



Dicontinuous Galerking methods for the aeroacoustic waves propagation

Marc Bernacki

► To cite this version:

Marc Bernacki. Dicontinuous Galerking methods for the aeroacoustic waves propagation. Mathematics [math]. Ecole des Ponts ParisTech, 2005. English. NNT: . pastel-00001518

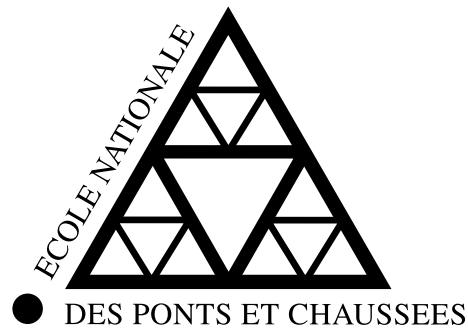
HAL Id: pastel-00001518

<https://pastel.hal.science/pastel-00001518>

Submitted on 22 Dec 2005

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE

présentée à

L'ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

SPÉCIALITÉ : MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Méthodes de type Galerkin discontinu
pour la propagation des ondes en aéroacoustique

par Marc BERNACKI

Présentée et soutenue publiquement le 22 septembre 2005 devant le jury d'examen :

M.	C. BAILLY	Rapporteur
M.	U. EHRENSTEIN	Examineur
M.	A. ERN	Président
M.	S. PIPERNO	Directeur de thèse
M.	O. PIRONNEAU	Rapporteur
Mme.	I. TERRASSE	Examinatrice

Remerciements

Ce travail, commencé en octobre 2002 au sein du laboratoire CERMICS à Sophia-Antipolis, a été pour moi d'une extrême richesse tant sur le plan humain que professionnel.

Je ne sais comment exprimer ma gratitude à Serge Piperno qui a dirigé ces travaux. Sa patience, ses conseils, son talent et ses qualités humaines hors du commun ont été un catalyseur à la passion avec laquelle je me suis investi dans ce travail.

Je tiens également à exprimer toute ma reconnaissance à Stéphane Lanteri pour l'aide précieuse qu'il m'a apportée. Ses compétences et sa gentillesse m'ont permis de franchir de nombreux obstacles avec confiance.

Je suis très honoré que Monsieur Christophe Bailly et Monsieur Olivier Pironneau aient accepté d'être les rapporteurs de ce travail. Je remercie également vivement Madame Isabelle Terrasse, Monsieur Uwe Ehrenstein et Monsieur Alexandre Ern qui ont consenti à faire partie du jury.

Evidemment je tiens également à saluer toutes les personnes du projet CAIMAN avec qui j'ai eu le plaisir de passer à la fois des moments studieux et des moments de détente. Merci donc à Nathalie, Sabine, Loula, Hugo, Adrien et Antoine. Je tenais à remercier tout particulièrement Mondher, qui a su me supporter comme voisin de bureau et à qui je souhaite bonne chance pour la suite. Je n'oublie pas tous ceux dont j'ai croisé la route, une pensée donc pour Christel, Gilles, Said, Jessy, Gregory et pour la famille Bartoli-Canouet.

Mais surtout, les mots me manquent pour remercier ma petite famille, mon fils tout d'abord qui par ses sourires, ses premiers pas et ses premiers mots m'a aidé à sa manière et surtout ma femme, Karine, pour son soutien, son écoute, ses conseils, sa patience et le bonheur qu'elle m'apporte jour après jour.

Table des matières

Introduction	7
1 Les équations d'Euler linéarisées	15
Introduction	15
1.1 Les équations d'Euler linéarisées pour un écoulement uniforme	17
1.2 Utilisation de la symétrisation des équations d'Euler	17
1.3 Le modèle de Bogey, Bailly et Juvé	19
1.3.1 Etude du modèle simplifié pour un écoulement moyen unidirectionnel cisailé bidimensionnel	21
1.3.2 Equations de Phillips et de Lilley	21
1.3.3 Modification de l'équation de stabilité de Rayleigh	23
1.4 Propriétés énergétiques des équations	26
1.5 Une autre approche pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz	28
Conclusion	30
2 Méthodes de type Galerkin discontinu pour l'aéroacoustique	31
Introduction	31
2.1 Le principe de la méthode	32
2.1.1 Discrétisation spatiale	33
2.1.2 Discrétisation temporelle	34
2.1.3 Différentes formulations	35
2.2 Méthode de type volumes finis	37
2.3 Méthode d'approximation $\mathbb{P}_1$	38
2.4 Les conditions aux limites	41
2.4.1 Introduction	41
2.4.2 Conditions aux limites réfléchissantes	43
2.4.3 Conditions aux limites absorbantes	45
2.4.4 Condition PML	46
Conclusion	50
3 Les propriétés de notre schéma	51
Introduction	51
3.1 Les résultats énergétiques	52
3.1.1 Le cadre uniforme	52
3.1.2 Le cadre non uniforme constant par cellule	56

3.1.3	Condition absorbante implicite	59
3.2	Les résultats de stabilité	60
3.2.1	En uniforme	60
3.2.2	En non uniforme	66
3.2.3	Condition absorbante implicite	70
3.2.4	Majoration de l'énergie semi-discrète	71
Conclusion		73
4	Validation de notre méthode	75
Introduction		75
4.1	Condition de stabilité	76
4.2	Cas tests de validation en écoulement uniforme	79
4.2.1	Cas test 1 : Un instationnaire périodique	79
4.2.2	Cas test 2 : cas test de Tam-Webb	83
4.2.3	Cas test 3 : condition réfléchissante	92
4.2.4	Conclusion	97
4.3	Cas test de validation en écoulement non uniforme	98
4.3.1	Cas test 1 : Workshop	98
4.3.2	Conclusion	103
4.4	Instabilités de Kelvin-Helmholtz en 2D	103
4.4.1	Introduction	103
4.4.2	Cas test académique	104
4.4.3	Traitement des instabilités par ajout d'un terme source discret	105
4.4.4	Cas test cisailé affine	110
4.4.5	Cas test avec instabilités	117
4.4.6	Problème aéroacoustique autour d'une coupe d'aile 2D de type NACA	119
4.4.7	Conclusion	123
Conclusion		129
5	Développement et validation d'un code 3D	131
Introduction		131
5.1	Condition de stabilité en 3D	132
5.2	Méthode de parallélisation	132
5.3	Cas tests en écoulement simple	133
5.3.1	Cas test de Tam-Webb 3D	133
5.3.2	Cas test avec écoulement de Couette subsonique	138
5.4	Cas test en écoulement complexe	142
5.4.1	Propagation aéroacoustique autour d'une sphère	142
5.4.2	Cas tests autour d'un Falcon	147
Conclusion		160
Conclusion		161
Références		164

Introduction

L'aéroacoustique numérique : une discipline en plein essor

L'aéroacoustique se situe à l'interface entre les deux disciplines traditionnelles que sont la mécanique des fluides et l'acoustique. L'étude du bruit d'origine aérodynamique a connu une évolution considérable ces dernières années, avec en particulier un développement très rapide des techniques de simulation numérique. Les domaines d'application de l'aéroacoustique se sont aussi multipliés. L'aéroacoustique est devenu un sujet industriel de première importance dans les domaines des transports aéronautiques et terrestres pour lesquels la minimisation de la pollution acoustique doit répondre à des normes de plus en plus sévères. Si certains sujets tels que l'étude du bruit généré par les pales d'un hélicoptère ou par un avion à l'atterrissage et au décollage paraissent évidents, d'autres le sont beaucoup moins comme l'étude du bruit généré par un écoulement aérodynamique au contact d'un toit ouvrant de voiture ou d'un pantographe ou encore l'étude des bruits d'écoulements internes dans les circuits aérauliques des climatisations...

La diversité des problèmes ayant trait à l'aéroacoustique est proportionnelle à sa complexité car c'est une discipline couplant des phénomènes aérodynamiques et acoustiques. L'étude du rayonnement sonore d'un écoulement se décompose logiquement en la génération du bruit par l'écoulement et en la propagation de ce bruit au sein de l'écoulement. Historiquement, une première tentative de réponse à la modélisation de ce type de phénomènes a été formulée par Lighthill [58] en 1952 en faisant apparaître le bruit généré par un écoulement comme solution d'une équation de propagation dans un milieu au repos. Cette analogie a ensuite été reformulée et améliorée par Phillips [65] puis par Lilley [59]. Ces premiers modèles ont permis de construire les bases de l'aéroacoustique et d'en exhiber les premiers résultats, ces approches étant d'ailleurs encore souvent utilisées aujourd'hui [27], [56].

A priori, il peut paraître surprenant que les premiers résultats tangibles en aéroacoustique n'aient pas été obtenus grâce à la résolution des équations générales de la mécanique des fluides car en effet ces équations modélisent à la fois l'évolution aérodynamique et l'évolution aéroacoustique d'un fluide. Grâce à l'évolution des techniques numériques il existe aujourd'hui des codes de CFD (Computational Fluid Dynamics) résolvant de manière très précise ces équations [54], [74], [55]. Les équations modèles utilisées peuvent être les équations de Navier-Stokes ou d'Euler, éventuellement incluses dans des modèles plus larges : modèles de turbulences, simulation des grandes échelles [57], équations de Navier-Stokes moyennées, équations d'Euler linéarisées [8]... Nous allons tenter d'expliquer pourquoi cette approche directe reste insuffisante pour la simulation précise de phénomènes aéroacoustiques complexes.

En fait, les caractéristiques particulières des fluctuations aéroacoustiques sont extrêmement

différentes de celles des perturbations aérodynamiques. Par exemple, alors que les perturbations aérodynamiques sont uniquement convectées par l'écoulement, pour une configuration simpliste de l'écoulement (uniforme) nous pouvons séparer les ondes aéroacoustiques en trois catégories [80] : les perturbations acoustiques se propageant à la vitesse du son tout en étant convectées par l'écoulement et les perturbations entropiques et de vorticité qui elles sont uniquement convectées par l'écoulement. De plus une moyenne réaliste de l'amplitude des perturbations aéroacoustiques est en général de l'ordre de 10^5 inférieure à celle des perturbations aérodynamiques. Il est également intéressant de constater que la longueur d'onde des phénomènes acoustiques est en moyenne de l'ordre de 100 fois celle des épaisseurs de cisaillement dans les écoulements cisailés [20].

Ces différents critères font d'une approche directe de l'aéroacoustique un problème multi-échelles. Ainsi la détermination des fluctuations aéroacoustiques à travers un code de CFD nécessite l'utilisation de méthodes très précises, associées à des maillages et des conditions aux limites appropriées à la fois aux critères aérodynamiques et acoustiques. Cette démarche ne peut donc s'avérer qu'extrêmement complexe et fort c teuse en terme de programmation. De plus les approches de ce type, par leur complexité, ne s'appuient en général que sur des schémas de type différences finies et donc sur des géométries simples. Il est donc évident qu'elles sont mal adaptées aux géométries complexes généralement introduites pour les problèmes aéroacoustiques comme l'illustrent les exemples que nous avons donnés en préambule.

Ces différentes remarques expliquent donc historiquement l'apparition de méthodes hybrides dont font partie l'analogie de Lighthill et les équations de Phillips et de Lilley. Ces méthodes sont basées sur la détermination séparée des données aérodynamiques et acoustiques [75]. Le principe de base de ces méthodes consiste grâce à un calcul de CFD (qui cette fois n'a nullement besoin d'être extrêmement précis) de déterminer le champ aérodynamique qui est alors utilisé pour la construction d'un terme source (grâce à un modèle de terme source plus ou moins complexe) que l'on injecte ensuite au sein d'un opérateur de propagation acoustique, cet opérateur ne nécessitant au pire que la connaissance du champ moyen. Nous pouvons également remarquer qu'il existe des modèles de termes sources ne faisant appel qu'à la connaissance du champ moyen [6]. Cette démarche permet donc de dissocier les difficultés, et contrairement à une approche directe rend réalisable la simulation de configurations aéroacoustiques réalistes.

Evidemment, contrairement à une approche directe, les méthodes hybrides sont de nature approximative et nécessitent pour être efficaces l'utilisation de termes sources réalistes et d'opérateurs de propagation très précis. Or ces deux données sont intrinsèquement liées. En effet, la complexité du terme source est une fonction décroissante de la complexité de l'opérateur de propagation. Cela s'explique par le caractère plus ou moins performant de l'opérateur de propagation dans la prise en compte des interactions entre acoustique et aérodynamique. Ainsi si l'analogie de Lighthill permet d'obtenir un opérateur de propagation très simple, elle néglige tous les phénomènes complexes d'interactions, d'où la nécessaire tentative hasardeuse de construction d'un terme source palliant cette insuffisance. Si les équations de Phillips et de Lilley constituent des opérateurs de propagation plus efficace, il n'en reste pas moins que le seul opérateur de propagation exact (prise en compte des effets de la convection et de la réfraction des ondes due à l'écoulement porteur) est construit grâce aux équations d'Euler linéarisées. En effet cet opérateur est utilisable pour tout type d'écoulement porteur, ainsi

il semble être le seul à pouvoir être utilisé dans le cas de géométries complexes et donc de configurations réalistes. De plus, le caractère “complet” de cet opérateur permet la construction de termes sources réalistes assez simples [20]. Il est à noter que les équations d’Euler linéarisées autour d’un écoulement non uniforme peuvent être, selon les caractéristiques de l’écoulement, un problème mal posé. En fait, les instabilités rencontrées correspondent à une réalité physique que des termes non linéaires dans les équations d’Euler permettent de contenir. Le fait de négliger ces termes lors de la résolution des équations d’Euler linéarisées rend incontrôlable ces instabilités connues sous le nom d’instabilités de type Kelvin-Helmholtz [3]. Nous présenterons différentes méthodes en continu et au niveau discret permettant de gérer ces instabilités. La figure 1 schématise l’emboîtement des différentes méthodes hybrides que nous venons d’introduire.

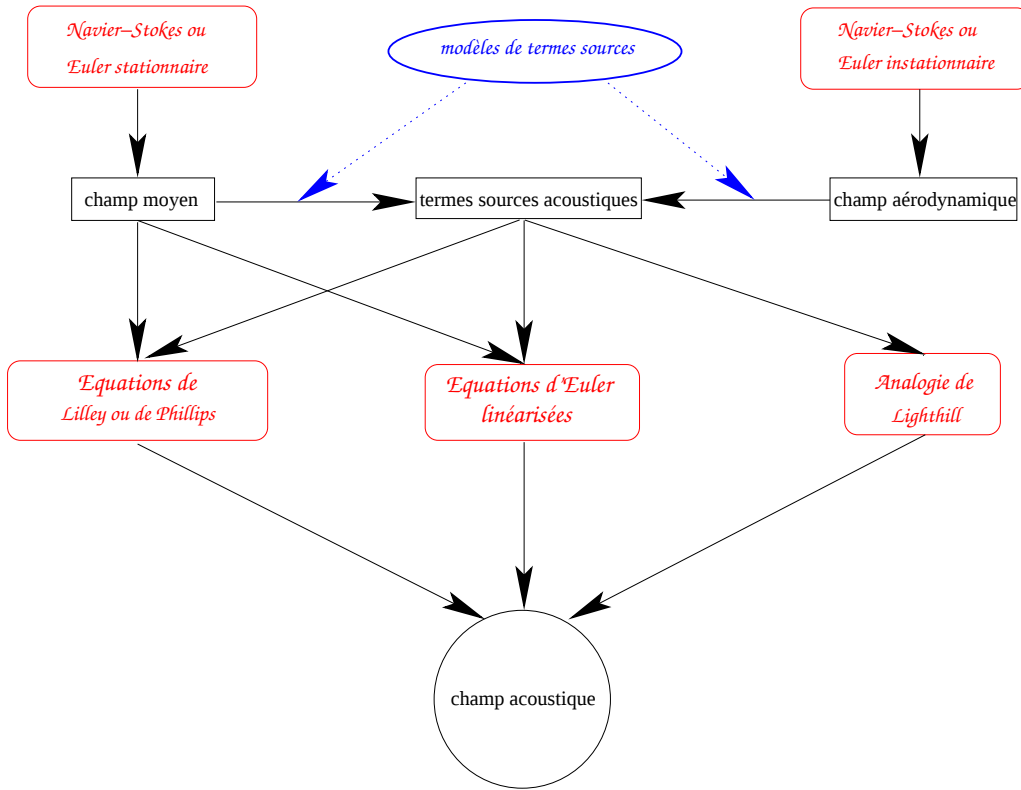


FIG. 1 – Méthodes hybrides de calcul du champ acoustique

Comme nous venons de l’expliquer, la construction d’une méthode hybride efficace repose sur deux critères distincts, le travail réalisé au sein de cette thèse s’est attaché à un de ces critères : celui de la construction d’un opérateur de propagation précis, robuste et utilisable pour des configurations de type industriel. Ainsi, nous n’aborderons pas le problème de la modélisation de terme sources aérodynamiques réalistes, mais nous décrirons et nous testerons une méthode de type Galerkin discontinu pour la résolution des équations d’Euler linéarisées aux seins d’écoulements moyens quelconques. Nous allons à présent tenter d’expliquer pour quelles raisons et dans quels objectifs l’utilisation de méthodes de type Galerkin discontinu nous a paru pouvoir être hautement bénéfique pour les problèmes liés à l’aéroacoustique.

Approximation de type Galerkin discontinu : une méthode en plein essor

Après avoir été esquissées au début de la construction des méthodes de type éléments finis, les méthodes de type Galerkin discontinu ont fait leur ré-apparition en 1973 pour la résolution de l'équation de transport des neutrons [71] et ont été formalisées un an plus tard pour cette même équation [52]. Le principe général de ces méthodes consiste à rechercher les inconnues numériques du problème considéré comme engendrées par une base de fonctions locales dans chaque cellule du maillage d'interpolation utilisé, l'ordre de cette base pouvant varier d'une cellule à une autre. De plus, le champ approché peut être discontinu à l'interface entre deux cellules voisines. Ainsi, ces méthodes peuvent être interprétées comme une approche de type éléments finis où aucune continuité n'est exigée entre les éléments ou comme une généralisation des méthodes de type volumes finis.

Les points forts de cette approche sont nombreux, elle permet par exemple de travailler sur des maillages non structurés et de gérer des coefficients ou des solutions discontinues. Cependant, malgré les avantages certains de ces méthodes pour les problèmes hétérogènes, elles ont été laissées de côté pendant une quinzaine d'années et connaissent aujourd'hui un nouvel essor pour une large variété d'applications [25], [33], [26]. Par exemple, les nombreuses applications et divers résultats existants pour une approche volumes finis des équations de Maxwell (utilisation de maillages curvilignes [73], utilisation de maillages non structurés en triangles [4], utilisation de maillages complètement destructurés [23], théorie sur la convergence de la méthode [34], estimations d'erreurs [83], conservation d'une énergie et d'une divergence discrètes [36]...) ont été étendus au cadre des méthodes de type Galerkin discontinu.

Ce renouveau auprès des numériciens peut être expliqué par la (re)découverte de la capacité de ces méthodes à être adaptées aux géométries et aux maillages complexes ainsi qu'aux hétérogénéités, à permettre d'atteindre un degré de précision élevé par le simple choix des fonctions de base (incluant les éléments spectraux), à réaliser de longs calculs en temps et enfin à être hautement parallélisable [45].

Tous ces critères mettent en évidence l'intérêt de ces méthodes pour l'aéroacoustique. Or curieusement, il existe dans la littérature très peu de références concernant l'utilisation de méthodes de type Galerkin discontinu pour les équations d'Euler linéarisées, nous pouvons citer [28], [61] et [5]. Les problèmes récurrents apparaissant dans ce contexte sont la diffusivité, les conditions aux limites et le traitement des instabilités de type Kelvin-Helmholtz.

Objectif et plan de la thèse

L'objectif principal de cette thèse était l'élaboration d'un code 3D à structure parallèle précis, robuste et utilisable pour des configurations réalistes de domaines, de maillages et d'écoulements porteurs tout en s'appuyant sur des méthodes de type Galerkin discontinu. Certaines bases, préalable à la réalisation de ce code, telles que le choix des conditions aux limites, la prise en compte d'écoulements non uniformes, l'assurance d'une condition de stabilité (incluant le traitement des instabilités de type Kelvin Helmholtz) n'étaient pas fixées. Ainsi, les objectifs secondaires que nous nous étions imposés étaient la construction d'un schéma non diffusif, d'ordre en espace modulable, stable de manière théorique sur maillage non struc-

turé pour des écoulements porteurs complexes grâce à des considérations énergétiques tout en proposant un traitement pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz adapté à notre approche.

Le manuscrit est structuré en cinq chapitres :

- ★ Le chapitre 1 a pour but de présenter différentes formulations des équations d'Euler linéarisées dont nous avons eu besoin pour l'élaboration de notre code. Les différentes approches présentées auront toutes un intérêt théorique et numérique selon la configuration du problème envisagé : écoulement porteur uniforme ou non uniforme, présence d'instabilités, considérations énergétiques... Nous présenterons également différents résultats théoriques sur les problèmes énergétiques et les possibles modes instables liés aux équations d'Euler linéarisées, le but étant par la suite de comparer ces résultats avec ceux obtenus par une approche discrète.
- ★ Dans le chapitre 2, nous présenterons de manière détaillée les bases du schéma proposé pour les différentes configurations envisagées dans le premier chapitre. Nous présenterons également plusieurs choix de conditions aux limites à des fins comparatives. Enfin, nous écrirons de manière explicite l'expression de notre schéma pour deux types de base d'approximation que nous utiliserons pour la réalisation de tous les cas tests figurant dans ce manuscrit.
- ★ Dans le chapitre 3, de manière générale vis à vis de l'ordre d'approximation en espace, nous présenterons les résultats théoriques de notre schéma concernant la stabilité pour tout type d'écoulement porteur sur maillages non structurés. Nous démontrerons la non-diffusivité du schéma proposé pour des écoulements porteurs uniformes et la corrélation entre les bilans énergétiques obtenus pour des écoulements porteurs non-uniformes et ceux obtenus en continu dans le premier chapitre. Nous démontrerons également les qualités des conditions aux limites de manière théorique (nous ne discuterons pas des problèmes d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz dans ce chapitre).
- ★ Dans le chapitre 4, nous illustrerons les résultats des trois premiers chapitres grâce à de nombreux cas tests en deux dimensions d'espace. Ces cas tests nous permettront de valider nos différentes approches tout en répondant à certaines questions posées dans les chapitres précédents (ordre d'approximation nécessaire, choix des conditions aux limites...). Nous proposerons également une méthode discrète permettant de gérer les instabilités de type Kelvin Helmholtz et assurant une condition de stabilité sur maillage non structuré pour tout type d'écoulement porteur. Nous validerons cette méthode de manière numérique et nous la comparerons avec une autre méthode existante (introduite dès le premier chapitre). Ces différents résultats permettant de fixer les bases de notre code 3D.
- ★ Dans le chapitre 5, nous décrirons la structure parallèle de notre code 3D et nous réaliserons différents cas tests dont deux de complexité industrielle.

Les études menées dans cette thèse ont donné lieu à la participation aux publications et présentations orales suivantes :

M. Bernacki, L. Fezoui, S. Lanteri et S. Piperno, *Parallel Discontinuous Galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of three-dimensional wave propagation problems*. Accepté pour publication dans Applied Mathematical Modelling en 2005.

M. Bernacki et S. Piperno, *A dissipation-free time-domain discontinuous Galerkin method applied to three-dimensional linearized Euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow*. Soumis pour publication dans Journal of computational acoustics en 2005.

M. Bernacki et S. Piperno, *Méthode de type Galerkin discontinu appliquée aux équations d'Euler linéarisées en écoulement uniforme ou non*, rapport de recherche INRIA No.5292¹, août 2004.

M. Bernacki, S. Lanteri et S. Piperno, *Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, non-diffusive, discontinuous Galerkin methods*. Accepté pour publication dans Journal of computational acoustics en 2004.

M. Bernacki et S. Piperno, *Méthode de type Galerkin discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique*, rapport de recherche INRIA No.4932², septembre 2003.

M. Bernacki et S. Piperno, *Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique*, rapport de recherche INRIA No.4699³, janvier 2003.

S. Lanteri, M. Bernacki, L. Fezoui et S. Piperno, *Parallel discontinuous Galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of 3D heterogeneous wave propagation problems*, DCABES Conference (Distributed Computing and its Applications in Business, Engineering and Sciences), University of Greenwich, England, August 25-27, 2005.

M. Bernacki et S. Piperno, *Stabilization of Kelvin-Helmholtz instabilities in three-dimensional linearized Euler equations using a non-dissipative time-domain discontinuous Galerkin method*, the 7th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves (WAVES'05), Brown University, USA, June 20-24, 2005.

M. Bernacki et S. Piperno, *Méthode de type Galerkin discontinu en aéroacoustique tridimensionnelle*, journée de rencontre aéroacoustique (jraa-2004), Paris, ENSTA, 24 novembre 2004.

1. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-5292.html>

2. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4932.html>

3. <http://www.inria.fr/rrrt/rr-4699.html>

M. Bernacki, *Méthode de type Galerkin-discontinu pour la propagation des ondes en aéro-acoustique*, 36ème Congrès National d'Analyse Numérique (CANUM04), Obernai, France, 31 mai-4 Juin 2004.

Chapitre 1

Les équations d'Euler linéarisées

Sommaire

Introduction	15
1.1 Les équations d'Euler linéarisées pour un écoulement uniforme .	17
1.2 Utilisation de la symétrisation des équations d'Euler	17
1.3 Le modèle de Bogey, Bailly et Juvé	19
1.3.1 Etude du modèle simplifié pour un écoulement moyen unidirectionnel cisailé bidimensionnel	21
1.3.2 Equations de Phillips et de Lilley	21
1.3.3 Modification de l'équation de stabilité de Rayleigh	23
1.4 Propriétés énergétiques des équations	26
1.5 Une autre approche pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz	28
Conclusion	30

Introduction

L'évolution d'un gaz est régie par les équations traditionnelles de la mécanique des fluides que sont la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie. L'approximation du fluide parfait consiste à négliger les effets de flux de chaleur, de diffusion et de viscosité dans ces équations. Nous obtenons ainsi les équations d'Euler qui en trois dimensions d'espace s'écrivent :

$$\partial_t \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix} + \partial_x \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ (\rho e + p)u \end{pmatrix} + \partial_y \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vw \\ (\rho e + p)v \end{pmatrix} + \partial_z \begin{pmatrix} \rho w \\ \rho vw \\ \rho w^2 + p \\ \rho w^2 + p \\ (\rho e + p)w \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad (1.1)$$

où ρ , $\vec{V} = {}^t(u, v, w)$, e et p correspondent respectivement à la masse volumique, à la vitesse du fluide, à l'énergie spécifique et à la pression. La loi d'état des gaz parfaits étant donnée par $p = (\gamma - 1)(\rho e - \frac{1}{2}\rho V^2)$, avec $\gamma = 1.4$ le rapport des chaleurs spécifiques. La célérité de l'écoulement est défini par $c = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}$ et le nombre de Mach par $M = \frac{V}{c} = \frac{\sqrt{u^2+v^2+w^2}}{c}$.

En notant $W = {}^t(\rho, \vec{V}, p)$ et $\tilde{W} = H(W) = {}^t(\rho, \rho \vec{V}, \rho e)$, nous pouvons récrire l'équation (1.1) sous la forme :

$$\partial_t H(W) + \partial_x F_x(H(W)) + \partial_y F_y(H(W)) + \partial_z F_z(H(W)) = \vec{0}. \quad (1.2)$$

Les équations d'Euler linéarisées sont obtenues simplement en linéarisant au premier ordre l'équation (1.2). Considérons un écoulement donné par $W_0 = {}^t(\rho_0, \vec{V}_0, p_0)$ solution des équations d'Euler stationnaires et $\delta W = {}^t(\delta\rho, \delta\vec{V}, \delta p)$ une petite perturbation de cet écoulement. L'écoulement global solution des équations d'Euler (1.1) vérifie :

$$\partial_t H(W_0 + \delta W) + \partial_x F_x(H(W_0 + \delta W)) + \partial_y F_y(H(W_0 + \delta W)) + \partial_z F_z(H(W_0 + \delta W)) = \vec{0},$$

ainsi en nous limitant aux termes du premier ordre, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \underbrace{\partial_t H(W_0) + \partial_x F_x(H(W_0)) + \partial_y F_y(H(W_0)) + \partial_z F_z(H(W_0))}_{=\vec{0}, \text{ car } W_0 \text{ solution des équations d'Euler stationnaires}} \\ & + \partial_t \left(\frac{\partial H}{\partial W}(W_0) \delta W \right) + \partial_x \left(\frac{\partial F_x}{\partial \tilde{W}}(\tilde{W}_0) \frac{\partial H}{\partial W}(W_0) \delta W \right) \\ & + \partial_y \left(\frac{\partial F_y}{\partial \tilde{W}}(\tilde{W}_0) \frac{\partial H}{\partial W}(W_0) \delta W \right) + \partial_z \left(\frac{\partial F_z}{\partial \tilde{W}}(\tilde{W}_0) \frac{\partial H}{\partial W}(W_0) \delta W \right) = \vec{0}. \end{aligned}$$

Finalement, en notant $\tilde{\gamma} = \gamma - 1$ et,

$$\vec{W} = \frac{\partial H}{\partial W}(W_0) \delta W = \begin{pmatrix} \delta\rho \\ \rho_0 \delta u + u_0 \delta\rho \\ \rho_0 \delta v + v_0 \delta\rho \\ \rho_0 \delta w + w_0 \delta\rho \\ \delta p / \tilde{\gamma} + V_0^2 \delta\rho / 2 + \rho_0 (u_0 \delta u + v_0 \delta v + w_0 \delta w) \end{pmatrix},$$

nous obtenons le système suivant :

$$\partial_t \vec{W} + \partial_x (\mathbb{A}_x^0 \vec{W}) + \partial_y (\mathbb{A}_y^0 \vec{W}) + \partial_z (\mathbb{A}_z^0 \vec{W}) = \vec{0}, \text{ avec,} \quad (1.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}_x^0 = \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_x & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{2} V_0^2 \vec{e}_x - u_0 \vec{V}_0 & u_0 \mathbb{I}_3 - \tilde{\gamma} \vec{e}_x {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_x & \tilde{\gamma} \vec{e}_x \\ \beta_0 u_0 & \alpha_0 {}^t \vec{e}_x - \tilde{\gamma} u_0 {}^t \vec{V}_0 & \gamma u_0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{A}_y^0 = \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_y & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{2} V_0^2 \vec{e}_y - v_0 \vec{V}_0 & v_0 \mathbb{I}_3 - \tilde{\gamma} \vec{e}_y {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_y & \tilde{\gamma} \vec{e}_y \\ \beta_0 v_0 & \alpha_0 {}^t \vec{e}_y - \tilde{\gamma} v_0 {}^t \vec{V}_0 & \gamma v_0 \end{pmatrix} \\ \mathbb{A}_z^0 = \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_z & 0 \\ \frac{\tilde{\gamma}}{2} V_0^2 \vec{e}_z - w_0 \vec{V}_0 & w_0 \mathbb{I}_3 - \tilde{\gamma} \vec{e}_z {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_z & \tilde{\gamma} \vec{e}_z \\ \beta_0 w_0 & \alpha_0 {}^t \vec{e}_z - \tilde{\gamma} w_0 {}^t \vec{V}_0 & \gamma w_0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.4)$$

où, $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ base canonique de $\mathbb{R}^3$, $\alpha_0 = \frac{c_0^2}{\tilde{\gamma}} + \frac{V_0^2}{2}$ et $\beta_0 = (\frac{\gamma}{2} - 1) V_0^2 - \frac{c_0^2}{\tilde{\gamma}}$. Ce système est fortement hyperbolique. Il s'agit de la forme la plus utilisée pour les équations d'Euler linéarisées car elles sont ici écrites sous la forme conservative. Cependant, nous allons présenter d'autres formes pour ces équations dont l'utilité sera détaillée par la suite.

1.1 Les équations d'Euler linéarisées pour un écoulement uniforme

Le cas le plus simple de nos équations est celui où l'écoulement porteur, solution des équations d'Euler stationnaires, est uniforme. Ainsi dans l'équation (1.3), les matrices $\mathbb{A}_x^0$, $\mathbb{A}_y^0$ et $\mathbb{A}_z^0$ sont constantes. Pour obtenir une forme simplifiée de nos équations, il est alors intéressant d'effectuer le changement de variables suivant :

$$\vec{\mathbf{W}}_u = \begin{pmatrix} \delta\rho - \delta p/c_0^2 \\ \rho_0 c_0 \delta u \\ \rho_0 c_0 \delta v \\ \rho_0 c_0 \delta w \\ \delta p \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 - \frac{\gamma V_0^2}{2c_0^2} & \gamma^t \vec{V}_0/c_0^2 & -\gamma/c_0^2 \\ -c_0 \vec{V}_0 & c_0 \mathbb{I}_3 & \vec{0} \\ \gamma V_0^2/2 & -\gamma^t \vec{V}_0 & \gamma \end{pmatrix}}_{\mathbb{M}_u} \vec{\mathbf{W}}, \quad (1.5)$$

il s'agit bien d'un changement de variables, car $\det(\mathbb{M}_u) = \gamma c_0^3 \neq 0$. En utilisant ces nouvelles variables, l'équation (1.3) devient :

$$\partial_t \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_x^0 \partial_x \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_y^0 \partial_y \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_z^0 \partial_z \vec{\mathbf{W}}_u = \vec{0}, \text{ avec,} \quad (1.6)$$

$$\bar{\mathbb{A}}_x^0 = \begin{pmatrix} u_0 & {}^t \vec{0} & 0 \\ \vec{0} & u_0 \mathbb{I}_3 & c_0 \vec{e}_x \\ 0 & c_0 {}^t \vec{e}_x & u_0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbb{A}}_y^0 = \begin{pmatrix} v_0 & {}^t \vec{0} & 0 \\ \vec{0} & v_0 \mathbb{I}_3 & c_0 \vec{e}_y \\ 0 & c_0 {}^t \vec{e}_y & v_0 \end{pmatrix}, \quad (1.7)$$

$$\bar{\mathbb{A}}_z^0 = \begin{pmatrix} w_0 & {}^t \vec{0} & 0 \\ \vec{0} & w_0 \mathbb{I}_3 & c_0 \vec{e}_z \\ 0 & c_0 {}^t \vec{e}_z & w_0 \end{pmatrix}.$$

L'intérêt de cette formulation réside évidemment dans la simplicité du système et dans le caractère symétrique des matrices $\bar{\mathbb{A}}_x^0$, $\bar{\mathbb{A}}_y^0$ et $\bar{\mathbb{A}}_z^0$. Malheureusement, cette simplification n'est plus possible lors de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme. Cependant la symétrisation des équations d'Euler permet d'obtenir une forme bien plus remarquable pour nos équations dans le cas d'un écoulement non uniforme.

1.2 Utilisation de la symétrisation des équations d'Euler

L'existence d'une forme symétrique pour les équations d'Euler est un résultat bien connu [44]. En utilisant le système (1.1), et en supposant que la solution $\tilde{W} = {}^t(\rho, \rho \vec{V}, \rho e)$ des équations d'Euler est assez régulière, le vecteur $\tilde{V}$ défini par :

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix} -\gamma \rho e/p + \gamma + 1 - \ln(p/\rho^\gamma) \\ \gamma \rho u/p \\ \gamma \rho v/p \\ \gamma \rho w/p \\ -\gamma \rho/p \end{pmatrix}, \quad (1.8)$$

1.2 Utilisation de la symétrisation des équations d'Euler

est solution des équations d'Euler symétrisées suivantes :

$$\mathbb{A}_0 \partial_t \tilde{V} + \tilde{\mathbb{A}}_x \partial_x \tilde{V} + \tilde{\mathbb{A}}_y \partial_y \tilde{V} + \tilde{\mathbb{A}}_z \partial_z \tilde{V} = \vec{0}, \quad (1.9)$$

ou les matrices $\mathbb{A}_0$, $\tilde{\mathbb{A}}_x$, $\tilde{\mathbb{A}}_y$, et $\tilde{\mathbb{A}}_z$ sont toutes symétriques et de plus $\mathbb{A}_0$ est définie positive. En utilisant $\alpha = \frac{c^2}{\gamma} + \frac{V^2}{2}$, elles s'écrivent sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbb{A}_0 = \frac{\rho}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 & {}^t \vec{V} & \alpha - c^2/\gamma \\ \vec{V} & \frac{c^2}{\gamma} \mathbb{I}_3 + \vec{V} {}^t \vec{V} & \alpha \vec{V} \\ \alpha - c^2/\gamma & \alpha {}^t \vec{V} & \alpha^2 - c^4/(\gamma \tilde{\gamma}) \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_x = u \mathbb{A}_0 + \frac{p}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_x & u \\ \vec{e}_x & \vec{e}_x {}^t \vec{V} + \vec{V} {}^t \vec{e}_x & u \vec{V} + \alpha \vec{e}_x \\ u & u {}^t \vec{V} + \alpha {}^t \vec{e}_x & 2\alpha u \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_y = v \mathbb{A}_0 + \frac{p}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_y & v \\ \vec{e}_y & \vec{e}_y {}^t \vec{V} + \vec{V} {}^t \vec{e}_y & v \vec{V} + \alpha \vec{e}_y \\ v & v {}^t \vec{V} + \alpha {}^t \vec{e}_y & 2\alpha v \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_z = w \mathbb{A}_0 + \frac{p}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_z & w \\ \vec{e}_z & \vec{e}_z {}^t \vec{V} + \vec{V} {}^t \vec{e}_z & w \vec{V} + \alpha \vec{e}_z \\ w & w {}^t \vec{V} + \alpha {}^t \vec{e}_z & 2\alpha w \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.10)$$

Les valeurs propres de $\mathbb{A}_0 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 5}$ sont complexes à déterminer, un moyen simple de prouver son caractère défini positif étant alors d'évaluer les déterminants des matrices :

$$\mathbb{M}_1 = (a_{11}), \quad \mathbb{M}_2 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}, \quad \mathbb{M}_3 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 3}, \quad \mathbb{M}_4 = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq 4}, \quad \mathbb{M}_5 = \mathbb{A}_0,$$

comme ils sont strictements positifs, nous en déduisons le résultat souhaité. Si nous reprenons ce jeu de variables pour la linéarisation autour de l'écoulement W_0 , nous obtenons :

$$\mathbb{A}_0^0 \partial_t \vec{W}_s + \partial_x \left(\tilde{\mathbb{A}}_x^0 \vec{W}_s \right) + \partial_y \left(\tilde{\mathbb{A}}_y^0 \vec{W}_s \right) + \partial_z \left(\tilde{\mathbb{A}}_z^0 \vec{W}_s \right) = \vec{0}, \quad (1.11)$$

avec,

$$\vec{W}_s = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial W} (W_0) \delta W = \mathbb{A}_0^{0-1} \vec{W}, \quad \tilde{\mathbb{A}}_x^0 = \mathbb{A}_x^0 \mathbb{A}_0^0, \quad \tilde{\mathbb{A}}_y^0 = \mathbb{A}_y^0 \mathbb{A}_0^0, \quad \tilde{\mathbb{A}}_z^0 = \mathbb{A}_z^0 \mathbb{A}_0^0,$$

de manière plus explicite :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{W}_s = \frac{\tilde{\gamma}}{p_0} \begin{pmatrix} \left(\frac{c_0^2}{\tilde{\gamma}} - \frac{V_0^2}{2} \right) \delta \rho - \rho_0 \vec{V}_0 \cdot \delta \vec{V} + \left(\frac{\rho_0 V_0^2}{2p_0} - \frac{1}{\tilde{\gamma}} \right) \delta p \\ u_0 \delta \rho + \rho_0 \delta u - \frac{\rho_0 u_0}{p_0} \delta p \\ v_0 \delta \rho + \rho_0 \delta v - \frac{\rho_0 v_0}{p_0} \delta p \\ w_0 \delta \rho + \rho_0 \delta w - \frac{\rho_0 w_0}{p_0} \delta p \\ \frac{\rho_0}{p_0} \delta p - \delta \rho \end{pmatrix} \\ \mathbb{A}_0^0 = \frac{\rho_0}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 1 & {}^t \vec{V}_0 & \alpha_0 - c_0^2/\gamma \\ \vec{V}_0 & \frac{c_0^2}{\gamma} \mathbb{I}_3 + \vec{V}_0 {}^t \vec{V}_0 & \alpha_0 \vec{V}_0 \\ \alpha_0 - c_0^2/\gamma & \alpha_0 {}^t \vec{V}_0 & \alpha_0^2 - c_0^4/(\gamma \tilde{\gamma}) \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_x^0 = u_0 \mathbb{A}_0^0 + \frac{p_0}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_x & u_0 \\ \vec{e}_x & \vec{e}_x {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_x & u_0 \vec{V}_0 + \alpha_0 \vec{e}_x \\ u_0 & u_0 {}^t \vec{V}_0 + \alpha_0 {}^t \vec{e}_x & 2\alpha_0 u_0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_y^0 = v_0 \mathbb{A}_0^0 + \frac{p_0}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_y & v_0 \\ \vec{e}_y & \vec{e}_y {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_y & v_0 \vec{V}_0 + \alpha_0 \vec{e}_y \\ v_0 & v_0 {}^t \vec{V}_0 + \alpha_0 {}^t \vec{e}_y & 2\alpha_0 v_0 \end{pmatrix} \\ \tilde{\mathbb{A}}_z^0 = w_0 \mathbb{A}_0^0 + \frac{p_0}{\tilde{\gamma}} \begin{pmatrix} 0 & {}^t \vec{e}_z & w_0 \\ \vec{e}_z & \vec{e}_z {}^t \vec{V}_0 + \vec{V}_0 {}^t \vec{e}_z & w_0 \vec{V}_0 + \alpha_0 \vec{e}_z \\ w_0 & w_0 {}^t \vec{V}_0 + \alpha_0 {}^t \vec{e}_z & 2\alpha_0 w_0 \end{pmatrix} \end{array} \right. \quad (1.12)$$

Bien que ce système semble plus complexe que celui donné par (1.3), l'intérêt de cette nouvelle formulation réside évidemment dans le caractère symétrique des matrices $\tilde{\mathbb{A}}_x^0$, $\tilde{\mathbb{A}}_y^0$, $\tilde{\mathbb{A}}_z^0$ et le caractère symétrique défini positif de la matrice $\mathbb{A}_0^0$. Nous verrons par la suite l'intérêt de cette formulation, principalement au niveau théorique.

Dans l'introduction nous avons rappelé que les équations d'Euler linéarisées peuvent donner naissance à des instabilités physiques naturelles qu'elles ne permettent pas de maîtriser par leur nature approximative. Le dernier système que nous présenterons correspond à une approximation introduite par Bogey, Bailly et Juvé [22] dans le but de gérer ces phénomènes tout en conservant un modèle réaliste.

1.3 Le modèle de Bogey, Bailly et Juvé

Le modèle de Bogey et Bailly consiste à utiliser, pour un écoulement non uniforme et sans introduire de terme source de nature aérodynamique, le jeu de variables $\vec{W}_b = {}^t (\delta \rho, \rho_0 \delta \vec{V}, \delta p)$. En effectuant le changement de variables nécessaire à partir de l'équation (1.3), nous obtenons :

$$\partial_t \vec{W}_b + \partial_x \left(\hat{\mathbb{A}}_x^0 \vec{W}_b \right) + \partial_y \left(\hat{\mathbb{A}}_y^0 \vec{W}_b \right) + \partial_z \left(\hat{\mathbb{A}}_z^0 \vec{W}_b \right) = \vec{H}, \text{ avec,} \quad (1.13)$$

$$\hat{\mathbb{A}}_x^0 = \begin{pmatrix} u_0 & {}^t\vec{e}_x & 0 \\ \vec{0} & u_0\mathbb{I}_3 & \vec{e}_x \\ 0 & c_0^{2t}\vec{e}_x & u_0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbb{A}}_y^0 = \begin{pmatrix} v_0 & {}^t\vec{e}_y & 0 \\ \vec{0} & v_0\mathbb{I}_3 & \vec{e}_y \\ 0 & c_0^{2t}\vec{e}_y & v_0 \end{pmatrix}, \quad (1.14)$$

$$\hat{\mathbb{A}}_z^0 = \begin{pmatrix} w_0 & {}^t\vec{e}_z & 0 \\ \vec{0} & w_0\mathbb{I}_3 & \vec{e}_z \\ 0 & c_0^{2t}\vec{e}_z & w_0 \end{pmatrix},$$

$$\vec{\mathbf{H}} = - \begin{pmatrix} 0 \\ \left(\rho_0 \delta \vec{V} + \delta \rho \vec{V}_0 \right) \cdot \vec{\nabla} u_0 \\ \left(\rho_0 \delta \vec{V} + \delta \rho \vec{V}_0 \right) \cdot \vec{\nabla} v_0 \\ \left(\rho_0 \delta \vec{V} + \delta \rho \vec{V}_0 \right) \cdot \vec{\nabla} w_0 \\ \tilde{\gamma} \left(\delta p \vec{\nabla} \cdot \vec{V}_0 - \delta \vec{V} \cdot \vec{\nabla} p_0 \right) \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

Les données aérodynamiques et aéroacoustiques d'un écoulement non uniforme interagissent intrinsèquement de manière complexe. Ainsi, lorsque nous travaillons sur les équations d'Euler linéarisées pour un écoulement porteur non uniforme, nous perdons forcément de l'information. Au niveau énergétique, les échanges entre énergie aérodynamique et aéroacoustique qui équilibrent le bilan énergétique total sont pour nous une donnée manquante. Une autre résultante de cette déconnexion entre aérodynamique et aéroacoustique réside dans le fait que certaines solutions des équations d'Euler en écoulement non uniforme peuvent donner naissance à des solutions instables pour les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement non uniforme. Ces instabilités, répertoriées sous le nom d'instabilités de Kelvin-Helmholtz sont bien connues [3], [31], [66].

L'apparition de ces instabilités n'est en soi pas inquiétante puisque justifiée physiquement. Malheureusement, si dans les équations d'Euler originales des termes non linéaires jouent le rôle de limiteur pour ces instabilités, il n'en est pas de même pour nos équations qui, après avoir donné naissance à ces instabilités, ne permettent pas de les contrôler. La solution la plus simple pour contrôler ces phénomènes est évidemment de diffuser de l'énergie. Ainsi dans certains cas l'utilisation de schémas diffusifs permet de résoudre ce problème [28]. Malheureusement, cette technique peut être coûteuse en terme de précision et impose de la diffusion numérique même lorsque cela n'est pas nécessaire (voir les cas tests sans instabilités).

Une autre approche consiste à rajouter un terme source aux équations assurant "assez" de diffusion pour stabiliser notre schéma, cette méthode peut être vue également comme une modification des équations de départ. Ainsi dans le modèle de Bogey, Bailly et Juvé, les auteurs résolvent l'équation (1.12) en imposant $\vec{H} = \vec{0}$ ce qui revient à résoudre les équations d'Euler linéarisées avec le terme source $-\vec{H}$. Dans l'article [22], Bogey, Bailly et Juvé justifient de manière théorique et numérique leur approximation. Nous allons présenter l'impact de ce modèle sur la stabilité et sur l'équation de Lilley en 2D. En fait dans la dernière partie de ce chapitre nous proposerons une autre approche et nous comparerons les résultats obtenus. Pour alléger l'écriture, nous nommerons "modèle simplifié" le modèle de Bogey, Bailly et Juvé.

1.3.1 Etude du modèle simplifié pour un écoulement moyen unidirectionnel cisailé bidimensionnel

Nous supposons que l'écoulement moyen (solution des équations d'Euler) est donné par :

$$\rho_0 = \rho_0(y), \quad u_0 = u_0(y), \quad v_0 = 0, \quad p_0 \text{ constant}, \quad (1.16)$$

d'où,

$$c_0 = c_0(y) = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\rho_0(y)}}.$$

Le système exact des équations d'Euler linéarisées s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (\rho_0 \delta v) = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = -\rho_0 \frac{du_0}{dy} \delta v \\ \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta p}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \gamma p_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \gamma p_0 \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0 \end{array} \right. \quad (1.17)$$

Dans ce cadre, seule la deuxième équation du système est modifiée dans le modèle simplifié et s'écrit : $\rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = 0$. Nous noterons $\tilde{h}$ le terme valant $-\rho_0 \frac{du_0}{dy} \delta v$ pour le modèle exact et 0 pour le modèle simplifié.

1.3.2 Equations de Phillips et de Lilley

Considérons l'hypothèse supplémentaire d'isentropie des petites perturbations : $\delta p = c_0^2 \delta \rho$. En combinant la première et la dernière ligne du système précédent (1.17), nous obtenons $c_0^2 \delta v \partial(\rho_0)/\partial y = 0$. Ainsi, en supposant que δv est non nul pour l'intérêt de l'étude, nous obtenons que ρ_0 et donc c_0 sont constants. De plus, la première et la dernière équation du système deviennent donc redondantes. Par convention, nous noterons D/Dt la dérivée convective suivante : $D/Dt = \partial/\partial t + u_0 \partial/\partial x$. Le système (1.17) nous fournit les deux équations suivantes :

$$\rho_0 \operatorname{div} \left(\frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} \right) = - \left(\nabla^2 \delta p + \rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + \rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} + \rho_0 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x},$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial \delta p}{\partial t} + u_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} \right) = -\rho_0 c_0^2 \left(\operatorname{div} \left(\frac{\partial \delta \vec{V}}{\partial t} \right) + u_0 \frac{\partial^2 \delta u}{\partial x^2} + u_0 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x \partial y} \right).$$

Ainsi,

$$\frac{D^2 \delta p}{Dt^2} = c_0^2 \left(\nabla^2 \delta p + \rho_0 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} - \frac{\partial \tilde{h}}{\partial x} \right). \quad (1.18)$$

Pour le modèle exact, nous obtenons une variante de l'équation de Phillips [65] :

$$\frac{D^2 \delta p}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta p - 2\gamma p_0 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0, \quad (1.19)$$

il s'agit bien d'une variante de l'équation de Phillips car nous n'utilisons pas de termes sources aérodynamiques et de plus, historiquement, la variable utilisée par Phillips notée π correspond à $\ln(p/p_0)$. En fait en utilisant $\delta\pi = \delta p/p_0$, nous retrouvons exactement l'équation de Phillips sans terme source :

$$\frac{D^2 \delta\pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta\pi = 2\gamma \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x}. \quad (1.20)$$

Cette équation peut être interprétée comme une équation d'onde avec terme source de nature quadripolaire. Nous ne rentrerons pas dans les détails des avantages de cette formulation (expliqués dans [20]) comparativement à l'analogie de Lighthill [58], car il faudrait introduire un modèle de terme source aérodynamique, ce qui n'est pas le but de notre approche. Cependant, l'équation (1.20) suffit pour comprendre l'inconvénient de cette approche. En effet, le terme source est linéaire en fluctuations (puisque'il est en $\frac{du_0}{dy}$), donc l'opérateur de propagation (terme de gauche) ne contient pas toutes les interactions de l'écoulement porteur et du champ acoustique. Pour résoudre ce problème il suffit de réappliquer la dérivée convective à l'équation (1.19) en utilisant la troisième équation du système (1.17) :

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{D^2 \delta p}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta p \right) &= -2c_0^2 \frac{du_0}{dy} \left(\rho_0 u_0 \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x \partial y} \right) + 2\gamma p_0 u_0 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 \delta v}{\partial x^2}, \\ \frac{D}{Dt} \left(\frac{D^2 \delta p}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta p \right) &+ 2c_0^2 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 \delta p}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned}$$

Ainsi en revenant à la variable $\delta\pi$ nous retrouvons l'équation de Lilley [59] sans terme source aérodynamique :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{D^2 \delta\pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta\pi \right) + 2c_0^2 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 \delta\pi}{\partial x \partial y} = 0, \quad (1.21)$$

l'intérêt de cette formulation plus complexe réside dans le fait que tous les termes linéaires font partie de l'opérateur de propagation. Regardons à présent l'impact du modèle simplifié sur les équations de Phillips et de Lilley, en utilisant $\tilde{h} = 0$, nous obtenons :

$$\frac{D^2 \delta\pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta\pi = \gamma \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x}, \quad (1.22)$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{D^2 \delta\pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta\pi \right) + c_0^2 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 \delta\pi}{\partial x \partial y} = 0. \quad (1.23)$$

Finalement, l'équation de Lilley exacte et celle obtenue pour le modèle simplifié diffèrent d'un facteur deux sur le terme en $\frac{du_0}{dy}$. Il est difficile d'estimer de manière générale l'impact de cette modification, Cependant, pour des hautes fréquences, nous pourrions démontrer que ce terme en $\frac{du_0}{dy}$ devient négligeable devant les termes de dérivées en temps d'ordre supérieur [24], [41]. En basses fréquences, la question de la légitimité d'une telle approche reste un problème ouvert au niveau théorique. Le but du modèle simplifié étant d'étouffer les instabilités de Kelvin-Helmholtz, nous allons à présent étudier son impact sur l'équation de stabilité de Rayleigh [70].

1.3.3 Modification de l'équation de stabilité de Rayleigh

Dans le but d'étudier la stabilité du système (1.17) et du modèle simplifié, nous allons chercher des solutions de ces deux systèmes (cette fois sans hypothèse d'isentropie) sous la forme :

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = \Re \left(\begin{pmatrix} 0 \\ \hat{u}_1(y) \\ \hat{v}_1(y) \\ \hat{p}_1(y) \end{pmatrix} e^{i(kx - \omega t)} \right), \quad (1.24)$$

avec k est un réel fixé, $\hat{u}_1$, $\hat{v}_1$ et $\hat{p}_1$ fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ et,

$$\omega = \omega_R + i\omega_I \quad \text{ou} \quad (\omega_R, \omega_I) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*.$$

L'existence d'une telle solution non nulle entraînerait l'instabilité du système, en effet la stricte positivité de ω_I rendrait cette solution exponentielle en temps. En utilisant la forme de cette solution, le système exact (1.17) se simplifie sous la forme :

$$\begin{cases} ik\rho_0\hat{u}_1 + \frac{d}{dy}(\rho_0\hat{v}_1) = 0 \\ ik\left(\rho_0\hat{u}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) + \hat{p}_1\right) = -\rho_0\hat{v}_1\frac{du_0}{dy} \\ ik\rho_0\hat{v}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) + \frac{d\hat{p}_1}{dy} = 0 \\ ik\hat{p}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) + ik\gamma p_0\hat{u}_1 + \gamma p_0\frac{d\hat{v}_1}{dy} = 0 \end{cases} \quad (1.25)$$

Posons $\hat{V}_1 = \rho_0\hat{v}_1$, en utilisant la deuxième et la troisième équation du système (1.25), nous avons :

$$ik\hat{V}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) = \frac{d}{dy}\left(\rho_0\hat{u}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) - \frac{i}{k}\hat{V}_1\frac{du_0}{dy}\right), \quad (1.26)$$

tandis que la première équation peut se récrire sous la forme :

$$\frac{d\hat{V}_1}{dy}\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) = -ik\rho_0\hat{u}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right). \quad (1.27)$$

En utilisant (1.26) et (1.27), on obtient :

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{d\hat{V}_1}{dy}\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right)\right) = k^2\hat{V}_1\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) + \frac{d\hat{V}_1}{dy}\frac{du_0}{dy} + \hat{V}_1\frac{d^2u_0}{dy^2},$$

en simplifiant cette équation nous obtenons l'équation de stabilité de Rayleigh suivante :

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right)\left(\frac{d^2\hat{V}_1}{dy^2} - k^2\hat{V}_1\right) - \frac{d^2u_0}{dy^2}\hat{V}_1 = 0. \quad (1.28)$$

Si nous considérons à présent le modèle simplifié ($\tilde{h} = 0$) pour la recherche d'un même type de solution, cela a pour effet de faire disparaître le terme de droite de la deuxième équation du système (1.25) et par les mêmes calculs nous obtenons l'équation de stabilité de Rayleigh du modèle simplifié :

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \hat{V}_1}{dy^2} - k^2 \hat{V}_1\right) + \frac{du_0}{dy} \frac{d\hat{V}_1}{dy} = 0. \quad (1.29)$$

L'utilisation du modèle simplifié a pour effet de faire disparaître le terme en dérivée seconde de u_0 , nous allons étudier sur un cas encore plus restrictif l'impact que peut avoir cette dérivée seconde.

1.3.3.1 Critères nécessaires d'instabilités

En plus des hypothèses faites précédemment sur la nature des solutions recherchées, nous supposons que le domaine d'étude des équations est une tuyère horizontale de longueur infinie et de largeur L ($\tilde{y} \in [0, L]$). Les solutions recherchées devront en plus vérifier :

$$\hat{V}_1(0) = \hat{V}_1(L) = 0, \quad (1.30)$$

ce qui est équivalent à $\hat{v}_1(0) = \hat{v}_1(L) = 0$. Nous obtenons ainsi le système différentiel complexe suivant sur $[0, L]$:

$$\begin{cases} \hat{V}_1 \in \mathcal{C}^2([0, L], \mathbb{C}) \\ \left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \hat{V}_1}{dy^2} - k^2 \hat{V}_1\right) - \frac{d^2 u_0}{dy^2} \hat{V}_1 = 0 \\ \hat{V}_1(0) = \hat{V}_1(L) = 0. \end{cases} \quad (1.31)$$

Nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 1.3.1

- *i) Si $u_0(y)$ est une fonction affine alors l'unique solution de (1.31) avec $\omega_I > 0$ est la fonction nulle.*
- *ii) **Théorème du point d'inflexion de Rayleigh [70]** : Si le système (1.31) admet une solution non nulle avec $\omega_I > 0$ (problème instable) alors u_0 possède un point d'inflexion.*
- *iii) **Théorème de Fjørtoft [37]** : Si le système (1.31) admet une solution non nulle avec $\omega_I > 0$ (problème instable) alors la fonction $\frac{d^2 u_0}{dy^2} (u_0 - u_0(y_s))$ est strictement négative sur un intervalle $I \subset [0, L]$ de mesure non nulle, avec y_s point d'inflexion de u_0 .*

Démonstration 1.3.1

i) Sous l'hypothèse du caractère affine de $u_0(y)$, l'équation différentielle devient :

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \hat{V}_1}{dy^2} - k^2 \hat{V}_1\right) = 0.$$

Sous l'hypothèse $\omega_I > 0$, on a $u_0 - \frac{\omega}{k} \neq 0 \forall y \in [0, L]$. Finalement, l'équation s'écrit :

$$\frac{d^2 \hat{V}_1}{dy^2} - k^2 \hat{V}_1 = 0,$$

Les équations d'Euler linéarisées

donc la forme des solutions ($Vect(e^{ky}, e^{-ky})$) associée aux conditions aux limites donnent comme unique solution du système (1.31) la fonction nulle. Grâce au système (1.25), nous obtenons alors ${}^t(\delta\rho, \delta u, \delta v, \delta p) = {}^t\vec{0}$.

ii) Supposons qu'une solution non nulle du problème (1.31) existe (le problème étant alors instable puisque $\omega_I > 0$), la fonction $u_0 - \frac{\omega}{k}$ ne s'annulant jamais sur $[0, L]$, nous pouvons récrire l'équation différentielle sous la forme :

$$\frac{d^2 \widehat{V}_1}{dy^2} - k^2 \widehat{V}_1 - \frac{d^2 u_0 / dy^2}{u_0 - \omega/k} \widehat{V}_1 = 0,$$

en multipliant cette équation par le conjugué de $\widehat{V}_1$, que nous noterons $\widehat{V}_1^\star$, et en intégrant sur $[0, L]$ nous obtenons :

$$\int_0^L \left(\frac{d^2 \widehat{V}_1}{dy^2} \widehat{V}_1^\star - k^2 |\widehat{V}_1|^2 - \frac{d^2 u_0 / dy^2}{u_0 - \omega/k} |\widehat{V}_1|^2 \right) dy = 0,$$

une intégration par parties sur le premier terme et les conditions aux limites donnent :

$$\int_0^L \left(\left| \frac{d\widehat{V}_1}{dy} \right|^2 + k^2 |\widehat{V}_1|^2 + \frac{d^2 u_0 / dy^2}{u_0 - \omega/k} |\widehat{V}_1|^2 \right) dy = 0. \quad (1.32)$$

Prenons la partie imaginaire de cette équation :

$$\int_0^L \frac{d^2 u_0}{dy^2} \frac{\Im(u_0 - \omega^\star/k)}{|u_0 - \omega/k|^2} |\widehat{V}_1|^2 dy = 0 \implies \omega_I \int_0^L \frac{d^2 u_0}{dy^2} \left| \frac{\widehat{V}_1}{u_0 - \omega/k} \right|^2 dy = 0, \quad (1.33)$$

d'après les hypothèses il est donc nécessaire que la dérivée seconde de u_0 change de signe, d'où le théorème du point d'inflexion de Rayleigh.

iii) Supposons à nouveau qu'une solution non nulle du problème (1.31) existe, d'après ii) u_0 admet au moins un point d'inflexion. Soit y_s un de ses points d'inflexion, en prenant cette fois la partie réelle de l'équation (1.32), nous avons :

$$\int_0^L \left(\left| \frac{d\widehat{V}_1}{dy} \right|^2 + k^2 |\widehat{V}_1|^2 + \frac{d^2 u_0}{dy^2} (u_0 - \omega_R/k) \left| \frac{\widehat{V}_1}{u_0 - \omega/k} \right|^2 \right) dy = 0, \quad (1.34)$$

de plus d'après (1.33),

$$\int_0^L \frac{d^2 u_0}{dy^2} \left| \frac{\widehat{V}_1}{u_0 - \omega/k} \right|^2 dy = 0 \longrightarrow \int_0^L \frac{d^2 u_0}{dy^2} (\omega_R/k - u_0(y_s)) \left| \frac{\widehat{V}_1}{u_0 - \omega/k} \right|^2 dy = 0. \quad (1.35)$$

En ajoutant (1.34) et (1.35), nous obtenons :

$$\int_0^L \left(\left| \frac{d\widehat{V}_1}{dy} \right|^2 + k^2 |\widehat{V}_1|^2 + \frac{d^2 u_0}{dy^2} (u_0 - u_0(y_s)) \left| \frac{\widehat{V}_1}{u_0 - \omega/k} \right|^2 \right) dy = 0,$$

d'où le théorème de Fjørtoft.



