

Des Algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle

Michel Schmitt

▶ **To cite this version:**

Michel Schmitt. Des Algorithmes morphologiques à l'intelligence artificielle. Mathematics [math]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 1989. English. NNT : . pastel-00001572

HAL Id: pastel-00001572
https://pastel.hal.science/pastel-00001572

Submitted on 15 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DES ALGORITHMES MORPHOLOGIQUES

A

L'INTELLIGENCE ARTIFICIELLE

THESE

présentée à

l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris

par

Michel SCHMITT

pour obtenir le titre de

DOCTEUR

en

MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE

Soutenue le 10 février 1989

devant le Jury composé de :

MM.	Georges	MATHERON	Président
	Jean-Daniel	BOISSONNAT	Rapporteur
	Christian	LANTUEJOUL	Rapporteur
	Olivier	FAUGERAS	Examinateur
	Jean	SERRA	Examinateur
	Claude	PUECH	Examinateur

Remerciements

Cette thèse n'aurait pas vu le jour sans l'aide d'un certain nombre de personnes. J'adresse ici mes plus vifs remerciements

à G. Matheron qui m'a fait l'honneur de présider le jury et qui, par ses ouvrages de référence, m'a donné le goût de chercher à faire de bonnes mathématiques (appliquées, bien sûr).

à O. Faugeras qui m'a accueilli dans son laboratoire à l'INRIA et m'a toujours soutenu, aussi bien scientifiquement que financièrement. Je le remercie aussi pour le temps qu'il m'a consacré et ses discussions fructueuses.

à J. Serra qui a été le directeur de cette thèse et m'a fait découvrir la morphologie mathématique et m'a accueilli au centre de Morphologie Mathématique pendant deux ans.

à Ch. Lantuéjoul en tant que rapporteur auprès du jury. Il n'a pas ménagé sa peine pour m'initier à ses travaux que j'ai essayé de poursuivre ici.

à J-D. Boissonnat en tant que rapporteur auprès du jury. Ses travaux sur la triangulation de Delaunay ont été le point de départ de nombreuses réflexions scientifiques.

à C. Puech pour avoir accepté de participer à ce jury et pour m'avoir révélé les beautés de la géométrie informatique.

à F. Maisonneuve pour m'avoir communiqué un certain nombre de dossiers non publiés concernant les géodésiques.

à J-P. Merlet pour son logiciel JPdraw qui m'a permis de créer les schémas de cette thèse ainsi que par sa disponibilité.

au Corps des Mines qui m'a autorisé à me former par la recherche et n'a pas hésité à me soutenir financièrement.

à tous ceux qui travaillent à l'Ecole des Mines et à l'INRIA et qui ont pris part de près ou de loin à ce travail et leur liste est longue !

enfin à ma femme Marie-Nathalie et mes enfants Matthieu et Jérôme qui m'ont supporté pendant ces trois années de travail ainsi qu'à mes parents et Anne et Pierre qui m'ont donné envie de construire de belles images.

A Thalie

Il faut imaginer Vénus turbulente,
au dessus du bruit de la mer.

Michel Serres

Il n'est plus besoin de présenter la morphologie mathématique. De nombreux chercheurs et industriels aussi bien en analyse d'images qu'en robotique utilisent ses primitives. Nous ne nous risquerons donc pas à en délimiter formellement les frontières. Pour nous, la morphologie mathématique sera "ce qui tourne autour des relations ensemblistes suivantes" :

$$K \subset X, \qquad K \cap X \neq \emptyset, \qquad K \subset X^c$$

où X représente l'ensemble à analyser – l'objet ou l'image – et K un ensemble analysant que l'on appelle généralement "élément structurant". X est donc une donnée dépendant des moyens d'acquisition, donnée sur laquelle nous n'avons que peu d'action. Au contraire, nous sommes maîtres du choix de K que nous ferons varier pour les besoins de l'analyse. Notons au passage que le choix de relations ensemblistes n'est pas anodin : d'emblée il élimine de notre champ d'investigations les techniques linéaires à base de convolution. Certains y verront une analogie avec le monde visuel : les signaux émis par divers objets ne s'additionnent pas car un objet opaque occulte tout ce qui est derrière lui.

Deux cadres théoriques ont été développés pour rendre compte de ces relations ensemblistes :

1. dans un espace localement compact et séparable E (espace LCS), en utilisant explicitement la topologie de E. On y étudie en particulier la régularité des opérateurs (continuité, semi-continuité) ainsi que la notion d'ensemble ou de fonction aléatoire. L'ouvrage de base sur cette approche reste "Random sets and integral geometry" de G. Matheron [Mat75].

2. dans un treillis complet, en mettant en valeur les propriétés algébriques des opérateurs telles que la commutation avec le sup ou la croissance. Cette approche a eu pour point de départ l'article de G. Matheron "filters and lattices" [Mat83], [Mat88b] et a abouti à la thèse de J. Serra "Eléments de théorie pour l'optique morphologique" [Ser86]. Ce domaine fait actuellement l'objet d'actives recherches.

C'est pourtant la première approche que nous poursuivrons ici dans le cadre de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$. Nous construirons d'abord des outils issus de la morphologie mathématique, puis nous montrerons comment s'en servir pour résoudre des problèmes d'analyse d'image.

Dans une première partie, nous exposerons la construction désormais classique d'une topologie sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$ ainsi que sa σ-algèbre associée (tribu borélienne). Nous l'illustrerons par l'analyse de la convergence d'algorithmes fondés sur la triangulation de Delaunay et utilisés en robotique pour représenter des données issues d'algorithmes de stéréoscopie bi- et tri-noculaires. Les relations ensemblistes interviennent ici dans la définition des "voisins" d'un ensemble donné. En effet la topologie utilisée est engendrée par les ouverts :

$$\mathcal{F}^K_{G_1,G_2,\ldots,G_p} = \{F \text{ fermés}, F \cap K = \emptyset,\ F \cap G_i \neq \emptyset\}$$

où K est un compact et $(G_i)_{i=1}^p$ une famille finie d'ouverts de $\mathbb{R}^n$.

La seconde partie nous amènera vers des domaines plus connus en morphologie mathématique : dilatation, érosion... c'est à dire la construction des primitives morphologiques. Là encore, le lien avec les relations ensemblistes est clair : le dilaté de X par K est l'ensemble des positions pour lesquelles K coupe l'ensemble X.

$$X \oplus \check{K} = \{x,\ K_x \cap X \neq \emptyset\}$$

où K_x est le translaté de K au point x. Nous ne ferons pas ici une description exhaustive des opérateurs, mais nous les examinerons sous un angle algorithmique original. Nous partirons de l'idée simple que la frontière du dilaté d'un convexe par un cercle de rayon r est la courbe parallèle à distance r. Cette remarque nous permettra de construire une nouvelle classe d'algorithmes travaillant uniquement sur les frontières des ensembles et par suite extrêmement rapides, en particulier dans le cas de transformations géodésiques.

Nous irons plus loin dans l'exploitation de cette technique algorithmique au cours de la troisième partie, en montrant comment calculer la fonction de propagation, outil très puissant, mais peu employé puisque le seul algorithme connu à ce jour est excessivement lent. La correction de l'algorithme nous permettra de mettre en évidence certaines notions concernant les géodésiques dans $\mathbb{R}^2$ muni de métriques issues d'un polygone convexe symétrique d'intérieur non vide.

La quatrième partie montre alors comment utiliser les opérateurs morphologiques pour résoudre un problème réel d'analyse d'image. Notre but n'est pas de donner une solution au problème, mais de montrer comment on arrive à des solutions, quels sont les critères qu'elles mettent en jeu. Le pluriel est ici intentionnel – nous donnerons une dizaine de solutions différentes – car nous voulons illustrer le fait qu'un problème peut se résoudre de nombreuses manières très distinctes dans leur conception : la solution qui est habituellement publiée n'est en général qu'une parmi d'autres.

Nous finirons en cherchant à mieux formaliser l'emploi des primitives morphologiques. Nous verrons que l'on peut les organiser selon leur complexité parallèlement à leurs effets de plus en plus sélectifs. Nous illustrerons cela par la description d'un système de programmation automatique, qui, à partir d'une image et d'une question, fournit une suite de transformations morphologiques, c'est-à-dire un programme.

Partie I

Morphologie mathématique et géométrie combinatoire

Introduction

La morphologie mathématique est surtout connue en robotique par la dilatation et l'érosion. En effet, si X représente l'espace libre dans lequel peut se mouvoir un robot K en translation uniquement (donc en particulier sans rotation), l'ensemble représentant les positions ou ce robot est à l'intérieur de l'espace libre est donné par l'érodé de X par K :

$$E_K(X) = X \ominus \check{K} = \{x,\ K_x \subset X\}$$

où K_x est le translaté de K par le vecteur $\vec{x}$ et $\check{K}$ est le symétrique de K par rapport à l'origine de l'espace. L'ensemble des points que le robot atteindra est donné par l'ouverture de X par K :

$$(X)_K = (X \ominus \check{K}) \oplus K = \bigcup \{K_x,\ K_x \subset X\}$$

où $\oplus$ est l'addition de Minkowski :

$$A \oplus B = \{a + b,\ a \in A \text{ et } b \in B\} = \{x,\ \check{B}_x \cap A \neq \emptyset\}$$

A l'aide d'outils de la géométrie informatique, des algorithmes ont été développés pour calculer de manière efficace l'érodé où l'ouvert dans le cas ou X est un polygone (ou polyèdre) ou un ensemble limité par des segments et des arcs de cercle [LPW79]. Cet aspect des choses échappe alors largement à la morphologie mathématique dont le but est plutôt d'examiner les propriétés des opérateurs fondés sur des relations du type $K \cap X \neq \emptyset$ ou $K \subset X$.

Dans ce chapitre, nous exposerons d'abord la topologie que fournit la morphologie mathématique sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$ et l'illustrerons par l'étude de la convergence vers le squelette d'une forme de l'ensemble des centres des boules circonscrites aux simplexes (boules de Delaunay) dans la triangulation de Delaunay. Puis nous passerons au cadre aléatoire associé et l'illustrerons par des éléments de calcul de complexité dans le cas moyen d'algorithmes utilisant des techniques de décompositions en cellules ("bucketing techniques" en anglais).

[0]Ce chapitre est paru dans les actes des Journées Géométrie et Robotique, LAAS/CNRS – Toulouse, 26–28 Mai 1988, Ed : J.D. Boissonnat et J.P. Laumond.

Chapitre 1

La topologie en tout ou rien

L'un des outils les plus communs lorsque l'on cherche à évaluer la différence entre deux formes est la distance de Hausdorff. La distance entre K et K' est définie comme suit :

$$\begin{aligned} \varrho(K,K') &= \max\left\{\sup_{x\in K} d(x,K'), \sup_{x\in K'} d(x,K)\right\} \\ &= \inf\left\{\varepsilon, K\subset K'\oplus B_\varepsilon, K'\subset K\oplus B_\varepsilon\right\} \end{aligned}$$

où B_ε est la boule fermée de rayon ε. Cependant, cette distance n'est définie que sur l'ensemble des compacts non vides de $\mathbb{R}^n$. Celui-ci, muni de la distance de Hausdorff n'est pas compact et ne permet pas de traiter les cas limites où l'on aimerait qu'une suite de compacts "converge" vers un demi-plan par exemple.

Nous proposons de montrer comment il est possible de pourvoir l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$ d'une topologie n'ayant pas les défauts que nous venons d'évoquer, de laquelle nous déduirons une σ-algèbre au paragraphe 2 en vue de manipuler des fermés aléatoires.Dans les paragraphes 1 et 2, nous suivrons la démarche de G. Matheron [Mat75]. Nous omettrons systématiquement les démonstrations pour nous concentrer sur les outils ainsi développés. Au contraire, lors de leur utilisation, nous donnerons des éléments de démonstration.

1.1 Définition d'une topologie sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$

Notons $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{F}$ quand il n'y a pas d'ambiguïté l'ensemble des fermés topologiques de $\mathbb{R}^n$ muni de sa topologie habituelle et $\mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ ou $\mathcal{K}$ celui des compacts. Nous avons vu que la morphologie mathématique reposait sur des relations du type $K\subset X$ et $K\cap X\neq\emptyset$. Il est possible de construire une topologie $\mathcal{T}$ à partir de ces dernières.

Définition 1.1

On appelle topologie en tout ou rien sur $\mathcal{F}$ la topologie engendrée par les ensembles

$$\mathcal{F}^K_{G_1,\ldots,G_p} = \{F\in\mathcal{F},\ F\cap K=\emptyset \text{ et } F\cap G_i\neq\emptyset\}$$

où $p\in\mathbb{N}$, $K\in\mathcal{K}$ est compact et $(G_i)_{i=1}^p$ est une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$

Pourquoi un seul compact ? Simplement parce que

$$K_1 \cap X = \emptyset \text{ et } K_2 \cap X = \emptyset \Rightarrow (K_1 \cup K_2) \cap X = \emptyset$$

ce qui montre qu'il est inutile de considérer plusieurs compacts simultanément.

Sous ces hypothèses :

Théorème 1.2

$(\mathcal{F}, \mathcal{T})$ est compact, séparé et séparable (i.e. $\mathcal{T}$ admet une base dénombrable).

La propriété de compacité qui nous servira par la suite peut se traduire de la façon suivante : toute suite de fermés admet au moins une valeur d'adhérence.

Illustrons ce point qui peut paraître paradoxal au premier abord : $\mathbb{R}^n$ n'est pas compact, alors que $\mathcal{F}$ l'est ! Soit $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\mathbb{R}^n$ qui diverge à l'infini $x_i \to \infty$. Alors $(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés qui converge vers $\emptyset$.

Comme la topologie $\mathcal{T}$ est séparable, il est possible de nous restreindre à l'étude des suites. Le théorème fondamental suivant donne une interprétation plus physique de $\mathcal{T}$ à l'aide de suites de points de $\mathbb{R}^n$.

Théorème 1.3

Une suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de fermés converge vers F si et seulement si on a simultanément :

Critère 1 : *$\forall x \in F$, $\exists x_i \in F_i$ à partir d'un certain rang, $x_i \to x$.*

Critère 2 : *Soient une sous-suite extraite $(F_{i_k})_{i_k\in N}$ de $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $x_{i_k} \in F_{i_k}$. Alors $x_{i_k} \to x \Rightarrow x \in F$.*

On peut en déduire facilement les points suivants :

1. L'application $\cup : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est continue,
2. Si $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés, alors $\lim F_i = \cap F_i$,
3. Si $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante de fermés, alors $\lim F_i = \overline{\cup F_i}$,
4. L'addition de Minkowski $\oplus$ de deux fermés n'étant pas nécessairement un fermé nous ne pouvons rien dire pour l'instant.

Malheureusement, l'intersection $\cap : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ n'est pas continue ce qui nous pousse à examiner plus en détail les notions de limite supérieure et inférieure ainsi que celle de semi-continuité.

Les critères 1 et 2 du théorème 1.3 permettent de définir deux fermés qui sont respectivement l'intersection et l'union de toutes les valeurs d'adhérence de la suite $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$.

Définition 1.4

Soit $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés. On appelle

1. *limite inférieure de $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les limites de suites de points $x_i \in F_i$. C'est le plus grand fermé qui vérifie le critère 1.*
2. *limite supérieure de $(F_i)_{i\in\mathbb{N}}$ l'ensemble de toutes les valeurs d'adhérence de suites de points $x_i \in F_i$. C'est le plus petit fermé qui vérifie le critère 2.*

En particulier :

$$F_i \to F \Longleftrightarrow \limsup F_i = \liminf F_i.$$

La semi-continuité s'en déduit comme dans le cas des fonctions réelles de variable réelle :

Définition 1.5

Soit Ω un espace topologique séparable et $\psi : \Omega \to \mathcal{F}$.

1. *ψ est semi-continue supérieure en $\omega \in \Omega$ si et seulement si $\forall\, \omega_i \to \omega,\ \limsup \psi(\omega_i) \subset \psi(\omega)$.*
2. *ψ est semi-continue inférieure en $\omega \in \Omega$ si et seulement si $\forall\, \omega_i \to \omega,\ \liminf \psi(\omega_i) \supset \psi(\omega)$.*

Avec ces définitions,

1. l'application $\cap : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est semi-continue supérieure,
2. l'application qui à F associe sa frontière ∂F est semi-continue inférieure,
3. l'inclusion passe à la limite : $(\forall i,\ F_i \subset F_i') \Rightarrow \limsup F_i \subset \liminf F_i'$.

1.2 Relations entre la topologie en tout ou rien et celle déduite de la distance de Hausdorff

Examinons à présent ce qui se passe sur l'espace $\mathcal{K}' = \mathcal{K} \setminus \{\emptyset\}$ des compacts non vides quand on le munit de la topologie induite par $\mathcal{T}$. Elle ne coïncide pas avec celle induite par la distance de Hausdorff.

Définition 1.6

On appelle topologie myope sur $\mathcal{K}$ la topologie engendrée par les ensembles

$$\mathcal{K}^F_{G_1,\ldots,G_p} = \{K \in \mathcal{K},\ K \cap F = \emptyset \text{ et } K \cap G_i \neq \emptyset\}$$

où $p \in \mathbb{N}$, $F \in \mathcal{F}$ est fermé et $(G_i)_{i=1}^p$ une famille d'ouverts de $\mathbb{R}^n$
Cette topologie coïncide sur $\mathcal{K}'$ avec celle induite par la distance de Hausdorff.

Proposition 1.7

La topologie myope est strictement plus fine que celle induite par $\mathcal{T}$ sur $\mathcal{K}'$.

Précisons le lien entre la convergence pour $\mathcal{T}$ et celle pour la topologie myope dans $\mathcal{K}'$:

Proposition 1.8

Une suite de compacts $(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge pour la topologie myope si et seulement si :

1. *$(K_i)_{i\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{F}$ au sens de $\mathcal{T}$.*
2. *Tous les K_i sont contenus dans un compact fixe.*

Remarque : le terme de topologie myope s'explique alors de lui-même, puisqu'une suite de compacts ne peut converger dans ce sens que si aucun de ses points ne "s'en va" à l'infini : la topologie myope est incapable de les prendre en compte. En reprenant l'exemple d'une suite $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de points divergeant vers l'infini, $(\{x_i\})_{i\in\mathbb{N}}$ converge vers $\emptyset$ dans $\mathcal{F}$ et ne converge pas dans $\mathcal{K}$.

En munissant $\mathcal{F}$ de $\mathcal{T}$ et $\mathcal{K}$ de la topologie myope, nous pouvons énoncer :

- l'addition de Minkowski, $\mathcal{F}\times\mathcal{K}\to\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ est continue,
- l'homothétie $\mathbb{R}^{+*}\times\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ et $\mathbb{R}^{+*}\times\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ est continue,
- l'érosion, $\mathcal{F}\times\mathcal{K}\to\mathcal{F}$ et $\mathcal{K}\times\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ est semi-continue inférieurement,
- l'enveloppe convexe, $\mathcal{K}\to\mathcal{K}$ est continue, l'enveloppe convexe fermée $\mathcal{F}\to\mathcal{F}$ s.c.i,
- l'espace des convexes de $\mathcal{F}$ est fermé dans $\mathcal{F}$, celui des convexes de $\mathcal{K}$ est fermé dans $\mathcal{K}$.

1.3 Application : relations entre le squelette et la triangulation de Delaunay

Donnons nous un objet X de $\mathbb{R}^n$, que nous supposerons compact, dont la frontière est une surface ou une union de surfaces C^3 (X n'est pas nécessairement simplement connexe, ni même connexe). Cet objet idéal ne nous est connu que par un certain nombre de points de mesure sur sa surface. Lorsque les points sont suffisamment denses sur la surface, les centres des sphères de Delaunay associées aux simplexes que fournit la triangulation de Delaunay de ces points donne une bonne approximation du squelette de X (voir figure 1.1). Nous allons montrer comment donner un sens précis au mot "approximation" et quel type de convergence on peut attendre si l'on fait augmenter indéfiniment la densité de points sur la surface de l'objet.

Avant tout, définissons quelques notions que nous emploierons dans toute cette section :

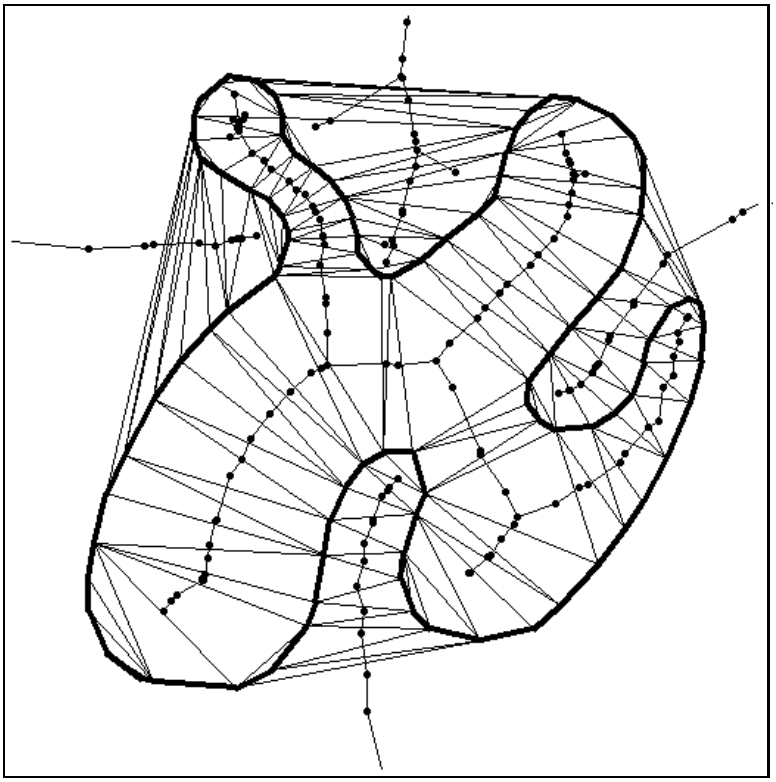


Figure 1.1 : Approximation du squelette par la triangulation de Delaunay.

Définition 1.9

On appelle ensemble de points de densité ε sur X tout ensemble $P = (p_i)_{i=1}^q$ de points de ∂X vérifiant :

$$\forall x \in \partial X,\ \exists i \in [1,q],\ p_i \in B(x,\varepsilon)$$

où $B(x,\varepsilon)$ est la boule fermée de centre x et de rayon ε.

Cette définition montre comment nous nous proposons d'échantillonner aussi finement que l'on veut la surface de X.

Définition 1.10

Le squelette intérieur de X, que nous noterons $Sq_{int}(X)$, est l'adhérence de $B_{max_{int}}(X)$, lieu des centres des boules maximales incluses dans X. En d'autres termes :

$$\begin{aligned} B_{max_{int}}(X) &= \{x,\ \exists r_x,\ B(x,r_x) \subset B(x',r') \subset X \Rightarrow x' = x,\ r' = r_x\} \\ Sq_{int}(X) &= \overline{B_{max_{int}}(X)} \end{aligned}$$

Le squelette extérieur $Sq_{ext}(X)$ se définit de manière analogue à l'aide des boules maximales incluses dans $\overline{X^c}$
Le squelette de X, noté $Sq(X)$ est alors l'union de son squelette intérieur et de son squelette extérieur. De façon analogue, nous noterons $B_{max}(X)$ l'union de $B_{max_{int}}(X)$ et de $B_{max_{ext}}(X)$.

La triangulation de Delaunay est bien connue et nous ne la redéfinirons pas ici [PS85] [BFBM88]. Il nous suffira de savoir qu'elle décompose l'enveloppe convexe d'un ensemble de points en simplexes d'intérieur disjoint. Une de ses propriétés caratéristiques est que la boule circonscrite à tout simplexe, qui est appelée sphère de Delaunay, ne contient aucun autre point de l'ensemble de départ dans son intérieur.

L'étude de la convergence de boules fermées dans $\mathcal{F}$ repose sur la proposition suivante :

Proposition 1.11

Soit $(D_i = B(x_i, r_i))_{i\in\mathbb{N}}$ une suite convergeante de boules dans $\mathcal{F}$.

1. *$x_i \to x$ et $r_i \to r \iff D_i \to B(x,r)$ dans $\mathcal{K}$ donc aussi dans $\mathcal{F}$.*
2. *Sinon (D_i) converge vers une boule généralisée, i.e. soit l'ensemble vide, soit un demi-espace fermé, soit $\mathbb{R}^n$ tout entier.*

Notations :

Pour étudier les problèmes de convergence, nous allons nous donner une suite d'ensembles de points $(P_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de plus en plus denses sur X. Nous supposerons que P_i est de densité $\varepsilon_i \to 0$.

Nous noterons X_i l'ensemble des centres des sphères de Delaunay associées à la triangulation de P_i.

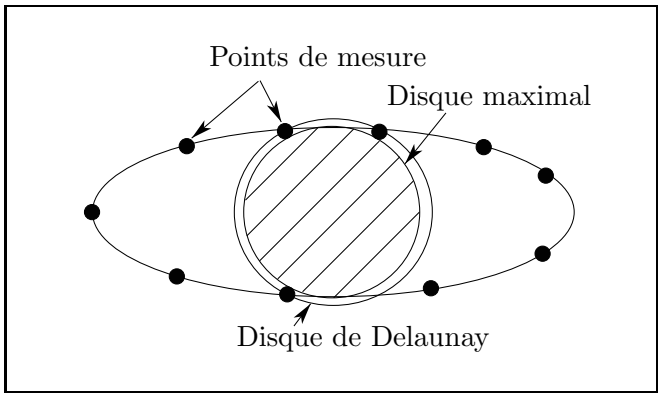


Figure 1.2 : Cercle de Delaunay approximant un cercle maximal.

Nous supposerons enfin que ∂X est une surface C^3.
Sous ces hypothèses, nous allons montrer que $X_i \to Sq(X) = B_{max}(X)$.

1.3.1 Convergence des centres des sphères de Delaunay vers le squelette

De façon heuristique, soit $D = B(x, r)$ une boule associée à un simplexe de la triangulation de P_i. Alors $B(x, r - \varepsilon_i)$ est incluse dans X ou $\overline{X^c}$ tout entière, par définition d'un ensemble de points de densité ε_i. Si ε_i est petit D est "presque maximale" dans X ou $\overline{X^c}$ et donc approxime une boule maximale (voir figure 1.2).

De façon plus précise, nous étudions d'abord les limites possibles de centres de sphères de Delaunay, puis en quel sens a lieu la convergence de l'ensemble des centres de ces sphères et nous montrerons enfin sous quelles hypothèses, tout le squelette est bien atteint.

Montrons que toute suite convergeante de centres de sphères de Delaunay converge vers le centre d'une boule maximale, c'est à dire un point du squelette.

Proposition 1.12

Soit $(D_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de sphères de Delaunay où D_i est associée à un simplexe de la triangulation de P_i. Si D est une valeur d'adhérence de D_i, alors D est maximal dans X ou $\overline{X^c}$.
En d'autres termes :

$$\limsup_{i\to\infty} X_i \subset B_{max}(X).$$

Démonstration : Soit donc une suite extraite $D_{i_k} \to D$. Comme $D_i = B(x_i, r_i)$ est une sphère de Delaunay, et que P_i est un ensemble de points de ∂X de densité ε_i, la boule $B(x_i, r_i - \varepsilon_i)$ ne rencontre pas la frontière de X. Elle est donc incluse dans X ou $\overline{X^c}$. Quitte à extraire une

sous-suite, nous pourrons suppposer que $B(x_{i_k}, r_{i_k} - \varepsilon_{i_k})$ sont tous en même temps dans X ou tous dans X^c. Comme $B(x_{i_k}, r_{i_k} - \varepsilon_{i_k}) \to D$ et que l'inclusion passe à la limite, $D \subset X$ ou $D \subset \overline{X^c}$. Supposons par exemple $D \subset X$ (l'autre cas se traite de manière analogue), et soit D' tel que $D \subset D' \subset X$. Nous allons montrer que $D = D'$, ce qui prouvera que D est maximale.

Notons $(a^0_{i_k}, \ldots, a^n_{i_k})$ les sommets du simplexe auquel D_{i_k} est circonscrit. Quitte à extraire encore une sous-suite, nous pouvons supposer que ces $n+1$ suites convergent vers $a_0, \ldots, a_n$ respectivement. Toutes ces limites sont des points de la frontière de X et appartiennent à D (voir les critères 1 et 2 du théorème de convergence des fermés).

- Supposons que deux de ces limites soient différentes. Comme ces points sont sur la frontière de D et D' (car ces boules sont incluses dans X), et que $D \subset D'$, on a $D = D'$, et D est donc maximal dans X.

- Supposons à présent que toutes ces limites soient égales à a. Plaçons nous d'abord dans le plan. D est le cercle limite du cercle circonscrit à trois points convergeant vers un point a. D est donc osculateur à la frontière (c'est ici qu'il faut supposer ∂X de classe C^3). Alors $D \subset X$ est maximal dans X. Dans $\mathbb{R}^n$, la démonstration est un peu plus délicate : orientons la surface selon la normale intérieure et soient $(c_1, \ldots, c_n)$ les courbures principales en a, classées par ordre croissant. Le rayon de D vérifie $\frac{1}{c_n} \leq r \leq \frac{1}{c_1}$, car D est sphère limite de la sphère circonscrite à $n+1$ points convergeant en a. Comme $D \subset X$, on a $r = \frac{1}{c_n}$. Or le rayon de la sphère maximale incluse dans X et contenant a vaut au plus $\frac{1}{c_n}$, d'où D est maximal.

Ceci achève la démonstration ■

Que se passe-t-il si nous supposons la frontière de X moins régulière ?

1. Si X est limité par une courbe C^∞ par morceaux, des pathologies peuvent apparaître au niveau des points de rebroussement (voir figure 1.3).

2. Si X est un polyèdre la proposition reste vérifiée.

Après avoir montré par la proposition précédente une sorte de convergence simple, montrons qu'en fait, sur tout compact, cette convergence a lieu uniformément.

Proposition 1.13

Soit K un compact.

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^{+*},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall i > n_0,\ K \cap X_i \subset B_{max}(X) \oplus B(0, \varepsilon)$$

c'est à dire que tous les centres qui sont dans K sont à une distance au plus ε de B_{max} si la discrétisation P_i est assez fine.

Démonstration : Supposons que la propriété ne soit pas vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$ et $D_{i_k} = B(x_{i_k}, r_{i_k})$ (sphère de Delaunay associée à un simplexe de la triangulation de P_{i_k}) une suite de sphères telle que $d(x_{i_k}, B_{max}(X)) > \varepsilon$ pour tout k. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que $D_{i_k} \to D = B(x, r)$ dans $\mathcal{F}$, puisque $\mathcal{F}$ est compact. Deux cas sont possibles :

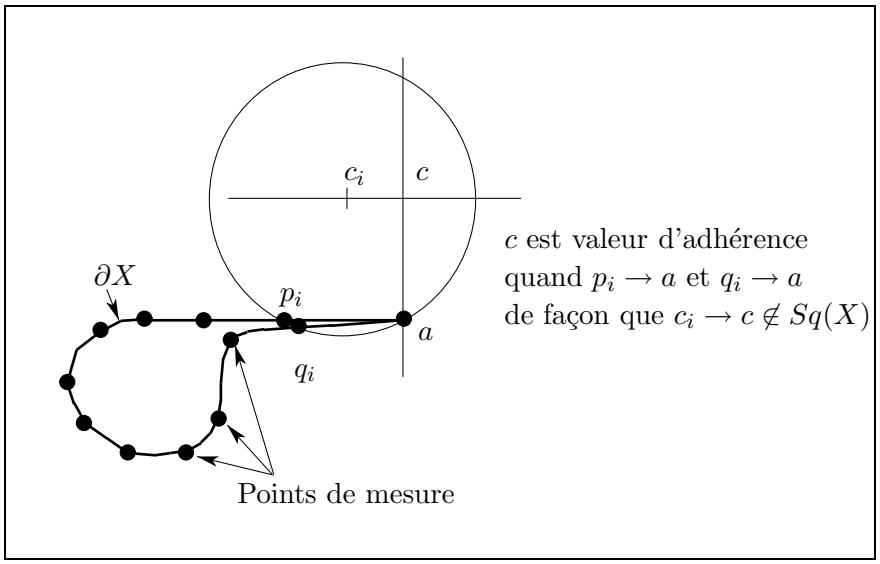


Figure 1.3 : Exemple de limite de centres de cercles de Delaunay qui n'est pas un point du squelette.

- D est une boule vraie : il y a alors convergence dans $\mathcal{K}$. D'après la proposition précédente, x est centre d'une boule maximale, donc appartient au squelette. Or $x_{i_k} \to x$, $x \in B_{max}(X)$ et $d(x_{i_k}, Sq(X)) > \varepsilon > 0$. Il y a contradiction.
- D est une boule généralisée : D ne peut être l'espace entier car X est non vide, ni le vide car D contient au moins un point de ∂X. Donc D est un demi-espace fermé inclus dans $\overline{X^c}$. Donc x_{i_k} diverge vers l'infini, ce qui est en contradiction avec le fait que $x_{i_k} \in K$ ■

Pour l'instant, nous ne savons rien sur $\liminf X_i$, c'est à dire si véritablement tout point du squelette peut effectivement être atteint au moyen des centres des sphères de Delaunay. La réponse est ici encore positive si l'on suppose C^2 la surface ∂X.

Proposition 1.14

$$\liminf_{i \to \infty} X_i \supset B_{max}(X).$$

Démonstration : Soit $D = B(x, r)$ une boule maximale de X ou $\overline{X^c}$. Notons $A = D \cap \partial X$ l'ensemble des "points d'appui" de D sur la frontière de X. $\overset{\circ}{D}$, intérieur de D, ne contient aucun point de P_i. Soit donc $\overset{\circ}{D_i}=\overset{\circ}{B}\ (x_i, r_i)$, boule maximale dans $\mathbb{R}^n \setminus P_i$, $A \subset D \subset D_i$. On peut alors trouver D_i', sphère de Delaunay associée à la triangulation de P_i, s'appuyant sur $D_i \cap P_i$ et contenant le centre de D_i (Nous ne démontrerons par ici ce lemme. Le principe est de faire augmenter le rayon de D_i jusqu'à ce que au moins $n+1$ points soient sur sa surface comme l'illustre la figure 1.4).

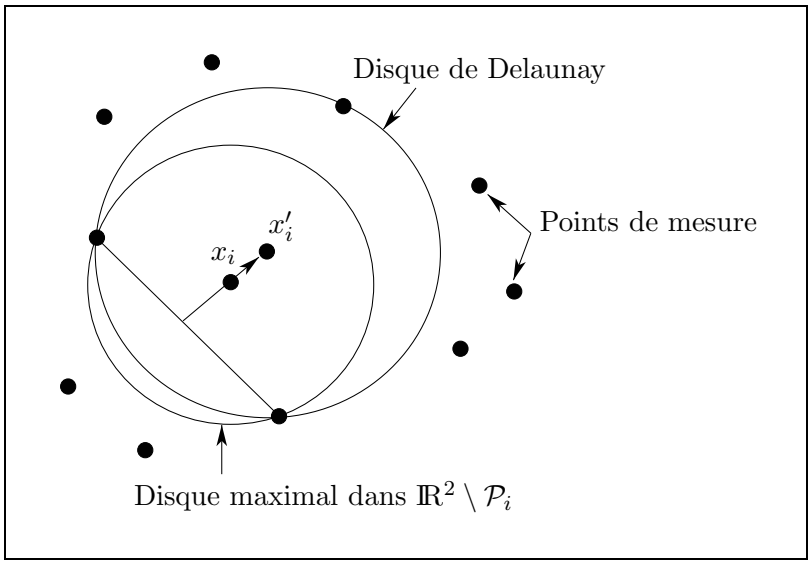


Figure 1.4 : Transformation d'un cercle maximal de $\mathbb{R}^n \setminus P_i$ en cercle de Delaunay.

$D_i \ominus B(0, \varepsilon_i)$ ne contient pas de point de P_i car D_i est maximale dans $\mathbb{R}^n \setminus P_i$ et P_i est de densité ε_i. Soit D_0 une valeur d'adhérence de D_i. Alors $A \subset D \subset D_0 \subset X$ ou $\overline{X^c}$. Comme D est maximale, $D = D_0$ est la seule valeur d'adhérence de D_i. Donc $D_i \to D$. La suite (x_i) des centres de (D_i) converge donc vers x, centre de D. Comme $x_i \in D_i'$, $x \in D'$, une valeur d'adhérence de (D_i') (qui existe bien car $\mathcal{F}$ est compact). D' est une boule maximale puisque limite de boules de Delaunay.

Si la surface ∂X est C^1, il n'y a que deux boules maximales qui s'appuient en $a \in A$, où $A = D \cap \partial X$, l'une D_{int} intérieure à X, l'autre D_{ext} dans $\overline{X^c}$, toutes les deux de rayon non nul si la surface ∂X est C^2. Comme $A \subset D'$, D' est l'une des deux boules D_{ext} et D_{int}. D' est celle qui contient x, c'est à dire aussi D. Donc toute valeur d'adhérence de D_i' est D, i.e. $D_i' \to D$, ce qui achève la démonstration ■

Remarque : Dans le cas d'une courbe C^∞ par morceaux, donc d'un polygone, ce résultat peut être faux, comme le montre l'exemple de la figure 1.5 où deux angles rentrants se font face. Le segment du squelette entre a et b n'est jamais atteint, si l'on suppose que les points p_1 et p_2 sont dans P_i pour tout i.

L'ensemble des propositions que nous avons montrées permet d'énoncer le théorème central :

Théorème 1.15

L'ensemble X_i des centres des sphères de Delaunay associées à la triangulation de P_i converge au sens de la topologie des fermés $\mathcal{T}$ vers le squelette de X.

Démonstration : nous avons vu que

$$\limsup X_i \subset B_{max}(X) \subset \liminf X_i$$

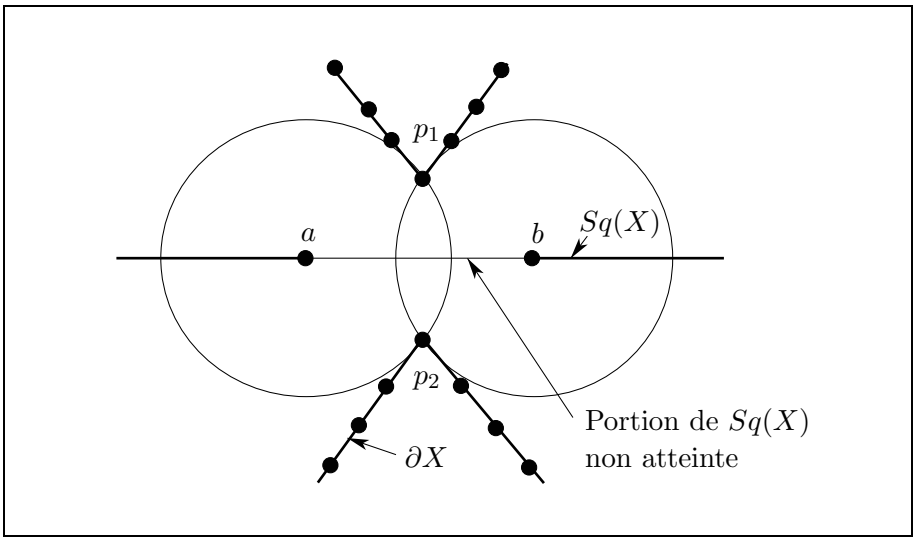


Figure 1.5 : Exemple de polygone où certains points du squelette ne sont pas atteints par des limites de centres de cercles de Delaunay.

Donc $\lim X_i = B_{max}(X)$. Ceci prouve aussi que $B_{max}(X)$ est fermé, c'est à dire que $B_{max}(X) = Sq(x)$, dans le cas où ∂X est C^3.

1.3.2 Vitesse de convergence

Bien que la convergence vers le squelette soit uniforme sur tout compact, cela ne prouve pas que cette convergence soit rapide.

Nous allons apporter quelques éléments de réponse dans le plan, en montrant que c'est seulement au niveau des points terminaux où cette convergence peut être très lente. Pour ne pas alourdir le texte, nous ne donnerons pas les détails des calculs.

Proposition 1.16

Soit X l'ensemble plan, intersection du sur-graphe de la fonction $f(x) = x^2(1-\sqrt{|x|})$ et du carré centré à l'origine de côté $L >> 1$. Alors le point terminal $(0,0)$ est atteint en $O(\sqrt{\varepsilon_i})$ (voir figure 1.6).

Il est donc possible qu'un point terminal soit atteint "lentement".

Remarque : si f est C^3, alors la convergence est $k\frac{f^{(3)}}{f^{(2)}}\varepsilon_i$ où k est une constante indépendante de f.

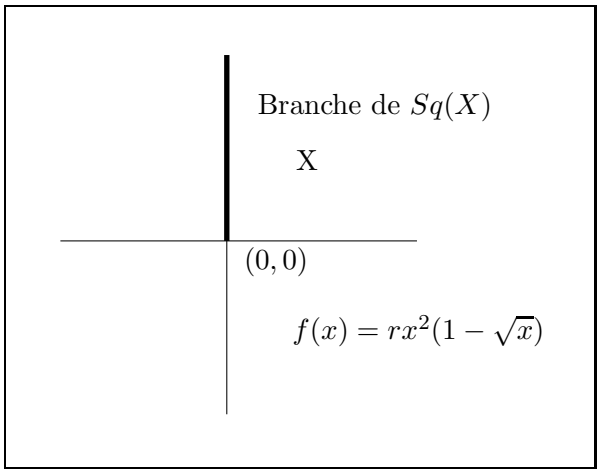


Figure 1.6 : Exemple d'extrémité atteinte lentement.

Proposition 1.17

Soit $D = B(x, r)$ une boule maximal de X ou $\overline{X^c}$, rencontrant la frontière de X en deux points distincts a et b. Soit θ l'angle $(\widehat{a, x, b})$. Soit $D_i = B(x_i, r_i) \to D$ une suite de cercles de Delaunay associés à la triangulation de P_i. Alors :

$$d(x_i, x) < k \times \frac{\cos\theta}{1 - \cos\theta} \times \varepsilon_i$$

où k est une constante indépendante de X.

Cette proposition montre qu'en fait la convergence vers le squelette est, en dehors d'un voisinage des extrémités et de l'infini, linéaire par rapport à ε_i, car θ n'est nul qu'aux extrémités et à l'infini.

1.3.3 Forme du squelette

En nous restreignant au plan $\mathbb{R}^2$, si ∂X est assez régulière, le squelette de X est en fait un graphe planaire localement fini (pour une étude détaillée de ces propriétés, voir [CR67]). Nous avons vu la convergence de X_i au sens des fermés. Cela n'implique pas que les diverses branches du squelette soient respectées. Nous allons montrer que les points multiples sont effectivement respectés.

∂X est un lacet C^3 ou une union de lacets C^3. Les points de P_i peuvent être ordonnés sur chaque lacet de ∂ selon leur abscisse curviligne. Il est donc possible de parler "du polygone" ou "des polygones" composant P_i.

Comment définir un point triple sur X_i ? Pour cela posons :

Définition 1.18

Soient x_1^i et x_2^i deux points de X_i. Nous dirons que x_1^i et x_2^i sont voisins si et seulement si les triangles, ayant pour centre de leur cercle circonscrit ces points, sont adjacents selon une arête qui n'est pas une arête du polygone P_i.

Définition 1.19

x_1^i est un point triple si et seulement s'il a trois voisins.

Remarque : Nous n'étudierons ici que le cas des points triples, qui représentent les seules singularités (avec les points extrémaux) stables du squelette. Nous supposerons donc que pour tout i, quatre points de P_i ne sont jamais cocycliques. Une façon de tourner cette difficulté, lorsque plus de quatre points sont cocycliques, est de trianguler ces points d'une manière quelconque arbitraire. Les centres des cercles de Delaunay associés aux divers simplexes sont alors identiques, et les définitions précédentes peuvent encore s'appliquer en supposant que X_i est un ensemble dont les éléments peuvent apparaître plusieurs fois.

Proposition 1.20

Soit x un point triple du squelette de X. Pour i assez grand, il existe une suite de cercles de Delaunay $D_i = B(x_i, r_i)$ telle que tous les x_i soient des points triples et $x_i \to x$.

Démonstration : Soit $D = B(x, r)$ la boule maximale dont le centre x est point triple du squelette. Cette boule touche la frontière de X en au moins trois points distincts (a, b, c), car x est triple. Soit d un point intérieur au triangle (a, b, c). A partir d'un certain rang, d appartient à l'enveloppe convexe de P_i, car l'enveloppe convexe est continue sur $\mathcal{K}$. Pour tout i, soit t_i un triangle de Delaunay contenant d (d peut être sur la frontière de t_i). Soit t une valeur d'adhérence de t_i et $t_{i_k} \to t$. Soient (a_i, b_i, c_i) les trois sommets de t_i. Quitte à extraire une sous-suite de t_{i_k}, nous supposerons que a_{i_k}, b_{i_k} et c_{i_k} convergent vers a', b' et c' respectivement et que D_{i_k}, cercle de Delaunay associé à t_{i_k} converge vers D'. Alors $d \in t = (a', b', c')$ et t est le triangle (a, b, c). Or D' est un cercle maximal qui s'appuie sur a, b et c, d'où $D = D'$. Comme le triangle (a, b, c) est la seule valeur d'adhérence possible de t_i, $t_i \to t$. t n'est pas un triangle dégénéré, donc on peut supposer, en permutant si besoin a_i, b_i et c_i, $a_i \to a$, $b_i \to b$ et $c_i \to c$ et $D_i \to D$.

A partir d'un certain rang, les distances $d(a, b)$, $d(b, c)$ et $d(c, a)$ sont toutes supérieures à $3 * \varepsilon_i$. Alors $d(a_i, b_i)$, $d(b_i, c_i)$ et $d(c_i, a_i)$ sont supérieures à ε_i. Donc les trois côtés du triangle t_i ne sont plus des arêtes du polygone P_i, et le point x_i admet exactement trois voisins ■

Lorsque le squelette de X se présente comme une union d'arcs et possède un nombre fini de points terminaux et de points triples, la proposition précedente est une première étape pour montrer que, pour une approximation suffisamment fine de ∂X par P_i, le squelette déduit de la triangulation de Delaunay en joignant les centres des cercles de Delaunay voisins a la même forme que le squelette de l'objet X (même topologie au sens des graphes planaires).

En résumé, la triangulation de Delaunay d'un ensemble de points de mesure sur la surface d'un objet fournit un moyen efficace d'estimer le squelette de cet objet, ainsi que sa structure. Cependant l'hypothèse fondamentale est la régularité de la surface échantillonnée : C^3 et modèle régulier. Cette hypothèse est-elle raisonnable pour le monde qui nous entoure ?

Chapitre 2

Ensembles fermés aléatoires

Cette section est motivée par l'étude d'algorithmes de bucketisation, comme le montre par exemple [BFBM88]. Souvent il est nécessaire de tester toutes les intersections des objets d'une classe avec ceux d'une autre. Cette opération coûte cher et la technique des buckets consiste à accélérer ces algorithmes de la manière suivante : l'espace est découpé en zones contiguës (buckets) souvent parallélépipédiques et l'on associe à chaque zone la liste des objets qui la traversent. Or si deux objets s'intersectent, cela se passe dans l'une de ces zones au moins. Ainsi donc, on peut travailler zone par zone en espérant que chacune ne contiendra que peu d'objets.

Dans le cas le pire, rien n'a été gagné, puisque tous les objets peuvent s'intersecter dans une seule zone. Cependant, ce cas est rare, ce qui motive une analyse en moyenne, c'est-à-dire le calcul d'une probabilité. Pour cela, les objets sont assimilés à un ensemble aléatoire X et nous allons évaluer la probabilité d'intersection de X avec un bucket déterministe B : $P(\{X \in \mathcal{F},\ B \cap X \neq \emptyset\})$. Malheureusement, en général, un tel ensemble n'est pas mesurable au sens des processus stochastiques[1]. Nous allons d'abord exposer la σ-algèbre que fournit la morphologie mathématique puis montrerons comment l'employer.

2.1 Définition d'une σ-algèbre et le théorème de Choquet

Lorsque l'on dispose d'une topologie sur un ensemble, il est possible de lui associer une σ-algèbre "naturelle", celle engendrée par les ouverts (tribu borélienne). Dans le cas de $(\mathcal{F}, \mathcal{T})$, cette σ-algèbre, que nous noterons σ_f, est engendrée par la classe des $\mathcal{F}^K$ seule ou celle des $\mathcal{F}_G$ seule, car si $K_i \uparrow G$, alors $\mathcal{F}_{K_i} \uparrow \mathcal{F}_G$; de façon analogue, si $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est un système de voisinages ouverts de K et si $G_i \downarrow K$ alors $\mathcal{F}_{G_i} \downarrow \mathcal{F}_K$. Donc, pour K compact fixé, $\{X,\ K \subset X^c\}$ est un élément de σ_f, c'est-à-dire un événement et l'on pourra parler de sa probabilité.

Définition 2.1

On appelle fermé aléatoire ou RACS (pour Random Closed Set) le triplet $(\mathcal{F}, \sigma_f, P)$ où P est une probabilité sur l'espace mesurable $(\mathcal{F}, \sigma_f)$

[1] C'est le cas en particulier si B n'est pas dénombrable. Cependant, on peut souvent paramétrer X au moyen d'un nombre fini de paramètres et on est alors ramené à calculer des probabilités dans $\mathbb{R}^n$. Nous proposons de sauter le pas, et ce pour éviter de mettre en évidence dans chaque cas ces paramètres.

L'existence de telles probabilités est assurée par la compacité de $\mathcal{F}$ et nous en verrons d'ailleurs un exemple non trivial par la suite.

Comme σ_f est la tribu borélienne, toutes les applications continues ou mêmes semi-continues $\mathcal{A} \to \mathcal{F}$ (où $\mathcal{A}$ est un espace topologique muni de sa tribu borélienne) sont mesurables et définissent donc des variables aléatoires. Ainsi nous avons le droit de parler de l'union, de l'intersection de deux fermés aléatoires ou du dilaté, de l'ouvert d'un fermé aléatoire par un compact déterministe.

De même qu'une variable aléatoire réelle est entièrement déterminée par la donnée de sa fonction de répartition, il est possible de mettre en évidence une notion similaire dans le cas des RACS : c'est le célèbre théorème de Choquet [Cho54].

Théorème 2.2

[Théorème de Choquet] Soit $T : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ une fonctionnelle. Il existe une unique probabilité P sur σ_f telle que $P(\mathcal{F}_K) = P(\{X,\ X \cap K \neq \emptyset\}) = T(K)$ si et seulement si T est une capacité de Choquet alternée d'ordre infini telle que $T(\emptyset) = 0$ et $0 \leq T \leq 1$.

Nous n'expliciterons pas la notion de capacité de Choquet car cela est inutile pour notre propos. Il suffit de savoir qu'il s'agit de conditions sur T analogues aux propriétés de croissance et de continuité à droite d'une fonction réelle pour être la fonction de répartition d'une variable aléatoire.

Ainsi donc, pour caractériser un RACS, il nous suffira de connaître sa fonctionnelle $T(K) = P(\{X,\ X \cap K \neq \emptyset\})$.

2.2 Relations avec la notion de loi spatiale

Comment se situe la σ-algèbre σ_f par rapport à celle que l'on utilise en théorie des processus stochastiques (i.e. en traitement du signal) ? Si X est un RACS, on peut considérer X comme une fonction aléatoire f_X par le biais de sa fonction indicatrice : $f_X(x) = 1 \Leftrightarrow x \in X$. σ_f nous permet d'évaluer des événements du type

$$\{X,\ K_1 \subset X^c \text{ et } K_2 \subset X\} = \{f_X,\ f_X(x) = 0 \text{ pour } x \in K_1 \text{ et } f_X(x) = 1 \text{ pour } x \in K_2\}$$

En théorie des processus stochastiques, seuls les ensembles où K_1 et K_2 sont dénombrables sont mesurables, ce qui interdit d'étudier f_X sur une boule voisinage de son centre.

Examinons plus en détail ce point. Pour cela, plaçons-nous dans un cadre commun, celui des fonctions $\mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$. Montrons d'abord comment passer des fonctions aux ensembles et réciproquement.

Définition 2.3

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ une fonction semi-continue supérieure. On appelle sous-graphe de f l'ensemble fermé de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$SG(f) = \{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \overline{\mathbb{R}},\ f(x) \geq t\} \cup \{(x,-\infty), x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Il faut noter que c'est précisément parce que f est semi-continue supérieure que $SG(f)$ est fermé. Réciproquement, notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des fermés F de $\mathbb{R}^{n+1}$ vérifiant :

$$(x,t) \in F \Longrightarrow (x,t') \in F \text{ pour } t' < t$$

ainsi que $(x,-\infty) \in F$. Alors la fonction $f(x) = \sup\{t,\ (x,t) \in F\}$ est semi-continue supérieure. Il y a donc bijection entre l'espace Φ_f les fonctions semi-continues supérieures et les fermés de $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$.

Proposition 2.4

$\mathcal{C}$ muni de la topologie induite par $\mathcal{T}$ est compact.

Nous pouvons donc reprendre tout ce que nous avons présenté dans le nouveau cadre de Φ_f, ce qui nous permet de définir la notion de fonction aléatoire s.c.s., la σ-algèbre qui nous occupe étant engendrée par les événements de la forme :

$$\{f \in \Phi_f,\ \sup\{f(x), x \in K\} \leq t\}$$

où K parcourt l'ensemble des compacts.

Dans le cas des processus stochastiques, (où les fonctions aléatoires ne sont pas forcément s.c.s.), seuls les événements où K est composé d'un nombre dénombrable de points sont mesurables, du fait du procédé de construction d'une σ-algèbre sur un produit quelconque d'espaces mesurables.

Donnons nous une loi spatiale, c'est-à-dire une famille de fonctions de répartition

$$F_{x_1,\ldots,x_p}(u_1,\ldots,u_p) : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p \to [0,1]$$

ce qui revient à se donner la fonctionnelle $T(K)$ cf. théorème 2.2 pour K dénombrable.

Proposition 2.5

Il existe plusieurs fonctions aléatoires s.c.s. (Φ_f, σ_f, P) telles que :

$$\forall\, p,\ (x_i)_{i=1}^p,\ (u_i)_{i=1}^p,\quad P(f(x_1) < u_1, \ldots, f(x_p) < u_p) = F_{x_1,\ldots,x_p}(u_1,\ldots,u_p).$$

Une de ces fonctions, nécessairement unique est séparable, i.e. il existe une partie dense dans $\mathbb{R}^n$ telle que

$$f(x) = \limsup_{y \to x, y \in D} f(y).$$

En raisonnant sur les ensembles, la séparabilité s'exprime par $SG(f) = \overline{SG(f) \cap (D \times \overline{\mathbb{R}})}$ où $SG(f)$ est le sous-graphe de f (voir [Mat69] P 46 et [Mat75] P 43).

En somme, à l'aide de la σ-algèbre σ_f, la loi spatiale (i.e. $T(K)$ pour K dénombrable) ne suffit toujours pas à caractériser une fonction aléatoire s.c.s., comme dans le cas de processus stochastiques. Cependant, la donnée de $T(K)$ sur $\mathcal{K}$ caractérise une seule fonction aléatoire s.c.s.

2.3 Application : étude des performances d'algorithmes de bucketisation dans le cas moyen

2.3.1 Le schéma booléen

Introduisons à présent un type particulier d'ensemble aléatoire, le schéma booléen, en vue de modéliser une répartition "au hasard" de motifs élémentaires, comme par exemple des segments, des triangles ou des chaînes polygonales. Nous adopterons une présentation quelque peu plus heuristique [Ser82]. Une présentation plus rigoureuse est faite dans [Mat75] reposant sur la notion d'ensemble aléatoire conditionnel, notion que nous voulons éviter ici. Le lien entre les deux points de vue est développé dans [PS87].

Définition 2.6

Soient $\theta \in \mathbb{R}^{+*}$ et X' un RACS. Le schéma booléen défini par θ et X', que nous appellerons grain primaire, est le fermé aléatoire dont les réalisations sont données par :

$$X = \bigcup_{x \in \mathcal{P}} X'_x$$

où $\mathcal{P}$ est une réalisation d'un processus de Poisson uniforme d'intensité θ dans $\mathbb{R}^n$ et X'_x le translaté du grain primaire X' par $\vec{x}$, les $(X'_x)_{x \in \mathcal{P}}$ étant tirés de manière indépendante (voir figure 2.1).

Remarques :

1. X' est un ensemble aléatoire, donc pourra modéliser un motif déformable selon certaines probabilités.

2. Les effets de bord ne sont pas pris en compte dans ce modèle. En effet, le processus de Poisson sous-jacent est supposé infini dans $\mathbb{R}^n$.

3. X' ne peut pas être quelconque. En effet, il faut que X, union des divers X' soit fermé pour que nous puissions parler du RACS X. Ceci est réalisé si et seulement si $E[V(X' \oplus K)] < \infty$ pour un compact $K \in \mathcal{K}$ d'intérieur non vide, où $V(.)$ est le volume (cette formule a bien un sens puisque $\oplus K : \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ est continue et que $V(.) : \mathcal{F} \to \mathbb{R}^+$ est mesurable). Par exemple, on ne pourra donc pas prendre pour X' une droite.

Donnons maintenant deux théorèmes concernant les schémas booléens qui nous serviront dans l'estimation d'algorithme que nous nous proposons d'effectuer.

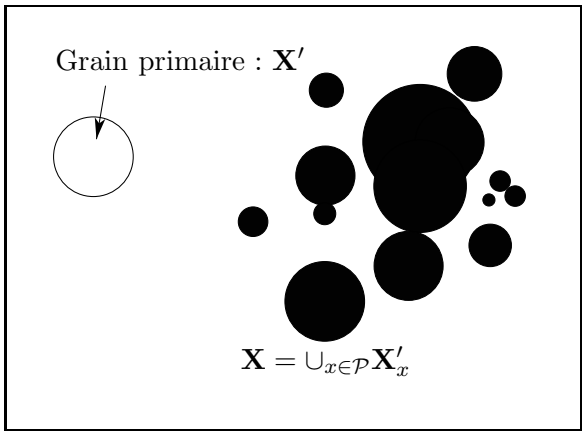


Figure 2.1 : Le schéma booléen

Théorème 2.7

La fonctionnelle caractéristique du schéma booléen $X \equiv (\theta, X')$ est donnée par :

$$1 - T(K) = P(K \cap X = \emptyset) = \exp\left(-\theta E[V(X' \oplus \check{K})]\right)$$

où $\check{K}$ est le symétrique de K par rapport à l'origine et $E[\cdot]$ l'espérance mathématique.

Théorème 2.8

La variable aléatoire donnant le nombre de grains primaires rencontrés par K déterministe suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = \theta E(V(X' \oplus \check{K}))$:

$$P(N(K) = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$$

Nous exploiterons le schéma booléen ainsi : X' sera une donnée et nous en déduirons les probabilités relatives à l'intersection d'une forme donnée K avec ces différents motifs répartis au hasard.

2.3.2 Exemples de calculs

Avec les notations du paragraphe précédent, nous allons donner des exemples de calculs pour des cas particuliers de X et B. Pour leur utilisation pratique, voir [BFBM88]. Nous avons vu que si X' représente l'objet dont nous étudions l'intersection avec un bucket B, le nombre d'objets qui coupent B suit une loi de Poisson de paramètre $\theta E[V(X' \oplus \check{B})]$. Dans notre cas le volume est en fait la surface dans $\mathbb{R}^2$ (resp. le volume dans $\mathbb{R}^3$) et θ peut être estimé par n/L^2 (resp. n/L^3) où n est le nombre de grains primaires qui tombent dans un carré de côté L (resp. un

cube de côté L). Donc le nombre moyen d'objets qui coupe B est précisement le paramètre de la loi de Poisson.

Cas où X' est un segment

Prenons pour X' un segment de longueur moyenne $\overline{l}$ et d'orientation uniforme. Si B est un cercle de rayon ρ, le nombre moyen d'intersections $\overline{ns}$ s'écrit :

$$\overline{ns} = \theta \left(2\rho\overline{l} + \pi\rho^2\right)$$

Si B est une sphère de rayon ρ on trouve :

$$\overline{ns} = \theta\rho^2 \left(\pi\overline{l} + \frac{4}{3}\pi\rho\right)$$

Dans le cas où B est un carré de côté λ :

$$\overline{ns} = \theta\lambda \left(\sqrt{2}\overline{l} + \lambda\right)$$

Ainsi donc tous les calculs reviennent à évaluer $V(X \oplus \check{B})$ dans chaque cas particulier et d'en prendre la moyenne.

Cas où X' est un convexe plan

Dans le cas où B est un carré il est possible de simplifier les calculs. En effet, un carré est la somme de Minkowski de ses deux côtés :

$$B = [O, (\lambda, 0)] \oplus [O, (0, \lambda)] = S_x \oplus S_y$$

Comme la somme de Minkowski est associative, on peut faire l'addition en deux fois :

$$X \oplus B = (X \oplus S_x) \oplus S_y$$

Si nous notons $\overline{A}$ la surface moyenne du convexe aléatoire X' et $\overline{x}$ (resp. $\overline{y}$) la longueur moyenne de la projection de X' sur l'axe des x (resp. sur l'axe des y), le nombre moyen de convexes $\overline{nt}$ intersectant un bucket carré de côté λ est donné par (voir figure 2.2) :

$$\overline{nt} = \theta \left(\overline{A} + \lambda(\overline{x} + \overline{y}) + \lambda^2\right)$$

Les valeurs de $\overline{A}$, $\overline{x}$ et $\overline{y}$ se calculent alors en prenant des lois particulières pour le convexe aléatoire X' comme par exemple un triangle de base fixe, de hauteur de loi donnée et d'orientation quelconque...

Nous ne développerons pas plus ce point. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage de référence sur les probabilités géométriques [San76]. Notons qu'à taille de bucket donnée, lorsque le nombre d'objets tend vers l'infini dans un domaine borné (i.e. $\theta \to \infty$), la complexité des algorithmes reste linéaire. Cependant, dans la pratique, il est plus raisonnable de considérer θ constant. Nous bénéficions alors d'une estimation précise de la constante multiplicative et la taille des buckets sera choisie en conséquence : ni trop petite, car la constitution pour chaque bucket de la liste des objets l'intersectant sera longue, ni trop grande, car la technique des buckets n'apporterait rien.

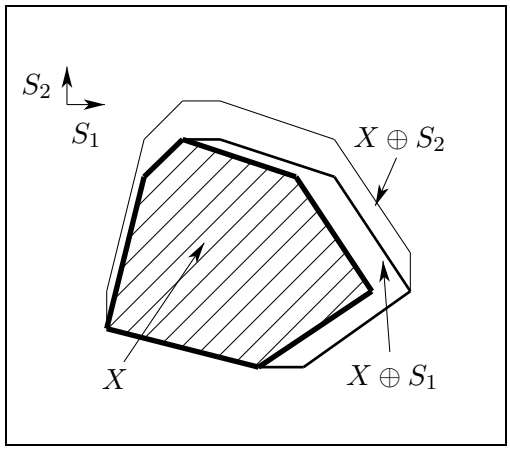


Figure 2.2 : Addition de Minkowski d'un convexe plan et d'un carré.

2.4 Conclusion

La morphologie mathématique fournit donc deux outils souvent peu connus, une topologie et une σ-algèbre, dont l'application à l'analyse d'algorithmes semble prometteuse. De plus, de nombreux résultats existent dans la littérature, comme les schémas booléens, et peuvent donc être exploités directement. Ces deux outils fournissent aussi une alternative à ceux qui sont utilisés habituellement : distance de Hausdorff et loi spatiale.

Partie II

Technique des lacets I : Algorithmes élémentaires

Introduction

Quelle structure d'image pour des algorithmes morphologiques ?

Etudier les manières possibles de structurer les images ne consiste pas seulement à chercher une structure de données pour coder ces images dans un ordinateur, mais aussi à déterminer les méthodes d'accès aux pixels en vue de leurs transformations. Ce n'est qu'après avoir déterminé cet ensemble que l'on peut envisager la construction d'ordinateurs spécialisés traitant les images de manière extrêmement rapide.

La matrice de pixels

Jusqu'à présent, la seule structure d'image réellement exploitée en morphologie mathématique a été le tableau de pixels stocké en mémoire sous forme d'une matrice : une image $n \times n$ occupe en mémoire $n^2 \times p$ bits où p est le nombre de bits utilisés pour coder un pixel ($p = 1$ pour une image binaire).

La méthode d'accès la plus simple consiste alors à balayer l'image de manière séquentielle vidéo – de gauche à droite et de haut en bas – et de transformer chaque pixel en fonction de ses voisins directs (4 ou 8 en trame carrée, 6 en trame hexagonale).

Ces algorithmes sont relativement lents à effectuer les transformations morphologiques sur des ordinateurs conventionnels : de l'ordre d'une seconde pour une dilatation hexagonale de taille 1 sur un Sun 3/60. De plus une dilatation de taille n est calculée en itérant n fois la dilatation de taille 1 ; le squelette est obtenu en amincissant l'image en un nombre de balayages de l'image égal en général à 6 fois la taille du plus grand érodé. Ce sont ces algorithmes qui sont utilisés dans les ordinateurs spécialisés.

Dans le but de réduire le nombre de balayages de l'image, des algorithmes dits *rapides* ou *récursifs* ont été développés ([RP66] et plus récemment [Mey87]). Leur principe est d'utiliser, pour calculer la valeur d'un pixel, la valeur des pixels voisins non seulement de l'image initiale, mais aussi de l'image transformée. Cette technique est à mettre en parallèle avec le principe du filtrage récursif en traitement du signal. Il est ainsi possible de calculer par exemple la fonction distance euclidienne d'un ensemble binaire en deux "passes", c'est-à-dire en deux balayages de l'image, l'un en sens vidéo, l'autre en sens vidéo-inverse.

Ces algorithmes présentent un progrès important en algorithmique morphologique. Cependant la structure de données qu'ils exploitent reste toujours la même : un tableau de pixels et un accès séquentiel ligne à ligne aux pixels accompagnés de leurs voisins.

D'autres structures d'images classiquement utilisées en analyse d'image pourraient être envisagées en morphologie mathématique. En voici quelques-unes.

Les quadtrees

Cette structure consiste à agglomérer des pixels en pavés carrés lorsque ceux-ci ont une même valeur [Sam84]. Elle permet d'obtenir un stockage compact et les primitives fournissant les pavés voisins d'un pavé donné sont connues. L'écriture des algorithmes de morphologie mathématique est donc envisageable : on trouve en particulier dans la littérature des algorithmes d'extraction de contours et de squelettisation. Cependant l'absence de stabilité de cette structure vis-à-vis de la translation rend ces algorithmes complexes [Blo87] et condamne de fait ce type de représentation pour les transformations morphologiques. Il serait peut-être même préférable de les effectuer directement sur des tableaux de pixels, quitte à retransformer l'image en quadtree par la suite.

Les polygones

Dans ce cas, la notion même de pixel disparaît entièrement, puisque les sommets du polygone ne sont plus astreints à se trouver sur une grille régulière. La géométrie informatique a prouvé que des algorithmes efficaces pouvaient être développés sur cette structure [PS85]. En ce qui concerne la morphologie mathématique, citons en particulier la construction du squelette en $O(n \log n)$ [Lee82], le calcul du diagramme de Voronoï au sens de la métrique géodésique [Aro87] ainsi que le diagramme de Voronoï au plus lointain voisin, toujours au sens de la métrique géodésique [AFW88], le calcul de l'érodé d'un polygone par un polygone convexe [For85] et d'un polygone par un polygone quelconque [AB87]. Cependant, la plupart des algorithmes ont été développés pour des polygones simples : une seule suite de sommets le représente alors.

Avec cette structure, les rotations ainsi que les translations sont très faciles à effectuer !

L'un des problèmes de cette structure est la qualité avec laquelle on veut représenter une image digitale, obtenue par une caméra par exemple : si l'on veut une image d'une grande précision, les polygones utilisés auront un nombre de sommets important, ce qui rend les algorithmes employés gourmands en temps et en place mémoire : on remarquera en particulier que peu sont linéaires mais présentent souvent une complexité en $O(n \log n)$.

Une distinction s'impose : les objets crées par l'homme sont souvent relativement simples dans leur forme, et leur frontière se compose essentiellement de segments ou d'arcs de cercle. Par contre les formes naturelles présentent des contours plus irréguliers que seuls des polygones ayant un très grand nombre de côtés sont à même de décrire fidèlement : il suffit d'avoir présent à l'esprit un milieu poreux par exemple ou une image d'eutectique lamellaire (voir le chapitre "Variations lamellaires").

Enfin les éléments structurants que l'on emploie classiquement en morphologie mathématique doivent souvent être des approximations du cercle. Ainsi un polygone ouvert par une approximation du cercle (par un dodécagone par exemple) verra son nombre de côtés croître rapidement.

Les graphes

Les diverses transformations morphologiques peuvent s'étendre facilement au cas des graphes (voir [BGT82] et [Vin88]). Malheureusement, l'emploi de cette structure est limité à certains problèmes particuliers. Si l'on considère une trame – hexagonale ou carrée – comme un graphe, la place mémoire requise pour une image est prohibitive puisque la structure particulière de trame n'est pas exploitée.

Les files de contours

Le principe des algorithmes à base de files de contours [vVV88] exploite le fait que, pour calculer sur une image binaire le dilaté de taille 1, il suffit de mettre à "un" les pixels voisins des pixels de la frontière. Ainsi, après un balayage complet de l'image, les pixels de la frontière sont détectés, leurs voisins mis à "un" et leur adresse insérée dans une file. Pour calculer le dilaté suivant, il suffit d'examiner la file et les voisins des pixels de la file. Ces algorithmes sont donc, après un balayage préliminaire de l'image, linéaires par rapport au nombre de pixels de la frontière des objets.

La structure de donnée exploitée est donc une file. On doit en outre disposer d'un accès aléatoire à tout pixel de l'image ainsi qu'à ses voisins.

Structure d'image utilisée

Nous proposons de prendre en compte les avantages de deux de ces structures en utilisant le principe du *code de Freeman* [Fre61] pour une image binaire numérisée ici en trame hexagonale.

De façon informelle, une forme simplement connexe sera représentée par un *lacet fermé* :

1. une origine : 2 coordonnées
2. une liste de directions codant la suite des segments successifs de la frontière de la forme, prise dans le sens trigonométrique.

Une image sera alors un ensemble de lacets, en prenant soin d'orienter la frontière des particules dans le sens trigonométrique et celle des trous dans le sens horaire. Avec cette convention, la forme se trouve toujours à gauche du lacet et le fond à droite. Nous nous écartons par là de la structure de file de contours par le fait que dans un lacet, les pixels sont *ordonnés*, ce qui donne un sens à la notion de "gauche" et de "droite". Notre représentation s'écarte aussi d'une représentation polygonale, puisque les sommets sont astreints à se trouver sur une grille (hexagonale) et les côtés à avoir une orientation discrète (0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, ...), ainsi qu'une longueur fixe, distance entre deux points successifs de la trame.

Nous utiliserons les méthodes d'accès aux pixels suivantes :

1. *Marche aléatoire* sur les images : étant en un pixel donné, nous pouvons accéder à un pixel voisin dans une direction donnée, sans pour cela chercher à accéder systématiquement à tous les pixels du voisinage.

2. Nous utiliserons des *règles de récritures* pour transformer les listes de codes de Freeman en de nouvelles listes.

3. Nous ne chercherons pas à examiner le voisinage d'un pixel pour conclure à la valeur du pixel transformé, comme cela est classiquement fait dans les algorithmes usuels, rapides et à file de contours.

4. Nous nous servirons d'une *image de travail* pour trouver les intersections des divers lacets.

Nous allons montrer dans un premier temps comment calculer les dilatés hexagonaux successifs à partir d'une représentation de type lacet. Nous verrons alors que cette structure est en fait trop contraignante et nous en introduirons une nouvelle toujours fondée sur le même principe, mais ne requérant pas la condition de fermeture des lacets. Ceci nous permettra de retrouver diverses transformations morphologiques telles que dilatation, érosion, fonction distance et fonction de propagation, tant euclidiennes que géodésiques et ce sous forme d'algorithmes particulièrement efficaces (*optimaux* dans un sens que nous préciserons).

Chapitre 3

Hypothèses et notations

3.1 Définition de la trame hexagonale

Définition 3.1

Nous appellerons grille hexagonale l'ensemble $\mathbb{H}$ *des points* a_{ij}, $(i,j) \in \mathrm{Z}^2$ *tels que :*

$$\overrightarrow{Oa_{ij}} \;=\; i\vec{x} + j\left(\frac{1}{2}\vec{x} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{y}\right)$$

où $(O, \vec{x}, \vec{y})$ *est un repère orthonormé direct de l'espace affine* $\mathbb{R}^2$.

$\mathbb{H}$ peut être considéré comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'une part et comme un ensemble isomorphe à Z^2. La seconde approche nous occupera essentiellement aux chapitres 4 et 5, alors que la première sera étudiée en details au chapitre 6.

Définition 3.2

Nous appellerons relations de voisinage le sous-ensemble Δ *de* $\mathbb{H}^2$ *tel que :*

$$\Delta \;=\; \{\ (a_{i,j}, a_{i+\varepsilon_1, j+\varepsilon_2})\ \}$$

avec :

$$(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \left\{ \begin{array}{cccc} & (1,0) & ou & (0,1) \\ ou & (-1,1) & ou & (-1,0) \\ ou & (0,-1) & ou & (1,-1) \end{array} \right.$$

On dira que $a_{i,j}$ *et* $a_{k,l}$ *sont voisins si et seulement si* $(a_{i,j}, a_{k,l}) \in \Delta$.

Le point $a_{i,j}$ a exactement 6 voisins formant les sommets d'un hexagone régulier, comme le montre la figure 3.1.

Définition 3.3

Nous appellerons trame hexagonale $G = (H, \Delta)$ *le graphe non orienté ayant la grille hexagonale* $\mathbb{H}$ *pour sommets et* Δ *pour ensemble d'arêtes.*

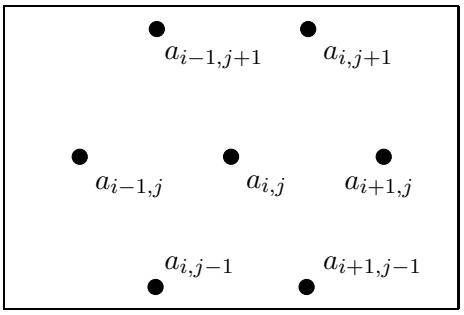


Figure 3.1 : Voisinage hexagonal de $a_{i,j}$.

