



Migration profondeur avant sommation en amplitude préservée par extrapolation de forme d'onde

Frédéric Joncour

► To cite this version:

Frédéric Joncour. Migration profondeur avant sommation en amplitude préservée par extrapolation de forme d'onde. Sciences of the Universe [physics]. École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2005. English. NNT: . pastel-00001616

HAL Id: pastel-00001616

<https://pastel.hal.science/pastel-00001616>

Submitted on 19 May 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Centre de recherche en géophysique

THÈSE DE DOCTORAT DE L'ÉCOLE DES MINES DE PARIS

présentée par

Frédéric JONCOUR

pour obtenir le titre de

Docteur de l'École des Mines de Paris

Spécialité : Dynamique et Ressources des Bassins Sédimentaires

Sujet de la thèse :

MIGRATION PROFONDEUR AVANT SOMMATION EN AMPLITUDE PRÉSERVÉE PAR EXTRAPOLATION DE FORME D'ONDE

Soutenue le 22 décembre 2005 à l'Institut Français du Pétrole

devant le jury composé de :

Bernard Beaudoin

Hélène Barucq

Michel Dietrich

Gilles Lambaré

Julie Svay-Lucas

Raoul Madariaga

Président du Jury

Rapporteur

Rapporteur

Directeur de Thèse

Co-directeur de Thèse

Membre du jury

Avant propos

Cette thèse se déroule à l'Institut Français du Pétrole sous la bienveillance de Julie Svay-Lucas, et, en partenariat avec l'Ecole des Mines de Paris, sous la tutelle de mon directeur de thèse Gilles Lambaré.

Axé sur les méthodes d'imagerie par équation d'onde en milieux géologiques complexes, ce travail peut s'appuyer sur l'effort de recherche réalisé depuis de nombreuses années dans la division géophysique de l'IFP. Bertrand Duquet, qui a été à l'origine des développements les plus récents, est ainsi un interlocuteur clef dans l'avancement de mon travail de thèse.

Ces méthodes d'imagerie connaissent actuellement un essor important en exploration pétrolière car elles répondent aux défis de l'imagerie en milieux géologiques complexes et bénéficient de l'augmentation de la puissance informatique, qui jusqu'ici les pénalisait.

Ce projet marque donc la volonté de l'IFP de développer des outils de migration quantitatifs par équation d'onde, en intégrant aux méthodes existantes les derniers développements dans ce domaine.

Remerciements

Ma thèse s'est déroulée dans la division de géophysique à l'Institut Français du Pétrole. L'IFP est à mes yeux mais je pense également encore internationalement considéré comme l'un des centre de recherche de premier plan en géophysique pétrolière. Je suis fier d'y avoir travaillé.

Mes premiers remerciements iront à mon directeur de thèse Gilles Lambaré, maître auxiliaire à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris. Son enthousiasme, ses connaissances mais aussi son expérience, ont permis de faire de ce travail ce qu'il est aujourd'hui. Gilles travailler avec toi a été un honneur et un enseignement pour moi. Merci à toi.

Je tiens aussi à remercier Julie Svay-Lucas, chef du projet τ imagerie quantitative par équation d'onde z pour avoir co-dirigé ce travail de thèse. Sa disponibilité, ses conseils, ses réflexions ainsi que la grande indépendance qu'elle a su m'accorder m'ont été très utiles tout au long de cette thèse.

Le développement d'un code de migration sismique est délicat. L'IFP a développé un savoir faire dont Bertrand Duquet est aujourd'hui le maître des clefs. C'est lui qui est à l'origine de ce travail et encore lui qui m'a initié aux techniques de migration par équation d'onde. Enfin, ce sont ses codes sur lequel je me suis toujours basé. Je lui dois également la plupart des astuces informatiques que j'utilise aujourd'hui. Un grand merci pour tout cela mais aussi pour ta bonne humeur, les discussions et l'enthousiasme que tu as su me faire partager.

Je tiens à remercier Hélène Barucq, professeur à l'Université de Pau et de l'Adour ainsi que Michel Dietrich, directeur de recherche au CNRS de Grenoble pour avoir accepté d'être rapporteurs de cette thèse et de faire partie du jury. Hélène a particulièrement contribué par ses remarques constructives à améliorer mon manuscrit de thèse. Merci pour cela.

La journée de travail au deuxième étage de la division géophysique de l'IFP commence par un bon café dans le bureau de Judith, et par une petite discussion avec Bruno qui prend son petit déjeuner. Yannick n'est jamais loin, toujours prêt pour partager des bons moments et pour dépenser son trop plein d'énergie. Il n'est pas rare d'y croiser Timothée qui vient faire partager à Jean Philippe sa passion pour la télé-réalité et plus généralement pour la franche rigolade. Jean Philippe, lui, s'en fout complètement et préfère parler de plongée sous-marine et de moto. C'est sans compter sur Patrick qui a toujours une aventure à raconter (ou un problème informatique). Le tableau n'est pas complet si je n'ajoute pas les anciens : Delphine et ses bonnes vieilles blagues, Caro qui a arrêté le café mais pas de déconner, Maud ma comparse, Carole toujours tendance, François et Laure toujours en harmonie. Merci à vous, vous avez partagé trois ans de ma vie, vous avez été mon univers.

Un grand merci à mes collègues de l'Ecole des Mines de Paris : Bernard Beaudoin pour m'avoir accueilli au sein de l'école des Mines de Paris. Pascal Podevin et Philippe Thierry avec qui j'ai toujours apprécié de discuter, Alexandre et François mes collègues thésards de l'école des Mines.

Je remercie également les géophysiciens avec lesquels j'ai pu partager mon amour pour la géophysique pétrolière : Norman Bleistein de la Colorado School of Mines, René Edouard Plessis de Shell ainsi que l'ensemble de l'équipe d'imagerie de BP Houston qui m'a accueilli pour les deux derniers mois de ma thèse (particulièrement Laurent Sirgue et Frédéric Billette).

Je tiens également à remercier mes amis thésards de la division réservoir et des stages : Cyril, Maria, Ben, Carolina, Carlos, Seb et Maximo ; mes amis thésards géophysiciens : Vijay, Louanas, Kaveh, et Yoann.

Big up à toute la grande Familia Rennaise que je ne cesse de représenter ! Big up à mes parents et mes frères qui ont fait de moi ce que je suis aujourd'hui. Big up à ma douce fiancée Laurence pour son soutien, sa patience et son amour de chaque instant. Merci à vous tous du fond du coeur. Ce travail de thèse est aussi le votre, je vous le dédie.

Résumé

La migration est une étape clé de la chaîne de traitement des données de sismique réflexion. Intervenant après les phases de pré-traitement, et d'estimation du modèle de vitesse, elle peut servir de base à la caractérisation litho-sismique du réservoir. En effet lorsqu'elle est faite avant sommation, en profondeur et en amplitude préservée, elle permet d'obtenir les réflectivités du sous-sol en fonction de l'angle d'incidence de l'onde sismique. Une inversion stratigraphique des paramètres élastiques du réservoir est alors possible permettant une caractérisation sismique plus détaillée du réservoir.

Jusqu'à présent la migration en amplitude préservée était essentiellement basée sur des techniques de tracé de rayons, qui hélas présentent de réelles limitations pour les milieux géologiques complexes caractérisés par de fortes variations latérales de vitesse. L'utilisation d'approximations *one-way* *z* paraxiales de l'équation d'onde permet de s'affranchir de ces limitations puisque, dans le cadre de la migration profondeur, elles fournissent des solutions précises et robustes pour l'ensemble de la bande de fréquences sismiques. En outre elles prennent en compte naturellement les trajectoires multiples induites par des modèles de vitesse complexes (en particulier dans le cas des structures salifères). Longtemps pénalisées par leur coût numérique dans les applications 3D ces méthodes peuvent actuellement être appliquées sur données réelles. Elles portent le nom de migration par équation d'onde.

Sur le plan de la préservation des amplitudes l'étude de la migration par équation d'onde n'a pas débouché jusqu'à présent sur une formulation aussi aboutie qu'avec l'utilisation de la théorie des rais. Dans ce domaine les efforts doivent porter tant sur la propagation numérique du champ d'onde, que sur la condition d'imagerie. Toutes deux doivent préserver le caractère quantitatif de l'imagerie. Mon travail de thèse porte sur la définition et le développement numérique d'une méthode de migration par équation d'onde quantitative à 2D.

Dans un premier temps, j'ai abordé l'étude de la préservation des amplitudes par l'approximation "one-way" paraxiale de l'équation des ondes. Je me suis familiarisé avec la technique en m'appuyant sur les travaux et les algorithmes développés à l'Institut Français du Pétrole. Dans un second temps, j'ai modifié le principe d'imagerie classique, de façon à constituer des collections migrées en fonction de l'angle de réflexion, et à retrouver l'information sur la dépendance angulaire de la réflectivité ou de la perturbation d'impédance. Cela devrait nous permettre de mieux caractériser le sous sol dans le cas de milieux complexes ou les analyses classiques (AVO) ne donnent pas de résultats satisfaisants.

Table des matières

1	Introduction générale	2
1.1	L'imagerie sismique	2
1.1.1	L'acquisition sismique	2
1.1.2	Les ondes sismiques	3
1.1.3	La chaîne de traitement sismique	4
1.1.3.1	Les objectifs	4
1.1.3.2	Le prétraitement des données	5
1.1.3.3	Le traitement sismique	5
1.2	L'imagerie sismique par équation d'onde	9
1.3	Mes travaux de thèse	11
1.3.1	Migration par équation d'onde en milieu anisotrope VTI	11
1.3.2	Migration par équation d'onde en amplitude préservée	12
1.3.3	Plan de thèse	14
2	Propagation quantitative par équation d'onde	15
2.1	Introduction	15
2.2	Équation acoustique "one-way"	17
2.2.1	Équation d'onde acoustique "one-way" - "two-way"	17
2.2.1.1	Équation d'onde acoustique "two-way"	17
2.2.1.2	Équation d'onde "one-way"	18
2.2.1.3	Discussion sur le choix de l'équation d'onde "one-way"	19
2.2.1.4	L'extrapolation d'un champ d'onde par équation d'onde	20
2.2.2	L'extrapolation par équation d'onde "one-way"	21
2.2.2.1	Méthodes spectrales	22
2.2.2.2	Méthodes par différences finies	23

2.2.2.3	Méthodes mixtes	26
2.2.2.4	Conclusions	27
2.2.3	Équation “one-way” avec second membre	27
2.2.3.1	Condition initiale “one-way” dans le domaine de Fourier	27
2.2.3.2	Approximation de la condition limite “one-way” dans le domaine spatiale	30
2.3	Équation “one-way” quantitative	31
2.3.1	Équation “one-way” modifiée	32
2.3.1.1	Étude de l’équation “one-way” classique	32
2.3.1.2	Équation “one-way” modifiée	35
2.3.1.3	Généralisation aux milieux hétérogènes	35
2.3.2	Discussion sur l’équation “one-way” quantitative en milieu blocky	37
2.3.2.1	Coefficient de réflexion linéarisé en pression	38
2.3.2.2	Comparaison avec le terme correctif de l’équation "one-way"	40
2.3.3	Construction d’un propagateur paraxial quantitatif	42
2.3.3.1	Apport de la méthode de décomposition	42
2.3.3.2	Apport du schéma explicite	44
2.3.3.3	Résolution de l’opérateur de transmission	45
2.4	Applications numériques	46
2.4.1	Cadre de l’étude	47
2.4.2	Milieu homogène	50
2.4.3	Milieu à gradient vertical	52
2.4.4	Milieu à gradient oblique	61
2.4.5	Milieu blocky	63
2.4.6	Les performances numériques	69
2.5	Conclusions	69
3	Imagerie quantitative en angle	
	et par équation d’onde	71
3.1	Introduction	71
3.2	La migration par équation d’onde	73
3.2.1	La migration par corrélation	73
3.2.2	La migration par extrapolation complète de champ d’onde	75

3.3	Principe d'imagerie quantitatif en angle et par équation d'onde	78
3.3.1	Introduction	78
3.3.2	Problème direct	80
3.3.2.1	Formule de modélisation quantitative de Kirchhoff surfacique . . .	80
3.3.2.2	Formule de modélisation volumique	85
3.3.2.3	Formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine de Fourier	86
3.3.3	Problème inverse	91
3.3.3.1	Principe d'imagerie quantitatif de Kirchhoff	91
3.3.3.2	Cas analytique	95
3.3.3.3	Extension au principe d'imagerie de Born	96
3.3.4	Mise en oeuvre pratique	98
3.3.4.1	Formulation par point de tir	98
3.3.4.2	Mise en oeuvre	99
3.3.4.3	Performances numériques	100
3.4	Applications numériques	100
3.4.1	La source sismique	100
3.4.2	Milieu homogène	101
3.4.2.1	Test canonique	101
3.4.2.2	Réflecteurs courbes	101
3.4.3	Milieu à gradient vertical	105
3.4.3.1	Réflecteur plan	105
3.4.3.2	Réflecteurs courbes	109
3.4.4	Milieu à gradient oblique	111
3.4.5	Données Marmousi	112
3.4.6	Application aux données réelles	120
3.5	Conclusions et perspectives	120
4	Conclusion générale	127
4.1	Les objectifs	127
4.2	Le travail réalisé	127
4.3	Perspectives	128
A	Extrapolateur paraxial stable à Coefficients variables : application aux milieux anisotropes VTI	130

A.1	Isotropie transverse à axe vertical	130
A.1.1	Pourquoi prendre en compte l'anisotropie ?	130
A.1.2	Isotropy Transverse Verticale (VTI) :	131
A.2	Introduction de l'anisotropie VTI dans les équations paraxiales	145
A.2.1	Approximation of the VTI dispersion relation	145
A.2.2	Taylor expansion of the dispersion relation	147
A.2.3	Stable VTI paraxial extrapolator	148
A.2.4	Application on a real data set	150
A.2.5	Conclusions	150
A.2.6	Acknowledgements	150
A.3	Conclusions	150
B	Théorème de représentation	152
C	Convention de Fourier	155
D	Formules analytiques pour le tracé de rayon en milieux simples	157
D.1	Construction du modèle de référence en milieu homogène	157
D.2	Construction du modèle de référence dans un milieu à gradient vertical de vitesse constant	158
E	Approximation de la phase stationnaire	162
F	Amplitude de la fonction de Green dans le domaine $(p_s, z_s, \mathbf{x}, \omega)$	164
F.1	Cas général	164
F.2	Cas homogène	166
G	Évaluation du terme de phase dans l'approximation de Kirchhoff en onde plane et en milieu de référence homogène	167
G.1	Montrons que $\tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) = -q_x x - p_{z_s}(z_s - z_0) - p_{z_r}(z_r - z_0)$	167
G.2	Montrons que $\tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) = -q_x x - q_z(z - z_0)$	169
G.3	Montrons que $\tau(p^s, p^r, z_0; x, z_0) = -(p^s + p^r) \cdot x$	169
H	Calcul du jacobien	170
I	Relation entre les champs en milieu homogène	172

J	Angle de réflexion dans le domaine des ondes planes	175
K	Mesure du Dirac composé par la fonction $\tan$	178
K.1	Composition de la mesure d'une distribution par une fonction	178
K.2	Application à $f(\theta) = \tan \theta - \tan \theta_0$	178
K.3	Application à $f(\omega) = k_{z_0} - (k_{z_s} + k_{z_r})$	179
L	Expression la transformée de radon	180

Chapitre 1

Introduction générale

1.1 L'imagerie sismique

Parmi les méthodes d'exploration géophysique, la plus employée dans le domaine pétrolier est la sismique réflexion. L'exploration sismique se fait en trois étapes : l'acquisition des données, leur traitement puis l'interprétation.

1.1.1 L'acquisition sismique

Une campagne d'acquisition sismique (Figure 1.1) consiste en premier lieu à exciter le sous-sol par une source (camions vibrateurs ou explosion). Celle-ci génère un champ d'ondes incident, qui se propage dans le sous-sol, se réfléchit et se diffracte sur les discontinuités des propriétés physiques de la Terre. La partie des champs réfléchis ou diffractés se propageant vers la surface est enregistrée par des capteurs (géophones, hydrophones). L'enregistrement en surface de la vitesse (à terre) ou de la pression (en mer) en fonction du temps, constitue la réponse sismique associée au point de tir considéré. On parle alors de sismogramme ou de section sismique. Lors d'une campagne sismique l'expérience est répétée en déplaçant latéralement le point source et les capteurs. Le résultat de cette campagne est alors trié de façon à constituer un cube de données sismiques dont chaque plan est associé à une position de tir (Figure 1.3).

Pour explorer une zone géologique, une campagne sismique cherche à optimiser le dispositif d'acquisition en surface de manière à éclairer le mieux possible la zone cible : les ondes sismiques générées par la source doivent se propager par des chemins différents de manière à fournir le plus d'information possible sur la subsurface. Ainsi, l'acquisition en couverture multiple consiste à quadriller le terrain en source et en récepteurs. Une section sismique classée par tir commun est l'enregistrement d'un tir par l'ensemble des récepteurs situés sur la même ligne d'acquisition. Le jeu de données acquis en déplaçant le dispositif d'acquisition comprend ainsi un grand nombre d'informations redondantes qui permettent de baisser le ratio signal sur bruit.

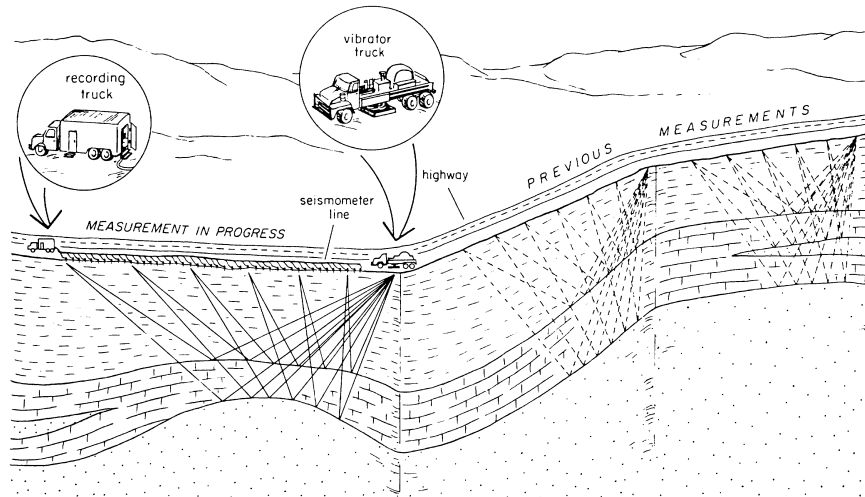


FIG. 1.1 – Principe d'acquisition de données sismiques 2D (Robison et Coruh, 1988)

1.1.2 Les ondes sismiques

Sous l'effet des contraintes générées par l'explosion d'une source, le sous-sol se comporte comme un milieu élastique : il subit des déformations, qui dépendent entre autres, des caractéristiques mécaniques des roches du sous-sol. Trois paramètres mécaniques indépendants sont nécessaires pour décrire un milieu élastique isotrope. Un milieu acoustique est un cas particulier du milieu élastique dans lequel il n'existe pas de contraintes tangentielles (cas des fluides parfaits). Dans ce cas, deux paramètres mécaniques indépendants suffisent pour caractériser un milieu acoustique isotrope. Le plus souvent, ils sont choisis parmi les quatre paramètres suivants : la densité de la roche (ou masse volumique), la vitesse, le module d'incompressibilité (produit de la densité par la vitesse au carré) et l'impédance (produit de la densité et de la vitesse). Les autres paramètres pouvant être déduits des paramètres choisis. Le tableau (1.1) donne à titre indicatif des ordres de grandeur des paramètres acoustiques, vitesse des ondes acoustiques et densité, pour différents types de milieux.

Nature des terrains	Vitesse P (m/s)	Densité (g/cm^3)
Eau	1450-1500	1
Craie	2300-2600	1.8-2.3
Calcaire	3500-6000	2.4-2.7
Grès	3000-4500	2.1-2.4
Marnes	2000-3000	2.1-2.6
Argiles	1100-2500	2.0-2.4
Sel	4500-5500	2.1-2.3
Basalte	5000-6000	2.7-3.1

TAB. 1.1 – Paramètres mécaniques (vitesse et densité) des ondes P dans différents types de roches (d'après Lavergne, 1986).

Dans un milieu élastique, l'explosion de la source génère des **ondes de volume** (qui se propagent

en profondeur) et des **ondes de surface** (qui se propagent le long de la surface d'acquisition). Les ondes de volume sont décomposées en **onde de compression** P (pour première car plus rapide) et en **ondes de cisaillement** S (pour secondaire). Dans un milieu acoustique, seules les ondes P peuvent se propager, les ondes S n'existent pas dans un tel milieu.

Ces ondes peuvent suivre des chemins très différents entre la source et le capteur. Les **ondes primaires**, que l'on cherche à enregistrer en priorité, sont définies comme celles qui se sont propagées par transmission jusqu'à une interface, avant d'y subir une réflexion unique et de remonter par transmission jusqu'aux récepteurs. Mais les ondes peuvent suivre d'autres chemins plus ou moins complexes. En particulier, les **ondes directes** se propagent latéralement juste en dessous de la surface d'acquisition directement entre la source et le capteur (sans réflexion). Les ondes peuvent aussi subir plusieurs réflexions avant de remonter aux récepteurs, on les appelle les **réflexions multiples**. Les **ondes réfractées**, quant à elles, sont propagées partiellement le long des interfaces. Lorsque les ondes rencontrent de petites hétérogénéités dans le milieu, elles peuvent également se diffracter. Parmi toutes ces ondes enregistrées aux récepteurs, en général, seules les ondes primaires sont utilisées pour imager le sous-sol.

1.1.3 La chaîne de traitement sismique

1.1.3.1 Les objectifs

Les objectifs de l'imagerie sismique sont de :

- reconstruire une image des discontinuités (imagerie structurale) ;
- de restituer quantitativement la nature physique (imagerie quantitative)

du milieu étudié. D'un point de vue géologique, les discontinuités physiques du sous-sol sont associées à des changements de lithologie et traduisent les limites entre les différentes formations. Les géologues peuvent ainsi, à partir de l'image sismique obtenue, reconstruire la structure géologique et optimiser les chances de trouver des gisements. Lorsque l'imagerie sismique permet de restituer certaines propriétés du sous-sol, elle peut alors servir de base à la caractérisation litho sismique du réservoir.

Pour cela, l'imagerie sismique traite l'information contenue dans les enregistrements. L'enregistrement des ondes contient des informations essentielles sur la structure et les propriétés mécaniques du sous-sol. Selon la nature des roches qu'elles traversent et selon la profondeur à laquelle elles se réfléchissent, les ondes mettent plus ou moins de temps à parcourir le chemin entre la source et le capteur. L'étude des temps d'arrivée des ondes sismiques, en d'autres termes l'étude de leur **cinématique**, permet ainsi d'obtenir l'information sur la vitesse des couches et la position des interfaces. De plus, lorsque l'onde rencontre un fort contraste d'impédance acoustique entre deux couches géologiques, elle se réfléchit, c'est-à-dire qu'une partie plus ou moins importante de son énergie remonte à la surface. On mesure l'importance de la réflexion par le coefficient de réflexion, qui est communément défini comme le rapport de l'amplitude de l'onde réfléchie sur l'amplitude de l'onde incidente. Le coefficient de réflexion dépend du contraste d'impédance mais également de l'angle entre l'onde incidente et le réflecteur. Cet angle est relié en surface avec le déport du récepteur par rapport à la source, appelé plus communément **offset**. Ce phénomène est appelé **AVO** (Amplitude Versus Offset) ou **AVA** (Amplitude Versus Angle). Dans certains contextes environne-

mentaux, l'étude de la variation du coefficient de réflexion en fonction de l'angle peut apporter un indice important de la présence d'hydrocarbures ou un moyen de déterminer la lithologie (Ostrander (1984)). L'étude des amplitudes des réflexions, en d'autres termes l'étude de la **dynamique** des signaux enregistrés, permet donc d'obtenir l'information quantitative sur les paramètres physiques des roches.

En résumé, les techniques d'imagerie utilisent les caractéristiques aussi bien cinématiques que dynamiques des réflexions des ondes primaires pour imager la subsurface. D'une manière générale, les techniques pour obtenir une image du sous-sol comprennent deux étapes : le prétraitement des données et les traitements d'imagerie.

D'un point de vue géologique, les discontinuités physiques du sous-sol sont associées à des changements de lithologie et traduisent les limites entre les différentes formations. Les géologues peuvent ainsi, à partir de l'image sismique obtenue, reconstruire la structure géologique et optimiser les chances de trouver des gisements. Lorsque l'imagerie sismique permet de restituer certaines propriétés du sous sol, elle peut alors servir de base à la caractérisation litho-sismique du réservoir.

1.1.3.2 Le prétraitement des données

La première phase de traitement consiste en un prétraitement des données. Elle vise à extraire des tirs élémentaires les ondes réfléchies, en supprimant les ondes indésirables, formées par les arrivées directes et réfractées, les ondes de surfaces, les multiples et les bruits incohérents. De nombreuses techniques ont été élaborées dans ce but. Ces techniques reposent en général sur l'utilisation d'une transformation permettant de séparer le signal et le bruit contenus dans les données, puis sur la construction d'un filtre permettant d'éliminer le bruit.

1.1.3.3 Le traitement sismique

Classiquement, on décompose le modèle du sous-sol en un macro-modèle contenant les grandes longueurs d'onde du modèle de vitesse et en un modèle de perturbations contenant les courtes longueurs d'onde. Le macro-modèle constitue le support de la propagation des ondes et le modèle de perturbations est à l'origine de la réflexion des ondes. Ainsi, le problème de l'imagerie sismique peut se décomposer en deux étapes successives : tout d'abord la détermination d'un macro-modèle de vitesse du sous-sol, puis à partir de celui-ci, l'application d'une méthode d'imagerie pour déterminer les réflectivités.

La première étape d'imagerie, liée à la cinématique, est la **détermination du champ de vitesse**, en réalisant des analyses de vitesse. On peut représenter les données en fonction de l'offset et du temps de trajet. Ensuite, il s'agit de déterminer la vitesse du milieu à partir de la courbure des temps de trajet des réflexions primaires enregistrées, en supposant le milieu 1D (couches sédimentaires horizontales). On appelle vitesse de sommation, le modèle de vitesse 1D qui permet d'aplanir les temps d'arrivées (correction NMO). En d'autres termes, après correction, le temps d'arrivée de l'onde est celui correspondant à l'offset nul quel que soit l'offset considéré. En sommant toutes ces traces, on obtient une section à offset nul qui donne une première idée de la structure du sous-sol. Mais ces concepts de l'analyse de vitesse reposent sur des hypothèses 1D. Pour des milieux complexes, la tomographie en temps de trajet est la méthode la plus adaptée à

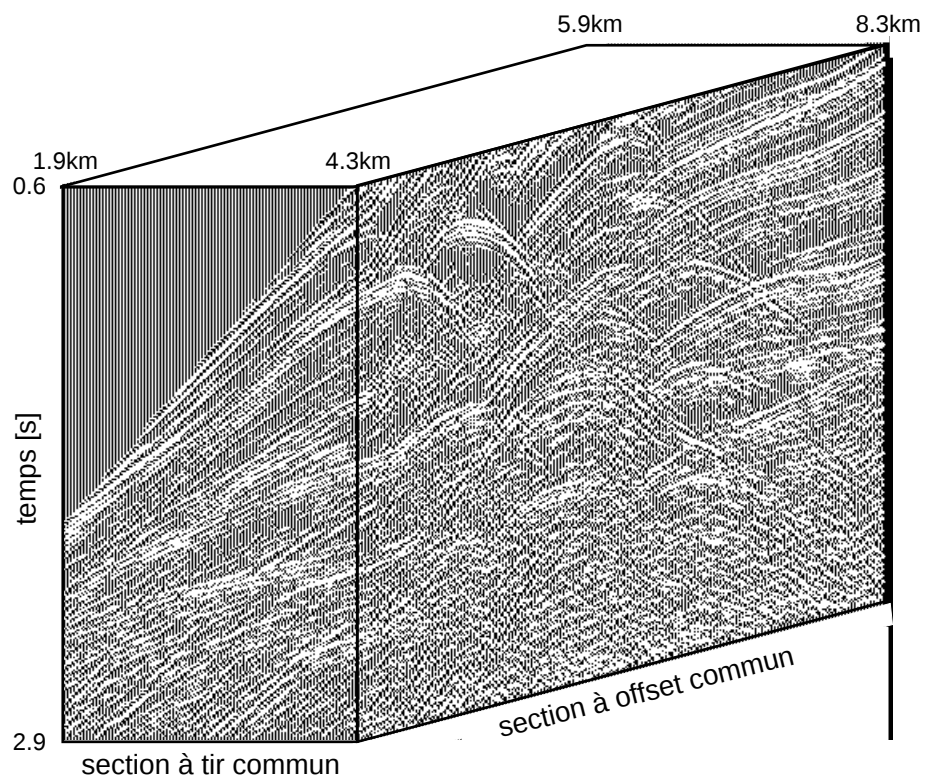


FIG. 1.2 – Cube de données sismiques (sous ensemble des données synthétiques Marmousi (Bourgeois et al, 1991)). Le premier plan est associé à la position de tir 4300m, le dernier plan à la position de tir 8300m (Duquet, 1996)

la détermination des vitesses de propagation des ondes (Bishop et al. (1985); Farra and Madariaga (1988); Delprat-Jannaud and Lailly (1993)). Ici, on ne travaille plus directement sur les données mais sur les temps de trajet associés à des réflecteurs. Elle consiste à inverser les temps de trajet pointés sur l'enregistrement et identifiés comme correspondant à des réflexions sur des interfaces pour retrouver des formes, des profondeurs d'interface et des vitesses de propagation d'onde entre les interfaces. Un autre type de tomographie, connu sous le nom de stéréotomographie, a été développé en utilisant non seulement les temps de trajet mais aussi les pentes des événements (Billette and Lambaré (1998)). Cette méthode qui ne nécessite pas l'introduction d'interfaces décrivant le modèle, est bien adaptée aux milieux complexes puisque le pointé, effectué de façon automatique, peut n'être que localement cohérent.

La seconde étape de l'imagerie, est consacrée aux techniques d'imagerie proprement dites, c'est ce que l'on appelle la **migration**. Le but essentiel de la migration est de repositionner correctement en profondeur (ou en temps) les réflecteurs. C'est ce que l'on appelle l'**imagerie structurale**. Ce type d'imagerie est basé sur les aspects cinématiques de la propagation. Lorsque la migration exploite également les informations dynamiques contenues dans les données sismiques (amplitudes), il est possible de quantifier certains paramètres physiques du sol, comme la distribution des coefficients de réflexion. Ce type de migration est appelé **migration quantitative** ou **migration en amplitude préservée**. Il existe de nombreuses techniques de migration dont les plus connues sont :

- les migrations par sommation le long des courbes de diffraction telle que la **migration de Kirchhoff**. C'est une variante des méthodes de sommation le long des hyperboles de réflexion en milieu homogène (French (1975); Schneider (1978); Keho and Beydoun (1988)). Leur avantage est qu'elles sont très rapides en 3D et qu'elles ont un formalisme quantitatif (Beylkin (1985); Bleistein (1987)). Dans le cas des milieux complexes, ces méthodes deviennent compliquées algébriquement (prise en compte des trajectoires multiples) et sont bien souvent limitées à des macro-modèles de vitesse lisses.
- les **migrations par transformée de Fourier** (domaine spectral) développées dans le domaine fréquence/nombre d'onde. Elle sont moins onéreuses en temps de calcul que les méthodes de différences finies mais sont limitées à des milieux variant lentement latéralement (Stolt (1978); Gazdag (1978); Gazdag and Sguazzero (1984); Stoffa et al. (1990); Le Rousseau and De Hoop (2003));
- les **migrations par équations d'onde** et techniques de différences finies. Elles sont basées sur le *principe d'imagerie de Claerbout* (Claerbout (1971); Collino (1987)). Elles sont plus coûteuses en temps calcul mais présentent l'avantage de prendre en compte naturellement les trajectoires multiples et ne sont pas limitées à des modèles de vitesse lisses.

Chaque type de méthode de migration a ses avantages et ses inconvénients.

La migration s'applique soit sur des traces sommées sur les offsets (section stack après NMO) et l'on parle alors de migration après sommation ; soit directement avant sommation sur les traces multi-offset et l'on parle alors de migration avant-sommation. La migration après sommation est plus rapide. Pour que la migration après sommation soit correcte, il faut que les hypothèses requises par la sommation soient vérifiées (les temps d'arrivées décrivent des hyperboles et la trace sommée doit représenter la trace à incidence normale). Or celles-ci ne sont valides que dans le cas de milieux simples 1D (variation verticale). Dans le cas des milieux complexes, il faut faire de la migration avant sommation.

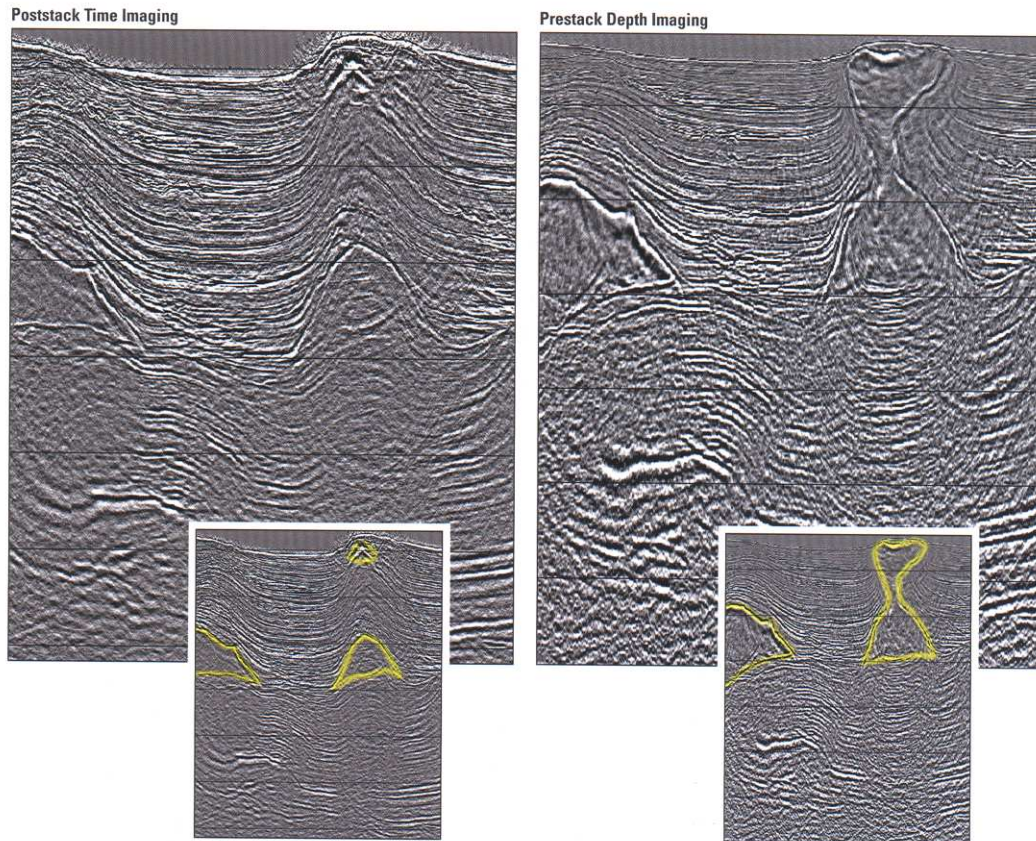


FIG. 1.3 – Comparaison de la migration en temps et de la migration en profondeur dans la zone du canyon vert dans le golfe du mexique. Chaque migration montre deux structures salifères (à gauche et à droite de chaque Figure), chacune remontant en bombant les couches sédimentaires qui les recouvrent; Pour la migration en temps (Figure de gauche), la structure salifère sur la gauche a un toit en dôme et une base plate, et crée une zone d'ombre sous elle. Celle sur la droite semble être composée par deux morceaux : une petite bulle de sel flottante s'est détachée du dôme situé dessous; Pour la migration en profondeur (Figure de droite), montre que la forme générale du dôme de gauche est la même, même si la base est maintenant pentée. Cependant, pour la structure de droite, la forme a complètement changé avec la migration en profondeur. Au lieu de former une structure anticlinale, les sédiments sont tronqués par une structure salifère en un morceau seul (Schlumberger oilfield review, 2002).

La migration peut être également en temps ou en profondeur. Certains problèmes peuvent être résolus par une migration temps, mais la plupart des problèmes complexes nécessitent une migration en profondeur (Albertin et al. (2002)). Dans le cas de la migration en temps, le modèle de vitesse, également appelé champ de vitesse, doit entre autre varier lentement (modèle lisse). Comme la plupart des hypothèses sont valides dans la majorité des bassins sédimentaires, la migration en temps est souvent applicable et utilisée dans la plupart des régions du monde. Dans le cas de la migration en profondeur, le modèle de vitesse peut comporter de fortes variations latérales et verticales de vitesse. Elle est choisie dans le cas de failles pentées, de plis ou d'intrusions juxtaposées avec de larges différences de propriétés élastiques. Cependant, elle nécessite un modèle de vitesse précis et demande des temps de calculs plus importants.

L'augmentation de la demande et la baisse des ressources poussent les compagnies pétrolières à explorer des zones plus profondes et plus complexes (zones montagneuses ou structures salifères). Pour y arriver et réduire les risques financiers liés à l'exploration, des techniques d'imagerie en profondeur performantes restituant à la fois la structure du sous-sol et les contrastes de propriétés dans les zones complexes sont nécessaires. Malheureusement, aujourd'hui, de telles techniques ne sont pas disponibles dans l'industrie pétrolière. Sur ce plan, la migration par équation d'onde est prometteuse car elle est particulièrement bien adaptée pour restituer la structure du milieu. En revanche, elle ne permet pas de restituer les contrastes de propriétés du sous-sol.

1.2 L'imagerie sismique par équation d'onde

Il existe de nombreuses techniques de migration en profondeur mais toutes nécessitent deux étapes. La première est la propagation du champ d'onde et la seconde est l'application d'une condition d'imagerie pour restituer la distribution des contrastes de propriétés du sous-sol à partir du champ propagé/rétro-propagé. Les différentes approches peuvent être classées par la méthode numérique utilisée pour simuler la propagation du champ d'onde.

