THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

par

Michel BELLET

en vue de l'obtention

DU TITRE DE DOCTEUR
en
SCIENCES ET GENIE DES MATERIAUX

MODELISATION NUMERIQUE

du

FORMAGE SUPERPLASTIQUE DE TOLES

Soutenue le 4 mars 1988 devant le jury composé de

MM	G. DUVAUT	.....	PRESIDENT
	M. ABOUAF	.....	RAPPORTEUR
	P. TROMPETTE	.....	RAPPORTEUR
	J.L. CHENOT	.....	EXAMINATEUR
	J. HAMANDJIAN	.....	EXAMINATEUR

AVANT-PROPOS

Je remercie Monsieur le Directeur de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris pour m'avoir donné la possibilité d'effectuer ce travail de recherche au Centre de Mise en Forme des Matériaux à Sophia Antipolis.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance envers mon directeur de thèse, Jean-Loup CHENOT, Directeur du CEMEF, pour son dynamisme et sa grande expérience de la modélisation numérique par éléments finis des procédés de mise en forme. Mes remerciements vont également à l'ensemble du groupe Thermo-mécanique-Plasticité au sein duquel j'ai trouvé une ambiance de travail sympathique et stimulante.

Le Professeur DUVAUT m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de mon jury . je l'en remercie.

Marc ABOUAF a suivi mes travaux durant mes premiers mois au CEMEF ses conseils, toujours soucieux de clarté et de rigueur, m'ont permis de tracer les grands axes de cette thèse. Je l'en remercie vivement.

Je tiens à associer à ces remerciements les personnes avec qui j'ai travaillé ces quelques années, particulièrement .

- Henri-Jean BRAUDEL, éternel débateur scientifique ou non,
- Elisabeth MASSONI, pour ses compétences en mécanique,
- Yves COMBRES qui, par nos discussions, m'a permis de rester au contact de la réalité métallurgique,
- Suzanne JACOMET qui m'a fait bénéficier de toute son expérience de la simulation sur pâte à modeler,
- Yves GERMAIN et Pierre MONTMITONNET, pour leurs remarques pertinentes sur le fond et la forme de cette thèse,
- tous les services fonctionnels, en particulier le bureau d'études et l'informatique.

Je veux particulièrement remercier Marlène COLAS qui a dactylographié ce document avec efficacité et disponibilité.

Mesdames GIANNINI et MULE en ont assuré la reproduction avec diligence et gentillesse . le leur en suis très reconnaissant.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION : Le Problème Industriel, les Motivations de la Recherche 1

CHAPITRE I : Le Comportement des Matériaux Superplastiques 11

I.A Phénoménologie : l'essai de traction uniaxiale d'un matériau superplastique 11
I.B Interprétation de la stabilité plastique - Loi de comportement 14
I.B.1 La sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux superplastiques. Le coefficient m 16
I.B.2 Loi de comportement des matériaux superplastiques.. 16
I.B.3 Identification expérimentale 18
I.C Les mécanismes microstructuraux à l'origine de la superplasticité 19
I.C.1 Modèle d'accomodation par diffusion 20
I.C.2 Modèle d'accomodation par déformation plastique des grains voisins 20
I.D Les conditions nécessaires à la superplasticité. Influence des paramètres essentiels 23
I.D.1 Structure des alliages superplastiques 23
I.D.2 Température et vitesse de déformation 27
I.D.3 Stabilité de la structure 27
I.E Conclusion sur les caractéristiques générales de la superplasticité 28

CHAPITRE II : Modélisation d'une Tôle Mince Viscoplastique 29

II.A Bibliographie 29
II.A.1 Les différentes approches mécaniques 29
II.A.2 Les modèles de comportement 30
II.B Le modèle proposé : une mécanique de membrane 31
II.B.1 Coordonnées curvilignes 31
II.B.2 Déformations 35
II.B.3 Contraintes 37
II.B.4 Application à un modèle de membrane 39
II.B.5 Equilibre mécanique d'une membrane 40
II.C Comportement 41
II.C.1 Elasto-viscoplasticité 42
II.C.2 Viscoplasticité pure 45
II.D Frottement 45

CHAPITRE **III : Résolution du Problème Numérique** 47

III.A Discrétisation temporelle 49
III.A.1 Formulation incrémentale semi-implicite avec résolution en déplacements 50
III.A.2 Méthode incrémentale semi-implicite avec résolution en vitesses 55
III.A.3 Calcul de la variation d'épaisseur 58
III.B Discrétisation spatiale. Méthode des éléments finis 58
III.B.1 Equation d'équilibre discrétisée 59
III.B.2 Algorithme de résolution 61
III.C Tests numériques 63
III.C.1 Influence de l'élasticité 64
III.C.2 Comparaison entre formulation en déplacements et formulation en vitesses 66
III.C.3 Comparaison avec le programme de calcul de l'Université de Swansea 68
III.D La gestion du contact avec la matrice 72
III.D.1 L'analyse de la position des noeuds par rapport à l'outil 73
III.D.2 La condition de contact 74
III.D.3 Le calcul des cissions de frottement 75
III.D.4 Vers un algorithme de contact plus satisfaisant 76

CHAPITRE IV : Simulation du Formage Superplastique 79

IV.A Le matériau de simulation 79
IV.B Dispositif expérimental 79
IV.C Préparation du flan initial 80
IV.D Formage expérimental 81
IV.E Simulation numérique et comparaison des résultats 83

CHAPITRE V : Application au Formage Superplastique de Tôles ... 85

V.A Les modèles actuel 85
V.B Le code de calcul SUPFORM3 88
V.B.1 La détermination du cyle de pression 89
V.C Etude d'un cas de déformation plane 91
V.D Etude de cas axisymétriques 95
V.D.1 Gonflage de diaphragme circulaire. Comparaison avec le modèle de Cornfield et Johnson 95
V.D.2 Gonflage de diaphragme circulaire. Comparaison avec l'expérience 97
V.D.3 Application au formage d'hémisphères en TA6V 100
V.E Etude d'un cas tridimensionnel 102
V.F Application au procédé SPF/DB 104
V.F.1 La nécessaire restriction à un problème bidimensionnel 104
V.F.2 Le modèle bidimensionnel SUPFORM2 110
V.F.3 Optimisation de l'épaisseur d'un composant 114
V.F.4 Application à la technique SPF/DB (déformation plane) 116

CONCLUSION 119

BIBLIOGRAPHIE

ANNEXES

INTRODUCTION

Le Problème Industriel
Les Motivations de la Recherche

L'invention de la superplasticité remonte aux années 1920-1930 lorsque Bingham, Jenkins puis Pearson réussirent à atteindre des déformations de plusieurs centaines de pourcent (PEARSON *1934).* Les alliages concernés étaient des alliages ternaires zinc-aluminium-cuivre, ou binaires plombétain ou bismuth-étain, ce qui explique qu'à l'époque, cette curiosité métallurgique ne se soit traduit par aucune application industrielle. C'est seulement en 1962 qu'Underwood (UNDERW000 1962) fit connaître en Occident les résultats des recherches menées par des équipes russes entre-temps (BOCHVAR et SVIDERSKAYA 1945, VOROBEV 1958, PRESNYAKOV et CHERVYAKUVN 1958).

Avant de présenter les applications industrielles actuelles de la superplasticité, il convient de donner un aperçu de la nature du phénomène. Il concerne certains matériaux métalliques à grains fins (de l'ordre du micromètre), sollicités mécaniquement à une température élevée (supérieure à 0,5 fois la température absolue de fusion), sous des contraintes relativement faibles (environ 10 MPa) et à des vitesses également faibles (typiquement 10^{-2} mn^{-1}). Cette propriété est associée à des déformations à la rupture élevées, généralement supérieures à 500% en traction uniaxiale. Nous reviendrons plus largement sur le comportement général des matériaux superplastiques dans le chapitre I.

Le fait de pouvoir mettre en forme des alliages sous des contraintes aussi faibles présente un intérêt évident dans le domaine des alliages structuraux à très haute contrainte à la rupture, utilisés dans l'aéronautique. A ce titre, la fin des années 60 et le début de la décennie suivante virent s'intensifier considérablement l'effort de recherche-développement, principalement aux USA, tant en ce qui concerne les matériaux que les procédés de mise en forme.

Quels sont les alliages présentant un comportement superplastique?

Outre les alliages des systèmes plomb-étain, bismuth-étain ou zinc-aluminium-cuivre, déjà évoqués, il s'agit principalement dans le domaine des alliages structuraux des bases titane et aluminium. La superplasticité des bases titane a permis d'aboutir aux premières applications industrielles. Le plus fréquemment utilisé est sans conteste le TA6V (6%Al - 4%V).

Nous citerons également les alliages Ti - 4 GAl - 4%Mo - 2%Sn
8%Al - 1%Mo - 1%V et Ti - 15%V - 3%Cr - 3%Al - 3%Sn.
Quant aux alliages d'aluminium, le "SUPRAL" (Al - 6%Cu - 0,4%Zr) et le 7475 (Al - 5,6%Zn - 2,2%Mg - 1,5%Cu - 0,2%Cr) restent les plus utilisés actuellement malgré d'importants travaux de développement concernant les alliages aluminium-lithium plus légers et à contrainte à rupture plus élevée (GRIMES 1985).

En ce qui concerne l'utilisation du titane et de l'aluminium, il nous faut rappeler que les bases titane présentent, par comparaison avec les alliages d'aluminium, des contraintes à la rupture plus élevées et surtout de meilleurs rapports contrainte à la rupture sur densité permettant, in fine, une réduction du poids des structures. Cependant, du fait du prix de la matière première et d'un coût de transformation élevés (le titane s'usine 1U fois moins vite que l'aluminium), les bases titane sont très peu utilisées en aéronautique civile (de l'ordre de 2% en poids sur un AIRBUS). En aéronautique militaire, le seul gain de poids a longtemps justifié leur présence (environ 30% du poids de la structure des avions du milieu des années 1970). Néanmoins, la très rapide augmentation du prix du titane de 1977 à 1982 avait renversé cette tendance : les bases titane étaient alors réservées à la fabrication des pièces les plus sollicitées thermiquement et mécaniquement, au profit des alliages d'aluminium mais aussi des composites. Aujourd'hui, cette évolution est remise en cause par la relative stabilisation du prix du titane mais aussi et surtout par l'application du formage superplastique aux bases titane et aluminium avec, pour les premières, une combinaison de cette technique avec celle du soudage-diffusion qui, nous allons le voir, révolutionne la conception des structures d'avion.

Les différents procédés de formage superplastique

Nous n'évoquerons ici que le formage superplastique de tôles, utilisé dans la construction d'éléments de structures aéronautiques. Il nous faut cependant mentionner que la superplasticité est également mise à profit pour la fabrication de pièces massives, telles les aubes de turbine en superalliages par exemple. Ainsi, dans le cas de bases nickel, on utilise la technique du "forgeage isotherme" : ce forgeage à vitesse faible et à température contrôlée (typiquement 1100 ± 50° C) permet une réduction des gammes par une meilleure approche des cotes finales.

Dans le cas des tôles, le procédé de base (figure 1) consiste en l'application d'une pression sur une tôle d'un matériau superplastique fixée sur les bords d'un moule femelle qui impose la forme. Afin d'éviter la corrosion du titane par l'oxygène, le gaz moteur utilisé est l'argon. Un couvercle vient fermer l'appareillage en assurant son étanchéité, et le tout est maintenu à la température de formage dans une presse à plateaux chauffants. Du fait du frottement contre l'outil, la déformation la plus importante est concentrée dans les régions libres de la tôle et il en résulte un amincissement maximum dans les coins de la pièce formée.

Afin de pallier cet inconvénient, d'autres procédés ont été développés, tels le "gonflage arrière" (figure 2A) qui consiste à gonfler le matériau avant application sur le moule femelle, ou bien encore l'utilisation simultanée d'un outil mobile (figure 2B) qui permet, par un choix judicieux (mais complexe) de la pression et de la vitesse de l'outil, d'obtenir une bonne répartition des épaisseurs. Une autre solution consiste à partir d'une tôle d'épaisseur non-uniforme, des paliers d'épaisseur constante (plus élevée dans les zones critiques) étant obtenus par usinage chimique.

La technique du soudage-diffusion

Les alliages de titane ont la propriété remarquable de se souder à haute température et sous une pression de contact assez faible. La soudure résulte du phénomène de diffusion à l'état solide, obtenu sans phase liquide intermédiaire, et réclame simplement un bon état de surface. Le temps de maintien et la pression sont variables, le premier étant inversement proportionnel à la seconde (en pratique de l'ordre de 1 h à 2 MPa). La résistance au cisaillement de tels joints est très proche de celle du matériau initial et très supérieure à celle obtenue par rivetage ou collage. Un pourra consulter à ce sujet et pour de plus amples renseignements la synthèse récente de Stephen (STEPHEN, 1986).
Le soudage-diffusion des alliages d'aluminium est plus problématique. Dans ce cas, l'oxyde A1203 n'est pas soluble dans A1 et constitue en surface une barrière anti-diffusion qui rend le soudage impossible. La solution consiste à revêtir préalablement les tôles d'une couche mince d'un élément soluble dans A1 (Cu, Ag,...). Cette couche empêche la formation d'oxyde et est absorbée par la tôle au cours du soudage. Malgré de nombreux développements en cours (HARVEY 1984), cette technique reste expérimentale et le soudage-diffusion n'est utilisé industriellement que pour les alliages de titane.

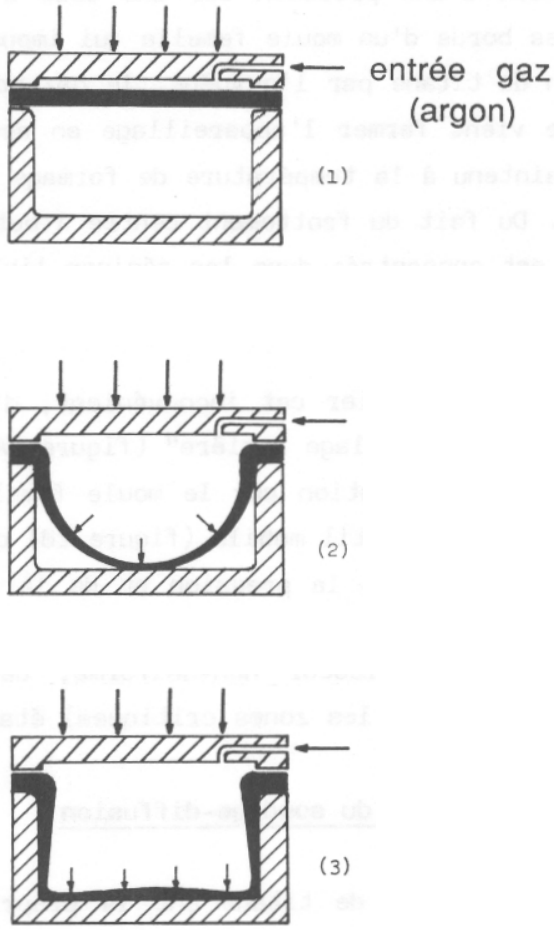


Figure 1 : Schéma illustrant le procédé de base du formage superplastique de tôle (l'épaisseur de la tôle n'est pas à l'échelle), d'après Laycock (LAYCOCK 1982)

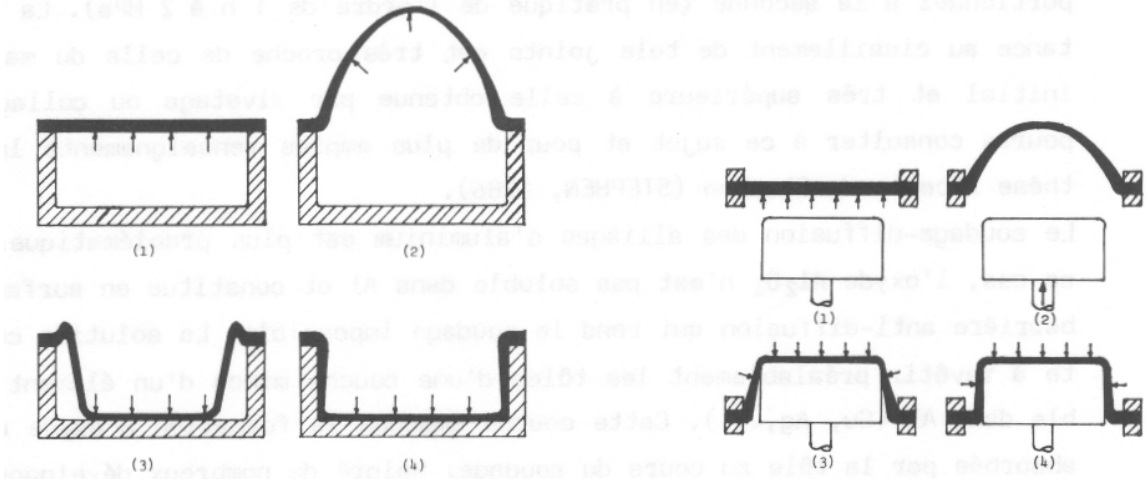


Figure 2 : Autres procédés de formage superplastique destinés à améliorer la répartition des épaisseurs par rapport au procédé de base, d'après Laycock (LAYCUCK 1982)

Le procédé "SPF/DB" (de l'anglais Super-Plastic Forming/Diffusion Bonding)

L'illustration en est donnée par la figure 3. Partant d'un sandwich de deux, trois ou quatre tôles, ce procédé permet de former des structures creuses, alvéolaires de forme complexe. En général, le soudage-diffusion est effectué avant gonflage sur la périphérie de la pièce ainsi qu'en des zones situées à l'emplacement des cloisons internes de la pièce finale. Plus précisément, on empêche le soudage-diffusion de s'effectuer entre les tôles par application préalable d'un produit formant une barrière de diffusion (ce produit appelé stop-off est le plus souvent du nitrure de bore BN). Les tôles sont alors mises sous pression pour former la pièce finale. Pour les structures à quatre tôles, les phases successives sont :

- le gonflage des deux tôles externes et, simultanément, la réalisation du soudage-diffusion à la périphérie et entre les deux tôles internes.
- le gonflage des deux tôles internes : le compartimentage est alors obtenu par soudage-diffusion des tôles internes au cours et à la fin du formage. Pour ce faire, la pièce est maintenue sous pression et sous atmosphère contrôlée après la fin du formage de façon à assurer un soudage correct.

En résumé, une opération de SPF/DB se déroule schématiquement selon les étapes suivantes :

1. découpe des tôles
2. usinage chimique éventuel
3. nettoyage
4. application par sérigraphie du stop-off
5. préparation du sandwich de tôles (insertion entre les tôles de tubes servant à insuffler le gaz moteur)
6. Mise en place dans la presse et chauffage
7. formage (soudage-diffusion, formage proprement dit, soudage diffusion)
8. Retrait du moule, refroidissement et nettoyage : attaque acide pour enlever la surface contaminée par le lubrifiant (nitrure de bore, oxyde d'yttrium ou graphite)
9. usinage éventuel, ébavurage
10. traitement thermique éventuel

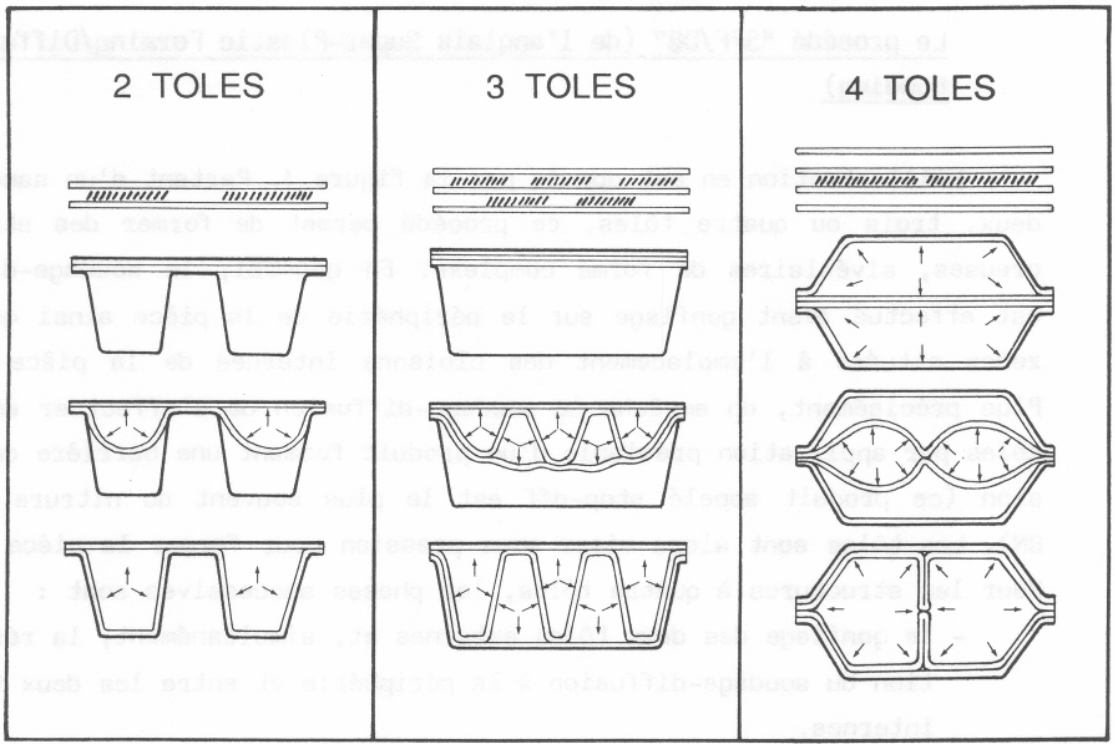


Figure 3 : Technique SPF/UB pour "sandwiches" de 2,3 ou 4 tôles. Les hachures indiquent la présence de produit anti-diffusion ("Stop-off") sur les faces en regard des tôles

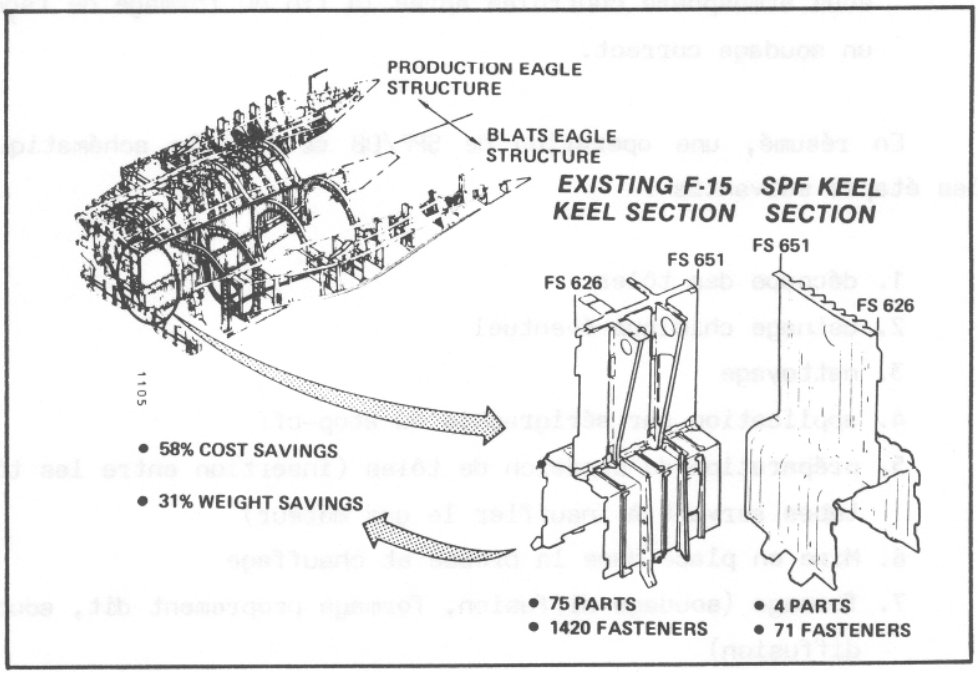


Figure 4 : Un exemple de la réduction possible du nombre de pièces et des gains associés en poids et en coût de fabrication, par utilisation du formage superplastique, d'après Williamson (WILLIAMSUN 1986)

Quelles sont les raisons de l'utilisation croissante du formage superplastique et de la SPF/DB?

On peut dire de manière générale que le formage superplastique, au même titre que la métallurgie des poudres ou le forgeage de précision, est une contribution à l'effort de réduction des coûts de mise en forme par développement de procédés permettant d'approcher les cotes finales des pièces en une seule opération (en anglais "near net shape processes"). En effet, ce procédé permet le formage direct de détails tels que fines nervures ou bossages à court rayon de raccordement qui nécessiteraient des reprises d'usinage importantes suite à une opération d'emboutissage ou de forgeage, voire un usinage complet dans certains cas. Ainsi, la plupart du temps, la pièce formée superplastiquement ne nécessite qu'un éventuel usinage très léger. Il en résulte une économie de matière première et une réduction du coût de fabrication des pièces.

Un second point non moins important est la réduction du nombre de pièces. En effet, les profils complexes autorisés par le formage superplastique permettent aux ingénieurs qui conçoivent la structure d'un avion de redessiner tout un ensemble fonctionnel de pièces initialement assemblées par rivetage ou soudage pour n'en faire qu'une, formée superplastiquement. Un des exemples les plus spectaculaires est le nouveau dessin d'une partie du fuselage arrière du chasseur américain F15 (figure 4), montrant une division par 20 du nombre de pièces et de rivets. Les conséquences directes sont d'une part, une réduction considérable du coût d'assemblage de telles structures et donc du coût global (58% pour l'exemple cité), et d'autre part un gain de poids (ici 3110, objectif souvent prépondérant en aéronautique.

Il est à noter que ces avantages sont encore plus marqués lorsque la technique SPF/DB peut être utilisée, dans le cas des alliages de titane. Un obtient par ce procédé des structures complexes avec raidisseurs internes en une seule opération. Un bon exemple est le "bord d'attaque" de l'aile de l'avion "RAFALE" de AMD-BA. Sur cette pièce de grandes dimensions (1,6 m x 0,3 m), le gain de poids par rapport à une pièce en alliage d'aluminium est approximativement de 45°x, le coût de la fabrication étant réduit de 4U% (ROLLAND, 1986).

Enfin, il faut ajouter que l'outillage destiné à une opération de formage superplastique est moins cher que pour une mise en forme conventionnelle. Seuls un ou deux moules femelles sont nécessaires au lieu de plusieurs paires d'outils devant être parfaitement ajustés deux par deux dans le cas de l'emboutissage ou du matriçage. Ceci contrebalance le surcoût dû à l'utilisation de matériaux devant offrir une bonne résistance à la corrosion, une bonne stabilité dimensionnelle et une faible usure à haute température (sont utilisés le plus souvent les aciers inox réfractaires, les céramiques et les composites carbone-carbone). D'autre part les pressions de maintien exercées sur le pourtour de la pièce étant faibles, le dimensionnement des presses de formage reste modeste (de 150 à 1000 tonnes). En outre la force nécessaire augmente moins vite avec les dimensions de la pièce que dans le cas de l'emboutissage par exemple.

En résumé, l'analyse comparative des coûts entre formage conventionnel et superplastique, laisse apparaître un gain de 30 à 50% sur les coûts de fabrication (figure 5), avec principalement une réduction spectaculaire du coût des opérations d'assemblage.

Ces gains potentiels révolutionnent depuis 10 ans la conception des structures aéronautiques et influent considérablement sur le choix des matériaux. Ainsi, les alliages de titane, malgré le prix élevé de la matière première, redeviennent-ils compétitifs par rapport aux alliages d'aluminium grâce à la technique SPF/DB, et ce aussi bien dans le domaine civil que militaire. Il en est de même pour les alliages d'aluminium par rapport aux composites, en raison du gain de poids et de la possibilité de profils complexes qui résultent du formage superplastique.

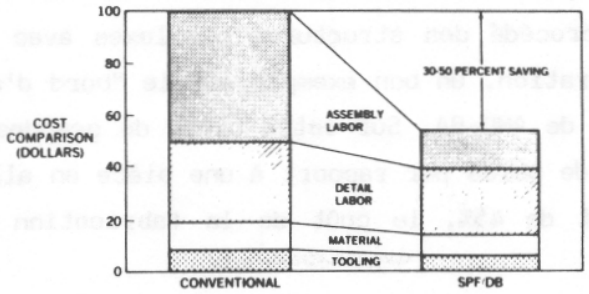


Figure 5 : Comparaison des coûts par mise en forme conventionnelle et par formage superplastique (Source : Mc Donnell-Douglas) (LEODOLTER, 1986).

Quelles sont les limites d'application du formage superplastique?

Elles sont principalement au nombre de trois : tout d'abord, le formage superplastique exige un matériau à microstructure très fine et stable dans le temps à haute température, afin que le caractère superplastique demeure. A l'exception de certains alliages, tels le TA6V dont les tôles peuvent être utilisées dans leur état normalisé, cela nécessite en général des traitements thermomécaniques adaptés, pour développer une recristallisation uniforme à partir de nombreux germes (fort écrouissage à la température de recristallisation suivi d'un recuit). Les alliages superplastiques sont donc des matériaux chers, en raison du prix de la base (titane) ou des traitements thermomécaniques nécessaires. Ils intéressent donc essentiellement les fabricants de produits à haute valeur ajoutée et en premier lieu, les constructeurs aéronautiques.

D'autre part, la déformabilité élevée de ces matériaux à haute température interdit une trop grande sollicitation thermique des pièces formées superplastiquement. Ainsi, les composants SPF et SPF/DB ne trouvent pas actuellement d'application dans les parties chaudes des moteurs, bien que des efforts soient faits pour augmenter la résistance au fluage par traitement thermique après formage provoquant un grossissement des grains.

Une troisième limitation provient des faibles valeurs des vitesses de déformation dans le domaine superplastique. Les temps de mise en forme sont longs (typiquement entre 30 mn et 3 h) comparés aux durées des formages traditionnels. Ceci exclut la fabrication de composants en grande série et confine là encore leur usage aux structures mécaniques de pointe.

Pourquoi un modèle numérique de simulation?

Si la technologie du formage superplastique est forte des avantages techniques et économiques précédemment exposés, il n'en demeure pas moins que le praticien reste confronté à des difficultés quant à sa mise en oeuvre industrielle. En particulier, l'influence du cycle de pression et du lubrifiant sur le profil d'épaisseur final des pièces n'est pas clairement établie. En outre, la détermination du cycle de pression de gonflage en fonction du temps, afin d'assurer un écoulement de type superplastique pen-

dant tout le formage (sans apparition de striction localisée et déchirure) pose problème. Face à ces difficultés, le praticien ne dispose la plupart du temps que de règles empiriques et de son expérience. Il en résulte pour chaque pièce nouvelle une longue et coûteuse série d'essais-erreurs-corrections avant de pouvoir satisfaire au cahier des charges imposé par le bureau d'étude.

On conçoit dès lors l'intérêt d'un modèle numérique de simulation capable de donner :

- les déformées successives de la tôle au cours du temps,
- la distribution finale des épaisseurs de la pièce,
- le cycle de pression à appliquer pour rester dans le domaine super plastique tout en minimisant la durée de l'opération.

De tels modèles existent déjà pour des géométries extrêmement simples (cas particuliers de déformation plane ou axisymétrique). Nous en dresserons l'inventaire au début du chapitre V. Cependant, ces modèles s'avèrent incapables de traiter des formes bidimensionnelles complexes ou a fortiori, tridimensionnelles.

C'est là l'objet de la présente thèse. Pour parvenir à un tel modèle général, nous nous plaçons dans le cadre de la mécanique des milieux continus. Après avoir rappelé dans le chapitre I les caractéristiques générales du comportement superplastique et la rhéologie des matériaux concernés, nous exposerons dans le chapitre II le modèle mécanique utilisé qui consiste principalement en une approximation de membrane viscoplastique pour la tôle mise en forme superplastiquement. La méthode de résolution numérique utilisée est celle des éléments finis. Sa présentation fait l'objet du chapitre III dans lequel sont notamment explicités les différents choix possibles concernant l'intégration de la loi de comportement. Les différents algorithmes sont testés dans des configurations simples. Les deux derniers chapitres ont pour thème la validation et l'application de notre modèle. Tout d'abord, à l'aide d'un matériau de simulation à base de pâte à modeler et au comportement se rapprochant de la superplasticité : la description des essais effectués au laboratoire et la confrontation entre résultats expérimentaux et calculs numériques font l'objet du chapitre IV. Enfin, le chapitre V est consacré à l'application du modèle au problème industriel du formage superplastique.

CHAPITRE I

Le Comportement des Matériaux Superplastiques

I.A PHENOMENOLOGIE : L'ESSAI DE TRACTION UNIAXIALE D'UN MATERIAU SUPERPLASTIQUE

Lorsqu'il est soumis à cet essai classique, sous certaines conditions que nous examinerons plus loin, un matériau superplastique se distingue radicalement des autres métaux déformés à chaud. Rappelons que ceux-ci se déforment suivant trois phases successives . un premier domaine élastique, un deuxième domaine dit d'écrouissage où - de même qu'à froid - la contrainte d'écoulement augmente avec la déformation pour passer par un maximum et devenir ensuite stationnaire dans une troisième région. Signalons que si ce troisième régime apparaît clairement lors d'un essai de torsion, il n'en va pas de même en traction où il apparaît simultanément un phénomène d'instabilité géométrique conduisant à la rupture de l'éprouvette après striction. Dans le cas d'un matériau superplastique, la phase de consolidation plastique est en général absente. L'instabilité géométrique se manifeste alors de fa9on précoce et donne lieu à un allongement régulier très important, par simple étirement du faible étranglement initialement apparu (figure I.1). En d'autres termes, il n'y a plus localisation de la déformation comme dans le phénomène de striction classique mais succession de strictions avec délocalisation du défaut à chaque fois. La courbe expérimentale de traction présente de ce fait une allure très particulière (figure 1.2). Les allongements obtenus varient entre plusieurs dizaines et plusieurs centaines de pourcent. En raison de sa valeur historique, nous montrons figure 1.3 la photographie désormais classique de l'éprouvette déformée par Pearson en 1934 (1950 % d'allongement).

Les courbes rationnelles (contrainte/déformation) enregistrées lors d'un essai de traction à vitesse de traverse constante ont l'allure caractéristique donnée par la figure 1.4, et montrent que l'écrouissage reste faible. Ceci est une caractéristique générale des matériaux superplastiques, bien que dans certains cas, on constate une augmentation de la contrainte d'écoulement due au grossissement des grains ou des phases. D'autre part, la figure 1.4 laisse apparaître la caractéristique fondamentale des matériaux superplastiques qui est la sensibilité élevée de la contrainte d'écoulement à la vitesse de déformation.

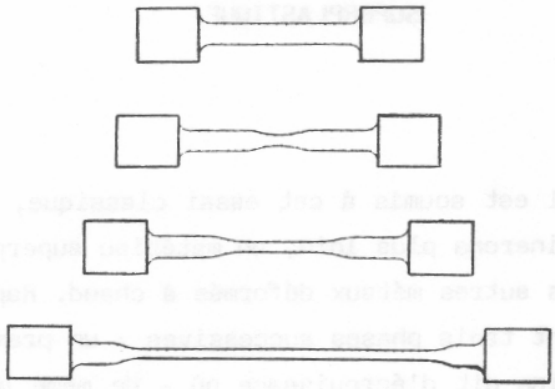


Figure I.1 : Différents stades de la déformation d'une éprouvette à comportement superplastique (schématique) (CIZERUN *1973)*

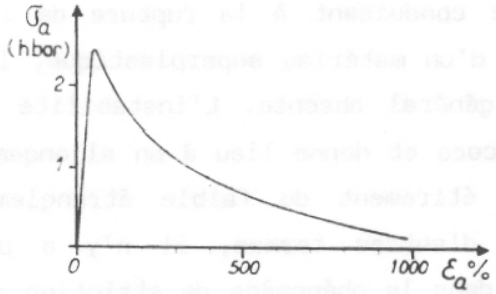


Figure I.2 : Courbe de traction d'un matériau superplastique (a_a est la force rapportée à la section initiale et e_a l'allongement, schématique) (CIZERUN 1973)

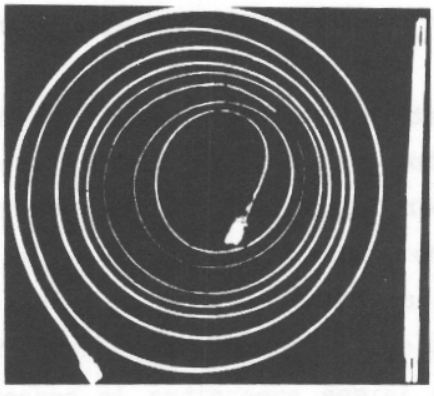


Figure 1.3 : Eprouvette de traction en alliage eutectique Pb-Sn. Allongement 1950% (PEARSON 1934)

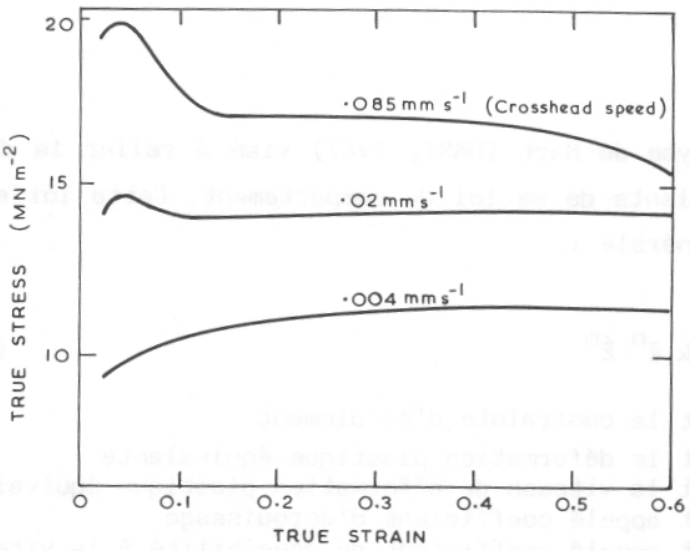


Figure 1.4 : Courbes de traction rationnelles obtenues sur éprouvettes de zinc de pureté commerciale pour différentes viteses de traverse maintenues constantes, d'après Naziri et Pearce (NAZIRI 1969)

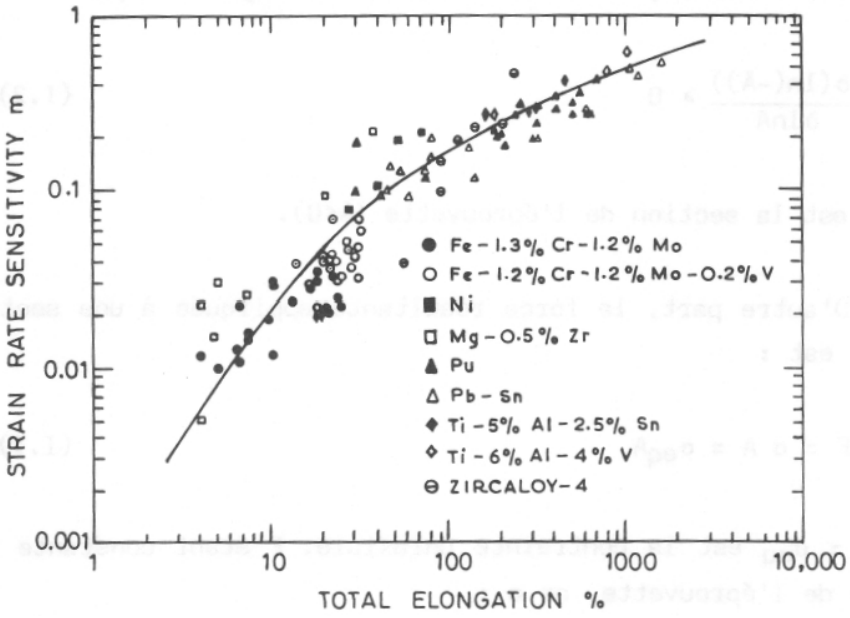


Figure 1.5 : Corrélation entre sensibilité à la vitesse de déformation (m) et allongement maximum en traction pour divers matériaux, d'après Woodford (WOODFORD 1969)

I.B INTERPRETATION DE LA STABILITE PLASTIQUE - LOI DE COMPORTEMENT

L'analyse de Hart (HART, 1967) vise à relier la ductilité d'un métal aux coefficients de sa loi de comportement. Cette loi est supposée être de la forme générale :

$$\sigma_{eq} = k\,\bar{\varepsilon}^{n}\,\dot{\bar{\varepsilon}}^{m} \qquad (I.1)$$

σ_{eq} est la contrainte d'écoulement
$\bar{\varepsilon}$ est la déformation plastique équivalente
$\dot{\bar{\varepsilon}}$ est la vitesse de déformation plastique équivalente
n est appelé coefficient d'écrouissage
m est appelé coefficient de sensibilité à la vitesse, compris entre 0 et 1
k est une constante du matériau

La condition de stabilité plastique d'une éprouvette de traction est que la vitesse d'amincissement diminue avec la section de l'éprouvette, ce qui peut s'écrire en dérivée doublemement logarithmique :

$$\frac{\partial(\ln(-\dot{A}))}{\partial \ln A} > 0 \qquad (I.2)$$

où A est la section de l'éprouvette. $(\dot{A}<0)$

D'autre part, la force résultante appliquée à une section de l'éprouvette est :

$$F = \sigma A = \sigma_{eq} A \qquad (I.3)$$

où $\sigma = \sigma_{eq}$

est la contrainte uniaxiale. F étant est la contrainte uniaxiale. F étant constante sur la longueur utile des l'éprouvette, on a :

$$\frac{\partial \ln F}{\partial \ln A} = 1 + \frac{\partial \ln \sigma_{eq}}{\partial \ln A} = 0$$

En injectant dans cette dernière équation la loi de comportement (I.1), il vient :

$$\frac{\partial \ln \sigma_{eq}}{\partial \ln A} = \frac{n}{\bar{\varepsilon}} \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \ln A} + m \frac{\partial \ln \dot{\bar{\varepsilon}}}{\partial \ln A}$$

En tenant compte des deux relations :

$$\dot{\bar{\varepsilon}} = - \dot{A}/A \qquad \text{et} \qquad \bar{\varepsilon} = \ln(A_0/A), \qquad (I.4)$$

on obtient

$$\frac{\partial \ln(-\dot{A})}{\partial \ln A} = \frac{n/\bar{\varepsilon} + m - 1}{m}$$

soit d'après (I.2), la condition de stabilité plastique

$$\frac{n}{\bar{\varepsilon}} + m > 1 \qquad (I.5)$$

Pour les alliages superplastiques, n est en général assez faible et la condition (1.5) n'est jamais vérifiée. Néanmoins les équations (I.4a, I.1 et I.3) conduisent à

$$\dot{A} = -(F/k)^{1/m} (1/A)^{1/m-1} \qquad (I.6)$$

Il faut noter que lorsque m augmente de 0,3 à 0,9 par exemple, l'exposant 1/m-1 décroît de 2,33 à 0,11. Ainsi, lorsque m tend vers 1, la dépendance de A en A est très significativement réduite et ceci explique la forte résistance à la propagation de la striction dans les matériaux superplastiques.