Définition 3.4

Nous appellerons triangle élémentaire fermé (resp. ouvert) tout triangle fermé (resp. ouvert) de $\mathbb{R}^2$ *dont les trois sommets sont des points distincts de* $\mathbb{H}$*, deux à deux voisins.*

3.2 Définition des directions

Définition 3.5

Notons les directions des 6 voisins d'un point par les entiers de 0 à 5 et $(\vec{u}_i)_{i=0}^5$ *les vecteurs unitaires correspondants, comme l'illustre la figure 3.2.*

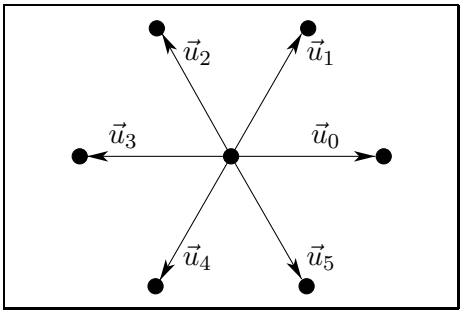


Figure 3.2 : Définition des 6 directions de la trame.

Souvent, nous utiliserons la notation $\vec{u}_i$ avec $i \in \mathrm{Z}$. Nous poserons alors par convention :

$$\vec{u}_i \;=\; \vec{u}_{i \bmod 6}.$$

Remarquons enfin que p et q sont deux points voisins de $\mathbb{H}$ si et seulement si il existe i tel que $\overrightarrow{pq} = \vec{u}_i$.

Définition 3.6

Soient p_1 et p_2 deux points voisins de $\mathbb{H}$. Nous appellerons point au milieu à droite de $\overrightarrow{p_1p_2}$ le point p_3 défini par :

$$\overrightarrow{p_1p_3} = \vec{u}_{i-1} \text{ avec } \overrightarrow{p_1p_2} = \vec{u}_i$$

selon la figure 3.3.

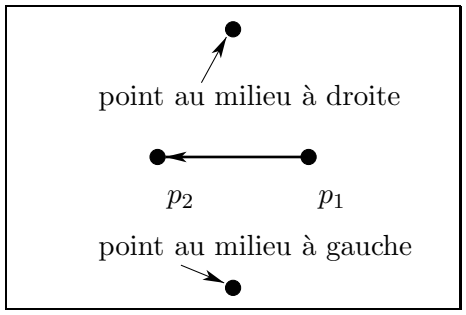


Figure 3.3 : Définition du point au milieu à droite.

Ce point est unique et est voisin de p_1 et de p_2.

On définira de manière analogue le point au milieu à gauche de p_1 et p_2.

Souvent, nous serons amenés à "tourner" autour d'un point en empruntant les voisins de ce point dans le sens trigonométrique ou horaire. De manière formelle nous l'exprimerons par :

Définition 3.7

Soit p un point de la grille $\mathbb{H}$ et $p_1 = p + \vec{u}_{i_1}$ et $p_2 = p + \vec{u}_{i_2}$ deux voisins de p. Les voisins de p balayés dans le sens trigonométrique de p_1 à p_2 sont donnés dans l'ordre par :

$$q_i = p + \vec{u}_i,\ i \in \mathrm{Z},\ i_1 < i < i_1 + ((i_2 - i_1) \bmod 6).$$

Le balayage dans le sens horaire se définit de manière analogue.

3.3 Définition des chaînes et lacets

Définition 3.8

Soit $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ une suite de codes, i.e. $c_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Soit p_0 un point de la grille $\mathbb{H}$. On appellera chemin ou chaîne d'origine p_0 codé par C la suite de points $(p_i)_{i=0}^n$ tels que

$$p_i \;=\; p_0 + \sum_{j=1}^{i} \vec{u}_{c_j}.$$

Rappel : Dans un espace affine E, il est toujours possible d'ajouter un point et un vecteur de l'espace vetoriel associé $\overrightarrow{E}$ en posant par convention :

$$\forall p, q \in E \;\; \forall \vec{v} \in \overrightarrow{E} \quad q = p + \vec{v} \iff \overrightarrow{pq} = \vec{v}.$$

Remarque : Si p_0 et q_0 sont deux points de la grille $\mathbb{H}$, les chemins d'origine p_0 et q_0 codés par la chaîne C se déduisent l'un de l'autre par une translation de vecteur $\overrightarrow{p_0 q_0}$.

Définition 3.9

Un lacet est un chemin dont les extrémités coïncident.

Remarque : La propriété de lacet ne dépend, d'après la remarque précédente, que de la liste des codes C.

Etant donné un chemin, c'est à dire une suite ordonnée de points, il est évident de remonter à la liste des codes C codant ce chemin. Pourtant, dans la pratique, sur une image, un tel chemin n'est pas donné par un n-uple, mais par un ensemble non ordonné de points et un algorithme de construction de C demande à être explicité. Malheureusement en général un tel algorithme n'existe pas. Cependant nous verrons que dans le cas des lacets simples, C est parfaitement défini (voir aussi [Ros70]).

Parfois, par abus de langage, la suite C elle-même munie de son origine p_0 sera appelée une chaîne. Lorsque la chaîne codée par C est en fait un lacet, nous parlerons du *lacet* C d'origine p_0. En vertu de la remarque, cette terminologie a bien un sens. Nous ne discuterons pas ici des conditions nécessaires et suffisantes sur C pour qu'il soit un lacet.

3.4 Notion de transformation géodésique

La trame $\mathbb{H}$ peut être considérée comme un espace métrique. Habituellement, la distance entre deux points x et y est définie par le nombre minimal d'arêtres d'un chemin digital joignant x à y. Dans la suite, cette distance sera appelée "distance hexagonale" sur $\mathbb{H}$. Nous verrons au chapitre 6 que d'autres métriques sur $\mathbb{H}$ peuvent être envisagées, mais qu'elles soulèvent des problèmes théoriques délicats.

Si l'on se donne un ensemble digital M et x, y deux points de M, on peut mesurer leur distance en ne considérant que les chemins digitaux dont tous les sommets sont dans M. Nous

appellerons cette métrique sur $M \subset \mathbb{H}$ "M-géodésique" ou simplement "géodésique" si le contexte ne prête pas à confusion.

Notre approche est purement digitale et suppose donc que nous possédions un objet sous forme de pixels de la trame. En particulier, la notion de digitalisation ne nous occupera pas ici. Cependant, par commodité ou nécessité, nous serons amené à associer à un objet digital un objet continu "sympathique" du plan $\mathbb{R}^2$. Plusieurs classes de tels objets ont été étudiées en détail, tels la classe des convexes, l'anneau convexe (unions finie de convexes) et le modèle régulier (ensembles ouverts et fermés par une boule) entre autres, qui ont permis d'obtenir de nombreux résultats en géométrie différentielle et en probabilités géométriques [Had57], [San76] ou [Ser82].

Au chapitre 4, seules nous intéresseront les questions liées à la connexité. On pourra alors considérer $\mathbb{H}$ comme un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ et ne prendre en compte que l'opération d'inclusion.

Le plongement de $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}^2$, c'est-à-dire munir $\mathbb{R}^2$ d'une distance telle que la distance sur $\mathbb{H}$ soit la même que celle induite par celle de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{H}$, ne sera étudié qu'au chapitre 6.

Chapitre 4

Algorithme de suivi de contours

Dans ce chapitre nous allons montrer comment construire la structure de données correspondant à une image binaire $\mathbf{X}$, $\mathbf{X}$ étant un sous-ensemble fini de $\mathbb{H}$, grille hexagonale. Nous supposerons dans un premier temps que $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^c$ sont connexes. Cette hypothèse est l'équivalent digital de la simple connexité dans le plan $\mathbb{R}^2$. Dans ce cas, $\mathbf{X}$ n'a pas de trou et de façon intuitive, la frontière de $\mathbf{X}$ sera un lacet. L'algorithme de détermination de ce lacet que nous allons présenter est classique [Ros70] : il utilise le principe de "l'aveugle " qui marche sur la frontière de $\mathbf{X}$ et qui la suit en cherchant le point le plus à sa droite : en faisant tourner sa canne dans le sens trigonométrique, il note à chaque fois le premier point de $\mathbf{X}$ qu'il rencontre.

La correction de cet algorithme est délicate à établir et n'a réellement été abordée que par A. Rosenfeld dans le cadre de la trame carrée en 4 et 8-connexité. Nous allons, dans le cas de la trame hexagonale, proposer une démonstration d'un genre totalement différent qui a le mérite de pouvoir être adaptée aux sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ appartenant au *modèle régulier* [Ser82]. Elle se fonde sur le théorème de Jordan dans le plan continu en immergeant $\mathbb{H}$ dans $\mathbb{R}^2$ – nous adopterons la même attitude lorsque nous aborderons la fonction de propagation. Nous mettrons en évidence les "bonnes propriétés" de l'algorithme de suivi de la frontière.

Nous quitterons le cas d'un ensemble $\mathbf{X}$ simplement connexe et verrons comment détecter toutes les frontières en assurant toujours les propriétés précédentes au résultat et cela par un unique balayage de l'image correspondant à $\mathbf{X}$.

Nous terminerons cette section par quelques digressions sur la possibilité de définir un théorème de Jordan sur une trame. Nous montrerons en particulier que toute triangulation du plan vérifie cette version digitale, mais que la réciproque est fausse.

4.1 Cas d'une particule X simplement connexe

La frontière d'un objet digital ne peut pas se définir de façon analogue au cas continu : tout point adhérant à un ensemble et à son complémentaire. En effet, définie de cette manière, la frontière digitale aurait une épaisseur de deux pixels en général. C'est pourquoi nous lui substituons la définition suivante :

Définition 4.1

Soit $\mathbf{X} \subset H$. *On appelle frontière intérieure de* $\mathbf{X}$ *le sous-ensemble de* $\mathbf{X}$ *noté Front* $(\mathbf{X})$ *des points de* $\mathbf{X}$ *voisins d'au moins un point de* $\mathbf{X}^c$.
De façon analogue, la frontière extérieure de $\mathbf{X}$ *est Front* $(\mathbf{X}^c)$

Etant donné un point p_0 de la frontière de $\mathbf{X}$, nous nous proposons de décrire *Front* $(\mathbf{X})$ par une suite de codes $C = (c_i)_{i=1}^n$ telle que la chaîne $P = (p_i)_{i=0}^n$ codée par C et d'origine p_0 ait les propriété suivantes :

P1 : $(p_i)_{i=0}^n$ sont des points de la frontière de $\mathbf{X}$.

P2 : $Front(\mathbf{X}) \subset \{p_i\}_{i=0}^n$.

P3 : La chaîne P est un lacet, c'est-à-dire $p_0 = p_n$.

P4 : Fixons un point p_i de la chaîne P. Les voisins de p_i balayés dans le sens trigonométrique de p_{i-1} à p_{i+1} sont tous dans $\mathbf{X}^c$.

P5 : Cette propriété est une sorte de réciproque à ce qui précède. Soit $q_0 \in \mathbf{X}^c$ et $q_1 \in \mathbf{X}$ avec q_0 et q_1 voisins. Soit x_{i_1} le premier point voisin de q_1 dans $\mathbf{X}$ obtenu à partir de q_0 en tournant dans le sens horaire. Soit x_{i_2} celui obtenu en tournant dans le sens trigonométrique. Les points x_{i_1}, q_1 et x_{i_2} sont trois points consécutifs de la chaîne P.

P6 : Pour tout couple de points (p_i, p_{i+1}), le point au milieu à droite de (p_i, p_{i+1}) est dans $\mathbf{X}^c$.

Pour avoir une interprétation graphique des propriétés **P4**, **P5** et **P6**, voir la figure 4.1. Ces trois propriétés sont fondamentales pour tous les algorithmes que nous allons présenter par la suite et assureront leur correction.

4.1.1 L'algorithme

L'algorithme précis est donné table 4.1. Décrivons de façon intuitive son fonctionnement. L'idée est de faire tourner autour de $\mathbf{X}$ un segment (p, q) de longueur unité tel qu'à tout instant $p \in \mathbf{X}$ et $q \in \mathbf{X}^c$. Pour cela, faisons le tourner autour de p dans le sens trigonométrique. Dès que $q \in \mathbf{X}$, nous sommes sur un nouveau point frontière. On inverse les rôles de p et q puis on recommence à faire tourner le segment autour de ce nouveau point. L'algorithme s'arrête lorsque ce segment revient à sa position de départ qui peut être par exemple : p point en haut à gauche de la particule et $q = p + \vec{u}_3$.

Exemple d'application : Dans le cas de la figure 4.2, l'algorithme fournit le résultat suivant :

$$chaîne[0 \ldots 5] \; = \; 4, 1, 0, 5, 2, 3.$$

Il faut noter que le test d'arrêt $x = x_0$ est trop fort et ne permettrait pas de parcourir $\mathbf{X}$ en entier. Seule la conjonction des deux tests $x = x_0$ et $d = d_0$ assure un résultat correct. Notons aussi que les segments du contour ont été explorés deux fois dans certains cas.

Nous allons à présent prouver que l'algorithme proposé fournit bien une chaîne possédant les six propriétés énoncées.

Variables

chaîne	tableau monodimensionnel des codes successifs.
x_0	point de départ.
d_0	direction de départ.
x	point courant de la frontière de $\mathbf{X}$.
d	direction courante.
i	indice du code suivant.

Entrée

x_0 et d_0	avec $x_0 \in \mathbf{X}$ et $x_0 + \vec{u}_{d_0} \notin \mathbf{X}$.

Sortie

i	nombre de segments du contour de $\mathbf{X}$.
$chaîne[0, i-1]$	code des directions des segments.

Initialisation

$i \leftarrow 0$; $x \leftarrow x_0$; $d \leftarrow d_0 + 1 \mod 6$;

Boucle générale

```
faire indéfiniment
        si x ≠ x_0
                tant que x + u_d ∉ X                                   (2)
                        d ← d + 1 mod 6;
        sinon
                tant que x + u_d ∉ X                                   (3)
                        si d = d_0 mod 6
                                fin de l'algorithme.
                        sinon
                                d ← d + 1 mod 6;
                fin tant que
        fin si
        x ← x + u_d;                                                   (4)
        chaîne[i] ← d mod 6;                                           (4)
        i ← i + 1; d ← d + 4 mod 6;                                    (4)
fin faire
```

Tableau 4.1 : Algorithme de suivi de contour d'une particule simplement connexe.

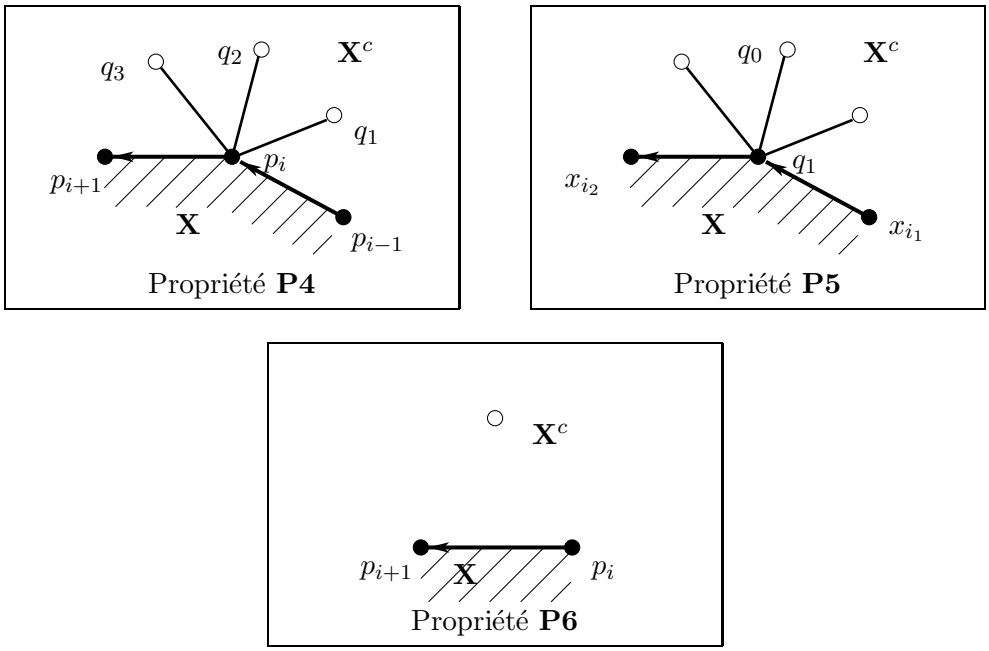


Figure 4.1 : Propriétés de la chaîne frontière.

4.1.2 Correction

La démonstration nécessite un intermède mathématique qui permettra de mettre en évidence les propriétés **P4** et **P5** du lacet obtenu.

Notation : Nous parlerons souvent de la *valeur* d'un point de $\mathbb{H}$. Il s'agira en fait de la fonction caractéristique de $\mathbf{X}$ sur $\mathbb{H}$ que nous noterons $v(x)$. Elle vaut 1 si le point est dans $\mathbf{X}$, 0 sinon.

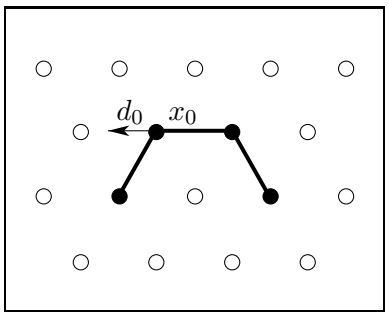


Figure 4.2 : Exemple de frontière.

a – Construction d'un lacet simple séparant X de $\mathbf{X}^c$ Soit S l'ensemble des segments de $\mathbb{R}^2$ construits comme suit :

> Pour tout triangle élémentaire de la trame, dont les trois sommets n'ont pas la même valeur, le segment s joignant les milieux des segments de Δ (arêtes de la trame) dont les extrémités ont des valeurs différentes est un élément de S (figure 4.3).

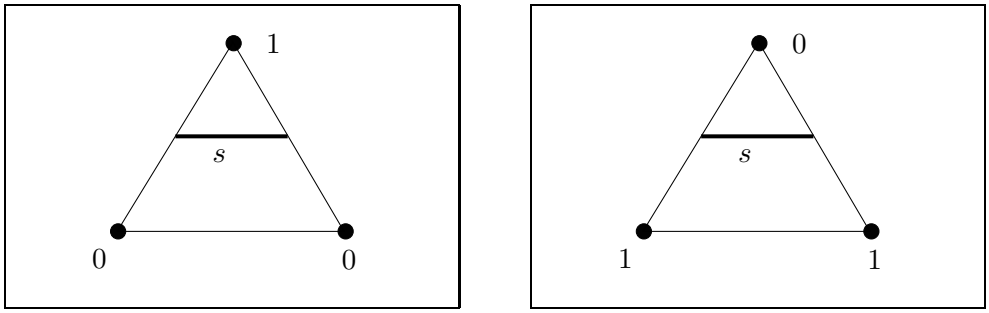


Figure 4.3 : Définition de $s \in S$.

Tout triangle élémentaire dont les trois sommets n'ont pas la même valeur contient exactement un segment de S, celui qui est homothétique du côté du triangle ayant ses deux extrémités à la même valeur par l'homothétie de rapport $\frac{1}{2}$ et de centre le sommet dont la valeur n'est présente qu'une seule fois. Donc à une rotation près, les deux cas présentés figure 4.3 sont les seuls possibles. Notons que s n'est jamais une arête de la trame.

Montrons maintenant la propriété suivante vérifiée par S :

Propriété 4.2

> *Soit $(p, q) \in \Delta$ et supposons que p et q aient des valeurs différentes ($v(p)+v(q) = 1$). Soit m le milieu de p et q ($m \notin \mathbb{H}$!). Alors S contient exactement deux segments distincts ayant m pour extrémité.*

Démonstration : L'arête (p, q) appartient à deux triangles élémentaires exactement :

$$\text{et} \quad \begin{array}{lcl} T1 & = & (p,\ q,\ \text{point au milieu à droite de } \overrightarrow{pq}) \\ T2 & = & (q,\ p,\ \text{point au milieu à droite de } \overrightarrow{qp}) \end{array}$$

Chacun de ces triangles contient exactement un segment de S. Comme $T1 \cap T2 = [p, q]$, où $[p, q]$ désigne le segment d'extrémités p et q en tant que segment de $\mathbb{R}^2$, et que tout segment de S n'est jamais inclus dans un segment de la trame, les deux segments de S sont distincts et ont chacun m pour extrémité ■

Chaînons à présent les segments de S pour obtenir un lacet simple L de $\mathbb{R}^2$, contenant en son intérieur exactement les points de $\mathbf{X}$. Pour cela construisons par récurrence sur i la suite de segments $S_0 = (s_i)_{i=1}^n$ en notant a_i et b_i les extrémités du segment s_i :

- $b_i = a_{i+1}$ pour $1 \leq i < n$,
- $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$.

Construction par récurrence :

i=1 : $\mathbf{X}$ est non vide, ainsi que $\mathbf{X}^c$, donc S est non vide. Soit alors $s_1 = (a_1, b_1) \in S$.

passage de i à $i+1$: Par construction, b_i est le milieu de deux points de la grille hexagonale possédant des valeurs différentes. D'après la propriété précédente, deux segments de S ont q_i pour extrémité : s_i et un autre s. Si pour $j \leq i$ on a $s_j = s$, alors le processus s'arrête, sinon, posons :

$$s_{i+1} = s = (a_{i+1}, b_{i+1}) = (b_i, b_{i+1}).$$

Nous allons prouver que l'arc L formé des segments de la suite S_0 est en fait un lacet simple polygonal. Pour cela montrons deux propriétés simples des éléments de S :

Propriété 4.3

Soient s et s' deux segments de S. Considérons les comme des segments fermés de $\mathbb{R}^2$. Alors $s \cap s'$ est soit vide, soit un point qui est l'une de leurs extrémités qu'ils ont en commun, milieu de deux points voisins de la grille $\mathbb{H}$.

Démonstration : clair ■

Propriété 4.4

Soient s, s' et s'' trois segments de S. Alors $s \cap s' \cap s'' = \emptyset$.

Démonstration : Si $s \cap s' \neq \emptyset$, ces deux segments se coupent en leur extrémité commune. Or en ce point passent au plus deux segments de S, ce qui prouve que s'' ne peut le contenir. On en déduit :

$$s \cap s' \cap s'' = \emptyset$$

En particulier la configuration en *étoile* de la figure 4.4 n'est pas possible ■

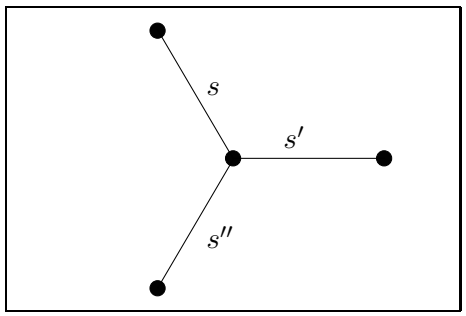


Figure 4.4 : Configuration impossible dans S.

Par construction, $s_n = (a_n, b_n)$ est tel que $b_n = a_i$ pour un certain $i < n$. Si $1 < i$, les trois segments s_{i-1}, s_i et s_n se coupent en a_i, ce qui contredit la propriété 4.4. Donc $i = 1$ et la suite S_0 est un lacet polygonal du plan $\mathbb{R}^2$. Ce lacet est simple, car les deux propriétés précédentes interdisent les points doubles. Remarquons enfin que tous les segments de S ne sont pas nécessairement dans le lacet simple S_0.

D'après le théorème de Jordan (voir par exemple [Die69]), S_0 sépare le plan en deux régions connexes, l'extérieur et l'intérieur que nous noterons respectivement E et I.

Montrons que $I \cap H = \mathbf{X}$ et $E \cap H = \mathbf{X}^c$. Soient $(p, q) \in H^2$, deux points tels que $p \in I$ et $q \in E$. Nous allons montrer dans un premier temps que :

$$v(p) \; + \; v(q) \; = \; 1$$

en notant $v(p)$ la "valeur" du point $p \in H$, c'est-à-dire :

$$v(p) \; = \; 1 \iff p \in \mathbf{X} \quad \text{et} \quad v(p) \; = \; 0 \iff p \notin \mathbf{X}.$$

Si $v(p) = v(q)$, alors il existe un chemin digital de p à q, tel que tous les points du chemin aient la valeur $v(p)$, puisque par hypothèse $\mathbf{X}$ et $\mathbf{X}^c$ sont connexes. Ce chemin peut être considéré comme un chemin polygonal γ de $\mathbb{R}^2$ ayant p et q comme extrémités. Comme p et q appartiennent à I et E respectivement, composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^2 \setminus \gamma$, γ coupe S_0. Or un chemin γ formé de segments de Δ et un chemin formé de segments de S ne peuvent se couper qu'en des extrémités de segments de S, milieux de points voisins de $\mathbb{H}$. Or ces points voisins ne peuvent avoir que des valeurs différentes : $v(p) + v(q) = 1$. Ceci contredit la définition du chemin γ dont tous les sommets ont la même valeur. Ainsi donc, p et q ont des valeurs différentes.

Supposons $p \in I \cap H$. Faisons parcourir à q l'ensemble $E \cap H$.

$$\forall q \in E \cap H, \;\; v(p) + v(q) = 1$$

q parcourt un ensemble infini, donc on peut trouver $q \in E \cap H$ tel que $v(q) = 0$. Donc $v(p) = 1$ et pour tous les $q \in I \cap H$, $v(q) = 0$. Si maintenant nous fixons q dans $E \cap H$, nous en déduisons que $v(p) = 1$ sur $I \cap H$. En résumé :

$$E \cap H = \mathbf{X} \text{ et } I \cap H = \mathbf{X}^c.$$

Il reste à remarquer pour finir, que tous les segments de S sont présents dans S_0 puisque sinon, ils seraient inclus dans un triangle élémentaire totalement inclus dans E ou I, ce qui est impossible.

b – Analyse de l'algorithme Montrons que l'algorithme suit dans l'ordre les sommets de S_0.

Les paramètres d'entrée de l'algorithme sont :

- la direction de départ d_0.
- un point x_0 de $\mathbf{X}$ tel que le point voisin dans la direction d_0 soit un point de $\mathbf{X}^c$.

Notons $S_0 = (s_i)_{i=1}^n$ avec $s_i = (a_i, b_i)$ et a_1 le milieu des deux points voisins de la trame p_1 et q_1. Quitte à renuméroter cycliquement S_0, on peut supposer que $p_1 = x_0$ et $q_1 = p_1 + \vec{u}_{d_0}$. Soit c le point au milieu à droite de $\overrightarrow{p_1q_1}$. Nous avons vu qu'il existait dans S exactement deux segments ayant c pour extrémité, un dans chaque triangle élémentaire s'appuyant sur (p_1, q_1). Nous pouvons prendre dans la construction proposée plus haut pour s_1 l'unique segment de S étant dans le triangle élémentaire (p_1, q_1, c). S_0 se construit alors par récurrence de manière unique.

Nous allons construire par récurrence sur i une suite $(p_i)_{i=1}^n$ de points de $\mathbf{X}$ et une suite $(q_i)_{i=1}^n$ de points de $\mathbf{X}^c$ avec p_i voisin de q_i, tel que le milieu de (p_i, q_i) est a_i.

Notons p_i les positions successives occupées par x dans l'algorithme soit lorsque le test (2) ou le test (3) est exécuté, soit lors de l'affectation $x \leftarrow x + \vec{u}_d$ dans le groupe d'instructions (4). Soit alors $q_i = p_i + \vec{u}_d$. Remarquons que les (p_i) et les (q_i) ne sont pas nécessairement distincts.

Montrons que pour $i \leq n$, le milieu de (p_i, q_i) est a_i.

$\underline{i = 1}$: Cela est vrai par construction.

Passage de i à $i + 1$:

- Supposons le test (2) effectué avec succès. Alors d est incrémenté de 1. Posons $p_{i+1} = p_i$ et $q_{i+1} = p_i + \vec{u}_d$. Le test est à nouveau exécuté.
  - S'il est vrai, $v(q_{i+1}) = 0$ et il en résulte que a_{i+1} est le milieu de (p_{i+1}, q_{i+1}).
  - S'il est faux, le groupe d'instructions (4) est exécuté. $p_{i+1} = p_i + \vec{u}_d$, $d \leftarrow d + 4$ et donc $q_{i+1} = p_i + \vec{u}_d = q_i$ (voir figure 4.5). Le segment (p_i, p_{i+1}) est alors un segment de la frontière de $\mathbf{X}$. Ainsi a_{i+1} est encore le milieu de (p_{i+1}, q_{i+1}). Le programme se poursuit alors soit par le test (2), soit par le test (3), suivant que p_{i+1} est ou n'est pas le point de départ. Il faut remarquer que le test (2) et le test (3) sont nécessairement vérifiés puisque $q_i = q_{i+1} \in \mathbf{X}^c$.
- Supposons le test (3) effectué avec succès à l'étape i. Si d est la direction de départ, le milieu de (p_i, q_i) est $a_1 = b_n$, et le processus s'arrête après avoir parcouru S_0.

  Sinon, on montre par un raisonnement analogue au précédent que la propriété du milieu reste vérifiée.

La seule différence entre les boucles "tant que" (2) et (3) est le test d'arrêt $d = d_0$ qui vérifie si le lacet S_0 a été parcouru en entier. La figure 4.6 illustre le processus entier et en particulier la condition d'arrêt du programme.

4.1.3 Complexité

Soit n le nombre de segments du lacet S_0. Les tests (2) et (3) sont exécutés n fois puisque à chaque fois on avance d'un segment sur le lacet S_0. Soit p le nombre de points de la frontière de $\mathbf{X}$. Chacun de ces points n'est sommet que d'au plus 6 triangles élémentaires contenant au plus un segment de S chacun. Réciproquement, tout segment de S est contenu dans un triangle élémentaire dont l'un des sommets appartient à la frontière de $\mathbf{X}$. Donc $n \leq 6 \times p$. En fait, on

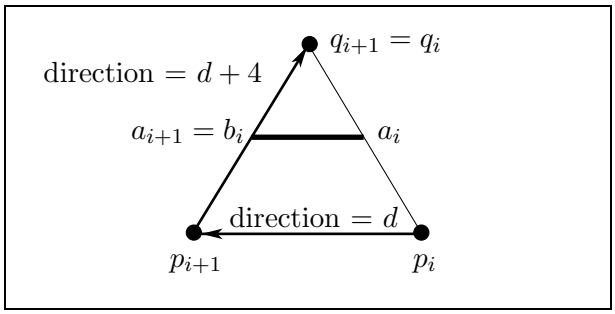


Figure 4.5 : Détection d'un segment de la frontière.

a l'égalité uniquement quand $p = 1$, c'est-à-dire pour un point isolé. Dans tous les autres cas, $n \leq 5 \times p$. Nous pouvons donc énoncer :

Proposition 4.5

L'algorithme proposé est linéaire par rapport aux nombres de points de $\mathbf{X} \setminus (\mathbf{X} \ominus H_1)$ *où* H_1 *est l'hexagone élémentaire de la trame.*

4.1.4 Accélération

On a vu lors de la démonstration de la correction de l'algorithme que le test (2) était trivialement vérifié lorsque le programme venait d'effectuer les instructions (4). Il est donc possible d'éliminer ce premier test en écrivant :

faire $d \longleftarrow d + 1$; tant que ...

à la place de :

tant que ... faire $d \longleftarrow d + 1$;

Cette simple remarque permet d'économiser environ un tiers du temps calcul. De manière informelle, le test (2) est effectué trois fois (parcours en ligne droite) avant d'être infirmé. Comme c'est cette boucle qui utilise quasiment tout le temps calcul et qu'un test sur trois en moyenne est éliminé on en déduit le gain de temps.

Attention : Il ne faut surtout pas faire la même chose pour (3), car le test d'arrêt doit absolument être effectué. De plus, cette boucle ne peut être rencontrée qu'au plus trois fois au cours de l'exécution du programme : le point x_0 a alors une structure en étoile à trois branches.

4.1.5 Propriétés du lacet résultat

Vérifions que la liste C des codes obtenue possède bien les six propriétés énoncées. Pour cela posons :

$$r_i = r_0 \ + \ \sum_{j=1}^{i} \vec{u}_{chaîne[j]} \quad \text{pour} \quad 1 \ \leq \ i \ \leq \ n$$

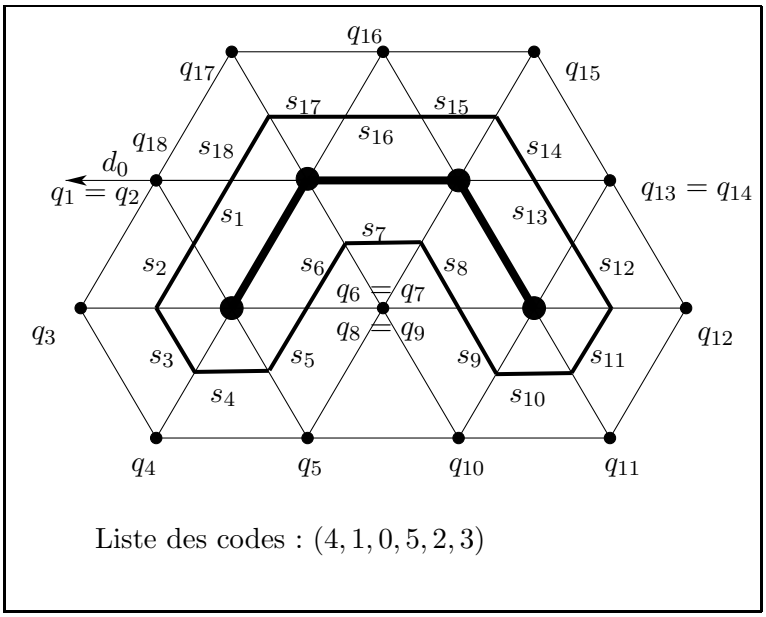


Figure 4.6 : Chaînage des segments de S.

avec $r_0 = x_0$. Les r_i ne sont rien d'autre que les positions successives occupées par x dans le groupe d'instructions (4) de l'algorithme. Dans la démonstration de la correction de ce dernier, nous avons noté ces points p_k, mais les indices ne correspondent pas. Si nous posons $r_i = p_{k_i}$, on a la propriété qui se déduit sans peine de la démonstration :

- La suite $(k_i)_{i=0}^{n}$ est strictement croissante.
- La suite $(p_j)_{j=k_i}^{k_{i+1}-1}$ est constante et la valeur de cette constante est p_i.
- Pour tout k, $p_{k_i} \neq p_{k_{i+1}}$, (sauf si $\mathbf{X}$ est réduit à un point unique).

P1 : Clair puisque les p_k sont des points de la frontière de $\mathbf{X}$.

P2 : Soit x un point de la frontière de $\mathbf{X}$. Soit alors $y \notin \mathbf{X}$ un point voisin de x. Notons z le milieu de (x, y). Exactement deux segments de S ont z pour extrémité. Lors du parcours de S_0, z a été le milieu de $(p_k, p_k + \vec{u}_d)$ pour un k donné, puisque *toute* la chaîne S_0 a été examinée. Donc $x = p_k = r_i$ pour i tel que $k_i \leq k < k_{i+1}$.

P3 : Clair puisque l'algorithme s'arrête quand on est revenu au point de départ.

P4 : Soit r_i fixé sur la frontiŕe de $\mathbf{X}$. Notons $(x_l)_{l=0}^{5}$ les six voisins de r_i. Convenons de considérer les indices des x modulo 6. Alors il existe i_1 et i_2 tels que $r_{i-1} = x_{i_1}$ et $r_{i+1} = x_{i_2}$. On peut convenir, quitte à rajouter 6 à i_2, que $i_1 < i_2 \leq i_1 + 6$.

Supposons $r_i \neq r_0$. Dans le test (2), le point visité est x_{i_1+1}, puis s'il est vérifié $x_{i_1+2} \ldots$ jusqu'à rencontrer un point de la frontière de $\mathbf{X}$, qui sera le point suivant du contour, c'est-à-dire $r_{i+1} = x_{i_2}$. Donc tous les points $x_{i_1+1} \ldots x_{i_2-1}$ ne sont pas dans $\mathbf{X}$, ce qui est la traduction exacte de la propriété **P4**.

Supposons $r_i = r_0$. Le raisonnement reste le même : il suffit de considérer les points examinés par le test (3) pour la première fois, avant d'exécuter les instructions (4) et d'y rajouter ceux examinés par le test (3) après la dernière exécution des instructions (4).

P5 : Soit q_1 un point de la frontière de $\mathbf{X}$ et $q_0 \notin \mathbf{X}$ voisin de q_1. Soit x_{i_1} le premier point de $\mathbf{X}$, voisin de q_1, obtenu à partir de q_0 en tournant dans le sens trigonométrique, et x_{i_2} celui en tournant dans le sens horaire. Nous pouvons supposer $i_1 < i_2 \leq i_1 + 6$. Notons (figure 4.7) :

- a_{i_1} le milieu de $[x_{i_1}, x_{i_1+1}]$.
- a_{i_2} le milieu de $[x_{i_2}, x_{i_2-1}]$.
- a_j le milieu de $[q_1, x_j]$ pour $i_1 < j < i_2$.

Pour $i_1 < j < i_2$, $x_j \notin \mathbf{X}$, donc tous les segments (a_j, a_{j+1}) pour $i_1 < j < i_2 - 1$ sont des segments successifs de S_0. Or on sait (voir la correction de l'algorithme) que ce dernier suit S_0 dans l'ordre. Donc les points x_{i_1}, q_1 et x_{i_2} seront dans cet ordre et successifs dans $(r_i)_{i=0}^n$, points successifs de la frontière.

Remarque : Cette démonstration prouve aussi que pour tout segment de la frontière de $\overline{\mathbf{X}}$ (x_{i_1}, q_1), il existe un segment de S, en l'occurence (a_{i_1}, a_{i_1+1}), qui est parallèle à ce segment et se trouve dans le triangle élémentaire de sommets x_{i_1}, q_1 et le point au milieu à droite de $\overrightarrow{x_{i_1} q_1}$.

P6 : Soit (r_i, r_{i+1}) un segment de la frontière de $\mathbf{X}$. Considérons le triangle élémentaire de sommets r_i, r_{i+1} et le point a au milieu à droite de $\overrightarrow{r_i r_{i+1}}$. Ce triangle contient un segment de S parallèle à (r_i, r_{i+1}) (voir la remarque dans la démonstration de **P5**), et donc $a \notin \mathbf{X}$.

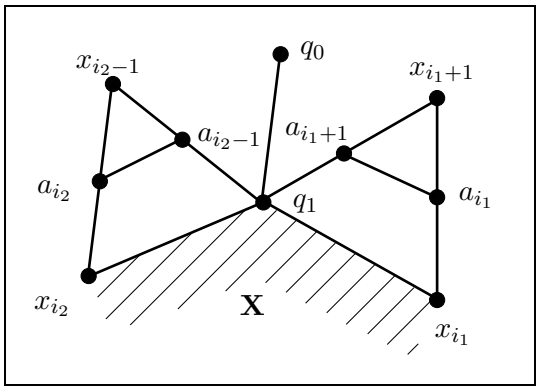


Figure 4.7 : Voisinage d'un point frontière.

4.2 Cas d'un ensemble $\mathbf{X} \subset H$ quelconque fini

4.2.1 Description de X par une suite d'ensembles simplement connexes

Soit $\mathbf{X}$ un sous-ensemble quelconque fini de $\mathbb{H}$.

Proposition 4.6

On peut décrire $\mathbf{X}$ *par une suite infinie décroissante d'ensembles* (X_i) *sous la forme :*

$$\mathbf{X} = (((X_0 \setminus X_1) \cup X_2) \setminus X_3) \cup X_4 \ldots$$

où

1. X_i *est union disjointe d'ensembles simplement connexes*
2. $X_{i+1} \subset X_i \ominus H_1$ *où* H_1 *désigne l'hexagone élémentaire.*

Le principe s'exprime de manière informelle ainsi (voir figure 4.8) :

- X_0 est l'union de $\mathbf{X}$ et de ses trous
- X_1 est l'ensemble des trous de $\mathbf{X}$
- X_2 est l'ensemble des particules se trouvant dans les trous de $\mathbf{X}$
- ...

De façon formelle, soit x_0 un point de $\mathbf{X}^c$ éloigné de $\mathbf{X}$. On pourra prendre par exemple un point en dehors d'un hexagone centré à l'origine contenant $\mathbf{X}$ qui existe puisque $\mathbf{X}$ est fini.

Posons :

X_i est l'ensemble des points x de $\mathbb{H}$ tels que tout chemin C de x à x_0 a un nombre de transitions $0-1$ et $1-0$ sur son parcours strictement supérieur à i.

Montrons que la suite ainsi définie a bien les propriétés requises :

- On a bien $X_{i+1} \subset X_i$ par construction.
- Montrons que $X_{2i} \setminus X_{2i+1} \subset \mathbf{X}$ et $X_{2i-1} \setminus X_{2i} \subset \mathbf{X}^c$.

  En effet, $X_{2i} \setminus X_{2i+1}$ est l'ensemble des points x pour lesquels il existe au moins un chemin de x à x_0 ayant $2i+1$ transitions, c'est-à-dire un nombre impair. Donc puisque $x_0 \in \mathbf{X}^c$, $x \in \mathbf{X}$.

  Le raisonnement est analogue pour $X_{2i-1} \setminus X_{2i}$.

  Soit x. Il existe un chemin de x à x_0 sans point double sur la trame. Le nombre de transitions $0-1$ et $1-0$ sur ce chemin est inférieur au nombre de pixels de $\mathbf{X}$. Donc X_i est vide à partir d'un certain rang. Comme on a $\mathbf{X} \subset X_0$, tout point x de $\mathbf{X}$ appartient à l'un des ensembles $X_i \setminus X_{i+1}$. Ceci n'est possible que pour i pair. Donc :

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{i=0}^{\infty} (X_{2i} \setminus X_{2i+1}) \\ &= ((X_0 \setminus X_1) \cup X_2) \setminus X_3 \ldots \end{aligned}$$

  puisque $X_i \supset X_{i+1}$.

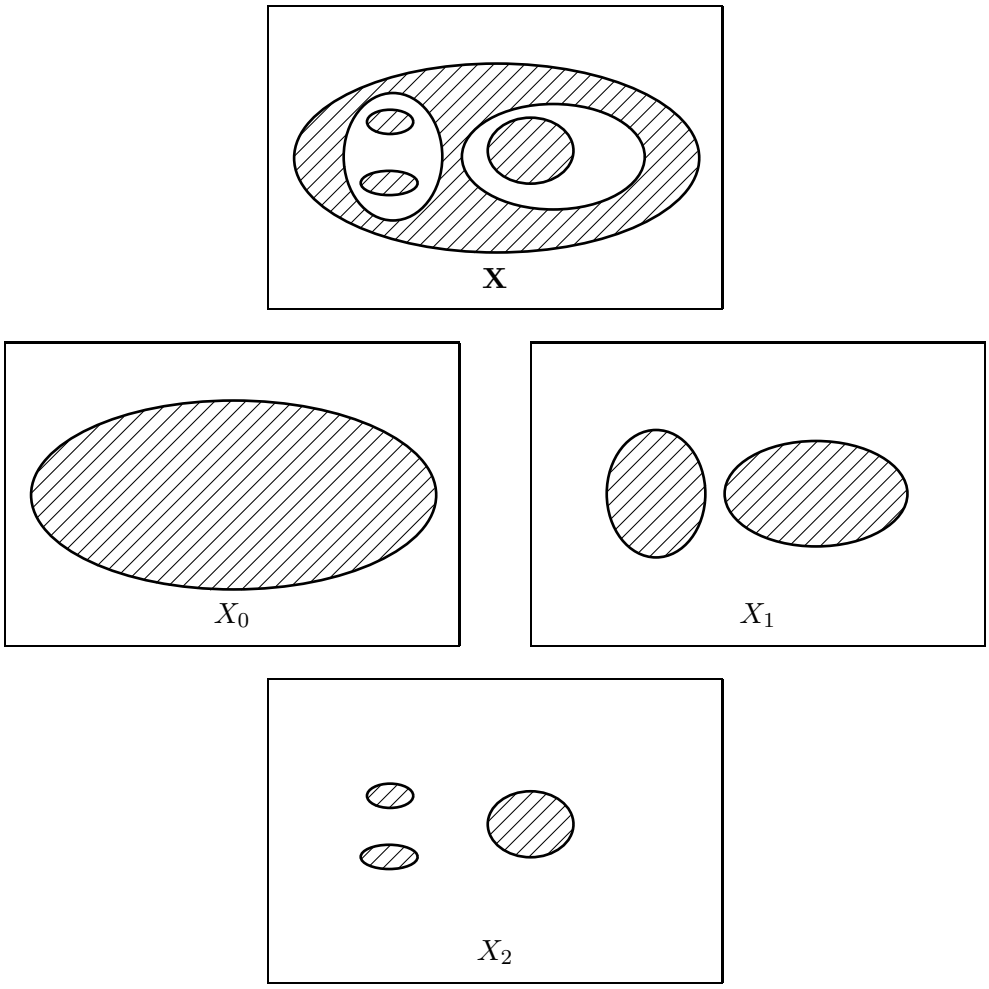


Figure 4.8 : Décomposition en ensembles simplement connexes.

- Si X_i n'est pas union disjointe d'ensembles simplement connexes, X_i^c n'est pas connexe. Soit alors $x \in X_i^c$, x n'étant pas dans la même composante connexe que x_0. Soit C un chemin de nombre de transitions minimal $j \leq i$ de x à x_0. C coupe X_i. Soit alors x_1 un de ces points d'intersection. Le sous-chemin de C de x_1 à x_0 possède $j-1$ transitions au plus ce qui montre que $x_1 \notin X_i$, ce qui est impossible. Donc X_i est union disjointe d'ensembles simplement connexes.

- Soit enfin x un point de la frontière de X_i. Soit alors x_1 un voisin de x n'appartenant pas à X_i et C_1 un chemin de nombre de transitions minimal j de x_1 à x_0. On a $j \leq i$ puisque $x_i \notin X_i$. Donc $C = x \cup C_1$ est un chemin de x à x_0 ayant exactement $j+1$ transitions, donc $x \notin X_{i+1}$ puisque $j+1 \leq i+1$, ce qui achève la démonstration ■

4.2.2 Détection de l'ensemble des contours d'un ensemble digital fini

D'après la proposition du paragraphe précédent, nous pouvons décrire $\mathbf{X}$ par une suite d'ensembles (X_i) union disjointe d'ensembles simplement connexes. Nous allons montrer qu'en fait, il suffit de suivre le contour de chacun d'eux pour obtenir un ensemble de lacets vérifiant les propriétés **P1** à **P6**.

Lemme 4.7

$$\mathit{Front}\ (\mathbf{X}) = \bigcup_{i \geq 0} \left(\mathit{Front}\ (X_{2i}) \cup \mathit{Front}\ (X_{2i+1}^c)\right)$$

Démonstration : un point x de $X_{2i} \subset X_{2i+1}$ et un point y de $X_{2j} \subset X_{2j+1}$ ne peuvent jamais être voisins, car $X_k \subset X_{k-1} \ominus H_1$. Donc la frontière de X est l'union disjointe des frontières de $X_{2j} \subset X_{2j+1}$ pour $j \geq 0$. Comme de plus $X_{2j} \ominus H_1 \supset X_{2j+1}$. Donc *Front* $(X_{2j} \subset X_{2j+1})$ est l'union (non nécessairement disjointe) de *Front* (X_{2j}) et de *Front* (X_{2j+1}) ■

Si nous nous donnons $x \in \mathbf{X}$ et $y \in \mathbf{X}^c$, voisins. Choisissons le plus grand indice tel que $x \in X_{2i}$. Deux cas peuvent se présenter :

- $x \in X_{2i}$ et $y \notin X_{2i}$. Alors $x \in$ *Front* (X_{2i}).

- $x \in X_{2i}$ et $y \in X_{2i}$. Alors $y \in X_{2i+1}$ et $x \notin X_{2i+1}$. Donc $x \in$ *Front* (X_{2i+1}^c).

Construisons à présent l'ensemble des contours :

- contour de chaque composante (simplement) connexe de X_{2i}.

- contour du complémentaire de chaque composante connexe de X_{2i+1}. L'algorithme de suivi de contour s'adapte sans problème à ce cas.

Proposition 4.8

L'ensemble des contours de **X** *vérifie globalement les propriétés* **P1** *à* **P6**.

Démonstration : en vertu du lemme précédent, la vérification des six propriétés est immédiate ■

4.2.3 Algorithme pratique

Nous avons vu que pour lancer l'algorithme de suivi de frontière, il suffit de connaître une transition $0-1$ sur l'image. Tout lacet de contour peut être trouvé par cette méthode, c'est-à-dire qu'il existe toujours une transition $0-1$ qui permettra d'obtenir en sortie de l'algorithme le lacet souhaité. Malheureusement, de nombreuses transitions donneront les mêmes lacets qui se déduiront cycliquement les uns des autres.

Pour éviter de détecter plusieurs fois les mêmes lacets, nous proposons de marquer les boucles déjà trouvées. Pour cela, modifions les valeurs de chaque pixel visité par l'algorithme :

- S'il est à 0 mettons le à -1
- S'il est à 1 mettons le à 2.

Les transitions que nous rechercherons alors seront :

$$\text{ou} \begin{cases} 0 - x & \text{avec} \quad x \geq 1 \\ y - 1 & \text{avec} \quad y \leq 0 \end{cases}$$

ces configurations étant examinées par un balayage vidéo de l'image, de gauche à droite et de haut en bas.

Il est clair qu'après une telle procédure de marquage, toutes les transitions de type $0-x$ ou $y-1$ donnant naissance au lacet en question ont été éliminées. Il reste à prouver que cela ne perturbe pas la détection des autres frontières. A cette fin établissons le lemme :

Lemme 4.9

Soit C' une composante connexe de X_j contenue dans la composante connexe C de X_{j-1}. Alors le contour de C sera marqué avant celui de C' et il restera après le marquage du contour de C au moins une transition $0-x$ (resp. $y-1$) si j est impair (resp. pair) pour initialiser le suivi de C'.

Démonstration : Plaçons nous dans le cas où j est impair par exemple (j pair conduit à une démonstration analogue). Le point *en haut à gauche* de C sera rencontré avant celui de C' dans un balayage vidéo puisque $C' \subset C \ominus H_1$. Donc le controur de C sera suivi avant celui de C'. Nous avons vu que le contour interne de C' (i.e. $C' \setminus C' \ominus H_1$) est inclus dans $C \ominus H_1$. Ainsi lors de la procédure de marquage, le contour interne de C' ne sera pas modifié, et il restera donc au moins une transition $0-x$, $x \geq 1$ pour le caractériser ■

Lemme 4.10

Soient C et C' deux composantes connexes de X_j. Le marquage de C ne modifie pas la valeur des pixels de C'.

Notons les X_i sous la forme d'un arbre. Les sommets au niveau i sont les composantes connexes de X_i. C' est fils de C si et seulement si C est une composante connexe de X_i, C' une composante connexe de X_{i+1} et $C' \subset C$. Enfin, chaque sommet est valué par les coordonnées de son point le plus en haut à gauche. Les contours sont alors détectés dans l'ordre suivant : le nœud suivant visité sera celui de valeur minimale dans l'ordre lexicographique parmi les nœuds non encore visités. Les relations d'inclusion assurent qu'il est le fils d'un nœud déjà visité.

Ces deux lemmes montrent que le marquage n'empêche pas la détection de tous les lacets de contour. Nous avons vu que réciproquement tout contour n'est visité qu'au plus une seule fois, ce que nous exprimerons par le fait que l'algorithme proposé est optimal.

Algorithme : suivi de toutes les chaînes de contour

Soit x le point courant et y son voisin dans la direction 0.

Parcourir l'image en sens vidéo

Si ($v(x) = 0$ et $v(y) > 0$) ou ($v(x) \leq 0$ et $v(y) = 1$)

suivre le contour d'origine y en modifiant la valeur des points p visités lors du suivi :

$$\begin{cases} \text{changer} \quad v(p) = 1 \quad \text{en} \quad v(p) = 2 \\ \text{changer} \quad v(p) = 0 \quad \text{en} \quad v(p) = -1 \end{cases}$$

fin si

fin du parcours.

4.2.4 Exemple d'illustration

Faisons fonctionner l'algorithme dans le cas d'un ensemble d'épaisseur unité ayant deux trous pour bien en comprendre les caractéristiques. La figure 4.9 illustre les diverses étapes du processus.

4.3 Digressions sur le théorème de Jordan digital

Nous venons d'utiliser le théorème de Jordan dans $\mathbb{R}^2$ en nous plaçant sur une sous-trame de la trame hexagonale. Il faut noter que la frontière de $\mathbf{X}$ décrite sous forme de lacet par l'algorithme que nous avons étudié ne permet pas d'appliquer le théorème de Jordan : en effet

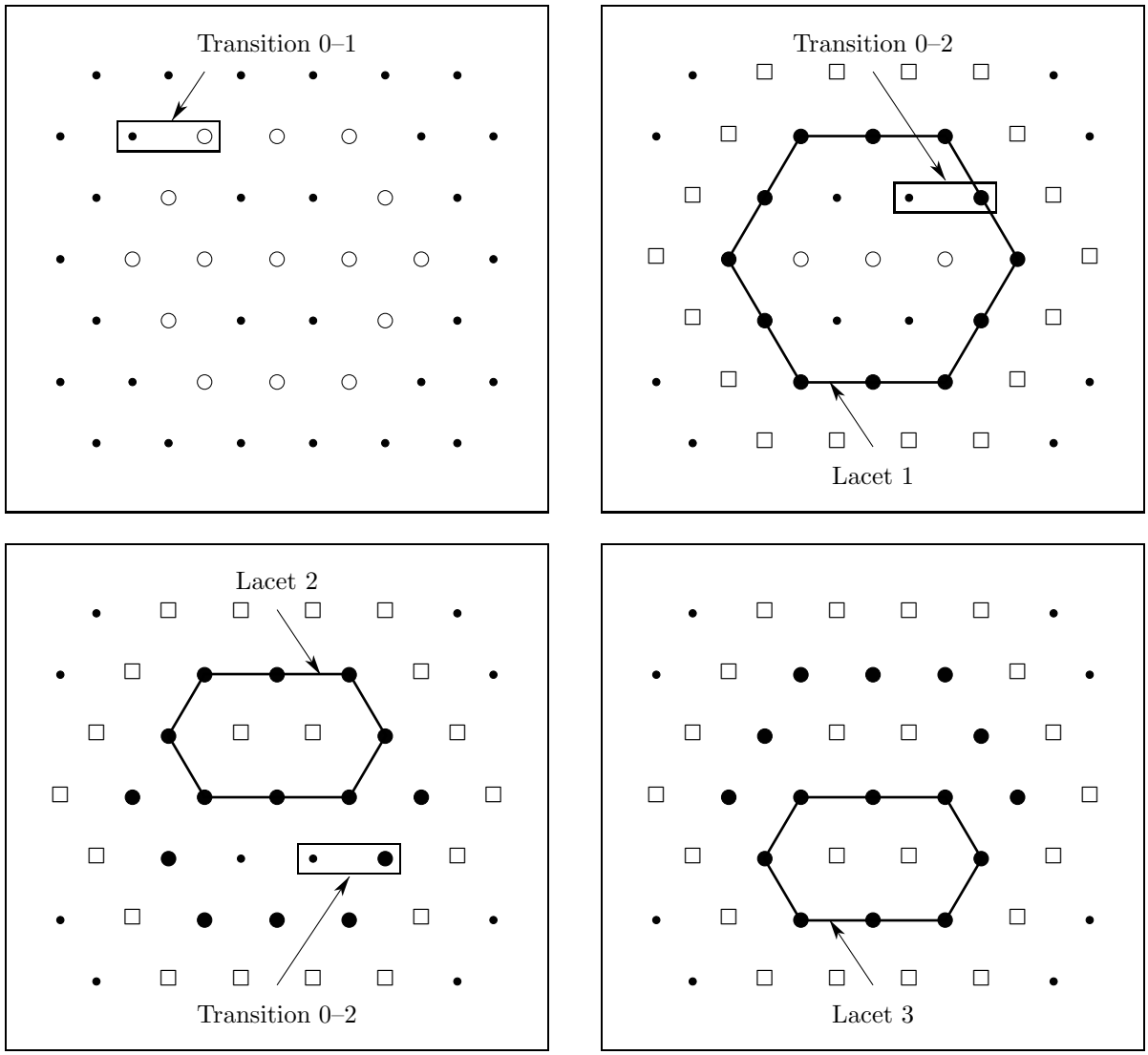


Figure 4.9 : Illustration de la détection de tous les contours.

le lacet n'est pas simple comme l'ont montré les figures. Il peut exister des points doubles, et l'intérieur peut même être vide !

Avant de montrer comment opérer dans le cas d'un ensemble $\mathbf{X}$ non simplement connexe, nous allons voir ce qui reste du théorème de Jordan sur une trame dans le cas général et le sens que l'on peut lui donner. Il est bien connu que toute trame ne vérifie pas nécessairement le théorème de Jordan digital (Par exemple, pour la trame carrée il faut prendre $\mathbf{X}$ en 4-connexité et $\mathbf{X}^c$ en 8-connexité ou inversement). Nous parlerons donc de la *propriété de Jordan* et tenterons de mettre en évidence des trames qui la vérifient. Là encore nous nous fonderons sur les travaux de A. Rosenfeld [Ros79]. Nous ne chercherons pas à généraliser les résultats qu'il a obtenus dans le cas de la trame carrée, à la trame héxagonale. Nous allons montrer le résultat plus fort suivant :

Toute triangulation vérifie la propriété de Jordan digitale.

En particulier, la trame hexagonale vérifie donc la propriété de Jordan digitale.

Ces résultats ne nous serviront pas directement par la suite, mais ils permettront de se faire une idée des comportements parfois paradoxaux que certaines trames peuvent présenter :

La trame hexagonale n'est pas le seul graphe planaire invariant par translation possédant la propriété de Jordan digitale.

4.3.1 Rappel du théorème de Jordan dans le plan $\mathbb{R}^2$

Nous reprenons ici la formulation donnée dans les *éléments d'analyse* de J. Dieudonné [Die69] :

Théorème 4.11

[Théorème de Jordan] *Soit H une courbe fermée simple dans $\mathbf{C}$. Alors :*

1. *$\mathbf{C} \setminus H$ a exactement deux composantes connexes, dont l'une est bornée et l'autre non bornée.*
2. *La frontière de chacune des composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus H$ est H.*
3. *Si γ est un lacet simple défini dans $I = [\alpha, \beta]$ et tel que $\gamma(I) = H$, alors $j(x;\gamma) = 0$ si x est dans la composante connexe non bornée de $\mathbf{C} \setminus H$, et $j(x;\gamma) = \pm 1$ si x est dans la composante connexe bornée de $\mathbf{C} \setminus H$, où $j(x;\gamma)$ représente l'indice de x par rapport à γ.*

4.3.2 La propriété de Jordan digitale

Soit V un ensemble de points de $\mathbb{R}^2$ sans point d'accumulation et E un ensemble d'arêtes non orientées, c'est-à-dire un sous-ensemble de V^2 tel que $(a,b) \in E \implies (b,a) \in E$. Nous noterons G le graphe simple (V,E). Dans ce qui suit, nous plongerons ce graphe dans $\mathbb{R}^2$ en supposant

que les arêtes de celui-ci sont matérialisées par des segments de droite. Nous supposerons aussi que G est connexe.

Le premier problème à résoudre est de définir un lacet simple sur un graphe. Nous reprenons ici la définition de A. Rosenfeld [Ros79] qui est la seule acceptable.

Définition 4.12

Un lacet simple digital ou lacet de Jordan est un lacet qui n'a pas de point double et ne se touche pas. En d'autres termes, si l'on note $(p_i)_{i=0}^{n-1}$ les pixels de ce lacet :

1. $\forall i, j, \;\; i \neq j, \;\; p_i \neq p_j$.
2. p_i *voisin de* $p_j \iff j = i \pm 1 \; mod \; n$.

Remarque : Dans le cas continu, un lacet n'est simple que s'il n'a pas de point double. Par contre, la notion de "ne se touche pas" n'a pas d'analogue continu, car si deux parties d'une courbe sont infiniment proches, elles ont un point en commun par continuité. A. Rosenfeld [Ros79] a montré que sous cette définition du lacet simple digital, l'ensemble des pixels suffit pour retrouver la suite ordonnée des points du lacet :

Pour qu'un ensemble de points corresponde à un lacet simple digital, il faut et il suffit que chaque point ait exactement deux voisins.

Nous pouvons alors énoncer :

Propriété 4.13

[**Propriété de Jordan digitale**] *Soit L un lacet simple digital et P l'ensemble des points correspondants. Le sous-graphe de G induit par les sommets de $V \setminus P$ a exactement deux composantes connexes.*

4.3.3 Quelques lemmes sur les triangulations

Avant d'attaquer le théorème central, nous allons établir quelques résultats intermédiaires sur les triangulations. Pour cela, nous ferons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 4.14

Tout x de V a un nombre fini de voisins.

Cette hypothèse n'est pas réellement restrictive ; en particulier la trame hexagonale la vérifie. Elle correspond bien à l'idée que l'on se fait d'une "bonne triangulation".

Hypothèse 4.15

L'enveloppe convexe de V est $\mathbb{R}^2$

Cette hypothèse nous évitera de considérer les effets de bords pour les points sur l'enveloppe convexe.

Notons $\mathcal{G}$ le plongement de G dans $\mathbb{R}^2$ où les arêtes de G sont représentées par des segments. Avec ces notations :

Définition 4.16

$$G \text{ triangulation} \iff \begin{cases} 1\text{-} & G \text{ est planaire} \\ 2\text{-} & \text{les composantes connexes de } \mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G} \text{ sont des triangles} \end{cases}$$

Sous ces hypothèses, on peut classer les voisins de tout $x \in V$ dans l'ordre trigonométrique $P = (x_i)_{i=1}^n$. Posons $x_0 = x_n$. Notons bien que l'hypothèse 4.15 est nécessaire pour assurer l'existence d'une triangulation sur V !

Proposition 4.17

Pour tout i, les points x_{i-1} et x_i sont voisins et le polygone de sommets P est un polygone simple contenant en son intérieur x.

Démonstration : Exprimons x_i en coordonnées polaires de pôle x : $x_i = r_i \exp(i\theta_i)$. Dire que les x_i sont classés dans l'ordre trigonométrique revient à supposer :

$$0 \leq \theta_1 < \theta_2 \ldots < \theta_n < 2\pi \text{ et } \theta_0 = \theta_n - 2\pi.$$

1. $\theta_{i+1} - \theta_i < \pi$. En effet, les trois points x_i, x_{i+1} et x sont trois sommets successifs d'une face de G. Comme celles-ci sont triangulaires, il s'agit d'un triangle de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$. Comme la somme des angles d'un triangle vaut π, l'un de ceux-ci ne peut dépasser π. L'inégalité est stricte si on suppose que les triangles de $\mathbb{R}^2 \setminus \mathcal{G}$ ne sont pas dégénérés.

   Il faut noter que nous avons fait implicitement l'hypothèse que V ensemble des sommets de G est infini : $\mathcal{G}$ découpe le plan en triangles. En fait, lorsque l'on triangule un ensemble de points (par la méthode de Delaunay par exemple), seule l'enveloppe convexe de ces points est triangulée et une des faces du graphe G est d'extension infinie : c'est celle qui correspond au complémentaire de l'enveloppe convexe.

2. x_{i+1} et x_i sont voisins puisque le triangle (x_i, x_{i+1}, x) est une face de G.

3. x est à l'intérieur du polygone formé par ses voisins.

   Le contour polygonal C de sommets $P = (x_i)_{i=1}^n$ est un lacet simple de $\mathbb{R}^2$, donc sépare le plan en deux régions. Pour montrer que x est à l'intérieur de C, il suffit de calculer l'indice de x par rapport à C et de montrer qu'il vaut $2i\pi$.

$$\begin{aligned}
\int_C \frac{dz}{z-x} &= \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d(x_i + t(x_{i+1} - x_i))}{x_i + t(x_{i+1} - x_i)} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} [\ln(x_i + t(x_{i+1} - x_i))]_{t=0}^{t=1} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} \ln \frac{r_{i+1}}{r_i} + i\,(\theta_{i+1} - \theta_i) \\
&= i(\theta_n - \theta_0) \\
&= 2i\pi
\end{aligned}$$

Le calcul sous forme du logarithme est bien valide puisque chaque segment est tout entier contenu dans un demi-plan limité par la droite passant par x et de direction celle du segment. Dans un tel demi-plan, une détermination du logarithme existe bien ■

4.3.4 Le théorème central

Théorème 4.18

Si G est une triangulation, alors la propriété de Jordan digitale est vérifiée pour tout lacet simple non dégénéré.

Démonstration : Nous verrons au cours de la démonstration la définition précise d'un lacet simple non dégénéré.

Soit L un lacet simple digital sur G et $P = \{p_i\}_{i=0}^{n-1}$ l'ensemble des sommets (pixels) qui composent ce lacet. Nous appellerons C la ligne polygonale de sommets les (p_i) que l'on relie avec des segments de droite. Comme G est planaire, C est un lacet simple de $\mathbb{R}^2$ et nous pouvons appliquer le théorème de Jordan dans le plan. Soient C_I et C_E respectivement l'intérieur et l'extérieur. Posons $V_I = V \cap C_I$ et $V_E = V \cap C_E$.

Nous allons montrer que les graphes induits sur V_I et V_E sont connexes alors que celui induit sur $V_I \cup V_E$ ne l'est pas, ce qui établira le théorème.

Soient x et y deux points de V_I. Comme G est connexe, il existe un chemin $(x_1, \ldots, x_p)$ de x à y. Si celui-ci n'emploie que des sommets de V_I nous avons terminé. Sinon soit x_{i_1} le premier point hors de V_I et x_{i_2} le dernier. Comme $x_{i_1-1} \in C_I$ et $x_{i_1} \notin C_I$, le segment $[x_{i_1-1}, x_i]$ coupe le polygone C et comme G est planaire, cela ne peut avoir lieu qu'en un des sommets du graphe G. Donc $x_{i_1} \in P$ et $x_{i_2} \in P$. Comme P est connexe au sens de G, on peut remplacer $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_2})$ par un chemin de points de P $(y_1, \ldots, y_q)$. Alors $(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, y_1, \ldots, y_q, x_{i_2+1}, \ldots, x_p)$ est un chemin de x à y dans le graphe induit par $V_I \cup P$.

Choisissons parmi tous les chemins de x à y dans $V_I \cup P$ celui qui utilise le moins de points de P. Soit s ce nombre. Si $s = 0$, il existe un chemin de x à y dans V_I. Sinon soit $Ch = (x_i)_{i=0}^{p-1}$ un chemin correspondant à s minimal et soit $x_{i_1} = p_{i_2}$ le premier point de Ch appartenant à P. Nous allons montrer que l'on peut contourner le point x_{i_1} par des points de V_I, ce qui fournira un chemin empruntant $s - 1$ points de P, ce qui est contradictoire avec la minimalité de Ch. Nous en conclurons $s = 0$.

Ordonnons les points du voisinage de x_{i_1} dans le sens trigonométrique :

$$(p_{i_2-1}, \underbrace{y_1, \ldots, y_k}_{Y}, p_{i_2+1}, \underbrace{z_1, \ldots, z_l}_{Z}).$$

Y et Z ne peuvent être vides, car sinon p_{i_2-1} et p_{i_2+1} seraient voisins, ce qui impliquerait que le lacet simple C entoure une face triangulaire de G. Nous éliminons momentanément ce cas. D'autre part, $Y \cap P = \emptyset$ et $Z \cap P = \emptyset$ car chaque point d'un lacet simple digital a exactement deux voisins et ceux de p_{i_2} sont p_{i_2-1} et p_{i_2+1}.

Lemme 4.19

Y et Z ne peuvent être dans la même composante connexe de $\mathbb{R}^2 \setminus C$.

Démonstration : $Y \cup Z \subset V_I \cup V_E$. Puisque C_I et C_E sont des ouverts connexes, donc connexes par arcs, et que la ligne polygonale $\mathcal{Y}$ de sommets Y ne coupe pas le polygone simple C lacet simple de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{Y}$ est toute entière dans C_I ou toute entière dans C_E. Il en est de même pour celle de sommets Z. Montrons qu'ils ne peuvent pas être dans la même composante (voir figure 4.10).

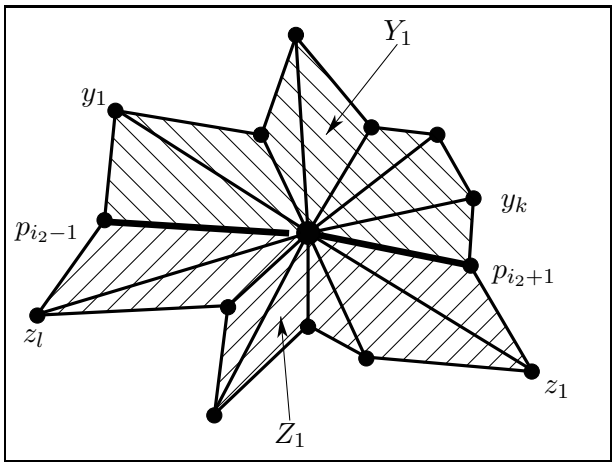


Figure 4.10 : Structure du voisinage de p_{i_2}.

Notons Y_1 et Z_1 les polygones *fermés* de sommets :

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv (p_{i_2-1}, y_1, \ldots, y_k, p_{i_2+1}, p_{i_2}) \\ Z_1 &\equiv (p_{i_2+1}, z_1, \ldots, z_l, p_{i_2-1}, p_{i_2}) \end{aligned}$$

Notons $\overset{\circ}{Y}_1$ l'intérieur de Y_1 au sens topologique de $\mathbb{R}^2$.

1. $\overset{\circ}{Y}_1$ et $\overset{\circ}{Z}_1$ sont connexes et
$$\overset{\circ}{Y}_1 \cap C = \overset{\circ}{Z}_1 \cap C = \emptyset.$$
Donc $\overset{\circ}{Y}_1 \subset C_E$ ou C_I. De même pour $\overset{\circ}{Z}_1$.

2. $Y_1 \cup Z_1$ est un voisinage de p_{i_2} (Théorème de Jordan dans $\mathbb{R}^2$). Si $\overset{\circ}{Y}_1$ et $\overset{\circ}{Z}_1$ étaient dans la même composante connexe, par exemple C_I, on aurait $Z_1 \cup Y_1 \subset C_I \cup C$. Comme tout voisinage de p_{i_2} coupe C_I et C_E cela est impossible. D'où le lemme ■

Dans ce qui suit, nous supposerons $Y \subset C_E$ et $Z \subset C_I$.

Après avoir établi ce lemme sur la structure du voisinage de x_{i_1}, montrons comment "contourner" x_{i_1}. Comme dans le voisinage de x_{i_1} seuls les (z_r) sont dans V_I, posons $x_{i_1-1} = z_m$. Par l'examen des configurations possibles de ce voisinage, nous allons dans chaque cas déterminer un chemin de x à y empruntant $s-1$ points de P, ce qui achèvera la démonstration du théorème.

Cas 1 : $x_{i_1+1} = p_{i_2-1}$.

On considère le chemin Ch1 :

$Ch1 \equiv (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, z_{m+1}, z_{m+2}, \ldots, z_l, x_{i_1+1}, \ldots, x_{p-1})$.

Cas 2 : $x_{i_1+1} = p_{i_2+1}$.

On considère le chemin Ch2 :

$Ch2 \equiv (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, z_{m-1}, z_{m-2}, \ldots, z_1, x_{i_1+1}, \ldots, x_{p-1})$.

Cas 3 : $x_{i_1+1} = z_q$ avec $q \geq m$.

On considère le chemin Ch3 :

$Ch3 \equiv (x_1, \ldots, x_{i_1-1}, z_{m+1}, \ldots, z_{q-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{p-1})$.

Cas 4 : $x_{i_1+1} = z_q$ avec $q \leq m$.

Analogue au cas 3.

Cas 5 : $x_{i_1+1} = y_q$ est impossible car $y_q \in V_E$.

Donc x et y sont dans la même composante connexe de V_I, ce qui prouve la connexité de V_I.

Par une démonstration analogue, on prouve que V_E est connexe.

Définition 4.20

Un lacet simple digital tel que $V_I = \emptyset$ sera appelé un lacet dégénéré.

Remarque : Nous avons vu que Y et Z ne sont vides que si P est réduit aux trois sommets d'une face triangulaire du graphe G. La réciproque étant évidente, on peut caractériser les lacets simples dégénérés par le fait qu'ils sont réduits à trois points voisins.

Montrons que $x \in V_I$ et $y \in V_E$ ne sont pas dans la même composante connexe de $V \setminus P$[1]. Soit $Ch = (x_i)_{i=0}^{p-1}$ un chemin de x à y. Comme $x \in C_I$ et $y \in C_E$, le chemin polygonal de sommets Ch coupe C, lacet simple de $\mathbb{R}^2$. Comme tous les segments considérés sont des arêtes de G, le chemin polygonal Ch coupe C en un de ses sommets, donc en un point de P. Comme

[1]Nous supposerons que V_I a au moins un point, sinon, la propriété de Jordan n'est trivialement pas vérifiée. Il n'en reste pas moins que V_E est connexe.

$P \cap V_I = \emptyset$ et $P \cap V_E = \emptyset$, tout chemin de x à y n'est pas entièrement inclus dans $V \setminus P$. Il en résulte que $V \setminus P$ a deux composantes connexes au moins, ce qui achève la démonstration du théorème annoncé.

Pour avoir un meilleur parallèle avec le cas continu, montrons que P est la frontière externe de V_I et V_E.

Proposition 4.21

$$D(V_I) \;=\; V_I \cup P \text{ et } D(V_E) \;=\; V_E \cup P$$

où $D(\cdot)$ est la dilatation de taille 1 sur le graphe.

Démonstration : Reprenons la structure du voisinage d'un point de P (voir figure 4.10). Nous avons vu que Y et Z ne pouvaient être vides si le lacet P n'était pas dégénéré. Donc le point x_{i_1} est voisin d'au moins un point de $Z \subset V_E$ et d'au moins un point de $Y \subset V_I$. Enfin, tout point x de V_I ne peut être voisin d'un point Y de V_E, puisque tout chemin de x à y contient au moins un point de P ■

4.3.5 Réciproque

Il serait agréable de disposer d'une réciproque de ce théorème sous certaines hypothèses sur le graphe G. Malheureusement, nous allons présenter un *contre exemple* : soit G le graphe non orienté de la figure 4.11, que nous supposons se répétant à l'infini, et $\mathcal{G}$ son plongement dans $\mathbb{R}^2$. Ce graphe, bien que planaire, n'est pas une triangulation.

Proposition 4.22

G vérifie la propriété de Jordan pour tout lacet simple non dégénéré.

Soit $L = (p_i)_{i=0}^{n-1}$ un lacet simple digital de G, P l'ensemble des points qui le composent et C la ligne polygonale fermée de sommets L.

Lemme 4.23

Si pour chaque motif élémentaire on ajoute l'arête (a_6, a_8) selon la figure 4.11, L reste un lacet simple.

Démonstration : Supposons que pour un motif élémentaire, $a_8 \in P$. Montrons qu'alors $a_6 \notin P$ en raisonnant sur G. Le successeur et le prédécesseur de a_8 sont soit a_1 et a_7, soit a_3 et a_5 puisque L est un lacet simple supposé non dégénéré. Dans le premier cas, si le successeur de a_7 est a_6, les trois suivants envisageables a_2, a_5 ou a_4 ne sont pas possibles. En effet, il ne peut s'agir de :

- a_2, puisque a_1 est voisin de a_2, le lacet L se réduit à $(a_1, a_8, a_7, a_6, a_2)$, lacet qui vérifie la propriété de Jordan digitale. Nous supposerons dorénavant L différent de ce lacet.