Il est important de noter que nous avons exhibé uniquement des conditions nécessaires d'instabilité et non des conditions suffisantes. Finalement, il est quasiment impossible de prévoir avec certitude la génération d'instabilités mais nous possédons des critères propices à l'apparition de tels phénomènes. Comme nous venons de le voir avec l'étude de l'équation de Rayleigh, le terme en dérivée seconde de u_0 joue un rôle central dans l'apparition des instabilités, l'intérêt du modèle simplifié est de faire disparaître ce terme.

Cependant, le bien fondé de ce modèle reste un problème ouvert, principalement en basses fréquences et d'autant plus qu'il ne fournit pas une condition suffisante de stabilité des équations en continu. Nous avons utilisé ce traitement dans bon nombre de configurations instables, dont nous exposerons les résultats dans la suite. Parallèlement, nous avons cherché à construire un autre modèle reposant sur la même approche que pour le modèle simplifié mais qui permettrait d'obtenir un problème stable pour tout type d'écoulement. Notre approche est fondée sur des considérations énergétiques. Ainsi nous allons tout d'abord présenter différents résultats énergétiques.

1.4 Propriétés énergétiques des équations

D'un point de vue purement physique, il est toujours rassurant lors de l'approximation d'un problème pour lequel il y a conservation d'une énergie de conserver cette particularité pour le modèle approché. Malheureusement, la conservation de l'énergie pour les équations d'Euler est un critère difficilement interprétable en aéroacoustique. En effet, lors de l'utilisation des équations d'Euler linéarisées, nous séparons la détermination des champs aérodynamiques et celle des ondes acoustiques qui pourtant interagissent. Si nous nous intéressons au système (1.6) pour lequel l'écoulement porteur est supposé uniforme, nous avons alors conservation d'une énergie aéroacoustique. En effet l'énergie aéroacoustique $\mathcal{E}_u$ définie par $\mathcal{E}_u = \frac{1}{2} \|\vec{\mathbf{W}}_u\|^2$ vérifie l'équation $\partial_t \mathcal{E}_u + \text{div} \vec{\mathcal{F}}_u = 0$, le flux d'énergie $\vec{\mathcal{F}}_u$ étant donné par :

$$\vec{\mathcal{F}}_u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} {}^t \vec{\mathbf{W}}_u \tilde{\mathbf{A}}_x^0 \vec{\mathbf{W}}_u \\ {}^t \vec{\mathbf{W}}_u \tilde{\mathbf{A}}_y^0 \vec{\mathbf{W}}_u \\ {}^t \vec{\mathbf{W}}_u \tilde{\mathbf{A}}_z^0 \vec{\mathbf{W}}_u \end{pmatrix}.$$

Ainsi une énergie aéroacoustique est bien conservée. Le problème est plus complexe lorsque l'écoulement porteur est non uniforme, car dans ce cas il y a échange d'énergie entre le champ aérodynamique et les grandeurs acoustiques. De ce fait, il n'y a plus conservation d'une énergie aéroacoustique, nous retrouvons ce résultat en utilisant le système (1.11). Considérons l'énergie acoustique définie par $\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \tilde{\mathbf{A}}_0^0 \vec{\mathbf{W}}_s$, elle vérifie l'équation :

$$\partial_t \mathcal{E} + \text{div} \vec{\mathcal{F}} = \mathcal{S}, \quad (1.36)$$

où le flux énergétique $\vec{\mathcal{F}}$ et le terme source $\mathcal{S}$ sont donnés par :

$$\vec{\mathcal{F}} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \tilde{\mathbf{A}}_x^0 \vec{\mathbf{W}}_s \\ {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \tilde{\mathbf{A}}_y^0 \vec{\mathbf{W}}_s \\ {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \tilde{\mathbf{A}}_z^0 \vec{\mathbf{W}}_s \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = -\frac{1}{2} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \left[\partial_x (\tilde{\mathbf{A}}_x^0) + \partial_y (\tilde{\mathbf{A}}_y^0) + \partial_z (\tilde{\mathbf{A}}_z^0) \right] \vec{\mathbf{W}}_s. \quad (1.37)$$

Les instabilités de Kelvin Helmholtz que nous avons présentées se caractérisent par des modes instables exponentiels en temps. Ainsi, nous savons que pour certains types d'écoulements non uniformes, il est normal d'observer une croissance exponentielle en temps de structures cohérentes. Il est évidemment intéressant au niveau énergétique d'exhiber en continu une majoration en accord avec ce résultat physique, c'est le but du lemme 1.4.1. De plus nous aurons à cœur d'obtenir des résultats énergétiques similaires au niveau discret lors de l'utilisation de notre schéma.

Lemme 1.4.1 *Considérons $\Omega \times [0, T]$ le domaine en espace-temps où nous cherchons à résoudre le système (1.3) en supposant que toutes les grandeurs mathématiques soient à support compact dans Ω . Soit,*

$$\forall t \in [0, T], \Phi(t) = \int_{\Omega} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{W}} \mathbb{A}_0^{0-1} \vec{\mathbf{W}} = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \mathbb{A}_0^0 \vec{\mathbf{W}}_s, \quad (1.38)$$

alors $\Phi(t)$ vérifie l'inégalité suivante :

$$\forall t \in [0, T], \Phi(t) \leq \Phi(0) e^{\alpha t}, \text{ avec,} \quad (1.39)$$

$$\alpha = \sup_{\Omega} (\rho(\mathbb{K})), \text{ ou } \mathbb{K} = \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \left(\partial_x(\tilde{\mathbb{A}}_x^0) + \partial_y(\tilde{\mathbb{A}}_y^0) + \partial_z(\tilde{\mathbb{A}}_z^0) \right) \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1}. \quad (1.40)$$

Remarque 1.4.1

- La matrice $\mathbb{A}_0^0$ est une matrice symétrique définie positive, ainsi elle est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes positives. Il existe $\mathbb{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{D}$ diagonale à valeurs positives telles que $\mathbb{A}_0^0 = {}^t \mathbb{P} \mathbb{D} \mathbb{P}$, nous notons $\sqrt{\mathbb{D}}$ la matrice diagonale dont les termes sont les racines de ceux de $\mathbb{D}$ et $\sqrt{\mathbb{A}_0^0} = {}^t \mathbb{P} \sqrt{\mathbb{D}} \mathbb{P}$.
- Les matrices $\mathbb{A}_0^0, \tilde{\mathbb{A}}_x^0, \tilde{\mathbb{A}}_y^0$ et $\tilde{\mathbb{A}}_z^0$ étant symétriques, la matrice $\mathbb{K}$ est symétrique.

Démonstration 1.4.1 Comme la matrice $\mathbb{A}_0^0$ est symétrique,

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)) = \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{W}} \mathbb{A}_0^{0-1} \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t} = - \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{W}} \left(\partial_x \left(\mathbb{A}_x^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_y \left(\mathbb{A}_y^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_z \left(\mathbb{A}_z^0 \vec{\mathbf{W}} \right) \right).$$

En notant $\vec{\mathbf{Z}} = \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{W}}$ et en utilisant $\forall s \in \{x, y, z\}, \mathbb{A}_s^0 = \tilde{\mathbb{A}}_s^0 \mathbb{A}_0^{0-1}$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\Phi(t)) &= - \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \left(\partial_x \left(\tilde{\mathbb{A}}_x^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \partial_y \left(\tilde{\mathbb{A}}_y^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \partial_z \left(\tilde{\mathbb{A}}_z^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) \right) \\ &= - \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \mathbb{K} \vec{\mathbf{Z}} - \underbrace{\int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \left(\tilde{\mathbb{A}}_x^0 \partial_x \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \tilde{\mathbb{A}}_y^0 \partial_y \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \tilde{\mathbb{A}}_z^0 \partial_z \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) \right)}_{(1)}. \end{aligned}$$

Or, grâce à la symétrie des matrices $\tilde{\mathbb{A}}_s^0 \forall s \in \{x, y, z\}$,

$$(1) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \mathbb{K} \vec{\mathbf{Z}} - \frac{1}{2} (2), \text{ avec,}$$

$$(2) = \int_{\Omega} \partial_x \left({}^t \vec{\mathbf{Z}} \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_x^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \partial_y \left({}^t \vec{\mathbf{Z}} \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_y^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right) + \partial_z \left({}^t \vec{\mathbf{Z}} \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_z^0 \sqrt{\mathbb{A}_0^0}^{-1} \vec{\mathbf{Z}} \right).$$

1.5 Une autre approche pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz

Le caractère compact des différentes grandeurs sur Ω donne :

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \mathbb{K} \vec{\mathbf{Z}}.$$

Grâce au caractère symétrique de $\mathbb{K}$,

$$\frac{d}{dt}(\Phi(t)) \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho(\mathbb{K}) {}^t \vec{\mathbf{Z}} \vec{\mathbf{Z}} \leq \sup_{\Omega}(\rho(\mathbb{K})) \int_{\Omega} {}^t \vec{\mathbf{Z}} \vec{\mathbf{Z}} = \alpha \Phi(t).$$

Ainsi, en intégrant,

$$\forall t \in [0, T], \Phi(t) \leq \Phi(0) + \int_0^t \alpha \Phi(s) ds.$$

Une application triviale du lemme de Gronwall fournit alors le résultat du lemme :

$$\forall t \in [0, T], \Phi(t) \leq \Phi(0) e^{\alpha t}.$$

■

1.5 Une autre approche pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz

Repartons des résultats énergétiques de la partie précédente, pour $\mathcal{E} = \frac{1}{2} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \mathbb{A}_0^0 \vec{\mathbf{W}}_s$ nous avons $\partial_t \mathcal{E} + \text{div} \vec{\mathcal{F}} = \mathcal{S}$, avec $\mathcal{S} = -\frac{1}{2} {}^t \vec{\mathbf{W}}_s \left[\partial_x(\tilde{\mathbb{A}}_x^0) + \partial_y(\tilde{\mathbb{A}}_y^0) + \partial_z(\tilde{\mathbb{A}}_z^0) \right] \vec{\mathbf{W}}_s$. Un traitement simple permettant d'obtenir la conservation de $C\mathcal{E}$ avec C une constante est donc de rajouter au terme de droite de l'équation (1.11) le terme source suivant :

$$\vec{\mathbf{H}} = \frac{C}{2} \left[\partial_x(\tilde{\mathbb{A}}_x^0) + \partial_y(\tilde{\mathbb{A}}_y^0) + \partial_z(\tilde{\mathbb{A}}_z^0) \right] \vec{\mathbf{W}}_s. \quad (1.41)$$

Comme pour le modèle simplifié, nous modifions les équations et il est important d'étudier l'impact de cette modification. En utilisant les variables conservatives ce nouveau modèle s'écrit :

$$\partial_t \vec{\mathbf{W}} + \partial_x \left(\mathbb{A}_x^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_y \left(\mathbb{A}_y^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_z \left(\mathbb{A}_z^0 \vec{\mathbf{W}} \right) = \frac{C}{2} \left[\partial_x(\tilde{\mathbb{A}}_x^0) + \partial_y(\tilde{\mathbb{A}}_y^0) + \partial_z(\tilde{\mathbb{A}}_z^0) \right] \mathbb{A}_0^{0^{-1}} \vec{\mathbf{W}}, \quad (1.42)$$

et en utilisant les variables du modèle simplifié :

$$\begin{aligned} \partial_t \vec{\mathbf{W}}_b + \partial_x \left(\hat{\mathbb{A}}_x^0 \vec{\mathbf{W}}_b \right) + \partial_y \left(\hat{\mathbb{A}}_y^0 \vec{\mathbf{W}}_b \right) + \partial_z \left(\hat{\mathbb{A}}_z^0 \vec{\mathbf{W}}_b \right) = \\ \vec{\mathbf{H}} + \frac{C}{2} \mathbb{M} \left[\partial_x(\tilde{\mathbb{A}}_x^0) + \partial_y(\tilde{\mathbb{A}}_y^0) + \partial_z(\tilde{\mathbb{A}}_z^0) \right] \mathbb{A}_0^{0^{-1}} \mathbb{M}^{-1} \vec{\mathbf{W}}_b, \end{aligned} \quad (1.43)$$

avec,

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} 1 & {}^t \vec{0} & 0 \\ -\vec{V}_0 & \mathbb{I}_3 & \vec{0} \\ \frac{1}{2} \tilde{\gamma} V_0^2 & -\tilde{\gamma} {}^t \vec{V}_0 & \tilde{\gamma} \end{pmatrix}.$$

Les équations d'Euler linéarisées

Le terme source de l'équation (1.43) étant assez complexe, nous nous proposons de comparer ce deuxième modèle avec le premier dans le cas d'un écoulement défini par $u_0 = u_0(y)$, $v_0 = 0$ et ρ_0, p_0 constants (donc c_0 constant). Le système (1.43) s'écrit alors :

$$\begin{cases} \frac{\partial \delta \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \delta \rho}{\partial x} + \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial y} = 0 \\ \rho_0 \frac{\partial \delta u}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + \frac{\partial \delta p}{\partial x} = \left(\frac{C}{2} - 1 \right) \rho_0 \frac{du_0}{dy} \delta v \\ \rho_0 \frac{\partial \delta v}{\partial t} + \rho_0 u_0 \frac{\partial \delta v}{\partial x} + \frac{\partial \delta p}{\partial y} = \frac{C}{2} \rho_0 \frac{du_0}{dy} \delta u \\ \frac{\partial \delta p}{\partial t} + \gamma p_0 \frac{\partial \delta u}{\partial x} + u_0 \frac{\partial \delta p}{\partial x} + \gamma p_0 \frac{\partial \delta v}{\partial y} = \frac{C}{2} \rho_0 u_0 \frac{du_0}{dy} \delta v \end{cases} \quad (1.44)$$

tandis que le terme source était nul pour le modèle simplifié. Du coup, les équations de Phillips et de Lilley modifiées que nous obtenons sont bien plus complexes :

$$\begin{aligned} \frac{D^2 \delta \pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta \pi + \frac{C}{2} u_0 \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta \pi}{\partial y} - \gamma \frac{du_0}{dy} \frac{\partial \delta v}{\partial x} \left(2 - \frac{C}{2} \right) = \\ \frac{C}{2} \left[\frac{du_0}{dy} \left(\frac{C}{2} \frac{u_0 \rho_0}{p_0} \frac{du_0}{dy} \delta u - \gamma \frac{\partial \delta u}{\partial y} \right) - \gamma \frac{d^2 u_0}{dy^2} \delta v \right]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} \left(\frac{D^2 \delta \pi}{Dt^2} - c_0^2 \nabla^2 \delta \pi \right) + c_0^2 (2 - C) \frac{du_0}{dy} \frac{\partial^2 \delta \pi}{\partial x \partial y} + \frac{C^2}{4} \left(u_0 \left(\frac{du_0}{dy} \right)^2 \frac{\partial \delta \pi}{\partial x} - c_0^2 \frac{d^2 u_0}{dy^2} \frac{\partial \delta \pi}{\partial y} \right) = \\ \frac{\gamma C}{2} \frac{du_0}{dy} \left[- \left(\frac{C}{2} (M_0^2 + 1) - 1 \right) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{du_0}{dy} \delta v \right) + \left(\frac{C}{2} - 2 \right) \frac{du_0}{dy} \left(\frac{C}{2} \frac{du_0}{dy} \frac{u_0}{c_0^2} \delta v - \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right) \right. \\ \left. + u_0 \frac{\partial}{\partial y} \left(\text{div} (\delta \vec{V}) \right) - \frac{C^2}{4} \frac{d^2 u_0}{dy^2} \delta u \right]. \end{aligned}$$

Nous pouvons remarquer que nous retrouvons pour $C = 0$ les équations exactes de Phillips et de Lilley. Malheureusement il n'existe pas de simplification de ces expressions pour un $C > 0$. Evidemment, par rapport à ces expressions il est impossible d'estimer qualitativement l'impact du terme source utilisé sur les solutions obtenues.

Ce nouveau modèle est construit par rapport à la conservation d'une énergie, ce qui assure un caractère borné aux différentes variables physiques et donc permet d'obtenir la stabilité des équations de manière systématique quel que soit l'écoulement porteur autour duquel nous avons linéarisé. Malgré cela, il est quand même intéressant de constater les modifications apportées à l'équation de stabilité de Rayleigh. En reprenant les notations et les hypothèses de la partie 1.3.3 avec notre modèle, l'équation (1.26) se réécrit :

$$ik \widehat{V}_1 \left(u_0 - \frac{\omega}{k} \right) = \frac{d}{dy} \left(\rho_0 \widehat{u}_1 \left(u_0 - \frac{\omega}{k} \right) + \left(\frac{C}{2} - 1 \right) \frac{i}{k} \widehat{V}_1 \frac{du_0}{dy} \right) + \frac{C}{2} \rho_0 \frac{du_0}{dy} \widehat{u}_1, \quad (1.45)$$

1.5 Une autre approche pour les instabilités de type Kelvin-Helmholtz

tandis que la première équation du système (1.25) n'est pas modifiée, en combinant cette équation avec (1.45), nous obtenons :

$$\left(u_0 - \frac{\omega}{k}\right) \left(\frac{d^2 \hat{V}_1}{dy^2} - k^2 \hat{V}_1\right) + \left(\frac{C}{2} - 1\right) \hat{V}_1 \frac{d^2 u_0}{dy^2} + C \frac{du_0}{dy} \frac{d\hat{V}_1}{dy} = 0. \quad (1.46)$$

Pour $C = 0$ nous retrouvons logiquement l'équation exacte de stabilité de Rayleigh (1.28), nous pouvons également remarquer que le choix $C = 2$ permet d'obtenir une équation proche de celle obtenue pour le modèle simplifiée (1.29) (à un facteur près sur le terme en $\frac{du_0}{dy}$).

Conclusion

Nous venons de présenter différentes formes des équations de l'aéroacoustique. Le but de cette présentation succincte réside dans le fait que tout au long du mémoire nous utiliserons les différentes formes présentées. Ainsi par exemple, lors de la linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement uniforme, nous utiliserons le système (1.6) pour sa simplicité et ses caractéristiques tandis que dans le cadre de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme, nous utiliserons le système le plus traditionnel (1.3). Le système (1.11), plus riche mais plus complexe que le système (1.3), nous sera indispensable au niveau des résultats énergétiques que nous développerons dans les chapitres trois et quatre.

Enfin comme nous l'avons vu, les équations d'Euler linéarisées en temporel peuvent donner naissance à des instabilités naturelles qu'elles ne permettent pas de contrôler. Nous avons présenté deux approches possibles en continu pour essayer de répondre à ce problème. Une première approche proposée par Bogey, Bailly et Juvé consiste à résoudre le système (1.13) en imposant $\vec{H} = \vec{0}$, dans la suite du mémoire nous nommerons ce modèle "modèle simplifié". Cette démarche a l'intérêt de peu modifier l'équation de Lilley du modèle originel tout en modifiant à notre avantage l'équation de stabilité de Rayleigh. Il apparaît que le seul point négatif de cette approche réside dans le fait qu'elle ne peut assurer de manière catégorique la stabilité du problème. La deuxième approche que nous avons illustrée a été construite à partir des propriétés du système (1.11). Nous avons élaboré un terme source permettant de conserver une énergie et donc d'assurer la stabilité des équations quel que soit l'écoulement porteur solution des équations d'Euler. Malheureusement, notre modèle, contrairement au modèle simplifié, complique de manière inextricable les équations de Phillips ou de Lilley par rapport à celles du modèle originel. Il est donc quasiment impossible d'estimer l'impact de ce modèle sur la forme des solutions. Dans la quatrième partie du mémoire, nous étudierons de manière numérique l'impact de ces deux modèles sur des cas tests stables et instables. Dans la partie suivante, nous allons présenter la méthode numérique ainsi que les conditions aux limites que nous avons retenus pour la résolution des différents systèmes et modèles que nous venons d'exposer.

Chapitre 2

Méthodes de type Galerkin discontinu pour l'aéroacoustique

Sommaire

Introduction	31
2.1 Le principe de la méthode	32
2.1.1 Discrétisation spatiale	33
2.1.2 Discrétisation temporelle	34
2.1.3 Différentes formulations	35
2.2 Méthode de type volumes finis	37
2.3 Méthode d'approximation $\mathbb{P}_1$	38
2.4 Les conditions aux limites	41
2.4.1 Introduction	41
2.4.2 Conditions aux limites réfléchissantes	43
2.4.3 Conditions aux limites absorbantes	45
2.4.4 Condition PML	46
Conclusion	50

Introduction

L'utilisation de méthodes de type Galerkin discontinu est aujourd'hui répandue dans la plupart des problèmes de modélisation de systèmes différentiels physiques [25], [33], [26]. Cependant, il est vrai qu'en aéroacoustique l'utilisation de schémas autres que des schémas de type différences finies est très récente. Ainsi il existe très peu de références sur la construction de schémas de type Galerkin discontinu pour l'aéroacoustique. Nous pouvons citer [28], [61] et [5]. Dans [28], les auteurs utilisent pour leur schéma en espace une méthode de type caractéristique aux interfaces pour le calcul des flux ce qui facilite énormément la construction des conditions aux limites. Le schéma est malheureusement diffusif et il ne possède pas de condition théorique de stabilité. Le caractère diffusif peut permettre sans certitude de gérer les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Dans [5], la construction du schéma en espace de type

Galerkin discontinu utilisé par H.L. Atkins est très proche de celle citée précédemment tout en introduisant une méthode de type PML comme condition absorbante.

Il est à noter que nous n'avons pas rencontré dans la littérature de discussion quant à la construction d'une condition de stabilité suffisante pour un schéma de type Galerkin discontinu en maillage non structuré appliqué à l'aéroacoustique et il en est de même quant à la recherche d'une méthode permettant de stabiliser de manière systématique les instabilités de type Kelvin-Helmholtz.

Dans cette partie, après avoir rappelé de manière succincte le principe de la méthode, nous présenterons les différents choix que nous avons faits pour notre schéma (flux internes, conditions aux limites réfléchissantes et absorbantes) et ce pour les différents contextes que nous avons abordés dans le premier chapitre (écoulement porteur uniforme ou non, utilisation du modèle simplifié...)

2.1 Le principe de la méthode

Les méthodes de type Galerkin discontinu qui ont déjà fait leurs preuves pour la résolution des équations de Maxwell ont toutes les qualités requises pour s'adapter parfaitement aux problèmes aéroacoustiques en écoulement non uniforme [28], [16], [17], [14]. Supposons que nous disposons d'une partition en polyèdres d'un domaine Ω (dont la frontière $\partial\Omega$ est la réunion des frontières physiques de l'objet $\partial\Omega^{\text{phys}}$ et des frontières artificielles $\partial\Omega^\infty$) en un nombre fini de polyèdres (chacun d'eux ayant un nombre fini de faces). Pour chaque polyèdre $\mathcal{T}_i$, appelé "volume de contrôle" ou "cellule", V_i correspond à son volume. Nous appellerons face entre deux cellules leur intersection lorsqu'il s'agit d'une surface polyédrique. La réunion de ces faces $\mathcal{F}$ regroupent les faces internes $\mathcal{F}^{\text{int}} = \mathcal{F}/\partial\Omega$, les faces physiques $\mathcal{F}^{\text{phys}} = \mathcal{F} \cap \partial\Omega^{\text{phys}}$ et les faces absorbantes $\mathcal{F}^{\text{abs}} = \mathcal{F} \cap \partial\Omega^\infty$. Pour chaque face interne $a_{ik} = \mathcal{T}_i \cap \mathcal{T}_k$, nous noterons S_{ik} la mesure de a_{ik} et $\vec{n}_{ik}$ la normale unitaire, orientée de $\mathcal{T}_i$ vers $\mathcal{T}_k$. Les mêmes définitions sont étendues aux faces frontières, l'index k correspond alors à une cellule fictive en dehors du domaine. Nous noterons $\mathcal{V}_i$ l'ensemble des indices des cellules voisines à la cellule $\mathcal{T}_i$ et P_i son périmètre :

$$P_i = \sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik}.$$

Rappelons le résultat géométrique suivant pour chaque cellule :

$$\sum_{k \in \mathcal{V}_i} S_{ik} \vec{n}_{ik} = \vec{0}.$$

Le principe général des méthodes de type Galerkin discontinu consiste à rechercher les inconnues numériques du problème sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions de bases locales dans chaque cellule $\vec{\varphi}_{ij}$, $1 \leq j \leq d_i$ (génératrices de l'espace local $\mathcal{P}_i$) et le champ approché peut être discontinu à l'interface entre deux cellules voisines. En fait, une fonction de flux numérique est définie pour approcher le flux au niveau des interfaces des cellules de contrôle, où la solution approchée est discontinue. Le contexte que nous venons de présenter est le plus général. Pour être très clair, de manière un peu prématurée, nous allons préciser dans quel contexte nous avons utilisé cette méthode pour les grandes parties de ce mémoire :

★ Dans ce chapitre, tous les schémas et les conditions aux limites que nous présentons sont

“libres” en géométrie et en ordre d’approximation. Plus précisément, les formulations que nous en donnons sont indépendantes des caractéristiques géométriques des cellules et de l’espace d’approximation $\mathcal{P}$ utilisé dans chaque cellule, cet espace d’approximation pouvant également varier d’une cellule à une autre.

- ★ Les résultats théoriques de ces schémas (conservation d’une énergie, condition de stabilité...), présentés dans le chapitre suivant, le seront également de la manière la plus générale qui soit.
- ★ Les seules restrictions que nous avons dû apporter à nos formulations concernent le traitement des données de l’écoulement porteur. Dans les systèmes présentés au premier chapitre, les matrices $\mathbb{A}_s^0, \bar{\mathbb{A}}_s^0, \tilde{\mathbb{A}}_s^0$ et $\hat{\mathbb{A}}_s^0$ sont toutes fonctions de l’écoulement porteur. Ainsi, si la résolution d’un de ces systèmes en écoulement uniforme ne pose pas problème puisque ces matrices deviennent constantes, qu’en est-il de leur approximation en écoulement non uniforme?

Au cours de la thèse, nous avons longuement travaillé sur ce problème de l’approximation d’un écoulement non uniforme. En effet si idéalement l’utilisation d’un même espace d’approximation pour les variables aéroacoustiques et aérodynamiques semble le plus logique, numériquement cette approche serait beaucoup trop coûteuse et l’obtention de résultats énergétiques ou de stabilité face à la complexité des équations nous a paru insurmontable. Même si dans ce chapitre, nous illustrerons comment une approximation d’ordre quelconque pour les variables aéroacoustiques et aérodynamiques pourrait s’écrire, aucun résultat théorique et numérique ne viendra illustrer cette formulation. Finalement, le choix qui s’est révélé pour nous le plus “productif” en terme de résultats théoriques et assez facilement exploitable d’un point de vue numérique est celui d’une approximation constante par cellule pour un écoulement porteur non uniforme.

- ★ Enfin, nous avons dû nous limiter dans le cadre de la thèse à la réalisation d’un code 3D parallèle ne pouvant utiliser toutes les facettes de la flexibilité de nos schémas, donc d’un point de vue numérique (voir les deux derniers chapitres), nous utiliserons ces méthodes dans le cas de maillages respectivement triangulaires en 2D et tétraédriques en 3D pour lesquels les volumes de contrôles coïncident respectivement avec les triangles et les tétraèdres du maillage et nous utiliserons ces méthodes dans le cadre de bases de fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à un. Nous présenterons dans ce chapitre les formulations précises de ces restrictions.

A présent nous allons développer l’écriture de notre schéma dans le cas le plus général du système (1.3).

2.1.1 Discrétisation spatiale

Plaçons nous dans le cadre de la linéarisation des équations d’Euler autour d’un écoulement non uniforme en utilisant les variables conservatives (1.3). Pour chaque cellule $\mathcal{T}_i$, nous noterons $\mathbb{A}_x^i, \mathbb{A}_y^i, \mathbb{A}_z^i$ les approximations respectives des matrices $\mathbb{A}_x^0, \mathbb{A}_y^0, \mathbb{A}_z^0$ exprimées dans (1.4) sur $\mathcal{T}_i$ pour l’instant sans hypothèse sur la base d’approximation utilisée pour ces données aérodynamiques. Sur chacune des cellules, on se donne un espace vectoriel de dimension d_i et un ensemble de fonctions de base $\bar{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i$. Ainsi d_i correspond au nombre de degrés de liberté du champ dans la cellule $\mathcal{T}_i$. Comme nous l’avons déjà remarqué, les fonctions de base

n'assurent aucune continuité entre deux cellules voisines. En multipliant le système (1.3) par la fonction de base $\vec{\varphi}_{ij}$ et en intégrant sur la cellule $\mathcal{T}_i$, on obtient :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t} = - \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left(\sum_{s \in \{x,y,z\}} \partial_s (\mathbb{A}_s^0 \vec{\mathbf{W}}) \right). \quad (2.1)$$

Une intégration par partie donne :

$$\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}}{\partial t} = \int_{\mathcal{T}_i} \left(\sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^0 \right) \vec{\mathbf{W}} - \int_{\partial \mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left(\sum_{s \in \{x,y,z\}} n_s \mathbb{A}_s^0 \vec{\mathbf{W}} \right). \quad (2.2)$$

Nous noterons $\vec{\mathbf{W}}_i$ la projection orthogonale de $\vec{\mathbf{W}}$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{P}_i$. Ainsi sur tout le domaine, nous utiliserons l'approximation suivante :

$$\vec{\mathbf{W}} \simeq \sum_i \vec{\mathbf{W}}_i = \sum_i \sum_{j=1}^{d_i} W_{ij} \vec{\varphi}_{ij}. \quad (2.3)$$

Avec W_{ij} , grandeur scalaire constante en espace dans la cellule $\mathcal{T}_i$, désignant le j^{ieme} degré de liberté de $\vec{\mathbf{W}}_i$. On notera $\mathbf{W}_i$ le vecteur colonne $(W_{ij})_{1 \leq j \leq d_i}$. Cette construction nous fournit le résultat suivant :

$$\forall \vec{\varphi} \in \mathcal{P}_i, \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\mathbf{W}} \cdot \vec{\varphi} = \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\mathbf{W}}_i \cdot \vec{\varphi}. \quad (2.4)$$

De plus, nous pouvons remplacer dans l'équation (2.2) les matrices $\mathbb{A}_s^0$ par leurs approximations respectives $\mathbb{A}_s^i$. Pour les intégrales surfaciques, nous devons définir une approximation pour les champs en tenant compte qu'aucune hypothèse de continuité n'est exigée. Nous utiliserons des flux totalement centrés :

$$\begin{cases} \forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \left[(n_{ik_x} \mathbb{A}_x^0 + n_{ik_y} \mathbb{A}_y^0 + n_{ik_z} \mathbb{A}_z^0) \vec{\mathbf{W}} \right]_{|a_{ik}} \simeq \frac{1}{2} \left(\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k \right), \\ \text{avec } \mathbb{P}_{ik}^i = n_{ik_x} \mathbb{A}_x^i + n_{ik_y} \mathbb{A}_y^i + n_{ik_z} \mathbb{A}_z^i, \quad \mathbb{P}_{ik}^k = n_{ik_x} \mathbb{A}_x^k + n_{ik_y} \mathbb{A}_y^k + n_{ik_z} \mathbb{A}_z^k. \end{cases} \quad (2.5)$$

On aboutit finalement au système semi-discret :

$$\left(\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_i}{\partial t} = \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k}{2} \right)_{1 \leq j \leq d_i}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Discrétisation temporelle

Concernant la discrétisation en temps, nous utilisons un schéma de type saute-mouton à trois niveaux, la forme continue de nos équations nous empêchant d'utiliser un schéma saute-mouton plus astucieux à deux pas en temps que l'on retrouve souvent pour les systèmes d'équations dits "croisés" comme pour les équations de Maxwell [13], [67]. Les inconnues $\vec{\mathbf{W}}_i$ sont calculées aux instants $t^n = n\Delta t$. En supposant que nous disposons de $\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}$ et de $\vec{\mathbf{W}}_i^n$, les inconnues $\vec{\mathbf{W}}_i^{n+1}$ sont approchées sous la forme :

$$\forall j \in \{1, \dots, d_i\},$$

$$\int_{T_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}}{2\Delta t} = \int_{T_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t\partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n}{2}, \quad (2.7)$$

ce que l'on peut récrire de la manière suivante : $\forall j \in \{1, \dots, d_i\}$,

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j &= \sum_{s \in \{x,y,z\}} \int_{T_i} {}^t\partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n}{2} \\ &= \sum_{s \in \{x,y,z\}} \sum_{l=1}^{d_i} W_{il}^n \int_{T_i} {}^t\partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\varphi}_{il} - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left[\sum_{l=1}^{d_i} \left(W_{il}^n \int_{a_{ik}} {}^t\vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{ik}^i \vec{\varphi}_{il} \right) + \sum_{r=1}^{d_k} \left(W_{kr}^n \int_{a_{ik}} {}^t\vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\varphi}_{kr} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

Le schéma en temps est explicite, ainsi, chaque pas de temps ne requiert que l'inversion en 3D (resp. en 2D) de la matrice $\mathbb{M}_i = \int_{T_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\varphi}_{il}$: matrice de taille $d_i \times d_i$ locale symétrique définie positive par bloc de taille 5x5 (resp. 4x4) si le nombre de degré de liberté est le même pour chacune des 5 variables (resp. 4 variables) aéroacoustiques.

2.1.3 Différentes formulations

Le schéma exposé par l'équation (2.8) correspond exactement au schéma utilisé pour le système (1.3), mais nous allons présenter de nombreuses variantes de ce schéma selon les critères suivants :

- Présence d'un terme source en continu noté $\vec{\mathcal{H}}$.
- Ecoulement porteur uniforme.
- Ecoulement porteur non uniforme constant par cellule.
- Ecoulement porteur non uniforme non constant par cellule.
- Utilisation du modèle simplifié.

Ecoulement porteur uniforme avec terme source

Nous utiliserons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j \in \{1, \dots, d_i\}} &= \sum_{s \in \{x,y,z\}} \int_{T_i} {}^t\partial_s \vec{\varphi}_{ij} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \right) + \int_{T_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

avec les matrices $\bar{\mathbb{A}}_s^0$ (données par (1.7)) constantes sur tout le domaine et symétriques et $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 = n_{ik_x} \bar{\mathbb{A}}_x^0 + n_{ik_y} \bar{\mathbb{A}}_y^0 + n_{ik_z} \bar{\mathbb{A}}_z^0$.

Ecoulement porteur non uniforme constant par cellule avec terme source

Dans le cas où nous utilisons une représentation constante par cellule de l'écoulement associé au système (1.3), ce qui correspond au schéma (2.8) auquel nous rajoutons un terme

source, nous obtenons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j \in \{1, \dots, d_i\}} &= \sum_{s \in \{x, y, z\}} \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n \\ &\quad - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n}{2} + \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{H}}, \end{aligned} \quad (2.10)$$

avec les matrices $\mathbb{A}_s^i$ (données par (1.4)) constantes sur $\mathcal{T}_i$ et non symétriques.

Ecoulement porteur non uniforme non constant par cellule avec terme source

Dans le cadre d'une approximation plus précise de l'écoulement, en faisant l'hypothèse du choix d'une même base d'approximation pour chaque cellule et de l'utilisation d'une même famille scalaire de fonctions de base pour chaque composante du vecteur des inconnues numériques dans chaque cellule, la méthode que nous proposons est d'approximer les matrices dépendantes de l'écoulement sur chaque cellule grâce aux fonctions de base scalaires $(\varphi_{ij}, 1 \leq j \leq \tilde{d}_i)$. Plus précisément, l'approximation que nous proposons est la suivante :

$$\forall s \in \{x, y, z\}, \forall i, \mathbb{A}_s^i = \sum_{m=1}^{\tilde{d}_i} \mathbb{A}_{ms}^i \varphi_{im}, \quad (2.11)$$

avec les $\mathbb{A}_{ms}^i$ constantes par cellules. En utilisant la notation $\forall m \in \{1, \dots, \tilde{d}_i\}$, $\mathbb{P}_{m_{ik}}^i = n_{ikx} \mathbb{A}_{mx}^i + n_{iky} \mathbb{A}_{my}^i + n_{ikz} \mathbb{A}_{mz}^i$ et le fait que $\forall (i, k)$ $\tilde{d}_i = \tilde{d}_k$ et $d_i = d_k$, le schéma s'écrit alors de manière détaillée :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j &= \sum_{s \in \{x, y, z\}} \sum_{m=1}^{\tilde{d}_i} \int_{\mathcal{T}_i} \varphi_{im} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_{ms}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \sum_{m=1}^{\tilde{d}_i} \int_{a_{ik}} \left(\varphi_{im} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{m_{ik}}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \varphi_{km} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{m_{ik}}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) + \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{H}}, \\ &= \sum_{s \in \{x, y, z\}} \sum_{m=1}^{\tilde{d}_i} \sum_{l=1}^{d_i} W_{il}^n \int_{\mathcal{T}_i} \varphi_{im} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_{ms}^i \vec{\varphi}_{il} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \sum_{m=1}^{\tilde{d}_i} \sum_{l=1}^{d_i} \left(W_{il}^n \int_{a_{ik}} \varphi_{im} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{m_{ik}}^i \vec{\varphi}_{il} + W_{kl}^n \int_{a_{ik}} \varphi_{km} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{P}_{m_{ik}}^k \vec{\varphi}_{kl} \right) + \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Utilisation du modèle simplifié en écoulement non uniforme avec terme source

Enfin, nous utiliserons également le modèle simplifié exprimé par (1.13) sous la forme :

$$\left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_{b_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{b_i}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j = \sum_{s \in \{x, y, z\}} \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \hat{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{W}}_{b_i}^n \quad (2.13)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left(\hat{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_{b_i}^n + \hat{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_{b_k}^n \right) + \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{J}},$$

avec les $\tilde{\mathbb{A}}_s^i$ données par (1.14) constantes par cellules ou décomposées de la même manière que dans le paragraphe précédent. Le terme $\vec{\mathcal{J}}$ représente ici un terme source imposé et comme nous l'avons expliqué le terme source $\vec{\mathcal{H}}$ de l'équation (1.13) est négligé.

Par souci de clarté et de compréhension, nous allons à présent détailler de manière précise les configurations que nous avons utilisées pour la réalisation des cas tests que nous étudierons aux deux derniers chapitres.

2.2 Méthode de type volumes finis

La méthode dite $\mathbb{P}_0$ consiste en fait à considérer les différentes variables comme constantes par cellule. Ce qui correspond à $d_i = 5$ en 3D et à $d_i = 4$ en 2D (chaque composante du vecteur des inconnues numériques ayant un degré commun $\tilde{d}_i$ égal à 1). Si nous considérons cette approximation pour nos équations les plus simples : écoulement uniforme sans terme source. On obtient en utilisant (2.9) :

$$V_i \frac{\mathbf{W}_{u_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{u_i}^{n-1}}{2\Delta t} = -\frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} l_{ik} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\mathbf{W}_{u_i}^n + \mathbf{W}_{u_k}^n), \quad (2.14)$$

avec,

$$V_i = \int_{\mathcal{T}_i} d\mathcal{V}, \quad l_{ik} = \int_{a_{ik}} d\mathcal{S}. \quad (2.15)$$

Cette formulation correspond exactement à un schéma volumes finis classique avec flux centrés en espace. Ce schéma est étudié en détails dans [17]. Nous pouvons rappeler les résultats principaux suivants pour un domaine infini sans parois frontières :

- Sur un domaine maillé de manière structuré, la stabilité du schéma est assurée par la condition de type CFL suivante :

$$\Delta t \left(\frac{|u_0|}{\Delta x} + \frac{|v_0|}{\Delta y} + \frac{|w_0|}{\Delta z} + c_0 \sqrt{\frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} + \frac{1}{\Delta z^2}} \right) \leq 1, \quad (2.16)$$

de plus le schéma est non diffusif.

- La méthode des équations équivalentes permet de montrer que ce schéma est d'ordre 2 en espace et en temps sur tout maillage structuré.
- Ce schéma est faiblement dispersif : le terme d'ordre 2 de la relation de dispersion discrète est très faible lorsque le pas de temps est proche du pas maximal autorisé par la condition CFL.
- Dans le cas de l'utilisation d'un maillage non structuré, ce schéma est stable en norme $\mathcal{L}^2$ sur tout maillage en polyèdres si pour toutes cellules adjacentes $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_j$ du maillage :

$$\Delta t < \frac{2V_i}{P_i \left(\left| \vec{V}_0 \cdot \vec{n}_{ij} \right| + c_0 \right)}, \quad (2.17)$$

de plus le schéma est alors non diffusif.

Nous avons également construit pour ce schéma des conditions aux limites réfléchissantes et absorbantes efficaces permettant sur maillages non structurés de conserver une condition suffisante de stabilité. Ces résultats théoriques auraient peut-être mérité une part plus importante dans la rédaction de ce mémoire, cependant ce schéma volumes finis restant un cas particulier de notre méthode, il nous a semblé préférable de s'attarder sur des résultats d'ordre général. De plus nous verrons grâce à différents cas tests que nous avons très vite été amené à abandonner les schémas de type volumes finis pour leur manque de précision.

Finalement, nous renvoyons le lecteur soucieux de la démonstration de ces résultats aux articles [15] et [17].

2.3 Méthode d'approximation $\mathbb{P}_1$

Dans le cadre d'un espace d'approximation pour chaque cellule engendré par une base de fonctions polynomiales de degré 1, les maillages que nous utiliserons seront tous des maillages en tétraèdres en 3D et en triangles en 2D. Précisons tout d'abord les choix que nous avons faits au niveau des fonctions de base : nous supposerons toujours les fonctions de base scalaires communes à chaque cellule et à chaque variable du vecteur des inconnues numériques. Le choix de l'espace $\mathbb{P}_1$ fixant ce nombre de fonctions de bases scalaires $\tilde{d}_i$ à 4 en 3D et à 3 en 2D. Ainsi $d_i = 5\tilde{d}_i = 20$ en 3D et $d_i = 4\tilde{d}_i = 12$ en 2D. Les fonctions de base scalaires $\mathbb{P}_1$ que nous utiliserons sont les plus traditionnelles.

Considérons la géométrie suivante en 3D,

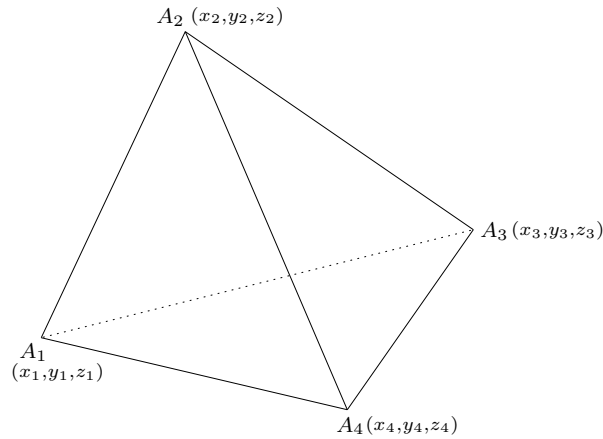


FIG. 2.1 – Représentation d'une cellule tétraédrique

En notant $(\vec{e}_l)_{1 \leq l \leq 4}$ la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et :

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{pmatrix},$$

nous définissons $(\varphi_l, l \in \{1, 2, 3, 4\})$ grâce à l'expression suivante :

$$\forall l \in \{1, 2, 3, 4\} \quad \varphi_l(X, Y, Z) = (\mathbb{M}^{-1} \vec{e}_l) \cdot \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (2.18)$$

Ainsi φ_l est la fonction $\mathbb{P}_1$ valant 1 au sommet A_l et valant 0 pour les trois autres sommets de la cellule.

Nous avons présenté dans la partie précédente plusieurs formulations en espace faisant intervenir différents types d'intégrales, nous allons pour les cas qui nous intéressent préciser les expressions exactes de ces intégrales. En notant $\mathbb{N} = [n_{uv}]_{u,v}$ une matrice carrée constante de $\mathcal{M}_5(\mathbb{R})$ en 3D ou de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ en 2D, nous avons besoin de connaître les expressions exactes de :

$$\begin{aligned} \mathbb{M}_i &= \left(\int_{T_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\varphi}_{il} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}, \\ \forall s \in \{x, y, z\}, \mathbb{F}_{is} &= \left(\int_{T_i} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{il} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}, \\ \mathbb{G}_{ik} &= \left(\int_{a_{ik}} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{il} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}, \\ \mathbb{H}_{ik} &= \left(\int_{a_{ik}} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{kl} \right)_{\substack{1 \leq j \leq d_i \\ 1 \leq l \leq d_k}}, \\ \forall (m, s) \in \{1, \dots, \tilde{d}_i\} \times \{x, y, z\}, \mathbb{I}_{ism} &= \left(\int_{T_i} \varphi_{im} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{il} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}, \\ \forall m \in \{1, \dots, \tilde{d}_i\}, \mathbb{J}_{im} &= \left(\int_{a_{ik}} \varphi_{im} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{il} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}, \\ \forall m \in \{1, \dots, \tilde{d}_i\}, \mathbb{K}_{im} &= \left(\int_{a_{ik}} \varphi_{km} {}^t \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{N} \vec{\varphi}_{kl} \right)_{1 \leq j, l \leq d_i}. \end{aligned}$$

Nous allons exprimer à présent ces différentes matrices par rapport aux fonctions de bases que nous avons choisies :

- La matrice de masse est diagonale par blocs de tailles 4×4 en 3D (3×3 en 2D), les blocs $\mathbb{D}_i$ étant tous égaux :

$$\text{en 2D } \mathbb{M}_i = \frac{V_i}{12} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \text{en 3D } \mathbb{M}_i = \frac{V_i}{20} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

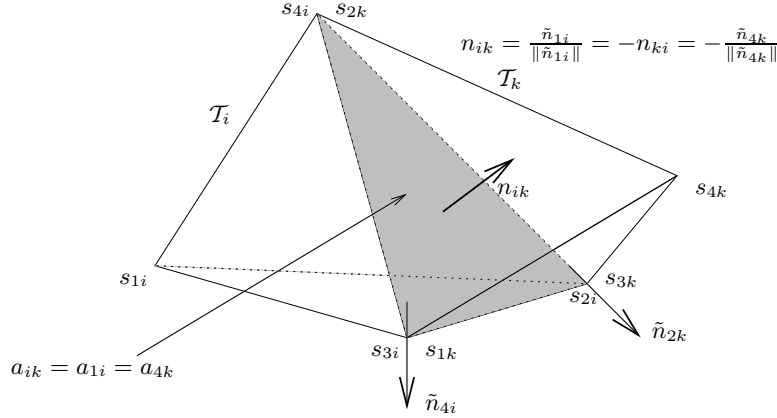


FIG. 2.2 – Représentation locale de deux tétraèdres voisins

- Précisons quelques notations de la figure 2.2 : la numérotation des sommets correspond à la numérotation locale des 4 sommets de chaque tétraèdre. L'interface a_{ik} entre $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_k$ correspond pour le cas particulier de notre figure à la face opposée à s_{1i} et à s_{4k} , ainsi nous la noterons également a_{1i} ou a_{4k} . De même nous noterons pour cette configuration $\tilde{n}_{ik} = \int_{a_{ik}} \vec{n} dS = \tilde{n}_{1i} = -\tilde{n}_{ki} = -\tilde{n}_{4k}$. En utilisant cette configuration (et sa correspondante en 2D pour un maillage en triangles) :

$$\text{En 2D, } \mathbb{F}_{is} = (n_{uv} \mathbb{D}_{is})_{1 \leq u, v \leq 4} \text{ avec } \mathbb{D}_{is} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} \tilde{n}_{1is} & \tilde{n}_{2is} & \tilde{n}_{3is} \\ \tilde{n}_{1is} & \tilde{n}_{2is} & \tilde{n}_{3is} \end{pmatrix}.$$

$$\text{En 3D, } \mathbb{F}_{is} = (n_{uv} \mathbb{D}_{is})_{1 \leq u, v \leq 5} \text{ avec } \mathbb{D}_{is} = -\frac{1}{12} \begin{pmatrix} \tilde{n}_{1is} & \tilde{n}_{2is} & \tilde{n}_{3is} & \tilde{n}_{4is} \\ \tilde{n}_{1is} & \tilde{n}_{2is} & \tilde{n}_{3is} & \tilde{n}_{4is} \\ \tilde{n}_{1is} & \tilde{n}_{2is} & \tilde{n}_{3is} & \tilde{n}_{4is} \end{pmatrix}.$$

- En notant $\tilde{k}$ le numéro local de la face a_{ik} (qui est fixé par le numéro local du sommet opposé) pour la cellule $\mathcal{T}_i$ (dans l'exemple de la figure $\tilde{k} = 1$), nous avons :

$$\text{En 2D, } \mathbb{G}_{ik} = (n_{uv} \mathbb{D}_{ik})_{1 \leq u, v \leq 4} \text{ avec } \mathbb{D}_{ik} = \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{6} [(1 - \delta_{\tilde{k}u})(1 - \delta_{\tilde{k}v})(1 + \delta_{uv})]_{1 \leq u, v \leq 3}.$$

$$\text{En 3D, } \mathbb{G}_{ik} = (n_{uv} \mathbb{D}_{ik})_{1 \leq u, v \leq 5} \text{ avec } \mathbb{D}_{ik} = \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{12} [(1 - \delta_{\tilde{k}u})(1 - \delta_{\tilde{k}v})(1 + \delta_{uv})]_{1 \leq u, v \leq 4}.$$

- Comme l'illustre la figure, nous avons en 3D entre les sommets de $\mathcal{T}_i$ et $\mathcal{T}_k$ trois points en commun. Considérons alors la permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_4$ qui pour chacun de ces trois points fait correspondre à sa numérotation locale dans $\mathcal{T}_k$ sa numérotation locale dans $\mathcal{T}_i$ et qui à la numérotation locale du quatrième sommet de $\mathcal{T}_k$ fait correspondre celle du quatrième sommet de $\mathcal{T}_i$. Dans l'exemple de la figure :

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nous avons alors :

$$\mathbb{H}_{ik} = (n_{uv}\mathbb{D}_{ik})_{1 \leq u, v \leq 5} \quad \text{avec} \quad \mathbb{D}_{ik} = \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{12} \left[(1 - \delta_{\tilde{k}u}) (1 - \delta_{\tilde{k}\sigma(v)}) (1 + \delta_{u\sigma(v)}) \right]_{1 \leq u, v \leq 4}.$$

En 2D, en utilisant le même raisonnement (avec $\sigma \in \mathfrak{S}_3$), nous avons :

$$\mathbb{H}_{ik} = (n_{uv}\mathbb{D}_{ik})_{1 \leq u, v \leq 4} \quad \text{avec} \quad \mathbb{D}_{ik} = \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{6} \left[(1 - \delta_{\tilde{k}u}) (1 - \delta_{\tilde{k}\sigma(v)}) (1 + \delta_{u\sigma(v)}) \right]_{1 \leq u, v \leq 3}.$$

- Pour les trois dernières intégrales, nous ne donnerons que les formules en 3D. En utilisant les mêmes notations que précédemment :

$$\text{pour } 1 \leq m \leq 4 \text{ et } s \in \{x, y, z\}, \quad \mathbb{I}_{ism} = (n_{uv}\mathbb{D}_{ism})_{1 \leq u, v \leq 5},$$

avec,

$$\mathbb{D}_{ism} = -\frac{1}{60} \begin{pmatrix} (1 + \delta_{1m}) \tilde{n}_{1s} & (1 + \delta_{2m}) \tilde{n}_{1s} & (1 + \delta_{3m}) \tilde{n}_{1s} & (1 + \delta_{4m}) \tilde{n}_{1s} \\ (1 + \delta_{1m}) \tilde{n}_{2s} & (1 + \delta_{2m}) \tilde{n}_{2s} & (1 + \delta_{3m}) \tilde{n}_{2s} & (1 + \delta_{4m}) \tilde{n}_{2s} \\ (1 + \delta_{1m}) \tilde{n}_{3s} & (1 + \delta_{2m}) \tilde{n}_{3s} & (1 + \delta_{3m}) \tilde{n}_{3s} & (1 + \delta_{4m}) \tilde{n}_{3s} \\ (1 + \delta_{1m}) \tilde{n}_{4s} & (1 + \delta_{2m}) \tilde{n}_{4s} & (1 + \delta_{3m}) \tilde{n}_{4s} & (1 + \delta_{4m}) \tilde{n}_{4s} \end{pmatrix}.$$

•

$$\text{Pour } 1 \leq m \leq 4, \quad \mathbb{J}_{im} = (n_{uv}\mathbb{D}_{im})_{1 \leq u, v \leq 5},$$

avec,

$$\mathbb{D}_{im} = \delta_{\tilde{k}m} \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{60} \left[(1 - \delta_{\tilde{k}u}) (1 - \delta_{\tilde{k}v}) (1 + \delta_{uv}) (1 + \delta_{mu} + \delta_{mv}) \right]_{1 \leq u, v \leq 4}.$$

•

$$\text{Pour } 1 \leq m \leq 4, \quad \mathbb{K}_{im} = (n_{uv}\mathbb{D}_{im})_{1 \leq u, v \leq 5},$$

avec,

$$\mathbb{D}_{im} = \delta_{\tilde{k}\sigma(m)} \frac{\|\tilde{n}_{ik}\|}{60} \left[(1 - \delta_{\tilde{k}u}) (1 - \delta_{\tilde{k}\sigma(v)}) (1 + \delta_{u\sigma(v)}) (1 + \delta_{\sigma(m)u} + \delta_{\sigma(m)\sigma(v)}) \right]_{1 \leq u, v \leq 4}$$

2.4 Les conditions aux limites

2.4.1 Introduction

Le problème des conditions aux limites est une pierre angulaire de la simulation numérique. En effet pour les problèmes physiques concernant la propagation d'ondes, le domaine physique est nécessairement tronqué pour obtenir le domaine de calcul. Comment, alors, donner l'illusion que le domaine est infini? Pour cela, il est nécessaire de construire des conditions aux limites non-réfléchissantes (aussi appelées absorbantes) avec la meilleure précision possible pour éviter les phénomènes de réflexions parasites polluant les résultats. Ce sujet est inépuisable et alimente depuis l'apparition des techniques de simulation numérique un nombre incalculable de recherches.

Rien qu'en aéroacoustique de nombreuses méthodes existent [50], [40], [77], [47], [39]... Nous allons présenter les plus traditionnelles. Une des plus courantes est basée sur une

approche de type caractéristiques, nous pouvons citer les travaux de Thompson [81], [82], Giles [39], Poinso et Lele [68]. Dans cette approche, le système hyperbolique est diagonalisé afin de faire apparaître les différents types de perturbations associées aux équations d'Euler linéarisées : perturbation en vorticité, perturbation acoustique et perturbation entropique. Ainsi, il est possible, au niveau d'une frontière absorbante de fixer les invariants entrant à 0. Bien que facilement exploitable, cette méthode est efficace pour les incidences nulles mais peu propice aux incidences obliques et problématiques pour les coins éventuels du domaine. Giles [39] a apporté des améliorations pour les problèmes obliques tout en rencontrant des phénomènes d'instabilités.

Une deuxième approche consiste à utiliser les expressions asymptotiques des équations d'Euler obtenues en champ acoustique lointain. Cette méthode introduite par Engquist et Majda [32] mais également par Bayliss et Turkel [9] et Hagstrom et Hariharan [43] est aujourd'hui de plus en plus utilisée dans les problèmes de simulation numérique en aéroacoustique. Cette technique est plus précise et efficace que celle des caractéristiques grâce à son caractère multidimensionnel. Les conditions aux limites de Tam et Dong [77], largement utilisées en aéroacoustique [20], [80], [22], appartiennent à cette famille.

La dernière approche dont nous allons discuter est l'utilisation de méthode de type PML qui est de plus en plus présente en aéroacoustique. Berenger a introduit il y maintenant dix ans cette nouvelle méthode pour absorber les ondes électromagnétiques lors de l'utilisation de schémas en différences finies pour résoudre les équations de Maxwell [11], [12]. Cette méthode consiste à greffer autour du domaine de calcul une zone PML où les équations sont modifiées de manière à faire décroître exponentiellement les différentes variables du problème sans réflexions parasites (théoriquement). Les résultats obtenus en électromagnétisme se sont révélés très concluant. Cela explique l'intérêt porté à une telle méthode pour tous les autres problèmes de convection d'ondes. Hu a été le premier à adapter cette méthode aux équations de l'aéroacoustique [47], [48]. Malheureusement, les caractéristiques complexes des équations de l'aéroacoustique ont apportées des complications, ainsi il a été montré depuis que des ondes de haute fréquence peuvent rendre instable l'utilisation de PML traditionnels [10], [76], [46]. Depuis de nombreuses variantes ont été proposées pour éviter ce genre de phénomènes : utilisation d'un filtre pour les instabilités [47], choix judicieux des coefficients d'absorption [76], modification de l'écoulement porteur dans la zone PML [46], régularisation des coefficients d'absorption [60] et modification des équations [5] permettant d'obtenir pour certaines configurations de l'écoulement un problème bien posé [30]. Malheureusement la construction d'une méthode PML assurant la stabilité pour tout type d'écoulement porteur et pour toute perturbation reste un problème ouvert.

Nous allons présenter dans cette partie les différents choix que nous avons faits pour les conditions aux limites de notre schéma, bien que nous utiliserons et validerons ces conditions aux limites dans le cadre d'écoulements porteurs uniformes ou constants par cellule, nous en proposerons également une extension dans le cadre d'une approximation d'ordre quelconque de l'écoulement. Nous commencerons par des conditions aux limites réfléchissantes qui ne posent pas vraiment de problèmes en aéroacoustique puis nous proposerons ensuite des conditions aux limites absorbantes. Nous verrons que nos conditions aux limites absorbantes s'apparentent à une méthode de type caractéristique. En effet, le fait de travailler sur des maillages non structurés et la recherche de résultats théoriques sur la stabilité ont limités considérablement les

choix qui s'offraient à nous. Comme nous l'avons précisé, les méthodes de type caractéristique peuvent engendrer des réflexions parasites, c'est pourquoi nous présenterons également une méthode de type PML en 2D introduite par Atkins [5] adaptée à notre schéma. Pour préciser les choses, nous ne nous intéresserons absolument pas aux problèmes théoriques posés par les PML, mais nous validerons nos conditions absorbantes pour des cas tests où les conditions PML fournissent d'excellents résultats.

2.4.2 Conditions aux limites réfléchissantes

Comme annoncé, nos conditions aux limites sont imposées de manière faible. Pour les frontières physiques, nous utiliserons uniquement des conditions réfléchissantes s'exprimant à la fois sur l'écoulement porteur et sur les perturbations. Plus précisément pour l'écoulement moyen, nous supposerons qu'il est tangentiel à toute face réfléchissante. Ainsi, plusieurs cas de figures se présentent :

- Pour un écoulement uniforme, cela se traduit par la condition :

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys}, \vec{n}_{ik} \cdot \vec{V}_0 = 0, \quad (2.19)$$

ainsi dans le cas d'un écoulement uniforme, les faces réfléchissantes sont nécessairement toutes tangentielles à l'écoulement.

