusqu'à présent ont été principalement des méthodes probabilistes : on cherche des caractéristiques vérifiées par « la plupart » des formules, ce qui permet d'éviter de considérer des cas délicats mais rares. Certaines méthodes sont combinatoires mais liées à des calculs compliqués. Notre approche vise l'utilisation de séries génératrices, un outil qui jusqu'alors n'avait que peu été utilisé dans ce domaine. La construction d'une formule, qui consiste à choisir avec replacement des clauses est modélisée par des jets de boules dans des urnes, et l'énumération de ces jets se fait alors à l'aide de ces séries. La méthode a donné naissance à une nouvelle preuve de deux résultats d'Olivier Dubois et Yacine Boufkhad concernant des bornes supérieures au seuil de satisfaisabilité, obtenues ici par des méthodes combinatoires. La nouvelle preuve est alors beaucoup plus courte et n'utilise que des résultats élémentaires de la théorie des séries génératrices. Elle fait l'objet d'un article paru dans la revue *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Sciences* [Puy04].

À la suite de notre succès, la notion de solution localement maximale employée par Dubois et Boufkhad a été améliorée, et les méthodes de séries génératrices ont permis d'effectuer un nouveau calcul. Celui-ci a donné naissance à une expression exacte de l'espérance du nombre de telles solutions pour une formule aléatoire et de retrouver la borne correspondante.

Plan: Ce chapitre se décompose en quatre parties. Les parties 1.1 et 1.2 servent d'introduction. La partie 1.1 présente le problème k-SAT et énonce précisément la conjecture du seuil de satisfaisabilité, ainsi que l'essentiel des résultats obtenus précédemment.

La partie 1.2 présente les techniques classiques de la combinatoire analytique et les méthodes de séries génératrices, pour en déduire des résultats qui seront employés par la suite. Nous dérivons notamment de la théorie générale des séries génératrices deux résultats simples mais essentiels pour la suite du chapitre (proposition 1.2 et 1.3). Nous redonnons par ailleurs une application classique des formules du crible aux séries génératrices qui sera utilisée à la partie 1.4.

La partie 1.3 présente les nouvelles preuves des deux bornes supérieures de Dubois et Boufkhad. Enfin, la partie 1.4 présente les résultats obtenus concernant l'énumération du nombre de solutions localement maximales après amélioration de la notion initiale de Dubois et Boufkhad.

Résultats principaux: Dans la partie 1.3, on donne une expression exacte, par série génératrice, de l'espérance du nombre d'impliquants premiers d'une formule 3-SAT aléatoire (théorème 1.4). Le résultat s'exprime simplement en terme d'une somme de coefficients de séries génératrices (alors que le résultat original utilise une somme double). Nous retrouvons alors un résultat de Dubois et Boufkhad montrant que la valeur $4,883$ est une borne supérieure au seuil, à l'aide d'une simple borne de col.

Nous effectuons ensuite un travail similaire pour calculer l'espérance du nombre de solutions localement maximales d'une formule k-SAT aléatoire, pour tout entier k (théorème 1.6), le résultat s'exprimant cette fois simplement comme le coefficient d'une série génératrice bien adaptée (le résultat original utilisait à nouveau une somme double). La borne $4,643$ en découle alors naturellement.

Dans la partie 1.4, on redéfinit deux critères plus restrictifs de solutions localement maximales, puis on donne une expression exacte, par série génératrice de l'espérance du nombre de chacun de ces types de solutions pour une formule 3-SAT aléatoire (théorèmes 1.8 et 1.9). Puis on en déduit que la borne obtenue par ces deux critères reste inchangée.

1.1 Seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT

Cette partie introduit le contexte des travaux sur le seuil de satisfaisabilité. On définit les notions de formule k-SAT, de problème de satisfaisabilité des formules booléennes et problème k-SAT. On présente des résultats de simulations qui ont amené à conjecturer l'existence d'un phénomène de seuil. Quelques autres problèmes pour lesquels le phénomène a été constaté sont brièvement exposés ainsi qu'un aperçu général de travaux sur ce genre de phénomènes.

Dans cette partie, nous ne faisons ainsi que des rappels. Les contributions personnelles de l'auteur ne feront leur apparition qu'à la partie 1.3.

1.1.1 Définitions et introduction du problème de satisfaisabilité

Définitions des objets considérés

On considère des formules booléennes construites sur un ensemble de n variables $\{x_1, \ldots, x_n\}$. À chaque variable x_i est associé une paire de *littéraux* $(x_i, \neg x_i)$. Une formule est alors construite sur l'ensemble des littéraux grâce aux deux connecteurs logiques : l'opérateur « et » de conjonction, noté

$\wedge$, et l'opérateur « ou » de disjonction, noté $\vee$. On peut la représenter sous forme d'arbre comme le montre l'exemple de la figure 1.1.

$$\Phi = \neg x_3 \vee x_4 \vee (x_2 \wedge \neg x_1)$$

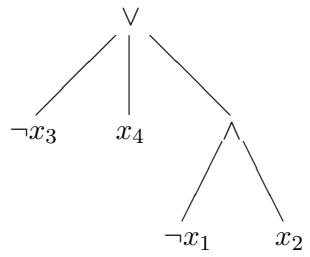


FIG. 1.1 – Représentation en arbre d'une formule booléenne.

La taille d'une formule peut être caractérisée de différentes manières, la plus simple étant le nombre de connecteurs logiques qui la constituent. Ainsi la formule Φ de la figure 1.1 est de taille 3. On vérifie bien qu'une fois l'ensemble des variables fixé, pour tout entier m, il y a un nombre fini de formules de taille m.

Chacune des variables x_i peut prendre la valeur VRAI ou FAUX. Le littéral x_i prend alors la même valeur tandis que le littéral $\neg x_i$ prend la valeur opposée. Pour simplifier les notations, on utilisera plutôt la notation $\{0, 1\}$ où 0 désigne la valeur FAUX et 1 désigne la valeur VRAI. Une formule est dite *satisfaisable* s'il existe une affectation des variables, c'est-à-dire une substitution de chacune des variables par une valeur 0 ou 1 telle que l'évaluation de la formule produise le résultat 1. La formule ci-dessus est ainsi satisfaisable avec, par exemple

$$x_1 = 0 \quad ; \quad x_2 = 1 \quad ; \quad x_3 = 1 \quad ; \quad x_4 = 0.$$

On dit alors que l'affectation est une *solution* de ϕ.

Une formule booléenne peut avoir une écriture avec une imbrication arbitraire de conjonctions et de disjonctions. Pour étudier la satisfaisabilité d'une formule, on souhaiterait n'avoir à considérer que les formes les plus simples. On introduit donc la définition suivante concernant la forme d'une formule.

Définition 1.1 *Une formule booléenne est dite de forme normale conjonctive si elle est construite par une conjonction de clauses, chacune de ces clauses étant une disjonction de littéraux.*

La formule ϕ suivante, construite sur un ensemble de 4 variables est ainsi de forme normale conjonctive

$$\Phi = (x_1 \vee x_2) \wedge (x_4 \vee \neg x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_1) \wedge (x_3 \vee \neg x_4)\,.$$

On en vient ainsi à la définition des formules de type k-SAT.

Définition 1.2 *Une formule de type k-SAT est une formule sous forme normale conjonctive, dont chacune des clauses comporte exactement k littéraux.*

Un exemple de formule 3-SAT est ainsi

$$\Phi = (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_5) \wedge (x_1 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5) \wedge (x_3 \vee \neg x_4 \vee \neg x_5).$$

Un résultat classique de logique est que toute formule booléenne Φ admet une formule $\tilde{\Phi}$ sous forme normale conjonctive équivalente, c'est-à-dire qui est satisfaite par une affectation A si et seulement si A satisfait également Φ. Malheureusement, la taille de la formule $\tilde{\Phi}$ est, dans le pire des cas, exponentielle en le nombre de variables de Φ.

Il est cependant possible, pour toute formule booléenne Φ de taille m construite avec n variables, de trouver par des manipulations élémentaires une formule $\tilde{\Phi}$ de type 3-SAT (ou même k-SAT pour tout entier $k \geq 3$, mais pas 2-SAT), de taille $O(m^2)$ sur $O(n)$ variables, qui soit satisfaisable si et seulement si Φ l'est. Par conséquent, si on dispose d'algorithmes rapides pour décider la satisfaisabilité d'une formule sous forme 3-SAT, on est capable de le faire pour n'importe quelle formule booléenne. Ceci explique pourquoi on s'intéresse particulièrement à l'étude des formules construites sous cette forme.

Définition du problème k-SAT

La question naturelle que l'on est maintenant amené à se poser est la suivante :

> **Problème:** Étant donné une formule booléenne Φ, existe-t-il un algorithme fonctionnant en temps polynomial en la taille de la formule qui permette de décider si oui ou non, la formule est satisfaisable ?

Ce problème est appelé *problème de satisfaisabilité des formules booléennes* ou plus couramment problème SAT. Si la formule donnée est de type k-SAT, alors on parle de problème k-SAT. Étant donné que décider si une formule booléenne quelconque est satisfaisable peut se ramener à décider si une formule de type 3-SAT est satisfaisable, on est amené à s'intéresser plus précisément au problème 3-SAT, qui est du coup potentiellement le plus dur à résoudre.

Bien entendu, il existe toujours une façon de décider la satisfaisabilité qui consiste à tester toutes les valeurs de Φ sous toutes les affectations possibles. Ceci étant, comme il existe 2^n affectations, cet algorithme est loin de fonctionner en temps polynomial, même si pour chacune des affectations, l'évaluation de la formule s'effectue en temps linéaire. La réponse à cette question est apportée par le théorème suivant.

Théorème 1.1 (Cook [Coo71]) *Le problème* 2-SAT *est résoluble en temps polynomial. Pour tout entier k supérieur ou égal à* 3*, le problème k-SAT est* NP*-complet.*

La définition de la NP-complétude d'un problème $(\mathcal{P})$ est la suivante :

- $(\mathcal{P})$ est dans la classe des problèmes NP c'est-à-dire que l'on peut décider en temps polynomial en la taille de l'entrée si une solution proposée pour le problème convient.
- Considérons un autre problème $(\mathcal{P}')$ de la classe NP. Il existe alors un polynôme R tel que toute instance de taille ℓ du problème soit équivalente à une instante de taille $O(R(\ell))$ de $(\mathcal{P})$. On dit alors que $(\mathcal{P}')$ est réductible en temps polynomial à $(\mathcal{P})$.

La NP-complétude du problème k-SAT découle du théorème de Cook démontré en 1971, qui assure que SAT est un problème NP-complet. Le problème k-SAT est en fait le problème NP-complet le plus classique et pour montrer la NP-complétude d'un autre problème, on montre souvent que le problème 3-SAT est réductible en temps polynomial à ce problème. Ainsi, le problème du circuit hamiltonien consistant à trouver un circuit passant une et une seule fois par tous les sommets dans un graphe donné est NP-complet car prouver la satisfaisabilité d'une formule booléenne de type 3-SAT peut se ramener à trouver un circuit hamiltonien dans un graphe de taille comparable à celle de la formule. Une grande classe de problèmes NP-complets et d'exemples de réductions peut-être trouvée dans le livre de Garey et Johnson [GJ79].

Naturellement, on se demande si la classe des problèmes NP est égale ou non à la classe des problèmes résolubles en temps polynomial. La question reste ouverte. Elle est même devenue l'une des questions les plus célèbres des mathématiques, au même titre que l'était le problème de Fermat (récemment tombé) ou la conjecture de Riemann. De nombreux algorithmes ont été créés pour déterminer si une formule 3-SAT était satisfaisable ou non, le plus célèbre restant la procédure de Davis-Putnam [DP60]. D'autre algorithmes plus performants existent à ce jour mais tous fonctionnent en temps exponentiel au moins dans le cas le pire. Cependant, l'utilisation de ces algorithmes a pu au moins mettre en évidence des phénomènes de seuils que l'on présente dans la partie suivante.

1.1.2 Transitions de phase

Dans de nombreux problèmes de l'informatique, la complexité d'un programme dans le cas le pire n'est que grossièrement indicatrice de la complexité typiquement observée. Pour ne citer qu'un exemple, l'algorithme de tri QUICKSORT utilise dans le pire des cas $O\left(n^2\right)$ opérations pour trier une liste de longueur n (quand la liste est déjà triée), alors qu'en moyenne, il n'en nécessite que $O\left(n \ln n\right)$. On cherche alors parfois à étudier non plus la complexité générale d'un algorithme mais sa complexité dite « réelle », c'est-à-dire présente soit en moyenne, soit avec grande probabilité. On cherche également à délimiter les régions dites « faciles », où des algorithmes peuvent résoudre rapidement un problème, des régions difficiles où le temps le pire semble inévitable.

Les problèmes NP-complets n'échappent pas à cette étude. La grande singularité de cette classe de problèmes explique sans doute que, dans certains cas, des comportements particulièrement violents ont pu être mis en évidence. Dans le cas particulier du problème 3-SAT, la figure 1.2 montre l'évolution de la probabilité de satisfaisabilité en fonction du rapport des deux paramètres principaux des formules : le nombre m de clauses et le nombre n de variables. Les diverses courbes ont été obtenues chacune avec un nombre de variables fixé, en faisant alors évoluer ce rapport m/n.

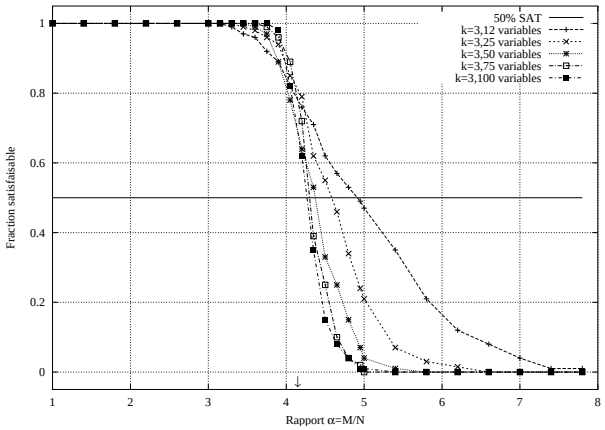


FIG. 1.2 – Proportion de formules satisfaisables en fonction du paramètre m/n.

Cette figure a été produite par Ludovic Meunier, lors de son stage de DEA, à la suite de ses travaux sur le problème 3-SAT [Meu00].

Comme on peut le constater, la probabilité de satisfaisabilité chute abruptement de 1 à 0 au voisinage de la valeur $r_3 \approx 4,25$. Cette chute est d'autant plus prononcée que le nombre de variables est grand. Il semblerait que lorsque les deux quantités m et n tendent vers l'infini, le domaine des

formules 3-SAT puisse se scinder en deux régions séparées par une valeur de seuil du paramètre m/n pour lesquelles

- Si m/n est inférieur à r_3, la formule est presque sûrement satisfaisable.
- Si m/n est supérieur à r_3, la formule est presque sûrement non satisfaisable.

Lorsque ce phénomène est constaté, on parle alors de transition de phase par analogie avec la physique : de la même manière, la température est un paramètre qui sépare l'état physique de l'eau en deux phases, solide/liquide, à la valeur 0^oC et en deux autres phases, liquide/vapeur, à la valeur 100^oC.

> **Remarque:** Par « presque sûrement », on entend avec probabilité $1 - o(1)$ lorsque m et n tendent vers l'infini (à ne pas confondre avec la convergence presque sûrement de Lebesgue).

Le problème 3-SAT n'est pas le seul problème pour lequel on a constaté une transition de phase. Pour tout entier k, le problème k-SAT semble en présenter une (le point de seuil étant de plus en plus grand à mesure que k augmente). Mais plusieurs problèmes voisins de logique en présentent. On citera par exemple :

• k-XOR-SAT : Est-il possible de satisfaire une formule qui est une conjonction de clauses, chacune étant de la forme $\ell_1 \oplus \ell_2 \oplus \cdots \oplus \ell_k$ où les $(\ell_i)_{i\in[\![1;k]\!]}$ sont des littéraux et $\oplus$ désigne l'addition modulo 2 ? On peut noter que décider la satisfaisabilité d'une telle formule revient à résoudre une équation linéaire à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Ce problème est donc résoluble en temps polynomial (à l'aide du pivot de Gauss par exemple). Le phénomène de seuil de ce problème a notamment été étudié par Olivier Dubois (voir paragraphe 1.1.4).

• 1-DANS-k-SAT : Est-il possible de satisfaire une formule k-SAT de sorte que un et un seul littéral soit satisfait dans chaque clause ? Schaefer [Sch78] a montré que ce problème était un problème NP-complet. À notre connaissance, l'étude du seuil de ce problème n'a fait l'objet que d'une courte note d'Achlioptas (voir également le paragraphe 1.1.4).

Des problèmes intervenant en dehors du contexte de logique des propositions présentent ce genre de phénomène, comme le problème de la partition d'entiers (séparer un ensemble d'entiers en deux sous-ensembles disjoints de sommes égales ou qui diffèrent de 1). De nombreux phénomènes de seuil fleurissent également en théorie des graphes. Si l'on considère les graphes à n sommets et m arêtes, on a à nouveau des résultat qui apparaissent presque sûrement en fonction du paramètre m/n :

- s'il est inférieur à $1/2$, le graphe ne comporte presque sûrement que des arbres, c'est-à-dire avec forte probabilité.
- s'il vaut $1/2$, on observe presque sûrement la présence d'une « composante géante » (c'est-à-dire un sous graphe connexe) de taille $O\left(n^{2/3}\right)$.
- enfin, s'il est supérieur à $1/2$, il y a une unique composante géante de taille $O(n)$.

Les premiers travaux sur de tels modèles de graphes aléatoires remontent à Erdös et Rényi ([ER59] et [ER60]). Les résultats célèbres ci-dessus peuvent être notamment retrouvés dans l'article de Janson et al. [JKŁP93].

Le monde de la physique comporte également des légions de problèmes dont la modélisation mathématique présente un phénomène de seuil (problème de percolation, des verres de spins).

Pour en revenir à k-SAT, Les observations ont montré que les algorithmes de recherche de solutions devenaient particulièrement lents lorsque les instances du problème k-SAT étaient proches de la zone de seuil. En revanche, ils sont relativement performants si l'on considère des instances qui en sont assez éloignées. Ce phénomène semble être dû au fait que si la formule comporte peu de clauses, il est très facile de trouver une solution puisqu'il y en a en fait beaucoup. Par ailleurs, si elle comporte beaucoup de clauses, il est plus facile d'en sélectionner une partie pour obtenir

un sous-ensemble de clauses contradictoires. Trouver la valeur exacte du seuil a donc un intérêt essentiel du point de vue de l'algorithmique en logique des propositions.

1.1.3 Conjecture du seuil de satisfaisabilité

Au vu des résultats des simulations, on peut donc donner un énoncé précis de la conjecture de seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT.

Conjecture 1.1 (Seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT) *Soit $\mathcal{F}_{n,m,k}$ l'ensemble des formules booléennes de type k-SAT à m clauses, construites sur un ensemble de n variables. Pour tout entier k, il existe un réel r_k tel que pour tout réel r, on ait*

- *Si r est strictement supérieur à r_k alors*

$$\mathbb{P}\left(\Phi \in \mathcal{F}_{n,m,k} \text{ est satisfaisable}\right) \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\geq r}]{} 0.$$

- *Si r est strictement inférieur à r_k alors*

$$\mathbb{P}\left(\Phi \in \mathcal{F}_{n,m,k} \text{ est satisfaisable}\right) \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq r}]{} 1.$$

En ce qui concerne la construction des formules, on peut rajouter éventuellement quelques conditions pour simplifier l'étude tout en s'assurant que les différentes conjectures restent équivalentes. En effet, jusqu'à présent, les clauses peuvent être construites en choisissant à priori n'importe quels littéraux. Ainsi la formule peut contenir des clauses de la forme :

- $(x_i \vee x_i \vee x_j)$ qui est en fait équivalente à la clause à deux littéraux $(x_i \vee x_j)$.
- $(x_i \vee \neg x_i \vee x_j)$ qui est en fait une tautologie, c'est-à-dire une proposition toujours vraie.

Le modèle le plus couramment utilisé est justement celui où l'on interdit aux formules de contenir les deux types de clause juste cités. Plusieurs autres modèles pour l'ensemble $\mathcal{F}_{n,m,k}$ ont été proposés : on impose parfois aux formules de ne pas contenir plusieurs fois la même clause. Tous ces modèles sont équivalents, au sens où, asymptotiquement, la probabilité de satisfaisabilité reste inchangée. Ainsi, si la conjecture était validée pour n'importe lequel de ces modèles, elle serait vraie pour tous les autres.

1.1.4 Présentation des travaux déjà existants

Phénomènes de seuils

Concernant les problèmes de transitions de phases, le phénomène a pu être prouvé pour certains des problèmes précédemment cité.

• PARTITION D'ENTIERS : Borgs, Chayes et Pittel [BCP01] ont montré que si l'on considérait un ensemble de n entiers, pris entre 1 et 2^m, avec $m, n \longrightarrow \infty$ et $m/n = \kappa$, alors le problème du partitionnement d'entiers avait presque sûrement une solution si $\kappa < 1$ mais n'en avait pas presque sûrement si $\kappa > 1$. Plus précisément, ils ont même réussi à obtenir la fenêtre de transition du problème, c'est-à-dire une expression au second ordre de la valeur du rapport

$$m/n = 1 - \frac{\log_2 n}{2n} + \frac{\lambda}{n}$$

pour lequel la probabilité d'existence d'une solution converge vers une valeur $p(\lambda)$ non nulle.

• 2-SAT : Chvatàl et Reeb [CR92] ont prouvé l'existence d'un seuil de satisfaisabilité à la valeur $r_2 = 1$. Le résultat a ensuite été affiné par plusieurs auteurs, Goert, Fernandez de la Vega, Verhoeven, puis Frieze et Sorkin. Les résultats les plus fins furent enfin fournis par Bollobàs, Borgs, Chayes, Kim et Wilson [BBC+01] et concernent également la fenêtre de transition du problème.

• 3-XOR-SAT : Olivier Dubois et Jacques Mandler [DM02] ont réussi à établir que ce problème présentait également une transition de phase dont la valeur de seuil était donnée par $c_3 \approx 0.917935$. Cette valeur est ainsi la première valeur de seuil qui ne soit pas une valeur rationnelle simple.

• 1-DANS-k-SAT : Dans une courte note [ACIM01], Dimitris Achlioptas et al. ont annoncé une valeur de seuil de $1/\binom{k}{2}$ mais jusqu'à présent, aucune preuve complète n'est disponible à notre connaissance.

Concernant la transition de phase du problème 3-SAT, la littérature sur le sujet est extrêmement abondante mais le problème reste un problème ouvert depuis plus de 20 ans. Jusqu'à présent, seuls des résultats partiels ont pu être obtenus. Le résultat le plus surprenant reste celui de Ehud Friedgut.

Théorème 1.2 (Friedgut [Fri99]) *Pour tout entier k, il existe une suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que pour tout ϵ strictement positif, on ait d'une part*

$$\mathbb{P}\left(\Phi \in \mathcal{F}_{n,m,k} \text{ est satisfaisable}\right) \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\geq(\gamma_n+\epsilon)}]{} 0,$$

et d'autre part

$$\mathbb{P}\left(\Phi \in \mathcal{F}_{n,m,k} \text{ est satisfaisable}\right) \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq(\gamma_n-\epsilon)}]{} 1.$$

Malheureusement, il n'a toujours pas été prouvé que la suite $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, la limite étant alors le seuil de satisfaisabilité (elle pourrait osciller faiblement en fonction de n).

Encadrements du seuil de k-SAT

En 1983, un premier résultat dû à Franco et Paull [FP83] donnait une majoration de la localisation d'un éventuel seuil. Depuis, de nombreux efforts ont été faits pour améliorer les bornes supérieures et inférieures à cette éventuelle valeur de seuil. En effet, pour trouver une borne supérieure (resp. inférieure), il suffit simplement de trouver une valeur r^+ (resp. r^-) pour laquelle pour tout $r > r^+$ (resp. pour tout $r < r^-$) on ait

$$\mathbb{P}\left(\Phi \in \mathcal{F}_{n,m,k} \text{ est satisfaisable}\right) \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\geq r}]{} 0 \quad (\text{resp. } 1 \text{ avec } m/n \leq r)\,.$$

Par la suite, on parlera par commodité de langage de *borne supérieure (resp. inférieure) du seuil de satisfaisabilité*.

Le tableau suivant donne une liste (non exhaustive) des bornes précédemment obtenues. Les valeurs marquées par une étoile sont celles obtenues par une méthode qui peut s'étendre au problème k-SAT pour tout entier k. Les articles de Dubois [Dub01] (pour les bornes supérieures), Franco [Fra01] et Achlioptas [Ach01] (pour les bornes inférieures) expliquent les techniques utilisées pour les obtenir.

Les méthodes permettant d'obtenir les bornes supérieures diffèrent radicalement de celles utilisées pour obtenir des bornes inférieures. La plupart des bornes inférieures ont été obtenues par l'étude d'un algorithme (en particulier toutes celles présentées dans le tableau précédent). Le principe est simple.

Bornes inférieures du seuil de 3-SAT			Bornes supérieure du seuil de 3-SAT		
2.9*	Chao, Franco	[CF90]	5,191*	Franco, Paull	[FP83]
2/3*	Chvátal, Reed	[CR92]	5,081	El Mafthoui, Fernandez de la Vega	[EMFdlV95]
1.63	Broder et al.	[BFU93]	4,883*	Dubois, Boufkhad	[DB99]
3,003*	Frieze, Suen	[FS96]	4,762*	Kamath et al.	[KMPS95]
3,145	Achlioptas	[Ach00]	4,643*	Dubois, Boufkhad	[DB97]
3,26	Achlioptas, Sorkin	[AS00]	4,602	Kirousis et al.	[KKKS98]
3,42	Kaporis, Kirousis, Lalas	[KKL02]	4,596	Janson et al.	[JSV00]
			4,506	Dubois et al.	[DMB03]

FIG. 1.3 – Bornes supérieures et inférieures de la valeur du seuil de 3-SAT.

On considère un algorithme qui prend en argument une formule Φ de type k-SAT et tente de renvoyer en sortie une solution de cette formule. Il peut bien entendu échouer, et ce, même si la formule est satisfaisable (le but étant qu'il fonctionne rapidement et que son étude soit facile, non qu'il soit particulièrement performant). Chaque algorithme affecte au fur et à mesure des valeurs à certaines des variables, selon des règles qui assurent qu'à aucun moment il ne contredit la formule. Il réussit son exécution s'il arrive à donner une valeur à chacune d'entre elles et échoue si il n'a pas réussi à la terminer en affectant toutes les variables. Si l'on arrive à prouver que pour une certaine valeur de m/n, l'algorithme trouve une solution presque sûrement quand m et n tendent vers l'infini, alors, presque sûrement toutes les formules sont satisfaisables et la valeur du rapport est une borne inférieure au seuil de satisfaisabilité.

L'algorithme de Broder, Frieze et Upfal [BFU93] fonctionne ainsi de la manière suivante. Les auteurs définissent la notion de littéral pur, c'est-à-dire qui n'apparaît que sous forme positive ou négative. Si l'on donne alors la valeur 1 à ce littéral, on satisfait toutes les clauses qui le contiennent sans prendre le risque que d'autres clauses soient contredites ou comportent un littéral à la valeur 0 et ainsi ne deviennent plus difficiles à satisfaire. L'algorithme suit donc ce que l'on nomme la règle du littéral pur :

Entrée : Une formule Φ de type k-SAT.
Sortie : Une solution de Φ ou le résultat *échec*.

Tant que il reste des littéraux purs **faire**
  Choisir un littéral pur au hasard
  Donner la valeur 1 à ce littéral (et donc la bonne valeur 0 ou 1 à la variable associée).
  Retirer toutes les clauses de Φ qui contiennent ce littéral.

Si la formule ne comporte plus de clauses
  Donner n'importe quelle valeur aux variables non encore affectées et renvoyer le résultat.
Sinon
  Renvoyer *échec*.
Fin de l'algorithme

FIG. 1.4 – Algorithme de la règle du littéral pur.

Les autres algorithmes fonctionnent sur le même principe, mais les règles sont différentes concer-

nant le choix de la variable à affecter (certains tentent même de donner une valeur à deux variables en même temps [Ach00]).

On peut remarquer que la procédure permet ici à chaque instant de la boucle de conserver Φ sous forme k-SAT. D'autres algorithmes ne gardent pas cette propriété. Ils donnent des valeurs à des variables qui apparaissent sous forme positive et négative. On est alors ramené à étudier l'algorithme sur des formules dont certaines clauses contiennent des littéraux déjà contredits, ou ce qui revient au même, des formules contenant des clauses à seulement deux voire même un littéral. Dans ces cas, les algorithmes appliquent également d'autre règles, avec un certain ordre de priorité, comme par exemple :

- (**1**) S'il existe une clause avec un seul littéral, alors on doit forcément le satisfaire (et donc s'il y a ce littéral et sa négation chacun dans une clause de longueur 1, on échoue forcément).
- (**2**) On applique ensuite la règle du littéral pur.
- (**3**) S'il n'y a pas de littéral pur et pas de clause à un seul littéral, on peut par exemple chercher le littéral qui apparaît dans le plus grand nombre de clauses et lui donner la valeur 1 de sorte qu'un maximum de clauses soient satisfaites. Puis on recommence après avoir retiré de la formule toutes les clauses que l'on a satisfaites.

Il faut cependant noter que plus on rajoute de règles, plus l'étude de l'algorithme et de sa probabilité de succès est difficile. Pour trouver de nouvelles bornes inférieures par cette méthode, la difficulté principale consiste à imaginer de nouvelles règles sans pour autant rendre l'analyse trop compliquée. Les meilleures bornes inférieures obtenues à ce jour, qui sont présentées dans le tableau de la figure 1.3, ont ainsi été obtenues grâce à des algorithmes ayant des règles de plus en plus évoluées (afin d'augmenter la probabilité de succès), mais avec une étude de moins en moins simple.

Concernant les méthodes donnant des bornes supérieures, dans la plupart des cas, les auteurs proposent une majoration de la probabilité de satisfaisabilité puis étudient pour quelles valeurs du paramètre m/n leur majorant tend vers 0 quand les deux quantités m et n tendent vers l'infini. Le plus simple pour obtenir une majoration reste de borner le nombre de formules satisfaisables par le cardinal d'un ensemble plus grand puis de diviser le cardinal de cet ensemble par le nombre total de formule. Comme on le verra par la suite, les séries génératrices interviennent alors dans ce contexte précis, de part la puissance de ces objets dans le cadre du dénombrement.

Physique de la transition de phase de 3-SAT

Les phénomènes de seuils, de manière générale, sont constatés aussi bien en mathématiques, qu'en informatique théorique ou physique statistique. Cette situation amène ainsi à étudier ces problèmes du point de vue de chacune de ces sciences, et à rapprocher les résultats obtenus de sorte qu'un progrès dans l'une de ces disciplines puisse profiter aux autres. Ces dernières années, plusieurs physiciens ont étudié la transition de phase de k-SAT, ainsi que d'autre problèmes où se présentaient des phénomènes de seuils (comme la composante géante des graphes aléatoires). Les méthodes de la physique ne sont pas toujours rigoureuses, néanmoins, elles ont souvent apporté une bonne compréhension du problème dans les régions où l'analyse mathématique n'aboutissait pas.

Du point de vue de la physique statistique, une affectation de valeurs à n variables booléennes est vue comme une *configuration*. À tout couple constitué d'une formule Φ et d'une affectation A, on associe une fonction de coût $E(\Phi, A)$ qui correspond au nombre de clauses de Φ qui ne sont pas satisfaites par A. Le minimum de cette fonction sur l'ensemble des configurations est alors noté $E(\Phi)$. Cette variable aléatoire sur l'espace des formules se concentre fortement au voisinage de sa valeur moyenne, notée $\overline{E(\Phi)}$, pour de grandes valeurs des paramètres. Étant égale au nombre minimal de clauses non satisfaites par une affectation, cette moyenne est nulle dans la région de

satisfaisabilité et strictement positive dans la région de non-satisfaisabilité.

Cette moyenne n'est pas aisément calculable. Pour récupérer de l'information sur celle-ci, on passe par une autre variable aléatoire définie par

$$Z(\Phi) = \sum_{A} \exp(-E(\Phi, A)/T)$$

où T est un paramètre réel fixe (la « température »). On peut constater que lorsque T tend vers 0, le logarithme de cette variable admet alors un développement de la forme

$$\ln Z(\Phi) = \ln N(\Phi) - \frac{E(\Phi)}{T} + ...$$

où la notation $N(\Phi)$ désigne le nombre de configurations pour lesquelles l'énergie est minimale et où le reste est formé de termes exponentiellement petits. Une technique, appelée *méthode des répliques*, consiste alors à calculer le moment d'ordre ℓ de cette variable aléatoire en utilisant typiquement une méthode de Laplace pour n grand. Le point non rigoureux de la méthode des répliques consiste alors à effectuer une sorte de prolongement analytique. Une fois l'équivalent asymptotique obtenu, le paramètre ℓ est considéré comme une variable réelle et les renseignements désirés sont recueillis de cet équivalent, à l'aide d'arguments heuristiques, pour ℓ voisin de 0 grâce au développement

$$Z^{\ell}(\Phi) = 1 + \ell \ln Z(\Phi) + O\left(\ell^2\right).$$

Ce type d'étude a été notamment effectué par Olivier Martin, Rémi Monasson et Riccardo Zecchina, dont une présentation des travaux plus exhaustive peut être trouvée dans le volume spécial de *Theoretical Computer Sciences* sur les transitions de phase [MMZ01]. Dans le cadre de la transition de phase de 3-SAT, ces auteurs ont permis de mettre en évidence un phénomène de fragmentation. Au voisinage d'une valeur approximative $\approx 4,0$ (soit un peu avant la valeur de seuil), l'ensemble des solutions passe d'un état de type composante « connexe » de taille exponentielle, à une réunion d'un nombre exponentiel de plus petits sous-ensembles « connexes ». La méthode aurait également permis, selon des renseignements d'Olivier Dubois, de trouver exactement ses équations donnant la valeur exacte du seuil de 3-XOR-SAT (bien que l'argument ne soit pas rigoureux pour autant).

Les physiciens espèrent ainsi arriver à obtenir des équations donnant une valeur de seuil d'environ $4,25$, qu'une analyse alors plus rigoureuse pourrait valider comme la position exacte de la transition de phase. Mais même si la valeur du seuil n'a pas encore été atteinte par ce type de méthode, le problème k-SAT présente d'ores et déjà une physique très riche.

1.2 Généralités sur les séries génératrices

Cette seconde partie présente quelques définitions et propriétés sur les séries génératrices. Les résultats présentés sont essentiellement de nature algébrique et ne seront utilisés que dans le cadre de l'énumération de certaines classes d'objets. Plus précisément, ils serviront à déterminer la cardinalité de certains ensembles de formules booléennes.

Les points évoqués ne sont pour la plupart que des rappels. Néanmoins, nous utilisons dans cette partie la théorie des séries génératrices pour démontrer deux résultats simples mais essentiels pour la suite de nos travaux.

En effet, notre approche des bornes supérieures au seuil de satisfaisabilité utilise une modélisation de la contruction de formules k-SAT par des jets de boules dans des urnes. Or, comme on le constatera

dans cette partie, la combinatoire de ces séquences de jets se fait naturellement et très simplement à l'aide de séries génératrices. La proposition 1.2, dont la preuve est élémentaire, est la clé de voûte de la partie 1.3. Elle sera également utilisée, sous une généralisation multivariée, dans la partie 1.4, ainsi que la proposition 1.3 et les méthodes du crible à la fin du paragraphe 1.2.3.

1.2.1 Définitions et exemples

On dispose d'une classe d'objets $\mathcal{F}$. À chaque objet ω est associé une taille $|\omega|$ et pour tout entier m, le nombre d'objets de taille m est fini et noté F_m. On cherche à obtenir des informations sur la suite de nombres $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ (formule close pour l'expression de F_m ou équivalent asymptotique par exemple). On définit la *série génératrice ordinaire* de la suite $F(z)$ de la manière suivante :

$$F(z) = \sum_{\omega\in\mathcal{F}} z^{|\omega|} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m\, z^m.$$

Il est parfois possible d'obtenir une expression de $F(z)$, sous forme close ou implicite. On utilise alors généralement des développements en série en 0 ou la formule de Cauchy pour obtenir les renseignements souhaités sur les coefficients F_m.

Quelques exemples classiques

Pour certains ensembles simples, les séries génératrices s'obtiennent directement. Considérons par exemple l'ensemble des entiers naturels, où le poids d'un entier est égal à sa valeur. Il y a alors un seul objet de taille n de sorte que $F(z) = 1/(1-z)$. Si maintenant $\mathcal{F}$ est l'ensemble des mots sur un alphabet $\{a, b\}$ pour lesquels la taille est égale à la longueur, on a cette fois 2^m objets de taille m de sorte que $F(z) = 1/(1-2z)$.

Pour d'autre cas, ce sont les propriétés de récurrence de la suite $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ qui sont utilisées. Considérons par exemple l'ensemble des arbres binaires, c'est-à-dire des arbres enracinés, planaires, non étiquetés où chaque sommet a au plus deux fils. On note C_m le nombre de tels arbres à m sommets. Par convention, on pose $C_0 = 1$. On trouve facilement les premiers termes, $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, $C_3 = 5$. D'autre part, en remarquant qu'un arbre de taille $m \geq 1$ est formé par une paire de sous-arbres (gauche et droit) de taille k et $m-k$ où k est un entier compris entre 0 et $m-1$, il vient la récurrence

$$\forall m \geq 1 \qquad C_m = \sum_{k=0}^{m-1} C_k\, C_{m-k}. \tag{1.1}$$

Cette équation se traduit sur la série génératrice $C(z)$ par la relation

$$C(z) = zC(z)^2 + 1 \quad \text{ et donc } \quad C(z) = \frac{1-\sqrt{1-4z}}{2z}. \tag{1.2}$$

Le développement en série de la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t}$ permet alors de retrouver l'expression classique de C_m appelé $m^{\text{ième}}$ nombre de Catalan

$$\forall m \in \mathbb{N} \qquad C_m = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

Dictionnaires

Lorsque les objets de la classe que l'on considère sont obtenus par une construction simple à partir d'objets d'autres classes dont on connaît les séries génératrices, on utilise alors des « dictionnaires » qui traduisent directement la construction utilisée en relation sur les séries. Si par exemple, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux classes dont les fonctions de poids sont notées $|\cdot|_{\mathcal{A}}$ et $|\cdot|_{\mathcal{B}}$, la série génératrice de la classe $\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ muni de la fonction de poids définie par $|(\alpha, \beta)|_{\mathcal{C}} = |\alpha|_{\mathcal{A}} + |\beta|_{\mathcal{B}}$ est donnée par

$$C(z) = A(z)B(z). \tag{1.3}$$

Le tableau de la figure 1.5 donne les correspondances les plus classiques. Lorsqu'un objet est formé à partir de plusieurs objets de différentes classes, son poids est égal à la somme des poids de tous ses composants. Pour les suites finies, la classe $\mathcal{A}$ ne doit pas contenir d'objet de taille 0 sinon, pour tout entier m, il existe une infinité de suites finies de taille m (attention à ne pas confondre taille avec longueur).

Construction		*Série génératrice*
Union disjointe	$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) + B(z)$
Produit	$\mathcal{C} = \mathcal{A} \times \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) \cdot B(z)$
Suites finies	$\mathcal{C} = \Sigma(\mathcal{A})$	$C(z) = (1 - A(z))^{-1}$
Ensembles	$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$	$C(z) = \exp\left(A(z) - \frac{1}{2}A(z^2) + \cdots\right)$

FIG. 1.5 – Constructions classiques et traductions en série génératrice.

La relation (1.2) s'obtient alors directement à partir de ce tableau en remarquant que si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des arbres binaires, on a une bijection des ensembles

$$\mathcal{F} \quad \longleftrightarrow \quad \emptyset \quad + \quad \{\bullet\} \times \mathcal{F} \times \mathcal{F}$$

puisqu'un arbre binaire est soit vide, soit composé d'une racine et de deux sous-arbres également binaires.

Les séries génératrices ordinaires, pour des raisons qui seront explicitées par la suite ne sont pas toujours adaptées à l'étude de certaines classes d'objets. Le paragraphe suivant est consacré à la présentation générale des séries génératrices exponentielles. On donne ensuite une application de cette théorie à un problème plus spécifique de jets de boules dans des urnes, qui sera celui rencontré pour l'énumération de certaines formules booléennes, dans la partie suivante.

1.2.2 Séries génératrices exponentielles

Objets étiquetés

De nombreux objets apparaissant dans le monde de la combinatoire font intervenir des étiquettes dans leur structure. Plus précisément, à chacun des « atomes » qui forment ces objets est associée une valeur, réelle parfois mais la plupart du temps entière, toutes ces valeurs étant distinctes. L'exemple le plus classique est celui d'un graphe étiqueté, dont les sommets sont étiquetés par les entiers de 1 à m (l'entier m étant ici égal au nombre de sommets). Les permutations sont également des objets étiquetés (on peut les voir comme des suites de m cellules, ou chaque cellule a une étiquette). Pour un objet étiqueté, la taille est alors toujours définie comme le nombre d'étiquettes. Pour ces classes,

on définit alors la *série génératrice exponentielle*, donnée pour une classe $\mathcal{F}$ dont F_m désigne le nombre d'objets de taille m par

$$F(z) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}} \frac{1}{|\omega|!} z^{|\omega|} = \sum_{m=0}^{\infty} F_m \frac{z^m}{m!}.$$

La série génératrice exponentielle des permutations est alors donnée par $F(z) = 1/(1-z)$.

Produit étiqueté

Comme pour les séries génératrices ordinaires, il est naturel de chercher des constructions simples entre des classes d'objets étiquetés qui se traduisent en des équations simples sur les séries génératrices exponentielle.

Le produit cartésien de deux ensembles ne peut être utilisé tel quel, puisqu'un couple d'objets étiquetés n'est plus correctement étiqueté. En effet, l'un des objets est étiqueté alors par les entiers 1, 2, ..., m et le second par les entiers 1, 2, ..., n. Le couple d'objets fait donc intervenir deux fois certains entiers dans leurs étiquettes. Pour définir correctement un produit, un ré-étiquetage est nécessaire. Le produit ré-étiqueté de deux objets $\omega_{\mathcal{A}}$ et $\omega_{\mathcal{B}}$ de taille m et n est alors défini via deux ensembles d'indices

$$a_1 < \ldots < a_m \quad \text{et} \quad b_1 < \ldots < b_n \quad \text{tels que} \quad \bigcup_{i=1}^{m} \{a_i\} \bigcup_{j=1}^{n} \{b_j\} = [\![1; m+n]\!]$$

par le couple $(\omega_{\mathcal{A}}, \omega_{\mathcal{B}})$ où l'atome étiqueté par i dans $\omega_{\mathcal{A}}$ (resp. j dans $\omega_{\mathcal{B}}$) est dorénavant étiqueté par a_i (resp. b_j). La figure 1.6 présente un exemple de ré-étiquetage entre deux graphes.

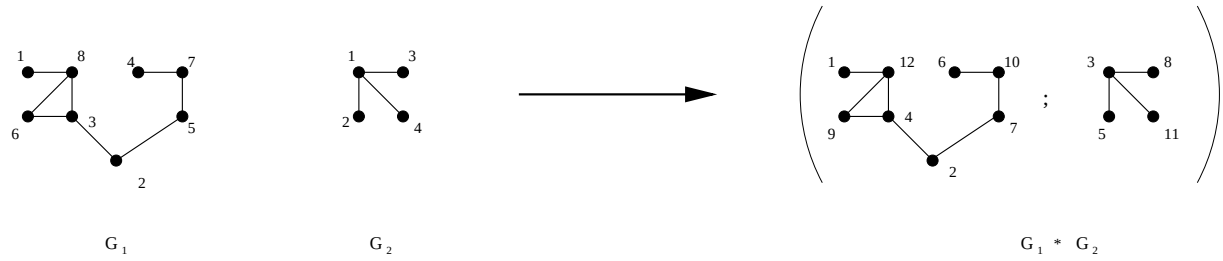


FIG. 1.6 – Exemple de ré-étiquetage pour deux graphes connexes de taille 4 et 8, les indices des nouvelles étiquettes étant $\{1, 2, 4, 6, 7, 9, 10, 12\}$ et $\{3, 5, 8, 11\}$. On notera que l'on obtient une paire ordonnée de graphes connexes à 8 et 4 sommets, et non pas un graphe à 12 sommets et 2 composantes connexes.

Pour m et n deux entiers donnés, il y a $\binom{m+n}{n}$ façons de choisir de nouvelles étiquettes. Ainsi étant donné deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ d'objets étiquetés, si $\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$ est la classe de tous les produits ré-étiquetés d'un élément de $\mathcal{A}$ et d'un élément de $\mathcal{B}$, pour tous les choix d'étiquettes possibles, alors il vient naturellement pour les séries génératrices exponentielles la relation

$$C(z) = A(z)B(z).$$

On peut bien entendu généraliser le produit ré-étiqueté pour des produits d'un nombre quelconque d'ensembles. On a alors à nouveau un dictionnaire de traduction des constructions en relation sur les séries génératrices donné par la figure 1.7.

Construction		*Série génératrice exponentielle*
Union disjointe	$\mathcal{C} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) + B(z)$
Produit ré-étiqueté	$\mathcal{C} = \mathcal{A} \star \mathcal{B}$	$C(z) = A(z) \cdot B(z)$
Suites finies ré-étiquetées	$\mathcal{C} = \Sigma(\mathcal{A})$	$C(z) = (1 - A(z))^{-1}$
Ensembles ré-étiquetés	$\mathcal{C} = \mathcal{P}(\mathcal{A})$	$C(z) = \exp(A(z))$

FIG. 1.7 – Constructions classiques et traductions en série génératrice exponentielle.

Comme application de ce tableau, on peut par exemple remarquer qu'une permutation peut être vue comme un ensemble ré-étiqueté de cycles. Par conséquent, la série génératrice exponentielle des cycles vérifie $1/(1-z) = \exp C(z)$ soit $C(z) = -\ln(1-z)$. On retrouve ainsi indirectement que le nombre de permutations circulaires de longueur m est égal à $(m-1)!$.

Application aux problèmes d'urnes

On en vient maintenant aux applications qui nous intéressent. On considère un problème général. Soit $M_1, \ldots, M_p$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. On dispose de p urnes et on veut jeter m boules distinctes (numérotées par 1, 2, ..., m), de sorte qu'à la fin, le nombre de boules dans l'urne i soit un élément de M_i. Par exemple, si $M_1 = \{0, 1, 2\}$ et $M_2 = \{2, 3, \ldots\}$, c'est que l'on veut au plus deux boules dans la première urne et au moins 2 dans la seconde. La question est alors de savoir de combien de manières on peut faire de tels jets, ce nombre étant noté F_m.

Proposition 1.1 *La série génératrice de la suite $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est donnée par*

$$F(z) = \prod_{i=1}^{p} \left(\sum_{m \in M_i} \frac{z^m}{m!} \right).$$

Preuve : Considérons une certaine séquence de jets de longueur quelconque. On peut alors voir cette séquence comme un ré-étiquetage de p séquences de jets dans chacune des p urnes, les étiquettes de chaque jet étant données par l'instant auquel la boule est tombée dans une urne. La série génératrice exponentielle de la suite $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est alors donnée par le produit de p séries génératrices $F_1, \ldots, F_p$, où F_i compte le nombre de façons de jeter des boules dans l'urne i de sorte qu'à la fin, le nombre de boules dans l'urne soit un élément de M_i. Comme pour tout entier i, il n'y a qu'une façon de jeter i boules, on déduit que

$$F_i(z) = \sum_{m \in M_i} \frac{z^m}{m!}$$

et la proposition en découle aussitôt. □

Une application classique de cette proposition est le calcul de la série génératrice des surjections dans un ensemble à p éléments. On peut voir une surjection de $[\![1; m]\!]$ dans $[\![1; p]\!]$ comme une séquence de jets dans p urnes : le numéro de l'urne dans laquelle on jette la première boule est l'image de 1, et ainsi de suite. La séquence code une surjection si à la fin des jets, chaque urne contient au moins une boule. En appliquant ce qui précède, on en déduit que la série génératrice est donnée par $(e^z - 1)^p$.

On considère maintenant un problème légèrement plus compliqué. On partitionne cette fois notre ensemble d'urnes en sous-ensembles $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p$. Pour tout entier i, l'ensemble $\mathcal{E}_i$ contient e_i urnes.

On veut cette fois jeter m boules distinguables dans les urnes, de sorte qu'à la fin, pour tout i, le nombre total de boules contenu dans les urnes du sous-ensemble $\mathcal{E}_i$ soit un élément de M_i.

On peut toujours considérer de telles séquences de jets comme un ré-étiquetage de p séquences de jets dans chacun des ensembles. Puisque cette fois, il y a $(e_i)^m$ façons de jeter m boules dans l'ensemble d'urnes $\mathcal{E}_i$, il vient cette fois

$$F_i(z) = \sum_{m \in M_i} \frac{(e_i z)^m}{m!}.$$

Au final, on a donc la proposition suivante :

Proposition 1.2 *Soient $M_1, \ldots, M_p$ des sous-ensembles de $\mathbb{N}$. On dispose d'un ensemble d'urnes partitionné en p sous-ensembles $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_p$, de cardinalités respectives $e_1, \ldots e_p$. On note $(F_m)_{m\in\mathbb{N}}$ le nombre de façons de jeter m boules distinguables dans ces urnes de sorte qu'à la fin, le nombre total de boules dans chaque sous-ensemble $\mathcal{E}_i$ d'urnes soit un élément de M_i. Alors, la série génératrice $F(z)$ de la suite est donnée par*

$$F(z) = \prod_{i=1}^{p} \left(\sum_{m \in M_i} \frac{(e_i z)^m}{m!} \right). \tag{1.4}$$

Le résultat très simple de cette proposition est la clé de voûte de la troisième partie de ce chapitre. Il sera utilisé à plusieurs reprises.

1.2.3 Séries génératrices multivariées

Définitions et dictionnaires

Cette partie présente brièvement certaines définitions et relations qui seront utilisées dans la partie 1.4. Les idées des preuves ne seront pas toujours détaillées mais elles peuvent être retrouvées avec tous les détails et de nombreux exemples dans le troisième chapitre du livre à paraître de Flajolet-Sedgewick [FS].

On considère à nouveau une classe $\mathcal{F}$ d'objets. À chaque objet ω est associé un poids $|\omega|$ mais également un certain nombre d'entiers $p_1(\omega), \ldots, p_s(\omega)$ qui dénombrent des caractéristiques supplémentaires de ces objets. Comme exemple classique, on cite le nombre de cycles dans une permutation, le nombre de composantes connexes ou de points isolés pour un graphe. On définit la série génératrice exponentielle multivariée de la manière suivante

$$F(z, a_1, \ldots, a_s) = \sum_{\omega \in \mathcal{F}} {a_1}^{p_1(\omega)} \cdots {a_s}^{p_s(\omega)} \frac{z^{|\omega|}}{|\omega|!}$$

Supposons que la classe $\mathcal{F}$ que l'on considère soit composée des suites finies ré-étiquetées (ou des ensembles ré-étiquetés) d'objets d'une classe $\mathcal{A}$. À chaque élément de $\mathcal{F}$, on associe sa taille mais également sa longueur, s'il s'agit d'une suite, ou son cardinal, s'il s'agit d'un ensemble. La série génératrice multivariée de $\mathcal{F}$ s'obtient alors à partir de la série génératrice exponentielle de $\mathcal{A}$ par l'une des deux relations de la figure 1.8.

Ces deux relations ne sont qu'une partie d'un dictionnaire plus large. Une description plus exhaustive des relations peut être trouvée dans Flajolet-Sedgewick. Elles se généralisent facilement lorsque $\mathcal{F}$ est construite à partir de plusieurs sous-classes $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_s$ disjointes. On se contente ici de décrire le cas qui nous sera utile par la suite. La formule obtenue sera appliquée dans la dernière partie de ce chapitre.

Construction		*Série génératrice multivariée*
Suites finies ré-étiquetées	$\mathcal{C} = \Sigma(\mathcal{A})$	$C(z,u) = (1 - uA(z))^{-1}$
Ensembles ré-étiquetés	$\mathcal{C} = \mathfrak{S}(\mathcal{A})$	$C(z,u) = \exp(uA(z))$

FIG. 1.8 – Dictionnaire (succin) des séries génératrices multivariées.