Actuellement, concernant la propagation d'ondes, il existe deux grandes méthodes de migration. D'une part, la propagation peut être basée par la résolution de l'équation d'onde. Généralement, ce n'est pas l'équation d'onde complète qui est résolue mais l'approximation de la partie descendante ou montante du champ d'onde complet. La migration associée est appelée migration par équation d'onde. D'autre part, la propagation d'ondes peut être également basée sur la propagation de rayon (Beylkin (1985); Bleistein (1987)). La migration associée est appelée migration de Kirchhoff. Celle-ci a été intensivement utilisée et développée dans les années 80 quand elle constituait le meilleur compromis entre précision et coût informatique pour les applications 3D. Même si des résultats impressionnants ont été obtenus avec de telles techniques pour des milieux complexes Operto et al. (2000); Thierry et al. (1999); Xu and Lambaré (2000); Xu et al. (2001)), elles connaissent néanmoins de réelles limitations. La première limitation est la prise en compte des trajectoires multiples. Bien que tout à fait possible (construction de front d'onde; Vinje et al. (1993); Lambaré et al. (1994); Lucio et al. (1995); Vinje et al. (1996)), cela introduit une complexité supplémentaire dans les codes. Les inconvénients majeurs de ces techniques sont la nécessité de lisser le modèle de vitesse pour la propagation (Duquet et al. (2000)) et la présence d'artéfacts asymptotiques hautes fréquences (Stolk and Symes (2002)). De son côté, la migration par équation d'onde (Claerbout (1971); Claerbout (1983); Berkhout (1980); Berkhout (1985); Wapenaar and Berkhout (1989);

Biondi (2002a)) est considérée comme la meilleure approche pour faire de la migration structurale en milieu complexe (Duquet et al. (2002)). Ces méthodes ont pour avantages de prendre en compte naturellement les trajectoires multiples induites par des modèles de vitesse complexes caractérisées par de fortes discontinuités latérales (en particulier dans le cas des structures salifères, (Geoltrain and Brac, 1993; Audebert et al., 1997)). Elles fournissent une solution précise sur l'ensemble de la bande de fréquence de la sismique (pas d'approximation hautes fréquences) et ne nécessitent pas le lissage du modèle de vitesse. Jusqu'ici pénalisée par leur coût de calcul, la migration par équation d'onde devient aujourd'hui envisageable pour l'imagerie 3D grâce à l'augmentation rapide et toujours croissante de la puissance de calcul informatique.

De nombreux algorithmes de migration par équation d'onde ont été conçus. Celui d'écrit ici est basé sur le principe d'imagerie de Claerbout (1971). Ce principe se décompose en trois étapes :

- propagation du champ d'onde généré par la source ;
- rétropropagation (propagation inverse) du champ d'onde enregistré aux niveaux des récepteurs ;
- mise en évidence du réflecteur par l'application du principe d'imagerie : corrélation des deux champs en chaque point du sous-sol pour le temps $t=0$. Une forte corrélation en un point indique que les signaux propagés et rétropropagés sont en phase et que ce point est le siège d'une diffraction (ou réflexion).

Les deux premières phases de cet algorithme nécessitent donc une étape de modélisation de la propagation des ondes qui soit efficace. Comme la résolution numérique directe de l'équation des ondes est très coûteuse en 3D (Plessix and Mulder, 2002), il peut être pratique d'utiliser l'approximation paraxiale de l'équation des ondes (Bamberger et al. (1984); Bamberger et al. (1985)), dont la construction est l'objet d'une partie de ce rapport. Cette approximation est caractérisée par un certain nombre de coefficients paraxiaux que l'on ajuste pour approcher le mieux possible la partie montante ou descendante de la solution de l'équation des ondes.

Finalement c'est la corrélation, à chaque en profondeur, entre le champ propagé de la source et le champ rétropropagé depuis les récepteurs qui nous donne l'image sismique. En effet, cette corrélation prise au temps nul permet de mettre en évidence les points où il y a coïncidence temporelle et spatiale des deux champs d'ondes. Le produit de corrélation pris au temps nul et noté $m(x, z)$, s'exprime dans le domaine fréquentiel par l'intégrale :

$$m(x, z) = \int u(x, z, \omega) \bar{v}(x, z, \omega) d\omega. \quad (1.1)$$

où u et v correspondent respectivement au champ propagé et rétropropagé.

Ce schéma est celui de la migration en tir commun. Mais il y a aussi la migration du jeu de données complet par propagation et rétropropagation de tout le jeu de données composé par plusieurs points de tir. Dans ce cas, on a pour chaque point en profondeur un champ propagé et rétropropagé multi-offset. L'image migrée sommée est obtenue en sommant les contributions pour tous les points de tir.

1.3 Mes travaux de thèse

Le besoin croissant en hydrocarbures et l'épuisement de nombreux champs pétroliers ont conduit l'exploration géophysique à s'intéresser à l'imagerie de structures géologiques complexes (structure salifère). Le développement de techniques d'imagerie sismique d'une part et de détermination de champs de vitesse de propagation d'autre part, adaptées à ce type de structure, sont actuellement des thèmes de recherche clés de l'exploration pétrolière.

La méthode de migration par équation d'onde, basée sur la modélisation de la propagation des ondes dans le sous-sol par différences finies, permet de modéliser correctement des propagations d'ondes complexes associées par exemple à des milieux comportant de fortes variations latérales et verticales de vitesse. Jusqu'à présent, seul le cas isotrope a été abordé. De plus, ce type de migration n'a débouché jusqu'ici sur aucun formalisme quantitatif.

L'objectif de mon travail est d'apporter des améliorations aux outils de migration par équation d'onde développés à l'Institut Français du Pétrole. Nous avons travaillé particulièrement sur deux points d'améliorations. Le premier point est l'introduction de l'anisotropie dans un code de migration par forme d'onde. Il fait l'objet de l'annexe A. Le deuxième point est le développement d'une méthode d'imagerie par extrapolation de champ d'onde en amplitudes préservées. Ce développement constitue l'axe principal de mon travail de thèse et fera l'objet de ce mémoire.

1.3.1 Migration par équation d'onde en milieu anisotrope VTI

En géophysique pétrolière, la plupart des applications classiques supposent que les milieux étudiés sont isotropes. Or, à l'échelle sismique, les milieux sédimentaires sont généralement faiblement anisotropes (de l'ordre de 10 à 20 %), et l'utilisation de méthodes isotropes peut donc engendrer des erreurs de focalisation et de positionnement des réflecteurs en profondeur (Thomsen, 1986; Tsvankin, 1996). Des études montrent que le décalage spatial entre les images migrées et les logs aux puits peut atteindre 10% (Stopin, 2001). L'introduction de l'anisotropie dans le traitement sismique permet souvent de mieux décrire la nature des roches et donc de mieux corrélérer et ajuster les images migrées.

Pour pouvoir faire de l'imagerie sismique anisotrope, il s'agit dans un premier temps de déterminer le modèle de vitesse anisotrope. Les paramètres d'anisotropies étaient jusqu'à présent très difficiles à estimer. Grâce à de nouvelles méthodes comme la tomographie de réflexion (Stopin, 2001), ces paramètres d'anisotropie deviennent accessibles et peuvent être introduits dans les chaînes de traitements classiques.

Dans un deuxième temps, il faut introduire l'anisotropie dans le propagateur utilisé dans l'imagerie. Des travaux récents (Ristow, 1999) ont permis de démontrer que notre outil de propagation des ondes peut être généralisé au cas des milieux anisotropes. C'est sur ce résultat que s'est appuyée la volonté d'introduire l'anisotropie dans le logiciel d'imagerie sismique isotrope 2D de l'IFP, *Topomig*. Notre travail s'appuie donc sur un outil isotrope existant et performant.

L'introduction de l'anisotropie dans le propagateur paraxial passe, dans l'approche que nous suivons, par l'introduction de coefficients paraxiaux variables qui dépendent des paramètres d'anisotropie. Il est important de reconsidérer le schéma numérique en tenant compte des variations de

ces coefficients. En effet, une étude énergétique a montré que le schéma numérique initial, construit pour des coefficients paraxiaux constants, pouvait s'avérer instable lorsque ceux-ci devenaient variables. Un deuxième point consistera à mener une étude sur les valeurs des coefficients paraxiaux en fonction des paramètres d'anisotropie. Cette étude est motivée par une observation effectuée sur des résultats préliminaires : pour de faibles variations d'anisotropie on peut rencontrer de fortes variations dans les coefficients paraxiaux. Enfin, j'ai testé l'extrapolateur paraxial à coefficients paraxiaux variables sur un jeu de données réelles.

Ce travail est présenté dans l'annexe A sous la forme d'un résumé en anglais présenté au congrès annuel de la SEG¹ en octobre 2003 à Dallas.

1.3.2 Migration par équation d'onde en amplitude préservée

L'avantage de la migration par équation d'onde par rapport à la migration de Kirchhoff a été bien établie en terme d'imagerie structurale (Duquet et al. (2002)). Il est légitime d'espérer également des bénéfices en terme d'imagerie quantitative (Stolk and Symes (2002); Stolk and Symes (2004)). La migration quantitative a été longuement étudiée dans le cas des approximations ray+Born ou ray+Kirchhoff, où des formules et des algorithmes performants ont été développés (Operto et al. (2000); Thierry et al. (1999); Xu and Lambaré (2000); Xu et al. (2001)). Ces travaux ont été réalisés en grande partie dans les années 1990, quand la migration de Kirchhoff apparaissait comme la seule possibilité pour la migration profondeur 3D avant sommation (3D PSDM). Aujourd'hui, avec l'essor de la migration par équation d'onde 3D, un effort similaire se développe pour obtenir des formules de migration quantitative par équation d'onde. Cependant, l'étude de la migration par équation d'onde n'a pas débouché jusqu'à présent sur une formulation aussi aboutie qu'avec l'utilisation de la théorie des rais.

Deux classes de méthodes ont été proposées pour résoudre le problème inverse de sismique réflexion : l'approche par moindre carré Lailly (1983); Tarantola (1984b)) et l'approche directe (Beylkin (1984); Bleistein (1987)). La formulation par moindre carrés a été utilisée par Plessix and Mulder (2002) pour obtenir une migration quantitative par équation d'onde (une itération), mais comme dans la théorie des rais, l'approche directe devrait donner de meilleurs résultats pour les premières itérations. Malheureusement, il n'est pas possible de tirer avantage directement du savoir-faire issu de la théorie en amplitude préservée des rais, car la plupart des paramètres nécessaires ne peuvent pas être obtenus par l'équation d'onde complète (vecteur lenteur en profondeur par exemple). Quelques approches ont été proposées mais n'ont pas montré complètement et de manière satisfaisante leurs capacités à préserver l'amplitude (Zhang et al. (2004); Sava et al. (2001)).

La migration quantitative consiste à exploiter l'amplitude contenue dans les données sismiques (champ réfléchi) pour en extraire l'amplitude du coefficient de réflexion. On a besoin pour cela de simuler (pour les défaire) les effets rencontrés par l'onde lors de sa propagation (effets cinématiques et dynamiques, d'où la dénomination de **propagation quantitative**) ainsi que de décrire le phénomène de réflexion (ou diffraction) intervenu sur les discontinuités. L'extraction de l'amplitude du coefficient de réflexion (ou de la perturbation relative d'impédance) en fonction de l'angle d'incidence (De Bruin et al. (1990); Brandsberg-Dahl et al. (1999); Mosher and Foster (2000); Rickett and Sava (2001); Rickett and Sava (2002); Sava and Fomel (2003); Soubaras (2003)) à partir de

¹Society of Exploration Geophysicists

celles des champs incident et réfléchi est fournie par un principe d'imagerie dit "quantitatif". Sur le plan de la propagation "quantitative", des travaux récents (Zhang et al., 2003; Kiyashchenko and Plessix, 2004; Le Rousseau and De Hoop, 1998; Prat, 2005) ont montré que les outils de modélisation "one-way" de la propagation des ondes ne permettent pas de restituer les amplitudes des approximations asymptotiques hautes fréquences des solutions de l'équation des ondes (i.e. l'équation transport). De plus, ils ont montré que l'ajout d'un terme supplémentaire permettait de rendre l'équation "one-way" quantitative. Sur le plan d'imagerie quantitative en angle, Sava and Fomel (2003) ont proposé un principe d'imagerie qui permet de construire des collections de points image communs (common image gather : CIG) dans le domaine des angles. Cependant, un principe d'imagerie en amplitude préservée reste encore à établir.

Mon travail de thèse porte sur la définition et le développement numérique d'une méthode de migration en amplitude préservée par extrapolation du champ d'onde dans le domaine des angles. Dans ce domaine, les efforts doivent porter tant sur la propagation numérique du champ d'onde, que sur la condition d'imagerie. Toutes deux doivent préserver le caractère quantitatif de l'imagerie. J'ai abordé le problème en deux dimensions.

Pour les développements numériques, je me suis basé sur les codes de modélisation et de migration structurale par équations d'onde performants qui existaient à l'Institut Français du Pétrole. Le code d'imagerie permettait de faire de la migration par point de tir dans le domaine des offsets de surface (Duquet (1996)).

J'ai travaillé sur deux points particuliers visant à rendre quantitatifs les codes de migration existants à l'Institut Français du Pétrole. Dans un premier temps, j'ai modifié les propagateurs "one-way" pour les rendre quantitatifs. Pour cela, je suis parti de l'équation "one-way" modifiée introduit par Zhang et al. (Zhang et al. (2002); Zhang et al. (2003); Zhang et al. (2004); Zhang et al. (2005)) et en utilisant la théorie du splitting d'opérateur (Collino (1987)), j'ai décomposé le problème en deux sous problèmes. Le premier est un problème de propagation "one-way" classique et le second sert à corriger l'amplitude du champ "one-way" propagé *via* la résolution d'une équation supplémentaire. Dans un deuxième temps, j'ai travaillé sur la définition d'un formalisme d'imagerie quantitatif par équation d'onde dans le domaine des angles. L'idée est d'extrapoler la géométrie d'acquisition en profondeur puis d'appliquer un principe d'imagerie quantitatif lorsque l'on est à la profondeur que l'on désire imager. Deux principes d'imagerie sont présentés. Le premier restitue la distribution des coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence et le deuxième la perturbation d'impédance. Les développements sont basés sur la formule quantitative de modélisation asymptotique (par Kirchhoff ou par Born) écrite dans le domaine spatial puis dans le domaine des ondes planes (domaine de Fourier). Le travail dans le domaine des ondes planes permet d'éviter les singularités qui apparaissent lorsque les sources et les récepteurs touchent le point image après extrapolation du champ d'onde en profondeur. Ensuite, en supposant que le milieu est localement homogène, je dérive une expression linéaire liant la réflectivité et le champ d'onde extrapolé en profondeur. Finalement, je montre comment exprimer cette formule rigoureusement par une sommation de pente (slant stack) dans le domaine des points images (CIGs) en offset, comme proposé par Sava and Fomel (2003). Numériquement, cette partie a consisté d'abord à modifier le principe d'imagerie existant en fonction de l'offset en surface afin d'obtenir une image migrée dans le domaine des offsets profondeur (distance source-récepteur après extrapolation). Ensuite, il a fallu réaliser un programme de post-traitement pour convertir quantitativement les images

migrées depuis le domaine des offsets profondeur vers le domaine des angles.

1.3.3 Plan de thèse

Le premier chapitre est consacré à la mise en place d'un outil de propagation "one-way"(extrapolation) par équation d'onde en amplitude préservée. Nous avons utilisé et adapté l'approche proposé par (Zhang et al. (2002); Zhang et al. (2003); Zhang et al. (2004); Zhang et al. (2005)) pour modifier l'extrapolateur paraxial "one-way" classique afin de construire un extrapolateur paraxial modifié qui soit quantitatif dans les milieux où la vitesse varie latéralement et verticalement. Des exemples numériques sont ensuite présentés illustrant les aspects quantitatifs de l'extrapolateur paraxial modifié. Pour ce travail, je me suis appuyé sur les travaux et les algorithmes développés à l'Institut Français du Pétrole.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation d'un nouveau principe d'imagerie quantitative par équation d'onde. Pour y aboutir, nous inversons la formule de modélisation volumique afin d'obtenir la formule d'imagerie quantitative de Kirchhoff. Ensuite, cette expression est passée dans le domaine de Fourier. En supposant enfin que le milieu est localement homogène (au voisinage du point image), et en introduisant certaines propriétés du champ d'onde, nous dérivons deux nouvelles conditions d'imagerie quantitative par équation d'onde. Celles-ci permettent de calculer à partir du champ complet extrapolé à chaque profondeur, soit la distribution des coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence, soit la perturbation d'impédance dans le domaine des angles. Des exemples numériques sont présentés illustrant les aspects quantitatifs des deux principes d'imagerie. Un exemple sur données réelles est finalement présenté dans le cadre d'une étude quantitative.

Chapitre 2

Propagation quantitative par équation d'onde

Résumé

La migration classique par équation d'onde vise à relocaliser les réflecteurs en profondeur mais n'en restitue pas forcément les amplitudes. À partir du moment où l'on s'intéresse aux contrastes de propriétés dans le sous sol, il est essentiel de s'assurer que chaque étape de la migration restitue précisément les amplitudes et dans ce cas, la migration est dite quantitative ou en amplitude préservée. Il existe plusieurs migrations par équation d'onde mais toutes peuvent se décomposer en deux étapes successives. La première étape consiste à extrapoler à chaque profondeur le champ d'onde enregistré en surface. La deuxième étape consiste à appliquer un principe d'imagerie pour construire l'image migrée à partir des données extrapolées en profondeur. Ainsi, pour faire de la migration en amplitude préservée, il faut propager quantitativement le champ d'onde et appliquer un principe d'imagerie quantitatif. Au niveau de la propagation, la propagation par équation “one-way” est actuellement le meilleur compromis entre temps calcul et précision obtenue. À l'origine, les équations “one-way” utilisées pour la migration par équation d'onde ont été construites pour préserver les aspects cinématiques de la propagation, mais sans réel souci pour la préservation des aspects dynamiques.

Cette partie porte sur la construction d'un propagateur paraxial “one-way” quantitatif performant en milieux hétérogènes. Des résultats numériques menés en 2D pour des milieux de complexité croissante sont présentés. Ils montrent qu'un propagateur “one-way” paraxial modifié permet de restituer correctement les amplitudes dans un milieu de vitesse variant lentement latéralement et verticalement.

2.1 Introduction

L'extrapolation du champ d'onde consiste à modéliser la propagation des ondes en résolvant l'équation des ondes dans sa totalité. La solution ainsi obtenue est alors complète et exacte. Ce-

pendant les méthodes d'extrapolation par différences finies sont très coûteuses, ce qui les rend peu applicables en pratique dans le traitement sismique 3D. Une approximation possible consiste à supposer que la solution de l'équation des ondes puisse se décomposer en deux champs indépendants. Chacun de ces champs est caractérisé par une direction de propagation privilégiée (en l'occurrence, la direction verticale) et l'équation décrivant sa propagation est l'équation "one-way". La spécificité est que l'on extrapole récursivement le champ d'onde en profondeur (Ristow (1980); Blacquiere (1989)). Actuellement, la plupart des techniques de migration par forme d'onde utilisées en production sont basées sur les méthodes "one-way" (Claerbout (1983); Berkhout (1985); Berkhout (1987); Biondi (2002b)). Cette décomposition qui est exacte en milieu homogène devient une approximation en milieu hétérogène. En pratique, pour prendre en compte les variations latérales de vitesse, une approximation supplémentaire est nécessaire (Bamberger et al. (1984)). Celle-ci, appelée approximation paraxiale, consiste à décrire la propagation du champ d'onde "one-way" autour de la direction de propagation verticale. Les raisons principales de la prédominance de l'approche "one-way" sont certainement la facilité relative de l'implémentation et du coût numérique raisonnable qu'elles apportent par rapport aux techniques utilisées pour résoudre l'équation d'onde complète.

Les premiers travaux appliqués à l'imagerie sismique sur les aspects quantitatifs de l'extrapolateur "one-way" ont été réalisés par Bamberger et al. (1984); Bamberger et al. (1985). Dans deux rapports successifs, Bamberger et al. ont suggéré une méthode permettant de prendre en compte la perte d'énergie des ondes traversant, à incidence normale, une interface caractérisée par un fort contraste de vitesse. Ces travaux ont pendant longtemps été les seuls sur les aspects quantitatifs du propagateur "one-way". Puis Collino and Lavaud (1996) ont soulevé le problème des amplitudes en comparant numériquement le comportement quantitatif du propagateur paraxial avec celui d'un propagateur "two-way".

En 1993, Zhang a proposé d'ajouter un terme à l'équation d'onde "one-way" pour la rendre quantitative au sens asymptotique hautes fréquences (Zhang (1993); Zhang et al. (2001); Zhang et al. (2002); Zhang et al. (2003); Zhang et al. (2004)). Ce terme est défini de telle sorte qu'une étude asymptotique de leur équation "one-way" modifiée permet de trouver une équation eikonale et une équation de transport one-way égales à celles de l'équation d'onde complète. Les exemples numériques montrés en 2D sont cependant limités au cas du gradient vertical de vitesse, c'est-à-dire aux milieux dont la vitesse varie linéairement et uniquement suivant la direction verticale.

Puis en 1996, De Hoop (1996); De Hoop and Bleistein (1997); Le Rousseau (2001); Le Rousseau and De Hoop (2003) ont utilisé le formalisme des opérateurs pseudo différentiels pour dériver un système d'équations "one-way" équivalent à l'équation d'onde "two-way" dans le cas d'un milieu de densité constante. Le système exacte a été écrit par Prat dans le cas d'une densité variable (Prat (2005)). Dans cette approche, le couplage entre ondes montante et descendante intervient de façon naturelle. La solution, calculée sous la forme d'un développement de Bremmer, revient à décomposer le problème en une succession de problèmes de diffractions élémentaires.

Plus récemment, Kiyashchenko and Plessix (2004) et Kiyashchenko et al. (2005) ont proposé de construire un propagateur par équation d'onde quantitatif basé sur la résolution de plusieurs équations "one-way" classiques. Pour cela, ils partent d'une factorisation de l'équation des ondes sous la forme d'un produit de deux opérateurs d'ordre un (l'opérateur one-way montant et l'opérateur one-way descendant). Ils développent ensuite le produit et l'égalise avec l'équation des ondes. Ils

en déduisent un opérateur d’erreur dont l’effet est injecté dans les équations sous la forme d’une donnée initiale.

Dans ce chapitre, nous aborderons les aspects théoriques et numériques que nous avons utilisé pour faire de la propagation quantitative “one-way” d’un champ d’onde. Dans la première section, après avoir introduit les bases de l’extrapolation “one-way”, nous discuterons du choix de cette approximation pour faire de la propagation d’onde. Nous introduirons ensuite les différents extrapolateurs “one-way” qui existent dans la littérature et présenterons plus en détails l’extrapolateur paraxial qui sera plus particulièrement utilisé par la suite.

Dans la seconde section, nous avons suivi les développements introduits par Zhang et al. (2003) pour modifier les équations “one-way” classique afin de construire une équation “one-way” modifiée quantitative au sens asymptotique hautes fréquences. Nous montrerons ensuite que les modifications à apporter à l’équation “one-way” consistent à y introduire un coefficient de transmission linéarisé. Nous discuterons enfin des liens qui existent entre cette équation “one-way” modifiée (que nous avons retenue) et les différentes approches abordées dans la littérature.

La troisième section porte sur la construction numérique d’un extrapolateur paraxial quantitatif “one-way” valide en milieu complètement hétérogène. Enfin, la dernière section est consacrée aux résultats numériques obtenus en 2D avec le propagateur paraxial modifié dans le cas d’un gradient de vitesse vertical puis non vertical et enfin dans le cas d’un milieu composé par plusieurs couches horizontales homogènes.

2.2 Équation acoustique “one-way”

2.2.1 Équation d’onde acoustique ”one-way” - ”two-way”

2.2.1.1 Équation d’onde acoustique ”two-way”

Introduisons l’équation de l’acoustodynamique qui gouverne l’évolution du champ de pression P dans un milieu acoustique défini par son module d’incompressibilité κ et sa densité ρ ,

$$\frac{1}{\kappa(x, y, z)} \frac{\partial^2 P(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \nabla \cdot \left(\frac{\nabla P(x, y, z, t)}{\rho(x, y, z)} \right) = S(x, y, z, t) \quad (2.1)$$

avec

$$S(x, y, z, t) = -\nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{f}(x, y, z, t)}{\rho(x, y, z)} \right) \quad (2.2)$$

où $S(x, y, z, t)$ et $\mathbf{f}(x, y, z, t)$ sont respectivement la distribution de source et les forces de volume. Notons l’expression de la vitesse $c(x, y, z) = \sqrt{\kappa/\rho}$.

Cette équation est un cas particulier du cas élastique linéaire dans lequel il n’y a pas de contraintes tangentielles. Le lecteur qui souhaite une approche plus détaillée peut se reporter au travail de Wapenaar and Berkhout (1989) dans lequel est fournie une bibliographie détaillée et sont présentés les principaux développements.

Les conventions de Fourier utilisées par la suite sont celles présentées en annexe (C).

Supposons que la densité ρ est constante dans le milieu. L'équation (2.1) se réécrit dans le domaine fréquentiel sous la forme,

$$\frac{\partial^2 P(x, y, z, \omega)}{\partial z^2} + H_2(x, y, z)P(x, y, z, \omega) = \rho S(x, y, z, \omega), \quad (2.3)$$

avec

$$H_2(x, y, z, \omega) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{c^2(x, y, z)} \right) \quad (2.4)$$

où l'on a fait apparaître la direction privilégiée suivant la verticale. L'équation (2.3) est appelée équation “two-way” par opposition à l'équation “one-way” que nous allons dériver à la section suivante.

2.2.1.2 Équation d'onde “one-way”

L'équation “one-way” est obtenue en factorisant l'équation “two-way” (2.3) dans le domaine de Fourier (k_x, k_y, z, ω) (Berkhout and Wapenaar (1989)). Cette factorisation n'est exacte que lorsque la vitesse est supposée homogène. Dans ce cas, le champ d'onde complet peut se découpler en un champ d'onde montant et un champ d'onde descendant suivant la direction verticale z .

Partons de l'équation (2.3) sans second membre et supposons que la vitesse ne varie que suivant z . Cette équation s'écrit dans le domaine de Fourier (k_x, k_y, z, ω) sous la forme,

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega)}{\partial z^2} + \left[\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2 - k_y^2 \right] \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega) = 0 \quad (2.5)$$

où $\tilde{P}$ est la transformée de Fourier de P selon x et y . Cette équation, également appelée équation de Helmholtz, peut se factoriser sous la forme,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right] \left[\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right] \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega) = 0. \quad (2.6)$$

avec,

$$\Lambda(k_x, k_y, z, \omega) = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2 - k_y^2} \quad (2.7)$$

Cette factorisation n'est exacte que si le modèle de vitesse est homogène et constitue seulement une approximation en milieu hétérogène (Bamberger et al. (1985), Kiyashchenko and Plessix (2004)). Posons $L = \frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda$ et $L^* = \frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda$. L'équation d'onde spectrale peut s'écrire comme $LL^*\tilde{P} = 0$, mais elle peut également être écrite sous la forme d'un système d'équations couplées du premier ordre,

$$\begin{aligned} L^* \tilde{P} &= \tilde{\phi}, & \text{ondes descendantes} \\ L \tilde{\phi} &= 0, & \text{ondes montantes} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Classiquement, le couplage entre ondes montantes et ondes descendantes est négligé et on ne considère que le système du premier ordre décrivant les ondes descendantes (et inversement pour les ondes montantes) (Scale (1995)). Cela est équivalent à supposer une direction principale de propagation. Dans le cas de l'application la plus courante de l'approximation “one-way”, la migration, nous négligeons le champ montant et nous avons le système du premier ordre décrivant les ondes descendantes, $L^* \tilde{P} = 0$. Ainsi, le champ d'onde complet se décompose alors en un champ d'onde montant $\tilde{P}^-$ et un champ d'onde descendant $\tilde{P}^+$, vérifiant respectivement les équations “one-way” classiques.

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right) \tilde{P}^+ &= 0 \\ \left(\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right) \tilde{P}^- &= 0 \end{aligned} \quad (2.9)$$

Ces équations sont les équations “one-way” classiques (Claerbout (1971); Claerbout (1983)) où l'équation avec le signe + décrit la propagation d'une onde montante et l'équation avec le signe - décrit la propagation d'une onde descendante. Λ est couramment appelé opérateur “single square root” (SSR).

Notons que l'opérateur Λ est réel lorsque $\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2 - k_y^2 > 0$. Dans ce cas, $\tilde{P}$ est de la forme $e^{\pm i\Lambda \Delta z}$ et décrit les modes propagatifs de l'équation d'onde. En revanche, lorsque l'opérateur Λ devient imaginaire ($\frac{\omega^2}{c^2(z)} - k_x^2 - k_y^2 \leq 0$), $\tilde{P}$ décrit la propagation d'ondes dites évanescentes dont l'amplitude décroît exponentiellement avec la distance parcourue.

Enfin, notons également que comme pour l'équation de Helmholtz, des conditions de radiation à l'infini (conditions de Sommerfeld) doivent être imposées à l'équation “one-way” pour éviter une solution exponentielle du champ d'onde.

2.2.1.3 Discussion sur le choix de l'équation d'onde “one-way”

Étudions maintenant les particularités qui découlent du choix de l'utilisation de l'équation “one-way” ou “two-way” dans la migration par équation d'onde. Chacune de ces méthodes a ses avantages et ses inconvénients, et le choix entre ces méthodes varie en fonction des auteurs.

L'approche “two-way” modélise le champ d'onde acoustique complet. De façon naturelle, cette méthode ne présente pas de limitation quant aux pendages des réflecteurs à imager, aux vitesses et permet de prendre en compte tous les types d'onde (directes, multiples, coniques, ondes évanescentes), les trajectoires multiples et les trajectoires (ondes) tournantes (Mulder and Plessix (2003); Mulder and Plessix (2004)). Comme elle prend en compte implicitement les trajectoires tournantes,

elle peut être utilisée pour imager à la fois les deux côtés d’un réflecteur (illumination de réflecteurs et failles par la face inférieure). Ainsi, les amplitudes sont naturellement bien calculées. Cependant, elle est en pratique peu utilisée en raison de son coût informatique élevé (nombre de points à la puissance 5). En effet, elle demande un pas d’échantillonnage spatial plus serré et significativement plus de points par longueur d’onde que sa cousine “one-way” pour éviter la dispersion numérique. Comme la méthode “two-way” propage tous les types d’onde (particulièrement les multiples) en même temps, la qualité de la migration associée est particulièrement sensible aux erreurs sur le modèle de vitesse. Cela peut entraîner de sérieux problèmes de focalisation particulièrement à cause des multiples. Les méthodes de migration classiquement associées sont la migration temps¹ (Tarantola (1984a); Lailly (1984); Pica et al. (1990)) et la migration “two-way” en fréquence (Pratt (1990)).

L’approche “one-way” est, quant à elle, basée sur l’approximation de la partie descendante du champ d’onde complet. Elle prend en compte les trajectoires multiples mais ne modélise pas tous les types d’onde (comme les réflexions multiples). Son principal avantage par rapport à l’équation “two-way” reste son coût de calcul raisonnable (surtout en 3D), ce qui la rend aujourd’hui, utilisable pour faire de l’imagerie et de l’analyse de vitesse 3D. Concernant la cinématique seulement, son principal inconvénient est son angle maximum de propagation par rapport à la verticale (90° max) qui ne lui permet pas de prendre en compte les trajectoires tournantes. De nombreuses méthodes d’extrapolation “one-way” ont été développées tant dans le domaine spatial que dans le domaine spectral. L’extrapolation “one-way” par méthodes spectrales bénéficie d’une implémentation relativement simple (multiplication + interpolation) qui apporte une solution rapide au problème de la propagation. Lorsque le milieu ne dépend que de z , cette solution spectrale de l’équation “one-way” est exacte. Les méthodes spectrales manipulent des angles de propagation maximum de 90° et sont limitées à des milieux hétérogènes dont la vitesse varie lentement latéralement. Pour prendre en compte les fortes variations latérales de vitesse, des méthodes spatiales ont été développées (différences finies) mais l’angle maximum de propagation associé est bien souvent limité à 60° ou 70° . Des méthodes mixtes existent et permettent de tirer avantage à la fois des méthodes spectrales et des méthodes spatiales. Collino and Lavaud (1996); Zhang et al. (2003) ont montré que la formulation “one-way” ne permet pas de restituer les amplitudes mais d’un point de vue cinématique cette approche est tout à fait correcte. Les méthodes de migration associées sont la migration par point de tir (Claerbout (1983)) et la migration source-récepteur (Claerbout (1971)).

Pour l’ensemble des applications numériques qui seront présentées par la suite, c’est l’approche “one-way” qui a été choisie et utilisée car elle constitue encore aujourd’hui l’approche la plus adaptée pour une extension 3D de la migration par équation d’onde en amplitude préservée. Notons que dans le cas 2D, l’utilisation d’un extrapolateur “two-way” est tout à fait envisageable.

2.2.1.4 L’extrapolation d’un champ d’onde par équation d’onde

La résolution de l’équation d’onde est nécessaire pour extrapoler un champ d’onde en profondeur. L’extrapolation consiste à calculer, à partir du champ d’onde de départ le champ d’onde pour une nouvelle profondeur (Figure 2.1). Cette étape est également appelée prolongement du champ d’onde.

¹time reverse migration (en anglais).

Il existe trois méthodes principales pour prolonger (Ristow (1980)) le champ d'onde. Cela consiste à résoudre l'équation des ondes de trois manières différentes :

- en utilisant le théorème de représentation (Peels (1988); Berkhout and Wapenaar (1989); Kinneging (1989)). C'est la méthode utilisée classiquement pour extrapoler le champ d'onde en utilisant la fonction de Green du milieu (calculée par des rais). La base de l'extrapolation directe du champ d'onde analytique est le théorème de représentation² qui permet de calculer le champ d'onde en profondeur à partir du champ mesuré en surface (cf. annexe B).
- par des méthodes spectrales. Dans un milieu latéralement homogène, l'extrapolation d'ondes montantes ou descendantes s'expriment en appliquant un filtre du type $e^{i\Lambda\Delta z}$ à la transformée de Fourier horizontale des données (Claerbout (1985)) dans le domaine fréquence-nombre d'onde.
- par différences finies (Claerbout (1985); Duquet (1996); Soubaras (1996)). Il s'agit de résoudre l'équation d'onde “two-way” ou “one-way” en discrétisant par différences finies.

La figure (2.1) montre les différences entre les procédures. Alors que l'approche par différences finies calcule séquentiellement en profondeur chaque champ d'onde de manière récursive, la méthode conventionnelle de Kirchhoff part toujours du champ enregistré en surface. La méthode fréquence-nombre d'onde fonctionne dans le domaine des fréquences et utilise un opérateur exact, solution de l'équation des ondes “one-way”, dans le cas d'une distribution de vitesse invariante latéralement.

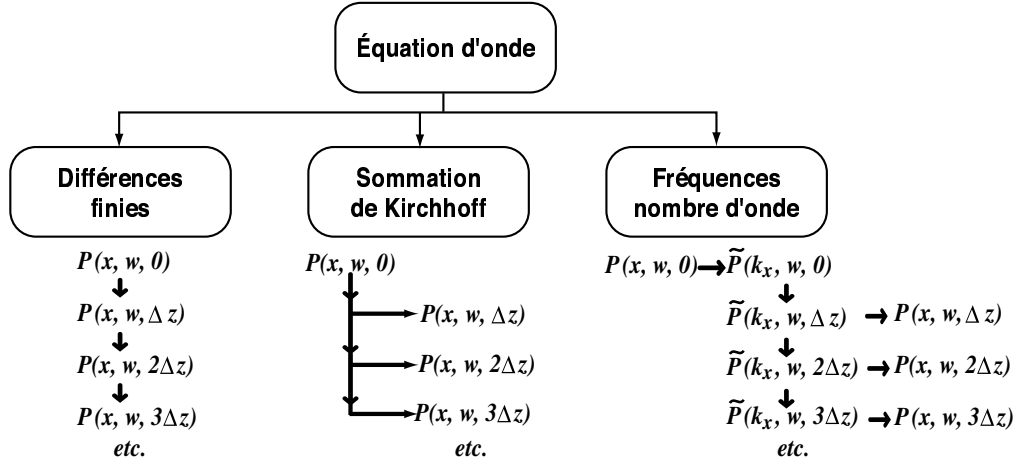


FIG. 2.1 – Les différentes méthodes de prolongement d'un champ d'onde.

2.2.2 L'extrapolation par équation d'onde “one-way”

Les différentes méthodes de propagation par équation d'onde “one-way” diffèrent d'abord par le domaine utilisé pour résoudre l'équation numériquement : dans le domaine fréquence-nombre d'onde pour les méthodes spectrales basées sur le Phase Shift ou dans le domaine fréquence-espace pour les méthodes basées sur les différences finies. Des méthodes appelées mixtes ont été développées pour tirer avantage successivement des deux domaines.

L'équation “one-way” descendante dans le domaine fréquence-nombre d'onde s'écrit,

²Gustav Robert Kirchhoff, 1824-1887

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}(k_x, k_y, z, \omega) = i\Lambda \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega) \quad (2.10)$$

avec,

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} \quad (2.11)$$

Les différentes approches diffèrent par la manière avec laquelle l’opérateur Λ est approché.

2.2.2.1 Méthodes spectrales

Extrapolation Phase Shift

Quand la vitesse $c(x, y, z)$ ne varie pas latéralement (i.e. $c(x, y, z) = c(z)$), l’équation (2.10) a une solution analytique dans le domaine fréquence-nombre d’onde donnée par

$$P(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, k_y, z, \omega) e^{i\Lambda \Delta z} \quad (2.12)$$

Cette méthode est un outil très efficace car elle fournit une solution exacte de l’équation “one-way” par une simple multiplication dans le domaine fréquence-nombre d’onde. C’est une méthode d’extrapolation inconditionnellement stable qui est utilisée dans la migration Phase Shift (Gazdag (1978)). Cette méthode peut migrer des pendages jusqu’à 90° mais est limitée à des variations verticales de vitesse seulement. Plusieurs autres approches ont été développées pour s’affranchir de cette limitation.

Extrapolation Split-Step Fourier (SSF)

Pour permettre des variations latérales de vitesse, Stoffa et al. (1990) ont introduit l’approche Split Step Fourier, basée sur la théorie des perturbations. Le champ de vitesse est décomposé en une vitesse moyenne et un terme de perturbation variable spatialement,

$$c(x, y, z) = c_0(z) + \delta c(z; x, y). \quad (2.13)$$

L’extrapolation est alors réalisée en deux étapes : une extrapolation Phase Shift est faite utilisant la vitesse 1D c_0 dans le domaine fréquence-nombre d’onde

$$P^*(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = P(k_x, k_y, z, \omega) e^{i\Lambda \Delta z} \quad \text{avec} \quad \Lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_0^2} - k_x^2 - k_y^2}, \quad (2.14)$$

et un terme de correction à la propagation verticale est appliquée à P^* dans le domaine fréquence-espace

$$P(x, y, z + \Delta z, \omega) = P^*(x, y, z + \Delta z, \omega) e^{i \left(\frac{\omega}{c(x, y, z)} - \frac{\omega}{c_0(z)} \right) \Delta z}. \quad (2.15)$$

Cette méthode est efficace si la vitesse ne varie pas trop rapidement latéralement ou si les angles de propagation sont proches de la verticale.