- Pour un écoulement non uniforme supposé constant par cellule :

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys}, \vec{n}_{ik} \cdot \vec{V}_0^i = 0, \quad (2.20)$$

ainsi dans ce cas la condition s'exprime au niveau de la cellule $\mathcal{T}_i$, l'approximation prise pour l'écoulement dans la cellule $\mathcal{T}_i$ doit être normale à $\vec{n}_{ik}$.

- Enfin, pour un écoulement non uniforme supposé d'approximation non constante par cellule, cette même condition n'est imposée que sur la face a_{ik} :

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys}, \vec{n}_{ik} \cdot \vec{V}_{0|a_{ik}}^i = 0, \quad (2.21)$$

ce qui signifie, dans ce cas, que pour une cellule $\mathcal{T}_i$ comportant une face physique a_{ik} , l'écoulement sur cette face doit rester normal à $\vec{n}_{ik}$.

Il est évidemment important de s'interroger sur le sens physique de cette condition. En fait cette condition paraît naturelle puisqu'elle est généralement imposée comme condition aux limites réfléchissante lors de la résolution des équations d'Euler. Seul son application a besoin d'être éclaircie. En effet imaginons que l'écoulement fourni nous soit donné aux sommets du maillage et que nous utilisions dans notre code un écoulement porteur $\mathbb{P}_0$, nous serons alors obligé dans une cellule comportant une face réfléchissante d'imposer non pas une moyenne des valeurs aux sommets du polyèdre mais sa composante tangentielle (qui théoriquement devraient être assez proches).

Il s'agit maintenant de donner un sens aux termes $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{W}_{u_k}$, $\mathbb{P}_{ik}^k \vec{W}_k$ et $\hat{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{W}_{b_k}$ lorsque a_{ik} est une interface réfléchissante et $\mathcal{T}_k$ une cellule fictive en dehors du domaine de calcul. Pour l'écoulement s'il est non uniforme, nous supposerons que l'écoulement dans la cellule $\mathcal{T}_k$ est celui fixé dans la cellule $\mathcal{T}_i$. Pour les perturbations, la cellule $\mathcal{T}_k$ correspond à une cellule miroir. Plus précisément nos variables vérifient :

$$\delta \rho_k = \delta \rho_i, \delta p_k = \delta p_i, \text{ et } \delta \vec{V}_k = \delta \vec{V}_i - 2 \left(\vec{n}_{ik} \cdot \delta \vec{V}_i \right) \vec{n}_{ik},$$

ce qui implique $(\delta\vec{V}_k - \delta\vec{V}_i) \wedge \vec{n}_{ik} = \vec{0}$ et $\delta\vec{V}_k \cdot \vec{n}_{ik} = -\delta\vec{V}_i \cdot \vec{n}_{ik}$. Nous utiliserons à présent la notation :

$$\begin{pmatrix} \delta\rho_k \\ \delta\vec{V}_k \\ \delta p_k \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & {}^t\vec{0} & 0 \\ \vec{0} & \mathbb{I}_3 - 2n_{ik} {}^t n_{ik} & \vec{0} \\ 0 & {}^t\vec{0} & 1 \end{pmatrix}}_{\mathbb{H}_{ik}} \begin{pmatrix} \delta\rho_i \\ \delta\vec{V}_i \\ \delta p_i \end{pmatrix}. \quad (2.22)$$

Lemme 2.4.1

- Pour un écoulement uniforme la condition (2.22) se traduit sous la forme :

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys} \text{ avec } \mathcal{T}_k \text{ cellule fictive, } \vec{W}_{u_k} = \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_{u_i}. \quad (2.23)$$

- Pour un écoulement non uniforme supposé constant par cellule, vérifiant (2.20), la condition (2.22) pour les schémas (2.10) et (2.13) se traduit sous la forme :

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys} \text{ avec } \mathcal{T}_k \text{ cellule fictive, } \vec{W}_k = \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_i, \quad (2.24)$$

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{phys} \text{ avec } \mathcal{T}_k \text{ cellule fictive, } \vec{W}_{b_k} = \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_{b_i}. \quad (2.25)$$

- De même, pour un écoulement non uniforme supposé d'approximation non constante par cellule, vérifiant (2.21), la condition (2.22) pour les schémas (2.10) et (2.13) se traduit par les expressions (2.24) et (2.25).

Démonstration 2.4.1 La démonstration est très simple, il s'agit d'effectuer les changements de variable correspondant à chaque équation et de tenir compte selon les cas de (2.20), (2.21) ou (2.22). ■

Finalement, notre condition réfléchissante à l'interface entre la cellule interne $\mathcal{T}_i$ et la cellule fictive $\mathcal{T}_k$ s'exprime selon les cas :

- Pour un écoulement uniforme :

$$\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{W}_{u_k} = \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_{u_i}. \quad (2.26)$$

- Pour un écoulement non uniforme d'approximation constante ou non par cellule :

$$\mathbb{P}_{ik}^k \vec{W}_k = \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_i, \quad (2.27)$$

$$\hat{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{W}_{b_k} = \hat{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{W}_{b_i}. \quad (2.28)$$

Nous allons à présent donner deux résultats qui seront utiles par la suite.

Lemme 2.4.2

- Sous la condition (2.19) pour un écoulement uniforme, la matrice $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik}$ est antisymétrique.
- Pour un écoulement non uniforme, $\mathbb{H}_{ik}$ commute avec la matrice $\mathbb{A}_0^i$ donnée par (1.12) ($\mathbb{A}_0^0$ exprimée dans la cellule $\mathcal{T}_i$), de plus sous la condition (2.20) pour un écoulement porteur $\mathbb{P}_0$ la matrice $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{A}_0^i \mathbb{H}_{ik}$ est antisymétrique sur $\mathcal{T}_i$ et sous la condition (2.21) pour un écoulement porteur d'approximation non constante par cellule la matrice $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} = \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{A}_0^i \mathbb{H}_{ik}$ est antisymétrique sur a_{ik} .

Démonstration 2.4.2 *Le calcul fournit immédiatement ces résultats.*

■

Nous démontrerons dans le chapitre suivant les qualités théoriques et numériques de cette condition réfléchissante. Nous allons à présent nous pencher sur le problème plus épineux des conditions aux limites absorbantes.

2.4.3 Conditions aux limites absorbantes

Dans cette partie nous allons présenter les différentes conditions aux limites absorbantes que nous utiliserons. Nous ne discuterons pas pour l'instant de leurs intérêts théorique et numérique.

2.4.3.1 Condition aux limites absorbantes pour un écoulement uniforme

Dans cette partie, nous nous plaçons dans le cadre le plus simple de la linéarisation autour d'un écoulement uniforme (1.6). Comme pour les parois physiques, il est nécessaire de donner un sens au terme $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}$ de (2.9) lorsque a_{ik} est une face absorbante et $\mathcal{T}_k$ une cellule fictive. En fait un décentrage est utilisé pour conserver uniquement les ondes sortantes. Comme la matrice $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0$ est diagonalisable dans $\mathbb{R}$ (symétrique réelle), avant la discrétisation en temps, un décentrage classique consisterait à prendre un flux absorbant $\mathbb{F}_{ik}$ sous la forme $\mathbb{F}_{ik} = (\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0)^+ \vec{\mathbf{W}}_i$, ou pour toute matrice diagonalisable $\mathbb{Q} = \mathbb{S}^{-1} \mathbb{D} \mathbb{S}$ avec $\mathbb{D}$ diagonale, $\mathbb{Q}^+ = (\mathbb{Q} + |\mathbb{Q}|)/2$ et $|\mathbb{Q}| = \mathbb{S}^{-1} |\mathbb{D}| \mathbb{S}$, $|\mathbb{D}|$ correspondant à la matrice diagonale dont les termes sont les modules des valeurs propres. Nous allons présenter deux conditions absorbantes qui correspondent à une variante de cette méthode :

$$1^{\text{ÈRE}} \text{ CONDITION ABSORBANTE : } \quad \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n = |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}. \quad (2.29)$$

$$2^{\text{ÈME}} \text{ CONDITION ABSORBANTE : } \quad \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n = |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \frac{\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1}}{2}. \quad (2.30)$$

Ces deux conditions sont assez proches. Bien qu'un peu plus complexe à implémenter par son caractère localement implicite, la deuxième condition permet d'obtenir un schéma partout centré en temps et d'ordre 2 ce qui n'est pas le cas de la première. Malgré cette meilleure précision locale, nous n'avons en fait obtenu aucune différence notable entre ces deux méthodes pour les différents cas tests que nous présenterons.

2.4.3.2 Condition aux limites absorbantes pour un écoulement non uniforme constant par cellule

Plaçons-nous dans le cadre du système (2.7), la matrice $\mathbb{P}_{ik}^i$ est diagonalisable, ainsi nous pourrions appliquer les mêmes conditions absorbantes que précédemment. Malheureusement, cette matrice n'est pas symétrique, caractère hautement utile dans les considérations énergétiques que nous verrons dans le chapitre suivant. C'est ici que la symétrisation des équations d'Euler va nous être très utile. Nous allons présenter deux conditions absorbantes qui utilisent la matrice $\mathbb{A}_0^i$ donnée par (1.14) et exprimée dans la cellule d'indice i .

Rappelons que la matrice $\mathbb{A}_0^i$ est une matrice symétrique définie positive, ainsi elle est diagonalisable dans une base orthonormée et ses valeurs propres sont toutes positives. Il existe $\mathbb{P} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{D}$ diagonale à valeurs positives telles que $\mathbb{A}_0^i = {}^t\mathbb{P}\mathbb{D}\mathbb{P}$, nous noterons $\sqrt{\mathbb{D}}$ la matrice diagonale dont les termes sont les racines de ceux de $\mathbb{D}$ et $\sqrt{\mathbb{A}_0^i} = {}^t\mathbb{P}\sqrt{\mathbb{D}}\mathbb{P}$. Considérons à présent la matrice $\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i} = \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1}$, cette matrice est symétrique grâce au caractère symétrique de $\sqrt{\mathbb{A}_0^i}$ et de $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i$, elle est donc diagonalisable. Ces quelques résultats nous permettent d'introduire les deux conditions absorbantes suivantes :

$$1^{\text{ÈRE}} \text{ CDT ABSORBANTE : } \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n = \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \right| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}. \quad (2.31)$$

$$2^{\text{ÈME}} \text{ CDT ABSORBANTE : } \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n = \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \right| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \frac{\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} + \vec{\mathbf{W}}_i^{n+1}}{2}. \quad (2.32)$$

Dans le cas de l'utilisation du modèle simplifié, la condition absorbante que nous utiliserons est la suivante :

$$\hat{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_{b_k}^n = \left| \hat{\mathbb{P}}_{ik}^i \right| \vec{\mathbf{W}}_{b_i}^{n-1}. \quad (2.33)$$

Cette condition est parfaitement définie car même si $\hat{\mathbb{P}}_{ik}^i$ n'est pas symétrique, elle est diagonalisable.

2.4.3.3 Proposition de conditions aux limites absorbantes pour un écoulement non uniforme d'approximation non constante par cellule

La question évidente qui se pose lorsque l'écoulement n'est plus constant par cellule et lorsque nous désirons utiliser les mêmes conditions que (2.31) et (2.32) dans le cadre du système (2.12) est celle du sens donné à $\sqrt{\mathbb{A}_0^i} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \right| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1}$ sur l'interface a_{ik} lorsque les coefficients des différentes matrices de cette expression sont approchés de manière non constante. Une méthode simple consisterait à approcher la matrice symétrique non constante $\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}$ sur l'interface a_{ik} par une matrice symétrique constante.

Nous ne développerons pas plus les questions portant sur une approximation non constante par cellule d'un écoulement, en effet nous n'avons pu par manque de temps exploiter de manière détaillée cette idée. Nous avons cherché au niveau de l'écriture du schéma, de la construction d'une condition réfléchissante et d'une condition absorbante à illustrer comment les choix que nous avons faits dans le cas d'une approximation constante par élément de l'écoulement pouvait facilement s'étendre à ce contexte plus complexe. Cependant nous avons présenté des embryons d'idées que nous n'avons pu décortiquer de manière théorique ou tester de manière numérique. Il est évident que cette question constitue une perspective intéressante pour la suite de ces travaux.

2.4.4 Condition PML

Comme nous l'avons expliqué, nous nous sommes intéressé aux méthodes PML pour l'aéroacoustique uniquement pour tester la qualité de nos conditions aux limites dans les cas

les plus simples. Ainsi nous allons présenter ici une méthode PML traditionnelle dans le cas de la linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement uniforme en 2D. Revenons à l'équation (1.6) exprimée en deux dimensions d'espace :

$$\frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_u}{\partial t} + \bar{\mathbb{A}}_x^0 \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_u}{\partial x} + \bar{\mathbb{A}}_y^0 \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_u}{\partial y} = \vec{0}. \quad (2.34)$$

Le principe de la méthode PML consiste à splitter les équations dans le sens où chaque variable physique est séparée en deux variables, la première étant associée aux dérivées en x et la deuxième aux dérivées en y , et en ajoutant de plus à chaque équation un terme d'amortissement anisotrope. Plus précisément, nous récrivons (1.6) sous la forme :

$$\begin{cases} \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_{u_1}}{\partial t} + \sigma_x \vec{\mathbf{W}}_{u_1} + \bar{\mathbb{A}}_x^0 \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_u}{\partial x} = \vec{0} \\ \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_{u_2}}{\partial t} + \sigma_y \vec{\mathbf{W}}_{u_2} + \bar{\mathbb{A}}_y^0 \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_u}{\partial y} = \vec{0} \\ \vec{\mathbf{W}}_u = \vec{\mathbf{W}}_{u_1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_2} \end{cases} \quad (2.35)$$

Nous pouvons vérifier que lorsque les coefficients d'amortissement sont nuls nous retrouvons les équations d'Euler linéarisées. Ces coefficients sont introduits dans le but d'absorber les différentes ondes et ce dans une zone en bordure du domaine. De plus leur choix s'avère délicat, en fait il n'existe pas vraiment de lois précises mais plutôt des remarques empiriques issues de la mise en pratique de ces méthodes [47], [42]. Le dessin suivant illustre le type de domaine utilisé.

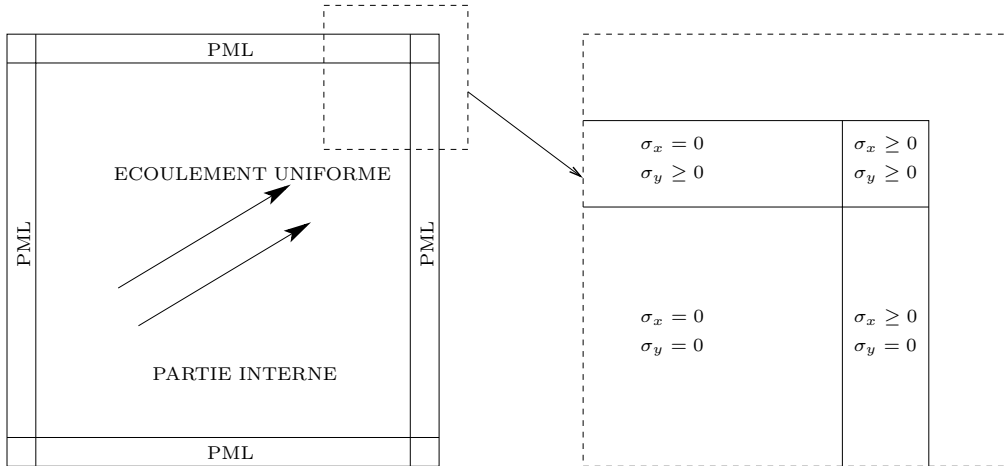


FIG. 2.3 – Schéma type d'un domaine de calcul lors de l'utilisation des PML

La figure illustre les deux types d'interfaces générés par le domaine PML, un premier type d'interfaces entre zone non PML et zone PML et un deuxième type d'interfaces entre zones PML distinctes. Les propriétés remarquables de la méthode PML sont multiples, tout d'abord nous pouvons affirmer qu'à une interface, entre une zone non PML et une zone PML ou entre

deux zones PML, normales à l'axe des abscisses avec les coefficients d'absorptions respectifs (σ_{x1}, σ_y) et (σ_{x2}, σ_y) , la réflexion est nulle et l'onde transmise conserve la même direction et la même amplitude que l'onde incidente et ce indépendamment de l'angle d'incidence et de la fréquence de l'onde. Cette propriété reste évidemment exacte dans le cas d'une interface normale à l'axe des ordonnées séparant deux milieux dont les coefficients d'absorptions respectifs seraient (σ_x, σ_{y1}) et (σ_x, σ_{y2}) .

De plus lorsque σ_x (resp. σ_y) est non nul, l'amplitude des différentes ondes qu'elles soient de nature acoustique, de vorticité ou entropique décroît exponentiellement dans la direction x (resp. dans la direction y). De nombreuses démonstrations de ces résultats existent dans la littérature [47]. Les simplifications apportées par H.L. Atkins [5] consistent à supposer que σ_x et σ_y sont des constantes de mêmes valeurs dans leurs zones respectives, plus précisément il utilise le modèle suivant :

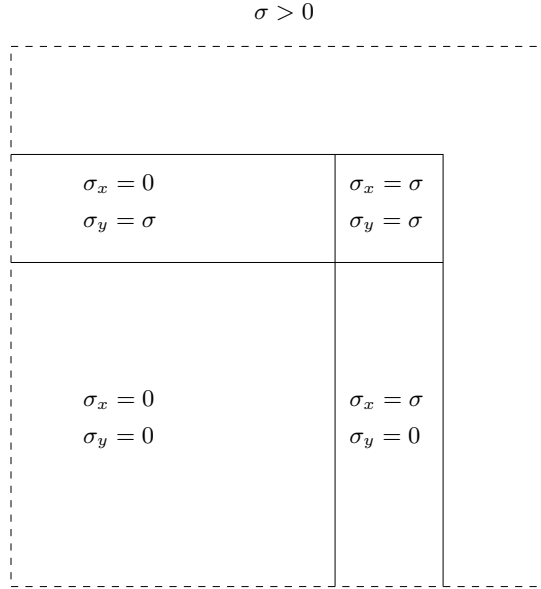


FIG. 2.4 – Schéma type d'un domaine de calcul lors de l'utilisation des PML de H.L. Atkins

Ce modèle a la propriété de très bien s'adapter à l'utilisation d'une méthode de type Galerkin discontinu et de simplifier le système (2.35) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \vec{W}_u}{\partial t} + \bar{A}_x^0 \frac{\partial \vec{W}_u}{\partial x} + \bar{A}_y^0 \frac{\partial \vec{W}_u}{\partial y} = -\sigma_x \vec{W}_u + (\sigma_x - \sigma_y) \vec{W}_{u_2} \\ \frac{\partial \vec{W}_{u_2}}{\partial t} + \bar{A}_y^0 \frac{\partial \vec{W}_u}{\partial y} = -\sigma_y \vec{W}_{u_2} \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Ainsi l'utilisation de cette méthode permet de diminuer la complexité par rapport à la méthode PML traditionnelle puisque nous n'avons plus à introduire qu'une seule nouvelles variable: $\vec{W}_{u_2}$. Nous pouvons aussi remarquer que l'absence de réflexions parasites au niveau de la zone PML sous-entend l'utilisation d'un maillage régulier dans cette zone lorsque les coefficients d'absorptions ne sont pas constants, le fait d'avoir opté pour des coefficients

constants nous permet donc de conserver un maillage quelconque dans la zone PML. Cependant la discontinuité brutale du coefficient d'absorption entre la zone interne et la zone PML sera inévitablement responsable de légères réflexions parasites. Finalement, nous chercherons à comparer nos conditions absorbantes à une méthode PML non optimale.

2.4.4.1 Expression du schéma

Par souci de stabilité, nous utiliserons dans les zones PML un schéma exponentiel. La forme des équations de (2.36) permet d'obtenir un schéma $\mathbb{P}_1$ facile à mettre en oeuvre par rapport à celui que nous avons déjà construit car le traitement du schéma dans la zone non PML reste le même et il est suffisant de connaître l'évolution de la nouvelle variable uniquement dans la zone PML. Nous pouvons, en utilisant une forme scalaire pour l'écriture du schéma Galerkin discontinu, le résumer sous la forme suivante :

$$\text{Zone non PML, } \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{M}^i \frac{\mathbf{W}_{u_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{u_i}^{n-1}}{2\Delta t} = \mathbb{N}^i \mathbf{W}_{u_i}^n - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\mathbb{O}_k^{ii} \mathbf{W}_{u_i}^n + \mathbb{O}_k^{ik} \mathbf{W}_{u_k}^n \right) \\ \mathbb{N}^i = \left[\sum_s \int_{\mathcal{T}_i} {}^t (\partial_{x_s} \vec{\varphi}_{iu}) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\varphi}_{iv} \right]_{1 \leq u, v \leq d_i} \\ \mathbb{O}_c^{ab} = \left[\int_{\tau_{ac}} {}^t \vec{\varphi}_{au} \bar{\mathbb{P}}_{ac}^0 \vec{\varphi}_{bv} \right]_{1 \leq u, v \leq d_i} \end{array} \right. \quad (2.37)$$

$$\sigma_x = \sigma, \sigma_y = 0, \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{W}_{u_i}^{n+1} = \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} e^{-2\sigma\Delta t} + \frac{1 - e^{-2\sigma\Delta t}}{\sigma} \left(\mathbb{K}_i + \sigma \mathbf{W}_{u_{2_i}}^n \right) \\ \mathbb{K}_i = \mathbb{M}_i^{-1} \left(\mathbb{N}_i \mathbf{W}_{u_i}^n - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\mathbb{O}_k^{ii} \mathbf{W}_{u_i}^n + \mathbb{O}_k^{ik} \mathbf{W}_{u_k}^n \right) \right) \\ \mathbf{W}_{u_{2_i}}^{n+1} = \mathbf{W}_{u_{2_i}}^{n-1} + 2\Delta t \tilde{\mathbb{K}}_i \\ \tilde{\mathbb{K}}_i = \tilde{\mathbb{M}}_i^{-1} \left(\tilde{\mathbb{N}}_i \mathbf{W}_{u_i}^n - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\tilde{\mathbb{O}}_k^{ii} \mathbf{W}_{u_i}^n + \tilde{\mathbb{O}}_k^{ik} \mathbf{W}_{u_k}^n \right) \right) \\ \tilde{\mathbb{N}}^i = \left[\int_{\mathcal{T}_i} {}^t (\partial_y \vec{\varphi}_{iu}) \bar{\mathbb{A}}_y^0 \vec{\varphi}_{iv} \right]_{1 \leq u, v \leq d_i} \\ \tilde{\mathbb{O}}_c^{ab} = \left[\int_{\tau_{ac}} {}^t \vec{\varphi}_{au} (\tilde{n}_{ac_y} \bar{\mathbb{A}}_y^0) \vec{\varphi}_{bv} \right]_{1 \leq u, v \leq d_i} \end{array} \right. \quad (2.38)$$

$$\sigma_x = 0, \sigma_y = \sigma, \begin{cases} \mathbf{W}_{u_i}^{n+1} = \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} e^{-2\sigma\Delta t} + \frac{1 - e^{-2\sigma\Delta t}}{\sigma} \left(\mathbb{K}_i + \sigma \left(\mathbf{W}_{u_i}^n - \mathbf{W}_{u_{2i}}^n \right) \right) \\ \mathbf{W}_{u_{2i}}^{n+1} = \mathbf{W}_{u_{2i}}^{n-1} e^{-2\sigma\Delta t} + \frac{1 - e^{-2\sigma\Delta t}}{\sigma} \tilde{\mathbb{K}}_i, \end{cases} \quad (2.39)$$

$$\sigma_x = \sigma_y = \sigma, \begin{cases} \mathbf{W}_{u_i}^{n+1} = \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} e^{-2\sigma\Delta t} + \frac{1 - e^{-2\sigma\Delta t}}{\sigma} \mathbb{K}_i. \end{cases} \quad (2.40)$$

Conclusion

Dans cette partie, nous venons de poser les bases de notre schéma et les choix inhérents à la méthode de type Galerkin discontinu : forme des flux aux interfaces, conditions aux limites... Nous avons construit pour chaque version des équations physiques que nous avons exposée dans le premier chapitre, tous les outils nécessaires à l'élaboration d'un code Galerkin discontinu d'ordre quelconque (le choix de l'espace d'approximation étant libre). Nous avons illustré ces choix dans le cas d'espaces d'approximations polynomiaux de degrés inférieurs ou égaux à 1.

La liberté offerte par cette méthode est quasiment inépuisable. Ainsi, nous avons montré comment le fait de passer d'une approximation de type $\mathbb{P}_0$ à une approximation d'ordre plus élevé pour l'écoulement porteur pouvait s'écrire simplement. Malheureusement, nous n'avons pu, par manque de temps, valider théoriquement et numériquement une telle approche. Les résultats théoriques du chapitre suivant sont consacrés au cas d'un espace d'approximation quelconque des variables aéroacoustiques associées à un caractère uniforme ou $\mathbb{P}_0$ de l'écoulement.

Chapitre 3

Les propriétés de notre schéma

Sommaire

Introduction	51
3.1 Les résultats énergétiques	52
3.1.1 Le cadre uniforme	52
3.1.2 Le cadre non uniforme constant par cellule	56
3.1.3 Condition absorbante implicite	59
3.2 Les résultats de stabilité	60
3.2.1 En uniforme	60
3.2.2 En non uniforme	66
3.2.3 Condition absorbante implicite	70
3.2.4 Majoration de l'énergie semi-discrète	71
Conclusion	73

Introduction

Lorsque nous travaillons sur des maillages non structurés, il est très difficile d'obtenir des conditions de stabilité théoriques. En effet il n'est plus possible d'utiliser des méthodes de type analyse de Fourier. Une des méthodes les plus répandues est de travailler sur des considérations énergétiques, ainsi la conservation ou la décroissance d'une énergie (fonction de Lyapounov) assure la stabilité de notre schéma puisque nécessairement les différentes variables restent bornées. Nous allons donc présenter les résultats théoriques les plus importants de notre méthode puisqu'ils concernent la stabilité des différents schémas que nous avons présentés. Nous allons démontrer plusieurs résultats :

- Notre schéma pour un écoulement uniforme, sans hypothèses sur l'espace d'approximation des variables aéroacoustiques, est stable sous une condition de type CFL, il est non-diffusif sur un domaine sans paroi absorbante et notre condition réfléchissante n'influe pas sur le bilan énergétique.
- Notre schéma pour un écoulement non uniforme approché de manière $\mathbb{P}_0$, sans hypothèses sur l'espace d'approximation des variables aéroacoustiques, permet de quantifier sous une condition de type CFL les échanges énergétiques entre les données

aérodynamiques et acoustiques, nous possédons une estimation énergétique hautement dépendante de la régularité de l'écoulement. Notre condition absorbante permet de diffuser de l'énergie et notre condition réfléchissante n'influe pas sur le bilan énergétique.

Nous aurions pu en première partie de ce chapitre démontrer des résultats analogues pour notre schéma $\mathbb{P}_0$, mais l'intérêt aurait été plutôt limité car ils découlent directement des résultats obtenus de manière générale pour un espace d'approximation de type $\mathbb{P}_{k,k \geq 0}$. Rappelons juste dans le cadre du schéma donné par (2.14) muni des conditions (2.26) et (2.29) les résultats démontrés dans [17] :

En utilisant les notations de (2.15), soit,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^n = & \sum_i V_i \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) \\ & - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} l_{ik} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\mathbb{P}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\mathbb{P}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right), \end{aligned} \quad (3.1)$$

avec l_{ik} alors, $\mathbb{F}^n$ est une suite décroissante, plus précisément :

$$\Delta \mathbb{F} = \mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1} = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} l_{ik} {}^t \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2} \right) |\mathbb{P}_{ik}^0| \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2} \right) \leq 0. \quad (3.2)$$

De plus $\mathbb{F}^n$ est bien une forme quadratique définie positive de toutes les inconnues numériques $(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n, \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1})$ sous la condition de type CFL suivante :

$$\forall i, \forall j \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t < \frac{2V_i}{P_i \left(|\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_{ij}| + c_0 \right)}. \quad (3.3)$$

Enfin, nous ne démontrerons pas de résultats particuliers concernant la convergence de notre méthode, en effet de nombreuses études sur la convergence des méthodes de type Galerkin discontinu existent dans la littérature [45], [35]. Ainsi, nous pourrions démontrer dans le cadre de la linéarisation autour d'un écoulement uniforme, comme cela est détaillé dans [35] pour les équations de Maxwell, que la convergence de notre schéma est d'ordre k en espace et d'ordre 2 en temps pour un espace de solution assez régulier et pour une base d'approximation de type $\mathbb{P}_k$. Dans le cadre de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme, l'étude précise d'un ordre de convergence dépendant également de l'espace d'approximation utilisé pour l'écoulement et de la manière dont cet écoulement a été obtenu semble extrêmement plus complexe et reste un problème ouvert.

3.1 Les résultats énergétiques

3.1.1 Le cadre uniforme

Commençons donc par le cas le plus simple où l'écoulement est uniforme. Ainsi, nous nous intéressons au problème donné par (1.6) :

$$\partial_t \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_x^0 \partial_x \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_y^0 \partial_y \vec{\mathbf{W}}_u + \bar{\mathbb{A}}_z^0 \partial_z \vec{\mathbf{W}}_u = \vec{0},$$

pour lequel nous utilisons le schéma donné par (2.9) sans terme source, (2.19), (2.26) et (2.29) (nous verrons par la suite les modifications qu'apportent la condition absorbante (2.30)). Rappelons juste le système général :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_{u_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{u_i}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j \in \{1, \dots, d_i\}} &= \sum_{s \in \{x, y, z\}} \int_{T_i} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \right). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Définition 3.1.1 *Pour une partition du domaine en volumes finis avec seulement des interfaces réfléchissantes (2.26) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :*

$$\forall i, \mathbb{E}_{u_i}^n = \frac{1}{2} \int_{T_i} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) = \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{W}_{u_i}^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^n + {}^t \mathbf{W}_{u_i}^{n+1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \right), \quad (3.5)$$

$$\mathbb{E}_u^n = \sum_i \mathbb{E}_{u_i}^n. \quad (3.6)$$

Il est loin d'être trivial que cette énergie puisse s'identifier à une fonction de Lyapounov, car elle dépend explicitement du schéma utilisé. Dans la suite, nous allons démontrer que cette énergie se conserve à chaque pas de temps dans le cas de la linéarisation autour d'un écoulement uniforme.

Lemme 3.1.1 *En considérant le schéma donné par (3.4) et (2.26), sous la condition (2.19), l'énergie discrète (3.6) est exactement conservée à chaque pas de temps, c'est à dire :*

$$\mathbb{E}_u^n = \mathbb{E}_u^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}^*. \quad (3.7)$$

Démonstration 3.1.1

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) = \frac{1}{2\Delta t} \sum_i \int_{T_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2} \right),$$

grâce à (3.4),

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) &= \sum_i \int_{T_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n+1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \right), \end{aligned}$$

en sommant suivant les interfaces, nous avons,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) &= \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n+1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \bar{\mathbb{P}}_{ki}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n+1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \right) + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n+1} \bar{\mathbb{P}}_{ki}^0 \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\mathbb{Id} + \mathbb{H}_{ik}) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\mathbb{Id} + \mathbb{H}_{ik}) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n.
 \end{aligned}$$

Or $\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0$ est symétrique et $\bar{\mathbb{P}}_{ki}^0 = -\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0$, donc,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) &= \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\
 &\quad - \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \bar{\mathbb{P}}_{ki}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n+1} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\mathbb{Id} + \mathbb{H}_{ik}) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\mathbb{Id} + \mathbb{H}_{ik}) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n.
 \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) &= \\
 \sum_i \left[\int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} \left({}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \right] & \quad (1) \\
 - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \left(\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik} + {}^t (\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik}) \right) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1}. & \quad (2)
 \end{aligned}$$

Grâce au caractère constant des matrices $\bar{\mathbb{A}}_s^0$, en intégrant par parties nous obtenons (1) = $\vec{0}$, et grâce à la première assertion du lemme 2.4.2 nous avons également (2) = $\vec{0}$. Ainsi nous vérifions bien que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}_u^n = \mathbb{E}_u^{n-1}$.

■

Nous allons à présent nous intéresser aux cas où nous ajoutons à notre domaine des interfaces absorbantes.

Définition 3.1.2 Pour une partition du domaine en volumes finis avec des interfaces absorbantes (2.29) et réfléchissantes (2.26) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :

$$\forall i, \mathbb{F}_{u_i}^n = \mathbb{E}_{u_i}^n - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right), \quad (3.8)$$

$$\mathbb{F}_u^n = \sum_i \mathbb{F}_{u_i}^n. \quad (3.9)$$

Les termes correctifs apportées à $\mathbb{E}_u^n$ ne portent donc que sur les parois absorbantes. Nous allons à présent montrer que l'énergie discrète $\mathbb{F}_u^n$ est décroissante à chaque pas de temps.

Lemme 3.1.2 *En considérant le schéma donné par (3.4), (2.29) et (2.26), sous la condition (2.19), l'énergie discrète totale $\mathbb{F}_u^n$ définie par (3.9) est décroissante à chaque itération. Plus précisément :*

$$\Delta \mathbb{F}_u = \mathbb{F}_u^n - \mathbb{F}_u^{n-1} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}) |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}) \leq 0. \quad (3.10)$$

Démonstration 3.1.2 *Nous avons :*

$$\Delta \mathbb{F}_u = \Delta \mathbb{E}_u - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - 2 {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2} \right),$$

or si nous reprenons la démonstration précédente en tenant compte de la présence des interfaces absorbantes, nous obtenons par le même cheminement et en utilisant (2.29) :

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}_u^n - \mathbb{E}_u^{n-1}) = \sum_i \left[\int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} \left({}^t \partial_s (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + {}^t \partial_s (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n) \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right] \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \left(\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik} + {}^t (\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik}) \right) \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \quad (2)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}. \quad (3)$$

Et comme précédemment (1) et (2) valent $\vec{0}$, nous obtenons donc :

$$\Delta \mathbb{E}_u = -\frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2},$$

ainsi, en utilisant la symétrie de $|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0|$:

$$\Delta \mathbb{F}_u = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}) |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}).$$

Le caractère négatif de cette expression découle directement du caractère positif de la matrice $|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0|$, ce qui achève la démonstration du lemme. ■

Nous allons à présent démontrer des résultats analogues dans le cadre de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme.

3.1.2 Le cadre non uniforme constant par cellule

Revenons à l'équation (1.3) :

$$\partial_t \vec{\mathbf{W}} + \partial_x \left(\mathbb{A}_x^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_y \left(\mathbb{A}_y^0 \vec{\mathbf{W}} \right) + \partial_z \left(\mathbb{A}_z^0 \vec{\mathbf{W}} \right) = \vec{0},$$

pour laquelle nous utilisons le schéma donné par (2.10) sans terme source, (2.20), (2.27) et (2.31) (nous verrons par la suite les modifications qu'apportent la condition absorbante (2.32)). Rappelons juste le système général :

$$\left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j = \sum_{s \in \{x,y,z\}} \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n}{2}. \quad (3.11)$$

Définition 3.1.3 *Pour une partition du domaine en volumes finis avec seulement des interfaces réfléchissantes (2.27) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :*

$$\forall i, \mathbb{E}_i^n = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n + {}^t \vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right), \quad (3.12)$$

$$\mathbb{E}^n = \sum_i \mathbb{E}_i^n, \quad (3.13)$$

avec $\mathbb{A}_0^i$ l'expression de la matrice $\mathbb{A}_0^0$ donnée par (1.12) dans la cellule $\mathcal{T}_i$.

Nous allons à présent démontrer que les variations de $\mathbb{E}$ au cours du temps sont hautement dépendantes de la régularité de l'écoulement.

Lemme 3.1.3 *En considérant le schéma donné par (3.11) et (2.27), sous la condition (2.20), l'énergie discrète (3.13) vérifie l'équation suivante à chaque pas de temps :*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}^n = \mathbb{E}^{n-1} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} \left[\begin{array}{c} {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) \\ + \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^{n-1} \right) \end{array} \right], \quad (3.14)$$

avec,

$$\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i = \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{A}_0^i, \quad \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k = \mathbb{P}_{ik}^k \mathbb{A}_0^k.$$

Démonstration 3.1.3 *Nous avons grâce à la symétrie de $\mathbb{A}_0^i$,*

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}) = \frac{1}{2\Delta t} \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{A}_0^{i-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_0^{i-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^n - \vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} \right),$$

par commodité, posons $\vec{\mathbf{V}}_i = \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i$. En utilisant l'équation (3.11) et le fait que $\mathbb{A}_0^i$ soit constante par cellule, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}) = \\ \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^n \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \right).$$

En sommant suivant les interfaces,

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}) = \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^n \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \quad (1)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ki}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n + \tilde{\mathbb{P}}_{ki}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n \right) \quad (2)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ki}^k \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} + \tilde{\mathbb{P}}_{ki}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right). \quad (4)$$

Or contrairement à l'opérateur $\mathbb{P}$, l'opérateur $\tilde{\mathbb{P}}$ est symétrique (on retrouve ainsi l'intérêt de la formulation symétrique des équations d'Euler). De plus $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i = -\tilde{\mathbb{P}}_{ki}^i$ et $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k = -\tilde{\mathbb{P}}_{ki}^k$. Ainsi nous obtenons :

$$\begin{aligned} (2) + (3) &= - \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ki}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n, \\ &\quad \text{et, } (2) + (3) + (4) = \\ &= - \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1}. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}) = \sum_i \left[\int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x,y,z\}} \left({}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^n \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n \right] \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n \\ & - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} + \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \right) \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n, \end{aligned} \quad (6)$$

grâce à la symétrie et au caractère constant par cellule de $\tilde{\mathbb{A}}_s$, en intégrant par parties nous obtenons (5) = $\vec{0}$. De plus la matrice $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik}$ est antisymétrique sur a_{ik} d'après le lemme 2.4.2, donc (6) = $\vec{0}$. En revenant à la variable $\vec{\mathbf{W}}$, nous obtenons le résultat (3.14).

■

Nous pouvons remarquer que ce terme restant est un analogue discret du terme source $\mathcal{S}$ exprimé par (1.37) dans l'équation (1.36). Nous pouvons également remarquer que les parois réfléchissantes n'influent pas sur le bilan énergétique. Nous allons à présent nous intéresser au cas où nous ajoutons à notre domaine des parois absorbantes.

Définition 3.1.4 *Pour une partition du domaine en volumes finis avec des interfaces absorbantes (2.31) et réfléchissantes (2.27) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :*

$$\forall i, \mathbb{F}_i^n = \mathbb{E}_i^n - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} \left[\begin{array}{c} {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \mathbb{M}_{ik} \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \\ - {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \mathbb{M}_{ik} \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \end{array} \right], \quad (3.15)$$

avec,

$$\mathbb{M}_{ik} = \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}. \quad (3.16)$$

$$\mathbb{F}^n = \sum_i \mathbb{F}_i^n. \quad (3.17)$$

Les termes correctifs apportées à $\mathbb{E}^n$ ne portent donc que sur les interfaces absorbantes.

Lemme 3.1.4 *En considérant le schéma donné par (3.11), (2.31) et (2.27), sous la condition (2.20), l'énergie discrète totale $\mathbb{F}^n$ définie par (3.17) vérifie le résultat suivant :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1}) = & \quad (3.18) \\ -\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} & {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) + {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^{n-1} \right) \\ -\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} & \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right). \end{aligned}$$

Le premier terme de cette expression est le même que pour le bilan de $\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}$ donné par (3.14). Le second terme est négatif et correspond à l'absorption énergétique due à notre condition aux limites absorbante.

Démonstration 3.1.4 *En ajoutant des interfaces absorbantes, on peut récrire le bilan concernant $\mathbb{E}$ sous la forme :*

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{E}^n - \mathbb{E}^{n-1}) = & (1) + (2) + (3) + (4) \\ -\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} & {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} \right). \quad (7) \end{aligned}$$

Or,

$$\Delta \mathbb{F} = \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1}) = \Delta \mathbb{E} - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n - 2 {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2}.$$

Ainsi, en regroupant les termes portant sur les interfaces absorbantes et en utilisant les mêmes résultats que pour le bilan portant sur $\mathbb{E}$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1}) = \\ & -\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \vec{\mathbf{V}}_i^n \\ & -\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t (\vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{V}}_i^n) \mathbb{M}_{ik} (\vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{V}}_i^n), \end{aligned}$$

ce qui correspond aux résultats du lemme en revenant aux variables initiales. ■

3.1.3 Condition absorbante implicite

Nous allons à présent donner plusieurs résultats sans démonstrations car elles seraient très proches de celles que nous venons de voir dans le cas de l'utilisation de la condition absorbante en uniforme (2.29) ou non uniforme (2.31).

Définition 3.1.5 Dans le cadre uniforme, pour une partition du domaine en volumes finis avec des interfaces absorbantes (2.30) et réfléchissantes (2.26) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \forall i, \tilde{\mathbb{F}}_{u_i}^n &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} ({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\mathbb{P}_{ik}^0| (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1}), \\ \tilde{\mathbb{F}}_u^n &= \sum_i \tilde{\mathbb{F}}_{u_i}^n. \end{aligned} \tag{3.19}$$

Définition 3.1.6 Dans le cadre non uniforme constant par cellule, pour une partition du domaine en volumes finis avec des conditions absorbantes (2.32) et réfléchissantes (2.27) aux bords du domaine, nous considérons dans chaque cellule et sur l'ensemble du domaine l'énergie suivante :

$$\begin{aligned} \forall i, \tilde{\mathbb{F}}_i^n &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} ({}^t \vec{\mathbf{W}}_i^n \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n + {}^t \vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}) \\ &+ \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t (\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}) \mathbb{M}_{ik} (\mathbb{A}_0^{i-1} (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n+1})), \\ \tilde{\mathbb{F}}^n &= \sum_i \tilde{\mathbb{F}}_i^n. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Lemme 3.1.5 En considérant le schéma donné par (3.4), (2.30) et (2.26), sous la condition (2.19), l'énergie discrète totale $\tilde{\mathbb{F}}_u^n$ définie par (3.20) est décroissante à chaque itération. Plus précisément :

$$\tilde{\mathbb{F}}_u^n - \tilde{\mathbb{F}}_u^{n-1} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}) |\mathbb{P}_{ik}^0| (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-2}) \leq 0. \tag{3.23}$$

Lemme 3.1.6 *En considérant le schéma donné par (3.11), (2.32) et (2.27), sous la condition (2.20), l'énergie discrète totale $\tilde{\mathbb{F}}^n$ définie par (3.22) vérifie le résultat suivant :*

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{F}}^n - \tilde{\mathbb{F}}^{n-1} = & \quad (3.24) \\ -\frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}}^t & \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) + \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) (\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^{n-1} \right) \\ -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t & \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right). \end{aligned}$$

3.2 Les résultats de stabilité

3.2.1 En uniforme

Dans l'optique d'obtenir une condition de stabilité pour notre schéma, nous allons démontrer que notre énergie discrète $\mathbb{E}_u^n$, sous une condition de stabilité portant sur Δt , est une forme quadratique définie positive des inconnues numériques $(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}, \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n)$. Commençons par donner certaines définitions.

Définition 3.2.1 $\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$, nous notons $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}$ la norme $\mathcal{L}^2$ du vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ sur $\mathcal{T}_i$, c'est-à-dire $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|^2$. La même notation sera utilisée pour la norme $\mathcal{L}^2$ d'un vecteur sur une interface a_{ik} .

Définition 3.2.2 Nous supposons une certaine régularité des fonctions de base $\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i$. Plus précisément, nous supposons que sur chaque volume $\mathcal{T}_i$, il existe des constantes sans dimension α_i et β_{ik} ($k \in \mathcal{V}_i$), indépendantes de la taille de l'élément, telles que :

$$\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \forall s \in \{x, y, z\}, \quad \|\partial_s \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i} \leq \frac{\alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}, \quad (3.25)$$

$$\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 \leq \frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2. \quad (3.26)$$

Définition 3.2.3 Grâce à la symétrie des matrices $\bar{\mathbb{A}}_s^0$, nous rappelons le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \forall s \in \{x, y, z\}, \\ \|\bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \int_{\mathcal{T}_i} \|\bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{X}}\|^2 \leq \rho(\bar{\mathbb{A}}_s^0)^2 \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|^2 = \rho(\bar{\mathbb{A}}_s^0)^2 \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2, \end{aligned}$$

avec ρ le rayon spectral. Nous noterons :

$$\lambda = \sum_s \rho(\bar{\mathbb{A}}_s^0) = |u_0| + |v_0| + |w_0| + 3c_0, \quad \rho_{ik} = \rho(\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0) = |\vec{V}_0 \cdot \vec{n}_{ik}| + c_0.$$

Lemme 3.2.1 *En utilisant le schéma défini par (3.4) et (2.26), et les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète $\mathbb{E}_{u_i}^n$ définie par (3.5) vérifie :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u_i}^n \geq & \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \\ & - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.27)$$

En considérant dans cette expression que si a_{ik} est une interface réfléchissante, alors par convention :

$$\|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k} = \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}, \quad \beta_{ki} = \beta_{ik}, \quad V_k = V_i.$$

Démonstration 3.2.1 *Nous avons :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u_i}^n &= \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{W}_{u_i}^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^n + {}^t \mathbf{W}_{u_i}^{n+1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{W}_{u_i}^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^n + {}^t \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \right) + \Delta t \mathbb{X}_{u_i}^n, \text{ avec,} \\ \mathbb{X}_{u_i}^n &= \frac{1}{2} {}^t \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \mathbb{M}^i \left(\mathbf{W}_{u_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \right) \\ &= \int_{\mathcal{T}_i} \sum_s {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \frac{\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n}{2} \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_s \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n. \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} |\mathbb{X}_{u_i}^n| &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_s \left| \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) \right| + \sum_s \left| \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \right| \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left| \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \right| \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \left(\sum_s \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right)\|_{\mathcal{T}_i} + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \|\bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right)\|_{\mathcal{T}_i} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{a_{ik}} \right) \\ &\leq \frac{\alpha_i P_i \lambda}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} + \frac{1}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \rho_{ik} \left(\frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned}$$

La majoration de la somme sur les interfaces voisines est à détailler car en effet si elle semble ne faire intervenir que l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, il faut regarder de plus près les termes pour lesquels $\mathcal{T}_k$ est une cellule fictive. En effet si $k \in \mathcal{V}_i$ et a_{ik} est une interface réfléchissante :

$$\|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{a_{ik}} \leq \rho_{ik} \|\mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}} \underbrace{=}_{t\mathbb{H}_{ik}\mathbb{H}_{ik}=Id} \rho_{ik} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}} \leq \frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i},$$

et en utilisant les conventions du lemme 3.2.1 :

$$\|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{a_{ik}} \leq \frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \underbrace{=}_{\text{par convention}} \frac{\rho_{ik}\beta_{ki}\|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{T}_k}.$$

Finalement,

$$|\mathbb{E}_{u_i}^n| \geq \frac{1}{2} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{1}{2} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \Delta t |\mathbb{X}_{u_i}^n|,$$

et le fait que $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ donne le résultat du lemme. ■

Lemme 3.2.2 En utilisant le schéma défini par (3.4) et (2.26), et les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète $\mathbb{E}_u^n$ définie par (3.5) est une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}, \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n)$ si :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \quad (3.28)$$

Démonstration 3.2.2 D'après le lemme précédent, nous avons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u_i}^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left(\frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\rho_{ki}\beta_{ki}\|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Ce que l'on peut récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u_i}^n &\geq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \|\vec{n}_{ik}\| \left(\frac{1}{2P_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{u_i}^n &\geq \\ &\sum_{k \in \mathcal{V}_i} \|\vec{n}_{ik}\| \left(\left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i \lambda \Delta t}{2V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right. \end{aligned}$$

$$+ \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \Big).$$

En sommant suivant les interfaces et en utilisant les notations du lemme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_u^n &\geq \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \|\vec{n}_{ik}\| Y_{ik} + \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \|\vec{n}_{ik}\| Z_{ik}, \text{ avec,} \\ Y_{ik} &= \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) + \\ &\quad \left(\frac{1}{2P_k} - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k} - \frac{\alpha_k\lambda\Delta t}{2V_k} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right), \\ Z_{ik} &= \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement, l'énergie $\mathbb{E}^n$ est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda\Delta t}{2V_i} > 0,$$

ce qui donne le résultat du lemme. ■

Nous en déduisons le résultat principal de cette partie :

Théorème 3.2.1 *En utilisant le schéma défini par (3.4) et (2.26) sur un maillage arbitraire (comportant uniquement aux bords des interfaces réfléchissantes) et les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète $\mathbb{E}_u^n$ définie par (3.5) est conservée au cours des itérations. De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n, \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1})$, assurant ainsi la stabilité $\mathcal{L}^2$ du schéma, si le pas de temps vérifie la condition :*

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

Toujours dans l'optique d'obtenir une condition de stabilité pour notre schéma lorsque nous utilisons des interfaces absorbantes en sortie de domaine, nous allons démontrer que sous une condition portant sur Δt , $\mathbb{F}^n$ est une forme quadratique définie positive des variables $(\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n, \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1})$.

Lemme 3.2.3 *En utilisant le schéma défini par (3.4), (2.26) et (2.29), et les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète $\mathbb{F}_{u_i}^n$ définie par (3.8) vérifie :*

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_{u_i}^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left(\frac{\rho_{ik}\beta_{ik}\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\rho_{ki}\beta_{ki}\|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right). \end{aligned} \tag{3.29}$$

En considérant dans cette expression que si a_{ik} est une interface réfléchissante ou absorbante, alors par convention :

$$\|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{I}_k} = \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}, \quad \beta_{ki} = \beta_{ik}, \quad V_k = V_i.$$

Démonstration 3.2.3 *La démonstration est analogue à la démonstration 3.2.1, nous avons :*

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{u_i}^n &= \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{W}_i^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^n + {}^t \mathbf{W}_i^{n-1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_i^{n-1} \right) + \Delta t \mathbb{X}_i^n - \Delta t \mathbb{Y}_i^n, \text{ avec,} \\
 \mathbb{Y}_i^n &= \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right), \\
 \mathbb{X}_i^n &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_s \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_s \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}.
 \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}
 \mathbb{F}_{u_i}^n &= \frac{1}{2} \left({}^t \mathbf{W}_{u_i}^n \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^n + {}^t \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \mathbb{M}^i \mathbf{W}_{u_i}^{n-1} \right) \\
 &\quad + \frac{\Delta t}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_s \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \right) - {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \left(\partial_{x_s} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right) \right) \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} \left({}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n |\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0| \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \right), \\
 \mathbb{F}_{u_i}^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{T}_i} \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho_{ik} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{a_{ik}} - \frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \rho_{ik} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}} \\
 &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \rho_{ik} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{a_{ik}}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}}^2 \right),
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \rho(|\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0|) = \rho(\bar{\mathbb{P}}_{ik}^0) = \rho_{ik} \text{ et } \|\mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}} = \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{a_{ik}}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{u_i}^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho_{ik} \left(\frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \rho_{ik} \left(\frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \rho_{ik} \left(\frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right),
\end{aligned}$$

et en utilisant les conventions données dans le lemme, on obtient,

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}_{u_i}^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n\|_{\mathcal{I}_i} \\
&\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \rho_{ik} \left(\frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right),
\end{aligned}$$

le fait que $\rho_{ik} = \rho_{ki}$ nous donne le résultat du lemme. ■

Lemme 3.2.4 En utilisant le schéma défini par (3.4), (2.26) et (2.29), et les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète totale $\mathbb{F}_u^n$ définie par (3.9) est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si,

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \quad (3.30)$$

Démonstration 3.2.4 La démonstration est identique à celle du lemme 3.2.2 en utilisant les résultats et les notations du lemme 3.2.3. ■

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3.2.2 En utilisant le schéma défini par (3.4), (2.26) et (2.29) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3, l'énergie discrète $\mathbb{F}_u^n$ définie par (3.9) est une suite décroissante. De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_{u_i}^n, \mathbf{W}_{u_i}^{n-1})$, assurant ainsi la stabilité $\mathcal{L}^2$ du schéma, si le pas de temps vérifie la condition :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

3.2.2 En non uniforme

Dans l'optique d'obtenir une estimation énergétique pour notre schéma, nous allons directement démontrer que notre énergie discrète avec termes correctifs $\mathbb{F}^n$, sous une condition de stabilité portant sur Δt , est une forme quadratique définie positive des inconnues numériques $(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}, \vec{\mathbf{W}}_i^n)$ (la démonstration du même résultat pour $\mathbb{E}^n$ en découle directement) Commençons par donner certaines définitions.

Définition 3.2.4 $\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$, nous noterons $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}$ la norme $\mathcal{L}^2$ du vecteur $\vec{\mathbf{X}}$ sur $\mathcal{T}_i$, c'est-à-dire $\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \int_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|^2 = \langle \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{X}} \rangle_{\mathcal{T}_i}$ (ces mêmes notations étant étendues pour la norme et le produit scalaire sur une interface a_{ik}). Grâce au caractère symétrique défini positif de la matrice $\mathbb{A}_0^i$, nous utiliserons également les notations :

$$\|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{X}} \mathbb{A}_0^i {}^{-1} \vec{\mathbf{X}} = \ll \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{X}} \gg_{\mathcal{T}_i},$$

$$\|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 = \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{X}} \mathbb{A}_0^i {}^{-1} \vec{\mathbf{X}} = \ll \vec{\mathbf{X}}, \vec{\mathbf{X}} \gg_{a_{ik}}.$$

Nous pouvons alors remarquer que $\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$, $\|\sqrt{\mathbb{A}_0^i} {}^{-1} \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i} = \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}$ et $\|\sqrt{\mathbb{A}_0^i} {}^{-1} \vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}} = \|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}$.

Définition 3.2.5 Nous supposons une certaine régularité des fonctions de base $\vec{\varphi}_{ij}$, $1 \leq j \leq d_i$. Plus précisément, nous supposons que sur chaque volume $\mathcal{T}_i$, il existe des constantes sans dimension α_i et β_{ik} ($k \in \mathcal{V}_i$), indépendantes de la taille des éléments, telles que :

$$\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \forall s \in \{x, y, z\}, \|\partial_s \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i} \leq \frac{\alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}, \quad (3.31)$$

$$\forall \vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i), \forall a_{ik} \in \mathcal{F}, \|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 \leq \frac{\beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2, \quad (3.32)$$

remarquons que vérifier ces deux inégalités par rapport à $\|\cdot\|$ est équivalent à les vérifier par rapport à $\|\cdot\|_{\mathcal{T}_i}$.

Définition 3.2.6 Nous noterons,

$$\vec{\mathbf{Z}}_i^n = \sqrt{\mathbb{A}_0^i} {}^{-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n, \quad \lambda^i = \sum_s \rho(\mathbb{A}_s^i) = |u_0^i| + |v_0^i| + |w_0^i| + 3c_0^i,$$

$$\rho_{ik} = \begin{cases} \sup \left(\rho(\mathbb{P}_{ik}^k) \sqrt{\rho(\mathbb{A}_0^k \mathbb{A}_0^{i-1})}, \rho(\mathbb{P}_{ik}^i) \sqrt{\rho(\mathbb{A}_0^i \mathbb{A}_0^{k-1})} \right), & \forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}} \\ \rho(\mathbb{P}_{ik}^i) = |\vec{V}_0^i \cdot \vec{n}_{ik}| + c_0^i, & \forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}} \cup \mathcal{F}^{\text{abs}} \end{cases}$$

Les propriétés de notre schéma

Nous pouvons remarquer que $\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}, \rho_{ik} = \rho_{ki}$. Toujours par convention nous noterons dans le cas où a_{ik} est une interface réfléchissante ou absorbante avec k l'indice d'une cellule fictive,

$$\|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k} = \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}, \quad \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k} = \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}, \quad \beta_{ki} = \beta_{ik}, \quad V_k = V_i, \quad \rho_{ki} = \rho_{ik}.$$

Commençons par démontrer le résultat intermédiaire suivant :

Lemme 3.2.5 *En utilisant le schéma défini par (3.11), (2.27) et (2.31) et les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie discrète $\mathbb{F}_i^n$ définie par (3.15) vérifie :*

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda^i \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \vartheta_i} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Démonstration 3.2.5 *Nous avons :*

$$\mathbb{F}_i^n = \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) + \Delta t \mathbb{X}_i^n,$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_i^n &= \frac{1}{2\Delta t} \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \mathbb{A}_0^{i-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n+1} - \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \mathbb{M}_{ik} \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) - {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \mathbb{M}_{ik} \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right), \\ \mathbb{X}_i^n &= \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \right) \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n - {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1}, \\ \mathbb{X}_i^n &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} \left({}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n - {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \partial_s \vec{\mathbf{V}}_i^n \right) - \frac{1}{2} \sum_{k \in \vartheta_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \\ &\quad - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n - {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1}, \\ \mathbb{X}_i^n &= \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} \left({}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n - {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \partial_s \vec{\mathbf{V}}_i^n \right) - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1}, \end{aligned}$$

$$\mathbb{X}_i^n = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \right) \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i^n - {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \partial_s \left(\vec{\mathbf{Z}}_i^n \right) \quad (1)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_k^n \quad (2)$$

$$- \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \mathbb{H}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i^n \quad (3)$$

$$- \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^n \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \vec{\mathbf{Z}}_i^n. \quad (4)$$

- La matrice $\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1}$ est symétrique, de plus,

$$\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right) = \rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{A}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right) = \rho \left(\mathbb{A}_s^i \right),$$

donc en utilisant les définitions,

$$|(1)| \leq \frac{\lambda_i \alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{Z}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i} = \frac{\lambda_i \alpha_i P_i}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}.$$

- La matrice $\sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1}$ est symétrique, de plus,

$$\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \right) = \rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \right) = \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^k \right),$$

donc,

$$|(2)| \leq \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^k \right) \sqrt{\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k} \mathbb{A}_0^{i-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \right)} \|\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{Z}}_k^n\|_{a_{ik}},$$

or,

$$\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k} \mathbb{A}_0^{i-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \right) = \rho \left(\mathbb{A}_0^k \mathbb{A}_0^{i-1} \right),$$

d'où,

$$|(2)| \leq \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^k \right) \sqrt{\rho \left(\mathbb{A}_0^k \mathbb{A}_0^{i-1} \right)} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{a_{ki}}.$$

- Les matrices $\mathbb{A}_0^i$ et $\mathbb{H}_{ik}$ commutent et $\mathbb{H}_{ik}^2 = \mathbb{I}d$, d'où,

$$\sqrt{\rho \left(\left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i} \mathbb{H}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right) \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i} \mathbb{H}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right) \right)} = 1,$$

ainsi ,

$$|(3)| \leq \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \|\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{Z}}_i^n\|_{a_{ik}} = \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{a_{ik}}.$$

- La matrice $\left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right|$ est symétrique, de plus,

$$\rho \left(\left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \right) = \rho \left(\left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \mathbb{P}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \right) = \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right),$$

donc,

$$\begin{aligned} |(4)| &\leq \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \left(\|\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}}^2 + \|\vec{\mathbf{Z}}_i^n\|_{a_{ik}}^2 \right) \\ &= \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{a_{ik}}^2 \right). \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, la définition 3.2.5, la définition 3.2.6 et l'inégalité $\mathbb{F}_i^n \geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) - \Delta t |\mathbb{X}_i^n|$, nous obtenons le résultat intermédiaire souhaité. ■

Lemme 3.2.6 En utilisant le schéma défini par (3.11), (2.27) et (2.31) et les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ définie par (3.17) est une forme quadratique définie positive de toutes les variables si :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

Démonstration 3.2.6 Repartons du précédent résultat :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda^i \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right), \end{aligned}$$

ce que l'on peut récrire sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n &\geq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \|\vec{n}_{ik}\| \left(\frac{1}{2P_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik} \rho_{ik} \Delta t}{4V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\alpha_i \lambda^i \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i} - \frac{\beta_{ki} \rho_{ki} \Delta t}{4V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right), \end{aligned}$$

d'où,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n &\geq \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \|\vec{n}_{ik}\| \left(\left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\alpha_i \lambda^i \Delta t}{2V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{I}_i}^2 + \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik} \rho_{ik} \Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i \lambda^i \Delta t}{2V_i} \right) \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{I}_i}^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\beta_{ki} \rho_{ki} \Delta t}{4V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{I}_k}^2 \right). \end{aligned}$$

Finalement,

$$\mathbb{F}^n \geq \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \|\vec{n}_{ik}\| Y_{ik} + \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}} \cup \mathcal{F}^{\text{abs}}} \|\vec{n}_{ik}\| Z_{ik}, \quad \text{avec,}$$

$$\begin{aligned}
 Y_{ik} &= \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda^i\Delta t}{2V_i} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{T_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{T_i}^2 \right) + \\
 &\quad \left(\frac{1}{2P_k} - \frac{\beta_{ki}\rho_{ki}\Delta t}{4V_k} - \frac{\alpha_k\lambda^k\Delta t}{2V_k} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{T_k}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_k^{n-1}\|_{T_k}^2 \right), \\
 Z_{ik} &= \left(\frac{1}{2P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{4V_i} - \frac{\alpha_i\lambda^i\Delta t}{2V_i} \right) \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{T_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{T_i}^2 \right).
 \end{aligned}$$

L'énergie $\mathbb{F}^n$ est donc bien une forme quadratique définie positive de toutes les variables si :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \frac{1}{P_i} - \frac{\beta_{ik}\rho_{ik}\Delta t}{2V_i} - \frac{\alpha_i\lambda^i\Delta t}{V_i} > 0,$$

ce qui achève la démonstration. ■

Nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 3.2.3 *En utilisant le schéma défini par (3.11), (2.27) et (2.31) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ définie par (3.17) vérifie l'équation (3.18). De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_i^{n-1})$, si le pas de temps vérifie la condition :*

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \quad (3.34)$$

3.2.3 Condition absorbante implicite

Les résultats obtenus lors de l'utilisation de la condition absorbante implicite sont très proches de ceux de la partie précédente.