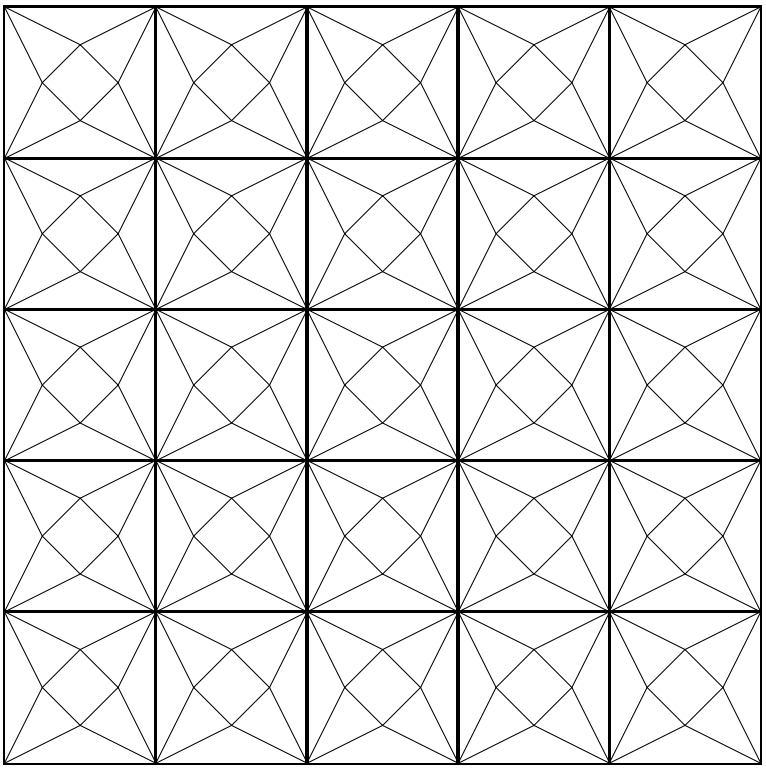


Figure 4.11 : Trame vérifiant la propriété de Jordan, bien que ne constituant pas une triangulation.

- a_5, puisque a_5 est voisin de a_1, a_8 et a_6, tous trois sur L.
- a_4, puisque a_7 est voisin de a_4.

a_3 n'est pas possible comme successeur de a_7 puisque voisin de a_1. Il s'en suit que P est de la forme :

$$(a_1, a_8, a_7, a_4) \quad \text{ou} \quad (a_4, a_7, a_8, a_1).$$

Dans le second cas P est de la forme :

$$(a_3, a_8, a_5, a_2) \quad \text{ou} \quad (a_2, a_5, a_8, a_3).$$

(voir figure 4.12).

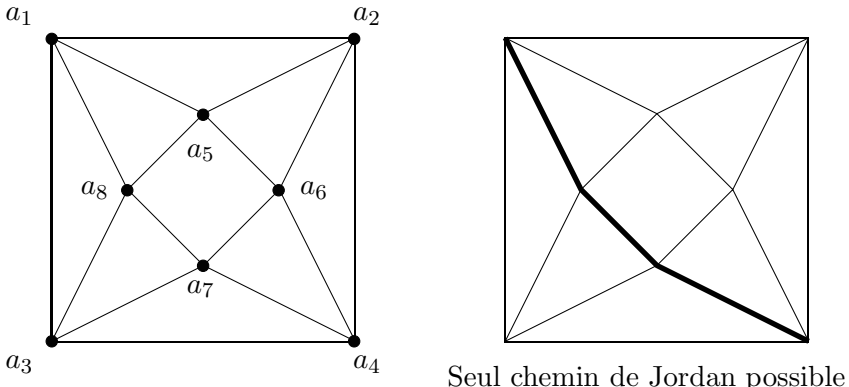


Figure 4.12 : Morceaux de lacet sur G.

Or pour tous ces chemins, a_6 est voisin de l'un des deux centraux (a_8, a_7) ou (a_8, a_5). Si $a_6 \in P$, a_6 est successeur ou prédécesseur d'un de ces points, ce qui n'est pas possible d'après les configurations nécessaires que nous avons mises en évidence.

Soit G' le graphe obtenu en ajoutant à chaque motif élémentaire de G l'arête (a_8, a_6). Nous avons montré que L est toujours un lacet simple sur G'. Puisque G' est une triangulation, nous pouvons lui appliquer le théorème. En gardant les notations de ce dernier, V_I et V_E sont les deux composantes connexes de $V \setminus C$. Il reste à montrer que ces deux composantes sont encore connexes au sens de G. Pour cela établissons ce dernier lemme :

Lemme 4.24

Tout chemin de G' d'extrémités x et y, totalement inclus dans V_I (resp. V_E) peut être transformé en un chemin sur G, toujours inclus dans V_I (resp. V_E).

Démonstration : Soient x et y dans V_I et un chemin de G' de x à y inclus dans V_I. Supposons que sur un motif élémentaire ce chemin passe par les points successifs (a_8, a_6). De la démonstration du lemme donnant la forme locale des lacets simples de G on déduit facilement que tout lacet

simple passant par a_5 ou a_7 passe par l'un des deux points a_8 ou a_6. Or ces deux points sont dans V_I, donc aussi a_5 et a_7.

Il est dons possible de modifier le chemin de x à y dans G' en restant dans V_I en remplaçant toute succession de type

	a_8, a_6	par	a_8, a_5, a_6
et	a_6, a_8	par	a_6, a_5, a_8

Ce nouveau chemin de G' est aussi un chemin de G et donc V_I est connexe au sens de G.

On montre de façon analogue que V_E est aussi connexe au sens de G.

Enfin $V_I \cup V_E$ n'est pas connexe au sens de G puisqu'il ne l'est pas au sens de G' qui a plus d'arêtes que G ■

En conclusion, une triangulation et donc la trame hexagonale est une "bonne trame" pour représenter des images, alors que la trame carrée pose de nombreux problèmes de connexité qui ne sont résolus qu'en introduisant une dissymétrie entre un ensemble et son complémentaire. Cependant, d'autres trames peuvent présenter de bonnes propriétés comme le montre le contre-exemple.

Chapitre 5

Opérations morphologiques sur les chaînes et lacets

5.1 Dilatation des lacets

Nous allons d'abord voir comment calculer de manière simple le lacet parallèle à un lacet donné. Nous quitterons ensuite la structure de lacet pour aborder celle de chaîne, plus générale et plus efficace. Elle nous permettra en particulier d'obtenir des algorithmes pour les transformations géodésiques. Nous montrerons aussi comment effectuer certaines mesures (diamètre de Ferret...) à partir de la structure de chaîne. La fonction de propagation ne sera abordée qu'au chapitre suivant, car il sera nécessaire d'étudier d'abord en détail la notion de géodésique dans des métriques particulières.

5.1.1 Dilatation d'un lacet par l'hexagone élémentaire

Nous supposerons d'abord que $\mathbf{X}$ est représenté par un unique lacet $L = (O, C)$, d'origine $O = (x, y)$ et de liste de codes $C = (c_i)_{i=1}^{n}$. Par commodité, nous poserons $c_0 = c_n$.

Définition 5.1

Soit $\mathcal{D} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ l'application qui transforme les lacets comme suit :
Posons $L' = (O', C') = \mathcal{D}(L)$. On dira que $\mathcal{D}(L)$ est le lacet dilaté de L.

1. $O' = O + \vec{u}_{c_n - 2}$
2. $C' = (c_1^1, \ldots, c_{i_1}^1, c_1^2, \ldots, c_{i_2}^2, \ldots, c_1^n, \ldots, c_{i_n}^n)$, *ou sous forme condensée :*

$$C' = \left((c_p^j)_{p=1}^{i_j} \right)_{j=1}^{n}$$

avec $c_1^j, \ldots, c_{i_j}^j$ est donné par le système de règles $\mathcal{R}$ (voir table 5.1) :

$$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{\mathcal{R}} c_1^j, \ldots, c_{i_j}^j$$

$c_j - c_{j-1} \bmod 6$		
0	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_0}$	c_j
1	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_1}$	c_{j-1}, c_j
2	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_2}$	$c_{j-1}, c_{j-1}+1, c_j$
3	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_3}$	$c_{j-1}, c_{j-1}+1, c_j-1, c_j$
4	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_4}$	$c_{j-1}, c_{j-1}+1, c_{j-1}+2, c_j-1, c_j$
5	$c_{j-1}, c_j \xrightarrow{R_5}$	$\emptyset$

Tableau 5.1 : Les règles du système $\mathcal{R}$.

Ces règles peuvent être traduites géométriquement comme le montre la figure 5.1.

Remarque : La règle 4 ne peut pas être activée dans le cas d'un lacet délivré par l'algorithme de suivi de contours : en effet la propriété **P6** n'est pas vérifiée. Cependant, cette règle nous servira par la suite pour effectuer des dilatations de taille plus grande.

Démontrons à présent quelques propriétés du lacet transformé$L' = \mathcal{D}(L)$.

Proposition 5.2

L' est un lacet (fermé).

Démonstration : Posons pour toute la suite de ce paragraphe

$$p_0 = O \text{ et } p_i = O + \sum_{j=1}^{i} \vec{u}_{c_j} \ , \ \ 1 \leq i \leq n$$

Par hypothèse, L est un lacet, donc $p_0 = p_n$. Par construction, O' est le point au milieu à droite de (p_{n-1}, p_n), dont le code de direction est c_n. Posons $p'_0 = O'$ et construisons par récurrence la suite de points

$$p'_i = p'_{i-1} + \sum_{j=1}^{i_j} \vec{u}_{c'^i_j} \ , \ \ 1 \leq i \leq n.$$

De par la définition de $\mathcal{R}$ (voir figure 5.1), si p'_{i-1} est le point au milieu à droite de (p_{i-2}, p_{i-1}), alors p'_i est le point au milieu à droite de (p_{i-1}, p_i). Donc puisque p'_0 est au milieu à droite de (p_{n-1}, p_0), p'_n est au milieu à droite de (p_{n-1}, p_n). D'où $p'_0 = p'_n$, ce qui prouve que la chaîne L' est fermée ■

Notons à présent les codes de L' par $C' = (c_i)_{i=1}^{q}$ et les points du lacet :

$$q'_i = O' + \sum_{j=1}^{i} \vec{u}_{c'_j} \ , \ \ 0 \leq i \leq q.$$

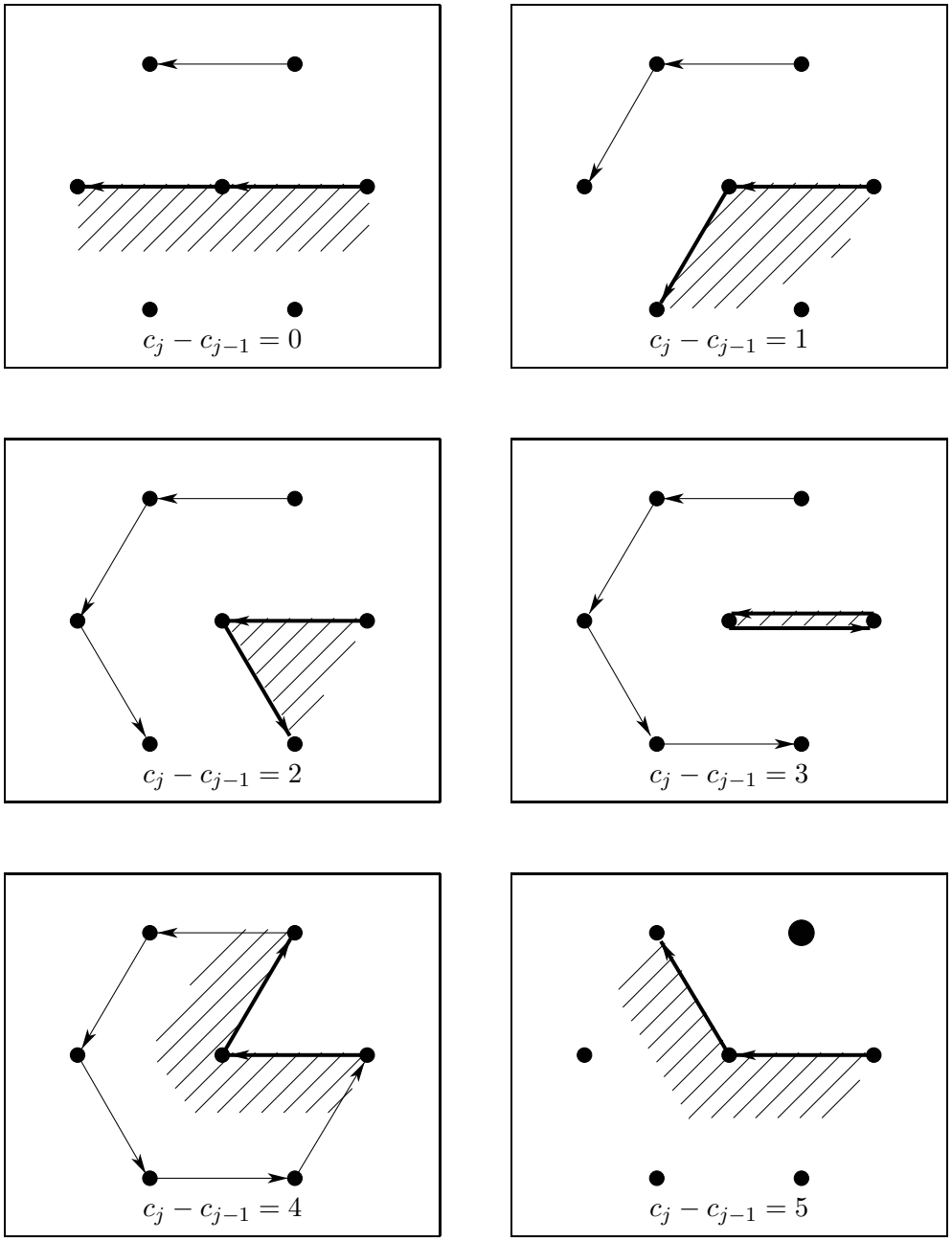


Figure 5.1 : Interprétation géométrique des règles du système $\mathcal{R}$.

Proposition 5.3

$$\mathbf{X} \oplus H_1 \setminus \mathbf{X} \subset \{q'_i\}_{i=1}^{q}.$$

Cette proposition exprime le fait que tous les points du dilaté de taille un de $\mathbf{X}$ qui ne sont pas dans $\mathbf{X}$ sont visités par le lacet transformé.

Démonstration : Soit $x \in \mathbf{X} \oplus H_1$. La propriété **P5** de l'algorithme de suivi de contours assure qu'il existe trois points consécutifs p_{i-1}, p_i et p_{i+1} où x est examiné lorsque l'on balaye les voisins de p_i dans le sens trigonométrique en partant de p_{i-1} pour aboutir à p_{i+1}. Soit $(x_j)_{j=1}^{s}$ la suite des points de $\mathbf{X}^c$ rencontrés. On a $x = x_k$ pour $1 \leq k \leq s$. $x_1 = p'_i$ car x_1 est le point au milieu à droite de (p_{i-1}, p_i) et $x_s = p'_{i+1}$ puisque x_s est le point au milieu à droite de (p_i, p_{i+1}). Par construction (voir figure 5.1), tous les points $(x_i)_{i=1}^{s}$ sont visités par la sous-chaîne du lacet L' allant de p'_i à p'_{i+1}. Donc $x = q'_t$ pour $0 \leq t \leq q-1$ ■

Proposition 5.4

$$\{q'_i\}_{i=1}^{q} \subset \mathbf{X} \oplus H_1.$$

Démonstration : Tout point q_i appartient à une sous-chaîne de p'_j à p'_{j+1}. Or tous les points de cette sous-chaîne sont voisins de $p_j \in \mathbf{X}$, d'où la proposition ■

En résumé, si nous supposons que les points de $\mathbf{X}$ ont pour valeur 1, ceux de $\mathbf{X}^c$ la valeur 0 et que l'on affecte la valeur 1 au points $(q'_i)_{i=1}^{q}$ du lacet L', *les points dont la valeur est alors* 1 *sont exactement ceux de* $\mathbf{X} \oplus H_1$. Il faut noter qu'une fois $\mathbf{X}$ codé sous forme de lacet, nous venons de calculer $\mathbf{X} \oplus H_1$ *sans utiliser de relations de voisinages*. En fait, celles-ci sont contenues dans l'enchaînement des directions des segments successifs du lacet. La figure 5.2 illustre l'application $\mathcal{D}$ par un exemple. Nous avons dans ce cas :

$$\begin{aligned} L &= (O, (4,4,5,5,0,0,2,3,2,1,0,1,3,3)) \\ L' &= (O', (3,4,4,4,5,5,5,0,0,0,1,2,2,3,0,1,1,2,3,3)) \end{aligned}$$

5.1.2 Propriétés du lacet dilaté

La figure 5.2 montre bien que le lacet dilaté ne possède pas les propriétés **P1** à **P6**. Si l'on cherche à itérer la dilatation des lacets $\mathcal{D}$, nous devons restreindre les propriétés demandées. En voici trois qui se conserveront par itération :

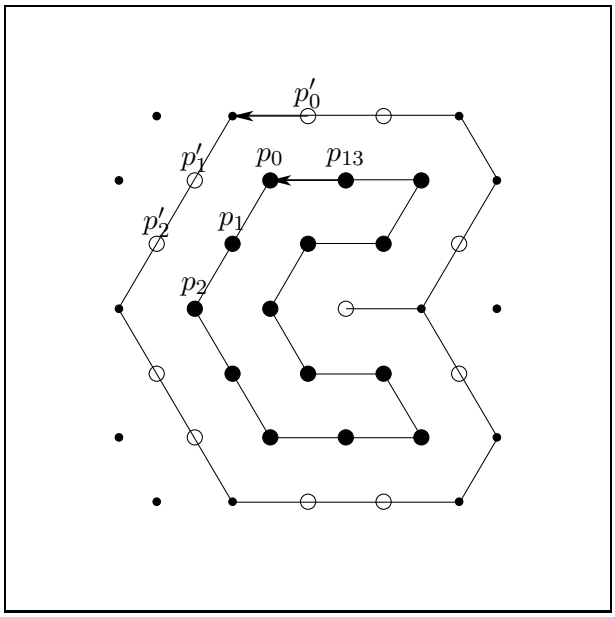


Figure 5.2 : Exemple où le lacet transformé n'est pas la frontière du dilaté.

Définition 5.5

Soit $\mathbf{X}$ *un ensemble simplement connexe et* L *un lacet. Notons le lacet* $L = (p_0, (c_1, \ldots, c_n))$ *et* $p_i = p_0 + \sum_{j=1}^{i} \vec{u}_{c_j}$ *et* $\mathbf{X}$ *l'ensemble traité. Nous dirons que* $\mathbf{X}$ est représenté par L *ou que* L est associé à $\mathbf{X}$ *si et seulement si* L *vérifie les trois propriétés :*

Propriétés des lacets

Propriété **L1** *: (fermeture)* $p_0 = p_n$.

Propriété **L2** *:* $\forall i\ p_i \in \mathbf{X}$.

Propriété **L3** *: Soient* $x_1 \in \mathbf{X}$ *et* $x_2 \in \mathbf{X}^c$*, voisins. Il existe* i *tel que* $x_1 = p_i$ *et* x_2 *est atteint lorsque l'on balaye les voisins de* p_i *dans le sens trigonométrique de* p_{i-1} *à* p_{i+1}.

Notons que la propriété **L3** implique que *Front* $(\mathbf{X}) \subset \{p_i\}_{i=1}^{n}$.

L'introduction de ces trois nouvelles propriétés est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 5.6

Soit un lacet L *associé à* $\mathbf{X}$ *et vérifiant* **L1** *à* **L3**. *Alors le lacet dilaté* $\mathcal{D}(L)$ *associé à* $\mathbf{X} \oplus H_1$ *vérifie aussi* **L1** *à* **L3**.

Démonstration : En gardant les notations du paragraphe précédent :

- $L' = \mathcal{D}(L)$ le lacet transformé de L.
- $C = (p_i)_{i=1}^n$ les points de L avec $p_0 = p_n$.
- $(p'_i)_{i=1}^n$ les points au milieu à droite de (p_{i-1}, p_i).
- $C' = (q'_i)_{i=1}^q$ les points du lacet transformé. On a donc $\{p'_i\}_{i=1}^n \subset \{q'_i\}_{i=1}^q$.

Propriété **L1** : L' la vérifie (voir la démonstration du paragraphe précédent).
Propriété **L2** : De par la structure du système $\mathcal{R}$, les points $\{q'_i\}$ du lacet L' sont voisins des points du lacet L. Donc pour tout i, $q'_i \in \mathbf{X} \oplus H_1$.
Propriété **L3** : Soient $x_1 \in \mathbf{X} \oplus H_1$ et $x_2 \in (\mathbf{X} \oplus H_1)^c$. Comme $x_1 \in \mathbf{X} \oplus H_1$, soit $x_0 \in \mathbf{X}$ voisin de x_1. Par hypothèse, la propriété **L3** est vérifiée par L. Soient donc k tel que $x_0 = p_k$ et x_1 balayé dans le sens trigonométrique de p_{k-1} à p_{k+1}. On a donc par construction de $\mathcal{R}$ $x_1 = q'_j$, q'_j se trouvant entre les points p'_k et p'_{k+1} sur le lacet L'.

Cas 1 : $x_1 \neq p'_k$ et $x_1 \neq p'_{k+1}$. Alors les vecteurs $\overrightarrow{q'_{j-1}q'_j}$ et $\overrightarrow{q'_jq'_{j+1}}$ font un angle de $\frac{\pi}{3}$ (voir figure 5.1) et le point au milieu à gauche de (q'_{j-1}, q'_j) est dans $\mathbf{X}$. Les seules positions possibles pour x sont alors a, b ou c selon la figure 5.3. Ces trois points seront rencontrés en balayant dans le sens trigonométrique les voisins de q'_j de q'_{j-1} à q'_{j+1}.

Cas 2 : $x_1 = p'_k$. Alors p'_k est au milieu à droite de (p_{k-1}, p_k) (voir figure 5.4). Notons, toujours selon la figure 5.4, les quatre autres voisins de p'_k, a, b, c et d. Les points p_{k-2} et p_{k+1} ne peuvent pas se trouver simultanément en d et a respectivement, car tout voisin de x_1 serait dans $\mathbf{X} \oplus H_1$. Supposons $p_{k-2} \neq d$. L'application des règles $\mathcal{R}$ montre que $q'_{j-1} = d$, puisque toutes les règles (sauf R_5 que l'on ne peut pas employer) transforment c_i, c_{i+1} en $c_i, \ldots, c_{i+1}$.

- Si $p_{k+1} \neq a$, alors $q'_{j+1} = a$. Dans ces conditions, les deux seules possibilités pour x_2, à savoir b et c seront balayées par l'application de la règle transformant $((q'_{j-1}, q'_j), (q'_j, q'_{j+1}))$.
- Si $p_{k+1} = a$, $p_{k+2} \neq b$ puisque sinon tout voisin de x_1 est dans $\mathbf{X} \oplus H_1$. La règle utilisée pour transformer $((p_k, p_{k+1}), (p_{k+1}, p_{k+2})$ ne sera pas R_5 et donc $q'_{j+1} = b$. x_2 est alors c et sera bien visité à l'application de R_5 à $((d, p'_k), (p'_k, b))$ ■

De façon évidente, les lacets fournis par le suivi de contours vérifient les propriétés **L1** à **L3**. Nous en déduisons donc :

Proposition 5.7

Soit L un lacet fourni par le suivi de contours. Alors $\mathcal{D}^n(L)$ vérifie **L1** *à* **L3** *pour l'ensemble $\mathbf{X} \oplus nH_1$.*

Ainsi donc, supposons que nous disposions d'une image binaire ne contenant qu'un objet simplement connexe dont les pixels sont à la valeur 1, le fond ayant la valeur 0. Si nous traçons tous les lacets $\mathcal{D}^i(L)$ pour $1 \leq i \leq n$ à la valeur 1, l'ensemble des pixels à la valeur 1 sera exactement $\mathbf{X} \oplus nH_1$. Malheureusement, le lacet $\mathcal{D}^n(L)$ contient beaucoup de points n'étant pas sur la frontière de $\mathbf{X} \oplus nH_1$. Après avoir montré comment étendre ces résultats au cas d'une union de lacets décrivant un objet quelconque, nous montrerons comment il est possible d'éliminer ces portions inutiles.

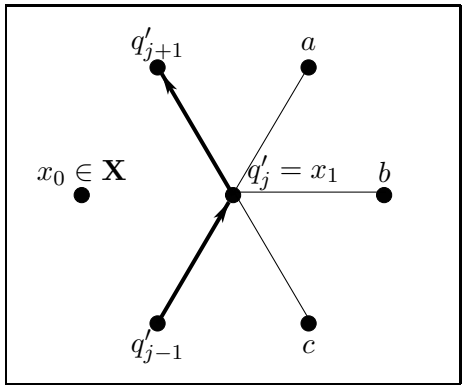


Figure 5.3 : Illustration du cas 1.

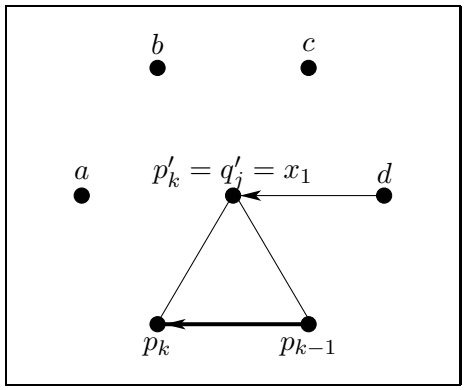


Figure 5.4 : Illustration du cas 2.

5.1.3 Dilatation d'un ensemble de lacets

Il a été démontré que tout sous-ensemble $\mathbf{X}$ pouvait être décrit par une suite d'ensembles (X_i), unions disjointes d'ensembles simplement connexes :

$$\mathbf{X} = ((X_0 \setminus X_1) \cup X_2) \setminus X_3 \ldots = \bigcup_{i=0}^{\infty} X_{2i} \setminus X_{2i+1}$$

et les lacets décrivant $\mathbf{X}$ sont les contours internes des X_{2i} et les contours externes des X_{2i+1}. Plus précisement :

- Soit Y une composante (simplement) connexe de X_{2i}. Le suivi de son contour fournira un lacet possédant les propriétés **L1** à **L3** pour la composante Y.
- Soit Z une composante (simplement) connexe de X_{2i+1}. Nous suivons le contour de Z^c qui fournit un lacet possédant les propriétés **L1** à **L3** pour Z^c.

Proposition 5.8

Le suivi de contour de $\mathbf{X}$ *quelconque fournit un ensemble de lacets vérifiant globalement* **L1** *à* **L3**.

Démonstration :
Propriété **L1** : clair car chaque lacet est fermé.
Propriété **L2** : par construction de l'algorithme de suivi de contour, chaque point d'un lacet est dans $\mathbf{X}$.
Propriété **L3** : soient $x_1 \in \mathbf{X}$ et $x_2 \in \mathbf{X}^c$ voisins. Alors $x_1 \in X_{2i}$ et deux cas seulement peuvent se présenter :

- $x_2 \in X_{2i-1}$. Il suffit d'appliquer la propriété **L3** au lacet contour de la composante de X_{2i} contenant x_1.
- $x_2 \in X_{2i+1}$. Il suffit d'appliquer la propriété **L3** au lacet contour du complémentaire de la composante de X_{2i+1} contenant x_2.

Proposition 5.9

Soit $\{L^i\}_{i=1}^n$ *l'ensemble des lacets de contour de* $\mathbf{X}$. *Alors* $\{\mathcal{D}(L^i)\}_{i=1}^n$ *vérifie* **L1** *à* **L3** *pour* $\mathbf{X} \oplus nH_1$.

Démonstration : la démonstration proposée dans le cas d'un unique lacet se transpose directement au cas d'une union de lacets.

5.2 Transformation des lacets en chaînes

Si l'on en restait là, les algorithmes proposés seraient profondément inefficaces. En effet, la règle 5 engendre des boucles supplémentaires. Ces boucles n'apportent rien si ce n'est de permettre au dilaté d'être bien un lacet, mais il est aisé de voir que les points de ces boucles sont soit dans $\mathbf{X}$, soit dans $\mathbf{X} \oplus H_1$, et dans ce cas ces points seront atteints par d'autres du lacet dilaté.

L'idée que nous allons donc développer est de ne garder que les parties *utiles* des lacets, c'est-à-dire celles qui sont incluses dans $\mathbf{X} \oplus H_1 \setminus \mathbf{X}$, chacun des points de $\mathbf{X} \oplus H_1 \setminus \mathbf{X}$ n'étant atteint qu'une seule fois.

5.2.1 Nouvelle représentation et règles de manipulation

Nous allons maintenant supposer que $\mathbf{X}$ est représenté non plus par des lacets, mais par des chaînes et des lacets vérifiant globalement les propriétés **L1** à **L3** que nous étendons au cas des chaînes.

Propriété **L1** : seuls les lacets sont fermés.

Propriété **L2** : tous les points des lacets et les points non terminaux des chaînes sont dans $\mathbf{X}$.

Propriété **L3** : soient $x_1 \in \mathbf{X}$ et $x_2 \in \mathbf{X}^c$ voisins. Il existe soit un point d'un lacet soit un point non terminal d'une chaîne p_i tel que $p_i = x_1$ et x_2 est balayé dans le sens trigonométrique de p_{i-1} à p_{i+1}.

Nous allons montrer que ces propriétés se conservent par dilatation. Pour cela étendons l'opérateur de dilatation de lacet au cas des chaînes.

Définition 5.10

Soit $L = (O, (c_1, \ldots, c_n))$ *une* chaîne. *La chaîne dilatée est une chaîne ayant les mêmes extrémités définie par :*

$$\mathcal{D}(L) = (O, (c_1 - 1, \mathcal{R}(c_1, c_2), \ldots, \mathcal{R}(c_{n-1}, c_n), c_n + 1))$$

Cette définition est illustrée figure 5.5.

Soit $\{L_i\}_{i=1}^n$ un ensemble de chaînes et lacets représentant $\mathbf{X}$. L'élimination des parties inutiles de $\{\mathcal{D}(L_i)\}_{i=1}^n$ s'effectue comme suit :

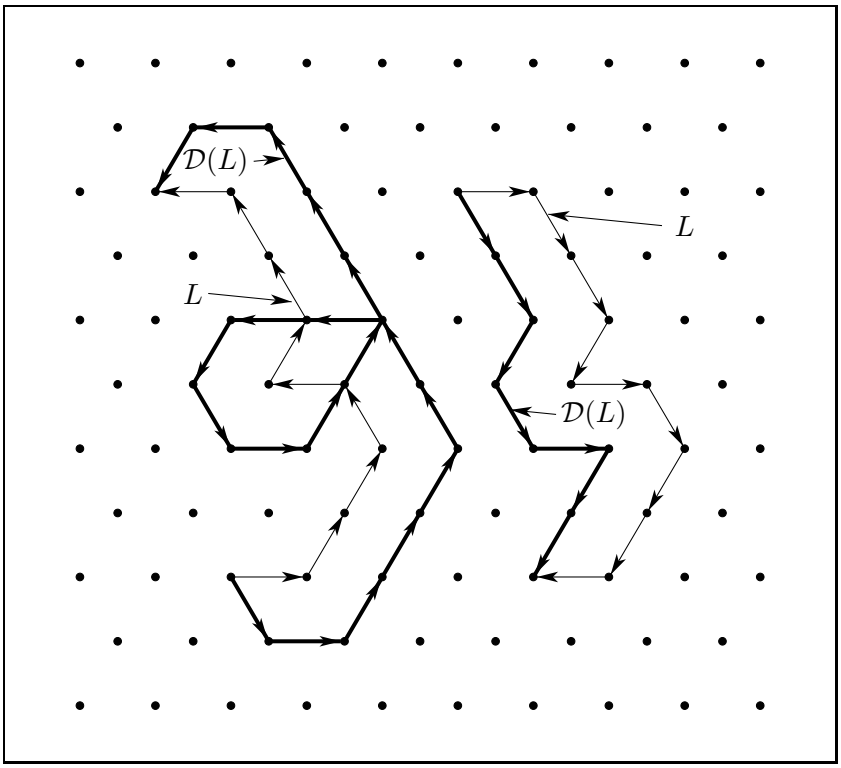


Figure 5.5 : Dilatation d'une chaîne.

Définition 5.11

[**Mise à jour**] *Supposons* $\mathbf{X}$ *tracé sur une image avec des valeurs* > 0, $\mathbf{X}^c$ *prenant des valeurs* ≤ 0. *Notons* $(q_i^j)_{j=0}^{n_i}$ *les points de* $\mathcal{D}(L_i)$ *et examinons ces chaînes et lacets pour* i *croissant de* 1 *à* n.

- *Si* $\mathcal{D}(L_i)$ *est un lacet dont tous les points ont sur l'image une valeur* ≤ 0, $\mathcal{D}(L_i)$ *est tracé sur l'image à une valeur* > 0 *et est conservé tel quel.*
- *Si* $\mathcal{D}(L_i)$ *est un lacet dont au moins un point a une valeur* > 0, *on peut supposer, quitte à effectuer une rotation sur ses points, que* $q_i^0 = q_i^{n_i} \in \mathbf{X}$ *et on considère ce lacet comme une chaîne.*
- *Si* $\mathcal{D}(L_i)$ *est une chaîne, par définition de* $\mathcal{D}$ *les valeurs de* q_i^0 *et* $q_i^{n_i}$ *sont* > 0. *Soit* q_i^α *le premier point dont la valeur dans l'image est* ≤ 0, *puis* q_i^β *le premier point* > 0 *obtenu après* q_i^α. *La chaîne* $(q_i^{\alpha-1}, \ldots, q_i^\beta)$ *est conservée, tracée sur l'image avec une valeur* > 0 *et on reprend le processus à partir de* q_i^β.

Ainsi chaque chaîne ou lacet peut être découpé en plusieurs nouvelles chaînes.

5.2.2 Conservation de la représentation par dilatation

Comme dans le cas des lacets, nous pouvons énoncer le théorème central :

Théorème 5.12

Soit $\{L_i\}_{i=1}^n$ *un ensemble de chaînes et lacets représentant* $\mathbf{X}$ *(donc vérifiant* **L1** *à* **L3***). Alors* $\{\mathcal{D}(L_i)\}_{i=1}^n$ *mis à jour représente* $\mathbf{X} \oplus H_1$.

Démonstration : Nous noterons parfois l'ensemble des lacets $\{L_i\}_{i=1}^n$ par L et leurs dilatés $\{\mathcal{D}(L_i)\}_{i=1}^n$ par $\mathcal{D}(L)$.
Propriété **L1** : clair.
Propriété **L2** : clair, puisque les règles de $\mathcal{R}$ ne fournissent que des points voisins des points de départ.
Propriété **L3** : Reprenons les notations de la démonstration dans le cas des lacets. Soit $x_1 \in \mathbf{X} \oplus H_1$, $x_2 \in (\mathbf{X} \oplus H_1)^c$ et $x_0 \in \mathbf{X}$, x_1 voisin de x_0 et x_2. D'après **L3** appliqué à $\{L_i\}_{i=1}^n$, $x_1 = p$ pour un point de l'un des L_i. Comme $x_1 \in \mathbf{X} \oplus H_1 \setminus \mathbf{X}$, le point p avait avant la mise à jour une valeur ≤ 0 et a été mis à une valeur > 0 pendant celle-ci en examinant q_i^j. Ce point fait partie d'un morceau de chaîne ou de lacet $(q_i^k)_{k=\alpha}^\beta$ dont q_i^j n'est pas une extrémité. La démonstration proposée dans le cas des chaînes s'applique alors telle quelle pour montrer que x_2 sera balayé dans le sens trigonométrique de q_i^{j-1} à q_i^{j+1} ■

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer notre premier algorithme opérationnel pour calculer un dilaté de taille n par l'hexagone H_1 :

Algorithme : Dilatation de taille n

Soit $\mathbf{X}$ un ensemble binaire à la valeur 1 sur une image.

- Suivre les contours de $\mathbf{X}$: $L = (L_i)_{i=1}^{p}$
- Pour j de 1 à n
  - $L \leftarrow \mathcal{D}(L)$
  - Mettre à jour L en écrivant dans l'image à la valeur 1
- Fin pour.

Le résultat de l'algorithme est bien le dilaté de taille n. En effet, nous avons vu que la propriété **L3** se transmet par itération et mise à jour. Donc à la mise à jour j, tous les points de $\mathbf{X} \oplus jH_1 \setminus \mathbf{X} \oplus (j-1)H_1$ et rien que ces points vont être mis sur l'image à la valeur 1.

Nous pourrions tout de suite présenter d'autres algorithmes tels que la fonction distance. Il nous semble nécessaire de travailler encore un peu pour aborder le cas géodésique avant de regrouper les algorithmes dans une section à part.

5.2.3 Optimalité de la représentation

La mise à jour montre dans quel sens il faut entendre le mot optimalité : tous les points de la frontière de $\mathbf{X} \oplus H_1$ ne sont présents qu'une et une seule fois dans les lacets transformés ou les chaînes transformées privées de leurs extrémités. Dans ce sens, toute chaîne est "signifiante". Par contre, à aucun moment nous ne cherchons à concaténer deux chaînes codant des points successifs. Cela ne ferait qu'alourdir les algorithmes sans pour autant accroître leur efficacité (bien au contraire !).

5.2.4 Transformations géodésiques

Donnons nous M un masque de travail, par rapport auquel nous effectuerons les dilatations et $\mathbf{X} \subset M$. Notons le dilaté géodésique de $\mathbf{X}$ de taille n dans M (itéré n fois de $\mathbf{X} \leftarrow (\mathbf{X} \oplus H_1) \cap M$) par :

$$\mathbf{X} \oplus_M nH_1$$

Supposons que nous disposions d'une image dans laquelle les pixels aient les valeurs suivantes :

- 0 pour les pixels de $M \setminus \mathbf{X}$
- 1 pour les pixels de $\mathbf{X}$
- 2 pour les pixels de M^c

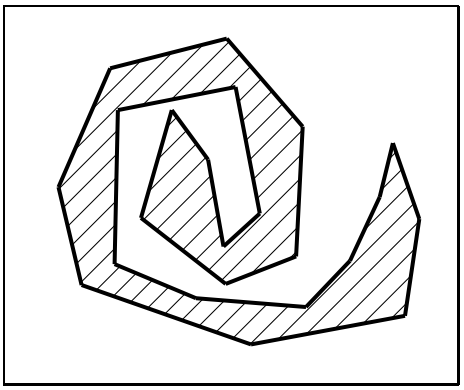


Figure 5.6 : Particule enroulée

et que nous appliquions les procédures de dilatation et de mise à jour que nous avons décrites. Montrons que nous obtenons en fait le dilaté géodésique de $\mathbf{X}$ dans M.

La propriété **L3** doit alors se prendre dans le sens suivant :

Propriété **L3** : Soient $x_1 \in \mathbf{X}$ et $x_2 \in \mathbf{X}^c \cap M$, voisins. Il existe i tel que $x_1 = p_i$ et x_2 est atteint lorsque l'on balaye les voisins de p_i dans le sens trigonométrique de p_{i-1} à p_{i+1}.

La seule différence est donc que x_2 doit être dans $\mathbf{X}^c \cap M$ et non plus seulement dans $\mathbf{X}^c$. On peut encore montrer que les nouvelles propriétés **L1** à **L3** se conservent par dilatation et mise à jour pour $\mathbf{X} \oplus_M H_1$.

Nous venons de voir que le cas géodésique se traite donc de manière similaire au cas hexagonal non géodésique, en modifiant seulement les valeurs des pixels sur l'image de départ. En particulier la représentation reste optimale contrairement à ce qui se passe pour les algorithmes à base de récritures [Mey87] et [Laÿ87] :

- pour les algorithmes à base de lacets, la complexité est proportionnelle au périmètre des objets, quelle que soit leur forme, (après une étape de suivi de contours demandant une seule scrutation de l'image)
- pour les algorithmes récursifs, le nombre de balayages de l'image dépend de la forme et est élevé dans le cas d'objets fortement enroulés (voir figure 5.6) ou de faible épaisseur tels que des squelettes ou des frontières ($\mathbf{X} \ominus H_1$ par exemple).

5.3 Applications

Nous présentons ici cinq applications immédiates de ce qui précède. Leur intérêt réside essentiellement dans la *rapidité d'exécution* par rapport aux algorithmes classiques à base de récritures.

Nous noterons l'étape de mise à jour ainsi :

Mise à jour, $Fond = n_1$, $Forme = n_2$

Cela signifie que dans l'algorithme de mise à jour, les pixels ayant une valeur ≤ 0 (correspondant à $\mathbf{X}^c$ ou $\mathbf{X}^c \cap M$) ont ici la valeur n_1, ceux ayant une valeur > 0 (correspondant à $\mathbf{X}$ ou $\mathbf{X} \cup M^c$ dans le cas géodésique) ont ici la valeur n_2. En d'autres termes, seules les portions de lacets ou de chaînes ayant, avant d'être écrites sur l'image, des pixels à la valeur $Fond = n_1$ sont conservées et écrites à la valeur $Forme = n_2$.

5.3.1 Reconstruction

Soit Y un sous-ensemble de $\mathbb{H}$ et X un sous-ensemble de Y. La reconstruction de X dans Y consiste à ne conserver que les composantes connexes de Y qui coupent X.

Algorithme : reconstruction de X dans Y

Entrée : $\begin{cases} 0 & \text{pour} & Y^c \\ 1 & \text{pour} & Y \setminus X \\ 2 & \text{pour} & X \end{cases}$

Balayer l'image en sens vidéo

- Si le pixel est à 2 faire
  - Créer un lacet ponctuel correspondant à ce pixel
  - Tant qu'il reste des chaînes ou des lacets
    - Dilater les chaînes et lacets
    - Mettre à jour, $Fond = 1$ ou 2, $Forme = 3$
  - Fin tant que
- Fin si.

Sortie : $\begin{cases} 0 & \text{pour} & Y^c \\ 1 & \text{pour} & \text{Composantes connexes de } Y \text{ non reconstruites} \\ 3 & \text{pour} & \text{Composantes connexes de } Y \text{ reconstruites} \end{cases}$

L'algorithme proposé est performant, car les particules de Y qui seront reconstruites ne seront parcourues qu'une seule fois par les lacets et les autres aucune fois. En particulier, la dilatation du point recouvre progressivement toutes les composantes connexes de X qui se trouvent dans une même composante de Y. Chaque dilatation jusqu'à convergence correspond donc à la recherche d'une composante connexe.

5.3.2 Etiquetage

Soit X un sous-ensemble de $\mathbb{H}$. L'objectif est de donner à chaque composante connexe de X une valeur uniforme ou étiquette ("label" en anglais), deux composantes connexes distinctes ayant deux étiquettes différentes.

Algorithme : étiquetage de X

Entrée : $\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad X^c \\ 32767 & \text{pour} \quad X \end{cases}$

- $i \longleftarrow 1$
- Balayer l'image en sens vidéo
  - Si le pixel examiné est à 32767 faire
    - Créer un lacet ponctuel correspondant à ce pixel
    - Tant qu'il reste des chaînes ou des lacets faire
      - Dilater les chaînes et lacets
      - Mettre à jour, $Fond = 32767$, $Forme = i$
      - $i \longleftarrow i + 1$
    - Fin tant que
  - Fin si

Sortie : $\begin{cases} 0 \text{ pour } X^c \\ \text{Une étiquette différente} \\ \quad \text{pour chaque composante connexe de } X \end{cases}$

Les étiquettes vont de 1 à nb où nb est le nombre de composantes connexes de X. Les étiquettes l_1 et l_2 correspondant respectivement aux composantes connexes X_1 et X_2 vérifient $l_1 < l_2$ si et seulement si le point en haut à gauche de X_1 apparaît avant celui de X_2 dans un balayage vidéo.

Ici encore, chaque particule est reconstruite une seule fois. La boucle créée correspond au point en haut à gauche de celle-ci.

5.3.3 Fonction distance hexagonale

Cette fonction est définie par :

$$\delta(x) \ = \ d(x, X^c)$$

où d est la distance hexagonale. Notons qu'en fait, il s'agit de la distance à X^c. Le support de cette fonction est donc exactement X. Nous pouvons écrire de façon équivalente :

$$\delta(x) = \sup\{n, \ x \in \mathbf{X} \ominus nH_1\}.$$

Algorithme : fonction distance hexagonale de X

Entrée : $\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad X^c \\ 32767 & \text{pour} \quad X \end{cases}$

- Suivre le contour de X^c
- $i \longleftarrow 2$
- Tant qu'il reste des chaînes ou des lacets faire
  - Dilater les chaînes et lacets
  - Mettre à jour, $Fond = 32767$, $Forme = i$
  - $i \longleftarrow i + 1$
- Fin tant que.

Sortie : $\begin{cases} 0 & \text{pour } X^c \\ \delta(x, X^c) & \text{pour } X \end{cases}$

Par les algorithmes récursifs, cette fonction est obtenue en deux balayages de l'image, ce qui les rend performants. Le nôtre a un temps d'exécution égal pour des ensembles X de grande taille. Par contre quand X est de petite taille, la technique des lacets est avantageuse puisque, en première approximation, le temps d'exécution est proportionnel au nombre de pixels de X. Cependant, c'est dans le cas géodésique que les lacets donnent toute leur puissance.

5.3.4 Fonction distance hexagonale géodésique

Soit Y une partie de $\mathbb{H}$ et X un sous-ensemble de Y. Nous cherchons la fonction δ_Y donnant pour tout x sa distance hexagonale géodésique à X dans Y.

Algorithme : fonction distance géodésique à X dans Y

Entrée : $\begin{cases} 0 & \text{pour} \quad X \cup Y^c \\ 32767 & \text{pour} \quad Y \setminus X \end{cases}$

- Suivre le contour de X
- $i \longleftarrow 1$
- Tant qu'il reste des chaînes ou des lacets
  - Dilater les chaînes et lacets
  - Mettre à jour, $Fond = 32767$, $Forme = i$
  - $i \longleftarrow i + 1$
- Fin tant que.

Sortie : $\begin{cases} 0 & \text{pour } X \cup Y^c \\ \delta_Y(x, X) & \text{pour } Y \setminus X \end{cases}$

5.3.5 Zones d'influence

Soit X un sous-ensemble de la trame $\mathbb{H}$. Nous supposerons que X est issu d'un algorithme d'étiquetage, c'est-à-dire que chaque composante connexe de X est représentée dans l'image par une valeur différente. La zone d'influence d'une composante connexe est l'ensemble des points qui sont plus proches de cette composante que de toute autre – cette notion se confond avec celle de diagramme de Voronoï, mais nous avons voulu garder la terminologie usuelle en morphologie mathématique. Nous voulons donc en sortie de l'algorithme une image dans laquelle chaque pixel a la valeur de la composante connexe la plus proche de lui.

Algorithme : zones d'influence X

Entrée : image étiquetée X

- Suivre le contour de X en conservant la valeur de la composante
- Tant qu'il reste des chaînes ou des lacets
  - Dilater les chaînes et lacets
  - Mettre à jour, $Fond = 0$, $Forme$ =valeur de la chaîne
- Fin tant que.

Sortie : image étiquetée

Pour cet algorithme, la partie de mise à jour est modifiée comme suit : les points des chaînes et lacets sont écrits non plus à une valeur fixe > 0, mais à la valeur de la composante connexe correspondante. Pour cela, lors du suivi de contours, la valeur de la composante donnant naissance à chaque lacet est mémorisée et transmise lors de la dilatation des chaînes et lacets.

correction de l'algorithme : Nous avons vu que à l'étape n, seuls les points de $X \oplus nH_1 \setminus X \oplus (n-1)H_1$ seront écrits. Comme un lacet (ou une chaîne) dilaté ne contient que des points voisins au lacet, seuls des points à distance n au plus d'une composante connexe peuvent être écrits. Considérons un pixel p. Il appartient à $X \oplus iH_1 \setminus X \oplus (i-1)H_1$ pour un certain i. Il sera donc écrit à l'étape i à une valeur correspondant à une composante connexe à distance au plus i. Cette distance est en fait exactement i puisque p est à distance exactement i de X ■

Remarque : lorsqu'un pixel est équidistant de plusieurs composantes connexes, l'algorithme fournit celle qui a été détectée en premier par l'algorithme de suivi de contours.

5.4 Autres éléments structurants

Nous avons examiné dans ce qui précède uniquement le cas de l'hexagone. Pour de petites tailles de dilatation, il fournit une approximation adéquate du cercle. Malheureusement, pour des tailles supérieures à une dizaine de pixels, lorsque l'on désire des approximations fines du cercle, il est nécessaire de considérer des polygones réguliers ayant plus de six côtés. Nous allons montrer que l'on peut programmer des dodécagones très facilement à l'aide de lacets.

5.4.1 Hexagone conjugué et dodécagone

Un dodécagone digital D_n de taille n peut être décomposé en somme de Minkowski d'un hexagone $n_1(n)H_1$ et d'un hexagone conjugué $n_2(n)H_1^*$ (voir figure 5.7). Les nombres $n_1(n)$ et $n_2(n)$ sont choisis par récurrence de sorte que le résultat soit aussi régulier que possible :

- $D_1 = H_1$
- Notons $D_n = n_1(n)H_1 \oplus n_2(n)H_1^*$.
  - Si $n_1(n)+1 < \sqrt{3}n_2(n)$ alors $\begin{cases} n_1(n+1) &= n_1(n)+1 \\ n_2(n+1) &= n_2(n) \end{cases}$
  - Si $n_1(n)+1 \geq \sqrt{3}n_2(n)$ alors $\begin{cases} n_1(n+1) &= n_1(n) \\ n_2(n+1) &= n_2(n)+1 \end{cases}$

En général, on programme l'hexagone conjugué en remarquant qu'il est somme de Minkowski des deux triangles conjugués comme le montre la figure 5.7. Les triangles conjugués peuvent être programmés par des techniques de lacets, mais les règles de récriture sont relativement complexes et nous ne les exposerons pas ici. La solution suivante est beaucoup plus simple : remarquons que l'hexagone conjugué est un hexagone de taille 2 dont on aurait supprimé les six sommets. Le passage d'un lacet correspondant à H_1 au lacet correspondant à H_1^* peut se faire en modifiant la règle R_2 comme le montre la figure 5.8.

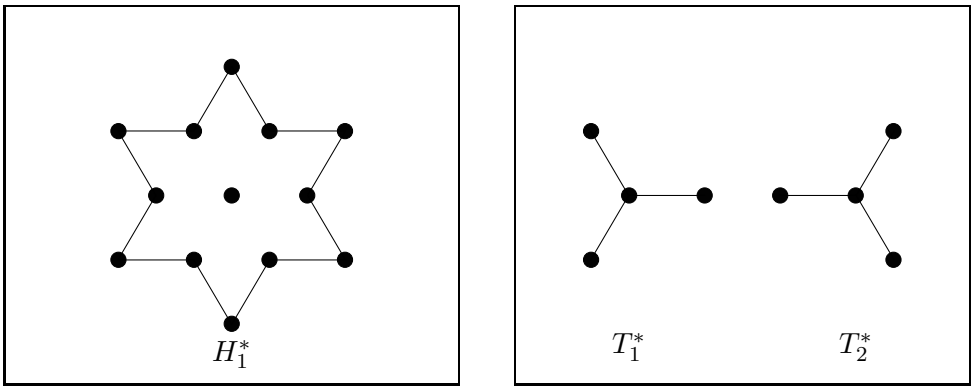


Figure 5.7 : L'hexagone conjugué H_1^* et les triangles conjugués.

Notation : Soit L un ensemble de chaînes et lacets qui représente un ensemble $\mathbf{X}$. Rappelons que nous notons $\mathcal{D}(L)$ la dilatation de L par H_1 au moyen du système de règles $\mathcal{R}$.Notons $\mathcal{D}^*(L)$ la "dilatation" de L au moyen du système de règles $\mathcal{R}^*$ présenté figure 5.8. Il faut remarquer que l'on ne peut pas associer de dilatation au sens strict (opération croissante commutant avec le sup) avec le système $\mathcal{R}^*$.

Algorithme : dilatation par H_1^*

Entrée : un ensemble L de chaînes et lacets représentant X

- $L \longleftarrow \mathcal{D}(L)$
- Mettre à jour L, $Fond = 0$, $Forme = 1$
- $L \longleftarrow \mathcal{D}^*(L)$

Sortie : un ensemble de chaînes et lacets représentant $X \oplus H_1^*$

Remarques :

1. Nous n'effectuons pas de mise à jour après l'étape de récriture par le système $\mathcal{R}^*$. Il est bien sûr licite de l'effectuer, mais on peut montrer qu'elle coupe les chaînes et lacets en de nombreuses petites chaînes (chaque application de la règle R_2^* coupe la chaîne) et l'on dépasse très rapidement la capacité des ordinateurs ! Nous ne sommes donc plus optimal.

2. L'ordre des deux étapes de récriture est primordial : on ne peut les intervertir. La raison en est que les règles 2, 3 et 4 ne se déclenchent alors que sur des points qui ne sont pas frontière de X...

3. Si l'on veut effectuer plusieurs dilatations par H_1^*, on itère le nombre de fois voulu l'algorithme proposé. A chaque fois nous effectuons une étape de mise à jour, ce qui montre que l'algorithme est "presque" optimal.

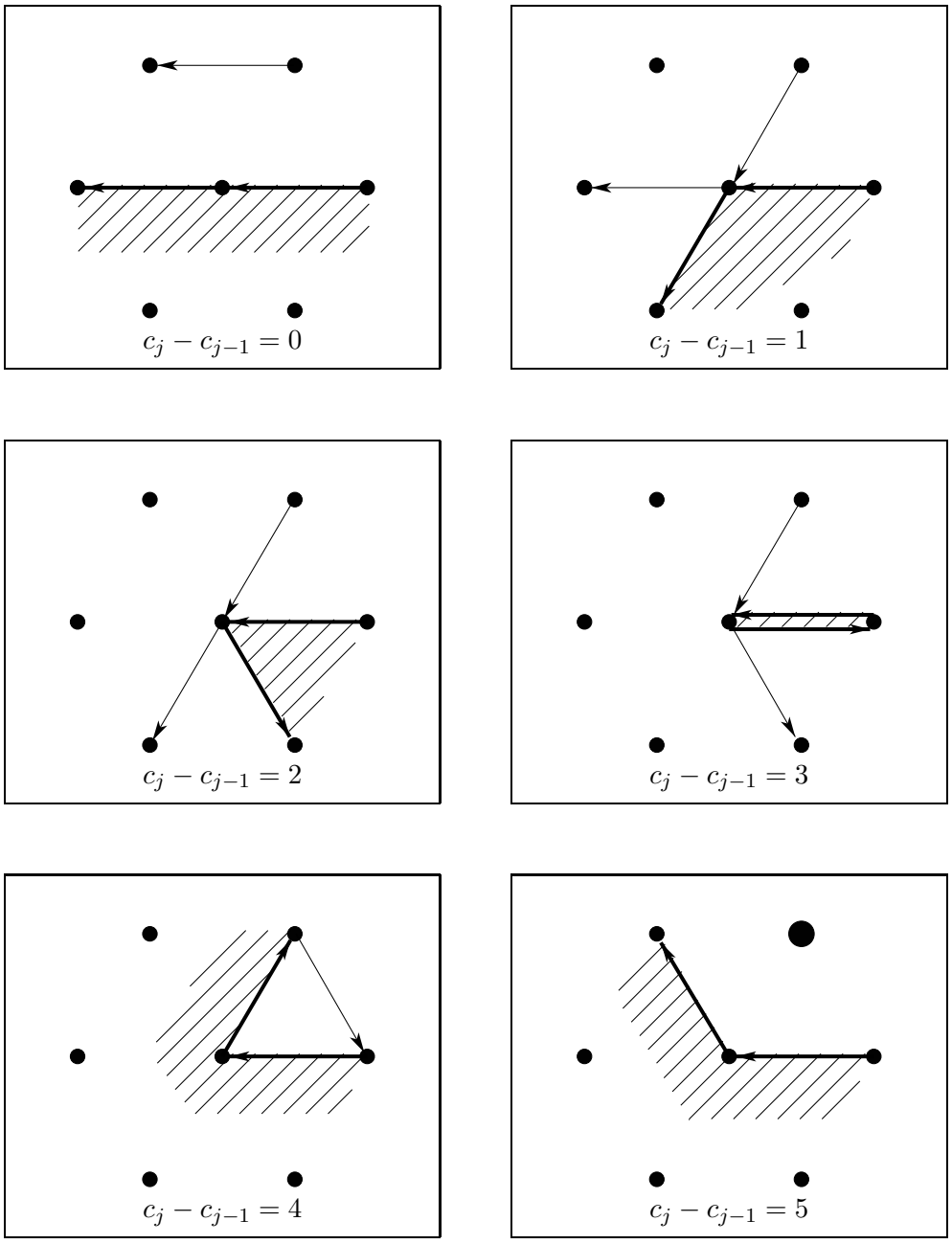


Figure 5.8 : Règles de récriture pour passer de H_1 à H_1^*.

Nous ne démontrerons pas la correction de l'algorithme qui n'apporte rien de plus que d'établir le résultat.

L'extension au cas géodésique est analogue au cas de l'hexagone que nous avons exposé.

5.4.2 Segments

Un des éléments structurants que l'on emploie souvent est le segment. Sa programmation par des lacets est évidente, mais les propriétés des lacets et chaînes sont très mauvaises : on ne peut plus les dilater par H_1 ou H_1^*. Il faut repasser par une étape de suivi de contours avant de poursuivre.

Algorithme : dilatation de X par un segment s de taille n

Entrée : un ensemble de chaînes et lacets représentant X

- Faire n fois
  - déplacer les origines de tous les lacets et chaînes dans la direction de s
  - Mettre à jour, $Fond = 0$, $Forme = 1$
- fait

Sortie : l'image de mise à jour contient $X \oplus ns$

5.5 Mesures

Nous venons de voir que la technique des lacets fournissait des algorithmes qui dans le cas géodésique sont nettement plus rapides que les algorithmes récursifs. Les lacets apportent aussi des solutions efficaces pour un certain nombre de mesures.

5.5.1 Variation diamétrale et périmètre

Comment obtenir une mesure robuste de la notion de périmètre ? L'idée la plus simple est de compter le nombre de pixels de $\partial\mathbf{X}$. Cette méthode présente plusieurs biais :

- Le périmètre est sous-estimé lorsque l'objet présente des parties d'épaisseur unité, comme le montre la figure 5.9.
- Un segment selon une direction conjuguée de la trame voit son périmètre sur-estimé dans la proportion $\frac{2}{\sqrt{3}}$

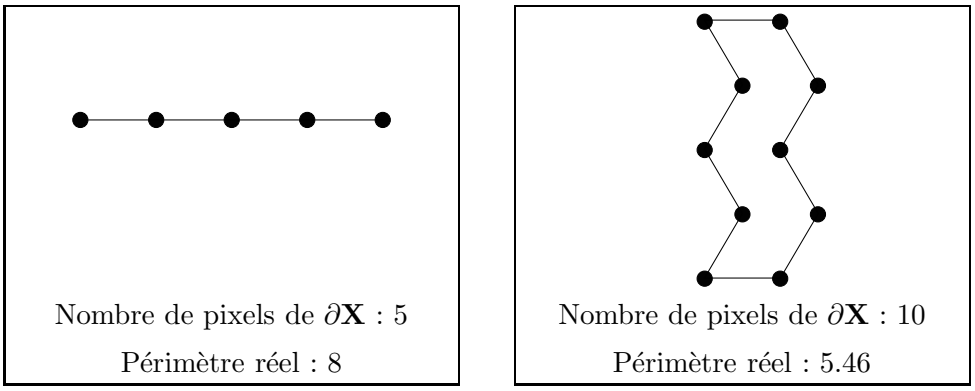


Figure 5.9 : Quelques exemples de biais pour la mesure du périmètre par le nombre de pixels de $\partial\mathbf{X}$.

Le premier point peut être contourné en comptant le nombre de segments que compte les chaînes de contours. Cependant le second point reste.

La solution consiste ici à utiliser la formule de Crofton (voir [Had57] et [San76]. Pour cela définissons d'abord la notion de variation diamétrale que les physiciens reconnaitront comme le flux entrant dans un objet.

Définition 5.13

Soit $\mathbf{X}$ *un compact. On apelle* variation diamétrale *de* $\mathbf{X}$ *dans la direction* α *la limite (quand elle existe)*

$$D_\alpha(\mathbf{X}) = \lim_{\lambda \to 0} \frac{\mu(\mathbf{X} \oplus \lambda u_\alpha) - \mu(\mathbf{X})}{\lambda}$$

où u_α *est le segment unité dans la direction* α *et* μ *la mesure de Lebesgue (i.e. le volume).*

Dans le cas où $\mathbf{X}$ est limité par une ou plusieurs courbes rectifiables, la variation diamétrale de $\mathbf{X}$ est définie dans toutes les directions.

Théorème 5.14

Soit $\mathbf{X}$ *un compact limité par une ou plusieurs courbes rectifiables. Alors le périmètre* $U(\mathbf{X})$ *de* $\mathbf{X}$ *est donné par la formule de Crofton :*

$$U(\mathbf{X}) = \int_0^{2\pi} D_\alpha(\mathbf{X}) d\alpha$$

L'utilisation de la formule de Crofton est immédiate : il suffit de mesurer la variation diamétrale de $\mathbf{X}$ dans un certain nombre de directions. Or la mesure de la variation diamétrale

dans une direction quelconque est simple par la technique des lacets : il suffit de sommer les contributions élémentaires de chaque segment de contour. De façon précise, soit $L = (0, (c_1, \ldots, c_n))$ le lacet contour de $\mathbf{X}$ –le cas de plusieurs contours se traite facilement puisque la variation diamétrale est additive–. Notons $d(\vec{u}_i)$ la contribution d'un segment de code i.

$$d(\vec{u}_i) \ = \ \max(0, \|\vec{u}_i \wedge \vec{u}_\alpha\|)$$

où $\vec{u}_\alpha$ est le vecteur unitaire dans la direction α et $\wedge$ le produit vectoriel. Alors :

$$D_\alpha(\mathbf{X}) \ = \ \sum_{i=1}^{n} d(\vec{u}_{c_i})$$

Donc le calcul de $D_\alpha(\mathbf{X})$ nécessite un seul balayage du lacet. Pour obtenir une estimation du périmètre, il nous reste à calculer la variation diamétrale dans plusieurs directions régulièrement espacées. L'expérience montre que 12 directions est un bon compromis.

5.5.2 Diamètre de Ferret

La notion de diamètre de Ferret est relativement proche de celle de variation diamétrale et coïncide avec elle dans le cas des convexes.

Définition 5.15

Soient $\mathbf{X}$ un compact plan, une direction α et une droite Δ_α orthogonale à cette direction. On appelle diamètre de Ferret dans la direction α le nombre :

$$F_\alpha(\mathbf{X}) \ = \ l(\Pi(\mathbf{X}|\Delta_\alpha))$$

où l est la longueur, $\Pi(\mathbf{X}|\Delta_\alpha)$ la projection de $\mathbf{X}$ sur Δ_α (voir figure 5.10).

Nous n'étudierons ici que le cas où $\mathbf{X}$ est simplement connexe, c'est-à-dire que $\mathbf{X}$ est représenté par un unique lacet $L = (O, (c_1, \ldots, c_n))$. Dans ce cas, la projection de $\mathbf{X}$ sur Δ_α est un segment. Plaçons-nous sur Δ_α que nous munissons de l'origine O', projection de l'origine du lacet, et que nous orientons arbitrairement. Il est possible de calculer, en parcourant le lacet, la distance (algébrique) de la projection du point courant à O'. Le maximum moins le minimum de ces distances fournit le diamètre de Ferret.

De manière pratique, calculons les contributions des segments élémentaires :

$$d(\vec{u}_i) \ = \ \|\vec{u}_i \wedge \vec{u}_\alpha\|$$

où $\vec{u}_\alpha$ est le vecteur unitaire de direction α. Alors :

$$F_\alpha(\mathbf{X}) \ = \ \max_{0<j\leq n} \left(\sum_{i=0}^{j} d(\vec{u}_{c_i}) \right) - \min_{0<j\leq n} \left(\sum_{i=0}^{j} d(\vec{u}_{c_i}) \right)$$

On remarquera que notre algorithme ne demande qu'un balayage de l'image pour construire le lacet de contour et un balayage du lacet obtenu. Les algorithmes classiques ont un nombre de balayages dépendant de la forme des objets.

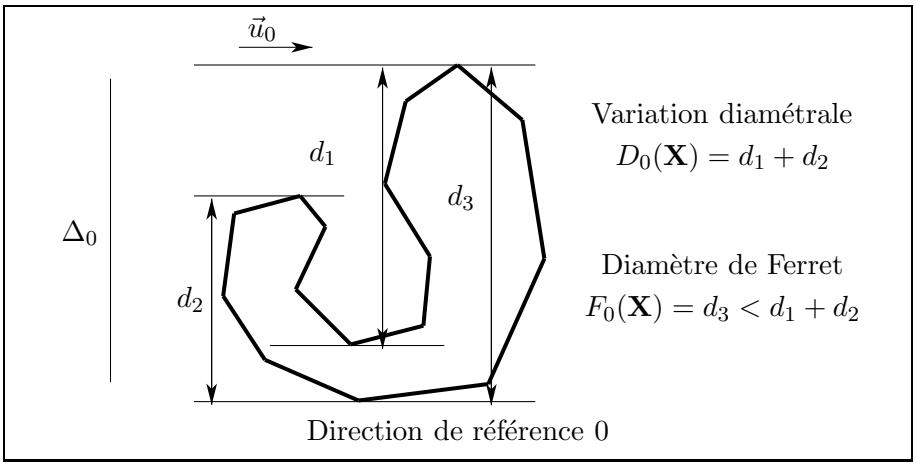


Figure 5.10 : Différence entre la variation diamétrale et le diamètre de Ferret.

5.5.3 Nombre de particules et nombre d'Euler

Par nombre de particules, nous entendons ici nombre de composantes connexes de l'image. D'après ce qui précède, on peut le calculer à partir d'un étiquetage. Il s'agit alors du maximum sur l'image résultat. Cet algorithme nécessite un premier balayage de l'image pour effectuer le suivi de contours, et un balayage de chaque particule lors du étiquetage. Cette dernière étape dont la durée est proportionnelle à la surface des particules. Nous allons montrer que l'on peut s'en affranchir et calculer le nombre de particules sur les lacets directement.

Définition 5.16

Soient c_1 et c_2 deux codes de direction. Nous appellerons déviation digitale *de c_1 à c_2 le nombre $\delta(c_1, c_2) = \frac{\pi}{3} \times ((c_2 - c_1 + 3 \ mod\ 6) - 3)$.*

Le nombre $\delta(c_1, c_2)$ est toujours compris entre $\frac{-2\pi}{3}$ et π, c'est-à-dire l'angle orienté des deux vecteurs $\vec{u}_{c_1}$ et $\vec{u}_{c_2}$, angle compris entre $\frac{-2\pi}{3}$ et π.

Proposition 5.17

Soit $\mathbf{X}$ un ensemble simplement connexe et $L = (c_1, \ldots, c_n)$ le lacet fourni par un suivi de contours. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n} \delta(c_{i-1}, c_i) \ = \ 2\pi$$

Interprétation : la somme des déviations digitales le long d'un lacet de contour vaut 2π, c'est-à-dire que la tangente à la courbe contour fait un tour complet sur elle-même lorsqu'on parcourt la frontière.

Démonstration : l'ensemble $\mathbf{X}$ est un polygone à p côtés et peut donc être triangulé.

Le nombre de triangles formant la triangulation est $p-2$. En effet, si nous notons t le nombre de triangles et q le nombre d'arêtes de la triangulation qui ne sont pas des sommets du polygone, nous avons par la formule d'Euler $t-(q+p)+p=1$. D'autre part, comptons le nombre d'arêtes des triangles, au nombre de $3t$. Les arêtes internes ont été comptées 2 fois, donc $3t=p+2q$. De cette équation et de la formule d'Euler on trouve $t=p-2$.

Plaçons-nous en chaque sommet du polygone. L'angle complet 2π peut se décomposer en la somme (algébrique) de π, de la déviation entre les deux segments successifs du polygone et de l'angle intérieur du polygone, lui-même somme d'angles de triangles de la triangulation. En sommant sur tous les sommets du polygone, et en remarquant que la somme des angles des triangles de la triangulation est $(p-2)\pi$, on trouve que la somme des déviations vaut 2π ■

Proposition 5.18

Soit $\mathbf{X}^c$ un ensemble simplement connexe fini ($\mathbf{X}$ est la grille hexagonale entière avec un unique trou) et $L=(c_1,\ldots,c_n)$ le lacet obtenu par suivi de contour. Alors :

$$\sum_{i=1}^{n}\delta(c_{i-1},c_i) \;=\; -2\pi$$

Démonstration : dans le cas du trou, la procédure de triangulation que nous avons employée pour la démonstration de la proposition précédente peut être appliquée. La seule différence apparaît au décompte des angles de chaque sommet du polygone. L'angle complet 2π peut se décomposer en la somme (algébrique) de π, de la déviation entre les deux segments successifs du polygone (dans l'ordre de parcours du suivi de contour) et de l'angle *extérieur* au polygone. C'est bien l'angle extérieur qui intervient, puisque $\mathbf{X}$ est intérieur au trou ! Or l'angle extérieur au polygone en un sommet vaut 2π moins l'angle intérieur correspondant ■

Les deux propositions qui précèdent permettent de distinguer les lacets qui correspondent à une particule et ceux qui correspondent à un trou et ce par un unique balayage de chaque lacet.

Algorithme : Nombre de particules

Le nombre de particules est égal au nombre de lacets dont la somme des déviations vaut 2π.

Ce qui précède fournit aussi le nombre d'Euler : *nombre de particules moins nombre de trous.* En effet :

Algorithme : Nombre d'Euler

Le nombre d'Euler est égal au nombre de lacets dont la somme des déviations vaut 2π moins le nombre de lacets dont la somme des déviations vaut -2π.

Partie III

Technique des lacets II : La fonction de propagation

Chapitre 6

La fonction de propagation

6.1 Introduction

Définition 6.1

Soit $X \subset \mathbb{R}^2$. On appelle **fonction de propagation**[1] *sur X la fonction définie par :*

$$T_X(x) \;=\; \sup_{y \in X} d_X(x, y)$$

où d_X est la distance géodésique associée à la distance d sur $\mathbb{R}^2$

La fonction de propagation, introduite par Ch. Lantuéjoul et S. Beucher [LB81] est un outil très puissant en morphologie mathématique. En effet, elle permet entre autres de donner une définition rigoureuse à deux notions intuitives au moins :

Extrémités : Elles peuvent être définies comme maxima locaux de T_X. De façon informelle, ce sont les points "les plus loins" de tous les autres.

Longueur : Elle peut être définie comme le maximum global de T_X. Il s'agit donc de la longueur de la plus longue géodésique contenue dans X. Cette mesure donne des résultats corrects même sur des particules en forme de spirale.

Malheureusement, cette fonction a eu peu de succès, puisque le seul algorithme connu pour la calculer est extrêmement lent sur des ordinateurs classiques (plusieurs dizaines de minutes). En outre, il est mal adapté aux ordinateurs spécialisés en morphologie mathématique, car il

[1] Un certain nombre de travaux connexes ont été effectués par Ch. Lantuéjoul et F. Maisonneuve [ML88] sur la fonction distance géodésique selon X à un compact Y :

$$\begin{array}{rccc} \lambda_X^Y \;:\; & X & \longmapsto & \mathbb{R} \\ & x & \longrightarrow & \sup_{y \in Y} d_X(x, y) \end{array}$$

où d_X est la distance géodésique dans X, i.e. la borne inférieure des longueurs des chemins de x à y inclus dans X. Il ont en particulier étudié la continuité de cette fonction, son minimum (unique !), ses maxima... Nous proposons de nous restreindre au cas $X = Y$ que l'on utilise habituellement.

nécessite de coder les six directions de la trame conjuguée. De plus, l'algorithme travaille selon la distance hexagonale et cette fonction faisant intervenir des distances importantes sur la trame, il serait intéressant de décrire un algorithme travaillant en trame dodécagonale.

Au sens de la métrique hexagonale, le calcul de la fonction de propagation ne semble pas soulever de difficultés majeures : en effet, il suffit de prendre le sup des boules géodésiques associées à tous les pixels de X. Malgré les algorithmes rapides que nous avons développés, le temps de calcul est prohibitif. Nous allons donc chercher à diminuer le nombre de boules géodésiques à calculer en déterminant $Y \subset X$ tel que :

$$T_X(x) \;=\; \sup_{y \in Y} d_X(x, y)$$

Si Y est de cardinalité réduite, nous pouvons espérer obtenir des algorithmes efficaces.

D'autre part, en ce qui concerne l'isotropie de la métrique, tout le problème consiste à déterminer quelle distance d nous allons prendre pour la définition 6.1 ainsi que la fonction distance géodésique associée d_X. La distance la plus naturelle sur la trame est la distance hexagonale, mais nous avons vu qu'elle a le défaut de ne pas être très isotrope. On peut chercher à définir d'autres distances en ajoutant de nouvelles arêtes à la trame en prenant les directions conjuguées. La distance d est alors obtenue en pondérant les diverses arêtes selon leur longueur comme le montre la figure 6.1. Une boule est alors un ensemble de points formant un dodécagone. Si l'on veut obtenir des boules encore plus circulaires, il est possible d'ajouter d'autres arêtes joignant des points de plus en plus distants sur la trame.

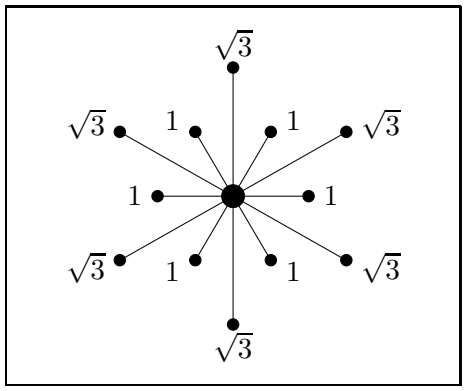


Figure 6.1 : Distance dodécagonale sur la trame hexagonale.

Pourtant, la définition de d_X sur la trame pose un sérieux problème théorique lorsque d n'est plus la métrique hexagonale, mais par exemple la métrique dodécagonale : si l'on se donne X sur la trame hexagonale et deux points x et y de X, une géodésique peut "sauter" d'un côté à l'autre de X sans suivre sa forme comme le montre la figure 6.2. On ne peut pas accepter de telles géodésiques, car on associe implicitement à X un ensemble continu de $\mathbb{R}^2$ et l'on demande aux géodésique d'être incluses dans cet ensemble continu. Il semble donc naturel de sauter le pas et d'étudier les géodésiques de $\mathbb{R}^2$ includes dans $X \subset \mathbb{R}^2$ en munissant le plan d'une métrique compatible avec celle de la trame en distance non hexagonale.