Extrapolation Phase Shift Plus Interpolation (PSPI)

La méthode Phase Shift Plus Interpolation (Gazdag and Sguazzero (1984)) introduit dans la méthode de Phase Shift plusieurs vitesses de références, chacune invariante latéralement, pour prendre en compte des variations latérales de vitesse. Pour chaque vitesse de référence est calculé un champ d'onde de référence et le champ d'onde final est obtenu en interpolant les champs d'onde de référence en fonction des variations locales de la vitesse. Pour assurer une haute précision pour de faibles pendages, une propagation verticale (décalage en temps) avec la vitesse exacte est d'abord appliquée sur le champ d'onde dans le domaine fréquence-espace,

$$P^*(x, y, z + \Delta z, \omega) = P(x, y, z) e^{\frac{i\omega}{c(x, y, z)} \Delta z} \quad (2.16)$$

puis un Phase Shift résiduel est appliqué pour chaque vitesse de référence c_{ref} dans le domaine fréquence-nombre d'onde,

$$P_{ref}(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) = P^*(k_x, k_y, z + \Delta z, \omega) e^{i(\Lambda - \frac{\omega}{c_{ref}}) \Delta z} \quad (2.17)$$

avec

$$\Lambda = \sqrt{\frac{\omega^2}{c_{ref}^2} - k_x^2 - k_y^2}, \quad (2.18)$$

Les approches SSF et PSPI sont équivalentes lorsqu'une seule vitesse de référence est utilisée. L'efficacité de cette méthode est directement proportionnelle au nombre de vitesses de référence prises à chaque pas d'extrapolation. Le nombre de vitesses de références dépend à la fois du contraste de vitesse et du pendage des réflecteurs. Un choix adaptatif des vitesses de référence a été implémenté par Bagaini et al. (1995). L'opérateur d'extrapolation PSPI est basé sur la décomposition inconditionnellement stable de l'opérateur Phase Shift. Cependant, des instabilités numériques peuvent exister dans de rares cas pendant l'application récursive de cet extrapolateur (Etgen (1994)).

2.2.2.2 Méthodes par différences finies

Extrapolation paraxiale

Une approche différente consiste à considérer une approximation de l'équation “one-way” dans le domaine fréquence-espace. Cette approximation, dite paraxiale, vise à obtenir des équations aux dérivées partielles approchant la propagation des ondes “one-way” autour de la direction verticale de propagation (Collino (1987); Duquet (1996); Soubaras (1996)).

Les équations paraxiales ont été introduites par Claerbout (1983) pour l'extrapolation 2D et

ont été intensivement utilisées parce qu'elles manipulaient les variations latérales de vitesse avec une stabilité inconditionnelle (stables quelles que soient les variations latérales de vitesse, Collino (1987)). Supposant que la vitesse est homogène, les équations paraxiales sont dérivées à partir de l'équation "one-way" dans le domaine fréquence-nombre d'onde en approchant l'opérateur Λ par un développement en fractions rationnelles de Padé (Bamberger et al. (1985); Bamberger et al. (1988)),

$$\Lambda \approx \frac{\omega}{c} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N \left(\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)}{1 - \alpha_n^N \left(\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)} \right), \quad (2.19)$$

où N est l'ordre de l'approximation et les coefficients réels α_n^N et β_n^N vérifient (Bamberger et al. (1985)) :

$$\begin{cases} \beta_n^N = \cos^2 \left(\frac{n\pi}{2N+1} \right) \\ \alpha_n^N = \frac{2}{2N+1} \sin^2 \left(\frac{2n}{2N+1} \right). \end{cases} \quad (2.20)$$

Ces coefficients peuvent être également optimisés numériquement (Bamberger et al. (1985); Collino (1987)) pour que (2.19) ajuste au mieux l'opérateur racine carré Λ (2.11) avec,

$$\begin{cases} 0 < \beta_n, \forall n \in \{1, \dots, N\} \\ 0 \leq \alpha_n < 1, \forall n \in \{1, \dots, N\} \end{cases} \quad (2.21)$$

En utilisant l'équation (2.19), l'approximation paraxiale de l'équation "one-way" (2.10) dans le domaine fréquence-nombre d'onde devient donc,

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}(k_x, k_y, z, \omega) = i \frac{\omega}{c} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N \left(\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)}{1 - \alpha_n^N \left(\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} + \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2} \right)} \right) \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega). \quad (2.22)$$

L'équation "one-way" paraxiale (2.22) décrit la propagation du champ d'onde "one-way" autour de la direction verticale. Son domaine de validité est limité par son angle maximal d'ouverture (mesuré par rapport à la verticale) à l'intérieur duquel l'erreur entre la relation de dispersion de l'équation des ondes (2.7) et l'équation paraxiale (2.19) est inférieure à un certain seuil. Par conséquent, l'utilisation d'un propagateur paraxial pour modéliser la propagation des ondes en imagerie sismique implique des limitations pour imager des réflecteurs fortement pentés. En utilisant les transformations,

$$-k_x^2 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \text{et} \quad -k_y^2 \Longleftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad (2.23)$$

l'approximation paraxiale de l'équation "one-way" (2.10) dans le domaine fréquences-espace avec la vitesse exacte $c(x, y, z)$ donne,

$$\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, z, \omega) = i\frac{\omega}{c} \left(1 - \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N (S_x^2 + S_y^2)}{1 - \alpha_n^N (S_x^2 + S_y^2)} \right) P(x, y, z, \omega) \quad (2.24)$$

avec,

$$S_x = \frac{c(x, y, z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial x}, \quad S_y = \frac{c(x, y, z)}{\omega} \frac{\partial}{\partial y} \quad (2.25)$$

Pour les problèmes 2D, la résolution numérique de l'équation (2.19) avec des schémas implicites par différences finies conduit classiquement à la résolution de systèmes tridiagonaux faciles à résoudre. Lorsque l'on considère les problèmes 3D, ce type de techniques peut toujours être utilisé mais le système linéaire est bien plus difficile à inverser (Kern (1992)). Pour éviter cette difficulté, Brown (1983) a suggéré de décomposer l'équation (2.22) suivant les directions x et y . Cette technique de décomposition³ réduit le problème à l'application d'une série d'opérateurs implicites 2D, mais génère une erreur anisotrope azimutale. L'imagerie de forts pendages et la symétrie circulaire peuvent être améliorées en combinant différentes directions de décomposition (Ristow and Rühl (1997); Collino (1995)).

L'équation paraxiale 2D pour un milieu hétérogène que nous avons utilisée dans nos travaux s'écrit dans le domaine temps-espace sous la forme du système différentiel (Collino and Lavaud (1996)) :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial z} + i\omega \frac{P}{c^2} - i\omega \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c} \phi_n = 0 \\ \frac{\omega^2}{c} \phi_n + \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial \phi_n}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial P}{\partial x} \right) = 0 \\ P(x, z = 0, \omega) = P_0(x, z, \omega). \end{cases} \quad (2.26)$$

avec x appartenant à l'intervalle $[-X; X]$. Les $\phi_n(x, z, t)$ sont des fonctions auxiliaires de calcul et $c = c(x, z)$ est la vitesse dans le milieu. Introduisons les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} \frac{\partial P}{\partial x}(x, z, \omega) \Big|_{x=-X} = \frac{\partial P}{\partial x}(x, z, \omega) \Big|_{x=X} = 0 \\ \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(x, z, \omega) \Big|_{x=-X} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x}(x, z, \omega) \Big|_{x=X} = 0. \end{cases} \quad (2.27)$$

Le grand avantage de ces méthodes est leur capacité à manipuler les fortes variations latérales de vitesse. Un inconvénient majeur est la dispersion numérique qui gouverne la taille de la grille sur laquelle les dérivées doivent être approchées. La technique de discrétisation utilisée est détaillée dans les travaux de Collino (1987).

³Splitting (en anglais)

2.2.2.3 Méthodes mixtes

Extrapolation de Li

En présence de faibles variations latérales de vitesse, les schémas par différences finies sont pénalisés par rapport aux méthodes Phase Shift (i.e. limitation du pendage, anisotropie azimutale en 3D, dispersion numérique). Pour compenser ces déficiences, Li (1991) a proposé de combiner l'opérateur différences finies avec l'opérateur Phase Shift pour tirer avantage des points forts de chaque méthode. Il a introduit dans le domaine fréquence-nombre d'onde un opérateur erreur ε entre l'opérateur exact Λ et l'opérateur approché paraxial Λ^{FD} ,

$$\varepsilon = \Lambda - \Lambda^{FD}. \quad (2.28)$$

avec Λ donné par l'équation (2.11) et Λ^{FD} donné par l'équation (2.19). Pour compenser les erreurs des différences finies, on peut ajouter un opérateur d'erreur à l'équation paraxiale initiale (2.22). Cela nécessite de résoudre une équation supplémentaire dans le domaine fréquence-nombre d'onde donnée par,

$$\frac{\partial \tilde{P}}{\partial z}(k_x, k_y, z, \omega) = \left(i \frac{\omega}{c} \varepsilon\right) \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega). \quad (2.29)$$

Le calcul de ce terme correctif demande l'utilisation d'un modèle de vitesse homogène c_0 . Quand les variations latérales de vitesse sont modérées, la vitesse exacte $c(x, y, z)$ peut être remplacée par la vitesse moyenne sur tous les (x, y) à chaque pas d'extrapolation en profondeur. Ainsi, la solution de l'équation (2.29) dans le domaine fréquence-nombre d'onde en utilisant la vitesse moyenne c_0 s'écrit :

$$\tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega) = e^{\left(i \frac{\omega}{c} \varepsilon \Delta z\right)} \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega). \quad (2.30)$$

Cette méthode donne de bons résultats pour des variations latérales de vitesse modérées. En présence de forts contrastes de vitesse, Li propose d'utiliser un propagateur Phase Shift plus interpolation pour faire la correction de phase.

Extrapolation Fourier Finite difference (FFD)

Similairement à l'approche de Li, l'extrapolateur Fourier Finite Différence proposé par Ristow and Rühl (1994; 1997) est basé sur un opérateur de Phase Shift dans le domaine fréquence-nombre d'onde couplé avec un opérateur paraxial dans le domaine fréquence-espace. L'extrapolateur est dérivé en considérant ε , la différence entre l'opérateur Λ avec la vitesse exacte et l'opérateur Λ avec la vitesse de référence c_0 ,

$$\varepsilon = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2} - \frac{k_y^2 c^2}{\omega^2}} - \frac{\omega}{c_0} \sqrt{1 - \frac{k_x^2 c_0^2}{\omega^2} - \frac{k_y^2 c_0^2}{\omega^2}} \quad (2.31)$$

Les stratégies combinant à la fois les opérateurs différences finies et Phase Shift constituent une

approche naturelle pour dériver un extrapolateur qui manipule de forts contrastes de vitesse et n’ont pas de limitation en angle lorsque la vitesse ne varie pas.

2.2.2.4 Conclusions

Toutes les méthodes d’extrapolation “one-way” présentées ici ont pour objectif commun de résoudre l’équation “one-way”. Les différences viennent des approximations utilisées (ou pas) pour calculer la racine carrée Λ de l’équation “one-way”. Chacune à ses avantages et ses inconvénients. Les méthodes spectrales sont les plus rapides et possède la plus grande ouverture. Cependant, elles sont limitées aux milieux caractérisés par de faibles contrastes latéraux de vitesse. Les méthodes par différences finies sont particulièrement adaptées pour les milieux à forts contrastes latéraux mais souffrent d’une ouverture limitée. Enfin, les méthodes mixtes tentent de tirer avantage à la fois des méthodes spectrales et des méthodes spatiales.

Le travail réalisé pour rendre la propagation “one-way” quantitative dans la section suivante ne porte pas sur l’extrapolateur lui-même. Par conséquent, il peut être combiné à tous les extrapolateurs “one-way” existants. Toutefois, je ne considère par la suite que l’extrapolateur paraxial car c’est le plus adapté pour décrire la propagation en milieu hétérogène.

2.2.3 Équation “one-way” avec second membre

Dans le cadre de la sismique réflexion, nous nous intéressons à la propagation d’un champ d’onde dans un milieu de vitesse $c(x, y, z)$ généré par une source $F^S(x, y, t)$ située à la surface en $z = z_0$. La propagation par équation “one-way” s’écrit comme une équation différentielle du premier ordre en z sans second membre tandis que le terme source est introduit sous la forme d’une condition limite à la profondeur $z = z_0$. Il s’agit de trouver la condition limite “one-way” pour laquelle la solution P' de l’équation “one-way” sans second membre est égale à la solution P de l’équation des ondes avec second membre.

La marche à suivre consiste dans un premier temps à exprimer le terme source (second membre) de l’équation d’onde sous la forme d’une condition limite en $z = z_0$. Il s’agit ensuite d’évaluer l’équation “one-way” en $z = z_0$. Finalement, on déduit la condition limite à considérer pour que la solution de l’équation “one-way” paraxial coïncide avec la solution de l’équation “two-way” (Collino and Lavaud (1996); Duquet (1996)). Pour que cette expression soit valide en milieu hétérogène, la dernière étape est l’introduction de l’approximation paraxiale dans les équations “one-way”.

2.2.3.1 Condition initiale “one-way” dans le domaine de Fourier

Considérons l’équation d’onde acoustique dans un milieu de vitesse hétérogène :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P(x, y, z, t)}{\partial t^2} - \Delta P(x, y, z, t) = \delta(z - z_0) F^S(x, y, t), & \text{sur } \mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R} * \mathbb{R}^+ \\ P(x, y, z, 0) = 0 \\ \frac{\partial P}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0, \end{cases} \quad (2.32)$$

où F^S est une source causale avec $F^S(x, y, t) = 0$, pour $t < 0$ qui sera typiquement de la forme $F^S(x, y, t) = f(t)\delta(x - x_s)\delta(y - y_s)$ où (x_s, y_s) désigne les coordonnées horizontales de la source.

D’après Collino and Lavaud (1996), Duquet (1996), le champ d’onde complet P du système (2.32) peut s’écrire comme la somme d’un champ P^+ décrivant le champ d’onde dans la partie inférieure du modèle ($z > z_0$) et d’un champ P^- décrivant le champ d’onde dans la partie supérieure du modèle ($z < z_0$). Deux systèmes équivalents à (2.32) sont alors obtenus, l’un pour P^+ , l’autre pour P^- dans lesquels le terme source a été éliminé au profit d’une condition limite, telle que et P^+ est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P^+}{\partial t^2}(x, y, z, t) - \Delta P^+(x, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial P^+}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{F^0(x, y, t)}{2}, \text{ en } z = z_0 \\ P^+(x, y, z, 0) = 0 \\ \frac{\partial P^+}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (2.33)$$

et P^- est solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 P^-}{\partial t^2}(x, y, z, t) - \Delta P^-(x, y, z, t) = 0 \\ \frac{\partial P^-}{\partial z}(x, y, z, t) = \frac{F^0(x, y, t)}{2}, \text{ en } z = z_0 \\ P^-(x, y, z, 0) = 0 \\ \frac{\partial P^-}{\partial t}(x, y, z, 0) = 0, \end{array} \right. \quad (2.34)$$

La décomposition en $z = z_0$ du champ d’onde complet P en un champ P^+ et un champ P^- suppose que les deux champs d’onde soient entièrement découplés (pas d’interaction) pour toute profondeur différente de z_0 . Avec ce choix, aucune onde du champ P^+ de la partie inférieure ne revient du demi-espace supérieur.

Considérons maintenant l’équation “one-way” sans second membre modélisant un champ d’onde descendant exprimé dans le domaine (k_x, k_y, z, ω) ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \tilde{P}'}{\partial z}(k_x, k_y, z, \omega) = i\Lambda \tilde{P}'(k_x, k_y, z, \omega) \\ \tilde{P}'(k_x, k_y, z, \omega) = \tilde{F}^P(k_x, k_y, \omega), \text{ en } z = z_0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

où $\tilde{P}'$ et $\tilde{F}^P$ sont respectivement la transformée de Fourier suivant x, y et t du champ d’onde et de la condition limite “one-way”.

Et cherchons l’expression de la condition limite “one-way” de (2.35) pour laquelle solution $\tilde{P}'$ de l’équation “one-way” soit également solution de l’équation des ondes P du système (2.33). D’une part, la condition limite (2.33) pour l’équation d’onde s’écrit dans le domaine (k_x, k_y, z, ω) ,

$$\frac{\partial \tilde{P}^+}{\partial z}(k_x, k_y, z = z_0, \omega) = \frac{\tilde{F}^0(k_x, k_y, \omega)}{2}. \quad (2.36)$$

D'autre part, l'équation “one-way” s'écrit en $z = z_0$,

$$\frac{\partial \tilde{P}'}{\partial z}(k_x, k_y, z = z_0, \omega) = i\Lambda \tilde{P}'(k_x, k_y, z = z_0, \omega) \quad (2.37)$$

avec $\tilde{P}'(k_x, k_y, z = z_0, \omega) = \tilde{F}^P(k_x, k_y, \omega)$.

On déduit des équations (2.36) et (2.37) l'expression de la condition limite $\tilde{P}'$ en $z = z_0$ en fonction du terme source de l'équation d'onde F^0 , tel que

$$\boxed{\tilde{P}'(k_x, k_y, z = z_0, \omega) = \Lambda^{-1} \frac{1}{2i} F^0(k_x, k_y, \omega), \quad \text{pour } z = z_0} \quad (2.38)$$

Cette condition limite adaptée permet à l'équation “one-way” de restituer à la fois l'amplitude et la forme du signal de la partie descendante (ou montante) de l'équation d'onde complète. Les Figures (2.2) montre l'importance de la prise en compte d'une condition limite adaptée pour restituer l'amplitude et la forme du signal sismique.

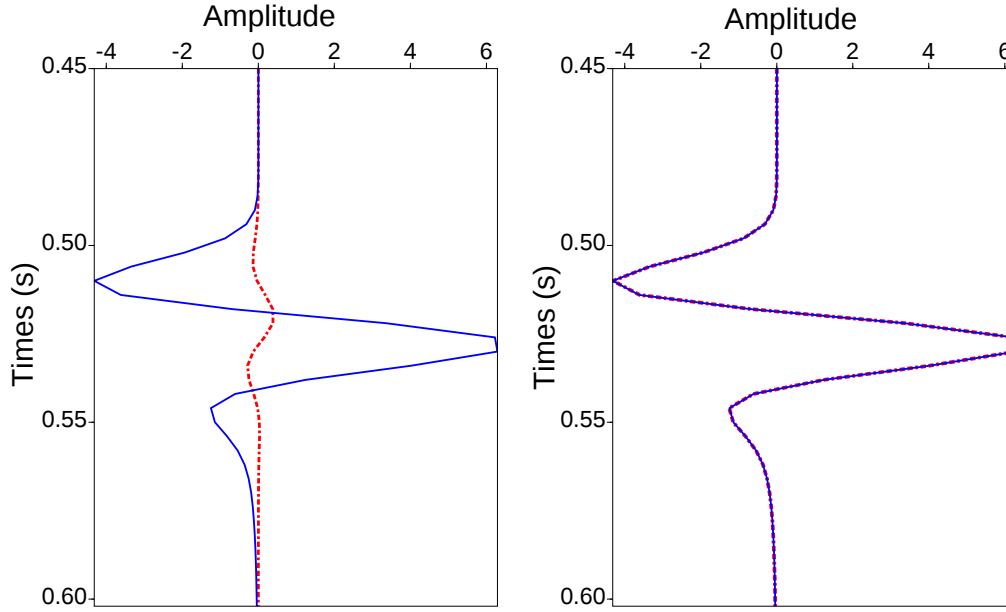


FIG. 2.2 – Condition limite “one-way”. Comparaison du champ propagé “one-way” en trait pointillé (calculé avec un extrapolateur Phase Shift) et du champ propagé “two-way” en trait plein (calculé analytiquement en annexe (D)). Le milieu est homogène de vitesse égale à 2000 m/s. Les traces sismiques présentées correspondent à un récepteur localisé en $(x = x_s, z = 1060\text{m})$ et une source sismique en $(x = x_s, z = 0\text{m})$. La source sismique utilisée est un Ricker de fréquence centrale égale à 20 Hz. (à gauche) la condition limite est la source sismique. On remarque que les deux signaux diffèrent à la fois en amplitude et en forme. (à droite) la condition limite est la condition limite “one-way” (2.38). On observe que l'utilisation d'une condition limite adaptée permet d'ajuster à la fois l'amplitude et la forme du signal.

L'utilisation de la condition limite (2.38) dans le domaine (k_x, k_y, z, ω) est limitée aux milieux dont la vitesse est invariante latéralement.

2.2.3.2 Approximation de la condition limite “one-way” dans le domaine spatiale

Pour obtenir l’expression de la condition limite “one-way” en milieu hétérogène, nous allons introduire l’approximation paraxiale de l’opérateur Λ . L’expression 3D nécessite l’introduction de la notion de splitting. Afin de simplifier le problème, nous nous restreignons au cas 2D.

En 2D, la condition limite s’écrit,

$$\tilde{P}(k_x, z = z_0, \omega) = \frac{\tilde{F}^0(k_x, \omega)}{2i\Lambda} = \frac{c}{i2\omega} \frac{\tilde{F}^0(k_x, \omega)}{\left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (2.39)$$

et réécrivons la comme,

$$\tilde{P}(k_x, z = z_0, \omega) = \frac{c}{i2\omega} \tilde{F}^0(k_x, \omega) \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (2.40)$$

Approchons $\left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ par l’approximation de Padé introduite dans l’équation (2.19) et en posons ensuite,

$$\begin{cases} \tilde{g}(k_x, z = z_0, \omega) = \frac{c}{i2\omega} \tilde{F}^0(k_x, \omega) \left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{-1} \\ \text{et} \\ \tilde{g}_m(k_x, z = z_0, \omega) = \left(\frac{k_x^2 c^2}{\omega^2 - \alpha_m^M k_x^2 c^2}\right). \end{cases} \quad (2.41)$$

Enfin, en opérant des transformées de Fourier inverses suivant k_x et k_z , le système s’écrit d’après Collino and Lavaud (1996) dans le domaine fréquence-espace sous la forme :

$$\begin{cases} P(x, z = z_0, \omega) = g - \sum_{m=1}^M \beta_m^M g_m \\ \frac{\omega^2}{c} g + \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial g}{\partial x}\right) = \frac{\omega}{2i} F^0 \\ \frac{\omega^2}{c} g_m + \alpha_m^M \frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial g_m}{\partial x}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(c \frac{\partial g}{\partial x}\right). \end{cases} \quad (2.42)$$

où $c = c(x, z)$, $P = P(x, z = z_0, \omega)$, $g = g(x, z = z_0, \omega)$, $g_m = g_m(x, z = z_0, \omega)$ et $F^0 = F^0(x, \omega)$.

A l’ordre 0, $\left(1 - \frac{k_x^2 c^2}{\omega^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1$ et la condition limite (2.39) devient,

$$P(x, z = 0, \omega) = \frac{c(x, z)}{i2\omega} F^0(x, \omega). \quad (2.43)$$

Même approchée à l’ordre 0 (Figure 2.3), la condition limite “one-way” a un impact à la fois l’amplitude (multiplication par la vitesse c) et la forme du signal (intégration en temps) de la source de l’équation des ondes F^0 . À l’ordre 0, la condition limite “one-way” (2.39) est bien approchée pour de petits angles de propagation. Les amplitudes sont sous-estimées lorsque l’angle de propagation devient trop grand. Plus l’ordre de l’approximation M est grand (Figure 2.3), et plus

l’approximation est correcte pour de grands angles de propagation.

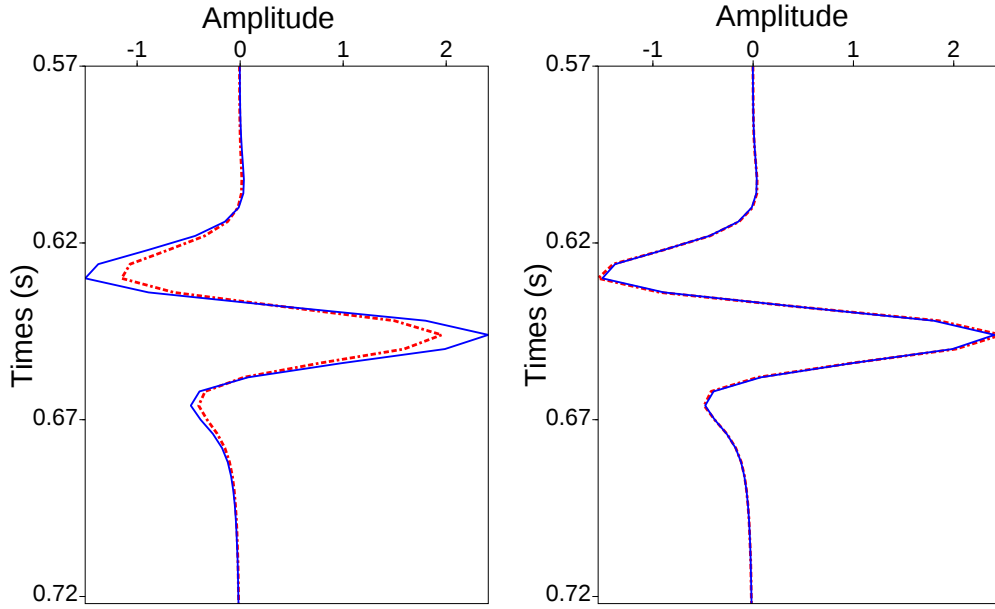


FIG. 2.3 – Influence de l’approximation de la condition limite. Comparaison, pour un large offset ($h = 1000\text{m}$), du champ propagé “one-way” en trait pointillé (calculé avec un extrapolateur Phase Shift) et du champ propagé “two-way” en trait plein (calculé analytiquement en annexe (D)). Le milieu est homogène de vitesse égale à 2000 m/s . Les traces sismiques présentées correspondent à un récepteur localisé en $(x = 1000\text{m}, z = 1060\text{m})$ et une source sismique en $(x = x_s, z = 0\text{m})$. La source sismique utilisée est un Ricker de fréquence centrale égale à 20 Hz . (à gauche) La condition limite est une approximation paraxiale à l’ordre 0 de la condition limite “one-way” (équation (2.43)). . Bien qu’ayant la même forme, on remarque que les deux signaux diffèrent en amplitude; (à droite) La condition limite est une approximation paraxiale à l’ordre 0 de la condition limite “one-way” (équation (2.42)). On observe que l’utilisation d’une condition limite adaptée permet d’ajuster à la fois l’amplitude et la forme du signal.

2.3 Équation “one-way” quantitative

Dans cette section, je présente l’approche de Zhang et al. (2003) que nous avons suivie pour construire un extrapolateur “one-way” quantitatif. Dans un premier temps, nous présentons les motivations qui conduisent à modifier les équations “one-way” classiques. Dans un deuxième temps, les équations “one-way” sont modifiées pour produire des équations dont la solution asymptotique haute fréquence est équivalente à celle de l’équation des ondes “two-way”. Ces modifications sont déduites de l’étude d’un milieu à gradient vertical de vitesse $v(z)$. Dans ce cas, le système peut se réécrire sous la forme d’un système d’équations différentielles ordinaires en éliminant les autres variables *via* une transformée de Fourier en temps et variables transverses (x, z) . Alors, il est relativement simple de voir comment modifier les équations utilisées par Claerbout pour retrouver l’amplitude au sens asymptotique haute fréquence.

Dans un troisième temps, nous présentons la généralisation de l’approche en milieu hétérogène. Pour les milieux hétérogènes, $v = v(x, y, z)$, les mêmes équations permettent aussi de faire

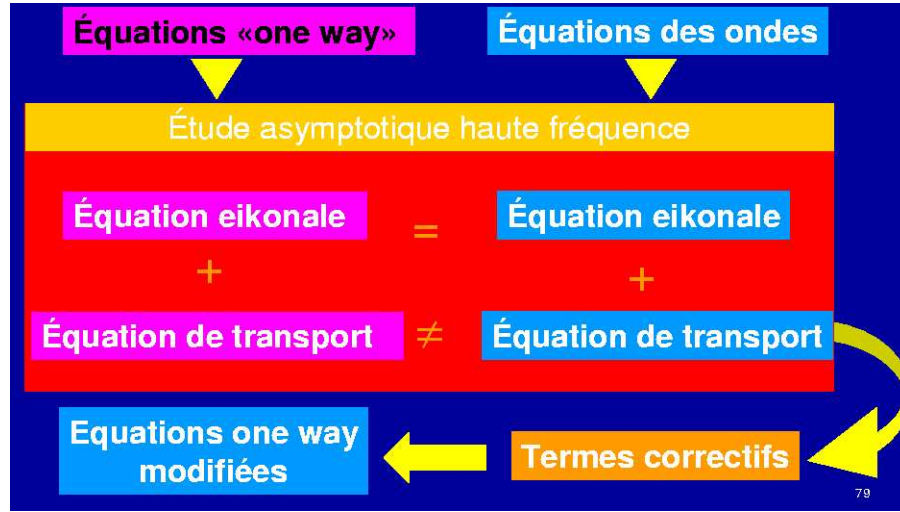


FIG. 2.4 – Schéma synthétique présentant l'approche asymptotique hautes fréquences suivie pour rendre les équations “one-way” quantitatives.

de la propagation quantitative. Maintenant les vecteurs d'onde transverses (k_x, k_y) doivent être correctement interprétés en terme de dérivées partielles en (x, y) .

2.3.1 Équation “one-way” modifiée

2.3.1.1 Étude de l'équation “one-way” classique

Cette section fournit les motivations de la modification des équations d'onde “one-way” utilisées dans la migration par équation d'onde. Nous commençons par l'équation d'onde factorisée en milieu homogène, qui permet d'identifier les ondes montantes et descendantes, solutions des équations d'onde “one-way”. Nous montrons ensuite que les solutions des équations “one-way” ainsi dérivées ne sont plus solutions de l'équation d'onde complète lorsque l'on permet au milieu de dépendre de z ($v = v(z)$). Dans le cas d'une solution WKBJ (Clayton and Stolt (1981)) dans un milieu $v(z)$, les amplitudes des équations “one-way” ne sont pas en accord avec les amplitudes de l'équation des ondes complète. En modifiant les équations “one-way”, on obtient de nouvelles équations dont les équations eikonale et de transport sont en accord avec celles de l'équation des ondes complète.

Dans le domaine de Fourier, les solutions descendantes WKBJ de l'équation des ondes (2.1) prennent la forme,

$$\tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega) = A(k_x, k_y, z) e^{-i\omega\varphi(k_x, k_y, z, \omega)} \quad (2.44)$$

avec $\nabla\varphi$ pointant dans la direction de propagation des fronts d'onde. En particulier, $(\partial\varphi/\partial z) > 0$ indique les ondes dans la direction des z croissants, c'est-à-dire des ondes descendantes. Pour les ondes montantes $(\partial\varphi/\partial z) < 0$.

Pour des vitesses constantes, l'équation des ondes (2.1) s'écrit dans le domaine fréquence-nombre d'onde sous la forme

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} + \Lambda^2 \tilde{P} = \left[\frac{\partial}{\partial z} + i\Lambda \right] \left[\frac{\partial}{\partial z} - i\Lambda \right] \tilde{P} = 0. \quad (2.45)$$

avec,

$$\Lambda = \text{sign}(\omega) \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2 - k_y^2} = \frac{\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{c^2 k_x^2}{\omega^2} - \frac{c^2 k_y^2}{\omega^2}}, \quad (2.46)$$

et $\tilde{P} = \tilde{P}(k_x, k_y, z, \omega)$ la transformée de Fourier suivant x et y de $P(x, y, z, \omega)$. De plus, les solutions de l'équation d'onde complète sont également solutions des deux équations “one-way” et donc on peut écrire

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i\Lambda \right) A_{\pm} e^{(\mp i\Lambda z)} = 0, \quad (2.47)$$

avec le signe du haut donnant la solution descendante et le signe du bas donnant la solution montante. Ici, nous nous plaçons sous l'hypothèse haute fréquence, c'est-à-dire que nous considérerons comme prépondérant les termes dont l'ordre en fréquence est le plus élevé. Ainsi, le terme d'amplitude A de la solution WKBJ (équation (2.44)), qui s'écrit formellement sous la forme d'une série en puissance inverse de ω (Clayton and Stolt (1981)), va être approché par le terme de la série dont l'ordre est le plus élevé en fréquence (le terme d'ordre 0). Par abus de notation, la notation A sera gardée pour désigner le terme d'amplitude d'ordre principal.

Nous voulons établir les équations “one-way” dans le cas hétérogène, en séparant de la même façon les ondes montantes et descendantes. Pour cette généralisation, nous cherchons les équations “one-way” pour lesquelles la solution de la théorie des rais donne le même ordre principal d'amplitude que la solution de l'équation des ondes “two-way” (2.45). Cette étude est dite asymptotique haute fréquence puisque l'on va étudier le comportement de la solution de l'équation “two-way” sous l'hypothèse de l'approximation haute fréquence.

Considérons dans un premier temps, le cas où $c = c(z)$, et transformons la partie gauche de l'expression (2.45) pour la préparer à une étude asymptotique. Pour cela, nous introduisons le vecteur lentur $\bar{p}$ défini par

$$\bar{p} = \frac{\bar{k}}{\omega}, \quad p_z = \frac{\Lambda}{\omega} = \frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - (c(z)\bar{p})^2} \quad (2.48)$$

avec $\bar{k} = (k_x, k_y)$ le vecteur d'onde transverse tel que $\bar{k}^2 = k_x^2 + k_y^2$. Réécrivons l'équation des ondes (2.45) sous la forme,

$$\frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial z^2} + \omega^2 p_z^2 \tilde{P} = 0. \quad (2.49)$$

On introduit la solution WKBJ,

$$\tilde{P} = A(\bar{p}, z) e^{i\omega\varphi(\bar{p}, z)} \quad (2.50)$$

dans (2.49), nous trouvons,

$$\left(-\omega^2 \left[\left[\frac{d\varphi}{dz}\right]^2 - p_z^2\right] A - i\omega \left[2 \frac{d\varphi}{dz} \frac{dA}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} A\right] + O(1)\right) e^{i\omega\varphi} = 0. \quad (2.51)$$

Ici, $O(1)$ est un terme de l'ordre de $(i\omega)^0$. En considérant plus particulièrement les équations issues des termes en ω^2 et en $i\omega$, cette équation mène aux équations familières de l'*eikonal* et de *transport* exprimées dans le domaine (p_x, p_y, z, ω) . Ces équations sont

$$\begin{aligned} \left[\frac{d\varphi}{dz}\right]^2 = p_z^2 &\Rightarrow \frac{d\varphi}{dz} = \pm p_z, \quad \text{et} \quad 2 \frac{d\varphi}{dz} \frac{dA}{dz} + \frac{d^2\varphi}{dz^2} A = 0. \\ \text{ou} \quad \pm \left[2p_z \frac{dA}{dz} - \frac{1}{c^3(z)p_z} \frac{dc(z)}{dz} A\right] &= 0. \\ \text{ou} \quad \frac{dA}{dz} - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} A &= 0. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Notons que :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{dz^2} &= \frac{d}{dz} \left(\frac{1}{c(z)} \sqrt{1 - (c(z)p_z)^2} \right) \\ &= - \frac{1}{c^3(z)p_z} \frac{dc(z)}{dz} \end{aligned}$$

Ici, nous considérons que le signe du haut de la solution est celui pour lequel $\text{signe}(p_z) = 1$. Dans ce cas, le signe du haut correspond à l'onde descendante et le signe du bas correspond à l'onde montante. Notons que l'équation de transport est la même pour les deux ondes parce qu'il n'apparaît que p_z^2 dans cette équation.

Maintenant, considérons les deux équations des ondes “one-way” de (2.47) et la solution WKBJ correspondante. En substituant les mêmes formes de solution dans les équations “one-way”, nous obtenons,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z\right] A_{\pm} e^{-i\omega\varphi_{\pm}} = i\omega \left[-\frac{d\varphi_{\pm}}{dz} \pm p_z\right] A_{\pm} e^{-i\omega\varphi_{\pm}} + \frac{dA_{\pm}}{dz} e^{-i\omega\varphi_{\pm}} = 0, \quad (2.53)$$

on en déduit les équations eikonaux et de transports associées,

$$\frac{d\varphi_{\pm}}{dz} = \pm p_z \quad \text{et} \quad \frac{dA_{\pm}}{dz} = 0. \quad (2.54)$$

On obtient ainsi les deux branches de l'équation eikonale (une pour chaque équation “one-way”) mais l'équation de transport n'est pas la même que pour l'équation des ondes complète (eq. 2.52). La solution de l'équation “one-way” ne possède donc pas l'amplitude correcte de la solution de l'équation des ondes. Nous devons donc modifier les équations “one-way” dans (2.53) si nous voulons construire une équation de transport en accord avec celle de l'équation d'onde complète, tout en gardant la même équation eikonale pour les deux pour que la cinématique soit respectée. La

clef pour faire cela vient de l'étude de la dernière forme de l'équation de transport (2.52). Celle-ci suggère l'ajout d'un terme afin d'obtenir des équations “one-way” avec la bonne dynamique pour le cas $c = c(z)$.

On obtient ainsi les deux branches de l'équation eikonale (une pour chaque équation “one-way”) mais l'équation de transport n'est pas la même que pour l'équation des ondes complètes (eq. 2.52). La solution de l'équation “one-way” ne possède donc pas l'amplitude correcte de la solution de l'équation des ondes. Nous devons donc modifier les équations “one-way” dans (2.53) si nous voulons construire une équation de transport en accord avec celle de l'équation d'onde complète, tout en gardant la même équation eikonale pour les deux pour que la cinématique soit respectée (équation $i\omega$). La clef pour faire cela vient de l'étude de la dernière forme de l'équation de transport (2.52). Celle-ci suggère l'ajout d'un terme afin d'obtenir des équations “one-way” avec la bonne dynamique pour le cas $c = c(z)$.

2.3.1.2 Équation “one-way” modifiée

Considérons donc maintenant la nouvelle équation “one-way”

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} \right) \tilde{P} = 0. \quad (2.55)$$

On remarque que l'ajout de ce terme ne modifie en rien la cinématique du problème (terme d'ordre inférieur à $i\omega$). La solution asymptotique est régie par

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i\omega p_z - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} \right) A_{\pm} e^{-i\omega\varphi_{\pm}} = \\ i\omega \left[-\frac{d\varphi_{\pm}}{dz} \pm p_z \right] A_{\pm} e^{-i\omega\varphi_{\pm}} + \left[\frac{dA_{\pm}}{dz} - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} A_{\pm} \right] e^{-i\omega\varphi_{\pm}} = 0. \end{aligned}$$

L'équation de transport (2.54) est ainsi remplacée par

$$\frac{dA_{\pm}}{dz} - \frac{1}{2c^3(z)p_z^2} \frac{dc(z)}{dz} A_{\pm} = 0. \quad (2.56)$$

et l'équation eikonale reste inchangée. L'équation (2.56) est équivalente à l'équation de transport de l'équation d'onde complète. Par conséquent, la solution de l'équation “one-way” modifiée (2.55) possède les mêmes temps d'arrivée et les mêmes amplitudes que la solution de l'équation d'onde complète. En fait, ceci est vérifié dans le cas d'un milieu qui dépend uniquement de z c'est-à-dire quand $c = c(z)$.

2.3.1.3 Généralisation aux milieux hétérogènes

La question qui se pose maintenant est de savoir comment cette approche peut être généralisée dans un milieu complètement hétérogène, où $c = c(x, y, z)$. Nous allons voir ici, que cela peut être fait par l'introduction de la théorie des opérateurs pseudo différentiels. Les opérateurs pseudo-différentiels sont des généralisations des opérateurs différentiels. Leur conception se justifie par le

besoin d’inverser des opérateurs différentiels elliptiques, ou parabolique si on sort du cadre des opérateurs classiques (Prat (2005)). Historiquement, l’analyse micro locale, qui regroupe la théorie des opérateurs pseudo-différentiels et des opérateurs intégraux de Fourier, est née des travaux de Kohn and Nirenberg (1965) et de Hörmander (1985). Définissons un opérateur pseudo différentiel P appliqué à une fonction F par la représentation :

$$p(\mathbf{x}, \mathbf{D})F(\mathbf{x}) = \int \hat{F}(\mathbf{k})P(\mathbf{x}, \mathbf{k})e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{k}} d\mathbf{k} \quad (2.57)$$

où $P(\mathbf{x}, \mathbf{k})$ est le symbole pour l’opérateur pseudo-différentiel $p(\mathbf{x}, \mathbf{D})$. $\mathbf{D}$ est l’opérateur de dérivation tel que $D_i = \partial/\partial x_i$ et $\hat{F}(\mathbf{k})$ est la transformée de Fourier de $F(\mathbf{x})$.