Du fait de sa simplicité (on néglige les effets de triaxialité au voisinage de la striction) cette analyse s'est avérée incapable de prédire les évolutions géométriques enregistrées expérimentalement. Néanmoins, elle a le mérite de révéler la nécessité d'une sensibilité à la vitesse élevée pour obtenir des allongements importants. Ceci a été confirmé expérimentalement pour des alliages divers (W00DF0RD, 1969) (figure I.5).

I.B.1 La sensibilité à la vitesse de déformation des matériaux superplastiques. Le coefficient m

Au vu de l'analyse précédente, $m = \partial(\ln\sigma_{eq})/\partial(\ln\dot{\varepsilon})$ est un paramètre de première importance dans la caractérisation de la déformation superplastique. Lorsqu'on déforme un matériau superplastique à différentes vitesses $\dot{\varepsilon}_{eq}$ - maintenues chaque fois constantes - les variations de la contrainte d'écoulement sont données par la courbe pleine de la figure I.6.

Le domaine III, caractérisé par une valeur faible de m, correspond au comportement habituel d'un matériau déformé à haute température dans le domaine du fluage. Le domaine II est le domaine superplastique : m prend des valeurs élevées et les contraintes sont plus faibles que celles qu'on obtiendrait en extrapolant la courbe du domaine III (courbe en pointillés). Dans le domaine I, m prend à nouveau des valeurs plus faibles généralement voisines de 0,2. Les variations de m sont données schématiquement figure I.7.

I.B.1 a) Variations de m avec la déformation

La déformation superplastique entraîne, parallèlement à l'écrouissage de certains grains, comme nous le verrons par la suite (I.C.2), un grossissement général des grains dont on peut s'attendre à ce qu'il dégrade la valeur de m (voir plus loin I.D.1). La figure I.7 bis montre la décroissance effective de m avec $\bar{\varepsilon}$ pour le TA6V (GHOSH, 1979a). Des résultats similaires ont été trouvés pour les alliages d'aluminium (GHOSH, 1979b). La décroissance de m est d'autant plus rapide que $\dot{\bar{\varepsilon}}$ est élevée.

I.B.2 Loi de comportement des matériaux superplastiques

Au vu de la figure I.6, une bonne approximation de la loi de comportement dans le domaine superplastique II est une loi puissance du type

$$\sigma_{eq} = k\dot{\varepsilon}^{m} \qquad (I.7)$$

On retrouve par cette linéarisation une loi de fluage de Norton, mais avec un coefficient m élevé. Il faut noter que dans cette écriture, nous négligeons la contrainte seuil, dont les valeurs sont généralement faibles (RAI, GRANT 1975).

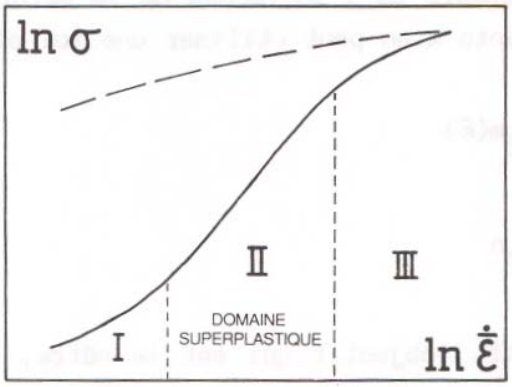


Figure 1.6 : Relation contrainte/vitesse de déformation pour un matériau superplastique (trait continu) en comparaison avec un matériau classique (pointillés) (schématique)

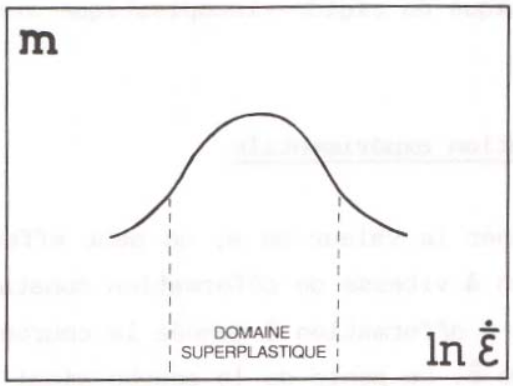


Figure 1.7 : Variation de m en fonction de la vitesse de déformation (schématique)

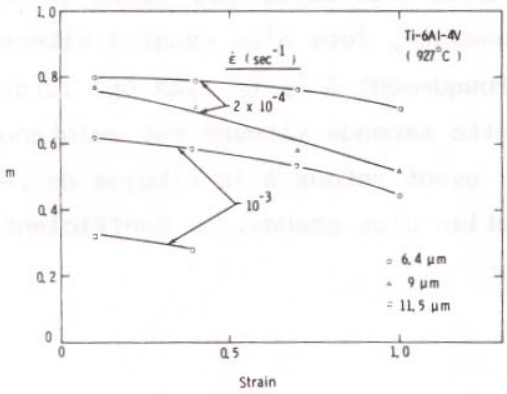


Figure 1.7 bis: Evolution de m en fonction de la déformation pour différentes tailles de grain et vitesses de déformation.
Matériau : TA6V à 927 OC, d'après Ghosh et Hamilton (GHOSH 1979a)

Pour tenir compte de l'influence de la déformation sur les valeurs de m et de la constante k on peut utiliser une loi plus générale de type :

$$\sigma_{eq} = k(\bar{\varepsilon})\ \dot{\bar{\varepsilon}}^{m(\bar{\varepsilon})} \qquad (I.8)$$

avec : $k = k_0\,(\bar{\varepsilon}_0 + \bar{\varepsilon})^n$

En considérant l'objectif qui est le nôtre, la modélisation numérique de la mise en forme des matériaux superplastiques, une telle loi a le mérite de pouvoir refléter avec une assez bonne approximation le comportement dans le stade II et d'être suffisamment simple pour être facilement intégrée dans un code de calcul. La rhéologie de notre modèle sera donc de type élasto-viscoplastique ou rigide-viscoplastique avec une loi de fluage de la forme (I.8).

I.B.3 Identification expérimentale

Pour déterminer la valeur de m, on peut effectuer des essais de traction ou de torsion à vitesse de déformation constante et température donnée et tracer ensuite à déformation $\bar{\varepsilon}$ donnée la courbe de la figure 1.6 donnant σ_{eq} en fonction de $\dot{\bar{\varepsilon}}$. La pente de la courbe ainsi trouvée est :

$$m_1 = \left.\frac{\partial \ln \sigma_{eq}}{\partial \ln \dot{\bar{\varepsilon}}}\right|_{\bar{\varepsilon},T} \qquad (I.9)$$

Une autre méthode est celle des sauts de vitesse (BACKOFEN, TURNER, AVERY 1964) qui consiste, lors d'un essai à vitesse de déformation constante $\dot{\bar{\varepsilon}}_1$, à passer brusquement à $\dot{\bar{\varepsilon}}_2\ (\approx 1{,}25\ \dot{\bar{\varepsilon}}_1)$ lorsqu'une déformation choisie $\bar{\varepsilon}$ est atteinte. Cette seconde vitesse est maintenue un court instant (environ 2 à 3% de déformation) avant retour à la vitesse de référence $\dot{\bar{\varepsilon}}_1$ et un prochain saut à une déformation plus grande. Le coefficient m est alors calculé suivant la relation :

$$m_2 = \frac{\Delta(\ln\sigma)}{\Delta(\ln\dot{\bar{\varepsilon}})} \qquad (I.10)$$

Une troisième méthode similaire à la deuxième et donnant des résultats identiques est la méthode de relaxation qui consiste à mesurer la vitesse de décroissance de la contrainte lorsque l'essai à vitesse imposée est arrêté à une déformation donnée (FELTHAM 1960).

Expérimentalement, les valeurs de m trouvées par la première méthode différent de celles trouvées par les deux dernières, les écarts étant assez importants pour certains alliages. En fait, l'hypothèse généralement admise, comme dans l'équation de comportement (I.8) par exemple, est que la structure du matériau reste constante au cours de l'essai, ou tout au moins qu'elle est reliée de manière bi-univoque à la déformation $\bar{\varepsilon}$.

Dans ce cas on démontre que les valeurs ml et m2 sont identiques. En revanche, lorsqu'il y a évolution de la structure non reliée directement à $\bar{\varepsilon}$ (par exemple grossissement des grains dépendant de plusieurs facteurs dont le temps) les valeurs diffèrent : m_2 est alors le coefficient m à structure constante (noté m_s) tandis que la valeur m_1 est influencée par l'évolution de la structure du matériau. Si les valeurs m_s sont utiles afin de juger de la validité des modèles microscopiques proposés pour rendre compte du comportement superplastique, c'est cependant la première valeur qu'il convient de prendre en compte dans l'analyse de la stabilité plastique présentée ci-dessus et donc dans un modèle numérique de la déformation superplastique.

I.C LES MÉCANISMES MICROSTRUCTURAUX A L'ORIGINE DE LA SUPERPLASTICITE

Les mécanismes mis en oeuvre lors de la déformation à chaud des métaux classiques (mouvement de dislocations thermiquement activé et couplé au phénomène de diffusion) permettent d'aboutir à des lois de comportement diverses faisant intervenir une énergie d'activation liée au phénomène de diffusion et une sensibilité à la contrainte (par exemple : loi puissance). Une loi empirique qui s'accorde bien avec ces modèles est celle de Sellars et Tegart :

$$\dot{\varepsilon} = A\,(\mathrm{sh}\ \alpha\ \sigma_{eq})^p\ e^{-\,Q/RT} \qquad (I.11)$$

dont une approximation, lorsque la contrainte d'écoulement est faible, est la loi de Norton qui s'écrit de la même manière que (I.7) :

$$\dot{\varepsilon} = B\ \sigma_{eq}^{\ p} \qquad (I.12)$$

Néanmoins, les coefficients de sensibilité à la vitesse m = 1/p suggérés par ces mécanismes sont toujours inférieurs à 0,3. L'écoulement superplastique met donc en jeu d'autres mécanismes. Aujourd'hui, il est communément admis que c'est le glissement aux joints de grains qui joue alors un

rôle prépondérant. Ce glissement n'est possible qu'au delà d'une température critique appelée température d'équicohésion : lorsque la température de l'essai lui est supérieure, il est plus facile de provoquer le glissement aux joints que de déformer les grains (figure I.8). La température d'équicohésion est généralement supérieure à 0,5 T_f (T_f : température de fusion en Kelvin) et croît avec la vitesse de déformation, comme le montre la figure I.8. Ceci explique qu'il n'y ait de superplasticité qu'aux faibles vitesses de déformation.

A l'évidence, le glissement aux joints doit être accomodé pour éviter la formation de cavités au niveau des points triples. Il est hors de question de dresser ici un panorama de tous les mécanismes qui ont été suggérés. Cependant, nous donnons ci-après un aperçu des deux modèles les plus souvent envisagés.

I.C.1 Modèle d'accommodation par diffusion

Le modèle bidimensionnel d'Ashby et Verrall (ASHBY, 1973) repose sur un mécanisme de fluage diffusion qui rend compte de nombreux résultats expérimentaux. La figure I.9 représente schématiquement le mécanisme : l'état initial et l'état final présentent des tailles de grains identiques, mais ce processus élémentaire correspond à une déformation de 0,55. Les grains ont subi des translations relatives par glissement aux joints. L'accommodation nécessite une déformation des grains, réalisée par diffusion en volume le long des joints. Suivant ce modèle, on obtient un coefficient m égal à 0,5, donc assez représentatif de l'écoulement superplastique.

I.C.2 Modèle d'accomodation par déformation plastique des grains voisins

Dans le modèle de Ball et Hutchison (BALL, 1969), le glissement est supposé se réaliser par groupes de grains (figure I.10). Ce glissement provoque nécessairement un mouvement de dislocations dans certains grains voisins avec empilement sur les joints opposés. C'est la montée des dislocations dans les joints de grains qui autorise la continuation du glissement, et régit l'écoulement global. On trouve là encore m = 0,5.

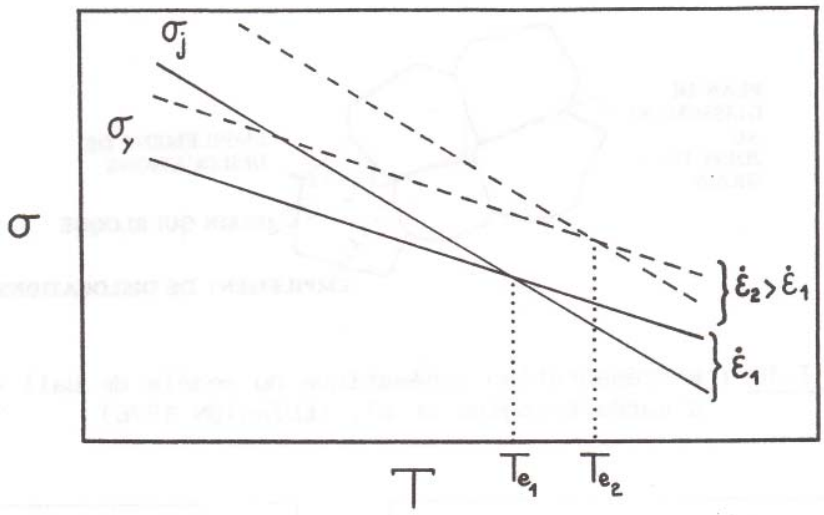


Figure 1.8 : Définition de la température d'équicohésion d'un polycristal. σ_y est la contrainte nécessaire pour déformer les grains ($\sigma_y = M\ \tau_c$ avec τ_c cission critique de Schmid et M facteur d'orientation moyen de Taylor) et σ_j est la contrainte critique de glissement des joints (schématique)

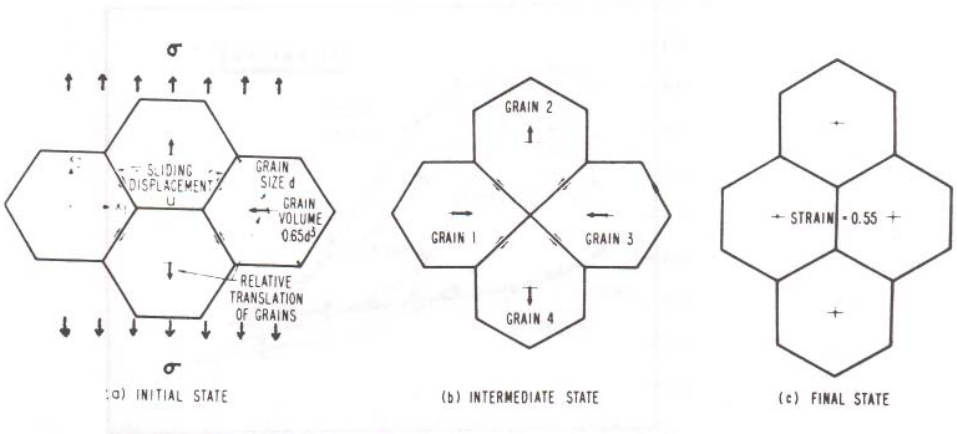


Figure 1.9 : Mécanisme élémentaire de déformation superplastique par glissement aux joints de grain et accomodation par fluage-diffusion, d'après Ashby et Verrall(ASHBY 1973)

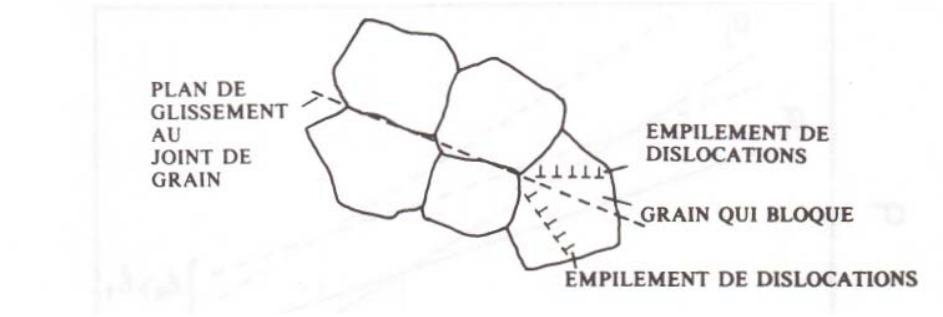


Figure I.10 : Représentation schématique du modèle de ball et Hutchison d'après Edington et al. (EDINGTON 1976)

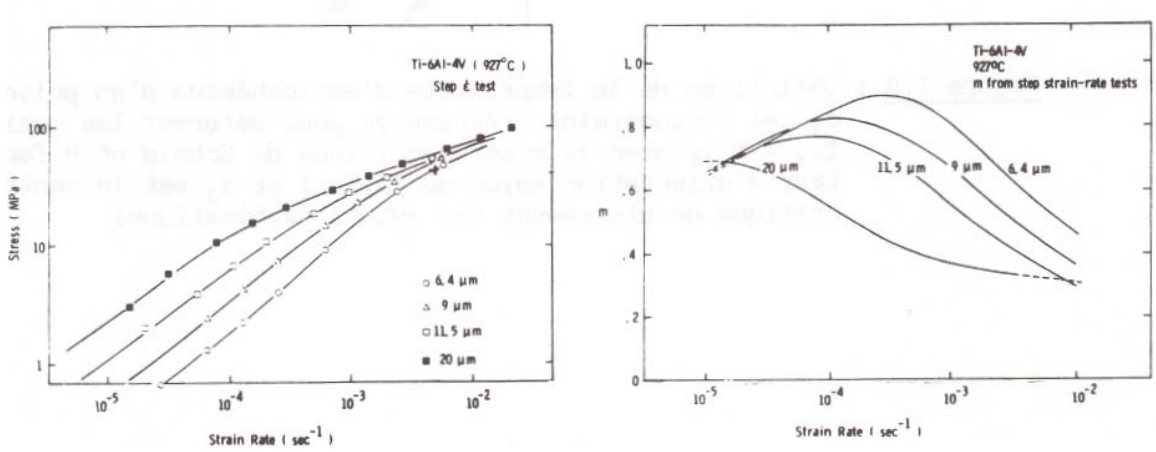


Figure I.11 : Influence de la taille de grain sur la courbe contrainte/ vitesse de déformation et sur la valeur correspondante de m. Alliage Ti-6°%Al-4%V à 927°C d'après Ghosh et Hamilton (GHOSH 1979a)

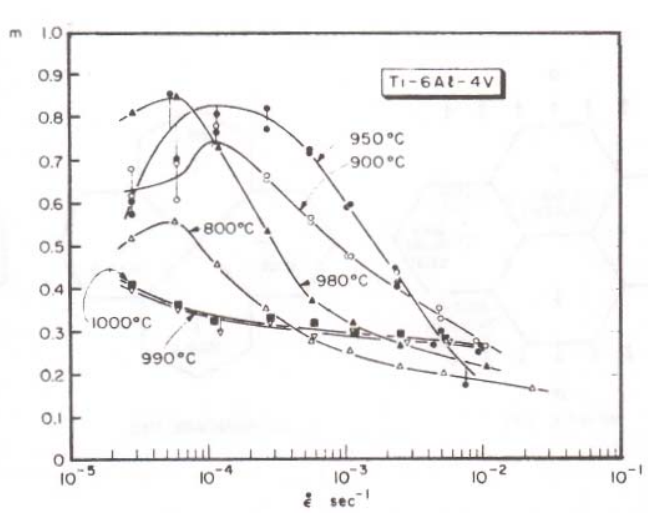


Figure 1.12 : Variations de m en fonction de la vitesse de déformation à différentes températures pour un alliage Ti-6%Al-4%V, d'après Lee et Backofen (LEE 1967)

En fait, ces deux modèles ne sont pas pleinement satisfaisants pour plusieurs raisons dont les principales sont :

- les valeurs des vitesses de déformation prévues par ces modèles concordent mal avec l'expérience.
- m n'est pas constant, comme le prévoient ces modèles : il dépend de la taille de grain, de la vitesse de déformation et de la température.
- ces modèles ne rendent pas compte de la forme sigmoîdale $\sigma_{eq}/\dot{\bar{\varepsilon}}$.
- ces modèles ne tiennent pas compte de la présence de phases différentes.

Les modèles que nous avons présentés ont fait l'objet de nombreuses critiques et par la même ont donné naissance à de nouvelles interprétations. Pour plus de détails, on pourra consulter entre autres références, (HAYDEN, et al. 1972), (SUERY, BAUDELET 1982), (PADMANABHAN, DAVIES 1980), (COMBRES, 1985).

Tous les modèles proposés ont leurs mérites et leurs insuffisances respectifs, ce qui laisse à penser que la superplasticité est un phénomène complexe faisant intervenir de nombreux mécanismes simultanément. Ces modèles ont cependant le mérite de permettre l'interprétation de certains faits expérimentaux tels, entre autres, la valeur élevée du coefficient m, la disparition de toute texture cristallographique au cours de la déformation, et l'influence de la taille de grains : généralement, on obtient une dépendance de la forme $\dot{\varepsilon}_{eq} \sim 1/d^a$ avec d = taille de grains et a = 2 ou 3.

Ces modèles mettent donc en évidence les conditions structurales et opératoires nécessaires à la superplasticité. Le passage en revue de l'influence des différents paramètres essentiels fait l'objet du paragraphe suivant.

I.D LES CONDITIONS NECESSAIRES A LA SUPERPLASTICITE. INFLUENCE DES PARAMETRES ESSENTIELS

I.D.1 Structure des alliages superplastiques

La forte influence de la taille de grain sur la vitesse de déformation prévue par les modèles microstructuraux, est corroborée par de nombreuses

expériences. La figure I.11 illustre bien le décalage du domaine superplastique vers des valeurs plus élevées (ou plutôt, moins infinitésimales) de la vitesse de déformation en même temps qu'une augmentation du coefficient de sensibilité à la vitesse m, lorsque la taille des grains diminue. Les matériaux superplastiques ont une taille de grain comprise entre 1 et 10 µm environ, avec équiaxialité de la structure. On sait que dans les matériaux métalliques monophasés, les structures à grains fins sont généralement très instables : la déformation superplastique ne peut alors être prolongée dans le temps et ne présente donc guère d'intérêt. Pour pallier cet inconvénient, certains alliages dits "quasi-monophasés" comportent aux joints de grains de la matrice une fine distribution de précipités destinée à empêcher le grossissement des grains. De nombreux alliages présentent cette caractéristique parmi lesquels l'alliage Sn- 1%Bi, et les alliages d'aluminium Al-Cu- 0.5%Zr ("Supral"), 7475 et Al-Li. Dans les alliages biphasés, la notion de taille de grain est un peu plus ambiguë. Paton et Hamilton (PATON, 1979) ont montré qu'il était nécessaire de prendre alors en compte la distribution de la taille des grains et la forme de ceux-ci. Si la structure est à forte dispersion, la croissance des grains d'une phase est inhibée par les grains de l'autre phase et réciproquement. On citera dans cette catégorie majoritaire les alliages eutectiques Zn-Al, Pb-Sn, Sn-Bi, les laitons et l'alliage de titane Ti- 6%Al - 4%V(TA6V).

Le tableau I, tiré pour l'essentiel de (PADMANABHAN, 1980) donne la liste des alliages superplastiques connus avec la valeur de m mesurée, l'allongement maximal obtenu et le domaine de température. Ce tableau ne présente que les matériaux pour lesquels la superplasticité est structurelle. Il nous faut dire un mot cependant d'un autre type de superplasticité qui, s'il n'entre pas dans le cadre de cette thèse, n'en demeure pas moins extrêmement intéressant : il s'agit de la superplasticité temporaire ou "conjoncturelle". Certains alliages industriels conventionnels présentent en effet un caractère superplastique transitoire lorsque, au cours d'une recristallisation après un écrouissage conséquent et un recuit, les grains (ou phases) ont une taille uniforme très faible et inférieure à 1 µm. Ceci permet une vitesse de déformation superplastique bien plus élevée que dans le cas de la superplasticité structurelle (de l'ordre de 10^{-1} s^{-1}). Le problème est alors de parfaitement synchroniser les opérations qui développent cette structure fine transitoire et les opérations de mise en forme.

Matériau	m maximum	% élong.	Tempér. (K)
1	2	3	4
Bi-44.5Pb eutectic	0.42	600	293
Bi-43Sn eutectic	-	1950	293
Bi-31Pb-17Sn eutectic	0.45	600	293
Cd-17.5Zn eutectic	0.5	400	293
Cd-27Zn	0.5	350	293-303
In-34Bi eutectic	0.76	450	293
Pb-5Cd	0.35	-	293
Pb-17.4Cd eutectic	0.6	> 350	298-373
Pb-30Cd	0.35	> 900	298
Pb-19Sn	0.5	-	293-353
Pb-7.9Tl	0.5	400	293
Sn (high purity)	0.5	-	293
Sn-1Bi	0.48	500	295
Sn-5Bi	0.68	1000	293
Sn-5Cd eutectoid	0.32	350	298
Sn-2Pb	0.5	600	293-353
Sn-38Pb eutectic	0.7	> 4850	293-443
Sn-2 to 6Sb	0.4	-	413-483
Sn-9.8Zn eutectic	0.5	570	393-453
Sn-32Pb-18Cd	0.55	-	298-343
Sn-31.1Pb-3.4Zn	0.55	500	298-343
Zn-(Commercial)	0.2	409	293-343
Zn-0.2Al	0.8	465	296
Zn-0.4Al	0.5	650	293
Zn-4.9Al eutectic	0.68	300	473-633
Zn-18Al	0.6	-	295-623
Zn-22Al eutectoid	0.7 (1.0-ref. 209)	2900	293-573
Zn-36Al	0.5	-	295-623
Zn-40Al	0.65	1300	523-573
Zn-50Al	0.3	1000	523-573
Zn-22Al-0.1Cu	0.65	-	523
Zn-22Al-4Cu	0.5	1000	293-523
Zn-22Al-0.2Mn	0.5	1000	293-523
Zn-0.1Ni-0.04Mg	0.51	> 980	373-523
Zn-W particles	-	100	300
Zn-ZnO_2	-	120	300
α-Pu	-	218	380
β-Pu	0.33	700	453
Mg (commercial)	-	80	-
Mg-Al eutectic	0.8	2100	623-673
Mg-30.7Cd	-	250	723
Mg-0.5Zr	0.3	150	773
Mg-ZK60 (commercial)	0.52	1700	503-583
Mg-6Zn-0.5Zr	0.6	1000	543-583
Al (commercial)	0.2	6000 (torsion)	650-850
Al-7.6Ca	0.78	850	573-873
Al-17Cu	0.35	600	673-797
Al-33Cu eutectic	0.9	1150	653-798
Al-10 to 13Si eutectic (Sodium modified casting alloy LM6)	0.4	183	723-761
Al-6Cu-0.5Zr	0.5	2000	673-773
Al-25 to 33Cu-7 to 11Mg	0.72	> 600	693-753
Al-12Si-4Cu	0.4	-	773
Al-5.6Zn-1.56Mg	0.7	500	803
Al-6Zn-3Mg	0.35	400	613-633
Al-10.72Zn-0.93Mg-0.42Zr	0.9	1550	823
Al-4.6Mg-0.75Mn-0.2Fe-0.15Si	0.4	150	548
Al-5.8Mg-0.37Zr-0.16Mn-0.07Cr	0.6	> 800	793
Al-4.5Cu-1.5Mg-0.5Mn-0.2Fe-0.1Si	0.4	200	673
Al-5.6Zn-2.5Mg-1.5Cu-0.2Cr-0.2Fe-0.1Si	0.4	200	673
7075Al alloy	-	> 200	678
Ag-28.1Cu eutectic	0.53	500	948
Al-2.4Li-1.2Cu-.6Mg-.1Zr (8090) Al-2.2Li-2.7Cu-.1Zr (2090) Al-2.5Li-1.8Cu-.7Mg-.1Zr (8091)	0.6	1000	
Cu-9.5Al	0.8	-	1073
Cu-9.8Al	0.7	700	813-973
Cu-10 to 20Mg	-	250	973
Cu-7P	0.5	> 600	683-873
Cu-40Zn	0.75	> 525	900
Cu-48Zn	0.9	450	773-1073
Cu-9.5Al-4Fe (also known as CDA 619)	0.7	> 800	1073
Cu-10Al-3Fe	0.6	720	1073
Cu-10Al-4Fe	0.6	1000	1023
Cu-38.5Zn-3Fe	0.53	330	773-1073
Cu-2.8Al-1.8Si-0.4Co (also known as CDA 638)	0.5	320	773-873
Cu-38Zn-15Ni-0.2Mn	-	200	723-838
IN 836 (Cu base)	0.45	> 300	823
Be (ingot source)	0.9	130	973-1273
Fe-0.1C	0.9	-	1000
Fe-0.4C	0.6	-	1000
Fe-0.8C	0.35	100	923-1033
Fe-1.3C	0.4	500	923-1173
Fe-1.6C	0.45	500	923-1173
Fe-1.9C	0.5	500	923-1173
Fe-0.12C-1.97Si	0.26	150	1073-1223
Fe-0.14C-1.93Mn	0.60	-	1000-1073
Fe-0.3C-2.0Al	0.37	-	1313
Fe-0.44C-2.0Mn	0.8	-	1000-1073
Fe-0.01C-6.4Ni-0.35Nb	0.40	-	973-1073
Fe-0.13C-1.11Mn-0.11V	0.45	310	973-1173
Fe-0.2C-3.1Ni-0.29Nb	0.56	-	973-1073
Fe-0.34C-0.47Mn-2.0Al	0.48	372	1173-1223

Tableau I

Matériau	m maximum	% élong.	Tempér. (K)
1	2	3	4
Fe-0.34C-0.47Mn-2.0Al	0.48	372	1173-1223
Fe-0.42C-1.87Mn-0.24Si (also known as AISI 1340)	0.65	460	1000
Fe-0.91C-0.45Mn-0.12Si	0.42	142	989-1190
Fe-0.07C-0.91Mn-0.5P-0.1V	0.31	169	1073-1223
Fe-0.14C-0.72Mn-0.15Si-0.14V	0.43	242	1073-1223
Fe-0.14C-1.16Mn-0.5P-0.11V	0.57	270	1073-1223
Fe-0.16C-1.54Mn-1.98P-0.13V	0.55	376	1173
Fe-0.18C-1.54Mn-0.9P-0.11V	0.55	320	1173
C-Mn steels (containing small additions of V,Nb,Al and Ti)	>0.7	184	1073-1273
Fe-0.03 to 0.1C-3.9Ni-3Mo-1.58Ti	0.67	820	1123-1273
Fe-0.03 to 0.1C-3.9Ni-3Mo-1.58Ti-60 ppm B	0.37	634	1123-1273
Fe-0.14C-0.72Mn-0.15Si-0.14V	0.43	242	1073-1223
Fe-26Cr-6.5Ni (also known as IN 744)	0.62	>1000	973-1293
Fe-50Cu	0.5	-	973-1073
Ni (commercial)	0.38	225	1073-1093
Nichrome	0.41	190	1273
Ni-34.9Cr-26.2Fe-0.58Ti	0.5	>1000	1068-1128
Ni-38Cr-14Fe-1.75Ti-1Al	0.5	1000	1083-1253
Ni-39Cr-10Fe-1.75Ti-1Al	0.5	1000	1083-1253
Ni-15.0Co-9.5Cr-5.5Al-5.0Ti-3.0Mo (also known as IN 100)	0.50	1000	1083-1343
Ni-16Cr-8.3Co-3.4Ti-3.4Al-2.6W-1.78Ta-1.75Mo-0.9Nb-0.1Zr-0.17C-0.01B (also known as IN 738)	0.4	500	1073-1273
Powder consolidated NASA-TAZ-8A	-	>600	1255
Powder consolidated U 700	0.42	1000	1300
Powder consolidated NASA-TRW-VIA	-	>300	1366
Powder consolidated IN 713	-	230	1366
Ti (commercial) (also known as RC 70)	0.8	-	1173
Ti-8Mn	0.95	140	853-1173
Ti-15Mo	0.45	450	853-1173
Ti-4Al-0.25O_2	0.6	-	1223-1323
Ti-5Al-2.5Sn	0.72	450	1173-1373
Ti-6Al-4V	0.85	1000	1023-1273
Ti-6Al-5Zr-4Mo-1Cu-0.25Si (also known as IMI 700)	-	300	1073
Ti-11Sn-5Zr-2.25Al-1Mo-0.25Si(also known as IMI 679)	-	500	1073
Co-10Al	0.47	450	1473
Cr-30Co	-	160	1473
Zr-2.5Nb	0.6	430	900-1100
Zircaloy 2 with 0.11 to 2.0 O_2	0.57	2500	1073-1323
Zircaloy 4 with 0.11 to 2.0 O_2	0.57	2500	1073-1323
W-15 to 30Re	0.8	260	2273

Tableau I (suite)

Baudelet et Suery (BAUDELET, 1987) ont étudié le phénomène et l'ont appliqué à la mise en forme d'alliages cuivreux ou d'aciers de construction (35NCD4).

I.D.2 Température et vitesses de déformation

La température, nous l'avons vu, doit être supérieure à 0,5 T_f. En général il existe une température optimale pour laquelle le coefficient m est maximum. Dans le cas du TA6V, comme le montre la figure I.12, ce maximum est atteint entre 900 et 98L PC et correspond aux plus fortes valeurs de la vitesse de déformation.

La gamme des vitesses de déformation se situe principalement dans le domaine des vitesses de fluage. Généralement la vitesse optimum du domaine II de la figure 1.6 est comprise entre 10^{-5} et 10^{-3} s^{-1}.

I.D.3 Stabilité de la structure

Le grossissement des grains ayant été déjà évoqué, ainsi que les moyens de le réduire, il nous faut maintenant dire un mot du phénomène de cavitation pouvant conduire à une rupture prématurée de certains matériaux superplastiques. Cette forme d'endommagement apparaît précisément dans les alliages quasi-monophasés (les cavités sont alors associées à la présence des précipités dont le rôle est d'inhiber la croissance des grains) ou bien dans les alliages présentant des phases de duretés très différentes (en particulier, les laitons). Selon Suery (SUERY, 1985), la croissance des cavités est contrôlée par la déformation plastique de la région qui les environne, ce qui conduit à une loi de croissance du volume de la cavité en fonction du temps, proportionnelle à ce volume. Le facteur de proportionnalité peut alors prendre des valeurs différentes suivant les alliages, comprises entre 2 et 5 généralement. D'un point de vue industriel, afin de supprimer cet endommagement critique du matériau lors de la mise en forme, une solution consiste à superposer à la contrainte appliquée une pression hydrostatique de l'ordre de 50 à 100% de la valeur de la contrainte d'écoulement du matériau (STORY et al. 1985). Ainsi, en mise en forme de tôles d'alliages Al-Li ou 7475 est on conduit à former la tôle dans une enceinte maintenue à une pression de quelques MPa, grâce à une pression différentielle généralement de l'ordre de quelques dizièmes de MPa. Il s'ensuit des

problèmes de régulation et un dimensionnement plus important des presses de formage qui augmentent sensiblement le prix des composants.

I.E CONCLUSION SUR LES CARACTERISTIQUES 6ENERALES DE LA SUPERPLASTICITE

En résumé, nous reprendrons la définition de la superplasticité donnée par Baudelet et Suery et illustrée par le schéma logique de la figure I.13: "la superplasticité est une propriété de déformation plastique à haute température d'un matériau à structure fine mettant en jeu des mécanismes de déformation à valeurs du coefficient m élevées pendant des temps suffisamment longs pour conduire à des déformations à rupture importantes, si aucun endommagement important ne se manifeste en parallèle".

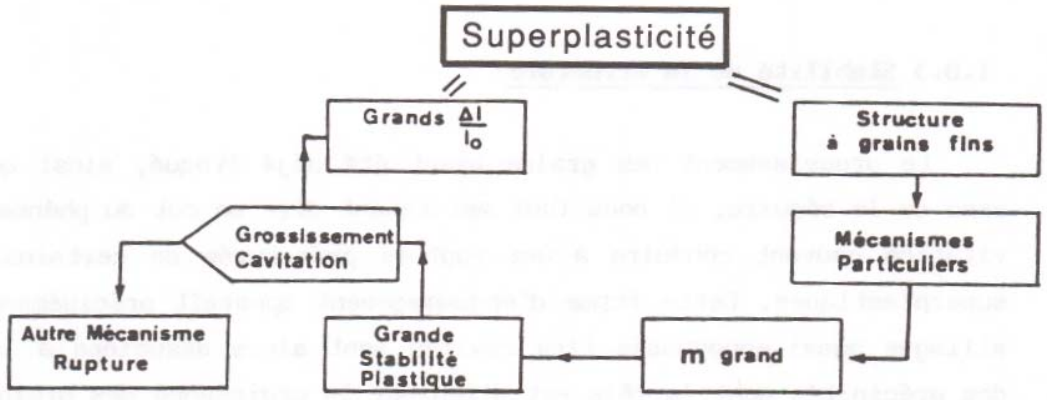


Figure I.13 : Schéma logique montrant les caractéristiques des matériaux superplastiques

CHAPITRE II

Modélisation d'une Tôle Mince Viscoplastique

II.A BIBLIOGRAPHIE

Nous séparerons cette étude bibliographique en deux parties : la première dans laquelle sont exposées les approches mécaniques utilisées pour traiter les grandes déformations de produits minces, qu'ils soient élastiques, élasto-plastiques ou viscoplastiques. Dans la seconde partie seront discutées les différentes options possibles pour rendre compte de la visco-plasticité du matériau.

II.A.1 Les différentes approches mécaniques

Une première manière d'appréhender le problème est d'écrire les équations de la mécanique des milieux continus pour les solides déformables sans essayer de tirer parti de la minceur du produit. Cette approche "volumique" a permis d'obtenir des résultats rapidement par simple application de codes de calcul initialement développés pour étudier la mise en forme de pièces massives (forgeage...). Elle a donné lieu à des résultats récents sur des géométries simples axisymétriques (CHANDRASEKARAN, ALLEN, HAISLER et GOFORTH 1987, ZHANG, WOOD et ZIENKIEWICZ 1986, ARGYRIS et DOLTSINIS 1984). Cependant, une telle approche implique évidemment des temps de calcul et des capacités de stockage informatique élevés et les conclusions des articles précédents évoquent la nécessité de mettre en oeuvre des approches plus "économiques".

La théorie des coques (TIMOSHENKO 1961, BUDIANSKY 1968, WEMPNER 1981) fournit plusieurs modèles correspondant à différents niveaux d'approximation de la cinématique de la coque. L'hypothèse généralement faite, dite de Kirchhoff, est celle de la conservation de la normale à la coque. Le tenseur incrémental des déformations entre deux configurations est alors composé des déformations de membrane (déformations dans le plan tangent à la surface de référence) et d'une partie due à la variation du tenseur fondamental de courbure (flexion) et qui, au premier ordre, est linéaire dans l'épaisseur de la coque.

Ce modèle de coque mince a été utilisé par de nombreux auteurs : pour application au gonflage hydraulique de diaphragme, avec un modèle tridimen-sionnel (GOTOH 1974), à l'emboutissage axisymétrique (ZIENKIEWICZ et ONATE

1979, ONATE et ZIENKIEWICZ 1983, WOOD, MATTIASON, HONNUR et ZIENKIEWICZ 1985) ou encore à l'étude de tests de plissement en 3D (BATOZ 1987). Il faut noter que parmi les auteurs précédents, aucun n'a utilisé les coordonnées curvilignes. Pourtant ce formalisme permet, en identifiant chacun des points matériels de la surface de référence par ses coordonnées initiales, d'éviter maints changements de repère pour se ramener dans le plan tangent à la tôle. D'autre part, les calculs internes aux éléments finis sont plus rapides car les fonctions d'interpolation et leurs dérivées sont constantes lorsqu'elles sont exprimées en fonction des coordonnées initiales. Ces avantages ont été soulignés par Wood et sont actuellement mis à profit dans un modèle de coque mince appliqué au formage superplastique (BONET, WOOD 1987) alors qu'auparavant, seul Wifi avait adopté ce formalisme, mais pour une approche volumique (WIFI 1976).

Une seconde approximation plus radicale est donnée par le modèle de membrane : la contribution de la flexion à la déformation est alors négligée et les déformations et contraintes (planes) sont homogènes dans l'épaisseur du matériau. Autrement dit, la tôle peut alors être assimilée à sa seule surface de référence. La paramétrisation de celle-ci par deux coordonnées curvilignes est alors la solution la plus efficace pour mener les calculs, ainsi que l'ont prouvé de nombreux travaux (ODEN et SATU 1967, WANG et BUDIANSKY 1978, WANG et WENNER 1978, KOBAYASHI et KIM 1978, TAKEZONO, NAKAMACHI et YAMAGUCHI 1980, TANG 1981, NAKAMACHI, TAKEZUNO et SOWERBY 1982, WANG 1984, MATTIASSON et MELANDER 1985, WOOD, MATTIASSON, HONNOR et ZIENKIEWICZ 1985, DOLTSINIS et al. 1987, GERMAIN, CHUNG, WAGONER et LEE 1987). A propos de la validité de l'approximation membrane, il est intéressant de mentionner les conclusions de Stoughton : après avoir introduit les effets de flexion dans le modèle de Wang et Budiansky, il apparaît que ces effets n'ont quasiment aucune influence sur le calcul des déformations dès que le rapport du rayon de courbure sur l'épaisseur de la tôle dépasse la valeur de 6 environ (STOUGHTUN 1985). Cette estimation rend l'approximation membrane tout à fait légitime dans une grande majorité des cas de mise en forme de tôles rencontrés dans la pratique.

II.A.2 Les modèles de comportement

La viscoplasticité peut être envisagée suivant le point de vue de la mécanique des solides, le comportement étant alors élasto-viscoplastique,

ou bien selon une approche de type "fluide" avec un matériau purement viscoplastique dit de Norton-Hoff. La première approche est très utilisée pour l'étude du fluage de structures métalliques pouvant être sollicitées thermiquement (OWEN et DAMJANIC 1982, DINIS et OWEN 1982). Dans le domaine de la mise en forme à chaud, les effets élastiques sont généralement très faibles en comparaison des effets plastiques . aussi est-il d'usage de les négliger et d'adopter l'approche "fluide". Dans le domaine d'application qui nous préoccupe, citons les références suivantes : (KOBAYASHI et KIM 1978, WANG 1984, DOLTSINIS et al. 1987, BONET et WOOD 1987, GERMAIN, CHUNG, WAGONER et LEE 1987).

11.8 LE MODELÉ PROPOSE : UNE MECANIIJUE DE MEMBRANE

La formulation mécanique que nous exposons ci-après a été développée parallèlement pour application à la simulation de l'emboutissage à froid et du formage superplastique. Elle a déjà fait l'objet de diverses communications (MASSONI, BELLET, ABOUAF, CHENOT 1986, BELLET, MASSONI, CHENOT 1987). Aussi dans cette partie ne ferons nous essentiellement qu'un rappel de ces considérations mécaniques exposées en détail dans la thèse d'E. Massoni (MASSONI 1987). En ce qui concerne l'utilisation des coordonnées curvilignes et la théorie des coques minces, le lecteur pourra consulter les articles ou ouvrages de référence suivants (KITAGAWA et TOMITA 1971, KITAGAWA, SEGUCHI et TOMITA 1972, WEMPNER 1981, MASON 1980).