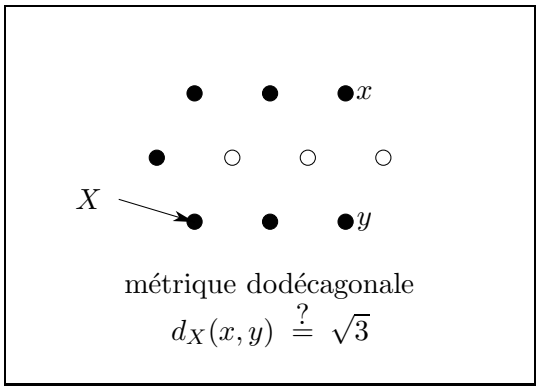


Figure 6.2 : Peut-on accepter de telles géodésiques dans X ?

Il n'y aura plus unicité de la géodésique entre deux points au sens de ces nouvelles métriques (voir figure 6.3). D'autre part, la notion de géodésique locale, si féconde en métrique euclidienne sur un ensemble X simplement connexe, s'écroule sur la trame hexagonale, comme le montre la figure 6.4 : (a, b, c) est une géodésique, tout comme (b, c, d), alors que (a, b, c, d) n'est pas une géodésique de a à d ! Il nous faudra donc trouver des géodésiques agréables ayant les mêmes propriétés que les géodésiques euclidiennes.

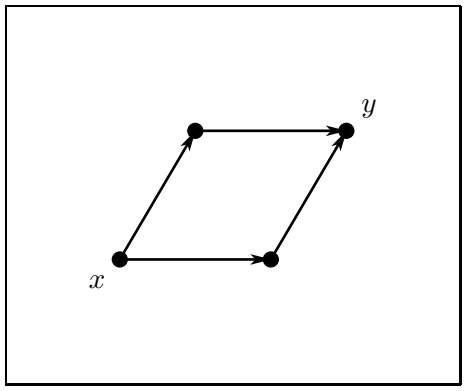


Figure 6.3 : Exemple de deux géodésiques distinctes entre x et y au sens de la trame hexagonale.

Après les rappels des propriétés de base des géodésiques de $\mathbb{R}^2$ muni de sa métrique euclidienne, nous étudierons les géodésiques dans le cas de métriques non isotropes définies par un compact convexe symétrique d'intérieur non vide. Nous montrerons en particulier que la géodésique euclidienne reste une géodésique au sens de ces métriques. Nous examinerons alors la structure locale de la frontière des boules géodésiques et montrerons que les points les plus éloignés d'un point donné ne peuvent avoir que quelques configurations très simples indépendantes du point donné. Après avoir déterminé la façon de plonger un ensemble digital X dans $\mathbb{R}^2$, nous pourrons exposer les algorithmes de calcul de la fonction de propagation, en métrique hexagonale et

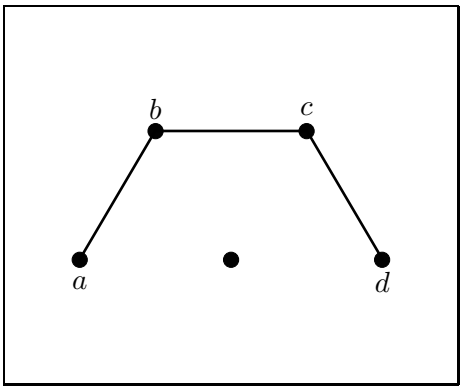


Figure 6.4 : En métrique hexagonale, une géodésique locale n'est pas nécessairement une géodésique globale.

dodécagonale.

A titre d'exemple, nous montrerons le théorème suivant, fournissant immédiatement l'algorithme de calcul de la fonction de propagation pour la distance hexagonale :

Théorème 6.2

Soit X un sous-ensemble de H trame hexagonale. Alors :

$$T_X(x) = \sup_{y \in Y} d_X(x, y)$$

où Y est l'ensemble des points de X ayant les configurations suivantes :

- *la frontière de X présente en y un angle de 0 ou $\frac{\pi}{3}$*
- *la frontière de X en y est un segment S de longueur $p > 1$ faisant un angle de $\frac{2\pi}{3}$ aux deux extrémités, tous deux du même côté et le triangle équilatéral de base S de ce même côté est entièrement inclus dans X. Tous les points de S sont équivalents et par suite il suffit qu'un seul soit présent dans Y.*

La figure 6.5 présente ces configurations.

Enfin, nous énoncerons quelques propriétés mathématiques de la fonction de propagation qui nous seront utiles au chapitre suivant.

6.2 Quelques lemmes sur les géodésiques

L'objet de cette section est de rappeler certaines propriétés des géodésiques dans $\mathbf{X}$ compact du plan muni de la distance euclidienne usuelle que nous noterons d. Nous ne donnerons pas les démonstrations car elles correspondent à des travaux non publiés [ML88].

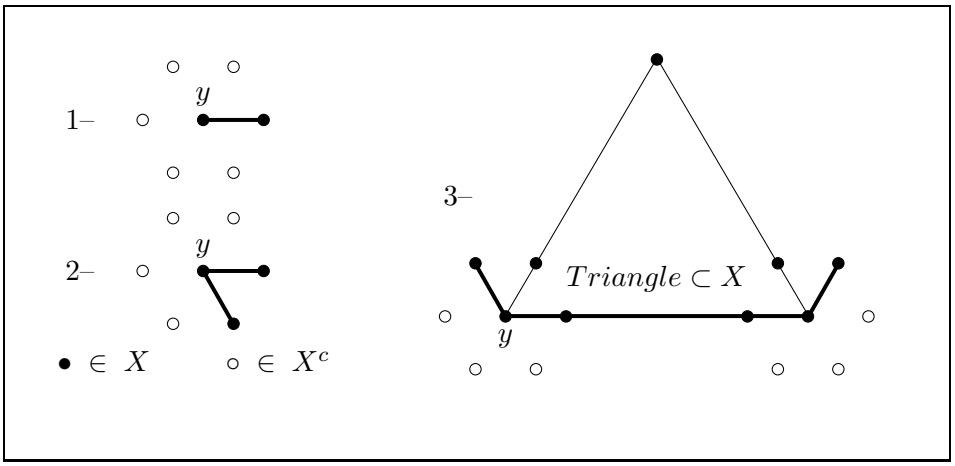


Figure 6.5 : Les trois configurations dans l'ensemble Y.

6.2.1 La notion d'arc et de chemin géodésiques

Définition 6.3

Soit $\mathbf{X}$ *une partie non vide de* $\mathbb{R}^2$, x *et* y *deux points de* $\mathbf{X}$. *On appelle* chemin *de* x *à* y *toute application continue* $f : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathbf{X}$ *telle que* $f(\alpha) = x$ *et* $f(\beta) = y$.

Pour mesurer la longueur de ce chemin, nous allons l'approximer par des lignes polygonales.

Définition 6.4

On appelle ligne polygonale croissante *sur* f *toute ligne polygonale* $P = (f(\lambda_i))_{i=0}^n$ *avec :*

$$\alpha = \lambda_0 < \ldots < \lambda_i < \ldots < \lambda_n = \beta$$

La longueur de cette ligne polygonale est la somme des longueurs de ses segments :

$$\mathcal{L}(P) = \sum_{i=1}^{n} d\left(f(\lambda_{i-1}), f(\lambda_i)\right)$$

Définition 6.5

Soit f *un chemin de* x *à* y *dans* $\mathbf{X}$. f *est dit* rectifiable *si et seulement si l'ensemble :*

$$\{\mathcal{L}(P),\ P \text{ ligne polygonale croissante }\}$$

est borné. Sa borne supérieure est la longueur *du chemin* f.

La notion de chemin n'est pas suffisante. En effet, si $f(t)$, $t \in [0,1]$ est un chemin de $f(0)$ à $f(1)$, $g(u) = f(2u)$, $u \in [0, 0.5]$ aussi. Or ces deux chemins ont même image. Classiquement on définit alors une relation d'équivalence sur l'ensemble des chemins. Cependant, pour obtenir des théorèmes plus simples, il est préférable de raisonner sur la notion d'arc.

Définition 6.6

Soit A une partie de $\mathbf{X}$. A est un arc *s'il est image d'un chemin de $\mathbf{X}$.*

- *S'il existe un chemin injectif dont A est l'image, on dira que A est un* arc simple.
- *S'il existe un chemin rectifiable dont A est l'image, on dira que A est un* arc rectifiable.
- *Tous les chemins injectifs d'image A ont mêmes extrémités. Ce seront les* extrémités *de A.*
- *Si A est rectifiable, la* longueur *de A est la borne inférieure des longueurs des chemins d'image A.*

Définition 6.7

On appelle géodésique *dans $\mathbf{X}$ tout arc simple rectifiable dont la longueur est inférieure à la longueur de tout autre arc simple de $\mathbf{X}$ de mêmes extrémités.*

Notons bien qu'une géodésique est nécessairement un arc *simple*. Si Γ est une géodésique de x à y, on a par définition :

$$\mathcal{L}(\Gamma) \;=\; d_X(x,y)$$

Lemme 6.8

Si Γ est un arc simple rectifiable dont nous noterons l'une des extrémités x, il existe un seul chemin $\gamma : [0, \mathcal{L}(\Gamma)] \to \mathbf{X}$ d'image Γ tel que $\gamma(0) = x$ et $\mathcal{L}(\Gamma|_{[0,t]}) = t$ (abscisse curviligne).
Si Γ est une géodésique reliant x à y, nous dirons que γ est un chemin géodésique *de x à y.*

Remarque : si a et b sont deux points de l'arc simple Γ, on peut définir sans ambiguïté le sous-arc de Γ de a à b : si nous notons $\gamma(u) = a$ et $\gamma(v) = b$, c'est $\gamma([u, v])$.

6.2.2 La distance géodésique

Nous allons munir $\mathbf{X}$ d'une distance qui n'est pas toujours équivalente à celle induite par la distance euclidienne du plan, mais qui rend bien compte de la distance à parcourir lorsque l'on veut passer d'un point x à un point y tout en restant dans l'ensemble $\mathbf{X}$.

Désignons par $\mathcal{C}_X(x,y)$ l'ensemble des chemins de $\mathbf{X}$ reliant x à y. Posons :

$$d_X(x,y) \;=\; \begin{cases} \infty & \text{si } \mathcal{C}_X(x,y) = \emptyset \\ \inf\{\mathcal{L}(f),\ f \in \mathcal{C}_X(x,y)\} & \text{sinon} \end{cases}$$

d_X n'est pas une distance car elle peut prendre des valeurs infinies, en particulier si x et y appartiennent à deux composantes connexes distinctes de $\mathbf{X}$. En revanche, d_X vérifie les trois axiomes d'une distance : séparation, symétrie et inégalité triangulaire.

Définition 6.9

On appelle diamètre géodésique *de* $\mathbf{X}$ *le nombre éventuellement infini :*

$$\sup\{d_X(x,y),\ x \in \mathbf{X}, y \in \mathbf{X}\}.$$

Si le diamètre géodésique de $\mathbf{X}$ est borné, alors d_X est une distance que nous appellerons *distance géodésique* sur $\mathbf{X}$.

6.2.3 Existence et unicité des géodésiques

Nous venons de définir la distance géodésique. En particulier, si A est une géodésique de x à y, la longueur de A est la distance géodésique de x à y. Mais à quelles conditions sur $\mathbf{X}$ existe-t-il une géodésique unique de x à y ?

Théorème 6.10

Existence d'une géodésique *[Lan82]. Soit* $\mathbf{X}$ *un compact de* $\mathbb{R}^2$*,* x *et* y *deux points distincts de* $\mathbf{X}$*. S'il existe dans* $\mathbf{X}$ *un chemin rectifiable d'extrémités* x *et* y *(i.e.* $d_X(x,y) < \infty$*), alors il existe une géodésique entre ces deux points.*

Théorème 6.11

Unicité géodésique *[Lan82]. Si* X *est simplement connexe, il existe au plus une géodésique entre deux points quelconques de* $\mathbf{X}$*.*

Il faudrait bien se garder de croire qu'il existe toujours une géodésique entre deux points de $\mathbf{X}$. En effet, leur distance géodésique peut être infinie...

6.2.4 Encore quelques lemmes

Souvent nous ne pourrons montrer qu'un arc est une géodésique seulement au voisinage de chacun de ses points. Dans quelle mesure avons nous affaire à une géodésique ? Autre façon de formuler le problème : soient deux géodésiques qui se recouvrent partiellement. Leur union est-elle une géodésique ? Pour répondre à ces questions, F. Maisonneuve a introduit la notion de géodésique locale [ML88].

Définition 6.12

Soit $\gamma : [t_1, t_2] \to \mathbf{X}$ un chemin de $\mathbf{X}$. γ est une géodésique au voisinage de $t \in]t_1, t_2[$ si

$$\exists \varepsilon_t > 0 \text{ tel que } [t - \varepsilon_t, t + \varepsilon_t] \subset]t_1, t_2[\text{ et } \gamma|_{[t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t]} \text{ géodésique.}$$

γ est une géodésique locale si c'est une géodésique au voisinage de tout $t \in]t_1, t_2[$.

La structure locale d'une telle courbe est donnée par le résultat suivant :

Lemme 6.13

Soit $\Gamma \subset \mathbf{X}$ un arc fermé simple tel que la composante bornée Ω de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$ est incluse dans $\mathbf{X}$. En tout point frontière de $\mathbf{X}$ au voisinage duquel Γ est une géodésique, on a pour toute boule ouverte B_x de centre x et de rayon assez petit :

$$\begin{cases} B_x \cap \Omega^c & est \quad \text{convexe} \\ B_x \cap \Omega & est \quad \text{connexe} \end{cases}$$

Dans le cas où $\mathbf{X}$ est simplement connexe, ou même si $\mathbf{X}^c$ n'a pas de composante connexe de diamètre arbitrairement petit à distance finie, on a une réciproque :

Théorème 6.14

Soit $\Gamma \subset \mathbf{X}$ un arc simple. Si tout point de $\overset{\circ}{\Gamma}$ au voisinage duquel Γ n'est pas rectiligne est sur $\partial\mathbf{X}$, et pour toute boule ouverte B_x de centre x et de rayon assez petit, $B_x \cap \Gamma^c$ a deux composantes connexes dont l'une est convexe et non incluse dans $\mathbf{X}$, alors Γ est une géodésique locale.

Dans le cas où $\mathbf{X}$ est simplement connexe, le théorème suivant justifie pleinement l'introduction de la notion de géodésique locale :

Théorème 6.15

Soit $\mathbf{X}$ simplement connexe et soient $a \neq b$ dans $\mathbf{X}$. S'il existe une géodésique locale γ d'extrémités a et b, elle est injective et l'arc simple $\Gamma = Im(\gamma)$ est unique.
Si $d_X(a, b) < \infty$, Γ est la géodésique entre a et b que l'on notera Γ_{ab}.

Ainsi donc la notion de géodésique locale recouvre-t-elle celle de géodésique globale dans le cas qui nous intéresse : $\mathbf{X}$ simplement connexe.

Nous utiliserons souvent ce théorème sous la forme suivante : soient Γ et Γ' deux géodésiques et $\gamma : [0, \alpha] \to \mathbf{X}$ et $\gamma' : [0, \alpha'] \to \mathbf{X}$ les chemins géodésiques associés. Si les deux géodésiques se recouvrent sur une portion non ponctuelle, i.e. il existe $\beta < \alpha$ tel que pour $t \in [\beta, \alpha]$ on ait

$\gamma(t) = \gamma'(t - \beta)$, le chemin δ obtenu en recollant les deux chemins géodésiques est un chemin géodésique de $\gamma(0)$ à $\gamma'(\alpha')$.

$$\delta \begin{cases} \gamma(t) & 0 \leq t \leq \alpha \\ \gamma'(t-\beta) & \beta \leq t \leq \alpha' + \beta \end{cases}$$

Enfin, donnons un dernier résultat sur les triangles géodésiques. Un tel triangle $T_X(a, b, c)$ est défini par la donnée de trois points a, b et c de $\mathbf{X}$ et des géodésiques Γ_{ab}, Γ_{bc} et Γ_{ca}. On dira que ce triangle est non dégénéré si deux géodésiques n'ont en commun qu'une de leurs extrémités. Si $T_X(a, b, c)$ est dégénéré, on peut le rendre non dégénéré de la façon suivante : supposons que $\Gamma_{ab} \cap \Gamma_{bc}$ ne soit pas réduit à $\{b\}$. Soit x le premier point de $\Gamma_{ab} \cap \Gamma_{bc}$ obtenu en parcourant Γ_{ab} de a vers b. Par unicité de la géodésique entre deux points, $\Gamma_{ax} \subset \Gamma_{ab}$ et $\Gamma_{cx} \subset \Gamma_{cb}$ et $\Gamma_{ax} \cap \Gamma_{cx} = \emptyset$. En recommençant l'opération pour a et c, on trouve respectivement deux nouveaux points y et z. Le triangle géodésique $T_X(x, y, z)$ est maintenant non dégénéré et inclus dans $T_X(a, b, c)$. La courbe $\Gamma_{xy} \cup \Gamma_{yz} \cup \Gamma_{zx}$ est fermée simple. On appellera triangle géodésique l'adhérence de l'intérieur de cette courbe.

Théorème 6.16

Soit $T_X = T_X(a, b, c)$ le triangle géodésique non dégénéré de sommets a, b et c et T le triangle euclidien correspondant limité par des segments. Le triangle T admet la décomposition :

$$T = T_X \cup K_{ab} \cup K_{bc} \cup K_{ca}$$

où K_{xy}, l'ensemble limité par le segment $[x, y]$ et la géodésique Γ_{xy} est convexe.

$$\begin{cases} T_X \cap K_{ab} = \Gamma_{ab} \\ T_X \cap K_{bc} = \Gamma_{bc} \\ T_X \cap K_{ca} = \Gamma_{ca} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} K_{ab} \cap K_{bc} = \{b\} \\ K_{bc} \cap K_{ca} = \{c\} \\ K_{ca} \cap K_{ab} = \{a\} \end{cases}$$

Cette décomposition est illustrée sur la figure 6.6.

Notons bien que l'hypothèse de non dégénérescence du triangle T_X est essentielle pour ce théorème.

6.3 Géodésiques dans l'espace $(\mathbb{R}^2, \phi)$

Pour étudier les propriétés des géodésiques digitales, il est souvent utile de plonger la trame employée dans $\mathbb{R}^2$ et de considérer sur $\mathbb{R}^2$ une métrique ϕ qui soit compatible avec celle de la trame, c'est-à-dire que si x et y sont deux points de la trame, leur distance au sens de la trame est égale à leur distance au sens de ϕ.

Après avoir donné une définition et quelques propriétés des métriques ϕ que nous allons considérer, nous allons démontrer le théorème central suivant :

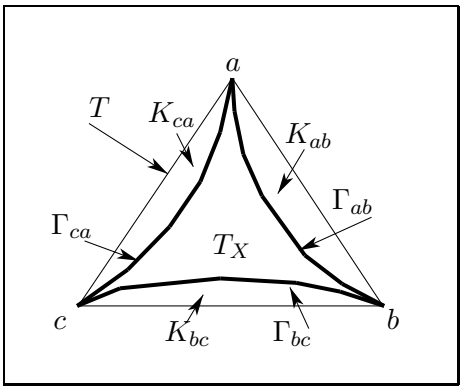


Figure 6.6 : Structure des triangles géodésiques.

Théorème 6.17

Toute géodésique au sens de la distance euclidienne est une géodésique au sens de ϕ.

La réciproque est évidemment fausse, puisque les géodésiques pour ϕ ne sont pas nécessairement uniques dans le cas où **X** est simplement connexe.

6.3.1 Définition d'une métrique associée à un compact K

Les métriques que nous allons étudier ici sont définies par un compact convexe symétrique d'intérieur non vide. Elles ont déjà fait l'objet d'études (Minkowski 1911 !) et l'on pourra trouver des résultats similaires à ceux que nous exposons dans [Lay72]. Ces métriques, loin d'être exotiques, ont de nombreuses applications en planification de trajectoires de robots ou en placement de formes [For85]. La plupart reposent sur le calcul du diagramme de Voronoï pour ce type de métriques – et pour d'autres, plus générales, abandonnant la notion de symétrie [CD85].

Définition 6.18

Soit K un compact convexe symétrique par rapport à O origine de $\mathbb{R}^2$ et d'intérieur non vide. Considérons ϕ définie par :

$$\phi(x, y) = \min \{\lambda,\ \lambda > 0,\ y \in \{x\} \oplus \lambda K\}.$$

Proposition 6.19

ϕ est une distance.

Démonstration :

1. $\phi(x,y) < \infty$. En effet, puisque K est d'intérieur non vide, soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon \subset K$. Soit d la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$y \in \{x\} \oplus \frac{d(x,y)}{\varepsilon} K$$

2. Montrons que $y \in \{x\} \oplus \phi(x,y)K$. En effet, $\lambda \to \lambda K$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{K}$. $K' \to \{x\} \oplus K'$ est continue de $\mathcal{K}$ dans $\mathcal{K}$. Donc $\lambda \to \{x\} \oplus \lambda K$ est continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathcal{K}$. Soit $\lambda_n \downarrow \phi(x,y)$. Pour tout n on a : $y \in \{x\} \oplus \lambda_n K$ et donc

$$y \in \lim_{n\to\infty} \{x\} \oplus \lambda_n K = \{x\} \oplus \phi(x,y)K.$$

3. $\phi(x,y) = 0 \Longleftrightarrow y \in \{x\} \Longleftrightarrow y = x$.

4. Symétrie :

$$\begin{array}{rl} & y \in \{x\} \oplus \phi(x,y)K \\ \Longleftrightarrow & \exists u \in K,\ y = x + \phi(x,y)u \\ \Longleftrightarrow & \exists v \in K,\ x = y + \phi(x,y)v \end{array}$$

car K est symétrique. Donc $\phi(y,x) \leq \phi(x,y)$. En échangeant les rôles de x et y on obtient l'inégalité en sens opposé et donc :

$$\phi(x,y) \ = \ \phi(y,x).$$

5. Inégalité triangulaire : comme K est convexe $(\alpha_1 + \alpha_2)K = \alpha_1 K \oplus \alpha_2 K$. Donc

$$\begin{array}{rl} & \left\{ \begin{array}{l} z \in \{y\} \oplus \phi(y,z)K \\ y \in \{x\} \oplus \phi(x,y)K \end{array} \right. \\ \Longrightarrow & z \in (\{x\} \oplus \phi(x,y)K) \oplus \phi(y,z)K \\ \Longrightarrow & z \in \{x\} \oplus (\phi(x,y) + \phi(y,z))\, K \end{array}$$

On en déduit l'inégalité triangulaire :

$$\phi(x,z) \leq \phi(x,y) + \phi(y,z) \ \blacksquare$$

Proposition 6.20

∂K contient un segment si et seulement si il existe trois points non alignés x, y, z tels que

$$\phi(x,z) \ = \ \phi(x,y) + \phi(y,z).$$

Démonstration :

• Si ∂K contient un segment, soient x_1 et x_2 deux points de celui-ci et x_3 leur milieu. Posons $x = O$, $y = x_1$, $z = x_1 + \overrightarrow{Ox_2} = O + 2\overrightarrow{Ox_3}$. On a :

$$\begin{array}{l} \phi(x,y) = 1 \\ \phi(y,z) = \phi(O,x_2) = 1 \\ \phi(x,z) = \phi(O, O + 2\overrightarrow{Ox_3}) = 2\phi(O,x_3) = 2. \end{array}$$

Donc $\phi(x,z) = \phi(x,y)+\phi(y,z)$. Comme $x_1 \neq x_2$, les vecteurs $\overrightarrow{Ox_1}$ et $\overrightarrow{Ox_3}$ ne sont pas colinéaires, sinon l'un des demi-plans ouverts limités par la droite (O,x_1) serait dans K^c et par symétrie par rapport à O l'autre aussi, ce qui nous donnerait K d'intérieur vide. Ainsi, x_1 n'est pas sur la droite (O,x_3), c'est-à-dire que les trois points x, y, z, ne sont pas alignés.

• Réciproquement, supposons que $\phi(x,z) = \phi(x,y)+\phi(y,z)$ avec y n'étant pas sur la droite (x,y). Soit alors y' sur le segment $[x,z]$ à la distance (selon ϕ) $\phi(x,y)$ de x. Ce point existe bien puisque $\phi(x,z)K = \phi(x,y)K \oplus \phi(y,z)K$. Alors $\{x\} \oplus \phi(x,y)K \cap \{z\} \oplus \phi(y,z)K$ est convexe et contient par suite le segment $[y,y']$. Si pour y_1 sur ce segment on avait $\phi(x,y_1) < \phi(x,y)$, on aurait $\phi(x,z) > \phi(x,y_1) + \phi(y_1,z)$, ce qui viole l'inégalité triangulaire vérifiée par ϕ. Nous en déduisons que $\phi(x,y_1) = \phi(x,y)$ pour tout y sur le segment $[y,y']$, ce qui prouve que $[y,y']$ est un sous-ensemble de ∂K ■

Définition 6.21

On dira que la métrique ϕ est dégénérée *si et seulement si ∂K contient un segment. Elle sera dite* non dégénérée *dans le cas contraire.*

Cette terminologie sera justifiée par la suite : dans une métrique dégénérée nous verrons qu'il n'y a plus unicité de la géodésique entre deux points.

6.3.2 Arcs rectifiables au sens de ϕ

Nous nous proposons de comparer les longueurs respectives de divers arcs lorsque l'on munit $\mathbb{R}^2$ de métriques différentes. Il est donc nécessaire avant toute chose de s'assurer que les arcs que nous étudions sont mesurables pour ces métriques. La proposition suivante a pour but de montrer que précisément il n'y a aucun problème.

Proposition 6.22

Un arc est rectifiable pour la distance euclidienne si et seulement si cet arc est rectifiable pour la distance ϕ.

Démonstration : nous allons montrer dans un premier temps que la distance ϕ est équivalente à la distance euclidienne. Soient x et y deux points de $\mathbb{R}^2$ et α la direction du vecteur $\overrightarrow{xy}$ ($\vec{\alpha} = \frac{\overrightarrow{xy}}{\|\overrightarrow{xy}\|}$). Soit D_α la demi-droite issue de O et de direction α. $D_\alpha \cap K$ est compact convexe, donc un segment dans notre cas. Notons $f(\alpha)$ sa longueur euclidienne. $f(\alpha) > 0$ car K est d'intérieur non vide. $f(\alpha)$ étant définie, établissons les deux lemmes techniques :

Lemme 6.23

$$\forall x \neq y,\ \phi(x,y) = d(x,y) \times (f(\alpha))^{-1}$$

où d est la distance euclidienne de $\mathbb{R}^2$ et α la direction du vecteur $\overrightarrow{xy}$.

Nous avons

$$y \in \{x\} \oplus \frac{d(x,y)}{f(\alpha)} K \tag{6.1}$$

i.e.

$$\phi(x,y) \leq \frac{d(x,y)}{f(\alpha)} \tag{6.2}$$

D'autre part,

$$y \in \{x\} \oplus \phi(x,y) K.$$

Alors, par homothétie de rapport $\frac{f(\alpha)}{d(x,y)}$ et de centre x,

$$x + f(\alpha)\vec{\alpha} \in \{x\} \oplus \frac{\phi(x,y) f(\alpha)}{d(x,y)} K.$$

Or par hypothèse

$$\phi(O, O + f(\alpha)\vec{\alpha}) = 1.$$

Donc

$$1 \leq \phi(x,y) \frac{f(\alpha)}{d(x,y)} \;\; i.e. \;\; \frac{d(x,y)}{f(\alpha)} \leq \phi(x,y) \tag{6.3}$$

En combinant les inéquations 6.2 et 6.3, on trouve l'inégalité souhaitée :

$$\phi(x,y) = (f(\alpha))^{-1} \times d(x,y).$$

Lemme 6.24

$$\exists \phi_1, \phi_2, \;\; \forall \alpha, \;\; 0 < \phi_1 \leq \frac{1}{f(\alpha)} \leq \phi_2 < \infty.$$

Comme K est compact, $K \subset B_R$ pour un R donné, où B_R désigne la boule de rayon R centrée à l'origine. Alors

$$0 < \phi_1 = \frac{1}{R} \leq \frac{1}{f(\alpha)}.$$

Comme K est d'intérieur non vide, soit $\varepsilon > 0$ tel que $B_\varepsilon \subset K$. Alors

$$\frac{1}{f(\alpha)} \;\leq\; \frac{1}{\varepsilon} \;<\; \infty.$$

Démonstration de la proposition : soit P une ligne polygonale $(p_i)_{i=0}^n$. Notons $\mathcal{L}(P)$ sa longueur euclidienne et $\mathcal{L}_\phi(P)$ celle déduite de la distance ϕ. Nous avons :

$$\mathcal{L}_\phi(P) = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{\overrightarrow{p_i p_{i+1}}}{\|\overrightarrow{p_i p_{i+1}}\|} \right)^{-1} \times d(p_i, p_{i+1}).$$

Donc

$$\phi_1 \mathcal{L}(P) \;\leq\; \mathcal{L}_\phi(P) \;\leq\; \phi_2 \mathcal{L}(P) \tag{6.4}$$

Soit maintenant un chemin $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$. Montrons que l'équation 6.4 est encore vraie pour γ.

$$\begin{array}{rrcl} & \sup\{\mathcal{L}(P),\ P \in \mathcal{P}\} & \leq & \phi_1^{-1} \sup\{\mathcal{L}_\phi(P),\ P \in \mathcal{P}\} \\ et & \sup\{\mathcal{L}_\phi(P),\ P \in \mathcal{P}\} & \leq & \phi_2 \sup\{\mathcal{L}(P),\ P \in \mathcal{P}\} \end{array}$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des lignes polygonales croissantes sur γ. Donc si le chemin γ est rectifiable au sens de la distance euclidienne, γ est rectifiable au sens de ϕ et réciproquement et on a :

$$\phi_1 \mathcal{L}(\gamma) \ \leq \ \mathcal{L}_\phi(\gamma) \ \leq \ \phi_2 \mathcal{L}(\gamma) \tag{6.5}$$

Soit maintenant A un arc dans le plan. Nous avons vu que $\mathcal{L}(A)$ est la borne inférieure des longueurs des chemins d'image A. Comme les inégalités 6.5 passent à la borne inférieure, nous avons établi la proposition et :

$$\phi_1 \mathcal{L}(A) \ \leq \ \mathcal{L}_\phi(A) \ \leq \ \phi_2 \mathcal{L}(A) \blacksquare$$

6.3.3 Géodésiques dans le plan

Montrons qu'au sens de la métrique ϕ le segment reste le plus court chemin entre deux points. De façon précise :

Proposition 6.25

Soit A un arc simple rectifiable différent d'un segment, $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ un chemin d'image A.

1. *Si la métrique ϕ n'est pas dégénérée, alors*

$$\mathcal{L}_\phi(A) > \phi(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)).$$

2. *Si la métrique ϕ est dégénérée, l'inégalité précédente n'est vraie qu'au sens large.*

Démonstration : comme A est simple, $\gamma(\alpha)$ et $\gamma(\beta)$ ne dépendent pas de γ : ce sont les extrémités de A. Soit $\mathcal{P}$ l'ensemble des lignes polygonales croissantes de γ. Examinons les différentes configurations possibles pour γ dans le cas d'une métrique non dégénérée :

1. $\gamma(\alpha) = \gamma(\beta)$. Il existe alors $x \neq \gamma(\alpha)$ tel que $x = \gamma(a),\ \alpha < a < \beta$.
   En conséquence :

$$\mathcal{L}_\phi(\gamma) \geq \phi(\gamma(\alpha), x) + \phi(x, \gamma(\beta)) > 0 = \phi(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))$$

2. $\gamma(\alpha) \neq \gamma(\beta)$.
   - Il existe x n'étant pas sur la droite $(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))$ tel que $x = \gamma(a),\ \alpha < a < \beta$.

$$\mathcal{L}_\phi(\gamma) \geq \phi(\gamma(\alpha), x) + \phi(x, \gamma(\beta)) > \phi(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))$$

   puisque $\gamma(\alpha)$, $\gamma(\beta)$ et x ne sont pas alignés.

- Si les autres cas ne sont pas vérifiés, soit x sur la droite $(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))$. Par hypothèse, on peut choisir x à l'extérieur du segment $[\gamma(\alpha), \gamma(\beta)]$. On a alors pour la distance euclidienne

$$d(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)) \ < \ d(\gamma(\alpha), x) + d(x, \gamma(\beta))$$

et en multipliant par $\frac{1}{f(\alpha)}$ où α est la direction du vecteur $\overrightarrow{\gamma(\alpha), \gamma(\beta)}$, pour la métrique ϕ on en conclut :

$$\phi(\gamma(\alpha), \gamma(\beta)) \ < \ \phi(\gamma(\alpha), x) + \phi(x, \gamma(\beta)) \leq \mathcal{L}_\phi(\gamma).$$

Le résultat s'obtient dans chacun des cas en passant à la limite inférieure sur γ.

Dans le cas où la métrique est quelconque, on a toujours

$$\mathcal{L}_\phi(\gamma) = \sup\{\mathcal{L}_\phi(P), \ P \in \mathcal{P}\} \ \geq \ \phi(\gamma(\alpha), \gamma(\beta))\blacksquare$$

6.3.4 Caractérisation des géodésiques de $(\mathbf{X}, \phi)$

6.3.4.1 Cas d'une métrique non dégénérée

Soit $\mathbf{X}$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ compact, connexe, simplement connexe et tel que la distance géodésique d_X (déduite de la distance euclidienne) entre deux points de $\mathbf{X}$ soit finie. Sous ces hypothèses, nous avons vu qu'il existait un et un seul arc géodésique entre deux points x et y. Cet arc est simple, rectifiable et sa longueur est $d_X(x, y)$. Nous allons chercher une caractérisation géométrique de cet arc qui ne fasse plus intervenir explicitement la métrique euclidienne.

Hypothèse 6.26

Hypothèse H1 *Soit* Γ *un arc simple rectifiable de* $\mathbf{X}$. Γ *vérifie l'hypothèse H1 si et seulement si :*

$$\forall x, y \ \in \Gamma, \ [x, y] \cap \mathbf{X}^c \neq \emptyset \ \textit{ou} \ [x, y] \subset \Gamma$$

Cette hypothèse exprime le fait qu'entre deux quelconques de ses points, Γ est soit un segment, soit ce segment sort de $\mathbf{X}$. Nous allons montrer que cette hypothèse est *caractéristique* d'une géodésique.

Proposition 6.27

Si Γ *est un arc géodésique pour la métrique euclidienne,* Γ *vérifie l'hypothèse H1.*

Démonstration : soient x et y deux points de Γ et $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbf{X}$ un chemin injectif d'image Γ. Posons $x = \gamma(t_1)$ et $y = \gamma(t_2)$. $\gamma([t_1, t_2])$ est un arc géodésique de x à y. Comme cet arc est unique, soit :

- $[x, y] \subset \mathbf{X}$. C'est la géodésique de x à y et $\gamma([t_1, t_2]) = [x, y]$, i.e. $[x, y] \subset \Gamma$.

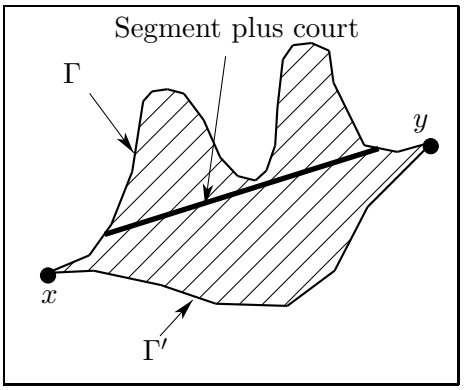


Figure 6.7 : Unicité de la géodésique de x à y.

- $[x, y] \cap \mathbf{X}^c \neq \emptyset$ ■

Proposition 6.28

Si Γ et Γ' sont deux arcs simples rectifiables de x à y vérifiant l'hypothèse H1, alors $\Gamma = \Gamma'$.

Démonstration : soient γ et γ' deux chemins injectifs d'image Γ et Γ' respectivement. Soit $E = \{t,\ \gamma(t) \notin \Gamma'\}$. E est un ouvert car γ est une fonction continue et Γ' un compact.

E est non vide, car sinon les deux arcs Γ et Γ' sont égaux. Soit $]t_1, t_2[$ une composante connexe de E. On a

$$\gamma(t_1) = \gamma'(t_3) \ \ et \ \ \gamma(t_2) = \gamma'(t_4)$$

avec $\alpha \leq t_3 < t_4 \leq \beta$. Définissons maintenant :

$$\begin{array}{lcll} \delta & : & [t_1, t_2] \to \mathbf{X} & \forall t \in [t_1, t_2],\ \delta(t) = \gamma(t) \\ \delta' & : & [t_3, t_4] \to \mathbf{X} & \forall t \in [t_3, t_4],\ \delta'(t) = \gamma'(t) \end{array}$$

deux sous-chemins de γ et γ' respectivement. Ces deux nouveaux chemins n'ont en commun que leurs extrémités.

Dans sa démonstration sur l'unicité des géodésiques, Ch. Lantuéjoul montre que l'on peut remplacer un sous-chemin de δ ou de δ' par un segment de droite sans sortir de l'ensemble connexe limité par la courbe simple ζ :

$$\zeta : [t_1, t_2 + t_4 - t_3] \to \mathbf{X} \quad \left\{ \begin{array}{ll} \zeta(t) = \delta(t) & si \quad t_1 \leq t \leq t_2 \\ \zeta(t) = \delta'(t_2 + t_4 - t) & si \quad t_3 \leq t \leq t_4 \end{array} \right.$$

Comme $\mathbf{X}$ est simplement connexe, cette zone est entièrement incluse dans $\mathbf{X}$ (voir figure 6.7).

Donc il ne peut exister plus d'un arc rectifiable vérifiant l'hypothèse H1. Ainsi l'hypothèse H1 *caractérise* l'arc géodésique au sens de la métrique euclidienne de x à y ■

Munissons à présent le plan d'une métrique non dégénérée ϕ correspondant à un compact K. L'existence d'une géodésique de x à y dans $\mathbf{X}$ se démontre de manière similaire à celle proposée

par Ch. Lantuéjoul [Lan82]. La proposition 6.27 reste vraie puisque nous avons vu que pour toute métrique non dégénérée ϕ

$$\mathcal{L}_\phi(\gamma([\alpha,\beta])) > \phi(\gamma(\alpha),\gamma(\beta))$$

si γ n'est pas le segment $[\gamma(\alpha),\gamma(\beta)]$.

La proposition 6.28 ne dépend pas de la métrique ϕ, et donc reste vraie.

Ainsi une géodésique au sens de ϕ est aussi caractérisée par l'hypothèse H1 et par suite est unique. Il s'ensuit que la géodésique au sens de ϕ et celle au sens de la métrique euclidienne sont égales et sont caractérisées par l'hypothèse H1.

6.3.4.2 Cas d'une métrique dégénérée

Dans le cas d'une métrique ϕ dégénérée, il n'y a plus toujours unicité de la géodésique entre deux points x et y. Pour aborder les géodésiques dans ce cas, nous allons considérer une suite de métriques et passer à la limite. Dans le paragraphe suivant, nous verrons comment une métrique dégénérée peut être approchée par une suite de métriques non dégénérées.

Soit K_n une suite de compacts, convexes, symétriques, d'intérieur non vide définissant une suite de métriques non dégénérées ϕ_n, tendant en décroissant vers un compact K au sens de la distance de Hausdorff sur $\mathcal{K}$ ensemble des compacts non vides.

Notons $f_n(\alpha)$ les fonctions introduites dans l'équation 6.1 page 111 On a :

$$\forall \alpha \in [0,2\pi[\quad \lim_{n\to\infty} f_n(\alpha) = f(\alpha).$$

Lemme 6.29

La convergence $f_n \to f$ est uniforme.

Démonstration :

Solution 1 Il est possible de démontrer que f_n est une fonction continue car K_n est d'intérieur non vide. L'application du théorème de Dini ([Die69] P. 136) fournit alors le résultat ■

Solution 2 Sans savoir que f_n est continue, nous allons montrer que la distance de Hausdorff rend la convergence des f_n uniforme. $K_n \to K$ pour la métrique de Hausdorff ϱ. Soient $\varepsilon > 0$ et N tels que $n > N \Rightarrow \varrho(K_n, K) \leq \varepsilon$. Comme $K_n \downarrow K$, soit R assez grand pour que $B(R) \supset K_0 \supset K_i \supset K$. Comme K est d'intérieur non vide, soit η assez petit pour que $B(\eta) \subset K \subset K_i \subset K_0$. Soit α une direction et x le point de ∂K tel que $x = O + f(\alpha)\vec{\alpha}$. Il existe alors un demi-plan fermé Π contenant K et dont x est sur la droite frontière Δ, puisque K est convexe. Soit Π_1 le dilaté de Π par la boule de rayon ε, demi-plan limité par la droite Δ_1. Par la croissance de la dilatation, $n > N \Rightarrow K_n \subset \Pi_1$ puisque $\varrho(K_n, K) \leq \varepsilon$. On a alors :

$$| f_n(\alpha) - f(\alpha) | \leq \frac{\varepsilon}{\sin\gamma} \tag{6.6}$$

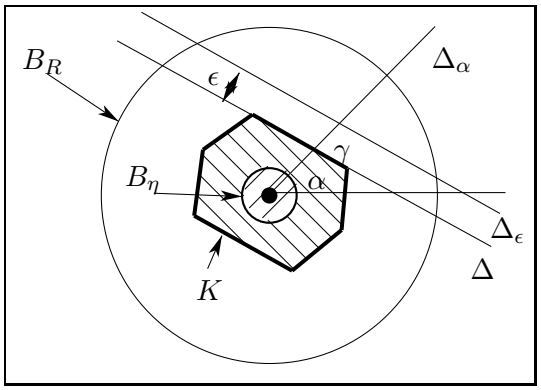


Figure 6.8 : Convergence uniforme de $f_n \to f$

où γ est l'angle de la droite Δ et de la direction α (voir figure 6.8). On peut minorer $\sin\gamma$ par :

$$\sin\gamma \;\leq\; \frac{\eta}{f(\alpha)} \;\leq\; \frac{\eta}{R} \tag{6.7}$$

En combinant les inéquations 6.6 et 6.7 on trouve la majoration :

$$n > N \implies |\, f_n(\alpha) - f(\alpha)\,| \leq \frac{\varepsilon \times R}{\eta}$$

ce qui prouve la convergence uniforme puisque $\frac{\varepsilon R}{\eta}$ ne dépend pas de α ■

Utilisons ce résultat. Soit alors $\varepsilon_n \downarrow 0$ tel que

$$\forall\alpha \quad |\, \frac{1}{f_n(\alpha)} - \frac{1}{f(\alpha)}\,| < \varepsilon_n$$

On en déduit l'inégalité sur les longueurs d'une même chaîne polygonale P :

$$|\, \mathcal{L}_{\phi_n}(P) - \mathcal{L}_{\phi}(P)\,| < \varepsilon_n \mathcal{L}_{\phi_0}(P) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Passons à présent aux arcs rectifiables de x à y :

$$|\, \sup\{\mathcal{L}_{\phi_n}(P),\ P \in \mathcal{P}\} - \sup\{\mathcal{L}_{\phi}(P),\ P \in \mathcal{P}\}\,|$$

$$\leq \sup\{|\, \mathcal{L}_{\phi_n}(P) - \mathcal{L}_{\phi}(P)\,|,\ (P) \in \mathcal{P}\} \leq \varepsilon_n \mathcal{L}_{\phi_0}(\gamma) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des suites polygonales croissantes de γ. Ainsi

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_{\phi_n}(\gamma) = \mathcal{L}_{\phi}(\gamma).$$

Si Γ est la géodésique euclidienne donc aussi au sens des ϕ_n et Γ' un autre arc simple rectifiable de mêmes extrémités, il est possible de passer à la limite et on obtient :

$$\mathcal{L}_{\phi_n}(\Gamma) < \mathcal{L}_{\phi_n}(\Gamma') \implies \mathcal{L}_{\phi}(\Gamma) \leq \mathcal{L}_{\phi}(\Gamma').$$

En passant à la borne inférieure, cette inéquation est encore vraie pour un arc Γ' rectifiable, mais non nécessairement simple.

Avec les résultats des paragraphes 6.3.4.1, nous venons de démontrer le théorème central :

Théorème 6.30

Pour toute métrique ϕ définie par un compact convexe symétrique d'intérieurs non vides, la *géodésique au sens de la distance euclidienne de x à y dans* $\mathbf{X}$ *est* une *géodésique au sens de ϕ.*

6.3.5 Approximation d'une métrique dégénérée

Dans le paragraphe précédent nous nous sommes servi d'une suite de métriques approximant la métrique dégénérée ϕ. Présentons une manière explicite de construire cette suite.

Proposition 6.31

Soit K un compact convexe symétrique d'intérieur non vide. Posons :

$$K_n = \bigcap_{B_x(n) \supset K} B_x(n)$$

où $B_x(n)$ est la boule de rayon n et de centre x. K_n est une suite de compacts convexes symétriques d'intérieur non vide induisant des métriques ϕ_n non dégénérées sur $\mathbb{R}^2$ telle que $K_n \downarrow K$ quand $n \to \infty$.

Démonstration :

1. On a $K \subset K_n$ par construction.
2. K_n est compact car intersection de boules compactes.
3. K_n est convexe car intersection de boules qui sont des convexes.
4. K_n est symétrique, car si $K \subset B_x(n)$, alors $-B_x(n) = B_{-x}(n)$ contient $-K = K$. Donc si $B_x(n)$ participe à l'intersection, $B_{-x}(n)$ aussi, et puisque l'intersection de ces deux boules est un convexe symétrique, K_n est intersection de convexes symétriques, donc convexe symétrique lui-même.
5. K_n est une suite décroissante, car

   $$B_x(n) = \bigcap_{B_y(n+1) \supset B_x(n)} B_y(n+1).$$

   En effet, $B_y(n+1) \supset B_x(n)$ est réalisé pour tout y appartenant au disque de centre x et de rayon 1.
6. Montrons que au sens de la distance de Hausdorff,

   $$K = \lim_{n \to \infty} K_n$$

   Soit $z \notin K$. Soient alors Δ une droite et Π_1, Π_2 les deux demi-plans de frontière Δ tels que $K \subset \Pi_1$ et $z \in \Pi_2$. Ceci est possible puisque deux compacts convexes de $\mathbb{R}^2$ peuvent

toujours être séparés par une droite. Soient z_1 la projection sur Δ de z et $B(r)$ le faisceau de cercles de rayon r tangents à Δ, passant par z_1 et inclus dans Π_1.

Supposons

$$\forall n,\ \exists x_n,\ x_n \in K \text{ et } x_n \notin \dot{B}(n)$$

où $\dot{B}(n)$ représente l'intérieur de $B(n)$. Alors, comme K est compact, il existe une sous-suite x_{n_k} convergente vers $y \in K$. Puisque pour k assez grand et p fixé, $x_{n_k} \notin \dot{B}(p)$, et à la limite $y \notin \dot{B}(p)$, en conséquence, $y \in \Pi_2 \cup \Delta$. Or $\Pi_2 \cup \Delta$ et K sont disjoints, ce qui est une contradiction.

Ainsi, à partir d'un certain rang, $K \subset B(n)$ avec $z \notin B(n)$, ce qui prouve que pour n assez grand, $z \notin K_n$.

$$\forall x \notin K,\ x \notin \lim_{n\to\infty} \downarrow K_n$$

Comme $K \subset K_n$, on a bien $K_n \downarrow K$.

7. ∂K_n ne contient pas de segment.

   En effet, soit sinon $[x_1, x_2]$ un tel segment. L'intersection de toutes les boules de rayon n contient l'intersection des deux disques de rayon n dont la frontière passe par x_1 et x_2. Alors le segment $]x_1, x_2[$ est intérieur à cette intersection, ce qui montre que ce segment n'est pas sur la frontière de K_n ■

6.4 Structure des boules géodésiques

Soit $\mathbf{X}$ compact, connexe, simplement connexe et de diamètre géodésique borné ($d_X < \infty$ sur $\mathbf{X}$). Bien que des théorèmes généraux puissent être énoncés nous nous restreindrons au cas où $\mathbf{X}$ est un polygone $(x_i)_{i=0}^n$ avec $x_0 = x_n$. C'est le cas qui nous occupera, puisque le plongement d'un sous-ensemble de la trame hexagonale dans $\mathbb{R}^2$ se fera sous la forme d'un polygone. $\mathbf{X}$ ne sera pas nécessairement simple mais non croisé.

Pour étudier la forme des boules géodésiques, nous allons décomposer $\mathbf{X}$ en triangles sur chacun desquels la distance géodésique prend la forme simple de la distance usuelle à un point à une constante additive près. Une triangulation analogue est présentée dans [Her87], dans le but de déterminer le graphe de visibilité d'un polygone simple.

Comme $\mathbf{X}$ est un polygone, toutes les géodésiques sont des lignes polygonales dont les sommets qui ne sont pas des extrémités sont des sommets concaves de $\mathbf{X}$. Cela découle de la caractérisation des géodésiques.

Fixons une fois pour toutes $x \in \mathbf{X}$ et étudions la forme des boules géodésiques centrées en x, i.e. des ensembles :

$$B(x, \lambda) \ = \ \{y \in \mathbf{X},\ d_X(x, y) \leq \lambda\}$$

Notations :

- d la distance euclidienne
- d_X la distance géodésique sur $\mathbf{X}$ déduite de la distance euclidienne d

- d^ϕ la distance définie par K
- d^ϕ_X la distance géodésique sur $\mathbf{X}$ déduite de la distance d^ϕ
- Γ_{ab} la géodésique euclidienne de a à b

Définition 6.32

Soit y un point de $\mathbf{X}$. La géodésique Γ_{xy} est une ligne polygonale $(p_i)_{i=0}^n$, $p_0 = x$ et $p_n = y$. On appelle prolongé *de Γ_{xy} dans $\mathbf{X}$ la ligne polygonale $p_0, \ldots, p_{n-1}, p_n, q$ telle que le segment $[p_n, q]$ soit dans le prolongement de $[p_{n-1}, p_n]$, inclus dans $\mathbf{X}$ et de longueur maximale.*

Remarque : q est un point de la frontière de $\mathbf{X}$ et le prolongé de Γ_{xy} est la géodésique de x à q. Il se peut que $[p_n, q]$ contienne des sommets concaves de $\mathbf{X}$ dans son intérieur. Il se peut aussi que $p_n = q$, c'est-à-dire que la géodésique ne puisse être prolongée en ligne droite.

Notons :

- E l'ensemble des sommets de $\mathbf{X}$ et des extrémités des géodésiques prolongées de Γ_{xx_i}. On a $E \subset \partial\mathbf{X}$.
- Les géodésiques prolongées Γ sont des lignes polygonales (p_i) dont les sommets sont dans E. Si des points de E se trouvent sur l'intérieur d'une arête, nous coupons cette arête en deux selon ce point. Nous supposerons donc que $\Gamma \cap E = \{p_i\}$. Soit alors A l'ensemble de toutes les arêtes des géodésiques prolongées de Γ_{xx_i}.
- A_0 est l'ensemble des côtés du polygone $\partial\mathbf{X}$ coupés selon les points de E et qui ne sont pas déjà dans A.
- $G = (E, A)$ le graphe de sommets E et d'arêtes A
- $G_0 = (E, A_0 \cup A)$ le graphe obtenu en ajoutant à G les arêtes A_0.

L'ensemble de ces notations est illustré figure 6.9.

$$\begin{array}{rcl} E & = & \{ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9\} \\ A & = & \{ \quad (x, x_1), (x, x_2), (x_2, x_3), (x_2, x_8), (x, x_4), (x, x_5), \\ & & \quad (x, x_7), (x_7, x_9), (x_7, x_6)\} \\ A_0 & = & \{ \quad (x_1, x_2), (x_3, x_8), (x_8, x_4), (x_4, x_5), (x_5, x_9), \\ & & \quad (x_9, x_6), (x_7, x_1)\} \end{array}$$

Lemme 6.33

G et G_0 sont planaires.

Démonstration : si G n'est pas planaire, soient deux arêtes de G, $[a, b]$ et $[c, d]$ se coupant strictement en e, intérieur à ces deux segments. Quitte à échanger les rôles de a et b, on peut supposer que $[a, b] \subset \Gamma_{xa}$. De même $[c, d] \subset \Gamma_{xd}$. Comme la géodésique de e à x est unique,

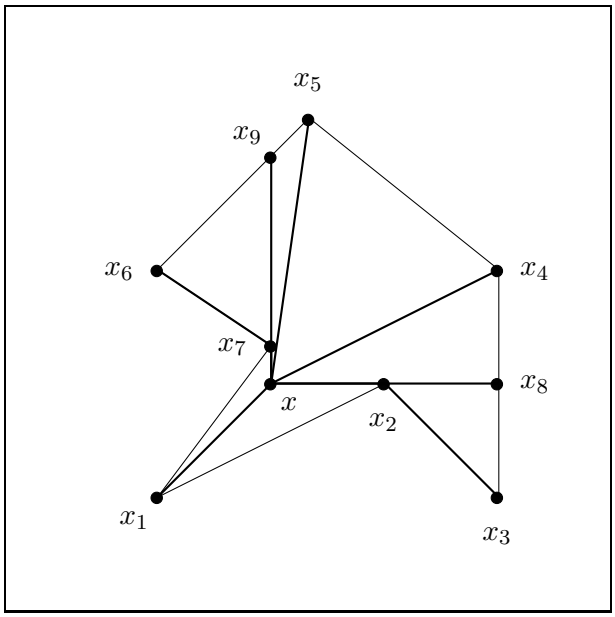


Figure 6.9 : Décomposition de **X** en triangles.

les deux segments $[a, b]$ et $[c, d]$ sont portés par la même droite et ne peuvent donc se couper strictement.

Comme les segments de A et de A_0 ne peuvent se couper qu'en leur extrémité, G_0 est aussi planaire ■

Soit $T = (t_i)_{i=0}^{p}$ une face (ouverte) de G_0. Nous supposerons que les points t_i sont de "vrais" sommets, c'est-à-dire que la frontière de T ne présente pas en t_i un angle plat. $T \subset \mathbf{X}$ puisque toutes les arêtes du graphe sont dans **X**.

Lemme 6.34

T est un polygone convexe.

Démonstration : soit t_i un sommet de T dont l'angle soit $> \pi$. Considérons la géodésique Γ_{xt_i}, ligne polygonale $(p_i)_{i=0}^{n}$ avec $p_0 = x$ et $p_n = t_i$. Le segment $[p_{n-1}, p_n]$ est dans le dièdre d'angle au sommet $< \pi$ et de sommet t_i, limité par les demi-droites d'origine t_i et de directions $\overrightarrow{t_i t_{i-1}}$ et $\overrightarrow{t_i t_{i+1}}$. Donc le prolongement de la géodésique Γ_{xt_i} coupe T, ce qui est impossible (voir figure 6.10) ■

Lemme 6.35

Soit y un point quelconque de T. Γ_{yx} passe par le point t_i tel que $d_X(x, t_i) < d_X(x, t_j)$.

Démonstration : soit z le point de Γ_{xy} le plus proche de x et sur la frontière de T. On a $z \in E$. En effet, z n'est pas :

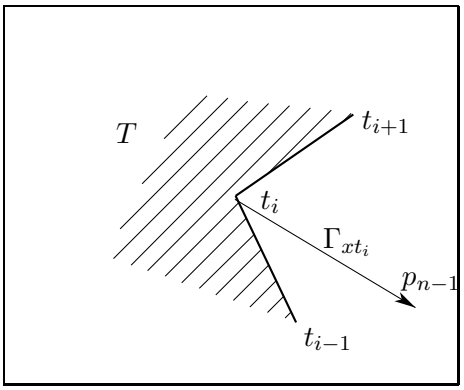


Figure 6.10 : Convexité de T.

- intérieur à une arête $[a, b]$ de G. En effet, d'après le principe d'unicité de la géodésique de z à x, soit $[z, a]$ soit $[z, b]$ est dans Γ_{xz}. Donc soit a, soit b est un point de la frontière plus proche de x que z.
- intérieur à un segment $[a, b]$ de A_0. La géodésique Γ_{xz} ne peut contenir ni $[z, a]$ ni $[z, b]$, donc traverse T et retraversera la frontière de T avant d'atteindre x.

Donc $z \in E$.

Notons $(z_j)_{j=0}^{p}$ les points de Γ_{xz} avec $z_0 = x$ et $z_p = z$. Le segment $[z_{p-1}, z_p] \in A$ puisque $z \in E$. Son prolongement ne coupe pas T. Comme de plus $z_{p-1} \in \overline{T}^c$, z est un sommet de T. La droite D_1 portée par $[z_{p-1}, z_p]$ est une droite d'appui du convexe $\overline{T}$.

Notons $(z'_j)_{j=0}^{q}$ les points de Γ_{xt_i} avec $z'_0 = x$ et $z'_q = t_i$. Par un raisonnement analogue, la droite D_2 portée par $[z'_{q-1}, z'_q]$ est une droite d'appui du convexe $\overline{T}$. D'autre part, de façon analogue, le point $z'_{q-1} \in \overline{T}$.

Soit u le point le plus éloigné de x qui soit à la fois sur les deux géodésiques Γ_{xt_i} et Γ_{xz} Le triangle géodésique $T_X = (u, t_i, z)$ est non dégénéré si et seulement si $t_i \neq z$. En vertu du théorème de structure des triangles géodésiques, le triangle T_g limité par les droites D_1, D_2 et (t_i, z) est inclus dans T_X. Puisque D_1 et D_2 sont des droites d'appui de T (en z et t_i respectivement), l'union de T_X et de T_g est convexe. Donc le segment $[y, z_{p-1}] \subset T_X \cup T_g$. Or la géodésique de x à y est $(z_0, \ldots, z_p, y)$. L'hypothèse H1 sur les géodésiques n'est pas respectée, ce qui implique que $t_i = z$ (voir figure 6.11) ■

Lemme 6.36

Le lemme précédent reste vrai pour $y \in \overline{T}$.

Démonstration : Comme T est convexe, $\overline{T}$ est d_X connexe par arcs. Il est donc possible de passer à la limite :

$$\forall y \in \overline{T},\ d_X(x, y) \ = \ d_X(x, t_i) + d(t_i, y)$$

Cette équation prouve alors que pour tout $y \in \overline{T}$, la géodésique de x à y passe par t_i ■

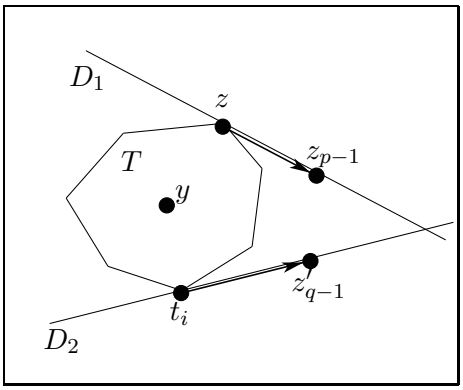


Figure 6.11 : Structure des faces de G_0.

Lemme 6.37

T est un triangle.

Démonstration : notons $T = (t_i)_{i=0}^n$ les sommets de T et supposons que t_1 soit le point le plus proche de x selon d_X (s'il en existe plusieurs, nous en choisissons un arbitrairement). Si $n > 3$, le segment $[t_1, t_3]$ coupe T. En vertu du lemme précédent, Γ_{xt_3} passe par t_1. Comme $t_1 \in E$. Donc le segment $[t_1, t_3]$ est une arête du graphe G. Ceci est impossible puisque T est une de ses faces ■

Résumons à présent l'ensemble des résultats obtenus :

Théorème 6.38

Les faces du graphe G_0 sont des triangles. Si T est l'un de ces triangles ouverts et t son sommet le plus proche de x au sens de d_X :

$$\forall y \in \overline{T},\ d_X(x,y) \ = \ d_X(x,t) + d(t,y)$$

Munissons maintenant $\mathbb{R}^2$ de la métrique ϕ déduite d'un compact convexe symétrique d'intérieur non vide K.

Nous avons vu que sous les hypothèses que nous avons faites sur $\mathbf{X}$, Γ_{ab} existe et est unique. De plus Γ_{ab} est aussi une géodésique au sens de d^ϕ. Donc

$$d_X^\phi(a,b) = \mathcal{L}_\phi(\Gamma_{ab})$$

Comme $t \in \Gamma_{xy}$, la distance géodésique de t à x au sens de ϕ peut se calculer au moyen de cette géodésique euclidienne et on en déduit :

$$\forall y \in \overline{T},\ d_X^\phi(x,y) = d_X^\phi(x,t) + d^\phi(t,y) \tag{6.8}$$

Donc sur un triangle T, la boule géodésique $B(x,\lambda)$ prend l'une des deux formes suivantes :

- si $d_X^\phi(t,x) > \lambda$, $B(x,\lambda) \cap T = \emptyset$
- si $d_X^\phi(t,x) \leq \lambda$, $B(x,\lambda) \cap T = \{t\} \oplus (\lambda - d_X^\phi(t,x))K \cap T$. C'est en fait l'intersection de T et du dilaté (non géodésique et au sens de d^ϕ) de taille $(\lambda - d_X^\phi(t,x))$ de $\{t\}$.

Nous supposerons maintenant que K définissant la métrique ϕ est un polygone $(k_i)_{i=0}^k$ avec $k_0 = k_k$. Notons α_i la direction du vecteur $\overrightarrow{Ok_i}$. Nous pouvons toujours supposer que la suite $(\alpha_i)_{i=0}^k$ est strictement croissante et que $\alpha_0 + 2\pi = \alpha_k$, i.e. les sommets de K sont énumérés dans le sens trigonométrique. Nous noterons s_i le segment frontière de K, $s_i = [k_{i-1}, k_i]$ et $\vec{\alpha_i}$ le vecteur unitaire de direction α_i (voir figure 6.12).

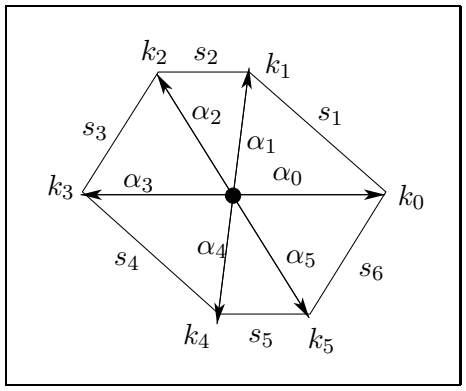


Figure 6.12 : Notations de K.

Quelle est localement la forme de la frontière de $B(x,\lambda)$, i.e. quel est le voisinage d'un point y à distance λ de x ? Nous allons montrer dans un premier temps le sens que nous donnons au mot voisinage.

Définition d'un voisinage de y

Construisons l'ensemble Z des points de E différents de y et des arêtes de A_0 qui ne contiennent pas y. Z est une union finie de compacts, donc compact et $y \notin Z$. Il existe donc un voisinage V de y que l'on peut choisir circulaire, fermé et de centre y qui ne coupe pas Z. Sur V, la trace de G_0 est un ensemble éventuellement vide de rayons issus de y. De même, la géodésique Γ_{xy} est sur V également un rayon. Par le même type de raisonnement, on peut réduire V de telle sorte que sur V la frontière de $B(x,\lambda)$ soit aussi une union de rayons issus de y.

La géodésique Γ_{xy} est une ligne polygonale $(p_i)_{i=0}^n$ avec $p_0 = y$ et $p_n = x$. Soit α la direction du vecteur $\overrightarrow{p_0p_1}$. Il existe alors un seul i tel que : $\alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$. Notons r_1 le rayon issu de y de direction $\overrightarrow{k_ik_{i+1}}$ et r_2 :

- si $\alpha_i < \alpha$, r_2 est le rayon issu de y de direction $\overrightarrow{k_{i+1}k_i}$.
- si $\alpha_i = \alpha$, r_2 est le rayon issu de y de direction $\overrightarrow{k_ik_{i-1}}$.

La figure 6.13 illustre ces deux cas.

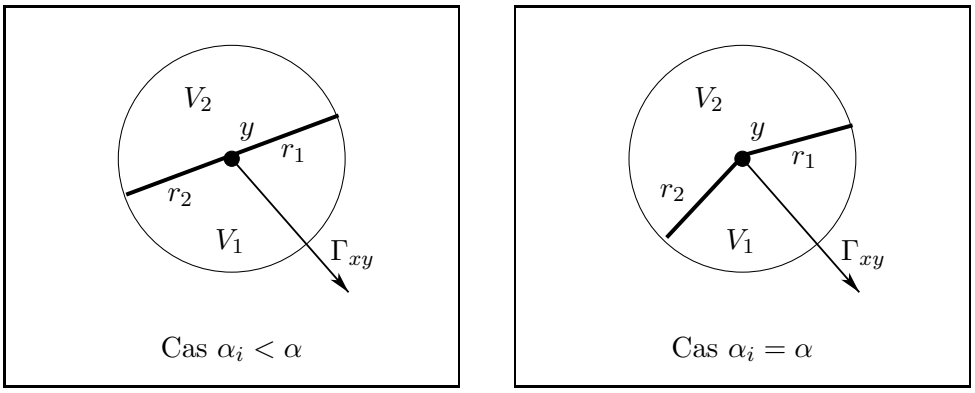


Figure 6.13 : Les deux types de frontière locale d'une boule géodésique.

Proposition 6.39

r_1 et r_2 coupent V en deux secteurs connexes.

1. *Celui (V_1) qui contient la direction α est convexe.*
2. *Tous les points de l'autre (V_2) sont à distance $> \lambda$.*
3. *Les points à distance exactement λ de x sont sur $r_1 \cup r_2$. (réciproque fausse)*

Démonstration : le premier point est vérifié par définition de notations sur K.

Soit $z \in V_2$. z et y appartiennent à un même triangle fermé de la triangulation de $\mathbf{X}$. En effet, les sommets de tous les triangles sont des points de E, or $E \cap V \subset \{y\}$, et les côtés des triangles sont des rayons de V.

Cas 1 : si le triangle contenant z et y a pour sommet le plus proche de x le point y, alors $d_X^\phi(x,y) < d_X^\phi(x,z)$, quelle que soit la localisation de z dans V.

Cas 2 : sinon soit t sur Γ_{xy} sommet le plus proche de x du triangle contenant z et y. Sur ce triangle, la proposition est vérifiée puisque la boule géodésique de centre x se réduit à l'homothétique de K, centré en t ayant y sur sa frontière ■

6.5 Extrémités libres des géodésiques maximales

L'objet de cette section est de chercher les configurations que peuvent prendre les points les plus éloignés d'un point donné. Soit donc x fixé une fois pour toutes. Nous cherchons les points y tels que $d_X^\phi(x,y)$ soit maximal. De façon équivalente, nous cherchons l'extrémité y des géodésiques de longueur maximale de x à y.

Notations :

x : un point de $\mathbf{X}$ fixé.

y : un point de $\mathbf{X}$ tel que :

$$\forall z \in \mathbf{X},\ d_X^\phi(x,y) \geq d_X^\phi(x,z)$$

λ : la distance $d_X^\phi(x,y)$

Γ_{xy} : la géodésique au sens de la distance géodésique *euclidienne* sur $\mathbf{X}$.

B : la boule géodésique de centre x et de rayon $d_X^\phi(x,y)$.

Y : un ensemble de points tel que la fonction de propagation sur $\mathbf{X}$ puisse s'écrire :

$$T_X(z) \ = \ \sup_{y \in Y} d_X^\phi(z,y)$$

Nous construirons progressivement Y. Notons que nous ne chercherons pas à trouver Y minimal.

V : un voisinage circulaire fermé de centre y tel que sur V, le graphe G_0 et la frontière de B soient des rayons uniquement. En particulier si $z \in]y, y_1]$ rayon de V moins son centre, on a les propriétés évidentes suivantes :

- $z \in \mathbf{X} \Longrightarrow [y, y_1] \subset \mathbf{X}$
- $z \notin \mathbf{X} \Longrightarrow]y, y_1] \subset \mathbf{X}^c$
- $z \in \partial\mathbf{X} \Longrightarrow [y, y_1] \subset \partial\mathbf{X}$
- $d_X^\phi(x,z) = \lambda \Longrightarrow d_X^\phi(x,\cdot) = \lambda$ sur $[y, y_1]$
- $d_X^\phi(x,z) < \lambda \Longrightarrow d_X^\phi(x,\cdot) < \lambda$ sur $]y, y_1]$
- $d_X^\phi(x,z) > \lambda \Longrightarrow d_X^\phi(x,\cdot) > \lambda$ sur $]y, y_1]$

Les paragraphes qui vont suivre étudieront de nombreuses configurations pour y. Ces différents cas ne pourront être décrits de façon synthétique que si l'on fait des hypothèses sur les polygones $\mathbf{X}$ et K. Ces résultats généraux sont cependant utiles lorsque l'on cherche à employer diverses métriques K, de plus en plus proches de la métrique euclidienne. La particularisation se fera facilement sans démonstration supplémentaire. Nous les ferons à la section suivante.

Nous n'étudierons que le cas où $y \in \partial\mathbf{X}$. En effet, d'après le principe de prolongement des géodésiques, toute géodésique se terminant en un point intérieur à $\mathbf{X}$ peut se prolonger en ligne droite, i.e. on peut trouver dans $\mathbf{X}$ un point strictement plus loin de x que y.

Dans un premier temps éliminons les cas pathologiques où y est un point singulier de la frontière ou bien un point terminal :

Définition 6.40

y est un point singulier si et seulement si sur un voisinage circulaire de y, $\mathbf{X}^c$ a deux composantes connexes au moins (voir figure 6.14).

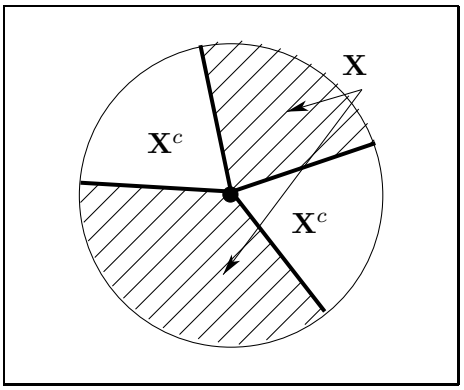


Figure 6.14 : Voisinage d'un point singulier.

Proposition 6.41

Si y est un point singulier, $y \notin Y$.

Démonstration : soit y point singulier et V le voisinage défini dans les notations. Comme $V \cap \mathbf{X}^c$ se compose de deux secteurs au moins, $V \cap \mathbf{X}$ aussi. Soit S_1 celui qui contient la géodésique Γ_{xy} et C_2 une autre. Choisissons arbitrairement un rayon de C_2 que nous noterons r. Alors $\Gamma_{xy} \cup r$ est une géodésique. En effet, Γ_{xy} est une géodésique. Notons $s = \Gamma_{xy} \cap V$. $s \cup r$ est une géodésique, puisque :

- si r est dans le prolongement de s, c'est clair.
- sinon tout segment joignant un point de r à un point de s coupe $\mathbf{X}^c$, en vertu des propositions 6.27 et 6.28.

Donc $y \notin Y$ ■

Définition 6.42

y est un point terminal si et seulement si $X \cap V$ est un rayon seulement (voir figure 6.15).

Nous mettrons tous les points terminaux dans Y.

Plaçons-nous dans le cas d'un point y frontière, non terminal et non singulier. Dans ces conditions, $V \cap \mathbf{X}$ est un secteur (connexe) de V fermé, non réduit à un rayon, et $V \cap \mathbf{X}^c$ un secteur ouvert (connexe).

Proposition 6.43

y ne peut pas être un sommet concave de $\mathbf{X}$.

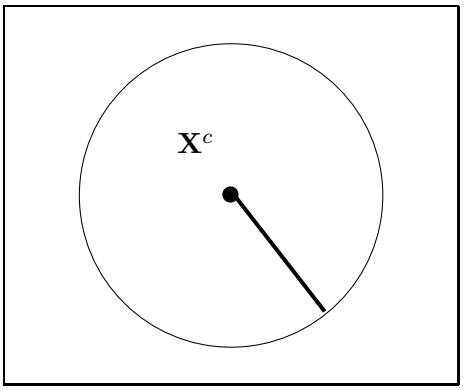


Figure 6.15 : Point terminal.

Démonstration : nous avons vu que sur V, la boule géodésique B est un secteur convexe. Donc B ne peut couvrir $\mathbf{X} \cap V$ en entier, puisque c'est un secteur strictement plus grand que l'angle plat (voir les deux configurations locales des boules géodésiques) ■

Proposition 6.44

Si y n'est pas un sommet de $\mathbf{X}$, alors :

1. *tous les points de l'arête r contenant y sont à même distance de x.*
2. *les deux extrémités de r sont des sommets convexes non singuliers*

Cette proposition est illustrée sur la figure 6.16.

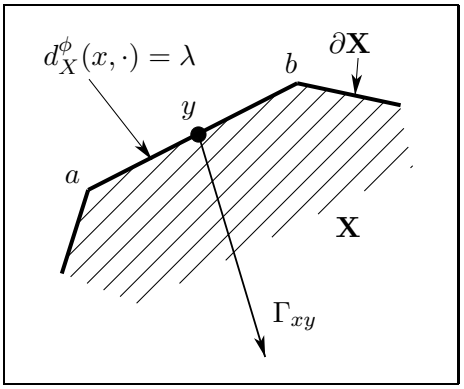


Figure 6.16 : Voisinage d'un point à distance maximale n'étant pas un sommet de $\mathbf{X}$.

Démonstration : V se décompose en deux demi-cercles : $V \cap \mathbf{X}$ est un demi-cercle fermé et $V \cap \mathbf{X}^c$ son complémentaire, un demi-cercle ouvert. Comme la boule B recouvre $\mathbf{X}$, d'après les configurations locales des boules géodésiques, $V \cap \partial\mathbf{X}$ est à la distance λ de x.

Considérons le côté $[a,b]$ de $\mathbf{X}$ contenant y. Supposons que tous ces points ne soient pas à distance λ de x. $[a,b] \cap \{z, d_X^\phi(x,z) = \lambda\}$ est un compact. Soit $[a',b']$ une de ses composantes connexes. Par hypothèse, $a' \neq a$ ou $b' \neq b$. Supposons $a' \neq a$. Comme $d_X^\phi(x,a') = \lambda$, on peut reprendre la démonstration locale en remplaçant y par a'. Il existe alors un voisinage de a' dans $[a,b]$ étant à la distance λ de x. Ceci contredit la supposition $[a',b']$ est une composante connexe de $[a,b] \cap \{z, d_X^\phi(x,z) = \lambda\}$. Donc tout point de $[a,b]$ est à distance λ de x.

