

Developement of a parameter identification method by inverse analysis coupled with a 3D finite element model

Romain Forestier

▶ **To cite this version:**

Romain Forestier. Developement of a parameter identification method by inverse analysis coupled with a 3D finite element model. Mathematics [math]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2004. English. NNT : . pastel-00001362

HAL Id: pastel-00001362
https://pastel.hal.science/pastel-00001362

Submitted on 5 Sep 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

THESE

Présentée par
Romain Forestier

Ingénieur en Mathématiques et Modélisation
de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse

En vue de l'obtention du titre de
Docteur en Mécanique Numérique

DEVELOPPEMENT D'UNE METHODE D'IDENTIFICATION DE PARAMETRES PAR ANALYSE INVERSE COUPLEE AVEC UN MODELE ELEMENTS FINIS 3D

Soutenue le 22 janvier 2004

Devant le jury composé de

M. Olivier Allix	Président
M. Marc Bonnet	Rapporteur
M. Eric Ragneau	Rapporteur
M. Tommaso Dal Negro	Examinateur
Mme Chantal David	Examinateur
Mme Elisabeth Massoni	Examinateur
M. Yvan Chastel	Examinateur

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier la Direction de l'Ecole des Mines de Paris pour m'avoir donné la possibilité d'effectuer ce travail de thèse au Centre de Mise en Forme des Matériaux de Sophia-Antipolis.

Je remercie Elisabeth MASSONI et Yvan CHASTEL pour toute la confiance qu'ils m'ont accordée au cours de cette thèse. Leurs qualités humaines ainsi que leurs compétences ont été une source de motivation permanente pour moi. J'ai beaucoup appris au cours de ces trois années de travail.

Merci à Marc BONNET et à Eric RAGNEAU d'avoir accepté de rapporter ma thèse ainsi qu'à Olivier ALLIX pour l'avoir présidée.

J'ai eu l'occasion, au cours de cette thèse de travailler avec Chantal DAVID et Tommaso DAL NEGRO dans le cadre du projet européen TESTIFY. Je les remercie pour leur collaboration ainsi que d'avoir accepté de faire partie du jury.

Plus généralement, je tiens à exprimer ma gratitude envers tous les partenaires du projet européen TESTIFY pour leur compétences ainsi que pour leur bonne humeur. Travailler dans ce projet restera un souvenir inoubliable.

Merci à Gilbert et à Vincent pour m'avoir initié aux joies des essais mécaniques. Sans leur disponibilité et leur motivation, il m'aurait été difficile d'obtenir tous les résultats escomptés.

Je remercie ma famille, qui m'a toujours soutenu au cours de mes études. Merci à mes amis de l'INSA, qui ne m'ont jamais perdu de vue malgré les années qui passent. Guilhem, Squalou, JC, Olivier, Stéphane, Mauléon, Damien, Blandine, Sébastien, Lolo, Bobo, Carinne (bref, le groupe H'), vous êtes les meilleurs des supporters.

Je remercie tout particulièrement Mehdi, pour son amitié et pour toutes nos réunions de travail. Un grand merci à Mihaela, à Serge et à Julien pour m'avoir supporté dans le bureau ainsi qu'à Karim pour m'avoir mis le pieds à l'étrier. Merci à Nico, Nathalie, Gilles, Cyril et Sven -les expatriés toulousains- ainsi qu'à Audrey, Fred, Ramzy, Delphine, Josué, Mehdi, Christian, Hye-jin, Tho et Alban pour leur perpétuelle bonne humeur et leur sympathie.

Remerciements 3

Introduction : Optimisation et mise en forme 9

1.1 Ecoulements complexes des matériaux lors d'essais mécaniques 10
1.1.1 Prise en compte de la géométrie de l'outillage et de la pièce 10
1.1.2 Prise en compte du frottement 11
1.1.3 Prise en compte de l'auto-échauffement 12
1.1.4 Prise en compte de comportements mécaniques complexes 12
1.1.5 Conception de nouveaux essais 14
1.2 Objectifs du présent travail 15
1.3 Bibliographie 15

Identification de paramètres par méthode de moindres carrés 17

2.1 Introduction 17
2.2 Problèmes inverses et problèmes de moindres carrés 18
2.2.1 Point de vue déterministe 18
2.2.2 Point de vue statistique 19
2.3 Méthodes de minimisation de la fonction coût 21
2.3.1 Méthodes d'ordre zéro 21
2.3.2 Méthodes à direction de descente 26
2.4 Application à l'identification de paramètres rhéologiques 36
2.4.1 Identification des paramètres d'une loi de Norton-Hoff – comparaison des méthodes de BFGS et de Gauss-Newton 38
2.4.2 Identification des paramètres d'une loi viscoplastique 'complexe' 40
2.5 Stabilité des méthodes à direction de descente 40
2.5.1 La matrice de Gauss-Newton et la notion d'identifiabilité 41
2.5.2 Stabilité du jeu de paramètres identifié 44
2.5.3 Calcul d'intervalles de confiance 45
2.5.4 Stabilité de l'algorithme de Gauss-Newton 46
2.6 Techniques de stabilisation des méthodes à direction de descente 48
2.6.1 Méthodes à région de confiance 48
2.6.2 La méthode de Levenberg-Marquardt 49
2.6.3 Approche statistique : introduction de l'information a priori 51
2.6.4 Méthode de Gauss-Newton stabilisée 52
2.7 Application à l'analyse de l'essai de compression d'un cube avec un comportement viscoplastique 53

2.7.1 Etude des effets de corrélation entre les paramètres à identifier....53
2.7.2 Application de la méthode de Gauss-Newton stabilisée....54
2.7.3 Influence d'un bruit de mesure sur l'identification de paramètres....55
2.8 Sensibilité des paramètres identifiés à une incertitude expérimentale....58
2.9 Conclusion....61
2.10 Bibliographie....62

Développement d'une méthode inverse autour du logiciel FORGE3®....65

3.1 Introduction....65
3.2 Présentation du modèle direct FORGE3®....65
3.2.1 Modélisation du problème thermo-mécanique....65
3.2.2 Equations de comportement....66
3.2.3 Conditions aux limites et conditions initiales....71
3.2.4 Discrétisation temporelle et algorithme de splitting....73
3.2.5 Discrétisation et résolution du problème mécanique....75
3.2.6 Discrétisation et résolution du problème thermique....82
3.2.7 Résolution de systèmes linéaires et parallélisation du modèle direct....84
3.2.8 Remaillage et transport....85
3.2.9 Conclusion sur le modèle direct FORGE3®....88
3.3 Modèle inverse et analyse de sensibilité....88
3.3.1 Différences finies....89
3.3.2 Méthode de la variable complexe....90
3.3.3 Différentiation analytique....91
3.3.4 Différentiation semi-analytique....93
3.3.5 Méthode adjointe....94
3.3.6 Différentiation automatique....96
3.3.7 Choix d'une méthode d'analyse de sensibilité....96
3.3.8 Parallélisation du modèle inverse....97
3.4 Validation de la méthode de différentiation semi-analytique....97
3.4.1 Loi viscoplastique sans écrouissage....97
3.4.2 Loi viscoplastique avec écrouissage....101
3.4.3 Contact bilatéral collant....105
3.4.4 Discussion sur la différentiabilité du modèle direct....105
3.4.5 Comparaison des temps de calcul....107
3.5 Conclusion....108
3.6 Bibliographie....108

Exemples d'applications....111

4.1 Introduction....111
4.2 Compression uniaxiale....111
4.3 Torsion....114

4.4 Test SICO 119
4.5 Bipoinçonnement 121
4.5.1 Simulation numérique de l'essai de bipoinçonnement 122
4.5.2 Géométries des éprouvettes et 'identifiabilité' du système 123
4.5.3 Sensibilité des paramètres identifiés par rapport au frottement 128
4.6 Utilisation de mesures de champs de déformation pour la caractérisation de tôles 129
4.6.1 Description du système de corrélation d'images Aramis 129
4.6.2 Identification d'une loi de comportement isotrope à partir d'essais de gonflage hydrauliques 131
4.6.3 Analyse de l'essai Nakazima 134
4.7 Conclusion sur les applications à différents essais 147
Bibliographie 148
Conclusion 150
Annexe 152

Chapitre 1

Introduction : Optimisation et mise en forme

La prédiction et l'optimisation du résultat d'une opération de mise en forme peuvent être délicates, et la simulation numérique est aujourd'hui devenue un outil incontournable pour l'industriel ainsi que pour le chercheur. En effet, lorsque l'on veut définir une nouvelle expérience ou bien un nouveau procédé industriel, la simulation numérique est couramment utilisée comme une aide à la conception. Elle permet d'une part de décrire l'écoulement de matière au cours du procédé ainsi que les champs de contrainte, de déformation et de température induits ; et d'autre part d'observer l'influence d'une modification des paramètres d'entrée du code sur le procédé de mise en forme. Le développement de méthodes d'analyse de sensibilité et d'optimisation automatique s'inscrit dans un souci :

- d'amélioration du caractère prédictif de la simulation
- d'optimisation des conditions expérimentales (paramètres du procédé, nuance de matériaux, etc.) dans le but de satisfaire un cahier des charges défini au préalable.

Le but de ce travail est de développer une méthode d'analyse de sensibilité ainsi qu'une méthode d'optimisation automatique couplées à un code de simulation tridimensionnel de procédés de mise en forme de métaux. Il a été effectué dans le cadre du projet européen TESTIFY, dont l'objectif est l'étude et le développement de méthodologies pour concevoir et analyser des essais mécaniques à chaud sur des métaux. Dans ce contexte, l'analyse de sensibilité est considérée comme un outil permettant d'étudier l'influence des paramètres de l'essai sur le résultat d'un essai mécanique. Elle permet alors de détecter ceux qui sont les plus critiques et de les ajuster avec une tolérance adéquate. C'est également un outil qui peut être utilisé pour le développement de méthodes d'optimisation automatiques.
Les méthodes d'optimisation couplées à un logiciel de simulation numérique peuvent être utilisées soit pour recaler des paramètres d'entrée (problèmes inverses), soit pour optimiser la forme d'un lopin ou d'un outil (optimisation de forme). Elles permettent donc d'améliorer le caractère prédictif des logiciels de simulation numérique ainsi que d'optimiser les procédés de mise en forme et les essais mécaniques. Même si nous nous intéressons principalement aux problèmes inverses dans ce manuscrit, les méthodes étudiées et développées sont la plupart du temps utilisables pour les problèmes d'optimisation de forme.
En définitive, le présent travail a pour objectif de donner des solutions à des problèmes liés à :

- la prise en compte de l'écoulement complexe de matière lors de l'analyse d'essais mécaniques
- l'identification de paramètres (mécaniques, thermiques, microstructuraux, etc.)
- l'optimisation de forme

1.1 Ecoulements complexes des matériaux lors d'essais mécaniques

Les essais mécaniques que l'on pratique dans le domaine de la mise en forme sont caractérisés par des déformations importantes. Il est alors fréquent que l'écoulement de matière soit hétérogène à cause :

- de la géométrie de l'outillage ou de la pièce (essai de bipoinçonnement),
- du frottement entre l'outil et la pièce,
- de l'auto-échauffement (essais pratiqués à vitesse de déformation importante) et des gradients de températures,
- du comportement complexe de la matière (matériaux anisotropes, écrouissage cinématique, etc.).

La prise en compte de ces phénomènes dans l'analyse des essais ne peut généralement pas se faire en utilisant des modèles analytiques modélisant l'écoulement de matière. Ainsi, l'utilisation de modèles éléments finis donnant une approximation très fine de l'état thermo-mécanique de la matière au cours de ces essais présente un grand intérêt. Lorsque l'analyse de l'essai vise à identifier un certain nombre de paramètres d'entrée du logiciel de simulation numérique (paramètres de comportement, de frottement, thermiques, …), l'analyse nécessite alors la connexion d'un module d'analyse inverse basé sur une méthode d'optimisation.

1.1.1 Prise en compte de la géométrie de l'outillage et de la pièce

Un certain nombre d'essais mécaniques présentent un écoulement de matière relativement complexe en raison même de la géométrie des échantillons à caractériser et/ou des outils. L'exemple de l'essai de bipoinçonnement illustre bien cette problématique. Cet essai consiste en l'écrasement d'un lopin parallélépipédique plan entre deux mors eux aussi parallélépipédiques (Figure 1). La géométrie même du montage expérimental fait que l'écoulement est non seulement hétérogène, mais aussi tridimensionnel à cause de l'écoulement latéral de matière.

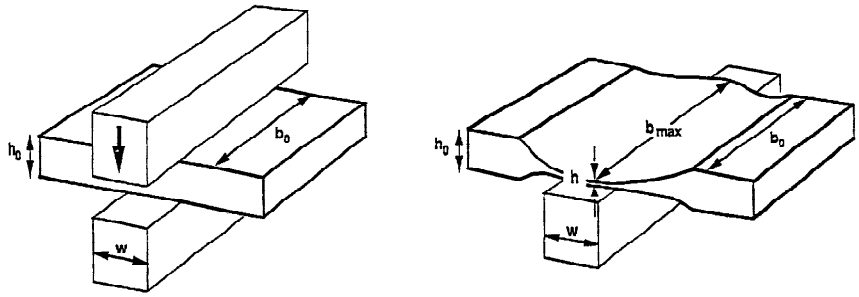


Figure 1 : géométrie de l'essai de bipoinçonnement

Nous savons que la mesure de l'effort au cours de cet essai contient de l'information sur la rhéologie du matériau ainsi que sur le frottement entre l'outil et la pièce. L'exploitation de cette information est un problème inverse qui a intéressé un certain nombre d'auteurs. Par exemple, Gelin et Ghouati (1996) identifient les paramètres d'une loi de comportement élasto-viscoplastique d'un alliage d'aluminium en couplant une méthode inverse avec un solveur éléments finis 2D. L'écoulement latéral de matière est pris en compte par un modèle analytique et le frottement est supposé connu. Szeliga

et al. (2002) proposent un autre modèle analytique pour prendre en compte l'écoulement latéral de matière dans leur modèle éléments finis 2D. Le coefficient de frottement est identifié indépendamment grâce à des essais de compression d'anneaux. Le développement d'une méthode inverse couplée avec un modèle éléments finis 3D devrait permettre une analyse très précise de cet essai. De plus, des notions de quantité d'information et d' 'identifiabilité' d'un modèle sont nécessaires pour pouvoir exploiter toute l'information contenue dans l'essai de bipoinçonnement en terme de rhéologie et de frottement.
Outre la géométrie de l'essai, l'apparition d'instabilités peut aussi être à l'origine d'écoulements hétérogènes. Nous pouvons citer les travaux de Mahnken et Stein (1997) qui simulent le phénomène de striction localisée au cours d'essais de traction avec une méthode d'éléments finis 2D. Les auteurs, grâce à leur module d'analyse inverse, identifient les paramètres d'une loi de comportement élasto-viscoplastique pour un acier. Ce type d'approche permet d'analyser des essais de traction pour des déformations plus importantes qu'à l'accoutumée.

1.1.2 Prise en compte du frottement

Il est en principe possible de déterminer des coefficients de frottement par des mesures directes d'efforts tangentiels en utilisant des capteurs ou bien des tribomètres (Boyer (2001)). Comme pour les essais rhéologiques, il est important de se rapprocher le plus possible des conditions d'utilisation en industrie. Or, il peut être délicat et même impossible d'effectuer des mesures directes lorsque la pression de contact entre l'outil et la pièce est trop importante. L'utilisation de méthodes inverses peut donc se révéler utile pour la détermination de coefficients de frottement. Par exemple, Ben Abdallah et Bonnet (2000) identifient la contrainte de contact entre un poinçon et un massif élastique semi-infini afin de caractériser le frottement entre les deux pièces à partir de mesures de déplacements autour du poinçon. Nous pouvons citer aussi les travaux de Massoni et al. (2002), qui, à partir de la mesure du bombé d'une éprouvette et de l'effort d'écrasement au cours d'un essai de compression uniaxiale sur un cylindre, effectuent une identification simultanée des coefficients de comportement et de frottement.
Nous avons vu que le frottement joue un rôle dans l'essai de bipoinçonnement. Plus généralement, le frottement est un effet relativement délicat à prendre en compte dans des modèles analytiques d'essais mécaniques. Dans les essais de compression, le frottement est à l'origine de l'apparition d'un bombé sur l'éprouvette. Suivant la géométrie de l'éprouvette (plus ou moins élancée), le frottement peut alors jouer un effet parasite au cours de l'essai. M. Pietrzyk (2002) analyse des essais de compression uniaxiale sur un acier pour identifier des paramètres d'une loi viscoplastique en tenant compte des effets de frottement entre la pièce et les outils. L'auteur caractérise les paramètres de plusieurs lois de comportement viscoplastiques plus ou moins complexes qui peuvent prendre en compte des changements de phases ou de microstructure, le coefficient de frottement étant considéré connu. Faurholdt (2000) identifie des coefficients de lois de comportement et de frottement à partir de mesures d'efforts au cours d'un essai de compression. Bien qu'il soit connu que la sensibilité de l'effort par rapport au coefficient de frottement est fortement dépendante de la géométrie des éprouvettes, l'auteur ne donne aucune indication sur la qualité de la caractérisation du frottement ou bien sur les effets croisés que l'on peut avoir entre les termes de frottement et de comportement. De manière générale, il est peu fait mention dans la littérature de l'influence de la valeur du coefficient de frottement sur les résultats de l'identification des paramètres rhéologiques. Or, c'est bien pour prendre en compte les

effets de frottement que les méthodes inverses ont été initialement introduites dans le cadre de l'analyse des essais de compression. Nous pouvons citer toutefois les travaux de Diot et al. (2003), qui s'affranchissent du frottement pour un essai de compression dynamique en utilisant des géométries d'éprouvettes pour lesquelles le frottement est très faible. Les auteurs, qui utilisent une méthode inverse, vérifient a posteriori que le résultat de l'analyse rhéologique reste inchangée quelle que soit la valeur du coefficient de frottement.
Dans le cadre de ce travail, nous cherchons non seulement à utiliser une méthode inverse pour identifier des paramètres de lois de comportement, mais aussi à déterminer quel degré de confiance nous pouvons accorder à cette identification, sachant que l'on a une incertitude sur les coefficients de frottement.
Le frottement est fréquemment un effet parasite lors de l'identification de paramètres rhéologiques. Comme dans l'essai de bipoinçonnement, il arrive que les effets de comportement et de frottement soient intimement liés. Le développement de critères permettant de quantifier à quel point ces effets sont liés est donc nécessaire. Un autre défi, lié aux méthodes inverses, est le développement de méthodologies permettant la conception optimale d'expériences en terme de géométries d'échantillons et de conditions opératoires. Le caractère discriminant des effets de frottement et de comportement peut ainsi être vu comme un critère à optimiser pour un essai donné.

1.1.3 Prise en compte de l'auto-échauffement

La localisation de la déformation peut être causée, lors d'essais à vitesse de déformation élevée, par l'auto-échauffement de la matière. Pour un essai adiabatique sur un métal, l'auto-échauffement est de l'ordre de :

$$\Delta T \approx \frac{r\sigma\varepsilon}{\rho c_p} \qquad (1)$$

où ΔT est la variation de température due à l'auto-échauffement, r est un rapport de rendement métallurgique compris entre 0.8 et 0.97, σ la contrainte d'écoulement du matériau, ε la déformation plastique, ρ la densité et c_p la chaleur massique à pression constante. Ainsi, lorsqu'un essai est effectué à grande vitesse, les échanges de chaleur avec l'extérieur pouvant être négligés, il est nécessaire de prendre en compte l'auto-échauffement. L'importance de ce phénomène a été démontrée par Gavrus et al. (1999) pour l'essai de torsion. En effet, cet essai permet d'atteindre des vitesses de déformation ainsi que des déformations importantes. De plus, l'écoulement de matière au cours de cet essai étant hétérogène, l'auto-échauffement n'est pas uniforme. Dans ce cas, l'utilisation d'une méthode inverse couplée avec un code éléments finis se révèle très utile. De manière générale, peu d'auteurs prennent en compte l'auto-échauffement, considérant que leurs essais ne sont pas adiabatiques ou que le comportement du matériau n'est pas thermo-dépendant.
La prise en compte de l'auto-échauffement dans les essais mécaniques ajoute un degré de complexité aux problèmes inverses. Il est néanmoins important de pouvoir le modéliser pour certains essais.

1.1.4 Prise en compte de comportements mécaniques complexes

La modélisation du comportement mécanique des métaux peut s'avérer très complexe, tout particulièrement en grande déformation. Par exemple, il est bien connu que les tôles

métalliques obtenues par laminage présentent fréquemment un comportement anisotrope : dans ces tôles, l'écoulement de matière sera supérieur dans certaines directions à celui dans d'autres. Ce type de comportement justifie l'utilisation de modèles tridimensionnels pour analyser des essais a priori bidimensionnels mais révélant le caractère tridimensionnel de l'écoulement réel du matériau. L'exemple de la simulation par éléments finis de la compression uniaxiale d'un cylindre présentant un comportement anisotrope est illustré par la figure 2. Dans cet exemple, l'éprouvette initialement de section circulaire, tend à s'ovaliser du fait du comportement anisotrope du matériau.

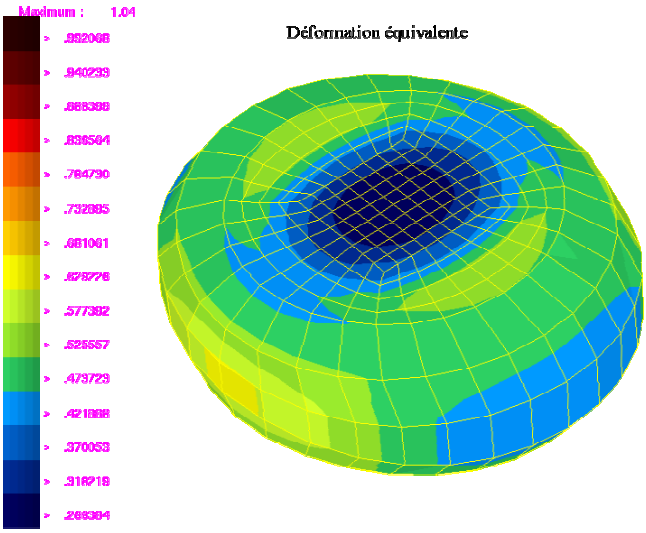


Figure 2 : exemple de simulation d'un essai de compression d'un cylindre avec une loi de comportement anisotrope (Logé (1999)).

A la lumière de cet exemple, on comprend que le comportement d'un matériau peut avoir une influence sur la géométrie d'une éprouvette au cours d'un essai. Ainsi, des mesures de géométries peuvent a priori être utilisées pour caractériser des métaux.
Le caractère anisotrope d'un métal peut aussi être caractérisé à partir de mesures de contraintes. Par exemple, Gavrus et Fancillette (2003) identifient les paramètres d'un critère de plasticité de Hill anisotrope à partir de mesures d'efforts effectuées au cours d'un essai de compression appelé 'Chanel die'. Les auteurs utilisent un modèle analytique afin de relier l'effort à la contrainte.
Il existe d'autres types de comportements complexes. Par exemple, Mahnken et Stein (1995) ont appliqué leur modèle inverse à l'identification des paramètres d'une loi de comportement modélisant l'écrouissage cinématique à partir d'essais cycliques de traction-compression afin de modéliser l'effet Bauschinger. Ce type de comportement, à l'instar de l'anisotropie, est très difficile à prendre en compte analytiquement dans l'analyse d'un essai mécanique.
Aussi complexes soient-ils, les comportements décrits ci-dessus sont bien sûr caractéristiques d'un état métallurgique du matériau étudié. Par exemple, l'anisotropie peut-être décrite en terme de métallurgie structurale, via les mécanismes élémentaires de la déformation plastique. La modélisation de ces mécanismes permet en plus de développer des lois de comportement pour lesquelles l'anisotropie est évolutive. D'autres lois de comportement sont plutôt basée sur des éléments de métallurgie physique qui prennent en compte la densité de dislocations ou bien des phénomènes comme la recristallisation ou la restauration. De même que l'on peut envisager

l'utilisation de modèles d'anisotropie évolutive, ces lois sont alors dépendantes de variables physiques internes régies par des lois d'évolution (densité de dislocations, fraction recristallisée, etc.). Ainsi, il existe de nombreuses lois rhéologiques, dont les paramètres peuvent être nombreux et difficiles à identifier.
Même si dans notre étude nous nous sommes intéressés à un nombre restreint de lois rhéologiques, il est nécessaire de développer une méthode permettant, à plus ou moins long terme, d'identifier des paramètres de modèles très complexes, prenant en compte des phénomènes physiques, basés sur des modèles micro-macro ou sur l'évolution de variables internes. De plus, l'utilisation de lois anisotropes met en lumière l'intérêt de l'utilisation d'un modèle direct 3D. Enfin, l'identification de lois physiques pourrait nécessiter l'utilisation d'observations métallurgiques pour l'analyse inverse. Notre méthode devra donc être suffisamment flexible pour permettre de changer de données expérimentales à recaler sans que l'utilisateur ait à faire de modifications majeures dans le code source.

1.1.5 Conception de nouveaux essais

Grâce au développement conjoint de nouvelles techniques de mesure, l'approche inverse a permis le dépouillement de nouveaux essais, 'non-classiques', qui font intervenir des déformations non homogènes et qui ne peuvent être en aucune façon dépouillés de façon analytique. En contrepartie, ces essais ont souvent l'avantage de contenir une grande quantité d'information sur le comportement du matériau étudié. Par exemple, Meuwissen et al. (1998) analysent des essais de traction d'éprouvettes planes aux géométries non-conventionnelles (figure 3) grâce à un système d'analyse d'images par corrélation. C'est l'évolution du champ de déformation au cours du temps qui est utilisée pour caractériser le comportement anisotrope d'un métal.

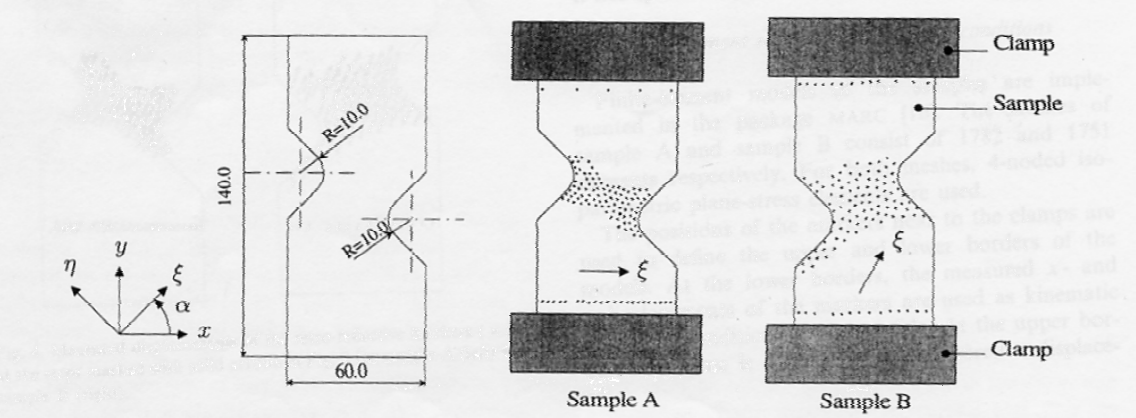


Fig. 2. Definition of α, the angle from the global x-direction to the rolling direction (ξ) of the plate, characteristic dimensions of the samples and positions of the retro-reflective markers on both samples.

Figure 3 : éprouvettes de traction non-classiques (Meuwissen et al. (1998))

Ainsi, pour les essais mécaniques, la complexité de l'écoulement n'est plus un frein à l'obtention de données, et ceci grâce aux méthodes inverses. Encore faut-il être en mesure de concevoir un essai qui contienne suffisamment d'information sur les paramètres que l'on cherche à identifier. Nombre d'auteurs travaillant sur les problèmes inverses en thermique décrivent des méthodes objectives de conception d'essais. Ce domaine, appelé 'optimal experiment design', est utilisé par Emery et Nenarokomov (1998) pour placer correctement des thermocouples afin d'identifier un flux de chaleur entre deux métaux. Les auteurs montrent qu'il existe une configuration optimale, qui

permet d'exploiter un maximum d'information sur le flux à identifier. L'étude est effectuée à partir d'une analyse de sensibilité. Cet exemple montre que l'analyse de sensibilité peut être utilisée comme un outil d'aide à la conception d'expériences.
En définitive, notre travail devra apporter une contribution à l'analyse de nouveaux essais ainsi qu'à la conception de plans d'expérience riches en information.

1.2 Objectifs du présent travail

Les quelques exemples présentés ci-dessus illustrent les exigences que nous nous sommes données pour effectuer cette étude. Ils montrent que l'analyse d'essais mécaniques dans le domaine de la mise en forme doit souvent prendre en compte des écoulements de matière complexes et/ou tridimensionnels proches des écoulements réels. Le développement d'une méthode inverse couplée avec un logiciel éléments finis 3D semble être en mesure de répondre à cette exigence. Notre étude a principalement pour objectif de développer une telle méthode afin de pouvoir identifier les paramètres de lois de comportement relativement complexes (anisotropes, dépendantes de nombreux paramètres) à partir de l'analyse d'essais bidimensionnels ou tridimensionnels.
Nous avons également développé une méthode d'analyse de sensibilité des résultats d'essais aux caractéristiques du matériau, et démontré l'utilité de telles méthodes dans la conception de plans d'expérience ou la détermination de la stabilité des méthodes inverses. On peut ainsi viser, par exemple, la quantification des effets parasites dus au frottement lors de l'analyse rhéologique d'essais de compression.
Enfin, même si nous nous sommes surtout intéressés à l'analyse d'essais mécaniques, cette étude doit pouvoir être replacée dans un contexte plus général. En effet, des thématiques telles que l'optimisation de forme, l'identification de paramètres thermiques, tribologiques, métallurgiques sont des sujets de recherche au CEMEF depuis quelques années qui s'appuient sur ces mêmes développements. La majorité des méthodes étudiées et développées dans notre travail devront donc apporter une contribution à l'analyse de ce type de problème.

1.3 Bibliographie

J. Ben Abdallah, M. Bonnet, Une approche non destructive pour l'identification de contraintes de contact, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 2, 328 (2000) 525-529.

S. Diot, A. Gavrus, D. Guines, E. Ragneau, Identification du comportement d'un acier en compression : du quasi-statique au dynamique, Mécanique et Industrie, 4 (2003) 519-524.

A. F. Emery, A. V. Nenarokomov, Optimal experiment design, Measurement Science and Technology , 9 (1998) 864-876.

T. G. Faurholdt, Inverse modelling of constitutive parameters for elastoplastic problems, Journal of strain analysis, 35,6 (2000) 471-477.

A. Gavrus, H. Francillette, Identification of anisotropic Hill criteria from the channel die compression test. Application to a normal anisotropy of zirconium 702α, Journal de physique IV, 105 (2003) 11-18

A. Gavrus, E. Massoni, J.L. Chenot, The rheological parameter identification formulated as an inverse finite element problem, Inverse Problems in Engineering, 7 (1999) 1-41.

J. C. Gelin, O. Ghouati, An inverse solution procedure for material parameters identification in large plastic deformation, Communications in Numerical Methods in Engineering, 12 (1996) 161-173.

R. Logé, Influence des conditions thermomécaniques et de la microstructure sur les évolutions de texture cristallographique du zircaloy-4 en mise en forme à chaud, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef,1999.

E. Massoni, B. Boyer, R. Forestier, Inverse analysis of thermomechanical upsetting tests using gradient method with semi-analytical derivatives, International journal of thermal sciences, 41 (2002) 557-563.

R. Mahnken, E. Stein, Parameter identification for viscoplastic models based on analytical derivatives of a least-square functional and stability investigations, International Journal of Plasticity, 12, 4 (1996) 451-479.

R. Mahnken, E. Stein, Parameter identification for finite deformation elasto-plasticity in principal directions, Computational Methods in Applied Mechanical Engineering, 147 (1997) 17-39.

M. Meuwissen, C. Oomens, F. Baaijens, R. Petterson, J. Janssen, Determination of the elasto-plastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method, Journal of Material Processing Technology, 75 (1998) 204-211.

M. Pietrzyk, Through-process modelling of microstructure evolution in hot forming of steels, Journal of Material Processing Technologies, 5887 (2002) 1-10.

D. Szeliga, P. Matuszyk, R. Kuziak, M. Pietrzyk, Identification of rheological parameters, Journal of Materials Processing Technologies, 125-126 (2002) 150-154.

Chapitre 2

Identification de paramètres par méthode de moindres carrés

2.1 Introduction

Nous nous proposons dans ce chapitre de faire une étude bibliographique des différentes méthodes numériques applicables à l'identification de paramètres par analyse inverse. Le but des méthodes inverses est de déterminer des grandeurs difficilement mesurables à partir de grandeurs facilement observables. Leur champ d'application est très vaste et faire une étude bibliographique représentative de cette diversité est difficile. En effet, les problèmes inverses intéressent aussi bien les thermiciens, les mathématiciens, les statisticiens, les géophysiciens, les mécaniciens, les ingénieurs, les électroniciens, les économétriciens, etc. Il est donc important d'arriver à faire une classification des différentes méthodes inverses existantes afin de savoir laquelle appliquer au problème qui nous intéresse. De manière générale, on peut dire qu'un problème inverse se réduit à l'extraction du maximum d'information contenue dans des observations d'un système physique (Tarantola et Valette (1982)). Les méthodes inverses peuvent être divisées en deux grandes classes :

- l'estimation de fonctions,
- l'identification de paramètres.

Ces deux classes de problèmes présentent des instabilités de natures différentes. Alors que les problèmes d'identification de fonctions sont souvent mal posés, les problèmes d'identification de paramètres sont rendus délicats par les effets de corrélation entre les paramètres (Beck et Woodbury (1998)).
Les problèmes inverses, contrairement aux problèmes directs ou à d'autres problèmes d'optimisation (optimisation de forme par exemple) doivent intégrer des données expérimentales. Il est nécessaire dans ce cas d'avoir une idée du degré de confiance que l'on accorde aux mesures expérimentales et de connaître la façon dont une erreur de mesure affecte les valeurs des paramètres identifiés.
Même si certains auteurs (Tarantola (1987)) utilisent des normes L^1 ou bien L^∞, les problèmes inverses sont très fréquemment exprimés sous forme d'un problème d'optimisation au sens des moindres carrés. Dans ce premier chapitre, le lien entre problèmes inverses et problèmes de moindres carrés est fait. En un deuxième temps, différentes méthodes d'optimisation sont présentées et discutées. Il est important, lorsque l'on développe une méthode numérique, d'être capable de faire une analyse de stabilité. Afin de comprendre les sources d'instabilité des problèmes d'identification de paramètres, quelques modèles simples sont présentés et quelques critères de stabilité sont décrits. Enfin, la dernière partie de ce premier chapitre est dédiée à la description de plusieurs méthodes de stabilisation.

2.2 Problèmes inverses et problèmes de moindres carrés

Dans cette partie, deux approches différentes sont présentées pour relier le problème d'identification de paramètres à un problème de moindres carrés. Dans l'approche de type **déterministe**, le problème inverse est exprimé sous une forme relaxée, et l'on cherche juste à minimiser une distance entre les données issues d'un modèle et les mesures expérimentales. Dans une autre approche, de type **statistique**, le problème inverse est vu comme la recherche du jeu de paramètres qui maximise la probabilité de réaliser la mesure expérimentale.

2.2.1 Point de vue déterministe

Définition d'un problème d'identification de paramètres : Soit M un vecteur de $\mathrm{IR}^{\mathrm{NbMes}}$ contenant NbMes observations d'un système physique et F une application de $\mathrm{IR}^{\mathrm{Npar}}$ dans $\mathrm{IR}^{\mathrm{NbMes}}$. On suppose que F est obtenue à partir d'une modélisation du système physique observé. Le problème inverse a pour but de trouver le jeu de paramètres λ appartenant à $\mathrm{IR}^{\mathrm{Npar}}$ tel que $\mathrm{F}(\lambda)=\mathrm{M}$.

Remarques :

- Par opposition au problème inverse, le calcul de $\mathrm{F}(\lambda)$ est appelé problème direct et peut être par exemple issu de la résolution d'un système d'équations algébriques, d'un système d'équations différentielles ordinaires ou bien d'un système d'équations aux dérivées partielles.

- Si l'opérateur F est inversible, la résolution du problème inverse correspond au calcul de l'inverse de F (Figure 4).

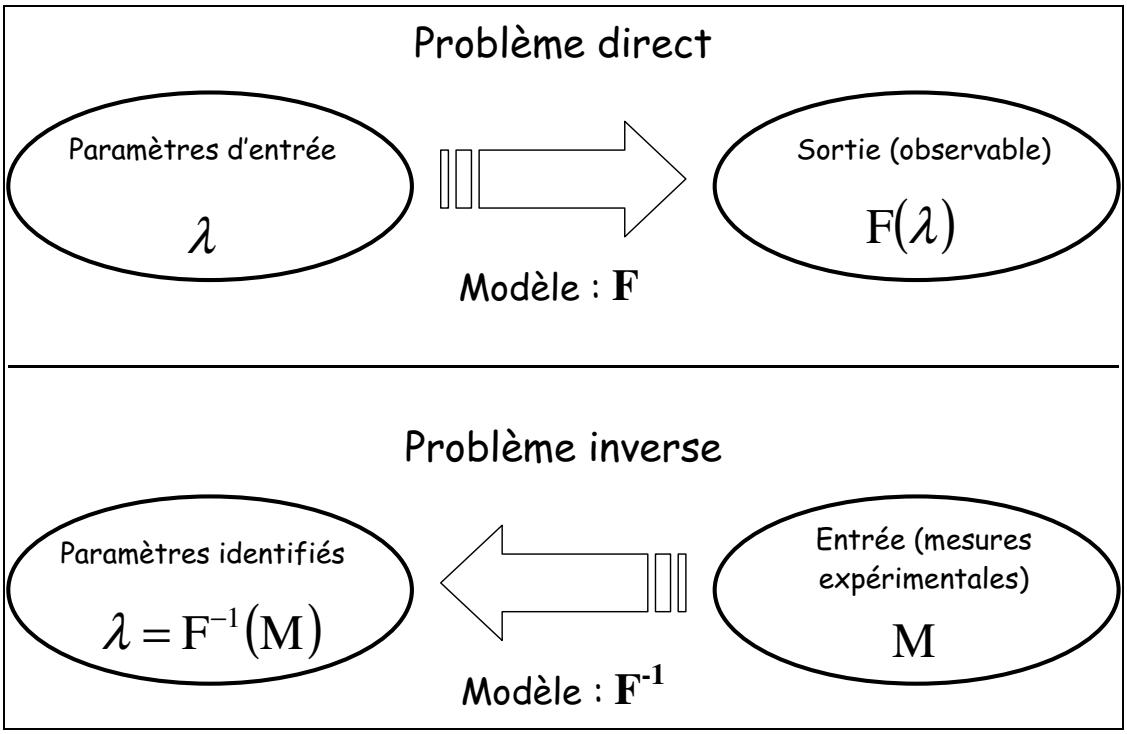


Figure 4 : entrées et sorties des problèmes direct et inverse

La résolution du problème inverse tel que défini ci-dessus implique donc que l'application F soit bijective. Une condition nécessaire de bijectivité de l'application F est que NbMes=Npar. Généralement, on a plutôt NbMes>>Npar en identification de paramètres. Donc, une condition nécessaire d'existence et d'unicité de la solution du problème d'identification de paramètres est que $M \in \mathrm{Im}(F)$. En pratique, lorsque la mesure expérimentale est entachée d'erreurs de mesure et lorsque l'erreur de modélisation est non négligeable, il est fréquent que $M \notin \mathrm{Im}(F)$.
Les problèmes d'identification de paramètres sont généralement exprimés sous la forme d'un problème d'optimisation (au sens des moindres carrés) afin de ne pas avoir à considérer l'inverse de l'opérateur F :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \lambda^{opt} \in \mathrm{IR}^{NPar} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \phi(\lambda^{opt}) = \min_{\lambda \in \mathrm{IR}^{NPar}} (\phi(\lambda)) \\ \phi(\lambda) = \|F(\lambda) - M\|_W^2 = (F(\lambda) - M)^T W (F(\lambda) - M) \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

La matrice W est une matrice diagonale contenant des poids affectés à chaque mesure. La fonction ϕ est appelée **fonction coût** ou **fonction objectif**. En fait, le problème d'identification est relaxé, car la condition $F(\lambda)$=M n'est plus imposée. Le problème d'optimisation est de trouver λ^{opt} tel que $F(\lambda^{opt})$ soit égal à la projection orthogonale de M sur Im(F) au sens de la métrique définie par W.

2.2.2 Point de vue statistique

La présence d'un bruit de mesure aléatoire peut être une des raisons de la non appartenance de M à l'image de F. Soit e_i la variable aléatoire 'bruit de mesure' définie par :

$$e_i = F(\lambda)_i - M_i \qquad i \in [1, NbMes]_{IN} \tag{3}$$

Supposons que le bruit de mesure puisse être modélisé par une loi normale de moyenne nulle et de matrice de covariance V_M. Si la matrice V_M est symétrique définie positive, la densité de probabilité f associée au vecteur e s'exprime alors de la manière suivante (Beck et Arnold (1977)) :

$$f(e) = \frac{1}{(2\pi)^{NbMes} \sqrt{\det(V_M)}} \exp\left(-\frac{1}{2} e^T V_M^{-1} e \right) \tag{4}$$

La densité de probabilité de la variable aléatoire M sachant λ s'écrit donc :

$$f(M|\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{NbMes} \sqrt{\det(V_M)}} \exp\left(-\frac{1}{2} (F(\lambda) - M)^T V_M^{-1} (F(\lambda) - M) \right) \tag{5}$$

Il est possible d'estimer la valeur de λ en utilisant l'estimateur du maximum de vraisemblance. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de λ (noté

λ^{vrais}) revient à chercher la valeur de λ telle que f(M|λ) soit maximale pour la valeur observée de M (Cowan (1998)). En d'autres termes, on cherche à trouver le jeu de paramètres tel que l'observation M soit la plus probable (Figure 5).

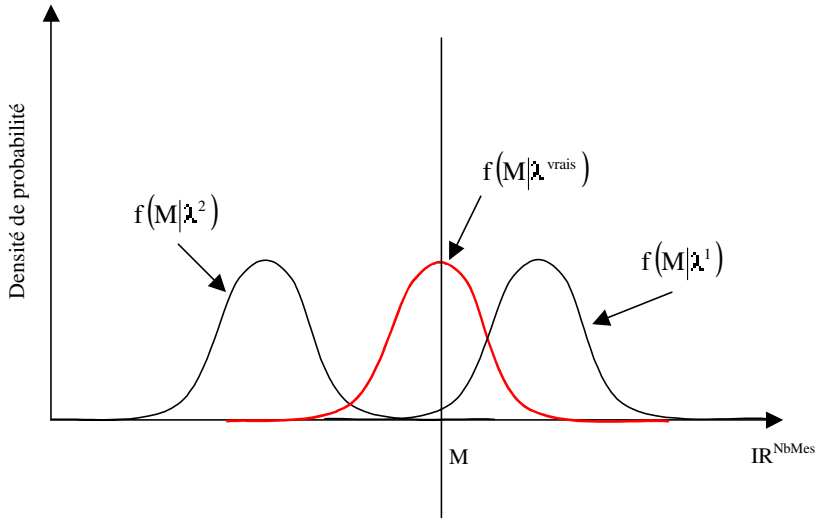


Figure 5 : comparaison entre la densité de probabilité du bruit de mesure obtenue avec deux jeux de paramètres quelconques (λ^1, λ^2) avec le maximum de vraisemblance λ^{vrais}

Généralement, plutôt que de maximiser f(M|λ), on maximise la fonction ln(f(M|λ)) par rapport à λ :

$$\ln\left(f\left(M|\lambda\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{(2\pi)^{NbMes}\sqrt{\det\left(V_M\right)}}\right) + \left(-\frac{1}{2}\left(F(\lambda)-M\right)^T V_M^{-1}\left(F(\lambda)-M\right)\right) \qquad (6)$$

La recherche du maximum de vraisemblance peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \lambda^{vrais} \in IR^{NPar} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \phi\left(\lambda^{vrais}\right) = \min\limits_{\lambda \in IR^{NPar}}\left(\phi(\lambda)\right) \\ \phi(\lambda) = \left(F(\lambda)-M\right)^T V_M^{-1}\left(F(\lambda)-M\right) \end{cases} \end{aligned} \qquad (7)$$

Finalement, si les variables aléatoires e_i sont indépendantes, la matrice V_M est diagonale et le problème (7) a la forme du problème (2). Ainsi, il sera possible d'étudier les propriétés statistiques des paramètres λ dans ce cas particulier une fois le problème d'optimisation résolu. Cette approche permet de donner une expression objective de la matrice de pondération W du problème d'optimisation (2).

Remarque : Dans certains cas, le bruit de mesure peut être modélisé par d'autres densités de probabilité. Le problème de minimisation associé à la recherche du maximum de vraisemblance ne sera alors pas un problème de moindres carrés (Tarantola (1987)).

2.3 Méthodes de minimisation de la fonction coût

Le problème direct est, la plupart du temps, un problème non-linéaire par rapport aux paramètres à déterminer, de sorte que le problème d'optimisation (2) doit être résolu par une méthode itérative. Il existe un grand nombre d'algorithmes itératifs de minimisation qu'il est possible de classer dans deux grandes catégories : les méthodes d'ordre zéro et les méthodes à direction de descente. Dans ce paragraphe sont passées en revue les plus connues des méthodes d'ordre 0 et des méthodes à direction de descente. Les taux de convergence et la nature des solutions obtenues par ces diverses méthodes sont discutés.

2.3.1 Méthodes d'ordre zéro

Les méthodes d'ordre zéro sont des méthodes qui ne nécessitent pas le calcul du gradient de la fonction coût. Leur implémentation ne requiert pas forcément une bonne connaissance du modèle direct, mais elles sont parfois difficiles à paramétrer. Par contre, elles peuvent s'avérer utiles pour la recherche de minima de fonctions non différentiables, pour 'sortir' de minima locaux ou même pour la recherche de minima globaux.

2.3.1.1 L'algorithme du simplexe

Cette méthode a été introduite par Nelder et Mead en 1965 (Nealder et Mead (1965)). Supposons que la fonction coût ϕ ait NPar paramètres. On définit un simplexe comme étant un polygone de volume non nul contenant NPar+1 sommets. La méthode du simplexe a pour but de générer une suite de simplexes de $\mathrm{IR}^{\mathrm{NPar}}$ dont les sommets tendent vers un minimum local. Il est à noter que cette méthode n'est pas une méthode à direction de descente et ne converge pas a priori vers le minimum local le plus proche des points initiaux. De plus, cette méthode n'utilise que des valeurs ponctuelles de la fonction coût et ne nécessite pas l'estimation du gradient de celle-ci par rapport aux paramètres à identifier. La méthode du simplexe peut donc être utilisée pour la recherche du minimum d'une fonction coût non-différentiable. Une itération de l'algorithme de Nelder-Mead est décrite ci-dessous :

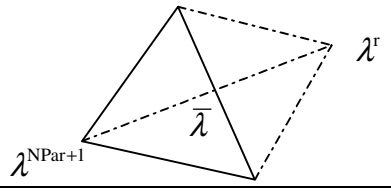
1. Classement : On classe les nœuds du simplexe courant de sorte que :

$$\phi\left(\lambda^{1}\right) \leq \phi\left(\lambda^{2}\right) \leq \ldots \leq \phi\left(\lambda^{\mathrm{NPar}+1}\right)$$

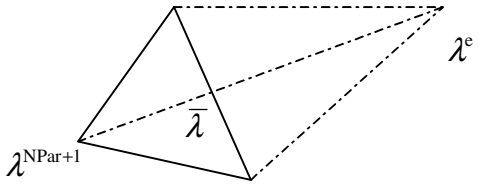
2. Réflexion : On construit la réflexion λ^{r} de $\lambda^{\mathrm{NPar}+1}$ par rapport à l'isobarycentre $\overline{\lambda}$ de $\left\{\lambda^{1}, \lambda^{3}, \ldots, \lambda^{\mathrm{NPar}}\right\}$.

$$\lambda^{\mathrm{r}} = \overline{\lambda} + \mu\left(\overline{\lambda} - \lambda^{\mathrm{NPar}+1}\right) \text{ avec } \mu \geq 0$$

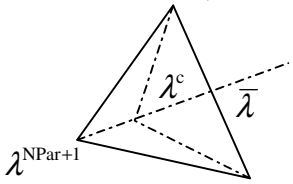
Si $\phi\left(\lambda^{1}\right) \leq \phi\left(\lambda^{\mathrm{r}}\right) < \phi\left(\lambda^{\mathrm{NPar}}\right)$, on remplace $\lambda^{\mathrm{NPar}+1}$ par λ^{r} dans le simplexe et on passe à l'itération suivante.



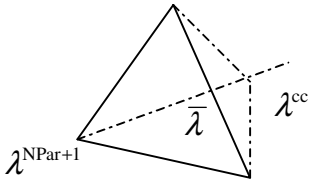
3. Expansion : Si $\phi(\lambda^r) < \phi(\lambda^1)$, on calcule $\phi(\lambda^e)$ avec $\lambda^e = \bar{\lambda} + \chi(\lambda^r - \bar{\lambda})$ et $\chi > 1$. Si $\phi(\lambda^e) < \phi(\lambda^r)$, on remplace λ^{NPar+1} par λ^e dans le simplexe et on passe à l'itération suivante. Sinon, on remplace λ^{NPar+1} par λ^r et on passe à l'itération suivante.



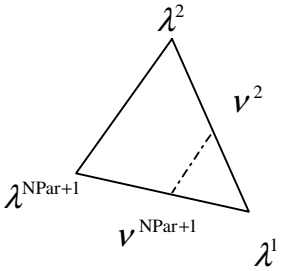
4. Contraction intérieure : Si $\phi(\lambda^{NPar}) \le \phi(\lambda^r) < \phi(\lambda^{NPar+1})$, on calcule $\phi(\lambda^c)$ avec $\lambda^c = \bar{\lambda} + \gamma(\lambda^r - \bar{\lambda})$ et $0 < \gamma < 1$. Si $\phi(\lambda^c) < \phi(\lambda^r)$, on remplace λ^{NPar+1} par λ^c dans le simplexe et on passe à l'itération suivante. Sinon, on va à l'étape 6.



5. Contraction extérieure : Si $\phi(\lambda^{NPar+1}) \le \phi(\lambda^r)$, on calcule $\phi(\lambda^{cc})$ avec $\lambda^{cc} = \bar{\lambda} - \gamma(\lambda^r - \lambda^{NPar+1})$. Si $\phi(\lambda^{cc}) < \phi(\lambda^{NPar+1})$, on remplace λ^{NPar+1} par λ^c dans le simplexe et on passe à l'itération suivante. Sinon, on va à l'étape 6.



6. Rétrécissement : On évalue la fonction coût aux NPar points $v^i = \lambda^1 + \eta(\lambda^i - \lambda^1)$ pour i=2,..Npar+1 et $0 < \eta < 1$. On choisit alors pour l'itération suivante le simplexe (non ordonné) $\{\lambda^1, v^2, ..., v^{NPar+1}\}$.



Il existe de nombreuses variantes de la méthode du simplexe qui ont pour but d'augmenter le taux de convergence de cet algorithme. Néanmoins, pour un nombre important de paramètres, le cardinal des simplexes augmente, et la méthode devient moins intéressante que les méthodes à direction de descente (Nouatin (2000)). De plus,

il est à noter que, même si généralement l'algorithme fonctionne bien, il existe des cas où la méthode ne converge pas. Des exemples de convergence vers des points non-stationnaires ont en effet été décrits dans (Mc Kinnon (1998)) dans des cas de minimisation de fonctions strictement convexes.

2.3.1.2 Les algorithmes génétiques

J. Holland (Holland (1975)) introduit en 1975 les algorithmes génétiques en s'inspirant des principes de la théorie de l'évolution et de la génétique. Le vocabulaire associé à cette famille de méthodes est en partie emprunté à ces deux disciplines. Les méthodes génétiques sont des algorithmes stochastiques, dont le but est de générer une suite d'ensembles de jeux de paramètres (populations) dont les éléments (chromosomes) tendent vers le jeu de paramètres optimal. Cette classe d'algorithmes s'appuie sur trois étapes : la *sélection*, le *croisement* et la *mutation* (Ghouati et Gelin (1998)).

On note $P^n = \{\lambda^1,...,\lambda^k\}$ une **population** de k jeux de paramètres à l'étape n de l'algorithme. On génère aléatoirement une population P^0 initiale. Suivant le type de problème résolu (combinatoire ou non par exemple), un codage décimal ou binaire est choisi pour les paramètres. Le choix du type de codage peut avoir une influence sur le taux de convergence de l'algorithme génétique.

Supposons que nous sommes à l'étape n. En un premier temps, une sous-population de k' (k'≤k) individus est générée en utilisant k'/2 fois les algorithmes de sélection, de croisement et de mutation.

- *Sélection* : deux individus ('parents') sont tirés aléatoirement dans P_n avec une loi de probabilité proportionnelle à une fonction '*fitness*' φ, qui est d'autant plus importante que la valeur de la fonction coût est faible : $\text{Prob}(\text{choisir } \lambda^i) = \varphi(\lambda^i)$.

  Par exemple, certains auteurs choisissent $\varphi(\lambda^i) = \frac{1}{\phi(\lambda^i)} \sum_{j=1}^{j=k} \phi(\lambda^j)$ où ϕ est la fonction coût introduite le problème d'optimisation (2).

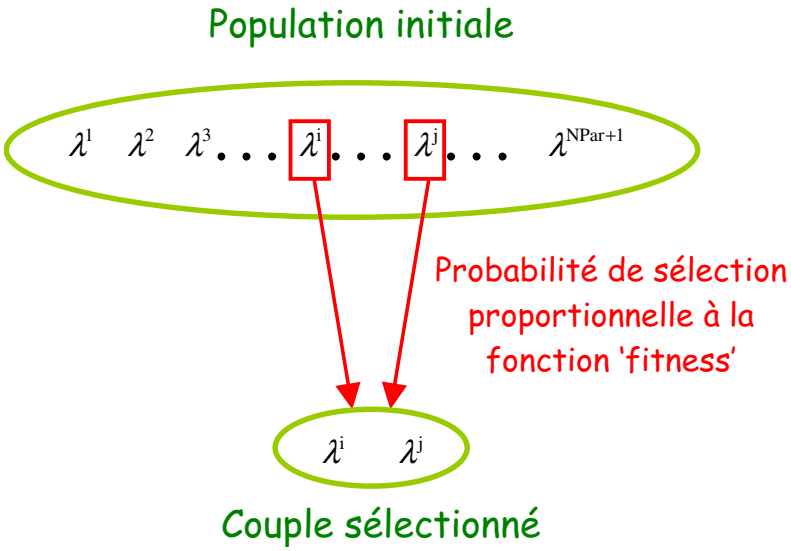


Figure 6 : étape de sélection

- *Croisement* (*crossover)* : Un individu (‘fils’) est généré à partir des deux individus précédents (en faisant une moyenne pondérée entre eux par exemple).