Théorème 3.2.4 *En utilisant le schéma défini par (3.4), (2.26) et (2.30) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 et en tenant compte de la modification suivante :*

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}, \quad \rho_{ik} = 0,$$

l'énergie discrète $\tilde{\mathbb{F}}_u^n$ définie par (3.20) est une suite décroissante. De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_{u_i}^n, \mathbf{W}_{u_i}^{n-1})$, assurant ainsi la stabilité $\mathcal{L}^2$ du schéma, si le pas de temps vérifie la condition :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

Théorème 3.2.5 *En utilisant le schéma défini par (3.11), (2.27) et (2.32) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6 et en tenant compte de la modification suivante :*

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}, \quad \rho_{ik} = 0,$$

l'énergie discrète $\tilde{\mathbb{F}}^n$ définie par (3.22) vérifie l'équation (3.24). De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_i^{n-1})$, si le pas de temps vérifie la condition :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}. \quad (3.35)$$

3.2.4 Majoration de l'énergie semi-discrète

Comme nous l'avons déjà expliqué, il est physiquement cohérent lors de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme de ne pas obtenir la conservation d'une énergie aéroacoustique. Ce résultat détaillé en continu dans la partie 1.4 s'exprime au niveau de notre schéma par le biais du théorème 3.2.3. L'apparition possible de modes instables en temps au sein des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement non uniforme nous a guidés dans notre recherche de majoration pour l'énergie. Ainsi, dans la partie 1.4, nous avons démontré une majoration de notre énergie par un terme exponentiel en temps.

Nous nous sommes alors investis dans la recherche d'un résultat similaire en discret pour notre schéma. Notre schéma en temps nous a restreint dans cette approche et nous avons réussi à obtenir des résultats intéressants uniquement pour une approche semi-discrète (continue en temps, discrète en espace).

Nous allons présenter dans cette partie ces différents résultats. Nous supposons que le domaine de résolution $\Omega \times [0, T]$ est infini en espace, et que nous utilisons un maillage quelconque ne comportant que des interfaces réfléchissantes aux bords éventuels du domaine. Considérons alors sur ce maillage le schéma semi-discrète défini par (2.6) et par (2.27) :

$$\left(\int_{\mathcal{T}_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_i}{\partial t} = \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k}{2} \right)_{1 \leq j \leq d_i},$$

$$\forall a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}, \text{ avec } \mathcal{T}_k \text{ cellule fictive, } \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k = \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{W}}_i.$$

Considérons $\mathbb{E}(t)$ l'énergie semi-discrète suivante :

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}(t) = \frac{1}{2} \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_i \mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i. \quad (3.36)$$

Nous allons alors démontrer le résultat suivant :

Lemme 3.2.7 *En utilisant les définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie semi-discrète $\mathbb{E}(t)$ définie par (3.36) vérifie l'inégalité suivante :*

$$\forall t \in [0, T], \quad \mathbb{E}(t) \leq \mathbb{E}(0) e^{\alpha t}, \text{ avec,} \quad (3.37)$$

$$\alpha = \sup_{a_{ik} \in \mathcal{F}} \left(\frac{P_i}{2V_i} \rho_{ik} \beta_{ik} \right). \quad (3.38)$$

Démonstration 3.2.7 Nous avons $\forall t \in [0, T]$,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbb{E}(t)) &= \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} {}^t \vec{\mathbf{W}}_i \mathbb{A}_0^{i-1} \frac{\partial \vec{\mathbf{W}}_i}{\partial t} \\
 &= \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i \right) \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i - \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i \right) \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k}{2} \\
 &= \sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \vec{\mathbf{V}}_k \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_k \tilde{\mathbb{P}}_{ki}^k \vec{\mathbf{V}}_k + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k \tilde{\mathbb{P}}_{ki}^i \vec{\mathbf{V}}_i - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i \\
 &= \underbrace{\sum_i \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i}_{(1)} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i.
 \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en utilisant la symétrie des matrices $\tilde{\mathbb{A}}_s^i$, nous obtenons $(1) = \vec{0}$.
Finalement,

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}(\mathbb{E}(t)) &= -\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_k \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i \\
 &\quad - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{Z}}_i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \mathbb{H}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i.
 \end{aligned}$$

En utilisant les mêmes majorations que dans la démonstration du résultat intermédiaire

(3.33), nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbb{E}(t)) &\leq \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho(\mathbb{P}_{ik}^k) \sqrt{\rho(\mathbb{A}_0^k \mathbb{A}_0^{k-1})} \|\vec{\mathbf{Z}}_i\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{Z}}_k\|_{a_{ik}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \rho(\mathbb{P}_{ik}^i) \sqrt{\rho(\mathbb{A}_0^i \mathbb{A}_0^{i-1})} \|\vec{\mathbf{Z}}_i\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{Z}}_k\|_{a_{ik}} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \rho(\mathbb{P}_{ik}^i) \|\vec{\mathbf{Z}}_i\|_{a_{ik}}^2. \end{aligned}$$

En utilisant les définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, et l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbb{E}(t)) &\leq \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\vec{n}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phys}}} \frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2, \\ \frac{d}{dt}(\mathbb{E}(t)) &\leq \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \leq \frac{1}{2} \sum_i \frac{P_i}{V_i} \sup_{k \in \mathcal{V}_i} (\rho_{ik} \beta_{ik}) \|\vec{\mathbf{W}}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 \\ &\leq \frac{1}{2} \sup_i \left(\frac{P_i}{V_i} \sup_{k \in \mathcal{V}_i} (\rho_{ik} \beta_{ik}) \right) \sum_i \|\vec{\mathbf{W}}_i\|_{\mathcal{T}_i}^2 = \alpha \mathbb{E}(t). \end{aligned}$$

En intégrant par parties sur $[0, t]$, $\forall t \in [0, T]$ et en appliquant le lemme de Gronwall, nous obtenons le résultat souhaité. ■

Ce lemme nous permet ainsi d'affirmer que notre schéma en espace conserve la propriété d'une majoration de type exponentielle en temps de l'énergie que nous avons démontrée en continu (1.39). Nous n'avons pas réussi à étendre ce résultat pour le schéma saute-mouton en temps. Cependant, nous avons numériquement constaté ce caractère exponentiel en temps des instabilités sur tous les cas tests instables que nous avons soumis à notre schéma. La preuve théorique restant un problème ouvert.

Conclusion

Dans cette partie nous nous sommes attachés à démontrer les propriétés théoriques de notre schéma. Dans bon nombre de méthodes numériques en maillages non structurés, la condition de stabilité est extrapolée de celle connue en maillage structuré, ce qui peut se révéler parfois drastique, parfois insuffisant et en tout cas souvent douteux. Ainsi, nous avons cherché dans la plupart des cas de figure que nous avons développés au sein de notre code

(écoulement porteur uniforme ou non, choix des conditions absorbantes, choix des conditions réfléchissantes, prise en charge des instabilités...) à avoir un contrôle sur une énergie et si possible de connaître une condition explicite de stabilité. Nous pouvons résumer les différents résultats obtenus dans cette partie par les points suivants :

- Dans le cas de la linéarisation autour d'un écoulement uniforme pour une base d'approximation d'ordre quelconque des variables aéroacoustiques :
 - Nous possédons un schéma non diffusif (conservation d'une énergie en domaine infini sans parois absorbantes).
 - Notre condition réfléchissante n'influe pas sur le bilan énergétique.
 - Nous possédons une estimation explicite de l'impact de nos deux conditions absorbantes sur le bilan énergétique.
 - Notre schéma est stable sous une condition de type CFL.
- Dans le cas de la linéarisation autour d'un écoulement non uniforme approché de manière $\mathbb{P}_0$ pour une approximation d'ordre quelconque des variables aéroacoustiques :
 - Nous possédons une estimation des échanges énergétiques entre les champs aérodynamique et aéroacoustique.
 - Notre condition réfléchissante n'influe pas sur le bilan énergétique.
 - Nous possédons une estimation explicite de l'impact de nos deux conditions absorbantes sur le bilan énergétique.
 - Dans le cas de la présence d'instabilités de type de Kelvin-Helmholtz, nous possédons en semi-discret une majoration explicite de la croissance exponentielle en temps de l'énergie analogue à celle obtenue en continu.

Les résultats obtenus pour la linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement non uniforme sont évidemment moins satisfaisants que ceux obtenus pour un écoulement porteur uniforme (absence de condition de stabilité et même présence possible d'instabilités exponentielles en temps). Mais ces résultats nous ont permis d'avancer dans la recherche d'un traitement numérique permettant "d'étouffer" les instabilités et assurant une condition de stabilité. Nous présenterons ces résultats dans le chapitre suivant.

Chapitre 4

Validation de notre méthode

Sommaire

Introduction	75
4.1 Condition de stabilité	76
4.2 Cas tests de validation en écoulement uniforme	79
4.2.1 Cas test 1 : Un instationnaire périodique	79
4.2.2 Cas test 2 : cas test de Tam-Webb	83
4.2.3 Cas test 3 : condition réfléchissante	92
4.2.4 Conclusion	97
4.3 Cas test de validation en écoulement non uniforme	98
4.3.1 Cas test 1 : Workshop	98
4.3.2 Conclusion	103
4.4 Instabilités de Kelvin-Helmholtz en 2D	103
4.4.1 Introduction	103
4.4.2 Cas test académique	104
4.4.3 Traitement des instabilités par ajout d'un terme source discret	105
4.4.4 Cas test cisailé affine	110
4.4.5 Cas test avec instabilités	117
4.4.6 Problème aéroacoustique autour d'une coupe d'aile 2D de type NACA	119
4.4.7 Conclusion	123
Conclusion	129

Introduction

On se propose dans cette partie de valider sur des cas tests 2D plus ou moins académiques les différentes caractéristiques de la méthode et les différents schémas présentés dans le deuxième chapitre. Avant de construire un code 3D parallèle, il était important de vérifier le bon comportement global de la méthode. Ainsi, de nombreux cas tests 2D ont été réalisés au cours de la thèse, ceux présentés ici nous ont semblé pertinents pour la richesse de leurs résultats. Les critères que nous avons cherché à vérifier sont nombreux et variés. Tout d'abord il était important d'estimer la précision de notre schéma et le gain du passage d'une base d'approximation de type $\mathbb{P}_0$ à $\mathbb{P}_1$. Une des difficultés de l'aéroacoustique provient de la nature des

perturbations (entropique, de vorticité ou acoustique) qui ont des caractéristiques différentes. Il était donc capital de vérifier le bon comportement de notre schéma vis-à-vis de cette difficulté. Deux autres points sensibles de l'aéroacoustique sont le traitement des termes sources et les conditions aux limites. En effet, les termes sources sont indispensables à la modélisation de l'interaction entre écoulement et acoustique et les conditions aux limites doivent permettre de gérer la sortie et la réflexion des différents types d'ondes propre à l'aéroacoustique. Nous chercherons également à corroborer les résultats théoriques vus dans la partie précédente. Dans les parties intitulées "Cas tests de validation en écoulement uniforme" et "Cas test de validation en écoulement non uniforme", nous étudierons quatre cas tests dont le tableau 4.1 résume les caractéristiques. Dans la partie intitulée "Instabilités de Kelvin-Helmholtz en 2D", nous nous intéresserons à des cas tests en écoulement non uniforme instables. Nous proposerons une solution aux traitements des instabilités que nous comparerons avec le modèle simplifié. Nous vérifierons également l'impact négligeable de notre traitement sur des cas tests ne présentant pas d'instabilités.

TAB. 4.1 – Particularités des différents cas tests de la partie validation

Caractéristiques	CT1	CT2	CT3	CT4
��coulement porteur uniforme	à	à	à	
��coulement porteur non uniforme				à
Comparaison entre $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$	��	à	à	
Comparaison avec la solution exacte	à	à	à	à
Présence d'un terme source	à			
Bilan énergétique		à	à	
Présence d'interfaces réfléchissantes			��	à
Comparaison entre conditions absorbantes		��	à	à

4.1 Condition de stabilité

Pour pouvoir utiliser les conditions de stabilité qui font l'objet des théorèmes 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5, il est nécessaire d'expliciter les coefficients α_i et β_{ik} introduits dans (3.25) et (3.26) et que l'on retrouve dans (3.31) et (3.32). En utilisant les choix faits pour les fonctions de base et le nombre de degrés de liberté (voir page 38), nous allons démontrer le lemme suivant :

Lemme 4.1.1 *Grâce aux choix faits en 2D sur les fonctions de base et le type de maillage (i.e approximation $\mathbb{P}_1$ et maillages en triangles), les hypothèses des définitions 3.2.2 et 3.2.5 sont vérifiées et plus précisément nous pouvons affirmer qu'elles le sont pour :*

$$\forall i, \quad \alpha_i^2 = \frac{3 \max_{j \in \vartheta_i} \left(\|\vec{n}_{ij}\| \right)}{P_i}. \quad (4.1)$$

$$\forall i, \quad \forall k \in \vartheta_i, \quad \beta_{ik} = 2. \quad (4.2)$$

Démonstration 4.1.1 *D'après les données géométriques et les fonctions de base utilisées (voir page 38), nous avons :*

$$\int_{\mathcal{T}_i} \varphi_{ij} \varphi_{ik} = (1 + \delta_{jk}) \frac{V_i}{12}, \quad (4.3)$$

$$\int_{a_{ik}} \varphi_{ij} \varphi_{il} = (1 - \delta_{kj}) (1 - \delta_{kl}) (1 + \delta_{jl}) \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6}. \quad (4.4)$$

Pour le résultat (4.1), considérons un vecteur $\vec{\mathbf{X}} \in \text{Vect}(\vec{\varphi}_{ij}, 1 \leq j \leq d_i)$, que l'on peut également mettre sous la forme $\vec{\mathbf{X}} = \sum_{j \in \vartheta_i} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \varphi_{ij}$. Nous avons grâce à (4.3) :

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 &= \int_{\mathcal{T}_i} \vec{\mathbf{X}} \cdot \vec{\mathbf{X}} = \frac{V_i}{12} \sum_{j \in \vartheta_i} \sum_{k \in \vartheta_i} (1 + \delta_{jk}) \vec{\mathbf{X}}_{ij} \cdot \vec{\mathbf{X}}_{ik} \\ &= \frac{V_i}{12} \left(\sum_{j \in \vartheta_i} \|\vec{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \left\| \sum_{j \in \vartheta_i} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right\|^2 \right) \geq \frac{V_i}{12} \sum_{j \in \vartheta_i} \|\vec{\mathbf{X}}_{ij}\|^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

de plus,

$$\begin{aligned} \|\partial_s \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 &= \frac{1}{4V_i} \sum_{j \in \vartheta_i} \sum_{k \in \vartheta_i} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \cdot \vec{\mathbf{X}}_{ik} \|\vec{n}_{ij}\| \|\vec{n}_{ik}\| \tilde{n}_{ijs} \tilde{n}_{iks} \\ &= \frac{1}{4V_i} \left(\sum_{j \in \vartheta_i} \|\vec{n}_{ij}\| \tilde{n}_{ijs} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right)^2 = \frac{P_i^2}{4V_i} \left(\sum_{j \in \vartheta_i} \frac{\|\vec{n}_{ij}\|}{P_i} \tilde{n}_{ijs} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right)^2, \end{aligned}$$

et grâce à la convexité de la fonction carrée,

$$\|\partial_s \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \leq \frac{P_i^2}{4V_i} \sum_{j \in \vartheta_i} \frac{\|\vec{n}_{ij}\|}{P_i} \left(\tilde{n}_{ijs} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right)^2 \leq \frac{P_i}{4V_i} \max_{j \in \vartheta_i} \left(\|\vec{n}_{ij}\| \right) \sum_{j \in \vartheta_i} \|\vec{\mathbf{X}}_{ij}\|^2, \quad (4.6)$$

finalement d'après (4.5) et (4.6),

$$\|\partial_s \vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \leq \frac{3P_i \max_{j \in \vartheta_i} \left(\|\vec{n}_{ij}\| \right)}{V_i^2} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{\mathcal{T}_i}^2,$$

ce qui donne le résultat (4.1).

En utilisant (4.4), nous avons :

$$\begin{aligned} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 &= \sum_{j \in \vartheta_i} \sum_{l \in \vartheta_i} (1 - \delta_{kj}) (1 - \delta_{kl}) (1 + \delta_{jl}) \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \cdot \vec{\mathbf{X}}_{il} \\ &= \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6} \left(\sum_{\substack{j \in \vartheta_i \\ j \neq k}} \|\vec{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \left\| \sum_{\substack{j \in \vartheta_i \\ j \neq k}} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right\|^2 \right), \end{aligned}$$

donc,

$$\|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 \leq \frac{\|\vec{n}_{ik}\|}{6} \left(\sum_{j \in \vartheta_i} \|\vec{\mathbf{X}}_{ij}\|^2 + \left\| \sum_{j \in \vartheta_i} \vec{\mathbf{X}}_{ij} \right\|^2 \right), \quad (4.7)$$

finalement grâce à (4.5) et (4.7), on obtient :

$$\|\vec{\mathbf{X}}\|_{a_{ik}}^2 \leq \frac{2\|\vec{n}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{X}}\|_{I_i}^2, \quad (4.8)$$

d'où (4.2). ■

Ainsi, dans ce cadre, la condition de stabilité des théorèmes 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4 et 3.2.5 peut s'écrire :

$$\forall i, \forall k \in \vartheta_i, \quad \Delta t \left(\lambda \sqrt{\frac{3 \max_{k \in \vartheta_i} (\|\vec{n}_{ik}\|)}{P_i}} + \rho_{ik} \right) < \frac{V_i}{P_i}. \quad (4.9)$$

Remarque 4.1.1 Nous pouvons simplifier l'expression précédente en remarquant que si l'on note $\|\vec{n}_{ik_0}\| = \max_{k \in \vartheta_i} \|\vec{n}_{ik}\|$, alors :

$$P_i - \|\vec{n}_{ik_0}\| = \sum_{\substack{k \in \vartheta_i \\ k \neq k_0}} \|\vec{n}_{ik}\| \geq \left\| \sum_{\substack{k \in \vartheta_i \\ k \neq k_0}} \vec{n}_{ik} \right\| = \left\| -\vec{n}_{ik_0} \right\| = \|\vec{n}_{ik_0}\|,$$

d'où,

$$\max_{k \in \vartheta_i} \|\vec{n}_{ik}\| \leq \frac{P_i}{2},$$

et une condition de stabilité moins fine mais plus simple peut s'écrire :

$$\forall i, \forall k \in \vartheta_i, \quad \Delta t \left(\lambda \sqrt{\frac{3}{2}} + \rho_{ik} \right) < \frac{V_i}{P_i}. \quad (4.10)$$

Remarque 4.1.2 Il est intéressant de comparer la condition de stabilité du modèle $\mathbb{P}_1$ exprimée par (4.10) par rapport à la condition de stabilité du modèle $\mathbb{P}_0$ exprimée par (2.17) pour un cas simple. Considérons le cas le plus simple qui soit : un problème purement acoustique. Nous considérons alors un écoulement uniforme à champ de vitesse nul. La condition (2.17) devient alors :

$$\forall i, \quad \Delta t < \frac{2V_i}{c_0 P_i},$$

tandis que la condition (4.10) s'écrit :

$$\forall i, \quad \Delta t < \frac{V_i}{c_0 P_i (1 + \sqrt{6})}.$$

Ainsi en acoustique pure, la condition CFL (non optimale) du modèle $\mathbb{P}_1$ est quasiment sept fois plus restrictive que celle du modèle $\mathbb{P}_0$. Dans la pratique, nous avons généralement utilisé la condition (4.10) pour sa simplicité et pour éviter avec certitude l'apparition d'instabilités purement numériques, tout en sachant que cette condition n'est pas optimale.

4.2 Cas tests de validation en écoulement uniforme

4.2.1 Cas test 1 : Un instationnaire périodique

Dans ce cas test, nous introduisons un terme source correspondant à une solution des équations fixées préalablement. Plus précisément, nous injectons la solution désirée dans les équations pour obtenir le terme source correspondant. L'intérêt de cette démarche est de pouvoir tester dans notre code la prise en charge du terme source et d'avoir une solution explicite simple (puisque nous la fixons). Le choix d'une solution périodique en temps et gaussienne en espace permet d'estimer efficacement l'erreur numérique tant sur le point de la dispersion que de la diffusion. Ainsi, nous fixons le terme source de telle manière que la solution soit donnée par :

$$\begin{pmatrix} \delta\rho \\ \delta u \\ \delta v \\ \delta p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ -u_0 \\ -v_0 \\ p_0 \end{pmatrix} B \cos(wt) \exp(-A(x^2 + y^2)), \quad (4.11)$$

avec,

$$A = \frac{\ln(2)}{288}, \quad B = 0.1, \quad T = 4 \rightarrow w = \frac{\pi}{2}.$$

L'écoulement est défini par :

$$\rho_0 = 1, \quad u_0 = v_0 = 0.5/\sqrt{2}, \quad p_0 = 1/\gamma, \quad \text{d'où } c_0 = 1.$$

L'uniformité de l'écoulement nous permet d'utiliser la forme la plus simple de notre schéma donnée par (2.9) avec $\vec{\mathcal{H}}$ fixé par la solution désirée (4.11). Rappelons juste le schéma global :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_{u_i}^{n+1} - \mathbf{W}_{u_i}^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j \in \{1, \dots, d_i\}} &= \sum_{s \in \{x, y, z\}} \int_{T_i}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \bar{\mathbb{A}}_s^0 \vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \bar{\mathbb{P}}_{ik}^0 (\vec{\mathbf{W}}_{u_i}^n + \vec{\mathbf{W}}_{u_k}^n) + \int_{T_i} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \vec{\mathcal{H}}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

L'intégrale portant sur le terme source est approchée par une formule de Gauss à 7 points dans chaque triangle. Ce cas test est réalisé sur quatre maillages non structurés en triangles et pour cinq configurations différentes. Le tableau (4.2) regroupe les différentes configurations, les données portant sur les maillages et les temps de calculs (temps de calculs relevés pour un processeur 2GHz-Pentium4, 1Gb-RDRAM de mémoire).

Les schémas utilisés de type approximation $\mathbb{P}_0$ ou $\mathbb{P}_1$ se déduisent directement de (4.12) en utilisant les bases d'approximation correspondantes. Le cas test est réalisé sur 40 périodes, soit $T_{final} = 160$. Le domaine de calcul est un carré de coté 200 dont le centre correspond à celui de la gaussienne du terme source. Nous utilisons notre condition absorbante explicite (2.29) sur les bords du domaine. Le pas de temps est fixé par (2.17) pour l'approximation $\mathbb{P}_0$ et par (4.10) pour l'approximation $\mathbb{P}_1$.

La figure 4.1 représente l'évolution de l'erreur $\mathcal{L}^2$ en pression sur l'ensemble du domaine par rapport à la solution exacte en fonction du temps pour les cinq configurations. La figure 4.3

représente δp pour la configuration (1) à $t = T_{final}$ et la figure 4.2 représente la comparaison de la coupe en $y=0$ à $t = T_{final}$ pour la solution exacte, la configuration (5) et la configuration (1).

Au niveau de la représentation des résultats obtenus, il est légitime de se demander quel traitement est utilisé puisque notre méthode fournit des résultats sur la base d'approximation utilisée. Nous allons préciser ici de manière générale quels post-traitements nous avons utilisés dans les cas des bases d'approximation de type $\mathbb{P}_0$ ou $\mathbb{P}_1$ pour tous les cas tests que nous avons réalisés en 2D et en 3D.

- ★ Dans le cas d'une approximation de type volumes finis, notre méthode nous fournit pour chaque variable du vecteur des inconnues numériques une valeur par cellule. Notre préférence portant sur une représentation par sommet des résultats, nous utilisons le traitement suivant :

Définition 4.2.1 Soit X_c , une des variables du vecteur des inconnues numériques dont nous connaissons une distribution constante par cellule sur l'ensemble du maillage défini par X_{c_i} sur chaque cellule $\mathcal{T}_i$. Nous définissons alors une représentation par sommet de cette variable nommée X grâce à la formule barycentrique suivante : soit s un des sommets du maillage,

$$X(s) = \frac{\sum_{i/s \in \mathcal{T}_i} V_i X_{c_i}}{\sum_{i/s \in \mathcal{T}_i} V_i}.$$

- ★ Dans le cas d'une approximation de type $\mathbb{P}_1$, notre méthode nous fournit pour chaque variable des inconnues numériques une expression polynomiale de degré 1 dans chaque cellule, de plus les fonctions de base utilisées (nodales) nous fournissent directement les valeurs de ces inconnues en chacun des sommets de la cellule. Ainsi nous possédons pour un sommet s du maillage, appartenant à N_s cellules distinctes, N_s valeurs de chaque variable que nous noterons pour la variable $X : (X_{s_i})_{i/s \in \mathcal{T}_i}$. Nous utilisons alors le traitement barycentrique suivant :

Définition 4.2.2 La représentation par sommet de la variable X est donnée par :

$$X(s) = \frac{\sum_{i/s \in \mathcal{T}_i} V_i X_{s_i}}{\sum_{i/s \in \mathcal{T}_i} V_i}.$$

TAB. 4.2 – *Caractéristiques et temps de calculs pour les différentes configurations*

Config.	Maillage	Approx.	Caractéristiques du maillage	Temps de calcul
(1)	M1	$\mathbb{P}_1$	ns=13213, nt=27329	7 mn 9 sec
(2)	M1	$\mathbb{P}_0$	ns=13213, nt=27329	2 mn 3 sec
(3)	M2	$\mathbb{P}_0$	ns=46427, nt=96090	7 mn 34 sec
(4)	M3	$\mathbb{P}_0$	ns=60984, nt=129100	9 mn 58 sec
(5)	M4	$\mathbb{P}_0$	ns=75536, nt=162093	12 mn 1 sec

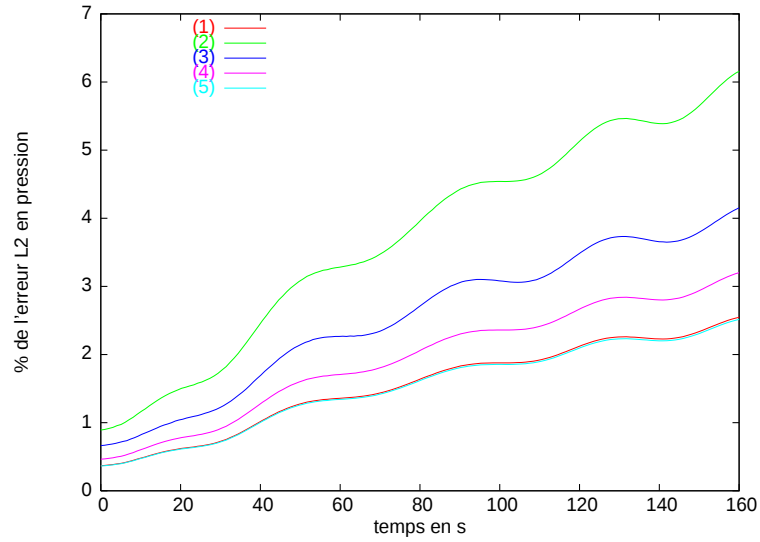


FIG. 4.1 – *Evolution temporelle de l'erreur $\mathcal{L}^2$ en pression sur l'ensemble du maillage par rapport à la solution exacte pour les différentes configurations*

4.2 Cas tests de validation en écoulement uniforme

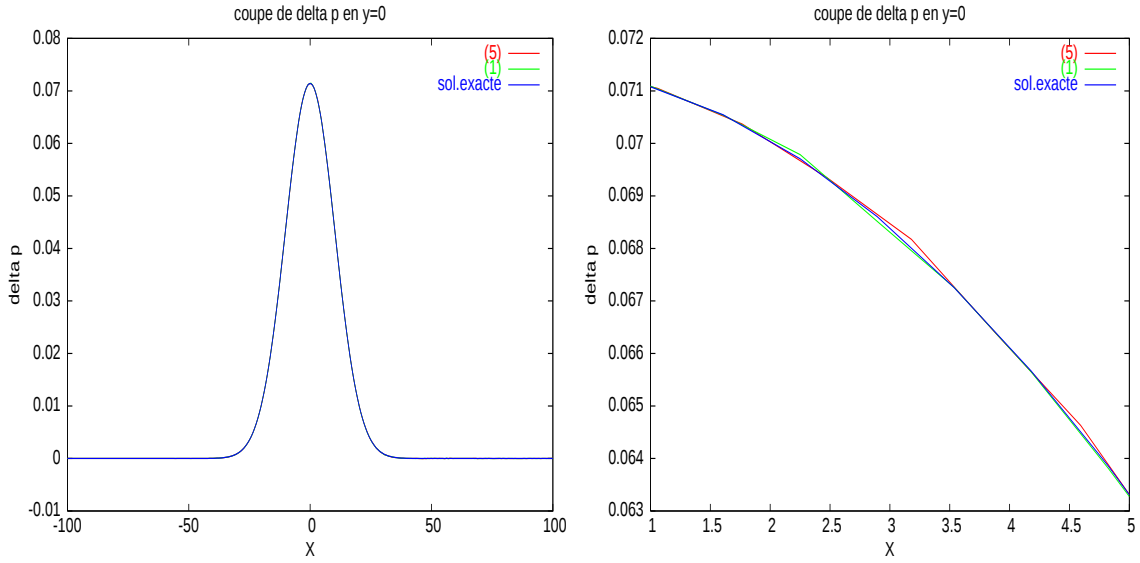


FIG. 4.2 – Coupe en $y=0$ à $t = T_{final}$ pour la solution exacte et les configurations (1) et (5)

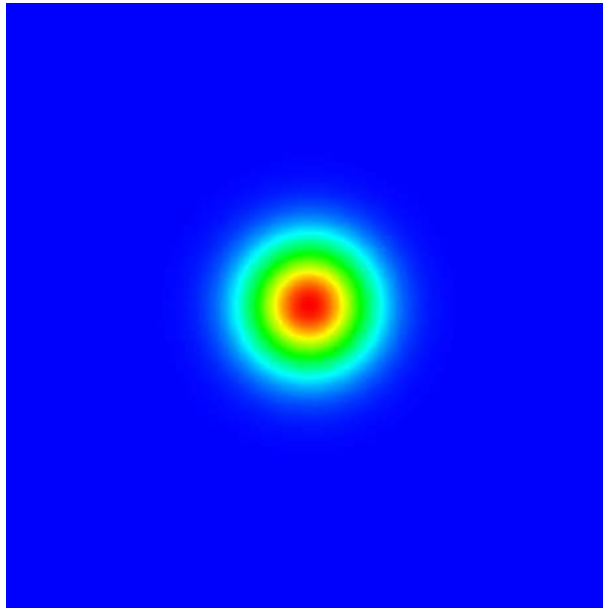


FIG. 4.3 – Représentation de 50 isovaleurs de δp pour la configuration (1) à $t = T_{final}$

D'un point de vue global, les résultats sont satisfaisants puisque, pour la configuration la moins précise, c'est-à-dire la configuration (2), l'erreur $\mathcal{L}^2$ en pression sur l'ensemble du domaine au bout de 40 périodes est de l'ordre de 6% et ce pour un temps de calcul très raisonnable ($\simeq 2mn$). Cela atteste d'un bon traitement du terme source.

En rentrant plus dans les détails, les résultats comparatifs entre les temps de calcul et l'erreur $\mathcal{L}^2$ illustrent l'intérêt du passage d'une base d'approximation de type $\mathbb{P}_0$ à une base

ques de la zone PML sont les suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_0 = 1.2 \text{ kg/m}^3, \quad u_0 = 0.5c_0, \quad v_0 = 0, \quad p_0 = 10^5 \text{ Pa} \\ \delta \vec{V}(x,y,0) = \vec{0}, \quad \delta p(x,y,0) = c_0^2 \delta \rho(x,y,0) = \epsilon e^{-\beta(x^2+y^2)}, \text{ avec } \epsilon = 10^3, \beta = \frac{\ln(2)}{9} \\ \sigma = 400 \text{ (valeur optimale obtenue après différents essais)} \end{array} \right.$$

La solution exacte pour δp s'écrivant alors :

$$\delta p(x,y,t) = \frac{\epsilon}{2\beta} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4\beta}} \cos(c_0 t \zeta) J_0(\mu \zeta) \zeta d\zeta,$$

avec,

$$\mu = \sqrt{(x - u_0 t)^2 + y^2} \text{ et } J_0(z) \text{ fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0.}$$

Les pas de temps sont fixés par les lois (2.17) pour l'approximation $\mathbb{P}_0$ et par (4.10) pour les différents schémas $\mathbb{P}_1$. Il est à noter que lors de l'utilisation de la méthode PML, nous ne connaissons pas de condition théorique de stabilité. Ainsi nous avons utilisé par extrapolation la condition suffisante de stabilité correspondant à l'utilisation de la condition absorbante (2.29). Les figures 4.4, 4.5, 4.6 et 4.7 présentent respectivement δp aux instants $t_1 = 9.10^{-2}s$, $t_2 = 0.17s$, $t_3 = 0.23s$ et $t_4 = 0.33s$.

Pour pouvoir apprécier, selon la configuration, l'amplitude des perturbations créées par le bruit numérique interne propre à la méthode et par les conditions aux limites pour δp , la plus petite des isovaleurs que nous avons représentée correspond à la valeur absolue de l'isovaleur pour laquelle nous avons commencé à visualiser des oscillations. La solution exacte nous permet de calculer pour chaque méthode l'erreur $\mathcal{L}^2$ en pression aux instants t_1, t_2, t_3 et t_4 . Les légendes et les résultats sont résumés dans le tableau 4.3. La figure 4.8 représente à l'instant t_3 la comparaison avec la solution exacte des coupes en $y=0$ des différentes configurations. Enfin, la figure 4.9 représente l'évolution temporelle de F_u^n donnée par (3.9) pour la deuxième configuration.

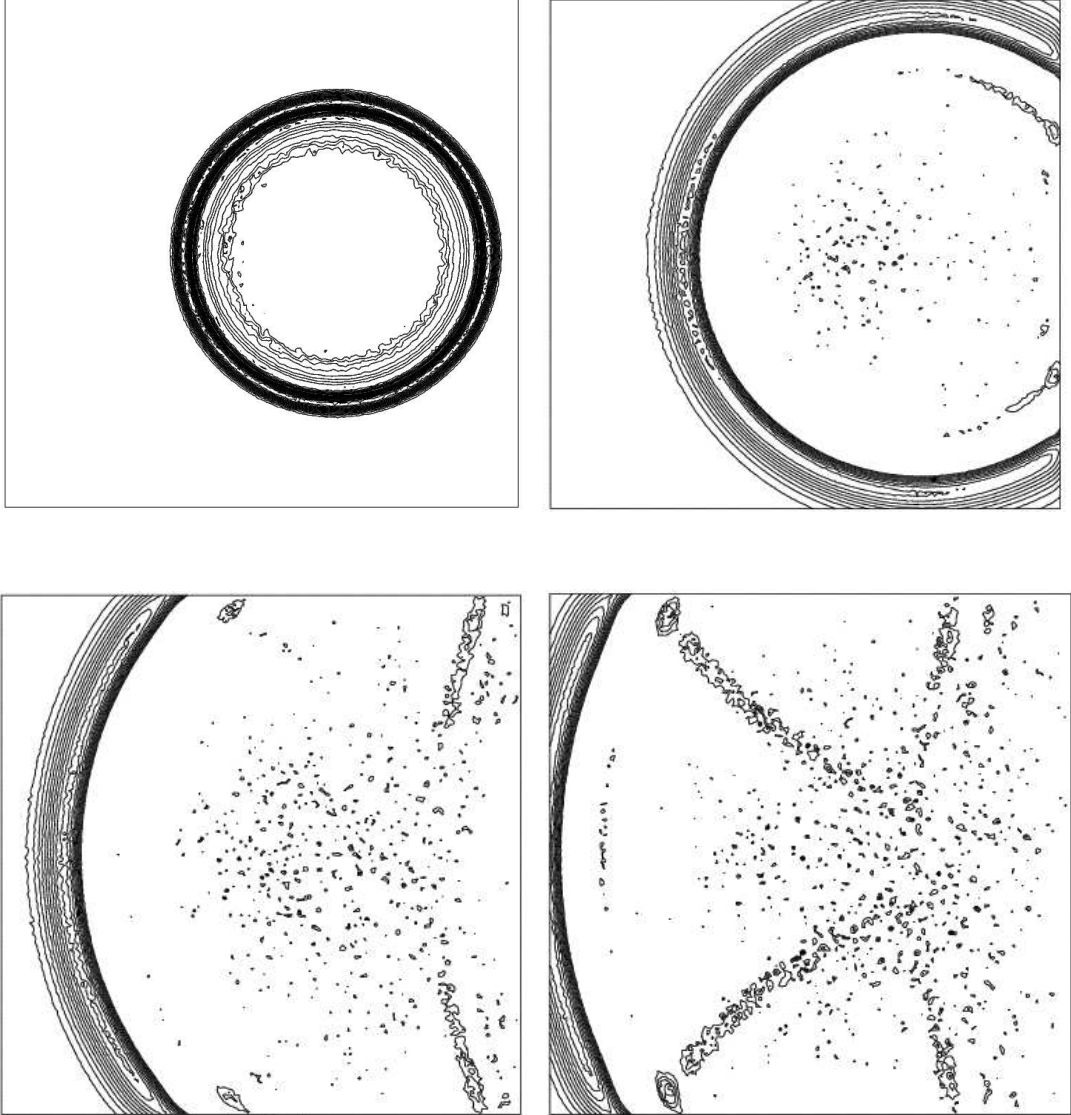


FIG. 4.4 – 20 isovaleurs de δp dans le cas de l'approximation $\mathbb{P}_0$ associée à la condition (2.29) aux instants t_1 , t_2 , t_3 et t_4 (de gauche à droite et de haut en bas)

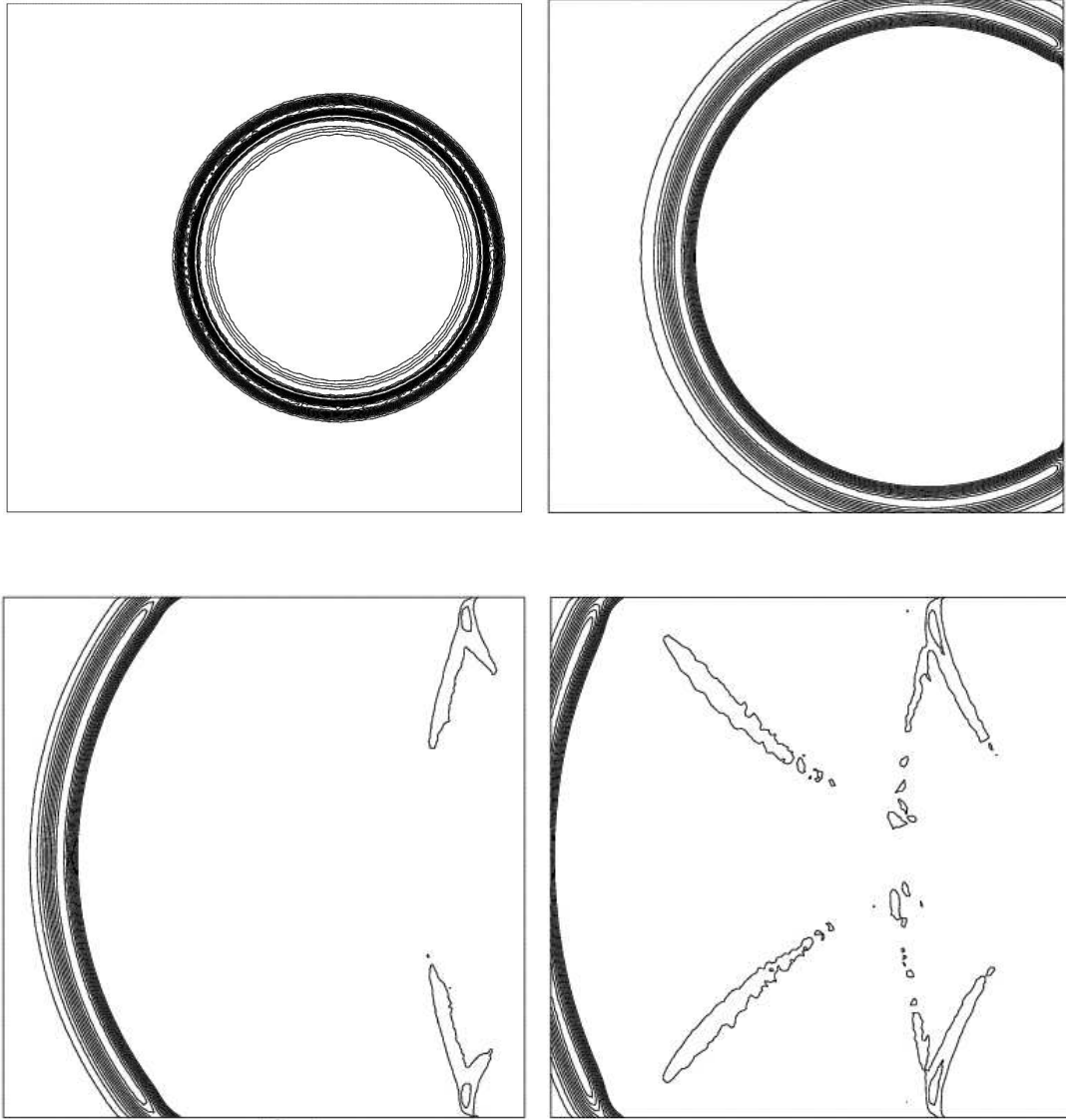


FIG. 4.5 – 20 isovaleurs de δp dans le cas de l'approximation $\mathbb{P}_1$ associée à la condition (2.29) aux instants t_1 , t_2 , t_3 et t_4 (de gauche à droite et de haut en bas)

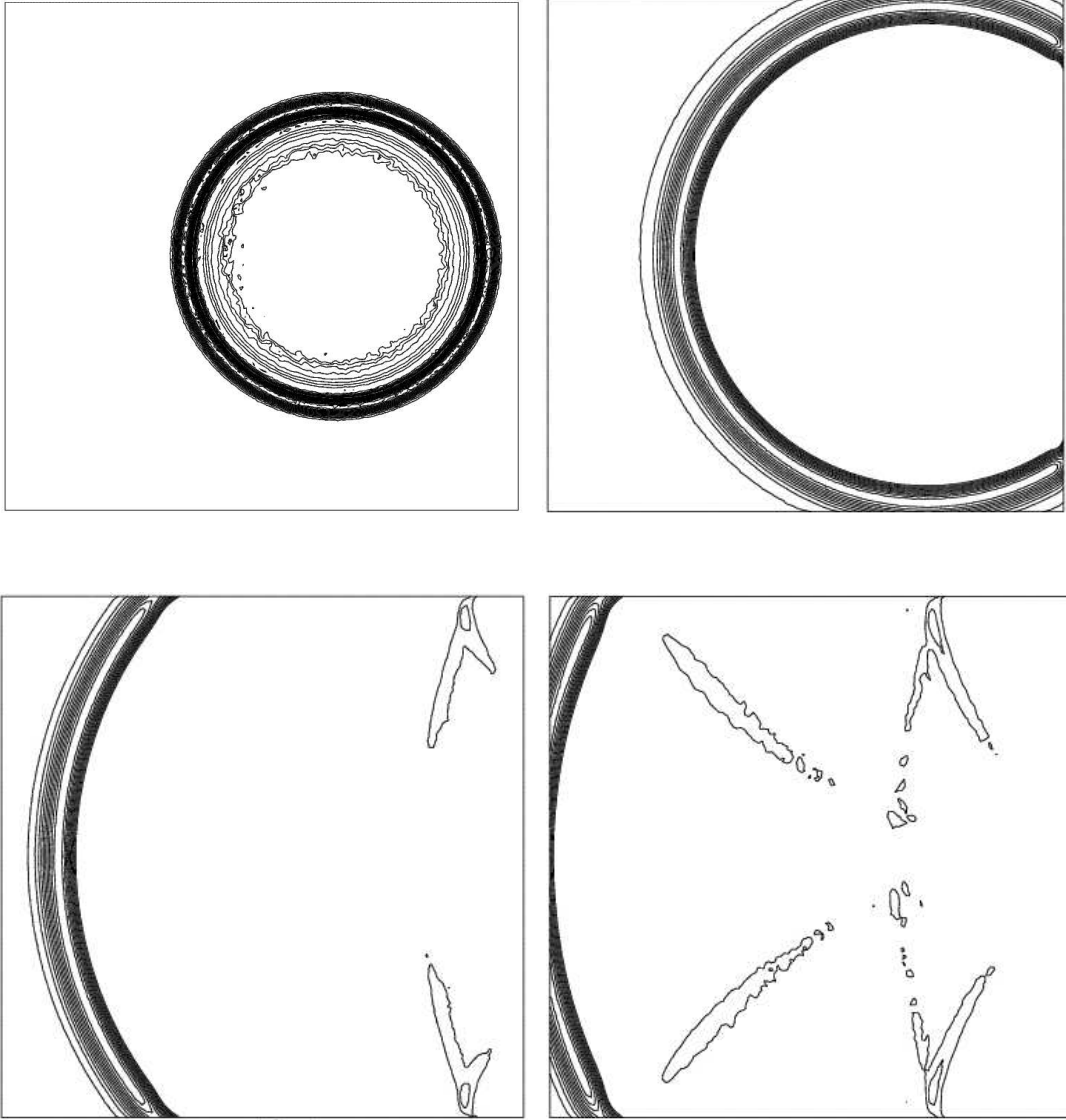


FIG. 4.6 – 20 isovaleurs de δp dans le cas de l'approximation $\mathbb{P}_1$ associée à la condition (2.30) aux instants t_1 , t_2 , t_3 et t_4 (de gauche à droite et de haut en bas)

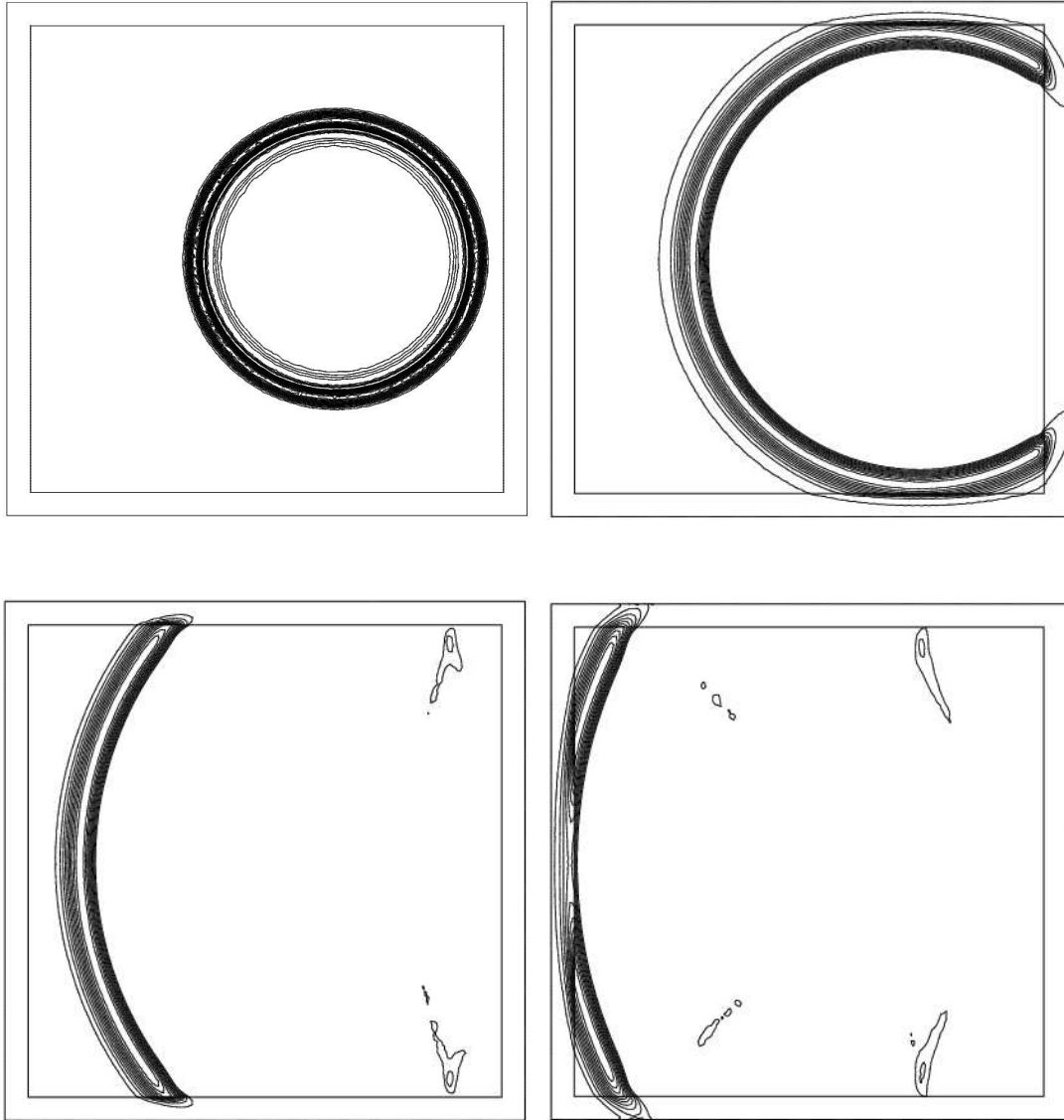


FIG. 4.7 – 20 isovaleurs de δp dans le cas de l'approximation $\mathbb{P}_1$ associée à la zone PML aux instants t_1, t_2, t_3 et t_4 (de gauche à droite et de haut en bas)

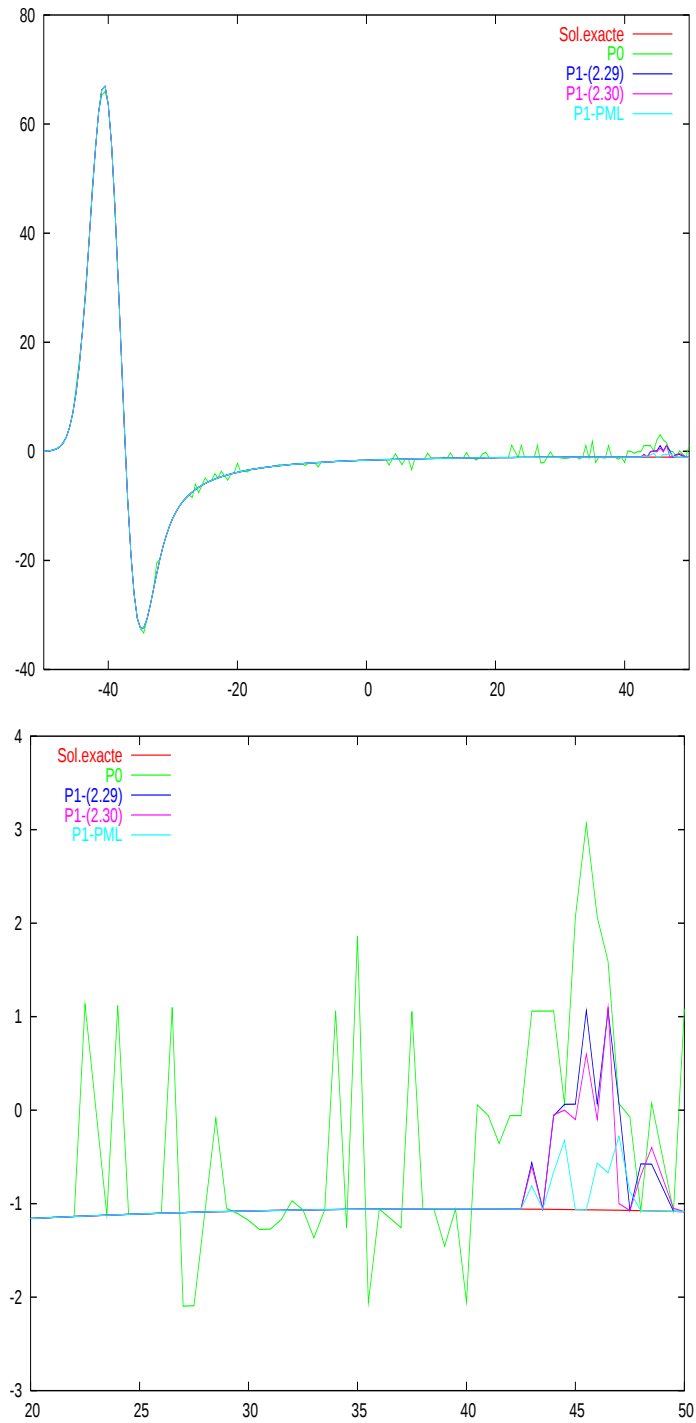


FIG. 4.8 – Comparaison de la coupe en $y=0$ à l'instant t_3 de la solution exacte avec les différentes configurations

4.2 Cas tests de validation en écoulement uniforme

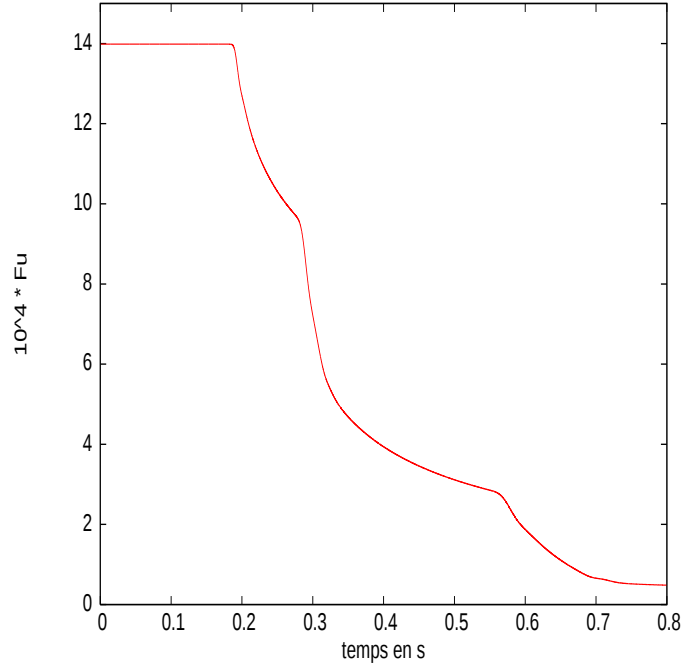


FIG. 4.9 – Evolution temporelle de F_u^n

TAB. 4.3 – Calculs d'erreur

Approx. et Cond.Abs	Instant	Min des $ isos $	Erreur $\mathcal{L}^2$ en %
$\mathbb{P}_0$ et cdt.Abs. explicite 2.29	t_1	4.7	5
	t_2	4.5	5
	t_3	4.3	6
	t_4	5.6	9
$\mathbb{P}_1$ et cdt.Abs. explicite 2.29	t_1	0.45	< 0.5
	t_2	0.8	< 1
	t_3	1.45	2
	t_4	1.8	3
$\mathbb{P}_1$ et Cdt.Abs implicite 2.30	t_1	0.45	< 0.5
	t_2	0.8	< 1
	t_3	1.45	2
	t_4	1.8	3
$\mathbb{P}_1$ et zone PML	t_1	0.45	< 0.5
	t_2	0.5	0.5
	t_3	0.72	1
	t_4	1.3	< 2

Les différents résultats sont riches en enseignements. Nous pouvons les résumer par les points suivants :

- Nous pouvons tout d’abord constater que le gain en précision entre le passage d’une base d’approximation $\mathbb{P}_0$ à une base d’approximation $\mathbb{P}_1$ est important tant au niveau du bruit numérique propre à l’approximation qu’au niveau des réflexions parasites engendrées par la condition absorbante (2.29). En effet, d’après le tableau 4.3, avant d’atteindre le bord du domaine ($t = t_1$) l’erreur $\mathcal{L}^2$ commise pour l’approximation $\mathbb{P}_1$ est plus de dix fois moins importante que celle commise pour l’approximation $\mathbb{P}_0$ et pour la même condition absorbante (2.29) les réflexions parasites associées au bruit numérique après avoir atteint le dernier bord ($t = t_4$) rendent l’approximation $\mathbb{P}_0$ trois fois moins performante en norme $\mathcal{L}^2$ que l’approximation $\mathbb{P}_1$.

De manière plus générale, l’erreur $\mathcal{L}^2$ de 9% obtenue dans le cas de l’approximation $\mathbb{P}_0$ à $t = t_4$ associée au caractère assez fin du maillage et à l’allure assez grossière des isovaleurs représentées par la figure 4.4 viennent conforter les remarques du premier cas test dans la mise en évidence du caractère trop grossier des méthodes de type volumes finis dans le cas de problèmes aéroacoustiques simples.

- Comme l’illustrent les figures 4.5, 4.6 et 4.8, nous n’avons obtenu aucune différence notable entre l’utilisation de la condition absorbante explicite (2.29) et l’utilisation de la condition absorbante implicite (2.30) pour l’approximation $\mathbb{P}_1$.
- On vérifie logiquement qu’il n’y a aucune différence entre l’approximation $\mathbb{P}_1$ avec condition absorbante explicite ou implicite et le schéma $\mathbb{P}_1$ avec zone PML tant que les bords du domaine ne sont pas atteints. Par contre, nous constatons des réflexions parasites aux bords du domaine générant une erreur $\mathcal{L}^2$ 1.5 fois plus importante pour nos deux conditions absorbantes discrètes que lors de l’utilisation de la zone PML.
- Dans le cas de l’utilisation d’une zone PML, nous pouvons interpréter les légères réflexions observées aux bords du domaine comme des réflexions parasites dues à la variation brutale du coefficient d’absorption lorsque nous passons de la zone interne à la zone PML.
- La courbe décrivant l’évolution de $\mathbb{F}_u^n$ dans le cas de l’utilisation de la condition absorbante (2.29) est en accord avec les résultats du lemme 3.1.2. En effet, nous pouvons vérifier qu’avant d’atteindre la première paroi absorbante (à $t \simeq 0.2s$), l’énergie est parfaitement conservée. Ensuite, l’énergie reste décroissante et les différents changements de pente correspondent à l’arrivée des perturbations au niveau des autres parois absorbantes.

En conclusion, nous pouvons affirmer que même si nos conditions absorbantes offrent des résultats précis et satisfaisants, la condition PML non optimale que nous avons utilisée reste plus performante. Cependant nous privilégierons nos conditions absorbantes et ce pour plusieurs raisons importantes :

- Nous avons vu que nos deux conditions absorbantes permettaient de connaître explicitement une condition de stabilité, ce qui sur maillage non uniforme est un critère ardu à obtenir.
- La mise en place de conditions PML exige des manipulations contraignantes au niveau des maillages non structurés (ce qui peut devenir très gênant en 3D).
- Mais surtout les problèmes de stabilité des conditions PML en aéroacoustique, qui restent une question ouverte, nous ont paru avoir un caractère rédhibitoire. Ainsi nous

pouvons constater pour notre cas test l'apparition d'instabilités dans la zone PML, après un temps assez long, qui finissent par envahir tout le domaine de calcul et ce indépendamment des caractéristiques de la zone PML (comme l'illustre la figure 4.10 où nous avons augmenté la taille de la zone PML). Même s'il s'agit d'un phénomène bien connu [46], qui pourrait par exemple se résoudre par l'utilisation d'un filtre, nous aurions à mettre en place des traitements aux limites dépendants du cas test, ce que nous voulions à tout prix éviter. Finalement nos conditions absorbantes nous ont paru être une alternative intéressante aux méthodes existantes tant sur le plan théorique que numérique.