En particulier les sommets a et b réalisent le maximum de la distance à x. Ils ne peuvent donc pas être concaves, ni singuliers ■

On peut encore être un peu plus précis sur la structure locale de l'arête $[a,b]$. En effet, l'arête $[a,b]$ ayant tous ses points à distance λ de x doit avoir la direction d'un des côtés de K. Supposons que ce soit $s_i = [k_{i-1}, k_i]$. Nous supposerons que $\mathbf{X}$ est à gauche de $\overrightarrow{ab}$, ce qui est possible en intervertissant les rôles de a et b. Nous supposerons enfin que K est aussi à gauche de $\overrightarrow{k_{i-1}k_i}$, ce qui est possible puisque K est symétrique par rapport à l'origine et que l'on peut choisir le côté s_j symétrique de s_i si ce dernier ne convient pas. La géodésique Γ_{xa} est une ligne polygonale $(a_i)_{i=0}^p$ avec $a_0 = a$ et $a_p = x$. Notons $\vec{s}_a = \overrightarrow{a_0 a_1}$. Nous définirons $\vec{s}_b$ de manière analogue. Toujours en vertu de la structure locale des boules géodésiques, $\vec{s}_a$ et $\vec{s}_b$ ont leur angle compris entre α_i et α_{i-1}. Soit u le point le plus éloigné de x simultanément sur les deux géodésiques Γ_{xa} et Γ_{xb}. Le triangle géodésique (u,a,b) n'est pas dégénéré. On en déduit la proposition :

Proposition 6.45

Le triangle euclidien limité par la droite (a,b), la droite passant par a de direction α_i et celle passant par b de direction α_{i-1} est inclus dans le triangle géodésique (u,a,b) qui est lui-même inclus dans $\mathbf{X}$ (voir figure 6.17).

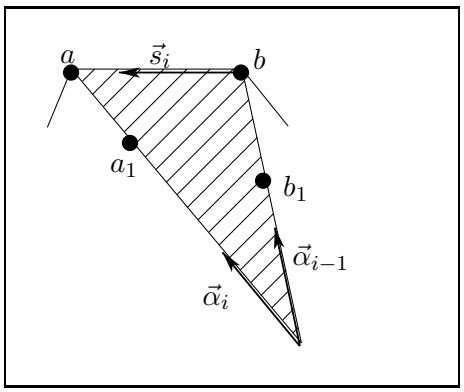


Figure 6.17 : Voisinage d'un point à distance maximale n'étant pas un sommet de $\mathbf{X}$ et son triangle euclidien associé.

Il nous reste maintenant à étudier le dernier cas où y est un sommet convexe de $\mathbf{X}$.

Lemme 6.46

S'il existe $z \in V \cap \mathbf{X}$ $(z \neq y)$ à distance λ de x, on peut trouver un point sur une arête de $\mathbf{X}$, n'étant pas un sommet à distance λ de x.

En d'autres termes, ce cas a déjà été pris en compte.

Démonstration : comme $z \neq y$, tout le rayon de V contenant y est à distance λ de x. Or si la boule géodésique B recouvre $\mathbf{X}$, d'après la structure locale des boules géodésiques, ce rayon ne peut être que sur la frontière de $\mathbf{X}$. Donc le point z est sur $\partial\mathbf{X}$ et vérifie donc le lemme ■

Proposition 6.47

Il suffit de ne garder dans Y que les sommets convexes de $\mathbf{X}$ tels qu'il existe une direction parallèle à l'un des côtés de K et telle que le diamètre de V de cette direction, privé de y, soit inclus dans $\mathbf{X}^c$.

La droite portée par le diamètre sera appelée *une droite d'appui stricte* (voir figure 6.18).

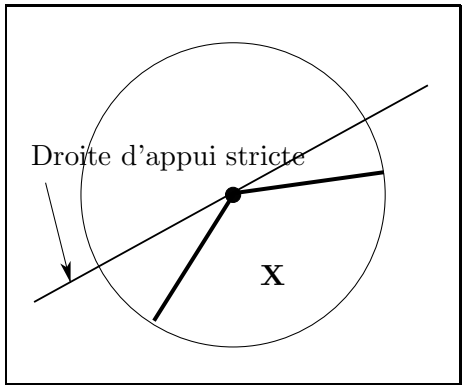


Figure 6.18 : Définition d'une droite d'appui.

Démonstration : soit α la direction du dernier segment de la géodésique Γ_{xy} en y. Soit alors i tel que $\alpha_i \leq \alpha < \alpha_{i+1}$. Le demi-disque limité par la direction de s_i et contenant Γ_{xy} contient tous les points à distance $\leq \lambda$, donc en particulier $V \cap \mathbf{X}$. D'après le lemme précédent, il ne peut exister de point à distance λ de x dans $V \cap \mathbf{X}$. Donc les rayons de direction s_i et $s_i + \pi$ ne sont pas dans le secteur correspondant à $\mathbf{X}$ (puisque la distance de chacun de leurs points à x est $\geq \lambda$) et par suite le diamètre de direction s_i coupe $V \cap \mathbf{X}$ en y uniquement ■

En résumé, il suffit que Y contienne les points suivants :

1. Les points terminaux
2. Un point des arêtes ayant à leurs extrémité deux sommets convexes non singuliers
3. Les sommets possédant une droite d'appui stricte de direction l'un des côtés de K.

6.6 Plongement d'un ensemble digital dans $\mathbb{R}^2$

La notion de géodésique euclidienne n'a pas de sens sur la trame. Nous allons donc associer à tout ensemble $\mathbf{X}$ de la trame un ensemble de $\mathbb{R}^2$ que nous noterons $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ sur lequel nous pourrons appliquer les théorèmes précédents.

6.6.1 Cas de la distance hexagonale

Définition 6.48

On appellera plongement de $\mathbf{X}$ *et on le notera* $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ *l'union de :*

- *tous les triangles élémentaires* (x_1, x_2, x_3) *fermés tels que* $x_i \in \mathbf{X}$ *pour* $1 \leq i \leq 3$
- *tous les segments fermés* (x_1, x_2) *pour* $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ *voisins*
- *de* $\mathbf{X}$

Notations :

- d^6 distance déduite de K, hexagone régulier.
- d^6_X distance géodésique associée à d^6 dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbf{X})$.

Proposition 6.49

Soient x *et* y *deux points de* $\mathbf{X}$*. Alors la distance géodésique (usuelle) sur la trame hexagonale de* x *à* y *est égale à* $d^6_X(x, y)$*.*

Démonstration : considérons la géodésique euclidienne Γ_{xy}. C'est une ligne polygonale dont les sommets sont des points de la trame. Or la longueur de chacun de ces segments est la même au sens de la trame (nombre minimal de segments des chemins sur la trame) qu'au sens de d^6 (géodésique de $\mathbb{R}^2$) ■

Proposition 6.50

Si $\mathbf{X}$ *est simplement connexe, alors* $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ *est aussi simplement connexe dans* $\mathbb{R}^2$ *et son diamètre géodésique est borné.*

Démonstration : Commençons par le diamètre géodésique. Soient $x, y \in \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Si x est un point de la grille, $x = x_1 \in \mathbf{X}$. Si x est sur une arête ouverte de la trame (x_1, x_2), alors $x_1, x_2 \in \mathbf{X}$. Si, enfin x est dans un triangle élémentaire ouvert (x_1, x_2, x_3), alors le triangle fermé tout entier est dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$. Donc dans tous les cas, le segment $[x, x_1] \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$ où x_1 est un point de la grille. De manière analogue, il est possible de trouver y_1 sur la grille tel que le segment $[y, y_1] \subset \mathcal{P}(\mathbf{X})$. Comme $\mathbf{X}$ est connexe, il existe dans $\mathbf{X}$ un chemin de x_1 à y_1. Par définition, la ligne polygonale

de sommets les points de ce chemin est incluse dans $\mathcal{P}(\mathbf{X})$. Sa longueur est finie, donc le diamètre géodésique de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est borné.

Remarquons que nous avons démontré la connexité par arcs de $\mathcal{P}(\mathbf{X})$. Un raisonnement analogue permet de montrer que $\mathcal{P}(\mathbf{X})^c$ est lui aussi connexe par arcs, ce qui achève la démonstration ■

Proposition 6.51

Sur $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ muni de la distance géodésique d_X il y a existence et unicité des géodésiques de x à y arbitraires.

Démonstration : $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ est simplement connexe, compact. d_X connexe par arcs puisque $\mathbf{X}$ est connexe par arcs et que son diamètre géodésique est borné. Alors [LM84] sur $\mathcal{P}(\mathbf{X})$ il y a existence et unicité des géodésiques ■

6.6.2 Cas de la distance dodécagonale

L'hexagone peut ne pas être une approximation suffisante du cercle. Pour cela, nous allons munir $\mathbb{R}^2$ de la distance ϕ déduite d'un dodécaèdre régulier, dont les côtés sont parallèles aux six directions de la trame et aux six directions conjuguées. Nous noterons cette distance d^{12}. Le principe est de régulariser le contour de $\mathbf{X}$ au moyen des directions du dodécagone, sans pour autant modifier la connexité du plongement. Pour cela nous utilisons le plongement de $\mathbf{X}$ au sens de la métrique hexagonale et nous y rajoutons les triangles correspondant aux angles concaves de $\frac{4\pi}{3}$ de la manière suivante. Si nous numérotons $(x_i)_{i=0}^5$ les voisins de x dans le sens trigonométrique, nous rajoutons le triangle (x_0, x_1, x_2) si et seulement si $x_0, x_1, x_2 \in \mathbf{X}$ et $x, x_3, x_5 \in \mathbf{X}^c$ (voir figure 6.19).

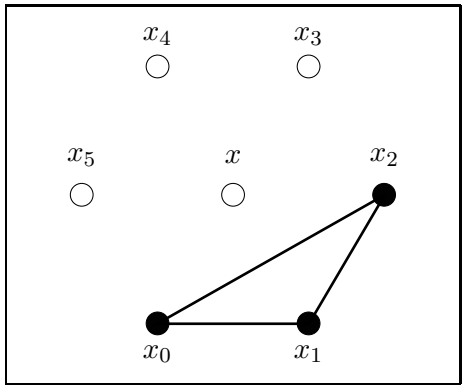


Figure 6.19 : Triangles rajoutés pour le plongement de $\mathbf{X}$ dans $(\mathbb{R}^2, d^{12})$.

Définition 6.52

On appelle plongement de $\mathbf{X}$ *dans* $(\mathbb{R}^2, d^{12})$ *l'union de :*

- *tous les triangles élémentaires fermés dont les trois sommets sont dans* $\mathbf{X}$*,*
- *tous les segments joignant des points voisins dans* $\mathbf{X}$*,*
- *tous les triangles* (x_1, x_2, x_3) *de points de* $\mathbf{X}$ *avec* x_1 *et* x_3 *voisins de* x_2*, ces trois points n'étant pas alignés.*

Un exemple est donné figure 6.20.

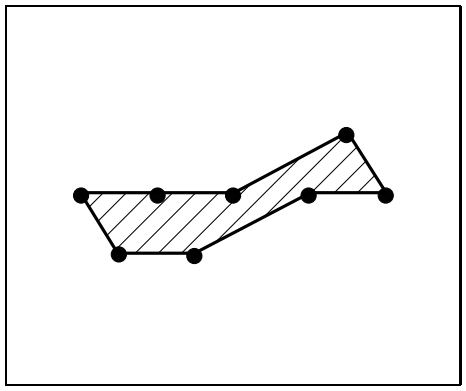


Figure 6.20 : Plongement de X dans $(\mathbb{R}^2, d^{12})$.

Nous avons montré comment effectuer des dilatations par des dodécagones. Malheureusement, on ne peut pas en déduire une distance sur la trame. La fonction qui à deux points x et y associe la plus petite taille de dilatation par des dodécagones telle que le dilaté de x contienne y n'est pas une distance ! Par contre, on peut montrer que c'est la partie entière de la distance dodécagonale sur le plongement de $\mathbf{X}$. La distance que nous introduisons sur la trame ne s'interprète donc pas simplement comme le nombre de segments d'un chemin sur la trame. En particulier, la distance entre deux points de la trame n'est pas toujours un entier !

Le plongement de $\mathbf{X}$ dans $(\mathbb{R}^2, d^{12})$ a sinon le même type de propriétés que pour la métrique hexagonale :

- Si $\mathbf{X}$ est simplement connexe, le plongé est simplement connexe et de diamètre géodésique borné

- Si $\mathbf{X}$ est simplement connexe, il y a existence et unicité des géodésiques (euclidiennes) entre deux points du plongé.

6.7 Algorithmes de calcul

L'algorithme est alors une conséquence immédiate du théorème sur les extrémités libres des géodésiques de longueur maximale. De façon générale :

$$T(x) \;=\; \sup\{d_X^{\phi}(x,y),\; y \in Y\}$$

6.7.1 Cas de la métrique hexagonale

Y est composé de deux types de points frontière :

1. la frontière de $\mathbf{X}$ au sens du suivi de contours fait un angle de 0 ou $\frac{\pi}{3}$, i.e. cas 2 ou cas 3 dans les systèmes de récritures pour la dilatation des lacets.

2. la frontière de $\mathbf{X}$ est un segment aux extrémités duquel $\partial\mathbf{X}$ présente deux angles de $\frac{2\pi}{3}$ du même côté de ce segment et le triangle équilatéral ayant pour base ce segment et de ce même côté est inclus dans $\mathbf{X}$.

Dans la pratique, on pourra laisser de côté la condition relative au triangle équilatéral qui est pénible à vérifier sur les images. Il ne reste donc plus qu'à calculer la fonction distance hexagonale à chaque point de Y et d'en prendre le sup.

Le nombre de points de Y est en général assez faible. On peut montrer que dans le cas de $\mathbf{X}$ faiblement convexe (entre deux points de $\mathbf{X}$ il existe une géodésique au sens de d_6 dans $\mathbb{R}^2$ qui soit incluse dans $\mathbf{X}$) Y a au plus six éléments. Le nombre d'éléments de Y dépend bien sûr de la forme de $\mathbf{X}$.

6.7.2 Cas de la métrique dodécagonale

L'algorithme est très proche du précédent. Nous entendrons ici frontière de $\mathbf{X}$ au sens de la frontière de plongement de $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance dodécagonale. Cette frontière se déduit du suivi de contour en remplaçant chaque succession de segments x_{i-1}, x_i, x_{i+1} présentant un angle concave de $\frac{4\pi}{3}$ par le segment $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ lorsque ni x_{i+1} ni x_{i-1} ne sont des sommets concaves pour le suivi de contours. Nous appellerons frontière de $\mathbf{X}$ cette nouvelle suite de segments. Les points de Y sont de deux types :

- la frontière de $\mathbf{X}$ fait un angle de 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{2\pi}{3}$.

- la frontière de $\mathbf{X}$ est un segment et aux extrémités duquel $\partial\mathbf{X}$ présente deux angles de $\frac{5\pi}{6}$ du même côté de ce segment et le triangle isocèle de base ce segment et d'angle au sommet opposé $\frac{\pi}{6}$ et du même côté de ce segment est inclus dans $\mathbf{X}$.

Ici encore, dans la pratique, on laissera de côté la condition relative au triangle. Les fonctions distance aux points de Y seront prises au sens des dilatations dodécagonales. Le résultat sera donc la partie entière de la fonction de propagation sur le plongement de $\mathbf{X}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la distance dodécagonale.

Le nombre de points de Y est plus grand que dans le cas hexagonal d'un facteur environ 2. Cependant, comme des distances importantes sont mises en jeu, il est toujours préférable de travailler en distance dodécagonale.

Le processus de calcul est illustré en distances hexagonale et dodécagonale sur la figure 6.21.

6.8 Et la simple connexité ?

Nous avons vu que la simple connexité jouait un rôle central dans toutes nos démonstrations. En effet, ce n'est que dans ce cas qu'il y a unicité des géodésiques et que les triangles géodésiques ont la forme que nous avons décrite. Que reste-t-il des théorèmes précédents si l'on supprime la simple connexité ? Malheureusement presque rien.

a – Extrémité libre d'une géodésique de longueur maximale L'extrémité libre d'une géodésique de longueur maximale n'est plus nécessairement un point frontière comme le montre la figure 6.22.

b – Les extrémités Nous verrons au chapitre "variations lamellaires" qu'une bonne définition de la notion d'extrémités d'un objet est donnée par les maxima régionaux de la fonction de propagation. La figure 6.23 donne l'exemple d'un objet non simplement connexe dont les extrémités sont loin d'être ce que l'intuition indique.

Nous n'avons pas trouvé d'exemple d'objet plan où les maxima régionaux de la fonction de propagation ne soient pas des points de la frontière. Nous conjecturons que dans le plan de tels objets n'existent pas. Par contre, sur la sphère, de tels objets existent, mais ceci est lié au plongement de la sphère dans l'espace $\mathbb{R}^3$.

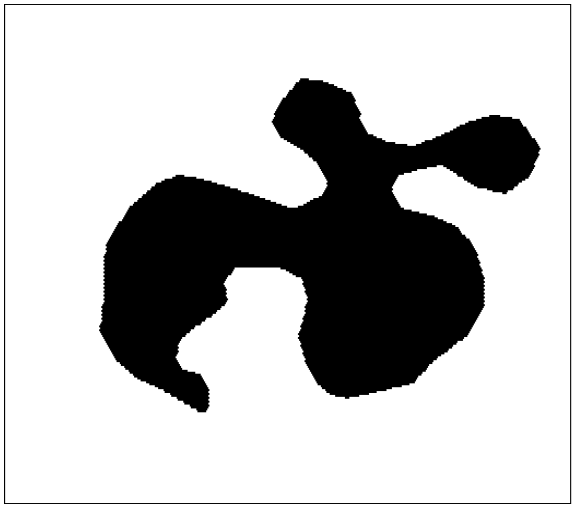
6.9 Quelques propriétés mathématiques

La fonction de propagation se comporte un peu comme une fonction distance : c'est la fonction distance au point le plus loin. Prenons-en l'opposé. On peut alors définir par les formules classiques la notion d'amont, d'aval et montrer qu'en tout point au voisinage duquel chaque point n'a qu'un seul aval, elle est dérivable. L'adhérence des points où elle n'est pas dérivable forme quelque chose d'analogue au squelette et nous l'appellerons *antisquelette*.

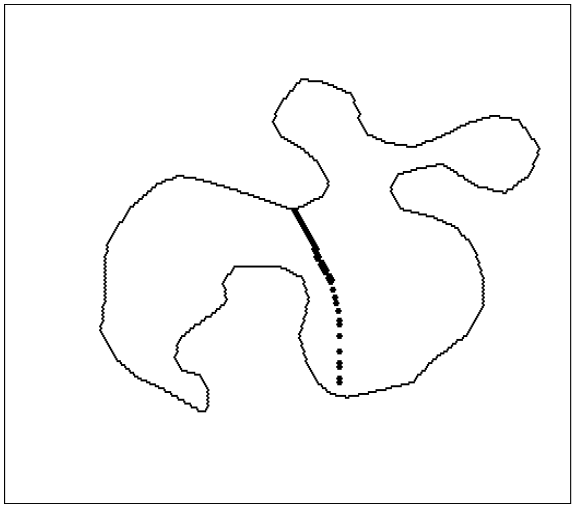
Dans le cas d'un convexe, on peut étendre la fonction de propagation à $\mathbb{R}^2$, puisque les géodésiques dans le convexe $\mathbf{X}$ sont les segments. Posons :

$$T_X(x) \;=\; \sup\{d(x,y),\; y \in \mathbf{X}\}$$

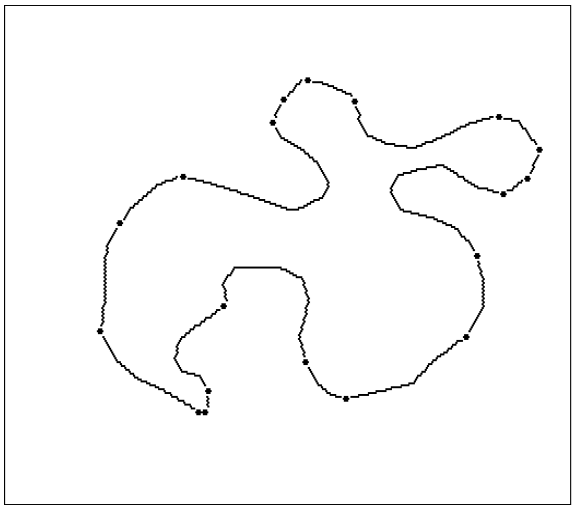
Cette fonction restreinte à $\mathbf{X}$ est la fonction de propagation. On peut montrer qu'elle caractérise $\mathbf{X}$. On peut aussi trouver un ensemble Z et une constante a tels que la fonction distance sur



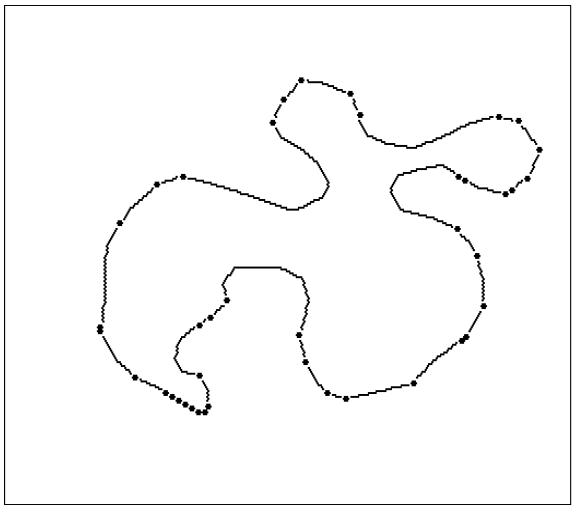
(1) : Forme simplement connexe



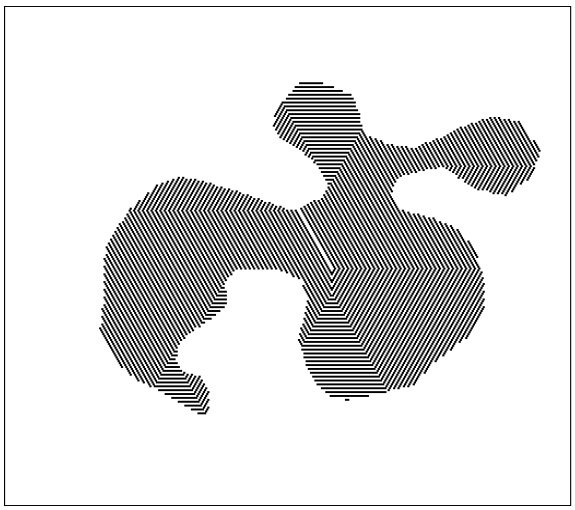
(2) : Anti-squelette



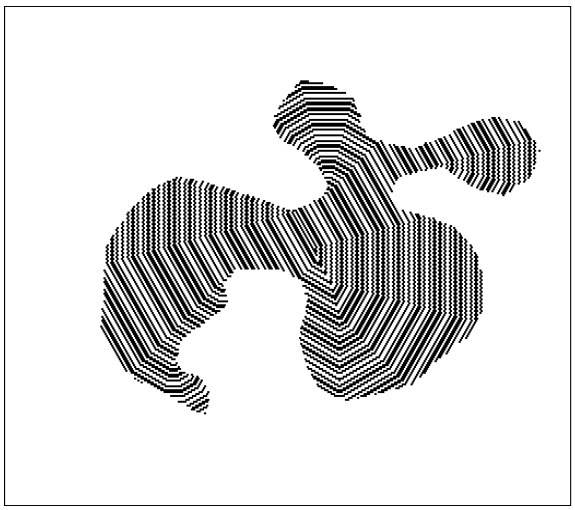
(3) : Y en distance hexagonale



(4) : Y en distance dodécagonale



(5) : T_X en distance hexagonale



(6) : T_X en distance dodécagonale

Figure 6.21 : La fonction de propagation.

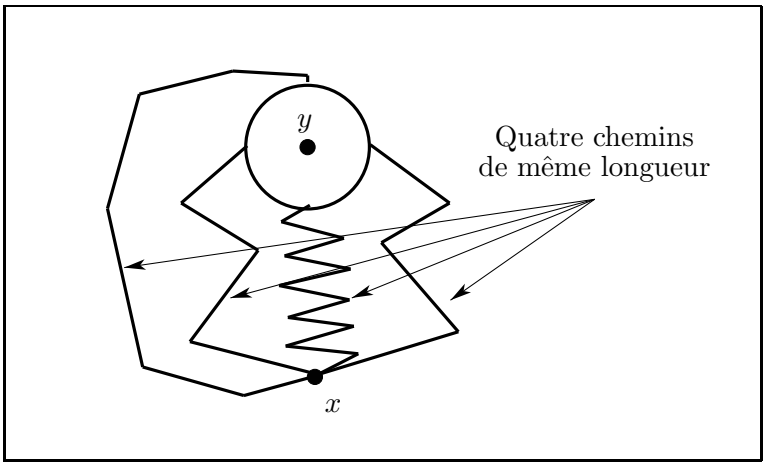


Figure 6.22 : Le point le plus loin de x n'est plus sur la frontière.

Z soit $a - T_X$. Cela montre que $-T_X$ a bien la structure d'une fonction distance et tous les résultats de mesurabilité [Mat78] et [Mat88a] s'étendent immédiatement.

Toujours dans le cas convexe, $\mathbf{X}$ est l'intersection des boules minimales qui le contiennent. L'adhérence des centres de ces boules est précisément l'antisquelette. L'analogie avec le squelette est claire : le squelette est le lieu des centres des boules maximales incluses dans $\mathbf{X}$.

Malheureusement, des exemples montrent que cet antisquelette n'est ni s.c.i ni s.c.s contrairement au squelette [Mat88a]. La raison en est simple : les topologies utilisées ne sont pas adéquates. Dire que la distance de Hausdorff entre deux ensembles est ε est équivalent à dire que les fonctions distance associées à ces deux ensembles sont différentes d'au plus ε en norme L_∞. Dans le cas de la fonction de propagation on ne peut rien dire. En effet, soit $F_n \to F$ une suite de compacts (même simplement connexes) convergeant au sens de Hausdorff. Il se peut que T_{F_n} n'aient pas de limite simple.

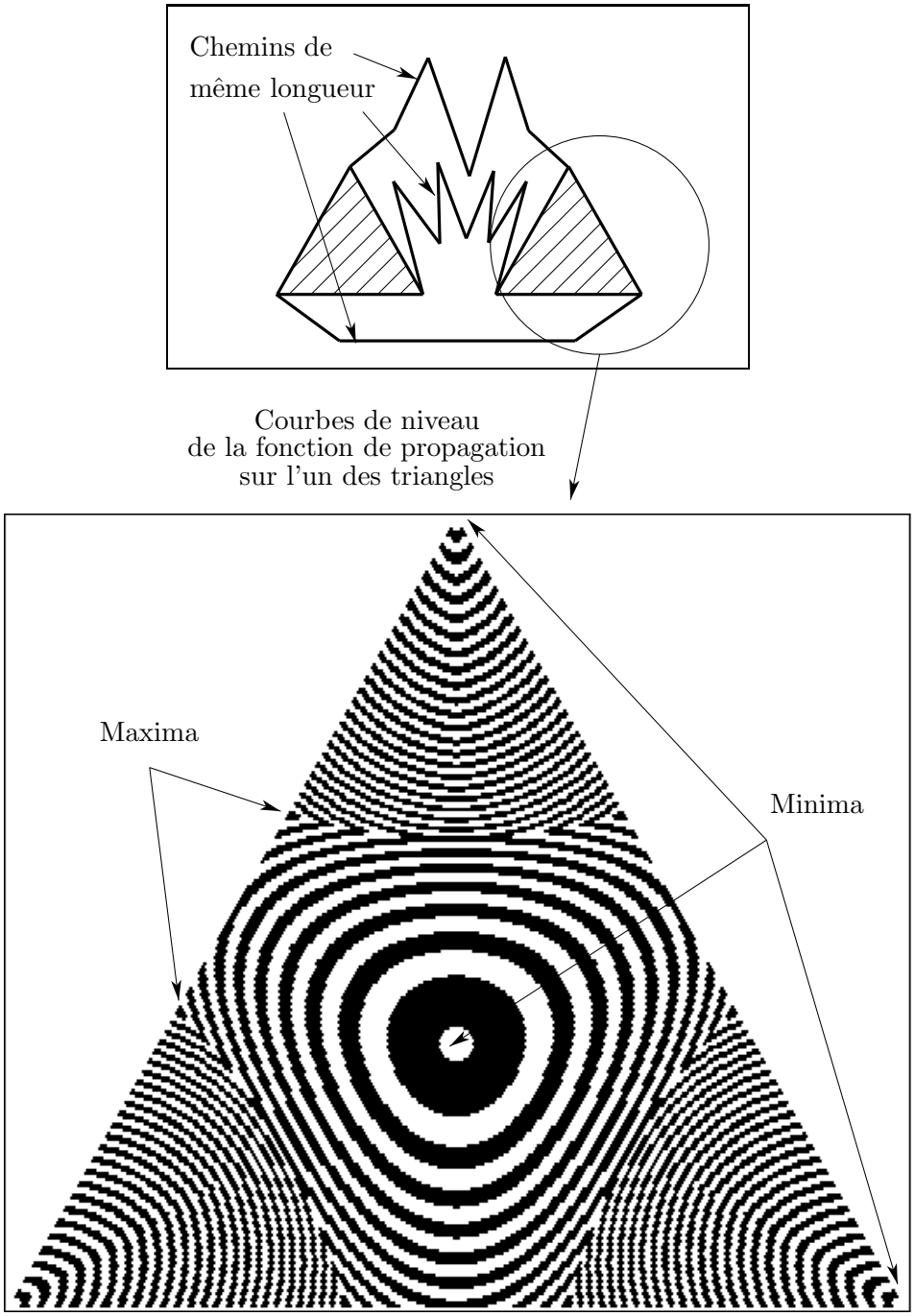


Figure 6.23 : Extrémités curieuses.

Partie IV

Variations lamellaires ou comment résoudre un problème d'analyse d'images

Chapitre 7

Variations lamellaires

7.1 Introduction

7.1.1 Segmentation et morphologie mathématique

La morphologie mathématique a montré ses qualités par de nombreuses applications en analyse d'images [Pr87]. Ces applications se divisent en deux grandes classes de problèmes :

1. la quantification, c'est-à-dire la transformation d'une image ou d'une forme en quelques nombres ou quelques courbes, comme par exemple la quantification de textures au moyen du schéma booléen, les granulométries ou la détermination d'indices de symétrie (voir par exemple [CC85]),

2. la segmentation, c'est-à-dire la réduction d'une image à une autre image plus simple où les détails superflus ont été éliminés.

Avant tout, précisons ce que recouvre le mot *segmentation* dans le contexte morphologique, car nous l'emploierons dans un sens particulier. Traditionnellement, ce terme désigne le processus de partitionnement d'une image en zones homogènes selon certains critères. Une présentation formelle de ces notions se trouve dans [Mon88]. Ces critères se veulent le plus indépendants possible de la scène à étudier. L'idéal serait une méthode qui s'applique de manière quasi universelle, en adaptant un certain nombre de paramètres numériques. Les critères généralement utilisés ne dépendent alors que des contrastes que présente l'image dans son ensemble, et sont souvent déterminés par les conditions d'éclairage ; les objets, leur disposition dans l'image ne jouent par contre aucun rôle. Par exemple, sur les images correspondant à ce qui se trouve sur un bureau, toujours éclairé de la même manière, la présence ou l'absence d'un téléphone, d'un cendrier ne modifie ni ces critères ni les paramètres associés.

En morphologie mathématique, il en va tout autrement : segmenter signifie isoler tel ou tel objet, telle ou telle caractéristique. Dans le cas de scènes de bureau, il s'agira par exemple de délimiter la zone de l'image correspondant précisément au téléphone, sur une coupe scanner, de délimiter les contours de la vertèbre.

Il en découle deux traits particuliers de l'approche morphologique en analyse d'images :

1. D'abord, le système doit avoir un certain nombre de *connaissances* lui permettant de reconnaître l'objet désiré et de le distinguer de son contexte. L'objet est donc décrit par

un *modèle* – dont nous discuterons les fondements dans la dernière partie de ce travail consacré à la programmation automatique – discriminant dans l'*univers* choisi, c'est à dire contenant suffisament d'éléments pour reconnaître l'objet dans l'ensemble des contextes dans lesquels il est autorisé à apparaître. Cet univers est habituellement défini au moment où l'on entreprend l'étude en question et donne les contraintes que l'on se fixe a priori. Le modèle au contraire est élaboré petit à petit au moyen des caractéristiques que les transformations morphologiques sont aptes à mettre en évidence et il se concrétise par le programme de reconnaissance, suite ordonnée de transformations morphologiques.

2. Le programme obtenu n'aura pas une portée très générale car les caractéristiques mises en jeu sont spécifiques aux objets à reconnaître, contrairement par exemple au comportement d'extracteurs de contours ou de techniques type "split and merge" en segmentation.

7.1.2 Un problème d'analyse d'images : détection des lignes de défaut dans un eutectique lamellaire

Un des reproches que l'on fait souvent à la morphologie mathématique est de construire des programmes que seul un initié peut comprendre. De plus, une seule solution est en général présentée – *la* solution –, dont les critères mis en jeu sont rarement explicités et quand ils le sont, ils semblent bien arbitraires. Un néophyte se demandera souvent "pourquoi diable a-t-il fallu en passer par là ?"

Notre but dans cette partie n'est pas de donner une solution à un certain nombre de problèmes réels, bien que concrètement nous en proposerons. Nous voudrions plutôt montrer comment on en arrive à une solution, démonter cette solution pour en examiner les composants, c'est-à-dire exposer la démarche inverse (résolument non bourbakiste) qui vise à explorer un certain nombre de pistes et à choisir entre elles. Pour employer une analogie en mathématiques : la manière de démontrer un théorème nous importe autant que la démonstration elle-même. Pour cela, nous avons besoin d'un problème suffisamment riche, et nous avons choisi pour cela les *eutectiques lamellaires*, célèbre pour l'élégante solution que lui avait donné Ch. Lantuéjoul en 1978 [Lan78]. Depuis près de 10 ans, c'est *la* solution des eutectiques lamellaires, qui semble un des acquis immuables de la morphologie mathématique. Or quand nous avons repris le problème, nous nous sommes aperçus que beaucoup d'autres solutions existaient et donnaient des résultats similaires. Ce dogme de *la solution* s'écroulerait-il ?

Rappelons brièvement la question : il s'agit, sur des images d'eutectiques lamellaires prises au microscope de mettre en évidence les lignes de défaut en vue de leur quantification (figure 7.1). Les images se présentent comme un ensemble de lames parallèles de deux types, régulièrement espacées. Les lignes de défaut, grossièrement orthogonales aux lames, sont les zones où cette régularité est rompue. Les lignes de défaut peuvent se diviser en deux classes :

1. Les lignes de *fracture*, où les lames sont effectivement brisées.
2. Les lignes de *flexion*, où les lames présentent un décallage latéral de leur axe (voir figure 7.2).

Dans l'étude citée, seules les premières ont fait l'objet d'un algorithme. Nous montrerons ici comment les deux types de lignes peuvent être détectés.

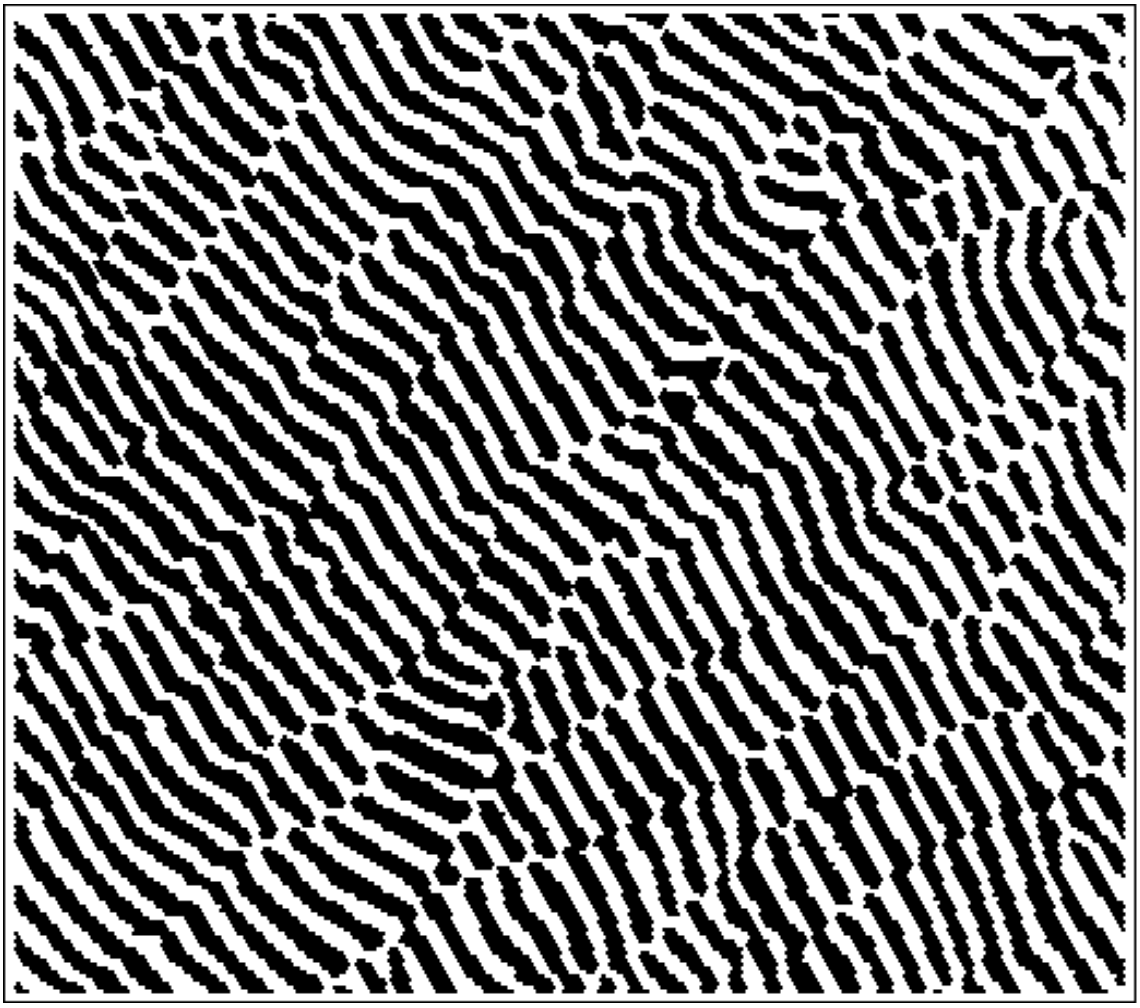
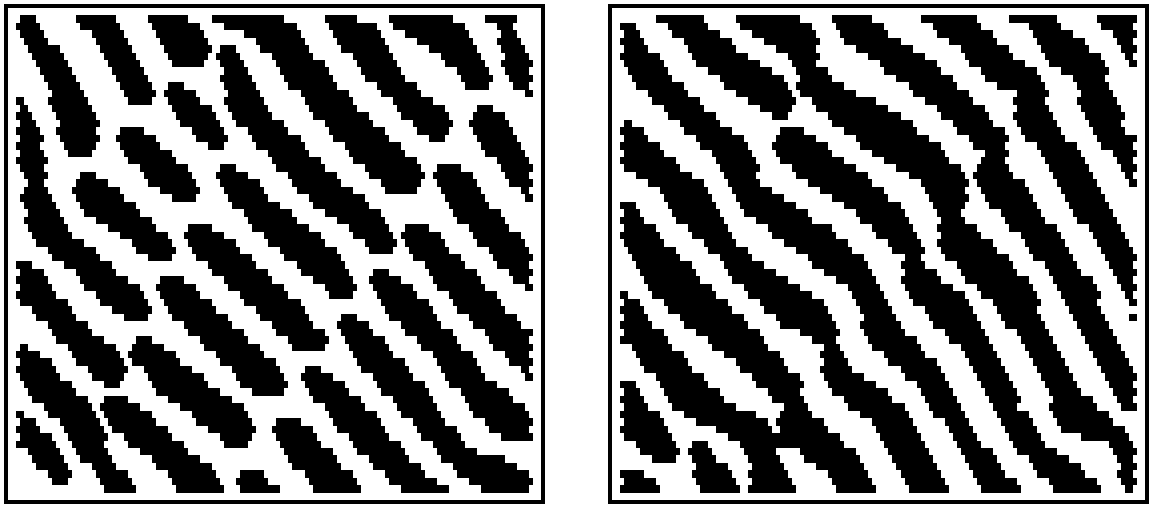


Figure 7.1 : Image d'eutectiques lamellaires.



lignes de fracture ligne de flexure

Figure 7.2 : Les deux types de ligne.

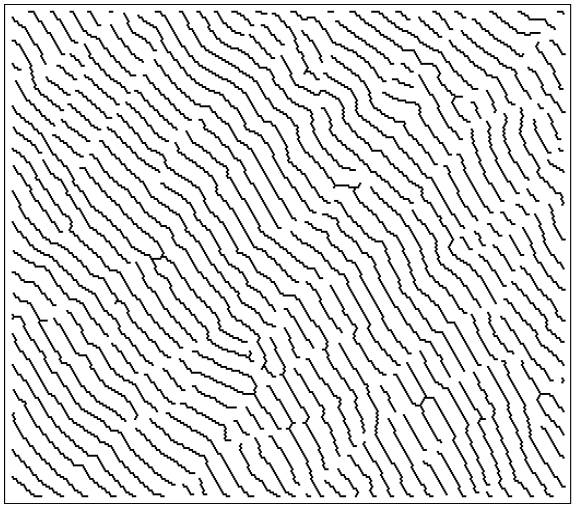
L'algorithme original est le suivant :

Algorithme original (Algorithme 1)

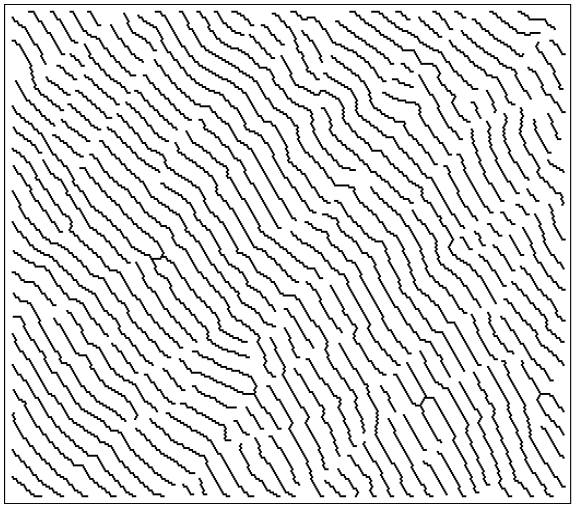
I : image originale
Z : image des zones de fracture
R : image des lignes de fracture

- $S \longleftarrow$ *Squelette* (I) (1)
- $E \longleftarrow$ *Ebarb* $(S, 3)$ (2)
- $T \longleftarrow$ *Terminal* (E) (3)
- $Z \longleftarrow$ *Plateau* (*Zones d'influence* $(T \cup S), T)$ (5)
- $R \longleftarrow$ *Squelette* (Z) (6)

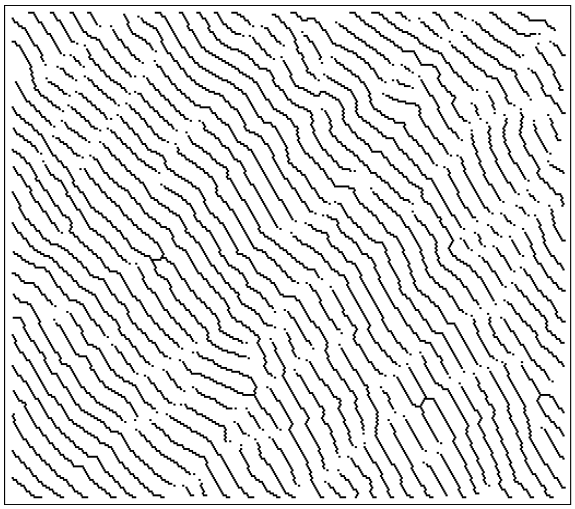
Les chiffres correspondent aux images de la figure 7.3. Les transformations utilisées sont définies au paragraphe 7.10. Ce programme illustre bien cet aspect peu explicite des programmes morphologiques. Pourquoi un squelette par zones d'influence, par exemple ?



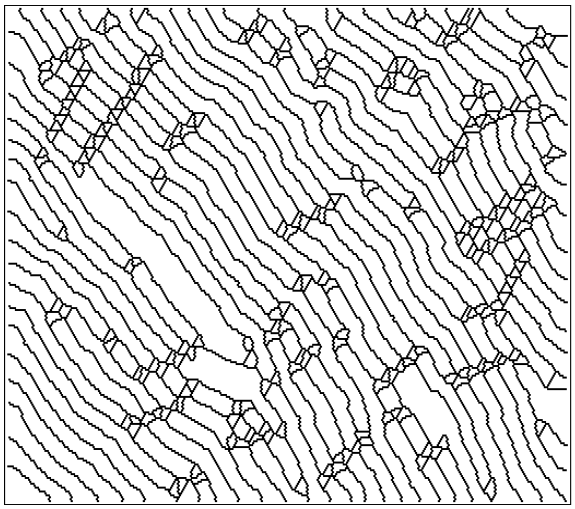
(1) : Squelette



(2) : Squelette ébarbulé



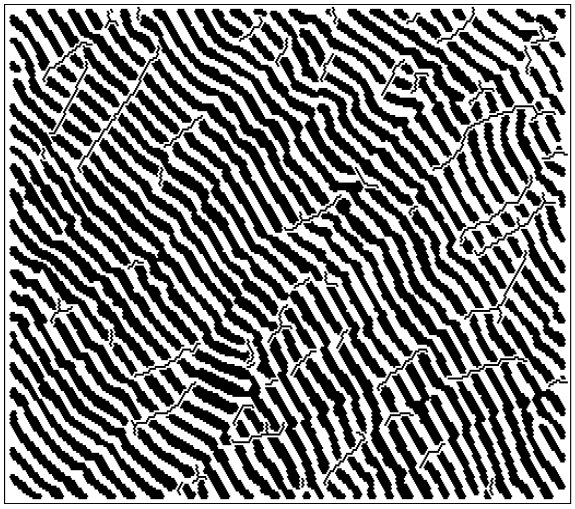
(3) : Squelette et points terminaux



(4) : Squelette par zones d'influence de (3)



(5) : Zones d'influence des extrémités



(6) : Résultat

Figure 7.3 : La solution originale (d'après Ch. Lantuéjoul).

7.1.3 Comment apprécier la qualité d'un programme ?

Il convient avant tout de bien distinguer les propriétés mathématiques que l'on manipule de leur traduction algorithmique qui parfois n'en fournissent qu'une approximation. C'est ce qui se passe par exemple avec la notion de squelette que l'on peut définir aussi bien dans $\mathbb{R}^n$ que sur une trame et dont il existe de nombreux algorithmes de calcul : amincissements homotopiques, remontée vers l'amont ou résidu par ouverture de la fonction distance. Dans notre esprit algorithme est synonyme de "recette de cuisine", c'est-à-dire une suite de commandes permettant d'aboutir à un résultat. Dans certains cas, nous n'avons pas réussi à expliciter les propriétés sous-jacentes à un algorithme : c'est alors l'algorithme lui même qui servira de définition. Pour ne pas avoir à envisager ce cas dans l'introduction, nous ne parlerons que d'algorithmes. Par contre, quand nous analyserons les diverses solutions, nous chercherons dans la mesure du possible à distinguer les algorithmes des propriétés mathématiques.

Comme nous nous proposons de décrire plusieurs algorithmes, qui pour la plupart donneront à l'oeil des résultats acceptables. Il n'en reste pas moins nécessaire de juger plus finement de leurs qualités et de leurs défauts respectifs. En un mot, il faut les comparer. C'est l'un des problèmes clef de toute étude en analyse d'images, problème encore largement ouvert dont nous esquisserons ici quelques pistes seulement.

Lorsqu'une solution de référence existe, il est possible de comparer les algorithmes en mesurant l'écart entre leurs résultats et la référence. En fait, la mesure en question dépend de ce que l'on désire faire du résultat : dans le cas des eutectiques lamellaires par exemple, le résultat du programme est une image sur laquelle sont tracées les lignes de défaut. Supposons que l'on cherche à évaluer la longueur moyenne des lignes de défaut et que l'on dispose d'un dessin des lignes idéales (si tant est qu'il puisse exister et faire l'unanimité entre toutes les personnes !) on pourrait évaluer l'écart par la distance de Hausdorff entre le résultat du programme et le dessin idéal. Malheureusement, une telle mesure est inadéquate. En effet, la connexité des lignes obtenues modifie considérablement la moyenne et donc un algorithme qui respectera bien les lignes longues sera meilleur que celui fournissant une suite de pixels non connexes, bien que les distances de Hausdorff à la référence soient du même ordre (figure 7.4). La référence était déjà souvent arbitraire, la mesure de l'écart l'est tout autant... Cependant, une fois la référence et la mesure fixée, cette technique a l'avantage de faire force de loi et de donner un critère objectif. Il ne reste plus qu'à choisir un échantillon représentatif du problème pour classer les divers algorithmes.

Le défaut majeur de cette approche est de considérer les algorithmes comme des boîtes noires. Rien ne permet de savoir comment les améliorer, ni dans quelles conditions ils cesseront de fournir des résultats acceptables. En effet, l'échantillon, certes représentatif, ne passe pas en revue tous les cas possibles, mais seulement un certain nombre.

En ce qui concerne notre problème, qu'est-ce qu'une ligne de défaut ? Nous en avons donné une idée intuitive. Lorsque l'on se met à vouloir dessiner à la main les lignes de défaut, on se rend compte que ce n'est pas aussi facile que l'on croit. La main hésite : telle ligne doit-elle être poursuivie et connectée à telle autre ? Même dans le cas des lignes de fracture des ambiguïtés apparaissent. Il faut nous rendre à l'évidence, la solution de référence n'existe pas.

Notre problème ressemble étrangement aux questions soulevées par la mise au point d'extracteurs de contours. Si l'on cherche à les tracer à la main sur une image donnée, nous

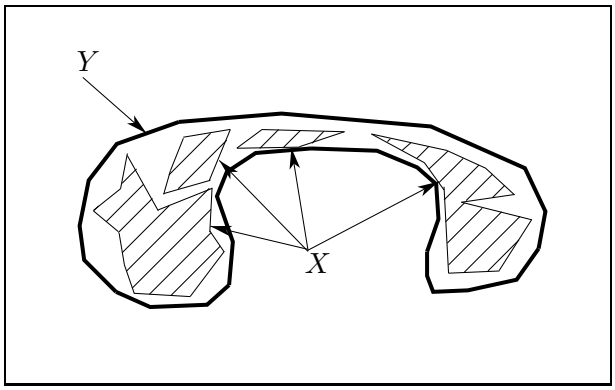


Figure 7.4 : Deux ensembles de connexités très différentes peuvent être proches au sens de Hausdorff.

sommes soumis aux mêmes hésitations. Pourtant dans le cas des contours, nous avons mieux qu'une idée intuitive des contours d'un objet, car nous pouvons les définir comme suit :

Soient (x, y) les coordonnées d'un point de l'image dans un repère lié à l'image, i.e. le plan focal de la caméra. Soit O son centre optique et $z = f(x, y)$ la fonction qui à tout point M de coordonnées (x, y) associe la distance au plus proche objet de la scène sur la droite (OM). Les contours d'occultation des objets sont les discontinuités de f ; les arêtes des objets les discontinuités de la différentielle $D_f(x, y)$. Malheureusement, on n'a pas accès à f – sauf dans des cas très particuliers –, mais seulement au niveau de gris du pixel (x, y). On peut cependant remarquer que, en général, de part et d'autre d'un contour d'occultation la luminance est différente, puisqu'il s'agit de deux objets différents, que le long d'une arête il en est de même puisque les faces de l'objet ont des orientations différentes. Cette correspondance généralement vérifiée suggère de chercher les contours au moyen des contrastes dans l'image. Comment définir un contraste ? A ce niveau, il faut quitter la réalité et passer au niveau des définitions mathématiques et des modèles : c'est le seul moyen d'être cohérent. Canny [Can83] propose la solution suivante.

> Plaçons-nous dans $\mathbb{R}$ et définissons un contour par une fonction de Heavyside additionnée à un bruit gaussien. Parmi tous les noyaux de convolution dans $L_2(\mathbb{R})$ cherchons celui qui donne les meilleurs résultats selon les trois critères suivants :
>
> 1. Bonne détection : maximiser la probabilité de détecter au moins un contour.
> 2. Bonne localisation : minimiser la distance du contour détecté au contour vrai $(x = 0)$.
> 3. Pas d'oscillations : minimiser la probabilité de trouver plus d'un contour.

Le nombre de noyaux de convolution qui vérifient les propriétés précédentes ne dépend que d'un petit nombre de paramètres. Ces critères sont certes arbitraires, mais ils ont l'avantage de former une *définition* de la notion de contour, en accord avec l'idée intuitive que l'on en avait.

Une telle approche est séduisante, mais que pouvons nous en retenir ? Clairement elle ne peut s'appliquer qu'à la détection d'éléments relativement généraux. Il est impensable de chercher un modèle d'eutectique lamellaire : il serait trop complexe et trop spécifique. Par contre cette approche est adéquate pour juger des primitives de plus bas niveau, plus générales, comme celles déterminant par exemple des extrémités ou des centres.

La figure 7.5 présente plusieurs solutions. “A l’œil”, c’est-à-dire selon des critères subjectifs, elles sont équivalentes. Pour les juger la solution consiste à examiner comment ils sont construits, c’est-à-dire d’ouvrir la boîte noire pour mettre au jour les critères caractéristiques des images qui sont effectivement exploités. Certains sont à l’évidence plus sûrs que d’autres. Par exemple, un algorithme de détection des lignes de défaut peut utiliser le fait que ces lignes sont quasiment orthogonales aux lames. Ce critère semble raisonnable. Cependant, comment est déterminée cette direction ? localement, globalement ou donnée à l’avance ? Il est clair que la dernière solution ne peut s’appliquer que si un protocole assure que toutes les images seront présentées dans le même sens ou si un opérateur humain donne cette direction à la main. Il s’agit d’une restriction importante de l’univers de travail. De plus cette direction privilégiée varie sur une même image dans des proportions relativement importantes (environ 30 degrés). Donc un algorithme utilisant une estimation locale de la direction sera à préférer à celui mesurant globalement cette direction.

Cette analyse du contenu des algorithmes n’est rien d’autre que l’explicitation du modèle sous-jacent à la solution du problème de reconnaissance ; elle a en outre l’avantage de montrer où peuvent se situer les défaillances lors d’un mauvais comportement de l’algorithme. Ce modèle définit donc la taille de l’univers, c’est-à-dire les divers types d’images sur lesquelles l’algorithme s’applique. Le meilleur algorithme est celui possédant la classe la plus large possible. Malheureusement, il ne s’agit que d’un ordre partiel entre les divers algorithmes et le choix reste en fin de compte entre les mains de l’utilisateur.

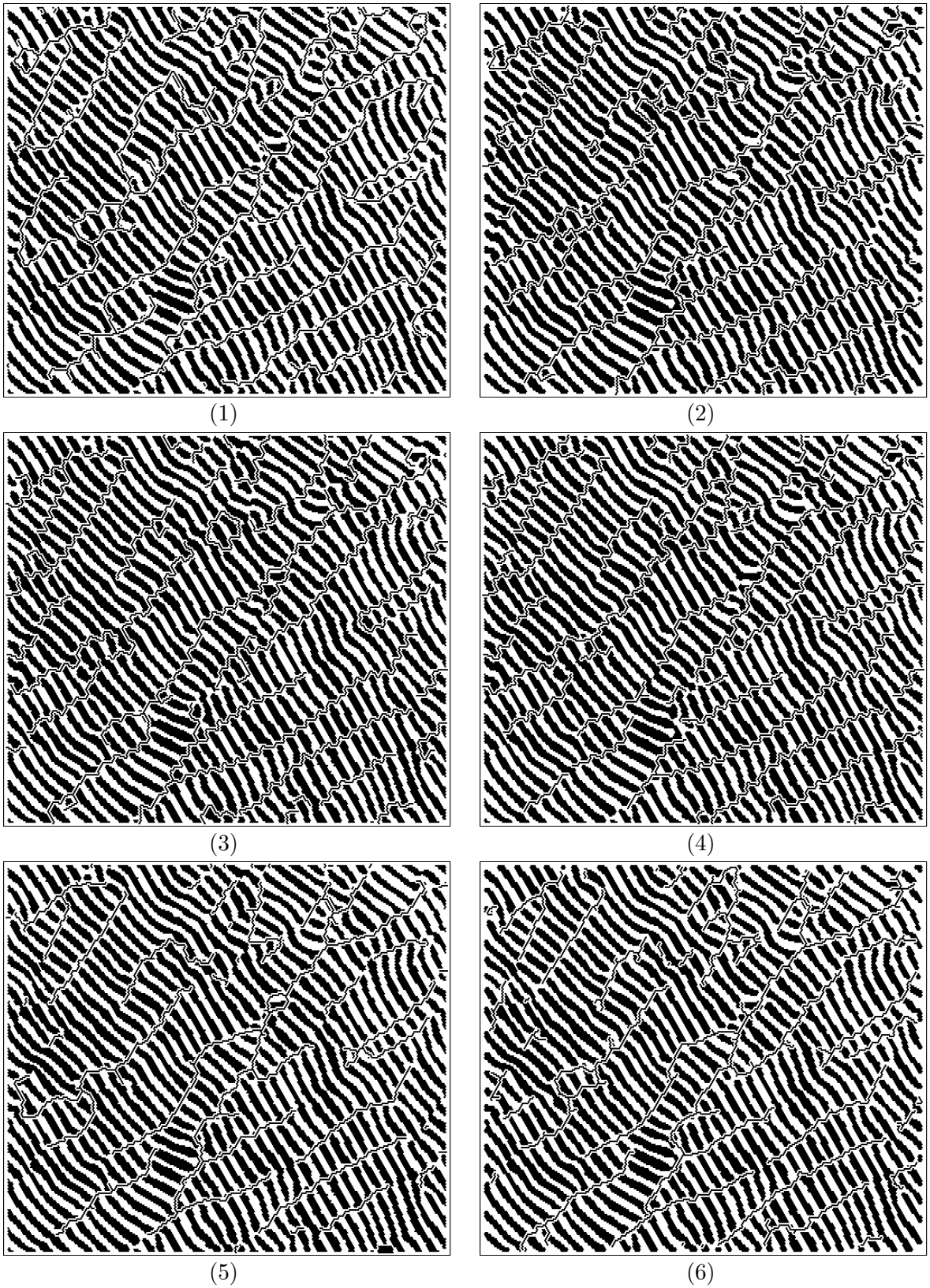
Nous ne nous intéresserons que relativement peu à la vitesse d’exécution du programme. Ce temps varie dans des proportions importantes selon la machine utilisée et selon les progrès effectués en algorithmique. La partie précédente montre par exemple que les transformations géodésiques se calculent en un temps analogue à celui requis pour les mêmes transformations non géodésiques ; il en est de même pour l’utilisation du squelette ou de la fonction de propagation. Dans ce contexte, sélectionnons et construisons si nécessaire des transformations de qualité, pour lesquelles nous chercherons des algorithmes efficaces.

Dans cette optique, nous allons présenter des “variations” sur le thème des eutectiques lamellaires, problème si simple dans sa formulation et si riche par les concepts mis en jeu par ses diverses solutions. Nous voudrions d’autre part prouver que, bien loin d’être arbitraire dans l’emploi des transformations, la morphologie mathématique sait *construire* des solutions distinctes selon des critères divers et porter un jugement sur leurs qualités morphologiques.

7.1.4 Quelques options

Dans ce chapitre, nous aurions pu éliminer dans une certaine mesure les algorithmes pour nous concentrer sur les propriétés mathématiques. Cette attitude ne nous paraît pas souhaitable. En effet, l’analyse d’image est indissociable de la manipulation même des images. C’est pourquoi nous montrerons toujours en plus des propriétés mathématiques comment implanter les transformations.

Souvent, lorsque l’on cherche à reproduire les résultats qu’annoncent certains articles, on est surpris de constater que “cela ne marche pas”. Certains petits prétraitements n’ont pas été signalés. Ici, tous les traitements seront explicités, de telle sorte qu’une personne disposant de la même image initiale que nous obtiendra rigoureusement les mêmes résultats. Nous espérons que cela poussera les détenteurs de logiciels tels que Visilog ou Morpholisp [Sch87] à reprogrammer



(1) (2)

(3) (4)

(5) (6)

Figure 7.5 : Diverses solutions.

les transformations proposées.

Enfin, les procédés de duplication ne permettent en général pas de reproduire de manière satisfaisante les images à teintes de gris. Or un texte traitant d'analyse d'images doit nécessairement en présenter. Nous nous sommes donc astreints à n'illustrer le texte qu'au moyen d'images binaires.

7.2 Etude de l'algorithme existant

De façon informelle l'algorithme proposé par Ch. Lantuéjoul revient à dire que les fractures sont des zones proches des extrémités des lames.

7.2.1 La notion d'extrémités

Qu'est-ce que des extrémités ?

Définition : extrémités

Les extrémités sont les points terminaux du squelette.

En d'autres termes, ce sont les centres des cercles osculateurs à la frontière de X, entièrement contenus dans X. Or ces cercles osculateurs sont tangents à la frontière en des maxima de la courbure. Ce critère est donc presque local, dans le sens où pour dire si un point est point terminal du squelette, il ne suffit pas de connaître un voisinage du point arbitrairement petit, mais un voisinage dont la taille est la distance de ce point à la frontière de la particule. Cependant, quand on observe l'algorithme, on remarque qu'une étape d'ébarbulage est nécessaire pour éliminer les "petites extrémités parasites". Dans toute cette partie, nous appellerons *barbule* tout arc du squelette considéré comme un graphe (ce qui est possible pour des objets assez réguliers) qui aboutit à un point terminal. Quelle est la taille de ces barbules ? Si nous approximons une lame par un rectangle, et si nous supposons que ce rectangle présente une irrégularité sur un de ses grands côtés, la barbule générée aura comme longueur la moitié de la largeur du rectangle. Cette demi-largeur est un paramètre robuste. En effet, toutes les lames ont à deux pixels près la même largeur, qui peut d'ailleurs faire l'objet d'une mesure directe sur l'image au moyen d'une granulométrie par exemple (dans le cas où toutes les images ne seraient pas à la même échelle). On élimine donc les barbules qui ont une longueur inférieure à la demi-largeur des lames (figure 7.6).

Supposons à présent que les lames soient bruitées au niveau de leurs extrémités. Le squelette présentera de nombreuses barbules à ce niveau, dont certaines seront éliminées par le critère de longueur. L'extrémité détectée sera alors à l'intérieur de la particule à une distance plus grande de la frontière. Les images dont nous disposons sont de très bonnes qualités, ce qui assure que les critères mis en jeu sont effectivement vérifiés, d'où le bon comportement de l'algorithme. Une autre solution consiste à effectuer une ouverture de taille 1. Il ne subsiste alors aucune barbule, sauf aux endroits des zones de forte flexure, ce qui dans notre cas représente plutôt un avantage qu'un inconvénient. (figure 7.7).

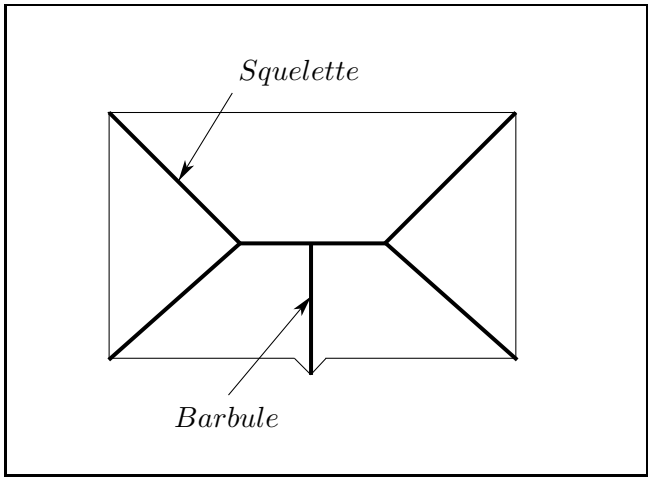


Figure 7.6 : Barbule générée par une irrégularité sur la frontière d'un rectangle.

Il faudrait bien se garder de croire que c'est la seule solution fondée sur l'emploi du squelette. En voici une qui ne fait pas intervenir la longueur des barbules. Comme les lames sont toutes relativement allongées, elles ont chacune deux extrémités, qui correspondent aux points les plus éloignés que l'on puisse trouver. En d'autres termes, il suffit de déterminer les points terminaux du chemin le plus long inclus dans le squelette, et sans points triples. Voici deux façons de calculer ces points :

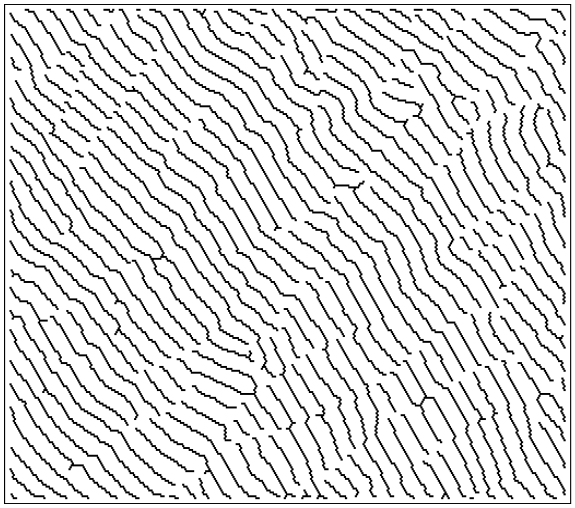
1. Partir d'un point terminal du squelette, chercher le point terminal p_1 le plus éloigné de ce premier, puis le point terminal p_2 le plus éloigné de p_1. p_1 et p_2 sont les deux extrémités souhaitées (figure 7.8).

2. Déterminer les maxima absolus de la fonction de propagation associée au squelette (voir la définition donnée dans la partie algorithmique).

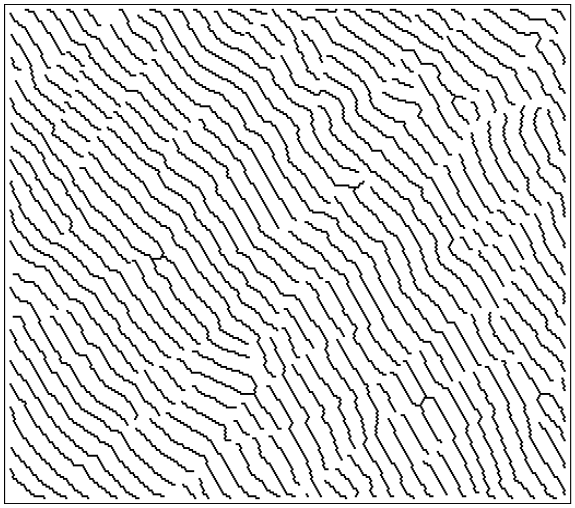
Cet algorithme ne fait plus intervenir aucun seuil, mais impose que toute particule a exactement deux extrémités, ce qui est acceptable pour la majorité des lames, mais inacceptable pour quatre lames présentes sur l'image (figure 7.9).

En conclusion, nous voyons que les deux algorithmes fonctionnent sur des classes d'images non comparables : les extrémités en tant qu'extrémités du squelette (ébarbulé) nécessitent des lames d'épaisseur constante et peu bruitées, les extrémités en tant qu'extrémités du chemin maximal nécessitent des lames relativement allongées mais pouvant présenter un bruit plus important.

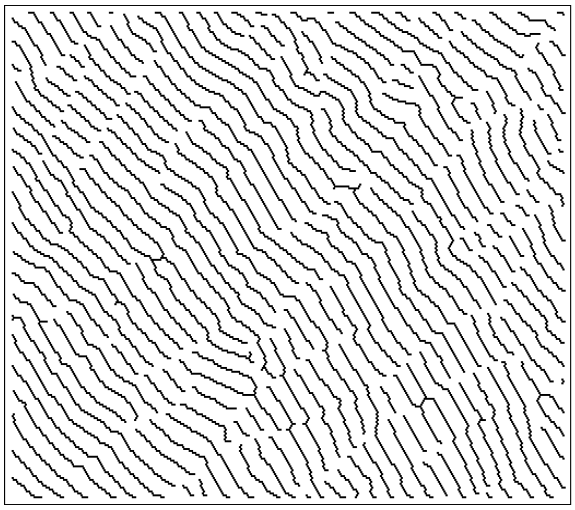
Maintenant, pourquoi avoir choisi de réduire les particules à leur squelette, opération instable (le squelette est une transformation semi-continue inférieure de l'ensemble des ouverts relativement compacts dans l'ensemble des compacts) ? C'est parce que la notion de point terminal n'a de sens que sur un squelette. Cependant, la fonction de propagation peut nous fournir une alternative. Posons :



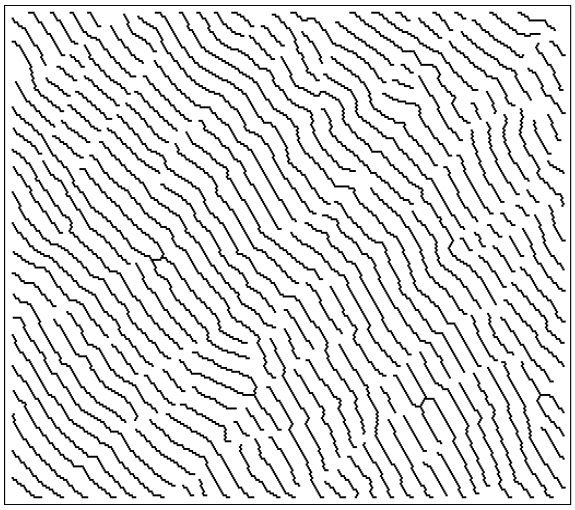
(1) : Squelette de l'image originale



(2) : Elimination des barbules des (1) de taille ≤ 3 pixels



(3) : Squelette de l'image ouverte par H



(4) : Elimination des barbules des (3) de taille ≤ 3 pixels

Figure 7.7 : Comparaison des barbules générées sur l'image originale et l'image ouverte.

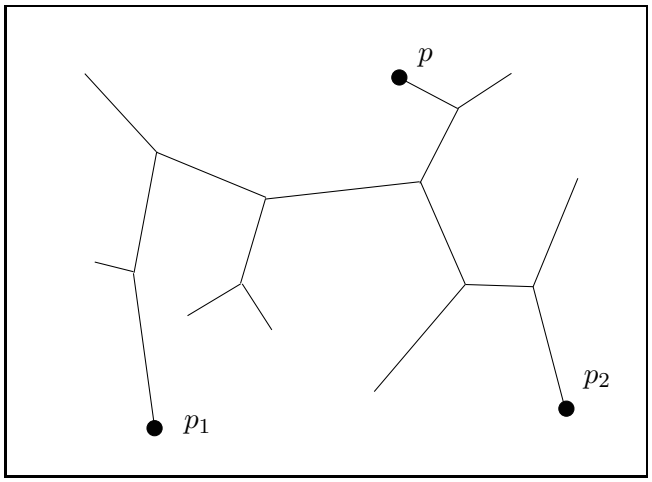


Figure 7.8 : Chemin maximal sur un squelette.

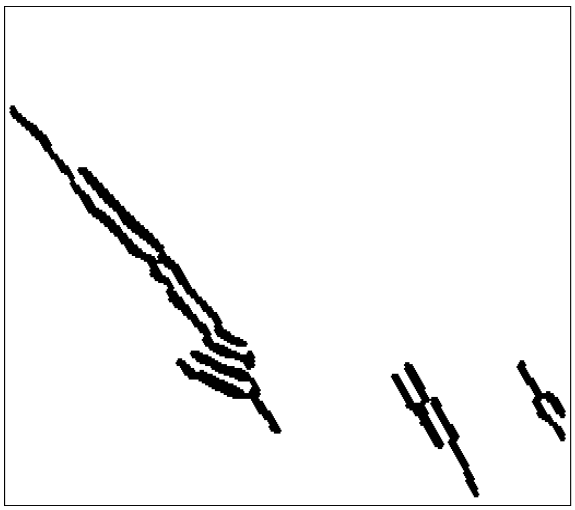


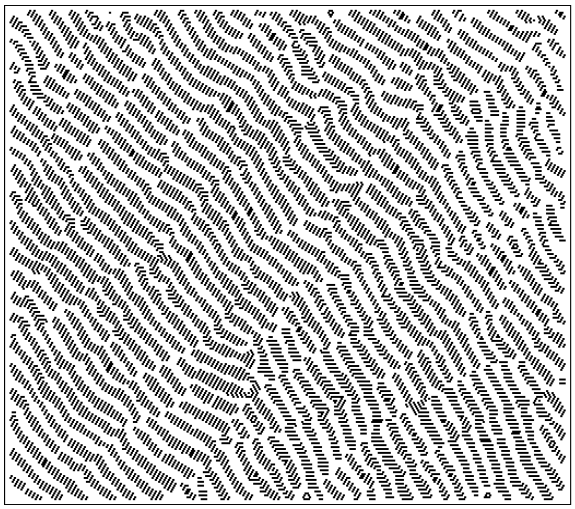
Figure 7.9 : Particules présentant à l'évidence plus de deux extrémités.

Définition : extrémités

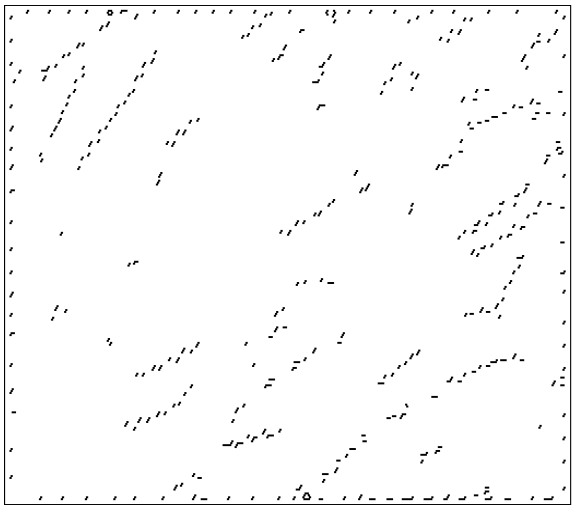
Les extrémités sont les maxima régionaux de la fonction de propagation, i.e. les maxima de

$$T_X(x) = \sup_{y \in X} d_X(x, y)$$

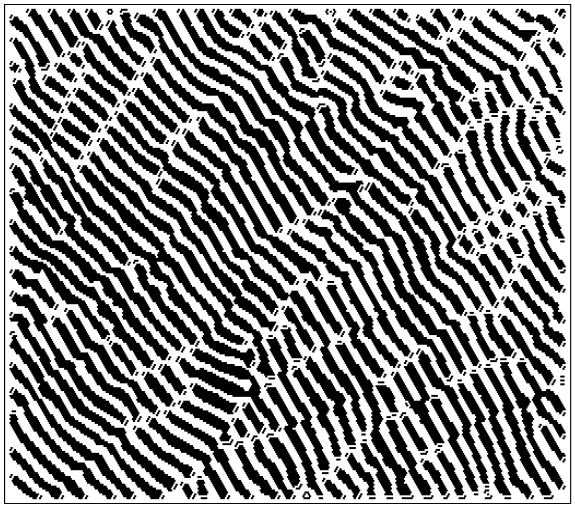
où d_X est la distance géodésique dans X ensemble des lames (figure 7.10).