II.B.1 Coordonnées curvilignes

Nous avons vu précédemment que l'utilisation des coordonnées curvilignes s'impose lorsqu'on fait une approximation de type membrane. Dans un souci de généralité, nous faisons ci-après quelques rappels concernant leur mise en oeuvre pour étudier la déformation d'un solide dans un espace à trois dimensions. Nous verrons par la suite leur application à un modèle de membrane.

Dans la figure II.1, la position du point M appartenant au solide de configuration Q est donnée par le vecteur([1]).

$$\mathbf{r} = x_i \, \mathbf{I}_i \qquad \text{(II.1)}$$

(1) Dans la suite on utilisera la convention d'Einstein de sommation des indices répétés.

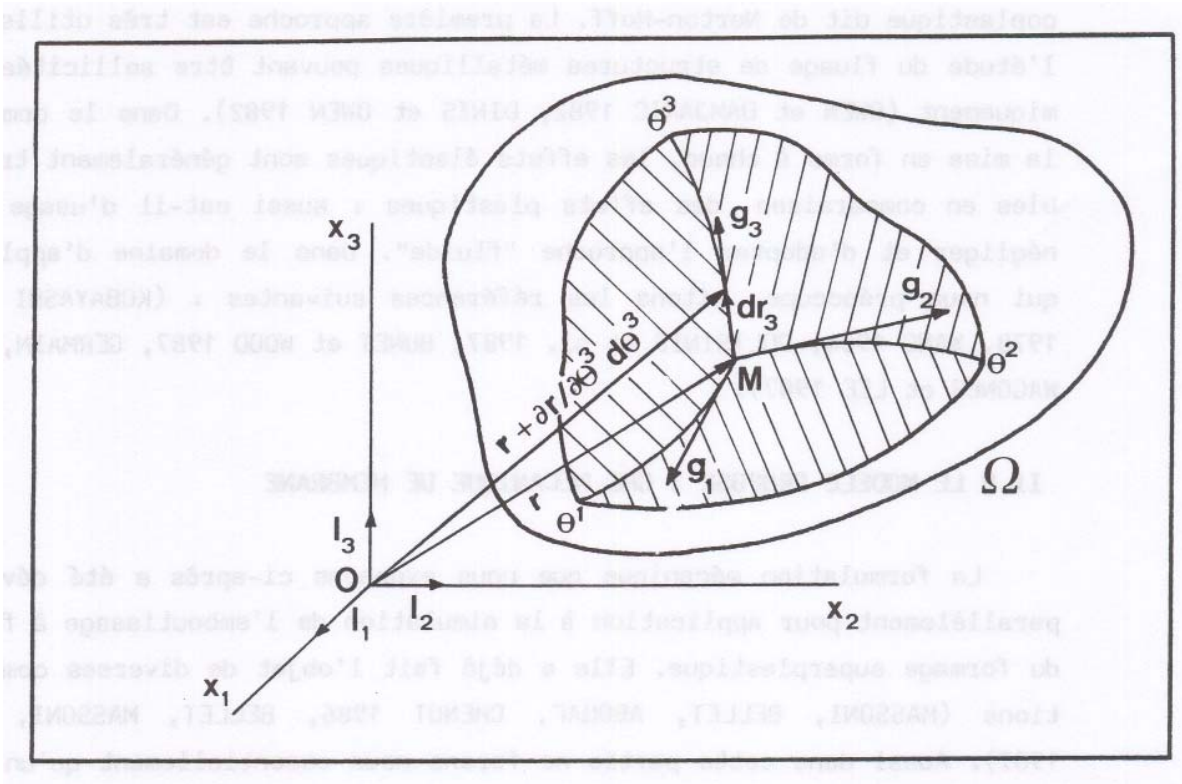


Figure II.1 : Coordonnées curvilignes

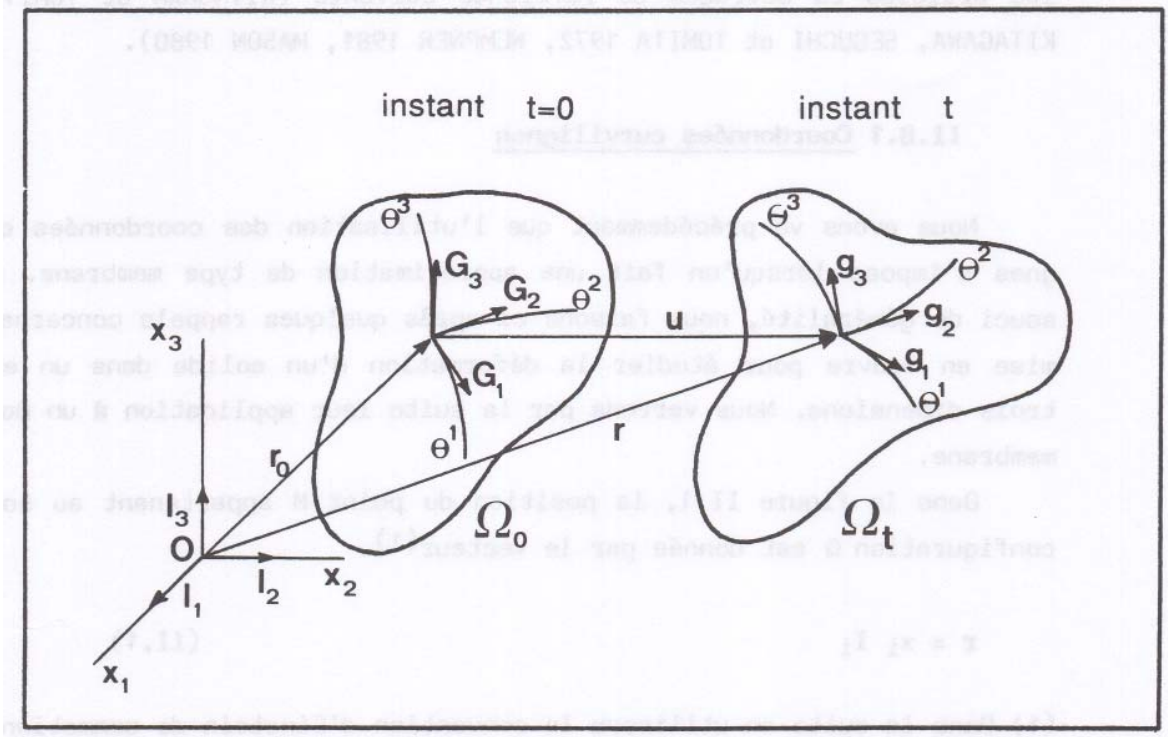


Figure II.2 : Cinématique

où les xi sont les coordonnées dans le repère orthonormé ($\mathbf{0, I_1, I_2, I_3}$) fixe du laboratoire. On suppose que chaque point matériel du solide est repéré, quelle que soit la configuration prise par le solide, par 3 coordonnées curvilignes θ^i constantes. On suppose donc, pour chaque configuration, l'existence de relations biunivoques $xi=xi(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ et $\theta^i = \theta^i(x_1, x_2, x_3)$, les fonctions considérées ayant les propriétés de continuité et de dérivabilité requises par l'analyse qui va suivre.

Les courbes θ^1, θ^2, θ^3 issues du point M de la figure II.1 correspondent à des valeurs fixées des deux autres coordonnées curvilignes. Il apparaft qu'une variation infinitésimale $d\theta^i$ s'accompagne d'une variation dr du vecteur position, tangente à la courbe θ^i. Il s'ensuit que le vecteur

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial x_j}{\partial \theta^i} \mathbf{I}_j \qquad \text{(II.2)}$$

est tangent à la courbe θ^i au point M. La base ($\mathbf{g_1}$, $\mathbf{g_2}$, $\mathbf{g_3}$) est appelée base tangente au point M. On peut alors définir une base réciproque de vecteurs $\mathbf{g}^i$ tels que

$$\mathbf{g}^i . \mathbf{g}_j = \delta^i_j \qquad \text{(II.3)}$$

Les vecteurs $\mathbf{g}^i$ sont alors normaux aux surfaces de paramètre θ^i. Il faut noter qu'en général les vecteurs tangents et normaux ne sont ni unitaires, ni orthogonaux. La décomposition des vecteurs tangents dans la base normale et vice-versa donne

$$\mathbf{g}_i = g_{ij} \mathbf{g}^j \quad \text{et} \quad \mathbf{g}^i = g^{ij} \mathbf{g}_j \qquad \text{(II.4)}$$

Les g_{ij} sont les composantes covariantes du tenseur métrique. Il résulte de (II.3) et (II.4) que

$$g_{ij} = \mathbf{g}_i . \mathbf{g}_j \qquad g^{ij} = \mathbf{g}^i . \mathbf{g}^j \qquad \text{(II.5)}$$

$$g^{in} g_{nj} = \delta^i_j$$

Un élément d'arc est alors donné par :

$$ds^2 = d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = g_i d\theta^i \cdot g_j d\theta^j = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \qquad (II.6)$$

Tout vecteur **v** ou tenseur **t** peut être décomposé selon $\mathbf{g}_i$ ou $\mathbf{g}^i$.Un a alors les formules suivantes .

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{g}_i = v_i \mathbf{g}^i \\ v^i &= g^{ij} v_j \qquad v_i = g_{ij} v^j \\ \mathbf{t} &= t^{ij} \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j = t_{ij} \mathbf{g}^i \times \mathbf{g}^j \\ t^{ij} &= g^{im} g^{jn} t_{mn} \end{aligned} \qquad (II.7)$$

II.8.1a Dérivation covariante

Cas d'un vecteur **v**

On définit la dérivée covariante de la composante contravariante vi (respectivement de la composante covariante v_i) du vecteur **v** dans la base tangente $\mathbf{g}_i$ (respectivement dans la base réciproque $\mathbf{g}^i$ comme étant la composante dans cette base de la dérivée partielle du vecteur **v** par rapport à θ^i

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta^j} = v^i{}_{/j}\, \mathbf{g}_i = v_{i/j}\, \mathbf{g}^i \qquad (II.8)$$

$$\text{On a donc } v^i{}_{/j} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta^j} \cdot \mathbf{g}^i \qquad (II.9)$$

$$v^i{}_{/j} = g^{ik}\, v_{k/j}$$

Pour exprimer facilement ces dérivées covariantes, on introduit les symboles de Christoffel qui sont les composantes des dérivées partielles des vecteurs de base.

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial \theta^j} = \Gamma_{ijk}\, \mathbf{g}^k = \Gamma_{ij}{}^k\, \mathbf{g}_k \qquad (II.10)$$

Les coefficients Γ sont représentatifs de la courbure des axes de coordonnées curvilignes : pour que les coordonnées θ^i soient rectilignes, il faut et il suffit que tous les Γ_{ijk} soient nuls.

On démontre les relations :

$$v^j{}_{/i} = \frac{\partial v^j}{\partial \theta^i} + \Gamma_{ik}{}^j v^k \qquad \text{(II.11)}$$

$$v_{j/i} = \frac{\partial v_j}{\partial \theta^i} - \Gamma_{ij}{}^k v_k$$

Cas d'un tenseur **t**

De manière analogue à un vecteur, on a

$$\frac{\partial \mathbf{t}}{\partial \theta^k} = t^{ij}{}_{/k}\ \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$$

et on montre que :

$$t^{ij}{}_{/k} = \frac{\partial t^{ij}}{\partial \theta^k} + t^{nj}\ \Gamma_{nk}{}^i + t^{in}\ \Gamma_{nk}{}^j \qquad \text{(II.12)}$$

II.B.2 Déformations

Reprenons le solide de la figure II.1 et considérons sa configuration initiale Ω_0 et sa configuration à l'instant t, Ω_t (figure II.2). Un point matériel M occupant la position M_0 à t = 0 se trouve en M_t à l'instant t. Au point M les bases tangentes à t = 0 et à t sont respectivement $\mathbf{G_i}$ et $\mathbf{g_i}$. Le point M subit un déplacement **u** au cours de la transformation. Si $\mathbf{r_o}$ et **r** sont les vecteurs positions de M à t = 0 et à t on a :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r_0} + \mathbf{u} \qquad \text{(II.13)}$$

Le tenseur des déformations de Green-Lagrange ε est défini par la variation du produit scalaire, cette variation étant évaluée par rapport au produit scalaire dans la configuration initiale. Ainsi, partant au voisinage de M_0, de deux vecteurs matériels **dL** et **δL** , se transformant en **dl** et **δl**, on a

$$\mathbf{dL} = \mathbf{G}_i d\theta^i \qquad \text{et} \quad \delta\mathbf{L} = \mathbf{G}_i \delta\theta^i$$
$$\mathbf{dl} = \mathbf{g}_i d\theta^i \qquad \text{et} \quad \delta\mathbf{l} = \mathbf{g}_i \delta\theta^i$$

et le tenseur ε est donné par :

$$\mathbf{dl} \cdot \delta\mathbf{l} - \mathbf{dL} \cdot \delta\mathbf{L} = 2\, \mathbf{dL} \cdot \boldsymbol{\varepsilon} . \delta\mathbf{L}$$

ce qui s'écrit

$$g_{ij} d\theta^i \delta\theta^j - G_{ij} d\theta^i \delta\theta^j = 2\, d\theta^i \varepsilon_{ij} \delta\theta^j$$

soit finalement :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (g_{ij} - G_{ij}) \qquad \text{(II.14)}$$

Une mesure des déformations est donc donnée par la simple différence des composantes des tenseurs métriques. Il faut noter que les composantes ε_{ij}, n'ont pas la signification physique des composantes cartésiennes du tenseur **ε**. Par exemple, on montre facilement que la déformation physique - c'est-à-dire l'allongement relatif local $\delta(\Delta L)/AL$ - selon la courbe θ^1 est :

$$\gamma_{11} = \frac{\varepsilon_{11}}{g_{11}}$$

et plus généralement $\gamma_{ij} = \dfrac{\varepsilon_{ij}}{\sqrt{g_{ii} g_{jj}}}$ (II.15)

On peut faire apparaltre la relation entre le tenseur de déformation et le champ de déplacement **u** de la manière suivante

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial (\mathbf{r}_0 + \mathbf{u})}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \theta^i} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta^i}$$

ce qui donne en vertu de (II.8) (dérivation covariante Ω_0)

$$\mathbf{g}_i = G_i + u_{m/i}\, G^m = (\delta^m{}_i + u^m{}_{/i})\, G_m \qquad (II.16)$$

En tenant compte de (II.3), (II.5), (II.9) et (II.14) on obtient finalement une autre expression de ε_{ij} :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\,(u_{i/j} + u_{j/i} + u_{m/i} u^m{}_{/j}) \qquad (II.17)$$

II.B.3 Contraintes

L'état de contrainte du solide dans sa configuration à l'instant t peut être décrit de multiples façons selon que l'on choisit de caractériser l'élément de surface dans la configuration Ω_0 ou Ω_t et que l'on exprime le vecteur contrainte dans la base $\mathbf{G_i}$ ou $\mathbf{g_i}$. Soit **df** la force élémentaire de cohésion interne s'exerçant sur une partie du solide, dans sa configuration déformée Ω_t, à travers un élément de surface ds, de normale extérieure **n** . Le vecteur contrainte **t** , défini par **df = t** ds, dépend alors linéairement du vecteur normal **n** , et le tenseur des contraintes de Cauchy est défini par :

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\, \mathbf{n} \qquad (II.18)$$

En coordonnées curvilignes, $\boldsymbol{\sigma}$, qui est symétrique, peut s'écrire dans la configuration Ω_t :

$$\boldsymbol{\sigma} = \sigma^{ij}\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j \qquad (II.19)$$

or $n = n_i \mathbf{g}^i$

on a alors $\mathbf{t} = \sigma^{ij} n_i \mathbf{g}_j$ (II.20)

Il est possible de définir d'autres tenseurs de contraintes selon qu'on choisit de caractériser l'élément de surface dans la configuration

non-déformée Ω_0 plutôt que dans Ω_t, ou que l'on transporte le vecteur **df** . Dans le premier cas, soit dS l'élément de surface (de normale **N**) dans Ω_0 qui est transformé en ds de normale **n** . Le vecteur contrainte **T** par rapport à cette surface est donné par :

$$\mathbf{df} = \mathbf{T}\, dS = \mathbf{t}\, ds \qquad \text{(II.21)}$$

et l'on définit le premier tenseur de Piola-Kirchhoff, de composantes contravariantes τ^{ij} dans la base G par :

$$\mathbf{df} = dS\, \tau^{ij} N_i G_j \qquad \text{(II.22)}$$

Dans le second cas, si on note **F** l'application linéaire tangente faisant passer de la configuration Ω_0 à la configuration Ω_t, on définit le second tenseur de Piola Kirchhoff, de composantes τ^{ij} dans la base **G** par:

$$\mathbf{F}^{-1}\,(\,\mathbf{df}\,) = dS\, \pi^{ij} N_i G_j \qquad \text{(II.23)}$$

D'autre part nous noterons k^{ij} les composantes dans la base **g** du tenseur de Kirchhoff :

$$k^{ij} = J\, \sigma^{ij} \qquad \text{(II.24)}$$

où J est le déterminant de l'application linéaire tangente **F** . On montre que

$$J = \det F = \sqrt{g/G}$$

où g et G désignent respectivement les déterminants des tenseurs métriques des configurations Ω_t et Ω_0. On démontre alors la relation :

$$ds\, n_i = J\, dS\, N_i \qquad \text{(II.25)}$$

Il en découle alors les relations suivantes (en tenant compte de (II.16)) entre les composantes des différents tenseurs de contraintes :

$$\tau^{ki} = J\, \sigma^{ji} \left(\delta^k{}_j + u^k{}_{/j}\right) \qquad \text{(II.26)}$$

$$\pi^{ij} = J\, \sigma^{ij} = k^{ij} \qquad \text{(II.27)}$$

II.B.4 Application à un modèle de membrane

Dans le cas présent, notre objectif étant un modèle mécanique représentatif d'un produit mince, nous adopterons l'approximation la plus simple de la théorie des coques minces, qui est un modèle de membrane : les déformations envisagées sont les déformations de la seule surface de référence, à laquelle est assimilée en fait toute la tôle puisqu'on suppose l'homogénéité des variables mécaniques à travers l'épaisseur du produit. Cela entraîne naturellement la disparition de la coordonnée curviligne θ^3 dans l'épaisseur, le vecteur $\mathbf{g}_3$ étant simplement la normale aux vecteurs tangents à la tôle $\mathbf{g}_1$ et $\mathbf{g}_2$. La tôle est alors assimilée à l'ensemble des points matériels de sa surface de référence, chacun de ces points ayant une épaisseur de tôle associée h :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}\,(\theta^1,\theta^2) \qquad (II.28)$$
$$h = h\,(\theta^1,\theta^2)$$

La base tangente est donc la suivante :

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^1} \qquad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta^2}$$
$$\mathbf{g}_3 = \frac{1}{\| \mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2 \|}\, \mathbf{g}_1 \wedge \mathbf{g}_2$$

Les relations des parties II.B.1,2,3 sont encore valables avec

$$g^{33} = g_{33} = 1 \qquad \text{et} \qquad g^{i3} = g_{i3} = 0 \qquad \forall i = 1,2$$

L'élément de surface de la membrane est alors donné par

$$ds = \sqrt{g}\; d\theta^1\; d\theta^2 \qquad (II.29)$$

Il en résulte que

$$J = \frac{h\, ds}{H\, dS} = \frac{h}{H}\sqrt{\frac{g}{G}} \qquad (II.30)$$

où h et H sont respectivement l'épaisseur locale dans la configuration Ω_t et Ω_0, et où g et G désignent cette fois les déterminants des tenseurs métriques de membrane.

II.B.5 Equilibre mécanique d'une membrane

En négligeant les effets d'inertie et de pesanteur, l'équation d'équilibre se réduit à

$$\mathbf{div}\ \sigma = 0 \qquad \text{(II.31)}$$

soit en coordonnées curvilignes,

$$\sigma^{ij}{}_{/j} = 0 \qquad i = 1,3$$

où les dérivées convectives du tenseur des contraites sont données par les formules (II.12). Dans la logique de l'approximation membrane qui vient d'être précisée au II.B.4, nous ferons l'hypothèse d'un état de contraintes planes ($\sigma^{i3} = 0$ pour $i = 1,2,3$). Il faut remarquer alors que l'équation d'équilibre ci-dessus, écrite dans la direction normale à la tôle ($i = 3$) se ramène à :

$$\Gamma_{ij}{}^{3}\ \sigma^{ij} = 0 \qquad i,j = 1,2$$

ce qui est la forme générale des relations de Laplace, exprimant les contraintes normales en fonction du rayon de courbure et des contraintes tangentielles (MASSONI, 1987).

Il est classique dans le formalisme de la mécanique des milieux continus et en vue d'une résolution par la méthode des éléments finis, de réécrire l'équation d'équilibre (II.31) sous la forme variationnelle du théorème des puissances virtuelles

Pour tout champ de vitesse **v***

$$\int_{\Omega} \sigma : \dot{\varepsilon}\ (\ \mathbf{v^*}\ )dv - \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}\ .\ \mathbf{v^*}\ ds = 0 \qquad \text{(II.32)}$$

Selon l'hypothèse membrane, la puissance dissipée par les efforts normaux à la tôle et par les efforts de flexion sera négligée devant celle des efforts d'expansion dans le plan de la tôle, et nous écrirons donc, dans le repère curviligne associé à la configuration Ω :

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \dot{\varepsilon}^{*}_{ij} \, h \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^{*} ds = 0 \qquad \text{(II.33)}$$

où i,j varient de 1 à 2 seulement. Le tenseur σ étant symétrique et $\dot{\varepsilon}^{*}$ étant défini par

$$\dot{\varepsilon}^{*}_{ij} = \frac{1}{2} \left(v^{*}_{i/j} + v^{*}_{j/i} \right) \qquad \text{(II.34)}$$

l'équation II.33 peut encore s'écrire

$$\int_{\Omega} \sigma^{ij} \, v^{*}_{i/j} \, h \, ds - \int_{\Omega} \mathbf{T} \cdot \mathbf{v}^{*} \, ds = 0 \qquad \text{(II.35)}$$

Il est à noter que la puissance dissipée par les efforts externes **T** , qui sont dans notre cas la pression de formage ou les cissions de frottement contre l'outil, est intégrée sur la surface Ω de la membrane, dans la même optique, l'élément de volume dv s'écrit hds où h est l'épaisseur locale et ds l'élément de surface de la membrane.

II.C COMPORTEMENT

Après avoir tracé le cadre mécanique dans lequel nous résoudrons le problème d'écoulement, il nous faut maintenant préciser le comportement du matériau. Nous avons vu dans le premier chapitre que les matériaux superplastiques obéissent en général à une loi de fluage de type "loi puissance", avec absence de seuil. Il nous faut alors reparler du choix entre le point de vue de la mécanique des solides - c'est-à-dire un comportement élastique-viscoplastique - et celui d'une approche de type "fluide", avec un matériau purement viscoplastique de Norton-Hoff.

Au CEMEF, cette dernière approche a déjà été largement utilisée pour la modélisation du forgeage et du laminage à chaud, et du gonflement des brames en coulée continue (GERMAIN 1985, BERN 1987, BERTRAND 1987, DAVID 1987, DALIN 1987). Néanmoins il a été montré que l'élasticité pouvait avoir des effets observables localement (BERN 1987, DALIN 1987) et qu'une modélisation fine se devait de la prendre en compte, ce qui dans le cas de problèmes stationnaires, implique des difficultés numériques supplémentaires. Pour notre part, nous avons conservé la possibilité de tenir compte de l'élasticité, ceci notamment en vue de pouvoir appliquer notre modèle au cas du thermoformage de matériaux polymères plus élastiques.

II.C.1 Elasto-viscoplasticité

La loi de comportement s'écrit, dans le cadre du modèle viscoplastique de Perzyna (PERZYNA, 1963),

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(el)} + \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} \qquad \text{(II.36.a)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(el)} \qquad \text{(II.36.b)}$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \gamma < \Phi(f) > \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(II.36.c)}$$

où $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation (partie symétrique du tenseur gradient de vitesse), où $\dot{\sigma}$ est une vitesse de contraintes dont nous discuterons le choix au chapitre III. $\mathbf{E}$ est le tenseur d'élasticité, d'ordre 4, γ la "fluidité" du matériau et $<\Phi(f)>$ la fonction d'écoulement qui est non-nulle pour les seules valeurs positives de $\Phi(f)$. f est une fonction scalaire représentant l'excès de contrainte par rapport au seuil de plasticité statique σ_0 (à partir duquel apparaissent des déformations irréversibles) :

$$f = \sigma_{eq} - \sigma_0 \qquad \text{(II.37)}$$

$$\text{avec } \sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2} \text{ Trace } (\mathbf{s}^2)\right]^{1/2} \qquad \text{(II.38)}$$

où σ_{eq} est la contrainte équivalente de Von Mises, fonction du déviateur des contraintes $\mathbf{s}$. La relation (II.36.c) exprime alors simplement que la vitesse de déformation viscoplastique est fonction de l'excès de contrainte f. On a alors pour la loi d'écoulement associée à f, c'est-à-dire vérifiant le principe du travail maximal,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \gamma < \Phi\ (f) > \frac{3}{2\sigma_{eq}}\, \mathbf{s} \qquad \text{(II.39)}$$

En introduisant la vitesse de déformation équivalente de Von Mises donnée par

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \left[\frac{2}{3} \text{ Trace } (\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)^2})\right]^{1/2} \qquad \text{(II.40)}$$

il vient : $< \Phi(f) > = \dot{\varepsilon}_{eq}/\gamma$

et la relation (II.39) s'écrit alors sous la forme plus classique, lorsqu'il y a écoulement viscoplastique,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \frac{3\,\dot{\varepsilon}_{eq}}{2\,\sigma_{eq}}\,\mathbf{s} \qquad \text{(II.41)}$$

Dans le cas qui nous concerne, nous avons vu au chapitre I que la loi de comportement est de la forme :

$$\sigma_{eq} = k\,\dot{\varepsilon}_{eq}^{\,m}$$

avec une absence de seuil, soit $\sigma_0 = 0$

Il en résulte que :

$$< \Phi(f) > = < \Phi(\sigma_{eq}) > = \dot{\varepsilon}_{eq}/\gamma = \left(\frac{\sigma_{eq}}{k}\right)^{1/m} \frac{1}{\gamma}$$

On en déduit :

$$\gamma = k^{-1/m}$$

$$\Phi(f) = f^{1/m}$$

et la relation (II.39) fait apparaître la vitesse de déformation viscoplastique comme étant la dérivée d'un potentiel viscoplastique Q par rapport au tenseur des contraintes

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \qquad \text{(II.42)}$$

$$Q = \gamma\,\frac{m}{m+1}\,(\sigma_{eq})^{(m+1)/m} \qquad \text{(II.43)}$$

On a évidemment :

$$\dot{\varepsilon}_{eq} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{eq}} \qquad \text{(II.44)}$$

II.C.1.a - Application au cas de la membrane

Nous nous placerons donc ici en système de coordonnées curvilignes et dans un état de contraintes planes. Dans ce cadre la loi de Hooke s'écrit (MASSONI, 1987).

$$\dot{\sigma}^{ij} = 2\mu \left[g^{ip}\, g^{jq} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\, g^{ij}\, g^{pq} \right] \dot{\varepsilon}^{(el)}_{pq} \qquad (II.45)$$

$$i,j,p,q = 1,2$$

où λ et μ sont les coefficients de Lamé et g la métrique de la configuration. Le tenseur d'élasticité de la relation II.36.b est alors donné en composantes contravariantes par :

$$E^{ijpq} = \mu \left[g^{ip}\, g^{jq} + g^{iq}\, g^{jp} + \frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu}\, g^{ij}\, g^{pq} \right] \qquad (II.46)$$

Par ailleurs, la contrainte équivalente de Von Mises est donnée par :

$$\sigma_{eq} = \left[\frac{3}{2}\, s^{ij} s_{ij} \right]^{1/2} \qquad (II.47)$$

$$i,j = 1,2$$

où le déviateur des contraintes s est donné (en composantes contraviantes) par :

$$s^{ij} = \sigma^{ij} - \frac{1}{3}\, g^{ij}\, g_{rs} \sigma^{rs} \qquad (II.48)$$

$$i,j,r,s = 1,2$$

En adoptant la notation vectorielle ${}^t\sigma = (\sigma^{11}\ \sigma^{22}\ \sigma^{12})$ et

${}^t\dot{\mathcal{E}} = (\dot{\mathcal{E}}_{11}\ \dot{\mathcal{E}}_{22}\ \dot{\mathcal{E}}_{12})$ et en reportant (II.48) dans (II.47), on obtient

$$\sigma_{eq} = ({}^t \sigma\, \mathbf{A}\, \sigma)^{1/2} \qquad (II.49)$$

où **A** est une matrice 3x3 construite à partir d'un tenseur d'ordre 4 de composantes :

$$A_{ijkl} = \frac{3}{2}\, g_{ik} g_{jl} - \frac{1}{2}\, g_{ij} g_{kl}$$

On a alors $\frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} = \frac{1}{\sigma_{eq}} \mathbf{A}\,\sigma$ (II.50)

et la vitesse de déformation viscoplastique est alors donnée par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{eq}} \frac{\partial \sigma_{eq}}{\partial \sigma} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}} \mathbf{A}\,\sigma \qquad \text{(II.51)}$$

avec $\dot{\mathcal{E}}_{eq}$ définie ainsi :

$$\dot{\varepsilon}^2_{eq} = {}^t \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} \mathbf{A}^{-1} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} \qquad \text{(II.52)}$$

En résumé, le système d'équations (II.36) s'écrit en coordonnées curvilignes :

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}^{(el)}_{ij} + \dot{\varepsilon}^{(vp)}_{ij} \qquad \text{(II.53.a)}$$

$$\dot{\sigma}^{ij} = E^{ijkl}\, \dot{\varepsilon}^{(el)}_{kl} \qquad \text{(II.53.b)}$$

$$\dot{\varepsilon}^{(vp)}_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma^{ij}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}} A_{ijkl}\, \sigma^{kl} \qquad \text{(II.53.c)}$$

avec $\dot{\mathcal{E}}$ défini, de la même manière que (II.34) en fonction du champ de vitesse v par

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} (v_{i/j} + v_{j/i}) \qquad \text{(II.54)}$$

II.C.2 <u>Viscoplasticité pure</u>

Le système d'équations (II.36) se réduit alors à :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}} \mathbf{s} \qquad \text{(II.55)}$$

soit en coordonnées curvilignes, pour une membrane,

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma^{ij}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}} A_{ijkl} \sigma^{kl} \qquad (II.56)$$

II.D FROTTEMENT

Au vu du comportement viscoplastique du matériau, nous pouvons envisager de traiter le frottement suivant deux idéalisations classiques : tout d'abord le modèle viscoplastique dans lequel la cission de frottement est engendrée par le cisaillement d'une couche limite viscoplastique de faible épaisseur à l'interface outil/matériau. On obtient alors

$$\tau_f = - K_f \| \Delta v \|^{p-1} \Delta v \qquad (II.57)$$

où Δv est la vitesse relative du matériau par rapport à l'outil,
p est la sensibilité à la vitesse du matériau de la couche limite
et Kf le coefficient de frottement, fonction de p, de la consistance du matériau dans la couche limite et de son épaisseur.

Le second modèle est celui de Coulomb où l'on a proportionnalité entre contrainte normale et cission tangentielle. En remarquant que pour une tôle mince au contact d'un moule, la contrainte normale peut être assimilée à la pression gazeuse de mise en forme, cette loi s'écrit :

$$\tau_f = - \mu p \| \Delta v \|^{-1} \Delta v \qquad (II.58)$$

Le choix entre ces deux modèles est délicat. Dans la pratique du formage superplastique, on utilise des produits résistant à haute température (tels le nitrure de bore) dont le rôle est de lubrifier le contact mais aussi de faciliter le démoulage de la pièce. Dans l'état actuel de la technologie, c'est dans l'usage de ces produits que réside, entre autres, le savoir faire de chaque industriel : aussi les données concernant les coefficients de frottement sont elles rares et imprécises. Pour notre part nous utilisons les deux modèles avec une préférence pour la loi de Coulomb, dont on sait qu'elle est bien adaptée dans le cas de faibles contraintes normales. La valeur du coefficient μ semble se situer entre 0,05 et 0,3 suivant les lubrifiants utilisés.

CHAPITRE III

Résolution du Problème Numérique

Dans ce chapitre, nous nous donnerons les moyens de calculer l'évolution d'une tôle viscoplastique soumise à des conditions aux limites consistant d'une part en une pression appliquée sur la totalité de la tôle, et d'autre part en des conditions cohérentes à la frontière : dans chaque direction, sont imposées soit la composante du vecteur vitesse (cas du contact avec l'outil), soit la composante du vecteur contrainte (cas du bord libre ou du frottement contre l'outil).

Nous avons choisi, comme de nombreux auteurs, la méthode des éléments finis pour résoudre l'équation variationnelle d'équilibre; ceci en raison de la précision et de la souplesse d'utilisation de cette technique, que nous exposerons brièvement dans la partie III.B. Pour une présentation générale de la méthode, nous invitons le lecteur à se référer à (ZIENKIEWICZ 1979, DHATT 1981). L'application de cette méthode à l'analyse des structures non-linéaires s'est développée avec succès depuis bientôt une vingtaine d'années. Les problèmes à traiter sont de deux ordres : tout d'abord, résoudre numériquement les équations d'équilibre, après les avoir discrétisées. En second lieu, il s'agit d'intégrer les lois de comportement du matériau le long du chemin de déformation. La méthode la plus utilisée, encore actuellement dans les codes de calculs industriels, dérive de la méthode dite de la "contrainte initiale" proposée par Zienkiewicz (ZIENKIEWICZ, VALLIAPAN et KING 1969, ZIENKIEWICZ et CORMEAU 1974). Le lecteur trouvera dans (BRAUDEL 1986) une analyse critique détaillée de cette méthode. Pour résumer, nous dirons qu'étant donnée une discrétisation temporelle (incréments de temps ou chargement incrémental en élastoplasticité instantanée), elle résoud l'équation d'équilibre en intégrant simultanément la loi de comportement. L'équation d'équilibre est résolue de manière itérative par des méthodes dites de "quasi-Newton", dans lesquelles la matrice de raideur est une approximation plus ou moins précise de la matrice de raideur tangente exacte. La convergence est alors en général lente, voire impossible, et la taille des incréments limitée. Mais l'inconvénient essentiel réside dans l'intégration des équations de comportement le long du chemin de déformation calculé par la méthode itérative. La solution obtenue dépend alors de "l'itinéraire" suivi pendant la résolution (en anglais "path dependence"), donc de la stratégie de résolution. En outre, les équations élasto-(visco)plastiques, écrites en vitesses (II.C) sont le plus souvent intégrées de manière explicite, ce qui est une source d'erreurs et d'instabilités.

Il faut toutefois souligner qu'un grand nombre d'améliorations ont été développées au cours des quinze dernières années. Nous citerons en particulier :

- des algorithmes divers pour accélérer la convergence (NAYAK et ZIENKIEWICZ 1972, BREZINSKY 1970),
- l'intégration implicite de la loi de comportement (SON 1977) qui évite en élastoplasticité les procédures diverses de retour sur le critère, inhérentes au schéma explicite (KRIEG et KRIEG 1977),
- la technique des "sous-pas" incrémentaux qui assure une borne supérieure de l'erreur d'intégration (NYSSEN 1981).

Néanmoins, cette méthode ou ses variantes ont des performances limitées et des temps de calcul importants (NAGTEGAAL et DE JONG 1981).

L'idée porteuse d'une amélioration possible a été suggérée initialement par Nagtegaal (NAGTEGAAL 1982). Elle consiste à séparer nettement la résolution de l'équilibre et l'intégration de la loi de comportement : en particulier, la détermination de l'état de contrainte en fin d'incrément (qui permet le calcul de l'équilibre) ne doit faire intervenir que des variables mécaniques de début d'incrément et leurs variations sur la totalité de l'incrément, assurant ainsi l'indépendance de la solution par rapport au processus de résolution. C'est l'approche également développée au CEMEF par Abouaf et Braudel (ABOUAF 1985, BRAUDEL 1986). Dans cette optique, le problème majeur est l'intégration de la loi de comportement sur l'incrément de temps At, ce problème étant étroitement lié au mode de détermination de la géométrie de la fin d'incrément. Dans une logique de mécanique du solide, les précédents auteurs (BRAUDEL, ABOUAF, CHENOT 1986) ont privilégié la variable déplacement : une "loi de comportement incrémentale", déduite d'une intégration semi-implicite des équations de comportement, donne la variation de l'état de contraintes en fonction du déplacement.

Pour notre part, nous reprenons cette formulation en l'étendant à l'élastoviscoplasticité traitée dans notre contexte spécifique de contraintes planes, en coordonnées curvilignes et en tenant compte de grandes rotations incrémentales. En vue de quantifier l'influence de l'élasticité sur

la mise en forme d'une tôle viscoplastique, nous avons développé une formulation semblable appliquée au comportement viscoplastique pur.

Une alternative à cette formulation consiste à privilégier non plus la variable déplacement mais vitesse. Si cette approche est classiquement appliquée au fluide de Norton-Hoff (où le champ de vitesse solution minimise une fonctionnelle (HILL 1956)), elle est très rarement utilisée dans la résolution de problèmes élasto-viscoplastiques : Taylor et Becker (TAYLOR, BECKER 1983) ont développé un schéma d'intégration implicite de la loi de comportement mais le champ de vitesse solution de l'équation d'équilibre est intégré explicitement sur l'incrément de temps pour calculer la configuration suivante. C'est ce qui nous a incité à mettre en oeuvre une formulation dont l'idée de base est d'intégrer de manière semi-implicite la loi de comportement et le champ de vitesse solution de l'équilibre, ce second schéma ayant déjà été appliqué au fluide de Norton-Hoff avec succès (BOHATIER, CHENOT 1985). Divers tests numériques, dont les résultats sont exposés en III.C, traduisent les avantages de cette formulation.

III.A DISCRETISATION TEMPORELLE

Pour résoudre l'équation d'équilibre, on pourrait penser transporter les quantités inconnues dans une configuration de référence, parfaitement déterminée. Choisir par exemple la configuration initiale conduirait alors à une formulation Lagrangienne totale par ailleurs adoptée par quelques auteurs pour la mise en forme de tôles (WIFI 1976, TANG 1981). Cependant, la difficulté de prendre en compte l'histoire des déformations et surtout l'évolution des conditions aux limites (contact évolutif) nous fera éliminer cette formulation. Nous lui préférerons, dans la continuité de récents travaux (BRAUDEL, ABOUAF, CHENOT 1986a, 1986b), une formulation incrémentale où l'équation d'équilibre de la tôle à la fin de l'incrément de temps sera écrite et résolue sur la configuration de la tôle à cet instant. Il est à noter que cette formulation se rapproche de la formulation Lagrangienne réactualisée classique en élastoplasticité (MCMEEKING, RICE 1975, NAGTEGAAL, DE JONG 1981) puisqu'on calcule des variations incrémentales des grandeurs mécaniques par rapport à une configuration de référence qui est celle du début d'incrément. En revanche, elle s'en écarte si l'on consi-

dère que l'équation d'équilibre du théorème des travaux virtuels est calculée sur la configuration de fin d'incrément elle-même. En outre, dans notre cas précis, l'utilisation des coordonnées curvilignes, coordonnées des points dans la configuration initiale non-déformée (donc Lagrangiennes) ne doit pas prêter à confusion avec une formulation Lagrangienne totale dont nous avons rappelé le principe plus haut.

Notre problème va donc consister, connaissant la configuration Ω de la tôle à l'instant t, à calculer la nouvelle configuration Ω' en fin d'incrément, à l'instant t+Δt. Sauf contre-indications ponctuelles, nous noterons "prime" les variables mécaniques se rapportant à Ω'.

III.A.1 Formulation incrémentale semi-implicite avec résolution en déplacements

L'équation d'équilibre (II.33) de la configuration de fin d'incrément, à t+Δt, s'écrit :

$$\int_{\Omega'} \boldsymbol{\sigma}' : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^* \, h' ds' - \int_{\Omega'} \mathbf{T}' . \mathbf{V}^* \, ds' = 0 \qquad \text{(III.1)}$$

pour tout champ de vitesse virtuel $\mathbf{V}^*$, soit encore, en tenant compte de (II.29) et (II.34) :

$$\int_{\Omega'} \sigma'^{ij} V^*_{i/j} \, h' \sqrt{g'} \, d\theta^1 d\theta^2 - \int_{\Omega'} \mathbf{T}' . \mathbf{V}^* \sqrt{g'} \, d\theta^1 d\theta^2 = 0 \qquad \text{(III.1 bis)}$$

où $\mathbf{T}'$ représente les contraintes externes (pression gazeuse, frottement) à t+Δt.

On choisit de résoudre cette équation en termes de champ de déplacement U des points matériels entre les configurations à t et t+Δt. Ceci est possible à condition d'établir les relations entre U et les incréments de contraintes de Cauchy $\boldsymbol{\Delta\sigma}$, d'épaisseur Δh, ainsi qu'entre $\mathbf{U}$ et $\mathbf{T}'$. Le calcul de variation d'épaisseur sera exposé en III.A.3 et le calcul des contraintes de frottement sera traité simultanément avec la gestion du contact outil-tôle dans la partie III.D. Pour l'instant nous allons nous intéresser seulement à la détermination de l'état de contraintes à t+Δt.

Dans le cadre de rotations finies (non-infinitésimales) pendant l'incrément Δt,la loi de comportement élasto-viscoplastique donnée par (II.36)

va maintenant s'écrire :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(el)} + \dot{\varepsilon}^{(vp)} \qquad \text{(III.2)}$$

$$\overset{\nabla}{\sigma} = E\,\dot{\varepsilon}^{(el)}$$

$$\dot{\varepsilon}^{(vp)} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma}$$

L'idée de base est l'intégration semi-implicite de la dernière relation. On peut envisager d'effectuer cette intégration suivant deux schémas différents.

$$\text{GMR :} \qquad \Delta\varepsilon^{(vp)} = \Delta t \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\sigma + \eta\,\Delta\sigma\right) \qquad \text{(III.3)}$$

$$\text{GTR :} \qquad \Delta\varepsilon^{(vp)} = \Delta t\left[(1-\eta)\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\sigma\right) + \eta\frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\sigma + \Delta\sigma\right)\right] \qquad \text{(III.3 bis)}$$

Dans les deux cas, l'intégration est purement explicite pour $\eta=0$ et purement implicite pour $\eta=1$. Le premier schéma est communément désigné par les initiales GMR (Generalized Midpoint Rule) et le second par GTR (Generalized Trapezoîdal Rule). Il a été montré (ORTIZ, POPOV 1985) que ces schémas assurent une précision du second ordre en Δt pour $\eta = 0{,}5$. En revanche, la stabilité (atténuation de petites perturbations sur les valeurs initiales) du schéma GMR est assurée quel que soit Q dès que $\eta > 0{,}5$ alors qu'elle n'est atteinte qu'avec des η plus élevés pour le schéma GTR. Pour notre part, nous n'avons pas étudié en détail ces deux options, mais avons simplement constaté pour $\eta = 0{,}5$, une convergence légèrement plus rapide de la résolution de la loi de comportement (explicitée ci-après) avec GMR. C'est donc l'équation (III.3) avec $\eta = 0{,}5$ que nous utiliserons dans le modèle.