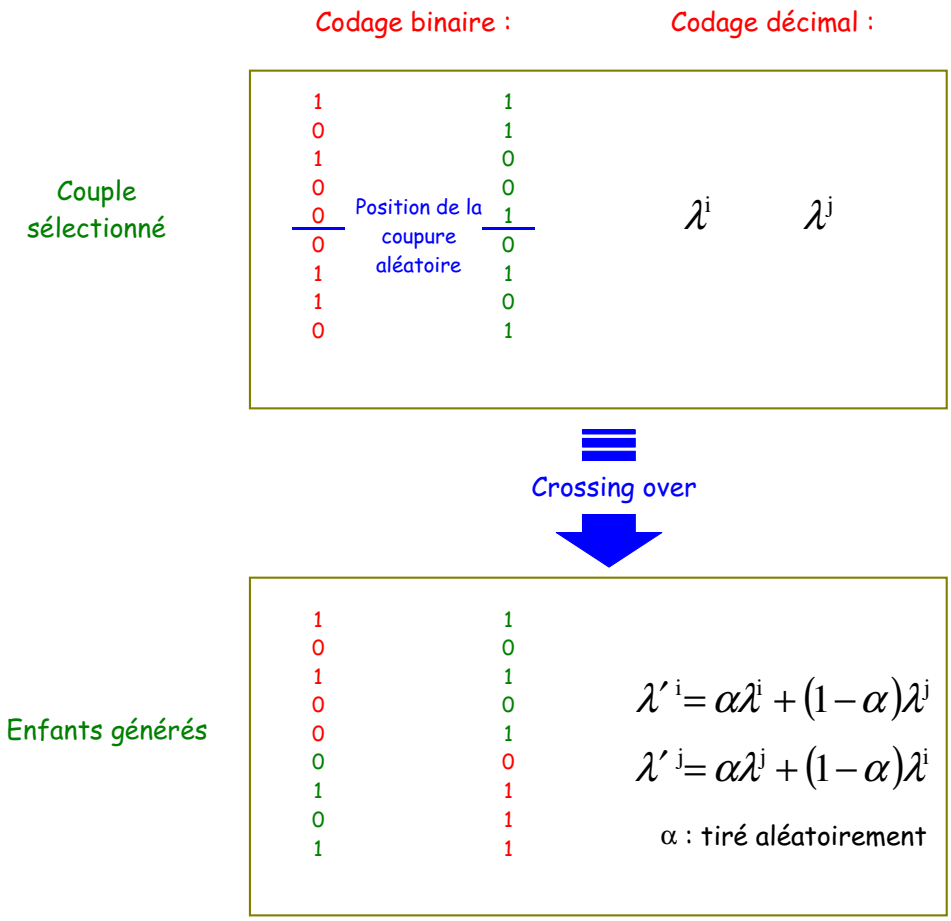


Figure 7 : exemples de crossover pour un cas avec codage binaire et pour un cas avec codage décimal

- *Mutation* : On modifie le nouvel individu de manière aléatoire (par addition d’un bruit généré par une loi normale ou uniforme par exemple).

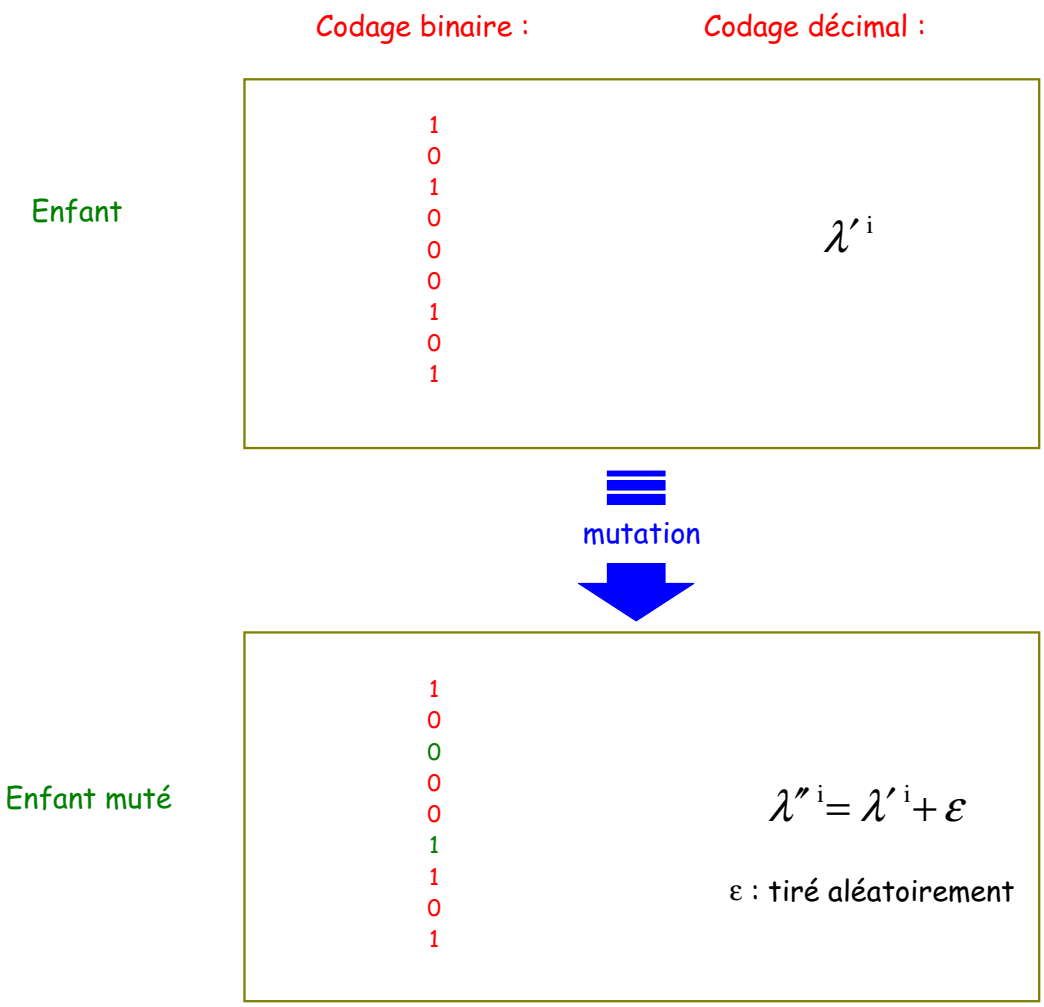


Figure 8 : exemples de mutations pour un cas avec codage binaire et pour un cas avec codage décimal

Certains algorithmes génétiques, dits '*élitistes*', complètent la sous-population générée par les meilleurs individus de la population précédente. Ce processus a pour but d'augmenter le taux de convergence de l'algorithme génétique.

La procédure décrite ci-dessus est itérée jusqu'à ce qu'un critère d'arrêt soit atteint. Il existe plusieurs types de critères d'arrêt : on peut arrêter l'algorithme lorsque les populations sont assez homogènes (on considère alors que le processus stochastique a atteint une mesure stationnaire), lorsque la fonction coût la plus basse ou la plus élevée d'une population passe sous un critère d'arrêt, etc. La Figure 9 présente le diagramme général d'un algorithme génétique.

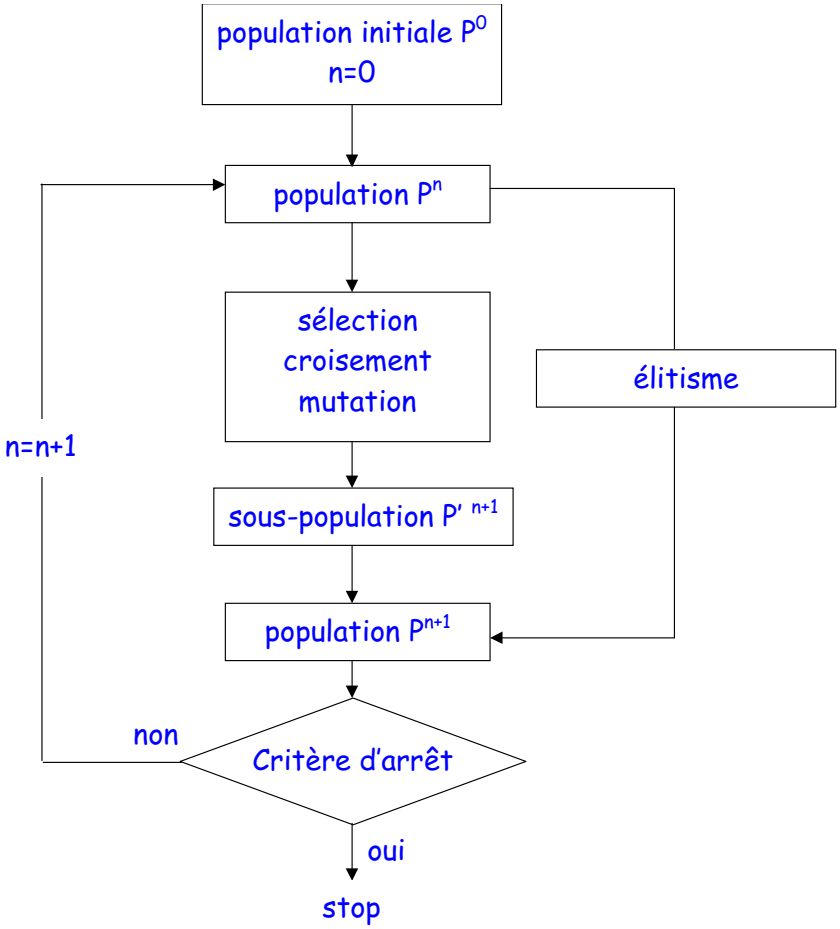


Figure 9 : diagramme général d'un algorithme génétique

Une des propriétés remarquables de ces méthodes est qu'elles convergent presque sûrement vers un optimum global sous certaines conditions. Le résultat obtenu avec un algorithme génétique ne dépend donc pas de l'initialisation de celui-ci (c'est à dire du choix de la population initiale). Par contre, elles nécessitent de nombreuses estimations de la fonction coût pour atteindre le minimum global car leur taux de convergence est généralement relativement faible. C'est pour cette raison que de nombreuses variantes de cet algorithme existent, contenant plus ou moins de paramètres à ajuster.

2.3.2 Méthodes à direction de descente

L'utilisation des méthodes à direction de descente nécessite que la fonction coût soit au moins une fois différentiable par rapport à λ. Nous supposons que c'est le cas dans la suite. Il est alors possible d'énoncer une condition nécessaire d'optimalité :

Condition nécessaire d'optimalité du premier ordre:

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{dF^T}{d\lambda}\left(F(\lambda) - M\right) = 0 \qquad (8)$$

Dans le cas où la fonction coût ϕ est deux fois différentiable, on peut énoncer une condition suffisante d'optimalité :

Condition suffisante d'optimalité du second ordre :

$$\begin{cases} \dfrac{d\phi}{d\lambda} = \dfrac{dF^T}{d\lambda}\left(F(\lambda) - M\right) = 0 \\ \dfrac{d^2\phi}{d\lambda^2} \text{ définie positive} \end{cases} \tag{9}$$

Ces méthodes ont la propriété de converger relativement rapidement vers un point stationnaire. Par contre, elles ne permettent d'atteindre qu'un minimum local. Le résultat de l'optimisation peut donc dépendre du jeu de paramètres servant à l'initialisation. Ces méthodes ont pour but d'atteindre un jeu de paramètres λ satisfaisant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre [eq. (8)].

Direction de descente : On dit que d est une *direction de descente* pour la fonction coût ϕ si : $\dfrac{d\phi^T}{d\lambda}\, d < 0$.

Si d est une direction de descente, il est évident que pour α suffisamment petit, on a $\phi(\lambda + \alpha d) < \phi(\lambda)$. Les méthodes à direction de descente sont des algorithmes qui utilisent cette notion pour minimiser la fonction coût. En voici le principe général pour un problème sans contrainte (Gilbert 1999) :

1	Tant que $\left\| \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k} \right\|_2 >$ critère d'arrêt, continuer,
2	Choix d'une direction de descente d^k,
3	Recherche linéaire : détermination d'un pas $\alpha^k > 0$ tel que $\phi(\lambda^k + \alpha^k . d^k)$ soit suffisamment petit par rapport à $\phi(\lambda^k)$.
4	$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha^k d^k$, *k=k+1*. Retour au 1

Les différentes méthodes à direction de descente diffèrent donc par le choix de la direction de descente et par le choix de la recherche linéaire. Quelques unes sont décrites dans les paragraphes qui suivent.

2.3.2.1 Plus forte pente

Il s'agit de la méthode d'ordre 1 la plus simple. C'est la méthode à direction de descente pour laquelle on choisit $d_k = -\dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}$. Elle est très simple à mettre en œuvre mais n'est pas très efficace en pratique. On constate en effet qu'elle converge rapidement loin de l'optimum et qu'elle devient très lente dans le voisinage de celui-ci. En fait, son défaut majeur est qu'elle ne prend pas en compte la courbure de la fonction coût.

2.3.2.2 Gradient conjugué

Il s'agit d'une méthode relativement proche de la méthode de la plus forte pente, pour laquelle on garde en mémoire la direction de descente précédente :

$$\begin{cases} d^1 = -\dfrac{d\phi(\lambda^1)}{d\lambda} \\ d^k = -\dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} + \beta^k d^{k-1} \qquad \forall k > 1 \end{cases} \tag{10}$$

d^k peut constituer une direction de descente pour un choix judicieux de β^k. Pour cela, on choisit β^k de sorte que :

$$\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}^T d^{k-1} = 0 \tag{11}$$

La relation (11) implique en effet que $\dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}^T d^k = -\left\| \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} \right\|_2 < 0$.

Deux méthodes de gradient conjugué sont très fréquemment citées dans la littérature :

Méthode de Fletcher et Reeves (1964) : $\beta_k = \dfrac{\left\| \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} \right\|_2}{\left\| \dfrac{d\phi(\lambda^{k-1})}{d\lambda} \right\|_2}$

Méthode de Polak et Ribière (1969) : $\beta_k = \dfrac{\left(\dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} - \dfrac{d\phi(\lambda^{k-1})}{d\lambda} \right)^T \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}}{\left\| \dfrac{d\phi(\lambda^{k-1})}{d\lambda} \right\|_2}$

2.3.2.3 Algorithme de Newton-Raphson

Pour l'algorithme de Newton-Raphson, la direction d^k est donnée par :

$$\begin{aligned} H(\lambda^k) d^k &= -\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} \\ H(\lambda^k) &= \frac{d^2\phi(\lambda^k)}{d\lambda^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Si λ^{opt} satisfait la condition suffisante d'optimalité du second ordre [eq. (9)], la matrice hessienne $H(\lambda^{opt})$ est symétrique définie positive. Donc, $H(\lambda)$ est aussi symétrique définie positive dans un voisinage de λ^{opt}. Il s'en suit que dans un voisinage de λ^{opt},

d^k est une direction de descente car $\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}^T d^k = -d^{kT} H(\lambda^k) d^k < 0$. Cette méthode, contrairement aux méthodes du premier ordre, sera plus efficace près de l'optimum que loin de celui-ci. On peut démontrer qu'elle converge quadratiquement dans un voisinage de l'optimum (Fletcher (1996)).

2.3.2.4 Méthodes de quasi-Newton

Ces algorithmes sont dérivés de l'algorithme de Newton. La direction d^k est donnée par une relation du type :

$$Q^k d^k = -\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} \tag{13}$$

La matrice Q^k doit 'approximer' $H(\lambda^k)$. La première propriété évidente à satisfaire est la 'symétrie définie positivité', afin que d^k soit une direction de descente. La deuxième propriété, moins intuitive, demandée à Q^k est la suivante :

$$Q^k(\lambda^k - \lambda^{k-1}) = \frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda} - \frac{d\phi(\lambda^{k-1})}{d\lambda} \tag{14}$$

qui garantit que Q^k se comporte comme le 'hessien moyen' sur le segment $[\lambda^{k-1}; \lambda^k]$. La méthode de Quasi-Newton la plus connue est la méthode de BFGS (Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) (Gilbert (1999)). Dans cet algorithme, les matrices Q^k et $(Q^k)^{-1}$ sont données par les relations de récurrence suivantes :

$$\begin{cases} Q^{k+1} = Q^k + \dfrac{y^k y^{kT}}{y^{kT} s^k} - \dfrac{Q^k s^k s^{kT} Q^k}{s^{kT} Q^k s^k} \\ (Q^{k+1})^{-1} = (Q^k)^{-1} + \left[I + \dfrac{(Q^k)^{-1} y^{kT} (Q^k)^{-1} y^k}{y^{kT} s^k} \right] \dfrac{s^k s^{kT}}{y^{kT} s^k} - \dfrac{s^k y^{kT} (Q^k)^{-1} + (Q^k)^{-1} y^k s^{kT}}{y^{kT} (Q^k)^{-1} y^k} \\ s^k = \lambda^{k+1} - \lambda^k \quad \text{et} \qquad y^k = \dfrac{d\phi(\lambda^{k+1})}{d\lambda^{k+1}} - \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k} \end{cases} \tag{15}$$

La matrice Q^1 est en général choisie égale à la matrice identité, si bien que lors des premières itérations, la méthode BFGS est très proche d'une méthode de plus forte pente (réputée rapide loin de l'optimum) et se rapproche de la méthode de Newton au cours des itérations (réputée rapide près de l'optimum). Malgré ces propriétés très intéressantes, cette méthode peut s'avérer assez lente pour des problèmes mal posés, et nécessiter l'ajout de paramètres de stabilisation (Barrault et Le Bris (1999)).

2.3.2.5 Algorithme de Gauss-Newton

Il s'agit d'une méthode d'optimisation très souvent employée en identification de paramètres. Cet algorithme est spécifique à la minimisation des problèmes de moindres carrés [eq. (2)]. Dans ce cas,

$$\frac{d^2\phi(\lambda)}{d\lambda^2} = 2\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} + 2\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2} W\left(F(\lambda) - M\right) \tag{16}$$

Dans la méthode de Gauss-Newton, le terme $\frac{d^2F(\lambda)}{d\lambda^2} W\left(F(\lambda) - M\right)$ est négligé. La direction de descente est alors donnée par :

$$\begin{cases} Q^k d^k = -\frac{d\phi\left(\lambda^k\right)}{d\lambda^k} \\ Q^k = 2\frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda} \end{cases} \tag{17}$$

Cette approximation est meilleure au fur et à mesure que l'on se rapproche de l'optimum. Il est à noter que la **matrice de sensibilité** $\frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}$ doit être injective pour que cette méthode converge. Sous cette hypothèse, d^k est une direction de descente ; cette condition implique qu'il est possible de discerner les influences croisées des paramètres.
Dans le cas où la méthode de Gauss-Newton est utilisée sans méthode de recherche linéaire, Fletcher (1996) démontre la propriété suivante :

$$\left\|\lambda^{k+1} - \lambda^{opt}\right\| \le 2\left\|Q^{-1}\frac{d^2F\left(\lambda^{opt}\right)}{d\lambda^2}\left(F\left(\lambda^{opt}\right) - M\right)\right\| \cdot \left\|\lambda^k - \lambda^{opt}\right\| + O\left(\left\|\lambda^k - \lambda^{opt}\right\|^2\right) \tag{18}$$

Cette relation indique que si le modèle direct est linéaire dans un voisinage du jeu de paramètre optimal ou bien si le problème de moindres carrés est un problème à faible résidu (c'est à dire que l'erreur de modélisation est faible par exemple), alors la méthode de Gauss-Newton se comporte comme la méthode de Newton et converge quadratiquement. Par contre, dans le cas d'un problème fortement non linéaire et à fort résidu, la méthode de Gauss-Newton peut ne pas converger. Il est alors indispensable d'utiliser un algorithme de recherche linéaire afin de forcer la convergence de la méthode.

2.3.2.6 Critères de recherche linéaire

La recherche linéaire a été introduite afin de forcer la convergence des méthodes à direction de descente. En effet, leur convergence vers un minimum local n'est pas assurée si l'on néglige cette étape. Les algorithmes de recherche linéaire ont été développés grâce à un résultat de Curry (1944), qui a démontré que les méthodes à direction de descente convergent vers un minimum local si l'on utilise une méthode de recherche linéaire exacte.

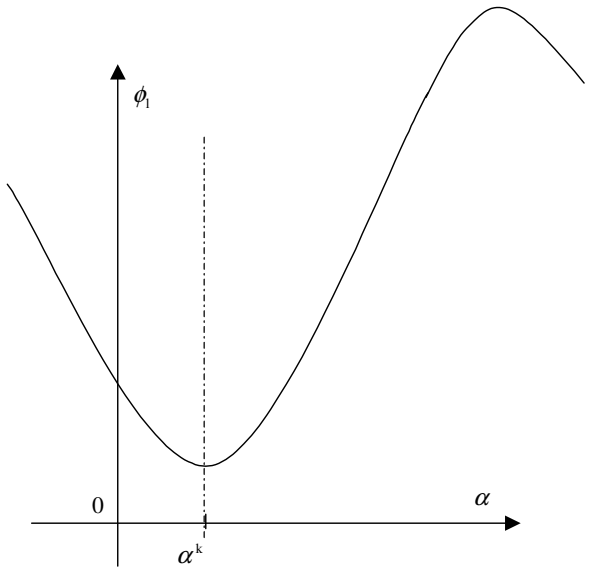


Figure 10 : pas de Curry

Une méthode de recherche linéaire exacte a pour objectif d'atteindre un paramètre α^k satisfaisant la condition de Curry (Figure 10) :

$$\begin{aligned} &\alpha^k = \underset{\alpha \in \mathrm{IR}^+}{\mathrm{Argmin}} \left(\phi_1(\alpha)\right) \\ &\text{avec } \phi_1(\alpha) = \phi(\lambda^k + \alpha \mathrm{d}^k) \end{aligned} \tag{19}$$

La détermination d'un pas de Curry est donc un problème d'optimisation unidimensionnel. L'inconvénient majeur de cette méthode est qu'il peut être extrêmement coûteux en temps de calcul de déterminer le pas de Curry. C'est pour cela qu'ont été introduits des critères de recherche linéaire plus faibles. En un premier temps, certains auteurs ont cherché à déterminer un paramètre α^k faisant décroître la fonction coût :

$$\phi(\lambda^k + \alpha^k \mathrm{d}^k) \leq \phi(\lambda^k) \tag{20}$$

Ce critère se révèle en pratique bien plus efficace que le précédent, mais aucun résultat ne peut être obtenu sur la convergence des méthodes à direction de descente couplées avec ce critère. Le problème est que l'on n'assure pas que la fonction coût décroisse de façon significative à chaque itération. C'est dans le but d'obtenir des méthodes d'optimisation plus robustes qu'à été introduit le critère d'Armijo et Goldstein (Figure 11) :

$$\begin{aligned} &\phi(\lambda^k + \alpha^k \mathrm{d}^k) \leq \phi(\lambda^k) + \omega.\alpha^k \frac{\mathrm{d}\phi(\lambda^k)}{\mathrm{d}\lambda^k}^{\mathrm{T}} \mathrm{d}^k \\ &\text{Soit} \quad \phi_1(\alpha^k) \leq \phi_1(0) + \omega.\alpha^k \frac{\mathrm{d}\phi_1}{\mathrm{d}\alpha}(0) \end{aligned} \tag{21}$$

où par définition, on pose que $\phi_1(\alpha^k) = \phi(\lambda^k + \alpha^k \mathrm{d}^k)$ et ω est une constante positive appartenant à]0 ;1/2[

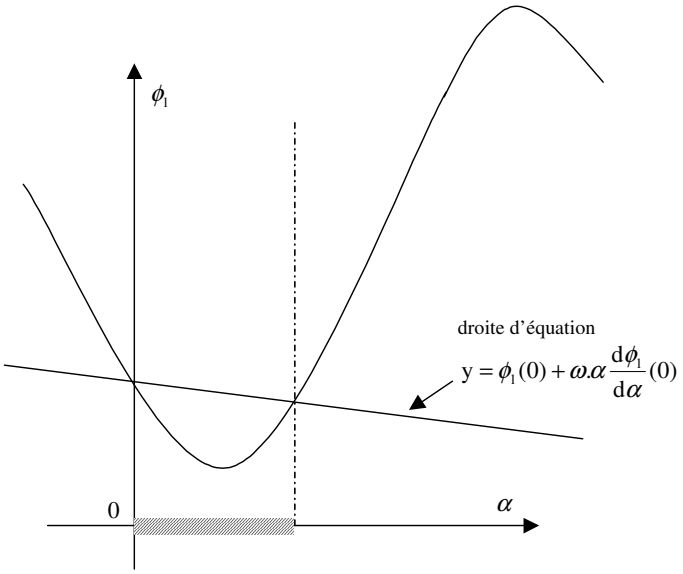


Figure 11 : ensemble des pas satisfaisant le critère d'Armijo et Golstein

L'utilisation du critère d'Armijo et de Goldstein (Gilbert (1999)) autorise l'utilisation de pas de recherche linéaire arbitrairement faible. Afin d'éviter la détermination de pas trop faibles (c'est à dire la stagnation de la méthode), on peut aussi utiliser le critère de Wolfe-Powel (Figure 12) :

$$\begin{cases} \phi_1(\alpha^k) \le \phi_1(0) + \omega.\alpha^k \dfrac{d\phi_1}{d\alpha}(0) \\ \dfrac{d\phi_1}{d\alpha}(\alpha^k) \ge \eta \dfrac{d\phi_1}{d\alpha}(0) \end{cases} \tag{22}$$

Il s'agit d'un critère d'Armijo et Goldstein auquel a été rajoutée une condition sur le gradient de la fonction coût dans la direction de recherche. Cette dernière condition interdit toute valeur de α^k dans un voisinage de zéro.

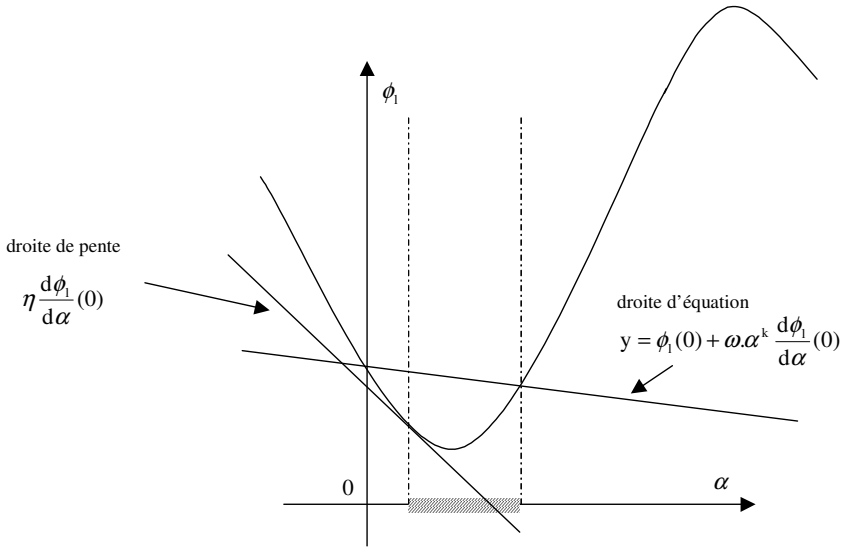


Figure 12 : ensemble des pas satisfaisant le critère de Wolfe et Powel

Fletcher (1996) énonce un théorème indiquant que sous certaines conditions, lorsque l'on utilise une méthode à direction de descente avec un critère de Wolfe et Powell, on a convergence vers un minimum local.

2.3.2.7 Algorithmes de recherche linéaire

Un algorithme de recherche linéaire est une méthode qui génère une famille de pas $\{\alpha_i^k, i = 1,2,...\}$ jusqu'à ce qu'un paramètre α_i^k satisfasse un des critères décrits au paragraphe précédent. Il existe en fait un grand nombre de méthodes, chacune ayant pour but d'atteindre un critère (Curry, Armijo et Goldstein ou Wolfe et Powell).

- Recherche par dichotomie

Dans cette méthode, on construit une famille de triplets (α_1, α_2, α_3) dans l'ensemble T défini par :

$$(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\in T \Leftrightarrow \begin{cases} \phi_1(\alpha_2) \le \min(\phi_1(\alpha_1),\phi_1(\alpha_3)) \\ \dfrac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1} = \tau \quad \text{ou} \quad \dfrac{\alpha_3-\alpha_2}{\alpha_2-\alpha_1} = \dfrac{1}{\tau} \end{cases} \tag{23}$$

où τ est une constante fixée par l'utilisateur. Certains auteurs fixent la valeur de τ au nombre d'or. La méthode est alors appelée **Golden section search**. Le but de l'algorithme est de générer une famille de triplets qui tendent à se contracter vers une valeur satisfaisant un critère de recherche linéaire. Pour cela, on génère α_4, le symétrique de α_2 par rapport au centre du segment (α_1, α_3). Celui des deux triplets (α_1, α_4, α_2) ou (α_2, α_4, α_3) qui appartient à T est alors retenu pour l'itération suivante.

- Méthode de backtracking

La méthode de backtracking est souvent utilisée pour atteindre le critère d'Armijo et de Goldstein. Il s'agit de remplacer α^k successivement par 1, τ, τ^2, τ^3, …, où τ est un paramètre inférieur à 1 fixé par l'utilisateur. Cette méthode a l'avantage d'être simple mais a l'inconvénient d'être lente.

Dans le cadre de ce travail, nous avons utilisé une méthode de backtracking modifiée.

Supposons que l'algorithme n'ait pas convergé à la i-ème itération, alors :

$$\phi\left(\lambda^k + \alpha_i^k d^k\right) > \phi\left(\lambda^k\right) + \omega.\alpha_i^k \frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k}^T d^k \tag{24}$$

Si l'on suppose que ϕ_l peut être raisonnablement approchée par une fonction quadratique et que $\phi_l\left(\alpha_{i+1}^k\right) << \phi_l\left(\alpha_i^k\right)$, alors on peut donner l'expression suivante pour α_{i+1}^k :

$$\alpha_{i+1}^k = \frac{\sqrt{\phi\left(\lambda^k\right)}.\alpha_i^k}{\sqrt{\phi\left(\lambda^k\right)} + \sqrt{\phi\left(\lambda^k + \alpha_i^k d^k\right)}} \tag{25}$$

Cette expression donnerait exactement le minimum de la fonction coût dans la direction d^k si celle-ci était quadratique et si son minimum était zéro (dans cette direction).
Ainsi, cet algorithme de recherche linéaire peut s'écrire comme suit :

Initialisation :
$i \leftarrow 1$
$\alpha_1^k \leftarrow 1$
Tant que $\phi(\lambda^k) + \omega.\alpha_i^k \frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k}^T d^k < \phi(\lambda^k + \alpha_i^k d^k)$

1. $\alpha_{i+1}^k = \frac{\sqrt{\phi(\lambda^k)}\alpha_i^k}{\sqrt{\phi(\lambda^k) + \sqrt{\phi(\lambda^k + \alpha_i^k d^k)}}}$
2. $i \leftarrow i + 1$

Fin tant que.

Cette méthode s'appuie bien sûr sur un certain nombre d'hypothèses plus ou moins réalistes suivant le caractère non linéaire du problème inverse. Néanmoins, cette méthode a le mérite de prendre en compte les valeurs de la fonction coût calculées lors de la recherche linéaire (contrairement à la méthode de backtracking classique) et d'être très simple à programmer.

- Algorithme de type Moré et Thuente

Moré et Thuente (1994) donnent un algorithme de recherche linéaire basé sur la recherche d'un intervalle d'appartenance du paramètre α. Durant la recherche linéaire, les bornes de cet intervalle se rapprochent, de sorte que l'on finisse par trouver une valeur de α satisfaisant des conditions de type Wolfe et Powell. Les auteurs démontrent que sous certaines conditions, cette méthode converge en un nombre fini d'itérations. Par contre, il existe un certain nombre de paramètres à ajuster pour que la méthode soit suffisamment efficace.

- Interpolation quadratique (Fletcher (1996))

Cette méthode est basée sur une approximation quadratique de la fonction coût dans la direction de descente. En effet, nous disposons des valeurs de $\phi_1(0)$, de $\frac{d\phi_1}{d\alpha}(0)$ et de $\phi_1(\alpha_i^k)$. Si la convergence de la méthode n'est pas atteinte, alors α_{i+1}^k est défini comme le minimum du polynôme q de degré 2 obtenu par interpolation des valeurs connues de la fonction coût et de son gradient :

$$q(\alpha) = \phi_1(0) + \frac{d\phi_1(0)}{d\alpha}\alpha + \frac{\left(\phi_1(\alpha_i^k) - \phi_1(0) - \frac{d\phi_1(0)}{d\alpha}\right)}{\alpha_i^k}\alpha^2 \qquad (26)$$

d'où :

$$\alpha_{i+1}^{k} = -\frac{\alpha_i^k}{2\left(\phi_1(\alpha_i^k) - \phi_1(0) - \frac{d\phi_1(0)}{d\alpha}\right)} \cdot \frac{d\phi_1(0)}{d\alpha} \tag{27}$$

Des éléments de la suite $\{\alpha_i^k\}$ sont générés jusqu'à ce que l'on trouve un élément satisfaisant la condition d'optimalité recherchée.

2.3.2.8 Imposition de contraintes sur les paramètres à identifier

Toutes les méthodes d'optimisation décrites ci-dessus ne prennent pas en compte l'imposition de contraintes sur les paramètres à identifier. Dans un certain nombre d'applications, l'utilisateur peut avoir une idée de l'ordre de grandeur des paramètres à identifier. Dans ce cas, il convient d'ajouter des contraintes au problème d'optimisation. Dans le cadre de ce travail, nous souhaitons juste être en mesure de pouvoir imposer l'appartenance d'un paramètre à un intervalle fixé. Le problème de moindres carrés s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \lambda^{opt} \in \mathrm{IR}^{NPar} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \phi(\lambda^{opt}) = \min_{\lambda \in \Lambda}(\phi(\lambda)) \\ \phi(\lambda) = \|F(\lambda) - M\|_W^2 = (F(\lambda) - M)^T W (F(\lambda) - M) \\ \Lambda = \{\lambda / \lambda_i \in [\lambda_i^{min}, \lambda_i^{max}] \ \forall i \in [1, NPar]_{IN}\} \end{cases} \end{aligned} \tag{28}$$

Dans ce nouveau problème, on fait la recherche du jeu de paramètres optimal dans l'ensemble Λ des contraintes. Certains auteurs utilisent une méthode de pénalisation afin de prendre en compte les contraintes (Fletcher (1996), Pang et Tin-Loi (2001)) ou bien une méthode de Lagrangien augmenté (Ghouati et al. (1998)). Dans le cadre de ce travail, nous avons opté pour une méthode de projection. Cette dernière consiste simplement à projeter orthogonalement sur l'ensemble des contraintes les valeurs des paramètres qui sont passées en revue par la méthode d'optimisation. Cette technique est compatible avec n'importe quelle méthode d'optimisation décrite précédemment.

2.3.2.9 Choix d'une méthode d'optimisation

Généralement, les méthodes inverses demandent une somme considérable de calculs et leur développement s'est fait en partie grâce aux développements de l'informatique. En effet, toutes les méthodes d'optimisation requièrent de nombreuses résolutions du problème direct. Or, ces calculs peuvent être relativement longs, surtout lorsqu'il s'agit de résoudre un système d'équations différentielles discrétisées par éléments finis (et qui peut contenir un grand nombre de degrés de liberté). Le choix de la méthode d'optimisation est donc conditionné par le fait qu'il faut faire un minimum d'estimations de la fonction coût.

L'utilisation d'une méthode d'ordre zéro semble adéquate dans le cas où l'on veut utiliser le modèle direct comme une boîte noire ou lorsque le modèle direct n'est pas différentiable. La seule difficulté est alors le calcul de la fonction coût et le paramétrage de la méthode. Leur taux de convergence étant assez faible, ces méthodes n'ont pas été utilisées dans le cadre de ce travail même si elles peuvent permettre d'atteindre des minima globaux.

Les méthodes à direction de descente nécessitent au moins le calcul du gradient de la fonction coût. Le calcul de ce terme peut être relativement complexe et coûteux en temps de calcul. Cette étape, appelée analyse de sensibilité, est nécessaire à l'utilisation de méthodes à direction de descente et peut prendre beaucoup de temps. De plus, ces techniques ne permettent d'atteindre que des minima locaux. En contrepartie, elles ont un taux de convergence significativement plus élevé que les méthodes d'ordre zéro.
Enfin, nous pouvons citer l'existence de méthodes hybrides, combinant des algorithmes d'ordre 0 avec des algorithmes d'ordre un. Par exemple, Ghouati et Gelin (1998) utilisent un algorithme génétique pour initialiser une méthode de Levenberg-Marquardt. Cette méthode permet de détecter les minima globaux et de s'affranchir du choix du jeu de paramètres initial mais demeure tout de même relativement coûteuse en temps de calcul.
Dans le cadre de ce travail, il a été choisi d'utiliser une méthode à direction de descente afin d'avoir un compromis entre la qualité des résultats et le temps de calcul. Vu le temps de calcul requis pour une simulation, il est en effet important de minimiser le nombre d'estimations de la fonction coût.

2.4 Application à l'identification de paramètres rhéologiques

Dans ce paragraphe, nous nous sommes surtout intéressés aux différences de taux de convergence des méthodes BFGS et de Gauss-Newton. La méthode de BFGS a un taux de convergence superlinéaire près de la solution. Cette méthode doit être associée à un critère de Wolfe afin que les directions générées soient des directions de descente. En contrepartie, il peut arriver que cette méthode ne converge pas pour les problèmes de moindres carrés à forts résidus et fortement non-linéaires. La méthode de Gauss Newton est une méthode spécifique aux problèmes de moindres carrés. Elle peut elle aussi être instable en présence de problèmes à forts résidus et fortement non-linéaires. Généralement, un critère d'Armijo suffit à assurer la convergence de la méthode. En effet, la matrice de Gauss-Newton est toujours symétrique définie positive à condition que la matrice de sensibilité soit injective. Nous allons dans ce paragraphe comparer les taux de convergence de ces deux méthodes dans le cadre de l'identification des paramètres rhéologiques à partir de l'essai de compression d'un cube.
L'essai de compression uniaxiale est un essai rhéologique relativement classique. Il peut être étudié de manière analytique si le frottement et l'autoéchauffement sont négligés. Dans ce cas, il est possible de prévoir l'évolution de la section de l'éprouvette par rapport au temps. Le champ de contrainte étant homogène, la mesure de l'effort est alors une mesure directe de la contrainte équivalente.

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S} \qquad \text{avec} \quad \bar{\sigma} = \sqrt{\frac{3}{2}\sigma : \sigma} \tag{29}$$

où $\bar{\sigma}$ est la contrainte équivalente, σ le tenseur des contraintes de Cauchy, F est l'effort mesuré au cours de l'essai et S est la section de l'éprouvette. Dans les exemples qui suivent, l'éprouvette cubique est écrasée à vitesse constante (Figure 13).

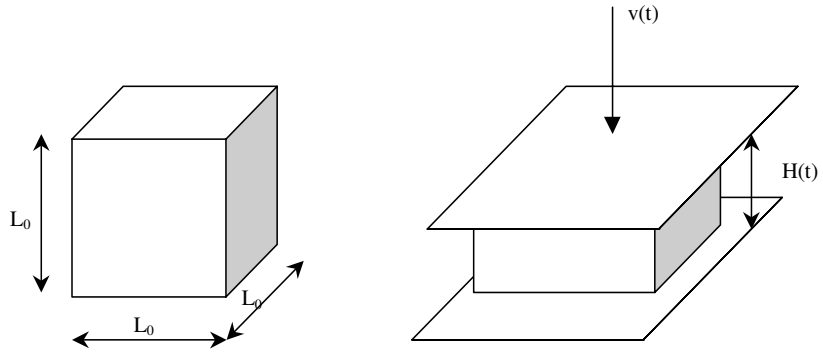


Figure 13 : essai de compression simple d'un cube

Si nous nous plaçons dans le cadre d'un comportement isotrope du matériau étudié, on appelle loi de comportement toute relation de la forme (Montheillet (1996)) :

$$\sigma_0 = \mathrm{f}\left(\lambda, \dot{\bar{\varepsilon}}, \bar{\varepsilon}, \mathrm{T}\right) \tag{30}$$

où σ_0 est la contrainte d'écoulement du matériau, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ le taux de déformation généralisé, $\bar{\varepsilon}$ la déformation généralisée, T la température et λ un jeu de paramètres caractérisant le comportement du matériau. Le taux de déformation et la déformation généralisée sont donnés par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon} &= \frac{1}{2}\left(\nabla \mathrm{v} + \nabla \mathrm{v}^{\mathrm{T}}\right) \\ \dot{\bar{\varepsilon}} &= \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\varepsilon}_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}} \qquad \bar{\varepsilon}(\mathrm{t}) = \int_0^{\mathrm{t}} \dot{\bar{\varepsilon}}\mathrm{dt} \end{aligned} \tag{31}$$

où $\dot{\varepsilon}$ est le tenseur taux de déformation.
Dans ce contexte, si le matériau subit une déformation plastique (i.e. $\bar{\sigma} = \sigma_0$) au cours de l'essai de compression, l'effort prend la forme suivante :

$$\mathrm{F} = \sigma_0(\lambda)\frac{\mathrm{L}_0^3}{\mathrm{H(t)}} \tag{32}$$

où L_0 est longueur initiale d'une arrête de l'éprouvette, H_0 la hauteur initiale et H(t) la hauteur à l'instant t. A partir de cette expression, il est aisé de déterminer la dérivée de l'effort par rapport aux paramètres à identifier :

$$\frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}\lambda} = \frac{\mathrm{d}\sigma_0(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\frac{\mathrm{L}_0^3}{\mathrm{H(t)}} \tag{33}$$

Dans ce cas, la résolution du problème direct et l'analyse de sensibilité ne présentent aucune difficulté à être effectuées analytiquement.

2.4.1 Identification des paramètres d'une loi de Norton-Hoff – comparaison des méthodes de BFGS et de Gauss-Newton

Le but ici est d'analyser des essais de compression à partir de mesures d'efforts au cours du temps. Le plan d'expérience est composé de quatre essais, réalisés pour deux vitesses d'écrasement (1 et 10 mm/s) et pour deux températures (1000 et 1200 °C). Afin de valider et de comparer les différentes méthodes d'optimisation, nous avons utilisé des expériences artificielles générées avec le modèle direct [eq. (32)]. En un premier temps, nous avons effectué des simulations à l'aide d'une loi de Norton-Hoff, que nous appellerons Modèle 0 dans le cadre de cette étude :

$$\text{Modèle 0 : } \bar{\sigma} = \sqrt{3}\mathrm{K}\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}}\right)\bar{\varepsilon}^{\,\mathrm{n}}\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{m}} \tag{34}$$

Le jeu de paramètres λ à identifier est (K, m, n, β). Les simulations ont été effectuées avec les valeurs suivantes des paramètres :

$$\begin{aligned} \mathrm{K} &= 0.5\,\mathrm{MPa.s}^{\mathrm{m}} \qquad \mathrm{m} = 0.01 \\ \mathrm{n} &= 0.1 \qquad\qquad \beta = 500\ \mathrm{K} \end{aligned} \tag{35}$$

A partir d'un jeu initial de paramètres quelconque, nous avons essayé de retrouver le jeu de paramètres initial en utilisant les méthodes de BFGS et de Gauss-Newton.
L'algorithme de BFGS doit être impérativement utilisé avec une recherche linéaire de type Wolfe et Goldstein. L'utilisation d'un critère d'Armijo simple conduit généralement à la non convergence de la méthode. En effet, l'utilisation d'un critère de Wolfe et Goldstein est une condition suffisante pour générer des directions de descente avec la méthode de BFGS.
Il existe diverses façons d'initialiser l'algorithme de BFGS. Lorsque la matrice initiale est la matrice identité, on parle de démarrage à froid. Le but de cet algorithme étant de générer une suite de matrices se rapprochant de la matrice Hessienne, il est généralement conseillé de démarrer la méthode avec une matrice relativement proche de la matrice hessienne. On parle alors de démarrage à chaud.
En ce qui concerne la méthode de BFGS avec démarrage à froid, nous pouvons remarquer que la suite de matrices générées dépend de la base dans laquelle on travaille. Ainsi, il est possible d'améliorer le taux de convergence de la méthode en choisissant une base initiale idoine. Dans le cadre de cette étude, nous avons effectué un changement de variable qui conduit au choix de la matrice de BFGS suivant :

$$G_{ij}^{0} = \frac{1}{\lambda_i^2}\delta_{ij} \tag{36}$$

Avec cette méthode, le taux de convergence est relativement lent (Tableau 1).

Valeurs nominales	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K =0.5 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K	K =1. MPa.s^m m=0.1 n=0.3 β =200 K	K =0.503 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =499.3 K
		Nombre d'itérations : 20

Tableau 1 : résultat de l'identification avec la méthode de BFGS démarrée à froid

La méthode a ensuite été initialisée avec la matrice de Gauss-Newton. Même si le taux de convergence est toujours relativement faible, les résultats obtenus sont meilleurs qu'avec le démarrage à froid (Tableau 2).

Valeurs nominales	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K =0.5 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K	K =1. MPa.s^m m=0.1 n=0.3 β =200 K	K =0.500 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =499.7 K
		Nombre d'itérations : 13

Tableau 2 : résultat de l'identification avec la méthode de BFGS démarrée à chaud

La méthode de Gauss-Newton est généralement associée à une recherche linéaire de type Armijo. Globalement nous pouvons dire, d'après les essais que nous avons effectués, que le taux de convergence de cette méthode est assez peu dépendant de la méthode de recherche linéaire utilisée. Les résultats obtenus avec la méthode de Gauss-Newton (Tableau 3) sont significativement meilleurs que ceux obtenus avec la méthode de BFGS. Ce résultat est conforme à la théorie, puisque dans un cas à résidu nul, la méthode de Gauss-Newton est censée avoir un taux de convergence quadratique, alors que la méthode de BFGS a juste un taux de convergence superlinéaire. De plus, il est bien connu que la méthode de BFGS peut être relativement lente dans des cas mal conditionnés. Il est probable que de forts effets de corrélation entre certains des paramètres à identifier rendent le problème difficile à résoudre avec cette méthode.

Valeurs nominales	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K =0.5 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K	K =1. MPa.s^m m=0.1 n=0.3 β =200 K	K =0.500 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K
		Nombre d'itérations : 4

Tableau 3 : résultat de l'identification avec la méthode de Gauss-Newton

Cet exemple met en évidence l'intérêt de l'utilisation de la méthode de Gauss-Newton. Elle est en effet bien plus rapide que la méthode de BFGS dans notre cas. De plus, la méthode de BFGS est relativement délicate à paramétrer (recherche linéaire, démarrage à chaud ou à froid).

Remarque : Les résultats que nous avons obtenus dépendent peu de la valeur initiale des points. Nous avons fait des tests en faisant varier le jeu de paramètres initial sans remarquer de différence notable.

2.4.2 Identification des paramètres d'une loi viscoplastique 'complexe'

Nous avons essayé d'identifier les paramètres d'une loi de comportement un peu plus complexe que la loi de Norton-Hoff [eq. (34)].

$$\text{Modèle 1} \begin{cases} \sigma_0 = \sqrt{3}\left[(1-W)K_0 \exp\left(\frac{\beta}{T}\right)(\bar{\varepsilon})^n + WK_{sat} \exp\left(\frac{\beta_{sat}}{T}\right)\right]\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^m \\ W = 1-\exp(-r\bar{\varepsilon}) \end{cases} \quad (37)$$

Cette loi de comportement Modèle 1 présente l'avantage d'être en mesure de simuler l'adoucissement d'un matériau. Elle a été introduite pour simuler le comportement de métaux biphasés ou bien contenant des grains recristallisés ou restaurés. La fonction W a été introduite comme une fraction volumique et la loi de comportement est obtenue grâce à une loi de mélange. Ainsi, ce modèle rhéologique simule la transition entre deux modèles rhéologiques (de type Norton-Hoff) au cours de la déformation (Gavrus (1996)).
Un espace expérimental artificiel a à nouveau été généré en utilisant le modèle direct, obtenu pour deux vitesses d'écrasement (1 et 10 mm/s) et pour deux températures (1000 et 1200 °C). Il est à noter que ce plan d'expérience est très réduit. Nous cherchons à identifier 7 paramètres à partir de seulement quatre expériences. En fait, une seule courbe est en théorie nécessaire pour identifier les termes d'écrouissage et d'adoucissement (n et r). Ensuite, il est nécessaire d'utiliser des courbes obtenues avec au moins deux températures pour identifier les termes caractérisant la sensibilité du comportement à la température (β et β_{sat}). Enfin, deux vitesses de déformation permettent d'identifier le paramètre de viscosité m.
La méthode de BFGS, démarrée à froid et à chaud, ainsi que la méthode de Gauss-Newton ne convergent pas dans ce cas. La méthode de BFGS avec démarrage à froid stagne très rapidement à une valeur de la fonction coût relativement élevée. Tout le temps de calcul est quasiment passé en recherche linéaire. La méthode de Gauss-Newton génère un premier pas très grand et la méthode diverge. Ce comportement s'explique par le très mauvais conditionnement de ce problème.
Ces quelques applications montrent que les méthodes à direction de descente classiques peuvent être instables dans le cadre de la résolution de problèmes mal conditionnés. Il est donc nécessaire d'être capable de stabiliser ces méthodes pour identifier les paramètres de modèles comprenant beaucoup de paramètres.

2.5 Stabilité des méthodes à direction de descente

C'est Hadamard (1923) qui le premier a défini la notion de problème bien posé. Soit M un vecteur contenant des mesures effectuées sur le système physique étudié. Le problème $F(\lambda)$=M est bien posé si l'on a :

- existence de la solution λ
- unicité de la solution

- continuité de la solution (i.e. λ dépend continûment de M).

Si l'une de ces trois conditions n'est pas respectée, on dit alors que le problème est mal posé. Il arrive souvent que la solution d'un problème d'identification de fonction ne dépende pas continûment des mesures (Dowding et Blackwell (1998)). En d'autres mots, même si l'erreur de mesure est faible, la résolution du problème inverse ne donnera pas forcément un résultat 'proche' de la solution exacte. Ainsi, les fonctions issues de la résolution numérique d'un problème inverse peuvent être entachées d'oscillations qui sont dues au caractère mal posé du problème (Alifanov et al. (1995)). Dans ce cas, on utilise généralement une stratégie de régularisation au sens de Tikhonov (Tikhonov et Arsenin (1977)), qui peut être vue comme un filtrage de la solution numérique. Sans l'utilisation d'une telle technique, la résolution de problèmes mal posés donneraient des solutions dénuées de sens physique.
Comparés aux problèmes d'identification de fonction, les problèmes d'identification de paramètres sont souvent mieux posés car leur nombre de degrés de liberté est généralement faible. Par conséquent, les problèmes d'identification de paramètres sont moins sensibles aux erreurs de mesure. Par contre, ils sont difficiles à résoudre à cause d'effets de corrélation entre les paramètres à identifier (Beck et Woodbury (1998)). Dans les paragraphes qui suivent, nous nous proposons d'étudier les effets de la corrélation sur la stabilité d'un problème d'identification de paramètres. Ensuite, plusieurs méthodes de stabilisation sont proposées.

2.5.1 La matrice de Gauss-Newton et la notion d'identifiabilité

Nous avons vu dans le paragraphe précédent que la méthode de Gauss-Newton converge à la condition que la matrice de sensibilité $\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ soit injective. Autrement dit, les dérivées du modèle par rapport aux paramètres doivent être linéairement indépendantes. Dans le cas contraire, il est impossible de différentier les effets des paramètres à identifier sur le système physique. Ainsi, Beck et Arnold (1977) donnent une condition d'identifiabilité pour un système physique :

Condition d'identifiabilité :

Le jeu de paramètres λ est identifiable à partir d'observations de F si $\det\left(\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}^{\mathrm{T}}\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right) \neq 0$ dans un voisinage du minimum de la fonction coût ϕ.

Il s'agit en fait d'une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de $\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ dans un voisinage de la solution.

Exemple
On veut identifier les paramètres (K et m) d'une loi de comportement de la forme

$$\bar{\sigma} = \mathrm{K}\left(\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{m}} \tag{38}$$

à partir de mesures de $\bar{\sigma}$. Supposons que les conditions expérimentales soient telles que $\dot{\bar{\varepsilon}}$ soit constant $\left(\dot{\bar{\varepsilon}} = \dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)$. Alors :

$$\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathrm{K}} = \left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \mathrm{m}} = \mathrm{K} \ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right).\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}} \tag{39}$$

$$\det\left(\frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial(\mathrm{K},\mathrm{m})}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial(\mathrm{K},\mathrm{m})}\right) = \det\begin{pmatrix} \left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{2\mathrm{m}} & \mathrm{K}\ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right).\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{2\mathrm{m}} \\ \mathrm{K}\ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right).\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{2\mathrm{m}} & \left(\mathrm{K}\ln\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)\right)^2.\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{2\mathrm{m}} \end{pmatrix} = 0 \tag{40}$$

Le problème n'est donc pas identifiable. Par contre, si l'on utilise deux mesures de $\bar{\sigma}$, effectuées pour deux valeurs différentes de $\dot{\bar{\varepsilon}}$, le problème devient identifiable. Cet exemple montre bien que le plan d'expérience et la forme de la loi à identifier doivent être choisis de façon adéquate, afin de rendre le système identifiable.

§

En fait, la matrice de Gauss-Newton est une approximation de la matrice hessienne de la fonction coût dans un voisinage de l'optimum si l'on considère que l'écart entre le modèle et les mesures est suffisamment faible. Dans ce cas, le matrice de Gauss-Newton représente la courbure de la fonction coût. Ainsi, lorsque la matrice de Gauss-Newton dégénère, la fonction coût présente localement une vallée dans l'hyperplan généré par les vecteurs du noyau. Il est donc possible d'associer la non-identifiabilité d'un problème inverse à la présence d'une vallée dans un voisinage du jeu de paramètres optimal.

Exemple

On veut identifier les paramètres d'une loi de comportement de la forme

$$\bar{\sigma} = \mathrm{K}\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}}\right)\dot{\bar{\varepsilon}}_0^{\mathrm{m}_0} \tag{41}$$

à partir de mesures de $\bar{\sigma}$. On se propose de calculer les paramètres K et β à partir de deux mesures de $\bar{\sigma}$ effectuées pour deux conditions expérimentales différentes T et $\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}$. $\dot{\bar{\varepsilon}}_0$ est supposé fixé et m_0 est connu.

Soit $\mathrm{F}(\mathrm{K},\beta) = \left(\bar{\sigma}(\mathrm{K},\beta;\mathrm{T}), \bar{\sigma}(\mathrm{K},\beta;\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T})\right)^{\mathrm{T}}$ le vecteur contenant les mesures de contrainte correspondant aux deux températures.

Nous avons alors :

$$\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \mathrm{K}} = \begin{pmatrix} \exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}}\right)\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}_0} \\ \exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}}\right)\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}_0} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial \beta} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{T}^2}\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}}\right)\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}_0} \\ -\frac{\mathrm{K}}{(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T})^2}\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}}\right)\left(\dot{\bar{\varepsilon}}_0\right)^{\mathrm{m}_0} \end{pmatrix} \tag{42}$$

$$\det\left(\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial(\mathrm{K},\beta)}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial(\mathrm{K},\beta)}\right) = \frac{\mathrm{K}^2}{\mathrm{T}^2(\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T})^2}\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}}\right)\exp\left(\frac{\beta}{\mathrm{T}}\right)\left[\frac{1}{\mathrm{T}+\Delta\mathrm{T}} - \frac{1}{\mathrm{T}}\right]^2 \tag{43}$$

Il est évident que le problème tend à dégénérer pour de faibles valeurs de ΔT. De plus, la formule ci-dessus nous indique aussi que pour des températures importantes, le problème devient mal conditionné. Nous en déduisons que l'identification de lois de la forme [eq. (41)] sera difficile à chaud, même lorsque ΔT paraît important.

Application numérique :
Considérons que les valeurs exactes des paramètres et des conditions expérimentales sont les suivantes :
K=500 MPa β =6000 K T=1000 K ΔT =200 K
La figure 14 montre la présence d'une vallée près du jeu optimal de paramètres, en raison des effets de corrélation entre K et β pour le cas à résidu nul.