Application

On considère des graphes étiquetés dont chaque sommet est de degré au plus deux. Pour chaque graphe G, on note $\#\deg_i(G)$ son nombre de sommets de degré i. On cherche la série génératrice multivariée de la classe définie par

$$F(z,a,b,c) = \sum_G a^{\#\deg_0(G)} b^{\#\deg_1(G)} c^{\#\deg_2(G)} \frac{z^{|G|}}{|G|!}.$$

Proposition 1.3 *La série génératrice F énumérant les graphes dont tous les sommets sont de degré au plus 2 est donnée par*

$$F(z,a,b,c) = \exp\left(a\,z + \frac{1}{2}\frac{b^2\,z^2}{1-c\,z} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-c\,z}\right) - c\,z - \frac{c^2\,z^2}{2}\right)\right)$$

où la variable z code le nombre de sommets du graphe, a code le nombre de points isolés, b le nombre de sommets de degré 1 et c le nombre de sommets de degré 2.

Preuve : Il suffit de constater qu'un tel graphe est un ensemble ré-étiqueté de points isolés, de segments non-orientés de longueur au moins 2 ou de cycles non-orientés de longueur au moins 3, ces trois classes d'objets étant disjointes.

- La série génératrice multivariée de la classe « points isolé » est donnée par $F_1(z,a,b,c) = az$: il y a un seul objet point isolé qui est codé par le monôme az.
- Celle des segments est donnée par $F_2(z,a,b,c) = (bz)^2/2(1-cz)$. En effet, un segment n'est qu'une suite finie de cellules, chacune comprenant un entier compris entre 1 et m. Il y en a donc $m!$ de longueur m, qui sont codés par le monôme $b^2c^{m-2}z^m$ (deux sommets seulement sont de degré 1, le reste est de degré 2). On rajoute un facteur $1/2$ pour ne pas prendre en compte l'orientation.
- Enfin, on a vu précédemment que la série génératrice exponentielle univariée des cycles est donnée par $-\ln(1-z)$. Comme dans un cycle, chaque sommet est de degré 2, la série multivariée est alors donnée par $-\ln(1-cz)$. Puisque dans un graphe, les cycles sont de longueur au moins 3 et non-orientés, il ne reste plus qu'à retrancher les premiers termes de la série et à diviser par 2 pour trouver la série génératrice multivariée exponentielle F_3 des cycles étiquetés non-orientés.

Les dictionnaires nous assurent alors qu'il suffit de passer la somme de ces trois fonctions à l'exponentielle pour obtenir celle des graphes considérés. □

Formules du crible

On termine le paragraphe sur les séries génératrices multivariées par des formules du type formule du crible, aussi appelées formules d'inclusion-exclusion, qui seront utilisées dans la partie 1.4. Les notions, notations et preuves présentées ici sont des éléments classiques de combinatoire et de séries génératrices multivariées. On se réfère en particulier à l'excellent livre de Stanley [Sta97].

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble fini d'objets et $\mathcal{P}$ un ensemble fini de propriétés. Les éléments de $\mathcal{E}$ peuvent vérifier certaines propriétés de $\mathcal{P}$ ou bien aucune. Pour tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de propriétés, on note $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{F}$ qui vérifient les propriétés de $\mathcal{T}$, et $\mathcal{E}_=(\mathcal{T})$ celui des éléments qui ne vérifient que celles-ci, c'est à dire qu'ils vérifient toutes celles de $\mathcal{T}$ et aucune de $\mathcal{P} \setminus \mathcal{T}$.

Par la suite, $\mathcal{E}$ sera l'ensemble des objets de taille fixée d'une classe $\mathcal{F}$. Le but général de ce paragraphe est de trouver, à partir d'une série multivariée judicieusement choisie de la classe $\mathcal{F}$, une expression de la série génératrice des classes $\mathcal{F}(\mathcal{T})$ et $\mathcal{F}_=(\mathcal{T})$ pour un ensemble donné de propriétés $\mathcal{T}$. On a dans un premier temps le lemme suivant :

Lemme 1.1 *L'ensemble $\mathcal{E}(\mathcal{T})$ est l'union pour $\mathcal{T}' \supset T$ des ensembles $\mathcal{E}_=(\mathcal{T}')$. De plus, si T_1 et T_2 sont deux ensembles distincts, les ensembles $\mathcal{E}_=(\mathcal{T}_1)$ et $\mathcal{E}_=(\mathcal{T}_2)$ sont clairement disjoints. Il vient donc*

$$\big|\mathcal{E}(T)\big| = \sum_{\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}} \big|\mathcal{E}_=(\mathcal{T}')\big|.$$

Cette formule admet alors un inverse et on a pour tout sous-ensemble $\mathcal{T}$ de $\mathcal{P}$

$$\big|\mathcal{E}_=(T)\big| = \sum_{\mathcal{T}' \supset \mathcal{T}} (-1)^{|\mathcal{T}' \setminus \mathcal{T}|} \big|\mathcal{E}(\mathcal{T}')\big|.$$

La preuve de ce lemme peut être trouvée dans le livre de Stanley (comme corollaire d'un résultat plus général). On a notamment comme application la formule d'inclusion-exclusion qui donne le cardinal de l'union de plusieurs ensembles.

Proposition 1.4 *Soit $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_s$ des ensembles finis. Alors, on a*

$$\big|\, \mathcal{E}_1 \cup \cdots \cup \mathcal{E}_s \,\big| = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{s+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le s} \big|\, \mathcal{E}_{i_1} \cap \cdots \cap \mathcal{E}_{i_k} \,\big|.$$

Preuve : Notons $\mathcal{E}$ l'union des ensembles $\mathcal{E}_i$ et $(\mathcal{P}_i)$ la propriété « appartient à $\mathcal{E}_i$ ». Il est clair que pour tout ensemble non vide I d'indices :

$$\mathcal{E}(\{\mathcal{P}_i\}_{i \in I}) = \cap_{i \in I} \mathcal{E}_i.$$

Il suffit alors d'appliquer la formule en choisissant l'ensemble $\mathcal{T} = \emptyset$. On a alors

$$|\mathcal{E}_=(\emptyset)| = \sum_{\mathcal{T}' \supset\, \emptyset} (-1)^{|\mathcal{T}'|}\ |\mathcal{E}(\mathcal{T}')| = |\mathcal{E}(\emptyset)| + \sum_{\substack{S \subset [\![1;s]\!] \\ S \neq \emptyset}} (-1)^{|S|}\ \left|\cap_{i \in S} \mathcal{E}_i\right|.$$

Comme $\mathcal{E}$ est l'union des $\mathcal{E}_i$, tout élément est au moins dans un de ces ensemble, et ainsi, l'ensemble $\mathcal{E}_=(\emptyset)$ est vide et l'ensemble $\mathcal{E}(\emptyset)$ est $\mathcal{E}$ tout entier. On en déduit alors la formule en « faisant passer » ce terme de l'autre coté de l'égalité. □

Définition 1.3 *Soit $F(z, a_1, \ldots, a_s)$ une série génératrice multivariée et S un sous-ensemble de $[\![1; s]\!]$. On note A_S le vecteur de $\mathbb{R}^n$ tel que $(A_S)_i = 1$ si i est un élément de S et $(A_S)_i = 0$ sinon, et $F_S(z)$ la série $F(z, A_S) = F(z, (A_S)_1, \ldots, (A_S)_s)$. Ainsi, pour $s = 2$ on a :*

$$F_\emptyset(z) = F(z, 0, 0), \qquad F_{\{1\}}(z) = F(z, 1, 0),$$
$$F_{\{2\}}(z) = F(z, 0, 1), \qquad F_{\{1,2\}}(z) = F(z, 1, 1).$$

Proposition 1.5 *Soit $\mathcal{F}$ une classe d'objets. Pour tout ω dans $\mathcal{F}$, on note $|\omega|$ sa taille. À chaque objet est également associée une collection finie d'entiers $p_i(\omega)$ pour i élément de $[\![1;s]\!]$, qui dénombrent des caractéristiques supplémentaires de cet objet. La série génératrice exponentielle associée est alors*

$$F(z,a_1,\dots,a_s)=\sum_{\omega\in\mathcal{F}} {a_1}^{p_1(\omega)}\cdots {a_s}^{p_s(\omega)}\ \frac{z^{|\omega|}}{|\omega|!}.$$

Notons $\mathcal{P}_i$ la propriété « $p_i(\omega)=0$ ». Alors, pour tout sous-ensemble S de $[\![1;s]\!]$, la série génératrice $F_S(z)$ est la série génératrice du sous-ensemble $\mathcal{F}(\{\mathcal{P}_i\}_{i\notin S})$ de la classe $\mathcal{F}$.

Preuve : Il suffit de revenir à la définition de la série génératrice multivariée. On voit alors que le monôme ${(A_S)_1}^{p_1(\omega)}\cdots{(A_S)_s}^{p_s(\omega)}$ vaut 1 si et seulement si, pour tout i, lorsque $(A_S)_i=0$, alors $p_i(\omega)=0$. En d'autres termes, l'objet ω n'est « compté » que s'il vérifie la propriété P_i pour tout i n'appartenant pas à S. □

Corollaire 1.1 *Soit S un sous-ensemble de $[\![1;s]\!]$. On note $F_{=S}(z)$ la série génératrice exponentielle de $\mathcal{F}_{=}(\{\mathcal{P}_i\}_{i\notin S})$. Alors*

$$F_{=S}(z)=\sum_{S'\subset S}(-1)^{|S'|-|S|}\ F_{S'}(z).$$

Preuve : C'est une simple conséquence de la proposition 1.5, en appliquant le lemme 1.1 à chacun des sous-ensembles finis des objets de taille m. □

1.2.4 Bornes de cols

On termine maintenant les rappels par celui d'une borne très classique. En effet, jusqu'à présent, on s'est contenté de donner des méthodes pour obtenir des séries génératrices. Le lemme suivant permet, une fois que la série génératrice a été trouvée d'obtenir une majoration de ses coefficients de Taylor (et donc des cardinaux que l'on recherche).

Lemme 1.2 *Si (f_k) est une suite de réels positifs et si $f(z)=\sum f_k\, z^k$ alors,*

$$f_k\le \min_{0<x<\rho}\ \frac{f(x)}{x^k} \tag{1.5}$$

où ρ désigne le rayon de convergence de la série. Ce minimum est toujours atteint si k est supérieur au plus petit entier r tel que $f_r\neq 0$ et s'obtient alors comme racine de l'équation $xf'(x)/f(x)=k$.

Cette majoration très classique est appelée borne de col (le minimum de la fonction $x\mapsto f(x)x^{-k}$ est appelé point col et le graphe de la fonction de la variable complexe $\left|f(z)z^{-k}\right|$ ressemble à un col de montagne au voisinage de ce point). En ce qui nous concerne, on peut toujours l'appliquer puisque les séries génératrices énumèrent des cardinaux d'ensembles et sont donc forcément à coefficients positifs.

La majoration peut paraître très grossière étant donné que

$$f(x)\,x^{-k}=f_0\,x^{-k}+\cdots+f_k+f_{k+1}x+\cdots,$$

mais dans de nombreux cas, elle donne exactement l'ordre de croissance exponentiel des coefficients $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Naturellement, des équivalents asymptotiques bien plus fins peuvent être obtenus, avec des méthodes dites « de col ». En particulier, avec un peu plus de travail, il serait aisé d'obtenir des

équivalents asymptotiques à partir des expressions données par les théorèmes 1.4 et 1.6. Cependant, le fait d'avoir un équivalent asymptotique n'apporte aucune précision supplémentaire par rapport aux bornes de col, en ce qui concerne les bornes supérieures au seuil de satisfaisabilité. C'est pourquoi ce travail n'a pas été fait même si les expressions s'y prêtent.

Une liste plus exhaustive et détaillée des méthodes de cols peut être trouvée dans les chapitres de Flajolet-Sedgewick, avec de nombreux exemples, ou encore dans le livre de De Bruijin [DB81].

1.3 Reprise des bornes existantes par séries génératrices

Cette partie présente les premiers résultats obtenus, par des méthodes de séries génératrices, concernant les bornes supérieures au seuil de satisfaisabilité. Nous donnons de nouvelles preuves de trois bornes. La première fut prouvée en premier lieu par Franco et Paull [FP83]. Les deux suivantes ont été trouvées par Dubois et Boufkhad ([DB97] et [DB99]).

Ces deux derniers auteurs utilisent des idées simples mais des calculs compliqués pour arriver à leur fins. Le point de départ de leurs travaux est une inégalité très courante en probabilités (proposition 1.6). La difficulté consiste alors à calculer convenablement l'espérance d'une variable aléatoire judicieusement choisie de sorte qu'il en résulte une majoration de la probabilité de satisfaisabilité. Les calculs de Dubois et Boufkhad amènent dans leurs deux articles à considérer une somme double puis à effectuer une analyse asymptotique la plus fine possible.

Nos travaux reprennent leurs idées, notamment les mêmes majorations initiales. La technique de calcul est cependant complètement différente. Nous calculons comme ces deux auteurs l'espérance du nombre d'impliquants premier pour une formule 3-SAT aléatoire (théorème 1.4) et l'espérance du nombre de solutions localement maximales pour une formule k-SAT aléatoire (théorème 1.6), mais en exprimant ces quantités en termes de coefficients de séries génératrices. Les formules obtenues sont alors bien plus simples que celles de Dubois et Boufkhad puisque l'une d'elle ne fait intervenir qu'une simple somme, tandis que l'autre s'exprime sous forme close. Seuls les résultats élémentaires introduits à la partie 1.2 sont utilisés. Les deux bornes supérieures sont retrouvées alors par des bornes de col et des majorations élémentaires. Les nouvelles preuves sont ainsi bien plus courtes.

Dans toute cette partie, on considère le modèle des formules de type 3-SAT et plus généralement k-SAT dont les littéraux d'une même clause sont associés à des variables distinctes. La formule peut cependant contenir plusieurs fois la même clause. Dans ce modèle, il y a donc $2^k\binom{n}{k}$ façons de choisir une clause sur n variables (on choisit d'abord k variables parmi les n, puis on choisit les signes des littéraux), et le nombre total de formules ayant m clauses est ainsi donné par $\left(2^k\binom{n}{k}\right)^m$.

1.3.1 Espérance du nombre de solutions d'une formule

La première borne supérieure au seuil de satisfaisabilité de k-SAT a été mentionnée par plusieurs auteurs (Franco et Paull dans un premier temps, puis Simon, Carlier, Dubois et Moulines [SCDM86], Chvatàl et Szemerédi [CS88] et d'autres encore), comme application directe de la méthode du premier moment à la variable aléatoire donnant le nombre de solutions d'une formule. Cette méthode consiste simplement à utiliser l'inégalité suivante

Proposition 1.6 *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ sur un espace probabilisé Ω. Alors on a*

$$\mathbb{P}(X > 0) \leq \mathbb{E}(X).$$

Dans une perspective énumérative, cette proposition peut être vue comme une conséquence direct de la remarque suivante *Pour tout entier strictement positif k, on a $k \geq 1$*. On en déduit

alors l'inégalité suivante

$$|\{\ \Phi\ k\text{-SAT satisfaisable }\}| \leq |\{\ (\Phi\ k\text{-SAT}, S) \text{ tels que } \Phi \text{ est satisfaite par } S\ \}|\,. \tag{1.6}$$

On retrouve le résultat de la proposition 1.6 en divisant les deux membres de cette inégalité par le nombre total de formules. On peut noter que cette majoration reste valide quel que soit le type des formules que l'on considère, et non pas seulement pour les formules de type k-SAT.

L'intérêt de cette inégalité vient alors du fait que si, pour une formule satisfaisable donnée, il est très difficile de compter son nombre de solutions, en revanche, pour une affectation donnée, il est très facile de déterminer le nombre de formules qu'elle satisfait. Ainsi par des arguments élémentaires, il vient

Lemme 1.3 *Le nombre de paires (Φ, S) où Φ est une formule de type k-SAT avec m clauses et S est une affectation qui satisfait Φ est donné par*

$$|\{\ (\Phi, S)\ \}| = 2^n \left(\left(2^k - 1\right) \binom{n}{k} \right)^m .$$

Preuve : Soit $C = \pm x_{i_1} \vee \cdots \vee \pm x_{i_k}$ une clause et S une affectation des variables fixée (on identifie le signe de négation $\neg$ avec le signe moins). Il y a une seule façon de choisir les signes des k littéraux de C pour contredire la clause : chaque littéral doit avoir le signe opposé à sa valeur. Par conséquent, il y a exactement $2^k - 1$ façons de choisir les signes de sorte que la clause soit satisfaite. Il y a donc au total $(2^k - 1)\binom{n}{k}$ clauses qui sont satisfaites par S, et ce, pour toute affectation S.

Maintenant, une formule est satisfaite par notre affectation S si et seulement si toutes ses clauses sont satisfaites. Il y a ainsi exactement $\left((2^k - 1)\binom{n}{k}\right)^m$ telles formules. Comme ce nombre est indépendant de la nature de S, on en déduit le lemme, étant donné qu'il y a exactement 2^n affectations possibles. □

Muni de ce lemme, il suffit de diviser les deux termes de l'inégalité (1.6) par le nombre total de formules $(2^k\binom{n}{k})^m$ pour obtenir (avec $r = m/n$) :

$$\mathbb{P}\left(\Phi \text{ satisfaisable}\right) \leq \left(2\left(\frac{2^k - 1}{2^k}\right)^r\right)^n . \tag{1.7}$$

Avec $r > -\ln(2)/\ln\left(1 - 2^{-k}\right)$, le terme de droite de cette inégalité tend vers 0 quand n tend vers l'infini, et donc la probabilité de satisfaisabilité également. Pour $k = 3$, ceci donne la valeur $5,191$ qui est la première borne obtenue par Franco et Paull, dès 1983.

Théorème 1.3 (Franco and Paull [FP83]) *Soient m, n deux entiers et $\mathcal{F}_{m,n,k}$ l'ensemble des formules de type k-SAT à m clauses construites sur n variables. On suppose que $m, n \to \infty$, avec $m/n \geq r$. Alors, si $r > -\ln(2)/\ln(1 - 2^{-k})$, l'espérance du nombre de solutions d'une formule aléatoire tend vers 0 et dès lors*

$$\mathbb{P}\left(\phi \in \mathcal{F}_{m,n,k} \text{ satisfaisable}\right) \longrightarrow 0.$$

Pour $k = 3$, la borne supérieure obtenue pour le seuil de 3-SAT est $5,191$.

On peut noter que cette majoration de la valeur du seuil reste valide pour $k = 2$ mais la valeur obtenue $-\ln 2/\ln(3/4) \approx 2,41$ est supérieure à la valeur réelle du seuil $r_2 = 1$ qui est connue dans ce cas particulier. Cette majoration suggère également l'équivalent $r_k \sim 2^k \ln 2$ pour la valeur du seuil quand k tend vers l'infini. Ce résultat est en quelque mesure vrai : s'il existe une valeur de

seuil r_k pour tout entier k, alors on a l'équivalent ci-dessus. On intuite même un équivalent de la forme

$$r_k \sim 2^k \ln 2 + C + o(1).$$

Olivier Dubois a déjà conjecturé $-\frac{1+\ln 2}{2}$ comme valeur pour la constante C mais à ce jour, personne n'en a la preuve.

1.3.2 Impliquants premiers, définition

Dans cette partie, on travaille sur le problème 3-SAT exclusivement. Cependant, les définitions et la méthodologie fournies peuvent facilement s'étendre au problème k-SAT pour tout entier k.

Dans la partie précédente, on a borné le nombre de formules satisfaisables par le nombre de paires formules-solutions. Comme une formule peut avoir de 1 à 2^n solutions, la majoration ainsi obtenue est sûrement très grossière. L'idée présentée dans cette partie pour améliorer la borne est d'essayer de former des blocs de solutions. On essaie de réunir celles qui se ressemblent beaucoup et on va dès lors énumérer seulement le nombre de tels groupes pour chaque formule satisfaisable.

On montre le principe sur un exemple. Considérons la formule suivante :

$$\begin{aligned}\Phi = \ & (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \\ & \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4).\end{aligned}$$

La formule a été volontairement choisie avec peu de clauses par rapport à son nombre de variables de sorte qu'elle ait beaucoup de solutions à regrouper. Cette formule est satisfaite par les 7 affectations suivantes

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	1	1

Considérons alors les quatre premières solutions. On remarque qu'elles donnent toutes la même valeur 0 aux deux variables x_1 et x_2. Plus précisément, une fois que l'on a donné la valeur 0 à ces deux variables, quelle que soit la valeur donnée à x_3 et x_4, l'affectation satisfait la formule. Ceci nous amène à considérer les affectations partielles et les impliquants premiers, introduit pour la première fois dans ce contexte par Yacine Boufkhad et Olivier Dubois [DB99].

Définition 1.4 *Une affectation partielle est une affectation d'un sous-ensemble des variables (éventuellement l'ensemble tout entier).*

On dit alors qu'une affectation partielle A satisfait une formule Φ si, quelle que soit la valeur donnée aux variables non affectées, on obtient une solution de Φ. Ainsi, s'il manque k variables dans A et que A satisfait Φ, A regroupe 2^k solutions.

Concernant la formule précédente, l'ensemble des affectations partielles qui la satisfont est ainsi donné par :

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	0
0	0	0	1
0	0	1	0
0	0	1	1
1	0	0	1
0	1	1	1
1	1	1	1

À 4 variables

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	0	–
0	0	–	0
0	0	–	1
0	0	1	–
–	0	0	1
0	–	1	1
–	1	1	1

À 3 variables

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	–	–

À 2 variables

Regardons maintenant plus précisément ce qui se passe au niveau de notre exemple, une fois que l'on a donné la valeur 0 à x_1 et x_2. On représente en gras les littéraux de Φ qui sont alors satisfaits :

$$\Phi = (\neg \boldsymbol{x_1} \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg \boldsymbol{x_2} \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg \boldsymbol{x_2} \vee x_3) \wedge (\neg \boldsymbol{x_1} \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge$$
$$\wedge (\neg \boldsymbol{x_1} \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg \boldsymbol{x_2} \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg \boldsymbol{x_2} \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg \boldsymbol{x_2} \vee x_4).$$

Avant même de donner une valeur aux variables x_3 et x_4, chacune des clauses de la formule contient déjà un littéral satisfait. Il est alors clair que la formule restera satisfaite, quelle que soit la valeur donnée à ces deux dernières variables. Ces considérations nous mènent à une caractérisation simple de la satisfaisabilité.

Lemme 1.4 *Une affectation partielle A satisfait une formule Φ si et seulement si dans chacune des clauses de Φ, il existe au moins un littéral qui soit satisfait par l'une des valeurs de A. En particulier, cela implique qu'au moins une variable soit affectée.*

Preuve : On considère une affectation partielle A. Dans un premier temps, il est clair que si Φ comporte dans chacune de ses clauses au moins un littéral satisfait par A, alors quelle que soit les valeurs données aux dernières variables, on obtiendra une solution.

Réciproquement, on suppose qu'il existe au moins une clause C qui ne comporte de littéral satisfait par A. On écrit $C = (l_1 \vee l_2 \vee l_3)$ où les l_1, l_2 et l_3 sont des littéraux. Si l'un de ces littéraux est associé à une variables affectée par A, alors il n'est pas satisfait par hypothèse. Pour les autres, on donne à la variable associée une valeur qui les contredit, puis on donne enfin n'importe quelle valeur aux variables restantes. L'affectation complète obtenue contredit la clause C donc Φ. L'affectation partielle A ne satisfait donc pas Φ au sens précédent.

On déduit donc de tout ceci que la formule est satisfaite par A au sens précédent si et seulement si les valeurs de A permettent de satisfaire au moins un littéral par clause. □

On veut maintenant introduire naturellement une relation d'ordre sur les affectations partielles.

Définition 1.5 *Soient A et B deux affectations partielles. On dit que A est inférieure à B si l'on peut retirer de B certaines valeurs pour obtenir A.*

Un impliquant premier (IP) *d'une formule Φ est une affectation partielle satisfaisante qui est minimale pour cet ordre naturel.*

En ce qui concerne notre exemple, seulement 4 des 15 affectations partielles qui la satisfont sont

des impliquants premiers ; ce sont les seules pour lesquelles on ne peut plus retirer de valeurs.

x_1	x_2	x_3	x_4
0	0	−	−
−	0	0	1
0	−	1	1
−	1	1	1

Maintenant au vu de ces définitions, il est clair que toute formule satisfaisable admet au moins un impliquant premier. Elle admet au moins une solution, et il suffit de retirer à celle-ci des affectations jusqu'à ce que cela ne soit plus possible pour en obtenir un. Comme précédemment (voir l'inégalité (1.6)), il vient naturellement la majoration suivante :

$$|\{\ \Phi \text{ satisfaisable }\}| \leq |\{\ (\Phi, I) \text{ tels que } I \text{ est un IP de } \Phi\ \}|\,. \tag{1.8}$$

L'intérêt de cette inégalité vient à nouveau du fait qu'il est plus facile de compter, pour une affectation partielle donnée, le nombre de formules pour lesquelles elle est un impliquant premier, que l'inverse. Le paragraphe suivant propose de mener à bien ce calcul, par une méthode à base de séries génératrices et de modèles d'urnes. Ces techniques fournissent une nouvelle preuve plus courte et plus simple que la preuve originale de Dubois et Boufkhad.

> **Remarque:** Précisons tout de même que les ensembles de solutions que regroupent les impliquants premiers d'une formule ne sont pas nécessairement disjoints. En particulier, rien n'indique qu'une formule ait forcément moins d'impliquants premiers que de solutions. Cependant, le calcul qui suit montre que la borne supérieure obtenue par la majoration (1.8) est meilleure que celle dont on disposait déjà (théorème 1.3).

1.3.3 Borne supérieure par les impliquants premiers

On commence par donner une caractérisation simple du fait qu'une affectation donnée A soit un impliquant premier d'une formule Φ. Le lemme 1.4 a la conséquence suivante.

Lemme 1.5 *Une affectation partielle A est un impliquant premier d'une formule Φ si et seulement si, pour chacune de ses variables x_i, il existe une clause de Φ de la forme $C = \pm x_i \vee y_2 \vee y_3$ de sorte que :*

(**1**) *le signe est choisi tel que la valeur du littéral $\pm x_i$ soit* 1.

(**2**) *les littéraux y_2 et y_3 sont soit associés à des variables non affectées, soit de valeur* 0 *pour l'affectation de A.*

Preuve : Il suffit de voir que si l'on retire une des variables x_i de A, au moins une clause ne doit plus contenir de littéral satisfait, alors qu'elle en contenait au moins un avant le retrait de x_i. On en déduit alors facilement que cette clause est de la forme précédente et satisfait (**1**) et (**2**). La réciproque est immédiate. □

Le lemme 1.5 permet alors, pour une affectation partielle A donnée, un dénombrement par série génératrice des formules qui acceptent A comme impliquant premier, et il vient finalement le théorème suivant.

Théorème 1.4 *Le nombre de paires (Φ, A) où Φ est une formule de type* 3-SAT *avec m clauses et A est un de ses impliquants premiers est donné par*

$$|\{\ (\Phi, A \text{ IP})\ \}| = m! \sum_{\ell=1}^{n} \binom{n}{\ell} 2^\ell\ [z^m]\ e^{z\ (\alpha_{n,\ell} - \ell\beta_{n,\ell})} \left(e^{z\ \beta_{n,\ell}} - 1\right)^\ell,$$

les coefficients $\alpha_{n,\ell}$ et $\beta_{n,\ell}$ étant donnés par

$$\alpha_{n,\ell} = 8\tbinom{n}{3} - \left[\tbinom{\ell}{3} + 2\tbinom{\ell}{2}(n-\ell) + 4\ell\tbinom{n-\ell}{2} + 8\tbinom{n-\ell}{3}\right],$$

$$\beta_{n,\ell} = \tbinom{\ell-1}{2} + 2(\ell-1)(n-\ell) + 4\tbinom{n-\ell}{2}.$$

L'espérance du nombre d'impliquants premiers pour une formule 3-SAT *aléatoire s'obtient en divisant cette expression par le nombre total de formules soit $\left(8\binom{n}{3}\right)^m$.*

Preuve : Considérons une affectation A et soit ℓ le nombre de variables auxquelles elle assigne une valeur. On va supposer dans un premier temps que A donne en fait la valeur 0 aux variables $x_1, \ldots, x_\ell$. Toutes les clauses d'une formule Φ qui admet A comme impliquant premier doivent alors contenir au moins un littéral satisfait par A. De telles clauses sont alors de la forme $\neg x_i \vee a \vee b$ où i est un élément de $[\![1;\ell]\!]$. Soit $A_{n,\ell}$ l'ensemble de ces clauses et $\alpha_{n,\ell}$ leur nombre. Comme le complémentaire de $A_{n,\ell}$ est l'ensemble des clauses qui ne contiennent pas de littéral $(\neg x_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$, il vient

$$\alpha_{n,\ell} = 8\tbinom{n}{3} - \left[\tbinom{\ell}{3} + 2\tbinom{\ell}{2}(n-\ell) + 4\ell\tbinom{n-\ell}{2} + 8\tbinom{n-\ell}{3}\right].$$

Maintenant, en vertu du lemme 1.5, la formule doit également contenir une clause de la forme $\neg x_i \vee y_2 \vee y_3$ où y_2 et y_3 sont soit de la forme $(x_j)_{j\in[\![1;\ell]\!]\setminus\{i\}}$, soit de la forme $(\pm x_j)_{j\in[\![\ell+1;n]\!]}$. Soit $B_{n,\ell,i}$ l'ensemble de ces clauses et $\beta_{n,\ell,i}$ leur nombre. On voit facilement que ces ensembles sont disjoints puisque par construction, chaque clause de $B_{n,\ell,i}$ ne contient que x_i comme littéral satisfait par A. De plus, les ensembles ont tous le même cardinal

$$\beta_{n,\ell,i} = \beta_{n,\ell} = \tbinom{\ell-1}{2} + 2(\ell-1)(n-\ell) + 4\tbinom{n-\ell}{2}.$$

Finalement, pour construire une formule qui admet A comme impliquant premier, il faut choisir m éléments dans un ensemble de cardinal $\alpha_{n,\ell}$ de sorte que, dans les ℓ sous-ensembles disjoints $B_{n,\ell,i}$, au moins un élément soit pris. Si l'on pose $\tilde{A}_{n,\ell} = A_{n,\ell} \setminus (\cup_{1\le i\le k} B_{n,\ell,i})$, on est ainsi amené à dénombrer le nombre de façons de tirer m éléments dans les ensembles $\tilde{A}_{n,\ell}, B_{n,\ell,1}, \ldots, B_{n\ell,\ell}$ tous deux à deux disjoints, en prenant au moins un élément dans chacun des ensembles $B_{n,\ell,i}$ et un nombre quelconque d'éléments de $\tilde{A}_{n,\ell}$.

Cette question peut alors être vue comme une instance du problème d'urnes exposé au paragraphe 1.2.2. On « remplace » chaque clause par une urne. Sélectionner m clauses avec replacement pour construire une formule est alors équivalent à jeter m boules distinguables dans la collection des urnes, et les conditions imposées sur la façon de sélectionner se traduisent aisément. La proposition 1.2 assure donc que le nombre de formules à m clauses qui acceptent A comme impliquant premier est donné par le coefficient $F_{m,n,\ell}$ de la série génératrice

$$F_{n,\ell}(z) = \sum_{m\ge 0} F_{m,n,\ell} \frac{z^m}{m!} = e^{z\ (\alpha_{n,\ell} - \ell\beta_{n,\ell})} \left(e^{z\ \beta_{n,\ell}} - 1\right)^\ell. \tag{1.9}$$

Soit A' une autre affectation partielle de ℓ variables $x_{i_1}, \ldots, x_{i_\ell}$. Quitte à échanger les noms des variables $x_s \mapsto x_{i_s}$ et les signes des littéraux $x_s \mapsto \neg x_{i_s}$ et $\neg x_s \mapsto x_{i_s}$, on voit que le nombre de formules qui admettent A' comme impliquant premier est le même que celui de A et ne dépend que des quantités m, n et ℓ, et pas du nom des variables ou de la valeur des affectations. Puisqu'il y a $2^\ell \binom{n}{\ell}$ affectations partielles de ℓ variables, on en déduit le théorème. □

À partir de cette formule, les bornes classiques sur les coefficients des séries génératrices à coefficients positifs présentées au paragraphe 1.2.4 permettent de retrouver simplement le résultat de Dubois et Boufkhad.

Théorème 1.5 (Dubois and Boufkhad [DB99]) *Soient m, n deux entiers et $\mathcal{F}_{m,n,3}$ l'ensemble de formules de type* 3-SAT *à m clauses construites sur n variables. On suppose que $m, n \to \infty$, avec $m/n \geq r$. Alors, si $r > 4,883$, l'espérance du nombre d'impliquants premiers d'une formule aléatoire tend vers 0 et dès lors*

$$\mathbb{P}\left(\phi \in \mathcal{F}_{m,n,3} \text{ satisfaisable}\right) \longrightarrow 0.$$

Preuve : À cet instant, on pose $\ell = \alpha n$, puis $m = rn$ et on remarque que $\alpha_{n,\ell} - \ell\beta_{n,\ell} \leq \frac{1}{3}\ell^2(3n-\ell)$ et $\beta_{n,\ell} \leq \frac{1}{2}(2n-\ell)^2$. De par la majoration (1.5), il s'ensuit que pour tout $\alpha > 0$ et tout réel $u_\alpha > 0$

$$F_{rn,n,\alpha n} \leq (rn)!\, n^{2m} \left(e^{\alpha^2(1-\alpha/3)u_\alpha}\left(e^{2(1-\alpha/2)^2 u_\alpha} - 1\right)^\alpha u_\alpha^{-r}\right)^n.$$

Pour obtenir la meilleur majoration possible, u_α doit alors minimiser le terme de droite dans cette inégalité. Si r est strictement inférieur à α, il suffit de faire tendre u_α vers 0 pour constater que le coefficient $I_{rn,n,\alpha n}$ est nul. Sinon, l'expression admet un unique minimum, qui est atteint quand $\delta_\alpha = 2(1-\alpha/2)^2 u_\alpha$ satisfait l'équation implicite

$$\frac{\alpha^2(1-\alpha/3)}{2(1-\alpha/2)^2}\delta_\alpha + \alpha\frac{\delta_\alpha}{1-e^{-\delta_\alpha}} = r. \tag{1.10}$$

Comme le seuil se situe aux alentours de la valeur $4,25$, on peut supposer que r est strictement supérieur à 1. Le réel δ_α est ainsi défini pour tout $\alpha \in]0;1]$.

Pour majorer le coefficient binomial, les mêmes bornes classiques de cols donnent une minoration de la factorielle. Ainsi pour tout entier s, on a $\frac{1}{s!} \leq \frac{e^s}{s^s}$. En combinant cette minoration avec la formule de Stirling, on en déduit qu'il existe une constante C telle que pour tout entier n et tout α tel que αn soit un entier

$$\binom{n}{\alpha n} \leq C\sqrt{2\pi n}\left(\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}\right)^{-n}.$$

Finalement, en vertu de l'équivalent

$$\frac{(rn)!n^{2rn}}{\left(8\binom{n}{3}\right)^{rn}} \sim \sqrt{2\pi r}e^{3r}n^{1/2}\left(\frac{3r}{4e}\right)^{rn},$$

la majoration (1.8) et l'égalité du lemme 1.4 mènent à la majoration suivante

$$\mathbb{P}\left(\Phi \text{ satisfaisable}\right) \leq C'n \sum_{\alpha \in \left\{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}, 1\right\}} f_r(\alpha, \delta_\alpha)^n \tag{1.11}$$

où δ_α est défini pour tout $\alpha \in]0;1]$ par l'équation implicite (1.10) et où la fonction f_r est donnée par

$$f_r(\alpha, \delta_\alpha) = \left(\frac{3r}{4e}\right)^r \frac{2^\alpha}{\alpha^\alpha(1-\alpha)^{1-\alpha}}\left(e^{\frac{\alpha^2(1-\alpha/3)}{2(1-\alpha/2)^2}\delta_\alpha}\left(e^{\delta_\alpha}-1\right)^\alpha \delta_\alpha^{-r}\, 2^r\, (1-\alpha/2)^{2r}\right)$$

En particulier, cette majoration implique que

$$\mathbb{P}\left(\Phi \text{ satisfaisable}\right) \leq C' n^2 \left(\max_{\alpha \in]0,1]} f_r(\alpha, \delta_\alpha)\right)^n.$$

Si le maximum de la fonction $\alpha \mapsto f_r(\alpha, \delta_\alpha)$ est strictement inférieur à 1, alors la probabilité tend vers 0 et le réel r est une borne supérieure au seuil de satisfaisabilité. La meilleure majoration du seuil obtenue par cette méthode est ainsi $r_3 \leq 4,883$. Les calculs ont été faits à l'aide du logiciel de calcul formel MAPLE et les détails sont donnés dans la première partie de l'annexe, tout à la fin de ce document. □

Comme mentionné en début de partie, tout le travail qui a été réalisé dans cette partie peut être adapté au problème k-SAT pour tout entier k. En revanche, le travail effectué sur ordinateur doit être fait au cas par cas. Ainsi, il ne ressort pas d'expression générale qui donne une borne supérieure en fonction de l'entier k choisi, alors que les travaux de Dubois et Boufkhad permettent d'obtenir une telle formule. Toutefois, la preuve présentée ici est plus simple et plus courte que l'originale.

Dans la prochaine partie, on prouve justement l'existence d'une famille de borne supérieures $(c_k)_{k\geq 2}$ au seuil de satisfaisabilité des formules k-SAT. Ces valeurs s'expriment chacune de manière simple en fonction de k. Le résultat est attribué à ces deux auteurs, mais la preuve qui va être présentée est à nouveau bien plus courte que la leur, tout en n'utilisant que des résultats élémentaires de la théorie des séries génératrices.

1.3.4 Solutions localement maximales

L'objectif de la partie précédente était d'améliorer la borne originale de Franco et Paull en groupant les solutions entre elles. L'idée qui va être développée dans cette partie est due à Olivier Dubois et Yacine Boufkhad. Elle consiste cette fois non à grouper des solutions, mais à n'en compter qu'une partie d'entre elles. Le dénombrement se fait en introduisant une relation d'ordre sur les affectations, comme on l'avait fait sur les affectations partielles, puis à n'énumérer que les éléments minimums. La grande similitude entre ces deux idées fait qu'une fois de plus, les méthodes de séries génératrices s'appliquent.

On définit la relation d'ordre suivante sur les affectations. On dit que A est inférieure à B si l'on peut obtenir B en changeant certains 0 de A en 1. L'ensemble des affectations muni de cette relation d'ordre a une structure de treillis. On reprend comme exemple la formule donnée en exemple au paragraphe 1.3.2,

$$\begin{aligned}\Phi = \ & (\neg x_1 \vee x_2 \vee \neg x_3) \wedge (\neg x_2 \vee \neg x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_3) \wedge (\neg x_1 \vee x_3 \vee x_4) \\ & \wedge (\neg x_1 \vee x_2 \vee x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee \neg x_4) \wedge (\neg x_2 \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \neg x_2 \vee x_4).\end{aligned}$$

La figure suivante montre l'ensemble des affectations des 4 variables, ordonnées selon le treillis. Les solutions de Φ sont encadrées en gris.

On pourrait envisager d'énumérer alors uniquement le nombre de paires formules-solutions où les solutions sont celles qui sont maximales relativement à cette relation d'ordre. Comme précédemment, une majoration similaire à celle des inégalités (1.6) et (1.8) serait valide, puisque toute formule satisfaisable a au moins une formule maximale. Cependant, il est très difficile de caractériser simplement, pour une affectation donnée, les formules dont elle est une solution maximale. Pour remédier à ce problème, Olivier Dubois et Yacine Boufkhad ont introduit une propriété plus faible de solution localement maximale (notée NPS pour *negatively prime solutions*).

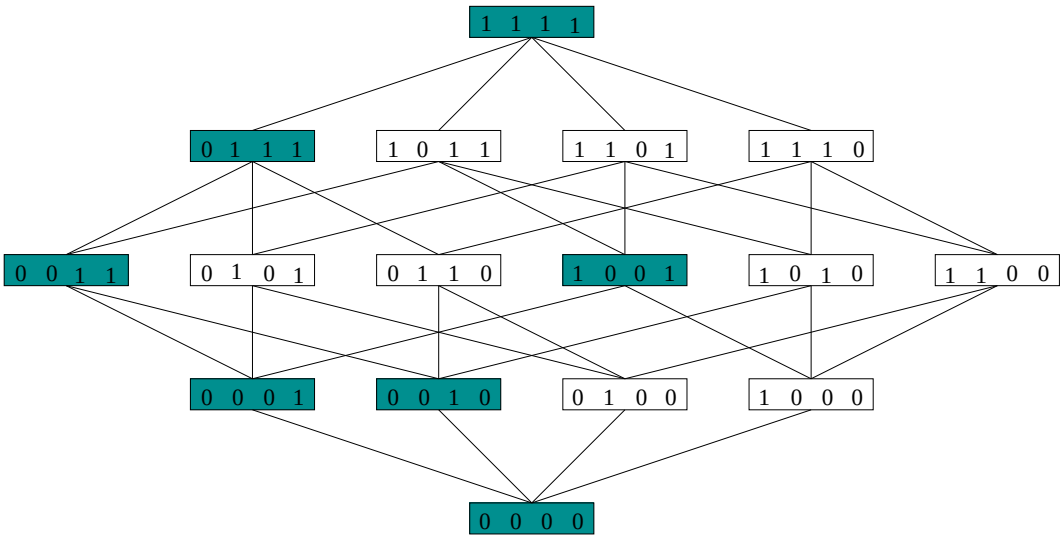


FIG. 1.9 – Treillis des affectations.

Définition 1.6 *Soit Φ une formule booléenne. Une solution A de Φ est dite localement maximale si, lorsque l'on change l'un quelconque de ses 0 en 1, l'affectation obtenue ne satisfait plus Φ. En d'autres termes, la formule Φ n'admet pas de solution B dans le treillis qui diffère de A d'une seule variable et telle que $A \leq B$.*

En ce qui concerne l'exemple ci-dessus, la formule n'admet donc que deux NPS :

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	0	1

x_1	x_2	x_3	x_4
1	1	1	1

Comme précédemment, on déduit du fait que toute formule admette une NPS l'inégalité

$$|\{\ \Phi \text{ satisfaisable }\}| \leq |\{\ (\Phi, S) \text{ tels que } S \text{ est une NPS de } \Phi\ \}| \tag{1.12}$$

et la probabilité de satisfaisabilité est ainsi inférieure à l'espérance du nombre de NPS. Le paragraphe suivant présente un nouveau calcul du membre de droite de l'inégalité (ce qui revient a calculer l'espérance), qui prouve la borne $r_3 < 4,643$ par une méthode à nouveau bien plus courte que la preuve originale de Dubois et Boufkhad.

1.3.5 Borne supérieure des NPS

Comme pour les impliquants premiers, on commence par donner une caractérisation simple du fait qu'une solution soit maximale pour une formule Φ. Soit donc A une affectation et ℓ le nombre de variables ayant la valeur 0. Comme les variables jouent des rôles similaires, on peut supposer que les variables $x_1, \ldots, x_\ell$ sont affectées à 0 et les variables $x_{\ell+1}, \ldots, x_n$ sont affectées à 1. On a alors le lemme suivant :

Lemme 1.6 *Une formule Φ admet A comme solution localement maximale si et seulement si Φ est composée uniquement de clauses parmi les $(2^k - 1)\binom{n}{k}$ satisfaites par A (voir le paragraphe 1.3.1) et si elle contient pour tout entier i compris entre 1 et ℓ une clause de la forme*

$$C = (\neg x_i \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k) \quad \textit{avec} \quad y_i \in \{x_1, \ldots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \ldots, \neg x_n\} \setminus \{x_i\}$$

Preuve : La preuve est la même que celle du lemme 1.5. Dans un premier temps, si Φ admet A comme solution localement maximale, elle l'admet pour solution donc ne comporte que des clauses satisfaites par A. Ensuite, si l'on change la valeur de x_i de 0 en 1, la formule devient contredite si et seulement si une clause ne contient plus que des littéraux non satisfaits. Comme on n'a changé qu'une seule valeur, cela impose que la clause ne contenait que le littéral $\neg x_i$ de satisfait avant le changement. Elle est donc forcément de la forme ci-dessus. □

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une formule Φ admette A pour solution localement maximale sont du même type que celles rencontrées dans le lemme 1.5. Le même dénombrement par série génératrice est donc possible et il vient le théorème suivant.

Théorème 1.6 *Le nombre de paires (Φ, A) où Φ est une formule de type k-*SAT *et A une de ses* NPS *est donné par*

$$|\{\ (\Phi, A \text{ NPS})\ \}| = m!\,[z^m] e^{z\,\frac{2^k-k-1}{k}\binom{n-1}{k-1}} \left(2e^{z\binom{n-1}{k-1}} - 1\right)^n .$$

L'espérance du nombre de solutions localement maximales s'obtient comme de coutume en divisant cette expression par le nombre total de formules $\left(2^k\binom{n}{k}\right)^m$.

Preuve : On considère toujours l'affectation A qui associe la valeur 0 à $x_1, \ldots, x_\ell$ et la valeur 1 aux autres. Pour tout entier i compris entre 1 et ℓ, on introduit les ensembles de clauses C_i définis par

$$\forall i \in [\![1;\ell]\!] \qquad C_i = \{(\neg x_i \vee y_2 \vee \cdots \vee y_k) \quad \text{avec} \quad y_i \in \{x_1, \ldots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \ldots, \neg x_n\} \setminus \{x_i\}\}\,.$$

Il est immédiat de constater que les ensembles C_i sont à nouveau deux à deux disjoints et ont le même cardinal $\binom{n-1}{k-1}$. On est alors ramené au même problème que dans le paragraphe 1.3.3. À nouveau, la proposition 1.2 assure que le nombre de formules à m clauses qui acceptent A comme NPS est donné par $m!$ fois le coefficient de z^m de la série génératrice

$$F_{n,\ell}(z) = \sum_{m\geq 0} F_{m,n,\ell}\frac{z^m}{m!} = e^{z\left((2^k-1)\binom{n}{k} - \ell\binom{n-1}{k-1}\right)} \left(e^{z\binom{n-1}{k-1}} - 1\right)^\ell . \tag{1.13}$$

Soit A' une autre affectation des variables qui donnent la valeur 0 à ℓ variables $\{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\}$. Quitte à échanger les variables et les littéraux associés, il est clair que le nombre de formules qui admettent A' pour NPS ne dépend à nouveau que des paramètres m, n et ℓ et non des indices des variables affectées à 0. Comme il y a $\binom{n}{\ell}$ affectations des variables donnant à ℓ d'entre elles la valeur 0, on en déduit que

$$|\{\ (\Phi, A \text{ NPS})\ \}| = \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell}\, m!\,[z^m] e^{z\,\left((2^k-1)\binom{n}{k} - \ell\binom{n-1}{k-1}\right)} \left(e^{z\binom{n-1}{k-1}} - 1\right)^\ell .$$

L'extraction de coefficient est une opération linéaire, c'est-à-dire que

$$[z^n]f(z) + g(z) = [z^n]f(z) + [z^n]g(z).$$

La linéarité permet donc de factoriser le produit pour finalement obtenir le théorème, en utilisant la relation $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$. □

En appliquant à nouveau des bornes de col à ces expressions, on retrouve immédiatement le résultat de Dubois et Boufkhad.

Théorème 1.7 (Dubois and Boufkhad [DB99]) *Soient m, n deux entiers et $\mathcal{F}_{m,n,k}$ l'ensemble de formules de type k-SAT à m clauses construites sur n variables. Pour tout réel r strictement positif, on définit*

$$f_k(r) = \left(\frac{kr}{2^k e}\right)^r \frac{e^{\frac{2^k-k-1}{k}\delta}\left(2e^\delta - 1\right)}{\delta^r}$$

où le réel δ est l'unique réel strictement positif satisfaisant

$$\delta\left(\frac{2^k-k-1}{k} + \frac{2e^\delta}{2e^\delta - 1}\right) = r.$$

Soit $c_k = \inf\{r \in]0; +\infty[\,/ f_k(r) < 1\}$. On suppose que $m, n \to \infty$, avec $m/n \geq r$. Alors, si $r > c_k$, l'espérance du nombre de NPS *d'une formule aléatoire tend vers 0 et dès lors*

$$\mathbb{P}\left(\phi \in \mathcal{F}_{m,n,k} \text{ satisfaisable}\right) \longrightarrow 0.$$

Preuve : Le fait que la série génératrice ait une forme close est une chance puisque cela permet de majorer directement le nombre total de couples, sans avoir à majorer terme à terme une somme de n termes, comme ce que l'on a du faire pour les impliquants premiers. Cette série génératrice est à nouveau à coefficients positifs. Les bornes de col classiques peuvent donc être utilisées. En faisant le changement de variable $z = \delta\binom{n-1}{k-1}$, puis en utilisant la formule de Stirling, il vient ainsi, avec $m = rn$

$$\mathbb{P}\left(\Phi\ k\text{-SAT satisfaisable}\right) \leq C\sqrt{2\pi rn}\left(\left(\frac{kr}{2^k e}\right)^r \frac{e^{\frac{2^k-k-1}{k}\delta}\left(2e^\delta - 1\right)}{\delta^r}\right)^n.$$

L'expression sous la parenthèse est minimale dès que δ satisfait l'équation

$$\delta\left(\frac{2^k-k-1}{k} + \frac{2e^\delta}{2e^\delta - 1}\right) = r.$$

Si la valeur de l'expression est alors inférieure à 1, on en déduit que la probabilité de satisfaisabilité tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Pour $k = 3$, la plus petite valeur de r pour laquelle cette propriété se vérifie est ainsi $4,643$. Ainsi, on en déduit la majoration $r_3 < 4,643$. Pour de plus grandes valeurs de k, la majoration du seuil ainsi obtenue montre ainsi par exemple $r_4 < 10,217$ et $r_6 < 43,508$. □

1.4 Raffinement de la notion de solution localement maximales

1.4.1 Discussions préliminaires

Améliorer la borne

Pour affiner la majoration du seuil de satisfaisabilité, on est bien entendu tenté d'utiliser une notion plus forte de solution localement maximale. Des travaux ont déjà été effectués en ce sens, afin d'améliorer la borne supérieure des NPS, notamment ceux de Kaporis et al. ([KKKS98] puis [KKS+01]). Étant donné la structure en treillis des solutions, on est par exemple amené à définir les NPS-2 qui sont des solutions pour lesquelles on ne peut changer ni un, ni deux 0 en 1 sans contredire la formule, puis à calculer l'espérance du nombre de telles solutions afin d'améliorer la borne. Un argument probabiliste permet cependant d'affirmer que la borne ne sera pas améliorée (Kirousis et al. mentionnent le résultat sans donner l'argument, celui-ci ne m'a été fournit qu'oralement par Olivier

Dubois et personne n'a pris la peine de le rédiger dans la littérature). Il faut considérer les solutions pour lesquelles on ne peut pas changer trois 0 en 1 sans contredire la formule pour espérer améliorer la borne obtenue par les NPS, ou faire leur travail qui consiste à briser la symétrie entre les variables en introduisant l'ordre lexicographique sur les affectations (ils considèrent alors des solutions pour lesquelles on ne peut pas effectuer de changement de la forme $(x_i, x_j) = (0, 1) \rightarrow (x_i, x_j) = (1, 0)$ avec $i < j$).

Les travaux de Kirousis et al. ne se transposent pas facilement à une étude par série génératrice, notamment à cause de l'absence de symétrie entre les variables. On est donc amené à calculer l'espérance du nombre de solutions pour lesquelles on ne peut changer trois 0 en 1. Néanmoins, l'étude du cas où l'on interdit le changement de deux zéros est une étape nécessaire, avant de traiter le cas de trois zéros. On veut donc comprendre précisément la combinatoire servant à énumérer les couples composés d'une formule Φ et d'une solution A pour laquelle on ne peut changer un ou deux 0 en 1 sans contredire Φ. Nos objectifs dans cette partie sont donc les suivants :

- (**1**) Donner, pour toute affectation A, les caractéristiques des formules dont A est une NPS-2.
- (**2**) Exprimer ces caractéristiques en termes de séries génératrices et en déduire une formule explicite pour l'espérance du nombre de NPS-2.
- (**3**) Retrouver la borne du seuil de satisfaisabilité $4,643$ par une analyse asymptotique des coefficients des séries génératrices énumérant les coupes de formules/NPS-2.

Cette partie présente donc les techniques utilisées et les formules explicites obtenues pour le calcul de l'espérance du nombre de NPS-2 d'une formule 3-SAT aléatoire. Par la suite, on appellera simple flip le changement d'un 0 d'une affectation en 1, et double flip le changement de deux 0 d'une affectation en 1.

Calcul de l'espérance des NPS-2.