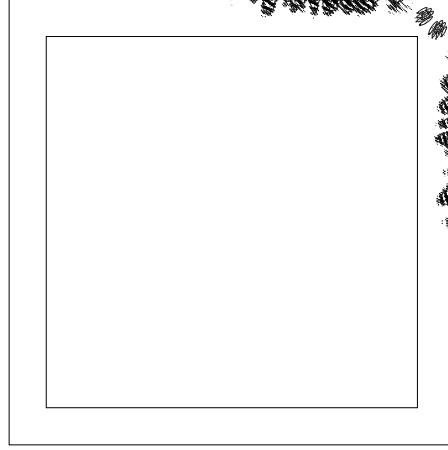


FIG. 4.10 – 10 Isovaleurs de δp de 1 à 10^3 dans le cas de l'approximation $\mathbb{P}_1$ avec zone PML à $t=5s$

Après avoir validé nos conditions absorbantes en uniforme, nous allons nous intéresser à notre condition réfléchissante en uniforme exprimée par (2.26).

4.2.3 Cas test 3 : condition réfléchissante

Ce cas test a pour but de comparer les résultats obtenus face à une perturbation initiale sur un domaine comportant à la fois des interfaces réfléchissantes et des interfaces absorbantes pour les bases d'approximation $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$. Une nouvelle fois, nous nous intéressons à la propagation d'une perturbation acoustique au sein d'un écoulement uniforme horizontal défini par :

$$\rho_0 = 1, u_0 = 0.5, v_0 = 0., p_0 = 1/\gamma, c_0 = 1. \quad (4.13)$$

Cette fois le domaine est un rectangle de longueur 200 et de largeur 40 dont le centre correspond à l'origine du repère, nous imposons notre condition absorbante explicite (2.29) en aval et en amont de l'écoulement tandis que nous imposons la condition réfléchissante (2.26) au niveau des deux autres parois (cette configuration étant en accord avec la condition théorique (2.19) portant sur l'écoulement uniforme). Le maillage non structuré utilisé est le même pour les approximations $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ (39782 noeuds, 78602 triangles) et est symétrique par rapport à la droite d'équation $y=0$ (nous verrons par la suite l'intérêt de cette symétrie). Cette configuration permet de visualiser plusieurs réflexions des ondes acoustiques avant d'atteindre les

parois absorbantes. La perturbation initiale est donnée par :

$$\delta p(x, y, 0) = \delta \rho(x, y, 0) = \exp(-\beta(x^2 + y^2)), \quad \delta \vec{V} = \vec{0}, \quad \text{avec, } \beta = \frac{\ln(2)}{9}.$$

Parallèlement à cette première configuration, dans le but d'estimer précisément l'erreur due aux réflexions parasites au niveau des parois réfléchissantes, nous réalisons un deuxième cas test sur un domaine rectangulaire également centré avec l'origine du repère de longueur 200 et de largeur 120. Le maillage construit par symétries du premier par rapport aux droites $y = 20$ et $y = -20$ est composé de 235806 triangles (nous comprenons ici l'intérêt d'avoir choisi un maillage symétrique pour la première configuration, car cela permet d'obtenir le même maillage sur les trois zones en évitant les problèmes de raccordement) et nous imposons la condition absorbante (2.29) sur l'ensemble des parois du bord du domaine. La perturbation initiale utilisée est définie par :

$$\delta p(x, y, 0) = \delta \rho(x, y, 0) = r(x, y) + r(x, y + 40) + r(x, y - 40), \quad \delta \vec{V} = \vec{0},$$

avec,

$$r(x, y) = \exp(-\beta(x^2 + y^2)).$$

L'écoulement utilisé est identique à celui de la première configuration. Cette deuxième configuration nous permet avant la deuxième "vague" de réflexions sur les parois réfléchissantes pour la première configuration, de comparer les résultats sur la partie commune des deux domaines. Idéalement (condition réfléchissante parfaite), les résultats devraient être identiques.

Remarque 4.2.1 *En fait l'élaboration de la deuxième configuration est généralisable. Plus précisément imaginons pour $N \in \mathbb{N}$ un domaine de longueur 200 et de largeur $40(1 + 2N)$ centré au centre du repère et un maillage de $78602(2N + 1)$ triangles obtenus par translations successives du domaine et du maillage originel, alors en conservant l'écoulement donné par (4.13) et en considérant les données initiales :*

$$\delta p(x, y, 0) = \delta \rho(x, y, 0) = \sum_{k=-N}^N \exp\left(-\beta\left(x^2 + (y + 40k)^2\right)\right), \quad \delta \vec{V} = \vec{0},$$

nous devrions obtenir idéalement sur le domaine originel (pour une condition réfléchissante parfaite) des résultats identiques avant la $N + 1$ ème réflexion sur les parois réfléchissantes de la première configuration.

De plus nous connaissons de manière analytique la solution de ce problème, la solution pour $\delta \vec{V}$ est donnée par :

$$\delta \vec{V}(x, y, t) = \frac{1}{2\beta} \sum_{k=-N}^N \begin{pmatrix} x - u_0 t \\ y + 40k \end{pmatrix} \frac{1}{\mu_k} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{4\beta}} \sin(\zeta t) J_1(\zeta \mu_k) \zeta d\zeta,$$

avec,

$$\mu_k = \sqrt{(x - u_0 t)^2 + (y + 40k)^2} \quad \text{et } J_1(z) \text{ fonction de Bessel de première espèce d'ordre 1.}$$

Le pas de temps est fixé par (2.17) pour l'approximation $\mathbb{P}_0$ et par (4.10) pour l'approximation $\mathbb{P}_1$. Les figures 4.11 et 4.12 représentent respectivement $\|\delta\vec{V}\|$ aux instants $t=50, 135$ et $220s$ pour les approximations $\mathbb{P}_0$ et $\mathbb{P}_1$ (pour la première configuration). La figure 4.13 représente $\|\delta\vec{V}\|$ aux instants $t=22s$ et $t=50s$ pour la deuxième configuration. La figure 4.14 correspond à l'évolution temporelle de notre forme quadratique définie positive (3.9) pour la première configuration. Enfin le tableau 4.4 permet de comparer les performances entre les deux bases d'approximation.

A l'instant $t=50s$, l'erreur commise pour chaque base d'approximation correspond à l'erreur $\mathcal{L}^2$ sur $\|\delta\vec{V}\|$ par rapport aux résultats obtenus pour la deuxième configuration sur la même base d'approximation, cette comparaison permet d'évaluer uniquement l'erreur introduite pour chaque base d'approximation par notre condition réfléchissante et non l'erreur globale de la méthode d'approximation que nous aurions obtenue en comparant la première configuration avec la solution exacte. Aux instants $t=135$ et $220s$, pour chaque base d'approximation, l'erreur est évaluée par rapport à la solution exacte, ce qui correspond à l'erreur globale introduite par la base d'approximation et les conditions aux limites réfléchissantes et absorbantes.

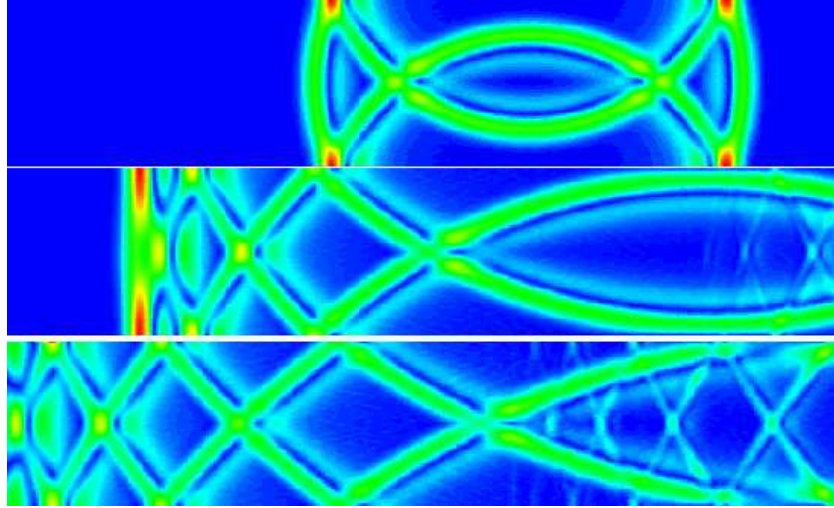


FIG. 4.11 – 50 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ à $t=50, 135$ et $220s$ (de haut en bas) pour la première configuration et l'approximation de type $\mathbb{P}_0$

- Il ressort tout d'abord de ce cas test que notre condition réfléchissante est vraiment performante, puisqu'à $t=50s$, l'erreur $\mathcal{L}_2$ uniquement introduite par notre condition réfléchissante est de l'ordre de 1% pour l'approximation $\mathbb{P}_0$ et est inférieure à 0.1% pour l'approximation $\mathbb{P}_1$.
- La comparaison globale de l'erreur $\mathcal{L}^2$ par rapport à la solution exacte entre les deux bases d'approximation est évidemment sans équivoque. Ainsi, ces résultats combinés avec ceux des précédents cas tests, nous ont convaincus de la limite des schémas de type volumes finis en aéroacoustique, nous n'utiliserons pas de schéma de type $\mathbb{P}_0$ lorsque nous traiterons de cas tests 2D en écoulement non uniforme ou de cas tests 3D.

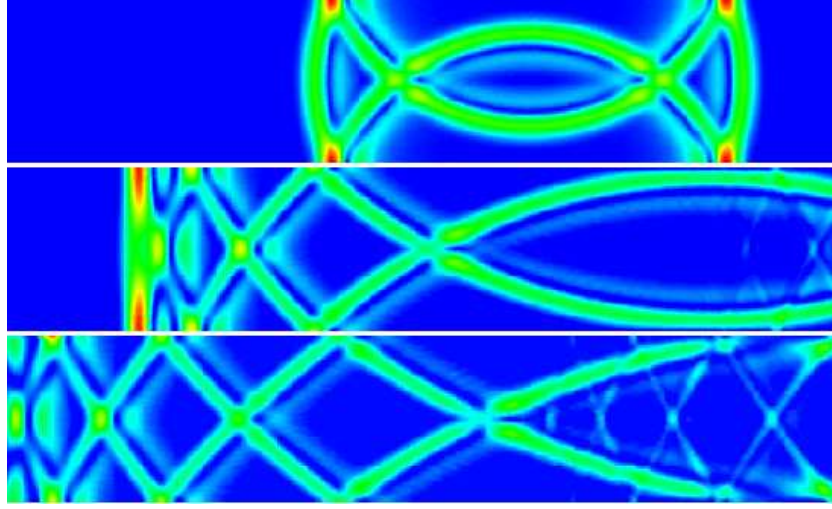


FIG. 4.12 – 50 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ à $t=50, 135$ et $220s$ (de haut en bas) pour la première configuration et l'approximation de type $\mathbb{P}_1$

TAB. 4.4 – Calculs d'erreur $\mathcal{L}^2$ et caractéristiques des isovaleurs représentées

Approx.	Instant en sec	50 isos. représentées	Erreur $\mathcal{L}^2$ en %
$\mathbb{P}_0$	t=50	de $7,7.10^{-3}$ à $1,55.10^{-1}$	1
	t=135	de $6,1.10^{-3}$ à $1,02.10^{-1}$	7
	t=220	de $5,2.10^{-3}$ à $8,7.10^{-2}$	7
$\mathbb{P}_1$	t=50	de $7,7.10^{-4}$ à $1,55.10^{-1}$	< 0.1
	t=135	de 10^{-3} à $1,02.10^{-1}$	1
	t=220	de $8,7.10^{-4}$ à $8,7.10^{-2}$	1

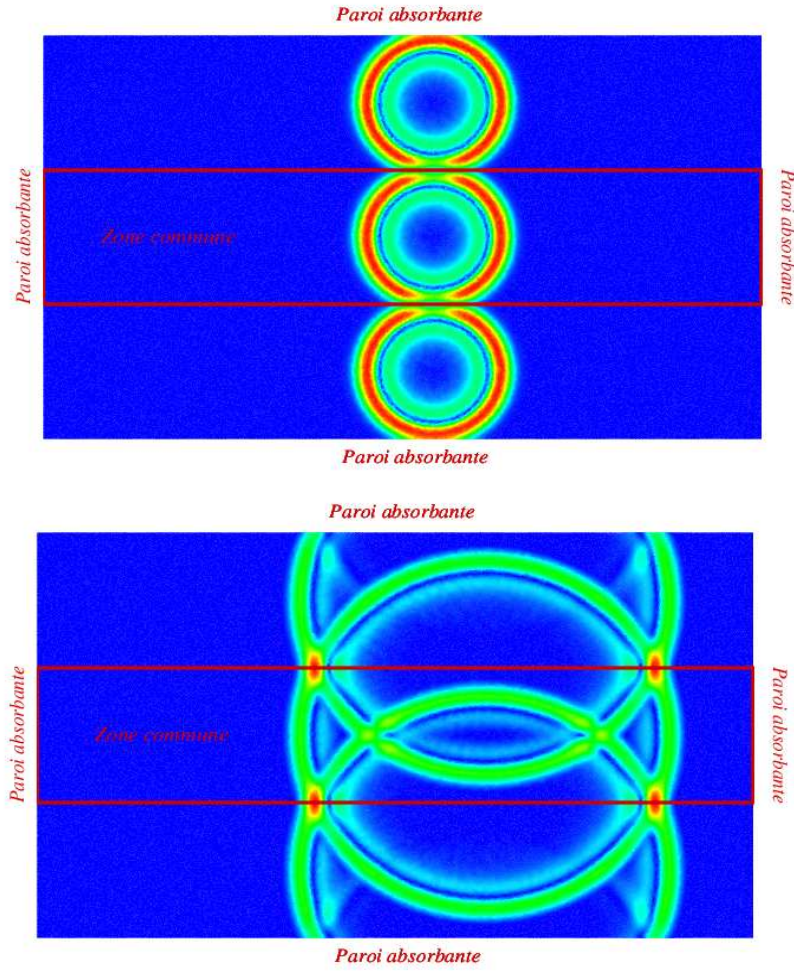


FIG. 4.13 – 50 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ à $t=22$ et $50s$ (de haut en bas) pour la deuxième configuration et l'approximation de type $\mathbb{P}_1$

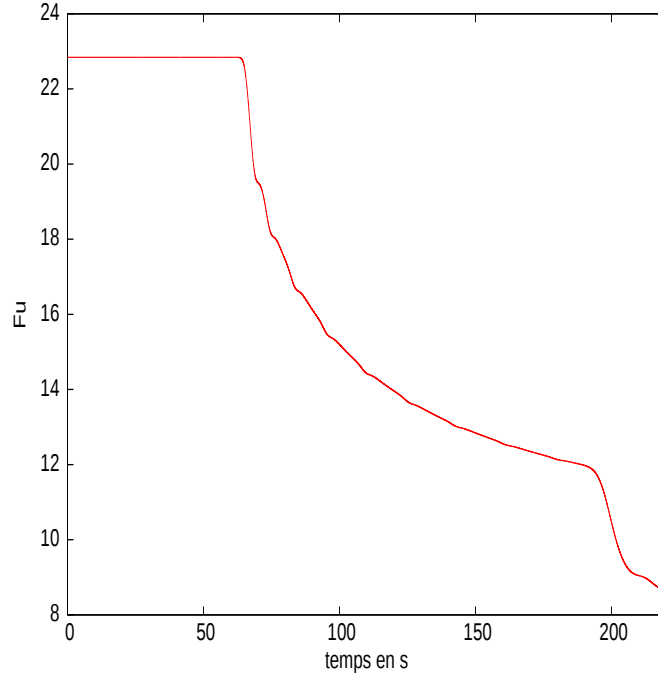


FIG. 4.14 – Evolution temporelle de F_u^n

- La courbe 4.14 corrobore le lemme 3.1.2, en effet nous pouvons observer que F_u^n pour la première configuration est constante avant d’atteindre la première paroi absorbante à $t \simeq 66s$ (ainsi nous vérifions que notre condition réfléchissante n’influe pas sur le bilan énergétique). Nous observons ensuite, comme prévu, la décroissance de F_u^n . La variation de pente à $t \simeq 200s$ correspondant à l’instant où la perturbation acoustique atteint la deuxième paroi absorbante.

4.2.4 Conclusion

Ces trois cas tests simples en écoulement uniforme que nous avons choisis de présenter parmi tous ceux que nous avons réalisés dans un contexte similaire nous ont permis de mettre en évidence plusieurs points cruciaux. Il y apparaît notamment qu’une approximation $\mathbb{P}_1$ des variables aéroacoustiques a un rapport qualité-coût beaucoup plus satisfaisant qu’une approximation $\mathbb{P}_0$. Cet état de fait nous a conduit à abandonner pour la suite de nos travaux l’utilisation de schémas de types volumes finis pour la résolution de problèmes en écoulement non uniforme et pour l’élaboration d’un code 3D. Mais surtout ces cas tests illustrent les résultats satisfaisants obtenus pour nos conditions aux limites réfléchissantes (2.26) et absorbantes (2.29) et (2.30). Ce résultat concernant nos deux conditions absorbantes était essentiel à nos yeux. En effet, sachant qu’il existe en terme de précision des conditions aux limites absorbantes plus performantes que nos conditions de type caractéristique [77],[21], nous devions vérifier que les résultats théoriques obtenus en terme de stabilité sur maillage non structuré n’étaient pas gâchés par des réflexions parasites trop importantes. Notre approche en terme de condition absorbante semble donc permettre de concilier utilisation de maillage non structuré,

condition de stabilité théorique raisonnable sur ces maillages et précision satisfaisante.

Nous allons à présent nous intéresser à un cas test en écoulement non uniforme dans le but d'étendre les remarques précédentes à ce nouveau contexte.

4.3 Cas test de validation en écoulement non uniforme

Contrairement à la linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement uniforme, il est délicat d'estimer l'erreur numérique commise lors de la résolution des équations d'Euler autour d'un écoulement non uniforme. En effet, il existe alors peu de configurations où la solution est connue de manière analytique. La linéarisation autour d'un écoulement cisailé en fait partie grâce pour ce type de champ moyen à la résolution analytique possible de l'équation de Lilley sous certaines hypothèses [20]. C'est pourquoi le premier cas test en écoulement non uniforme que nous allons présenter appartient à cette famille.

4.3.1 Cas test 1 : Workshop

Ce cas test est issu du Workshop [2]. L'auteur Tom Hagstrom a proposé ce problème dans le but de tester les conditions aux limites non physiques proposées par les participants. Son problème est composé de trois parties, nous nous sommes intéressés à la deuxième, correspondant à l'étude de la propagation d'une perturbation initiale au sein d'un écoulement porteur non uniforme cisailé horizontal subsonique $\delta \vec{V}_0 = {}^t(0.9y, 0)$. Le problème est adimensionné. La difficulté et donc l'intérêt de ce cas test réside principalement dans la valeur nulle de la vitesse de l'écoulement sur la paroi $y=0$. Nous nous sommes également intéressés à ce cas test car l'auteur fournit un grand nombre de résultats¹.

Les données initiales (resp. les solutions) sont fournies sur un maillage régulier de taille 513×129 (resp. 129×33 , aux instants $t_1 = 1$, $t_2 = 2$, $t_k = 4(k - 2) \quad \forall k \in \{3, \dots, 18\}$). Ainsi le temps final du calcul est $t_{18} = 64$. Ces nombreux résultats nous ont permis d'évaluer l'erreur commise par notre schéma au cours du temps pour une base d'approximation de type $\mathbb{P}_1$.

Le domaine est rectangulaire de longueur 4 et de largeur 1 centré en $(0, 0.5)$. Nous avons imposé (conformément aux exigences de l'auteur) notre condition réfléchissante (2.27) sur les deux parois horizontales (l'écoulement imposé vérifiant la condition (2.20)) et nous avons testé nos deux conditions absorbantes (2.31) et (2.32) sur les deux parois verticales. Le pas de temps a été fixé par la condition (4.10). Le maillage que nous avons utilisé n'est pas celui indiqué par l'auteur puisqu'il s'agit d'un maillage régulier, nous avons utilisé un maillage non structuré composé de 67632 triangles (34457 sommets). Ainsi, nous avons dû interpoler les données initiales sur notre maillage. Pour pouvoir comparer les résultats, nous avons également interpolé nos résultats sur le maillage uniforme de taille 129×33 aux différents instants t_k .

Les solutions présentées pour notre schéma sont celles que nous avons obtenues lors de l'utilisation de la condition absorbante (2.31), mais nous n'avons constaté aucune différence tangible lors de la réalisation du cas test entre nos deux conditions non physiques (2.31) et (2.32).

Les figures 4.15 et 4.16 représentent les données initiales. Les figures 4.17 à 4.20 représentent nos solutions ainsi que celles fournies par l'auteur à l'instant $t_{18} = 64$ sur le même maillage.

1. www.math.unm.edu/~hagstrom/CAAWorkshop

Les figures 4.21 et 4.22 représentent la valeur absolue de la différence entre nos résultats et la solution exacte pour les différentes variables à l'instant t_{18} . Enfin la figure 4.23 représente l'évolution temporelle de l'erreur $\mathcal{L}_2$ par rapport à la solution exacte pour les différentes variables.

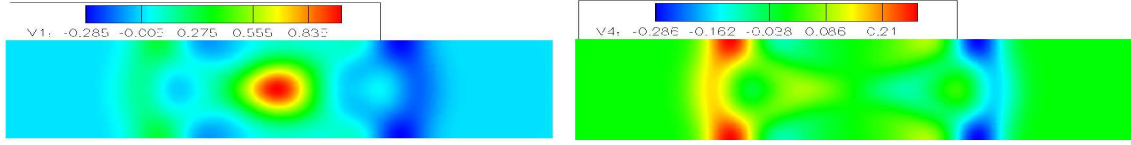


FIG. 4.15 – 50 isovaleurs de δp et de $\delta \rho$ à $t=0$ (de gauche à droite)

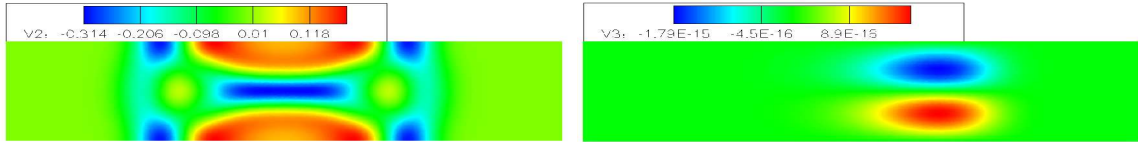


FIG. 4.16 – 50 isovaleurs de δu et de δv à $t=0$ (de gauche à droite)

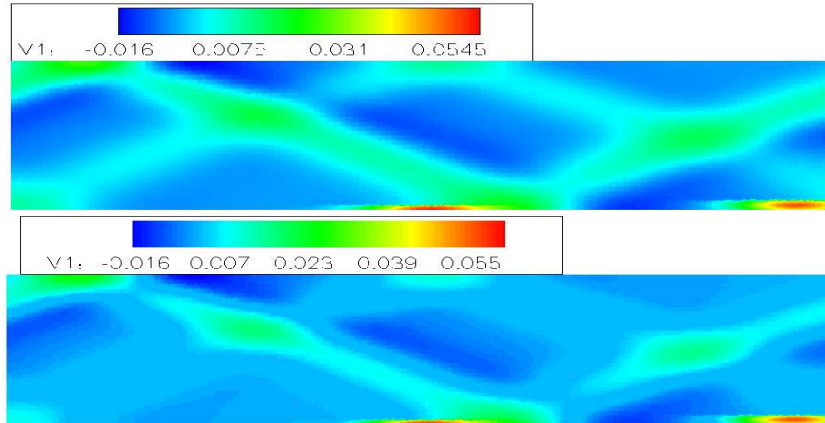


FIG. 4.17 – 50 isovaleurs de $\delta \rho$ à $t=64$ pour la solution exacte et avec notre schéma (de haut en bas)

L'allure des figures 4.17 à 4.20 illustre une grande ressemblance entre les résultats obtenus et ceux de la solution exacte pour les quatre variables, ainsi notre schéma semble bien réagir aux caractéristiques particulières de l'écoulement. Les figures 4.21 et 4.22 permettent de voir que par rapport à l'erreur globale commise, nos conditions aux limites ne semblent pas influencer de manière notable la qualité des résultats. D'après les précédents cas tests en écoulement uniforme, nous aurions pu nous attendre à une erreur globale principalement concentrée sur des réflexions parasites, ce qui n'est pas le cas. Une raison simple de cette différence peut tout simplement provenir du fait que le schéma et la condition absorbante

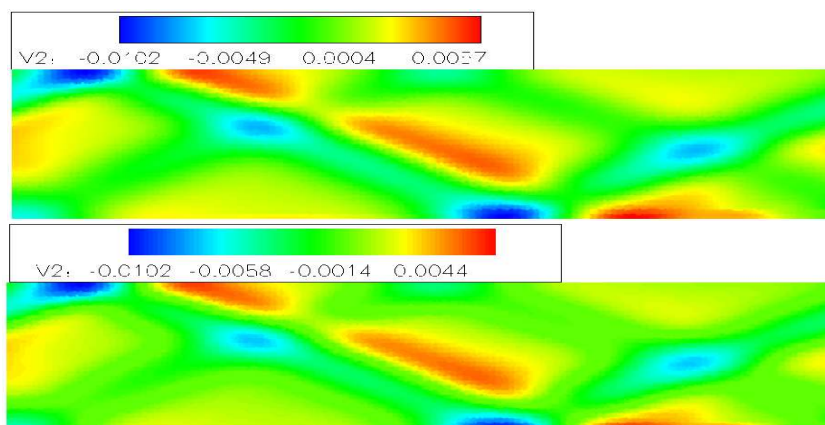


FIG. 4.18 – 50 isovaleurs de δu à $t=64$ pour la solution exacte et avec notre schéma (de haut en bas)

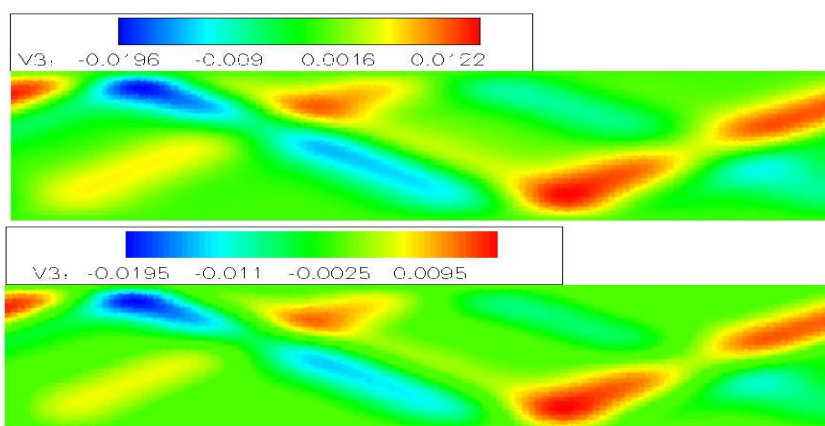


FIG. 4.19 – 50 isovaleurs de δv à $t=64$ pour la solution exacte et avec notre schéma (de haut en bas)

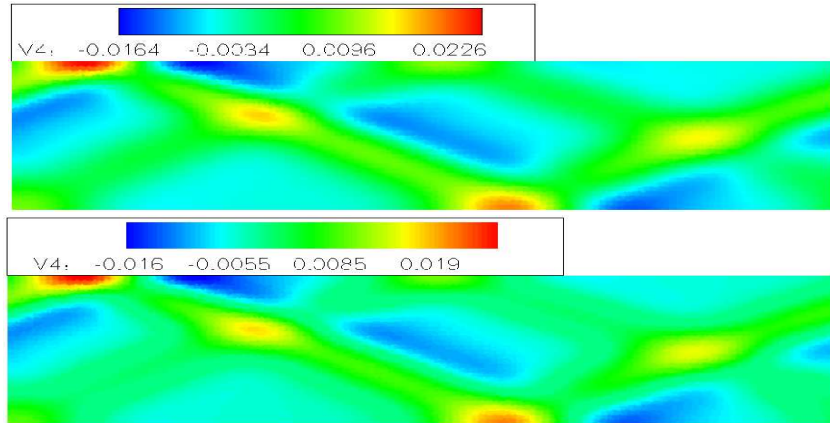


FIG. 4.20 – 50 isovalues de δp à $t=64$ pour la solution exacte et avec notre schéma (de haut en bas)

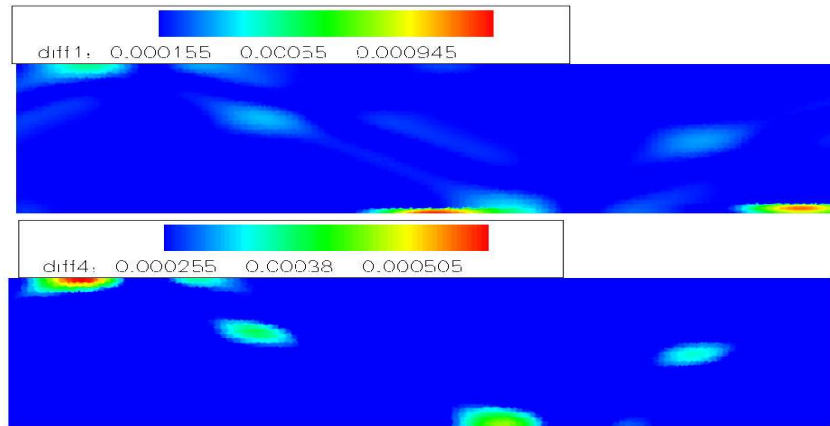


FIG. 4.21 – 50 isovalues de $|\rho_{exact} - \rho_{calcul}|$ et de $|p_{exact} - p_{calcul}|$ à $t=64$ (de haut en bas)

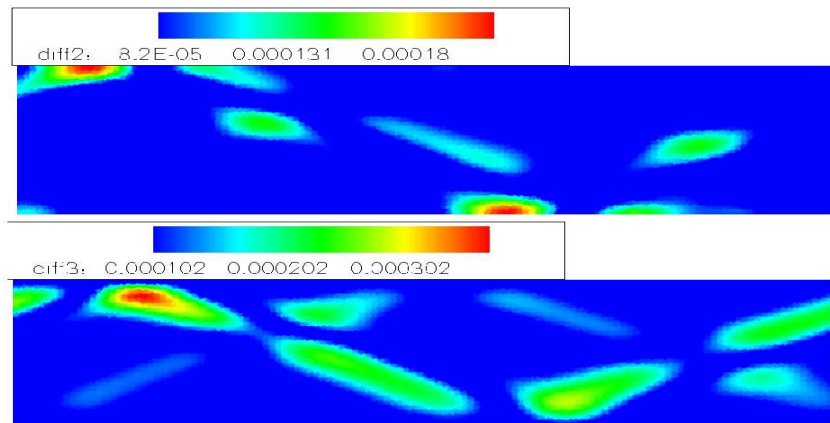


FIG. 4.22 – 50 isovalues de $|u_{exact} - u_{calcul}|$ et de $|v_{exact} - v_{calcul}|$ à $t=64$ (de haut en bas)

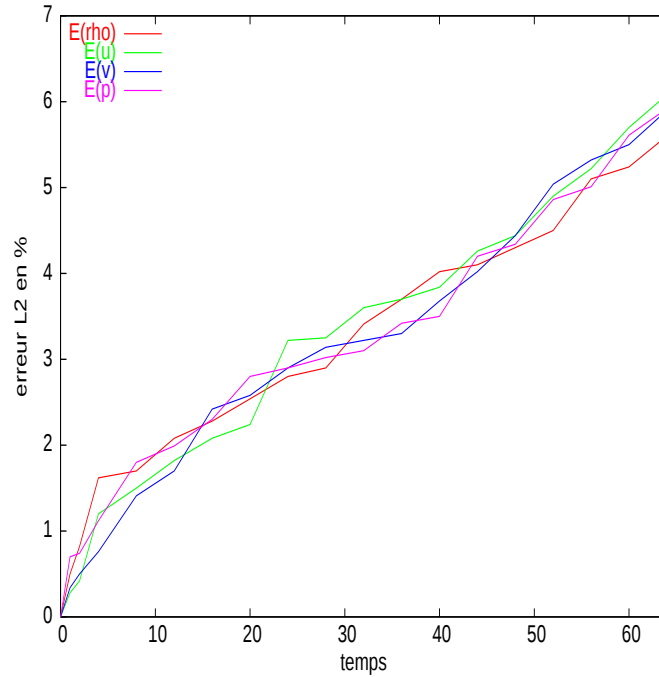


FIG. 4.23 – Evolution temporelle de l'erreur $\mathcal{L}^2$ pour $\delta\rho$, δu , δv et δp

utilisée ne sont plus les mêmes (les équations approchées sont beaucoup plus complexes). Ainsi, il semble que pour ce nouveau schéma (2.7) associé à une base d'approximation $\mathbb{P}_1$, l'erreur numérique due à nos conditions absorbantes (2.31) et réfléchissantes (2.27) est du même ordre que celle issue du bruit numérique propre du schéma (de l'ordre de 2% en norme $\mathcal{L}^\infty$). De manière plus précise, l'erreur $\mathcal{L}^2$ au temps final est en moyenne entre les différentes variables de 5.8% (voir figure 4.23), ce qui est déjà assez satisfaisant compte tenu du caractère assez grossier du maillage non uniforme que nous avons utilisé. De plus il ne faut pas perdre de vue que, par souci de comparaison, nous avons dû interpoler nos résultats sur le maillage structuré 129×33 , l'erreur commise lors de ce traitement est venue s'ajouter à l'erreur numérique inhérente à notre schéma.

Il est évident que nous ne pouvions pas répondre aux exigences de l'auteur en terme de précision. En effet, Tom Hagstrom affirmait qu'il était possible d'atteindre une précision de l'ordre de 7-8 décimales pour un maillage structuré de 16384 cellules! Nous sommes bien loin d'un tel niveau de précision, ce qui est tout à fait normal compte tenu de l'ordre de précision de notre schéma pour une base d'approximation de type $\mathbb{P}_1$. Ce cas test s'adressait tout particulièrement à des schémas en différence finies d'ordre élevé. Notre objectif était simplement de vérifier le bon comportement global de notre méthode face à un cas test en écoulement non uniforme dont nous connaissions la solution exacte.

4.3.2 Conclusion

Le cas test du workshop et les cas tests en écoulement uniforme nous ont permis de mettre en évidence les qualités de notre approche pour des écoulements et des géométries simples. Cependant, si les résultats en termes de précision-coût et performances des conditions aux limites sont toutefois raisonnables, nous ne pourrions rivaliser avec des codes déjà existants de type différences finies d'ordre élevé associés à des conditions aux limites absorbantes adaptées aux incidences obliques [77].

Cette note négative était évidemment prévisible, le domaine de prédilection de notre méthode étant l'utilisation de géométries complexes. De plus si ces quatre premiers cas tests nous ont permis de tester efficacement notre schéma ils ont tout de même laissé une zone d'ombre : les phénomènes d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz. La nature des écoulements porteurs que nous avons pour l'instant utilisés (uniforme ou cisailé linéaire) ne permettaient pas de douter sur l'absence d'instabilités. Dans la partie suivante, nous allons nous intéresser à la construction d'une méthode discrète permettant pour tout type d'écoulement porteur de gérer les instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Nous comparerons ce nouveau traitement au modèle simplifié sur des cas tests stables et instables. Le dernier cas test 2D présenté (autour d'une coupe d'aile 2D) démontrera les qualités importantes de notre méthode pour une géométrie complexe.

4.4 Instabilités de Kelvin-Helmholtz en 2D

4.4.1 Introduction

Dans le premier chapitre, nous avons exposé de manière détaillée comment les équations d'Euler linéarisées pouvaient donner naissance à des instabilités. Nous avons démontré comment sur des configurations très simples, certaines particularités de l'écoulement porteur non uniforme étaient propices à l'apparition de modes exponentiels en temps comme solutions des équations d'Euler linéarisées. Nous avons également d'un point de vue énergétique cherché à retrouver ces résultats.

Or il est curieux de constater que peu d'articles portant sur les équations d'Euler linéarisées traitent de ce sujet ou du moins cherchent à y apporter une solution d'un point de vue numérique en terme de filtrage. Car en effet si ces instabilités ont un sens physique important et méritent tout notre intérêt, il n'en reste pas moins que d'un point de vue numérique elles polluent les résultats en empêchant une étude précise de la propagation des ondes acoustiques. Cette remarque justifie donc la recherche d'une méthode permettant de contenir les instabilités tout en modifiant au minimum les résultats purement acoustiques.

Nous avons déjà exposé certaines méthodes existantes en temporel : utilisation de schémas diffusifs [28], modification des équations comme pour le modèle simplifié [22]. A ce jour, il n'existe pas de remède miracle en temporel pour contrer ces instabilités dans le sens où il n'existe pas de méthode en temps permettant de gérer les instabilités de manière sûre pour tout type d'écoulement porteur tout en conservant un modèle réaliste. En fréquentiel, nous pouvons citer les travaux de A. Agarwal, P.J. Morris et R. Mani qui dans l'article [3] démontrent que leur méthode (utilisation d'une zone éponge en sortie de domaine permettant d'absorber les instabilités à une fréquence donnée) est une réponse efficace et valable quel que

soit l'écoulement porteur. Il est également intéressant de remarquer que pour une approche mixte Lagrangienne-Eulerienne de l'aéroacoustique et une formulation du problème portant sur le déplacement lagrangien connue comme l'équation de Galbrun [38], [69], [64], le caractère bien posé de cette équation pour des écoulements uniforme ou cisailé a donné lieu à diverses recherches [29], [53].

Le modèle simplifié nous a permis dans la plupart des cas de stabiliser les configurations instables que nous avons rencontrées. Les résultats obtenus avec cette méthode nous ont convaincus du bien fondé de l'approche de Bogey, Bailly et Juvé. Malheureusement nous avons pu constater que leur traitement ne permettait pas non plus de garantir la stabilité (nous verrons dans le dernier chapitre un cas test où leur traitement associé à notre schéma s'est révélé instable). Parallèlement, nous avons donc cherché à construire une méthode basée sur le même principe que le modèle simplifié (modification des équations initiales) permettant d'assurer la stabilité de notre schéma pour tout type d'écoulement porteur. Pour cela nous nous sommes inspirés à la fois des remarques d'ordre énergétique que nous avons faites en continu dans la partie 1.5, où nous avons démontré comment un terme source permettait de conserver une énergie aéroacoustique, et également du bilan énergétique en discret exprimé par l'équation (3.18). Cette équation fournit en fait précisément une correction énergétique qu'il suffirait d'apporter pour assurer la stabilité et donc étouffer les instabilités. En effet, dans le bilan énergétique (3.18), le deuxième terme est négatif, ainsi l'ajout d'un terme source qui permettrait d'annuler le premier terme ou le rendre négatif assurerait une condition de stabilité de type CFL. Après avoir exploré plusieurs pistes, nous avons réussi à déterminer un terme source discret à rajouter à notre schéma (nous verrons que l'on peut également l'interpréter comme une modification des flux en espace) pour contrôler le premier terme, ce terme source discret s'apparentant justement au terme source en continu que nous avons exhibé pour forcer la stabilité des équations en continu.

Dans ce chapitre nous illustrerons ces phénomènes d'instabilités, nous présenterons notre terme source discret et nous démontrerons sa capacité à résoudre les problèmes d'instabilités. Nous vérifierons que l'impact de notre modèle ou du modèle simplifié est négligeable sur des cas tests stables et nous étudierons la stabilisation de plusieurs cas tests instables grâce à ces deux traitements.

4.4.2 Cas test académique

Nous allons à présent illustrer l'apparition de ce type d'instabilités sur une configuration académique. Il est connu qu'un écoulement cisailé en tangente hyperbolique est propice à l'apparition de ce type de phénomène. En effet si la ligne d'inflexion correspond également à une ligne de convection des perturbations, l'énergie est alors amplifiée le long de cette ligne, engendrant ainsi des instabilités. Considérons le cas où l'écoulement est défini par $\vec{V}_0 = (0.25 \tanh(\alpha(y - 0.25)) + 0.5) \vec{e}_x$ avec $\alpha = 151.51$, $\rho_0 = 1$ et $p_0 = 1/\gamma$. Ainsi cet écoulement possède une ligne d'inflexion d'équation $y=0.25$ (et $\|\vec{V}_0\| = 0.5$ le long de cette ligne). Pour rappeler quelques notations et résultats de la théorie des couches de mélange, nous pouvons remarquer que $u_0(y)$ peut s'écrire sous la forme :

$$u_0(y) = \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{U_2 - U_1}{2} \tanh\left(\frac{2y}{\delta_w(0)}\right),$$

avec,

$$U_1 = 0.25, U_2 = 0.75 \text{ et } \delta_w(0) = \frac{2}{\alpha}.$$

De manière traditionnelle, $\delta_w(0)$ est appelé épaisseur de vorticité initiale de la couche de cisaillement. L'épaisseur de vorticité de la zone cisailée se calcule de la façon suivante :

$$\delta_w = \frac{U_2 - U_1}{\sup_y |du/dy|}.$$

Il existe alors, d'après la théorie des instabilités linéaires, une fréquence optimale pour le développement des instabilités [63], cette fréquence est donnée par la formule :

$$f = 0.132 \frac{U_1 + U_2}{2\delta_w}. \quad (4.14)$$

Ainsi, nous introduisons au sein de cet écoulement un terme source périodique en temps de fréquence $F = 5Hz$ qui correspond après calcul à la fréquence optimale (4.14) pour la configuration de notre cas test et gaussien en espace pour exciter les modes instables. Par souci de comparaison, nous avons réalisé le même cas test mais pour un écoulement cisailé affine. La figure 4.24 montrent que le comportement général est complètement diff rent pour les deux configurations. Dans le cas de l'écoulement en tangente hyperbolique, les instabilités dont l'allure est propre aux instabilités de type Kelvin-Helmholtz (voir figure 4.25) apparaissent rapidement et croissent le long de la ligne d'inflexion. Si l'apparition d'instabilités était

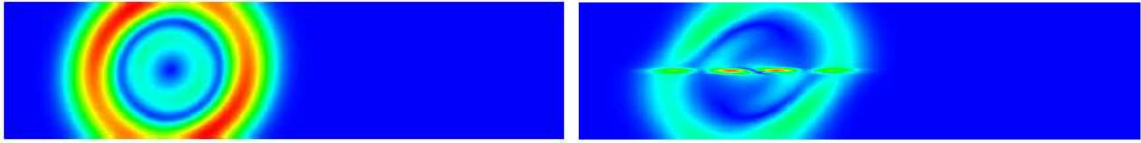


FIG. 4.24 – Contours de $\|\delta\vec{V}\|$   $t=0.257$. A gauche :  coulement cisailé affine. A droite :  coulement cisailé en tangente hyperbolique

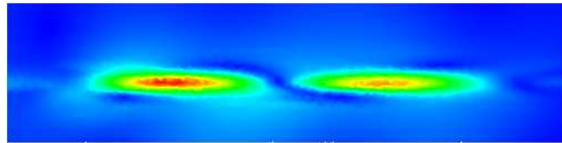


FIG. 4.25 – Allure des instabilités à $t=0.257$ pour l'écoulement en tangente hyperbolique

fortement prévisible pour ce cas test, il n'en est malheureusement pas de même pour la plupart des configurations réelles en écoulement non uniforme. Ainsi nous avons constaté qu'a priori l'apparition de tels phénomènes n'était pas prévisible.

4.4.3 Traitement des instabilités par ajout d'un terme source discret

Rappelons le théorème 3.2.3 :

En utilisant le schéma défini par (3.11), (2.27) et (2.31) sur un maillage arbitraire (comportant

aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ définie par (3.17) vérifie l'équation (3.18) :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1} = & -\frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}}^t \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) + \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^{n-1} \right) \\ & -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right). \end{aligned}$$

De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\mathbf{W}_i^n, \mathbf{W}_i^{n-1})$ si le pas de temps vérifie la condition :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

Comme nous l'avons déjà expliqué, le premier terme de cette variation illustre les échanges énergétiques entre aérodynamique et aéroacoustique, il est a priori impossible de déterminer son signe. Il est "responsable" du fait que l'énergie puisse augmenter de manière exponentielle en temps lors de la présence d'instabilités. Nous allons à présent rajouter un terme source discret portant sur les interfaces internes au schéma (3.11). Le schéma modifié s'écrit :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j = & \sum_{s \in \{x,y,z\}} \int_{T_i}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \cdot \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n + \mathbb{P}_{ik}^k \vec{\mathbf{W}}_k^n}{2} \\ & + \underbrace{\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n}_{\text{Terme source discret}} \end{aligned} \quad (4.15)$$

- Ce terme source ne porte que sur les interfaces internes car par convention si k correspond à l'indice d'une cellule fictive $\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k = \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i$.
- Ce terme source disparaît lorsque l'écoulement est uniforme ou lorsque nous nous situons dans une partie uniforme d'un écoulement non uniforme.
- Si nous combinons ce terme source avec les flux internes centrés, nous obtenons le schéma suivant :

$$\begin{aligned} \left(\mathbb{M}_i \frac{\mathbf{W}_i^{n+1} - \mathbf{W}_i^{n-1}}{2\Delta t} \right)_j = & \sum_{s \in \{x,y,z\}} \int_{T_i}^t \partial_s \vec{\varphi}_{ij} \cdot \mathbb{A}_s^i \vec{\mathbf{W}}_i^n \\ & - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \vec{\varphi}_{ij} \cdot \left[\frac{\mathbb{P}_{ik}^i \vec{\mathbf{W}}_i^n}{2} + \frac{1}{4} \left(\mathbb{P}_{ik}^k + \mathbb{P}_{ik}^i \mathbb{A}_0^i \mathbb{A}_0^{k-1} \right) \vec{\mathbf{W}}_k^n \right], \end{aligned}$$

ce que l'on peut interpréter comme une approximation possible de nos équations par un choix de flux interne non conservatif.

- Nous pouvons remarquer que la forme du terme source discret utilisé est similaire au terme source en continu (1.37) de l'équation (1.36).

Nous allons à présent démontrer le théorème suivant :

Théorème 4.4.1 *En utilisant le schéma défini par (4.15), (2.27) et (2.31) sur un maillage arbitraire (comportant aux bords des interfaces réfléchissantes et absorbantes) avec les notations des définitions 3.2.4, 3.2.5 et 3.2.6, l'énergie discrète $\mathbb{F}^n$ définie par (3.17) vérifie l'équation :*

$$\mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right). \quad (4.16)$$

De plus, il s'agit également d'une forme quadratique définie positive de toutes les variables $(\vec{\mathbf{W}}_i^n, \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1})$, si le pas de temps vérifie la condition (3.34) :

$$\forall i, \forall k \in \mathcal{V}_i, \quad \Delta t (2\lambda\alpha_i + \beta_{ik}\rho_{ik}) < \frac{2V_i}{P_i}.$$

Ainsi l'énergie $\mathbb{F}^n$ est exactement conservée sur un domaine infini ne comportant que des bords réfléchissants et décroît en présence d'interfaces absorbantes. Ainsi nous possédons une condition théorique de stabilité en écoulement non uniforme, exprimée par (3.34). Les résultats énoncés sont identiques dans le cas de l'utilisation de la condition absorbante implicite (2.32) si le pas de temps vérifie la condition (3.35), le bilan pour $\tilde{\mathbb{F}}$ s'écrivant alors :

$$\tilde{\mathbb{F}}^n - \tilde{\mathbb{F}}^{n-1} = -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right). \quad (4.17)$$

Démonstration 4.4.1 Nous allons démontrer ce théorème pour la condition absorbante explicite, la démarche étant identique pour la condition absorbante implicite. En reprenant le même cheminement que pour les lemmes 3.1.3 et 3.1.4, nous obtenons :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} (\mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1}) = \\ & \sum_i \left[\int_{T_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}} \left({}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + {}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{V}}_i^n \right) \tilde{\mathbb{A}}_s^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) - \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n \right] \quad (1) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n \quad (2) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} + {}^t \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \mathbb{H}_{ik} \right) \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n \quad (3) \\ & - \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^n + \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \right) + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} \right) \quad (4) \\ & - \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^n \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^n - 2 {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} + {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} \mathbb{M}_{ik} \vec{\mathbf{V}}_i^{n-2} \quad (5) \\ & + \frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}} {}^t \vec{\mathbf{V}}_i^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_k^n + {}^t \vec{\mathbf{V}}_k^{n-1} \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \right) \vec{\mathbf{V}}_i^n \quad (6) \end{aligned}$$

grâce au terme source

Les résultats (1) = $\vec{0}$, (3) = $\vec{0}$, (2) + (6) = $\vec{0}$ et

$$(4) + (5) =$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right),$$

fournissent le résultat (4.16).

Démontrons maintenant le résultat concernant la condition CFL en reprenant les notations et le principe de la démonstration du lemme 3.2.5 :

$$\mathbb{X}_i^n = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{T}_i} \sum_{s \in \{x, y, z\}}^t \partial_s \left(\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \right) \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i^n - \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{A}}_s^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \partial_s \left(\vec{\mathbf{Z}}_i^n \right) \quad (7)$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^k \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \right) \vec{\mathbf{Z}}_k^n \quad (8)$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right) \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_k^n \quad (9)$$

$$-\frac{1}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{phy}}} \int_{a_{ik}}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^i} \mathbb{H}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \vec{\mathbf{Z}}_i^n \quad (10)$$

$$-\frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1} + \vec{\mathbf{Z}}_i^n \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^i \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \vec{\mathbf{Z}}_i^n. \quad (11)$$

En utilisant les majorations démontrées pour le lemme 3.2.5 et la majoration suivante :

$$|(8) + (9)| \leq \frac{1}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \mathfrak{C}_{ik} \|\vec{\mathbf{Z}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{Z}}_k^n\|_{a_{ik}},$$

$$\text{avec, } \mathfrak{C}_{ik} = \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^k \right) \sqrt{\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k} \mathbb{A}_0^{i-1} \sqrt{\mathbb{A}_0^k} \right)} + \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \sqrt{\rho \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \mathbb{A}_0^i \sqrt{\mathbb{A}_0^k}^{-1} \right)}$$

or,

$$\mathfrak{C}_{ik} = \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^k \right) \sqrt{\rho \left(\mathbb{A}_0^k \mathbb{A}_0^{i-1} \right)} + \rho \left(\mathbb{P}_{ik}^i \right) \sqrt{\rho \left(\mathbb{A}_0^i \mathbb{A}_0^{k-1} \right)},$$

donc,

$$|(8) + (9)| \leq \frac{1}{2} \rho_{ik} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{a_{ik}} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{a_{ik}},$$

nous obtenons finalement le résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_i^n &\geq \frac{1}{2} \left(\|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 \right) - \frac{\alpha_i P_i \lambda^i \Delta t}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^n\|_{\mathcal{T}_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i} \\ &\quad - \frac{\Delta t}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \left(\frac{\rho_{ik} \beta_{ik} \|\vec{\tilde{n}}_{ik}\|}{V_i} \|\vec{\mathbf{W}}_i^{n-1}\|_{\mathcal{T}_i}^2 + \frac{\rho_{ki} \beta_{ki} \|\vec{\tilde{n}}_{ki}\|}{V_k} \|\vec{\mathbf{W}}_k^n\|_{\mathcal{T}_k}^2 \right). \end{aligned}$$

La fin de la démonstration est identique à celle de la démonstration du lemme 3.2.6



Ce résultat est important car il nous assure une condition de stabilité pour tout type d'écoulement sur tout type de maillage. Cependant, comme lorsque nous rajoutons un terme source aux équations en continu, le fait de rajouter ce traitement discret revient à résoudre numériquement un problème différent. Il était donc crucial de vérifier que ce traitement a très peu d'influence numériquement sur des configurations stables.

Les cas tests qui suivent vont nous permettre d'illustrer plusieurs points :

- L'impact très faible de notre traitement pour des cas tests en écoulement non uniforme sans instabilités (même si évidemment d'un point de vue numérique, ce traitement n'a un intérêt qu'en présence d'instabilités).
- Les répercussions de notre méthode sur des cas tests instables.
- La comparaison de notre méthode avec celle de Bogey, Bailly et Juvé [22] sur des cas tests instables.

Il est à noter évidemment qu'une fois notre méthode validée, elle ne sera appliquée que sur des configurations instables.

Une autre remarque que nous pouvons faire réside dans le caractère "fort" de notre traitement, "fort" au sens où notre traitement a pour effet de faire disparaître le premier terme des bilans (3.18) et (3.24) quels que soient leurs signes. Or seul le caractère éventuellement positif de ces termes pose problème. Regardons de plus près cette remarque pour le cas de la condition absorbante explicite (les résultats que nous allons énoncer étant généralisables à la condition absorbante implicite), imaginons que le terme source discret de l'équation (4.15) soit remplacé par :

$$\frac{1}{4} \sum_{k \in \mathcal{V}_i} \int_{a_{ik}} \tilde{\varphi}_{ij} \cdot \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{k-} - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{i-} \right) \mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n.$$

Nous obtiendrions alors,

$$\begin{aligned} \mathbb{F}^n - \mathbb{F}^{n-1} = & \quad (4.18) \\ -\frac{\Delta t}{2} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{int}}} \int_{a_{ik}}^t & \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^{n-1} \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{k+} - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{i+} \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^n \right) + \left(\mathbb{A}_0^{i-1} \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \left(\tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{k+} - \tilde{\mathbb{P}}_{ik}^{i+} \right) \left(\mathbb{A}_0^{k-1} \vec{\mathbf{W}}_k^{n-1} \right) \\ -\frac{\Delta t}{4} \sum_{a_{ik} \in \mathcal{F}^{\text{abs}}} \int_{a_{ik}}^t & \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right) \left| \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \tilde{\mathbb{P}}_{ik} \sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \right| \left(\sqrt{\mathbb{A}_0^i}^{-1} \left(\vec{\mathbf{W}}_i^{n-2} + \vec{\mathbf{W}}_i^n \right) \right), \end{aligned}$$

tout en conservant la même condition en temps, donnée par (3.34) pour le caractère défini positif de $\mathbb{F}^n$. Grâce au caractère négatif du premier terme du nouveau bilan, nous aurions la même condition CFL de stabilité pour ce nouveau terme source tout en respectant un peu mieux la physique du problème (annulation uniquement de la partie positive du premier terme de (3.18)). En fait notre choix s'est porté sur la première méthode pour une raison simple, le coût numérique. En effet, nous avons réalisé une phase de test pour valider et comparer les résultats obtenus pour ces deux traitements et nous n'avons numériquement obtenu aucune différence pour tous les cas tests réalisés, par contre le deuxième terme source s'est révélé beaucoup plus gourmand en terme d'opérations et de stockage car il nécessite le calcul et le stockage de $\tilde{\mathbb{P}}^+$ pour chaque interface interne, ce qui évidemment n'est pas négligeable contenu de la complexité de la matrice $\tilde{\mathbb{P}}$ et des maillages que nous avons été amenés à utiliser en 2D et 3D. Ainsi dans la suite du mémoire lorsque nous ferons référence à "notre traitement", il sera question de l'utilisation du premier terme source discret.