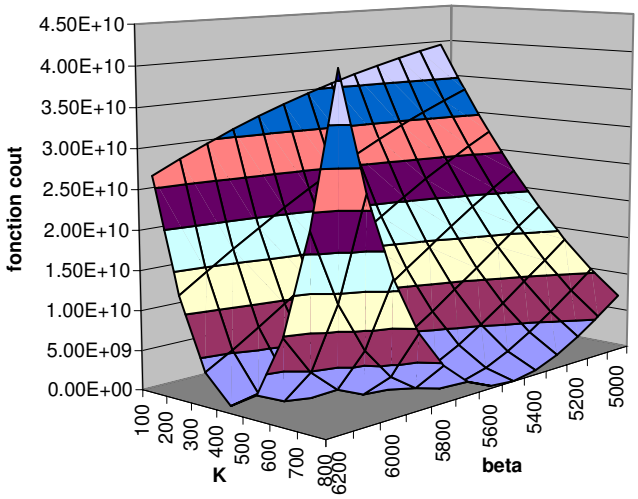


Figure 14 : forme de la fonction coût autour de l'optimum pour le cas à résidu nul

§

Il est de plus possible de donner une interprétation aux termes de la matrice de Gauss-Newton (Forestier et al. (2002)). En effet, $\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right)_{ij} = \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i}^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_j}$. Or

$$\cos\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i};\frac{dF(\lambda)}{d\lambda_j}\right) = \frac{\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right)_{ij}}{\sqrt{\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right)_{ii}\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}\right)_{jj}}} \qquad (44)$$

Ainsi, en renormalisant les termes de la matrice de Gauss-Newton, il est possible de calculer l'angle que font les vecteurs $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i}$ et $\frac{dF(\lambda)}{d\lambda_j}$ dans l'espace IR^{NbMes}. Si le cosinus entre deux vecteurs de sensibilité est proche de 1 ou de –1, alors le problème risque d'être mal conditionné car les effets de λ^i et de λ^j sur F ne sont pas discriminés. Dans ce cas, il sera dangereux de donner une interprétation physique aux paramètres

identifiés. La matrice de Gauss-Newton contient donc une information fondamentale sur les effets croisés entre les paramètres.

2.5.2 Stabilité du jeu de paramètres identifié

Comme le montre le paragraphe précédent, l'analyse de sensibilité peut fournir une information sur la forme de la fonction coût près de l'optimum et sur la stabilité de la méthode. Il peut être intéressant d'étudier la stabilité de la solution du problème inverse en présence d'une perturbation sur les mesures expérimentales grâce à l'information apportée par l'analyse de sensibilité. Pour cela, exprimons la condition d'optimalité du premier ordre qui définit le jeu de paramètres optimal λ :

$$\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = 2\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\left(\mathrm{F}(\lambda)-\mathrm{M}\right) = 0 \tag{45}$$

Si M est perturbé par $\delta\mathrm{M}$, alors la solution du problème inverse devient $\lambda+\delta\lambda$. Si la norme de $\delta\mathrm{M}$ est suffisamment faible, on peut écrire au premier ordre :

$$2\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\left(\mathrm{F}(\lambda)+\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\delta\lambda-\mathrm{M}-\delta\mathrm{M}\right) = 0 \tag{46}$$

A partir des équations (45) et (46), on obtient :

$$\left(\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right)\delta\lambda = \frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\delta\mathrm{M} \tag{47}$$

De la relation (47), on peut déduire la relation suivante :

$$\left\|\delta\lambda\right\|_2 \le \left\|\left(\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1}\right\|_2 .\left\|\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\delta\mathrm{M}\right\|_2 \tag{48}$$

$$\text{avec} \quad \left\|\delta\lambda\right\|_2 \underset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{NPar}}\delta\lambda_{\mathrm{k}}^2}$$

Mais cette relation ne donne qu'une borne supérieure sur la norme de $\delta\lambda$. Or certains paramètres sont plus sensibles que d'autres aux perturbations sur les données expérimentales. Il est donc préférable de donner une majoration de chaque composante de $\delta\lambda$:

$$\left|\delta\lambda_{\mathrm{k}}\right| \le \left\|\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{NPar}}\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda_{\mathrm{i}}}\mathrm{G}_{\mathrm{ki}}\right\|_{\mathrm{W}} .\left\|\delta\mathrm{M}\right\|_{\mathrm{W}} \tag{49}$$

avec $\mathrm{G} = \left(\frac{\mathrm{dF}(\lambda)^{\mathrm{T}}}{\mathrm{d}\lambda}\mathrm{W}\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}\right)^{-1}$, $\left\|\mathrm{V}\right\|_{\mathrm{W}}^2 = \mathrm{V}^{\mathrm{T}}\mathrm{WV}$ et $\delta\lambda = \left(\delta\lambda_1,...,\delta\lambda_{\mathrm{k}},...\delta\lambda_{\mathrm{NPar}}\right)$.

Or, on peut montrer que

$$\left\| \sum_{i=1}^{NPar} \frac{dF(\lambda)}{d\lambda_i} G_{ki} \right\|_W^2 = G_{kk} \tag{50}$$

Donc, si $|\lambda_k| \neq 0$:

$$\frac{|\delta\lambda_k|}{|\lambda_k|} \leq g_k \frac{\|\delta M\|_W}{\|M\|_W}$$
$$\text{avec } g_k = \frac{\sqrt{G_{kk}} . \|M\|_W}{|\lambda_k|} \tag{51}$$

La relation (51) donne une majoration de l'erreur relative sur les paramètres par rapport à l'erreur relative sur les mesures. Cette étude est basée sur un développement limité et n'est valable que dans le cas où la perturbation δM demeure de faible amplitude. Par contre, elle fournit une idée du comportement du problème inverse près du jeu optimal de paramètres et caractérise bien la stabilité du schéma localement.

2.5.3 Calcul d'intervalles de confiance

Si les erreurs de mesure peuvent être modélisées par des lois normales, indépendantes et identiquement distribuées, il est possible de donner une expression d'un estimateur de la matrice de covariance V des paramètres (Frederiksen (1998)) :

$$V = \frac{\|F(\lambda) - M\|_2^2}{NbMes - NbPar} \left[\frac{dF}{d\lambda}^T \frac{dF}{d\lambda} \right]^{-1} \tag{52}$$

Cette matrice est proportionnelle à l'inverse de la matrice de Gauss-Newton. A partir de cette expression, il est possible d'exprimer les intervalles de confiance sur les paramètres. Voici l'exemple des intervalles de confiance à 95% :

$$\text{Prob}(\lambda_i \in I) \geq 0.95$$
$$I = \left(\lambda_i^{opt} - 1.98\sqrt{V_{ii}} ; \lambda_i^{opt} + 1.98\sqrt{V_{ii}} \right) \tag{53}$$

Remarque : L'estimation d'intervalles de confiance n'est valide que dans le cas où la différence entre le modèle et l'observation est due à un bruit Gaussien non autocorrélé (chaque erreur de mesure est alors indépendante de la précédente). Dans le cas, par exemple, où l'erreur de modélisation prédomine, il est très difficile de donner une expression des intervalles de confiance car l'erreur ne peut pas forcément être modélisée par un bruit gaussien. Il est donc important de vérifier a posteriori que les hypothèses statistiques sont raisonnables.

Dans le cas d'un bruit gaussien non autocorrélé, l'inverse de la matrice de corrélation est égale à la quantité d'information au sens de Fisher (Emery (1998)). Si la matrice de Gauss-Newton est de déterminant nul, on dit que l'information contenue dans l'essai est

nulle. Certains auteurs utilisent la notion de quantité d'information pour supprimer les effets de corrélation entre les paramètres. Frederiksen (1998) par exemple, utilise une méthode inverse afin de déterminer les constantes d'élasticité d'un métal à partir de mesures de fréquences de résonance d'une tôle. Afin d'avoir une estimation précise des paramètres, l'auteur recherche une forme optimale pour la tôle. Il est montré que les conditions expérimentales peuvent jouer très fortement sur la précision de la méthode inverse. Cette procédure, appelée **optimal experiment design**, a pour but de concevoir une expérience contenant un maximum d'information sur les paramètres à identifier (Beck et Arnold (1977)). Plus généralement, l'analyse de sensibilité peut être considérée comme un outil d'aide à la conception d'expériences. Un exemple de ce type d'approche est donné dans le dernier chapitre, dans le cadre de l'analyse de l'essai Nakazima.

2.5.4 Stabilité de l'algorithme de Gauss-Newton

La corrélation entre les paramètres a non seulement un effet sur la forme de la fonction coût près de l'optimum, mais a aussi une influence sur la convergence de la méthode de Gauss-Newton dans le voisinage de la solution. En effet, considérons un modèle à un paramètre. Le pas de la méthode de Gauss-Newton s'écrit alors, dans le cas où W=1 et où NbMes=1:

$$\mathrm{d} = \left\| \frac{\mathrm{dF}}{\mathrm{d}\lambda} \right\|_2^{-2} \frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}^{\mathrm{T}} \left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right) = \left(\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right)^{-1} \left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right) \tag{54}$$

Supposons que $\frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} = \eta$, avec η arbitrairement petit. Alors,

$$\mathrm{d} = \frac{\left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right)}{\eta} \tag{55}$$

Il est clair que le pas de Gauss-Newton va être important si $\left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right)$ n'est pas négligeable par rapport à ε, même si le gradient de la fonction coût est faible. Dans les applications que nous avons eues à traiter dans le cadre de cette étude, les résidus $\left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right)$ ne deviennent jamais très faibles à cause de l'erreur de modélisation (choix de la loi de comportement par exemple) Ainsi, même près de l'optimum, la méthode de Gauss-Newton peut générer des pas très importants. Dans un cas d'identification de plusieurs paramètres, il est possible d'établir la proposition suivante :

Proposition 1: Soient $(\alpha_i)_{i=1,..,NPar}$ l'ensemble des valeurs propres de la matrice de Gauss-Newton et d la direction de descente calculée par la méthode de Gauss-Newton [eq. (17)]. Si $\left(2 \frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{W} \frac{\mathrm{dF}(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda} \right) \mathrm{d} = -\frac{\mathrm{d}\phi(\lambda)}{\mathrm{d}\lambda}$ alors,

$$\|\mathrm{d}\|_2 \leq \sqrt{\phi(\lambda)} . \sqrt{\sum_{i=1}^{NPar} \frac{1}{|\alpha_i|}} \tag{56}$$

Preuve : Soit $(\alpha_i, V_i)_{i=1,NPar}$ l'ensemble des couples (valeurs propres, vecteurs propres) de la matrice de Gauss-Newton. Nous pouvons choisir les vecteurs propres V_i de norme unité. Ainsi, l'ensemble $(V_i)_{i=1,..,NPar}$ est une base orthonormée de IR^{NPar}. Alors, la matrice de Gauss-Newton peut s'écrire :

$$\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{NPar} \alpha_i V_i V_i^T \tag{57}$$

et

$$\left(\frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} \right)^{-1} = \sum_{i=1}^{NPar} \frac{1}{\alpha_i} V_i V_i^T \tag{58}$$

d'où, d'après l'équation (17) :

$$d = \sum_{i=1}^{NPar} \frac{V_i V_i^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W(F(\lambda) - M)}{\alpha_i} \tag{59}$$

or $V_i^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W(F(\lambda) - M)$ est un scalaire. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on montre que :

$$\left| V_i^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W(F(\lambda) - M) \right| \le \left\| \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} V_i \right\|_W \left\| (F(\lambda) - M) \right\|_W \tag{60}$$

et

$$\left\| \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} V_i \right\|_W = \sqrt{V_i^T \frac{dF(\lambda)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda)}{d\lambda} V_i} = \sqrt{\alpha_i V_i^T V_i} = \sqrt{\alpha_i} \tag{61}$$

donc

$$\|d\|_2^2 \le \sum_{i=1}^{NPar} \frac{\|V_i\|_2^2 \|F(\lambda) - M\|_W^2}{|\alpha_i|} \tag{62}$$

soit

$$\|d\|_2 \le \|F(\lambda) - M\|_W \sqrt{\sum_{i=1}^{NPar} \frac{1}{|\alpha_i|}} \tag{63}$$

§

Pour un problème à plusieurs dimensions, la matrice de Gauss-Newton peut devenir mal conditionnée soit à cause d'effets de corrélation, soit si la mesure est peu sensible à un des paramètres à identifier. Dans ce cas, la borne supérieure de la norme du pas de Gauss-Newton peut devenir très importante si la valeur minimale de la fonction coût est importante par rapport à la racine carrée de la plus faible valeur propre (par exemple quand l'erreur de modélisation est trop importante). Nous en déduisons donc que la méthode de Gauss-Newton peut être instable près du minimum dans le cas par exemple où l'erreur due au choix du modèle est importante par rapport à la valeur de la plus faible valeur propre de la hessienne de ϕ. Lorsqu'il n'est pas possible d'utiliser une procédure d'optimisation de profil d'expérience, il peut donc devenir nécessaire

d'employer des méthodes de stabilisation, afin de pouvoir traiter des cas contenant un nombre important de paramètres.

2.6 Techniques de stabilisation des méthodes à direction de descente

L'utilisation de l'algorithme de Gauss-Newton est limitée par le fait qu'il peut apparaître des instabilités pour les problèmes mal conditionnés. Quelques méthodes de stabilisation sont présentées dans les paragraphes qui suivent. Toutes ces méthodes ont pour but de borner la zone admissible de recherche du jeu de paramètres optimal. Les méthodes à région de confiance généralisent la notion de méthodes à direction de descente. Dans ces méthodes, on va interdire de chercher le jeu de paramètres optimal au delà d'une hypersphère pour laquelle la non-linéarité de la fonction coût devient trop importante. La méthode de Levenberg-Marquardt peut être vue comme un cas particulier de méthode à région de confiance.
Une autre approche est celle des statisticiens, qui stabilisent souvent le problème d'identification de paramètres en ajoutant de l'information a priori sur les paramètres. Augmenter la quantité d'information a pour conséquence d'améliorer le conditionnement du problème d'identification de paramètres et donc de limiter les problèmes d'instabilité.

2.6.1 Méthodes à région de confiance

Ces méthodes sont reconnues pour être bien plus stables que les méthodes à direction de descente. En fait, les méthodes à région de confiance fournissent à la fois une direction et une longueur pour le pas d'optimisation. Ainsi, il n'est plus nécessaire d'utiliser une méthode de recherche linéaire. Supposons que l'on veuille stabiliser une méthode d'optimisation dont le pas est donné par :

$$\mathrm{M}^{\mathrm{k}}\mathrm{d}^{\mathrm{k}} = -\frac{\mathrm{d}\phi\left(\lambda^{\mathrm{k}}\right)}{\mathrm{d}\lambda^{\mathrm{k}}} \tag{64}$$

M^{k} est une matrice symétrique non nécessairement définie positive, qui peut être la hessienne de la fonction coût ou bien une approximation de celle-ci. Dans les méthodes à région de confiance, le problème (64) est remplacé par le problème suivant :

$$\begin{cases} \mathrm{q}\left(\mathrm{d}^{\mathrm{k}}\right) = \underset{\|\mathrm{d}\| \le \Delta^{\mathrm{k}}}{\mathrm{Min}}\, \mathrm{q}(\mathrm{d}) \\ \mathrm{q}(\mathrm{d}) = \frac{1}{2}\mathrm{d}^{\mathrm{T}}\mathrm{M}^{\mathrm{k}}\mathrm{d} + \mathrm{d}^{\mathrm{T}}\,\frac{\mathrm{d}\phi\left(\lambda^{\mathrm{k}}\right)}{\mathrm{d}\lambda^{\mathrm{k}}} \end{cases} \tag{65}$$

L'utilisation du paramètre Δ^{k} [eq. (65)] assure que la norme du pas d'optimisation n'est pas trop importante. En fait, nous imposons juste que la norme du pas d'optimisation ne soit pas supérieure à un rayon de confiance Δ^{k}.
Toute la difficulté de ces méthodes est de déterminer de manière adéquate le rayon de la région de confiance. Ce dernier est déterminé de sorte que la variation de la fonction coût dans la région de confiance soit suffisamment proche d'un modèle de variation ψ^{k} (Gilbert (1999)) :

$$\psi^k(d) = -\left(\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda}^T d + \frac{1}{2} d^T M^k d \right) \tag{66}$$

Les résultats de convergence de ces méthodes sont beaucoup plus forts que ceux des méthodes à direction de descente avec recherche linéaire. Leur utilisation, par contre, présente quelques inconvénients. Par exemple, le calcul du rayon de confiance initial peut être relativement difficile (Barrault et Le Bris (1999)).

2.6.2 La méthode de Levenberg-Marquardt

La méthode de Levenberg-Marquardt est le cas particulier d'une méthode à région de confiance pour laquelle on choisit de borner la norme L^2 du pas d'optimisation (Fletcher (1996)) :

$$\begin{cases} q(d^k) = \underset{\|d\|_2 \le \Delta^k}{\text{Min}}\, q(d) \\ q(d) = \frac{1}{2} d^T M^k d + d^T \frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k} \end{cases} \tag{67}$$

On peut démontrer que ce problème est équivalent au problème suivant :

$$\begin{cases} \left(M^k + \nu I\right) d^k = -\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k} \\ \text{avec} \\ \nu \ge 0 \\ \nu \left(\left\| d^k \right\|_2 - \Delta^k \right) = 0 \end{cases} \tag{68}$$

Concrètement, lorsque l'on programme une méthode de Levenberg-Marquardt, l'étape de recherche linéaire est remplacée par la recherche du paramètre ν adéquat. En fait, une première valeur de direction de descente est calculée pour ν=0. Si $\left\| d^k \right\|_2 > \Delta^k$, alors on augmente la valeur de ν jusqu'à ce que la contrainte soit respectée (Figure 15). Lorsque ν est 'grand', la direction trouvée est proche de la plus forte pente (i.e. colinéaire au gradient de la fontion coût). Lorsque ν est 'faible', on se rapproche de la méthode d'optimisation [eq. (64)].

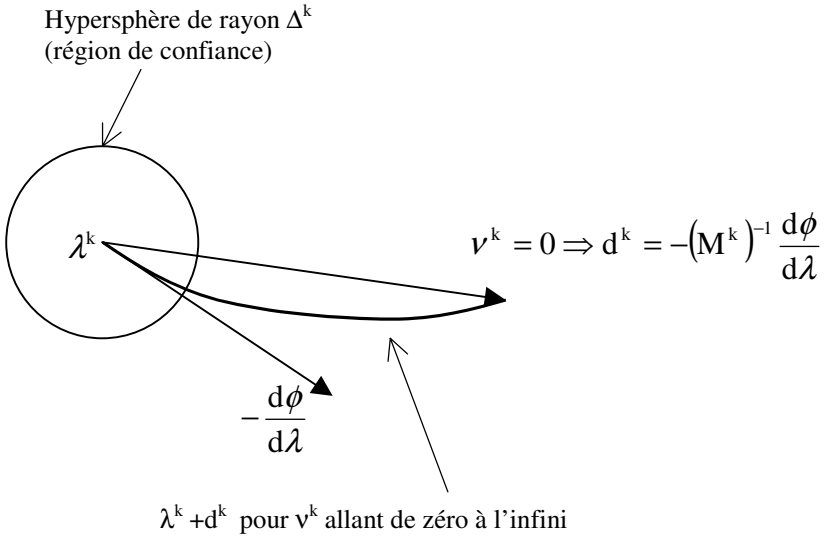


Figure 15 : recherche du paramètre de stabilisation ν^k optimal

Application à la méthode de Gauss-Newton :

Les instabilités qui peuvent apparaître dans la méthode de Gauss-Newton sont généralement dues à un mauvais conditionnement de la matrice de Gauss-Newton. L'idée de la méthode de Levenberg-Marquardt est d'ajouter une matrice diagonale à la matrice de Gauss-Newton afin de filtrer les plus faibles valeurs propres. Cette méthode consiste à résoudre le problème suivant :

$$\left(\frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W \frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda} + \nu^k . I \right) d^k = -\frac{dF(\lambda^k)^T}{d\lambda} \left(F(\lambda^k) - M \right) \qquad (69)$$

où ν^k est le paramètre de Levenberg-Marquardt. En effet, en utilisant le même raisonnement que celui fait pour la proposition 1 (cf. 2.5.4), on peut montrer que :

$$\left\| d^k \right\|_2 \leq \sqrt{\phi(\lambda^k)} \sqrt{\sum_{i=1}^{NPar} \frac{|\alpha_i|}{(\alpha_i + \nu^k)^2}} \qquad (70)$$

où $\{\alpha_i, i = 1,.., NPar\}$ est l'ensemble des valeurs propres de la matrice de Gauss-Newton. Ainsi, même si la matrice de Gauss-Newton a des valeurs propres relativement basses, le paramètre ν^k assure que le terme $\sum_{i=1}^{NPar} \frac{|\alpha_i|}{(\alpha_i + \nu^k)^2}$ n'explose pas. Cette procédure a donc pour effet de limiter les instabilités de la méthode de Gauss-Newton. Toute la difficulté de la méthode réside dans la détermination du paramètre ν^k optimal. Si ν^k est trop important, la méthode de Levenberg-Marquardt dégénère vers une méthode de plus forte pente. Si ν^k est trop faible, la méthode se rapproche de la méthode de Gauss-Newton et peut être instable.

2.6.3 Approche statistique : introduction de l'information a priori

Dans le cas où l'on utilise le principe du maximum de vraisemblance pour résoudre le problème inverse, il est possible d'introduire une information a priori sur les paramètres. L'ajout de cette information permet de stabiliser le problème de moindres carrés. On suppose alors que les paramètres sont des variables aléatoires indépendantes de l'erreur de mesure et distribuées selon une loi normale :

$$\lambda \sim \mathrm{N}(\lambda_0, \mathrm{V}_\lambda) \tag{71}$$

λ_0 est le vecteur moyenne a priori de λ et V_λ est la matrice de corrélation des paramètres. En fait, V_λ indique la ″confiance″ que l'on a en l'estimation initiale λ_0.
De plus, si par hypothèse, le bruit de mesure est supposé gaussien :

$$\mathrm{f}\left(\mathrm{M}\middle|\lambda\right) = \frac{1}{(2\pi)^{\mathrm{NbMes}}\sqrt{\det(\mathrm{V_M})}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda))^{\mathrm{T}}\,\mathrm{V_M}^{-1}(\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda))\right) \tag{72}$$

où $\mathrm{f}\left(\mathrm{M}\middle|\lambda\right)$ est la densité de distribution de M sachant λ. En utilisant le théorème de Bayes, il est possible d'exprimer la densité de distribution de λ sachant M :

$$\mathrm{f}\left(\lambda\middle|\mathrm{M}\right) = \frac{\mathrm{f}\left(\mathrm{M}\middle|\lambda\right)\mathrm{f}(\lambda)}{\mathrm{f}(\mathrm{M})} \tag{73}$$

Soit :

$$\mathrm{f}\left(\lambda\middle|\mathrm{M}\right) = \mathrm{C}\,\exp\left(-\frac{1}{2}(\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda))^{\mathrm{T}}\,\mathrm{V_M}^{-1}(\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda))\right)\exp\left(-\frac{1}{2}(\lambda-\lambda_0)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{V_\lambda}^{-1}(\lambda-\lambda_0)\right) \tag{74}$$

où C est une constante ne dépendant pas de λ. Si l'on applique le principe du maximum de vraisemblance a posteriori, le problème d'optimisation à résoudre s'écrit alors (Beck et Arnold (1977)) :

$$\begin{aligned}&\text{trouver } \lambda^{\mathrm{opt}} \in \mathrm{IR}^{\mathrm{NPar}} \text{ tel que}\\ &\begin{cases}\phi_{\mathrm{prior}}\left(\lambda^{\mathrm{opt}}\right) = \min\limits_{\lambda\in\mathrm{IR}^{\mathrm{NPar}}}\left(\phi_{\mathrm{prior}}(\lambda)\right)\\ \phi_{\mathrm{prior}}(\lambda) = (\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda))^{\mathrm{T}}\,\mathrm{V_M}^{-1}(\mathrm{M}-\mathrm{F}(\lambda)) + (\lambda-\lambda_0)^{\mathrm{T}}\,\mathrm{V_\lambda}^{-1}(\lambda-\lambda_0)\end{cases}\end{aligned} \tag{75}$$

Si la matrice V_λ est diagonale (c'est à dire si les valeurs des paramètres ne sont pas autocorrélées a priori), alors cette méthode revient à ajouter un terme diagonal à la matrice de Gauss-Newton. On peut être frappé de la ressemblance de cette méthode avec la méthode de Levenberg-Marquardt. Il existe néanmoins deux différences majeures avec cette méthode : l'expression de la fonction coût et de son gradient sont modifiés et les termes diagonaux ajoutés ne sont pas tous égaux. Cette méthode permet donc d'ajuster les termes de régularisation à chaque paramètre et de s'affranchir des problèmes liés à la détermination du paramètre de stabilisation de la méthode de Levenberg-Marquardt. Elle revient en définitive à pénaliser les pas de Gauss-Newton qui s'éloignent trop de l'estimation a priori.

2.6.4 Méthode de Gauss-Newton stabilisée

Il a été montré dans le paragraphe 2.5.2 que certains paramètres sont plus sensibles que d'autres à une perturbation sur les données expérimentales. Dans le cas où l'on cherche à résoudre un problème sous contrainte de la forme [eq. (28)], nous avons essayé d'utiliser l'information apportée par l'utilisateur sous forme de contraintes pour stabiliser le problème. Nous avons utilisé une méthode de Gauss-Newton stabilisée par une matrice diagonale dont les termes diagonaux varient en fonction des bornes imposées aux paramètres :

$$\begin{cases} \left(\dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W \dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda} + \nu D \right) d^k = -2 \dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W\left(F(\lambda^k) - M\right) \\ D_{ij} = \dfrac{1}{\left(\lambda_i^{max} - \lambda_i^{min}\right)^2} \delta_{ij} \end{cases} \tag{76}$$

où λ_i^{min} et λ_i^{max} sont respectivement les bornes inférieures et supérieures des paramètres imposées par l'utilisateur (c.f. paragraphe 2.3.2.8) et ν est un paramètre dépendant de l'ordre de grandeur de la fonction coût finale. Cette méthode revient à résoudre à chaque itération le sous-problème suivant, obtenu en pénalisant les pas de Gauss-Newton trop importants par rapport à $|\lambda_i^{min} - \lambda_i^{max}|$:

$$\begin{cases} d^k = \underset{d \in IR^{NPar}}{\operatorname{argmin}} \Psi(d) \\ \Psi(d) = \dfrac{1}{2} d^T \left(\dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W \dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda} \right) d + d^T \dfrac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}^T W\left(F(\lambda^k) - M\right) + \nu \|d\|_D^2 \end{cases} \tag{77}$$

$$\text{avec } D_{ij} = \frac{1}{\left(\lambda_i^{max} - \lambda_i^{min}\right)^2} \delta_{ij}$$

Il est possible, pour cette méthode, de donner une borne supérieure à une norme de la direction de descente d_k :

$$\begin{cases} \left\| d^k \right\|_D \le \dfrac{1}{\left| \alpha_{min}^R + \nu \right|} \left\| \dfrac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k} \right\|_{D^{-1}} \\ \|d\|_D^2 = d^T D d \\ \left\| \dfrac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} \right\|_{D^{-1}} = \dfrac{d\phi(\lambda)}{d\lambda}^T D^{-1} \dfrac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} \end{cases} \tag{78}$$

où α_{min}^R est la plus faible valeur propre de la matrice H définie comme suit :

$$H = R^{-1}\frac{dF(\lambda^k)^T}{d\lambda}\ W\frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}R^{-1}$$
$$\text{avec}\, R_{ij} = \frac{1}{\left|\lambda_i^{max} - \lambda_i^{min}\right|}\delta_{ij} \tag{79}$$

Si l'on veut $\left\|d^k\right\|_D^2 \le NPar$, alors on obtient la relation suivante :

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{NPar}}\left\|\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k}\right\|_{D^{-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{NPar}\left(\left(\frac{d\phi(\lambda^k)}{d\lambda^k}\right)_i\left(\lambda_i^{max} - \lambda_i^{min}\right)\right)^2}{NPar}} \tag{80}$$

Ainsi, nous obtenons une relation fournissant un paramètre de stabilisation à chaque itération de Gauss-Newton. Nous pouvons remarquer que ce paramètre tend vers zéro lorsque l'on se rapproche du point stationnaire. En définitive, la méthode que nous avons développée est spécifique aux problèmes sous contrainte de la forme du système (28), mais elle est plus simple à programmer et à paramétrer qu'une méthode à région de confiance classique.

2.7 Application à l'analyse de l'essai de compression d'un cube avec un comportement viscoplastique

Le problème présenté au (§ 2.4) est repris ici. Cette fois, nous discutons de la stabilité du problème d'identification de paramètres rhéologiques. Nous vérifions que les temps de calcul obtenus avec la méthode de Gauss-Newton stabilisée sont acceptables et que la méthode est même stable en présence de données expérimentales bruitées.

2.7.1 Etude des effets de corrélation entre les paramètres à identifier

Une analyse de sensibilité a été effectuée afin de quantifier les effets de corrélation entre les paramètres de la loi de Norton-Hoff [eq. (34)]. Le plan d'expérience est le même que celui utilisé dans le § 2.4 (deux vitesses (1 et 10 mm/s) et deux températures (1000 et 1200°C)). On obtient, pour les valeurs nominales des paramètres :

$$\cos\left(\frac{dF}{dK},\frac{dF}{dm}\right) = -0.81 \quad \cos\left(\frac{dF}{dK},\frac{dF}{dn}\right) = -0.89$$
$$\cos\left(\frac{dF}{dK},\frac{dF}{d\beta}\right) = 0.99 \quad \cos\left(\frac{dF}{dm},\frac{dF}{dn}\right) = 0.77 \tag{81}$$
$$\cos\left(\frac{dF}{dm},\frac{dF}{d\beta}\right) = -0.81 \quad \cos\left(\frac{dF}{dn},\frac{dF}{d\beta}\right) = -0.89$$

Il existe une très forte corrélation entre les effets de K et les effets de β sur la mesure de l'effort. La fonction coût présente donc une vallée près du jeu de paramètres optimal

(Figure 16). Ce problème inverse étant mal conditionné, le choix de la méthode d'optimisation est crucial. Il est en effet bien connu que la méthode de BFGS ou bien la méthode de Gauss-Newton peuvent rencontrer des difficultés à converger dans ce contexte.

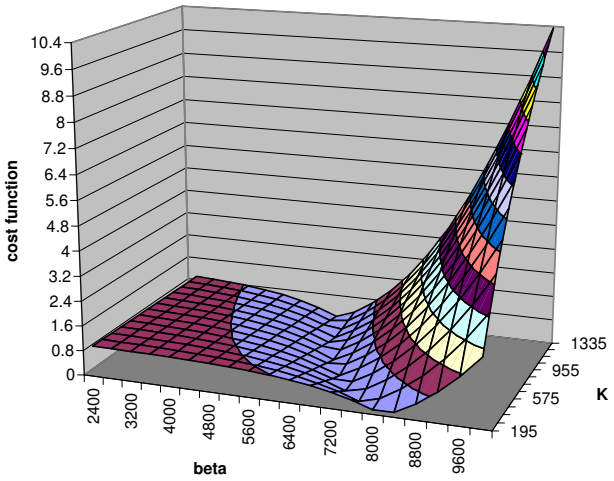


Figure 16 : fonction coût en fonction de K et de β

Les couples de paramètres fortement corrélés sont plus nombreux pour le modèle rhéologique 1 [eq. (37)]. La matrice de corrélation pour ce modèle est donnée ci-dessous :

$$C=\begin{array}{c} \begin{matrix} K_0 & n_0 & m & \beta & r & K_{sat} & \beta_{sat} \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0.32 & 0.07 & -0.93 & 0.27 & -0.79 & 0.69 \\ & 1 & -5.10^{-5} & 0.03 & 0.86 & 4.10^{-4} & 8.810^{-3} \\ & & 1 & 3.7.10^{-4} & 8.8.10^{-3} & 0.01 & -7.10^{-3} \\ & & & 1 & 3.8.10^{-2} & 0.71 & -0.51 \\ & SYM & & & 1 & -0.43 & 0.73 \\ & & & & & 1 & -0.92 \\ & & & & & & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} K_0 \\ n_0 \\ m \\ \beta \\ r \\ K_{sat} \\ \beta_{sat} \end{matrix} \end{array} \qquad (82)$$

$$\text{avec} \quad C_{ij} = \cos\left(\frac{dF}{d\lambda_i};\frac{dF}{d\lambda_j}\right)$$

Ce sont les multiples effets croisés (entre K, β, K_{sat} et β_{sat}) entre paramètres qui sont à l'origine des instabilités observées avec les méthode de Gauss-Newton et de BFGS au paragraphe 2.4.2.

2.7.2 Application de la méthode de Gauss-Newton stabilisée

Nous avons appliqué la méthode de Gauss-Newton stabilisée à l'identification des paramètres de la loi du modèle 0 [eq. (34)] et du modèle 1 [eq. (37)]. Dans le premier cas, les méthodes de Gauss-Newton et de BFGS convergent à partir du moment où le plan d'expérience est suffisamment complet (cf. § 2.4). Les premiers tests montrent que

la méthode de Gauss-Newton stabilisée ne rallonge pas trop le temps de calcul par rapport aux méthodes classiques.

Valeurs nominales	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K =0.5 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K	K =1. MPa.s^m m=0.1 n=0.3 β =200 K	K =0.500 MPa.s^m m=0.01 n=0.1 β =500 K
		Nb itérations : 6 $\phi_{final} = 4.7.10^{-2}\%$

Tableau 4 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 0 avec l'algorithme de Gauss-Newton stabilisé

En effet, six itérations ont été nécessaires à la convergence (Tableau 4), contre quatre avec la méthode de Gauss-Newton classique et treize pour la méthode de BFGS. Ainsi, même pour des problèmes relativement bien conditionnés, la méthode de Gauss-Newton stabilisée a un temps de calcul acceptable.
Il a été vu que les méthodes de Gauss-Newton et de BFGS ne convergent pas pour l'identification des paramètres du modèle 1. La méthode de Gauss-Newton stabilisée a été testée dans ce cas, avec le plan d'expérience décrit au (§ 2.4). Les résultats de l'identification sont donnés ci-dessous (Tableau 5).

Valeurs nominales	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K_0=30 MPa.s^m m=0.2 n=0.1 β =5000 K r=2.0 K_{sat}=10 MPa.s^m β_{sat} =3000K	K_0=50 MPa.s^m m=0.1 n=0.2 β =3000 K r=0.2 K_{sat}=8 MPa.s^m β_{sat} =1000K	K_0=29.72 MPa.s^m m=0.1989 n=0.100 β =5007.7 K r=1.98 K_{sat}=10.89 MPa.s^m β_{sat} =2819.31K
		Nb itérations : 23 $\phi_{final} = 5.2.10^{-2}\%$

Tableau 5 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 1 avec l'algorithme de Gauss-Newton stabilisé

La méthode de Gauss-Newton stabilisée présente donc l'avantage de converger même lorsque de nombreux effets de corrélation rendent le problème difficilement identifiable. Elle semble être un bon compromis entre temps de calcul et robustesse.

2.7.3 Influence d'un bruit de mesure sur l'identification de paramètres

Dans la réalité, diverses erreurs et approximations font que le minimum de la fonction coût n'est pas zéro. Le problème d'identification est alors qualifié de problème à résidu non nul. Dans les applications concrètes que nous aurons à traiter dans la suite, l'erreur de modélisation n'est pas négligeable. Il faut donc traiter les diverses méthodes

d'optimisation dans un cas à résidu non nul. Pour se faire, nous avons ajouté aux données expérimentales un bruit Gaussien de moyenne nulle et de variance constante par expérience. Soit F_j^i la j-ième mesure effectuée lors du i-ième essai. On introduit alors l'amplitude de la perturbation, notée ξ :

$$\tilde{F}_j^i = F_j^i + \left(\xi \sum_{k=1}^{k=NbMes(i)} F_k^i \right) e \tag{83}$$

où NbMes(i) est le nombre de mesures effectuées lors du i-ième essai et e est une variable aléatoire Gaussienne de moyenne nulle et de variance unité. Nous avons procédé à l'identification de paramètres pour des bruits d'amplitude 5% et 10%. Les résultats sont fournis dans le tableau 6 pour l'identification des paramètres de la loi de Norton-Hoff (Modèle 0).

Valeurs nominales	Valeurs identifiées ξ=5%	Valeurs identifiées ξ=10%
K_0=500 kPa.s^m m=0.01 n=0.1 β=500 K	K_0=515.5 kPa.s^m m=0.013 n=0.0940 β=465.84 K	K_0=491.6 kPa.s^m m=0.0107 n=0.0992 β=529.51 K
	Nb itérations : 9 ϕ_{final}=8.3%	Nb itérations : 7 ϕ_{final}=19.1%

Tableau 6 : résultats de l'identification des paramètres du modèle 0 en présence de bruits de mesure gaussiens

Cet exemple montre que la méthode d'optimisation demeure stable en présence de données bruitées pour l'identification d'une loi de Norton-Hoff. Nous pouvons constater que certains paramètres semblent plus affectés que d'autres par l'ajout d'un bruit de mesure. L'analyse de stabilité permet d'estimer la sensibilité du résultat à un bruit de mesure :

$$\begin{aligned} \frac{|\delta K|}{K} &\le 8.0 \frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \qquad \frac{|\delta m|}{m} \le 50.3 \frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \\ \frac{|\delta n|}{n} &\le 9.5 \frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \qquad \frac{|\delta \beta|}{\beta} \le 23.7 \frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \end{aligned} \tag{84}$$

L'incertitude relative sur les paramètres m et β est relativement importante. Pour le paramètre β, l'incertitude est due au fait que la température ne varie pas assez dans le plan d'expérience (d'où la forte corrélation avec K). Pour le paramètre m, l'erreur relative a une borne supérieure élevée en raison de la faible valeur de m. Dans ce cas, une faible variation en valeur absolue de m peut correspondre à une variation importante de m en valeur relative. Il ne s'agit donc pas d'un problème de stabilité pour ce paramètre. Une variation de 1% sur l'effort induit une variation de l'ordre de 5.10^{-3} de m en valeur absolue. Malgré cette incertitude, la loi de comportement du matériau

reproduit fidèlement le comportement du matériau dans l'intervalle de vitesse de déformation, de déformation et de température défini par le plan d'expérience.
La même analyse a été appliquée à l'identification des paramètres du modèle rhéologique 1 (Tableau 7).

Valeurs nominales	Valeurs identifiées ξ=5%	Valeurs identifiées ξ=10%
K_0=30 MPa.s^m m=0.2 n=0.1 β=5000 K r=2.0 K_{sat}=10 MPa.s^m β_{sat} =3000K	K_0=30.04 MPa.s^m m=0.204 n=0.0959 β=5018.1 K r=2.24 K_{sat}=6.98 MPa.s^m β_{sat} =4034 K	K_0=26.30 MPa.s^m m=0.1978 n=0.1021 β=5172.4 K r=2.00 K_{sat}=11.33 MPa.s^m β_{sat} =2905.28K
	Nb itérations : 30 ϕ_{final} =5.2%	Nb itérations : 28 ϕ_{final} =11.2%

Tableau 7 : résultats de l'identification des paramètres du modèle 1 en présence de bruits de mesure gaussiens

Cette méthode d'optimisation se comporte plutôt bien en présence d'un bruit de mesure. Les paramètres identifiés sont relativement proches de leurs valeurs nominales. L'analyse de stabilité permet de prévoir quels sont les paramètres qui sont le plus sensibles à des erreurs de mesure :

$$\left|\frac{\delta K_0}{K_0}\right| \le 28.7\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta m}{m}\right| \le 8.4\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta n}{n}\right| \le 16.8\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| \le 6.9\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2}$$
$$\left|\frac{\delta r}{r}\right| \le 28.7\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta K_{sat}}{K_{sat}}\right| \le 212.3\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta\beta_{sat}}{\beta_{sat}}\right| \le 130.27\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \qquad (85)$$

Nous pouvons constater que les paramètres K_{sat} et β_{sat} ne semblent pas caractérisés avec une précision satisfaisante. En fait, l'effort devient sensible par rapport à ces paramètres pour de grandes déformations (suivant la valeur de r). Ainsi, si la déformation du matériau n'est pas très importante, l'incertitude sur ces paramètres est alors très importante. Nous comprenons la raison pour laquelle l'identification de cette loi ne peut se faire qu'avec une méthode d'optimisation stabilisée. Outre les effets de corrélation, un déficit de sensibilité de l'effort par rapport à un ou plusieurs paramètres peut s'avérer une source d'instabilités.

A la lumière de ces deux exemples, la méthode de Gauss-Newton stabilisée semble être un bon choix. Elle permet en effet d'identifier les paramètres de lois de comportement, y compris pour des cas excessivement mal conditionnés : même si le jeu de paramètres identifié n'est pas déterminé de façon unique, nous obtenons en définitive une loi de comportement représentative du comportement du matériau dans un intervalle de déformation, de vitesse de déformation et de température donné. De plus, les indicateurs de corrélation et de stabilité que nous avons mis en place permettent bien de détecter les causes de l'instabilité du problème inverse.

2.8 Sensibilité des paramètres identifiés à une incertitude expérimentale

Un des objectifs de cette étude est de prendre en compte l'incertitude expérimentale dans l'identification de paramètres. Dans le paragraphe 2.5.2, nous avons étudié l'influence d'une variation de données expérimentales sur le jeu de paramètres identifiés. Mais il peut y avoir aussi une incertitude sur des conditions aux limites (coefficient de frottement, échanges thermiques), sur des conditions initiales (température initiale du lopin) ou même sur la géométrie initiale du lopin (tolérance sur les cotes des éprouvettes). Tous ces aléas expérimentaux vont avoir une influence plus ou moins importante sur la valeur des paramètres et de la contrainte d'écoulement que l'on identifie.

Les aléas expérimentaux peuvent parfois être modélisés de façon statistique. Dans ce contexte, cette incertitude peut être insérée dans la fonction coût comme une information a priori. L'estimation du maximum de vraisemblance permet alors de prendre en compte les incertitudes expérimentales dans le problème d'optimisation. Cela suppose que l'on modélise l'aléa expérimental comme une loi normale de moyenne et de variance connues a priori (Tarantola (1987)).

Une autre approche consiste à identifier les mesures expérimentales afin de relaxer le problème. Allix et al. (2003) identifient un module d'Young à partir de mesures de déplacement et d'efforts au cours d'essais dynamiques sur une barre de Hopkinson. Les mesures expérimentales étant entachées d'un bruit aléatoires, les auteurs les considèrent comme des paramètres à identifier. Ainsi, l'analyse inverse se divise en deux étapes : identification des champs de déplacement, de contrainte et de l'effort grâce à la résolution d'un problème dynamique adjoint ; puis identification du module d'Young en utilisant les champs de déplacement, de contrainte et l'effort identifiés précédemment.

L'approche que nous avons adoptée est différente. Nous nous proposons d'essayer de quantifier l'influence d'une incertitude expérimentale sur la précision de notre analyse inverse. Cette étude est menée à l'ordre un, pour un paramètre expérimental supposé scalaire. Ayant opté pour une méthode déterministe dès le départ, nous ne cherchons donc pas à caractériser de façon stochastique l'incertitude expérimentale.

Soit λ le jeu de paramètres optimal, trouvé comme solution du problème inverse et soit μ un paramètre qui est a priori connu avec un précision absolue de $\Delta\mu$.

On sait que :

$$\frac{\partial \mathrm{F}^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda}\left(\mathrm{F}(\lambda,\mu)-\mathrm{M}\right)=0 \tag{86}$$

Si l'on remplace e par $\mu+\mathrm{d}\mu$, le nouveau jeu de paramètres identifié est noté $\lambda+\mathrm{d}\lambda$:

$$\frac{\partial \mathrm{F}(\lambda+\mathrm{d}\lambda,\mu+\mathrm{d}\mu)^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda}\left(\mathrm{F}(\lambda+\mathrm{d}\lambda,\mu+\mathrm{d}\mu)-\mathrm{M}\right)=0 \tag{87}$$

En faisant un développement limité à l'ordre un de [eq. (87)] et en utilisant la relation [eq. (86)], on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}\mu}=-\left(\frac{\partial \mathrm{F}(\lambda,\mu)^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda}\,\frac{\partial \mathrm{F}(\lambda,\mu)}{\partial \lambda}\right)^{-1}\frac{\partial \mathrm{F}(\lambda,\mu)^{\mathrm{T}}}{\partial \lambda}\,\frac{\partial \mathrm{F}(\lambda,\mu)}{\partial \mu} \tag{88}$$

La relation (88) est intéressante car elle donne une idée de l'influence d'une incertitude expérimentale sur le jeu de paramètres identifié. Nous pouvons noter que cette relation est valable dans le cas où μ ne serait pas scalaire. Dans le cas vectoriel, cette relation est néanmoins plus difficile à exploiter car il faut alors prendre en compte les effets croisés entre les paramètres expérimentaux.
Si μ est dans [μ-Δμ ; μ+Δμ], alors, en supposant que Δμ soit faible par rapport au caractère non-linéaire du modèle direct, λ appartient à $[\lambda - \left|\frac{d\lambda}{d\mu}\right|\Delta\mu \ ; \ \lambda + \left|\frac{d\lambda}{d\mu}\right|\Delta\mu]$. De même, on peut dire que si Δμ est suffisamment faible, $\sigma_0(\lambda)$ appartient à $(\sigma_0(\lambda - \frac{d\lambda}{d\mu}\Delta\mu) \ ; \ \sigma_0(\lambda + \frac{d\lambda}{d\mu}\Delta\mu))$. Cette approche est utile car elle permet de détecter quels sont les paramètres expérimentaux critiques pour identifier un jeu de paramètres donné. Il est à noter que cet estimateur ne dépend pas des mesures expérimentales et peut donc être calculé avant d'effectuer les essais expérimentaux. Par contre, le modèle étant non linéaire, le résultat dépend a priori du jeu de paramètres à la fin de l'identification. De plus, cette analyse est faite uniquement à l'ordre 1 et ne permet pas de traiter le cas où $d\sigma_0(\lambda)/d\lambda$ est nul (i.e. lorsque les termes d'ordre deux prédominent). Cette analyse, effectuée a priori, devient alors plutôt qualitative et pourra être effectuée pour divers jeux de paramètres λ et μ afin de détecter les paramètres expérimentaux les plus critiques.

Exemple
Nous avons considéré le cas de compression d'un cylindre (Figure 17).

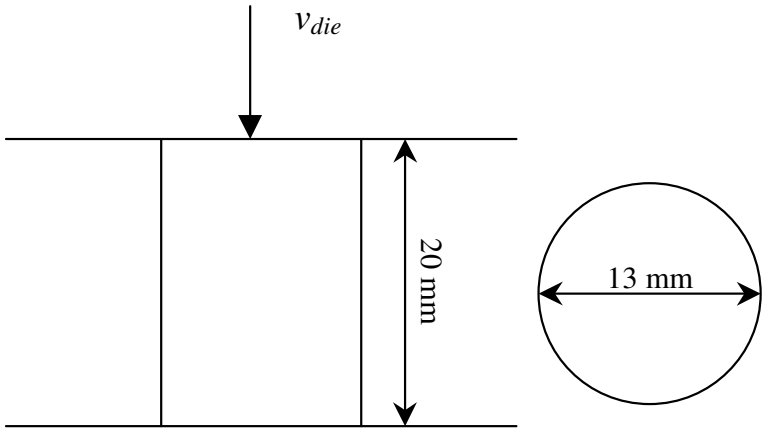


Figure 17 : Géométrie des éprouvettes de compression

Le but de ce test est d'introduire l'incertitude liée aux conditions de frottement. Dans ce cas, nous modélisons le frottement par une loi de Tresca :

$$\tau = -\frac{\overline{m}}{\sqrt{3}}\frac{\Delta v}{\|\Delta v\|} \qquad (89)$$

où Δv est la vitesse de glissement entre la pièce et l'outillage et τ est la cission de glissement (cf. 3.2.3.1).
Dans ce cas, nous supposons que nous avons effectué une analyse inverse et que l'on a obtenu le jeu de paramètres suivant pour la loi de Norton-Hoff :

$$\begin{aligned} K &= 0.5\,\text{MPa.s}^m \quad & m &= 0.2 \\ n &= 0.1 & \beta &= 3000\text{K} \end{aligned} \tag{90}$$

Les simulations ont été effectuées pour un coefficient de frottement de Tresca de 0.15. Or, en général, le frottement n'est pas déterminé exactement. Si l'on suppose que le coefficient de frottement est connu à 0.05 près, on peut se demander quelle est l'incertitude engendrée sur les paramètres identifiés.
Cet essai a été simulé avec le logiciel éléments finis FORGE3® (cf. Chapitre 3) et le calcul de la dérivée de l'effort par rapport aux différents paramètres (K, m, n, β, $\overline{m}$) est décrit et validé dans le prochain chapitre.
Pour cette rhéologie, la relation (88) fournit une valeur de la dérivée de chaque paramètre par rapport au coefficient de frottement $\overline{m}$:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{d\overline{m}} &= -34\,\text{kPa.s}^m \quad & \frac{dm}{d\overline{m}} &= 9{,}5.10^{-6} \\ \frac{dn}{d\overline{m}} &= -8{,}9.10^{-5} & \frac{d\beta}{d\overline{m}} &= 8{,}2.10^{-2}\,\text{K} \end{aligned} \tag{91}$$

A partir de ces valeurs, il est possible de donner des intervalles de confiance pour les paramètres rhéologiques :

$$\begin{aligned} K &\in [498.3,501.7]\ \text{kPa.s}^m \quad & m &\in [0.2,0.2] \\ n &\in [0.1,0.1] & \beta &\in [3000,3000]\ \text{K} \end{aligned} \tag{92}$$

En fait, faire varier $\overline{m}$ de 0.05 induit seulement une variation de l'ordre de 0.3% sur K, les autres paramètres étant encore moins sensibles au frottement. La comparaison entre la contrainte d'écoulement et ses bornes supérieures et inférieures (Figure 18) montre que malgré l'incertitude sur le frottement, la contrainte d'écoulement est déterminée avec précision.

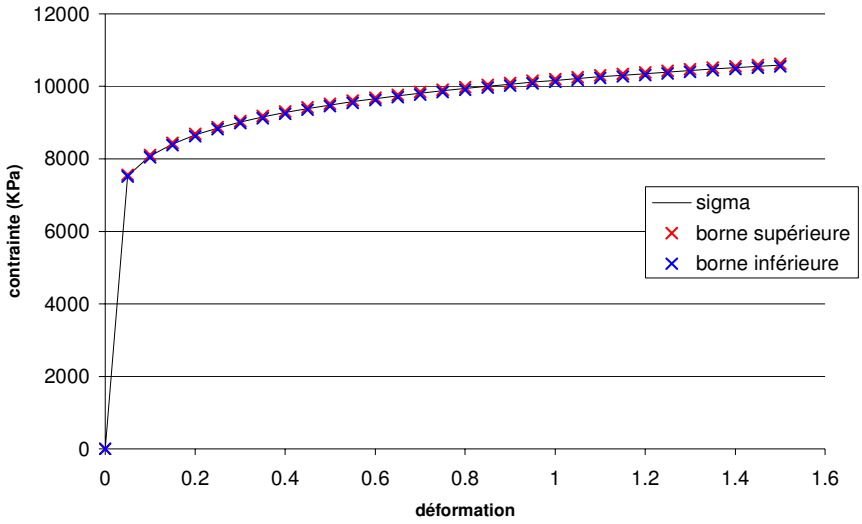


Figure 18 : comparaison entre la contrainte d'écoulement et ses bornes supérieure et inférieure

Dans ce cas, même si l'on ne connaît pas avec une très bonne précision le coefficient de frottement, la contrainte d'écoulement est identifiée avec précision (à l'erreur de modélisation et de mesure près). Ce résultat est bien sûr dépendant de la géométrie de l'éprouvette.

Remarque : Les mesures expérimentales n'interviennent pas explicitement. Cette analyse de stabilité peut même être effectuée a priori, avant d'effectuer l'analyse inverse.

2.9 Conclusion

Nous avons vu au cours de l'étude bibliographique que le problème d'identification de paramètres pouvait être exprimé sous la forme d'un problème d'optimisation au sens des moindres carrés. La résolution d'un problème inverse nécessite donc l'utilisation d'une méthode d'optimisation. La résolution du problème direct pouvant être relativement coûteuse en temps de calcul, il est nécessaire d'utiliser une méthode avec un taux de convergence relativement élevé. C'est pour cette raison que l'utilisation d'une méthode à direction de descente semble être le choix le plus judicieux, au risque de n'atteindre qu'un minimum local.
L'étude d'un problème modèle a révélé que les méthode de BFGS et de Gauss-Newton présentent des instabilités lorsque l'on essaye d'identifier un nombre important de paramètres.
Nous avons étudié dans ce chapitre divers remèdes aux problèmes d'instabilité rencontrés par les méthodes à direction de descente à cause d'effets de corrélation entre les paramètres à identifier. La méthode de Gauss-Newton stabilisée nous a paru suffisamment robuste et simple d'utilisation pour les cas qui nous intéressent. Sans l'utilisation d'une telle technique de stabilisation, il ne peut être envisageable d'identifier un nombre de paramètres relativement important (de l'ordre de la dizaine).
Tous les cas que nous avons traités jusqu'à présent sont des cas relativement simples, pour lesquels l'utilisation d'une méthode éléments finis n'est pas nécessaire pour la résolution du problème direct. L'analyse de sensibilité n'est notamment pas un

problème dans ce contexte. Dans le chapitre suivant, nous décrivons comment connecter une méthode d'analyse de sensibilité à un modèle direct relativement complexe afin de pouvoir utiliser la méthode de Gauss-Newton stabilisée pour analyser des essais mécaniques induisant des écoulements complexes.

2.10 Bibliographie

O. Alifanov, E. Artyukhin, S. Rumyantsev, Extreme methods for solving ill-posed problems with applications to inverse heat conduction problems, Begell House, New York, 1995.

Barrault M., Le Bris C., Optimisation numérique et différentiation automatique pour un problème industriel. Octobre 1999, Champs sur Marne, http://binky.enpc.fr/reports/.

J. V. Beck, K. Arnold, Parameter estimation in engineering and science, Wiley, New York, 1977.

J. V. Beck, K. A. Woodbury, Inverse problems and parameter estimation : integration of measurements and analysis, Measurement Science and Technology , 9 (1998) 839-847.

K. J. Dowding, B. F. Blackwell, Joint experiment/computational techniques to measure thermal properties of solids, Measurement Science and Technology , 9 (1998) 877-887.

G. Cowan, Statistical data analysis, Oxford : Clarenson press, 1998.

A. F. Emery, A. V. Nenarokomov, Optimal experiment design, Measurement Science and Technology , 9 (1998) 864-876.

R. Forestier, Y. Chastel, E. Massoni, 3D inverse analysis model using semi-analytical differentiation for mechanical parameter estimation, à paraître dans Inverse problems in Engineering (2002).

R. Fletcher, C. Reeves, Computer Journal, 7 (1964) 81-84.

R. Fletcher, Practical optimisation methods, Second edition, John Wiley & Sons, Chichester, 1996.

P. S. Frederiksen, Parameter uncertainty and design of optimal experiments for the estimation of elastic constants, International journal of solids structures, 35, no 12 (1998) 1241-1260.

A. Gavrus, Identification automatique des paramètres rhéologiques par analyse inverse, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, 1996, Cemef.

O. Ghouati , J. C. Gelin, Gradient based methods, genetic algorithms and the finite element method for the identification of material parameters. p157-162, Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications, Huétink & Baaijens (eds), 1998.

O. Ghouati , D. Joannic, J. C. Gelin, Optimisation of process parameters for the control of springback in deep drawing. P819-824, Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications, Huétink & Baaijens (eds), 1998.

J. C. Gilbert, Optimisation différentiable : Théorie et Algorithmes. INRIA, Roquencourt (1999).

J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem in Linear Partial Differential Equations, New Haven, CT: Yale University Press, 1923

J. H. Holland, Adaptation in natural and artificial system, Ann Harbor, The University of Michigan Press, 1975.

F. Montheillet, Métallurgie en Mise en forme, Techniques de l'ingénieur, M 600, 1996.

J. J. Moré, D. J. Thuente, Line search algorithms with guaranteed sufficient decrease, ACM Transactions on mathematical software, 20, no 3 (1994) 286-307.