Le problème majeur rencontré dans cette partie est le suivant : pour les NPS, les ensembles des clauses qui « interdisent » les simples flips sont disjoints (par « interdisent », on entend que si une formule contient la clause, on ne peut changer la valeur de la variable considérée de 0 en 1 sans contredire la formule). Pour les NPS-2, c'est différent. Certains ensembles se recoupent : des clauses qui interdisent les simples flips interdisent par ailleurs des doubles flips. On ne peut se contenter d'appliquer la formule (1.4) pour le dénombrement.

Pour réussir l'énumération, on est donc amené à répondre à la question suivante : étant donnée une affectation A, comment puis-je construire une formule dont c'est une NPS-2 ?

Il existe un procédé simple pour cela : on commence par sélectionner des clauses dans les ensembles qui interdisent des simples flips. Là, la technique est déjà connue, il suffit de sélectionner au moins une clause dans un certain nombre de sous-ensembles disjoints. Une fois que l'on a fait cela, on met de coté ces ensembles. Tous les simples flips sont interdits et certains doubles flips le sont également.

On cherche alors parmi les clauses restantes lesquelles peuvent nous servir à interdire les doubles flips restants. À cet instant, comme on le verra par la suite, c'est devenu très simple puisqu'une fois qu'on a écarté les clauses anti-simple flip, les clauses anti-double flip se scindent en sous-ensembles disjoints. Il suffit alors de recommencer le procédé : piocher au moins un élément dans chaque sous-ensemble de clauses qui interdisent un double flip que l'on a pas encore interdit, mettre ensuite le tout de coté et terminer la sélection dans l'ensemble des clauses restantes.

Cette dernière partie a pour but de calculer le nombre total de couples $(\Phi, A$ NPS-2). Le procédé d'énumération n'est que la mise en équation de la procédure de construction que l'on vient de mettre en place. La seule difficulté supplémentaire par rapport aux travaux précédent est la mise en place

d'un codage qui dit à la fin de la sélection visant à interdire les simples flips quels doubles flips sont également interdits. On utilise pour cela des séries génératrices multivariées et les formules du crible de la partie 1.2.3.

Dans tout ce qui suit, on s'intéresse au problème 3-SAT uniquement.

1.4.2 Quelques lemmes

Soit A l'affectation des n variables $x_1, \dots, x_n$ qui associe aux ℓ premières variables la valeur 0 et la valeur 1 aux $n-\ell$ suivantes. On va chercher parmi les $7\binom{n}{3}$ clauses qui sont satisfaites par A celles qui sont contredites soit par le changement d'un 0 en 1 (que l'on appellera un simple flip), soit par le changement de deux 0 en 1 (que l'on appellera alors un double flip).

Soit C une clause de trois variables. Si elle est contredite par le simple flip de x_i (pour un certain entier $i \leq \ell$), c'est qu'elle est de la forme décrite dans le lemme 1.6. Si maintenant elle est contredite par le double flip de x_i et x_j, pour deux entiers i et j inférieurs ou égaux à ℓ, c'est qu'elle est d'une des trois formes suivantes :

$$(\mathbf{1}) \qquad C = \neg x_i \vee \neg x_j \vee y_3 \quad \text{avec} \quad y_3 \in \{x_1, \dots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \dots \neg x_n\} \setminus \{x_i, x_j\},$$

$$(\mathbf{2}) \qquad C = \neg x_i \vee y_2 \vee y_3 \quad \text{avec} \quad y_2, y_3 \in \{x_1, \dots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \dots \neg x_n\} \setminus \{x_i, x_j\},$$

$$(\mathbf{3}) \qquad C = \neg x_j \vee y_2 \vee y_3 \quad \text{avec} \quad y_2, y_3 \in \{x_1, \dots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \dots \neg x_n\} \setminus \{x_i, x_j\}.$$

> **Remarque:** Les clauses qui vérifient la condition (**1**) ont exactement deux littéraux de satisfaits. De telles clauses sont appelées 2-clauses. Par analogie, les clauses qui vérifient les conditions (**2**) et (**3**) sont alors appelées 1-clauses puisqu'elles n'ont qu'un seul littéral de satisfait.
>
> Ainsi étant donné une formule 3-SAT et une affectation , on peut séparer les clauses de la formule en quatre ensembles de 0-clauses, 1-clauses, 2-clauses et 3-clauses. La notion s'étend bien entendu aux formules k-SAT. Il est clair que pour tous entiers $r \neq s$, les ensembles des r-clauses et des s-clauses sont disjoints.

Supposons donc maintenant que l'on veuille construire une formule dont A soit une NPS dont certains double flips soient interdits. On entend par la qu'il existe un certain ensemble S de couples d'entiers tels que si $\{i,j\}$ est dans S, alors si l'on change les valeurs x_i et x_j de 0 à 1, on n'obtient plus une solution de Φ. On a ainsi la proposition suivante :

Proposition 1.7 *Soit $S \subset \{\{i,j\},\ i,j \in [\![1;\ell]\!]\}$. Une formule Φ admet A pour* NPS *dont les double flips d'indices de S sont interdits, si et seulement si elle est composée uniquement de clauses parmi les $7\binom{n}{3}$ clauses satisfaites par A et si les deux conditions suivantes sont satisfaites :*

- *Pour tout entier i, au moins une clause de Φ est de la forme*

$$C = (\neg x_i \vee y_2 \vee y_3) \quad \textit{avec} \quad y_2, y_3 \in \{x_1, \dots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \dots, x_n\} \setminus \{x_i\}.$$

- *Pour tout couple $\{i,j\}$ de S, au moins une clause de Φ est de la forme* (**1**), (**2**), (**3**) *décrite à l'instant.*

Notons C_i l'ensemble des clauses qui interdisent le simple flip de x_i et $C_{i,j}$ l'ensemble de celles qui interdisent le double flip des deux variables x_i et x_j. On veut énumérer les formules pour lesquelles A est une NPS dont on interdit un ensemble S de double flips. Les méthodes utilisées pour obtenir les formules (1.9) et (1.13) ne peuvent pas être utilisées cette fois car, si les ensembles $(C_i)_{i \in [\![1;\ell]\!]}$ sont disjoints deux à deux, en revanche C_i et $C_{i,j}$ ne le sont pas. Plus précisément, les éléments de $C_i \cap C_{i,j}$ sont justement les éléments du type (**2**) (et ceux de $C_j \cap C_{i,j}$ sont ceux de type (**3**)). On doit donc trouver une autre façon pour énumérer.

1.4.3 Version faible des NPS-2 : définition et borne supérieure associée

Dans un premier temps, pour simplifier l'étude, on ne va interdire qu'une partie des doubles flips. On commence donc par quelques définitions.

Définition faible des NPS-2

Définition 1.7 *Soient $x_1, \ldots, x_n$ des variables booléennes et A une affectation de ces n variables. On dit que x_i et x_j sont deux zéros consécutifs de A si elles sont affectées à 0 et si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

- *Pour tout entier k strictement compris entre i et j, la variable x_k est affectée à 1.*
- *Pour tout entier k strictement inférieur à i ou strictement supérieur à j, la variable x_k est affectée à 1.*

Considérons par exemple l'affectation suivante :

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1	0	0	1	0	0

Alors ses zéros consécutifs sont les 4 paires (x_2, x_3), (x_3, x_5), (x_5, x_6) et (x_6, x_2). En revanche, les deux paires (x_2, x_5) et (x_3, x_6) n'en sont pas. Pour toute affectation A, si x_i est un zéro de A, on note i^+ l'indice du zéro suivant, c'est à dire, le plus petit entier $j > i$ tel que x_j soit un zéro de A. S'il n'y en a pas, on définit i^+ comme étant le plus petit entier j tel que x_j soit un zéro. De la même manière, on définit et on note i^- l'indice du zéro précédent. Dans l'exemple ci-dessus, on a donc par exemple $2^+ = 3$ et $2^- = 6$.

On introduit alors une nouvelle notion de solution localement maximale que l'on notera NPS-2.

Définition 1.8 *Une solution est une* NPS-2 *si c'est une* NPS *et si lorsque l'on change n'importe quelle paire de* 0 *consécutifs en* 1*, on n'obtient plus une solution de la formule.*

Puisque toute formule satisfaisable a au moins une NPS-2, on en déduit comme de coutume :

$$|\{\ \Phi \text{ satisfaisable }\}| \leq |\{\ (\Phi, S) \text{ tels que } S \text{ est une NPS-2 de } \Phi\ \}|\,. \tag{1.14}$$

Comme précédemment, on va chercher une expression du membre de droite de cette inégalité, en cherchant pour une affectation donnée le nombre de formules pour lesquelles c'est une NPS-2.

Série génératrice

On reprend l'affectation A du paragraphe 1.4.2 et les sous-ensembles C_i et $C_{i,j}$ de ce même paragraphe. Dans un premier temps, on va coder la série génératrice qui énumère le nombre de façons de piocher les clauses qui contredisent les simple flips. Chaque sous-ensemble C_i peut être décomposé en quatre sous-ensembles disjoints. On note F l'ensemble des littéraux non satisfaits soit l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_\ell, \neg x_{\ell+1}, \ldots, \neg x_n\}$.

- le premier ensemble est celui des clauses qui interdisent les double flips consécutifs de (x_{i^-}, x_i) et de (x_i, x_{i^+}). Elles sont de la forme

$$\{(\neg x_i \vee y_2 \vee y_3), \quad y_2, y_3 \in F \setminus \{x_{i^-}, x_i, x_{i^+}\}\}\,.$$

  Au total, il y en a exactement $\binom{n-3}{2}$.

– le second celui des clauses qui interdisent uniquement le double flip consécutif de (x_i, x_{i^+}). Elles sont de la forme

$$\{(\neg x_i \vee x_{i^-} \vee y_3), \quad y_3 \in F \setminus \{x_{i^-}, x_i, x_{i^+}\}\}.$$

Au total, il y en a $n-3$.

– le troisième est celui des clauses qui interdisent uniquement le double flip consécutif de (x_{i^-}, x_i). Elles sont de la forme

$$\{(\neg x_i \vee x_{i^+} \vee y_3), \quad y_3 \in F \setminus \{x_{i^-}, x_i, x_{i^+}\}\}.$$

Il y en a également $n-3$.

– enfin, le dernier est celui des clauses qui n'interdisent aucun double flip consécutif. Il n'y en a qu'une, c'est la clause

$$(\neg x_i \vee x_{i^-} \vee x_{i^+}).$$

On souhaite maintenant coder les façons de tirer $m \geq 1$ éléments dans C_i, en marquant le nombre de clauses qui contredisent des doubles flips. On introduit donc les variables $(a_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$ qui vont uniquement servir au marquage des clauses qui interdisent le double flip des deux variables x_i et x_{i^+}. Les constatations précédentes nous amènent alors à la proposition suivante :

Proposition 1.8 *Soit $f_{m,r,s}$ le nombre de façons de piocher $m \geq 1$ éléments dans C_i de sorte que l'on prenne r clauses qui contredisent le double flip de x_{i^-}, x_i et s clauses qui contredisent le double flip de x_i, x_{i^+}. Alors la série génératrice exponentielle de ces nombres est donnée par*

$$\begin{aligned} F_i(z, a_{i^-}, a_i) &= \sum_{m,r,s\geq 0} f_{m,r,s}\ (a_{i^-})^r\ (a_i)^s\ \frac{z^m}{m!} \\ &= e^{z\left(a_{i^-}\ a_i\binom{n-3}{2}+a_{i^-}(n-3)+a_i(n-3)+1\right)} - 1. \end{aligned}$$

Maintenant, les ensembles C_i étant disjoints deux à deux, la série génératrice $F(z, a_1, a_2, \dots a_\ell)$ codant les façons de piocher au moins un élément dans chacun de ces ensembles où la variable z code le nombre d'éléments piochés et la variable a_i code le nombre de clauses qui interdisent le double flip de x_i et x_{i^+} est alors donnée par le produit de ces fonctions, en vertu de la théorie générale des séries génératrices exponentielles.

Corollaire 1.2 *Soit $f_{m,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}$ le nombre de façons de piocher m éléments dans les ensembles C_i, de sorte que l'on prenne au moins un élément dans chaque ensemble, et que l'on prenne α_1 éléments dans $C_{1,2}$, α_2 éléments dans $C_{2,3}$, etc .... La série génératrice de ces nombres est alors donnée par*

$$\begin{aligned} F(z, a_1, \dots, a_\ell) &= \sum_{m,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell\geq 0} f_{m,\alpha_1,\dots,\alpha_\ell}(a_1)^{\alpha_1}\cdots(a_\ell)^{\alpha_\ell}\frac{z^m}{m!} \\ &= \prod_{i=1}^{\ell}\left(e^{z\left(a_{i^-}a_i\binom{n-3}{2}+a_{i^-}(n-3)+a_i(n-3)+1\right)} - 1\right). \end{aligned} \tag{1.15}$$

Maintenant que l'on a réussi à introduire un codage dans la façon dont on interdit les simple flips, les méthodes du paragraphe 1.2.3 vont nous permettre de récupérer, pour un ensemble donné S de double flips, le nombre de façons de piocher des éléments de $C_1, , \dots, C_\ell$ de façon à interdire tous les simples flips, mais aussi les doubles flips de S et seulement ceux là.

On considère les propositions $(\mathcal{P}_i)$ définies pour tout i appartenant à $[\![1;\ell]\!]$ et tout tirage ω d'éléments de $C_1, , \dots, C_\ell$ par

« ω contient une clause qui interdit le double flip de x_i, x_{i^+} ». $(\mathcal{P}_i)$

En appliquant la formule du corollaire 1.1, on en déduit que pour tout ensemble S de doubles flips consécutifs, la série génératrice qui énumère tous les tirages d'éléments de $(C_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$ de sorte que seuls les doubles flips de S soient interdits est donnée par

$$F_{=S}(z) = \sum_{S'\subset S} (-1)^{|S|-|S'|} F_{S'}(z), \tag{1.16}$$

où la fonction F est celle de l'équation (1.15). Par conséquent, on a la formule suivante :

Lemme 1.7 *Le nombre de façons de construire une formule ϕ de forme* 3-SAT *à m clauses, telle que A soit une* NPS-2 *de ϕ est donné par le coefficient de z^m dans la série génératrice exponentielle*

$$G(z) = e^{z\left(7\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}\right)} \quad Tr\begin{bmatrix} -(e^z-1)e^{-z(n-2)} & e^{-z(n-2)}-1 \\ e^{z(n-2)}-1 & e^{z\binom{n-1}{2}}-1 \end{bmatrix}^{\ell}.$$

Preuve : L'ensemble des clauses satisfaites par A est dans un premier temps scindé en plusieurs sous-ensembles :

- les ensembles des 1-clauses qui interdisent un simple flip, c'est-à-dire les ensembles $(C_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$. Certaines des clauses de ces ensembles interdisent par ailleurs des doubles flips consécutifs. Chacun de ces ℓ ensembles comporte $\binom{n-1}{2}$ éléments, et est divisé en quatre sous-ensembles comme précédemment.
- les ensembles des 2-clauses qui interdisent un double flip de deux 0 consécutifs, soient les ensembles C_{i,i^+} privés de $C_i \cup C_{i^+}$. Aucune des clauses de ces ensembles n'interdit de simple flip, et elles interdisent chacune un et un seul double flip. Chacun de ces ℓ ensembles est de cardinal $n-2$ (ce sont les clauses du type (**1**) que l'on a vues au début du paragraphe 1.4.2).
- enfin, le reste des clauses, c'est-à-dire un ensemble de cardinal $7\binom{n}{3} - \ell\left(\binom{n-1}{2} + (n-2)\right)$.

Pour construire une formule dont A est une NPS-2, on commence par piocher au moins un élément dans chacun des ensembles de C_i afin d'interdire les simples flips. Certains doubles flips seront alors automatiquement interdits par des éléments de C_i. Une fois que cette sélection est terminée, on met de coté les ℓ ensembles $(C_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$.

À ce stade de construction de notre formule, tous les simples flips sont interdits et on a également interdit un certain ensemble S de doubles flips. Le codage introduit juste à l'instant permet de savoir exactement à l'issue du premier tirage ceux d'entre eux qu'il reste à interdire. Pour chacun d'entre eux, on doit alors piocher au moins un élément dans l'ensemble des 2-clauses qui interdit ce double flip. Une fois que l'on a fait cela, on met de coté ces $\ell - |S|$ ensembles disjoints et on est alors libre de compléter notre formule à l'aide des $7\binom{n}{3} - \ell\binom{n-1}{2} - (\ell - |S|)(n-2)$ clauses restantes.

Si S est un ensemble de double flips donné, on a vu que la série génératrice exponentielle qui énumère le nombre de façons de piocher les 1-clauses de sorte que seuls les doubles flips de S soient interdits est donné par l'équation (1.16). Celle qui énumère le nombre de façons de piocher au moins un élément dans $\ell - |S|$ ensembles disjoints de cardinal $n-2$ est donnée par $\left(e^{z(n-2)}-1\right)^{\ell-|S|}$ et pour finir, celle énumérant le nombre de façons de piocher un nombre quelconque d'élément dans un ensemble de cardinal $7\binom{n}{3} - \ell\binom{n-1}{2} - (\ell - |S|)(n-2)$ est donnée par $e^{z\left(7\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}-(\ell-|S|)(n-2)\right)}$.

Ainsi, la série génératrice qui compte le nombre de formules dont A est une NPS-2 et dont les doubles flips de S sont tous interdits par au moins une 1-clauses (le reste étant interdit uniquement

par des 2-clauses) est donnée par le produit de ces trois fonctions

$$\begin{aligned} G_S(z) &= F_{=S}(z)\left(e^{z(n-2)}-1\right)^{\ell-|S|} e^{z\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}-(\ell-|S|)(n-2)} \\ &= F_{=S}(z)\left(1-e^{-z(n-2)}\right)^{\ell-|S|} e^{z\left(7\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}\right)}. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Il suffit alors de faire la somme sur $S \subset [\![1;\ell]\!]$. On obtient alors la série génératrice exponentielle énumérant le nombre de formules dont A est une NPS-2.

$$\begin{aligned} G(z) &= \sum_{S\subset[\![1;\ell]\!]}\left(\sum_{S'\subset S}(-1)^{|S|-|S'|}F_{S'}(z)\right)\left(1-e^{-z(n-2)}\right)^{\ell-|S|} e^{z\left(7\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}\right)} \\ &= e^{z\left(7\binom{n}{3}-\ell\binom{n-1}{2}\right)}\left[\sum_{S'\subset[\![1;\ell]\!]}\left(\sum_{S\supset S'}(-1)^{|S|-|S'|}\left(1-e^{-z(n-2)}\right)^{\ell-|S|}\right)F_{S'}(z)\right]. \end{aligned}$$

Après l'inversion de sommation, l'expression entre parenthèses se factorise étant donné que choisir $S \supset S'$, c'est choisir des éléments parmi les $\ell - |S'|$ restants et donc

$$\begin{aligned} \sum_{S\supset S'}(-1)^{|S|-|S'|}\left(1-e^{-z(n-2)}\right)^{\ell-|S|} &= \sum_{i=0}^{\ell-|S'|}\binom{\ell-|S'|}{i}(-1)^i\left(e^{z(n-2)}-1\right)^{\ell-|S'|-i} \\ &= \left(-e^{-z(n-2)}\right)^{\ell-|S'|}. \end{aligned}$$

On est donc maintenant amené à simplifier la somme $\sum_{S'\subset[\![1;\ell]\!]} F_{S'}(z)\ (-e^{-z(n-2)})^{\ell-|S'|}$. Pour cela, on écrit S' comme un mot de longueur ℓ sur l'alphabet $\{0,1\}$. La $i^{\text{ème}}$ lettre du mot est égale à 1 si et seulement si i appartient à S'. Il est alors aisé de constater que la fonction $F_{S'}(z)$ s'écrit alors

$$F_{S'}(z) = \left(e^{z\binom{n-1}{2}}-1\right)^{\#11(S')}\left(e^{z(n-2)}-1\right)^{\#01(S')+\#10(S')}(e^z-1)^{\#00(S')}$$

où la notation $\#01(S')$ désigne le nombre de fois où la séquence "01" apparaît dans le mot S' (et ainsi de suite pour les autres notations) en comptant également une occurrence supplémentaire si la dernière lettre du mot est un 0 et la première lettre un 1. Par ailleurs, la relation $\ell - |S'| = \#00(S') + \#01(S')$ s'obtient facilement. On est donc ramené à une somme de la forme

$$\sum_{S'\subset[\![1;\ell]\!]} F_{S'}(z)\ (-e^{-z(n-2)})^{\ell-|S'|} = \sum_{S'\in\{0,1\}^\ell} a(z)^{\#00(S')}b(z)^{\#01(S')}c(z)^{\#10(S')}d(z)^{\#11(S')}$$

où les fonctions a, b, c et d sont données par

$$\begin{aligned} a(z) &= -(e^z-1)e^{-z(n-2)}, & b(z) &= e^{-z(n-2)}-1, \\ c(z) &= e^{z(n-2)}-1, & d(z) &= e^{z\binom{n-1}{2}}-1. \end{aligned}$$

Cette formule se factorise grâce à la relation

$$\sum_{S'\in\{0,1\}^\ell} a(z)^{\#00(S')}b(z)^{\#01(S')}c(z)^{\#10(S')}d(z)^{\#11(S')} = \mathrm{Tr}\begin{bmatrix} a(z) & b(z) \\ c(z) & d(z) \end{bmatrix}^\ell \tag{1.18}$$

ce qui achève la preuve du lemme. La preuve de cette dernière égalité est un peu particulière et ne requiert pas la théorie des séries génératrices multivariées. Elle sera proposée dans la partie 3.2 de l'annexe. □

Jusqu'à présent, on considérait l'affectation A qui associait la valeur 0 aux ℓ premières variables $x_1, \ldots, x_\ell$ et la valeur 1 aux autres. Si l'on considère une autre affectation B donnant la valeur 0 à ℓ variables, seuls les rôles des variables sont échangés, les calculs eux restent les mêmes. Par conséquent, on obtient la même expression du nombre de formules dont B est une NPS-2. En sommant alors sur toutes les formules, il vient alors après factorisation

Théorème 1.8 (Énumération des NPS-2(version faible)) *Le nombre de paires (Φ, A) où Φ est une formule de type 3-SAT avec m clauses et A est une de ses NPS-2 est donné par*

$$|\{\ (\Phi, A \text{ NPS-2})\ \}| = m!\ [z^m] e^{z4\binom{n}{3}}\, Tr\,(T^n)$$

où la matrice T est donnée par

$$T = \begin{bmatrix} e^{z\binom{n-1}{2}} - (e^z - 1)e^{-z(n-2)} & e^{-z(n-2)} - 1 \\ e^{z(n-2)} - 1 & 2e^{z\binom{n-1}{2}} - 1 \end{bmatrix}.$$

Corollaire 1.3 *Les bornes de col donnent le même ordre de grandeur exponentiel pour L'espérance du nombre de NPS d'une formule 3-SAT aléatoire et celle du nombre de NPS-2 (version faible).*

Preuve : Si l'on effectue comme à la fin du paragraphe 1.3.4 le changement de variable $\delta = z\binom{n-1}{2}$ et que le réel δ est supposé fixé, on constate que asymptotiquement, la matrice T devient

$$T = \begin{bmatrix} e^{\delta} + O\left(\frac{1}{n}\right) & O\left(\frac{1}{n}\right) \\ O\left(\frac{1}{n}\right) & 2e^{\delta} - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{bmatrix}.$$

La plus grande des valeurs propres de cette matrice est alors de la forme $2e^{\delta} - 1 + O\left(\frac{1}{n}\right)$ et la trace de la matrice T^n admet donc cette valeur $2e^{\delta} - 1$ comme ordre de croissance exponentiel. La formule de la proposition précédente assure alors que la borne de col a le même ordre de croissance exponentiel pour l'espérance du nombre de NPS-2 d'une formule 3-SAT aléatoire que celle donnée par l'espérance du nombre de NPS. □

> **Remarque:** Puisque les bornes de cols donnent dans la plupart des cas l'ordre de croissance exponentiel exact, on est alors convaincu que
>
> $$E\left[|\text{NPS de } \Phi \in \mathcal{F}_{m,n,3}|\right] \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq r}]{} 0 \Longleftrightarrow E\left[|\text{NPS-2 (faibles) de } \Phi \in \mathcal{F}_{m,n,3}|\right] \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq r}]{} 0.$$

Finalement, le marquage des clauses qui interdisent des doubles flips consécutifs, et une application élémentaire de la formule du crible a permis d'obtenir une expression simple de l'espérance du nombre de NPS-2 (pour une définition simplifiée). Ce résultat encourageant nous amène à effectuer maintenant le calcul pour la version forte de la définition. On va donc maintenant calculer l'espérance du nombre de solutions d'une formule 3-SAT aléatoire pour lesquelles il n'est pas possible de changer deux 0 en 1 sans contredire la formule.

1.4.4 Version forte des NPS-2 : définition et série génératrice

Cette fois-ci, on ne veut compter pour chaque formule que les solutions pour lesquelles il n'est possible d'effectuer ni un simple flip, ni un double flip sans contredire la formule. On commence donc naturellement par une définition.

Définition forte des NPS-2

Définition 1.9 *Une solution est une* NPS-2 *si c'est une* NPS *et si lorsque l'on change n'importe quelle paire de* 0 *en* 1*, on n'obtient plus une solution de la formule.*

Puisque toute formule satisfaisable a au moins une NPS-2, on en déduit comme de coutume :

$$|\{\ \Phi \text{ satisfaisable }\}| \leq |\{\ (\Phi, S) \text{ tels que } S \text{ est une NPS-2 de } \Phi\ \}|\,. \tag{1.19}$$

À nouveau, on va chercher une expression du membre de droite de cette inégalité, en cherchant pour une affectation donnée le nombre de formules pour lesquelles c'est une NPS-2.

Série génératrice

On reprend l'affectation A classique, qui assigne la valeur 0 aux ℓ premières variables et la valeur 1 aux autres. On réintroduit également les sous-ensembles $(C_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$ et $(C_{i,j})_{i,j\in[\![1;\ell]\!]}$ du paragraphe 1.4.2. On va effectuer un nouveau codage de la série génératrice qui énumère le nombre de façon de piocher les clauses qui contredisent les simple flips.

Parmi les éléments des sous-ensembles C_i, on peut alors distinguer trois types de clauses, suivant le nombre de doubles flips qu'elles interdisent :

- celles de la forme $\neg x_i \vee \neg x_j \vee \neg x_k$ avec $j, k \geq \ell + 1$. Ces clauses interdisent tout double flip impliquant la variable x_i. Il y en a exactement $\binom{n-\ell}{2}$.
- celles de la forme $\neg x_i \vee x_j \vee \neg x_k$ avec $j \leq \ell$ et $k \geq \ell+1$. Ces clauses interdisent tout double flip impliquant la variable x_i sauf le double flip des deux variables x_i et x_j. Il y en a exactement $(\ell - 1)(n - \ell)$.
- pour finir, celles de la forme $\neg x_i \vee x_j \vee x_k$ avec $j, k \leq \ell$. Celles-ci interdisent tous les doubles flips sauf celui des deux variables x_i et x_j où celui de x_i et x_k. Il y en a exactement $\binom{\ell-1}{2}$.

On souhaite comme précédemment coder les façons de tirer $m \geq 1$ éléments dans C_i, en marquant le nombre de clauses qui contredisent des doubles flips. On introduit donc les variables $(a_{i,j})_{i,j\in[\![1;\ell]\!]}$ qui vont uniquement servir au marquage des clauses qui interdisent le double flip des deux variables x_i et x_j. Les constatations précédentes nous amènent alors à la proposition suivante :

Proposition 1.9 *Soit $f_{m,a_{i,1},\ldots,a_{i,\ell}}$ le nombre de façons de piocher m éléments dans C_i de sorte que l'on prenne au moins un élément, $a_{1,i}$ clauses qui contredisent le double flip de x_1, x_i et ainsi de suite. Alors la série génératrice exponentielle de ces nombres est donnée par*

$$\begin{aligned} F_i(z, a_{1,i}, \ldots, a_{\ell,i}) &= \sum_{m,\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell \geq 0} f_{m,\alpha_1,\ldots,\alpha_\ell}\ (a_{1,i})^{\alpha_1} \cdots (a_{\ell,i})^{\alpha_\ell}\ \frac{z^m}{m!} \\ &= \exp z \left(\binom{n-\ell}{2} \prod_{s\neq i} a_{i,s} + (n-\ell) \sum_{j\neq i} \prod_{s\neq i,j} a_{i,s} + \sum_{j,k\neq i} \prod_{s\neq i,j,k} a_{i,s} \right) - 1 \end{aligned}$$

Les ensembles C_i étant disjoints deux à deux, la série génératrice $F(z, a_{1,2}, a_{1,3}, \ldots, a_{\ell-1,\ell})$ énumérant le nombre de façons de piocher au moins un élément dans chacun de ces ensembles où la variable z code le nombre d'éléments piochés et la variable $a_{i,j}$ code le nombre de clauses qui interdisent le double flip de x_i et x_j est alors donnée par le produit de ces fonctions.

Corollaire 1.4 *Soit $f_{m,\alpha_{1,2},\ldots,\alpha_{\ell-1,\ell}}$ le nombre de façons de piocher m éléments dans les ensembles C_i, de sorte que l'on prenne au moins un élément dans chaque ensemble, et que l'on prenne $\alpha_{1,2}$*

éléments dans $C_{1,2}$, $\alpha_{1,3}$ éléments dans $C_{2,3}$, etc .... La série génératrice de ces nombres est alors donnée par

$$F(z, a_{1,2}, \ldots, a_{\ell-1,\ell}) = \sum_{m,\alpha_{1,2},\ldots,\alpha_{\ell-1,\ell}\geq 0} f_{m,\alpha_{1,2},\ldots,\alpha_{\ell-1,\ell}} (a_{1,2})^{\alpha_{1,2}} \cdots (a_{\ell-1,\ell})^{\alpha_{\ell-1,\ell}} \frac{z^m}{m!}$$
$$= \prod_{i=1}^{\ell} \left(e^{z\binom{n-\ell}{2} \prod_{s\neq i} a_{i,s} + (n-\ell)\sum_{j\neq i}\prod_{s\neq i,j} a_{i,s} + \sum_{j,k\neq i}\prod_{s\neq i,j,k} a_{i,s}} - 1 \right) \quad (1.20)$$

Muni de ce codage on procède alors de la même manière que précédemment. On considère les propositions $(\mathcal{P}_{i,j})$ définies pour tous i, j appartenant à $[\![1;\ell]\!]$ et tout tirage ω d'éléments de $C_1, , \ldots, C_\ell$ par

« ω contient une clause qui interdit le double flip de x_i, x_j » $(\mathcal{P}_{i,j})$

La formule du corollaire 1.1 s'applique à nouveau. Pour tout sous-ensemble S de doubles flips, la série génératrice qui énumère le nombre de façons de piocher les 1-clauses de sorte que seuls les doubles flips de S soient interdits est encore donnée par l'équation (1.16), mais la fonction F est cette fois donnée par l'équation (1.20). On en déduit alors le lemme suivant :

Lemme 1.8 *Le nombre de façons de construire une formule ϕ de forme* 3-SAT *à m clauses, telle que A soit une* NPS-2 *de ϕ est donné par $m!\ell!$ fois le coefficient de $z^m u^\ell$ dans la série génératrice exponentielle bivariée*

$$G(z,u) = e^{z\left(7\binom{n}{3} - \ell\binom{n-1}{2}\right)} e^{\left(ua(z) + \frac{1}{2}\frac{u^2 b(z)}{1-uc(z)} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-uc(z)}\right) - uc(z) - \frac{(uc(z))^2}{2}\right)\right)} \quad (1.21)$$

avec
$$a(z) = e^{z\binom{n-1}{2}} - 1 \qquad b(z) = -\left(e^{z(n-2)} - 1\right)^2 e^{-z(n-2)}$$
$$c(z) = -\left(e^z - 1\right) e^{-z(n-2)}$$

Preuve : On scinde comme précédemment l'ensemble des clauses satisfaites par A en plusieurs sous-ensembles deux à deux disjoints

- les ensembles des 1-clauses qui interdisent un simple flip, c'est-à-dire les éléments des ensembles $(C_i)_{i\in[\![1;\ell]\!]}$. Certaines d'entre elles interdisent par ailleurs des doubles flips. Chacun de ces ensembles comporte $\binom{n-1}{2}$ éléments, et comporte des clauses des trois formes décrites auparavant.
- les ensembles des 2-clauses qui interdisent les doubles flips mais pas de simple flip, c'est-à-dire les ensembles $C_{i,j}$ privés de $C_i \cup C_j$. Aucune d'entre elle n'interdit de simple flip et elles n'interdisent chacun qu'un et un seul double flip. Chacun de ces ensembles est de cardinal $n-2$.
- le reste des clauses, c'est-à-dire un ensemble de cardinal $7\binom{n}{3} - \ell\binom{n-1}{2} - \binom{\ell}{2}(n-2)$.

De la même manière que précédemment, pour tout sous-ensemble S de doubles flips, la série génératrice énumérant le nombre de formules dont A est une NPS-2 et dont les doubles flips de S sont interdits par au moins une 1-clause (le reste étant interdit uniquement par des 2-clauses) est donnée par

$$G_S(z) = F_{=S}(z) \left(1 - e^{z(n-2)}\right)^{\binom{\ell}{2}-|S|} e^{z\left(7\binom{n}{3} - \ell\binom{n-1}{2}\right)} \quad (1.22)$$

où la fonction F est cette fois celle de l'équation (1.20).

On somme alors sur S cette relation et on fait une inversion de somme double. Ainsi, la série génératrice qui compte le nombre de formules dont A est une NPS-2 est donné par

$$G(z) = \sum_{S' \subset [\![1;\ell]\!]^2} F_{S'}(z)\ (-e^{-z(n-2)})^{\binom{\ell}{2}-|S'|}.$$

Pour simplifier cette somme, on va cette fois considérer S' comme un graphe à ℓ sommets contenant une arête entre le sommet i et le sommet j si et seulement si $\{i,j\}$ appartient à S. Soit maintenant S' un graphe et i un sommet de ce graphe. La fonction F_{iS} est obtenue en remplaçant dans la fonction F_i de la proposition 1.9 les variables $a_{i,j}$ par 0 ou 1. Il est alors clair que cette fonction s'évalue en 0 sauf s'il existe au moins $\ell-3$ variables de la forme $a_{i,s}$ avec s appartenant à $[\![1;\ell]\!] \setminus \{i\}$ qui s'évalue en 1. Par conséquent, la fonction $F_{S'}$ s'évalue également à 0 à moins que le graphe S' n'ait que des sommets de degré au moins $\ell-3$.

> **Remarque:** Cette propriété se justifie de manière directe. À chaque fois que l'on sélectionne une 1-clause pour interdire un simple flip, on interdit par la même occasion au moins $\ell-2$ doubles flips impliquant cette variable. En vertu de la proposition 1.5 du paragraphe 1.2.3, la série génératrice $F_{S'}$ énumère les tirages pour lesquels on n'a pioché aucune clause qui contredise un double flip qui ne soit pas dans S'. Si le graphe associé à S' a un degré de sommet i inférieur à $\ell-3$, c'est qu'il y a au moins 3 doubles flips impliquant i qui ne sont toujours pas interdits ce qui est impossible.
>
> Cette propriété justifie également que la version faible des NPS-2 n'apporte pas d'amélioration significative. En effet, un graphe G à ℓ sommets dont tous les sommets sont de degré $\ell-3$ a au moins $\binom{\ell-1}{2}$ arêtes. Son graphe complémentaire $\overline{G}$ qui possède une arête entre le sommet i et j si et seulement si G n'en a pas n'a que des sommets de degré au plus 2 et ne comporte donc au maximum qu'un seul cycle soit au plus $\ell-1$ arêtes. Ainsi, en interdisant tous les simples flips, on interdit alors au moins $\binom{\ell-1}{2}$ doubles flips aléatoires par la même occasion. C'est donc sans surprise que l'on constate qu'en interdisant en plus les doubles flips de variables consécutifs soit ℓ doubles flips, on n'apporte très peu de modifications à la majoration.

À partir de ces constatations, on en déduit que la fonction $F_{S'}$ s'écrit alors

$$F_{S'}(z) = \left(e^{z\binom{n-1}{2}}-1\right)^{\#\deg_{\ell-1}(S')} \left(e^{z(n-2)}-1\right)^{\#\deg_{\ell-2}(S')} (e^z-1)^{\#\deg_{\ell-3}(S')}$$

où la notation $\#\deg_{\ell-i}(S')$ désigne le nombre de sommets de degré $\ell-i$ du graphe associé à S'. D'autre part, pour tout graphe G dont $\mathcal{E}$ est l'ensemble des sommets et $\mathcal{V}$ l'ensemble des arêtes, on a la relation

$$\sum_{e\in\mathcal{E}} \deg(e) = 2\,|\mathcal{V}| \qquad \text{ou encore} \qquad \sum_{e\in\mathcal{E}} (\ell-1-\deg(e)) = 2\left(\binom{\ell}{2} - |\mathcal{V}|\right).$$

La deuxième formule s'interprète comme l'énumération du nombre d'arêtes manquantes dans le graphe. En appliquant celle-ci au graphe associé à S' qui ne comporte que des sommets de degré $\ell-1$, $\ell-2$ ou encore $\ell-3$, à qui il ne manque donc que 0, 1 ou 2 arêtes, on obtient la relation

$$\#\deg_{\ell-2} + 2\ \#\deg_{\ell-3} = 2\left(\binom{\ell}{2} - |S'|\right).$$

On est donc ramené à une somme de la forme

$$\begin{aligned}\sum_{S'\subset[\![1;\ell]\!]} F_{S'}(z)\ (-e^{-z(n-2)})^{\binom{\ell}{2}-|S'|} &= \sum_{\substack{G=(\mathcal{E},\mathcal{V})\ ,\ |\mathcal{E}|=\ell\\ \forall e\in\mathcal{E},\ \deg(e)\geq\ell-3}} a(z)^{\#\deg_{\ell-1}(G)} b(z)^{\#\deg_{\ell-2}(G)/2} c(z)^{\#\deg_{\ell-3}(G)}\\ &= \sum_{\substack{G=(\mathcal{E},\mathcal{V})\ ,\ |\mathcal{E}|=\ell\\ \forall e\in\mathcal{E},\ \deg(e)\leq 2}} a(z)^{\#\deg_0(G)} b(z)^{\#\deg_1(G)/2} c(z)^{\#\deg_2(G)}\end{aligned}$$

où les fonctions a, b et c sont données par

$$a(z) = e^{z\binom{n-1}{2}} - 1 \qquad b(z) = -\left(e^{z(n-2)}-1\right)^2 e^{-z(n-2)}$$
$$c(z) = -\left(e^z - 1\right) e^{-z(n-2)}$$

L'étude de cette somme a déjà été effectuée dans la partie 1.2.3 sur les séries génératrices multivariées. La proposition 1.3 assure donc que la somme s'exprime comme $\ell!$ fois le coefficient de u^ℓ dans la série génératrice

$$\exp\left(ua(z) + \frac{1}{2}\,\frac{u^2 b(z)}{1-uc(z)} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-uc(z)}\right) - uc(z) - \frac{(uc(z))^2}{2}\right)\right)$$

ce qui achève la preuve. □

À nouveau, le calcul ne fait intervenir que le nombre de variables assignées à la valeur 0 de l'affectation que l'on considérait. Pour cette même raison, on peut conclure :

Théorème 1.9 (Énumération des NPS-2 (version forte)) *Le nombre de paires (Φ, A) où Φ est une formule de type 3-SAT avec m clauses et A est une de ses NPS-2 est donné par*

$$|\{\ (\Phi, A \text{ NPS-2})\ \}| = m!n!\ [z^m u^n] e^{z4\binom{n}{3}} e^{u\widehat{a}(z) + \frac{1}{2}\frac{u^2 b(z)}{1-uc(z)} + \frac{1}{2}\left(\ln\left(\frac{1}{1-uc(z)}\right) - uc(z) - \frac{(uc(z))^2}{2}\right)}$$

où la fonction $\widehat{a}(z) = a(z) + e^{z\binom{n-1}{2}} = 2e^{z\binom{n-1}{2}} - 1$ et les fonctions b et c sont celles définies par le lemme 1.8.

Preuve : Puisque que le nombre de couples (Φ, A) où A est une NPS-2 de Φ ne dépend que du nombre ℓ de variables de A affectées à 0, on déduit du lemme 1.8 que

$$|\{\ (\Phi, A \text{ NPS-2})\ \}| = m! \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \ell! [u^\ell] G(z,u)$$

Il suffit alors juste de remarquer que

$$\begin{aligned}\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} e^{z(n-\ell)\binom{n-1}{2}} \cdot \ell! [u^\ell] G(z,u) &= n! \sum_{\ell=0}^{n} [u^{n-\ell}] e^{uz\binom{n-1}{2}} \cdot [u^\ell] G(z,u)\\ &= n!\,[u^n] e^{uz\binom{n-1}{2}} G(z,u)\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.5 *Les bornes de cols donnent le même ordre de grandeur exponentiel pour l'espérance du nombre de NPS d'une formule 3-SAT aléatoire et celle du nombre de NPS-2 (version forte).*

Preuve : En considérant les paramètres $\delta = z\binom{n-1}{2}$ et u constants, on a les majorations pour tous réels u et δ positifs

$$n![u^n]e^{uz\binom{n-1}{2}}G(z,u) \leq n!e^{u\left(2e^{\delta}-1\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)}u^{-n}.$$

En minimisant cette expression par rapport à u, on obtient la majoration

$$n![u^n]e^{uz\binom{n-1}{2}}G(z,u) \leq \left(2e^{\delta}-1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n.$$

On obtient alors la même majoration que pour les NPS en minimisant par rapport à δ la fonction $\delta \mapsto e^{\frac{4}{3}\delta}\left(2e^{\delta}-1\right)\delta^{-m}$. □

> **Remarque:** À nouveau, les bornes de cols permettent de se convaincre que
>
> $$E\left[|\text{NPS de } \Phi \in \mathcal{F}_{m,n,3}|\right] \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq r}]{} 0 \Longleftrightarrow E\left[|\text{NPS-2 (fortes) de } \Phi \in \mathcal{F}_{m,n,3}|\right] \xrightarrow[\substack{m,n\to\infty \\ m/n\leq r}]{} 0.$$

1.5 Discussions

La plus grande difficulté rencontrée, lorsque l'on cherche à améliorer la borne d'Olivier Dubois et Yacine Boufkhad des NPS, est celle exposée au paragraphe 1.4.1. Il est difficile de caractériser, pour une affectation A donnée, les formules qui admettent A comme NPS-2, ou NPS-ℓ pour $\ell \geq 3$. Ceci parce que les ensembles de clauses qui interdisent les flips ne sont pas disjoints. Depuis les travaux de Kirousis et al., aucune méthode probabiliste n'a abouti dans ce domaine et notamment, l'analyse de l'espérance des NPS-3 n'a pas été faite.

Les travaux qui ont été effectués dans cette thèse ouvrent une voie nouvelle et permettent d'être optimiste concernant cette analyse :

• le schéma de construction d'une formule, présenté au paragraphe 1.4.1 peut se naturellement être mis en place dans le cadre des NPS-3.

• les mises en équations par série génératrice, après utilisation de formules du crible a permis de mettre en place une jolie combinatoire. Il y a fort à parier qu'en utilisant à nouveau des variables de « marquage », une telle combinatoire se mette en place.

• enfin, les nombreux exemples abordés dans ce chapitre ont permis de se convaincre que les bornes de cols conduisaient, dans la plupart des cas, par une majoration élémentaire, aux mêmes bornes bornes que celles données par une analyse asymptotique particulièrement lourde.

Pour toutes ces raisons, ces travaux méritent d'être poursuivis, et l'on peut espérer qu'une nouvelle borne originale puisse être atteinte par ces méthodes.

Chapitre 2

Modèles d'urnes triangulaires de Pólya-Eggenberger

Sommaire

2.1 Présentation générale des urnes de Pólya 57
2.2 Méthodes de la combinatoire analytique 63
2.3 Urne de Pólya 70
2.4 Urnes triangulaires à deux couleurs de boules 75
2.5 Urnes triangulaires à trois couleurs de boules 83
2.6 Discussions 94

Le modèle d'urne de Pólya-Eggenberger est de formulation extrêmement simple : on dispose d'une urne qui contient des boules de diverses couleurs. On pioche une boule puis, en fonction de sa couleur, on exécute un certain nombre d'opérations qui modifient selon une règle déterminée la composition de l'urne (ajout/retrait d'un certain nombre de boules pour chaque couleur). Puis, on itère le procédé. On notera bien que les opérations effectuées ne dépendent que de la couleur de la boule piochée, pas du temps, ni de la composition interne de l'urne. Ce modèle a beau être simple, l'étude de la composition de l'urne après un grand nombre de pioches est une entreprise difficile.

De nombreux auteurs se sont intéressés à ce modèle. Les résultats obtenus ont permis de déterminer les lois limites que vérifient les distributions de probabilités de la composition des urnes dans une majeure partie des cas à deux couleurs de boules ainsi que pour quelques cas du modèle général à p couleurs. Les méthodes sont très variées (récurrences, martingales, etc ..). En contrepartie, l'unification de ces méthodes n'avait encore pas été envisagée et certaines urnes échappaient encore à l'analyse.

Notre approche se base sur une méthode originale de Philippe Flajolet, Joaquim Gabbaró et Helmut Pekari. Ces auteurs utilisent des méthodes de séries génératrices et d'analyse complexe pour redémontrer certains résultats de leurs prédécesseurs concernant une urne particulière à deux couleurs de boules, tout en apportant de considérables précisions. La méthode étant par ailleurs très polyvalente, il était envisageable de l'appliquer à une large classe d'urnes, et d'établir ainsi une classification des propriétés probabilistes des urnes en fonction des règles de replacement des boules.

Ce chapitre présente les résultats obtenus lors de l'étude des cas dits « triangulaires ». Pour des raisons techniques, ce cas avait été considéré comme problématique par plusieurs auteurs (voir paragraphe 2.1.2). Les cas des urnes triangulaires à deux, puis trois couleurs de boules sont traités par la méthode de Flajolet-Gabarró-Pekari et un grand nombre de résultats originaux sont obtenus.

Ces travaux font l'objet d'un article en préparation avec Philippe Flajolet [FP05b]. Dans le cadre de la classification, une autre urne sera étudiée dans la partie 3.2 du troisième chapitre. Le traitement du reste des urnes fera l'objet de travaux ultérieurs à cette thèse.

Plan: Ce chapitre se décompose en 5 parties. La partie 2.1 introduit précisément le modèle, ainsi que les résultats des prédécesseurs et propose ainsi un aperçu des travaux qui restent à effectuer. La partie 2.2 présente dans tous les détails la méthodologie de Flajolet-Gabbaró-Pekari qui sera utilisée par la suite.

Les parties suivantes entament la classification des urnes. La première urne, étudiée dans la partie 2.3 est le modèle original de Pólya, dont tous les résultats sont connus. Le but de cette partie est donc simplement de présenter la méthode sur un exemple simple.

Le modèle suivant, lequel fait l'objet de la partie 2.4, est un modèle dont la loi limite n'était jusqu'alors pas décrite (même si l'on en connaissait l'existence par un argument non constructif). On donne une caractérisation complète de cette loi ainsi que tous ses moments, ce que nos prédécesseurs n'avaient pas réussi à faire.

Enfin, dans la partie 2.5, nous généralisons les résultats de la partie 2.4 pour le cas d'urnes à 3 couleurs de boules. Les méthodes utilisées jusqu'alors échouaient pour les mêmes raisons techniques que dans le cas de deux couleurs et il n'y avait donc aucun résultat concernant ces modèles.

Résultats principaux: En ce qui concerne l'urne de Pólya initiale, les expressions exactes des probabilités, des moments et la loi limite étaient déjà connues. Nous donnons simplement, à l'aide de méthodes introduites initialement par Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró et Helmut Pekari, de nouvelles preuves de ces résultats.

Pour les urnes dites triangulaires à deux types de boules, nous commençons par présenter ces urnes comme une modélisation originale de l'évolution des espèces. Ensuite, les résultats suivants sont nouveaux : nous donnons une formule simple pour la distribution de probabilités ne faisant intervenir qu'une somme alternée (proposition 2.6). Nous trouvons par ailleurs des formules générales pour l'espérance, la variance et l'équivalent asymptotique de tous les moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires au temps n (corollaire 2.2). Jusqu'à présent, seule l'espérance d'un cas particulier d'urne avait pu être calculée.

Nous démontrons ensuite la convergence locale des probabilités vers une loi limite de type loi stable (avec des précisions sur la vitesse de convergence), et nous identifions cette loi en donnant un développement en série de rayon de convergence infini de sa densité (théorème 2.8). Pour finir, nous donnons une expression de la transformée de Mellin de la loi limite (théorème 2.9) ce qui fournit tous les moments d'ordre fractionnaires.

Les urnes triangulaires à trois couleurs de boules n'avaient jusqu'à présent jamais été étudiées. Les résultats qui suivent sont donc entièrement originaux. Trois comportements distincts sont observés en fonction des coefficients de la matrice de replacement. Pour chacun de ces trois cas, on donne l'espérance et la variance de la variable aléatoire égale au nombre de boules de la seconde couleur dans la proposition 2.9 (les boules de la première couleur ont une évolution identique au cas à deux couleurs de boules). Pour deux des comportements, on trouve à nouveau l'équivalent asymptotique des moments (proposition 2.10), et on en déduit la loi limite par une méthode de moments (théorème 2.11). Pour le dernier cas, on prouve une convergence en distribution et on caractérise la loi limite par une expression intégrale de sa fonction caractéristique (théorème 2.12).

2.1 Présentation générale des urnes de Pólya

Cette partie introduit le modèle d'urne de Pólya-Eggenberger. Nous rappelons le modèle initial et sa généralisation. Nous montrons brièvement en quoi ce modèle a suscité l'intérêt en donnant quelques applications en informatique. Puis nous présentons les résultats les plus significatifs obtenus à ce jour sur ces modèles.

2.1.1 Matrices d'évolutions

Le modèle d'urne que nous considérons a fait son apparition pour la première fois dans un article de Pólya et Eggenberger de 1923 [EP23]. La formulation exacte du problème (en allemand) est alors la suivante :

> « *In einer Urne befinden sich zu Beginn des spieles R rote und S schwarze, insgesamt $R+S=N$ Kugeln. Man zieht aus der Urne eine Kugel, und man legt an Stelle der gezogenen Kugel $1+\Delta$ Kugeln derselben Farbe in die Urne. Nun zieht man wieder eine Kugel und wiederholt die gleiche Operation.* »

Les auteurs introduisent ce modèle pour représenter la propagation d'épidémies. La généralisation du modèle de Pólya-Eggenberger se fait immédiatement. On dispose d'une urne contenant des boules blanches ou noires. La composition initiale est fixée à α_0 noires et β_0 blanches. À chaque instant, on pioche une boule dans l'urne, on regarde sa couleur puis on la replace. Si la boule est noire, on ajoute alors a boules noires et b boules blanches à la composition de l'urne. Si elle est blanche, on ajoute c boules noires et d boules blanches. Les coefficients peuvent éventuellement être négatifs, ce qui consiste alors en un retrait au lieu d'un ajout de boules. Les règles sont généralement résumées par la matrice 2×2

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

On s'intéresse alors à la distribution du nombre de boules de chaque couleur au bout de n pioches. Le problème se généralise naturellement à des urnes ayant un nombre $p \geq 3$ de couleurs de boules.

L'intérêt envers ces modèles d'urnes s'est particulièrement accru lorsque l'on a constaté que plusieurs problèmes classiques du monde informatique pouvaient se modéliser comme une instance d'un problème d'urne. On se propose de donner ici deux exemples très simples :

• Collectionneur de coupons : Il arrive souvent que certains produits alimentaires pour enfants proposent une image surprise à découvrir à l'intérieur de l'emballage. Supposons qu'il y ait un ensemble de m vignettes à collectionner. À chaque fois que l'on achète un paquet, on reçoit une vignette au hasard parmi les m possibles. Dès lors, on est naturellement amené à poser deux questions :

- Quelle est la distribution du nombre d'images différentes obtenues après n pioches ?
- Combien de temps faudra-t-il en moyenne pour toutes les avoir ? Quelle est la distribution limite de ce temps ?

Ce problème, de formulation très simple, a donné naissance à un test, dit « test du collectionneur de coupons », qui est utilisé pour la génération aléatoire de nombres. Par ailleurs, les réponses aux questions précédentes ont des applications par exemple dans les techniques de hachage. On citera en référence à ces deux applications les volumes 2 et 3 de la « bible » classique de Donald Knuth, *The art of computer programming* ([Knu69] et [Knu73]).

