

Equations integro-differentielles d'évolution: méthodes numériques et applications en finance.

Ekaterina Voltchkova

▶ **To cite this version:**

Ekaterina Voltchkova. Equations integro-differentielles d'évolution: méthodes numériques et applications en finance.. Mathématiques générales [math.GM]. Ecole Polytechnique X, 2005. Français. NNT : . pastel-00001538

HAL Id: pastel-00001538
https://pastel.hal.science/pastel-00001538

Submitted on 27 Jul 2010

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Thèse présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR DE L'ECOLE POLYTECHNIQUE

spécialité : Mathématiques Appliquées

par

Ekaterina Voltchkova

Equations intégro-différentielles d'évolution : méthodes numériques et applications en finance

Soutenue le 28 octobre 2005 devant le jury composé de :

Mariko ARISAWA	
Guy BARLES	Rapporteur
Rama CONT	Directeur de thèse
Nicole EL KAROUI	Président
Damien LAMBERTON	Rapporteur
Olivier PIRONNEAU	
Christoph SCHWAB	

A mes parents.

Résumé

Cette thèse porte sur le problème d'évaluation d'options dans les modèles basés sur les processus de Lévy. Nous établissons le lien entre les prix d'options dans ces modèles et des équations intégro-différentielles (EID). Ce lien nous permet de construire des méthodes numériques efficaces d'évaluation d'options.

Nous étudions d'abord la régularité des prix des options européennes (standards ou avec barrières). En particulier, nous mettons en évidence à travers plusieurs exemples l'absence possible de cette régularité. Dans ce cas, les prix d'options doivent être considérés comme des solutions généralisées des EID. Plus précisément, nous montrons que les prix des options européennes, avec ou sans barrières, sont des solutions de viscosité des problèmes intégro-différentiels correspondants.

Nous proposons ensuite deux schémas semi-implicites aux différences finies pour la résolution numérique des EID. Nous étudions leurs consistance, stabilité et convergence vers la solution de viscosité de l'équation. Nous proposons également des estimations de la vitesse de cette convergence.

Enfin, la dernière partie de la thèse est consacrée aux tests numériques des méthodes proposées et la comparaison de l'efficacité des deux schémas.

Mots clés : équations intégro-différentielles, solutions de viscosité, évaluation d'options, modèles de Lévy exponentiels, schémas implicites-explicites aux différences finies.

Abstract

This thesis deals with option pricing in exponential Lévy models. We establish the relationship between option prices in such models and partial integro-differential equations (PIDE). This allows us to construct efficient numerical methods for option pricing.

First, we study the regularity of European (vanilla or barrier) option prices. In particular, we show on several examples that this regularity may fail. In this case, option prices must be considered as generalized solutions of the PIDEs. More precisely, we prove that European option prices, with or without barriers, are viscosity solutions of the corresponding integro-differential problems.

Next, we propose two semi-implicit finite difference schemes for numerical solution of the PIDEs. We study their consistency, stability, and convergence to the viscosity solution of the equation. We also estimate the convergence rate.

The last part of the thesis is devoted to numerical tests and comparison of the efficiency of the two schemes proposed.

Key words : integro-differential equations, viscosity solutions, option pricing, exponential Lévy models, implicit-explicit finite difference schemes.

Remerciements

Je tiens d'abord à remercier Rama Cont, mon directeur de thèse, qui m'a soutenue tout au long de ces quatre années en me manifestant sa confiance et en m'encourageant dans mon travail.

Je remercie tous les membres du jury du temps qu'ils m'ont consacré. Mes remerciements vont tout particulièrement à Guy Barles et Damien Lamberton qui ont accepté de rapporter sur cette thèse. Je leur suis reconnaissante pour la lecture très attentive du manuscrit et pour toutes leurs remarques.

Je remercie Nicole El Karoui de l'intérêt bienveillant qu'elle a toujours porté pour nous, les doctorants. Sa personnalité m'a profondément marquée par l'énergie et l'enthousiasme scientifique constants qu'elle communique.

J'exprime toute ma gratitude à Olivier Pironneau pour avoir accepté faire partie du jury mais aussi pour m'avoir initiée à la finance mathématique par l'intermédiaire de son cours de DEA et par la direction de mon stage au Laboratoire Jacques-Louis Lions de l'Université Paris VI.

Je suis extrêmement reconnaissante à Christoph Schwab pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail. Le séjour à l'ETH Zurich que j'ai effectué sur son invitation a été très motivant pour ma recherche et m'a laissé des souvenirs inoubliables.

Je remercie également Mariko Arisawa qui a eu la gentillesse de venir assister à ma soutenance.

Cette thèse a été menée au sein du Centre de Mathématiques Appliquées de l'Ecole Polytechnique dont je remercie tous les membres et plus particulièrement son directeur, Vincent Giovangigli. L'ambiance amicale qui règne dans ce laboratoire m'a permis d'acquérir au cours de ces années une expérience professionnelle et personnelle agréable et enrichissante. Je tiens à remercier chaleureusement mes condisciples thésards et post-docs de leur soutien et des bons moments que nous avons passés ensemble. Donc un grand merci à Peter, Julien, Emily, François, Moeiz, Asma, Karima, Chokri, Nicolas, Jean-Philippe, David, Céline, Ying, Claudia, Frank, Mariapia.

J'adresse toute ma reconnaissance à Daniel Gabay, Monique Jeanblanc et Stéphane Crépey d'avoir bien voulu me faire confiance et de me permettre d'enseigner à l'Ecole Supérieure d'Ingénieurs Léonard de Vinci et à l'Université d'Evry. Merci à Imen, Thomas, Yousra, Mélanie, Binh et à tous mes collègues et amis que j'ai rencontrés grâce à ces enseignements.

Mes remerciements vont aussi à Agnès Sulem et Bernard Lapeyre qui ont valorisé mon travail en m'invitant à intégrer mes méthodes numériques dans le code Premia. La collaboration avec l'équipe dynamique du Premia a été un grand plaisir. Merci à tous les membres du projet Mathfi de l'INRIA et du CERMICS de l'ENPC pour leur accueil.

Enfin, de tout mon cœur, je remercie mes proches et mes amis de leur soutien émotionnel inestimable. Sébastien, merci ! La pression de ces derniers mois aurait été insupportable sans toi. Un merci spécial à Marc pour la relecture du manuscrit.

Merci infiniment à mes parents : pour tout !

Table des matières

1 Introduction **11**
1.1 Modèles discontinus en finance : motivation 11
1.2 Contexte et contribution de cette thèse 16
1.3 Structure de la thèse 20

2 Modélisation financière avec des processus de Lévy **23**
2.1 Processus de Lévy : définitions 23
2.2 Modèles de Lévy exponentiels 25
2.3 Exemples de processus de Lévy en finance 26
2.3.1 Modèles de diffusion avec sauts 26
2.3.2 Modèles purement discontinus à sauts d'activité infinie 29

3 Equations intégro-différentielles pour les prix d'options **33**
3.1 Introduction 33
3.2 Définitions et théorèmes de vérification 33
3.2.1 Options européennes 36
3.2.2 Options à barrières 37
3.3 Manque de régularité dans les modèles à sauts 38
3.3.1 Options européennes 38
3.3.2 Options à barrières 39
3.4 Prix d'options comme solutions classiques des EID 43
3.4.1 Options européennes 43
3.4.2 Options à barrières 51
3.5 Continuité des prix des options à barrières 54
3.6 Prix d'options comme solutions de viscosité des EID 67
3.6.1 Définitions 70
3.6.2 L'unicité des solutions de viscosité 74
3.6.3 Caractérisation des prix d'options 75
3.7 Conclusion 80
3.8 Sommaire des principaux résultats 81

4 Méthodes numériques **83**
4.1 Introduction 83
4.2 Approximation par un processus d'activité finie 84
4.2.1 Options européennes 85
4.2.2 Options à barrières 87
4.3 Localisation sur un domaine borné 91
4.4 Troncature de l'intégrale 100
4.4.1 Options européennes 100
4.4.2 Options à barrières 103
4.5 Schémas implicites-explicites aux différences finies 105
4.5.1 Calcul de l'intégrale par la méthode de FFT 107
4.6 Consistance, stabilité et convergence 110
4.6.1 Consistance 110
4.6.2 Monotonie et stabilité 113
4.6.3 Convergence 116
4.6.4 Vitesse de convergence 124
4.6.5 L'influence des petits sauts sur la vitesse de convergence 139
4.7 Revue de la littérature 149
4.8 Sommaire des principaux résultats 151

5 Résultats numériques **153**
5.1 Exemples étudiés 153
5.2 Comparaison de différentes variantes du schéma 153
5.2.1 Centré contre décentré 153
5.2.2 Deux versions de la partie explicite 156
5.3 L'ordre de convergence 162
5.4 Choix de ε 166
5.5 Choix du domaine de calcul 167
5.6 Options à barrières 171

A **175**
A.1 Quelques propriétés utiles des processus de Lévy 175
A.2 Calcul de la solution du problème de l'Exemple 3.3.4 176
A.3 Une autre approche pour montrer la convergence des schémas 178

Chapitre 1

Introduction

1.1 Modèles discontinus en finance : motivation

Des modèles discontinus pour l'évaluation d'options ont été introduits pour la première fois en 1976 par Merton [Mer76]. Depuis, des centaines d'articles de recherche ont apparu sur le sujet et l'intérêt des praticiens pour ces modèles est également de plus en plus grand.

Il existe plusieurs explications à cette popularité. Tout le monde s'accorde sur le fait que, dans beaucoup de situations, le modèle classique de Black et Scholes est trop simpliste pour reproduire les phénomènes observés sur le marché. Plusieurs méthodes ont donc été proposées pour généraliser ce modèle. Dans ce sens, les modèles à sauts s'inscrivent dans une liste de modèles qui ont pour vocation de remédier aux défauts du modèle de Black-Scholes. Nous pouvons citer à ce titre des modèles de volatilité locale ou de volatilité stochastique, le mouvement brownien fractionnaire ou encore des modèles multifractals. Les modèles à sauts ont pourtant un certain nombre d'avantages qui leur ont permis de prendre une place importante dans cette multitude d'outils de modélisation financière.

Commençons par l'argument le plus intuitif que l'on peut comprendre en regardant la Figure 1.1. Elle représente l'évolution du prix de l'action de la *SLM Corporation*, côtée à la bourse de New-York, sur une période de trois mois entre janvier et mars 1993. Nous voyons que le prix subit de temps en temps des changements importants comparés à la variation moyenne (il est naturel d'appeler ces larges mouvements des sauts). Donc, les sauts dans la dynamique des prix sont une réalité du marché et pas seulement un outil mathématique. Il est évident qu'une dynamique de ce type ne peut pas être modélisée correctement par un processus aléatoire continu. En même temps, c'est à ces grands changements imprévisibles dans les prix qu'est associée la partie majeure des pertes liées à l'actif financier. Il est donc important de les prendre en compte pour une gestion efficace du risque.

Notons que les sauts sont surtout visibles à des petites échelles du temps : sur

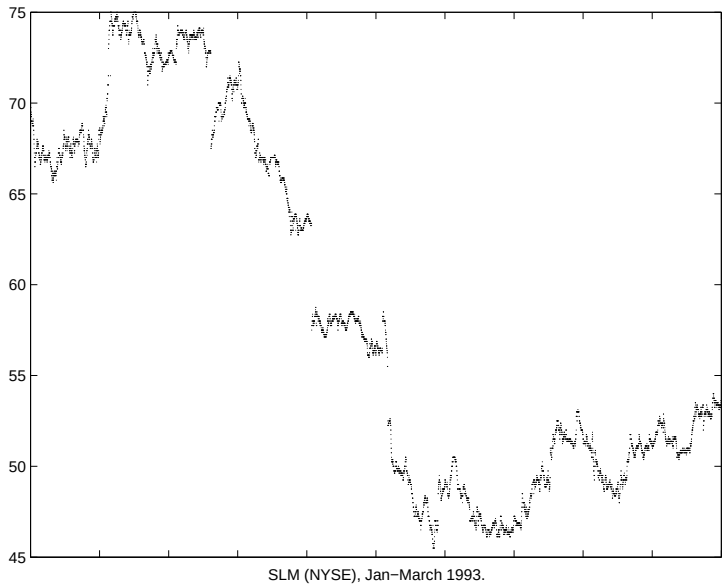


FIG. 1.1 – Evolution du prix d'action de SLM Corporation (NYSE), janvier–mars 1993.

des longues périodes, l'évolution des prix ressemble de plus en plus à un mouvement brownien. Ceci relève du fait que l'on finit par tomber dans le cadre du théorème central limite. De manière générale, comme il n'existe pas de modèle universel, le choix d'un tel ou tel modèle dépend de l'application visée. Dans notre contexte, l'utilisation des modèles discontinus est surtout justifiée si l'on s'intéresse à des courtes périodes du temps : quelques jours ou mois. Or, c'est précisément l'échelle de la maturité des options.

Un autre exemple où on ne peut pas se passer des modèles discontinus est donné par le marché de l'énergie. Sur la Figure 1.2, nous voyons l'évolution du prix d'électricité sur le marché *Nord Pool* entre 1995 et 2000. Les grands pics que nous observons sont dus au fait que la production d'électricité ne change pas beaucoup et qu'il n'est pas possible de la stocker, alors que sa consommation peut varier énormément. Par exemple, s'il arrive un hiver très froid en France, la consommation de l'électricité augmente et au bout d'un certain moment elle dépasse la capacité de production d'EDF. Donc, EDF est obligé d'acheter de l'électricité aux producteurs des autres pays qui vont la vendre très cher puisque le producteur français n'a pas d'autre solution. C'est la raison pour laquelle il y a des pics dans la dynamique des prix.[1] Ce comportement est également modélisé avec des processus aléatoires discontinus.

Une autre motivation provient du marché d'options. Rappelons qu'une option est un contrat qui donne droit (mais pas obligation) a celui qui le détient d'acheter ou de vendre

[1]Pour être correct, précisons que la Figure 1.2 représente le marché scandinave et pas français mais le comportement des courbes des prix sur tous les marchés d'énergie est globalement le même.

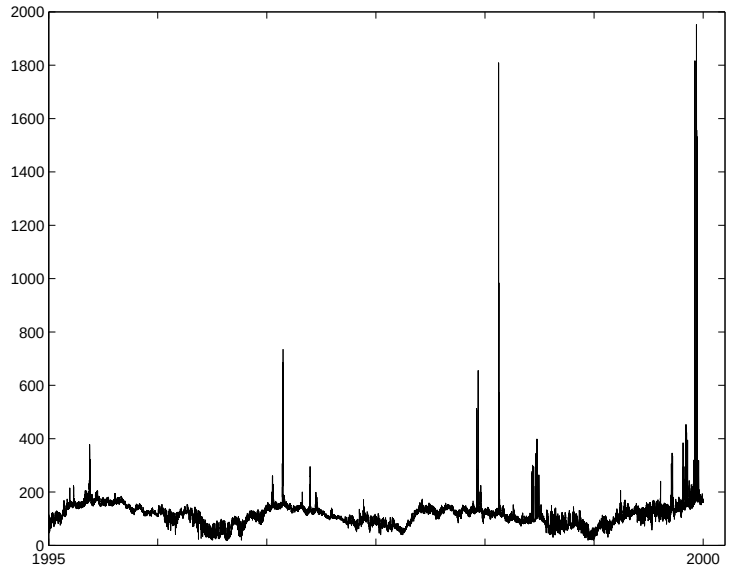


FIG. 1.2 – Evolution du prix d'électricité (Nord Pool), 1995–2000.

un autre actif financier (l'actif *sous-jacent*) dans le futur au prix fixé d'avance. La date T d'expiration de l'option s'appelle aussi la *maturité* de l'option. Le prix d'exercice K, en argot financier, est désigné par le terme anglais *strike* et le rapport K/S_0 du *strike* sur la valeur courante du sous-jacent s'appelle la *moneyness*. La valeur de l'option à la maturité est appelée le *payoff*.

Voici quelques autres mots du vocabulaire lié aux options que nous utiliserons dans cette thèse. Une option d'achat s'appelle un *Call* et une option de vente, un *Put*. Une option qui ne peut être exercée qu'à la maturité est dite de type européen. Une option que l'on a droit d'exercer à tout moment jusqu'à sa date d'expiration s'appelle une option américaine.

On appelle les Calls et les Puts européens des *options vanilles*, par opposition aux produits plus complexes dits *exotiques*. Les options exotiques que nous avons étudiées sont des options à barrières dont le *payoff* dépend de la trajectoire du prix du sous-jacent : plus précisément, il dépend du fait que le prix a franchi ou non des barrières, fixées dans le contrat, avant la date d'exercice.

Nous présumons néanmoins que le lecteur est familier avec ces notions basiques ainsi qu'avec le modèle de Black-Scholes pour l'évaluation d'options. Pour une bonne introduction dans le sujet, nous renvoyons au livre classique de Hull [Hul97].

En quoi les options ont-elles motivé l'utilisation des modèles à sauts ? Remarquons que les modèles continus conduisent généralement à un marché complet ou qui peut être complété par un ou deux instruments supplémentaires, comme dans des modèles de volatilité stochastique. Cela signifie que, dans un tel marché, tout *payoff* peut être répliqué exactement. Si c'est le cas, alors l'existence des options devient un paradoxe ! En

revanche, ce paradoxe s'explique naturellement si l'on prend en compte des discontinuités. En effet, la présence des sauts dans les prix rend impossible une couverture parfaite et les options permettent aux participants du marché de couvrir les risques qu'ils ne peuvent pas couvrir en utilisant uniquement le sous-jacent.

Encore une fois, le phénomène est plus prononcé pour des courtes périodes de temps. On observe que des options à courtes maturités sont cotées sur le marché à des prix relativement élevés[2] ce qui s'explique difficilement dans le cadre des modèles continus. En effet, si le sous-jacent était continu, la probabilité qu'il bouge, disons, de 10% en quelques jours serait très petite et personne ne voudrait payer une prime pour se protéger contre ce risque négligeable. Donc, l'existence des options à courtes maturités indique que les participants du marché reconnaissent le risque de sauts dans les prix.

Notons que la qualité d'un modèle ne réside pas tellement dans la reconstitution fidèle des propriétés empiriques des prix des sous-jacents. De manière générale, des modèles stochastiques en temps continu ont été introduits en finance dans le but d'évaluation des options. Dans cette optique, la destination d'un modèle est, premièrement, de reproduire les prix des options liquides observés sur le marché et, deuxièmement, d'assigner des valeurs à des produits complexes non côtés (options "exotiques") sans introduire de possibilités d'arbitrage. Le modèle doit donc servir d'un outil consistant d'interpolation et d'extrapolation des prix de marché. Il est également utilisé pour calculer des stratégies de couverture.

L'état d'un marché d'options à un instant donné est représenté traditionnellement par la surface de volatilité implicite de Black-Scholes. Un bon modèle doit pouvoir reproduire des surfaces observées.

Par définition, la volatilité implicite Σ d'un Call est le nombre qui, substitué dans la formule de Black-Scholes, reproduit le prix du Call C^* :

$$C^*(K,T) = C_{BS}(K,T;\Sigma(K,T)). \tag{1.1.1}$$

Rappelons que la formule de Black-Scholes a la forme suivante :

$$C_{BS}(K,T;\sigma) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2), \tag{1.1.2}$$

$$\text{où} \qquad d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

et $\mathcal{N}$ est la fonction de distribution d'une variable normale standard. On obtient Σ en inversant (1.1.1). La relation (1.1.1) ne signifie pas que les prix sont calculés dans le cadre du modèle de Black-Scholes : C^* peut être observé sur le marché ou calculé à l'aide d'un modèle quelconque. La formule (1.1.1) donne juste une façon convenable de représenter cette valeur.

Il est bien connu que la surface $\Sigma(K,T)$ n'est jamais plate comme le prédit le modèle de Black-Scholes. La volatilité implicite dépend fortement du *strike* : graphiquement, cette

[2] au sens que les prix sont assez différents du *payoff* même à l'approche de la date d'exercice

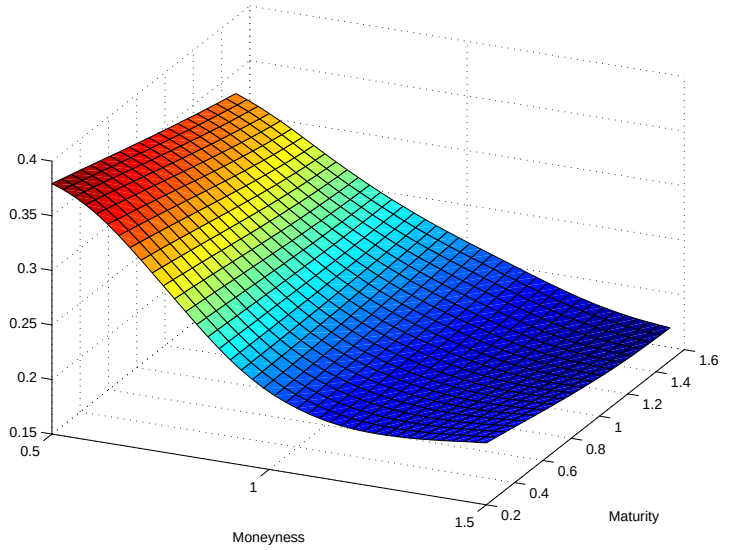


FIG. 1.3 – Profil de la volatilité implicite des options sur l'indice S&P 500, le 11 juin 2001.

dépendance ressemble à un "smile" (courbe convexe symétrique) ou un "skew" (courbe décroissante). La volatilité présente également une structure par termes (dépendance de la maturité) non triviale. La Figure 1.3 montre le profil de la volatilité implicite en fonction de la *moneyness* et de la maturité pour des options sur l'indice SP 500.[3]

Bien que des modèles basés sur des diffusions parviennent à calibrer les surfaces de volatilité implicite de façon assez satisfaisante, ceci est souvent atteint au prix de valeurs non-réalistes des paramètres qui n'ont pas d'explications en termes de la dynamique du marché (par exemple, la volatilité locale fortement non-stationnaire ou la volatilité de volatilité trop élevée). Des modèles à sauts, au contraire, proposent une explication intuitive des phénomènes liés à la structure de la volatilité implicite.

Citons un exemple : sur les marchés d'options sur des indices on observe des *skews*, alors que les marchés sur les taux de change présentent des *smiles*. Une explication possible est la suivante. Dans le cas des indices, les participants du marché redoutent surtout des sauts négatifs ce qui résulte en un *skew*. Sur les marchés de change (tels que USD/EUR) des mouvements symétriques sont attendus, ce qui se traduit par un *smile*.

Un autre exemple est le changement dans la structure des prix d'options qui a été enregistré après le krach boursier de 1987 : les *smiles*/*skews* sont devenus plus prononcés. Ce changement n'a pas d'interprétation satisfaisante dans le cadre des modèles continus. En revanche, dans les modèles à sauts, la structure actuelle des prix s'explique naturellement par la crainte de grands sauts négatifs chez des agents de marché qui ont vécu cette crise.

[3] l'indice *Standard & Poor* composé de 500 valeurs américaines

Le lecteur intéressé peut trouver une présentation plus détaillée des arguments qui motivent l'utilisation des processus à sauts en finance dans le premier chapitre de [CT03].

1.2 Contexte et contribution de cette thèse

Dans cette section, nous résumons le travail de thèse en mettant l'accent sur les résultats obtenus. La structure du mémoire est expliquée dans la section suivante.

Un des critères importants de l'utilité d'un modèle est l'existence de méthodes efficaces pour l'évaluation d'options (vanilles et exotiques) ainsi que pour le calcul de stratégies de couverture préconisées par ce modèle.

C'est également la raison de la grande popularité du modèle de Black-Scholes malgré ses imperfections. En effet, les prix des Calls et des Puts européens dans ce modèle sont donnés par une formule analytique. Les prix des produits exotiques tels que options à barrières ou américaines peuvent être caractérisés en termes de solutions de problèmes aux limites sur un domaine fixe ou à frontière libre pour une EDP parabolique du second ordre. Cela permet l'évaluation de ces produits par des méthodes efficaces et bien étudiées dans l'analyse numérique des EDP. En ce qui concerne la couverture, dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le *payoff* de toute option peut être parfaitement répliqué par une stratégie dynamique qui consiste à avoir à chaque instant du temps une quantité précise (*delta* de Black-Scholes) du sous-jacent qui peut aussi être calculée facilement.

Dans les modèles à sauts, l'évaluation et la couverture des options posent plusieurs problèmes nouveaux par rapport au cas de diffusions, tant sur le plan théorique que numérique.

Premièrement, des formules analytiques pour les prix d'options dans ces modèles sont quasi inexistantes, avec, probablement, la seule exception qui est la représentation en série du prix de Call européen dans le modèle de Merton.[4]

Par analogie avec le modèle de Black-Scholes, dans des modèles discontinus, on peut associer aux prix d'options des équations déterministes qui sont en l'occurrence des *équations intégro-différentielles* (EID). Ce lien a été exploité par plusieurs auteurs [Zha97b, AA00, MvPS04, dFV04, BLCN04, AO05] pour construire des méthodes numériques d'évaluation d'options. Néanmoins, la justification rigoureuse de cette approche est absente dans la plupart de ces travaux.[5]

Le problème est que, contrairement au cas de diffusion, les prix d'options peuvent être non-réguliers, voire discontinus. Cela complique la dérivation des EID correspondantes. En effet, la méthode standard consiste à appliquer la formule d'Itô à la fonction valeur, identifier le terme de dérive et le mettre à zéro, ce qui donne l'équation sur le prix. Or la

[4] voir (2.3.1), Section 2.3.1

[5] à l'exception de ceux de Xiaolan Zhang qui fournit une analyse rigoureuse du lien entre le prix d'une option américaine et une inéquation variationnelle intégro-différentielle dans un modèle de diffusion avec sauts particulier

formule d'Itô s'applique seulement à des fonctions régulières, donc cette méthode n'est pas toujours applicable dans les modèles à sauts.

De plus, comme l'équation fait intervenir les dérivées de la fonction, il n'est pas clair a priori en quel sens une fonction de prix irrégulière est solution de cette équation.

Dans cette thèse, nous mettons d'abord en évidence ces difficultés à travers quelques *exemples de prix non-réguliers* des options européennes et barrières dans des modèles populaires dans la littérature financière (Section 3.3). L'analyse de ces exemples nous a permis de clarifier l'origine de certains problèmes spécifiques aux modèles discontinus.

Nous donnons ensuite des conditions suffisantes pour que la valeur d'une option soit régulière et nous proposons une *dérivation rigoureuse de l'équation intégro-différentielle* vérifiée (au sens classique) par la fonction valeur dans ce cas (Section 3.4).

Pour prendre en compte des prix non-réguliers, nous considérons la notion de *solution de viscosité continue* (Section 3.6). C'est une notion de solution généralisée qui s'avère être appropriée dans ce contexte. D'une part, elle fournit un cadre mathématique rigoureux pour décrire la relation entre les prix d'options et les équations intégro-différentielles qui les caractérisent. D'autre part, ce concept offre un outil flexible pour montrer la convergence des schémas numériques là où la méthode classique utilisant le théorème de Lax ne s'applique pas.

Une condition nécessaire pour qu'une fonction soit solution de viscosité est sa continuité. En faisant appel à des techniques probabilistes, nous étudions la continuité des prix des options européennes (Proposition 3.4.1) et barrière (Section 3.5) dans le cadre de modèles de Lévy exponentiels. Nous donnons des *conditions nécessaires et suffisantes pour la continuité* en termes des paramètres du processus de Lévy sous-jacent. Ces conditions sont explicites et faciles à vérifier.

Nous montrons que sous ces conditions la valeur d'une option européenne ou barrière est une solution de viscosité d'une EID (Section 3.6.3). Soulignons que l'objectif de cette partie du travail n'était pas d'étudier des propriétés générales des EID sous des hypothèses abstraites mais d'obtenir des résultats précis dans le cas des modèles utilisés en finance.

Ces résultats à l'appui, nous proposons ensuite une *méthode d'évaluation d'options* par la résolution numérique des équations intégro-différentielles. Les EID en question ont des propriétés particulières qui les distinguent des équations différentielles usuelles et exigent un traitement spécifique.

Premièrement, le caractère non-local de l'opérateur implique des *conditions aux bords non-standards* : la fonction doit être prolongée non seulement sur les bords mais aussi en dehors du domaine. Cela pose un problème de choix de conditions aux bords numériques lors de la localisation de l'équation sur un domaine de calcul borné. Dans un premier temps, nous montrons que toute extension bornée implique la décroissance exponentielle de l'erreur de localisation (à l'intérieur de l'intervalle mais pas sur les bords) quand la

taille du domaine augmente (Proposition 4.3.1). Ensuite, nous proposons un meilleur prolongement qui implique la décroissance exponentielle de l'erreur uniforme, y compris sur les bords (Proposition 4.3.4).

Il est également nécessaire de *tronquer le domaine d'intégration* dans la partie intégrale de l'opérateur. Nous montrons que l'erreur de troncature tend vers zéro quand l'intervalle d'intégration tend vers $\mathbb{R}$ (Section 4.3). Dans le cas des options européennes, nous estimons en plus la vitesse de cette convergence.

Une autre particularité des équations non-locales est que les conditions aux bords font partie inséparable de l'opérateur et doivent être prises en compte pour montrer la consistance de l'opérateur approximant (Section 4.6.1). Ceci est nouveau par rapport au cas des EDP où les conditions aux bords n'influencent pas la consistance.

Deuxièmement, le noyau intégral peut avoir une *singularité en zéro*. Pour traiter ce cas numériquement, nous remplaçons les petits sauts du processus par une diffusion appropriée. Nous donnons une *estimation d'erreur* de cette approximation (Section 4.2).

Notre approche à la résolution numérique du problème intégro-différentiel consiste à utiliser des *schémas aux différences finies* de type *implicite-explicite* où la partie "différentielle" (locale) est traitée de façon implicite et la partie "intégrale" (non-locale) est traitée de façon explicite pour éviter l'inversion d'une matrice pleine à chaque itération. Cette décomposition n'étant pas unique, nous étudions deux versions du schéma implicite-explicite (Section 4.5).

A cause du caractère non-local de l'opérateur et l'irrégularité de la condition initiale, typique pour des applications financières, l'analyse classique des schémas aux différences finies n'est pas applicable dans le cadre des EID. En particulier, nous mettons en évidence que l'équivalence "l'ordre d'approximation = l'ordre de convergence" n'est plus vérifiée dans ce cas. Nous montrons donc la *convergence de nos schémas* en utilisant deux méthodes alternatives.

La première méthode a été inspirée par un résultat de Barles & Souganidis [BS91] qui permet de montrer la convergence des schémas monotones vers des solutions de viscosité des EDP. Nous avons généralisé cette approche au cas intégro-différentiel (Section 4.6.3).

La deuxième méthode est une adaptation au cas non-local de l'approche de Fleming & Soner [FS93] qui fait intervenir la notion de sous-solution et sur-solution régulières. Cette deuxième méthode offre une autre vision du problème mais conduit principalement aux même résultats. Pour cette raison, nous l'avons placée dans l'annexe (Section A.3).

L'approche de viscosité de Barles & Souganidis ne permettant pas d'estimer la vitesse de convergence, nous utilisons pour cela une autre technique développée par Krylov pour des EDP [Kry97b]. Nous l'adaptons au cas des EID et la simplifions profitant de la linéarité de nos équations. Cela nous permet d'estimer *l'ordre de convergence* de nos schémas dans le cas singulier (Section 4.6.4) et non-singulier (Section 4.6.5). Nous montrons que, contrairement au cadre standard du théorème de Lax, l'ordre de convergence est moins élevé que l'ordre d'approximation et que la singularité du noyau intégral le diminue davantage.

Dans le Chapitre 5, nous discutons certains aspects liés à l'implémentation des schémas proposés et le choix de divers paramètres de localisation et de discrétisation. De *nombreux tests numériques* que nous avons effectués ont permis d'identifier les avantages et les inconvénients de chacun des deux schémas. Nous avons également confirmé et dans certains cas précisé des estimations théoriques obtenues dans le Chapitre 4.

De manière générale, l'analyse théorique et les simulations numériques que nous avons effectuées ont montré que les schémas implicites-explicites proposés dans cette thèse sont rapides et performants :

- ils sont stables, monotones et convergents,
- s'appliquent à tous les modèles de Lévy exponentiels, aussi bien ceux ayant une composante de diffusion que purement discontinus,
- permettent d'évaluer des options européennes et barrières,
- ne demandent pas de connaître l'expression analytique de la mesure de sauts et donc peuvent être utilisés pour la calibration non-paramétrique de modèle,
- enfin, sont faciles à implémenter ce qui est un avantage non-négligeable pour les praticiens.

Les résultats obtenus dans cette thèse ont donné lieu aux publications suivantes :

- R Cont, E Voltchkova, *Integro-differential equations for option prices in exponential Lévy models*. 2004, *Finance & Stochastics*, Vol. 3, pp. 299–325, 2005.

- R Cont, E Voltchkova, *A finite difference scheme for option pricing in jump diffusion and exponential Lévy models*, 2003, accepté pour publication à SIAM Journal on Numerical Analysis.

- R Cont, P Tankov, E Voltchkova, *Option pricing models with jumps : integro-differential equations and inverse problems*, in : P Neittaanmaki et al (Eds.) : ECCOMAS 2004.

Pour illustrer l'intérêt de notre travail pour les applications en finance, mentionnons un autre article qui est en cours de préparation :

- R. Cont, P. Tankov, E. Voltchkova, *Hedging options in presence of jumps*.

Dans ce travail, nous abordons un sujet très important mais pratiquement inexploré dans le cadre de modèles à sauts : la *couverture des options*. En utilisant les schémas aux différences finies développés dans cette thèse, nous comparons numériquement le risque résiduel de différentes stratégies de couverture : couverture delta-neutre, couverture en delta de Black-Scholes, couverture delta-gamma et couverture optimale quadratique avec ou sans options. Nous mettons en évidence que l'incomplétude du marché n'est pas un problème d'une classe de modèles mais une réalité du marché qui conduit à des erreurs de couverture. Alors que les modèles continus ignorent ce problème, des modèles à sauts

permettent de quantifier l'erreur de couverture.

Concluons cette section par quelques références sur la littérature existante sur des équations intégro-différentielles et leurs applications en finance (nous y reviendrons tout au long de cette thèse pour comparer nos résultats à ceux obtenus par d'autres auteurs).

La théorie des solutions classiques des EID a été développée dans [Bon67, BCP68, BL82, GL84, GM02, GM95, GM92]. Les solutions de viscosité de ce type d'équations sont étudiées dans [Say91, Son86, AT96, BBP97, Pha98, Ama03, JK03, JK05, Imb04, Ari05a].

L'application des EID à l'évaluation d'options en finance a motivé de nombreuses recherches sur la résolution numérique de ces équations. Des méthodes basées sur les différences finies ont été proposées dans [TR00, Zha97b, Zha94, AA00, dFV04, HM03, BLCN04, AO05]. Dans [MvPS04], les auteurs utilisent la formulation variationnelle du problème intégro-différentiel et proposent une méthode numérique de type éléments finis pour sa résolution. Une revue de ces méthodes est donnée à la fin du Chapitre 4.

1.3 Structure de la thèse

La partie principale de cette thèse est composée de cinq chapitres, dont ce chapitre d'introduction. Le mémoire comporte également une annexe.

Chapitre 2. La *Section 2.1* rappelle la définition et la terminologie liée aux processus de Lévy que nous utiliserons tout au long de ce mémoire. La *Section 2.2* introduit les modèles de Lévy exponentiels pour des actifs financiers. La *Section 2.3* passe en revue les exemples de modèles de Lévy utilisés dans la littérature financière.

Dans le **Chapitre 3**, nous étudions la régularité des prix des options européennes et options à barrières dans les modèles de Lévy exponentiels et leur lien avec des équations intégro-différentielles (EID).

La *Section 3.2* donne la définition du prix d'option comme espérance actualisée de son *payoff* et propose un raisonnement heuristique qui permet de lui associer une EID. Les résultats existants sur les solutions régulières des EID du type que nous étudions dans cette thèse sont résumés dans les *Sections 3.2.1* et *3.2.2*.

Dans la *Section 3.3*, nous donnons quelques exemples d'absence de régularité des valeurs d'options dans les modèles à sauts. Nous analysons ces exemples et expliquons les raisons de cette manque de régularité.

Dans la *Section 3.4*, nous proposons des conditions suffisantes sur le processus de Lévy qui garantissent la régularité des prix d'options. Nous dérivons de façon rigoureuse les EID vérifiées par les prix sous ces conditions. Le cas européen et barrière sont traités séparément dans les *Sections 3.4.1* et *3.4.2*.

La *Section 3.5* est consacrée à l'étude de la continuité des options à barrières dans les modèles de Lévy exponentiels.

La *Section 3.6* traite de la caractérisation des prix d'options en termes de solutions

de viscosité des EID. Après une partie introductive où nous parlons de l'origine et de l'intuition qui est derrière ce concept, nous donnons une définition formelle des solutions de viscosité dans la *Section 3.6.1*. Dans la *Section 3.6.2*, nous faisons le point sur les résultats existants concernant l'unicité de la solution de viscosité pour des équations non-locales. La *Section 3.6.3* contient la démonstration de notre résultat principale sur le lien entre les prix d'options et les solutions de viscosité continues des EID.

Le **Chapitre 4** aborde le problème de la résolution numérique des équations intégro-différentielles. Dans la *Section 4.1*, nous présentons les étapes de l'approximation de l'équation. Ces étapes sont détaillées dans les sections suivantes :

- approximation des petits sauts par une diffusion dans la *Section 4.2*;
- localisation sur un domaine de calcul borné dans la *Section 4.3*;
- troncature des grands sauts (localisation du domaine d'intégration) dans la *Section 4.4*.

Dans la *Section 4.5*, nous introduisons deux schémas implicites-explicites aux différences finies pour la résolution des EID. La *Section 4.5.1* explique comment tirer parti de la forme particulière de l'opérateur intégral pour accélérer le calcul en utilisant la méthode de transformation de Fourier rapide (FFT).

La *Section 4.6* est consacrée à l'analyse de nos schémas numériques. Nous montrons leur consistance locale avec l'équation (*Section 4.6.1*), leurs monotonie et stabilité (*Section 4.6.2*) et la convergence dans la norme uniforme en x et en t (*Section 4.6.3*). En utilisant une autre approche, nous estimons ensuite la vitesse de convergence dans la *Section 4.6.4*. Nous montrons que la convergence est d'ordre $O(\Delta x + \sqrt{\Delta t})$. Dans la *Section 4.6.5*, nous étudions l'effet de l'approximation des petits sauts sur la vitesse de convergence dans le cas des processus purement discontinus. La *Section 4.7* propose une revue de la littérature sur des méthodes numériques pour des EID.

A la fin des Chapitres 3 et 4, nous donnons un sommaire des principaux résultats avec les numéros des pages où ils se trouvent pour faciliter leur repérage parmi des lemmes techniques.

Le **Chapitre 5** présente les résultats des simulations numériques qui permettent de comparer les performances de nos deux schémas et préciser le choix de certains paramètres de discrétisation.

L'**Annexe** de cette thèse est composé de trois sections. La *Section A.1* comporte quelques propriétés des processus de Lévy que nous utilisons dans nos démonstrations. La *Section A.2* donne l'expression exacte de la solution d'un problème utilisé comme exemple dans la Section 3.3. La *Section A.2* propose une démonstration alternative de la convergence des schémas numériques étudiés dans le Chapitre 4.

Toutes les définitions, lemmes, propositions, théorèmes etc. dans cette thèse ont une numérotation unique composée du numéro de la section et numéro du résultat à l'intérieur

de la section. Par exemple, le Théorème 4.6.33 se trouve dans la Section 4.6. Les équations ont une numérotation indépendante basée sur le même principe.

Chapitre 2

Modélisation financière avec des processus de Lévy

2.1 Processus de Lévy : définitions

Considérons un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q})$ que nous fixerons dans toute la suite. Un processus de Lévy en dimension 1 est un processus stochastique X_t aux accroissements stationnaires et indépendants qui est continu en probabilité (mais peut avoir des trajectoires discontinues). Sans perdre de généralité, on peut supposer que $X_0 = 0$. Nous choisirons toujours une version continue à droite avec limites à gauche (càdlàg) de X_t et nous noterons $\Delta X_t = X_t - X_{t-}$ le saut de X en t.

La fonction caractéristique de X_t a la représentation suivante, dite de Lévy-Khinchin [Sat99] :

$$E[e^{izX_t}] = \exp t\phi(z), \quad \phi(z) = -\frac{\sigma^2 z^2}{2} + i\gamma z + \int_{-\infty}^{\infty} (e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq 1})\nu(dx),$$

où $\sigma \geq 0$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ sont des constantes et ν une mesure positive de Radon sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ vérifiant

$$\int_{-1}^{+1} x^2 \nu(dx) < \infty, \qquad \int_{|x|>1} \nu(dx) < \infty.$$

La mesure ν est appelée mesure de Lévy de X. Elle a la signification suivante : pour $A \subset \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mesurable, $\nu(A)$ est l'intensité (le nombre moyen par unité de temps) de sauts prenant leur valeur dans cet ensemble :

$$\nu(A) = \mathbb{E}[\#\{t \in [0,1],\ \text{t.q. } \Delta X_t \in A\}] = \frac{1}{T}\mathbb{E}[\#\{t \in [0,T],\ \text{t.q. } \Delta X_t \in A\}].$$

Le processus aléatoire X peut être interprété comme une superposition indépendante d'un mouvement Brownien avec dérive et de processus de Poisson compensés indépendants avec les tailles de sauts x différents, $\nu(dx)$ étant l'intensité de sauts de taille x. Cette représentation est appelée la décomposition de Lévy-Itô.

En général, ν n'est pas une mesure finie. Si $\lambda = \int \nu(dx) < +\infty$, on peut normaliser la mesure ν pour définir une *mesure de probabilité* ν_0 qui peut alors s'interpréter comme la distribution des tailles de sauts :

$$\nu_0(dx) \quad = \quad \frac{\nu(dx)}{\lambda}. \tag{2.1.1}$$

Dans ce cas, on dit que les sauts de X sont *d'activité finie*. Ils sont décrits par un *processus de Poisson composé* avec l'intensité λ et la distribution des tailles de sauts $\nu_0(\cdot)$:

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t(\lambda)} Y_i, \qquad Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \nu_0.$$

Notons que le mouvement brownien ($\nu \equiv 0$) et le processus de Poisson ($\gamma = \sigma = 0$, $\nu = \lambda\delta_1$) sont deux cas particuliers des processus de Lévy. Le mouvement brownien avec dérive est le seul processus de Lévy ayant des trajectoires continues.

Si $\int |x|\nu(dx) < \infty$, on parle de *sauts à variation bornée*. Dans ce cas, le nombre de sauts dans chaque intervalle de temps peut être infini mais leur somme est absolument convergente avec probabilité 1. Par conséquent, X_t peut être représenté comme une somme trajectorielle d'un mouvement Brownien et de sauts :

$$X_t \quad = \quad \gamma_0 t + \sigma W_t + \sum_{0<s\leq t} \Delta X_s,$$

où $\gamma_0 = \gamma - \int_{|x|\leq 1} x\nu(dx)$. On peut aussi l'écrire d'une façon équivalente :

$$X_t \quad = \quad \gamma_0 t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{\mathbb{R}\setminus\{0\}} x J_X(du\, dx),$$

où J_X est une mesure aléatoire (*mesure de Poisson de* X) définie comme suit [Pro90] :

$$\forall t > 0,\ \forall A \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}\setminus\{0\}), \qquad J_X([0,t]\times A) = \#\{s \in [0,t],\ \text{t.q. } \Delta X_s \in A\}.$$

On remarque que $\mathbb{E}[J_X([0,t]\times A)] = t\nu(A)$.

Si $\int |x|\nu(dx) = \infty$, alors les sauts ont une variation infinie et les petits sauts doivent être compensés. On définit la *mesure de Poisson compensée* de X :

$$\tilde{J}_X([0,t]\times A) = J_X([0,t]\times A) - t\nu(A).$$

Alors, une trajectoire de X s'écrit de la manière suivante :

$$X_t \quad = \quad \gamma_0 t + \sigma W_t + \sum_{0<s\leq t,\ |\Delta X_s|\geq 1} \Delta X_s + \int_0^t \int_{|x|<1} x \tilde{J}_X(du\, dx).$$

Cette décomposition est valable pour tous les processus de Lévy.

Pour commodité, on va classifier les processus de Lévy comme dans [Sat99].

Définition 2.1.1. Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy sur $\mathbb{R}$ généré par le triplet (σ, γ, ν). On dit qu'il est de

type A, si $\sigma = 0$ et $\nu(\mathbb{R}) < \infty$ *(Poisson composé)*;
type B, si $\sigma = 0$, $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ et $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) < \infty$ *(activité infinie + variation bornée)*;
type C, si $\sigma > 0$ ou $\int_{|x|\leq 1} |x|\nu(dx) = \infty$ *(variation non bornée).*

Les processus de Lévy font partie des processus de Markov (au sens fort). Le semigroupe associé à X est un semigroupe par rapport à la convolution dont le générateur infinitésimal $L^X : f \to L^X f$ est un opérateur intégro-différentiel donné par :

$$L^X f(x) = \lim_{t\to 0} \frac{E[f(x + X_t)] - f(x)}{t} = \\ = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial f}{\partial x} + \int \nu(dy)[f(x+y) - f(x) - y1_{\{|y|\leq 1\}}\frac{\partial f}{\partial x}(x)]. \quad (2.1.2)$$

Il est bien défini pour des fonctions $f \in C^2(\mathbb{R})$ à support compact. C'est cet opérateur qui va intervenir dans les équations pour des prix d'options dans les modèles de Lévy exponentiels que nous définissons dans la section suivante.

2.2 Modèles de Lévy exponentiels

Soit $(S_t)_{t\in[0,T]}$ le prix d'un actif financier modélisé comme un processus stochastique sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$. La filtration $\mathcal{F}_t$ représente l'information historique sur le prix jusqu'à l'instant t. Sous l'hypothèse d'absence d'arbitrage, il existe une mesure $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ sous laquelle les prix actualisés de tous les produits financiers sont des $\mathbb{Q}$-martingales. En particulier, le sous-jacent actualisé $(e^{-rt}S_t)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Dans les modèles de Lévy exponentiels, la dynamique risque-neutre de S_t sous $\mathbb{Q}$ est représentée comme l'exponentielle d'un processus de Lévy :

$$S_t = S_0 e^{rt+X_t}.$$

Ici, X_t est un processus de Lévy (sous $\mathbb{Q}$) avec le triplet caractéristique (σ,γ,ν) et r est le taux d'intérêt d'un actif non-risqué. L'absence d'arbitrage impose que $\hat{S}_t = S_t e^{-rt} = \exp X_t$ soit une martingale. Ceci est équivalent aux conditions suivantes sur le triplet (σ,γ,ν) :

$$\int_{|y|>1} \nu(dy)e^y < \infty, \qquad \gamma = \gamma(\sigma,\nu) = -\frac{\sigma^2}{2} - \int (e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1})\nu(dy). \quad (2.2.1)$$

On va supposer par la suite que cette relation est vérifiée. Le générateur infinitésimal L^X devient alors :

$$L^X f(x) = \frac{\sigma^2}{2}[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial x}] + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(dy)\ [f(x+y) - f(x) - (e^y - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x)]. \quad (2.2.2)$$

On va également utiliser la notation $Y_t = rt + X_t$. Le générateur infinitésimal de Y_t est égal à

$$Lf = L^X f + r\frac{\partial f}{\partial x}. \tag{2.2.3}$$

La dynamique risque-neutre (c'est-à-dire, sous la probabilité $\mathbb{Q}$) de S_t est donnée par

$$S_t = S_0 + \int_0^t rS_{u-}du + \int_0^t S_{u-}\sigma dW_u + \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1)S_{u-}\tilde{J}_X(du\ \ dx). \tag{2.2.4}$$

Le processus (S_t) est aussi un processus de Markov avec l'espace d'états $(0, \infty)$ et le générateur infinitésimal suivant :

$$L^S f(x) = rx\frac{\partial f}{\partial x}(x) + \frac{\sigma^2 x^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) + \int \nu(dy)[f(xe^y) - f(x) - x(e^y - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(x)]. \tag{2.2.5}$$

2.3 Exemples de processus de Lévy en finance

En principe, un processus de Lévy peut avoir simultanément une composante de diffusion non nulle $\sigma \neq 0$ et des sauts d'activité infinie. Cependant, les petits sauts créent un comportement similaire à une diffusion et sont donc redondants avec la composante brownienne, du point de vue de la modélisation de la dynamique des prix. En particulier, un tel modèle serait difficile à calibrer [CT04].

Par conséquent, les modèles de Lévy exponentiels considérés dans la littérature financière sont de deux types. Le premier type, ce sont des *modèles de diffusion avec sauts* où on combine une partie de diffusion non nulle $\sigma > 0$ avec un processus de sauts d'activité finie. Une trajectoire typique d'un tel processus est représentée sur la Figure 2.1. Le processus évolue principalement comme une diffusion, tandis que les discontinuités modélisent de grands mouvements inattendus et relativement rares dans les prix.

La seconde catégorie de modèles, ce sont des processus sans terme de diffusion. Dans ce cas, les petits sauts fréquents sont nécessaires pour générer des trajectoires réalistes : on parle alors des *modèles purement discontinus d'activité infinie*. La Figure 2.2 montre un exemple de trajectoire d'un tel processus. Ici, l'évolution se passe par des sauts qui arrivent constamment : il y a une infinité de sauts dans chaque intervalle de temps.

Différents modèles de Lévy exponentiels proposés dans la littérature sur la modélisation financière correspondent aux différents choix de la mesure de Lévy ν. Dans la section suivante, nous passons en revue les modèles les plus fréquemment utilisés.

2.3.1 Modèles de diffusion avec sauts

Un processus de Lévy de type diffusion avec sauts a la forme suivante :

$$X_t = \gamma t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t(\lambda)} Y_i, \qquad \sigma > 0, \quad Y_i \overset{i.i.d.}{\sim} \nu_0.$$

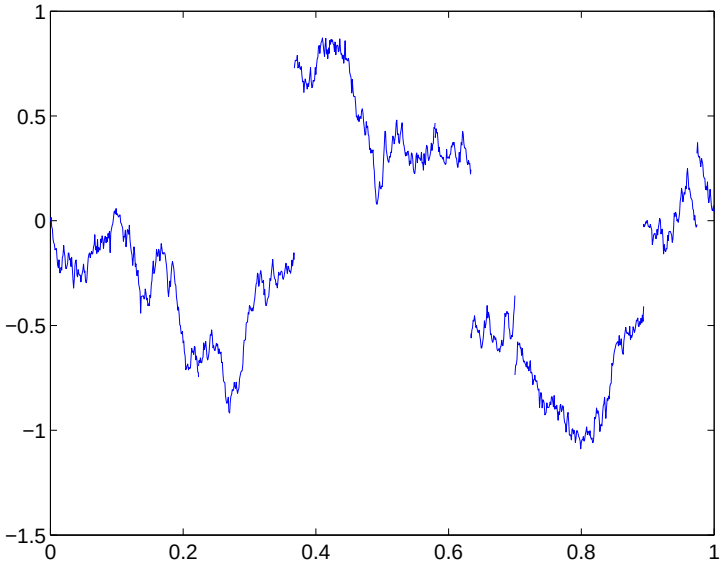


FIG. 2.1 – Une trajectoire typique d'un processus de diffusion avec sauts (mouvement brownien plus Poisson composé).

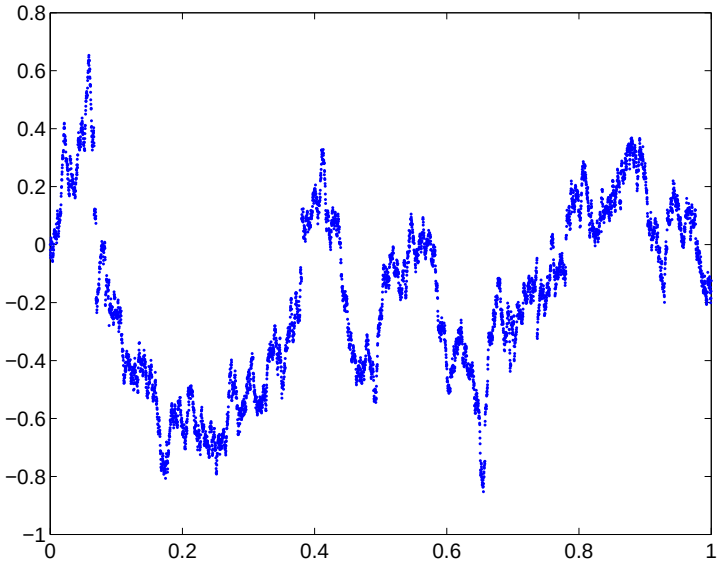


FIG. 2.2 – Une trajectoire typique d'un processus à sauts d'activité infinie et sans terme de diffusion (ici, processus stable tempéré).

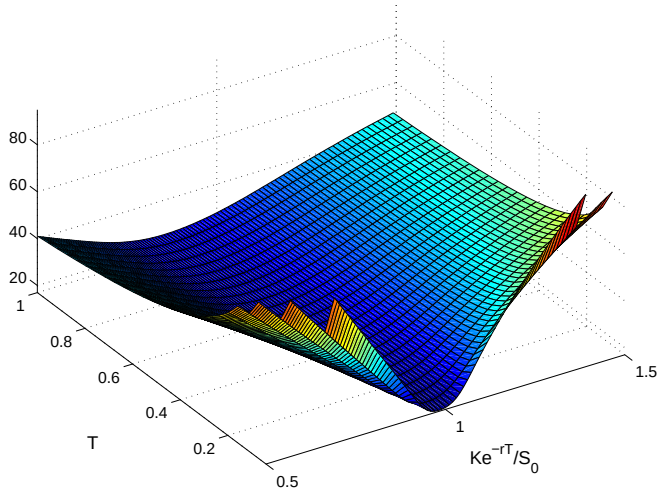


FIG. 2.3 – La volatilité implicite en fonction de la maturité et de la *moneyness* dans le modèle de Merton avec $\sigma = 0.15$, $r = 0$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0$, $\delta = 1$.

où $(N_t)_{t\geq 0}$ est le processus de Poisson d'intensité λ qui décrit les instants de sauts de X et Y_i sont les tailles des sauts. La mesure de Lévy ν est égale à $\lambda\nu_0$ et le paramètre de dérive γ est fixé par la condition de martingale (2.2.1).

Modèle de Merton

Le modèle de Merton [Mer76] fut le premier modèle de ce type proposé dans la littérature. Les sauts du logarithme du prix dans ce modèle ont une distribution gaussienne, $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu, \delta^2)$:

$$\nu_0(x) = \frac{e^{-(x-\mu)^2/2\delta^2}}{\sqrt{2\pi\delta^2}}.$$

La densité de probabilité de X_t peut être représentée sous forme d'une série :

$$p_t(x) = e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k \exp\left\{-\frac{(x-\gamma t-k\mu)^2}{2(\sigma^2 t+k\delta^2)}\right\}}{k!\sqrt{2\pi(\sigma^2 t + k\delta^2)}}.$$

De façon similaire, les prix des options européennes dans le modèle de Merton admettent une représentation en série où chaque terme fait intervenir la formule de Black-Scholes :

$$C_{\text{Merton}}(S_0, K, T, \sigma, r) = e^{-rT} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda T}(\lambda T)^n}{n!} e^{r_n T} C_{\text{BS}}(S_0 e^{n\delta^2/T}, K, T, \sigma_n, r_n), \quad (2.3.1)$$

$$r_n = r - \lambda(e^{\mu+\delta^2/2} - 1) + n\mu/T, \qquad \sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + n\delta^2/T}.$$

La Figure 2.3 représente la surface de la volatilité implicite dans le modèle de Merton pour les paramètres suivants : $\sigma = 0.15$, $r = 0$, $\lambda = 0.1$, $\mu = 0$, $\delta = 1$. Rappelons que λ est l'intensité des sauts.

Modèle double-exponentiel

Dans ce modèle, proposé par Kou [Kou02], les sauts ont une distribution exponentielle asymétrique :

$$\nu_0(x) = p\lambda\lambda_+ e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0} + (1-p)\lambda\lambda_- e^{-\lambda_- |x|} 1_{x<0}.$$

Ici, λ est l'intensité de sauts, les paramètres $\lambda_- > 0$ et $\lambda_+ > 1$ contrôlent, respectivement, la décroissance des queues de distribution des sauts négatifs et positifs et p est la probabilité d'un saut positif.

Dans ce modèle, il est également possible d'écrire les prix de certains produits sous forme de série [Kou02, KW01] mais cette série n'est pas convenable pour un calcul numérique. Elle n'est pas absolument convergente et son implémentation demande l'utilisation des routines spéciales de calcul de très haute précision.

2.3.2 Modèles purement discontinus à sauts d'activité infinie

Modèle Variance Gamma

Le processus Variance Gamma introduit dans [MS90, MCC98] est un processus purement discontinu d'activité infinie et à variation bornée, populaire dans la modélisation financière. Sa mesure de Lévy a une densité donnée par :

$$\nu(x) = \frac{1}{\kappa|x|} e^{Ax - B|x|} \qquad \text{avec} \quad A = \frac{\theta}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{\theta^2 + 2\sigma^2/\kappa}}{\sigma^2}. \tag{2.3.2}$$

La fonction caractéristique de X_t (la transformée de Fourier de sa distribution) est égale à :

$$\Phi_t(u) = e^{itu\gamma}(1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u)^{-\frac{t}{\kappa}}, \qquad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\kappa}\log(1 - \frac{\sigma^2\kappa}{2} - \theta\kappa). \tag{2.3.3}$$

La dérive γ est déterminée par la condition de martingale (2.2.1). La Figure 2.4 montre un exemple de surface de volatilité implicite pouvant être générée par ce modèle.

Modèle NIG (*Normal inverse Gaussian*)

Le processus NIG a été utilisé pour la modélisation financière dans [BN98, BN97, Ryd97]. Sa densité de Lévy est donnée par

$$\nu(x) = \frac{C}{|x|} e^{Ax} K_1(B|x|) \qquad \text{avec} \quad C = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{2\pi\sigma\sqrt{\kappa}}, \quad A = \frac{\theta}{\sigma^2} \quad \text{et} \quad B = \frac{\sqrt{\theta^2 + \sigma^2/\kappa}}{\sigma^2},$$

où K est la fonction de Bessel modifiée de deuxième espèce. Un résumé des propriétés de ce modèle, ainsi que des autres présentés dans cette section, peut être trouvé dans

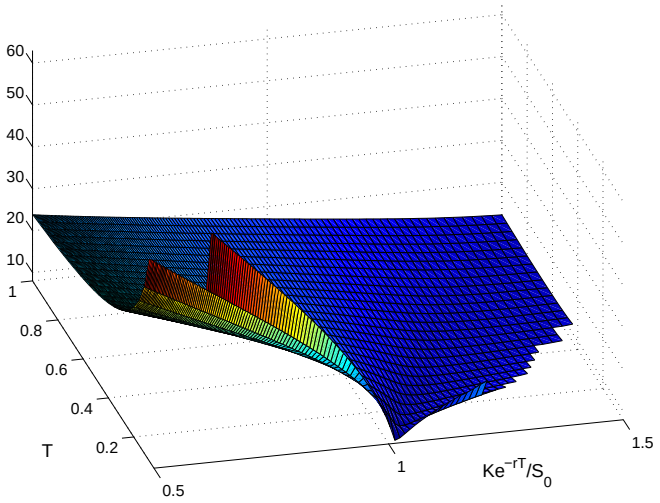


FIG. 2.4 – La volatilité implicite en fonction de la maturité et de la *moneyness* dans le modèle Variance Gamma avec $r = 0$, $\kappa = 0.16$, $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$.

[CT03] ou [Tan04]. Notons seulement que le comportement asymptotique de K en zéro implique que

$$\nu(x) \sim \frac{1}{|x|^2} \qquad \text{quand} \quad x \to 0. \tag{2.3.4}$$

Les processus Variance Gamma et NIG s'obtiennent par une subordination d'un mouvement brownien par un processus α-stable tempéré : le processus VG correspond à $\alpha = 0$ et NIG à $\alpha = 1/2$. Ces deux cas sont les plus étudiés puisque la densité de probabilité du subordinateur pour ces valeurs de α est connue sous forme analytique. Ceci rend le processus subordonné plus facile à étudier et à simuler.

Au lieu de procéder par subordination, on peut spécifier la densité de Lévy directement. L'exemple le plus connu dans cette catégorie est celui des processus stables tempérés.

Modèles stables tempérés

Ce modèle a été introduit par Koponen [Kop95] sous le nom de *truncated Lévy flights* et utilisé pour la modélisation financière dans [BP97, CBP97, Mat00], [CGMY02] (sous le nom de CGMY) et [BL02] (sous le nom de KoBoL).

La densité de Lévy d'un processus stable tempéré a l'expression suivante

$$\nu(x) = \frac{c_-}{|x|^{1+\alpha_-}} e^{-\lambda_- |x|} 1_{x<0} + \frac{c_+}{|x|^{1+\alpha_+}} e^{-\lambda_+ x} 1_{x>0},$$

où $c_\pm > 0$, $\lambda_- > 0$, $\lambda_+ > 1$ et $0 < \alpha_\pm < 2$. Si $\alpha_- = \alpha_+$, le processus stable tempéré s'obtient en multipliant la densité de Lévy d'un processus stable par un facteur exponentiel

décroissant, éventuellement non-symétrique. Si $\alpha_- \neq \alpha_+$, on parle d'un processus stable tempéré généralisé.

Une troisième approche à la construction d'un processus de Lévy consiste à spécifier la densité de probabilité de ses accroissements à une échelle donnée du temps, en choisissant une loi infiniment divisible quelconque. Un exemple des processus ainsi obtenus est donné par les **modèles hyperboliques généralisés** étudiés dans [Ebe01, Rai98, EKP98, ER01]. La mesure de Lévy dans ces modèles est connue mais a une forme assez compliquée faisant intervenir des intégrales des fonctions spéciales.

Chapitre 3

Equations intégro-différentielles pour les prix d'options

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions la régularité des prix des options européennes et à barrières dans les modèles de Lévy exponentiels et leur lien avec des équations intégro-différentielles (EID).

Nous commençons par une dérivation heuristique des EID vérifiées par les fonctions de prix dans l'hypothèse que ces fonctions sont suffisamment régulières (Section 3.2). Nous montrons ensuite que dans certains cas, contrairement aux modèles de diffusion, les prix d'options peuvent être non-réguliers (Section 3.3). Dans la Section 3.4, nous étudions la régularité des valeurs des options en fonction des propriétés du processus de Lévy sous-jacent et de la fonction de *payoff*.

Si la valeur de l'option n'est pas de classe $C^{1,2}$, elle doit être vue comme une solution généralisée de l'EID. Nous considérons la notion de solution de viscosité qui est une généralisation de la solution classique. La régularité requise pour une solution de viscosité est la continuité : l'existence des dérivées n'est pas nécessaire. Nous étudions des conditions qui garantissent la continuité des prix d'options (Section 3.5) et nous montrons que sous ces conditions la valeur d'une option est une solution de viscosité de l'EID correspondante (Section 3.6.3).

3.2 Définitions et théorèmes de vérification

La valeur d'une option européenne est donnée par l'espérance conditionnelle actualisée de son *payoff* $H(S_T)$ sous la mesure de probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$:

$$C_t = E[e^{-r(T-t)}H(S_T)|\mathcal{F}_t].$$

La propriété de Markov implique que $C_t = C(t, S)$ où

$$C(t, S_t) \;=\; E[e^{-r(T-t)}H(S_T)|S_t = S]. \tag{3.2.1}$$

On introduit le changement de variables $\tau = T - t$, $x = \ln(S/S_0)$ et on définit : $h(x) = H(S_0 e^x)$ et $f(\tau, x) = e^{r\tau} C(T - \tau, S_0 e^x)$. Alors,

$$f(\tau, x) = E[h(x + r\tau + X_\tau)]. \tag{3.2.2}$$

Pour expliquer le lien entre les fonctions (3.2.1), (3.2.2) et des équations intégro-différentielles, on donne tout d'abord un raisonnement heuristique. La dérivation rigoureuse de ces équations est présentée dans la Section 3.4.

Le raisonnement heuristique est le suivant : *si h est dans le domaine du générateur infinitésimal L^X* de X donné par (2.2.2), on peut dériver (3.2.2) par rapport à τ, ce qui donne

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = L^X f + r\frac{\partial f}{\partial x} \equiv Lf, \quad \text{sur } (0,T] \times \mathbb{R}; \qquad f(0,x) = h(x), \quad x \in \mathbb{R}. \tag{3.2.3}$$

De même, *si f est régulier*, en effectuant un changement de variables on obtient une équation similaire sur $C(t, S)$:

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S) + L^S C(t,S) - rC(t,S) = 0; \qquad C(T,S) = H(S). \tag{3.2.4}$$

Cette équation ressemble à celle de Black-Scholes sauf que l'opérateur différentiel de Black-Scholes est remplacé ici par l'opérateur intégro-différentiel L^S.

De façon similaire, les valeurs des options à barrières peuvent être représentées en termes de solutions des problèmes à valeur initiale avec des conditions aux bords. Considérons, par exemple, un Call *up-and-out* de maturité T, de strike K et à barrière supérieure $U > S_0$. Son *payoff* terminal est donné par

$$H_T \;\; = \;\; (S_T - K)^+ 1_{T<\theta},$$

où $\theta = \inf\{t \geq 0 \mid S_t \geq U\}$ est le premier instant où la barrière est franchie. La valeur de cette option au temps t est définie comme l'espérance actualisée de son *payoff* : $C_t = e^{-r(T-t)} E[H_T | \mathcal{F}_t]$. Par construction, $e^{r(T-t)} C_t$ est une martingale.

Grâce à la propriété de Markov forte des processus de Lévy, il est possible d'exprimer le prix C_t comme une fonction déterministe du temps t et de la valeur actuelle du sous-jacent S_t avant que la barrière soit franchie. Plus précisément, pour tout $(t, S) \in [0, T] \times (0, \infty)$ on peut définir

$$C_b(t,S) \;\; = \;\; e^{-r(T-t)} \; E[H(Se^{Y_{T-t}}) 1_{T<\theta_t}], \tag{3.2.5}$$

où $H(S) = (S-K)^+$, $\{Y_{s-t},\ s \geq t\}$ est un processus de Lévy et $\theta_t = \inf\{s \geq t \mid Se^{Y_{s-t}} \geq U\}$ est le temps de la première sortie du domaine après t. Alors,

$$C_t = C_b(t,\ S_t) 1_{t \leq \theta} \tag{3.2.6}$$

pour tout $t \leq T$. Soulignons que hors de l'ensemble $\{t \leq \theta\}$ les objets C_t et $C_b(t, S_t)$ sont différents : si la barrière a déjà été franchie, C_t sera toujours égal à zéro, tandis que

$C_b(t, S_t)$ peut redevenir positif si le sous-jacent revient dans la région au-dessous de la barrière.

Comme dans le cas européen, en effectuant un changement de variables logarithmique, on définit

$$f_b(\tau, x) = e^{r\tau} C_b(T - \tau, S_0 e^x). \tag{3.2.7}$$

Le problème intégro-différentiel auquel on s'attend dans ce cas est le suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \tau} = L^X f + r\frac{\partial f}{\partial x}, && \text{dans } (0,T] \times (-\infty, \ln(U/S_0)), \\ &f(0,x) = h(x), && x < \ln(U/S_0), \\ &f(\tau,x) = 0, && x \geq \ln(U/S_0). \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

La différence principale entre cette équation et l'EDP analogue pour des modèles de diffusion est dans les "conditions aux bords" : (3.2.8) ne spécifie pas seulement le comportement de la solution *à* la barrière $S = U$ mais aussi *au-delà* de la barrière ($S > U$). Ceci est nécessaire à cause de la nature non locale de l'opérateur L^X : pour évaluer le terme intégral

$$Jf(\tau, x) \equiv \int [f(\tau, x + y) - f(\tau, x) - (e^y - 1)\frac{\partial f}{\partial x}(\tau, x)]\nu(dy)$$

au point x donné, on a besoin de connaître la fonction $f(\tau, \cdot)$ sur $\mathbb{R}$ tout entier. La condition (3.2.8) prolonge la fonction au-delà de la barrière par zéro.

Plus généralement, considérons une option à barrière simple ou double avec *rebate*. Dans ce cas, le domaine limité par les barrières est un intervalle (L, U) avec $0 \leq L < U \leq \infty$ ($L = 0$ correspond à l'absence de barrière inférieure et $U = \infty$ signifie l'absence de barrière supérieure). Si, pendant la vie de l'option, le sous-jacent est resté dans (L, U), le *payoff* de l'option est donné par $H(S_T)$. Dans le cas contraire, l'option paye un *rebate* $H_1(\theta, S_\theta)$ qui dépend de l'instant de la sortie du domaine et de la valeur du sous-jacent à cette instant.

Le prix de cette option à l'instant $t \in [0, T]$ est donné par

$$C_t = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} H(S_T) 1_{T<\theta} + e^{-r(\theta-t)} H_1(\theta, S_\theta) 1_{T \geq \theta} \mid \mathcal{F}_t].$$

Encore une fois, avant que les barrières soient franchies, C_t peut être exprimé à l'aide d'une fonction déterministe par la formule (3.2.6) avec

$$C_b(t, S) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} H(S e^{Y_{T-t}}) 1_{T<\theta_t} + e^{-r(\theta_t - t)} H_1(\theta_t, S e^{Y_{\theta_t - t}}) 1_{T \geq \theta_t}].$$

Après le changement de variables (3.2.7), on obtient

$$f_b(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x + Y_\tau}) 1_{\tau<\theta} + e^{-r(\theta-\tau)} H_1(T - \tau + \theta, S_0 e^{x+Y_\theta}) 1_{\tau \geq \theta}],$$

où $\theta = \inf\{t \geq 0 \mid x + Y_t \notin O\}$ et $O = (l, u) \equiv (\ln(L/S_0), \ln(U/S_0))$. Si l'on note $g(\tau, x) = e^{r\tau} H_1(T - \tau, S_0 e^x)$ et $h(x) = H(S_0 e^x)$ (comme précédemment), alors

$$f_b(\tau, x) = \mathbb{E}[h(x + Y_\tau) 1_{\tau < \theta} + g(\tau - \theta, x + Y_\theta) 1_{\tau \geq \theta}]. \tag{3.2.9}$$

Le problème intégro-différentiel correspondant (que l'on obtient par un raisonnement formel) est le suivant :

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = L^X f + r \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad \text{dans } (0, T] \times O, \tag{3.2.10}$$

$$f(0, x) = h(x), \qquad x \in O,$$

$$f(\tau, x) = g(\tau, x), \qquad x \notin O. \tag{3.2.11}$$

Les conditions "aux bords" consistent ici à prolonger la fonction en dehors du domaine par la valeur du rebate.

Notons cependant que les hypothèses qui nous ont permis de "dériver" les EID ne sont pas vérifiées en pratique : la fonction de *payoff* h n'est généralement pas dans le domaine de L^X ni même différentiable. Par exemple, $h(x) = (K - S_0 e^x)^+$ pour un Put et $h(x) = 1_{x \geq x_0}$ pour une option binaire. Dans les deux sections suivantes, on donne un aperçu des résultats existants sur le lien entre les prix d'options et des équations intégro-différentielles.