Dans la seconde équation du système (III.2), $\Delta\sigma$ est une dérivée objective du tenseur de Cauchy. Un choix possible consiste à prendre la dérivation convective (ou de Oldroyd, voir annexe I). Dans notre cas, en coordonnées curvilignes, ce choix est le plus naturel car (III.2.b) devient alors:

$$\Delta\sigma^{ij} = E^{ijkl}\,\Delta\varepsilon^{(el)}_{kl} \qquad \text{(III.4)}$$

où $\Delta\sigma^{ij}$ représente la différence entre les composantes du tenseur de Cauchy de la configuration Ω', exprimées dans la métrique g', et les composantes du tenseur de Cauchy de la configuration Ω, exprimées dans la métrique g :

$$\sigma'^{ij} = (\sigma + \Delta\sigma)^{ij} = \sigma^{ij} + \Delta\sigma^{ij} \qquad \text{(III.5)}$$

On aboutit donc à la loi de comportement incrémentale suivante :

$$\Delta\varepsilon = \Delta\varepsilon^{(el)} + \Delta\varepsilon^{(vp)}$$

$$\Delta\sigma = E\,\Delta\varepsilon^{(el)} \qquad \text{(III.6)}$$

$$\Delta\varepsilon^{(vp)} = \Delta t \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\sigma + \eta\,\Delta\sigma\right)$$

où $\boldsymbol{\Delta\varepsilon}$ est donné suivant (II.14) par :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(g'_{ij} - g_{ij}\right)$$

équation équivalente à :

$$\Delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(U_{i/j} + U_{j/i} + U_{m/j}U^{m}{}_{/i}\right)$$

Le système III.6 doit être résolu localement (aux points d'intégration du maillage, dans le cadre de la méthode des éléments finis). La procédure de résolution est du type Newton-Raphson sur l'inconnue $\boldsymbol{\Delta\sigma}$(en pratique, il s'agit d'un vecteur à trois composantes $\Delta\sigma^{11}$, $\Delta\sigma^{22}$, $\Delta\sigma^{12}$). Il faut noter que la résolution de (III.6), c'est-à-dire l'annulation du résidu :

$$R(\Delta\sigma) = \Delta\sigma - E\left(\Delta\varepsilon - \Delta t \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\left(\sigma + \eta\,\Delta\sigma\right)\right)$$

nécessite le calcul de la matrice de comportement tangente $\delta(\Delta\sigma)/\delta\Delta\varepsilon$ dont l'expression suivante est démontrée et détaillée en annexe II :

$$\frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial(\Delta\varepsilon)} = \left(1_{3x3} + \eta\,E\,\frac{\partial(\Delta\varepsilon^{(vp)})}{\partial\sigma}\left(\sigma + \eta\,\Delta\sigma\right)\right)^{-1} . E \qquad \text{(III.7)}$$

Cette matrice, sous-produit de la résolution, permet un calcul précis du terme fondamental de la matrice de raideur tangente intervenant dans la résolution globale de l'équation des puissances virtuelles.

Remarque 1

Le choix de la dérivation objective à considérer dans l'équation (III.2.b) est à l'heure actuelle ouvert. Il n'existe pas, à notre connaissance, de justification théorique définitive en faveur de l'une ou l'autre des dérivées possibles, bien que certains arguments aient été avancés (MANDEL 1971, SIDOROFF 1982) en faveur de la dérivée de Jaumann (définie ci-dessous). On pourrait songer à utiliser par exemple la dérivée de

Truesdell qui consiste à transporter le tenseur de Cauchy sur la configuration de référence, à dériver ce tenseur (second tenseur de Piola-Kirchhoff) et ramener cette dérivée par transport. Ainsi, si l'on note, comme dans la partie (II.B.3) π^{ij} les composantes de PK2 sur la configuration de début d'incrément, on a :

$$\pi^{ij} = J\,\sigma^{ij} \qquad \text{(III.8)}$$

où J est le Jacobien de la transformation incrémentale. La dérivation de cette équation nous donne :

$$\overset{Tr}{\sigma}{}^{ij} = \frac{1}{J}\left(\dot{J}\,\sigma^{ij} + J\,\overset{c}{\sigma}{}^{ij}\right)$$

où $\overset{c}{\boldsymbol{\sigma}}$ est la dérivée convective, soit encore :

$$\overset{Tr}{\boldsymbol{\sigma}} = Tr(\dot{\varepsilon})\,\sigma + \overset{c}{\sigma} \qquad \text{(III.9)}$$

Ainsi, pour un matériau quasi-incompressible (ce qui est notre cas, les déformations élastiques étant faibles devant les déformations plastiques), ces deux dérivées sont identiques.

Cependant, il n'en va pas de même pour la dérivée la plus utilisée qui est celle de Jaumann (ou dérivée en rotation propre). En notant w le tenseur taux de rotation, partie non-symétrique du tenseur gradient de vitesse, cette dérivée s'écrit :

$$\overset{J}{\boldsymbol{\sigma}} = \dot{\sigma} - w\sigma + \sigma\,w \qquad \text{(III.10)}$$

On démontre alors (voir annexe I) que :

$$\overset{c}{\boldsymbol{\sigma}} = \overset{J}{\sigma} - \dot{\varepsilon}\,\sigma - \sigma\,\dot{\varepsilon} \qquad \text{(III.11)}$$

ce qui en coordonnées curvilignes, s'écrit :

$$\overset{J}{\sigma}{}^{ij} = \overset{c}{\sigma}{}^{ij} + (g^{li}\,\sigma^{kj} + g^{jl}\,\sigma^{ik})\,\dot{\varepsilon}_{kl} \qquad \text{(III.12)}$$

L'utilisation de cette dérivée introduira donc un terme complémentaire :

$$\Delta\sigma^{ij} = E^{ijkl}\,\Delta\varepsilon_{kl}^{(el)} - (g^{li}\,\sigma^{kj} + g^{jl}\,\sigma^{ik})\Delta\varepsilon_{kl} \qquad \text{(III.13)}$$

En pratique, la différence entre ces différentes dérivées a une influence minime sur le résultat. L'important est de s'assurer de l'objectivité de la loi de comportement. Sur ces problèmes d'objectivité et l'introduction des différentes dérivées, le lecteur pourra consulter (SIDORUFF, 1982).

Remarque 2

Une autre solution pour la prise en compte de grandes déformations incrémentales a été proposée par Braudel (BRAUDEL, 1986) . elle consiste à intégrer la loi de comportement dans le repère corotationnel avec une hypothèse cinématique qui suppose d'abord une déformation pure puis une rotation. Cette formulation conduit à la mesure de déformation In **U** (où **U** est la matrice symétrique de la décomposition polaire **RU** de l'application linéaire tangente **F** (LEE 1969)). En outre, elle vérifie l'incompressibilité incrémentale et minimise la déformation équivalente. Cependant, sa faiblesse principale commune à la formulation exposée ci-dessus, est l'incompatibilité cinématique inhérente à l'hypothèse sur le chemin de déformation incrémental. C'est une des raisons pour lesquelles, nous avons développé une formulation implicite avec résolution en vitesses que nous exposerons plus loin.

III.A.1.a Extension à la viscoplasticité pure

En viscoplasticité pure, nous utiliserons un schéma d'intégration voisin du précédent (BELLET, MASSONI, CHENOT 1987). L'équation de comportement (II.55) est alors intégrée suivant

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon} = \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{(vp)} = \Delta t \left[(1-\eta)\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \eta\, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \right] \qquad \text{(III.14)}$$

où, en notation vectorielle,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{\partial Q}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{\sigma}$$

Le taux de déformation en fin d'incrément est donc donné par :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' = \frac{1}{\eta}\left[\frac{1}{\Delta t}\, \Delta\boldsymbol{\varepsilon} - (1-\eta)\, \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}}\, \mathbf{A}\, \boldsymbol{\sigma}\right] \qquad \text{(III.15)}$$

La prise en compte de la relation de comportement, à t+Δt,

$$\sigma'_{eq} = k\,\dot{\varepsilon}'^{m}_{eq}$$

permet de calculer finalement l'état de contraintes en fin d'incrément :

$$\boldsymbol{\sigma}' = k\,\dot{\varepsilon}'^{m-1}_{eq}\quad \mathbf{A}^{-1}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}' \qquad \text{(III.16)}$$

Le module tangent peut alors se calculer facilement (voir annexe II) :

$$\frac{\partial(\Delta\boldsymbol{\sigma})}{\partial(\Delta\boldsymbol{\varepsilon})} = \frac{1}{\eta\Delta t}\,\mathbf{A}^{-1}\,\frac{\partial}{\partial\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'}\left(\frac{\sigma'_{eq}}{\dot{\varepsilon}'_{eq}}\,\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}'\right) \qquad \text{(III.17)}$$

Il est à remarquer que dans ce cas, la résolution est directe et ne nécessite pas une méthode itérative comme en élasto-viscoplasticité. Il en résulte un gain de temps dans la simulation globale. Nous en reparlerons lors de la présentation des résultats des tests, lorsque nous comparerons les deux formulations.

Une difficulté que nous avons rencontrée avec cette formulation est l'instabilité du schéma d'intégration (III.14) avec η = 1/2, lors de variations importantes de $\dot{\varepsilon}$ entre t et t+Δt. Ainsi, lorsqu'un noeud arrive au contact de la matrice et est donc freiné par cette dernière, la norme du vecteur **Δε** est notablement inférieure à celle de Δt 1/2 $\dot{\varepsilon}$. Il s'ensuit des valeurs aberrantes de $\dot{\varepsilon}'$ que rien ne permet de corriger et qui entraînent des résultats erronés, puis une divergence du calcul. La solution consiste alors à adopter un schéma totalement implicite (η=1), chaque fois qu'un noeud de l'élément arrive en contact, avant de revenir au schéma normal à l'incrément suivant. En fait il s'agit d'un phénomène ponctuel de décharge, en partie élastique, transparent pour cette formulation. L'élasticité, ici absente, ne joue pas son rôle "régulateur", au moyen d'une "constante de rappel".

III.A.2 Méthode incrémentale semi-implicite avec résolution en vitesses

Le principe général est le suivant

• soit Ω la configuration de la tôle à l'instant t en début d'incrément. En tout point matériel M, de coordonnées cartésiennes **X** , le vecteur vitesse **V** est connu.

. On cherche la configuration Ω' à t+Δt. Elle est définie comme étant l'ensemble des points matériels M' , transformés des points matériels **M** selon l'approximation du second ordre suivante. Si l'on considère le vecteur vitesse comme fonction des coordonnées matérielles et du temps, on a :

$$\mathbf{X'} = \mathbf{X} + \mathbf{V}\,\Delta t + \frac{1}{2}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\Delta t^2 + 0(\Delta t^3) \qquad \text{(III.18)}$$

si l'on remarque alors que **V'** , solution de l'équation des puissances virtuelles sur Ω', s'écrit également :

$$\mathbf{V'} = \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}\Delta t + 0\,(\Delta t^2) \qquad \text{(III.19)}$$

on a, en reportant (III.19) dans (III.18),

$$\mathbf{X'} = \mathbf{X} + \frac{1}{2}\,(\,\mathbf{V} + \mathbf{V'}\,)\Delta t + 0\,(\Delta t^3) \qquad \text{(III.20)}$$

Ce schéma d'ordre 2 en Δt se généralise sous la forme suivante ("generalized trapezoïdal rule" en anglais) déjà utilisée au III.A.1.a) :

$$\mathbf{X'} = \mathbf{X} + ((1-\eta)\,\mathbf{V} + \eta\,\mathbf{V'}\,)\Delta t \qquad \text{(III.21)}$$

où le paramètre η peut varier entre 0 (intégration explicite) et 1 (implicite). L'intégration semi-implicite avec η = 1/2 correspond à une variation linéaire du vecteur vitesse entre t et t+Δt, comme l'indique l'équation (III.19). On peut le vérifier facilement en intégrant

$$\mathbf{V}_u = \mathbf{V} + \frac{u-t}{\Delta t}\,(\,\mathbf{V'} - \mathbf{V}\,)$$

entre t et t+Δt : on retrouve alors l'approximation (III.20).

Parallèlement à cette hypothèse cinématique, la loi de comportement à t+Δt est directement résolue sous sa forme en vitesses. En d'autres termes, il s'agit de calculer l'état de contraintes σ' à t+Δt, associé au champ de vitesse **V'** , caractérisé par le taux de déformation $\dot{\varepsilon}'$. Si l'on reprend les notations de la partie précédente III.A.1 (équation III.2), nous avons au temps t :

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^{(el)} + \dot{\varepsilon}^{(vp)}$$

$$\sigma = E\,\dot{\varepsilon}^{(el)} \qquad \text{(III.22)}$$

$$\dot{\varepsilon}^{(vp)} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\,(\sigma)$$

Au temps t+Δt, on doit avoir de même :

$$\dot{\varepsilon}' = \dot{\varepsilon}^{(el)'} + \dot{\varepsilon}^{(vp)'}$$

$$\overset{\nabla}{\sigma}' = E\,\dot{\varepsilon}^{(el)'} \qquad \text{(III.23)}$$

$$\dot{\varepsilon}^{(vp)'} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma}\,(\sigma')$$

Du fait de l'utilisation de coordonnées curvilignes, la dérivée convective du tenseur de contraintes de Cauchy est intégrée suivant le schéma implicite :

$$\sigma' = \sigma + ((1-\eta)\overset{c}{\sigma} + \eta\overset{c'}{\sigma})\,\Delta t \qquad \text{(III.24)}$$

Si l'on utilise la dérivée de Jaumann dans III.22.b et III.23.b, on a alors :

$$\sigma' = \sigma + ((1-\eta)(\overset{J}{\sigma} - \dot{\varepsilon}\sigma - \sigma\dot{\varepsilon}) + \eta(\overset{J}{\sigma}' - \dot{\varepsilon}'\sigma' - \sigma'\dot{\varepsilon}'))\Delta t \qquad \text{(III.25)}$$

Connaissant alors **v'** et le tenseur taux de déformation associé $\dot{\varepsilon}'$ défini par

$$\dot{\varepsilon}'_{ij} = \frac{1}{2}(V'_{i/j} + V'_{j/i})$$

où la dérivation covariante est effectuée dans la métrique de la configuration Ω', les quatre équations III.23 et III.24 ou III.25 ont alors quatre inconnues qui sont $\dot{\varepsilon}^{(el)'}$, $\overset{\nabla}{\sigma}'$, $\dot{\varepsilon}^{(vp)'}$, , et σ' . On peut donc résoudre ce système au moyen d'un algorithme de Newton-Raphson. On trouvera en annexe III les détails des calculs et l'expression de la matrice tangente de comportement δ (σ') / δ($\dot{\varepsilon}'$).

Ainsi la résolution de cette loi de comportement écrite en termes de vitesses $\boldsymbol{\sigma}' = \boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{V}')$, associée à l'hypothèse cinématique 111.18 rend possible la résolution en $\mathbf{V}'$ de l'équation d'équilibre de la configuration Ω' écrite plus haut (III.1).

III.A.3 Calcul de la variation d'épaisseur

La variation d'épaisseur est obtenue par écriture de l'incompressibilité locale. Si ce calcul est exact dans le cas viscoplastique pur, il s'agit d'une approximation en élasto-viscoplastique, qui consiste à négliger la variation d'épaisseur due à la déformation élastique. Un écrira donc dans tous les cas :

$$J = 1 \qquad \text{(III.26)}$$

où J est le jacobien de la transformation incrémentale. Localement, si ds et h désignent l'élément de surface matériel et l'épaisseur en début d'incrément et si ds' et h' désignent les mêmes quantités en fin d'incrément cela se traduit par :

$$h\,ds = h'ds' \qquad \text{(III.27)}$$

ce qui en vertu de (II.30) donne :

$$h' = h\sqrt{\frac{g}{g'}} \qquad \text{(III.28)}$$

où g et g' sont respectivement les déterminants des tenseurs métriques sur Ω et Ω' .

III.B DISCRETISATION SPATIALE. METHODE DES ELEMENTS FINIS

La tôle est discrétisée en éléments isoparamétriques bidimensionnels à 3 degrés de liberté par noeud (3 composantes du déplacement dans un repère cartésien fixe). Les intégrales, telles celles de l'équation des puissances virtuelles sont calculées par la méthode de Gauss. Dans chaque élément, un vecteur $\mathbf{V}$ est obtenu par interpolation des vecteurs $\mathbf{V}^N$ aux noeuds de l'élément :

$$\mathbf{V} = \sum_{N=1}^{NEL} \Psi_N(\xi)\,\mathbf{V}^N$$

qu'on notera, avec la convention de sommation (NEL étant le nombre de noeuds de l'élément)

$$\mathbf{V} = \Psi_N(\xi)\, V^N \qquad N = 1,NEL \qquad \text{(III.29)}$$

où Ψ_N sont les fonctions d'interpolation calculées en fonction des coordonnées locales $\boldsymbol{\zeta}$, sur l'élément de référence dans R^2. Il est à noter que ces fonctions peuvent également être calculées directement à partir des coordonnées matérielles θ^1 et θ^2.

III.B.1 Equation d'équilibre discrétisée

Dans le but d'écrire la forme discrétisée de l'équation d'équilibre (III.1), on établit la relation fondamentale entre les dérivées covariantes et les composantes cartésiennes nodales d'un champ de vecteurs $\mathbf{V}$. D'après (II.8) et (III.29) :

$$V_{i/j} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \theta^j} \cdot \mathbf{g}_i = \frac{\partial \Psi_N}{\partial \theta^j}\, \mathbf{V}^N \cdot \mathbf{g}_i \qquad \text{(III.30)}$$

Cette relation s'écrit donc :

$$V_{i/j} = B^k_{ijN}\, V^N_k \qquad \text{(III.31)}$$

$$\text{avec } B^k_{ijN} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial \theta^j}\, \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{I}_k$$

$$i=1,3 \quad J=1,2 \quad k=1,3 \quad N=1,NEL \qquad \text{(III.32)}$$

où les vecteurs $\mathbf{I}_k$ forment la base cartésienne orthonormée. Il faut remarquer que les dérivées $\delta\Psi_N/\delta\theta^j$ sont constantes et peuvent donc être calculées une fois pour toutes au début du calcul. Il s'agit là d'un avantage par rapport à un calcul en coordonnées cartésiennes où la matrice B, donnant accès aux dérivées $V_{i,j}$, s'écrit :

$$B_{ijNk} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial X_j}\ \delta_{ik}$$

avec un calcul nécessaire de la matrice Jacobienne $\delta \mathbf{X} / \delta \zeta$.

Les vecteurs tangents sont obtenus par la relation suivante, $\mathbf{X}^N$ désignant les vecteurs positions des noeuds du maillage :

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial \theta^i}\ \mathbf{X}^N \qquad \text{(III.33)}$$

Si l'on reprend alors les mêmes notations qu'au III.A, l'équation d'équilibre de la configuration Ω' à t+Δt s'écrit donc, sous forme discrétisée :

$$\int_{\Omega'} \sigma'^{ij} B'^{k}_{ijN}\ \overset{*N}{V_k}\ h'\ ds' = \int_{\Omega'} T'_k \Psi_N\ \overset{*N}{V_k}\ ds' \qquad \text{(III.34)}$$

Cette égalité doit être satisfaite pour tout champ de vitesses virtuel V* . Il en résulte que, pour tout degré de liberté (N, k) , pour lequel la vitesse n'est pas imposée, on doit avoir :

$$\int_{\Omega'} \sigma'^{ij}\ B'^{k}_{ijN}\ h' ds' = \int_{\Omega'} T'_k \Psi_N ds' \qquad \text{(III.35)}$$

soit encore en explicitant l'élément de surface élémentaire ds' en fonction de la métrique g' de la configuration Ω' (équation II.29),

$$\int_{\Omega'} \sigma'^{ij} B'^{k}_{ijN}\ h' \sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2 = \int_{\Omega'} T'_k\ \Psi_N\ \sqrt{g'}\ d\theta^1 d\theta^2 \qquad \text{(III.36)}$$

Signalons que dans le second membre de (III.34), le produit scalaire $\mathbf{T'}.\mathbf{V^*}^N$ est exprimé en fonction des composantes cartésiennes de ces vecteurs, et que par ailleurs les coefficients B'^{k}_{iJN} sont calculés suivant la la formule (III.32) avec la métrique g' de la configuration Ω'.

En ce qui concerne les contraintes externes T' , elles sont la somme des contraintes de frottement dont nous reparlerons plus loin en III.D, et des contraintes dues à la pression gazeuse, moteur de la mise en forme en formage superplastique. Cette pression p s'exerce normalement à toute partie de la tôle, donc suivant le vecteur normal unitaire local g'_3 :

$$\mathbf{T'}_p = \pm\, p\, \mathbf{g}'_3 \qquad \text{(III.37)}$$

le signe étant fonction de l'orientation de g'_3 et de la géométrie du procédé.

III.B.2 Algorithme de résolution

Dans l'équation d'équilibre discrétisée (III.36), la configuration Ω' dépend de la variable cinématique choisie. Dans une formulation en déplacements, les coordonnées des points matériels de Ω' seront définies par :

$$\mathbf{X'} = \mathbf{X} + \mathbf{U} \qquad \text{(III.38)}$$

où **X** sont les vecteurs position des mêmes points dans la configuration connue Ω de début d'incrément et **U** le champ de déplacement. Avec une formulation en vitesses, nous avons :

$$\mathbf{X'} = \mathbf{X} + ((1-\eta)\,\mathbf{V} + \eta\,\mathbf{V'})\Delta t \qquad \text{(III.39)}$$

et Ω' dépend cette fois du champ de vitesses **V'** . Il en va de même pour la métrique sur Ω', les coefficients B'^{k}_{ijN}, les contraintes de pression T'_p et l'épaisseur h', comme nous l'avons déjà vu au III.A.3. D'autre part les lois de comportement incrémentales précédemment exposées nous permettent de calculer $\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{U})$ ou $\boldsymbol{\sigma}'(\mathbf{V'})$. Enfin, nous définirons dans le paragraphe III.D les relations donnant les contraintes de frottement T'_f en fonction de **U** ou **V'** .

En conséquence, on peut définir deux fonctions vectorielles $\mathbf{R}^1(U)$ et $\mathbf{R}^2(V')$ par

$$R^1_{Nk}(\mathbf{U}) = R^2_{Nk}(\mathbf{V'}) = \int_{\Omega'} \sigma'^{ij} B'^{k}_{ijN} h' \sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2 - \int_{\Omega'} T'_k \Psi_N \sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2 \qquad \text{(III.40)}$$

pour tout degré de liberté (N,k) où la vitesse est non-imposée.

L'équation d'équilibre s'écrira alors sous l'une des deux formes :

$$R^1 (U) = 0 \qquad \text{(III.41)}$$

$$R^2 (V') = 0 \qquad \text{(III.42)}$$

Le problème mécanique se ramène donc à la résolution d'un système d'équations non-linéaires. Pour le résoudre nous avons choisi la méthode classique de Newton-Raphson.

Notons **R** le vecteur résidu($\mathbf{R}^1$ ou $\mathbf{R}^2$). La méthode est alors la suivante (pour la variable inconnue U par exemple).

1 - Initialisation de la variable : $\mathbf{U}_0$

En pratique, pour accélérer la convergence de l'algorithme, on initialisera cette variable à la valeur trouvée à l'incrément précédent.

2. On calcule la suite de variables $\mathbf{U}_i$ telle que :

$$\left[\frac{\partial R}{\partial U} (U_{i-1})\right] \delta U_i = - R (U_{i-1}) \qquad \text{(III.43)}$$

$$U_i = U_{i-1} + \delta U_i \qquad \text{(III.44)}$$

Le test de convergence s'effectue sur la norme d**u résidu R : on établit le rapport de la plus grande des composantes de R** , pour un degré de liberté non-imposé en vitesse, à la plus grande des réactions inconnues (composantes de R pour les degrés de liberté imposés) et on arrête l'algorithme classiquement pour des valeurs de ce rapport inférieures à 10^{-4} (0,01%).

Ce type d'algorithme n'exige pas en théorie un calcul exact de la dérivée du résidu R : on peut se contenter d'un calcul approché de cette matrice de raideur, la convergence vers la solution étant alors ralentie. L'important est évidemment de toujours calculer exactement le résidu R pour s'assurer de la convergence vers la bonne solution.

La matrice de raideur **δR / δU** est en général non-symétrique. Les essais que nous avons faits montrent que la convergence n'est quasiment pas altérée si l'on symétrise cette matrice et si l'on utilise un solveur *symétrique* (décomposition de Crout), ce qui est économique en temps de calcul. En revanche, ces essais ont montré (MASSONI, BELLET, ABOUAF, CHENOT 1986) qu'il est nécessaire, sous peine de convergence très ralentie, voire impos-

sible, de recalculer cette matrice à chaque itération, en y incluant les contributions exactes de chacun des termes du résidu discrétisé (éq.III.40).
Pour ce qui concerne le terme prépondérant de comportement, on a dans le cas de la formulation en vitesses :

$$\frac{\partial R^{1(\omega)}}{\partial V'^{M}_{1}}{}_{Nk} = \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial V'^{M}_{1}} B'^{k}_{ijN} + \sigma'^{ij} \frac{\partial B'^{k}_{ijN}}{\partial V'^{M}_{1}} \right] h' \sqrt{g'}\, d\theta^1\, d\theta^2 \quad \text{(III.45)}$$

Soulignons que, du fait de (III.28), la dérivée du produit $h'\sqrt{g'}$ est identiquement nulle.

On pourra consulter en annexe l'expression détaillée des matrices de raideur pour les deux formulations étudiées. Remarquons toutefois ici que le calcul exact des modules tangents $\delta(\boldsymbol{\sigma}')/\delta(\boldsymbol{\Delta\varepsilon})$ ou $\delta(\boldsymbol{\sigma}')/\delta(\dot{\boldsymbol{\mathcal{E}}}')$, qui découle des lois de comportement incrémentales, permet un calcul exact du terme fondamental de comportement de la raideur $\boldsymbol{\delta R^1 / \delta U}$ ou $\boldsymbol{\delta R^2 / \delta V'}$. Nous avons par exemple dans le cas de la formulation en vitesses :

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial V'} = \frac{\partial \sigma'}{\partial \dot{\varepsilon}'} \frac{\partial \dot{\varepsilon}'}{\partial V'}$$

$$\text{avec } \frac{\partial \dot{\varepsilon}'^{ij}}{\partial V'^{M}_{1}} = \frac{1}{2} \left(B'^{1}_{ijM} + B'^{1}_{jiM} \right)$$

III.C TESTS NUMERIUUES

Nous avons choisi de présenter ici trois tests numériques : le premier met en évidence l'influence de l'élasticité par comparaison de calculs réalisés avec les formulations élasto-viscoplastique et viscoplastique pure. Le second montre la plus grande précision de la formulation en vitesses, avec intégration semi-implicite, par rapport à la formulation en déplacements. Enfin le troisième test a été réalisé dans le cadre d'une collaboration avec l'Université de Swansea (Royaume Uni) et consiste à comparer, sur un cas d'école simple, le programme actuellement développé dans cette université (BONET, WOOD 1987) avec le nôtre.

III.C.1 Influence de l'élasticité

Ce test a été réalisé en appliquant la formulation incrémentale en déplacements aux lois de comportement élastique-viscoplastique et viscoplastique pur. Dans les deux cas, la loi de comportement du matériau est donnée par :

$$\sigma_{eq} = 250\ \dot{\varepsilon}_{eq}^{0,33} \quad (MPa)$$

Les caractéristiques élastiques sont :

$$\lambda = 37500\ MPa \qquad E = 50\ 000\ MPa$$
$$\mu = 18750\ MPa \quad \text{soit} \quad \nu = 0,33$$

La géométrie du test est donnée par la figure III.1. Le bord externe circulaire de la tôle est maintenu fixe et, par raison de symétrie, on restreint l'étude à un secteur angulaire du flan initial ($\pi/16$ radians). Ce secteur est maillé en 61 éléments triangulaires linéaires à un point d'intégration. Une pression constante de 0,30 MPa est appliquée sur la face supérieure du diaphragme. La matrice cylindrique est maillée en triangles. Le frottement à l'interface outil/tôle est de Coulomb ($\mu = 0.2$).

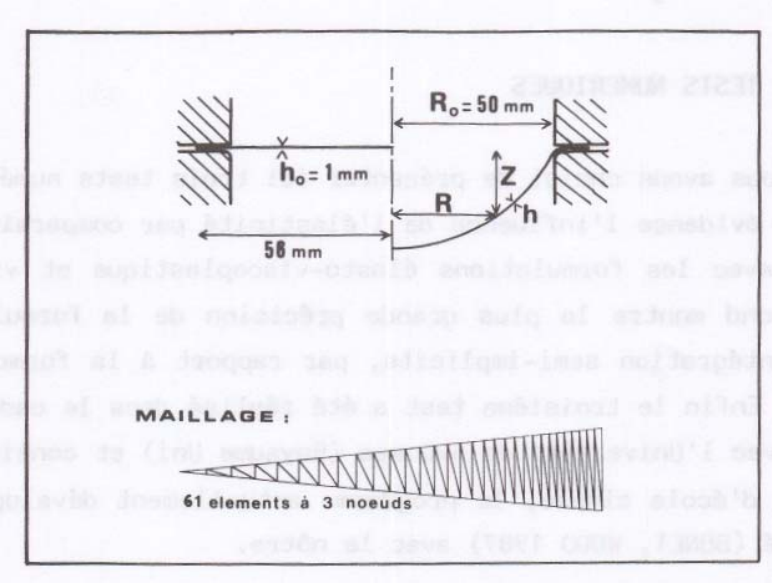


Figure II1.1 : Géométrie du test

Le tableau ci-dessous donne les résultats comparatifs pour un temps de formage donné de 4720 s, correspondant approximativement à l'obtention d'une demi-sphère.

	Elastoviscoplastique	Viscoplastique pur	
Résultats au pôle			
Flèche (mm)	50,1	49,5	- 1,2%
σ_{eq}(MPa)	23,0	22,4	- 2,6%
$\bar{\varepsilon}$	1,23	1,20	- 2,4%
h (épaisseur mm)	0,29	0,30	+ 3,4%
Résultats au bord			
σ_{eq} (MPa)	7,738	7,736	- 0,02%
$\bar{\varepsilon}$	0,227	0,226	- 0,59%
h (mm)	0,823	0,824	+ 0,15%
Convergence de l'algorithme			
nombre d'itérations moyen par incrément (30s)	2,0	1,6	- 20%
temps CPU (s) (DEC VAX 750)	1456	1084	- 25%

En ce qui concerne les résultats au pôle, la comparaison ne doit porter en fait que sur la flèche obtenue, les autres variables étant liées à cette dernière, par exemple par la loi classique dite de Laplace

$$\sigma_{eq} = p \frac{R}{2h}$$

(où R est le rayon de courbure) que l'on trouve bien vérifiée ici. Ainsi, l'écart dû à l'élasticité se situe autour du pourcent pour la déflection au pôle et la variation d'épaisseur.

En revanche, les temps de calcul sont sensiblement différents : on enregistre une meilleure convergence de l'algorithme de Newton-Raphson global dans le cas viscoplastique pur (-20% sur le nombre d'itérations), à laquelle s'ajoute le gain de temps réalisé dans la loi de comportement. En élastoviscoplasticité, la résolution de cette dernière nécessite en moyenne 2,8 itérations de Newton, contre 1 "itération" (résolution directe) en viscoplastique pur (d'où un gain de temps de 5% dans le cas présent). Finalement on peut tirer 2 conclusions de ce test :

1. Comme prévu, l'influence de l'élasticité est faible pour ce type de mise en forme. Néanmoins, il était intéressant de pouvoir la quantifier.

2. Au niveau des algorithmes, il faut retenir que le traitement de la loi de comportement au niveau local des points d'intégration n'a que peu d'influence sur le temps de calcul, et il en a d'autant moins que le maillage grossit : en effet, alors que la durée de ce traitement varie linéairement avec le nombre d'éléments, le temps consacré à la résolution du Newton global varie lui comme LB^2 x NBN donc beaucoup plus vite (LB = largeur de bande, NBN = nombre de noeuds total).

III.C2 Comparaison entre formulation en déplacements et formulation en vitesses

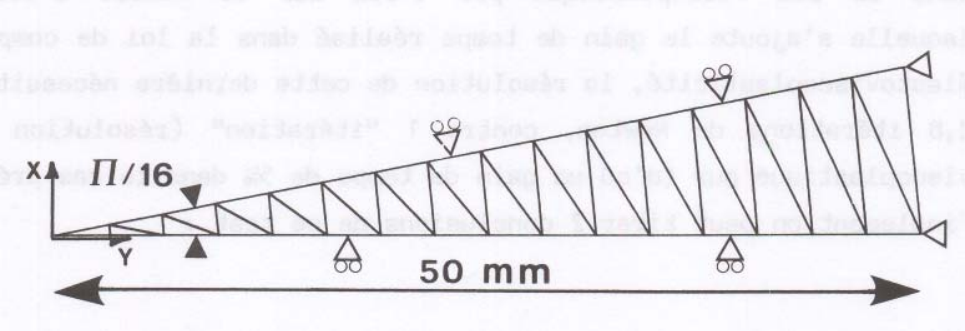
Dans ce paragraphe, nous comparerons les deux formulations présentées en III.A.1 et III.A.2, pour un matériau élastoviscoplastique aux caractéristiques suivantes

$$\sigma_{eq} = 460\ \dot{\varepsilon}_{eq}^{0,5} \qquad \text{(MPa)}$$

$$E = 50000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0,33$$

Le test choisi est le gonflage d'un diaphragme circulaire (diamètre initial 100 mm, épaisseur initiale 1 mm). Afin de comparer seulement les deux schémas d'intégration, on fait abstraction de la présence d'un outil en considérant que le pourtour de la tôle est maintenu fixe. De même qu'en C.1, par raison de symétrie, on étudie seulement un secteur de π/16 radian dont le maillage d'éléments finis (31 éléments triangulaires linéaires à un point d'intégration) est illustré ci-dessous.



La pression appliquée croît linéairement de 0 MPa au début, à 0,14 MPa à 603 s, valeur maintenue constante par la suite, jusqu'au temps final 3603 s, pour lequel un hémisphère est quasiment formé. Le paramètre observé est la flèche au pôle w, en particulier l'évolution de l'erreur relative sur w avec la taille des incréments de temps. Pour chacune des formulations, un calcul est d'abord effectué avec un très petit pas de temps (1 s). Les flè

ches finales calculées (à 3603 s) sont alors w_1 = 46,432 mm pour la formulation en déplacements et w_2 = 46,420 mm pour la formulation en vitesses, soit une différence de 0,026%.

Pour chaque formulation et pas de temps Δt, l'erreur relative $e_{\Delta t}$ sur w est calculée par la formule

$$e_{\Delta t} = (w_i - w_{\Delta t})/w_i$$

Afin d'éviter des problèmes de convergence dus à de trop grands incréments en tout début de calcul, tous les calculs démarrent de la configuration obtenue à t=3s, avec Δt=1 s.

La figure III.2 traduit l'évolution de l'erreur relative avec Δt. Pour la formulation en déplacements, on a comparé les intégrations semi-implicite (η=1/2) et implicite (η=1) de la loi de comportement : on confirme ici la supériorité du schéma semi-implicite avec une erreur relative réduite de 30% par rapport au schéma implicite. Il est à noter que dans les deux cas, l'erreur relative est proportionnelle à $\Delta t^{1,1}$.

En comparaison, l'approche en vitesses est beaucoup plus précise, l'erreur étant alors proportionnelle à $\Delta t^{1,6}$ (proche du Δt^2 donné théoriquement par la seule intégration semi-implicite du champ du vitesse). Dans la gamme de pas de temps que nous avons explorée, l'erreur est diminuée d'un facteur allant de 1,4 à 12.

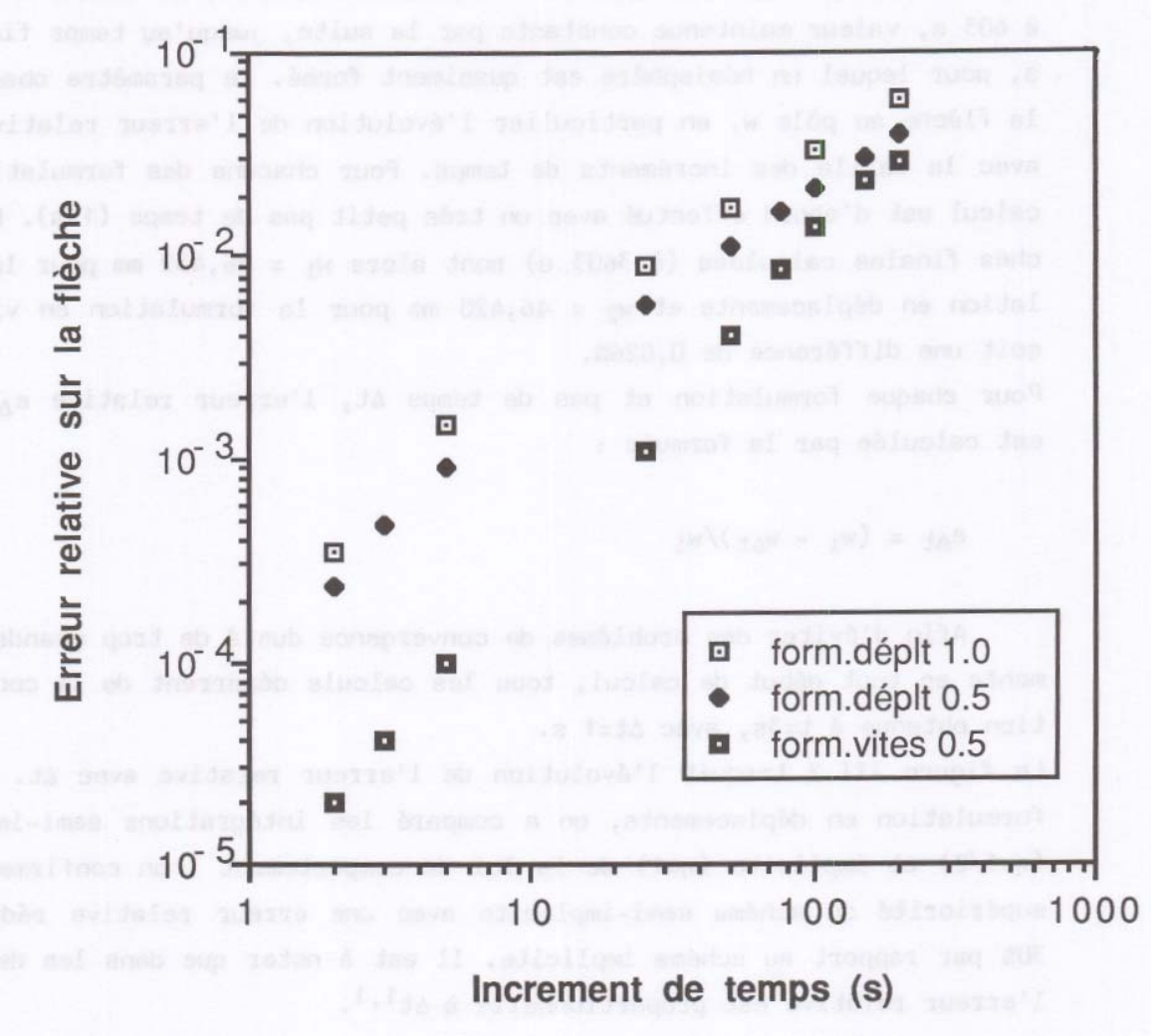


Figure III.2 : Evolution de l'erreur relative sur la flèche au pôle en fonction du pas de temps Δt pour la formulation en déplacements et la formulation en vitesses

III.C.3 Comparaison avec le programme de calcul de l'Université de Swansea

Le modèle de l'Université de Swansea a pour base une mécanique de coque mince. Le comportement est purement viscoplastique avec un schéma d'intégration explicite du champ de vitesse (BONET, WOOD 1987).

Le cas étudié est le formage libre (sans outil) d'une tôle à frontière elliptique. Cette frontière est maintenue fixe dans le plan XOY. La figure III.3 fournit les données géométriques et rhéologiques du test.

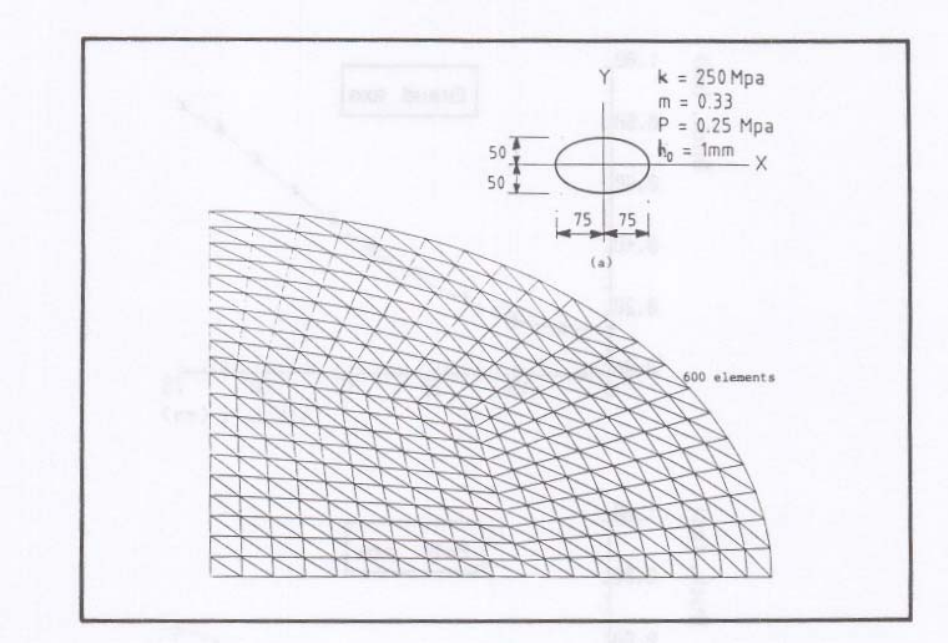


Figure 111.3 : Définition du test

Par raison de symétrie, un quart de la tôle est maillé en 600 éléments triangulaires. Au cours de ce test, nous avons utilisé la formulation incrémentale en déplacements avec un comportement viscoplastique pur.

La figure III.4 montre la déformée obtenue au temps 95 mn (visualisation des demi-sections suivant le grand axe et le petit axe de l'ellipse initiale). On constate une excellente concordance entre les deux modèles. Il en va de même pour le profil d'épaisseur donné par la figure III.5.