J. A. Nelder, R. Mead, A simplex method for function minimization, The computer journal (1965)

O. H Nouatin, Méthode et analyse de simulation numérique d'écoulements 3D des polymères fondus- Identification de paramètres rhéologiques viscoélastiques par analyse inverse. Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, 2000, Cemef.

O. Allix, P. Feissel, P. Thévenet, A delay damage mesomodel of laminates under dynamic loading : basic aspects and identification issues, Computers and Structures, 81 (2003) 1177-1191.

J. S. Pang, F. Tin-Loi, A penalty interior point algorithm for a parameter identification problem in elastoplasticity, Mechanics Structure and Machines, 29 (2001) 85-99.

E. Polak, G. Ribière, Note sur la converge de méthode de directions conjuguées, Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle, 3 (1969) 35-43.

D. S. Schnur, N. Zabaras, An inverse method for determining elastic material properties and a material interface, International Jounal for Numerical Methods in Engineering, 33 (1992) 2039-2057.

A. Tarantola, B. Valette, Generalized nonlinear inverse problems solved using the least square criterion, Reviews of geophysics and space physiscs, 20, no 2 (1982) 219-232

A. Tarantola, Inverse Problem theory, Elsevier, Amsterdam, 1987.

A. Tikhonov, V. Arsenin, Solutions of ill-posed problems, Winston, Washington DC, 1977.

Chapitre 3

Développement d'une méthode inverse autour du logiciel FORGE3®

3.1 Introduction

Le développement d'une méthode inverse appliquée à la caractérisation de métaux est présentée dans ce chapitre. Généralement, les paramètres rhéologiques ou tribologiques associés à un matériau sont déterminés à partir de mesures issues d'essais mécaniques. Les paramètres à identifier sont alors reliés aux mesures expérimentales par le biais d'un système d'équations différentielles aux limites (appelé modèle direct). Si l'écoulement de matière pendant l'essai est relativement homogène, il est possible d'utiliser un modèle analytique comme modèle direct. C'est par exemple le cas d'un essai de compression pour lequel le frottement avec l'outillage est négligeable. Dans le cas où l'écoulement est plus complexe, il peut être intéressant d'utiliser un logiciel de simulation numérique comme modèle direct.

C'est dans cette optique que nous avons développé une méthode inverse basée sur le logiciel FORGE3®. La première partie de ce chapitre sera donc dédiée à la description de ce logiciel. Le problème inverse associé à l'identification de paramètres mécaniques est exprimé sous la forme d'un problème de moindres carrés et est résolu à l'aide d'un algorithme de Gauss-Newton. Cette méthode nécessite le développement d'un module d'analyse de sensibilité. Ainsi, une étude bibliographique des différentes méthodes d'analyse de sensibilité existantes est présentée. L'application de ces méthodes à la dérivation des équations de FORGE3® est présentée en dernière partie.

3.2 Présentation du modèle direct FORGE3®

3.2.1 Modélisation du problème thermo-mécanique

3.2.1.1 Equations de conservation

L'échelle à laquelle nous étudions la déformation mécanique est telle que le milieu peut être considéré comme continu. Nous nous plaçons donc dans le cadre de la mécanique des milieux continus pour suivre l'évolution d'un domaine borné $\Omega(t)$. Les équations de base de la mécanique sont déduites des bilans de conservation de la matière [eq. (93)] de la quantité de mouvement [eq. (94)] et de l'énergie [eq. (95)] (Rappaz et al. (1998)).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v) = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{93}$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v \otimes v) = \mathrm{div}(\sigma) + F_v \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{94}$$

$$\frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + \mathrm{div}(\rho v H) = \sigma : \dot{\varepsilon} + \dot{Q}_T - \mathrm{div}(j_T) \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{95}$$

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\nabla v + \nabla v^T}{2} \tag{96}$$

où ρ est la masse volumique, v est la vitesse d'écoulement, σ le tenseur des contraintes de Cauchy, F_v un champ de forces volumiques (gravité, champ magnétiques, etc.), H l'enthalpie massique, $\dot{\varepsilon}$ le taux de déformation, $\dot{Q}_T$ un terme source de chaleur (due aux réactions chimiques par exemple) et j_T le flux de chaleur. Les équations de conservation peuvent être simplifiées en utilisant un certain nombre d'hypothèses :

- Les efforts volumiques, les effets d'inertie et le terme $\dot{Q}_T$ sont négligés.
- Le matériau est supposé subir une déformation élasto-viscoplastique. Une décomposition additive du tenseur des vitesses de déformation est adoptée :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}^{vp} \tag{97}$$

où $\dot{\varepsilon}^e$ est le taux de déformation élastique et $\dot{\varepsilon}^{vp}$ est le taux de déformation viscoplastique.

- La déformation plastique étant supposée incompressible, on a :

$$\mathrm{trace}(\dot{\varepsilon}^{vp}) = 0 \tag{98}$$

Les équations de conservation s'écrivent alors :

$$\mathrm{div}(v) = \mathrm{trace}(\dot{\varepsilon}^e) \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{99}$$

$$\mathrm{div}(\sigma) = 0 \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{100}$$

$$\rho \frac{d(H)}{dt} + \mathrm{div}(j_T) = \sigma : \dot{\varepsilon} \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{101}$$

3.2.2 Equations de comportement

Le système d'équations de conservation est obtenu à partir de considérations relativement générales et est valable pour un large éventail de matériaux. Du point de vu mathématique, ce système d'équations n'est pas fermé. Il est donc nécessaire d'ajouter aux équations de conservation des équations de comportement. Pour ce faire, la contrainte est reliée à la déformation et au taux de déformation par le biais d'une loi de comportement mécanique. Ensuite, deux relations entre l'enthalpie massique, le flux de chaleur et la température sont données pour fermer l'équation de conservation de l'énergie.

3.2.2.1 Loi de comportement mécanique

3.2.2.1.1 Critère de plasticité isotrope de von Mises

Dans le cadre de cette étude, nous ne considérons que le cas de l'élasticité linéaire pour laquelle l'évolution de la déformation élastique est fréquemment donnée sous la forme tensorielle suivante:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^{e} &= L^{-1}\dot{\sigma} \\ \dot{\varepsilon}^{e} &= \frac{d}{dt}\varepsilon^{e} \end{aligned} \tag{102}$$

où L est un tenseur inversible d'ordre 4, composé des coefficients d'élasticité. L'élasticité étant supposée isotrope, l'évolution de la déformation élastique est donnée par la loi de Hooke :

$$\dot{\varepsilon}^{e} = \frac{1+\upsilon}{E}\dot{\sigma} - \frac{\upsilon}{E}\mathrm{tr}(\dot{\sigma})\,\mathrm{Id} \tag{103}$$

où E est le module de Young et υ le coefficient de Poisson. Une loi d'écrouissage est introduite dans un critère de plasticité de von Mises pour le cas d'un matériau isotrope :

$$\begin{aligned} &f(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T) \le 0 \\ &\text{avec} \quad f(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T) = \bar{\sigma} - \sigma_0\left(\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T\right) \end{aligned} \tag{104}$$

$$\begin{aligned} &\bar{\sigma}^2 = \frac{3}{2}s:s \qquad \dot{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{2}{3}\dot{\varepsilon}^{vp}:\dot{\varepsilon}^{vp} \\ &s = \sigma + pI \qquad \frac{d\bar{\varepsilon}}{dt} = \dot{\bar{\varepsilon}} \qquad p = -\frac{1}{3}\mathrm{trace}(\sigma) \end{aligned} \tag{105}$$

où σ_0 est la contrainte d'écoulement, $\bar{\sigma}$ la contrainte équivalente, s la partie déviatorique du tenseur des contraintes de Cauchy, p la pression hydrostatique, $\dot{\bar{\varepsilon}}$ le taux de déformation généralisé et $\bar{\varepsilon}$ la déformation généralisée. La relation (104) décrit un convexe de plasticité elliptique dans l'espace des contraintes principales (Figure 19). Si l'état de contrainte se situe à l'intérieur du convexe de plasticité, la déformation est élastique alors qu'un état de contrainte engendrant une déformation plastique se trouve nécessairement sur le bord du convexe de plasticité.

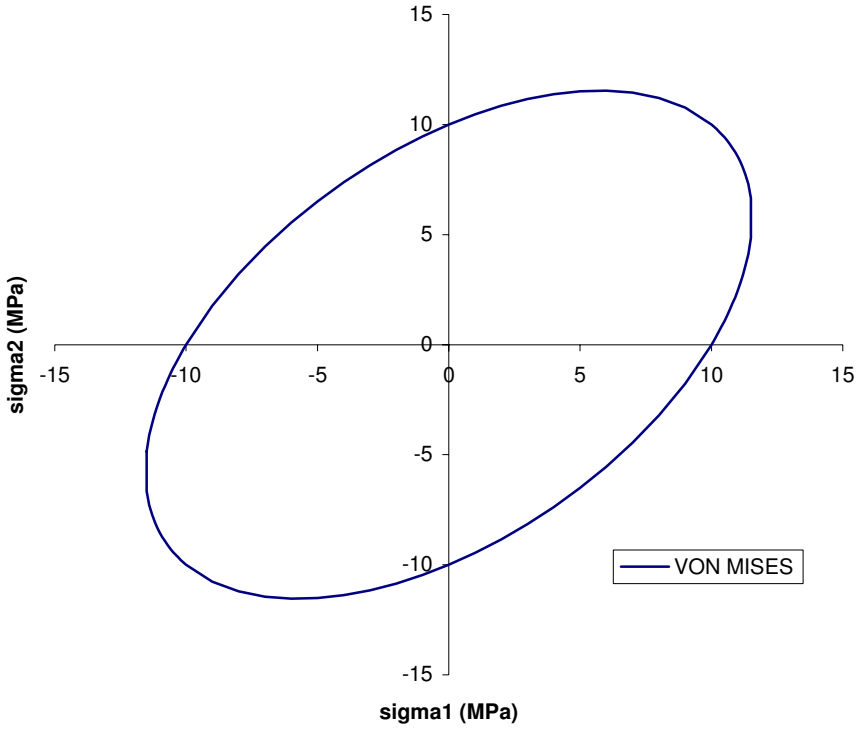


Figure 19 : convexe de plasticité généré par un critère de von Mises

Ce type de loi de comportement est non-linéaire à cause de la relation (104). L'écrouissage est modélisé par la relation entre la contrainte d'écoulement et la déformation généralisée, et le caractère visqueux du matériau est modélisé grâce à la dépendance de la contrainte d'écoulement par rapport au taux de déformation généralisé. Suivant le type de matériau modélisé, la contrainte d'écoulement peut prendre des formes relativement différentes.
En utilisant des conditions de type Karush-Kuhn-Tucker, il est possible de donner une expression du taux de déformation plastique (Aliaga (2000)) :

$$\dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda}^{vp} \frac{\partial f(\sigma, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T)}{\partial \sigma} \qquad \text{avec} \quad \dot{\lambda}^{vp} \geq 0 \text{ et } \dot{\lambda}^{vp}.f(\sigma, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T) = 0 \tag{106}$$

On peut montrer que $\dot{\lambda}^{vp} = \dot{\bar{\varepsilon}}$. Dans le cas purement viscoplastique, on pose $\varepsilon^e = 0,\ \dot{\varepsilon}^e = 0$ d'où $\dot{\bar{\varepsilon}}^2 = \frac{2}{3}\dot{\varepsilon} : \dot{\varepsilon}$ et $\bar{\sigma} = \sigma_0$. Or,

$$\frac{\partial f(\sigma, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}, T)}{\partial \sigma} = \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2\bar{\sigma}} s = \frac{3}{2\sigma_0} s \tag{107}$$

d'où la relation explicite suivante pour le cas viscoplastique :

$$s = \frac{2}{3} \frac{\sigma_0}{\dot{\bar{\varepsilon}}} \dot{\varepsilon} \tag{108}$$

3.2.2.1.2 Critère de plasticité anisotrope de Hill (1948)

Le modèle quadratique de plasticité de Hill (1948) peut être considéré comme une généralisation du modèle de plasticité isotrope de von Mises. Il sert à modéliser le comportement anisotrope que certains métaux acquièrent après une opération de laminage par exemple. Nous considérons toujours que l'élasticité du matériau est isotrope. Par contre, l'anisotropie plastique est modélisée grâce au critère de plasticité suivant :

$$\begin{aligned} & f_H(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T) \le 0 \\ & \text{avec} \quad f_H(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T) = \bar{\sigma}_H - \sigma_0\left(\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T\right) \end{aligned} \tag{109}$$

$$\begin{aligned} & \bar{\sigma}_H{}^2 = \\ & F_H(\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + G_H(\sigma_{33}-\sigma_{11})^2 + H_H(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + 2L_H\sigma_{23}^2 + 2M_H\sigma_{13}^2 + 2N_H\sigma_{12}^2 \end{aligned} \tag{110}$$

où $\bar{\sigma}_H$ est la contrainte équivalente exprimée dans une métrique qui prend en compte le caractère anisotrope du matériau. L'expression (110) est valable dans un repère attaché à la matière. Il est donc nécessaire de prendre en compte la rotation de la matière lors de la déformation (Knockaert (2001)).
Soient X_0 et X_t respectivement la position initiale et celle à l'instant t d'un point matériel. Le tenseur gradient de déformation F_T est donné par :

$$F_T = \frac{\partial X_t}{\partial X_0} \tag{111}$$

Soit R la matrice de rotation de la matière (R est une matrice orthogonale). F_T peut être décomposé de façon unique comme suit :

$$F_T = RU \tag{112}$$

avec U une matrice définie positive. Le tenseur des contraintes dans le référentiel lié à la matière σ^{mat} s'exprime alors de la manière suivante :

$$\sigma^{mat} = R\sigma R^T \tag{113}$$

et $\bar{\sigma}_H$ s'écrit

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_H{}^2 = {} & F_H\left(\sigma_{22}^{mat}-\sigma_{33}^{mat}\right)^2 + G_H\left(\sigma_{33}^{mat}-\sigma_{11}^{mat}\right)^2 + H_H\left(\sigma_{11}^{mat}-\sigma_{22}^{mat}\right)^2 \\ & +2L_H\sigma_{23}^{mat\,2} + 2M_H\sigma_{13}^{mat\,2} + 2N_H\sigma_{12}^{mat\,2} \end{aligned} \tag{114}$$

Comme dans le cas isotrope, la loi de normalité s'applique :

$$\begin{aligned} & \dot{\varepsilon}^{vp} = \dot{\lambda}^{vp}\frac{\partial f_H(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T)}{\partial\sigma} \\ & \text{avec} \quad \dot{\lambda}^{vp} \ge 0 \text{ et } \dot{\lambda}^{vp} f_H(\sigma,\bar{\varepsilon},\dot{\bar{\varepsilon}},T) = 0 \end{aligned} \tag{115}$$

Le critère de Hill, à l'instar du critère de von Mises, est un critère quadratique. Le convexe de plasticité généré est donc aussi un critère elliptique. Par contre, le critère de Hill affecte les axes principaux ainsi que le rapport grand axe/petit axe du convexe de plasticité (Figure 20).

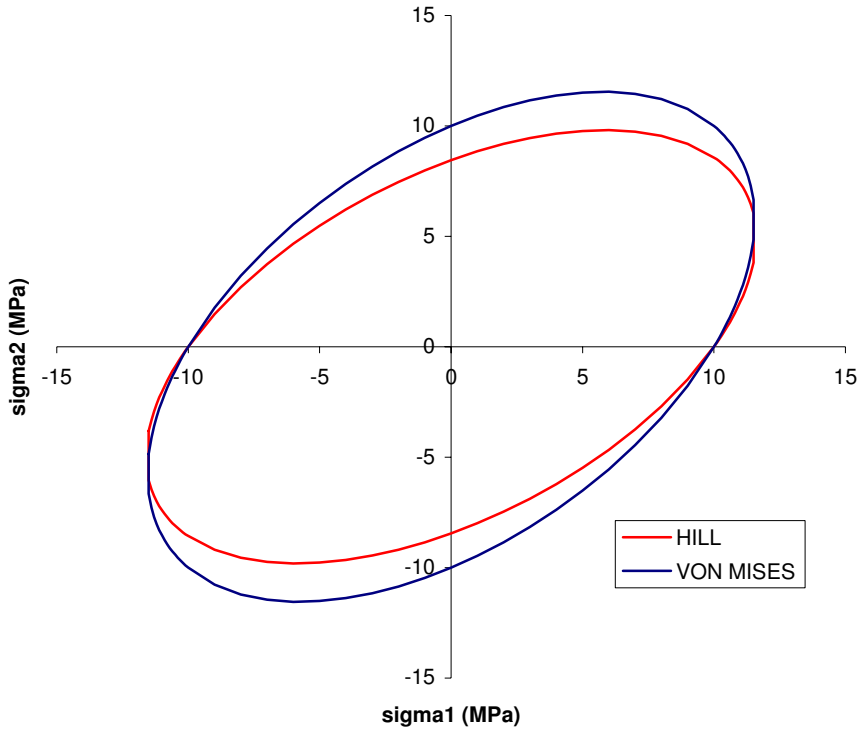


Figure 20 : comparaison de deux convexes de plasticité, respectivement générés à partir du critère de von Mises et du critère de Hill (1948)

3.2.2.2 Loi de comportement thermique

En considérant que la chaleur massique à pression constante c_p ne dépend pas de la température, on relie l'enthalpie massique à la température (Rappaz et al. (1998)) :

$$H = c_p T \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{116}$$

De plus, le flux de chaleur par diffusion j_T est modélisé par une loi de Fourier :

$$j_T = -k\nabla T \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{117}$$

où k est la conductivité thermique.
De ces relations, on déduit l'équation de la chaleur :

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} - \nabla.(k\nabla T) = \sigma : \dot{\varepsilon} \qquad \text{dans } \Omega(t) \tag{118}$$

3.2.3 Conditions aux limites et conditions initiales

Dans les cas que nous traitons, le domaine $\Omega(t)$ délimitant le matériau sera toujours borné. Il est nécessaire de décrire des conditions aux bords pour compléter les bilans de conservation.

3.2.3.1 Conditions aux limites du problème mécanique

Pour le problème mécanique, nous aurons principalement trois types de conditions aux limites : la condition de bord libre, la condition de pression imposée et la condition de contact unilatéral.

- Condition de bord libre :

$$\sigma n = 0 \ \text{ sur } \partial\Omega_l(t) \tag{119}$$

- Condition de pression imposée :

$$\sigma n = -P_{imp} n \quad \text{ sur } \partial\Omega_p(t) \tag{120}$$

- Condition de contact unilatéral (ou condition de Signorini) et loi de frottement :

$$\left.\begin{array}{l}(v - v_{out}).n \le 0 \\ \sigma_n \le 0 \\ \sigma_n (v - v_{out}).n = 0\end{array}\right\} \quad \text{sur } \partial\Omega_c(t) \text{ (contact unilatéral)} \tag{121}$$

$$\sigma_t = \tau(\Delta v_t) \quad \text{ sur } \partial\Omega_c(t) \text{ (loi de frottement)} \tag{122}$$

avec

$$\begin{array}{l}\sigma_n = \sigma n.n \\ \sigma_t = \sigma n.t \\ \Delta v_t = (v - v_{out}) - (v - v_{out}).n\, n\end{array} \tag{123}$$

Exemples de lois de frottement :

$$\text{Loi de Tresca : } \tau = -\frac{\overline{m}}{\sqrt{3}} \frac{\Delta v_t}{\|\Delta v_t\|} \tag{124}$$

$$\text{Loi de Norton : } \tau = -\alpha K \|\Delta v_t\|^{p-1} \Delta v_t \tag{125}$$

Pour que le problème mécanique soit bien posé, nous avons, quelque soit t positif :

$$\begin{aligned} &\partial\Omega_l(t)\cap\partial\Omega_p(t)=\phi \quad \partial\Omega_p(t)\cap\partial\Omega_c(t)=\phi \quad \partial\Omega_c(t)\cap\partial\Omega_l(t)=\phi \\ &\text{et} \quad \partial\Omega_l(t)\cup\partial\Omega_p(t)\cup\partial\Omega_c(t)=\partial\Omega(t) \end{aligned} \tag{126}$$

3.2.3.2 Conditions aux limites et condition initiale du problème thermique

Pour le problème thermique, nous aurons à traiter deux types de conditions aux limites : la condition de convection – radiation et la condition de contact.

- Condition de type convection - radiation (Aliaga (2000)):

$$-k\nabla T.n = h(T - T_{ext}) \text{ sur } \partial\Omega_{cr}(t) \tag{127}$$

avec

$$\begin{cases} h = h_{conv} + h_{rad} \\ h_{rad} = \varepsilon_r \sigma_r (T + T_{ext})(T^2 + T_{ext}^2) \end{cases} \tag{128}$$

h_{conv} et h_{rad} sont respectivement les coefficients de transfert thermique par convection et par radiation, σ_r la constante de Stefan (σ_r=5,66961.10^{-8} W.M^{-2}.K^{-4}) et ε_r l'émissivité du corps.

- Condition de contact avec un outil :

$$-k\nabla T.n = h_{out}(T - T_{surf}) \text{ sur } \partial\Omega_c(t) \tag{129}$$

avec

$$\begin{aligned} T_{surf} &= \frac{e_{mat}T + e_{out}T_{out}}{e_{mat} + e_{out}} \\ e_{mat} &= \sqrt{k\rho c_p} \\ e_{out} &= \sqrt{k^{out}\rho^{out}c_p^{out}} \end{aligned} \tag{130}$$

T_{surf} est la température d'interface entre l'outil et la pièce, h_{out} est le coefficient de transfert thermique, e_{out} l'effusivité de l'outil est e_{mat} l'effusivité de la pièce. k^{out}, ρ^{out} et c_p^{out} sont respectivement la conductivité, la densité et la capacité calorifique de l'outil.

Pour que le problème thermique soit bien posé, nous avons, quelque soit t positif :

$$\partial\Omega_{cr}(t)\cap\partial\Omega_c(t)=\phi \quad \text{et} \quad \partial\Omega_{cr}(t)\cup\partial\Omega_c(t)=\partial\Omega(t) \tag{131}$$

Il est de plus nécessaire de donner une condition initiale en température :

$$T(t=0,x) = T_{ini}(x) \quad \forall x \in \Omega(0) \tag{132}$$

3.2.4 Discrétisation temporelle et algorithme de splitting

Soit x(t) la position d'un point matériel à l'instant t. La fonction x(t) satisfait la relation suivante :

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(t)dt \tag{133}$$

Afin de résoudre de façon approchée le problème thermo-mécanique, une discrétisation de l'équation (133) par un schéma d'Euler explicite est effectuée. Pour se faire, nous introduisons l'application $\Phi^{t,\Delta t}$, qui sert à réactualiser le domaine d'un incrément t à un incrément t+Δt :

$$\begin{aligned} \Phi^{t,\Delta t} :\ & \Omega^t \rightarrow IR^3 \\ & x \mapsto x + \Delta t\, v^{t+\Delta t} \end{aligned} \tag{134}$$

Le domaine $\Omega^{t+\Delta t}$ est défini grâce à l'application $\Phi^{t,\Delta t}$:

$$\Omega^{t+\Delta t} = \Phi^{t,\Delta t}\left(\Omega^t\right) \tag{135}$$

Il est à noter que les points du domaine Ω^t suivent les trajectoires des points matériels (à l'erreur de discrétisation près).
Un schéma de Lagrange réactualisé est utilisé dans FORGE3®. Cela signifie que le domaine Ω^t est utilisé comme domaine de référence afin de définir le jeu de variables $\left(v^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \sigma^{t+\Delta t}\right)$ satisfaisant l'équilibre thermomécanique. Le problème thermomécanique, après discrétisation selon un schéma lagrangien réactualisé s'écrit :

$$\left(v^t, p^t, \sigma^t, \Omega^t\right) \text{ connu}$$
$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma^{t+\Delta t} = 0 \quad \text{dans } \Omega^t \\ \operatorname{div} v^{t+\Delta t} = -\dfrac{\dot{p}^{t+\Delta t}}{\chi} \quad \text{dans } \Omega^t \\ \bar{\sigma}_H - \sigma_0\left(\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}\right) \le 0 \\ \dot{\varepsilon}^{e\,t+\Delta t} = L^{-1}\dot{\sigma}^{t+\Delta t} \\ \rho c_p \dfrac{dT^{t+\Delta t}}{dt} - \nabla.\left(k\nabla T^{t+\Delta t}\right) = \sigma^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} \quad \text{dans } \Omega^t \\ \text{Conditions aux limites} \\ \Omega^{t+\Delta t} = \Phi^{t,\Delta t}\left(\Omega^t\right) \end{cases} \tag{136}$$

où χ est le module de compressibilité élastique $\left(\chi = \dfrac{E}{3(1-2\upsilon)}\right)$.

Les problèmes mécanique et thermique du système (136) sont fortement couplés à cause de la thermo-dépendance de la loi de comportement et du terme source de l'équation de la chaleur. Afin de découpler ces deux problèmes, un algorithme de splitting est utilisé :

$$
\begin{aligned}
&\left(v^t, p^t, \sigma^t, \Omega^t\right) \text{ connu} \\
&\begin{cases}
\operatorname{div}\sigma^{t+\Delta t} = 0 \quad \text{dans } \Omega^t \\
\operatorname{div} v^{t+\Delta t} = -\dfrac{\dot{p}^{t+\Delta t}}{\chi} \qquad \text{dans } \Omega^t \\
\bar{\sigma}_H - \sigma_0\left(\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{t+\Delta}, T^t\right) \le 0 \\
\dot{\varepsilon}^{e\,t+\Delta} = L^{-1}\dot{\sigma}^{t+\Delta t} \\
\text{Conditions aux limites}
\end{cases} \\
&\begin{cases}
\rho c_p \dfrac{dT^{t+\Delta t}}{dt} - \nabla.\left(k\nabla T^{t+\Delta t}\right) = \sigma^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} \qquad \text{dans } \Omega^t \\
\text{Conditions aux limites}
\end{cases} \\
&\Omega^{t+\Delta t} = \Phi^{t,\Delta t}\left(\Omega^t\right)
\end{aligned}
\tag{137}
$$

Dans ce schéma, le découplage est obtenu en faisant dépendre la loi de comportement de la température calculée à l'instant précédant. Cette méthode permet la résolution 'séparée' des problèmes mécanique et thermique.
Il existe un certain nombre de variables d'histoire qui doivent être incrémentées au cours du temps (c'est typiquement le cas des coordonnées du maillage, de la déformation, du déviateur des contraintes, de la pression, de la température ou du champ de déplacement). Par exemple,

$$U^{n+1} = U^n + \Delta t\, V^{n+1} \tag{138}$$

où U^n est le vecteur contenant les coordonnées du champde déplacement à l'instant t_n. Nous noterons dans la suite h^n le vecteur contenant toutes les variables d'histoire à l'instant t_n. Tout comme le maillage, les variables d'histoire sont actualisées en utilisant un schéma d'Euler explicite :

$$h^{t+\Delta t} = h^t + \Delta t\, \dot{h}\left(v^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}\right) \tag{139}$$

Ainsi, le problème thermomécanique après discrétisation temporelle s'écrit :

tant que $t \le t_{fin}$

$$\begin{cases} \operatorname{div}\sigma^{t+\Delta t} = 0 \quad \text{dans } \Omega^t \\ \operatorname{div} v^{t+\Delta t} = -\dfrac{\dot{p}^{t+\Delta t}}{\chi} \quad \text{dans } \Omega^t \\ \bar{\sigma}_H - \sigma_0\left(\bar{\varepsilon}^{t+\Delta t}, \dot{\bar{\varepsilon}}^{t+\Delta t}, T^t\right) \le 0 \\ \dot{\varepsilon}^{e\,t+\Delta} = L^{-1}\dot{\sigma}^{t+\Delta} \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho c_p \dfrac{dT^{t+\Delta t}}{dt} - \nabla.\left(k\nabla T^{t+\Delta t}\right) = \sigma^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}^{t+\Delta t} \quad \text{dans } \Omega^t \\ \text{Conditions aux limites} \end{cases} \qquad (140)$$

$$\begin{cases} \Omega^{t+\Delta t} = \Phi^{t,\Delta t}\left(\Omega^t\right) \\ h^{t+\Delta t} = h^t + \Delta t\, \dot{h}\left(v^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, T^{t+\Delta t}\right) \\ t = t + \Delta t \\ \text{mise à jour de } \Delta t \end{cases}$$

fin tant que

3.2.5 Discrétisation et résolution du problème mécanique

3.2.5.1 Schéma incrémental et formulation faible

Un schéma de type Lagrangien réactualisé étant utilisé pour la discrétisation temporelle, on cherche à déterminer $\left(v^{t+\Delta t}, p^{t+\Delta t}, \sigma^{t+\Delta t}, \Omega^{t+\Delta t}\right)$ connaissant $\left(v^t, p^t, \sigma^t, \Omega^t\right)$.

$\sigma^{t+\Delta t}$ est déterminé par un schéma incrémental à partir du calcul de $\dot{\sigma}^{t+\Delta}$ (Aliaga (2000)) :

$$\dot{\sigma}^{t+\Delta t} = L\dot{\varepsilon}^e = L\dot{\varepsilon} - L\dot{\varepsilon}^{vp} \qquad (141)$$

En utilisant la loi de normalité [eq. (106)], on obtient :

$$\dot{\sigma}^{t+\Delta t} = L\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}^{vp} L \frac{\partial f}{\partial \sigma} \qquad (142)$$

où $\dot{\lambda}^{vp}$ est choisi tel que la fonction g définie ci-dessous soit négative ou nulle :

$$\begin{cases} g\left(\dot{\lambda}^{vp}\right) = f\left(\sigma^t + \Delta\sigma^t\left(\dot{\lambda}^{vp}\right), \bar{\varepsilon}^t + \Delta t\, \dot{\lambda}^{vp}, \dot{\lambda}^{vp}\right) \le 0 \\ \dot{\lambda}^{vp} g\left(\dot{\lambda}^{vp}\right) = 0 \end{cases} \qquad (143)$$

avec

$$\begin{aligned}\Delta\sigma^{t}\left(\dot{\lambda}^{vp}\right) &= \Delta t\left(L\dot{\varepsilon} - \dot{\lambda}^{vp} L\frac{\partial f}{\partial \sigma}\right)\\ \sigma^{t+\Delta t} &= \sigma^{t} + \Delta\sigma^{t}\left(\dot{\lambda}^{vp}\right)\end{aligned} \tag{144}$$

On définit le prédicteur élastique σ^{pred} de la manière suivante :

$$\sigma^{pred} = \sigma^{t} + \Delta t L\dot{\varepsilon} \tag{145}$$

Si $f\left(\sigma^{pred}, \bar{\varepsilon}^{t}, 0\right) \le 0$, alors la déformation est purement élastique ($\sigma^{t+\Delta t} = \sigma^{pred}$). Dans le cas contraire, on utilise un algorithme de Newton-Raphson pour calculer un $\dot{\lambda}^{vp}$ tel que $g\left(\dot{\lambda}^{vp}\right) = 0$ (Knockaert (2001)). On peut démontrer que, dans ce cas, $\sigma^{t+\Delta t}$ est la projection orthogonale de σ^{pred} sur le convexe de plasticité (Figure 21).

$$\begin{aligned}\sigma^{t+\Delta t} &= \underset{\Pi}{Proj}\left(\sigma^{pred}\right)\\ \Pi &= \left\{\sigma / f\left(\sigma, \bar{\varepsilon}, \dot{\bar{\varepsilon}}\right) \le 0\right\}\end{aligned} \tag{146}$$

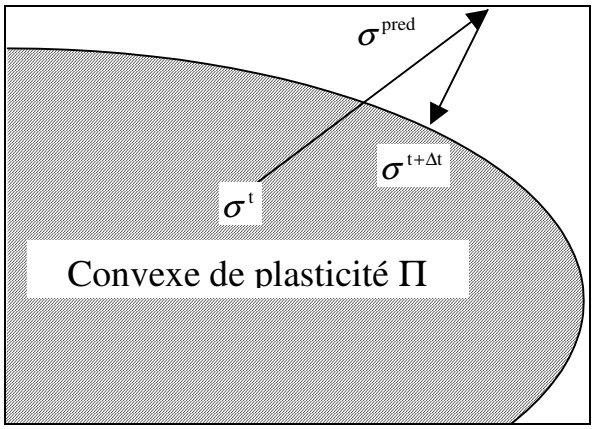


Figure 21 : projection orthogonale du prédicteur élastique sur le convexe de plasticité (retour radial)

Remarques :

-Ce schéma est aussi bien valable pour le critère de Von Mises [eq. (104)] que pour le critère de Hill [eq. (109)].
- Cet algorithme étant implicite, la méthode est inconditionnellement stable.

Ainsi, le problème mécanique fort continu s'écrit :

$$\begin{cases} div\,\sigma^{t+\Delta t} = 0\\ div\,v^{t+\Delta t} = -\dfrac{\dot{p}^{t+\Delta t}}{\chi}\\ \sigma^{t+\Delta t} = \underset{\Pi}{Proj}\left(\sigma^{pred}\right)\\ + \text{conditions aux limites}\end{cases} \tag{147}$$

On donne une forme faible du problème (147) afin de pouvoir utiliser une méthode d'éléments finis. Celle-ci s'exprime de la manière suivante, après avoir discrétisé le terme $\dot{p}^{t+\Delta t}$ par un schéma d'Euler explicite:

$$\text{Trouver}\left(v,p,\sigma_n\right)\in V\times P\times\Sigma_n \quad \text{tels que}$$

$$\begin{cases} \int_{\Omega^t} s^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}\left(v^*\right)d\Omega - \int_{\Omega^t} p^{t+\Delta t}\,\mathrm{div}\left(v^*\right)d\Omega \\ \qquad\qquad - \int_{\partial\Omega_c^t(t)} \sigma_n{}^{t+\Delta t} v^*.n\,d\Gamma - \int_{\partial\Omega_c^t(t)} \sigma_t{}^{t+\Delta t} v^*.t\,d\Gamma = 0 \;\; \forall v^* \in V \\ \int_{\partial\Omega_c^t(t)} \left(v^{t+\Delta t} - v_{out}\right).n\left(\sigma_n^* - \sigma_n{}^{t+\Delta t}\right)d\Gamma \quad \geq 0 \quad \forall \dot{\sigma}_n{}^* \in \Sigma_n \\ \int_{\Omega^t} p^*\,\mathrm{div}\left(v^{t+\Delta t}\right)d\Omega = -\int_{\Omega^t} p^*\,\frac{1}{\chi}\frac{p^{t+\Delta t}-p^t}{\Delta t}\,d\Omega \quad \forall p^* \in P \\ \sigma^{t+\Delta t} = \underset{\Pi}{\mathrm{Proj}}\left(\sigma^{pred}\right), \quad s^{t+\Delta t} = \sigma^{t+\Delta t} - p^{t+\Delta t} I, \quad p^{t+\Delta t} = \frac{1}{3}\mathrm{trace}\left(\sigma^{t+\Delta t}\right) \end{cases} \tag{148}$$

$$V = \left\{v \,/\, \partial_j v_i \in H\right\}$$

$$P = H'$$

$$\Sigma_n = \left\{\sigma_n \,/\, \sigma_n \leq 0 \text{ sur } \partial\Omega_c(t)\right\}$$

où H est un espace fonctionnel Hilbertien dépendant de la loi de comportement utilisée et H' son dual. Dans cette formulation faible, la contrainte normale est considérée comme une variable de Lagrange par rapport à la contrainte de contact unilatéral.

3.2.5.2 Gestion incrémentale du contact unilatéral

La contrainte associée à la gestion du contact unilatéral est gérée par une méthode de pénalisation. Cette méthode revient à imposer sur la zone de contact une contrainte normale de la forme :

$$\sigma_n = -\rho\left[\left(v^{t+\Delta t} - v_{out}\right).n - \frac{d_{pen}^t}{\Delta t}\right]^+ \qquad \text{sur } \partial\Omega_c(t) \tag{149}$$

avec

$$\left[x\right]^+ = \begin{cases} x \text{ si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \tag{150}$$

ρ est le coefficient de pénalisation et d_{pen}^t est la distance de pénétration de la pièce à l'intérieur de l'outil à l'instant t. On prend comme convention que d_{pen}^t est négative lorsque la pièce pénètre dans l'outil et positive dans le cas contraire (Figure 22).

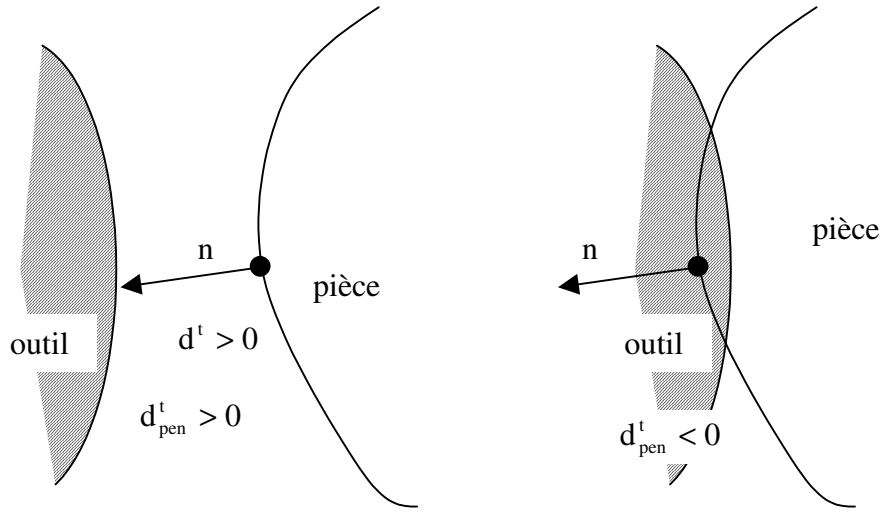


Figure 22 : convention de signe pour la distance de pénétration

Avec ces considérations, le problème faible (148) devient :

$$\begin{cases} \int_{\Omega(t)} s^{t+\Delta t} : \dot{\varepsilon}(v^*) d\Omega - \int_{\Omega(t)} p^{t+\Delta t} \operatorname{div}(v^*) d\Omega \\ \qquad + \rho \int_{\partial\Omega_C(t)} \left[(v^{t+\Delta t} - v_{out}).n - \frac{d^t_{pen}}{\Delta t} \right]^+ v^*.n d\Gamma - \int_{\partial\Omega_C(t)} \sigma_t^{t+\Delta t} v^*.t d\Gamma = 0 \ \forall v^* \in V \\ \int_{\Omega(t)} p^* \operatorname{div}(v^{t+\Delta t}) d\Omega = - \int_{\Omega(t)} p^* \frac{1}{\chi} \frac{p^{t+\Delta t} - p^t}{\Delta t} d\Omega \ \ \forall p^* \in P \\ \sigma^{t+\Delta t} = \underset{\Pi}{\operatorname{Proj}}(\sigma^{pred}), \quad s^{t+\Delta t} = \sigma^{t+\Delta t} - p^{t+\Delta t} I, \quad p^{t+\Delta t} = \frac{1}{3} \operatorname{trace}(\sigma^{t+\Delta t}) \end{cases} \tag{151}$$

Le problème (151) n'a que deux inconnues ($v^{t+\Delta t}$ et $p^{t+\Delta t}$) et les espaces d'admissibilité sont des espaces de Hilbert alors que le problème (148) est un problème à trois champs et que l'espaces d'admissibilité Σ_n est seulement convexe. Le problème (151) pourra donc être résolu plus facilement que le problème (148) par une méthode d'éléments finis.

3.2.5.3 Résolution

Le mini élément P1+/P1 est utilisé pour la résolution du problème (151). Il s'agit d'un élément fini mixte tétraédrique (triangulaire en 2D) pour lequel la vitesse et la pression sont interpolées par des fonctions linéaires par morceaux (Figure 23). Cet élément a l'avantage de vérifier les conditions de Brezzi-Babuska pour un problème de Stokes grâce à l'ajout d'un degré de liberté supplémentaire en vitesse sur chaque élément (Fortin et al. (1984)). Dans ce cas, la pression peut être considérée comme une variable de Lagrange associée à la contrainte d'incompressibilité et la condition de Brezzi-Babuska assure que l'on résout bien un problème de point selle (sans saut de dualité)

(Brezzi et Fortin (1991)). Dans le cas présent, le problème ne peut pas être vu comme un problème de point selle à cause de la compressibilité élastique. Le mini élément P1+/P1 est tout de même utilisé afin de stabiliser la méthode. En effet, concrètement, le matériau est faiblement compressible et des cas purement viscoplastiques seront traités dans la suite.

Soit τ_h une triangulation régulière de Ω^t. Chaque élément est décomposé en quatre sous-éléments tétraédriques en 3D (en trois en 2D) ayant pour sommets le centre de gravité de l'élément et trois nœuds (2 nœuds en 2D) (Figure 23).

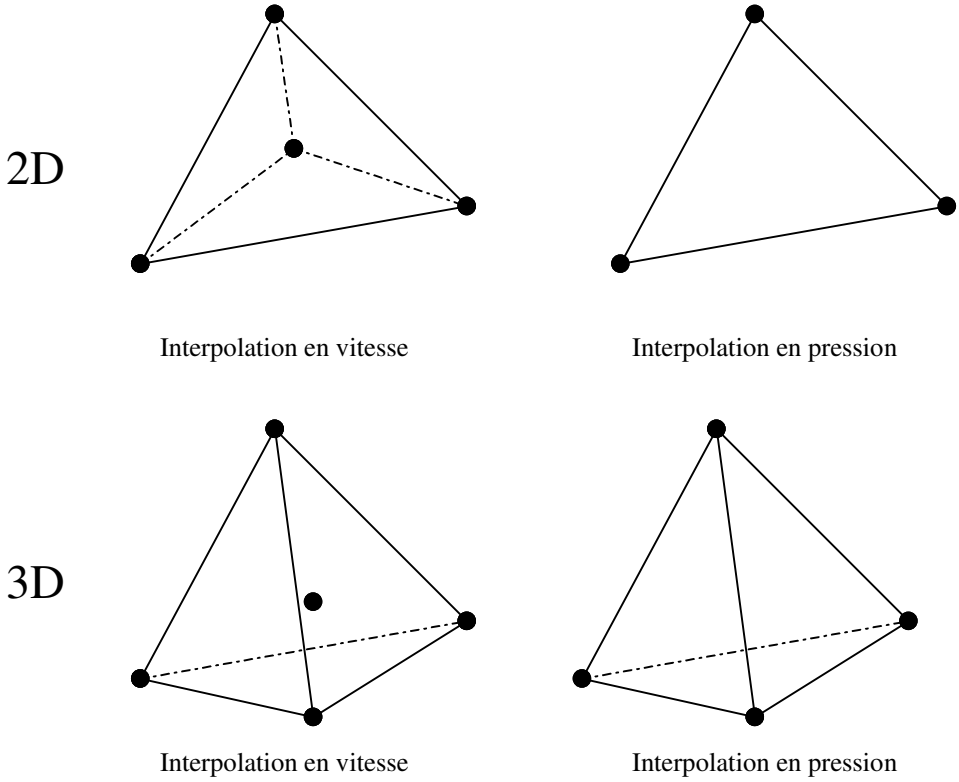


Figure 23 : mini élément P1+/P1 en 2D et en 3D

L'ensemble des sous éléments de l'élément E sera noté S(E). L'espace d'approximation de la vitesse est enrichi par l'espace des fonctions bulles, qui sont linéaires sur chaque sous élément et nulles sur le bord de chaque élément. On note V_h l'espace d'approximation de la vitesse, B_h l'ensemble des fonctions bulle et P_h l'espace d'approximation de la pression.

$$\begin{aligned} P_h &= \left\{\Psi \in C^0 / \Psi|_E \in P^1(E) \ \ \forall E \in \tau_h\right\} \\ B_h &= \left\{\Psi \in C^0 / \Psi|_E \in P^1(S(E)) \forall E \in \tau_h \ , \ \Psi|_E(x) = 0 \ \ \forall x \in \partial E \ \ \ \forall E \in \tau_h\right\} \\ V_h &= {P_h}^3 \oplus {B_h}^3 \end{aligned} \qquad (152)$$

Le temps est discrétisé en NbIncr intervalles : $[0, t_{fin}] = \bigcup_{i=0}^{i=NbIncr-1} [t_i, t_{i+1}]$, avec t_0=0 et t_{NbIncr}=t_{fin}. En définitive, la vitesse et la pression discrètes sont approximées de la façon suivante en 3D :

$$\begin{aligned} \left(v_h(t_n)\right)_k &= \sum_{i=1}^{NbNoe} V_{3i+k}^n N_i + \sum_{i=1}^{NbElt} B_{3i+k}^n b_i \quad k = 1,2,3 \\ v_h(t_n) &= \left[\left(v_h(t_n)\right)_1, \left(v_h(t_n)\right)_2, \left(v_h(t_n)\right)_3\right]^T \end{aligned} \tag{153}$$

$$p_h(t_n) = \sum_{i=1}^{NbNoe} P_i^n N_i \tag{154}$$

où NbNoe est le nombre de nœuds, NbElt est le nombre d'éléments $\{N_i, i=1,..,NbNoe\}$ sont les fonctions de base associées à l'espace P_h et $\{b_i, i=1,..,NbElt\}$ sont les fonctions de base associées à l'espace B_h.

Afin d'éviter que le contact soit surcontraint, il est nécessaire de modifier la mesure $d\Gamma$ par une mesure discrète $d\Gamma_c$ pour les termes de contact :

$$d\Gamma_c = \sum_{i=1}^{NbNoe} \delta^i S^i \qquad \text{sur } \partial\Omega_c(t) \tag{155}$$

où δ^i est la mesure de Dirac au i-ième nœud et S^i est la surface des éléments contenant le i-ième nœud. On parle alors de contact nodal. L'utilisation d'une formulation intégrée pour les termes de frottement ne pose pas de problème (Mocellin (1999)).

La forme faible des équations de conservation de la masse et de la quantité de mouvement devient alors dans le cas discret :

$$\text{trouver } \left(v_h^{t_{n+1}}, p_h^{t_{n+1}}\right) \in V_h \times P_h$$

$$\begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega(t_n)} s^{t_{n+1}}\left(v_h^{t_{n+1}}\right) : \dot{\varepsilon}\left(v_h^*\right) d\Omega - \int_{\Omega(t_n)} p_h^{t_{n+1}} \operatorname{div}\left(v_h^*\right) d\Omega + \rho \int_{\partial\Omega_C(t_n)} \left[\left(v_h^{t_{n+1}} - v_{out}\right).n - \frac{d_{pen}^{t_n}}{\Delta t}\right]^+ v_h^*.n\, d\Gamma_c \\ \qquad - \displaystyle\int_{\partial\Omega_C(t_n)} \sigma_T^{t_{n+1}} v_h^*.t\, d\Gamma = 0 \quad \forall v_h^* \in {P_h}^3 \\ \displaystyle\int_{\Omega(t_n)} s^{t_{n+1}}\left(v_h^{t_{n+1}}\right) : \dot{\varepsilon}\left(b_h^*\right) d\Omega - \int_{\Omega(t_n)} p_h^{t_{n+1}} \operatorname{div}\left(b_h^*\right) d\Omega = 0 \qquad \forall b_h^* \in {B_h}^3 \\ \displaystyle\int_{\Omega(t_n)} p^* \operatorname{div}\left(v_h^{t_{n+1}}\right) d\Omega = -\int_{\Omega(t_n)} p^* \frac{1}{\chi} \frac{p_h^{t_{n+1}} - p_h^{t_n}}{\Delta t}\, d\Omega \qquad \forall p^* \in P_h \\ \sigma^{t_{n+1}} = \underset{\Pi}{\operatorname{Proj}}\left(\sigma^{pred}\right), \quad s^{t_{n+1}} = \sigma^{t_{n+1}} - p^{t_{n+1}} I, \quad p_h^{t_{n+1}} = \frac{1}{3}\operatorname{trace}\left(\sigma^{t_{n+1}}\right) \end{cases} \tag{156}$$

En remplaçant successivement les fonctions test par les fonctions de base des espaces d'approximation, on obtient un système non-linéaire discret noté de la manière suivante à l'instant t_n :

$$\begin{cases} R^{v}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \\ R^{b}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \\ R^{p}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \end{cases} \tag{157}$$

et $V^{n+1} = \left(V_1^{n+1}, ..., V_{3NbNoe}^{n+1}\right)$, $B^{n+1} = \left(B_1^{n+1}, ..., B_{3NbElt}^{n+1}\right)$, $P^{n+1} = \left(P_1^{n+1}, ..., P_{NbNoe}^{n+1}\right)$.

Il est possible de démontrer que le terme R^v ne dépend pas de B^{n+1} (Aliaga (2000)). Le système (157) s'écrit donc :

$$\begin{cases} R^{v}(V^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \\ R^{b}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \\ R^{p}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) = 0 \end{cases} \tag{158}$$

Ce problème est rendu non linéaire à cause des termes de contact, de frottement et de comportement et est résolu par l'algorithme de Newton-Raphson. A chaque itération de Newton-Raphson, un système linéaire de la forme suivante doit être résolu :

$$\begin{pmatrix} K^{vv} & 0 & K^{vp} \\ 0 & K^{bb} & K^{bp} \\ K^{vp\,T} & K^{bp\,T} & K^{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V^{n+1} \\ \Delta B^{n+1} \\ \Delta P^{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^{v}(V^{n+1}, P^{n+1}) \\ R^{b}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) \\ R^{p}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) \end{pmatrix} \tag{159}$$

Grâce à une technique de 'condensation de la bulle', le degré de liberté supplémentaire lié à la bulle est supprimé des équations :

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} A & D \\ D^{T} & -E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V^{n+1} \\ \Delta P^{n+1} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} R^{v}(V^{n+1}, P^{n+1}) \\ R^{bp}(V^{n+1}, B^{n+1}, P^{n+1}) \end{pmatrix} \\ &A = K^{vv} \\ &D = K^{bp} \\ &E = K^{bp\,T} K^{bb\,-1} K^{bp} - K^{pp} \\ &R^{bp} = R^{p} - K^{bp\,T} K^{bb\,-1} R^{b} \end{aligned} \tag{160}$$

Cette formulation a donc l'avantage de pouvoir prendre en compte la condition d'incompressibilité sans agrandir la taille des systèmes linéaires à résoudre.
En définitive, l'algorithme de Newton-Raphson s'écrit [eq. (161)]:

$$
\begin{cases}
k = 1 \\
\text{tant que } \left\| R\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right) \right\| \geq \text{critère d'arrêt} \\
\dfrac{\partial R\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right)}{\partial\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right)} \begin{pmatrix} \Delta V_k^{n+1} \\ \Delta P_k^{n+1} \end{pmatrix} = -R\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right) \\
\begin{pmatrix} V_{k+1}^{n+1} \\ P_{k+1}^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_k^{n+1} \\ P_k^{n+1} \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} \Delta V_k^{n+1} \\ \Delta P_k^{n+1} \end{pmatrix} \\
k = k + 1
\end{cases}
\tag{161}
$$

avec

$$
\begin{cases}
R\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right) = \begin{pmatrix} R^{v}\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right) \\ R^{bp}\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right) \end{pmatrix} \\
\dfrac{\partial R\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right)}{\partial\left(V_k^{n+1}, P_k^{n+1}\right)} = \begin{pmatrix} A & D \\ D^T & -C \end{pmatrix}
\end{cases}
\tag{162}
$$

où α est un paramètre déterminé par une procédure de recherche linéaire.

3.2.6 Discrétisation et résolution du problème thermique

3.2.6.1 Formulation faible et discrétisation spatiale

La forme faible du problème thermique ([eq. (118)]+conditions limites) s'écrit :

$$
\begin{aligned}
&\text{Trouver } T \in \Theta \\
&\int_{\Omega(t)} \rho c_p \frac{dT}{dt} T^* d\Omega + \int_{\Omega(t)} k \nabla T . \nabla T^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_c(t)} h_{out}\left(T - T_S\right) . \nabla T^* d\Omega + \int_{\partial\Omega_{cr}(t)} h\left(T - T_{ext}\right) . \nabla T^* d\Omega \\
&\qquad = \int_{\Omega(t)} \sigma : \dot{\varepsilon} T^* d\Omega \qquad \forall T^* \in \Theta_0
\end{aligned}
\tag{163}
$$

$$\Theta = \left\{ T / T = T_{imp} \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}$$

$$\Theta_0 = \left\{ T / T = 0 \text{ sur } \partial\Omega_D \right\}$$

A partir de cette formulation faible, une méthode d'éléments finis P1 est construite. Les éléments sont les mêmes que ceux utilisés pour le problème mécanique (tétraédriques) et l'on utilise les fonctions de base $\{N_i, i=1, NbNoe\}$ déjà introduites pour la résolution du problème mécanique :

$$T_h\left(t_n\right) = \sum_{i=1}^{NbNoe} T_i^n N_i \tag{164}$$

L'inconnue du problème devient alors le vecteur T^n :

$$T^n = \left(T_1^n, ..., T_{NbNoe}^n\right) \tag{165}$$

En remplaçant les fonctions test par les fonctions de base $\{N_{i,\ i=1,\ NbNoe}\}$, on obtient un système discret noté comme suit :

$$C_{th}\frac{dT^n}{dt}+K_{th}T^n=Q \tag{166}$$

Comme les paramètres thermiques sont supposés dépendre de la température, la matrice C_{th} de capacité, la matrice K_{th} de conductivité et le terme source (vecteur chargement) Q dépendent de T^n et le problème à résoudre est non-linéaire.

3.2.6.2 Discrétisation temporelle

Plutôt que de résoudre le problème faible à l'instant t_n, la discrétisation est effectuée à un instant t^* appartenant à l'ensemble $[t_n, t_{n+1}]$ dans le but de rendre le schéma plus plus consistant (Soyris (1990)) :

$$t^*=\alpha_1 t_{n-1}+\alpha_2 t_n+\alpha_3 t_{n+1} \qquad \text{et} \qquad T^*=\alpha_1 T^{n-1}+\alpha_2 T^n+\alpha_3 T^{n+1} \tag{167}$$

Les mêmes pas de discrétisation temporelle sont utilisés pour le problème mécanique et pour le problème thermique afin de n'utiliser qu'un seul maillage. Comme nous utilisons une formulation lagrangienne, nous avons :

$$\frac{dT^*}{dt}=\frac{\partial T^*}{\partial t} \tag{168}$$

La dérivée partielle est discrétisée par un schéma à deux pas :

$$\frac{\partial T^*}{\partial t}\approx(1-\gamma_2)\frac{T_n-T_{n-1}}{t_n-t_{n-1}}+\gamma_2\frac{T_{n+1}-T_n}{t_{n+1}-t_n}\underset{\text{def}}{=}\frac{\Delta T^*}{\Delta t} \tag{169}$$

Un schéma à deux pas de Dupont est utilisé ($\alpha_1=\frac{1}{4}$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=\frac{3}{4}$ et $\gamma_2=1$) initialisé par un schéma de Crank-Nicholson ($\alpha_1=0$, $\alpha_2=\frac{3}{2}$, $\alpha_3=1$ et $\gamma_2=\frac{3}{2}$) (Soyris (1990)).

Nous noterons dans la suite l'opérateur discret de dérivation $\frac{\Delta}{\Delta t}$. Le système discrétisé s'écrit alors :

$$C^*\frac{\Delta T^*}{\Delta t}+K_{th}^*T^*=Q^* \tag{170}$$

où les matrices C_{th}^*, K_{th}^* et le vecteur Q^* sont obtenus respectivement à partir d'une approximation à l'ordre deux des matrice C_{th}, K_{th} et du vecteur Q. Il s'agit d'une linéarisation qui permet d'éviter d'utiliser des itérations de Newton-Raphson pour résoudre le problème thermique (Menai (1995)).

Finalement, nous noterons le problème thermique :

$$M^n T^{n+1} = Q'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right) \tag{171}$$

où M^n est une matrice de $IR^{NbNoe}xIR^{NbNoe}$ et Q' un vecteur de IR^{NbNoe}.