3.2.1 Options européennes

Si f est une solution régulière alors, en appliquant la formule d'Itô à $f(t, X_t)$ entre 0 et T, Nualart & Schoutens montrent [NS01] que f a la représentation probabiliste (3.2.2) :

Proposition 3.2.1 (Représentation de Feynman-Kac pour des processus de Lévy)**.** *Supposons qu'il existe $a > 0$ tel que $\int_{|x|>1} \exp(a|x|)\nu(dx) < \infty$. Si $f \in C^{1,2}$ est une solution classique de (3.2.3) et que ses dérivées sont majorées par une fonction polynomiale de x, uniformément en $t \in [0, T]$, alors f a la représentation probabiliste (3.2.2).*

Remarque 3.2.2. Ce résultat implique l'unicité de la solution de (3.2.3) dans la classe des fonctions $C^{1,2}$ à dérivées bornées par un polynôme uniformément en $t \in [0, T]$.

Des résultats de ce type sont parfois appelés *théorèmes de vérification* : f est *supposée* être régulière et ses dérivées sont supposées vérifier certaines conditions d'intégrabilité. De telles conditions sur f et ν garantissent que $f(t, X_t)$ peut être représentée comme une somme d'une martingale et d'un processus de variation finie. Pourtant, il est facile de voir que ces conditions ne sont *jamais* vérifiées dans les applications. Par exemple, même pour un Put européen, la dérivée seconde (le Gamma de l'option) n'est certainement pas uniformément bornée en t !

Ces hypothèses peuvent être relâchées de plusieurs façons. Dans Bensoussan & Lions [BL82], le problème (3.2.3) est considéré dans le cadre des espaces de Sobolev. Afin de pouvoir traiter des fonctions qui ne tendent pas vers zéro à l'infini, comme c'est le cas pour un Call ou un Put, on utilise des espaces avec poids.

Définition 3.2.3. (Espaces de Sobolev avec poids)
Pour $\mu \geq 0$, on pose $\beta_\mu(x) = e^{-\mu\sqrt{1+x^2}}$. On note

- $L^{p,\mu}(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions u telles que $u\beta_\mu \in L^p(\mathbb{R})$,
- $W^{1,p,\mu}(\mathbb{R}) \equiv W^{1,p,\mu}$ l'espace des fonctions u telles que $u\beta_\mu$, $u'\beta_\mu \in L^p(\mathbb{R})$,
- $W^{2,p,\mu}(\mathbb{R}) \equiv W^{2,p,\mu}$ l'espace des fonctions u telles que $u\beta_\mu$, $u'\beta_\mu$, $u''\beta_\mu \in L^p(\mathbb{R})$.

On définit également

- $W^{2,1,p,\mu}((0,T)\times\mathbb{R}) \equiv W^{2,1,p,\mu}$ l'espace des fonctions $u \in L^p(0,T;W^{2,p,\mu}(\mathbb{R}))$ telles que $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;L^{p,\mu}(\mathbb{R}))$.

On omet l'indice μ dans le cas où $\mu = 0$.

Le résultat suivant est un corollaire[1] des Théorèmes 3.3 et 8.1 de [BL82].

Proposition 3.2.4. *Soit $\sigma > 0$ et $\int_{|x|>1} |x|\nu(dx) < \infty$. Alors, pour tout $h \in W^{2,p,\mu} \cap L^\infty$, $2 \leq p < \infty$, $\mu > 0$, le problème (3.2.3) possède une unique solution $u \in W^{2,1,p,\mu} \cap L^\infty$. Cette solution a la représentation probabiliste (3.2.2).*

Bien qu'il soit plus informatif que la Proposition 3.2.1, ce résultat ne s'applique pas non plus aux Calls et aux Puts puisque, dans ces cas, la dérivée seconde du *payoff* n'est pas intégrable et donc h n'appartient pas à $W^{2,p}(\mathbb{R})$. Il est toutefois possible, en modifiant légèrement les démonstrations de Bensoussan-Lions, d'obtenir un résultat analogue pour $h \in W^{1,p}(\mathbb{R})$: la solution u appartient alors à $L^p(0,T;W^{1,p}(\mathbb{R}))$ avec $\frac{\partial u}{\partial t} \in L^p(0,T;W^{-1,p}(\mathbb{R}))$. Il faut ensuite adapter ce résultat aux espaces avec poids.[2]

Cependant, les espaces de Sobolev ne semblent pas être un cadre naturel pour les applications financières. En effet, les prix des options sont définies ponctuellement et non presque partout et la norme que l'on veut contrôler est la norme uniforme, donc les normes L^p n'ont pas de sens intuitif dans ce contexte. Dans la Section 3.4, on va montrer quelques résultats de régularité en partant directement des propriétés de la densité du processus de Lévy et en utilisant des techniques probabilistes telles que la formule d'Itô.

3.2.2 Options à barrières

Définition 3.2.5. Soit $O \subset \mathbb{R}$ un ouvert borné. On note $\mathcal{D}$ l'espace des fonctions $C^\infty(O)$ à support compact dans O, $W_0^{1,p}(O)$ l'adhérence de $\mathcal{D}$ dans la norme de $W^{1,p}(O)$ et $W^{-1,p}$ son dual.

Le résultat suivant est l'analogue de la Proposition 3.2.4 pour le cas d'un domaine borné. Il suit des Théorèmes 3.4 et 8.2 de [BL82].

[1] On considère un cas particulier des problèmes étudiés dans [BL82] : à savoir, des équations linéaires à coefficients constants.

[2] Des espaces de Sobolev avec poids dans ce contexte d'évaluation d'options à *payoffs* polynomialement ou exponentiellement croissants ont été introduits dans [JLL90], dans le cas local, et dans [MvPS04] pour des EID du type étudié dans cette thèse. Dans ces travaux, les auteurs considèrent la formulation variationnelle du problème.

Proposition 3.2.6. *Soit $O \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné et X un processus de Lévy vérifiant $\sigma > 0$ et $\int_{|x|>1} |x|\nu(dx) < \infty$. Alors pour tout $h \in W_0^{1,p}(O)$, $2 \leq p < \infty$, le problème*

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu, \qquad \text{dans } (0,T] \times O, \tag{3.2.12}$$
$$u(0,x) = h(x), \qquad x \in O, \tag{3.2.13}$$
$$u(\tau,x) = 0, \qquad x \notin O \tag{3.2.14}$$

possède une unique solution $u \in L^p(0,T;W_0^{1,p}(O))$ telle que $\frac{\partial u}{\partial \tau} \in L^p(0,T;W^{-1,p}(O))$.

Si $p > 3$ cette solution a la représentation probabiliste

$$u(\tau,x) \;=\; \mathbb{E}[h(x + r\tau + X_\tau)1_{\{\tau < \inf\{t \geq 0 \;|\; x+rt+X_t \notin O\}\}}].$$

En général, on ne peut pas espérer une grande régularité de la solution de (3.2.12)–(3.2.14) comme on le verra dans la Section 3.3.2.

3.3 Manque de régularité dans les modèles à sauts

Dans cette section, nous donnons quelques exemples de prix d'options non-réguliers.

Dans le cas européen, l'exemple présenté est celui du modèle Variance Gamma qui est purement discontinu. Comme on verra dans la Section 3.4.1, si $\sigma > 0$ alors la valeur d'une option européenne est de classe C^∞. Bien sûr, même dans ce cas, les dérivées ne sont pas uniformément bornées en t à cause de l'irrégularité de la condition initiale.

En présence de barrières, à l'impact de la condition initiale vient s'ajouter l'effet du bord. Cela fait que la valeur d'une option à barrières peut être non-régulière même si la composante de diffusion du processus est non nulle ! Les exemples de la Section 3.3.2 montrent les problèmes qui peuvent survenir.

3.3.1 Options européennes

Exemple 3.3.1 (modèle Variance Gamma)**.** Rappelons que la fonction caractéristique de X_t dans le modèle Variance Gamma est donnée par

$$\Phi_t(u) \;=\; e^{itu\gamma}(1 + \frac{u^2\sigma^2\kappa}{2} - i\theta\kappa u)^{-\frac{t}{\kappa}}. \tag{3.3.1}$$

La fonction caractéristique étant la transformée de Fourier de la densité de distribution $\rho(t,\cdot)$ de X_t, on peut déduire la régularité de ρ du comportement de Φ à l'infini. Or $|\Phi_t(\cdot)|$ décroît comme $|u|^{-2t/\kappa}$ quand $|u| \to \infty$: la vitesse de décroissance augmente avec t. Par conséquent, la solution fondamentale $\rho(t,x)$ de l'EID a un degré de régularité qui augmente *graduellement* avec t : pour $t \in (p\kappa/2, (p+1)\kappa/2)$, la solution fondamentale

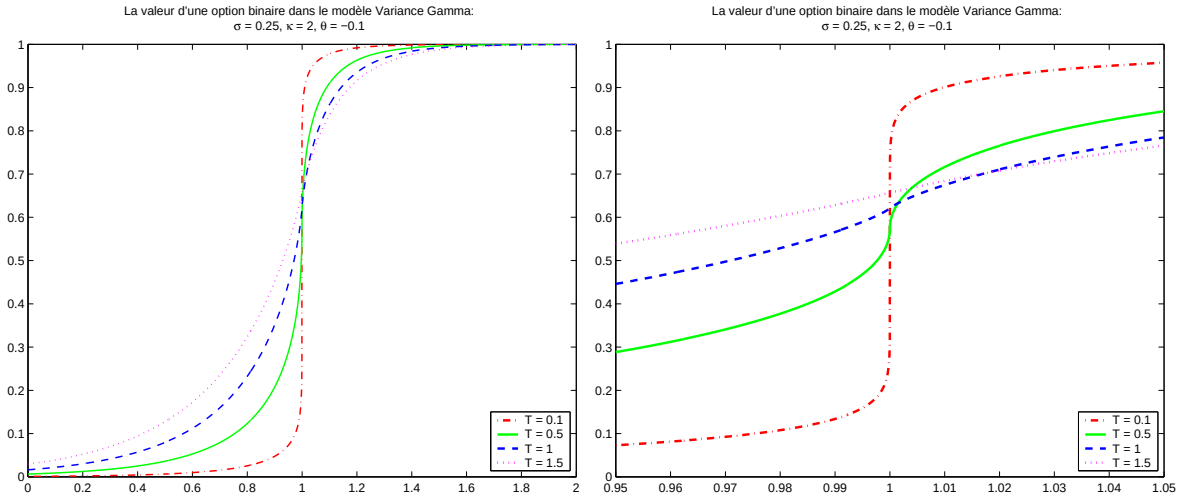


FIG. 3.1 – La valeur d'une option binaire dans le modèle Variance Gamma. La figure de droite est un zoom sur le point d'irrégularité.

$\rho(t,\cdot)$ est dans $C^{p-1}(\mathbb{R})$ mais pas dans $C^p(\mathbb{R})$. En particulier, pour $t < \kappa/2$, $\rho(t,\cdot)$ n'est pas localement bornée.[3]

La valeur d'une option binaire européenne définie par le *payoff* $h(x) = 1_{x\geq x_0}$ est la primitive de $\rho(t,\cdot)$. Par conséquent, elle est continue mais non différentiable pour $t < \kappa/2$ (Fig. 3.1).

3.3.2 Options à barrières

Exemple 3.3.2. [Absence de régularité globale sur $\mathbb{R}$] La solution de (3.2.12)–(3.2.14) ne peut pas être régulière sur $\mathbb{R}$, même en l'absence de sauts. En particulier, le Théorème 5 de Rong [Ron97] est erroné : formulé dans un cadre plus général, il implique que pour $h \in W_p^{2(1-1/p)}(\mathbb{R})$, $p > 3$, avec $h = 0$ en dehors d'un borné O, il existe une unique solution $u(\tau,x) \in W_p^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$ de (3.2.12)–(3.2.14). Or, ceci est faux même si L est un simple laplacien : $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$.

En effet, si $u \in W_p^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$, alors $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \in L_p([0,T]\times\mathbb{R})$. Nous avons $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans $(0,T]\times O$ d'après l'équation et $\frac{\partial u}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ dans $(0,T]\times\{\mathbb{R}\setminus O\}$ puisque $u \equiv 0$ en dehors de O. Par conséquent, u est solution du problème suivant :

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \qquad \text{dans } (0,T]\times\mathbb{R}, \\ &u(0,x) = h(x), \qquad x \in \mathbb{R}, \qquad h \in W_p^{2(1-1/p)}(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

[3] On peut également voir ces propriétés directement à partir de l'expression pour ρ qui fait intervenir la fonction de Bessel modifiée du second type (voir [CT03], Table 4.5) : $\rho(t,x) = C|x|^{t/\kappa-1/2}e^{Ax}K_{|t/\kappa-1/2|}(B|x|)$. En particulier, pour tout ν, $K_{|\nu|}(z) \to +\infty$ quand $z \to 0$, d'où on déduit immédiatement que $\rho(t,x)$ est singulier en $x = 0$ si $t/\kappa - 1/2 \leq 0$.

Or, il est bien connu que ce problème possède une unique solution dans $W_p^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$:

$$u(\tau,x)=\int \frac{e^{-\frac{(x-y)^2}{4\tau^2}}}{\sqrt{4\pi\tau^2}}h(y)dy$$

qui n'est pas à support compact. Cette contradiction prouve que la solution de (3.2.12)–(3.2.14) ne peut pas être de classe $W_p^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R})$.

On peut aussi le voir autrement. Si la solution u de l'équation de la chaleur vérifie $u=\frac{\partial u}{\partial x}=0$ sur la frontière ∂O, alors elle est identiquement nulle. Sinon, la chaleur va diffuser et donc pour maintenir la température zéro sur les bords il faut qu'il y ait un flux de chaleur non nul à travers ∂O. Cela implique que $\frac{\partial u}{\partial x}$ a des discontinuités sur les bords. Par conséquent, la dérivée seconde n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 3.3.3. [$\mathbf{u\notin C^{1,2}([0,T]\times\bar{O})}$] Montrons maintenant que $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ ne peut pas être uniformément continue sur $[0,T]\times O$, sauf cas spéciaux où le processus ne saute pas à l'intérieur du domaine à partir de la frontière. Ceci est vrai même si h est de classe $C^\infty(\mathbb{R})$ et nul sur ∂O (donc se raccorde bien aux conditions aux bords) ! En effet, si $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ était uniformément continue sur $[0,T]\times O$, elle serait continue jusqu'au bord sur $[0,T]\times\bar{O}$. Considérons le coin du domaine $(0,x_*)$ où $x_*\in\partial O$. Comme $u(\tau,x_*)\equiv 0$, on a $\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,x_*)\equiv 0$ et donc $\frac{\partial u}{\partial\tau}(0,x_*)=0$. D'un autre côté, comme $\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,x)=Lu(\tau,x)$ dans le domaine, on obtient par continuité que $\frac{\partial u}{\partial\tau}(0,x)=Lh(x)$, pour tout $x\in O$, d'où $\frac{\partial u}{\partial\tau}(0,x_*)=Lh(x_*)$. Pour arriver à une contradiction, il reste à montrer que $Lh(x_*)\neq 0$. Nous avons supposé que $h(x_*)=h'(x_*)=h''(x_*)=0$, donc $Lh(x_*)=\int h(x_*+y)\nu(dy)$. Or ceci est différent de zéro dans la plupart des cas : à savoir, si le processus X peut avoir des sauts vers l'intérieur du domaine. En particulier, si O est borné des deux côtés et ν n'est pas identiquement nulle, il y aura une discontinuité au moins sur une des barrières.[4]

Cela implique également que $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ ne peut pas être uniformément continue sur $[0,T]\times O$ puisque $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ s'exprime en fonction de u, $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ grâce à l'équation. Dans le cas où $\sigma=0$ et $\int_{|y|<1}|y|\nu(dy)<\infty$, le même raisonnement s'applique à $\frac{\partial u}{\partial x}$: si cette dérivée était uniformément continue, $\frac{\partial u}{\partial\tau}$ le serait aussi puisqu'elle s'exprime en fonction de u et $\frac{\partial u}{\partial x}$ par l'équation.

Soulignons que cette irrégularité sur le bord est due au caractère non local de L et non aux propriétés de la condition initiale qui est supposée $C^\infty(\mathbb{R})$ dans ces exemples.

Exemple 3.3.4. [Irrégularité à l'intérieur du domaine] L'exemple suivant est inspiré de celui de Gimbert et Lions [GL84] (Section VI ii), page 340). Ils montrent que la solution du problème elliptique

$$-u''+u-u(x-1)=1 \quad \text{dans} \quad (-1,1), \qquad u(x)=0 \quad \text{si} \quad x\notin(-1,1) \tag{3.3.2}$$

[4] L'idée de cet exemple est inspirée des résultats de Friedman [Fri64] pour les EDP paraboliques avec un terme source : $\frac{\partial u}{\partial t}-Du=f$, $u=0$ sur ∂O. Ici, D est un opérateur différentiel du second ordre. Dans [Fri64], il apparaît que la solution est régulière si $f(0,x)=0$ pour $x\in\partial O$. Dans le cas intégro-différentiel, l'opérateur intégral $\int u(\tau,x+y)\nu(dy)$ peut être interprété comme un terme source pour la partie différentielle. Or, comme on a vu, il ne vérifie pas la condition de [Fri64].

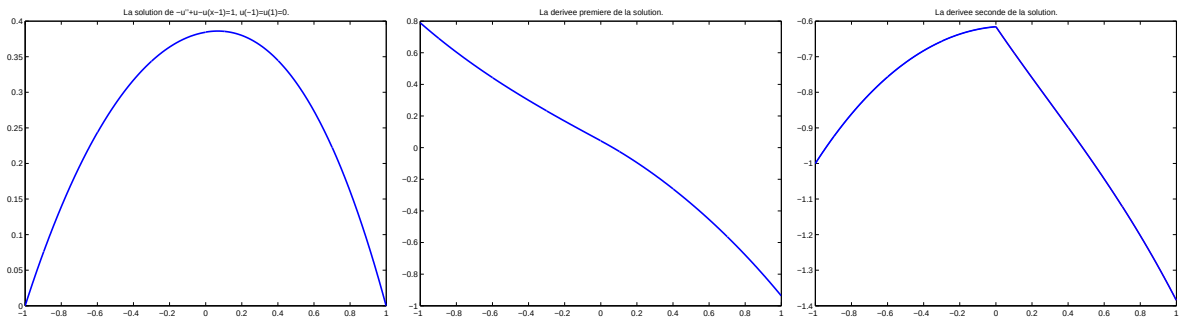


FIG. 3.2 – La solution du problème (3.3.2) avec ses dérivées u' et u''.

n'est pas de classe $C^3(-1,1)$ parce que la dérivée seconde n'est pas différentiable en $x = 0$:

$$u''(x) = c_0 + c_1 x^- + c_2 x^+ + o(|x|) \qquad \text{quand} \quad x \to 0, \quad \text{avec} \quad c_1 \neq c_2. \tag{3.3.3}$$

Ici, $x^- = \min(x, 0)$ et $x^+ = \max(x, 0)$.[5] Pour prouver (3.3.3), il suffit de résoudre cette équation (voir Section A.2 de l'annexe, Proposition A.2.1). La Figure 3.2 représente la solution ainsi que ses dérivées u' et u''.

Toutefois, pour mieux comprendre l'origine du problème en $x = 0$, nous donnons aussi un raisonnement général. On suppose que u est la solution de (3.3.2) dans $W_0^{1,p}((-1,1)) \cap W_{loc}^{2,p}((-1,1))$, $p < \infty$, dont l'existence et l'unicité sont montrées dans [GL84]. Comme u (prolongée par zéro) est continue et bornée sur $\mathbb{R}$, la dérivée seconde est continue et bornée sur $(-1,1)$ où elle s'exprime en fonction de u. On peut donc écrire le développement limité de u'' en $x = 0$:

$$\begin{aligned}
x < 0 : \quad & u''(x) = u(x) - 1 = u(0) + u'(0)x + o(|x|) - 1 = u(0) - 1 + u'(0)x + o(|x|), \\
x > 0 : \quad & u''(x) = u(x) - u(x-1) - 1 \\
& = (u(0) + u'(0)x + o(|x|)) - (u(-1) + u'(-1+)x + o(|x|)) - 1 \\
& = u(0) - 1 + (u'(0) - u'(-1+))x + o(|x|).
\end{aligned}$$

Ceci implique (3.3.3) avec $c_0 = u(0) - 1$, $c_1 = u'(0)$ et $c_2 = u'(0) - u'(-1+)$. Or le calcul direct montre que $u'(-1+) \neq 0$. Donc $c_1 \neq c_2$. On voit que la discontinuité de la dérivée première sur le bord ($x = -1$) est propagée à l'intérieur du domaine par le terme non local et résulte en une discontinuité de $u''' = u' - u'(x-1)$ en $x = 0$.

On considère maintenant un problème parabolique avec le même opérateur :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u(\tau, x) + u(\tau, x-1) \qquad \text{dans} \quad (0,T] \times (-1,1), \tag{3.3.4}$$

$$u(\tau, -1) = u(\tau, 1) = 0, \qquad \tau \in [0,T], \tag{3.3.5}$$

$$u(0, x) = h(x), \qquad x \in (-1,1). \tag{3.3.6}$$

[5] Dans [GL84], il y a une erreur dans le développement de u'' en zéro : $u''(x) = cx^+ + o(|x|)$ pour un certain $c > 0$. La bonne expression est donnée par (3.3.3).

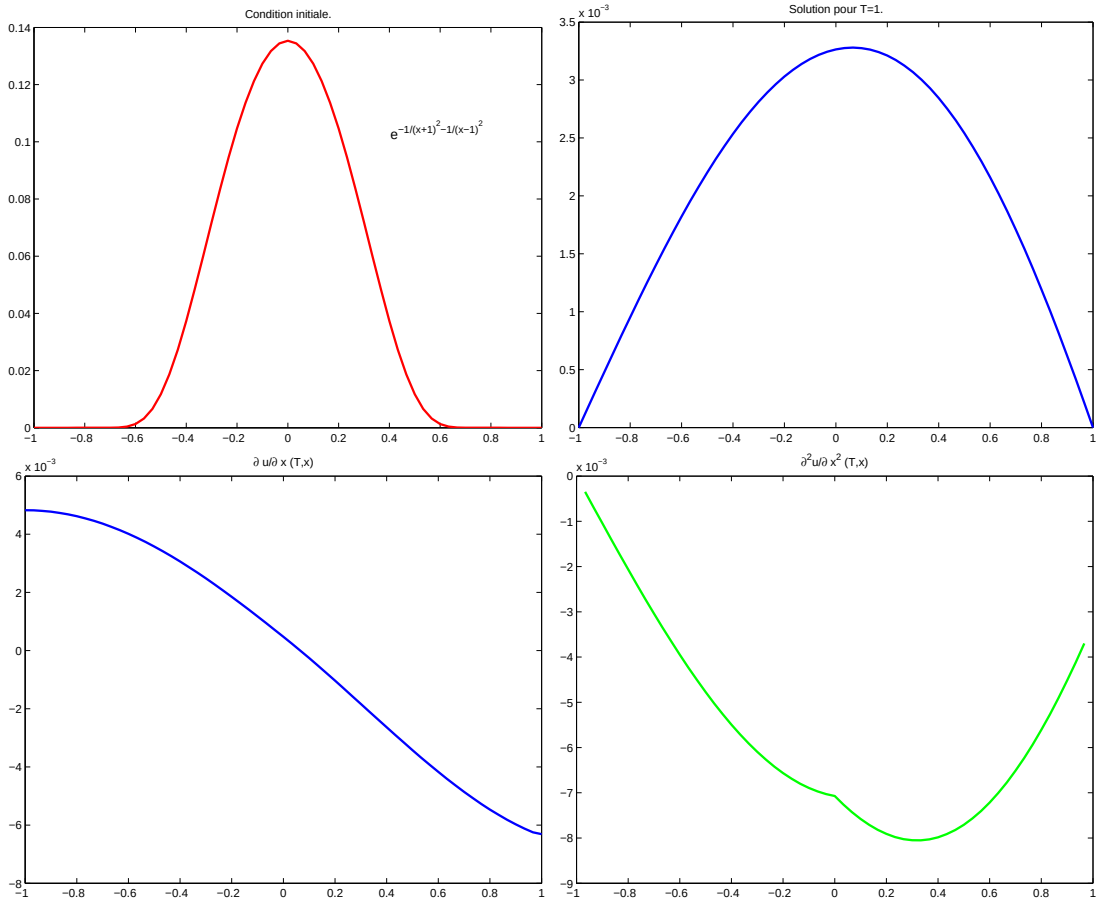


FIG. 3.3 – La solution du problème (3.3.4)–(3.3.6) avec $h(x) = \exp(-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2})$ et $T = 1$. En haut : la condition initiale et la solution pour $\tau = T$; en bas : les dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$. La solution est calculée numériquement.

Nous avons choisi la condition initiale $h(x) = \exp(-\frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{(x-1)^2})$ qui s'annule avec toutes ses dérivées sur les bords $x = \pm 1$. Donc h prolongée par zéro sur $\mathbb{R}$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R})$. Néanmoins, en résolvant cette équation numériquement, on observe le même phénomène que dans l'exemple précédent : la dérivée seconde n'est pas différentiable en $x = 0$ (voir la Figure 3.3). La nature du problème est exactement la même que dans l'exemple elliptique : le terme non local transporte la discontinuité des dérivées sur le bord à l'intérieur du domaine.

Il est intéressant de noter que les "bonnes" propriétés de ν dans les deux exemples précédents sont contradictoires : si le processus peut sortir du domaine par des sauts, alors l'irrégularité sur le bord est propagée à l'intérieur ; si X peut sauter vers le domaine, alors les dérivées ne sont pas uniformément continues. Donc, si ν n'est pas une mesure nulle, on aura au moins un de ces deux problèmes.

3.4 Prix d'options comme solutions classiques des EID

Dans cette section, nous présentons des conditions sous lesquelles les valeurs des options européennes ou barrière sont des solutions classiques (régulières) des équations intégro-différentielles correspondantes.

3.4.1 Options européennes

On commence par démontrer que la valeur d'une option européenne est une fonction continue de ses arguments, sous la condition de Lipschitz sur le *payoff* et sans aucune restriction supplémentaire sur la densité de Lévy.

Proposition 3.4.1. (Continuité des options européennes)
Soit H une fonction lipschitzienne :

$$\exists c > 0, \quad |H(S_1) - H(S_2)| \leq c|S_1 - S_2|. \tag{3.4.1}$$

Alors la valeur forward d'une option européenne $f(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})]$ est continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

Démonstration. La continuité par rapport à x est immédiate :

$$\begin{aligned} |f(\tau, x + \Delta x) - f(\tau, x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+\Delta x+r\tau+X_\tau})] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})]| \\ &\leq cS_0 e^{x+r\tau}|e^{\Delta x} - 1|\mathbb{E}[e^{X_\tau}] \to 0 \quad \text{as } |\Delta x| \to 0, \end{aligned}$$

car $\mathbb{E}e^{X_\tau} = 1$ grâce à la condition de martingale.

Montrons la continuité en temps. Soit $t \geq s \geq 0$ (le cas $s \geq t$ étant symétrique). Alors, $X_t \stackrel{d}{=} X_s + X_{t-s}$, $X_{t-s} \perp\!\!\!\perp X_s$. On obtient

$$\begin{aligned} |f(t, x) - f(s, x)| &\leq \mathbb{E}[|H(S_0 e^{x+rt+X_t}) - H(S_0 e^{x+rs+X_s})|] \\ &\leq cS_0 e^{x+rs}\mathbb{E}|e^{r(t-s)+X_{t-s}} - 1|. \end{aligned}$$

Donc, on a besoin de montrer que $\mathbb{E}|e^{r\tau+X_\tau} - 1| \to 0$ quand $\tau \to 0$. Premièrement, on remarque que la condition de martingale implique :

$$\mathbb{E}|e^{r\tau+X_\tau} - 1| = e^{r\tau} - 1 + 2\mathbb{E}[(1 - e^{r\tau+X_\tau})^+]. \tag{3.4.2}$$

Nous avons $(1 - e^{r\tau+X_\tau})^+ \to 0$ quand $\tau \to 0$ presque sûrement par la continuité à droite des trajectoires de X. D'autre part, $|(1 - e^{r\tau+X_\tau})^+| \leq 1$. Par conséquent, le théorème de convergence dominée implique que $\mathbb{E}[(1 - e^{r\tau+X_\tau})^+] \to 0$ quand $\tau \to 0$.

Nous avons montrer la continuité en directions de x et de τ. Comme la continuité en x est uniforme par rapport à τ, on conclut que la fonction f est continue en tout point $(\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$. □

Dans la proposition suivante, on donne des conditions sur le triplet de Lévy de X qui rendent la valeur de l'option de classe C^∞ pour $t > 0$ (ceci sans supposer la continuité du *payoff*).

Proposition 3.4.2. (Régularité C^∞ des options européennes)
Soit h une fonction mesurable à croissance au plus polynomiale : $\exists p \geq 0$, $|h(x)| \leq C(1+|x|^p)$ et $\{X\}$ un processus de Lévy vérifiant les conditions suivantes :

$$(i) \qquad \sigma > 0 \quad ou \quad \exists \beta \in (0,2), \quad \liminf_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon^{2-\beta}} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |y|^2 \nu(dy) > 0; \tag{3.4.3}$$

$$(ii) \qquad \forall n \geq 0, \int_{|y|>1} |y|^n \nu(dy) < \infty. \tag{3.4.4}$$

Alors, $u(\tau,x) = \mathbb{E}[h(x+r\tau+X_\tau)]$ est de classe $C^\infty((0,T]\times\mathbb{R})$ avec $\left|\frac{\partial^{n+m}u}{\partial x^n \partial \tau^m}(x)\right| \leq C(1+|x|^p)$, pour tout $n,m \geq 0$.[6]

Démonstration. On a $u(\tau,x) = h(x) * \tilde{p}_\tau(x)$ où $\tilde{p}_\tau(x) = p_\tau(-x)$ et p_τ est la densité de probabilité de $r\tau + X_\tau$. La transformée de Fourier de $\tilde{p}_\tau$ est donnée par la fonction caractéristique de $r\tau + X_\tau$:

$$\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z) \;=\; \psi_{r\tau+X_\tau}(z) = \exp(\tau\phi_{r+X_1}(z))$$

avec

$$\begin{aligned}
\phi_{r+X_1}(z) &= -\frac{\sigma^2}{2}z^2 + i\gamma z + \int (e^{iyz} - 1 - iyz1_{|y|\leq 1})\nu(dy), \\
\gamma &= r - \frac{\sigma^2}{2} - \int (e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1})\nu(dy).
\end{aligned}$$

La condition (3.4.3) implique que, pour $\tau > 0$, $|\psi_{r\tau+X_\tau}(z)| \leq C\exp(-c|z|^\alpha)$ avec $\alpha > 0$.[7] Donc $\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z)$ décroît à l'infini plus vite que tout polynôme de z. Par conséquent, $\tilde{p}_\tau(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$.

Pour montrer que $u \in C^\infty((0,T]\times\mathbb{R})$, il faut montrer que les dérivées de $\tilde{p}_\tau(x)$ décroissent suffisamment vite à l'infini pour que le produit de convolution $h(x) * \frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x)$ ait un sens. La décroissance de $\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x)$ est liée à la régularité de $\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z)$ et donc de $\phi_{r+X_1}(z)$. On a

$$\begin{aligned}
\phi'_{r+X_1}(z) &= -\sigma^2 z + i\gamma + \int iy(e^{iyz} - 1_{|y|\leq 1})\nu(dy), \\
\phi''_{r+X_1}(z) &= -\sigma^2 + \int (iy)^2 e^{iyz}\nu(dy), \\
\phi^{(k)}_{r+X_1}(z) &= \int (iy)^k e^{iyz}\nu(dy), \qquad \forall k \geq 3.
\end{aligned}$$

[6] Ici et partout dans la preuve, C désigne une constante, pas nécessairement la même, qui dépend de n, m et τ.

[7] $\alpha = 2$ si $\sigma > 0$ et $\alpha = \beta$ si $\sigma = 0$ et la deuxième condition dans (3.4.3) est vérifiée (voir [Sat99, proposition 28.3]).

Grâce à la condition (3.4.4), les intégrales dans ces expressions sont finies. Par conséquent, $\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau] \in C^\infty(\mathbb{R})$. En plus, on s'aperçoit que

$$|\phi'_{r+X_1}(z)| \leq C_1(1+|z|) \quad \text{et} \quad |\phi^{(k)}_{r+X_1}(z)| \leq C_k, \ \forall k \geq 2.$$

On vérifie par récurrence que

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z)\right| \ \leq \ C(1+|z|^k)|\psi_{r\tau+X_\tau}(z)| \leq C(1+|z|^k)e^{-c|z|^\alpha}, \quad \forall k \geq 0.$$

On en déduit que

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}[\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}](z)\right| \ = \ \left|\frac{d^k}{dz^k}\left((-iz)^n\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z)\right)\right| \leq C|z|^{n+k}e^{-c|z|^\alpha}.$$

Donc, $\forall k, n \geq 0$, $\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}[\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}](z) \in L^2(\mathbb{R})$ ce qui implique $|x|^k \frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x) \in L^2(\mathbb{R})$. Puisque c'est vrai pour tout $k \geq 0$, on a aussi $(1+|x|^k)\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x) \in L^1(\mathbb{R})$. En effet,

$$\begin{aligned}\int (1+|x|^k)\left|\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x)\right| dx &\leq C\int \frac{1}{1+|x|}(1+|x|^{k+1})\left|\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x)\right| dx \\ &\leq C\left\|\frac{1}{1+|x|}\right\|_{L^2}\left\|(1+|x|^{k+1})\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(x)\right\|_{L^2} < \infty.\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial^n u}{\partial x^n}(\tau,x)\right| = \left|\int h(x-y)\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(y)dy\right| &\leq C\int (1+|x-y|^p)\left|\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(y)\right| dy \\ &\leq C(1+|x|^p)\int (1+|y|^p)\left|\frac{\partial^n \tilde{p}_\tau}{\partial x^n}(y)\right| dy \leq C(1+|x|^p).\end{aligned}$$

On a montré la régularité de u par rapport à x. De façon analogue, en utilisant $|\phi_{r+X_1}(z)| \leq C(1+|z|^2)$, on vérifie par récurrence que

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}[\frac{\partial^m \tilde{p}_\tau}{\partial \tau^m}](z)\right| \ = \ \left|\frac{d^k}{dz^k}\frac{\partial^m}{\partial \tau^m}\mathcal{F}[\tilde{p}_\tau](z)\right| = \left|\frac{d^k}{dz^k}[\phi_{r+X_1}(z)]^m e^{\tau\phi_{r+X_1}(z)}\right| \leq C|z|^{2m+k}e^{-c|z|^\alpha}.$$

Le même raisonnement implique alors que pour tout $k \geq 0$, $(1+|x|^k)\frac{\partial^m \tilde{p}_\tau}{\partial \tau^m}(x) \in L^1(\mathbb{R})$. Donc $\frac{\partial^m u}{\partial \tau^m}(\tau,x) = h(x) * \frac{\partial^m \tilde{p}_\tau}{\partial \tau^m}(x)$ est bien défini et vérifie $|\frac{\partial^m u}{\partial \tau^m}(\tau,x)| \leq C(1+|x|^p)$. Les dérivées croisées sont traitées exactement de la même manière, en vérifiant que

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}[\frac{\partial^{n+m} \tilde{p}_\tau}{\partial x^n \partial \tau^m}](z)\right| \ = \ \left|\frac{d^k}{dz^k}\left((-iz)^n[\phi_{r+X_1}(z)]^m e^{\tau\phi_{r+X_1}(z)}\right)\right| \leq C|z|^{2m+n+k}e^{-c|z|^\alpha}.$$

Cela termine la démonstration. □

Remarque 3.4.3. Ce raisonnement ne s'applique pas directement à $h_{Call}(x) = (e^x - 1)^+$ mais on peut facilement déduire le résultat en utilisant la relation $h_{Call}(x) = h_{Put}(x) + e^x - 1$ où $h_{Put}(x) = (1 - e^x)^+$. La fonction $u_{Call}(\tau, x) = \mathbb{E}[h_{Call}(x + r\tau + X_\tau)]$ est bien définie grâce à la condition $\int_{|y|>1} e^y \nu(dy) < \infty$. Nous avons $u_{Call}(\tau, x) = u_{Put}(\tau, x) + e^{x+r\tau} - 1$ d'où $u_{Call} \in C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$ et $\left| \frac{\partial^{n+m} u_{Call}}{\partial x^n \partial \tau^m}(x) \right| \leq Ce^x$.

Nous allons maintenant montrer que, sous les hypothèses de la Proposition 3.4.2, la valeur d'une option européenne vérifie l'équation intégro-différentielle (3.2.4). Nous aurons besoin d'une hypothèse technique supplémentaire :

$$\int_{|y|>1} e^{2y} \nu(dy) < \infty. \tag{3.4.5}$$

Cette condition est équivalente à l'existence du moment d'ordre 2 pour le processus de prix S_t. Alors, $\hat{S}_t = \exp X_t$ est une martingale de carré intégrable :

$$\frac{d\hat{S}_t}{\hat{S}_{t-}} = \sigma dW_t + \int_{-\infty}^{\infty} (e^x - 1) \tilde{J}_X(dt\ dx), \qquad \sup_{t\in[0,T]} E[\hat{S}_t^2] < \infty.$$

Proposition 3.4.4. (EID pour des options européennes)
Considérons le modèle de Lévy exponentiel $S_t = S_0 \exp(rt + X_t)$ où X est un processus de Lévy vérifiant (3.4.5) et (3.4.3). Soit H une fonction lipschitzienne. On suppose également que $h(x) = H(S_0 e^x)$ est à croissance au plus polynomiale à l'infini.[8]

Alors la valeur $C(t,S)$ d'une option européenne de payoff $H(S_T)$ définie par (3.2.1) est continue sur $[0,T] \times [0,\infty)$, de classe C^∞ sur $[0,T) \times (0,\infty)$ et vérifie l'équation intégro-différentielle suivante :

$$\frac{\partial C}{\partial t}(t,S) + rS\frac{\partial C}{\partial S}(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S) - rC(t,S) + \\ + \int \nu(dx)[C(t,Se^x) - C(t,S) - S(e^x - 1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S)] = 0 \tag{3.4.6}$$

sur $[0,T) \times (0,\infty)$ avec la condition terminale :

$$\forall S > 0, \qquad C(T,S) = H(S). \tag{3.4.7}$$

Démonstration. La fonction C est continue sur $[0,T] \times [0,\infty)$ d'après la Proposition 3.4.1 et de classe $C^\infty([0,T) \times (0,\infty))$ d'après la Proposition 3.4.2 (il suffit d'appliquer ces résultats à $h(x) = H(S_0 e^x)$).

La démonstration de (3.4.6) consiste, comme dans le cas Black-Scholes, à appliquer la formule d'Itô à la martingale $\hat{C}(t, S_t) = e^{r(T-t)} C(t, S_t)$, à identifier ensuite le terme de dérive et à le mettre à zéro.

[8] Ces conditions sont vérifiées pour un Put avec $c = 1$. Le résultat pour un Call peut être déduit de la relation de parité Call-Put (cf. Remarque 3.4.3).

Par construction, $\hat{C}_t = E[H|\mathcal{F}_t]$ est une martingale. En appliquant la formule d'Itô à $\hat{C}_t = e^{r(T-t)}C(t,S_t)$ et en utilisant l'équation (2.2.4) on obtient :

$$\begin{aligned} d\hat{C}_t = e^{r(T-t)}[-rC_t + \frac{\partial C}{\partial t}(t,S_{t-}) + \frac{\sigma^2 S_t^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S_{t-})]dt + e^{r(T-t)}\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})dS_t + \\ + e^{r(T-t)}[C(t,S_{t-}e^{\Delta X_t}) - C(t,S_{t-}) - S_{t-}(e^{\Delta X_t}-1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})] = \\ = a(t)dt + dM_t \quad (3.4.8) \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} a(t) = e^{r(T-t)}[-rC(t,S_{t-}) + \frac{\partial C}{\partial t}(t,S_{t-}) + \frac{\sigma^2 S_{t-}^2}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(t,S_{t-}) + rS_{t-}\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})] \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\nu(dx)e^{r(T-t)}[C(t,S_{t-}e^x) - C(t,S_{t-}) - S_{t-}(e^x-1)\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})], \end{aligned}$$

et

$$dM_t = e^{r(T-t)}\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})\sigma S_{t-}dW_t + \int_{\mathbb{R}} e^{r(T-t)}[C(t,S_{t-}e^x) - C(t,S_{t-})]\tilde{J}_X(dt\ \ dx).$$

Montrons que M_t est une martingale. Comme la fonction de *payoff* H est lipschitzienne, C est également lipschitzienne par rapport à la deuxième variable :

$$\begin{aligned} |C(t,S_1) - C(t,S_2)| &= e^{-r(T-t)}|E[H(S_1e^{r(T-t)+X_{T-t}})] - E[H(S_2e^{r(T-t)+X_{T-t}})]| \\ &\leq c|S_1 - S_2|E[e^{X_{T-t}}] = c|S_1 - S_2| \end{aligned}$$

car e^{X_t} est une martingale. Par conséquent, le processus prévisible $\psi(t,x) = C(t,S_{t-}e^x) - C(t,S_{t-})$ vérifie

$$\begin{aligned} E[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)|\psi(t,x)|^2] = E[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}}\nu(dx)|C(t,S_{t-}e^x) - C(t,S_{t-})|^2\ ] \\ \leq E[\int_0^T dt\int_{\mathbb{R}} c^2(e^x-1)^2 S_{t-}^2\nu(dx)] \\ \leq \tilde{c}^2\left(\int_{|x|\leq 1}x^2\nu(dx) + \int_{|x|>1}(e^{2x}+1)\nu(dx)\right)\ E[\int_0^T S_{t-}^2 dt] < \infty, \end{aligned}$$

d'après (3.4.5). Donc, l'intégrale de Poisson compensée

$$\int_0^t\int_{-\infty}^{\infty} e^{r(T-t)}[C(t,S_{t-}e^x) - C(t,S_{t-})]\ \tilde{J}_X(dt\ dx)$$

est une martingale de carré intégrable. De plus, puisque C est lipschitzienne, nous avons $\partial C/\partial S\ \in L^\infty$ et

$$||\frac{\partial C}{\partial S}(t,\cdot)||_{L^\infty} \leq c, \quad \text{donc} \quad E[\int_0^T S_{t-}^2|\frac{\partial C}{\partial S}(t,S_{t-})|^2 dt] \leq c^2 E[\int_0^T S_{t-}^2 dt] < \infty.$$

En utilisant la relation d'isométrie pour les intégrales de Wiener, on obtient que $\int_0^t \sigma S_t \frac{\partial C}{\partial S}(t, S_{t-})dW_t$ est aussi une martingale de carré intégrable. Par conséquent, M_t et $\hat{C}_t - M_t$ le sont aussi. Or, $\hat{C}_t - M_t = \int_0^t a(s)ds$ est également un processus *continu* à variation bornée. En effet, les dérivées de C qui rentrent dans l'expression de $a(t)$ sont bornées sur $[0,T) \times (0,\infty)$. Donc, d'après [JS02, Chapitre I, Lemmes 4.14 b) et 4.13 b)], on doit avoir $a(t) = 0$ $\mathbb{Q}$-presque sûrement, $\forall t \in [0,T)$. Ceci implique l'EID (3.4.6) dans $[0,T) \times (0,\infty)$. □

Remarque 3.4.5. La condition (3.4.3) est vérifiée dans tous les modèles de diffusion à sauts avec une composante de diffusion non nulle ainsi que pour les densités de Lévy se comportant en zéro comme $\nu(x) \sim c/|x|^{1+\beta}$ avec $\beta \in (0,2)$. Ceci est vérifié pour les modèles stables tempérés mais non pour le modèle Variance Gamma [MM91]. Dans le cas de Variance Gamma, l'EID se réduit à une équation du premier ordre pour laquelle la régularité C^1 est suffisante. Cependant, comme nous avons vu dans la Section 3.3.1, même cette régularité peut faire défaut.

Pour compléter cette section sur les options européennes, on va montrer un résultat plus précis dans le cas $\sigma > 0$ qui nous servira par la suite à étudier la vitesse de convergence des schémas numériques. Comme nous avons déjà noté, dans le cas des *payoffs* de type Call ou Put, les dérivées de la valeur de l'option ne sont pas uniformément bornées en temps. La proposition suivante précise le comportement des dérivées quand $\tau \to 0$ pour ce type de conditions initiales.

Proposition 3.4.6. (Estimation des dérivées en fonction du temps)
Soit u la fonction définie par (3.2.2) où le processus X vérifie (3.4.5) et a une composante brownienne non nulle : $\sigma > 0$. Supposons que h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C^∞ par morceaux à l'exception d'un nombre fini de points $\xi_1, \ldots, \xi_M$, telle que $\forall n \geq 0$, $\forall x \notin \{\xi_1, \ldots, \xi_M\}$, $|h^{(n)}(x)| \leq K$. Supposons également que $H(S) = h(\ln(S/S_0))$ est lipschitzienne. Alors,

(i) $u \in C([0,T] \times \mathbb{R}) \cap C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$;
(ii) u est solution du problème (3.2.3) ;
(iii) pour tout $\tau > 0$, $m, n \in \mathbb{N}$, $m + n > 0$,

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial \tau^m \partial x^n}(\tau, \cdot) \right\| \leq \frac{C}{(\sqrt{\tau})^{2m+n-1}}. \tag{3.4.9}$$

Ici, $\|\cdot\|$ désigne la norme uniforme. La constante C dépend de m, n, K, T et des coefficients de l'opérateur L (mais ne dépend pas de τ).

Démonstration. La fonction u est continue sur $[0,T] \times \mathbb{R}$, appartient à $C^\infty((0,T] \times \mathbb{R})$ et vérifie (3.2.3) d'après la Proposition 3.4.4 (rappelons que $u(\tau, x) = e^{r\tau} C(T - \tau, S_0 e^x)$).

Pour montrer les estimations (3.4.9), on écrit la fonction sous forme de convolution :

$$u(\tau, x) = h(x) * \tilde{p}_\tau(x) = h(x) * \tilde{p}_\tau^W(x) * \tilde{p}_\tau^{(X-W)}(x), \tag{3.4.10}$$

où $p_\tau(x) = \tilde{p}_\tau(-x)$ est la densité de X_τ, et $\tilde{p}^W_\tau(-x)$, $\tilde{p}^{(X-W)}_\tau(-x)$ sont celles des processus σW_τ et $(X_\tau - \sigma W_\tau)$ respectivement. Donc,

$$\left\| \frac{\partial^{m+n} u}{\partial \tau^m \partial x^n}(\tau, \cdot) \right\| \leq \left\| \frac{\partial^{m+n}(h * \tilde{p}^W_\tau)}{\partial \tau^m \partial x^n} \right\|. \tag{3.4.11}$$

Les dérivées de h peuvent avoir des sauts aux points $\xi_1, \ldots, \xi_I$. Soient $a_i^{(n)} = h^{(n)}(\xi_i+) - h^{(n)}(\xi_i-)$ les amplitudes de ces sauts. Alors, $\forall n \geq 1$, $i = 1, \ldots, I$, $|a_i^{(n)}| \leq 2K$. En utilisant les propriétés du produit de convolution, on obtient :

$$\frac{\partial^n (h * \tilde{p}^W_\tau)}{\partial x^n}(x) = (h^{(n)} * \tilde{p}^W_\tau)(x) + \sum_{i=1}^{I} [a_i^{(n-1)} \tilde{p}^W_\tau(x - \xi_i) + a_i^{(n-2)} \frac{\partial \tilde{p}^W_\tau}{\partial x}(x - \xi_i) + \cdots + a_i^{(1)} \frac{\partial^{n-2} \tilde{p}^W_\tau}{\partial x^{n-2}}(x - \xi_i)], \tag{3.4.12}$$

où $h^{(n)}$ est la dérivée ponctuelle d'ordre n de h. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\frac{\partial^n \tilde{p}^W_\tau}{\partial x^n}(x) = \frac{1}{(\sqrt{\tau})^{n+1}} \frac{\partial^n \tilde{p}^W_1}{\partial x^n}\left(\frac{x}{\sqrt{\tau}}\right). \tag{3.4.13}$$

Par conséquent, $\forall n \geq 1$,

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{\partial^n (h * \tilde{p}^W_\tau)}{\partial x^n} \right\| &\leq \|h^{(n)}\| + 2KI \left(\|\tilde{p}^W_\tau\| + \left\| \frac{\partial \tilde{p}^W_\tau}{\partial x} \right\| + \cdots + \left\| \frac{\partial^{n-2} \tilde{p}^W_\tau}{\partial x^{n-2}} \right\| \right) \\
&\leq K + 2KI \left(\frac{1}{\sqrt{\tau}} \|\tilde{p}^W_1\| + \frac{1}{(\sqrt{\tau})^2} \left\| \frac{\partial \tilde{p}^W_1}{\partial x} \right\| + \cdots + \frac{1}{(\sqrt{\tau})^{n-1}} \left\| \frac{\partial^{n-2} \tilde{p}^W_1}{\partial x^{n-2}} \right\| \right) \\
&\leq \frac{K}{(\sqrt{\tau})^{n-1}} \left[T^{\frac{n-1}{2}} + 2I \left(T^{\frac{n-2}{2}} \|\tilde{p}^W_1\| + T^{\frac{n-1}{2}} \left\| \frac{\partial \tilde{p}^W_1}{\partial x} \right\| + \cdots + \left\| \frac{\partial^{n-2} \tilde{p}^W_1}{\partial x^{n-2}} \right\| \right) \right] = \frac{C}{(\sqrt{\tau})^{n-1}}.
\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Donc, on a montré (3.4.9) pour $m = 0$, $n \geq 1$. On procède par récurrence sur m : supposons que (3.4.9) est vrai pour $m - 1$ et pour tout $n \geq 1$ et montrons qu'il est vrai aussi pour m.

On va utiliser la relation $\partial_\tau u = Lu$ que l'on peut dériver par rapport à x et τ autant de fois que nécessaire puisque u est de classe C^∞ en deux variables pour $\tau > 0$. Notons d'abord que, pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, on a

$$\begin{aligned}
Lf(x) = \frac{\sigma^2}{2} f''(x) - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \int (e^y - 1 - y 1_{|y| \leq 1}) \nu(dy) \right) f'(x) \\
+ \int_{|y|>1} \nu(dy)[f(x+y) - f(x)] + \int_{|y| \leq 1} \nu(dy)[f(x+y) - f(x) - y f'(x)].
\end{aligned}$$

On peut réécrire le dernier terme en utilisant la formule de Taylor :

$$\int_{|y|\leq 1} \nu(dy)[f(x+y) - f(x) - yf'(x)] \;=\; \int_{|y|\leq 1} \nu(dy) \int_0^y zf''(x+y-z)dz.$$

On obtient l'estimation suivante :

$$\|Lf\| \leq \frac{1}{2}\left(\sigma^2 + \int_{|y|\leq 1} y^2\nu(dy)\right)\|f''\| + \left|\frac{\sigma^2}{2} - r + \int (e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1})\nu(dy)\right|\|f'\|$$
$$+ 2\int_{|y|>1} \nu(dy)\|f\| \;=\; C_1\|f''\| + C_2\|f'\| + C_3\|f\|.$$

On va utiliser cette estimation avec les dérivées de u à la place de f. On obtient donc,

$$\left|\frac{\partial^{m+n}u}{\partial\tau^m\partial x^n}(\tau,x)\right| = \left|\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{\partial^{m-1+n}u}{\partial\tau^{m-1}\partial x^n}\right)(\tau,x)\right| = \left|L\left(\frac{\partial^{m-1+n}u}{\partial\tau^{m-1}\partial x^n}\right)(\tau,x)\right|$$
$$\leq C_1\left\|\frac{\partial^{m-1+n+2}u}{\partial\tau^{m-1}\partial x^{n+2}}(\tau,\cdot)\right\| + C_2\left\|\frac{\partial^{m-1+n+1}u}{\partial\tau^{m-1}\partial x^{n+1}}(\tau,\cdot)\right\| + C_3\left\|\frac{\partial^{m-1+n}u}{\partial\tau^{m-1}\partial x^n}(\tau,\cdot)\right\|$$
$$\leq \frac{C(K,T,m,n,r,\sigma,\nu)}{(\sqrt{\tau})^{2(m-1)+(n+2)-1}} = \frac{C}{(\sqrt{\tau})^{2m+n-1}},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nous avons prouvé (3.4.9) pour tous $m \geq 0$, $n \geq 1$. Il reste le cas $m \geq 1$, $n = 0$ que l'on traite exactement de la même façon, par récurrence sur m en partant de

$$\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,\cdot)\right\| \;=\; \|Lu(\tau,\cdot)\| \;\leq\; C_1\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,\cdot)\right\| + C_2\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,\cdot)\right\| + C_3\,\|u(\tau,\cdot)\| \;\leq\; \frac{C}{\sqrt{\tau}},$$

puisque $\|u(\tau,\cdot)\| = \|h * \tilde{p}_\tau^W\| \leq \|h\| \leq K$. □

Remarque 3.4.7. Si $h \in C^\infty(\mathbb{R})$ avec toutes les dérivées bornées, alors u appartient à $C^\infty([0,T]\times\mathbb{R})$ et ses dérivées sont également bornées. Pour le montrer, il suffit de poser $a_i^{(n)} = 0$ dans la démonstration précédente.

Remarque 3.4.8. La Proposition 3.4.6 ne parle pas de l'unicité de la solution puisque, à ce stade, il nous manque des outils pour la démontrer. En effet, on ne peut pas appliquer directement les résultats de Bensoussan & Lions [BL82] tels que la Proposition 3.2.4 : il faut les adapter aux fonctions $W^{1,p}$ (avec poids). Nous abordons la question d'unicité d'une autre manière. A savoir, nous verrons dans la Section 3.6.2 que toute solution régulière est une solution au sens de viscosité et que la solution de viscosité du problème de Cauchy est unique. Donc, la solution classique est unique.

3.4.2 Options à barrières

Le résultat suivant est un analogue de la Proposition 3.4.4. Il montre que si la valeur d'une option à barrières est suffisamment régulière alors elle vérifie une équation intégro-différentielle.

Proposition 3.4.9. (EID pour des options à barrières)
Soit $S_t = S_0 e^{Y_t}$ où Y est un processus de Lévy dont la mesure de Lévy ν vérifie (3.4.5). Soit

$$C_b(t,S) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[H(S_T)1_{T<\theta_t}|S_t = S], \tag{3.4.15}$$

où $\theta_t = \inf\{s \geq t \mid S_t \notin (L,U)\}$ et $0 \leq L < U \leq +\infty$, la valeur d'une option knock-out[9] *de payoff H. Supposons que $H \geq 0$ est à croissance au plus linéaire : $\exists M > 0$, tel que $H(S) \leq M(1+S)$.*

Si $C_b(t,S)$ est de classe $C^{1,2}([0,T)\times(L,U))$, alors elle vérifie le problème suivant :

$$\frac{\partial C_b}{\partial t}(t,S) + rS\frac{\partial C_b}{\partial S}(t,S) + \frac{\sigma^2 S^2}{2}\frac{\partial^2 C_b}{\partial S^2}(t,S) - rC_b(t,S) + \\ + \int \nu(dx)[C_b(t,Se^x) - C_b(t,S) - S(e^x-1)\frac{\partial C_b}{\partial S}(t,S)] = 0 \tag{3.4.16}$$

sur $[0,T)\times(L,U)$, avec les conditions aux limites :

$$C_b(T,S) = H(S), \qquad \forall S \in (L,U), \tag{3.4.17}$$
$$C_b(t,S) = 0, \qquad \forall S \notin (L,U). \tag{3.4.18}$$

Réciproquement, toute solution de (3.4.16)–(3.4.18) qui est de classe $C^{1,2}([0,T)\times(L,U))$ a la représentation (3.4.15).

Démonstration. Les conditions aux limites (3.4.17)–(3.4.18) sont automatiquement vérifiées par $C_b(t,S)$.

Soit $S_t^{(t_0,S_0)} = S_0 e^{Y_{t-t_0}}$ le processus partant de S_0 à l'instant t_0 où $(t_0,S_0) \in [0,T)\times(L,U)$. Soit $\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}$ la loi de $(S_t^{(t_0,S_0)})_{t_0\leq t\leq T}$. On note $D_n = (L+1/n, U-1/n)$ et $\tau_n = \inf\{u \geq t_0 \mid S_u^{(t_0,S_0)} \notin D_n\}$. Notons que le processus $(S^{(t_0,S_0)}_{(t\wedge\tau_n)-})_{t_0\leq t\leq T}$ prend ses valeurs dans $\overline{D}_n$ où la fonction C_b est régulière par hypothèse.

Par construction, le processus

$$\hat{C}_t = \mathbb{E}^{(t_0,S_0)}[H(S_T)1_{T<\theta_{t_0}}|\mathcal{F}_t] = e^{r(T-t)}C_b(t,S_t)1_{t\leq\theta_{t_0}}, \quad t\in[t_0,T], \tag{3.4.19}$$

où $\mathbb{E}^{(t_0,S_0)}$ désigne l'espérance sous $\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}$, est une martingale. Donc, par le théorème d'arrêt, $M_t^n = C_{t\wedge\tau_n}$ est aussi une martingale. Par la suite, on va omettre l'indice (t_0,S_0).

[9] à barrière simple (si $L=0$ ou $U=+\infty$) ou double.

Si $C_b \in C^{1,2}$ sur $[0,T) \times \overline{D}_n$, alors on peut appliquer le lemme d'Itô à $\hat{C}_b(t,S_t) \equiv e^{r(T-t)}C_b(t,S_t)$ entre t_0 et $t \wedge \tau_n$, $t \in [t_0,T)$:

$$M_t^n = \hat{C}_{t\wedge\tau_n} = \hat{C}_b(t\wedge\tau_n, S_{t\wedge\tau_n}) = \\ = \hat{C}_b(t_0,S_0) + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \left(\frac{\partial \hat{C}_b}{\partial t}(u,S_{u-}) + L^S \hat{C}_b(u,S_{u-}) \right) du \\ + \int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \sigma S_{u-} \frac{\partial \hat{C}_b}{\partial S}(u,S_{u-}) dW_u + \int_{[t_0,t\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}} [\hat{C}_b(u,S_{u-}e^y) - \hat{C}_b(u,S_{u-})] \tilde{J}_X(dt,dy), \tag{3.4.20}$$

grâce à l'équation (2.2.4). Montrons que les intégrales stochastiques dans la dernière ligne sont des martingales. Pour $u \in [t_0, t\wedge\tau_n]$, S_{u-} appartient à $\overline{D}_n$. Comme $\hat{C}_b$ est de classe $C^{1,2}$ sur $[t_0,t] \times \overline{D}_n$, nous avons $|\frac{\partial \hat{C}_b}{\partial S}| \leq c$ dans ce domaine. Par conséquent,

$$E[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} S_{u-}^2 |\frac{\partial \hat{C}_b}{\partial S}(u,S_{u-})|^2 du] \leq c^2 E[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} S_{u-}^2 du] < \infty, \tag{3.4.21}$$

d'après (3.4.5). Alors, par la relation d'isométrie pour les intégrales de Wiener, $\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} \sigma S_{u-} \frac{\partial \hat{C}_b}{\partial S}(u,S_{u-}) dW_u$ est aussi une intégrale de carré intégrable.

Pour le deuxième terme, remarquons d'abord que si $|y| \leq \eta$ avec un η suffisamment petit, alors $S_{u-}e^y \in D_{2n}$. Or sur ce domaine la dérivée $\frac{\partial \hat{C}_b}{\partial S}$ est uniformément bornée. Donc,

$$|\hat{C}_b(u,S_{u-}e^y) - \hat{C}_b(u,S_{u-})| \leq c|S_{u-}(e^y-1)|, \qquad |y| \leq \eta.$$

Pour $|y| > \eta$, on utilise la croissance linéaire de $\hat{C}_b$ (qui découle de la croissance linéaire de H) :

$$|\hat{C}_b(u,S_{u-}e^y) - \hat{C}_b(u,S_{u-})| \leq M(2 + S_{u-}(e^y+1)), \qquad |y| > \eta.$$

Nous obtenons que le processus prévisible $\psi(t,x) = \hat{C}_b(t,S_{t-}e^x) - \hat{C}_b(t,S_{t-})$ vérifie

$$\mathbb{E}[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} du \int_{\mathbb{R}} \nu(dy) |\psi(u,y)|^2] = \mathbb{E}[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} du \int_{\mathbb{R}} \nu(dy) |\hat{C}_b(u,S_{u-}e^y) - \hat{C}_b(u,S_{u-})|^2 \,] \\ \leq \mathbb{E}[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} du \left(S_{u-}^2 \int_{|y|\leq\eta} c^2 (e^y-1)^2 \nu(dy) + \int_{|y|>\eta} M^2 (2 + S_{u-}(e^y+1))^2 \nu(dy) \right)] \\ \leq \mathbb{E}[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} du \left(S_{u-}^2 c_1 \int_{|y|\leq\eta} y^2 \nu(dy) + c_2 \int_{|y|>\eta} (1 + S_{u-}^2 (e^{2y}+1)) \nu(dy) \right)] \\ = \left(c_1 \int_{|y|\leq\eta} y^2 \nu(dy) + c_2 \int_{|y|>\eta} (e^{2y}+1) \nu(dy) \right) E[\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} S_{u-}^2 du] \\ + c_2 \int_{|y|>\eta} \nu(dy)\ \mathbb{E}[t\wedge\tau_n - t_0] < \infty,$$

d'après (3.4.5). Par conséquent, l'intégrale de Poisson compensée

$$\int_{[t_0,t\wedge\tau_n]\times\mathbb{R}} [\hat{C}_b(u,S_{u-}e^y)-\hat{C}_b(u,S_{u-})]\tilde{J}_X(dt,dy)$$

est une martingale de carré intégrable. L'égalité (3.4.20) implique donc que

$$\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n}\left(\frac{\partial\hat{C}_b}{\partial t}(u,S_{u-})+L^S\hat{C}_b(u,S_{u-})\right)du \\ =\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} e^{r(T-u)}\left(\frac{\partial C_b}{\partial t}(u,S_{u-})+L^S C_b(u,S_{u-})-rC_b(u,S_{u-})\right)du \quad (3.4.22)$$

est aussi une martingale puisque tous les autres termes le sont. C'est également un processus continu à variation bornée. En effet, les dérivées de C_b sont bornées sur $[t_0,T)\times\overline{D}_n$ et le terme intégrale dans L^S peut être majoré comme précédemment. A savoir, on choisit $\eta>0$ tel que $S_{u-}e^y$ soit dans D_{2n}. La dérivée seconde $\frac{\partial^2 C_b}{\partial S^2}$ est uniformément bornée dans ce domaine, donc

$$\left|\int_{|y|\le\eta} e^{r(T-u)}[C_b(u,S_{u-}e^y)-C_b(u,S_{u-})-S_{u-}(e^y-1)\frac{\partial C_b}{\partial S}(u,S_{u-})]\nu(dy)\right| \\ \le ce^{r(T-u)}S_{u-}^2\int_{|y|\le\eta}(e^y-1)^2\nu(dy)<\infty.$$

Pour majorer le terme $\int_{|y|>\eta} C_b(u,S_{u-}e^y)\nu(dy)$, on utilise la croissance linéaire de C_b et la condition d'intégrabilité (3.4.5).

Une martingale continue à variation bornée est une constante [JS02, Chapitre I, Lemmes 4.14 b) et 4.13 b)], donc

$$\int_{t_0}^{t\wedge\tau_n} e^{r(T-u)}\left(\frac{\partial C_b}{\partial t}(u,S_{u-})+L^S C_b(u,S_{u-})-rC_b(u,S_{u-})\right)du=0 \quad (3.4.23)$$

$\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}$-presque sûrement. Si $S_0\in(L,U)$, alors $S_0\in D_n$ pour n suffisamment grand. Dans ce cas, $\tau_n>t_0$ $\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}$-presque sûrement, donc le domaine d'intégration dans (3.4.23) ne se réduit pas à $\{t_0\}$. Comme la fonction sous l'intégrale est continue par hypothèse, (3.4.23) implique qu'elle est nulle sur $[t_0,t\wedge\tau_n]$ $\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}$-presque sûrement. En particulier, comme $\mathbb{Q}^{(t_0,S_0)}[S_{t_0}=S_0]=1$, on obtient

$$\frac{\partial C_b}{\partial t}(t_0,S_0)+L^S C_b(t_0,S_0)-rC_b(t_0,S_0)=0. \quad (3.4.24)$$

Comme $(t_0,S_0)\in[0,T)\times(L,U)$ peut être choisi arbitrairement, l'équation est vérifiée sur $[0,T)\times(L,U)$, ce qu'il fallait démontrer.

La démonstration dans l'autre sens est plus facile. Soit $u\in C^{1,2}((0,T]\times(L,U))$ une solution de (3.4.16)–(3.4.18). En appliquant, comme précédemment, la formule d'Itô à

$\hat{C}_b(t, S_t)$, on obtient (3.4.20). L'intégrale par rapport à du est égale à zéro grâce à l'équation. Les autres termes sont des martingales, donc, en prenant l'espérance, on obtient

$$\hat{C}_b(t_0, S_0) = \mathbb{E}[\hat{C}_b(T \wedge \tau_n, S_{T\wedge\tau_n})]$$

ou, de façon équivalente,

$$C_b(t_0, S_0) = \mathbb{E}[e^{-r(T\wedge\tau_n - t_0)} C_b(T \wedge \tau_n, S_{T\wedge\tau_n})]. \tag{3.4.25}$$

Nous avons $T \wedge \tau_n \to T \wedge \theta_{t_0}$ quand $n \to \infty$. Par conséquent, d'après les conditions aux limites (3.4.17)–(3.4.18),

$$e^{-r(T\wedge\tau_n - t_0)} C_b(T \wedge \tau_n, S_{T\wedge\tau_n}) \longrightarrow e^{-r(T\wedge\theta_{t_0} - t_0)} C_b(T \wedge \theta_{t_0}, S_{T\wedge\theta_{t_0}}) = e^{-r(T-t_0)} H(S_T) 1_{T<\theta_{t_0}}.$$

Il reste à appliquer le théorème de la convergence dominée pour passer à la limite sous l'espérance dans (3.4.25). Pour cela, montrons que la fonction sous l'espérance possède une majorante intégrable. Comme H est à croissance linéaire, nous avons $H(S) \leq M(e^{rT} + S)$. La fonction $M(e^{rt} + S)$ est solution de (3.4.16) avec les conditions aux limites qui sont supérieures à celles de C_b. Donc, le principe de comparaison pour des solutions classiques [BCP68] implique que $C_b(t, S) \leq M(e^{rt} + S)$, pour tous t et S. Alors, $e^{-rT\wedge\tau_n} C_b(T \wedge \tau_n, S_{T\wedge\tau_n}) \leq M(1 + e^{-rT\wedge\tau_n} S_{T\wedge\tau_n})$ et $\mathbb{E}[M(1 + e^{-rT\wedge\tau_n} S_{T\wedge\tau_n})] = 2M$ par la propriété de martingale. En passant à la limite dans (3.4.25), on obtient

$$C_b(t_0, S_0) = e^{-r(T-t_0)} \mathbb{E}[H(S_T) 1_{T<\theta_{t_0}}].$$

La proposition est démontrée. □

Remarque 3.4.10. Cette proposition est aussi un théorème de vérification dans la mesure où nous *supposons* que C_b est de classe $C^{1,2}$ sur $[0, T) \times (L, U)$. L'idéal serait de trouver des conditions sur H et X pour que C_b soit effectivement $C^{1,2}$. Néanmoins, cette hypothèse est beaucoup plus faible et par conséquent plus réaliste que celle de la Proposition 3.2.1 (la bornitude uniforme des dérivées). Au moins, l'ensemble des cas où elle est vérifiée n'est pas vide (cf. l'exemple (3.3.4)–(3.3.6)).

3.5 Continuité des prix des options à barrières

Nous avons vu dans la Section 3.2.2 que les prix des options à barrières peuvent être non-réguliers. Comme l'illustre l'exemple suivant, si aucune restriction n'est imposée sur le processus de Lévy, la valeur d'une option peut même être discontinue pour tout t.

Exemple 3.5.1. Considérons $X_t = N_t^1 - N_t^2$ où N_t^i sont des processus de Poisson indépendants avec les intensités de sauts λ_1 et λ_2. On suppose pour simplifier que $r = 0$. Si $\lambda_2 = \lambda_1 e$, alors le processus de prix correspondant $S_t = S_0 e^{X_t}$ est une martingale.

Considérons dans ce modèle une option *knock-out* qui rapporte 0 ou 1 à la maturité selon que S_t a franchi ou non la barrière $U > S_0$ avant T :

$$H_T = 1_{T<\theta(S_0)}.$$

Ici, $\theta(S) = \inf\{t \geq 0 \mid Se^{X_t} \geq U\}$ est l'instant de la première sortie de $(0, U)$ en partant de S. Montrons que la valeur initiale de l'option

$$C(0, S) = \mathbb{E}[H_T | S_0 = S] = \mathbb{E}[1_{T<\theta(S)}]$$

n'est pas continue en $S^* = U/e$.

Soit $0 < \varepsilon < U - S^*$. Par définition, $\theta(S^* + \varepsilon) \leq \theta(S^* - \varepsilon)$. Donc,

$$\begin{aligned} C(0, S^* - \varepsilon) - C(0, S^* + \varepsilon) &= \mathbb{E}[1_{\{\theta(S^*+\varepsilon) \leq T < \theta(S^*-\varepsilon)\}}] \\ &= \mathbb{Q}\left(\theta(S^* + \varepsilon) \leq T < \theta(S^* - \varepsilon)\right). \end{aligned}$$

Considérons les réalisations de X telles que $N_T^1 = 1$ et $N_T^2 = 0$, c'est-à-dire, il y a un saut positif et pas de sauts négatifs avant T. Pour ces trajectoires, si S_t part de $S^* - \varepsilon$, alors il reste en-dessous de U, tandis qu'en partant de $S^* + \varepsilon$ il croise la barrière. Cela signifie que $\theta(S^* + \varepsilon) \leq T < \theta(S^* - \varepsilon)$. Donc,

$$C(0, S^* - \varepsilon) - C(0, S^* + \varepsilon) \;\geq\; \mathbb{Q}(N_T^1 = 1 \;\&\; N_T^2 = 0) \;=\; e^{-\lambda_1 T(e+1)} \lambda_1 T > 0.$$

Par conséquent, $S \mapsto C(0, S)$ est discontinue en $S = S^*$.

Dans cet exemple, il s'agit d'un processus d'activité finie sans terme de diffusion. Comme on a déjà noté, ce cas n'est pas intéressant pour la modélisation financière. Dans la section suivante, on montre que, en fait, dans beaucoup de cas pratiques, les prix d'options sont continus.

Pour étudier la continuité des valeurs des options à barrières on utilise les propriétés du *processus du premier passage*. Rappelons sa définition.

Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy. En suivant la notation de [Sat99], on définit

$$\begin{aligned} R_x &= \inf\{s \geq 0 \mid Y_s > x\}, \\ R''_x &= \inf\{s \geq 0 \mid Y_s \vee Y_{s-} \geq x\}. \end{aligned}$$

Notons que $\{R_x, x \geq 0\}$ est un processus à trajectoires croissantes ce qui permet de définir $R_{x-}(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} R_{x-\varepsilon}(\omega)$ et $R_{x+}(\omega) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} R_{x+\varepsilon}(\omega)$. Le processus R_x est continu à droite. En effet, par définition, il existe une suite $s_n \to 0$ telle que $R_x = \lim s_n$ et $Y_{s_n} > x$. Pour tout n, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $Y_{s_n} > x + \varepsilon$, d'où $s_n \geq R_{x+\varepsilon} \geq R_{x^+}$. Cela implique que $R_x \geq R_{x^+}$. De l'autre côté, $R_x \leq R_{x^+}$ par la croissance des trajectoires. Donc, $R_{x^+} = R_x$.