On modélise ce problème par une urne contenant initialement m boules blanches et dont les règles de replacement sont données par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

L'évolution de l'urne est simple : si une boule blanche est piochée, elle est coloriée en noir puis replacée. Si une noire est piochée, elle est remise telle quelle dans l'urne. Les boules noires correspondent donc aux coupons qui ont été récupérés, les blanches à ceux qui n'ont pas encore été obtenus.

• Arbres de Cayley croissants :

On considère des arbres non planaires, étiquetés et enracinés. On se propose d'en construire de manière récursive de la façon suivante. À l'instant initial, on ne dispose que d'un seul noeud, étiqueté par 1. À l'instant n, on sélectionne un noeud au hasard et on lui rajoute un fils d'étiquette $n+1$. L'arbre obtenu est alors dit croissant puisque tout noeud de l'arbre est étiqueté par un entier supérieur à l'étiquette de son père. La figure ci-dessous montre un exemple d'exécution de ce processus. Les noeuds coloriés en noir sont les noeuds internes, les noeuds blancs sont les noeuds externes.

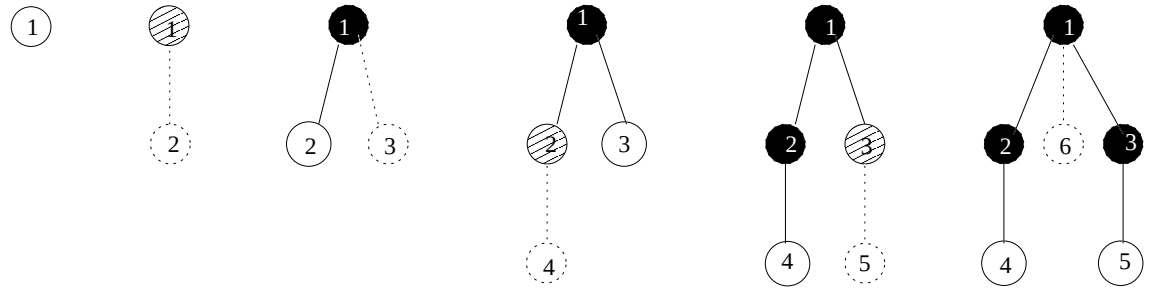


Fig. 2.1 – Exemple de construction aléatoire d'un arbre.

De tels arbres sont en bijection naturelle avec les arbres binaires de recherche (voir Flajolet-Sedgewick). Or, les paramètres des « ABR » (hauteur, longueur de parcours interne) donnent de nombreuses informations en théorie des files de priorité et du tri rapide quicksort (notamment concernant la complexité de l'exécution du programme). Étudier les arbres croissants permet ainsi d'obtenir des informations dans ces domaines.

Comme on peut le constater sur la figure, si l'on insère le nouveau fils au niveau d'un noeud interne, le nombre de noeuds externes augmente de 1. En revanche, si l'insertion se fait au niveau d'un noeud externe, c'est cette fois le nombre de noeuds internes qui augmente de 1. Les évolutions possibles de l'arbre se modélisent ainsi par une urne dont les règles de replacement sont données par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ayant pour condition initiale une boule blanche. Cette matrice est un cas particulier d'un modèle de Friedman, introduit en 1949. Le modèle d'arbre étudié a également une connection avec les nombres eulériens, une séquence classique de la combinatoire, comme on le verra dans le chapitre suivant, dédié au problème dit de « Ok Corral ».

Les deux problèmes que l'on vient de présenter sont parmi les problèmes les plus simples qui se transposent à des problèmes d'urne. Concernant d'autres applications des urnes à des problèmes

informatiques, on peut citer notamment les applications à la distribution des noeuds internes dans les arbres 2-3 et les arbres binaires de recherche équilibrés (voir Yao [Yao78], Aldous, Flannery, Palacios [AFP88] et Panholzer, Prodinger [PP98]), où l'on utilise une modélisation par une urne 2×2 dont les coefficients diagonaux sont négatifs. Plus récemment, Marianne Durand en collaboration avec Alfredo Viola a introduit un modèle d'urne contenant des boules de b couleurs dans l'étude du hachage à essai aléatoire, pour des unités de stockage pouvant contenir b données. Les résultats peuvent être retrouvés dans sa thèse [Dur04].

2.1.2 Urnes viables et urnes équilibrées

Lorsque les coefficients sont négatifs, il arrive qu'après un certain nombre de tirages, le processus stoppe, signifiant qu'il n'est plus possible de suivre les règles de la matrice. Considérons par exemple une urne dont les règles sont résumées par la matrice :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

En langage courant, le principe d'évolution de l'urne est simple : à chaque fois que l'on pioche une boule, elle « contamine » une boule de la couleur opposée qui prend alors sa couleur. S'il arrive que toutes les boules deviennent noires (ou blanches), alors l'urne stoppe : à partir de cet instant, il n'est plus possible de suivre les règles de replacement. En effet, on piochera alors nécessairement une boule noire, et on devra retirer une blanche alors qu'il n'y en a plus. On s'intéressera principalement aux urnes dites *viables*, c'est-à-dire celles pour lesquelles l'évolution de l'urne ne puisse jamais bloquer.

Définition 2.1 *Une urne est dite* viable *si aucune séquence de pioche n'amène à une action impossible (retirer plus de boules d'une certaine couleur qu'il n'en reste dans l'urne).*

Si les coefficients a, b, c et d sont positifs, il est clair que la viabilité de l'urne est assurée. Pour des urnes dont certains coefficients sont négatifs, la viabilité peut éventuellement être assurée par des conditions initiales particulières. Ces conditions seront détaillées au cas par cas dans le prochain paragraphe.

Les urnes présentées précédemment vérifient par ailleurs une propriété très utile. Leur matrice de replacement a une somme sur les lignes constante. Par conséquent, le nombre de boules dans l'urne augmente de la même valeur à chaque instant (ou reste constant). Une telle urne est dite équilibrée.

Définition 2.2 *Une urne est dite* équilibrée *si le nombre de boules rajouté après chaque pioche est le même, quelle que soit la couleur de la boule piochée. Cela revient à imposer que la somme sur chaque ligne de sa matrice de replacement soit constante.*

Cette hypothèse simplifie bien souvent les calculs. En effet, sous cette hypothèse, un seul paramètre permet de déterminer la composition de l'urne au temps n (le nombre de boules noires ou blanches). Si l'hypothèse n'est pas vérifiée, on doit considérer deux paramètres (le nombre de boules de chacune des couleurs ou le nombre total de boules plus le nombre de boules d'une quelconque couleur). Le fait d'avoir deux paramètres à considérer complique considérablement les récurrences satisfaites par les probabilités et personne jusqu'à présent n'a réussi à obtenir des résultats satisfaisants en tentant de les résoudre exactement.

Les premiers à s'attaquer aux urnes non-équilibrées furent Athreya et Karlin en 1968 [AK68]. Ces auteurs ont introduit un parallèle entre les modèles d'urnes et les processus de branchement markovien à temps continu (voir le livre de Athreya et Ney pour les définitions [AN04]). Sous leur

modèle, une urne contient des boules d'une couleur parmi p possibles. Chaque boule de l'urne a un temps de vie propre, qui suit une loi exponentielle. Dès que le temps de vie d'une boule arrive à sa fin, elle disparaît et donne naissance à un certain nombre de boules de chaque couleur. Puis, l'âge de chaque boule est remis à 0 et le procédé recommence. À l'aide de ce modèle, les auteurs ont obtenu de très nombreux résultats asymptotiques (incluant ceux de leurs prédécesseurs) sur le modèle dit de Pólya-Eggenberger généralisé où l'on utilise p couleurs pour les boules et où la matrice n'a aucun coefficient négatif à l'extérieur de la diagonale.

Plus récemment, Kotz, Mahmoud et Robert [KMR00] se sont penchés sur l'urne de matrice de replacement $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Le résultat surprenant qu'ils obtiennent est que le nombre de boules blanches est en moyenne asymptotiquement équivalent à $n/\ln n$ (sous un modèle de Poisson) alors que jusqu'à présent, les moyennes étaient généralement en $\Theta(n)$. Par ailleurs, ils traitent du modèle $\left[\begin{smallmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ équilibré pour lequel le nombre de blanches est en $\Theta(n^{1/4})$, un résultat que nous redémontrerons par la suite.

Très récemment, Janson [Jan04], dans des travaux indépendants de cette thèse, a repris les méthodes de Athreya et Karlin pour démontrer une multitude de résultats de convergence en distribution pour des modèles d'urnes généralisés vérifiant une hypothèse d'irréductibilité (en pratique, cela revient à dire que si l'on considère deux couleurs quelconque C_1 et C_2, on peut toujours obtenir une urne contenant une boule de la couleur C_2 à partir d'une urne dont la composition initiale est fixée à une seule boule de couleur C_1). Dans un article à paraître [Jan05], il a par ailleurs réussi à traiter entièrement le cas des matrices non irréductibles pour le cas d'urnes à deux couleurs (ce qui revient à considérer des matrices triangulaires), retrouvant ainsi les résultats de Kotz, Robert, Mahmoud ainsi qu'une partie des résultats qui seront présentés dans cette thèse, tout en ajoutant une caractérisation complète des lois limites de toutes les urnes viables et triangulaires (y-compris les cas non-équilibrés).

Les méthodes qui seront utilisées dans ce travail sont celles introduites par Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró et Helmut Pekari [FGP04]. Elles sont susceptibles de s'appliquer à toutes les urnes viables et équilibrées à deux types de boules, mais ne sont pas applicables au cas des urnes non-équilibrées. On va donc faire dans le prochain paragraphe un classement de toutes les urnes à étudier.

2.1.3 Classification des urnes viables et équilibrées à deux boules

Considérons dans un premier temps les urnes dont les coefficients de la matrice de replacement sont positifs. La matrice a au moins un coefficient non nul sur chaque ligne, sans quoi l'urne est équilibrée seulement si la matrice est la matrice nulle et alors, sa composition n'évolue jamais. D'autre part, une matrice de forme $\left[\begin{smallmatrix} s & 0 \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$ n'a aucun intérêt puisque l'urne évolue alors de façon déterministe. Il ne reste alors que deux urnes équilibrées ayant deux coefficients nuls à étudier, celles dont les matrices sont de la forme

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.1}$$

La première urne est celle du modèle de Pólya-Eggenberger, la seconde est un cas particulier d'un modèle plus général de matrice, introduit pour la première fois par Friedman [Fri49].

Si la matrice n'a qu'un coefficient nul, quitte à inverser les rôles de deux boules, on peut supposer que le coefficient nul est sur la première colonne. Il n'y a ainsi que deux types d'urnes à considérer dont les matrices de replacement sont

$$\begin{bmatrix} a & s-a \\ 0 & s \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad \begin{bmatrix} 0 & s \\ s-b & b \end{bmatrix} \tag{2.2}$$

avec $0 < a, b < s$ (le premier cas étant considéré comme problématique par plusieurs auteurs). Enfin, il reste à étudier le cas général des urnes de la forme

$$\begin{bmatrix} a & s-a \\ s-b & b \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

En ce qui concerne les urnes dont la matrice comporte des coefficients négatifs, pour assurer la viabilité, la somme sur les lignes doit être positive. Sinon, le nombre de boules diminue à chaque instant et l'urne bloque forcément au bout d'un certain temps. Par ailleurs, les coefficients non diagonaux doivent forcément être positifs. Considérons une matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ avec $b < 0$. Puisque la somme sur une ligne doit être positive, alors a est strictement positif. Si l'on pioche sans arrêt des boules noires, alors les règles de l'urne imposent de retirer des boules blanches tout en rajoutant des boules noires. Il est alors évident que l'urne n'est pas viable et que l'évolution va bloquer dès qu'il n'y aura plus de blanches.

Pour finir, si par exemple le coefficient a de la matrice ci-dessus est strictement négatif, alors le nombre initial de boules noires α_0 et le coefficient c doivent être des multiples de a. Sinon, il est toujours possible de trouver une séquence de pioche telle qu'à un instant, on doive retirer a boules noires de l'urne alors qu'il en reste moins de a : il suffit soit de piocher des noires en continu si a ne divise pas α_0 ou de piocher une fois une blanche puis que des noires si a divise α_0 mais pas c. Ces conditions sont généralement appelées *conditions de viabilité*.

Ces considérations faites, il ne reste plus que quelques urnes à étudier. Pour les urnes dont les matrices ont une somme sur les lignes nulle, à équivalence près, il n'y a que deux cas à considérer :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{ou} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Le premier modèle est en fait une autre formalisation du modèle d'Erhenfest d'échange de chaleur entre deux corps de différentes températures [EE07]. Le second est celui du collectionneur de coupons, comme on l'a vu précédemment.

On considère maintenant les urnes dont les matrices ont une somme sur les lignes strictement positive et au moins un coefficient négatif. Le nombre de boules dans l'urne augmente donc à chaque instant. À équivalence près, il ne reste que deux matrices possibles ayant un coefficient nul et un coefficient négatif :

$$\begin{bmatrix} -a & s+a \\ 0 & s \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 0 & s \\ s+b & -b \end{bmatrix} \tag{2.5}$$

avec les conditions $a \mid \alpha_0$ dans un cas et $b \mid s, \beta_0$ dans l'autre. La première matrice est à rapprocher du modèle du collectionneur de coupons puisqu'à chaque fois que l'on pioche une noire, on la repeint ainsi que $a-1$ de ses « collègues » en blanc (le nombre de noires ne fait alors que diminuer). Reste enfin le cas général, avec $a, b, s > 0$

$$\begin{bmatrix} -a & s+a \\ s+b & -b \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

et les conditions $a \mid \alpha_0, (s+b)$ et $b \mid \beta_0, (s+a)$. Ce modèle, ainsi que la matrice de droite de l'équation précédente peuvent être vues comme des généralisations du modèle de Friedman.

2.1.4 The story so far

Une multitude de résultats a été obtenue sur les urnes équilibrées à deux types de boules, depuis l'introduction du modèle de Pólya. Dans ce paragraphe, on se propose de faire un bref rappel des principaux résultats de nos prédécesseurs.

La première urne étudiée fut l'urne de Pólya ((2.1) à gauche). Pólya lui-même [Pól31] donne une expression exacte de la probabilité d'avoir k boules noires dans l'urne au temps n en fonction des paramètres α_0, β_0 et s. De ses expressions, il en déduit la convergence locale des probabilités vers une loi limite, nouvelle à l'époque, de type dit Beta et de paramètres $\left(\frac{\alpha_0}{s}, \frac{\beta_0}{s}\right)$.

Dix-huit ans plus tard, Friedman [Fri49] généralise le problème en considérant une urne dont la matrice de replacement est donnée par $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ b & a \end{smallmatrix}\right]$. Friedman donne une formule de récurrence entre les séries génératrices des moments de la variable aléatoire X_n donnant le nombre de boules noires au temps n. L'équation n'est cependant résoluble que dans certains cas qu'il étudie par la suite un à un, notamment l'urne de Pólya (lorsque $b = 0$), le modèle d'Erhenfest ((2.4) à droite), et le cas particulier où $a = 0$. Pour tous ces cas, il donne des expressions exactes des séries génératrices des moments et donc des probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$.

Il faut alors attendre Freedman [Fre65] pour obtenir la distribution limite de ces urnes. Le résultat principal est alors une convergence en distribution vers une loi limite gaussienne si le rapport des valeurs propres $\rho = (b - a)/(a + b)$ est inférieur ou égal à $1/2$, et vers une loi β de paramètres $\left(\frac{\alpha_0}{s}, \frac{\beta_0}{s}\right)$ si le rapport est strictement supérieur à $1/2$. Les méthodes utilisées sont à ce moment des méthodes de martingales.

Un peu plus tard, Bagchi et Pal [BP85] considèrent directement le cas général d'une urne équilibrée $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. En appliquant une méthode de moments, ils généralisent le résultat de Freedman de convergence en distribution vers une limite gaussienne à presque toutes les urnes viables et équilibrées ayant un rapport des valeurs propres inférieur ou égal à $1/2$. Leurs résultats s'appliquent alors pour les urnes (2.1) à droite, (2.2) à droite, certains cas de (2.3), (2.5) à droite et (2.6), mais pas au cas des urnes triangulaires.

Leurs travaux sont finalement repris par Gouet [Gou93] qui montre notamment pour les urnes triangulaires, à l'aide de techniques de martingales, une convergence vers une loi limite Z mais n'arrive cependant pas à la caractériser. En 1996, Smythe [Smy96] généralise le résultat de convergence en distribution vers une limite gaussienne pour une certaine classe d'urnes équilibrées à p couleurs, mais avec des conditions très strictes sur le spectre de la matrice de replacement. Notamment, si l'on trie les valeurs propres de la matrice de replacement dans l'ordre décroissant de leurs parties réelles, l'auteur impose $\Re(\lambda_1) \geq \Re(\lambda_2)/2$, une condition identique à celle de Bagchi et Pal.

Très récemment, Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró et Helmut Pekari ont mis en place une approche par série génératrice du modèle (2.6). À l'aide des méthodes de la combinatoire analytique, ils ont retrouvé les résultats de Bagchi et Pal tout en ajoutant des précisions sur les moments, des résultats supplémentaires de vitesse de convergence en loi (ce qu'il n'est pas possible d'obtenir par des méthodes de moments), ainsi que des fonctions de grandes déviations. Par ailleurs, une version non publiée de leur article traite le cas de l'urne $\left[\begin{smallmatrix} a+1 & 0 \\ 1 & a \end{smallmatrix}\right]$ pour laquelle ils montrent une convergence locale vers une loi limite de type loi stable.

Leur méthode est susceptible d'être appliquée à toutes les urnes viables et équilibrées à deux types de boules, bien que des difficultés techniques, qui seront présentées dans le paragraphe 2.2.3 dûssent être résolues au cas par cas. L'objectif poursuivi dans ces travaux était justement de l'utiliser afin de retrouver les lois limites de chacune de ces urnes par une méthode uniforme, tout en ajoutant des précisions en terme de vitesse de convergence, loi limite locale (et pas seulement convergence en distribution), et fonctions de grandes déviations. Nous nous sommes naturellement intéressés en premier lieu à l'urne triangulaire de gauche de l'équation (2.2) pour laquelle on savait seulement l'existence d'une loi limite par un argument non constructif. Puis les travaux ont été étendus au cas d'urnes triangulaires à trois types de boules. Ce chapitre présente les résultats obtenus qui font l'objet d'un article en préparation avec Philippe Flajolet [FP05a]. Par ailleurs, dans l'optique

d'une classification, l'urne de Pólya-Eggengerger $\left[\begin{smallmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]$ est étudiée rapidement dans la partie 2.3 de ce chapitre et l'urne de Friedman $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$ est également traitée dans le troisième chapitre, dans la partie 3.2, avec une application au problème de « Ok Corral ».

2.2 Méthodes de la combinatoire analytique

Dans cette partie, nous présentons toutes les techniques qui seront utilisées par la suite, notamment la méthode algébrique de Flajolet-Gabarró-Pekari. Celle-ci permet de coder l'évolution de l'urne par une série génératrice vérifiant une équation aux dérivées partielles simples. Nous présentons ensuite une célèbre méthode de résolution d'EDP, appelée *méthode des caractéristiques*. Celle-ci sera utilisée fréquemment par la suite. Finalement, nous rappelons les principaux théorèmes de convergence en distributions d'une variable aléatoire que nous utiliserons dans ce chapitre.

2.2.1 Série génératrice des événements

Dans ce paragraphe, on présente la méthode d'étude des urnes par série génératrice. L'idée générale est celle présentée par Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró et Helmut Pekari [FGP04]. On introduit une série génératrice énumérant toutes les évolutions possibles de l'urne à partir de l'état initial. Pour les urnes équilibrées, on constatera en effet qu'il y a équivalence entre ce dénombrement et l'analyse probabiliste de la composition de l'urne. On cherche une équation aux dérivées partielles vérifiée par cette série.

On ne présente la mise en équation que pour les urnes à deux types de boules équilibrées mais celle-ci s'étend immédiatement aux urnes équilibrées ayant un nombre quelconque de couleurs de boules.

On considère dans un premier temps une urne contenant à l'état initial une boule noire et une boule blanche, et dont la matrice de replacement est donnée par $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$. Soit $q_n(u,v)$ le polynôme énumérant toutes les évolutions possibles de l'urne au bout de n étapes. Il est défini de la façon suivante :

$$q_n(u,v) = \sum_{r,s\geq 0} q_{n,r,s} u^r v^s$$

où $q_{n,r,s}$ est le nombre de façons d'obtenir une urne composée de r boules noires et s boules blanches après n pioches, toutes les boules étant distinguées. Le tableau suivant donne les 2 premiers termes de la suite. Les numéros sont les indices des boules de l'urne et les notations N et B leur couleur.

La matrice de replacement étant équilibrée, le nombre de boules dans l'urne augmente de 2 unités à chaque étape, quelle que soit la couleur de la boule piochée. Par conséquent, au temps n, il y a exactement $2(n+1)$ boules dans l'urne, et le nombre de façons de procéder à n tirages est donné par $2 \cdot 4 \cdots (2n)$. On en déduit en particulier la relation liant la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les probabilités de la composition de l'urne :

$$\mathbb{P}\left(r \text{ noires et } s \text{ blanches au temps } n\right) = \frac{1}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} [u^r v^s] q_n(u,v). \tag{2.7}$$

Cette propriété ne se conserve pas si l'urne n'est pas équilibrée. Considérons par exemple une urne ayant également une boule de chaque couleur à l'état initial mais dont les règles sont données par la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Si l'on pioche une boule noire puis une blanche, on arrive à une composition au temps 2 de 2 noires et 3 blanches, et la probabilité d'un tel événement est de 1/4. En revanche, si l'on pioche

Instant 0	Pioche	Instant 1	Pioche	Instant 2
N : 1 B : 2	1	N : 1 3 B : 2 4	1	N : 1 3 5 B : 2 4 6
			2	N : 1 3 B : 2 4 5 6
			3	N : 1 3 5 B : 2 4 6
			4	N : 1 3 B : 2 4 5 6
	2	N : 1 B : 2 3 4	1	N : 1 5 B : 2 3 4 6
			2	N : 1 B : 2 3 4 5 6
			3	N : 1 B : 2 3 4 5 6
			4	N : 1 B : 2 3 4 5 6
$q_0(u,v) = uv$		$q_1(u,v) = u^2v^2 + uv^3$		$q_2(u,v) = 2u^3v^3 + 3u^2v^4 + 3uv^5$

FIG. 2.2 – Évolutions possibles de l'urne après 2 tirages.

d'abord une blanche, puis une noire, on obtient la même composition à l'instant 2, mais cette fois, la probabilité d'une telle séquence de tirages est donnée par 1/6.

$$\begin{array}{ccccc} \text{N}:1 & \xrightarrow{\mathbb{P}=1/2} & \text{N}:1\,3 & \xrightarrow{\mathbb{P}=1/2} & \text{N}:1\,3 \\ \text{B}:2 & & \text{B}:2\,4 & & \text{B}:2\,4\,5 \\ \text{N}:1 & \xrightarrow{\mathbb{P}=1/2} & \text{N}:1 & \xrightarrow{\mathbb{P}=1/3} & \text{N}:1\,4 \\ \text{B}:2 & & \text{B}:2\,3 & & \text{B}:2\,3\,5 \end{array}$$

Dès lors que les événements ne sont plus équiprobables, la relation (2.7) devient fausse. La méthode de série génératrice s'applique donc à priori uniquement aux urnes équilibrées.

Prenons maintenant une urne de composition (r, s) au temps n, représentée par le monôme $u^r v^s$. Il y a r façons de piocher une boule noire et d'obtenir une urne de composition $(r+1, s+1)$. Par ailleurs, il y a s façons de piocher une boule blanche et d'obtenir une urne de composition $(r, s+2)$. Ainsi, l'opérateur

$$u^r v^s \longmapsto r u^{r+1} v^{s+1} + s u^r v^{s+2} = \left(u^2 v \frac{\partial}{\partial u} + v^3 \frac{\partial}{\partial v} \right) u^r v^s$$

décrit exactement tous les événements qui peuvent arriver à notre urne. Par linéarité de cet opérateur, on en déduit que

$$q_{n+1}(u,v) = \left(u^2 v \frac{\partial}{\partial u} + v^3 \frac{\partial}{\partial v} \right) q_n(u,v). \tag{2.8}$$

En introduisant la série génératrice exponentielle de la suite (q_n)

$$H(z,u,v) = \sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}\, q_n(u,v),$$

il découle de la relation de récurrence que la fonction H que l'on nommera par la suite série génératrice des événements satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial z} = u^2 v \frac{\partial H}{\partial u} + v^3 \frac{\partial H}{\partial v} \tag{2.9}$$

et la condition initiale $H(0,u,v) = uv$. Réciproquement, supposons que H soit une solution de l'équation (2.9) et vérifie la condition initiale. Alors, la suite de coefficients $[z^n]H$ satisfait la même

récurrence que la suite $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ce qui la détermine de façon unique. Il n'y a donc qu'une et une seule solution à cette équation vérifiant ce type de condition initiale.

Cet exemple traité, on peut immédiatement généraliser la méthode et énoncer le résultat principal de l'étude des urnes par série génératrice par Flajolet-Gabarró-Pekari.

Théorème 2.1 *On considère une urne dont la composition initiale est de α_0 boules noires et β_0 boules blanches, et dont les règles de replacement sont données par la matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$. La série génératrice des événements, définie par*

$$H(z,u,v) = \sum_{r,s,n} q_{n,r,s} u^r v^s \frac{z^n}{n!}$$

où $q_{n,r,s}$ est le nombre de façons d'arriver à une urne contenant r noires et s blanches au temps n, satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial z} = u^{a+1}v^b \frac{\partial H}{\partial u} + u^c v^{d+1} \frac{\partial H}{\partial v} \tag{2.10}$$

et les conditions initiales

$$H(0,u,v) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0}. \tag{2.11}$$

Il existe une et une seule fonction satisfaisant les conditions (2.10) *et* (2.11)*. Si l'urne est équilibrée avec $s = a+b = c+d$, la probabilité d'avoir r boules noires et s boules blanches au temps n est alors donnée par*

$$\mathbb{P}\left(r \text{ noires et } s \text{ blanches au temps } n\right) = \frac{n!}{t_0(t_0+s)\cdots(t_0+(n-1)s)} [z^n u^r v^s]\, H(z,u,v). \tag{2.12}$$

Les moments sont obtenus par dérivation de la fonction H. En notant comme de coutume $X^{\underline{\ell}} = X(X-1)\cdots(X-\ell+1)$, le moment factoriel d'ordre ℓ de la variable aléatoire X_n donnant le nombre de boules noires est donné par

$$E\left[{X_n}^{\underline{\ell}}\right] = \frac{n!}{t_0(t_0+s)\cdots(t_0+(n-1)s)} [z^n] \frac{\partial^\ell H}{\partial u^\ell}\Big|_{u,v=1}. \tag{2.13}$$

Preuve : L'équation différentielle est obtenue de la même façon que pour l'exemple précédent. La formule (2.12) découle de la définition de $q_{n,r,s}$ en remarquant que le nombre de façons de faire n tirages est donné dans le cas général par le coefficient $t_0\cdots(t_0+(n-1)s)$. Enfin, l'équation (2.13) s'obtient en remarquant que

$$\frac{\partial^\ell H}{\partial u^\ell}\Big|_{u,v=1} = \sum_n \left(\sum_{r,s} q_{n,r,s} r(r-1)\cdots(r-\ell+1) \right) \frac{z^n}{n!}.$$

Après normalisation par le coefficient $\frac{n!}{t_0\cdots(t_0+(n-1)s)}$ et extraction de coefficient, on retrouve bien l'expression du moment factoriel. □

2.2.2 Redondance des variables

Considérons une urne équilibrée, dont la somme sur les lignes est égale à s, comportant à l'état initial α_0 boules noires et β_0 boules blanches (soit t_0 boules au total). À l'instant n, il y a nécessairement $t_0 + n$ boules dans l'urne. Le nombre d'événements $q_{n,i,j} = [z^n u^i v^j] H(z,u,v)$ est donc non nul seulement si $i + j = t_0 + ns$. Par conséquent, la variable v est redondante lorsque l'on fait une extraction de coefficient, puisque une fois que l'on a fait une extraction par rapport à z puis à u, la fonction de v obtenue n'a qu'un seul coefficient non nul. Il résulte de cette remarque :

Proposition 2.1 *Si l'urne est équilibrée avec pour somme sur les lignes s, la probabilité d'avoir r boules noires au temps n et donc $t_0 + ns - r$ boules blanches est donnée par*

$$\mathbb{P}\,(r \text{ noires au temps } n) = \frac{n!}{t_0(t_0+s)\cdots(t_0+(n-1)s)}[z^n u^r]\, H(z,u,1). \tag{2.14}$$

Par ailleurs, la relation $q_{n,i,j} \neq 0 \Rightarrow i + j = t_0 + ns$ se traduit immédiatement sur les monômes composant la série génératrice des événements par la formule

$$\left(u\frac{\partial}{\partial u} + v\frac{\partial}{\partial v}\right) u^i v^j z^n = \left(t_0\ \mathrm{Id} + sz\frac{\partial}{\partial z}\right) u^i v^j z^n.$$

Par linéarité, cette propriété s'étend à H tout entière qui vérifie ainsi une nouvelle équation aux dérivées partielles

$$u\frac{\partial H}{\partial u} + v\frac{\partial H}{\partial v} = t_0 H + sz\frac{\partial H}{\partial z} \tag{2.15}$$

En couplant celle-ci avec l'équation (2.10), on peut éliminer la dérivation par rapport à v, puis substituer 1 à v, puisque cette opération commute avec les opérations de dérivation par rapport à u et z. On obtient ainsi une équation aux dérivées partielles, vérifiée cette fois par $H(z,u,1)$.

Proposition 2.2 *La fonction $\hat{H}(z,u) = H(z,u,1)$ satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$(1 - su^c z)\frac{\partial \hat{H}}{\partial z} + (u^{c+1} - u^{a+1})\frac{\partial \hat{H}}{\partial u} = t_0\, u^c \hat{H} \tag{2.16}$$

et la condition initiale $\hat{H}(0,u) = u^{\alpha_0}$.

Cette équation aux dérivées partielles appartient à la classe des équations quasi-linéaires, définies généralement par la forme

$$A(z,u,\hat{H})\frac{\partial \hat{H}}{\partial u} + B(z,u,\hat{H})\frac{\partial \hat{H}}{\partial z} + C(z,u,\hat{H}) = 0.$$

Celle vérifiée par H est dite linéaire. Ce genre d'équation peut se résoudre universellement grâce à la méthode des caractéristiques sous forme implicite. Dans certains cas, lorsque les fonctions implicites se « résolvent », on peut aboutir à une forme close. La présentation de cette méthode est l'objet de la partie suivante.

2.2.3 Méthode des caractéristiques

Équation linéaire homogène :

L'équation aux dérivées partielles (2.10) vérifiée par la série génératrice des événements est dite linéaire du premier ordre et homogène, c'est-à-dire de la forme

$$f_1(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1,\ldots,x_n)\frac{\partial H}{\partial x_n} = 0.$$

Pour de telles équations, il est facile de remarquer que l'espace des solutions forme une algèbre de dimension infinie étant donné que pour toutes solutions H_1, H_2 et une fonction arbitraire φ de deux variables, $\varphi(H_1, H_2)$ est également une solution. Si l'ensemble des solutions paraît donc très grand, il est malgré tout possible de trouver une « base » de $n-1$ solutions $h_1,\ldots,h_{n-1}$, en ce sens que toutes les autres solutions s'expriment alors en fonction de h_1, $h_2,\ldots,h_{n-1}$ (mais pas comme une combinaison linéaire finie bien entendu). Les notions et les preuves des théorèmes présentés ici peuvent être retrouvés dans le livre de Henri Cartan ([Car67], quatrième partie).

Remarque: Les théorèmes sont prévus pour des fonctions allant d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Ils seront néanmoins appliqués *sans souci de rigueur mathématique* pour résoudre les équations (2.10) et (2.16), bien que l'on considère alors des fonctions de la variable complexe. Le fait est que, une fois une solution de la variable réelle trouvée à une équation, il sera alors généralement immédiat de vérifier que la fonction est en fait analytique sur un ouvert de $\mathbb{C}^n$ contenant l'origine, sur lequel elle satisfait encore l'équation différentielle.

Définition 2.3 *On considère une équation différentielle ordinaire*

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \tag{2.17}$$

où x est une application de classe $\mathcal{C}^1$ d'un ouvert I de $\mathbb{R}$ dans un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}^n$. Une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathbb{R}$ s'appelle une intégrale première de l'équation (2.17) *si la fonction $\psi(x(t))$ est constante chaque fois que $t \mapsto x(t)$ est une solution de l'équation* (2.17).

L'équation différentielle (2.17) peut également s'écrire sous la forme du système

$$\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = f_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad \forall i \in [\![1; n]\!] \tag{2.18}$$

où les réels $(x_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ et les fonctions $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont respectivement les composantes du vecteur x et du vecteur $f(x)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Avec de telles notations, il vient la proposition suivante, dont la vérification est immédiate.

Proposition 2.3 *Une fonction ψ est une intégrale première de l'équation* (2.17) *si et seulement si en tout point x de U, on a*

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial \psi}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n) = 0. \tag{2.19}$$

En vertu de cette proposition, on constate que les solutions d'une équation aux dérivées partielles coïncident exactement avec les intégrales premières d'un système d'équations différentielles ordinaire. La caractérisation de l'ensemble des solutions d'une telle équation découle alors du théorème suivant.

Théorème 2.2 (Existence des intégrales premières) *Si l'on dispose d'un système différentiel du type* (2.18) *dans lequel les fonctions $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et non toutes nulles en un point $(a_1, \ldots, a_n)$, il possède au voisinage de ce point un système de $n-1$ intégrales premières $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ dont les dérivées sont des formes linéaires linéairement indépendantes en tout point de ce voisinage. De plus, toute intégrale première ψ est de la forme $\Phi(\psi_1, \ldots, \psi_{n-1})$ où Φ est une fonction arbitraire de classe $\mathcal{C}^1$.*

Théorème 2.3 (Existence des solutions d'une EDP linéaire homogène) *Considérons une équation aux dérivées partielles*

$$f_1(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial H}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial H}{\partial x_n} = 0 \tag{2.20}$$

dont les fonctions coefficients $(f_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ ne sont pas toutes nulles en un point. Alors l'équation (2.20) *possède $n-1$ solutions $\psi_1, \ldots, \psi_{n-1}$ définies au voisinage de ce point, dont les dérivées sont linéairement indépendantes et toute solution ψ est une fonction arbitraire Φ de $\psi_1, \psi_2, \ldots \psi_{n-1}$.*

En ce qui concerne les équations (2.10) et (2.16), on constate facilement que le coefficient de $\partial H/\partial z$ est toujours non nul au point $z = 0$ ce qui assure la validité du théorème dans un voisinage de ce point (pour toutes valeurs de u ou v).

Finalement, résoudre une équation aux dérivées partielles revient à trouver les intégrales premières d'un système d'équations différentielles ordinaires. Il n'existe pas de méthode générale permettant de les trouver toutes automatiquement sous forme close et seuls certains systèmes sont résolubles sous forme explicite. On pose généralement le système (2.18) sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{f_1(x_1,\ldots,x_n)} = \frac{\mathrm{d}x_2}{f_2(x_1,\ldots,x_n)} = \cdots \frac{\mathrm{d}x_n}{f_n(x_1,\ldots,x_n)} \tag{2.21}$$

et on essaie ensuite de résoudre certaines des équations différentielles induites. Dans certains cas, elles s'intègrent directement sans problème (voir la preuve du théorème (2.4)). Dans d'autre cas, il est possible de trouver un certain ordre de résolution (preuve du théorème (3.1)). Dans le cas général en revanche, il n'existe pas de méthodologie universelle.

Fort heureusement, pour les urnes à deux types de boules, la série génératrice des événements ne dépend que de trois variables et les coefficients de l'équation aux dérivées partielles qu'elle vérifie sont des fonctions simples qui ne font intervenir qu'une ou deux de ces variables. Par conséquent, il existe une solution générale de l'équation différentielle qui s'exprime de manière formelle comme la réciproque d'une fonction de la variable complexe. La difficulté consiste alors à déterminer les propriétés analytiques de cette fonction. En particulier, la nature de ses singularités n'est pas claire et par conséquent, l'extraction des lois dans le cas général nécessite un travail non trivial mais envisageable. Pour le cas triangulaire, le problème ne se pose pas puisque comme on le verra par la suite, l'équation se résout sous forme close.

Équations quasi-linéaires

On s'intéresse maintenant à la résolution d'équations aux dérivées partielles de la forme (2.16) dites quasi-linéaires. Plus généralement, il s'agit d'équations de la forme

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,H)\frac{\partial H}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1,\ldots,x_n,H)\frac{\partial H}{\partial x_n} = g(x_1,\ldots,x_n,H). \tag{2.22}$$

Ce genre d'équation se ramène alors astucieusement au cas précédent. Il suffit de chercher dans un premier temps une fonction ψ telle que

$$\psi(x_1,\ldots,x_n,H) = 0.$$

et telle que $\partial\psi/\partial H \neq 0$ en au moins un point. Alors, on constate en dérivant cette expression que ψ satisfait l'équation aux dérivées partielles linéaire homogène

$$f_1(x_1,\ldots,x_n,H)\frac{\partial \psi}{\partial x_1} + \cdots + f_n(x_1,\ldots,x_n,H)\frac{\partial \psi}{\partial x_n} + g(x_1,\ldots,x_n,H)\frac{\partial \psi}{\partial H} = 0. \tag{2.23}$$

On peut donc tenter de résoudre cette équation à l'aide des méthodes précédentes. Si l'on réussit à trouver les n intégrales premières $\psi_1,\ldots,\psi_n$ de cette équation, on sait que la solution la plus générale de l'équation (2.23) s'exprime sous la forme

$$\psi(x_1,\ldots,x_n,H) = \Phi\left(\psi_1(x_1,\ldots,x_n,H),\ldots,\psi_n(x_1,\ldots,x_n,H)\right)$$

où Φ est une fonction arbitraire. Il suffit alors pour terminer de résoudre par rapport à la variable H l'équation $\psi(x_1,\ldots,x_n,H) = 0$.

2.2.4 Théorèmes de convergence en distribution

On termine brièvement l'introduction des méthodes utilisées dans le chapitre par deux méthodes pour prouver des convergences en distribution : la méthode des moments et celle des fonctions caractéristiques. La première a déjà été utilisée avec succès par Bagchi et Pal. Elle sera réutilisée ainsi que la seconde méthode dans le chapitre sur les urnes triangulaires à trois couleurs de boules. On rappelle donc brièvement les résultats importants. Les preuves peuvent être retrouvées dans l'excellent livre de Billingsley [Bil86]. Dans cette partie, l'intégrale utilisée est celle Stieljes. La fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X est la fonction de $\mathbb{R}$ dans $[0;1]$ définie par

$$\mu(x) = \mathbb{P}\left(X \leq x\right).$$

Une telle fonction est croissante, continue à droite, de limite nulle en $-\infty$ et de limite 1 en $+\infty$.

Méthode des moments

Théorème 2.4 *Soit μ une fonction de répartition. On suppose que μ admet des moments de tout ordre*

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k d\mu(x) < \infty.$$

Si la série entière $\sum \mu_k z^k/k!$ a un rayon de convergence strictement positif, alors μ est la seule fonction de répartition ayant ces moments. On dit alors que μ est caractérisée par ses moments.

Théorème 2.5 *Soit X une variable aléatoire et X_n une suite de variables aléatoires. Si la fonction de répartition μ de X est caractérisée par ses moments et si pour tout entier k, on a*

$$E\left[{X_n}^k\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} E\left[X^k\right],$$

alors, la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en distribution vers X :

$$\forall x \in \mathbb{R} \qquad \mu_n(x) = \mathbb{P}\left(X_n \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{P}\left(X \leq x\right) = \mu(x)$$

en tout point de continuité de μ.

Pour déterminer une convergence en distribution, il suffit donc de calculer les moments de la variable X_n (ou d'une de ses normalisations) et de vérifier que ces moments admettent des limites qui caractérisent une et une seule distribution limite. C'est ainsi la méthode utilisée par Bagchi et Pal pour montrer leurs résultats. On remarquera cependant que le théorème ne donne pas de précision sur la vitesse de convergence, ce que les méthodes de la combinatoire analytique vont fournir dans le cas des urnes à deux couleurs de boules.

Méthode des fonctions caractéristiques

Définition 2.4 *Soit μ une fonction de répartition. La fonction caractéristique de μ est définie pour tout réel ξ par*

$$\hat{\mu}\left(\xi\right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} d\mu(t). \tag{2.24}$$

Remarque: Si X est une variable aléatoire qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, \ldots, x_p$, sa fonction de répartition est constante par morceaux et sa fonction caractéristique coïncide par l'intégrale de Stieljes avec la série

$$\hat{\mu}(\xi) = \sum_{k=1}^{p} \mathbb{P}(X = x_k)\, e^{ix_k\xi}.$$

Théorème 2.6 *Soit X une variable aléatoire et X_n une suite de variables aléatoires. On note μ la fonction de répartition de X et μ_n celle de X_n. Alors X_n converge en distribution vers X si et seulement si la suite de fonctions caractéristiques $(\hat{\mu}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\hat{\mu}$.*

Ce chapitre a maintenant pour but de déterminer précisément la distribution limite de la composition des urnes triangulaires dont la matrice est à coefficients positifs. On traite dans un premier temps le cas d'une urne à deux couleurs de boules. On ne s'intéresse qu'à la variable aléatoire X_n donnant le nombre de boules noires à l'instant n. En effet si l'urne est équilibrée, et si Y_n est la variable aléatoire donnant le nombre de boules blanches à l'instant n, alors

$$X_n + Y_n = t_0 + sn$$

où t_0 est le nombre de boules initial et s la somme sur une ligne de la matrice de replacement. Il est donc inutile de considérer les deux variables.

2.3 Urne de Pólya

On considère une urne dont la composition initiale est donnée par α_0 boules noires et β_0 boules blanches, et dont la matrice de replacement est donnée par

$$\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}.$$

Cette urne est l'urne originale de Pólya. L'auteur l'utilise pour modéliser la propagation d'épidémies. On peut également la voir comme un modèle de campagne électorale : Deux personnes (Iznogoud et le calife par exemple) sont candidats pour une élection. Ils disposent à l'instant initial de α_0 et β_0 sympathisants respectivement, qu'ils envoient prospecter un peu partout. À chaque fois que l'un d'entre eux organise un débat, il convainc s personnes de voter pour son candidat. La question est alors de savoir combien de sympathisants auront-ils chacun après n débats.

On sait à peu près tout ce que l'on veut savoir sur ce modèle. Les résultats présentés ici ne sont pas nouveaux. Cette partie peut donc être considérée comme une simple mise en jambe pour les techniques de la combinatoire analytique.

2.3.1 Série génératrice des événements

En vertu de la proposition 2.1, la série génératrice des événements vérifie l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial z} = u^{s+1}\frac{\partial H}{\partial u} + v^{s+1}\frac{\partial H}{\partial v} \tag{2.25}$$

et les conditions initiales $H(0, u, v) = u^{\alpha_0}v^{\beta_0}$. Suivant la méthode des caractéristiques, on trouve alors :

Proposition 2.4 *La série génératrice des événements d'une urne de Pólya, initialisée à α_0 boules noires et β_0 boules blanches est donnée par*

$$H(z,u,v) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0} \left(1 - s u^s z\right)^{-\alpha_0/s} \left(1 - s v^s z\right)^{-\beta_0/s}. \tag{2.26}$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir $\alpha_0 + ks$ boules noires au temps n est donnée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(X_n = \alpha_0 + ks\right) &= \binom{n}{k} \frac{\frac{\alpha_0}{s} \cdots \left(\frac{\alpha_0}{s} + k - 1\right) \cdot \frac{\beta_0}{s} \cdots \left(\frac{\beta_0}{s} + n - k - 1\right)}{\frac{t_0}{s} \cdots \left(\frac{t_0}{s} + n - 1\right)} & (2.27) \\ &= \binom{\frac{\alpha_0}{s} + k - 1}{k} \binom{\frac{\beta_0}{s} + n - k - 1}{n-k} \binom{\frac{t_0}{s} + n - 1}{n}^{-1}. & (2.28) \end{aligned}$$

Ce résultat est classique et la formule (2.28) a été découverte en premier lieu par Pólya [Pól31]. Elle s'obtient facilement par un raisonnement élémentaire. On a choisit de la déduire de l'approche analytique pour illustrer celle-ci sur un cas très simple.

Preuve : On pose, suivant la méthode des caractéristiques le système

$$-\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u^{s+1}} = \frac{\mathrm{d}v}{v^{s+1}}.$$

On trouve immédiatement deux intégrales premières dont les dérivées sont linéairement indépendantes, en intégrant deux de ces équations à variables séparées

$$c_1 = z - \frac{1}{s} u^{-s} \qquad \text{et} \qquad c_2 = u^{-s} - v^{-s}.$$

La solution générale de l'équation (2.25) s'exprime donc sous la forme

$$H(z,u,v) = \phi\left(z - \frac{1}{s} u^{-s}, u^{-s} - v^{-s}\right)$$

où ϕ est une fonction arbitraire. Les conditions initiales imposent alors

$$\phi\left(-\frac{1}{s} u^{-s}, u^{-s} - v^{-s}\right) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0} \qquad \text{soit} \qquad \phi(x,y) = (-sx)^{-\alpha_0/s} (-sx - y)^{-\beta_0/s}.$$

En reportant cette expression de ϕ dans H, on trouve ainsi l'expression (2.26). La probabilité s'obtient finalement grâce à une extraction de coefficient, en utilisant la relation (2.12) □

> **Remarque:** On peut remarquer que cette fonction s'écrit sous la forme
>
> $$H(z,u,v) = f(u,z)^{\alpha_0} f(v,z)^{\beta_0} \quad \text{avec } f(x,z) = x(1 - s x^s z)^{-1/s}.$$
>
> Cette propriété a une justification combinatoire immédiate. La série f code l'évolution d'une boule initiale et de sa « descendance » (la variable u ou v codant alors la couleur). Chaque groupe évolue alors de manière déterministe indépendamment des autres, et l'évolution générale de l'urne n'est qu'un mélange des instants où chaque groupe évolue, ce qui se traduit par le produit des séries.

2.3.2 Espérance, écart-type et moments

Dès lors que l'on dispose de l'expression close de la série génératrice, la formule (2.13) permet de calculer les moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires. Les résultats qui suivent sont encore classiques et sont donnés notamment par Johnson et Kotz [JK77].

Corollaire 2.1 *La variable aléatoire donnant le nombre de boules noires d'une urne de Pólya initialisée avec α_0 noires et β_0 blanches admet pour espérance et pour écart-type*

$$E\left[X_n\right] = \frac{\alpha_0}{t_0}\left(t_0 + ns\right) \qquad et \qquad \sigma(X_n)^2 = \frac{\alpha_0\beta_0 s^2}{{t_0}^2(t_0+s)}\, n(t_0+ns).$$

Le moment d'ordre ℓ s'exprime comme une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\frac{(t_0+ns)\cdots(t_0+(n+k-1)s)}{t_0\cdots(t_0+(k-1)s)} = \frac{\binom{\frac{t_0}{s}+n+k-1}{k}}{\binom{\frac{t_0}{s}+k-1}{k}}, \qquad 0 \le k \le \ell.$$

En particulier, le moment d'ordre ℓ est un polynôme en n de degré ℓ et on a l'équivalent

$$E\left[{X_n}^{\ell}\right] = s^{\ell}\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{s}+\ell\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}+\ell\right)} n^{\ell} + O\left(n^{\ell-1}\right) \tag{2.29}$$

Preuve : L'espérance et l'écart-type de X_n s'obtiennent directement par application de la formule (2.13) et une extraction de coefficient. Pour montrer les assertions concernant les moments, il suffit en fait de montrer la propriété suivante des moments factoriels

$$E\left[X_n(X_n-1)\cdots(X_n-\ell+1)\right] = \sum_{0\le k\le \ell} m_{k,\ell}\frac{\binom{\frac{t_0}{s}+n+k-1}{k}}{\binom{\frac{t_0}{s}+k-1}{k}}$$

avec $m_{\ell,\ell} = \alpha_0\cdots(\alpha_0+\ell+1)$, puisque les moments se déduisent des moments factoriels par des combinaisons linéaires. On introduit pour cela, un lemme préliminaire.

Lemme 2.1 *Notons Δ la fonction $z \mapsto (1-sz)^{-1/s}$. Il existe une suite de polynômes (P_ℓ) telle que P_ℓ est de degré ℓ, de coefficient dominant $\alpha_0\cdots(\alpha_0+\ell-1)$ et telle que*

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} P_\ell\left(\Delta^s\right)\frac{(u-1)^\ell}{\ell!}. \tag{2.30}$$

Preuve du lemme: La fonction $H(z,u,1)$ peut s'écrire sous la forme

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0}\left(1-\Delta^s\left(1-u^{-s}\right)\right)^{-\alpha_0/s}.$$

Pour u proche de 1, cette expression admet un développement en série donné par

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha_0}{s}\cdots\left(\frac{\alpha_0}{s}+k-1\right)\Delta^{ks}\frac{(1-u^{-s})^k}{k!}.$$

Soient $(s_{k,\ell})_{\ell\in\mathbb{N}}$ les coefficients tels que

$$\left(1-u^{-s}\right)^k = \sum_{\ell=k}^{\infty} s_{k,\ell}(u-1)^\ell.$$

Alors, $s_{\ell,\ell} = s^\ell$ et après inversion des sommations sur k et ℓ, l'expression devient

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0} \sum_{\ell=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\ell} \frac{s_{k,\ell}}{k!} \frac{\alpha_0}{s} \cdots \left(\frac{\alpha_0}{s} + k - 1 \right) \Delta^k \right) (u-1)^\ell$$

ce qui est le résultat souhaité. □

Grâce au lemme, on dispose maintenant d'une expression très simple des dérivées de la fonction H par rapport à la variable u, prise en $u = v = 1$. Les moments s'obtiennent alors par une simple extraction de coefficient en remarquant que pour tout entier k

$$\frac{n!}{t_0 \cdots (t_0 + (n-1)s)} [z^n] \left(\frac{1}{1-sz} \right)^{\frac{t_0}{s}+k} = \frac{(t_0 + ns) \cdots (t_0 + (n+k-1)s)}{t_0 \cdots (t_0 + (k-1)s)}.$$

□

L'équivalent asymptotique des moments de X_n assure que la variable aléatoire normalisée X_n/n a des moments convergents à tout ordre. Qui plus est, les valeurs asymptotiques de ces moments caractérisent une et une seule distribution limite. En effet, la suite $\left(\frac{1}{\ell} \ln \left(\lim_{n\to\infty} E\left[(X_n/n)^\ell \right] \right) \right)_{\ell \in \mathbb{N}}$ est bornée, car elle converge en vertu de l'équivalent en l'infini

$$\ln \Gamma(x) = x \ln x - x + O(\ln x)$$

ce qui est un critère suffisant d'unicité pour la distribution limite (voir le théorème 2.4). Qui plus est, cette distribution limite n'est pas gaussienne, puisque l'écart-type et l'espérance sont du même ordre de grandeur. On a retrouvé une preuve de la convergence en loi de X_n/n vers une distribution limite. Maintenant, les expressions très simples des probabilités ont permis à Pólya d'obtenir un résultat plus fort de convergence locale.

2.3.3 Loi limite locale

On reprend l'expression de la probabilité d'avoir $\alpha_0 + ks$ boules noires au temps n donnée par l'équation (2.28). La loi limite locale est alors mise en évidence en déterminant l'équivalent asymptotique de cette expression.

Théorème 2.7 (Pólya) *Dans une urne de Pólya contenant à l'état initial α_0 boules noires et β_0 boules blanches, la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires admet une loi limite locale de type loi β de paramètres $\left(\frac{\alpha_0}{s}; \frac{\beta_0}{s} \right)$. Précisément, pour tout réel x dans l'intervalle $]0;1[$ tel que xn soit un entier, on a*

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha_0 + xns) = \frac{1}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{s}\right) \Gamma\left(\frac{\beta_0}{s}\right)} x^{\alpha_0/s-1} (1-x)^{\beta_0/s-1} + O\left(\frac{1}{n^2} \right)$$

où la majoration du reste est uniforme sur tout compact.