Considérons l’équation (2.55) l’équation “one-way” modifiée dans le domaine fréquence-nombre d’onde écrite sous la forme,

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} \pm i\Lambda - \Gamma \right) \tilde{P} = 0, \quad (2.58)$$

avec,

$$\Gamma = \frac{1}{2c(z)} \frac{\partial c(z)}{\partial z} \left[1 + \frac{(c(z)\bar{k})^2}{(\omega^2 - c^2(z)\bar{k}^2)} \right]. \quad (2.59)$$

Supposons maintenant que $c = c(x, y, z)$, que $i\omega$ tient lieu de dérivée temporelle et que $-\bar{k} = -(k_x, k_y)$ tient lieu d’un opérateur de gradient transverse, tel que

$$i\omega \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial t} \quad \text{et} \quad i(k_x, k_y) \Leftrightarrow -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (2.60)$$

où $\Leftrightarrow$ relie l’opérateur pseudo différentiel à droite par son symbole dans le domaine de Fourier à gauche. Ensuite, il devient simple de donner une signification à l’expression $(c(x, y, z)\bar{k})^2$ comme suit

$$-(c(x, y, z)\bar{k})^2 \Leftrightarrow c\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \cdot c\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \quad (2.61)$$

Il est alors assez facile de penser du symbole $\omega^2 - (c\bar{k})^2$, qu’il représente l’opérateur transverse des ondes “two-way”, c’est-à-dire

$$\omega^2 - (c\bar{k})^2 \Leftrightarrow \frac{\partial^2}{\partial t^2} - (c\nabla_T)^2. \quad (2.62)$$

On déduit

$$\Lambda \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2}}. \quad (2.63)$$

En appliquant une transformée de Fourier inverse à l’équation (2.58) selon les directions x, y, t et en utilisant les règles de calcul propres aux opérateurs pseudo-différentiels, (Zhang et al. (2003))

ont établi l’expression des opérateurs pseudo-différentiels associés aux symboles Λ et Γ . Ainsi, on obtient l’expression de l’équation “one-way” modifiée exprimée dans le domaine espace-temps,

$$\left[\frac{\partial}{\partial z} \pm \lambda - \gamma \right] P = 0 \quad (2.64)$$

où P est la transformée de Fourier inverse de $\tilde{P}$ et où λ et γ sont les opérateurs pseudo-différentiels associés respectivement aux symboles Λ et Γ et définis par

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{c} \sqrt{L_T(x, y, z, t)}, \\ \gamma &= \frac{cz}{2c} (I + L_T^{-1}(x, y, z, t)(c\nabla_{Tx})^2). \end{aligned} \quad (2.65)$$

avec,

$$L_T(x, y, z, t) = \frac{\partial^2}{\partial^2 t} - (c\nabla_{Tx})^2. \quad (2.66)$$

En menant une étude asymptotique en milieu hétérogène ($c = c(x, y, z)$) sur l’équation (2.64), Zhang et al. (2005) ont montré que l’équation de transport résultante est la même que celle de l’équation d’onde complète. Ainsi, l’équation “one-way” modifiée (2.64) permet de restituer les mêmes temps de trajet et les mêmes amplitudes que l’équation d’onde “two-way” en milieu hétérogène. Le lecteur qui souhaite une démonstration détaillée de cela peut se reporter à l’annexe A de Zhang et al. (2005).

En pratique, plusieurs approximations rationnelles sont faites pour éviter de calculer explicitement la racine carrée de l’opérateur différentiel λ . C’est dans ce cadre que sera utilisé l’approximation paraxiale par la suite.

2.3.2 Discussion sur l’équation “one-way” quantitative en milieu blocky

L’équation “one-way” modifiée a été établie par une étude asymptotique haute fréquence. *A priori*, la validité de sa solution est soumise aux mêmes limitations que les rais en terme de lissage du modèle de vitesse. La vitesse c est une fonction continue et dérivable. En réalité, l’étude asymptotique a permis de montrer que l’équation “one-way” modifiée permettait de restituer au moins les mêmes équations de transport et eikonale que celles obtenues avec l’équation d’onde mais peut-être vérifie-t-elle aussi d’autres propriétés non asymptotiques de l’équation des ondes comme les phénomènes de transmission. Que se passe-t-il si la vitesse c est discontinue.

Nous allons étudier les phénomènes de transmission associés au champ de pression calculé à partir de l’équation “one-way” modifiée lorsque celui-ci traverse une interface plane horizontale séparant deux milieux de vitesse distincte. Nous montrerons que dans ce cas $c(z)$, le terme correctif ajouté à l’équation “one-way” classique, peut être également interprété comme un opérateur de transmission linéarisé. Après avoir défini le coefficient de réflexion linéarisé associé à une onde plane incidente sur une interface plane, nous établirons l’équivalence entre ce dernier et le terme correctif.

2.3.2.1 Coefficient de réflexion linéarisé en pression

Établissons l'expression des coefficients de réflexion et de transmission en pression, associés à une onde plane incidente sur une interface plane.

Considérons une interface horizontale en $z = z_i$ limitant deux milieux homogènes (1) et (2) de vitesses respectivement égales à c_1 et c_2 et de densité ρ_1 et ρ_2 constantes égales à 1. Soit une onde plane incidente dans le milieu (1), arrivant avec un angle d'incidence θ_1 . Lorsque cette onde plane traverse l'interface entre les deux milieux, elle est transformée en une onde transmise dans le milieu (2) et une onde plane réfléchie dans le milieu (1) selon la loi de Snell-Descartes.

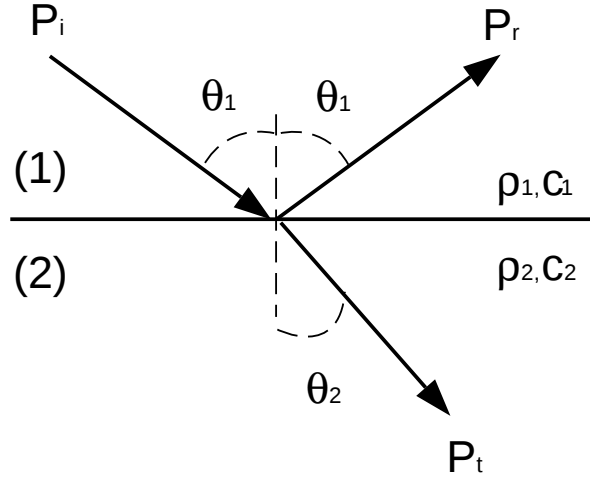


FIG. 2.5 – Le calcul des coefficients de réflexion est fait en vérifiant les conditions de continuité sur une interface pour des ondes planes. Cette figure présente le cas d'une incidence oblique ($\theta_1 \neq 0$). P_i , P_r et P_t sont respectivement, les champs de pression incidente, réfléchi et transmis sur le réflecteur séparant les milieux (1) et (2). ρ est la densité et c la vitesse. Dans notre cas, nous avons considéré un modèle de densité constante ($\rho = \rho_1 = \rho_2$).

La relation de Snell Descartes établit la relation entre l'angle d'incidence et de transmission des ondes planes,

$$\frac{\sin \theta_1}{c_1} = \frac{\sin \theta_2}{c_2} \quad (2.67)$$

θ_1 et θ_2 sont respectivement l'angle d'incidence et l'angle de transmission. Écrivons d'abord l'équation de continuité de la pression qui lie la pression incidente P_i , réfléchie P_r et transmise P_t sur l'interface,

$$P_i + P_r = P_t, \quad \text{en } z = z_i. \quad (2.68)$$

Cette équation (continuité de la contrainte normale) est liée au principe d'action-réaction. Le milieu (1) exerce sur le milieu (2) une force égale et opposée à celle du milieu (2) sur le milieu (1). Puis écrivons l'équation de continuité de la composante verticale du déplacement,

$$U_z^i + U_z^r = U_z^t, \quad \text{en } z = z_i. \quad (2.69)$$

Cette équation est liée au fait qu’il n’y a pas de vide dans le milieu. Considérons maintenant une onde plane de la forme,

$$P(x, z, \omega) = S(\omega)e^{-ik_x x - ik_z z}, \quad (2.70)$$

et un champ vectoriel de la forme,

$$\mathbf{U}(x, z, \omega) = BS(\omega)e^{-ik_x x - ik_z z} \mathbf{k}, \quad (2.71)$$

où B est un scalaire et le vecteur nombre d’onde $|\mathbf{k}| = \omega/c$ définit la polarisation de $\mathbf{U}(x, z, \omega)$. La pression est liée au déplacement par la relation (Berkhout (1987))

$$P(x, z, \omega) = \kappa \nabla \cdot \mathbf{U}(x, z, \omega) \quad (2.72)$$

où $\kappa = c^2 \rho$ désigne le module d’incompressibilité. En injectant (2.70) et (2.71) dans (2.73), on obtient l’expression du scalaire B tel que

$$B = \frac{1}{i\omega^2 \rho} \quad (2.73)$$

On déduit la relation entre la composante verticale du champ de déplacement et la pression,

$$U_z = \frac{\cos \theta}{i\omega c \rho} P. \quad (2.74)$$

où θ est l’angle de propagation par rapport à la direction verticale tel que $k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2} = \frac{\omega}{c} \cos \theta$. Notons que le signe de $\cos \theta$ dépend de la direction de propagation de l’onde plane (positif pour une onde descendante).

Injectons la relation (2.74) dans (2.69), cela donne

$$\frac{\cos \theta_1}{c_1 \rho_1} P_i - \frac{\cos \theta_1}{c_1 \rho_1} P_r = \frac{\cos \theta_2}{c_2 \rho_2} P_t. \quad (2.75)$$

Définissons la relation entre le champ de pression incident, réfléchi et transmis en introduisant un coefficient de transmission et un coefficient de réflexion dans (2.68),

$$1 + R = T \quad (2.76)$$

tel que $P_r = RP_i$ et $P_t = TP_i$. En supposant la densité constante, on déduit des équations (2.75) et (2.76), l’expression des coefficients de transmission et de réflexion en pression,

$$T = \frac{2c_2 \cos \theta_1}{c_1 \cos \theta_2 + c_2 \cos \theta_1} \quad (2.77)$$

et

$$R = \frac{c_2 \cos \theta_1 - c_1 \cos \theta_2}{c_1 \cos \theta_1 + c_2 \cos \theta_2}. \quad (2.78)$$

L'expression du coefficient de réflexions R_L linearisé par rapport à la vitesse et aux petits angles d'incidences introduit par Aki and Richards (1980) (p.153) dans le cas des ondes PP s'écrit :

$$R_L(\theta) = \frac{\Delta c}{2c \cos^2 \theta} \quad (2.79)$$

avec,

$$\Delta c = c_2 - c_1 \quad \text{et} \quad c = \frac{c_2 + c_1}{2} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}. \quad (2.80)$$

2.3.2.2 Comparaison avec le terme correctif de l'équation "one-way"

Étudions l'expression du champ de pression obtenu avec l'équation "one-way" modifiée lorsque celui transverse une interface plane. L'objectif est d'évaluer l'impact du terme correctif Γ de l'équation "one-way" modifiée sur le champ de pression propagé lorsque celui-ci traverse une interface caractérisée par un contraste de vitesse. Pour cela, considérons un modèle 2D composé de deux couches homogènes (1) et (2) limitées par une interface plane horizontale en $z = z_i$ et une source localisée dans la couche (1) en $z = z_0$. L'équation "one-way" modifiée en milieu de vitesse 1D ($c = c(z)$) s'écrit dans le domaine (z, k_x, ω) sous la forme

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z} + i\Lambda \tilde{P} - \Gamma \tilde{P} = 0. \\ \tilde{P}(z = z_0) = \tilde{F}^p \end{cases} \quad (2.81)$$

où $\tilde{P} = \tilde{P}(k_x, z, \omega)$ et $\tilde{F}^p = \tilde{F}^p(k_x, \omega)$ et avec,

$$\Lambda(k_x, z, \omega) = ik_z = \frac{i\omega}{c} \sqrt{1 - \frac{(ck_x)^2}{\omega^2}}, \quad \Gamma(k_x, z, \omega) = \frac{c_z}{2c} \left(\frac{1}{1 - \frac{(ck_x)^2}{\omega^2}} \right) \quad (2.82)$$

où c et c_z sont respectivement la vitesse et la dérivée verticale de la vitesse dans le milieu. Dans le cas d'un milieu $c(z)$, l'équation (2.81) a une solution analytique qui s'écrit,

$$\tilde{P}(k_x, z, \omega) = \tilde{P}(k_x, z = z_0, \omega) e^{(-i\Lambda + \Gamma)(z - z_0)} \quad (2.83)$$

Dans le milieu supérieur (1), il n'y a pas de variation de vitesse ($c_z = 0$), on déduit que

$$\Gamma = 0, \quad (2.84)$$

et donc,

$$\tilde{P}(k_x, z_{i-}, \omega) = \tilde{P}(k_x, z = z_0, \omega) e^{-i\Lambda(z_{i-} - z_0)}, \quad (2.85)$$

où z_{i-} désigne la profondeur juste au-dessus de z . Cette solution est celle obtenue avec l'équation “one-way” classique, et restitue correctement la cinématique et la dynamique de la propagation d'onde dans le cas d'un milieu homogène.

Juste après l'interface, l'expression du champ de pression s'écrit,

$$\begin{aligned} \tilde{P}(k_x, z_{i+}, \omega) &= \tilde{P}(k_x, z = z_0, \omega) e^{(-i\Lambda + \Gamma)(z_{i+} - z_0)} \\ &= \tilde{P}(k_x, z = z_{i-}, \omega) e^{(-i\Lambda + \Gamma)\Delta z} \end{aligned} \quad (2.86)$$

où z_{i+} désigne la profondeur juste en-dessous de z et où $\Delta z = z_{i+} - z_{i-}$ et $\tilde{P}(k_x, z = z_{i-}, \omega)$ sont obtenus par la relation (2.85). L'expression de Γ s'écrit de façon discrète,

$$\Gamma = \frac{(c_2 - c_1)}{\Delta z(c_2 + c_1)} \left(\frac{1}{\cos^2 \theta} \right) = \frac{R_L(\theta)}{\Delta z} \quad (2.87)$$

car $\frac{k_x c}{\omega} = \sin \theta$ et en posant $c = \frac{c_1 + c_2}{2}$ et $c_z = \frac{c_2 - c_1}{\Delta z}$. On remarque que Γ contient le coefficient de réflexion linéarisé R_L introduit par Aki and Richards (1980) (équation (2.79)). Lorsque $\Delta z \rightarrow 0$, l'expression du champ pression (2.86) devient,

$$\tilde{P}(k_x, z_{i+}, \omega) = \tilde{P}(k_x, z = z_i, \omega) e^{R_L(\theta)}, \quad \text{pour } z > z_i \quad (2.88)$$

car $\Lambda \Delta z \rightarrow 0$ et $\Gamma \Delta z = R_L(\theta)$. De plus, le développement limité de $e^{R_L(\theta)}$ à l'ordre 1 donne

$$\tilde{P}(k_x, z_i^+, \omega) = \tilde{P}(k_x, z = z_i^-, \omega) (1 + R_L(\theta)). \quad (2.89)$$

L'équation “one-way” modifiée consiste donc à prendre en compte dans la propagation un coefficient de transmission linéarisé dans l'équation “one-way” classique lorsque celui-ci est petit. Notons que lorsque l'angle de propagation tend vers 90° , $(1 + R(\theta))$ tend vers l'infini. Par conséquent, cette approche présente des instabilités pour des angles de propagation proches de l'horizontale. Nous verrons par la suite, comment ce problème a été traité en pratique ; cela peut être contrôlé soit en évitant d'appliquer Γ dans certains cas, soit par l'application d'un filtre, soit en introduisant une partie imaginaire au dénominateur de Γ (pour la résolution en espace).

Notons que si l'on considère le terme correctif écrit sous la forme (à partir de 2.59)

$$\Gamma = -\frac{1}{2\Lambda} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} \quad (2.90)$$

Si on approche $\partial \Lambda / \partial z$ par une formule d'Euler et Λ par un opérateur moyen égal à la demi-somme des opérateurs Λ_1 et Λ_2 , on obtient

$$\Gamma = -\frac{\Lambda_1 - \Lambda_2}{\Lambda_1 + \Lambda_2} \frac{1}{\Delta z} \quad (2.91)$$

où Λ_1 et Λ_2 sont les opérateurs associés respectivement aux profondeurs z_{i-} et z_{i+} tel que $\Lambda_1 = \frac{\omega \cos \theta_1}{c_1}$ et $\Lambda_2 = \frac{\omega \cos \theta_2}{c_2}$. Γ est alors égal au coefficient de réflexion exacte (équation 2.78).

2.3.3 Construction d’un propagateur paraxial quantitatif

Mis à part dans le cas simple d’un milieu invariant latéralement pour lequel l’équation “one-way” modifiée a une solution analytique (section 2.3.2.2), sa résolution s’avère difficile. L’introduction de la technique de splitting d’opérateur permet de réduire la complexité du système d’évolution (suivant z) en le ramenant à la résolution successive de plusieurs systèmes simples à intégrer. Cette approche est couramment utilisée dans le cas de l’extrapolateur “one-way” paraxial (Collino (1993); Collino (1995); Collino and Lavad (1996); Duquet (1996)). Nous proposons de l’introduire ici pour décomposer notre problème de propagation “one-way” quantitatif en un problème de propagation “one-way” classique puis en un problème de correction d’amplitude du champ “one-way” par un opérateur de “transmission”.

Dans un premier temps, la technique de splitting est introduite dans notre problème de propagation quantitative. Le système “one-way” modifié est ainsi décomposé en deux systèmes successifs à résoudre. Le premier est la résolution de l’équation “one-way” classique. Celle-ci ayant déjà été abordée dans la section (2.2.2), elle ne sera pas détaillée ici. Le second système intègre l’opérateur de transmission qui corrige le champ d’onde “one-way” en amplitude pour le rendre quantitatif. La résolution de ce système sera abordée dans la deuxième partie. Dans le cas d’un milieu de vitesse invariant latéralement, il a une solution exacte dans le domaine fréquence-nombre d’onde. Un extrapolateur phase shift quantitatif peut être rapidement mis en place de cette manière. Pour les milieux hétérogènes, l’opérateur de transmission est résolu dans le domaine spatial par un schéma aux différences finies. Cela va nous permettre de calculer le terme correctif en utilisant la valeur de la vitesse en chaque point du milieu et ainsi de prendre en compte de fortes variations latérales de vitesse.

2.3.3.1 Apport de la méthode de décomposition

Afin de préparer la résolution numérique de l’équation “one-way” quantitative, nous allons montrer dans le cadre de l’exemple bicouche précédent que le problème de propagation quantitative peut être décomposé en deux problèmes successifs. Le premier est un problème de propagation “one-way” classique et le second est une correction d’amplitude à appliquer.

On observe que (2.81) met en oeuvre la somme de deux opérateurs linéaires, donc l’équation est susceptible d’être traitée par un splitting d’opérateur. Comme pour le paraxial (section 2.2.2.2), l’équation (2.80) peut être résolue en utilisant une technique de splitting (Collino and Joly (1995)). On peut alors décomposer à chaque pas le problème (2.81) en deux sous-problèmes successifs,

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}_1}{\partial z} + i\Lambda \tilde{P}_1 = 0. \\ \tilde{P}_1(z = z_{k-1}) = \tilde{P}(z = z_{k-1}) \end{cases} \quad (2.92)$$

et

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} \frac{\partial \tilde{P}_2}{\partial z} - \Gamma \tilde{P}_2 = 0. \\ \tilde{P}_2(z = z_{k-1}) = \tilde{P}_1(z = z_k) \end{cases} \quad (2.93)$$

Enfin,

$$\tilde{P}(z = z_k) = \tilde{P}_2(z = z_{k-1}) \quad (2.94)$$

La solution de l'équation (2.92) correspond à la solution associée à l'équation "one-way" classique. Cette solution est valide en milieu homogène, c'est à dire qu'elle restitue correctement les amplitudes et la cinématique dans le cas d'un milieu homogène. Nous avons vu dans la section (2.3.1.1), que l'équation "one-way" permet d'obtenir l'équation eikonale de l'équation d'onde et que le terme correctif permet d'obtenir l'équation de transport. Par analogie, on peut dire que le problème $(\mathcal{P}_0)$ restitue les aspects cinématiques et que le problème $(\mathcal{P}_1)$ restitue les aspects quantitatifs. Un avantage de cette décomposition est que le problème $(\mathcal{P}_0)$ peut être résolu avec n'importe quel propagateur "one-way" classique (spectraux, différences finies, ou mixtes). De plus, elle permet de ramener la résolution du problème de propagation "one-way" quantitatif à la seule application d'un terme correctif aux propagateurs "one-way" classiques.

Reprenons maintenant l'exemple de notre milieu bicouche et étudions la transmission d'un champ d'onde à travers l'interface à la profondeur z_i en calculant l'expression du champ transmis à la profondeur z_{i+} à partir du champ incident à la profondeur z_{i-} . Partons de l'équation (2.93), et approchons la dérivée en z par différences finies à l'ordre 1, on obtient,

$$\frac{\tilde{P}_2(z_{i+}) - \tilde{P}_2(z_{i-})}{\Delta z} = \Gamma \tilde{P}_2(z_{i-}). \quad (2.95)$$

On déduit l'expression du champ P à la profondeur z_{i+} ,

$$\begin{aligned} \tilde{P}_2(z_{i+}) &= \tilde{P}_2(z_{i-}) + \Gamma \tilde{P}_2(z_{i-}) \Delta z \\ &= (1 + R_L(\theta)) \tilde{P}_2(z_{i-}) \end{aligned} \quad (2.96)$$

ou $\tilde{P}_2(z_i)$ est le champ propagé, calculé en résolvant l'équation "one-way" classique et $\Gamma \Delta z \tilde{P}_2(z_i)$ est le terme correctif qu'on lui apporte pour imposer des effets de transmission. L'équation "one-way" modifiée consiste à introduire un coefficient de transmission linéarisé dans l'équation "one-way" classique.

L'utilisation de la technique de splitting d'opérateur est très efficace ici, car en imposant la résolution de plusieurs systèmes d'évolution, on obtient des systèmes simples à intégrer. De plus, le découplage de Λ et de Γ n'altère pas la précision ($O(\Delta z^2)$) (Collino and Lavaud (1996), chap 1). Notons que lorsque l'angle de propagation tend vers 90° , $e^{\Gamma \Delta z}$ tend vers l'infini. Cette approche présente donc des instabilités pour des propagations proches de l'horizontale. En pratique, cela peut être contrôlé soit en évitant d'appliquer Γ dans certains cas, soit par l'application d'un filtre, soit en introduisant une partie imaginaire au dénominateur de Γ (pour la résolution en espace). Cette méthode permet de propager quantitativement des champs d'onde avec un angle de propagation inférieur 90° mais elle est limitée à des variations de vitesse suivant la profondeur uniquement. Comme cette méthode ne permet pas les variations latérales de vitesse, nous proposons d'intégrer par différences finies le terme d'extrapolation “one-way” classique Λ puis le terme de correction d'amplitude Γ .

2.3.3.2 Apport du schéma explicite

Les méthodes d'extrapolation d'onde dans le domaine fréquence-nombre d'onde utilisent des schémas implicites par différences finies (Collino (1987); Duquet (1996)). Ces schémas sont inconditionnellement stables (Collino (1987)) même dans le cas de fortes discontinuités latérales de vitesse. La résolution par une approche implicite est donc naturellement privilégiée. Dans ce cas, le problème ($\mathcal{P}_1$) s'écrit sous la forme :

$$\frac{\tilde{P}_2(z_{i+}) - \tilde{P}_2(z_{i-})}{\Delta z} = -\Gamma \left(\frac{\tilde{P}_2(z_{i+}) + \tilde{P}_2(z_{i-})}{2} \right) \quad (2.97)$$

d'où,

$$\left(\frac{1}{\Delta z} - \frac{\Gamma}{2} \right) \tilde{P}_2(z_{i+}) = \left(\frac{1}{\Delta z} + \frac{\Gamma}{2} \right) \tilde{P}_2(z_{i-}) \quad (2.98)$$

Contrairement au schéma explicite par lequel $\tilde{P}_2(z_{i+})$ s'exprime directement en fonction de $\tilde{P}_2(z_{i-})$ (d'où la dénomination explicite, cf. équation (2.96)), le schéma implicite nécessite l'inversion du terme $\left(\frac{1}{\Delta z} - \frac{\Gamma}{2} \right)$. Ainsi, on obtient l'expression de $\tilde{P}_2(z_{i-})$,

$$\tilde{P}_2(z_{i+}) = \frac{1 + \frac{\Gamma \Delta z}{2}}{1 - \frac{\Gamma \Delta z}{2}} \tilde{P}_2(z_{i-}) \quad (2.99)$$

Un développement limité à l'ordre 1 de (2.99) nous donne

$$\frac{1 + \frac{\Gamma \Delta z}{2}}{1 - \frac{\Gamma \Delta z}{2}} \approx (1 + R_L) \quad (2.100)$$

où R_L est le coefficient de réflexion linéarisé. Or, à incidence nulle, le coefficient de réflexion linéarisé (2.87) est exactement égal au coefficient de réflexion exact (2.78),

$$R_L(0) = R(0) = \frac{c_2 - c_1}{c_2 + c_1}. \quad (2.101)$$

En revanche, l’approche explicite (2.100) nous donne un coefficient transmission linéarisé égal à

$$T_{expl} = \frac{1}{\Delta z} \frac{3c_2 - c_1}{3c_1 - c_2} \neq (1 + R_L). \quad (2.102)$$

On déduit l’expression du champ réfléchi,

$$\tilde{P}_2(z_{i+}) = \frac{1}{\Delta z} \frac{3c_2 - c_1}{3c_1 - c_2} \tilde{P}_2(z_{i-}) \neq (1 + R_L) \tilde{P}_2(z_{i-}) \quad (2.103)$$

Contrairement au schéma explicite (équation (2.96)), le schéma implicite ne permet pas de restituer le champ transmis à incidence nulle (Prat (2005); Barucq et al. (2006a); Barucq et al. (2006b)). Ce paragraphe justifie la résolution du problème $(\mathcal{P}_1)$ par un schéma explicite. Nous allons maintenant présenter la stratégie utilisée pour résoudre le problème $(\mathcal{P}_1)$ dans le domaine fréquence-espace.

2.3.3.3 Résolution de l’opérateur de transmission

Le développement d’un extrapolateur “one-way” quantitatif en milieu latéralement hétérogène nécessite la résolution de l’équation “one-way” modifiée dans le domaine fréquence-espace introduite dans la section (2.3.1.3). Pour une onde descendante, elle s’écrit dans le domaine fréquence-espace sous la forme,

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial z} + i\lambda + \gamma \right) P = 0 \\ P(z=0) = \frac{1}{2i\lambda} F^s \end{cases} \quad (2.104)$$

ici, λ et γ sont les opérateurs pseudo-différentiels tel que

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{1}{c} \sqrt{L_T(x, y, z, \omega)}, \\ \gamma &= \frac{c_z}{2c} (I + L_T^{-1}(x, y, z, \omega) (c \nabla_{Tx})^2). \end{aligned} \quad (2.105)$$

avec,

$$L_T(x, y, z, t) = \omega^2 + (c \nabla_{Tx})^2. \quad (2.106)$$

où ω et k_x, k_z sont respectivement la dérivée de la vitesse par rapport à la direction verticale, la pulsation et les composantes horizontales et verticale du vecteur nombre d’onde.

Après splitting, (2.104) s’écrit sous la forme de deux systèmes d’équations différentielles,

$$(\mathcal{P}_0) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P_0 = -i\lambda P_0 \\ P_0(z = z_{k-1}) = P_{\Delta x}(z = z_{k-1}) \end{cases} \quad (2.107)$$

et

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P_1 = -\gamma P_1 \\ P_1(z = z_{k-1}) = P_0(z = z_k) \end{cases} \quad (2.108)$$

La résolution du problème $\mathcal{P}_0$ dans le domaine fréquence-espace n'est pas triviale. Pour y parvenir, on utilise une approximation paraxiale de son symbole Λ dans le domaine fréquence-nombre d'onde en supposant la vitesse homogène puis en utilisant les relations entre k_x et $\frac{\partial}{\partial x}$ on obtient l'équation paraxiale dans le domaine fréquence-espace avec la vitesse exacte $c(x, z)$ (voir section 2.2.2.2).

Posons $\varphi(x, z, \omega) = \frac{c_z}{2c}(L_T^{-1}(1; x, z, \omega))$ dans le problème $\mathcal{P}_1$, on obtient

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P_1 = \varphi \\ L_T(1; x, z, \omega) \varphi(x, z, \omega) = \frac{c_z}{2c} P_1 \\ P_1(z = z_{k-1}) = P_0(z = z_k) \end{cases} \quad (2.109)$$

En introduisant l'expression de L_T (2.106) dans l'équation (2.109), on aboutit au système,

$$(\mathcal{P}_1) : \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} P_1 = \varphi \\ \frac{\omega^2}{c} \varphi(x, z, \omega) + \frac{\partial}{\partial x} c \frac{\partial}{\partial x} \varphi(x, z, \omega) = \frac{1}{c} \frac{c_z}{2c} P_1 \\ P_1(z = z_{k-1}) = P_0(z = z_k) \end{cases} \quad (2.110)$$

Ce système différentiel est résolu par un schéma par différences finies implicite ce qui conduit à la résolution d'un système tridiagonal linéaire très proche de celui résolu pour l'extrapolateur "one-way" paraxial classique. Notons que la deuxième équation de ce système est une équation de Helmholtz. Pour assurer l'unicité de la solution, les conditions de radiation de Sommerfeld modélisant le comportement des solutions à l'infini doivent être introduites. Les imposer signifie que l'infini ne renvoie pas d'énergie assurant ainsi une solution unique à l'équation de Helmholtz. En réalité, le domaine est borné dans la direction x . Il faut donc imposer des conditions limites aux bords qui génèrent le minimum de réflexions sur les bords du domaine, c'est-à-dire que le champ P_1 doit tendre vers zéro aux limites du domaine. Ici, nous avons considéré des conditions absorbantes de type PML⁴. La méthode de discrétisation utilisée pour le schéma numérique et l'introduction de PML sont détaillées dans les travaux de Collino (1995) et Duquet (1996). Ce problème a également été étudié par Prat (2005).

2.4 Applications numériques

Cette dernière section présente les résultats numériques de l'étude de l'extrapolateur "one-way" paraxial modifié. L'objectif est de valider numériquement l'approche suivie pour construire des extrapolateurs "one-way" quantitatifs dans des milieux de complexité croissante. Dans un pre-

⁴Perfectly Matched Layer

mier temps, la validité dynamique de l'extrapolateur "one-way" classique en milieu homogène est présentée numériquement. Nous comparerons ensuite l'extrapolateur "one-way" classique et l'extrapolateur "one-way" modifié dans le cas d'un gradient vertical de vitesse. Puis, dans le cas d'un milieu de vitesse variant verticalement et latéralement, nous comparerons l'extrapolateur phase shift quantitatif et l'extrapolateur paraxial quantitatif. Enfin, le dernier exemple sera consacré à l'étude numérique du coefficient de transmission de l'équation "one-way" modifiée.

2.4.1 Cadre de l'étude

Nous allons considérer successivement les cas suivants :

- Cas d'un milieu homogène de vitesse $c_0 = 2500$ m/s.
- Cas d'un gradient vertical de vitesse constant : $v(z) = 2000 + z$ (m/s).
- Cas d'un gradient oblique de vitesse constant
- Cas d'un milieu bicouche

Il va s'agir de comparer le champ incident (propagation descendante) fourni par nos extrapolateurs paraxiaux "one-way" en amplitude préservée avec le champ incident obtenu par la théorie des rais ou l'équation d'onde "two-way". La comparaison est effectuée à travers des sismogrammes et des calculs d'erreur d'amplitude et de temps de trajet.

La source sismique utilisée

Dans le cas du propagateur paraxial, les ondes évanescentes (cf. section 2.2.1.2) deviennent des modes propagatifs (Collino (1993)). De plus, comme mentionner à la section (2.3.2.2), le terme de correction d'amplitude présente des singularités pour les grands angles de propagation. Pour que l'étude des amplitudes ne soit pas altérée par ces problèmes, la source sismique utilisée dans les exemples numériques ne contient ni ondes évanescentes, ni angles de propagation proches de la direction horizontale (Figure 2.6).

La source sismique est un Ricker⁵ distribué sur la surface,

$$f(x, \omega) = \omega^2 e^{-\frac{\omega^2}{\omega_s^2}} e^{-i\omega t_0} \left(\frac{\sin(\frac{a\omega}{c}|x - x_s| + \frac{\pi}{2})}{|x - x_s| + \frac{\pi}{2} \frac{c}{a\omega}} + \frac{\sin(\frac{a\omega}{c}|x - x_s| - \frac{\pi}{2})}{|x - x_s| - \frac{\pi}{2} \frac{c}{a\omega}} \right) \quad (2.111)$$

défini par

$$\begin{aligned} \omega_s &= 150.0 \text{ rad.s}^{-1} \\ x_s &= \frac{L}{2} \\ a &= 0.81 \end{aligned}$$

où ω_s est la fréquence centrale de la source, x_s est la position de la source dans le modèle $[L, Z]$. L est la largeur du modèle et Z sa profondeur. a est un paramètre numérique qui filtre les angles de propagation supérieurs à un angle maximal, tel que :

⁵dérivée seconde de gaussienne

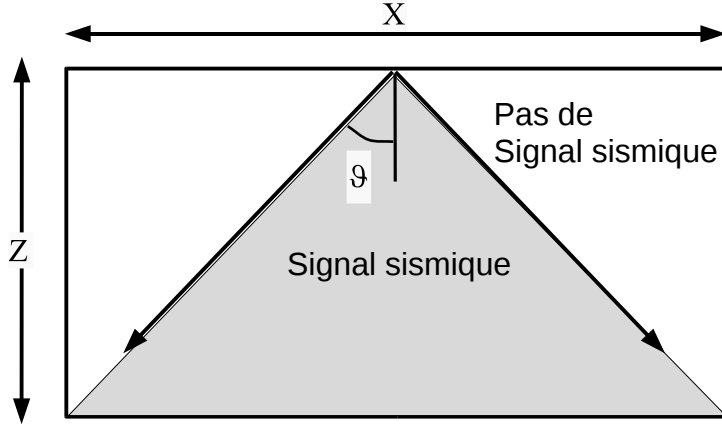


FIG. 2.6 – *Angle maximum de propagation. Schéma représentant le cône de propagation de la source sismique. θ est l'angle de propagation mesuré par rapport à la verticale.*

$$\sin\theta < a \quad (2.112)$$

où θ est l'angle de propagation mesuré par rapport à la verticale. Dès que $a < 1$, la source sismique ne contient pas d'ondes évanescentes. Pour $a=0.81$, l'angle maximal θ est de l'ordre de 60° (cf. Figure 2.6). Ce dernier est à peu près égal à l'angle d'ouverture de l'approximation paraxiale 60° . La source est présentée sur la Figures (2.7) pour la position $x = x_s$.

Calcul numérique de l'erreur et angles d'ouverture

Pour quantifier les erreurs introduites par les différents extrapolateurs "one-way", l'erreur relative cinématique (sur les temps de trajet) ou dynamique (sur les amplitudes) entre le "one-way" et le modèle de référence est calculée. L'erreur dynamique s'écrit :

$$E_d(x, z) = \left| \frac{A_{ref}(x, z) - A_{one}(x, z)}{A_{ref}(x, z)} \right| \times 100, \quad (2.113)$$

où $A(x, z) = \max_t(P(x, z, t))$ représente l'amplitude maximale enregistrée pour une position donnée (Figure 2.12). L'erreur cinématique est donnée par

$$E_c(x, z) = \left| \frac{T(\max_t(P_{ref})) - T(\max_t(P_{one}))}{T(\max_t(P_{ref}))} \right| \times 100, \quad (2.114)$$

où $T(\max_t(P_{one}))$ et $T(\max_t(P_{ref}))$ sont respectivement les temps de trajet associés à l'amplitude maximale des données issues de l'extrapolation "one-way" et des données de référence en un point donné (Figure 2.11). Ces erreurs sont utilisées pour déterminer les cônes (ou domaines) de validité en amplitude ou en temps des extrapolateurs "one-way". Le cône de validité est caractérisé par son angle maximal d'ouverture (cinématique θ_c ou dynamique θ_d) mesurés par rapport à la verticale et à l'intérieur duquel l'erreur relative (cinématique ou dynamique) entre l'extrapolateur et le modèle est inférieure à une limite fixée (1%, 5%, 10%). La mesure de l'angle d'ouverture du cône est un paramètre classiquement utilisé dans le cas homogène pour évaluer la qualité cinématique d'un propagateur "one-way" paraxial. Plus l'angle d'ouverture est grand et plus l'extrapolateur propa-

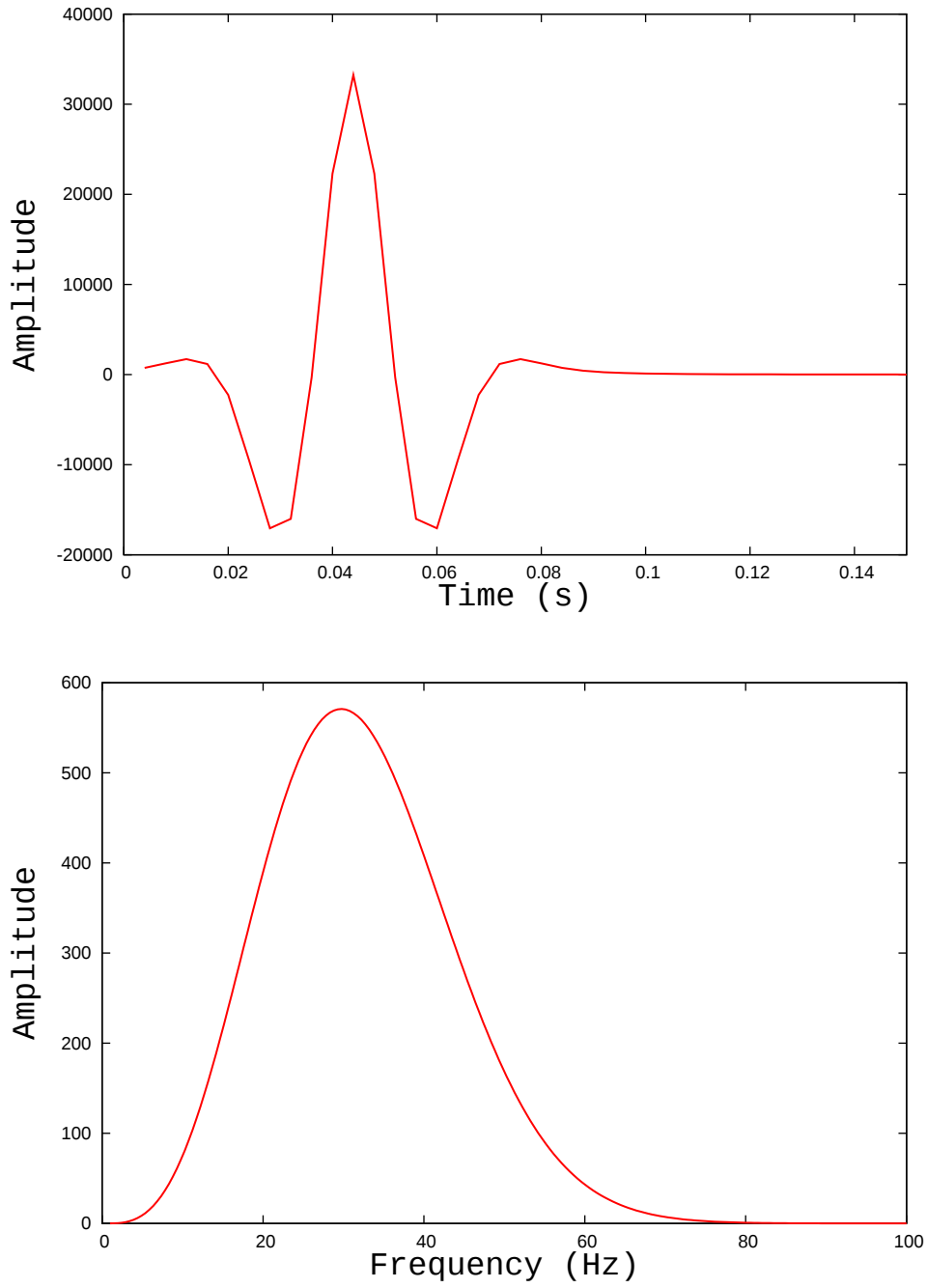


FIG. 2.7 – Présentation de la source sismique utilisée $f(x, t)$ définie par l'équation (2.111); Haut : représentation de la source sismique utilisée $f(x, t)$ en $x = x_s$; Bas : transformée de Fourier de $f(x = x_s, t)$.