Remarque
Aliaga (2000) a noté l'apparition d'instabilités numériques dans le calcul de la température lorsque le pas de temps est inférieur à un pas de temps critique Δt_c :

$$\Delta t_c = \frac{h\rho c_p}{k} \tag{172}$$

Le calcul thermique doit donc être effectué avec un pas de temps Δt au moins supérieur à Δt_c. Ce pas de temps pouvant être supérieur au pas de temps utilisé pour la résolution mécanique, la température correspondant au pas de temps mécanique est obtenue par régression linéaire. Le schéma thermique ainsi développé est qualifié *d'asynchrone*.

3.2.7 Résolution de systèmes linéaires et parallélisation du modèle direct

Il existe deux classes de méthodes pour résoudre les systèmes linéaires : les méthodes directes et les méthodes itératives. Pour la simulation 3D de procédés de mise en forme, il a été choisi d'utiliser un solveur itératif pour plusieurs raisons (Traoré (2001)):

- Il est aisé de paralléliser les méthodes éléments finis en utilisant une stratégie de partitionnement de maillage
- Le taux de convergence des méthodes itératives est généralement meilleur que celui des méthodes directes pour les grands systèmes linéaires
- Les méthodes itératives permettent d'utiliser un stockage Morse (stockage creux) pour les matrices contrairement aux méthodes directes, qui nécessitent le stockage du profil des matrices (stockage ligne de ciel).

Une méthode de résidu minimal préconditionnée par une factorisation incomplète de Crout est utilisée dans FORGE3®. Elle présente la particularité de ne faire intervenir que des produits matrice-vecteur et des produits scalaires entre vecteurs. C'est cette propriété qui permet de paralléliser la méthode du résidu minimal par une stratégie de partitionnement de maillage (il s'agit d'une approche S.P.M.D.). Le principe de cette méthode est d'affecter à chaque processeur une partie des nœuds du maillage (Figure 24). Le produit matrice-vecteur global est alors obtenu par une moyenne pondérée des produits matrice vecteurs locaux et les produits scalaires globaux sont obtenus par sommation des produits scalaires locaux (Marie (1997)).

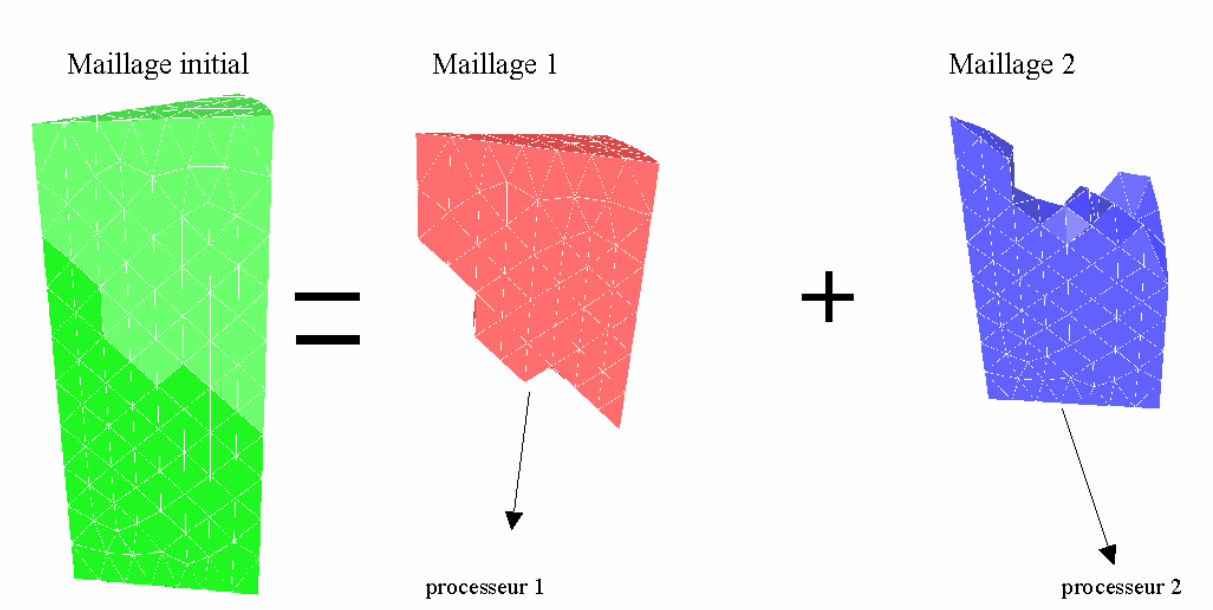


Figure 24 : partitionnement d'un maillage en deux sous-maillages

3.2.8 Remaillage et transport

FORGE3® a pour but de simuler des procédés de mise en forme mettant en jeu de grandes déformations. Les procédés de mise en forme ont généralement pour objectif de produire des pièces complexes à partir de lopins qui ont une forme géométrique simple. La formulation retenue étant de type lagrangien réactualisé, les nœuds du maillage suivent les trajectoires des points matériels. Le maillage initial a donc toutes les chances de dégénérer. Or, les résultats d'estimation d'erreur a priori en éléments finis montrent que les éléments du maillage doivent être de forme aussi proche que possible de celle d'éléments équilatéraux. Dans le cas contraire, la précision des méthodes éléments finis dégénère avec le maillage. Pour préserver une bonne qualité de maillage durant la simulation, un algorithme de remaillage a été développé afin de remplacer un maillage dégénéré au cours du calcul par un maillage de meilleure qualité (Coupez (1991)). Mais l'utilisation d'une procédure de remaillage nécessite le développement d'une méthode de transport des variables d'histoire depuis l'ancien jusqu'au nouveau maillage. Il existe deux types de variables d'histoires : les variables nodales (P1 par morceaux) et les variables P0 par élément.

3.2.8.1 Transport P1

Le transport des variables nodales s'effectue en deux étapes :

- Recherche de l'élément d'appartenance de chaque nœud du nouveau maillage dans l'ancien maillage

- Interpolation des valeurs nodales depuis les sommets de l'élément d'appartenance de l'ancien maillage jusqu'au nœud du nouveau maillage. Elle est effectuée en utilisant les fonctions de forme de l'ancien maillage (Figure 25).

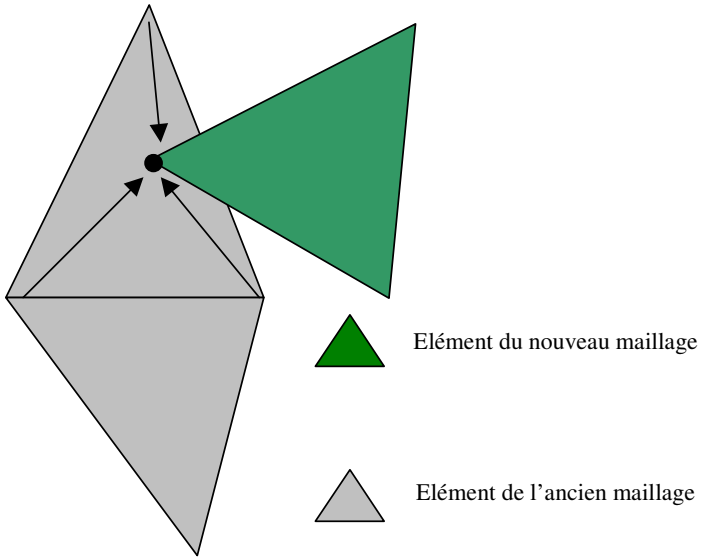


Figure 25 : transport des variable d'histoire P1

3.2.8.2 Transport P0

L'interpolation des variables P0 par élément est un peu plus délicate et est effectuée en deux étapes.

- En un premier temps, on utilise une méthode de moindres carrés afin d'affecter des valeurs aux nœuds de l'ancien maillage à partir des valeurs définies par élément (Figure 26).

$$\text{trouver } \left(\bar{u}_1^{\,opt},...,\bar{u}_{NbNoe}^{\,opt}\right) \text{ tel que}$$

$$\left(\bar{u}_1^{\,opt},...,\bar{u}_{NbNoe}^{\,opt}\right) = \arg\underset{\bar{u}_i}{Min}\left\| \sum_{i=1}^{i=NbNoe} \bar{u}_i N^i - \sum_{j=1}^{j=NbElt} u_j 1^j \right\|^2 \qquad (173)$$

u_j : valeur sur l'élément j

$\bar{u}_i$: valeur extrapolée au nœud i

N^i : fonction de forme sur le nœud i

1^j : fonction indicatrice sur l'élément j.

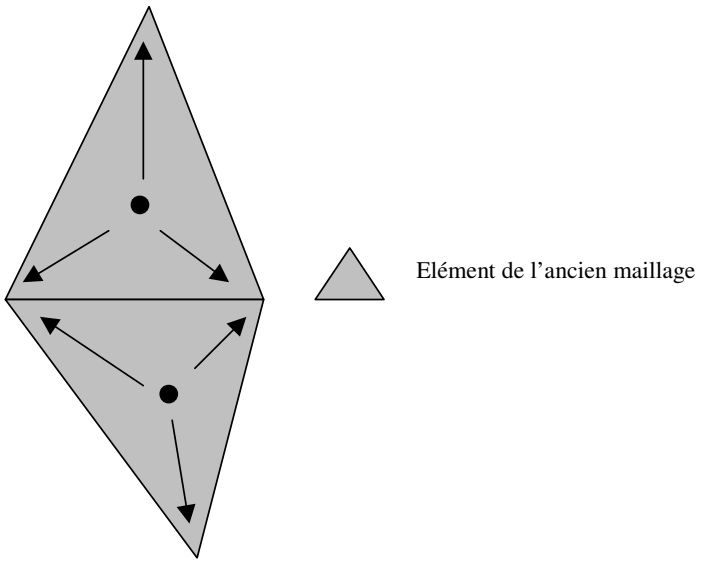


Figure 26 : extrapolation par moindres carrés des valeurs P0 aux nœuds

Cette extrapolation est faite dans le but d'utiliser la procédure de transport de variables nodales décrite précédemment.

- Dans une deuxième étape, on cherche l'élément d'appartenance dans l'ancien maillage du centre de gravité de chaque élément du nouveau maillage. Grâce aux fonctions de base définies sur l'ancien maillage, on affecte alors une valeur au centre de gravité en utilisant la procédure de transport de variables P1 décrite précédemment (Figure 27).

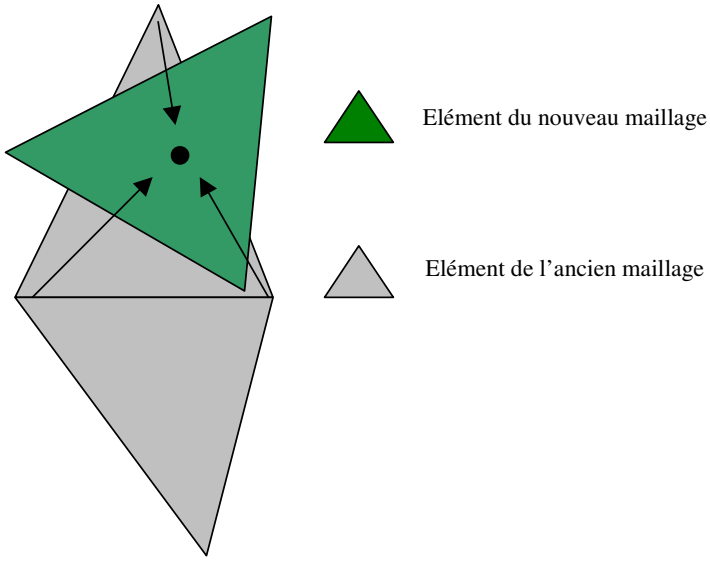


Figure 27 : transport P1 des variables d'histoire extrapolées jusqu'au centre de gravité du nouveau maillage

La valeur de la variable d'histoire interpolée au centre de gravité sera celle affectée à l'élément. Cette procédure de transport induit une diffusion numérique supplémentaire par rapport à l'interpolation P1 à cause de la phase d'extrapolation. En effet, les valeurs affectées aux nœuds lors de l'extrapolation ne sont qu'une moyenne pondérée des valeurs P0 des éléments contenant ce nœud (Traoré (2002)).

3.2.9 Conclusion sur le modèle direct FORGE3®

Le logiciel FORGE3® a été développé pour simuler des procédés des mise en forme, généralement caractérisés par de grandes déformations et des écoulements complexes. L'utilisation d'un algorithme de remaillage permet en outre d'atteindre des déformations relativement importantes. A partir de la vitesse, de la pression et de la température calculées comme solutions approchées de l'équilibre thermomécanique, il est possible de calculer un certain nombre de grandeurs mesurables (effort, couple, champ de déformation, etc.). Dans le paragraphe qui suit, nous allons chercher à développer une méthode permettant de dériver ces grandeurs mesurables par rapport aux paramètres à identifier afin de coupler FORGE3® avec un module d'optimisation basé sur une méthode à direction de descente.

3.3 Modèle inverse et analyse de sensibilité

Nous avons passé en revue un certain nombre de méthodes d'optimisation dans le premier chapitre. Parmi toutes les approches possibles, nous avons opté pour la méthode de Gauss-Newton en raison de son taux de convergence relativement intéressant.
Dans un premier temps, nous rappelons que le problème inverse a la forme suivante :

$$\begin{aligned} &\text{trouver } \lambda^{opt} \in \mathrm{IR}^{NPar} \text{ tel que} \\ &\begin{cases} \phi\left(\lambda^{opt}\right) = \min\limits_{\lambda \in \mathrm{IR}^{NPar}} \left(\phi(\lambda)\right) \\ \phi(\lambda) = \left\| \mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M} \right\|_{\mathrm{W}}^2 = \left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right)^{\mathrm{T}} \mathrm{W} \left(\mathrm{F}(\lambda) - \mathrm{M}\right) \end{cases} \end{aligned} \tag{174}$$

où λ^{opt} est le vecteur de dimension Npar contenant le jeu de paramètres à identifier, M est le vecteur contenant les mesures expérimentales et $\mathrm{F}(\lambda)$ est le vecteur contenant le résultats de la simulation numérique correspondant à l'observable M. Typiquement, dans les cas que nous aurons à traiter, M représentera l'effort mesuré pendant un essai de compression, le couple mesuré pendant un essai de torsion, la flèche mesurée pendant un essai de gonflage, etc.
Ce problème est résolu par un algorithme de Gauss-Newton :

$$\begin{aligned} &\mathrm{k} = 1 \\ &\begin{cases} \text{tant que} \left\| \dfrac{\mathrm{d}\phi\left(\lambda^{\mathrm{k}}\right)}{\mathrm{d}\lambda^{\mathrm{k}}} \right\|_2 > \text{critère d'arrêt} \\ \mathrm{Q}^{\mathrm{k}} \mathrm{d}^{\mathrm{k}} = -\dfrac{\mathrm{d}\phi\left(\lambda^{\mathrm{k}}\right)}{\mathrm{d}\lambda^{\mathrm{k}}} \\ \mathrm{Q}^{\mathrm{k}} = 2 \dfrac{\mathrm{dF}(\lambda^{\mathrm{k}})}{\mathrm{d}\lambda}^{\mathrm{T}} \mathrm{W} \dfrac{\mathrm{dF}(\lambda^{\mathrm{k}})}{\mathrm{d}\lambda} \\ \lambda^{\mathrm{k}+1} = \lambda^{\mathrm{k}} + \alpha_{\mathrm{ls}} \mathrm{d}^{\mathrm{k}} \\ \\ \mathrm{k} = \mathrm{k} + 1 \end{cases} \end{aligned} \tag{175}$$

où α_{ls} est obtenu par recherche linéaire. Cette méthode pourra être stabilisée en utilisant la méthode décrite au paragraphe 2.6. L'utilisation de cet algorithme nécessite le calcul de la matrice de sensibilité $\frac{dF(\lambda^k)}{d\lambda}$ par le biais d'un module d'analyse de sensibilité.
FORGE3® est utilisé comme modèle direct pour décrire précisément l'écoulement de matière lors de l'essai mécanique étudié. Développer un module d'analyse de sensibilité revient en quelque sorte à dériver FORGE3® par rapport aux paramètres à identifier. L'exécution du modèle inverse requiert généralement de nombreux appels au modèle direct et au module d'analyse de sensibilité. Il est donc nécessaire :

- d'avoir une analyse de sensibilité assez précise pour permettre à l'algorithme de Gauss-Newton de converger en peu d'itérations,

- que la méthode choisie soit assez rapide pour ne pas augmenter trop les temps de calcul. Nous devons donc avoir un bon compromis entre la précision et le temps CPU de la méthode,

- que la méthode développée permette de changer facilement de modèle (loi de comportement, de frottement, etc.) et d'observable (effort, couple, champ de déformation, etc.).

Il est possible de distinguer deux grands types de méthodes d'analyse de sensibilité dans la littérature : les méthodes variationnelles et les méthodes discrètes (Mahnken et Stein (1996)). Dans la première approche, les équations du modèle direct sont dérivées et ensuite discrétisées (Constantinescu et Verger (2001)). Ce type de méthode s'avère souvent assez difficile à programmer. Généralement, les auteurs préfèrent utiliser une méthode discrète (c'est à dire dériver le problème discret). Notre étude bibliographique ne portera que sur cette deuxième famille de méthodes, bien plus souvent rencontrées dans la littérature.
Dans ce chapitre sont décrites un certain nombre de méthodes d'analyse de sensibilité discrètes. Leurs avantages et leurs défauts sont discutés afin de déterminer quelle méthode semble la plus adéquate pour notre problème.

3.3.1 Différences finies

La méthode des différences finies est l'approche la plus simple à programmer. Il est possible de citer la méthode décentrée à droite, à gauche et la méthode centrée. Elle sont basées sur un développement limité pour estimer la matrice de sensibilité.

Schéma décentré à droite :

$$\frac{dF}{d\lambda_i} = \frac{F(\lambda_1,...,\lambda_i+\Delta\lambda_i,...\lambda_{NPar}) - F(\lambda_1,...,\lambda_i,...\lambda_{NPar})}{\Delta\lambda_i} + O(\Delta\lambda_i) \qquad (176)$$

Schéma décentré à gauche :

$$\frac{dF}{d\lambda_i} = \frac{F(\lambda_1,...,\lambda_i,...\lambda_{NPar}) - F(\lambda_1,...,\lambda_i-\Delta\lambda_i,...\lambda_{NPar})}{\Delta\lambda_i} + O(\Delta\lambda_i) \qquad (177)$$

Schéma centré :

$$\frac{dF}{d\lambda_i} = \frac{F(\lambda_1,...,\lambda_i + \Delta\lambda_i,...\lambda_{NPar}) - F(\lambda_1,...,\lambda_i - \Delta\lambda_i,...\lambda_{NPar})}{2\Delta\lambda_i} + O\left(\Delta\lambda_i^{\,2}\right) \quad (178)$$

où $\Delta\lambda_i$ est un paramètre positif de discrétisation fixé par l'utilisateur. Si l'on a Npar paramètres à identifier, il est nécessaire d'exécuter NPar+1 fois le modèle direct pour obtenir la matrice de sensibilité à l'ordre un avec les méthodes décentrées. La méthode centrée est consistante d'ordre deux, mais nécessite 2NPar+1 simulations.
Il est à noter que le choix de la perturbation doit être fait de façon judicieuse. En effet, il est clair que pour un $\Delta\lambda_i$ trop important, l'erreur de troncature fait que la matrice de sensibilité est mal estimée. D'un autre coté, l'erreur d'arrondis de la machine fait que l'on ne peut pas choisir un $\Delta\lambda_i$ trop petit. Le choix de ce paramètre doit être un compromis entre l'erreur de troncature et l'erreur d'arrondis. Concrètement, nous observons que nous pouvons utiliser des $\Delta\lambda_i$ variant dans l'intervalle $[10^{-6}\lambda_i, 10^{-2}\lambda_i]$.
Schnur et Zabaras (1992) utilisent la méthode des différences finies couplée à un algorithme de Levenberg-Marquardt pour l'identification de paramètres élastiques et pour la localisation d'inclusions circulaires dans une matrice élastique. Tillier (1998) identifie les paramètres de lois de comportement viscoplastiques en utilisant un algorithme de Gauss-Newton couplé avec une méthode de différences finies. Meuwissen (1998) utilise un schéma décentré à droite pour estimer la matrice de sensibilité pour l'identification des paramètres de lois élasto-plastiques. Cet auteur utilise comme données expérimentales des mesures de champs de déformation pratiquées lors d'essais de traction d'éprouvettes planes percées. Les champs de déformation sont mesurés grâce à un système de corrélation d'images. Le nombre de paramètres à déterminer étant relativement faible, l'utilisation de la méthode des différences finies est bien adaptée à ce problème.
En définitive, les méthodes de type différences finies peuvent être programmées assez facilement mais ont une précision limitée par les erreurs d'arrondi ou de troncature. De plus, elles demandent de nombreuses exécutions du modèle direct. Dans le cadre du développement d'une méthode inverse autour d'un modèle direct 3D, cette méthode n'est pas assez performante en terme de temps de calcul.

3.3.2 Méthode de la variable complexe

Il existe une méthode de type différences finies qui permet d'éviter les erreurs d'arrondis. Cette méthode a été décrite par Lyness (1967) dans les années 60, mais n'a été que très récemment reprise par Squire et Trapp (1998). Elle est basée sur le fait que toutes les opérations définies sur les réels peuvent être généralisées sur le corps des complexes. Partant de cette constatation, il est possible de donner une estimation à l'ordre deux de la matrice de sensibilité :

$$\frac{dF}{d\lambda_j} = \frac{\mathrm{Im}\left(F(\lambda_1,...,\lambda_j + i\Delta\lambda_j,...\lambda_{NPar})\right)}{\Delta\lambda_j} + O\left(\left|\Delta\lambda_j\right|^2\right) \quad (179)$$

$$\text{avec } i^2 = -1 \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(a+bi) = b \;\forall (a,b) \in IR^2$$

Cette méthode ne faisant pas intervenir de différence au numérateur, nous n'avons pas d'erreur d'arrondis. En contrepartie, l'utilisation de nombres complexes à la place de

nombres réels double la place mémoire requise par le modèle direct et demande un nombre considérable de modifications du code. Anderson et al. (1999) ont appliqué cette méthode dans le cadre de l'optimisation de forme d'une aile d'avion. La méthode de la variable complexe est comparée à la méthode des différences finies centrée et il est montré qu'il est possible de choisir une valeur de la perturbation $\Delta\lambda_j$ bien plus faible avec la méthode de la variable complexe. Cette dernière méthode s'avère donc bien plus précise que la méthode des différences finies. Les temps de calcul de la méthode des différences finies centrées et de la méthode de la variable complexe sont pour ce cas à peu près identiques. Cette méthode demeure donc relativement lente.

3.3.3 Différentiation analytique

Plutôt que de considérer le modèle direct comme une boîte noire, on peut le voir comme un ensemble d'équations que l'on cherche à dériver. Nous avons vu dans le paragraphe 3.2 que l'écoulement du matériau est décrit à partir de la vitesse, de la pression, de la température et de variables d'histoire. Le calcul de la quantité $F(\lambda)$ peut être noté de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\text{à l'instant } t_n \\
&\begin{cases}
R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right) = 0 \\
M^n T^{n+1} = Q'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right) \\
h^{n+1} = h^n + \Delta t \dot{h}^n\left(V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}\right) \\
F_{n+1}(\lambda) = f\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}, h^{n+1}\right)
\end{cases} \\
&\text{avec } F(\lambda) = \left(F_1(\lambda), ..., F_N(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{180}$$

Le vecteur F est l'observable en fonction des variables internes du modèle direct.

Remarque : le calcul du résidu mécanique R étant supposé dépendre des paramètres à identifier, nous utilisons la notation $R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)$.

Les termes de la matrice de sensibilité sont obtenus à partir de l'expression suivante :

$$\frac{dF_n(\lambda)}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial \lambda} + \frac{\partial f}{\partial V^{n+1}}\frac{dV^{n+1}}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial P^{n+1}}\frac{dP^{n+1}}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial T^{n+1}}\frac{dT^{n+1}}{d\lambda} + \frac{\partial f}{\partial h^{n+1}}\frac{dh^{n+1}}{d\lambda} \tag{181}$$

A partir de l'expression analytique de f, il est possible de calculer les termes $\frac{\partial f}{\partial \lambda}$, $\frac{\partial f}{\partial V^{n+1}}$, $\frac{\partial f}{\partial P^{n+1}}$, $\frac{\partial f}{\partial T^{n+1}}$ et $\frac{\partial f}{\partial h^{n+1}}$. Par contre, les termes $\frac{dV^{n+1}}{d\lambda}$, $\frac{dP^{n+1}}{d\lambda}$, $\frac{dT^{n+1}}{d\lambda}$ et $\frac{dh^{n+1}}{d\lambda}$ sont eux calculés à partir de la résolution d'un système tangent au problème direct :

à l'instant t_n

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)}\left(\dfrac{d\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)}{d\lambda}\right)^T = \\ -\dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\lambda} - \dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(T^n, h^n\right)}\left(\dfrac{d\left(T^n, h^n\right)}{d\lambda}\right)^T \\ M^n \dfrac{dT^{n+1}}{d\lambda} = \dfrac{dQ'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{d\lambda} \\ \dfrac{dh^{n+1}}{d\lambda} = \dfrac{dh^n}{d\lambda} + \Delta t \dfrac{d}{d\lambda}\left(\dot{h}^n\left(V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}\right)\right) \end{cases} \quad (182)$$

Ce schéma, obtenu par différentiation des équations du système (180) par rapport à λ, donne une expression exacte de la dérivée de F par rapport à λ. De plus, il nécessite la résolution d'un problème non-linéaire (problème direct) et NPar systèmes linéaires alors que les schémas aux différences finies décentrés requièrent la résolution de NPar+1 problèmes non-linéaires. En contrepartie, il est nécessaire de donner une expression analytique de $\dfrac{\partial f}{\partial\lambda}$, $\dfrac{\partial f}{\partial V^{n+1}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial P^{n+1}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial T^{n+1}}$, $\dfrac{\partial f}{\partial h^{n+1}}$, $\dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(T^n, h^n\right)}$, $\dfrac{dQ'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{d\lambda}$ et de $\dfrac{d}{d\lambda}\left(\dot{h}^n\left(V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}\right)\right)$. Cela implique d'une part une bonne connaissance des sources du modèle direct, et d'autre part de modifier le code dès que l'on veut changer les paramètres à identifier.

Il est à noter que ce schéma fait intervenir les dérivées des variables d'histoire par rapport aux paramètres à identifier. Ces dérivées constituent elles aussi des variables d'histoire, qu'il convient de transporter lors du remaillage suivant l'algorithme décrit au paragraphe 3.2.8.

De nombreux auteurs ont appliqué cette méthode à divers problèmes d'optimisation. Gavrus et al. (1996) utilisent une méthode de dérivation analytique pour coupler un algorithme de Gauss-Newton avec le logiciel FORGE2®. Le modèle inverse ainsi développé est utilisé pour l'analyse d'essais de traction et de torsion respectivement à partir de mesures d'effort et de couple. Gelin et Ghouati (1996) utilisent cette même méthode de différentiation pour l'identification des paramètres d'une loi de comportement viscoplastique à partir d'essais de bipoinçonnement. Le modèle inverse est couplé avec un modèle éléments finis 2D basé sur une formulation en déplacement, et le problème d'optimisation est résolu grâce à un algorithme de Levenberg-Marquardt. Mahnken et Stein (1996) identifient les paramètres de deux lois de comportement élasto-viscoplastiques par analyse inverse. Le modèle direct est un solveur éléments finis et les méthodes de BFGS et de Gauss-Newton sont utilisées. Les auteurs utilisent une méthode de différentiation analytique pour calculer la matrice de sensibilité. La méthode ainsi implémentée donne de bons résultats, même si le calcul des termes de sensibilité est relativement complexe.

En définitive, la méthode analytique est appréciée pour sa précision et sa rapidité mais elle est peu flexible et rend difficile la maintenance du code. Cette méthode est d'autant plus difficile à implémenter que le problème direct est complexe.

3.3.4 Différentiation semi-analytique

La méthode semi-analytique cumule certains des avantages des méthodes de différences finies et des méthodes analytiques. Elle est basée sur une approximation à l'ordre un de la matrice de sensibilité :

$$\frac{dF_n}{d\lambda_i} = \frac{F_n\left(\tilde{\lambda}, \tilde{V}^{n+1}, \tilde{P}^{n+1}, \tilde{T}^{n+1}, \tilde{h}^{n+1}\right) - F_n\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}, h^{n+1}\right)}{\Delta\lambda_i} + O(\Delta\lambda) \qquad (183)$$

avec

$$\begin{aligned} &\tilde{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_i + \Delta\lambda_i, ..., \lambda_{NPar}) \\ &\tilde{V}^n = V^n + \Delta\lambda_i \frac{dV^n}{d\lambda_i} \qquad \tilde{P}^n = P^n + \Delta\lambda_i \frac{dP^n}{d\lambda_i} \\ &\tilde{T}^n = T^n + \Delta\lambda_i \frac{dT^n}{d\lambda_i} \qquad \tilde{h}^n = h^n + \Delta\lambda_i \frac{dh^n}{d\lambda_i} \end{aligned} \qquad (184)$$

Le calcul des dérivées des variables d'état par rapport au jeu de paramètres λ est basé, comme dans le cas analytique, sur la résolution du problème tangent linéaire (182). Dans le système tangent, le second membre du système linéaire obtenu par dérivation du problème mécanique [eq. (180)] peut être noté :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\lambda} + \frac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(T^n, h^n\right)} \left(\frac{d\left(T^n, h^n\right)}{d\lambda}\right)^T \\ &\quad = \left.\frac{dR\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{d\lambda}\right|_{V^{n+1}, P^{n+1} \text{ fixés}} \end{aligned} \qquad (185)$$

Dans ce schéma, toutes les dérivées qui nécessitent des développements analytiques fastidieux sont calculées par différences finies :

$$\text{à l'instant } t_n \begin{cases} \dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)} \left(\dfrac{d\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)}{d\lambda_i}\right)^T = \\ \qquad -\dfrac{R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, \tilde{T}^n, \tilde{h}^n\right) - R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\Delta\lambda_i} \\ M^n \dfrac{dT^{n+1}}{d\lambda_i} = \dfrac{Q'\left(\tilde{V}^{n+1}, \tilde{T}^n, \tilde{T}^{n-1}\right) - Q'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\Delta\lambda_i} \\ \dfrac{dh^{n+1}}{\lambda_i} = \dfrac{dh^n}{d\lambda_i} + \Delta t \dfrac{\dot{h}^n\left(\tilde{V}^{n+1}, \tilde{P}^{n+1}, \tilde{T}^{n+1}\right) - \dot{h}^n\left(V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}\right)}{\Delta\lambda_i} \end{cases} \qquad (186)$$

Il s'agit, en définitive, d'estimer les seconds membres des systèmes linéaires [eq. (182)] par différences finies, les opérateurs tangents étant calculés pour la résolution du modèle direct. Le système tangent (182) peut être réécrit en utilisant les propriétés de linéarité du problème thermique et du schéma de réactualisation des variables d'histoire :

$$\text{à l'instant } t_n$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\partial\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)}\left(\dfrac{d\left(V^{n+1}, P^{n+1}\right)}{d\lambda_i}\right)^T = \\ \qquad -\dfrac{R\left(\tilde{\lambda}, V^{n+1}, P^{n+1}, \tilde{T}^n, \tilde{h}^n\right) - R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right)}{\Delta\lambda_i} \\ M^n\tilde{T}^{n+1} = Q'\left(\tilde{V}^{n+1}, \tilde{T}^n, \tilde{T}^{n-1}\right) \\ \tilde{h}^{n+1} = \tilde{h}^n + \Delta t\, \dot{h}^n\left(\tilde{V}^{n+1}, \tilde{P}^{n+1}, \tilde{T}^{n+1}\right) \end{cases} \qquad (187)$$

Cette méthode d'analyse de sensibilité présente l'avantage de nécessiter la résolution de NPar problèmes linéaires comme pour la méthode analytique. De plus, grâce à l'utilisation de schémas aux différences finies intermédiaires, tous les termes qui interviennent ici sont déjà programmés pour le modèle direct. Ainsi, le module d'analyse de sensibilité est compatible avec toute modification de la loi de comportement ou de frottement. La maintenance du modèle inverse est donc relativement aisée. En contrepartie, l'estimation de la matrice de sensibilité est faite à l'ordre un, comme pour un schéma aux différences finies décentré classique.
Cheng et Liu (1987) ainsi que Bartelemy et Haftka (1990) ont essayé d'appliquer la méthode semi-analytique à un modèle direct utilisant des éléments poutres. Les auteurs démontrent que l'erreur de la méthode semi-analytique croît avec le nombre d'éléments. Cheng et al. (1989) prouvent que ce n'est pas le cas pour des éléments solides ou membranes. Tortorelli et Michaleris (1996) citent l'existence de la différentiation semi-analytique dans le cadre de problèmes inverses en thermique. Massoni et al. (2002) utilisent cette méthode pour l'identification de paramètres de lois de comportement élasto-viscoplastiques et pour l'identification de paramètres de lois de frottement. Le modèle direct utilisé est FORGE2® et l'analyse de sensibilité est effectuée avec un schéma semi-analytique semblable à celui décrit ci-dessus. La comparaison avec un schéma aux différences finies montre un gain de temps et de précision considérable en faveur de la méthode semi-analytique.

3.3.5 Méthode adjointe

La méthode de l'état adjoint a un coût indépendant du nombre de paramètres à identifier. Elle est donc souvent utilisée dans des problèmes d'optimisation comprenant un nombre important de paramètres de contrôle. Par conséquent, cette approche est fréquemment retenue pour l'estimation de fonctions. Bonnet (1999) utilise une méthode d'analyse de sensibilité par l'état adjoint afin de dériver un potentiel intégral par rapport à la position d'une fissure dans un domaine régit par les équations de l'élastodynamique. Ce type d'approche peut être utilisé pour la reconstruction de fissures. Le Masson et al. (2002) identifient un coefficient de transfert thermique à partir de mesures de températures effectuées lors d'un essai 'Jominy' (trempe). Les auteurs n'identifient pas les paramètres d'un modèle mais considèrent le coefficient de transfert

thermique comme une fonction du temps et de l'espace. Le problème inverse a donc de nombreux degrés de liberté et il devient nécessaire d'utiliser une méthode adjointe.
La méthode de l'état adjoint est aisément applicable aux problèmes stationnaires. Par contre, pour les problèmes instationnaires, le problème adjoint est bien posé dans le sens décroissant du temps. Il est alors nécessaire de sauvegarder toutes les variables d'histoire du problème direct. De plus, l'utilisation d'un algorithme de remaillage requiert le développement d'une routine adjointe de transport des variables d'histoire adjointes (Laroussi et Fourment (2002)). L'implémentation de la méthode de l'état adjoint pour le cas qui nous intéresse est donc relativement délicate.
La méthode de l'état adjoint nécessite la détermination de deux vecteurs adjoints, notés Γ_m^n et Γ_{th}^n. Ces vecteurs sont respectivement associés au problème mécanique et au problème thermique à l'instant t_n et sont solution du système suivant :

$$\begin{cases} {M^n}^T \Gamma_{th}^{n-1} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial T^n} - \displaystyle\sum_{i=n}^{i=N} \Delta t \dfrac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)^T}{\partial T^n} \dfrac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial h} \Gamma_m^i \\ + \dfrac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)^T}{\partial T^n} \Gamma_{th}^n + \dfrac{\partial Q'\left(U^{n+2}, T^{n+1}, T^n\right)^T}{\partial T^n} \Gamma_{th}^{n+1} \\ \dfrac{\partial R\left(\lambda, U^n, T^{n-1}, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial U^n} \Gamma_m^{n-1} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial U^n}^T \\ -\displaystyle\sum_{i=n}^{i=N} \dfrac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial h} \Delta t \dfrac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)}{\partial U^n} \Gamma_m^n \\ - \dfrac{\partial Q'\left(U^n, T^{n-1}, T^{n-2}\right)^T}{\partial U^n} \Gamma_{th}^{n-1} \end{cases} \tag{188}$$

Dans le système (188), les seconds membres des équations sont déterminés à partir de la connaissance de la solution du problème thermomécanique dans le futur. Ainsi, la résolution du problème adjoint ne peut se faire qu'après résolution complète du problème thermomécanique et après stockage de ces solutions. Le problème adjoint est donc bien posé dans le sens décroissant du temps. Nous pouvons remarquer aussi que l'ordre imposé dans le splitting est inversé : on résout d'abord le problème adjoint associé à la thermique et ensuite le problème adjoint associé à la mécanique. Une fois les divers états adjoints déterminés, la dérivée de la fonction coût par rapport aux paramètres à identifier est donnée par la relation suivante :

$$\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial \lambda} \tag{189}$$

Il est à noter que le système (188) ne fait intervenir aucune dérivée par rapport aux paramètres à identifier. Ainsi, la complexité de la méthode de l'état adjoint ne dépend

pas du nombre de paramètres à identifier. En contrepartie, la programmation d'une telle méthode peut être relativement complexe et coûteuse en terme de stockage. Elle est généralement indispensable pour l'identification de signaux ou pour les problèmes d'optimisation comprenant un grand nombre de paramètres.

Remarques :
- Le détail des calculs effectués pour détailler la méthode de l'état adjoint est donné en annexe.
- Tardieu et Constantinescu (2000) ont exprimé l'état adjoint associée à un problème détermination de coefficients d'élasticité à partir d'essais d'indentation. Le problème direct est exprimé, comme dans notre cas, sous forme d'une inéquation variationelle. Plutôt que d'exprimer l'état adjoint à partir des équations discrétisée, les auteurs donnent l'état adjoint associé au problème continu. Dans ce cas, l'état adjoint prend aussi la forme d'une inéquation variationelle.

3.3.6 Différentiation automatique

Plutôt que de dériver les équations discrètes ou continues du problème direct, les codes de différentiation automatique différentient le code source du modèle direct. N'importe quel programme de simulation numérique peut être vu comme la composition d'opérations simples (addition, multiplication, division, soustraction, sinus, exponentielle, …). A partir des règles de dérivation de base, il est possible de bâtir des logiciels ayant pour vocation de générer un code dérivé du code direct. Il existe deux modes de différentiation automatique : le mode direct et le mode adjoint (Barrault et Le Bris (1999)). Le coût d'un code tangent généré en mode direct croît linéairement avec le nombre de paramètres à identifier. Le coût d'un code tangent généré en mode adjoint est indépendant du nombre de paramètres, mais la taille mémoire requise croit avec le nombre de paramètres. L'utilisation d'un de ces modes de dérivation sera conditionné par la nature du problème que l'on a à résoudre. Si l'on a plus de paramètres que de fonctions à dériver, il vaut mieux utiliser le mode adjoint. Dans le cas contraire, il est préférable d'utiliser le mode de différentiation directe. Il est à noter que les codes dérivés générés doivent souvent être débarrassés d'un certain nombre de lignes inutiles (surtout en mode adjoint). Cette phase de nettoyage peut être relativement fastidieuse pour un code volumineux.

3.3.7 Choix d'une méthode d'analyse de sensibilité

Les deux principaux critères pour le choix de la méthode d'analyse de sensibilité sont la rapidité et la précision de la méthode. La méthode des différences finies est relativement lente et peu précise, cependant comme elle est simple à implémenter, elle sera tout de même utilisée dans la suite. La méthode de la variable complexe semble plutôt intéressante dans le cas où le modèle direct ne demande pas trop de place mémoire, ce qui n'est pas le cas pour FORGE3®. La méthode adjointe et la différentiation automatique manquent a priori de flexibilité et ne sont pas très simples à implémenter. Notre choix s'est donc porté sur une méthode semi-analytique, qui présente l'avantage d'être relativement simple à implémenter et qui permet une maintenance aisée du code inverse. En effet, les modifications effectuées sur le modèle inverse se répercutent automatiquement sur le module d'analyse de sensibilité. De plus, dans les applications qui nous intéressent, le nombre de paramètres reste relativement raisonnable et l'utilisation d'une méthode adjointe ne se révèle pas indispensable. Pour résumer, le

diagramme général du modèle inverse que nous avons développé est décrit par la figure 28.

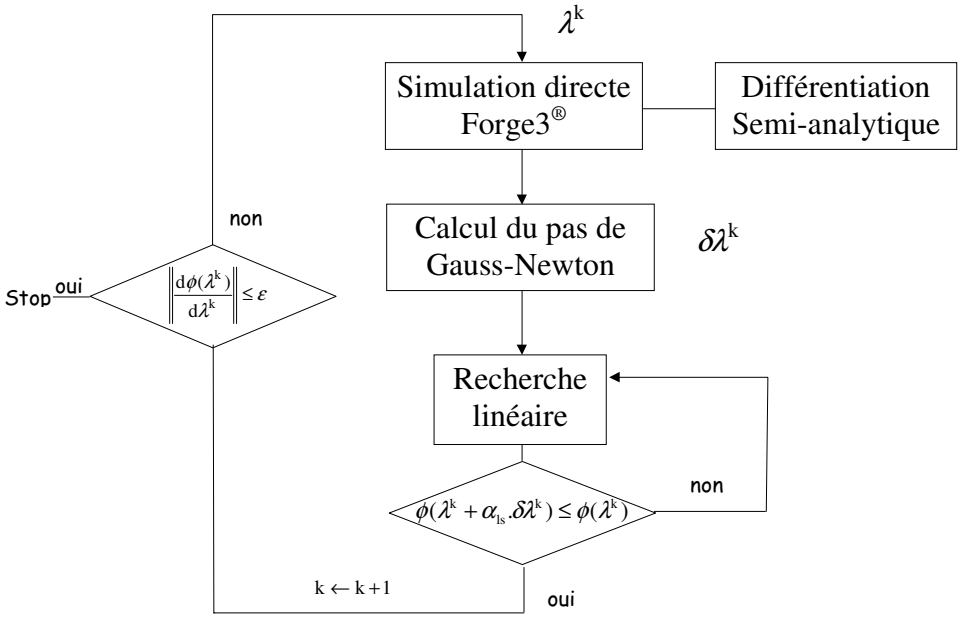


Figure 28 : diagramme général du modèle inverse développé

3.3.8 Parallélisation du modèle inverse

Comme pour le modèle direct, l'analyse de sensibilité ne fait intervenir que des produits matrice-vecteur et des produits scalaires. La stratégie de partitionnement de maillage décrite au 3.2.7 peut donc être aussi utilisée pour la méthode semi-analytique. Comme le nombre de paramètres à identifier est relativement faible, le calcul du pas de Gauss-Newton sera effectué sur un seul processeur. Nous pouvons remarquer qu'il aurait été possible de distribuer les divers essais mécaniques à effectuer à chaque itération de Gauss-Newton sur un processeur différent. Nous avons choisi la première option, car lorsque l'on utilise le partitionnement de maillage, l'équilibre des calculs entre tous les processeurs est plus facilement géré. De plus, la programmation de l'analyse de sensibilité est très facilement compatible avec la stratégie de partitionnement de maillage déjà implémentée dans FORGE3®.

3.4 Validation de la méthode de différentiation semi-analytique

3.4.1 Loi viscoplastique sans écrouissage

Nous avons dans un premier temps programmé une méthode de différences finies et une méthode semi-analytique couplées au logiciel FORGE3®. Ces deux méthodes ont été validées sur l'essai de compression d'un cube sans frottement. Les simulations ont été effectuées avec la loi de comportement purement viscoplastique suivante :

$$\sigma_0 = \mathrm{K}\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{m}} \qquad (190)$$

Les premières simulations sont réalisées sans remaillage. La méthode des différences finies et la méthode semi-analytique donnent des résultats tout à fait satisfaisants pour le calcul de la dérivée de l'effort par rapport à K et à m (Figures 29 et 30).

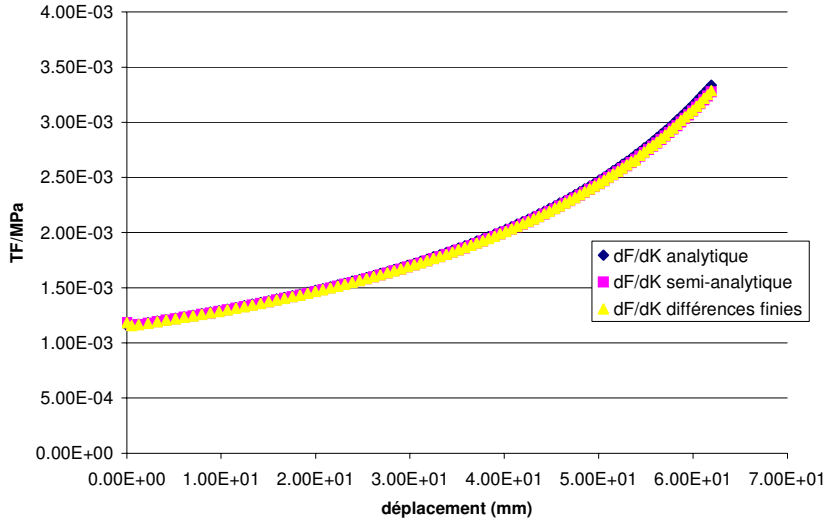


Figure 29 : dérivée de l'effort par rapport à K calculée analytiquement, par méthode semi-analytique et par différences finies

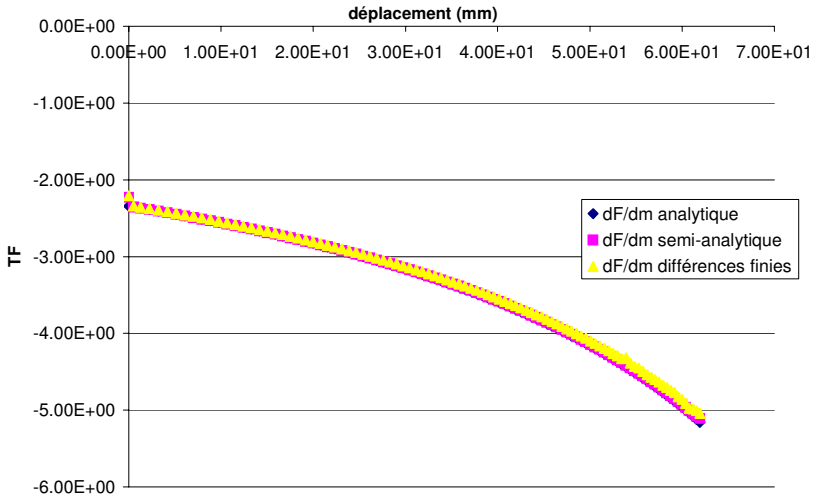


Figure 30 : dérivée de l'effort par rapport à m calculée analytiquement, par méthode semi-analytique et par différences finies

Nous avons vu (§3.3) que la précision de la méthode semi-analytique et de la méthode des différences finies dépendent a priori de la valeur de la perturbation $\Delta\lambda$. Soit δ la perturbation relative définie par $\delta=\Delta\lambda/\lambda$. Nous avons fait varier δ de 10^{-2} à 10^{-8}. Les deux méthodes semblent assez peu sensibles aux variations de δ (Figures 31 et 32). Cela tend à prouver que l'erreur due au calcul par éléments finis est plus importante que l'erreur de troncature du schéma aux différences finies ou du schéma semi-analytique. D'ailleurs, les erreurs relatives sur les différents calculs de dérivées sont de l'ordre de

grandeur de l'erreur relative sur l'effort. Cet exemple simple valide nos modules de différentiation par différences finies et par méthode semi-analytique.

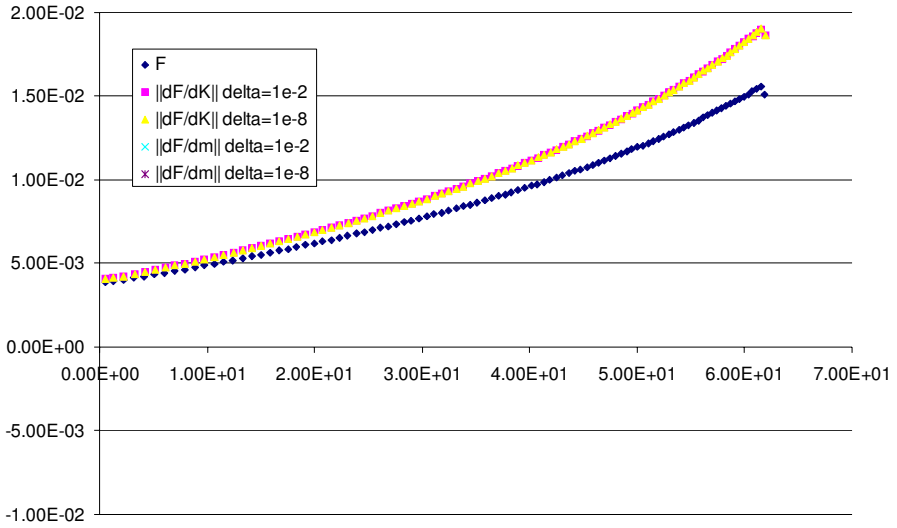


Figure 31 : erreurs relatives avec la méthode semi-analytique pour différentes valeurs de δ

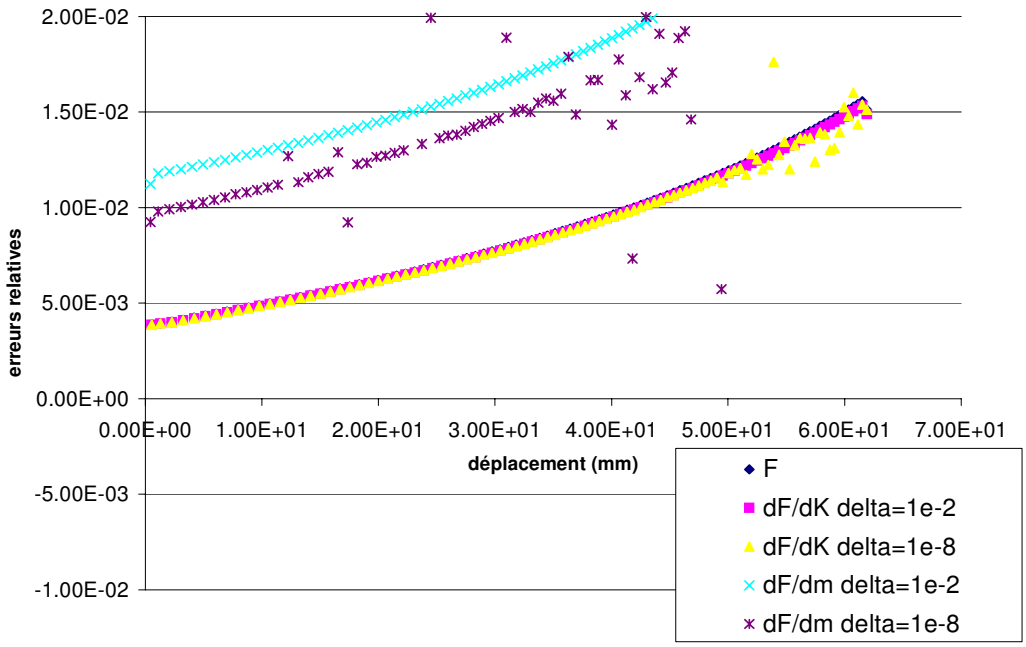


Figure 32 : erreurs relatives avec la méthode des différences finies pour différentes valeurs de δ

En un second temps, nous avons fait le même calcul de sensibilité en utilisant l'algorithme de remaillage. La loi de comportement utilisée n'inclut pas d'effets d'histoire (la loi est purement viscoplastique et sans écrouissage). Dans ce cas, la

méthode semi-analytique et la méthode des différences finies fournissent une fois de plus des résultats relativement bons.

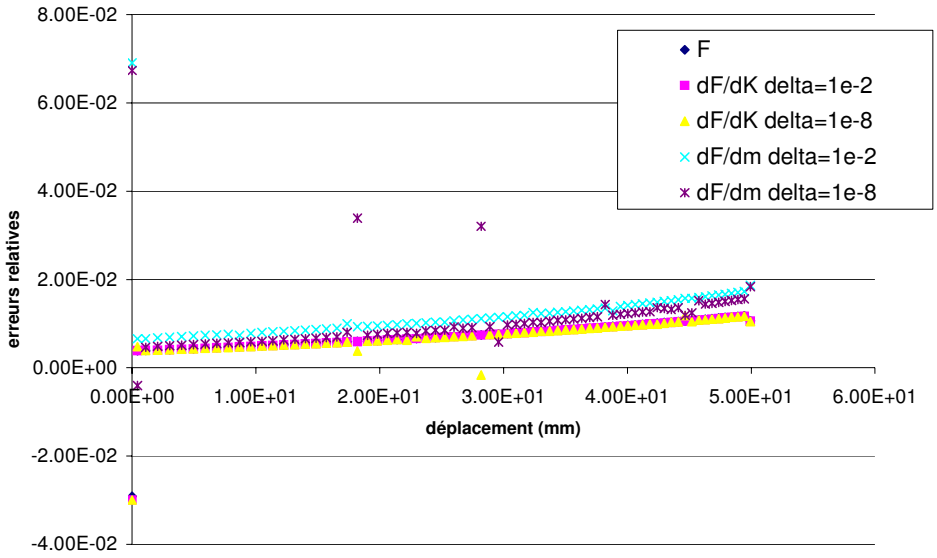


Figure 33 : erreurs relatives obtenues avec la méthode des différences finies

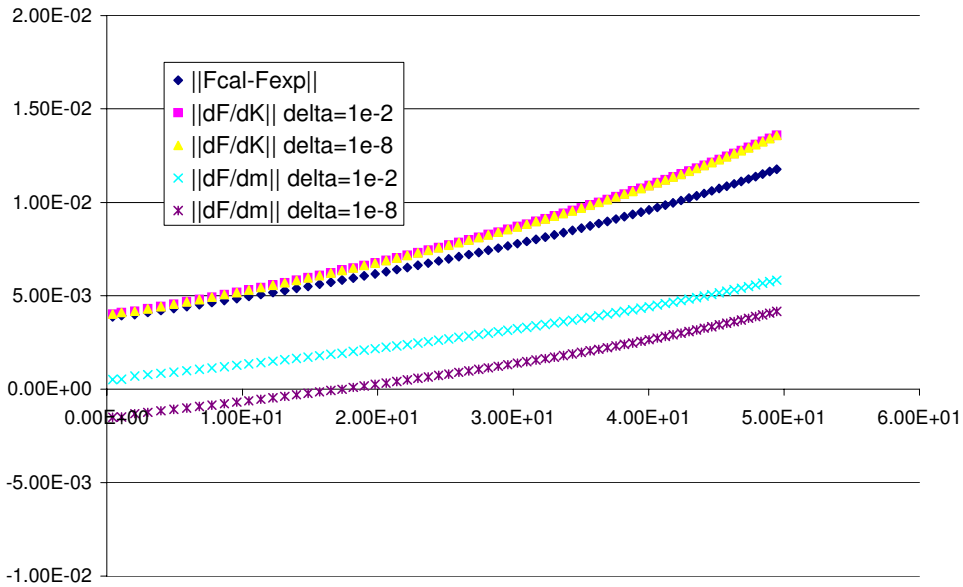


Figure 34 : erreurs relatives obtenues avec la méthode semi-analytique

Néanmoins, les courbes obtenues avec la méthode des différences finies présentent des artéfacts qui correspondent aux remaillages (Figure 33), alors que les courbes issues de la méthode semi-analytique sont beaucoup plus lisses (Figure 34). De plus, les oscillations obtenues avec la méthode des différences finies sont d'autant plus importantes que δ est faible.