On va présenter quelques propriétés du processus $\{R_x\}$, essentielles pour la preuve de la continuité des valeurs d'options.

Lemme 3.5.2. *Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy de type B ou C.*[10] *Alors, nous avons*

$$\forall x > 0, \qquad \mathbb{Q}[R_{x-} = R_x] = 1. \tag{3.5.1}$$

[10] C'est-à-dire, $\sigma > 0$ ou $\nu(\mathbb{R}) = \infty$ (voir la Définition 2.1.1). Autrement dit, Y n'est pas un Poisson composé.

Démonstration. D'après le Lemme 49.6 de [Sat99], $R''_x = R_x$ presque sûrement. Comme R_x est croissant, nous avons $R_x \geq R_{x-}$. Montrons que $R_{x-} \geq R''_x$.

En effet, $R_{x-} \equiv s = \lim s_n$ avec $s_n = R_{x-1/n}$. Par définition, $\exists u_k \downarrow s_n$ tel que $Y_{u_k} > x - 1/n$. Par la continuité à droite de Y, nous avons $Y_{s_n} = \lim Y_{u_k} \geq x - 1/n$. Comme $\{s_n\}$ converge vers s, on peut en extraire une sous-suite monotone $s_n \uparrow s$ ou $s_n \downarrow s$. Dans le premier cas, on obtient $Y_{s-} \geq x$; dans le deuxième, $Y_s \geq x$. Donc, dans tous les cas, $Y_{s-} \vee Y_s \geq x$. Par la définition de R''_x, cela implique que $s \equiv R_{x-} \geq R''_x$.

Nous obtenons $R''_x = R_x \geq R_{x-} \geq R''_x$ p.s., d'où $R_x = R_{x-}$ p.s., ce qu'il fallait démontrer. □

Un renseignement important concernant $\{R_x\}$ est si $R_0 = 0$ presque sûrement, ce qui signifie que Y_t ne peut pas rester en-dessous de zéro pour un temps positif. Le Tableau 3.1 contient cette information, tirée du Théorème 47.5 de [Sat99], pour différents types de processus de Lévy. Notons que, dans tous les cas, $R_0 = 0$ p.s. ou $R_0 > 0$ p.s. (il n'existe pas d'autres possibilités).

Définissons maintenant le *processus du maximum* de Y :

$$M_t \;=\; \sup_{0 \leq s \leq t} Y_s.$$

Le lemme suivant montre que, si Y n'est pas un Poisson composé, la distribution de M_t n'a pas d'atomes sauf éventuellement en $x = 0$.

Lemme 3.5.3. *Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy de type B ou C. Alors, pour tout $t \geq 0$, $x > 0$,*

$$\mathbb{Q}[M_t = x] \;=\; 0.$$

Démonstration. Pour $t = 0$, le résultat est trivial. Soit $t > 0$. En suivant les notations de [Sat99], on pose

$$\Lambda_t(\omega) = \inf\{s \in [0,t] \mid Y_s(\omega) \vee Y_{s-}(\omega) = M_t(\omega)\}. \tag{3.5.2}$$

On utilise un résultat auxiliaire montré dans le Lemme 49.6 de [Sat99] :

$$\mathbb{Q}[M_t = x,\ \Lambda_t < t] \;=\; 0.$$

Ce résultat implique que

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[M_t = x] &= \mathbb{Q}[M_t = x,\ \Lambda_t < t] + \mathbb{Q}[M_t = x,\ \Lambda_t = t] \\ &= \mathbb{Q}[M_t = x,\ \Lambda_t = t] \leq \mathbb{Q}[Y_t \vee Y_{t-} = x] = \mathbb{Q}[Y_t = x] = 0,\end{aligned}$$

car $Y_t = Y_{t-}$ presque sûrement et Y_t a une distribution continue d'après le Théorème 27.4 [Sat99]. □

Le processus M_t est croissant et càdlàg puisque Y_t est càdlàg. On l'utilise pour démontrer le lemme suivant.

Lemme 3.5.4. *Si $\{Y_t\}$ est de type B ou C, alors, $\forall x \geq 0$, $t \geq 0$, $(t,x) \neq (0,0)$,*

$$\mathbb{Q}[R_x = t] \;=\; 0.$$

Démonstration. Par la définition de R_x,

$$\mathbb{Q}[R_x = t] = \mathbb{Q}[\forall s < t,\ Y_s \leq x;\ \exists s_n \downarrow t,\ Y_{s_n} > x] \leq \mathbb{Q}[Y_{t-} \leq x;\ Y_t \geq x] = \\ \mathbb{Q}[Y_{t-} \leq x \leq Y_t,\ Y_{t-} \neq Y_t] + \mathbb{Q}[Y_{t-} = Y_t = x] \leq \mathbb{Q}[Y_{t-} \neq Y_t] + \mathbb{Q}[Y_t = x] = 0,$$

puisqu'un processus de Lévy n'a pas de points de discontinuité aux temps fixes presque sûrement et que Y_t a une distribution continue pour $t > 0$ (Théorème 27.4 [Sat99]) ; si $t = 0$, $x > 0$, il est évident que $\mathbb{Q}[Y_0 = x] = 0$. □

Lemme 3.5.5. *Si $\{Y_t\}$ est de type B ou C, alors, $\forall t \geq 0$, $\forall x > 0$,*

$$\mathbb{Q}[R_x \leq t < R_{x+\varepsilon}] \to 0, \tag{3.5.3}$$
$$\mathbb{Q}[R_{x-\varepsilon} \leq t < R_x] \to 0, \tag{3.5.4}$$

quand $\varepsilon \downarrow 0$.

Démonstration. Pour tout $t \geq 0$, $x \geq 0$, la suite $\Omega_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid R_x(\omega) \leq t < R_{x+\varepsilon}(\omega)\}$ est décroissante et $\bigcap \Omega_\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid R_x(\omega) = t\}$, par la continuité à droite de R_x. Par conséquent,

$$\mathbb{Q}[R_x \leq t < R_{x+\varepsilon}] \;\to\; \mathbb{Q}[R_x = t] = 0,$$

d'après le Lemme 3.5.4.

De façon similaire, pour tout $t \geq 0$, $x > 0$,

$$\mathbb{Q}[R_{x-\varepsilon} \leq t < R_x] \;\to\; \mathbb{Q}[R_{x-} \leq t < R_x] \;\leq\; \mathbb{Q}[R_{x-} \neq R_x] \;=\; 0,$$

d'après le Lemme 3.5.2. □

On pose $Y_t = rt + X_t$. Le triplet de Lévy de $\{Y_t\}$ est $(\sigma, r + \gamma, \nu)$, où γ est déterminé par la condition de martingale (2.2.1). Donc, $\{Y_t\}$ est du même type que $\{X_t\}$ au sens de la Définition 2.1.1. Cependant, les propriétés de R_0, qui dans le cas de variation bornée dépendent de la dérive, ne sont pas nécessairement les mêmes pour les deux processus. Il est donc important de préciser que $\{R_x\}$ sera toujours défini par rapport à $\{Y_t\}$.

Nous sommes prêts à étudier la continuité des options à barrières. On commence par le cas d'une barrière supérieure $U > S_0$.

Proposition 3.5.6. (Continuité des options *up-and-out***)**
Soit Y_t de type B ou C et $R_0 = 0$ p.s. Supposons que $H : (0,U) \to [0,\infty)$ est lipschitzienne :

$$\forall S_1, S_2 \in (0,U), \quad |H(S_1) - H(S_2)| \leq c|S_1 - S_2|,$$

avec $c > 0$. Posons $u = \ln(U/S_0)$. Alors, la fonction

$$f_u(\tau, x) = \begin{cases} \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau}) 1_{\{\tau < R_{u-x}\}}], & x < u, \\ 0, & x \geq u, \end{cases} \tag{3.5.5}$$

est continue sur $(0,T] \times \mathbb{R}$.

Remarque 3.5.7. On peut vérifier directement que $C(t,S) = e^{-r(T-t)} f_u(T-t, \ln(S/S_0))$ est une autre représentation de la fonction définie par (3.2.5). Rappelons qu'elle donne la valeur d'une option *up-and-out* de *payoff* $H(S_T)1_{T<\inf\{t\geq 0,\, S_t\geq U\}}$: $C(t,S)$ est le prix de l'option au temps t quand le sous-jacent vaut S, à condition que S_t n'a pas encore croisé la barrière (cf. (3.2.6)). Notons également que, grâce au Lemme 3.5.3, on peut remplacer dans la définition de f_u l'indicatrice de $\{\tau < R_{u-x}\}$ par celle de $\{M_\tau < u-x\}$. En effet,

$$\mathbb{Q}[M_\tau < u-x] \;\leq\; \mathbb{Q}[\tau < R_{u-x}] \leq \mathbb{Q}[M_\tau \leq u-x] = \mathbb{Q}[M_\tau < u-x].$$

Parfois, il sera commode d'utiliser cette écriture équivalente (cf. Proposition 4.3.1).

Démonstration. Nous allons d'abord montrer la continuité en x et en τ séparément et ensuite utiliser les estimations obtenues pour montrer la continuité en deux variables, à l'aide de l'inégalité triangulaire.

Comme H est lipschitzienne, elle est bornée sur $(0,U)$. Soit $M = \sup_{(0,U)} H(S)$. On montre d'abord la continuité par rapport à x, pour tout $\tau > 0$. Si $x < u$ et $\varepsilon \in (0, u-x)$, on a

$$\begin{aligned}
|f_u(\tau, x+\varepsilon) - f_u(\tau,x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x-\varepsilon}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x}\}}]| \\
&\leq |\mathbb{E}[(H(S_0e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0e^{x+Y_\tau}))1_{\{\tau<R_{u-x-\varepsilon}\}}]| + \\
&\quad + |\mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{R_{u-x-\varepsilon}\leq\tau<R_{u-x}\}}]| \\
&\leq cS_0e^{x+r\tau}(e^\varepsilon - 1) + M\mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \leq \tau < R_{u-x}] \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0,
\end{aligned}$$

d'après (3.5.4). On a utilisé ici la condition de martingale $\mathbb{E}e^{Y_\tau} = e^{r\tau}$ et le fait que $\tau < R_{u-x}$ implique $Y_\tau \leq u-x$, ce qui est équivalent à $S_0e^{x+Y_\tau} \leq U$.

De façon similaire, pour tout $x < u$,

$$\begin{aligned}
|f_u(\tau, x-\varepsilon) - f_u(\tau,x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x+\varepsilon}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x}\}}]| \\
&\leq |\mathbb{E}[(H(S_0e^{x-\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0e^{x+Y_\tau}))1_{\{\tau<R_{u-x}\}}]| + \\
&\quad + \mathbb{E}[H(S_0e^{x-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{R_{u-x}\leq\tau<R_{u-x+\varepsilon}\}}] \\
&\leq cS_0e^{x+r\tau}(1 - e^{-\varepsilon}) + M\mathbb{Q}[R_{u-x} \leq \tau < R_{u-x+\varepsilon}] \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0,
\end{aligned}$$

par (3.5.3). Cela prouve la continuité de $f_u(\tau,\cdot)$ pour tout $x \neq u$.

La continuité à droite en $x = u$ est immédiate, puisque $f = 0$ si $x \geq u$. Il reste à vérifier la continuité à gauche. Pour tout $\tau > 0$,

$$|f_u(\tau, u-\varepsilon) - f_u(\tau,u)| = |\mathbb{E}[H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_\varepsilon\}}]| \leq M\mathbb{Q}[R_\varepsilon > \tau] \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} M\mathbb{Q}[R_0 \geq \tau] = 0,$$

puisque R_x est continu à droite et que $R_0 = 0$ presque sûrement. Par conséquent, $\forall \tau > 0$, $f_u(\tau,\cdot)$ est continu sur $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant la continuité en temps. Pour un $x < u$ fixé et $t \geq s \geq 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}|f_u(t,x) - f_u(s,x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_t})1_{\{t<R_{u-x}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_s})1_{\{s<R_{u-x}\}}]| \\ &= |\mathbb{E}[(H(S_0 e^{x+Y_t}) - H(S_0 e^{x+Y_s}))1_{\{t<R_{u-x}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_s})1_{\{s<R_{u-x}\leq t\}}]| \\ &\leq c\mathbb{E}[S_0 e^{x+Y_s}|e^{Y_{t-s}} - 1|\, 1_{\{t<R_{u-x}\}}] + M\mathbb{Q}[s < R_{u-x} \leq t] \\ &\leq cS_0 e^{x+rs}\, \mathbb{E}|e^{Y_{t-s}} - 1| + M\mathbb{Q}[s < R_{u-x} \leq t].\end{aligned}$$

La convergence vers zéro du premier terme, quand $t \to s$, a déjà été démontrée dans la Proposition 3.4.1. Soit $t_n \downarrow s$ une suite quelconque. Notons $\Omega_n = \{\omega \in \Omega \mid s < R_{u-x}(\omega) \leq t_n\}$. Alors, $\{\Omega_n\}$ décroît quand $n \to \infty$ et

$$\bigcap_{n>0} \Omega_n = \{\omega \in \Omega \mid \forall n, s < R_{u-x}(\omega) \leq t_n\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid s < R_{u-x}(\omega) \leq s\} = \emptyset.$$

Donc, $\mathbb{Q}[s < R_{u-x} \leq t] \to 0$ quand $t \to s$.

Pour montrer la continuité de f_u en tant qu'une fonction de deux variables, considérons d'abord un point $(\tau, x) \in (0,T] \times (-\infty, u)$ et des accroissements $\Delta t, \Delta x \in \mathbb{R}$ suffisamment petits pour que $(\tau + \Delta t, x + \Delta x)$ reste dans le même domaine. Il faut montrer que

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x)\to 0} |f_u(\tau + \Delta t, x + \Delta x) - f_u(\tau, x)| = 0. \tag{3.5.6}$$

Par l'inégalité triangulaire, nous avons

$$\begin{aligned}&|f_u(\tau + \Delta t, x + \Delta x) - f_u(\tau, x)| \\ &\qquad \leq |f_u(\tau + \Delta t, x + \Delta x) - f_u(\tau, x + \Delta x)| + |f_u(\tau, x + \Delta x) - f_u(\tau, x)|. \end{aligned} \tag{3.5.7}$$

En utilisant les estimations précédentes, nous obtenons

$$\begin{aligned}|f_u(\tau + \Delta t, x + \Delta x) - f_u(\tau, x + \Delta x)| &\leq cS_0 e^{x+\Delta x}(e^{r\tau}1_{\Delta t\geq 0} + e^{r(\tau+\Delta t)}1_{\Delta t<0})\mathbb{E}|e^{Y_{|\Delta t|}} - 1| \\ &\quad + M(\mathbb{Q}[\tau < R_{u-x-\Delta x} \leq \tau + \Delta t]1_{\Delta t\geq 0} + \mathbb{Q}[\tau + \Delta t < R_{u-x-\Delta x} \leq \tau]1_{\Delta t<0}) \\ &\leq cS_0 e^{x+\Delta x+r\tau}\mathbb{E}|e^{Y_{|\Delta t|}} - 1| + M\mathbb{Q}[|R_{u-x-\Delta x} - \tau| \leq \Delta t]. \end{aligned} \tag{3.5.8}$$

Cette expression dépendant de Δt et Δx, il nous faut une majoration uniforme par rapport à l'un des deux paramètres pour passer à la limite double. Remarquons que pour tout $\varepsilon > 0$ suffisamment petit, nous avons, $\forall |\Delta x| \leq \varepsilon$, $R_{u-x-\varepsilon} \leq R_{u-x-\Delta x} \leq R_{u-x+\varepsilon}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[|R_{u-x-\Delta x} - \tau| \leq \Delta t] &\leq \mathbb{Q}[|R_{u-x-\varepsilon} - \tau| \leq \Delta t] + \mathbb{Q}[|R_{u-x+\varepsilon} - \tau| \leq \Delta t] \\ &\quad + \mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \leq \tau \leq R_{u-x+\varepsilon}].\end{aligned}$$

Comme la partie droite ne dépend plus de Δx, on peut écrire

$$\limsup_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} \mathbb{Q}[|R_{u-x-\Delta x} - \tau| \le \Delta t] \le \mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} = \tau] + \mathbb{Q}[R_{u-x+\varepsilon} = \tau] + \mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \le \tau \le R_{u-x+\varepsilon}] = \mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \le \tau \le R_{u-x+\varepsilon}], \quad (3.5.9)$$

d'après le Lemme 3.5.4. Pour le deuxième terme dans (3.5.7), nous obtenons

$$|f_u(\tau, x+\Delta x) - f_u(\tau, x)| \le cS_0 e^{x+r\tau}|e^{\Delta x} - 1| + + M(\mathbb{Q}[R_{u-x-\Delta x} \le \tau < R_{u-x}]1_{\Delta x \ge 0} + \mathbb{Q}[R_{u-x} \le \tau < R_{u-x-\Delta x}]1_{\Delta x<0}). \quad (3.5.10)$$

Comme nous avons déjà montré, cette expression tend vers zéro quand $\Delta x \to 0$. En résumant (3.5.7), (3.5.8), (3.5.9) et (3.5.10), nous obtenons

$$0 \le \liminf_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} |f_u(\tau+\Delta t, x+\Delta x) - f_u(\tau, x)| \le \limsup_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} |f_u(\tau+\Delta t, x+\Delta x) - f_u(\tau, x)| \le M\mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \le \tau \le R_{u-x+\varepsilon}]. \quad (3.5.11)$$

Quand $\varepsilon \to 0$, nous avons

$$\mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \le \tau \le R_{u-x+\varepsilon}] \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{Q}[\forall \varepsilon,\ R_{u-x-\varepsilon} \le \tau \le R_{u-x+\varepsilon}] \le \mathbb{Q}[R_{(u-x)-} \le \tau \le R_{u-x}] = \mathbb{Q}[R_{u-x} = \tau] = 0,$$

d'après les Lemmes 3.5.2 et 3.5.4. Par conséquent, (3.5.11) implique (3.5.6).

Nous avons montré la continuité de f_u en deux variables dans $(0,T]\times(-\infty,u)$. Il reste à vérifier la continuité sur le bord $(0,T]\times\{u\}$. Nous avons, pour tout $\delta > 0$ suffisamment petit et tout $|\Delta t| \le \delta$,

$$|f_u(\tau+\Delta t, u+\Delta x) - f_u(\tau, u)| = |f_u(\tau+\Delta t, u+\Delta x)|1_{\Delta x<0} \le M\mathbb{Q}[R_{|\Delta x|} > \tau+\Delta t] \le M\mathbb{Q}[R_{|\Delta x|} > \tau-\delta].$$

La partie droite ne dépend pas de Δt et tend vers zéro quand $\Delta x \to 0$, comme nous l'avons déjà démontré. Par conséquent,

$$\lim_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} |f_u(\tau+\Delta t, u+\Delta x) - f_u(\tau, u)| = 0.$$

La démonstration est maintenant terminée. □

Remarque 3.5.8. Comme l'indique la démonstration, si $\{Y_t\}$ est de type B ou C, $f_u(\tau, x)$ est continue sur $(0,T]\times\mathbb{R}\setminus\{u\}$. Si la condition $R_0 = 0$ p.s. n'est pas vérifiée, f_u peut être discontinue à la barrière. On verra plus tard (Proposition 3.5.14) que f_u est en effet discontinue en $x = u$ si $\lim_{x\to u} H(x) \ne 0$.

Pour étudier des options à barrière inférieure, on définit un processus $\{R_x^-,\ x \geq 0\}$ par

$$R_x^- \quad = \quad \inf\{s \geq 0 | Y_s < -x\} = \inf\{s \geq 0 \mid -Y_s > x\}.$$

Il représente le temps du premier passage de Y_t au-dessous de $(-x)$. De façon équivalente, R_x^- peut être vu comme le temps du premier passage de $(-Y_t)$ au-dessus de x. Par conséquent, les Lemmes 3.5.2–3.5.5 s'appliquent à R_x^- si $\{-Y_t\}$ (le *processus dual* de $\{Y_t\}$) vérifie les conditions correspondantes. Le triplet générateur de $\{-Y_t\}$ étant $(\sigma, -(r+\gamma), \nu(-dx))$, le processus dual a le même type que Y_t (au sens de la Définition 2.1.1). Notons cependant que $R_0 = 0$ p.s. n'implique pas $R_0^- = 0$ p.s., comme on peut le voir dans le Tableau 3.1.

Proposition 3.5.9. (Continuité des options *down-and-out***)**
Soit $\{Y_t\}$ de type B ou C et $R_0^- = 0$ p.s. Supposons que $H : (L, \infty) \to [0, \infty)$ est lipschitzienne :

$$\forall S_1, S_2 \in (L, \infty), \quad |H(S_1) - H(S_2)| \leq c|S_1 - S_2|,$$

avec $L < S_0$, $c > 0$. Posons $l = \ln(L/S_0)$. Alors, la fonction

$$f_l(\tau, x) = \begin{cases} \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau}) 1_{\{\tau < R_{x-l}^-\}}], & x > l, \\ 0, & x \leq l, \end{cases} \tag{3.5.12}$$

est continue sur $(0, T] \times \mathbb{R}$ (f_l représente la valeur forward d'une option down-and-out de payoff $H(S_T) 1_{T < \inf\{t \geq 0,\ S_t \leq L\}}$).

Démonstration. La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.5.6. La différence principale est que H peut être non bornée ce qui amène à affiner certaines estimations.

Pour montrer la continuité de $f(\tau, \cdot)$ en $x > l$ (pour un $\tau > 0$ fixé), on écrit :

$$\begin{aligned} |f_l(\tau, x+\varepsilon) - f_l(\tau, x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) 1_{\{\tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau}) 1_{\{\tau < R_{x-l}^-\}}]| \\ &\leq |\mathbb{E}[(H(S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0 e^{x+Y_\tau})) 1_{\{\tau < R_{x-l}^-\}}]| + \\ &\qquad + \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}]. \end{aligned}$$

Le premier terme peut être estimé comme précédemment et donc tend vers zéro quand $\varepsilon \downarrow 0$. Pour le second terme, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}] &\leq \mathbb{E}[C(1 + S_0 e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}] \\ &= C\mathbb{Q}[R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-] + C S_0 e^{x+\varepsilon+r\tau} \mathbb{E}[e^{Y_\tau} 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}]. \end{aligned} \tag{3.5.13}$$

La quantité $e^{Y_\tau} 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}}$ est bornée par une variable intégrable e^{Y_τ} et converge vers zéro en probabilité car

$$\forall \sigma > 0, \quad \mathbb{Q}[e^{Y_\tau} 1_{\{R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-\}} > \sigma] \leq \mathbb{Q}[R_{x-l}^- \leq \tau < R_{x+\varepsilon-l}^-] \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0,$$

d'après (3.5.3). Par conséquent, le théorème de convergence dominée implique

$$\mathbb{E}[e^{Y_\tau} 1_{\{R^-_{x-l} \le \tau < R^-_{x+\varepsilon-l}\}}] \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} 0, \tag{3.5.14}$$

et donc les deux termes dans (3.5.13) tendent vers zéro quand $\varepsilon \downarrow 0$.

En utilisant la même technique, on peut montrer que $|f_l(\tau, x-\varepsilon) - f_l(\tau, x)| \to 0$, $\forall x > l$, et que $|f_l(\tau, l-\varepsilon)| \to 0$ quand $\varepsilon \downarrow 0$ ce qui prouve la continuité de f_l en x.

De façon similaire, pour montrer la continuité en temps, on écrit pour un $x > l$ fixé et tous $t \ge s \ge 0$:

$$\begin{aligned}
|f_l(t,x) - f_l(s,x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_t}) 1_{\{t < R^-_{x-l}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_s}) 1_{\{s < R^-_{x-l}\}}]| \\
&= |\mathbb{E}[(H(S_0 e^{x+Y_t}) - H(S_0 e^{x+Y_s})) 1_{\{t < R^-_{x-l}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_s}) 1_{\{s < R^-_{x-l} \le t\}}]| \\
&\le c S_0 e^{x+rs} \mathbb{E}|e^{Y_{t-s}} - 1| + C\mathbb{Q}[s < R^-_{x-l} \le t] + C S_0 e^x \mathbb{E}[e^{Y_s} 1_{\{s < R^-_{x-l} \le t\}}].
\end{aligned}$$

La convergence vers zéro des deux premiers termes quand $t \to s$ a déjà été prouvée. Le dernier terme peut être traité de la même manière que (3.5.14).

Pour montrer la continuité en deux variables, on procède par l'inégalité triangulaire comme dans la Proposition 3.5.6. Le seul terme nouveau qui apparaît dans l'estimation de $|f_l(\tau + \Delta t, x + \Delta x) - f_l(\tau, x + \Delta x)|$ est le suivant :

$$C S_0 e^{x+\Delta x} \left(\mathbb{E}[e^{Y_\tau} 1_{\{\tau < R^-_{x+\Delta x-l} \le \tau + \Delta t\}}] 1_{\Delta t \ge 0} + \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{\tau + \Delta t < R^-_{x+\Delta x-l} \le \tau\}}] 1_{\Delta t < 0} \right). \tag{3.5.15}$$

Comme précédemment, nous allons le majorer uniformément en $|\Delta x| \le \varepsilon$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{\tau+\Delta t < R^-_{x+\Delta x-l} \le \tau\}}] \le \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{|R^-_{x+\Delta x-l} - \tau| \le \Delta t\}}] \\
&\quad \le \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{|R^-_{x+\varepsilon-l} - \tau| \le \Delta t\}}] + \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{|R^-_{x-\varepsilon-l} - \tau| \le \Delta t\}}] + \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{R^-_{x-\varepsilon-l} \le \tau \le R^-_{x+\varepsilon-l}\}}].
\end{aligned}$$

Quand $\Delta t \to 0$, nous avons, pour presque tout ω,

$$\begin{aligned}
&e^{Y_{\tau+\Delta t}(\omega)} \to e^{Y_\tau(\omega)}, \\
&1_{\{|R^-_{x+\varepsilon-l}(\omega) - \tau| \le \Delta t\}} \to 1_{\{R^-_{x+\varepsilon-l}(\omega) = \tau\}} = 0, \\
&1_{\{|R^-_{x-\varepsilon-l}(\omega) - \tau| \le \Delta t\}} \to 1_{\{R^-_{x-\varepsilon-l}(\omega) = \tau\}} = 0.
\end{aligned}$$

Par le théorème de convergence dominée, nous obtenons donc

$$\limsup_{(\Delta t, \Delta x) \to 0} \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{\tau+\Delta t < R^-_{x+\Delta x-l} \le \tau\}}] \le \mathbb{E}[e^{Y_\tau} 1_{\{R^-_{x-\varepsilon-l} \le \tau \le R^-_{x+\varepsilon-l}\}}]. \tag{3.5.16}$$

Puisque les trajectoires de R^-_x sont croissantes, nous avons

$$1_{\{R^-_{x-\varepsilon-l} \le \tau \le R^-_{x+\varepsilon-l}\}} \to 1_{\{R^-_{(x-l)-} \le \tau \le R^-_{x-l}\}} = 1_{\{R^-_{x-l} = \tau\}} = 0 \quad \text{p.s.}$$

quand $\varepsilon \to 0$. Par conséquent, (3.5.16) implique

$$\lim_{(\Delta t,\Delta x)\to 0} \mathbb{E}[e^{Y_{\tau+\Delta t}} 1_{\{\tau+\Delta t<R^-_{x+\Delta x-l}\le\tau\}}] = 0. \tag{3.5.17}$$

La démonstration pour l'autre terme dans (3.5.15) est complètement analogue. □

Enfin, on présente un résultat de continuité pour des options double-barrière. Pour $L < S_0 < U$, on pose comme précédemment $l = \ln(L/S_0)$ et $u = \ln(U/S_0)$.

Proposition 3.5.10. (Continuité des options double-barrière)
Soit $\{Y_t\}$ de type B ou C avec $R_0 = 0$ et $R^-_0 = 0$ p.s. Supposons que $H : (L, U) \to [0, \infty)$ est lipschitzienne :

$$\forall S_1, S_2 \in (L, U), \quad |H(S_1) - H(S_2)| \le c|S_1 - S_2|.$$

Alors, la valeur forward d'une option double-barrière de payoff $H(S_T)1_{T<\inf\{t\ge 0,\, S_t\notin(L,U)\}}$ définie par

$$f_d(\tau, x) = \begin{cases} \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x}\wedge R^-_{x-l}\}}], & x \in (l, u), \\ 0, & x \notin (l, u) \end{cases} \tag{3.5.18}$$

est continue sur $(0, T] \times \mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $M = \sup_{(L,U)} H(S)$. Comme dans les propositions précédentes, on montre la continuité de f_d à droite et à gauche en chaque point $x \in [l, u]$ en utilisant le Lemme 3.5.5. Par exemple, $\forall \tau > 0$, $\forall x \in (l, u)$,

$$\begin{aligned}
|f_d(\tau, x+\varepsilon) - f_d(\tau, x)| &= \\
&= |\mathbb{E}[H(S_0e^{x+\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x-\varepsilon}\wedge R^-_{x+\varepsilon-l}\}}] - \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x}\wedge R^-_{x-l}\}}]| \\
&\le |\mathbb{E}[(H(S_0e^{x+\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0e^{x+Y_\tau}))1_{\{\tau<R_{u-x-\varepsilon}\wedge R^-_{x-l}\}}]| + \\
&\quad + \mathbb{E}[H(S_0e^{x+\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_{u-x-\varepsilon}\}}1_{\{R^-_{x-l}\le\tau<R^-_{x+\varepsilon-l}\}}] + \\
&\quad + \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<R^-_{x-l}\}}1_{\{R_{u-x-\varepsilon}\le\tau<R_{u-x}\}}] \\
&\le cS_0e^{x+r\tau}(e^\varepsilon - 1) + M\mathbb{Q}[R^-_{x-l} \le \tau < R^-_{x+\varepsilon-l}] + M\mathbb{Q}[R_{u-x-\varepsilon} \le \tau < R_{u-x}] \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0.
\end{aligned}$$

On ne donne pas la preuve entière en détail puisqu'elle répète presque littéralement les preuves des Propositions 3.5.6 et 3.5.9. □

On va montrer maintenant que les conditions sur le processus données dans les Propositions 3.5.6–3.5.10 sont en fait *nécessaires* pour la continuité des options dans le sens suivant : si ces conditions ne sont pas vérifiées et que H ne s'annule pas sur la barrière, alors le prix de l'option est discontinu à la barrière.

On aura besoin de quelques lemmes. Le résultat suivant complète en quelque sorte le Lemme 3.5.3.

Lemme 3.5.11. *Soit $\{X_t\}$ un processus de Lévy. Soient R_x le processus du premier passage et M_t le processus du maximum relatifs à X. Si $R_0 > 0$ p.s. alors, $\forall t > 0$,*

$$\mathbb{Q}[M_t = 0] \;>\; 0. \tag{3.5.19}$$

Démonstration. Procédons au raisonnement par l'absurde : supposons qu'il existe $t_* > 0$ tel que $\mathbb{Q}[M_{t_*} = 0] = 0$. Alors, pour tout $t \geq t_*$, $\mathbb{Q}[M_t = 0] = 0$. On a l'identité suivante ([Sat99],(47.10)) : $\forall q > 0$,

$$q\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{Q}[M_t = 0]dt \;=\; \exp\left[-\int_0^\infty t^{-1}e^{-qt}\mathbb{Q}[X_t > 0]dt\right].$$

Considérons la partie gauche :

$$q\int_0^\infty e^{-qt}\mathbb{Q}[M_t = 0]dt \;=\; q\int_0^{t_*} e^{-qt}\mathbb{Q}[M_t = 0]dt \;\leq\; q\int_0^{t_*} dt \;\to\; 0$$

quand $q \to 0$. D'un autre coté, pour la partie gauche, on obtient

$$\exp\left[-\int_0^\infty t^{-1}e^{-qt}\mathbb{Q}[X_t > 0]dt\right] \quad\xrightarrow{q\to 0}\quad \exp\left[-\int_0^\infty t^{-1}\mathbb{Q}[X_t > 0]dt\right] \quad> \quad 0,$$

puisque $\int_0^\infty t^{-1}\mathbb{Q}[X_t > 0]dt < \infty$ d'après le Théorème 47.2 de [Sat99]. Cette contradiction termine la démonstration. □

Lemme 3.5.12. *Soit ν une mesure de Lévy et $\{R_t^\varepsilon\}$ un processus de Lévy caractérisé par le triplet $(\gamma_\varepsilon, \sigma_\varepsilon, \nu 1_{|x|<\varepsilon})$ avec γ_ε, $\sigma_\varepsilon \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. Alors, $\forall a > 0$, $\forall \tau \geq 0$,*

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |R_t^\varepsilon| \geq a] \;\xrightarrow{\varepsilon\to 0}\; 0. \tag{3.5.20}$$

Démonstration. Posons $Z_t^\varepsilon = R_t^\varepsilon - \gamma_\varepsilon t$. Le triplet caractéristique de Z_t^ε est $(0, \sigma_\varepsilon, \nu\mathbf{1}_{|x|<\varepsilon})$ d'où $\mathbb{E}Z_t^\varepsilon = 0$. On a

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |R_t^\varepsilon| \geq a] \;\leq\; \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_t^\varepsilon| \geq a - |\gamma_\varepsilon|\tau] \;\leq\; \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_t^\varepsilon| \geq a/2]$$

pour ε suffisamment petits. Par l'inégalité de Chebyshev,

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_t^\varepsilon| \geq a/2] \;\leq\; 2\frac{\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_t^\varepsilon|]}{a}.$$

En utilisant l'estimation (25.16) de [Sat99] [11], on obtient

$$\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_t^\varepsilon|] \;\leq\; 8\mathbb{E}|Z_\tau^\varepsilon| \;\leq\; 8\sqrt{\mathbb{E}(Z_\tau^\varepsilon)^2} \;=\; 8\sqrt{\tau(\sigma_\varepsilon^2 + \int_{|x|<\varepsilon} x^2\nu(dx))} \xrightarrow{\varepsilon\to 0} 0,$$

ce qui implique (3.5.20). □

[11] $\mathbb{E}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |X_t|] \leq 8\mathbb{E}|X_\tau|$ pourvu que $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ et $\mathbb{E}X_t = 0$.

Lemme 3.5.13. *Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy tel que $R_0 > 0$ p.s. Soit $(-\gamma_0)$ la dérive de Y ($\gamma_0 \geq 0$).*[12] *Alors, $\forall \eta > 0$, $\forall \tau < \eta/\gamma_0$,*

$$\mathbb{Q}[M_\tau = 0,\ Y_\tau \geq -\eta] \ > \ 0. \tag{3.5.21}$$

Démonstration. Supposons d'abord que $\gamma_0 > 0$. On décompose Y_τ de la manière suivante : $Y_\tau = -\gamma_0\tau + Z_\tau^{\varepsilon,+} + Z_\tau^{\varepsilon,-} + X_\tau^\varepsilon$, où $Z^{\varepsilon,+}$, $Z^{\varepsilon,-}$, X^ε sont des processus de Lévy indépendants ; $Z^{\varepsilon,+}$ et $Z^{\varepsilon,-}$ représentent respectivement les petits sauts positifs et négatifs de Y, de taille inférieure à $\varepsilon > 0$ (X^ε a donc des sauts plus grands que ε). Comme $R_0 > 0$ p.s., Y_τ n'a pas de composante brownienne.

On obtient donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}[M_\tau = 0,\ Y_\tau \geq -\eta] \geq \\
&\quad \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |X_t^\varepsilon| = 0,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} \{-\gamma_0 t + Z_t^{\varepsilon,+} + Z_t^{\varepsilon,-}\} = 0,\ Z_\tau^{\varepsilon,+} + Z_\tau^{\varepsilon,-} \geq \gamma_0\tau - \eta] \\
&\quad\quad \geq \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |X_t^\varepsilon| = 0]\, \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} \{-\gamma_0 t + Z_t^{\varepsilon,+}\} = 0,\ Z_\tau^{\varepsilon,-} \geq \gamma_0\tau - \eta] \\
&\quad\quad = \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |X_t^\varepsilon| = 0]\, \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} \{-\gamma_0 t + Z_t^{\varepsilon,+}\} = 0]\, \mathbb{Q}[Z_\tau^{\varepsilon,-} \geq \gamma_0\tau - \eta].
\end{aligned} \tag{3.5.22}$$

Le premier terme est minoré par la probabilité que X^ε n'a pas sauté avant τ :

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |X_t^\varepsilon| = 0] \ \geq \ \exp[-\tau \int_{|x|\geq\varepsilon} \nu(dx)] > 0.$$

Pour estimer le deuxième terme, on s'aperçoit que le processus $\{-\gamma_0 t + Z_t^{\varepsilon,+}\}$ vérifie les hypothèses du Lemme 3.5.11, d'où $\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{-\gamma_0 t + Z_t^{\varepsilon,+}\} = 0] > 0$.

Considérons le dernier terme. Posons $a = \eta - \gamma_0\tau$ ($a > 0$ par hypothèse). On a

$$\mathbb{Q}[Z_\tau^{\varepsilon,-} \ \geq \ \gamma_0\tau - \eta] \ \geq \ \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_\tau^{\varepsilon,-}| \ \leq \ a] \ = \ 1 - \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} |Z_\tau^{\varepsilon,-}| \ > \ a] \ \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \ 1,$$

d'après le Lemme 3.5.12. On peut donc choisir $\varepsilon > 0$ tel que

$$\mathbb{Q}[Z_\tau^{\varepsilon,-} \geq \gamma_0\tau - \eta] \geq 1/2 > 0.$$

Ainsi, tous les termes dans (3.5.22) sont strictement positifs ce qui implique (3.5.21). □

Proposition 3.5.14. (Discontinuité à la barrière)
Soit $\{Y_\tau\}$ un processus de Lévy de type B avec $R_0 > 0$ p.s. Supposons que $H : (0, U] \to [0, \infty)$ est lipschitzienne et telle que $H(U) \neq 0$. Alors, pour tout τ suffisamment petit, la fonction $f_u(\tau, x)$ définie par (3.5.5) est discontinue en $x = u \equiv \ln(U/S_0)$.

[12] Si la dérive $-\gamma_0$ est strictement positive ($\gamma_0 < 0$), alors nécessairement $R_0 = 0$ p.s. (voir Tableau 3.1).

Démonstration. On considère $\tau > 0$ puisque pour $\tau = 0$ la discontinuité est évidente. Par définition,

$$|f_u(\tau, u-\varepsilon) - f(\tau,u)| \;=\; \mathbb{E}[H(S_0 e^{u-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_\varepsilon\}}]. \tag{3.5.23}$$

On va d'abord montrer que $\mathbb{E}[H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_\varepsilon\}}] \to \mathbb{E}[H(S_0e^{u+Y_\tau})1_{\{\tau<R_0\}}]$ quand $\varepsilon \to 0$ et ensuite que cette dernière espérance est strictement positive.

Nous avons

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau})1_{\{\tau<R_\varepsilon\}}] - \mathbb{E}[H(S_0e^{u+Y_\tau})1_{\{\tau<R_0\}}]| \leq \\ |\mathbb{E}[(H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0e^{u+Y_\tau}))1_{\{\tau<R_0\}}]| + |\mathbb{E}[(H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau})(1_{\{\tau<R_\varepsilon\}} - 1_{\{\tau<R_0\}})|.\end{aligned} \tag{3.5.24}$$

Si $\tau < R_0$, cela implique que $Y_\tau \leq 0$ et donc $S_0e^{u+Y_\tau}, S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau} \in (0,U]$. Comme H est lipschitzienne, on obtient

$$\begin{aligned}|\mathbb{E}[(H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau}) - H(S_0e^{u+Y_\tau}))1_{\{\tau<R_0\}}]| &\leq CS_0e^u(e^{-\varepsilon}-1)\mathbb{E}[e^{Y_\tau}1_{\{\tau<R_0\}}] \\ &\leq CS_0e^u(e^{-\varepsilon}-1)\mathbb{E}[e^{Y_\tau}] = CS_0e^u(e^{-\varepsilon}-1)e^{r\tau} \overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

De plus, H est bornée sur $(0,U]$: $H(S) \leq M$, d'où

$$|\mathbb{E}[(H(S_0e^{u-\varepsilon+Y_\tau})(1_{\{\tau<R_\varepsilon\}} - 1_{\{\tau<R_0\}})| \leq M\mathbb{Q}[R_0 \leq \tau < R_\varepsilon] \;\overset{\varepsilon\to0}{\longrightarrow}\; M\mathbb{Q}[R_0 = \tau] = 0,$$

d'après le Lemme 3.5.4. On a démontré que la partie gauche de (3.5.24) tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

Passons à la deuxième étape. Comme H est continue et que $H(S_0e^u) > 0$, quel que soit $0 < c < H(S_0e^u)$, il existe $\eta > 0$ tel que $H(S_0e^x) \geq c$, $\forall x \in [u-\eta, u]$. Alors, pour tout $\tau < \eta/\gamma_0$, où $(-\gamma_0)$ est la dérive de Y, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H(S_0e^{u+Y_\tau})1_{\{\tau<R_0\}}] &\geq \mathbb{E}[H(S_0e^{u+Y_\tau})1_{\{\tau<R_0,\, Y_\tau\in[-\eta,0]\}}] \\ &\geq c\,\mathbb{Q}[\tau < R_0,\; Y_\tau \in [-\eta,0]] \geq c\,\mathbb{Q}[M_\tau = 0,\; Y_\tau \geq -\eta] > 0,\end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.5.13, ce qui prouve la proposition. □

Le Tableau 3.1 récapitule les résultats de cette section. Il est intéressant de noter que Alili et Kyprianou [AK04] arrivent à des conditions similaires à celles données dans les Propositions 3.5.6-3.5.9 mais dans un autre contexte : l'étude de la validité des conditions de *smooth pasting* (raccordement C^1 sur la frontière libre) pour des options américaines dans des modèles de Lévy exponentiels.

Remarque 3.5.15. Comme on peut le voir dans le Tableau 3.1, dans le cas de variation bornée, on a toujours soit $R_0 > 0$ p.s. soit $R_0^- > 0$ p.s. (sauf éventuellement dans le cas $\gamma_0 = r - \int(e^y - 1)\nu(dy) = 0$ qui n'est pas très intéressant car trop particulier). Par conséquent, la Proposition 3.5.14 implique qu'une option à double barrière sera toujours discontinue sur l'une des barrières (si H ne s'annule pas sur cette barrière).

Type de $Y_t = rt + X_t$			$R_0 = 0$ p.s.	$R_0^- = 0$ p.s.	Continuité		
					f_u	f_l	f_d
A	$\gamma_0 > 0$		**oui**	*non*			
	$\gamma_0 < 0$		*non*	**oui**			
	$\gamma_0 = 0$		*non*	*non*			
B	$\gamma_0 > 0$		**oui**	*non*	**oui**	non, si ...	non, si ...
	$\gamma_0 < 0$		*non*	**oui**	non, si ...	**oui**	non, si ...
	$\gamma_0 = 0$	$\nu(-\infty, 0) < \infty$	**oui**	*non*	**oui**	non, si ...	non, si ...
		$\nu(0, \infty) < \infty$	*non*	**oui**	non, si ...	**oui**	non, si ...
		$\nu(-\infty, 0) = \infty$, $\nu(0, \infty) = \infty$,	Les deux situations sont possibles (une analyse plus fine de $\{Y_t\}$ est nécessaire)				
C			**oui**	**oui**	**oui**	**oui**	**oui**

TAB. 3.1 – Ce tableau montre les propriétés de R_0 et R_0^- pour différents types de processus de Lévy et récapitule nos résultats sur la continuité des options à barrière. Dans le cas de variation bornée, $\gamma_0 = r - \int (e^y - 1)\nu(dy)$ désigne la dérive de $\{Y_t\}$. Nous n'avons pas étudié le cas A (Poisson composé) puisqu'il n'est pas intéressant pour les applications en finance. Une case "non, si ..." signifie que la fonction est discontinue si H est différent de zéro à la barrière (voir Proposition 3.5.14).

En général, on ne peut pas espérer mieux que la continuité lipschitzienne. En particulier, les bornes uniformes sur les dérivées, comme celles requises dans [NS01], ne sont jamais vérifiées dans les applications en finance puisque les fonctions de *payoff* ne sont pas régulières (comme dans le cas de Call ou de Put). Dans ces cas, les théorèmes de vérifications comme la Proposition 3.2.1 ne s'appliquent pas et la fonction de prix devrait être considérée comme une *solution de viscosité* de l'EID (3.2.3).

3.6 Prix d'options comme solutions de viscosité des EID

La notion de solutions de viscosité a été introduite par Crandall & Lions dans le cadre des EDP. On peut trouver un bon aperçu de la théorie et des applications des solutions de viscosité dans [CIL92]. Cette notion a été généralisée au cas des équations intégro-différentielles du type que nous étudions ici dans [Say91, Son86, AT96, BBP97, Pha98].

Dans cette section introductive, nous expliquons de manière informelle l'idée de ce concept. Ensuite, nous donnons dans la Section 3.6.1 la définition rigoureuse de solution de viscosité avec quelques variantes équivalentes utiles pour la suite. L'unicité des solutions est discutée dans la Section 3.6.2. La Section 3.6.3 est consacrée au lien entre des prix d'options et des solutions de viscosité des équations intégro-différentielles.

Considérons d'abord une solution régulière f de l'équation

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} - Lf = 0. \tag{3.6.1}$$

Elle possède la propriété suivante :

i) si φ est une fonction régulière telle que $f-\varphi$ a un maximum global en (τ,x), alors

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-L\varphi\right)(\tau,x)\leq 0. \tag{3.6.2}$$

En effet, comme (τ,x) est un maximum, nous avons

$$\frac{\partial(f-\varphi)}{\partial\tau}(\tau,x)=\frac{\partial(f-\varphi)}{\partial x}(\tau,x)=0, \tag{3.6.3}$$

$$\frac{\partial^2(f-\varphi)}{\partial x^2}(\tau,x)\leq 0. \tag{3.6.4}$$

De plus, puisque le maximum est global,

$$\begin{aligned}\forall(t,y),\quad f(\tau,x)-\varphi(\tau,x)\geq f(t,y)-\varphi(t,y)\\ \iff f(t,y)-f(\tau,x)\leq\varphi(t,y)-\varphi(\tau,x).\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

Donc, les dérivées et les accroissements de f au point (τ,x) sont reliés à ceux de φ. Par conséquent,

$$\begin{aligned}0=\left(\frac{\partial f}{\partial\tau}-Lf\right)(\tau,x)&=\left[\underline{\frac{\partial f}{\partial\tau}}-\frac{\sigma^2}{2}\underline{\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}\right](\tau,x)\\ &\quad-\int\nu(dy)[\underbrace{f(\tau,x+y)-f(\tau,x)}-(e^y-1)\underline{\frac{\partial f}{\partial x}}(\tau,x)]\\ \geq\left[\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}}-\frac{\sigma^2}{2}\underline{\underline{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}}}+\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}\right](\tau,x)&-\int\nu(dy)[\underbrace{\varphi(\tau,x+y)-\varphi(\tau,x)}-(e^y-1)\underline{\frac{\partial\varphi}{\partial x}}(\tau,x)]\\ &=\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-L\varphi\right)(\tau,x).\end{aligned} \tag{3.6.6}$$

De la même manière, on vérifie que

ii) si φ est une fonction régulière et (τ,x) un point de minimum global de $f-\varphi$, alors

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}-L\varphi\right)(\tau,x)\geq 0. \tag{3.6.7}$$

Nous allons exploiter ces deux propriétés des solutions régulières pour généraliser la notion de solution. A savoir, nous allons les prendre pour la *définition* de la solution. On dit que f est une *sous-solution* de viscosité de (3.6.1) si la propriété i) est vérifiée et une *sur-solution* de viscosité si ii) est vérifié. Enfin, f est une *solution de viscosité* si elle est sous-solution et sur-solution.

Dans cette définition, l'opérateur est appliqué à des fonctions tests régulières et non à f elle-même. Ainsi, f n'est pas obligée d'être $C^{1,2}$. Remarquons néanmoins que si f

est une solution de viscosité qui par ailleurs est une fonction de classe $C^{1,2}$, alors f est aussi une solution de (3.6.1) au sens classique. En effet, on peut prendre pour fonction test la fonction f elle-même : $\varphi = f$. Alors, $f - \varphi \equiv 0$ et tout point (τ, x) est un point de maximum et de minimum global. Par conséquent, il vient de i) et ii) que $\forall(\tau, x)$, $(\frac{\partial f}{\partial \tau} - Lf)(\tau, x) = (\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi)(\tau, x) = 0$.

Donc, les deux notions de solution coïncident sur la classe des fonctions régulières mais la notion de solution de viscosité est plus large.

Avant de continuer, une petite remarque sur la terminologie. Le terme *viscosité* vient du fait que ce concept a été inspiré en partie par la méthode de la viscosité évanescente pour des équations différentielles du premier ordre. En gros, on a une équation du premier ordre $\mathcal{L}u = 0$ qui n'a pas forcément de solution régulière. On rajoute un terme qui en dynamique des fluides correspond à la viscosité : $-\varepsilon\Delta u_\varepsilon + \mathcal{L}u_\varepsilon = 0$. On sait que cette équation parabolique possède une unique solution régulière u_ε dont on connaît bien les propriétés. On prend ensuite la limite de u_ε quand $\varepsilon \to 0$ et on obtient de cette manière une solution faible de l'équation initiale que l'on appelle naturellement une solution de viscosité.

La notion de solution de viscosité que nous avons introduite plus haut couvre ce cas mais s'applique à beaucoup d'autres problèmes où elle n'a plus cette signification physique. De façon très informelle, on peut dire que cette notion s'applique si la structure de l'opérateur est telle que les inégalités (3.6.3), (3.6.4) et (3.6.5), provenant du fait que (τ, x) est un maximum de $f - \varphi$, vont dans le bon sens pour induire l'inégalité (3.6.2) (et de même pour le minimum). C'est bien le cas pour l'opérateur intégro-différentiel en question, comme on l'a vu dans (3.6.6).

Nous avons exposé l'idée générale qui est derrière le concept de solution de viscosité mais il y a quand même plusieurs nuances. Par exemple, nous n'avons pas précisé la classe dans laquelle sont choisies des fonctions tests. Ce choix est différent dans les travaux cités au début de la section. En particulier, la croissance à l'infini varie en fonction de l'opérateur et de la classe dans laquelle on veut chercher une solution.

Premièrement, notons que la fonction test φ doit être dans le domaine de l'opérateur. Dans notre contexte, si nous ne savions rien sur ν, il faudrait prendre des fonctions tests bornées. Or, dans les applications financières, $\int_{y>1} e^y \nu(dy) < \infty$ grâce à la propriété de martingale, ce qui permet de choisir φ à croissance polynomiale à plus l'infini.

Deuxièmement, pour prendre en compte des *payoffs* standards, nous ne pouvons pas nous contenter des fonctions décroissantes vers zéro à l'infini car une telle définition ne serait pas applicables à des prix d'options.

Un autre aspect très important dont nous n'avons pas encore parlé, c'est la façon de traiter les conditions aux limites (la condition initiale mais aussi les conditions aux bords si le domaine en espace est borné).

Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \tau} &= Lf, && \text{dans } (0, T] \times O, \\ f(0, x) = h(x), \quad x \in O; \qquad & f(\tau, x) = g(\tau, x), \quad x \notin O, \end{aligned}$$

On peut demander qu'une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité vérifie

$$f(0,x) \leq (\text{resp. } \geq)\ h(x), \quad x \in O; \qquad f(\tau,x) \leq (\text{resp. } \geq)\ g(\tau,x), \quad x \notin O.$$

On parle dans ce cas des conditions aux limites au sens fort, par opposition aux conditions faibles que nous introduisons ci-après. Le problème est qu'une telle définition n'est pas toujours stable par rapport au passage à la limite. Schématiquement, on peut avoir la situation suivante. On considère une série de problèmes

$$\begin{aligned} F_n u_n &= 0 \quad \text{dans } \Omega, \\ G_n u_n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{aligned}$$

telle que $F_n \to F$ et $G_n \to G$.[13] On définit ensuite $u = \liminf u_n$ et on s'intéresse au problème vérifié par cette fonction limite. Typiquement, on peut montrer que $Fu \leq 0$ mais pas $Gu \leq 0$. C'est-à-dire, u ne vérifie pas les conditions aux bords. En revanche, ce qui est généralement vrai, c'est

$$\min(Gu, Fu) \leq 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3.6.8}$$

Dans ce cas, on parle des conditions aux limites faibles ou généralisées. Parfois, ces deux définitions (au sens fort et au sens faible) sont équivalentes mais pas toujours [Bar94, FS93] (cf. la Remarque 3.6.2).

De manière générale, le choix des fonctions tests et des autres détails de la définition doit être motivé par les applications que l'on veut en faire mais, surtout, il doit être justifié par un résultat d'existence et d'unicité de la solution. Par exemple, si $h(x) = x$ (une condition initiale non-bornée) et que l'on prend des fonctions tests bornées, alors on arrive à une situation absurde où toute fonction continue vérifiant $f(0,x) = h(x)$ est une solution de viscosité. En effet, l'ensemble des fonctions bornées φ telles que $f - \varphi$ ait un minimum ou maximum global est vide. Par conséquent, i) et ii) sont vérifiés de façon triviale : n'importe quelle propriété est vérifiée par les éléments d'un ensemble vide. Evidemment, une telle définition est complètement inutile.

Dans la section suivante, nous donnons une définition rigoureuse de solutions de viscosité, adaptée au contexte financier, qui conduit à l'existence et l'unicité de la solution.

3.6.1 Définitions

Notons USC (respectivement LSC) la classe des fonctions $v : [0,T) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ semi-continues supérieurement (respectivement inférieurement). De plus, notons $C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions mesurables à croissance polynomiale de degré p sur $[0,T] \times \mathbb{R}^+$ et bornées sur $[0,T] \times \mathbb{R}^-$:

$$\varphi \in C_p^+([0,T] \times \mathbb{R}) \iff \exists C > 0,\ |\varphi(t,x)| \leq C(1 + |x|^p\, 1_{x>0}). \tag{3.6.9}$$

[13] Par exemple, on peut penser à une discrétisation consistante du problème continue.

Sous une condition de décroissance polynomiale sur la queue droite de la densité de Lévy, $L\varphi$ peut être défini pour $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$:

$$L\varphi(x) = A\varphi(x) + \int_{|y|\leq 1} \nu(dy)[\varphi(x+y) - \varphi(x) - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x)] \tag{3.6.10}$$

$$+ \int_{|y|>1} \nu(dy)[\varphi(x+y) - \varphi(x)], \tag{3.6.11}$$

où A est un opérateur différentiel. Le terme de droite de (3.6.10) a un sens pour $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R})$ car

$$|\varphi(\tau,x+y) - \varphi(\tau,x) - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tau,x)| \leq y^2 \sup_{B(x,1)} |\varphi''(\tau,\cdot)| \qquad \text{pour } |y|\leq 1,$$

tandis que le terme de (3.6.11) est bien défini pour $\varphi \in C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ si

$$\int_{y>1} y^p \nu(dy) < +\infty,$$

ce qui est bien le cas grâce à la condition de martingale (2.2.1). Il est possible de considérer d'autres conditions de croissance que $u \in C_p^+$ (voir par exemple [AT96, BBP97]) grâce à des conditions supplémentaires sur la mesure de Lévy ν.

Soit $O = (l,u) \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle ouvert, $\partial O = \{l,u\}$ sa frontière et $g \in C_p^+([0,T]\times\ \mathbb{R}\setminus O)$ une fonction continue. Considérons le problème sur $[0,T]\times\mathbb{R}$:

$$\frac{\partial f}{\partial \tau} = Lf, \qquad \text{dans } (0,T]\times O, \tag{3.6.12}$$

$$f(0,x) = h(x), \quad x\in O; \qquad f(\tau,x) = g(\tau,x), \quad x\notin O. \tag{3.6.13}$$

Définition 3.6.1. [Solution de viscosité] Une fonction $v \in USC$ est une *sous-solution de viscosité* de (3.6.12)–(3.6.13) si pour toute fonction test $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ et tout point de maximum global $(\tau,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ de $v-\varphi$, les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\text{si } (\tau,x)\in(0,T]\times O, \qquad \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi\right)(\tau,x) \leq 0, \tag{3.6.14}$$

$$\text{si } \tau = 0,\ x\in\overline{O}, \qquad \min\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi\right)(\tau,x),\ v(\tau,x) - h(x)\} \leq 0,$$

$$\text{si } \tau\in(0,T],\ x\in\partial O, \qquad \min\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi\right)(\tau,x),\ v(\tau,x) - g(\tau,x)\} \leq 0, \tag{3.6.15}$$

$$\text{si } x\notin\overline{O}, \qquad v(\tau,x) \leq g(\tau,x). \tag{3.6.16}$$

Une fonction $v \in LSC$ est une *sur-solution de viscosité* de (3.6.12)–(3.6.13) si pour toute fonction $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ et tout point de minimum global

$(\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$ de $v - \varphi$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\text{si } (\tau, x) \in (0, T] \times O, \quad & \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(\tau, x) \geq 0, \\
\text{si } \tau = 0,\ x \in \overline{O}, \quad & \max\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(\tau, x),\ v(\tau, x) - h(x)\} \geq 0, \\
\text{si } \tau \in (0, T],\ x \in \partial O, \quad & \max\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(\tau, x),\ v(\tau, x) - g(\tau, x)\} \geq 0, \\
\text{si } x \notin \overline{O}, \quad & v(\tau, x) \geq g(\tau, x).
\end{aligned} \tag{3.6.17}$$

Une fonction $v \in C_p^+([0, T] \times \mathbb{R})$ est appelée *solution de viscosité* de (3.6.12)–(3.6.13) si elle est à la fois sous-solution et sur-solution. Cette fonction est alors continue sur $(0, T] \times \mathbb{R}$.

Notons qu'une sous-solution (ou sur-solution) n'est pas nécessairement continue. Les conditions initiales et aux limites sont vérifiées dans un sens faible (celui de la viscosité). Cette définition couvre aussi le cas $O = \mathbb{R}$.

Remarque 3.6.2. Dans le cas $O = \mathbb{R}$, la condition initiale faible

$$\max\{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(0, x),\ v(0, x) - h(x)\} \leq (\geq) 0 \tag{3.6.18}$$

est équivalente à la condition forte : $v(0, x) = h(x)$. La démonstration de ce fait (dans le cas de mesure bornée) se trouve dans Alvarez & Tourin [AT96, Proposition 1, pp. 302–303] (avec une référence sur [BP90, Proposition 5]). C'est une remarque importante pour l'étude de la convergence des schémas numériques. En effet, comme on verra dans la Section 4.6.3 (Théorème 4.6.9), la limite des solutions discrètes vérifie la condition initiale au sens faible (plus exactement, la méthode que nous utilisons ne permet pas de montrer que la condition initiale est vérifiée au sens fort). D'un autre côté, les valeurs des options vérifient, évidemment, les conditions aux limites au sens fort. Ainsi, on pourrait penser que la solution du schéma ne converge pas toujours vers le prix de l'option. Le résultat d'équivalence que nous venons de citer permet de résoudre cette difficulté.

Malheureusement, à notre connaissance, il n'y a pas de résultat analogue pour les conditions aux bords dans le cas ou O est un intervalle borné ou semi-borné. C'est-à-dire, on ne sait pas si une solution de viscosité vérifiant les conditions généralisées (3.6.15) et (3.6.17) vérifie aussi $v(\tau, x) = g(\tau, x)$, pour $x \in \partial O$. C'est une des raisons pour lesquelles nous ne savons pas montrer pour l'instant la convergence du schéma dans le cas d'une grille bornée.

On peut trouver plusieurs variantes de la définition 3.6.1 dans les articles cités plus haut. Tout d'abord, nous pouvons nous limiter au cas où le maximum (respectivement minimum) de $v - \varphi$ est égal à zéro :

Lemme 3.6.3. *Les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) La fonction $v \in USC$ est une sous-solution de viscosité de (3.6.12)–(3.6.13).
(ii) Pour tout $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ et tout $(\tau,x) \in [0,T]\times\mathbb{R}$ tels que

$$v(\tau,x) = \varphi(\tau,x) \qquad et \qquad \forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}, \quad v(t,y) \leq \varphi(t,y), \tag{3.6.19}$$

les propriétés (3.6.14)–(3.6.16) sont vérifiées.

Démonstration. Soit v une sous-solution. Les propriétés (3.6.19) indiquent en particulier que (τ,x) est un point de maximum global de $v-\varphi$. Alors, par la définition d'une sous-solution, (3.6.19) implique (3.6.14)–(3.6.16).

Réciproquement, supposons que v vérifie (ii). Soit φ une fonction test et (τ,x) un point de maximum global de $v-\varphi$, i.e.

$$\forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}, \quad v(t,y) - \varphi(t,y) \leq v(\tau,x) - \varphi(\tau,x).$$

Il est nécessaire de montrer que φ vérifie (3.6.14)–(3.6.16). Définissons une nouvelle fonction ψ par :

$$\psi(t,y) = \varphi(t,y) + [v(\tau,x) - \varphi(\tau,x)].$$

Par construction, ψ vérifie (3.6.19). Ainsi, d'après (ii), ψ satisfait (3.6.14)–(3.6.16). En outre, nous avons $\forall (t,y) \in [0,T]\times\mathbb{R}$,

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial \tau} - L\psi\right)(t,y) \;=\; \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(t,y). \tag{3.6.20}$$

Par conséquent, φ vérifie aussi (3.6.14)–(3.6.16). Ceci montre que v est sous-solution de viscosité. □

Nous pouvons montrer un résultat similaire pour les sur-solutions. De plus, "maximum" peut être remplacé par "maximum strict" (voir [BBP97]). Enfin, les fonctions tests peuvent être supposées $C^{1,2}$ ou C^∞ à la place de C^2. Limiter la croissance à l'infini de φ est essentiel pour donner un sens à $L\varphi$. Nous pouvons également supposer que les dérivées de φ sont aussi à croissance polynomiale. Il est possible de relâcher la condition $\varphi \in C_p^+$ en supposant des hypothèses plus fortes sur la décroissance de la densité de Lévy.

Remarque 3.6.4 (Conditions aux limites)**.** Pour les solutions classiques, nous avons imposé les "conditions aux limites" sur $\mathbb{R}\setminus O$ et pas seulement sur $\partial O = \{l,u\}$. On peut ici penser que la notion de solution de viscosité permet de s'affranchir de cette difficulté (voir remarque dans [Pha98, Sec. 5.1]). En effet, le noyau intégral est appliqué à la fonction test et non plus à la solution. Toutefois, remarquons que la fonction test doit vérifier $\varphi \geq v$ (resp. $\varphi \leq v$) sur $[0,T]\times\mathbb{R}$ et pas seulement sur $[0,T]\times O$, ce qui revient à spécifier les valeurs de v hors de O.

3.6.2 L'unicité des solutions de viscosité

L'outil central pour montrer l'unicité des solutions de viscosité est le principe de comparaison : si u, v sont solutions de viscosité et $u \geq v$ sur les bords, alors $\forall(\tau, x) \in [0, T] \times O,\ u(\tau, x) \geq v(\tau, x)$. Cette propriété peut être étendue aux sous-solutions et sur-solutions dans le sens suivant [Say91, AT96, JK03] :

Proposition 3.6.5. *(Principe de comparaison pour des solutions semi-continues) Soient $u \in USC$ et $v \in LSC$ à croissance polynomiale. Si u est une sous-solution et v une sur-solution de (3.6.12)–(3.6.13) avec $O = \mathbb{R}$ et h une fonction continue, alors nous avons $u \leq v$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.*

Dans le cas où ν est une mesure bornée, des preuves et des extensions peuvent être trouvées dans [AT96]. Le cas des mesures de Lévy de type général a été récemment traité dans [JK03].

Le principe de comparaison implique l'unicité de la solution de viscosité dans une classe de fonctions à croissance polynomiale. En effet, s'il existe deux solutions u et v alors, par définition, chacune de ces fonctions est une sur-solution et sous-solution. Donc, d'après la Proposition 3.6.5, $u \leq v$ et $v \leq u$, ce qui implique $u = v$.

La Proposition 3.6.5 traite le cas du problème de Cauchy ($O = \mathbb{R}$). Le cas d'un domaine borné est beaucoup moins clair. Ci-après, nous commentons quelques papiers où ce problème a été abordé.

Premièrement, de façon surprenante, la formulation précise du problème est souvent absente dans ces travaux. Dans [Pha98], l'auteur se contente de dire que l'extension de la définition au cas d'un domaine borné est immédiate, alors qu'il est crucial de savoir comment sont définies les conditions aux limites, à cause du terme non-local. Les preuves des théorèmes de comparaison qui suivent font appel à des résultats similaires pour le cas des EDP. La conclusion est trop rapide car, comme le notent Jakobsen & Karlsen dans [JK03], l'application des ces résultats au cas intégro-différentiel est loin d'être directe à cause du caractère non local de l'opérateur. Jakobsen & Karlsen se donnent donc l'objectif de démontrer rigoureusement le principe de comparaison pour les problèmes intégro-différentiels avec une mesure de Lévy générale, pas nécessairement bornée.

Malheureusement, dans [JK03], la formulation du problème dans le cas d'un domaine borné n'est pas précisée. L'opérateur non-local est simplement supposé être "bien défini". Le Théorème 5.2 de [JK03] établit ensuite un principe de comparaison à partir d'un certain nombre d'hypothèses sur l'opérateur. L'une de ces hypothèses (F7), comme le reconnaissent les auteurs, est particulièrement dure à vérifier. En fait, la vérification de cette hypothèse constitue un résultat en soi mais il est démontré uniquement dans le cas $O = \mathbb{R}$. L'hypothèse en question étant très technique et peu intuitive, il nous est difficile de juger si elle est vérifiée dans le cas d'un domaine borné. Nous ne savons donc pas si le Théorème 5.2 de [JK03] s'applique à notre problème.

Contrairement aux travaux précédents, dans un article récent de M. Arisawa [Ari05a] l'opérateur non-local est défini soigneusement mais de façon spéciale : le noyau intégral est tel que les valeurs de la solution en dehors du domaine n'interviennent pas. Autrement

dit, le processus stochastique sous-jacent ne sort pas du domaine. Pour les processus de Lévy, cette condition n'est pas vérifiée, donc les résultats de [Ari05a] ne s'appliquent pas non plus à notre équation.

Ce défaut est corrigé dans le tout dernier travail de Mariko Arisawa sur le sujet [Ari05b] : cet article a paru quand la première version de cette thèse a déjà été écrite et soumise aux rapporteurs. Dans [Ari05a, Ari05b], la définition de solutions de viscosité est légèrement différente : elle utilise la notion de semijets au lieu des fonctions tests. Dans ce cadre, l'auteur prouve des résultats de comparaison pour les solutions de viscosité semi-continues des problèmes intégro-différentiels avec des conditions aux bords de type Dirichlet ou Neumann. Sous réserve de vérifier l'équivalence des deux définitions de solutions de viscosité, ce résultat s'applique à notre équation si g et h sont continues et que $g(0,x) = h(x)$ sur ∂O.

Nous ne savons pas si l'unicité a lieu dans des cas plus généraux, notamment pour les options avec barrières où la condition $g(0,x) = h(x)$ n'est pas vérifiée.

3.6.3 Caractérisation des prix d'options

Le résultat d'unicité (Proposition 3.6.5) a été démontré dans le cadre des fonctions à croissance polynomiale à l'infini. Dans le contexte des prix d'options, ceci nous limite le choix des fonctions *payoff*. Nous donnons ici une condition suffisante pour que la valeur de l'option soit dans C_p^+ (voir (3.6.9) pour la définition).

Lemme 3.6.6. *Pour tout $p \geq 0$ et $n \geq 1$, il existe $c > 0$ tel que*

$$\forall x_1 \dots x_n \geq 0, \qquad (\sum_{i=1}^{n} x_i)^p \leq c \sum_{i=1}^{n} x_i^p. \tag{3.6.21}$$

Démonstration. Si $p \geq 1$, c'est l'inégalité de Jensen avec $g(x) = x^p$ et $c = n^{p-1}$. Si $0 \leq p < 1$, on montre aisément par récurrence que (3.6.21) est vérifié avec $c = 1$. □

Proposition 3.6.7. (Croissance polynomiale)
Soit $H : (0,\infty) \to [0,\infty)$ une fonction lipschitzienne : $|H(S_1) - H(S_2)| \leq C|S_1 - S_2|$. Si il existe $p > 0$ tel que :

$$H(S_0 e^x) \leq C_1(1 + |x|^p), \tag{3.6.22}$$

alors $f(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x + r\tau + X_\tau})]$ appartient à $C_p^+([0,T] \times \mathbb{R})$.

Démonstration. Nous montrons tout d'abord que

$$\mathbb{E}[(X_\tau)^p \, 1_{X_\tau > 0}] < \infty. \tag{3.6.23}$$

Du Théorème 25.3 de [Sat99] il vient que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction localement bornée sous-multiplicative, alors $\mathbb{E}g(X_\tau) < \infty$ pour tout $\tau > 0$ si et seulement si $\int_{|x|>1} g(x)\nu(dx) < \infty$.

Une fonction $g(x) \geq 0$ est dite *sous-multiplicative* si il existe $a > 0$ tel que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \;\; g(x+y) \;\; \leq \;\; ag(x)g(y).$$

Une fonction est *localement bornée* si elle est bornée sur tout compact.

Pour tout $p > 0$, la fonction $x^p \vee 1$ est sous-multiplicative (voir Proposition 25.4, [Sat99]), et

$$x^p \vee 1 \;\; \leq \;\; x^p 1_{x>0} + 1 \;\leq\; 2(x^p \vee 1).$$

Par conséquent, pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\begin{aligned}(x+y)^p\, 1_{x+y>0} + 1 \;&\leq\; 2((x+y)^p \vee 1) \;\leq \\ &\leq\; 2a(x^p \vee 1)(y^p \vee 1) \;\leq\; 2a(x^p\, 1_{x>0} + 1)(y^p\, 1_{y>0} + 1).\end{aligned}$$

Ainsi, $g(x) = x^p\, 1_{x>0} + 1$ est sous-multiplicative et localement bornée. Nous obtenons du théorème cité auparavant

$$\mathbb{E}[(X_\tau)^p\, 1_{X_\tau>0} + 1] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{|x|>1} (x^p\, 1_{x>0} + 1)\nu(dx) < \infty.$$

Comme ν est intégrable pour $|x| > 1$, ceci implique que

$$\mathbb{E}[(X_\tau)^p\, 1_{X_\tau>0}] < \infty \quad \Longleftrightarrow \quad \int_{x>1} x^p \nu(dx) < \infty. \tag{3.6.24}$$

Il vient de la condition de martingale que $\int_{x>1} e^x \nu(dx) < \infty$. Par conséquent, nous avons $\int_{x>1} x^p \nu(dx) < \infty$. Ainsi, (3.6.23) suit de (3.6.24).

Comme H est lipschitzienne, il existe $\tilde{c} > 0$ tel que $H(S) \leq \tilde{c}(1+S)$. Nous avons donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(\tau, x) \;\; \leq \;\; \tilde{c}\, \mathbb{E}[1 + S_0 e^{x+r\tau+X_\tau}] = \tilde{c}(1 + S_0 e^{x+r\tau}). \tag{3.6.25}$$

Pour $x < 0$, f est bornée par la constante $\tilde{c}(1+S_0 e^{rT})$. Etudions maintenant la croissance de f quand $x \to +\infty$.