4.4.4 Cas test cisailé affine

Ce premier cas test a pour but de tester notre traitement ainsi que le modèle simplifié sur un écoulement non uniforme sans instabilités. En effet si l'intérêt de ces méthodes de correction porte sur les cas tests instables, il est important de voir comment elles agissent sur les solutions d'un problème stable vu qu'elles consistent à modifier les équations. En pratique nous avons réalisé une batterie de tests pour valider les deux méthodes et les comparer. L'intérêt étant purement qualitatif, nous avons décidé d'exposer un cas test en écoulement cisailé affine représentatif des résultats que nous avons obtenus sur tout les autres cas que nous avons simulés. Les données de l'écoulement que nous avons utilisé sont les suivantes :

$$\rho_0 = 1, \vec{V}_0 = \left(\frac{0.7}{200} (y + 100) + 0.1 \right) \vec{e}_x, p_0 = \frac{1}{\gamma}.$$

Le domaine de calcul est un carré de côté 200 centré à l'origine du repère. Ainsi l'écoulement utilisé est une fonction affine de y variant de 0.1 à 0.8 pour y variant de -100 à 100. Nous avons utilisé un maillage non structuré composé de 20995 sommets (41468 triangles) en imposant la condition absorbante (2.31) sur les bords du domaine. Nous avons utilisé deux types de sources acoustiques. Dans un premier temps nous avons uniquement imposé une perturbation acoustique gaussienne en espace à l'instant initial (principalement pour vérifier les résultats énergétiques) et dans un second temps nous avons imposé un terme source gaussien en espace et périodique en temps de période $T = 11s$. Les figures 4.26, 4.27 et 4.28 correspondent à la comparaison des résultats obtenus pour la perturbation initiale tandis que les figures 4.29, 4.30 et 4.31 illustrent ceux obtenus pour la perturbation périodique en temps. Remarquons également que dans le cas de l'utilisation du modèle simplifié nous ne disposons pas de résultats énergétiques, ainsi les figures 4.27 et 4.30 ne concernent que le modèle sans traitement et le modèle avec notre terme source discret. Sur ces premiers résultats, nous pouvons remarquer les différents points suivants :

- La figure 4.26 ne montre pas de différence notable entre les configurations. Nous pouvons juste remarquer une légère différence entre la valeur maximale des isovaleurs (en rouge) entre la configuration sans traitement et les deux autres, plus précisément l'écart est de 2%.
- La figure 4.27 est en accord avec les résultats théoriques énergétiques. En effet, tout d'abord nous pouvons vérifier que pour le cas sans traitement l'énergie $\mathbb{F}$ donnée par (3.17) n'est pas conservée avant d'atteindre les premières interfaces absorbantes (à $t \simeq 66s$), elle augmente légèrement et cette variation correspond au premier terme de l'équation (3.18). Toutefois cette légère croissance est très vite dissipée lorsque la perturbation atteint les parois absorbantes. Dans le cas où nous utilisons notre traitement défini par (4.15) nous pouvons vérifier que $\mathbb{F}$ est constante avant d'atteindre les parois absorbantes, ce qui est en accord avec le bilan (4.16). Le dernier point important concernant le bilan énergétique est de constater que l'évolution globale de l'énergie est très proche pour les deux configurations.
- Enfin les calculs des erreurs $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ pour notre modèle et le modèle simplifié par rapport à la solution sans traitement sont représentatives des erreurs que nous avons obtenues pour tous les cas tests en écoulement non uniforme stable sans terme source

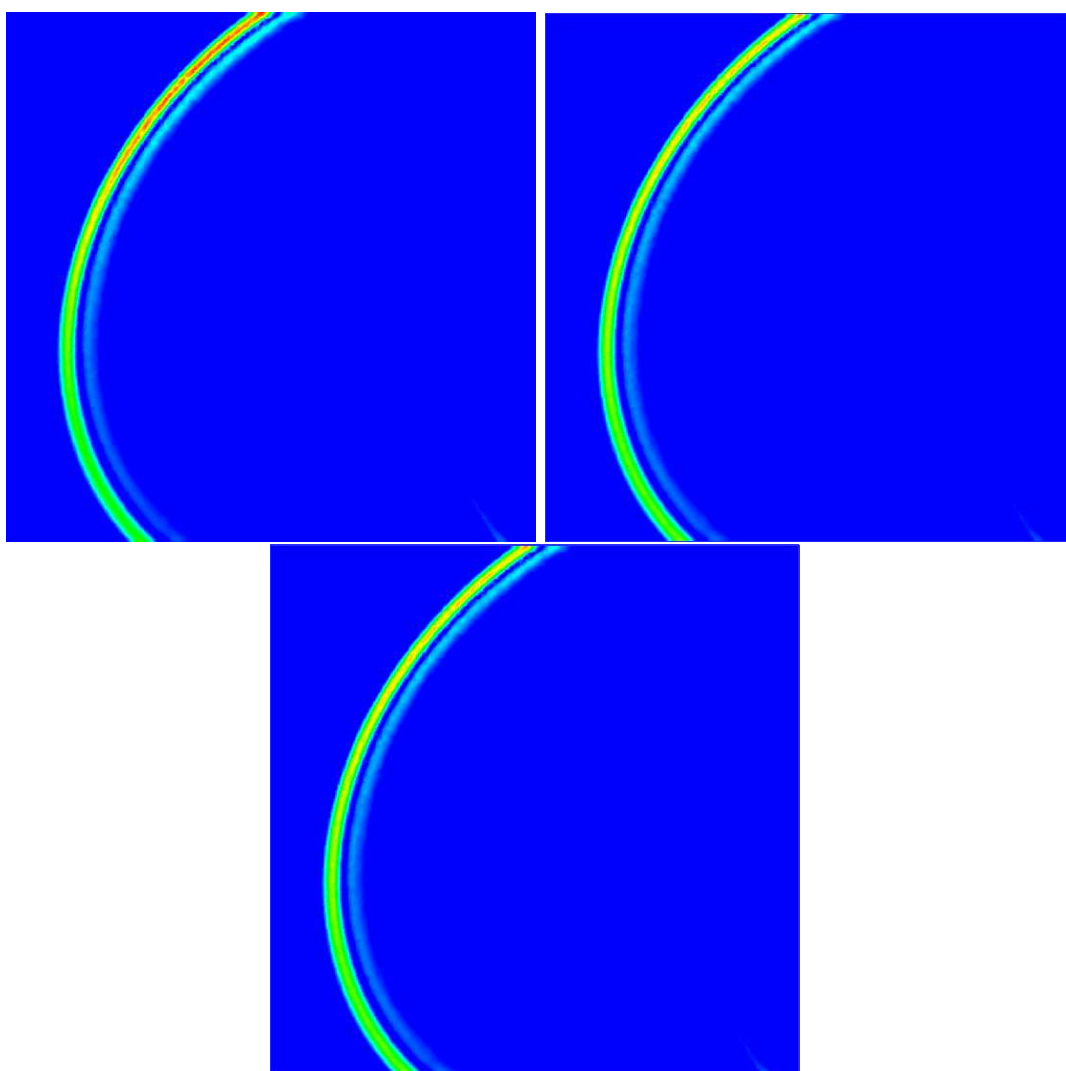


FIG. 4.26 – 20 isovaleurs de δV à $t=132s$. En haut de gauche à droite : sans traitement puis avec notre traitement. En bas : modèle simplifié

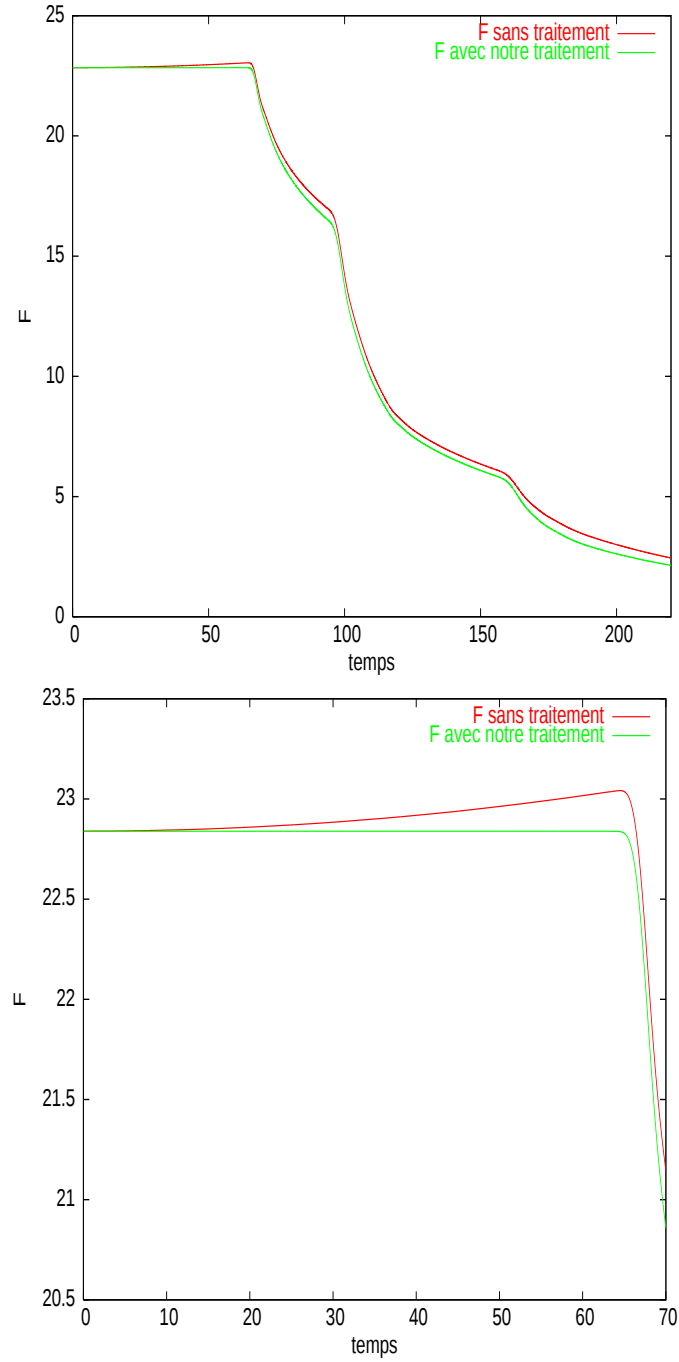


FIG. 4.27 – Représentation de $\mathbb{F}$ sans et avec notre traitement

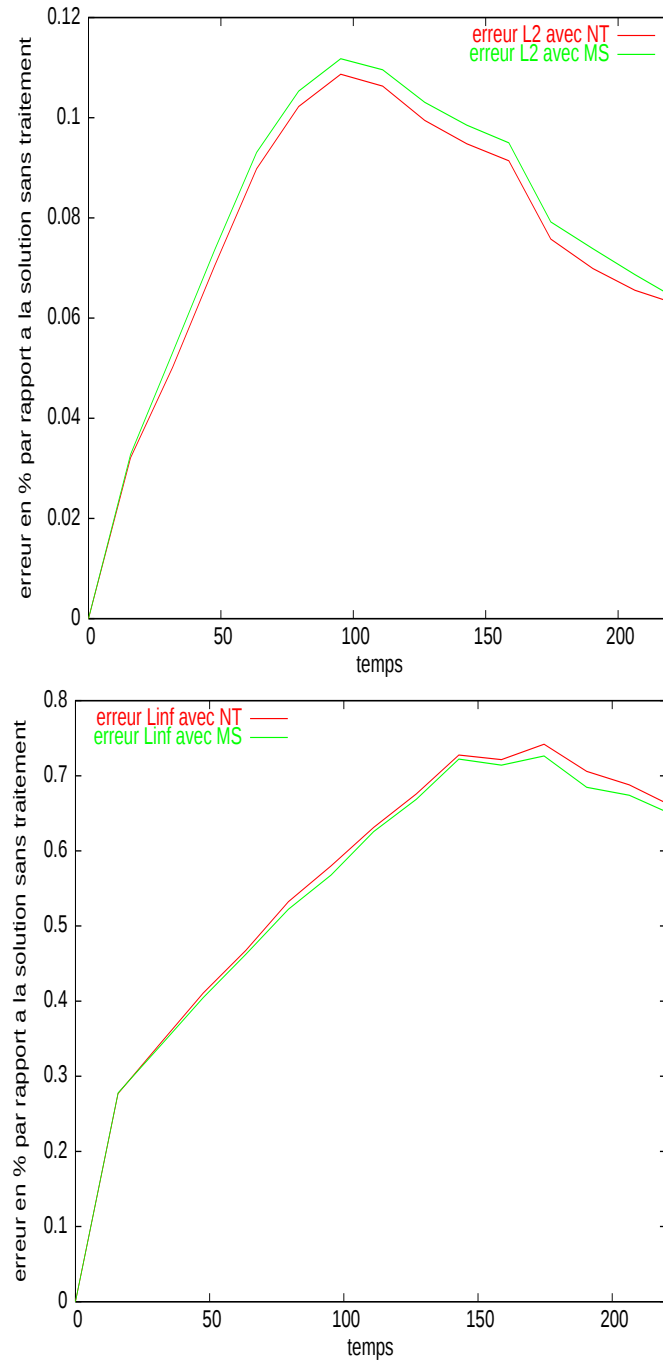


FIG. 4.28 – Evolution temporelle de l'erreur $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ pour $\|\delta\vec{V}\|$ par rapport à la solution sans traitement

(inférieur à 1%), ce qui est tout à fait acceptable. A noter également que l'évolution de ces erreurs est très proche pour les deux traitements.

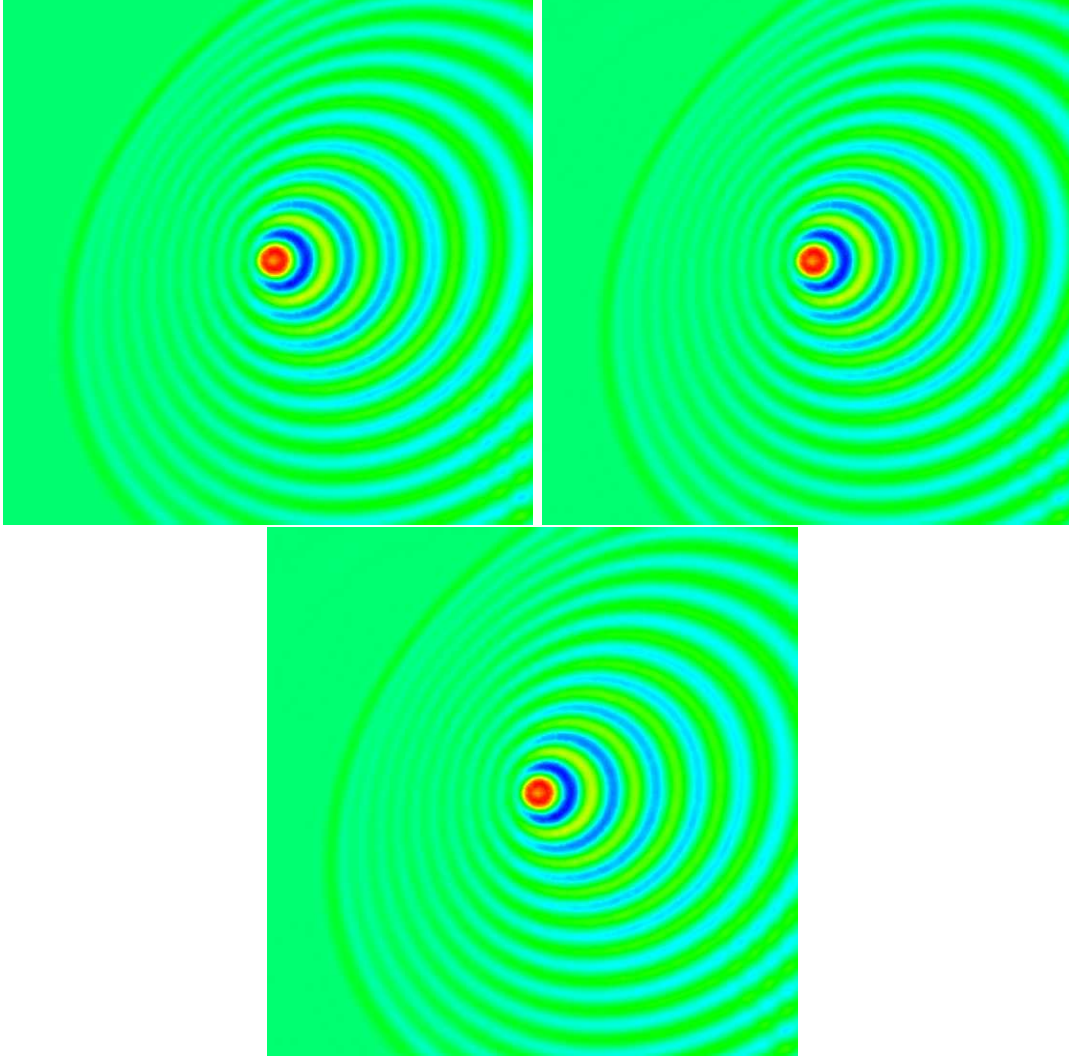


FIG. 4.29 – 50 isovalues de δp à $t=132s$. En haut de gauche à droite : sans traitement puis avec notre traitement. En bas : modèle simplifié

Les résultats obtenus lors de l'utilisation de la perturbation périodique en temps conforte les remarques faites précédemment, nous pouvons tout de même y ajouter les remarques suivantes :

- Les calculs des erreurs $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ pour notre modèle et le modèle simplifié par rapport à la solution sans traitement sont représentatives des erreurs que nous avons obtenues pour tous les cas tests en écoulement non uniforme stable avec terme source (inférieur à 4%).
- Il est intéressant de remarquer que les erreurs commises ne sont pas des fonctions croissantes du temps et que leurs variations sont très proches pour les deux modèles.

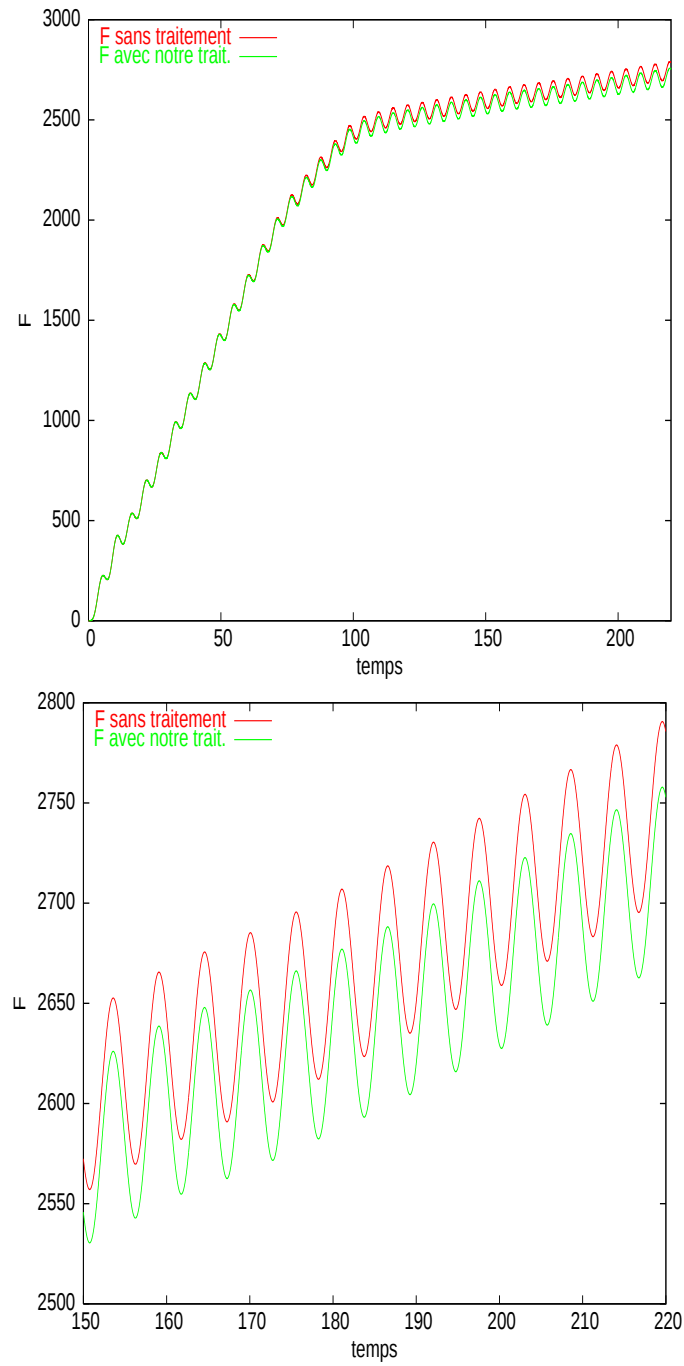


FIG. 4.30 – Représentation de $\mathbb{F}$ sans et avec notre traitement

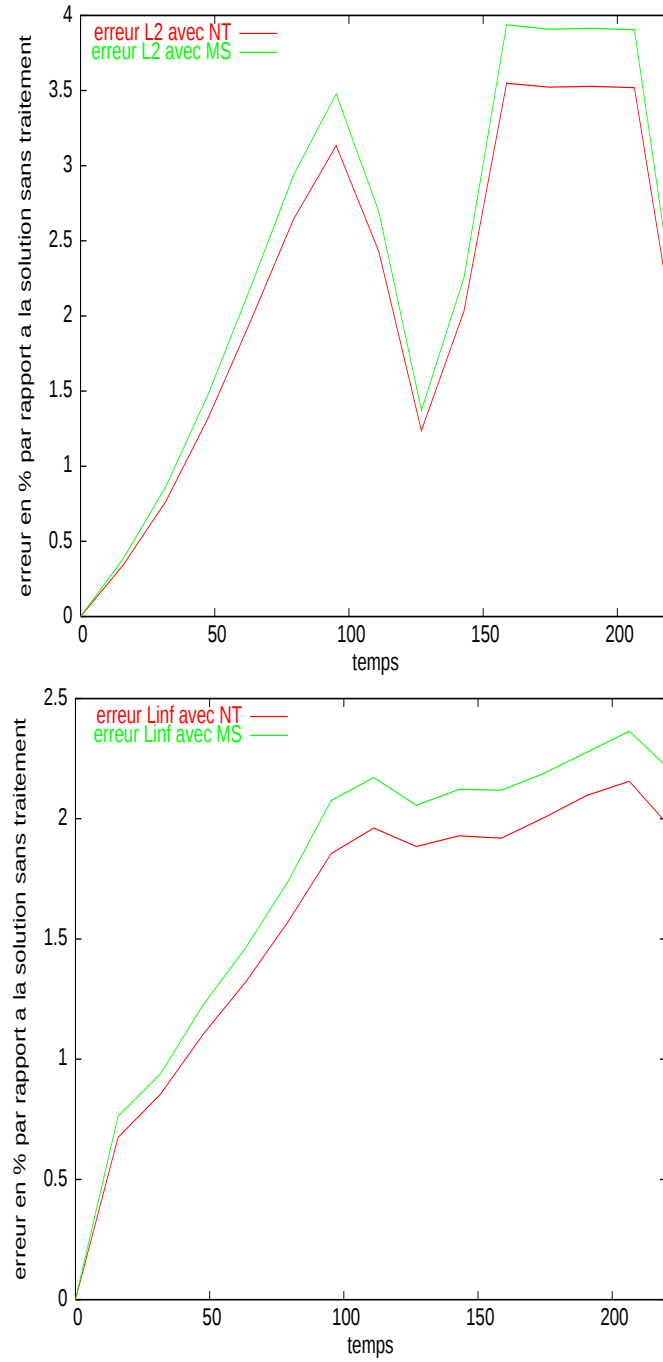


FIG. 4.31 – Evolution temporelle de l'erreur $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ pour δp par rapport à la solution sans traitement

- Si pour ce cas test nous pouvons remarquer que l'utilisation de notre méthode semble plus performante que celle du modèle simplifié, nous avons réalisé d'autres cas tests où la tendance était inversée. En fait la synthèse des résultats des différents cas tests que nous avons réalisés nous permet d'affirmer que les deux approches se sont révélées très proches au niveau du calcul d'erreur par rapport à la solution sans traitement pour les configurations stables.

Ce cas test est une des validations de notre modèle comparativement au modèle simplifié que nous avons réalisées. L'intérêt principal de notre méthode réside dans le résultat théorique de stabilité exprimé par le théorème (4.4.1). Ainsi nous verrons lorsque nous aborderons les cas tests 3D que contrairement à notre méthode, le modèle simplifié ne permet pas forcément de gérer toutes les instabilités.

4.4.5 Cas test avec instabilités

Nous allons à présent comparer comment notre modèle et le modèle simplifié agissent sur un cas test instable. Le cas test que nous allons étudier est identique du point de vue de l'écoulement porteur à celui que nous avons présenté en introduction de cette sous-partie. Rappelons que l'écoulement non uniforme est défini par :

$$\vec{V}_0 = (0.25 \tanh(151.51(y - 0.25)) + 0.5) \vec{e}_x, \quad \rho_0 = 1, \quad p_0 = 1/\gamma.$$

Le domaine de calcul est rectangulaire de longueur 2 et de largeur 0.5, l'origine du repère correspondant au sommet inférieur gauche du rectangle. Le terme source acoustique que nous imposons est gaussien en espace (le centre de la gaussienne ayant pour coordonnées (0.5, 0.25)) et indépendant du temps. Le maillage est non structuré composé de 35890 sommets (70928 triangles). Nous imposons notre condition absorbante (2.31) sur le bord du domaine. Parallèlement, nous réalisons le même cas test avec un écoulement affine défini par

$$\vec{V}_0 = y + 0.25, \quad \rho_0 = 1, \quad p_0 = 1/\gamma,$$

pour comparer l'allure générale des résultats pour l'écoulement en tanh après traitement avec ceux obtenus pour cet écoulement affine ne nécessitant aucun traitement. La figure 4.32 représente $\vec{V}_{0x}$ en fonction de y pour les deux écoulements.

Lorsque nous n'imposons pas de traitement particulier (voir figure 4.33) pour l'écoulement en tanh, nous voyons rapidement apparaître des modes instables convectés à la valeur de la vitesse sur la ligne d'inflexion dont l'amplitude augmente également rapidement, ces instabilités finissant par polluer les résultats. Ainsi à $t=1s$, le max de $|\delta p|$ est de l'ordre de 100 pour le cas sans traitement tandis qu'il est de l'ordre de 10 lors de l'utilisation de notre traitement ou du modèle simplifié. Les résultats obtenus pour les deux traitements sont très proches et nous vérifions alors l'absence d'instabilités. De plus nous pouvons constater grâce à la figure 4.36 que les résultats obtenus pour le cas stable (écoulement affine) sont assez proches de ceux obtenus pour le cas instable, stabilisé par l'un des deux traitements. Qualitativement, ces différents résultats montrent que les deux traitements utilisés permettent bien "d'étouffer" les instabilités de type Kelvin-Helmholtz tout en conservant un profil aéroacoustique cohérent.

La figure 4.37 montre au niveau énergétique le caractère explosif du cas test en tanh lorsque nous n'imposons pas de traitement. L'allure linéaire au voisinage de $t=1s$ de l'évolution de

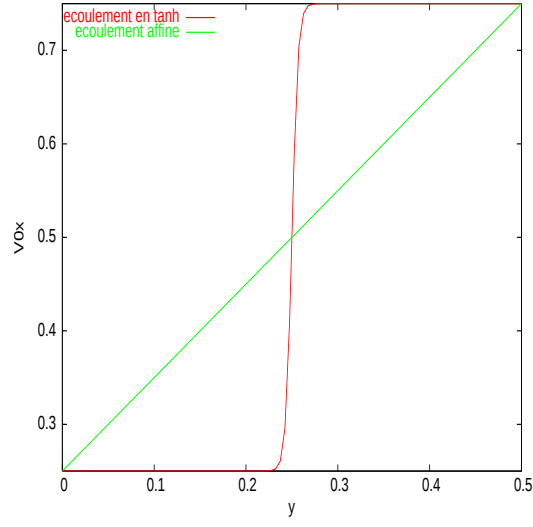


FIG. 4.32 – Représentation de $\vec{V}_{0x}$ en fonction de y pour les deux écoulements

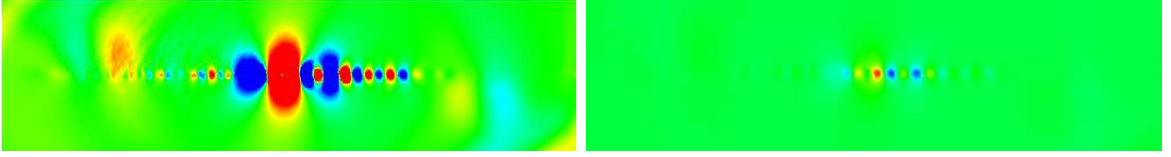


FIG. 4.33 – 50 isos de δp de -10 à 10 (figure de gauche) et de -100 à 100 (figure de droite) pour le cas instable sans traitement à $t=1s$

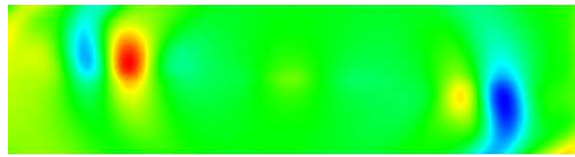


FIG. 4.34 – 50 isovaleurs de δp de -10 à 10 pour le cas instable avec modèle simplifié à $t=1s$

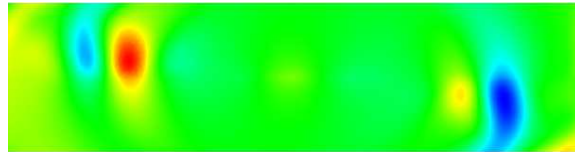


FIG. 4.35 – 50 isovaleurs de δp de -10 à 10 pour le cas instable avec notre traitement à $t=1s$

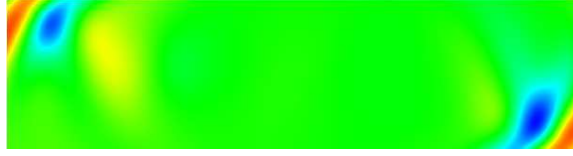


FIG. 4.36 – 50 isovaleurs de δp de -10 à 10 pour le cas stable (écoulement affine) sans traitement à $t=1s$

l'énergie en échelle logarithmique pour le cas en tanh sans traitement illustre le caractère exponentiel en temps des instabilités. Ce graphique permet également de constater que l'évolution temporelle de $\mathbb{F}$ est proche entre la configuration d'écoulement stabilisé par notre traitement et la configuration de l'écoulement affine sans traitement. Enfin la figure 4.38 représente la différence en norme $\mathcal{L}^2$ et norme $\mathcal{L}^\infty$ des résultats obtenus dans le cas instable entre notre traitement et celui du modèle simplifié, la différence maximale obtenue au cours du cas test est vraiment négligeable puisqu'elle est de l'ordre de 0.5% en norme $\mathcal{L}^2$ et de l'ordre de 0.4% en norme $\mathcal{L}^\infty$. Nous allons à présent détailler un dernier cas test en géométrie 2D. Ce cas test a pour but de valider pour un écoulement non uniforme complexe le comportement global de notre schéma ainsi que l'utilisation de méthodes permettant de gérer les instabilités et de comparer l'impact de l'écoulement comparativement au même cas test en acoustique pure.

4.4.6 Problème aéroacoustique autour d'une coupe d'aile 2D de type NACA

Ce cas test a déjà fait l'objet d'une étude dans [19]. La géométrie et le maillage non structuré du cas test nous ont été fournis par l'ONERA [28], le maillage est composé de 33046 sommets et de 65580 triangles. Nous avons obtenu la solution stationnaire des équations d'Euler pour un Mach infini $M_\infty = 0.5$ grâce à un solveur volumes finis des équations d'Euler non linéarisées [51]. Le profil du Mach est illustré par la figure 4.39. Nous utilisons notre condition réfléchissante (2.27) sur le bord de l'aile (en effectuant un post-traitement sur l'écoulement obtenu pour vérifier la condition (2.20)) et notre condition absorbante (2.31) sur le bord infini du domaine. La perturbation aéroacoustique est définie par un terme source gaussien en espace et périodique en temps ($T = 1ms$). Sans pouvoir le prévoir, nous avons alors observé l'apparition d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz au niveau du point du fuite, mais de manière encore plus inattendue nous avons constaté l'apparition d'autres instabilités au niveau des cellules à plus fort gradient en vitesse pour l'écoulement moyen. La figure 4.40 comparée à la figure 4.39 illustre ce résultat.

Sans rentrer trop dans les détails de la théorie des instabilités, nous pouvons apparemment, tout en restant prudent, ce deuxième type d'instabilités à des ondes de type Tollmien-Schlichting [72], [62]. En effet, l'approximation faite pour le calcul de l'écoulement porteur peut nous permettre de le comparer à un écoulement visqueux à très grand nombre de Reynolds (la viscosité étant numérique), ainsi au niveau des zones à fort gradient en vitesse, nous pouvons comparer le phénomène observé à l'apparition d'ondes de type Tollmien-Schlichting en écoulement visqueux dont le principe est le suivant : sur un profil d'aile en configuration bidimensionnelle stationnaire, l'écoulement est laminaire près du bord d'attaque. En aval, à partir d'un certain point, les lignes de courant ondulent ce qui peut générer des ondes bidimen-

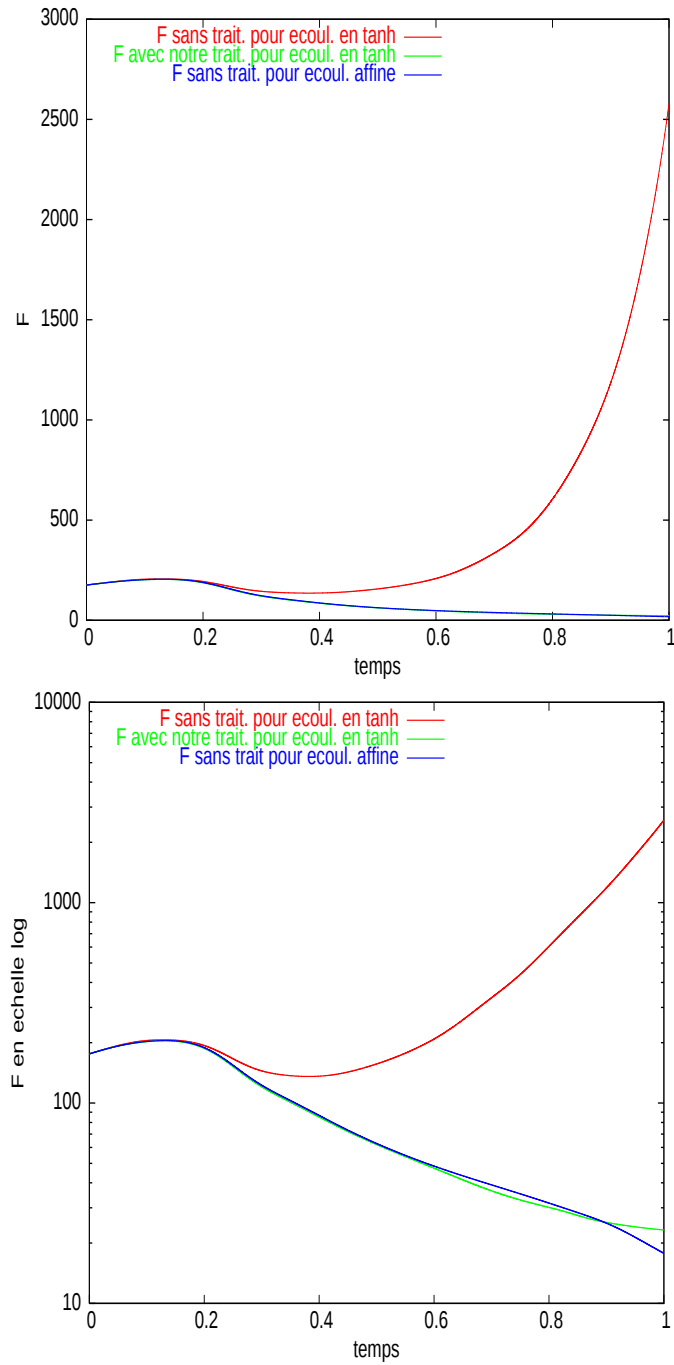


FIG. 4.37 – Représentation de F sans et avec notre traitement (figure du bas en échelle logarithmique)

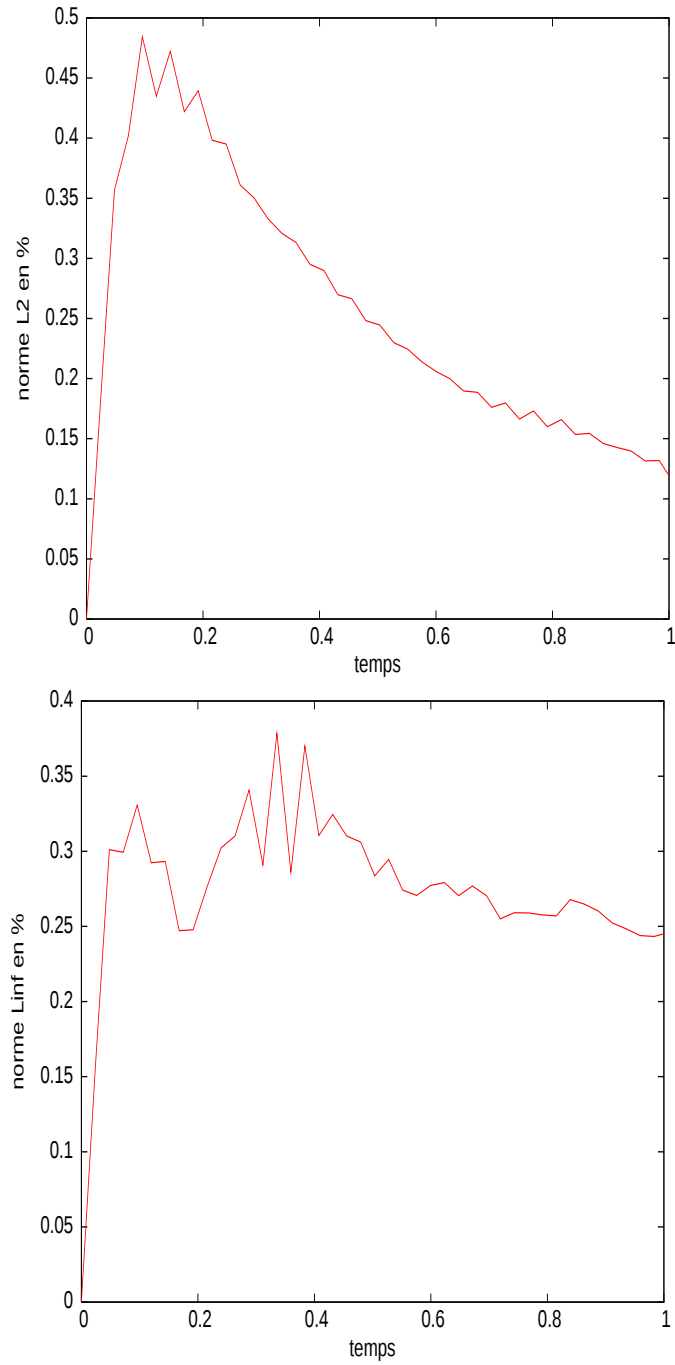
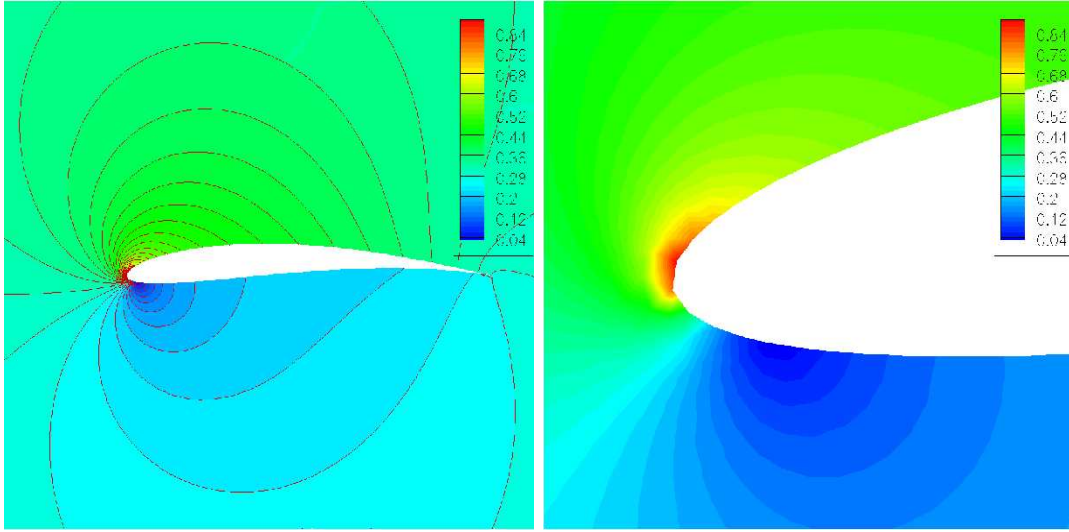
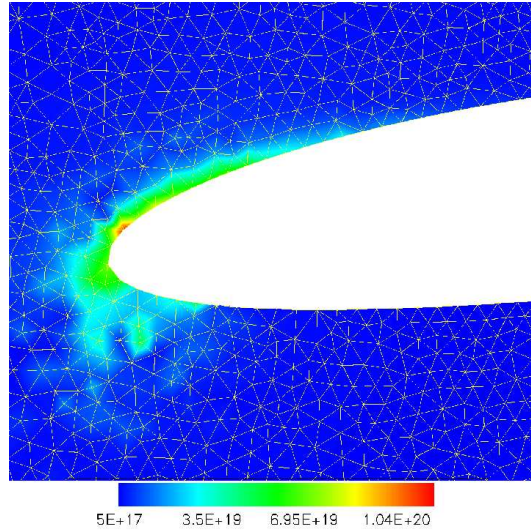


FIG. 4.38 – Evolution temporelle en % des normes $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ de la différence entre le modèle simplifié et notre traitement pour $\|\delta\vec{V}\|$


 FIG. 4.39 – Contours du nombre de Mach pour $M_\infty = 0.5$

sionnelles et parallèles au bord d'attaque. Des phénomènes complexes prennent place ensuite pour conduire l'écoulement au régime turbulent. L'analyse théorique de la première phase de transition (ondes de Tollmien-Schlichting) est étudiée à l'aide de l'équation d'Orr-Sommerfeld.

Nous n'avons pas approfondi l'étude de ce type de singularité pour son caractère très particulier et également par manque de temps. Il est à noter que les résultats théoriques obtenus sur notre traitement nous assure de toute manière la stabilisation numérique de ces instabilités.


 FIG. 4.40 – Contours de $\|\delta\vec{V}\|$ pour $t=1.57ms$ (sans traitement)

Lorsque nous utilisons notre traitement ou le modèle simplifié, nous observons la disparition des deux types d'instabilités. Les autres figures présentent les résultats obtenus en

écoulement complexe avec traitement par rapport à une configuration acoustique (pour laquelle : $\rho_0 = \rho_\infty$, $p_0 = p_\infty$ et $\vec{V}_0 = \vec{0}$). Les figures 4.41, 4.42, 4.43, 4.44 et 4.45 permettent de mettre en avant les résultats suivants :

- La vitesse du front d'onde n'étant pas la même pour les différents profils d'écoulement, la figure 4.41 ne représentent pas les deux premières configurations au même instant que la troisième mais permettent de comparer l'allure générale du front d'onde au même endroit. Or il apparaît clairement que la présence de l'écoulement influence notablement (et de la même manière pour les deux traitements) l'évolution des perturbations acoustiques, en effet il y apparaît que le front d'onde est accéléré au-dessus du profil d'aile tandis qu'il est ralenti en dessous. Ce résultat est en accord avec le profil de l'écoulement utilisé (voir figure 4.39).
- La figure 4.42 qui représente tout le domaine montre également que la présence de l'écoulement modifie de manière tangible la diffraction autour de l'aile.
- La figure 4.43 est plus singulière car elle met en évidence, pour les deux configurations stabilisées, la dégénérescence rapide de tourbillons au niveau du point de fuite. Ces tourbillons n'entraînent plus d'instabilités de type Kelvin-Helmholtz. Il semble donc que le modèle simplifié et notre traitement permettent de contrôler assez finement l'énergie pour éviter l'apparition des instabilités de type Kelvin-Helmholtz tout en ne faisant pas disparaître de manière brutale le phénomène physique.
- La figure 4.44 représente l'évolution de $\mathbb{F}$, pour l'écoulement non uniforme, avec et sans notre traitement. Nous retrouvons le caractère exponentiellement croissant en temps de l'énergie (ce qui est en accord avec la forme des ondes de Tollmien-Schlichting et celle des instabilités de type Kelvin-Helmholtz) et le comportement satisfaisant de $\mathbb{F}$ avec notre traitement.
- La figure 4.45 illustre, comme pour le cas test précédent, le caractère très proche des résultats obtenus lors de l'utilisation de notre traitement ou du modèle simplifié.
- Enfin, il est à noter que notre approche de type Galerkin discontinu s'est révélée réellement adaptée à la configuration de ce cas test : simplicité pour la construction du maillage, facilité d'utilisation de nos conditions aux limites, prise en charge immédiate de l'écoulement moyen et qualités des résultats.

4.4.7 Conclusion

Nous avons présenté dans cette partie une méthode discrète qui, associée à notre schéma, permet de gérer les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Cette méthode a été construite à partir des résultats énergétiques obtenus sur l'expression continue des équations (voir Partie 1.5) et sur le bilan énergétique de notre schéma en écoulement non uniforme. Nous avons démontré que théoriquement ce traitement permettait, contrairement à d'autres approches existantes, d'assurer la stabilité de notre schéma sous une condition de type CFL pour tout type d'écoulement grâce à la conservation d'une énergie.

Evidemment, comme pour le modèle simplifié, l'importance de ce résultat est diminuée par son caractère a priori physiquement peu justifiable. Cette méthode revenant à modifier les équations, nous avons dû valider numériquement notre modèle. Comme l'illustrent les cas tests que nous avons choisis de présenter, l'utilisation de notre traitement ou du modèle

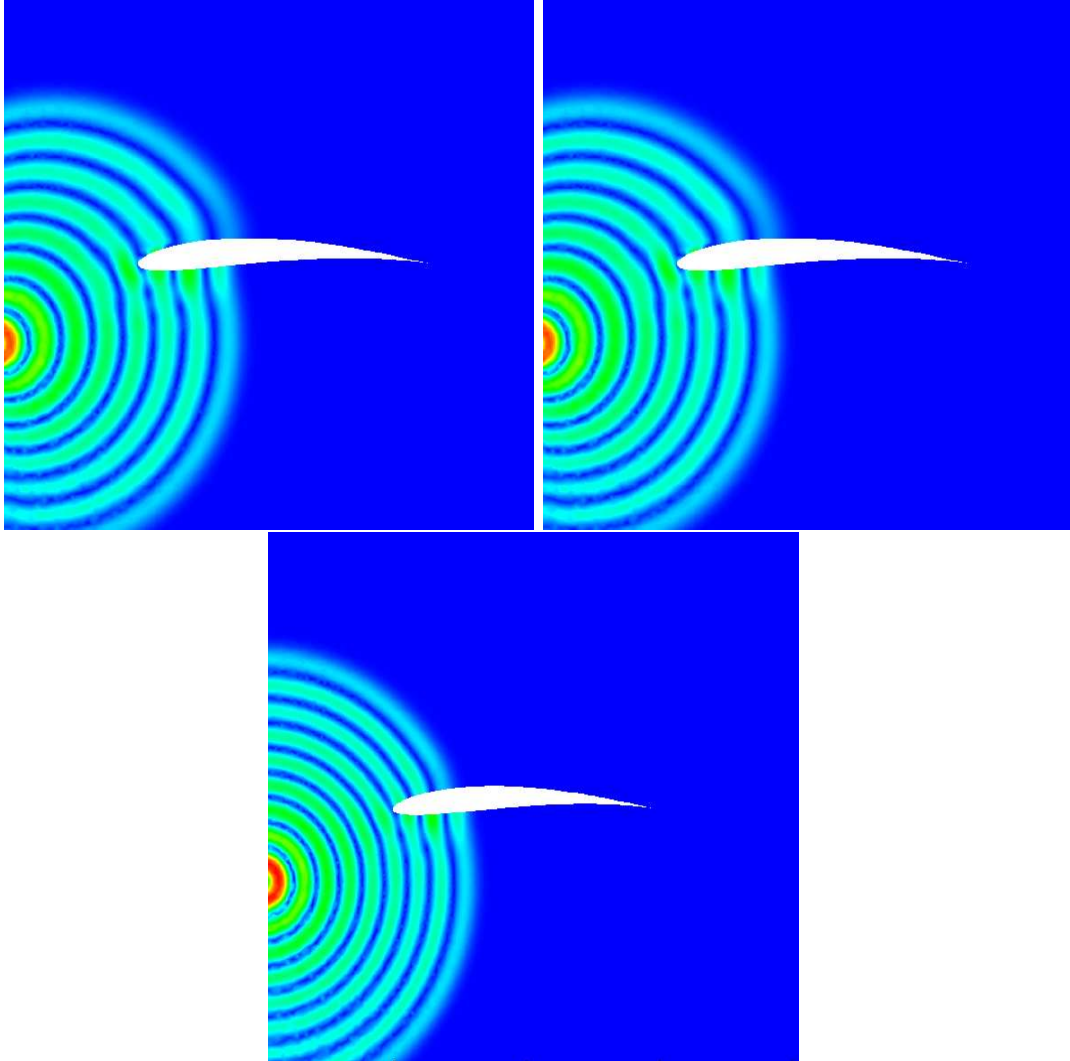


FIG. 4.41 – 50 isovaleurs de $\|\delta \vec{V}\|$. En haut à gauche : écoulement non uniforme avec notre traitement. En haut à droite : écoulement non uniforme avec modèle simplifié. En bas : acoustique.

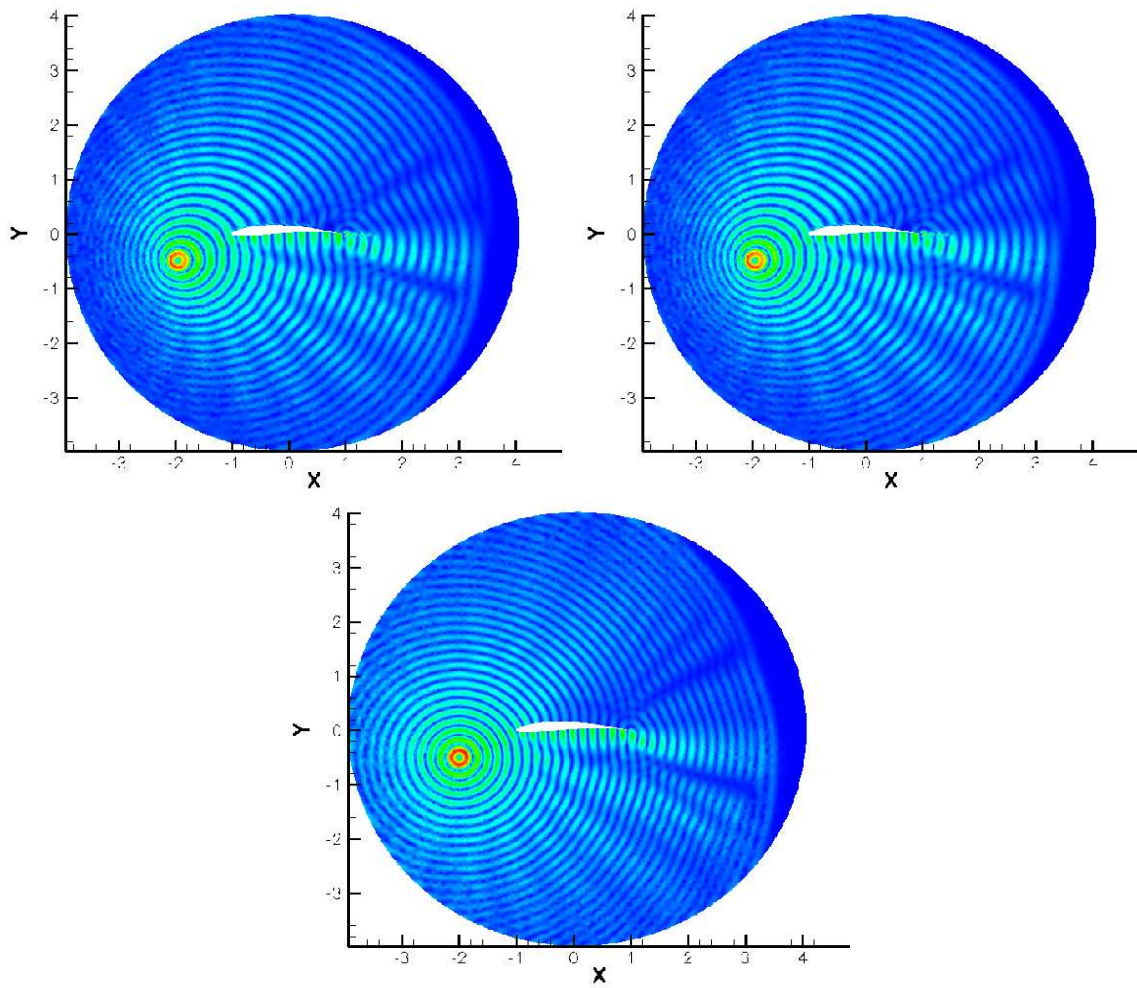


FIG. 4.42 – 50 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$. En haut à gauche : écoulement non uniforme avec notre traitement. En haut à droite : écoulement non uniforme avec modèle simplifié. En bas : acoustique.

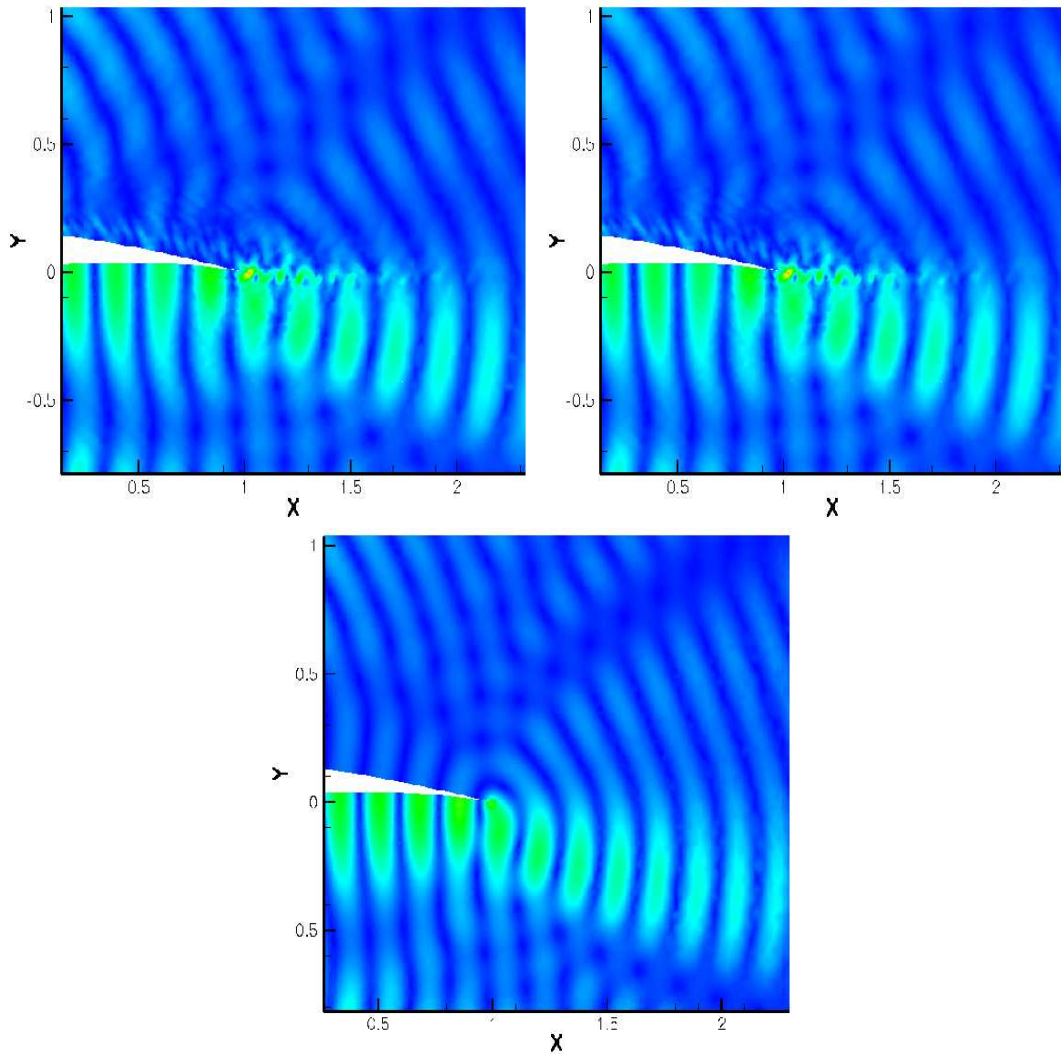


FIG. 4.43 – Zoom sur le point de fuite. En haut à gauche : écoulement non uniforme avec notre traitement. En haut à droite : écoulement non uniforme avec modèle simplifié. En bas : acoustique.

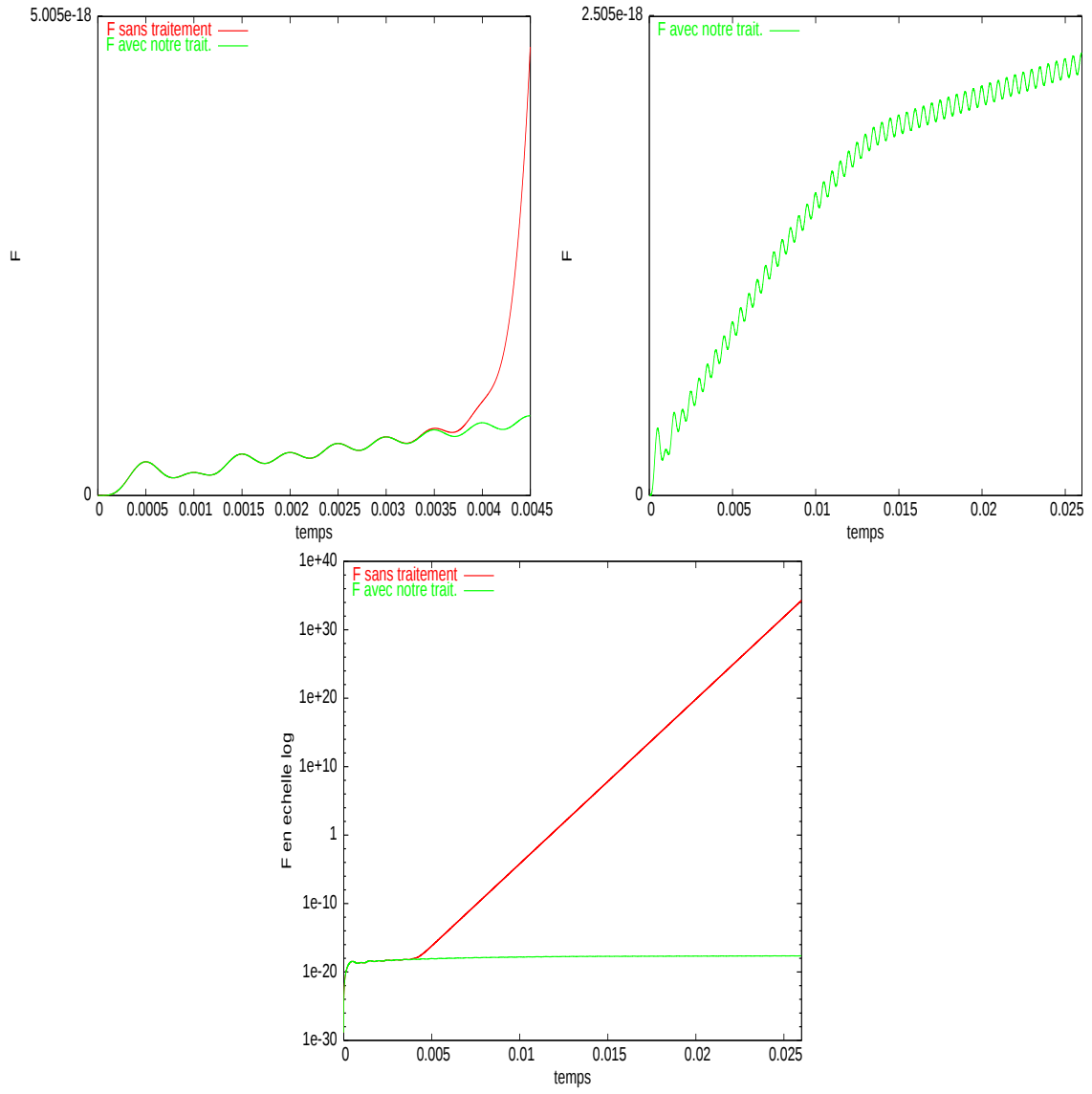


FIG. 4.44 – Représentation de F sans et avec notre traitement

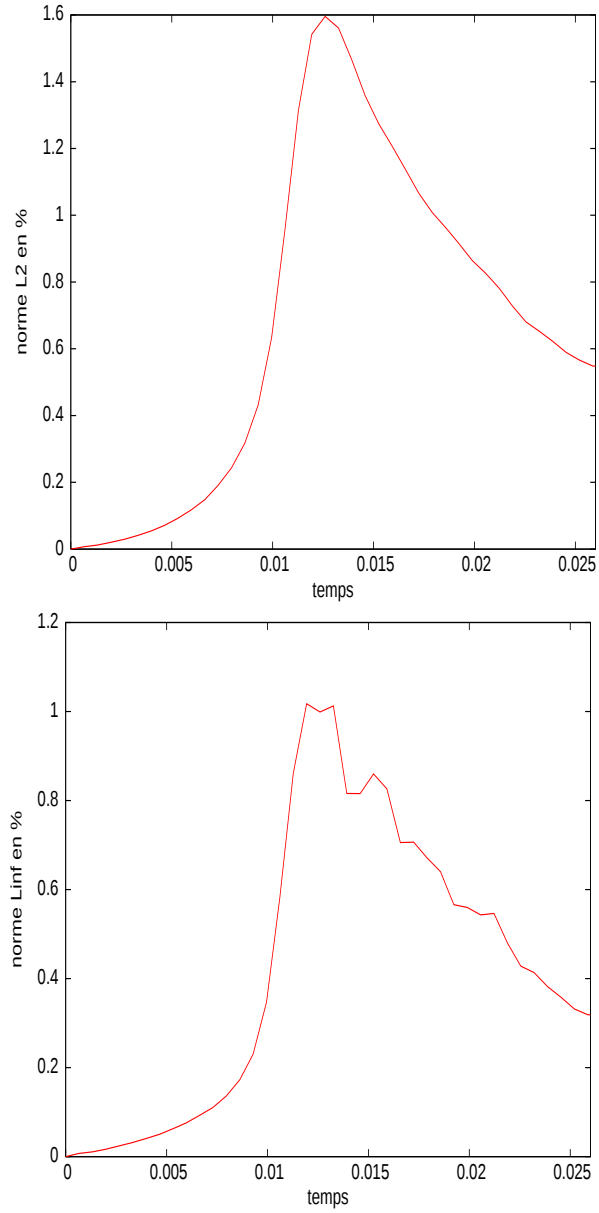


FIG. 4.45 – Evolution temporelle en % de la norme $\mathcal{L}^2$ et $\mathcal{L}^\infty$ de la différence entre le modèle simplifié et notre traitement pour $\|\delta\vec{V}_1\|$

simplifié a entraîné des modifications insignifiantes par rapport aux résultats sans traitement sur des cas tests stables. De plus les résultats obtenus sur des cas tests instables, stabilisés lors de l'utilisation de notre modèle ou du modèle simplifié, se sont révélés très proches pour les deux traitements.

Il est vrai que nous n'avons pas réussi à justifier de manière purement théorique notre méthode, nous aurions aimé en exhiber un domaine de validité en fréquence des perturbations et (ou) en régularité de l'écoulement non uniforme. Ceci reste un problème ouvert. Enfin, nous verrons dans le chapitre suivant que le modèle simplifié ne nous a pas permis de stabiliser toutes les configurations instables que nous avons rencontrées, ce résultat justifiant les efforts investis dans la construction de notre méthode.

Conclusion

Nous avons tenté à travers ce chapitre de mettre en évidence les points négatifs et positifs de nos différentes formulations et des choix qui s'offraient à nous. Au risque de se répéter, nous allons rappeler les enseignements que nous en avons tirés et en quoi ils ont influencé nos choix pour l'élaboration d'un code 3D.

- Le passage d'une approximation $\mathbb{P}_0$ à une approximation $\mathbb{P}_1$ était vraiment nécessaire. Cela nous a permis d'atteindre une précision que nous n'aurions jamais pu espérer obtenir sur des maillages et en des temps de calculs "raisonnables" avec une approximation de type volumes finis.
- Notre condition réfléchissante s'est révélée très efficace que ce soit pour un écoulement porteur uniforme ou non.
- Nos conditions aux limites absorbantes permettent d'obtenir des résultats satisfaisants mais elles sont loin d'être optimales. Ainsi nous avons vu sur le deuxième cas test que, pour un écoulement uniforme, elles étaient moins performantes qu'une méthode PML simplifiée. Cependant leur intérêt réside dans un rapport "précision-stabilité", en effet ces conditions aux limites nous assurent la stabilité du schéma tout en permettant d'obtenir des résultats satisfaisants. Nous pouvons également remarquer que la plupart des problèmes aéroacoustiques "intéressants" comportent un terme source diminuant nettement l'impact des réflexions parasites dues aux conditions aux limites. Ainsi nous avons estimé que la précision de nos conditions aux limites absorbantes était suffisante par rapport aux configurations auxquelles était destiné notre code. Nous avons également abandonné pour l'élaboration de notre code 3D les conditions aux limites absorbantes de forme implicite car elles ne nous ont pas permis d'améliorer la précision obtenue avec celles de forme explicite tout en engendrant un coût en terme de calcul non négligeable. De plus, ce choix n'aurait eu un impact sur la consistance en temps que si le nombre de Courant était proche de 1, ce qui n'est pas le cas pour une approche de type Galerkin discontinu $\mathbb{P}_1$. Ainsi pour notre code 3D, seules les conditions (2.29) et (2.31) ont été développées.
- Enfin, les deux traitements présentés pour résoudre le problème des instabilités de type Kelvin-Helmholtz se sont révélés performants et concordants. Grâce à notre traitement, nous avons réussi à assurer la stabilité de notre schéma pour tout type d'écoulement

4.4 Instabilités de Kelvin-Helmholtz en 2D

porteur. Nous présenterons dans la partie suivante un autre cas test en géométrie 3D permettant d'illustrer ce résultat.