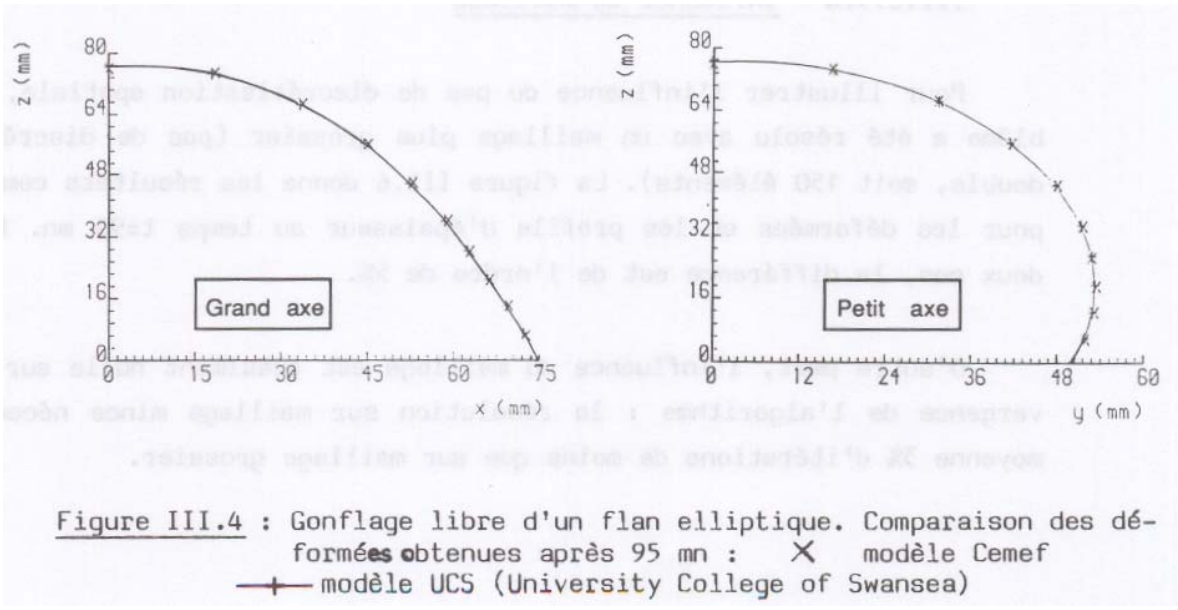


Figure III.4 : Gonflage libre d'un flan elliptique. Comparaison des déformées obtenues après 95 mn : × modèle Cemef
—+— modèle UCS (University College of Swansea)

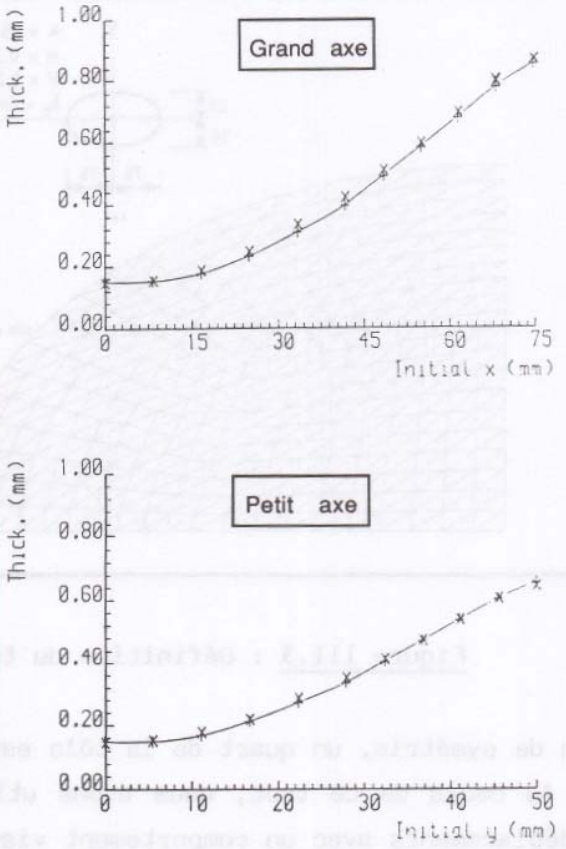


Figure III.5 : Gonflage libre d'un flan elliptique. Comparaison des profils d'épaisseur obtenus après 95 mn : X modèle Cemef
—+— modèle UCS

III.C.3.a - Influence du maillage

Pour illustrer l'influence du pas de discrétisation spatiale, le problème a été résolu avec un maillage plus grossier (pas de discrétisation double, soit 150 éléments). La figure III.6 donne les résultats comparatifs pour les déformées et les profils d'épaisseur au temps t=90 mn. Dans les deux cas, la différence est de l'ordre de 5%.

D'autre part, l'influence du maillage est quasiment nulle sur la convergence de l'algorithme : la résolution sur maillage mince nécessite en moyenne 3% d'itérations de moins que sur maillage grossier.

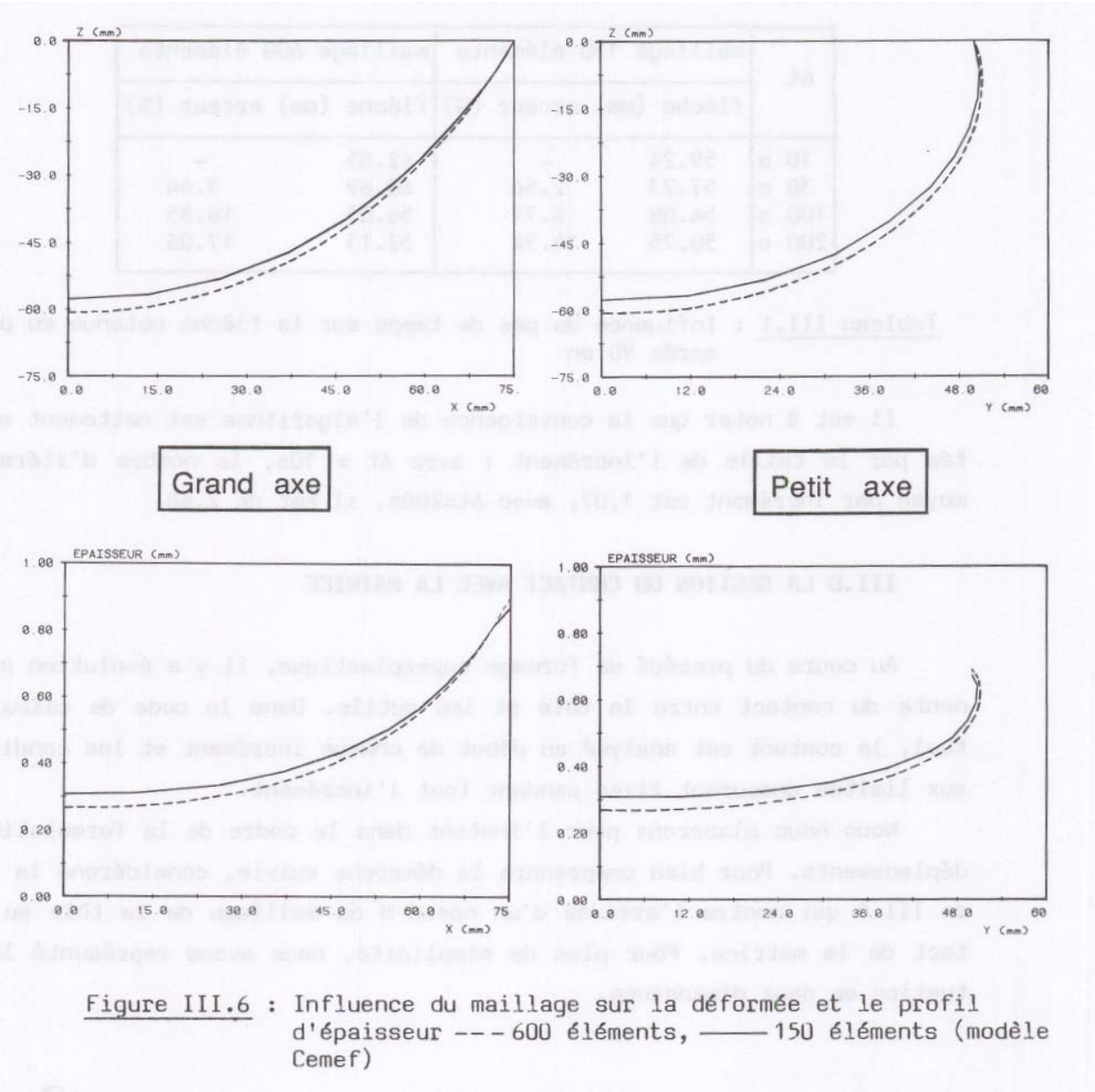


Figure III.6 : Influence du maillage sur la déformée et le profil d'épaisseur - - - 600 éléments, ——— 150 éléments (modèle Cemef)

III.C.3.b) Influence du pas de temps

Pour tester l'influence du pas de temps, nous avons procédé comme au III.C.2 : départ à partir de la configuration à t=3 s. La solution de référence est celle obtenue avec Δt=10 s. Le tableau ci-dessous regroupe les résultats obtenus pour la flèche au pôle à t=90 mn pour des pas de temps de 30, 100 et 200 s, et ce pour les deux maillages. Un constate que l'influence du pas de temps est plus sensible dans le cas du maillage fin.

Δt	maillage 150 éléments		maillage 600 éléments	
	flèche (mm)	erreur (%)	flèche (mm)	erreur (%)
10 s	59.24	-	62.85	-
30 s	57.73	2.56	60.69	3.44
100 s	54.08	8.71	56.03	10.85
200 s	50.75	14.34	52.13	17.06

Tableau III.1 : Influence du pas de temps sur la flèche obtenue au pôle après 90 mn

Il est à noter que la convergence de l'algorithme est nettement affectée par la taille de l'incrément : avec Δt = 10s, le nombre d'itérations moyen par incrément est 1,07; avec Δt=200s, il est de 2,48.

III.D LA GESTION DU CONTACT AVEC LA MATRICE

Au cours du procédé de formage superplastique, il y a évolution permanente du contact entre la tôle et les outils. Dans le code de calcul actuel, le contact est analysé au début de chaque incrément et les conditions aux limites demeurent fixes pendant tout l'incrément.

Nous nous placerons pour l'instant dans le cadre de la formulation en déplacements. Pour bien comprendre la démarche suivie, considérons la figure III.8 qui montre l'arrivée d'un noeud M du maillage de la tôle au contact de la matrice. Pour plus de simplicité, nous avons représenté la situation en deux dimensions.

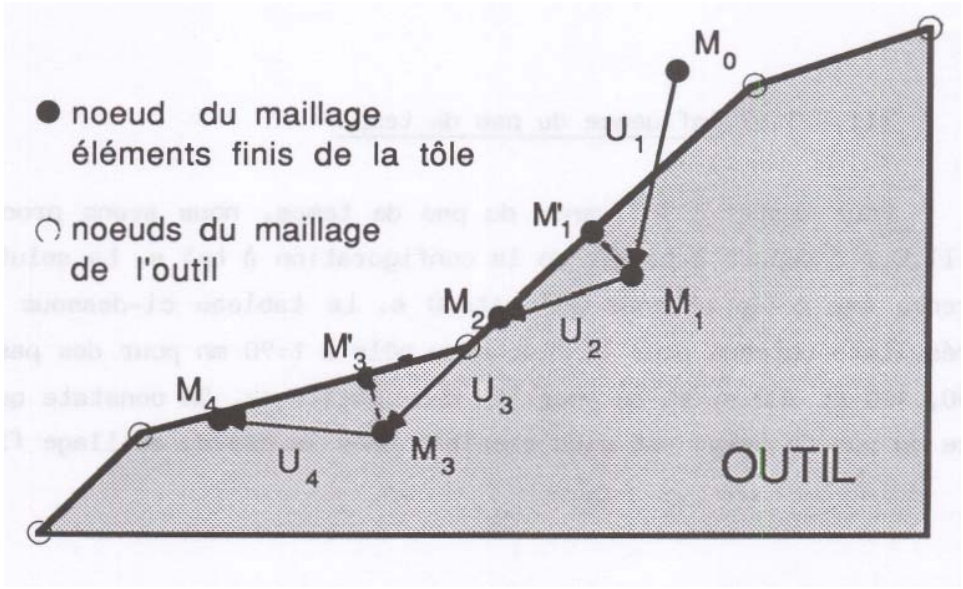


Figure 111.8 : Gestion du contact avel'outil

Il apparaît que trois problèmes distincts doivent être traités :

a) savoir analyser la position relative des noeuds du maillage de la tôle par rapport à la surface de la matrice.

b) faire en sorte qu'un noeud en contact reste à la surface de l'outil, donc imposer la condition

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \qquad \text{(III.46)}$$

où **U** est le déplacement incrémental et n la normale locale à l'outil, et prendre en compte cette condition dans l'équation d'équilibre globale.

c) calculer les cissions de frottement à l'interface.

Un quatrième problème, lié au second, serait de pouvoir éventuellement diagnostiquer le décollement possible d'un noeud. Nous avons traité ce problème en emboutissage, le test consistant en un changement de signe des réactions nodales normales (BELLET, MASSONI, CHENOT 1987). En formage superplastique, il se trouve que le décollement n'a jamais lieu, le métal restant plaqué à la surface de l'outil sous l'action de la pression gazeuse.

III.D.1 L'analyse de la position des noeuds par rapport à l'outil

Si l'on veut pouvoir traiter des formes d'outils tridimensionnelles quelconques, la voie la plus directe consiste à discrétiser la surface de l'outil en triangles. L'analyse se réduit alors à l'étude de la position d'un point par rapport au plan généré par l'élément de surface triangle. L'analyse globale met en jeu chaque noeud du maillage et tous les éléments de surface de l'outil. Cependant, la procédure est en pratique beaucoup moins coûteuse en temps de calcul qu'on ne l'imagine car elle est abrégée dans la quasi-totalité des cas

a) pour les noeuds qui ne sont pas en contact, l'analyse est pratiquée seulement lorsque le minorant ci-dessous de la distance réelle à l'outil devient négatif :

$$D_M^j - \sum_{i=j}^{n-1} \| \mathbf{U}_M^i \| \leq 0 \qquad \text{(III.47)}$$

où D^j_M est la plus récente évaluation de la distance entre le noeud M et l'outil, calculée au début de l'incrément j, et où $\mathbf{U}^i_M$ est le déplacement du noeud M pendant l'incrément i. n' est l'incrément en cours.

Si le noeud est alors trouvé à l'intérieur de l'outil, il est projeté orthogonalement sur sa surface et la condition (III.46) lui est appliquée (voir III.D.2).

b) pour les noeuds en contact, ce n'est qu'au cas où le noeud quitte tangentiellement son élément de surface qu'on entreprend une analyse mettant en jeu les seuls éléments de surface voisins de l'élément d'origine.

III.D.2 La condition de contact

Pour chaque noeud en contact, on définit une base locale orthonormée (**n** , **t** , **t'**) où **n** est la normale locale et **t** et **t'** deux vecteurs unitaires tangents. Par un changement de variable, l'équation d'équilibre (III.36) est résolue dans ce repère pour les degrés de liberté attachés à ce noeud, la première composante du déplacement étant alors imposée égale à zéro d'après la condition (III.46).

En ce qui concerne les noeuds arrivant en contact (et ayant donc pénétré dans l'outil) ou les noeuds changeant d'élément de surface de l'outil, il est nécessaire de les repositionner à la surface de l'outil. Généralement, ce réajustement est effectué au moyen d'une projection orthogonale, en fin d'incrément. L'inconvénient de cette méthode est la non-cohérence de cette projection avec l'évolution mécanique calculée du matériau (la projection étant effectuée sans variation de contraintes). En d'autres termes, la configuration respecte les conditions aux limites (pas de pénétration) mais n'est plus en équilibre mécanique. Il nous a semblé préférable d'intégrer cette projection dans le champ de déplacement de l'incrément suivant, comme le montre la figure III.8. Ainsi, pour chaque incrément on part d'une solution qui, certes, ne respecte pas les conditions aux limites (il s'agit en général d'une très légère pénétration dans l'outil) mais qui a le mérite de rester en équilibre. La prise en compte de la projection assure la cohérence mécanique déplacement/loi de comportement sur l'incrément en cours.

Numériquement, la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson est améliorée.

III.D.3 - Le calcul des cissions de frottement

La loi de frottement, nous l'avons dit plus haut (voir II.D) est du type viscoplastique ou, le plus fréquemment, de Coulomb. Pour des raisons de stabilité numérique, ces deux lois sont régularisées à l'origine pour gommer la discontinuité associée au changement de signe de la vitesse de glissement. Ainsi pour le modèle de Coulomb, on a

$$\mathbf{T}_f = - \mu \, p \, (\mathbf{U}^2_t + U_0^2)^{-1/2} \, \mathbf{U}_t \qquad \text{(III.48)}$$

où $\mathbf{U}_t$ est la composante tangente à l'outil du déplacement et où U_0 est un paramètre homogène à un déplacement, de valeur très faible. Cette cission est calculée en chaque point d'intégration des éléments de la tôle en contact, pour calcul du second terme de l'équation d'équilibre (III.36). Dans l'équation ci-dessus, U_t est interpolé au point d'intégration

$$\mathbf{U}_t = \Psi_M \, \mathbf{U}^M_t$$

En général, les déplacements nodaux sont tangents à l'outil, en vertu de la condition III.46 (on a donc $\mathbf{U}^{M}_{t} = \mathbf{U}^{M}_{t}$), sauf lorsque le noeud M vient d'entrer en contact : le déplacement intègre alors une composante normale, comme nous l'avons expliqué au III.D.2. Remarquons également que l'expression de la cission de frottement en termes de déplacement (éq.III.48), et non de vitesse (éq 11.58), implique l'hypothèse de colinéarité entre $\mathbf{U}_t$ et le vecteur vitesse à l'instant $t+\Delta t$.
Dans le cas du modèle viscoplastique, nous ferons l'hypothèse :

$$\mathbf{V} = \mathbf{U}_t / \Delta t \qquad \text{(III.49)}$$

et écrirons

$$\mathbf{T}_f = - K_f \, \Delta t^{-p} \, (\mathbf{U}^2_t + U_0^2)^{(p-1)/2} \, \mathbf{U}_t \qquad \text{(III.50)}$$

Le coefficient p est pris généralement égal à m, sensibilité à la vitesse du matériau de la tôle. Remarquons que s'il y a présence d'un autre matériau à l'interface, comme c'est souvent le cas en formage superplastique (nitrure de bore ou autres), l'estimation des deux coefficients K_f et p par "calage" sur des résultats expérimentaux est délicate.

III.D.4 - Vers un algorithme de contact plus satisfaisant

La gestion incrémentale du contact telle que nous l'avons présentée ci-dessus présente l'inconvénient du maintien des mêmes conditions aux limites pour un noeud pendant l'incrément entier, ce qui implique la pénétration : en conséquence, la configuration calculée à la fin d'un incrément ne peut être en équilibre mécanique tout en respectant les conditions de contact. Une solution simple, à notre avis, consiste à effectuer la même analyse de contact que précédemment, mais cette fois à l'intérieur de l'incrément à chaque nouvelle estimation de la solution. Les figures III.9 et III.10 illustrent la procédure utilisée.

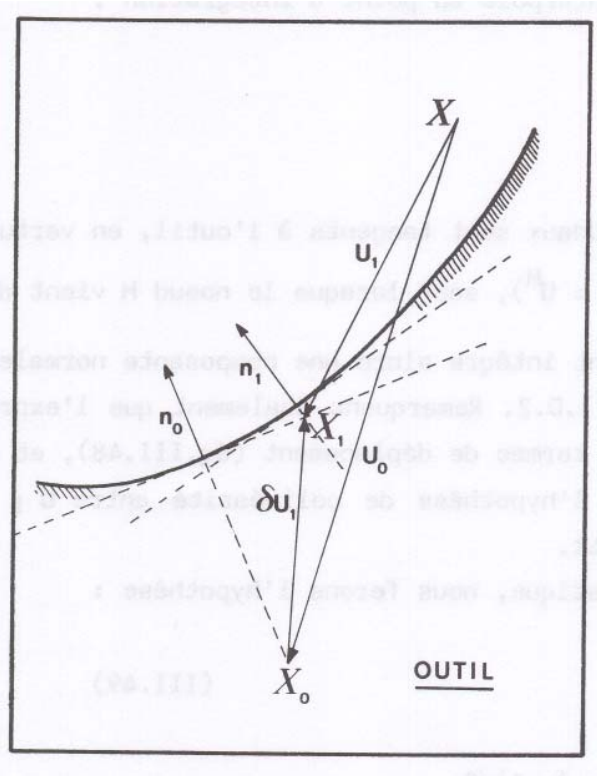


Figure 111.9 : arrivée d'un noeud en contact

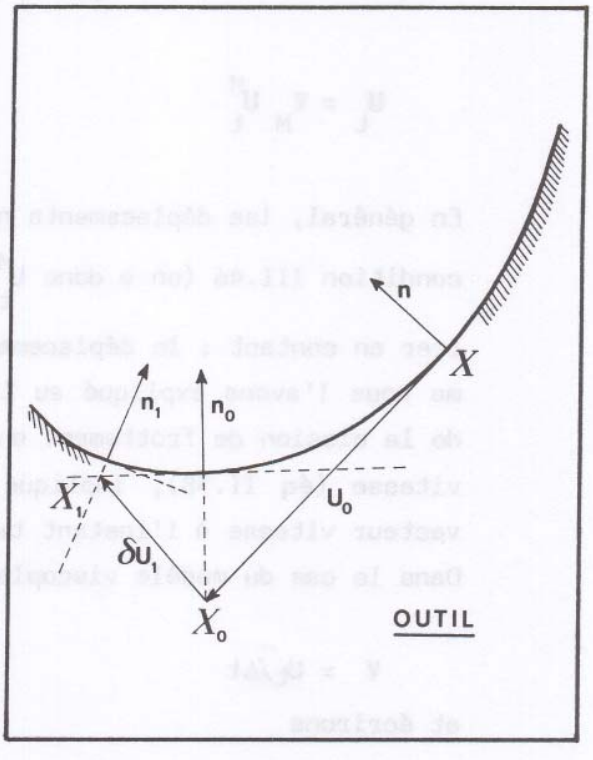


Figure III.10 : noeud en

Considérons un noeud de vecteur position X au temps t. Au cours de l'incrément [t,t+Δt], l'équation d'équilibre (III.36) est résolue par un algorithme de Newton-Raphson; partant d'un vecteur déplacement $\mathbf{U}_0$ pour ce noeud, on a à l'itératon i , en reprenant les équations III.43 et 44,

$$\delta U_i = - \left[\frac{\partial R}{\partial U} (U_{i-1})\right]^{-1} \; R (U_{i-1})$$

$$U_i = U_{i-1} + \delta U_i$$

et donc une nouvelle estimation de la position du noeud

$$X_i = X + U_i = X_{i-1} + \delta U_i$$

Le but est d'obtenir X_i à la surface de l'outil. L'algorithme de contact précédent nous donne la distance entre X i-1 et la surface de l'outil, soit d_{i-1} ainsi que la normale locale à l'outil, soit n_{i-1}. Il suffit alors d'imposer lors de la résolution de (III.43) la condition supplémentaire

$$\delta U_i . n_{i-1} = d_{i-1}$$

pour que $\mathbf{X}_i$ soit dans le plan local tangent à l'outil. Etant donné le mode de discrétisation en triangles de la surface de l'outil, cette procédure assure une configuration de fin d'incrément respectant parfaitement les conditions de contact, tout en étant en équilibre mécanique.

Remarquons que cet algorithme pose le problème , pour les noeuds arrivant en contact, de la détermination du déplacement tangent à l'outil $\mathbf{U}_t$. Cette estimation a son importance lorsque le frottement est sensible à la vitesse (équation III.50) : on pourra choisir alors pour $\mathbf{U}_t$ le vecteur reliant, pour un noeud M du maillage de la tôle, son point d'incidence sur la matrice à sa position en fin d'incrément. De bons résultats, en convergence et temps de calcul, ont été obtenus avec une méthode tout à fait similaire dans le cas de l'emboutissage avec un frottement de Coulomb et une définition analytique de la surface des outils (GERMAIN et al. 1987).

Enfin, si l'on utilise une formulation en vitesses, avec un déplacement évalué selon l'équation III.20, deux choix sont possibles : soit reprendre l'algorithme précédent, soit, comme l'a suggéré bohatier (BOHATIEK 1986), faire varier le paramètre d'intégration η, de façon que le déplacement $(1-\eta)$ $\mathbf{V}\,\Delta t$ amène le noeud au contact, la vitesse $\mathbf{V}'$ étant alors tangente à l'outil.

CHAPITRE IV

Simulation du Formage Superplastique

Le CEMEF a aujourd'hui une longue expérience de l'utilisation de pâtes à modeler comme matériaux de simulation des procédés de mise en forme industriels. Néanmoins, jusqu'ici, seuls les procédés basés sur la déformation de pièces massives avaient été simulés (essentiellement forgeage, laminage, filage). Il était donc tentant d'aborder le domaine de la mise en forme des produits minces à travers une simulation du formage superplasti

que.

IV.A LE MATERIAU DE SIMULATION

Afin d'atteindre des déformations significatives, nous avons utilisé une pâte assez sensible à la vitesse de déformation : il s'agit d'un mélange de plasticine rouge (marque HARBUTT) et de crème silicone, appelé viscosine. La proportion de crème silicone permet d'augmenter le coefficient m de la pâte : on obtient ainsi m - 0,2 à 0,3.

En ce qui concerne la viscosine utilisée lors de nos essais, des tests antérieurs d'écrasement, à différentes vitesses de déformation, ont permis de déterminer la rhéologie suivante, dans le domaine de vitesses de déformation $10^{-}\ s^{-1} < \dot{\varepsilon}_{eq} < 1\ s^{-1}$:

$$\sigma_{eq} = 0{,}071\ \dot{\varepsilon}_{eq}^{\,0{,}30}\ (MPa)$$

IV.B DISPOSITIF EXPERIMENTAL

En raison de la valeur relativement faible de m (la viscosine n'est pas à proprement parler superplastique), des gonflages de géométrie complexe' ne peuvent être exécutés avec ce type de matériau. Aussi nous sommes nous limités dans cette étude à la mise en forme d'hémisphères, d'une part pour tester la faisabilité d'un tel formage et d'autre part pour vérifier les résultats du code de calcul. La figure IV.1 montre le dispositif expérimental. Le moule est hémisphérique (rayon 60 mm, rayon du congé 10 mm). Au fond du moule, un évent est relié à une trompe à eau pour créer une dépression sous le flan de viscosine et permettre la mise en forme. Une deuxième conduite reliée à un manomètre à mercure permet de mesurer cette dépression.

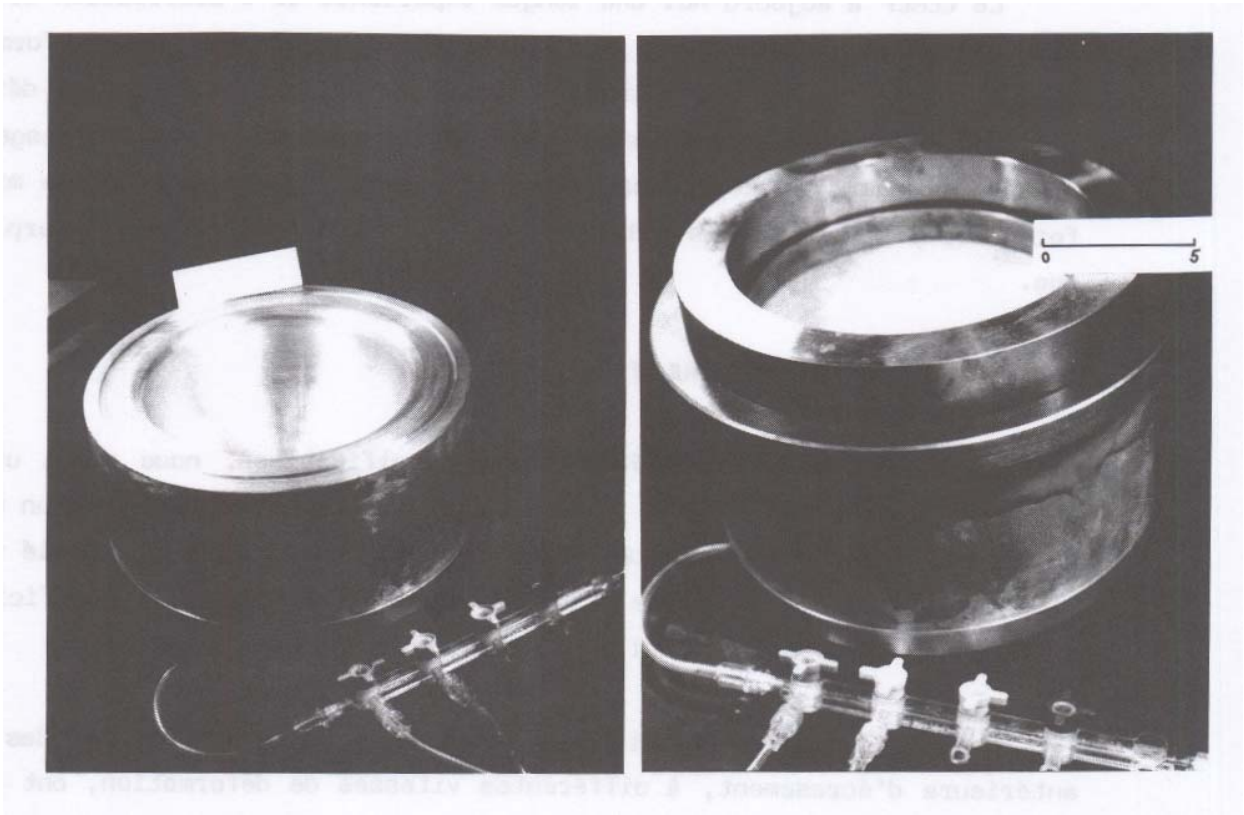


Figure IV.1 : Dispositif expérimental de gonflage. A gauche, l'outil seul A droite, après mise en place du flan et du serre-flan

Le flan a une épaisseur initiale de 3,75 mm. Nous aurions souhaité mettre en forme des flans plus minces mais, dans l'état actuel de notre savoir faire, cette épaisseur est apparue comme étant quasiment l'épaisseur minimale permettant des essais reproductibles et sans rupture prématurée. Il doit être signalé que pour cette épaisseur, la théorie de la membrane est mise en défaut au niveau du congé d'entrée, mais demeure néanmoins valable sur la quasi-totalité de la calotte sphérique.

IV.C PREPARATION DU FLAN INITIAL

Cette phase est fondamentale et conditionne la réussite de la simulation. Elle doit aboutir à un flan homogène et sans défaut interne. La vis-

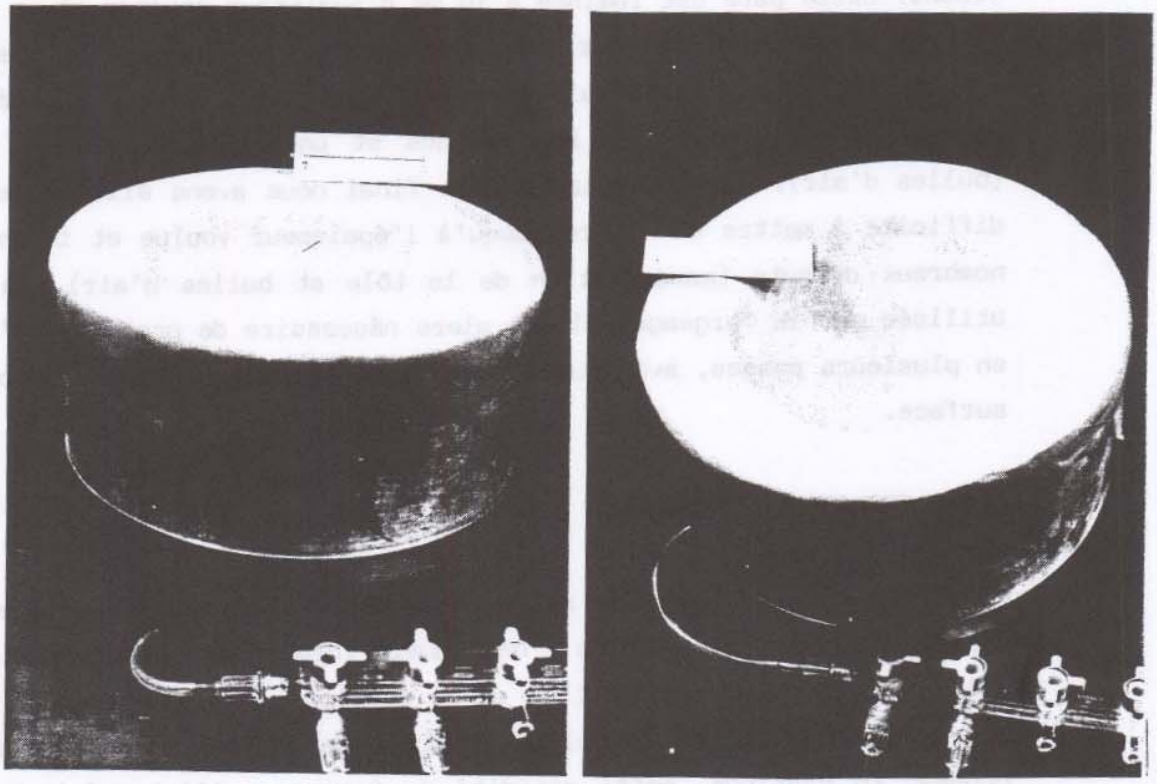
cosine est tout d'abord obtenue par malaxage de plasticine et de crème silicone. Cette pâte est laminée à 10 mm d'épaisseur environ et un lopin massif est alors constitué par superposition de ces "brames" de viscosine. De légers laminages intermédiaires et une mise sous charge prolongée assurent une bonne cohésion entre les couches et une présence minime de défauts (bulles d'air). Pour obtenir le flan final nous avons éliminé le laminage, difficile à mettre en oeuvre jusqu'à l'épaisseur voulue et introduisant de nombreux défauts (manipulation de la tôle et bulles d'air). La technique utilisée est le forgeage; il est alors nécessaire de pratiquer l'écrasement en plusieurs passes, avec lubrification au talc pour obtenir un bon état de surface.

IV.D FORMAGE EXPERIMENTAL

Pour un coefficient m de 0,3, la déformation équivalente est de 1,2 approximativement au pôle de l'hémisphère formé. Afin de travailler dans le milieu du domaine de définition de la rhéologie de la viscosine (autour de 0,1 s^{-1}), nous avons donc visé une durée de gonflage d'une dizaine de secondes. En pratique, cette rapidité de formage a l'inconvénient de rendre quasiment impossible la lecture de la pression. En effet, après ouverture de la trompe à eau, il se produit une diminution assez brutale du volume d'air sous le flan qui se déforme dans la cavité, à laquelle il faut ajouter l'inertie du manomètre à mercure. La pression "mesurée" est inférieure à 0,01 MPa.

La déformée finale est quasiment hémisphérique, presque partout en contact avec le moule : la figure IV.2 montre la pièce formée avant et après démoulage.

La mesure des épaisseurs est délicate : l'utilisation du Palmer est impossible en raison de la faible contrainte d'écoulement, celle de l'emporte-pièce également à cause de l'adhérence de la viscosine à l'outil. Finalement, la méthode utilisée est la suivante : on prélève sur la pièce, dans le moule, une portion angulaire qui est ensuite ramenée à un très faible secteur angulaire. L'épaisseur de ce secteur est alors mesurée au projecteur de profil.



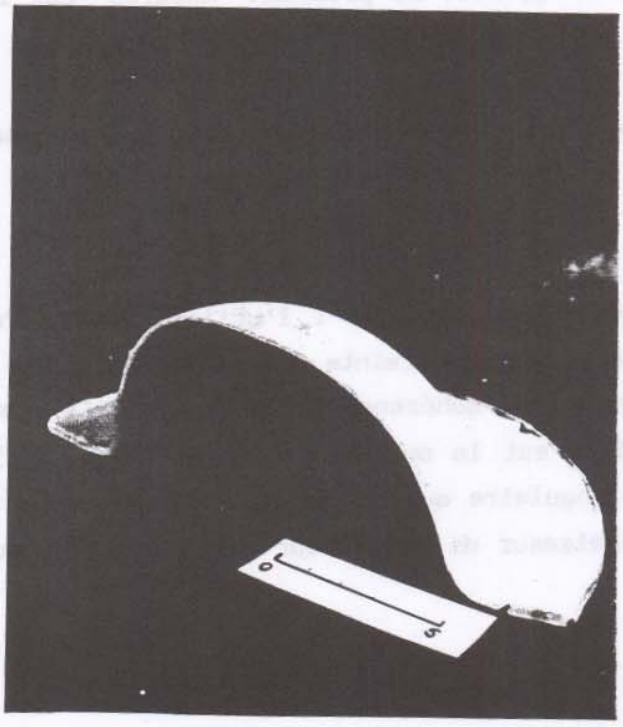


Figure IV.2 : Pièce formée en viscosine avant et après démoulage. La photographie ci-dessus montre l'apparition d'un défaut près du pôle.

IV.E SIMULATION NUMERIQUE ET COMPARAISON DES RESULTATS

La simulation numérique a été effectuée avec le logiciel SUPFUKM2 (calcul bidimensionnel axisymétrique présenté dans la partie V.F). Le maillage du flan comprend sur un rayon de 70 mm 31 noeuds et 30 éléments à 1 point de Gauss. Le maillage est raffiné au niveau du congé où le pas de discrétisation est 1 mm. Le noeud extérieur (r=70 mm) est considéré fixe et le contact collant (aucune mise en évidence expérimentale d'un avalement de matière). Nous avons demandé au programme de calculer le cycle de pression assurant une vitesse de déformation maximum au pôle autour de 0,1 s^{-1} (voir V.B). Le pas de temps est de 1 s et le temps de formage 11 s. La pression calculée est voisine de 0,002 avec un maximum de 0,0025 MPa à t=6 s.

La figure IV.3 regroupe les résultats concernant la distribution d'épaisseurs. Nous avons tracé, pour les résultats expérimentaux, les courbes d'épaisseurs minimale et maximale trouvés sur 3 pièces, avec pour chaque pièce, 3 prélèvements d'échantillons répartis à 120°.

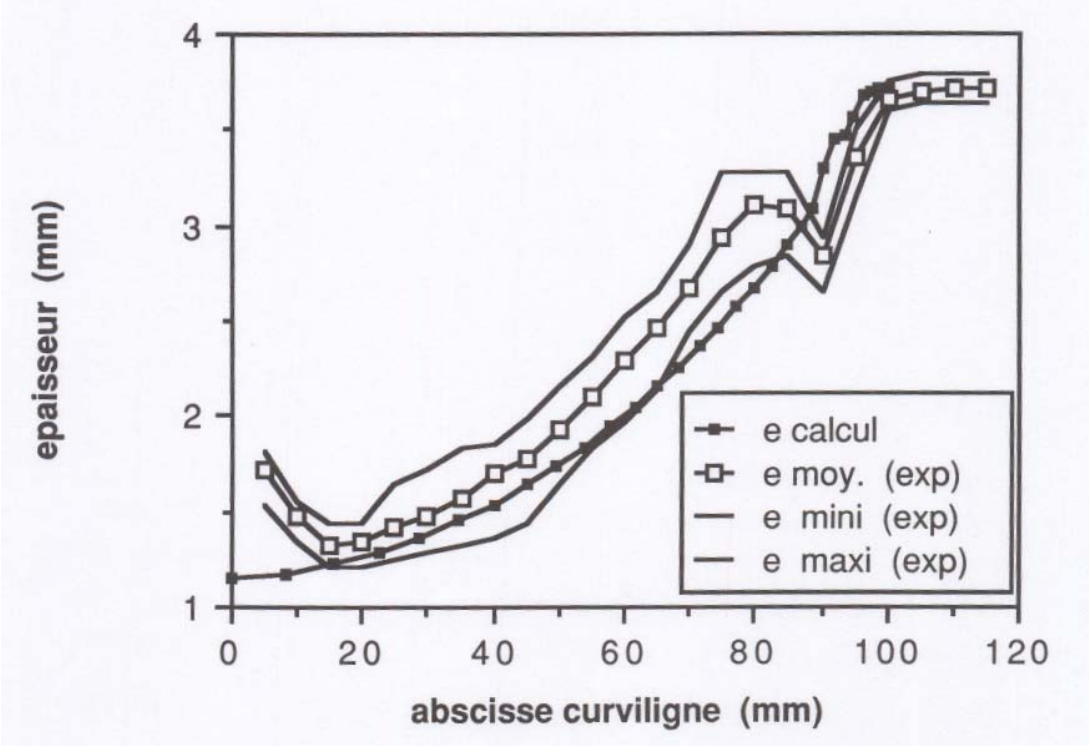


Figure IV.3 : Profil d'épaisseur de l'hémisphère final . Comparaison des résultats théoriques et expérimentaux

La dispersion des résultats expérimentaux est imputable d'une part à l'axisymétrie imparfaite des formages, en raison de l'apparition de striction plus ou moins localisée au voisinage du pôle. D'autre part, la technique de mesure, assez rustique, introduit des perturbations. Celles-ci sont très nettes au pôle où les épaisseurs se trouvent artificiellement augmentées. Cependant, on peut toutefois constater une bonne corrélation entre résultats numériques et expérimentaux sur la majeure partie de la pièce. Dans la région du congé, l'amincissement expérimental assez net n'est que partiellement simulé par le calcul mais rappelons que dans cette zone, les équations de membrane ne sont plus valides.

En conclusion de ces essais de simulation, nous pouvons confirmer la faisabilité de pièces relativement minces en viscosine jusqu'à des déformations de l'ordre de 1. D'autre part ces essais nous ont permis de vérifier les résultats du modèle numérique.

CHAPITRE V

Application au Formage Superplastique de Tôles

V.A LES MODELES ACTUELS

Les chercheurs se sont intéressés dès la fin des années 1960 à la modélisation du formage superplastique. Jovane, le premier, a proposé un modèle pour le gonflage de diaphragmes circulaires (JOVANE 1968). Son travail s'inscrit dans la continuité de l'étude de la déformation élasto-plastique de diaphragmes (HILL 1950, W00 1964, STORACKERS 1966) . à ce titre, la déformée est supposée être, à tout instant, une calotte sphérique d'épaisseur homogène. A partir d'une résolution analytique, un cycle de pression en fonction du temps est déterminé, de façon à assurer des vitesses de déformation dans le domaine superplastique. Suite à ces premiers travaux, d'autres auteurs ont également modélisé le gonflage de diaphragmes superplastiques (CORNFIELD et JOHNSON 1970, HOLT 1970, BELK 1975). Ces modèles sont assez similaires : le diaphragme déformé, supposé sphérique, est subdivisé en anneaux d'épaisseurs différentes. Sur chacun de ces anneaux, on écrit l'équation d'équilibre de Laplace $\sigma_{eq} = pR/2h$ (R rayon de courbure, h épaisseur). Un système global, dont les inconnues sont les positions des anneaux, est résolu de manière itérative. Holt montre, au travers de résultats expérimentaux obtenus sur des alliages plomb-étain, que l'hypothèse de sphéricité est réaliste pour $m \geq 0.5$. En revanche, l'hypothèse faite par Jovane de l'uniformité de l'épaisseur est plus discutable, ce qui est confirmé par Belk qui montre qu'elle conduit à des erreurs importantes dès que la flèche au pôle dépasse 0,7 fois le rayon initial. En fait, Cornfield et Johnson montrent que la distribution d'épaisseur, lorsque le diaphragme atteint la forme d'un hémisphère, est caractéristique du coefficient de sensibilité à la vitesse m (voir figure V.1). Cette distribution est d'autant plus homogène que l'on se rapproche du comportement Newtonien (m=1), sans toutefois atteindre l'uniformité. Ces résultats théoriques ont été confirmés par des essais sur TA6V et acier inox, comme l'illustre la figure V.2 ci-dessous.