3.4.2 Loi viscoplastique avec écrouissage

La plupart des matériaux que nous étudierons ont un comportement qui dépend de l'histoire des déformations. Nous nous sommes par exemple intéressés à la modélisation de l'écrouissage des métaux. Il est possible de modéliser le comportement d'un matériau capable de s'écrouir par la loi suivante :

$$\sigma_0 = \mathrm{K}\left(\bar{\varepsilon}\right)^{\mathrm{n}}\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^{\mathrm{m}} \tag{191}$$

Dans ce cas, les résultats obtenus avec la méthode semi-analytique sont significativement meilleurs que ceux obtenus avec la méthode des différences finies. En fait, la méthode des différences finies est instable après le premier remaillage pour une valeur de δ de 10^{-8} (Figure 35). Par contre, le résultat est satisfaisant pour une valeur de δ de 10^{-2} (Figure 36) et la méthode semi-analytique donne toujours de bons résultats quelle que soit la valeur de δ entre 10^{-8} et 10^{-2} (Figure 37).

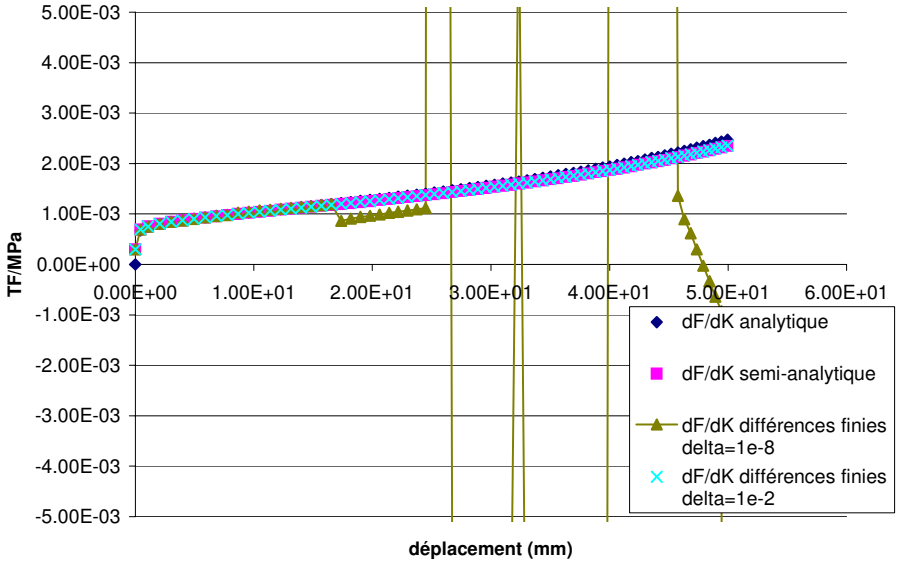


Figure 35 : comparaison de la dérivée de l'effort par rapport à K calculée analytiquement avec la méthode semi-analytique et avec la méthode des différences finies

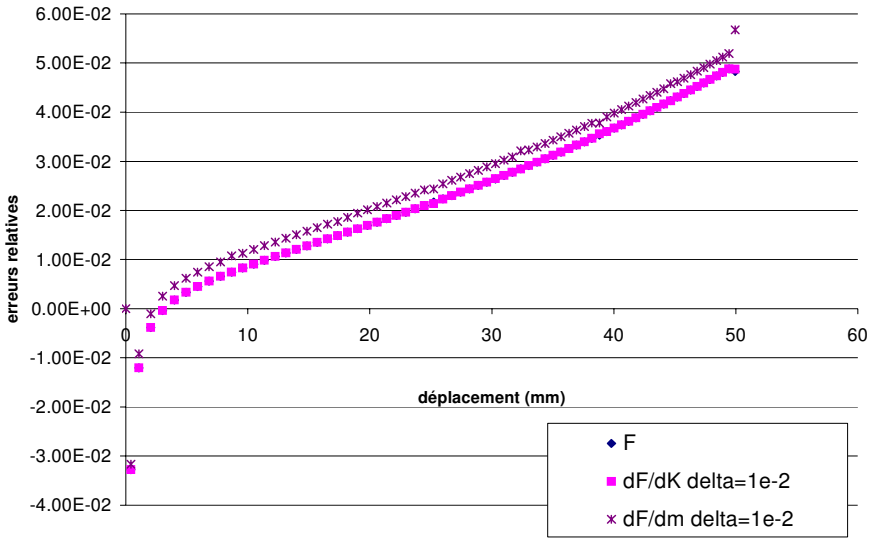


Figure 36 : erreurs relatives sur l'effort et sur les dérivées de l'effort calculées avec la méthode des différences finies pour $\delta=10^{-2}$

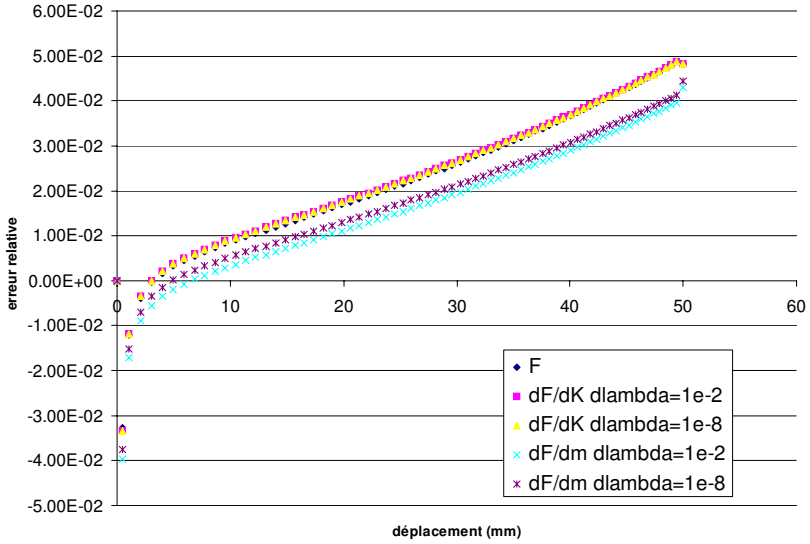


Figure 37 : erreurs relatives obtenues avec la méthode semi-analytique

L'exemple précédent montre que l'ajout de variables d'histoire à la loi de comportement rend la méthode des différences finies moins stable que la méthode semi-analytique. Ce cas test est pourtant très simple car la déformation et le taux de déformation sont homogènes tout au long de l'essai. De plus, la pièce reste de forme parallélépipédique. Ainsi, lors du remaillage, il n'y a pas de diffusion du bord de la pièce et, lors du transport, il n'y a pas de diffusion des valeurs de la déformation généralisée. C'est pour cela que nous avons effectué le même test en appliquant cette fois un fort frottement entre la pièce et les outils. Pour une valeur de $\delta=10^{-8}$, la méthode des différences finies est totalement instable. Pour une valeur de $\delta=10^{-2}$, on obtient une courbe encore très bruitée (Figure 38). Pour la même valeur de δ, nous pouvons constater des sauts, relativement peu élevés, sur les dérivées obtenues avec la méthode

semi-analytique. Ces débuts d'instabilité disparaissent lorsque δ atteint 10^{-7}. Ainsi, dans cet exemple, nous n'avons pas réussi à trouver de valeur de δ satisfaisante pour la méthode des différences finies, alors que l'on peut choisir δ entre 10^{-7} et 10^{-2} pour la méthode semi-analytique (Figure 39).

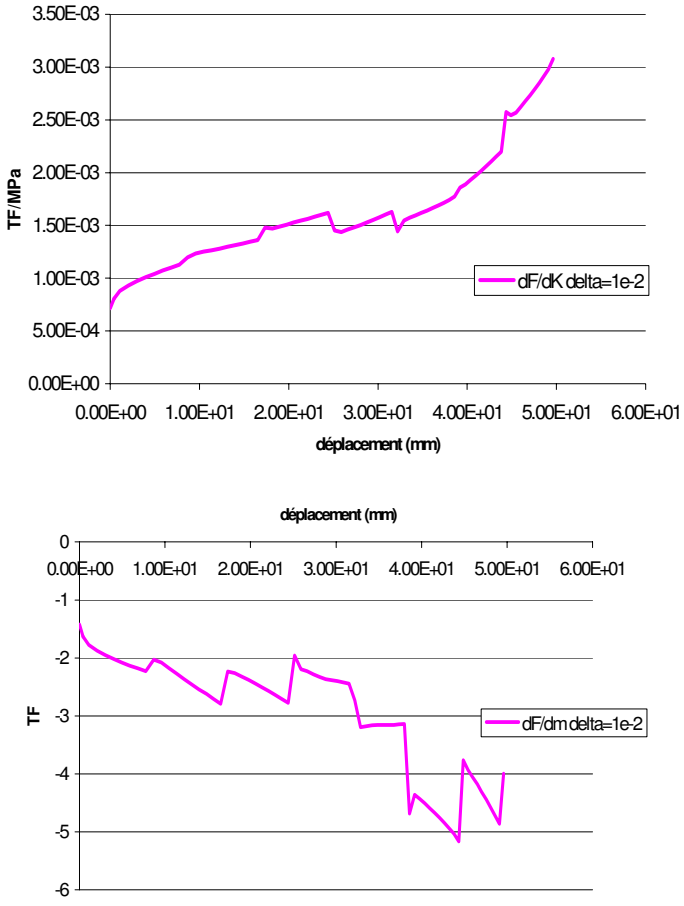


Figure 38 : dérivées obtenues avec la méthode des différences finies

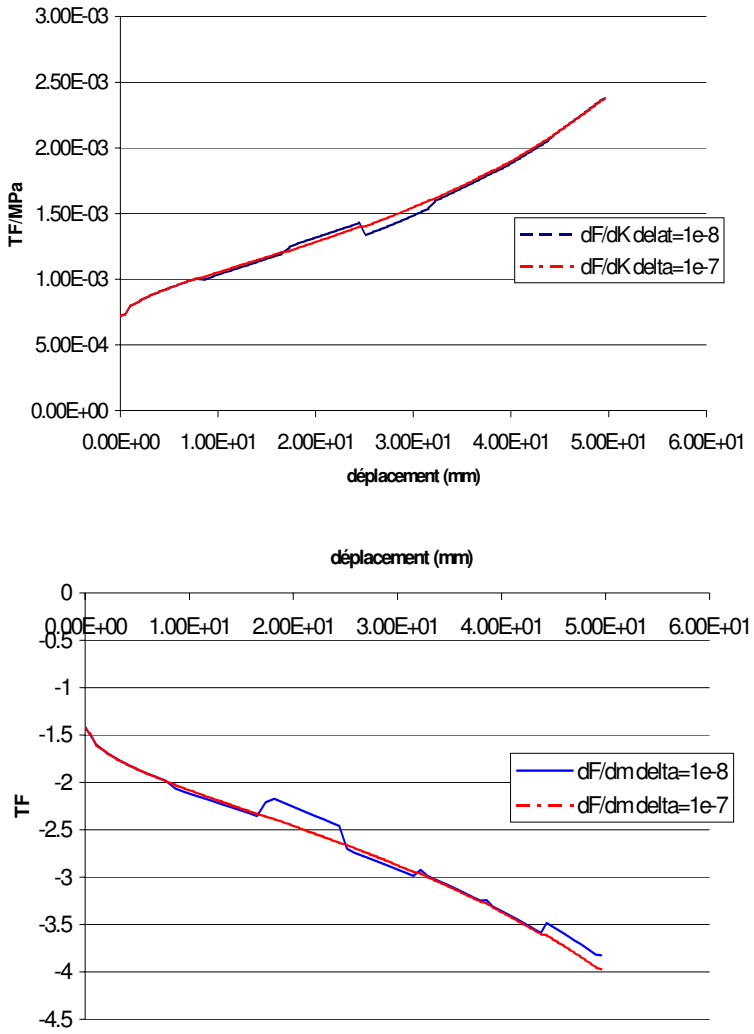


Figure 39 : dérivées obtenues avec la méthode semi-analytique

Le tableau 8 donne, en définitive, les valeurs de δ pour lesquelles aucune instabilité n'apparaît en fonction des cas traités. Nous pouvons constater qu'à mesure que l'on ajoute le remaillage, l'écrouissage et le frottement, l'intervalle de stabilité se réduit jusqu'à devenir vide pour la méthode des différences finies, alors que la méthode semi-analytique converge sans difficulté.

	Sans frottement Sans écrouissage Sans remaillage	Sans frottement Sans écrouissage Avec remaillage	Sans frottement Avec écrouissage Avec remaillage	Avec frottement Avec écrouissage Avec remaillage
Différences finies	$10^{-8}<\delta<10^{-2}$	$10^{-8}<\delta<10^{-2}$	$\delta\cong10^{-2}$	instable
Semi-analytique	$10^{-8}<\delta<10^{-2}$	$10^{-8}<\delta<10^{-2}$	$10^{-8}<\delta<10^{-2}$	$10^{-7}<\delta<10^{-2}$

Tableau 8 : Valeurs de δ pour lesquelles l'analyse de sensibilité est stable

3.4.3 Contact bilatéral collant

Nous avons ensuite effectué un essai de compression avec la même loi de comportement, en utilisant cette fois un contact bilatéral collant. Nous n'avons constaté aucune différence significative entre le schéma aux différences finies et le schéma semi-analytique dans ce cas (Figure 40). Par contre, les résultats ont été obtenus en 18 minutes avec la méthode semi-analytique, et en une heure avec la méthode des différences finies. Cet écart vient notamment du nombre d'appels à la routine de remaillage, qui est NPar +1 fois plus important pour la méthode des différences finies (si le nombre de paramètres à identifier est NPar).

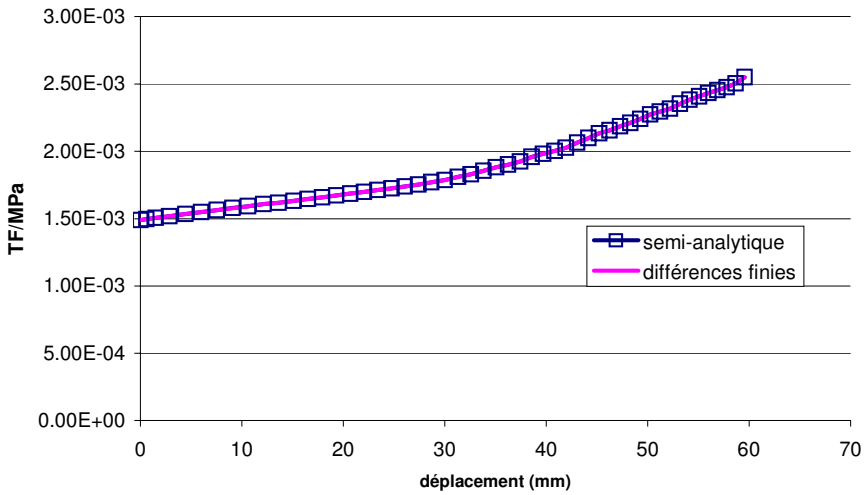


Figure 40 : calcul de dF/dK par la méthode semi-analytique et par la méthode des différences finies

Au premier abord, il peut paraître étonnant de constater que la méthode des différences finies est instable lorsque l'on utilise un contact unilatéral avec un fort frottement, et est stable lorsque l'on utilise un contact bilatéral. En fait, l'utilisation d'un contact bilatéral collant ne requiert pas l'utilisation d'un contact pénalisé. Ainsi, cette série de tests montre que la formulation semi-analytique est stable en présence de remaillage, lorsque l'on utilise un contact pénalisé, contrairement à la méthode des différences finies. Les raisons de l'instabilité du schéma aux différences finies sont discutées ci-dessous.

3.4.4 Discussion sur la différentiabilité du modèle direct

Au vu des résultats obtenus avec la méthode des différences finies, on peut se poser des questions quant à la régularité du modèle direct. Nous avons pu constater, d'après les exemples précédents, que l'utilisation du contact pénalisé semble rendre la méthode des différences finies instable. L'utilisation d'une méthode de pénalisation revient à poser :

$$\sigma_n = -\rho\left[(v - v_{out}).n - \frac{d_{pen}}{\Delta t}\right]^+ \qquad (192)$$

Dans FORGE3®, le coefficient de pénalisation est calculé de la manière suivante :

$$\rho = \frac{\max_{\Omega}(\bar{\sigma})}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{car}.\kappa} \tag{193}$$

où κ est la taille de maille et $\dot{\bar{\varepsilon}}_{car}$ est une vitesse de déformation caractéristique. L'effort a donc l'expression suivante :

$$F = \frac{\max_{\Omega}(\bar{\sigma})}{\dot{\bar{\varepsilon}}_{car}.\kappa} \int_{\partial\Omega_c} \left[(v - v_{out}).n - \frac{d_{pen}}{\Delta t} \right]^+ d\Gamma \; \frac{L_0^3}{H(t)} \tag{194}$$

A partir de cette expression, nous pouvons faire plusieurs constatations :

- La fonction $[.]^+$ n'est bien sûr pas dérivable en zéro. Nous ne considérons dans les schémas aux différences finies utilisés que des dérivées à droite. Comme la fonction $[.]^+$ a une dérivée à droite sur tout IR, nous pouvons sans problème utiliser la méthode des différences finies.

- Lorsque l'on utilise la méthode des différences finies, on effectue un remaillage sur le domaine courant et un remaillage sur le domaine perturbé. Or, le mailleur que nous utilisons est une méthode itérative pour lequel le problème de maillage est vu comme un problème d'optimisation sous la contrainte $\kappa = \kappa_{objectif}$. A la fin du remaillage, la contrainte n'est jamais exactement atteinte (elle n'est juste atteinte qu'à un certain nombre de chiffres significatifs près). Ainsi, l'utilisation du mailleur va affecter un certain nombre de chiffres significatifs lors du calcul du coefficient de pénalisation et donc de $F(\lambda+\Delta\lambda)$. Le mailleur agit donc comme s'il rajoutait une erreur d'arrondis supplémentaire dans le schéma aux différences finies classique. Par contre, dans le schéma semi-analytique, un seul remaillage est utilisé et le terme de pénalisation n'est pas dérivé pas rapport à λ. Ainsi, l'utilisation d'un schéma semi-analytique n'introduit pas la même discontinuité lors du remaillage avec une méthode de pénalisation du contact.

- Le caractère nodal du contact est une source d'instabilité lorsque l'on doit gérer un outil avec angle saillant. En effet, dans ce cas, il peut y avoir une pénétration relativement importante d'une arrête de la pièce dans l'outil. L'algorithme de remaillage faisant une interpolation P1 du domaine à remailler, des nœuds sont alors crées à l'intérieur de l'outil (Figure 41).

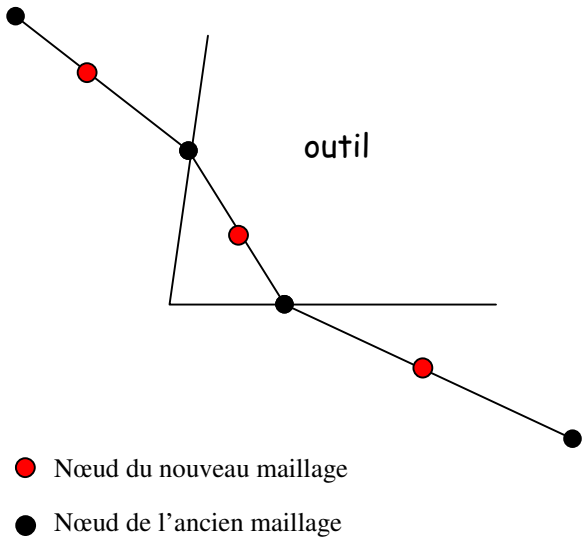


Figure 41 : pénétration des nœuds du nouveau maillage dans l'outil

Ainsi, même si l'on transporte des champs de vitesse et de pression satisfaisant l'équilibre mécanique, il se peut que les valeurs transportées ne satisfassent pas ce même équilibre. L'équation (192) montre bien qu'après remaillage, on peut avoir un saut de contrainte normale si l'on a une pénétration excessive d'un nœud après remaillage. Ainsi, l'erreur de diffusion sur la contrainte normale, lorsque l'on utilise du contact pénalisé, n'est pas forcément continue lorsque l'on utilise du remaillage.

- L'ajout de variables d'histoires a pour effet de faire se propager et s'accumuler les erreurs d'arrondis et donc de rendre les schéma (différences finies et semi-analytique) moins stables.

Il semble donc que la stabilité du schéma semi-analytique en présence de remaillage soit due au fait qu'un seul maillage est utilisé. Dans la méthode des différences finies classique, le modèle direct étant considéré comme une boite noire, le remaillage induit une erreur d'arrondis importante sur l'effort et le choix de la perturbation $\Delta\lambda$ devient délicat, voire impossible.

3.4.5 Comparaison des temps de calcul

Dans tous les exemples que nous avons traités, le temps de calcul associé à la méthode semi-analytique est significativement plus faible que le temps de calcul de la méthode des différences finies. Ceci s'explique par le fait que la méthode semi-analytique nécessite une résolution du problème direct plus NPar résolutions de systèmes non-linéaires alors que la méthode des différences finies nécessite NPar + 1 résolutions du problème direct. Si le problème direct nécessite en moyenne 3 itérations de l'algorithme de Newton-Raphson pour la résolution du problème mécanique, et si l'on note par S le coût de la résolution d'un système linéaire, alors le coût de la méthode semi-analytique est de (NPar+3)S contre 3(NPar+1)S pour la méthode des différences finies. Le choix de la valeur 3 pour le nombre d'itérations de Newton-Raphson n'est pas du tout exagéré. Dans ce cas, nous constatons que lorsque l'on augmente le nombre de paramètres, la méthode des différences finies devient beaucoup trop lente pour un problème 3D.

3.5 Conclusion

Le résultat d'une analyse inverse est fortement dépendant de la qualité du modèle direct choisi. Dans le cadre de ce travail, le logiciel FORGE3® a été choisi pour simuler l'écoulement de la matière pendant un essai mécanique. La formulation retenue ainsi que l'utilisation d'un algorithme de remaillage permettent de prendre en compte de grandes déformations. En utilisant comme modèle direct FORGE3®, nous sommes donc capables d'analyser des essais mécaniques pour lesquels l'écoulement de matière et les champs de température ne sont pas homogènes.
Pour utiliser l'algorithme de Gauss-Newton, il est nécessaire de dériver les observables par rapport aux paramètres à identifier. Nous avons choisi d'utiliser une analyse de sensibilité semi-analytique pour des raisons de flexibilité, de facilité d'implémentation et de temps de calcul. Grâce à cette méthode, il est possible de changer facilement de loi de comportement et de paramètres à identifier ; et le module d'analyse de sensibilité reste inchangé même lorsque le modèle direct subit des modifications.
Notre module d'optimisation étant à présent développé et validé, nous présentons dans le dernier chapitre de cette étude un certain nombre de cas que nous avons analysés.

3.6 Bibliographie

C. Aliaga, Simulation numérique par éléments finis en 3D du comportement thermomécanique au cours du traitement thermique d'aciers : application à la trempe de pièces forgées ou coulées, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 2000.

W.K. Anderson, J.C. Newman, D.L. Whitfield, E.J. Nielsen, Sensitivity analysis for the Navier-Stokes equations on unstructured meshes using complex variables, AIAA-99-3294 (1999).

M. Barrault, C. Le Bris, Optimisation numérique et différentiation automatique pour un problème industriel. Octobre 1999, Champs sur Marne, http://binky.enpc.fr/reports/.

B. Barthelemy, R.T. Haftka, Accuracy analysis of the semi-analytical method for shape sensitivity analysis, Mechanics of Structures and Machines, 18 (1990) 407-432.

M. Bonnet, A general boundary-only formula for crack shape sensitivity of integral functionals, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Astronomy, 327,12 (1999) 1215-1221.

F. Brezzi, M. Fortin, Mixed and hydrid finite element methods, Springer-Verlag New York inc., 1991.

G. Cheng, Y. Gu, Y. Zhou, Accuracy of the semi-analytical sensitivity analysis, Finite element in analysis and design, 6 (1989) 113-128.

G. Cheng, Y. Liu, A new computation scheme for sensitivity analysis, Engineering optimization, 12 (1987) 219-234.

A. Constantinescu, L. Verger, Identification of a viscoplastic behavior under transient thermal conditions, Proceedings of Eurotherm seminar 68, 2001.

T. Coupez, Grandes déformations incompressibles-remaillage automatique, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 1991.

M. Fortin, D.N. Arnold, F. Brezzi, A stable finite element for the Stokes equations. Calcolo, 21 (1984) 337 344.

A. Gavrus, E. Massoni, J.L. Chenot, An inverse analysis using a finite element model for identification of rheological parameters, Journal of materials processing technology, 60 (1996) 447-454.

J.C. Gelin, O. Ghouati, An inverse solution procedure for material parameters identification in large plastic deformation, Communications in numerical methods in engineering, 12 (1996) 161-173.

R. Hill, A theory of the yielding and of plastic flow of anisotropic metals, Proceedings of the Royal Society of London, Serie A, 193 (1948) 281-397.

R. Knockaert, Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 2001.

M. Laroussi, L. Fourment, The adjoint state method for sensitivity analysis of non-steady problems. Application to 3D forging, à paraître dans International Journal of forming Processes (2002).

P. Le Masson, T. Loulou, E. Artioukhine, P. Rogeon, D. Carron, J.J. Quemener, A numerical study for the estimation of a convection heat transfer coefficient during a metallurgical "Jominy end-quench", International journal of thermal sciences, 41 (2002) 517-527.

J.N. Lyness, Numerical algorithms based on the theory of complex variables, proceedings of ACM 22th National conference, Thomas Book Company, Washington D.C., 1967.

R. Mahnken, E. Stein, A unified approach for parameter identification of inelastic material models in the frame of the finite element method, Computer methods in applied mechanics and engineering, 136 (1996) 225-258.

S. Marie, Un modèle de parallélisation S.P.M.D. pour la simulation numérique de procédés de mise en forme de matériaux, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Cemef, 1997.

E. Massoni, B. Boyer, R. Forestier, Inverse analysis of thermomechanical upsetting tests using gradient method with semi-analytical derivatives, International journal of thermal sciences, 41 (2002) 557-563.

M. Menai, Simulation numérique tridimensionnelle du refroidissement des pièces en fonderie : approche thermomécanique, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Cemef, 1995.

M.H.H. Meuwissen, An inverse method for the mechanical characterisation of metals, Thèse de doctorat T.U. Eindhoven, 1998.

K. Mocellin, Contribution à la simulation numérique tridimensionnelle du forgeage à chaud : étude du contact et calcul multigrille, , Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 1999.

M. Rappaz, M. Bellet, M. Deville, Modélisation numérique en science et génie des matériaux, Presses polytechniques et romandes, 1998.

N. Renon, Simulation numérique par éléments finis de grandes déformations des sols. Application à la scarification , Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 2002.

D.S. Schnur, N. Zabaras, An inverse method for determining elastic material properties and a material interface, 33 (1992) 2039-2057.

W. Squire, G. Trapp, Using complex variables to estimate derivatives of real functions, 40, 1 (1998) 110-112.

N. Soyris, Modélisation tridimensionnelle du couplage thermique en forgeage, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Cemef, 1990.

Y. Tillier, Identification par analyse inverse du comportement mécanique des polymères solides ; applications aux sollicitations multiaxiales et rapides, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 1998.

N. Tardieu, A. Constantinescu, On the determination of elastic coefficients from indentation experiments, Inverse Problems, 16 (2000) 577-588.

K. Traoré, Simulation thermomécanique du laminage circulaire. Développement d'une formulation quasi-eulérienne tridimensionnelle sur une architecture parallèle, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 2001.

Chapitre 4

Exemples d'applications

4.1 Introduction

Différentes analyses d'essais mécaniques sont présentées dans ce chapitre. Certains de ces essais étant 2D, ils ont été analysés en utilisant notre module d'optimisation couplé avec FORGE2®. Nous avons aussi utilisé FORGE3® pour l'analyse des essais présentant un caractère tridimensionnel. Les lois de comportement identifiées sont purement viscoplastiques ou bien élasto-viscoplastiques, isotropes ou anisotropes. Les contraintes d'écoulement font intervenir entre 4 et 11 paramètres. Le but de ce chapitre est de démontrer l'efficacité et la flexibilité de la méthode inverse développée, ainsi que l'intérêt de l'étude de sensibilité dans l'analyse de la qualité des résultats ou dans la conception optimale de plans d'expériences.

4.2 Compression uniaxiale

Des essais de compression à chaud ont été réalisés sur des éprouvettes cylindriques en acier (I10Cr8DV) (Figure 42). Dans cette campagne d'essais, la vitesse de déformation varie de 0.2 à 5 /s et la température varie de 950°C à 1150°C (Tableau 9).

	$0.02s^{-1}$	**$0.5s^{-1}$**	**$5s^{-1}$**
950°C		+	+
1050°C	+	+	+
1150°C	+		+

Tableau 9 : plan d'expérience

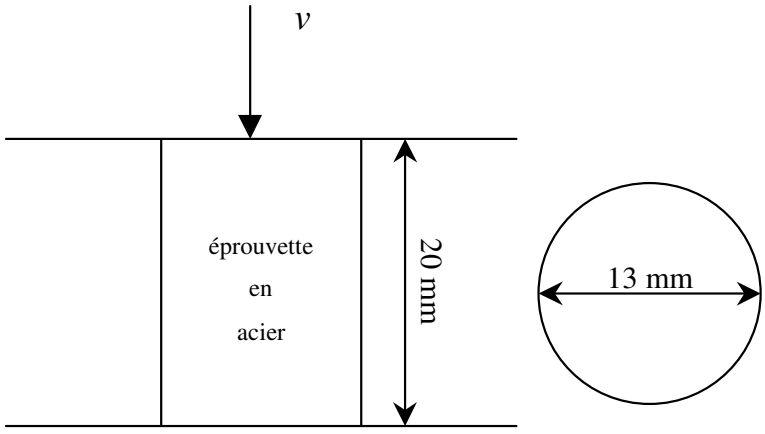


Figure 42 : géométrie des éprouvettes de compression

La mesure de la variation de l'effort au cours du temps est utilisée pour caractériser la rhéologie de l'acier. En un premier temps, nous avons identifié les paramètres d'une loi

de comportement de Norton-Hoff [eq. (34)]. Afin de valider le modèle inverse 3D, nous avons utilisé FORGE3® pour faire les simulations de l'essai de compression, même si FORGE2® aurait été suffisant ici (Figure 43).

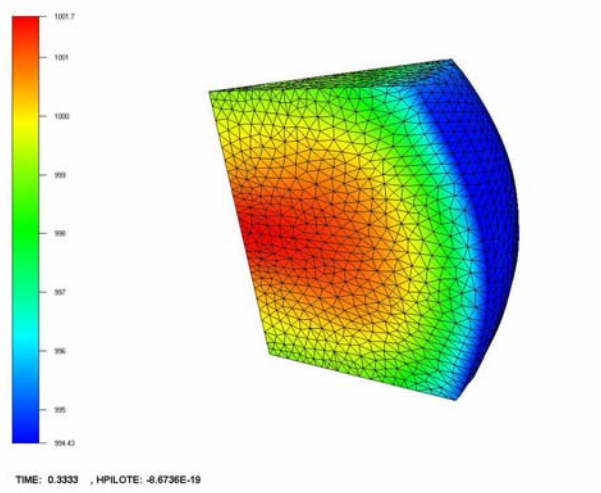


Figure 43 : simulation de l'essai de compression uniaxiale avec FORGE3®

La méthode de Gauss-Newton stabilisée converge en 15 itérations vers une valeur de la fonction coût de 9.80%.

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K (kPa.s^m)	500	523.52
m	0.2	0.10
n	0.1	$4.9.10^{-2}$
β (K)	3000	6335.46
ϕ_{final}		9.80%

Tableau 10 : résultat de l'identification des paramètres de la loi de Norton-Hoff

L'écart entre l'effort calculé et l'effort expérimental est relativement important à la fin du processus d'identification (Figure 44). A cause de l'erreur de modélisation due au choix de la loi de Norton Hoff, le comportement de l'acier étudié n'est pas bien modélisé. D'ailleurs, la différence entre l'effort calculé et l'effort mesuré (appelée résidu) présente un motif caractéristique d'une erreur de modélisation importante (Figure 45).

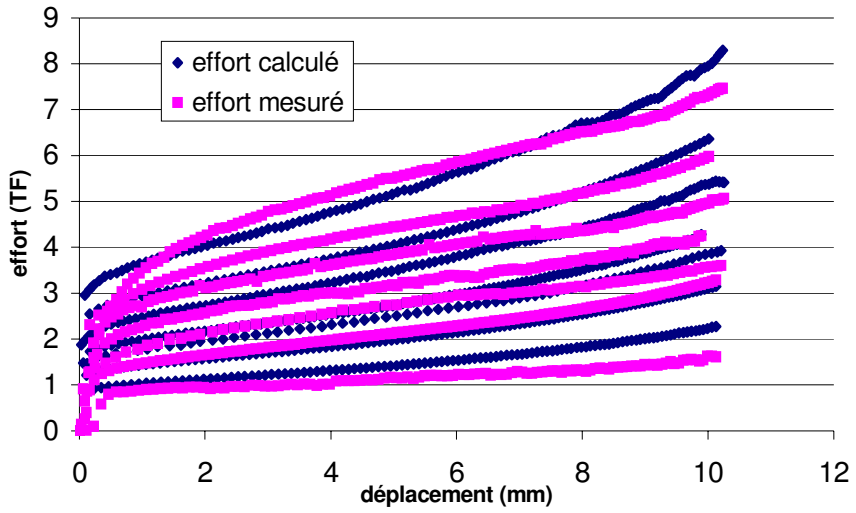


Figure 44 : comparaison entre l'effort calculé en utilisant la loi de Norton-Hoff et l'effort mesuré

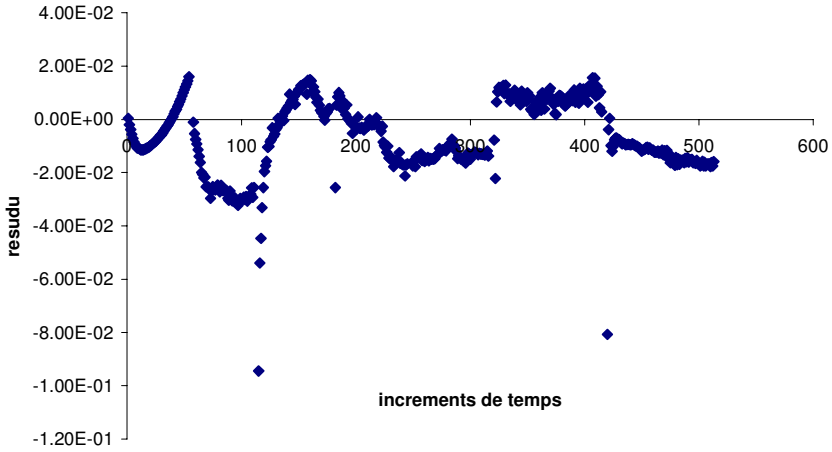


Figure 45 : résidu en fonction du temps

Afin de diminuer l'erreur de modélisation, nous avons effectué l'identification d'une loi de modèle rhéologique 1 [eq. (37)]. Grâce à l'utilisation de ce modèle, la valeur de la fonction coût à la fin de l'identification de paramètres est de 6.44%. Le jeu de paramètres, obtenu après 17 itérations de la méthode de Gauss-Newton stabilisée, est donné dans le tableau 11.

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K_0 (kPa.s^m)	500	516.33
m	0.1	0.102
n	0.01	0.205
β (K)	6000	6997.99
r	0.1	$-7.79.10^{-2}$
K_{sat} (kPa.s^m)	500	1496.91
β_{sat} (K)	9000	8275.87
ϕ_{final}		6.48%

Tableau 11 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 1

Même si ce second problème inverse est moins bien conditionné que le premier, il paraît plus satisfaisant d'utiliser le modèle 1 pour modéliser le comportement du matériau. Dans ce cas, il est impératif d'utiliser une méthode de stabilisation pour l'algorithme de Gauss-Newton. Une bonne correspondance entre l'effort calculé et l'effort mesuré est constatée (Figure 46).

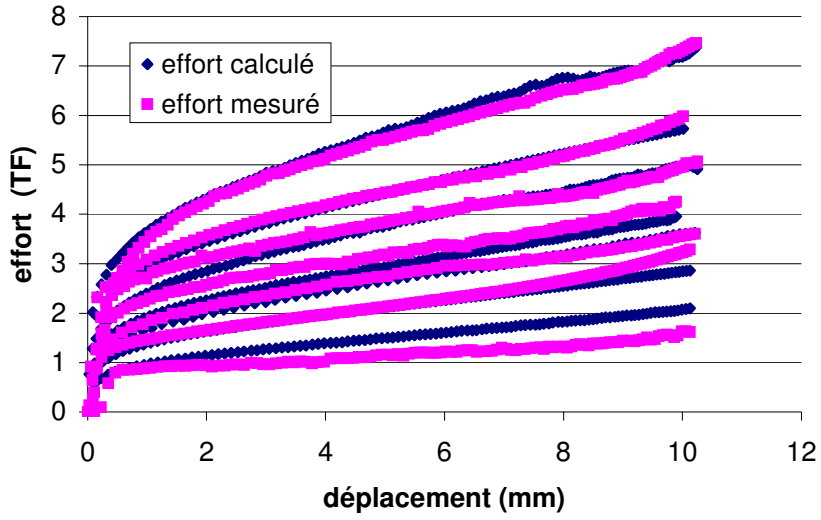


Figure 46 : comparaison entre l'effort calculé avec le modèle 1 et l'effort expérimental

La sensibilité des paramètres par rapport au coefficient de frottement montre que la qualité des résultats est relativement peu sensible à la valeur estimée du coefficient de frottement. Pour ce test, une loi de Tresca [eq. (89)] avec un coefficient de frottement $\overline{m}$ de 0.1, en bon accord avec les mesures de bombé de l'éprouvette, a été utilisée.

$$\begin{aligned} &\frac{dK_0}{d\overline{m}} = -101\,\text{kPa.s}^m \quad \frac{dn}{d\overline{m}} = -6.02\,.10^{-3} \\ &\frac{d\beta}{d\overline{m}} = 74.42\,\text{K} \quad \frac{dr}{d\overline{m}} = 2.51.10^{-2} \\ &\frac{dK_{sat}}{d\overline{m}} = 6.56\,\text{kPa.s}^m \quad \frac{d\beta_{sat}}{d\overline{m}} = -29.76\,\text{K} \\ &\frac{dm}{d\overline{m}} = -4.00.10^{-4} \end{aligned} \tag{195}$$

Dans ce cas, une variation de 0.1 du coefficient de frottement induit une variation de l'ordre de 2% sur la contrainte d'écoulement. Ainsi, même si l'on ne connaît pas le frottement avec une très grande précision, la contrainte d'écoulement est identifiée précisément avec cette géométrie d'éprouvettes.

4.3 Torsion

Une série d'essais de torsion a été réalisée sur l'acier NV2-4 dans le cadre du projet européen TESTIFY. La géométrie des éprouvettes de torsion est décrite dans la figure 47. Le plan d'expérience est composé de trois températures (900°C, 1000°C et 1100°C) et de trois vitesses de déformation (0.1/s, 1/s et 10/s).

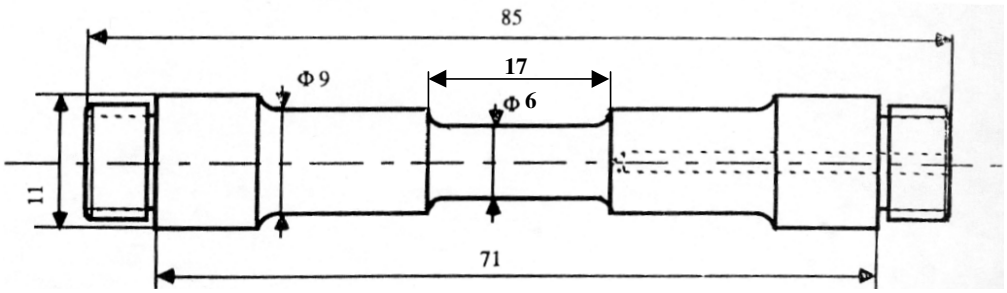


Figure 47 : géométrie des éprouvettes de torsion

L'écoulement de matière au cours d'un essai de torsion étant hétérogène, l'utilisation d'une méthode inverse couplée à une méthode éléments finis est nécessaire à l'analyse de l'essai. Gavrus et al. (1999) ont démontré l'intérêt de cette approche, notamment pour la prise en compte de l'autoéchauffement.
Les simulations numériques de l'essai de torsion ont été réalisées en utilisant la version de FORGE2® développée par L. D'Alvise (2002). Il s'agit d'une version de FORGE2® axisymétrique à laquelle a été rajoutée une vitesse de rotation. Cette formulation a été initialement développée dans le but de simuler le procédé de soudage par friction, mais peut être utilisée pour la simulation de l'essai de torsion. Cette approche permet de simuler l'écoulement de matière hétérogène induit par cet essai (Figure 48).

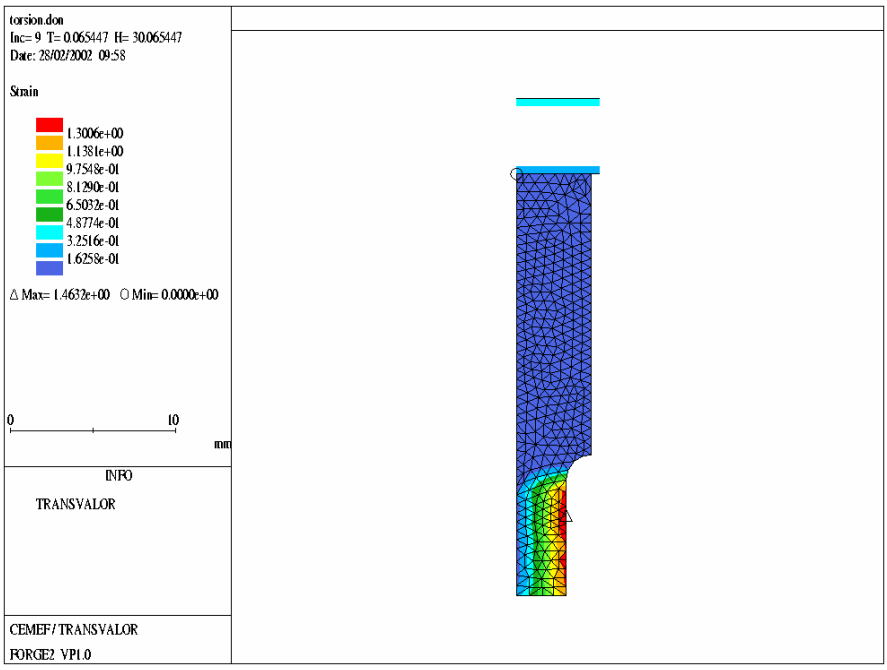


Figure 48 : champ de déformation généralisée obtenu à la fin d'un essai de torsion – simulation numérique effectuée avec FORGE2®

Nous avons identifié les paramètres du modèle rhéologique 1 [eq. (37)] en 17 itérations de la méthode de Gauss-Newton stabilisée (Tableau 12).

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
K_0 (MPa.s^m)	0.9	1.5
m	0.15	0.148
n	0.12	0.37
β (K)	5000	5256
r	-1	$-9.28.10^{-2}$
K_{sat} (MPa.s^m)	1.08	12.96
β_{sat} (K)	5000	4692
ϕ_{final}		9.44%

Tableau 12 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 1

L'analyse de stabilité indique que les paramètres sont relativement bien déterminés malgré leur nombre important. La raison de cette stabilité est certainement la richesse du plan d'expérience. Si nous utilisons la relation (51), nous constatons que la plupart des valeurs des paramètres sont très bien caractérisées. Seuls les paramètres r et K_{sat} semblent un peu plus sensibles à des variations de données expérimentales.

$$\left|\frac{\delta K_0}{K_0}\right| \le 0.53\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta m}{m}\right| \le 0.041\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta n}{n}\right| \le 0.33\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| \le 0.088\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2}$$
$$\left|\frac{\delta r}{r}\right| \le 13\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta K_{sat}}{K_{sat}}\right| \le 13.3\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta\beta_{sat}}{\beta_{sat}}\right| \le 0.58\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \qquad (196)$$

Le couple calculé à la fin de l'identification est en accord avec le couple mesuré expérimentalement (Figure 49).

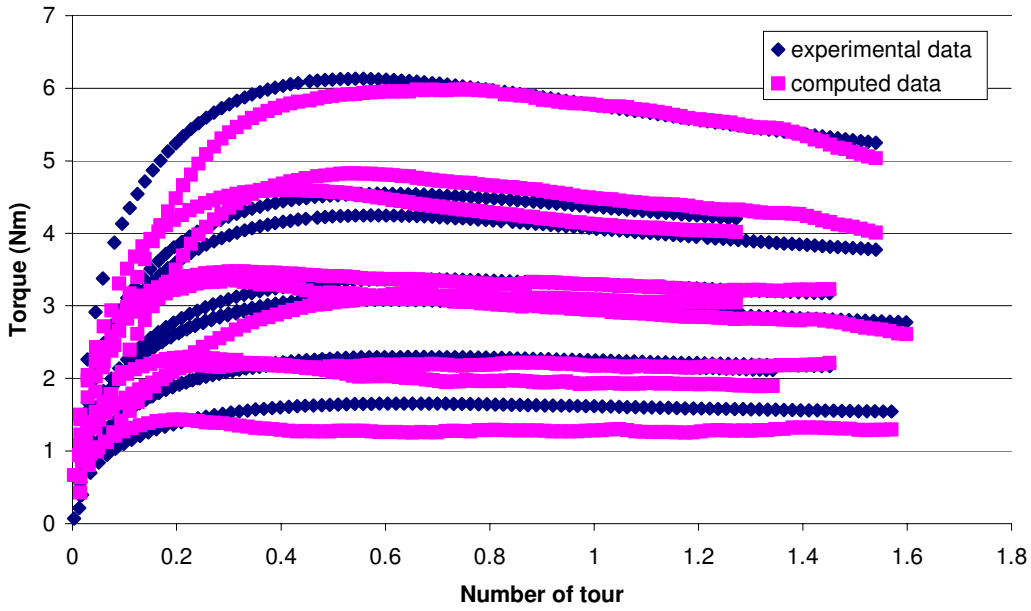


Figure 49 : comparaison entre le couple mesuré et le couple calculé avec FORGE2® après analyse inverse

Afin de tester le caractère prédictif de la méthode, des essais complémentaires ont été réalisés à 950°C et à 1050°C pour les trois vitesses de déformation de l'étude (0.1/s, 1/s et 10/s). Cet exemple montre bien que lorsque le plan d'expérience est suffisamment complet et lorsque la fonction coût est suffisamment basse à la fin de la procédure d'optimisation, la loi de comportement identifiée est bien prédictive à l'intérieur des intervalles de température et de vitesse de déformation (Figure 50).

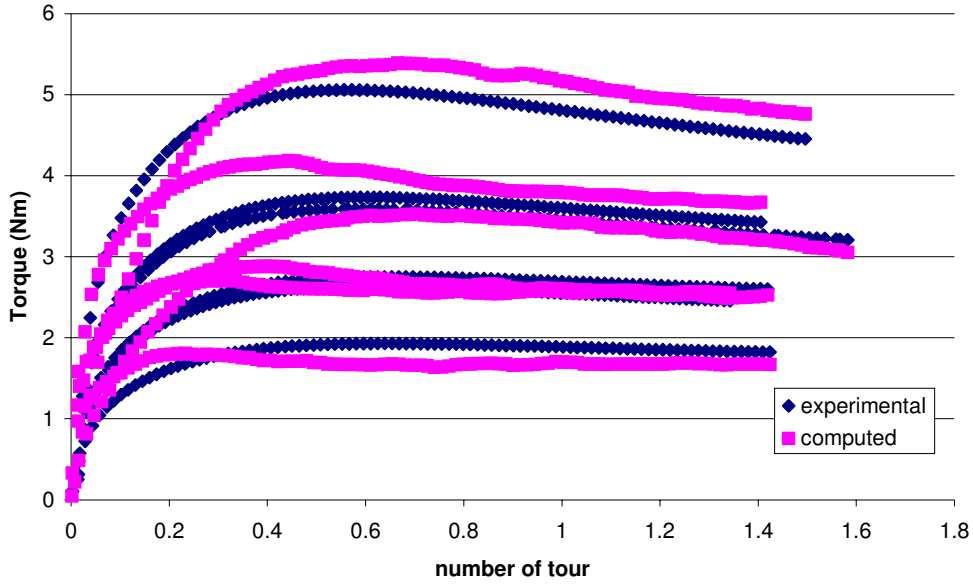


Figure 50 : comparaison entre des mesures de couples et les prévisions avec FORGE2®

Afin de vérifier que la méthode est suffisamment stable, nous avons étudié l'influence d'une variation de la longueur ou bien du rayon de l'éprouvette sur les valeurs des paramètres identifiés et sur les courbes contrainte déformation après recalage. Soient R le rayon de l'éprouvette et L sa longueur. Nous avons calculé, en utilisant le module d'analyse de sensibilité semi-analytique, la dérivée du couple par rapport à R et à L. De ces valeurs sont déduites les dérivées des paramètres identifiées par rapport à R et à L :

$$\begin{array}{ll}
\frac{dK}{dR} = 1.084\,MPa.s^{-m} & \frac{dK}{dL} = -0.0106\,MPa.s^{-m} \\
\frac{dn}{dR} = 2.7.10^{-3} & \frac{dn}{dL} = -4.7910^{-4} \\
\frac{d\beta}{dR} = 2.05\,K & \frac{d\beta}{dL} = -3.77.10^{-1}\,K \\
\frac{dr}{dR} = -2.20.10^{-2} & \frac{dr}{dL} = 3.95.10^{-3} \\
\frac{dK_{sat}}{dR} = 6.356\,MPa.s^{-m} & \frac{dK_{sat}}{dL} = 0.447\,MPa.s^{-m} \\
\frac{d\beta_{sat}}{dR} = 40.14\,K & \frac{d\beta_{sat}}{dL} = -7.23 \\
\frac{dm}{dR} = 6.04.10^{-5} & \frac{dm}{dL} = -1.08.10^{-5}
\end{array} \qquad (197)$$

Cette analyse de sensibilité met en évidence que les résultats de l'analyse inverse dépendent fortement de la précision sur la valeur du rayon. Par contre, une incertitude sur la longueur de l'éprouvette semble moins détériorer les résultats. Roebuck et al. (2003), préconisent une tolérance de 0.01 mm sur les cotes des éprouvettes ainsi que sur l'alignement de la machine dans leur 'Measurement good practice guide' dédié aux essais de torsion à chaud. L'influence d'une variation de 0.1 mm de rayon et de longueur sur la contrainte d'écoulement est montrée respectivement dans les figures 51 et 52.

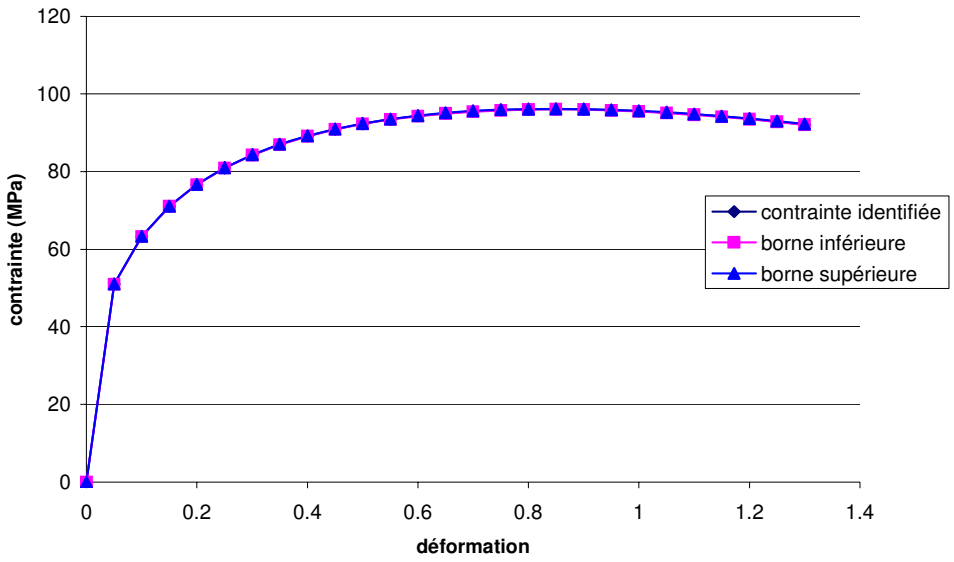


Figure 51 : influence d'une variation de 0.1 mm de la longueur sur la contrainte d'écoulement identifiée (T=1000°C, $\dot{\bar{\varepsilon}}=1s^{-1}$)

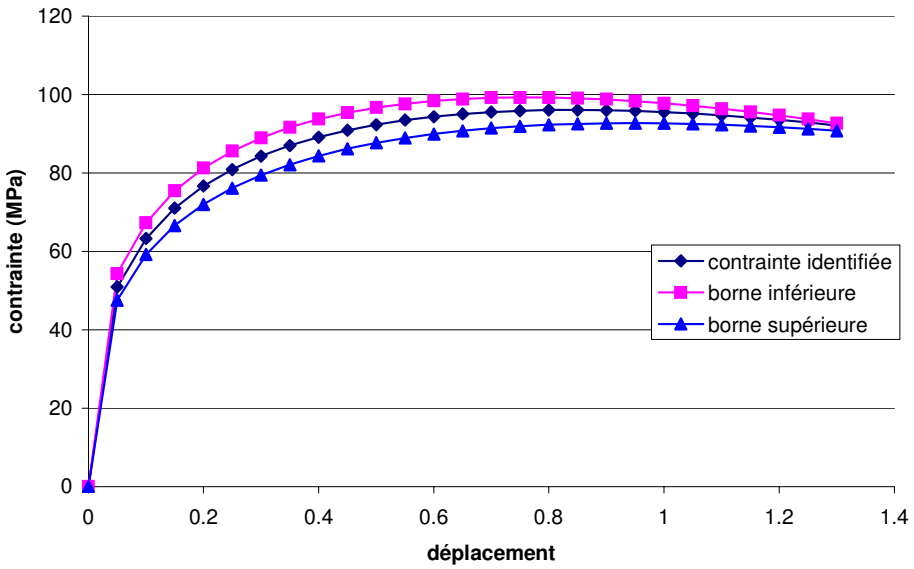


Figure 52 : influence d'une variation de 0.1mm de rayon sur la contrainte d'écoulement identifiée (T=1000°C, $\dot{\bar{\varepsilon}}=1s^{-1}$)

Il est bien mis en évidence que la tolérance sur la cote du rayon doit être plus faible que la tolérance sur la longueur. En définitive, il semble bien qu'une tolérance de 0.01 mm soit tout à fait satisfaisante pour effectuer une identification de paramètres rhéologiques avec cette géométrie d'éprouvette. L'analyse de sensibilité peut donc être utilisée comme une aide à la détermination de la tolérance sur les cotes d'éprouvettes de torsion. Cet exemple met donc en lumière tout l'intérêt de développer une méthode d'analyse de sensibilité. L'analyse de sensibilité permet donc non seulement d'utiliser des méthodes à direction de descente et d'étudier leur stabilité ; mais c'est aussi un outil d'aide à la conception d'essais.

Remarque : L'apparition d'une couche d'oxydation lors d'essais de torsion à chaud peut engendrer des variations de diamètre relativement importante par rapport à la tolérance fixée.

4.4 Test SICO

Le test SICO (Strain Induced Crack Opening) est, à l'origine, un essai de formabilité. Cet essai est caractérisé par une très forte hétérogénéité du champ de température et de déformation. Dans ce test, un gradient de température est imposé initialement à une éprouvette cylindrique de diamètre 10 mm et de longueur 150 mm. Lorsque l'équilibre thermique est atteint, on effectue une compression de l'éprouvette. Le champ de déformation ainsi obtenu est fortement hétérogène à cause de la thermo-dépendance du comportement du métal étudié. Il se forme donc un bombé au centre de l'éprouvette (Figure 53).