Preuve : L'expression de la probabilité donnée dans l'équation (2.28) ne fait intervenir que des coefficients binomiaux particuliers qui sont en fait les coefficients de séries génératrices de la forme $z \mapsto (1-z)^{-\alpha}$. On peut donc utiliser la formule de Stirling pour l'asymptotique de ces coefficients :

Proposition 2.5 (Formule de Stirling) *Pour tout réel α différent de $0, -1, -2, \ldots$, on a*

$$[z^n](1-z)^{-\alpha} = \binom{n+\alpha-1}{n} = \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(n+1)} = \frac{n^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Le résultat en découle immédiatement. □

> **Remarque:** On peut constater que ce résultat implique la convergence en distribution. En effet, la majoration du terme d'erreur en $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ permet d'assurer que
>
> $$\mathbb{P}\left(x \le \frac{X_n - \alpha_0}{ns} \le y\right) = \frac{1}{n}\frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{\beta_0}{s}\right)} \sum_{k=\lceil xn\rceil}^{\lfloor yn\rfloor} \left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{\alpha_0}{s}-1}\left(1-\frac{k}{n}\right)^{\frac{\beta_0}{s}-1} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$
>
> $$\xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{s}\right)\Gamma\left(\frac{\beta_0}{s}\right)} \int_x^y t^{\alpha_0/s-1}(1-t)^{\beta_0/s-1}\mathrm{d}t$$
>
> pour tous réels x et y appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

La figure 2.3 montre des exemples de lois limites de certaines urnes de Pólya, pour des conditions initiales variées :

- La courbe de gauche présente les densités des lois limites $\beta\left(\frac{\alpha_0}{s}, \frac{\beta_0}{s}\right)$ pour $s = 20$, $\alpha_0 + \beta_0 = 60$ et α_0 allant de 10 à 30 (les graphes des cas $\alpha_0 \ge 30$ sont symétriques). Il y a divergence en 0 si $\alpha_0 < s$. Sinon il y a un maximum unique qui se déplace à droite au fur et à mesure que α_0 augmente.
- La courbe de droite présente les densités de cas où il y a divergence en 0 et 1. Ce sont les cas où $\alpha_0 + \beta_0 = 60$ et $s = 120$, l'entier α_0 prenant les valeurs $10, 12, \ldots, 30$.

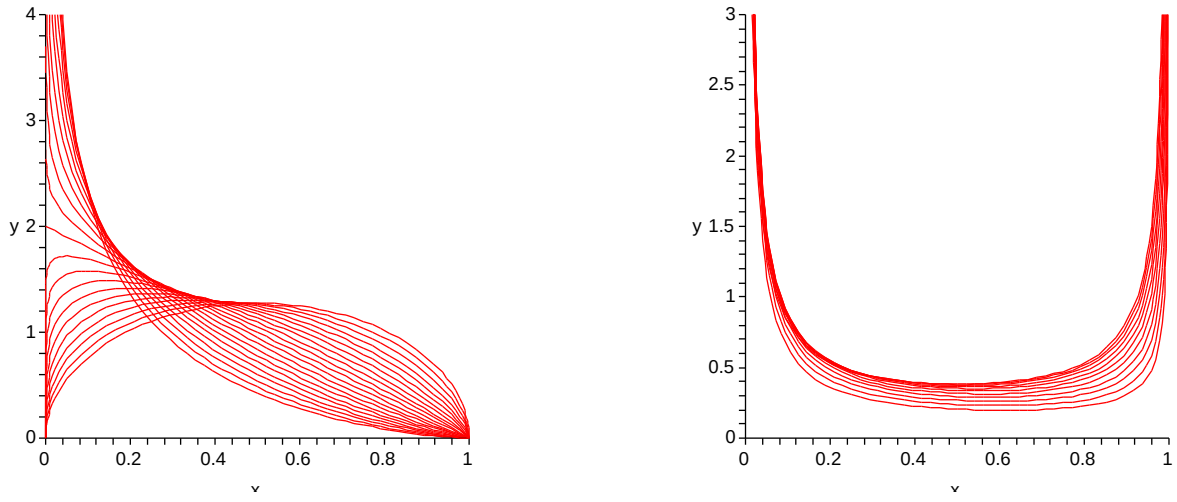


FIG. 2.3 – Graphes des lois limites des urnes de Pólya.

Pour illustrer la convergence, la figure 2.4 montre l'exemple d'une urne de Pólya pour laquelle $s = 1$, initialisée à 2 noires et 3 blanches. Les courbes représentent une interpolation linéaire des points $(k/n, n\mathbb{P}(X_n = k))$ pour différentes valeur de n.

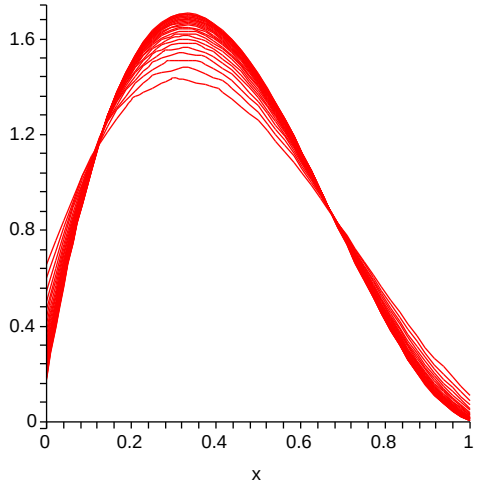


FIG. 2.4 – Convergence des probabilités de l'urne de Pólya.

2.4 Urnes triangulaires à deux couleurs de boules

On considère maintenant une urne dont la composition initiale est donnée par α_0 boules noires et β_0 boules blanches, et dont la matrice de replacement est donnée par

$$\begin{bmatrix} a & s-a \\ 0 & s \end{bmatrix}$$

avec $0 < a < s$. On suppose de plus que α_0 est non nul, sans quoi, l'urne ne comportera jamais de boules noires et quoi qu'il arrive, on ne fera que rajouter s blanches à chaque étape. Dans un premier temps, nous proposons une idée de modélisation originale pour cette urne.

Une urne triangulaire peut être vue comme une modélisation de l'évolution des espèces. Imaginons que nous disposons de deux populations de pokemons, une composée de pikachus et l'autre de raïchus (évolution naturelle de pikachu). À chaque instant, un individu sélectionné au hasard meurt et donne naissance à sa descendance, dont chaque individu a hérité des caractères de son ancêtre et peut éventuellement avoir évolué. Un pikachu donne donc naissance à un certain nombre de pikachus et de raïchus. Un raïchu ne peut, lui, donner naissance qu'à des raïchus.

Les règles résumées comme de coutume par la matrice de replacement peuvent également être vues comme un diagramme de « reproduction » du type de la figure 2.5. Le fait que l'urne soit

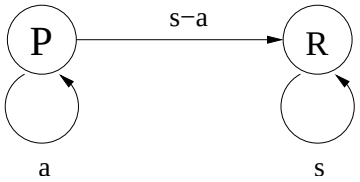


FIG. 2.5 – Diagramme de « reproduction » d'une urne triangulaire à deux couleurs de boules.

équilibrée se traduit sous ce modèle par le fait que chaque individu donne naissance au même

nombre de descendants. Les questions naturelles qui sont posées sont alors la vitesse de croissance de chacune des populations et la distribution limite.

À chaque instant, on rajoute au moins $s-a$ blanches dans l'urne. De plus, si l'urne comporte beaucoup de blanches, il a une très forte probabilité d'en piocher une, ce qui aura pour conséquence d'augmenter encore plus la proportion de blanches. Dans de telles conditions, on s'attend à avoir en moyenne bien plus de blanches que de noires dans l'urne.

Comme mentionné précédemment, ce modèle d'urne était considéré comme problématique par plusieurs auteurs et notamment, les techniques de Bagchi et Pal ne fonctionnaient pas, sans doute parce que cette matrice est réductible. Kotz, Mahmoud et Robert ont réussi à obtenir l'asymptotique de l'espérance du cas de l'urne $\left[\begin{smallmatrix}1 & 3\\ 0 & 4\end{smallmatrix}\right]$ initialisée à 2 noires et 4 blanches, Gouet a été le premier à obtenir une convergence en loi pour ce modèle, mais les résultats les plus significatifs ont été obtenus par Flajolet-Gabarró-Pekari dans le cas $s=a+1$ et $\alpha_0=t_0=1$, dans une version non publiée de leur article. Pour cet exemple particulier, les auteurs ont donné une expression exacte de l'espérance et montré une convergence locale des probabilités du modèle vers une loi limite dont la densité est donnée sous forme de série entière et se relie aux lois stables.

Nous traitons ici le cas général. Nos résultats personnels sont l'expression générale des probabilités du modèle (proposition 2.6), l'équivalent asymptotique de l'espérance, de la variance et de tous les moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires au temps n (corollaire 2.2). Nous généralisons le résultat de convergence locale des probabilités (théorème 2.8) et pour finir, nous donnons une expression de la transformée de Mellin de la loi limite (théorème 2.9).

2.4.1 Série génératrice

Comme pour les deux exemples précédents, la série génératrice des événements satisfait une équation aux dérivées partielles, cette fois donnée par

$$\frac{\partial H}{\partial z} = u^{a+1}v^{s-a}\frac{\partial H}{\partial u} + v^{s+1}\frac{\partial H}{\partial v}. \tag{2.31}$$

Cette équation, avec conditions initiales $H(0,u,v)=u^{\alpha_0}v^{\beta_0}$ se résout à nouveau sous forme close à l'aide de la méthode des caractéristiques.

Proposition 2.6 *La série génératrice des événements d'une urne triangulaire de matrice* $\left[\begin{smallmatrix}a & s-a\\ 0 & s\end{smallmatrix}\right]$, *initialisée à* α_0 *noires et* β_0 *blanches est donnée par*

$$H(z,u,v) = u^{\alpha_0}v^{\beta_0}\left(1-sv^sz\right)^{-\beta_0/s}\left(1-u^av^{-a}\left(1-\left(1-sv^sz\right)^{a/s}\right)\right)^{-\alpha_0/a}. \tag{2.32}$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir α_0+ka *boules noires au temps* n *est donnée par*

$$\mathbb{P}\left(X_n=\alpha_0+ka\right) = \frac{n!}{t_0\cdots(t_0+(n-1)s)}\binom{\frac{\alpha_0}{a}+k-1}{k}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}\binom{\frac{\beta_0-ai}{s}+n-1}{n}s^n. \tag{2.33}$$

Preuve : On pose à nouveau le système

$$-\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}v^{s-a}} = \frac{\mathrm{d}v}{v^{s+1}}.$$

Deux de ces systèmes sont à variables séparées et s'intègrent facilement. On trouve ainsi les deux intégrales premières.

$$c_1 = z-\frac{1}{s}v^{-s} \qquad \text{et} \qquad c_2 = u^{-a}-v^{-a}.$$

La solution générale de (2.31) est donc donnée par

$$H(z,u,v) = \phi\left(z - \frac{1}{s}\, v^{-s}, u^{-a} - v^{-a}\right) \tag{2.34}$$

pour une fonction ϕ arbitraire. Posons $x = -1/s\ v^{-s}$ et $y = u^{-a} - v^{-a}$. Les conditions initiales imposent alors $\phi(x,y) = u^{a_0} v^{b_0}$ avec

$$v = (-sx)^{-1/s} \qquad \text{et} \qquad u = \left(y + (-sx)^{-a/s}\right)^{-1/a}$$

La fonction ϕ étant ainsi identifiée, on en déduit l'expression de H. Pour obtenir les probabilités, on pose $v = 1$ et on extrait dans un premier temps le coefficient de $[u^{\alpha_0 + ka}]$ dans l'équation (2.32), ce qui donne

$$[u^{\alpha_0+ka} z^n] H(z,u,1) = \binom{\frac{\alpha_0}{a} + k - 1}{k} [z^n]\, (1-sz)^{-\beta_0/s} \left(1 - (1-sz)^{a/s}\right)^k.$$

Il ne reste plus alors qu'à développer le produit et à extraire de coefficient de $[z^n]$. □

> **Remarque:** On peut remarquer que si $a = s$, l'expression de H se simplifie en celle de l'équation (2.26). Malgré tout, le comportement asymptotique de l'urne sera comme on le constatera bientôt assez différent.
>
> On peut également remarquer que cette expression reste valide dans le cas $a < 0$ (on doit alors avoir $a|\alpha_0$ pour assurer la viabilité de l'urne). Dans ce cas, le nombre de boules noires ne peut prendre qu'un nombre fini de valeur et H est un polynôme en u. Les expressions précédentes montrent alors que la probabilité d'avoir ka noires dans l'urne où k varie de 0 à α_0/a vérifie
>
> $$\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \Theta\left(n^{-a/s}\right) \qquad \mathbb{P}(X_n = ka) = \Theta\left(n^{-ka/s}\right) \quad 1 \le k \le \alpha_0/a.$$

2.4.2 Espérance, variance et moments

Comme on peut le constater, la série génératrice d'une urne triangulaire est très similaire à celle de l'urne de Pólya. En fait, si l'on introduit par analogie la fonction $\Delta : z \mapsto (1-sz)^{-1/s}$, alors de la même manière

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0}\left(1 - \Delta^a\left(1 - u^{-a}\right)\right)^{-\alpha_0/a}.$$

On peut donc appliquer les mêmes techniques que précédemment pour obtenir la forme générale des moments.

Corollaire 2.2 *La variable aléatoire donnant le nombre de boules noires d'une urne triangulaire initialisée avec α_0 noires et β_0 blanches admet pour espérance et pour écart-type*

$$E[X_n] = \alpha_0\, \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\, n^{a/s} + O\left(n^{a/s-1}\right)$$

$$(\sigma[X_n])^2 = \alpha_0 \left[(\alpha_0 + a)\frac{\Gamma(\frac{t_0}{s})}{\Gamma(\frac{t_0+2a}{s})} - \alpha_0 \left(\frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\right)^2\right] n^{2a/s} + O\left(n^{a/s}\right).$$

Le moment d'ordre ℓ s'exprime comme une combinaison linéaire finie de termes de la forme

$$\frac{\left(\frac{t_0+ka}{s}\right)\cdots\left(\frac{t_0+ka}{s}+n-1\right)}{\frac{t_0}{s}\cdots\left(\frac{t_0}{s}+n-1\right)} = \frac{\binom{\frac{t_0+ka}{s}+n-1}{n}}{\binom{\frac{t_0}{s}+n-1}{n}}, \qquad 0\le k\le \ell.$$

En particulier, le moment d'ordre ℓ admet l'équivalent

$$E\left[{X_n}^{\ell}\right] = a^{\ell}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0+\ell\,a}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0+\ell\,a}{s}\right)}\,n^{\ell\,a/s}+O(n^{(\ell-1)a/s}).$$

> **Remarque:** Ce théorème montre que comme pour l'urne de Pólya, l'espérance et l'écart-type de X_n sont du même ordre de grandeur et il ne peut y avoir de loi limite gaussienne.

Preuve : L'espérance et la variance s'obtiennent comme de coutume grâce à des extractions de coefficient des fonctions $\frac{\partial H}{\partial u}$ et $\frac{\partial^2 H}{\partial u^2}$. Pour les moments, il suffit à nouveau de prouver que pour tout entier ℓ

$$\mathrm{E}\left[X_n(X_n-1)\cdots(X_n-\ell+1)\right] = a^{\ell}\,\frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0+\ell\,a}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0+\ell\,a}{s}\right)}n^{\ell a/s}+O(n^{(\ell-1)a/s})$$

comme on peut voir en développant le produit et en utilisant la linéarité de l'espérance. Comme pour l'urne de Pólya, on sait qu'il existe une suite de polynômes (Q_ℓ) telle que Q_ℓ est de degré ℓ, de coefficient dominant $\alpha_0\cdots(\alpha_0+\ell-1)$ et telle que

$$H(z,u,1) = \Delta^{t_0}\sum_{\ell=0}^{\infty} Q_\ell(\Delta^a)\frac{(u-1)^\ell}{\ell!}. \tag{2.35}$$

Il découle de ceci que pour tout entier ℓ dans $\mathbb{N}$

$$\left(\frac{\partial^\ell}{\partial u^\ell}H(z,u,1)\right)_{|u=1} = \alpha_0\cdots(\alpha_0+\ell-1)\Delta^{t_0+\ell a}+\cdots.$$

Puisque pour tous entiers $r_1<r_2$, $[z^n]\Delta^{r_1} = o([z^n]\Delta^{r_2})$, seul le coefficient de $\Delta^{t_0+\ell a}$ donne l'équivalent asymptotique et une simple extraction de coefficient achève la preuve. □

2.4.3 Loi limite locale

Pour les mêmes raisons qu'à la partie précédente, les moments de la variable normalisée $X_n/n^{a/s}$ caractérisent une et une seule distribution limite X_∞. On a donc automatiquement une convergence en distribution mais on ne sait rien sur la vitesse de convergence. Le théorème suivant apporte une réponse à cette question, tout en montrant un résultat plus fort de convergence de loi.

Théorème 2.8 *Dans une urne initialisée avec α_0 boules noires et β_0 boules blanches, dont l'évolution suit les règles de la matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & s-a \\ 0 & s\end{smallmatrix}\right]$, la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires suit une loi limite locale dont la densité s'exprime en terme de fonctions de Mittag-Leffler. Précisément, pour tout compact I de $]0;+\infty[$, pour tout x de I tel que $x\,n^{a/s}$ soit un entier, il y a l'équivalent*

$$\mathbb{P}\left(X_n=\alpha_0+axn^{a/s}\right) = \frac{1}{n^{a/s}}\,g(x)+O\left(\frac{1}{n^{2a/s}}\right)$$

et la majoration du terme d'erreur est uniforme sur I. La fonction g est définie sur $]0,\infty[$ par la série suivante, de rayon de convergence infini

$$g(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)} x^{\alpha_0/a-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{\Gamma\left(\frac{\beta_0 - ka}{s}\right)} \frac{x^k}{k!}. \tag{2.36}$$

Par conséquent, la fonction $\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)/\Gamma\left(\frac{t_0}{a}\right)(-x)^{1-\alpha_0/\alpha} g(-x)$ est la transformée de Laplace inverse d'une fonction de Mittag-Leffler de paramètres $(-a/s, \beta_0/s)$. Dans le cas où $\beta_0 = 0$, c'est exactement la densité d'une loi stable d'indice a/s.

Preuve : À partir de l'expression de la série génératrice des événements, il vient

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha_0 + ka) = \frac{n!}{t_0 \cdots (t_0 + (n-1)s)} [z^n u^k] (1 - sz)^{-\beta_0/s} \left(1 - u\left(1 - (1 - sz)^{a/s}\right)\right)^{-\alpha_0/a}.$$

L'étude des singularités de cette fonction est très similaire à des cas rencontrés par Banderier, Flajolet, Schaeffer et Soria [BFSS01], lors de leurs travaux sur les schémas de compositions de singularités critiques, eux-mêmes issus de la théorie des cartes planaires aléatoires. La preuve suit les techniques du théorème 12 de l'article. En faisant un développement en série par rapport à la variable u, et le changement de variable $sz \to z$, on obtient

$$\mathbb{P}(X_n = \alpha_0 + ka) = s^n \frac{n!}{t_0 \cdots (t_0 + (n-1)s)} \binom{\frac{\alpha_0}{a} + k - 1}{k} [z^n] (1 - z)^{-\beta_0/s} \left(1 - (1 - z)^{a/s}\right)^k.$$

Le coefficient de z^n s'exprime alors comme une intégrale de Cauchy le long d'un contour autour de l'origine. Ce contour peut être n'importe lequel dans le domaine de définition de G et donc ne traversant pas l'axe réel $[1, +\infty[$.

$$[z^n] (1 - z)^{-\beta_0/s} \left(1 - (1 - z)^{a/s}\right)^k = \frac{1}{2i\pi} \oint (1 - z)^{-\beta_0/s} \left(1 - (1 - z)^{a/s}\right)^k \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

À partir d'ici, on pose $k = xn^{a/b}$ où x est compris dans un intervalle compact I de $]0; +\infty[$. On note M un majorant de I quelconque. On intègre alors selon la variable z suivant le chemin de la figure 2.6 parcouru dans le sens direct.

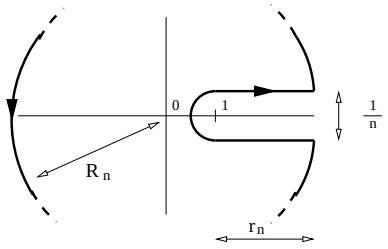


FIG. 2.6 – Contour d'intégration.

Ce chemin est un contour classique qui se découpe en 4 parties :

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \left\{z = t - \tfrac{i}{n}, \quad t \in [1; r_n]\right\}, \qquad \Gamma_2 = \left\{z = 1 - \tfrac{e^{-i\theta}}{n}, \quad \theta \in \left[-\tfrac{\pi}{2}; \tfrac{\pi}{2}\right]\right\}, \\ \Gamma_3 &= \left\{z = t + \tfrac{i}{n}, \quad t \in [1; r_n]\right\}, \qquad \Gamma_4 = \left\{z = R_n\, e^{i\theta}, \quad \Re(z) \leq r_n\right\}. \end{aligned} \tag{2.37}$$

avec $R_n = \sqrt{{r_n}^2 + (1/n)^2}$.

On choisit alors $r_n = 1 + Cn^{-a/s}$, où C est un réel positif suffisamment grand qui sera choisi plus tard, le but étant que l'intégrale le long du contour Γ_4 soit négligeable. Soit maintenant z un élément de Γ_4. Alors, on a les deux inégalités

$$\frac{C}{n^{a/s}} \le |1-z| \qquad \text{et} \qquad \left|1-(1-z)^{a/s}\right| \le \frac{a}{s}\, R_n \sin\left(\arctan\left(\frac{1}{n\, r_n}\right)\right)^{\frac{a-s}{s}}$$

La première inégalité s'obtient par une simple minoration de la distance de z à 1 sur le contour ; la seconde en appliquant le théorème des accroissements finis à la fonction $z \mapsto (1-z)^{a/s}$ entre 0 et z, puis en minorant le module de z sur le contour. En combinant ces deux inégalités, il vient finalement

$$\left|(1-z)^{-\beta_0/s}\left(1-(1-z)^{a/s}\right)^k \frac{1}{z^{n+1}}\right| = O\left(e^{-[C-x(s-a)/s]\, n^{a/s}\ln n}\right).$$

Par conséquent, la contribution du contour Γ_4 est un terme exponentiellement petit dès que C est supérieur à $M(s-a)/s$. Pour le reste de l'intégrale, en faisant le changement de variable $z = 1-t/n$, on obtient alors

$$[z^n]\,(1-z)^{-\beta_0/s}\left(1-(1-z)^{a/s}\right)^{xn^{a/s}} \sim \frac{n^{\beta_0/s-1}}{2i\pi}\int_{\Gamma'} t^{-\beta_0/s} e^{h_n(t)} dt$$

avec $h_n(t) = -(n+1)\ln\left(1-\frac{t}{n}\right) + xn^{a/s}\ln\left(1-\left(\frac{t}{n}\right)^{a/s}\right)$, et où Γ' est l'union de trois chemins Γ'_1,Γ'_2 et Γ'_3 qui sont les images de Γ_1, Γ_2 et Γ_3 par le changement de variable (c'est une boucle de $-n^{(s-a)/s}+i$ vers $-n^{(s-a)/s}-i$ à distance 1 de l'axe réel). On peut alors constater que la quantité t/n reste alors au voisinage de 1 sur le contour d'intégration et on a alors l'estimation uniforme

$$h_n(t) = t - xt^{a/s} + O\left(\frac{1}{n^{a/s}}\right)$$

ce qui permet d'écrire

$$\frac{1}{2i\pi}\oint (1-z)^{-\beta_0/s}\left(1-(1-z)^{a/s}\right)^k \frac{dz}{z^{n+1}} = \frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'} t^{-\beta_0/s} e^{t-xt^{a/s}}\mathrm{d}t\left(1+O\left(\frac{1}{n^{a/s}}\right)\right).$$

L'intégrande est à décroissance exponentielle. Quitte à rajouter deux termes d'erreur exponentiellement petits qui sont les intégrales de cette fonction le long de deux chemins de $-\infty+i$ vers $-n^{(s-a)/s}+i$ et de $-\infty-i$ vers $-n^{(s-a)/s}-i$, on peut étendre le chemin Γ' en une boucle $\mathcal{H}$ dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe des réels négatifs à distance 1. On utilise alors le lemme suivant.

Lemme 2.2 *Soit $\mathcal{H}$ le chemin qui part de $-\infty+i$, tourne autour de l'origine à distance 1 dans le sens des aiguilles d'une montre, puis termine en $-\infty-i$. Alors, pour tout réel α,*

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}} t^{-\alpha} e^t dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}. \tag{2.38}$$

La preuve du lemme repose sur la définition de la fonction Γ et la formule des compléments, ainsi que sur une technique classique due à Hankel (qui a donné son nom à ce type de contour

d'intégration). La preuve est donnée dans l'appendice de Flajolet-Sedgewick [FS]. L'intégrale peut alors se calculer en développant le terme $e^{-xt^{a/s}}$ et en intégrant terme à terme

$$\begin{aligned}\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}} t^{-\beta_0/s} e^{-xt^{a/s}+t} dt &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-x)^k}{k!} \frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{H}} t^{-(\beta_0-ka)/s} e^t dt \\ &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k \frac{x^k}{k!} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\beta_0-ka}{s}\right)}.\end{aligned}$$

On peut alors conclure à l'aide de la proposition 2.5 pour trouver l'équivalent du dernier facteur, ce qui donne

$$s^n \frac{n!}{t_0\cdots(t_0+(n-1)s)} \binom{\frac{\alpha_0}{a}+k-1}{k} = \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)} x^{\frac{\alpha_0}{a}-1} n^{-\beta_0/s+1-a/s}\left(1+O\left(\frac{1}{n^{a/s}}\right)\right)$$

et achève ainsi la preuve. □

> **Remarque:** On remarquera à nouveau que cette convergence locale entraîne la convergence en distribution.

La figure 2.7 montre des exemples de lois limites de certaines urnes, pour des conditions initiales variées. Il y a divergence en 0 dans le cas où l'entier α_0 est inférieur à a. La figure de gauche présente le graphe de la loi limite des urnes $\left[\begin{smallmatrix} i & 2 \\ 0 & i+2 \end{smallmatrix}\right]$ pour $i \in [\![2;6]\!]$ avec conditions initiales $(i+1,1)$, les graphes de droite sont les lois des mêmes urnes mais avec conditions initiales $(i-1,1)$. Les graphes ayant les sommets les plus hauts correspondent aux plus grandes valeurs de i.

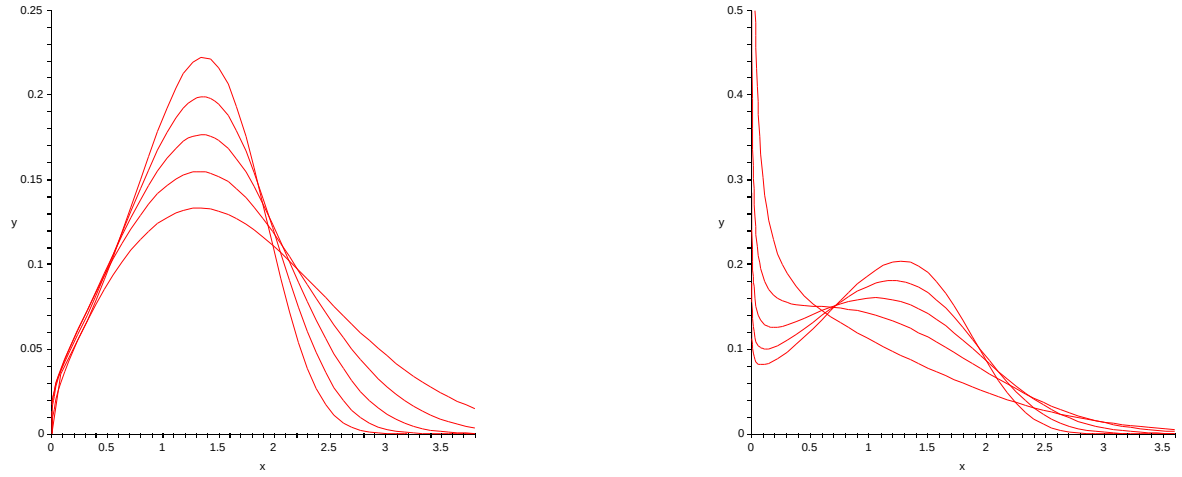


FIG. 2.7 – Graphes des lois limites des urnes triangulaires.

Comme pour l'urne de Pólya, on peut par ailleurs illustrer la convergence par le même type de graphe que la figure 2.4. Pour une urne triangulaire pour laquelle $a = 8$, $s = 11$, $\alpha_0 = 10$ et $\beta_0 = 3$, on obtient alors le graphe de la figure 2.8.

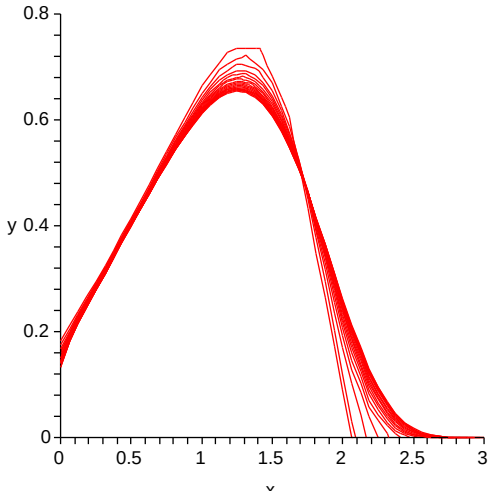


FIG. 2.8 – Graphe des probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour $n = 6, 9, \ldots, 60$. Les deux axes verticaux et horizontaux ont été renormalisés par $n^{8/11}$.

2.4.4 Transformée de Mellin de la loi limite

La transformée de Mellin d'une fonction f, définie sur l'axe des réels positifs est donné par

$$f^*(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1}\, f(x)\mathrm{d}x$$

pour tout complexe pour lequel cette intégrale est convergente. Par exemple, la transformée de Mellin de la fonction exponentielle e^{-x} est la fonction Γ. Soit X une variable aléatoire réelle positive ayant une densité h. On peut alors remarquer en vertu de la définition que les valeurs de la transformée de Mellin de h aux points entiers sont exactement les moments de la variable X. Ainsi, le calcul de la transformée de Mellin de la loi limite de X_n permet non seulement de retrouver les expressions obtenues précédemment, mais également d'obtenir les moments fractionnaires, donc davantage d'information.

Théorème 2.9 *La loi limite de la variable aléatoire X_n admet une transformée de Mellin donnée, pour tout $y > 1 - \alpha_0/a$, par*

$$g^*(y) = \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0+(y-1)a}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0+(y-1)a}{s}\right)}. \tag{2.39}$$

En particulier, le moment fractionnaire d'ordre α de la loi limite existe pour tout α de partie réelle strictement supérieure à $-\alpha_0/a$ et vaut $g^*(\alpha+1)$.

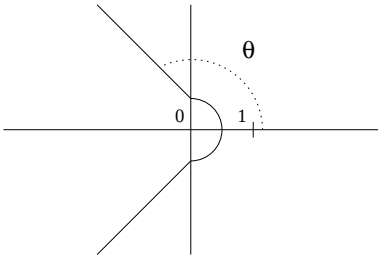
Preuve : Il est clair que pour toute fonction f et tout $\alpha > 0$ la transformée de Mellin de la fonction $x \mapsto f(\alpha x)$ est donnée par $y \mapsto \alpha^{-y} f^*(y)$. La transformée de Mellin de la loi limite est donnée par

$$g^*(y) = \int_0^{+\infty} x^{y-1} \left(\frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)} x^{\alpha_0/a-1} \int_{\mathcal{H}} t^{-\beta_0/s} e^{-xt^{a/s}+t} \mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathcal{H}} F(x,t)\mathrm{d}t \right) \mathrm{d}x$$

où $\mathcal{H}$ est un contour dans le sens des aiguilles d'une montre autour de l'axe réel négatif et avec

$$F(x,t) = \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)} x^{\alpha_0/a+y-2} t^{-\beta_0/s} e^{-xt^{a/s}+t}.$$

On souhaite appliquer le théorème de Fubini. L'intégrale $\int_0^{+\infty} x^{y-1}e^{-x\gamma}\mathrm{d}x$ converge pour tout γ tel que $\Re(\gamma) > 0$ et vaut $\gamma^{-y}\Gamma(y)$ puisque c'est la transformée de Mellin de la fonction $x \mapsto e^{-x\gamma}$. On peut alors déformer le contour $\mathcal{H}$ de la sorte



avec $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{s}{a}\frac{\pi}{2}$ sans que la valeur de l'intégrale $g(x) = \int_{\mathcal{H}} F(x,t)\mathrm{d}t$ ne change pour tout réel x strictement positif. Ainsi avec ce nouveau contour d'intégration, pour tout t de $\mathcal{H}$ et tout $y > 1 - \alpha_0/a$, l'intégrale $\int_0^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_0^{+\infty} F(x,t)\mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{\alpha_0 + (y-1)a}{a}\right) t^{-(t_0+(y-1)a)/s}\, e^t.$$

Il suffit alors d'intégrer par rapport à la variable t pour obtenir le résultat désiré. □

2.5 Urnes triangulaires à trois couleurs de boules

Les techniques algébriques de Flajolet-Gabarró-Pekari, notamment la mise en équation de l'équation (2.10) admettent une généralisation immédiate pour les urnes équilibrées à p couleurs de boules. On obtient alors une équation aux dérivées partielles sur une fonction de $p+1$ variables (une pour le temps, les autres pour coder chacune le nombre de boules d'une couleur). Il est donc envisageable de généraliser les résultats précédents aux urnes équilibrées à $p \geq 3$ couleurs.

Dans cette partie, on présente les résultats obtenus concernant les urnes triangulaires à 3 couleurs de boules. Ces urnes présentent un intérêt particulier puisque ce sont des exemples typiques de matrices qui ne vérifient pas l'hypothèse d'irréductibilité imposée par tous nos prédécesseurs (Athreya et Karlin, Smythe, Janson). Par ailleurs, l'équation aux dérivées partielles est pour ces urnes très facile à résoudre grâce à la méthode des caractéristiques et permet ainsi d'obtenir une série génératrice sous forme explicite en termes de fonctions hypergéométriques.

Une urne triangulaire peut également être vue comme une modélisation de l'évolution des espèces, sauf que nous disposons cette fois de trois types de pokemons (par exemple les salamèches, qui évoluent en reptincels, eux-mêmes évoluant en dracaufeus). Les règles sont résumées comme de coutume par la matrice de replacement ou un diagramme de « reproduction » du type de la figure 2.9.

Ce chapitre présente une classification des urnes triangulaires à 3 couleurs de boules et donc des évolutions possibles des populations sous ce modèle. La population intéressante à étudier est celle du deuxième type d'individu. Trois cas seront distingués, en fonction des coefficients de la

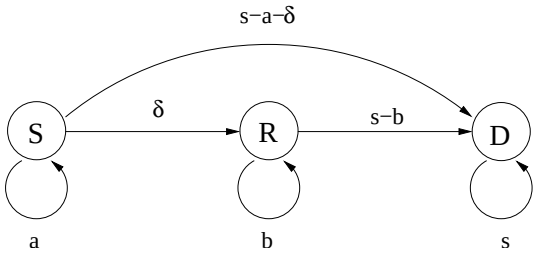


FIG. 2.9 – Diagramme de « reproduction » d'une urne triangulaire à trois couleurs de boules.

matrice, qui sont présentés dans la proposition 2.9. Pour chacun des cas, on déterminera ensuite une caractérisation des lois limites de la composition de cette population.

Ces urnes n'avaient jamais été étudiées à ce jour et tous les résultats de cette partie sont par conséquent originaux.

2.5.1 Série génératrice

On considère maintenant une urne contenant trois types de boules (rouges, noires, blanches). L'évolution de l'urne suit les règles résumées par la matrice

$$\begin{bmatrix} a & \delta & s-a-\delta \\ 0 & b & s-b \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

et la composition initiale est fixée à α_0 boules rouges, β_0 boules noires et γ_0 boules blanches. On s'intéresse aux cas où δ est un entier strictement positif afin que l'évolution du nombre de boules de la première couleur ait une incidence sur le nombre de boules de la seconde couleur. Le cas où δ est nul a peu intérêt car alors, les boules des deux premiers types ont chacune une évolution indépendante, du type de celle observée chez les noires pour les urnes triangulaires à deux types de boules.

En suivant la méthodologie des urnes à deux types de boules, on introduit la série génératrice $H(z,u,v,w)$ qui énumère toutes les évolutions possibles de l'urne à partir de l'état initial. Plus précisément, soit $q_{n,\ell_1,\ell_2,\ell_3}$ le nombre de façons d'arriver au temps n à une urne composée de ℓ_1 boules rouges, ℓ_2 boules noires, ℓ_3 boules blanches, et

$$H(z,u,v,w) = \sum_{z,\ell_1,\ell_2,\ell_3} q_{n,\ell_1,\ell_2,\ell_3}\, u^{\ell_1} v^{\ell_2} w^{\ell_3}\, \frac{z^n}{n!}.$$

Alors, le même raisonnement qu'à la partie précédente montre que H satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial H}{\partial z} = u^{a+1} v^{\delta} w^{s-a-\delta} \frac{\partial H}{\partial x} u + v^{b+1} w^{s-b} \frac{\partial H}{\partial v} + w^{s+1} \frac{\partial H}{\partial w} \tag{2.40}$$

avec pour conditions initiales $H(0,u,v,w) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0} w^{\gamma_0}$. La résolution de cette équation se fait encore une fois par la méthode des caractéristiques. La série génératrice fait alors intervenir une fonction particulière qui est la primitive d'une fonction algébrique et donc une fonction hypergéométrique. On commence par définir cette fonction, qui sera notée par la suite I.

Proposition 2.7 *On pose* $\lambda = \frac{a+\delta-b}{b}$ *et on définit pour tout complexe* z *de module strictement inférieur à* 1 *la fonction* I *par*

$$I(z) = \sum_{n\geq 0\,,\, n\neq a/b} (-1)^n \frac{a}{a-nb}\binom{n-\lambda-1}{n} z^n. \tag{2.41}$$

La fonction I *admet un unique prolongement analytique sur* $\mathbb{C}\setminus]-\infty;-1]$.

Preuve : On définit la fonction I_{z_0} de la manière suivante :

$$I_{z_0}(z) = -az^{a/b}\int_{z_0}^{z^{1/b}} \frac{(1+t^b)^\lambda}{t^{a+1}}\mathrm{d}t \tag{2.42}$$

où z_0 est un quelconque réel appartenant à l'intervalle $[0;1]$. Le chemin d'intégration ne doit alors pas sortir du domaine de définition de l'intégrande. La fonction I_{z_0} est définie sur $\mathbb{C}\setminus[-\infty;0]$. On considère alors deux cas.

Premier cas : a/b $\notin \mathbb{N}$

En intégrant terme à terme le développement en série de l'intégrande, on constate que I_{z_0} admet en l'origine un développement de la forme

$$I_{z_0}(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda-1}{n}\frac{a}{a-nb}\, z^n - C_1 z^{a/b},$$

la constante C_1 étant donnée par $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda-1}{n}\frac{a}{a-nb}{z_0}^{nb-a}$. On peut alors prolonger I sur $\mathbb{C}\setminus[-\infty;1]$ en posant $I(z) = I_{z_0}(z) + C_1 z^{a/b}$.

Deuxième cas : a/b $\in \mathbb{N}$

Soit m l'entier tel que $a = mb$. La fonction I_{z_0} admet cette fois un développement en l'origine de la forme

$$I_{z_0}(z) = \sum_{n=0,n\neq s}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda-1}{n}\frac{a}{a-nb}\, z^n - C_2 z^a - (-1)^m\binom{m-\lambda-1}{m} z^m \ln z^m,$$

la constante C_2 étant cette fois égale à $\sum_{n=0,n\neq m}^{\infty}(-1)^n\binom{n-\lambda-1}{n}\frac{a}{a-nb}{z_0}^{nb-a} + (-1)^m\binom{m-\lambda-1}{m}\ln z_0$. On prolonge dans ce cas I sur $\mathbb{C}\setminus[-\infty;1]$ en posant $I(z) = I_{z_0}(z) + C_2 z^{a/b} + (-1)^m\binom{m-\lambda-1}{m} z^m \ln z^m$. □

Maintenant que la fonction I est définie, on peut donner l'expression de la série génératrice des événements pour une urne triangulaire à 3 couleurs de boules.

Proposition 2.8 *La série génératrice énumérant toutes les évolutions possibles d'une urne ayant pour conditions initiales* α_0 *boules rouges,* β_0 *boules noires et* γ_0 *boules blanches est donnée par*

$$H(z,u,v,w) = {f_1}^{\alpha_0}{f_2}^{\beta_0}{f_3}^{\gamma_0}. \tag{2.43}$$

Les fonctions f_2 *et* f_3 *sont définies par*

$$f_3 = w(1-s\,w^s z)^{-1/s} \quad et \quad f_2 = v\left(1 - v^b\left(\frac{1}{w^b} - \frac{1}{{f_3}^b}\right)\right)^{-1/b}.$$

Si a/b n'est pas un entier, la fonction f_1 est donnée par

$$f_1 = u\left(1 - u^a\left(I\left(\left(\frac{v}{w}\right)^b - 1\right)v^{-a} - I\left(\left(\frac{f_2}{f_3}\right)^b - 1\right){f_2}^{-a}\right)\right)^{-1/a}$$

et dans le cas contraire, s'il existe un entier m tel que $a = mb$, alors

$$f_1 = u\left(1 - u^a\left(\frac{I\left(\left(\frac{v}{w}\right)^b - 1\right)}{v^a} - \frac{I\left(\left(\frac{f_2}{f_3}\right)^b - 1\right)}{{f_2}^a} - \binom{m-\lambda-1}{m}\left(\frac{1}{v^b} - \frac{1}{w^b}\right)^m \ln(f_2/v)^a\right)\right)^{-1/a}$$

Preuve : On commence dans un premier temps par résoudre l'équation aux dérivées partielles. On cherche les intégrales premières du système d'équations differentielles ordinaires

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}v^{\delta}w^{s-a-\delta}} = \frac{\mathrm{d}v}{v^{b+1}w^{s-b}} = \frac{\mathrm{d}w}{w^{s+1}} = -\mathrm{d}z.$$

On obtient facilement deux d'entre elles puisque l'équation liant v et w et celles liant z et w sont à variables séparées. Ainsi,

$$c_1 = z - \frac{1}{sw^s} \qquad c_2 = \frac{1}{w^b} - \frac{1}{v^b}$$

sont des intégrales premières du système. Pour trouver la dernière, on se sert de la relation liant v et w que l'on reporte dans l'équation liant u et v. Ainsi on est ramené à intégrer le système à variables séparées :

$$\frac{\mathrm{d}u}{u^{a+1}} = \frac{(1 + c_2v^b)^{\frac{a+\delta-b}{b}}}{v^{a+1}}\mathrm{d}v.$$

Une dernière intégrale première est ainsi donnée par

$$c_3 = \frac{1}{u^a} - \frac{I_{z_0}\left(v{c_2}^{1/b}\right)}{v^a}$$

où I_{z_0} est la fonction définie par l'équation (2.42) Finalement, la solution générale de l'équation aux dérivées partielles (2.40) est donnée par

$$H(z,u,v,w) = \Phi\left(z - 1/s\, w^{-s}, v^{-b} - w^{-b}, u^{-a} - v^{-a}I_{z_0}\left(\left((v/w)^b - 1\right)^{\frac{1}{b}}\right)\right) \tag{2.44}$$

où Φ est une fonction arbitraire. Il suffit maintenant de résoudre l'équation

$$H(0,u,v,w) = u^{\alpha_0}v^{\beta_0}w^{\gamma_0}.$$

En appliquant la même méthode que pour les urnes à deux couleurs, on pose

$$x' = -1/s\, w^{-s} \qquad y' = v^{-b} - w^{-b} \qquad z' = u^{-a} - v^{-a}I_{z_0}\left(\left((v/w)^b - 1\right)^{\frac{1}{b}}\right).$$

On exprime alors u, v et w en fonction de x', y', z' et il vient dans un premier temps pour v et w des expressions similaires à celles des urnes triangulaires

$$v(x',y') = \left(\left(-sx'\right)^{-b/s} + y'\right)^{-1/b} \qquad w(x') = \left(-sx'\right)^{-1/s}$$

puis en ce qui concerne la variable u

$$u = \left(z' + v(x',y')^{-a} I_{z_0} \left(\left(\left(v(x',y')/w(x') \right)^b - 1 \right)^{-1/b} \right) \right)^{-1/a}$$

avec au final $\Phi(x',y',z') = u(x',y',z')^{\alpha_0}\, v(x',y')^{\beta_0}\, w(x')^{\gamma_0}$ Il suffit alors de remplacer Φ par cette expression dans l'équation (2.44) et d'exprimer I_{z_0} en fonction de I. On constate finalement en utilisant la relation

$$\frac{1}{{f_2}^b} - \frac{1}{{f_3}^b} = \frac{1}{v^b} - \frac{1}{w^b}$$

que les deux termes faisant intervenir la constante C provenant de la différence $I_{z_0} - I$ s'annulent et que les éventuels termes logarithmiques (dans le cas $a/b \in \mathbb{N}$) se factorisent. □

2.5.2 Espérance et variance

Si l'on remplace les variables v et w par la valeur 1, on obtient la série génératrice bivariée comptant le nombre d'événements ayant k boules rouges au temps n. On constate alors que cette série génératrice est alors la même que pour le cas d'une urne à deux couleurs de matrice $\left[\begin{smallmatrix} a & s-a \\ 0 & s \end{smallmatrix}\right]$. En effet, si l'on "repeint" les boules rouges en noir et les noires en blanc, on se convainc aisément que l'évolution de l'urne suit alors les règles de cette nouvelle matrice. L'évolution des boules rouges est donc déjà connue et on se contente d'étudier celle des boules noires. La série génératrice bivariée énumérant les événements par rapport au nombre de boules noires est alors obtenue à partir de la fonction (2.43) en donnant à w et u la valeur 1. L'espérance et la variance du nombre de boules sont ensuite obtenues grâce aux coefficients de $[z^n]$ des dérivées première et seconde prises en $v = 1$ de cette fonction.

Comme précédemment, on définit $\Delta = (1 - sz^s)^{-1/s}$. Les dérivées de la série génératrice prises en $v = 1$ ne font intervenir que la fonction Δ. Plus précisément, ce sont des polynômes en Δ et $\ln \Delta$. L'asymptotique des coefficients de telles fonctions est donnée par Flajolet et Odlyzko [FO90].

Théorème 2.10 (Flajolet-Odlyzko) *Soit α et γ deux complexes tels que $\alpha \notin \mathbb{N}$ et f la fonction définie par*

$$f(z) = (1-z)^{\alpha} \left(\frac{1}{z} \ln \left(\frac{1}{1-z} \right) \right)^{\gamma}.$$

Alors, les coefficients de $f(z)$ satisfont

$$f_n = \frac{n^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)} (\ln n)^{\gamma} \left(1 + O\left(\frac{1}{\ln n} \right) \right).$$

Dans le cas qui nous intéresse, on considère des fonctions de la forme $z^{\gamma} f(z)$ où γ est un entier. Le coefficient de $[z^n]$ d'une telle fonction admet alors le même équivalent que dans le lemme (le décalage d'indice ne perturbe pas l'asymptotique). On distingue alors trois cas.

Proposition 2.9 *Soit une urne de composition $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ à l'état initial, suivant les règles de la matrice suivante*

$$\begin{bmatrix} a & \delta & s-a-\delta \\ 0 & b & s-b \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}.$$

Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires à l'instant n. Suivant les valeurs des paramètres a et b, trois comportement peuvent être observés concernant l'espérance et l'écart-type de la variable X_n.

1er cas : *a inférieur à b*

$$E[X_n] = \left(\beta_0 + \alpha_0 \frac{\delta}{b-a}\right) \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+b}{s}\right)}\, n^{b/s} + O\left(n^{(b-1)/s}\right)$$

$$\sigma(X_n)^2 = \left[C \frac{\Gamma(\frac{t_0}{s})}{\Gamma(\frac{t_0+2a}{s})} - \left(\left(\beta_0 + \alpha_0 \frac{\delta}{b-a}\right) \frac{\Gamma(\frac{t_0}{s})}{\Gamma(\frac{t_0+a}{s})}\right)^2\right] n^{2b/s} + O\left(n^{(2b-1)/s}\right)$$

où le coefficient C est défini par

$$C = \left(\beta_0 + \alpha_0 \frac{\delta}{b-a}\right)^2 + b\beta_0 + \alpha_0 \left(\frac{a\delta^2}{(b-a)^2} + b - a - 2\delta + \frac{2\delta(b+\delta)}{2b-a}\right).$$

2ème cas : *a et b égaux*

$$E[X_n] = \alpha_0 \frac{\delta}{a} \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\, n^{a/s} \ln\ n + O\left(n^{a/s}\right)$$

$$\sigma(X_n)^2 = {\alpha_0}^2 \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{a}{\alpha_0}\right) \frac{\Gamma(\frac{t_0}{s})}{\Gamma(\frac{t_0+2a}{s})} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\right)^2\right] n^{2a/s} (\ln n)^2 + O\left(n^{2a/s} \ln n\right).$$

3ème cas : *a supérieur à b*

$$E[X_n] = \alpha_0 \frac{\delta}{a-b} \frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\, n^{a/s} + O\left(n^{(a-1)/s}\right)$$

$$\sigma(X_n)^2 = {\alpha_0}^2 \left(\frac{\delta}{a-b}\right)^2 \left[\left(1 + \frac{a}{\alpha_0}\right) \frac{\Gamma(\frac{t_0}{s})}{\Gamma(\frac{t_0+2a}{s})} - \left(\frac{\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{t_0+a}{s}\right)}\right)^2\right] n^{2a/s} + O\left(n^{2(a-1)/s}\right).$$

En vertu de ces résultats, on peut faire quelques remarques qualitatives. Les coefficients a et b peuvent être vus comme les taux de « reproduction » des boules des deux premières couleur. Leur nombre est toujours très inférieur à celui des boules blanches. Les boules rouges ont toujours une espérance dont l'ordre de grandeur est en $\Theta(n^{a/s})$. Pour les boules noires, cela varie

- Si $a < b$, leur taux de croissance propre est supérieur à celui des boules rouges et leur vitesse d'évolution n'est pas perturbée.
- Si $a = b$, les taux de croissance sont les mêmes, mais comme l'insertion de boules rouges est toujours accompagnée d'une insertion de boules noires, celles-ci voient leur vitesse de croissance augmentée d'un facteur logarithmique.
- Enfin si $a > b$, la vitesse de croissance des boules noires est imposée par celle des boules rouges, puisque leur vitesse de « reproduction » propre est trop faible.

2.5.3 Expression des moments dans les cas $a \geq b$

Les deux cas $a = b$ et $a > b$ sont deux cas où les boules rouges imposent une croissance plus rapide aux boules noires. L'expression des moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires est ainsi à peu de choses près la même que celle des moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules rouges. On est donc amené à appliquer une méthode de moments. On commence donc par déterminer les moments de la variable X_n. On a ainsi la proposition suivante.

Proposition 2.10 *On considère une urne de composition initiale $(\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$. Soit X_n la variable donnant le nombre de boules noires au temps n. Alors, dans l'hypothèse où $a \geq b$, les moments de la variable X_n admettent pour équivalent*

$$E\left[{X_n}^{\ell}\right] = \left(\frac{a\delta}{a-b}\right)^{\ell} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0+\ell a}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0+\ell a}{s}\right)} n^{\ell a/s} + O\left(n^{\ell(a-1)/s}\right) \tag{2.45}$$

si a est strictement plus grand que b ; si $a = b$, alors

$$E\left[{X_n}^{\ell}\right] = \delta^{\ell} \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha_0+\ell a}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right)}{\Gamma\left(\frac{\alpha_0}{a}\right)\Gamma\left(\frac{t_0+\ell a}{s}\right)} n^{\ell a/s} (\ln\ n)^{\ell} + O\left(n^{\ell a/s} (\ln\ n)^{\ell-1}\right). \tag{2.46}$$

Preuve : On va montrer la propriété seulement dans le cas $a = mb$ avec $m \geq 2$ (et donc $a > b$). Les autres cas se démontrent facilement avec une preuve similaire à celle qui va être présentée. Dans toute la démonstration, z est supposé fixe (et donc Δ également) et v suffisamment proche de 1 pour que les développements en série puissent converger.