Soit $x > 0$. Nous pouvons estimer $f(\tau, x)$ de la manière suivante :

$$\begin{aligned}f(\tau,x) &= \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})1_{X_\tau<-x}] + \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})1_{X_\tau\geq -x}] \\ &\leq \tilde{c}\, \mathbb{E}[(1 + S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})1_{X_\tau<-x}] + C_1 \mathbb{E}[(1 + (x + r\tau + X_\tau)^p)1_{X_\tau\geq -x}].\end{aligned}$$

Comme précédemment, le premier terme est borné par $\tilde{c}(1 + S_0 e^{rT})$. Pour le second, il vient du Lemme 3.6.6 :

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}[(x + r\tau + X_\tau)^p\, 1_{X_\tau\geq -x}] = \\ &\qquad = \mathbb{E}[(x + r\tau + X_\tau)^p\, 1_{|X_\tau|\leq x}] + \mathbb{E}[(x + r\tau + X_\tau)^p\, 1_{X_\tau>x}] \\ &\qquad\quad \leq c(2x^p + (rT)^p) + c(x^p + (rT)^p + \mathbb{E}[(X_\tau)^p\, 1_{X_\tau\geq 0}]) \leq C_2(1 + x^p).\end{aligned}$$

Ainsi, nous obtenons la majoration

$$f(\tau,x) \;\le\; \tilde{c}(1+S_0e^{rT})+C_1(1+C_2(1+x^p)) \;\le\; C_3(1+x^p),$$

ce qui termine la preuve. □

Corollaire 3.6.8. *Si $H : (L,\infty) \to [0,\infty)$ est lipschitzienne et vérifie la condition de croissance polynomiale (3.6.22), alors $f_l(\tau,x)$ défini par (3.5.12) est de classe $C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$.*

Démonstration. Prolongeons H sur $(0,\infty)$ en une fonction $\tilde{H}$ continue et constante sur $(0,L]$:

$$\tilde{H}(S)=\begin{cases} H(S), & S>L,\\ \lim_{S\to L} H(S), & S\le L.\end{cases}$$

Alors, $\tilde{H}$ vérifient les conditions de la Proposition 3.6.7. Par conséquent,

$$f_l(\tau,x) \;\;\le\;\; \mathbb{E}[\tilde{H}(S_0e^{x+r\tau+X_\tau})] \;\le\; C(1+x^p1_{x\ge 0}).$$

□

Nous allons montrer le résultat principal de cette section qui indique que les valeurs des options européennes ou barrières peuvent être exprimées comme des solutions de viscosité de (3.6.12)–(3.6.13) :

Proposition 3.6.9. (Prix d'options comme solutions de viscosité)
Soit H la fonction de payoff. Si H est lipschitzienne et $h(x)=H(S_0e^x)$ a une croissance polynomiale à l'infini, alors

- *La valeur forward d'une option européenne $f_e(\tau,x)$ définie par (3.2.2) est l'unique solution de viscosité du problème de Cauchy (3.2.3) (c'est-à-dire, (3.6.12)–(3.6.13) avec $O=\mathbb{R}$).*
- *Soit $f_b(\tau,x)$ la valeur forward d'une option barrière knock-out (simple ou double) définie par (3.5.5), (3.5.12) ou (3.5.18). Si $f_b(\tau,x)$ est continue alors c'est une solution de viscosité de (3.6.12)–(3.6.13) (avec $g\equiv 0$).*

Démonstration. La fonction $f_e(\tau,x)$ est continue d'après la Proposition 3.4.1 et $C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ d'après la Proposition 3.6.7. Les fonctions f_u et f_d sont bornées sur $[0,T]\times\mathbb{R}$. Il vient du Corollaire 3.6.8 que $f_l\in C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$.

Dans la suite, f désignera de manière générique f_e, f_u, f_l ou f_d. De même, O sera respectivement $\mathbb{R}$, $(-\infty,u)$, (l,∞) ou (l,u). Ainsi, nous remarquons que f est continue et $C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ ce qui est consistant avec la définition de solution de viscosité.

Montrons maintenant que f est une sous-solution de (3.6.12)–(3.6.13). Par définition, f vérifie $f(0,x)=h(x)$ pour $x\in O$ et $f(\tau,x)=0$ pour $x\notin O$. Considérons $(\tau_0,x_0)\in$

$(0,T]\times O$ et une fonction test $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ telle que $\varphi(\tau_0,x_0) = f(\tau_0,x_0)$ et

$$\varphi(\tau,x) \geq f(\tau,x) \qquad \text{dans } [0,T]\times\mathbb{R}. \tag{3.6.26}$$

Comme nous avons noté dans la Section 3.6.1, nous pouvons supposer que les dérivées de φ sont également dans C_p^+. Notre but est de montrer l'inégalité (3.6.14) en (τ_0,x_0).

Pour $t\in[0,\tau_0]$, soit $\theta_t = \inf\{s\geq t \mid x_0+Y_s \notin O\}$ où $Y_s = rs+X_s$. De plus, définissons

$$M_t = \mathbb{E}[H(S_0e^{x_0+Y_{\tau_0}})1_{\tau_0\leq\theta_0} \mid \mathcal{F}_t].$$

Notons que $1_{\tau_0\leq\theta_0} = 1_{\tau_0\leq\theta_t}1_{t\leq\theta_0}$ et $1_{t\leq\theta_0}\in\mathcal{F}_t$. Comme $Y_s \stackrel{d}{=} Y_t + Z_{s-t}$, $\forall s\geq t$, où Z est un processus de Lévy indépendant de Y et ayant la même loi de distribution, on peut réécrire M_t de la façon suivante :

$$\begin{aligned} M_t &= 1_{t\leq\theta_0}\mathbb{E}[H(S_0e^{(x_0+Y_t)+Z_{\tau_0-t}})1_{\tau_0-t\leq \inf\{s\geq 0,\ (x_0+Y_t)+Z_s\notin O\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= 1_{t\leq\theta_0}f(\tau_0-t, x_0+Y_t) \quad \text{p.s.} \end{aligned}$$

Par construction, M_t est une martingale. Ainsi, il vient du théorème d'arrêt que

$$f(\tau_0,x_0) = M_0 = \mathbb{E}[M_{t\wedge\theta_0}] = \mathbb{E}[f(\tau_0-t\wedge\theta_0, x_0+Y_{t\wedge\theta_0})]. \tag{3.6.27}$$

Pour tout $t\in[0,\tau_0]$, (3.6.26) implique

$$f(\tau_0,x_0) \leq \mathbb{E}[\varphi(\tau_0-t\wedge\theta_0, x_0+Y_{t\wedge\theta_0})]. \tag{3.6.28}$$

En appliquant la formule d'Itô à la fonction régulière $\varphi(\tau_0-t, x_0+Y_t)$ entre 0 et $t\wedge\theta_0$ il vient :

$$\begin{aligned} f(\tau_0,x_0) \ \leq\ & \varphi(\tau_0,x_0) + \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\theta_0}(-\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + L\varphi + r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0-u, x_0+Y_{u-})du] \\ & + \mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\theta_0}\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tau_0-u, x_0+Y_{u-})\sigma dW_u + \\ & + \int_0^{t\wedge\theta_0}\int_{-\infty}^{\infty}(\varphi(\tau_0-u, x_0+Y_{u-}+y) - \varphi(\tau_0-u, x_0+Y_{u-})\ )\ \tilde{J_X}(du\ dy)], \end{aligned} \tag{3.6.29}$$

où $\tilde{J_X}$ est la mesure de Poisson compensée de X.

Nous désirons maintenant démontrer que la deuxième espérance dans (3.6.29) (l'espérance des intégrales stochastiques par rapport à σW_u et $\tilde{J_X}(du\ dy)$) est égale à zéro. Notons

$$\begin{aligned} A_t = & \int_0^t |\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tau_0-u, x_0+Y_u)|^2 du \\ & + \int_0^t du\int_{-\infty}^{\infty}\nu(dy)|\varphi(\tau_0-u, x_0+Y_u+y) - \varphi(\tau_0-u, x_0+Y_u)\ |^2. \end{aligned}$$

Par isométrie, si $\mathbb{E}[A_{t\wedge\theta_0}] < \infty$, alors les intégrales stochastiques en question, $\int_0^{t\wedge\theta_0}(\dots)\sigma dW_u$ et $\int_0^{t\wedge\theta_0}\int_{-\infty}^{\infty}(\dots)\tilde{J}_X(du\ dy)$, sont des martingales d'espérance nulle. En fait, il nous suffit de montrer une propriété légèrement différente. Pour simplifier, nous allons introduire un temps d'arrêt $\theta_A = \inf\{t \geq 0 \mid A_t > 1\}$. Alors, par construction, $\mathbb{E}[A_{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A}] \leq 1 < \infty$ ce qui implique

$$\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A}(\dots)\sigma dW_u + \int_0^{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A}\int_{-\infty}^{\infty}(\dots)\tilde{J}_X(du\ dy)] = 0. \tag{3.6.30}$$

Le fait de diminuer éventuellement l'intervalle d'intégration en temps n'est pas gênant car nous allons ensuite passer à la limite quand $t \to 0$. La seule condition est de ne pas réduire cet intervalle à zéro : sinon, évidemment, nous ne pourrons rien conclure sur l'intégrand. Il faut donc vérifier que $\theta_A > 0$ presque sûrement.

Pour cela, il suffit de montrer que A_t est finie. En effet, dans ce cas, A_t (qui a une forme d'intégrale de 0 à t) est continu par rapport à t et $A_t \to 0$ quand $t \to 0$. Donc, θ_A ne peut pas être égal à zéro.

Montrons que $\mathbb{Q}[A_t < \infty] = 1$. Le premier terme dans A_t est fini car la dérivée de φ est localement bornée. On va transformer le second terme de la façon suivante :

$$\begin{aligned}\int_0^t du \int_{-\infty}^{\infty}\nu(dy)|\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u+y)-\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u)\ |^2 \\ \leq \int_0^t du\int_{|y|\leq 1}\nu(dy)y^2|\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\tau_0-u,x_0+Y_u+\xi(y))|^2 \\ + \int_0^t du\int_{|y|>1}\nu(dy)|\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u+y)-\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u)\ |^2 \end{aligned} \tag{3.6.31}$$

où $\xi(y)$ est un nombre entre 0 et y. Encore une fois, la première partie est finie parce que $\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ est localement bornée et que $\int_{|y|\leq 1}\nu(dy)y^2 < \infty$. Pour estimer la seconde partie, nous utilisons le fait que $\varphi \in C_p^+$ ce qui implique

$$|\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u+y)-\varphi(\tau_0-u,x_0+Y_u)\ |^2 \leq Cy^{2p}1_{y>0}, \quad \text{pour } |y|>1,$$

avec $C(\omega) < \infty$ p.s. En utilisant cette estimation et le fait que $\int_{|y|>1}\nu(dy)y^{2p}1_{y>0} < \infty$, on conclut que l'expression dans (3.6.31) est finie. Par conséquent, nous avons (3.6.30).

Revenons maintenant à l'inégalité (3.6.29). Si nous avions appliqué la formule d'Itô entre 0 et $t \wedge \theta_0 \wedge \theta_A$, nous aurions obtenu la même formule avec des intégrales sur $[0, t \wedge \theta_0 \wedge \theta_A]$ au lieu de $[0, t \wedge \theta_0]$. C'est cette version que nous allons utiliser. Compte tenu de (3.6.30) et en remarquant que $f(\tau_0, x_0) = \varphi(\tau_0, x_0)$ nous obtenons

$$\mathbb{E}[\int_0^{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A}(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0-u,x_0+Y_{u_-})du] \ \leq \ 0. \tag{3.6.32}$$

L'idée maintenant est de diviser cette inégalité par t et de passer à la limite quand $t \to 0$. Désignons pour cela

$$B_t = \frac{1}{t}\int_0^t(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0-u,x_0+Y_{u_-})du. \tag{3.6.33}$$

Par le même argument que pour A_t, on vérifie que $B_t < \infty$ presque sûrement. Comme $(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})$ est continu, nous avons pour ω fixé que

$$B_t \xrightarrow{t\to 0} (\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0).$$

Notons $C = |(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0)|$ et introduisons $\theta_B = \inf\{t \geq 0 \mid |B_t| > C+1\}$. Par construction, $|B_{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A\wedge\theta_B}| \leq C+1$. Nous avons également que $\theta_B > 0$ presque sûrement (sinon, il existe $t_k \to 0$ tel que $|B_{t_k}| > C+1$; or $|B_{t_k}| \to C$). Par conséquent, pour ω fixé et pour t suffisamment petit, nous avons

$$B_{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A\wedge\theta_B} = B_t \xrightarrow{t\to 0} (\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0).$$

Le théorème de convergence dominée implique alors que

$$\mathbb{E}[B_{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A\wedge\theta_B}] \xrightarrow{t\to 0} (\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0).$$

Par ailleurs, en revenant en arrière et en remplaçant partout θ_A par $\theta_A \wedge \theta_B$,[14] nous pouvons obtenir dans (3.6.32) l'intégrale sur $[0, t\wedge\theta_0\wedge\theta_A\wedge\theta_B]$ ce qui implique

$$\mathbb{E}[B_{t\wedge\theta_0\wedge\theta_A\wedge\theta_B}] \leq 0.$$

En passant à la limite dans cette inégalité, nous obtenons

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0) \leq 0.$$

Ainsi, f est une sous-solution.

De même, si $\varphi \in C^2([0,T]\times\mathbb{R}) \cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ et $(\tau_0, x_0) \in (0,T]\times O$ vérifient $\varphi(\tau_0, x_0) = f(\tau_0, x_0)$ et $\varphi \leq f$ dans $[0,T]\times\mathbb{R}$, il est possible de montrer que

$$(\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} - L\varphi - r\frac{\partial\varphi}{\partial x})(\tau_0, x_0) \geq 0,$$

ce qui implique que f est une sur-solution. Par définition, f est alors une solution de viscosité de (3.6.12)–(3.6.13). Dans le cas $O = \mathbb{R}$, le principe de comparaison (Proposition 3.6.5) fournit l'unicité de la solution. □

3.7 Conclusion

La caractérisation des prix d'options en termes de solutions d'équations intégro-différentielles permet d'utiliser des méthodes numériques efficaces pour l'évaluation d'options à un sous-jacent en présence de sauts. Cette relation a déjà été utilisée par plusieurs auteurs (e.g. [AA00, MvPS04, dFV04, BLCN04, AO05]).

[14] Nous aurions pu introduire les temps d'arrêt θ_A et θ_B dès le début, c'est-à-dire, dès la ligne (3.6.27), mais à cet instant de la démonstration l'origine et la destination de ces notations aurait été obscure. Nous avons donc préféré les introduire au fur et à mesure des besoins.

Cependant, comme nous l'avons montré dans ce chapitre, cette caractérisation est moins évidente dans des modèles à sauts que dans des modèles de diffusion, à cause de l'irrégularité possible des prix. La valeur de l'option n'est pas toujours une solution classique de l'EID ce qui amène à considérer des notions de solutions généralisées.

En utilisant la notion de solution de viscosité, nous avons établi un lien précis entre des équations intégro-différentielles et des prix des options européennes et barrières dans les modèles de Lévy exponentiels. Ces résultats peuvent être étendus au cas de coefficients dépendant du temps (processus additifs) (voir [CT03, Chapter 14]). Du point de vue mathématique, on pourrait également considérer le cas de coefficients qui dépendent de la variable d'espace, c'est-à-dire des processus de Markov généraux ("modèles de volatilité locale avec sauts"), comme dans [AA00]. Cependant, comme il est montré dans [CT04], l'ajout d'une volatilité locale génère des effets redondants avec des petits sauts du processus de Lévy et rend le modèle difficile à calibrer. Le gain en terme de modélisation n'est donc pas clair et nous n'avons pas développé notre travail dans cette direction.

3.8 Sommaire des principaux résultats

Continuité des options européennes	**Proposition 3.4.1**, p. 43
Régularité C^∞ des options européennes	**Proposition 3.4.2**, p. 44
Dérivation de l'EID pour des options européennes dans le cas régulier	**Proposition 3.4.4**, p. 46
Comportement des dérivées d'une option européenne quand $\tau \to 0$	**Proposition 3.4.6**, p. 48
Dérivation de l'EID pour des options à barrières dans le cas régulier	**Proposition 3.4.9**, p. 51
Continuité des options *up-and-out*	**Proposition 3.5.6**, p. 57
Continuité des options *down-and-out*	**Proposition 3.5.9**, p. 61
Continuité des options double-barrière	**Proposition 3.5.10**, p. 63
Discontinuité à la barrière si les conditions des propositions précédentes ne sont pas vérifiées	**Proposition 3.5.14**, p. 65
Caractérisation des prix d'options européennes et à barrières comme solutions de viscosité des EID	**Proposition 3.6.9**, p. 77

Les résultats des Propositions 3.5.6, 3.5.9, 3.5.10 et 3.5.14 sont résumés dans le **Tableau 3.1**, p. 67.

Chapitre 4

Méthodes numériques

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons une approche à la résolution numérique du problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu, \qquad (0,T] \times O \tag{4.1.1}$$

$$u(\tau, x) = g(\tau, x), \qquad x \in O^c \tag{4.1.2}$$

$$u(0, x) = h(x), \qquad x \in O, \tag{4.1.3}$$

avec

$$Lu(\tau,x) = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,x) - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,x) + \int_{-\infty}^{\infty} \nu(dy)\ [u(\tau,x+y) - u(\tau,x) - (e^y - 1)\frac{\partial u}{\partial x}(\tau,x)],$$

où $O \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert, $O^c = \mathbb{R} \setminus O$ est le complémentaire de O et $g \in C_p^+([0,T] \times \mathbb{R} \setminus O)$ est une fonction continue.

Dans le cas de processus à sauts d'activité infinie, le noyau du terme intégral de l'équation présente une singularité en zéro ce qui est gênant du point de vue numérique. Au lieu de traiter ce cas directement, on remplace d'abord le processus initial par un modèle de diffusion avec sauts approprié. La procédure d'approximation est exposée dans la Section 4.2. Nous montrons que le prix d'un contrat donné (option européenne ou barrière) dans le nouveau modèle est proche du prix de ce contrat dans le modèle initial. Nous supposons donc par la suite que X est un processus à sauts d'activité finie avec $\sigma > 0$.

Avant de discrétiser l'équation, on la restreint sur un domaine borné et on tronque également le domaine d'intégration dans la partie non locale ce qui revient à supprimer

les grands sauts. Ces deux étapes sont présentées dans les Sections 4.3 et 4.4, respectivement. Nous estimons les erreurs liées à ces approximations en utilisant une approche probabiliste.

Pour résoudre numériquement le problème qui résulte de ces approximations préliminaires, nous utilisons des schémas aux différences finies de type implicite-explicite. Cette approche consiste, dans un premier temps, à diviser l'opérateur L en deux parties :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Du + Ju,$$

où D est la partie différentielle et J la partie intégrale de L (on verra que le choix de D et J peut varier conduisant à des schémas aux performances différentes). On remplace ensuite Du par une approximation de différences finies $D_\Delta u$, Ju par une quadrature $J_\Delta u$ et on utilise le schéma implicite-explicite suivant :

$$\frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} = D_\Delta u^{n+1} + J_\Delta u^n.$$

La partie non-locale est traitée de façon explicite pour éviter l'inversion d'une matrice pleine J_Δ.

Comme nous avons noté, il existe une certaine marge de manœuvre dans le choix des deux parties de l'opérateur. Les schémas qui en résultent possèdent des propriétés différentes tant sur le plan théorique qu'aux niveau des performances numériques.

Dans cette thèse, nous avons étudié deux versions du schéma. L'analyse théorique a montré que la première version est inconditionnellement stable malgré la présence d'une partie explicite. La seconde est seulement conditionnellement stable. Nous avons montré la convergence (Section 4.6.3) et donné des estimations de vitesse de convergence (Sections 4.6.4 et 4.6.5) des deux schémas.

Toutefois, en matière de méthodes numériques, la théorie doit toujours être approuvée par la pratique. Dans notre cas, la confrontation a posteriori des deux schémas à des simulations numériques (Section 5.2.2) a montré que la seconde méthode fait gagner un ordre d'erreur par rapport au premier schéma et que la condition de stabilité n'est pas très contraignante . En outre, le second schéma s'avère converger de façon plus uniforme par rapport aux paramètres de discrétisation.

4.2 Approximation par un processus d'activité finie

Dans le cas de modèles à sauts d'activité infinie, nous désirions nous débarrasser de la singularité de ν en zéro avant de résoudre le problème numériquement. L'idée consiste à remplacer les petits sauts du processus X_τ par un mouvement brownien approprié. Rappelons que X de triplet caractéristique (γ, σ, ν) est donné par

$$X_\tau = \gamma\tau + \sigma W_\tau + \int_0^\tau \int_{|z|>1} z J_X(dt\, dz) + \int_0^\tau \int_{-1}^1 z \tilde{J}_X(dt\, dz).$$

Pour chaque $\varepsilon > 0$, on définit sur le même espace de probabilité le processus suivant

$$X_\tau^\varepsilon = \gamma(\varepsilon)\tau + \sigma W_\tau + \sigma(\varepsilon)B_\tau + \int_0^\tau \int_{|z|>1} z J_X(dt\, dz) + \int_0^\tau \int_{|z|\geq\varepsilon} z \tilde{J}_X(dt\, dz). \quad (4.2.1)$$

où B_τ est un mouvement brownien indépendant de W_τ,

$$\sigma^2(\varepsilon) = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} y^2 \nu(\mathrm{d}y)$$

est choisi pour conserver la variance totale de X : $Var(X_\tau^\varepsilon) = Var(X_\tau)$, et $\gamma(\varepsilon)$ est déterminé pour que le processus $\exp(X_\tau^\varepsilon)$ reste une martingale :

$$\gamma(\varepsilon) = -\frac{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int_{|y|\geq\varepsilon} (e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1})\nu(dy).$$

Le triplet caractéristique du processus de Lévy X_τ^ε est donc $(\gamma(\varepsilon), \sqrt{\sigma^2 + \sigma^2(\varepsilon)}, \nu \mathbf{1}_{|x|\geq\varepsilon})$. Cela signifie qu'on remplace les sauts plus petits que ε par un mouvement brownien avec dérive : $\gamma(\varepsilon) - \gamma + \sigma(\varepsilon)W_\tau$. Par conséquent, X_τ^ε a des sauts d'activité finie.

On définit également la différence entre les deux processus :

$$R_\tau^\varepsilon \equiv X_\tau - X_\tau^\varepsilon = (\gamma - \gamma(\varepsilon))\tau - \sigma(\varepsilon)B_\tau - \int_0^\tau \int_{|z|<\varepsilon} z \tilde{J}_X(dt\, dz). \quad (4.2.2)$$

Le processus R^ε est également un processus de Lévy caractérisé par le triplet $(\gamma - \gamma(\varepsilon), \sigma(\varepsilon), \nu(-x)1_{|x|<\varepsilon})$.

On va montrer que l'erreur sur les prix d'options due à cette approximation tend vers zéro quand ε tend vers zéro. De plus, dans le cas européen, on donne une vitesse de convergence.

4.2.1 Options européennes

Rappelons que le prix d'une option européenne est donné par

$$u(\tau, x) = \mathbb{E}[h(x + r\tau + X_\tau)] = \mathbb{E}[h(x + Y_\tau)]. \quad (4.2.3)$$

On note par u^ε le prix de la même option dans le nouveau modèle :

$$u^\varepsilon(\tau, x) = \mathbb{E}[h(x + r\tau + X_\tau^\varepsilon)] \equiv \mathbb{E}[h(x + Y_\tau^\varepsilon)]. \quad (4.2.4)$$

Comme la composante de diffusion de X_τ^ε est non nulle, la Proposition 3.4.6 nous dit que u^ε vérifie le problème de Cauchy suivant (au sens classique) :

$$\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau} = L^\varepsilon u^\varepsilon, \qquad \text{sur } (0, T] \times \mathbb{R} \quad (4.2.5)$$

$$u^\varepsilon(0, x) = h(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R} \quad (4.2.6)$$

avec

$$L^\varepsilon f = \frac{\sigma^2+\sigma^2(\varepsilon)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \left(\frac{\sigma^2+\sigma^2(\varepsilon)}{2} - r + \alpha(\varepsilon)\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \lambda(\varepsilon)f(x) + \int_{|y|\geq\varepsilon}\nu(dy)f(x+y),$$

où $\alpha(\varepsilon) = \int_{|y|\geq\varepsilon}(e^y-1)\nu(\mathrm{d}y)$, $\lambda(\varepsilon) = \int_{|y|\geq\varepsilon}\nu(\mathrm{d}y)$.

La proposition suivante donne une estimation de l'écart entre u et u^ε.

Proposition 4.2.1. (Erreur de troncature des petits sauts, cas européen) *Soit h une fonction lipschitzienne : $|h(x)-h(y)| \leq c\,|x-y|$. Si u et u^ε sont définies par (4.2.3) et (4.2.4) respectivement, alors*

$$|u(\tau,x) - u^\varepsilon(\tau,x)| \;\leq\; C\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^3\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)} \leq C\varepsilon. \tag{4.2.7}$$

Démonstration. On utilise essentiellement [CT03, Proposition 6.2] avec la différence que l'on ajuste aussi le paramètre γ pour préserver la propriété de martingale. Définissons $Z_\tau = Y_\tau - (\gamma-\gamma(\varepsilon))\tau$. Alors,

$$\begin{aligned}|u(\tau,x) - u^\varepsilon(\tau,x)| &= |\mathbb{E}[h(x+Y_\tau)] - \mathbb{E}[h(x+Y_\tau^\varepsilon)]| \\ &\leq |\mathbb{E}[h(x+Z_\tau)] - \mathbb{E}[h(x+Y_\tau^\varepsilon)]| + \\ &\quad + |\mathbb{E}[h(x+Z_\tau+(\gamma-\gamma(\varepsilon))\tau)] - \mathbb{E}[h(x+Z_\tau)]|. \end{aligned}\tag{4.2.8}$$

Comme h est lipschitzienne, elle est presque partout différentiable avec $|h'| \leq c$. Par [CT03, Proposition 6.2], on a

$$|\mathbb{E}[h(x+Z_\tau)] - \mathbb{E}[h(x+Y_\tau^\varepsilon)]| \;\leq\; K\,c\,\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^3\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)} \tag{4.2.9}$$

avec $K < 16.5$. Le second terme peut être estimé de la manière suivante :

$$|\mathbb{E}[h(x+Z_\tau+(\gamma-\gamma(\varepsilon))\tau)] - \mathbb{E}[h(x+Z_\tau)]| \leq c\,|\gamma-\gamma(\varepsilon)|\tau$$

où

$$\begin{aligned}|\gamma-\gamma(\varepsilon)| &= \left|\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} - \int_{|y|<\varepsilon}(e^y-1-y)\nu(\mathrm{d}y)\right| \\ &= \left|\frac{1}{2}\int_{|y|<\varepsilon}\nu(\mathrm{d}y)\int_0^y e^s(y-s)^2 ds\right| \leq \frac{e^\varepsilon}{6}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^3\nu(\mathrm{d}y). \end{aligned}\tag{4.2.10}$$

Comme $\sigma^2(\varepsilon) \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$, (4.2.10) converge plus vite que (4.2.9) et donc peut être incorporé dans la constante C.

De plus, pour toute mesure ν, nous avons

$$\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^3\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^2\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)} \leq \frac{\varepsilon\sigma^2(\varepsilon)}{\sigma^2(\varepsilon)} = \varepsilon. \tag{4.2.11}$$

Cela termine la démonstration. □

Remarque 4.2.2. Si $\lim_{x\to 0}\nu(x)|x|^{1+\beta} = a > 0$, avec $0 \leq \beta < 2$, alors l'estimation (4.2.11) est optimale car dans ce cas $\frac{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}|y|^3\nu(\mathrm{d}y)}{\sigma^2(\varepsilon)} \sim \varepsilon$. Ce cas couvre tous les exemples cités au Chapitre 1 comme Variance Gamma et processus stables tempérés.

4.2.2 Options à barrières

Considérons maintenant le cas des options à barrières. La fonction de prix a la forme suivante :

$$u_b(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<\theta(x)\}}] \tag{4.2.12}$$

où $O = (l, u)$ est un intervalle ouvert, borné ou non ($-\infty \leq l < 0 < u \leq \infty$), et $\theta(x) = \inf\{t \geq 0 \,|\, x + Y_t \notin O\}$. Dans le modèle approché, on obtient donc

$$u_b^\varepsilon(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y_\tau^\varepsilon})1_{\{\tau<\theta^\varepsilon(x)\}}] \tag{4.2.13}$$

avec $\theta^\varepsilon(x) = \inf\{t \geq 0 \,|\, x + Y_t^\varepsilon \notin O\}$. On commence par montrer des résultats techniques dont on aura besoin par la suite.

Lemme 4.2.3. *Soit $\{X_t\}$ un processus de Lévy de type B ou C. On définit $\{X_t^\varepsilon\}$ comme dans (4.2.1) et on pose $Y_\tau = r\tau + X_\tau$ et $Y_t^\varepsilon = r\tau + X_\tau^\varepsilon$. Alors, pour tout temps déterministe $\tau \geq 0$ et tous $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > a,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{4.2.14}$$

$$\mathbb{Q}[\inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon < b,\ \inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t > b] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{4.2.15}$$

$$\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon < a,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t > a] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0, \tag{4.2.16}$$

$$\mathbb{Q}[\inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > b,\ \inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t < b] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \tag{4.2.17}$$

Démonstration. Si $a \leq 0$, la probabilité dans (4.2.14) est nulle puisque $Y_0 = 0$ et donc $\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t \geq 0$ presque sûrement. Considérons maintenant $a > 0$. Pour tout $\eta > 0$, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > a,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a] = \\
&\quad = \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > a,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t \leq a-\eta] + \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > a,\ a-\eta < \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a] \\
&\quad \leq \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{Y_t - R_t^\varepsilon\} > a,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t \leq a-\eta] + \mathbb{Q}[a-\eta < \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a] \\
&\leq \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}|R_t^\varepsilon| \geq \eta] + \mathbb{Q}[a-\eta < \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{Q}[a-\eta < \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < a],
\end{aligned} \tag{4.2.18}$$

puisque $\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}|R_t^\varepsilon|\ge\eta]\to 0$ quand $\varepsilon\to 0$, d'après le Lemme 3.5.12. Posons $\Omega_\eta=\{a-\eta<\sup Y_t<a\}$. Alors $\Omega_{\eta_1}\subseteq\Omega_{\eta_2}$ si $\eta_1\le\eta_2$. Par conséquent,

$$\mathbb{Q}[\Omega_\eta]\overset{\eta\to 0}{\to}\mathbb{Q}[\bigcap_{\eta>0}\Omega_\eta]=\mathbb{Q}[a\le\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a]=0. \tag{4.2.19}$$

Comme la partie gauche de (4.2.18) ne dépend pas de η, on conclut qu'elle est égale à zéro.

Le résultat (4.2.15) se ramène au cas précédent. En effet, si l'on note $\bar{Y}_t=-Y_t$, $\bar{Y}_t^\varepsilon=-Y_t^\varepsilon$, alors

$$\mathbb{Q}[\inf_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon<b,\ \inf_{0\le t\le\tau}Y_t>b] \;=\; \mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}\{\bar{Y}_t^\varepsilon\}>-b,\ \sup_{0\le t\le\tau}\{\bar{Y}_t\}<-b]\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0,$$

par (4.2.14), puisque $\bar{Y}_t$ est aussi de type B ou C.

Montrons (4.2.16). Si $a\le 0$, on a $\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon<a,\ \sup_{0\le t\le\tau}Y_t>a]=0$. Soit $a>0$. Pour tout $\eta>0$, on obtient comme précédemment,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon<a,\ \sup_{0\le t\le\tau}Y_t>a]=\\
&\quad=\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon<a,\ \sup_{0\le t\le\tau}Y_t\ge a+\eta]+\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon<a,\ a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a+\eta]\\
&\quad\le\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}\{Y_t-R_t^\varepsilon\}<a,\ \sup_{0\le t\le\tau}Y_t\ge a+\eta]+\mathbb{Q}[a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a+\eta]\\
&\le\mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}|R_t^\varepsilon|\ge\eta]+\mathbb{Q}[a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a+\eta]\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}\mathbb{Q}[a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a+\eta].
\end{aligned}\tag{4.2.20}$$

De la même manière comme dans (4.2.19), on obtient

$$\mathbb{Q}[a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t<a+\eta]\to\mathbb{Q}[a<\sup_{0\le t\le\tau}Y_t\le a]=0. \tag{4.2.21}$$

L'affirmation (4.2.17) se ramène à (4.2.16) : pour tout $b\in\mathbb{R}$,

$$\mathbb{Q}[\inf_{0\le t\le\tau}Y_t^\varepsilon>b,\ \inf_{0\le t\le\tau}Y_t<b] \;=\; \mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}\{\bar{Y}_t^\varepsilon\}<-b,\ \sup_{0\le t\le\tau}\{\bar{Y}_t\}>-b]\overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow}0.$$

□

Lemme 4.2.4. *Soit $\{Y_t\}$ un processus de Lévy de type B ou C et $\theta(x)$, $\theta^\varepsilon(x)$ définis comme dans (4.2.12) et (4.2.13). Pour tout $\tau\ge 0$, on a*

$$\mathbb{Q}[\theta^\varepsilon(x)\le\tau<\theta(x)] \;\to\; 0, \tag{4.2.22}$$

$$\mathbb{Q}[\theta(x)\le\tau<\theta^\varepsilon(x)] \;\to\; 0, \tag{4.2.23}$$

quand $\varepsilon\to 0$.

Démonstration. Si $x \geq u$ ou $x \leq l$, alors $\theta(x) = \theta^\varepsilon(x) = 0$, donc les probabilités dans (4.2.22)–(4.2.23) sont nulles.

Soit $l < x < u$. Montrons (4.2.22). Pour simplifier l'écriture, on introduit des notations pour les événements suivants :

$$\begin{aligned}
\Omega_u^\varepsilon &= \{\sup_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t^\varepsilon\} > u\},\\
\Omega_u &= \{\sup_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t\} < u\},\\
\Omega_l^\varepsilon &= \{\inf_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t^\varepsilon\} < l\},\\
\Omega_l &= \{\inf_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t\} > l\}.
\end{aligned}$$

D'après le Lemme 3.5.3, $\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t\} = u] = 0$ et

$$\mathbb{Q}[\inf_{0\leq t\leq\tau}\{x + Y_t\} = l] \;=\; \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{-x - Y_t\} = -l] = 0$$

(idem pour Y^ε). Par conséquent, $\mathbb{Q}[\theta^\varepsilon(x) \leq \tau] = \mathbb{Q}[\Omega_u^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon]$ et $\mathbb{Q}[\tau < \theta(x)] = \mathbb{Q}[\Omega_u \cap \Omega_l]$. On a donc

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}[\theta^\varepsilon(x) \leq \tau < \theta(x)] = \mathbb{Q}[(\Omega_u^\varepsilon \cup \Omega_l^\varepsilon) \cap (\Omega_u \cap \Omega_l)]\\
&= \mathbb{Q}[\Omega_u^\varepsilon \cap \Omega_u \cap \Omega_l] + \mathbb{Q}[\Omega_l^\varepsilon \cap \Omega_u \cap \Omega_l] - \mathbb{Q}[\Omega_u^\varepsilon \cap \Omega_l^\varepsilon \cap \Omega_u \cap \Omega_l] \leq \mathbb{Q}[\Omega_u^\varepsilon \cap \Omega_u] + \mathbb{Q}[\Omega_l^\varepsilon \cap \Omega_l]\\
&= \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > u - x,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t < u - x] + \mathbb{Q}[\inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon < l - x,\ \inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t > l - x] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'après (4.2.14) et (4.2.15).

Pour (4.2.23), on montre exactement de la même manière que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \theta^\varepsilon(x)] \leq \mathbb{Q}[&\sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon < u - x,\ \sup_{0\leq t\leq\tau} Y_t > u - x]\\
&+ \mathbb{Q}[\inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t^\varepsilon > l - x,\ \inf_{0\leq t\leq\tau} Y_t < l - x] \overset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.2.3. □

Nous avons maintenant tous les outils nécessaires pour montrer la convergence vers zéro de l'erreur de l'approximation activité finie des prix des options à barrières.

Proposition 4.2.5. (Erreur de troncature des petits sauts, cas barrière)
Soit H une fonction lipschitzienne positive. Si $\{Y_t\}$ est un processus de Lévy à sauts d'activité infinie et que u_b et u_b^ε sont donnés par (4.2.12) et (4.2.13) respectivement, alors, pour tout $(\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$, on a $|u_b(\tau, x) - u_b^\varepsilon(\tau, x)| \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$.

Démonstration. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned}
&|u(\tau, x) - u^\varepsilon(\tau, x)| = |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau})1_{\{\tau<\theta(x)\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon})1_{\{\tau<\theta^\varepsilon(x)\}}]|\\
&\quad\leq |\mathbb{E}[(H(S_0 e^{x+Y_\tau}) - H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon}))1_{\{\tau<\theta(x)\}}]| + |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon})(1_{\{\tau<\theta(x)\}} - 1_{\{\tau<\theta^\varepsilon(x)\}})]|\\
&\leq \mathbb{E}|H(S_0 e^{x+Y_\tau}) - H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon})| + \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon})1_{\{\theta^\varepsilon(x)\leq\tau<\theta(x)\}}] + \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+Y_\tau^\varepsilon})1_{\{\theta(x)\leq\tau<\theta^\varepsilon(x)\}}]
\end{aligned} \tag{4.2.24}$$

On note comme précédemment $R^\varepsilon_\tau \stackrel{d}{=} Y_\tau - Y^\varepsilon_\tau$, $R^\varepsilon \perp\!\!\!\perp \{Y,\ Y^\varepsilon\}$. Considérons le premier terme dans (4.2.24) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}|H(S_0e^{x+Y_\tau}) - H(S_0e^{x+Y^\varepsilon_\tau})| &\le CS_0e^x\mathbb{E}|e^{Y_\tau} - e^{Y^\varepsilon_\tau}| = CS_0e^x\mathbb{E}[e^{Y^\varepsilon_\tau}|e^{R^\varepsilon_\tau} - 1|] \\ &= CS_0e^x\mathbb{E}[e^{Y^\varepsilon_\tau}]\mathbb{E}|e^{R^\varepsilon_\tau} - 1| = CS_0e^{x+r\tau}\mathbb{E}|e^{R^\varepsilon_\tau} - 1| \\ &= CS_0e^{x+r\tau}[\mathbb{E}(e^{R^\varepsilon_\tau} - 1) + 2\mathbb{E}(1 - e^{R^\varepsilon_\tau})^+]. \quad (4.2.25)\end{aligned}$$

La première espérance peut être calculée explicitement :

$$\mathbb{E}(e^{R^\varepsilon_\tau} - 1) = \exp\{\tau[\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} + \gamma - \gamma(\varepsilon) + \int_{|x|<\varepsilon}(e^x - 1 - x)\nu(dx)]\} - 1 \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad (4.2.26)$$

Pour estimer la seconde espérance, on s'aperçoit d'abord que

$$\mathbb{E}(R^\varepsilon_\tau)^2 = 2\tau\sigma^2(\varepsilon) + \tau^2(\gamma - \gamma(\varepsilon))^2 \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

Cela signifie que $R^\varepsilon_\tau \to 0$ dans L^2 et donc a fortiori en loi : pour toute fonction continue bornée f, on a $\mathbb{E}f(R^\varepsilon_\tau) \to f(0)$ quand $\varepsilon \to 0$. Pour $f(x) = (1 - e^x)^+$ cela implique que

$$\mathbb{E}(1 - e^{R^\varepsilon_\tau})^+ \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0. \quad (4.2.27)$$

On conclut que l'expression dans (4.2.25) tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$.

Passons à l'estimation du deuxième terme dans (4.2.24). Comme H est lipschitzienne, il existe $M > 0$ tel que $H(S) \le M(S + 1)$, $\forall S \ge 0$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y^\varepsilon_\tau})1_{\{\theta^\varepsilon(x)\le\tau<\theta(x)\}}] &\le M\mathbb{E}[(S_0e^{-R^\varepsilon_\tau}e^{x+Y_\tau} + 1)1_{\{\theta^\varepsilon(x)\le\tau<\theta(x)\}}] \\ &\le M(S_0\mathbb{E}[e^{-R^\varepsilon_\tau}]e^u + 1)\mathbb{Q}[\theta^\varepsilon(x) \le \tau < \theta(x)], \quad (4.2.28)\end{aligned}$$

puisque $\tau < \theta(x)$ implique $x + Y_\tau < u$. En utilisant (4.2.22) et le fait que

$$\mathbb{E}[e^{-R^\varepsilon_\tau}] \ = \ \exp\{\tau[\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} - (\gamma - \gamma(\varepsilon)) + \int_{|x|<\varepsilon}(e^{-x} - 1 + x)\nu(dx)]\} \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 1,$$

on obtient que l'expression dans (4.2.28) tend vers zéro.

Le dernier terme de (4.2.24) est traité de façon similaire :

$$\mathbb{E}[H(S_0e^{x+Y^\varepsilon_\tau})1_{\{\theta(x)\le\tau<\theta^\varepsilon(x)\}}] \ \le \ M(S_0e^u + 1)\mathbb{Q}[\theta(x) \le \tau < \theta^\varepsilon(x)] \stackrel{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0,$$

d'après (4.2.23). Cela termine la démonstration. □

Notons que contrairement au cas européen, la Proposition 4.2.5 ne donne pas de vitesse de convergence de l'erreur.

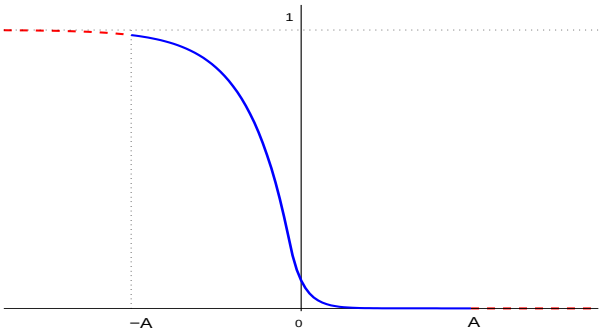


FIG. 4.1 – Exemple de conditions aux bords numériques pour un Put européen : la fonction est prolongée par le *payoff* $h(x) = (1 - e^x)^+$ à l'extérieur de l'intervalle de calcul $[-A, A]$.

4.3 Localisation sur un domaine borné

Pour résoudre numériquement le problème (4.1.1) dans le cas de O non borné, on le restreint d'abord sur un intervalle $x \in (-A, A)$. Dans le cas purement différentiel, cela amène à spécifier des conditions aux bords en $x = -A$ et $x = A$. Ici, comme on a déjà noté, l'opérateur L est non local : pour évaluer le terme intégral au point $x \in (-A, A)$, on doit connaître les valeurs de $u(\tau, \cdot)$ sur $\{x+y \mid y \in \operatorname{supp} \nu\}$, ce qui est égal à $\mathbb{R}$ tout entier dans la plupart des modèles. Dans le cas des options à barrières de type *knock-out*, la fonction est prolongée naturellement par zéro (ou par le *rebate*) à l'extérieur du domaine. Dans les autres cas, il faut choisir une extension artificielle $u(\tau, x) = g(\tau, x),\ x \notin (-A, A)$.

La fonction g peut être spécifiée de plusieurs façons. Dans cette thèse, nous avons d'abord considéré deux cas simples qui nous sont venus à l'esprit. Le premier est $g = 0$ ce qui veut dire que l'on prolonge la solution par zéro à l'extérieur du domaine. L'autre extension que nous avons étudiée est donnée par la fonction de *payoff* (la condition initiale) : $g(\tau, x) = h(x)$ (voir Fig. 4.1). Nous avons montré (Proposition 4.3.1) que dans les deux cas l'erreur de localisation décroît exponentiellement avec la taille du domaine.

Toutefois, du point de vue numérique ces deux conditions ne sont pas optimales et un meilleur choix serait $g(\tau, x) = h(x + r\tau)$. Nous justifions cette correction par la Proposition 4.3.4 dans la deuxième partie de cette section.

Commençons par le cas $g = 0$ ou $g = h$. On pose $M_\tau^x = \sup_{t \in [0,\tau]} |Y_t + x|$ et on considère

$$u_A(\tau, x) = \mathbb{E}[h(Y_\tau + x) 1_{\{M_\tau^x < A\}}], \qquad \text{si } g = 0 \tag{4.3.1}$$

$$\text{ou } u_A(\tau, x) = \mathbb{E}[h(Y_\tau + x) 1_{\{M_\tau^x < A\}} + h(Y_{\theta(x)} + x) 1_{\{M_\tau^x \geq A\}}] \tag{4.3.2}$$

où $\theta(x) = \inf\{t \geq 0, |Y_t + x| \geq A\}$ est le temps de la première sortie du processus $Y_t + x$ de l'intervalle $[-A, A]$.

Proposition 4.3.1. (Erreur de localisation si $g = h$ ou 0)
Supposons que h est bornée et qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{|x|>1} e^{\alpha|x|}\nu(dx) < \infty. \tag{4.3.3}$$

Soient $u(\tau, x) = \mathbb{E}[h(x + Y_\tau)]$ et $u_A(\tau, x)$ donnée par (4.3.1) ou (4.3.2). Alors,

$$|u(\tau, x) - u_A(\tau, x)| \leq 2C_{\tau,\alpha}e^{\alpha r\tau}||h||_\infty e^{-\alpha(A-|x|)}, \qquad \forall x \in (-A, A). \tag{4.3.4}$$

où la constante $C_{\tau,\alpha}$ ne dépend pas de A.

Démonstration. En soustrayant u_A de u on obtient :

$$\begin{aligned} |u(\tau, x) - u_A(\tau, x)| &= |\mathbb{E}h(Y_\tau + x)1_{\{M_\tau^x \geq A\}}| \\ &\leq ||h||_\infty \mathbb{Q}(M_\tau^x \geq A) \quad \text{pour } g = 0, \end{aligned}$$

ou, dans le cas $g(\tau, x) = h(x)$:

$$\begin{aligned} |u(\tau, x) - u_A(\tau, x)| &\leq \mathbb{E}|h(Y_\tau + x)1_{\{M_\tau^x \geq A\}}| + \mathbb{E}|h(Y_{\theta(x)} + x)1_{\{M_\tau^x \geq A\}}| \\ &\leq 2||h||_\infty \mathbb{Q}(M_\tau^x \geq A). \end{aligned} \tag{4.3.5}$$

Donc, dans les deux cas,

$$|u(\tau, x) - u_A(\tau, x)| \leq 2||h||_\infty \mathbb{Q}(M_\tau^x \geq A). \tag{4.3.6}$$

Le théorème 25.18 de [Sat99] avec (4.3.3) implique

$$C_{\tau,\alpha} = \mathbb{E}e^{\alpha \sup_{0\leq t\leq \tau} |X_t|} < \infty. \tag{4.3.7}$$

Par conséquent, on peut appliquer l'inégalité de Chebyshev (Proposition A.1.3) ce qui donne

$$\mathbb{Q}(M_\tau^0 \geq A) \leq \mathbb{E}[e^{\alpha \sup_{0\leq t\leq \tau} |rt+X_t|}]e^{-\alpha A} \leq C_{\tau,\alpha}e^{\alpha r\tau}e^{-\alpha A}. \tag{4.3.8}$$

Pour passer de M_τ^0 à M_τ^x, on utilise les implications suivantes :

$$\begin{aligned} & \sup|Y_t + x| \leq \sup|Y_t| + |x| \\ \Rightarrow \quad & (\sup|Y_t + x| \geq A \Rightarrow \sup|Y_t| + |x| \geq A) \\ \Rightarrow \quad & \mathbb{Q}(M_\tau^x \geq A) \leq \mathbb{Q}(M_\tau^0 \geq A - |x|) \\ & \leq C_{\tau,\alpha}e^{\alpha r\tau}e^{-\alpha(A-|x|)} \quad \text{d'après (4.3.8).} \end{aligned}$$

En combinant la dernière inégalité avec (4.3.6), on obtient le résultat. □

Remarque 4.3.2. Dans le cas d'un *Put*, la fonction de *payoff* h est bornée, donc la Proposition 4.3.1 s'applique. Dans d'autres exemples, h peut être non bornée ; dans ce cas, il est encore possible d'obtenir une décroissance exponentielle de l'erreur de localisation sous des restrictions supplémentaires sur ν. Notons que pour un *Call*, bien que le *payoff* croisse exponentiellement, on peut se ramener au cas borné d'un *Put* en utilisant la relation de parité *Call-Put* pour réduire l'erreur de localisation.

Remarque 4.3.3. La décroissance exponentielle de l'erreur de localisation dans le cas Black-Scholes a été démontrée par Lamberton & Lapeyre [LL92] en utilisant des formules probabilistes et par Barles, Daher & Romano [BDR95] avec une technique analytique dans l'esprit de [BS91].

Dans le cas des EID, une estimation exponentielle sur l'erreur de localisation dans la norme L^2 a été obtenue dans [MvPS04] par des méthodes analytiques. Notre estimation a l'avantage d'être locale (ponctuelle). Par exemple, elle reflète bien le fait intuitif que l'erreur de localisation est plus importante près de la frontière. Notons également que le résultat ci-dessus implique que l'erreur de localisation décroît uniformément sur tout sous-intervalle fermé de $(-A, A)$:

$$|u(\tau, x) - u_A(\tau, x)| \leq k e^{-\alpha\delta A}, \qquad \text{avec } |x| \leq (1-\delta)A,$$

où $0 < \delta < 1$.

L'hypothèse (4.3.3) signifie que les queues de ν doivent décroître exponentiellement, ce qui est vrai en général pour les exemples considérés dans la littérature (à l'exception du modèle log-stable de Carr et Wu [CW03]). Notons que dans les modèles de Lévy exponentiels, grâce à la condition de martingale, on a toujours $\int_1^{+\infty} e^{\alpha x}\nu(\mathrm{d}x) < \infty$, pour tout $\alpha \leq 1$, donc (4.3.3) est une condition supplémentaire sur les sauts négatifs.

Remarquons que l'estimation (4.3.5) est grossière et n'exploite pas le fait que, asymptotiquement, la solution est plus proche de h que de zéro. En fait, avec cette méthode, on aurait pu prendre n'importe quelle fonction g bornée : la convergence de l'erreur vers zéro tient tout simplement au fait que la probabilité de sortir d'un domaine décroît avec la taille du domaine.

Autrement dit, si le domaine est suffisamment grand pour que le processus n'en sorte presque jamais, le choix de conditions en dehors du domaine n'est pas très important. Mais cela est vrai seulement pour les points au milieu de l'intervalle : si le processus part d'un point près du bord, il y a toujours une possibilité non négligeable qu'il sorte du domaine. En particulier, si on se trompe beaucoup sur le prolongement, l'erreur sur les bords ne va pas converger vers zéro. Ceci est cohérent avec l'estimation (4.3.4) : si $|x| = A$, le terme de droite ne tend pas vers zéro.

Donc, la Proposition 4.3.1 ne donne pas d'information sur le bon choix de prolongement du point de vue numérique. Nous allons maintenant expliquer comment améliorer ce résultat.

Considérons la fonction $g(\tau, x) = h(x + r\tau)$ et remarquons qu'elle donne la condition aux bords *exacte* pour les deux *payoffs* suivants : $h(x) = 1$ et $h(x) = e^x$. En effet, dans ces deux cas, la solution du problème de Cauchy est connue explicitement :

$$\begin{aligned} h(x) = 1 \quad &\Rightarrow \quad u(\tau, x) = 1, \\ h(x) = e^x \quad &\Rightarrow \quad u(\tau, x) = e^{x+r\tau}. \end{aligned}$$

On voit que, dans les deux cas, $u(\tau, x) = h(x + r\tau)$.

Montrons également que pour $h(x) = (K - S_0 e^x)^+$ (*payoff* du Put), cette condition est cohérente avec la parité Call-Put :

$$P(t,S) = C(t,S) + Ke^{-r(T-t)} - S.$$

Quand S est petit, $C(t,S)$ est proche de zéro. Ceci suggère l'approximation suivante pour P :

$$P(t,S) \sim Ke^{-r(T-t)} - S \quad \text{quand} \quad S \to 0.$$

Par ailleurs, on sait que $P \to 0$ quand $S \to \infty$. Nous avons donc $P(t,S) \sim (Ke^{-r(T-t)} - S)^+$ pour S suffisamment petit ou suffisamment grand. En variables (τ, x), cela donne

$$p(\tau,x) = e^{r\tau} P(T-\tau, S_0 e^x) \sim (K - S_0 e^{x+r\tau})^+ = h(x + r\tau).$$

Cette façon de choisir les conditions aux bords pour un Call ou un Put en se basant sur la relation de parité est standard et fonctionne indépendamment du modèle. Toutefois, nous ne nous contentons pas de ce raisonnement heuristique et estimons, dans la proposition suivante, l'erreur de localisation dans ce cas.

Proposition 4.3.4. (Erreur de localisation si $g(\tau,x) = h(x + r\tau)$)
Soit Y_t de type B ou C. Considérons le prix forward d'un Put européen $p(\tau,x) = \mathbb{E}[h(x + r\tau + X_\tau)]$, avec $h(x) = (K - S_0 e^x)^+$, ainsi que son approximation sur l'intervalle (l,u) qui correspond au prolongement $g(\tau,x) = h(x + r\tau)$ (voir (3.2.9)) :

$$p_{(l,u)}(\tau,x) = \mathbb{E}[h(x + r\tau + X_\tau)1_{\theta > \tau} + h(x + r\tau + X_\theta)1_{\theta \le \tau}], \tag{4.3.9}$$

où $\theta = \inf\{t \ge 0 \mid x + rt + X_t \notin (l,u)\}$. Supposons qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{\alpha|x|} \nu(dx) < \infty, \qquad \int_1^{\infty} e^{(1+\alpha)x} \nu(dx) < \infty. \tag{4.3.10}$$

Soit $k = \ln(K/S_0)$. Alors, pour tous $u > k$, $l < k - r\tau$ et $x \in (l,u)$, nous avons

$$\begin{aligned} |p(\tau,x) - p_{(l,u)}(\tau,x)| \le e^{(1+\alpha)r\tau} \big[& K m^-_{\tau,\alpha} C^+_{\tau,1+\alpha} e^{-\alpha(u-k)} e^{-(1+\alpha)(u-x)} \\ & + 2S_0 C_{\tau,\alpha} e^l e^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)} + S_0 C^-_{\tau,\alpha} m^+_{\tau,1+\alpha} e^l e^{-\alpha(k-l)} e^{-\alpha(x-l)} + K m^+_{\tau,1+\alpha} e^{-(1+\alpha)(k-l)} \big], \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{\tau,\alpha} &= \mathbb{E}[e^{\alpha \sup_{0\le t\le\tau} |X_t|}] < \infty, \\ C^+_{\tau,1+\alpha} &= \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\le t\le\tau}\{X_t\}}] < \infty, \\ C^-_{\tau,\alpha} &= \mathbb{E}[e^{\alpha \sup_{0\le t\le\tau}\{-X_t\}}] < \infty, \\ m^+_{\tau,1+\alpha} &= \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)X_\tau}] = e^{\tau\phi(-i(1+\alpha))} < \infty, \\ m^-_{\tau,\alpha} &= e^{\tau\phi(i\alpha)^+} < \infty, \end{aligned}$$

où ϕ est l'exposant caractéristique de X. En particulier, si $K = S_0$ et $l = -u$, alors

$$|p(\tau, x) - p_{(l,u)}(\tau, x)| \leq C(\tau, \alpha)e^{-\alpha u}, \tag{4.3.12}$$

où $C(\tau,\alpha) = Ke^{(1+\alpha)r\tau}\left[m^-_{\tau,\alpha}C^+_{\tau,1+\alpha} + 2C_{\tau,\alpha} + C^-_{\tau,\alpha}m^+_{\tau,1+\alpha} + m^+_{\tau,1+\alpha}\right]$.

Avant de passer à la démonstration qui est assez technique, commentons ce résultat. Les estimations (4.3.11) et (4.3.12) montrent que l'erreur de localisation converge vers zéro même sur les bords ($x = l$ et $x = u$) ce qui n'était pas le cas dans la Proposition 4.3.1. Toutefois, l'erreur au milieu de l'intervalle décroît plus vite : si $x = k = 0$ et $l = -u$, on déduit de (4.3.11) que

$$|p(\tau, 0) - p_{(l,u)}(\tau, 0)| \leq C(\tau, \alpha)e^{-(1+\alpha)u} \tag{4.3.13}$$

avec le même $C(\tau, \alpha)$ que dans (4.3.12).

L'hypothèse (4.3.10) est un peu plus forte que (4.3.3) en ce qui concerne la queue droite de ν. Cette condition nous semble pourtant logique puisque la condition d'intégrabilité est initialement asymétrique pour les deux queues. L'hypothèse (4.3.10) signifie juste que l'on rajoute le même degré d'intégrabilité ($e^{\alpha|x|}$) des deux côtés.

Enfin, notons que la démonstration utilise de façon essentielle la forme du *payoff* de Put. En quelque sorte, il est composé d'une constante et d'une exponentielle pour lesquelles, comme nous avons remarqué, la condition $h(x+r\tau)$ est exacte. On peut imaginer des exemples de h pour lesquels cette condition ne sera pas forcément la meilleure.

Démonstration. Nous aurons besoin de quelques lemmes. Tous les lemmes formulés dans le cadre de cette preuve utilisent les mêmes hypothèses que la proposition.

Lemme 4.3.5. *Les constantes $C_{\tau,\alpha}$, $C^+_{\tau,1+\alpha}$, $C^-_{\tau,\alpha}$, $m^+_{\tau,1+\alpha}$ et $m^-_{\tau,\alpha}$ sont finies.*

Démonstration. Grâce à l'hypothèse (4.3.10), nous avons

$$\begin{aligned}
&\phi(-i(1+\alpha)) = \frac{\sigma^2}{2}\alpha(1+\alpha) + \int (e^{(1+\alpha)x} - 1 - (1+\alpha)(e^x - 1))\nu(dx) < \infty,\\
&|\phi(i\alpha)| = |\frac{\sigma^2}{2}(\alpha^2+\alpha) + \int (e^{-\alpha x} - 1 + \alpha(e^x - 1))\nu(dx)| < \infty.
\end{aligned} \tag{4.3.14}$$

Cela implique immédiatement que $m^+_{\tau,1+\alpha} < \infty$ et $m^-_{\tau,\alpha} < \infty$.

La finitude de $C_{\tau,\alpha}$ a déjà été démontrée dans la Proposition 4.3.1. Montrons que $C^+_{\tau,1+\alpha} < \infty$. Décomposons X de la façon suivante : $X_t \overset{d}{=} \tilde{X}_t + X^-_t$ où X^-_t comporte les sauts négatifs de X plus petits que -1 (c'est-à-dire, le triplet caractéristique de X^- est $(\sigma, \gamma, \nu 1_{\{x<-1\}})$). Alors $X^-_t \leq 0$ et donc $X_t 1_{X_t>0} \leq \tilde{X}_t 1_{\tilde{X}_t>0}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
C^+_{\tau,1+\alpha} = \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\leq t\leq\tau}\{X_t\}}] &= \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\leq t\leq\tau}\{X_t 1_{X_t>0}\}}]\\
&\leq \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\leq t\leq\tau}\{\tilde{X}_t 1_{\tilde{X}_t>0}\}}] \leq \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\leq t\leq\tau}|\tilde{X}_t|}].
\end{aligned}$$

D'après [Sat99, Théorème 25.18], nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\le t\le\tau}|\tilde{X}_t|}]<\infty \quad &\Longleftrightarrow \quad \exists t>0,\ \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)|\tilde{X}_t|}]<\infty \\ &\Longleftrightarrow \quad \int_{-1}^{\infty} e^{(1+\alpha)|x|}\nu(dx)<\infty. \end{aligned} \tag{4.3.15}$$

Or (4.3.15) est vrai grâce à l'hypothèse (4.3.10). Donc $C^{+}_{\tau,1+\alpha}<\infty$. Par le même raisonnement, nous obtenons

$$C^{-}_{\tau,\alpha}=\mathbb{E}[e^{\alpha\sup_{0\le t\le\tau}\{-X_t\}}]\le\mathbb{E}[e^{\alpha\sup_{0\le t\le\tau}|X_t|}]<\infty, \tag{4.3.16}$$

puisque $\int_{|x|>1}e^{\alpha|x|}\nu(dx)<\infty$. □

Lemme 4.3.6. *La relation suivante est vérifiée :*

$$\mathbb{E}[(e^{X_\tau}-e^{X_{\theta_l}})1_{\{\theta_l\le\tau\}}]=0. \tag{4.3.17}$$

Démonstration. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(e^{X_\tau}-e^{X_{\theta_l}})1_{\{\theta_l\le\tau\}}] &= \mathbb{E}[(e^{X_\tau}-e^{X_{\theta_l}})1_{\{\theta_l\le\tau\}}+(e^{X_\tau}-e^{X_\tau})1_{\{\tau<\theta_l\}}] \\ &= \mathbb{E}[e^{X_\tau}]-\mathbb{E}[e^{X_{\theta_l}}1_{\{\theta_l\le\tau\}}+e^{X_\tau}1_{\{\tau<\theta_l\}}]=\mathbb{E}[e^{X_\tau}]-\mathbb{E}[e^{X_{\tau\wedge\theta_l}}]=0,\end{aligned}$$

d'après le théorème d'arrêt optimal car e^{X_t} est une martingale. □

Rappelons que $\theta_l=\inf\{t\ge0\mid x+Y_t\le l\}$, $\theta_u=\inf\{t\ge0\mid x+Y_t\ge u\}$ et $Y_t=rt+X_t$.

Lemme 4.3.7. *Nous avons*

$$\begin{aligned}&p(\tau,x)-p_{(l,u)}(\tau,x)=\mathbb{E}[(K-S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau<k\}}] \\ &+S_0\mathbb{E}[(e^{x+r\tau+X_\tau}-e^{x+r\tau+X_{\theta_l}})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_l\le\tau\}}]+\mathbb{E}[(S_0e^{x+r\tau+X_\tau}-K)1_{\{\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau\ge k\}}].\end{aligned} \tag{4.3.18}$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}p(\tau,x)-p_{(l,u)}(\tau,x) &= \mathbb{E}[h(x+r\tau+X_\tau)1_{\theta>\tau}+h(x+r\tau+X_\tau)1_{\theta\le\tau}] \\ &\quad-\mathbb{E}[h(x+r\tau+X_\tau)1_{\theta>\tau}+h(x+r\tau+X_\theta)1_{\theta\le\tau}] \\ &= \mathbb{E}[\{h(x+r\tau+X_\tau)-h(x+r\tau+X_\theta)\}1_{\theta\le\tau}].\end{aligned}$$

Le processus peut sortir du domaine soit par la barrière supérieure, soit par la barrière inférieure : $\theta=\theta_u<\theta_l$ ou $\theta=\theta_l<\theta_u$. Donc

$$\begin{aligned}p(\tau,x)-p_{(l,u)}(\tau,x) &= \mathbb{E}[\{h(x+r\tau+X_\tau)-h(x+r\tau+X_{\theta_u})\}1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau\}}] \\ &\quad+\mathbb{E}[\{h(x+r\tau+X_\tau)-h(x+r\tau+X_{\theta_l})\}1_{\{\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\le\tau\}}] \\ &= \mathbb{E}[(K-S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau<k\}}] \\ &\quad+\mathbb{E}[((K-S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{x+r\tau+X_\tau<k\}}-(K-S_0e^{x+r\tau+X_{\theta_l}}))1_{\{\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\le\tau\}}],\end{aligned} \tag{4.3.19}$$

puisque $x + r\tau + X_{\theta_u} = x + Y_{\theta_u} + r(\tau - \theta_u) \geq u > k$ si $\theta_u \leq \tau$ et $x + r\tau + X_{\theta_l} = x + Y_{\theta_l} + r(\tau - \theta_l) \leq l + r(\tau - \theta_l) \leq l + r\tau < k$. La seconde espérance dans (4.3.19) peut être transformée de la manière suivante en utilisant le Lemme 4.3.6 :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[\big\{(K - S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{x+r\tau+X_\tau<k\}} - (K - S_0 e^{x+r\tau+X_{\theta_l}})\big\}\, 1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau\}}] \\
&\qquad = \mathbb{E}[\big\{S_0 e^{x+r\tau}(e^{X_{\theta_l}} - e^{X_\tau}) - (K - S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{x+r\tau+X_\tau\geq k\}}\big\}\, 1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau\}}] \\
&= S_0 e^{x+r\tau}\mathbb{E}[(e^{X_{\theta_l}} - e^{X_\tau})1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau\}}] + \mathbb{E}[(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau} - K)1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau,\, x+r\tau+X_\tau\geq k\}}] \\
&= S_0 e^{x+r\tau}\mathbb{E}[(e^{X_\tau} - e^{X_{\theta_l}})1_{\{\theta_u<\theta_l,\, \theta_l\leq\tau\}}] + \mathbb{E}[(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau} - K)1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau,\, x+r\tau+X_\tau\geq k\}}],
\end{aligned}$$

puisque $1_{\{\theta_l<\theta_u,\, \theta_l\leq\tau\}} = 1_{\{\theta_l\leq\tau\}} - 1_{\{\theta_u<\theta_l,\, \theta_l\leq\tau\}}$. Cela termine la preuve. □

Lemme 4.3.8. *Pour tout $c > 0$ et tout $t \leq \tau$, nous avons*

$$\mathbb{Q}[X_t \geq c] \leq m^+_{\tau,1+\alpha} e^{-(1+\alpha)c}, \tag{4.3.20}$$
$$\mathbb{Q}[-X_t \geq c] \leq m^-_{\tau,\alpha} e^{-\alpha c}. \tag{4.3.21}$$

Démonstration. Il vient de l'inégalité de Chebyshev que

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[X_t \geq c] = \mathbb{Q}[X_t 1_{X_t>0} \geq c] &\leq \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)X_t 1_{X_t>0}} 1_{X_t>0}] e^{-(1+\alpha)c} \\
&\leq \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)X_t}] e^{-(1+\alpha)c} = e^{t\phi(-i(1+\alpha))} e^{-(1+\alpha)c} = m^+_{\tau,1+\alpha} e^{-(1+\alpha)c}.
\end{aligned}$$

L'inégalité (4.3.21) se démontre de la même manière :

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[-X_t \geq c] = \mathbb{Q}[-X_t 1_{X_t<0} \geq c] &\leq \mathbb{E}[e^{\alpha(-X_t)1_{X_t<0}} 1_{X_t<0}] e^{-\alpha c} \\
&\leq \mathbb{E}[e^{\alpha(-X_t)}] e^{-\alpha c} = e^{t\phi(i\alpha)} e^{-\alpha c} \leq e^{\tau\phi(i\alpha)^+} e^{-\alpha c} = m^-_{\tau,\alpha} e^{-\alpha c}.
\end{aligned}$$

□

Lemme 4.3.9. *Nous avons*

$$\mathbb{Q}[\theta_u \leq \tau] \leq C^+_{\tau,1+\alpha} e^{(1+\alpha)r\tau} e^{-(1+\alpha)(u-x)}, \tag{4.3.22}$$
$$\mathbb{Q}[\theta_l \leq \tau] \leq C^-_{\tau,\alpha} e^{-\alpha(x-l)}. \tag{4.3.23}$$

Démonstration. Comme le processus est de type B ou C, on peut écrire[1]

$$\mathbb{Q}[\theta_u \leq \tau] = \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{x + rt + X_t\} \geq u] \leq \mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{X_t\} \geq u - x - r\tau].$$

Si $u - x - r\tau \leq 0$, l'inégalité (4.3.22) est triviale. On va supposer que $u - x - r\tau > 0$. L'inégalité de Chebyshev implique alors

$$\begin{aligned}
\mathbb{Q}[\sup_{0\leq t\leq\tau}\{X_t\} \geq u - x - r\tau] &\leq \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)\sup_{0\leq t\leq\tau}\{X_t\}}] e^{-(1+\alpha)(u-x-r\tau)} \\
&= C^+_{\tau,1+\alpha} e^{(1+\alpha)r\tau} e^{-(1+\alpha)(u-x)}.
\end{aligned}$$

[1] cf. Remarque 3.5.7

Montrons (4.3.23) :

$$\mathbb{Q}[\theta_l \le \tau] = \mathbb{Q}[\inf_{0\le t\le\tau}\{x+rt+X_t\} \le l] \le \mathbb{Q}[\inf_{0\le t\le\tau}\{X_t\} \le l-x]$$
$$\le \mathbb{Q}[\sup_{0\le t\le\tau}\{-X_t\} \ge x-l] \le \mathbb{E}[e^{\alpha \sup_{0\le t\le\tau}\{-X_t\}}]e^{-\alpha(x-l)} = C^-_{\tau,\alpha}e^{-\alpha(x-l)},$$

grâce à l'inégalité de Chebyshev. La démonstration est terminée. □

La suite de la démonstration de la proposition se déroulera en trois étapes, chaque étape correspondant à l'estimation d'un terme dans (4.3.18).

Etape 1 : estimation de $|\mathbb{E}[(K - S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau<k\}}]|$.
Transformons d'abord cette expression en utilisant la formule de la probabilité totale :

$$|\mathbb{E}[(K - S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau<k\}}]| \le K\mathbb{Q}[\theta_u \le \tau,\ x+Y_\tau < k]$$
$$= K\int_0^\tau \mathbb{Q}[x+Y_\tau < k \mid \theta_u = t]\mathbb{Q}[\theta_u \in dt]$$
$$= K\int_0^\tau \mathbb{Q}[x+Y_t+(Y_\tau - Y_t) < k,\ x+Y_t \ge u \mid \theta_u = t]\mathbb{Q}[\theta_u \in dt]$$
$$\le K\int_0^\tau \mathbb{Q}[Y_\tau - Y_t < k-u \mid \theta_u = t]\mathbb{Q}[\theta_u \in dt]. \quad (4.3.24)$$

Grâce à la propriété de Markov et la stationnarité des accroissements de Y, nous avons

$$\mathbb{Q}[Y_\tau - Y_t < k-u \mid \theta_u = t] = \mathbb{Q}[X_\tau - X_t < k-u-r(\tau-t)]$$
$$= \mathbb{Q}[X_{\tau-t} < k-u-r(\tau-t)] \le \mathbb{Q}[-X_{\tau-t} > u-k] \le m^-_{\tau,\alpha}e^{-\alpha(u-k)},$$

d'après le Lemme 4.3.8. En substituant cette estimation dans (4.3.24), nous obtenons

$$|\mathbb{E}[(K - S_0e^{x+r\tau+X_\tau})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_u\le\tau,\ x+r\tau+X_\tau<k\}}]| \le Km^-_{\tau,\alpha}e^{-\alpha(u-k)}\int_0^\tau \mathbb{Q}[\theta_u \in dt]$$
$$= Km^-_{\tau,\alpha}e^{-\alpha(u-k)}\mathbb{Q}[\theta_u \le \tau] \le Km^-_{\tau,\alpha}C^+_{\tau,1+\alpha}e^{(1+\alpha)r\tau}e^{-\alpha(u-k)}e^{-(1+\alpha)(u-x)}, \quad (4.3.25)$$

d'après (4.3.22).