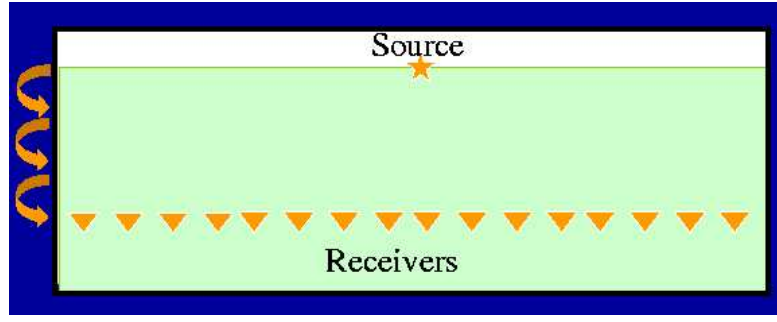


FIG. 2.8 – Dispositif utilisé ; La source sismique est placée au centre du modèle, le champ d'onde est propagé et enregistré à chaque profondeur et pour chaque fréquence. Ensuite, il s'agit d'extraire du champ propagé $P(x, z, t)$ les temps de trajet et les amplitudes associées au front d'onde.

gera correctement les grands angles de propagation. Ici, nous utilisons ce paramètre pour évaluer les performances dynamiques de nos extrapolateurs paraxiaux. L'objectif est donc de trouver l'extrapolateur associé au plus grand angle d'ouverture (cinématique et dynamique) possible tout en gardant un coût de calcul raisonnable.

2.4.2 Milieu homogène

Pour tester la propagation par équation “one-way”, nous avons généré des données synthétiques en utilisant des formules analytiques asymptotiques issues de la théorie des rayons (Forgues (1996)). Les caractéristiques de nos simulations numériques sont les suivantes. La grille de propagation $[x; z]$ est de $[641; 341]$ points espacés de 5 m. Le pas d'échantillonnage en temps est de 0.002 ms sur 512 pas, ce qui fait une longueur totale d'enregistrement de 1s. La source utilisée est une source distribuée en surface suivant l'équation (2.111). La vitesse de propagation est $c = 2500m/s$.

La propagation du champ a été enregistrée à chaque profondeur d'extrapolation. À chacune de celle-ci, les temps de trajet et les amplitudes associées au front d'onde propagé sont extraits pour construire des cartes de temps de trajet (Figure 2.11) et des cartes d'amplitudes (Figure 2.12). Le propagateur utilisé est un propagateur de type phase shift. On remarque que l'erreur cinématique faite avec le propagateur “one-way” (Figure 2.11, bas) est inférieure à 1% pour l'ensemble de notre modèle. De même, l'erreur dynamique est également inférieure à 1% pour l'ensemble de notre modèle (Figure 2.12, bas).

La différence de sismogrammes (Figure 2.9) montre que les résidus sont négligeables en milieu homogène. La superposition des traces “one-way” et analytique montre que l'amplitude ainsi que la forme du signal sont parfaitement restituées (Figure 2.10).

Pour ce qui est du choix de l'extrapolateur “one-way”, les erreurs dynamiques obtenues avec un extrapolateur phase shift (Figure 2.12, bas) sont comparables à celles obtenues en utilisant un propagateur paraxial à l'ordre 10 (Figure 2.13, haut). Si on diminue l'ordre du paraxial, le cône d'ouverture cinématique (Figure 2.14) et dynamique (Figure 2.13, bas) se restreint. Notons que le cône cinématique est plus restreint que le cône dynamique du paraxial. Cela s'explique facilement par le fait que les amplitudes sont liées à la courbure du front d'onde et donc au gradient du temps de trajet.

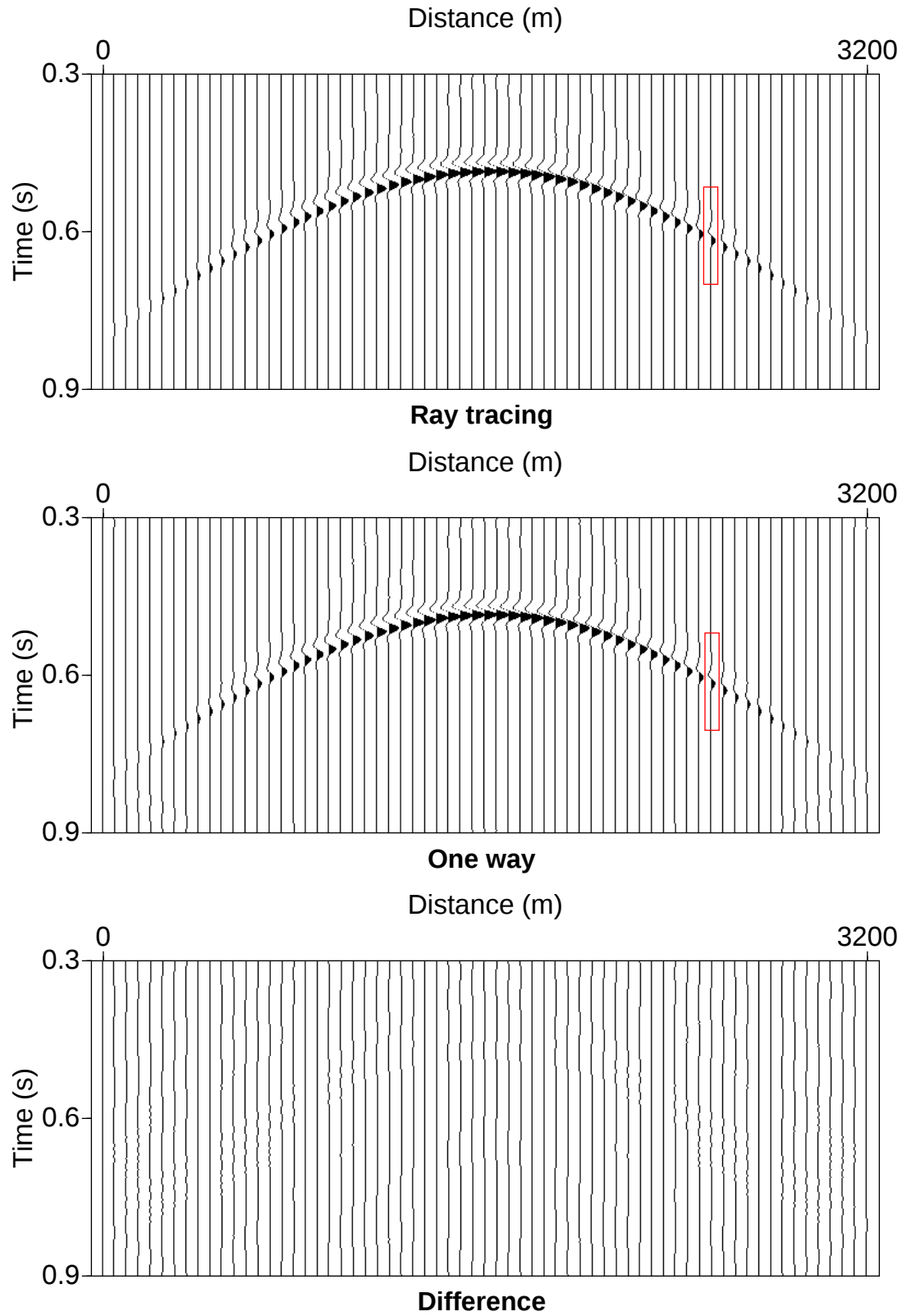


FIG. 2.9 – Comparaison des sismogrammes enregistrés à une profondeur de 1200 m en milieu homogène ($c = 2500 \text{ms}^{-1}$). Le même seuil est utilisé pour les trois figures. Haut : sismogramme calculé analytiquement ; Milieu : sismogramme calculé avec un extrapolateur "one-way" (phase shift) ; Bas : différence du sismogramme calculé analytiquement et calculé avec un extrapolateur "one-way". Les résidus sont négligeables.

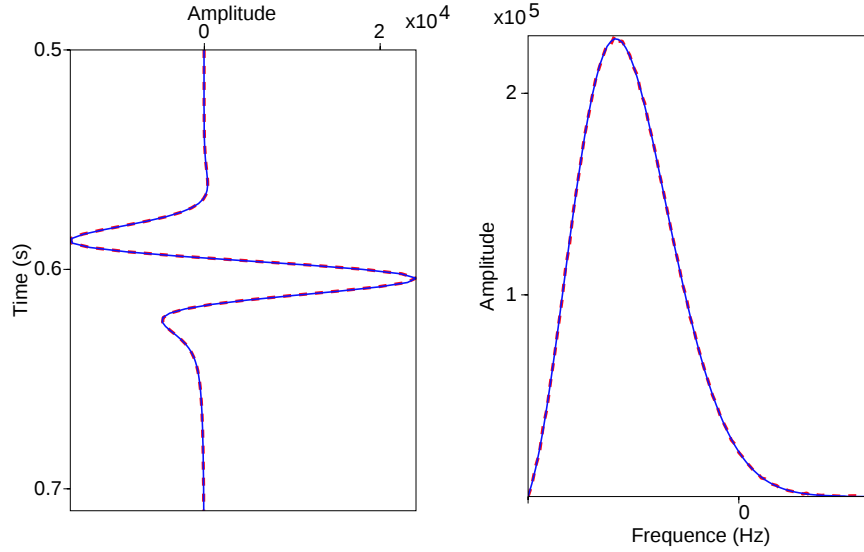


FIG. 2.10 – Agrandissement de la boîte de la Figure (2.9) pour une profondeur $z=1200$ m et un déport de 1000 m par rapport à la source. Haut : superposition de la trace sismique obtenue par calcul analytique (trait plein) et par propagation “one-way” (trait pointillé) ; Bas : superposition du spectre obtenu par calcul analytique (trait plein) et par propagation “one-way” (trait pointillé). On remarque que la forme du signal n’est plus celui d’un Ricker. Cela s’explique par la signature en 2D qui est une intégration temporelle du signal.

2.4.3 Milieu à gradient vertical

Nous avons montré dans le cas d’un modèle de vitesse homogène que les équations “one-way” classiques permettaient de restituer à la fois la cinématique et dynamique de la propagation. Qu’en est-il en milieu à gradient vertical de vitesse (Figure 2.15) ? En considérant le même dispositif que dans le cas homogène, nous allons comparer les amplitudes obtenues avec les formules analytiques issues de la théorie des rayons (annexe D).

La Figure (2.16) présente les sismogrammes obtenus analytiquement à partir des formules de tracé de rayons (de l’annexe D), et numériquement avec un propagateur “one-way” classique (phase shift) et un propagateur “one-way” modifié. On remarque que l’extrapolateur “one-way” classique (au milieu) sous-estime les amplitudes par rapport à la solution analytique (en haut) pour les grands angles de propagation. L’introduction du terme correctif dans le propagateur “one-way” (en bas) renforce les amplitudes pour les grands angles (vient du facteur $1/\cos^2\theta$) et ainsi permet de restituer correctement dynamique de la propagation sans modifier la cinématique.

La différence des sismogrammes montre (Figure 2.17) que le propagateur “one-way” classique (en haut) n’est pas quantitatif dans le cas d’un milieu à gradient vertical, contrairement à l’opérateur “one-way” modifié (au milieu) pour lequel les résidus sont négligeables. On remarque que l’extrapolateur paraxial modifié (en bas) au premier ordre présente des résidus satisfaisants autour de la direction verticale mais que ces résidus augmentent avec l’angle de propagation.

La Figure (2.20) compare le rapport entre les amplitudes obtenues avec différents propagateurs “one-way” et les amplitudes calculées analytiquement. On observe que l’introduction de la correction d’amplitude dans les extrapolateurs “one-way” classiques permet d’améliorer considé-

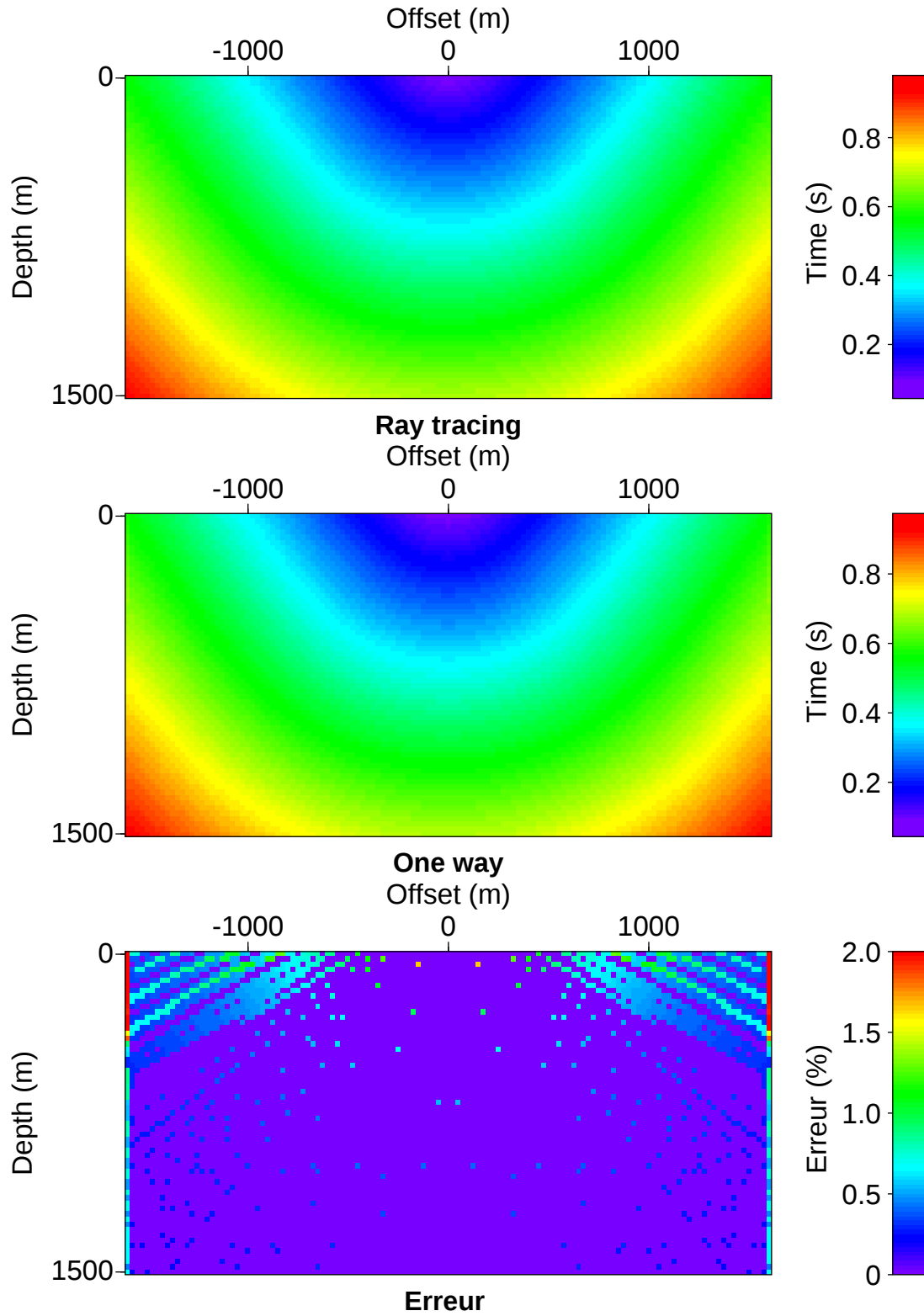


FIG. 2.11 – Comparaison des temps de trajet en milieu homogène. Haut : carte de temps de trajet calculé analytiquement ; Milieu : carte de temps de trajet obtenue par propagation “one-way” (phase shift) ; Bas : valeur absolue de l’erreur relative entre les temps de trajet analytiques et “one-way”. On remarque que l’erreur cinématique est inférieure à 1% à l’intérieur d’un cône de propagation de 60° (cela correspond à l’ensemble du domaine d’étude défini à la section (2.4.1)).

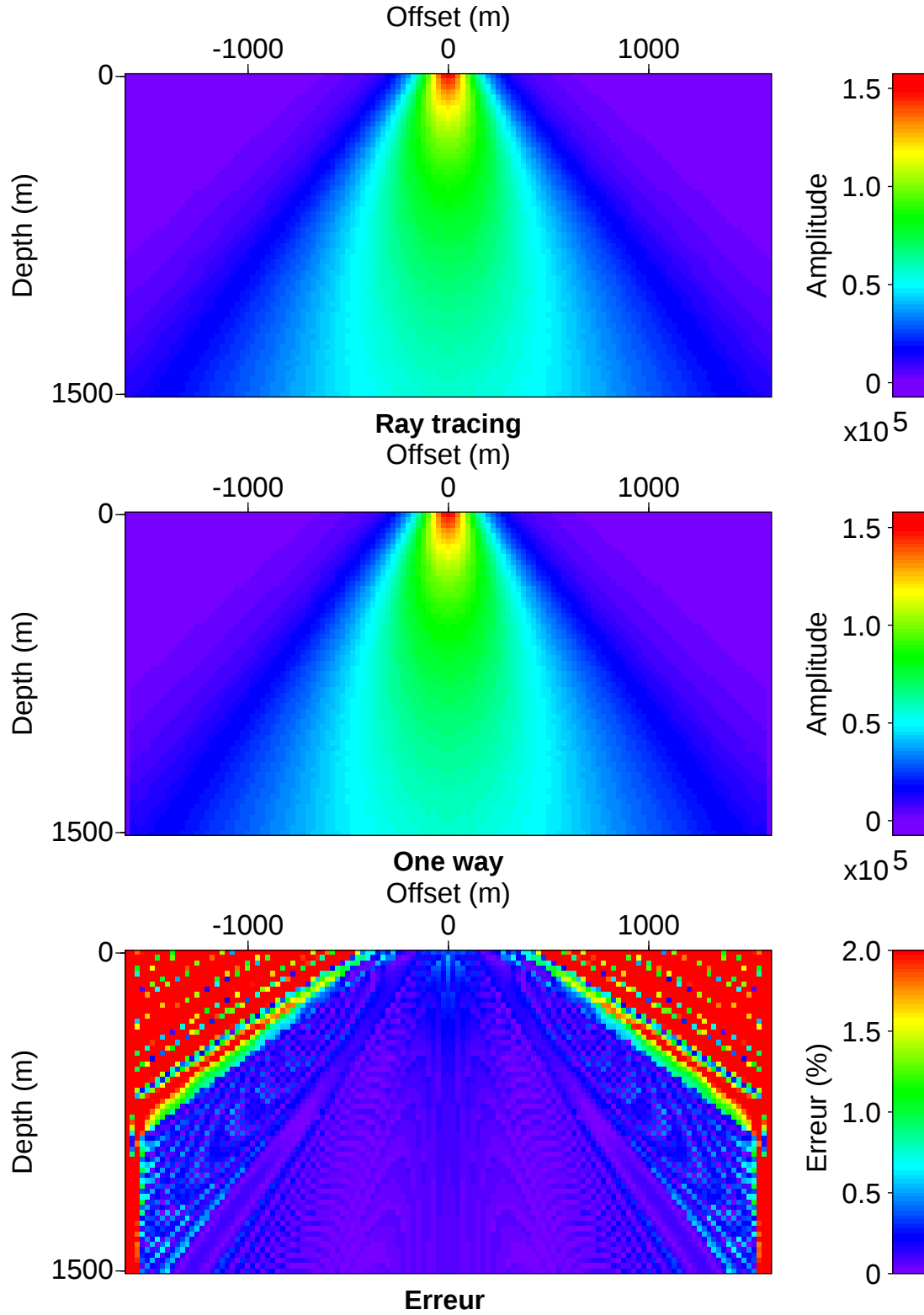


FIG. 2.12 – Comparaison des amplitudes en milieu homogène. Haut : carte d'amplitude calculée analytiquement ; Milieu : carte d'amplitude obtenue par propagation "one-way" (phase shift) ; Bas : valeur absolue de l'erreur relative entre les amplitudes analytiques et "one-way". On remarque que l'erreur dynamique est inférieure à 1% à l'intérieur d'un cône de propagation de 60° (cela correspond à l'ensemble du domaine d'étude défini à la section (2.4.1)).

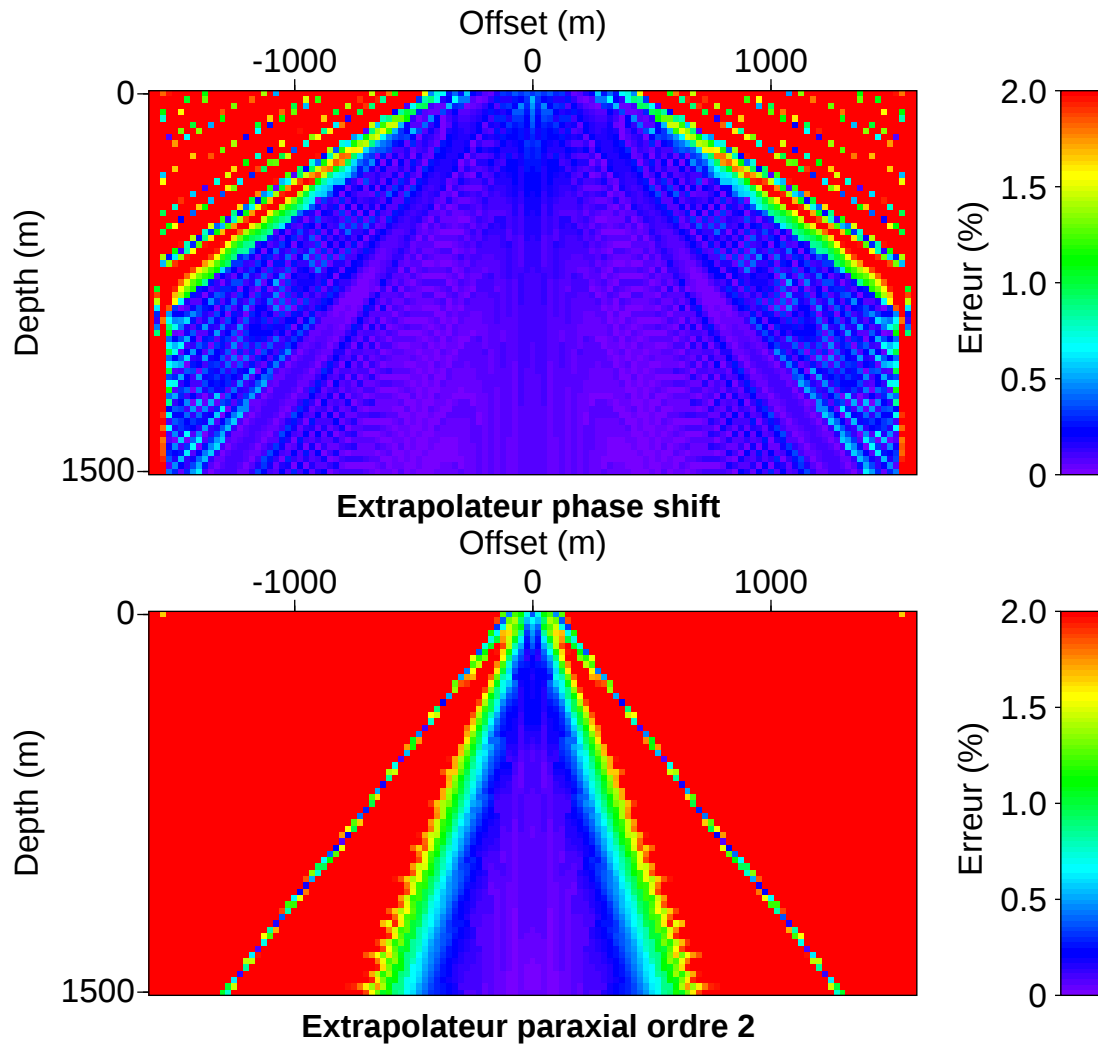


FIG. 2.13 – Influence de l'ordre de l'approximation paraxiale. Valeur absolue de l'erreur relative entre les amplitudes analytiques et les amplitudes propagées avec des extrapolateurs "one-way"; Haut : extrapolateur phase shift; Bas : extrapolateur paraxial ordre 2. On remarque que le cône dynamique de validité se restreint lorsque l'ordre de l'approximation paraxiale diminue.

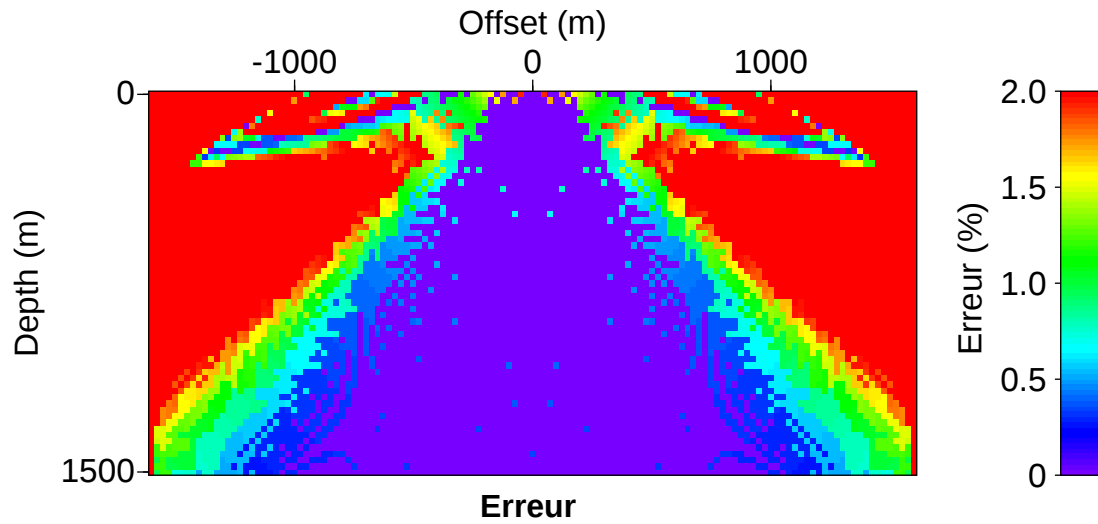


FIG. 2.14 – Influence de l'ordre de l'approximation paraxiale. Comparaison des erreurs relatives des temps de trajet entre le calcul analytique et les extrapolateurs "one-way" en milieu homogène. Erreur obtenue avec un extrapolateur "one-way" paraxial ordre 1.

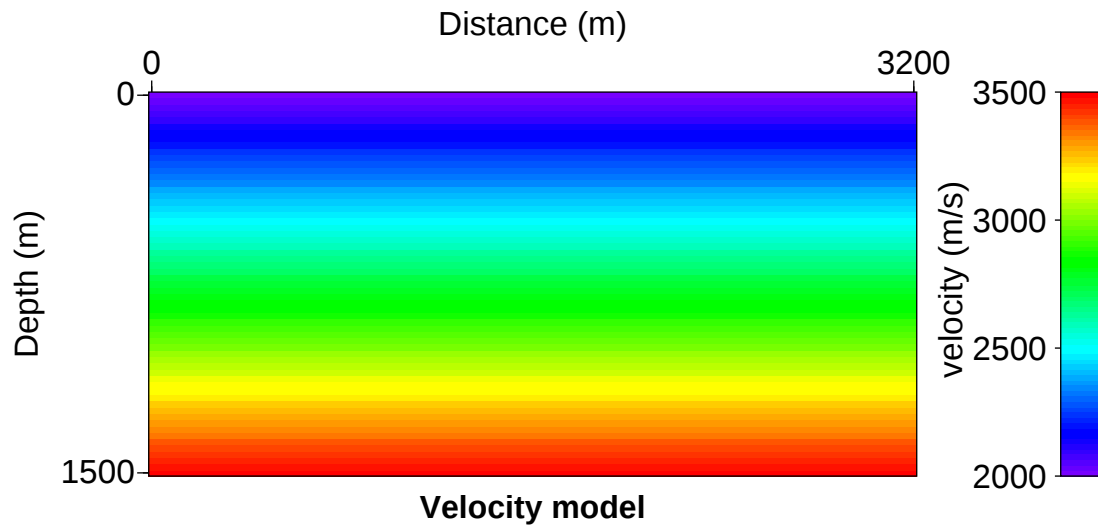


FIG. 2.15 – Modèle à gradient vertical de vitesse constant : $v(z) = 2000 + z$ en m/s avec z en m.

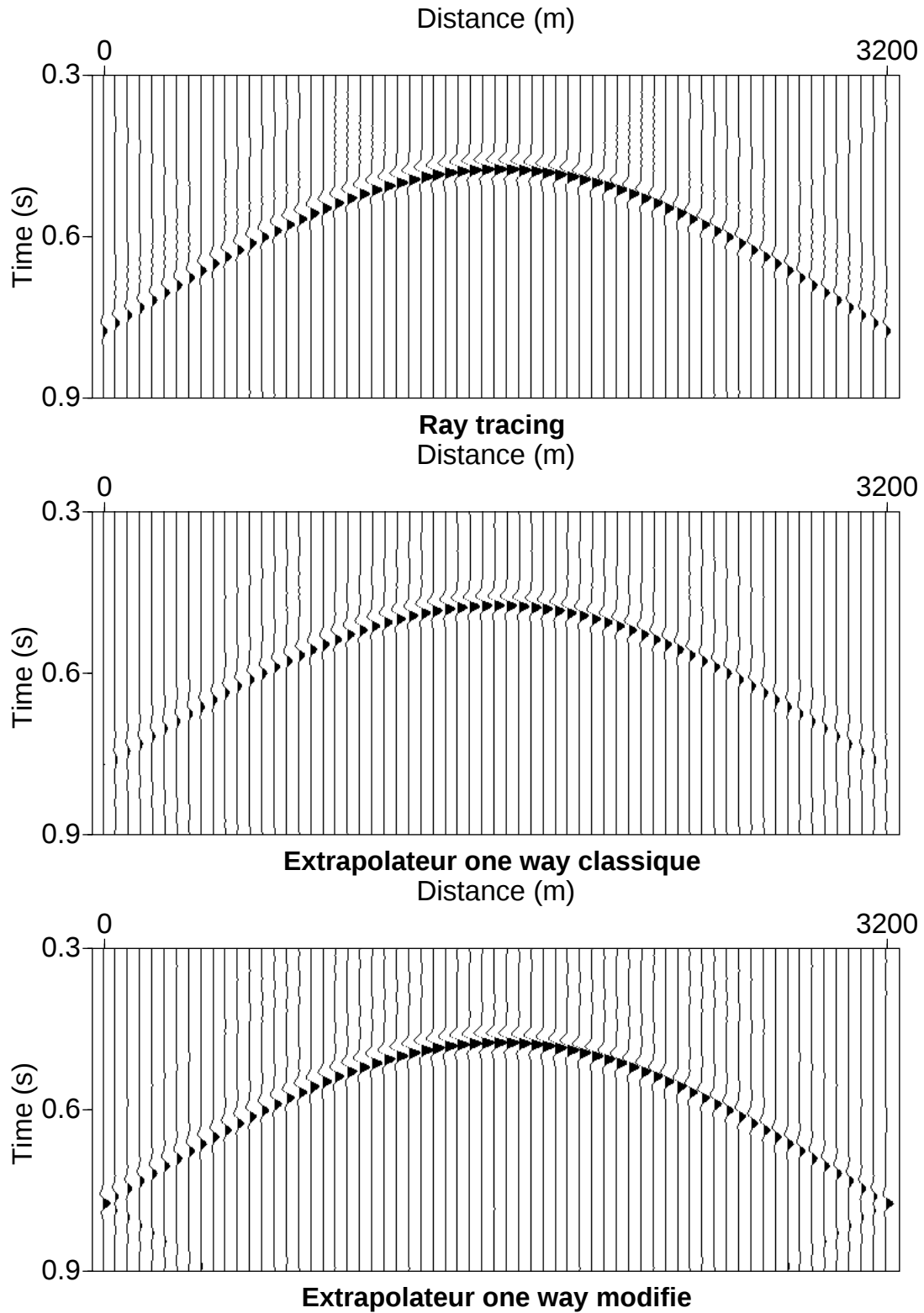


FIG. 2.16 – Comparaison des sismogrammes enregistrés à une profondeur de 1200 m en milieu à gradient vertical de vitesse. Le seuil utilisé est le même seuil pour les trois figures. Haut : sismogramme calculé analytiquement; Milieu : sismogramme calculé avec un extrapolateur “one-way” classique (phase shift); Bas : sismogramme calculé avec un extrapolateur “one-way” modifié

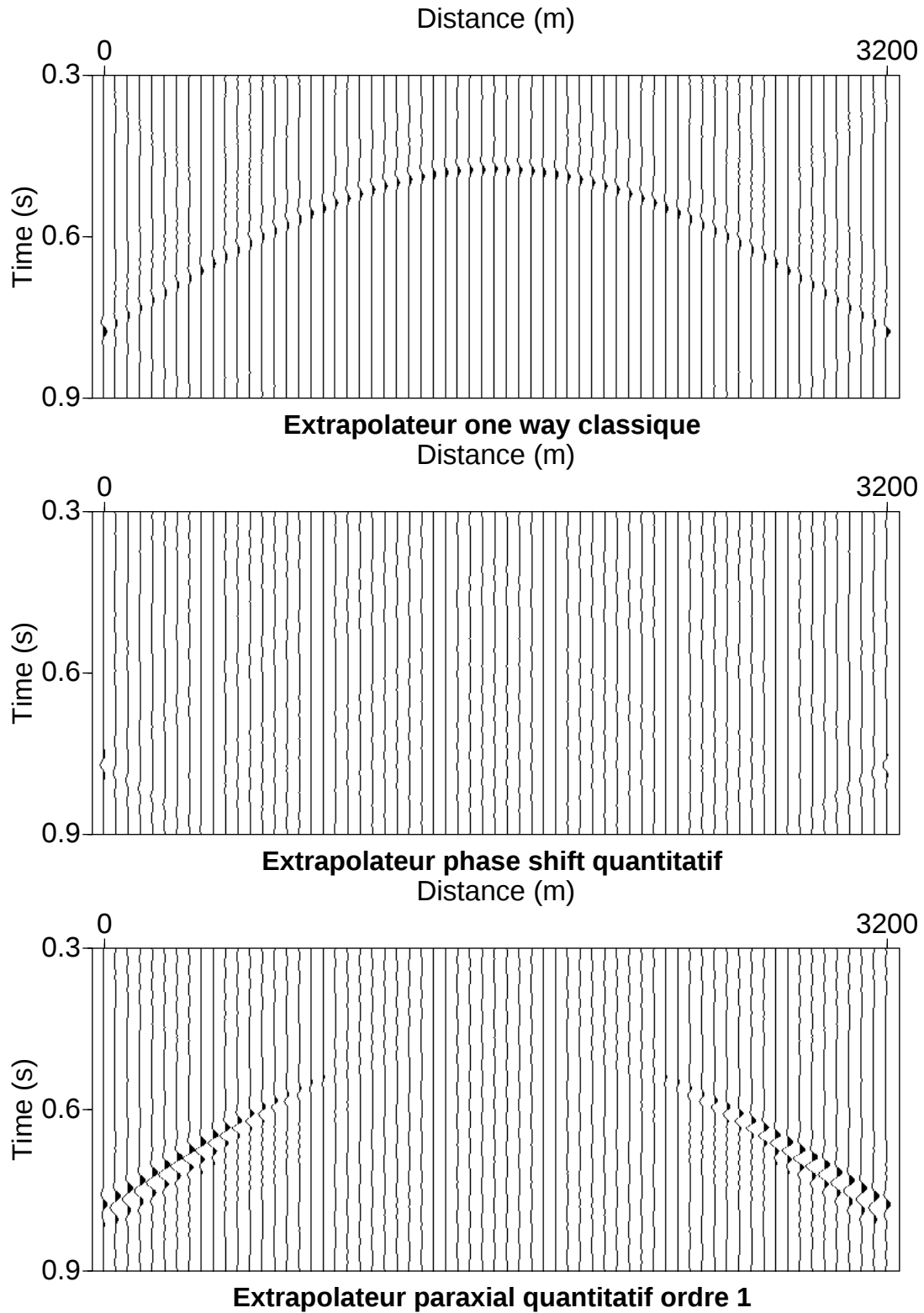


FIG. 2.17 – Différences entre les sismogrammes calculés analytiquement et ceux obtenus par propagation “one-way”. Le seuil utilisé est le même seuil pour les trois figures. Haut : différence entre analytique et extrapolateur “one-way” classique (phase shift) ; Milieu : différence entre analytique et extrapolateur “one-way” modifié (phase shift) ; Bas : différence entre analytique et extrapolateur “one-way” modifié paraxial ordre 2.