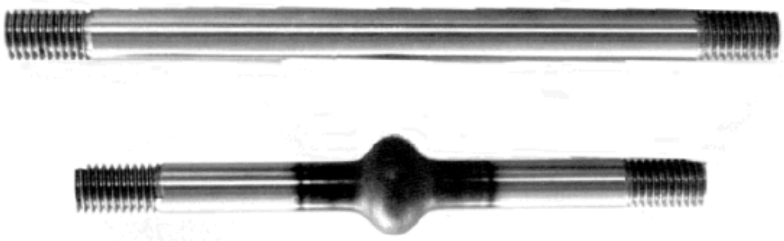


Figure 53 : éprouvettes avant et après un test SICO (Dal Negro et al. 2002)

Cet essai peut être utilisé comme un essai rhéologique grâce à un module d'analyse inverse couplé avec un modèle éléments finis. Il n'est en effet pas envisageable de développer un modèle analytique décrivant l'écoulement de matière induit par le test SICO. Notons que cet essai présente l'avantage de ne pas être perturbé par du frottement entre l'outil et la pièce. De plus, de par les conditions thermiques relativement complexes, chaque essai contient beaucoup d'informations sur la thermo-dépendance du comportement du matériau. Le profil de température de l'éprouvette au début de l'essai est présenté dans la figure 54. L'essai est réalisé sur des éprouvettes en acier inoxydable (AISI 304) pour trois vitesses de course de l'outil : (10, 15 et 25 mm/s).

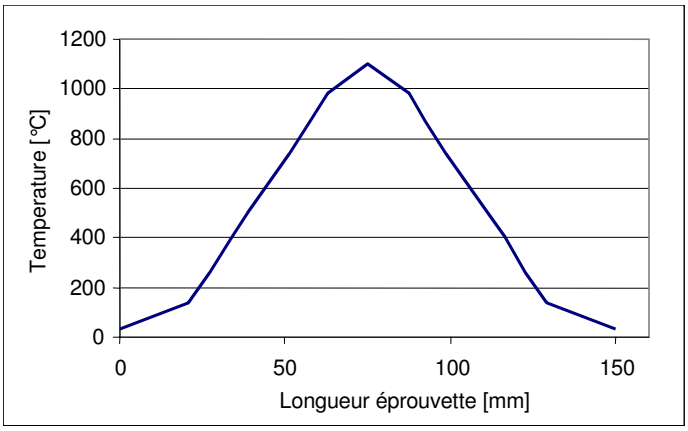


Figure 54 : profil de température au début de l'essai (Dal Negro et al. 2002)

Les tests SICO ont été réalisés sur une machine Gleeble à l'université de Padoue. L'essai étant axisymétrique, nous avons utilisé notre module inverse couplé avec FORGE2® (Figure 55) pour identifier les paramètres d'une loi de Norton-Hoff [eq. (34)].

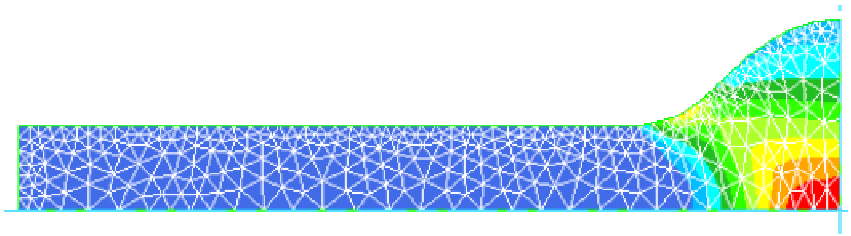


Figure 55 : exemple de simulation du SICO test avec FORGE2® (taux de déformation) (Dal Negro et al. 2002)

Le jeu de paramètres identifié après 5 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton stabilisé est présenté dans le tableau 13.

Paramètres	Valeurs identifiées
K (MPa.s^m)	4.92
m	0,18
n	0,087
β (K)	3783

Tableau 13 : résultat de l'identification des paramètres de la loi de Norton-Hoff

Au vu des coefficients de corrélation entre les paramètres, nous pouvons déduire que les effets de K et de β ne sont pas mieux discriminés avec le test SICO qu'avec un essai de compression ou de torsion classique :

$$\cos\left(\frac{dL}{dK},\frac{dL}{dm}\right)=0.797 \qquad \cos\left(\frac{dL}{dK},\frac{dL}{dn}\right)=-0.593$$

$$\cos\left(\frac{dL}{dK},\frac{dL}{d\beta}\right)=0.998 \qquad \cos\left(\frac{dL}{dm},\frac{dL}{dn}\right)=-0.318$$

$$\cos\left(\frac{dL}{dm},\frac{dL}{d\beta}\right)=0.793 \qquad \cos\left(\frac{dL}{dn},\frac{dL}{d\beta}\right)=-0.597$$

Mais, il serait intéressant de voir si le coefficient de corrélation entre K et β n'est pas plus faible dans le cas où l'on utilise différentes conditions initiales en thermique. Cet essai montre l'intérêt de l'utilisation de méthodes inverses pour développer de nouveaux essais rhéologiques. La complexité de l'écoulement du matériau n'est en effet plus un point de blocage, à condition bien sûr que l'on maîtrise les conditions opératoires.

4.5 Bipoinçonnement

L'essai de bipoinçonnement est fréquemment utilisé afin de caractériser un matériau dans des conditions proches de celles rencontrées lors du laminage de produits plats, ou de façon générale, pour reproduire des conditions de déformation plane. La figure 56 montre le dispositif expérimental de cet essai, constitué de deux outils parallélépipédiques venant serrer un échantillon plan.

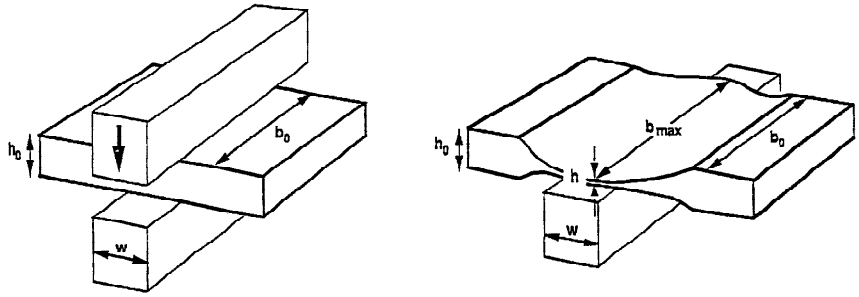


Figure 56 : géométrie de l'essai de bipoinçonnement

Dans le cadre du projet européen TESTIFY, une série d'essais de bipoinçonnement d'éprouvettes en laiton (CuZn40Pb2) a été réalisée pour diverses températures (500-750°C) et pour diverses vitesses de déformation (0.1-5s^{-1}). Le but de notre analyse est de fournir une loi de comportement à partir de mesures d'efforts effectuées au cours de cette campagne d'essais. Après une première série d'essais, nous avons pu constater que des instabilités d'écoulement apparaissent lorsque l'éprouvette est trop épaisse par rapport à la largeur des poinçons. On observe un cisaillement très important au moindre défaut d'alignement de l'éprouvette avec les poinçons. Afin de remédier à ces instabilités, nous avons utilisé les géométries d'éprouvettes décrites à la figure 57.

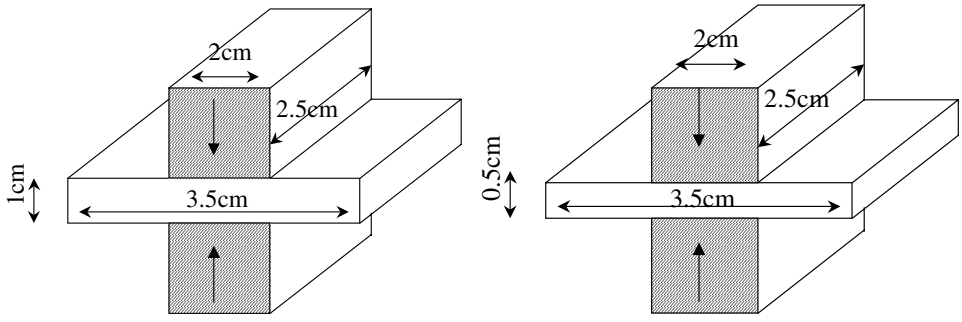


Figure 57 : éprouvettes utilisées pour les essais de bipoinçonnement

Kubié (1980) a démontré que l'effort mesuré au cours d'un essai de poinçonnement est d'autant plus sensible au frottement que l'éprouvette utilisée est fine. Ainsi, à cause des instabilités d'écoulement, nous sommes tenus d'utiliser des éprouvettes pour lesquelles l'effort est sensible au frottement. De cette constatation, il nous a semblé envisageable,

dans ce cas, d'identifier simultanément les coefficients de comportement et de frottement à partir de mesures d'effort.

4.5.1 Simulation numérique de l'essai de bipoinçonnement

Après avoir effectué les premiers essais, nous avons constaté que le laiton avait tendance à s'adoucir au cours de la déformation. Ceci s'explique par le fait que notre campagne d'essais se situe dans une gamme de températures correspondant à un changement de phase (Figure 58). En effet, l'alliage de laiton considéré contient 40% de zinc et est déformé à des températures variant de 500 à 700°C dans nos essais. Or, entre ces deux températures, le diagramme de phase indique que le laiton subit une transformation.

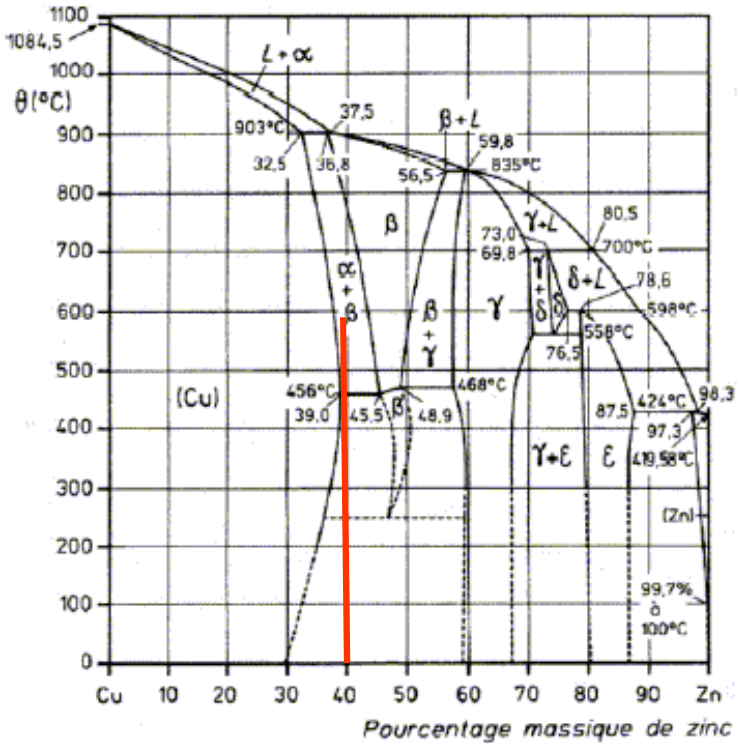


Figure 58 : diagramme de phase du laiton

Pour effectuer une analyse inverse cohérente et précise, il est nécessaire d'utiliser une loi de comportement suffisamment complexe pour représenter le comportement réel du matériau. Dans ce cas, il n'est pas possible de modéliser le comportement du matériau avec une loi aussi simple que la loi de Norton-Hoff [eq. (34)]. C'est pour cela que nous avons utilisé en un premier temps le modèle 1 [eq. (37)]. Cette loi présente en effet l'avantage de pouvoir simuler de façon globale un adoucissement d'un matériau. En fait, elle permet de prendre en compte la présence de deux phase différentes. Dans ce contexte, le paramètre W peut alors être considéré comme un pourcentage de phase et le modèle 1 est considéré comme une loi de mélange.
A cause de l'écoulement latéral de matière entre les mors, l'essai de bipoinçonnement est un essai tridimensionnel. Nombre d'auteurs utilisent des formulations éléments finis 2D pour simuler l'essai de bipoinçonnement. Afin de prendre en compte l'écoulement latéral de matière, l'effort doit alors être corrigé par un terme dépendant du taux de frottement et de la surface en contact. Nous avons choisi de simuler les essais de bipoinçonnement avec FORGE3® afin de prendre en compte le caractère 3D de cet essai

(Figure 59). La formulation retenue est donc complètement tridimensionnelle. Une comparaison entre une éprouvette après déformation et le résultat d'une simulation FORGE3® montre que cette approche permet de suivre l'évolution de la géométrie des éprouvettes au cours de l'essai (Figure 60).

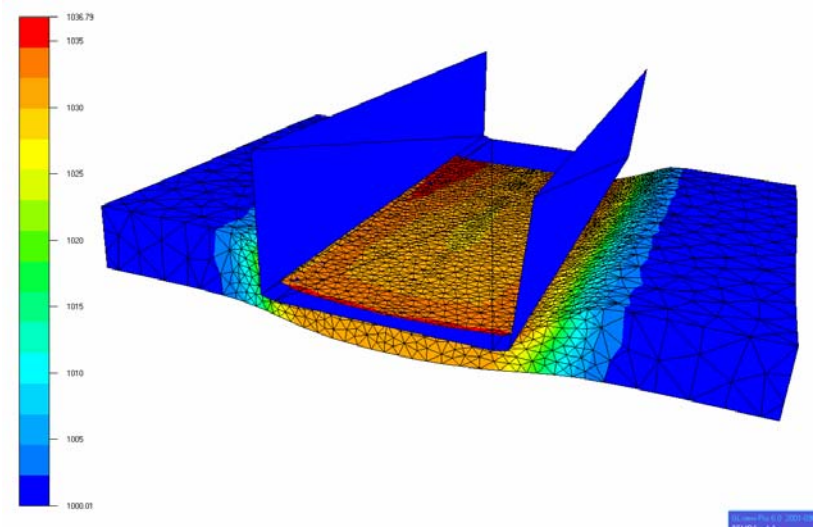


Figure 59 : simulation d'un essai de bipoinçonnement avec FORGE3®

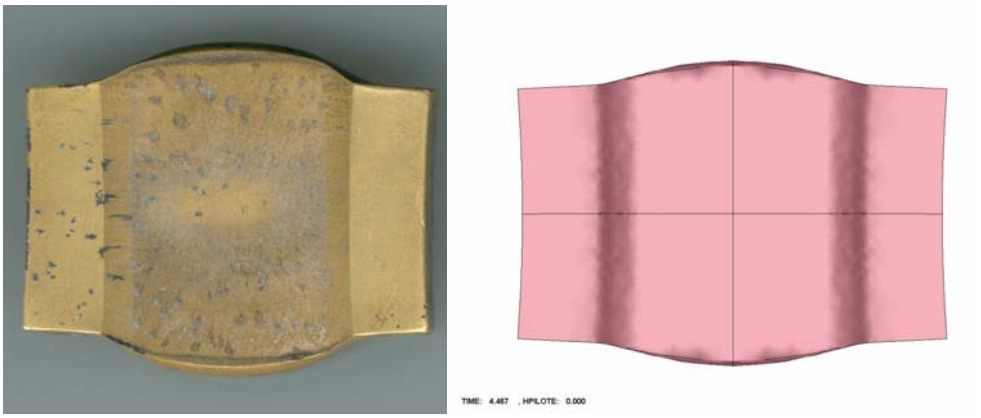


Figure 60 : comparaison entre un éprouvette après déformation et le résultat d'une simulation avec FORGE3®

4.5.2 Géométries des éprouvettes et 'identifiabilité' du système

Il est connu que le frottement joue un rôle d'autant plus important que le rapport hauteur de l'éprouvette sur largeur du poinçon est faible. Or, il est nécessaire d'utiliser des éprouvettes relativement peu épaisses afin d'éviter des instabilités d'écoulement. Après avoir effectué une analyse de sensibilité, nous avons constaté que l'effort est effectivement sensible au coefficient de frottement. Si les effets de corrélation entre le coefficient de frottement et les coefficients de comportement ne sont pas trop importants, il est possible d'identifier simultanément tous ces paramètres. Une première série de simulations a été effectuée en n'utilisant que les éprouvettes de hauteur 1cm avec le plan d'expérience décrit dans le tableau 14.

Temperature (°C) $\dot{\bar{\varepsilon}}$ (s^{-1})	550	600	650	700
0.1	+		+	+
5	+	+		+

Tableau 14 : plan d'expérience

L'analyse de sensibilité montre que la corrélation entre K et $\overline{m}$ est de 0.994. Il est donc très difficile de discriminer les effets de K et de $\overline{m}$ sur l'effort. D'ailleurs, l'analyse de stabilité montre bien que l'incertitude sur le coefficient de fortement est très importante.

$$\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| < 98.30\frac{\|\delta F\|}{\|F\|} \qquad \left|\frac{\delta K_0}{K_0}\right| < 43.37\frac{\|\delta F\|}{\|F\|} \tag{198}$$

L'identification simultanée des coefficients de frottement et de la loi de comportement s'est donc avérée impossible en raison du mauvais conditionnement du problème inverse. Nous avons alors réalisé l'analyse de sensibilité en utilisant les deux géométries d'éprouvettes. Le plan d'expérience utilisé est décrit dans le tableau 15.

Températures (°C) $\dot{\bar{\varepsilon}}$ (s^{-1})	550	600	650	700
0.1 Géométrie 1 Géométrie 2	 + +		 + +	 + +
5 Géométrie 1 Géométrie 2	 +	 + +		 + +

Tableau 15 : plan d'expérience

La corrélation entre K et $\overline{m}$ passe alors à 0.870 et le système peut être considéré comme identifiable. Douze itérations de l'algorithme de Gauss-Newton stabilisé ont été nécessaires pour obtenir le jeu de paramètres optimal (Tableau 16).

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
$\overline{m}$	0.3	0.71
K_0 (kPa.s^m)	30.	67.22
m	0.1	0.26
n	0.1	$8.52.10^{-2}$
β (K)	6000	5461.92
r	1.	0.72
K_{sat} (kPa.s^m)	30	9.50
β_{sat} (K)	6000.	5034.09
ϕ_{final}		11.96%

Tableau 16 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 1

Une relativement bonne correspondance entre les valeurs expérimentales et les résultats numériques est obtenue (Figures 61 et 62).

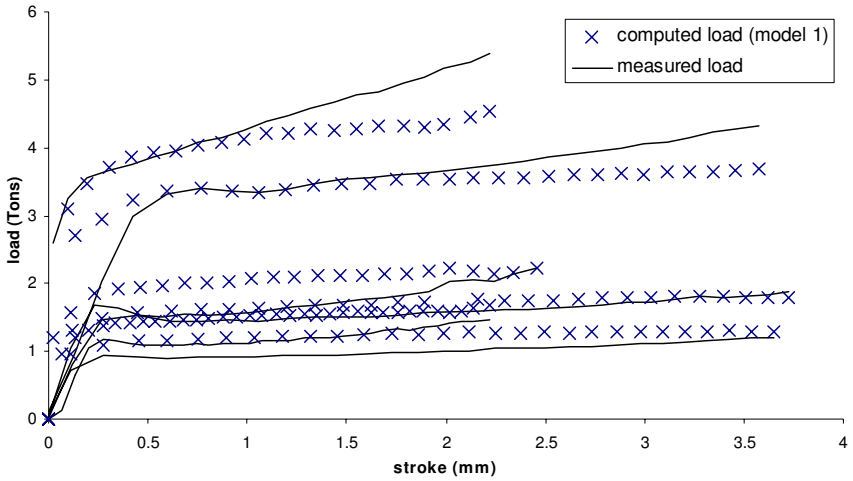


Figure 61: comparaison entre l'effort expérimental et l'effort calculé pour $\dot{\varepsilon}=0.1s^{-1}$ et pour les deux géométries

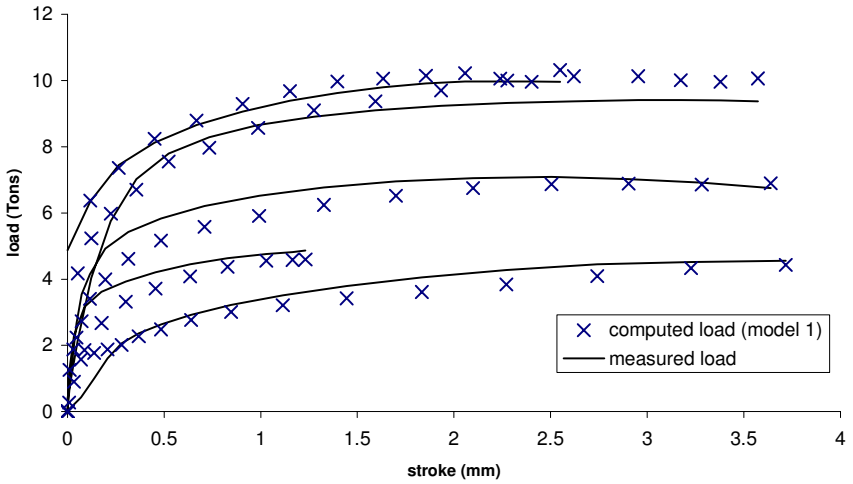


Figure 62: comparaison entre l'effort expérimental et l'effort calculé pour $\dot{\varepsilon}=5s^{-1}$ et pour les deux géométries

Malgré tout, le problème est mal conditionné et les valeurs des paramètres identifiés sont relativement sensibles à toute perturbation sur les mesures expérimentales :

$$\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \le 8.28\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta K_0}{K_0}\right| \le 29.30\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta m}{m}\right| \le 2.92\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta n}{n}\right| \le 19.18\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2}$$
$$\left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| \le 4.29\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta r}{r}\right| \le 19.97\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta K_{sat}}{K_{sat}}\right| \le 289.67\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \quad \left|\frac{\delta\beta_{sat}}{\beta_{sat}}\right| \le 286.11\frac{\|\delta F\|_2}{\|F\|_2} \tag{199}$$

Ceci vient du fait que les effets de corrélation entre certains paramètres de la loi de comportement sont très importants. Par exemple, $\cos\left(\frac{dL}{dK_0}, \frac{dL}{d\beta}\right) = 0.9987$. La fonction coût présente donc très certainement une vallée dans un voisinage du jeu de paramètres optimal. D'un point de vue numérique, on ne peut pas vraiment parler de l'unicité de la solution de ce problème. C'est pour cela qu'une méthode de Gauss-Newton sans terme de stabilisation est instable.
Nous avons essayé d'identifier les paramètres d'une loi de comportement un peu plus complexe afin de diminuer le résidu après l'optimisation :

$$\text{(modèle 2)} \begin{cases} \sigma_0 = \sqrt{3}\left[(1-W)K_0 \exp\left(\frac{\beta}{T}\right)(\bar{\varepsilon})^n + WK_{sat} \exp\left(\frac{\beta_{sat}}{T}\right)\right]\left(\sqrt{3}\dot{\bar{\varepsilon}}\right)^m \\ W = 1 - \exp(-r\bar{\varepsilon}) \\ r = r_0 + r_1 T \\ m = m_0 + m_1 T \end{cases} \quad (200)$$

En utilisant une fois de plus la méthode de Gauss-Newton stabilisée, nous obtenons une valeur finale de la fonction coût légèrement plus faible que celle obtenue pour le modèle 1 après 7 itérations (Tableau 17).

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
$\overline{m}$	0.71	0.63
K_0 (kPa.s^m)	113.	79.61.
m_0	0.26	-0.25
m_1(K^{-1})	2.10^{-4}	$5.97.10^{-4}$
n	0.085	$8.72.10^{-2}$
β (K)	5015	5348.39
r_0	-1.45	-2.74
r_1(K^{-1})	$2.8.\ 10^{-3}$	$4.52.10^{-3}$
K_{sat} (kPa.s^m)	$1.18.\ 10^{-2}$	15.1
β_{sat} (K)	5077	5474.74
ϕ_{final}		10.33%

Tableau 17 : résultat de l'identification des paramètres du modèle 2

Les courbes effort/déplacement obtenues avec ce modèle sont plus proches des données expérimentales que celles issues de l'identification du modèle 1 (Figures 63 et 64).

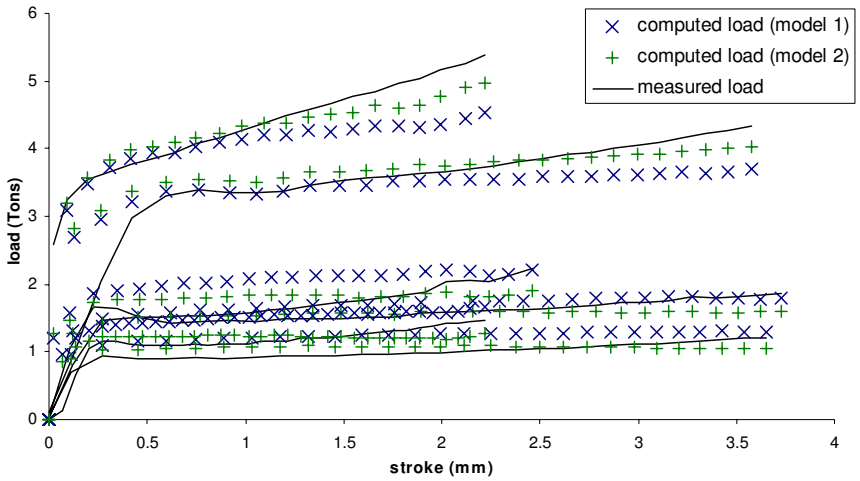


Figure 63 : comparaison entre l'effort expérimental et l'effort calculé pour $\dot{\varepsilon} = 0.1s^{-1}$ et pour les deux géométries

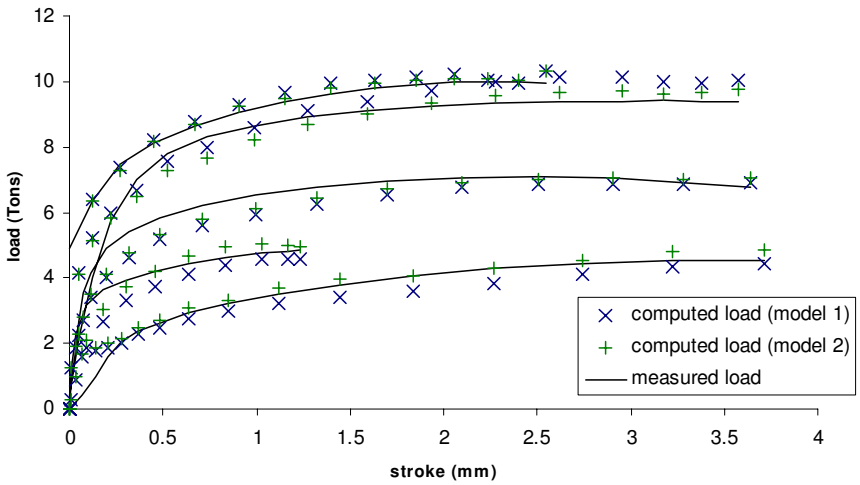


Figure 64 : comparaison entre l'effort expérimental et l'effort calculé pour $\dot{\varepsilon} = 5s^{-1}$ et pour les deux géométries

L'incertitude sur les paramètres est plus importante que pour le modèle 1 car de nouveaux effets de corrélation apparaissent lorsque l'on rajoute des paramètres. En fait, il faut une méthode d'optimisation robuste et un plan d'expérience assez complet car le type de modèle que nous utilisons introduit de nombreux effets de corrélation entre les paramètres, ce qui a pour effet de rendre le problème inverse mal conditionné. D'un autre côté, si l'on complexifie le modèle direct, de meilleurs résultats sont obtenus.
En définitive, l'étude des effets de corrélation et l'analyse de stabilité nous permettent d'identifier les paramètres de modèles rhéologiques plutôt complexes. De plus, nous avons pu effectuer, grâce à cette approche, une optimisation du plan d'expérience afin de rendre les paramètres de frottement et de comportement simultanément identifiables. L'analyse de sensibilité n'est donc plus considérée comme un simple outil d'optimisation, mais c'est aussi un outil d'aide à la conception d'expériences et de campagnes d'essais.

4.5.3 Sensibilité des paramètres identifiés par rapport au frottement

Après avoir identifié les paramètres du modèle 1, nous avons étudié l'influence du coefficient de frottement sur les paramètres identifiées. Le résultat suivant est obtenu :

$$\begin{aligned}
&\frac{dK_0}{d\overline{m}} = -2{,}52.10^{-2}\,\text{kPa.s}^{\,m} \qquad \frac{dn}{d\overline{m}} = -1{,}13.10^{-3} \\
&\frac{d\beta}{d\overline{m}} = -35{,}49\text{K} \qquad \frac{dr}{d\overline{m}} = 3{,}03.10^{-4} \\
&\frac{dK_{sat}}{d\overline{m}} = -1{,}98.10^{-3}\,\text{kPa.s}^{\,m} \qquad \frac{d\beta_{sat}}{d\overline{m}} = -4{,}48\text{K} \\
&\frac{dm}{d\overline{m}} = 8{,}16.10^{-4}
\end{aligned} \tag{201}$$

Il semble que seuls K_0 et K_{sat} soient affectés de façon significative par un changement de coefficient de frottement. L'influence sur les autres paramètres est négligeable :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{\delta K_0}{K_0}\right| \le 0{,}20\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \qquad \left|\frac{\delta n}{n}\right| \le 8.10^{-3}\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \\
&\left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| \le 4{,}2.10^{-3}\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \qquad \left|\frac{\delta\beta}{\beta}\right| \le 2{,}7.10^{-4}\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \\
&\left|\frac{\delta K_{sat}}{K_{sat}}\right| \le 0{,}24\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \qquad \left|\frac{\delta\beta_{sat}}{\beta_{sat}}\right| \le 4{,}9.10^{-4}\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right| \\
&\left|\frac{\delta n}{n}\right| \le 1{,}9.10^{-3}\left|\frac{\delta\overline{m}}{\overline{m}}\right|
\end{aligned} \tag{202}$$

En fait, nous pouvons en déduire qu'une erreur de 1% sur le coefficient de frottement engendre un écart de l'ordre de 0,2% sur la contrainte d'écoulement. La figure 65 montre l'effet d'une variation de plus ou moins 0,1 du coefficient de frottement sur la courbe contrainte déformation obtenue pour une vitesse de déformation de 0,1/s et pour une température de 600°C.

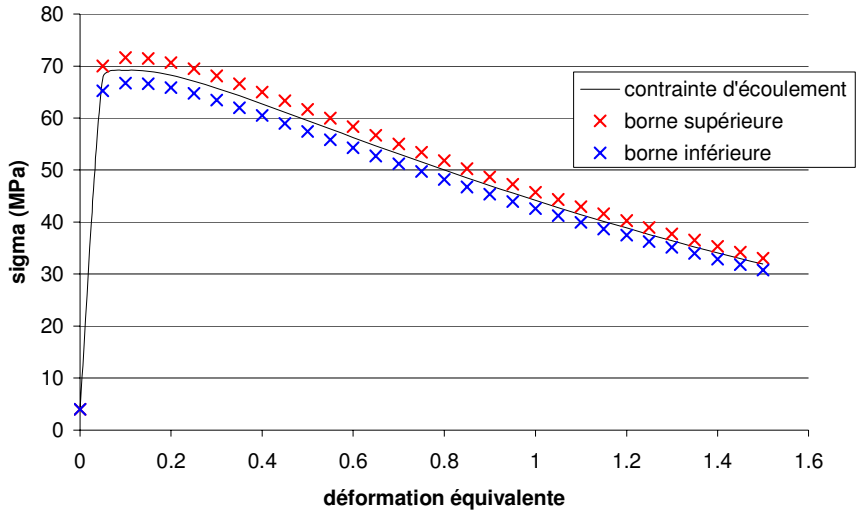


Figure 65 : influence d'une variation de 0.1 du coefficient de frottement sur la contrainte d'écoulement pour $\dot{\bar{\varepsilon}}$=0.1 s^{-1}

Même si la corrélation entre le coefficient de frottement et certains paramètres de la loi de comportement est importante, il existe un écart de sensibilité entre ces paramètres qui fait que l'identification simultanée du coefficient de frottement et des coefficients de la loi de comportement n'introduit donc pas d'incertitude significative sur la contrainte d'écoulement.

4.6 Utilisation de mesures de champs de déformation pour la caractérisation de tôles

Dans les applications que nous venons de présenter, l'observable utilisée est soit une mesure d'effort, soit une mesure de couple. Mais la méthode inverse que nous avons développée est suffisamment générale pour permettre d'utiliser d'autres types d'observables. A partir de cette constatation, nous avons eu l'idée d'utiliser des mesures de champs de déformation effectuées à l'aide du système de corrélation d'images Aramis, lors d'essais mécaniques réalisés sur des tôles, pour caractériser la rhéologie de métaux. Nous nous sommes intéressés plus précisément à l'analyse de l'essai de gonflage hydraulique et de l'essai Nakazima.

4.6.1 Description du système de corrélation d'images Aramis

Le système de mesure Aramis a été acquis au CEMEF après des essais croisés menés avec des laboratoires développant ce type de techniques (Ecole des Mines d'Albi-Carmaux, INSA Lyon et Braunschweig Universität). Le principe de ce système est le suivant (Knockaert (2001)) :

- on imprime sur les pièces un motif aléatoire à l'aide de peinture ou bien en faisant un dépôt électrolytique.
- deux photographies de l'éprouvette avant déformation sont prises sous un angle différent.
- deux photographies des pièces déformées sont à nouveau prises

- une des photographies de la configuration initiale est prise comme référence et est décomposée en carrés d'une dizaine de pixels.
- le logiciel effectue trois étapes de corrélation entre l'image de référence et les autres images afin de calculer la transformation mathématique (l'application linéaire tangente) qui permet de passer du carré initial au carré déformé. L'utilisation du motif aléatoire assure l'unicité du voisinage d'un point et sert à faire la correspondance entre les carrés déformées et les carrés non déformées.
- cette analyse, associée à l'utilisation des deux caméras, permet de déterminer le déplacement 3D ainsi que la distorsion de chaque carreau. Les déformations sont ainsi calculées à partir du calcul du gradient de la transformation.

Ce système a tout d'abord été validé par comparaison avec des mesures effectuées par extensomètres. De plus, on vérifie que l'application d'un mouvement de corps rigide à la pièce donne bien un champ de déformation nul.
Suivant le montage de l'expérience, on peut soit suivre l'évolution de la déformation en prenant une série de photographies (ce qui permet de suivre le chemin de déformation de tous les points de l'éprouvette), soit juste recomposer le champ de déformation final (c'est à dire, dans notre cas, à rupture).
Les mesures de champs de déformation sont classiquement utilisées pour la détermination de Courbes Limites de Formage (CLF) (Knockaert (2001)). Pour introduire la problématique de la mise en forme de tôles métalliques, nous pouvons dire que la formabilité des tôles dépend du chemin de déformation subit par la matière. Ainsi, la caractérisation de CLF se fait par le biais de différents essais (essais de gonflage, Nakazima, traction, etc.) qui ont pour but de faire varier le chemin de déformation. Afin de paramétriser le chemin de déformation, on utilise généralement le rapport ρ des déformations principales minimale et maximale dans le plan de la tôle. Le but des essais de formabilité est de faire varier ρ entre –0.5 (traction) et 1 (expansion biaxiale). Par définition, on dit que l'on est en expansion lorsque ρ est positif et en rétreint lorsque ρ est négatif (Figure 66).

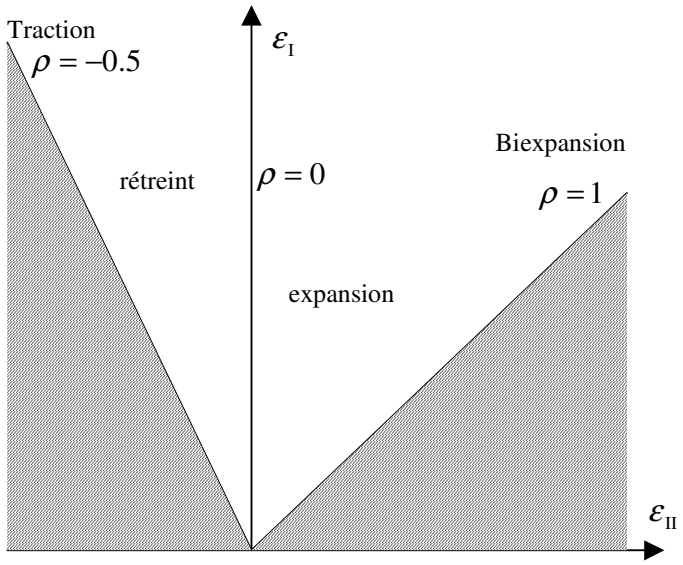


Figure 66 : espace des déformation principales

Plutôt que de n'exploiter que les mesures de déformation à rupture, nous avons décidé d'utiliser l'information concernant le comportement de tôles contenue dans ces essais

avant l'apparition de la striction localisée. Pour ce faire, nous avons analysé des essais de gonflage ainsi que des essais Nakazima avec notre modèle inverse. Comme dans le cas du test SICO, le but ici est de démontrer que l'on peut utiliser certains essais de formabilité comme essais rhéologiques, malgré l'écoulement hétérogène de matière que l'on peut rencontrer.

4.6.2 Identification d'une loi de comportement isotrope à partir d'essais de gonflage hydrauliques

M. Ben Tahar (Ben Tahar et Massoni (2003)) a effectué des essais de gonflage circulaire sur des tôles en acier doux. Le diamètre d_h de la matrice est de 125 mm (plusieurs dizaines de fois supérieur à l'épaisseur de la tôle afin de réduire l'effet de flexion), le rayon d'entrée R_h de la matrice étant de 10 mm (Figure 67). La tôle est fixée entre la matrice et le serre-flan avec un effort de serrage de 104 tonnes. Un jonc de retenu au niveau du flan, empêche tout avalement de matière et assure ainsi une expansion equibiaxiale au niveau du sommet de la tôle déformée. Il est à noter que l'utilisation de serre-flans elliptiques permet de faire varier le chemin de déformation de la matière, ce qui est très utile lorsque l'on veut construire une CLF. Durant l'essai, la tôle est gonflée sous l'action d'un liquide sous pression et des images de la tôle déformée sont prises avec deux caméras pour permettre une analyse stéréo 3D. Au préalable, un motif aléatoire a été imprimé par dépôt électrolytique sur la tôle non déformée afin d'utiliser le logiciel de corrélation d'images Aramis pour mesurer le champ de déplacement. Notons que ce type d'essai présente l'avantage d'être effectué dans des conditions expérimentales proches de celles rencontrées lors d'une mise en forme par hydroformage (en terme de chemin de déformation). Il est généralement analysé en utilisant une approximation polynomiale de la surface de la tôle déformée.

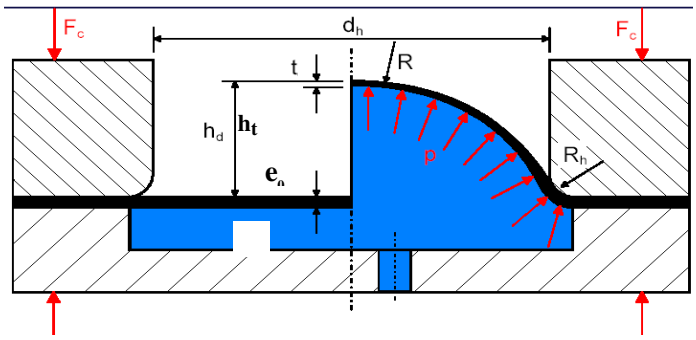


Figure 67 : essai de gonflage hydraulique

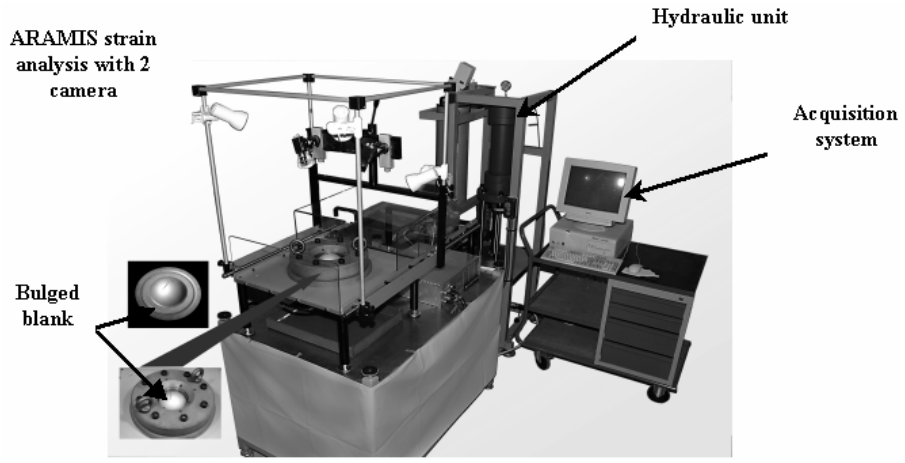


Figure 68 : dispositif expérimental de l'essai de gonflage

Une photographie d'une tôle après rupture ainsi que le résultat de l'analyse Aramis® sont présentés sur la figure 69. Dans ce cas, l'observable que nous allons utiliser n'est plus une mesure globale (comme l'effort ou bien le couple) mais bien une mesure locale, effectuée en plusieurs points de la tôle. La quantité d'information contenue dans ce type de données expérimentales est alors plus importante.

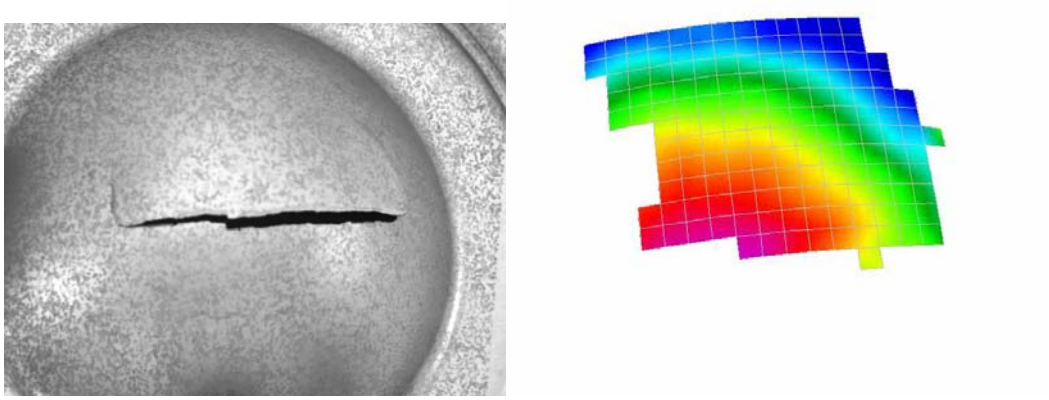


Figure 69 : photographie de la tôle après rupture et déformation majeure calculée avec Aramis pour un gonflage circulaire

Le modèle inverse couplé avec FORGE2® est utilisé afin de caractériser la rhéologie de l'acier. La loi de comportement utilisée pour la modélisation est une loi d'écrouissage de type Hollomon :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{3}\mathrm{K}\bar{\varepsilon}^{\,\mathrm{n}} \\ \lambda &= (\mathrm{K},\mathrm{n}) \end{aligned} \qquad (203)$$

Grâce au champ de déformation fourni par Aramis, il est possible de suivre la trajectoire de plusieurs points sur la tôle. Cette information a été introduite dans une nouvelle fonction coût :

$$\phi(\lambda) = \sum_{j=1}^{j=NbPoint} \frac{\sum_{i=1}^{i=Ni} \left\| X_j^{cal}(t_i) - X_j^{exp}(t_i) \right\|^2}{\sum_{i=1}^{i=Ni} \left\| X_j^{exp}(t_i) \right\|^2} \qquad (204)$$

où NbPoint est le nombre de points dont la trajectoire est suivie, Ni est le nombre d'instants de mesure, $X_j^{exp}(t_i)$ est la position du j-ième point mesurée à l'instant t_i et $X_j^{cal}(t_i)$ est la position du j-ième point calculée à l'instant t_i. Les valeurs finales des paramètres sont K= 0.518 MPa, n= 0.206 et la fonction coût vaut 2.6%. Une très bonne concordance entre les profils calculés et expérimentaux est constatée à la fin du calcul (Figure 70).

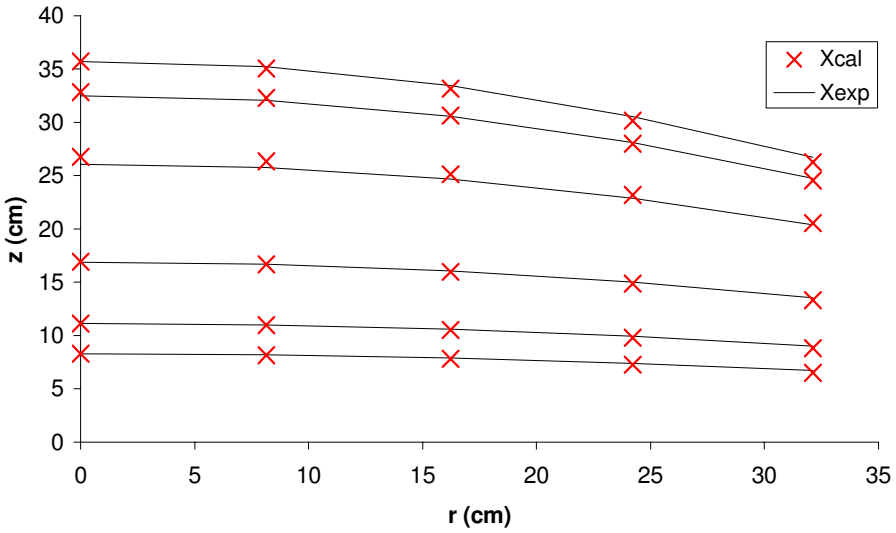


Figure 70 : évolution du profil de la tôle au cours du temps – comparaison expérience/simulation

L'analyse de stabilité donne le résultat suivant :

$$\frac{|\delta K|}{|K|} \le 3.6 \frac{\|\delta X\|_2}{\|X\|_2}$$
$$\frac{|\delta n|}{|n|} \le 9.0 \frac{\|\delta X\|_2}{\|X\|_2} \qquad (205)$$

Les paramètres de la loi d'écrouissage sont déterminés avec précision par l'analyse inverse du procédé de gonflage, et nous pouvons déduire que le gonflage hydraulique de tôles constitue un essai rhéologique qui peut être analysé par méthode inverse à partir de données issues du logiciel Aramis.

En un second temps, nous avons essayé d'identifier les paramètres du critère de plasticité anisotrope de Hill (1948) [eq. (109)] en utilisant des mesures effectuées lors de gonflages de tôles avec des serre-flans elliptiques réalisés dans diverses directions

par rapport au sens de laminage. En fait, il s'est avéré que l'écoulement de matière au cours de cet essai est trop prescrit pour permettre l'identification de ces paramètres. En définitive, il semble que l'essai de gonflage soit un bon essai pour caractériser la contrainte d'écoulement, mais qu'il ne permette pas de caractériser de façon précise le caractère anisotrope de la déformation plastique du matériau étudié.

4.6.3 Analyse de l'essai Nakazima

L'essai Nakazima est un essai d'emboutissage de tôle généralement utilisé pour déterminer des courbes limites de formage. Il s'agit d'emboutir une tôle avec un poinçon sphérique. Suivant la forme de l'éprouvette emboutie, on peut se trouver soit dans la zone de rétreint, soit dans la zone d'expansion. Ainsi, cet essai permet d'étudier l'influence du chemin de déformation sur la formabilité d'une tôle.
Plutôt que d'utiliser l'essai Nakazima de manière classique, i.e. comme simple mesure de la déformation à rupture, nous l'avons étudié comme un essai rhéologique complet. En effet, la mesure de l'effort au cours du temps fournit une information sur la contrainte d'écoulement. De plus, l'utilisation du système de corrélation d'images Aramis permet de recomposer le champ de déformation à la fin de l'essai. Cette dernière mesure fournit une information sur l'anisotropie du matériau. Contrairement à l'essai de traction, avec lequel il présente un certain nombre de similitudes, cet essai induit un écoulement de matière hétérogène.

4.6.3.1 Description du protocole expérimental

Les éprouvettes sont embouties par un poinçon sphérique de rayon 30 mm monté sur une machine DARTEC de 30 tonnes de puissance. La tôle est maintenue par un serre-flan présentant un jonc de retenue de rayon 64 mm (Figure 71).

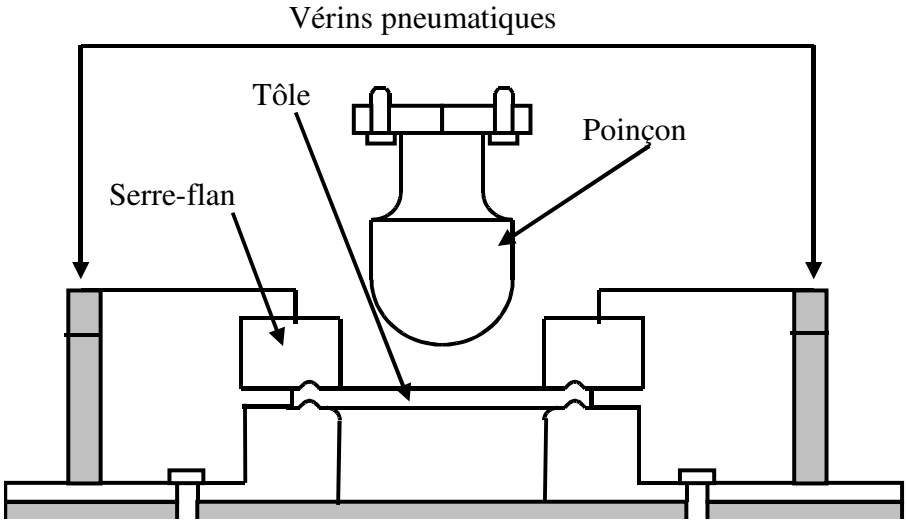


Figure 71 : montage de l'essai Nakazima

Le jonc de retenue et le serre-flan ont pour but d'éviter un avalement de matière au cours de l'emboutissage. La géométrie des éprouvettes est décrite dans la figure 72. Pour de faibles valeurs de W, la déformation est effectuée dans le domaine du retreint, alors que pour des valeurs relativement élevées de W, on se situe dans le domaine de l'expansion (Figure 73). Dans le cadre de cette étude, nous avons utilisé des éprouvettes

pour lesquelles W=20 mm, ce qui correspond à une déformation dans le domaine du rétreint.

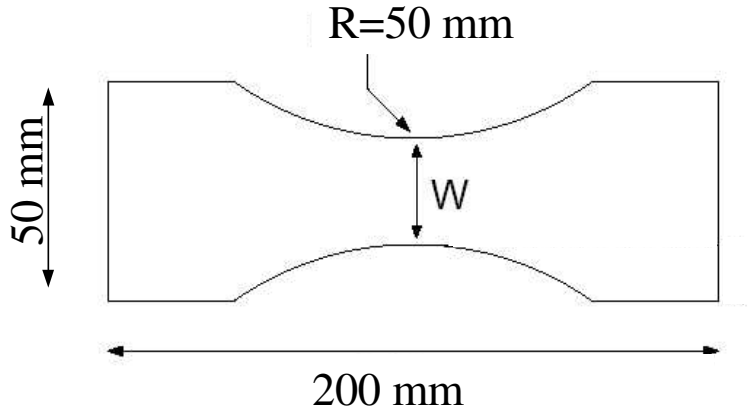


Figure 72 : géométrie des éprouvettes Nakazima

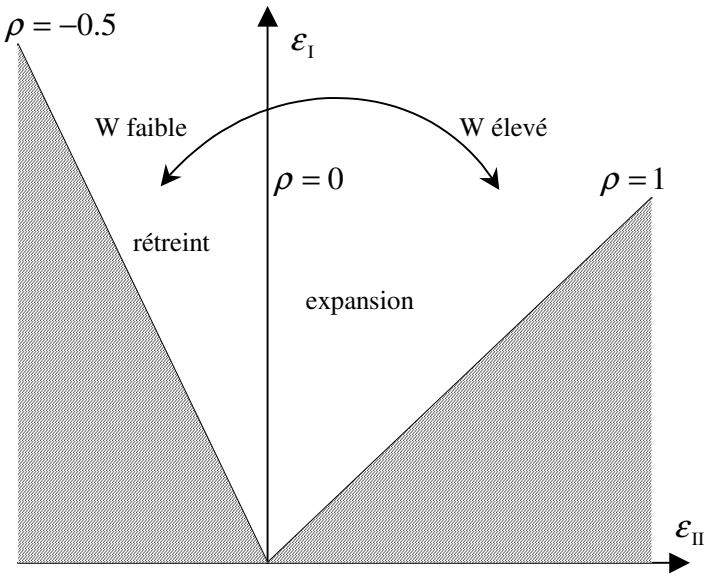


Figure 73 : variation du chemin de déformation suivant la valeur de W

Le but de cette étude est d'identifier les paramètres rhéologiques à froid de l'aluminium 5754 sous forme de tôles de 1 mm d'épaisseur. Afin de caractériser le caractère anisotrope du matériau (i.e. de déterminer les paramètres du critère de Hill), trois essais ont été effectués, avec des éprouvettes découpées dans trois directions différentes. Une éprouvette a été découpée dans la direction de laminage, une seconde à 45° et une troisième à 90° par rapport à la direction de laminage. Au cours de l'essai sur chacune des éprouvettes, la courbe effort/déplacement est enregistrée et l'éprouvette déformée est analysée à l'aide du logiciel Aramis de sorte que l'on ait accès au champ de déformation à la fin du procédé.

Il est à noter que le frottement peut jouer un effet parasite au cours de cet essai et rendre l'identification des paramètres rhéologiques délicate. Afin de le supprimer, ou du moins de le limiter, nous avons lubrifié les éprouvettes avec des feuilles de téflon associées à de la graisse. Cette lubrification permet de rendre le frottement négligeable. En effet, lorsque l'on n'utilise pas de lubrifiant, le pic du champ de déformation est excentré. Ce pic se rapproche du sommet du poinçon lorsque le frottement diminue. Ainsi, lorsque l'on effectue une simulation avec un frottement de Tresca de 0.1, on constate que le pic

est fortement décalé, alors qu'avec un frottement nul, il est parfaitement centré (Figure 74).

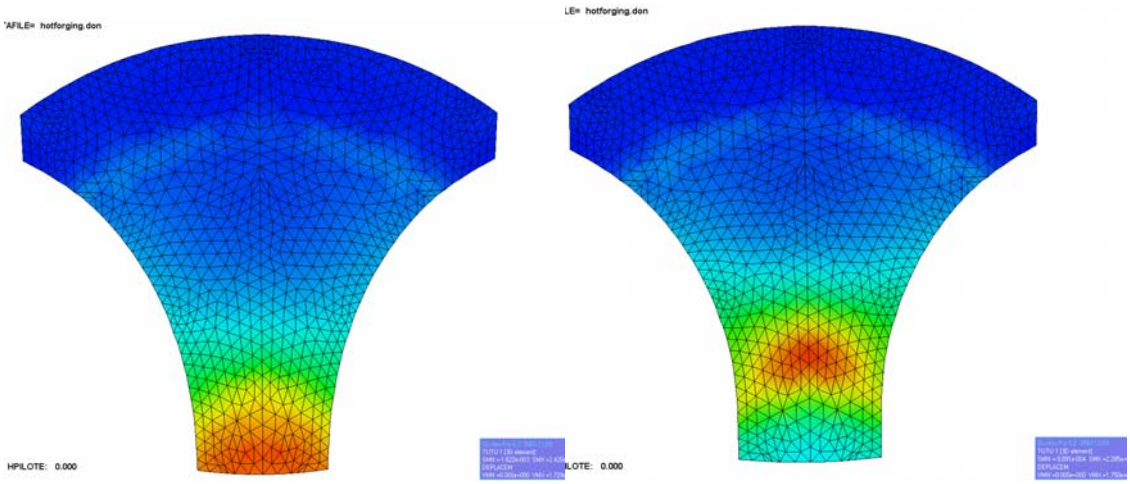


Figure 74 : comparaison du champ de déformation principale pour un frottement nul (gauche) et pour un frottement de Tresca de 0.1 (droite)

La position du pic obtenue avec Aramis nous indique donc que le frottement est très faible avec notre lubrification (Figure 75). Même si nous le considérons comme nul dans les simulations, il faudrait, dans l'absolu, identifier ce coefficient plus précisément. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps d'effectuer des essais de frottement ou bien d'utiliser la position du pic en déformation pour effectuer une analyse inverse.