Etape 2 : estimation de $|S_0\mathbb{E}[(e^{x+r\tau+X_\tau} - e^{x+r\tau+X_{\theta_l}})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_l\le\tau\}}]|$.
Il est commode de séparer les deux termes :

$$|\mathbb{E}[(e^{x+r\tau+X_\tau} - e^{x+r\tau+X_{\theta_l}})1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_l\le\tau\}}]|$$
$$\le \mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_\tau}1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_l\le\tau\}}] + \mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_{\theta_l}}1_{\{\theta_u<\theta_l,\ \theta_l\le\tau\}}]. \quad (4.3.26)$$

Pour le premier, nous obtenons

$$\mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_\tau}1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}] = \int_0^\tau \mathbb{E}[e^{x+Y_t+(Y_\tau-Y_t)}1_{\{\theta_u<t\}} \mid \theta_l = t]\,\mathbb{Q}[\theta_l\in dt]$$
$$\le e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{Y_\tau-Y_t}1_{\{\theta_u<t\}} \mid \theta_l = t]\,\mathbb{Q}[\theta_l\in dt] = e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{Y_\tau-Y_t}]\mathbb{Q}[\theta_u<t\mid\theta_l=t]\,\mathbb{Q}[\theta_l\in dt],$$

grâce à la propriété de Markov, puisque l'accroissement $Y_\tau - Y_t$ est indépendant de $\mathcal{F}_t$ et donc ne dépend pas de $\{\theta_u < t\}$ ni de $\{\theta_l = t\}$. Comme e^{X_t} est une martingale, nous avons $\mathbb{E}[e^{Y_\tau-Y_t}] = \mathbb{E}[e^{Y_{\tau-t}}] = e^{r(\tau-t)} \le e^{r\tau}$, ce qui implique

$$\mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_\tau}1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}] \le e^{l+r\tau}\mathbb{Q}[\theta_u<\theta_l\le\tau]$$
$$= e^{l+r\tau}\mathbb{Q}[|Y_{\theta_u}-Y_{\theta_l}|\ge u-l,\ \theta_u<\theta_l\le\tau]. \quad (4.3.27)$$

Il vient de l'inégalité de Chebyshev que

$$\mathbb{Q}[|Y_{\theta_u}-Y_{\theta_l}|\ge u-l,\ \theta_u<\theta_l\le\tau] \le \mathbb{E}[e^{\frac{\alpha}{2}|Y_{\theta_u}-Y_{\theta_l}|}1_{\{\theta_u<\theta_l\le\tau\}}]e^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)}$$
$$\le \mathbb{E}[e^{\alpha\sup_{0\le t\le\tau}|Y_t|}]e^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)} \le \mathbb{E}[e^{\alpha\sup_{0\le t\le\tau}|X_t|}]e^{\alpha r\tau}e^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)} = C_{\tau,\alpha}e^{\alpha r\tau}e^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)}.$$

Par conséquent, (4.3.27) implique

$$\mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_\tau}1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}] \le C_{\tau,\alpha}e^{(1+\alpha)r\tau}e^le^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)}.$$

De la même manière, on montre que

$$\mathbb{E}[e^{x+r\tau+X_{\theta_l}}1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}] = \mathbb{E}[e^{x+Y_{\theta_l}+r(\tau-\theta_l)}1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}]$$
$$\le e^{l+r\tau}\mathbb{Q}[\theta_u<\theta_l\le\tau] \le C_{\tau,\alpha}e^{(1+\alpha)r\tau}e^le^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)}.$$

En revenant à (4.3.26), nous obtenons

$$|S_0\mathbb{E}[(e^{x+r\tau+X_\tau}-e^{x+r\tau+X_{\theta_l}})1_{\{\theta_u<\theta_l,\,\theta_l\le\tau\}}]| \le 2S_0C_{\tau,\alpha}e^{(1+\alpha)r\tau}e^le^{-\frac{\alpha}{2}(u-l)}. \quad (4.3.28)$$

Etape 3 : estimation de $|\mathbb{E}[(S_0e^{x+r\tau+X_\tau}-K)1_{\{\theta_l<\theta_u,\,\theta_l\le\tau,\,x+r\tau+X_\tau\ge k\}}]|$.
Comme précédemment, nous divisons cette expression en deux termes :

$$|\mathbb{E}[(S_0e^{x+r\tau+X_\tau}-K)1_{\{\theta_l<\theta_u,\,\theta_l\le\tau,\,x+r\tau+X_\tau\ge k\}}]|$$
$$\le S_0\mathbb{E}[e^{x+Y_\tau}1_{\{\theta_l<\theta_u,\,\theta_l\le\tau,\,x+Y_\tau\ge k\}}] + K\mathbb{Q}[\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\le\tau,\ x+Y_\tau\ge k]. \quad (4.3.29)$$

Le premier terme peut être estimé de la façon suivante :

$$\mathbb{E}[e^{x+Y_\tau}1_{\{\theta_l<\theta_u,\,\theta_l\le\tau,\,x+Y_\tau\ge k\}}] \le e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{Y_\tau-Y_t}1_{\{Y_\tau-Y_t\ge k-l\}} \mid \theta_l = t]\mathbb{Q}[\theta_l\in dt]$$
$$= e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{Y_\tau-Y_t}1_{\{Y_\tau-Y_t\ge k-l\}}]\mathbb{Q}[\theta_l\in dt] = e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{Y_{\tau-t}}1_{\{Y_{\tau-t}\ge k-l\}}]\mathbb{Q}[\theta_l\in dt]$$
$$= e^l\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{-\alpha Y_{\tau-t}+(1+\alpha)Y_{\tau-t}}1_{\{Y_{\tau-t}\ge k-l\}}]\mathbb{Q}[\theta_l\in dt] \le$$
$$e^le^{-\alpha(k-l)}\int_0^\tau \mathbb{E}[e^{(1+\alpha)Y_{\tau-t}}]\mathbb{Q}[\theta_l\in dt] = e^le^{-\alpha(k-l)}\int_0^\tau e^{(1+\alpha)r(\tau-t)}e^{(\tau-t)\phi(-i(1+\alpha))}\mathbb{Q}[\theta_l\in dt]$$
$$\le e^le^{-\alpha(k-l)}e^{(1+\alpha)r\tau}e^{\tau\phi(-i(1+\alpha))}\mathbb{Q}[\theta_l\le\tau] = e^le^{-\alpha(k-l)}e^{(1+\alpha)r\tau}C^+_{\tau,1+\alpha}\mathbb{Q}[\theta_l\le\tau],$$

puisque $\phi(-i(1+\alpha)) \geq 0$. En utilisant (4.3.23), nous obtenons

$$\mathbb{E}[e^{x+Y_\tau} 1_{\{\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\leq\tau,\ x+Y_\tau\geq k\}}] \leq e^l e^{-\alpha(k-l)} e^{(1+\alpha)r\tau} C^+_{\tau,1+\alpha} C^-_{\tau,\alpha} e^{-\alpha(x-l)} \\ = C^-_{\tau,\alpha} C^+_{\tau,1+\alpha} e^{(1+\alpha)r\tau} e^l e^{-\alpha(k-l)} e^{-\alpha(x-l)}. \quad (4.3.30)$$

Estimons le deuxième terme :

$$\mathbb{Q}[\theta_l < \theta_u,\ \theta_l \leq \tau,\ x+Y_\tau \geq k] \leq \mathbb{Q}[\theta_l \leq \tau,\ x+Y_\tau \geq k] \\ = \int_0^\tau \mathbb{Q}[x+Y_\tau \geq k \mid \theta_l = t]\mathbb{Q}[\theta_l \in dt] \leq \int_0^\tau \mathbb{Q}[Y_\tau - Y_t \geq k-l \mid \theta_l = t]\mathbb{Q}[\theta_l \in dt] \\ = \int_0^\tau \mathbb{Q}[Y_\tau - Y_t \geq k-l]\mathbb{Q}[\theta_l \in dt] = \int_0^\tau \mathbb{Q}[Y_{\tau-t} \geq k-l]\mathbb{Q}[\theta_l \in dt].$$

Nous avons

$$\mathbb{Q}[Y_{\tau-t} \geq k-l] \leq \mathbb{Q}[X_{\tau-t} \geq k-l-r\tau] \leq m^+_{\tau,1+\alpha} e^{-(1+\alpha)(k-l-r\tau)},$$

d'après (4.3.21). Par conséquent,

$$|\mathbb{E}[(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau} - K) 1_{\{\theta_l<\theta_u,\ \theta_l\leq\tau,\ x+r\tau+X_\tau\geq k\}}]| \leq S_0 C^-_{\tau,\alpha} C^+_{\tau,1+\alpha} e^{(1+\alpha)r\tau} e^l e^{-\alpha(k-l)} e^{-\alpha(x-l)} \\ + K m^+_{\tau,1+\alpha} e^{(1+\alpha)r\tau} e^{-(1+\alpha)(k-l)}. \quad (4.3.31)$$

Les estimations (4.3.25), (4.3.28) et (4.3.31) avec le Lemme 4.3.7 impliquent (4.3.11). L'estimation (4.3.12) est une conséquence directe de (4.3.11). La proposition est démontrée. □

4.4 Troncature de l'intégrale

Pour calculer numériquement le terme intégral, on a besoin de restreindre le domaine d'intégration à un intervalle borné. En termes du processus, cela revient à tronquer les grands sauts. Nous estimons l'erreur qui résulte d'une telle approximation.

La procédure est similaire à celle décrite dans la Section 4.2 mais cette fois on a affaire à des grands sauts.

4.4.1 Options européennes

On considère d'abord le prix d'une option européenne

$$u(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau})], \quad (4.4.1)$$

où X_τ est un processus de Lévy avec le triplet (γ, σ, ν). Définissons un nouveau processus $\tilde{X}_\tau$ caractérisé par le triplet de Lévy $(\tilde{\gamma}, \sigma, \nu \mathbf{1}_{[B_l,B_r]})$, où $\tilde{\gamma}$ est tel que $\exp(\tilde{X}_t)$ reste une martingale :

$$\tilde{\gamma} = -\frac{\sigma^2}{2} - \int_{B_l}^{B_r} (e^y - 1 - y1_{|y|\leq 1})\nu(dy).$$

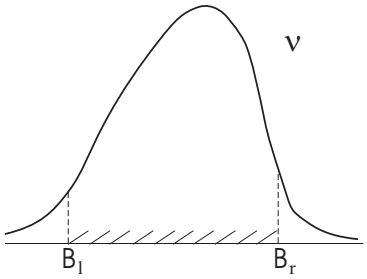


FIG. 4.2 – On tronque le support de ν pour obtenir un domaine d'intégration borné.

On définit :

$$\tilde{u}(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})], \tag{4.4.2}$$

et on va estimer l'écart entre $\tilde{u}$ et u.

Proposition 4.4.1. (Erreur de troncature des grands sauts, cas européen) *Soit H une fonction lipschitzienne : $|H(S_1) - H(S_2)| \leq c|S_1 - S_2|$. Supposons qu'il existe $\alpha_r, \alpha_l > 0$, tels que $\int_1^\infty e^{(1+\alpha_r)y}\nu(dy) < \infty$ et $\int_{-\infty}^{-1} |y|e^{\alpha_l|y|}\nu(dy) < \infty$.*

Si u et $\tilde{u}$ sont définies par (4.4.1) et (4.4.2) respectivement, alors

$$|u(\tau, x) - \tilde{u}(\tau, x)| \quad \leq \quad 2c\, S_0 e^{x+r\tau}\tau(C_1 e^{-\alpha_l|B_l|} + C_2 e^{-\alpha_r|B_r|}). \tag{4.4.3}$$

Démonstration. On note $\tilde{R}_\tau \stackrel{d}{=} X_\tau - \tilde{X}_\tau$, $\tilde{R}_\tau \perp\!\!\!\perp \tilde{X}_\tau$. Alors,

$$\begin{aligned} |u(\tau, x) - \tilde{u}(\tau, x)| &= |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau+\tilde{R}_\tau})] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})]| \\ &\leq c\, S_0 e^{x+r\tau}\mathbb{E}[e^{\tilde{X}_\tau}|e^{\tilde{R}_\tau} - 1|] = c\, S_0 e^{x+r\tau}\mathbb{E}|e^{\tilde{R}_\tau} - 1|. \end{aligned}$$

Par construction, $\mathbb{E}[e^{\tilde{R}_\tau} - 1] = 0$. Comme $|e^{\tilde{R}_\tau} - 1| = (e^{\tilde{R}_\tau} - 1) + 2(1 - e^{\tilde{R}_\tau})^+$ et que $(1 - e^{\tilde{R}_\tau})^+ \leq |\tilde{R}_\tau|$, on obtient

$$|u(\tau, x) - \tilde{u}(\tau, x)| \quad \leq \quad 2c\, S_0 e^{x+r\tau}\mathbb{E}|e^{\tilde{R}_\tau}|. \tag{4.4.4}$$

Le triplet de Lévy de $\tilde{R}_\tau$ est $(\gamma - \tilde{\gamma}, 0, \nu\mathbf{1}_{x\notin[B_l,B_r]})$ avec

$$\gamma - \tilde{\gamma} = -\int_{y\notin[B_l,B_r]} (e^y - 1)\nu(dy).$$

On peut écrire $\tilde{R}_\tau = P_\tau + N_\tau$, avec P_τ et N_τ caractérisés par $(\int_{-\infty}^{B_l}(1-e^y)\nu(\mathrm{d}y), 0, \nu\mathbf{1}_{x>B_r})$ et $(-\int_{B_r}^{\infty}(e^y - 1)\nu(\mathrm{d}y), 0, \nu\mathbf{1}_{x<B_l})$ respectivement. On suppose sans perte de généralité que $B_l < -1$, $B_r > 1$[2]. Comme P_τ a une dérive positive, qu'il n'a pas de composante

[2]Si (4.4.3) est vrai pour telles valeurs, il est vrai aussi pour tous B_l, B_r, à un changement de constantes près. De l'autre côté, cette estimation est inutile si le support de ν est borné. Par exemple, si le processus n'a pas de sauts positifs, on prendra $B_r = 0$, mais dans ce cas $\nu\mathbf{1}_{x\leq B_r} = \nu$, et il n'y a pas d'erreur de troncature due à B_r.

brownienne et que tous ses sauts sont positifs et bornés inférieurement par $B_r > 0$, on a $P_\tau \geq 0$ (puisque $P_0 = 0$). Inversement, N_τ a des sauts négatifs (bornés supérieurement par $B_l < 0$) et une dérive négative. Par conséquent, $N_\tau \leq 0$. Donc,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{R}_\tau| &\leq \mathbb{E}|P_\tau| + \mathbb{E}|N_\tau| = \mathbb{E}P_\tau - \mathbb{E}N_\tau \\
&= \tau\left[\int_{-\infty}^{B_l}(1-e^y-y)\nu(\mathrm{d}y) + \int_{B_r}^{\infty}(e^y-1+y)\nu(\mathrm{d}y)\right] \\
&\leq \tau\left[2\int_{-\infty}^{B_l}|y|\nu(\mathrm{d}y) + 2\int_{B_r}^{\infty}e^y\nu(\mathrm{d}y)\right]. \qquad (4.4.5)
\end{aligned}$$

En utilisant les hypothèses sur ν, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|\tilde{R}_\tau| &\leq \tau\left(2e^{-\alpha_l|B_l|}\int_{-\infty}^{B_l}|y|e^{\alpha_l|y|}\nu(\mathrm{d}y) + 2e^{-\alpha_r|B_r|}\int_{B_r}^{\infty}e^{(1+\alpha_r)y}\nu(\mathrm{d}y)\right) \\
&\leq \tau(C_1e^{-\alpha_l|B_l|} + C_2e^{-\alpha_r|B_r|}),
\end{aligned}$$

ce qu'on substitue dans (4.4.4) pour obtenir le résultat. □

Remarque 4.4.2. Les hypothèses sur ν dans la Proposition 4.4.1 sont légèrement plus fortes que (4.3.3). Nous en avons besoin pour obtenir une décroissance exponentielle de l'erreur de troncature. Cependant, on pourrait utiliser directement l'estimation (4.4.5). Autrement dit, l'existence des intégrales dans (4.4.5) suffit pour obtenir la convergence de $\tilde{u}$ vers u quand $|B_l|$ et $|B_r|$ tendent vers l'infini, mais le taux de cette convergence ne sera pas nécessairement exponentiel.

Remarque 4.4.3. Les hypothèses sont différentes pour les deux queues de ν. Par exemple, dans le modèle Variance Gamma où $\nu(x) = a\exp(-\eta_\pm|x|)/|x|$, on a besoin que η_+ soit plus grand que 1 et η_- seulement positif. La Proposition 4.4.1 s'applique alors avec $\alpha_l < \eta_-$ et $\alpha_r < \eta_+ - 1$.

Si ν est paramétré comme dans (2.3.2), nous avons $\eta_+ = B - A$ et $\eta_- = B + A$. Voici quelques jeux de paramètres que l'on trouve dans la littérature ([MCC98], [HM03]) :

σ	κ	θ	η_+	η_-
0.2	0.5	−0.2	16.18	6.18
0.12	0.002	0	263.5	263.5
0.12	0.16	−0.33	60.24	14.41

On voit que les conditions sur η_+ et η_- sont largement vérifiées.

Remarque 4.4.4. Des estimations similaires des erreurs de troncature des grands et des petits sauts ont été obtenues récemment dans [JKLC05] (pour des problèmes sur $\mathbb{R}^N$, sans barrières). Notons que notre estimation (4.2.7) donne un meilleur ordre de convergence en ε. Ceci est dû au fait que l'on considère des équations linéaires à coefficients constants.

4.4.2 Options à barrières

Considérons maintenant le cas d'une option à barrières. Par analogie avec (4.2.12), on définit la fonction

$$\tilde{u}_b(\tau, x) = \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tau<\tilde{\theta}(x)\}}], \tag{4.4.6}$$

où $\tilde{X}$ est le processus avec les grands sauts tronqués (comme dans (4.4.2)) et $\tilde{\theta}(x) = \inf\{t \geq 0 \mid x + rt + \tilde{X}_t \notin O\}$.

Proposition 4.4.5. (Erreur de troncature des grands sauts, cas barrière) *Soient H une fonction lipschitzienne et X un processus de Lévy de type B ou C. Soient u_b et $\tilde{u}_b$ définies par (4.2.12) et (4.4.6), respectivement. Si $\int_{y<-1} |y|\nu(dy) < \infty$ alors, pour tout $(\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}$,*

$$|u_b(\tau, x) - \tilde{u}_b(\tau, x)| \to 0, \quad \textit{quand } |B_l|, |B_r| \to \infty. \tag{4.4.7}$$

Démonstration. Nous avons par définition

$$\begin{aligned}
&|u_b(\tau, x) - \tilde{u}_b(\tau, x)| = |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau}) 1_{\{\tau<\theta(x)\}}] - \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tau<\tilde{\theta}(x)\}}]| \leq \\
&|\mathbb{E}[(H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau}) - H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})) 1_{\{\tau<\theta(x)\}}]| + |\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})(1_{\{\tau<\theta(x)\}} - 1_{\{\tau<\tilde{\theta}(x)\}})]| \\
&\quad \leq \mathbb{E}|H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau}) - H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})| + \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}}]
\end{aligned}$$

Le premier terme peut être estimé exactement comme dans le cas sans barrière (voir (4.4.4) et (4.4.5)) :

$$\mathbb{E}|H(S_0 e^{x+r\tau+X_\tau}) - H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})| \leq 4cS_0 e^{x+r\tau}\tau \left[\int_{-\infty}^{B_l} |y|\nu(dy) + \int_{B_r}^{\infty} e^y \nu(dy)\right] \to 0$$

quand $|B_l|$, $|B_r| \to \infty$, grâce à l'hypothèse sur ν.

Pour le second terme, on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}}] \leq \mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})] \leq C(1 + S_0 e^{x+r\tau}). \tag{4.4.8}$$

Nous avons utilisé ici la propriété de Lipschitz de H qui implique $H(S) \leq C(1 + S)$, ainsi que la propriété de martingale $e^{\tilde{X}_\tau} = 1$. Donc, la variable $H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}}$ possède une majorante intégrable. Afin d'appliquer le théorème de convergence dominée, nous allons montrer que cette variable tend vers zéro en probabilité quand $|B_l|$, $|B_r| \to \infty$. Pour tout $\varepsilon > 0$, nous avons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{Q}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau}) 1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}} > \varepsilon] \leq \mathbb{Q}[1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}} \neq 0] \\
&= \mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta(x) \text{ ou } \theta(x) \leq \tau < \tilde{\theta}(x)] \leq \mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta(x)] + \mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \tilde{\theta}(x)].
\end{aligned} \tag{4.4.9}$$

Par conséquent, il suffit de montrer que $\mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta(x)$ et $\mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \tilde{\theta}(x)]$ tendent vers zéro quand $|B_l|, |B_r| \to \infty$.

Pour tout $\eta > 0$, on introduit un ensemble auxiliaire $O_\eta^- = (l + \eta, u - \eta)$ et on note $\theta_\eta^-(x) = \inf\{t \geq 0 \mid x + rt + X_t \notin O_\eta^-\}$. Comme $O_\eta^- \subseteq O$, nous avons $\theta_\eta^-(x) \leq \theta(x)$. Alors,

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta(x)] &= \mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta_\eta^-(x)] + \mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau,\ \theta_\eta^-(x) \leq \tau < \theta(x)] \\ &\leq \mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\tilde{R}_t| \geq \eta] + \mathbb{Q}[\theta_\eta^-(x) \leq \tau < \theta(x)], \quad (4.4.10)\end{aligned}$$

où $\tilde{R}_t$ est défini comme précédemment (Proposition 4.4.1). Son triplet caractéristique est $(\int_{y \notin [B_l, B_r]}(1 - e^y)\nu(dy), 0, \nu 1_{y \notin [B_l, B_r]})$. Pour montrer que $\mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\tilde{R}_t| \geq \eta] \to 0$, on procède de la même manière que dans le Lemme 3.5.12. On retire d'abord l'espérance de $\tilde{R}_t$ en posant $Z_t = \tilde{R}_t - \mathbb{E}\tilde{R}_t = \tilde{R}_t - t\int_{y \notin [B_l, B_r]}(1 - e^y + y)\nu(dy)$. Alors, $\mathbb{E}Z_t = 0$. Nous avons

$$\mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\tilde{R}_t| \geq \eta] \leq \mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |Z_t| \geq \eta - t\int_{y \notin [B_l, B_r]}(1 - e^y + y)\nu(dy)] \leq \mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |Z_t| \geq \eta/2]$$

pour $|B_l|$ et $|B_r|$ suffisamment grands. En suivant les lignes de la démonstration du Lemme 3.5.12, nous obtenons

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |Z_t| \geq \eta/2] &\leq \frac{2}{\eta}\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |Z_t|] \leq \frac{16}{\eta}\mathbb{E}|Z_t| \\ &\leq \frac{16}{\eta}\left(\mathbb{E}|\tilde{R}_t| + t\left|\int_{y \notin [B_l, B_r]}(1 - e^y + y)\nu(dy)\right|\right) \to 0\end{aligned}$$

quand $|B_l|, |B_r| \to \infty$, puisque $\mathbb{E}|\tilde{R}_t| \to 0$ d'après (4.4.5). Donc, en passant à la limite dans (4.4.10) d'abord quand $|B_l|, |B_r| \to \infty$ et ensuite quand $\eta \to 0$, on obtient

$$\mathbb{Q}[\tilde{\theta}(x) \leq \tau < \theta(x)] \xrightarrow{|B_l|, |B_r| \to \infty} \mathbb{Q}[\theta_\eta^-(x) \leq \tau < \theta(x)] \xrightarrow{\eta \to 0} \mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \theta(x)] = 0.$$

De façon similaire, on définit $O_\eta^+ = (l - \eta, u + \eta)$ et $\theta_\eta^+(x) = \inf\{t \geq 0 \mid x + rt + X_t \notin O_\eta^+\}$. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \tilde{\theta}(x)] &= \mathbb{Q}[\theta_\eta^+(x) \leq \tau < \tilde{\theta}(x)] + \mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \theta_\eta^+(x),\ \tau < \tilde{\theta}(x)] \\ &\leq \mathbb{Q}[\sup_{0 \leq t \leq \tau} |\tilde{R}_t| \geq \eta] + \mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \theta_\eta^+(x)] \xrightarrow{|B_l|, |B_r| \to \infty} \\ &\mathbb{Q}[\theta(x) \leq \tau < \theta_\eta^+(x)] \xrightarrow{\eta \to 0} \mathbb{Q}[\theta(x) = \tau] = 0, \quad (4.4.11)\end{aligned}$$

d'après le Lemme 3.5.4, puisque

$$\mathbb{Q}[\theta(x) = \tau] \leq \mathbb{Q}[R_u = \tau] + \mathbb{Q}[R_{-l} = \tau],$$

où R_x est le processus du premier passage.

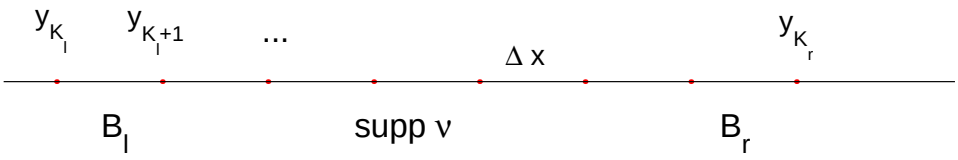


FIG. 4.3 – Le support de ν est discrétisé avec le même pas Δx que l'intervalle $[-A_l, A_r]$.

Nous avons démontré que $H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}} \xrightarrow{d} 0$ quand $|B_l|$, $|B_r| \to \infty$. Le théorème de la convergence dominée implique alors que

$$\mathbb{E}[H(S_0 e^{x+r\tau+\tilde{X}_\tau})1_{\{\tilde{\theta}(x)\leq\tau<\theta(x) \text{ ou } \theta(x)\leq\tau<\tilde{\theta}(x)\}}] \to 0,$$

ce qui termine la démonstration. □

En utilisant les Propositions 4.3.1, 4.4.1 et 4.4.5 on peut fixer d'avance $[-A, A]$ et $[B_l, B_r]$ pour avoir des bornes données sur les erreurs respectives. On va supposer par la suite que ceci est déjà fait et on va se concentrer sur la résolution numérique du problème localisé.

4.5 Schémas implicites-explicites aux différences finies

Rappelons que l'on considère le cas $\nu(\mathbb{R}) = \lambda < +\infty$ auquel on se ramène éventuellement par approximation des petits sauts (Section 4.2). Dans ce cas, on peut réécrire l'opérateur intégro-différentiel sous la forme suivante :

$$Lu = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\frac{\partial u}{\partial x} - \lambda u + \int_{B_l}^{B_r} \nu(dy)u(\tau, x+y), \tag{4.5.1}$$

où $\alpha = \int_{B_l}^{B_r}(e^y - 1)\nu(\mathrm{d}y)$. On considère le problème localisé sur l'intervalle $(-A_l, A_r)$, $A_l, A_r > 0$:

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = Lu, \qquad \text{sur} \quad (0,T] \times (-A_l, A_r) \tag{4.5.2}$$

$$u(0,x) = h(x), \quad x \in (-A_l, A_r); \qquad u(\tau, x) = g(\tau, x), \quad x \notin (-A_l, A_r). \tag{4.5.3}$$

On introduit une grille uniforme sur $[0,T]\times\mathbb{R}$: $\tau_n = n\Delta t$, $n = 0 \dots M$, $x_i = -A_l + i\Delta x$, $i \in \mathbb{Z}$, avec $\Delta t = T/M$, $\Delta x = (A_r + A_l)/N$. On note par $\{u_i^n\}$ les valeurs sur cette grille de la solution du schéma numérique qu'on va définir ci-après.

Pour approcher les termes intégraux, on utilise la règle de trapèzes avec le même pas Δx. Choisissons K_l, K_r tels que $[B_l, B_r] \subset [(K_l - 1/2)\Delta x, (K_r + 1/2)\Delta x]$ (Fig. 4.3). Alors :

$$\int_{B_l}^{B_r} \nu(dy)u(\tau, x_i + y) \approx \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j}, \qquad \text{où} \qquad \nu_j = \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} \nu(\mathrm{d}y). \tag{4.5.4}$$

Nous supposons que ν_j, λ et α sont calculés exactement puisque dans tous les modèles considérés dans la littérature il est possible de trouver les intégrales de ν de façon analytique ou numériquement avec une très grande précision[3]. Nous supposons donc qu'il n'y a pas d'erreur due à l'approximation de ν_j. Notons que, à défaut, on peut utiliser, par exemple, les approximations suivantes :

$$\nu_j \approx \frac{\nu(y_{j-1/2}) + \nu(y_{j+1/2})}{2}\Delta x, \quad \lambda \approx \hat{\lambda} = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j, \quad \alpha \approx \hat{\alpha} = \sum_{j=K_l}^{K_r} (e^{y_j} - 1)\nu_j,$$

où $y_j = j\Delta x$. D'ailleurs, nous avons d'abord implémenté cette méthode. La comparaison avec le calcul exact effectuée par la suite a montré qu'il n'y avait pas de grosse différence dans le résultat. Toutefois, nous préférons ne pas introduire d'erreur là où il est possible de ne pas le faire.

Les dérivées en x sont discrétisées par des différences finies :

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2}, \tag{4.5.5}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} \qquad \text{ou} \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}. \tag{4.5.6}$$

Le choix de l'approximation de la dérivée première dépend des valeurs des paramètres σ, r et α. Il est déterminé par la condition de stabilité et sera discuté plus loin (Section 4.6.2).[4]

En utilisant (4.5.4)–(4.5.6) on obtient une approximation $Lu \approx D_\Delta u + J_\Delta u$, où $D_\Delta u$ et $J_\Delta u$ sont choisis de deux façons suivantes.

Schéma 1. Le choix de la discrétisation de la dérivée première dépend ici du signe de $\sigma^2/2 - r + \alpha$. Puisque les deux cas sont traités de façon similaire, on va supposer sans perdre de généralité que $\sigma^2/2 - r + \alpha < 0$. Alors,

$$(D_\Delta u)_i = \frac{\sigma^2}{2}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x} - \lambda u_i, \tag{4.5.7}$$

$$(J_\Delta u)_i = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j}. \tag{4.5.8}$$

[3]Par exemple, dans les modèles stables tempérés, ν_j s'exprime à l'aide de la fonction gamma incomplète qui peut être évaluée efficacement par des routines standards.

[4]Dans le chapitre sur les résultats numériques (Section 5.2.1), nous montrons qu'il est également possible d'utiliser le schéma centré si Δx est suffisamment petit.

Schéma 2. De même, sans restreindre la généralité, nous supposons que $\sigma^2/2 - r < 0$ (dans le cas contraire, on changera le sens de la décentralisation du schéma pour $\partial u/\partial x$) :

$$(D_\Delta u)_i = \frac{\sigma^2}{2}\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}. \tag{4.5.9}$$

Pour discrétiser J, nous supposons pour fixer les idées que $\alpha < 0$:

$$(J_\Delta u)_i = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j} - \lambda u_i - \alpha\frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}. \tag{4.5.10}$$

Finalement, on remplace le problème (4.5.2)–(4.5.3) par le schéma suivant :

Initialisation :

$$u_i^0 = h(x_i), \qquad \text{si } i \in \{0, \ldots, N-1\}, \tag{4.5.11}$$

$$u_i^0 = g(0, x_i), \qquad \text{sinon.} \tag{4.5.12}$$

(**S**) **Pour $\mathbf{n = 0, \ldots, M-1}$** :

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = (D_\Delta u^{n+1})_i + (J_\Delta u^n)_i, \quad \text{si } i \in \{0, \ldots, N-1\} \tag{4.5.13}$$

$$u_i^{n+1} = g(n\Delta t, x_i), \qquad \text{sinon.} \tag{4.5.14}$$

4.5.1 Calcul de l'intégrale par la méthode de FFT

A chaque itération en temps, on a besoin de calculer la somme

$$(J_\Delta u)_i = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j}, \qquad i = 0, \ldots, N-1 \tag{4.5.15}$$

ce qui est l'étape la plus coûteuse de l'algorithme si elle est appliquée directement. En effet, elle demande $O(KN)$ opérations où $K = K_r - K_l + 1$ est le nombre de points de la grille sur le support de ν. Comme le domaine d'intégration est discrétisé avec le même pas Δx ($K \approx |B_r - B_l|/\Delta x$), le coût de calcul est, en réalité, de l'ordre $O(N^2)$.

Heureusement, la forme particulière de la somme permet de réduire considérablement le temps de calcul par l'utilisation de la transformation de Fourier rapide (FFT — *Fast Fourier Transform*). Rappelons d'abord les définitions des quantités qui peuvent être calculées efficacement par FFT.

Si $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est un vecteur de longueur n, sa *transformée de Fourier discrète* est donnée par le vecteur suivant :

$$\langle x \rangle_k \;=\; \sum_{j=1}^{n} x_j \omega_n^{(j-1)(k-1)}, \qquad k = 1, \ldots, n,$$

où $\omega_n = \exp(-2\pi i/n)$ est une racine d'ordre n de l'unité. Inversement, étant donné $\langle x \rangle$, on peut restituer x par la *transformation de Fourier inverse discrète* :

$$x_j \;=\; \langle\langle x \rangle\rangle_j^{-1} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \langle x \rangle_k \omega_n^{-(j-1)(k-1)}, \qquad j = 1, \ldots, n.$$

La propriété qu'on va utiliser pour calculer $(J_\Delta u)$, c'est l'analogue discret du théorème de convolution. Si $y = (y_1, \ldots, y_n)$, on note

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{j+1-k}, \qquad j = 1, \ldots, n, \tag{4.5.16}$$

où les indices de y sont pris modulo n : par exemple, $y_0 \equiv y_n$, $y_{-1} \equiv y_{n-1}$ et ainsi de suite. Une autre façon de donner un sens aux indices négatifs est de dire que y est un vecteur périodique de période n défini par les valeurs $(y_1, \ldots, y_n)$. Le vecteur c représente la *convolution discrète* de x et y. Le théorème de convolution discrète affirme alors qu'on a l'égalité suivante :

$$\langle c \rangle_k = \langle x \rangle_k \langle y \rangle_k, \qquad k = 1, \ldots, n$$

et donc,

$$c_j = \sum_{k=1}^{n} x_k y_{j+1-k} = \langle\langle x \rangle\langle y \rangle\rangle_j^{-1}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{4.5.17}$$

La méthode FFT permet de calculer simultanément toutes les valeurs de c_j, $j = 1, \ldots, n$, en $O(n \ln(n))$ opérations. Ceci est vrai pour tout n, même premier, et non seulement pour $n = 2^p$.

Maintenant, on va expliquer comment utiliser la propriété (4.5.17) pour calculer la somme (4.5.15). On pose $\tilde{N} = N + K_r - K_l$ et on définit deux vecteurs de taille $\tilde{N}$:

$$\begin{aligned} \mu \;&=\; (\underbrace{\nu_{K_r}, \ldots, \nu_{K_l}}_{K_r - K_l + 1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}), \\ v \;&=\; (\underbrace{u_{K_r+1}, \ldots, u_{K_r+N-1}}_{N-1}, \underbrace{u_{K_l}, \ldots, u_{K_r}}_{K_r - K_l + 1}). \end{aligned}$$

Ainsi, le vecteur μ est composé des ν_k rangés dans l'ordre inverse et il est complété par des zéros. Dans le vecteur v figurent toutes les valeurs de u (de u_{K_l} à u_{N-1+K_r}) intervenant dans le calcul de $(J_\Delta u)_i$ pour $i = 0, \ldots, N-1$, mais les $K_r - K_l + 1$ premières valeurs sont placées dans la queue du vecteur. On affirme que

$$(J_\Delta u)_i = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \mu_k v_{i+1-k}, \qquad i = 0, \ldots, N-1, \tag{4.5.18}$$

où v est interprété comme un vecteur périodique de période $\tilde{N}$. En effet, par définition,

$$\begin{aligned} \mu_k &= \begin{cases} \nu_{K_r+1-k}, & k = 1, \ldots, K_r - K_l + 1 \\ 0, & k > K_r - K_l + 1 \end{cases}, \\ v_s &= \begin{cases} u_{s+K_r}, & 1 \leq s \leq N-1 \\ u_{s+K_l-N-2}, & N \leq s \leq \tilde{N} \end{cases}. \end{aligned} \tag{4.5.19}$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{\tilde{N}} \mu_k v_{i+1-k} = \sum_{k=1}^{K_r-K_l+1} \nu_{K_r+1-k} v_{i+1-k} = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j v_{i+j-K_r}.$$

Comme $i \leq N-1$, $j \leq K_r$, on a $i + j - K_r \leq N - 1$. Donc, si $i + j - K_r \geq 1$, alors $v_{i+j-K_r} = u_{i+j}$ d'après (4.5.19).

Si $i + j - K_r \leq 0$, alors, par périodicité, $v_{i+j-K_r} = v_{i+j-K_r+\tilde{N}}$. Or, comme $i \geq 0$, $j \geq K_l$, on a $N \leq i + j - K_r + \tilde{N} \leq \tilde{N}$, et donc, d'après (4.5.19), $v_{i+j-K_r} = u_{i+j}$. Ceci prouve l'égalité (4.5.18) que l'on peut aussi écrire sous la forme vectorielle :

$$\langle\langle \mu \rangle\langle v \rangle\rangle^{-1} = ((J_\Delta u)_1, \ldots, (J_\Delta u)_{N-1}, \underbrace{*, \ldots, *}_{K_r-K_l}, (J_\Delta u)_0). \tag{4.5.20}$$

En pratique, on calcule $\langle \mu \rangle$ une fois et on trouve $(Ju^n)_i$, $i = 0, \ldots, N-1$, à chaque itération en effectuant une transformation de Fourier discrète pour calculer $\langle v \rangle$ et une transformation inverse pour calculer $\langle\langle \mu \rangle\langle v \rangle\rangle^{-1}$ (les valeurs notées par $*$ sont un sous-produit du calcul que l'on n'utilisera pas). La méthode FFT effectue cette procédure en $O(\tilde{N} \ln(\tilde{N})) = O((N+K)\ln(N+K)) = O(N \ln(N))$ opérations, ce qui est beaucoup mieux que $O(N^2)$.

Comme nous avons déjà noté, il existe des algorithmes de transformation de Fourier rapide pour N quelconque et non seulement pour les puissances de 2. Toutefois, si une bonne réalisation de tels algorithmes n'est pas disponible, on peut utiliser des routines standards de FFT qui fonctionnent avec $N = 2^p$ en complétant les vecteurs μ et v par des zéros.[5] Concrètement, on choisit N_z tel que $\tilde{N} + N_z = 2^p$ pour un $p \in \mathbb{N}$. On définit ensuite

$$\begin{aligned} \mu &= (\underbrace{\nu_{K_r}, \ldots, \nu_{K_l}}_{K_r-K_l+1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N_z}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N-1}), \\ v &= (\underbrace{u_{K_r+1}, \ldots, u_{K_r+N-1}}_{N-1}, \underbrace{0, \ldots, 0}_{N_z}, \underbrace{u_{K_l}, \ldots, u_{K_r}}_{K_r-K_l+1}). \end{aligned}$$

[5] La réalisation d'une bibliothèque efficace de la FFT n'est pas une affaire simple et doit être laissée aux experts en programmation. On peut trouver, par exemple, une bibliothèque gratuite de la FFT en langage C sur le site `http ://www.fftw.org`. Nous ne l'avons pas testée (nous utilisons une autre bibliothèque qui n'est pas en libre accès). Probablement, elle est trop lourde pour une application comme la notre. En revanche, chacun peut coder une routine basique, disons, de *Numerical recipes* mais qui exige que N soit une puissance de 2.

Les valeurs de $(J_\Delta u)_i$ s'obtiennent de la même manière :

$$\langle\langle\mu\rangle\langle v\rangle\rangle^{-1} = ((J_\Delta u)_1, \dots, (J_\Delta u)_{N-1}, \underbrace{*, \dots, *}_{K_r - K_l + N_z}, (J_\Delta u)_0). \tag{4.5.21}$$

Concluons par une remarque importante concernant une confusion fréquente liée à cette méthode. On *ne suppose pas* que les coefficients ν_k et u_i s'annulent sur les extrémités ni qu'ils soient périodiques. La notion de périodicité intervient dans la définition de la convolution discrète. Or, on ne calcule pas une convolution au sens (4.5.16) des vecteurs ν et u mais celle des vecteurs auxiliaires μ et v. Ces derniers sont choisis de façon à reproduire *exactement* la somme $(J_\Delta u)_i$ pour les valeurs de i entre 0 et N.

Autrement dit, on ne raisonne pas de la manière suivante : "puisque l'intégrale $\int \nu(y)u(x+y)dy$ peut être représentée comme une convolution, on l'approxime par une convolution discrète". Dans ce cas-là, effectivement, on devrait faire des hypothèses de périodicité qui ne sont pas vérifiées en réalité. Au lieu de procéder de cette façon, on discrétise l'intégrale par la méthode de trapèzes et on choisit une extension de la fonction u (des "conditions aux bords") que l'on justifie par l'estimation d'erreur. La méthode FFT apparaît uniquement comme un algorithme rapide pour calculer l'expression (4.5.15).

Ce point ne semble pas être bien compris dans [AA00] où a été proposée l'utilisation de FFT pour le calcul de l'intégrale en question. L'utilisation correcte de la méthode, expliquée ci-dessus, est décrite dans [dFV04].

Notons que l'homogénéité de ν est essentielle pour l'utilisation de FFT : si ν dépend de x, cette simplification de calcul n'est plus possible.

4.6 Consistance, stabilité et convergence

Dans cette section, nous étudions les propriétés des schémas aux différences finies présentés ci-dessus. Premièrement, nous montrons qu'ils sont localement consistants avec l'équation. Ensuite, nous vérifions qu'ils sont stables et monotones : inconditionnellement pour le premier schéma et pour Δt suffisamment petits pour le second.

La monotonie signifie que le schéma vérifie le principe de comparaison discret. Cette propriété est importante pour les applications financières : elle garantie que le schéma préserve la propriété d'absence d'arbitrage. Comme les solutions de l'équation continue, les solutions numériques vérifient les inégalités d'arbitrage.

En utilisant ces propriétés, on montre que les solutions des deux schémas convergent vers la solution de viscosité de l'équation, c'est-à-dire le prix de l'option, quand $\Delta x,\ \Delta t \to 0$.

4.6.1 Consistance

Proposition 4.6.1. (Consistance du schéma 1) *Soient D_Δ et J_Δ définis par (4.5.7)–(4.5.8) et g une fonction lipschitzienne. Le schéma aux différences finies (4.5.13) est localement consistant avec l'équation (4.5.2) : pour tout $v \in C^\infty([0,T] \times [-A_l, A_r])$ (tel*

que $v(\cdot,x) = g(\cdot,x)$ *pour* $x = -A_l$ *et* $x = A_r$ *si* ν *a des atomes) et pour tout* $(\tau,x) \in (0,T] \times (-A_l, A_r)$ *nous avons*

$$\left| \frac{v(\tau_{n+1},x_i) - v(\tau_n,x_i)}{\Delta t} - (D_\Delta v)(\tau_{n+1},x_i) - (J_\Delta v)(\tau_n,x_i) - \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} - Lv\right)(\tau,x) \right| \to 0, \tag{4.6.1}$$

quand $(\Delta t, \Delta x) \to 0$ *et* $(\tau_n, x_i) \to (\tau, x)$.

Démonstration. En utilisant le développement de Taylor jusqu'au deuxième ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \frac{v(\tau_{n+1},x) - v(\tau_n,x)}{\Delta t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,x) \right| &= \left| \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau_n,x_i) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,x) + \frac{\Delta t}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}(\tilde{\tau},x_i) \right| \\ &\le \left| \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau_n,x_i) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau,x) \right| + \frac{\Delta t}{2}\left\| \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right\| \to 0, \end{aligned} \tag{4.6.2}$$

quand $(\Delta t, \Delta x) \to 0$ et $(\tau_n, x_i) \to (\tau, x)$. Considérons maintenant la partie différentielle de l'opérateur :

$$\begin{aligned} &|(D_\Delta v)(\tau_{n+1},x_i) - (Dv)(\tau,x)| \le |(Dv)(\tau_{n+1},x_i) - (Dv)(\tau,x)| \\ &\quad + \left| \frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta x^2}{24}\left[\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(\tau_{n+1},\xi_1) + \frac{\partial^4 v}{\partial x^4}(\tau_{n+1},\eta_1) \right] + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha \right) \frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau_{n+1},\xi_2) \right| \\ &\quad \le |(Dv)(\tau_{n+1},x_i) - (Dv)(\tau,x)| + \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\sigma^2}{2}\left\| \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} \right\| + \frac{\Delta x}{2}|\sigma^2/2 - r + \alpha| \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right\| \to 0. \end{aligned} \tag{4.6.3}$$

L'estimation de la partie non-locale est un peu plus délicate à cause des conditions aux bords. Notons $\tilde{v}$ la fonction v prolongée par g sur $\mathbb{R}$:

$$\tilde{v}(\tau,x) = v(\tau,x)1_{x\in(-A_l,A_r)} + g(\tau,x)1_{x\notin(-A_l,A_r)}.$$

Elle est continue (et localement lipschitzienne) sauf peut-être en $-A_l$ et A_r. Nous avons

$$|(J_\Delta v)(\tau_n,x_i) - (Jv)(\tau,x)| \quad = \quad \left| \sum_{j=K_l}^{K_r} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} (\tilde{v}(\tau_n,x_i+y_j) - \tilde{v}(\tau,x+y))\nu(\mathrm{d}y) \right|.$$

Si l'intervalle $(y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ ne contient pas de points de discontinuité de $\tilde{v}$, alors

$$\left| \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} (\tilde{v}(\tau_n,x_i+y_j) - \tilde{v}(\tau,x+y))\nu(\mathrm{d}y) \right| \le c\Delta x \nu_j + c_1 \Delta t \nu_j,$$

où c est la constante de Lipschitz de $\tilde{v}$ et $c_1 = \sup_{t\in[\tau,\tau_n]} |\frac{\partial \tilde{v}}{\partial \tau}(t, x+y)|$. Si $-A_l$ ou A_r appartiennent à $(y_{j-1/2}, y_{j+1/2})$ et $\tilde{v}$ est discontinu en l'un de ces points, on peut estimer ce terme de la façon suivante :

$$\left| \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} (\tilde{v}(\tau_n, x_i + y_j) - \tilde{v}(\tau, x+y))\nu(\mathrm{d}y) \right| \\ \leq (|\tilde{v}(\tau_n, x_i + y_j)| + \sup_{y\in(y_{j-1/2}, y_{j+1/2})} |\tilde{v}(\tau, x+y)|)\nu_j \leq C(\tau, x)\nu_j.$$

Si ν n'a pas d'atomes, alors $\nu_j \to 0$ quand $\Delta x \to 0$. Par conséquent,

$$|(J_\Delta v)(\tau_n, x_i) - (Jv)(\tau, x)| \leq c\Delta x\lambda + c_1\Delta t\lambda + C(\tau, -A_l)\nu_{j_l} + C(\tau, A_r)\nu_{j_r} \to 0. \quad (4.6.4)$$

En rassemblant (4.6.2), (4.6.3) et (4.6.4), on obtient (4.6.1). □

Remarque 4.6.2. Il est intéressant de noter que les conditions aux bords sont impliquées de façon importante dans la consistance du schéma ce qui n'est pas le cas pour les EDP.

Proposition 4.6.3. (Consistance du schéma 2) *Sous les mêmes hypothèses que dans la Proposition 4.6.1, le schéma 2 est localement consistant avec l'équation (4.5.2).*

Démonstration. La démonstration est évidemment très similaire. Nous utilisons essentiellement les estimations déjà obtenues. Ainsi, comme dans (4.6.3), nous avons

$$|(D_\Delta v)(\tau_{n+1}, x_i) - (Dv)(\tau, x)| \leq \\ \leq |(Dv)(\tau_{n+1}, x_i) - (Dv)(\tau, x)| + \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\sigma^2}{2}\left\|\frac{\partial^4 v}{\partial x^4}\right\| + \frac{\Delta x}{2}|\sigma^2/2 - r|\left\|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\right\| \to 0, \quad (4.6.5)$$

quand $(\Delta t, \Delta x) \to 0$ et $(\tau_n, x_i) \to (\tau, x)$. Pour la partie intégrale, nous obtenons par analogie avec (4.6.4)

$$|(J_\Delta v)(\tau_n, x_i) - (Jv)(\tau, x)| \leq \left| \sum_{j=K_l}^{K_r} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} (\tilde{v}(\tau_n, x_i + y_j) - \tilde{v}(\tau, x+y))\nu(\mathrm{d}y) \right| \\ + \lambda|v(\tau_n, x_i) - v(\tau, x)| + \alpha\left|\frac{v(\tau_n, x_i + \Delta x) - v(\tau_n, x_i)}{\Delta x} - \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x)\right| \to 0. \quad (4.6.6)$$

Les estimations (4.6.2), (4.6.5) et (4.6.6) impliquent la consistance (4.6.1). □

Dans les Propositions 4.6.1 et 4.6.3, nous n'avons pas estimé l'ordre d'approximation de ces deux schémas. Dans le cas du problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$, nous le ferons soigneusement dans les Sections 4.6.4 et 4.6.5. Dans le cas d'un domaine borné, de toute façon, nous ne savons pas estimer la vitesse de convergence du schéma. Pour le faire, il faudrait connaître exactement la régularité de la solution ce qui est problématique comme on l'a vu dans la Section 3.2.2.

4.6.2 Monotonie et stabilité

Deux autres propriétés importantes pour montrer la convergence vers la solution de viscosité sont la monotonie et la stabilité du schéma. Il existe plusieurs notions de stabilité d'un schéma numérique. On va utiliser ici la stabilité dans la norme uniforme qui contrôle les erreurs sur les prix d'options pour toutes les valeurs du temps et du sous-jacent.

Définition 4.6.4 (Stabilité)**.** Le schéma **(S)** est dit *stable* si, pour toute condition initiale h et toute condition aux bords g bornées, il possède une solution et cette solution est bornée indépendamment de Δt, Δx, uniformément sur $[0,T]\times\mathbb{R}$:

$$\exists C>0,\ \forall\,\Delta t>0,\ \Delta x>0,\ i\in\mathbb{Z},\ n\in\{0,\dots,M\}:\quad |u_i^n|\le C.$$

On dit qu'un vecteur v (ou une matrice M) est *positif* si tous ses éléments sont positifs. On va écrire $u\ge v$ si $u-v\ge 0$.

Définition 4.6.5 (Monotonie ou principe de comparaison discret)**.** Le schéma **(S)** est dit *monotone* (vérifie le principe de comparaison discret) si la propriété suivante est vérifiée. Si u^n et v^n sont deux solutions de **(S)** avec les conditions initiales H et h et les conditions aux bords G et g, respectivement, alors

$$H\ge h,\quad G\ge g\qquad\Rightarrow\qquad \forall n\ge 1,\ u^n\ge v^n.$$

Le principe de comparaison discret a une interprétation financière importante : il est équivalent à dire que les prix d'options calculés à l'aide du schéma vérifient les *inégalités d'arbitrage*, c'est-à-dire que des inégalités entre les *payoffs* impliquent des inégalités entre les prix.

Proposition 4.6.6. (Stabilité et monotonie du schéma 1) *Le schéma* **(S)** *avec D_Δ et J_Δ définis par (4.5.7)–(4.5.8) est inconditionnellement stable et monotone.*

Démonstration. On réécrit d'abord l'équation (4.5.13) sous la forme suivante :

$$-\ c\Delta t u_{i-1}^{n+1}\ +\ (1\ +\ a\Delta t)u_i^{n+1}\ -\ b\Delta t u_{i+1}^{n+1}\quad =\quad u_i^n\ +\ \Delta t\sum_j \nu_j u_{i+j}^n, \tag{4.6.7}$$

où[6]

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2}-\left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{1}{\Delta x}+\lambda\ge 0,\\ b &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2}-\left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{1}{\Delta x}\ge 0,\\ c &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2}\ge 0. \end{aligned} \tag{4.6.8}$$

[6]Rappelons que l'on considère le cas $\sigma^2/2-r+\alpha<0$. Si $\sigma^2/2-r+\alpha\ge 0$ on changera l'approximation de la dérivée première (voir (4.5.6)) pour avoir $a,b,c\ge 0$, ce qui est nécessaire pour la stabilité et la monotonie.

Notons que $a = b + c + \lambda$.

Stabilité. Les relations (4.6.7) pour $i = 0, \ldots, N-1$ définissent un système linéaire tri-diagonal sur $\{u_0^{n+1}, \ldots, u_{N-1}^{n+1}\}$. Il a une unique solution car la diagonale principale est dominante : $1 + a\Delta t > c\Delta t + b\Delta t$.

On va montrer par récurrence que si $C \equiv \max\{\|h\|_\infty, \|g\|_\infty\} < \infty$ alors, $\forall\, n$,

$$\|u^n\|_\infty \leq C. \tag{4.6.9}$$

Par la définition de u^0, on a $\|u^0\|_\infty \leq C$. Soit (4.6.9) vérifié pour n. Supposons que $\|u^{n+1}\|_\infty > C$. Comme u_i^{n+1} est égal à $g(t_{n+1}, x_i)$ si $i \notin \{0, \ldots, N-1\}$, cela signifie que $\exists\, i_0 \in \{0, \ldots, N-1\}$, tel que $|u_{i_0}^{n+1}| = \|u^{n+1}\|_\infty$, et que $\forall\, i \in \mathbb{Z}$, $|u_i^{n+1}| \leq |u_{i_0}^{n+1}|$.

Par conséquent, on a

$$\begin{aligned}
\|u^{n+1}\|_\infty = |u_{i_0}^{n+1}| &= -c\Delta t|u_{i_0}^{n+1}| + (1 + a\Delta t)|u_{i_0}^{n+1}| - b\Delta t|u_{i_0}^{n+1}| - \lambda\Delta t|u_{i_0}^{n+1}| \\
&\leq -c\Delta t|u_{i_0-1}^{n+1}| + (1 + a\Delta t)|u_{i_0}^{n+1}| - b\Delta t|u_{i_0+1}^{n+1}| - \lambda\Delta t C \\
&\leq |-c\Delta t u_{i_0-1}^{n+1} + (1 + a\Delta t)u_{i_0}^{n+1} - b\Delta t u_{i_0+1}^{n+1}| - \lambda\Delta t C.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.6.7), on obtient

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq |u_{i_0}^n + \Delta t \sum_j \nu_j u_{i_0+j}^n| - \lambda\Delta t C \leq (1 + \lambda\Delta t)\|u^n\|_\infty - \lambda\Delta t C \leq C,$$

ce qui contredit l'hypothèse. Donc, $\|u^{n+1}\|_\infty \leq C$, ce qu'il fallait démontrer.

Monotonie. Soient u^n et v^n deux solutions de **(S)** avec des conditions initiales $H(x)$ et $h(x)$ vérifiant $H(x) \geq h(x)$, $\forall\, x \in (-A_l, A_r)$, et des conditions aux bords $G(\tau, x)$ et $g(\tau, x)$ telles que $G(\tau, x) \geq g(\tau, x)$, $\forall\, (\tau, x) \in [0, T] \times (-A_l, A_r)^c$. On définit $w^n = u^n - v^n$ et on doit montrer que $w^n \geq 0$, $\forall\, n \geq 0$.

De nouveau, on procède par récurrence. Par construction,

$$w_i^0 = \begin{cases} H(x_i) - h(x_i) \geq 0, & i \in \{0, \ldots, N-1\}, \\ G(0, x_i) - g(0, x_i) \geq 0, & i \notin \{0, \ldots, N-1\}. \end{cases}$$

Soit $w^n \geq 0$. Supposons, par l'absurde, que $\inf_{i\in\mathbb{Z}} w_i^{n+1} < 0$. Comme $\forall\, i \in \mathbb{Z}\backslash\{0, \ldots, N-1\}$, $w_i^{n+1} = G(t_{n+1}, x_i) - g(t_{n+1}, x_i) \geq 0$, cela implique que $\exists\, i_0 \in \{0, \ldots, N-1\}$, tel que $w_{i_0}^{n+1} = \inf_{i\in\mathbb{Z}} w_i^{n+1} < 0$. En utilisant (4.6.7), on obtient que

$$\begin{aligned}
\inf_{i\in\mathbb{Z}} w_i^{n+1} = w_{i_0}^{n+1} &= -c\Delta t w_{i_0}^{n+1} + (1 + a\Delta t)w_{i_0}^{n+1} - b\Delta t w_{i_0}^{n+1} - \lambda\Delta t w_{i_0}^{n+1} \\
&\geq -c\Delta t w_{i_0-1}^{n+1} + (1 + a\Delta t)w_{i_0}^{n+1} - b\Delta t w_{i_0+1}^{n+1} \\
&= w_{i_0}^n + \Delta t \sum_j \nu_j w_{i_0+j}^n \geq 0,
\end{aligned} \tag{4.6.10}$$

ce qui contredit l'hypothèse. En conséquence, $\inf_{i\in\mathbb{Z}} w_i^{n+1} \geq 0$ et donc $w^{n+1} \geq 0$. □

Proposition 4.6.7. (Stabilité et monotonie du schéma 2) *Le schéma* **(S)** *avec* D_Δ *et* J_Δ *définis par (4.5.9)–(4.5.10) est stable et monotone si*

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\alpha| + \lambda \Delta x}. \tag{4.6.11}$$

Démonstration. De la même façon, on réécrit (4.5.13) comme suit :

$$-c\Delta t u_{i-1}^{n+1} + (1 + a\Delta t) u_i^{n+1} - b\Delta t u_{i+1}^{n+1} = u_i^n + \Delta t \sum_j \nu_j u_{i+j}^n - \Delta t \lambda u_i^n - \Delta t \alpha \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\Delta x},$$

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{1}{\Delta x} \geq 0, \\ b &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r\right)\frac{1}{\Delta x} \geq 0, \\ c &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} \geq 0. \end{aligned} \tag{4.6.12}$$

Les coefficients sont positifs parce que nous avons supposé que $\sigma^2/2 - r < 0$. Ici, $a = b + c$.

Stabilité. Le raisonnement étant exactement le même que dans la Proposition 4.6.6, nous refaisons seulement le calcul :

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_\infty = |u_{i_0}^{n+1}| &= -c\Delta t |u_{i_0}^{n+1}| + (1 + a\Delta t)|u_{i_0}^{n+1}| - b\Delta t |u_{i_0}^{n+1}| \\ &\leq -c\Delta t |u_{i_0-1}^{n+1}| + (1 + a\Delta t)|u_{i_0}^{n+1}| - b\Delta t |u_{i_0+1}^{n+1}| \\ &\leq |-c\Delta t u_{i_0-1}^{n+1} + (1 + a\Delta t) u_{i_0}^{n+1} - b\Delta t u_{i_0+1}^{n+1}| \\ &= |u_{i_0}^n (1 - \Delta t \lambda - |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Delta t \sum_j \nu_j u_{i_0+j}^n + |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x} u_{i_0+1}^n| \\ &\leq \|u^n\|_\infty (1 - \Delta t \lambda - |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Delta t \lambda \|u^n\|_\infty + |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x} \|u^n\|_\infty \\ &= \|u^n\|_\infty \leq C. \end{aligned}$$

Nous avons utilisé la condition (4.6.11) pour avoir la positivité du coefficient qui multiplie $u_{i_0}^n$.

Monotonie. De la même manière que dans la Proposition 4.6.6, nous obtenons

$$\begin{aligned} \inf_{i \in \mathbb{Z}} w_i^{n+1} = w_{i_0}^{n+1} &= -c\Delta t w_{i_0}^{n+1} + (1 + a\Delta t) w_{i_0}^{n+1} - b\Delta t w_{i_0}^{n+1} \\ &\geq -c\Delta t w_{i_0-1}^{n+1} + (1 + a\Delta t) w_{i_0}^{n+1} - b\Delta t w_{i_0+1}^{n+1} \\ &= w_{i_0}^n (1 - \Delta t \lambda - |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Delta t \sum_j \nu_j w_{i_0+j}^n + |\alpha| \frac{\Delta t}{\Delta x} w_{i_0+1}^n \geq 0. \end{aligned}$$

□

Remarque 4.6.8 (Autres notions de stabilité)**.** On peut trouver dans la littérature différents critères de stabilité des schémas numériques. Par exemple, la stabilité au sens de von Neumann, étudiée pour un schéma similaire dans [AA00], représente u^n comme une transformée de Fourier discrète et exige que les coefficients de Fourier correspondant soient bornés. Ceci est essentiellement équivalent à la stabilité dans la norme L^2 avec des conditions aux bords périodiques. Cette approche permet de contrôler l'erreur globale au sens de moindres carrés mais pas l'erreur sur la valeur d'une option donnée. De plus, elle ne permet pas de prendre en compte l'effet des conditions aux bords non périodiques, ce qui est le cas ici.

4.6.3 Convergence

Dans la théorie classique des schémas aux différences finies pour des EDP, la consistance et la stabilité assurent la convergence du schéma sous certaines conditions de régularité sur les conditions aux limites et la solution. Cette approche ne s'applique pas dans notre cas puisque la condition initiale n'est pas régulière. Comme on a vu dans la Section 3.6, les solutions peuvent également être non régulières et leurs dérivées d'ordres supérieures peuvent ne pas exister.

C'est là où les solutions de viscosité viennent au secours : Barles & Souganidis ont montré dans [BS91] que dans le cas des EDP paraboliques de second ordre vérifiant un principe de comparaison fort (comme dans la Proposition 3.6.5), tout schéma localement consistant, stable et monotone converge uniformément sur tout compact de $[0,T]\times\mathbb{R}$ vers l'unique solution de viscosité continue. En généralisant cette approche au cas des équations intégro-différentielles, nous allons montrer la convergence de la solution de notre schéma (versions 1 et 2) vers une solution de viscosité de (4.5.2). Pour abréger les notations et montrer le lien avec [BS91], nous allons réécrire (4.5.13) sous une forme équivalente :

$$\frac{1}{\Delta t}S(\Delta t,\Delta x,n+1,i,u_i^{n+1},\tilde{u})=0,\qquad n\geq 0,\ i\in\{0,\dots,N-1\}$$

où $\tilde{u}=\{u_{i-1}^{n+1},u_{i+1}^{n+1},u^n\}$. Dans le schéma 1, S a la forme suivante :

$$\begin{aligned}S_1(\Delta t,\Delta x,n+1,i,u_i^{n+1},\tilde{u}) = (1+a\Delta t)u_i^{n+1} - c\Delta t u_{i-1}^{n+1} - b\Delta t u_{i+1}^{n+1} - \\ - u_i^n - \Delta t \sum_{\substack{j\\ 0\leq i+j\leq N-1}} \nu_j u_{i+j}^n . - \Delta t \sum_{\substack{j\\ i+j\notin\{0,\dots,N-1\}}} \nu_j g(\tau_n,x_{i+j}).\end{aligned}$$

Les coefficients $a,b,c\geq 0$ dépendent de Δx et sont donnés par (4.6.8). Dans le schéma 2, nous avons

$$\begin{aligned}S_2(\Delta t,\Delta x,n+1,i,u_i^{n+1},\tilde{u}) = (1+a\Delta t)u_i^{n+1} - c\Delta t u_{i-1}^{n+1} - b\Delta t u_{i+1}^{n+1} - \\ - u_i^n - \Delta t \sum_{\substack{j\\ 0\leq i+j\leq N-1}} \nu_j u_{i+j}^n . - \Delta t \sum_{\substack{j\\ i+j\notin\{0,\dots,N-1\}}} \nu_j g(\tau_n,x_{i+j}) + \lambda\Delta t u_i^n + \alpha\Delta t\frac{u_{i+1}^n-u_i^n}{\Delta x}\end{aligned}$$

avec a, b, c donnés par (4.6.12). Si $i = 0$ ou $i = N-1$, il faut remplacer u_{-1}^{n+1} par $g(\tau_{n+1}, x_{-1})$ et u_N^{n+1} par $g(\tau_{n+1}, x_N)$. Dans la suite, s'il n'est pas nécessaire de distinguer S_1 et S_2, nous allons les désigner de manière générique par S.

On a une propriété de *monotonie* suivante : si $u_i^{n+1} = v_i^{n+1}$ et $\tilde{u} \leq \tilde{v}$, alors

$$S(\Delta t, \Delta x, n+1, i, u_i^{n+1}, \tilde{u}) \geq S(\Delta t, \Delta x, n+1, i, v_i^{n+1}, \tilde{v}). \tag{4.6.13}$$

Pour S_1, cette propriété est vérifiée inconditionnellement. Pour S_2, elle est vérifiée sous la condition (4.6.11) sur Δt et Δx. Notons que (4.6.13) reste vrai avec des conditions plus faibles sur $\tilde{u}$ et $\tilde{v}$: à savoir, si $u_{i-1}^{n+1} \leq v_{i-1}^{n+1}$, $u_{i+1}^{n+1} \leq v_{i+1}^{n+1}$ et $u_{i+j}^n \leq v_{i+j}^n$ pour $j \in [K_l, \ldots, K_r]$. Autrement dit, il n'est pas nécessaire d'avoir l'inégalité entre u_{i+j}^n et v_{i+j}^n pour $j \notin [K_l, \ldots, K_r]$ car ces valeurs n'interviennent pas dans l'expression de S dans (4.6.13).

La *consistance* (4.6.1) se traduit par la propriété suivante : sous les hypothèses de la Proposition 4.6.1, nous avons, $\forall\, \varphi \in C^\infty([0,T] \times [-A_l, A_r])$, $\forall\, (\tau, x) \in [0,T] \times (-A_l, A_r)$,

$$\frac{1}{\Delta t} S(\Delta t, \Delta x, n+1, i, \varphi_i^{n+1}, \tilde{\varphi}) \to \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi \right)(\tau, x), \tag{4.6.14}$$

quand $\Delta t,\ \Delta x \to 0$ et $(\tau_{n+1}, x_i) \to (\tau, x)$.

Notons également que si ξ est une fonction constante sur la grille, on a pour $i \in \{1, \ldots, N-2\}$

$$\begin{aligned} &S_1(\Delta t, \Delta x, n+1, i, u_i^{n+1} + \xi, \tilde{u} + \xi) \\ &\qquad = S_1(\Delta t, \Delta x, n+1, i, u_i^{n+1}, \tilde{u}) - \Delta t \sum_{\substack{j \\ 0 \leq i+j \leq N-1}} \nu_j \xi. \end{aligned} \tag{4.6.15}$$

De façon similaire, dans le schéma 2, nous avons

$$\begin{aligned} &S_2(\Delta t, \Delta x, n+1, i, u_i^{n+1} + \xi, \tilde{u} + \xi) \\ &\qquad = S_2(\Delta t, \Delta x, n+1, i, u_i^{n+1}, \tilde{u}) + \Delta t \sum_{\substack{j \\ i+j \notin \{0, \ldots, N-1\}}} \nu_j \xi. \end{aligned} \tag{4.6.16}$$

On définit une interpolation constante par morceaux[7] de la solution du schéma **(S)** :

$$u^{(\Delta t, \Delta x)}(\tau, x) = u_j^n, \quad \text{if } \tau \in [\tau_n, \tau_{n+1}),\ \ x \in [x_{j-1/2}, x_{j+1/2}).$$

Théorème 4.6.9. (Convergence du schéma aux différences finies) *Soient $h(x)$ et $g(\tau, x)$ des fonctions lipschitziennes bornées telles que $g(0, -A_l) = h(-A_l)$ et $g(0, A_r) = h(A_r)$.*

[7] ou toute autre interpolation raisonnable : la forme précise ne joue aucun rôle

Supposons que le problème (4.5.2)–(4.5.3) vérifie le principe de comparaison pour des solutions de viscosité semi-continues : toute sous-solution est inférieure à toute sur-solution. Dans le cas d'un domaine borné et si ν a des atomes, nous faisons une hypothèse supplémentaire (pour pouvoir utiliser les résultats de consistance) : le principe de comparaison reste valable si on restreint le choix de fonctions tests dans la définition de la solution de viscosité aux fonctions φ telles que $\varphi \equiv g$ en dehors de $(-A_l, A_r)$.

Alors, la solution $u^{(\Delta t,\Delta x)}$ du schéma 1 converge uniformément sur tout compact de $[0,T]\times\mathbb{R}$ vers la solution de viscosité unique de (4.5.2)–(4.5.3). La solution du schéma 2 converge si la condition (4.6.11) est vérifiée.

Démonstration. On définit

$$\underline{u}(\tau,x) = \liminf_{(\Delta t,\Delta x)\to 0 \ (t,y)\to(\tau,x)} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y) \tag{4.6.17}$$

$$\overline{u}(\tau,x) = \limsup_{(\Delta t,\Delta x)\to 0 \ (t,y)\to(\tau,x)} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y) \tag{4.6.18}$$

L'idée de la démonstration est la suivante. Par construction, $\underline{u} \le \overline{u}$. On va montrer que $\overline{u}$ et $\underline{u}$ sont respectivement une sous-solution et une sur-solution de viscosité du problème (4.5.2)–(4.5.3). Alors, le principe de comparaison pour des solutions semi-continues implique que $\underline{u} \ge \overline{u}$. On pourra donc en conclure que $\underline{u} = \overline{u} = u$ est une solution de viscosité de (4.5.2)–(4.5.3).

Pour réaliser ce programme, on va maintenant montrer que $\overline{u}$ est une sous-solution de viscosité de (4.5.2). Premièrement, on note que $\overline{u}$ est uniformément bornée. En effet, d'après les Propositions 4.6.6 et 4.6.7, $|u^{(\Delta t,\Delta x)}(\tau,x)| \le C = \max\{\|h\|_\infty, \|g\|_\infty\}$ pour tous Δt et Δx positifs et tout $(\tau,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$. Donc, par construction, $\overline{u}$ est bornée par la même constante.

La propriété suivante est donnée sous forme d'un lemme.