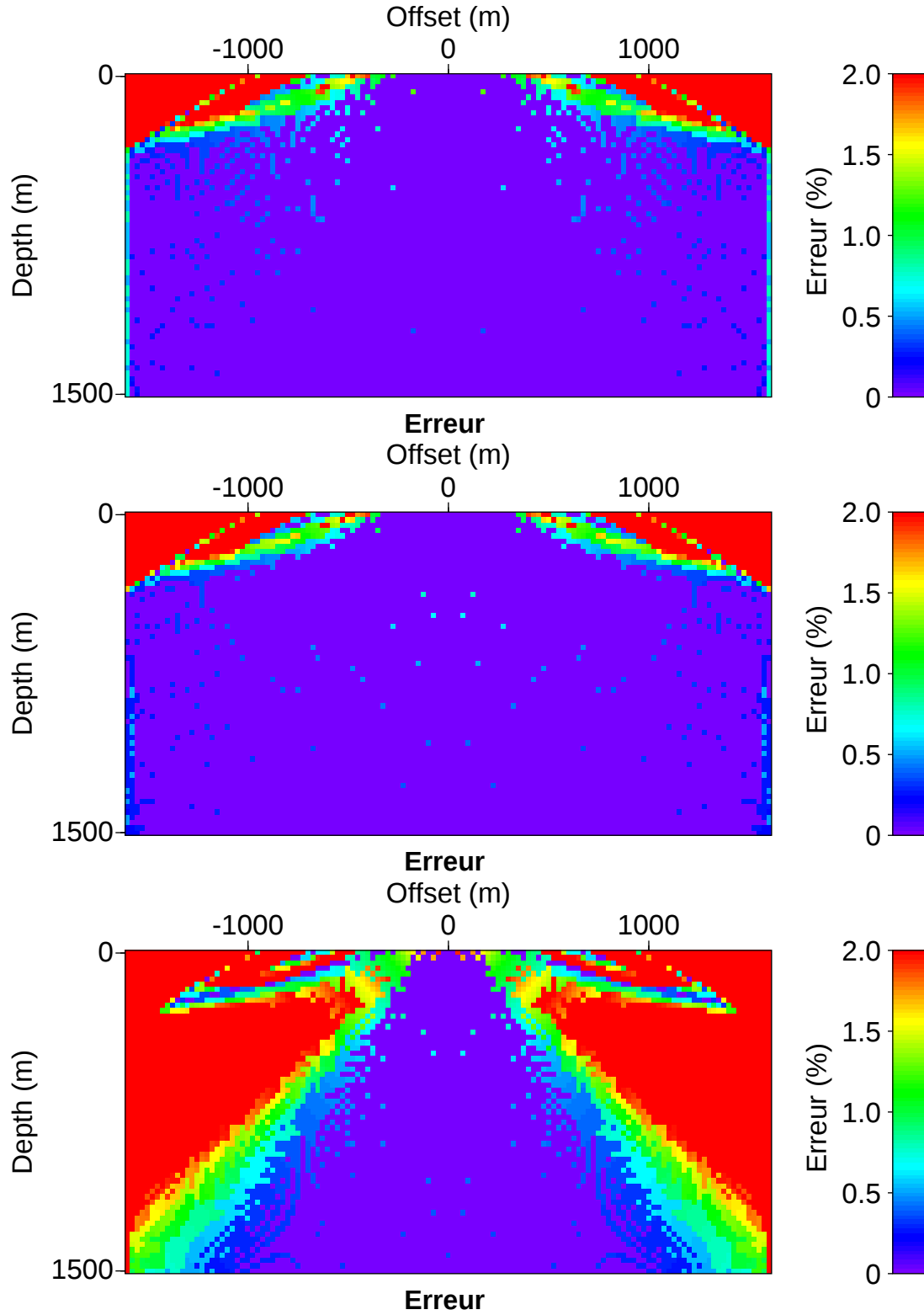


FIG. 2.18 – Comparaison des erreurs relatives des temps de trajet entre le calcul analytique et les extrapolateurs “one-way” en milieu à gradient vertical. Haut : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way” classique (phase shift) ; Milieu : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way” modifié (phase shift ou paraxial ordre > 9) ; Bas : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way” paraxial ordre 1.

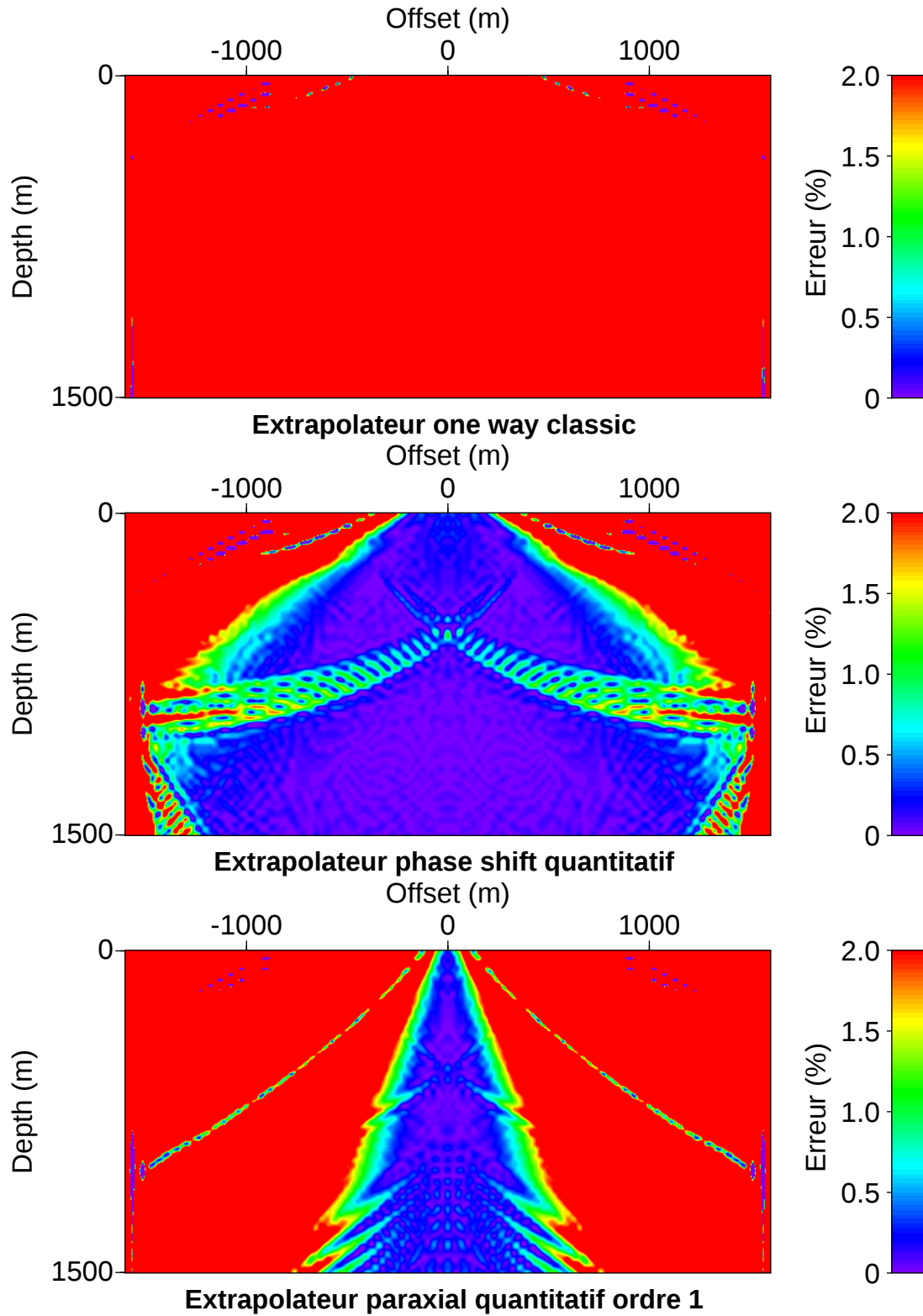


FIG. 2.19 – Comparaison des erreurs relatives des amplitudes entre le calcul analytique et les extrapolateurs “one-way” en milieu à gradient vertical. Haut : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way” classique (phase shift ou paraxial ordre > 9) ; Milieu : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way” modifié (phase shift ou paraxial ordre > 9) ; Bas : erreur obtenue avec un extrapolateur “one-way”.

ablement les amplitudes par rapport à un propagateur “one-way” classique. En effet, dans le cas d’un propagateur “one-way” phase shift ou paraxial d’ordre 10, les amplitudes sont parfaitement restituées pour l’ensemble des offsets représentés. Dans le cas d’un propagateur paraxial d’ordre 1 (une seule fraction rationnelle), les amplitudes sont également bien restituées pour une certaine ouverture autour de la direction verticale de propagation. Lorsque l’on s’éloigne de la direction verticale, l’erreur sur les amplitudes augmente. Un calcul d’erreur permet de définir un cône de validité autour de la direction verticale à l’intérieur duquel l’erreur sur les amplitudes est satisfaisante. Ce cône est représenté sur la Figure (2.19). En revanche, on observe que dans le cas d’un propagateur paraxial classique, les amplitudes ne sont pas correctement restituées quel que soit l’offset considéré. L’équation “one-way” classique n’est donc pas quantitative en milieu hétérogène et l’ajout du terme correctif permet de la rendre quantitative.

Le domaine de validité cinématique (Figure 2.18) associé au propagateur paraxial modifié est plus étendu que le domaine de validité dynamique (Figure 2.19). Ainsi, bien que le propagateur paraxial à l’ordre 1 est cinématiquement valide (erreur $< 1\%$) jusqu’à 45° (Figure 2.18, bas). Dynamiquement, son domaine de validité est de 20° (Figure 2.19, bas). Les tentatives menées pour augmenter l’angle maximal d’ouverture par optimisation⁶ des coefficients paraxiaux ont été jusqu’ici peu satisfaisantes. En effet, si l’optimisation permet d’augmenter significativement l’angle maximum d’ouverture cinématique (70° pour l’ordre 1), l’angle dynamique est pour sa part diminué. Cela s’explique car les coefficients paraxiaux sont optimisés pour ajuster au mieux la relation de dispersion de l’équation des ondes (et donc l’équation eïkonale). Pour y parvenir, on s’autorise une erreur limite (classiquement $< 1\%$) à l’intérieur de laquelle l’erreur peut osciller (2.21). L’équation de transport est pour sa part sensible à la dérivée du temps de trajet. Lorsque l’erreur sur le temps de trajet oscille, l’erreur dynamique devient rapidement importante. Plusieurs optimisations ont été menées en faisant varier le seuil d’erreur en fonction de l’angle de propagation ou encore en imposant une fonction d’erreur monotone (croissantes ou décroissante). Cependant aucune solution satisfaisante n’a pour l’instant été trouvée. Les meilleurs résultats ont été obtenus lorsque le seuil d’erreur pris est petit ($< 0.1\%$). Dans ce cas, les coefficients paraxiaux trouvés et l’angle d’ouverture associé sont proches de ceux obtenus par une approximation de Padé classique. Un compromis entre erreur et angle d’ouverture maximal est à faire si on veut utiliser un propagateur paraxial en 3D. Une autre solution envisageable consiste à trouver un terme correctif adapté à l’ordre de l’approximation paraxiale.

2.4.4 Milieu à gradient oblique

Ajoutons maintenant une complexité supplémentaire en introduisant dans notre problème de propagation des variations latérales de vitesse. Considérons un gradient oblique de vitesse $v(x, z) = 1500 + 0.36x + 0.36z$ (Figure 2.22). Une couche plane horizontale homogène est positionnée entre la couche à gradient et la surface. En milieu homogène, la condition initiale “one-way” a une expression analytique. Cela permet de séparer les problèmes possibles issus de la résolution numérique de la condition initiale “one-way” en milieu hétérogène du problème de propagation quantitative. La conséquence d’une telle configuration est l’apparition d’un terme de transmission lorsque le

⁶on cherche les coefficients paraxiaux qui donne le plus grand angle d’ouverture θ possible à l’intérieur duquel l’erreur entre la relation de dispersion paraxiale et la relation de dispersion de l’équation des ondes est inférieure à 1%.

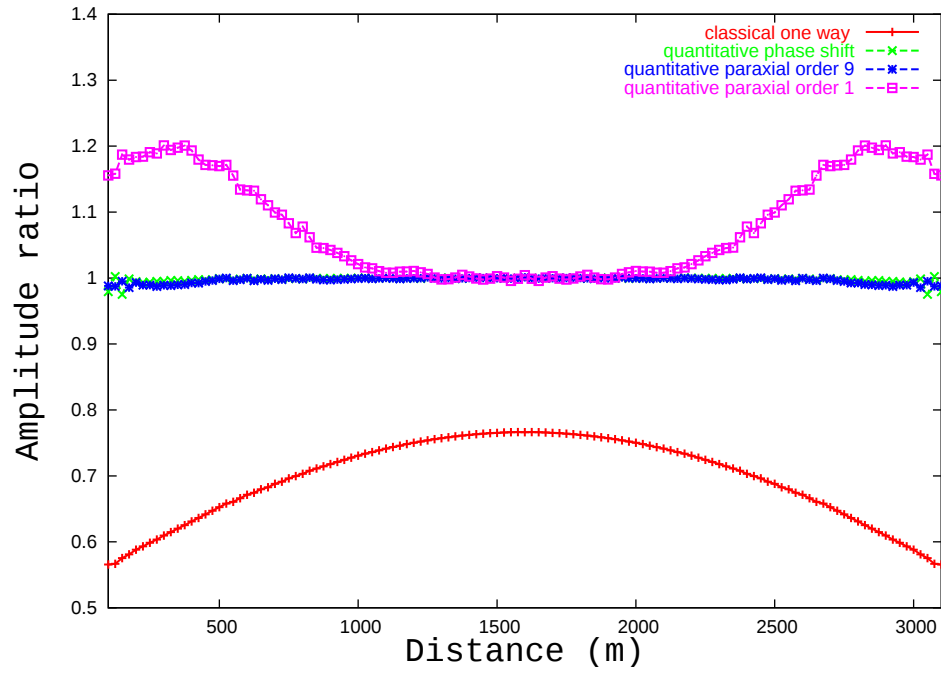


FIG. 2.20 – Représentation du rapport des amplitudes propagées avec des extrapolateurs “one-way” par rapport aux amplitudes analytiques dans le cas d’un milieu à gradient vertical.

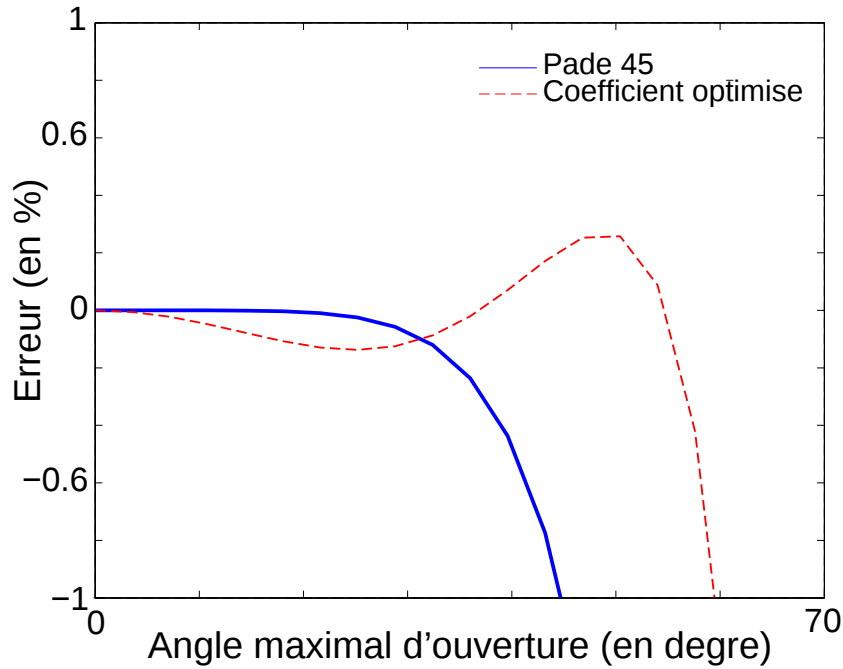


FIG. 2.21 – Coefficients paraxiaux optimisés. Chaque courbe représente l’erreur relative entre la relation de dispersion paraxiale (ordre 1) et la relation de dispersion de l’équation des ondes en fonction de l’angle de propagation. Trait plein : erreur obtenue en utilisant les coefficients paraxiaux de Padé dans la relation de dispersion paraxiale. Trait pointillé : erreur obtenue en utilisant des coefficients paraxiaux optimisés dans la relation de dispersion paraxiale. On observe que l’utilisation de coefficients paraxiaux optimisés d’augmente significativement l’angle maximal d’ouverture (défini pour une erreur cinématique à 1%) mais que l’erreur associée oscille davantage.

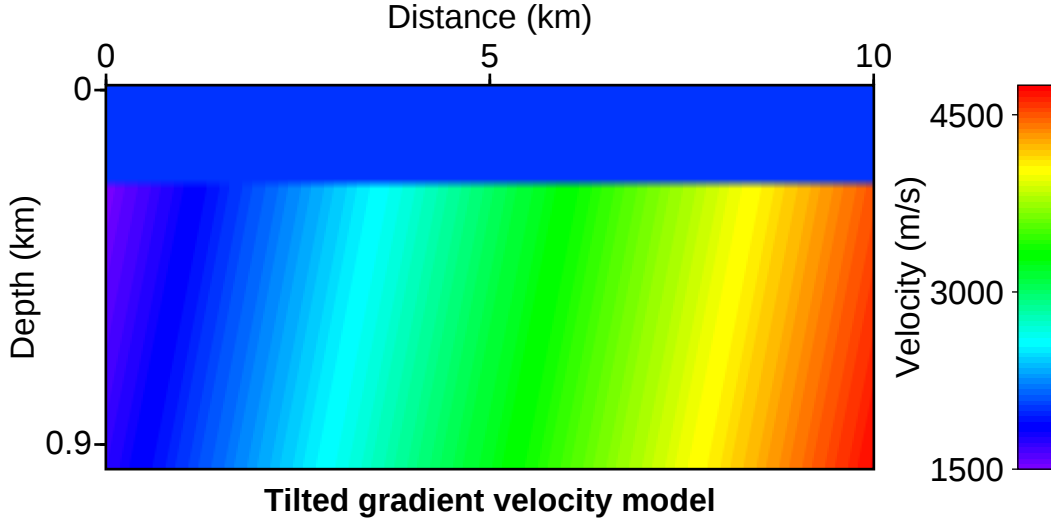


FIG. 2.22 – Modèle de vitesse pour l'exemple du gradient oblique. Le modèle est composé de deux couches planes. La première est une couche homogène de vitesse $c_1 = 2000\text{m/s}$, la deuxième est définie par la vitesse $v(x, z) = 1500 + 0.3x + 0.3z$.

front d'onde traverse l'interface. Dans cet exemple, les données de référence ont été modélisées en résolvant numériquement l'équation d'onde complète dans le domaine temporel (schéma aux différences finies d'ordre 2 en temps et 4 en espace). La source utilisée est la même que pour les exemples précédents et est localisée à la surface au milieu du modèle. Néanmoins, le modèle a été élargi des deux côtés pour éviter les réflexions sur les bords du domaine de calcul. Comparons maintenant le sismogramme de référence avec les sismogrammes obtenus par l'extrapolateur “one-way” modifié phase shift, l'extrapolateur “one-way” modifié paraxial (ordre 9) et l'extrapolateur “one-way” classique paraxial (ordre 9).

La différence entre les sismogrammes (Figure 2.25) calculés par équation “two-way” (Figure 2.23) et par équation “one-way” (Figure 2.24) montre de forts résidus pour l'extrapolateur “one-way” modifié phase shift. Cela s'explique simplement par le fait que la méthode d'extrapolation phase shift ne permet pas de prendre en compte les variations latérales de vitesse (Figure 2.26). Dans le cas d'un gradient de vitesse oblique, l'extrapolateur phase shift commet à la fois une erreur cinématique (Figure 2.24) et dynamique. Le résidu est d'ailleurs plus important que celui obtenu avec l'extrapolateur paraxial classique pour lequel la cinématique est bien restituée. On observe que l'utilisation d'un extrapolateur paraxial modifié permet d'obtenir des résultats tout à fait satisfaisants.

2.4.5 Milieu blocky

Étudions maintenant le comportement quantitatif de notre extrapolateur lorsque l'onde doit traverser une interface caractérisée par un fort contraste de vitesse.

Considérons un modèle 2D composé de trois couches planes horizontales homogènes empilées les unes sur les autres. La vitesse dans chaque couche est respectivement égale à 2000m/s , 3000m/s et 4000m/s depuis la couche la plus superficielle jusqu'à la plus enfouie (Figure 2.27). Les deux

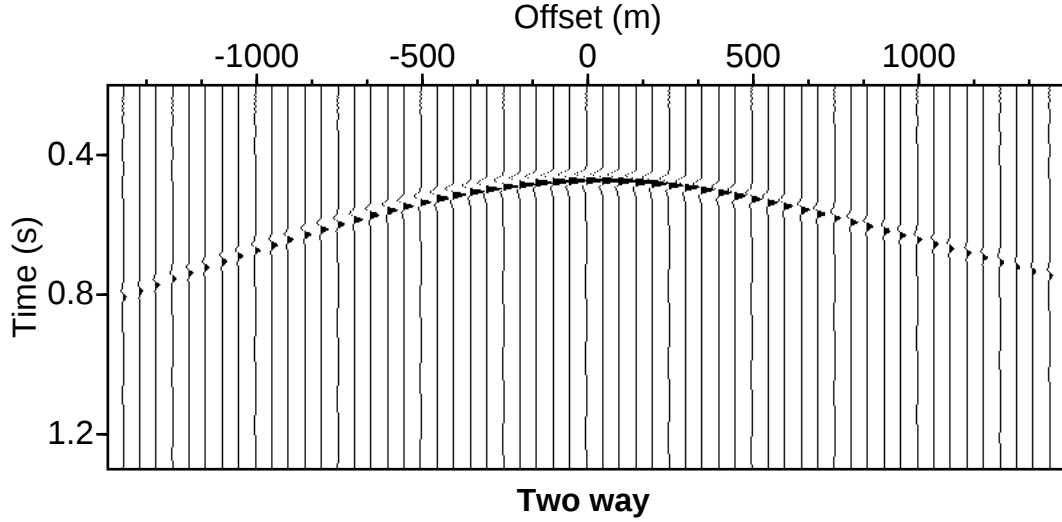


FIG. 2.23 – Sismogrammes calculés avec l'équation "two-way". Le seuil utilisé pour la représentation est le même que celui utilisé pour la Figure (2.24).

interfaces sont respectivement positionnées à des profondeurs $z = 550\text{m}$ et $z = 1050\text{m}$. Le champ d'onde dans le milieu a été extrapolé numériquement par l'extrapolateur "one-way" modifié paraxial (ordre 9) pour une source sismique située au centre du modèle en surface. L'étude de l'évolution en profondeur de l'amplitude maximale du front d'onde à l'aplomb de la source (Figure 2.28), montre des sauts d'amplitudes au niveau des interfaces correspondant à la transmission du champ à travers l'interface (application d'un coefficient de transmission).

D'après la section (2.3.2.1), l'expression du coefficient de transmission pour une onde plane incidente sur un réflecteur (Berkhout, 1980) s'écrit

$$T = \frac{2c_2 \cos \theta_2}{c_1 \cos \theta_1 + c_2 \cos \theta_2}. \quad (2.115)$$

Pour les interfaces 1 et 2 séparant les milieux 1, 2 et 3, les coefficients de transmission analytiques à incidence nulle (Figure 2.28) sont respectivement $T_1 = 1.2$ et $T_2 \approx 1.143$. Ces coefficients sont parfaitement restitués numériquement.

Si l'étude est maintenant étendue pour tous les angles d'incidence (Figure 2.29), on remarque que le coefficient de transmission de l'équation "one-way" modifiée est proche du coefficient de transmission pour une onde plane lorsque l'angle d'incidence est petit ce qui corrobore l'étude analytique de la section (2.3.2.2). Notons que l'équation paraxiale BEJH (Bamberger et al. (1985)) permettait d'approcher le coefficient de transmission à l'ordre 0. Dans le cas d'une équation paraxiale classique, aucun coefficient de transmission n'existait.

Dans le cas d'un milieu $c(z)$, l'introduction du terme correctif dans l'équation "one-way" classique équivaut à introduire un terme de transmission linéarisé (cf. section (2.3.2.2)).

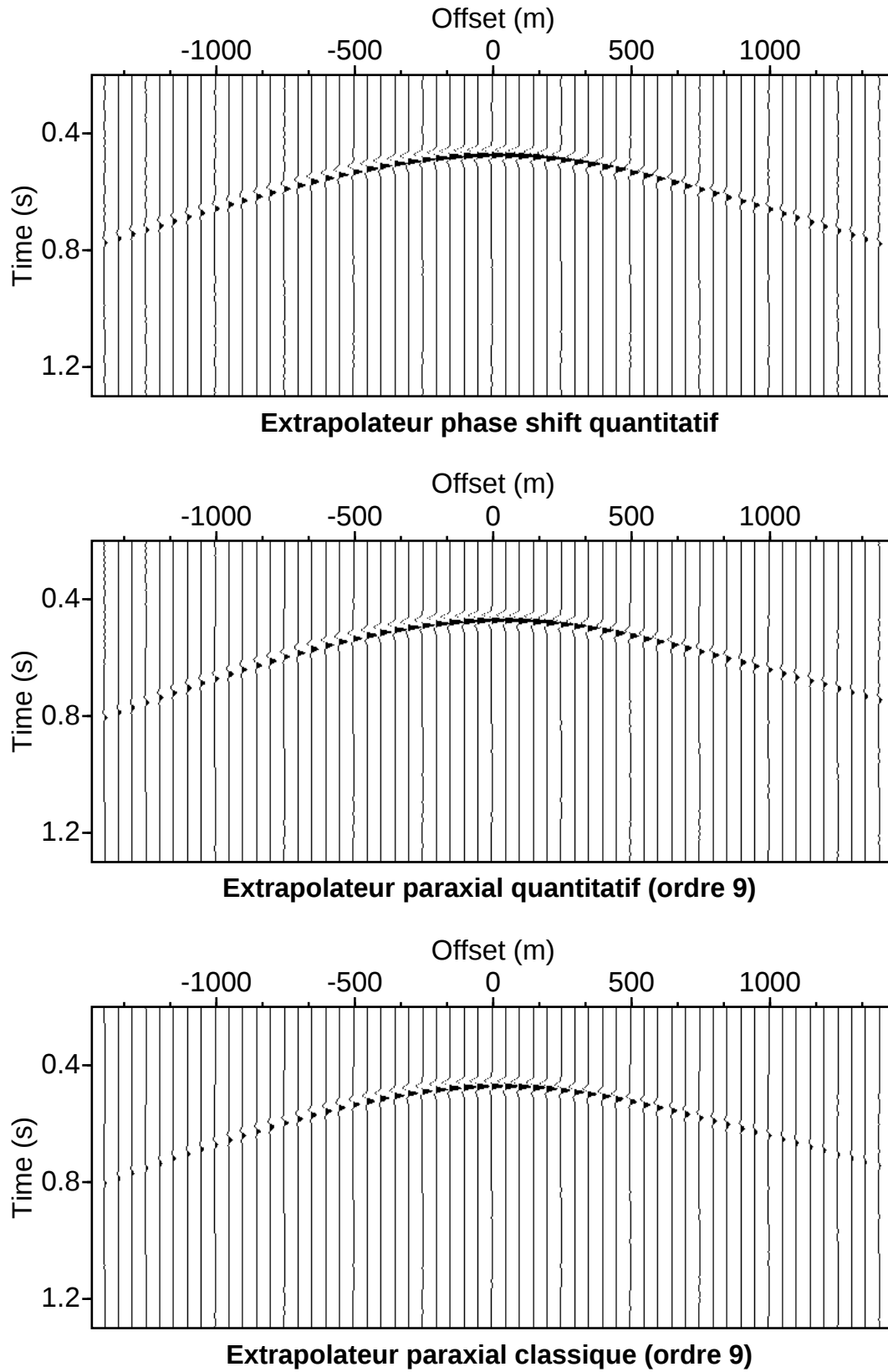


FIG. 2.24 – Sismogrammes calculés avec les propagateurs "one-way". Le seuil utilisé est le même seuil pour les trois figures. Haut : avec un propagateur phase shift quantitatif; Milieu : avec un propagateur paraxial quantitatif à ordre 9; Bas : avec un propagateur paraxial classique à ordre 9.

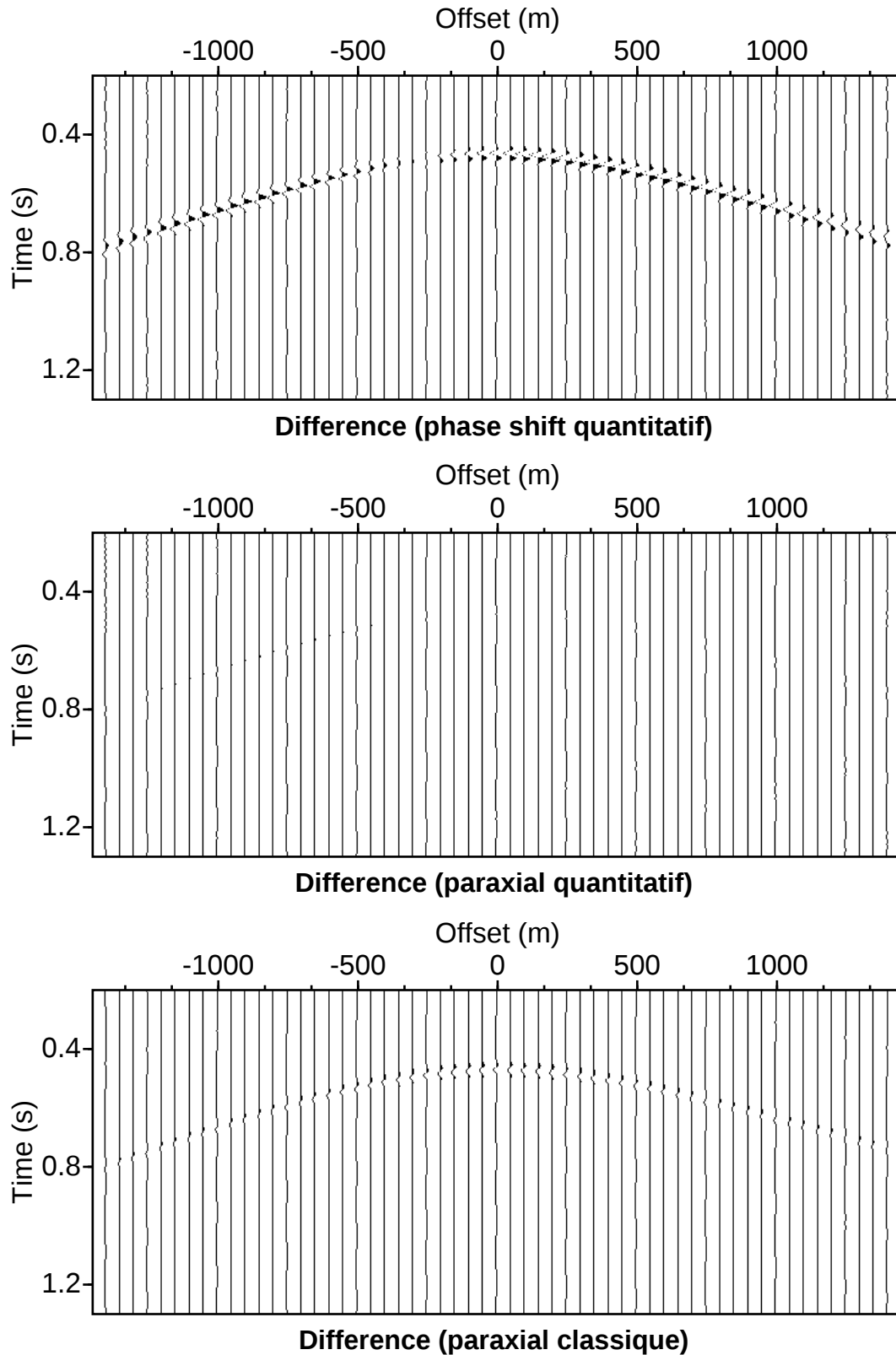


FIG. 2.25 – Différence entre les sismogrammes obtenus avec le propagateur “two-way” et les propagateurs “one-way” en milieu à gradient oblique. les Figures diffèrent par le propagateur “one-way” utilisé. Le seuil est le même pour les trois figures et identique à celui utilisé pour les Figures (2.24) et (2.23). Haut : propagateur phase shift quantitatif; Milieu : propagateur paraxial quantitatif à l’ordre 9; Bas : propagateur paraxial classique à l’ordre 9. On remarque que l’extrapolateur paraxial quantitatif donne des résidus sont négligeables. On remarque également qu’il est préférable d’utiliser un propagateur paraxial classique qu’un propagateur phase shift quantitatif dans ce milieu.

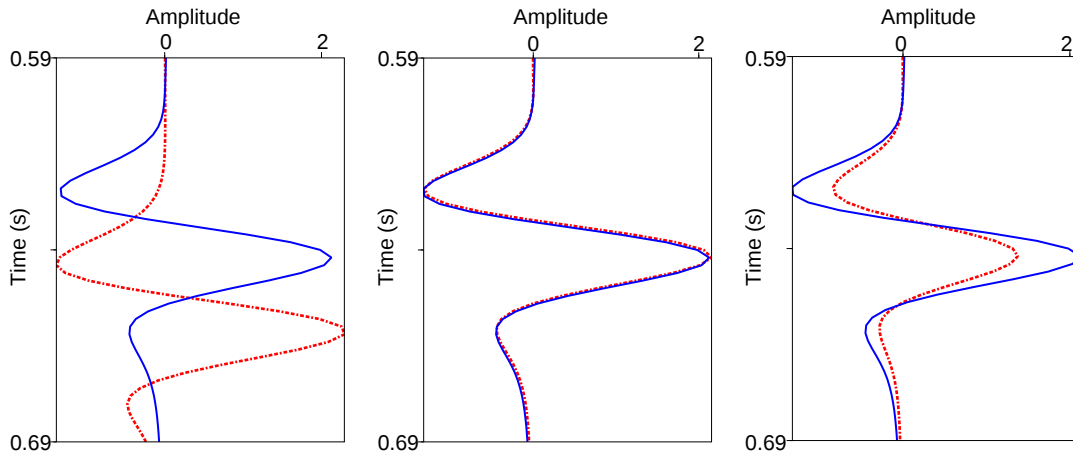


FIG. 2.26 – Superposition de la trace “two-way” (trait plein) pour ($h = 1000\text{m}, z = 750\text{m}$) avec celles obtenues par propagation “one-way” (trait pointillé). Haut : avec un propagateur phase shift quantitatif. On observe que les amplitudes ne sont pas exactes et que la cinématique est mal restituée; Milieu : avec un propagateur quantitatif paraxial à l’ordre 9. Les deux traces sont parfaitement superposées; Bas : avec un propagateur paraxial classique à l’ordre 9. La cinématique est correcte mais les amplitudes ne le sont pas.

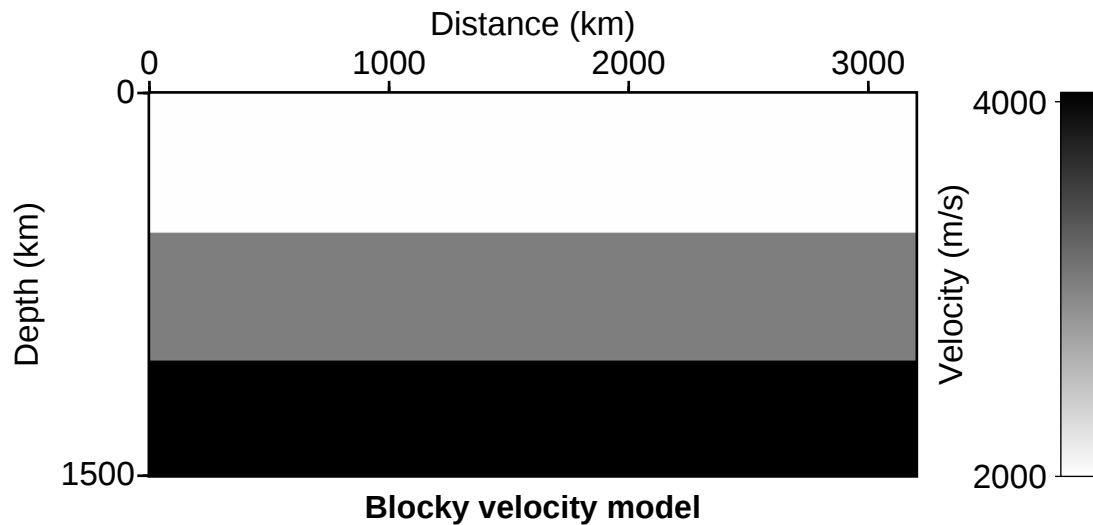


FIG. 2.27 – Modèle de vitesse blocky. Le modèle est composé de deux trois couches planes horizontales homogènes superposées. Les vitesses sont respectivement égales à 2000, 3000 et 4000 m/s. La source sismique est localisée en surface au centre du modèle.

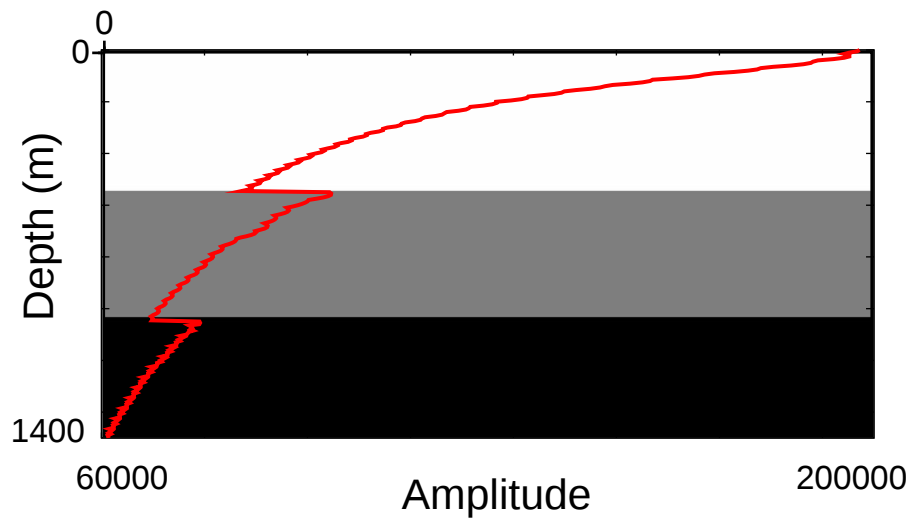


FIG. 2.28 – Représentation de l'évolution des amplitudes du front d'onde en fonction de la profondeur suivant la direction verticale à l'aplomb de la source.

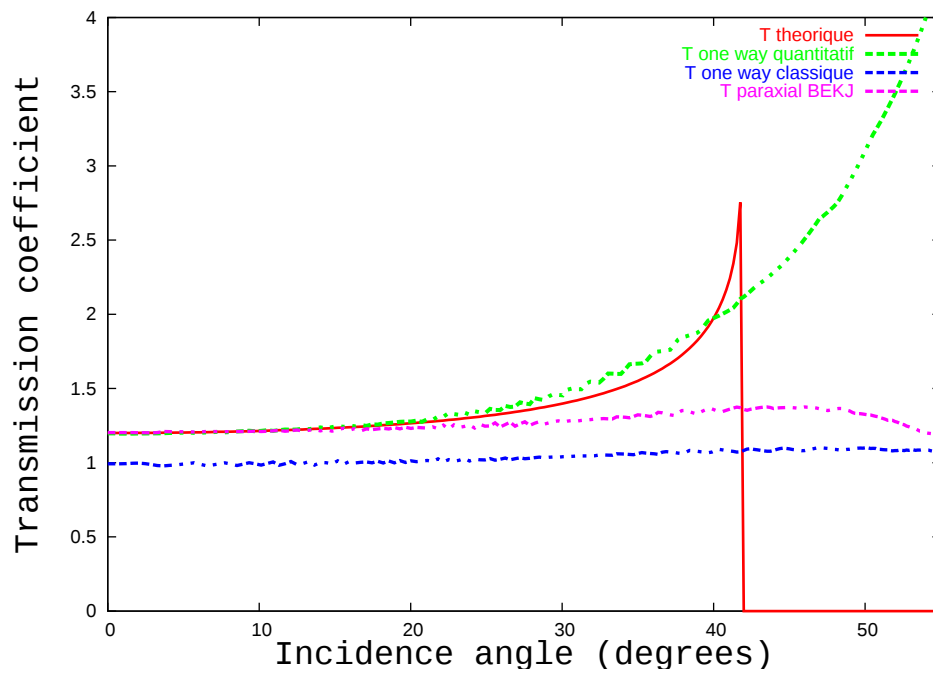


FIG. 2.29 – Superposition du coefficient de transmission en fonction de l'angle d'incidence pour la première interface.