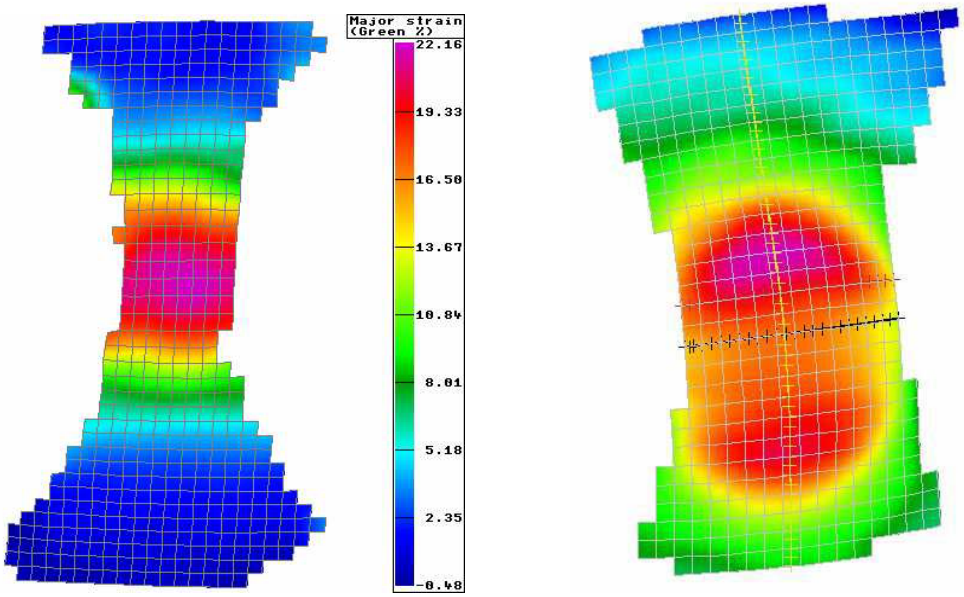


Figure 75 : champ de déformation principale mesuré par Aramis pour un cas lubrifié correctement (gauche) et pour un cas mal lubrifié (droite)

4.6.3.2 Une analyse inverse en 2 étapes

Le but de l'analyse de l'essai Nakazima est d'identifier les paramètres de la contrainte d'écoulement ainsi que les paramètres du critère de plasticité anisotrope de Hill. Notre intuition est que l'effort est surtout sensible aux paramètres de la contrainte d'écoulement alors que le champ de déformation est plutôt influencé par les paramètres d'anisotropie tels que ceux du critère de Hill. Si cette hypothèse se révèle exacte, l'analyse peut se faire en deux étapes :

- étape 1 : nous pouvons identifier les paramètres de la contrainte d'écoulement grâce aux mesures d'effort en utilisant un critère de von Mises.
- étape 2 : nous fixons les paramètres de la contrainte d'écoulement afin d'identifier les paramètres du critère de Hill.

Expérimentalement, nous avons constaté qu'il n'y avait pas d'influence de la direction dans laquelle l'éprouvette a été découpée sur la mesure de l'effort (Figure 76), ce qui nous conforte dans l'idée que l'effort n'est pas sensible aux paramètres du critère de Hill.

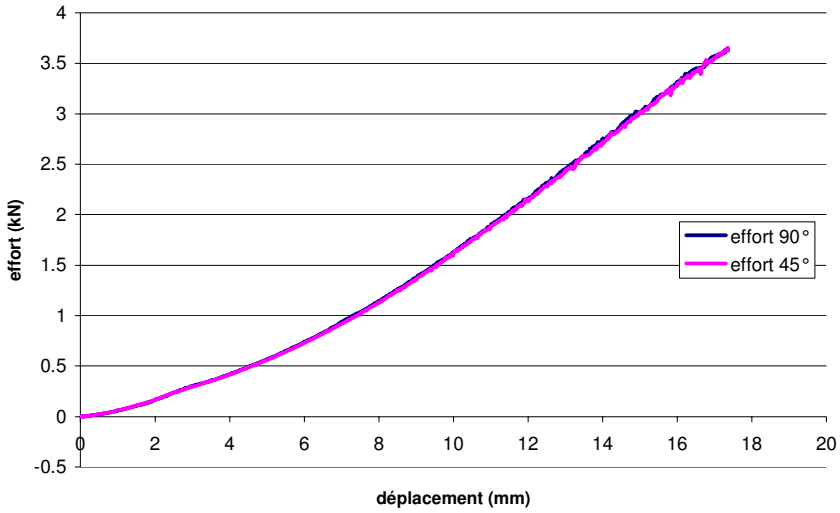


Figure 76 : comparaison entre l'effort obtenu avec une éprouvette découpée à 90° avec l'effort obtenu avec une éprouvette découpée à 45° par rapport à la direction de laminage

4.6.3.3 Identification des paramètres de la contrainte d'écoulement

Afin d'analyser l'essai Nakazima, il est nécessaire de le simuler avec FORGE3® (Figure 77). Pour se faire, une loi puissance a été utilisée pour modéliser le comportement du matériau :

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{3}\mathrm{K}\bar{\varepsilon}^{\,\mathrm{n}} \\ \lambda &= (\mathrm{K},\mathrm{n}) \end{aligned} \qquad (206)$$

La première étape de l'analyse de l'essai Nakazima consistant à déterminer les paramètres de la contrainte d'écoulement indépendamment des paramètres du critère de

Hill (1948), nous avons effectué les premières simulations en utilisant un critère de von Mises. En effet, l'effort étant a priori insensible à l'anisotropie, une simulation utilisant un critère isotrope suffira pour identifier les paramètres K et n à partir de l'effort.

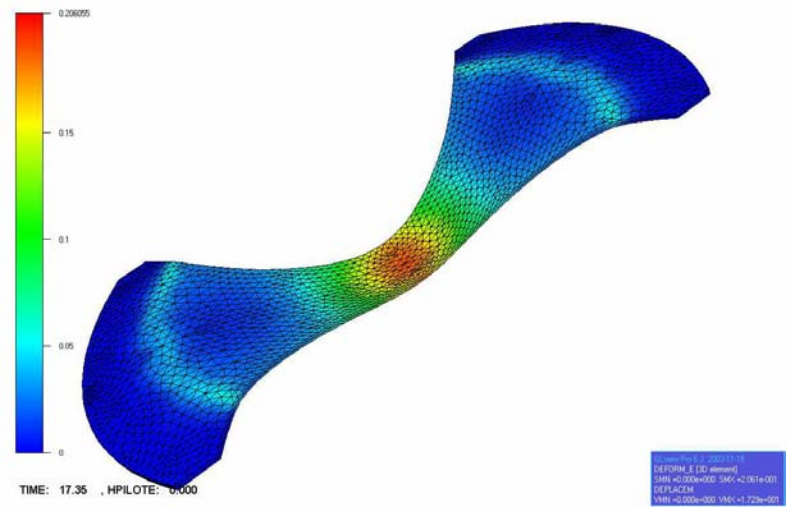


Figure 77 : résultat d'une simulation d'un essai Nakazima avec FORGE3®

Après 7 itérations de l'algorithme de Gauss-Newton, une valeur de la fonction coût de 1.1% est obtenue. Cette valeur correspond à une très bonne correspondance entre l'effort expérimental et l'effort simulé après recalage (Figure 78). Les valeurs identifiées sont : K = 250 MPa, n=0.31.

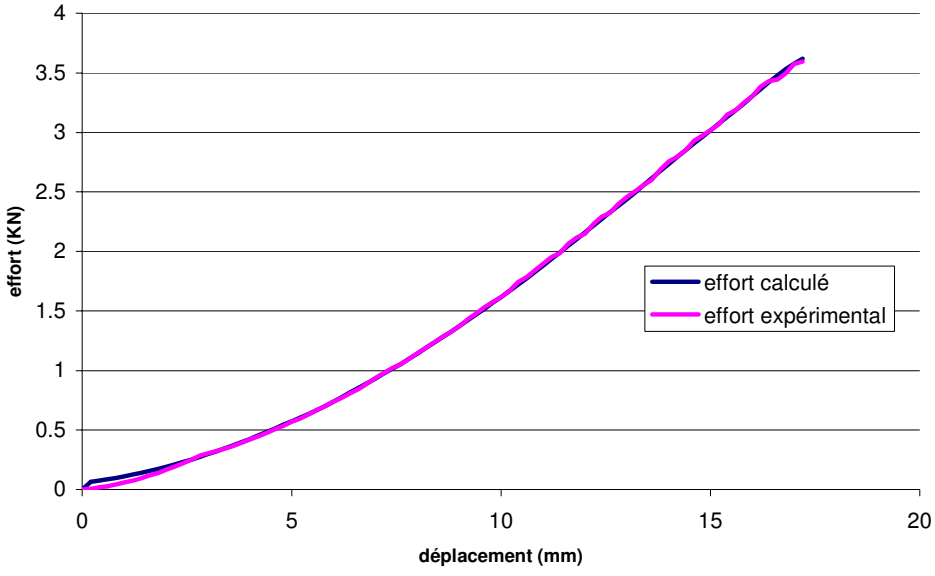


Figure 78 : comparaison entre l'effort calculé avec FORGE3® après recalage avec l'effort expérimental

L'analyse de stabilité par rapport à une perturbation sur les données expérimentales montre que les valeurs de ces paramètres sont relativement bien déterminées :

$$\left|\frac{dK}{K}\right| \le 5.7\frac{\|\Delta F\|}{\|F\|}$$
$$\left|\frac{dn}{n}\right| \le 6.5\frac{\|\Delta F\|}{\|F\|} \qquad (207)$$

Le fait que la mesure de l'effort n'est pas sensible aux paramètres du critère de Hill est l'hypothèse de base de cette analyse. Il est donc important de vérifier a posteriori la validité de cette hypothèse. Pour ce faire, après avoir identifié les paramètres de la loi de comportement, nous avons effectué une analyse de sensibilité de l'effort par rapport aux paramètres du critère de Hill, pour $F_H=G_H=H_H=0.5$ (matériau isotrope). Afin de déterminer si l'influence de ces paramètres est négligeable par rapport à l'influence de K et de n, nous avons comparé les sensibilités homogénéisées :

$$\left(\frac{dF}{d\lambda}\right)_{\text{hom og}} = \lambda\frac{dF}{d\lambda} \qquad (208)$$

La figure 79 montre bien que les paramètres du critère de Hill ont une influence négligeable sur l'effort. Ainsi, seuls les paramètres de la contrainte d'écoulement ont une influence non négligeable sur l'effort. Nous pouvons donc bien découpler l'identification des paramètres de la contrainte d'écoulement et l'identification des paramètres du critère de Hill.

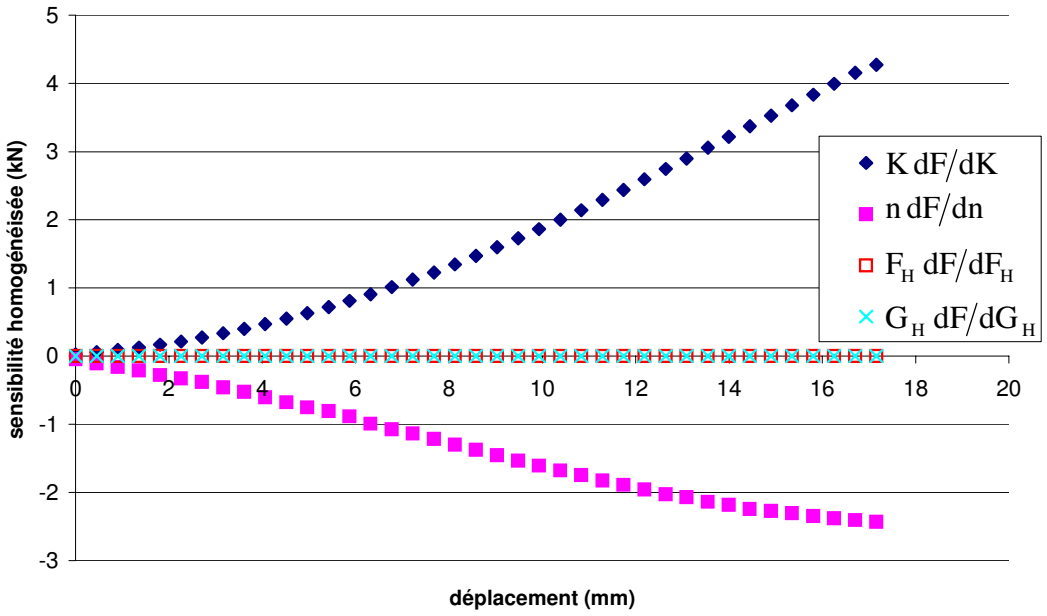


Figure 79 : sensibilités homogénéisées de l'effort F par rapport aux paramètres F_H et G_H du critère de Hill et par rapport aux paramètres K et n de la contrainte d'écoulement

Enfin, nous vérifions que l'incertitude sur le coefficient de frottement entre le poinçon et la pièce ne détériore pas trop le résultat de l'analyse inverse.

$$\frac{dK}{d\overline{m}} = -165 \text{ MPa.s}^{m}$$
$$\frac{dn}{d\overline{m}} = -2{,}28.10^{-2} \qquad (209)$$

En fait, vu l'influence du coefficient de Tresca sur la position du pic de déformation (Figure 74), nous avons pu estimer une valeur de $\overline{m}$ entre 0 et 0.05, ce qui correspond à une incertitude de l'ordre de 2 à 3% sur la contrainte d'écoulement.

4.6.3.4 Identification des paramètres du critère de Hill

Une fois les paramètres de la contrainte d'écoulement identifiés, nous cherchons à déterminer les paramètres du critère de plasticité de Hill. Pour se faire, nous disposons des déformations principales, déterminées à l'aide du logiciel ARAMIS. Afin d'identifier les paramètres du critère de Hill anisotrope, il est nécessaire de trouver une grandeur qui soit sensible à ces paramètres. Nous avons raisonné par analogie avec l'essai de traction, généralement utilisé pour la détermination de ces paramètres. Lors d'un essai de traction, on mesure le coefficient de Lankford. Soient ε_I la déformation principale dans la direction de traction, ε_{II} la déformation principale dans la direction transverse et ε_{III} la déformation dans l'épaisseur. Pour un essai donné, le coefficient r de Lankford est défini comme suit :

$$r = \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_{III}} \qquad (210)$$

où ε_{II} et ε_{III} sont respectivement la deuxième et la troisième valeur propre du tenseur de Green-Lagrange (les valeurs propres étant classées dans l'ordre décroissant). Le coefficient de Lankford est généralement mesuré pour une éprouvette découpée dans la direction de laminage (r_0), pour une éprouvette découpée dans la direction transverse (r_{90}), ainsi que pour une éprouvette découpée à 45° par rapport à la direction de laminage (r_{45}). Dans ce cas, les coefficients du critère de Hill sont donnés par les relations suivantes :

$$G_H = \frac{1}{1+r_0},\quad H_H = \frac{r_0}{1+r_0},\quad F_H = \frac{r_0}{r_{90}(1+r_0)},\quad N_H = \frac{2(F_H+G_H)r_{45}+F_H+G_H}{2} \qquad (211)$$

Remarque : Dans un contexte anisotrope, la contrainte d'écoulement est définie comme la contrainte obtenue à partir d'un essai de traction effectué sur une éprouvette découpée dans le sens de laminage. Cette définition implique que $G_H+H_H=1$. De plus, généralement, on pose $L_H=M_H=N_H$ (Knockaert (2001)). Ainsi, il est nécessaire de déterminer trois degrés de liberté pour caractériser l'anisotropie d'une tôle (F_H, G_H et N_H).

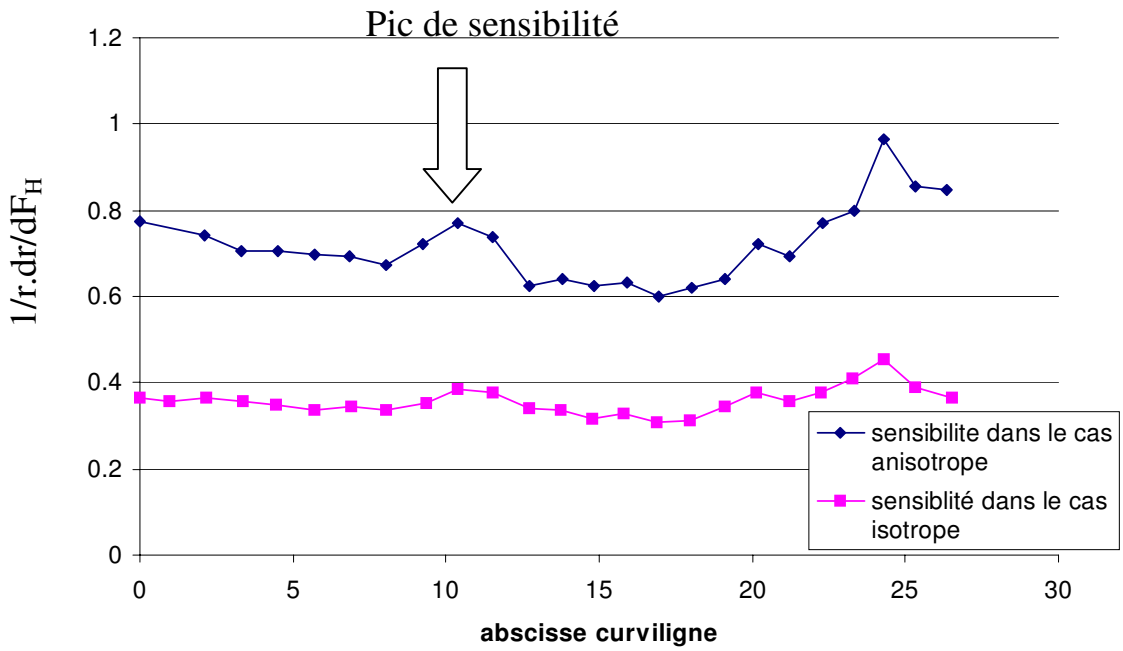
Par analogie, nous avons pris comme observable, le rapport de deux des valeurs propres du tenseur des déformations de Green-Lagrange dans le cas de l'essai Nakazima, en un point de la surface de la tôle suivant le plan tangent :

$$r_n = \frac{\varepsilon_{II}}{\varepsilon_{III}} \tag{212}$$

Enfin, comme pour l'essai de traction, nous avons utilisé trois éprouvettes, découpées à 0°, 45° et à 90° par rapport à la direction de laminage. Il faut noter que dans le cas de l'essai de traction, le coefficient de Lankford peut être considéré comme une propriété intrinsèque du matériau, représentant son caractère anisotrope. Dans le cas de l'essai Nakazima, le champ de déformation n'étant pas homogène, chaque point suit son propre chemin de déformation. Ainsi, le coefficient r_n doit être considéré comme une mesure du chemin de déformation plutôt que comme une propriété intrinsèque du matériau. Il dépend en fait du frottement, du caractère anisotrope de la matière, de la position du point de mesure et de la forme de l'éprouvette. Dans ces conditions, on peut se demander en quel point il est préférable de mesurer ce coefficient. Pour répondre à cette question, nous avons réalisé une analyse de sensibilité préliminaire. Pour se faire, nous avons calculé la dérivée logarithmique de r_n par rapport aux paramètres du critère de Hill sur toute l'éprouvette.

$$\left(\frac{dr_n}{d\lambda}\right)_{hom\,og} = \frac{1}{r_n}\frac{dr_n}{d\lambda} \tag{213}$$

Les termes diagonaux de la matrice de Gauss-Newton correspondant aux carrés des dérivées logarithmiques de r_n par rapport à chacun des paramètres, nous avons préféré utiliser cette dérivée plutôt qu'une dérivée classique pour définir la position des points de mesure. Nous avons constaté la présence de deux maxima de sensibilité de r_n par rapport à F_H et G_H sur l'axe central : un au centre et l'autre à environ 11 mm du centre (Figures 80 et 81). La position de ces points est la même quelles que soient les valeurs des paramètres du critère de Hill que nous avons testées (pour des coefficients de Lankford entre 0.6 et 1.4). Nous constatons que la dérivée logarithmique croit lorsque l'on s'éloigne trop du centre. Cette croissance provient du fait que r_n devient très faible et ne correspond pas à une augmentation de l'information. Même si le pic de sensibilité n'est pas très marqué, nous avons choisi le point à 11 mm pour les éprouvettes à 0 et 90°. D'après nos observations, il y a perte de contact entre le poinçon et la tôle en ce point. D'ailleurs, si l'on regarde la dérivée de r_n, on constate que ce point correspond à une valeur de la dérivée de r_n par rapport au coefficient de frottement très faible (Figure 83). Par contre, l'influence du frottement sur r_n est relativement importante sous la zone en contact. Nous avons donc choisi de mesurer r_n dans une zone hors contact afin de minimiser l'effet du frottement sur l'analyse.
Nous n'avons pas réussi à trouver un maximum de sensibilité de r_n par rapport au coefficient L_H bien marqué sur l'éprouvette à 45° (Figure 82). Cette fois encore, plutôt que d'essayer d'améliorer le conditionnement de la matrice de Gauss-Newton, nous pouvons essayer de minimiser l'influence du frottement sur l'analyse de l'essai en choisissant un point de mesure hors contact avec l'outillage.
Comme dans l'essai de traction, l'information sur F_H et G_H est contenu dans les essais à 0° et à 90°, alors que l'information sur L_H est plutôt contenue dans l'essai à 45°.
En définitive, la position des points de mesures retenue est donnée dans la figure 84. Même si le choix de ces points n'est pas forcément optimal, nous sommes assurés de l'identifiabilité du problème ainsi que de la faible influence du coefficient de frottement sur l'analyse.



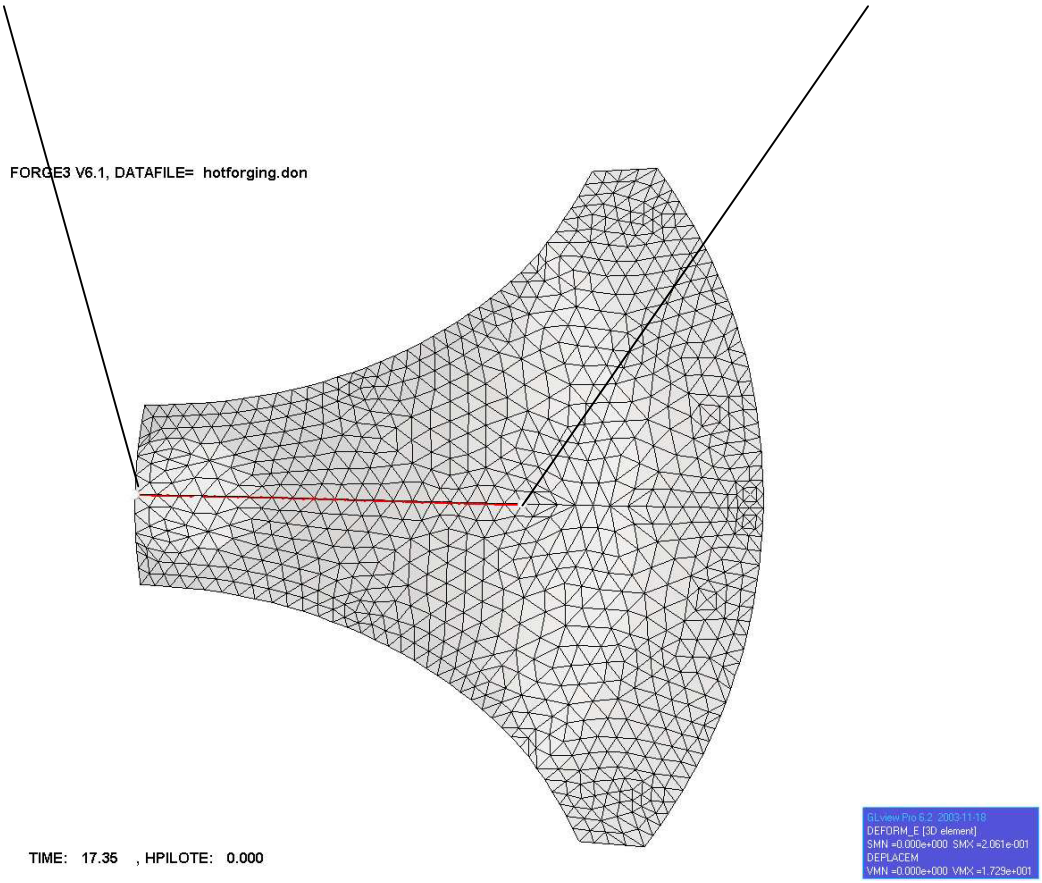


Figure 80 : analyse de sensibilité de r_n par rapport à F_H sur une éprouvette à 0°

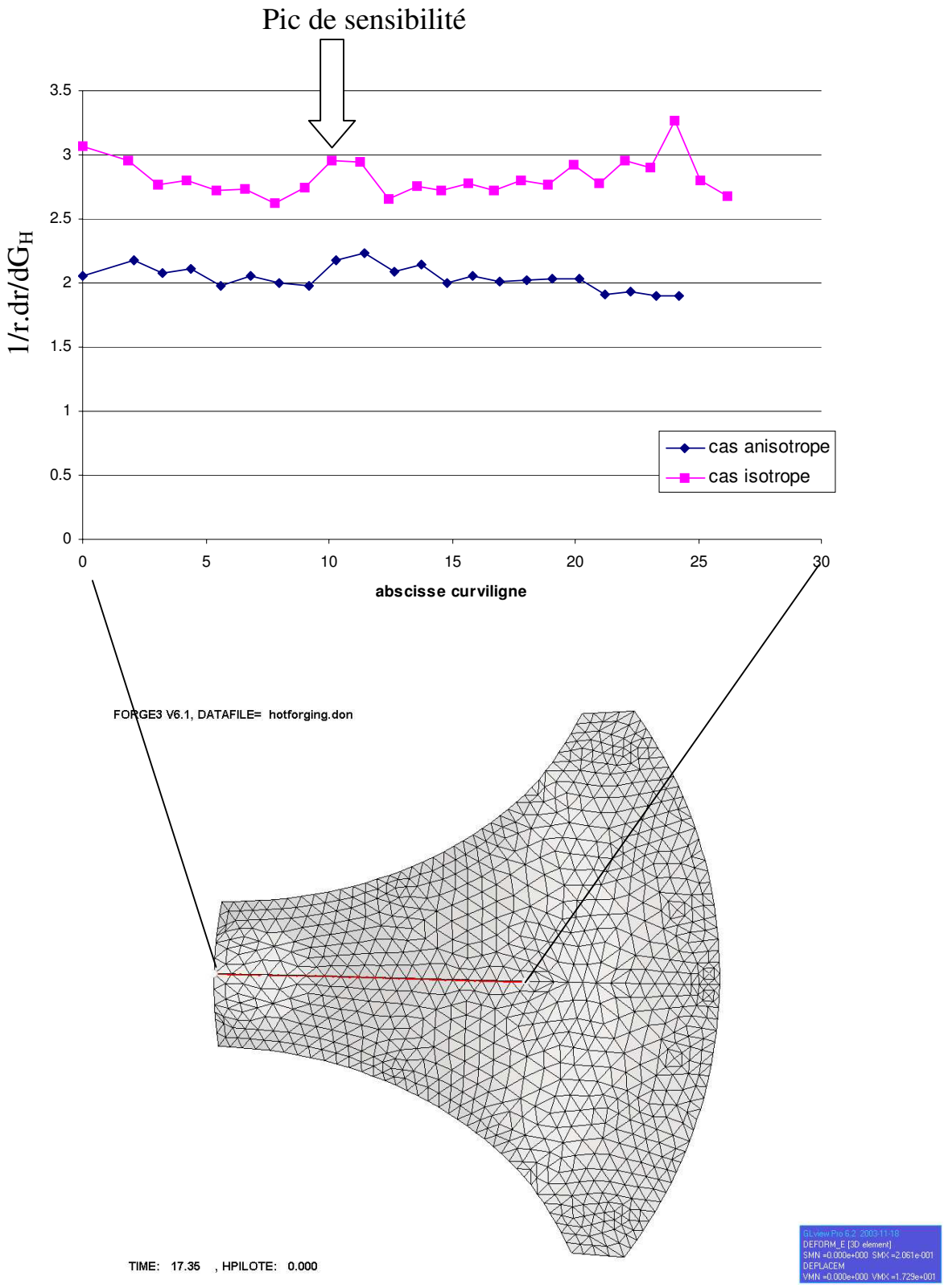


Figure 81 : analyse de sensibilité de r_n par rapport à G_H sur une éprouvette à 0°

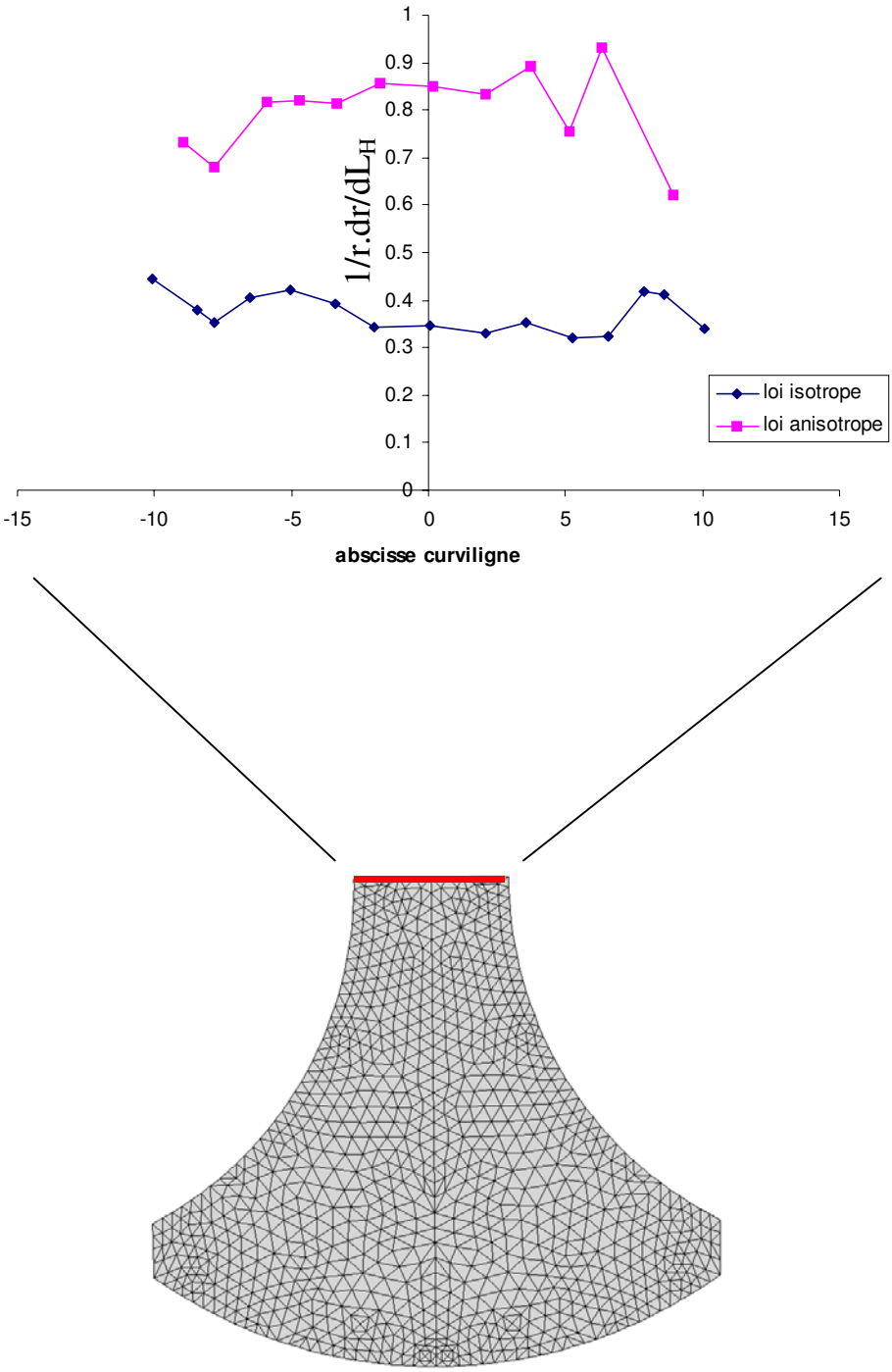


Figure 82 : analyse de sensibilité de r_n par rapport à L_H sur une éprouvette à 45°

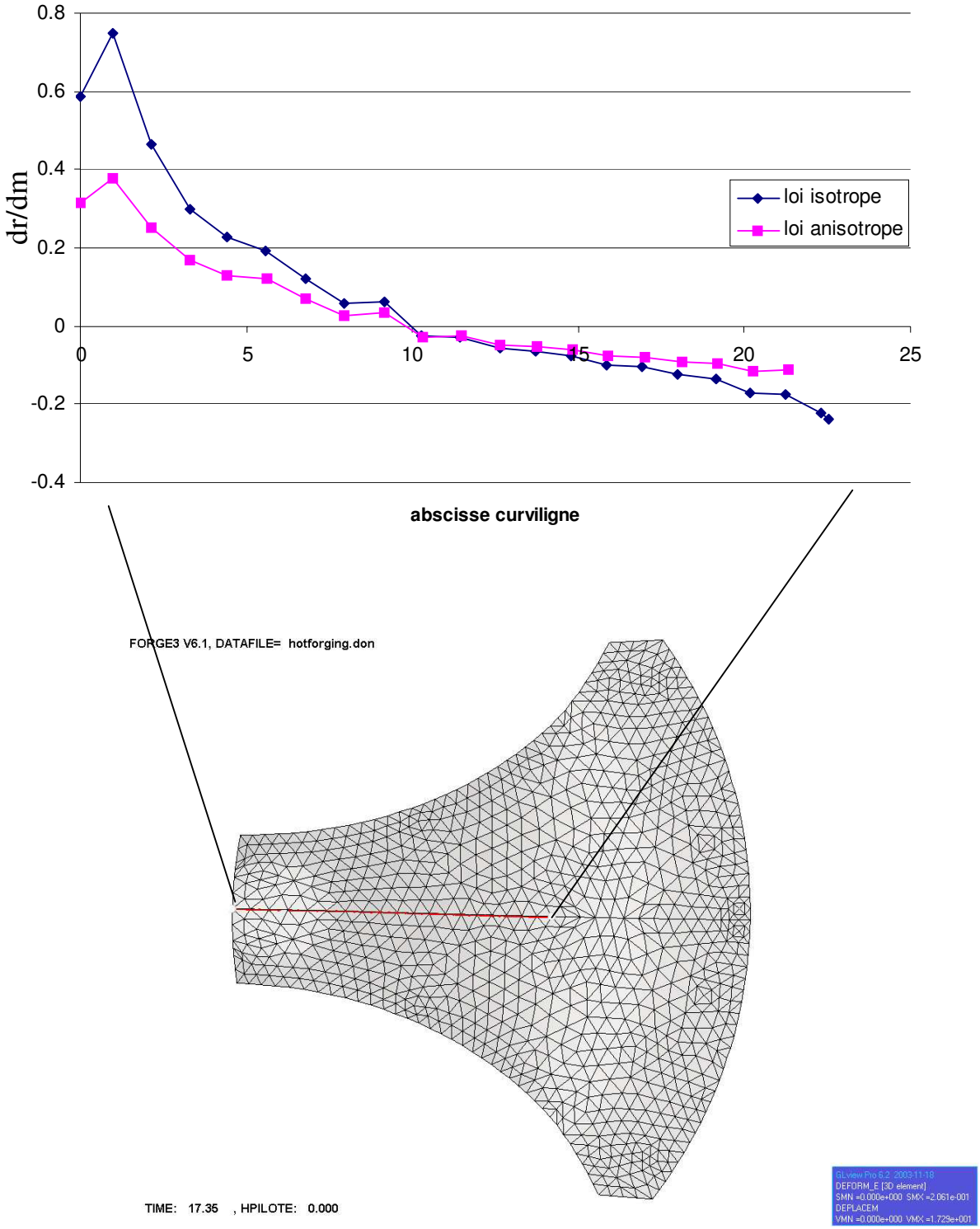


Figure 83 : analyse de sensibilité de r_n par rapport à $\overline{m}$

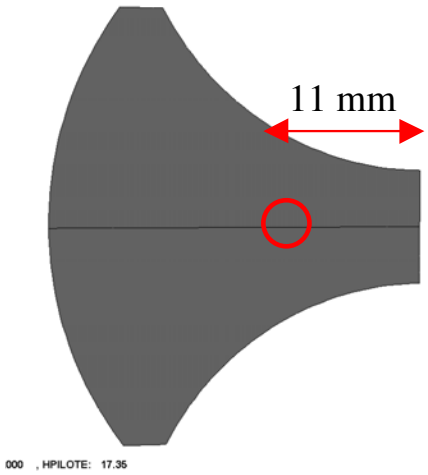


Figure 84 : position optimale des points de mesure pour l'analyse inverse

L'analyse inverse converge en 5 itérations et fournit le jeu de paramètres donné dans le tableau 18. En guise de référence, les coefficients de Lankford mesurés par V. Nalewajk (Nalewajk et al. (2003)) à partir d'essais de traction, et les coefficients obtenus à partir de l'analyse inverse des essais Nakazima décrite ci-dessus, sont donnés dans le tableau 19. Nous pouvons constater un même ordre de grandeur entre les résultats obtenus à partir des deux essais, ce qui nous conforte dans l'idée que l'essai Nakazima peut être utilisé comme un essai rhéologique pour révéler et identifier un comportement anisotrope. Cette approche permet de caractériser des métaux pour des chemins de déformation allant du rétreint à l'expansion, contrairement à la simple analyse d'un essai de traction.

	Valeurs initiales	Valeurs identifiées
F_H	0.5	0.86
G_H	0.5	0.53
L_H	1.5	1.54
ϕ_{final}		5.10^{-2} %

Tableau 18 : résultat de l'identification des paramètres du critère de Hill

	Traction	Nakazima
r_0	0.82	0.88
r_{45}	0.70	0.66
r_{90}	0.58	0.54

Tableau 19 : coefficients de Lankford

L'analyse de stabilité montre que nos mesures caractérisent bien les coefficients d'anisotropie de l'aluminium étudié :

$$\left|\frac{dF_H}{F_H}\right| \le 3.2\frac{\|\Delta r\|}{\|r\|}$$
$$\left|\frac{dG_H}{G_H}\right| \le 1.0\frac{\|\Delta r\|}{\|r\|} \qquad (214)$$
$$\left|\frac{dL_H}{L_H}\right| \le 1.4\frac{\|\Delta r\|}{\|r\|}$$

L'essai Nakazima permet donc de caractériser la rhéologie d'une tôle métallique pour une grande variété de chemins de déformation, contrairement à l'essai de traction, qui ne permet que l'étude de la rhéologie pour un unique chemin de déformation (i.e. $\rho \approx -0.5$).

4.7 Conclusion sur les applications à différents essais

Diverses applications de notre modèle inverse ont été présentées dans ce chapitre dans le but de démontrer la généralité et la stabilité de notre approche. Tout d'abord, il a été montré que le modèle inverse développé permet de s'affranchir d'un certain nombre de simplifications pour l'analyse d'essais relativement classiques. Ainsi, il a été possible de prendre en compte le frottement dans les essais de compression ou de bipoinçonnement, et d'inclure dans l'analyse l'hétérogénéité de l'autoéchauffement dans l'essai de torsion. Nous avons donc pu accéder à une analyse très fine (en comparaison avec une méthode analytique classique) de ces essais.

Notre méthode étant très générale, nous avons aussi été en mesure d'étudier des essais de formabilité (SICO tests, gonflage hydraulique, Nakazima) comme des essais rhéologiques. Ainsi, les méthodes inverses ouvrent la voie à l'exploitation d'essais non-classiques, dans lesquels l'écoulement de matière et le champ de température sont très hétérogènes. Il s'avère souvent que ces essais sont très riches en information (de par la diversité des chemins de déformation subis par la matière).

D'autre part, il est très important de quantifier l'influence de variations de conditions opératoires sur le résultat de l'analyse inverse. Ainsi, grâce à notre module d'analyse de sensibilité semi-analytique, nous avons étudié l'influence d'une variation de coefficient de frottement sur le résultat de l'analyse d'essais de compression ou de bipoinçonnement, ainsi que l'influence d'une variation de cote sur le résultat de l'analyse d'essais de torsion. Ceci nous permet de détecter les conditions opératoires critiques pour l'identification de paramètres.

Enfin, l'analyse de sensibilité a aussi été utilisée comme un outil aidant à la conception optimale d'expériences. Elle nous a notamment permis de comprendre pour quelle raison il fallait deux géométries différentes d'éprouvettes de bipoinçonnement pour identifier simultanément les coefficients de comportement et de frottement. De même, grâce à elle, la détermination d'une position acceptable des points de mesure du champ de déformation de tôles devient possible.

Bibliographie

M. Ben Tahar, E. Massoni, Etude de formabilité des tôles par analyse d'un essai de gonflage hydraulique, CD ROM, 16 Congrés Français de la mécanique. Nice 1-5 septembre 2003

T. Dal Negro , R. Forestier , E. Massoni, Inverse Analysis of the SICO test using a gradient method with semi-analytical derivative, 5th International ESAFORM Conference on Material Forming, Krakòw, Poland, april 14-17 (2002) 167-173.

L. D'Alvise, Development of a finite element model for the simulation of the inertia friction welding process, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Cemef, 2002.

A. Gavrus, E. Massoni, J.L. Chenot, The rheological parameter identification formulated as an inverse finite element problem, Inverse Problems in Engineering, 7 (1999) 1-41.

R. Hill, A theory of the yielding and of plastic flow of anisotropic metals, Proceedings of the Royal Society of London, Serie A, 193 (1948) 281-397.

R. Knockaert, Etude expérimentale et numérique de la localisation de la déformation lors de la mise en forme de produits minces, Thèse de doctorat de l'Ecole de Mines de Paris, Cemef, 2001.

J. Kubie, Le test de bipoinçonnement : étude théorique – Application à l'étude du transfert de matière dans un contact frottant, Thèse de doctorat de l'Ecole des Mines de Paris, Cemef, 1998.

V. Nalewajk, Y. Chastel, J.P. Nauzin, Warm deep drawing of aluminium : Identification of process parameters, Esaform 2003, Salerno, Italy, april 28-30, pp.367-370

B. Roebuck, M. S. Loveday, Y. Chastel, G. Fiorucci, T. Dal Negro, High temperature soloid torsion tests, Measurement Good Practice Guide, NPL, 2003.

Conclusion

Le but de cette étude était de développer une méthode d'identification de paramètres par analyse inverse suffisamment générale et flexible pour pouvoir identifier divers types de modèles à partir de différents types d'essais. Dans ce contexte, le choix des méthodes numériques à mettre en œuvre était particulièrement critique.

Le premier choix important concernait la méthode de minimisation de la fonction de moindres carrés. Après une étude bibliographique, il est apparu que, pour les applications que nous visions, il semblait préférable d'utiliser une méthode à direction de descente plutôt qu'une méthode d'ordre zéro pour des raisons de taux de convergence.

Minimiser une fonction de moindres carrés n'est pas la difficulté majeure dans la résolution d'un problème inverse, même si dans notre cas, il a été nécessaire de stabiliser notre méthode d'optimisation. Par contre, la connaissance de l'influence des conditions expérimentales sur le résultat de l'analyse inverse est un sujet d'étude très important. Nous avons proposé une approche déterministe pour pouvoir détecter les paramètres expérimentaux les plus importants à maîtriser au cours d'une expérience. Quelques applications, telles l'étude de l'influence des cotes des éprouvettes de torsion ou bien celle de l'influence d'une incertitude sur le frottement au cours d'essais de compression ont été traités. Cette approche met en lumière l'intérêt de l'analyse de sensibilité couplée avec une méthode inverse et encourage à utiliser des méthodes à direction de descente.

L'analyse de sensibilité s'est révélée être un outil pouvant aider à la conception d'expériences. Dans le cas du bipoinçonnement, nous avons eu l'idée d'ajouter une géométrie d'éprouvette grâce aux résultats d'analyse de sensibilité fournis par nos simulations éléments finis. De même, le choix des points de mesure des valeurs principales du tenseur de Green-Lagrange lors de l'essai Nakazima pour déterminer les paramètres du critère de Hill n'est pas trivial. L'analyse de sensibilité est donc non seulement un outil très utile pour la détermination d'un jeu de paramètres optimal, mais aussi une aide à la conception et à la compréhension des expériences analysées. Même si une méthode d'ordre zéro peut fournir un jeu de paramètres optimal (i.e. un optimum global), elle ne permet pas d'avoir une idée de la stabilité de la méthode inverse. Or, la stabilité est d'une importance capitale.

L'analyse de sensibilité étant très importante, il était alors nécessaire de développer une méthode qui allie stabilité, rapidité, précision et flexibilité. Après une étude bibliographique et des tests numériques, il est apparu que la méthode semi-analytique représente un bon compromis entre toutes ces qualités. Elle permet au module d'analyse de sensibilité d'être facilement compatible avec les modifications apportées au modèle direct. De plus, elle est presque aussi rapide et stable qu'une méthode analytique (beaucoup plus lourde à mettre en place et à maintenir à jour). Par contre, ce type de méthode est bien adapté aux problèmes inverses ne contenant pas trop de paramètres à identifier. Dans des cas où le nombre de paramètres devient significativement plus important (supérieur à la dizaine), il serait intéressant d'utiliser des méthodes adjointes.

L'utilisation de FORGE3® comme modèle direct permet de prendre en compte des écoulements de matière assez complexes. Grâce à cette approche, nous avons pu proposer une analyse très fine des essais de bipoinçonnement et des essais Nakazima. Ainsi, nous sommes donc actuellement en mesure d'analyser des essais dont l'écoulement est tridimensionnel. De plus, la gamme de lois de comportement que nous

pouvons identifier est relativement importante (diverses contraintes d'écoulement et divers critères de plasticité).
La méthode inverse que nous avons développée ouvre la voie à de multiples applications. Dans le dernier chapitre de ce manuscrit, nous l'avons appliquée à plusieurs problèmes d'identification de paramètres rhéologiques. Il est à noter que la méthode inverse développée pourrait être utilisée pour l'identification de paramètres métallurgiques, thermiques, de modèles micro-macros, de modèles d'endommagement, etc. Ainsi, il serait intéressant, à l'avenir, d'analyser des essais mécaniques de plus en plus complexes (i.e. contenant beaucoup d'information), ou bien de caractériser des modèles autres que rhéologiques. Tous les outils sont maintenant développés pour permettre de nouvelles applications.
L'étude de nouveaux essais est particulièrement intéressante. L'utilisation de champs de déformation ou d'observables liés à des gradients de déformation ou de température par exemple pourrait permettre de recueillir une quantité d'information très importante en un seul essai.
Un autre axe d'étude pourrait être aussi l'utilisation de fonctions coût multi-objectif. Dans les premières études que nous avons pu mener, il s'est avéré que le choix des pondérations des termes de telles fonctions coût n'est pas trivial. L'utilisation de telles méthodes permettrait, là encore, de maximiser la quantité d'information exploitée au cours d'un essai.
Enfin, l'optimisation automatique de plans d'expériences, pour certains essais, semble être une voie intéressante de recherche. En effet, toutes les tentatives d'optimisation que nous avons faites sont encore approximatives. Elles nous ont permis d'augmenter la quantité d'information, pas de la maximiser.
En définitive, la méthode inverse développée ici devrait permettre de donner libre cours à l'imagination de l'expérimentateur, de concevoir de nouveaux types de plans d'expérience et d'utiliser des mesures ou bien des essais qu'il n'aurait pas pu analyser de manière classique.

Annexe

Etat adjoint

Le but ici est de donner le détail du système adjoint associé au problème thermo-mécanique suivant :

$$\begin{aligned}
&\text{à l'instant } t_n \\
&\begin{cases}
R\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^n, h^n\right) = 0 \\
MT^{n+1} = Q'\left(V^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right) \\
h^{n+1} = h^n + \Delta t\, \dot{h}^n\left(V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}\right) \\
F_n(\lambda) = f\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}, h^{n+1}\right)
\end{cases} \\
&\text{avec } F(\lambda) = \left(F_1(\lambda), ..., F_N(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{215}$$

Pour simplifier, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}
&\text{à l'instant } t_n \\
&\begin{cases}
R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^{n+1}, T^{n+1}\right)\right) = 0 \\
MT^{n+1} = Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right) \\
h^{n+1} = h^n + \Delta t\, \dot{h}^n\left(U^{n+1}, T^{n+1}\right) \\
F_n(\lambda) = f\left(\lambda, V^{n+1}, P^{n+1}, T^{n+1}, h^{n+1}\right)
\end{cases} \\
&\text{avec } F(\lambda) = \left(F_1(\lambda), ..., F_N(\lambda)\right)
\end{aligned} \tag{216}$$

Les équations d'état peuvent être considérées comme des contraintes pour le problème d'optimisation. Pour se faire, une fonction lagrangienne ϕ_L est introduite :

$$\phi_L = \phi + \phi_m + \phi_{th} \tag{217}$$

avec

$$\phi_m = \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_m^{n\,T} R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right) \tag{218}$$

et

$$\phi_{th} = \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_{th}^{n\,T}\left(MT^{n+1} - Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)\right) \tag{219}$$

Ainsi, la dérivée de la fonction coût ϕ_L par rapport à λ s'écrit :

$$\phi_L = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \sum_{n=1}^{n=N} \frac{\partial \phi}{\partial U^n} \frac{dU^n}{d\lambda} + \frac{d\phi_m}{d\lambda} + \frac{d\phi_{th}}{d\lambda} \tag{220}$$

avec

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_m}{d\lambda} &= \sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial \lambda} \\
&+ \sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial U^{n+1}} \frac{dU^{n+1}}{d\lambda} \\
&+ \sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \sum_{i=1}^{n} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)}{\partial U^i} \frac{dU^i}{d\lambda} \\
&\sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \sum_{i=1}^{n} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)}{\partial T^i} \frac{dT^i}{d\lambda}
\end{aligned} \tag{221}$$

Soit

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi_m}{d\lambda} &= \sum_{n=1}^{n=N} {\Gamma_m^n}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial \lambda} \\
&+ \sum_{n=2}^{n=N+1} {\Gamma_m^{n-1}}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^n, T^{n-1}, h^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial U^n} \frac{dU^n}{d\lambda} \\
&+ \sum_{n=1}^{n=N} \sum_{i=n}^{i=N} {\Gamma_m^i}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)}{\partial U^n} \frac{dU^n}{d\lambda} \\
&\sum_{n=1}^{n=N} \sum_{i=n}^{i=N} {\Gamma_m^i}^T \frac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)}{\partial T^n} \frac{dT^n}{d\lambda}
\end{aligned} \tag{222}$$

et

$$\frac{d\phi_{th}}{d\lambda} = \sum_{i=1}^{i=N} {\Gamma_{th}^n}^T \begin{pmatrix} M \frac{dT^{n+1}}{d\lambda} - \frac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\partial U^{n+1}} \frac{dU^{n+1}}{d\lambda} \\ - \frac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\partial T^n} \frac{dT^n}{d\lambda} \\ - \frac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\partial T^{n-1}} \frac{dT^{n-1}}{d\lambda} \end{pmatrix} \tag{223}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\phi_{th}}{d\lambda} &= \sum_{i=2}^{i=N+1} \Gamma_{th}^{n-1\,T} M \frac{dT^n}{d\lambda} \\ &- \sum_{n=2}^{n=N+1} \Gamma_{th}^{n-1\,T} \frac{\partial Q'\left(U^n, T^{n-1}, T^{n-2}\right)}{\partial U^n} \frac{dU^n}{d\lambda} \\ &- \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_{th}^{n\,T} \frac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\partial T^n} \frac{dT^n}{d\lambda} \\ &- \sum_{n=1}^{n=N-1} \Gamma_{th}^{n+1\,T} \frac{\partial Q'\left(U^{n+2}, T^{n+1}, T^n\right)}{\partial T^n} \frac{dT^n}{d\lambda}\end{aligned} \tag{224}$$

En factorisant, on a :

$$\frac{d\phi_L}{d\lambda} = A + \sum_{i=1}^{i=N+1} A_m^{n\,T} \frac{dU^n}{d\lambda} + \sum A_{th}^{n\,T} \frac{dT^n}{d\lambda} \tag{225}$$

avec

$$A = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_m^{n\,T} \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial \lambda} \tag{226}$$

$$\begin{aligned}A_m^n &= \frac{\partial \phi}{\partial U^n} + \Gamma_m^{n\,T} \frac{\partial R\left(\lambda, U^n, T^{n-1}, h^0 + \sum_{i=1}^{n-1} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial U^n} \\ &\sum_{i=n}^{i=N} \Gamma_m^{n\,T} \frac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)}{\partial U^n} \\ &- \Gamma_{th}^{n-1\,T} \frac{\partial Q'\left(U^n, T^{n-1}, T^{n-2}\right)}{\partial U^n}\end{aligned} \tag{227}$$

$$\begin{aligned}A_{th}^n &= \frac{\partial \phi}{\partial T^n} + \sum_{i=n}^{i=N} \Gamma_m^{n\,T} \frac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \sum_{i=1}^{n} \Delta t\, \dot{h}^i\left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial h} \Delta t \frac{\partial \dot{h}^n\left(U^n, T^n\right)}{\partial T^n} \\ &- \Gamma_{th}^{n\,T} \frac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)}{\partial T^n} - \Gamma_{th}^{n+1\,T} \frac{\partial Q'\left(U^{n+2}, T^{n+1}, T^n\right)}{\partial T^n}\end{aligned} \tag{228}$$

Afin que les termes $\frac{dU}{d\lambda}$ et $\frac{dT}{d\lambda}$ n'apparaissent pas explicitement dans le calcul de la dérivée, on cherche à annuler A_m^n et A_{th}^n. Ainsi, l'état adjoint est obtenu en résolvant le système :

$$
\begin{cases}
M^T \Gamma_{th}^{n-1} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial T^n} - \displaystyle\sum_{i=n}^{i=N} \Delta t \dfrac{\partial \dot{h}^n \left(U^n, T^n\right)^T}{\partial T^n} \dfrac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i \left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial h} \Gamma_m^i \\
+ \dfrac{\partial Q'\left(U^{n+1}, T^n, T^{n-1}\right)^T}{\partial T^n} \Gamma_{th}^n + \dfrac{\partial Q'\left(U^{n+2}, T^{n+1}, T^n\right)^T}{\partial T^n} \Gamma_{th}^{n+1} \\
\dfrac{\partial R\left(\lambda, U^n, T^{n-1}, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \Delta t \dot{h}^i \left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial U^n} \Gamma_m^{n-1} = -\dfrac{\partial \phi}{\partial U^n}^T \\
- \displaystyle\sum_{i=n}^{i=N} \dfrac{\partial R\left(\lambda, U^{i+1}, T^i, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i \left(U^i, T^i\right)\right)^T}{\partial h} \Delta t \dfrac{\partial \dot{h}^n \left(U^n, T^n\right)}{\partial U^n} \Gamma_m^n \\
- \dfrac{\partial Q'\left(U^n, T^{n-1}, T^{n-2}\right)^T}{\partial U^n} \Gamma_{th}^{n-1}
\end{cases}
\tag{229}
$$

Ainsi, en choisissant les vecteurs adjoints comme solution du problème (229), on a la relation suivant :

$$
\frac{d\phi}{d\lambda} = \frac{d\phi_L}{d\lambda} = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} + \sum_{n=1}^{n=N} \Gamma_m^{n\,T} \frac{\partial R\left(\lambda, U^{n+1}, T^n, h^0 + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \Delta t \dot{h}^i \left(U^i, T^i\right)\right)}{\partial \lambda} \tag{230}
$$

La coût du calcul de la fonction coût ne dépend alors pas du nombre de paramètres par rapport auquel on dérive.