Lemme 4.6.10. *$\overline{u}$ est semi-continue supérieurement :*

$$\forall(\tau,x), \quad \limsup_{(t,y)\to(\tau,x)} \overline{u}(t,y) \le \overline{u}(\tau,x).$$

Démonstration. Il faut montrer que $\forall\varepsilon>0$, $\exists\ U(\tau,x)$, un voisinage de (τ,x), tel que $\forall(t,y)\in U(\tau,x)$, $\overline{u}(t,y) < \overline{u}(\tau,x)+\varepsilon$. Supposons que ceci est faux, c'est-à-dire

$$\exists\varepsilon>0,\ \exists(t_k,y_k)\to(\tau,x): \quad \forall k,\ \overline{u}(t_k,y_k)\ge\overline{u}(\tau,x)+\varepsilon. \tag{4.6.19}$$

Pour un k fixé, on a par construction :

$$\overline{u}(t_k,y_k) = \limsup_{(\Delta t,\Delta x)\to 0 \ (s,z)\to(t_k,y_k)} u^{(\Delta t,\Delta x)}(s,z).$$

Par conséquent, on peut trouver Δt_k, Δx_k, s_k, z_k dans le $1/k$-voisinage de $(0,0,t_k,y_k)$, tels que

$$u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(s_k,z_k) > \overline{u}(t_k,y_k) - \frac{1}{k}. \tag{4.6.20}$$

En combinant (4.6.20) avec (4.6.19), on obtient

$$u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(s_k,z_k) \;>\; \overline{u}(\tau,x)+\varepsilon-\frac{1}{k}. \tag{4.6.21}$$

Par construction, on a $(\Delta t_k,\Delta x_k,s_k,z_k)\to(0,0,\tau,x)$, donc

$$\limsup_{k\to\infty} u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(s_k,z_k) \;\le\; \limsup_{(\Delta t,\Delta x)\to 0\ (t,y)\to(\tau,x)} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y)=\overline{u}(\tau,x).$$

En passant à la limite supérieure dans (4.6.21) quand $k\to\infty$, on obtient

$$\overline{u}(\tau,x) \;\ge\; \overline{u}(\tau,x)+\varepsilon,$$

ce qui est impossible. Cette contradiction implique que (4.6.19) n'est pas vérifié, et donc $\overline{u}\in USC$. □

On a prouvé que $\overline{u}\in USC\cap C_p^+([0,T]\times\mathbb{R})$ (puisqu'elle est bornée). Pour montrer que $\overline{u}$ est une sous-solution de viscosité, il reste à vérifier les propriétés suivantes : $\forall(\tau,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}$,

(i) si $x\notin[-A_l,A_r]$, on a

$$\overline{u}(\tau,x)=g(\tau,x), \tag{4.6.22}$$

(ii) si $x\in[-A_l,A_r]$ et $\varphi\in C^2([0,T]\times[-A_l,A_r])$ vérifient

$$\overline{u}(\tau,x)=\varphi(\tau,x) \tag{4.6.23}$$

et $\overline{u}<\varphi$ sur $([0,T]\times\mathbb{R})\setminus\{(\tau,x)\}$, alors

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau,x)-L\varphi(\tau,x)\le 0,\quad \text{si } (\tau,x)\in(0,T]\times(-A_l,A_r), \tag{4.6.24}$$

$$\min\{\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau,x)-L\varphi(\tau,x),\ \overline{u}(\tau,x)-h(x)\}\le 0,\quad \text{si } \tau=0,\ x\in[-A_l,A_r] \tag{4.6.25}$$

$$\min\{\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau,x)-L\varphi(\tau,x),\ \overline{u}(\tau,x)-g(\tau,x)\}\le 0,\quad \text{si } \tau\neq 0,\ x=-A_l \text{ ou } A_r, \tag{4.6.26}$$

ce qui clairement implique (3.6.14)–(3.6.16). La propriété (i) est une conséquence immédiate de (4.5.12) et de (4.5.14). En effet, si $x\notin[-A_l,A_r]$ alors, par construction, $\exists\varepsilon>0$ tel que, pour tous $\Delta t,\ \Delta x<\varepsilon$ et tout $|(\tau_n,x_i)-(\tau,x)|<\varepsilon$, on a $u^{(\Delta t,\Delta x)}(\tau_n,x_i)=g(\tau_n,x_i)$; donc, (4.6.22) découle de la définition d'une limite supérieure.

Soient (τ,x) et φ comme dans (ii). Posons $B=\max\{|B_l|,|B_r|\}$ et prenons un intervalle ouvert borné $\Omega\subset\mathbb{R}$ qui contienne $[x-B,x+B]$.

Lemme 4.6.11. *Il existe des suites $\Delta t_k,\ \Delta x_k\to 0$ et $n_k,\ i_k$ telles que*

$$(\tau_{n_k},x_{i_k})\to(\tau,x), \tag{4.6.27}$$

$$u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{n_k},x_{i_k})\to\overline{u}(\tau,x),\qquad \textit{quand } k\to\infty, \tag{4.6.28}$$

et que pour tout k, (τ_{n_k}, x_{i_k}) est un point de maximum global de $u^{(\Delta t_k, \Delta x_k)}(\cdot,\cdot) - \varphi(\cdot,\cdot)$ sur la grille à l'intérieur de $[0,T]\times\Omega$:

$$\max_{(\tau_n, x_j)\in[0,T]\times\Omega} \{u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_n, x_j) - \varphi(\tau_n, x_j)\} = u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{n_k}, x_{i_k}) - \varphi(\tau_{n_k}, x_{i_k}). \quad (4.6.29)$$

Démonstration. L'existence de Δt_k, Δx_k, n_k, i_k vérifiant (4.6.27)–(4.6.28) est une conséquence immédiate de la définition d'une limite supérieure. Prenons une telle suite et considérons pour chaque k la fonction $u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)} - \varphi$. On peut supposer que k est suffisamment grand pour que $(x_{i_k} - B, x_{i_k} + B)$ soit contenu dans Ω. Comme le nombre de points de la grille dans $[0,T]\times\Omega$ est fini, le maximum dans (4.6.29) est atteint en un point $(\tau_{m_k}, x_{j_k}) \in [0,T]\times\Omega$.

La suite $\{(\tau_{m_k}, x_{j_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ étant bornée, on peut en extraire une sous-suite convergente (par souci de simplicité, on va garder la même notation pour cette sous-suite) : $(\tau_{m_k}, x_{j_k}) \to (\tau^*, x^*)$ quand $k\to\infty$. Montrons que $(\tau^*, x^*) = (\tau, x)$. Supposons, par l'absurde, que ceci est faux. Alors, en utilisant la définition de $\overline{u}$, la continuité de φ et le fait que $\overline{u} < \varphi$ sur $([0,T]\times\mathbb{R})\setminus\{(\tau,x)\}$, on obtient

$$\limsup_{k\to\infty} \left(u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{m_k}, x_{j_k}) - \varphi(\tau_{m_k}, x_{j_k})\right) \le \le \limsup_{\substack{(\Delta t,\Delta x)\to 0\\ (t,y)\to(\tau^*,x^*)}} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y) - \lim_{k\to\infty} \varphi(\tau_{m_k}, x_{j_k}) = = \overline{u}(\tau^*, x^*) - \varphi(\tau^*, x^*) < 0. \quad (4.6.30)$$

D'un autre côté, la définition de (τ_{m_k}, x_{j_k}) comme un point de maximum et les propriétés (4.6.28) et (4.6.23) impliquent

$$\limsup_{k\to\infty} \left(u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{m_k}, x_{j_k}) - \varphi(\tau_{m_k}, x_{j_k})\right) \ge \ge \limsup_{k\to\infty} \left(u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{n_k}, x_{i_k}) - \varphi(\tau_{n_k}, x_{i_k})\right) = \overline{u}(\tau,x) - \varphi(\tau,x) = 0,$$

ce qui contredit (4.6.30). Par conséquent, $(\tau^*, x^*) = (\tau, x)$.

En particulier, on déduit de la dernière inégalité que

$$\limsup_{k\to\infty} u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{m_k}, x_{j_k}) \ge \varphi(\tau,x) = \overline{u}(\tau,x).$$

Mais on sait que, par la définition de $\overline{u}$,

$$\limsup_{k\to\infty} u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{m_k}, x_{j_k}) \le \overline{u}(\tau,x).$$

On en conclut que cette limite supérieure est égale à $\overline{u}(\tau,x)$ et donc il existe une sous-suite $u^{(\Delta t_k,\Delta x_k)}(\tau_{m'_k}, x_{j'_k}) \to \overline{u}(\tau,x)$ qui vérifie par construction les propriétés désirées (4.6.27)–(4.6.29). □

On prend maintenant une suite définie dans ce lemme et on introduit les notations suivantes : ξ_k est la partie droite de (4.6.29), $(u^{\Delta_k})_i^n \equiv u^{(\Delta t_k, \Delta x_k)}(\tau_n, x_i)$ et $(\varphi)_i^n \equiv \varphi(\tau_n, x_i)$. Par construction,

$$\begin{aligned} \xi_k &\to 0, \quad \text{quand } k \to \infty, && (4.6.31)\\ (u^{\Delta_k})_{i_k}^{n_k} &= \varphi_{i_k}^{n_k} + \xi_k, && (4.6.32)\\ (u^{\Delta_k})_{i_k+j}^{n} &\leq \varphi_{i_k+j}^{n} + \xi_k, \quad \forall n = 0, \ldots, M,\ j = K_l, \ldots, K_r, && (4.6.33) \end{aligned}$$

puisque, pour k suffisamment grand, $(\tau_n, x_{i_k+j}) \in [0,T] \times \Omega$ si $K_l \leq j \leq K_r$.

Si $(\tau, x) \in (0,T] \times (-A_l, A_r)$, alors on déduit de (4.6.27) que $\tau_{n_k} > 0$ et $x_{i_k} \in (-A_l, A_r)$ pour tout k supérieur à un certain k_0. Par conséquent, comme $u^{(\Delta t_k, \Delta x_k)}$ est une solution du schéma (considérons d'abord le schéma 1), on a

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{\Delta t_k} S_1(\Delta t_k, \Delta x_k, n_k, i_k, (u^{\Delta_k})_{i_k}^{n_k}, \tilde{u}^{\Delta_k})\\ &\geq \frac{1}{\Delta t_k} S_1(\Delta t_k, \Delta x_k, n_k, i_k, \varphi_{i_k}^{n_k} + \xi_k, \tilde{\varphi} + \xi_k) \quad \text{par (4.6.32)–(4.6.33) et (4.6.13)}\\ &= \frac{1}{\Delta t_k} S_1(\Delta t_k, \Delta x_k, n_k, i_k, \varphi_{i_k}^{n_k}, \tilde{\varphi}) - \Delta t_k \sum_{\substack{j \\ 0 \leq i_k + j \leq N-1}} \nu_j \xi_k \quad \text{par (4.6.15).} \end{aligned}$$

Pour être vraiment précis, notons qu'on a droit d'utiliser (4.6.15) pour k suffisamment grand tels que $i_k \in \{1, \ldots, N-2\}$.[8] Remarquons que

$$\Big| \sum_{\substack{j \\ 0 \leq i_k + j \leq N-1}} \nu_j \xi_k \Big| \leq \lambda |u^{(\Delta t_k, \Delta x_k)}(\tau_{n_k}, x_{i_k}) - \varphi(\tau_{n_k}, x_{i_k})| \leq \lambda \left(C + \|\varphi\|_{[0,T] \times [-A_l, A_r]} \right),$$

donc ce terme est borné uniformément par rapport à k. Par conséquent, grâce à la définition de $\Delta t_k, \Delta x_k, n_k, i_k$ et la consistance (4.6.14), on obtient

$$\frac{1}{\Delta t_k} S_1(\Delta t_k, \Delta x_k, n_k, i_k, \varphi_{i_k}^{n_k}, \tilde{\varphi}) - \Delta t_k \sum_{\substack{j \\ 0 \leq i_k + j \leq N-1}} \nu_j \xi_k \to \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi \right)(\tau, x).$$

On conclut que $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - L\varphi\right)(\tau, x) \leq 0$. Le schéma 2 est traité de la même manière avec la seule différence que l'on remplace (4.6.15) par (4.6.16).

Nous avons donc montré (4.6.24). Si $\tau = 0$, trois possibilités se présentent :

(1) il existe une sous-suite de (4.6.27) telle que $\forall k$, $(\tau_{n_k}, x_{i_k}) \in (0,T] \times (-A_l, A_r)$;
(2) $\exists k_0$, tel que $\forall k > k_0$, $\tau_{n_k} = 0$, $x_{i_k} \in (-A_l, A_r)$;
(3) $\exists k_0$, tel que $\forall k > k_0$, $x_{i_k} = -A_l$ ou $x_{i_k} = A_r$.

[8] Si $i_k = 0$ ou $i_k = N-1$, un terme de bord d'ordre $\Delta t_k / (\Delta x_k)^2$ apparaît dans la formule (4.6.15).

Dans le premier cas, on obtient par les mêmes arguments que $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau,x) - L\varphi(\tau,x) \leq 0$. Dans le deuxième cas, on a $(u^{\Delta_k})_{i_k}^{n_k} = h(x_{i_k})$. En passant à la limite dans (4.6.28), on obtient

$$\overline{u}(\tau,x) = h(x).$$

Enfin, dans le troisième cas, $(u^{\Delta_k})_{i_k}^{n_k} = g(\tau_{n_k}, x_{i_k})$, donc $\overline{u}(\tau,x) = g(0,x) = h(x)$. Il est clair que, dans les trois cas, (4.6.25) est vérifié.

Si $\tau \neq 0$ et $x = -A_l$ ou $x = A_r$, seuls les cas (1) ou (3) sont possibles, ce qui donne respectivement $\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}(\tau,x) - L\varphi(\tau,x) \leq 0$ ou $\overline{u}(\tau,x) = g(\tau,x)$. Donc, (4.6.26) est aussi vérifié.

Pour résumer, on a montré que $\overline{u}$ est une sous-solution de viscosité de (4.5.2). Par exactement le même type d'arguments, il est possible de montrer que $\underline{u}$ est une sur-solution de viscosité de ce problème. Par construction, $\overline{u} \geq \underline{u}$, donc, en utilisant le principe de comparaison pour des solutions semi-continues, on conclut que $\overline{u} = \underline{u} = u$ est une solution de viscosité continue.

On va maintenant prouver que la convergence est uniforme sur tout compact de $[0,T] \times \mathbb{R}$. Pour cela, on utilise le théorème de Dini dont on rappelle l'énoncé :

Théorème de Dini. Soit X un espace métrique et $\{f_n\}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$, semi-continues supérieurement, telles que, $\forall x \in X$, $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est décroissante en n et $f_n(x) \to 0$. Alors $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de X.

Dans notre cas, $X = [0,T] \times \mathbb{R}$. Posons

$$\tilde{f}_n(\tau,x) = \sup_{\substack{|(\Delta t,\Delta x)| \leq 1/n \\ |(t,y)-(\tau,x)| \leq 1/n}} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y).$$

Par la propriété du supremum, la suite $\tilde{f}_n(\tau,x)$ est décroissante. On peut vérifier, par le même raisonnement que dans le Lemme 4.6.10, que $\tilde{f}_n$ est semi-continue supérieurement. En outre, nous avons montré que u est continue, donc $f_n(\tau,x) \equiv \tilde{f}_n(\tau,x) - u(\tau,x)$ est également décroissante et semi-continue supérieurement. Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau,x) = \overline{u}(\tau,x) - u(\tau,x) = 0.$$

Donc, d'après le théorème de Dini, $f_n \to 0$ uniformément sur tout compact de X. Par conséquent, la limite

$$\lim_{\substack{(\Delta t,\Delta x)\to 0 \\ (t,y)\to(\tau,x)}} u^{(\Delta t,\Delta x)}(t,y) = \lim_{n\to\infty} f_n(\tau,x) = u(\tau,x), \tag{4.6.34}$$

est uniforme sur tout compact de $[0,T] \times \mathbb{R}$. Le théorème est démontré. □

Remarque 4.6.12. Le principe de comparaison est vérifié si $O = \mathbb{R}$ [AT96]. La proposition s'applique donc au schéma "théorique" sur une grille infinie. Pour montrer la convergence du vrai schéma par cette méthode, nous avons besoin du principe de comparaison pour le problème sur un intervalle borné (voir Section 3.6).

Par un argument d'approximation de la solution par des fonctions C^∞, il est facile d'étendre le résultat de convergence au cas de condition initiale discontinue.

Corollaire 4.6.13. *Pour une option européenne ($O = \mathbb{R}$), si h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux avec un nombre fini de sauts alors, pour tout $\tau > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la solution du schéma 1 converge vers la solution de (4.5.2)–(4.5.3). Pour le schéma 2, la convergence a lieu sous la condition (4.6.11).*

Démonstration. Soient $\underline{h}, \overline{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que $\underline{h} \leq h \leq \overline{h}$. On note $z(\tau, x) = \mathbb{E}[\underline{h}(x+Y_\tau)]$, $w(\tau, x) = \mathbb{E}[\overline{h}(x + Y_\tau)]$ et on désigne par $z^{(\Delta t,\Delta x)}$ et $w^{(\Delta t,\Delta x)}$ les solutions du schéma qui correspondent aux conditions initiales $\underline{h}$ et $\overline{h}$, respectivement. Alors, par la monotonie, nous avons

$$z^{(\Delta t,\Delta x)} \leq u^{(\Delta t,\Delta x)} \leq w^{(\Delta t,\Delta x)}.$$

D'après le Théorème 4.6.9,

$$z^{(\Delta t,\Delta x)}(\tau, x) \to z(\tau, x) \qquad \text{et} \qquad w^{(\Delta t,\Delta x)}(\tau, x) \to w(\tau, x),$$

quand $(\Delta t, \Delta x) \to 0$ (sous la condition de stabilité (4.6.11) pour le schéma 2). Par conséquent, $u^{(\Delta t,\Delta x)}$ a aussi une limite :

$$u^{(\Delta t,\Delta x)}(\tau, x) \to u^*(\tau, x).$$

Par construction, nous avons $z(\tau, x) \leq u(\tau, x) \leq w(\tau, x)$ et $z(\tau, x) \leq u^*(\tau, x) \leq w(\tau, x)$. S'il est possible de rendre $w(\tau, x) - u(\tau, x)$ et $u(\tau, x) - z(\tau, x)$ arbitrairement petits, cela impliquerait que $u^*(\tau, x) = u(\tau, x)$.

Soient $\xi_1, \ldots, \xi_I$ les points de discontinuité de h. On suppose que les amplitudes des discontinuités en ces points sont bornées par K. Pour un $\varepsilon > 0$ donné, on construit $\underline{h}, \overline{h} \in C^\infty(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{aligned}
\underline{h}(x) \leq h(x) \leq \overline{h}(x), \qquad & \forall x \in \mathbb{R} \\
|\overline{h}(x) - \underline{h}(x)| \leq \varepsilon, \qquad & \forall x \notin \bigcup_{i=1}^{I} (\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon), \\
|\overline{h}(x) - \underline{h}(x)| \leq K, \qquad & \forall x \in \bigcup_{i=1}^{I} (\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned}
w(\tau, x) - z(\tau, x) &= \mathbb{E}[\overline{h}(x + Y_\tau) - \underline{h}(x + Y_\tau)] \\
&\leq \varepsilon \mathbb{Q}(x + Y_\tau \notin \bigcup_{i=1}^{I} (\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon)) + K \mathbb{Q}(x + Y_\tau \in \bigcup_{i=1}^{I} (\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon)) \\
&\leq \varepsilon + K \mathbb{Q}(x + Y_\tau \in \bigcup_{i=1}^{I} (\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon)). \quad (4.6.35)
\end{aligned}$$

Si on note $\Omega_\varepsilon = \{x+Y_\tau \in \bigcup_{i=1}^{I}(\xi_i-\varepsilon,\xi_i+\varepsilon)\}$, on obtient $\bigcap_{\varepsilon>0}\Omega_\varepsilon = \{x+Y_\tau \in \{\xi_1,\dots,\xi_I\}\}$. Or, comme σ est strictement positif, Y_τ a une distribution absolument continue pour $\tau > 0$ et donc $\mathbb{Q}(x + Y_\tau \in \{\xi_1,\dots,\xi_I\}) = 0$. Par conséquent,

$$\mathbb{Q}(x + Y_\tau \in \bigcup_{i=1}^{I}(\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} 0.$$

Donc l'expression dans (4.6.35) tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$, d'où $u^*(\tau, x) = u(\tau, x)$, ce qu'il fallait démontrer. □

Remarque 4.6.14. Si $\tau = 0$, on obtient

$$\mathbb{Q}(x + Y_\tau \in \bigcup_{i=1}^{I}(\xi_i - \varepsilon, \xi_i + \varepsilon)) \xrightarrow{\varepsilon\downarrow 0} \mathbb{Q}(x \in \{\xi_1,\dots,\xi_I\}) = 1_{\{x\in\{\xi_1,\dots,\xi_I\}\}}.$$

Donc, le schéma ne converge pas vers la solution (la condition initiale) aux points de discontinuité de h mais cela n'a pas d'importance puisqu'on n'a pas besoin de calculer numériquement la solution en $\tau = 0$.

Remarque 4.6.15. Les conditions que l'on impose sur le schéma pour montrer la convergence sont assez faibles. En effet, on utilise la consistance locale tandis que les preuves classiques par le théorème de Lax exigent la consistance *globale*, c'est-à-dire, la convergence dans (4.6.1) doit être non ponctuelle mais par rapport à une norme globale, ce qui demande, en particulier, de savoir d'avance sur quel espace fonctionnel vit la solution. Cela montre la flexibilité de la notion de solution de viscosité. Le prix à payer est la perte d'information sur l'ordre de convergence. Nous étudions la vitesse de convergence par une autre méthode dans les sections suivantes.

4.6.4 Vitesse de convergence

Dans le cadre de solutions de viscosité, des résultats sur la vitesse de convergence pour des schémas numériques ont été obtenus par Crandall & Lions [CL84] pour des équations du premier ordre et par Krylov [Kry97a, Kry97b] pour des EDP paraboliques du second ordre. Les idées de Krylov ont été utilisées et développées dans une séries de travaux récents [BJ02, Jak03, Jak02, BJ04, JKLC05].

Pour estimer la vitesse de convergence de nos schémas, nous nous sommes inspirés de [Kry97b]. Cependant, notre approche est légèrement plus simple et permet d'obtenir de meilleures estimations. Ceci est dû au fait que nous travaillons avec des équations linéaires à coefficients constants.

Comme la preuve utilise de manière essentielle des propriétés de la solution du problème de Cauchy, le résultat que nous présentons dans cette section est démontré uniquement dans le cas d'une grille infinie $\{(\tau_n, x_i),\ n \in \{0,\dots,M\},\ i \in \mathbb{N}\}$, comme d'ailleurs dans tous les articles cités plus haut. Malheureusement, la méthode ne semble

pas se généraliser au cas d'un domaine borné.

Pour ne pas alourdir la présentation, nous allons séparer la considération des deux versions du schéma. Dans un premier temps, nous étudions en détail le schéma 1. Pour le schéma 2, les preuves sont très similaires. Nous discutons dans la deuxième partie de cette section les points qui sont différents dans ce cas.

Vitesse de convergence du schéma 1

Introduisons d'abord quelques notations. Etant donné $J \subset \{0, \dots, M\}$, on désigne par $\mathcal{B}_{J\times\mathbb{N}}$ l'espace des fonctions bornées définies sur la grille $\{(\tau_n, x_i),\ n \in J,\ i \in \mathbb{N}\}$. On munit cet espace de la norme

$$\|v\|_{\Delta,J} = \sup_{n\in J,\ i\in\mathbb{N}} |v(\tau_n, x_i)|. \tag{4.6.36}$$

De la même manière, on définit $\mathcal{B}_{\mathbb{N}}$, l'espace de fonctions bornées sur $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$, muni de la norme

$$\|v\|_{\Delta} = \sup_{i\in\mathbb{N}} |v(x_i)|. \tag{4.6.37}$$

Soit

$$\begin{aligned} L_\Delta v(\tau,x) \ \equiv\ & \frac{\sigma^2}{2}\frac{u(\tau,x+\Delta x)-2u(\tau,x)+u(\tau,x-\Delta x)}{\Delta x^2}- \\ & \left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{u(\tau,x+\Delta x)-u(\tau,x)}{\Delta x}-\lambda u(\tau,x)+\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j u(\tau-\Delta t,x+j\Delta x). \end{aligned} \tag{4.6.38}$$

Pour toute fonction $\xi \in \mathcal{B}_{\{1,\dots,M\}\times\mathbb{N}}$, on considère le problème suivant :

$$v(0,x_i) = h(x_i), \qquad i \in \mathbb{N} \tag{4.6.39}$$

$$v(\tau_n,x_i) = v(\tau_{n-1},x_i) + L_\Delta v(\tau_n,x_i)\Delta t + \xi(\tau_n,x_i), \qquad n = 1,\dots,M,\ i \in \mathbb{N}. \tag{4.6.40}$$

Le schéma **(S)** ((4.5.11)+(4.5.13)) coïncide avec (4.6.39)–(4.6.40) quand $\xi \equiv 0$. Le terme $\xi(\tau_n, x_i)$ est introduit pour pouvoir comparer la solution du schéma u_Δ avec la solution du problème continu u qui ne vérifie pas (4.5.11)–(4.5.13) exactement mais à un résidu près. En effet,

$$\frac{\partial u}{\partial\tau}(\tau,x) = Lu(\tau,x), \qquad (\tau,x) \in (0,T]\times\mathbb{R}, \tag{4.6.41}$$

$$u(0,x) = h(x), \qquad x \in \mathbb{R} \tag{4.6.42}$$

impliquent $u(0,x_i) = h(x_i)$ et $u(\tau_n,x_i) = u(\tau_{n-1},x_i) + \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} Lu(s,x_i)ds$. Donc, u vérifie (4.6.39)–(4.6.40) avec $\xi(\tau_n,x_i) = \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} Lu(s,x_i)ds - L_\Delta u(\tau_n,x_i)\Delta t$.

Lemme 4.6.16. *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*
(i) Le problème (4.6.39)–(4.6.40) possède une unique solution $v(\xi) \in \mathcal{B}_{\{0,\dots,M\}\times\mathbb{N}}$.
(ii) Si $v_i = v(\xi_i)$, *où* $\xi_i \in \mathcal{B}_{\{1,\dots,M\}\times\mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, *alors*

$$\|v_1(\tau_n,\cdot) - v_2(\tau_n,\cdot)\| \;\le\; \sum_{k=1}^{n} \|\xi_1(\tau_k,\cdot) - \xi_2(\tau_k,\cdot)\|, \qquad n = 1,\dots,M. \quad (4.6.43)$$

Démonstration. (i) L'équation (4.6.40) s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} -c\Delta t v(\tau_n, x_{i-1}) + (1 + a\Delta t)v(\tau_n, x_i) - b\Delta t v(\tau_n, x_{i+1}) = \\ = v(\tau_{n-1}, x_i) + \Delta t \sum_j \nu_j v(\tau_{n-1}, x_{i+j}) + \xi(\tau_n, x_i), \quad (4.6.44) \end{aligned}$$

avec a, b, c donnés par (4.6.8). Ceci est un système linéaire tri-diagonal dont la diagonale principale est dominante. Par conséquent, le système possède une unique solution. Montrons que cette solution est bornée. Plus exactement, on va montrer par récurrence que

$$\|v(\tau_n,\cdot)\| \le \|h\| + \frac{1}{1+\lambda\Delta t} \sum_{k=1}^{n} \|\xi(\tau_k,\cdot)\|. \quad (4.6.45)$$

On a $|v(0, x_i)| = |h(x_i)| \le \|h\|$. Supposons que (4.6.45) est vérifié pour $n-1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout i,

$$|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| \ge \|v(\tau_n,\cdot)\| - \varepsilon \ge |v(\tau_n, x_i)| - \varepsilon.$$

Donc, on a

$$\begin{aligned} &\|v(\tau_n,\cdot)\| \le |v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + \varepsilon = \\ &= -c\Delta t|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + (1 + a\Delta t)|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| - b\Delta t|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| - \lambda\Delta t|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + \varepsilon \\ &\le -c\Delta t(|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1})| - \varepsilon) + (1 + a\Delta t)|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| - b\Delta t(|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1})| - \varepsilon) \\ &\qquad - \lambda\Delta t(\|v(\tau_n,\cdot)\| - \varepsilon) + \varepsilon \\ &\le |-c\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1}) + (1 + a\Delta t)v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1})| \\ &\qquad - \lambda\Delta t\|v(\tau_n,\cdot)\| + (1 + a\Delta t)\varepsilon. \end{aligned}$$

En utilisant (4.6.44), on en déduit que

$$\begin{aligned} (1+\lambda\Delta t)\|v(\tau_n,\cdot)\| &\le |v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)}) + \Delta t \sum_j \nu_j v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+j}) + \xi(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + (1 + a\Delta t)\varepsilon \\ &\le (1 + \lambda\Delta t)\|v(\tau_{n-1},\cdot)\| + \|\xi(\tau_n,\cdot)\| + (1 + a\Delta t)\varepsilon, \end{aligned}$$

d'où

$$\|v(\tau_n,\cdot)\| \le \|h\| + \frac{1}{1+\lambda\Delta t} \sum_{k=1}^{n} \|\xi(\tau_k,\cdot)\| + \frac{1 + a\Delta t}{1 + \lambda\Delta t}\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, on obtient (4.6.45).

(ii) Supposons d'abord que $\forall k, i$, $\xi_1(\tau_k, x_i) \geq \xi_2(\tau_k, x_i)$ et montrons que, dans ce cas, $v_1 \geq v_2$. Notons $v = v_1 - v_2$. On a $v(0, x_i) = 0$. Supposons que $v(\tau_{n-1}, x_i) \geq 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, prenons $i(\varepsilon)$ tel que $v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) \leq \inf_i v(\tau_n, x_i) + \varepsilon \leq v(\tau_n, x_i) + \varepsilon$, $\forall i$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\inf_i v(\tau_n, x_i) &\geq v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \varepsilon = \\
&\quad - c\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) + (1 + a\Delta t) v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \lambda \Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \varepsilon \\
&\geq -c\Delta t (v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1}) + \varepsilon) + (1 + a\Delta t) v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t (v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1}) + \varepsilon) \\
&\qquad - \lambda \Delta t (\inf_i v(\tau_n, x_i) + \varepsilon) - \varepsilon \\
&= v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)}) + \Delta t \sum_j \nu_j v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+j}) + (\xi_1 - \xi_2)(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \lambda \Delta t \inf_i v(\tau_n, x_i) - (1 + a\Delta t)\varepsilon \\
&\geq -\lambda \Delta t \inf_i v(\tau_n, x_i) - (1 + a\Delta t)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\inf_i v(\tau_n, x_i) \geq -\frac{1 + a\Delta t}{1 + \lambda \Delta t} \varepsilon.$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité, on obtient $\inf_i v(\tau_n, x_i) \geq 0$, donc $v = v_1 - v_2 \geq 0$.

Si ξ_1, ξ_2 sont arbitraires, on pose $v(\tau_n, x_i) = v_1(\tau_n, x_i) + \sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|$. La fonction v est une solution de (4.6.39)–(4.6.40) avec $\xi(\tau_n, x_i) = v(\tau_n, x_i) - v(\tau_{n-1}, x_i) - L_\Delta v(\tau_n, x_i)\Delta t$. Donc,

$$\begin{aligned}
\xi(\tau_n, x_i) &= \xi_1(\tau_n, x_i) + \|\xi_1(\tau_n, \cdot) - \xi_2(\tau_n, \cdot)\| - L_\Delta \left[\sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\| \right] \Delta t \\
&= \xi_1(\tau_n, x_i) + (1 + \lambda \Delta t) \|\xi_1(\tau_n, \cdot) - \xi_2(\tau_n, \cdot)\| \geq \xi_2(\tau_n, x_i).
\end{aligned}$$

Or, on a montré que cela implique $v(\tau_n, x_i) \geq v_2(\tau_n, x_i)$. Donc,

$$v_2(\tau_n, x_i) - v_1(\tau_n, x_i) \leq \sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|.$$

En échangeant v_1 avec v_2, on obtient (4.6.43). □

On va considérer des conditions initiales h qui vérifient l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.6.17. *h est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, C^∞ par morceaux à l'exception d'un nombre fini de points $\xi_1, \ldots, \xi_I$ et telle que $\forall n \geq 0$, $\forall x \notin \{\xi_1, \ldots, \xi_I\}$, $|h^{(n)}(x)| \leq K$.*

Remarque 4.6.18. Le *payoff* d'un Put, $h(x) = (1 - e^x)^+$, vérifie l'Hypothèse 4.6.17.

Lemme 4.6.19. *Si u est la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) avec h vérifiant l'Hypothèse 4.6.17, alors, pour tout $k \geq 1$,*

$$\|Lu(\tau_k,\cdot) \; - \; L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\| \quad \leq \quad C\left[\Delta x^2/\tau_k^{3/2} + \Delta x/\tau_k^{1/2} + 2(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}})\right], \quad (4.6.46)$$

avec $C = C(K,T,r,\sigma,\lambda,\alpha)$.

Démonstration. On a

$$|Lu(\tau_k,x_i) - L_\Delta u(\tau_k,x_i)| \leq |Du(\tau_k,x_i) - D_\Delta u(\tau_k,x_i)| + |Ju(\tau_k,x_i) - J_\Delta u(\tau_{k-1},x_i)|,$$

où D et J sont les parties différentielle et intégrale de L :

$$\begin{aligned} Du(\tau_k,x_i) &= \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_k,x_i) - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_k,x_i) - \lambda u(\tau_k,x_i), \quad (4.6.47)\\ Ju(\tau_k,x_i) &= \int_{B_l}^{B_r} u(\tau_k,x_i+y)\nu(dy), \quad (4.6.48)\end{aligned}$$

et D_Δ, J_Δ sont leurs approximations :

$$\begin{aligned} D_\Delta u(\tau_k,x_i) &= \frac{\sigma^2}{2}\frac{u(\tau_k,x_{i+1}) - 2u(\tau_k,x_i) + u(\tau_k,x_{i-1})}{(\Delta x)^2}\\ &\quad - \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\frac{u(\tau_k,x_{i+1}) - u(\tau_k,x_i)}{\Delta x} - \lambda u(\tau_k,x_i), \quad (4.6.49)\\ J_\Delta u(\tau_k,x_i) &= \sum_{j=K_l}^{K_r} u(\tau_k,x_{i+j})\nu_j. \quad (4.6.50)\end{aligned}$$

En utilisant le développement de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} &\exists \xi_1,\eta_1,\xi_2 \in [x_{i-1},x_{i+1}], \qquad |Du(\tau_k,x_i) - D_\Delta u)(\tau_k,x_i)| =\\ &\left|\frac{\sigma^2}{2}\frac{\Delta x^2}{24}\left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tau_k,\xi_1) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tau_k,\eta_1)\right] + \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\frac{\Delta x}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_k,\xi_2)\right|\\ &\leq \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\sigma^2}{2}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tau_k,\cdot)\right\| + \frac{\Delta x}{2}|\sigma^2/2 - r + \alpha|\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_k,\cdot)\right\|\\ &\leq C[\Delta x^2/\tau_k^{3/2} + \Delta x/\tau_k^{1/2}], \quad (4.6.51)\end{aligned}$$

d'après la Proposition 3.4.6. La partie intégrale peut être estimée de la façon suivante :

$$
\begin{aligned}
|Ju(\tau_k,x_i)-J_\Delta u(\tau_{k-1},x_i)| &= \left|\sum_{j=K_l}^{K_r} u(\tau_{k-1},x_{i+j})\nu_j - \int_{B_l}^{B_r} u(\tau_k,x_i+y)\nu(dy)\right| \\
&= \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} [u(\tau_{k-1},x_i+y_j)-u(\tau_k,x_i+y)]\nu(dy)\right| \\
\leq \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}[u(\tau_{k-1},x_i+y_j)-u(\tau_k,x_i+y_j)]\nu_j\right| &+ \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}[u(\tau_k,x_i+y_j)-u(\tau_k,x_i+y)]\nu(dy)\right| \\
&\leq \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{\partial u}{\partial\tau}(s,x_i+y_j)ds\right| + \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\nu(dy)\int_{x_i+y_j}^{x_i+y}\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_k,\xi)d\xi\right| \\
&\leq \lambda\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}(s,\cdot)\right\|ds + \frac{\lambda\Delta x}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_k,\cdot)\right\| \leq C\left[\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{ds}{\sqrt{s}}+\Delta x\right] \\
&= C\left[2(\sqrt{\tau_k}-\sqrt{\tau_{k-1}})+\Delta x\right]. \quad (4.6.52)
\end{aligned}
$$

En rassemblant les estimations (4.6.51) et (4.6.52), on obtient (4.6.46). □

Théorème 4.6.20. (Vitesse de convergence du schéma 1) *Supposons que h vérifie l'Hypothèse 4.6.17. Soient u la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) et u_Δ la solution du schéma 1 ((4.5.11)+(4.5.13)+(4.5.7)+(4.5.8)). Si $c_1 \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq c_2$, avec $c_1, c_2 > 0$, alors*

$$\|u-u_\Delta\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C\Delta x. \quad (4.6.53)$$

La constante C ne dépend que de T, K et des coefficients de l'opérateur L (σ, r, α et λ).

Démonstration. Comme on a déjà noté, les fonctions u_Δ et u vérifient (4.6.39)-(4.6.40) avec $\xi = 0$ et $\xi(\tau_k,x_i) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Lu(s,x_i)ds - L_\Delta u(\tau_k,x_i)\Delta t$, respectivement. D'après le Lemme 4.6.16,

$$
\begin{aligned}
\|u(\tau_n,\cdot)-u_\Delta(\tau_n,\cdot)\| &\leq \sum_{k=1}^{n}\|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} Lu(s,\cdot)ds - L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\Delta t\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n}\|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(Lu(s,\cdot)-Lu(\tau_k,\cdot))ds\| + \sum_{k=1}^{n}\|Lu(\tau_k,\cdot)-L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\|\Delta t. \quad (4.6.54)
\end{aligned}
$$

Regardons le premier terme :

$$
\begin{aligned}
|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(Lu(s,x)-Lu(\tau_k,x))ds| &= |\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{\partial^2 u}{\partial\tau^2}(\theta,x)d\theta| \\
&\leq C\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{d\theta}{\theta^{3/2}} \leq C\Delta t\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{ds}{s^{3/2}},
\end{aligned}
$$

par la Proposition 3.4.6. Par conséquent,

$$\sum_{k=1}^{n} \| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (Lu(s,\cdot) - Lu(\tau_k,\cdot))ds \| \leq C[\int_0^{\Delta t} ds \int_s^{\Delta t} \frac{d\theta}{\theta^{3/2}} + \Delta t \int_{\Delta t}^{T} \frac{ds}{s^{3/2}}]$$
$$= C[2\Delta t + \Delta t \frac{2(\sqrt{T} - \sqrt{\Delta t})}{\sqrt{T}\sqrt{\Delta t}}] \leq 4C\sqrt{\Delta t}. \quad (4.6.55)$$

Pour estimer le deuxième terme dans (4.6.54), remarquons que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta t}{\sqrt{\tau_k}} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{ds}{\sqrt{\tau_k}} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{ds}{\sqrt{s}} = 2\sqrt{\tau_n}, \quad (4.6.56)$$

et que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\Delta t}{\tau_k^{3/2}} = \frac{1}{\sqrt{\Delta t}} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{3/2}} \leq \frac{C}{\sqrt{\Delta t}}, \quad (4.6.57)$$

puisque la série $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k^{3/2}$ converge. En utilisant le Lemme 4.6.19, on obtient donc

$$\sum_{k=1}^{n} \|Lu(\tau_k,\cdot) - L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\|\Delta t \leq C\left[\Delta x^2/\sqrt{\Delta t} + 2\sqrt{\tau_n}\Delta x + 2\sqrt{\tau_n}\Delta t\right]$$
$$\leq C\left[\Delta x^2/\sqrt{\Delta t} + \Delta x + \Delta t\right]. \quad (4.6.58)$$

Si $c_1 \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq c_2$, les estimations (4.6.54), (4.6.55) et (4.6.58) impliquent (4.6.73). □

Remarque 4.6.21. Notre estimation $O(\Delta x)$ est meilleure que $O(\sqrt{\Delta x})$ donnée dans les articles que nous connaissons traitant le cas des équations paraboliques : [Jak03] pour des équations différentielles (même dans le cas linéaire) et [JKLC05] pour des équations intégro-différentielles. Il faut dire que contrairement à [Jak03] nous considérons des coefficients constants.

Remarque 4.6.22. Notons que la condition $\Delta t/\Delta x^2 \sim c$ n'est pas requise pour la convergence du schéma mais la nature de nos estimations l'impose pour évaluer la vitesse de convergence. Cette condition est aussi requise dans [Kry97b, Jak03].

La différence avec des schémas qui exigent la condition CFL $\Delta t \leq c\Delta x^2$ *pour la stabilité* est la suivante. En pratique, on calcule la solution discrète avec Δt et Δx fixés. Ensuite, si on veut augmenter la précision, on peut relancer le calcul en diminuant ces paramètres. Supposons que pour un Δt donné, le niveau de l'erreur dû à la discrétisation en temps nous convient déjà et on veut améliorer la discrétisation en espace en diminuant seulement Δx. Si le schéma est stable sous la condition CFL, il risque d'exploser après cette opération. En revanche, notre schéma restera stable quel que soit le rapport entre Δt est Δx. Il va converger avec la vitesse $O(\Delta x)$ vers l'erreur résiduelle déterminée par

Δt. Comme on a vu, cette erreur résiduelle est proportionnelle à $\sqrt{\Delta t}$ (et non à Δt, à cause de l'irrégularité de la condition initiale). Le Théorème 4.6.20 dit que, si on veut diminuer Δx et Δt de façon coordonnée et atteindre la vitesse de convergence en $O(\Delta x)$, il faut choisir $\Delta t \sim \Delta x^2$. Notons également que dans le cas CFL la constante c est donnée et limite la taille de Δt, tandis que les constantes c_1 et c_2 dans le Théorème 4.6.20 peuvent être quelconques.

Remarquons que le Théorème 4.6.20 suggère non seulement la majoration $\Delta t \le c\Delta x^2$ mais aussi la minoration $\Delta t \ge c_1 \Delta x^2$. Ceci est dû au terme $\Delta x^2/\sqrt{\Delta t}$ dans (4.6.58) : il devrait exploser si Δt est trop petit par rapport à Δx. Pourtant, dans les tests numériques, nous n'observons pas cette limitation : l'erreur diminue quand Δt diminue (voir Figure 5.8 dans la Section 5.3). Nous pensons donc que cette contrainte est un artefact de la méthode d'estimation et n'est pas nécessaire en pratique (voir aussi la discussion dans les Sections 5.2.2 et 5.3).

Vitesse de convergence du schéma 2

Nous considérons maintenant le problème (4.6.39)–(4.6.40) avec l'opérateur L_Δ du second schéma :

$$\begin{aligned} L_\Delta v(\tau,x) \;\equiv\; & \frac{\sigma^2}{2}\frac{u(\tau,x+\Delta x)-2u(\tau,x)+u(\tau,x-\Delta x)}{\Delta x^2} \\ & -\left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\frac{u(\tau,x+\Delta x)-u(\tau,x)}{\Delta x}+\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j u(\tau-\Delta t,x+j\Delta x) \\ & -\lambda u(\tau-\Delta t,x)-\alpha\frac{u(\tau-\Delta t,x+\Delta x)-u(\tau-\Delta t,x)}{\Delta x}. \end{aligned} \tag{4.6.59}$$

Lemme 4.6.23. *Si Δt vérifie la condition (4.6.11), alors nous avons les propriétés suivantes :*

(i) Le problème (4.6.39)–(4.6.40) avec L_Δ donné par (4.6.59) possède une unique solution $v(\xi) \in \mathcal{B}_{\{0,\dots,M\}\times\mathbb{N}}$.

(ii) Si $v_i = v(\xi_i)$, où $\xi_i \in \mathcal{B}_{\{1,\dots,M\}\times\mathbb{N}}$, $i = 1, 2$, alors

$$\|v_1(\tau_n,\cdot)-v_2(\tau_n,\cdot)\| \;\le\; \sum_{k=1}^{n}\|\xi_1(\tau_k,\cdot)-\xi_2(\tau_k,\cdot)\|, \qquad n=1,\dots,M. \tag{4.6.60}$$

Démonstration. (i) L'équation (4.6.40) s'écrit maintenant sous la forme

$$\begin{aligned} & -c\Delta t v(\tau_n,x_{i-1})+(1+a\Delta t)v(\tau_n,x_i)-b\Delta t v(\tau_n,x_{i+1}) \\ & \qquad = v(\tau_{n-1},x_i)+\Delta t\sum_j \nu_j v(\tau_{n-1},x_{i+j})-\Delta t\lambda v(\tau_{n-1},x_i) \\ & \qquad\qquad -\alpha\frac{v(\tau_{n-1},x_{i+1})-v(\tau_{n-1},x_i)}{\Delta x}+\xi(\tau_n,x_i), \end{aligned} \tag{4.6.61}$$

avec a, b, c donnés par (4.6.12). Le système linéaire qu'elle définit est toujours tri-diagonal à diagonale principale dominante, donc il possède une unique solution. Montrons que cette solution est bornée :

$$\|v(\tau_n, \cdot)\| \leq \|h\| + \sum_{k=1}^{n} \|\xi(\tau_k, \cdot)\|. \tag{4.6.62}$$

Par définition, $|v(0, x_i)| = |h(x_i)| \leq \|h\|$. Supposons que (4.6.62) est vérifié pour $n-1$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $i(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tel que $|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| \geq \|v(\tau_n, \cdot)\| - \varepsilon \geq |v(\tau_n, x_i)| - \varepsilon$, pour tout i. Donc,

$$\begin{aligned}
\|v(\tau_n, \cdot)\| &\leq |v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + \varepsilon = \\
&= -c\Delta t|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + (1 + a\Delta t)|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| - b\Delta t|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + \varepsilon \\
&\leq -c\Delta t(|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1})| - \varepsilon) + (1 + a\Delta t)|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| - b\Delta t(|v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1})| - \varepsilon) + \varepsilon \\
&\leq |-c\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1}) + (1 + a\Delta t)v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1})| + (1 + a\Delta t)\varepsilon.
\end{aligned}$$

Il vient de (4.6.61) que

$$\|v(\tau_n, \cdot)\| \leq |v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)})(1 - \lambda\Delta t - |\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Delta t \sum_j \nu_j v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+j})$$

$$+|\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x} v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+1}) + \xi(\tau_n, x_{i(\varepsilon)})| + (1 + a\Delta t)\varepsilon \leq \|v(\tau_{n-1}, \cdot)\| + \|\xi(\tau_n, \cdot)\| + (1 + a\Delta t)\varepsilon,$$

puisque $1 - \lambda\Delta t - |\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x} \geq 0$ grâce à (4.6.11). Rappelons que nous avons supposé pour fixer les idées que $\alpha < 0$. Dans le cas contraire, on utilise le schéma décentré à gauche dans la partie explicite et la preuve se déroule de la même manière.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, on obtient

$$\|v(\tau_n, \cdot)\| \leq \|h\| + \sum_{k=1}^{n} \|\xi(\tau_k, \cdot)\| + (1 + a\Delta t)\varepsilon.$$

Comme ε est arbitraire, cela implique (4.6.62).

(ii) Supposons d'abord que $\forall k, i$, $\xi_1(\tau_k, x_i) \geq \xi_2(\tau_k, x_i)$ et montrons que, dans ce cas, $v_1 \geq v_2$. Notons $v = v_1 - v_2$. On a $v(0, x_i) = 0$. Supposons que $v(\tau_{n-1}, x_i) \geq 0$. Etant donné $\varepsilon > 0$, prenons $i(\varepsilon)$ tel que $v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) \leq \inf_i v(\tau_n, x_i) + \varepsilon \leq v(\tau_n, x_i) + \varepsilon$, $\forall i$. Alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\inf_i v(\tau_n, x_i) &\geq v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \varepsilon = \\
&\quad - c\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) + (1 + a\Delta t)v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - \varepsilon \\
&\geq -c\Delta t(v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)-1}) + \varepsilon) + (1 + a\Delta t)v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - b\Delta t(v(\tau_n, x_{i(\varepsilon)+1}) + \varepsilon) - \varepsilon \\
&= v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)})(1 - \lambda\Delta t - |\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x}) + \Delta t \sum_j \nu_j v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+j}) + |\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x} v(\tau_{n-1}, x_{i(\varepsilon)+1}) \\
&\quad + (\xi_1 - \xi_2)(\tau_n, x_{i(\varepsilon)}) - (1 + a\Delta t)\varepsilon \geq -(1 + a\Delta t)\varepsilon.
\end{aligned}$$

En faisant tendre ε vers 0 dans cette inégalité, on obtient $\inf_i v(\tau_n, x_i) \geq 0$, donc $v = v_1 - v_2 \geq 0$.

Si ξ_1, ξ_2 sont arbitraires, on pose $v(\tau_n, x_i) = v_1(\tau_n, x_i) + \sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|$. La fonction v est une solution de (4.6.39)–(4.6.40) avec $\xi(\tau_n, x_i) = v(\tau_n, x_i) - v(\tau_{n-1}, x_i) - L_\Delta v(\tau_n, x_i)\Delta t$. Donc,

$$\begin{aligned}\xi(\tau_n, x_i) &= \xi_1(\tau_n, x_i) + \|\xi_1(\tau_n, \cdot) - \xi_2(\tau_n, \cdot)\| - L_\Delta \left[\sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|\right] \Delta t \\ &= \xi_1(\tau_n, x_i) + \|\xi_1(\tau_n, \cdot) - \xi_2(\tau_n, \cdot)\| \geq \xi_2(\tau_n, x_i),\end{aligned}$$

puisque $\sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|$ ne dépend pas de i et donc L_Δ appliqué à cette constante est égale à zéro. Or on a montré que cela implique $v(\tau_n, x_i) \geq v_2(\tau_n, x_i)$. Donc,

$$v_2(\tau_n, x_i) - v_1(\tau_n, x_i) \leq \sum_{k=1}^n \|\xi_1(\tau_k, \cdot) - \xi_2(\tau_k, \cdot)\|.$$

En échangeant v_1 avec v_2, on obtient (4.6.60). □

Lemme 4.6.24. *Soit u la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) avec h vérifiant l'Hypothèse 4.6.17. Si L_Δ est donné par (4.6.59) et Δt vérifie la condition (4.6.11), alors, pour tout $k \geq 2$,*

$$\begin{aligned}\|Lu(\tau_k, \cdot) - L_\Delta u(\tau_k, \cdot)\| \leq C \Big[&\Delta x^2/\tau_k^{3/2} + \Delta x/\tau_k^{1/2} + \Delta x \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} + \log(\tau_k/\tau_{k-1}) + \sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}}\Big], \quad (4.6.63)\end{aligned}$$

avec $C = C(K, T, r, \sigma, \lambda, \alpha)$. Pour $k = 1$, nous avons

$$\|Lu(\tau_1, \cdot) - L_\Delta u(\tau_1, \cdot)\| \leq C \left[\Delta x^2/(\Delta t)^{3/2} + \Delta x/(\Delta t)^{1/2} + \Delta x + 1/(\Delta t)^{1/2}\right]. \quad (4.6.64)$$

Démonstration. Par analogie avec (4.6.51), on obtient d'après la Proposition 3.4.6 :

$$\begin{aligned}|Du(\tau_k, x_i) - D_\Delta u)(\tau_k, x_i)| &\leq \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\sigma^2}{2}\left\|\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(\tau_k, \cdot)\right\| + \frac{\Delta x}{2}|\sigma^2/2 - r|\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_k, \cdot)\right\| \\ &\leq C[\Delta x^2/\tau_k^{3/2} + \Delta x/\tau_k^{1/2}]. \quad (4.6.65)\end{aligned}$$

La partie intégrale peut être estimée de la façon suivante :

$$\begin{aligned}&|Ju(\tau_k, x_i) - J_\Delta u(\tau_{k-1}, x_i)| \leq \\ &\qquad \leq |Ju(\tau_k, x_i) - J_\Delta u(\tau_k, x_i)| + \left|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial \tau}(J_\Delta u)(s, x_i) ds\right|. \quad (4.6.66)\end{aligned}$$

Pour le premier terme, nous obtenons comme dans (4.6.52) :

$$|Ju(\tau_k,x_i)-J_\Delta u(\tau_k,x_i)| \le \left|\sum_{j=K_l}^{K_r}\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}[u(\tau_{k-1},x_i+y_j)-u(\tau_k,x_i+y)]\nu(dy)\right|$$
$$+|\alpha|\left|\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_k,x_i)-\frac{u(\tau_k,x_i+\Delta x)-u(\tau_k,x_i)}{\Delta x}\right| \le \lambda\frac{\Delta x}{2}\left\|\frac{\partial u}{\partial x}(\tau_k,\cdot)\right\|+|\alpha|\frac{\Delta x}{2}\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau_k,\cdot)\right\|. \tag{4.6.67}$$

La Proposition 3.4.6 implique alors la majoration suivante :

$$|Ju(\tau_k,x_i)-J_\Delta u(\tau_k,x_i)| \le C[\Delta x+\Delta x/\tau_k^{1/2}]. \tag{4.6.68}$$

Dans le second terme, nous allons distinguer le cas $k=1$ qui demande un traitement spécial. Remarquons d'abord que

$$\begin{aligned}|J_\Delta f(x_i)| &= |\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j f_{i+j}-\lambda f_i-\alpha\frac{f_{i+1}-f_i}{\Delta x}|\\ &= \frac{1}{\Delta t}\left|(1-\lambda\Delta t-|\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x})f_i-f_i+\Delta t\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j f_{i+j}+|\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x}f_{i+1}\right|\\ &\le \frac{1}{\Delta t}\left((1-\lambda\Delta t-|\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x})\|f\|+\|f\|+\Delta t\sum_{j=K_l}^{K_r}\nu_j\|f\|+|\alpha|\frac{\Delta t}{\Delta x}\|f\|\right)=\frac{2}{\Delta t}\|f\|,\end{aligned} \tag{4.6.69}$$

grâce à la condition (4.6.11). Donc, on obtient

$$\begin{aligned}\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau}(J_\Delta u)(s,x_i)ds\right| = \left|\int_0^{\Delta t}J_\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial\tau}\right)(s,x_i)ds\right| &\le \frac{2}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}(s,\cdot)\right\|ds\\ &\le \frac{C}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\frac{ds}{\sqrt{s}}=\frac{\tilde C}{\sqrt{\Delta t}}.\end{aligned} \tag{4.6.70}$$

Pour traiter les termes avec $k\ge 2$, nous représentons $J_\Delta f$ d'une autre manière.

$$\begin{aligned}J_\Delta f(x_i) &= \sum_j\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left[f(x_i+y_j)-f(x_i)-(e^y-1)\frac{f(x_{i+1})-f(x_i)}{\Delta x}\right]\nu(\mathrm{d}y)\\ &= \sum_j\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left[f(x_i+y_j)-f(x_i)-(e^y-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x_i+\xi)\right]1_{|y|>1}\nu(\mathrm{d}y)\\ &+\sum_j\int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}}\left[y_j\frac{\partial f}{\partial x}(x_i)+\frac{y_j^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i+\eta)-y\frac{\partial f}{\partial x}(x_i+\zeta)\right]1_{|y|\le 1}\nu(\mathrm{d}y)\\ &-\int_{|y|\le 1}(e^y-1-y)\nu(\mathrm{d}y)\frac{\partial f}{\partial x}(x_i+z),\end{aligned}$$

où $\xi, \zeta, z \in [x_i, x_{i+1}]$ et $|\eta| \leq \Delta x/2$. La partie avec $|y| \leq 1$ peut être majorée comme suit :

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_j \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[y_j \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) + \frac{y_j^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \eta) - y \frac{\partial f}{\partial x}(x_i + \zeta) \right] 1_{|y| \leq 1} \nu(\mathrm{d}y) \right| \\
&\qquad = \left| \sum_j \int_{y_{j-1/2}}^{y_{j+1/2}} \left[(y_j - y) \frac{\partial f}{\partial x}(x_i) + y \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_i) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_i + \zeta) \right) \right.\right. \\
&\qquad\qquad \left.\left. + \frac{y_j^2 - y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \eta) - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_i + \eta) \right] 1_{|y| \leq 1} \nu(\mathrm{d}y) \right| \\
&\qquad\qquad \leq \lambda \frac{\Delta x}{2} \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| + 2\Delta x \int_{|y| \leq 1} |y| \nu(dy) \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \\
&\qquad\qquad\quad + \frac{\Delta x}{2} \left(\int_{|y| \leq 1} |y| \nu(dy) + \frac{\Delta x}{4} \right) \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\| + \int_{|y| \leq 1} \frac{y^2}{2} \nu(dy) \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|.
\end{aligned}$$

Nous avons utilisé le fait que $|y_j^2 - y^2| = |y_j - y||y_j + y| \leq \frac{\Delta x}{2}(2|y| + \Delta x/2)$. On obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
|J_\Delta f(x_i)| \leq\ & 2 \int_{|y|>1} \nu(dy) \, \|f\| + \\
&+ \left(\left| \int_{|y|>1} (e^y - 1) \nu(dy) \right| + \lambda \frac{\Delta x}{2} + \beta + 2\Delta x \int_{|y| \leq 1} |y| \nu(dy) \right) \left\| \frac{\partial f}{\partial x} \right\| \\
&\quad + \left(\frac{\Delta x}{2} \int_{|y| \leq 1} |y| \nu(dy) + \frac{\Delta x^2}{8} + \int_{|y| \leq 1} \frac{y^2}{2} \nu(dy) \right) \left\| \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right\|, \quad (4.6.71)
\end{aligned}$$

où $\beta = \int_{|y| \leq 1} (e^y - 1 - y) \nu(\mathrm{d}y) \geq 0$. Il en vient que

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\partial}{\partial \tau} (J_\Delta u)(s, x) \right| = \left| J_\Delta \left(\frac{\partial u}{\partial \tau} \right)(s, x) \right| \leq\ & C_1 \left\| \frac{\partial u}{\partial \tau}(s, \cdot) \right\| \\
&+ C_2 \left\| \frac{\partial^2 u}{\partial \tau \partial x}(s, \cdot) \right\| + C_3 \left\| \frac{\partial^3 u}{\partial \tau \partial x^2}(s, \cdot) \right\|.
\end{aligned}$$

La Proposition 3.4.6 implique alors que

$$\left| \frac{\partial}{\partial \tau} (J_\Delta u)(s, x) \right| \leq C(1/s^{3/2} + 1/s + 1/s^{1/2}),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial s} (J_\Delta u)(s, x_i) ds \right| &\leq C \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \left(\frac{1}{s^{3/2}} + \frac{1}{s} + \frac{1}{s^{1/2}} \right) ds \\
&\leq \tilde{C} \left(\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_k}} + \log(\tau_k / \tau_{k-1}) + \sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}} \right). \quad (4.6.72)
\end{aligned}$$

Les estimations (4.6.65), (4.6.70), (4.6.68) et (4.6.72) impliquent (4.6.63) et (4.6.64). □

Théorème 4.6.25. (Vitesse de convergence du schéma 2) *Supposons que h vérifie l'Hypothèse 4.6.17. Soient u la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) et u_Δ la solution du schéma 2 ((4.5.11)+(4.5.13)+(4.5.9)+(4.5.10)).*

Si la condition de stabilité (4.6.11) est vérifiée et $c_1 \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq c_2$, avec $c_1, c_2 > 0$, alors

$$\|u - u_\Delta\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C\Delta x. \tag{4.6.73}$$

La constante C ne dépend que de T, K et des coefficients de l'opérateur L (σ, r, α et λ).[9]

Notons que la condition $c_1 \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq c_2$ implique (4.6.11) pour Δx suffisamment petits, donc la condition de stabilité est automatiquement vérifiée.

Démonstration. Comme précédemment, nous obtenons grâce au Lemme 4.6.23,

$$\|u(\tau_n,\cdot)-u_\Delta(\tau_n,\cdot)\| \leq \sum_{k=1}^{n} \| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (Lu(s,\cdot)-Lu(\tau_k,\cdot))ds\| + \sum_{k=1}^{n} \|Lu(\tau_k,\cdot)-L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\|\Delta t. \tag{4.6.74}$$

L'estimation du premier terme est exactement la même que dans le Théorème 4.6.20, donc on peut directement utiliser (4.6.55). Ce qui est légèrement différent ici, c'est l'estimation de $\|Lu(\tau_k,\cdot) - L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\|$ (cf. Lemme 4.6.19 et Lemme 4.6.24). En utilisant le Lemme 4.6.24 et les remarques (4.6.56) et (4.6.57), nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \|Lu(\tau_k,\cdot) - L_\Delta u(\tau_k,\cdot)\|\Delta t &\leq C\Big[\Delta x^2/\sqrt{\Delta t} + 2\sqrt{\tau_n}\Delta x + \tau_n\Delta x \\ &\quad +\sqrt{\Delta t} + \Delta t(1/\sqrt{\Delta t} - 1/\sqrt{\tau_n} + \log(\tau_n) - \log(\Delta t) + \sqrt{\tau_n} - \sqrt{\Delta t}\Big] \\ &\leq \tilde{C}\left[\Delta x^2/\sqrt{\Delta t} + \Delta x + \Delta t\right]. \end{aligned} \tag{4.6.75}$$

Si $c_1 \leq \Delta t/\Delta x^2 \leq c_2$, les estimations (4.6.74), (4.6.55) et (4.6.75) impliquent (4.6.73). □

Remarque 4.6.26. Soulignons que les Théorèmes 4.6.20 et 4.6.25 donnent la vitesse de convergence en norme *uniforme en x et en t*. En fait, l'erreur est maximale sur les premières itérations en temps, à cause de l'irrégularité de la condition initiale. Ici, nous avons obtenu l'ordre $O(\Delta t^{1/2})$ ce qui peut apparaître comme un grave défaut de notre schéma en comparaison avec d'autres méthodes. Par exemple, dans [AA00, BLCN04] les auteurs affirment que leurs schémas sont d'ordre $O(\Delta t^2)$, voire plus élevé, en faisant implicitement le raccourci suivant : l'ordre d'approximation = l'ordre de convergence.

Remarquons premièrement que l'erreur de schéma est le plus souvent mesurée au temps final $\tau = T$ (dans une certaine norme en espace). Elle décroît, en effet, plus vite que l'erreur uniforme en temps. On peut vérifier numériquement que, dans notre

[9] K est la constante de l'Hypothèse 4.6.17.

cas, $\|u(T,\cdot) - u_\Delta(T,\cdot)\| = O(\Delta x + \Delta t)$ (voir Section 5.3). Néanmoins, dans certaines situations il peut être important de pouvoir contrôler l'erreur uniforme. Par exemple, si on veut utiliser ce schéma pour la calibration du modèle ou pour trouver la stratégie de couverture, on aura besoin des valeurs calculées sur toute la grille, y compris pour τ petits.

L'exemple suivant montre que l'estimation $O(\Delta t^{1/2})$ que nous avons obtenue est optimale pour ce type de discrétisation en temps. En outre, il illustre que le problème n'est pas lié à la présence de sauts mais uniquement au degré de régularité de la condition initiale.[10] En particulier, cet exemple devrait convaincre que l'ordre de convergence ne coïncide pas toujours avec l'ordre d'approximation de l'opérateur : ceci n'est vrai que si la condition initiale est régulière. Autrement dit, le Théorème de Lax doit être utilisé avec précaution : il ne s'applique pas dans toutes les circonstances.

Exemple 4.6.27. Considérons le problème suivant :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau}(\tau,x) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(\tau,x), \qquad (\tau,x) \in (0,T] \times \mathbb{R}, && (4.6.76)\\ u(0,x) &= h(x), \qquad x \in \mathbb{R}, && (4.6.77) \end{aligned}$$

qui peut être vu comme un cas particulier de (4.6.41)–(4.6.42) avec $\nu = 0$, $\sigma = \sqrt{2}$ et $r = 1$. La solution de ce problème est donnée par la formule :

$$u(\tau,x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-y)^2/4\tau} h(y)dy.$$

Discrétisons l'équation (4.6.76) en temps à l'aide du schéma implicite :

$$\begin{aligned} \frac{u_\Delta(\tau_n,x) - u_\Delta(\tau_n - \Delta t,x)}{\Delta t} &= \frac{\partial^2 u_\Delta}{\partial x^2}(\tau_n,x), \qquad n \geq 1, \quad x \in \mathbb{R}, && (4.6.78)\\ u_\Delta(0,x) &= h(x), \qquad x \in \mathbb{R}, && (4.6.79) \end{aligned}$$

Il n'y a donc pas de discrétisation en espace. Cela nous permet, d'un côté, de séparer l'effet de la discrétisation en temps et, de l'autre côté, de calculer la solution (après la première itération) explicitement.

Pour $n = 1$, $f(x) \equiv u_\Delta(\Delta t,x)$ est une solution de l'EDO

$$\Delta t f''(x) - f(x) = -h(x), \qquad x \in \mathbb{R},$$

d'où l'on trouve que

$$u_\Delta(\Delta t,x) = \frac{1}{2\sqrt{\Delta t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|/\sqrt{\Delta t}} h(y)dy.$$

[10] cf. [JK04] où le même ordre $O(\sqrt{\Delta t})$ a été obtenu pour une approximation semi-discrète d'une classe d'équations (locales) paraboliques dégénérées non linéaires avec un terme source.

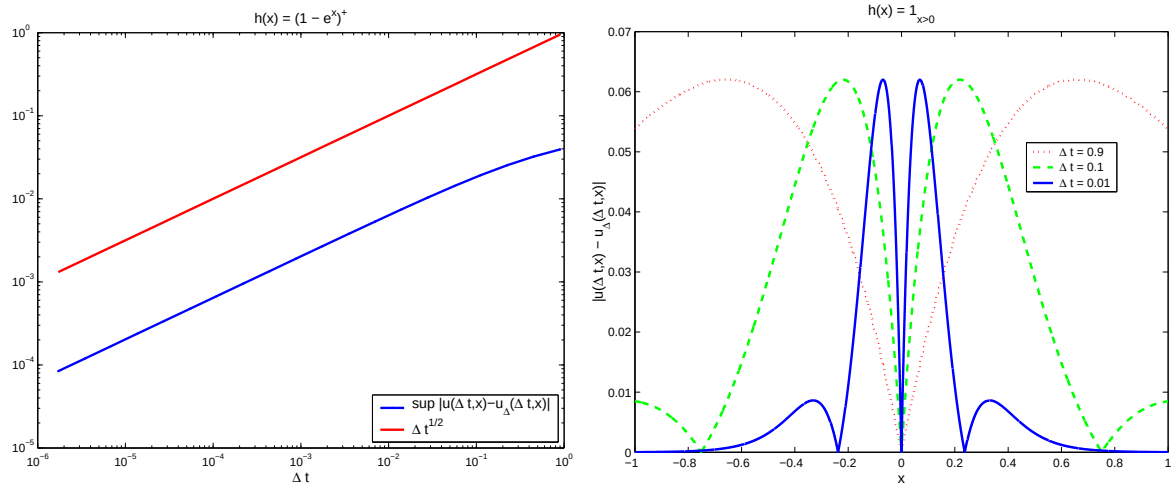


FIG. 4.4 – La figure de gauche montre $\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(\Delta t, x) - u_\Delta(\Delta t, x)|$ en fonction de Δt dans le cas $h(x) = (1 - e^x)^+$ (échelle log-log). En comparant la pente de cette ligne avec celle de $f(\Delta t) = \Delta t^{1/2}$ on voit que la convergence est d'ordre $O(\Delta t^{1/2})$. La figure de droite représente $|u(\Delta t, x) - u_\Delta(\Delta t, x)|$ en fonction de x pour trois valeurs de Δt dans le cas $h(x) = 1_{x\geq 0}$. L'erreur maximale sur $\mathbb{R}$ ne dépend pas de Δt et ne tend donc pas vers zéro quand $\Delta t \to 0$.

Considérons maintenant la condition initiale de type Put : $h(x) = (1 - e^x)^+$. Dans ce cas, nous obtenons

$$u(\Delta t, x) = \mathcal{N}(-\frac{x}{\sqrt{2\Delta t}}) - e^{x+\Delta t}\mathcal{N}(-\frac{x + 2\Delta t}{\sqrt{2\Delta t}}),$$

où $\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}/\sqrt{2\pi}dy$ et

$$u_\Delta(\Delta t, x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Delta t}}{2(1+\sqrt{\Delta t})} e^{-x/\sqrt{\Delta t}}, & x \geq 0, \\ 1 - \frac{e^x}{1-\Delta t} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{2(1-\sqrt{\Delta t})} e^{x/\sqrt{\Delta t}}, & x < 0. \end{cases}$$

Nous avons $\sup_{n\geq 0,\, x\in\mathbb{R}} |u(\tau_n, x) - u_\Delta(\tau_n, x)| \geq \sup_{x\in\mathbb{R}} |u(\Delta t, x) - u_\Delta(\Delta t, x)|$. Or, comme le montre la Figure 4.4, ce dernier terme converge vers zéro avec la vitesse $O(\Delta t^{1/2})$. Donc, la convergence globale est au plus d'ordre $\Delta t^{1/2}$.

La situation est encore pire si la condition initiale est discontinue. Soit $h(x) = 1_{x\geq 0}$. Alors les solutions de (4.6.76)–(4.6.77) et de (4.6.78)–(4.6.79) en $\tau = \Delta t$ sont données, respectivement, par

$$u(\Delta t, x) = 1 - \mathcal{N}(-\frac{x}{\sqrt{2\Delta t}}) \qquad \text{et} \qquad u_\Delta(\Delta t, x) = \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}e^{-x/\sqrt{\Delta t}}, & x \geq 0, \\ \frac{1}{2}e^{x/\sqrt{\Delta t}}, & x < 0. \end{cases}$$

Le calcul direct montre que

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |u(\Delta t, x) - u_\Delta(\Delta t, x)| = 1 - \mathcal{N}(-\frac{y_*}{\sqrt{2}}) - \frac{1}{2}e^{y_*},$$

où $y_* = -2(1 - \sqrt{\ln(e/\sqrt{\pi})})$. On voit que cette erreur ne dépend pas de Δt : elle est approximativement égale à 0.062.

4.6.5 L'influence des petits sauts sur la vitesse de convergence

Rappelons que si ν est singulier en zéro, on remplace d'abord u par u^ε (Section 4.5) et on cherche ensuite une approximation u^ε_Δ de u^ε en appliquant le schéma numérique. L'erreur de la première approximation est proportionnelle à ε d'après la Proposition 4.2.1. L'erreur entre u^ε_Δ et u^ε est donnée, en principe, par le Théorème 4.6.20 : $\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_\Delta\| \le C\Delta x$. Le problème est que la constante C dépend des coefficients de l'opérateur et donc de ε. Cette dépendance est telle que $C(\varepsilon) \to \infty$ quand $\varepsilon \to 0$. Or ce qui nous intéresse, ce n'est pas d'approcher au mieux u^ε pour un ε fixé mais de minimiser l'erreur entre u et u^ε_Δ. Il faut donc trouver un rapport optimal entre les paramètres ε, Δx et Δt pour équilibrer les deux termes d'erreur $\|u - u^\varepsilon\|$ et $\|u^\varepsilon - u^\varepsilon_\Delta\|$.

Pour le faire, il faut expliciter la dépendance de C de ε. Dans cette section, nous révisons les arguments de la section précédente en prenant soin de faire apparaître ε dans toutes les estimations.

Nous supposons ici que $\sigma = 0$ et que $\nu(y) \sim c|y|^{-(1+\beta)}$ quand $|y| \to 0$, avec $0 < \beta < 2$.[11] Alors,

$$\sigma(\varepsilon) \sim \varepsilon^{1-\beta/2}, \qquad \alpha(\varepsilon) \sim \varepsilon^{\min\{1-\beta,0\}}, \qquad \lambda(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\beta}. \tag{4.6.80}$$

Lemme 4.6.28. *Soit u^ε la solution du problème (4.2.5)–(4.2.6). Si h vérifie l'Hypothèse 4.6.17, alors, pour tout $\tau > 0$ et pour tous $n \ge 1$,*

$$\left\|\frac{\partial^n u^\varepsilon}{\partial x^n}(\tau,\cdot)\right\| \le \frac{C(n,T)}{(\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\tau})^{n-1}}, \quad \left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}(\tau,\cdot)\right\| \le C(T)\left(\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\sqrt{\tau}} + \varepsilon^{-\beta}\right),$$
$$\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \tau^2}(\tau,\cdot)\right\| \le C(T)\left(\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\tau^{3/2}} + \frac{1+\varepsilon^{1-\beta}}{\tau} + \frac{1}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau^{1/2}} + \frac{\varepsilon^{1-3\beta/2}}{\tau^{1/2}} + \varepsilon^{-2\beta}\right). \tag{4.6.81}$$

Démonstration. La preuve suit les lignes de la démonstration de la Proposition 3.4.6 avec cette différence que les coefficients dépendent de ε. Rappelons que

$$u^\varepsilon(\tau,x) = h(x) * \tilde{p}_\tau(x) = h(x) * \tilde{p}_{\sigma(\varepsilon)W_\tau}(x) * \tilde{p}_{X_\tau - \sigma(\varepsilon)W_\tau}(x), \tag{4.6.82}$$

où $p_\tau(x) = \tilde{p}_\tau(-x)$ est la densité de X_τ et $\tilde{p}_{\sigma(\varepsilon)W_\tau}(-x)$, $\tilde{p}_{X_\tau-\sigma(\varepsilon)W_\tau}(-x)$ sont celles des processus $\sigma(\varepsilon)W_\tau$ et $(X_\tau - \sigma(\varepsilon)W_\tau)$ respectivement. Donc,

$$\left\|\frac{\partial^n u^\varepsilon}{\partial x^n}(\tau,\cdot)\right\| \le \left\|\frac{\partial^n (h * \tilde{p}_{\sigma(\varepsilon)W_\tau})}{\partial x^n}\right\|. \tag{4.6.83}$$

[11] Ce cas est celui utilisé en pratique : comme on a déjà noté, les petits sauts d'activité infinie peuvent être redondants avec la composante brownienne.