Les dérivées par rapport à v prises en $v = 1$ de la fonction H définie dans l'équation (2.43) sont des polynômes en Δ et $\ln \Delta$. Comme pour les moments de l'urne triangulaire à deux couleurs, on va se contenter de chercher un développement de la série génératrice sous la forme

$$H(z, 1, v, 1) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(\Delta, \ln \Delta)(v-1)^k/k! \tag{2.47}$$

et d'isoler le coefficient dominant de ces polynômes. Comme on sait, en vertu du lemme de Flajolet-Odlyzko, que

$$[z^n]\Delta^k (\ln \Delta)^{\ell} = o\left(\Delta^{k'} (\ln \Delta)^{\ell'}\right) \qquad \text{si et seulement si} \qquad k < k' \text{ ou } k = k' \text{ et } l < l',$$

le terme donnant l'équivalent asymptotique du coefficient $[z^n]$ dans un polynôme en Δ et $\ln \Delta$ est celui qui est maximum pour l'ordre lexicographique. Pour simplifier les notations, on écrira

$$P(\Delta, \ln \Delta) = C\Delta^r (\ln \Delta)^s + o\left(\Delta^r (\ln \Delta)^s\right) = O\left(\Delta^r (\ln \Delta)^s\right)$$

dès qu'un polynôme a son terme dominant de degré r en Δ et s en $\ln \Delta$. On a alors le lemme suivant dont la preuve est immédiate mais qui sera néanmoins très utile.

Lemme 2.3 *Soient deux fonctions F et G telles que pour v dans un voisinage ouvert de 1 on aie*

$$F(v, \Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} O\left(\Delta^{kr} (\ln \Delta)^{ks}\right)(v-1)^k \quad \textit{et} \quad G(v, \Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} O\left(\Delta^{kr'} (\ln \Delta)^{ks'}\right)(v-1)^k.$$

Si $r' < r$ ou $r' = r$ et $s' \leq s$, alors

$$F \cdot G\,(v,\Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} O\left(\Delta^{kr}\,(\ln\Delta)^{ks}\right)(v-1)^k.$$

La propriété reste vraie si on remplace les $O\,(\cdot)$ par des $o\,(\cdot)$. Une propriété immédiate qui découle de ce lemme est que si F vérifie les hypothèses ci-dessus, alors pour tout entier k, F^k les vérifie aussi.

Corollaire 2.3 *Si I est une fonction analytique en 0 et que F vérifie les hypothèses du lemme 2.3 avec de plus $F(1,\Delta) = 0$, alors $I(F(v,\Delta))$ les vérifie également.*

Preuve : Il suffit de développer $I(F) = I(0) + \sum_{k=1}^{\infty} I_k F^k$. La série converge pour v dans un voisinage de 1 car $F(1,\Delta) = 0$ et donc $F(v,\Delta)$ est dans le disque de convergence de I pour v assez proche de 1. Il suffit alors d'appliquer le lemme aux fonctions $(F^k)_{k\in\mathbb{N}}$. □

Pour trouver le développement en série de l'équation (2.47), on commence par faire le travail pour chacune des fonctions f_1, f_2 et f_3. La fonction f_3 ne dépend pas de v donc il n'y a rien à faire. Le développement de la fonction f_2 est le même que celui de l'équation (2.35) :

$$f_2(z,1,v,1) = \Delta \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(\Delta^b)\frac{(v-1)^k}{k!} \tag{2.48}$$

où Q_k est de degré k. Le développement de f_1 est donné par le lemme suivant.

Lemme 2.4

$$f_1 = \Delta\left(1 - \frac{a\delta}{a-b}\Delta^a(v-1) + \sum_{k=1}^{\infty} o\left(\Delta^{ka}\right)(v-1)^k\right)^{-1/a}.$$

Preuve du lemme: L'expression sous les parenthèses de f_1 peut se décomposer comme somme de trois fonctions $f_1 = \Delta\,(R(v,\Delta) + S(v,\Delta) + T(v,\Delta))^{-1/a}$ avec

$$R(v,\Delta) = \Delta^a\left(1 - \frac{I\left(v^b-1\right)}{v^a}\right), \qquad S(v,\Delta) = \left(\frac{\Delta}{f_2}\right)^a I\left(\left(\frac{f_2}{\Delta}\right)^b - 1\right),$$

$$T(v,\Delta) = a\Delta^a\binom{m-\lambda-1}{m}\left(\frac{1}{v^b}-1\right)^m \ln(f_2/v).$$

Puisque I est analytique à l'origine et que $I(0) = 1$, il est clair que le développement en série au voisinage de 1 de R est de la forme

$$R(v,\Delta) = \Delta^a \sum_{k=1}^{\infty} R_k \frac{(v-1)^k}{k!}$$

et on trouve $R_1 = a - b\ I'(0) = -\frac{a\delta}{a-b}$. Pour obtenir le développement de la fonction T, il suffit d'appliquer le lemme 2.3. Dans un premier temps,

$$\begin{aligned}\ln(f_2/v) &= \ln\Delta - \ln v - \frac{1}{b}\ln\left(1 - \Delta^b(1-v^{-b})\right)\\ &= \ln\Delta - \ln v + \sum_{k=1}^{\infty}\Delta^{kb}\frac{1}{kb}\frac{(v^b-1)^k}{v^{kb}}\end{aligned}$$

Le terme $\ln v$ se développe en $\sum_{k=1}^{\infty} O(1)(v-1)^k$. Comme dans la preuve du lemme 2.1, le terme $(v^b-1)^k/v^{kb}$ est développé et une inversion de sommes donne finalement

$$\ln(f_2/v) = \ln\Delta + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\Delta^{kb}\right)(v-1)^k.$$

Par ailleurs, on a aussi

$$\Delta^a \binom{m-\lambda-1}{m}\left(\frac{1}{v^b}-1\right)^m = \Delta^a \sum_{k=m}^{\infty} O(1)(v-1)^k.$$

Après application du lemme 2.3, il vient

$$T(v,\Delta) = \Delta^a \ln\Delta \sum_{k=0}^{\infty} O(1)(v-1)^{k+m} + \Delta^a \sum_{k=0}^{\infty} O\left(\Delta^{kb}\right)(v-1)^{k+m}.$$

Finalement, comme par hypothèse $a > b$ et $m \geq 2$,

$$T(v,\Delta) = \sum_{k=0}^{\infty} o\left(\Delta^{ka}\right)(v-1)^k.$$

Pour finir, on prouve facilement à l'aide d'un développement similaire à celui effectué pour f_2 que

$$\frac{\Delta}{f_2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\Delta^{kb}\right)$$

et enfin à l'aide du corollaire du lemme que

$$S(v,\Delta) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\Delta^{kb}\right)(v-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} o\left(\Delta^{ka}\right)(v-1)^k$$

ce qui achève la preuve. □

En vertu des trois développements en série de f_1, f_2 et f_3, il vient donc finalement

$$H(z,1,v,1) = \Delta^{t_0}\left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} o\left(\Delta^{ka}\right)\right)\left(1 - \frac{a\delta}{a-b}\Delta^a(v-1) + \sum_{k=1}^{\infty} o\left(\Delta^{ka}\right)\right)^{-\alpha_0/a}.$$

En développant ce produit, on constate que

$$H(z,1,v,1) = \Delta^{t_0} \sum_{k=1}^{\infty}\left(\binom{k+\alpha_0/a-1}{k}\left(\frac{a\delta}{a-b}\right)^k \Delta^{ka} + o\left(\Delta^{ka}\right)\right)(v-1)^k$$

et une extraction de coefficient achève la démonstration de la proposition. □

> **Remarque:** Le cas $a = b$ se démontre de la même manière, à l'exception près que le développement de f_1 est alors de la forme
>
> $$f_1 = \Delta\left(1 - \delta\Delta^a \ln\Delta(v-1) + \sum_{k=1}^{\infty} O\left(\Delta^{ka}\right)(v-1)^k\right)^{-1/a}.$$
>
> Le cas $a > b$ et $a/b \notin \mathbb{N}$ se traite de la même manière que celui-ci, le terme logarithmique n'apparaissant pas dans ce cas.

Modulo une normalisation adaptée à chacun des deux cas, on constate maintenant que les moments de la variable normalisée Y_n sont les mêmes que ceux obtenus pour les boules noires d'une urne triangulaire à deux couleurs. On a vu au chapitre précédent que ces moments caractérisaient une distribution limite unique. On a donc le théorème suivant.

Théorème 2.11 *On considère une urne triangulaire à trois couleurs de boules (rouges, noires, blanches) dont les règles de replacement sont celles de la matrice*

$$\begin{bmatrix} a & \delta & s-a-\delta \\ 0 & b & s-b \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}$$

et dont la composition initiale est fixée à α_0 boules rouges, β_0 boules noires et γ_0 boules blanches. On suppose par ailleurs que les coefficients de la matrice sont tous positifs et que $a, b, \delta > 0$.

Soit X_n la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires au temps n et Y_n la variable aléatoire normalisée de X_n c'est à dire

$$Y_n = aX_n/(\delta n^{a/b} \ln n) \quad si\ a = b \qquad ; \qquad Y_n = X_n(a-b)/(\delta n^{a/b}) \quad si\ a > b.$$

Alors, Y_n converge en distribution vers une loi limite dont la densité s'exprime en termes de transformée de Laplace inverse d'une fonction de Mittag-Leffler. Son développement en série est celui donné par l'équation (2.36).

Dans le cas $a < b$, la série génératrice admet un développement ne faisant intervenir que des polynômes en Δ (le ℓième polynôme étant de degré ℓb) et dont le coefficient dominant est un polynôme en α_0 et β_0 dont les coefficients sont des fractions rationnelles en a, b et δ. Le moment d'ordre ℓ a donc au plus une croissance en $O\left(n^{\ell b/s}\right)$ et la variable normalisée $Y_n = X_n/n^{b/s}$ a des moments qui convergent à tout ordre. Cependant aucune formule simple n'est décelable. La partie suivante montre une convergence en distribution de la variable normalisée Y_n. On donne une expression sous forme intégrale de la fonction caractéristique de la loi limite qui permet de récupérer les moments par des dérivations successives.

2.5.4 Convergence en distribution dans le cas $a < b$

On se place dans le cas où $a < b$. On pose $\rho = b/s$. Soit donc $Y_n = X_n/n^\rho$. La fonction caractéristique ϕ_n de cette nouvelle variable aléatoire est obtenue en substituant v par $e^{i\xi/n^\rho}$ dans la série génératrice des événements puis en extrayant le coefficient de z^n soit

$$\phi_n(\xi) = \frac{n!}{t_0 \cdots (t_0 + (n-1)s)}\ [z^n] H(z, 1, e^{i\xi/n^\rho}, 1),$$

par définition de la série et en vertu de la remarque de la définition 2.4.

Théorème 2.12 *La variable aléatoire Y_n converge en distribution vers une loi limite dont la fonction caractéristique est donnée par l'expression intégrale suivante :*

$$\phi(\xi) = \frac{1}{2i\pi}\Gamma\left(\frac{t_0}{s}\right) \int_{\mathcal{H}} t^{-\gamma_0/s} \left(t^\rho - ib\xi\right)^{-(\alpha_0+\beta_0)/b} I\left(\frac{ib\xi}{t^\rho - ib\xi}\right)^{-\alpha_0/a} e^t\, dt$$

Pour tout ξ appartenant à un intervalle de la forme $[-\xi_0; \xi_0]$, le contour peut être n'importe quel contour contournant l'axe réel négatif à distance $\left(1 + \frac{1}{R}\right)^{1/\rho} (b\xi_0)^{1/\rho}$ dans le sens des aiguilles d'une montre, où R est le rayon d'une boule sur laquelle $I^{-1/a}$ est bien définie et bornée.

Preuve : En vertu du théorème 2.6, il suffit de montrer que la fonction caractéristique de Y_n converge simplement vers l'expression intégrale du théorème. Pour ne pas alourdir les formules, on ne va montrer cette convergence que dans le cas où les conditions initiales sont réduites à une seule boule rouge. Le cas général se traite de la même manière.

On fait dans un premier temps le changement de variable $sz \to z$ puis on utilise un contour de Cauchy pour récupérer le coefficient de $[z^n]$. On est ramené à évaluer l'intégrale

$$\oint \left(1 - e^{-\frac{a\xi}{n^\rho}} I\left(e^{\frac{ib\xi}{n^\rho}} - 1\right) + I\left(\frac{(1-z)^{-\rho}\left(1 - e^{\frac{-ib\xi}{n^\rho}}\right)}{1 - (1-z)^{-\rho}\left(1 - e^{\frac{-ib\xi}{n^\rho}}\right)} \right) \left(e^{-\frac{ib\xi}{n^\rho}} - 1 + (1-z)^\rho \right)^{a/b} \right)^{-\frac{1}{a}} \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}}$$

puis à renormaliser par le coefficient $s^n n!/(1 \cdots (1 + (n-1)s)$, dont l'équivalent asymptotique est $\Gamma(1/s)\, n^{1-1/s}$. On fixe maintenant ξ appartenant à $[-\xi_0, \xi_0]$. On intègre par rapport à z suivant un contour de Hankel classique (du type de la figure 2.6), en contournant le point 1 à distance $\Theta(1/n)$ (on ne précise encore ni la constante du Θ, ni le rayon du cercle extérieur du contour). Après le changement de variable classique $z = 1 - t/n$, l'intégrale devient

$$n^{1-\frac{1}{s}} \oint \left(I\left(\frac{ib\xi + O\left(\frac{1}{n^\rho}\right)}{t^\rho - ib\xi + O\left(\frac{1}{n^\rho}\right)} \right) \left(t^\rho - ib\xi + O\left(\frac{1}{n^\rho}\right) \right)^{a/b} + O\left(\frac{1}{n^{(b-a)/s}}\right) \right)^{-\frac{1}{a}} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^{-n-1} \mathrm{d}t$$

où les $O(\cdot)$ ne dépendent que de ξ et sont uniformes pour ξ appartenant à l'intervalle $[-\xi_0, \xi_0]$. La variable t suit alors un contour de la forme de la figure 2.10. Ce chemin est défini par deux

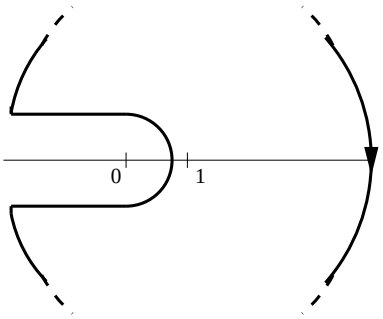


FIG. 2.10 – Contour d'intégration de la variable t.

paramètres qui sont le rayon du petit cercle r_1, indépendant de n et celui du grand de la forme $r_2 n + o(n)$. Il convient de choisir judicieusement ces deux constantes.

La fonction I est analytique sur la boule unité et on a $I(0) = 1$. Soit donc $0 < R < 1$ un réel tel que pour tout complexe z de module inférieur ou égal à R, on ait, par exemple, $\Re(I(z)) > 1/2$. Alors, en utilisant la définition principale de la racine, la fonction $z \mapsto I(z)^{-1/a}$ est bien définie, analytique et bornée sur le disque de rayon R. On choisit alors $r_1 > \left(1 + \frac{1}{R}\right)^{1/\rho} (b\xi_0)^{1/\rho}$. Étant donné ce choix, pour tout t du contour d'intégration, on a

$$|t| > \left(1 + \frac{1}{R}\right)^{1/\rho} (b\xi_0)^{1/\rho} \quad \Longrightarrow \quad |t^\rho - ib\xi| > |t|^\rho - |ib\xi| > \frac{1}{R}|b\xi_0| \quad \Longrightarrow \quad \left| \frac{ib\xi}{t^\rho - ib\xi} \right| < R.$$

Ainsi, l'intégrande converge simplement pour tout élément t du contour vers la fonction analytique

$$t \mapsto I\left(\frac{ib\xi}{t^\rho - ib\xi} \right)^{-1/a} (t^\rho - ib\xi)^{-1/b} e^t. \tag{2.49}$$

Par ailleurs, il est clair que la convergence de $t \mapsto \frac{1}{t^\rho - ib\xi + O(n^{-\rho})}$ est uniforme sur le contour avec un terme d'erreur en $O\left(n^{-\rho}\right)$. Par composition de fonctions, on en déduit que la convergence est également uniforme pour la fonction $H\left(1-\frac{t}{n}, 1, e^{ib\xi/n^\rho}, 1\right)$, avec un terme d'erreur en $O\left(n^{-(b-a)/s}\right)$.

Une fois ces considérations faites, il suffit de dérouler la méthode classique du contour de Hankel. On choisit le rayon du contour extérieur de la forme $r_2 = 1 + \frac{(\ln n)^2}{n}$. Le terme $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n-1}$ est un $O\left(e^{-(\ln n)^2}\right)$ le long du contour extérieur et la fonction H est bornée (puisque I est bornée sur le disque de rayon R). La contribution est donc négligeable. Pour le reste de l'intégrale, on utilise comme de coutume la convergence uniforme de $t \mapsto \left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n-1}$ vers e^t et celle de $H\left(1-\frac{t}{n}, 1, e^{ib\xi/n^\rho}, 1\right)$ vers la fonction définie par l'équation (2.49) pour conclure. □

Grâce au théorème, on retrouve alors facilement l'expression des moments de la variable aléatoire normalisée donnant le nombre de boules de la seconde couleur. En utilisant le développement en l'origine de la fonction I, donné précédemment par la formule

$$I(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n-\lambda-1}{n} \frac{a}{a-nb} z^n$$

avec $\lambda = \frac{a+\delta-b}{b}$, il suffit de calculer les dérivées de la fonction ϕ en 0 en utilisant la formule de Hankel (2.38).

2.6 Discussions

Finalement, on a réussi à classifier toutes les urnes triangulaires à trois couleurs de boules. Il est naturel à ce stade d'envisager une généralisation des résultats au cas des urnes triangulaires équilibrées à plus de 3 couleurs.

L'équation aux dérivées partielles vérifiée par la série génératrice des événements se résout toujours, dans le cas général, sous forme explicite. En effet, la méthode employée dans la preuve de la proposition 2.8 peut s'adapter au cas des urnes triangulaires à p couleurs de boules. La fonction H qui dépend alors de $p+1$ variables s'écrit alors comme un produit de p fonctions qui s'expriment toutes en termes de primitives de puissances de fonctions hypergéométriques. Notamment des développements en l'origine sont envisageables afin de retrouver l'espérance du nombre de boules de chacune des couleurs. Le travail est certes non trivial, mais il semble accessible par la méthode, et il est envisageable d'obtenir une classification des urnes triangulaires, comme dans le cas à 3 couleurs de boules (on attend des croissances de populations dans certains cas de l'ordre de $n^p(\ln n)^q$ avec p et q entiers).

En ce qui concerne la classification des urnes à 2 couleurs équilibrées quelconques, on traite le cas de l'urne $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$ dans la partie suivante. La poursuite de la classification est envisageable dans des travaux ultérieurs à cette thèse, mais cette étude nécessitera sans doute une quantité de travail non négligeable par rapport à ce qui a été fait jusqu'à présent.

Chapitre 3

Urne de Friedman et transition de phase à Ok Corral

Sommaire

3.1 Introduction 97
3.2 Modèle altruiste de Friedman 101
3.3 Probabilité de survie d'une équipe 109
3.4 Moments et loi limite du nombre de survivants 116
3.5 Discussions 126

Alors que la classification des urnes à trois couleurs de boules était encore en cours, Philippe Robert (Projet RAP, INRIA Rocquencourt) nous transmit un article de Kingman, concernant une modélisation de duels au revolver introduite par Williams et McIlroy. Deux groupes de tireurs s'affrontent : à chaque instant, un tueur choisi au hasard parmi ceux encore en vie tue un membre de l'équipe adverse. Ce modèle a été appelé modèle de « Ok Corral » par ces auteurs, en référence au fameux règlement de compte de 1881 à Tombstone. À priori, les applications d'une telle étude à des problèmes courants de l'informatique semblent limitées mais les travaux présentaient des résultats intéressants notamment un phénomène de transition de phase concernant les probabilités de survie de chacun des groupes ainsi qu'un ordre de grandeur du nombre moyen de survivants d'exposant 3/4 peut courant. En ce qui nous concerne, c'est plus particulièrement une relation entre ce modèle et une urne de type Pólya-Eggenberger, de matrice de replacement $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ qui nous intéresse.

Les travaux de ce chapitre visent deux objectifs. Dans un premier temps, nous reprenons l'étude de l'urne de Friedman $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$ (une généralisation naturelle de celle qui intervient dans l'étude du modèle de Ok Corral). Si plusieurs résultats sont déjà connus, notamment une expression exacte des probabilités et la distribution limite (gaussienne), il est non seulement envisageable de les retrouver par une méthode distincte, mais également d'obtenir des estimations plus précises.

En guise d'application, les résultats ont été utilisés pour améliorer certains résultats de Kingman. Notre étude révèle des expressions des probabilités du modèle qui sont nouvelles, et en particulier un lien entre les probabilités de survie des groupes de tireurs et les nombres eulériens. Cette connection a ainsi permis de donner un terme optimal de vitesse de convergence pour ces probabilités, et un équivalent asymptotique dans les régimes où elles sont exponentiellement petites. Après quoi, des manipulations algébriques ont permis de retrouver, par une méthode entièrement distincte de celle de Kingman, certaines expressions des moments du nombre de survivants, et ainsi la distribution limite.

Les travaux de ce chapitre font l'objet d'un article en préparation avec Philippe Flajolet [FP05a].

Plan: Ce chapitre est composé de quatre parties. La partie 3.1 introduit précisément le modèle de Ok Corral tel qu'il a été formulé par Williams et McIlroy. On présente ensuite les travaux de Kingman et on donne notamment la relation liant les probabilités du modèle à celles de l'urne de Friedman. La partie 3.2 présente une étude de cette urne par la méthode présentée au chapitre précédent.

Dans la partie 3.3, on détermine la distribution de probabilité du nombre de survivants lors d'un duel entre deux groupes de m et n personnes. On en déduit les probabilités de survie respectives de chacun des groupes et leur équivalent asymptotique, retrouvant notamment le phénomène de transition de phase au voisinage de $m/n = 1$ avant de traiter le cas $m/n < 1$. Enfin, dans la partie 3.4, on s'intéresse aux moments de la variable aléatoire donnant le nombre de survivants, afin de retrouver la distribution limite de cette variable.

Résultats principaux: Dans la deuxième partie, on retrouve la distribution de probabilité de l'urne $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$, ainsi que l'espérance et l'écart-type de la variable aléatoire X_n donnant le nombre de boules noires au temps n. Cette distribution avait déjà été trouvée par Friedman mais nous en donnons une nouvelle preuve, qui découle naturellement de la méthode introduite dans le chapitre 2.

Par le théorème 3.1, nous montrons ensuite que la distribution de probabilité de X_n converge localement vers une loi limite gaussienne alors que jusqu'à présent, on avait seulement une preuve de convergence en distribution par méthode de moments. Nous donnons de plus une expression de la vitesse de convergence. Enfin, par le théorème 3.2, nous déterminons la fonction de grande déviation.

Le reste du chapitre est consacré au problème de Ok Corral.

Dans la partie 3.3, notre théorème 3.3 donne deux expressions nouvelles pour la probabilité d'avoir S survivants dans un duel entre deux groupes de m et n personnes (pour tous entiers $1 \leq S \leq m$ et n). À partir de ces expressions, nous en déduisons le théorème 3.4 qui donne une expression de la probabilité de survie du premier groupe (et donc du second) et l'exprime en termes d'une somme de nombres eulériens. Nous donnons alors à partir de cette relation des équivalents asymptotiques de cette probabilité, avec termes d'erreurs optimaux. Le théorème 3.5 permet de retrouver, dans le cas où $(m-n)/\sqrt{m+n}$ converge, un phénomène de transition de phase déjà prouvé par Kingman, mais nous ajoutons une indication supplémentaire concernant un terme d'erreur optimal. Le résultat du théorème 3.6 qui concerne le cas $m/n \to \alpha < 1$ est entièrement original.

Dans la partie 3.4, la proposition 3.7 donne de nouvelles expression des moments de tout ordre de la variable aléatoire donnant le nombre de survivants dans le premier groupe (pour le second, il suffit d'inverser les valeurs de m et n). De son coté, Kingman n'obtenait des expressions que pour certains moments et seulement pour la variable aléatoire donnant le nombre de survivants du duel sans se soucier de quel groupe survit. Les formules obtenues font intervenir une famille de polynômes qui se relie aux nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce, ainsi que la fonction Q de Ramanujan.

Nous en déduisons qu'une famille de moments s'expriment sous une forme simple ne faisant intervenir qu'une somme alternée (corollaire 3.2), tandis qu'une autre famille s'exprime comme le coefficient d'une série génératrice bivariée (corollaire 3.3). Ces deux familles se relient l'une à l'autre grâce aux nombres de Stirling de première espèce. On en déduit alors par une méthode originale deux résultats de Kingman grâce à l'équivalent asymptotique des coefficients de cette série, que l'on obtient par une méthode de col (théorèmes 3.8 et 3.9). Cette étude est particulièrement intéressante puisque l'intégrande présente une confluence embarrassante, le point col se situant au voisinage d'une singularité.

3.1 Introduction

3.1.1 Présentation du problème

Le 6 octobre 1881, à Tombstone, charmante bourgade de l'Arizona, le ranch Ok Corral fut le théâtre d'un des plus fameux (et plus sanglants) règlements de compte de l'histoire de l'Ouest. Le shérif Wyatt Earp, ses deux frères Morgan et Virgil ainsi que leur ami John (Doc) Holliday affrontèrent en duel les frères Ike et Billy Clanton, ainsi que Tom et Frank McLaury, petits malfrats locaux qui avaient un peu depassé les bornes niveau attaques de diligence depuis quelques temps.

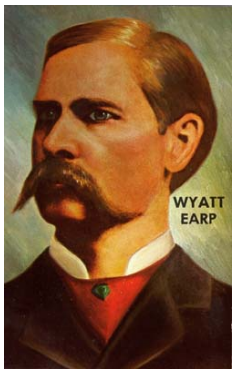


FIG. 3.1 – Wyatt Earp (1848-1929).

Ce fameux duel au revolver a depuis donné le jour à plusieurs films célèbres (dont le dernier film de Kevin Costner qui ne soit pas un navet), quelques tomes supplémentaires de la bande dessinée *Blueberry*, mais également à un problème mathématique dont la formulation est la suivante : Considérons deux groupes de tireurs qui s'affrontent en duel. À chaque instant, un tireur choisi aléatoirement parmi tous ceux encore en vie dégaine son revolver et tue un de ses adversaires. Le procédé se répète jusqu'à ce que l'un des deux groupes soit éliminé. On note m le cardinal du premier groupe et n celui du second. Par convention, on supposera toujours $1 \leq m, n$. Les deux questions qui sont naturellement amenées à se poser sont les suivantes :

- (Q_1) Combien de tireurs survivront au duel ? En particulier, quel est la moyenne $\mu(m, n)$, les moments et la distribution du nombre de survivants ?
- (Q_2) Quelle est la probabilité de survie de chaque groupe ?

Ce problème a ainsi été nommé « problème d'Ok Corral » en référence à l'affrontement de Tombstone. On distingue alors naturellement deux régimes

- Le régime « équitable » où $m \sim n$
- Le régime « biaisé » avec $m \gg n$.

Le duel tel qu'il s'est déroulé à Tombstone est donc une instance équitable avec deux groupes de 4 tireurs. L'exemple ci-dessous présente dans le détail, le cas où le premier groupe est formé de 3 duellistes, et le second groupe de 2. Les noeuds du graphe représentent la composition du groupe à chaque instant, ainsi que la probabilité d'une telle configuration à partir de l'état initial.

La probabilité de chaque configuration s'obtient en faisant la somme des probabilités de ses antécédents pondérées par la probabilité de chaque transition.

En ce qui concerne le scénario du duel de Tombstone, pour ne pas gâcher le plaisir des personnes désirant lire la bande dessinée *Blueberry* ou voir un des films sur le sujet, on ne révèlera pas comment se conclut l'affrontement, mais la théorie permet néanmoins d'affirmer qu'il n'y avait qu'une

$$\begin{array}{ccccccc}
(3,2)\ ;\ \mathbb{P}=1 & \longrightarrow & (2,2)\ ;\ \mathbb{P}=2/5 & \longrightarrow & (1,2)\ ;\ \mathbb{P}=1/5 & \longrightarrow & (0,2)\ ;\ \mathbb{P}=2/15 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(3,1)\ ;\ \mathbb{P}=3/5 & \longrightarrow & (2,1)\ ;\ \mathbb{P}=7/20 & \longrightarrow & (1,1)\ ;\ \mathbb{P}=11/60 & \longrightarrow & (0,1)\ ;\ \mathbb{P}=11/120 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
(3,0)\ ;\ \mathbb{P}=9/20 & & (2,0)\ ;\ \mathbb{P}=7/30 & & (1,0)\ ;\ \mathbb{P}=11/120 & &
\end{array}$$

FIG. 3.2 – Probabilités de survie pour un groupe de 3 tireurs opposé à un groupe de 2 tireurs.

probabilité de $4/21 \approx 0.1904$ pour une telle issue.

3.1.2 Heuristiques, récurrences et méthode des moments

Le problème de Ok Corral a été introduit pour la première fois par Williams et Mc Ilroy [WM98]. Dans l'article, les auteurs donnent un traitement heuristique fondé sur une modélisation du problème par un système d'équations différentielles et un processus de diffusion. Leur méthode suggère les équivalents asymptotiques

$$\mu(m,n) \sim \sqrt{m^2-n^2} \quad \text{si } m \gg n \quad \text{et} \quad \mu(n,n) \sim 2\,\frac{\Gamma(3/4)}{3^{1/4}\sqrt{\pi}}\,n^{3/4}. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, Williams et Mc Ilroy effectuent des vérifications numériques et les résultats sont en accord étroit avec leurs hypothèses.

Kingman [Kin99] reprend ensuite le problème, intéressé selon ses propres termes « non pas par les applications éventuelles pour les duels réels, mais pour ce curieux exposant 3/4 ». Sa méthode consiste à trouver une famille de solutions polynomiales à la récurrence satisfaite par la moyenne et les moments d'ordre supérieurs du nombre de survivants :

$$(m+n)f(m,n) = mf(m,n-1) + nf(m-1,n).$$

De cette manière, il réussit à obtenir des équivalents asymptotiques pour une famille de moments. Il en résulte en une caractérisation de la loi limite pour les deux cas équitable ($m \sim n$) et biaisé ($m-n \gg \sqrt{m+n}$), qui permettent donc de valider les deux heuristiques de Williams et Mc Ilroy. De plus, la méthode permet également de répondre à la question (Q_2) : le théorème 3 de [Kin99] décrit la probabilité de survie de chaque équipe dans la région de transition $m-n \sim x\sqrt{m+n}$, et l'exprime en termes de fonction d'erreur (erf).

Les preuves de Kingman sont basées sur la méthode des moments (cf paragraphe 2.2.4). Par conséquent, elles ne donnent aucune information sur les vitesses de convergence. La question est traitée par Kingman et Volkov [KV03], qui prouvent une loi limite locale (convergence ponctuelle vers la densité d'une gaussienne) accompagnée de termes d'erreurs, pour le cas $m = n$. Leur méthode permet également de trouver une formule explicite des probabilités, impliquant deux sommes alternées. Elle utilise une connection entre ce problème et l'urne de Friedman $\left[\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right]$. Cette urne étant parfaitement adaptée à l'emploi de nos méthodes, il est envisageable d'obtenir des résultats dans ce domaine.

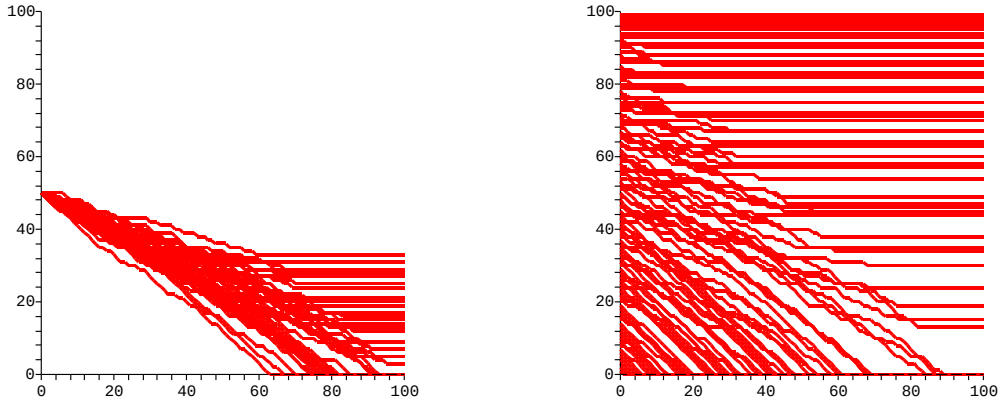


FIG. 3.3 – Cinquante évolutions aléatoires du cas équitable $m = n = 50$ (à gauche). Évolutions aléatoires dans le cas général $m+n = 100$ pour m appartenant à $[\![1; 99]\!]$. L'axe horizontal représente le temps, l'axe vertical le nombre de tireurs du premier groupe.

3.1.3 Processus de Kingman et modèle d'urne associé

Le processus de Ok Corral est un processus à valeurs entières utilisé pour modéliser le duel. On dispose de deux variables aléatoires (X_t, Y_t), $t \in \mathbb{N}$ dont les probabilités de transition vérifient :

$$\mathbb{P}\left(X_{t+1} = X_t - 1, Y_{t+1} = Y_t\right) = \frac{Y_t}{X_t + Y_t},$$

$$\mathbb{P}\left(X_{t+1} = X_t, Y_{t+1} = Y_t - 1\right) = \frac{X_t}{X_t + Y_t}.$$

Le processus démarre avec comme condition initiales $X_0 = m$ et $Y_0 = n$ et continue jusqu'à ce que soit X_t, soit Y_t s'annule. On note alors S la valeur de la variable non nulle et les valeurs de X_t et Y_t demeurent constantes à partir de cet instant. La figure 3.3 montre des simulations du processus pour des conditions initiales variées. Comme on peut le constater, dès que le duel devient déséquilibré, la situation du groupe en minorité ne fait qu'empirer et sa population décroît d'une unité presque à chaque instant. En revanche, tant que les populations restent proches, les pertes de chaque coté ont tendance à s'équilibrer et la durée du duel est prolongée.

Le problème se transpose naturellement à un problème d'urne de Pólya : on dispose d'une urne contenant des boules noires et des boules blanches. À chaque instant, on pioche une boule au hasard dans l'urne, on la replace alors en enlevant de l'urne une boule de la couleur opposée. Les règles de replacement sont résumées par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un tel modèle d'urne ne permet cependant pas une analyse facile, le modèle n'étant pas viable au sens défini au second chapitre. Au bout d'un certain temps, les boules d'une des deux couleurs auront disparu et on ne sera plus en mesure de suivre les instructions de replacement.

En utilisant une méthode de « renversement du temps », Kingman et Volkov [KV03] introduisent une correspondance entre le processus de Ok Corral et une urne de type urne de Friedman classique,

dont les règles de replacement sont cette fois données par

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Précisément, notons $\mathbb{P}_{\searrow}(m,n,S)$ la probabilité d'avoir S survivants dans le premier groupe, après un duel entre deux groupes de m et n tireurs et $\mathbb{P}_{\nearrow}(m,n,S)$ la probabilité d'avoir une urne avec m boules noires et n boules blanches à partir d'une composition initiale de S boules noires. La relation fondamentale de Kingman et Volkov est alors

Lemme 3.1 (Renversement du temps [KV03])) *Les probabilités du problème « Ok Corral » et de l'urne de Friedman sont reliées de la manière suivante :*

$$\mathbb{P}_{\searrow}(m,n,S) = \frac{S}{m+n}\mathbb{P}_{\nearrow}(m,n,S). \tag{3.2}$$

Preuve : Considérons un processus (X_t, Y_t) qui s'achève par l'élimination du deuxième groupe et tel que S personnes survivent dans le premier groupe. Le processus suit alors un chemin dans $\mathbb{N}^2$ passant par les points $(X_0,Y_0),(X_1,Y_1),\ldots,(X_{m+n-S},Y_{m+n-S})$. On introduit alors deux suites $(x_i)_{i\in[\![1;s]\!]}$ et $(y_i)_{i\in[\![1;s]\!]}$ telles que le chemin se décompose de la manière suivante :

$$\begin{array}{cccc}
(x_0,y_0), & (x_0-1,y_0), & \ldots & (x_1,y_0), \\
(x_1,y_0-1), & (x_1,y_0-2), & \ldots & (x_1,y_1), \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(x_{s-1}-1,y_{s-1}), & (x_{s-1}-2,y_{s-1}) & \ldots & (x_s,y_{s-1}) \\
(x_s,y_{s-1}-1), & (x_s,y_{s-1}-2) & \ldots & (x_s,0).
\end{array}$$

avec donc naturellement, $(X_0,Y_0)=(x_0,y_0)$ et $y_s = S$. Si le premier tireur éliminé est un membre de la deuxième équipe, on a $x_0 = x_1$. La probabilité d'un tel cheminement est alors donné par le produit des probabilité de chacune des transitions soit

$$\frac{{y_0}^{(x_0-x_1)}\cdot {x_1}^{(y_0-y_1)}\ \cdots\ {y_{s-1}}^{(x_{s-1}-x_s)}{x_s}^{y_{s-1}}}{(m+n)(m+n-1)\cdots(S+1)}.$$

Considérons maintenant une urne suivant les règles de replacement $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et contenant à l'instant initial S boules blanches et aucune boule noire. La probabilité d'obtenir à l'instant $m+n-S$ une urne avec m boules blanches et n boules noires en suivant le chemin ci-dessus mais dans le sens inverse est cette fois donnée par

$$\frac{{x_s}^{y_{s-1}}{y_{s-1}}^{(x_{s-1}-x_s)}\ \cdots\ {x_1}^{(y_0-y_1)}\cdot {y_0}^{(x_0-x_1)}}{S(S+1)\cdots(m+n-1)}.$$

Par conséquent, la probabilité de parcourir un quelconque chemin de (m,n) vers $(S,0)$ pour un processus de « Ok Corral » est égale à celle du parcours dans le sens inverse pour l'urne de Friedman, multipliée par le facteur $S/(m+n)$ indépendant du chemin. On en déduit donc le résultat en sommant sur tous les chemins possibles. □

La seconde urne permet elle dans tous les cas des séquences infinies de pioches et on peut donc appliquer les méthodes de la partie précédente pour son étude. La partie suivante présente l'étude de l'urne de matrice de replacement $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$, qui est une généralisation de celle de la correspondance du modèle de Ok Corral.

3.2 Modèle altruiste de Friedman

On considère une urne dont la composition initiale est donnée par α_0 boules noires et β_0 boules blanches, et dont la matrice de replacement est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{bmatrix}$$

Ce modèle a été introduit pour la première fois par Friedman et est alors présenté comme une modélisation d'une campagne de prévention routière. À chaque fois qu'un accident a lieu (on pioche une noire), la campagne de prévention est renforcée et la probabilité d'un autre accident baisse. Si aucun accident n'a lieu (on pioche une blanche), la campagne stagne et la probabilité d'accident augmente. On peut également le voir comme un modèle d'élection comme pour l'urne de Pólya, en considérant cette fois qu'à chaque fois qu'un comparse d'Iznogoud ou du calife organise un débat, il convainc par la stupidité de ses arguments s personnes de ne pas voter pour son candidat (et donc de voter pour l'autre).

Pour ce modèle, la distribution de probabilité a été donnée par Friedman et la distribution limite (gaussienne) par Freedman. En revanche, ni la vitesse de convergence, ni la fonction de grande déviation n'avaient été explicitées.

3.2.1 Série génératrice

En vertu de la proposition 2.1, la série génératrice des événements vérifie l'équation

$$\frac{\partial H}{\partial z} = uv^s \frac{\partial H}{\partial u} + u^s v \frac{\partial H}{\partial v} \tag{3.3}$$

et les conditions initiales $H(0,u,v) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0}$. Suivant la méthode des caractéristiques, on trouve alors l'expression suivante :

Proposition 3.1 *La série génératrice des événements d'une urne du modèle altruiste de Friedman, initialisée à α_0 boules noires et β_0 boules blanches est donnée par*

$$H(z,u,v) = u^{\alpha_0} v^{\beta_0} e^{\alpha_0 z(v^s - u^s)} \left(\frac{v^s - u^s}{v^s - u^s e^{sz(v^s-u^s)}} \right)^{t_0/s}. \tag{3.4}$$

Par conséquent, la probabilité d'avoir $\alpha_0 + ks$ boules noires au temps n est donnée par

$$\mathbb{P}\left(X_n = \alpha_0 + ks\right) = \frac{1}{t_0 \cdots (t_0 + (n-1)s)} \sum_{i=0}^{k} \binom{i + \frac{t_0}{s} - 1}{i} \binom{k - i - n - \frac{t_0}{s} - 1}{k-i} (\alpha_0 + is)^n. \tag{3.5}$$

La formule (3.5) a été découverte en premier lieu par Friedman, grâce à une résolution explicite des récurrences satisfaites par les séries génératrices des moments.

Preuve : On pose à nouveau suivant la méthode des caractéristiques le système

$$-\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{uv^s} = \frac{\mathrm{d}v}{u^s v}.$$

On commence dans un premier temps par intégrer le système formé par la deuxième égalité, qui est à variables séparées. On a directement ainsi une des deux intégrales premières du système.

$$\frac{\mathrm{d}u}{uv^s} = \frac{\mathrm{d}v}{u^s v} \quad \Longrightarrow \quad u^{s-1}\mathrm{d}u = v^{s-1}\mathrm{d}v \quad \Longrightarrow \quad c_1 = v^s - u^s.$$

On peut alors reporter cette équation dans le système formé par les deux premières égalités pour éliminer v. On a alors à nouveau un système à variables séparées qui s'intègre

$$-\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{uv^s} \quad \Longrightarrow \quad -\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{d}u}{u(c_1+u^s)} \quad \Longrightarrow \quad c_2 = z - \frac{\ln\left(1+c_1u^{-s}\right)}{sc_1}$$

et l'on peut alors remplacer c_1 par son expression en fonction de u et v. Finalement, la solution générale de l'équation (3.3) s'exprime alors sous la forme

$$H(z,u,v) = \phi\left(z(v^s-u^s) - \ln\left(\frac{v}{u}\right), v^s-u^s\right)$$

où ϕ est une fonction arbitraire. Les conditions initiales imposent alors

$$\phi\left(-\ln\left(\frac{v}{u}\right), v^s-u^s\right) = u^{\alpha_0}v^{\beta_0}.$$

En posant alors $x = -\ln\left(\frac{v}{u}\right)$ et $y = v^s - u^s$, il vient

$$v = ue^{-x} \quad \text{donc} \quad y = u^s\left(e^{-sx}-1\right) \quad \text{soit} \quad u = \left(\frac{y}{e^{-sx}-1}\right)^{1/s}.$$

Finalement, les conditions initiales imposent

$$\phi(x,y) = e^{-\beta_0 x}\left(\frac{y}{e^{-sx}-1}\right)^{t_0/s} = e^{\alpha_0 x}\left(\frac{y}{1-e^{sx}}\right)^{t_0/s}.$$

En reportant cette expression de ϕ dans H, on trouve alors l'expression (3.4). La formule (3.5) est alors obtenue grâce à la relation (2.14) qui amène à une simple extraction de coefficient. On commence par développer la puissance fractionnaire

$$\begin{aligned}\left(\frac{1-u^s}{1-u^se^{sz(1-u^s)}}\right)^{t_0/s} &= (1-u^s)^{t_0/s}\left(\frac{1}{1-u^se^{sz(1-u^s)}}\right)^{t_0/s} \\ &= (1-u^s)^{t_0/s}\sum_{i\geq 0}\binom{i+\frac{t_0}{s}-1}{i}u^{is}e^{isz(1-u^s)}.\end{aligned}$$

En reportant cette égalité dans l'expression de $H(z,u,1)$ obtenue en substituant 1 à v dans l'équation (3.4), on peut alors extraire le coefficient de $[z^n]$

$$\begin{aligned}[z^n]H(z,u,1) &= [z^n]\,(1-u^s)^{t_0/s}\sum_{i\geq 0}\binom{i+\frac{t_0}{s}-1}{i}u^{\alpha_0+is}e^{(\alpha_0+is)z(1-u^s)} \\ &= \sum_{i\geq 0}\binom{i+\frac{t_0}{s}-1}{i}\frac{(\alpha_0+is)^n}{n!}u^{\alpha_0+is}(1-u^s)^{n+\frac{t_0}{s}}\end{aligned}$$

et on achève la preuve en extrayant le coefficient de $[u^{\alpha_0+ks}]$ puis en renormalisant par le coefficient $\frac{n!}{t_0\cdots(t_0+(n-1)s)}$. □

3.2.2 Espérance, écart-type et moments

On applique maintenant une nouvelle fois la formule (2.13) pour retrouver espérance, variance et moments de la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires.

Corollaire 3.1 *La variable aléatoire donnant le nombre de boules noires d'une urne du modèle altruiste de Friedman, initialisée avec α_0 noires et β_0 blanches admet pour espérance*

$$E\left[X_n\right] = n\,\frac{s}{2} + \frac{t_0}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et pour écart-type

$$\sigma(X_n)^2 = n\,\frac{s^2}{12} + \frac{st_0}{12} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Preuve : Il suffit de dériver la fonction H deux fois et de faire des extractions de coefficient, selon la formule (2.13). □

En poussant un peu plus loin notre calcul, il est aisé d'obtenir des expressions asymptotiques pour les moments supérieurs. En fait, on constate alors que le moment d'ordre ℓ est toujours équivalent à la puissance ℓ du moment d'ordre 1. Un tel résultat n'apporte cependant pas une information suffisante en ce qui concerne la loi limite de la composition de l'urne. Pour l'obtenir, on doit considérer la variable normalisée $(X_n - sn/2)/\sqrt{n}$ et l'on doit alors utiliser des méthodes d'analyse de singularités pour poursuivre.

3.2.3 Loi limite locale

Cette partie a pour but de prouver que la composition de l'urne de Friedman a une distribution qui suit une loi limite gaussienne. Ce résultat a été prouvé pour la première fois par Freedman, comme cas particulier d'un théorème plus général concernant des urnes de matrices de replacement

$$\begin{bmatrix} a & s-a \\ s-a & a \end{bmatrix}.$$

Cet auteur utilise des méthodes de moments pour prouver une convergence en distribution et n'obtient donc pas d'information sur la vitesse de convergence. Les méthodes de la combinatoire analytique vont permettre de démontrer un résultat plus fort de convergence locale tout en précisant la vitesse de convergence.

Théorème 3.1 *Dans une urne initialisée avec α_0 noires et β_0 blanches, et dont l'évolution suit les règles de la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$, la variable aléatoire donnant le nombre de boules noires a une distribution limite gaussienne. Pour tout réel x tel que $\frac{ns}{2} + \alpha_0 + x\sqrt{\frac{n}{12}}$ soit un entier, on a*

$$\mathbb{P}\left(X_n = \frac{ns}{2} + \alpha_0 + x\sqrt{\frac{n}{12}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{n/12}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

et la majoration du terme d'erreur est uniforme pour x appartenant à $\mathbb{R}$.

Preuve : Pour simplifier la preuve, on considère dans un premier temps la variable aléatoire donnant le nombre de fois où une boule noire a été piochée. Notons Z_n cette variable. On note $p_n(u)$ sa série

génératrice de probabilité. Alors, de la relation $X_n = \alpha_0 + sZ_n$, on déduit que pour tout complexe u,

$$p_n(u) = \sum_k \mathbb{P}(Z_n = k)\, u^k = \frac{n!}{\frac{t_0}{s}\cdots\left(\frac{t_0}{s}+n-1\right)} \frac{1}{2i\pi} \oint e^{\alpha_0 z(1-u)/s} \left(\frac{1-u}{1-ue^{z(1-u)}}\right)^{t_0/s} \frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} \quad (3.6)$$

où pour tout complexe u, le contour d'intégration entoure l'origine $z = 0$ mais reste dans le domaine d'analycité de l'intégrande. En dérivant cette équation deux fois, puis en posant $u = 1$, on trouve rapidement que la variable Z_n a pour espérance et écart-type

$$\mu_n = \frac{n}{2} + \frac{\beta_0 - \alpha_0}{2s} + O\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \sigma_n = \frac{n}{12} + \frac{t_0}{12s} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Par ailleurs, on récupère la probabilité d'avoir pioché k fois une boule noire pendant les n premiers tirages en intégrant par rapport à u la fonction $p_n(u)/u^{k+1}$ le long d'un contour autour de $u = 0$,

$$\mathbb{P}(Z_n = k) = \frac{1}{2i\pi} \oint p_n(u) \frac{\mathrm{d}u}{u^{k+1}}. \quad (3.7)$$

Le théorème découle des preuves des trois remarques classiques de la méthode de col :

- (**1**) Pour tout complexe u, l'intégrande de l'équation (3.6) a une seule singularité dominante $\rho_0(u)$, les autres étant de module strictement plus grand (à l'exception du cas u réel négatif). Par conséquent, il est attendu que la fonction p_n satisfasse une hypothèse dite de grande puissance de la forme $p_n(u) \approx a(u)\rho_0(u)^{-n}$.
- (**2**) Lorsque l'entier k est de l'ordre de $n/2 + o(n)$, la fonction $u \mapsto \rho_0(u)^{-n}u^{-k}$ a un point col situé en $u = 1$ et on peut choisir un contour passant par cette valeur pour appliquer une méthode de Laplace et déterminer l'équivalent asymptotique de l'intégrale.
- (**3**) Pour ce faire, il faut remarquer que la série $p_n(u)$ est un polynôme en u à coefficients positifs et tous non nuls. Par conséquent, sur tout cercle de rayon R et de centre $u = 0$, le module de $p_n(u)$ est maximum uniquement en $u = R$. Dans de telles conditions, il est attendu que tout le poids de l'intégrale soit concentrée au voisinage de cette valeur et que le reste soit un terme exponentiellement petit. On peut alors faire une étude locale.

Les singularités de la fonction $z \mapsto \frac{1-u}{1-ue^{z(1-u)}}$ sont les complexes

$$\rho_\ell = -\frac{\ln u}{1-u} + \frac{2i\ell\pi}{1-u} \quad (3.8)$$

où le logarithme est pris égal à la valeur principale

$$u = re^{i\theta} \text{ avec } \theta \in]-\pi;\pi] \qquad \Longrightarrow \qquad \ln u = r + i\theta$$

de sorte que $\rho_0(u)$ soit celle de plus petit module. Considérons maintenant la fonction $u \mapsto \rho_0(u)^{-n}u^{-k}$. Pour tous entiers $1 \le k \le n$, cette fonction a un unique minimum sur l'axe réel positif donné par l'équation

$$\frac{u}{u-1} - \frac{1}{\ln u} = \frac{k}{n}. \quad (3.9)$$

Pour $k = n/2 + o(n)$, cette équation a une solution unique $u = 1$. On est donc amené pour montrer le théorème à considérer un contour d'intégration de rayon 1 dans l'équation (3.7). Les deux étapes suivantes consistent donc à montrer dans un premier qu'une partie de l'intégrale est un terme exponentiellement petit, puis appliquer une méthode de Laplace au voisinage de $u = 1$. On a pour ce faire à disposition les deux lemmes suivants.

Lemme 3.2 *Pour tout réel x strictement positif, la fonction $\theta \mapsto |\rho_0(xe^{i\theta})|$ est décroissante strictement sur $]-\pi;0]$ et croissante sur $[0;\pi]$. On peut aussi noter que $\rho_0(x)$ est un réel positif pour tout $x>0$ avec $\rho_0(1)=1$.*

Preuve du lemme: La fonction $\theta \mapsto |\rho_0(xe^{i\theta})|$ étant paire, il suffit de montrer qu'elle est strictement croissante sur $[0;\pi]$, en montrant par exemple que le carré de cette fonction est une application croissante sur $[0;\pi]$. On a pour cela

$$|\rho_0(xe^{i\theta})|^2 = \frac{\ln(x)^2+\theta^2}{1+x^2-2x\cos\theta}$$

donc

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(|\rho_0(xe^{i\theta})|^2\right) = \frac{2\left(\theta(1+x^2-2x\cos\theta)-x\sin\theta(\ln(x)^2+\theta^2)\right)}{(1+x^2-2x\cos\theta)^2}.$$

Notons $a_x(\theta)$ le numérateur de cette fraction. Alors $a_x(0)=0$ et

$$a'_x(\theta) = 2(1+x^2-(2x+x\ln(x)^2+x\theta^2)\cos\theta),$$

$$a''_x(\theta) = x((2+\theta^2)\sin\theta-2\theta\cos\theta)+x\theta^2\sin\theta.$$

La fonction $\theta\mapsto(2+\theta^2)\sin\theta-2\theta\cos\theta$ étant strictement positive sur l'intervalle $]0;\pi]$, la fonction a''_x est strictement positive sur ce même intervalle. La fonction a'_x est donc strictement croissante et comme $a'_x(0)=(1-x)^2-x\ln(x)^2$ est positif pour tout réel $x>0$, a'_x est strictement positive sur $]0;\pi]$. Finalement, comme $a_x(0)=0$, la fonction a_x est strictement positive sur $]0;\pi]$ ce qui assure que $\theta\mapsto|\rho_0(xe^{i\theta})|$ est strictement croissante sur l'intervalle $[0;\pi]$ et, par parité, strictement décroissante sur l'intervalle $[-\pi;0]$. □

> **Remarque:** On aurait pu se contenter ici de traiter le cas $x=1$ mais ce résultat plus général sera réutilisé pour trouver la fonction de grande déviation.