2.4.6 Les performances numériques

D'un point de vue numérique, le coût informatique d'un extrapolateur paraxial classique est proportionnel au nombre de fractions rationnelles utilisées dans l'approximation paraxiale. Le coût additionnel du terme correctif pour rendre l'extrapolateur quantitatif est équivalent à une fraction rationnelle supplémentaire. Les angles maximaux d'ouverture (cinématique et dynamique) qui caractérisent le domaine de validité du propagateur croissent avec l'ordre de l'approximation paraxiale. Contrairement au comportement cinématique pour lequel un extrapolateur d'ordre deux est suffisant pour obtenir un angle maximal d'ouverture satisfaisant (60° avec les coefficients de Padé et 80° avec des coefficients paraxiaux optimisés), le comportement dynamique nécessite de considérer des propagateurs d'ordre plus élevé pour obtenir un angle d'ouverture dynamique équivalent. Cela s'explique d'abord parce que l'utilisation des coefficients paraxiaux optimisés n'est pas possible (dans l'état actuel) car ils dégradent le comportement dynamique et ensuite parce que l'angle d'ouverture dynamique est, pour un ordre fixé, plus petit que l'angle d'ouverture cinématique.

Pour les exemples numériques (modélisation et migration), j'ai utilisé un propagateur paraxial quantitatif d'ordre 9 (+1 pour le terme correctif) qui assure un angle d'ouverture dynamique (et cinématique) supérieur à 70° . Ainsi, un extrapolateur paraxial quantitatif de bonne qualité (ordre 9 + 1 pour la correction d'amplitude) est 5 fois plus cher qu'un extrapolateur paraxial classique (2 fractions optimisées). Le coût de calcul de la correction d'amplitude ne représente alors que 10% du coût de l'extrapolation.

Les performances numériques peuvent être améliorées en s'autorisant un seuil d'erreur plus important. En effet, une erreur inférieure à 5% ou 10% reste envisageable et pourrait permettre une optimisation sur les coefficients plus satisfaisante. Une autre piste est l'utilisation des opérateurs mixtes. Enfin, un terme correctif adapté à l'ordre du paraxial est aussi une solution possible.

2.5 Conclusions

Mon objectif principal était d'améliorer le propagateur "one way" paraxial existant à l'Institut Français du Pétrole afin de le rendre quantitatif en milieu complètement hétérogène.

Sur le plan théorique, je me suis basé sur les développements récents de Zhang et al. (2003) introduisant une équation "one way" modifiée quantitative au sens asymptotique hautes fréquences. Afin de simplifier la résolution de cette équation, la technique de splitting a été utilisée pour décomposer le problème de propagation en deux sous-problèmes successifs. Le premier est la résolution de l'équation "one way" classique et le second est une correction d'amplitude. Une telle décomposition permet, d'une part, d'utiliser le savoir faire existant sur les propagateurs et d'autre part de restreindre le problème de propagation "one way" quantitatif à l'application d'un terme correctif après une propagation "one way" classique.

Sur le plan numérique, nous avons implémenté le terme correctif en 2D en utilisant un schéma explicite par différences finies. Des tests numériques sur les extrapolateurs phase shift et paraxial ont été menés (en 2D) pour valider numériquement les extrapolateurs modifiés dans des milieux de complexité croissante. Dans le cas de variations lisses du modèle de vitesse, l'extrapolateur paraxial

(ordre 9) modifié présente des erreurs très satisfaisantes ($< 1\%$) sur les amplitudes. Dans les milieux blocky horizontaux, il permet de prendre en compte un coefficient de transmission linéarisé lorsque l'onde traverse l'interface. Théoriquement, ce dernier explose pour des grands angles d'incidence. Les instabilités alors induites sont maîtrisées par l'introduction de conditions aux limites (PML).

Sur le plan des performances numériques, l'extrapolateur quantitatif paraxial utilisé (9 fraction + 1 pour la correction d'amplitude) est 5 fois plus cher qu'un extrapolateur classique (2 fractions optimisées). Le coût de calcul de la correction d'amplitude ne représente alors que 10% du coût de la propagation. Pour envisager un passage en 3D, nous avons tenté d'améliorer le domaine quantitatif de validité en optimisant les coefficients paraxiaux. Malheureusement, les améliorations obtenues ne sont pas significatives. Une amélioration possible est de s'autoriser un seuil d'erreur plus grand en amplitude ($> 1\%$) pour augmenter artificiellement le domaine de validité. En effet, une erreur de 5% ou 10% reste envisageable. Une autre amélioration possible est l'utilisation des opérateurs mixtes qui fournissent une solution exacte pour de grands angles d'incidences lorsque les variations latérales de vitesse sont douces.

À court terme, l'effort doit être porté sur la diminution du coût informatique du propagateur. Parallèlement, les perspectives directes sont l'extension en 3D qui ne pose pas de problème théorique particulier et l'introduction de l'anisotropie VTI. À plus long terme, des méthodes d'extrapolation prenant en compte la partie montante (ou même "two way") peuvent être envisagées.

Notons enfin que la condition initiale "one way" qui a été introduite n'est pas utile pour faire de la migration par extrapolation de champ d'onde. En effet, dans ce cas le champ à propager est le champ d'onde enregistré en surface (données sismiques) et non la source sismique.

Dans ce chapitre, nous avons introduit les équations gouvernant la propagation. Avec ceci, il est possible de définir une migration par forme d'onde en amplitude préservées. L'aspect imagerie en amplitude préservée par équation d'onde "one way" est abordée dans le chapitre suivant.

Chapitre 3

Imagerie quantitative en angle et par équation d'onde

Résumé

À l'heure actuelle, la migration par équation d'onde s'est imposée comme la meilleure approche pour imager les structures complexes. Jusqu'à présent, la préservation de l'amplitude n'a jamais été complètement traitée. Je propose dans cette partie, une approche pour dériver deux formules de migration par équation d'onde 2D en amplitude préservée et en angle. La première permet de reconstruire la distribution du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence. Mon approche est basée sur l'introduction de la théorie des rais dans le cadre de la migration par extrapolation du champ d'onde. De la même manière, cette approche est étendue pour établir un second principe d'imagerie permettant de retrouver la distribution des perturbations relatives d'impédance (Born). J'illustre la pertinence de l'approche et des principes d'imagerie obtenus sur des tests numériques pour des milieux de complexité croissante.

3.1 Introduction

Le plus souvent, la migration profondeur est utilisée pour relocaliser correctement les réflecteurs en profondeur. Cette étape est couramment appelée migration structurale. Elle est basée sur la cinématique de la propagation. Dans ce cas, l'image migrée restitue la structure du milieu, elle est ensuite utilisée par les géologues pour l'interprétation ou pour améliorer l'estimation du modèle de vitesse. Mais, on peut essayer de faire mieux en tentant de restituer les contrastes de propriétés entre les couches géologiques en terme de coefficients de réflexion en fonction de l'angle ou encore de perturbations des paramètres élastiques. Ce type de migration est appelée migration quantitative. Les images migrées peuvent être alors directement interprétées comme la mesure des variations de propriétés dans le milieu permettant la caractérisation de réservoir.

Pour essayer d'aboutir à une migration par équation d'onde en amplitude préservée dans le domaine des angles, deux axes de travail ont été récemment développés dans la littérature. Cependant,

aucun ne traite le problème de manière complète et satisfaisante.

D'un côté, Zhang et al. (2001); Zhang et al. (2002); Zhang et al. (2003); Zhang et al. (2005)) ont proposé une méthode pour faire de la migration par point de tir en amplitude préservée. Malheureusement, cette méthode nécessite de tracer des rayons après d'imagerie. Bien que quantitative, la mise en oeuvre de cette méthode est complexe en pratique.

D'un autre côté, Sava et al. (2001); Sava and Fomel (2003), ont montré que la migration par extrapolation complète du champ d'onde permettait de faire de la migration en angle. Cependant, les aspects quantitatifs n'ont pas été complètement traités et aucune formule d'imagerie quantitative n'a réellement été proposée.

Bien que la migration de Kirchhoff et la migration par équation d'onde aient toutes les deux le même objectif, elles ne requièrent pas les mêmes processus. La migration par équation d'onde nécessite d'abord d'extrapoler en profondeur le champ d'onde, et ensuite d'appliquer un principe d'imagerie (Claerbout (1985)) pour construire des collections de points images. D'un autre côté, la migration dite de Kirchhoff ne demande qu'une seule étape avec l'application d'un opérateur inverse (Beylkin (1984); Bleistein (1987); Jin et al. (1992)). Il serait formidable de retrouver l'extrapolation du champ d'onde et l'application d'un principe d'imagerie dans l'opérateur de migration de Kirchhoff. Malheureusement, même si certaines similarités existent, l'opérateur de migration de Kirchhoff en amplitude préservée ne peut être décomposé d'une telle manière. Il apparaît cependant raisonnable de chercher à introduire la théorie quantitative basée sur les tracés de rayons dans le principe d'imagerie en angle par équation d'onde (De Bruin et al. (1990); Sava and Fomel (2003)) après l'extrapolation du champ d'onde en profondeur.

Dans ce chapitre, je montre comment établir un principe d'imagerie quantitatif (Joncour et al. (2005b); Joncour et al. (2005a)) pour restituer soit le coefficient de réflexion soit la perturbation relative d'impédance. Les développements sont basés sur une démarche d'inversion directement inspirée de la migration de Kirchhoff. À l'intérieur de ce cadre rigoureux, j'établis la formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine des ondes planes (domaine de Fourier). Le travail dans le domaine des ondes planes permet d'éviter les singularités de fonction de Green qui apparaissent lorsque les sources et les récepteurs touchent le point image après extrapolation du champ d'onde en profondeur. Ensuite, en supposant que le milieu est localement homogène, je dérive une expression linéaire liant la réflectivité au champ d'onde extrapolé en profondeur. Finalement, je montre comment exprimer cette formule rigoureusement par une sommation de pente (slant stack) dans le domaine des CIGs¹ en offset, comme proposé par Sava and Fomel (2003).

La première section introduit les méthodes de migration par équation d'onde en angle. et les motivations qui nous ont poussés à modifier le principe d'imagerie existant pour établir un principe d'imagerie quantitatif par équation d'onde dans le domaine des angles.

La deuxième section est consacrée dans un premier temps à établir la formule quantitative de modélisation volumique de Kirchhoff dans le domaine des ondes planes. Puis, nous présenterons la méthode utilisée pour établir un principe d'imagerie quantitatif par équation d'onde.

Enfin la troisième section présente des résultats numériques en 2D qui valident notre approche dans des milieux de complexité croissante.

¹Common Image Gather

3.2 La migration par équation d'onde

Il existe de nombreuses techniques de migration par équation d'onde “one way” mais toutes requièrent deux étapes successives :

- l'extrapolation (individuelle ou couplée) du champ d'onde enregistré en surface et du champ d'onde issu de la source (Figure 3.1) ;
- l'application d'un principe d'imagerie (Figure 3.2). donné par Claerbout (1971).

Sur le plan de la migration “one way”, les différentes techniques peuvent être classées en fonction du type d'offset mis en jeu dans l'application du principe d'imagerie. On distingue deux grands types d'approche : la migration par corrélation de champ d'onde et la migration par extrapolation complète de champ d'onde.

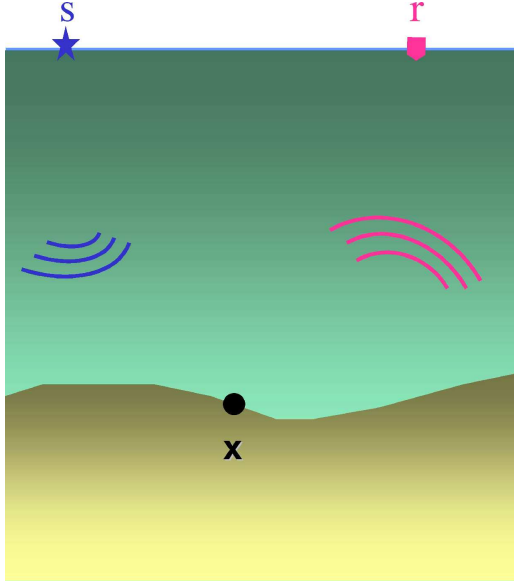


FIG. 3.1 – La première étape de l'imagerie par équation d'onde est l'extrapolation des champs d'onde en profondeur.

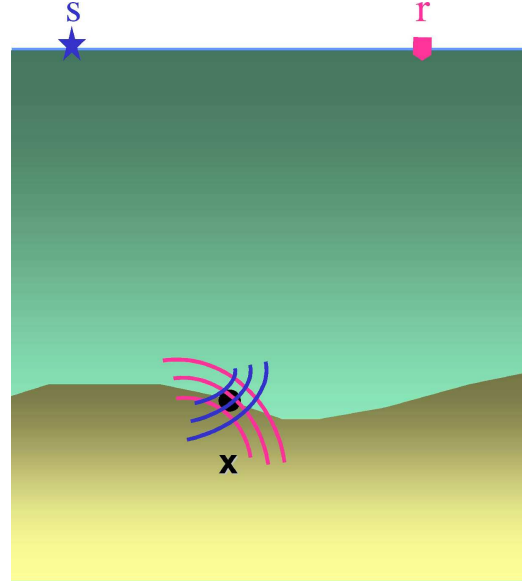


FIG. 3.2 – La seconde étape de l'imagerie par équation d'onde est l'application d'un principe d'imagerie.

3.2.1 La migration par corrélation

Le principe de la migration par corrélation de champ d'onde consiste d'abord à extrapoler individuellement en profondeur le champ d'onde source et le champ d'onde capté par les récepteurs. Le principe d'imagerie (Figure 3.3) consiste à évaluer en chaque point du sous-sol x la coïncidence spatio-temporelle entre les deux champs (Claerbout (1971)). L'image est obtenue par la fonction de corrélation,

$$I(x, z, h) = \int_{\omega} \frac{D(x_s, z_s; x, z, \omega)}{S(x_s, z_s; x, z, \omega)} d\omega \quad (3.1)$$

où $S(x_s, z_s; x, z, \omega)$ et $D(x_s, z_s; x, z, \omega)$ sont respectivement le champ extrapolé de la source et le champ extrapolé des récepteurs. (x_s, z_s) et (x, z) sont respectivement la position du point source et

du point image. L'image obtenue I en une position latérale x (midpoint²) est exprimée en fonction de la profondeur z et de l'offset en surface h , tel que $h = x - x_s$ (Figure 3.4). Lorsque le modèle de vitesse utilisé pour la migration est exact, un événement migré dans le domaine des offsets de surface sera plat dans $(z, h)_{x_{fix}}$ (Figure 3.4, Ehinger and Lailly (1995)).

Sur le plan de la préservation d'amplitude, Zhang et al. (2004) ont montré par une étude asymptotique hautes fréquences que la condition d'imagerie (3.1) était égale à la formule d'imagerie quantitative de Kirchhoff en angle (établie par Keho and Beydoun (1988))

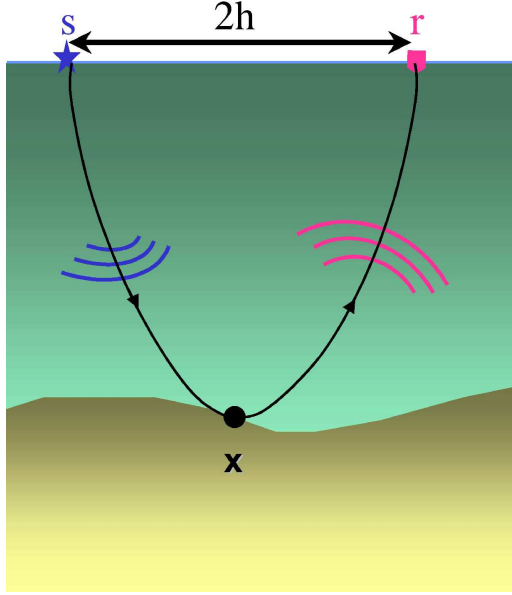


FIG. 3.3 – Migration par corrélation des champs extrapolés. Le principe d'imagerie est la corrélation spacio-temporelle des champs d'onde source et récepteurs extrapolés en fonction de l'offset de surface.

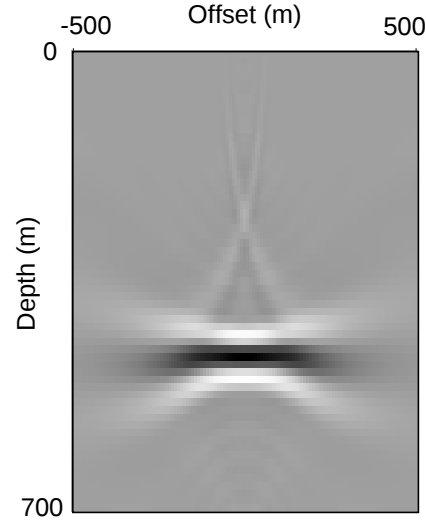


FIG. 3.4 – Point image dans le domaine des offsets de surface.

Traditionnellement, l'analyse de vitesse par migration et l'AVO³ utilisent les collections de points images communs (CIG⁴) dans le domaine des offsets de surface. Cependant, ces derniers échouent pour caractériser les chemins complexes de propagation, (Xu et al. (2001)) à cause, entre autres, de l'ambiguïté de la position du réflecteur causée par les trajectoires multiples, ce qui rend l'interprétation et l'analyse de vitesse par migration difficile. Ce problème peut être évité en utilisant les collections de points images en angle commun qui sont des représentations des images migrées triées par angle de réflexion commun.

Ainsi, Zhang et al. (2004) ont proposé un principe d'imagerie modifié quantitatif en angle,

$$I_s(x, z) = 4 \int -i \cdot \text{sign}(\omega) S(x, z; s; \omega) D^*(x, z; s; \omega) d\omega \quad (3.2)$$

où le multiplicateur $-i \cdot \text{sign}(\omega)$ est introduit pour obtenir l'inversion correcte de phase en 2D

²point milieu

³Amplitude Versus Offset

⁴Common Image Gather

(Bleistein et al. (2001)). En 3D, ce terme doit être modifié en $1/(i\omega)$.

Malheureusement, le principe (3.2) ne permet pas d'accéder directement à l'angle de réflexion car il nécessite de connaître les paramètres de rais côté sources et récepteurs (Zhang et al. (2004)). Pour être connus, ces paramètres qui ne sont pas accessibles en résolvant l'équation des ondes nécessitent un tracé de rayons.

3.2.2 La migration par extrapolation complète de champ d'onde

La seconde approche est la migration par extrapolation complète de champ d'onde. Le principe d'imagerie s'applique dans ce cas sur le champ d'onde complet extrapolé en profondeur. L'extrapolation du champ d'onde en profondeur, appelé également redatuming ou survey sinking⁵ (Claerbout (1971); Berkhout (1980); Wapenaar and Berkhout (1987); Berryhill (1979); Berryhill (1984); Shtivelman and Canning (1988); Biondi (2003)) consiste à calculer le champ d'onde (complet avant sommation) à une profondeur d'extrapolation, dite de "redatuming", à partir du champ d'onde mesuré à une autre profondeur (par exemple, la profondeur d'acquisition). Le champ d'onde alors obtenu, qui est appelé champ d'onde redatumé, est égal exactement au champ que nous aurions enregistré si le dispositif d'acquisition avait été placé à la profondeur redatumée.

On peut décomposer l'opération en trois étapes successives (Fig 3.5) : la première étape consiste à calculer le champ d'onde pour des récepteurs placés à une profondeur de redatuming par extrapolation des données de départ). Ensuite, en utilisant le principe de réciprocité⁶, on inverse la position des sources et des récepteurs. Ainsi, les sources se retrouvent en profondeur et les récepteurs de nouveau à la surface. Après l'application du principe de réciprocité, les données sont classées en collection en récepteur commun. La troisième et dernière étape consiste à retropropager une nouvelle fois les récepteurs depuis la surface d'acquisition jusqu'à la profondeur de redatuming.

Le principe d'imagerie consiste à évaluer le champ d'onde extrapolé à la profondeur d'imagerie à $t = 0$. Ainsi, les principales contributions se font pour des positions sources et récepteurs proches ou identiques au point image (Claerbout (1985)). La condition d'imagerie s'écrit

$$I(x, z, h) = \int P(x, h, z; \omega) d\omega \quad (3.3)$$

où P est le champ de pression et ω est la pulsation. L'image obtenue (Figure 3.7) sera exprimée en fonction des coordonnées du point image et de l'offset des données extrapolées (Figure 3.6) qui est appelé offset profondeur. Dans ce cas, lorsque le modèle de vitesse est exact, un événement migré dans le domaine des offsets profondeur sera focalisé (concentration de l'énergie) autour de l'offset nul. Une collection de points image dans le domaine des offsets profondeur est appelée ODCIG⁷ (Rickett and Sava (2001); Rickett and Sava (2002); Sava et al. (2001)). Le formalisme par extrapolation de champ d'onde complet (survey sinking) est le formalisme le plus adapté pour faire de l'imagerie en milieux complexes car elle permet d'éviter de manipuler les caustiques dans la condition d'imagerie et qu'elle fournit des images sans artefacts (Stolk and Symes (2002)).

⁵enfouissement du dispositif d'acquisition

⁶Le principe de réciprocité établit que la réponse acoustique associée à une source et un récepteur reste la même si on inverse la position de la source et du récepteur (formulée par Lord Rayleigh en 1873).

⁷Offset Domain Common Image Gather

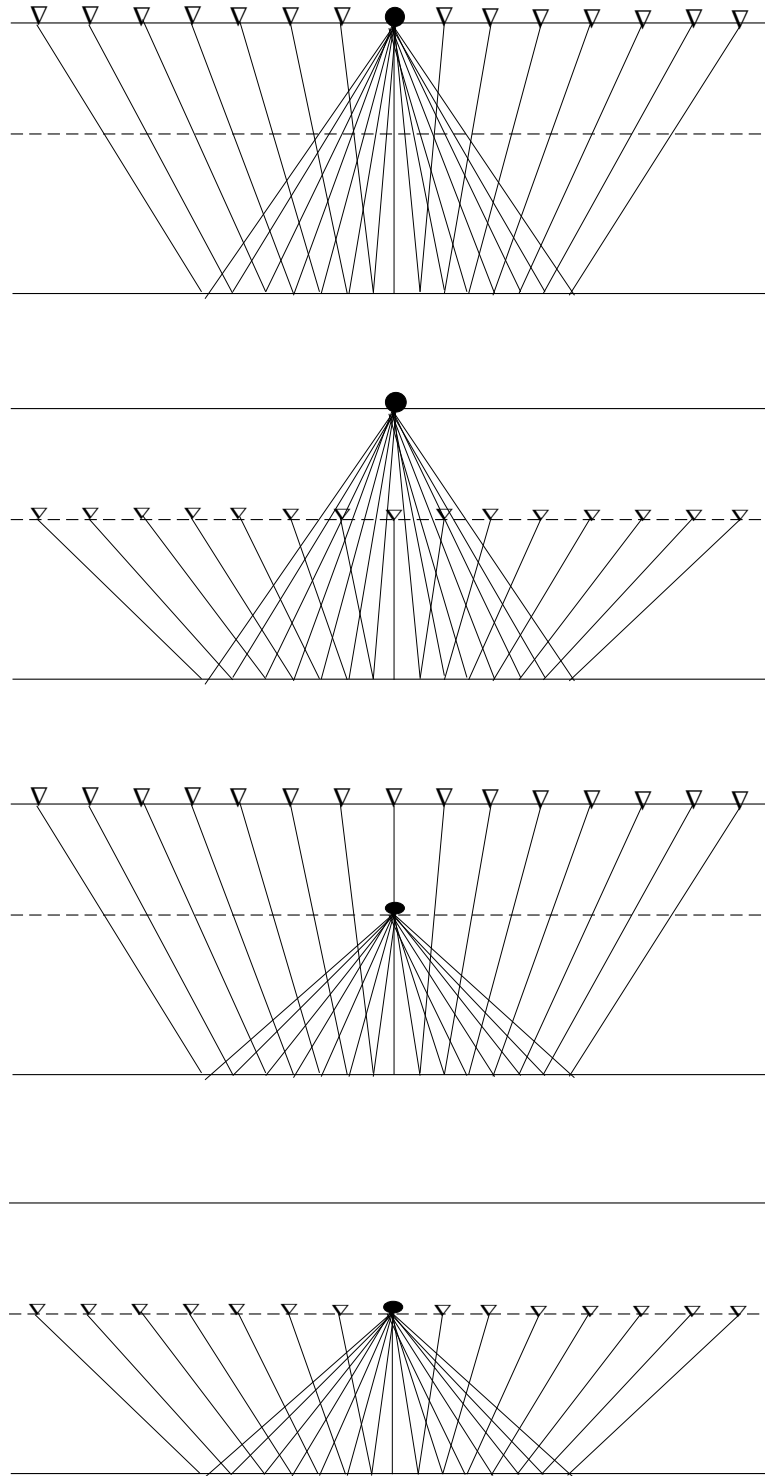


FIG. 3.5 – Le principe du redatuming : Le schéma du haut présente la géométrie d'acquisition en surface pour un point de tir. Le rond noir et les triangles symbolisent respectivement la position de la source et des récepteurs. Les trois schémas suivants décrivent les trois étapes du redatuming : tout d'abord les récepteurs sont redatumés sur la nouvelle profondeur. La seconde étape consiste à trier les données depuis une collection en point de source en collection en récepteur commun, c'est-à-dire à inverser la position des sources et des récepteurs (principe de réciprocité). La dernière étape est une nouvelle fois la rétropropagation des récepteurs à la nouvelle profondeur. Ainsi, nous obtenons des données pour les sources et les récepteurs à la nouvelle profondeur.

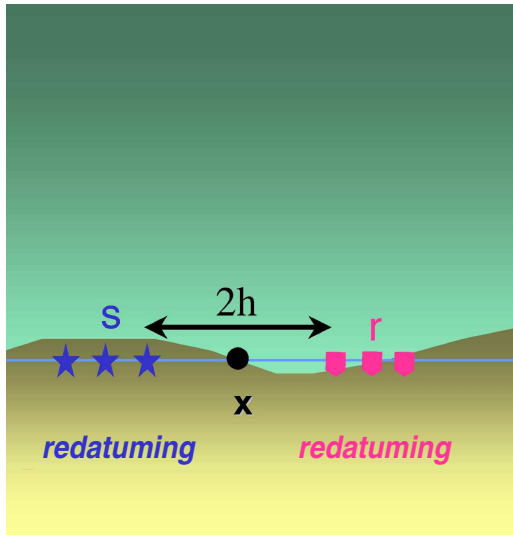


FIG. 3.6 – Migration par extrapolation de champ d'onde. Le principe d'imagerie est appliqué sur le champ d'onde complet extrapolé en profondeur (survey sinking). L'offset alors considéré est l'offset du dispositif d'acquisition à la profondeur d'extrapolation.

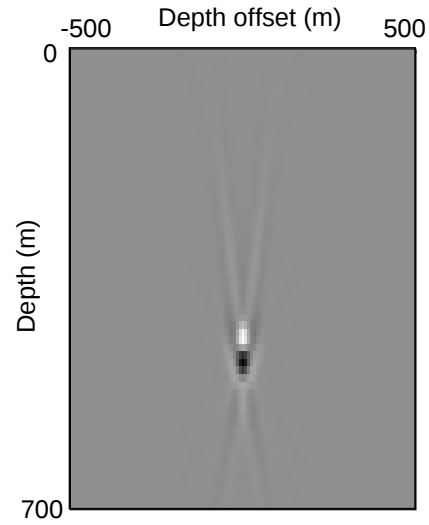


FIG. 3.7 – ODCIG pour une position latérale (ou midpoint) fixée. Point image obtenu par une migration par extrapolation de champ d'onde, lorsque la vitesse utilisée pour la migration est exacte. L'évènement migré dans le domaine des offsets profondeur est focalisé autour de l'offset nul.

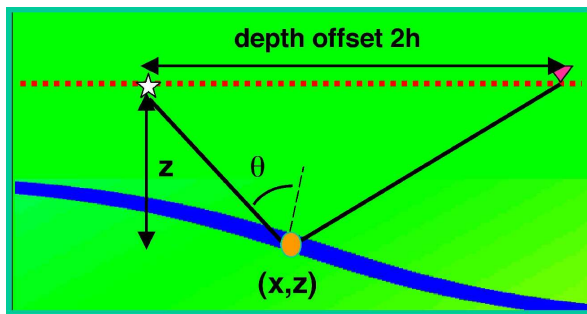


FIG. 3.8 – La relation entre offset en profondeur h , profondeur z et angle de réflexion θ en milieu homogène.

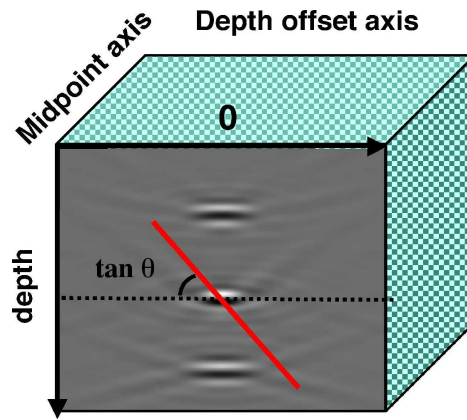


FIG. 3.9 – Conversion en angle. Représentation graphique de la sommation de pente (Slant Stack). Cette transformation (annexe L) consiste à sommer les contributions le long de droites de pente constante dans l'ODCIGs pour construire des ADCIGs.

Plusieurs approches ont été proposées pour calculer des collections en angle (ADCIG⁸) avec la migration par extrapolation de champ d'onde. De Bruin et al., 1990, ont été les premiers à décrire une méthode pour calculer la dépendance angulaire de la réflectivité avec une technique de migration par équation d'onde. Elle permet de former par l'application de la transformée de Fourier sur les données extrapolées, des *collections en offset-paramètre de rai*. Similairement, Prucha and Biondi, 1999, ont introduit une méthode pour extraire des *collections en offset-paramètre de rai* avec une sommation de pente⁹ (annexe L) pendant la migration source-récepteur dans le domaine *point milieu-offset*. Ces techniques s'appliquent avant l'application d'un principe d'imagerie. Cependant, elles produisent des images en fonction du paramètre de rai (p_h), et non pas en fonction de l'angle de réflexion. Pour accéder à l'angle de réflexion, le pendage du réflecteur doit être connu (Prucha and Biondi (1999); Mosher and Foster (2000)).

Par la suite, Rickett and Sava (2001); Rickett and Sava (2002); Sava and Fomel (2003) ont introduit une méthode permettant de produire directement des collections en angle après l'application du principe d'imagerie. L'idée est qu'après l'extrapolation complète du champ d'onde, la contribution à l'image se fait pour des positions sources, récepteurs proches ou identiques au point image. Dans ce cas, le milieu peut être supposé localement homogène. Sava and Fomel (2003) ont montré alors qu'il existait, pour un point image fixé, des relations géométriques simples (Figure (3.8)) entre l'offset profondeur, la profondeur et l'angle de réflexion. De plus, ils ont montré qu'il était possible de restituer la dépendance angulaire de l'image en appliquant une sommation de pente (Figure (3.9)) sur le point image (CIG) dans le domaine de Fourier. Cette approche est très puissante car elle permet de traiter chaque point image indépendamment les uns des autres (chaque CIG est indépendant). Cependant aucun formalisme quantitatif n'a été réellement établi. La question qui se pose est de savoir si la condition d'imagerie établie par Sava and Fomel (2003) peut fournir une signification physique à l'image migrée en terme de coefficient de réflexion ou encore de perturbation d'impédance (Sava et al. (2001)).

3.3 Principe d'imagerie quantitatif en angle et par équation d'onde

3.3.1 Introduction

Nous avons vu dans l'introduction que la migration par extrapolation complète se décompose en deux étapes. La première est l'extrapolation des champs d'onde en profondeur.

Pour définir un principe d'imagerie par équation d'onde quantitatif, nous proposons d'introduire l'approche directe de l'inversion linéarisée. Nous partons de la formule d'imagerie de Kirchhoff (ou de Born) exprimée en milieu homogène qui établit une relation linéaire entre le coefficient de réflexion (ou la perturbation d'impédance) avec le champ d'onde mesuré à une profondeur redatumée juste au-dessus des points images. On veut inverser cette formule et faire tendre la profondeur d'acquisition redatumée vers celle du point image. Or, l'évaluation de la formule d'imagerie de Kirchhoff (ou de Born) dans le domaine spacial et à la même profondeur que le dispositif d'acquisition conduit à des singularités. Celles-ci sont évitées lorsque le problème d'inversion linéarisé est considéré dans

⁸Angle Domain Common Image Gather

⁹slant stack

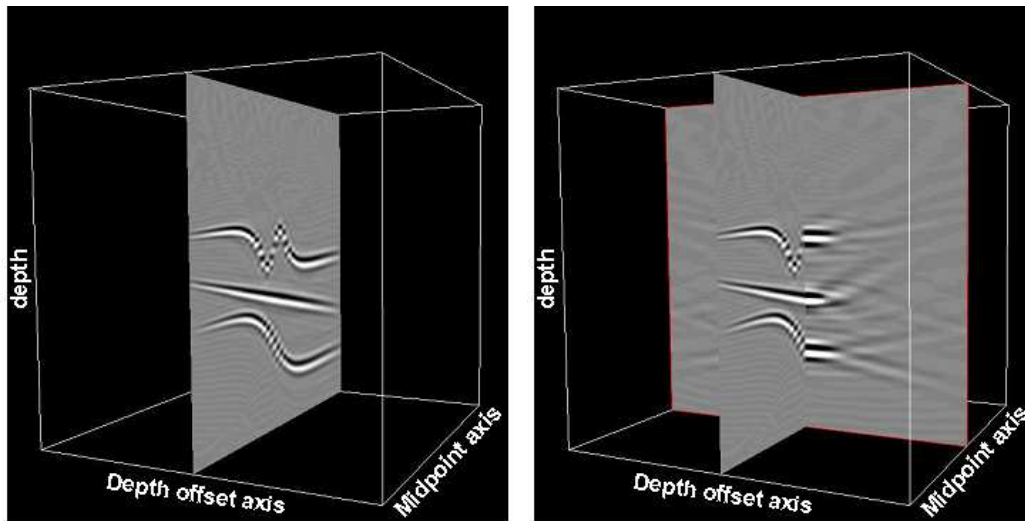


FIG. 3.10 – Présentation du principe d'imagerie de Claerbout. Gauche : le principe classique d'imagerie de Claerbout (1985) dit que l'image migrée est obtenue en prenant le champ redatumé à toutes les profondeurs pour à $t = 0$ et à offset nul ; Droite : des images migrées dans le domaine des offsets peuvent être obtenus en considérant le champ redatumé à toutes les profondeurs, à $t = 0$ mais pour tous les offsets. Comme le temps de trajet est égal à zéro, les contributions des points images se font pour des positions source, récepteurs et point image proches. Ainsi, on remarque que l'énergie dans les ODCIG à midpoint fixé est concentrée autour de l'offset nul. Ici, l'offset que l'on considère est l'offset en profondeur, c'est-à-dire l'offset associé au champ redatumé. Il est différent de l'offset des données en surface.

le domaine de Fourier. De plus, après extrapolation du champ d'onde, la source et le récepteur touchent le point image et le milieu peut être considéré comme localement homogène. Ce problème a déjà été étudié plusieurs fois par le passé, par Cohen and Bleistein (1979) (pour l'approche Kirchhoff) et par Clayton and Stolt (1981) (pour l'approche Born) dans le domaine des ondes planes. Dans ce domaine, la relation linéaire liant les données et la réflectivité (ou la perturbation d'impédance) devient diagonale. En milieu homogène, les fonctions de Green sont alors analytiques et formellement aucune approximation asymptotique n'est nécessaire. Cependant, celle-ci apparaît à travers l'hypothèse que la vitesse est localement homogène.

Ensuite, en tirant parti de la relation entre l'offset, la profondeur et l'angle d'incidence établie par Sava and Fomel (2003), on établit un principe d'imagerie par équation d'onde en amplitude préservée et dans le domaine des angles. Deux principes d'imagerie quantitatifs en angle sont proposés. Le premier restitue la distribution du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence (Kirchhoff) et le second restitue les perturbations d'impédances (Born).

3.3.2 Problème direct

Dans cette section, nous allons nous concentrer sur le problème direct (la modélisation) en utilisant la solution intégrale de Kirchhoff dans le cas général d'un milieu hétérogène. Pour y aboutir, nous introduisons dans le théorème de représentation, la théorie des rais et l'approximation de Kirchhoff pour établir la formule de modélisation surfacique de Kirchhoff. Une extension de l'intégrale surfacique à tout le volume est ensuite obtenue en introduisant un dirac surfacique (fonction singulière de Bleistein) (Bleistein (1987); Borgne (2004)). Puis, nous dérivons la formule obtenue dans le domaine de Fourier en milieu homogène.

3.3.2.1 Formule de modélisation quantitative de Kirchhoff surfacique

Théorème de représentation

Lorsque les discontinuités sont localisées le long de réflecteurs continus, le champ d'onde réfléchi sur cette discontinuité peut être représenté par une intégrale surfacique (Aki and Richards (1980), Nédélec (2001)). Le théorème de représentation permet d'exprimer la pression en un point récepteur $\mathbf{r}$ en fonction du champ de pression et de sa dérivée à l'interface (cf. annexe B). Il est exprimé par :

$$U(\mathbf{r}, \omega) = \int_{\mathbf{x} \in \Sigma} \left[\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} U(\mathbf{x}, \omega) - g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega) \frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} \right] d\mathbf{x} \quad (3.4)$$

où Σ est la surface de discontinuité, c'est-à-dire le réflecteur, $\mathbf{x}$ est un point de la surface Σ et $\mathbf{n}$ est le vecteur normal extérieur à Σ au point $\mathbf{x}$ (Figure 3.11). $U(\mathbf{r}, \omega)$ est le champ réfléchi sur la surface Σ et enregistré au point $\mathbf{r}$, où $\mathbf{r} = \mathbf{r}(r, z_r)$ définit la position des récepteurs. $U(\mathbf{x}, \omega)$ est le champ diffracté au point $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, z)$ sur la discontinuité Σ et $g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)$ est la fonction de Green acoustique pour une source placée en $\mathbf{r}$ et un point d'observation $\mathbf{x}$.