(1) : Courbes de niveau de la fonction de propagation



(2) : Maxima régionaux de (1)



(3) : Lames et leurs extrémités

Figure 7.10 : Extrémités définies par les maxima régionaux de la fonction de propagation.

Grâce à la notion de maximum régional, une particule peut présenter plus de deux extrémités. Voici quelques propriétés étranges des extrémités obtenues par cet algorithme :

- Les extrémités ne sont pas nécessairement des maxima de courbure: ils peuvent même se localiser en des minima de courbure, comme le montre la figure 7.11.
- Dans le cas d'un triangle, ce sont uniquement ses angles aigus.
- Dans le cas de polygones à plus de trois côtés, ce sont des sommets qui peuvent même être obtus dans certains cas.
- Dans le cas d'un squelette, ce sont *tous* les points terminaux.
- La transformation qui à une particule associe ses extrémités n'est pas semi-continue ! (Ceci provient du fait que la distance de Hausdorff induit une topologie trop grossière : deux objets très proches peuvent avoir des diamètres géodésiques très différents.)
- Certains objets peuvent ne présenter qu'une seule extrémité qui est toute leur frontière, comme par exemple les ensembles de Reuleaux. De façon générale, il s'agit de convexes de variation diamétrale constante.

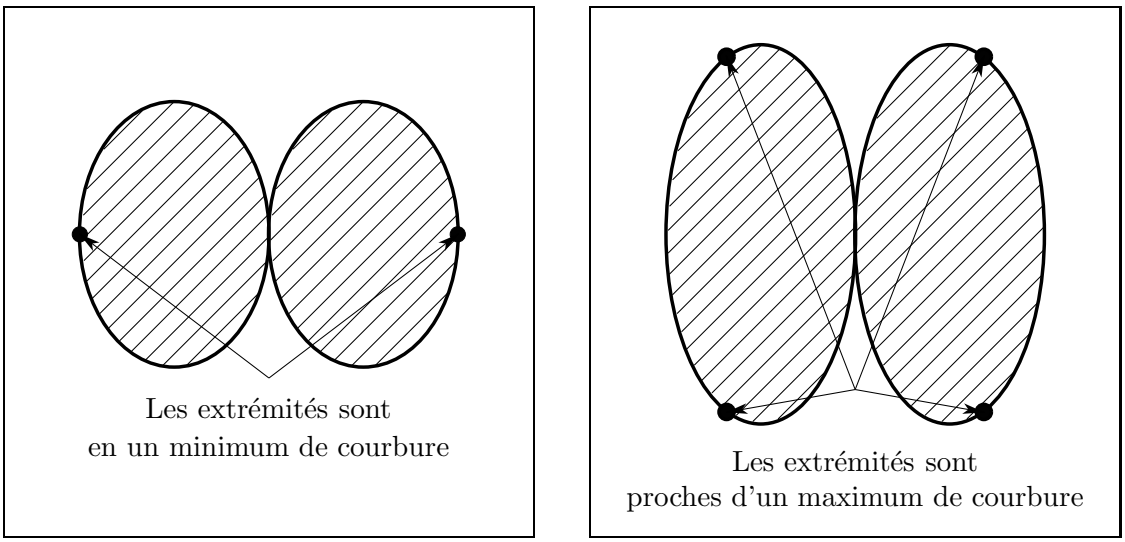


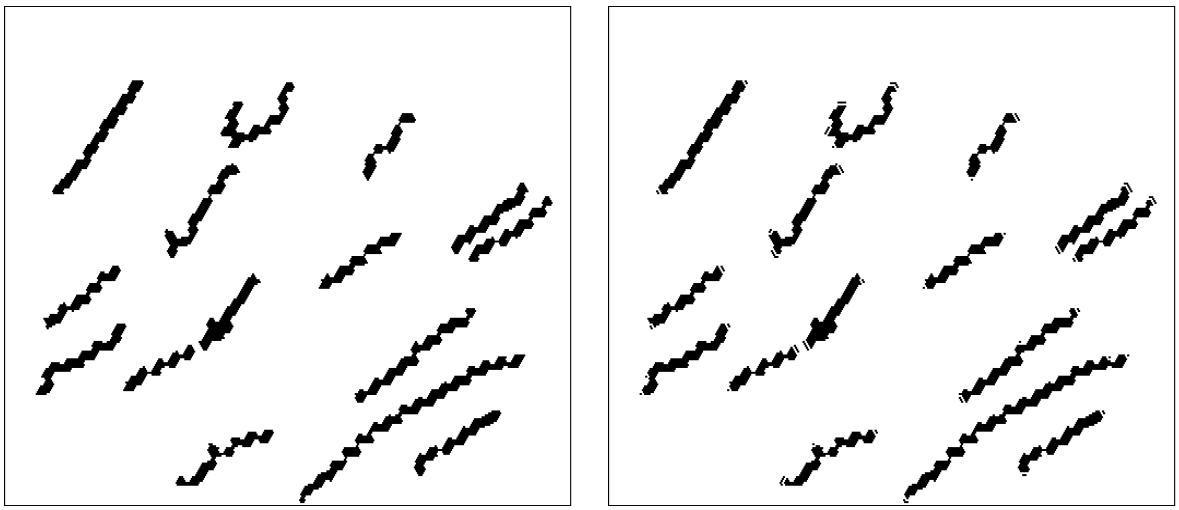
Figure 7.11 : Extrémités et maxima de courbure.

Quels sont les critères associés à cette transformation, i.e. quelle classe d'images peut-on lui associer ?

- Les particules doivent être simplement connexes, sinon, l'algorithme peut présenter des résultats contraires à l'intuition (voir partie algorithmique).
- La transformation est profondément globale, car il est impossible de connaître une extrémité si l'on ne connaît pas toute la particule.

- La robustesse face au bruit s'observe empiriquement, bien qu'aucun caractère mathématique ne lui soit associée, continuité par exemple (figure 7.12).

Ce sont ces deux derniers points qui en font une définition de bonne qualité, en général préférable aux extrémités du squelette.



(1) : Particules aux contours bruités

(2) : Extrémités obtenues par la fonction de propagation

Figure 7.12 : Robustesse de la détection d'extrémités.

7.2.2 Les zones de fracture

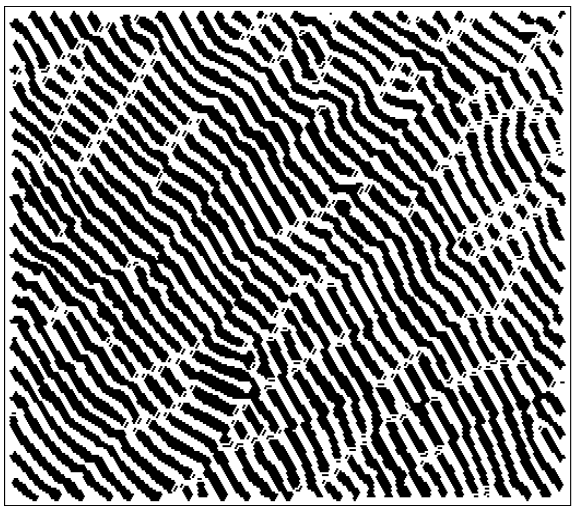
Revenons aux lignes de fracture ou plutôt aux zones de fracture. Le programme classique les définit formellement comme suit :

Définition : zones de fracture

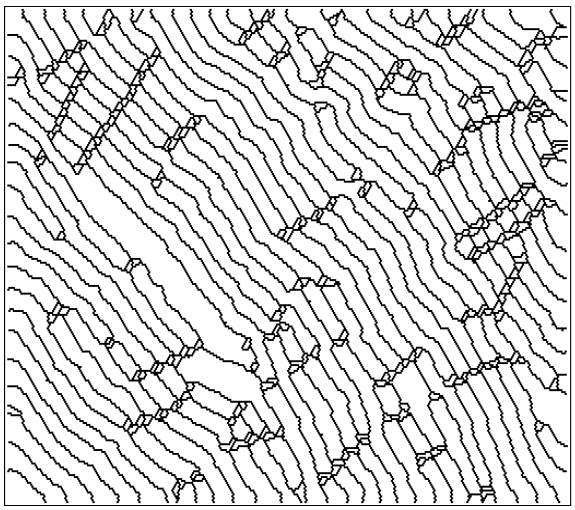
Les zones de fracture sont les zones d'influence des extrémités des objets.

Ce sont donc les points du plan qui sont plus proches d'une extrémité que de tout autre point du squelette. Cette définition semble parfaitement convenir, car elle peut s'appliquer à quasiment toute image, quelle que soit son échelle, son orientation, du moment que les extrémités ont été mises proprement en évidence (figure 7.13 où les extrémités ont été obtenues par la fonction de propagation).

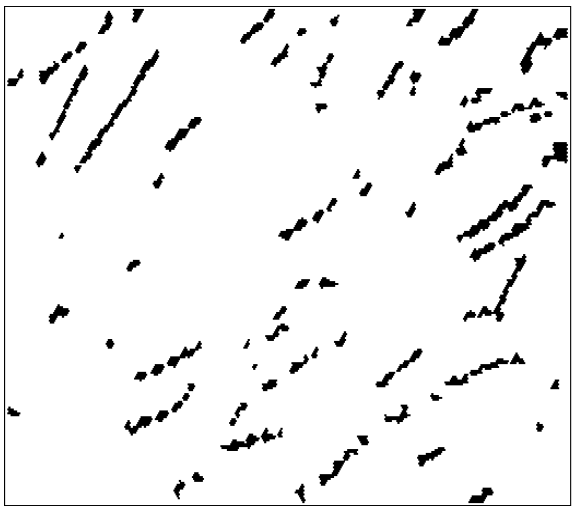
Pourtant, les résultats obtenus avec les extrémités déterminées par les points terminaux du squelette sont bien meilleurs que ceux obtenus avec les extrémités en tant que maxima régionaux de la fonction de propagation. En particulier les zones sont mieux connectées. Pour comprendre



(1) : Lames et leurs extrémités



(2) : Skiz de (1)



(3) : Zones d'influence des extrémités



(4) : Fermeture de taille 1 de (3)

Figure 7.13 : Détection des zones de fracture.

ce phénomène, supposons qu'une lame soit modélisée par un rectangle auquel on aurait adjoint un demi cercle à chaque largeur. Le squelette d'une lame sera alors modélisé par un segment. Les extrémités sont ses deux points terminaux. La zone d'influence d'un point terminal est alors le demi plan limité par la droite perpendiculaire au segment, passant par le point terminal et ne contenant pas le segment. Les maxima régionaux de la fonction de propagation sont dans notre modèle les deux points du cercle dans l'axe du rectangle. La zone d'influence de l'un de ces points est la demi droite issue de ce point et perpendiculaire à la frontière. Ceci explique pourquoi les extrémités ne se "propagent" pas sur le côté dans le deuxième cas. Dans le cas d'un polygone, cas plus réaliste pour un ensemble digital, la zone d'influence d'un sommet est le cône issu de ce point limité par les directions orthogonales aux côtés adjacents (voir figure 7.14).

Cette constatation surprenante montre l'étroite interdépendance entre les transformations morphologiques successives. Remarquons cependant que l'on peut se ramener au cas des particules réduites à leur squelette de la manière suivante : appelons X l'ensemble des lames et Y les maxima régionaux de la fonction de propagation. Il suffit d'amincir X conditionnellement à Y.

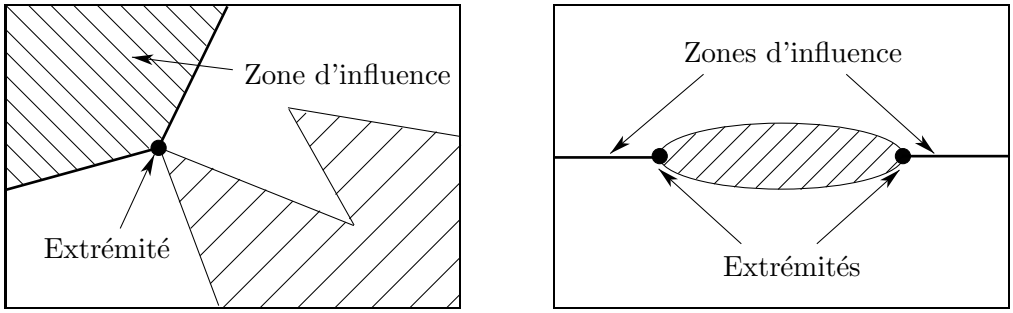


Figure 7.14 : Zones d'influence des extrémités sur quelques formes simples.

7.2.3 Passage des zones de fracture aux lignes de fracture

C'est probablement là que réside la partie la plus critiquable de l'algorithme. En effet, on cherche à transformer les zones de fracture en lignes au moyen du squelette. Or ces zones présentent des frontières anguleuses, puisque ce sont des unions de zones d'influence et qu'en un point où trois zones d'influence se rencontrent, au moins deux d'entre elles présentent une frontière anguleuse. Le squelette possédera donc de nombreuses barbules qui ne rendront pas compte de la direction des fractures. La justification d'une procédure d'ébarbulage peut être envisagée, mais nous pensons qu'il est préférable de s'arrêter aux zones mises en évidence au paragraphe précédent.

Cela termine l'étude de l'algorithme existant. Il faut cependant constater que les lignes de flexure n'ont pas encore été mises en évidence.

7.3 Algorithmes pour les lignes de défaut

Qu'est-ce qui caractérise une ligne de défaut ? Avant d'en donner une définition mathématique, disons qu'elles passent près des endroits où les lames présentent un décalage latéral de leur axe. Si nous parvenions à couper les lames à ce niveau, c'est-à-dire transformer la flexion en fracture, nous serions ramenés au problème classique. Comment déterminer les flexures ? Nous dirons que ce sont les endroits où la frontière des particules présente une forte courbure. Nous allons donc dans un premier temps déterminer ces points.

7.3.1 Recherche des points de forte courbure

Définir mathématiquement la courbure d'une courbe deux fois dérivable est simple. Malheureusement, dans le cas digital où toutes les courbes sont polygonales, le problème est délicat et n'a d'ailleurs pas encore trouvé de solution générale satisfaisante.

7.3.1.1 Les solutions morphologiques

Plaçons-nous d'abord dans le plan continu. Parmi les solutions morphologiques, citons l'ouverture par un disque, qui met en évidence les "irrégularités plus fines que le diamètre du disque". Cependant, la courbure doit être un critère purement local, alors qu'un point sera conservé par ouverture si et seulement si la frontière en ce point présente un rayon de courbure supérieur à celui du disque et si *l'élément structurant tangent à la frontière est totalement inclus dans l'objet*. La deuxième partie de cette condition montre que les zones de faible épaisseur des objets, bien que présentant une courbure faible seront éliminées au même titre que les zones de forte courbure (figure 7.15).

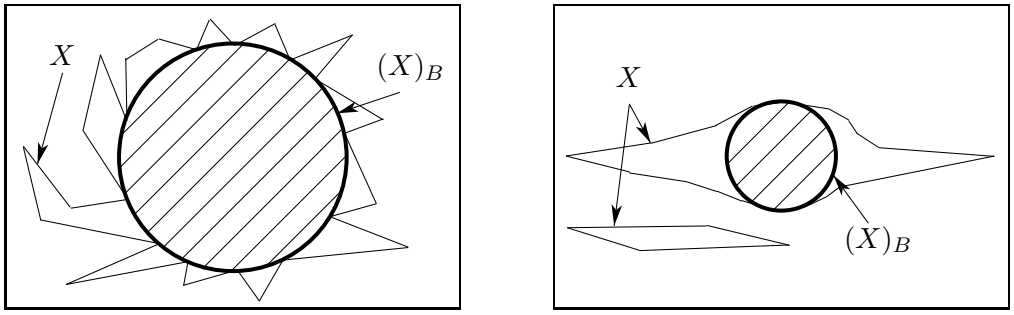


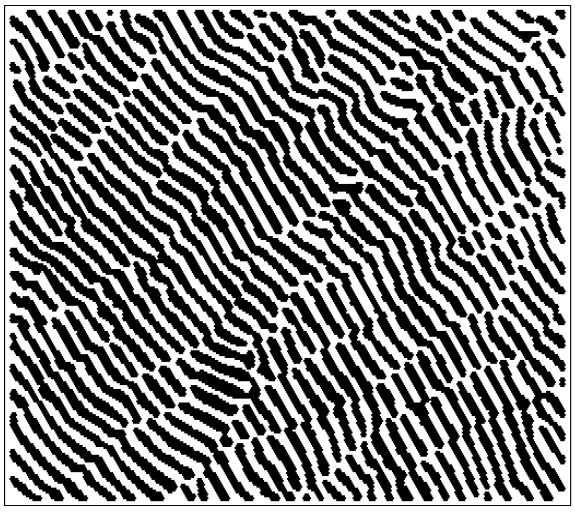
Figure 7.15 : Les deux effets de l'ouverture par un disque.

Dans notre cas, seule une ouverture de très petite taille peut être envisagée, car les lames ont une largeur de 5 à 7 pixels. Donc au delà de la taille 2, le caractère non local de l'ouverture sera prépondérant. Il en est de même pour la fermeture, car l'espace entre les lames est de l'ordre de l'épaisseur des lames. Cependant, nous pouvons effectuer la fermeture composante connexe par composante connexe, car nos lames sont en première approximation rectilignes. (Attention : la transformation qui à un ensemble associe l'union des fermés de chaque composante connexe

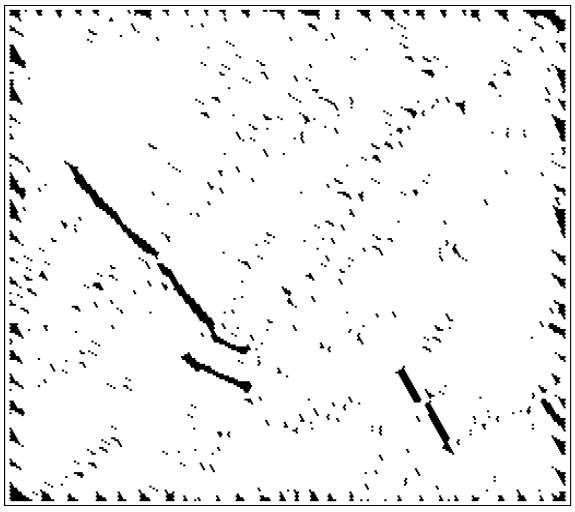
n'est pas une fermeture, car non idempotente. Il est donc possible de l'itérer et d'agglomérer progressivement certaines composantes connexes. Combien de fois itérer la transformation ?) Malheureusement, les résultats (figure 7.16) sont loin de ce que l'on attendait, et cela pour deux raisons :

- Malgré l'utilisation de cercles digitaux euclidiens, la différence entre le fermé et la forme initiale n'a pas une épaisseur supérieure à deux pixels.
- Du fait de la digitalisation, certains pixels au bord de l'objet peuvent être ajoutés et les particules générées sont du même ordre de taille que les premières.

Il nous semble impossible de distinguer les points correspondant à une courbure importante des autres. L'échec est manifeste.



(1) : Image originale



(2) : Différence entre le fermé et la particule, composante connexe par composante connexe

Figure 7.16 : Fermeture composante connexe par composante connexe.

Nous n'avons pas trouvé de solution morphologique au problème. C'est pourquoi nous nous sommes tournés vers des solutions plus classiques, fondées sur des suivis de contours et qui donnent des résultats de qualité suffisante.

7.3.1.2 Une autre solution

La solution que nous exposons n'est pas neuve. Elle a fait l'objet de publications en 1977 [FD77]. Nous l'avons retenue car elle fait appel au suivi de contour de l'objet que nous avons longuement développé dans la partie consacrée aux algorithmes et sa mise en oeuvre est très simple.

En effet, supposons le contour d'un objet donné par une suite de pixels $(p_i)_{i=0}^{n}$ selon un algorithme de suivi de contour. L'angle entre deux segments successifs de cette ligne polygonale

est un multiple de $\frac{\pi}{3}$. Il est possible de lisser ces variations en ne considérant non plus l'angle entre deux segments construits sur deux points adjacents $p_{i-1}p_i$ et p_ip_{i+1}, mais l'angle entre deux segments construits sur des points plus espacés.

Définition 7.1

On appelle k-courbure au point p_i l'angle entre les deux segments $p_{i-k}p_i$ et p_ip_{i+k}.

En trame hexagonale, si $k = 1$, la 1-courbure ne peut prendre que 6 valeurs distinctes. Dans le cas général, la k-courbure peut prendre $6k$ valeurs distinctes. Ceci montre que les directions sont échantillonnées de plus en plus finement quand k augmente. Par contre, les petits détails sont lissés. Cet algorithme travaille donc à une taille caractéristique donnée au dessous de laquelle les détails sont ignorés. Or dans notre cas cette taille est de l'ordre de la largeur des lames, paramètre dont nous avons déjà discuté la robustesse. Nous avons pris ici $k = 4$.

Les contours des lames sont bien évidemment bruités. Il est donc nécessaire de connaître la plus grande courbure que peut générer du bruit. Pour cela, plaçons-nous dans le modèle suivant : la portion de frontière étudiée est une droite bruitée par des pixels se trouvant dans le dilaté de taille 1 de l'objet. On vérifie que la 4-courbure maximale est d'environ 0.5 radian, valeur au delà de laquelle nous estimons avoir trouvé un point de forte courbure (figure 7.17). Les résultats sont présentés figure 7.18.

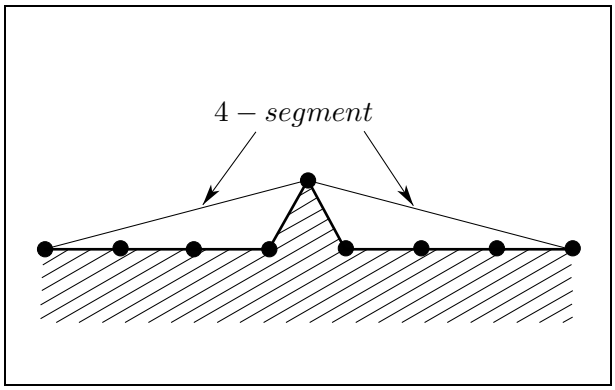


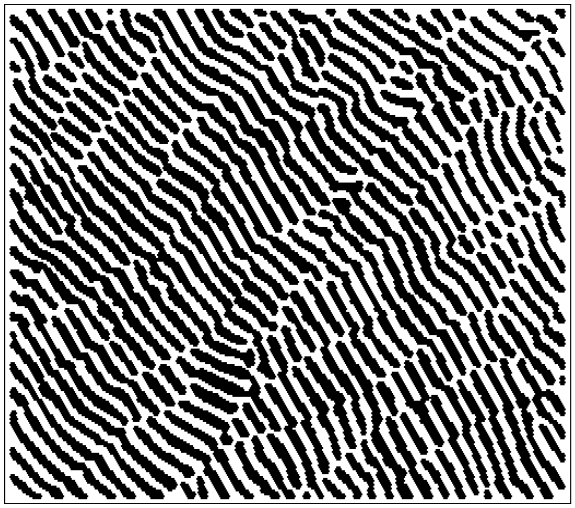
Figure 7.17 : 4-courbure maximale pour une droite bruitée.

Dans quelle mesure la frontière des lames a-t-elle été lissée ? En notation vectorielle :

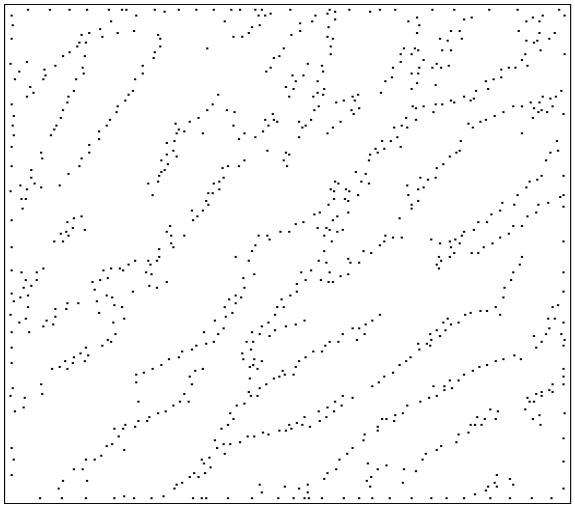
$$p_ip_{i+k} = \sum_{j=i}^{i+k-1} p_jp_{j+1}$$

Ceci montre que le vecteur p_ip_{i+k} correspond à un facteur d'échelle près à la moyenne mobile étendue à k vecteurs élémentaires de la frontière. On ne pouvait pas imaginer plus simple.

En examinant l'image formée par ces points, il semble que le travail soit terminé. En effet, il est facile de connecter ces points sans quasiment aucune ambiguïté (contrairement au tracé des lignes de défaut). Faut-il donc faire intervenir l'image de départ pour connecter ces



(1) : Image originale



(2) : Points de forte courbure

Figure 7.18 : Points de forte 4-courbure.

points ? Si la réponse est négative, nous n'aurons jamais fait intervenir le fait que les lames sont des objets parallèles et que les défauts sont orthogonaux aux lames. Il semble bien que nous négligeons alors des caractéristiques importantes des images. Si la réponse est positive, nous avons l'impression de mieux "coller" à l'idée d'une image d'eutectiques lamellaires. Mais n'est-ce pas inutile ? Ne réduit-on pas de façon trop importante la classe d'images pour lesquelles l'algorithme fonctionne ? Il me semble que les deux opinions se défendent : c'est un problème de contexte. Si l'on admet que l'univers peut présenter des images qui ne représentent pas des eutectiques, il est clair qu'il faut faire intervenir les lames pour découvrir, le cas échéant, que l'image ne représente pas un eutectique. On peut aussi admettre que de telles situations sont impensables. On peut très bien ne pas introduire de connaissances relatives aux lames dans les algorithmes. Nous rediscuterons ce point dans la dernière partie en étudiant la minimalité des modèles utilisés.

Nous allons, dans un premier temps examiner quelques procédures de connexion des points de fortes courbure, puis dans un deuxième temps, nous étudierons comment faire intervenir les lames des eutectiques.

7.4 Procédures de connexion de points a priori

L'algorithme de détection peut donc s'écrire dans ses grandes lignes comme suit :

1. Recherche des points de forte courbure
2. Connexion directe de ces points

Connecter des points, cela veut dire relier ces points au moyen de segments de droite. Cela revient donc à définir des relations de voisinages sur ces points.

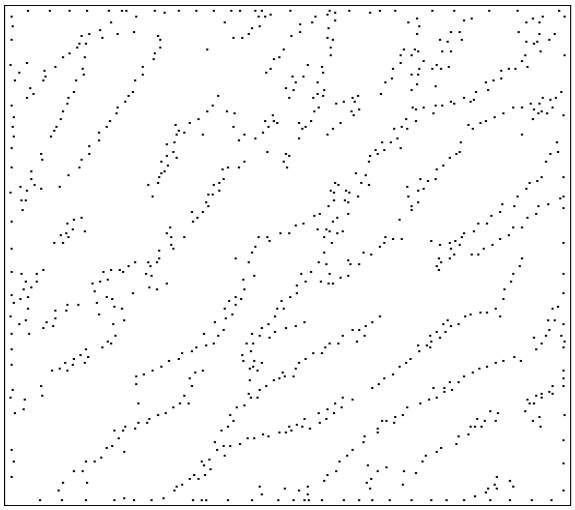
7.4.1 Connexion selon la distance

Une solution simple consisterait à définir deux points voisins comme deux points dont la distance est inférieure à un certain paramètre.

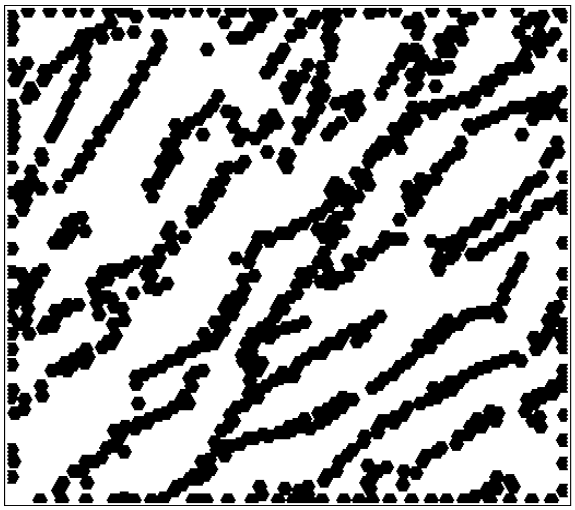
Définition : deux points voisins

Deux points sont voisins si leur distance est inférieure à un seuil.

Dans notre cas on pourrait prendre cette distance égale à la largeur des lames. Traduit en termes morphologiques : les zones de défaut sont le dilaté par un cercle de diamètre la largeur des lames des points de forte courbure. Les résultats de la figure 7.19 paraissent très bons. Examinons cependant de plus près ce qu'ils recouvrent.



(1) : Points de forte courbure



(2) : Dilaté de taille 3 de l'image (1)

Figure 7.19 : Dilaté par un disque de diamètre la largeur des lames des points de forte courbure.

Plaçons-nous en un point de forte courbure. Les seuls points de la frontière des lames à une distance inférieure à la largeur des lames sont des points soit sur la lame voisine, soit de l'autre côté de la même lame, soit sur la frontière du même côté (figure 7.20). Dans les deux premiers cas, si ces points ont été mis en évidence par le détecteur de courbure, la connexion doit avoir lieu. Le troisième cas correspond à une erreur. Notons au passage que la distinction entre les deux derniers cas n'est qu'intuitive. Quand dire que l'on est passé de "l'autre côté" de la particule ? En fait, le troisième cas peut encore se décomposer ainsi : les points de forte courbure très proches les uns des autres et du même côté de la lame correspondent-ils à un même défaut ou à deux défauts parallèles ? En fait, si l'on accepte des lignes de défaut parallèles à une distance inférieure à la largeur des lames l'une de l'autre, les lames – si on les suppose coupées par les lignes de défaut – seront plus larges que longues, ce qui est paradoxal. Il nous semble donc correct

de fusionner ces deux défauts parallèles. D'autre part, il se peut que plusieurs points de forte courbure soient détectés, alors qu'ils ne correspondent qu'à une seule et même flexure. Notons enfin que la solution morphologique fournit un résultat homotope aux lignes de défaut, alors que le graphe correspondant aux points voisins possède de nombreux petits triangles (figure 7.21).

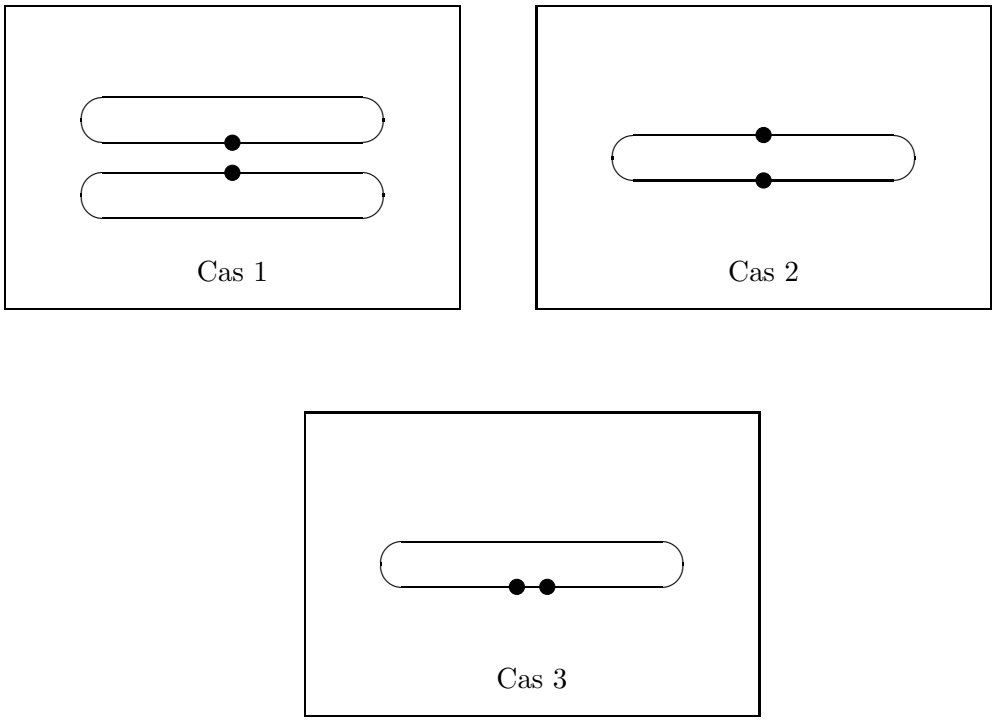


Figure 7.20 : Les trois cas de connexion par dilatation.

Restons en un point de forte courbure. Une ligne de défaut ne traversera la lame à ce niveau que si un autre point de forte courbure se trouve en face. De même, pour que le défaut se prolonge sur la lame voisine, il est nécessaire qu'un autre point de forte courbure s'y trouve. Ainsi donc l'algorithme ne fournira une ligne continue que si des points de forte courbure sont détectés de part et d'autre de toutes les lames traversées. Vu sous cet angle, le critère semble trop restrictif, et c'est pourquoi nous allons chercher à améliorer la connexité des lignes, même quand peu de points de forte courbure ont été mis en évidence. Notons au passage qu'expliciter le critère de connexion donne une bien meilleure évaluation de la qualité de l'algorithme que la mesure directe des écarts à un résultat idéal, où les petits défauts de connexion ne modifieront pas de manière sensible la valeur de la mesure.

7.4.2 Graphe de Delaunay, Gabriel

De nombreux outils ont été développés pour définir des relations de voisinage entre des points ou des objets de manière indépendante d'un facteur d'échelle. Beaucoup reposent sur le diagramme de Voronoï et son dual la triangulation de Delaunay. Nous allons étudier deux graphes classiques : la triangulation de Delaunay et le graphe de Gabriel. Ils ont été abondamment décrits

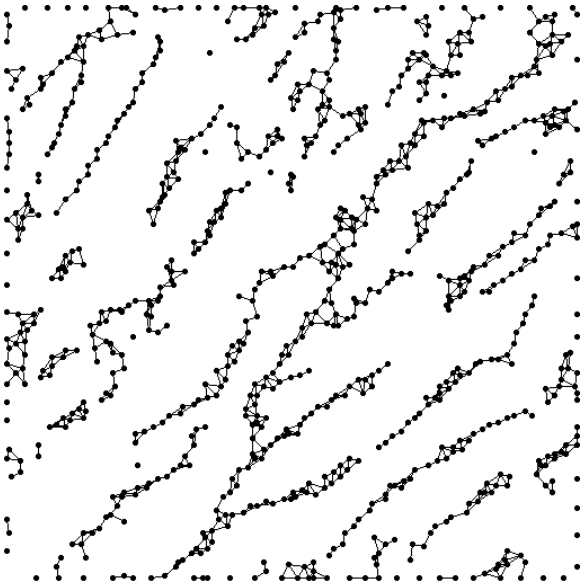


Figure 7.21 : Connexion par des segments de droite.

dans la littérature. Pour leur utilisation en morphologie mathématique, voir [Vin88].

Soit $P = (p_i)_{i=0}^{n}$ un ensemble de points distincts.

Définition 7.2

Le graphe de Delaunay construit sur P est le dual du diagramme de Voronoï de P.

En d'autres termes deux points p_i et p_j sont adjacents si et seulement si les deux ensembles

$$V(p_i) = \{x \mid \forall k \neq i,\ d(x,p_i) \leq d(x,p_k)\} \text{ et } V(p_j) = \{x \mid \forall k \neq j,\ d(x,p_j) \leq d(x,p_k)\}$$

ont des points communs.

Une liste des propriétés importantes du graphe de Delaunay peut être trouvée dans [PS85]. En voici deux qui nous serviront par la suite :

1. Le graphe de Delaunay est une triangulation de l'enveloppe convexe de l'ensemble de points P.
2. p_i et p_j sont adjacents si et seulement si il existe un disque dont la frontière contient p_i et p_j et qui ne contient aucun point de P dans son intérieur.

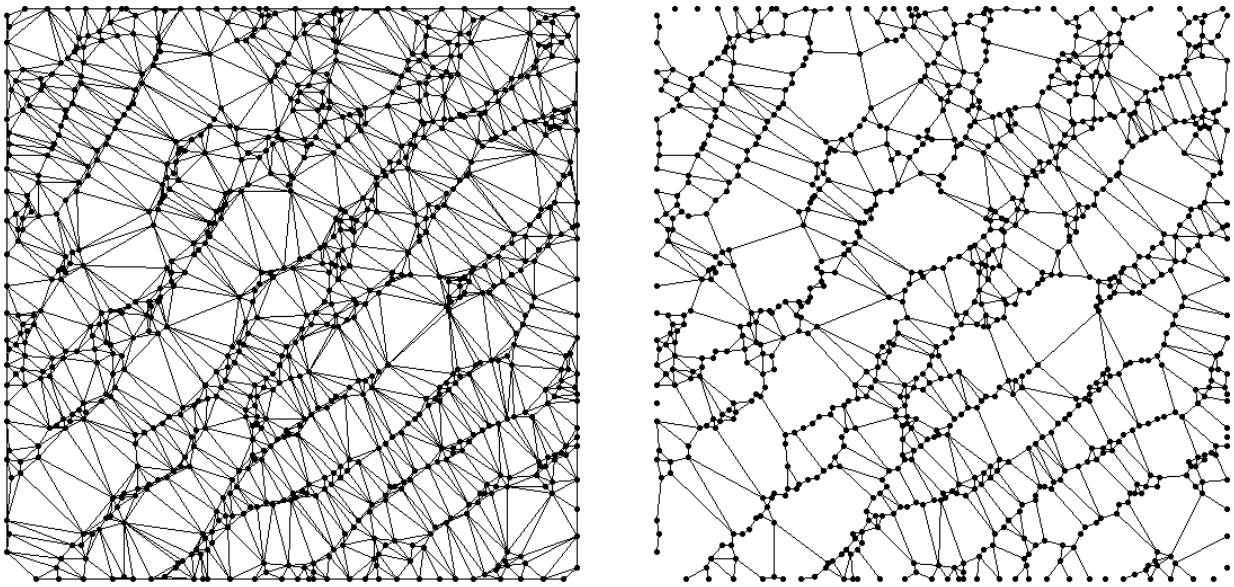
De façon informelle, l'intérêt majeur de la triangulation de Delaunay est de connecter un point avec d'autres points de manière "isotrope"[1] : en particulier deux points relativement éloignés peuvent être connectés s'il n'existe pas d'autres points plus proches dans cette direction. Malheureusement, cette propriété d'isotropie est nuisible dans notre cas, car elle crée des "ponts" entre les défauts. Il nous faut donc chercher un sous-graphe de la triangulation de Delaunay.

[1] Si l'on se place en un point x de la triangulation des points $(p_i)_{i=0}^{q}$ et que l'on effectue une inversion I de pôle x, les points connectés à x par la triangulation sont ceux dont les transformés se trouvent sur l'enveloppe convexe de $(I(p_i))_{i=0}^{q}$ [Boi84].

Définition 7.3

On appelle graphe de Gabriel des points P le sous-graphe de la triangulation de Delaunay défini par :

p_i et p_j sont adjacents si et seulement si le disque de diamètre p_i et p_j ne contient aucun point de P dans son intérieur.



Graphe de Delaunay Graphe de Gabriel

Figure 7.22 : Triangulation de Delaunay et graphe de Gabriel.

Une interprétation morphologique de ce graphe a été proposée par [Mey82], ainsi qu'un algorithme de calcul, connu sous le nom de *graphe perceptuel*.

Là encore trop de "ponts" entre les défauts subsistent. La raison en est simple : modélisons deux défauts parallèles par des courbes presque rectilignes, comme le montre la figure 7.23. Chaque fois que les courbes se rapprochent, un arc est créé entre les points les plus proches. Le graphe perceptuel est donc inutilisable.

7.4.3 Encore une autre procédure de connexion de points

Le principe de la procédure que nous allons proposer est de rajouter lors du calcul de diagramme de Voronoï de P un certain nombre de points qui empêcheront deux points appartenant à des défauts différents d'avoir des cellules de Voronoï adjacentes. L'algorithme (illustré figure 7.24) est le suivant :

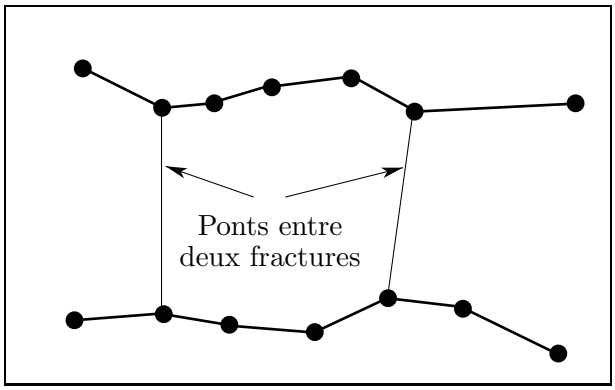


Figure 7.23 : Pourquoi le graphe de Gabriel fournit trop de connexions.

Algorithme 2 : connexion a priori version géométrie informatique

- Diagramme de Voronoï V_1 de $P = (p_i)_{i=0}^{n}$
- Dans chaque cellule $V_1(p_i)$ associée à p_i, déterminer les maxima relatifs de la fonction distance à p_i, soit $Q_i = (q_j^i)_{j=0}^{j_i}$
- Diagramme de Voronoï V_2 de $P \cup (\cup_{i=0}^{n} Q_i)$
- Joindre deux points de P si leurs cellules de Voronoï associées dans V_2 sont adjacentes.

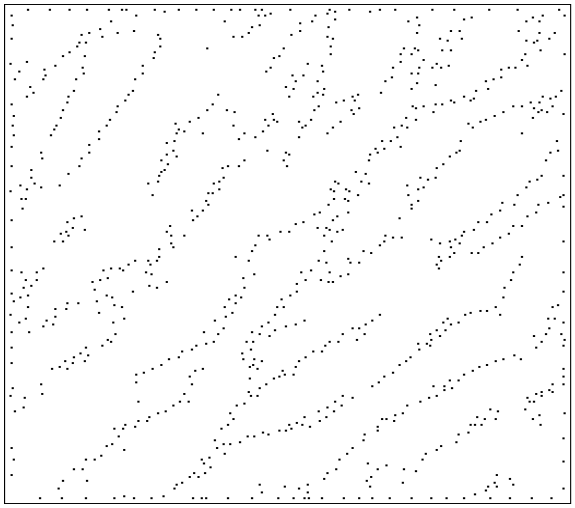
L'ensemble de points Q correspondant essentiellement à des points entre les diverses lignes de défaut a pour rôle de ne plus laisser adjacent des cellules de Voronoï de V_1 correspondant à deux points sur des défauts distincts et parallèles. Voilà un exemple d'algorithme qui tient lieu de définition à lui seul.

La traduction en termes morphologiques est la suivante :

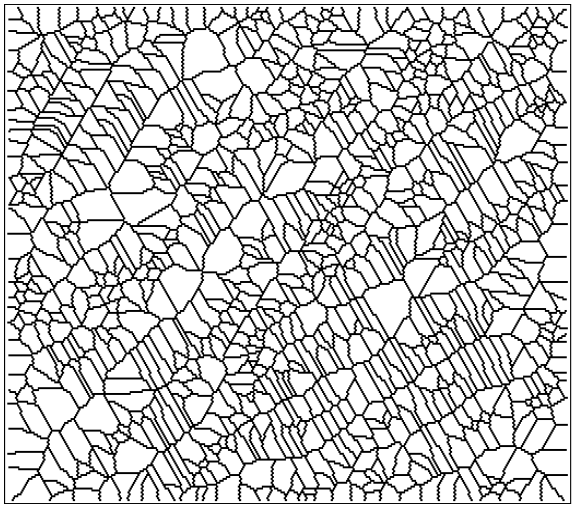
Algorithme 3 : connexion a priori version morphologique

P : ensemble des points de forte courbure.
Y : résultat.

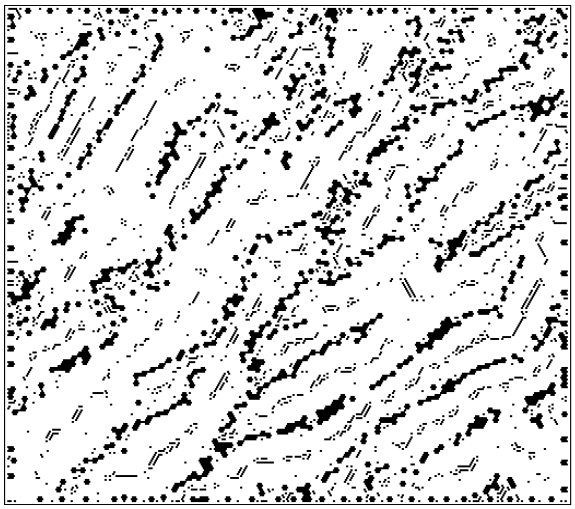
- $S_1 \leftarrow$ *Zones d'influence* (P) (2).
- $Q \leftarrow$ *Max régional* $(Distance_{S_1}(P))$ (3).
- $S_2 \leftarrow$ *Zones d'influence* $(P \cup Q)$.
- $Y \leftarrow$ *Plateau* (S_2, P) (4).



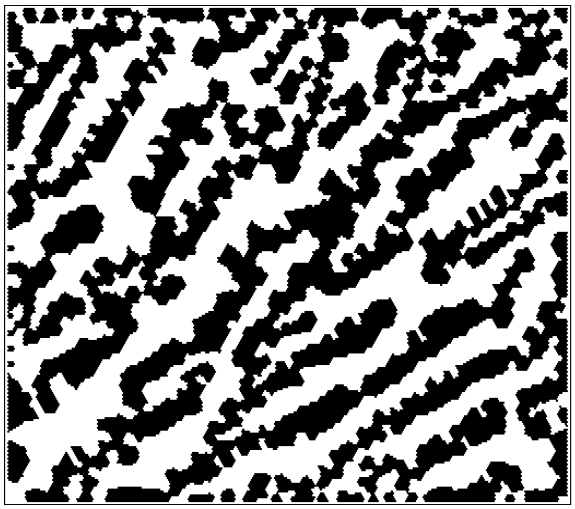
(1) : Point de forte courbure



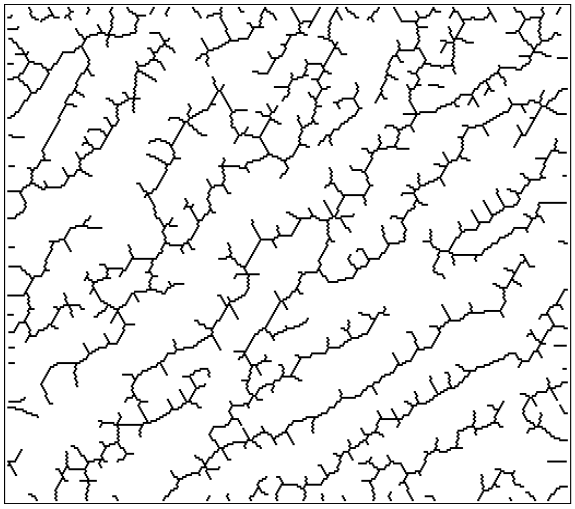
(2) : Zones d'influence de (1)



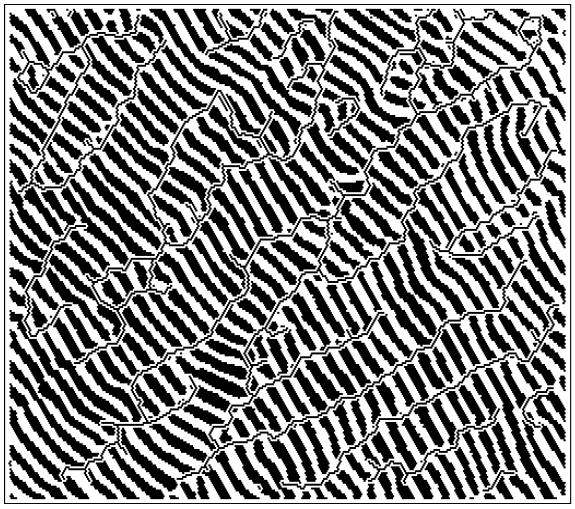
(3) : (1) ∪ maxima régionaux de (2)



(4) : Zones d'influence de (1) dans le skiz de (3)



(5) : Squelette de (4)



(6) : Résultat

Figure 7.24 : Encore une procédure de connexion de points : solution morphologique.

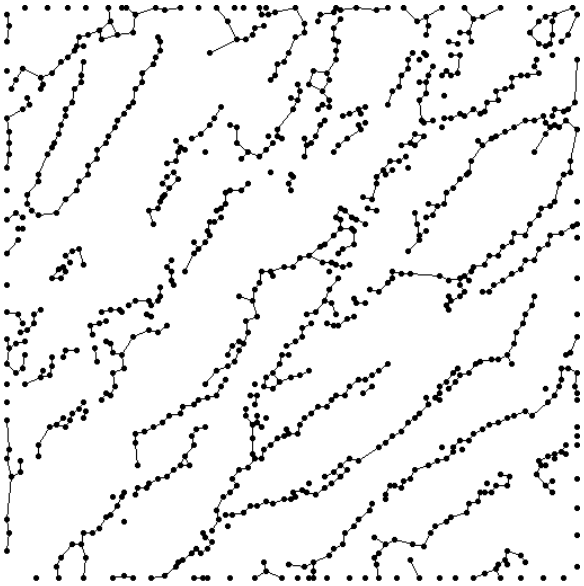


Figure 7.25 : Encore une procédure de connexion de points : solution géométrie combinatoire.

Les résultats sont, à l'oeil, bons, mais comment comparer ses performances au graphe perceptuel par exemple ? Quels critères plus explicites recouvre cet algorithme ? Pour cela, nous allons chercher quelques propriétés géométriques des points qui sont reliés.

Soient p_i et p_j deux points de P. Il ne peuvent être voisins dans S_2 que s'ils l'étaient dans S_1, puisque la cellule associée à $p \in P$ dans S_2 est incluse dans celle obtenue dans S_1. Donc le graphe obtenu est un sous-graphe de la triangulation de Delaunay.

Plaçons-nous en un sommet s de S_1, c'est-à-dire en un centre de cercle de Delaunay. Soient a, b et c les trois points dont les cellules de S_1 se rencontrent en s, s_a (resp. s_b, s_c) l'arête de S_1 incluse dans la médiatrice de b, c (resp. c, a et a, b) et notons α, β et γ les angles entre s_a et sb, s_b et sc, s_c et sa (figure 7.26). $\alpha + \beta + \gamma = \pi$. Or s n'est pas un maximum régional de la distance géodésique dans S_1 à a, b et c (les autres points n'interviennent pas) si et seulement si :

$$(\alpha \text{ ou } \beta \leq \frac{\pi}{2}) \text{ et } (\beta \text{ ou } \gamma \leq \frac{\pi}{2}) \text{ et } (\gamma \text{ ou } \alpha \leq \frac{\pi}{2})$$

Ceci implique que deux au moins des angles α, β ou γ soient supérieurs à $\frac{\pi}{2}$, ce qui est impossible car leur somme vaut précisement π. Donc Q est l'ensemble des sommets de S_1, i.e. chaque sommet du diagramme de Voronoï est maximum relatif de la fonction distance sur au moins une cellule de Voronoï.

Remarque : comme tout cercle de Delaunay construit sur P contient son centre, point de Q, aucun triangle de Delaunay construit sur P n'est conservé.

Examinons à présent la triangulation de Delaunay de P. Soient deux points de P, p_i et p_j, adjacents. Deux cas peuvent se présenter :

1. Les centres des deux cercles de Delaunay C_1 et C_2 qui s'appuient sur p_i et p_j sont de part et d'autre du segment p_ip_j. Alors p_ip_j fait partie du graphe perceptuel car le cercle

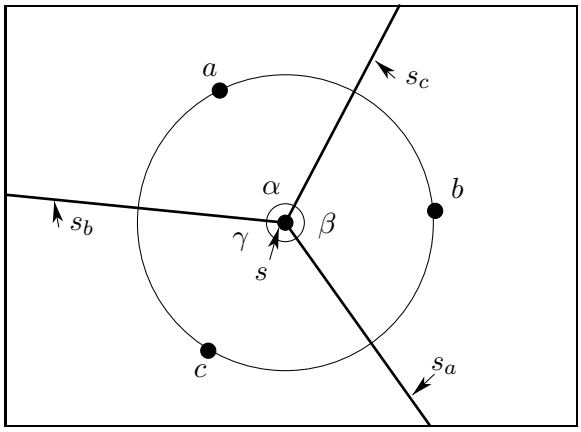


Figure 7.26 : Voisinage d'un sommet du diagramme de Voronoï.

de diamètre (p_i, p_j) est contenu dans $C_1 \cup C_2$. Si nous notons γ_i l'angle au centre de la corde $p_i p_j$ au cercle C_i (figure 7.27), la connexion (p_i, p_j) est conservée si et seulement si $\gamma_1 + \gamma_2 < \pi$.

2. Les centres des deux cercles de Delaunay C_1 et C_2 qui s'appuient sur p_i et p_j sont du même côté du segment $p_i p_j$. Alors tout cercle qui s'appuie sur $p_i p_j$ fait partie du faisceau de cercles à points de base p_i et p_j, entre C_1 et C_2 (figure 7.28). Il contient donc le centre du plus petit des cercles C_1 et C_2. Les points p_i et p_j ne sont donc pas connectés par notre algorithme. On remarquera que dans ce cas le segment $p_i p_j$ ne fait pas non plus partie du graphe de Gabriel.

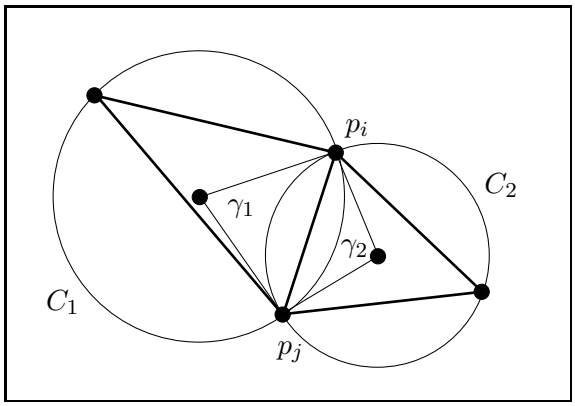


Figure 7.27 : Cas où les centres des cercles de Delaunay sont de part et d'autre.

En somme, nous proposons un sous-graphe du graphe de Gabriel, résultat qui nous permet de comparer cet algorithme au graphe de Gabriel lui-même. Examinons à présent son comportement sur un modèle simple. Soit $P = (p_{i,j})$ une grille rectangulaire régulière et notons a la distance

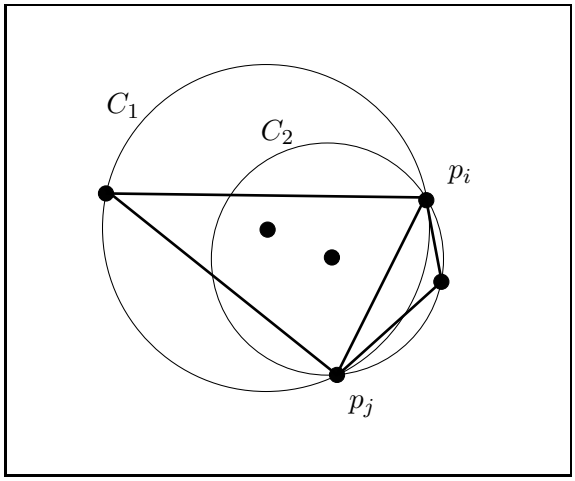


Figure 7.28 : Cas où les centres des cercles de Delaunay sont du même côté.

de $p_{i,j}$ à $p_{i+1,j}$ et b celle de $p_{i,j}$ à $p_{i,j+1}$. Supposons que $a < b$ par exemple. L'algorithme fournira des droites verticales espacées de a, ce qui semble convenable. Le graphe de Gabriel par contre fournira en plus un réseau de droites orthogonales espacées de b comme le montre la figure 7.29.

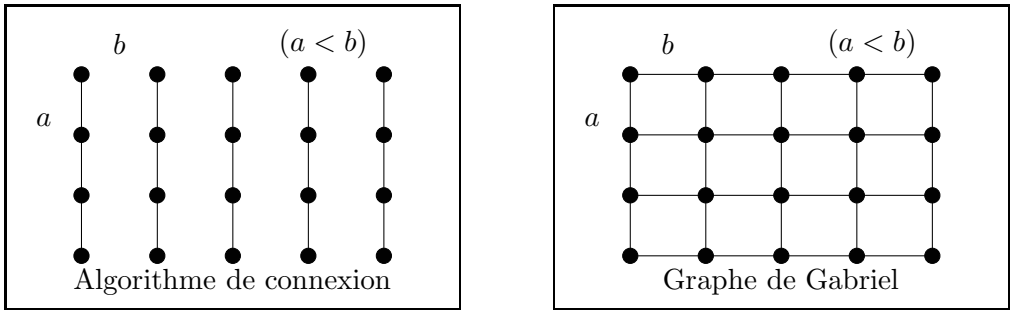


Figure 7.29 : Connexion d'une grille rectangulaire.

7.5 Coupure des lames

Bien que les résultats de la section précédente nous semblent être suffisants pour résoudre le problème posé, nous allons examiner à présent ce que peut nous apporter l'introduction de la connaissance relative à l'organisation géométrique des lames. Là encore, deux voies s'offrent à nous : couper les lames au niveau des points de forte courbure et se ramener au problème classique, ou chercher d'autres solutions.

7.5.1 Dilatation par des losanges

Les lames ne présentent pas un étranglement suffisamment net au niveau des points de forte courbure pour permettre l'emploi de procédures classiques telles que la séparation par érodés ultimes [Ser82]. Cependant, nous pouvons utiliser le fait que toutes les lames ont quasiment la même orientation.

Ainsi, une dilatation linéaire dans la direction orthogonale permettra de couper les lames. On peut mesurer cette direction globalement sur l'image avec, par exemple, une précision de 30 degrés. Notons qu'une précision supérieure est illusoire, puisque l'on remarque que suivant les diverses zones de l'image, cette direction varie dans ces proportions. Un autre problème de la dilatation linéaire est la sursegmentation des lames, que nous avions déjà évoquée lors de la présentation des procédures de connexion : au niveau d'une flexion, chaque point de forte courbure générera une coupure, ce qui est inacceptable. Une solution consiste à éliminer les portions de lames présentant une longueur trop faible, par exemple de l'ordre de la largeur des lames. Implicitement, cela suppose qu'il ne peut pas exister deux flexures distinctes et parallèles à une distance inférieure à la largeur des lames. Enfin, pour limiter la dilatation d'un point de forte courbure à la lame à laquelle il appartient, il convient d'effectuer la dilatation linéaire de manière géodésique en considérant les lames comme un masque.

Une alternative à la dilatation linéaire est la dilatation par un losange contenant la direction générale orthogonale aux lames et d'angle 60 degrés, l'origine se trouvant en un de ses sommets. L'intérêt d'une telle procédure est de pouvoir s'affranchir de l'élimination des morceaux de lames de longueur trop faible de l'algorithme précédent. Le seuil de longueur disparaît, mais nous en introduisons un nouveau : l'angle au sommet du losange, de 60 degrés ici. Il semble cependant que l'utilisation de losanges permette de mieux prendre en compte la variabilité de la direction générale sur une image.

En termes de transformations, si nous notons X l'ensemble des lames, P l'ensemble des points de forte courbure et L le losange élémentaire centré à l'un de ses sommets aigus, la coupure est obtenue par :

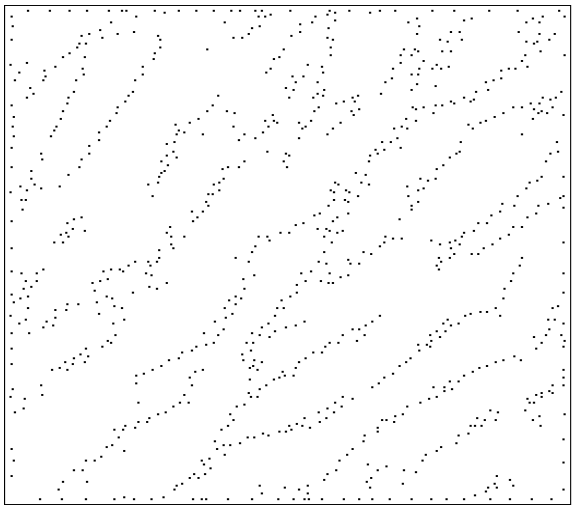
$$\{(P \oplus L) \cap X\}^{\infty} \cup \{(P \oplus \check{L}) \cap X\}^{\infty}$$

où $\{\}^{\infty}$ représente l'itération jusqu'à convergence.

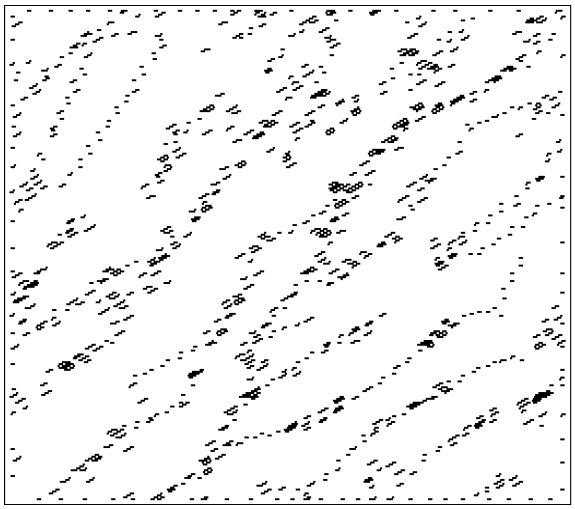
La technique de coupure présentée n'est cependant pas très satisfaisante. En effet, les directions utilisées semblent relativement arbitraires. On pourrait s'en affranchir par l'utilisation d'un élément structurant circulaire. Là encore deux faits s'y opposent.

1. On ne peut plus dilater géodésiquement les points de forte courbure jusqu'à convergence, puisque toute la lame à laquelle un tel point appartient sera reconstruite ! Il faut donc trouver la taille de dilatation adéquate. Il s'agira encore de la largeur des lames. Nous venons d'éliminer le paramètre direction pour retrouver la largeur des lames.

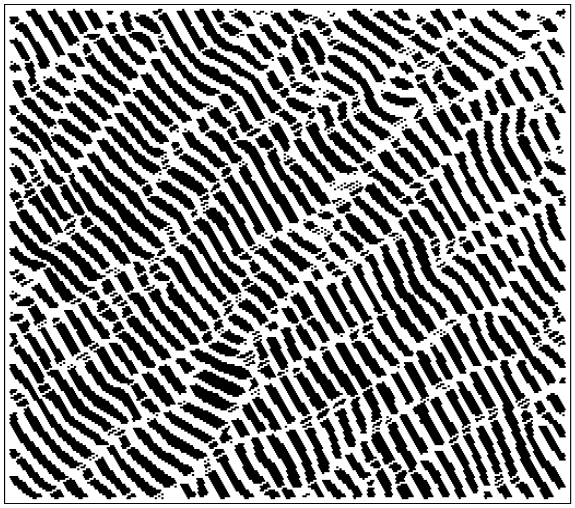
2. Mais dans ce cas, deux lignes de défaut parallèles à une distance de deux fois la largeur ne fourniront qu'une seule coupure : elles seront donc fusionnées. Ce seuil entre deux défauts parallèles est trop grand.



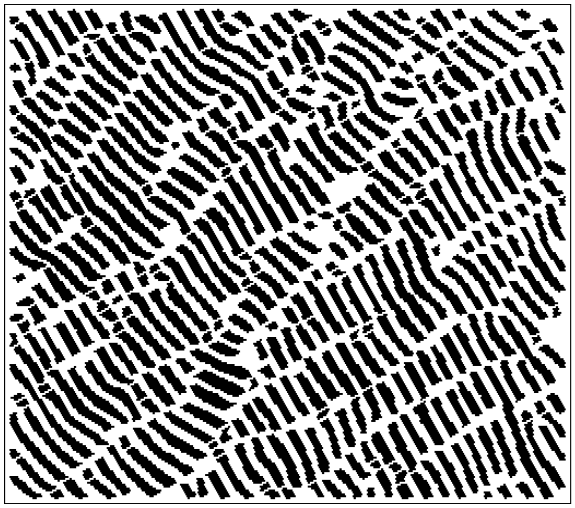
(1) : Points de forte courbure



(2) : Dilaté linéaire à 30 degrés conditionnellement aux lames

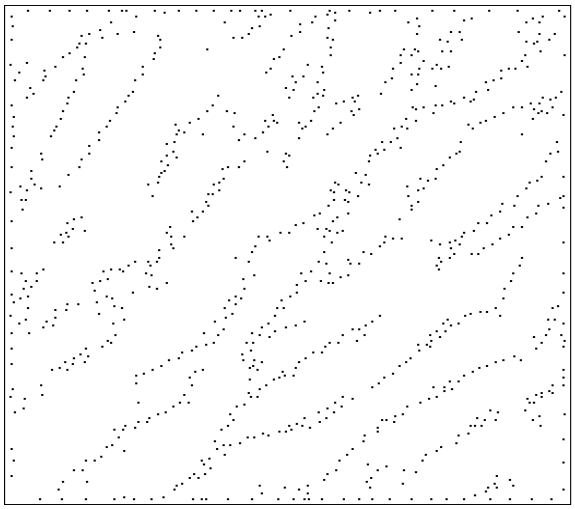


(3) : Lames coupées par le dilaté linéaire



(4) : Ouverture de taille 1 de (3) suivie d'une reconstruction dans (3)

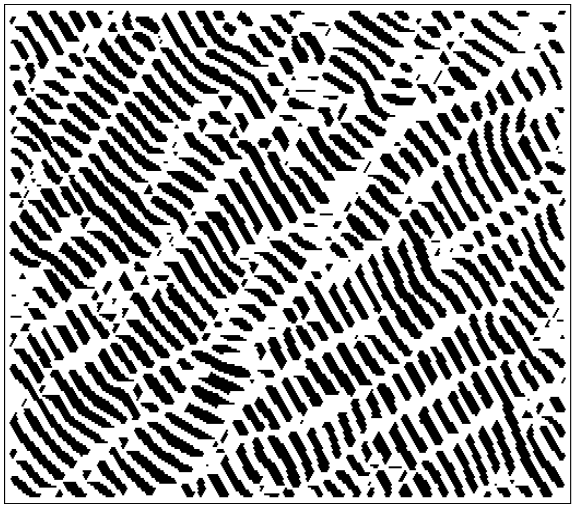
Figure 7.30 : Coupure des lames par dilatation linéaire conditionnelle.



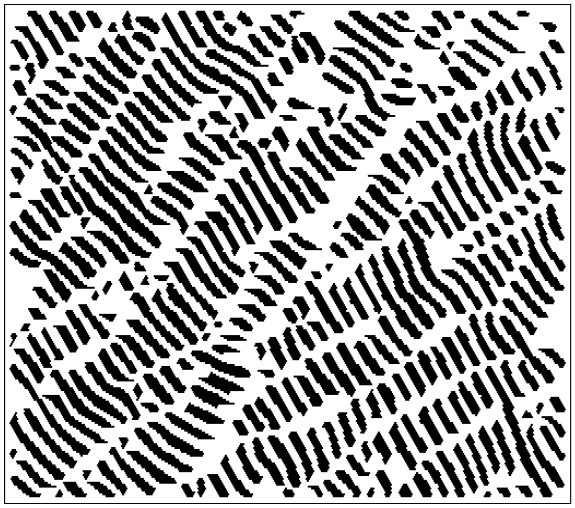
(1) : Points de forte courbure



(2) : Dilaté par un losange conditionnellement aux lames



(3) : Lames coupées par le dilaté (2)



(4) : Ouverture de taille 1 de (3) suivie d'une reconstruction dans (3)

Figure 7.31 : Coupure des lames par dilatation losangique conditionnelle.

7.5.2 Erodés ultimes géodésiques

L'algorithme classique de séparation par érodés ultimes peut être adapté à notre cas. Qu'est-ce qu'un érodé ultime ? C'est un maximum régional de la fonction distance à la frontière. Or les "centres" des régions rectilignes des lames pourraient être décrits par les maxima régionaux de la distance aux flexures. Il suffit donc de considérer la fonction distance aux points de forte courbure non plus dans toute l'image, mais dans le masque formé par les lames, et d'appliquer la procédure classique de manière géodésique.

Définition : coupures des lames

Les coupures sont les lignes de partage des eaux de l'opposé de la fonction distance géodésique aux points de forte courbure.

Si nous notons X l'ensemble des lames, P l'ensemble des points de forte courbure, en notant en indice l'ensemble dans lequel s'effectue la transformation géodésique, l'algorithme associé s'écrit :

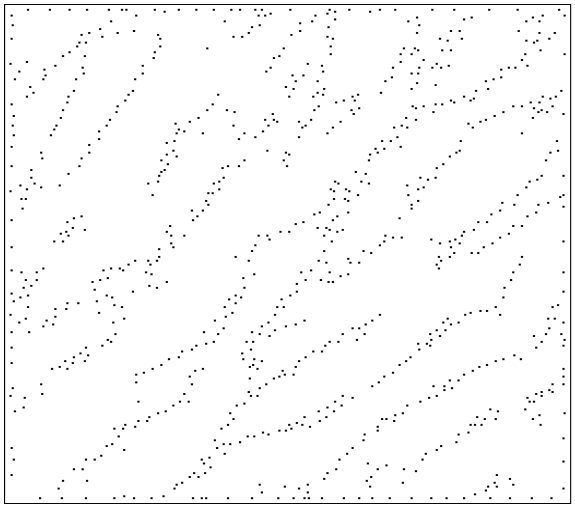
Algorithme 4 : séparation par érodés ultimes géodésiques

X : ensemble des lames.
P : ensemble des points de forte courbure.
Y : résultat.

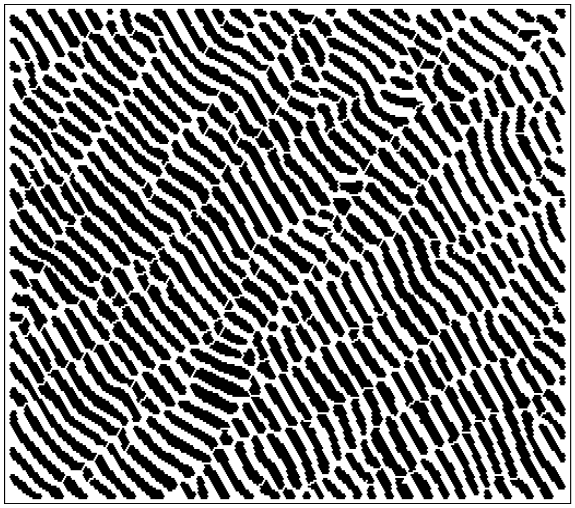
- $D \leftarrow \mathit{Distance}_X\ (P)$.
- $R \leftarrow \mathit{Max\ régional}\ (D)$.
- $E = D \times R$ (érodés ultimes géodésiques, leur niveau de gris représentant le nombre d'érosions pour l'obtenir).
- $Y \leftarrow \emptyset$.
- Pour n de $\max D$ à 1 faire :

  $$Y \leftarrow \mathit{Epaissi}_{D \geq n}\ (Y \cup (E == n)).$$

La mesure directe d'une direction a totalement disparu et la procédure s'appliquera donc à une image dans n'importe quelle position, pouvant même présenter des fluctuations de direction. Notons cependant qu'il nous est toujours nécessaire d'éliminer les portions de lames sursegmentées, de longueur inférieure à, par exemple, la largeur des lames (par une ouverture circulaire suivie d'une reconstruction). Cette dernière technique de coupure de lames est de loin la meilleure, bien que ses résultats soient comparables à ceux des autres techniques présentées. Cependant, l'étude des critères mis en jeu montre que ce dernier algorithme s'appliquera à une classe d'images beaucoup plus vaste.



(1) : Points de forte courbure



(2) : Lames coupées par érodés ultimes géodésiques

Figure 7.32 : Coupure des lames par érodés ultimes géodésiques.

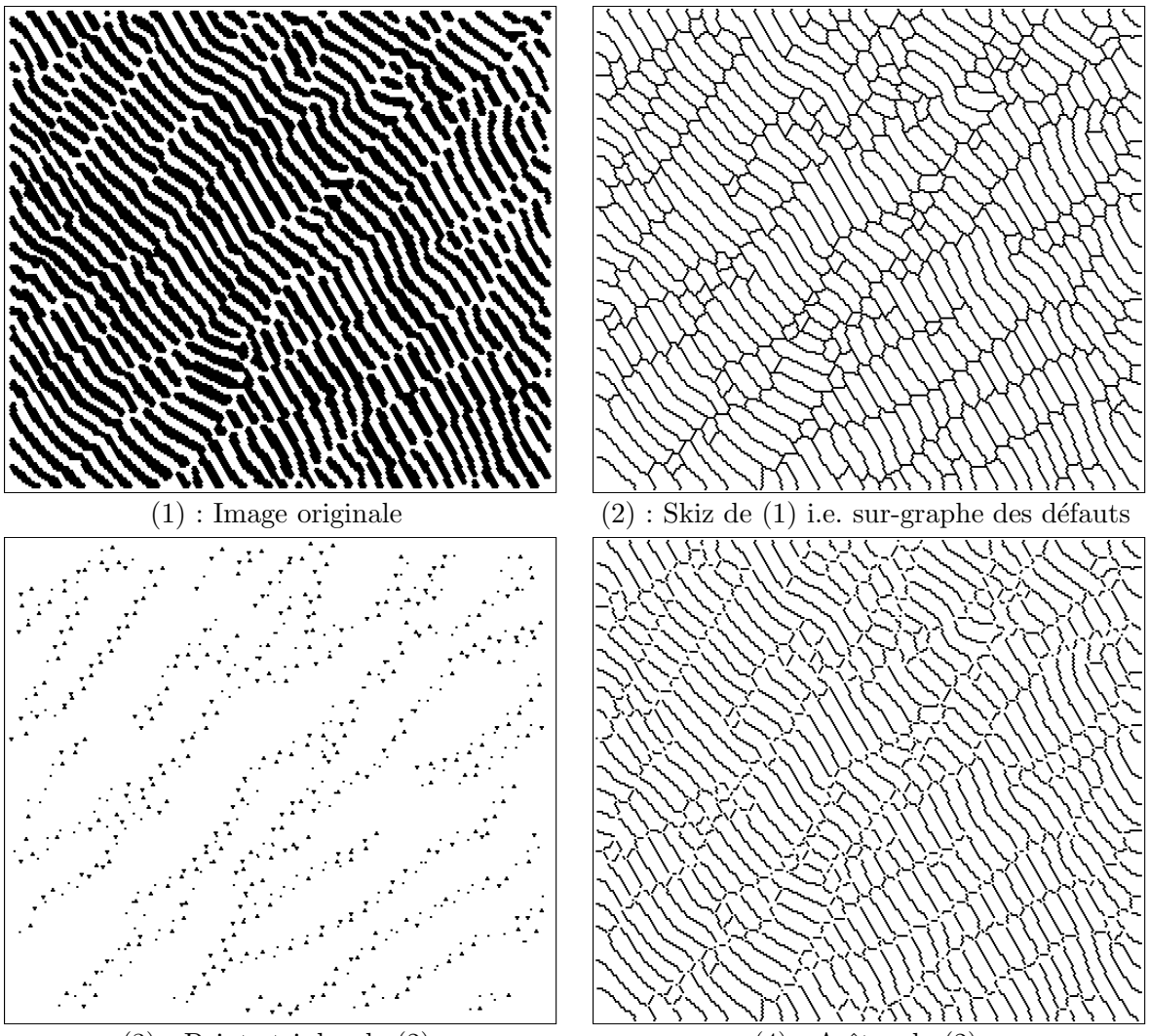
7.6 Recherche des lignes de défaut après coupure des lames

Nos lames sont à présent coupées au niveau des flexures. Il est donc possible d'utiliser la solution originelle. Cependant, nous obtenons des zones de flexure et non des lignes. En particulier une procédure de squelettisation fournit un résultat bruité par de nombreuses barbules parasites. Pourtant à la main, sur l'image 7.32, il est facile de suivre les grandes lignes qui représentent les défauts. Il nous semble que plutôt que d'étudier des procédures d'ébarbulages, il est nécessaire de mieux formaliser la notion de ligne de fracture (puisque après la coupure des lames il ne reste plus que celle-là). Dans le fond de l'image – le complémentaire des lames – les lignes de fracture semblent relier des points où trois couloirs se rencontrent. Il n'y a qu'une manière mathématique de donner un sens au mot "point triple", c'est de squelettiser l'ensemble. Or inévitablement il apparaîtra des barbules. Et bien non, si nous prenons le squelette par zones d'influence, ce qui revient dans le contexte de lames quasi rectilignes à squelettiser le fond de l'image et à l'ébarbuler totalement. Nous poserons alors :

Définition : lignes de défaut

L'ensemble des lignes de fracture est un sous-graphe du squelette par zones d'influence des lames.