Pour tout $n \geq 0$, nous avons

$$\frac{\partial^n \tilde{p}_{\sigma(\varepsilon)W_\tau}}{\partial x^n}(x) = \frac{1}{(\sigma(\varepsilon)\sqrt{\tau})^{n+1}} \frac{\partial^n \tilde{p}_{W_1}}{\partial x^n}\left(\frac{x}{\sigma(\varepsilon)\sqrt{\tau}}\right). \tag{4.6.84}$$

Donc, il suffit de remplacer τ par $\sigma(\varepsilon)\sqrt{\tau}$ dans (3.4.14) pour conclure que $\forall n \geq 1$,

$$\left\| \frac{\partial^n (h * \tilde{p}_{\sigma(\varepsilon)W_\tau})}{\partial x^n} \right\| \leq \frac{C(n,T)}{(\sigma(\varepsilon)\sqrt{\tau})^{n-1}} \leq \frac{\tilde{C}(n,T)}{(\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\tau})^{n-1}}.$$

Les dérivées $\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}$ et $\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \tau^2}$ sont reliées aux dérivées en x par l'équation $\partial_\tau u^\varepsilon = L^\varepsilon u^\varepsilon$. Pour toute fonction $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, nous avons

$$\begin{aligned}
|L^\varepsilon f(x)| &= |\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) - \left(\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} - r + \alpha(\varepsilon)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x) - \lambda(\varepsilon) f(x) \\
&+ \int_{|y|\geq\varepsilon} \nu(dy) f(x+y)| \leq \frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)\right| + |\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} - r + \alpha(\varepsilon)|\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right| + 2\lambda(\varepsilon)\|f\| \\
&\leq C\left(\varepsilon^{2-\beta}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x)\right| + (1+\varepsilon^{1-\beta})\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right| + \varepsilon^{-\beta}\|f\|\right).
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}(\tau,x)\right| &= |L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau,x)| \\
&\leq C\left(\varepsilon^{2-\beta}\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(\tau,\cdot)\right\| + (1+\varepsilon^{1-\beta})\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(\tau,\cdot)\right\| + \varepsilon^{-\beta}\left\|u^\varepsilon(\tau,\cdot)\right\|\right) \\
&\leq C(T)\left(\frac{\varepsilon^{2-\beta}}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\tau}} + 1 + \varepsilon^{1-\beta} + \varepsilon^{-\beta}\right) \leq \tilde{C}(T)\left(\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\sqrt{\tau}} + \varepsilon^{-\beta}\right),
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer. De la même façon, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \tau^2}(\tau,x)\right| &= \left|\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}\right)(\tau,x)\right| = \left|L^\varepsilon\left(\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}\right)(\tau,x)\right| \\
&\leq C\left(\varepsilon^{2-\beta}\left\|\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial \tau \partial x^2}(\tau,\cdot)\right\| + (1+\varepsilon^{1-\beta})\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \tau \partial x}(\tau,\cdot)\right\| + \varepsilon^{-\beta}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}(\tau,\cdot)\right\|\right).
\end{aligned}$$

En appliquant encore une fois l'équation, on se ramène aux dérivées par rapport à x :

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial \tau^2}(\tau,x)\right| \leq C\Bigg\{&\varepsilon^{2-\beta}\left(\varepsilon^{2-\beta}\left\|\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x^4}(\tau,\cdot)\right\| + (1+\varepsilon^{1-\beta})\left\|\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3}(\tau,\cdot)\right\| + \varepsilon^{-\beta}\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(\tau,\cdot)\right\|\right) \\
&+ (1+\varepsilon^{1-\beta})\left(\varepsilon^{2-\beta}\left\|\frac{\partial^3 u^\varepsilon}{\partial x^3}(\tau,\cdot)\right\| + (1+\varepsilon^{1-\beta})\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(\tau,\cdot)\right\| + \varepsilon^{-\beta}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(\tau,\cdot)\right\|\right) \\
&+ \varepsilon^{-\beta}\left(\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\sqrt{\tau}} + \varepsilon^{-\beta}\right)\Bigg\}.
\end{aligned}$$

Les estimations déjà démontrées pour les dérivées spatiales impliquent (4.6.81). □

Vitesse de convergence du schéma 1

On définit L^ε_Δ comme L_Δ dans (4.6.38) en remplaçant σ, α et λ par $\sigma(\varepsilon)$, $\alpha(\varepsilon)$ et $\lambda(\varepsilon)$, respectivement.

Lemme 4.6.29. *Si u^ε est la solution du problème (4.2.5)–(4.2.6), alors il existe $C(T) > 0$ tel que, $\forall k \geq 1$, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$,*

$$\begin{aligned}&\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\| \\ &\leq C(T)\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{3/2}} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta} + \frac{\Delta t}{\varepsilon^{2\beta}} + \varepsilon^{1-3\beta/2}(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}})\right]. \quad (4.6.85)\end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit de reprendre la démonstration du Lemme 4.6.19 en tenant compte du paramètre ε. Ainsi, nous avons

$$|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,x_i)| \leq |D^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - D^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,x_i)| + |J^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_{k-1},x_i)|.$$

Par analogie avec (4.6.51), nous obtenons

$$\begin{aligned}|D^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - D^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon)(\tau_k,x_i)| &\leq \frac{\Delta x^2}{12}\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2}\left\|\frac{\partial^4 u^\varepsilon}{\partial x^4}(\tau_k,\cdot)\right\| \\ &+ \frac{\Delta x}{2}|\sigma^2(\varepsilon)/2 - r + \alpha(\varepsilon)|\left\|\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x^2}(\tau_k,\cdot)\right\| \leq C(T)\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{3/2}} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}}\right), \quad (4.6.86)\end{aligned}$$

d'après le Lemme 4.6.28. Pour la partie intégrale de l'opérateur, le même calcul que dans (4.6.52) montre que

$$\begin{aligned}|J^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_{k-1},x_i)| &\leq \lambda(\varepsilon)\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial \tau}(s,\cdot)\right\| ds + \frac{\lambda(\varepsilon)\Delta x}{2}\left\|\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x}(\tau_k,\cdot)\right\| \\ &\leq C(T)\left[\varepsilon^{-\beta}\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\left[\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\sqrt{s}} + \varepsilon^{-\beta}\right] ds + \varepsilon^{-\beta}\Delta x\right] \\ &\leq \tilde{C}(T)\left[\varepsilon^{1-3\beta/2}(\sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}}) + \varepsilon^{-2\beta}\Delta t + \varepsilon^{-\beta}\Delta x\right]. \quad (4.6.87)\end{aligned}$$

Les estimations (4.6.86) et (4.6.87) impliquent (4.6.85). □

Théorème 4.6.30. (Ordre de convergence du schéma 1, cas d'activité infinie) *Supposons que h vérifie l'Hypothèse 4.6.17. Soit u la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) avec $\sigma = 0$ et le comportement suivant de la densité de ν en zéro : $\nu(y) \sim c/|y|^{1+\beta}$, $0 < \beta < 2$. Soit u^ε_Δ la solution du schéma (4.6.39)-(4.6.40) avec l'opérateur L^ε_Δ et $\xi = 0$.*

Si $\varepsilon \sim \Delta x^a$ et $\Delta t \sim \Delta x^b$ (c'est-à-dire, $c_1 \leq \varepsilon/\Delta x^a \leq c_2$ et $c_3 \leq \Delta t/\Delta x^b \leq c_4$), alors

$$\|u - u^\varepsilon_\Delta\|_{\Delta,\{0,\ldots,M\}} \leq C(T)(\Delta x)^p, \quad (4.6.88)$$

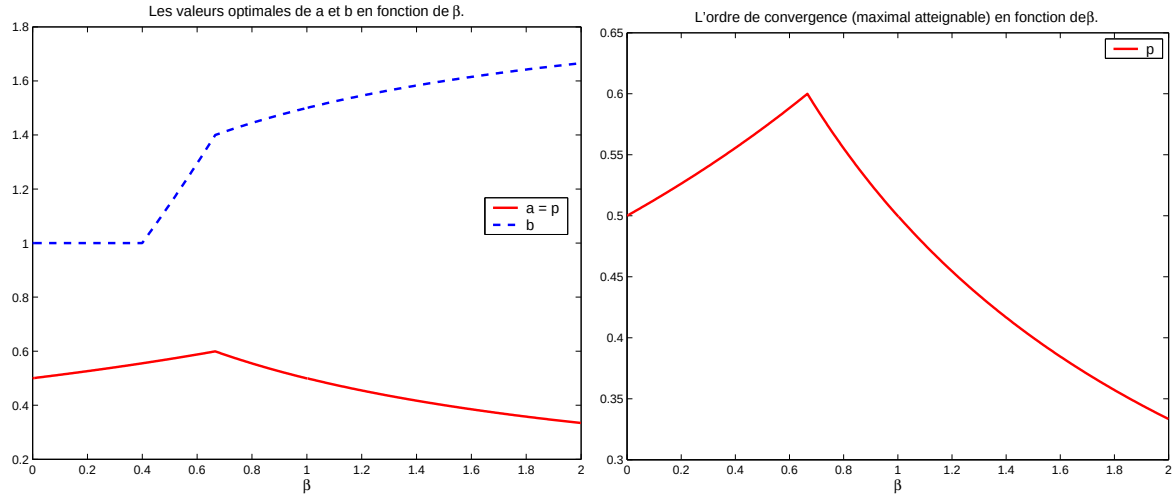


FIG. 4.5 – Pour chaque $0 < \beta < 2$, sont représentées les valeurs de a et b qui maximisent l'ordre de convergence p. Le calcul montre que, pour ces valeurs, p coïncide avec a.

où

$$p = \min\{a, a(1-\beta/2)+b/2, b-a(1-\beta/2), b-2\beta a, 2-a(1-\beta/2)-b/2, 1-a(1-\beta/2), 1-\beta a\}.$$

L'ordre maximal $\max_{a,b}\{p\}$ *est égal à* a *et est atteint pour les valeurs de* a *et* b *suivantes :*

$$a = \begin{cases} \frac{2}{4-\beta}, & 0 < \beta \le 2/3 \\ \frac{1}{1+\beta}, & 2/3 < \beta < 2. \end{cases} \qquad b = \begin{cases} 1, & 0 < \beta \le 2/5 \\ \frac{2(1+2\beta)}{4-\beta}, & 2/5 < \beta \le 2/3 \\ \frac{1+2\beta}{1+\beta}, & 2/3 < \beta < 2; \end{cases} \tag{4.6.89}$$

Ces valeurs optimales sont représentées sur la Figure 4.5.

Démonstration. L'erreur globale est constituée de deux parties :

$$\|u - u^\varepsilon_\Delta\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \le \|u - u^\varepsilon\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} + \|u^\varepsilon - u^\varepsilon_\Delta\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}}. \tag{4.6.90}$$

Le premier terme, l'erreur d'approximation des petits sauts, est proportionnelle à ε, selon la Proposition 4.2.1. La fonction $u^\varepsilon(\tau_n, x_i)$ est une solution de (4.6.39)-(4.6.40) avec $\xi(\tau_k, x_i) = \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} L^\varepsilon u^\varepsilon(s, x_i)ds - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k, x_i)\Delta t$. D'après le Lemme 4.6.16,

$$\begin{aligned} \|u^\varepsilon(\tau_n,\cdot) - u^\varepsilon_\Delta(\tau_n,\cdot)\| &\le \sum_{k=1}^{n} \| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} L^\varepsilon u^\varepsilon(s,\cdot)ds - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\Delta t\| \\ &\le \sum_{k=1}^{n} \| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (L^\varepsilon u^\varepsilon(s,\cdot) - L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot))ds\| + \sum_{k=1}^{n} \|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\|\Delta t. \end{aligned} \tag{4.6.91}$$

Il vient du Lemme 4.6.28 que

$$\begin{aligned}|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(L^\varepsilon u^\varepsilon(s,x)-L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x))ds| &= |\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial\tau^2}(\theta,x)d\theta| \\ &\leq C\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\left(\frac{\varepsilon^{1-\beta/2}}{\theta^{3/2}}+\frac{\varepsilon^{1-\beta}}{\theta}+\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta/2}\theta^{1/2}}+\frac{\varepsilon^{1-3\beta/2}}{\theta^{1/2}}+\varepsilon^{-2\beta}\right)d\theta.\end{aligned}$$

De la même manière que nous avons montré (4.6.55), nous vérifions que

$$\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{d\theta}{\theta^{3/2}} \;\leq\; C\sqrt{\Delta t}.$$

Pour les autres termes, nous obtenons

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{d\theta}{\theta}\leq\int_0^{\Delta t}ds\int_s^{\Delta t}\frac{d\theta}{\theta}+\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{\Delta t}{s}ds= \\ &\quad=\Delta t+\Delta t(\ln\tau_n-\ln\Delta t)\leq C\Delta t\ln(\Delta t^{-1})\leq\tilde{C}\Delta t^\alpha,\quad\forall\alpha<1, \qquad (4.6.92)\\ &\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}\frac{d\theta}{\theta^{1/2}}\leq\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{\Delta t}{\sqrt{s}}ds=2\Delta t\sum_{k=1}^n(\sqrt{\tau_k}-\sqrt{\tau_{k-1}})\leq 2T\Delta t,\\ &\sum_{k=1}^n\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}ds\int_s^{\tau_k}d\theta\leq\sum_{k=1}^n\Delta t^2=\tau_n\Delta t\leq T\Delta t.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(L^\varepsilon u^\varepsilon(s,\cdot)-L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot))ds\|\leq \\ &\qquad\leq C\left(\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}+(1+\varepsilon^{1-\beta})\Delta t^\alpha+(\varepsilon^{-1+\beta/2}+\varepsilon^{1-3\beta/2}+\varepsilon^{-2\beta})\Delta t\right)\\ &\qquad\qquad\leq C\left(\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}+(1+\varepsilon^{1-\beta})\Delta t^\alpha+(\varepsilon^{-1+\beta/2}+\varepsilon^{-2\beta})\Delta t\right). \qquad (4.6.93)\end{aligned}$$

Pour estimer le second terme dans (4.6.91), nous utilisons le Lemme 4.6.29 et les remarques (4.6.56) et (4.6.57). Il en vient que

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^n\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)-L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\|\Delta t\leq \\ &\qquad\leq C\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}}+\frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}}+\frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta}+\frac{\Delta t}{\varepsilon^{2\beta}}+\varepsilon^{1-3\beta/2}\Delta t\right]\\ &\qquad\qquad\leq\tilde{C}\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}}+(\varepsilon^{-1+\beta/2}+\varepsilon^{-\beta})\Delta x+\varepsilon^{-2\beta}\Delta t\right]. \qquad (4.6.94)\end{aligned}$$

Soient $\varepsilon \sim \Delta x^a$ et $\Delta t \sim \Delta x^b$. Si l'on choisit dans (4.6.92) $\alpha > 1 - 2a/3b$, alors $(1+\varepsilon^{1-\beta})\Delta t^\alpha \leq C(\varepsilon^{-1+\beta/2} + \varepsilon^{-2\beta})\Delta t$. Les estimations (4.6.90), (4.6.91), (4.6.93) et (4.6.94) impliquent

$$\|u - u_\Delta^\varepsilon\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C(\Delta x^a + \Delta x^{a(1-\beta/2)+b/2} + \Delta x^{b-a(1-\beta/2)} + \Delta x^{b-2\beta a} + \Delta x^{2-a(1-\beta/2)-b/2} + \Delta x^{1-a(1-\beta/2)} + \Delta x^{1-a\beta})$$

d'où le résultat (4.6.88). Si l'on maximise p en fonction de a et b, on obtient (4.6.89). □

Remarque 4.6.31. Dans le Lemme 4.6.28, on peut estimer les dérivées de u^ε autrement. En regroupant différemment les termes dans $L^\varepsilon f$, on obtient

$$|L^\varepsilon f(x)| = \left| \frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x) - \left(\frac{\sigma^2(\varepsilon)}{2} - r + \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1}(e^y - 1 - y)\nu(dy)\right)\frac{\partial f}{\partial x}(x) - \right.$$
$$\left. \int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1}(f(x+y) - f(x) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x))\nu(dy) - \int_{|y|>1}(f(x+y) - f(x) - (e^y-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x))\nu(dy)\right|$$
$$\leq C\left(\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right| + \|f\|\right) \leq \frac{C(T)}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\tau}},$$

puisque

$$\left|\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1}(f(x+y) - f(x) - y\frac{\partial f}{\partial x}(x))\nu(dy)\right| = \left|\int_{\varepsilon\leq|y|\leq 1}\frac{y^2}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x+\xi)\nu(dy)\right| \leq C\left\|\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right\|$$

et

$$\left|\int_{|y|>1}(f(x+y) - f(x) - (e^y-1)\frac{\partial f}{\partial x}(x))\nu(dy)\right| \leq C\left(\|f\| + \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x)\right|\right). \quad (4.6.95)$$

Cela implique l'estimation suivante pour les dérivées en temps (au lieu de (4.6.81)) :

$$\left\|\frac{\partial^m u^\varepsilon}{\partial \tau^m}(\tau,\cdot)\right\| \leq \frac{C(m,T)}{(\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\tau})^{2m-1}}. \quad (4.6.96)$$

Compte tenu de ce changement, (4.6.85) dans le Lemme 4.6.29 devient

$$\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot) - L_\Delta^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\| \leq C(T)\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{3/2}} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta} + \frac{\sqrt{\tau_k} - \sqrt{\tau_{k-1}}}{\varepsilon^{1+\beta/2}}\right].$$

Les estimations (4.6.93) et (4.6.94) deviennent à leur tour

$$\sum_{k=1}^n \left\|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}(L^\varepsilon u^\varepsilon(s,\cdot) - L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot))ds\right\| \leq C\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}}, \quad (4.6.97)$$
$$\sum_{k=1}^n \|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot) - L_\Delta^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\|\Delta t \leq C\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}} + (\varepsilon^{-1+\beta/2} + \varepsilon^{-\beta})\Delta x + \frac{\Delta t}{\varepsilon^{1+\beta/2}}\right].$$

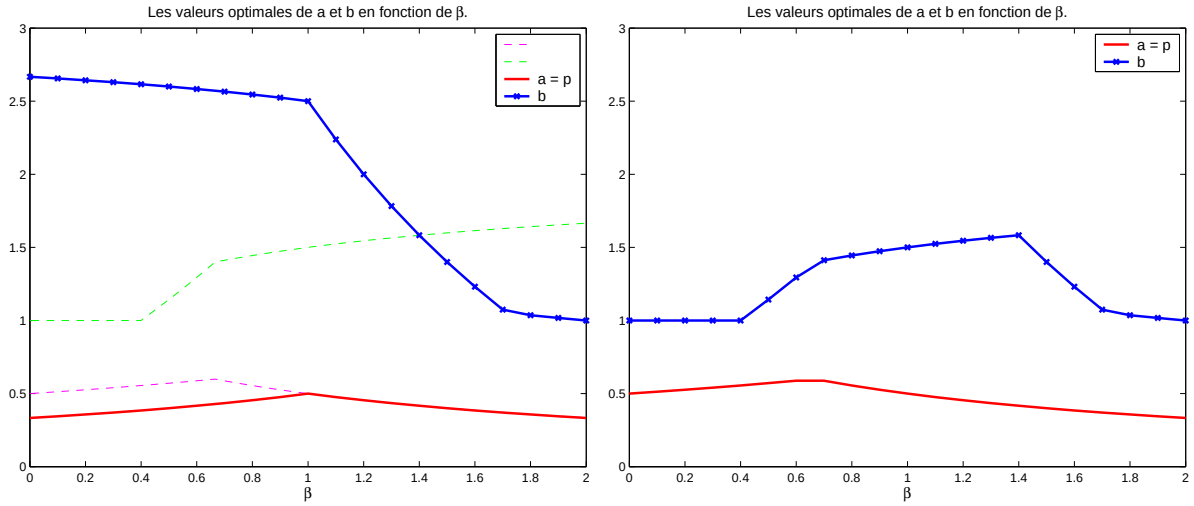


FIG. 4.6 – A gauche : l'ordre de convergence et les valeurs optimales de a et b selon l'estimation (4.6.98) (en pointillé : les anciennes valeurs selon (4.6.89)). A droite : la combinaison des deux estimations. Pour $\beta \leq 7/5$, on utilise (4.6.89) et pour $\beta > 7/5$, (4.6.99). Cela permet d'affaiblir la restriction sur Δt par rapport à (4.6.89).

Ainsi, nous obtenons l'estimation suivante de l'ordre de convergence :

$$\|u - u_\Delta^\varepsilon\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C(\Delta x^a + \Delta x^{b/2-3a(1-\beta/2)} + \Delta x^{b-a(1+\beta/2)} + \Delta x^{2-a(1-\beta/2)-b/2} + \Delta x^{1-a(1-\beta/2)} + \Delta x^{1-a\beta}). \quad (4.6.98)$$

L'ordre maximal Δx^p que l'on peut tirer de cette estimation est atteint pour les valeurs suivantes des paramètres (voir Figure 4.6) :

$$p = a = \begin{cases} \frac{1}{3-\beta}, & 0 < \beta \leq 1 \\ \frac{1}{1+\beta}, & 1 < \beta < 2. \end{cases} \qquad b = \begin{cases} \frac{8-3\beta}{3-\beta}, & 0 < \beta \leq 1 \\ \frac{8-3\beta}{1+\beta}, & 1 < \beta \leq 12/7 \\ \frac{4+\beta}{2(1+\beta)}, & 12/7 < \beta < 2. \end{cases} \quad (4.6.99)$$

On voit que cette estimation est plus avantageuse pour $\beta \geq 7/5$ car elle permet de relâcher la restriction sur le pas Δt. Le graphe de droite sur la Figure 4.6 résume les deux résultats.

Le caractère plutôt hasardeux des courbes suggère que l'estimation que nous avons obtenue n'est pas optimale. Difficile donc de tirer des conclusions définitives sur le choix de ε. Néanmoins, commentons ce résultat. Selon cette estimation, la singularité de ν détériore l'ordre de convergence : il est toujours plus petit que 0.6 et peut descendre jusqu'à 1/3 quand β est proche de 2. De plus, pour atteindre la vitesse de convergence maximale, il faut imposer une restriction sur le pas de temps : $\Delta t \leq c\Delta x^b$ où b peut aller jusqu'à ≈ 1.6.

Vitesse de convergence du schéma 2

Lemme 4.6.32. *Soit L^ε_Δ l'opérateur du schéma 2. Si u^ε est la solution du problème (4.2.5)–(4.2.6), alors il existe $C(T) > 0$ tel que, $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, $\forall k \geq 2$,*

$$\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\| \leq C(T)\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{3/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}}\right.$$
$$\left. + \frac{\sqrt{\tau_k}-\sqrt{\tau_{k-1}}}{\varepsilon^{1-\beta/2}} + \frac{1+\Delta x/\varepsilon^\beta}{\varepsilon^{2-\beta}}\log(\tau_k/\tau_{k-1}) + \frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta-1}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_k}}\right)\right]. \tag{4.6.100}$$

Pour $k = 1$, nous avons

$$\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_1,\cdot) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_1,\cdot)\| \leq$$
$$\leq C(T)\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_1^{3/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_1^{1/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_1^{1/2}} + \frac{1}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}}\right]. \tag{4.6.101}$$

Démonstration. La démonstration consiste à préciser, dans le Lemme 4.6.24, la dépendance des constantes du paramètre ε. Nous avons :

$$|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - L^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,x_i)| \leq$$
$$\leq |D^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - D^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,x_i)| + |J^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_{k-1},x_i)|.$$

Pour majorer les dérivées de u^ε, nous allons utiliser le Lemme 4.6.28 et la version (4.6.96) de l'estimation pour les dérivées en temps. Par analogie avec (4.6.86), nous obtenons

$$|D^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - D^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon)(\tau_k,x_i)| \leq C\left(\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{3/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}}\right). \tag{4.6.102}$$

On décompose la partie intégrale comme dans (4.6.72). L'estimation (4.6.67) implique

$$|J^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,x_i) - J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon(\tau_k,x_i)| \leq C\left(\frac{\Delta x}{\varepsilon^\beta} + \frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}\tau_k^{1/2}}\right). \tag{4.6.103}$$

De la même manière que dans (4.6.70), nous obtenons

$$\left|\int_{\tau_0}^{\tau_1}\frac{\partial}{\partial\tau}(J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon)(s,x_i)ds\right| \leq \frac{C}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}}. \tag{4.6.104}$$

Pour $k \geq 2$, on déduit de (4.6.71) que

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}(J^\varepsilon_\Delta u^\varepsilon)(s,x)\right| \leq C\left(\left\|\frac{\partial u}{\partial\tau}(s,\cdot)\right\| + (1+\Delta x/\varepsilon^\beta)\left\|\frac{\partial^2 u}{\partial\tau\partial x}(s,\cdot)\right\|\right.$$
$$\left. + (1+\Delta x/\varepsilon^{\beta-1})\left\|\frac{\partial^3 u}{\partial\tau\partial x^2}(s,\cdot)\right\|\right) \leq C\left(\frac{1}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{s}} + \frac{1+\Delta x/\varepsilon^\beta}{\varepsilon^{2-\beta}s} + \frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta-1}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}s^{3/2}}\right).$$

Dans ce calcul, nous avons négligé certains termes qui sont asymptotiquement plus petits que d'autres (par exemple, $\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})$ par rapport à $\Delta x/\varepsilon^{\beta}$). Cela implique

$$\left|\int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k}\frac{\partial}{\partial s}(J_\Delta^\varepsilon u^\varepsilon)(s,x_i)ds\right| \leq C\left(\frac{\sqrt{\tau_k}-\sqrt{\tau_{k-1}}}{\varepsilon^{1-\beta/2}}+\frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{2-\beta}}\log(\tau_k/\tau_{k-1})\right.$$
$$\left.+\frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta-1}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}}\left(\frac{1}{\sqrt{\tau_{k-1}}}-\frac{1}{\sqrt{\tau_k}}\right)\right). \quad (4.6.105)$$

Les estimations (4.6.102), (4.6.103), (4.6.104) et (4.6.105) impliquent (4.6.100) et (4.6.101). □

Théorème 4.6.33. (Ordre de convergence du schéma 2, cas d'activité infinie) *Supposons que h vérifie l'Hypothèse 4.6.17. Soit u la solution du problème (4.6.41)–(4.6.42) avec $\sigma = 0$ et le comportement suivant de la densité de ν en zéro : $\nu(y) \sim c/|y|^{1+\beta}$, $0<\beta<2$. Soit u_Δ^ε la solution du schéma 2. Si $\varepsilon \sim \Delta x^a$ et $\Delta t \sim \Delta x^b$ tels que la condition (4.6.11) est vérifée, alors*

$$\|u-u_\Delta^\varepsilon\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C(T)(\Delta x)^p, \quad (4.6.106)$$

où

$$p=\min\{a,\frac{b}{2}-3a(1-\frac{\beta}{2}),2-a(1-\frac{\beta}{2})-\frac{b}{2},1-a(1-\frac{\beta}{2}),1-\beta a,1+\alpha b-2a,1+\frac{b}{2}-a(2-\frac{\beta}{2})\},$$

avec $\alpha<1$ quelconque. L'ordre maximal $\max_{a,b,\alpha}\{p\}$ est égal à a et est atteint pour les valeurs de a et b (compatibles avec la condition de stabilité (4.6.11)) suivantes :

$$p=a=\begin{cases}\frac{1}{3-\beta}, & 0<\beta\leq 1\\ \frac{1}{1+\beta}, & 1<\beta<2.\end{cases} \qquad b=\begin{cases}\frac{8-3\beta}{3-\beta}, & 0<\beta\leq 1\\ \frac{8-3\beta}{1+\beta}, & 1<\beta\leq 8/5\\ \frac{2\beta}{1+\beta}, & 8/5<\beta<2.\end{cases} \quad (4.6.107)$$

Ces valeurs sont représentées sur la Figure 4.7.

Démonstration. La preuve est entièrement analogue à celle du Théorème 4.6.30 (voir également la Remarque 4.6.31). Ainsi, (4.6.90), (4.6.91) et (4.6.97) impliquent

$$\|u-u_\Delta^\varepsilon\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C_1\varepsilon + C_2\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}}+\sum_{k=1}^{n}\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)-L_\Delta^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\|\Delta t. \quad (4.6.108)$$

Il vient du Lemme 4.6.32 et des remarques (4.6.56) et (4.6.57) que

$$\sum_{k=1}^{n}\|L^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)-L_\Delta^\varepsilon u^\varepsilon(\tau_k,\cdot)\|\Delta t \leq C\left[\frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}}+\frac{\Delta x}{\varepsilon^{1-\beta/2}}+\frac{\Delta x}{\varepsilon^{\beta}}+\frac{\Delta x(1+\varepsilon^{1-\beta})}{\varepsilon^{1-\beta/2}}\right.$$
$$\left.+\frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon^{1-\beta/2}}+\frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta}}{\varepsilon^{2-\beta}}\Delta t\log(1/\Delta t)+\frac{1+\Delta x/\varepsilon^{\beta-1}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}}\sqrt{\Delta t}\right]. \quad (4.6.109)$$

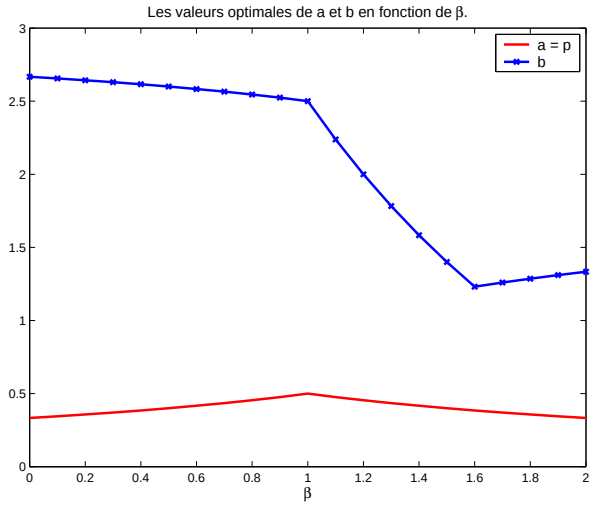


FIG. 4.7 – L'ordre de convergence du schéma 2 et les valeurs optimales de a et b selon l'estimation (4.6.107).

Nous avons $\Delta t \log(1/\Delta t) \leq C\Delta t^{\alpha}$ avec $\alpha < 1$ quelconque. En négligeant les termes qui décroissent plus vite que les autres, nous obtenons

$$\|u - u_{\Delta}^{\varepsilon}\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C \left(\varepsilon + \frac{\sqrt{\Delta t}}{\varepsilon^{3(1-\beta/2)}} + \frac{\Delta x^2}{\varepsilon^{1-\beta/2}\sqrt{\Delta t}} + \right. \\ \left. + \frac{\Delta x}{\varepsilon^{1-\beta/2}} + \frac{\Delta x}{\varepsilon^{\beta}} + \frac{\Delta x \Delta t^{\alpha}}{\varepsilon^2} + \frac{\Delta x \sqrt{\Delta t}}{\varepsilon^{2-\beta/2}} \right). \quad (4.6.110)$$

Si $\varepsilon \sim \Delta x^a$ et $\Delta t \sim \Delta x^b$, alors

$$\|u - u_{\Delta}^{\varepsilon}\|_{\Delta,\{0,\dots,M\}} \leq C(\Delta x^a + \Delta x^{b/2-3a(1-\beta/2)} + \Delta x^{2-a(1-\beta/2)-b/2} \\ + \Delta x^{1-a(1-\beta/2)} + \Delta x^{1-a\beta} + \Delta x^{1+\alpha b-2a} + \Delta x^{1+b/2-a(2-\beta/2)}).$$

d'où l'expression pour p dans (4.6.106). Rappelons que la condition de stabilité (4.6.11) a la forme suivante :

$$\Delta t \leq \frac{\Delta x}{|\alpha(\varepsilon)| + \lambda(\varepsilon)\Delta x}.$$

Or, quand $\Delta x \to 0$, nous avons

$$\frac{\Delta x}{|\alpha(\varepsilon)| + \lambda(\varepsilon)\Delta x} \sim \begin{cases} \Delta x, & \beta \leq 1, \\ \varepsilon^{\beta-1}\Delta x, & \beta > 1. \end{cases} \quad (4.6.111)$$

Cela impose les restrictions suivantes sur b : $b \geq 1$ si $\beta \leq 1$ et $b \geq a(\beta - 1) + 1$ si $\beta > 1$. En maximisant p en fonction de a et b sous ces contraintes, on obtient (4.6.107). □

Nous avons refait cet exercice pour le schéma 2 dans l'espoir de trouver la raison théorique pour laquelle ce schéma donne numériquement des résultats meilleurs que le schéma 1. Malheureusement, cette méthode ne permet pas de voir la différence. Nous ne nous lançons donc pas dans le calcul fastidieux de l'ordre de convergence par la deuxième approche qui utilise une autre version des estimations des dérivées en temps, comme nous l'avons fait pour le premier schéma. Très probablement, le résultat serait le même que dans (4.6.89).

En ce qui concerne la différence des performances des deux schémas, nous en avons trouvé une explication partielle qui sera discutée dans la Section 5.2.2 où nous comparons les deux méthodes.

4.7 Revue de la littérature

La résolution numérique des équations intégro-différentielles pour l'évaluation d'options a fait l'objet de nombreux travaux récents.

Carr & Madan [CM98] ont proposé une méthode efficace d'évaluation des Calls européens dans les modèles de Lévy utilisant la transformation de Fourier rapide. Cette méthode s'applique si la fonction caractéristique du processus est connue sous forme analytique. Elle ne s'applique pas aux processus plus généraux avec des coefficients variables ni aux produits exotiques tels que, par exemple, des options à barrières. Cette méthode est moins performante pour des petites maturités car la densité du processus est proche de la masse de Dirac ce qui implique une décroissance lente de la fonction caractéristique à l'infini. Il faut donc prendre un domaine très grand pour calculer sa transformée de Fourier de façon précise.

Plusieurs auteurs proposent d'utiliser des méthodes basées sur les différences finies. Zhang [Zha94, Zha97b, Zha97a] a développé une méthode d'évaluation des options américaines dans les modèles de diffusion avec sauts. Elle a étudié sa convergence sous l'hypothèse que la densité de ν possède tous les moments exponentiels. Notons que cette hypothèse est très restrictive : parmi les exemples de la Section 2.3, seul le modèle de Merton la vérifie. Des variations sur le schéma de Zhang sont données dans [dFL03].

Toujours dans le cas des modèles de diffusions avec sauts mais avec éventuellement des coefficients variables dans la partie diffusion, Andersen & Andreasen [AA00] combinent les différences finies pour discrétiser la partie différentielle et la transformation de Fourier discrète pour calculer les intégrales. Chaque itération en temps est effectuée en deux étapes comme dans les méthodes des pas fractionnaires. Chaque étape est un schéma implicite-explicite : au premier pas, c'est la partie intégrale qui est explicite et on calcule $u^{n+1/2}$ à partir de u^n en résolvant le système tri-diagonal provenant de la partie différentielle. Ensuite, les rôles des termes intégral et différentiel sont échangés : pour calculer u^{n+1} à partir de $u^{n+1/2}$, on inverse la matrice de la partie intégrale en utilisant la FFT. Les auteurs proposent d'utiliser le schéma de Crank-Nikolson pour la discrétisation en temps et analysent la consistance et stabilité (au sens de von Neumann) de leur méthode. Toutefois, l'analyse de convergence de ce schéma n'est pas faite donc l'avantage

de la discrétisation d'ordre 2 en temps n'est pas clair.

Quelques autres idées (sans analyse de stabilité ni de convergence) sont esquissées dans Tavella & Randall [TR00]. Elle tournent également autour de la décomposition de l'opérateur en partie différentielle traitée de façon implicite et partie intégrale explicite. Par exemple, les auteurs suggèrent de faire plusieurs itérations implicites-explicites intermédiaires entre deux pas de temps qui remplaceraient une itération purement implicite. Une autre méthode itérative est exposée dans [dFV04] : le schéma proposé est implicite et le système qui en résulte est résolu par des itérations du point fixe.

Des schémas de type implicite-explicite aux différences finies sont proposés aussi dans [BLCN04, BN05]. L'effort des auteurs est dirigé vers la construction des schémas "d'ordres élevés" en temps. Leur approche consiste à adapter aux EID les méthodes de type Runge-Kutta pour des EDP sans pour autant justifier que l'ordre de convergence des schémas ainsi obtenus est effectivement élevé. Comme on a vu, la transposition directe des estimations standards de l'ordre de convergence au cas des équations sur les prix d'options n'est pas possible à cause de l'irrégularité de la condition initiale (par exemple, le schéma implicite ordinaire est d'ordre $O(\sqrt{\Delta t})$ et non $O(\Delta t)$).

Dans [BLCN04], les auteurs utilisent aussi l'approche de Barles-Souganidis pour étudier la convergence des schémas monotones vers des solutions de viscosité des EID mais uniquement dans le cas d'un domaine non borné : l'effet des conditions aux bords n'est pas pris en compte.

Hirsa & Madan [HM03] proposent une approche heuristique au traitement de la singularité de l'intégrale dans le modèle de Variance Gamma qui consiste à remplacer le terme $u(\tau, x_i + y) - u(\tau, x_i)$ pour $|y| \leq \Delta x$ par $\frac{\partial u}{\partial x}(\tau, x_i)y$ et d'approximer ensuite la dérivée par une différence finie.

En utilisant la formulation variationnelle du problème, Matache et al. [MvPS04] proposent une méthode de type Galerkin avec une compression de la matrice de la partie non locale dans une base d'ondelettes. Les auteurs donnent également une estimation exponentielle de l'erreur de localisation du problème sur un domaine borné (dans la norme L^2, cf. la Remarque 4.3.3). Les idées de [MvPS04] ont été utilisées dans [AO05] pour construire une méthode simplifié pour le cas spécial des modèles de Merton et de Kou.

Soulignons que notre contribution consiste non pas dans le fait d'utiliser des schémas implicites-explicites, ce qui est une approche classique dans l'analyse numérique, mais dans l'étude rigoureuse de la convergence de ces schémas qui est absente dans la plupart des travaux sur le sujet. Comme nous avons montré dans ce chapitre, la question de convergence et surtout de vitesse de convergence dans le contexte des équations non-locales avec des conditions initiales non-régulières n'est pas triviale et demande une vrai analyse théorique.

Nous justifions également le choix de toutes les approximations que nous faisons par des estimations des erreurs correspondantes : approximation des petits sauts dans le cas singulier, choix du domaine de calcul et des conditions aux bords numériques, troncature du support de la mesure. L'étude de ces étapes est souvent omise lors de l'analyse des méthodes numériques.

4.8 Sommaire des principaux résultats

Erreur de troncature des petits sauts, cas européen	**Proposition 4.2.1**, p. 86
Erreur de troncature des petits sauts, cas barrière	**Proposition 4.2.5**, p. 89
Erreur de localisation, prolongement borné quelconque	**Proposition 4.3.1**, p. 92
Erreur de localisation, prolongement optimal $h(x + r\tau)$	**Proposition 4.3.4**, p. 94
Troncature du domaine d'intégration, cas européen	**Proposition 4.4.1**, p. 101
Troncature du domaine d'intégration, cas barrière	**Proposition 4.4.5**, p. 103
Consistance du schéma 1	**Proposition 4.6.1**, p. 110
Consistance du schéma 2	**Proposition 4.6.3**, p. 112
Stabilité et monotonie du schéma 1	**Proposition 4.6.6**, p. 113
Stabilité et monotonie du schéma 2	**Proposition 4.6.7**, p. 115
Convergence du schéma implicite-explicite	**Théorème 4.6.9**, p. 117
Ordre de convergence du schéma 1, cas d'activité finie	**Théorème 4.6.20**, p. 129
Ordre de convergence du schéma 2, cas d'activité finie	**Théorème 4.6.25**, p. 136
Ordre de convergence du schéma 1, cas d'activité infinie	**Théorème 4.6.30**, p. 141
Ordre de convergence du schéma 2, cas d'activité infinie	**Théorème 4.6.33**, p. 147

Chapitre 5

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous commentons les détails de l'implémentation de nos schémas et présentons des résultats numériques en les comparant avec d'autres méthodes existantes.

5.1 Exemples étudiés

Afin de valider nos schémas, nous allons considérer les modèles suivants : Merton, Kou, Variance Gamma et stables tempérés (ST dans la légende des figures). Dans ces modèles, il existent des méthodes efficaces d'évaluation des options européennes : la formule semi-fermée (2.3.1) pour Merton et la méthode par FFT de Carr & Madan [CM98] pour les autres. En prenant comme référence la solution calculée avec une grande précision par ces méthodes alternatives, nous allons étudier l'erreur numérique de nos schémas en fonction de différents paramètres.

Comme la plupart des estimations théoriques que nous avons obtenues s'appliquent à des *payoffs* bornés, nous calculons des prix de Puts plutôt que de Calls. Les valeurs de Calls peuvent être déduites de la relation de parité :

$$C(t,S) - P(t,S) = S - Ke^{-r(T-t)}.$$

Pour mettre en évidence l'impact de l'irrégularité du *payoff* du Put sur l'erreur numérique, nous allons faire également quelques tests pour le contrat *forward* dont le *payoff* est régulier : $h(x) = e^x - 1$.

5.2 Comparaison de différentes variantes du schéma

5.2.1 Centré contre décentré

Dans le Chapitre 4, nous avons étudié les propriétés des schémas décentrés. Nous avons démontré que le schéma 1 est toujours stable et monotone, indépendamment des valeurs de Δt et Δx. Le schéma 2 est stable sous la condition (4.6.11).

On peut également considérer les schémas centrés correspondants.
Schéma 1 centré.

$$\begin{aligned}(Du)_i &= \frac{\sigma^2}{2}\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x} - \lambda u_i,\\ (Ju)_i &= \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j}.\end{aligned}$$

Ce schéma est stable si

$$\Delta x \leq \frac{\sigma^2}{|\sigma^2/2 - r + \hat{\alpha}|}. \tag{5.2.1}$$

En effet, dans ce cas, les coefficients a, b et c dans (4.6.7) deviennent

$$\begin{aligned}a &= \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} + \lambda,\\ b &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{1}{2\Delta x},\\ c &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2}-r+\alpha\right)\frac{1}{2\Delta x}.\end{aligned}$$

La condition (5.2.1) garantit leur positivité ce qui implique la stabilité et la monotonie du schéma.

Il se trouve que dans la plupart des situations réelles la condition (5.2.1) est vérifiée, du moins pour Δx suffisamment petit. En effet, nous avons toujours $\sigma > 0$ grâce à l'approximation des petits sauts. Dans des modèles purement discontinus, certes, $\sigma^2(\varepsilon)$ tend vers zéro quand $\varepsilon \to 0$. Toutefois, le paramètre ε dépend de Δx de telle manière que Δx décroît plus vite que $\sigma^2(\varepsilon)$:

$$\sigma^2(\varepsilon) \sim \varepsilon^{2-\beta} \sim \Delta x^{a(2-\beta)},$$

avec a donné par (4.5). Nous avons $a(2-\beta) \leq 1$ ce qui signifie que Δx décroît plus vite. Donc, en pratique, on peut très bien utiliser le schéma centré.

Dans le code, pour garantir la stabilité, nous effectuons une vérification de la condition (5.2.1) : si elle est vérifiée, nous utilisons le schéma centré ; sinon, nous utilisons le schéma décentré et affichons un message d'avertissement. Il est également possible de prévoir un ajustement automatique des paramètres pour assurer la condition (5.2.1).

Notons que l'approximation centrée est d'ordre $O(\Delta x^2)$. Si ν a une densité régulière, alors on peut vérifier que l'approximation de l'intégrale est également d'ordre 2. Cela explique pourquoi, à Δt fixé, on observe une convergence d'ordre $O(\Delta x^2)$ dans nos exemples (voir Figure 5.9).

Considérons maintenant le second schéma.

Schéma 2 centré.

$$(D_\Delta u)_i = \frac{\sigma^2}{2}\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}, \tag{5.2.2}$$

$$(J_\Delta u)_i = \sum_{j=K_l}^{K_r} \nu_j u_{i+j} - \lambda u_i - \alpha\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2\Delta x}. \tag{5.2.3}$$

Ici, la dérivée première rentre dans les deux parties et par conséquent influence la stabilité de deux façons différentes. Pour la stabilité de la partie implicite, il suffit que les coefficients a, b et c soient positifs :

$$\begin{aligned} a &= \frac{\sigma^2}{(\Delta x)^2} \geq 0, \\ b &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} - \left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\frac{1}{\Delta x} \geq 0, \\ c &= \frac{\sigma^2}{2(\Delta x)^2} + \left(\frac{\sigma^2}{2}-r\right)\frac{1}{\Delta x} \geq 0. \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

Ceci est vérifié si

$$\Delta x \leq \frac{\sigma^2}{|\sigma^2/2 - r|}. \tag{5.2.5}$$

Cette condition est encore moins restrictive que (5.2.1) si $\beta > 1$. Dans le cas particulier où $r = 0$, cette condition se réduit à $\Delta x \leq 2$.

La stabilité de la partie explicite est moins évidente. Pour montrer la stabilité dans la norme uniforme, nous avons besoin de la positivité de tous les coefficients dans la matrice de la partie explicite. Or, avec la discrétisation centrée, il y aura toujours des coefficients négatifs. En effet, nous avons $\Delta t(\nu_1 - \alpha/2\Delta x)$ devant u_{i+1} et $\Delta t(\nu_{-1} + \alpha/2\Delta x)$ devant u_{i-1} : l'un de ces coefficients, en fonction du signe de α, est négatif pour des Δx suffisamment petits.

Pourtant, nos expériences numériques montrent que, dans beaucoup de cas, ce schéma se comporte de façon stable (et donne de meilleurs résultats comme on verra dans la section suivante). Comment est-ce possible ?

La réponse est que la positivité des coefficients garantit que le schéma est stable pour *toutes* les conditions initiales et conditions aux bords. La présence des coefficients négatifs signifie que l'on peut toujours trouver des "mauvaises" conditions pour lesquelles le schéma va exploser. Cela n'empêche pas pour autant la stabilité dans des cas plus réguliers.

A titre d'exemple, si la condition initiale est de classe C^∞ (supposons que le domaine est infini et le problème de conditions aux bords ne se pose pas), alors il est possible de montrer que le schéma est inconditionnellement stable. Il n'est donc pas très surprenant

que dans des situations intermédiaires (entre très irrégulier et C^∞) le schéma puisse être stable sous certaines conditions sur Δt et Δx.

Le même argument est valable pour expliquer la stabilité du schéma décentré dans les cas où la condition (4.6.11) n'est pas vérifiée, ce qu'on observe aussi dans nos essais numériques.

Les Figures 5.1 et 5.2 comparent les versions centrée et décentrée des deux schémas pour $\Delta t = \Delta x = 0.01$ fixés. Pour le schéma 1, les résultats obtenus avec ces valeurs des paramètres ne permettent pas de conclure de façon sûre laquelle des deux versions est meilleure. Toutefois, si on diminue progressivement Δx (Figure 5.9), on voit que l'erreur du schéma centré décroît comme $O(\Delta x^2)$, alors que le schéma décentré est seulement d'ordre 1. Pour le schéma 2, la différence est plus évidente en faveur de la version centré déjà pour $\Delta x = 0.01$.

Par conséquent, s'il est possible d'utiliser le schéma centré (c'est-à-dire, s'il reste stable), il faut le préférer au décentré puisque cela ne coûte rien au niveau de l'algorithme. La Figure 5.1 ne permet pas de voir l'avantage du schéma centré puisque l'amélioration qui lui est due est cachée par d'autres effets conduisant à des erreurs d'ordre plus élevé. Nous attirons l'attention du lecteur sur le fait que l'erreur sur la Figure 5.2, grâce au schéma 2, est environ dix fois plus petite pour les mêmes exemples et ce dans tous les modèles considérés. La section suivante est consacrée a l'explication de ce phénomène.

5.2.2 Deux versions de la partie explicite

Nous comparons ici les performances numériques des schémas 1 et 2 présentés dans la Section 4.5. Dans la légende des figures, ces schémas sont indiqués par `price` et `price2`, respectivement.

Considérons d'abord quelques exemples. La Figure 5.3 montre l'erreur des deux schémas dans deux modèles à sauts d'activité finie : ceux de Merton et Kou. Premièrement, on voit que l'erreur est beaucoup plus petite pour le second schéma. Deuxièmement, on observe que pour $\Delta t = 0.01$ fixé, l'erreur ne change pas beaucoup si on passe de $\Delta x = 0.01$ à $\Delta x = 0.001$.

Sur la Figure 5.4, nous avons représenté le même type de tests pour le modèle Variance Gamma (purement discontinu à sauts d'activité infinie). Comme précédemment, l'erreur du schéma 2 est plus petite par rapport au premier schéma. En outre, dans le cas $r \neq 0$, le premier schéma introduit un biais supplémentaire. La différence principale avec le cas d'activité finie est que l'erreur du schéma 1 augmente considérablement quand Δx diminue (à Δt fixé).

Voici une explication de ce comportement. Nous avons vu dans les Théorèmes 4.6.20 et 4.6.25 que l'erreur du schéma est constituée de plusieurs termes dont certains ne dépendent que de Δt et d'autres tendent vers zéro quand $\Delta x \to 0$ si Δt reste fixe. Les termes qui ne tendent pas vers zéro avec Δx déterminent le niveau d'erreur pour Δt

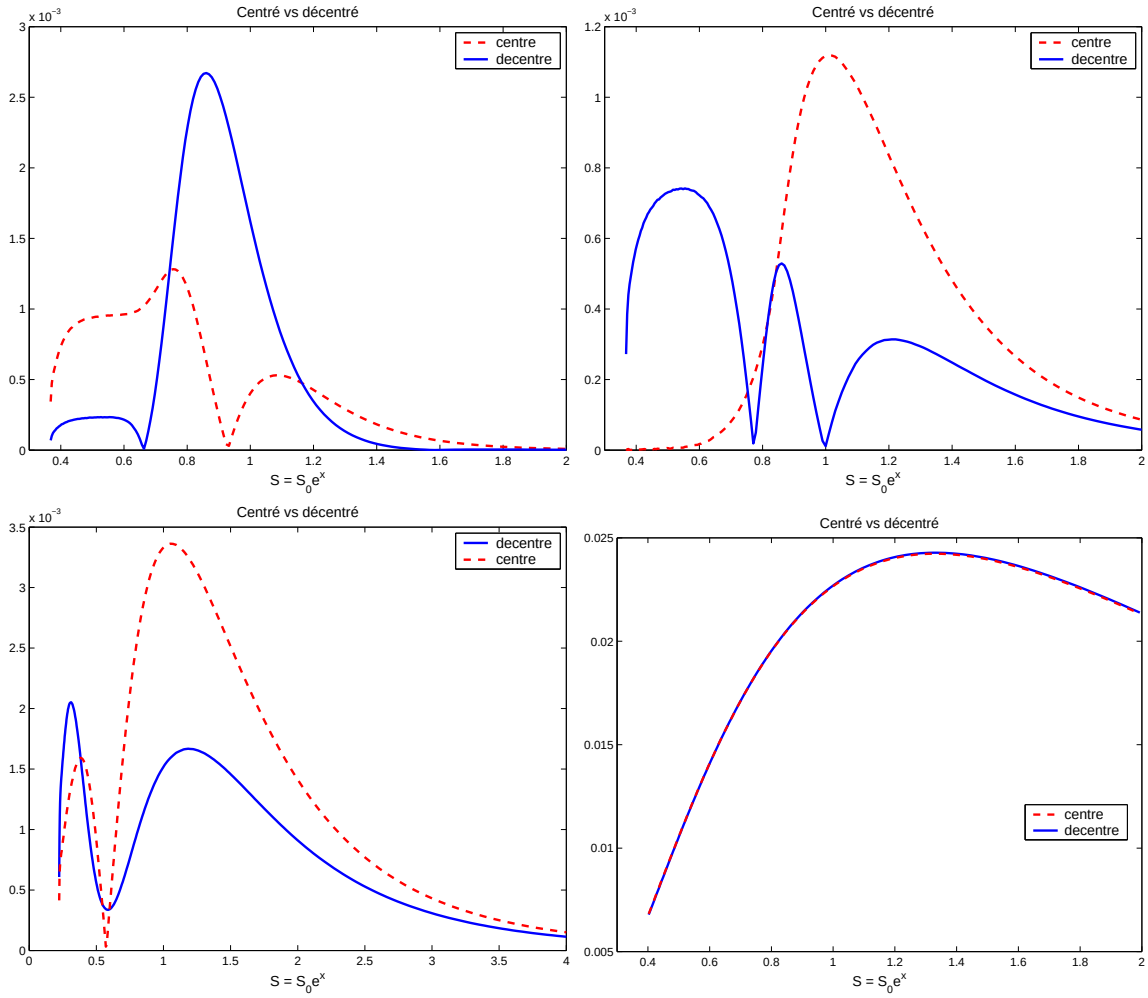


FIG. 5.1 – Schéma 1 : comparaison des versions centrée et décentrée pour un Δx donné. Les deux courbes sur la dernière figure sont confondues.

figure	modèle	σ	r	produit
En haut à gauche	VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0	0.04	Put
En haut à droite	VG : $\theta = -0.2$, $\sigma = 0.2$, $\kappa = 0.5$	0	0	Put
En bas à gauche	Merton : $\mu = -0.2$, $\delta = 0.1$, $\lambda = 5$	0.15	0.04	Put
En bas à droite	ST : $\alpha_+ = 1.5$, $\lambda_+ = 5$, $c_+ = 0.5$ $\alpha_- = 1.1$, $\lambda_- = 2$, $c_- = 0.6$	0	0.04	Put

figure	T	M	Δt	l	u	N	Δx
Deux figures en haut	1	100	0.01	-1	1.4	240	0.01
En bas à gauche	1	100	0.01	-1.5	2	350	0.01
En bas à droite	1	100	0.01	-5.07	5.04	1011	0.01

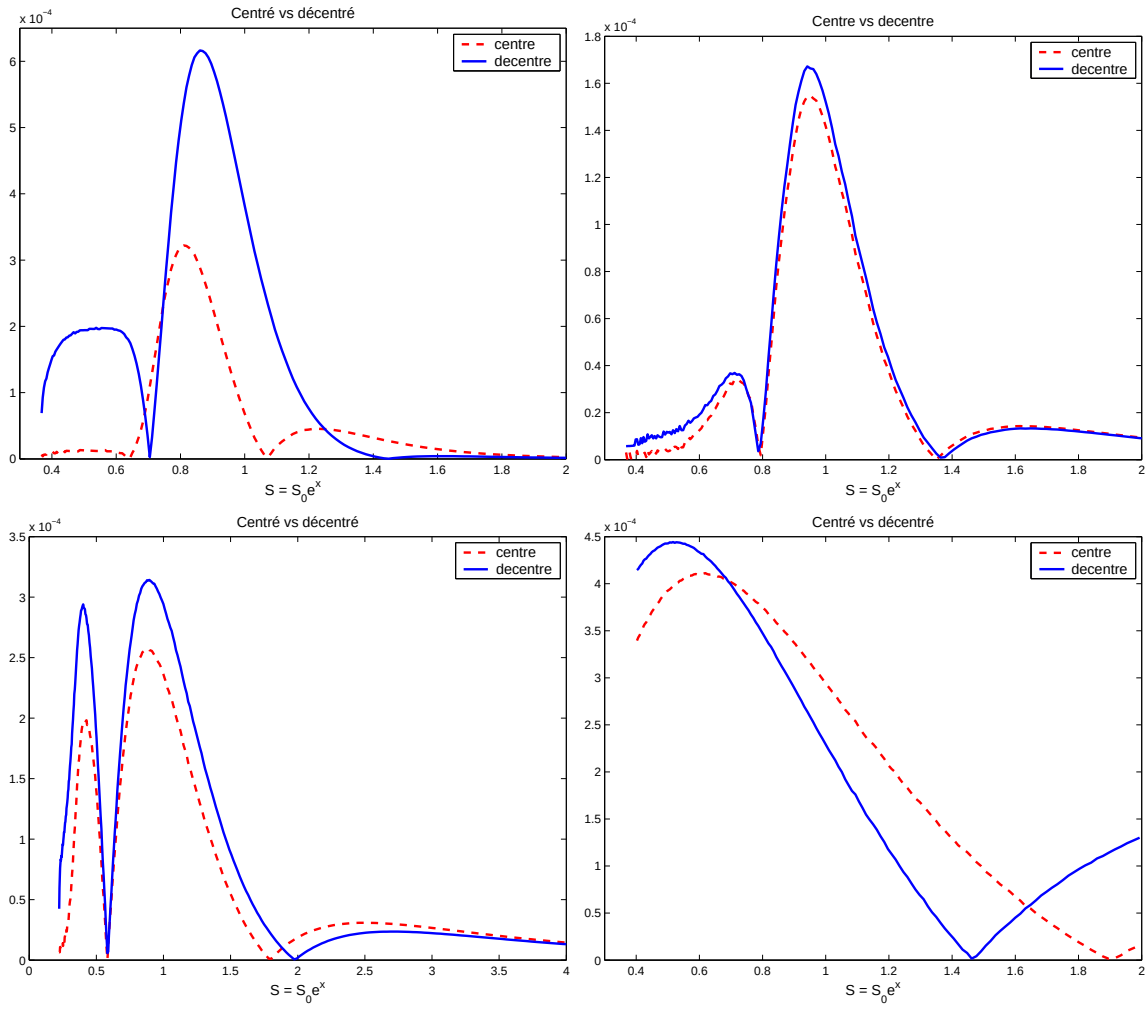


FIG. 5.2 – Schéma 2 : comparaison des versions centrée et décentrée pour un Δx donné.

figure	modèle	σ	r	produit
En haut à gauche	VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0	0.04	Put
En haut à droite	VG : $\theta = -0.2$, $\sigma = 0.2$, $\kappa = 0.5$	0	0	Put
En bas à gauche	Merton : $\mu = -0.2$, $\delta = 0.1$, $\lambda = 5$	0.15	0.04	Put
En bas à droite	ST : $\alpha_+ = 1.5$, $\lambda_+ = 5$, $c_+ = 0.5$ $\alpha_- = 1.1$, $\lambda_- = 2$, $c_- = 0.6$	0	0.04	Put

figure	T	M	Δt	l	u	N	Δx
Deux figures en haut	1	100	0.01	-1	1.4	240	0.01
En bas à gauche	1	100	0.01	-1.5	2	350	0.01
En bas à droite	1	100	0.01	-5.07	5.04	1011	0.01

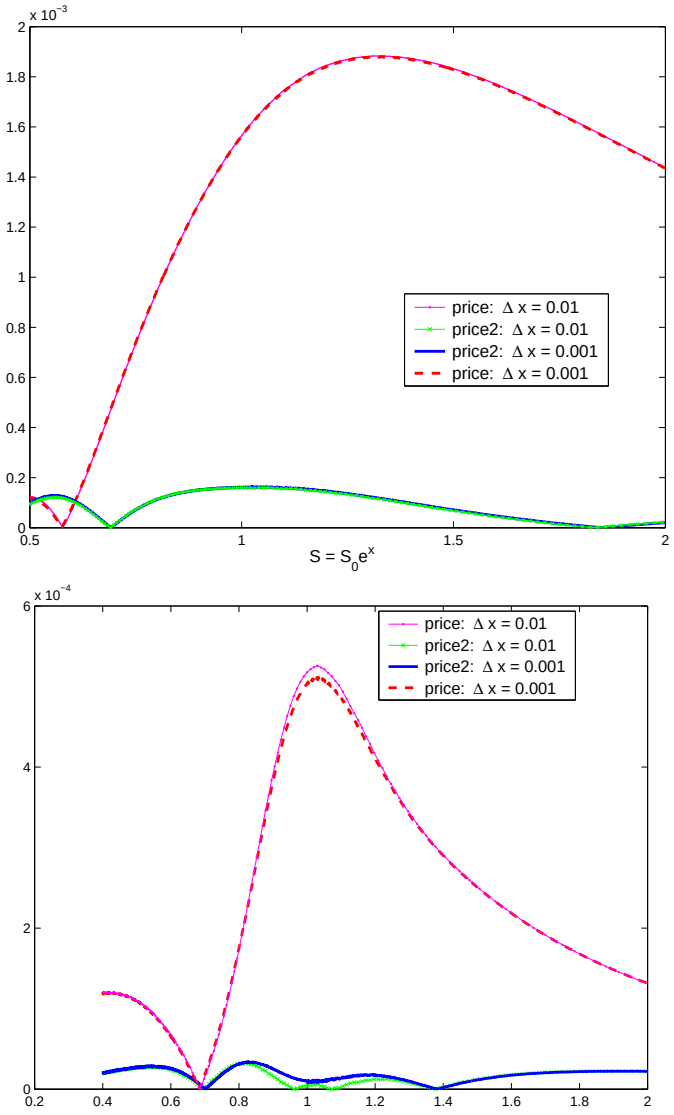


FIG. 5.3 – Comparaison des schémas 1 et 2 dans deux modèles à sauts d'activité finie. L'erreur pour $\Delta x = 0.01$ et $\Delta x = 0.001$ pour le même schéma est quasiment la même : à comparer avec le cas d'activité infinie (Figure 5.4).

figure	modèle	σ	r	produit
En haut	Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 2$	0.2	0	Put
En bas	Kou : $\lambda = 1$, $\lambda_+ = 6$, $\lambda_- = 4$, $p = 0.5$	0.15	0.04	Put

figure	T	M	Δt	l	u
En haut	1	100	0.01	-3.1	3.27
En bas	1	100	0.01	-1.76	2.03

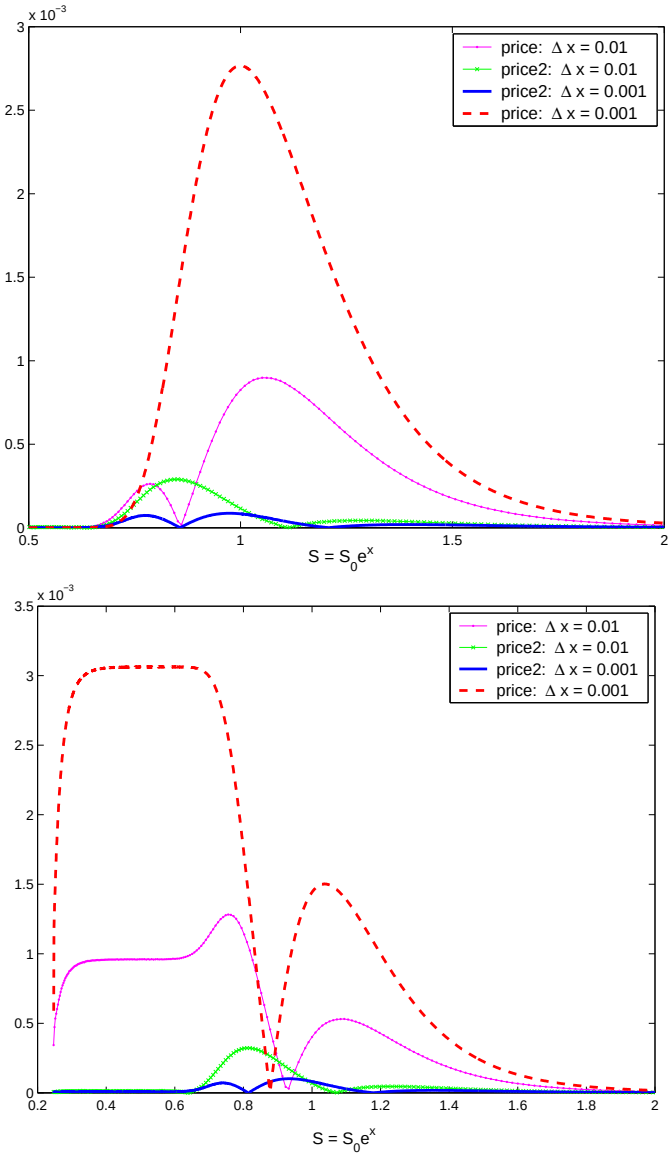


FIG. 5.4 – Comparaison des schémas 1 et 2 sur un modèle de type Variance Gamma avec $r = 0$ et $r = 0.04$. Deux défauts du schéma 1 : 1) l'erreur augmente quand Δx diminue, 2) il y a un biais supplémentaire dans le cas $r \neq 0$.

figure	modèle	r	produit
En haut	VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0	Put
En bas	VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0.04	Put

T	M	Δt	l	u
1	100	0.01	-1.4	1.4

donné. Ils sont précisément les suivants :

$$\sum_{k=1}^{n} \| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} (Lu(s,\cdot) - Lu(\tau_k,\cdot))ds\| \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial \tau}(J_\Delta u)(s,x_i)ds \right|. \quad (5.2.6)$$

Le premier terme est le même pour les deux schémas puisque l'opérateur L y est le même. C'est le deuxième terme qui différencie les schémas 1 et 2. Quand $\Delta x \to 0$, il tend vers

$$\sum_{k=1}^{n} \left| \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} \frac{\partial}{\partial \tau}(Ju)(s,x_i)ds \right|. \quad (5.2.7)$$

Pour la clarté, désignons par J_1 et J_2 la partie intégrale dans la première et la seconde méthode. Rappelons que $J_1 u(s,x) = \int u(s,x+y)\nu(dy)$ et

$$J_2 u(s,x) = \int [u(s,x+y) - u(s,x) - (e^y - 1)\frac{\partial u}{\partial x}(s,x)]\nu(dy). \quad (5.2.8)$$

Il se trouve que les deux termes supplémentaires dans J_2 compensent le premier de sorte que (5.2.7) est beaucoup plus petit dans le schéma 2. Par exemple, pour un *forward* où $u(s,x) = e^{rs+x}$, nous avons $J_1 u(s,x) = e^{rs+x}\int e^y \nu(dy)$ tandis que $J_2 u(s,x) = 0$! Dans le cas de Put, même si on ne peut pas donner les expressions exactes pour $J_1 u$ et $J_2 u$, il est clair que le phénomène est de la même nature : les termes dans (5.2.8) se compensent.

En plus, si on prend en compte l'effet de ε dans le cas de ν singulière, on voit que dans l'exemple de contrat *forward*, $J_1 u$ est proportionnel à $\lambda(\varepsilon) \sim \varepsilon^{-\beta}$. Par conséquent, il est naturel que l'erreur augmente quand Δx diminue puisque $\varepsilon(\Delta x)$ diminue aussi.

Nous avons donc compris pourquoi l'erreur du schéma 1 est plus grande de manière générale et pourquoi, pour Δt fixé, elle augmente quand Δx diminue dans les modèles purement discontinus comme sur la Figure 5.4. Ce que nous ne savons pas expliquer pour le moment, c'est le fait que l'erreur du schéma 2 *n'augmente pas* dans la même situation.

En effet, selon nos estimations, déjà le premier terme dans (5.2.6) est proportionnel à $\sqrt{\Delta t}/\varepsilon^{3(1-\beta/2)}$ (voir (4.6.97)) et donc devrait exploser quand $\varepsilon \to 0$. De toute évidence, il y a aussi un phénomène de compensation quelque part que l'on perd avec la décomposition (5.2.6). Comprendre ce mécanisme de compensation permettrait probablement d'améliorer l'estimation de $\varepsilon(\Delta x)$ optimal. Malheureusement, nous n'avons pas encore réussi à le faire. Nous devons donc nous contenter de la constatation empirique du fait que le schéma 2 est plus performant que le schéma 1.

La seule limitation du schéma 2 est son instabilité pour Δt trop grand par rapport aux autres termes (des combinaisons de Δx et $\varepsilon(\Delta x)$). En pratique, si on veut calculer la solution avec une très grande précision, nous recommandons tout de même d'utiliser le schéma 2 en diminuant éventuellement Δt si la solution commence à osciller. En effet, comme on a vu, dès que ce schéma est stable, il donne de très bons résultats.

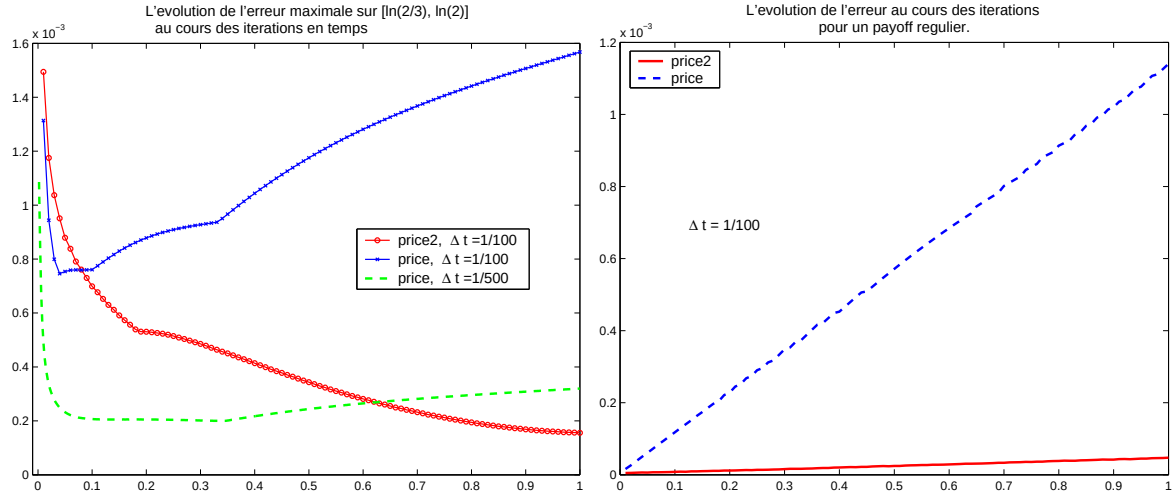


FIG. 5.5 – L'erreur (dans la norme uniforme en x) au cours des itérations dans les schémas 1 et 2. A gauche : *payoff* non-régulier (Put), a droite : *payoff* régulier (*forward*).

modèle	σ	r	produit	T	l	u	Δx	N
Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 2$	0.2	0.04	Put	1	-3.1	3.31	0.01	641

5.3 L'ordre de convergence

Dans les Sections 4.6.4 et 4.6.5, nous avons donné des estimations théoriques de la vitesse de convergence des schémas 1 et 2 dans la norme uniforme en t et en x. Rappelons que, pour le cas d'activité finie, nous avons obtenu l'ordre $O(\Delta x)$ à condition que Δt soit proportionnel à Δx^2. Plus précisément, en regardant les preuves des Théorèmes 4.6.20 et 4.6.25, nous voyons la composition suivante de la majoration de l'erreur : $O(\Delta x^2/\sqrt{\Delta t} + \Delta x + \sqrt{\Delta t} + \Delta t)$.

Nous allons maintenant considérer l'effet de Δt et Δx séparément.

Les Figures 5.5–5.8 illustrent les Remarques 4.6.22 et 4.6.26. Nous avons suggéré que l'erreur est maximale sur les premières itérations en temps (à cause de l'irrégularité de la condition initiale) et que l'erreur en temps finale $t = T$ décroît comme $O(\Delta t)$.