Suivant la même philosophie, Ghosh et Hamilton (GHOSH, HAMILTON 1980) ont abordé le cas de la déformation plane à travers l'étude du formage de longues boîtes parallélépipédiques. Dans une section médiane, l'évolution du rayon de courbure de la partie libre de la tôle (qui n'a pas encore touché le moule) est calculée analytiquement. Pour tenir compte du frottement contre le moule, les zones en contact sont divisées en tranches (cette approche a été reprise par Kuperfarb (KUPERFARB, GERMAIN, ABOUAF 1987)).

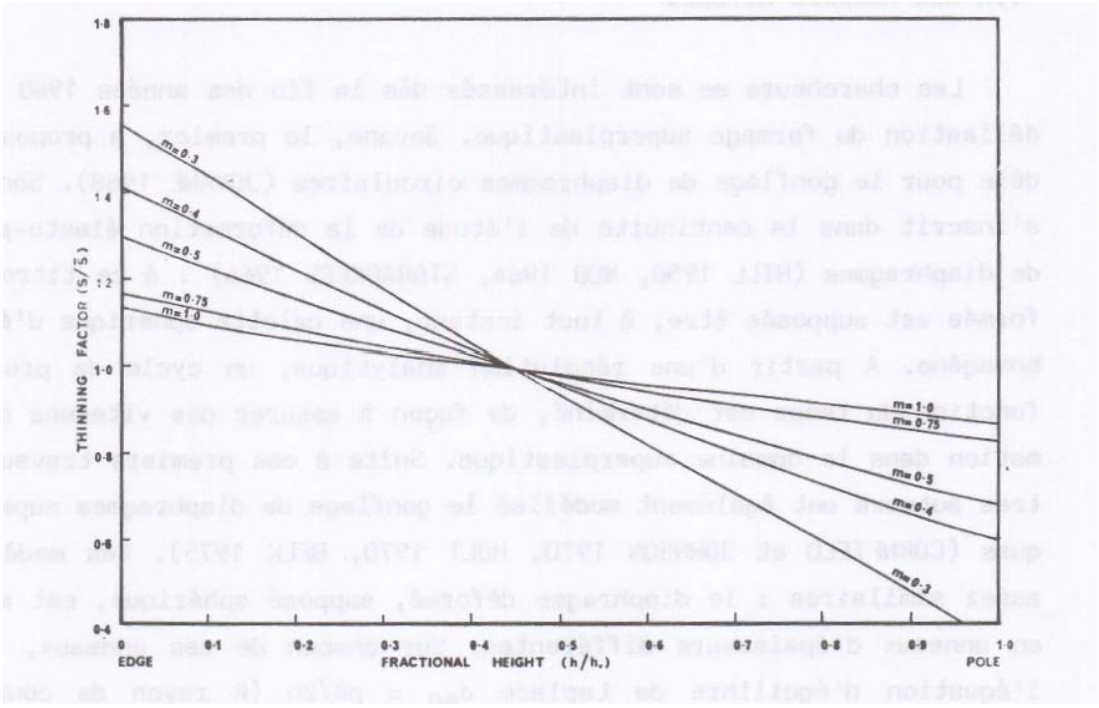


Figure V.1 : Distribution calculée d'épaisseur sur hémisphère en fonction de m (en abscisses : déflection h/rayon initial h_0, en ordonnées : épaisseur s/épaisseur moyenne $\bar{S}$) (CORNFIELD, JOHNSON 1970).

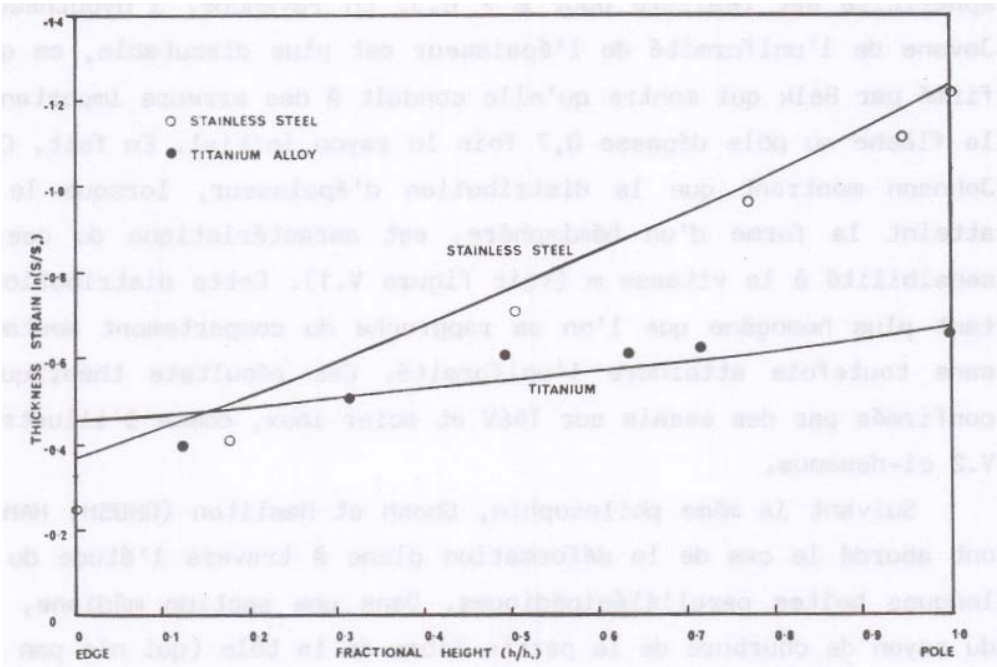


Figure V.2 : Comparaison des résultats expérimentaux (cercles) avec le profil d'épaisseur calculé (en trait continu). En abscisses : déflection h/rayon initial h_o, en ordonnées : déformation dans l'épaisseur $\ln(s/s_0)$. m = 0,4 pour l'acier inox et m = 0,75 pour l'alliage de titane (CORNFIELD, JOHNSON 1970)

Ghosh et Hamilton ont donné des exemples de cycles de pression calculés de façon à réguler la vitesse de déformation dans la partie libre (figure V.3) et ont étudié l'influence de la géométrie du moule sur l'allure de ces cycles.

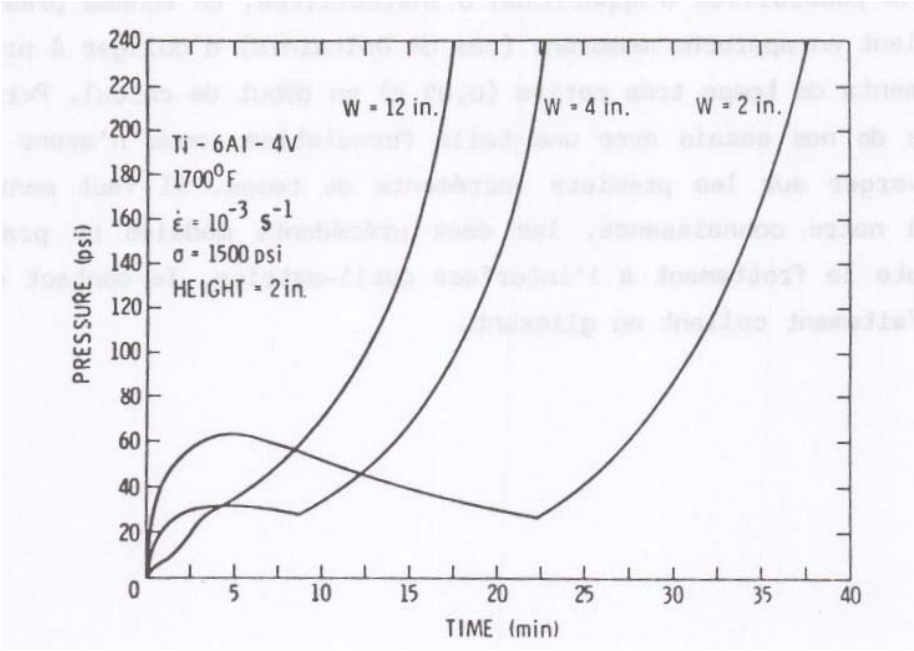


Figure V.3 Influence de la largeur du moule (w) sur le cycle de pression calculé assurant une vitesse de déformation constante. Profondeur du moule = 2 pouces. (1 psi ≈ 0,007 MPa) (GHOSH, HAMILTON 1980)

L'avantage des modèles précédents réside dans leur facilité de mise en oeuvre : peu de données à manipuler, un temps de calcul très réduit permettant une exploitation sur microcalculateur. Ainsi, suite aux publications précédentes, chaque constructeur aéronautique (ou presque) a-t-il développé un tel modèle. Néanmoins, leurs limitations sont évidentes. Tout d'abord, la prise en compte de formes complexes d'outils est délicate : les seules géométries traitées sont coniques (TANG 1980) ou parallélépipédiques à parois inclinées (MALININ et ROMANOV 1985). Une seconde limitation est due à leur caractère bidimensionnel qui ne permet de traiter que les déformations planes et axisymétriques : d'où l'impossibilité de modéliser ce qui se passe à l'extrêmité d'une boite parallélépipédique par exemple, sans parler de pièces 3D plus complexes.

Pour aller plus loin, la méthode des éléments finis a été mise en oeuvre, tout d'abord avec une approche "volumique" (voir chapitre II) en 2 dimensions (ZHANG, WOOD et ZIENKIEWICZ 1986, CHANDRASEKARAN, ALLEN, HAISLER et GOFORTH 1987) ou 3 dimensions (ARGYRIS et DOLTSINIS 1984). Les modèles

les plus récents sont basés sur des approches membrane ou coque mince (DOLTSINIS et al. 1987, BONET et WOOD 1987), plus économiques en temps de calcul. Ces deux modèles utilisent une formulation viscoplastique pure avec intégration explicite du champ de vitesse. Outre une moins grande précision et la possibilité d'apparition d'instabilités, ce schéma présente l'inconvénient en approche membrane (cas de Doltsinis) d'obliger à prendre des incréments de temps très petits (0,05 s) en début de calcul. Personnellement, lors de nos essais avec une telle formulation, nous n'avons pas réussi à converger sur les premiers incréments de temps. Il faut mentionner enfin qu'à notre connaissance, les deux précédents modèles ne prennent pas en compte le frottement à l'interface outil-matrice, le contact étant supposé parfaitement collant ou glissant.

V.B LE CODE DE CALCUL SUPFORM3

Nous venons de voir qu'il existe fort peu de modèles capables de traiter des géométries complexes. Industriellement, aucun n'est actuellement utilisé. Ce sont les constructeurs aéronautiques Européens qui, les premiers, ont soumis le problème de la modélisation aux laboratoires de recherche. On a déjà cité les travaux de l'Université de Stuttgart (RFA) (DOLTSINIS et al. 1987) en collaboration avec MBB (Messerschmidt-bolkowB16m) et ceux de l'Université de Swansea (UK) (BONET et WOOD 1987) avec British Aerospace. En France, les sociétés Avions Marcel Dassault-bréguet Aviation, Aerospatiale, Matra et SNECMA, ont été les premières à exprimer le besoin industriel d'une modélisation.

Il est hors de question de détailler ici la structure du code de calcul SUPFORM3, construit à partir des équations présentées aux chapitres II et III. Nous nous intéresserons plutôt à un point spécifique : le problème de la détermination du cycle de pression.

V.B.1 La détermination du cycle de pression

Cette détermination répond, dans le cas des alliages superplastiques, à un impératif : contrôler la vitesse de déformation afin d'éviter le phénomène de striction. Si l'on se reporte à la figure I.6 (chapitre I), ceci signifie que la vitesse de déformation équivalente $\dot{\varepsilon}_{eq}$ doit se situer dans le domaine II qui est le domaine superplastique où la valeur élevée du coefficient de sensibilité à la vitesse m assure un retard maximum à la striction (voir aussi l'analyse de Hart de la partie I.B). Un doit éviter en revanche les domaines I et III dans lesquels la striction apparaît plus facilement.

Un second objectif est de minimiser la durée de l'opération de formage, ceci dans un souci d'optimiser la productivité des outils mais aussi de limiter l'endommagement des pièces dû à l'oxydation à chaud pendant l'opération.

Ces deux impératifs nous ont conduit à envisager une régulation de la valeur maximum de $\dot{\varepsilon}_{eq}$ dans la tôle autour de la borne supérieure du domaine superplastique. Ainsi, l'ensemble des valeurs $\dot{\varepsilon}_{eq}$ dans la tôle sera-t-il situé majoritairement dans le domaine II superplastique, c'est ce qu'illustre la figure V.4 ci-dessous.

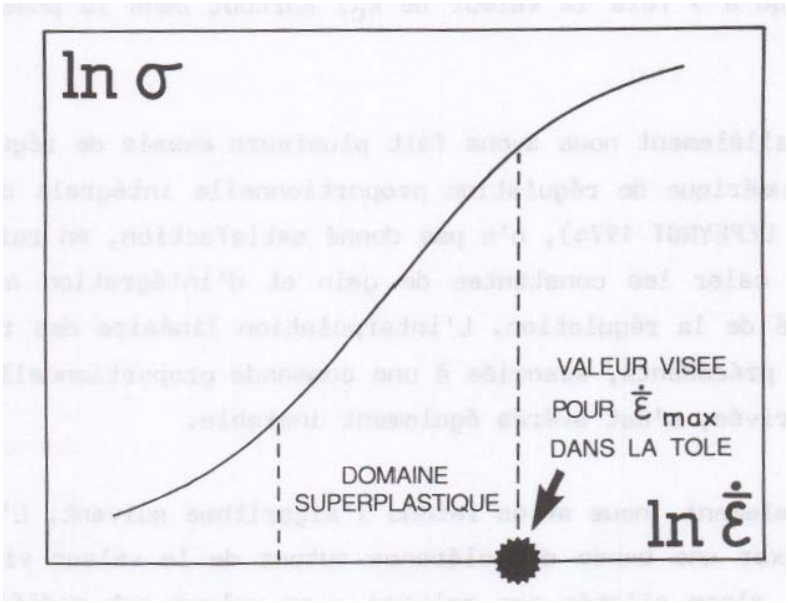


Figure V.4 : L'idée de base de la régulation de la vitesse de déformation

Remarquons que si certaines parties de la tôle (généralement les zones en contact) présentent des vitesses dans le domaine I, l'apparition de la striction au cours du formage est assez improbable du fait cette fois des très faibles valeurs de $\dot{\varepsilon}_{eq}$.

Pour effectuer cette régulation, la seule variable sur laquelle nous pouvons agir est la pression p appliquée sur la tôle. Dans les modèles 2D analytiques dérivés de celui de Ghosh et Hamilton, pour la mise en forme d'une boîte ou d'un diaphragme, il est assez simple d'introduire directement la condition Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$) = cste, le lieu du maximum de $\dot{\varepsilon}_{eq}$ étant connu d'avance (GHOSH et HAMILTON 1980). Il n'en va pas de même pour les géométries plus complexes. Parmi les modèles d'éléments finis appliqués au formage superplastique, seul celui de l'Université de Stuttgart (DULTSINIS et al. 1987) inclut une telle régulation. Son principe est très simple : la correction en pression est directement proportionnelle à l'écart en vitesse de déformation. Si à l'incrément n on a p = p_n et Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$) = $\dot{\varepsilon}_n$ alors la pression appliquée au cours de l'incrément n+1 est donnée par :

$$p_{n+1} = p_n \frac{\dot{\varepsilon}_c}{\dot{\varepsilon}_n}$$

ou $\dot{\varepsilon}_c$ est la valeur visée. Bien que la valeur de la correction soit limitée pour éviter de trop fortes oscillations, celles-ci sont assez importantes (jusqu'à 3 fois la valeur de $\dot{\varepsilon}_c$) surtout dans la phase finale du formage.

Parallèlement nous avons fait plusieurs essais de régulation. Un algorithme numérique de régulation proportionnelle intégrale dérivée (P.I.D.), (FAURRE, DEPEYROT 1974), n'a pas donné satisfaction, en raison de la difficulté de caler les constantes de gain et d'intégration afin d'assurer la stabilité de la régulation. L'interpolation linéaire des résultats des incréments précédents, associée à une commande proportionnelle ou proportionnelle dérivée, s'est avérée également instable.

Finalement, nous avons retenu l'algorithme suivant. L'idée de base est de se fixer une bande de tolérance autour de la valeur visée $\dot{\varepsilon}_c$. La pression est alors pilotée par paliers : sa valeur est modifiée si, à la fin

d'un incrément, Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$) se trouve hors de la bande de tolérance. En complément, un ensemble de considérations (tendance au retour vers la valeur visée, succès ou échec des dernières corrections de pression, sensibilité $\Delta\dot{\varepsilon}_{eq}/\Delta p$) interviennent dans la décision de modifier la pression et dans la détermination de la nouvelle valeur.

En pratique, l'utilisateur du code de calcul doit fournir les données suivantes

- la valeur visée pour Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$)
- la tolérance autour de cette valeur
- la vitesse de montée en pression (MPa/s) dans la phase initiale du formage, jusqu'à ce que $\dot{\varepsilon}_c$ soit atteinte ou dépassée, la régulation entrant alors en service
- l'écart de pression entre deux paliers successifs
- la pression maximale à respecter
- le nombre d'incréments (généralement 5 ou 6) qui constituent la mémoire de l'évolution de p et Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$) et donc la base de décision pour l'incrément en cours.

Dans la suite, nous donnerons quelques exemples de cycles de pression ainsi calculés.

V.C ETUDE D'UN CAS DE DEFORMATION PLANE

La pièce étudiée est une longue boite parallélépipédique (longueur 380 mm, largeur 70 mm, profondeur 30 mm) en alliage de titane TA6V. Cette pièce a fait l'objet d'une campagne d'essais dans les établissements de la société Avions Marcel Dassault-Bréguet Aviation au cours de l'année 1984. Dans une section moyenne de la boîte, la tôle peut être considérée en état de déformation plane (déformations nulles selon l'axe longitudinal de la pièce). C'est cette approximation légitime qui a permis à Kuperfarb de modéliser le formage de cette pièce au moyen d'une méthode mixte déjà mentionnée au V.A (équation d'équilibre analytique dans la partie restant libre et méthode des tranches dans les zones en contact (KUPERFARB, GERMAIN, ABOUAF 1987)). Nous avons également tiré profit de l'approximation déformation plane en maillant seulement une bande de matériau : comme l'indique la figure V.5, le maillage comprend 35 éléments à 4 noeuds et 4 points de Gauss entre le bord supérieur du moule et l'axe de symétrie longitudinal. Le déplacement des noeuds est imposé nul selon cet axe.

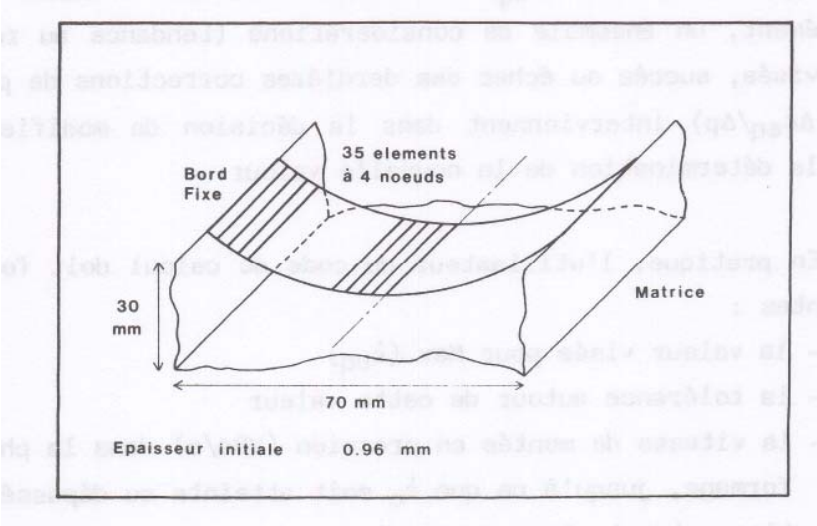


Figure V.5 : Maillage utilisé en déformation plane

Ne disposant d'aucune information précise concernant la rhéologie de l'alliage utilisé lors des essais, nous avons pris un coefficient m égal à 0,5, ce qui est une valeur classique pour un écoulement superplastique (voir partie I.C). La consistance, variable k de l'équation de comportement $\sigma_{eq} = k\dot{\varepsilon}^{m}_{eq}$ a été calée en analysant l'évolution du rayon de courbure en fonction du temps, avant le contact au fond du moule. Expérimentalement, cette évolution est connue par 3 essais interrompus à 7, 13 et 19 mn. Nous avons trouvé une excellent corrélation entre l'évolution expérimentale et l'évolution réelle pour k = 460 MPa.s ^{1}.

La rhéologie étant fixée, nous avons simulé le formage complet de la pièce en imposant le cycle de pression utilisé lors des essais industriels, et ce pour trois coefficients de frottement de Coulomb : μ = 0,1 - 0,2 - 0,3. La figure V.6 regroupe les profils d'épaisseurs calculés et expérimentaux : on constate une influence non négligeable du frottement, qui augmente la différence d'épaisseur entre le coin et le milieu de la pièce, et d'autre part, une bonne adéquation entre expérience et modèle avec μ = 0,2. Il est à noter que ce même coefficient μ = 0,2 avait déjà été trouvé en utilisant la méthode des tranches (KUPERFARB et al. 1987).

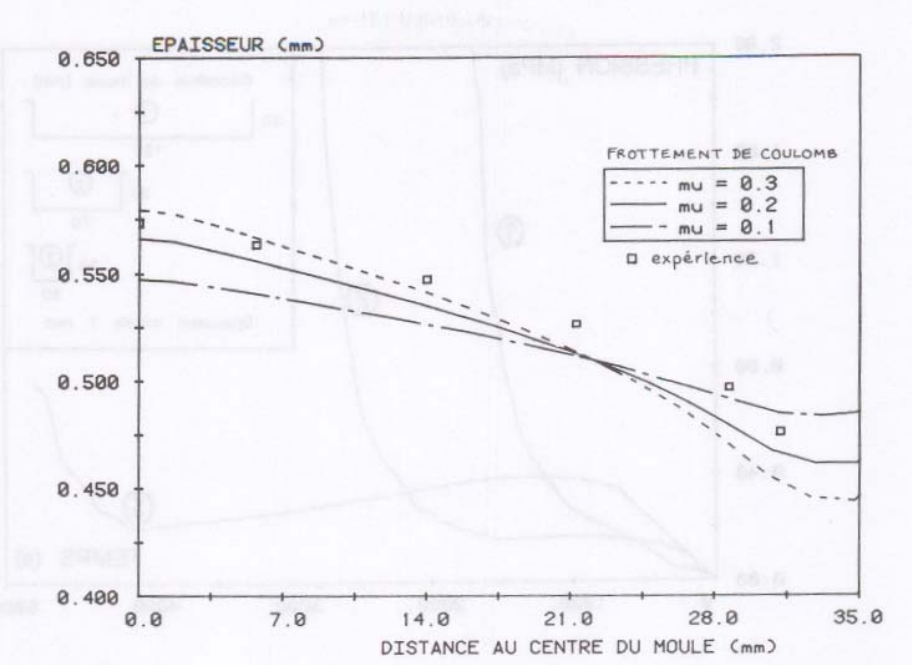


Figure V.6 : Profils d'épaisseur sur pièce finale

Allure du cycle de pression

Nous avons voulu calculer le cycle de pression optimum, au sens où nous l'avons précédemment défini et tester l'influence de la géométrie du moule sur ce cycle. Pour une même profondeur de 30 mm, nous avons testé trois largeurs de moule : 180 mm, 70 mm (cas précédemment étudié) et 3U mm. La vitesse choisie pour le maximum de la vitesse de déformation est 3.10^{-4} s^{-1}. Les cycles de pression optimum sont donnés figure V.7. La fin du formage est similaire dans les trois cas : la mise en forme finale du coin de la pièce nécessite une forte augmentation de la pression. Celle-ci dépend alors de l'épaisseur locale de la tôle. Ainsi, dans le cas n°3, où la tôle a déjà été considérablement déformée, la pression finale est seulement de 0,8 MPa environ. En revanche, la pièce n°2 réclame une pression finale plus élevée (3,8 MPa) et la pièce n°3, aux faibles valeurs de déformation, une pression de 6,0 MPa. Il faut toutefois préciser qu'à ce stade, les rayons de courbure sont très faibles et que l'erreur d'approximation due au maillage et à l'hypothèse membrane est sans doute importante.

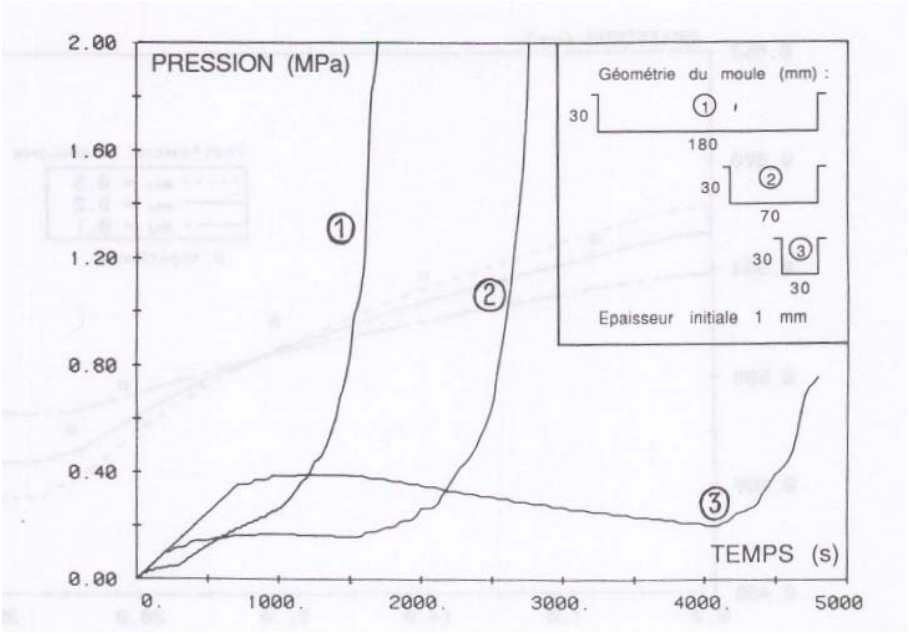


Figure V.7 : Cycles de pression optimaux en déformation plane pour différentes géométries

En ce qui concerne la première partie des cycles de pression, elle illustre la compétition entre variation du rayon de courbure et variation d'épaisseur : initialement, la vitesse de variation du rayon est beaucoup plus élevée que la vitesse de variation de l'épaisseur et, suivant l'équation d'équilibre $\sigma_{eq} = p\ R/h$ (R : rayon de courbure, h : épaisseur), la pression doit alors augmenter. Au cours du formage, la variation d'épaisseur est de plus en plus rapide alors que la variation de rayon de courbure est de plus en plus lente : la pression doit alors être diminuée. Toutefois, ce n'est pas le cas avec la géométrie n°1 pour laquelle, le contact avec la matrice est atteint avant que le phénomène d'amincissement ne soit prédominant. Il est intéressant de comparer ces courbes à celles calculées par Ghosh et Hamilton et présentées figure V.3. Les rapports géométriques sont différents ainsi que les hypothèses de contact (collant sur la figure V.3). Cependant l'allure générale est la même.

Pour le cas n°2, nous donnons figure V.8 l'évolution du maximum de la vitesse de déformation équivalente au cours de l'opération. On constate que la régulation autour de la valeur choisie est correcte.

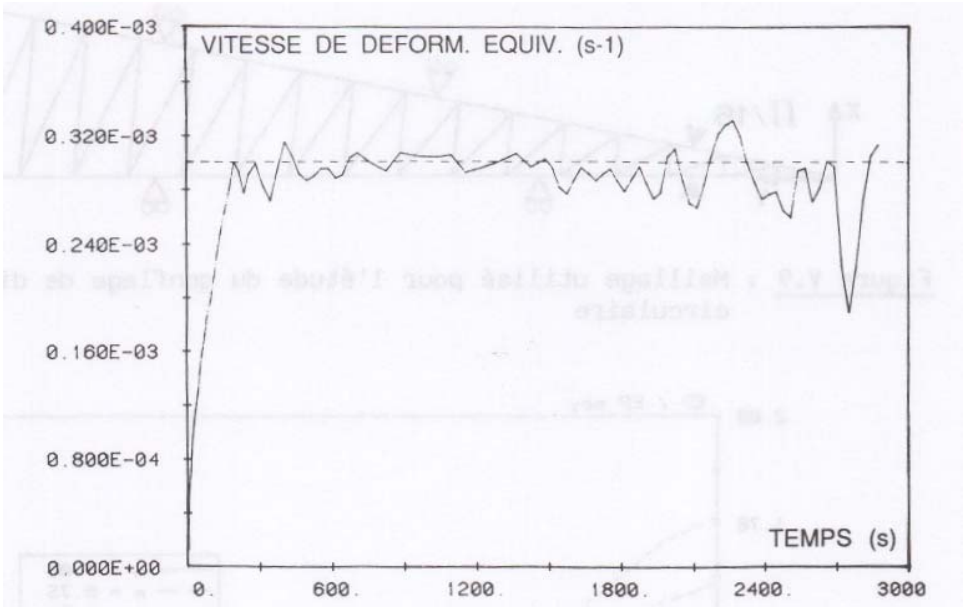


Figure V.8 : Régulation de Max ($\dot{\varepsilon}_{eq}$) pour la géométrie rP2

V.D - ETUDE DE CAS AXISYMETRIUUES

V.D.1 Gonflage de diaphragme circulaire. Comparaison du profil d'épaisseur théorique obtenu sur l'hémisphère avec celui calculé par le modèle de Cornfield et Johnson

Lorsque la vitesse d'écrouissage du matériau est faible, ce qui est le cas des alliages superplastiques, la déformée est à tout instant une calotte sphérique. Au bout d'un certain temps, un hémisphère est obtenu . Cornfield et Johnson ont montré grâce à leur modèle et ont vérifié expérimentalement, que le profil d'épaisseur de l'hémisphère est principalement influencé par la valeur de m, comme l'indique la figure V.1 (voir plus haut).

Pour calculer ce gonflage, nous avons maillé, en raison de la symétrie axiale, un secteur angulaire de faible ouverture (π/16 radians) : voir figure V.9 ci-après. Le maillage comprend 31 éléments triangulaires linéaires à un point d'intégration. La figure V.10 montre la répartition d'épaisseur obtenue avec notre modèle, pour différentes valeurs de m.

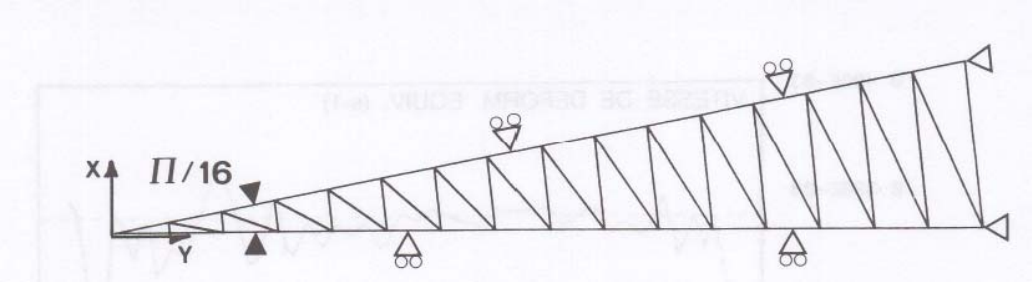


Figure V.9 : Maillage utilisé pour l'étude du gonflage de diaphragme circulaire

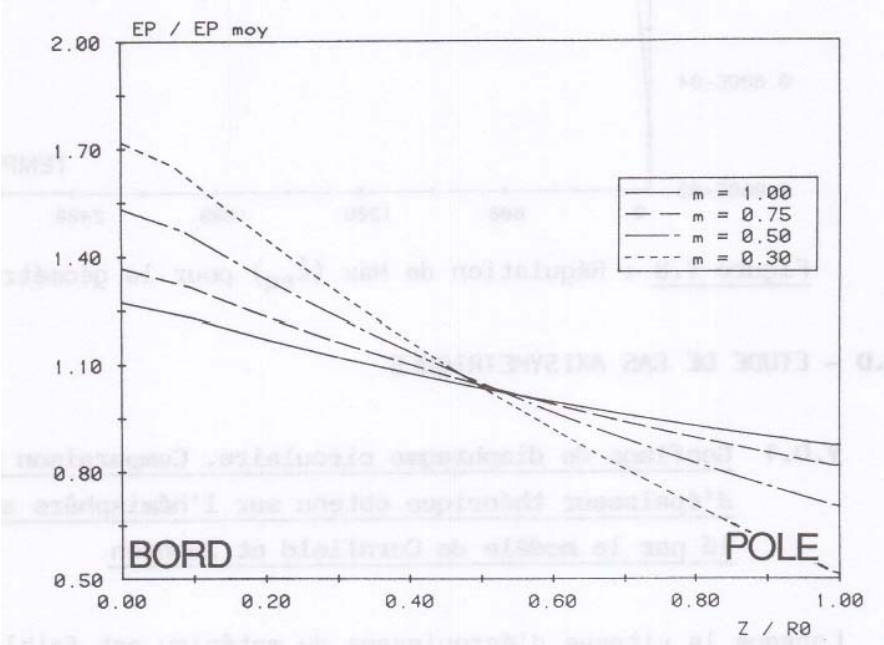


Figure V.10 : Profils d'épaisseurs théoriques de l'hémisphère formé . En ordonnées figure le rapport de l'épaisseur locale à l'épaisseur moyenne de l'hémisphère (qui est égale à la moitié de l'épaisseur initiale du diaphragme).

On retrouve le même type de courbes que Cornfield et Johnson avec une parfaite concordance au pôle (le facteur d'amincissement diffère seulement de 0,02 environ). Au bord de l'hémisphère, il existe un léger décalage (0,10 à 0,20) qui provient de l'hypothèse de déformation plane faite par ces chercheurs dans cette région. A notre avis, cette hypothèse, si elle semble légitime, introduit sans doute des perturbations dans le calcul (ces auteurs n'expliquent pas clairement la transition d'un état de tension équibiaxiale au pôle à un état de déformation plane au bord). Ceci est confirmé au vu des résultats expérimentaux que ces auteurs mentionnent (nous invitons le lecteur à se reporter à la figure V.2) : on constate qu'au bord de l'hémisphère, leur modèle prévoit de plus grandes déformations qu'en réalité (donc des épaisseurs trop faibles). Si l'on extrapole par exemple la courbe expérimentale concernant l'alliage de titane, on trouve

une déformation dans l'épaisseur de -0,37, soit un rapport épaisseur/épaisseur moyenne de 1,38. Le modèle de C. et J. donne un rapport inférieur 1,17 (voir figure V.1 pour m = 0,75). Si l'on se réfère à la figure V.10 ci-dessus, on trouve avec notre modèle d'éléments finis... 1,37, soit exactement la valeur expérimentale! Cette stricte coïncidence mise à part, ce qui précède démontre la bonne réponse de notre modèle aux variations de la sensibilité à la vitesse du matériau. Nous avons vérifié que, comme le prévoit l'analyse de Cornfield et Johnson, la géométrie initiale, la constante k et la vitesse de déformation n'ont quasiment aucune influence sur les profils d'épaisseurs.

V.D.2 - Gonflage de diaphragme circulaire. Comparaison avec l'expérience

Il s'agit du même type de gonflage que précédemment. La géométrie illustrée figure V.11 ci-dessous a été étudiée expérimentalement (GAVRIUSHIN, GAVRIUSHINA 1985) pour un alliage d'aluminium Al-6%Mg-1%Mn assez faiblement superplastique (m = 0,33 seulement). La pression est maintenue constante égale à 0,3 MPa.

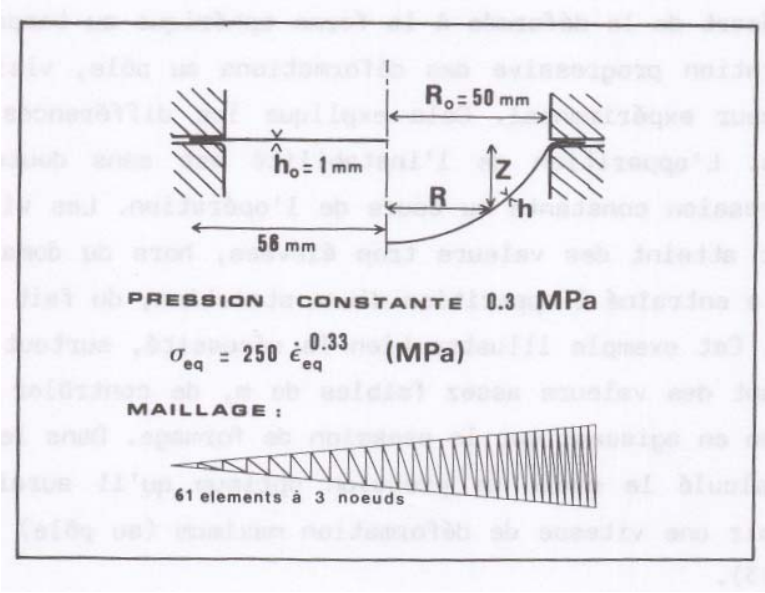


Figure V.11 : Gonflage de diaphragme circulaire en alliage d'aluminium.

Nous avons effectué la simulation numérique sur un faible secteur angulaire ($\pi/16$) maillé avec 61 triangles linéaires. Les résultats aux temps 10 mn, 20 mn et 40 mn sont reportés dans la figure V.12. Pour enrichir la comparaison, nous avons superposé les résultats d'un modèle de l'Université de Swansea qui utilise des éléments finis bidimensionnels axisymétriques purement viscoplastiques (ZHANG, WOOD et ZIENKIEWICZ 1986, voir aussi partie II.A). En ce qui concerne les déformées successives au cours du temps, les deux modèles donnent des résultats très proches et en bon accord avec la réalité. Il n'en est pas de même pour le profil d'épaisseur et ceci nécessite quelques éclaircissements

1. Le modèle de Swansea est erroné au pôle : cette anomalie est due à un "biais" des éléments classiques axisymétriques dont la solution a été donnée par Abouaf (ABOUAF 1985).

2. Les profils d'épaisseurs prédits par les deux modèles sont très proches (région polaire exceptée) mais cependant différents du profil expérimental, surtout au temps 40 mn.

En fait, il faut savoir que le diaphragme s'est rompu au pôle au temps final 40 mn. On peut voir les effets du développement de cette instabilité dans l'écart de la déformée à la forme sphérique au temps 40 mn et dans la concentration progressive des déformations au pôle, visible sur le profil d'épaisseur expérimental. Cela explique les différences avec les profils calculés. L'apparition de l'instabilité est sans doute dûe au maintien d'une pression constante au cours de l'opération. Les vitesses de déformation ont atteint des valeurs trop élevées, hors du domaine superplastique et cela a entraîné l'apparition d'une striction, du fait d'un coefficient m diminué. Cet exemple illustre bien la nécessité, surtout pour les alliages présentant des valeurs assez faibles de m, de contrôler la vitesse de déformation en agissant sur la pression de formage. Dans le cas présent, nous avons calculé le cycle de pression optimum qu'il aurait fallu appliquer pour avoir une vitesse de déformation maximum (au pôle) de 3.10^{-4} s^{-1} (figure V.13).