Comment déterminer ce sous-graphe ? Nous allons montrer trois types de critères auquels on peut penser.



(1) : Image originale (2) : Skiz de (1) i.e. sur-graphe des défauts

(3) : Points triples de (2) (4) : Arêtes de (2)

Figure 7.33 : Définition d'un graphe contenant les lignes de défaut.

7.6.1 Un critère de direction globale

Nous savons que les lignes de fracture ont une direction générale à peu près fixe. Il est pourtant impossible de s'en servir, car les arêtes de graphe correspondant aux fractures sont en général courtes et leur direction quelconque ! Par contre les arêtes correspondant à la ligne médiane entre deux lames sont généralement plus longues et possèdent donc une direction mieux définie. On peut donc effectuer une ouverture linéaire dans cette direction générale de l'image. L'expérience montre que la taille de l'ouverture est de l'ordre de la largeur des lames. Cependant, une telle technique doit absolument être bannie :

1. Un squelette est beaucoup trop fin pour qu'une ouverture linéaire puisse avoir un sens. C'est d'ailleurs pourquoi nous avions trouvé que seule une ouverture d'assez petite taille convenait, taille sans rapport avec l'allongement des arêtes qu'elle est sensée mettre en évidence.

2. Toujours à cause de la finesse du squelette, la direction générale devrait être déterminée très finement, or nous savons qu'elle fluctue sur l'image.

Algorithme 5 : direction des arêtes longues

G : graphe obtenu par squelettisation par zones d'influence (1).
Y : résultat (figure 7.34)

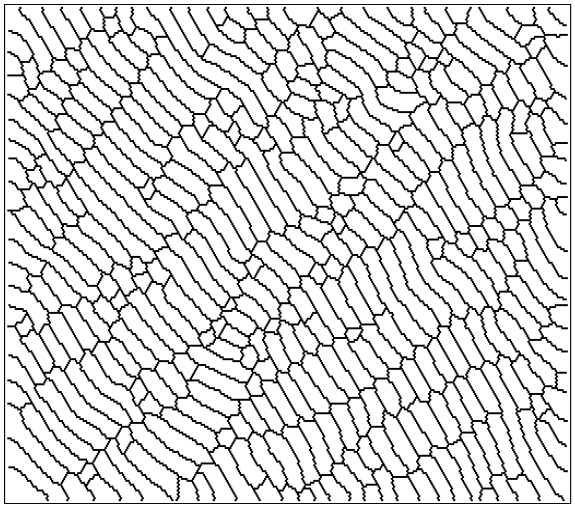
- $T \leftarrow$ *Triple* (G).
- $A = G \setminus T$ (ensemble des arêtes).
- $A' \leftarrow A \setminus$ *Recons* $(A, (A)_S)$ où S est un segment d'orientation la direction générale de l'image.
- $Y \leftarrow$ *Aminci* $(A' \cup T)$ (2).

Il n'existe pas de propriété mathématique correspondant à cet algorithme : en effet, l'ouverture par un segment S d'un squelette ne préserve que ses parties rectilignes ayant exactement la direction de S. Ceci ne se produit jamais, sauf cas particulier. Cette ouverture produit donc l'ensemble vide...

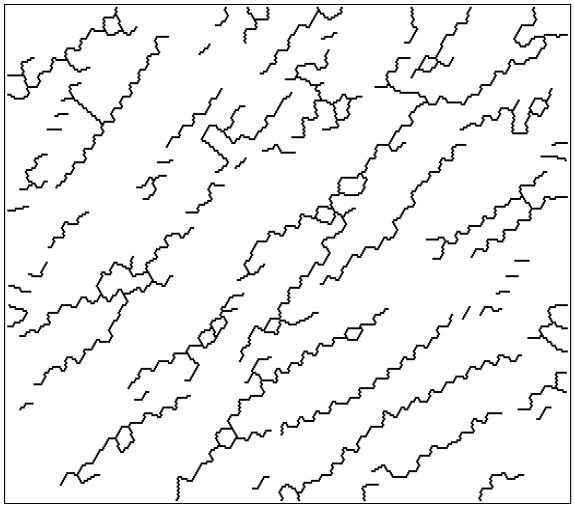
On peut contourner la notion d'ouverture comme suit : supposons que l'on approxime chaque arête du graphe par un segment de droite. On peut déterminer la direction de chaque arête. Mais là encore on retombe sur le problème de la direction générale et le fait que certains segments des lignes de fracture peuvent avoir cette direction générale.

Remarque : Les résultats fournis par les algorithmes demandent souvent une mise en forme reposant sur quelques critères simples. Par exemple, dans le cas où nous cherchons un sous-graphe du squelette par zones d'influence, nous proposons (voir figure 7.34) :

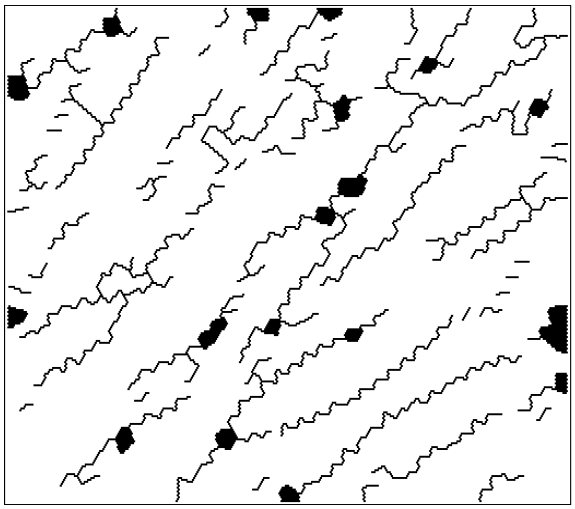
1. Fermer les trous correspondant à une face exactement du graphe. En d'autres termes, si toutes les arêtes entourant une face du graphe sont classifiées comme appartenant aux lignes de flexion, on peut raisonnablement penser qu'il s'agit d'une flexure unique passant au milieu (3).



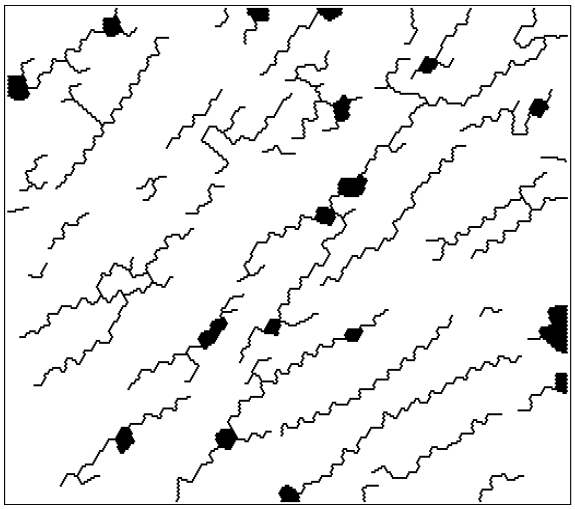
(1) : Graphe de départ



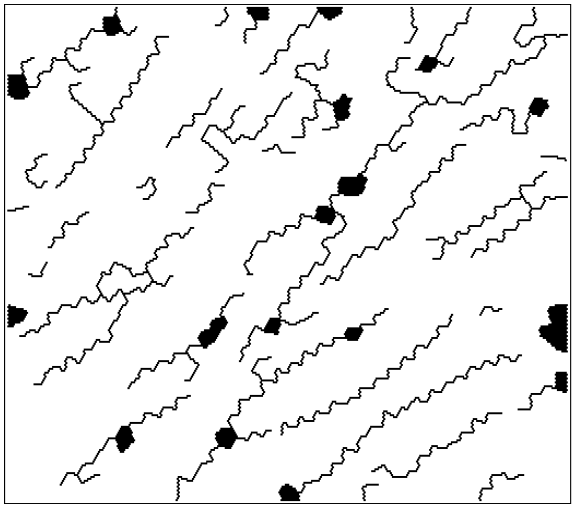
(2) : Sous-graphe retenu



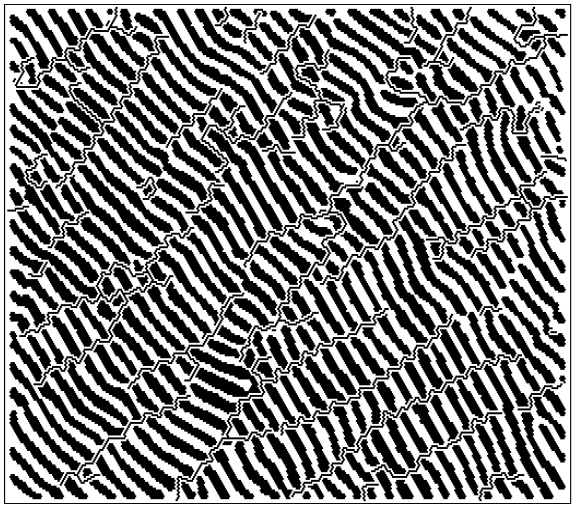
(3) : Fermeture des trous d'une face



(4) : Elimination des arêtes isolées



(5) : Elimination des barbules d'une arête de long



(6) : Résultat

Figure 7.34 : Elimination des arêtes selon un critère de direction globale.

2. Eliminer les arêtes isolées (4).

3. Eliminer les barbules composées d'une seule arête du graphe (5).

7.6.2 Critères de longueur

Si nous examinons l'ensemble des longueurs des arêtes correspondant aux fractures et celui des autres arêtes, nous constatons que ces deux ensembles ne sont pas disjoints. Tout ce que nous pouvons dire est que de tous petits segments (jusqu'à environ 4 pixels de long) font certainement partie des fractures et que les segments très longs n'en font pas partie (environ $15 - 20$ pixels de long). Entre les deux, il faut être plus précis. Nous divisons donc l'ensemble des arêtes en 3 classes : les longues, les courtes et les intermédiaires.

Plaçons-nous dans le cas où les fractures ne sont pas trop proches les unes des autres. Les arêtes du squelette par zones d'influence qui relient une fracture à une autre sont longues. Donc les arêtes correspondant aux fractures sont celles qui sont adjacentes aux arêtes longues.

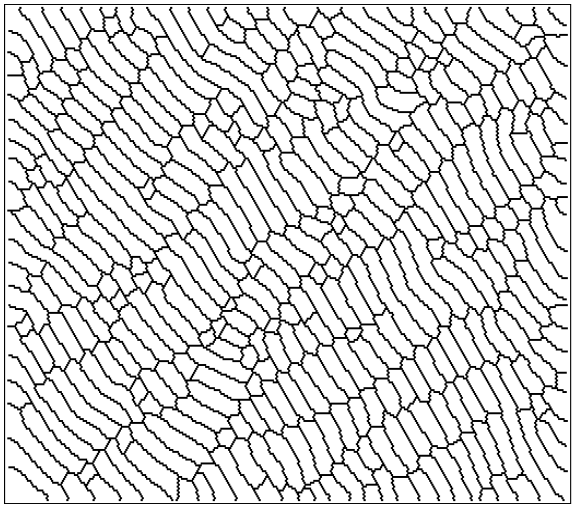
Dans le cas général, une arête de longueur intermédiaire appartient soit à une fracture, soit relie une fracture à une autre. Dans ce dernier cas, les deux fractures sont relativement proches. Si on suppose donc qu'en aucun cas deux fractures seront relativement proches d'une troisième à droite et à gauche (ce qui pourrait arriver dans des zones fortement perturbées mais que nous ne rencontrons pas ici), nous pouvons garder la définition :

Définition : lignes de défaut

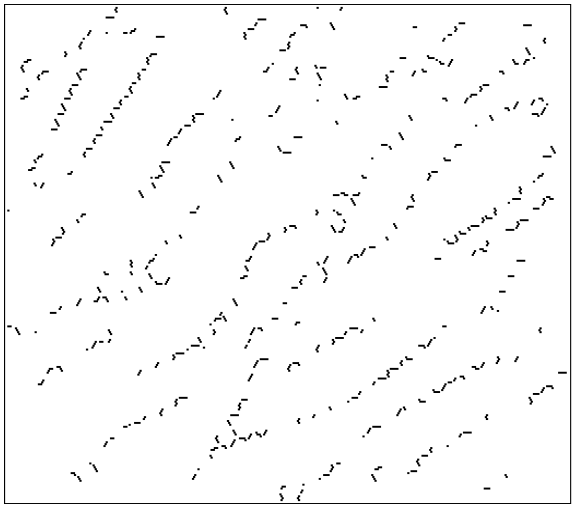
Les arêtes correspondant aux lignes de fracture sont les arêtes adjacentes aux arêtes longues.

Le résultat semble bon bien qu'en théorie il ne fournisse pas toutes les fractures comme nous l'avons remarqué. Notons cependant la propreté des lignes obtenues et le fait qu'aucune procédure d'ébarbulage n'est nécessaire.

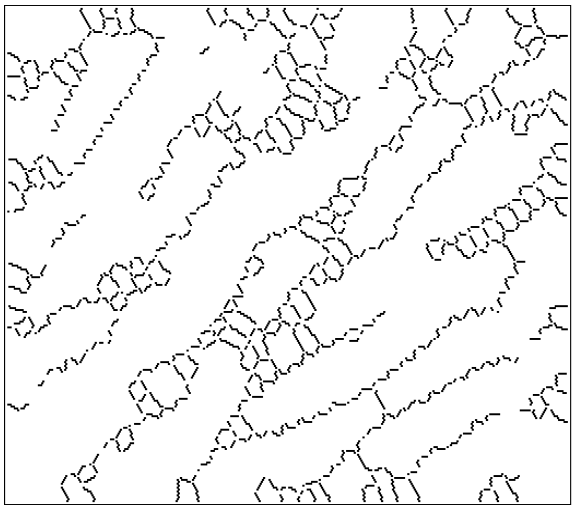
On pourrait imaginer des critères du même type, un peu plus complexes pour mettre en évidence les endroits où trois fractures ou plus peuvent être parallèles. On bute cependant sur un problème majeur : le graphe que nous avons obtenu sur une grille de pixels contient de nombreux sommets d'ordre supérieur à trois. En particulier, deux arêtes de part et d'autre d'une fracture peuvent être adjacentes.



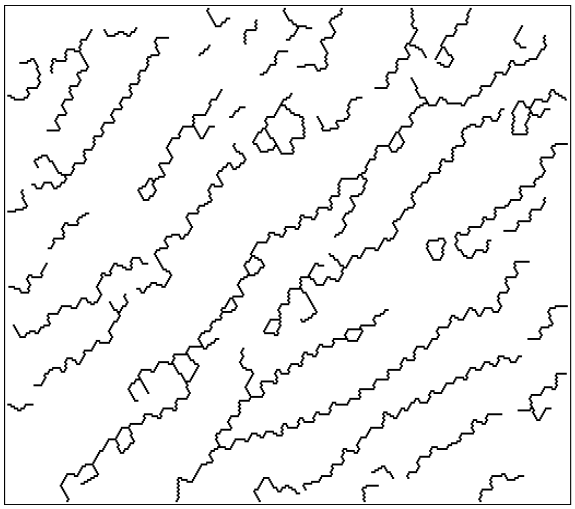
(1) : Graphe de départ



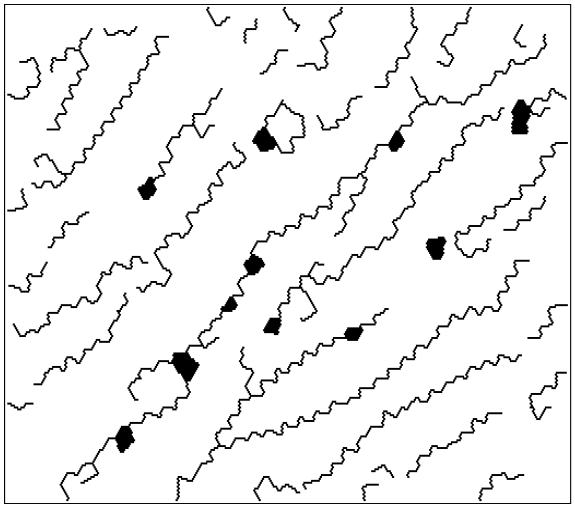
(2) : Arêtes courtes



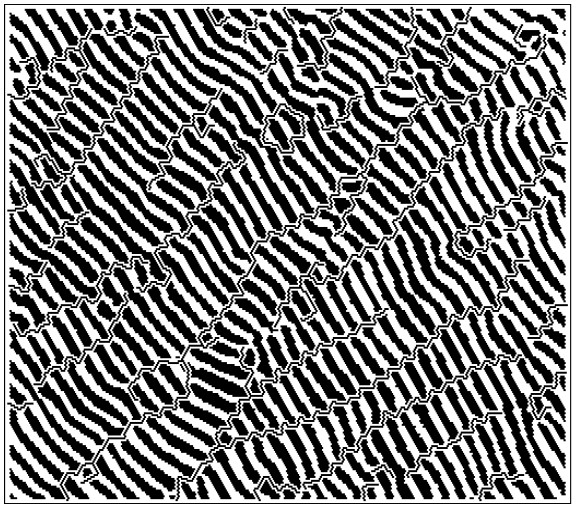
(3) : Arêtes non longues



(4) : Arêtes de (3) adjacentes aux arêtes longues



(5) : Mise en forme



(6) : Résultat

Figure 7.35 : Solution : arêtes adjacentes aux arêtes longues.

Algorithme 6 : arêtes adjacentes aux arêtes longues

G : graphe obtenu par squelettisation par zones d'influence (1).
Y : résultat (figure 7.35).

1. $T \leftarrow$ *Triple* (G).
2. $A = G \setminus T$ (l'ensemble des arêtes).
3. $C \leftarrow$ *Ebarb* $(A, 2)$ (arêtes courtes) (2).
4. $L \leftarrow$ *Ebarb* $(A, 8)$ (arêtes longues).
5. $I = A \setminus L$ (arêtes non longues) (3).
6. $T' \leftarrow$ *Recons* $(T, L \oplus H)$
7. $A' \leftarrow$ *Recons* $(A, T' \oplus H)$.
8. $Y \leftarrow$ *Aminci* $(A' \cup C \cup T)$ (4).
9. Mise en forme (5) et (6).

Le point 4 peut se calculer en construisant l'image qui à toute particule associe le niveau de gris correspondant à sa surface et en la seuillant aux valeurs correspondant aux arêtes courtes et longues.

Cette solution est très satisfaisante pour l'esprit, car elle injecte dans l'algorithme la topologie des lignes de défaut, c'est-à-dire des connaissances spécifiques de ces lignes. Par contre aucun critère de direction n'a été mis en jeu, même local.

7.6.3 L'antisquelette

Comment faire intervenir cette notion de direction locale ? Avant de le voir, examinons une cellule du graphe, c'est-à-dire la zone d'influence d'une lame. Sauf au niveau des points triples où trois lignes de défaut se rencontrent, toute cellule touche exactement deux lignes de défaut au niveau de ses extrémités. Il est donc possible sur chaque cellule de déterminer au moins deux arêtes non adjacentes qui ne font pas partie des lignes de fracture. On pourrait se fonder encore une fois sur un argument de longueur, mais il nous semble préférable de mieux utiliser leur forme, c'est-à-dire leur direction locale. Comme chaque cellule est allongée, si nous coupions la cellule en deux dans le sens de la largeur, les deux arêtes cherchées seraient celles qui touchent cette coupure (figure 7.36).

Comment déterminer cette ligne qui coupe en deux une lame ? Ce sont, de façon informelle, des points équidistants des "extrémités". Or la distance aux extrémités est donnée précisément par la fonction de propagation. Pour un point où la fonction de propagation est dérivable, il n'y a, sauf configuration particulière, qu'un point le plus éloigné. Par contre, là où elle ne l'est pas, il y a au moins deux points les plus éloignés : ce sont donc les points singuliers de la fonction de propagation qui répondent à la question. L'analogie avec la fonction distance usuelle est claire : l'adhérence des points où la fonction distance n'est pas dérivable forme le squelette, et en un

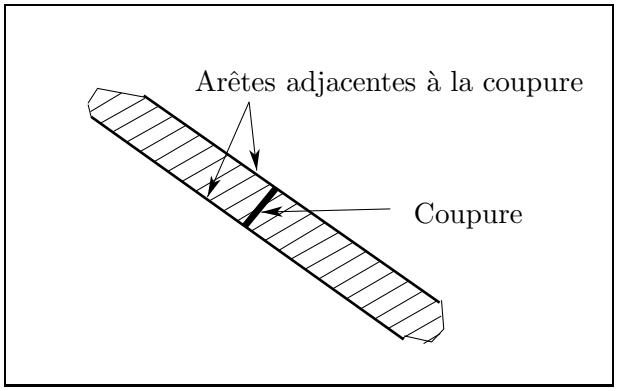


Figure 7.36 : Arêtes adjacentes à la coupure d'une lame.

point du squelette, il existe au moins deux points de la frontière les plus proches (éventuellement confondus dans le cas d'une extrémité du squelette).

Définition : coupure d'une lame en son milieu

On peut couper une lame en son milieu par l'antisquelette de cette lame.

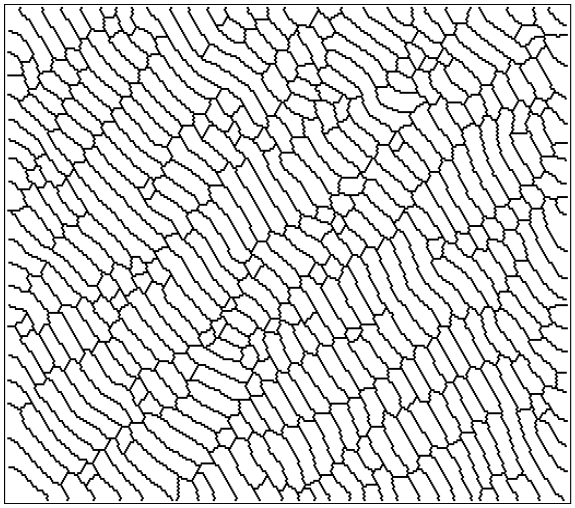
Nous avons montré que localement, la fonction de propagation avait la structure d'une fonction distance – existence d'un amont, d'un aval – et qu'en tout point intérieur ayant un amont formé d'une seule géodésique, la fonction de propagation était différentiable, son gradient étant un vecteur unitaire orienté selon cet amont. Les algorithmes pour extraire ces points singuliers sont donc équivalents à ceux mis en oeuvre pour calculer le squelette :

1. Si l'on ne désire pas un antisquelette connexe, on pourra procéder à la différence entre la fonction de propagation fermée par un hexagone de taille un et la fonction elle-même.

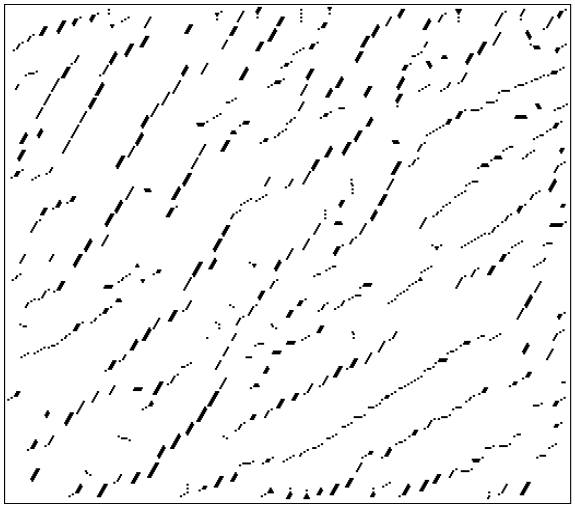
2. L'analogue de l'amincissement binaire est un peu plus compliqué. Si nous appelons $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ les seuils successifs de la fonction de propagation T ($X_n = \{x \mid T(x) \leq n\}$) et si nous notons $A \bigcirc_B L$ le squelette de A conditionnellement à B obtenu par l'élément structurant L, formons la suite $Y_n = X_{n-1} \bigcirc_{Y_{n-1}} L$ avec $Y_0 = X_0 = \emptyset$. A partir d'un certain rang, le diamètre géodésique de la particule, cette suite est stationnaire. L'antisquelette est la limite de cette suite.

3. Enfin, on peut utiliser les techniques de suivi de crêtes de F. Meyer [Mey88], en se plaçant sur l'opposé de la fonction de propagation, car l'antisquelette représente non pas les lignes de crête, mais les lignes de talweg (lignes de crêtes de l'opposé de la fonction).

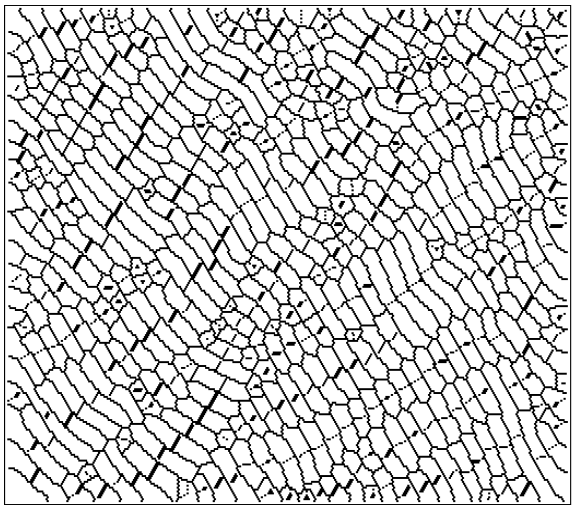
Dans notre cas, le premier algorithme suffit amplement. On peut même montrer que, contrairement au cas du squelette obtenu par ouverture de la fonction distance, une dilatation de taille un suffit à connecter les divers points de l'antisquelette. Sauf au niveau des points triples des lignes de défaut, les résultats sont excellents comme le montre la figure 7.37.



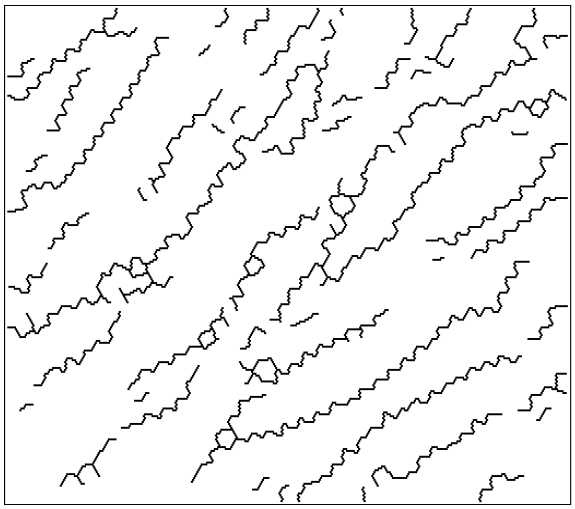
(1) : Graphe de départ



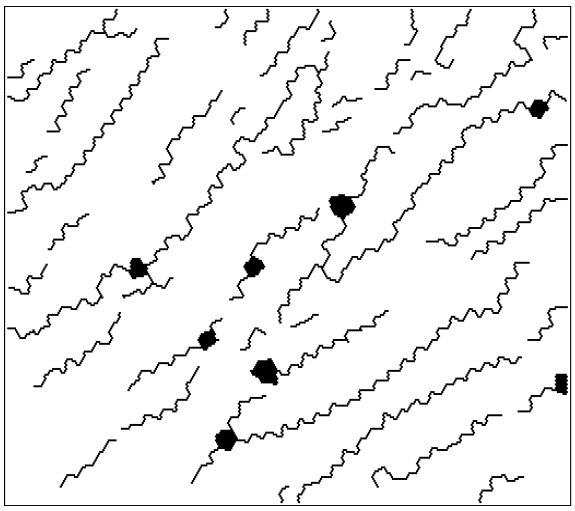
(2) : Antisquelette



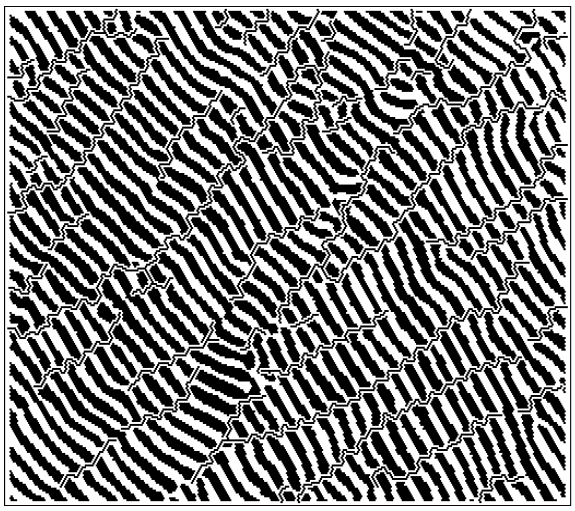
(3) : (1) ∪ (2)



(4) : Arêtes non adjacentes à l'antisquelette



(5) : Mise en forme



(6) : Résultat

Figure 7.37 : Solution : coupure des lame en leur milieu par l'antisquelette.

Algorithme 7 : coupure des lames par antisquelette

G : Squelette par zones d'influence des lames (1).
X : G^c.
T : Les points triples de G.
A : Arêtes de G.
C : arêtes courtes de G.
Y : résultat (figure 7.37).

- $T \leftarrow$ *Propagation* (X).
- $ASq = (T)^H \setminus T$ (Antisquelette) (2).
- $A' =$ *Recons* $(A, Asq \oplus 2H)$ (arêtes touchées par l'antisquelette) (4).
- $Y \leftarrow$ *Aminci* $((A \setminus A') \cup T)$ (5).
- Mise en forme (5) et (6).

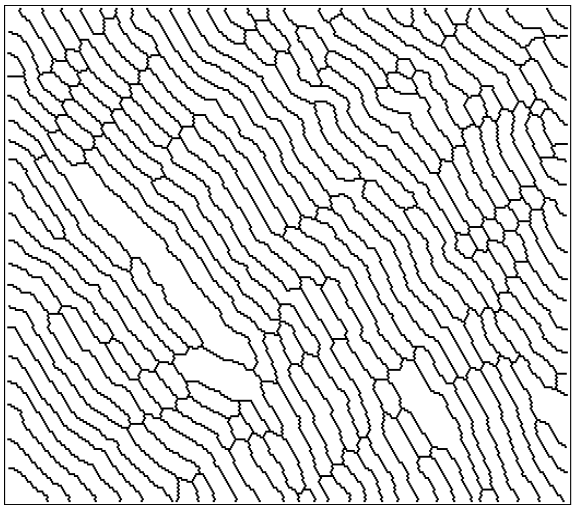
En conclusion, quels critères mettre en oeuvre sur le graphe issu du squelette par zones d'influence des lames ? Le dernier utilise pleinement la forme des lames pour déterminer quelles arêtes doivent être éliminées. En particulier, l'antisquelette revient à chercher une direction privilégiée localement, c'est-à-dire lame par lame, ce qui est souhaitable. Il semble donc bien adapté aux images d'eutectiques. Le second algorithme est plus général, car il ne s'occupe pas de la forme des faces du graphe, mais seulement des relations d'adjacence entre arêtes longues, courtes et intermédiaires. Il semble cependant ne pas introduire assez de connaissances relatives aux lames elles-mêmes.

7.6.4 Retour à l'image originale

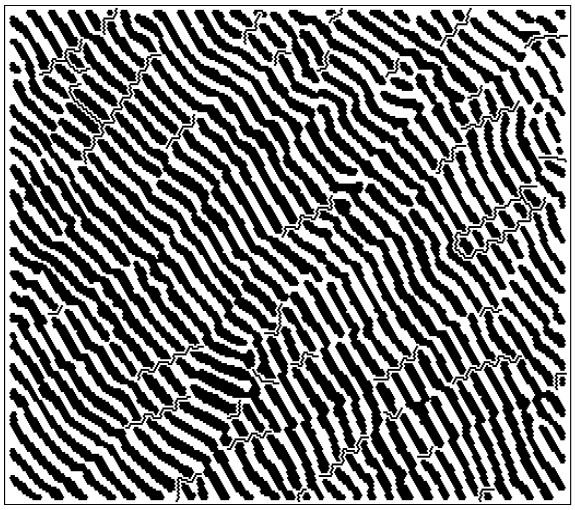
Nous venons de présenter divers algorithmes pour calculer des lignes de fracture. Comment se comportent-ils sur les images originales, sans chercher à couper les lames au niveau des défauts ? Comparons-les avec ceux de l'algorithme original. Les résultats des trois algorithmes sont présentés figure 7.38. Les performances des deux derniers sont équivalentes à celle de l'algorithme original. Cependant, notons que ces algorithmes fournissent directement des lignes et non des zones, avantage certain.

7.7 Recherche de chemins sur des fonctions particulières

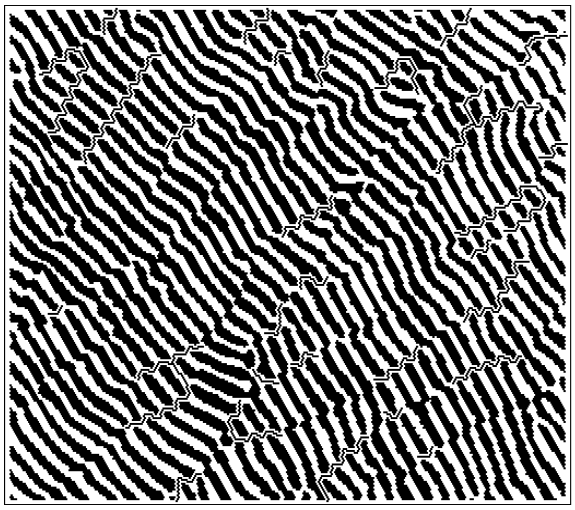
Nous avons vu comment ramener la recherche des défauts à une recherche des fractures seulement, après avoir coupé les lames au niveau des flexures. Nous allons à présent examiner une classe d'algorithmes permettant de connecter les points de forte courbure sans couper les lames, mais en utilisant l'information qu'elles possèdent. L'idée de base est de prolonger les



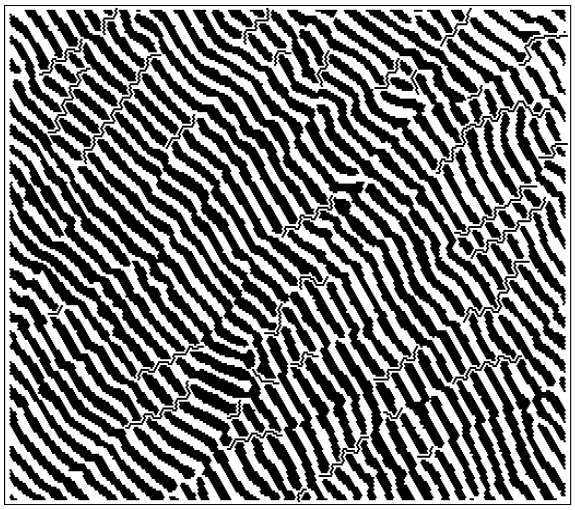
(1) : Graphe de départ



(2) : Résultat par direction des arêtes



(3) : Résultat par les arêtes adjacentes aux longues



(4) : Résultat par l'antisquelette

Figure 7.38 : Détection des lignes de fracture sur l'image originale par les trois algorithmes précédents.

points de forte courbure en des segments ou des courbes et ceci orthogonalement à la lame près de laquelle ils se trouvent.

7.7.1 Remontée vers l'amont

Plaçons-nous dans le modèle suivant : une lame est un ensemble simplement connexe, limité par une courbe C^∞.

Définition 7.4

Soit x un point de X. On appelle **amont** *de x l'ensemble des points y de X vérifiant :*

$$d(y, X^c) \;=\; d(y, x) \;+\; d(x, X^c)$$

*et l'***aval** *l'ensemble des points y de X vérifiant :*

$$d(y, X^c) \;=\; d(x, X^c) \;-\; d(x, y)$$

Soit un point x de la frontière. A cause des hypothèses que nous avons faites, l'amont de ce point est formé d'un seul segment, normal à la frontière dont l'une des extrémités est le point, l'autre un point du squelette de la particule. Considérons l'adhérence du complémentaire de la particule. L'amont de x est là encore formé d'un seul segment, dans le prolongement du premier (figure 7.39). Ainsi donc, tout point peut être remplacé par un segment orthogonal à la frontière allant d'un point du squelette à un point du squelette du fond.

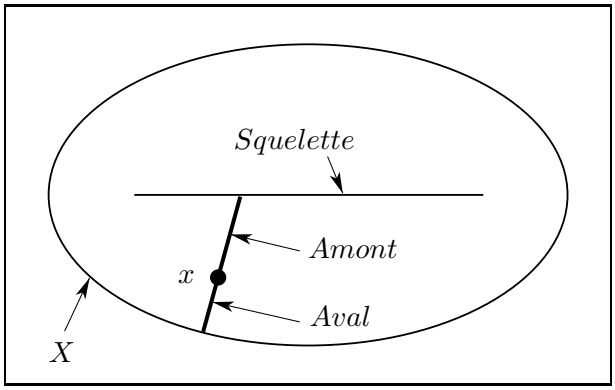


Figure 7.39 : L'amont d'un point selon la fonction distance.

Le principe de l'algorithme est donc simple. Si nous calculons la fonction distance à la frontière (qui est donc définie dans le plan tout entier), il suffit de chercher l'amont de chaque point de forte courbure. Dans le cas digital, cependant, quelques difficultés surgissent (voir [Mey88]). En effet, l'amont d'un point n'est pas un segment, mais la plupart du temps un cône d'ouverture au sommet 60 degrés. Cela est dû au fait que la métrique hexagonale est dégénérée et qu'il n'y a plus unicité de la géodésique entre deux points. Une notion d'amont

restreint a été développée pour éviter ce problème et montre comment on peut obtenir un amont d'une épaisseur au plus de deux pixels. Pourtant, une notion aussi raffinée est inutile dans notre cas, puisque l'amont d'un point aura environ la moitié de la largeur d'une lame, soit au plus trois pixels. De plus, comme nous l'avons déjà remarqué, à un seul défaut peuvent correspondre plusieurs points de forte courbure sur un même côté de la lame. Les cônes correspondant à l'amont trivial, c'est-à-dire l'ensemble des points vérifiant la définition de l'amont en munissant le plan de la métrique hexagonale, s'interpénètrent du fait de leur angle au sommet. Donc deux lignes de défaut parallèles espacées de moins de la largeur d'une lame seront confondues. Le défaut de cet algorithme est le suivant : pour qu'une ligne de défaut croise plusieurs lames, il est nécessaire qu'un point de forte courbure au moins soit présent de chaque côté de chaque lame. Cette condition n'est pas satisfaite en de nombreux endroits. Les lignes fournies ne sont donc pas toujours connexes.

Si l'on veut par exemple qu'une lame soit traversée même dans le cas où un seul point de forte courbure est présent, il faut continuer à se propager sur la fonction distance. Replaçons-nous dans le plan continu. Tout point du squelette qui n'est pas un point terminal ou multiple de ce dernier a un aval qui se décompose en exactement deux segments, l'un à droite, l'autre à gauche de la branche du squelette (figure 7.40). Ainsi donc si nous sommes parvenus à un point du squelette par une remontée vers l'amont, le chemin que nous avons emprunté correspond à l'un des deux segments formant l'aval du point du squelette. Il ne reste donc plus qu'à redescendre selon l'aval qui n'a pas encore été exploré. La technique peut d'ailleurs ne pas s'arrêter là : nous pouvons associer à un point toute une ligne polygonale. Ici pourtant, il est nécessaire de ne considérer que l'amont restreint pour obtenir une ligne d'épaisseur deux au plus. En effet, l'utilisation de l'amont trivial conduit à une ligne qui forme en fait un cône et ne signifie plus rien au delà d'une dizaine de pixels (figure 7.41).

Algorithme 8 : Remontée vers l'amont

D : Fonction distance à la frontière de X.
P : Ensemble des points de forte courbure.

- Pour n de 2 à $\max D$ faire :
  $$Y \leftarrow Y \cup ((Y \oplus H \times n) == D)$$

Les résultats obtenus par la technique de suivi d'amont et d'aval sont présentés figure 7.42.

7.7.2 Les courbes de niveau de la fonction de propagation

Nous avons vu que de nombreuses propriétés de la fonction distance pouvaient se transposer à la fonction de propagation. Montrons comment utiliser cette dernière pour se propager orthogonalement aux lames. Pour cela, plaçons nous dans le modèle suivant : supposons qu'une lame puisse se modéliser par un rectangle terminé aux deux bouts par un triangle rectangle isocèle. Soient s_1 et s_2 les deux sommets extrêmes de ces deux triangles (figure 7.43). Si la lame est suffisamment longue, la fonction de propagation associée est le maximum de la distance à s_1 et

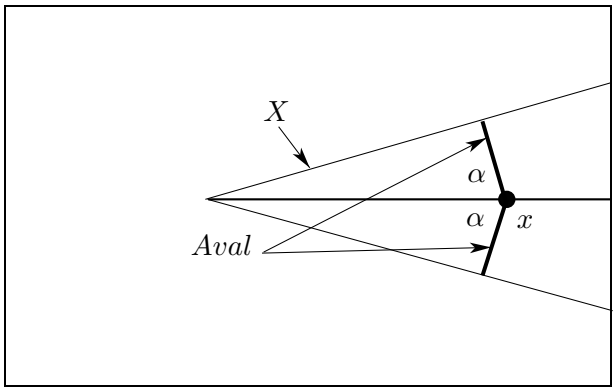


Figure 7.40 : L'aval d'un point du squelette.

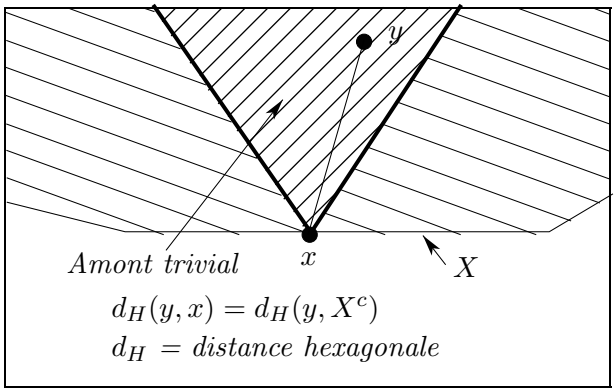
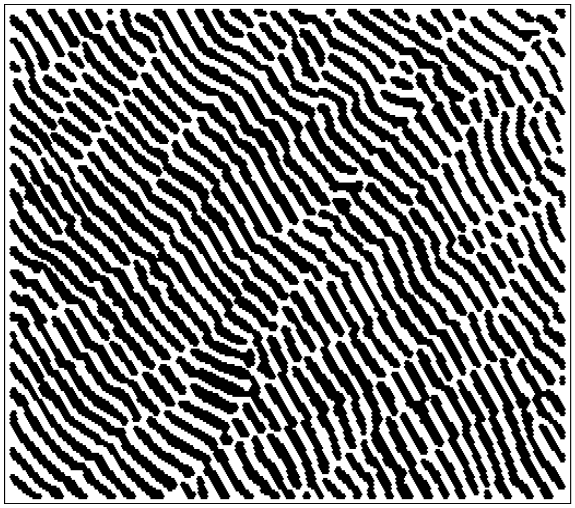
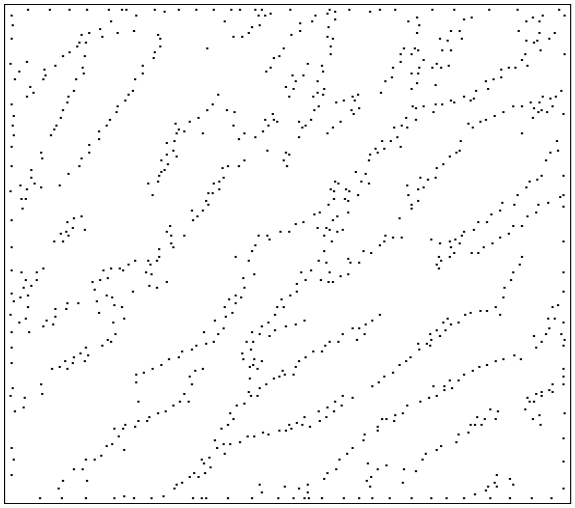


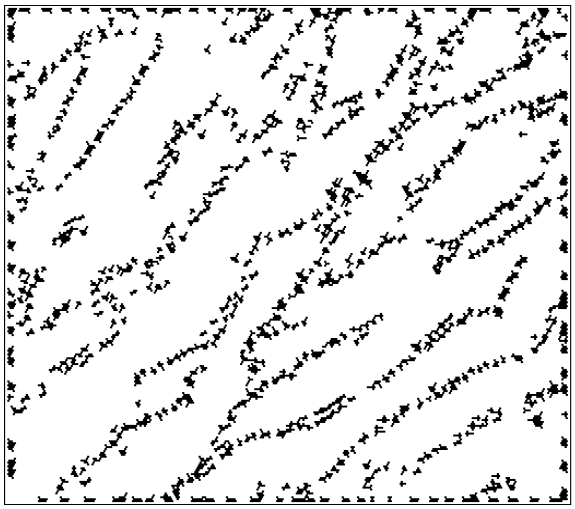
Figure 7.41 : Remontée vers l'amont triviale et effet de cône.



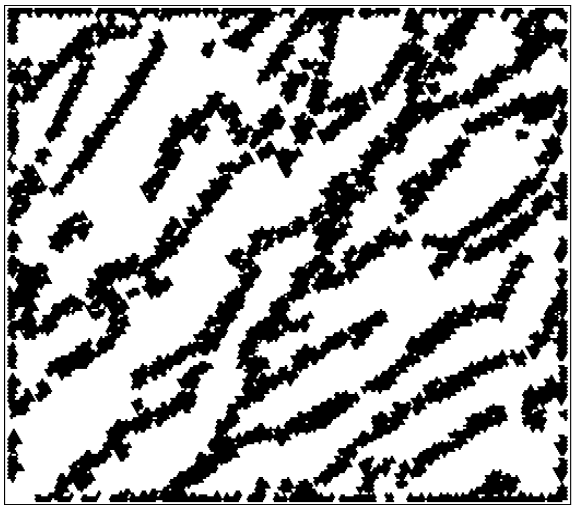
(1) : Image originale



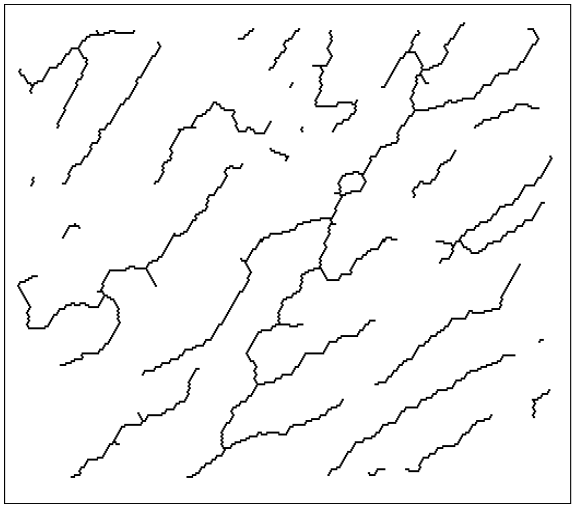
(2) : Points de forte courbure



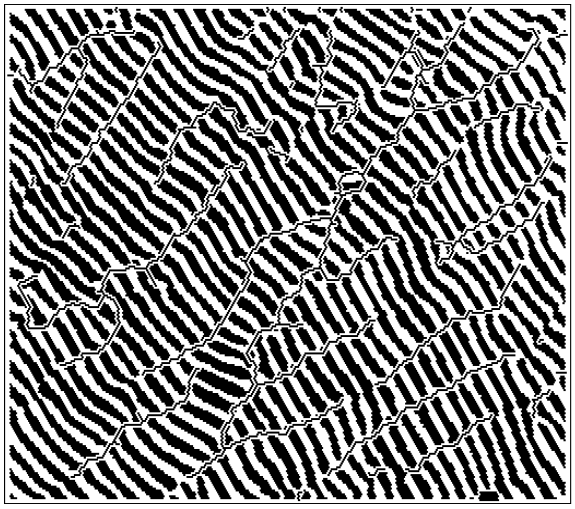
(3) : Remontée vers l'amont



(4) : Redescente vers l'aval



(5) : Squelettisation et ébarbulage de (4)



(6) : Résultat

Figure 7.42 : Résultat par la remontée vers l'amont.

de celle à s_2. L'antisquelette se réduit au segment qui relie les milieux des grands côtés du rectangle. Plaçons-nous dans l'une des régions limitées par l'antisquelette, disons celle qui contient s_1. La fonction de propagation est, sur cette région, la distance à s_2. Une courbe de niveau est donc un arc de cercle centré en s_2, c'est-à-dire un arc très plat puisque s_2 est relativement loin. Donc pour se propager orthogonalement à la lame, il suffit de suivre une courbe de niveau de la fonction de propagation. Ces courbes de niveau sont bien d'épaisseur un pixel, donc le problème du cône généré par la fonction distance disparaît.

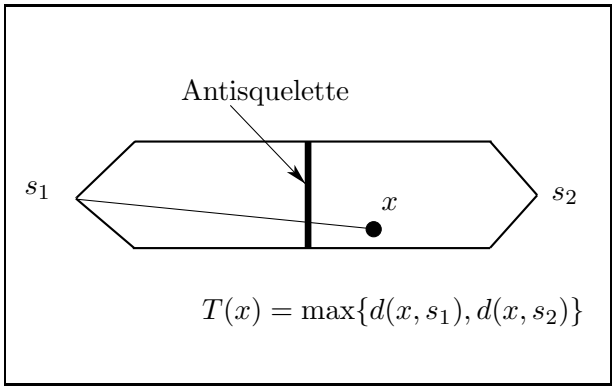


Figure 7.43 : La fonction de propagation d'un rectangle terminé par deux triangles.

Comment se propager sur le fond des lames ? Le problème est sérieux, car le complémentaire des lames n'est pas simplement connexe ! Pire, il est (en théorie du moins) non compact. Pourtant, si l'on examine ce qui fait fonctionner l'algorithme, on se rend compte qu'il s'agit simplement du fait que l'on utilise une boule géodésique centrée loin du point que l'on étudie. Or nous avons vu comment calculer de manière efficace des boules géodésiques. Quels centres choisir ? Par exemple les quatre coins de l'image donneront des résultats satisfaisants. Il suffit maintenant de suivre les courbes de niveau de cette pseudo-fonction de propagation. Les zones de défaut sont alors mises en évidence en agglomérant les morceaux de courbe obtenus, par une dilatation de taille un. Ce paramètre correspond à la finesse avec laquelle on veut distinguer deux lignes de défaut parallèles.

Les conditions pour qu'une ligne de défaut soit continue sont les suivantes : si nous considérons les points successifs des frontières de lames traversées, une ligne de défaut sera interrompue si et seulement si deux points consécutifs n'ont pas été détectés comme points de forte courbure.

Notons que le suivi de lignes ne devrait s'appliquer qu'aux lignes de flexion. Or l'expérience montre que même au niveau des lignes de fracture, les résultats sont bons. Pourquoi ? C'est parce qu'au niveau des extrémités, les points de forte courbure sont proches les uns des autres. Le suivi n'a pas grand sens et se limite en général à un voisinage restreint du point (de l'ordre de deux pixels). La dilatation finale de taille un a pour effet de connecter ces morceaux de courbe très proches.

Algorithme 9 : suivi des lignes de niveau de la fonction de propagation

X : Ensemble des lames (1).
P : ensemble des points de forte courbure (2).
$(a_i)_{i=0}^3$: les quatre coins de l'image.
Y : résultat (figure 7.44).

- $T \leftarrow Propagation\ (X))$
- Pour i de 0 à 3 faire :

  $$D_i \leftarrow Distance_{X^c}\ (a_i)$$
- $D \leftarrow \max(D_0, D_1, D_2, D_3, T)$ (3)
- $P \leftarrow P \oplus H$
- $Y \leftarrow Plateau\ (D, P)$ (4)
- Mise en forme : fermeture de taille 1, squelettisation, ébarbulage de taille 5 : (5) et (6)

7.8 Encore une solution

Avant de clore l'étude des eutectiques lamellaires examinons une solution évoquée par Ch. Lantuéjoul pour détecter les lignes de fracture.

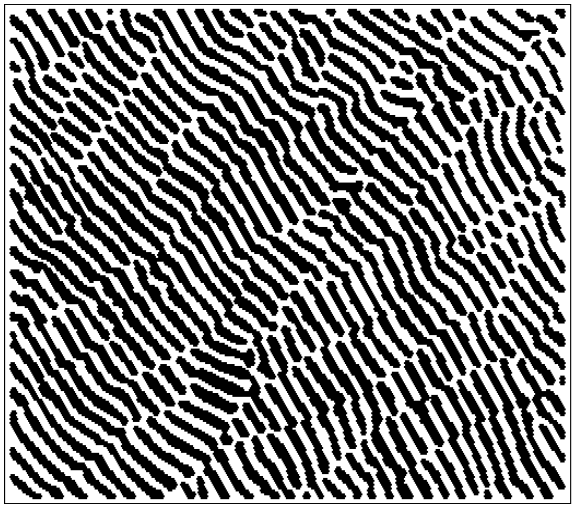
Définition : zones de fracture

Les zones de fracture sont les zones proches de trois particules à la fois.

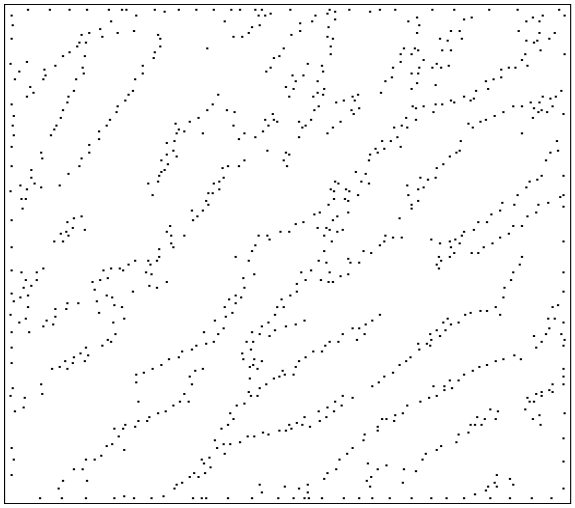
Intuitivement, il s'agit de caractériser les endroits où trois "couloirs" correspondant au complémentaire de lames se rencontrent.

L'algorithme serait donc de calculer la fonction distance au troisième voisin (distance non géodésique par exemple) et de seuiller cette fonction à une valeur correspondant à la moitié de la largeur des lames. Les résultats sont présentés figure 7.45. La force de l'algorithme réside dans sa très grande simplicité d'énoncé. Le calcul effectif de la fonction est par contre long et nous l'avons programmé de manière directe : pour chaque particule, nous calculons la fonction distance, puis nous conservons pour chaque pixel les trois distances les plus courtes. Il est donc nécessaire de calculer environ 400 fonctions distance !

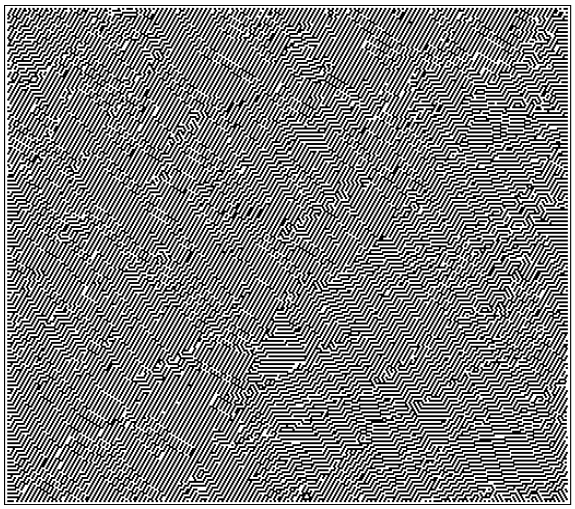
Comment situer cet algorithme par rapport aux précédents ? Montrons que sous des hypothèses peu restrictives, cet algorithme revient à ne conserver que les arêtes du graphe présenté section 7.6.2 d'une longueur inférieure à un seuil. Reprenons notre graphe et supposons que chaque arête soit modélisée par un segment de droite. Supposons de plus que ce graphe n'ait



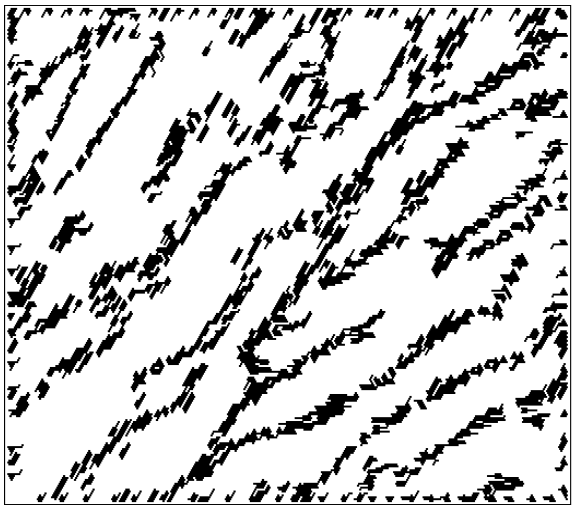
(1) : Image originale



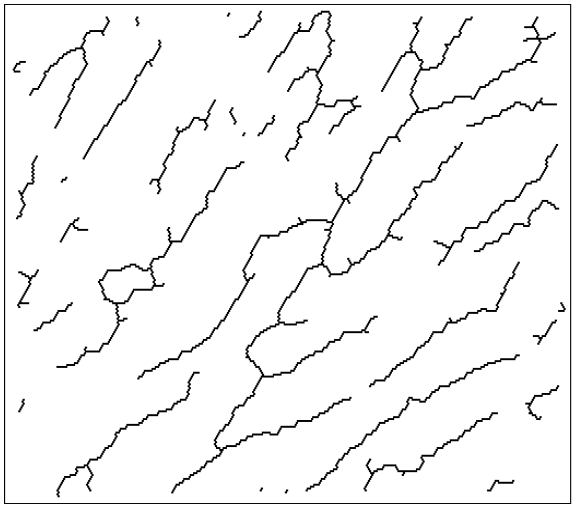
(2) : Points de forte courbure



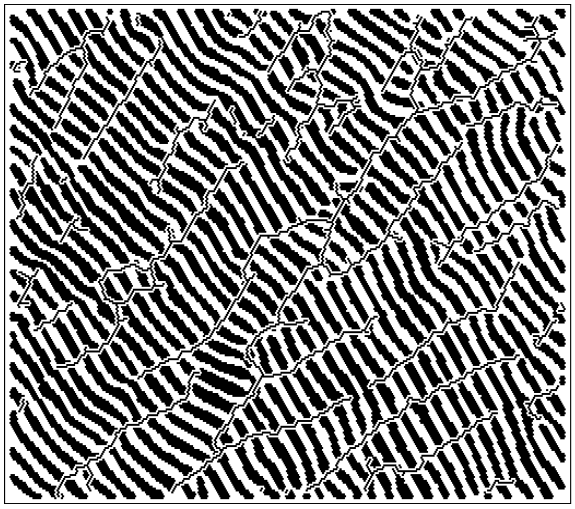
(3) : Courbes de niveau de la propagation



(4) : Suivi des courbes de niveau

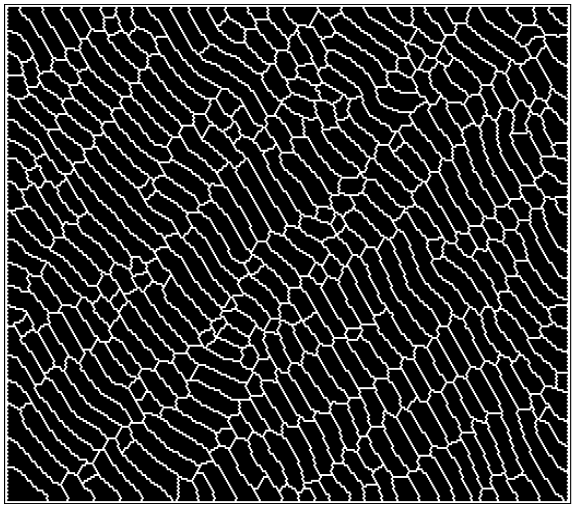


(5) : Fermeture, squelettisation et ébarbulage

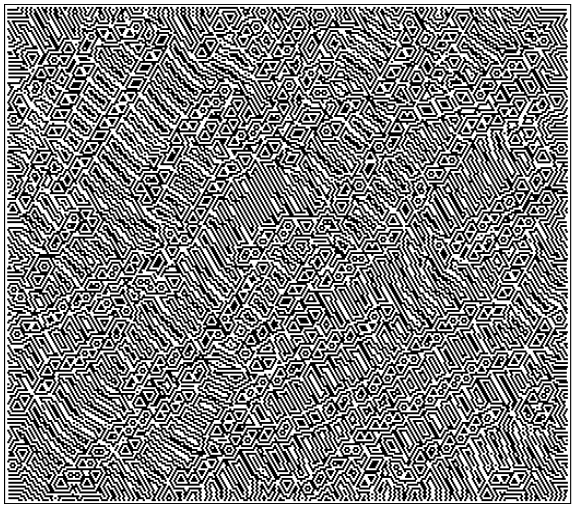


(6) : Résultat

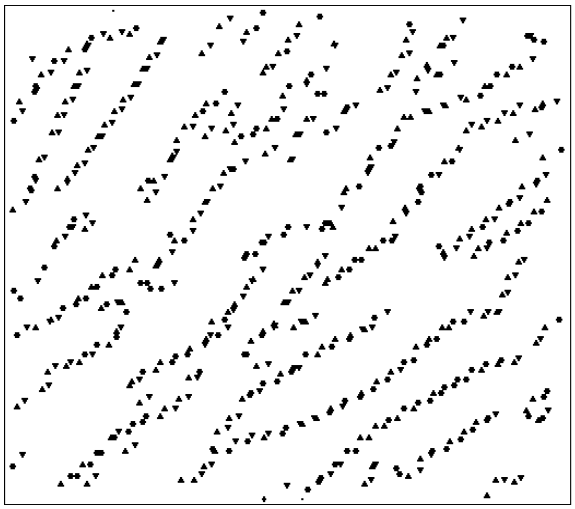
Figure 7.44 : Résultat du suivi des lignes de niveau de la fonction de propagation.



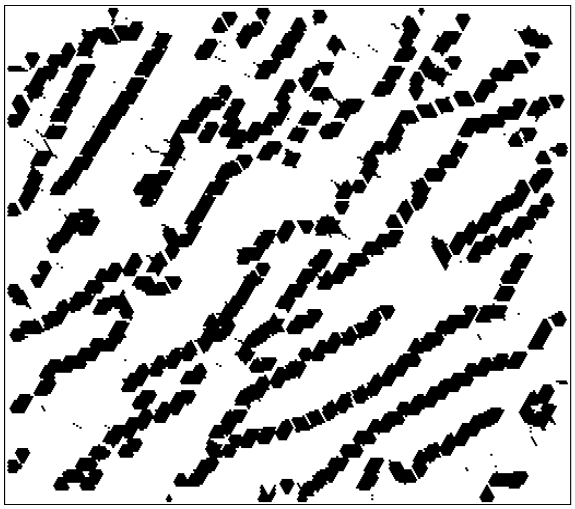
(1) : Faces du graphe original



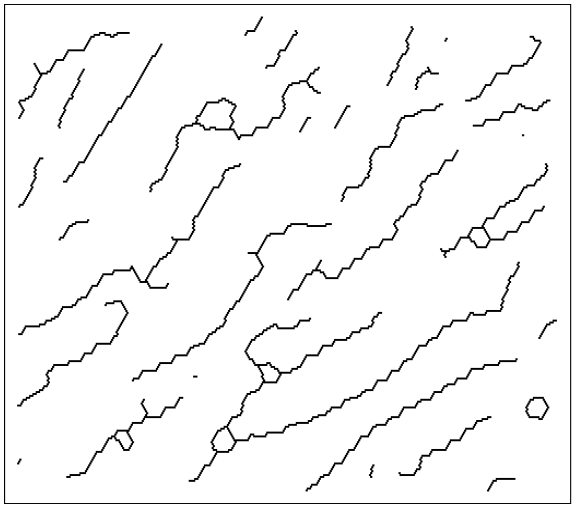
(2) : Courbes de niveau de la distance au troisième voisin



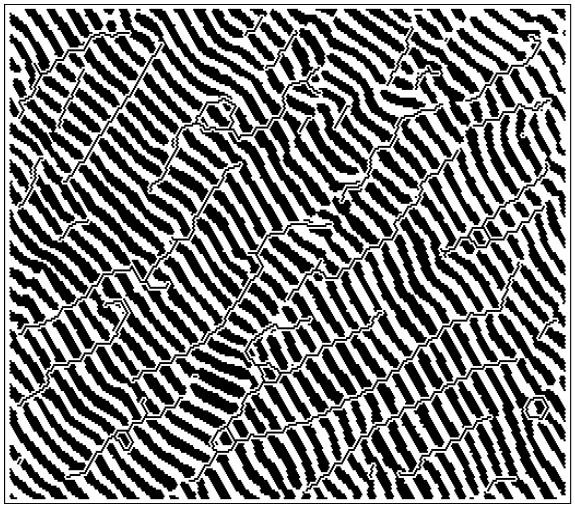
(3) : Seuillage (0-3)



(4) : Seuillage (0-5)



(5) : mise en forme des lignes



(6) : Résultat

Figure 7.45 : La fonction distance au troisième voisin.

que des sommets d'ordre trois (ce qui est toujours possible). Enfin supposons qu'en un sommet, les trois faces adjacentes présentent toutes trois des angles obtus (ce qui est bien le cas pour une structure en nid d'abeilles). Ces trois hypothèses sont bien vérifiées par les graphes expérimentaux. Plaçons-nous en un point x d'une arête du graphe. Les deux faces les plus proches sont les faces de part et d'autre de l'arête, à distance 0. Soit un point y de l'adhérence de la troisième particule la plus proche réalisant le minimum et une géodésique de x à y, c'est-à-dire un chemin de x à y dans le graphe. Ce chemin ne peut être inclus dans l'arête contenant x, car il n'est adjacent qu'à deux particules. Donc il contient au moins un point triple (sommet du graphe). Or en un point triple se rencontrent trois particules. Donc si z est le point triple le plus proche de x sur le chemin, z appartient à une troisième particule et est plus proche de x que ne l'est y. Donc $y = z$ est le sommet du graphe le plus proche de x, c'est-à-dire une des deux extrémités de l'arête contenant x. Donc lorsque l'on seuille la fonction distance au troisième voisin, seules les arêtes de longueur inférieure à deux fois ce seuil seront conservées. La distance au troisième voisin est donc un simple critère de longueur ! Nous avons déjà discuté ce critère.

En somme cette approche n'apporte rien de neuf si ce n'est un autre éclairage sur un algorithme connu. De plus sa complexité le rend inapplicable dans la pratique.

7.9 Quel algorithme ?

Au terme de cette étude il est nécessaire de prendre position pour un seul algorithme qui sera celui que nous utiliserons. Ce choix sera bien sûr subjectif, puisque nous avons montré qu'il n'est pas toujours possible de classer des algorithmes. Cependant, j'aurais une préférence pour l'algorithme 4 suivi de l'algorithme 7, puisqu'ils fournissent des lignes de défaut sans barbule et incorporent des connaissances relatives à la forme des lames, en estimant leur direction localement et non globalement.

Nous avons voulu montrer dans cette partie que résoudre un problème par la morphologie mathématique recouvre un processus dont la partie émergée est une suite de transformations, le programme. De nombreuses voies s'offrent en général dont la plupart débouche sur une solution acceptable. La comparaison des algorithmes doit alors s'effectuer plus sur leur contenu, c'est-à-dire sur les connaissances mises en jeu que sur leurs résultats. C'est le seul moyen de comprendre l'échec de certaines procédures et de corriger leurs défauts. Bien sûr, nous sommes loin d'avoir épuisé le problème soulevé par les eutectiques lamellaires, mais nous espérons avoir montré qu'il ne se réduisent pas à une page comme on le voit habituellement [Ser82].

Pour terminer, remarquons trois paradoxes qui se dégagent de ce qui précède :

- Un algorithme approximatif peut donner de très bons résultats, comme le montre la section consacrée aux recherches de chemins sur des fonctions particulières.
- Un algorithme correspondant à une définition précise peut donner des résultats médiocres : substitution dans l'algorithme original de la recherche des extrémités des particules au moyen des points terminaux du squelette par les maxima régionaux de la fonction de propagation.
- Ce n'est pas ce qui est le plus évident sur l'image qui sert. Pour s'en convaincre, il suffit de lire la section consacrée aux procédures de connexion de points a priori, qui ne font pas intervenir de relations géométriques entre les lames.

7.10 Définitions et algorithmes utilisés

H Hexagone élémentaire de la trame.

Squelette (X) Squelette de X. Amincissement de X, image binaire, par l'élément structurant L.

Zones d'influence (P) Zones d'influence de P. P est une image binaire. Le résultat est une image numérique où chaque niveau de gris correspond à la zone d'influence d'une composante connexe de P. Cette image présente donc autant de niveaux de gris que P de composantes connexes.

Skiz (P) (Squelette par zones d'influence) P est une image binaire. Le résultat est l'ensemble des points équidistants de deux composantes connexes distinctes de P. Pour éviter les problèmes de la distance hexagonale (cône amont), nous calculons *Skiz* (P) ainsi : il suffit d'amincir (*Zones d'influence* $(P) \oplus H) \neq$ *Zones d'influence* (P). Le résultat de cet algorithme est une bonne approximation du *Skiz* (P) réel.

Max régional (X) Maxima régionaux de l'image numérique X. C, ensemble connexe binaire, est un maximum régional si :

- sur C, X est une constante v.
- sur $(C \oplus H) \setminus C$ (frontière externe de C), X est strictement inférieure à v.

Plateau (X, P) Plateaux de X contenant P. Un plateau de l'image numérique X est une partie connexe maximale C, sur laquelle X est constante. Les plateaux de X forment une partition de l'image. *Plateau* (X, P) est l'union des plateaux de X qui contiennent au moins un point de P.

Distance (X) Fonction distance à X, image binaire. Le résultat est une image numérique représentant la distance hexagonale à X.

Distance$_X$ (Y) Fonction distance géodésique dans X à Y. Le résultat est une image numérique nulle en dehors de Y et affectant à chaque pixel la distance géodésique selon Y à X.

Recons (X, Y) Reconstruction de X dans Y, toutes deux images binaires. Le résultat est une image binaire contenant toutes les composantes connexes de Y contenant au moins un point de X.

Triple (X) Points triples de X, squelette d'épaisseur unité.

Terminal (X) Points terminaux de X, squelette d'épaisseur unité.

Ebarb (X, n) Ebarbulage de taille n de X, squelette d'épaisseur unité. Il suffit d'itérer n fois $X \setminus$ *Terminal* (X).

Propagation (X) Fonction de propagation de X, image binaire ne contenant que des composantes simplement connexes.

Amanci$_X$ (Y) Amincissement de Y conditionnellement à X, c'est-à-dire que l'on calcule le squelette de Y dans la métrique géodésique de X^c. L'algorithme de calcul consiste, à chaque étape de l'amincissement, à faire l'union avec X :

$$\{(Y \cup X) \bigcirc L\}^{\infty}$$

où L est l'élément structurant classique de squelettisation, $\bigcirc$ l'amincissement et $\{\cdot\}^{\infty}$ l'itération jusqu'à convergence.

Epaissi$_X$ (Y) Epaississement de Y conditionnellement à X (ou dans X). L'algorithme de calcul consiste, à chaque étape de l'épaississement à faire l'intersection avec X :

$$\{(Y \cap X) \bigcirc L\}^{\infty}$$

$A == B$ Comparaison de deux images ou d'une image et d'une constante. Le résultat est une image binaire dont les pixels à 1 correspondent aux pixels où la condition est vérifiée.

Partie V

Morphologie mathématique et intelligence artificielle

Chapitre 8

Morphologie mathématique et intelligence artificielle

8.1 Introduction

L'analyse des images et leur interprétation regroupent deux classes principales et fondamentales de techniques. La première, celle des *traitements numériques* permet, après amélioration des images, d'en extraire des caractéristiques appelées *primitives* telles que lignes de fort contraste, des segments, des angles ou des taches de faibles dimensions. Les algorithmes associés dépendent peu de la nature du problème à traiter. La seconde comprend les méthodes de *raisonnement* fondées sur des connaissances explicites et leur *représentation*, connaissances liées au problème posé, au domaine d'application ou à la technique utilisée. Les techniques du premier type sont regroupées sous le terme général de reconnaissance des formes, les secondes sous le terme d'intelligence artificielle. [Pen87] illustre bien cette approche.

8.1.1 Reconnaissance des formes

En reconnaissance des formes, l'identification d'un objet se fait classiquement par la mise en correspondance des primitives obtenues avec une base de références. Pour faire face à la variabilité de l'apparence d'un même objet, deux grandes classes de techniques ont été développées : les méthodes statistiques (calcul de "distances" à des objets de référence ...) [Ba73] et les méthodes syntaxiques [Fu74, Mic84] où l'ensemble des paramètres est assimilé à un mot que l'on analyse au moyen d'une grammaire. Toutefois, face à la complexité des problèmes posés, les techniques algorithmiques de la reconnaissance des formes s'avèrent insuffisantes. L'une des pierres d'achoppement est précisément l'utilisation à bon escient, c'est-à-dire "raisonnée", des connaissances.