Muni de ce lemme, on peut maintenant montrer que la contribution de l'intégrale $\oint p_n(u)u^{-k}$ le long du cercle de rayon 1 est concentrée au voisinage du point $u=1$ (indépendamment de la croissance de k). Soit ϵ un « petit » réel strictement positif. On choisit un réel η quelconque appartenant à l'intervalle $\left]\left|\rho_0(e^{i\epsilon})\right|^{-1};1\right[$, puis dans la définition de $p_n(u)$ (équation (3.6)), on choisit pour contour le cercle de rayon $\eta\left|\rho_0(e^{i\epsilon})\right|$.

Pour tout complexe u de la forme $e^{i\theta}$ avec $|\theta|\in[\epsilon;\pi]$, les singularités de l'intégrande sont de module supérieur à $\rho_0(u)$, donc supérieur à $\left|\rho_0(re^{i\epsilon})\right|$. Le contour d'intégration est donc bien dans le domaine d'analyticité de l'intégrande. Par ailleurs, les complexes $\rho_\ell(u)$ sont à distance au moins $(1-\eta)\left|\rho_0(re^{i\epsilon})\right|$ du contour d'intégration. Cette minoration par un réel strictement positif assure qu'il est possible de majorer uniformément en z du contour et en u de la forme $e^{i\theta}$ avec $|\theta|\in[\epsilon;\pi]$ le terme $(1-u)/(1-ue^{z(1-u)})$ par une constante C. Au final, il vient la majoration

$$\left|e^{\alpha_0 z(1-u)/s}\left(\frac{1-u}{1-ue^{z(1-u)}}\right)^{t_0/s}\frac{1}{z^{n+1}}\right| \le e^{2\alpha_0|\rho_0(e^{i\epsilon})|/s}C^{t_0/s}\left(\eta\left|\rho_0(e^{i\epsilon})\right|\right)^{-(n+1)}.$$

On en déduit donc en faisant une majoration grossière dans l'équation (3.6) que $p_n(u)$ est majorée pour $u=e^{i\theta}$ avec $|\theta|\in[\epsilon;\pi]$ par un terme exponentiellement petit, indépendant de u. La contribution de l'intégrale le long du contour $\{|z|=1;|\arg(z)|\in[\epsilon;\pi]\}$ est ainsi pour tout ϵ strictement positif un terme négligeable devant l'équivalent attendu du théorème en $\Theta\left(n^{-1/2}\right)$ et son terme d'erreur.

Pour étudier la contribution de l'intégrale au voisinage de $u=1$, on a le lemme suivant.

Lemme 3.3 *Soit u_0 un élément de $\mathbb{C}\setminus]-\infty;0]$. Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de u_0 sur lequel p_n satisfait une propriété de quasi-puissance :*

$$\forall u\in\mathcal{V}\qquad p_n(u)=u^{-\alpha_0/s}\rho_0(u)^{-n-t_0/s}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \tag{3.10}$$

et la majoration du terme d'erreur est uniforme pour u appartenant à $\mathcal{V}$.

Preuve du lemme: On fait le changement de variable $z/\rho_0(u)\to z$ dans l'équation (3.6) afin de se ramener à une singularité principale localisée en $z=1$. Celle-ci s'écrit alors

$$p_n(u)=\frac{n!}{\frac{t_0}{s}\cdots\left(\frac{t_0}{s}+n-1\right)}\rho_0(u)^{-n-t_0/s}\frac{1}{2i\pi}\oint e^{-\alpha_0/s\, z\ln u}\left(\frac{g(-\ln u(1-z))}{1-z}\right)^{t_0/s}\frac{\mathrm{d}z}{z^{n+1}} \tag{3.11}$$

où la fonction g définie par $g(x)=x/(1-e^{-x})$ est méromorphe sur le plan complexe avec pour singularités les points $2ik\pi, k\in\mathbb{Z}^*$. La puissance fractionnaire incite alors à prendre comme contour d'intégration le contour de Hankel Γ de la figure 2.6, défini par les équations (2.37) avec cette fois $r_n=1+\frac{(\ln n)^2}{n}$. Lorsque u est dans un voisinage de u_0 suffisamment petit $\mathcal{V}$, on constate que, pour n assez grand, le complexe $-\ln u(1-z)$ est confiné, pour tout z du contour et tout u de $\mathcal{V}$, dans un compact de $\mathbb{C}\setminus\{2ik\pi,k\in\mathbb{Z}^*\}$, ce qui assure qu'il est à distance respectable des singularités de g. On peut donc supposer qu'il existe deux constantes C_1 et C_2 telles que

$$\forall u\in\mathcal{V},\quad \forall z\in\Gamma\qquad |z\ln u|\le C_1\quad\text{ et }\quad \big|g\left(-\ln u(1-z)\right)\big|\le C_2.$$

Ces hypothèses faites, on peut majorer la contribution du contour Γ_4. On a en effet, pour tout z de Γ_4 la majoration

$$\begin{aligned}\left|e^{-\frac{\alpha_0}{s}z\ln u}\left(\frac{g(-\ln u(1-z))}{1-z}\right)^{t_0/s}\frac{1}{z^{n+1}}\right| &\le e^{\alpha_0/sC_1}\left(\frac{nC_2}{(\ln n)^2}\right)^{t_0/s}\left(1+\frac{(\ln n)^2}{n}\right)^{-n-1}\\ &= e^{-(\ln n)^2+o\left((\ln n)^2\right)}\end{aligned}$$

La contribution de Γ_4 est donc un terme exponentiellement petit. Pour le reste de l'intégrale, on fait le changement de variable $z=1-\frac{t}{n}$. La quantité t/n restant au voisinage de 0 le long du contour, l'intégrande s'écrit alors

$$u^{-\frac{\alpha_0}{s}\left(1-\frac{t}{n}\right)}\left(\frac{n}{t}\right)^{t_0/s}g\left(\frac{-t\ln u}{n}\right)^{t_0/s}\left(1-\frac{t}{n}\right)^{-n-1}=n^{t_0/s}u^{-\alpha_0/s}t^{-t_0/s}e^t\left(1+\frac{g_1(t,u)}{n}+O\left(\frac{(\ln n)^4}{n^2}\right)\right)$$

avec $g_1(t,u)=\frac{t(t+1)}{2}-t\ln u\left(1+\frac{t_0}{2s}\right)$ et une majoration du reste uniforme en t et en u. On en déduit donc que

$$p_n(u)=\frac{n!n^{t_0/s-1}}{\frac{t_0}{s}\cdots\left(\frac{t_0}{s}+n-1\right)}u^{-\alpha_0/s}\rho_0(u)^{-n-t_0/s}\frac{1}{2i\pi}\int_{\Gamma'}t^{-t_0/s}e^t\mathrm{d}t\left(1+\frac{g_1(t,u)}{n}+O\left(\frac{(\ln n)^4}{n^2}\right)\right)$$

où Γ' est, comme dans la preuve du théorème 2.8 une boucle autour de l'axe réelle négatif à distance 1 de $-(\ln n)^2+i$ vers $-(\ln n)^2-i$. Quitte à rajouter des termes exponentiellement petits, on peut compléter le chemin d'intégration en une boucle infinie puis utiliser la formule de Hankel (lemme 2.2) et la formule de Stirling (proposition 2.5) pour conclure. □

En vertu de ce dernier lemme, on est donc ramené à évaluer l'équivalent asymptotique de l'intégrale

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} e^{-\alpha_0 i\theta/s}\rho_0(e^{i\theta})^{-n-t_0/s}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(\theta)e^{nf(\theta)}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta$$

où ϵ est un quelconque réel assez petit, avec $g(\theta) = e^{-\alpha_0 i\theta/s}\rho_0(e^{i\theta})^{-t_0/s}$ et $f(\theta) = \ln\rho_0(e^{i\theta})$. L'intégrande admettant un maximum global en 0, la méthode de Laplace est alors parfaitement adaptée pour obtenir l'équivalent asymptotique. Pour tout entier k de la forme $k = \frac{n}{2} + \frac{\beta_0-\alpha_0}{2s} + x\sqrt{\frac{n}{12}}$, on a

$$g(\theta)e^{nf(\theta)}e^{-ik\theta} = e^{-\frac{n\theta^2}{24} - ix\sqrt{\frac{n}{12}}\theta + O(\theta^2) + nO(\theta^4)}.$$

Quitte à choisir ϵ suffisamment petit, il existe par conséquent une constante telle que l'on aie

$$\left|\int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\leq|\theta|\leq\epsilon} e^{-\alpha_0 i\theta/s}\rho_0(e^{i\theta})^{-n-t_0/s}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta\right| \leq \int_{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\leq|\theta|\leq\epsilon} e^{-n\theta^2/48 + A\theta^2}\mathrm{d}\theta = O\left(e^{-(\ln n)^2}\right).$$

Pour le reste de l'intégrale, après le changement de variable $\theta\sqrt{n/12} \to \theta$, il vient de la même manière que dans le lemme 3.3 un développement de la forme

$$\int_{-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{-\alpha_0 i\theta/s}\rho_0(e^{i\theta})^{-n-t_0/s}e^{-ik\theta}\mathrm{d}\theta = \sqrt{\frac{12}{n}}\int_{-\ln n}^{\ln n} e^{-\theta^2/2 - ix\theta}\left(1 + \frac{a(\theta)}{n} + O\left(\frac{(\ln n)^4}{n^2}\right)\right)\mathrm{d}\theta.$$

avec $a(\theta) = -\theta^2/(12s) - \theta^4/240$ et où le terme d'erreur ne dépend pas de x et est uniforme en θ appartenant à $[-\ln n; \ln n]$. On peut alors développer ce produit pour obtenir une somme de trois intégrales. Quitte à rajouter les queues de chacune qui sont des termes négligeables devant $1/n$, on peut compléter les intégrales de $-\infty$ à $+\infty$. Le premier terme s'évalue alors en $\sqrt{12/n}e^{-x^2/2}$, le second se majore facilement en $O(1/n)$ indépendamment de x et le dernier est un terme d'erreur en $o(1/n)$. On a donc montré une convergence locale des probabilités de Z_n vers une loi limite gaussienne. Le résultat s'en déduit pour X_n grâce à la relation $X_n = \alpha_0 + sZ_n$. □

Comme pour les exemples précédents, on illustre la convergence en distribution par un graphe donnant les probabilités de l'urne de Friedman. L'exemple de la figure 3.4 est celui d'une urne pour laquelle $s = 1$, $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$. L'axe horizontal a été normalisé par n, l'axe vertical par $\sqrt{n}$. On retrouve bien le profil en cloche d'une gaussienne.

3.2.4 Probabilités de grandes déviations

On s'intéresse maintenant à la probabilité d'être très éloigné de la valeur moyenne soit d'avoir $s\alpha n$ boules dans l'urne avec $\alpha < 1/2$. On s'attend alors à avoir une probabilité exponentiellement faible et on recherche le lien existant entre l'ordre de décroissance exponentiel de cette probabilité et le coefficient α. Si cet ordre de décroissance s'exprime comme une fonction continue de α, cette fonction est appelée fonction de grande déviation. Celle de l'urne de Friedman est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.2 *Dans une urne initialisée avec α_0 noires et β_0 blanches, et dont l'évolution suit les règles de la matrice $\left[\begin{smallmatrix} 0 & s \\ s & 0 \end{smallmatrix}\right]$, on note Z_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois où une boule noire a été piochée au temps n. Pour tout α compris entre 0 et 1/2, on a l'équivalent*

$$\mathbb{P}(Z_n = \alpha n) = \frac{{x_\alpha}^{-\alpha_0/s}\rho_0(x_\alpha)^{-t_0/s}}{\sqrt{2\pi h(x_\alpha)\, n}}\left(\rho_0(x_\alpha){x_\alpha}^{\alpha}\right)^{-n}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

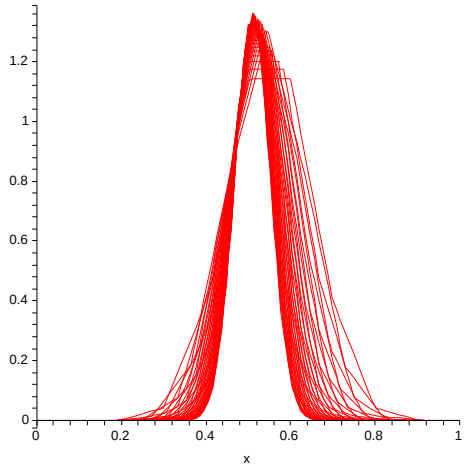


FIG. 3.4 – Graphe des probabilités $\mathbb{P}(X_n = k)$ pour $n = 10..50$.

où x_α est l'unique réel appartenant à $]0;1[$ satisfaisant l'équation

$$x_\alpha = g^{-1}(\alpha) \qquad avec \qquad g(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

et où les fonctions ρ_0 et h sont données par

$$\rho_0(x) = \frac{-\ln x}{1-x} \qquad et \qquad h(x) = \frac{x}{(1-x)^2} - \frac{1}{\ln(x)^2}.$$

En particulier pour tout réel $\alpha \in]0;1/2[$, la probabilité d'avoir αsn boules noires dans l'urne tend vers 0 à vitesse exponentielle.

Preuve : On reprend la méthode de col utilisée pour la preuve de la convergence locale des probabilités. L'équation (3.9) donnant le point col reste valide et pour $k = \alpha n$ avec α appartenant à $]0;1/2[$ détermine un unique réel x_α appartenant à l'intervalle $]0;1[$. On applique alors les mêmes méthodes que précédemment en intégrant la fonction p_n sur un cercle de rayon x_α.

De la même manière qu'auparavant, on fixe un réel ϵ strictement positif. On justifie à nouveau à l'aide du lemme 3.2 que la contribution de l'intégrale le long du contour $\{|z| = x_\alpha, |\arg(z)| \in [\epsilon;\pi]\}$ est un terme négligeable devant $(\rho_0(x_\alpha){x_\alpha}^\alpha)^{-n}$, en considérant un cercle de rayon strictement compris entre $\rho_0(x_\alpha)$ et $\left|\rho_0(x_\alpha e^{i\epsilon})\right|$ comme contour d'intégration dans l'équation (3.6). On est ainsi ramené à une étude locale. On utilise alors le lemme 3.3. Au voisinage du point x_α, l'intégrale s'écrit sous une forme de type Laplace

$$\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \left(x_\alpha e^{i\theta}\right)^{-\alpha n - \alpha_0/s} \rho_0\left(x_\alpha e^{i\theta}\right)^{-n-t_0/s} \mathrm{d}\theta = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} g(\theta) e^{nf(\theta)} \mathrm{d}\theta$$

avec cette fois $g(\theta) = \left(x_\alpha e^{i\theta}\right)^{-\alpha_0/s} \rho_0(x_\alpha e^{i\theta})^{-t_0/s}$ et $f(\theta) = -\ln \rho_0(x_\alpha e^{i\theta}) - \alpha \ln\left(x_\alpha e^{i\theta}\right)$. On a à nouveau un maximum global en 0 et on applique encore une fois une méthode de Laplace. Comme

précédemment, on montre que le terme $\int_{|\theta|\in[\ln n/\sqrt{n};\pi]} g(\theta)e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta$ est négligeable, et pour le reste, on fait le changement de variable $\theta\sqrt{n}\to\theta$ puis un développement en 0. Il vient ainsi

$$\int_{-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} g(\theta)e^{nf(\theta)}\mathrm{d}\theta = g(0)e^{nf(0)}\int_{-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}}^{\frac{\ln n}{\sqrt{n}}} e^{f''(0)\theta^2/2}\left(1+\frac{a_1(\theta)}{\sqrt{n}}+\frac{a_2(\theta)}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\mathrm{d}\theta$$

avec $a_1(\theta)=\frac{g'(0)}{g(0)}\theta+\frac{f^{(3)}(0)}{6}\theta^3$, a_2 étant de la même manière un polynôme en θ faisant intervenir les dérivées de f et g dans ses coefficients, la majoration du reste d'erreur étant pour finir, uniforme sur l'intervalle d'intégration. Le terme $\int_{-\ln n/\sqrt{n}}^{\ln n/\sqrt{n}} e^{f''(0)\theta^2/2}a_1(\theta)\mathrm{d}\theta$ est nul par imparité. Pour les deux autres, on peut encore compléter les intégrales qui s'évaluent alors en fonction des dérivées de f et g en 0 et donc de x_α. En particulier, on trouve

$$f''(0)=\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(-\ln\rho_0(x_\alpha e^{i\theta})\right)_{|\theta=0}=\frac{\rho_0''(x_\alpha)}{\rho_0(x_\alpha)}{x_\alpha}^2+\frac{\rho_0'(x_\alpha)}{\rho_0(x_\alpha)}x_\alpha-\left(\frac{\rho_0'(x_\alpha)}{\rho_0(x_\alpha)}x_\alpha\right)^2=h(x_\alpha)$$

ce qui achève la preuve. □

3.3 Probabilité de survie d'une équipe

On revient dans cette partie au problème du duel d'Ok Corral.

3.3.1 Série génératrice et probabilité de l'événement « S survivants »

Considérons donc une urne de composition initiale S boules noires dont les règles d'évolution sont les suivantes : à chaque instant, on pioche une boule, on la replace dans l'urne puis on ajoute une nouvelle boule de la couleur opposée. Les règles sont ainsi résumées par la matrice

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

L'étude de cette urne fut l'objet de la partie 3.2. En utilisant les résultats de cette partie, plus précisément la formule (3.5), on peut déterminer deux expressions pour la probabilité $\mathbb{P}_{\searrow}(m,n,S)$ associée au modèle de duel.

Théorème 3.3 (Nombre de survivants, formules exactes des probabilités) *La probabilité d'avoir S survivants dans le premier groupe lors d'un duel de Ok Corral entre deux groupes de m et n tireurs est donnée par les expressions*

$$\mathbb{P}_{\searrow}(m,n,S) = \frac{S!}{(m+n)!}\sum_{k=S}^{m}(-1)^{m-k}\binom{k-1}{S-1}\binom{m+n}{n+k}k^{m+n-S} \tag{3.12}$$

$$= \frac{S!}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{k+S-1}{k}\binom{m+n}{m+k}k^{m+n-S}. \tag{3.13}$$

> **Remarque:** On peut noter que le coefficient binomial $\binom{k-1}{S-1}$ peut s'écrire à une constante près comme le polynôme de la variable k, $(k-1)(k-2)\cdots(k-S+1)$ qui est nul pour $k\in[\![1;S-1]\!]$. La somme peut ainsi être étendue pour k allant de 1 à m.

Preuve : Dans un premier temps, on applique la formule (3.5) avec les valeurs

$$s \leftarrow 1 \quad ; \quad \alpha_0, t_0 \leftarrow S \quad ; \quad k \leftarrow m - S \quad ; \quad n \leftarrow m + n - S.$$

La formule devient alors

$$\mathbb{P}_{\nearrow}(m,n,S) = \frac{1}{S \cdots (m+n-1)} \sum_{i=0}^{m-k} \binom{i+S-1}{i} \binom{-n-S-i-1}{m-S-i} (S+i)^{m+n-S}.$$

Le second coefficient binomial s'évalue alors de la façon suivante

$$\binom{-n-S-i-1}{m-S-i} = \frac{(-n-S-i-1)\cdots(-n-m)}{(m-S-i)!} = (-1)^{m-S-i}\binom{n+m}{m-S-i}.$$

On achève la preuve de la première formule en faisant le changement de variable $k = S + i$, puis en utilisant la relation (3.2). La seconde relation, bien qu'elle ressemble beaucoup à la première ne semble pas accessible par des manipulations symboliques élémentaires. Pour la prouver, on introduit la fraction rationnelle suivante

$$F_{m,n,S}(z) = \frac{z^{m+n-S}(z-1)\cdots(z-S+1)}{(z-m)(z-m+1)\cdots(z+n-1)(z+n)}.$$

Il est clair que cette fraction rationnelle n'a que des pôles simples, qui sont les entiers relatifs

$$\{-n, -n+1, \ldots, -1\} \quad \text{et} \quad \{S, \ldots, m\}.$$

Par ailleurs, on vérifie facilement que pour tout entier k compris entre S et m, le résidu de F en k est donné par

$$\frac{k^{m+n-S}(k-1)\cdots(k-S+1)}{(k-m)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 2\cdots(k+n)} = (-1)^{m-k}\frac{(S-1)!}{(m+n)!}\binom{k-1}{S-1}\binom{m+n}{n+k}k^{m+n-S}.$$

La fraction F a bien entendu été choisie pour vérifier cette propriété. Par conséquent, si l'on note Res le résidu, il vient

$$(m+n)\,\mathbb{P}_{\nearrow}(m,n,S) = \sum_{k=S}^{m} \mathrm{Res}\left(F_{m,n,S}(z)\right)_{z=k}$$

Considérons maintenant l'intégrale de $F_{m,n,S}$ le long d'un cercle de rayon R centré en l'origine. Pour R assez grand, le cercle englobe tous les pôles de cette fonction, et le théorème des résidus assure que l'intégrale le long du cercle est égale à la somme des résidus de chacun des pôles. Mais d'autre part, comme la fraction est de degré -2, une majoration grossière montre que l'intégrale tend vers 0 quand le rayon tend vers l'infini. La somme des résidus de F est donc nulle, et ainsi, on a également

$$(m+n)\,\mathbb{P}_{\nearrow}(m,n,S) = -\sum_{k=-n}^{-1} \mathrm{Res}\left(F_{m,n,S}(z)\right)_{z=k}.$$

On obtient ainsi la seconde expression (3.13) une fois que l'on a explicité les résidus de F aux entiers négatifs et après utilisation de la relation (3.2). □

En utilisant ces deux formules, on retrouve ainsi bien les probabilités de l'exemple de la figure 3.1.1 à savoir

$$\mathbb{P}_{\searrow}(3,2,3) = \frac{9}{20} \qquad \mathbb{P}_{\searrow}(3,2,2) = \frac{7}{30} \qquad \mathbb{P}_{\searrow}(3,2,1) = \frac{11}{120}$$

pour les probabilités d'avoir 1, 2 ou 3 survivants dans le premier groupe, et par symétrie

$$\mathbb{P}_{\searrow}(2,3,2) = \frac{11}{120} \qquad \mathbb{P}_{\searrow}(2,3,1) = \frac{2}{15}$$

pour les probabilités d'avoir 1 ou 2 survivants dans le second groupe.

3.3.2 Probabilité de survie d'une équipe et nombres eulériens

On s'intéresse dorénavant à la probabilité de survie du premier groupe, dans un duel à Ok Corral entre m et n tireurs. Clairement, la probabilité

$$\mathbb{P}_1(m,n) = \sum_{S=1}^{m} \mathbb{P}_{\searrow}(m,n,S)$$

est proche de 0 lorsque $m \ll n$, devient exactement $1/2$ quand $m = n$ puis est proche de 1 lorsque $m \gg n$. Dans ce paragraphe, on se propose de montrer le lien entre cette probabilité et les nombres eulériens, qui sont des nombres très classiques en combinatoire, connus pour compter le nombre de montées dans les permutations. Pour les définitions et les propriétés de ces nombres, on se réfère à Comtet [Com74].

Définition 3.1 *Pour une permutation $\sigma = \sigma_1 \cdots \sigma_n$, une montée est un indice i compris entre 1 et $n-1$ tel que $\sigma_i \leq \sigma_{i+1}$. Le nombre eulérien $A_{n,k}$ est le nombre de permutation de taille n ayant $k-1$ montées.*

Proposition 3.2 *La série génératrice bivariée des nombres eulériens est donnée par*

$$A(z,u) = 1 + \sum_{1 \leq k \leq n} A_{n,k} u^k \frac{z^n}{n!} = \frac{1-u}{1-ue^{z(1-u)}} \tag{3.14}$$

et un développement en série similaire à celui de la formule 3.5 donne

$$A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{n+1}{i} (k-i)^n. \tag{3.15}$$

Notre résultat est alors le suivant :

Théorème 3.4 (probabilité de survie) *On considère deux groupes de m et n tireurs qui s'affrontent selon les règles d'un duel à Ok Corral. La probabilité de survie du premier groupe lors d'un duel de Ok Corral est donnée par les expressions*

$$\mathbb{P}_1(m,n) = \frac{1}{(m+n)!} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m+n}{n+k} k^{m+n} \tag{3.16}$$

$$= \frac{1}{(m+n)!} \sum_{k=1}^{m} A_{m+n,k}. \tag{3.17}$$

En particulier, elle est égale à la probabilité pour une permutation aléatoire de taille $m+n$ d'avoir au plus m montées.

Preuve : En sommant pour S allant de 1 à m les probabilités (3.12), il vient

$$\mathbb{P}_1(m,n) = \frac{1}{(m+n)!} \sum_{k=1}^{m} (-1)^{m-k} \binom{m+n}{n+k} k^{m+n} \left(\sum_{S=1}^{k} \binom{k-1}{S-1} S! k^{-S} \right).$$

La formule (3.16) découle alors de l'identité valable pour tout entier k :

$$\sum_{S=1}^{k} \binom{k-1}{S-1} S! k^{-S} = 1. \tag{3.18}$$

Pour la prouver, on définit la famille de polynômes

$$V_k(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,(1+xt)^{k-1}\; x\,t\,\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} x^{i+1}(i+1)!.$$

L'équation (3.18) est alors équivalente à $V_k(1/k) = 1$ ce qui se vérifie aisément en remarquant que

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-e^{-t}\left(1+\frac{t}{k}\right)^k\right) = e^{-t}\left(1+\frac{t}{k}\right)^{k-1}\frac{t}{k}.$$

Pour montrer la seconde formule, on calcule les sommes partielles des nombres eulériens grâce à une extraction de coefficient. En effet, on a

$$[u^m z^{m+n}]\frac{1}{1-ue^{z(1-u)}} = [u^m z^{m+n}]\frac{1}{1-u}A(z,u) = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m} A_{m+n,k}.$$

L'extraction de coefficient est similaire à celle utilisée pour obtenir la formule (3.5) et il vient alors cette fois

$$\frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m} A_{m+n,k} = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{n+k}k^{m+n}.$$

On en déduit donc la relation (3.17) en comparant cette dernière inégalité à la relation (3.16). □

3.3.3 Fenêtre de transition de Ok Corral

Les nombres eulériens ont été très longuement étudiés, du fait de leurs interventions fréquentes en probabilité, statistiques, combinatoire et calcul des différences finies. En particulier, on sait depuis plusieurs décennies que la famille de distributions

$$\left(\frac{A_{n,k}}{n!}\right)_{k=1}^{n}$$

a une limite gaussienne de moyenne $(n+1)/2$ et d'écart-type $\sqrt{(n+1)/12}$. Ce résultat découle par ailleurs immédiatement du théorème 3.1, en considérant le cas particulier $s = \alpha_0 = t_0 = 1$.

Étant donné la distribution limite gaussienne des nombres eulériens, le théorème 3.4 a pour conséquence immédiate le résultat suivant : *si m et n tendent vers l'infini de sorte que $(m-n)/\sqrt{m+n}$ converge vers un réel θ, alors*

$$\mathbb{P}_1(m,n) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\theta\sqrt{3}} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t.$$

C'est justement le résultat du théorème 3 de l'article de Kingman [Kin99]. Cependant, les arguments de Kingman ne permettent pas de quantifier précisément le terme d'erreur, ce qui est dorénavant possible, étant donné l'expression très précise de la probabilité $\mathbb{P}_1(m,n)$.

Pour parvenir à nos fins, on utilise une expression intégrale des nombres eulériens de la forme suivante :

Lemme 3.4 (Nicolas [Nic92]) *Pour tous entiers p et q tels que $1 \le p \le q$, le nombre eulérien $A_{q,p}$ est donné par l'expression intégrale*

$$A_{q,p} = q!\;\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{q+1}\cos\left(q+1-2p\right)t\;\,dt. \tag{3.19}$$

La preuve de Nicolas utilise les propriétés de récurrence des nombres eulériens. Il montre que ses expressions intégrales les vérifient également ainsi que des conditions initiales identiques. Ce lemme permet alors à l'aide de méthodes d'analyse asymptotique de déterminer de façon très précise la transition de phase dans les duels à peu près équilibrés

Théorème 3.5 *On considère deux groupes M et N de tireurs, de cardinalités respectives m et n. À chaque instant, un tireur choisi au hasard parmi ceux encore en vie tue un membre de l'équipe adverse. Notons $\mathbb{P}_1(m,n)$ la probabilité de survie de l'équipe 1. Alors on a l'équivalent asymptotique*

$$\mathbb{P}_1(m,n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{m-n}{\sqrt{m+n}}\sqrt{3}} e^{-t^2/2} dt + O\left(\frac{1}{n}\right), \tag{3.20}$$

le terme d'erreur étant optimal. En particulier, il y a transition de phase au voisinage de la valeur $m/n = 1$ puisque la probabilité de survie passe abruptement de la valeur 0 à la valeur 1.

Preuve : En sommant l'expression de Nicolas (3.19) pour $q = m+n$ et p allant de 1 à m, on trouve alors

$$\begin{aligned}\frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m} A_{m+n,k} &= \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+n+1} \frac{\cos nt \sin mt}{\sin t} \mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^{m+n+1} \left(\frac{\sin(m+n)t}{\sin t} + \frac{\sin(m-n)t}{\sin t}\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

On est donc ramené à l'étude d'intégrales de la forme

$$I(a,b) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t}. \tag{3.21}$$

Il est clair que cette intégrale est absolument convergente pour tous entiers a et b supérieurs à 1, et que sa valeur est comprise entre 0 et $\pi/2$. On va chercher la limite de ces intégrales quand a et b tendent vers l'infini. Le théorème découle alors du résultat crucial suivant

Lemme 3.5 *Les intégrales $I(a,b)$ admettent l'équivalent asymptotique lorsque a tend vers l'infini*

$$I(a,b) = \sqrt{\pi}\int_0^{\frac{b}{\sqrt{a}}\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-t^2}\, dt + O\left(\frac{1}{a}\right) \tag{3.22}$$

En particulier, si $b = o(\sqrt{a})$, l'intégrale converge vers 0, si $\sqrt{a} = o(b)$, l'intégrale converge vers $\pi/2$ et si $b \sim x\sqrt{a}$, l'intégrale converge vers une valeur comprise entre 0 et $\pi/2$.

Preuve du lemme: La preuve utilise la méthode de Laplace pour les équivalents d'intégrales d'une fonction à une grande puissance. Dans un premier temps, on a la majoration

$$\left|\int_\pi^\infty \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \int_\pi^\infty \frac{1}{t^{a+1}}\mathrm{d}t = \frac{1}{a\pi^a}$$

Cette majoration assure donc que

$$I(a,b) = \int_0^\pi \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t} + o\left(\frac{1}{a^p}\right)$$

pour tout entier p. Maintenant, sur l'intervalle $[0;\pi]$, la fonction $\sin(t)/t$ est positive et décroissante et on a le développement en série à l'origine

$$\ln\left(\frac{\sin t}{t}\right) = -\frac{t^2}{6} - \frac{t^4}{180} + O\left(t^6\right).$$

Il existe donc une constante A telle que pour a assez grand, il y ait la majoration

$$\left|\int_{\frac{\ln a}{\sqrt{a}}}^{\pi} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \pi\frac{\sqrt{a}}{\ln a} e^{-(\ln a)^2/6 + A(\ln a)^4/a} = o\left(\frac{1}{a^p}\right)$$

pour tout entier p. On est donc ramené à une étude au voisinage de l'origine et on a alors

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\ln a}{\sqrt{a}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t} &= \int_0^{\frac{\ln a}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{at^2}{6} - \frac{at^4}{180} + O\left(at^6\right)} \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t} \\ &= \left(\int_0^{\frac{\ln a}{\sqrt{a}}} e^{-\frac{at^2}{6}} \left(1 + a\frac{t^4}{180} + O\left(at^6\right)\right) \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right).\end{aligned}$$

Il suffit alors de faire le changement de variable $t \leftarrow t/\sqrt{a}$. On obtient alors deux intégrales convergentes, plus un terme d'erreur

$$\int_0^{\frac{\ln a}{\sqrt{a}}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^a \sin bt \ \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int_0^{\ln a} e^{-\frac{t^2}{6}} \sin\frac{bt}{\sqrt{a}} \ \frac{\mathrm{d}t}{t} + \frac{1}{180a}\left(\int_0^{\ln a} t^3 e^{-\frac{t^2}{6}} \sin\frac{bt}{\sqrt{a}} \ \mathrm{d}t\right) + O\left(\frac{(\ln a)^5}{a^{3/2}}\right).$$

Le reste de la première est majoré de la façon suivante, pour a assez grand :

$$\left|\int_{\ln a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{6}} \sin(b/\sqrt{a}t) \ \frac{\mathrm{d}t}{t}\right| \leq \frac{1}{\ln a}\int_{\ln a}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{6}} \leq \frac{1}{\ln a}\int_{\ln a}^{\infty} te^{-\frac{t^2}{6}} = 3\frac{1}{\ln a}e^{-(\ln a)^2/6} = o\left(\frac{1}{a^p}\right) \quad \forall p \in \mathbb{N}.$$

Le reste de la deuxième se majore de la même façon avec une intégration par parties. Ce deuxième terme assure ainsi que le terme d'erreur en $O\left(1/a\right)$ est optimum. Notons maintenant F la fonction définie par l'intégrale à paramètres

$$F(x) = \int_0^{\infty} e^{-t^2/6} \sin(xt)\frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/6} \sin(xt)\frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

Il est clair que cette fonction est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et on a

$$F'(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/6}\cos(xt)\mathrm{d}t = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2-6ixt}{6}}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2+6ixt}{6}}\mathrm{d}t\right).$$

Une simple factorisation et un changement de variable assure alors que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2-6ixt}{6}}\mathrm{d}t = e^{-\frac{3}{2}x^2}\int_{3ix-\infty}^{3ix+\infty} e^{-t^2/6}\mathrm{d}t = \sqrt{6\pi}\, e^{-\frac{3}{2}x^2}$$

et la deuxième intégrale s'évalue de la même façon. La fonction F est donc une fonction d'erreur et les conditions limites imposent alors

$$F(x) = \frac{\sqrt{6\pi}}{2}\int_0^x e^{-\frac{3}{2}t^2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}\int_0^{x\sqrt{\frac{3}{2}}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$$

ce qui achève la preuve du lemme et donc du théorème. □

On peut noter que les majorations des termes d'erreurs dans les démonstrations classiques du théorème central limite sont généralement de l'ordre de $O\left(1/\sqrt{n}\right)$. Le terme en $O\left(1/n\right)$ est donc plus intéressant. Le tableau suivant présente quelques vérifications pour différentes valeurs des paramètres m et n avec $n = m + \sqrt{m}$.

(m, n)	$\mathbb{P}_1(m, n)$	$\mathbb{P}_\infty =$ Approximation (3.20)	$m(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_\infty)$
$100, 110$	0.11608	0.1159	$8.75 \cdot 10^{-3}$
$400, 420$	0.11321	0.11319	$8.70 \cdot 10^{-3}$
$1600, 1640$	0.11177	0.11177	$8.68 \cdot 10^{-3}$

La figure 3.5 illustre la transition de phase de Ok Corral.

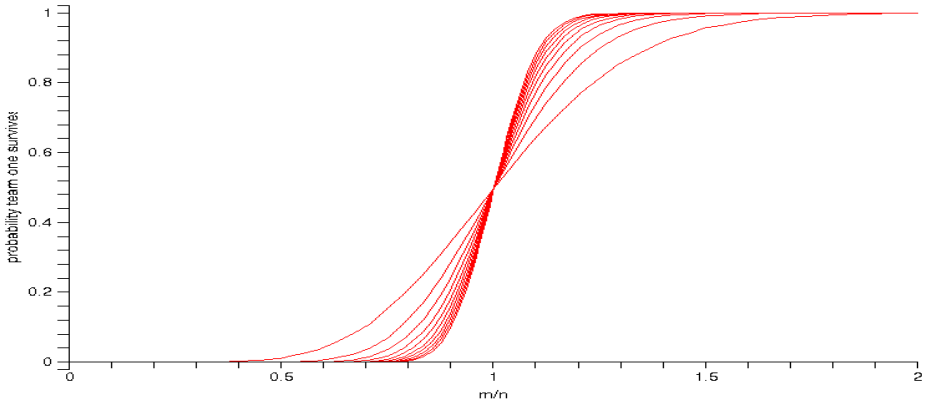


FIG. 3.5 – Probabilité de survie des Earps ($m = 10, 20, \ldots, 100$).

3.3.4 Probabilités de survie lors de duels déséquilibrés

Dans le cas où l'on s'éloigne de manière significative de la fenêtre de transition, le terme d'erreur en $O\left(1/n\right)$ n'est que grossièrement indicatif de la probabilité réelle de survie d'une équipe. En effet, dès que les équipes ne sont plus en proportions à peu près égales, on attend une convergence bien plus rapide vers 0 où vers 1 de cette probabilité.

On s'intéresse donc cette fois à la probabilité de survie de l'équipe 1, lorsqu'elle est en infériorité numérique significative soit $m = \alpha n$ avec $\alpha < 1$.

Théorème 3.6 *La probabilité de survie de la première équipe dans un duel satisfait la propriété suivante. Pour tout α compris entre 0 et 1, on a l'équivalent*

$$\mathbb{P}_1\left(\alpha n, n\right) = \frac{\left(x_\alpha \rho_0(x_\alpha)\right)^{-1}}{(1 - x_\alpha)\sqrt{2\pi h(x_\alpha)\, n}} \left({x_\alpha}^\alpha \rho_0(x_\alpha)\right)^{-n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{3.23}$$

le réel x_α étant défini implicitement par l'équation

$$x_\alpha = g^{-1}\left(\frac{\alpha}{1+\alpha}\right) \qquad \textit{avec} \qquad g(x) = \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x}$$

et les fonctions ρ_0 et h étant celles du théorème 3.2.

En particulier pour tout réel $\alpha \in]0;1[$ la probabilité de survie tend vers 0 à vitesse exponentielle.

Preuve : La preuve est quasi-identique à celle du théorème 3.2. La probabilité de survie du premier groupe est donnée par

$$\mathbb{P}_1(\alpha n, n) = [z^{m+n}u^m]\frac{1}{1-ue^{z(1-u)}} = \frac{1}{2i\pi}\oint \frac{1}{1-u}p_{m+n}(u)\frac{\mathrm{d}u}{u^{m+1}}$$

où p_{m+n} est la série génératrice des probabilités au temps $m+n$ d'une urne de Friedman de composition $\alpha_0 = t_0 = 1$ dans le cas $s = 1$. Lorsque $m = \alpha n$ avec $\alpha < 1$, le point col x_α est situé strictement entre 0 et 1 et la fonction $u \mapsto 1/(1-u)$ se comporte comme la constante $1/(1-x_\alpha)$ au voisinage de ce point. On peut donc appliquer la même méthode de col. L'équivalent asymptotique est alors seulement modifié par la valeur de cette constante.

□

Il serait envisageable d'obtenir une majoration uniforme pour tout α appartenant à un intervalle de la forme $[\epsilon; 1-\epsilon]$ où ϵ est un réel positif mais le travail serait alors bien plus délicat. Dans le tableau ci-dessous, on compare, pour $n = 1000$ la valeur exacte de la probabilité de survie $\mathbb{P}_1(m,n)$ à l'équivalent asymptotique donné par la formule (3.23), ainsi que la valeur exacte du logarithme de cette probabilité à leurs limites données par le théorème 3.6.

α	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9
$\mathbb{P}_1(\alpha n, n)$	$1.839 \cdot 10^{-670}$	$1.440 \cdot 10^{-274}$	$6.262 \cdot 10^{-115}$	$4.844 \cdot 10^{-37}$	$3.159 \cdot 10^{-5}$
limite théorique	$1.839 \cdot 10^{-670}$	$1.414 \cdot 10^{-274}$	$5.542 \cdot 10^{-115}$	$3.217 \cdot 10^{-37}$	$1.008 \cdot 10^{-5}$
$\frac{1}{n}\ln \mathbb{P}_1(\alpha n, n)$	-1.5421	-0.6305	-0.2629	-0.0836	-0.0102
limite théorique	-1.5377	-0.6262	-0.2589	-0.0801	0.0079

3.4 Moments et loi limite du nombre de survivants

Dans cette dernière partie, on s'intéresse maintenant aux moments de la variable aléatoire donnant le nombre de survivants du premier groupe. On notera S cette variable pour rester conforme aux notations précédentes. La variable aléatoire donnant le nombre de survivants du second groupe, notée S' ne sera pas étudiée. Ses moments se déduisent de nos formules en inversant les rôles de m et n.

À l'aide de récurrences, Kingman a trouvé une famille de polynômes $(P_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ telle que P_ℓ soit de degré 4ℓ et telle que $E(P_\ell(S+S'))$ s'évalue comme un polynôme de degré 3ℓ en m et n. Ainsi il a pu obtenir la convergence en distribution de S vers une loi gamma de paramètre 1/2. La méthode de Kingman fonctionne ainsi « à l'envers » en quelque sorte. À la base de son raisonnement, il suppose que certains moments s'expriment comme un polynôme et trouve une famille qui convient.

Par le théorème 3.3, nous disposons d'une formule exacte des probabilités du modèle par une expression qui ne fait intervenir qu'une simple somme alternée. Nous pouvons donc dans un premier temps directement exprimer tous les moments à l'aide d'une double somme, alors que Kingman n'a des expressions que pour certains d'entre eux. De plus, il obtient les moments du nombre de survivants *dans les deux groupes* et n'a pas de formule pour chacun des groupes pris séparément.

Le but de cette partie est de simplifier cette double somme, afin d'obtenir les expressions les plus simples possibles de tous les moments. Notre étude révèle que chacun d'entre eux s'exprime sous la forme d'une somme alternée proche de l'expression des probabilités de survie 3.16. La formule générale fait intervenir la fonction Q de Ramanujan, ainsi que deux familles de polynômes, dont on

donne les séries génératrices bivariées qui s'expriment simplement en fonction de celle des nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce (théorème 3.7).

La formule générale ne se prêtant pas aisément à une analyse asymptotique, nous extrayons deux familles de moments « utiles », d'ordre pair. Ces moments s'expriment dans un cas comme une somme simple qui généralise l'expression 3.16, puis dans l'autre cas comme le coefficient d'une série génératrice bivariée très proche de celle des nombres eulériens. Nous retrouvons alors l'équivalent asymptotique de ces moments donné par Kingman dans les deux cas duels équilibré / déséquilibré, par une nouvelle preuve fondée sur l'analyse de singularités.

Pour finir, dans le cas particulier $m = n$, nous retrouvons le résultat de Kingman disant que certains moments s'expriment comme un polynôme en n.

3.4.1 Expressions exactes des moments du nombre de survivants

Soit P un polynôme. En vertu de l'expression exacte de la probabilité d'avoir S survivants dans le premier groupe donnée par l'équation (3.12), l'espérance de $P(S)$ est alors donnée par

$$E\left[P(S)\right] = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n}\left(\sum_{S=1}^{k}\binom{k-1}{S-1}P(S)S!k^{-S}\right). \tag{3.24}$$

On a vu précédemment que lorsque $P(X) = 1$, il se produit la factorisation « miracle » :

$$\sum_{S=1}^{k}\binom{k-1}{S-1}S!k^{-S} = 1.$$

Ce qui nous intéresse, c'est d'avoir des factorisations similaires pour les expressions

$$\sum_{S=1}^{k}\binom{k-1}{s-1}P(S)S!k^{-S} \tag{3.25}$$

où P est un polynôme quelconque où plus simplement pour $P(X) = X^{\ell}$. L'étude de ces sommes amène au théorème suivant :

Théorème 3.7 (Expressions générale des moments) *Soient F et G les fonctions définies par*

$$F(z,u) = e^{u\left(e^{-z}+z-1\right)} \quad \text{et} \quad G(z,u) = e^{u\left(e^{-z}+z-1\right)}\int_0^z ue^{-t}e^{-u\left(e^{-t}+t-1\right)}dt. \tag{3.26}$$

et l'on note $f_n(u) = [z^n]F(z,u)$ et $g_n(u) = [z^n]G(z,u)$. La fonction Q de Ramanujan est définie par

$$Q(k) = 1 + \frac{k}{k} + \frac{k(k-1)}{k^2} + \cdots + \frac{k!}{k^k}.$$

On considère un duel de type Ok Corral entre deux groupes de m et n tireurs. Soit S la variable aléatoire donnant le nombre de survivants dans le premier groupe à la fin du duel. Pour tout entier ℓ, les moments de la variable S sont donnés par l'expression suivante :

$$E(S^{\ell}) = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n-1}\big(f_{\ell+1}(k)Q(k) + g_{\ell+1}(k)\big). \tag{3.27}$$

Le polynôme f_n est de degré $\lfloor n/2\rfloor$ et g_n est de degré $\lfloor (n+1)/2\rfloor$. Le coefficient dominant de $f_{2\ell}$ est égal à $(2\ell-1)(2\ell-3)\cdots 3$ et le coefficient dominant de $g_{2\ell+1}$ est donné par $2\ell(2\ell-2)\cdots 2$.

Preuve : On reconsidère la famille de polynômes $(V_k)_{k\in\mathbb{N}}$ introduite dans le paragraphe précédent et on introduit par ailleurs une nouvelle suite $(W_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Ces deux familles sont définies de la manière suivante :

$$W_k(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,(1+xt)^k\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad V_k(x) = \int_0^\infty e^{-t}\,(1+xt)^{k-1}\,x\,t\;\mathrm{d}t. \tag{3.28}$$

On sait que V_k et W_k sont des polynômes en x et que V_k s'exprime également, en développant le produit, sous la forme

$$V_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \binom{k-1}{i-1} i! x^i.$$

De cette propriété, il est facile d'en déduire que les sommes qui nous intéressent (équation 3.25) s'expriment en fonction du polynôme V_k de la manière suivante :

$$\sum_{S=1}^{k} \binom{k-1}{S-1} S^\ell\, S! k^{-S} = \left[(\theta_x)^\ell V_k(x)\right]_{|\frac{1}{k}} \tag{3.29}$$

où $\theta_x = x\,\partial_x$. Une simple intégration par parties donne les relations suivantes :

$$W_k' = \left(\frac{k}{x} - \frac{1}{x^2}\right) W_k + \frac{1}{x^2}, \tag{3.30}$$

$$V_k' = \frac{1}{x} W_k + \left(\frac{k-1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) V_k. \tag{3.31}$$

De ces relations, en procédant par dérivations successives des deux identités (3.30) et (3.31), il est clair qu'il est possible, pour tout entier ℓ, d'exprimer $V_k^{(\ell)}(1/k)$ et $W_k^{(\ell)}(1/k)$ en fonction de $W_k(1/k) = Q(k)$ et $V_k(1/k) = 1$. Par conséquent, on peut faire de même pour $\left[(\theta_x)^\ell V_k\right](1/k)$.

Maintenant pour tout fonction f et g, il est clair que $\theta_x(f\cdot g) = (\theta_x f)\cdot g + f\cdot(\theta_x)g$. Par ailleurs, si $f(x) = -1/x$ alors clairement $\theta_x\, f = -f$. En notant

$$v_\ell(k) = \left[(\theta_x)^\ell V_k\right](1/k) \quad \text{et} \quad w_\ell(k) = \left[(\theta_x)^\ell W_k\right](1/k) \tag{3.32}$$

puis en appliquant l'opérateur $(\theta_x)^\ell$ aux équations (3.30) et (3.31), les propriétés citées permettent de trouver deux formules de récurrences :

$$w_0(k) = Q(k) \qquad v_0(k) = 1 \qquad w_1(k) = k \qquad v_1(k) = Q(k) - 1$$

et pour tout entier ℓ supérieur ou égal à 1

$$w_{\ell+1}(k) = k\left[(-1)^\ell + \sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^{\ell+1-i} \binom{\ell}{i} w_i(k)\right],$$

$$v_{\ell+1}(k) = w_\ell(k) - v_\ell(k) + k\left[\sum_{i=0}^{\ell-1} (-1)^{\ell+1-i} \binom{\ell}{i} v_i(k)\right].$$

Ces deux récurrences se traduisent immédiatement par des équations différentielles sur les séries génératrices exponentielles bivariées. En introduisant les deux fonctions

$$V(z,u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n(u)\frac{z^n}{n!} \quad \text{et} \quad W(z,u) = \sum_{n\in\mathbb{N}} w_n(u)\frac{z^n}{n!}, \tag{3.33}$$

les formules de récurrences se traduisent par les équations

$$\frac{\partial W}{\partial z} + u\left(e^{-z}-1\right)W = ue^{-z} \quad \text{et} \quad \frac{\partial V}{\partial z} + \left(u\left(e^{-z}-1\right)+1\right)V = W$$

avec conditions initiales $V(0)=1$ et $W(0)=Q(u)$. La résolution de la première équation se fait à l'aide de la méthode de variation de constante. On trouve alors

$$W(z,u) = Q(u)F(z,u) + G(z,u)$$

où F et G sont les fonctions définies par les équations (3.26). Pour la seconde, il suffit de remarquer que la fonction $\frac{1}{u}\frac{\partial W}{\partial z}$ est une solution qui vérifie les conditions initiales imposées et donc que V est égale à cette fonction. On en déduit alors la proposition en vertu des définitions (3.33) et (3.32) et de la relation (3.29). Les propriétés concernant les coefficients dominants se déduisent aisément des formules de récurrence. □

> **Remarque:** La série génératrice bivariée $F(-z,u)$ est la série génératrice bivariée des nombres de Stirling 2-associés de deuxième espèce (voir Comtet [Com74]). Elle énumère les partitions d'ensemble qui ne contiennent pas de parties à un élément, la variable z codant le cardinal de l'ensemble partitionné et u codant le nombre d'éléments de la partition.
>
> Il est clair qu'une telle partition d'un ensemble de n éléments a au plus $\lfloor n/2 \rfloor$ éléments et que le nombre de façons de le partitionner en $\lfloor n/2 \rfloor$ sous-ensembles est donné si n est pair avec $n=2p$ par
>
> $$\frac{1}{p!}\binom{2p}{2}\binom{2p-2}{2}\cdots\binom{2}{2} = (2p-1)(2p-3)\cdots 3.$$

La suite $(Q(k))_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite célèbre de Ramanujan, qui joue notamment un rôle central dans l'analyse du hachage à essai linéaire. Un article de Flajolet et al. lui est dédiée [FGKP95]. Son terme général ne s'exprime pas sous une forme close, mais l'expression intégrale donnée par $W_k(1/k)$ permet à l'aide d'une méthode de Laplace, de déterminer un équivalent asymptotique à tout ordre, dont les premiers termes sont

$$Q(k) = \sqrt{\frac{\pi k}{2}} + \frac{2}{3} + \frac{1}{12}\sqrt{\frac{\pi}{2k}} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Un développement asymptotique ne nous est d'aucune utilité pour une somme dont les signes sont alternés. Il est donc difficile d'obtenir l'asymptotique de tous les moments de la variable aléatoire S par cette voie. En revanche, en effectuant des combinaisons linéaires judicieusement choisies, il vient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2 (Expressions par somme de moments « utiles ») *Il existe une famille de polynômes unitaires $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de degré 2ℓ telle que*

$$E(M_\ell(S)) = \frac{2^\ell \ell!}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+\ell}. \tag{3.34}$$

Les coefficients $(m_{i,\ell})_{i\in[\![1;2\ell]\!]}$ de M_ℓ sont solutions d'un système linéaire triangulaire défini par le système d'équations

$$\sum_{i=1}^{2\ell} m_{i,\ell}\, f_{\ell+1}(X) = 0 \qquad et \qquad \sum_{i=1}^{2\ell} m_{i,\ell}\, g_{\ell+1}(X) = 2^\ell \ell! X^{\ell+1}, \tag{3.35}$$

où les familles de polynômes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont celles définies dans le théorème 3.7.