Chapitre 5

Développement et validation d'un code 3D

Sommaire

Introduction	131
5.1 Condition de stabilité en 3D	132
5.2 Méthode de parallélisation	132
5.3 Cas tests en écoulement simple	133
5.3.1 Cas test de Tam-Webb 3D	133
5.3.2 Cas test avec écoulement de Couette subsonique	138
5.4 Cas test en écoulement complexe	142
5.4.1 Propagation aéroacoustique autour d'une sphère	142
5.4.2 Cas tests autour d'un Falcon	147
Conclusion	160

Introduction

L'objectif principal de cette thèse était l'élaboration d'un solveur de type Galerkin discontinu pour les équations d'Euler linéarisées en 3D sur maillages non structurés. L'enjeu était double. Tout d'abord d'une manière purement générale, malgré la complexité des problèmes industriels ayant trait à l'aéroacoustique, il existe peu de solveurs 3D en maillage non structuré pour ces équations et de plus nous voulions démontrer l'intérêt des méthodes de type Galerkin discontinu concernant l'aéroacoustique, vu leur rayonnement actuel concernant d'autres problèmes de propagations d'ondes [67], [25] et sa richesse en terme de flexibilité. Nous avons tenté de montrer comment l'approche de type Galerkin discontinu permettait d'apporter des alternatives à certains problèmes récurrents en aéroacoustique : construction de conditions aux limites non réfléchissantes, prise en charge d'un écoulement porteur non uniforme, traitement des instabilités physiques...

Le chapitre précédent nous a permis de valider en 2D les choix que nous avons faits pour la construction de notre schéma d'un point de vue numérique. Il ne nous restait plus qu'à s'en servir comme bases pour un code 3D. L'objectif que nous nous étions fixé concernant

la complexité des calculs auxquels nous destinions notre code n'était viable que sur support parallèle, je tiens encore à remercier vivement Stéphane Lanteri pour sa patience inépuisable et ses précieux conseils dans cette phase indispensable de notre travail.

Après avoir illustré les capacités de notre code en terme de performance sur deux cas tests simples (l'un en écoulement uniforme et l'autre en écoulement cisailé linéaire), nous présenterons deux cas tests en configuration réaliste.

5.1 Condition de stabilité en 3D

Comme nous l'avons fait dans la partie 4.1 pour le cas 2D, il est nécessaire de préciser en 3D les coefficients α_i et β_{ik} introduits dans (3.25) et (3.26) ainsi que dans (3.31) et (3.32) pour utiliser les théorèmes 3.2.2 et 3.2.3. En respectant les choix faits pour les fonctions de base et le nombre de degrés de liberté (voir page 38), nous pouvons proposer le lemme suivant :

Lemme 5.1.1 *Grâce aux choix faits en 3D sur les fonctions de base et le type de maillage, les hypothèses des définitions 3.2.2 et 3.2.5 sont vérifiées pour :*

$$\forall i, \quad \alpha_i^2 = \frac{5 \max_{j \in \vartheta_i} (\|\vec{n}_{ij}\|)}{9P_i}. \quad (5.1)$$

$$\forall i, \quad \forall k \in \vartheta_i, \quad \beta_{ik} = \frac{8}{3}. \quad (5.2)$$

La principe de la démonstration de ce lemme est identique à celui du lemme 4.1.1.

Remarque 5.1.1 *En utilisant le même principe que pour la remarque 4.1.1, une condition de stabilité moins fine mais plus simple peut s'écrire :*

$$\forall i, \quad \forall k \in \vartheta_i, \quad \Delta t \left(\lambda \sqrt{\frac{5}{18}} + \frac{4}{3} \rho_{ik} \right) < \frac{V_i}{P_i}. \quad (5.3)$$

Remarque 5.1.2 *En utilisant le même principe que pour la remarque 4.1.2, on obtient que la condition CFL non optimale (exprimée par (5.3)) en $\mathbb{P}_1$ est quasiment six fois plus restrictive que celle du modèle $\mathbb{P}_0$ donnée par (2.17) pour un problème d'acoustique 3D.*

5.2 Méthode de parallélisation

Les méthodes de type Galerkin discontinu sont souvent considérées comme les candidates idéales pour la construction d'un code à structure parallèle. Cette remarque est particulièrement vraie pour les méthodes d'ordre élevé [45] qui sont en effet caractérisées par un nombre d'opérations de calcul important par sous-domaine pour un faible taux d'adressage mémoire ou d'opérations de communication. Cette remarque, par rapport à la base d'approximation $\mathbb{P}_1$ que nous utilisons, restera "empirique". Nous pouvons juste affirmer qu'une montée en ordre dans notre code permettrait d'améliorer sans aucun doute les taux d'accélération parallèle que nous allons présenter.

Nous avons décidé d'appuyer notre méthode de parallélisation du solveur de type Galerkin discontinu pour des formulations en domaine temporel (GDDT) décrit dans le deuxième chapitre sur une stratégie de type SPMD (Single Program Multiple Data) qui combine un

partitionnement du maillage global et un programme de communication. Concernant le partitionnement du maillage, la nature compacte de la méthode se prête naturellement à une décomposition par élément, ce qui permet de construire des zones communes minimales entre les sous-maillages. En fait un tel partitionnement introduit une famille d'interfaces artificielles correspondant en 3D à une surface décomposée en triangles. Pour chaque paire de sous-maillages voisins, une telle interface est dupliquée dans la définition topologique des deux sous-maillages et le calcul des flux numériques au niveau des interfaces artificielles est effectué deux fois. La stratégie de parallélisation de type SPMD est basée sur un partitionnement du domaine nécessitant également des opérations arithmétiques redondantes. Cependant la décomposition parallèle que nous avons adoptée fait partie de celle minimisant le nombre de telles opérations [51]. En pratique, la décomposition du domaine est obtenu avec l'aide de ParMeTis parallel graph partitioning tool [49] dont le programme de communication est basé sur MPI (Message Passing Interface).

Les calculs 3D ont été réalisés sur un cluster de 16 PC. Chacun de ces ordinateurs étant doté de deux processeurs Intel Pentium4 de 2Ghz supporté par 1Gb de mémoire RDRAM. L'interconnexion des nœuds du cluster est basée sur un réseau de type Gigabit Ethernet. Le code GDDT a été programmé en Fortran 77 et l'implémentation MPICH de MPI a été utilisée. Dans les tableaux de performances qui suivent, les résultats sont donnés pour des calculs effectués en 64 bit, N_p correspond au nombre de processeurs utilisés pour l'exécution parallèle (N_p représente donc aussi le nombre de sous-domaines), "REEL" correspond au temps total de la simulation tandis que "CPU" représente le maximum des temps CPU sur l'ensemble des processeurs. Finalement, "% CPU" correspond au pourcentage du temps CPU total par rapport au temps total de la simulation. Ce pourcentage permet clairement d'évaluer l'utilisation CPU. Nous considérerons ce rapport comme un critère évaluateur de l'efficacité de notre technique de parallélisation. En effet, la différence entre temps CPU et temps total est significative du temps passé dans les communications entre sous-maillages. L'accélération parallèle $S(N_p)$ sera toujours donnée par rapport au temps total d'exécution.

5.3 Cas tests en écoulement simple

5.3.1 Cas test de Tam-Webb 3D

Nous allons étudier en géométrie 3D un premier cas test académique en écoulement uniforme dont nous avons déjà présenté une version 2D dans la partie 4.2.2. Le domaine est cubique de côté 50, centré à l'origine du repère utilisé. Nous avons construit pour ce cas test deux maillages non structurés en tétraèdres dont le tableau 5.1 donne les caractéristiques. Nous imposons aux bords du domaine notre condition absorbante (2.29). L'écoulement uniforme choisi est horizontal de Mach 0.5 : $\rho_0 = 1/\gamma$, $p_0 = 1$, $\vec{V}_0 = {}^t(0.5, 0, 0)$. Lors de l'étude du cas test 2D, nous avons choisi une perturbation de nature acoustique. Cette fois nous avons opté pour le cas le plus complexe, celui d'un mélange des trois perturbations possibles :

$$\delta\rho = e^{-r_1^2} + 0.1e^{-r_2^2}, \quad \delta p = e^{-r_1^2}, \quad \delta\vec{V} = 0.1e^{-r_3^2} \begin{pmatrix} y - y_3 \\ x_3 - x \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec,

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0, 0), \quad (x_2, y_2, z_2) = (-12.5, 0, 0), \\ (x_3, y_3, z_3) = (12.5, 0, 0), \quad \text{et } \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad r_i^2 = 0.2 \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right).$$

Le terme commun à $\delta\rho$ et δp correspond à une perturbation acoustique (car $c_0^2 = 1$), tandis que le second terme de $\delta\rho$ s'identifie à une perturbation entropique et que le champ de perturbation en vitesse à divergence nulle s'identifie à une perturbation en vorticité. Ce premier cas test en 3D a pour but de tester sur différents points la qualité de notre schéma 3D. Tout d'abord, connaissant la solution exacte, ce cas test va nous permettre d'évaluer l'erreur $\mathcal{L}^2$ globale au cours de la simulation et une nouvelle fois de tester nos conditions aux limites pour les trois types de perturbations. De plus d'un point de vue calculs de performances, ce cas test peut être considéré comme une valeur étalon du meilleur rendement "précision/temps de calculs" que nous pourrions obtenir avec notre code parallèle. En effet la configuration choisie est à notre avantage :

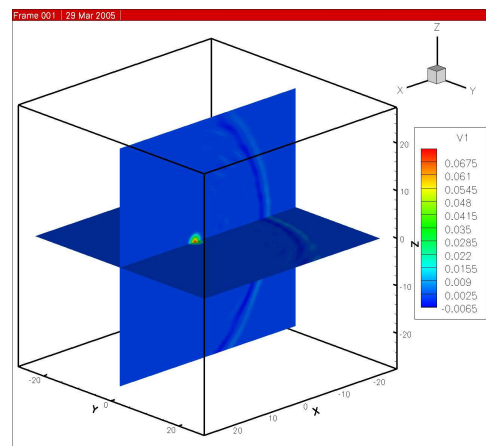
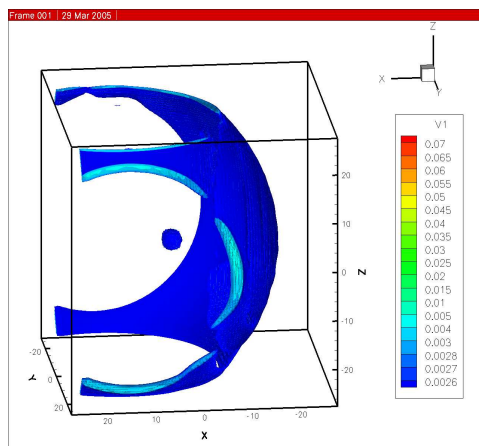
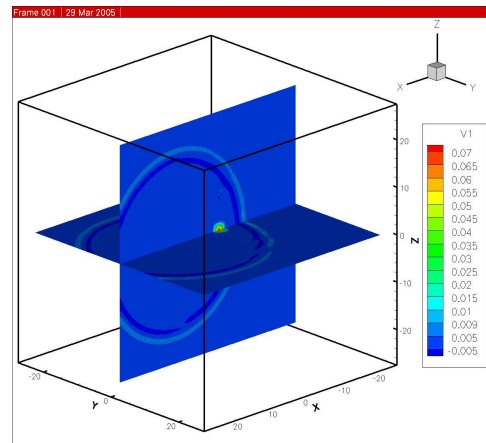
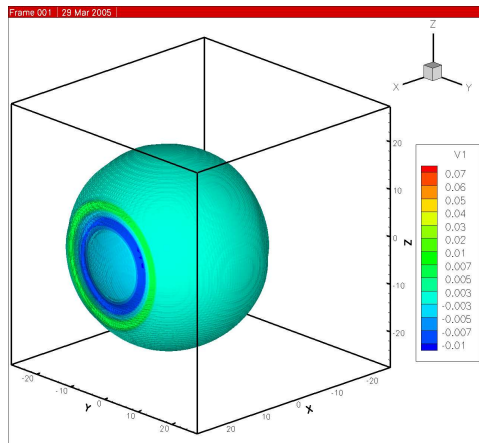
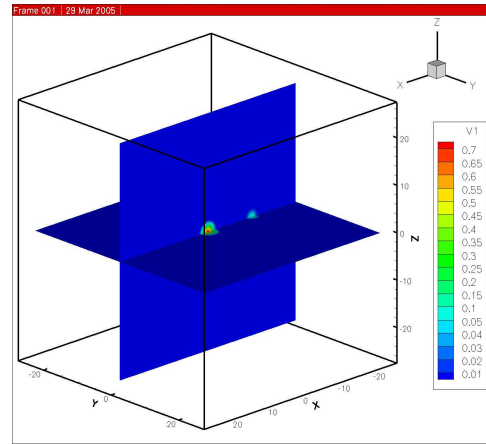
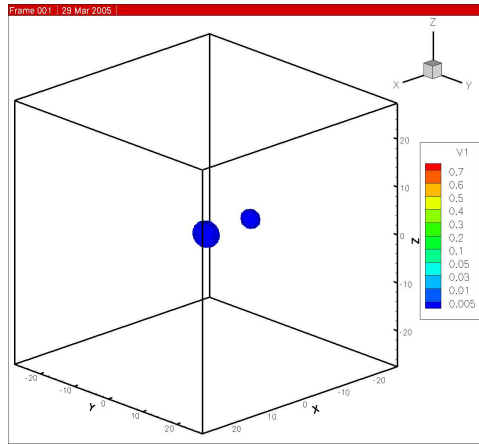
- L'écoulement est uniforme, ce qui permet d'utiliser le schéma le plus simple développé au sein de notre code exprimé par (2.9), de plus il n'y a pas de termes sources ($\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$).
- La nature de l'écoulement ne peut donner naissance à des instabilités (absence de traitement).
- Ce problème est purement "volumique" au sens où nous n'avons pas à nous concentrer sur des résultats surfaciques autour d'un obstacle, ainsi les maillages utilisés ne présentent pas de raffinements locaux qui pénalisent de manière notable la condition CFL de stabilité.

Le tableau 5.2 regroupe les résultats de performance obtenus pour les deux maillages. Les figures 5.1 et 5.2 représentent respectivement l'évolution de $\delta\rho$ et de $\|\delta\vec{V}\|$ au cours de la simulation ($0 \leq T \leq 80s$) pour le maillage M2. La figure 5.3 représente l'évolution temporelle de $\mathbb{F}_u$ (3.9) pour le maillage M2.

TAB. 5.1 – *Caractéristiques des maillages*

Maillage	# sommets	# tétraèdres	# faces absorbantes
M1	68,921	384,000	19,200
M2	531,441	3,072,000	76,800

Les résultats obtenus sont satisfaisants. En effet, nous avons pu constater le bon comportement de notre schéma par rapport aux différentes perturbations. Au temps final, nous avons obtenu une erreur $\mathcal{L}^2$ sur l'ensemble du domaine de l'ordre de 3% pour M1 et de l'ordre de 1.5% pour M2 par rapport à la solution exacte. Nous avons également au cours du temps relevé des réflexions parasites au bord du domaine au maximum de l'ordre de 2% pour M1 et de l'ordre de 1% pour M2 (en amplitude par rapport à la valeur maximale au même instant), ce qui est tout à fait raisonnable. La figure (5.3) est en accord avec nos résultats théoriques. En effet, comme nous travaillons autour d'un écoulement uniforme, l'énergie est parfaitement conservée jusqu'à $t \simeq 15s$, instant où la première paroi est atteinte par la perturbation acoustique, ensuite nous constatons deux changements de pente lors de l'arrivée



5.3 Cas tests en écoulement simple

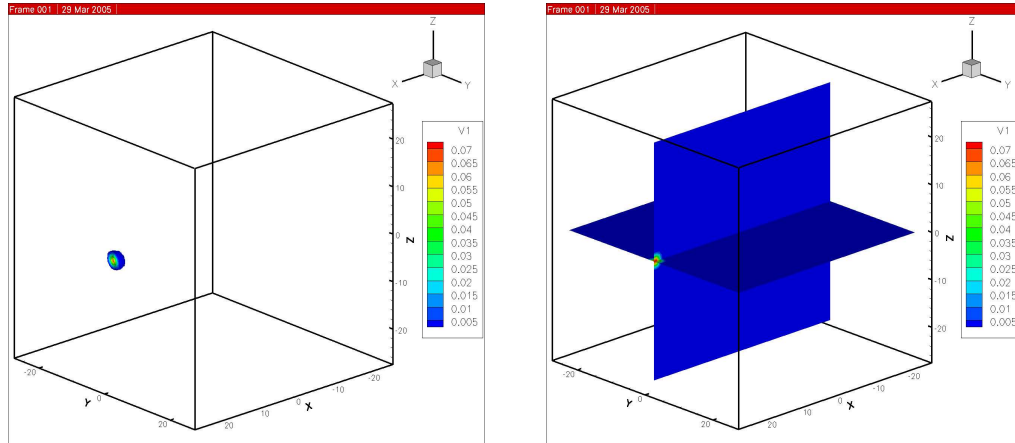


FIG. 5.1 – 30 isos de $\delta\rho$. A gauche : résultats volumiques. A droite : coupes en $y=0$ et $z=0$. Instants de visualisation de haut en bas : $t=0, 17.8, 31.1$ et $71.1s$

TAB. 5.2 – Résultats de performance

Maillage	N_p	CPU		REEL	% CPU	$S(N_p)$
M1	1	1 h 15 mn 10 sec	1 h 15 mn 38 sec	99%	1	
-	4	18 mn 49 sec	19 mn 21 sec	97%	3.9	
-	8	9 mn 42 sec	10 mn 5 sec	96%	7.5	
-	16	4 mn 36 sec	4 mn 59 sec	92%	15.2	
M2	8	9 h 26 mn 52 sec	10 h 3 mn 22 sec	94%	1	
-	16	4 h 48 mn 20 sec	5 h 13 mn 3 sec	92%	1.93	

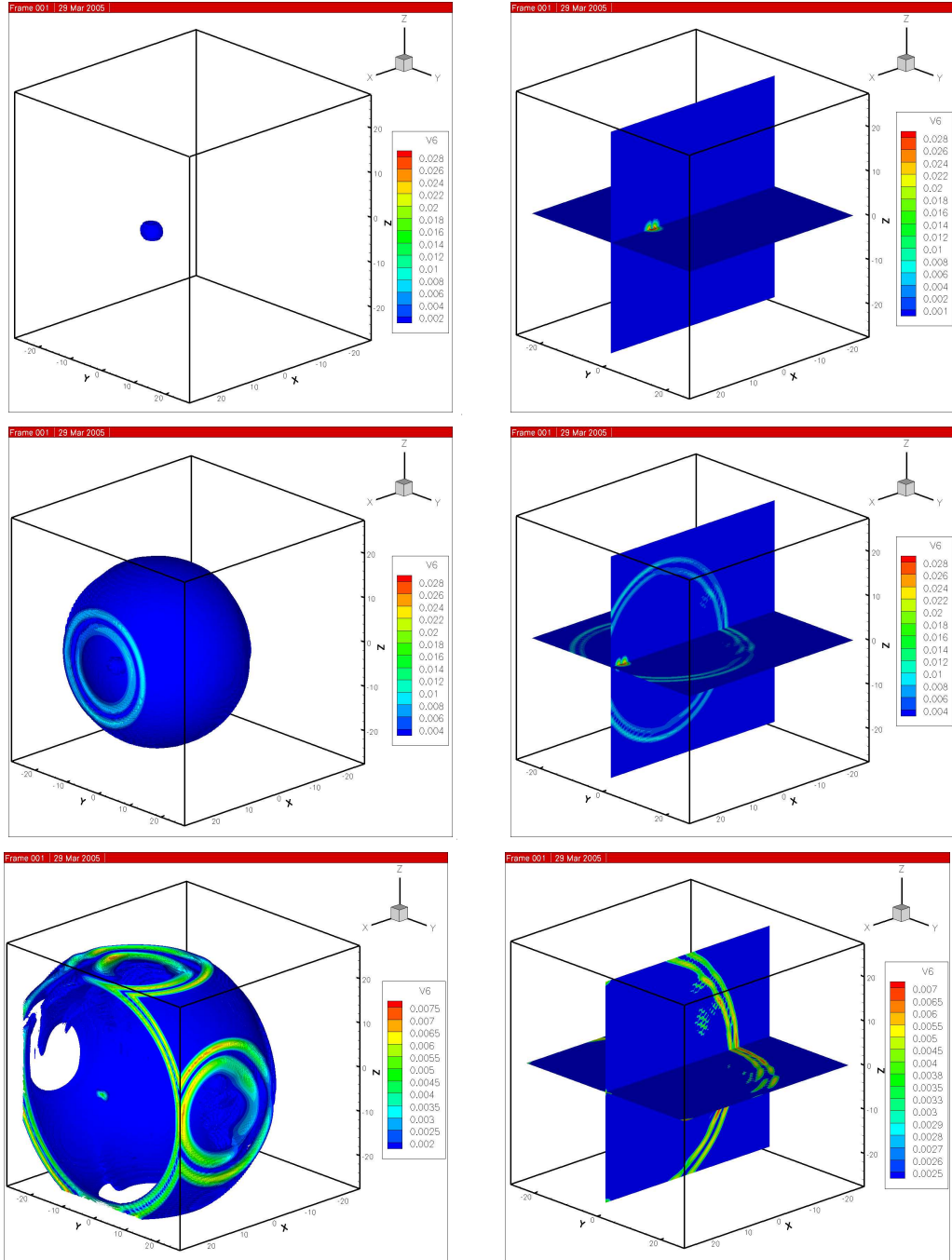
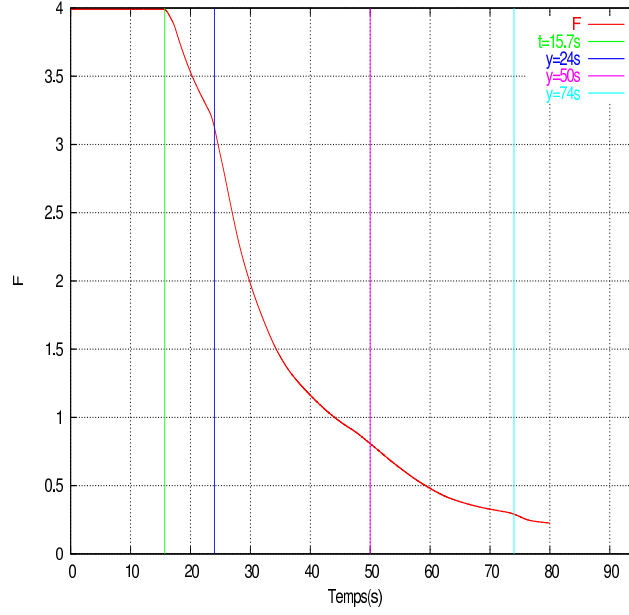


FIG. 5.2 – 30 isos de $\|\delta\vec{V}\|$. A gauche : résultats volumiques. A droite : coupes en $y=0$ et $z=0$. Instants de visualisation de haut en bas : $t=0$, 17.8 et 22.7 s


 FIG. 5.3 – Evolution temporelle de F_u pour le maillage M2

de la perturbation acoustique sur les autres parois absorbantes, le quatrième changement de pente correspond à la sortie de la perturbation en vorticité et la cinquième à celle de la sortie de la perturbation entropique. En terme de performances, nous ne pouvons être que satisfaits des résultats obtenus tant au niveau de l'accélération du code parallèle, qu'au niveau du pourcentage CPU dont le min est de 92% pour l'utilisation de 16 processeurs sur le maillage M2 ainsi qu'au niveau des temps de calculs réels. Comme nous l'avons expliqué au début du cas test, il était important d'obtenir d'excellents résultats en terme de vitesse sur ce cas test par rapport à sa complexité restreinte, nous verrons dans les cas tests suivants que l'utilisation d'écoulements non uniformes et (ou) de maillages raffinés localement diminuent de manière notable les performances.

5.3.2 Cas test avec écoulement de Couette subsonique

Ce deuxième cas test en géométrie 3D a pour but d'étudier les performances de notre code pour un écoulement porteur non uniforme simple. Ainsi l'écoulement choisi est cisailé linéaire subsonique :

$$\rho_0 = 1, p_0 = 1/\gamma, \vec{V}_0 = {}^t(0.9z, 0, 0).$$

Le domaine est parall l pip dique, il est défini par $(x, y, z) \in [-2, 2] \times [0, 1] \times [0, 1]$. Deux maillages ont été construits pour cette simulation dont les caractéristiques sont résumées dans le tableau 5.3. Pour ce cas test, aucun terme source ou traitement pour les instabilités n'a été introduit ( coulement stable d'après le critère de stabilité de Rayleigh). Comme pour le cas test précédent, la perturbation aéroacoustique est introduite à l'instant initial sous la forme d'une perturbation acoustique, d'une perturbation en vorticité et d'une perturbation

entropique :

$$\delta\rho = e^{-r_1^2} + 0.1e^{-r_2^2}, \quad \delta p = e^{-r_1^2}, \quad \delta\vec{V} = 0.1e^{-r_3^2} \begin{pmatrix} y - y_3 \\ x_3 - x \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec,

$$(x_1, y_1, z_1) = (0, 0.5, 0.5), \quad (x_2, y_2, z_2) = (1, 0.5, 0.5), \\ (x_3, y_3, z_3) = (-1, 0.5, 0.5), \quad \text{et } \forall i \in \{1, 2, 3\} \quad r_i^2 = 10 \left((x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 \right).$$

Le schéma utilisé est défini par (2.10) avec $\vec{\mathcal{H}} = \vec{0}$, nous utilisons la condition absorbante définie par (2.31) sur les six faces du parallélépipède. Nous pouvons remarquer que la complexité des maillages est proche de celle des maillages utilisés dans le cas test précédent, l'intérêt est de pouvoir comparer les temps de calculs lors de l'utilisation d'un écoulement non uniforme simple par rapport aux résultats du précédent cas test. Pour le cas test de Tam-Webb le domaine était cubique, nous n'avons pas retenu la même géométrie pour pouvoir estimer de manière encore plus sensible l'impact de notre condition absorbante (la perturbation acoustique atteignant les premières parois absorbantes dès le début de la simulation). Les résultats de performances pour les deux maillages sont regroupés dans le tableau 5.4. Les figures 5.4 et 5.5 représentent respectivement l'évolution de $\|\delta\vec{V}\|$ et de $\delta\rho$ au cours de la simulation ($0 \leq T \leq 5.75s$) pour le maillage M2. La figure 5.6 représente l'évolution temporelle de $\mathbb{F}$ définie par (3.17) pour le maillage M2.

TAB. 5.3 – Caractéristiques des maillages

Maillage	# sommets	# tétraèdres	# faces absorbantes
M1	73,629	405,600	23,504
M2	522,801	3,000,000	90,000

TAB. 5.4 – Résultats de performance

Maillage	N_p	CPU	REEL	% CPU	$S(N_p)$
M1	1	1 h 47 mn 5 sec	1 h 48 mn 3sec	99%	1
-	4	27 mn 37 sec	28 mn 44 sec	96%	3.9
-	8	13 mn 33 sec	14 mn 23 sec	94%	7.5
-	16	6 mn 37 sec	7 mn 12 sec	92%	15
M2	8	12 h 52 mn 39 sec	13 h 14 mn 54 sec	97%	1
-	16	6 h 22 mn 10 sec	6 h 59 mn 2 sec	90%	1.9

Les résultats obtenus montrent comme pour le cas test précédent le bon comportement global de notre schéma au niveau de la précision. Nous obtenons au maximum en sortie de domaine au cours du temps des réflexions parasites de l'ordre de 1.5% pour M1 et de l'ordre de 1% pour M2 (en amplitude par rapport à la valeur maximale au même instant).

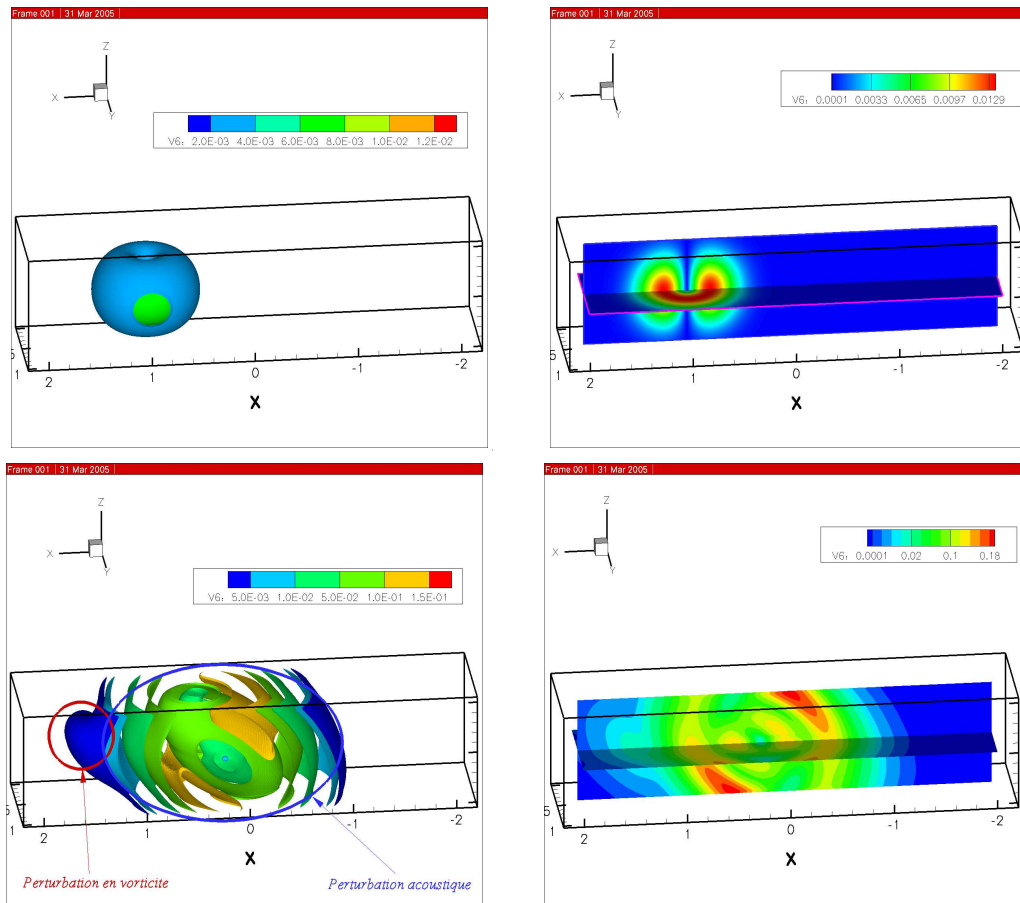


FIG. 5.4 – 30 isos de $\|\delta\vec{V}\|$. A gauche : résultats volumiques. A droite : coupes en $y=0$ et $z=0$. Instants de visualisation de haut en bas : $t=0$ et $t=0.5s$

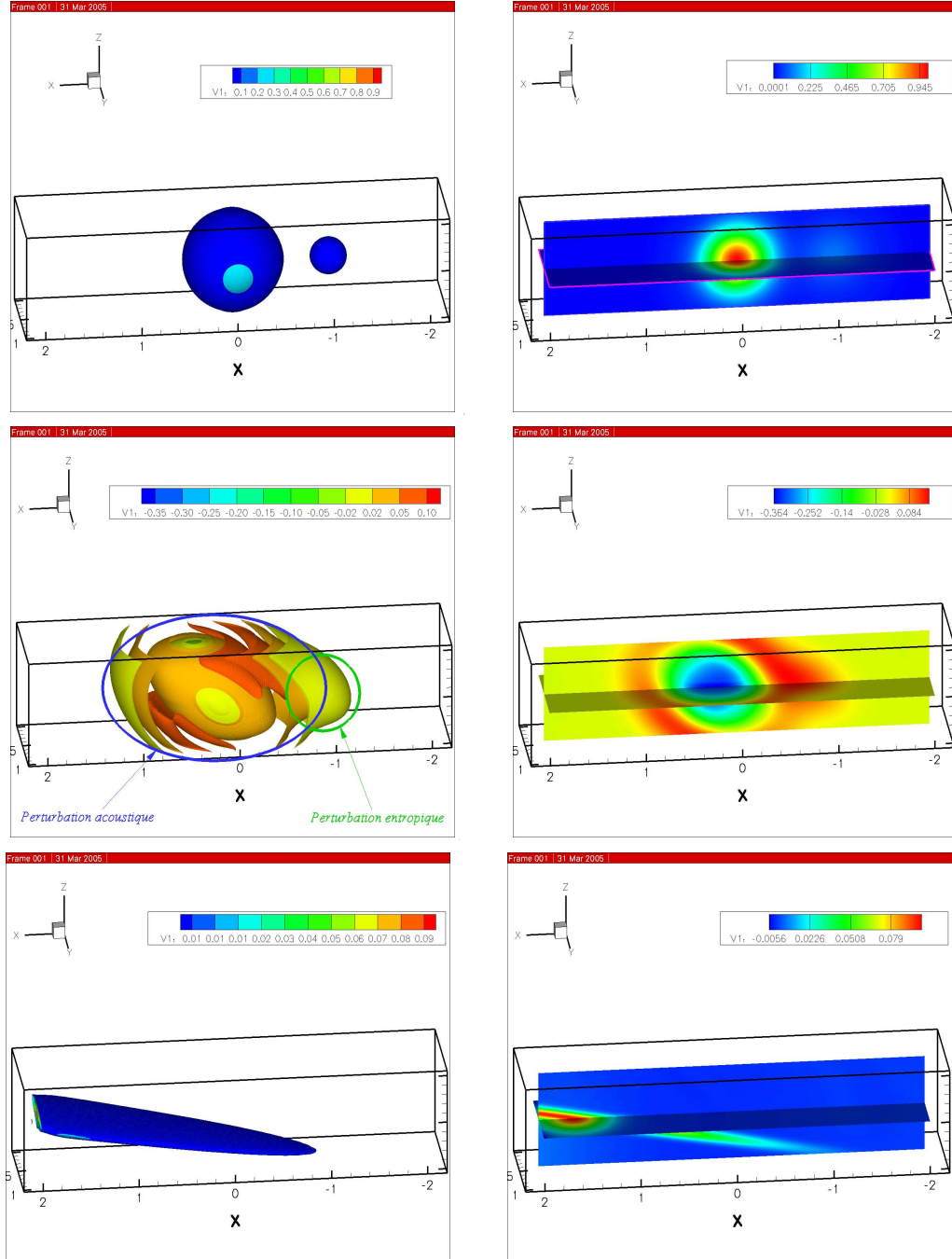


FIG. 5.5 – 30 isos de $\delta\rho$. A gauche : résultats volumiques. A droite : coupes en $y=0$ et $z=0$. Instants de visualisation de haut en bas : $t=0$, $t=0.5$ et $t=5.75s$

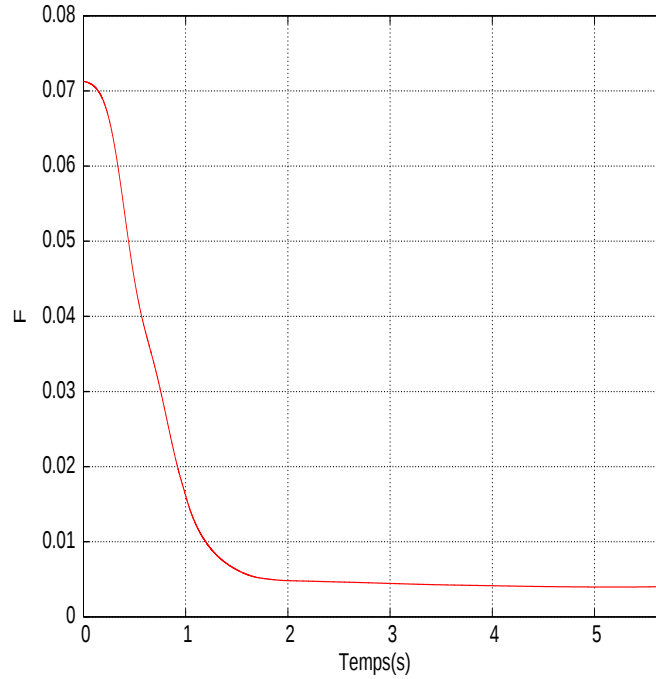


FIG. 5.6 – Evolution temporelle de F pour le maillage $M2$

Au niveau de la parallélisation, l'accélération du code parallèle et le pourcentage CPU sont satisfaisants. Cependant, comme nous l'avons prévu, à maillages quasiment identiques en termes de nœuds et de tétraèdres, les temps de calculs obtenus pour cette configuration en écoulement non uniforme sont de manière significative plus importants que ceux du cas test précédent (en écoulement uniforme). Les temps de calculs réels restent tout de même raisonnables.

Ces deux cas tests à l'intérêt physique très limité nous ont permis de tester la version parallèle de notre code 3D avec succès.

5.4 Cas test en écoulement complexe

5.4.1 Propagation aéroacoustique autour d'une sphère

Après avoir validé notre code 3D sur des cas tests assez simples, nous allons à présent étudier un premier cas test 3D complexe. Le but est ici d'illustrer la capacité de notre code parallèle à résoudre le problème que nous allons détailler dans des temps de calculs raisonnables. Le domaine de calcul est un cube de côté 10 centré à l'origine du repère, évidé de la sphère de rayon 1 également centrée à l'origine. Deux maillages non structurés tétraédriques ont été construits ($M1$ et $M2$) pour ce cas test dont les caractéristiques sont précisées dans le tableau 5.5. La figure 5.7 représente le maillage $M2$ ainsi que le maillage surfacique de la sphère pour $M2$. L'écoulement porteur non-uniforme stationnaire subsonique ($M_\infty = 0.5$) a été obtenu grâce à un solveur 3D de type MUSCL-Volumes finis des équations d'Euler 3D sur maillage tétraédriques [51]. La figure 5.8 représente le Mach de l'écoulement pour $M2$

qui varie entre 0.005 et 0.845. Nous avons imposé notre condition absorbante (2.31) sur les frontières en champ lointain et notre condition réfléchissante (2.27) sur la sphère. La perturbation acoustique est imposée sous la forme d'un terme source gaussien en espace de centre le point de coordonnées $(-3, 0, -2)$ et périodique en temps de période $T = 0.2s$. Nous n'avons pas eu à imposer de traitement d'instabilités pour ce cas test. Les calculs de performances ont été réalisés sur 4, 8 et 16 processeurs pour le maillage M1 et sur 8, 16 et 32 processeurs pour le maillage M2. Parallèlement, nous avons réalisé le même cas test en acoustique pure sur le maillage M2, l'écoulement uniforme étant défini par :

$$\vec{V}_0 = \vec{0}, \rho_0 = \rho_\infty \text{ et } p_0 = p_\infty.$$

Nous n'avons pas effectué de calculs de performances sur cette configuration, son but étant uniquement de comparer les profils de diffraction sur la sphère entre acoustique et aéroacoustique. Les figures 5.9, 5.10 et 5.11 représentent respectivement 30 isovaleurs de $\delta\vec{V}$ à $t=2s$ (après 10 périodes) pour le maillage M1 avec écoulement non uniforme, le maillage M2 avec écoulement non uniforme et le maillage M2 avec écoulement au repos. La figure 5.12 représente l'évolution temporelle de $\mathbb{F}$ (3.17) pour les deux maillages en écoulement complexe. Les résultats de performance sont regroupés dans le tableau 5.6.

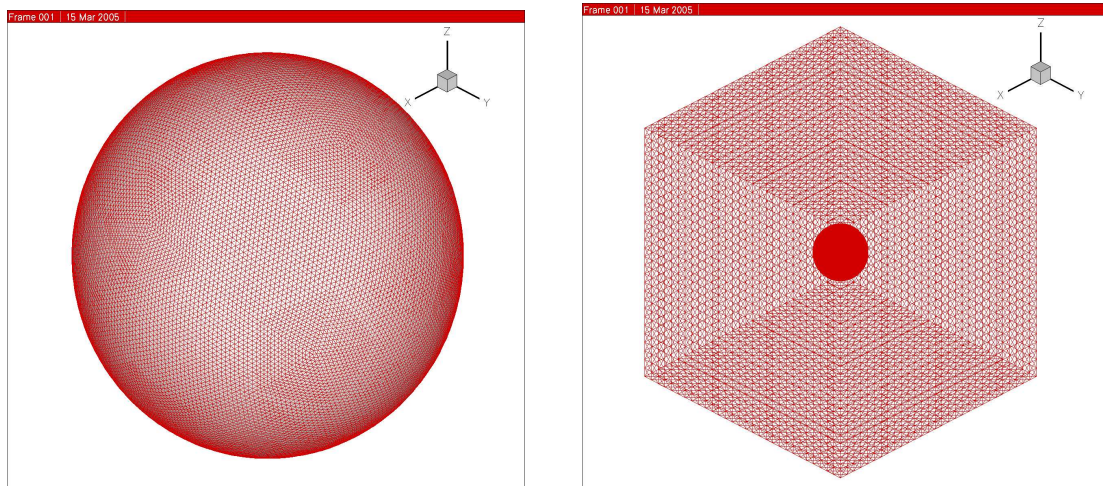


FIG. 5.7 – Maillage surfacique de la sphère et volumique du domaine (M2)

TAB. 5.5 – Propagation aéroacoustique autour d'une sphère : caractéristiques des maillages

Maillage	# sommets	# tétraèdres	# faces absorbantes	# faces réfléchissantes
M1	113053	649237	10092	11520
M2	267075	1525722	10092	46080

Intéressons-nous d'abord aux figures 5.9 à 5.11 qui illustrent clairement l'impact fort de l'écoulement sur la propagation du bruit. La comparaison entre les configurations en

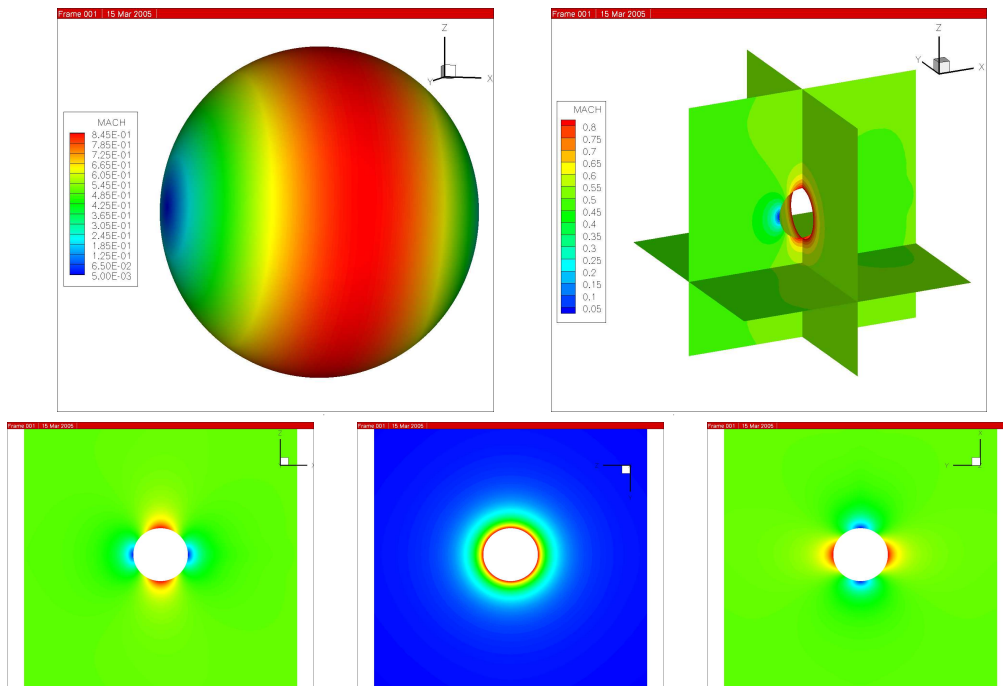


FIG. 5.8 – 100 isos surfaciques en haut à gauche et 20 isos sur les différentes coupes du Mach de l'écoulement. En bas de gauche à droite : $y=0$, $x=0$ et $z=0$

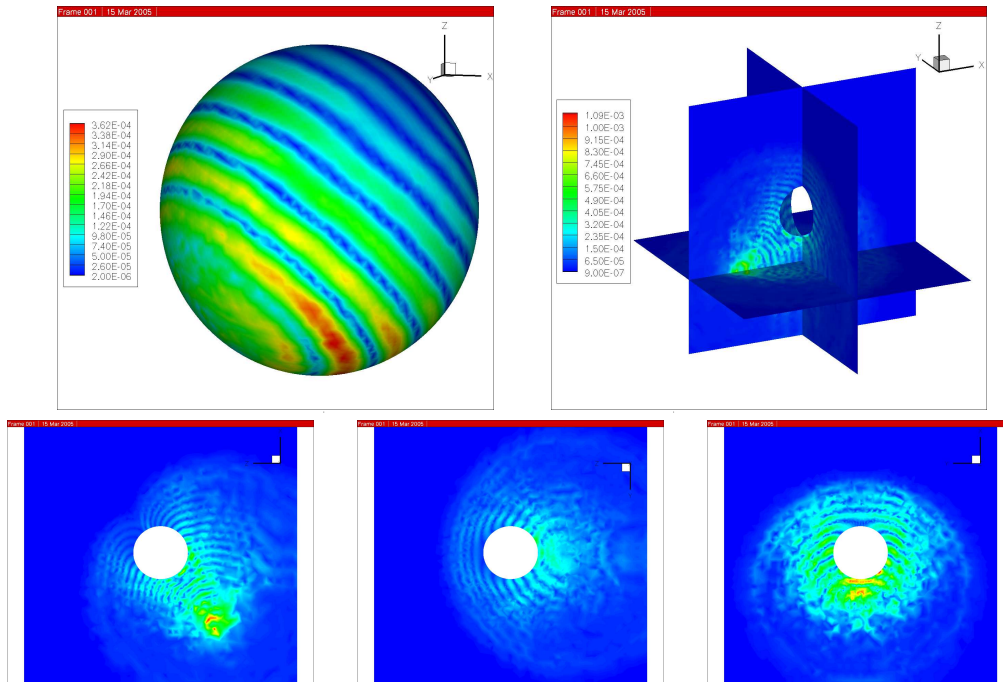


FIG. 5.9 – 30 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ pour le maillage M1 avec écoulement non uniforme. En haut : résultats surfaciques et coupes en $y=x=0$ et $z=-2$. En bas de gauche à droite : $y=0$, $x=0$ et $z=0$

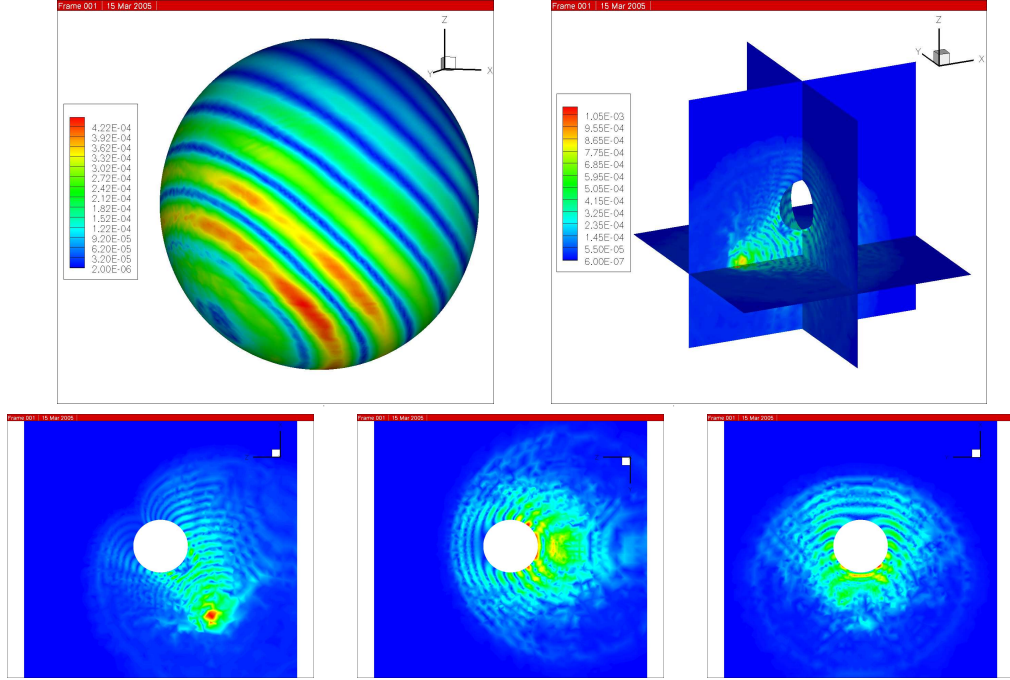


FIG. 5.10 – 30 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ pour le maillage M2 avec écoulement non uniforme. En haut : résultats surfaciques et coupes en $y=x=0$ et $z=-2$. En bas de gauche à droite : $y=0$, $x=0$ et $z=0$

TAB. 5.6 – Propagation aéroacoustique autour d'une sphère : résultats de performances

Maillage	N_p	CPU	REEL	% CPU	$S(N_p)$
M1	4	5 h 4 mn 40 s	5 h 8mn 40 s	98.7	1
-	8	2 h 41 mn	2 h 45 mn 50s	97.1	1.86
-	16	1 h 16 mn 30s	1 h 20 mn 30s	95	3.83
M2	8	8 h 48 mn 40s	9 h 16 mn 30s	95	1
-	16	4 h 45 mn 51s	5 h 4 mn 6s	94	1.83
-	32	2 h 15 mn 26s	2 h 27 mn 13s	92	3.78

5.4 Cas test en écoulement complexe

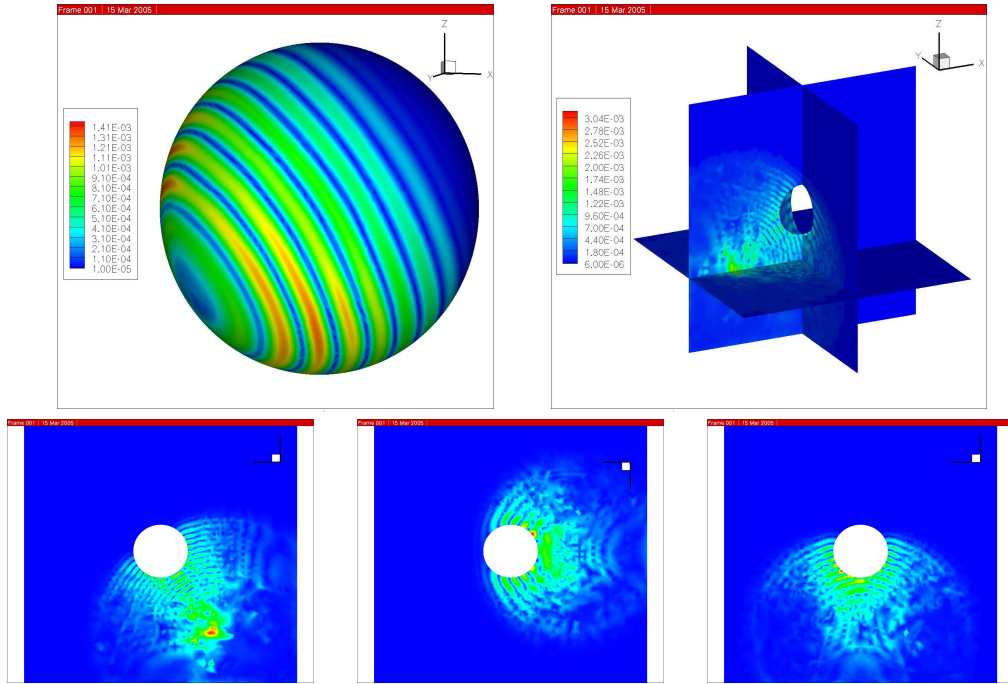


FIG. 5.11 – 30 isovaleurs de $\|\delta\vec{V}\|$ pour le maillage M2 avec écoulement au repos. En haut : résultats surfaciques et coupes en $y=x=0$ et $z=-2$. En bas de gauche à droite : $y=0$, $x=0$ et $z=0$

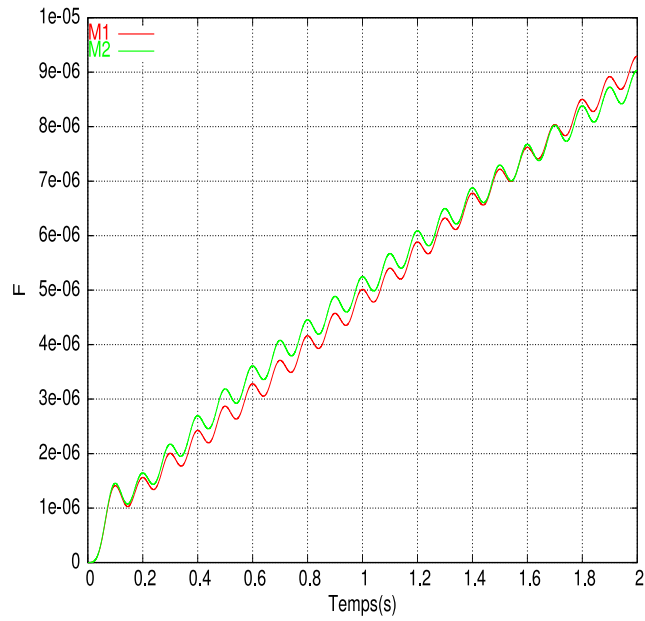


FIG. 5.12 – Evolution temporelle de F

écoulement non uniforme et la simulation acoustique permet de visualiser l'impact de l'écoulement sur la vitesse des fronts d'ondes mais aussi sur leurs directivités.

Qualitativement, nous pouvons également remarquer que le maillage M2 permet d'obtenir des résultats beaucoup plus fins que le maillage M1, évidemment les temps de calculs s'en ressentent puisque pour un même nombre de processeurs ($N_p = 8$) le temps de calcul CPU ou réel pour le cas test "M2-aéroacoustique" est de l'ordre de 3.4 fois celui du cas test "M1-aéroacoustique". Au niveau de notre stratégie de parallélisation, les choix que nous avons faits semblent efficaces puisque le plus faible pourcentage de temps CPU par rapport au temps réel est égale à 92% (dans le cas "M2-aéroacoustique-32processeurs"). Enfin, grâce à la parallélisation de notre code, les temps de calculs réels obtenus par rapport à la complexité du cas test sont encourageants ($< 2h30$ pour la configuration "M2-aéroacoustique-32 processeurs").

5.4.2 Cas tests autour d'un Falcon

Nous allons présenter deux cas tests pour une même géométrie et un même écoulement. La géométrie est définie par un domaine cubique autour d'un profil d'avion de type falcon, deux maillages (M1 et M2) ont été construits pour cette géométrie dont les caractéristiques sont regroupées dans le tableau 5.7. Pour les deux maillages, l'écoulement porteur non uniforme stationnaire subsonique ($M_\infty = 0.5$) a été obtenu grâce au même code de résolution des équations d'Euler stationnaire 3D que pour le cas test de la sphère. La figure 5.13 représente le maillage volumique M2 ainsi que le maillage surfacique du falcon pour M2. La figure 5.14 correspond à la représentation de 100 isovaleurs du Mach de l'écoulement porteur à la surface du falcon pour le maillage M2. Les deux cas tests que nous allons présenter diffèrent par le terme source que nous avons imposé. Le premier a pour but d'étudier une configuration instable tandis que le deuxième est une étude de performance.

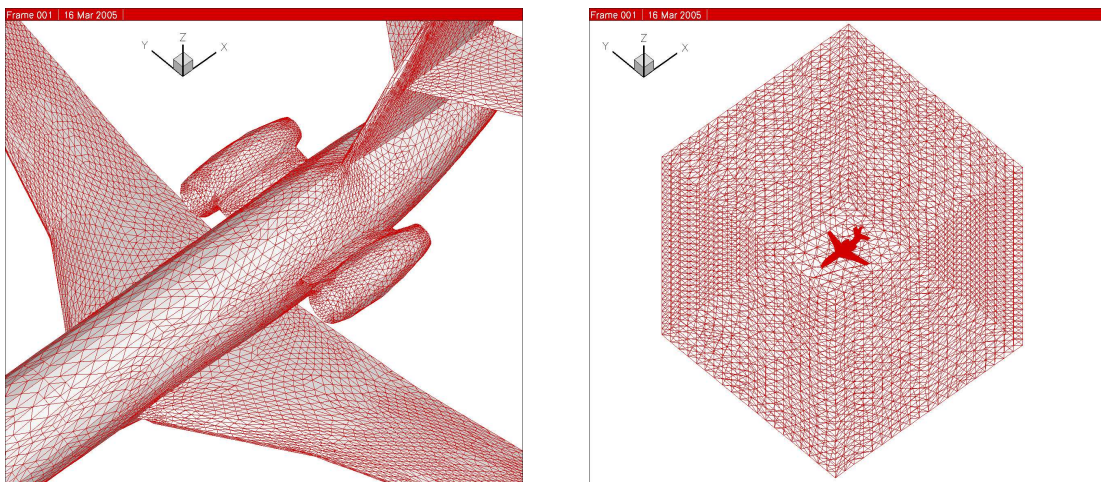


FIG. 5.13 – Maillage surfacique du falcon et volumique du domaine (M2)

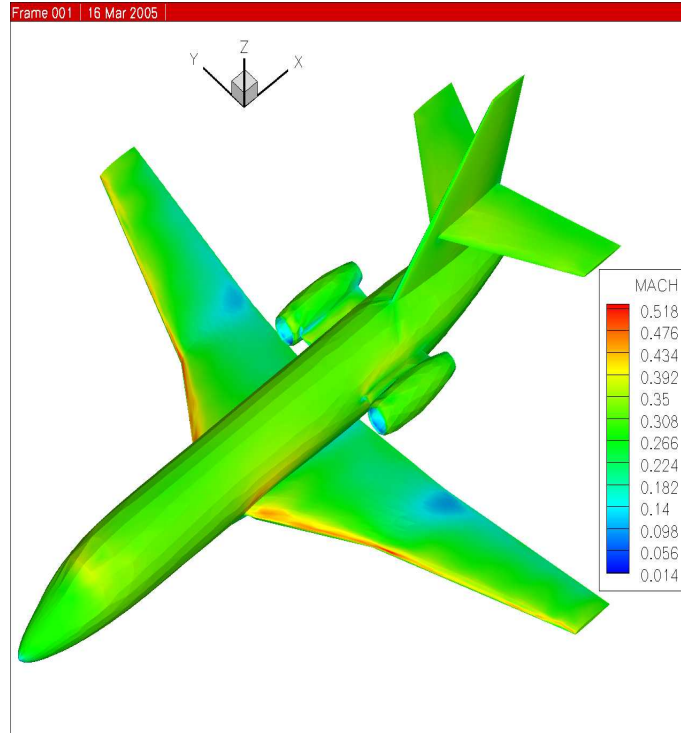


FIG. 5.14 – Données surfacique du Mach de l'écoulement

TAB. 5.7 – Propagation aéroacoustique autour d'un falcon : caractéristiques des maillages

Maillage	# sommets	# tétraèdres	# faces absorbantes	# faces réfléchissantes
M1	30514	163732	1696	10856
M2	231036	1309856	6784	43424

5.4.2.1 Terme source bipolaire

Dans ce premier cas test réalisé uniquement sur le maillage M2, la perturbation acoustique a été imposée sous la forme de deux pulses gaussiens en espace et périodiques en temps (de même gaussienne et de même période $T = 7ms$) centrés et concentrés au niveau des deux moteurs du falcon. La figure 5.15 correspond à la représentation en espace du max en temps de la composante en pression du terme source.