Les trois courbes sur la Figure 5.5 (à gauche) représentent l'évolution de l'erreur maximale pour un Put européen sur l'intervalle $x \in [\log(2/3), \log(2)]$ au cours des itérations en temps (à Δx fixe). Nous avons d'abord fait le test avec 100 itérations pour les deux schémas. Dans le schéma 1, l'erreur en $t = T$ est plus grande que l'erreur en $t = \Delta t$. Toutefois, si on augmente le nombre d'itérations jusqu'à 500, l'erreur au temps finale devient plus petite que sur les premières itérations confirmant notre hypothèse qu'elle y décroît plus vite. Remarquons que cet effet est absent dans le cas de *forward* (*payoff* régulier) sur la figure de droite.

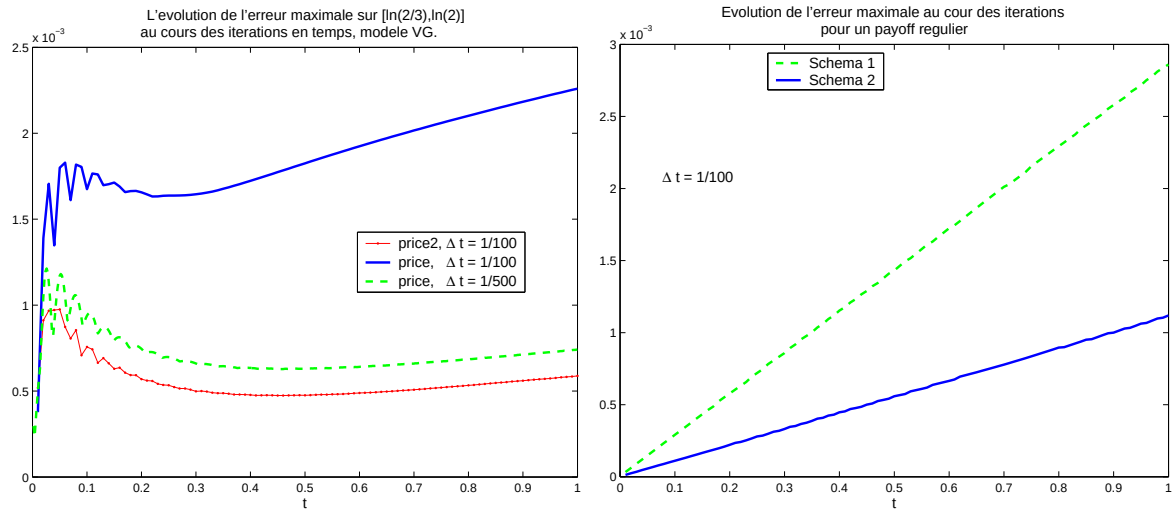


FIG. 5.6 – L'erreur (dans la norme uniforme en x) au cours des itérations dans les schémas 1 et 2. A gauche : *payoff* non-régulier (Put), a droite : *payoff* régulier (*forward*).

modèle	r	T	l	u	Δx	N
VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0.04	1	-1.32	1.63	0.01	295

Nous observons les mêmes phénomènes dans le modèle Variance Gamma (Figure 5.6).

La Figure 5.7 montre que la convergence de l'erreur en $t = \Delta t$ est effectivement d'ordre $O(\sqrt{\Delta t})$. Il faut dire que, sur le graphique de gauche, nous avons un peu forcé le choix des autres paramètres pour que cette convergence soit visible : à savoir, nous avons pris Δx assez grand et donc le schéma décentré pour préserver la stabilité. En effet, le terme $\sqrt{\Delta t}$ dans l'estimation de l'erreur est multiplié par l'erreur due à la discrétisation de la dérivée première et de la partie intégrale qui est d'ordre Δx (ou même Δx^2). Donc, si Δx est petit, alors $\Delta x\sqrt{\Delta t}$ est petit aussi et on voit d'abord l'effet du terme $O(\Delta t)$, comme sur le graphique de droite.

On peut en tirer deux conclusions. D'un côté, la convergence au sens strict du terme est incontestablement d'ordre $O(\sqrt{\Delta t})$. De l'autre côté, dans la pratique, Δt n'est jamais infiniment petit et il se peut que pour des valeurs raisonnables nous voyions un comportement linéaire de l'erreur. Bien sûr, dans ce dernier cas, l'erreur converge linéairement non pas vers zéro mais vers une erreur résiduelle.

La Figure 5.8 montre l'erreur au temps final $t = T$. Premièrement, nous voyons que la convergence est parfaitement linéaire en Δt, même pour des valeurs de Δt très petites. Deuxièmement, comme nous avons noté dans la Remarque 4.6.22, nous n'observons pas l'explosion de l'erreur que suggère le terme $\Delta x^2/\sqrt{\Delta t}$. Cela veut dire que ce terme est présent seulement dans notre estimation et non dans l'erreur elle-même.

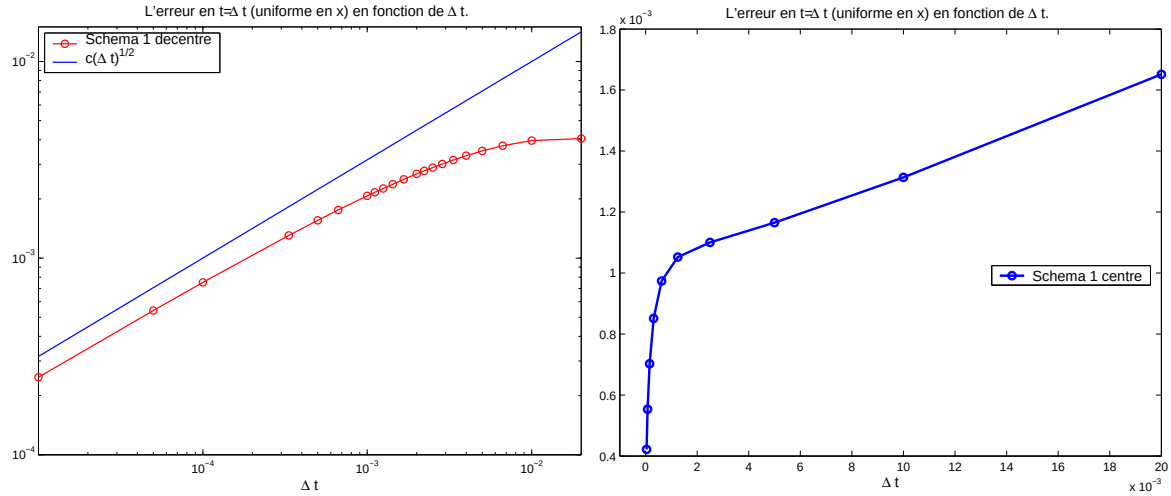


FIG. 5.7 – L'erreur à la première itération ($t = \Delta t$), dans la norme uniforme en x, en fonction de Δt. **A gauche** : schéma 1 décentré avec $\Delta x = 0.1$, échelle log-log. Pour comparer la pente, nous avons tracé la courbe $0.1\sqrt{\Delta t}$: on voit que les deux courbes deviennent parallèles pour des petits Δt, donc la convergence de l'erreur est d'ordre $\sqrt{\Delta t}$. **A droite** : $\Delta x = 0.01$ (schéma 1 centré), échelle linéaire. La convergence de l'erreur est d'abord linéaire en Δt (mais on voit le vrai ordre $O(\sqrt{\Delta t})$ quand Δt devient petit).

modèle	σ	r	produit	T	l	u
Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 2$	0.2	0.04	Put	1	-3.1	3.31

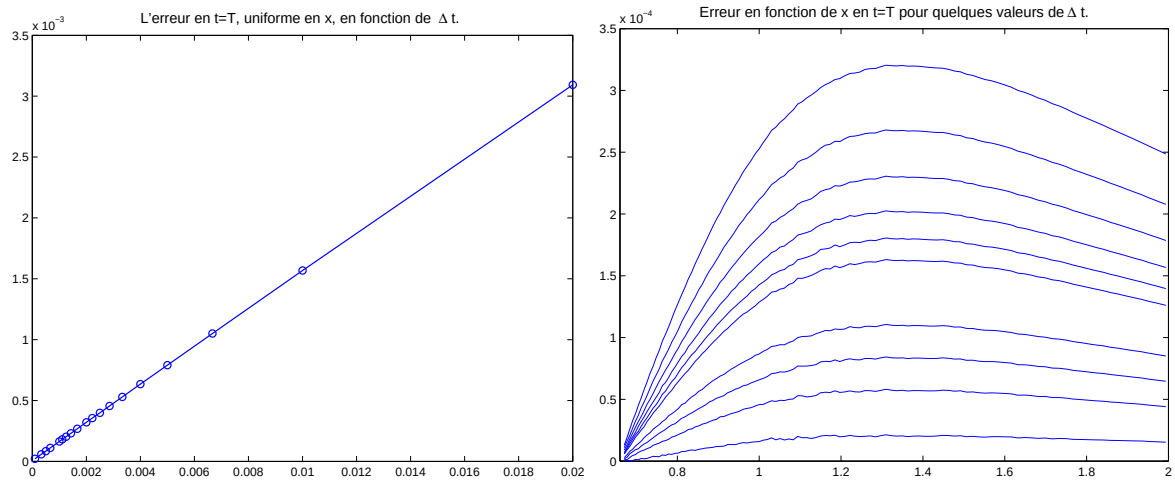


FIG. 5.8 – Convergence de l'erreur en $t = T$ en fonction de Δt pour Δx fixé, schéma 1 centré. A gauche : l'erreur maximale sur l'intervalle $[\log(2/3), \log(2)]$ en fonction de Δt, échelle linéaire. On voit que la convergence est d'ordre $O(\Delta t)$. A droite : chaque courbe représente l'erreur absolue en fonction de x pour une valeur de Δt. Sont représentées les dix dernières valeurs de $\Delta t = T/M$ de la figure de gauche : $M = 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1500, 2000, 3000, 10000$.

modèle	σ	r	produit	T	l	u	Δx	N
Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 2$	0.2	0.04	Put	1	-3.1	3.31	0.01	641

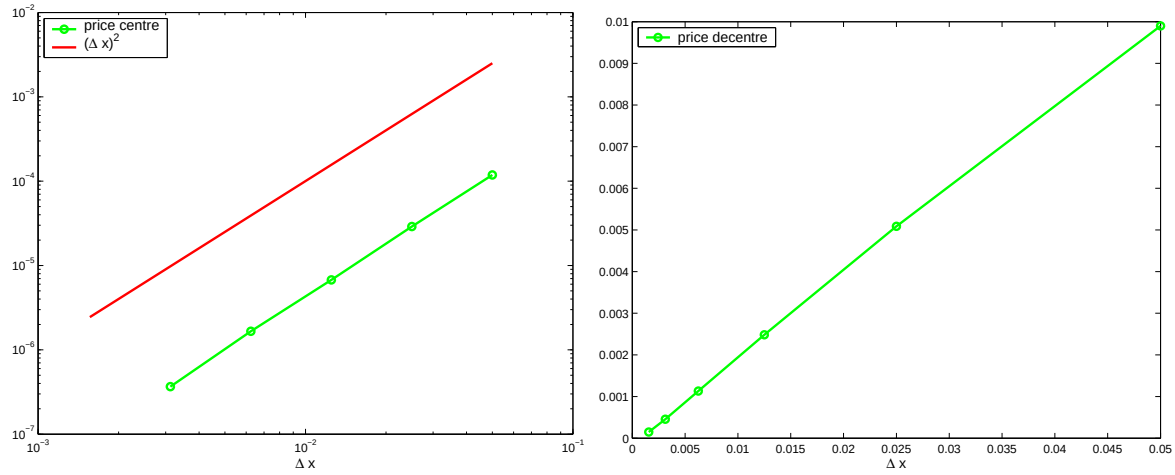


FIG. 5.9 – Convergence de l'erreur en $t = T$ en fonction de Δx pour Δt fixé. **A gauche** : schéma 1 centré, échelle log-log. La ligne marquée de cercles représente l'erreur moins sa limite quand $\Delta x \to 0$ (pour avoir bien une droite à l'échelle logarithmique). La seconde droite donne la pente de Δx^2. On voit que l'erreur converge comme $O(\Delta x^2)$ (vers l'erreur résiduelle déterminée par Δt). **A droite** : schéma 1 décentré, échelle linéaire. La convergence est du premier ordre : $O(\Delta x)$.

modèle	σ	r	produit	T	l	u	Δt	M
Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 2$	0.2	0.04	Put	1	-3.1	3.31	0.002	500

La convergence en Δx est illustrée par la Figure 5.9. Le second ordre du schéma centré s'explique par la régularité de ν : comme nous l'avons déjà noté, si ν est régulière, la discrétisation de l'intégrale est d'ordre 2. En approximant la dérivée première par une différence centrée, on atteint l'ordre 2 global.

5.4 Choix de ε

Dans le cas des modèles purement discontinus, un paramètre supplémentaire qui influence l'erreur est le paramètre d'approximation des petits sauts ε. Comme nous avons noté dans la Section 4.6.5, pour minimiser l'erreur globale, les paramètres Δx et ε ne peuvent pas être choisis indépendamment.

La Figure 5.10 montre l'erreur dans le modèle Variance Gamma en fonction de Δx et ε. On voit que choisir ε le plus petit possible n'est pas une bonne idée : l'erreur explose pour $\varepsilon < \Delta x$.

La Figure 5.11 illustre la même idée que, pour un Δx fixé, il existe un choix optimal de ε. Dans les Sections 4.6.4 et 4.6.5, nous avons fait une tentative de trouver la dépendance

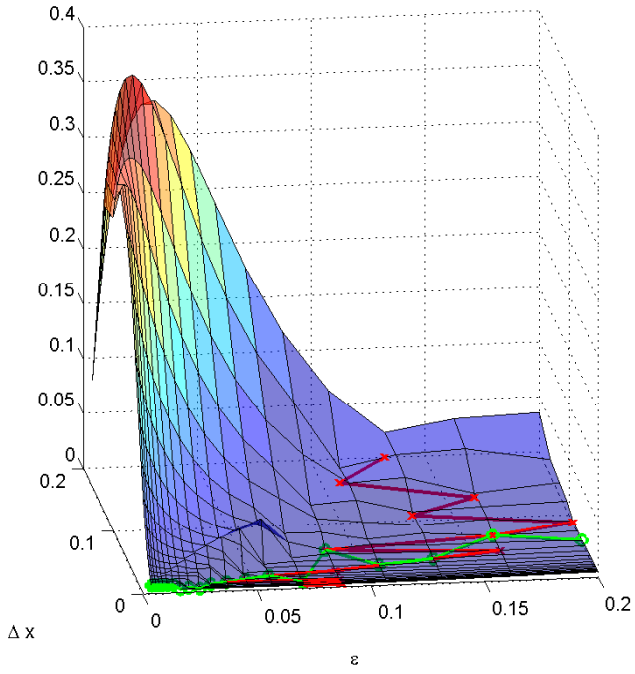


FIG. 5.10 – L'erreur maximale en fonction de ε et de Δx. Modèle Variance Gamma.

optimale $\varepsilon(\Delta x)$ de façon analytique. Rappelons que nous l'avons cherchée sous la forme $\varepsilon = \Delta x^a$. La Figure 5.12 montre l'erreur dans le modèle Variance Gamma en fonction de Δx si $\varepsilon = \Delta x^a$: différentes courbes correspondent aux différentes valeurs de a. On observe que si a est élevé (à partir de 0.4 sur ces figures), l'erreur du schéma 1 commence à exploser quand Δx diminue, alors que le schéma 2 reste stable. Notons que l'explosion de l'erreur dans le schéma 1 ne contredit pas nos estimations[1] puisque ces dernières supposent que Δt est également choisi par rapport à Δx, alors que sur la Figure 5.12, Δt est fixe.

5.5 Choix du domaine de calcul

Dans la Section 4.3, nous avons démontré que l'erreur de localisation décroît exponentiellement avec la taille du domaine de calcul. Théoriquement, pour choisir le domaine, il suffit de fixer le niveau d'erreur à ne pas dépasser et déduire de l'estimation (4.3.11) l'intervalle (l, u) qui garantie ce niveau d'erreur. Cependant, les constantes dans nos estimations ne peuvent pas toutes être calculées explicitement et, surtout, elles sont trop grandes pour être utilisées en pratique. Elle préconisent des intervalles de calcul inutilement larges.

[1](4.6.88), (4.6.89), (4.6.99)

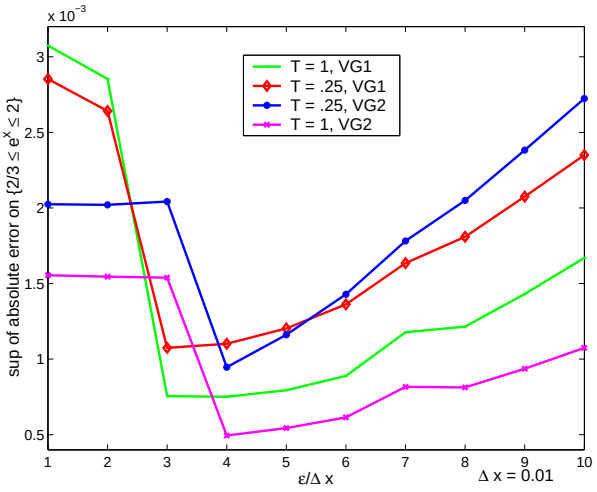


FIG. 5.11 – Influence de la troncature des petits sauts sur l'erreur numérique dans différents modèles de type Variance Gamma.

	θ	σ	κ	r
VG1	-0.33	0.12	0.16	0
VG2	-0.1	0.25	2	0

Au lieu de procéder de cette manière, on choisit le domaine en utilisant le raisonnement heuristique suivant. Nous fixons le domaine sur lequel nous voulons obtenir une bonne précision pour la solution : $I = [\log(2/3), \log(2)]$. Cet intervalle correspond aux *moneyness* entre 0.5 et 1.5. Puis, nous choisissons le domaine de calcul (l, u) de telle manière que la probabilité pour le processus $rt + X_t$ de sortir de (l, u) en partant de I soit petite. La technique heuristique pour cela consiste à déterminer (l, u) en fonction de la moyenne et la variance du processus $rt + X_t$. Nous considérons qu'en partant du point x, le processus restera essentiellement dans

$$\bigcup_{t\in[0,T]} (x + rt + t\mathbb{E}X_1 - kt\sqrt{VarX_1}, x + rt + t\mathbb{E}X_1 + kt\sqrt{VarX_1})$$
$$\subseteq (x + T\mathbb{E}X_1 - kT\sqrt{VarX_1}, x + rT + kT\sqrt{VarX_1}),$$

avec un certain $k > 0$. Pour obtenir la deuxième ligne, nous avons uilisé le fait que $\mathbb{E}X_1 \leq 0$, grâce à la condition de martingale. Pour prendre en compte tous les points de I, nous fixons donc

$$(l, u) = (\log(2/3) + T\mathbb{E}X_1 - kT\sqrt{VarX_1}, \log(2) + rT + kT\sqrt{VarX_1}). \qquad (5.5.1)$$

Le choix $k = 3$ s'avère suffisant (voit Figure 5.13). Les moments de X_1 se calculent facilement dans tous les modèles que nous avons mentionnés plus haut (voir le Tableau 5.1).

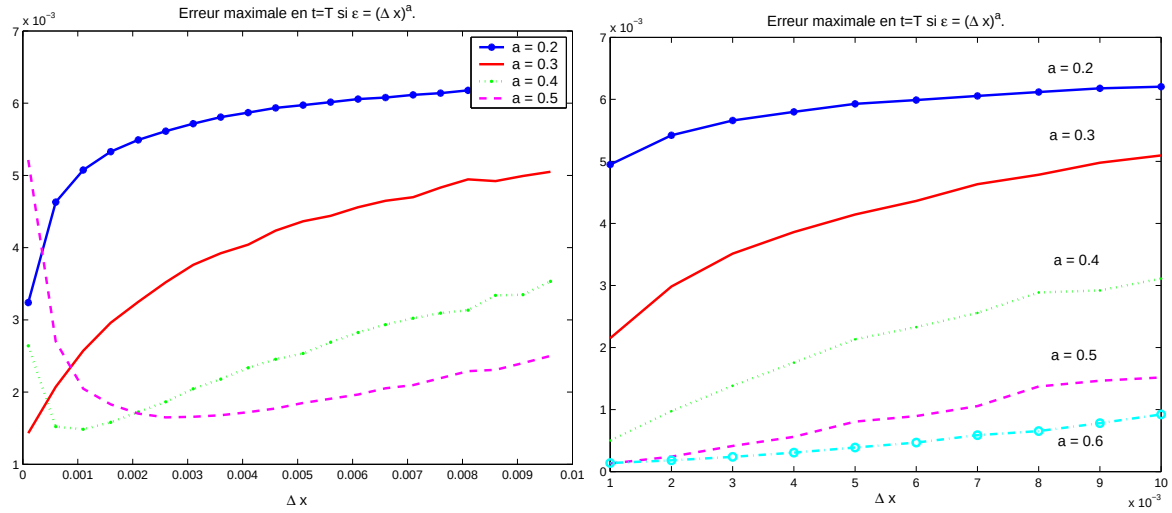


FIG. 5.12 – L'erreur en fonction de Δx si $\varepsilon = (\Delta x)^a$, pour quelques valeurs de a. Le pas de temps est fixe. A gauche : schéma 1. A droite : schéma 2. On voit que si a est élevé (à partir de 0.4 sur ces figures), l'erreur du schéma 1 commence à exploser quand Δx diminue.

modèle	r	T	M	Δt	produit
VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0.04	1	100	0.01	Put

TAB. 5.1 – L'espérance et la variance de X_1 dans quelques modèles de Lévy en finance.

modèle	$\mathbb{E}X_1$	$VarX_1$
Merton	$-\sigma^2/2 - \lambda(\exp(\mu + \delta^2/2) - 1 - \mu)$	$\sigma^2 + \lambda(\delta^2 + \mu^2)$
Kou	$-\sigma^2/2 - \lambda\left(\frac{p}{\lambda_+(\lambda_+-1)} + \frac{1-p}{\lambda_-(\lambda_-+1)}\right)$	$\sigma^2 + \lambda\left(\frac{p}{\lambda_+^2} + \frac{1-p}{\lambda_-^2}\right)$
Variance Gamma	$\theta + \log(1 - \sigma^2\kappa/2 - \theta\kappa)/\kappa$	$\sigma^2 + \theta^2\kappa$
Stable Tempéré	$-E_+ - E_-$, voir (5.5.2)–(5.5.3) ci-dessous	$\frac{c_+\Gamma(2-\alpha_+)}{\lambda_+^{2-\alpha_+}} + \frac{c_-\Gamma(2-\alpha_-)}{\lambda_-^{2-\alpha_-}}$

$$E_+ = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_+)\lambda_+^{\alpha_+} c_+ \left(\left(1 - \frac{1}{\lambda_+}\right)^{\alpha_+} - 1 + \frac{\alpha_+}{\lambda_+}\right), & \text{si } \alpha_+ \neq 1, \\ c_+ \left[(\lambda_+ - 1)\log\left(1 - \frac{1}{\lambda_+}\right) + 1\right], & \text{si } \alpha_+ = 1, \end{cases} \tag{5.5.2}$$

$$E_- = \begin{cases} \Gamma(-\alpha_-)\lambda_-^{\alpha_-} c_- \left(\left(1 + \frac{1}{\lambda_-}\right)^{\alpha_-} - 1 - \frac{\alpha_-}{\lambda_-}\right), & \text{si } \alpha_- \neq 1, \\ c_- \left[(\lambda_- + 1)\log\left(1 + \frac{1}{\lambda_-}\right) - 1\right], & \text{si } \alpha_- = 1. \end{cases} \tag{5.5.3}$$

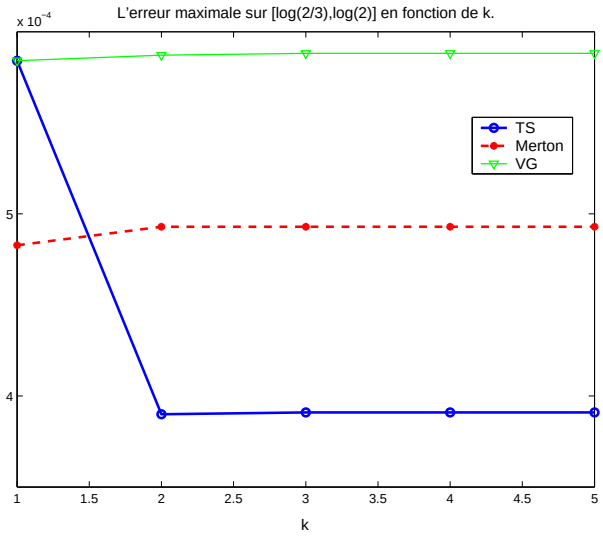


FIG. 5.13 – L'erreur maximale sur l'intervalle $I = [\log(2/3), \log(2)]$ en fonction de k si le domaine de calcul est choisi selon la formule (5.5.1). Les trois courbes correspondent aux trois modèles différents dont les paramètres sont donnés dans le tableau ci-dessous.

modèle	σ	r
ST : $\alpha_+ = 1.5$, $\lambda_+ = 5$, $c_+ = 0.5$ $\alpha_- = 1.1$, $\lambda_- = 2$, $c_- = 0.6$	0	0.04
Merton : $\mu = -0.3$, $\delta = 0.15$, $\lambda = 10$	0.2	0.04
VG : $\theta = -0.33$, $\sigma = 0.12$, $\kappa = 0.16$	0	0.04

La Figure 5.14 compare trois choix de conditions aux bords discutés dans la Section 4.3 : $g = 0$, $g = h$ et $g(\tau, x) = h(x + r\tau)$. Nous voyons que la différence est prononcée près du bord mais beaucoup moins à l'intérieur de l'intervalle, même pour $g = 0$ qui est très loin de la condition exacte. On observe également que la condition $g(\tau, x) = h(x+r\tau)$ est la meilleure des trois.

5.6 Options à barrières

Quand la méthode FFT de Carr & Madan s'applique, elle est suffisamment rapide et précise. Néanmoins, son utilisation est limitée aux options européennes dans les modèles où la fonction caractéristique est connue explicitement. En revanche, avec nos schémas, on peut calculer aussi facilement des options à barrières. En effet, c'est seulement les conditions aux bords qui changent dans ce cas. On peut dire que l'évaluation des options à barrières est encore plus facile car les conditions aux bords sont connues, alors que pour des options européennes, on doit les choisir de façon artificielle.

Voici deux exemples de calculs des options à barrières avec notre méthode. La Figure 5.15 représente le prix d'un Call up-and-out dans le modèle de Merton. La Figure 5.16 illustre la convergence du prix à la monnaie d'un Put double-barrière calculé avec notre schéma. Nous ne pouvons pas montrer l'erreur dans ce cas puisque nous ne disposons pas d'une méthode alternative pour calculer la vraie valeur.

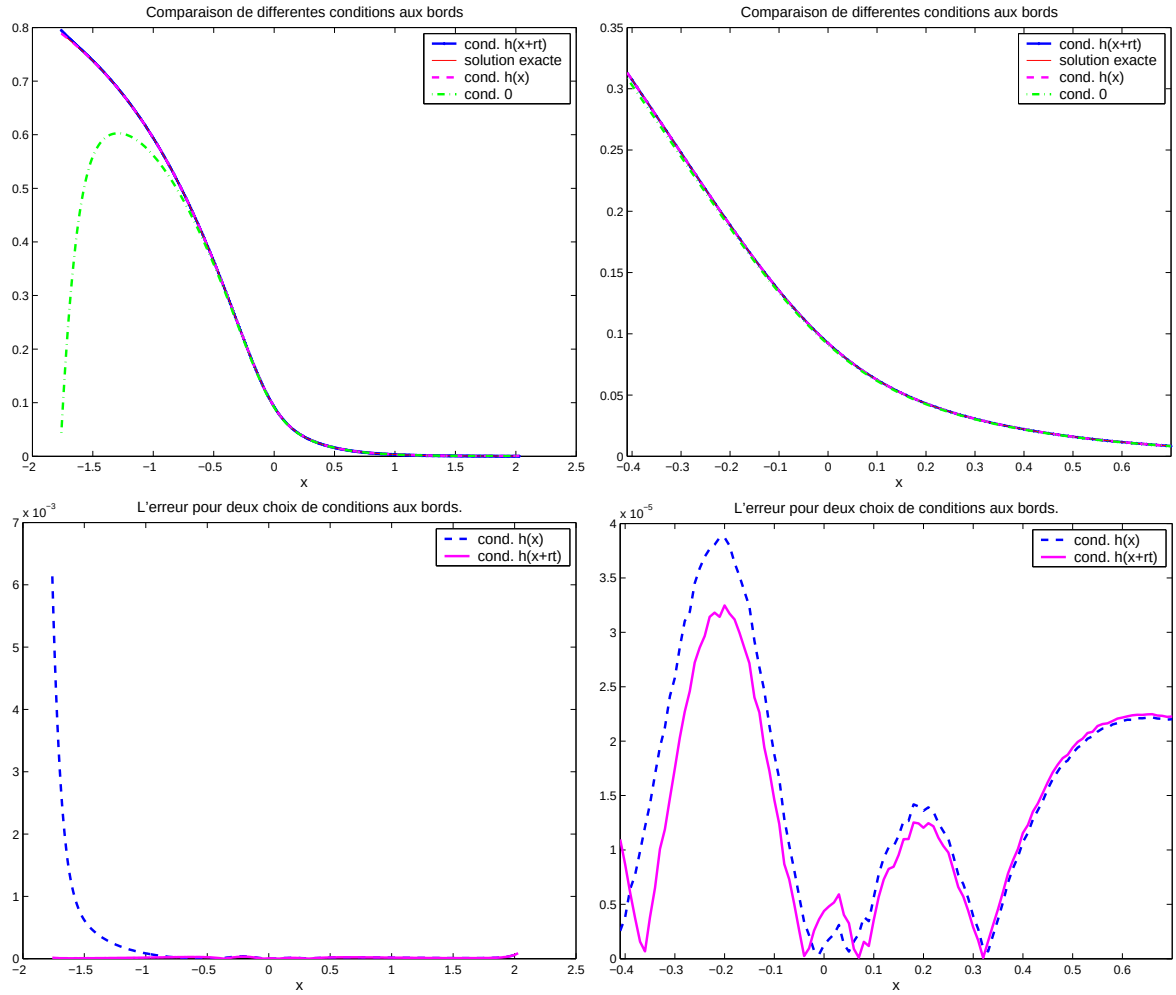


FIG. 5.14 – Comparaison de différentes conditions aux bords sur tout l'intervalle de calcul (graphiques de gauche) et sur le domaine d'intérêt $[\log(2/3), \log(2)]$ (graphiques de droite). En haut : la valeur du Put ; en bas : l'erreur absolue. Schéma 2 centré.

modèle	σ	r	T	Δt	l	u	N	Δx
Kou : $\lambda = 1$, $\lambda_+ = 6$, $\lambda_- = 4$, $p = 0.5$	0.15	0.04	1	0.01	-1.76	2.04	380	0.01

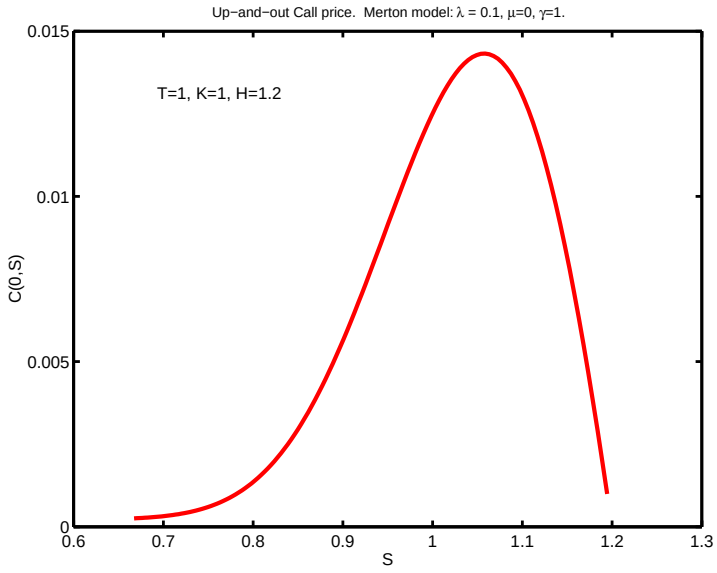


FIG. 5.15 – La valeur d'un Call up-and-out en fonction de la valeur du stock dans le modèle de Merton. Niveau de la barrière : $H = 1.2$.

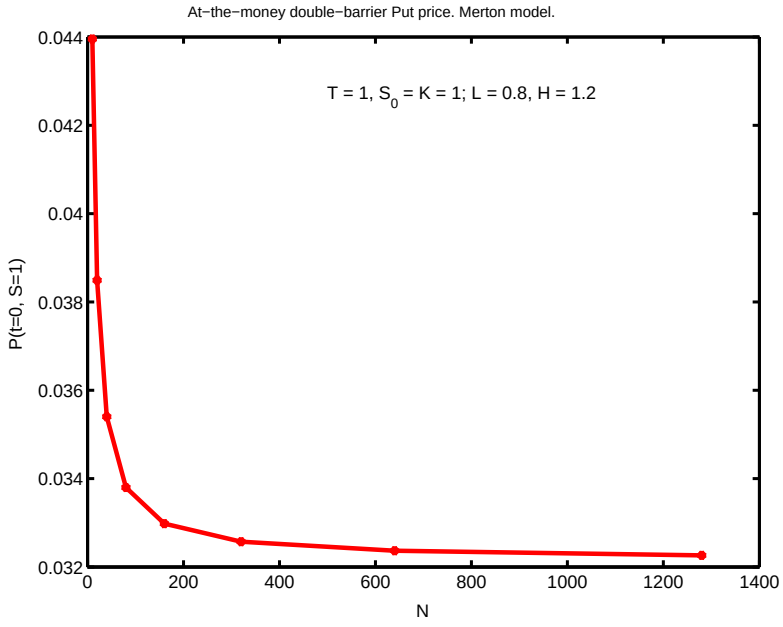


FIG. 5.16 – La valeur à la monnaie d'un Put double-barrière en fonction du nombre de pas d'espace. Modèle de Merton. Niveaux des barrières : $L = 0.8$, $H = 1.2$.

Annexe A

A.1 Quelques propriétés utiles des processus de Lévy

Proposition A.1.1. (L'espérance et la variance d'un processus de Lévy) *Si X_t est un processus de Lévy caractérisé par le triplet (b, σ, ν), alors*

$$\mathbb{E}X_t = t[b + \int_{|x|>1} x\nu(dx)], \tag{A.1.1}$$

$$\mathrm{Var}X_t = t[\sigma^2 + \int x^2\nu(dx)]. \tag{A.1.2}$$

Démonstration. La fonction caractéristique de X_t est

$$\psi_{X_t}(z) = \exp\{t[-\frac{\sigma^2}{2}z^2 + ibz + \int_{-\infty}^{\infty}(e^{izx} - 1 - izx1_{|x|\leq 1})\nu(\mathrm{d}x)]\}$$

On utilise les formules suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_t &= -i\psi'_{X_t}(0) \\ \mathbb{E}X_t^2 &= -\psi''_{X_t}(0) \\ \mathrm{Var}X_t &= \mathbb{E}X_t^2 - (\mathbb{E}X_t)^2 \end{aligned}$$

et on obtient (A.1.1) et (A.1.2) par un simple calcul. □

Théorème A.1.2. *([Sat99], Théorème 25.18) Soit X_t un processus de Lévy sur $\mathbb{R}^d$. On définit*

$$M_t = \sup_{s\in[0,t]} |X_s|. \tag{A.1.3}$$

Soit $g(r)$ une fonction non négative continue sous-multiplicative sur $[0, \infty)$, telle que $g \nearrow \infty$ quand $r \to \infty$. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) $\exists t > 0 \quad \mathbb{E}[g(M_t)] < \infty$.

(2) $\forall t > 0 \quad \mathbb{E}[g(M_t)] < \infty$.

(3) $\exists t > 0 \quad \mathbb{E}[g(|X_t|)] < \infty$.

(4) $\forall t > 0 \quad \mathbb{E}[g(|X_t|)] < \infty$.

La proposition suivante est un résultat général classique sur des variables aléatoires.

Proposition A.1.3. (L'inégalité de Chebyshev généralisée) *Soient ξ une variable aléatoire positive et $g(x) \geq 0$ une fonction croissante sur $[0, \infty)$ avec $\mathbb{E}g(\xi) < \infty$. Alors, pour tout $\alpha > 0$*

$$\mathbb{P}\{\xi > \alpha\} \leq \frac{\mathbb{E}g(\xi)}{g(\alpha)}. \tag{A.1.4}$$

Démonstration. En effet, si μ est la loi de ξ sous $\mathbb{P}$, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}g(\xi) = \int_{x\geq 0} g(x)\mu(\mathrm{d}x) &= \int_{0\leq x\leq \alpha} g(x)\mu(\mathrm{d}x) + \int_{x>\alpha} g(x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &\geq \int_{x>\alpha} g(x)\mu(\mathrm{d}x) \\ &\geq g(\alpha)\int_{x>\alpha} \mu(\mathrm{d}x) = g(\alpha)\mathbb{P}\{\xi > \alpha\}, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité (A.1.4). □

A.2 Calcul de la solution du problème de l'Exemple 3.3.4

Proposition A.2.1. *La solution du problème*

$$-u'' + u - u(x-1) = 1 \quad \textit{dans} \quad (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0$$

est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} A_1 \operatorname{ch} x + A_2 \operatorname{sh} x + 1, & x \in [-1, 0], \\ B_1 \operatorname{ch} x + B_2 \operatorname{sh} x - \frac{A_2}{2} x \operatorname{ch}(x-1) - \frac{A_1}{2} x \operatorname{sh}(x-1) + 2, & x \in (0, 1], \end{cases} \tag{A.2.1}$$

où

$$A_1 = u_0 - 1, \quad A_2 = \frac{A_1 \operatorname{ch} 1 + 1}{\operatorname{sh} 1}, \quad B_1 = u_0 - 2, \quad B_2 = -\frac{2 - A_2/2 + (u_0 - 2)\operatorname{ch} 1}{\operatorname{sh} 1}$$

et u_0 est la valeur de u en $x = 0$:

$$u_0 = \frac{(5 \operatorname{sh} 1 - 1)(\operatorname{ch} 1 - 1)}{\operatorname{sh} 1 + 4 \operatorname{sh} 1 \operatorname{ch} 1 - \operatorname{ch} 1} \approx 0.3846.$$

La limite à droite de u' en $x = -1$ est égale à

$$u'(-1+) = -A_1 \operatorname{sh} 1 + A_2 \operatorname{ch} 1 \approx 0.7894.$$

Démonstration. On résout d'abord le problème sur $(-1,0)$:

$$\begin{aligned} &u'' - u = -1, \quad x \in (-1,0),\\ &u(-1) = 0, \quad u(0) = u_0, \end{aligned}$$

où u_0 est une constante à définir. On obtient ainsi la première expression dans (A.2.1). Ensuite, on résout le problème sur $(0,1)$ en utilisant la solution déjà obtenue :

$$\begin{aligned} &u'' - u = -1 - (A_1 \operatorname{ch}(x-1) + A_2 \operatorname{sh}(x-1) + 1), \quad x \in (0,1),\\ &u(0) = u_0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

Cela donne la seconde expression dans (A.2.1). La constante u_0 est déterminée par la condition de continuité de u' en $x = 0$. □

La proposition suivante montre une autre façon de calculer la solution du même problème, sous forme de série de Fourier. Cette méthode pourrait être utile si la partie droite n'était pas constante et on ne savait pas trouver la solution explicite.

Proposition A.2.2. *La solution du problème*

$$-u'' + u - u(x-1) = 1 \quad \textit{dans} \quad (-1,1), \qquad u(-1) = u(1) = 0$$

est donnée par

$$u(x) = \begin{cases} u_0 + u_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(\pi n(x+1)), & \textit{si } x \in [-1,0],\\ u_0 - u_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin(\pi n x), & \textit{si } x \in (0,1], \end{cases} \tag{A.2.2}$$

où

$$v_n = \frac{2}{p_n} \begin{cases} \frac{u_0}{\pi n}, & n \textit{ pair},\\ \frac{2-u_0}{\pi n}, & n \textit{ impair}, \end{cases} \qquad w_n = \frac{2}{p_n} \begin{cases} \frac{v_n}{2} - \frac{2u_0}{\pi n}, & n \textit{ pair},\\ \frac{v_n}{2} + \frac{2}{\pi n}, & n \textit{ impair}, \end{cases} \qquad p_n = (\pi n)^2 + 1,$$

et

$$u_0 = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \pi n [w_n - (-1)^n v_n].$$

Démonstration. Comme précédemment, on résout d'abord le problème sur $(-1,0)$ en cherchant la solution sous forme d'une série de Fourier, ce qui donne la première expression dans (A.2.2). Ensuite, on résout le problème sur $(0,1)$ en utilisant la solution déjà obtenue :

$$\begin{aligned} &u'' - u = -1 - u_0 x - \sum_{n=1}^{\infty} v_n \sin(\pi n x), \quad x \in (0,1),\\ &u(0) = u_0, \quad u(1) = 0. \end{aligned}$$

De même, par la méthode de Fourier, on obtient la seconde expression dans (A.2.2). La constante u_0 est déterminée par la condition de continuité de u' en $x = 0$. □

A.3 Une autre approche pour montrer la convergence des schémas

Dans cette section, nous adaptons au cas non-local la démonstration de convergence des schémas numériques proposée par Fleming & Soner [FS93]. Nous avons développé cette méthode dans l'espoir de prouver la convergence dans des cas qui ne seraient pas couverts par l'approche de viscosité (notamment, nous espérions contourner l'absence de principe de comparaison dans le cas d'un domaine borné). Finalement, nous nous sommes retrouvés avec le même genre de difficultés ce qui n'était pas évident au départ. Nous laissons donc cette démonstration pour montrer le problème sous un autre angle, bien que le résultat que nous obtenons soit le même. Pour ne pas alourdir la présentation, nous considérons uniquement le schéma 1.

On suppose ici que $\sigma > 0$ ce qui est toujours le cas après la troncature des petits sauts (voir Section 4.3). On note $O^c = \mathbb{R} \setminus O$. Soient $g : [0,T] \times O^c \to \mathbb{R}$ et $h : O \to \mathbb{R}$. Considérons le problème suivant :

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} - Lu = 0, \qquad (0,T] \times O \tag{A.3.1}$$
$$u(\tau, x) = g(\tau, x), \qquad [0,T] \times O^c \tag{A.3.2}$$
$$u(0,x) \;=\; h(x), \qquad x \in O \tag{A.3.3}$$

On écrit le schéma numérique correspondant sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} u(\tau_n, x_i) &= F_\Delta[u(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i), && n = 1, \dots, M,\ i \in \{0, \dots, N-1\} \\ u(\tau_n, x_i) &= g(\tau_n, x_i), && n = 0, \dots, M,\ i \notin \{0, \dots, N-1\} \\ u(0, x_i) \;&=\; h(x_i), && i \in \{0, \dots, N-1\}. \end{aligned} \tag{A.3.4}$$

Soit u^Δ la solution du schéma (A.3.4) définie sur la grille $Q_\Delta = \{(\tau_n, x_i) \mid n = 0, \dots, M,\ i \in \mathbb{Z}\}$ où $\tau_n = n\Delta t$, $x_i = x_0 + i\Delta x$.

Définition A.3.1. Une fonction w^Δ définie sur Q_Δ est une sur-solution du schéma (A.3.4) si

$$\begin{aligned} w^\Delta(\tau_n, x_i) &\geq F_\Delta[w^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i), && n = 1, \dots, M,\ i \in \{0, \dots, N-1\} \\ w^\Delta(\tau_n, x_i) &\geq g(\tau_n, x_i), && n = 0, \dots, M,\ i \notin \{0, \dots, N-1\} \\ w^\Delta(0, x_i) &\geq h(x_i), && i \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

Une fonction z^Δ sur Q_Δ est une sous-solution de (A.3.4) si

$$\begin{aligned} z^\Delta(\tau_n, x_i) &\leq F_\Delta[z^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i), && n = 1, \dots, M,\ i \in \{0, \dots, N-1\} \\ z^\Delta(\tau_n, x_i) &\leq g(\tau_n, x_i), && n = 0, \dots, M,\ i \notin \{0, \dots, N-1\} \\ z^\Delta(0, x_i) &\leq h(x_i), && i \in \{0, \dots, N-1\} \end{aligned}$$

Lemme A.3.2. *Pour toute sur-solution w et toute sous-solution z de (A.3.4), on a*

$$z^\Delta \le u^\Delta \le w^\Delta \quad \text{sur } Q_\Delta.$$

Démonstration. Pour $n = 0$ ou $i \notin \{0, \dots, N-1\}$ les inégalités sont vérifiées par définition. Pour $n > 0$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, c'est une conséquence directe de la monotonie du schéma. En effet, si $z^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot) \le u^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot) \le w^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)$, alors, pour $i \in \{0, \dots, N-1\}$, on obtient

$$\begin{aligned} z^\Delta(\tau_n, x_i) \le F_\Delta[z^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i) &\le F_\Delta[u^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i) \\ &= u^\Delta(\tau_n, x_i) \\ &= F_\Delta[u^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i) \le F_\Delta[w^\Delta(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i) = w^\Delta(\tau_n, x_i). \end{aligned}$$

□

On va démontrer maintenant la consistance du schéma dans la norme uniforme pour une classe de fonctions suivante :

$$\begin{aligned} E = \{v(\text{prolongée par } g) : [0,T]\times\mathbb{R} \to \mathbb{R} \ \text{ uniformément continue}, \ \ v \in C^{1,2}([0,T]\times O) \\ \text{avec } \frac{\partial v}{\partial \tau}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \ \text{ uniformément continues sur } [0,T]\times O\}. \end{aligned} \tag{A.3.5}$$

Proposition A.3.3 (Consistance dans la norme uniforme)**.** *Si v appartient à E, alors, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \Delta > 0$ t.q.*

$$\left| \frac{v(\tau_n, x_i) - v(\tau_{n-1}, x_i)}{\Delta t} - L_\Delta v(\tau_n, x_i) - \left(\frac{\partial v}{\partial \tau} - Lv \right)(\tau, x) \right| < \varepsilon, \tag{A.3.6}$$

pour tous Δt, $\Delta x > 0$, $(\tau, x) \in (0,T] \times O$, $n \ge 1$, $i \in \{0, \dots, N-1\}$, tels que $\sup\{\Delta t, \Delta x, |\tau_n - \tau|, |x_i - x|\} < \Delta$.

Démonstration. Supposons que $\sup\{\Delta t, \Delta x, |\tau_n - \tau|, |x_i - x|\} < \Delta$. Il faut montrer que l'expression dans (A.3.6) est majorée par $\alpha(\Delta)$ indépendamment de $(\tau, x), (\tau_n, x_i) \in (0,T] \times O$, tel que $\alpha(\Delta) \to 0$ lorsque $\Delta \to 0$. On a :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{v(\tau_n, x_i) - v(\tau_{n-1}, x_i)}{\Delta t} - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) \right| = \left| \frac{1}{\Delta t} \int_{\tau_{n-1}}^{\tau_n} \left(\frac{\partial v}{\partial \tau}(t, x_i) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) \right) dt \right| \\ &\le \sup_{t \in (\tau_{n-1}, \tau_n)} \left| \frac{\partial v}{\partial \tau}(t, x_i) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) \right| \le \sup_{\substack{t, \tau \in (0,T],\, y, x \in O \\ |t-\tau| \le 2\Delta \\ |y-x| \le \Delta}} \left| \frac{\partial v}{\partial \tau}(t, y) - \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau, x) \right| \xrightarrow{\Delta \downarrow 0} 0, \end{aligned} \tag{A.3.7}$$

car $\frac{\partial v}{\partial \tau}$ est uniformément continue sur $(0,T] \times O$ par hypothèse.

Considérons maintenant les termes dans Dv (la partie différentielle de Lv). En utilisant le développement de Taylor jusqu'au deuxième ordre, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{v(\tau_n, x_{i-1}) - 2v(\tau_n, x_i) + v(\tau_n, x_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x)\right| \\
&\qquad = \left|\frac{1}{\Delta x^2}\int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau_n, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x)\right)(\Delta x - |x_i - y|)dy\right| \\
&\leq 2 \sup_{y\in(x_{i-1},x_{i+1})} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau_n, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x)\right| \leq 2 \sup_{\substack{t,\tau \in (0,T], y, x \in O \\ |t-\tau|\leq\Delta \\ |y-x|\leq 2\Delta}} \left|\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, y) - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x)\right| \overset{\Delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0,
\end{aligned}$$

puisque $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$ est uniformément continue sur $(0, T] \times O$. De la même façon, on montre que

$$\begin{aligned}
\left|\frac{v(\tau_n, x_{i+1}) - v(\tau_n, x_i)}{\Delta x} - \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_i}^{x_{i+1}} \left(\frac{\partial v}{\partial x}(\tau_n, y) - \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x)\right) dy\right| \\
&\leq \sup_{\substack{t,\tau \in (0,T], y, x \in O \\ |t-\tau|\leq\Delta \\ |y-x|\leq 2\Delta}} \left|\frac{\partial v}{\partial x}(t, y) - \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x)\right| \overset{\Delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Il en vient que

$$\begin{aligned}
|(D_\Delta v)(\tau_n, x_i) - (Dv)(\tau, x)| = \Bigg|&\frac{\sigma^2}{2}\left[\frac{v(\tau_n, x_{i-1}) - 2v(\tau_n, x_i) + v(\tau_n, x_{i+1})}{\Delta x^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(\tau, x)\right] \\
&+ \left(\frac{\sigma^2}{2} - r + \alpha\right)\left[\frac{v(\tau_n, x_{i+1}) - v(\tau_n, x_i)}{\Delta x} - \frac{\partial v}{\partial x}(\tau, x)\right]\Bigg| \overset{\Delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

La partie intégrale peut être estimée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
|(J_\Delta v)(\tau_{n-1}, x_i) - (Jv)(\tau, x)| &= \left|\sum_{j=K_l}^{K_r} v(\tau_{n-1}, x_i + y_j)\nu_j - \int_{B_l}^{B_r} v(\tau, x + y)\nu(\mathrm{d}y)\right| \\
&= \left|\sum_{j=K_l}^{K_r} \int_{(j-1/2)\Delta x}^{(j+1/2)\Delta x} (v(\tau_{n-1}, x_i + y_j) - v(\tau, x + y))\nu(\mathrm{d}y)\right| \\
&\leq \lambda\Delta \sup_{\substack{\theta_1,\theta_2 \in [0,T], \xi_1,\xi_2 \in \mathbb{R} \\ |\theta_1-\theta_2|\leq 2\Delta \\ |\xi_1-\xi_2|\leq 3\Delta/2}} |v(\theta_1, \xi_1) - v(\theta_2, \xi_2)| \overset{\Delta\downarrow 0}{\longrightarrow} 0, \quad \text{(A.3.8)}
\end{aligned}$$

puisque v est uniformément continue sur $[0, T] \times \mathbb{R}$.

En rassemblant toutes ces estimations, on obtient (4.6.1). □

Définition A.3.4. Une fonction $w \in E$ est une *sur-solution régulière* du problème (A.3.1)–(A.3.3) si elle vérifie les inégalités suivantes :

$$\frac{\partial w}{\partial \tau}(\tau, x) - Lu(\tau, x) \geq 0, \qquad (\tau, x) \in (0, T] \times O, \tag{A.3.9}$$

$$w(\tau, x) \geq g(\tau, x), \qquad x \in O^c, \tag{A.3.10}$$

$$w(0, x) \geq h(x), \qquad x \in O. \tag{A.3.11}$$

Une fonction $z \in E$ est une *sous-solution régulière* du problème (A.3.1)–(A.3.3) si elle vérifie (A.3.9)– (A.3.11) avec les inégalités inverses.

Lemme A.3.5. *Soient $w(\tau, x)$ et $z(\tau, x)$ une sur-solution et une sous-solution régulières du problème (A.3.1)–(A.3.3). Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\Delta > 0$ tel que $\forall \Delta t, \Delta x \leq \Delta$, $\forall n \geq 0$, $\forall i \in \mathbb{Z}$,*

$$z(\tau_n, x_i) - \varepsilon < u^{\Delta}(\tau_n, x_i) < w(\tau_n, x_i) + \varepsilon. \tag{A.3.12}$$

Démonstration. Choisissons b tel que $0 < b(T + 1) < \varepsilon$ et posons $\bar{w}(\tau, x) = w(\tau, x) + b(\tau + 1)$. Si $i \notin \{0, \ldots, N - 1\}$, on a

$$\bar{w}(\tau_n, x_i) = w(\tau_n, x_i) + b(\tau_n + 1) \geq g(\tau_n, x_i) + b(\tau_n + 1) \geq g(\tau_n, x_i). \tag{A.3.13}$$

Si $i \in \{0, \ldots, N - 1\}$,

$$\bar{w}(0, x_i) = w(0, x_i) + b \geq h(x_i) + b \geq h(x_i). \tag{A.3.14}$$

Si $n \geq 1$, $i \in \{0, \ldots, N - 1\}$, on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\bar{w}(\tau_n, x_i) - \bar{w}(\tau_n - \Delta t, x_i)}{\Delta t} - L_{\Delta}\bar{w}(\tau_n, x_i) &= \frac{w(\tau_n, x_i) - w(\tau_n - \Delta t, x_i)}{\Delta t} - L_{\Delta} w(\tau_n, x_i) \\ &+ \frac{b(\tau_n + 1) - b(\tau_n - \Delta t + 1)}{\Delta t} + \lambda b(\tau_n + 1) - \sum_{\substack{j \\ 0 \leq i + j \leq N - 1}} \nu_j b(\tau_n - \Delta t + 1) \\ &\to \left(\frac{\partial w}{\partial \tau}(\tau, x) - Lu(\tau, x)\right) + b[1 + (\tau + 1) \sum_{\substack{j \\ i + j \notin \{0, \ldots, N - 1\}}} \nu_j] > 0, \end{aligned} \tag{A.3.15}$$

quand $\Delta t, \Delta x \to 0$, $(\tau_n, x_i) \to (\tau, x)$, uniformément dans $(0, T] \times O$, d'après la Proposition A.3.3. Donc, pour un $\Delta > 0$ suffisamment petit, $\forall \Delta t, \Delta x \leq \Delta$, on a

$$\frac{\bar{w}(\tau_n, x_i) - \bar{w}(\tau_n - \Delta t, x_i)}{\Delta t} - L_{\Delta}\bar{w}(\tau_n, x_i) \geq 0,$$

ou

$$\bar{w}(\tau_n, x_i) \geq F_{\Delta}[\bar{w}(\tau_n - \Delta t, \cdot)](x_i), \qquad \forall n \geq 1,\ \forall i \in \{0, \ldots, N - 1\}. \tag{A.3.16}$$

D'après (A.3.13), (A.3.14) et (A.3.16), la fonction $\bar{w}$ est une sur-solution de (A.3.4), donc le Lemme A.3.2 implique que

$$u^{\Delta}(\tau_n, x_i) \leq \bar{w}(\tau_n, x_i) \leq w(\tau_n, x_i) + b(T+1) < w(\tau_n, x_i) + \varepsilon, \qquad \forall n \geq 0,\ \forall i \in \mathbb{Z},$$

ce qu'il fallait démontrer. La minoration par $z(\tau_n, x_i) - \varepsilon$ se démontre de la même manière. □

Corollaire A.3.6. *Soient $\underline{u}$ et $\overline{u}$ les fonctions définies par (4.6.17)–(4.6.18). Pour toute sous-solution régulière $z(\tau, x)$ et toute sur-solution régulière $w(\tau, x)$ du problème (A.3.1)–(A.3.3), on a*

$$\forall (\tau, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}, \qquad z(\tau, x) \leq \underline{u}(\tau, x) \leq \overline{u}(\tau, x) \leq w(\tau, x). \tag{A.3.17}$$

Démonstration. Par définition des limites supérieure et inférieure, (A.3.12) implique (A.3.17). □

Proposition A.3.7. *Pour une option européenne ($O = \mathbb{R}$), si h est une fonction bornée sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux avec un nombre fini de sauts alors, pour tout $\tau > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$, la solution du schéma converge vers la solution de (A.3.1)–(A.3.3) :*

$$\lim_{(\Delta t, \Delta x) \to 0} \ \lim_{(\tau_n, x_i) \to (\tau, x)} u^{(\Delta t, \Delta x)}(\tau_n, x_i) \quad = \quad u(\tau, x).$$

Démonstration. Si $\underline{h}, \overline{h} \in C^{\infty}(\mathbb{R})$ sont telles que $\underline{h} \leq h \leq \overline{h}$ alors, d'après la Proposition 3.4.6 et la Remarque 3.4.7, $z(\tau, x) = \mathbb{E}[\underline{h}(x + Y_\tau)]$ et $w(\tau, x) = \mathbb{E}[\overline{h}(x + Y_\tau)]$ sont des solutions $C^{\infty}([0, T] \times \mathbb{R})$ de l'équation (A.3.1). Donc $z, w \in E$ car les dérivées d'une fonction de classe $C^{\infty}([0, T] \times \mathbb{R})$ sont uniformément bornées. Par conséquent, z est une sous-solution régulière et w une sur-solution régulière (au sens de la Définition A.3.4) du problème de Cauchy (A.3.1), (A.3.3). D'après le Corollaire A.3.6, on obtient (A.3.17). Par ailleurs, on sait que pour tout $\varepsilon > 0$, il est possible de choisir $\underline{h}$ et $\overline{h}$ de telle manière que $w(\tau, x) - z(\tau, x) < \varepsilon$ (voir Corollaire 4.6.13). Cela implique qu'il existe une limite de $u^{(\Delta t, \Delta x)}(\tau_n, x_i)$ et qu'elle est égale à $u(\tau, x)$. La démonstration est terminée. □

Remarque A.3.8. Si h est continue, la convergence du schéma est uniforme en (τ, x). En effet, dans ce cas, on peut choisir $w(\tau, x) - z(\tau, x) \leq \varepsilon$ uniformément sur tout le domaine et l'estimation (A.3.12) est également uniforme sur la grille. Si h présente des discontinuités, l'estimation (4.6.35) dépend de (τ, x), donc cette méthode ne permet pas d'obtenir une convergence uniforme.

Remarque A.3.9. La Proposition A.3.7 s'applique aux options européennes. Dans le cas barrière, la difficulté réside dans le fait qu'il n'est pas toujours possible de trouver des solutions approximantes dans la classe E. En effet, comme nous avons montré dans la Section 3.2.2 (Exemple 3.3.3), même si la condition initiale se raccorde de façon régulière aux conditions aux bords, les dérivées de la solution ne sont pas uniformément continues, sauf dans des cas très particuliers : par exemple, une option à barrière simple avec un processus qui n'a pas de sauts vers le domaine.

Bibliographie

[AA00] L. Andersen and J. Andreasen. Jump-diffusion models : Volatility smile fitting and numerical methods for pricing. *Rev. Derivatives Research*, 4 :231–262, 2000.

[AK04] L. Alili and A.E. Kyprianou. Some remarks on first passage of Lévy processes, the American put and pasting principles. 2004.

[Ama03] A. L. Amadori. Nonlinear integro-differential evolution problems arising in option pricing : a viscosity solutions approach. *J. Differential Integral Equations*, 16(7) :787–811, 2003.

[AO05] A. Almendral and C.W. Oosterlee. Numerical valuation of options with jumps in the underlying. *Applied Numerical Mathematics*, 53 :1–18, 2005.

[Ari05a] Mariko Arisawa. A new definition of viscosity solutions for a class of second-order degenerate elliptic integro-differential equations. *working paper*, 2005.

[Ari05b] Mariko Arisawa. Viscosity solution's approach to jump processes arising in mathematical finances. *working paper*, 2005.

[AT96] O. Alvarez and A. Tourin. Viscosity solutions of non-linear integro-differential equations. *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 13(3) :293–317, 1996.

[Bar94] Guy Barles. *Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi*, volume 17 of *Mathématiques & Applications*. Springer-Verlag, Paris, 1994.

[BBP97] G. Barles, R. Buckdahn, and E. Pardoux. Backward stochastic differential equations and integral-partial differential equations. *Stochastics and Stochastic Reports*, 60 :57–83, 1997.

[BCP68] J.M. Bony, P. Courrège, and P. Priouret. Semi-groupes de Feller sur une variété compacte et problèmes aux limites integro-différentiels du second ordre donnant un principe de maximum. *Annales de L'Institut Fourier*, 18 :369–521, 1968.

[BDR95] G. Barles, Ch. Daher, and M. Romano. Convergence of numerical schemes for parabolic equations arising in finance theory. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 5(1) :125–143, 1995.

[BJ02] G. Barles and E. R. Jakobsen. On the convergence rate of approximation schemes for Hamilton Jacobi Bellman equations. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 36 :33–54, 2002.

[BJ04] G. Barles and E. R. Jakobsen. Error bounds for monotone approximation schemes for Hamilton-Jacobi-Bellman equations. 2004.

[BL82] Alain Bensoussan and Jacques-Louis Lions. *Contrôle Impulsionnel et Inéquations Quasi-Variationnelles*. Dunod, Paris, 1982.

[BL02] Svetlana Boyarchenko and Sergei Levendorskiĭ. *Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory*. World Scientific, River Edge, NJ, 2002.

[BLCN04] M. Briani, C. La Chioma, and R. Natalini. Convergence of numerical schemes for viscosity solutions to integro-differential degenerate parabolic problems arising in financial theory. *Numerische Mathematik*, 98(4) :607–646, 2004.

[BN97] Ole E. Barndorff-Nielsen. Normal inverse Gaussian distributions and stochastic volatility modelling. *Scand. J. Statist.*, 24(1) :1–13, 1997.

[BN98] O.E. Barndorff-Nielsen. Processes of normal inverse Gaussian type. *Finance Stoch.*, (2) :41–68, 1998.

[BN05] M. Briani and R. Natalini. Asymptotic high-order schemes for integro-differential problems arising in markets with jumps. 2005.

[Bon67] J.M. Bony. Problème de Dirichlet et semi-groupe fortement fellerien associé à un opérateur integro-différentiel. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences*, 265 :361–364, 1967.

[BP90] G. Barles and B. Perthame. Comparison principle for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbation of degenerated elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 21 :21–44, 1990.

[BP97] J.P. Bouchaud and M. Potters. *Théorie des Risques Financiers*. Aléa, Saclay, 1997.

[BS91] G. Barles and P.E. Souganidis. Convergence of approximation schemes for fully nonlinear second order equations. *Asymptotic Anal.*, 4(3) :271–283, 1991.

[CBP97] Rama Cont, Jean-Philippe Bouchaud, and Marc Potters. Scaling in financial data : Stable laws and beyond. In B. Dubrulle, F. Graner, and D. Sornette, editors, *Scale Invariance and Beyond*. Springer, Berlin, 1997.

[CGMY02] Peter Carr, Hélyette Geman, Dilip Madan, and Marc Yor. The fine structure of asset returns : An empirical investigation. *Journal of Business*, 75(2) :305–332, 2002.

[CIL92] M. Crandall, H. Ishii, and P.L. Lions. Users guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 27 :1–42, 1992.

[CL84] M. Crandall and P.L. Lions. Two approximations of solutions of Hamilton-Jacobi equations. *Mathematics of Computation*, 43 :1–19, 1984.

[CM98] Peter Carr and D. Madan. Option valuation using the fast Fourier transform. *J. Comput. Finance*, 2(2) :61–73, 1998.

[CT03] R. Cont and P. Tankov. *Financial modelling with jump processes*. Chapman & Hall / CRC Press, 2003.

[CT04] Rama Cont and Peter Tankov. Nonparametric calibration of jump-diffusion option pricing models. *Journal of Computational Finance*, 7(3) :1–49, 2004.

[CW03] Peter Carr and Liuren Wu. The finite moment logstable process and option pricing. *Journal of Finance*, 58(2) :753–778, April 2003.

[dFL03] Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, and G. Labahn. A penalty method for American options with jump-diffusion processes. Working paper, University of Waterloo, March 2003.

[dFV04] Y. d'Halluin, P.A. Forsyth, and K.R. Vetzal. Robust numerical methods for contingent claims under jump-diffusion processes. Working paper, University of Waterloo, January 2004.

[Ebe01] E. Eberlein. Applications of generalized hyperbolic Lévy motion to Finance. In O.E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, and S. Resnick, editors, *Lévy Processes—Theory and Applications*, pages 319–336. Birkhäuser, Boston, 2001.

[EKP98] Ernst Eberlein, Ulrich Keller, and Karsten Prause. New insights into smile, mispricing and Value at Risk : The hyperbolic model. *Journal of Business*, 71(3) :371–405, 1998.

[ER01] Ernst Eberlein and Sebastian Raible. Some analytic facts on the generalized hyperbolic model. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Barcelona, 2000)*, volume 202 of *Progr. Math.*, pages 367–378. Birkhäuser, Basel, 2001.

[Fri64] A. Friedman. *Partial Differential Equations of Parabolic Type*. Prentice Hall, 1964.

[FS93] W.H. Fleming and H.M. Soner. *Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions*. Springer, New York, 1993.

[GL84] F. Gimbert and P.L. Lions. Existence and regularity results for solutions of second order integrodifferential operators. *Ricerche Matematiche*, 33 :315–358, 1984.

[GM92] M.G. Garroni and J.-L. Menaldi. *Green Functions for Second Order Parabolic Integro-Differential Problems*, volume 275 of *Pitman Research Notes in Mathematics Series*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1992.

[GM95] Maria Giovanna Garroni and José-Luis Menaldi. Maximum principles for integro-differential parabolic operators. *Differential Integral Equations*, 8(1) :161–182, 1995.

[GM02] M.G. Garroni and J.L. Menaldi, editors. *Second Order Elliptic Integro-Differential Problems*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2002.

[HM03] Ali Hirsa and Dilip B. Madan. Pricing American options under variance gamma. *Journal of Computational Finance*, 7(2) :63–80, 2003.

[Hul97] John Hull. *Options, Futures and Other Derivative Securities*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 1997.

[Imb04] Cyril Imbert. A non-local regularization of first order Hamilton-Jacobi equations. *à paraître dans J. Differential equations*, 2004.

[Jak02] E. R. Jakobsen. Error bounds for monotone approximation schemes for non-convex degenerated elliptic equations un $\mathbb{R}^1$. 2002.

[Jak03] E. R. Jakobsen. On the rate of convergence of approximation schemes for Bellman equations associated with optimal stopping time problems. *Math. Models Methods in Appl. Sci. (M3AS)*, 13(5) :613–644, 2003.

[JK03] E. R. Jakobsen and H. K. Karlsen. A "maximum principle for semicontinuous functions" applicable to integro-partial differential equations. *à paraître dans Nonlinear Differential Equations Appl.*, 2003.

[JK04] E. R. Jakobsen and H. K. Karlsen. A convergence rate for semi-discrete splitting approximations for degenerate parabolic equations with source terms. 2004.

[JK05] E. R. Jakobsen and H. K. Karlsen. Continuous dependence estimates for viscosity solutions of integro-pdes. *J. Differential Equations*, 212(2) :278–318, 2005.

[JKLC05] E. R. Jakobsen, H. K. Karlsen, and C. La Chioma. Error estimates for approximate solutions to Bellman equations associated with controlled jump-diffusions. 2005.

[JLL90] P. Jaillet, D. Lamberton, and B. Lapeyre. Variational inequalities and the pricing of American options. *Acta Appl. Math.*, 21 :263–289, 1990.

[JS02] Jean Jacod and Albert N. Shiryaev. *Limit Theorems for Stochastic Processes*. Springer, Berlin, 2nd edition, 2002.

[Kop95] I. Koponen. Analytic approach to the problem of convergence of truncated Lévy flights towards the Gaussian stochastic process. *Physical Review E*, 52 :1197–1199, 1995.

[Kou02] S.G. Kou. A jump-diffusion model for option pricing. *Management Science*, 48 :1086–1101, 2002.

[Kry97a] N. Krylov. On the rate of convergence of finite difference approximations of solutions for bellman's equations. *St. Petersburg Mathematics Journal*, 9 :245–256, 1997.

[Kry97b] N. Krylov. On the rate of convergence of finite difference approximations of solutions for bellman's equations with variable coefficients. *Probab. Theor. Relat. Fields*, 117 :1–16, 1997.

[KW01] S.G. Kou and H. Wang. Option pricing under a jump-diffusion model. Disponible sur le site web des auteurs, 2001.

[LL92] Damien Lamberton and Bernard Lapeyre. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance. *Mathématiques et Applications, SMAI*, (9), 1992.

[Mat00] A. Matacz. Financial modeling and option theory with the truncated Lévy process. *Int. J. Theor. Appl. Finance*, 3(1) :143–160, 2000.

[MCC98] D. Madan, P. Carr, and E.C. Chang. The variance gamma process and option pricing. *European Finance Review*, 2 :79–105, 1998.

[Mer76] R.C. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *J. Financial Economics*, 3(1/2) :125–144, Jan/March 1976.

[MM91] D. Madan and F. Milne. Option pricing with variance gamma martingale components. *Math. Finance*, 1(4) :39–55, 1991.

[MS90] D. Madan and E. Seneta. The Variance Gamma model for share market returns. *Journal of Business*, 63(4) :511–524, 1990.

[MvPS04] Ana-Maria Matache, T. von Petersdorff, and Christoph Schwab. Fast deterministic pricing of options on Lévy driven assets. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 38(1) :37–71, 2004.

[NS01] David Nualart and Wim Schoutens. Backward stochastic differential equations and Feynman-Kac formula for Lévy processes, with applications in finance. *Bernoulli*, 7(5) :761–776, 2001.

[Pha98] Huyên Pham. Optimal stopping of controlled jump-diffusion processes : A viscosity solution approach. *Journal of Mathematical Systems*, 8(1) :1–27, 1998.

[Pro90] Philip Protter. *Stochastic integration and differential equations*. Springer, Berlin, 1990.

[Rai98] S. Raible. *Lévy processes in finance : theory, numerics and empirical facts*. PhD thesis, Freiburg University, 1998.

[Ron97] Situ Rong. On solutions of backward stochastic differential equations with jumps and applications. *Stochastic Process. Appl.*, 66(2) :209–236, 1997.

[Ryd97] Tina Hviid Rydberg. The normal inverse Gaussian Lévy process : simulation and approximation. *Comm. Statist. Stochastic Models*, 13(4) :887–910, 1997.

[Sat99] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1999.

[Say91] A. Sayah. Equations d'Hamilton Jacobi du premier ordre avec termes integrodifferentiels. *Comm. Partial Differential Equations*, 16 :1057–1093, 1991.

[Son86] H.M. Soner. *Optimal Control of Jump-Markov Processes and Viscosity Solutions*, volume 10 of *IMA Volumes in mathematics and applications*, pages 501–511. Springer Verlag, New York, 1986.

[Tan04] Peter Tankov. *Processus de Lévy en finance : problèmes inverses et modélisation de dépendance*. PhD thesis, Ecole Polytechnique, Palaiseau, 2004.

[TR00] D. Tavella and C. Randall. *Pricing Financial Instruments : the Finite Difference Method*. Wiley, New York, 2000.

[Zha94] XiaoLan Zhang. *Analyse Numérique des Options Américaines dans un Modèle de Diffusion avec Sauts*. PhD thesis, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.

[Zha97a] XiaoLan Zhang. Numerical analysis of American option pricing in a jump-diffusion model. *Math. Oper. Res.*, 22(3) :668–690, 1997.

[Zha97b] XiaoLan Zhang. Valuation of American options in a jump-diffusion model. In *Numerical methods in finance*, pages 93–114. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.