[0] Une traduction anglaise de ce chapitre doit paraître dans *Signal Processing*

8.1.2 Intelligence artificielle

Soulignons avant tout que la notion de connaissance ne se confond pas avec celle d'information : un information ne devient connaissance que s'il existe en plus des outils pour la retrouver et la manipuler. En d'autres termes, il faut *coder* les informations dans un formalisme adéquat pour être en mesure de faire des *inférences* sur ces dernières.

En intelligence artificielle, trois grandes familles de techniques sont nées pour répondre à ce besoin : les systèmes à base de règles, les langages orientés objets et les réseaux sémantiques, la combinaison de plusieurs pouvant se trouver dans un même système. [Vig86] donne un aperçu complet de ces techniques et une abondante bibliographie à leur sujet. Présentons brièvement quelques systèmes utilisant les deux premiers types de techniques.

8.1.2.1 Systèmes à base de règles

Une règle répond au format général

$$\underbrace{\text{A}}_{condition} \Longrightarrow \underbrace{\text{B}}_{action}$$

et peut être utilisée de quatre manières différentes : A vrai permet de déduire que B est vrai, ou, pour vérifier B, il suffit de chercher à vérifier A, et de même avec (non B) $\Rightarrow$ (non A). Ce sont les caractéristiques du moteur d'inférences qui déterminent les mécanismes licites d'exploitation des règles.

Par exemple, le langage PROLOG [CM85] utilise exclusivement le chaînage arrière comme mécanisme d'inférences.

Les règles permettent une certaine modularité, i.e. le codage d'"atomes" de connaissance qui peuvent être modifiés de façon quasi indépendante. Contrairement aux approches procédurales où les connaissances sont incluses dans le flot du programme, cette approche les met à plat sous une forme explicite, peut-être sous une forme trop peu structurée.

Citons parmi de nombreuses réalisations :

- Un système expert de segmentation d'images de bas niveau [NL84]. Il montre en particulier comment utiliser conjointement plusieurs techniques différentes (Split & merge, séparation d'histogrammes, gradient) pour éviter les défauts inhérents à chacune d'elles. La connaissance est codée exclusivement sous forme de règles de production indépendantes de tout domaine d'application. De plus, le système de contrôle permettant de focaliser la recherche sur des données particulières (régions, lignes), et de choisir le groupe de règles de segmentation adéquat, s'exprime lui aussi sous forme de règles.

- Un système expert de segmentation et d'interprétation d'images sismiques [ZS87]. Les règles indiquent comment regrouper des pixels. Les résultats obtenus sont supérieurs à ceux obtenus par des méthodes algorithmiques.

8.1.2.2 Langages objets

La notion de représentation centrée objet a été mise en valeur par Minsky [Min75] et permet de structurer les connaissances sous forme de *frames* décrivant un objet ou une situation de façon stéréotypée à la manière d'un *Record* en Pascal. Une organisation hiérarchique des frames permet le mécanisme d'héritage - le fils possède les connaissances de son père en plus des siennes propres - et évite ainsi la duplication des connaissances. A ces frames sont associées des *méthodes*, procédures qui déterminent le "comportement" de ces objets. Des langages, parmi lesques Mering [Fer84] et Ceyx, extension de Le_Lisp de l'Inria, ont été développés pour programmer ce type de notions.

Notons que les frames sans notion de méthodes ont été utilisés avec succès dans le système Acronym [Bro81] pour stocker des modèles tridimensionnels d'objets sous forme de cônes généralisés, comme par exemple des modèles d'avions ou de pièces industrielles.

8.2 Les primitives morphologiques

8.2.1 Place de la morphologie mathématique en analyse d'images

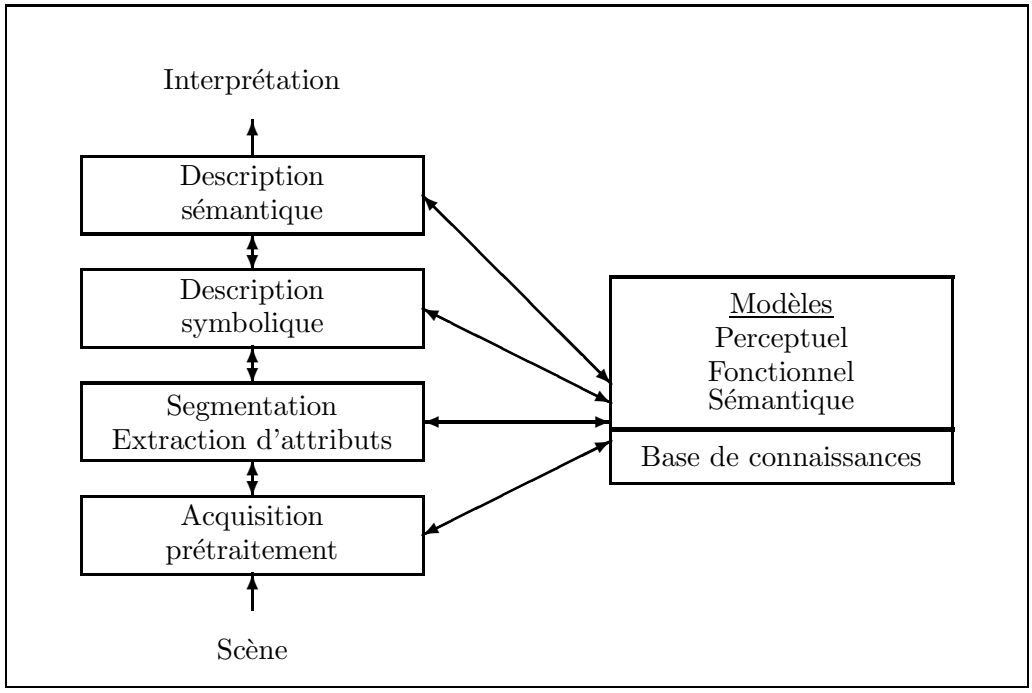


Figure 8.1 : Principe d'un système de vision par ordinateur.

La figure 8.1 présente le schéma de principe généralement admis pour un système de vision artificielle [Hat87]. Lorsque l'on parcourt les modules de gauche de bas en haut, la scène étudiée est transformée progressivement en des entités codées par des représentations d'abstraction

croissante. Citons quelques-unes de ces représentations de niveau de plus en plus élevé :

- le tableau de pixels sans aucune structure particulière,
- le chaînage des pixels des contours de l'image,
- l'approximation polygonale de ces chaînes de contours,
- la triangulation de Delaunay contrainte de ces segments,

Malgré sa généralisation à des graphes [1], la morphologie mathématique [Mat75, Ser82, CC85, Ser88] n'a pas cherché à opérer sur d'autres représentations que les tableaux de pixels : elle n'en a pas eu besoin. Les deux études (parmi bien d'autres) de S. Beucher [Beu85] sur le trafic routier et celle de I. Bloch [BP87] des tumeurs cérébrales - et plus généralement celles de F. Prêteux en imagerie médicale [Pr87] - montrent que l'on accède à la description symbolique sans utiliser autre chose que des pixels. A l'abstraction croissante correspond, en morphologie mathématique, une succession d'images contenant de moins en moins d'informations inutiles, inutiles au sens du but fixé, et mettant peu à peu en évidence les objets recherchés. Pour les images de traffic routier, il s'agira par exemple d'un pixel marquant chaque voiture à l'avant, pour les images de cerveau, d'un contour sous forme de pixels non chaînés de la lésion.

Les modules de droite de la figure 8.1 symbolisent les modèles et connaissances sous-jacents, qui doivent intervenir selon J.P. Haton à tous les niveaux. Le terme de modèle n'apparait que peu en morphologie mathématique. C'est qu'en fait le modèle est absent des programmes de reconnaissance, mais non de l'esprit de leurs concepteurs. Une justification précise de l'emploi de telle ou telle transformation à l'aide de critères relevant entre autres du protocole d'acquisition ou des invariants du système observé et de son organisation est souvent donnée. On pourra consulter [Pr87] et [Ben87]. Ce dernier montre très bien que pour détecter des réseaux hydrographiques sur photos satellite, il est nécessaire d'inclure des connaissances de type formel et logique sur la topographie de tels réseaux. L'ensemble de ces critères forme bien un modèle, mais dans un sens assez différent de celui où l'on le prend habituellement. Ce modèle sous sa forme explicite est totalement absent du programme, qui n'a pas d'autres connaissances que l'enchaînement des transformations qui représente en quelque sorte la compilation de la partie supposée utile du modèle.

Avant de montrer comment la notion de critères sous-tendant un modèle ainsi que des connaissances morphologiques peuvent être introduites explicitement dans un système de programmation automatique, structurons la boîte à outils du morphologiste, c'est-à-dire l'ensemble des transformations mises à sa disposition.

8.2.2 La boîte à outil des primitives morphologiques

Distinguons deux points de vue selon lesquels nous pouvons examiner les primitives morphologiques. Le premier consiste en leur contenu mathématique ou algorithmique : un filtre est toute opération croissante et idempotente, ou, un chapeau haut-de-forme est le résidu par une ouverture. Le deuxième nous renseigne sur l'effet que peut provoquer la primitive quand elle est

[1] Certaines transformations morphologiques ont pu être utilisées en robotique sur des représentations de type polygones pour construire l'espace des positions qu'un robot peut atteindre [LPW79]. Cette approche est cependant hors de notre propos, puisqu'elle ne correspond pas à de l'analyse d'images.

appliquée à un image. Une ouverture par un disque élimine les particules d'épaisseur inférieure au diamètre du disque. De plus elle lisse les contours des objets.

Selon le premier point de vue, nous parlerons de primitive d'opérateur ou tout simplement de transformation morphologique, selon le second, de primitive d'image, d'effet, de critère ou de caractéristique.

L'une des originalités de la morphologie mathématique est de fournir non pas une collection de primitives disparates, mais une véritable construction, au moyen de principes mathématiques (dualité, opérations booléennes, composition des applications ...) qui permet de classer les primitives selon leurs effets parallèlement à leur complexité. De manière imagée, on peut représenter ces primitives sous forme d'une pyramide renversée : plus on s'élève dans celle-ci, plus les primitives ont des effets spécifiques et une complexité accrue (figure 8.2).

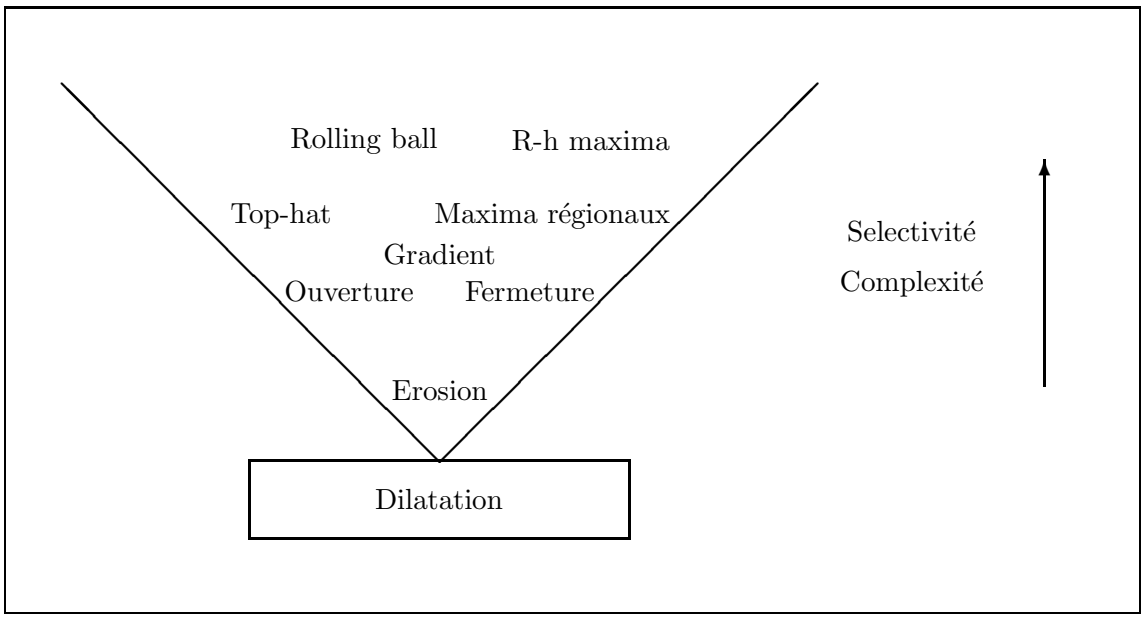


Figure 8.2 : L'édifice des transformations morphologiques.

Il est possible de mettre à la base de cette pyramide un ensemble de transformations qui toutes permettront de construire les mêmes primitives plus complexes que nous appellerons primitives d'ordre supérieur. Le choix de la transformation de base est donc aussi arbitraire que le choix des axiomes dans les constructions mathématiques usuelles (la géométrie par exemple). Par convention, c'est la dilatation par un compact que nous choisirons.

A partir des principes mathématiques proposés, il nous est possible de construire toutes les transformations usuelles telles que ouverture algébrique, squelette ... Notons que la construction mathématique assure aux primitives des propriétés fortes telles que l'idempotence, la croissance ... qui sont utiles en particulier lorsque l'on cherche à les itérer.

En outre, ces propriétés mathématiques garantissent la complétude de l'édifice. Par exemple, toutes les transformations croissantes, idempotentes et antiextensives (i.e. les ouvertures

algébriques) sont présentes : il est inutile de chercher à les construire par d'autres moyens.

Un tel édifice ne saurait être établi une fois pour toutes ; il est bien plus un ensemble évolutif qui s'enrichit en fonction des besoins de l'analyse d'images et des problèmes spécifiques qui lui sont posés, comme nous allons le voir en présentant deux primitives d'ordre supérieur créées pour traduire des critères spécifiques sur les images à teinte de gris.

8.2.2.1 R-h maxima et R-h minima

Cette primitive a été développée pour rendre robuste et sélective la recherche de maxima régionaux [SP86]. En effet de nombreux objets se présentent sous forme de taches claires (maxima régionaux) sur les images. Dans le cas où ces dernières sont peu contrastées avec un fond hétérogène, les techniques à base de gradient ou de seuillage sont généralement inefficaces. Quant aux maxima régionaux, ils sont inexploitables en raison d'une part des nombreux maxima parasites et d'autre part de leur taille pratiquement ponctuelle.

Le principe des r-h maxima est de ne garder que les maxima présentant dans leur voisinage un contraste suffisant : tout autour d'eux, à une distance r, le niveau de gris de l'image doit être diminué d'au moins h.

La formule calculatoire, permettant un traitement en parallèle sur tous les maxima, est donnée par (voir figure 8.3) :

$$\begin{array}{lcl} I_1 & = & \text{image originale} \\ I_2 & = & \text{maxima régionaux}(I_1) \\ I_3 & = & (\text{dilatation}(I_2 - h) \cap I_1)^r \\ I_4 & = & \min(1, I_1 - I_3) \\ I_5 & = & 1 - \min(1, I_3) \\ I_6 & = & I_1 \times (I_4 \setminus (\text{reconstruction de } I_4 \text{ par } I_5)) \end{array}$$

Quelques propriétés mathématiques de la primitive r-h maximum sont :

- anti-extensivité et idempotence (mais non pas croissance),
- croissance avec r,
- décroissance avec h.

L'algorithme a été utilisé dans plusieurs applications et a démontré sa robustesse [SP86].

8.2.2.2 Résidus par ouverture : le chapeau haut-de-forme et le rolling ball

Avec cette primitive, ce sont les effets liés à l'utilisation de divers types d'éléments structurants qui seront abordés.

Le chapeau haut-de-forme [Mey79] employé très couramment en morphologie mathématique peut être défini en termes fonctionnels comme suit : c'est la différence entre l'image initiale et son ouvert.

Appliqué avec des éléments structurants plans, il permet de caractériser des objets relativement contrastés qui disparaissent par ouverture :

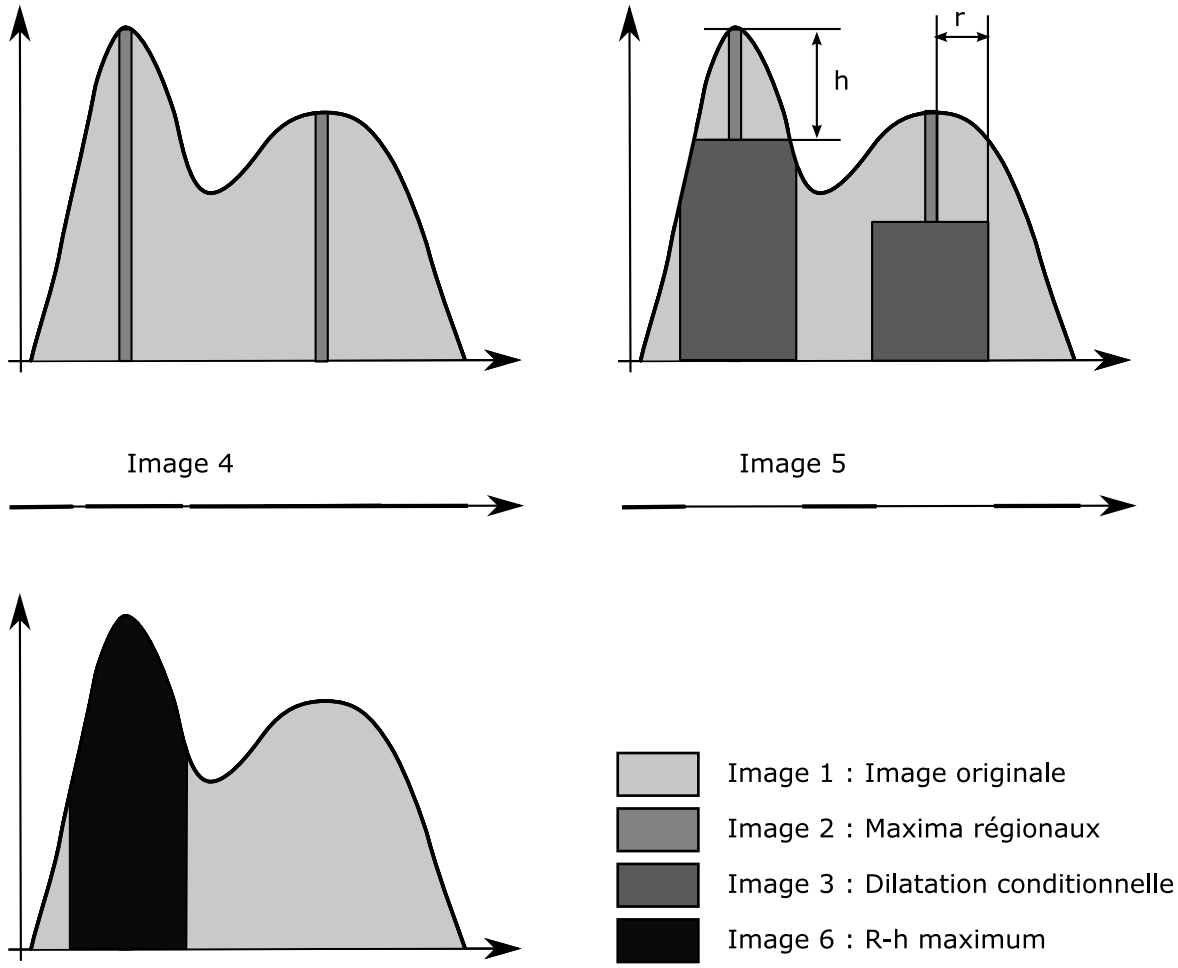


Figure 8.3 : R-h maximum.

- objets de faible épaisseur (ouverture circulaire),
- petits objets ronds (réunion d'ouvertures linéaires),
- objets très ronds (amincissement suivi d'un ébarbulage (un nombre donné de fois) et d'une reconstruction à teintes de gris). On se persuadera que cette dernière suite de transformations est bien une ouverture.

Si nous prenons à présent des éléments structurants tridimensionnels tels que des rhombododécaèdres, il est possible d'accéder à une nouvelle information : une brusque variation de pente si on assimile l'image à teintes de gris à une surface de $\mathbb{R}^3$ (figure 8.4). Notons bien qu'une telle information est inaccessible par n'importe quel élément structurant plan. En effet, seules les informations invariantes par anamorphose sont accessibles par ces derniers. Or une anamorphose convenable peut changer le sens d'une angulosité. Dans $\mathbb{R}$ par exemple, une angulosité tournée vers le bas peut se traduire par $f'(x)_g > f'(x)_d > 0$. Après l'anamorphose $\mathcal{A}$ il est possible d'avoir $0 < \mathcal{A}(f)'(x)_g < \mathcal{A}(f)'(x)_d$, où $f'(x)_g$ est la dérivée à gauche au point x de f et $f'(x)_d$ celle à droite.

Cette primitive a été utilisée avec succès pour extraire des contours de lésions cérébrales en I.R.M. [BP87]. Ces deux transformations montrent bien le parallèle qui existe entre la construction mathématique des primitives d'ordre supérieur et leurs effets hautement spécifiques sur les images. Malheureusement, il n'y a pas de correspondance bi-univoque entre ces deux aspects. Le *rolling ball* par exemple a deux effets : il caractérise les ruptures de pente et se comporte comme un chapeau haut-de-forme classique, effets qui peuvent être antagonistes dans certains cas. Réciproquement, plusieurs algorithmes ont été développés pour extraire les extrémités des particules, les maxima régionaux de la fonction de propagation ou les extrémités du squelette.

Ecrire un programme d'analyse d'images revient donc dans un premier temps à chercher les effets que l'on veut obtenir (délimiter le corps vertébral en coupe scanner, par exemple), i.e. poser ou *spécifier* un problème, puis dans un deuxième temps, à mettre en regard de ces effets les transformations morphologiques dont les effets sont précisément ceux souhaités.

8.3 Un système de programmation automatique

La notion de mise en correspondance des effets souhaités avec ceux que propose la morphologie mathématique a été discutée et illustrée dans [B$^+$87]. La démarche procède par allers et retours entre les effets désirés et les primitives candidates qui requièrent pour leur bonne application un ensemble de propriétés des images (bon rapport signal sur bruit par exemple). Les propriétés vérifiées sont ensuite ajoutées aux effets de départ et le raisonnement se poursuit jusqu'à stabilité. Lorsque plusieurs primitives restent candidates, celle de complexité minimale est retenue. L'enchaînement des primitives entre elles n'est pas formalisé.

Nous proposons d'étudier précisément la structure des transformations de haut niveau en cherchant à les décomposer automatiquement pour choisir leurs constituants et leurs enchaînements au moyen d'un raisonnement géométrique.

Dans le cadre de la segmentation d'images binaires, nous avons développé un système automatique de synthèse de programmes de morphologie mathématique [Sch86] pour automatiser

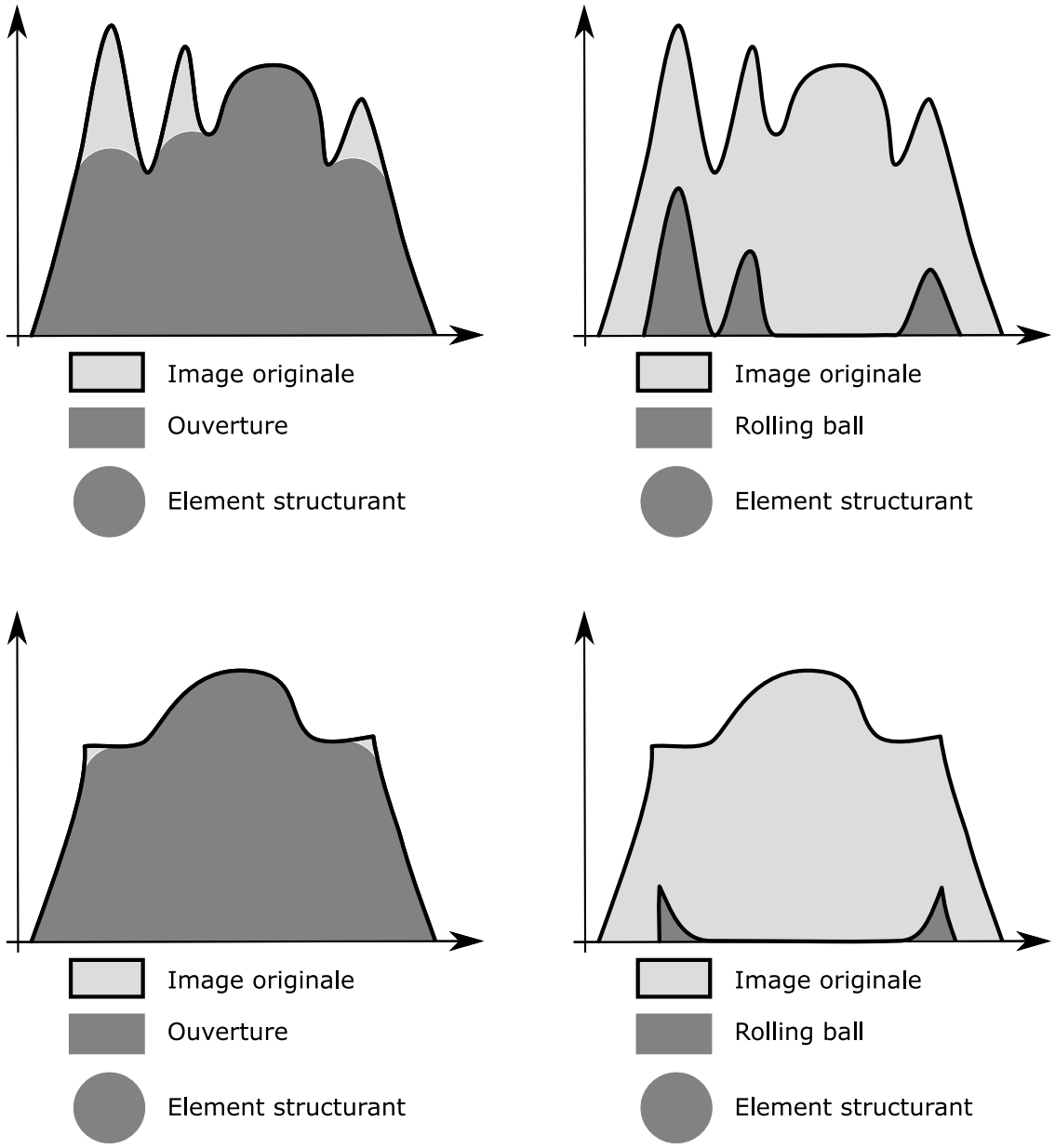


Figure 8.4 : Rolling ball.

cette mise en correspondance ainsi que l'enchaînement des transformations en vue de l'écriture de logiciels par des non-spécialistes en morphologie.

8.3.1 Spécification de problèmes - Langage morphologique

Spécifier un problème d'analyse d'images comporte toujours deux volets :

Le premier comprend une question qui précise l'objet de l'analyse. Elle devra répondre à trois critères :

1. indépendance vis-à-vis du domaine d'application, i.e. exprimée dans un langage morphologique que nous préciserons. La personne qui pose le problème (médecin, métallurgiste), doit donc faire une analyse de son problème et en particulier traduire les termes de son jargon en caractéristiques d'images telles que extrémités, particules allongées ... intelligibles pour un morphologiste.
2. discriminante, i.e. seuls les objets voulus doivent correspondre à la définition proposée.
3. minimale. En d'autres termes, la question ne doit pas contenir d'informations superflues (nous en donnerons des exemples).

Une question n'est discriminante et minimale que dans un univers donné qui fixe les limites entre lesquelles le programme devra évoluer.

Le second volet est précisément cet univers, qui sera matérialisé par une collection d'images servant de référence et présentant l'ensemble des aspects de l'objet à segmenter. Il servira alors d'ensemble de validation pour le programme synthétisé. Nous n'allons pas examiner immédiatement l'ensemble des images de la collection. Cet univers est trop riche et nécessiterait des temps de calculs souvent prohibitifs pour la mise au point d'un programme. C'est pourquoi pour des questions de simplicité, nous nous proposons de restreindre la collection à la donnée d'une seule image, qui devra être représentative, au sens où tous les problèmes à résoudre par le programme y seront représentés.

Examinons à présent un langage morphologique possible : chaque extraction de caractéristique d'images peut s'écrire sous la forme

$$i_0 = \text{transformation } (i_1, \ldots, i_n)$$

où i_0 est le résultat de la transformation des images i_1 à i_n. Par exemple, l'image i_0 contient les particules proches de i_1 dans i_2. Or les images i_j peuvent être elles-mêmes le résultat de l'action d'autres caractéristiques. Ainsi nous définissons le langage morphologique comme l'algèbre des termes formés avec ces caractéristiques comme symboles fonctionnels et les images comme symboles de constantes. La figure 8.5 correspond à la question de la détection de lignes de fractures dans un eutectique lamellaire [Lan78]. La figure 8.6 montre le type d'images que nous cherchons à traiter et la figure 8.7 présente le résultat souhaité.

Notons bien que nous aurions pu spécifier notre problème d'analyse d'images d'une autre manière, comme en donnant des exemples et des contre-exemples de résultats, ou par une liste de propriétés que l'on désirerait atteindre à la fin du traitement. Pour une analyse détaillée des spécifications de problème en général, voir [BF81].

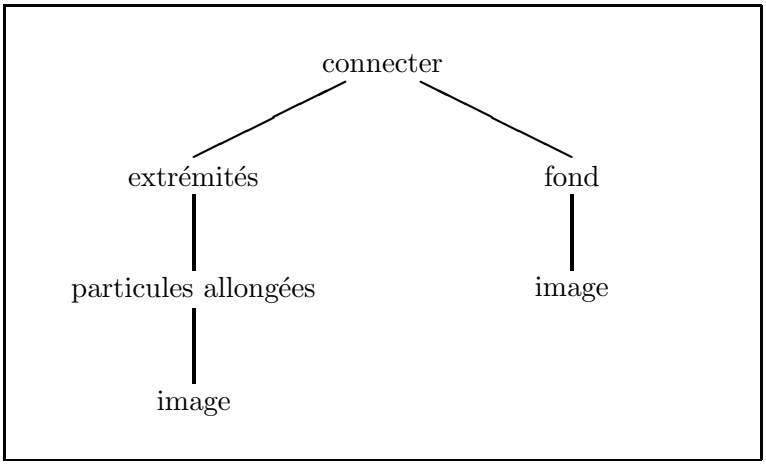


Figure 8.5 : Exemple de question.

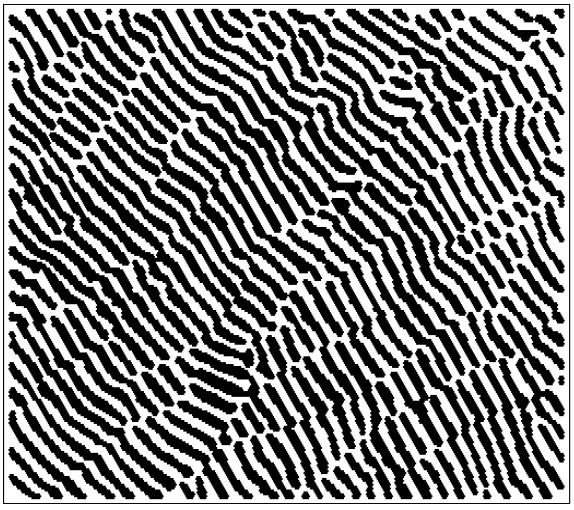


Figure 8.6 : Image d'eutectique lamellaire.

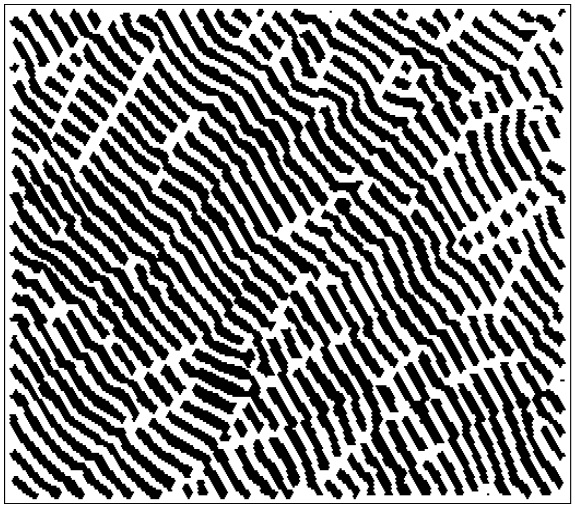


Figure 8.7 : Dessin à la main des lignes de fracture.

8.3.2 Les briques de base du programme synthétisé

Nous avons montré lors de l'étude de l'édifice des primitives morphologiques que celles d'ordre supérieur se décomposaient en opérateurs plus simples. Jusqu'à quel degré de détail un système de programmation automatique doit-il descendre ? Jusqu'au moment où cette décomposition ne fait plus intervenir que des problèmes d'algorithmique où l'intelligence artificielle est absente. Dans cet esprit, un érodé ultime géodésique est une transformation morphologique élémentaire. La façon dont une transformation morphologique particulière est implantée sur une machine particulière ou dans un langage particulier ne nous préoccupe pas ici.

Nous définissons donc une transformation morphologique élémentaire f par :

1. Son type t : érosion dilatation, HMT, amincissement ou épaississement exclusivement,
2. Son élément structurant,
3. Son itérateur :
   - un nombre fixé n : $f = t^n$
   - convergence : $f = \lim_{n\to\infty} t_n$
   - ultime : $f = \cup_{n=1}^{\infty} t_{n-1} \setminus C(t^n, t^{n-1})$ où $C(a, b)$ désigne la reconstruction de b à partir des marqueurs de a
   - antiultime : dual du précédent
4. Son masque dans le cas des transformations géodésiques.

Notons que toutes les combinaisons ne sont pas permises : l'itérateur ultime doit être associé à une transformation antiextensive; de manière analogue la limite $\lim_{n\to\infty} t_n$ peut ne pas exister, ce qui condamne l'emploi de l'itérateur convergence. Enfin certaines combinaisons, bien que licites, n'apportent rien de neuf comme le montre l'exemple suivant : l'amincissement ultime par L est la fonction constante qui à toute image associe l'image vide !

Le tableau 8.8 montre les combinaisons permises d'itérateurs et de type de transformation.

	Erodé	Dilaté	Ouvert	Fermé	HMT	Aminci	Epaissi
nombre fixé	oui	oui	non	non	oui	oui	oui
Convergence	non	non	non	non	non	oui	oui
Ultime	oui (1)	non	oui	non	non	oui (2)	oui
Antiultime	non	oui (1)	non	oui	non	non	oui (2)

(1) lorsque l'origine appartient à l'élément structurant.
(2) l'itérateur ultime a un intérêt uniquement dans le cas d'amincissements ou d'épaississements non homotopiques où des composantes connexes peuvent disparaître.

Figure 8.8 : Combinaisons constructives de transformations et d'itérateurs.

8.3.3 La base de règles

Voici quelques exemples de connaissances qui permettent de transformer la recherche de caractéristiques en d'autres plus simples :

- des particules allongées sont à la fois longues et étroites dans deux directions orthogonales.
- un trou est une particule du fond de l'image qui ne touche pas le bord de cette dernière.

C'est à cause de ce principe de décomposition que nous nous sommes tournés vers les systèmes à base de règles de production. Le terme correspondant à la question est progressivement décomposé au moyen des règles que nous utilisons en chaînage arrière pur jusqu'à obtenir des effets dont la traduction algorithmique est immédiate, comme par exemple :

- le fond de l'image est son complémentaire.

8.3.4 Les mécanismes d'inférence

8.3.4.1 Sélection de la règle à exécuter

L'un des problèmes communs à tous les systèmes à base de règles est de limiter l'explosion combinatoire lors du parcours de la base. Dans le système qui nous préoccupe, ce problème est augmenté par le temps de calcul parfois long des transformations morphologiques même sur des ordinateurs spécialisés.

Or dans certains cas il est clair qu'une règle ne fournira pas le résultat escompté. Par exemple, chercher le centre d'une particule non simplement connexe au moyen de son centroïde par amincissement. Il est cependant possible de tester la simple connexité des particules avant de lancer le calcul du centroïde. C'est pourquoi nous avons muni les règles de conditions de déclenchement, correspondant à des mesures simples sur les images ou à des questions posées à

l'utilisateur, comme par exemple sur l'opportunité de supprimer les particules qui touchent le bord de champ de l'image.

8.3.4.2 Détection des échecs et back-track

Comment évaluer les résultats obtenus par les transformations morphologiques essayées ?

Il est bien clair que le seul juge du bon déroulement des divers algorithmes est en fin de compte l'opérateur. Cependant dans certains cas, les résultats obtenus sont manifestement erronés : par exemple une procédure de connexion doit diminuer le nombre de particules.

Des procédures d'évaluation des résultats sont donc associées aux règles et selon leur résultat, un retour en arrière est effectué. La question pertinente est alors : où retourner en arrière ? Il suffit peut-être de modifier légèrement l'un des paramètres de la primitive employée, et dans ce cas, il n'est pas judicieux de changer immédiatement de règle, c'est-à-dire de type de transformation. Nous avons donc adopté la stratégie suivante :

- Dans un premier temps, modifier légèrement les paramètres de la primitive (de façon automatique par des formules connues du système).
- Dans un second temps, en cas de nouvel échec, chercher une autre règle activable.

La figure 8.9 donne un exemple complet de règle de notre système.

8.3.5 Résultats - Evaluation

8.3.5.1 Exemple

Illustrons les performances de ce système par la résolution du problème désormais classique en morphologie mathématique de la détection des lignes de fracture dans un eutectique lamellaire [Lan78].

Le problème peut se spécifier de plusieurs manières différentes.

1- *connecter les extrémités des particules dans le fond de l'image*

Notons qu'il est inutile de préciser *extrémités des particules allongées* puisque toutes les particules présentes sur des images d'eutectiques lamellaires (notre univers dans ce cas) sont allongées (figure 8.6). Le programme synthétisé est relativement proche de la solution proposée en 1978.

Si	**Particule étroite**	
	x	Entrée
	y	Sortie
	$size$	Paramètre
	()	Pas de test d'activation
Alors	**Ouverture circulaire**	Transformation 1
	x	Entrée
	z_1	Sortie
	$(/\ (1 +\ size)\ 2)$	Rayon de l'élément structurant
	$(=\ /\ 0\ Area(z_1))$	Image vide ?
	Ouverture trop grande	Diagnostic
	$(\times\ .75\ size)$	Variation de $size$
	Reconstruction de particule	Transformation 2
	x, z_1	Entrée
	z_2	Sortie
	()	Pas de paramètre
	$(<\ Area(z_2)\ Area(z_1))$	Il ne faut pas reconstruire toutes les particules
	Il n'y a pas de particules étroites	Diagnostic
	$(\times\ 1.25\ size)$	Variation de $size$
	Difference d'images	Transformation 3
	x, z_2	Entrée
	y	Sortie
	()	Pas de paramètre
	()	Pas de test

"Les particules étroites sont celles qui disparaissent par ouverture circulaire."

Figure 8.9 : Exemple de règle.

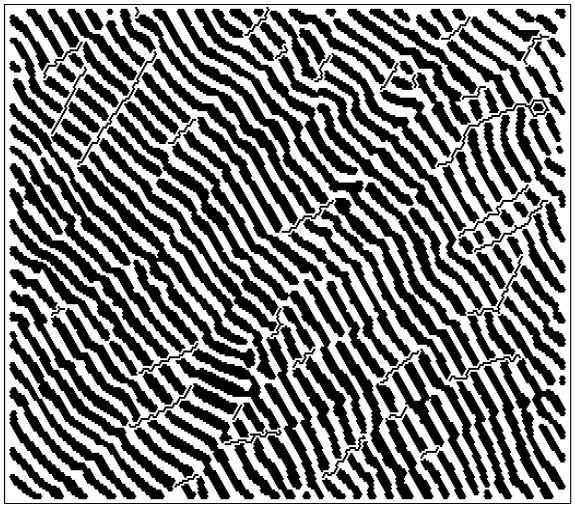


Figure 8.10 : Solution 1.

(centroide 1 3)	calcul du centroïde
(andnot 1 3 4)	complémentaire de précédent
(gultime 4 5 20 1)	érosion ultime géodésique pour la calcul des extrémités des particules
(edgelim 5 6)	élimination des extrémités touchant le bord
(cxor 1 1 7)	fond de l'image originale
(gdilate 6 8 3 7)	dilatation géodésique des extrémités
(gaminc 8 9 1 0 L 6)	amincissement conditionnel aux extrémités
(gebarb 9 10 20 6)	ébarbulage conditionnel aux extrémités

La figure 8.10 illustre cette première solution.

2- *détecter les parties longues du fond de l'image dans la direction* $\alpha = 30°$

α est une valeur proposée par l'utilisateur, cette direction étant perpendiculaire à l'orientation générale de l'image.

(cxor 1 1 2)	complémentaire
(cadre 2 3)	création du bord de l'image
(andnot 2 3 3)	élimination de ce cadre sur l'image complémentée
(lineopen 3 4 30 3 30)	ouverture linéaire de taille 3
(aminc 4 5 1 0 L)	amincissement du résultat

La figure 8.11 illustre cette deuxième solution.

Le programme synthétisé est particulièrement simple et ses performances suffisantes pour les applications pratiques, bien qu'inférieures à celles du programme précédent lorsque la direction des lames n'est pas constante sur l'ensemble de l'image.

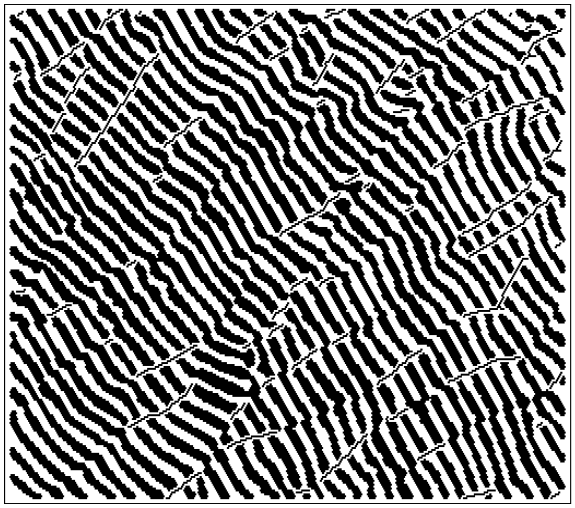


Figure 8.11 : Solution 2.

Cet exemple montre qu'un problème n'admet pas nécessairement une seule formulation et donc de solution unique. La qualité de la solution dépend cependant de la qualité de la question posée qui doit mettre en valeur les caractéristiques profondément spécifiques des objets à extraire, dans notre cas de la qualité de la description d'une ligne de fracture.

8.3.5.2 Structure des programmes synthétisés

Par construction, les programmes synthétisés sont séquentiels, ce qui assure leur terminaison à l'exécution. Il faut cependant se garder de croire qu'ils sont toujours de la forme :

$$\text{Image } 1 \rightarrow \text{Image } 2 \rightarrow \ldots \rightarrow \text{Image } n$$

L'exemple proposé le montre à l'évidence.

Par contre ces programmes ne peuvent pas contenir de sauts conditionnels ni de boucles autres que les itérateurs que nous avons décrits.

8.3.5.3 Classes d'objets et primitives morphologiques

Nous avons vu dans l'introduction que de nombreuses techniques avaient vu le jour pour s'affranchir du bruit des capteurs et de la variabilité des objets étudiés. On peut dire que les transformations morphologiques sont bien adaptées à ce problème. En effet elles sont fondées sur l'inclusion : l'érosion est le lieu des positions où l'élément structurant est inclus dans l'objet. Ce sont donc des inégalités et non des égalités qui définissent les objets qui n'ont plus à être identiques au pixel près. Il s'agit bien d'une classe d'objet qui est ainsi mise en évidence.

La deuxième solution de notre problème illustre bien cet aspect : le résultat de l'opérateur "parties longues dans la direction α" fournit des objets ayant *à peu près* cette orientation.

Dans cette optique, le choix des paramètres n'est pas crucial. En général, toute une plage dans laquelle ce paramètre pourra se situer fournit une solution acceptable.

8.3.6 Limites et perspectives

Une limitation de notre système en l'état actuel se situe au niveau du traitement des mesures. Les paramètres des primitives ne peuvent être fournis que par l'utilisateur, éventuellement transformés de façon adéquate. Par exemple un allongement est le produit d'une longueur et d'une largeur. Si les paramètres pouvaient se déduire directement sur les images, il serait possible de déterminer de manière quasi automatique les paramètres voulus. Par exemple, la taille de l'érosion séparant des particules serait obtenue en calculant la fonction distance et en mesurant le nombre d'Euler à chaque niveau (le temps calcul requis est tout-à-fait raisonnable). La taille recherchée correspond à un nombre d'Euler à peu près constant précédé par une augmentation brutale.

Nous avons vu que les programmes que nous synthétisons sont obtenus à partir du traitement d'une seule image représentative. Nous espérons qu'en général ce programme s'appliquera aux autres images de la collection. Il reste néanmoins nécessaire d'étudier le comportement du programme sur l'ensemble des images de la collection de référence, le système devant s'adapter en conséquence.

Nous pensons enfin qu'un formalisme similaire, mais à base d'autres primitives se prêtera à la morphologie à teintes de gris.

8.4 Conclusion : quelles connaissances avons-nous introduites ?

Où se trouvent les connaissances qui ont permis à notre système de résoudre le problème posé ?

Les connaissances relatives à la technique utilisée, c'est-à-dire la morphologie mathématique, sont intégrées dans la base de connaissance, soit sous forme de technique de décomposition, soit sous forme de test d'activation ou de succès.

Celles relatives au domaine d'application sont absentes en tant que telles. L'utilisateur du système a traduit sa requête en termes morphologiques et a abandonné tout terme rappelant le domaine d'application : le mot "ligne de fracture" est totalement absent du système.

Celles relatives au problème posé sont totalement incluses dans la question, dans les caractéristiques qui la composent et dans sa structure. Reprenons notre exemple *connecter les extrémités des particules dans le fond de l'image*. Le système "sait" qu'il doit exister des extrémités de particules, que ces dernières doivent être plus ou moins regroupées dans un certain nombre de régions puisqu'il s'agit de les connecter. Mais c'est tout. C'est un modèle explicite de ce que le système recherche, au sens où nous l'avons précisé plus haut. Par contre il n'a pas de modèle général de ce que représente l'image comme : l'image est formée de particules très allongées, d'orientation et d'épaisseur quasi constantes et d'espacement régulier.

L'une des perspectives à plus long terme serait précisément la possession par le système d'un

tel modèle général, lui donnant plus de connaissances, proposé par l'utilisateur et qui laisserait plus de latitude au système dans le choix des algorithmes puisqu'il pourra non seulement les tester sur l'image, mais confronter leur pertinence avec le modèle.

Terminons enfin par une autre perspective à long terme dont le langage morphologique serait absent. La traduction du problème posé en langage morphologique est parfois contraignante, et l'on préférerait souvent lui substituer un dessin montrant le résultat, au moyen d'une souris par exemple, comme nous l'avons fait figure 8.7. Le système poserait alors des questions sur la pertinence de certaines particularités du dessin en vue de composer lui-même la question morphologique. Mais nous n'en sommes pas encore là.

Bibliographie

[AB87] F. Avnaim and J.D. Boissonnat. The polygon containment problem: 1-simultaneous containment under translation. Technical Report 689, INRIA, June 1987.

[AFW88] B. Aronov, S. Fortune, and G. Wilfong. The furthest-site geodesic voronoi diagram. In *Fourth Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 229–240, Urbana-Champaign, Illinois, June 6-8 1988.

[Aro87] B. Aronov. On the geodesic voronoi diagram of point sites in a simple polygon. In *Third Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 39–49, Waterloo, Ontario, Canada, June 8-10 1987.

[B$^+$87] I. Bloch et al. A meta-model for segmentation problems in mathematical morphology. In *Information Processing in Medical Imaging, 10th IPMI International Conference*, Utrecht, June 1987.

[Ba73] J.P. Benzécri and al. *L'analyse des données*. Dunod, 1973. Tome 1 : La Toxinomie, Tome 2 : L'analyse des correspondence.

[Ben87] M. Benhamou. Description et simulation de réseaux de drainage par analyse d'images. Thèse École des Mines de Paris, 1987.

[Beu85] S. Beucher. Analyse du trafic routier par caméra vidéo, contrat armines/irt. Technical Report N-973, C.M.M. École des Mines, 1985.

[BF81] A. Barr and E.A. Feigenbaum. *The Handbook of Artificial Intelligence*. W. Kaufmann, Inc., Los Altos, California, 1981.

[BFBM88] J.D. Boissonnat, O.D. Faugeras, and E. Le Bras-Mehlman. Representing stereo data with the delaunay triangulation. Technical Report 788, INRIA, February 1988.

[BGT82] F. Burger, X. Gandillot, and P. Treillart. Transformations morphologiques sur un graphe : Application à l'étude des lymphocytes. Technical report, École des Mines, Centre de Morphologie Mathématique, Fontainebleau, 1982.

[Blo87] I. Bloch. Morphologie mathématique et représentation d'images par arbres. Rapport de DEA de Génie Biologique et Médical, September 1987.

[Boi84] J.D. Boissonnat. Geometric structures for three-dimensional shape representation. *ACM Transactions on Graphics*, 3:266–286, October 1984.

[BP87] I. Bloch and F. Prêteux. Démarche morpho-mathématique de segmentation appliquée aux lésions cérébrales en imagerie par résonance magnétique. *Journal de microscopie et de spectroscopie électroniques*, 12 (1):45–48, 1987.

[Bro81] R.A. Brooks. Symbolic reasoning among 3-d models and 2-d images. *Artificial Intelligence*, 17:285–348, 1981.

[Can83] J.F. Canny. Finding edges and lines in images. M.I.T. Artif. Intell. Lab., Cambridge, MA, TR-720, 1983.

[CC85] M. Coster and J.L. Chermant. *Précis d'Analyse d'Images*. CNRS Ed., Paris, 1985.

[CD85] L.P. Chew and R.L. Drysdale. Voronoi diagrams based on convex distance functions. In *First Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 235–244, Baltimore, Maryland, 5-7, June 1985.

[Cho54] G. Choquet. Theory of capacities. *Ann. Inst. Fourier*, V:131–295, 1953-54.

[CM85] W.F. Clocksin and C.S. Mellish. *Programmer en Prolog*. Eyrolles, 1985.

[CR67] L. Calabi and J.A. Riley. The skeletons of stable plane sets. Technical Report AF 19 (628-5711), Parke Math. Lab. Inc., One River Road, Carlisle, Massachusetts, December 1967.

[Die69] J. Dieudonné. *Éléments d'Analyse (Tome 1)*. Gauthier-Villars, 1969.

[FD77] H. Freeman and L.S. Davis. A corner finding algorithm for chain-coded curves. *IEEE Trans. on Computers*, C26 (3):297–303, 1977.

[Fer84] J. Ferber. Mering : un langage d'acteurs pour la représentation des connaissances et la compréhension du langage naturel. In *4ème Congres AFCET-INRIA*, Paris, January 1984.

[For85] S.J. Fortune. *Lecture Notes in Computer Science 194*, chapter Fast Algorithms for Polygon Containment, pages 189–198. Springer Verlag, 1985.

[Fre61] H. Freeman. On the encoding of arbitrary geometric configurations. *IEEE Trans. on Computers*, C10:260–268, 1961.

[Fu74] K.S. Fu. *Syntactic Methods in Pattern Recognition*. Academic Press, 1974.

[Had57] H. Hadwiger. *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*. Springer Verlag, Berlin, 1957.

[Hat87] J.P. Haton. Les systemes à base de connaissance en reconnaissance et interprétation des formes. In *MARI 87*, pages 73–80, Paris, La Villette, May 1987.

[Her87] J. Hershberger. Finding the visibility graph of a simple polygon in time proportional to its size. In *Third Annual Symposium on Computational Geometry*, pages 39–49, Waterloo, Ontario, Canada, June 8-10 1987.

[Lan78] Ch. Lantuéjoul. Détection automatique de lignes de défauts dans des systèmes eutectiques lamellaires. Technical Report N. 574, CGMM École des Mines, 1978.

[Lan82] Ch. Lantuéjoul. *Multicomputers and Image Processing Algorithms and Programs*, chapter Geodesic segmentation, pages 111–124. Academic Press, 1982.

[Lay72] S.R. Lay. *Convex Sets and their Applications*. John Wiley and Sons, New York, 1972.

[Laÿ87] B. Laÿ. Recursive algorithms in mathematical morphology. In *Acta Stereologica*, pages 691–696, Caen, France, 1987. Vol. 6/III,*Proc. 7th Int. Congress For Stereology,*.

[LB81] Ch. Lantuéjoul and S. Beucher. On the use of the geodesic metric in image analysis. *J. Microsc.*, 121:39–49, January 1981.

[Lee82] D.T. Lee. Medial axis transformation of a planar shape. *PAMI*, 4 (4):363–369, July 1982.

[LM84] Ch. Lantuéjoul and F. Maisonneuve. Geodesic methods in quantitative image analysis. *Pattern Recognition*, 17(2):177–187, 1984.

[LPW79] T. Lozano-Pérez and M.A. Wesley. An algorithm for planning collision free paths among polyhedral obstacles. *Comm. ACM*, 22:560–570, 1979.

[Mat69] G. Matheron. *Théorie des ensembles aléatoires*. Les cahiers du Centre de Morphologie Mathématique, École des Mines de Paris, 1969.

[Mat75] G. Matheron. *Random Sets and Integral Geometry*. John Wiley and Sons, New York, 1975.

[Mat78] G. Matheron. Quelques propriétés topologiques du squelette. Technical Report 560, CGMM, École des Mines, April 1978.

[Mat83] G. Matheron. Filters and lattices. Technical Report 851, CGMM, École des Mines, September 1983.

[Mat88a] G. Matheron. Examples of topological properties of skeletons. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.

[Mat88b] G. Matheron. Filters and lattices. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.

[Mey79] F. Meyer. Cytologie quantitative et morphologie mathématique. Thèse École des Mines de Paris, 1979.

[Mey82] F. Meyer. The perceptuel graph: A new algorithm. In *Proc. IEEE Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing,*, Paris, 1982.

[Mey87] F. Meyer. Algorithmes séquentiels. In *11th Colloque GRETSI*, Nice, June 1987.

[Mey88] F. Meyer. Skeletons in digital spaces. In J. Serra, editor, *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.

[Mic84] L. Miclet. *Méthodes structurales pour la reconnaissance des formes*. Eyrolles, Paris, 1984.

[Min75] M. L. Minsky. A framework for representing knowledge. In P. H. Winston, editor, *The Psychology of Computer Vision*. McGraw Hill, New York, 1975.

[ML88] F. Maisonneuve and Ch. Lantuéjoul. Géodésiques locales et structure des triangles géodésiques. Private communication, 1988.

[Mon88] O. Monga. *Segmentation d'images par croissance hiérarchique de régions*. PhD thesis, Université Paris XI, 1988.

[NL84] A.M. Nazif and M.D. Levine. Low level image segmentation : an expert system. *PAMI*, 6 (5):555–577, 1984.

[Pen87] Alex P. Pentland. *From Pixels to Predicates*. Ablex publishing Corp., Norwood, New Jersey, 1987.

[Pr87] F. Prêteux. Description et interprétation des images par la morphologie mathématique. application à l'imagerie médicale. Thèse d'Etat Paris 6, 1987.

[PS85] F.P. Preparata and M.I. Shamos. *Computational Geometry: an Introduction*. Springer Verlag, 1985.

[PS87] F. Prêteux and M. Schmitt. La morphologie mathématique : de l'analyse d'images à l'intelligence artificielle. In *Support de Cours MARI 87*, Paris, La Villette, May 1987.

[Ros70] A. Rosenfeld. Connectivity in digital pictures. *JACM*, 17 (1):146–160, 1970.

[Ros79] A. Rosenfeld. *Picture Languages*. Academic Press, 1979.

[RP66] A. Rosenfeld and J.L. Pfaltz. Sequential operations in digital picture processing. *J. Assoc. Comp. Mach.*, 13(4):471–494, 1966.

[Sam84] H. Samet. The quadtree and other related hierarchical data structures. *ACM Computing Surveys*, 1984.

[San76] L.A. Santalo. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison Wesley, 1976.

[Sch86] M. Schmitt. Synthèse automatique de programmes de morphologie mathématique. Rapport de DEA d'Informatique, Orsay, 1986.

[Sch87] M. Schmitt. Morpholisp. Technical Report 33/87/MM, CGMM, École des Mines, 1987.

[Ser82] J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*. Academic Press, London, 1982.

[Ser86] J. Serra. Eléments de théorie pour l'optique morphologique. Thèse d'Etat, Université de Paris VI, 1986.

[Ser88] J. Serra, editor. *Image Analysis and Mathematical Morphology, Volume 2: Theoretical Advances*. Academic Press, London, 1988.

[SP86] M. Schmitt and F. Prêteux. Un nouvel algorithme en morphologie mathématique : Les r-h maxima et les r-h minima. In *2ème Semaine Internationale de l'Image Electronique*, volume 2, pages 469–475, Nice, April 1986.

[Vig86] Ph. Vignard. *Représentation des Connaissances, Mécanismes d'Exploitation et d'Apprentissage*. INRIA, 1986.

[Vin88] L. Vincent. Graphs and mathematical morphology. Technical Report 11/88/MM, CGMM, École des Mines, 1988.

[vVV88] L.J. van Vliet and Ben J.H. Verwer. A contour processing method for fast binary neighbourhood operations. *Pattern Recognition Letters*, 7:27–36, January 1988.

[ZS87] Z. Zhang and M. Simaan. A rule-based interpretation system for segmentation of seismic images. *Pattern Recognition*, 20 (1):45–53, 1987.

Table des matières

I Morphologie mathématique et géométrie combinatoire **5**

1 La topologie en tout ou rien **9**
1.1 Définition d'une topologie sur l'ensemble des fermés de $\mathbb{R}^n$ 9
1.2 Relations entre la topologie en tout ou rien et celle déduite de la distance de Hausdorff 11
1.3 Application : relations entre le squelette et la triangulation de Delaunay 12
1.3.1 Convergence des centres des sphères de Delaunay vers le squelette 15
1.3.2 Vitesse de convergence 19
1.3.3 Forme du squelette 20

2 Ensembles fermés aléatoires **23**
2.1 Définition d'une σ-algèbre et le théorème de Choquet 23
2.2 Relations avec la notion de loi spatiale 24
2.3 Application : étude des performances d'algorithmes de bucketisation dans le cas moyen 26
2.3.1 Le schéma booléen 26
2.3.2 Exemples de calculs 27
2.4 Conclusion 29

II Technique des lacets I : Algorithmes élémentaires **31**

3 Hypothèses et notations **37**
3.1 Définition de la trame hexagonale 37
3.2 Définition des directions 38
3.3 Définition des chaînes et lacets 39
3.4 Notion de transformation géodésique 40

4 Algorithme de suivi de contours **43**
4.1 Cas d'une particule $\mathbf{X}$ simplement connexe 43
4.1.1 L'algorithme 44
4.1.2 Correction 46
4.1.3 Complexité 50
4.1.4 Accélération 51
4.1.5 Propriétés du lacet résultat 51
4.2 Cas d'un ensemble $\mathbf{X} \subset H$ quelconque fini 53
4.2.1 Description de $\mathbf{X}$ par une suite d'ensembles simplement connexes 53

4.2.2 Détection de l'ensemble des contours d'un ensemble digital fini 56
4.2.3 Algorithme pratique 57
4.2.4 Exemple d'illustration 58
4.3 Digressions sur le théorème de Jordan digital 58
4.3.1 Rappel du théorème de Jordan dans le plan $\mathbb{R}^2$ 60
4.3.2 La propriété de Jordan digitale 60
4.3.3 Quelques lemmes sur les triangulations 61
4.3.4 Le théorème central 63
4.3.5 Réciproque 66

5 Opérations morphologiques sur les chaînes et lacets 71
5.1 Dilatation des lacets 71
5.1.1 Dilatation d'un lacet par l'hexagone élémentaire 71
5.1.2 Propriétés du lacet dilaté 74
5.1.3 Dilatation d'un ensemble de lacets 78
5.2 Transformation des lacets en chaînes 79
5.2.1 Nouvelle représentation et règles de manipulation 79
5.2.2 Conservation de la représentation par dilatation 81
5.2.3 Optimalité de la représentation 82
5.2.4 Transformations géodésiques 82
5.3 Applications 83
5.3.1 Reconstruction 84
5.3.2 Etiquetage 84
5.3.3 Fonction distance hexagonale 85
5.3.4 Fonction distance hexagonale géodésique 86
5.3.5 Zones d'influence 87
5.4 Autres éléments structurants 88
5.4.1 Hexagone conjugué et dodécagone 88
5.4.2 Segments 91
5.5 Mesures 91
5.5.1 Variation diamétrale et périmètre 91
5.5.2 Diamètre de Ferret 93
5.5.3 Nombre de particules et nombre d'Euler 94

III Technique des lacets II : La fonction de propagation 97

6 La fonction de propagation 99
6.1 Introduction 99
6.2 Quelques lemmes sur les géodésiques 102
6.2.1 La notion d'arc et de chemin géodésiques 103
6.2.2 La distance géodésique 104
6.2.3 Existence et unicité des géodésiques 105
6.2.4 Encore quelques lemmes 105
6.3 Géodésiques dans l'espace $(\mathbb{R}^2, \phi)$ 107
6.3.1 Définition d'une métrique associée à un compact K 108
6.3.2 Arcs rectifiables au sens de ϕ 110
6.3.3 Géodésiques dans le plan 112

6.3.4 Caractérisation des géodésiques de $(\mathbf{X}, \phi)$ . . . 113
6.3.4.1 Cas d'une métrique non dégénérée . . . 113
6.3.4.2 Cas d'une métrique dégénérée . . . 115
6.3.5 Approximation d'une métrique dégénérée . . . 117
6.4 Structure des boules géodésiques . . . 118
6.5 Extrémités libres des géodésiques maximales . . . 124
6.6 Plongement d'un ensemble digital dans $\mathbb{R}^2$ . . . 130
6.6.1 Cas de la distance hexagonale . . . 130
6.6.2 Cas de la distance dodécagonale . . . 131
6.7 Algorithmes de calcul . . . 133
6.7.1 Cas de la métrique hexagonale . . . 133
6.7.2 Cas de la métrique dodécagonale . . . 133
6.8 Et la simple connexité ? . . . 134
6.9 Quelques propriétés mathématiques . . . 134

IV Variations lamellaires ou comment résoudre un problème d'analyse d'images 139

7 Variations lamellaires 141
7.1 Introduction . . . 141
7.1.1 Segmentation et morphologie mathématique . . . 141
7.1.2 Un problème d'analyse d'images : détection des lignes de défaut dans un eutectique lamellaire . . . 142
7.1.3 Comment apprécier la qualité d'un programme ? . . . 146
7.1.4 Quelques options . . . 148
7.2 Etude de l'algorithme existant . . . 150
7.2.1 La notion d'extrémités . . . 150
7.2.2 Les zones de fracture . . . 156
7.2.3 Passage des zones de fracture aux lignes de fracture . . . 158
7.3 Algorithmes pour les lignes de défaut . . . 159
7.3.1 Recherche des points de forte courbure . . . 159
7.3.1.1 Les solutions morphologiques . . . 159
7.3.1.2 Une autre solution . . . 160
7.4 Procédures de connexion de points a priori . . . 162
7.4.1 Connexion selon la distance . . . 163
7.4.2 Graphe de Delaunay, Gabriel . . . 164
7.4.3 Encore une autre procédure de connexion de points . . . 166
7.5 Coupure des lames . . . 171
7.5.1 Dilatation par des losanges . . . 172
7.5.2 Erodés ultimes géodésiques . . . 175
7.6 Recherche des lignes de défaut après coupure des lames . . . 176
7.6.1 Un critère de direction globale . . . 178
7.6.2 Critères de longueur . . . 180
7.6.3 L'antisquelette . . . 182
7.6.4 Retour à l'image originale . . . 185
7.7 Recherche de chemins sur des fonctions particulières . . . 185
7.7.1 Remontée vers l'amont . . . 187

7.7.2 Les courbes de niveau de la fonction de propagation . . . 188
7.8 Encore une solution . . . 192
7.9 Quel algorithme ? . . . 195
7.10 Définitions et algorithmes utilisés . . . 196

V Morphologie mathématique et intelligence artificielle 199

8 Morphologie mathématique et intelligence artificielle 201
8.1 Introduction . . . 201
8.1.1 Reconnaissance des formes . . . 201
8.1.2 Intelligence artificielle . . . 202
8.1.2.1 Systèmes à base de règles . . . 202
8.1.2.2 Langages objets . . . 203
8.2 Les primitives morphologiques . . . 203
8.2.1 Place de la morphologie mathématique en analyse d'images . . . 203
8.2.2 La boîte à outil des primitives morphologiques . . . 204
8.2.2.1 R-h maxima et R-h minima . . . 206
8.2.2.2 Résidus par ouverture : le chapeau haut-de-forme et le rolling ball 206
8.3 Un système de programmation automatique . . . 208
8.3.1 Spécification de problèmes - Langage morphologique . . . 210
8.3.2 Les briques de base du programme synthétisé . . . 212
8.3.3 La base de règles . . . 213
8.3.4 Les mécanismes d'inférence . . . 213
8.3.4.1 Sélection de la règle à exécuter . . . 213
8.3.4.2 Détection des échecs et back-track . . . 214
8.3.5 Résultats - Evaluation . . . 214
8.3.5.1 Exemple . . . 214
8.3.5.2 Structure des programmes synthétisés . . . 217
8.3.5.3 Classes d'objets et primitives morphologiques . . . 217
8.3.6 Limites et perspectives . . . 218
8.4 Conclusion : quelles connaissances avons-nous introduites ? . . . 218

Liste des Figures

1.1 Approximation du squelette par la triangulation de Delaunay. 13
1.2 Cercle de Delaunay approximant un cercle maximal. 15
1.3 Exemple de limite de centres de cercles de Delaunay qui n'est pas un point du squelette. 17
1.4 Transformation d'un cercle maximal de $\mathbb{R}^n \setminus P_i$ en cercle de Delaunay. 18
1.5 Exemple de polygone où certains points du squelette ne sont pas atteints par des limites de centres de cercles de Delaunay. 19
1.6 Exemple d'extrémité atteinte lentement. 20

2.1 Le schéma booléen 27
2.2 Addition de Minkowski d'un convexe plan et d'un carré. 29

3.1 Voisinage hexagonal de $a_{i,j}$. 38
3.2 Définition des 6 directions de la trame. 38
3.3 Définition du point au milieu à droite. 39

4.1 Propriétés de la chaîne frontière. 46
4.2 Exemple de frontière. 46
4.3 Définition de $s \in S$. 47
4.4 Configuration impossible dans S. 48
4.5 Détection d'un segment de la frontière. 51
4.6 Chaînage des segments de S. 52
4.7 Voisinage d'un point frontière. 53
4.8 Décomposition en ensembles simplement connexes. 55
4.9 Illustration de la détection de tous les contours. 59
4.10 Structure du voisinage de p_{i_2}. 64
4.11 Trame vérifiant la propriété de Jordan, bien que ne constituant pas une triangulation. 67
4.12 Morceaux de lacet sur G. 68

5.1 Interprétation géométrique des règles du système $\mathcal{R}$. 73
5.2 Exemple où le lacet transformé n'est pas la frontière du dilaté. 75
5.3 Illustration du cas 1. 77
5.4 Illustration du cas 2. 77
5.5 Dilatation d'une chaîne. 80
5.6 Particule enroulée 83
5.7 L'hexagone conjugué H_1^* et les triangles conjugués. 89
5.8 Règles de récriture pour passer de H_1 à H_1^*. 90

5.9 Quelques exemples de biais pour la mesure du périmètre par le nombre de pixels de $\partial\mathbf{X}$. 92
5.10 Différence entre la variation diamétrale et le diamètre de Ferret. 94

6.1 Distance dodécagonale sur la trame hexagonale. 100
6.2 Peut-on accepter de telles géodésiques dans X ? 101
6.3 Exemple de deux géodésiques distinctes entre x et y au sens de la trame hexagonale. 101
6.4 En métrique hexagonale, une géodésique locale n'est pas nécessairement une géodésique globale. 102
6.5 Les trois configurations dans l'ensemble Y. 103
6.6 Structure des triangles géodésiques. 108
6.7 Unicité de la géodésique de x à y. 114
6.8 Convergence uniforme de $f_n \to f$ 116
6.9 Décomposition de $\mathbf{X}$ en triangles. 120
6.10 Convexité de T. 121
6.11 Structure des faces de G_0. 122
6.12 Notations de K. 123
6.13 Les deux types de frontière locale d'une boule géodésique. 124
6.14 Voisinage d'un point singulier. 126
6.15 Point terminal. 127
6.16 Voisinage d'un point à distance maximale n'étant pas un sommet de $\mathbf{X}$. 127
6.17 Voisinage d'un point à distance maximale n'étant pas un sommet de $\mathbf{X}$ et son triangle euclidien associé. 128
6.18 Définition d'une droite d'appui. 129
6.19 Triangles rajoutés pour le plongement de $\mathbf{X}$ dans $(\mathbb{R}^2, d^{12})$. 131
6.20 Plongement de X dans $(\mathbb{R}^2, d^{12})$. 132
6.21 La fonction de propagation. 135
6.22 Le point le plus loin de x n'est plus sur la frontière. 136
6.23 Extrémités curieuses. 137

7.1 Image d'eutectiques lamellaires. 143
7.2 Les deux types de ligne. 144
7.3 La solution originale (d'après Ch. Lantuéjoul). 145
7.4 Deux ensembles de connexités très différentes peuvent être proches au sens de Hausdorff. 147
7.5 Diverses solutions. 149
7.6 Barbule générée par une irrégularité sur la frontière d'un rectangle. 151
7.7 Comparaison des barbules générées sur l'image originale et l'image ouverte. 152
7.8 Chemin maximal sur un squelette. 153
7.9 Particules présentant à l'évidence plus de deux extrémités. 153
7.10 Extrémités définies par les maxima régionaux de la fonction de propagation. 154
7.11 Extrémités et maxima de courbure. 155
7.12 Robustesse de la détection d'extrémités. 156
7.13 Détection des zones de fracture. 157
7.14 Zones d'influence des extrémités sur quelques formes simples. 158
7.15 Les deux effets de l'ouverture par un disque. 159
7.16 Fermeture composante connexe par composante connexe. 160
7.17 4-courbure maximale pour une droite bruitée. 161

7.18 Points de forte 4-courbure. 162
7.19 Dilaté par un disque de diamètre la largeur des lames des points de forte courbure.163
7.20 Les trois cas de connexion par dilatation. 164
7.21 Connexion par des segments de droite. 165
7.22 Triangulation de Delaunay et graphe de Gabriel. 166
7.23 Pourquoi le graphe de Gabriel fournit trop de connexions. 167
7.24 Encore une procédure de connexion de points : solution morphologique. 168
7.25 Encore une procédure de connexion de points : solution géométrie combinatoire. 169
7.26 Voisinage d'un sommet du diagramme de Voronoï. 170
7.27 Cas où les centres des cercles de Delaunay sont de part et d'autre. 170
7.28 Cas où les centres des cercles de Delaunay sont du même côté. 171
7.29 Connexion d'une grille rectangulaire. 171
7.30 Coupure des lames par dilatation linéaire conditionnelle. 173
7.31 Coupure des lames par dilatation losangique conditionnelle. 174
7.32 Coupure des lames par érodés ultimes géodésiques. 176
7.33 Définition d'un graphe contenant les lignes de défaut. 177
7.34 Elimination des arêtes selon un critère de direction globale. 179
7.35 Solution : arêtes adjacentes aux arêtes longues. 181
7.36 Arêtes adjacentes à la coupure d'une lame. 183
7.37 Solution : coupure des lame en leur milieu par l'antisquelette. 184
7.38 Détection des lignes de fracture sur l'image originale par les trois algorithmes précédents. 186
7.39 L'amont d'un point selon la fonction distance. 187
7.40 L'aval d'un point du squelette. 189
7.41 Remontée vers l'amont triviale et effet de cône. 189
7.42 Résultat par la remontée vers l'amont. 190
7.43 La fonction de propagation d'un rectangle terminé par deux triangles. 191
7.44 Résultat du suivi des lignes de niveau de la fonction de propagation. 193
7.45 La fonction distance au troisième voisin. 194

8.1 Principe d'un système de vision par ordinateur. 203
8.2 L'édifice des transformations morphologiques. 205
8.3 R-h maximum. 207
8.4 Rolling ball. 209
8.5 Exemple de question. 211
8.6 Image d'eutectique lamellaire. 211
8.7 Dessin à la main des lignes de fracture. 212
8.8 Combinaisons constructives de transformations et d'itérateurs. 213
8.9 Exemple de règle. 215
8.10 Solution 1. 216
8.11 Solution 2. 217

Des Algorithmes Morphologiques à l'Intelligence Artificielle

Cette thèse se propose d'examiner sous un angle particulier quelques aspects de la morphologie mathématique. Nous montrons d'abord comment la notion de convergence d'ensembles fermés et celle d'ensemble aléatoire fermé peuvent être employées en géométrie algorithmique. Nous exposons ensuite une nouvelle technique permettant l'écriture d'algorithmes morphologiques efficace en imagerie binaire au moyen d'un codage de contours sous forme de chaînes et lacets. Les algorithmes concernés sont entre autres l'érosion, la dilatation, la fonction distance, tant dans le cas euclidien que géodésique, la fonction de propagation, en métrique hexagonale et dodécagonale, le labeling, la reconstruction... Nous abordons aussi les mesures morphologiques telles que variation diamétrale, diamètre de Ferret, périmètre, nombre d'Euler... L'emploi des transformations est alors illustré par la résolution complète d'un problème particulier en sciences des matériaux où nous discutons les qualités respectives d'une dizaine de solutions différentes. Enfin, un essai de formalisation de l'emploi des transformations morphologiques a abouti à l'écriture d'un système de programmation automatique.

Mots clé :

Morphologie Mathématique, Analyse d'Images, Algorithmique, Codage de Contour, Primitives Morphologiques, Géodésiques, Programmation Automatique.

From Morphological Algorithms to Artificial Intelligence

The aim of this thesis is to examine some aspects of mathematical morphology from special viewpoints. We first show how the notion of convergence of closed sets and that of random closed sets can be used in computational geometry. Then we describe a new technique which allows us to write efficient morphological algorithms for binary image processing by means of boundary coding with chains and loops. We describe among others the following algorithms : erosion, dilation, distance function (both in the Euclidean and the geodesic case), propagation function, (in the hexagonal and dodecagonal metrics), labeling, particle reconstruction, etc. We also tackle morphological measures such as diametrical variation, Ferret's diameter, perimeter, Euler's number, etc. The use of these transformations is then illustrated by the complete resolution of one special problem in material sciences, where we discuss the respective quality of about ten different solutions. Finally, the attempt to formalize the use of the morphological transformations led to an automatic programming system in mathematical morphology.

Key Words :

Mathematical Morphology, Image Analysis, Algorithms, Boundary Coding, Morphological Features, Geodesics, Automatic Programming.