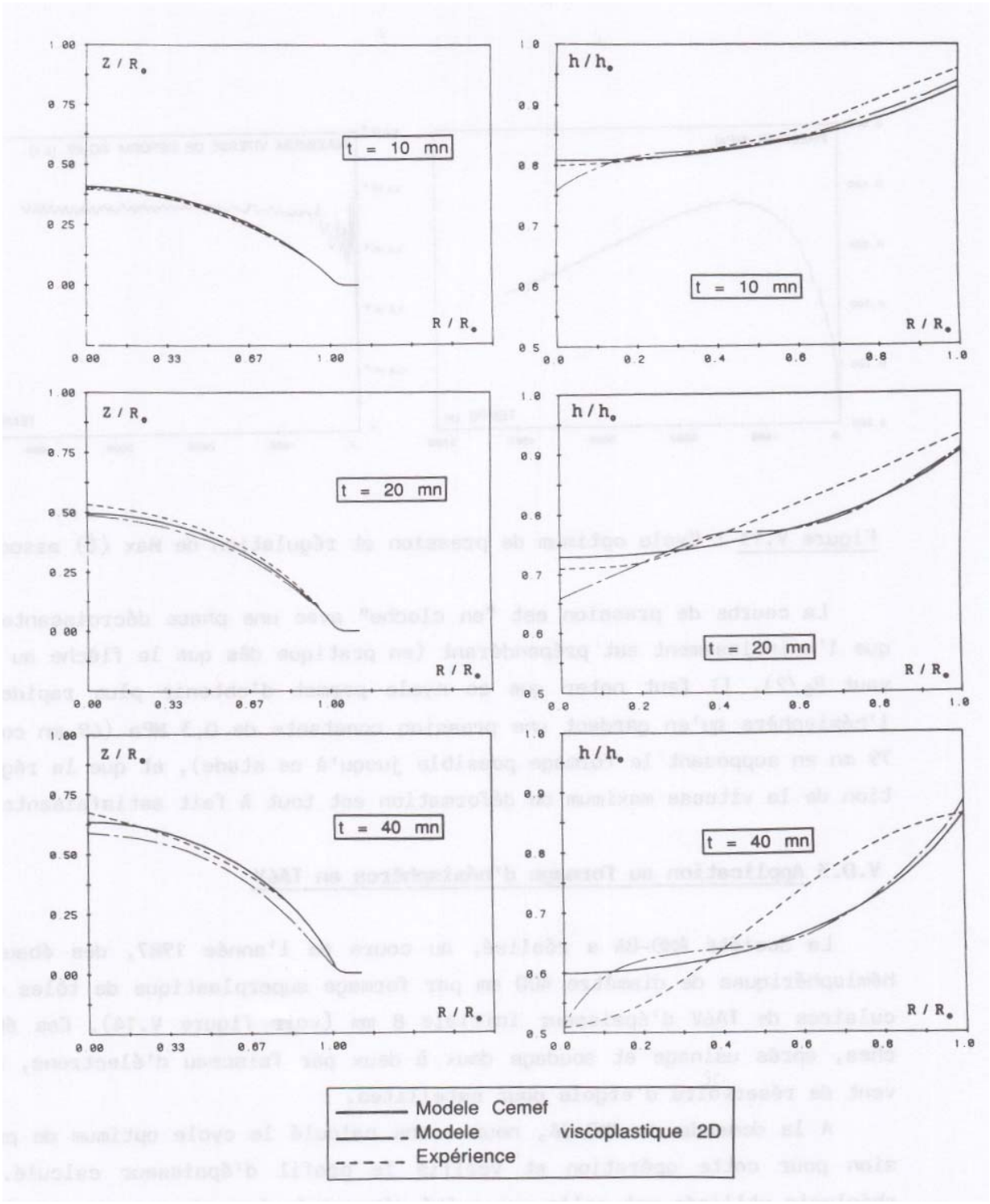


Figure V.12 : Gonflage de diaphragme circulaire en alliage d'aluminium
Résultats

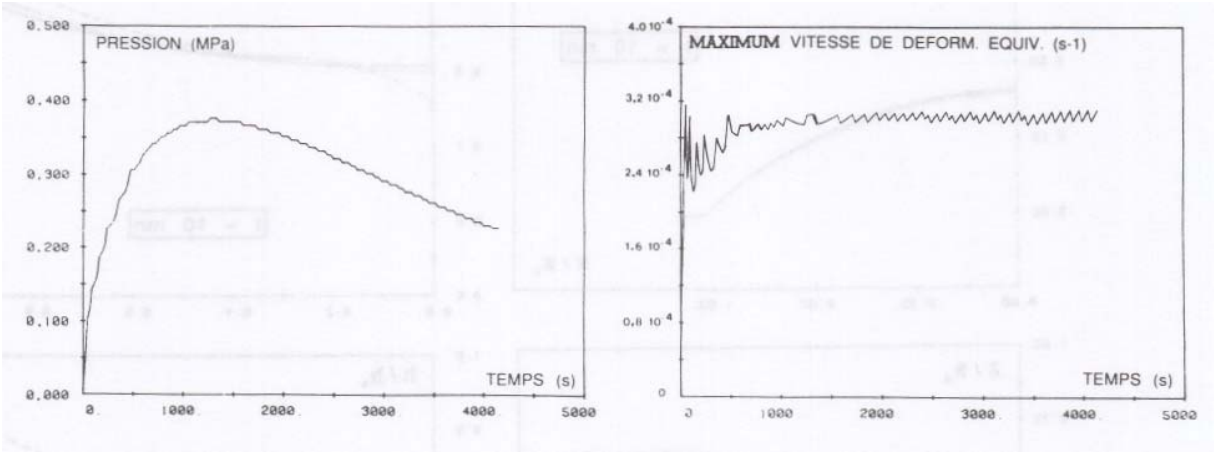


Figure V.13 : Cycle optimum de pression et régulation de Max ($\dot{\bar{\varepsilon}}$) associée

La courbe de pression est "en cloche" avec une phase décroissante dès que l'amincissement est prépondérant (en pratique dès que la flèche au pôle vaut $R_0/2$). Il faut noter que ce cycle permet d'obtenir plus rapidement l'hémisphère qu'en gardant une pression constante de 0,3 MPa (69 mn contre 79 mn en supposant le formage possible jusqu'à ce stade), et que la régulation de la vitesse maximum de déformation est tout à fait satisfaisante.

V.D.3 Application au formage d'hémisphères en TA6V

La Société AMD-BA a réalisé, au cours de l'année 1987, des ébauches hémisphériques de diamètre 400 mm par formage superplastique de tôles circulaires de TA6V d'épaisseur initiale 8 mm (voir figure V.14). Ces ébauches, après usinage et soudage deux à deux par faisceau d'électrons, servent de réservoirs d'ergols pour satellites.
A la demande de AMD-BA, nous avons calculé le cycle optimum de pression pour cette opération et vérifié le profil d'épaisseur calculé. La rhéologie utilisée est celle qui a été déterminée lors des essais de déformation plane présentés dans la partie V.C, soit

$$\sigma_{eq} = 460\ \dot{\bar{\varepsilon}}^{0,50} \quad (MPa)$$

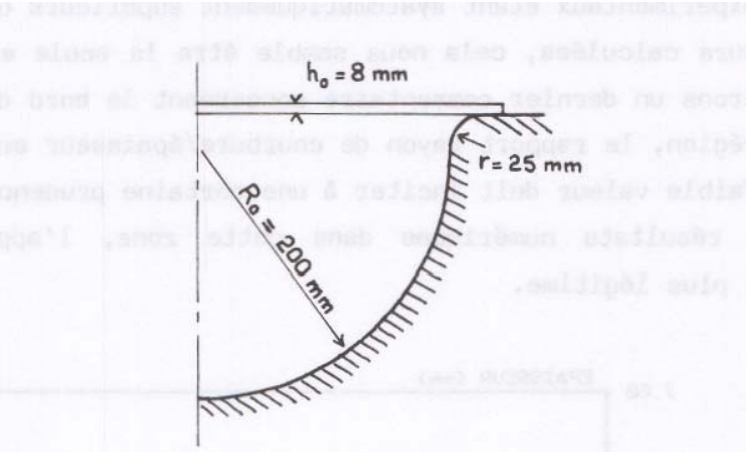


Figure V.14 : Formage d'hémisphères en TA6V

Le maillage est du même type que précédemment. Le diamètre initial du flan est 450 mm et le pourtour est maintenu fixe. La figure V.15 donne le cycle de pression calculé ainsi que la régulation associée. On notera la faible valeur des pressions nécessaires (3 bars au maximum!),l'opération étant réalisée en un peu plus d'une heure.

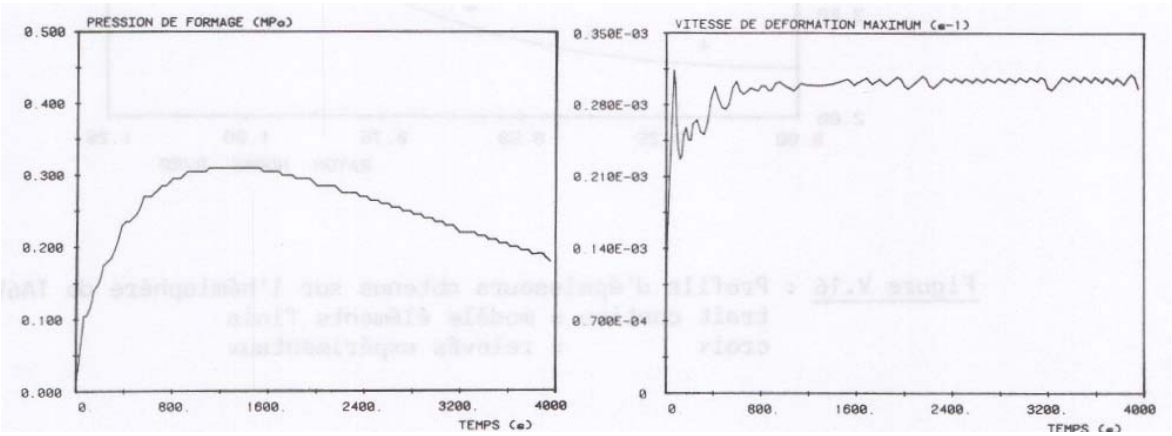


Figure V.15 : Cycle de pression optimum et régulation de la vitesse de déformaion maximum pour la mise en forme d'hémisphères

Il n'a malheureusement pas été possible de comparer la durée de formage calculée et le temps nécessaire pour accomplir réellement l'opération. En revanche, nous avons comparé les épaisseurs finales de l'hémisphère : la figure V.16 montre une excellente concordance entre relevés expérimentaux et calcul. La perte de volume du calcul étant nulle, on peut conclure à une légère imprécision sur l'épaisseur initiale de la tôle de l'essai : les re-

levés expérimentaux étant systématiquement supérieurs de 0,2 mm environ aux épaisseurs calculées, cela nous semble être la seule explication possible. Nous ferons un dernier commentaire concernant le bord de l'hémisphère. Dans cette région, le rapport rayon de courbure/épaisseur est voisin de 3 cette faible valeur doit inciter à une certaine prudence quant à la validité des résultats numériques dans cette zone, l'approximation membrane n'étant plus légitime.

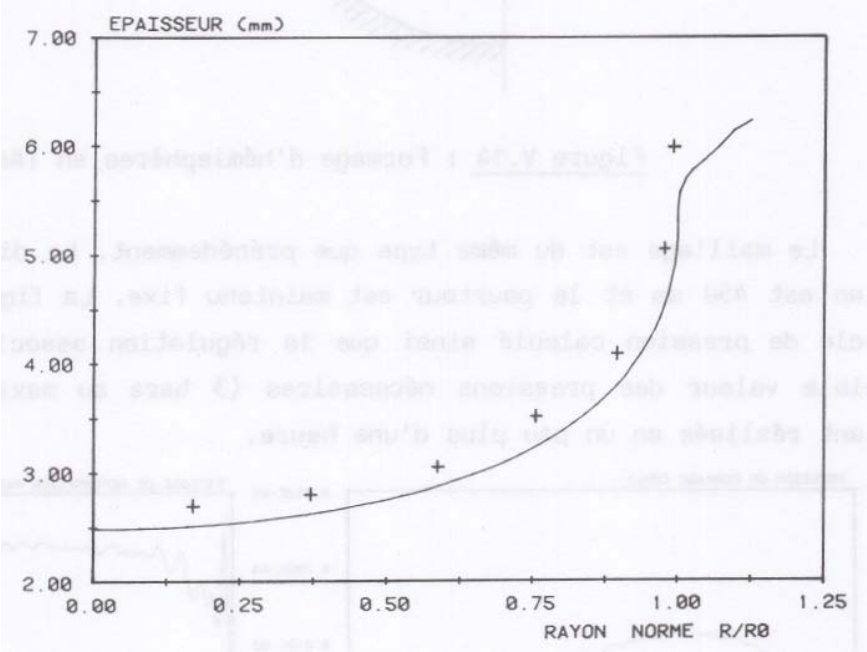


Figure V.16 : Profils d'épaisseurs obtenus sur l'hémisphère de TA6V
trait continu = modèle éléments finis
croix = relevés expérimentaux

V.E - ETUDE D'UN CAS TRIDIMENSIONNEL

La pièce étudiée est une cuvette parallélépipédique avec, dans le fond, un renflement central. La géométrie est donnée par la figure V.17 qui est une représentation du maillage utilisé pour discrétiser la surface du moule.

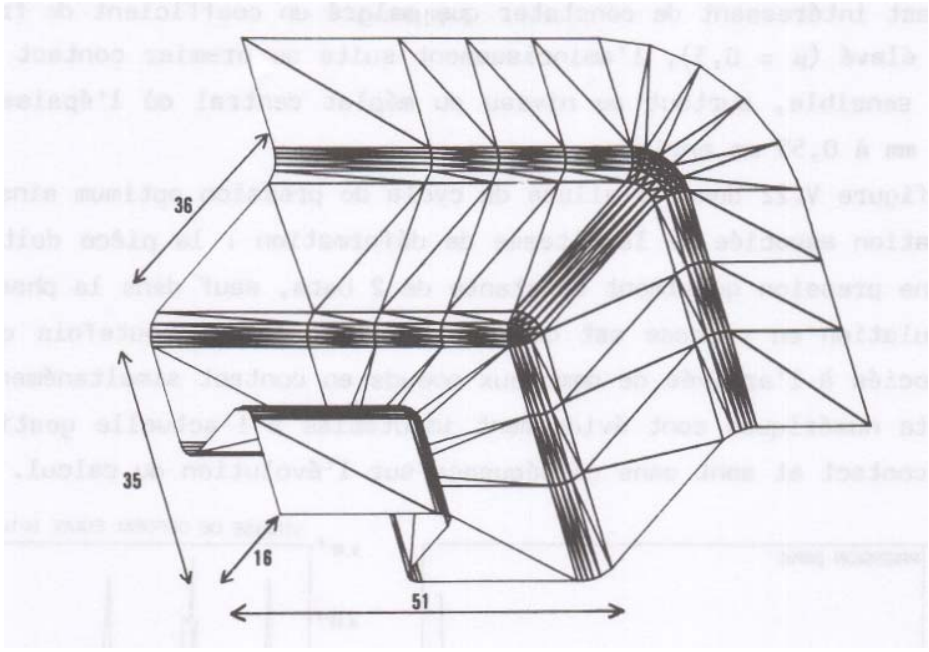


Figure V.17 : Discrétisation de la surface du moule en éléments triangulaires. Par raison de symétrie, le quart du moule est représenté.

Le matériau utilisé est l'alliage de titane TA6V, avec la même rhéologie qu'au V.C. L'épaisseur initiale de la tôle est 1 mm. Celle-ci est maillée en 560 éléments quadrangulaires à quatre points d'intégration, avec un pas de discrétisation de 2 mm, constant suivant les deux directions. Le maillage a ainsi 609 noeuds, soit 1827 degrés de liberté. Le cycle de pression est déterminé automatiquement par le calcul pour assurer une régulation de la valeur maximum de la vitesse de déformation équivalente autour de 3.10^{-4} s^{-1}. Le frottement est de Coulomb avec μ =0,3. Le pas de temps au début du calcul est de 5s, puis est augmenté rapidement et maintenu à 30 s.

La pièce est considérée comme formée (tous les noeuds du maillage de la tôle sont en contact avec la matrice) au temps 9635 s, après 339 incréments. Les figures V.18 à V.21 montrent différentes phases successives du procédé avec l'évolution du profil d'épaisseurs et la répartition finale de la déformation plastique cumulée. Sur la pièce finale, les régions présentant l'épaisseur la plus fine sont les coins ainsi que les arêtes verticales du renflement (e = 0,20 mm, $\bar{\varepsilon}$ = 1,86).

Il est intéressant de constater que malgré un coefficient de frottement assez élevé (μ =0,3), l'amincissement suite au premier contact avec l'outil est sensible, surtout au niveau du méplat central où l'épaisseur passe de 0,6 mm à 0,55 mm environ.
La figure V.22 donne l'allure du cycle de pression optimum ainsi que la régulation associée de la vitesse de déformation : la pièce doit être formée à une pression quasiment constante de 2 bars, sauf dans la phase finale. La régulation en vitesse est correcte. Elle présente toutefois quelques pics associés à l'arrivée de nombreux noeuds en contact simultanément. Ces artefacts numériques sont évidemment imputables à l'actuelle gestion explicite du contact et sont sans conséquence sur l'évolution du calcul.

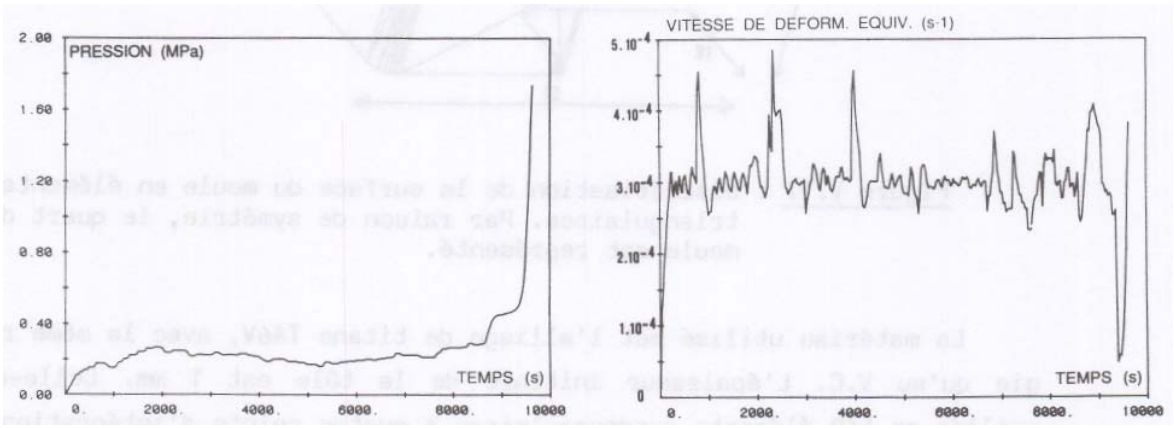


Figure V.22 : Cycle optimum de pression. Régulation associée de la vitesse de déformation

V.F APPLICATION AU PROCEDE SPF/DB

V.F.1 La nécessaire restriction à un problème bidimensionnel

La modélisation numérique générale du procédé SPF/DB, c'est-à-dire le calcul de la transformation d'un sandwich initial de trois ou quatre tôles en une pièce alvéolaire complexe, comme celle de la figure ci-dessous, soulève des problèmes non-encore résolus.

Figure V.18 : Pièce tridimensionnelle. Temps de formage 30 mn. Distribution d'épaisseur dans la tôle (échelle en mm)

Figure V.19 . Temps de formage 120 mn. Distribution d'épaisseur dans la tôle (échelle en mm)

Figure V.20 . Temps de formage 160 mn (fin). Distribution d'épaisseur dans la pièce finale (échelle en mm)

Figure V.21 . Temps de formage 160 mn (fin) Distribution de la déformation plastique équivalente dans la pièce finale

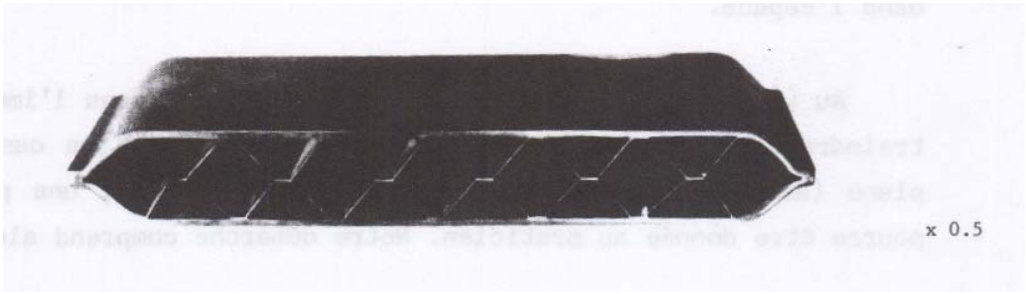


Figure V.23 : Exemple de pièce élaborée par la technique SPF/DB (pièce de démonstration)

Dans ce procédé, la difficulté provient des interactions entre les différentes tôles : il existe d'une part des régions soudées par diffusion avant formage, et d'autre part, les tôles se rencontrent et se soudent par diffusion au cours du formage. La définition du domaine d'étude et son maillage constituent donc un premier problème. Rien n'empêche en théorie de considérer un domaine unique maillé en éléments finis. Néanmoins, cette solution va augmenter considérablement le temps de calcul. Rappelons que celui-ci varie proportionnellement à LB^2 x NBN (LB largeur de bande, NBN nombre de noeuds). Ainsi pour un composant à n tôles, la largeur de bande sera approximativement n fois celle du composant à une tôle, à pas de discrétisation égal sur toutes les tôles. En conséquence, le temps de calcul sera multiplié par n^3. Pour éviter cela, et en tenant compte du fait que les tôles ont peu de noeuds en commun (tout au moins au début), une solution consisterait à partitionner le domaine en sous-structures (chacune des tôles) et à résoudre le problème mécanique sur chaque sous-structure, en tenant compte des interactions entre elles. Cette technique de sous-structuration ou de super-éléments (JONES 1971) a déjà été appliquée en calcul de structure (PULMANO 1974) et en mécanique de la rupture (TONG 1973).

Un deuxième problème est la gestion de l'évolution du domaine ainsi défini. Au cours du formage, certaines tôles vont entrer en contact et se souder par diffusion : ceci réclame un algorithme de contact très performant, capable de gérer l'interaction de deux maillages d'éléments finis dans l'espace.

Au vu de ces difficultés, nous avons préféré dans l'immédiat nous restreindre à un problème bidimensionnel. Ainsi, pour les cas de déformation plane (assez fréquents pour ce type de composants), une première réponse pourra être donnée au praticien. Notre démarche comprend alors deux étapes:

1)- La création d'un modèle bidimensionnel capable de traiter les cas de déformation plane ou axisymétrique.

2)- Développer, pour ces cas simples, des possibilités de maillage et un algorithme de contact permettant de résoudre le problème posé.

V.F.2 Le modèle bidimensionnel SUPFORM2

En raison de la symétrie du problème, plan ou axisymétrique, l'écoulement ne dépend plus que d'une coordonnée matérielle qui est la distance initiale à l'axe vertical, soit p selon l'axe 0x (voir figure ci-dessous).

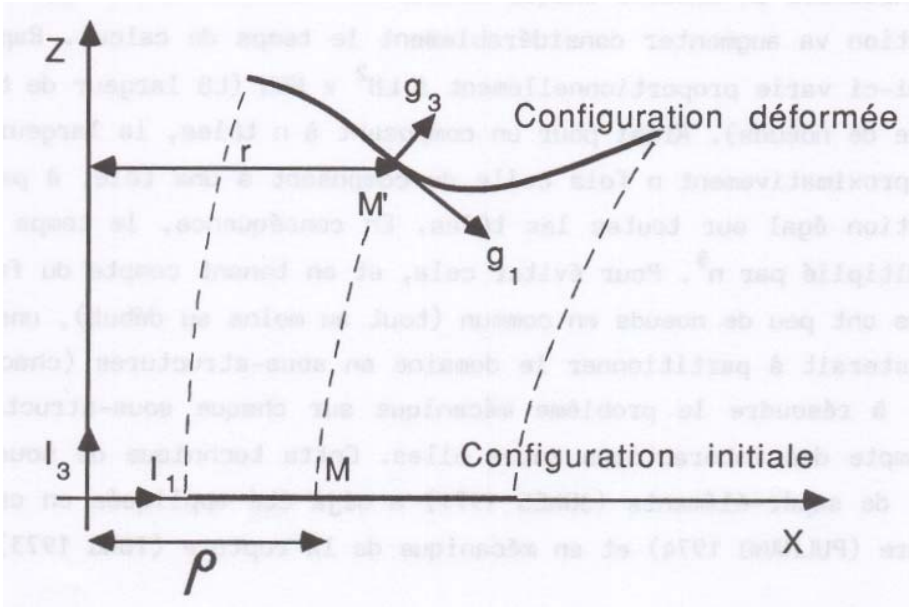


Figure V.24 : Paramétrisation de la déformation plane ou axisymétrique

En reprenant les notations du chapitre II, nous avons cette fois

- en déformation plane **g2 = I2** vecteur constant

- en déformation axisymétrique

$$g_2 = - r \sin \theta \, I_1 + r \cos \theta \, I_2$$

où r est la distance radiale et 8 l'angle (constant) du point matériel dans le plan Oxy.

Dans les deux cas, la base tangente est orthogonale et complètement déterminée par $g_1 = \frac{\partial X}{\partial \rho}$

Contraintes et vitesses de déformation sont en axes principaux dans la base tangente, ce qui en notation vectorielle s'écrit :

$$^t\boldsymbol{\sigma} = [\sigma^{11} \; \sigma^{22}]$$

$$^t\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11} \; \varepsilon_{22}]$$

La formulation générale du problème, présentée plus haut èst conservée. Pour résoudre le problème aux limites, on peut utiliser dans le code de calcul des éléments de membrane à deux ou trois noeuds avec deux degrés de liberté par noeud qui sont les composantes cartésiennes du déplacement dans le plan xoz. Pour plus de détails sur ce modèle bidimensionnel, on pourra consulter (BOISSAVI, 1987).

Tests comparatifs SUPFORM2/SUPFORM3

Afin de tester la validité et les performances du nouveau modèle, nous l'avons comparé avec le modèle tridimensionnel en déformation plane et axi-symétrique. La figure ci-dessous donne une idée du type de maillage utilisé dans les deux cas.

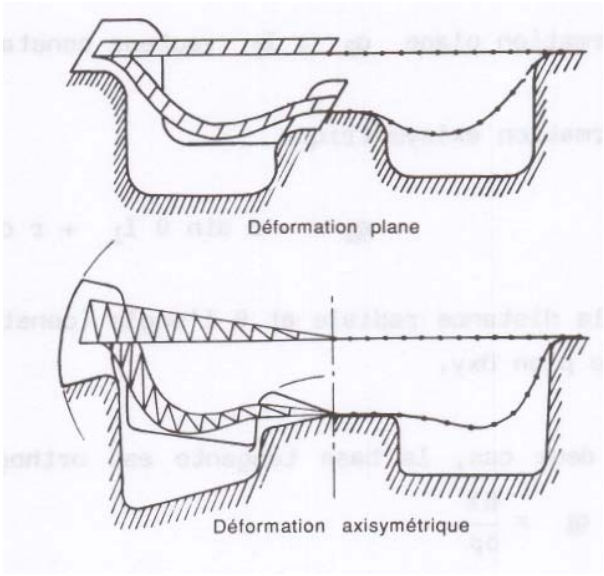


Figure V.25 : Comparaison des types de maillage utilisés par les modèles 2D et 3D en déformation plane et axisymétique.

Le test a été effectué sur la géométrie de moule ci-dessous

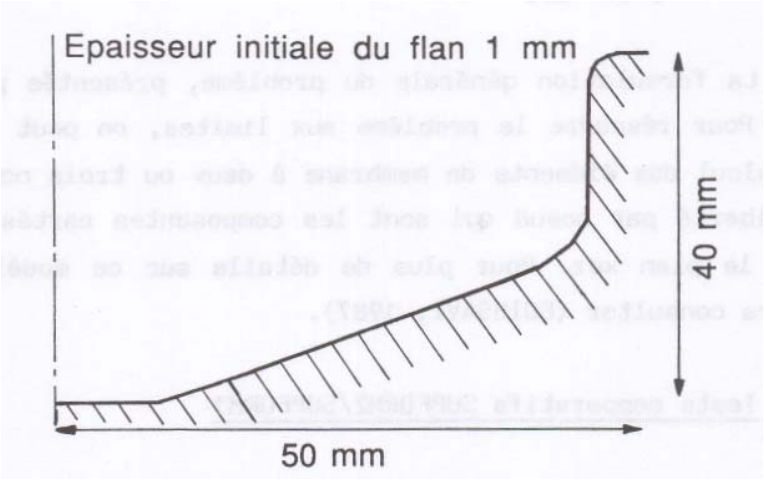


Figure V.26 : Géométrie du formage-test

Les résultats sont identiques. A titre d'exemple, la figure V.27 donne les profils d'épaisseurs obtenus en déformation plane et axisymétrique.

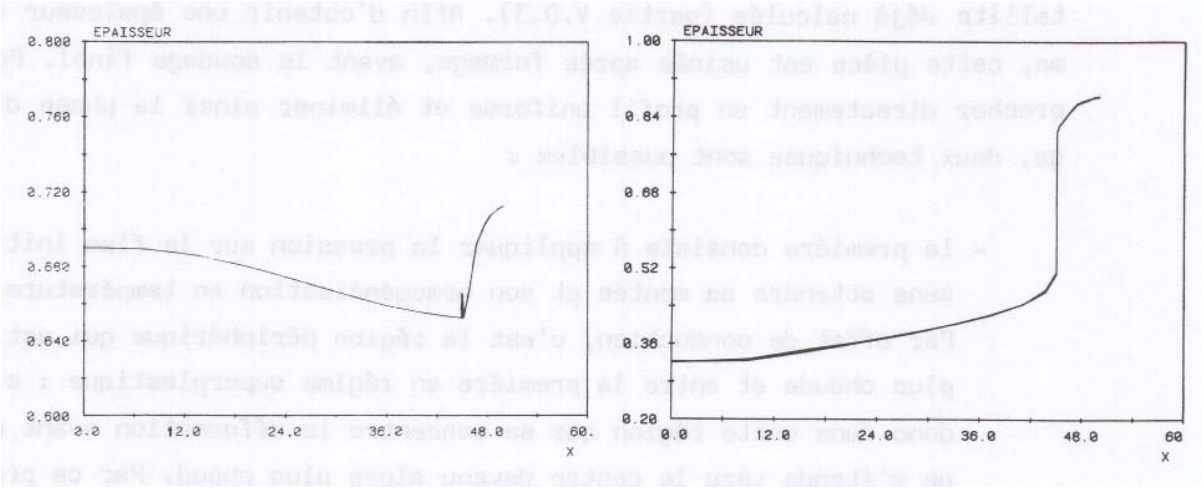


Figure V.27 : Profils d'épaisseurs calculés. A gauche : déformation plane, à droite : déformation axisymétrique.

En ce qui concerne le temps de calcul, pour un même pas de discrétisation, on observe un gain d'un facteur 6 dans les deux cas. Le temps de calcul est alors 5 mn environ pour 50 éléments, sur un mini-calculateur VAX 750. Au vu des améliorations qui pourront être encore apportées à ce logiciel et des possibilités des mini-calculateurs dans un futur immédiat, ceci signifie que le présent modèle peut constituer à très court terme un logiciel de calcul interactif capable d'indiquer immédiatement au dessinateur d'une pièce sa faisabilité en formage superplastique. Cette possibilité de réponse immédiate est bien sûr réduite aux pièces simples, mais il s'agit cependant d'un outil beaucoup plus souple que les calculs actuels de boîte rectangulaire ou de dôme hémisphérique.

Une autre conséquence est la possibilité d'aborder les composants soudés par diffusion que nous évoquions plus haut. Pour illustrer notre propos, nous donnons ci-après deux exemples d'application de ce code de calcul.

V.F.3 Optimisation de l'épaisseur d'un composant

La pièce étudiée est l'hémisphère du réservoir de carburant pour satellite déjà calculée (partie V.D.3). Afin d'obtenir une épaisseur uniforme, cette pièce est usinée après formage, avant le soudage final. Pour approcher directement un profil uniforme et éliminer ainsi la phase d'usinage, deux techniques sont possibles :

- la première consiste à appliquer la pression sur le flan initial sans attendre sa montée et son homogénéisation en température. Par effet de conduction, c'est la région périphérique qui est la plus chaude et entre la première en régime superplastique : c'est donc dans cette région que se concentre la déformation avant qu'elle ne s'étende vers le centre devenu alors plus chaud. Par ce procédé (à la mise en oeuvre délicate) on arrive à des profils d'épaisseurs relativement homogènes (LAYCUCK 1982).

- la deuxième méthode consiste à partir d'un flan initial d'épaisseur non-uniforme. Des paliers d'épaisseur constante peuvent être obtenus par attaques chimiques successives de la surface en utilisant un système de masques. Cette technique est utilisée couramment pour renforcer l'épaisseur des zones critiques en formage SPF/DB de composants à plusieurs tôles (ROLLAND 1986).

Il nous a semblé intéressant de montrer quelle pouvait être l'aide du logiciel à l'utilisation de cette dernière méthode, dans le cas présent de l'hémisphère.

La figure V.28 illustre la démarche suivie pour aboutir à un profil final homogène de 3 mm. Partant du profil d'épaisseur obtenu avec un flan d'épaisseur initiale homogène 8 mm (courbe 1), l'opérateur détermine un nouveau profil initial composé de paliers circulaires d'épaisseurs variables. Ces épaisseurs sont déterminées en supposant que les déformations restent les mêmes, d'un profil à l'autre. On peut voir en examinant la courbe 2 que ce raisonnement n'est pas valable, la déformation de la zone centrale dépendant assez fortement du profil d'épaisseur à la périphérie. Le profil n°3 donne satisfaction : l'épaisseur finale est située entre 2,75 et 3,25 mm. On constate qu'une économie de matière première est alors possible puisque l'épaisseur de la tôle initiale à approvisionner est diminuée. En outre, la pièce n°3 est celle qui se forme le plus vite en régime

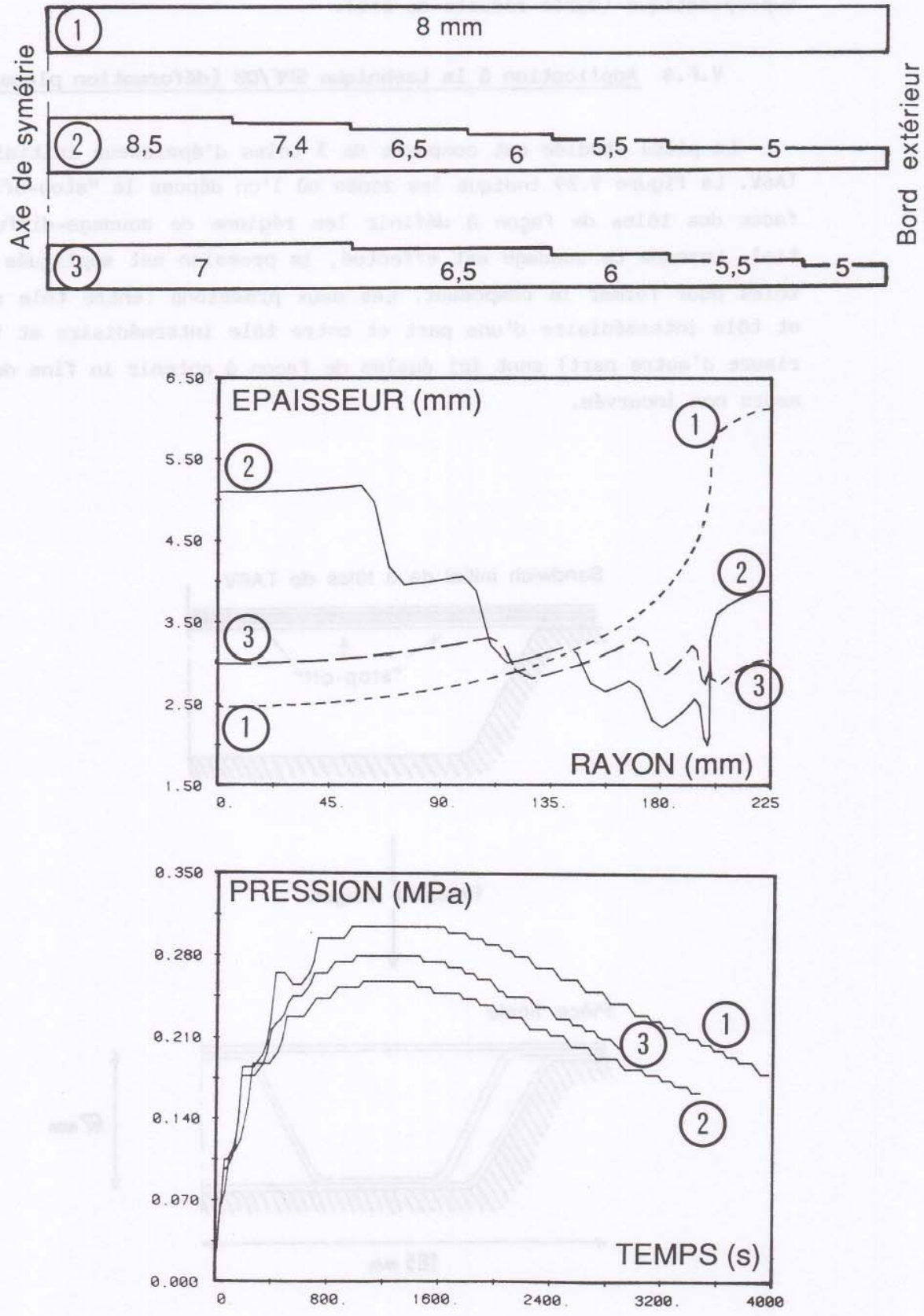


Figure V.28 : Optimisation de l'épaisseur de la pièce finale en partant d'un flan constitué de paliers d'épaisseurs variables

superplastique (durée réduite de 25%).

V.F.4 Application à la technique SPF/DB (déformation plane)

La pièce étudiée est composée de 3 tôles d'épaisseur initiale 1 mm en TA6V. La figure V.29 indique les zones où l'on dépose le "stop-off" sur les faces des tôles de façon à définir les régions de soudage-diffusion initial. Lorsque ce soudage est effectué, la pression est appliquée entre les tôles pour former le composant. Les deux pressions (entre tôle supérieure et tôle intermédiaire d'une part et entre tôle intermédiaire et tôle inférieure d'autre part) sont ici égales de façon à obtenir in fine des raidisseurs non incurvés.

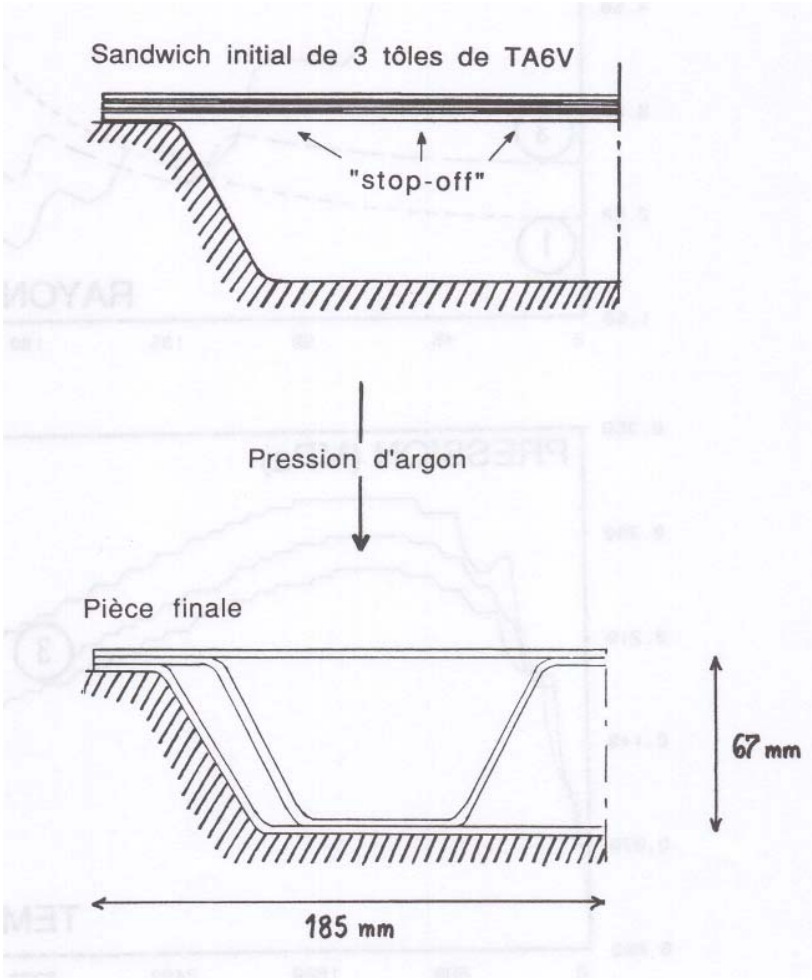


Figure V.29 : Etude d'une structure SPF/DB

La tôle supérieure, non-déformée, n'intervient pas dans la modélisation. Le maillage utilisé est représenté figure V.30. Entre les noeuds 1 et 3, et les noeuds 30 et 40, c'est-à-dire dans les régions soudées, l'épaisseur initiale est égale à 2 mm. Pour chaque élément, un code indique le sens d'application de la pression, ou la nullité de la pression différentielle dans les régions libres de la tôle intermédiaire.

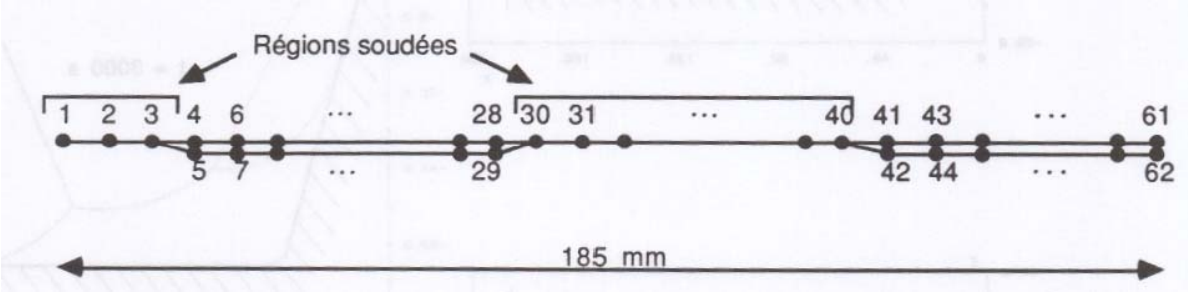


Figure V.30 : Maillage 2D utilisé

La figure V.31 donne une idée du déroulement de l'opération et le cycle de pression optimum pour une vitesse de déformation équivalente maximum de 3.10^{-4} s^{-1} : on constate que l'allure générale est la même que pour le formage d'une tôle unique, avec cependant une durée plus longue.

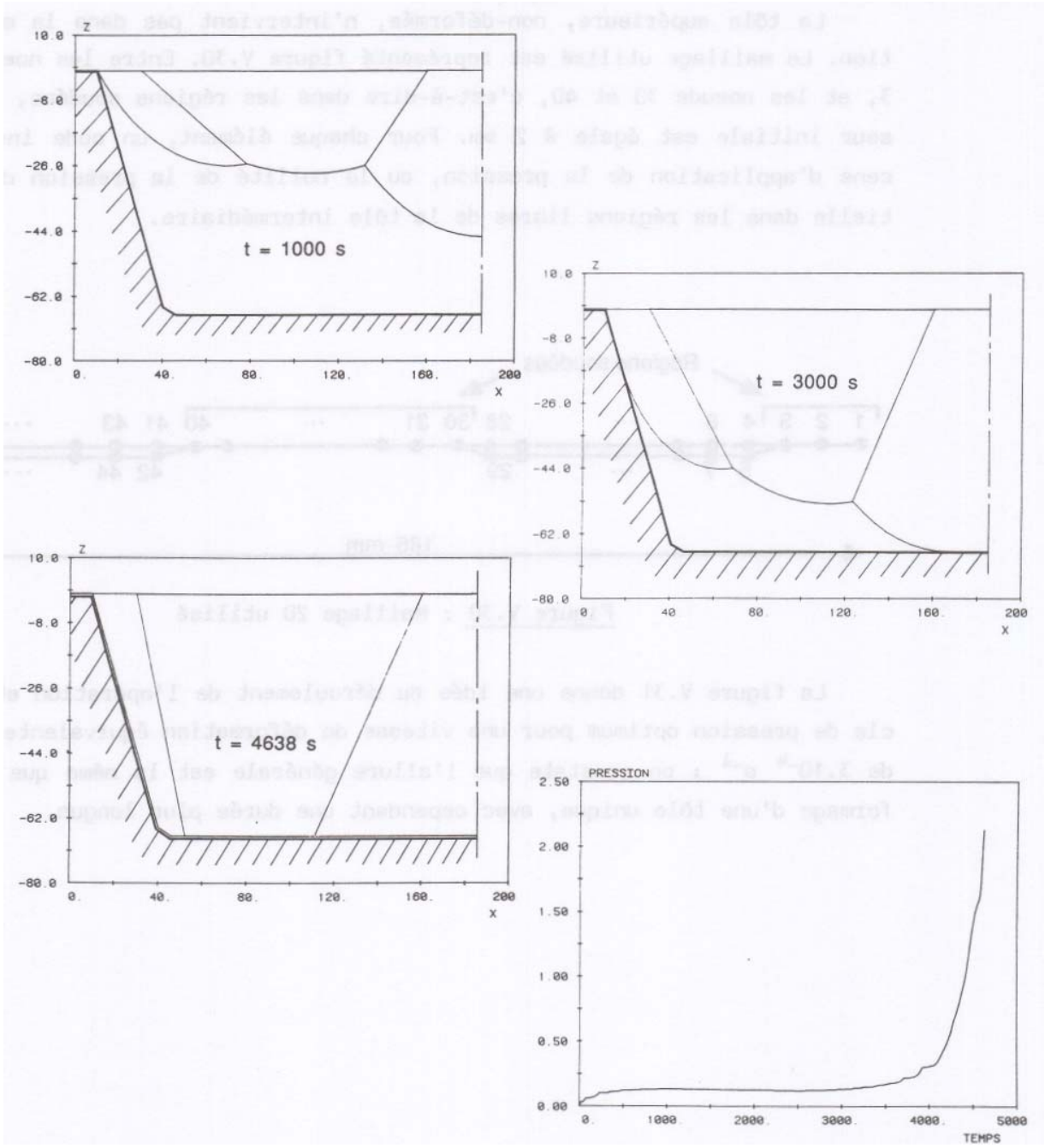


Figure V.31 : Étapes successives et cycle de pression optimum pour la mise en forme d'une structure 3 tôles

CONCLUSION

Dans ce mémoire, nous avons présenté une solution numérique au problème de la simulation du formage superplastique de tôles minces. Après avoir rappelé dans le chapitre I les caractéristiques principales du comportement des alliages superplastiques, nous nous sommes principalement intéressés à la résolution du problème mécanique. Le modèle repose sur l'approximation de membrane, particulièrement adaptée au calcul des structures minces et testée antérieurement pour la simulation de l'expansion à froid. Notre modèle de membrane viscoplastique est exposé au chapitre II. En ce qui concerne la discrétisation temporelle et l'intégration de la loi de comportement, nous avons explicité différents choix possibles au chapitre III. La confrontation de ces différentes options a montré que, pour l'application présente, où l'influence de l'élasticité s'est avérée faible, une formulation en déplacements avec intégration implicite de la loi de comportement purement viscoplastique était satisfaisante. Cependant, cette étude nous a donné l'occasion de mettre en oeuvre une nouvelle formulation implicite en vitesse spatiale et en vitesse de contrainte bien adaptée au traitement de l'élasto-viscoplasticité. A précision donnée, elle autorise de plus grands incréments qu'une formulation en déplacements avec intégration implicite de la loi de comportement. Son application à l'élasto-plasticité devrait être source de progrès dans l'avenir.