Ce cas test s'est révélé instable (apparition d'instabilités de type Tollmien-Schlichting), mais le résultat le plus significatif de ce cas test est que l'utilisation du modèle simplifié ne nous a pas permis de stabiliser les résultats. Ainsi si ce traitement semble efficace pour les instabilités de Kelvin-Helmholtz (toutefois sans certitude théorique), il ne paraît pas être généralisable à d'autres types d'instabilités. Rappelons juste que dans le cas de l'utilisation du modèle simplifié, nous ne possédons pas de condition théorique de stabilité (nous avons pour les utilisations précédentes du modèle simplifié utilisé la condition en temps (3.34)). Ainsi pour être sûr que ces instabilités ne pouvaient être engendrées par l'utilisation d'un pas de temps Δt trop grand, nous avons réalisé ce cas test pour de nombreux coefficients CFL (jusqu'à 5% du Δt maximal autorisé par la condition de stabilité suffisante), sans arriver à stabiliser les résultats.

La figure 5.16 représente en échelles linéaire et logarithmique l'évolution temporelle de $\mathbb{F}$ (3.17) pour les deux configurations avec traitement. Nous constatons bien une évolution exponentielle de $\mathbb{F}$ à partir de $t \simeq 0.6s$ lors de l'utilisation du modèle simplifié. La figure 5.17 représente l'évolution de $\mathbb{F}$ pour $0 \leq t \leq 2.5$ lors de l'utilisation de notre traitement (absence d'instabilités). La figure 5.18 représente sur la surface du falcon 50 isovaleurs de $\|\delta \vec{V}\|$ à $t=1.05s$ en échelle logarithmique pour les cas instables (sans traitement et utilisation du modèle simplifié) et en échelle linéaire pour le cas stable. Nous constatons pour les deux configurations instables l'apparition d'une même singularité au niveau de l'un des moteurs. La raison pour laquelle nous n'obtenons pas un comportement similaire dans le deuxième moteur peut s'expliquer par l'asymétrie du maillage surfacique du Falcon ainsi que celle de l'écoulement porteur. Enfin la figure 5.19 représente l'évolution temporelle à la surface du falcon de $\|\delta \vec{V}\|$ lors de l'utilisation de notre traitement jusqu'à $t=2.5s$. Ce cas test nous a permis d'illustrer l'intérêt de notre méthode concernant le traitement des instabilités car nos choix au niveau de notre schéma en espace et en temps ne permettaient pas de stabiliser ce cas test par des méthodes existantes.

5.4.2.2 Terme source monopolaire

Dans ce deuxième cas test, le terme source utilisé est monopolaire gaussien en espace et périodique en temps ($T=0.25s$), la figure 5.20 représente le sup en temps de la composante en pression du terme source sur M2. Nous pouvons donc voir que cette fois il est localisé au niveau du "nez" de l'appareil. Nous avons réalisé ce cas test sur 1, 4, 8 et 16 processeurs pour M1 et sur 16 et 32 processeurs pour M2. Nous avons utilisé notre traitement des instabilités dans tous les cas. Le tableau 5.8 regroupe les résultats de performances.

Les figures 5.21, 5.22 et 5.23 représentent l'allure des profils de diffraction obtenus pour la simulation sur le maillage M2 à différents instants.

Les performances parallèles obtenues pour le maillage M1 sont satisfaisantes mais son

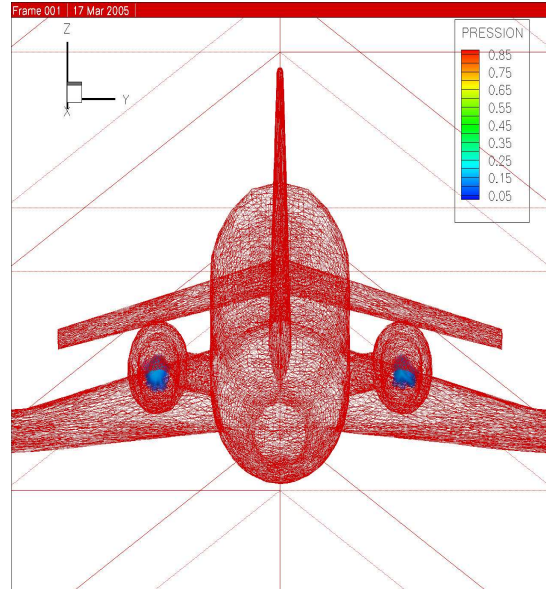


FIG. 5.15 – Représentation du sup en temps du terme source bipolaire

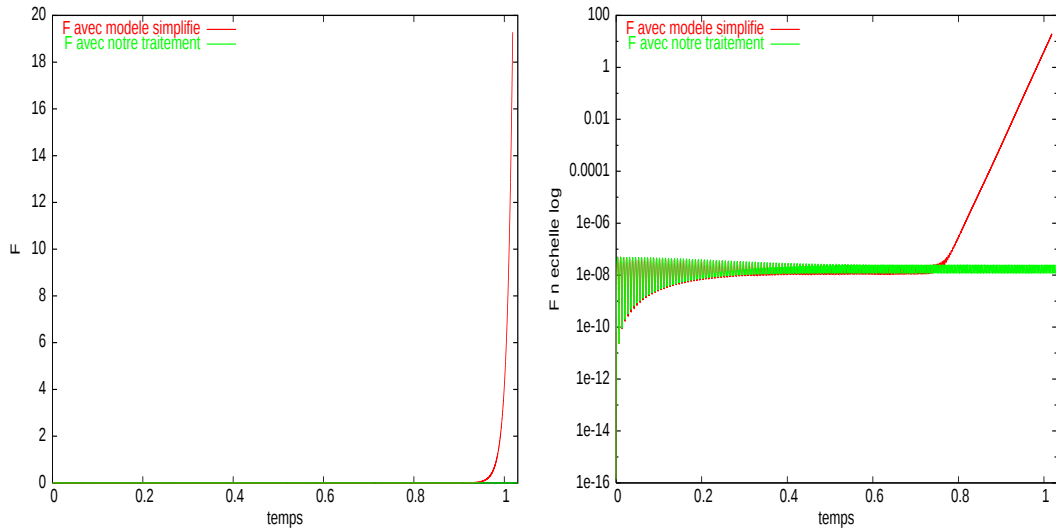


FIG. 5.16 – Evolution temporelle de $\mathbb{F}$ lors de l'utilisation du modèle simplifié et de notre traitement pour $t \leq 1.02$. A gauche : échelle linéaire. A droite : échelle logarithmique

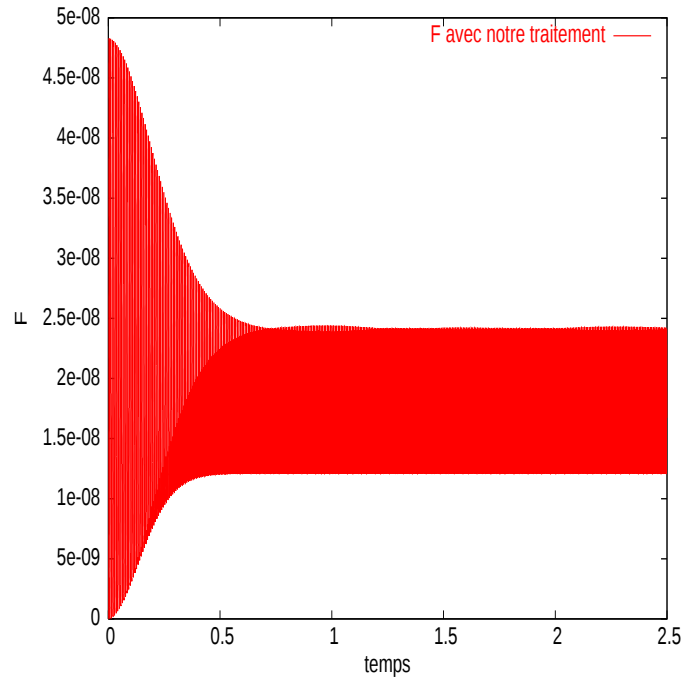


FIG. 5.17 – Evolution temporelle de $\mathbb{F}$ lors de l'utilisation de notre traitement pour $t \leq 2.5$

TAB. 5.8 – Propagation aéroacoustique autour d'un falcon : résultats de performances

Maillage	N_p	CPU		REEL	% CPU	$S(N_p)$
M1	1	16 h 45 mn 42 sec	16 h 54 mn 50 sec	99%	1	
-	4	4 h 28 mn 37 sec	4 h 48 mn 50 sec	93%	3.5	
-	8	2 h 22 mn 4 sec	2 h 36 mn 7 sec	91%	6.5	
M2	16	3 j 18 h 27 mn 18 sec	4 j 7 h 51 mn 6 sec	87%	1	
-	32	2 j 3 h 55 mn 33 s	2 j 13 h 5 mn 21 sec	85%	1.7	

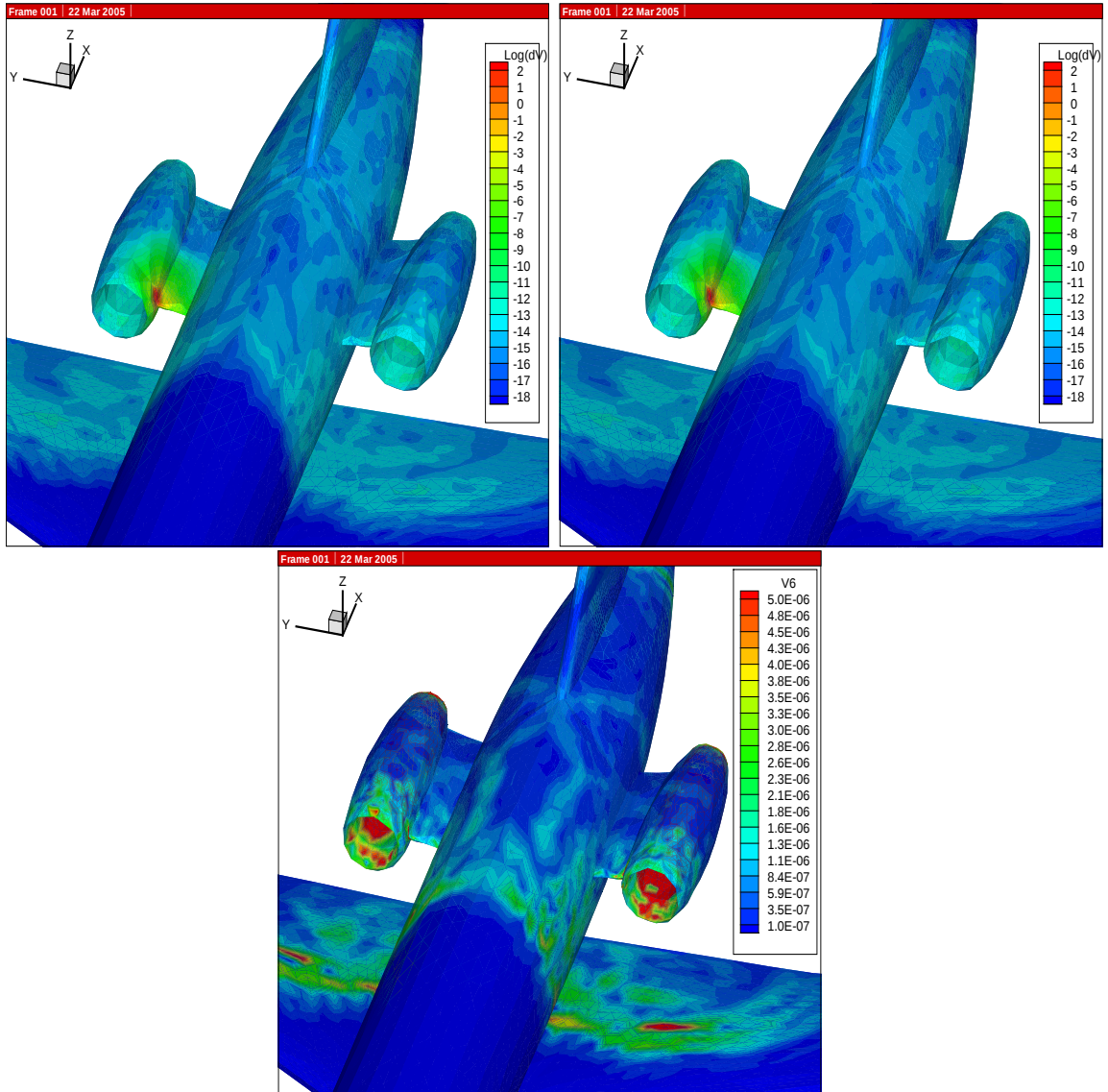


FIG. 5.18 – 50 isos de $\|\delta\vec{V}\|$ à $t=1.05s$. En haut à gauche : sans traitement en échelle logarithmique, en haut à droite : modèle simplifié en échelle logarithmique, en bas : notre traitement en échelle linéaire

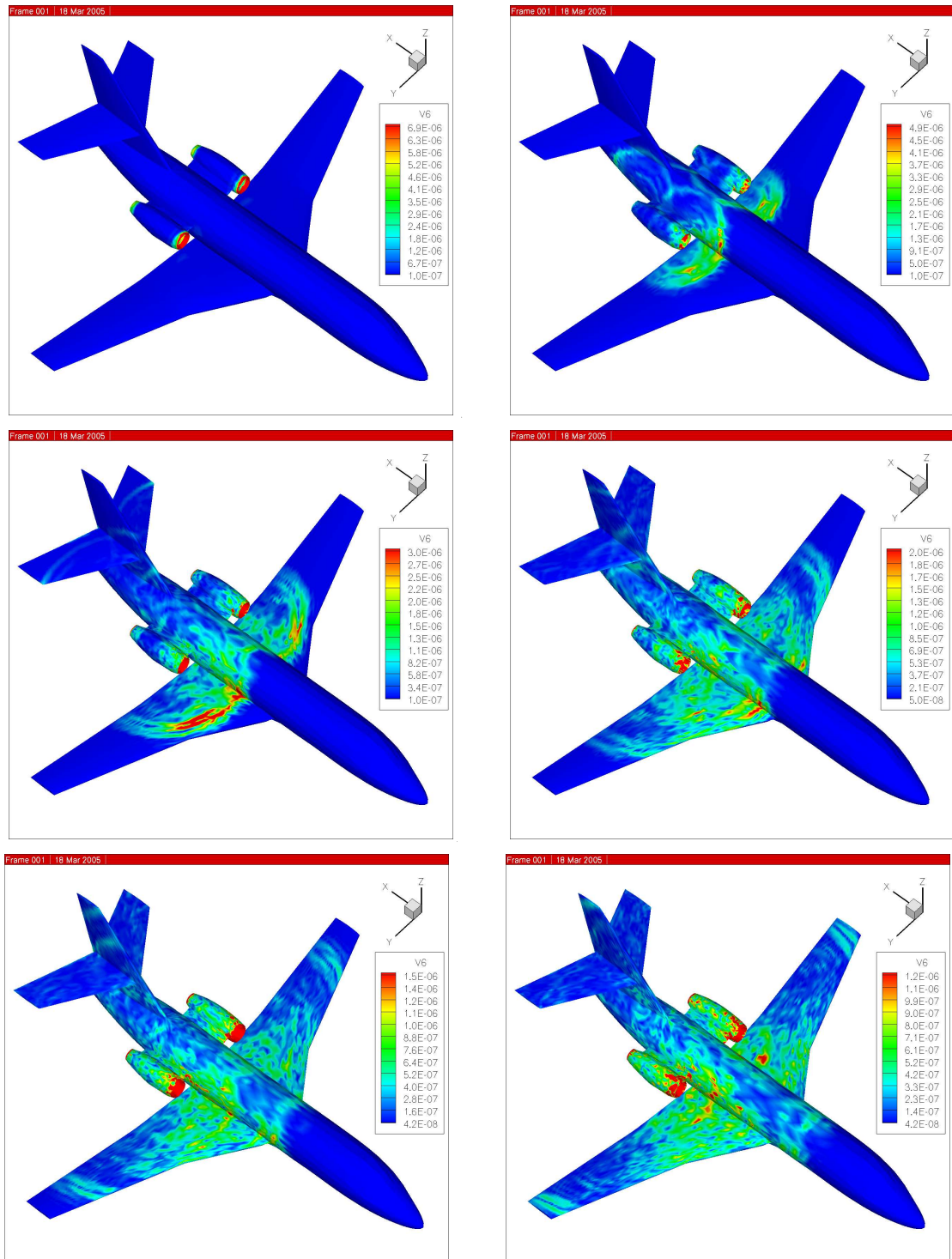


FIG. 5.19 – 50 isos de $\|\delta\vec{V}\|$ à $t=0.41s, 0.84s, 1.25s, 1.66s, 2.09s$ et $2.5s$ (de gauche à droite et de haut en bas)

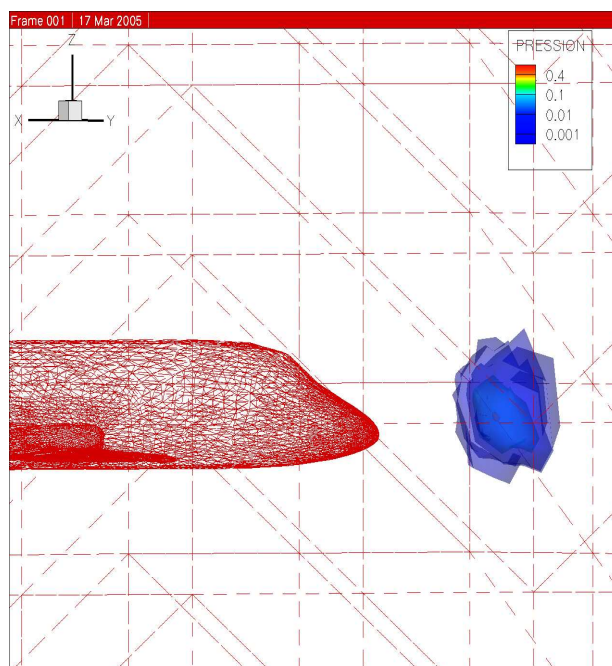


FIG. 5.20 – *Représentation du sup en temps de la composante en pression du terme source monopolaire*

caractère assez grossier ne nous a pas permis d'obtenir des résultats aussi précis que nous le voulions. Les résultats obtenus pour le maillage M2 présentent plusieurs facettes. Remarquons tout d'abord que l'allure générale de l'évolution des isovaleurs est vraiment satisfaisante et cohérente avec les résultats attendus. Cette simulation met en évidence la capacité de notre méthode à appréhender des configurations de complexité industrielle. Cependant nous pouvons constater une zone assez chahutée sur à peu près un tiers du haut de l'avion. Ce phénomène, par son caractère grossier, ne peut être imputé à l'écoulement non uniforme. L'explication provient tout simplement du fait que le maillage surfacique du falcon est un peu plus étiré dans cette zone que sur le reste de l'avion. La raison pour laquelle nous n'avons pas tenté de raffiner un peu plus le maillage provient du principal point noir des résultats présentés : les temps de calculs pour le maillage M2. En effet, nous pouvons constater que le temps de calcul de plus de 2 jours et demi sur 32 processeurs pour M2 est trop important. Il est vrai que le code 3D que nous avons construit est fortement optimisable, nous n'avons pu aborder cette phase avant la rédaction de ce mémoire. Nous avons donc bon espoir de pouvoir réduire significativement ces temps de calculs.

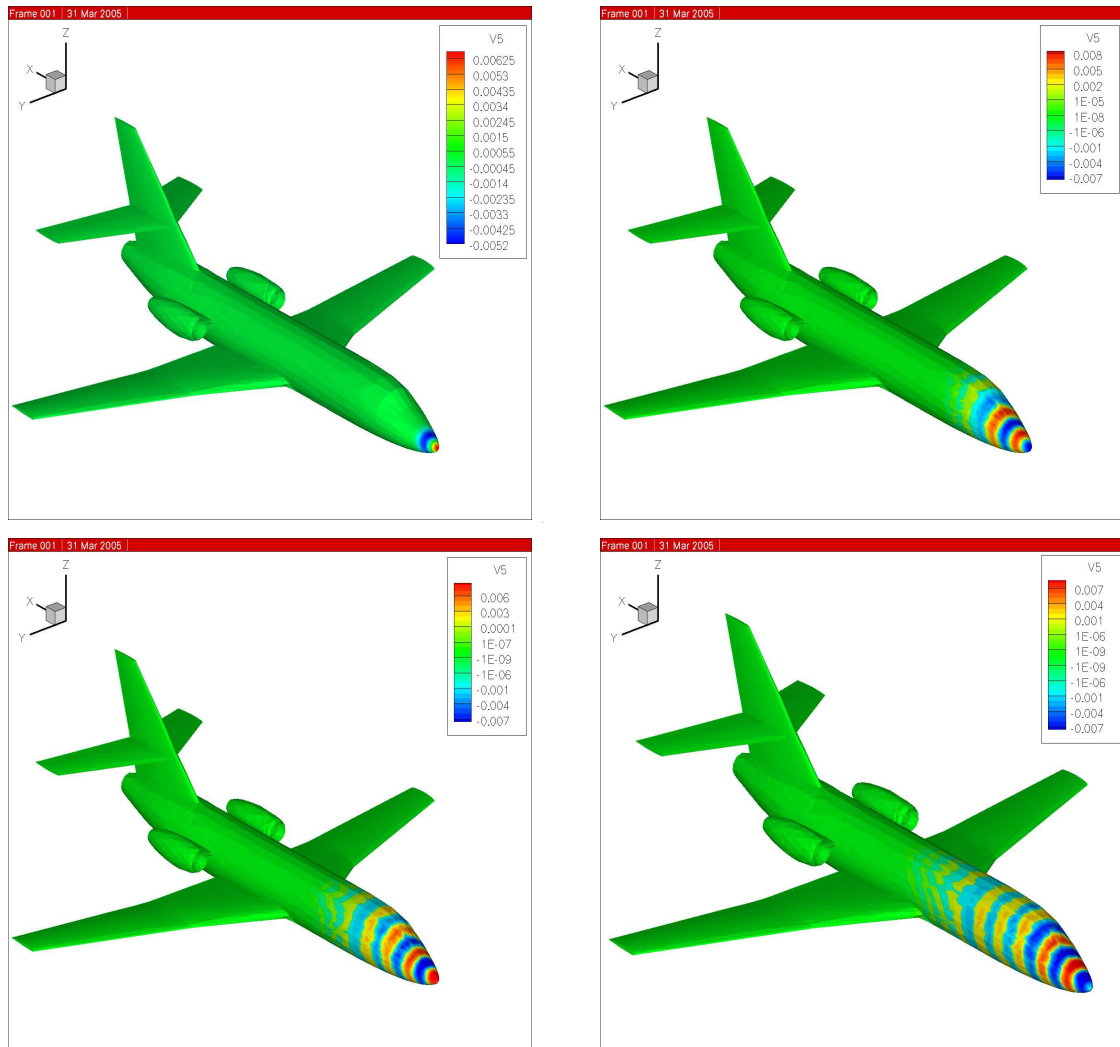


FIG. 5.21 – 50 isos de δp . De gauche à droite et de haut en bas : $t=0.74$, $t=1.06s$, $t=1.38s$ et $t=1.7s$

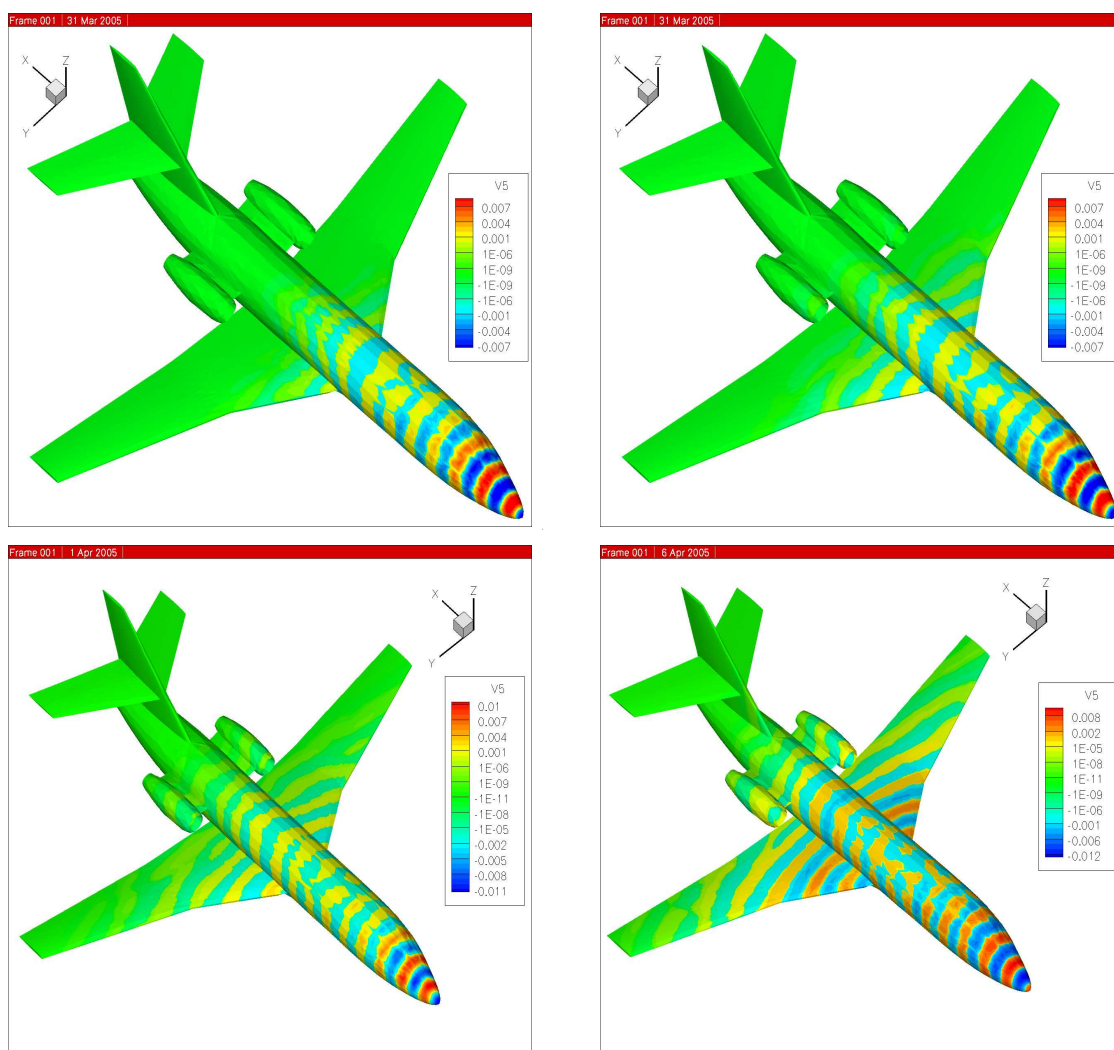


FIG. 5.22 – 50 isos de δp . De gauche à droite et de haut en bas : $t=2s$, $t=2.23s$, $t=2.44s$ et $t=2.7s$

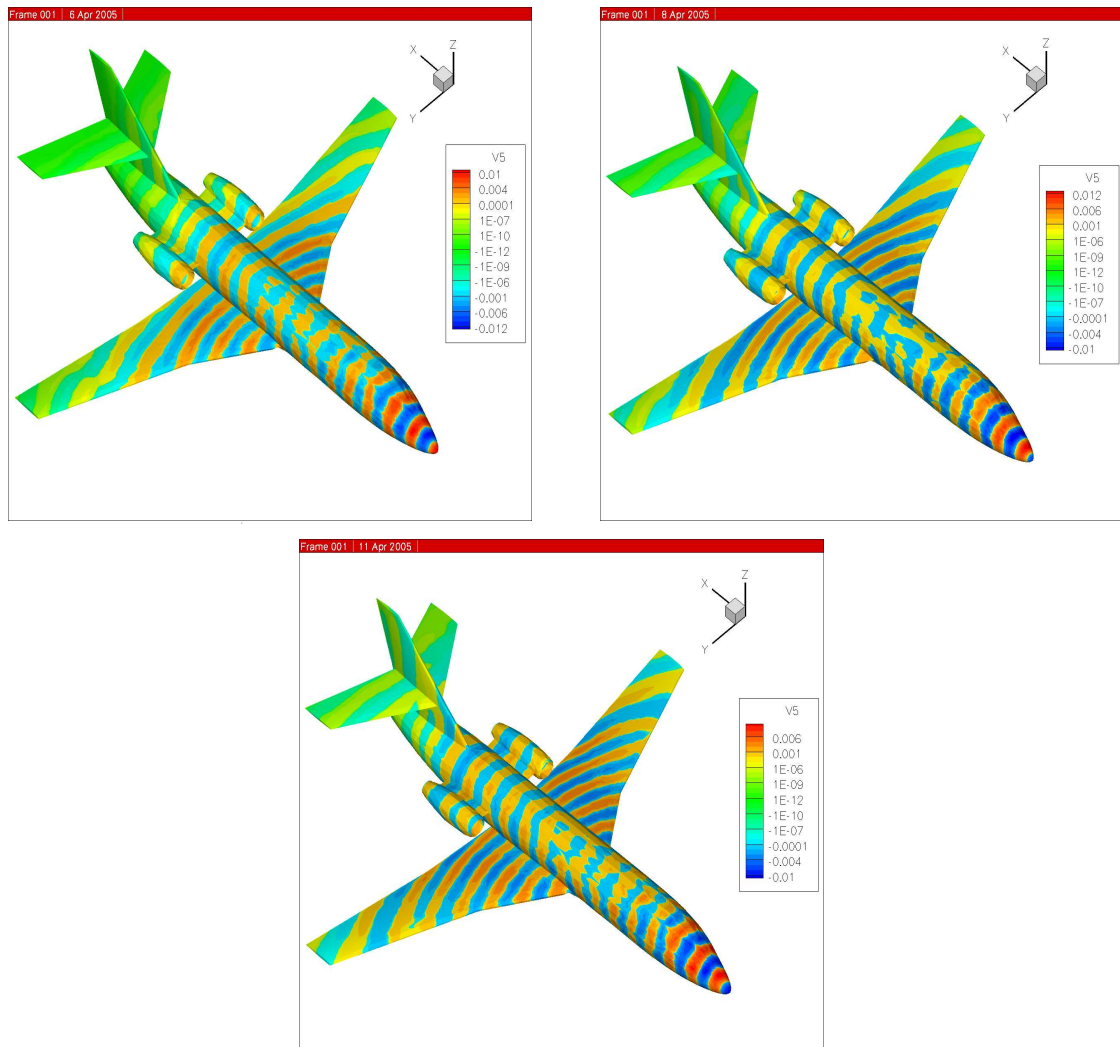


FIG. 5.23 – 50 isos de δp . De gauche à droite et de haut en bas : $t=3.05s$, $t=3.23s$ et $t=3.5s$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les possibilités de notre code 3D s'appuyant sur les schémas (2.9) et (2.10), sur les conditions aux limites réfléchissantes (2.26) et (2.27), sur les conditions absorbantes (2.29) et (2.31) et sur les deux traitements des instabilités de type Kelvin Helmholtz que nous avons précédemment détaillés. Les résultats obtenus ont mis en évidence une forte disparité au niveau des performances que nous allons essayer d'expliquer. Nous avons obtenu de manière générale des performances très satisfaisantes dans le cas de l'étude de problèmes aéroacoustiques autour d'un écoulement uniforme comme l'illustre le premier cas test du chapitre. L'architecture de notre code parallèle s'est révélé très performante pour ces configurations avec des résultats en terme de "% CPU" et d'accélération parallèle quasiment optimaux. Il est à noter qu'un temps réel d'un peu plus de 5 heures pour la configuration "M2-16processeurs" du premier cas test est une réelle performance compte tenu de la finesse du maillage et de la qualité des résultats.

Nous ne pouvons malheureusement pas conclure aussi positivement sur les résultats des trois autres tests de performances réalisés, dont les résultats restent assez satisfaisants. L'utilisation du schéma (2.10), associé aux conditions aux limites (2.27) et (2.31) et aux particularités géométriques et aérodynamiques de ces cas tests s'est révélée plus coûteuse en terme de communications et d'opérations et donc de temps de calcul que pour le premier cas test. Le tableau 5.9 résume les temps de calculs obtenus pour chacun des 4 cas tests dans la configuration : "16 processeurs-maillage le plus fin". Nous allons tenter d'expliquer les nettes différences obtenues grâce à des critères d'ordre globaux et à des critères d'ordre comparatif entre l'utilisation d'un écoulement porteur uniforme ou non uniforme. Commençons par préciser ces différents critères :

I. Critères Globaux :

- (1) Le raffinement local d'un maillage est extrêmement pénalisant pour la condition CFL de stabilité.
- (2) Le temps final caractéristique d'un cas test est extrêmement dépendant de sa configuration (taille du domaine, fréquence du terme source, caractéristiques de l'écoulement), il peut donc être très différent d'un cas test à un autre.
- (3) La présence d'un terme source selon ses caractéristiques temporelles et spatiales peut être coûteuse.

II. Critères comparatifs entre écoulement porteur uniforme et non uniforme :

- (1) Le schéma utilisé en non uniforme est beaucoup plus coûteux :
 - En terme d'opérations :
 - i) Les matrices $\mathbb{A}_s$ ne sont pas symétriques et sont pleines contrairement aux matrices $\bar{\mathbb{A}}_s$.
 - ii) Notre condition absorbante entraîne le calcul et la diagonalisation aux interfaces absorbantes de plusieurs matrices complexes contrairement à celle utilisée en uniforme.
 - iii) Le calcul éventuel de $\mathbb{F}$ est beaucoup plus complexe que celui de $\mathbb{F}_u$.
 - En terme de stockage :
 - iv) En non uniforme le stockage de l'écoulement est nécessaire.

- v) La remarque précédente sur les matrices $\mathbb{A}_s$ entraîne également un surplus de stockage.
- En terme de communications :
 - vi) L'échange des valeurs des variables de l'écoulement porteur est nécessaire au niveau des interfaces artificielles pour un écoulement porteur non uniforme (cet échange n'est cependant effectué qu'une seule fois).
- (2) Le caractère éventuellement instable de l'écoulement nécessitant le recours à notre traitement est également coûteux en terme d'opérations puisqu'il nécessite le calcul à chaque itération temporelle d'un terme de flux supplémentaire pour chaque interface interne.

TAB. 5.9 – *Comparaison des différents cas tests pour 16 processeurs et sur maillage fin*

Cas test	# tétraèdres	REEL	% CPU	$S(16)/S(8)$
Tam-Webb	3072000	5 h 13mn 3 sec	92	1.93
Cisaillé linéaire	3000000	6 h59 mn 2 sec	90	1.9
Autour de la sphère	1525722	5 h 4mn 6 sec	94	1.83
Falcon monopolaire	1309856	4 j 7 h 51 mn 6 sec	87	-

Nous pouvons maintenant grâce à ces remarques essayer de comprendre les différences de résultats entre les différents tests de performances. La différence des résultats entre les deux premiers cas tests provient uniquement du point II.(1). En effet la complexité des maillages étant identique, la condition CFL et le temps caractéristique entraînant un nombre d'itérations en temps semblable, une telle différence au niveau du temps de calcul se justifie simplement par les différents critères du point II.(1).

La troisième simulation présente un temps de calcul peu inférieur à celui de la deuxième pour un maillage comportant quasiment deux fois moins de cellules alors que tous les deux correspondent à des configurations "écoulement non uniforme sans instabilité". Cette différence s'explique donc grâce au point I.. En effet le maillage est localement raffiné au niveau de la sphère et ce troisième cas test fait appel au calcul d'un terme source gaussien en espace à chaque itération en temps.

Enfin le temps de calcul quasiment 20.5 fois plus important pour le dernier cas test par rapport au cas test de la sphère s'explique également grâce au point I., le temps caractéristique de ce cas test pour pouvoir observer le profil de diffraction sur l'ensemble du Falcon associé à un maillage très raffiné par endroit et à l'utilisation de notre traitement des instabilités explique une telle différence.

Nous pouvons conclure ces remarques en affirmant que les résultats sont évidemment prometteurs d'un point de vue théorique (traitement performant des instabilités, condition théorique de stabilité sur maillage non structuré pour un écoulement porteur non uniforme) et numérique. De plus nous sommes convaincus qu'une étude sérieuse sur l'optimisation de ce code qui n'a pu être réalisée aurait amélioré de manière notable les performances obtenues. Le caractère flexible des méthodes de type Galerkin discontinu associé à cette première ver-

sion de notre code permettent également d'envisager de nombreux développements aisément programmables.

Conclusion

Conclusion générale

Ce document a présenté la mise en oeuvre de méthodes de type Galerkin discontinu pour l'aéroacoustique. La plupart des objectifs que nous nous étions fixés au début de la thèse ont été atteints. Ainsi, nous avons montré comment la structure de ces méthodes permettait de faire face par leur nature discontinue à des configurations d'écoulements, de géométries et de maillages complexes.

De manière un peu plus précise, dans le cadre académique mais peu réaliste de la linéarisation des équations d'Euler autour d'un écoulement uniforme, nous avons démontré grâce à des conservations d'énergies la stabilité de notre modèle sur maillage non structuré. Nous avons également illustré l'alternative intéressante en terme de "coût-résultats de stabilité-précision" que représentaient nos conditions aux limites par rapport à d'autres conditions existantes. Toujours dans ce cadre, les nombreux cas tests réalisés en deux puis trois dimensions d'espace ont mis en évidence le bien fondé de notre approche, ses qualités ainsi que la limite des méthodes de type volumes finis pour les problèmes ayant trait à l'aéroacoustique. Cependant, comme nous avons cherché à l'expliquer avec le cas test du Workshop [2] présenté dans le chapitre 4, pour une configuration aussi simpliste, notre méthode n'est pas vraiment exploitée "à sa juste valeur". En effet l'intérêt de notre formulation par rapport à des schémas ou à des codes existants n'est réelle que pour des configurations complexes.

Concernant la propagation de perturbations aéroacoustiques au sein d'un écoulement non uniforme, les équations d'Euler ont été linéarisées après une symétrisation classique. Cette formulation originale nous a permis d'obtenir une équation de conservation énergétique avec terme source. Nous nous sommes efforcés, à travers notre schéma, de retrouver ce résultat au niveau discret, ce bilan énergétique exprimant en fait les échanges entre aérodynamique et aéroacoustique dus au caractère non uniforme de l'écoulement. Comme nous l'avons illustré, ce bilan nous a guidé dans la recherche d'une méthode permettant de limiter les instabilités physiques pouvant être engendrées par les équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement non uniforme. Notre schéma associé à des conditions aux limites non physiques de type caractéristique d'expressions assez complexes et à notre traitement de type discret des instabilités nous a permis d'obtenir une condition suffisante de stabilité de type CFL pour tout type d'écoulement porteur (d'approximation constante par cellule) grâce à la conservation d'une énergie. A notre connaissance, un tel résultat sur maillage non structuré et pour un schéma explicite en temps n'avait jamais été démontré. La comparaison de notre méthode de traitement des instabilités avec celle du modèle simplifié utilisé par Bogey, Bailly et Juvé a été réalisée de manière numérique sur plusieurs cas tests (une justification plus théorique res-

tant un problème ouvert), les résultats obtenus ont montré que ces deux traitements avaient un impact négligeable sur des configurations d'écoulements stables et que pour les cas tests instables, stabilisés lors de l'utilisation de ces deux méthodes, les résultats obtenus pour ces deux traitements étaient quasiment identiques. Cependant, le modèle simplifié associé à notre schéma ne nous a pas permis de stabiliser toutes les configurations instables rencontrées (voir cas test du Falcon) contrairement à notre approche. Ce résultat justifie l'effort engagé dans la recherche d'une méthode assurant la stabilité de manière théorique.

Il est à noter que tous les résultats théoriques développés dans ce mémoire (conditions de stabilité, bilans énergétiques, traitements des instabilités) ont été énoncés et démontrés pour un choix quelconque de fonctions de base, c'est-à-dire pour une version d'ordre quelconque en espace de notre schéma.

Les résultats obtenus en deux dimensions d'espace au cours de la thèse dont certains sont présentés dans le chapitre 4 nous ont permis de faire un choix parmi les possibilités qui s'offraient à nous pour la réalisation de notre code en trois dimensions d'espace. Ainsi, les versions implicites de nos conditions aux limites absorbantes, bien que théoriquement plus précises que les versions explicites et donnant lieu aux mêmes résultats théoriques ont été abandonnées pour leur caractère coûteux. Les tests de performances présentés dans le dernier chapitre ont permis de valider notre code 3D à structure parallèle, les résultats obtenus pour le cas test du Falcon ont mis en évidence le potentiel de notre méthode pour des problèmes de nature industrielle.

Perspectives

Les perspectives envisageables pour la suite de ce travail sont réellement multiples et prometteuses. Ainsi comme nous venons de l'expliquer, si les résultats numériques présentés dans ce mémoire l'ont été pour une base d'approximation $\mathbb{P}_0$ ou $\mathbb{P}_1$, la partie la plus délicate que représente les résultats théoriques a déjà été étendue à une base d'approximation d'ordre quelconque. En quelque sorte, l'amélioration de la précision des résultats numériques obtenus ne nécessitent plus qu'une extension assez rapide à effectuer de la version actuelle de notre code 3D.

Une question bien plus sensible et complexe à envisager est celle de l'amélioration de la représentation de l'écoulement puisque tous les résultats théoriques ou numériques présentés dans ce mémoire l'ont été pour une représentation au mieux constante par cellule du champ moyen; or envisager une approche d'ordre quelconque pour les variables aéroacoustiques nécessite que l'on s'interroge sur le bien fondé d'une telle approximation pour l'écoulement porteur. L'extension des résultats théoriques obtenus pour un écoulement approché de manière plus précise est à notre sens un des objectifs les plus intéressants. De même, l'amélioration et la diversification de nos conditions aux limites non physiques, tout en conservant les résultats théoriques obtenus, nous paraît être un sujet complexe et important.

Le cas test du Falcon a également mis en avant une autre voie à explorer, celle de l'amélioration possible de notre schéma en temps. S'il est vrai que les résultats théoriques de stabilité obtenus sont pour nous les résultats les plus intéressants de ce mémoire, il n'en reste pas moins que la complexité des maillages utilisés pour des problèmes réalistes peut être extrêmement pénalisante vis-à-vis de la condition CFL de notre schéma. Ainsi, nous pensons

qu'une version implicite en temps (ou au moins localement implicite) de la formulation en espace de notre schéma est un sujet qui mérite d'être abordé.

Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre 5, une phase d'optimisation de notre code parallèle qui n'a pu être réalisée avant la rédaction de ce mémoire est également une étape indispensable pour la réalisation des prochaines simulations que nous envisageons. En effet, il est clair qu'une collaboration future avec un partenaire industriel de l'aéronautique semble être une des suites évidentes à donner à ces travaux.

Références

- [1] “Third computational aeroacoustics workshop on benchmark problems” – NASA Ohio aerospace institute, 1999.
- [2] “Fourth computational aeroacoustics workshop on benchmark problems” – NASA Ohio aerospace institute, 2003.
- [3] A. AGARWAL, P. MORRIS et R. MANI – “Calculation of sound propagation in nonuniform flows: suppression of instability waves”, *AIAA Journal* **42** (2004), no. 1, p. 80–88.
- [4] L. ANNE, J. CIONI, L. FEZOUÏ et F. POUPAUD – “A parallel FVTD Maxwell solver using 3D unstructured meshes”, *13th Annual Review of Progress in Applied Computational Electromagnetics (PIERS)*, 1997, p. 359–365.
- [5] H. ATKINS – “Continued development of the discontinuous Galerkin method for computational aeroacoustic applications”, Tech. Report Va 23681-0001, NASA, Langley Research Center Hampton, 1997.
- [6] C. BAILLY, W. BÉCHARA, S. CANDEL et P. LAFON – “Stochastic approach of noise modeling for free turbulent flows”, *AIAA Journal* **32** (1994), p. 455–463.
- [7] C. BAILLY, J.-M. CLARISSE et C. BOGEY – “Workshop sur les conditions aux limites numériques : conditions non réfléchissantes en aéroacoustique”, 2002.
- [8] C. BAILLY et D. JUVÉ – “Numerical solution of acoustic propagation problems using linearized Euler equations”, *AIAA Journal* **38** (2000), no. 1, p. 22–29.
- [9] A. BAYLISS et E. TURKEL – “Far field boundary conditions for compressible flows”, *Journal of Computational Physics* **48** (1982), p. 182–199.
- [10] E. BECACHE, S. FAUQUEUX et P. JOLY – “Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves”, Rapport de recherche 4304, INRIA, 2001.
- [11] J. BERENGER – “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *Journal of Computational Physics* **114** (1994), p. 185–200.
- [12] —, “A three-dimensional perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *Journal of Computational Physics* **127** (1996), p. 363–379.
- [13] M. BERNACKI, L. FEZOUÏ, S. LANTERI et S. PIPERNO – “Parallel discontinuous Galerkin unstructured mesh solvers for the calculation of three-dimensional wave propagation problems”, *Applied Mathematical Modelling* (2005), article soumis.
- [14] M. BERNACKI, S. LANTERI et S. PIPERNO – “Time-domain parallel simulation of heterogeneous wave propagation on unstructured grids using explicit, non-diffusive, discontinuous Galerkin methods”, *Journal of Computational Acoustics* (2004), article accepté.
- [15] M. BERNACKI et S. PIPERNO – “Schémas en volumes finis avec flux centrés : application à l’aéroacoustique”, Rapport de recherche 4506, INRIA, 2002.

-
- [16] — , “Méthode de type Galerkin discontinu pour la propagation des ondes en aéroacoustique”, Rapport de recherche 4932, INRIA, 2003.
 - [17] — , “Schémas en volumes finis avec flux centrés pour la propagation des ondes en aéroacoustique”, Rapport de recherche 4699, INRIA, 2003.
 - [18] — , “Méthode de type Galerkin discontinu appliquée aux équations d’Euler linéarisées en écoulement uniforme ou non”, Rapport de recherche 5292, INRIA, 2004.
 - [19] — , “A dissipation-free time-domain discontinuous Galerkin method applied to three-dimensional linearized Euler equations around a steady-state non-uniform inviscid flow”, *Journal of Computational Acoustics* (2005), article soumis.
 - [20] C. BOGEY – “Calcul direct du bruit aérodynamique et validation de modèles acoustiques hybrides”, Thèse, Ecole centrale de Lyon, 2000.
 - [21] C. BOGEY et C. BAILLY – “Three-dimensional non-reflective boundary conditions for acoustic simulations : far field formulation and validation test cases”, *Acta Acustica* **88** (2002), no. 4, p. 463–471.
 - [22] C. BOGEY, C. BAILLY et D. JUVÉ – “Computation of flow noise using source terms in linearized Euler’s equations”, *AIAA Journal* **40** (2002), no. 2, p. 225–243.
 - [23] F. BOURDEL, P. HELLUY et P. MAZET – “Resolution of the non-stationary or harmonic Maxwell equations by a discontinuous finite element method”, *Computing Methods in Applied Sciences and Engineering*, Nova Science, 1991, p. 405–422.
 - [24] S. CANDEL – “Numerical solution of conservation equations arising in linear wave theory: application to aeroacoustics”, *Journal of Fluid Mechanics* **83** (1977), no. 3, p. 465–493.
 - [25] B. COCKBURN, G. KARNIADAKIS et C.-W. SHU – “The development of discontinuous Galerkin methods”, *Lecture notes in Computational Science and Engineering* 11, Springer, 2000.
 - [26] B. COCKBURN et C.-W. SHU – “Runge-Kutta discontinuous Galerkin methods for convection-dominated problems”, *Journal of Scientific Computing* **16** (2001), no. 3, p. 173–261.
 - [27] T. COLONIUS, S. LELE et P. MOIN – “Sound generation in a mixing layer”, *Journal of Fluid Mechanics* **330** (1997), p. 375–409.
 - [28] P. DELORME et C. PEYRET – “Galerkin discontinuous method for computational aeroacoustics”, Communication privée.
 - [29] A.-S. B.-B. DHIA, G. LEGENDRE et E. LUNEVILLE – “Analyse mathématique de l’équation de Galbrun en écoulement uniforme”, Série IIb, Mécanique/Mechanics 8, *Compte rendus de l’Académie des sciences*, 2001.
 - [30] J. DIAZ et P. JOLY – “Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics”, *Sixth International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation* (Jyväskylä, Finland), 2003.
 - [31] A. DOWLING, J. F. WILLIAMS et M. GOLDSTEIN – “Sound production in a moving stream”, *Philosophical Transactions of the Royal Society of London* **288** (1978), no. A, p. 321–349.
 - [32] B. ENGQUIST et A. MAJDA – “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”, *Mathematics of Computation* **31** (1977), no. 139, p. 629–651.

-
- [33] A. ERN et J.-L. GUERMOND – *Theory and practice of finite elements*, Applied Mathematical Sciences, vol. 159, Springer, 2004.
- [34] R. EYMARD, T. GALLOUET et R. HERBIN – *The finite volume method, vol. 7-3*, North Holland-Elsevier Science, 2000.
- [35] L. FEZOU, S. LANTERI, S. LOHRENGEL et S. PIPERNO – “Convergence and stability of a discontinuous Galerkin time-domain method for the 3D heterogeneous Maxwell equations on unstructured meshes”, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis* (2005), article soumis.
- [36] L. FEZOU, M. REMAKI et S. PIPERNO – “A nondiffusive finite volume scheme for the three-dimensional Maxwell’s equations on unstructured meshes”, *SIAM J. Numer. Anal.* **39** (2002), no. 6, p. 2089–2108.
- [37] R. FJØRTOFT – “Application of integral theorems in deriving criteria of stability for laminar flows and the baroclinic circular vortex”, *Geophys.Pub.Oslo* **17** (1950), p. 1–52.
- [38] H. GALBRUN – *Propagation d’une onde sonore dans l’atmosphère et théorie des zones de silence*, Gauthier-Villars, Paris, 1931.
- [39] M. GILES – “Non-reflecting boundary conditions for Euler equations calculations”, *AIAA Journal* **28** (1990), no. 12, p. 2050–2058.
- [40] D. GIVOLI – “Non-reflecting boundary conditions”, *Journal of Computational Physics* **94** (1991), p. 1–29.
- [41] M. GOLDSTEIN – *Aeroacoustics*, McGraw-Hill, 1976.
- [42] T. GONZALEZ – “Contributions aux conditions d’interface et conditions aux limites pour le système d’équations d’Euler compressible”, Thèse, Université Paris 6, 2000.
- [43] T. HAGSTROM et S. HARIHARAN – “Accurate boundary conditions for exterior problems in gas dynamics”, *Mathematics of Computation* **51** (1988), no. 184, p. 581–597.
- [44] A. HARTEN – “On the symmetric form of systems of conservation laws with entropy”, *ICASE* **81** (1981), no. 34.
- [45] J. HESTAVEN et T. WARBURTON – “Nodal high-order methods on unstructured grids. I: Time-domain solution of Maxwell’s equations”, *Journal of Computational Physics* **181** (2002), no. 1, p. 186–221.
- [46] J. HESTAVEN – “On the analysis and construction of perfectly matched layers for the linearized Euler equations”, *Journal of Computational Physics* **142** (1998), p. 129–147.
- [47] F. HU – “On absorbing boundary conditions for linearized Euler equations by a perfectly matched layer”, *Journal of Computational Physics* **129** (1996), p. 201–219.
- [48] —, “A stable, perfectly matched layer for linearized Euler equations in unsplit physical variables”, *Journal of Computational Physics* **173** (2001), p. 455–480.
- [49] G. KARYPIS et V. KUMAR – “Parallel multilevel k-way partitioning scheme for irregular graphs”, *SIAM Review* **41** (1999), p. 278–300.
- [50] D. KRÖNER – “Absorbing boundary conditions for the linearized Euler equations in 2-D”, *Mathematics of Computation* **195** (1991), no. 57.
- [51] S. LANTERI – “Parallel solutions of compressible flows using overlapping and non-overlapping mesh partitioning strategies”, *Parallel Computing* **22** (1996), p. 943–968.

-
- [52] P. LE SAINT et P. RAVIART – “On a finite element method for solving the neutron transport equation”, *Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations* (I. C. de Boor, éd.), Academic press, New-York, 1974, p. 89–145.
 - [53] G. LEGENDRE – “Rayonnement acoustique dans un fluide en écoulement : analyse mathématique et numérique de l’équation de Galbrun”, Thèse, Université Paris VI, 2003.
 - [54] S. LELE – “Compact finite difference schemes with spectral-like resolution”, *Journal of Computational Physics* **103** (1992), no. 1, p. 20–26.
 - [55] — , “Computational aeroacoustics : a review”, *35th Aerospace Sciences Meeting & Exhibit*, vol. 97-0018, AIAA paper, 1997.
 - [56] S. LELE, P. MOIN et M. WANG – “Computation of quadrupole noise using acoustic analogy”, *AIAA Journal* **34** (1996), no. 11, p. 2247–2254.
 - [57] M. LESIEUR et O. METAIS – “New trends in large-eddy simulations of turbulence”, *Annu.Rev.Fluid Mech.* **28** (1996), p. 45–82.
 - [58] M. Lighthill – “On sound generated aerodynamically -I. general theory”, *Proc. Roy. Soc. London* **211** (1952), no. Ser. A, 1107, p. 564–587.
 - [59] G. LILLEY – “The generation and radiation of supersonic jet noise. vol.IV- theory of turbulence generated jet noise, noise radiation from upstream sources, and combustion noise. Part II : Generation of sound in a mixing region”, *Air Force Aero Propulsion Laboratory AFAPL-TR-72-53* (1972), no. 4.
 - [60] J. LIONS, J. METRAL et O. VACUS – “Well-posed absorbing layer for hyperbolic problems”, *Numerische Mathematik* **92** (2002), no. 3, p. 535–562.
 - [61] D. LOCKARD et H. ATKINS – “Efficient implementations of the quadrature-free discontinuous Galerkin method”, *AIAA Journal* **99** (1999), no. 3309, p. 1–11.
 - [62] O. MARSDEN, C. BAILLY et C. BOGEY – “Noise radiated by a high-Reynolds-number 3-D airfoil”, *AIAA Paper 2005-2817*, p. 1–11, 11th AIAA/CEAS Aeroacoustics Conference, 23-25 may, Monterey, California, USA.
 - [63] A. MICHALKE – “On the inviscid instability of the hyperbolic-tangent velocity profile”, *Journal of Fluid Mechanics* **19** (1964), p. 543–556.
 - [64] C. PEYRET et G. ELIAS – “A finite element method to study harmonic aeroacoustics problems”, *Journal of the Acoustical Society of America* **110** (2001), no. 2, p. 661–668.
 - [65] O. PHILLIPS – “On the generation of sound by supersonic turbulent shear layers”, *Journal of Fluid Mechanics* **9** (1960), no. 1, p. 1–28.
 - [66] A. PIERCE – “Wave equation for sound in fluids with unsteady inhomogeneous flow”, *Journal of the Acoustical Society of America* **87** (1990), no. 6, p. 2292–2299.
 - [67] S. PIPERNO et L. FEZoui – “A discontinuous Galerkin FVTD method for 3D Maxwell equations”, Rapport de recherche 4733, INRIA, 2003.
 - [68] T. POINSOT et S. LELE – “Boundary conditions for direct simulations of compressible viscous flows”, *Journal of Computational Physics* **101** (1992), p. 104–129.
 - [69] B. POIRÉE – “Petites perturbations d’un écoulement tournant”, *Acustica* **59** (1985), p. 85–94.
 - [70] L. RAYLEIGH – “On the stability of certain fluid motions”, *Proc.Math.Soc.London* **11** (1880), no. 57, See Scientific Papers, Dover, New-York, 1, pp.474-487 (1964).

-
- [71] W. REED et T. HILL – “Triangular mesh methods for the neutron transport equation”, Technical Report LA-UR-73-479, Los Alamos Scientific Laboratory, 1973.
 - [72] H. SCHLICHTING – *Boundary layer theory*, McGraw-Hill, 1968.
 - [73] J. SHANG et R. FITHEN – “A comparative study of characteristic-based algorithms for the Maxwell equations”, *Journal of Computational Physics* **125** (1996), p. 378–394.
 - [74] H. SHEN et C. TAM – “Numerical simulation of the generation of the axisymmetric mode jet screech tones”, *AIAA Journal* **36** (1998), no. 10, p. 1801–1807.
 - [75] C. TAM – “Computational aeroacoustics : issues and methods”, *AIAA Journal* **33** (1995), no. 10, p. 1788–1796.
 - [76] C. TAM, L. AURIAULT et F. CAMBULI – “Perfectly matched layer as an absorbing boundary condition for the linearized Euler equations in open and ducted domains”, *Journal of Computational Physics* **144** (1998), p. 213–234.
 - [77] C. TAM et Z. DONG – “Radiation and outflow boundary conditions for direct computation of acoustic and flow disturbances in a non uniform mean flow”, *Journal of Computational Acoustics* **4** (1996), no. 2, p. 175–201.
 - [78] C. TAM et J. HARDIN – “NASA Ohio aerospace institute, second computational aeroacoustics workshop on benchmark problems”, 1997.
 - [79] C. TAM, J. HARDIN et J. RISTORCELLI – “NASA Ohio aerospace institute, workshop on benchmark problems in computational aeroacoustics”, 1995.
 - [80] C. TAM et J. WEBB – “Dispersion-relation-preserving finite difference schemes for computational acoustics”, *Journal of Computational Physics* **107** (1993), p. 262–281.
 - [81] K. THOMPSON – “Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems”, *Journal of Computational Physics* **68** (1987), p. 1–24.
 - [82] — , “Time dependant boundary conditions for hyperbolic systems II”, *Journal of Computational Physics* **89** (1990), p. 439–461.
 - [83] J.-P. VILA – “Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multi-dimensional scalar convection laws. I : Explicit monotone schemes”, *RAIRO Modél. Math. Anal. Numér.* **28** (1994), no. 3, p. 267–295.

Résumé

On s'est intéressé dans ce travail à la résolution numérique des équations d'Euler linéarisées autour d'un écoulement stationnaire, subsonique et assez régulier. Dans le but d'obtenir des matrices symétriques dans ces équations, et *in fine*, une équation d'équilibre énergétique, nous considérons la linéarisation d'une forme symétrique des équations d'Euler tridimensionnelles. Nous proposons un schéma non-diffusif de type Galerkin discontinu en domaine temporel (GDDT) s'appuyant sur une formulation centrée-élément avec des flux numériques totalement centrés et un schéma en temps explicite de type saute-mouton, ce qui permet d'obtenir une approximation sans dissipation et fournit une estimation précise des variations de l'énergie aéroacoustique. En effet, dans le cas général de la linéarisation autour d'un écoulement non-uniforme, il existe une équation d'équilibre énergétique au niveau continu que nous vérifions au niveau discret. Nous montrons qu'il existe un terme source discret permettant de conserver exactement l'énergie ce qui permet de prouver la stabilité de notre schéma. Ainsi, notre schéma non-diffusif de type GDDT fournit un outil précis pour contrôler des phénomènes tel que les instabilités de Kelvin-Helmholtz. Nous illustrons la capacité de notre méthode aussi bien sur plusieurs cas tests académiques que sur différentes configurations complexes grâce à une implémentation parallèle.

MOTS-CLÉS : Aéroacoustique, équations d'Euler linéarisées, écoulement stationnaire uniforme ou non, maillages non structurés, méthode de type Galerkin discontinu en domaine temporel, méthode non-dissipative, équation d'équilibre énergétique, instabilités de Kelvin-Helmholtz, implémentation parallèle.

Abstract

This work is devoted to the numerical solution of three-dimensional linearized Euler equations around steady-state, smooth, subsonic flows. In order to get symmetric matrices for these equations and, *in fine*, an energy balance equation, we consider the linearization of symmetrized Euler equations. We propose a non-dissipative Discontinuous Galerkin Time-Domain (DGTD) method which relies on an element-centered formulation with centered numerical fluxes and an explicit leap-frog time scheme, leading to a dissipation-free approximation and allowing an accurate estimation of the aeroacoustic energy variation. Indeed, in the general case of the linearization around a non-uniform flow, a balance equation with source term for the aeroacoustic energy is also verified at the discrete level. We show that there exists a discrete source term such that the energy is exactly conserved and the stability of the scheme can be proved. Therefore the non-dissipative DGTD method provides an accurate tool for controlling phenomena like Kelvin-Helmholtz instabilities. We illustrate the efficiency of our method on many academic test cases as well as on various complex configurations thanks to a parallel implementation.

KEYWORDS : Aeroacoustics, linearized Euler equations, steady-state non-uniform or uniform flow, unstructured meshes, non-dissipative time-domain discontinuous Galerkin method, energy balance equation, Kelvin-Helmholtz instabilities, parallel implementation.