Preuve : Cela découle immédiatement des degrés étagés des polynômes $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$. □

En particulier, on trouve

$$E\left[S(S+1)\right] = \frac{2}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+1}$$

$$E\left[S(S+1)(S+2)(S+\frac{1}{3})\right] = \frac{8}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+2}$$

$$E\left[S^2(S+1)^2(S+2)(S+3)\right] = \frac{48}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+3}$$

De telles expressions peuvent permettre d'obtenir l'asymptotique des moments pairs de la variable S, ce qui suffit pour caractériser sa distribution limite. La similitude entre l'expression 3.34 et celle donnant la probabilité de survie incite à chercher une expression comme coefficient d'une série génératrice. Il vient alors un second corollaire.

Corollaire 3.3 (Expressions par série génératrice de moments « utiles ») *Il existe une famille de polynômes unitaires $\left(\widehat{M}_\ell\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de degré 2ℓ telle que*

$$E(\widehat{M}_\ell(S)) = 2^\ell(\ell!)^2\,[z^{m+n}u^m]\frac{1}{\left(1-ue^{z(1-u)}\right)^{\ell+1}}. \tag{3.36}$$

La famille $(\widehat{M}_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ s'exprime en fonction de la famille $(M_\ell)_{\ell\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$\forall \ell\in N,\qquad \widehat{M}_\ell(X) = 2^\ell\ell!\sum_{i=0}^{\ell}|s(\ell+1,i+1)|\,\frac{M_i(X)}{2^i i!} \tag{3.37}$$

où $s(\ell,i)$ est la notation classique du nombre de Stirling de première espèce.

Preuve : Les nombres de Stirling de première espèce vérifient la relation

$$\forall \ell\in\mathbb{N},\qquad X(X+1)\cdots(X+\ell-1) = \sum_{i=0}^{\ell}|s(\ell,i)|\,X^i. \tag{3.38}$$

Par une extraction de coefficient désormais classique, il vient

$$\ell!\,[z^{m+n}u^m]\frac{1}{\left(1-ue^{z(1-u)}\right)^{\ell+1}} = \frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=0}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n}\cdot(k+1)\cdots(k+\ell) \tag{3.39}$$

Considérons maintenant la famille de polynômes $\left(\widehat{M}_\ell\right)_{\ell\in\mathbb{N}}$ définie par l'équation 3.37. Il est clair que pour tout entier ℓ, le polynôme $\widehat{M}_\ell$ est unitaire. D'autre part, la linéarité de l'espérance assure que

$$E\left(\widehat{M}_\ell(S)\right) = 2^\ell\ell!\sum_{i=0}^{\ell}|s(\ell+1,i+1)|\,\frac{E\left(M_i(S)\right)}{2^i i!}.$$

La preuve découle de cette formule en utilisant successivement les relations (3.34), (3.38) et (3.39). □

3.4.2 Analyse asymptotique des moments utiles définis par série génératrice

Dans ce paragraphe, on introduit deux nouvelles variables. Notons $N = m + n$ le nombre total de tueurs au début du duel et $\delta = m - n$ la différence de population entre les deux groupes. Dans son article, Kingman distingue deux régimes distincts, suivant que $\delta/\sqrt{N}$ ait une limite nulle ou infinie. On pouvait effectivement s'attendre à une telle classification étant donné le phénomène de seuil constaté au théorème 3.5.

Notre but dans cette partie est de déterminer un équivalent asymptotique des moments utiles définis par le corollaire 3.3 par analyse de singularité, en distinguant les deux régimes. De la sorte, l'asymptotique des moments pairs de S sera connue ce qui sera suffisant pour retrouver les lois limites de Kingman.

La principale difficulté dans l'analyse de singularité qui va être présentée est la présence d'une singularité de l'intégrande précisément à l'endroit où se situe le point col (en $u = 1$). Ce genre de cas problématique a notamment été etudié par Van Der Waerden [vdW51]. Notre méthode sera différente de la sienne et consiste à utiliser un contour mobile, se rapprochant de la singularité.

Discussions préliminaires

Considérons une urne de Friedman de matrice de replacement $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, initialisée à $\ell + 1$ boules blanches. Soit Z_n la variable aléatoire donnant le nombre de fois où une boule noire a été piochée au temps n et $p_N(u)$ sa série génératrice des probabilités. Le théorème 3.1 implique alors la relation

$$p_N(u) = \frac{\ell!}{(N+1)\cdots(N+\ell)}[z^N]\left(\frac{1-u}{1-ue^{z(1-u)}}\right)^{\ell+1}$$

et par conséquent, le corollaire 3.3 permet d'obtenir une expression intégrale de certains moments pairs

$$E(\widehat{M}_\ell(S)) = 2^\ell \ell!\,(N+1)\cdots(N+\ell)\frac{1}{2i\pi}\oint \frac{p_N(u)}{(1-u)^{\ell+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u^{m+1}}. \tag{3.40}$$

L'intégrande a une singularité au point $u = 1$ puisque $p_N(1) = 1$. Le contour ne pouvant être un cercle de rayon 1, on le choisit de la forme de la figure 3.6. Le rayon du grand cercle est choisi égal à 1 et le contour du petit arc de cercle sera de la forme $r = 1 - o(1)$ où le second terme sera défini selon le cas. Le réel ϵ est choisi arbitrairement petit.

La contribution le long de l'arc de cercle de rayon 1 est toujours un terme exponentiellement petit, en vertu du lemme 3.2. La contribution le long des deux petits segments de droite est un terme qui tend vers 0 puisque l'intégrande se borne facilement le long de ces deux segments et que la longueur de chacun d'entre eux tend vers 0. Pour finir, la fonction p_N vérifie une propriété de quasi-puissance au voisinage de $u = 1$ donnée par l'équation (3.10) du lemme 3.3. On est donc ramené à étudier l'équivalent asymptotique d'une intégrale s'écrivant sous la forme

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{u=re^{i\theta},|\theta|\le\epsilon} e^{Ng(u)}\,(-\ln(u))^{-(\ell+1)}\,u^{-\delta/2-1}\mathrm{d}u, \tag{3.41}$$

où ϵ est un réel arbitrairement petit, g est définie par l'équation

$$g(u) = -\ln(-\ln(u)) + \ln(1-u) - \ln(u)/2 \underset{u\to 1}{=} -\frac{1}{24}(1-u)^2 + O\left((1-u)^3\right),$$

et r est choisi de sorte que le contour passe à proximité du point col, déterminé par l'équation

$$N\left(\frac{u}{1-u} + \frac{1}{\ln u} + \frac{1}{2}\right) + \frac{\delta}{2} + \frac{\ell+1}{\ln u} = 0. \tag{3.42}$$

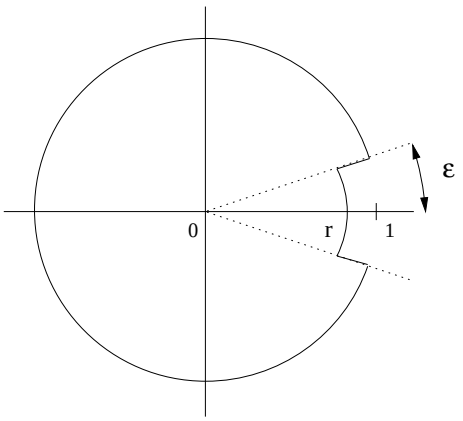


FIG. 3.6 – Contour déformé.

Suivant le régime, cette équation détermine deux comportements du point col. Nous allons maintenant traiter les deux cas séparément.

Duels déséquilibrés : $(m-n) \gg \sqrt{m+n}$

On suppose que $(m-n)/\sqrt{m+n} \longrightarrow +\infty$. La population du premier groupe est donc bien supérieure à celle du second groupe et sa probabilité de survie est donc de $1-o(1)$. Dans ce cas, les moments du nombre de survivants dans ce groupe admettent l'équivalent asymptotique suivant :

Théorème 3.8 (Kingman) *Considérons un duel de type Ok Corral entre deux groupes de m et n tireurs. On suppose que m et n tendent vers l'infini de sorte que, en notant $\delta = m-n$ et $N = m+n$, on ait $\delta/\sqrt{N} \to +\infty$. Notons S la variable aléatoire donnant le nombre de tueurs survivants dans le premier groupe. Alors, on a, pour tout entier ℓ,*

$$E[S^{2\ell}] \sim (N \cdot \delta)^{\ell} = (m^2 - n^2)^{\ell}.$$

Par conséquent, la variable aléatoire $S/\sqrt{m^2-n^2}$ tend vers 1 avec probabilité 1.

> **Remarque:** Kingman monte cet équivalent asymptotique seulement dans le cas ℓ pair. Cependant, ceci suffit pour déterminer le résultat de convergence.

Preuve : L'équation de col (3.42) détermine un point col de la forme

$$u \approx 1 - \frac{C}{\delta} \quad \text{avec} \quad C = 2(\ell+1).$$

On choisit donc le rayon r égal à cette approximation dans l'équation (3.41). La preuve passe par plusieurs étapes classiques, que nous avons déjà rencontré dans les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2.

Dans un premier temps, on montre que la contribution pour $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \leq \theta \leq \epsilon$ est un terme exponentiellement petit devant l'équivalent attendu. Cette étape s'effectue de la même manière que précédemment dans le théorème 3.1. Puis, on effectue un développement au premier ordre de l'intégrande au voisinage de 0 On constate ainsi que uniformément en θ, on a

$$\frac{1}{-\ln u} = \frac{1}{-\ln\left(1-\frac{C}{\delta}\right) - i\theta} = \delta\left(\frac{1}{C - i\theta\delta} + O\left(\frac{1}{\delta}\right)\right),$$

et que par ailleurs, on a

$$u^{-\delta/2-1}\mathrm{d}u = \left(e^{C/2} + O\left(\frac{1}{\delta}\right)\right) e^{-i\theta\delta/2}\mathrm{d}\theta.$$

Pour finir, le dernier terme s'évalue de la sorte

$$e^{-Ng(u)} = e^{-N/(24\delta^2)(\theta\delta - iC)^2 + O(1/\delta)}.$$

On effectue alors le changement de variable $\theta\delta = x$, et on complète ensuite l'intégrale. Au final, puisque $N/\delta^2 \to 0$, on obtient l'équivalent

$$\frac{1}{2i\pi}\oint \frac{p_N(u)}{(1-u)^{\ell+1}}\frac{\mathrm{d}u}{u^{(N+\delta)/2+1}} \sim \delta^\ell \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{(C-ix)/2}}{(C-ix)^{\ell+1}}\mathrm{d}x.$$

Cette dernière intégrale se calcule alors très simplement par résidu. En translatant la droite d'intégration à l'infini vers le bas, on constate que cette intégrale est égale au résidu de l'intégrande en $x = -iC$. Celui ci se calcule en utilisant le développement en série de l'exponentielle :

$$\frac{e^{(C-ix)/2}}{(C-ix)^{\ell+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}\frac{(C-ix)^{k-\ell-1}}{k!}.$$

On constate alors qu'il vaut bien $1/(2^\ell \ell!)$, ce qui assure que pour tout entier ℓ, il existe un polynôme R_ℓ de degré au plus $2\ell - 1$ tel que

$$E\left[\widehat{M}_\ell(S)\right] = E\left[S^{2\ell} + R_\ell(S)\right] \sim (N\cdot\delta)^\ell.$$

Pour en déduire l'équivalent asymptotique, il suffit de montrer que l'espérance de $R_\ell(S)$ est un terme négligeable.

La variable aléatoire donnant le nombre de survivants est à valeurs entières. Par conséquent, si a et b sont deux entiers, on a $E[S^a] \le E[S^b]$. On est donc ramené à montrer que l'espérance de la variable aléatoire $S^{2\ell-1}$ est un terme négligeable devant $(m^2-n^2)^\ell$. Pour cela, il suffit d'appliquer l'inégalité de Hölder :

$$\forall p > 1 \qquad E\left[S^{2\ell-1}\right] = \int x^{2\ell-1}\mathrm{d}\mu(x) \le \left(\int \left(x^{2\ell-1}\right)^p \mathrm{d}\mu(x)\right)^{1/p}$$

où μ est la fonction de répartition de la variable aléatoire S. La majoration du moment d'ordre $2\ell-1$ en découle en choisissant $p = 2\ell/(2\ell-1)$. □

Duels équilibrés : $(m-n) \gg \sqrt{m+n}$

On suppose maintenant que $(m-n)/\sqrt{m+n} \longrightarrow 0$. Les populations des deux groupes sont de taille comparable et la probabilité de survie de chacun est donc de $1/2 + o(1)$. Cette fois, le théorème est le suivant :

Théorème 3.9 (Kingman) *Considérons un duel de type Ok Corral entre deux groupes de m et n tireurs. On suppose que m et n tendent vers l'infini de sorte que, en notant $\delta = m-n$ et $N = m+n$, on aie $\delta/\sqrt{N} \to 0$. Notons S la variable aléatoire donnant le nombre de tueurs survivants dans le premier groupe. Alors, on a, pour tout entier ℓ,*

$$E[S^{2\ell}] \sim \frac{1}{2}\frac{\ell! 4^{\ell/2}}{3^{\ell/2}\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)} n^{3\ell/2}.$$

Par conséquent, la variable normalisée $3S^4/(16n^3)$ *suit une distribution limite dont la fonction de répartition est la moyenne de celle d'une masse de Dirac de poids* $1/2$ *en* 0 *et de celle d'une fonction gamma de paramètre* $1/2$*. Ainsi, pour tout* λ *strictement positif,*

$$\mathbb{P}\left(S \leq \lambda n^{3/4}\right) \longrightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{3(\lambda/2)^4} x^{-1/2} e^{-x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\lambda^2\sqrt{3/8}} e^{-x^2/2} dx. \tag{3.43}$$

Preuve : L'équation de col (3.42) détermine un point col dans ce cas de la forme

$$u \approx 1 - \frac{C}{\sqrt{n}} \quad \text{avec } C = \sqrt{12(\ell+1)}.$$

En effectuant le même travail que précédemment, à l'exception d'un changement de variable cette fois de la forme $\theta\sqrt{N} \to x$, on obtient un équivalent donné par

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \oint \frac{p_N(u)}{(1-u)^{\ell+1}} \frac{\mathrm{d}u}{u^{(N+\delta)/2+1}} &\sim N^{\ell/2} \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-(x+iC)^2/24}}{(C-ix)^{\ell+1}} \mathrm{d}x \\ &\sim N^{\ell/2} i^{\ell} \frac{1}{2\pi} \int_{-iC-\infty}^{-iC+\infty} e^{-a^2/24} a^{-\ell-1} \mathrm{d}a, \end{aligned} \tag{3.44}$$

en posant $a = x + iC$. Cette intégrale se ramène alors à une intégrale de type Hankel. En faisant le changement de variable $a^2/24 = t$, on obtient

$$i^{\ell} \frac{1}{2\pi} \int_{-iC-\infty}^{-iC+\infty} e^{-a^2/24} a^{-\ell-1} \mathrm{d}a = \frac{1}{2} \frac{1}{(24)^{\ell/2}} \int_{\mathcal{P}} e^{-t} t^{-(\frac{\ell}{2}+1)} \mathrm{d}t.$$

où le contour $\mathcal{P}$ est une parabole qui entoure l'axe réel positif. La formule de Hankel amène finalement à l'équivalent

$$E\left[\widehat{M}_\ell(S)\right] \sim \frac{1}{2} \frac{\ell!}{6^{\ell/2}\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)} N^{3p} = \frac{1}{2} \frac{\ell! 4^{\ell/2}}{3^{\ell/2}\Gamma\left(\frac{\ell}{2}+1\right)} n^{3\ell/2}.$$

On en déduit l'équivalent du moment d'ordre ℓ par la même technique que dans le cas des duels déséquilibrés.

Maintenant, le moment d'ordre p de la variable normalisée $3S^4/(16n^3)$ est asymptotiquement équivalent à la moitié de $(2p)!/(4^p \cdot p!) = \Gamma(p+1/2)/\Gamma(1/2)$, soit la moitié du moment d'ordre p d'une distribution de type gamma de paramètre $1/2$. Comme une telle distribution est caractérisée par ses moments, on déduit la convergence en distribution de la variable $3S^4/(16n^3)$ vers la distribution limite décrite par le théorème et donc l'équation (3.43). Par ailleurs, le moment d'ordre ν converge pour tout réel ν et sa limite est donné par $\Gamma(\nu+1/2)/(2\Gamma(1/2))$. Le choix de $\nu = 1/4$ permet de valider l'heuristique de Williams et Mc Ilroy. □

3.4.3 Cas particulier : duel parfaitement équitable ($m = n$)

On considère maintenant la somme

$$J(n;r) := \frac{1}{(2n)!} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} \binom{2n}{n+k} k^{2n+r}. \tag{3.45}$$

Cette somme apparaît dans les expressions des moments du nombre de survivants, pour un duel de Ok Corral équilibré (les deux équipes ayant le même nombre de tireurs au départ). Le but de ce paragraphe est de montrer la chose suivante : si r est pair, l'expression $J(n,r)$ est un polynôme en n calculable. De cette manière, on a une nouvelle preuve des expressions asymptotiques des moments $E\left[S^{4\ell}\right]$ de Ok Corral dans le cas équilibré, et donc, à la loi limite de Kingman.

Proposition 3.3 *Pour tout entier p appartenant à $\mathbb{N}$, la somme $J(n,2p)$, est un polynôme en n de degré $3p$ et de coefficient dominant $1/2(3^p \cdot p!)$.*

Par conséquent la famille de moments $(E[M_{2p}(S)])_{p\in\mathbb{N}}$ où S est la variable aléatoire donnant le nombre de survivants dans le premier groupe lors d'un duel entre deux groupes de n personnes, sont des polynômes en n de degré $3p$ et de coefficient dominant $(2p)!4^p/2(3^p p!)$.

Preuve : Comme dans la preuve de la seconde formule exacte des probabilités (3.13), on introduit la fraction rationnelle

$$F_{n,r}(z) = \frac{z^{2n+r}}{(z-n)\cdots(z-1)\cdot z\cdot(z+1)\cdots(z+n)}. \tag{3.46}$$

Pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$\operatorname{Res}(q(z))_{z=k} = (-1)^r \operatorname{Res}(q(z))_{z=-k} = \frac{1}{(2n)!}(-1)^{n-k}\binom{2n}{n+k}.$$

On considère maintenant l'intégrale

$$J'(n,r) := \frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} F_{n,r}(z)\,dz, \tag{3.47}$$

où R est supposé vérifier $R > n$. L'intégrale est égale à la somme des résidus de l'intégrande. Si r est impair, la somme des résidus s'annule et l'intégrale est égale à 0. Si r est pair, on obtient deux fois la somme des résidus aux points 1, 2, ..., , n. Ainsi, pour tout entier p

$$J'(n,2p) = 2J(n,2p).$$

On est donc ramené à calculer l'intégrale J'.

Soit $U(z)$ une fraction rationnelle quelconque. Elle admet alors un développement en l'infini de la forme

$$U(z) = u(z) + \frac{u_{-1}}{z} + O(z^{-2}),$$

où $u(z)$ est un polynôme obtenu comme le quotient de la division euclidienne du numérateur de U par son dénominateur, et u_{-1} est une constante de type « résidu à l'infini ». On peut également l'obtenir comme le résidu en 0 de la fraction rationnelle $U(1/z)$. Alors, puisque la fonction $z \mapsto U(1/z) - u(1/z) - u_{-1}/z$ est un $O\left(1/z^2\right)$ il vient par intégration sur un cercle de rayon R

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{|z|=R} U(z)\,\mathrm{d}z = u_{-1} + O\left(1/R\right)$$

pour tout réel R plus grand que le module de n'importe quel pôle de U : l'intégrale de $z \mapsto u(z)$ est nulle car u est entière, celle de $z \mapsto u_{-1}/z$ s'évalue en u_{-1}, le reste est un $O\left(1/R\right)$, qui est en fait nul dès que R est supérieur au module de tous les pôles de U.

On peut maintenant appliquer cette formule pour $J'(n,r)$. On écrit alors

$$J'(n,r) = [z^{-1}]_\infty F_{n,r}(z),$$

où la notation $[z^a]_\infty$ désigne le coefficient de $[z^a]$ dans le développement à l'infini. En faisant changement de variable $z \leftarrow 1/z$, il vient

$$[z^{-1}]_\infty F_{n,r}(z) = [z]\,F_{n,r}(1/z) = [z^r]z^{-r+1}F_{n,r}(1/z).$$

où cette fois, la notation $[z^r]$ est la notation usuelle du coefficient de z^r dans une fonction. Maintenant, par définition de $F_{n,r}$ (3.46), il vient

$$z^{-r+1}F_{n,r}(1/z) = \frac{1}{(1-z^2)\cdots(1-n^2z^2)}.$$

soit finalement

$$J(n,2p) = \frac{1}{2}[z^{2p}]\frac{1}{P_n(z)}, \qquad P_n(z) := \prod_{j=1}^{n}\left(1-j^2z^2\right).$$

On peut alors appliquer le logarithme, puis faire un développement en série. Il vient ainsi

$$\ln P_n(z) = \sum_{j=1}^{n}\ln\left(1-j^2z^2\right) = -\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i}j^{2i}z^{2i}$$

soit, en inversant les sommations, puis en repassant à l'exponentielle

$$\frac{1}{P_n(z)} = \exp\left(a_2(n)z^2 + \frac{a_4(n)}{2}z^4 + \frac{a_6(n)}{3}z^6 + \cdots\right),$$

où les $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sont les polynômes de Bernouilli définis par $a_r(n) = \sum_{j=1}^{n} j^r$. En développant l'exponentielle, on constate alors que $J(n,2p)$ s'exprime comme un polynôme de degré p en les $(a_{2i})_{i\in[\![1;\ell]\!]}$. En particulier, il vient

$$J(n,0) = \frac{1}{2}, \qquad J(n,2) = \frac{a_2(n)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{12},$$

$$J(n,4) = \frac{1}{4}\left(a_4 + {a_2}^2\right) = \frac{n(n+1)(n+2)(2n+1)(2n+3)(5n-1)}{720}.$$

(la formule complète est du type Faà di Bruno, polynômes de Bell, etc). Le degré de a_i étant égal à $i+1$, il vient naturellement

$$J(n,2p) = \frac{1}{2}\frac{1}{\ell!}\left(a_2(n)\right)^p + \cdots = \frac{n^{3p}}{2\cdot p!\cdot 3^p} + O\left(n^{3p-1}\right) \tag{3.48}$$

ce qui achève la preuve. □

3.5 Discussions

Le modèle de duel de Ok Corral, bien que de formulation très simple, présente bon nombre de phénomènes intéressants. Qui plus est, prouver ces phénomènes a requis l'usage de techniques variées, que ce soit les méthodes de récurrences de Kingman, ou nos méthodes à base de séries génératrices et de méthodes de cols généralisées (dans le cas de confluence singularité / point col). Toutes ces raisons en font un problème de qualité.

Malgré tout, quelques points restent à éclaircir, notamment en ce qui concerne l'étude des sommes alternées apparaîssant dans le théorème 3.7. L'équivalent asymptotique des termes de la forme

$$\frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+r}Q(k)$$

reste mystérieuse, même si on aurait tendance à penser, en vertu de l'équivalent de la fonction Q de Ramanujan de la forme $Q(k) \sim \sqrt{\pi k/2}$, que le résultat attendu est une généralisation naturelle de ce qui se passe pour les autres sommes

$$\frac{1}{(m+n)!}\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m-k}\binom{m+n}{m-k}k^{m+n+r'}.$$

En ce qui concerne ces dernières, nous n'avons toujours pas de preuve directe que certaines d'entre elles s'expriment comme un polynôme en m et n (à part pour le cas particulier $m = n$), bien que cela résulte des formules de Kingman.

Pour finir, le lien entre les probabilités du modèle et les nombres eulériens a été mis en évidence par le calcul. On sait pourtant que les nombres eulériens ont une interprétation combinatoire simple. Il est donc naturel de penser qu'il puisse exister une preuve bijective de certains de nos résultats, notamment du théorème 3.4.

L'application des résultats obtenus sur l'urne de Friedman à ce problème incite fortement à continuer les travaux de classification des modèles d'urnes de Pólya-Eggenberger par nos méthodes. En effet, ce faisant, nous avons pu sensiblement améliorer certains résultats de Kingman. Il est naturel de penser que la classification puisse à l'avenir permettre d'obtenir des résultats intéressants dans d'autres domaines à l'aide d'une représentation convenable par un tel modèle.

Conclusion

L'application de la combinatoire analytique aux phénomènes de seuils et aux modèles d'urnes a été très fructueuse. Outre le fait d'avoir pu raccourcir les preuves de résultats déjà existants (en k-satisfaisabilité), d'avoir pu apporter des précisions à des résultats d'un probabiliste renommé (ceux de Kingman pour le problème de Ok Corral), nous avons pu également obtenir de nombreux résultats originaux.

Notre approche permet de traduire les propriétés de récurrences ou de décomposabilité des structures en équations simples sur des séries génératrices. Une fois celles-ci résolues, différents types de résultats sont obtenus : des formules exactes s'obtiennent par extraction de coefficient, comme pour les propositions 2.6 et 3.1, des majorations sont dérivées de bornes de col triviales, comme pour les nouvelles preuves des théorèmes 1.5 et 1.7, et des équivalents asymptotiques précis sont accessibles par des méthodes de cols, comme pour les nouvelles preuves des théorèmes 3.8 et 3.9. Ces exemples confirment le fait que la combinatoire analytique est une approche élégante et puissante à l'étude des problèmes de transition de phase et des modèles d'urnes.

Nous n'avons cependant par encore réussi à obtenir une borne originale au seuil de satisfaisabilité des formules 3-SAT, en utilisant les techniques de séries génératrices. Les travaux qui ont été effectués dans cette thèse ouvrent néanmoins une voie qui permettra, nous l'espérons, d'en obtenir une par l'étude des triples flips. Nous ne nous attendons certes pas à obtenir immédiatement par cette méthode la valeur du seuil supposée de $4,25$ ou même une valeur inférieure à la borne $4,506$ d'Olivier Dubois, Yacine Boufkhad et Jacques Mandler, qui est la meilleure à ce jour, mais au moins une amélioration de la valeur $4,643$ dans un premier temps.

Par ailleurs, plusieurs modèles d'urnes de Pólya-Eggenberger restent mystérieux, ceux à deux types de boules dont le rapport des valeurs propres de la matrice de replacement est supérieur à $1/2$. Il serait intéressant de voir si nos méthodes permettent de déterminer les lois limites de ces modèles. La classification des urnes à deux couleurs de boules reste ainsi un sujet de recherche prometteur.

Annexe

Cette annexe présente quelques compléments techniques au traitement du chapitre 1 relatif au problème SAT et au seuil de satisfaisabilité.

1 Session Maple pour les impliquants premiers

Dans ce paragraphe, on établit à l'aide de Maple que pour $r = 4.883$, le maximum de g_r definie au paragraphe 1.3.3 est strictement inférieur à 1. L'idée générale est de faire une majoration grossière de g_r' puis de lancer un programme qui effectue une évaluation numérique de g_r en suffisament de points $x_0 < \cdots < x_p$. Si la propriété suivante est vérifiée

$$1 - \max_{i \in [\![0;p]\!]} \{g_r(x_i)\} > \frac{||g_r'||}{2} \max_{i \in [\![0;p-1]\!]} |x_{i+1} - x_i| \tag{1}$$

l'inégalité des accroissements finis assure que pour tout $t \notin \{x_0, \ldots, x_p\}$, on a nécessairement $g_r(t) < 1$. La preuve est ainsi réduite à une simple suite de vérifications mécaniques simples.

Un petit problème est posé par le fait que la fonction $\alpha \mapsto \frac{2^\alpha}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}}$ a des dérivées infinies en 0 et en 1. Par conséquent, on doit d'abord majorer directement la fonction g_r sur des intervalles de la forme $]0, \epsilon]$ et $[1-\eta, 1]$.

Propriétés de monotonicité

La fonction f_r peut s'écrire comme le produit d'une constante $\left(\frac{3r}{2e}\right)^r$ et de deux fonctions

$$f_1 : \alpha \mapsto \frac{2^\alpha}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{2r} \qquad f_2 : \alpha \mapsto \exp\left(\frac{\alpha^2(1-\alpha/3)}{2(1-\alpha/2)}\delta_\alpha + \alpha \ln\left(e^{\delta_\alpha} - 1\right) - r \ln\ \delta_\alpha\right).$$

Dans un premier temps, on peut montrer que $\alpha \mapsto \delta_\alpha$ et f_2 sont toutes deux monotones. On pose

$$h(x, y) = \frac{x^2(1-x/3)}{2(1-x/2)^2} y + x \frac{y}{1 - e^{-y}}.$$

Ainsi, $h(\alpha, \delta_\alpha) = r$. En dérivant cette expression par rapport à α, il vient

$$\frac{\partial h}{\partial x}(\alpha, \delta_\alpha) + \delta_\alpha' \frac{\partial h}{\partial y}(\alpha, \delta_\alpha) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \delta_\alpha' = \left(-\frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}}\right)(\alpha, \delta_\alpha).$$

On constate ensuite que $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont toutes deux des fonctions positives sur $[0,1] \times]0, +\infty[$ et par conséquent, la fonction $\alpha \mapsto \delta_\alpha$ est décroissante. En ce qui concerne la fonction f_2, la relation $h(\alpha, \delta_\alpha) = r$ implique également

$$f_2'(\alpha) = \left(\frac{\alpha(12 - 6\alpha + \alpha^2)}{3(2-\alpha)^3}\delta_\alpha + \ln(e^{\delta_\alpha} - 1)\right) f_2(\alpha).$$

Puisque $\alpha \mapsto \delta_\alpha$ est décroissante, pour tout α, $\ln(e^{\delta_\alpha} - 1) \geq \ln(e^{\delta_1} - 1) \approx 1.8017 > 0$. La fonction f_2' est donc positive et f_2 est croissante.

Finalement, la fonction f_1 satisfait

$$f_1'(\alpha) = \left(\ln(2) - \ln(\alpha) + \ln(1-\alpha) - \frac{2r}{2-\alpha} \right) f_1(\alpha).$$

L'expression entre parenthèses est inférieure à $\ln(2) + \ln(\alpha) - \ln(1-\alpha) - r$, qui est négatif dès que $\alpha > \frac{2e^{-r}}{1+2e^{-r}} \sim 0.0149$. La fonction f_1 est donc décroissante sur l'intervalle $[0.015, 1]$.

Majoration de g_r sur les intervalles [0,0.897] et [0.957,1]

Dans un premier temps, on utilise la majoration

$$\frac{2^\alpha}{\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}} \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right)^{2r} \leq 3 \qquad \forall\, \alpha \in [0,1]$$

qui implique que pour tout $\alpha \in]0, 0.414]$, $g_r(\alpha) \leq 3 \left(\frac{3r}{2e}\right)^r f_2(0.414) \approx 0.992$. Ensuite, on utilise la décroissance de f_1 sur $[0.015, 1]$ pour conclure que sur tout intervalle $[a, b]$ avec $a > 0.015$,

$$\forall\, \alpha \in [a,b], \qquad g_r(\alpha) \leq \left(\frac{3r}{2e}\right)^r f_1(a) f_2(b).$$

En subdivisant l'intervalle $[0.015, 1]$ en plusieurs petits intervalles, on montre que cette majoration assure que g_r est inférieure à 1 sur les deux intervalles $]0, 0.897]$ et $[0.957, 1]$.

Majoration de g_r' sur l'intervalle [0.897,0.957]

Pour tout $\alpha \in [0.897, 0.957]$, on a $\delta_{0.957} \leq \delta_\alpha \leq \delta_{0.897}$. En dérivant g_r par rapport à α, il vient

$$g_r'(\alpha) = \frac{\partial f_r}{\partial \alpha} + \delta_\alpha' \frac{\partial f_r}{\partial \delta_\alpha} = \left(\frac{\partial f_r}{\partial \alpha} - \frac{\frac{\partial h}{\partial x}}{\frac{\partial h}{\partial y}} \frac{\partial f_r}{\partial \delta_\alpha} \right) (\alpha, \delta_\alpha).$$

On constate alors que $\frac{\partial h}{\partial x}$ et $\frac{\partial h}{\partial y}$ sont deux fonctions positives croissantes de x et de y et qu'ainsi, leur plus grandes et plus petites valeurs sont respectivement $\frac{\partial h}{\partial x}(0.957, \delta_{0.897})$ et $\frac{\partial h}{\partial y}(0.897, \delta_{0.957})$. Pour majorer $\frac{\partial f_r}{\partial \alpha}$ et $\frac{\partial f_r}{\partial \delta_\alpha}$, on introduit a_r de sorte que $f_r = \exp(a_r)$. Alors

$$\begin{aligned} a_r(\alpha, \delta_\alpha) &= C + \alpha \ln(2) - \alpha \ln(\alpha) - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \frac{\alpha^2(1-\alpha/3)}{2(1-\alpha/2)^2}\delta_\alpha \\ &\quad + \alpha \ln(e^{\delta_\alpha} - 1) - r \ln(\delta_\alpha) + 2r \ln(1-\alpha/2), \end{aligned}$$

et par ailleurs, $\frac{\partial f_r}{\partial x} = f_r \frac{\partial a_r}{\partial x}$ et $\frac{\partial f_r}{\partial y} = f_r \frac{\partial a_r}{\partial y}$. Les dérivées de a_r sont des fonctions simples, et finalement, une majoration grossière def_r, $\frac{\partial a_r}{\partial x}$ et $\frac{\partial a_r}{\partial x}$ donne la borne supérieure

$$\forall\, \alpha \in [0.897, 0.957], \qquad \left| g_r'(\alpha) \right| \leq 60.$$

Evaluations numériques

On pose $r = 4.883$ puis on exécute un programme qui calcule la plus grande valeur de g_r avec une précision de 15 chiffres après la virgule, pour des points de l'intervalle $[0.897, 0.957]$ à distance au plus $0.6 \cdot 10^{-7}$ l'un de l'autre (10^6 valeurs). La plus grande valeur retournée est alors $1 - 0.2721 \cdot 10^{-5}$. La condition (1) est ainsi vérifiée et la valeur 4.883 est bien une borne supérieure au seuil de satisfaisabilite.

2 Matrices d'ajacences de graphes

Le but de ce paragraphe est de donner une preuve de la factorisation de l'égalité (1.18). La méthode utilise les matrices d'adjacence des graphes.

Définition 3.1 *Soit $G = (\mathcal{E}, \mathcal{V})$ un graphe orienté à n sommets. On note $e_0, \ldots, e_n$ ses sommets. La matrice d'adjacence T du graphe est définie à l'aide d'un ensemble d'indéterminées $(a_{i,j})_{i,j \in [\![0;n]\!]}$ de la manière suivante :*

$$T = (T_{i,j})_{i,j \in [\![0;n]\!]} \quad \textit{telle que} \quad \begin{cases} T_{i,j} = a_{i,j} & \textit{si } (e_i, e_j) \in \mathcal{V} \\ T_{i,j} = 0 & \textit{sinon} \end{cases}$$

On notera que l'on autorise le graphe à avoir une arête bouclant sur le même sommet. L'intérêt de cette matrice est de coder toutes les transitions possibles du graphe. Par ailleurs, si l'on considère ses puissances successives, on code tous les chemins que l'on peut effectuer dans le graphe.

Théorème 3.1 *Soit $\gamma : e_{i_1} \to e_{i_2} \to \cdots \to e_{i_\ell+1}$ un chemin dans le graphe. On note $\ell = |\gamma|$ sa longueur et on lui associe le polynôme P_γ en les $(a_{i,j})_{i,j \in [\![0;n]\!]}$ défini par*

$$P_\gamma(a_{1,1}, a_{1,2}, \ldots, a_{\ell,\ell-1}, a_{\ell,\ell}) = a_{i_1,i_2} \cdots a_{i_\ell,i_{\ell+1}}.$$

Alors, pour tout entier ℓ et tous indices i et j appartenant à $[\![0;n]\!]$,

$$(T^\ell)_{i,j} = \sum_{\substack{\gamma : e_i \to \cdots \to e_j \\ |\gamma| = \ell}} P_\gamma.$$

La preuve de ce résultat est très classique. Pour s'en convaincre, il suffit de regarder ce qui se passe pour le carré de la matrice, puis de le montrer par récurrence.

Corollaire 3.1 *La trace de la matrice T^ℓ est la somme des polynômes associés aux cycles du graphe de longueur ℓ dont l'origine est marquée :*

$$Tr\left(T^\ell\right) = \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{\substack{\gamma : e \to \cdots \to e \\ |\gamma| = k}} P_\gamma.$$

Le lemme 1.9 découle immédiatement de ce corollaire. Pour le prouver, on considère un graphe orienté complet, à deux sommets e_0 et e_1 (les deux arêtes (e_0, e_0) et (e_1, e_1) sont comprises). A tout mot ω sur l'alphabet $\{0, 1\}$, on associe un cycle γ dans le graphe tel que le $i^{\text{ème}}$ état visité correspond à celui dont l'indice est la $i^{\text{ème}}$ lettre du mot. Le dernier pas du chemin est alors celui du retour à l'état de départ.

Exemple : $\omega = 01101 \quad \Leftrightarrow \quad \gamma = e_0 \to e_1 \to e_1 \to e_0 \to e_1 \to e_0.$

On a alors clairement la correspondance

$$a(z)^{\#00(\omega)} b(z)^{\#01(\omega)} c(z)^{\#10(\omega)} d(z)^{\#11(\omega)} = P_\gamma(a(z), b(z), c(z), d(z)).$$

puisque, par exemple, une occurence du mot 01 dans ω se traduit par une transition de e_0 vers e_1, elle-même codée par un monôme $a_{0,1}$ dans le produit définissant P_γ. Le lemme vient aussitôt puisque sommer le terme de gauche de cette inégalité sur ω appartenant à $\{0,1\}^\ell$ revient à sommer le terme de droite sur les cycles du graphe de longueur ℓ dont l'origine est marquée.

Bibliographie

[Ach00] Dimitris Achlioptas. Setting 2 variables at a time yields a new lower bound for random 3-sat. Dans *Proceeding of the 32nd ACM Symposium on Theory of Computing, Association for Computing Machinery*, pages 28–37, 2000.

[Ach01] Dimitris Achlioptas. Lower bounds for random 3-sat via differential equations. *Theoret. Comput. Sci.*, 265(1-2) :159–185, 2001. Phase transitions in combinatorial problems (Trieste, 1999).

[ACIM01] Dimitris Achlioptas, Arthur Chtcherba, Gabriel Istrate, et Cristopher Moore. The phase transition in 1-in-k sat and nae 3-sat. Dans *Proceedings of the twelfth annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pages 721–722. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

[AFP88] David Aldous, Barry Flannery, et José Luis Palacios. Two applications of urn processes – the fringe analysis of search trees and the simulation of quasi-stationnary distributions of markov-chains. *Probability in the engineering and informational sciences*, 2(2) :293–307, 1988.

[AK68] Krishna B. Athreya et Samuel Karlin. Embedding of urn schemes into continuous time Markov branching processes and related limit theorems. *Ann. Math. Statist.*, 39 :1801–1817, 1968.

[AN04] Krishna B. Athreya et Peter E. Ney. *Branching processes*. Dover Publications Inc., Mineola, NY, 2004.

[AS00] Dimitris Achlioptas et Gregory B. Sorkin. Optimal myopic algorithms for random 3-sat. Dans *41st Annual Symposium on Foundations of Computer Science (Redondo Beach, CA, 2000)*, pages 590–600. IEEE Comput. Soc. Press, Los Alamitos, CA, 2000.

[BBC+01] Béla Bollobás, Christian Borgs, Jennifer T. Chayes, Jeong Han Kim, et David B. Wilson. The scaling window of the 2-SAT transition. *Random Structures Algorithms*, 18(3) :201–256, 2001.

[BCP01] Christian Borgs, Jennifer Chayes, et Boris Pittel. Phase transition and finite-size scaling for the integer partitioning problem. *Random Structures Algorithms*, 19(3-4) :247–288, 2001. Analysis of algorithms (Krynica Morska, 2000).

[BFSS01] Cyril Banderier, Philippe Flajolet, Gilles Schaeffer, et Michèle Soria. Random maps, coalescing saddles, singularity analysis, and Airy phenomena. *Random Structures Algorithms*, 19(3-4) :194–246, 2001. Analysis of algorithms (Krynica Morska, 2000).

[BFU93] Andrei Z. Broder, Alan M. Frieze, et Eli Upfal. On the satisfiability and maximum satisfiability of random 3-CNF formulas. Dans *Proceedings of the Fourth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms (Austin, TX, 1993)*, pages 322–330, New York, 1993. ACM.

[Bil86] Patrick Billingsley. *Probability and measure*. Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics : Probability and Mathematical Statistics. John Wiley & Sons Inc., New York, seconde édition, 1986.

[BP85] A. Bagchi et A. K. Pal. Asymptotic normality in the generalized Pólya-Eggenberger urn model, with an application to computer data structures. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 6(3) :394–405, 1985.

[Car67] Henri Cartan. *Calcul différentiel*. Hermann, Paris, 1967.

[CF86] Ming-Te Chao et John Franco. Probabilistic analysis of two heuristics for the 3-satisfiability problem. *SIAM Journal on Computing*, 15(4) :1106–1118, 1986.

[CF90] Ming-Te Chao et John Franco. Probabilistic analysis of a generalization of the unit-clause literal selection heuristics for the k-satisfiability problem. *Information Sciences. An International Journal*, 51(3) :289–314, 1990.

[Com74] Louis Comtet. *Advanced combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1974. The art of finite and infinite expansions.

[Coo71] Stephen A. Cook. The complexity of theorem proving procedures. Dans *Third annual ACM symposium on theory of computing*, pages 151–158, 1971.

[CR92] Vasek Chvátal et B. Reed. Mick gets some (the odds are on his side). Dans *33rd Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 620–627, Pittsburgh, Pennsylvania, October 1992. IEEE.

[CS88] Vasek Chvatál et Endre Szemerédi. Many hard examples for resolution. *J. Amer. Math. Soc.*, 35(4) :759–768, 1988.

[DB81] N. G. De Bruijn. *Asymptotic methods in analysis*. Dover Publication Inc., New York, troisième édition, 1981.

[DB97] Olivier Dubois et Yacine Boufkhad. A general upper bound for the satisfiability threshold of random r-SAT formulae. *Journal of Algorithms*, 24(2) :395–420, 1997.

[DB99] Olivier Dubois et Yacine Boufkhad. Length of prime implicants and number of solutions of random CNF formulae. *Theoret. Comput. Sci.*, 215(1-2) :1–30, 1999.

[DGG01] M. Drmota, D. Gardy, et B. Gittenberger. A unified presentation of some urn models. *Algorithmica*, 29(1-2) :120–147, 2001. Average-case analysis of algorithms (Princeton, NJ, 1998).

[DM02] Olivier Dubois et Jacques Mandler. The 3-xorsat threshold. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 335(11) :963–966, 2002.

[DMB03] Olivier Dubois, Jacques Mandler, et Yacine Boufkhad. Typical 3-sat formulae and the satisfiability threshold. Dans *Electronic Colloquium on computational complexity*, 2003.

[DP60] Martin Davis et Hilary Putnam. A computing procedure for quantification theory. *Journal of the association for computing machinery*, 7 :201–215, 1960.

[Dub01] Olivier Dubois. Upper bounds on the satisfiability threshold. *Theoret. Comput. Sci.*, 265(1-2) :187–197, 2001. Phase transitions in combinatorial problems (Trieste, 1999).

[Dur04] Marianne Durand. *Combinatoire analytique et algorithmique des ensembles de données*. Thèse de doctorat, École polytechnique, Avril 2004.

[EE07] P. Ehrenfest et T. Ehrenfest. Über zwei bekannte Einwände gegen das Boltzmannsche h-Theorem. *Physik, Zs.*, 8 :311–314, 1907.

[EMFdlV95] A. El Maftouhi et W. Fernandez de la Vega. On random 3-sat. *Combinatorics, Probability and Computing*, 4(3) :189–195, 1995.

[EP23] F. Eggenberger et G. Pólya. Über die Statistik verketteter Vorgänge. *Zeitschrift für angewandte mathematik und mechanik*, 1 :279–289, 1923.

[ER59] P. Erdős et A. Rényi. On random graphs. I. *Publ. Math. Debrecen*, 6 :290–297, 1959.

[ER60] P. Erdős et A. Rényi. On the evolution of random graphs. *Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl.*, 5 :17–61, 1960.

[Fel71] William Feller. *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.* John Wiley & Sons Inc., New York, seconde édition, 1971.

[FGKP95] Philippe Flajolet, Peter J. Grabner, Peter Kirschenhofer, et Helmut Prodinger. On Ramanujan's Q-function. *J. Comput. Appl. Math.*, 58(1) :103–116, 1995.

[FGP04] Philippe Flajolet, Joaquim Gabarró, et Helmut Pekari. Analytic urns. *Annals of probability (to appear)*, 2004.

[FO90] Philippe Flajolet et Andrew Odlyzko. Singularity analysis of generating functions. *SIAM J. Discrete Math.*, 3(2) :216–240, 1990.

[FP83] John Franco et Marvin Paull. Probabilistic analysis of the Davis-Putnam procedure for solving the satisfiability problem. *Discrete Applied Mathematics*, 5(1) :77–87, 1983.

[FP05a] Philippe Flajolet et Vincent Puyhaubert. Analytic combinatorics at Ok Corral. *À paraître*, 2005.

[FP05b] Philippe Flajolet et Vincent Puyhaubert. Triangular urns of dimension 2 and 3. *À paraître*, 2005.

[Fra01] John Franco. Results related to threshold phenomena research in satisfiability : lower bounds. *Theoret. Comput. Sci.*, 265(1-2) :147–157, 2001. Phase transitions in combinatorial problems (Trieste, 1999).

[Fre65] David A. Freedman. Bernard Friedman's urn. *Ann. Math. Statist*, 36 :956–970, 1965.

[Fri49] Bernard Friedman. A simple urn model. *Comm. Pure Appl. Math.*, 2 :59–70, 1949.

[Fri99] Ehud Friedgut. Sharp thresholds of graph properties, and the k-sat problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 12(4) :1017–1054, 1999. With an appendix by Jean Bourgain.

[FS] Philippe Flajolet et Robert Sedgewick. *Analytic combinatorics.* A paraître. Une version préliminaire des 9 premiers chapitres est disponible sur le web à l'adresse http ://algo.inria.fr/flajolet/Publications/publist.html.

[FS96] Alan Frieze et Stephen Suen. Analysis of two simple heuristics on a random instance of k-SAT. *Journal of Algorithms*, 20(2) :312–355, 1996.

[GJ79] Michael R. Garey et David S. Johnson. *Computers and intractability.* W. H. Freeman and Co., San Francisco, Calif., 1979. A guide to the theory of NP-completeness, A Series of Books in the Mathematical Sciences.

[Gou93] Raúl Gouet. Martingale functional central limit theorems for a generalized Pólya urn. *Ann. Probab.*, 21(3) :1624–1639, 1993.

[Hwa94] Hsien-Kuei Hwang. *Théorèmes limites pour les structures combinatoires et les fonctions arithmétiques.* Thèse de doctorat, École polytechnique, Decembre 1994.

[Hwa98] Hsien-Kuei Hwang. On convergence rates in the central limit theorems for combinatorial structures. *European J. Combin.*, 19(3) :329–343, 1998.

[Jan04] Svante JANSON. Functional limit theorems for multitype branching processes and generalized Pólya urns. *Stochastic Process. Appl.*, 110(2) :177–245, 2004.

[Jan05] Svante JANSON. Limit theorems for triangular urn schemes. *To appear*, 2005.

[JK77] Norman L. JOHNSON et Samuel KOTZ. *Urn models and their application.* John Wiley & Sons, New York-London-Sydney, 1977. An approach to modern discrete probability theory, Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics.

[JKŁP93] Svante JANSON, Donald E. KNUTH, Tomasz ŁUCZAK, et Boris PITTEL. The birth of the giant component. *Random Structures Algorithms*, 4(3) :231–358, 1993. With an introduction by the editors.

[JSV00] Svante JANSON, Yannis C. STAMATIOU, et Malvina VAMVAKARI. Bounding the unsatisfiability threshold of random 3-SAT. *Random Structures Algorithms*, 17(2) :103–116, 2000.

[Kin99] J. F. C. KINGMAN. Martingales in the OK Corral. *Bull. London Math. Soc.*, 31(5) :601–606, 1999.

[KKKS98] Lefteris M. KIROUSIS, Evangelos KRANAKIS, Danny KRIZANC, et Yannis C. STAMATIOU. Approximating the unsatisfiability threshold of random formulas. *Random Structures and Algorithms*, 12(3) :253–269, 1998.

[KKL02] Alexis C. KAPORIS, Lefteris M. KIROUSIS, et Efthimios G. LALAS. The probabilistic analysis of a greedy satisfiability algorithm. Dans Möhring R. et Raman R., éditeurs, *ESA 2002 : 10th annual european symposium*, volume 2461 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 574–585, Rome, Italy, 2002. Springer.

[KKS+01] Alexis C. KAPORIS, Lefteris M. KIROUSIS, Yannis C. STAMATIOU, Malvina VAMVAKARI, et Michele ZITO. Coupon collectors, q-binomial coefficients and the unsatisfiability threshold. Dans Antonio RESTIVO, Simona Ronchi Della ROCCA, et Luca ROVERSI, éditeurs, *Theoretical Computer Science, 7th Italian Conference*, volume 2202 de *Lecture Notes in Computer Science*, pages 328–338, Torino, Italy, octobre4–6 2001. Springer.

[KMPS95] Anil KAMATH, Rajeev MOTWANI, Krishna PALEM, et Paul SPIRAKIS. Tail bounds for occupancy and the satisfiability threshold conjecture. *Random Structures and Algorithms*, 7(1) :59–80, 1995.

[KMR00] Samuel KOTZ, Hosam MAHMOUD, et Philippe ROBERT. On generalized Pólya urn models. *Statist. Probab. Lett.*, 49(2) :163–173, 2000.

[Knu69] Donald E. KNUTH. *The art of computer programming, Vol 2 : Seminumerical Algorithms.* Addison-Wesley Publishing Co., 1969.

[Knu73] Donald E. KNUTH. *The art of computer programming, Vol 3 : Sorting and Searching.* Addison-Wesley Publishing Co., 1973.

[KV03] J. F. C. KINGMAN et S. E. VOLKOV. Solution to the OK Corral model via decoupling of Friedman's urn. *J. Theoret. Probab.*, 16(1) :267–276, 2003.

[Mah05] Hosam MAHMOUD. Pólya urn models and connections to random trees : A review. *Manuscript*, 2005.

[Meu00] Ludovic MEUNIER. Étude des transitions de phases en K-satisfaisabilité. Mémoire de D.E.A., École polytechnique, 2000.

[MMZ01] Olivier C. Martin, Rémi Monasson, et Riccardo Zecchina. Statistical mechanics methods and phase transitions in optimization problems. *Theoret. Comput. Sci.*, 265(1-2) :3–67, 2001. Phase transitions in combinatorial problems (Trieste, 1999).

[Nic92] J.-L. Nicolas. An integral representation for Eulerian numbers. Dans *Sets, graphs and numbers (Budapest, 1991)*, volume 60 de *Colloq. Math. Soc. János Bolyai*, pages 513–527. North-Holland, Amsterdam, 1992.

[Pól31] G. Pólya. Sur quelques points de la théorie des probabilités. *Annales Institut Poincaré*, 1 :118–161, 1931.

[PP98] Alois Panholzer et Helmut Prodinger. An analytic approach for the analysis of rotations in fringe-balanced binary search trees. *Ann. Comb.*, 2(2) :173–184, 1998.

[Puy04] Vincent Puyhaubert. Generating functions and the satisfiability threshold. *Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, 6(2) :425–436, 2004.

[SCDM86] J.-C. Simon, Jacques Carlier, Olivier Dubois, et O. Moulines. étude statistique de l'existence de solutions de problèmes sat, application aux systèmes-experts. *Compte Rendu de l'Académie des Sciences de Paris*, 302 :283–286, 1986.

[Sch78] Thomas J. Schaefer. The complexity of satisfiability problems. Dans *Conference Record of the Tenth Annual ACM Symposium on theory of computing*, pages 216–226. ACM, 1978.

[Smy96] R. T. Smythe. Central limit theorems for urn models. *Stochastic Process. Appl.*, 65(1) :115–137, 1996.

[Sta97] Richard P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Vol. 1*, volume 49 de *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1997. With a foreword by Gian-Carlo Rota, Corrected reprint of the 1986 original.

[vdW51] B. L. van der Waerden. On the method of saddle points. *Appl. Sci. Research B.*, 2 :33–45, 1951.

[WM98] David Williams et Paul McIlroy. The OK Corral and the power of the law (a curious Poisson-kernel formula for a parabolic equation). *Bull. London Math. Soc.*, 30(2) :166–170, 1998.

[Yao78] Andrew Chi Chih Yao. On random $2-3$ trees. *Acta Informatica*, 9(2) :159–170, 1977/78.