Sur ces bases, nous avons développé deux modèles d'éléments finis capables de traiter des géométries bidimensionnelles (axisymétrie ou déformation plane) ou tridimensionnelles. La validation de ces modèles a été effectuée d'une part à l'aide de divers tests numériques : les résultats se sont avérés tout à fait similaires à ceux d'un modèle de coque mince (3D) et d'un modèle volumique axisymétrique. D'autre part, des essais sur pâte à modeler ont démontré une bonne corrélation entre résultats numériques et expérimentaux (chapitre IV).

Pour faire de ce calcul par éléments finis un logiciel de simulation du formage superplastique, nous avons développé un module de régulation de la vitesse de déformation avec calcul automatique de la pression devant être appliquée sur la tôle. En outre, le modèle 2D a été conçu pour pouvoir

simuler le procédé SPF/DB, associant formage superplastique et soudage par diffusion pour le formage de composants complexes alvéolaires. Différentes pièces 3D ou 2D sont présentées au chapitre V, montrant les capacités actuelles du code de calcul.

Dans l'avenir, pour augmenter les potentialités du logiciel, on peut envisager plusieurs axes de développement dont les principaux sont

1. La prise en compte de lois de comportement plus complexes. Actuellement, les coefficients de la loi de comportement viscoplastique dépendent de la déformation plastique cumulée et de la vitesse de déformation. Il semble nécessaire d'inclure dans cette loi l'influence de la taille moyenne des grains qui évolue sensiblement pendant le formage. Toutefois, cela nécessite des investigations complémentaires afin de déterminer des lois d'évolution de la taille de grain au cours de chargements complexes. L'intégration de telles lois dans le modèle ne poserait guère de problème et le couplage ainsi réalisé permettrait, outre une meilleure description du comportement, une prédiction de la microstructure des pièces formées.

2. Généraliser le code de calcul tridimensionnel actuel afin de pouvoir simuler le formage de composants à plusieurs tôles et de formes complexes. Cet objectif ambitieux requiert des techniques actuellement en développement telles le remaillage dynamique (évolution adéquate du maillage des tôles pour éviter de trop grandes distorsions des éléments et minimiser l'erreur d'approximation) et les méthodes multi-grilles destinées à abaisser considérablement les coûts de calcul.

En attendant la réalisation progressive de ces objectifs, il nous semble que le présent simulateur numérique est d'ores et déjà à même de contribuer à l'essor de la mise en forme superplastique en permettant au praticien de choisir rapidement les meilleures solutions technologiques.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ABOUAF M.
Modélisation de la Compaction de Poudres Métalliques Frittées Approche par la Mécanique des Milieux Continus Thèse d'Etat Université Grenoble (1985).

ARGYRIS J.H., DOLTSINIS J.S.
A Primer on Superplasticity in Natural Formulation
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 46 (1984) p. 83.

ASHBY M.F., VERRALL R.A.
Diffusion Accomodated Flow and Superplasticity
Acta Met. 21 (1973) p. 149.

BACKOFEN W.A., TURNER I.R., AVERY D.H.
Superplasticity in an Aluminium-Zinc Alloy
ASM Trans. Quart. 57 (1964) p. 980.

BALL A., HUTCHISON M.M.
Superplasticity in the Aluminium-Zinc Eutectoid
Met. Sci. J.3 (1969) p.1.

BATOZ J.L., JAAMEI S., POL P.
Simulation Numérique du Plissement des Tôles Minces
Ecole d'Eté Mise en Forme - Pièces Formées. GRECO Grandes Déformations - GIS Mise en Forme, Oléron (1987).

BAUDELET B., SUERY M.
Mise en Forme Superplastique
A paraltre dans les Techniques de l'Ingénieur (1987).

BELK J.A.
A Quantitative Model of the Blow-Forming of Spherical Surfaces in Superplastic Sheet Metal.
Int. J. Mech. Sci. 17 (1975) p. 505.

BELLET M., MASSONI E., CHENOT J.L.
A Viscoplastic Membrane Formulation for the 3-Dimensional Analysis of Thin Sheet Metal Forming.
Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelone, Pineridge Press (1987) p. 917.

BELLET M., MASSONI E., CHENOT J.L.
Calcul des Membranes Elasto-Plastiques et Elasto-Viscoplastiques, Application à l'Emboutissage et au Formage Superplastique. Ecole d'Eté Mise en Forme - Pièces Formées, GRECO Grandes Déformations - GIS Mise en Forme, Oléron (1987).

BERN A.
Contribution à la Modélisation par Eléments Finis des Surfaces Libres en Régime Permanent.
Thèse de Doctorat ENSMP (1987).

BERTRAND C.
Modélisation Numérique par Eléments Finis du Calibrage à Chaud des Métaux.
Thèse de Doctorat ENSMP (1987).

BOCHVAR A.A., SVIDERSKAYA Z.A.
Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. 9 (1945) p. 821

BOHATIER C., CHENOT J.L.
Finite Element Formulations for Non-Steady-State Large Viscoplastic Deformation.
Int. J. Num. Meth. Eng. 21 (1985) p. 1697.

BOISSAVI C.
Développement d'un Logiciel de Simulation Numérique par Eléments Finis. Application au Formage Superplastique de Tôle. Rapport de Stage CEMEF ENSMP. Responsable M. Bellet (1987).

BONET J., WOOD R.D
Solution Procedures for the Finite Element Analysis of Superplastic Forming of Thin Sheet.
Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelone, Pineridge Press (1987) p. 927.

BRAUDEL H.J.
Modélisation des Grandes Transformations Elastoplastiques d'un Solide Isotrope par la Méthode des Eléments Finis. Application à la Forge à Froid des Métaux.
Thèse d'Etat Université Lyon I (1986).

BRAUDEL H.J., ABOUAF M., CHENUT J.L.
An Implicit and Incremental Formulation for the Solution of Elastoplastic Problems by the Finite Element Method.
Comp. Struc. 22 (1986) p. 8U1.

BRAUDEL H.J., ABOUAF M., CHENUT J.L.
An Implicit Incrementally Objective Formulation for the Solution of Elasto-plastic Problems at Finite Strain by the F.E.M.
Comp. Struc. 24 (1986) p. 825.

BREZINSKI C.
Algorithmes d'Accélération de la Convergence Ed. Technip (1970).

BUDIANSKY B.
Notes on Nonlinear Shell Theory J. Appl. Mech. 35 (1968) p. 393.

CHANDRASEKARAN N., ALLEN D.H., HAISLER W.E., GOFORTH R.E.
Application of the Finite Element Method to Large Deformation in Superplastic Metal Forming Processes
2nd Int. Symposium on Constitutive Laws, Tucson (1987).

CIZERON G.
Superplasticité des Métaux et Alliages - Applications Récentes. Techniques de l'Ingénieur (1973) p M145.

COMBRES Y.
Superplasticité - Structure et Rhéologie
Rapport Interne CEMEF - Ecole Nationale Sup. des Mines de Paris (1985).

CORNFIELD G.C., JOHNSON R.H.
The Forming of Superplastic Sheet Metal
Int. J. Mech. Sci. 12 (1970) p. 479.

DALIN J.B.
Modélisation Numérique de la Coulée Continue Thèse de Doctorat ENSMP (1987).

DAVID C.
Modélisation Tridimensionnelle par Eléments Finis de l'Ecoulement d'un matériau Viscoplastique pour l'Etude du Laminage à Chaud Thèse de Doctorat ENSMP (1987).

DHATT G., TOUZOT G.
Une Présentation de la Méthode des Eléments Finis, Maloine (1981).

DINIS L.M.S., OWEN D.R.J.
Elasto-Viscoplastic and Elasto-Plastic Large Deformation Analysis of Thin Plates and Shells.
Int. J. Num. Meth. Eng. 18 (1982) p. 591.

DOLTSINIS J.S., LUGINSLAND J., NOLTING S.
Some Developments in the Numerical Simulation of Metal Forming Processes.
Int. Conf. on Computational Plasticity, Barcelone, Pineridge Press (1987) p. 875.

EDINGTON J.W., MELTON K.N., CUTLER C.P.
Progr. Mat. Sci. 21 No 3 (1976) p. 61.

FAURRE P., DEPEYROT M.
Eléments d'Automatique
Automatique et Temps Réel, Dunod (1974).

FELTHAM P.
J. Inst. Met. 89 (1960) p. 210.

GERMAIN Y.
Modélisation par Eléments Finis d'Ecoulement Viscoplastique avec Frottement. Application au Forgeage à Chaud.
Thèse de Doctorat ENSMP (1985).

GERMAIN Y., CHUNG K., WAGONER R.H., LEE J.K.
Sheet Forming Analysis
Engineering Research Center for Net Shape Manufacturing. Report NSM-9. The Ohio State University (1987).

GHOSH A.K., HAMILTON C.H.
Mechanical Behavior and Hardening Characteristics of a Superplastic Ti-6A14V Alloy.
Met. Trans. A 10A (1979) p. 699.

GHOSH A.K., HAMILTON C.H.
Proc. 5th Int. Conf. on Strength of Metals and Alloys, édité par P. Haasen, Aachen (1979) p. 905.

GHOSH A.K., HAMILTON C.H.
Superplastic Forming of a Long Rectangular Box Section
ASM Conf. on Process Modelling, Thousand Oaks (CA), (1980) p. 303.

GOTOH M.
A Finite Element Analysis of General Deformation of Sheet Metals Int. J. Num. Eng. 8 (1974) p. 731.

GRIMES R.
Superplasticity in Aluminium-Lithium Based Alloys.
Int. Conf. on Superplasticity - Grenoble 1985 - Editions du C.N.R.S. Paris (1985) p. 13.1.

HART E.W.
Theory of the Tensile Test
Acta Met. 15 (1967) p. 351.

HARVEY J., PARTRIDGE P.G., SNOOKE C.L.
Diffusion Bonding of Aluminium Alloys
The Metals Society Diffusion Bonding Conference, London (1984).

HAYDEN H.W., FLOREEN S., GOODELL P.D.
The Deformation Mechanisms of Superplasticity
Met. Trans. 3 (1972) p. 833.

HILL R.
A Theory of the Plastic Bulging of a Metal Diaphragm by Lateral Pressure. Phil. Mag. 41 (1950) p. 1133.

HILL R.
New Horizons in the Mechanics of Solids
J. Mech. Phys. of Solids 5 (1956) p. 60.

HOLT D.L.
An Analysis of the bulging of a Superplastic Sheet by Lateral Pressure
Int. J. Mech. Sci. 12 (1970) p. 491.

JONES C.E.
Advanced Substructuring Techniques
NASA Report no CR-119927 (1971).

JOVANE F.
An Approximate Analysis of the Superplastic Forming of a Thin Circular Diaphragm : Theory and Experiments.
Int. J. Mech. Sci. 10 (1968) p. 403.

KITAGAWA H., SEGUGHI Y., TOMITA Y.
An Inremental Theory of Large Strain and Large Displacement Problems and its Finite Element Formulation.
Ingénieur Archiv 41 (1971) p. 213.

KITAGAWA H., TOMITA Y.
An Incremenal Finite Element Analysis of Two-Dimensional Large Strain and Large Displacement Problems for Elasto-Plastic Material.
Proceedings of the 21st Japan National Congress of Applied Mechanics (1971) p. 243.

KOBAYASHI S., KIM J.H.
Deformation Analysis of Axisymmetric Sheet Metal Forming Processes by the Rigid-Plastic Finite Element Method.
Mechanics of Sheet Metal Forming, D.P. Koistinen, N.M. Wang eds. Plenum Press, New York (1978) p. 367.

KRIEG R.D., KRIEG D.B.
Accuracies of Numerical Solution Methods for the Elastic Perfectly Plastic Model.
J. Press. Vessel Tech. 99 (1977) p. 510.

KUPERFARB G., GERMAIN Y., ABOUAF M.
A Mechanical Study of Superplastic Forming of Ti-6A1-4V Sheet.
J. Mech. Work. Tech. 14 (1987) p. 159.

LAYCOCK D.B.
Superplastic Forming of Sheet Metal
Superplastic Forming of Structural Alloys, N.E. Paton and C.H.
Hamilton eds. The Metal. Soc. of AIME (1982) p. 257.

LEE D., BACKOFEN W.A.
Superplasticity in some Titanium and Zirconium Alloys.
Trans. Met. Soc. AIME 239 (1967) p. 1034.

LEE E.H.
Elastic-Plastic Deformation at Finite Strains
J. Appl. Mech. 36 (1969) p. 1.

LEODOLTER W.
Production Implementation of Titanium Superplastically Formed/Diffusion
Bonded Structure.
Int. Conf. on Titanium Products and Applications, San-Francisco, Oct.1986.

MC MEEKING R.M., RICE J.R.
Finite Elements Formulations for Problems of Large Elastic-Plastic Deformation.
Int. J. Solids Struc. 11 (1975) p. 601.

MALININ N.N., ROMANOV K.I.
Hot Deformation of a Long Narrow Rectangular Membrane
Int. J. Mech. Sci. 27 (1985) p. 303.

MANDEL J.
Plasticité Classique et Viscoplasticité
Int. Centre for Mech. Sciences. Udine. Springer Verlag (1971).

MASON J.
Variational, Incremental and Energy Methods in Solid Mechanics and Shell
Theory.
Studies in Applied Mechanics, Elsevier (1980).

MASSONI E.
Modélisation Numérique par Eléments Finis de l'Emboutissage
Thèse de Doctorat ENSMP (1987).

MASSONI E., BELLET M., ABOUAF M., CHENOT J.L.
Large Displacements Numerical Calculation of 3-Dimensional Elasto-Plastic
and Elasto-Viscoplastic Membrane by the Finite Element Method.
Numerical Methods for Non-Linear Problems, vol.3, Pineridge Press (1986)
p. 480.

MATTIASSON K., MELANDER A.
Numerical Simulation of Stretch Forming Processes.
Int. Workshop on Simulation of Metal Forming Processes by the Finite
Element Method. Springer Verlag (1985).

NAGTAGAAL J.C.
On the Implementation of Inelastic Constitutive Equations with Special Reference to Large Deformation Problems.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 33 (1982) p. 469.

NAGTEGAAL J.C., DE JONG J.E.
Some Computational Aspects to Elastic-Plastic Large Strain Analysis.
Int. J. Num. Meth. Eng. 17 (1981) p. 15.

NAKAMACHI E., TAKEZONO S., SOWERBY R.
A Numerical Analysis of the Hydraulic Bulging of Circular Disks into Axi-symmetric Dies
J. Appl. Mech. 49 (1982) p. 501.

NAYAK G.C., ZIENKIEWICZ O.C.
Elasto-Plastic Stress Analysis. A Generalization for Various Constitutive Relations Including Strain Solftening
Int. J. Num. Meth. Eng. 5 (1972) p. 113.

NAZIRI H., PEARCE R.
Extended Plasticity in Commercial-Purity Zinc
J. Inst. Met. 97 (1969) p. 326.

NYSSEN C.
An Efficient and Accurate Iterative Method, Allowing for Large Incremental Steps, to Solve Elastoplastic Problems.
Comp. Struc. 13 (1981) p. 63.

ODEN J.T., SATO T.
Finite Strains and Displacements of Elastic Membranes by the Finite Element Method.
Int. J. Solids Struct. 3 (1967) p. 471.

ONATE E., ZIENKIEWICZ O.C.
A Viscous Shell Formulation for the Analysis of Thin Sheet Metal Forming
Int. J. Mech. Sci. 25 no 5 (1983) p. 305.

ORTIZ M., POPOV E.P.
Accuracy and Stability of Integration Algorithm for Elastoplastic Constitutive Relations.
Int. J. Num. Meth. Eng. 21 (1985) p. 1561.

OWEN D.R.J., DAMJANIC F.
Viscoplastic Analysis of Solids : Stability Considerations.
Recent Advances in Non-Linear Computational Mechanics. Pineridge Press (1982) p. 225.

PADMANABHAN K.A., DAVIES G.J. Superplasticity
Springer Verlag (1980).

PATON N.E., HAMILTON C.H.
Microstructural Influences on Superplasticity in Ti-6A1-4V.
Met. Trans. 1OA (1979) p. 241.

PEARSON C.E.
The Viscous Properties of Extruded Eutectic Alloys of Lead-Tin and bismuthTin.
J. Inst. Met. 54 (1934) p. 111.

PERZYNA P.
The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials
Q. Appl. Math. 20 (1963) p. 321.

PRESNYAKOV A.A., CHERVYAKOVA V.V.
(Apparition de la Superplasticité dans le Système Al-Cu)
Izv. Akad. Nauk. S.S.S.R. 3 (1958) p. 120.

PULMANO V.A., BLACK D.C., KABAILA A.P.
Substructure Analysis of Multistorey Flat Slab Buildings
Proc. ASCE-IABSE Conf. on Tall Buildings, Bangkok (1974).

RAI G., GRANT N.J.
Met. Trans. 6A (1975) p. 385.

ROLLAND B.
SPF/DB Applications for Military Aircraft
Int. Conf. on Titanium Products and Applications, San-Francisco,
Oct. 1986.

SIDOROFF F.
Cours sur les Grandes Déformations
Ecole d'Eté Sophia-Antipolis. Rapport GRECO 51/1982 (1982).

SIDOROFF F.
Incremental Constitutive Equation for Large Strain Elastoplasticity
Int. J. Eng. Sci. 20 (1982) p. 19.

SON N.Q.
On the Elastic-Plastic Initial Boundary Value Problems and its Numerical Integration.
Int. J. Num. Meth. Eng. 11 (1977) p. 817.

STEPHEN D.
Titanium Diffusion Bonding in the Manufacture of Aircraft Structure
Int. Conf. on Titanium Products and Applications, San-Francisco, Oct. 1986.

STORAKERS B.
Finite Plastic Deformation of a Circular Membrane Under Hydrostatic Pressure
Int. J. Mech. Sci. 8 (1966) p. 619.

STORY J.M., PETIT J.I., LEGE D.J., HAZARD B.L.
Forming Process Variables Effects on Cavitation in the Superplastic Forming of Commercially Produced 7475 Aluminium
Superplasticity in Aerospace-Aluminium, R. Pearce, L. Kelly eds, Cranfield (1985) p. 67.

STOUGHTON T.B.
Finite Element Modeling of 1008 AKS Sheet Steel Stretched over a Rectangular Punch with Bending Effects
Computer Modeling of Sheet Metal Forming Process, N-M. Wang, S.C. Tang eds, The Metallurgical Society (1985) p. 143.

SUERY M.
Cavitation in Superplastic Alloys - Theoritical
Int. Conf. on Superplasticity - Grenoble 1985 - Editions du C.N.R.S. Paris (1985) p. 9.1.

SUERY M., BAUDELET B.
Problems Relating to Structure, Rheology and Mechanisms in Superplasticity
Superplastic Forming of Structural Alloys, N.E. Paton and C.H. Hamilton eds The Metal. Soc. of AIME (1982) p. 105.

TAKEZONO S., NAKAMACHI E., YAMAGUCHI T.
Elasto/Viscoplastic Analysis of Thin Circular Plates Under Large Strains and Large Deformations
J. Appl. Mech. 47 (1980) p. 741.

TANG S.
Analysis of Superplastic Forming of Titanium Sheet Into Shallow Hat-Section
AIAA/ASME 19th Structures, Structural Dynamics of Materials Conf. (1980) p. 256.

TANG S.C.
Large Elasto-Plastic Strain Analysis of Flanged Hole Forming. Comp. Struct. 13 (1981) p. 363.

TAYLOR L.M., BECKER E.B.
Some Computational Aspects of Large Deformation Rate-Dependant Plasticity Problems.
Comp. Meth. Appl. Mech. Eng. 41 (1983) p. 251.

TIMOSHENKO S., WOINONSKY-KRIEGER S.
Théorie des Plaques et Coques, Dunod (1961).

TONG P., LASRY S.J.
A Super-Element for Crack Analysis
Int. J. of Fracture Mech. 9 (1973) p. 234.

UNDERWOOD E.E.
Superplasticity and Related Phenomena
J. Metals 14 (1962) p. 914.

VOROBEV V.G.
(Changement des Propriétés Mécaniques Concomittant d'une Evolution Structurale)
Metalloved. J. Obratot. Met. 3 (1958) p. 35.

WANG N-M
A Rigig-Plastic Rate-Sensitive Finite Element Method for Modelling Sheet Metal Forming Processes
Numerical Analysis of Forming Processes, J.F.T. Pittman, U.C. Zienkiewicz, R.D. Wood, J.M. Alexander eds. John Wiley & Sons (1984) p. 117.

WANG N-M, BUDIANSKY B.
Analysis of Sheet Metal Stamping by a Finite-Element Method.
J. Appl. Mech. 45 (1978) p. 73.

WANG N-M, WENNER M.L.
Elastic-Viscoplastic Analyses of Simple Stretch Forming Problems
Mechanics of Sheet Metal Forming, D.P. Koistinen, N-M. Wang eds. Plenum Press, New York (1978) p. 367.

WEMPNER G.
Mechanics of Solids with Applications to Thin Bodies
Sijthoff & Noordhoff (1981).

WIFI A.S.
An Incremental Complete Solution of the Stretch-Forming and Deep-Drawing of a Circular Blank Using a Hemispherical Punch. Int. J. Mech. Sci. 18 (1976) p. 23.

WILLIAMSON J.R.
Superplastic Forming/Diffusion Bonding of Titanium - An Air Force Overview Int. Conf. on Titanium Products and Applications, San-Francisco, Oct. 1986

WOO D.M.
The Analysis of Axisymmetric Forming of Sheet Metal and the Hydrostatic Bulging Process
Int. J. Mech. Sci. 6 (1964) p. 303.

WOOD R.D., MATTIASSON K., HONNOR M.E., ZIENKIEWICZ O.C.
Viscous Flow and Solid Mechanics Approaches to the Analysis of Thin Sheet Forming
Computer Modelling of Sheet Metal Forming Process, N-M. Wang, S.C. Tang eds, The Metallurgical Society (1985) p. 121.

WOODFORD D.A.
Strain-Rate Sensitivity as a Measure of Ductility.
Trans. Am. Soc. Met. 62 (1969) p. 291.

ZHANG W.C., WOOD R.D., ZIENKIEWICZ O.C.
Superplastic Forming Analysis Using a Finite Element Viscous Flow Formulation
Aluminium Technology 86, The Institute of Metals, London, Book 4 (1986) p. 111.1.

ZIENKIEWICZ O.C., VALLIAPAN S., KING I.P.
Elastoplastic Solutions of Engineering Problems. Initial Stress Finite Element Approach
Int. J. Num. Meth. Eng. 1 (1969) p. 75.

ZIENKIEWICZ O.C., CORMEAU I.C.
Visco-Plasticity - Plasticity and Creep in Elastic Solids –
A Unified Numerical Solution Approach
Int. J. Num. Meth. Eng. 8 (1974) p. 821.

ZIENKIEWICZ O.C., ONATE E.
Finite Element Solution of Some Problems of Metal Forming Using the Plastic Flow Approach
Proceedings of the Int. Congress on Num. Meth. Eng. GAMNI Paris (1978) p. 183.

ZIENKIEWICZ O.C.
La Méthode des Eléments Finis, Mac Graw - Hill (1979).

ANNEXES

ANNEXE I : DERIVATION CONVECTIVE ET DERIVATION DE JAUMANN

Soit une configuration Ω de métrique g et un champ de vitesse **v** sur cette configuration. Soit **T** un tenseur de composantes contravariantes T^{ij} dans la base g :

$$\mathbf{T} = T^{ij}\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$$

La dérivée convective ou de Oldroyd, notée $\overset{c}{T}$, est définie ainsi :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \overset{c}{T}^{ij}\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j + T^{ij} \frac{d\mathbf{g}_i}{dt} \times \mathbf{g}_j + T^{ij}\, \mathbf{g}_i + T^{ij}\, \mathbf{g}_i \times \frac{d\mathbf{g}_j}{dt}$$

Or, $$\frac{d\mathbf{g}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \theta^i}\right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta^i} = v^k{}_{/i}\, \mathbf{g}_k$$

et par voie de conséquence

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \overset{c}{T}^{ij}\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j + T^{ij}\, v^k{}_{/i}\, \mathbf{g}_k \times \mathbf{g}_j + T^{ij} v^l{}_{/j}\, \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_l$$

$$= \left(\overset{c}{T}^{ij} + T^{kj}\, v^i{}_{/k} + T^{il}\, v^j{}_{/l}\right) \mathbf{g}_i \times \mathbf{g}_j$$

ce qui s'écrit encore en termes tensoriels, en notant **L** le tenseur gradient de vitesses.

$$\overset{c}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{L}\mathbf{T} - \mathbf{T}^t\mathbf{L}$$

La dérivée de Jaumann, notée $\overset{J}{\mathbf{T}}$, s'obtient en ne prenant en compte que la rotation associée à la transformation. Le tenseur gradient de vitesse est alors remplacé par sa partie antisymétrique w dans l'expression ci-dessus:

$$\overset{J}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{w}\mathbf{T} - \mathbf{T}^t\mathbf{w}$$

$$\overset{J}{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{w}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{w}$$

On peut alors établir facilement la relation entre ces deux dérivées objectives, en rempla9ant par exemple L par sa décomposition en taux de déformation $\dot{\varepsilon}$ (partie symétrique) et taux de rotation **w** (partie antisymétrique) :

$$\overset{c}{T} = \dot{T} - (\dot{\varepsilon} + w)\,T - T\,{}^{t}(\dot{\varepsilon} + w)$$

$$\overset{c}{T} = \overset{J}{T} - \dot{\varepsilon}T - T\dot{\varepsilon}$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$\overset{c}{T}{}^{ij} = \overset{J}{T}{}^{ij} - \dot{\varepsilon}_k{}^{i}\,T^{kj} - T^{ik}\,\dot{\varepsilon}_k{}^{j}$$

$$= \overset{J}{T}{}^{ij} - g^{il}\,\dot{\varepsilon}_{kl}\,T^{kJ} - g^{jl}\,T^{ik}\,\dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$\overset{c}{T}{}^{ij} = \overset{J}{T}{}^{ij} - (g^{il}\,T^{kj} + g^{jl}\,T^{ik})\,\dot{\varepsilon}_{kl}$$

ANNEXE II : MATRICE TANGENTE DE COMPORTEMENT $\delta(\boldsymbol{\Delta\sigma})/\delta(\boldsymbol{\Delta\varepsilon})$ EN ELASTO-VISCOPLASTICITE ET EN VISCOPLASTICITE PURE

1)- Elastoviscoplasticité

Résoudre le système (III.6) revient à annuler le résidu

$$\mathbf{R}\,(\,\Delta\sigma\,) = \Delta\sigma - E\,(\Delta\varepsilon - \Delta\varepsilon^{(vp)}(\,\sigma + \eta\,\Delta\sigma\,))$$

Si l'on adopte la notation vectorielle décrite au II.C.1.a), cette résolution par une méthode de Newton-Raphson nécessite le calcul de la matrice tangente.

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial\,(\,\Delta\sigma\,)} = \mathbb{1}_{3x3} + \eta\,E\,\frac{\partial(\,\Delta\varepsilon^{(vp)}}{\partial\sigma}(\,\sigma + \eta\,\Delta\sigma\,) \qquad (A.II.1)$$

De manière générale, en reprenant les notations du même paragraphe, on a :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(vp)} = \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}}\,\mathbf{A}\,\sigma$$

et on obtient après calculs

$$\frac{\partial(\,\dot{\varepsilon}^{(vp)})}{\partial\sigma} = \left(\frac{\partial\dot{\varepsilon}_{eq}}{\partial\sigma_{eq}} - \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}}\right)\frac{1}{\sigma_{eq}^{2}}\,\mathbf{A}\,\sigma^{t}(\,\mathbf{A}\,\sigma\,) + \frac{\dot{\varepsilon}_{eq}}{\sigma_{eq}}\,\mathbf{A} \qquad (A.II.2)$$

et donc :

$$\frac{\partial(\,\Delta\varepsilon^{(vp)})}{\partial\sigma} = \Delta t\,\frac{\partial\,\dot{\varepsilon}^{(vp)}}{\partial\sigma}$$

qu'il faut calculer pour $\boldsymbol{\sigma} + \eta\,\Delta\boldsymbol{\sigma}$ et injecter dans (A.II.1) pour obtenir la matrice tangente du système.

En ce qui concerne la matrice tangente de comportement, son expression découle du système (III.6)

$$E\,\Delta\varepsilon = \Delta\sigma + E\,\Delta\varepsilon^{(vp)}(\sigma + \eta\,\Delta\sigma)$$

donc

$$E\,\frac{\partial(\Delta\varepsilon)}{\partial(\Delta\sigma)} = \mathbb{1}_{3x3} + \eta\,E\,\frac{\partial(\Delta\varepsilon^{(vp)})}{\partial\sigma}(\sigma + \eta\,\Delta\sigma)$$

soit finalement :

$$\frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial(\Delta\varepsilon)} = \left[\mathbb{1}_{3x3} + \eta\,E\,\frac{\partial(\Delta\varepsilon^{(vp)})}{\partial\sigma}(\sigma + \eta\,\Delta\sigma)\right]^{-1} E \qquad \text{(A.II.3)}$$

On constate donc que ce module tangent de comportement se déduit immédiatement de la matrice tangente donnée en (A.II.1).

2). Viscoplasticité pure

On a, en vertu du schéma d'intégration (III.14) :

$$\frac{\partial(\Delta\sigma)}{\partial(\Delta\varepsilon)} = \frac{\partial\sigma'}{\partial(\Delta\varepsilon)} = \frac{\partial\sigma'}{\partial\dot{\varepsilon}'}\,\frac{\partial\dot{\varepsilon}'}{\partial(\Delta\varepsilon)} = \frac{1}{\eta\,\Delta t}\,\frac{\partial\sigma'}{\partial\dot{\varepsilon}'} \qquad \text{(A.II.4)}$$

D'autre part, l'équation (III.16) nous donne :

$$\sigma' = k\,\dot{\varepsilon}_{eq}^{m-1}\,A^{-1}\,\dot{\varepsilon}' = \frac{\sigma_{eq}'}{\dot{\varepsilon}'_{eq}}\,A^{-1}\,\dot{\varepsilon}'$$

Après calculs, on en déduit :

$$\frac{\partial\sigma'}{\partial\dot{\varepsilon}'} = A^{-1}\left[\frac{1}{\dot{\varepsilon}^2_{eq}}\left(\frac{\partial\sigma_{eq}'}{\partial\dot{\varepsilon}'_{eq}} - \frac{\sigma'_{eq}}{\dot{\varepsilon}'_{eq}}\right)\dot{\varepsilon}'^{,t}(A^{-1}\,\dot{\varepsilon}') + \frac{\sigma'_{eq}}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\,\mathbb{1}_{3x3}\right]$$

Cette expression, reportée dans (A.II.4) donne l'expression de la matrice tangente de comportement

$$\partial(\Delta\sigma)/\partial(\Delta\varepsilon).$$

ANNEXE III : LOI DE COMPORTEMENT ELASTO-VISCOPLASTIWUE/FORMULATION EN VITESSES

Résoudre le système constitué des quatre équations III.23 et III.24 revient à annuler le résidu :

$$R\left(\overset{c}{\sigma}'\right) = -\dot{\varepsilon}' + E'^{-1}\overset{c}{\sigma}' + \dot{\varepsilon}^{(vp)'}(\sigma')$$

La résolution par méthode de Newton-Raphson nécessite le calcul de :

$$\frac{\partial R}{\partial \overset{c}{\sigma}'} = E'^{-1} + \eta\Delta t \frac{\partial \dot{\varepsilon}^{(vp)'}}{\partial \sigma}(\sigma')$$

où $\frac{\partial \dot{\varepsilon}^{(vp)'}}{\partial \sigma}$ est donné par l'équation (A.II.2) de l'annexe II.

Calcul de la matrice tangente de comportement $\delta(\sigma')/\delta(\dot{\varepsilon}')$

Si l'on reprend l'équation :

$$\dot{\varepsilon}' = E'^{-1}\overset{c}{\sigma}' + \dot{\varepsilon}^{(vp)'}$$

il vient

$$\frac{\partial \sigma'}{\partial \dot{\varepsilon}'} = \eta\,\Delta t\left[E'^{-1} + \eta\Delta t \frac{\partial \dot{\varepsilon}^{(vp)'}}{\partial \sigma}(\sigma')\right]^{-1}$$

qui est à $\eta\Delta t$ près la matrice nécessaire à la résolution du système de la loi de comportement (II.23).

ANNEXE IV : MATRICE DE RAIDEUR DU SYSTEME GLOBAL

Dans le cas de la formulation en déplacement, on a (éq. III.40).

$$R^{1}_{Nk}(\mathbf{U}) = \int_{\Omega'} \sigma'^{ij} B'^{k}_{ijN}\, h'\sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2 - \int_{\Omega'} T'_k \Psi_N \sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2$$

1). Terme de comportement

$$\frac{\partial R^{1(co)}_{Nk}}{\partial U^{M}_{1}} = \int_{\Omega'} \left[\frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial U^{M}_{1}} B'^{k}_{ijN} + \sigma'^{ij} \frac{\partial B'^{k}_{ijN}}{\partial U^{M}_{1}}\right] h'\sqrt{g'}\, d\theta^1 d\theta^2$$

On a d'une part,

$$\frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial U^{M}_{1}} = \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{gh}} \frac{\partial \Delta\varepsilon_{gh}}{\partial U^{M}_{1}}$$

où $\delta(\sigma')/\delta(\Delta\varepsilon)=\delta(\Delta\sigma)/\delta(\Delta\varepsilon)$ est le module tangent déterminé lors du calcul de la loi de comportement (éq. A.II.3 ou A.II.4) et on a au premier ordre,

$$\frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial U^{M}_{1}} = \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \Delta\varepsilon_{gh}} \frac{1}{2} \left(B^{1}_{ghM} + B^{1}_{hgM}\right)$$

D'autre part, on a :

$$B'^{k}_{ijN} = \frac{\partial \Psi_n}{\partial \theta^j}\, \mathbf{g}'_i \cdot \mathbf{I}_k = \frac{\partial \Psi_N}{\partial \theta^j} \frac{\partial \Psi_P}{\partial \theta^i}\, \mathbf{X}'^{P} \cdot \mathbf{I}_k$$

et il vient

$$\frac{\partial B^{k}_{ijN}}{\partial U^{M}_{1}} = \frac{\partial \Psi_N}{\partial \theta^j} \frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta^i} \delta^{k}_{1}$$

2. Terme de chargement extérieur

$$\frac{\partial R^{1(ch)}_{Nk}}{\partial U^M_1} = \int_{\Omega'} - \frac{\partial T'_k}{\partial U^M_1} \Psi_N \sqrt{g'} d\theta^1 d\theta^2$$

Nous négligeons, pour le calcul de ce terme, la dérivée $\partial(\sqrt{g'})/\partial \mathbf{U}$.

2.a) Terme de pression

$$\mathbf{T}'^{(p)} = - p \mathbf{g'_3}$$

En exploitant le fait que **g'3** est unitaire et orthogonal à **g'1** et **g'2** , on démontre assez facilement que :

$$\frac{\partial \mathbf{g'_3}}{\partial U^M_1} = -(\mathbf{I_1} . \mathbf{g'_3})[\frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta^1} g'^{1s} + \frac{\partial \Psi_M}{\partial \theta^2} g'^{2s}] \mathbf{g'_s}$$

2.b) Terme de frottement

$$\mathbf{T}'^{(f)} = - \mu p \frac{1}{\sqrt{\mathbf{U}^2 + u_0^2}} \mathbf{U}$$

Les calculs de dérivation ne posent guère de problème et on obtient :

$$\frac{\partial T'^{(f)}_k}{\partial U^M_1} = - \mu p \Psi_M (\mathbf{U}^2 + u_0^2)^{-3/2}[- U_1 U_k + (\mathbf{U}^2 + u_0^2)\delta^1_k]$$

Finalement, le terme dérivé du chargement extérieur s'écrit :

$$\frac{\partial R^{1(ch)}_{Nk}}{\partial U^M_1} = \int_{\Omega'} (p \frac{\partial \mathbf{g'_3}}{\partial U^M_1} . \mathbf{I}_k + \frac{\partial T'^{(f)}_k}{\partial U^M_1}) \Psi_N \sqrt{g'} d\theta^1 d\theta^2$$

Avec une formulation en vitesses, les calculs sont assez similaires. Il faut noter toutefois que pour le terme de comportement, on a :

$$\frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial V'^{M}_{l}} = \frac{\partial \sigma'^{ij}}{\partial \dot{\varepsilon}'_{gh}} \frac{\partial \dot{\varepsilon}'_{gh}}{\partial V'^{M}_{l}}$$

avec $\partial(\sigma')/\partial(\dot{\varepsilon}')$ donné en annexe III et l'écriture exacte cette fois :

$$\frac{\partial \dot{\varepsilon}'_{gh}}{\partial V'^{M}_{l}} = \frac{1}{2} (B^{l}_{ghM} + B^{l}_{hgM})$$

RESUME

La superplasticité est la propriété qu'ont certains métaux de pouvoir subit de grandes déformations plastiques sans instabilité. Dans l'industrie aéronautique, cette,propriété est utilisée lors du thermoformage de pièces de structure en tôles d'ale liages de titane ou d'aluminium. L'introduction et le premier chapitre sont consacrés à une présentation des caractéristiques générales de la superplasticité et du procédé' de mise en forme par pression gazeuse. Une meilleure"maîtrise de ce procédé, en particulier quant aux cycles de pression et aux épaisseurs finales, est conditionnée par sa modélisation numérique. L'auteur présente un modèle mécanique reposant sur une hypothèse de membrane. Les équations écrites en coordonnées curvilignes pour un matériau élasto-viscoplastique ou viscoplastique pur, avec écrouissage isotrope, font l'objet du chapitre Il. La méthode de résolution numérique est celle des éléments finis. Sa présentation, dans le cadre de l'approximation membrane, est effectue au chapitre III dans lequel sont explicitées les différentes possibilités concernant l'intégration de la loi de comportement. Dans un premier temps, et dans le cadre d'une formulation incrémentale en déplacements préalablement testée en élastoplasticité, l'auteur exploite la possibilité d'exprimer une relation biunivoque entre trainte et taux de déformation viscoplastique, en proposant un schéma implicite •qui néglige l'élasticité. En second lieu, le modèle élasto-viscoplastique est repris dans une formulation incrémentale en vitesses, où l'inconnue est le champ de vitesse sur la configuration finale, elle-même inconnue, et où toutes les relations de comportement restent écrites en vitesses. Ce nouveau schéma conduit à une meilleure précision que la formulation en déplacements. Le chapitre IV rend compte d'essais de simulation du procédé sur plasticine : ces essais ont permis de valider le modèle proposé. Dans le dernier chapitre, l'auteur présente l'application du modèle à des cas de figure industriels. L'un des intérêts du code de calcul est une régulation numérique automatique de la pression permettant d'assurer la faisabilité de l'opération en un temps minimum.

ABSTRACT

The application of the superplasticity of metals has become an industrial reali ty in the aerospace industry since 1970. This property of large stable plastic deformation allows the thermoforming of structural parts made of tHin sheets of titanium and aluminium alloys. The introduction and chapter I are a presentation of the general characteristics of superplasticity and of the forming process using fluid pressure. A better control of this process, especially regarding pressure cycles and final thickness profile, is conditionned by its numerical modeling. The author presents. a mechanical model based on a membrane hypothesis. In chapter II, the equations are written in curvilinear coordinates for an elastic-viscoplastic or puiely viscoplastic material, with isotropic strain hardening. The numerical resôlution method is the. finite element method. Its presentation, in the frame of membrane approximation, is in chapter III, in which the different possibilities for the integration of the behaviour law are discussed. Firstly, using an existing incremental displacement formulation, the author takes advantage of the direct relation between stress and viscoplastic strain rate to propose an implicit scheme in which elasticity is neglected. Secondly, the elastic-viscoplastic model is treated with an implicit velocity formulation, in which the unknown variable is the velocity field of the unknown current configuration and the behaviour equations remain written in terme of velocity.. Ibis new. scheme givés a better precision than the displacement.formulation.Chapter IV descri bes experimental simulation rk with plasticine, resulting in the ,validation of the model. In chapter V, the application of the model to industrial forming operations.iS presented. An interesting characteristic of the computation code is an automatic numerical regulation of forming pressure which ensures the faisability of the forming in a minimum time.

MOTS CLES :
SUPERPLASTICITE, FORMAGE SUPERPLASTIQUE, ELEMENTS FINIS, MEMBRANE, VISCOPLASTICITE, ELASTO-VISCOPLASTICITE, DISCRETISATION TEMPORELLE, SIMULATION