On va exprimer le champ diffracté $U(\mathbf{x}, \omega)$ (qui est inconnu) et sa dérivée sur l'interface Σ en fonction du champ incident et d'un coefficient de réflexion : c'est *l'approximation de Kirchhoff* qui permet d'aboutir à l'intégrale de Kirchhoff-Helmholtz. Le champ incident (connu) et les fonctions

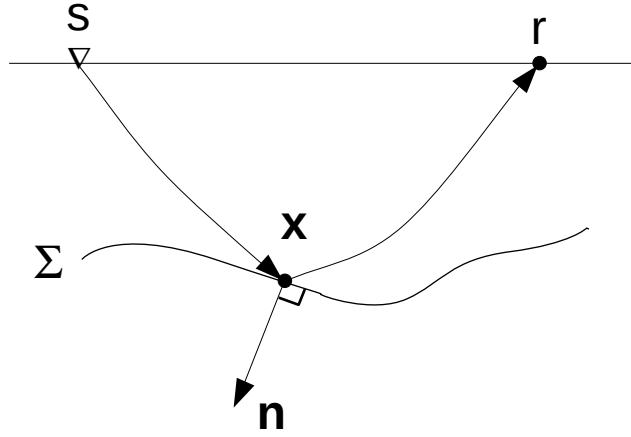


FIG. 3.11 – *Somation de Kirchhoff.* s et r représentent respectivement la source et le récepteur à la profondeur z . Σ est l'interface sur laquelle on étudie la réflexion, x est le point de diffraction associé au couple (s, r) .

de Green sont calculées par la théorie des rais.

Théorie des rais

Considérons maintenant la fonction de green calculée par la théorie des rais, c'est-à-dire la solution asymptotique de l'équation des ondes lorsque $\omega \rightarrow \infty$. Celle-ci est appelée solution asymptotique haute fréquence de l'équation des ondes.

Pour un rai reliant la source s à un point x , la fonction de Green impulsionnelle calculée par la théorie des rais s'écrit de la façon suivante :

$$g(s, x, \omega) = C(\omega)A(s, x)e^{-i\omega T(s, x)} \quad (3.5)$$

où $T(s, x)$ est le temps de parcours de l'onde de la source s au point d'observation x , $A(s, x)$ représente l'amplitude de l'onde calculée le long du rai. $C(\omega)$ est la signature de la fonction prenant en compte la dimension de l'espace (Červený (1985)) et est égal à :

$$C(\omega) = \frac{1}{\sqrt{i\omega}}, \quad \text{en } 2D. \quad (3.6)$$

La théorie des rais nous fournit le terme d'amplitude qui est égal dans le cas acoustique 2D (Forgues (1996)) à

$$A(s, x) = \sqrt{\frac{c(x)}{8\pi\mathcal{J}(s, x)}}, \quad (3.7)$$

lorsque la densité ρ est prise égale à 1 (équation d'onde scalaire). c est la vitesse au point x et $\mathcal{J}(s, x)$ est la divergence géométrique en 2D entre la source s et le point d'observation x .

On définit alors la divergence géométrique $\mathcal{J}(s, x)$ comme le rapport entre la section du tube de rai et l'angle solide à la source ϕ_0 (Figure 3.12),

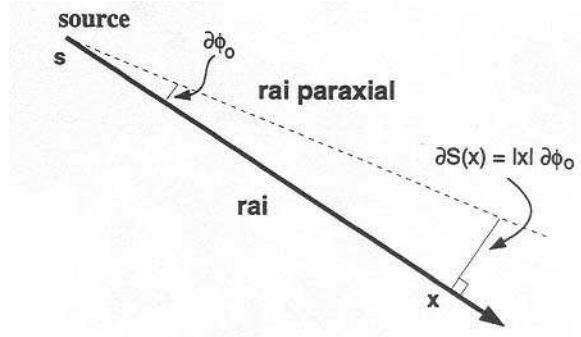


FIG. 3.12 – Divergence géométrique. Représentation de l'étalement du tube de rai dans le cas simple d'un milieu 2D homogène. La section du tube de rai est un segment de droite.

$$\mathcal{J}(\mathbf{s}, \mathbf{x}) = \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \phi_0}. \quad (3.8)$$

Notons qu'il est possible d'habiller la fonction de Green par une ondelette source $S(\omega)$. Elle s'écrit alors :

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega) = \mathcal{K}(\omega) A(\mathbf{s}, \mathbf{x}) e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})} \quad (3.9)$$

où $\mathcal{K}(\omega) = S(\omega)C(\omega)$. Par souci de simplicité, nous ne prendrons pas en compte le terme source $S(\omega)$ dans les développements suivants. Il sera réintroduit à la fin de la section.

Approximation de Kirchhoff : le concept de réflexion

Introduisons le concept de réflexion basé sur l'hypothèse des ondes planes (Aki and Richards (1980), chap 5 et 6). Celui-ci établit que l'amplitude d'une onde plane réfléchie sur une interface plane est égale à l'amplitude de l'onde incidente multipliée par un coefficient dit de réflexion.

Dans le cadre de la théorie des rais, ce concept peut être généralisé à une interface et des ondes non planes. En effet, sous l'hypothèse hautes fréquences, l'interface est considérée comme localement plane pour un rayon incident (la longueur d'onde est très petite devant la courbure de l'interface). Ainsi, l'amplitude de l'onde réfléchie au point de réflexion $\mathbf{x}$ est égal à l'amplitude de l'onde incidente multipliée par un coefficient de réflexion dépendant de l'angle d'incidence. Le rai réfléchi vérifie la loi de Snell-Descartes.

En un point $\mathbf{x}$, le coefficient de réflexion normalisé par rapport à l'amplitude¹⁰ est défini par

$$|U(\mathbf{x}, \omega)| = |R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))| |U^{inc}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)| \quad (3.10)$$

où $U^{inc}(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega)$ est le champ incident au point $\mathbf{x}$, $R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))$ est le coefficient de réflexion qui dépend du point de réflexion $\mathbf{x}$ et de l'angle d'incidence par rapport à la normale extérieure $\mathbf{n}$ à Σ

¹⁰Le coefficient de réflexion normalisé par rapport à l'amplitude est à différencier du coefficient de réflexion normalisé par rapport à l'énergie (cf. Borgne (2003)).

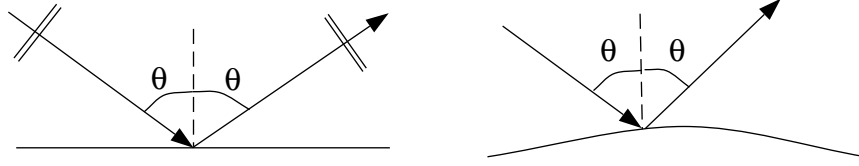


FIG. 3.13 – Le concept de réflexion en acoustique. La figure de gauche est une illustration classique du coefficient de réflexion : une onde plane incidente arrivant sur une interface plane avec un certain angle d'incidence θ (par rapport à la normale à la surface) est partiellement réfléchi en une onde plane avec un angle de réflexion θ et dont son amplitude est multipliée (atténuée) par un certain coefficient de réflexion (dépend de l'angle θ). A droite, la figure schématise la généralisation du concept de réflexion dans le cadre de la théorie des ray : un ray incident avec un angle d'incidence θ sur une interface courbe mais supposée localement plane est réfléchi avec un angle de réflexion spéculaire θ . L'amplitude est alors multipliée par le coefficient de réflexion spéculaire (dépend aussi de l'angle θ).

au point $\mathbf{x}$.

L'approximation de Kirchhoff est une approximation asymptotique linéaire de la relation connectant les données réfléchies $U(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{s})$ à la réflectivité de l'interface. Pour un point $\mathbf{s}$, elle relie $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}'$ tel que le ray joignant $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}'$ vérifie la loi de Snell-Descartes. Il existe un point $\mathbf{x}$ unique tel que $\mathbf{r}'$ égal à $\mathbf{r}$. Ce point est le point spéculaire (Figure 3.14).

En utilisant (3.5) et (3.10), on écrit l'expression du champ réfléchi au point $\mathbf{x}$,

$$U(\mathbf{x}, \omega) = R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{x}, \mathbf{s}))C(\omega)A(\mathbf{s}, \mathbf{x})e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})} \quad (3.11)$$

Simplification de l'intégrale (3.4)

Étudions maintenant les différents termes de l'intégrale (3.4).

Calcul du terme $\frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}}$

Soit $\mathbf{x}'$ un point appartenant à la branche du ray réfléchi (Figure 3.14). Le champ réfléchi s'écrit en $\mathbf{x}'$

$$U(\mathbf{x}', \omega) \approx R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))C(\omega)A(\mathbf{s}, \mathbf{x})e^{-i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})}e^{-i\omega T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')} \quad (3.12)$$

Les dérivées spatiales sont approchées par l'approximation asymptotique haute fréquence de la théorie des ray, c'est-à-dire que seul le terme d'ordre principal en ω est gardé (les autres termes étant considérés comme négligeables). Ainsi, on suppose que les variations d'amplitude sont suffisamment faibles pour être négligées devant les variations du temps de parcours T :

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}', \omega)}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} U(\mathbf{x}', \omega) \approx -i\omega(\mathbf{n} \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} T)U(\mathbf{x}', \omega). \quad (3.13)$$

$\nabla T(\mathbf{x}')$ définit le vecteur normal à l'isochrone pour $T(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$. Celui-ci est égal au vecteur lenteur $\mathbf{p}_{ref}$ tangent au rayon au réfléchi (joignant $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}'$) au point $\mathbf{x}'$, d'où

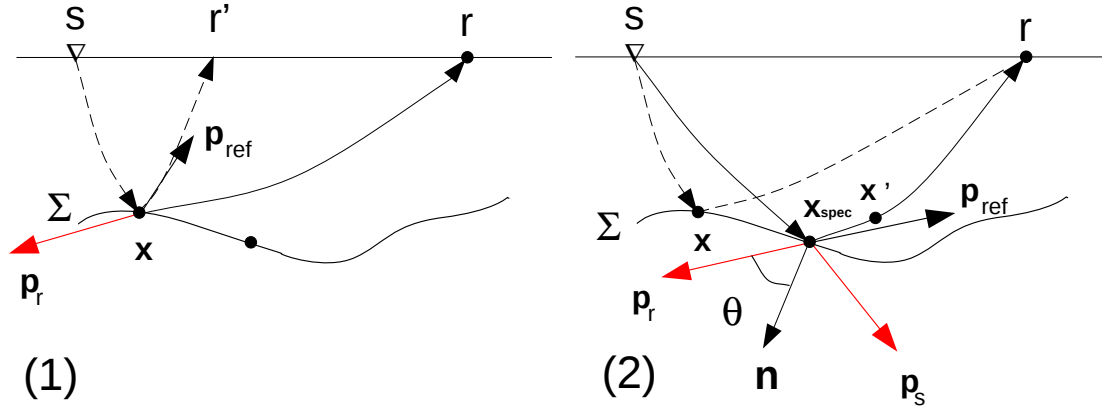


FIG. 3.14 – Σ est l'interface sur laquelle on étudie la réflexion. $\mathbf{p}_s$ et $\mathbf{p}_{ref}$ sont respectivement les vecteurs lents associés à l'onde incidente et à l'onde réfléchie au point de réflexion $\mathbf{x}$. $\mathbf{x}$ est le point courant d'intégration sur Σ et $\mathbf{x}'$ appartient à la branche du rai réfléchi sur Σ en $\mathbf{x}$. On distingue deux situations. (1) : Si on se fixe la position du point source $\mathbf{s}$ et du point courant $\mathbf{x}$, l'approximation de Kirchhoff relie $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}'$ tel que le rai joignant $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}'$ vérifie la loi de Shell-Descarte. (2) : Si on se fixe une géométrie donnée ($\mathbf{s}, \mathbf{r}$) alors la contribution principale se fera pour le point spéculaire $\mathbf{x} = \mathbf{x}_{spec}$, c'est-à-dire qu'il existe un point $\mathbf{x}$ unique sur Σ vérifiant la loi de Snell-Descarte et tel que $\mathbf{r}' = \mathbf{r}$.

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}', \omega)}{\partial \mathbf{n}} \approx -i\omega(\mathbf{p}_{ref} \cdot \mathbf{n})[\mathbf{x}']U(\mathbf{x}', \omega), \quad (3.14)$$

où $\mathbf{p}_{ref}$ est le vecteur lent du rai réfléchi au point $\mathbf{x}'$ et orienté vers le haut (il est unique pour un couple source-récepteur donné). Faisons tendre $\mathbf{x}'$ vers $\mathbf{x}$ pour évaluer l'expression en $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$,

$$\frac{\partial U(\mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} \approx -i\omega(\mathbf{p}_{ref} \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x})U(\mathbf{x}, \omega). \quad (3.15)$$

Calcul du terme $\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}}$

De la même manière, la dérivée de la fonction de Green pour une source localisée en $\mathbf{r}$ et un point d'observation $\mathbf{x}$ s'écrit,

$$\frac{\partial g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega)}{\partial \mathbf{n}} \approx -i\omega(\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{n})(\mathbf{x})g(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \omega), \quad (3.16)$$

$\mathbf{p}_r$ est le vecteur lent au point $\mathbf{x}$ et orienté vers le bas.

Formule de modélisation

En injectant (3.15) et (3.16) dans (3.4),

$$U(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{s}) = \int_{\mathbf{x} \in \Sigma} i\omega([\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}_r] \cdot \mathbf{n})[\mathbf{x}]R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))\mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})C^2(\omega)e^{-i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})}d\mathbf{x} \quad (3.17)$$

avec,

$$\begin{cases} \mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) &= A(\mathbf{s}, \mathbf{x})A(\mathbf{r}, \mathbf{x}) \\ \mathcal{T}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) &= T(\mathbf{s}, \mathbf{x}) + T(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \\ C(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{i\omega}} \end{cases} \quad (3.18)$$

où $U(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{s})$ est le champ réfléchi mesuré en surface et associé à un point de tir en $\mathbf{s}$. Dans le problème d'imagerie, on ne connaît pas $\mathbf{p}_{ref}(\mathbf{x})$ et la normale $\mathbf{n}$. Faisons l'approximation de la phase stationnaire (donné en annexe E) dans l'intégrale (3.17). Dans ce cas, la contribution principale est celle du point spéculaire dont le rai reliant $\mathbf{x}$ à $\mathbf{r}$ vérifie la condition de spécularité de Snell-Descartes où $\mathbf{p}_{ref}(\mathbf{x}) = -\mathbf{p}_r(\mathbf{x})$. On peut remplacer dans l'intégrale (3.17) le terme $(\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}_r) \cdot \mathbf{n}$ par sa valeur spéculaire puisque seule celle ci contribue à l'approximation hautes fréquences. On déduit,

$$i\omega([\mathbf{p}_{ref} - \mathbf{p}_r] \cdot \mathbf{n})[\mathbf{x}] = -2i\omega(\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{n})[\mathbf{x}] \quad (3.19)$$

De plus en tout point spéculaire, on a

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{q}}{|\mathbf{q}|} = \frac{\mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r}{|\mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r|} \quad (3.20)$$

et en tout point $\mathbf{x}$, on peut remplacer $\mathbf{n}(\mathbf{x})$ par (3.20) puisque cette approximation est valide au point spéculaire. On peut définir $\cos(\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))$ tel que

$$2(\mathbf{p}_r \cdot \mathbf{n}) = 2 \frac{\cos(\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))}{c(\mathbf{x})}. \quad (3.21)$$

À partir de (3.17), (3.19) et (3.21), on obtient la formule surfacique de modélisation de Kirchhoff,

$$U(\mathbf{s}, \mathbf{r}, \omega) = \int_{\mathbf{x} \in \Sigma} R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})} d\mathbf{x} \quad (3.22)$$

avec,

$$\mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) = 2 \frac{\cos(\theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))}{c(\mathbf{x})} \mathcal{A}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) \quad (3.23)$$

où θ est le demi-angle d'ouverture au point courant et devient l'angle d'incidence au point spéculaire.

3.3.2.2 Formule de modélisation volumique

Passons maintenant de l'intégrale surfacique (3.22) à une intégrale de volume plus intéressante pour établir les formules de migration. Ceci va permettre de nous affranchir de l'intégration sur la surface Σ que nous ne connaissons pas dans le principe d'imagerie.

L'introduction de la fonction singulière de (Bleistein (1984)), permet de transformer l'intégrale

surfactive (3.22) en intégrale volumique et ainsi d'étendre la formulation de la modélisation à tout le volume.

Soit $\mathbf{x}$ un point du réflecteur, on peut interpréter l'intégrale surfactive $\int_{\mathbf{x} \in \Sigma} f d\mathbf{x}$ en utilisant au sens des distributions un Dirac ayant pour support la surface Σ tel que :

$$\int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) d\Sigma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbf{x}} f(\mathbf{x}) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x}) dV(\mathbf{x}) \quad (3.24)$$

où $f(\mathbf{x})$ est une fonction test régulière $\in D$ (i.e fonctions indéfiniment dérivables à support compact) et $\delta_{\Sigma}(\mathbf{x})$ est la distribution surfactive ayant pour support le réflecteur Σ ,

En posant,

$$f(\mathbf{x}) = R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{-i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})}, \quad (3.25)$$

l'intégrale surfactive (3.23) est transformée en une intégrale volumique,

$$U(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{s}) = \int_{\mathbf{x} \in V} R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x}) \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})} d\mathbf{x} \quad (3.26)$$

Les quantités que l'on va restituer dans l'étape d'imagerie sont $R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x})$. En prenant en compte l'ondelette de la source, la formule devient,

$$U(\mathbf{r}, \omega; \mathbf{s}) = \int_{\mathbf{x} \in V} R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x}) S(\omega) \mathcal{L}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}) e^{i\omega T(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})} d\mathbf{x} \quad (3.27)$$

où $S(\omega)$ est une ondelette ponctuelle.

Par la suite, nous noterons $R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s}))$ le coefficient de réflexion multiplié par le dirac surfactive $R(\mathbf{x}, \theta(\mathbf{r}, \mathbf{x}, \mathbf{s})) \delta_{\Sigma}(\mathbf{x})$.

3.3.2.3 Formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine de Fourier

Dans cette section, nous allons dériver l'expression de la formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine des ondes planes. Pour cela, nous allons faire des transformées de Fourier de la formule de modélisation de Kirchhoff (3.27) suivant les coordonnées source et récepteur. Nous appliquerons ensuite le théorème de la phase stationnaire (annexe E) pour aboutir à l'expression de la formule de modélisation en Kirchhoff en ondes planes. Cela sera aussi l'occasion de montrer que le coefficient de réflexion est le même dans le domaine spatial (r, z_r, s, z_s) et dans le domaine de Fourier (p^r, z_r, p^s, z_s) au sens asymptotique hautes fréquences. s et r sont respectivement les abscisses source et récepteur. Cette approche va nous permettre ensuite de résoudre le problème d'imagerie dans le domaine de Fourier afin d'avoir accès à la dépendance angulaire du coefficient de réflexion et d'établir un lien avec l'imagerie par équation d'onde.

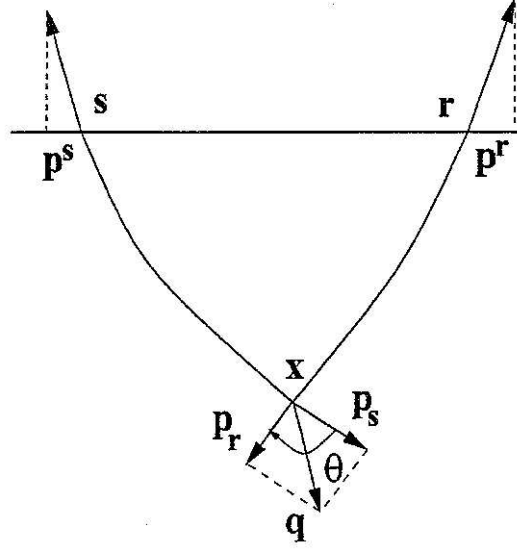


FIG. 3.15 – Représentation des paramètres de rai (vecteur lent) mis en oeuvre dans la migration : θ est l'angle d'incidence ; p^s et p^r décrivent les composantes horizontales des vecteurs lents en surface alors que $\mathbf{p}_s$ et $\mathbf{p}_r$ décrivent les vecteurs lents en profondeur à la position $\mathbf{x}$.

Formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine de Fourier

Énonçons maintenant une formule équivalente dans le domaine de Fourier. Dans ce dernier, $s \rightarrow k^s$ et $r \rightarrow k^r$. On pose $k^s = \omega p^s$ et $k^r = \omega p^r$. La relation (3.27) devient,

$$U(p^r, z_r, \omega; p^s, z_s) = \int_{\mathbf{x} \in V} d\mathbf{x} R(\mathbf{x}, \theta(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)) \mathcal{C}(\omega) \mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) e^{-i\omega \tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)} \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) &= \tilde{\mathcal{A}}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) |\mathbf{q}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)| \\ \tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) &= T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s_{spec}, z_s) - p^r r_{spec} - p^s s_{spec} \\ |\mathbf{q}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)| &= 2 \frac{\cos(\theta(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s))}{c(\mathbf{x})} \\ \mathcal{C}(\omega) &= \frac{i}{\omega} \end{aligned}$$

où $\tilde{\mathcal{A}}$ et τ sont respectivement les termes d'amplitude et de temps de trajet dans le domaine (τ, p) . p^r et p^s sont les composantes horizontales des vecteurs lents $\mathbf{p}^s$ et $\mathbf{p}^r$ en surface et non en profondeur comme $\mathbf{p}_r$ et $\mathbf{p}_s$ (cf. Figure 3.15). s_{spec} et r_{spec} sont respectivement la source et le récepteur spéculaires associés au point de réflexion $\mathbf{x} \in V$ et à l'angle d'incidence θ à la profondeur z_s et z_r . k^r et k^s sont respectivement les composantes horizontales des vecteurs nombre d'onde

source et récepteur. Notons que nous faisons un abus de notation en gardant U pour nommer sa transformée de Fourier partielle.

Démonstration

Montrons maintenant que l'on peut asymptotiquement passer de (3.27) à (3.28). Partons de l'équation (3.27),

$$U(r, z_r, \omega; s, z_s) = \int_{\mathbf{x} \in V} d\mathbf{x} R(\mathbf{x}, \theta(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)) \mathcal{L}(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) e^{-i\omega T(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)}, \quad (3.29)$$

et appliquons formellement une transformée de Fourier suivant l'axe des récepteurs r ,

$$U(k^r, z_r, \omega; s, z_s) = \int_{-\infty}^{+\infty} dr U(r, z_r, \omega; s, z_s) e^{ik^r r}, \quad (3.30)$$

que l'on écrit en fonction de p^r ,

$$\begin{aligned} U(p^r, z_r, \omega; s, z_s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} dr U(r, z_r, \omega; s, z_s) e^{i\omega p^r r} \\ &= \int_{\mathbf{x} \in V} d\mathbf{x} \int_{-\infty}^{+\infty} dr R(\mathbf{x}, \theta(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)) \mathcal{L}(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) \\ &\quad \times e^{-i\omega(T(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) - p^r r)} \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec $k^r = \omega p^r$. Il est possible de calculer l'intégrale par rapport r

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} dr R(\mathbf{x}, \theta(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)) \mathcal{L}(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) e^{-i\omega(T(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) - p^r r)} \quad (3.32)$$

dans (3.31) par l'application du théorème de la phase stationnaire. Lorsque $\mathbf{x}$ et s sont fixés, la partie de l'intégrale qui contribue est celle pour laquelle la dérivée de la phase ($T(r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) - p^r r$) par rapport à l'abscisse r du récepteur est nulle, c'est-à-dire un r_{spec} tel que

$$\frac{\partial T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x})}{\partial r} = p^r. \quad (3.33)$$

C'est le récepteur r spéculaire (r_{spec}) dans l'hypothèse haute fréquence. Il faut qu'il n'y en ait qu'un seul pour $\mathbf{x}$ et s fixés. Dans ce cas, l'intégrale I peut être alors approchée par (annexe E)

$$I \approx \sqrt{i} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega \left| \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) \right|}} R(\mathbf{x}, \theta(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)) \mathcal{L}(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) e^{-i\omega(T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) - p^r r_{spec})} \quad (3.34)$$

où r_{spec} dépend de (p^r, z_r, s, z_s) et en posant,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) &= \tilde{\mathcal{A}}(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) |\mathbf{q}(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)| \\ \tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) &= T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) - p^r r_{spec} \end{aligned}$$

avec,

$$\tilde{\mathcal{A}}(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) = \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{\partial^2 T}{\partial r^2}(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}) \right|}} \mathcal{A}(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s), \quad (3.35)$$

et l'équation (3.31) peut s'écrire comme,

$$U(p^r, z_r, \omega; s, z_s) \approx \int d\mathbf{x} R(\mathbf{x}, \theta(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)) \mathcal{C}(\omega) \mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s) e^{-i\omega\tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)}. \quad (3.36)$$

avec $\mathcal{C}(\omega) = \frac{\sqrt{i}}{\sqrt{\omega}}$.

La même démarche est suivie côté source. Comme r_{spec} ne dépend que de $(p^r, z_r, \mathbf{x}, s, z_s)$, on voit bien que l'on peut passer de $U(r, z_r, \omega; s, z_s)$ à $U(p^r, z_r, \omega; p^s, z_s)$ par l'application de deux transformations de Fourier suivant l'axe horizontal des sources et des récepteurs en prenant l'approximation de la phase stationnaire et que,

$$R(\mathbf{x}, \theta(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s_{spec}, z_s)) = R(\mathbf{x}, \theta(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)). \quad (3.37)$$

Formule de modélisation de Kirchhoff en milieu homogène

Commençons par décrire plus en détails la formule de Kirchhoff en ondes planes,

$$U(p^r, z_r, \omega; p^s, z_s) = \int d\mathbf{x} R(\mathbf{x}, \theta(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)) \mathcal{C}(\omega) \mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) e^{-i\omega\tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)} \quad (3.38)$$

avec

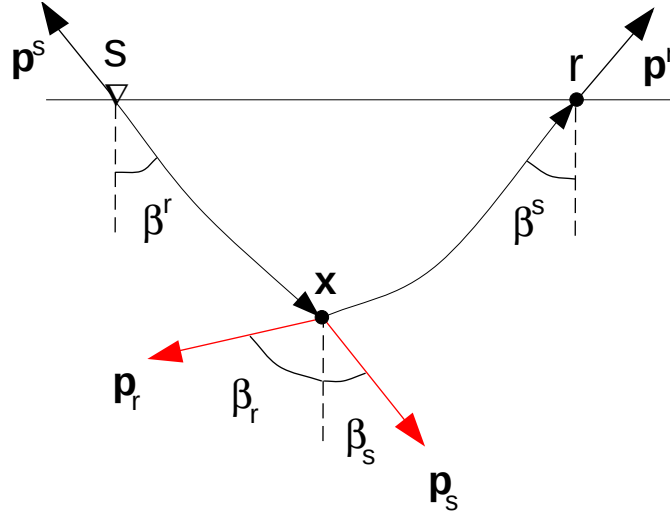


FIG. 3.16 – $\mathbf{x}$ est le point spéculaire de réflexion associé au couple $(\mathbf{s}, \mathbf{r})$. $\mathbf{p}^s$ et $\mathbf{p}^r$ sont respectivement les vecteurs lents en surface associés aux rais émergents en surface. On définit β^s et β^r , les angles d'émergence des rais mesurés par rapport à la verticale et associés respectivement à la source $\mathbf{s}$ et au récepteur $\mathbf{r}$. De même, $\mathbf{p}_s$ et $\mathbf{p}_r$ sont respectivement les vecteurs lents associés aux rais incident et réfléchi au point de réflexion $\mathbf{x}$. On définit β_s et β_r , les angles d'incidence et de réflexion des rais mesurés par rapport à la verticale au point diffractant $\mathbf{x}$.

$$\mathcal{L}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) = \tilde{\mathcal{A}}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) |\mathbf{q}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)| \quad (3.39)$$

$$\tau(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) = T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s_{spec}, z_s) - p^r r_{spec} - p^s s_{spec} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{C}(\omega) = \frac{i}{\omega} \quad (3.41)$$

où $\mathbf{q} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_r$ (en profondeur et non à la surface comme $\mathbf{p}^s$ et $\mathbf{p}^r$) et,

$$\tilde{\mathcal{A}}(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s) = \tilde{A}(p^r, z_r, \mathbf{x}) \tilde{A}(\mathbf{x}, p^s, z_s) \quad (3.42)$$

et enfin

$$\begin{aligned} \tilde{A}(p^r, z_r, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{4 \left| \frac{\partial(p^r, z_r)}{\partial(\sigma, \beta_r)} \right|}} \\ \tilde{A}(p^s, z_s, \mathbf{x}) &= \frac{1}{\sqrt{4 \left| \frac{\partial(p^s, z_s)}{\partial(\sigma, \beta_s)} \right|}} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Les expressions ci-dessus sont obtenues en exprimant le terme de divergence géométrique en fonction du jacobien associé au changement de variables $(\partial(x, z)/\partial(\sigma, \beta_r))$ et le terme asymptotique $(\partial^2 T / \partial r^2)(r_{spec}, \mathbf{x}, s)$ en fonction du paramètre de rai et l'angle d'incidence ou d'émergence. Cette étape est détaillée en annexe F.

Dans le cas d'un milieu homogène, les termes d'amplitudes (3.43) s'écrivent (annexe F),

$$\begin{aligned}\tilde{A}(p^s, z_s, \mathbf{x}) &= \frac{c_0}{2 \cos \beta^s} = \frac{1}{2p_s^z} \\ \tilde{A}(\mathbf{x}, p^r, z_r) &= \frac{c_0}{2 \cos \beta^r} = \frac{1}{2p_r^z}\end{aligned}\quad (3.44)$$

où p_r^z et p_s^z sont respectivement les composantes verticales des vecteurs lenteurs $\mathbf{p}^s$ et $\mathbf{p}^r$ en surface. En introduisant (3.44) dans l'équation (3.38), la formule de modélisation de Kirchhoff dans le domaine des ondes planes en milieu homogène s'écrit

$$\begin{aligned}U(p^r, z_r, \omega; p^s, z_s) &= \int d\mathbf{x} R(\mathbf{x}, \theta(p^r, z_r, \mathbf{x}, p^s, z_s)) 2 \cos \theta \frac{ic(\mathbf{x})}{4|\omega| \cos \beta^s \cos \beta^r} \\ &\times e^{-i\omega(T(r_{spec}, z_r, \mathbf{x}, s_{spec}, z_s) - p^r r_{spec} - p^s s_{spec})}.\end{aligned}\quad (3.45)$$

C'est l'application du théorème de la phase stationnaire qui fait disparaître la singularité du terme d'amplitude de la fonction de Green (lorsque la distance entre source et point d'observation tend vers zéro). Cela explique pourquoi la fonction de Green dans le domaine de Fourier n'a plus de singularité.

3.3.3 Problème inverse

3.3.3.1 Principe d'imagerie quantitatif de Kirchhoff

Cette section porte sur la mise en place d'un principe d'imagerie en angle et en amplitude préservée par équation d'onde à partir de la formule de modélisation de Kirchhoff en ondes planes développée précédemment.

Considérons une surface d'acquisition z_0 et un point image $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, z)$. Supposons que les sources et les récepteurs sont à la même profondeur $z_r = z_s = z_0$, et partons de la formule de modélisation (3.45) en milieu homogène et dans le domaine (p^s, p^r, z, ω) ,

$$U(k_s, k_r, z_0, \omega) = \int dx \int dz R(x, z, \theta(p^s, p^r)) \frac{i \cdot \text{sign}(\omega)}{|\omega|} \mathcal{L}(p^s, p^r, z_0; x, z) e^{-i\omega \tau(p^s, p^r, z_0; x, z)} \quad (3.46)$$

avec,

$$\mathcal{L}(p^s, p^r, z_0; x, z) = \frac{2 \cos \theta}{c} \mathcal{A}(p^s, p^r, z_0; x, z) = \frac{|\mathbf{q}|}{4p_{z_s} p_{z_r}} \quad (3.47)$$

et $U(k_s, k_r, z_0, \omega) = U(p^s, p^r, z_0, \omega)$. k_s et k_r sont les composantes horizontales des vecteurs nombre d'onde en surface.

En introduisant la propriété $\tau(p^s, p^r, z_0; x, z) = -q_x x - q_z(z - z_0)$ montrée dans l'annexe (G), on exprime le champ sous la forme d'une transformée de Fourier du coefficient de réflexion tel que :

$$\begin{aligned}
 U(k_s, k_r, z_0; \omega) &= \int dx \int dz R(x, z, \theta(k_s, k_r, \omega)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) e^{i\omega(q_x x + q_z(z-z_0))} \\
 &= R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(k_s, k_r, \omega)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) e^{-i\omega q_z z_0}
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

avec,

$$\begin{aligned}
 p_{z_s} &= \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_s}{\omega}\right)^2} \\
 p_{z_r} &= \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_r}{\omega}\right)^2} \\
 q_x &= \frac{k_s + k_r}{\omega} \\
 q_z &= \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_s}{\omega}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_r}{\omega}\right)^2} \\
 q &= \sqrt{q_x^2 + q_z^2}
 \end{aligned}$$

où tout est exprimé en fonction de k_s, k_r, z_0, ω . Notons que θ dépend de k_s, k_r et de ω . Notons si q_z est un complexe, on choisit la fonction racine carré dont la partie imaginaire est positive pour imposer une décroissance exponentielle vers le bas.

Appliquons maintenant une transformée de Fourier par rapport à z_0 ,

$$U(k_s, k_r, k_{z_0}; \omega) = R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(k_s, k_r, \omega)) \left(\frac{-2\pi|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \delta(k_{z_0} - \omega q_z) \tag{3.49}$$

et prenons l'intégrale sur ω pour faire apparaître $t = 0$,

$$U(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(k_s, k_r, \omega)) \left(\frac{-2\pi|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \delta(k_{z_0} - \omega q_z). \tag{3.50}$$

La seule contribution de cette intégrale est pour ω tel que $k_{z_0} - \omega q_z = 0$, soit

$$\omega \left[\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_s}{\omega}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_r}{\omega}\right)^2} \right] = k_{z_0}. \tag{3.51}$$

On cherche à restituer le coefficient de réflexion à partir des ondes réfléchies. Les calculs peuvent donc se limiter à la partie non évanescence des fonctions de Green, c'est-à-dire lorsque

$$\frac{k_s}{\omega} < \frac{1}{c} \quad \text{et} \quad \frac{k_r}{\omega} < \frac{1}{c} \tag{3.52}$$

et par conséquent les bornes d'intégration en ω de (3.50) peuvent être restreintes à

$$]-\infty; -\max(ck_s, ck_r)[U]\max(ck_s, ck_r); \infty[. \quad (3.53)$$

Regardons la fonction de ω ,

$$f(\omega) = \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_s}{\omega}\right)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{k_r}{\omega}\right)^2} \quad (3.54)$$

dans l'intervalle $]-\infty; -\max(ck_s, ck_r)[U]\max(ck_s, ck_r); \infty[$. Supposons que $k_s < k_r$ (l'inverse se déduit de la même façon) alors la fonction $f(\omega)$ doit être considérée sur l'intervalle $]-\infty, -ck_r[U]ck_r, +\infty[$. $f(\omega)$ est une fonction croissante sur $]ck_r, +\infty[$ dont la valeur minimale est $\sqrt{\frac{k_r^2 - k_s^2}{c^2 k_r^2}}$. On en déduit que l'équation (3.51) a une solution ω_0 pour $k_s < k_r$ uniquement si $k_{z_0} > \sqrt{k_r^2 - k_s^2}$. Plus généralement, en considérant aussi le cas $k_r < k_s$, nous aurons une solution unique que si $k_{z_0} > \sqrt{|k_r^2 - k_s^2|}$.

Si c'est le cas alors on a une solution unique ω_0 et on peut alors écrire d'après l'annexe K que,

$$\delta(k_{z_0} - \omega q_z) = \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| \delta(\omega - \omega_0). \quad (3.55)$$

En injectant (3.55) dans l'équation (3.50), on obtient

$$\begin{aligned} U(k_s, k_r, k_{z_0}; t=0) &= R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(k_s, k_r, k_{z_0})) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| \\ &= R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(k_s, k_r, k_{z_0})) \frac{c^2 |\mathbf{q}|}{4i\omega |q_z|}. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Ainsi, il existe une relation linéaire entre la transformée de Fourier des données redatumées prise à $t=0$ et le coefficient de réflexion. Dans le domaine des ondes planes, cette relation est diagonale (multiplication) et l'expression du coefficient de réflexion en fonction des données redatumées s'écrit,

$$R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(k_s, k_r, k_{z_0})) = U(k_s, k_r, k_{z_0}; t=0) \frac{4i\omega |q_z|}{c^2 |\mathbf{q}|}. \quad (3.57)$$

Exprimons maintenant la relation (3.57) en fonction de k_m, k_{z_0}, θ . La relation entre le champ d'onde dans le domaine (k_s, k_r, k_{z_0}) et le champ d'onde dans le domaine (k_m, k_h, k_{z_0}) est donnée par :

$$\begin{aligned} U(k_s, k_r, k_{z_0}; t=0) &= \int ds \int dr U(s, r, k_{z_0}; t=0) e^{ik_s s + ik_r r} \\ &= \int dm \int dh \left| \frac{\partial(s, r)}{\partial(m, h)} \right| U(m, h, k_{z_0}; t=0) e^{ik_m m + ik_h h} \\ &= 2U(k_m, k_h, k_{z_0}; t=0) \end{aligned} \quad (3.58)$$

avec,

$$\begin{cases} m &= \frac{s+r}{2} \\ h &= \frac{s-r}{2} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} k_m &= k_s + k_r \\ k_h &= k_s - k_r \end{cases} \quad (3.59)$$

et le jacobien associé au changement de variables $\left| \frac{\partial(s, r)}{\partial(m, h)} \right| = 2$.

En introduisant la relation montrée en annexe (J) qui lie l'angle de réflexion et les composantes verticales et en offset du nombre d'onde ,

$$\tan\theta = -\frac{k_h}{k_{z_0}}, \quad (3.60)$$

et en injectant (3.58) dans (3.57), on a

$$R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(k_s, k_r, k_{z_0})) = U(k_m, k_h, k_{z_0}; t=0) \frac{8i\omega|q_z|}{c^2|\mathbf{q}|} \quad (3.61)$$

avec

$$\begin{aligned} \omega q_x &= k_m \\ k_h &= -k_{z_0} \tan\theta \\ |\mathbf{q}| &= \frac{2\cos\theta}{c} \end{aligned}$$

où tout est exprimé en fonction de k_m, k_{z_0}, θ .

La relation (3.61) exprime le coefficient de réflexion dans le domaine de Fourier en fonction des données dans le domaine (k_m, k_h, k_{z_0}) . Réalisons maintenant des transformées de Fourier inverses suivant l'axe k_m et k_z , pour établir l'expression du coefficient de réflexion dans le domaine spatial,

$$R(x, z_0, \theta) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_{z_0} \int dk_m \frac{8i\omega|q_z|}{c^2|\mathbf{q}|} U(k_m, k_h, k_{z_0}; t=0) e^{-ik_m x_m} e^{-ik_{z_0} z_{z_0}} \quad (3.62)$$

Il est ensuite possible de restituer la dépendance en angle du coefficient de réflexion en sélectionnant la contribution pour un angle de réflexion θ_0 fixé,

$$R(x, z_0, \theta_0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int dk_{z_0} \int dk_m \int dk_h \delta(k_h - k_{z_0} \tan\theta_0) \frac{8i\omega|q_z|}{c^2|\mathbf{q}_0|} e^{-ik_{z_0} z_{z_0}} U(k_m, k_h, k_{z_0}; t=0) e^{-ik_m x_m}. \quad (3.63)$$

Le terme $\frac{\omega|q_z|}{|\mathbf{q}|}$ ne dépend que de k_{z_0} et de θ_0 . Il peut donc être sorti de l'intégrale sur k_m et l'on obtient

$$R(x, z_0, \theta_0) = \frac{1}{(2\pi)} \int dk_{z_0} \int dk_h \delta(k_h - k_z \tan \theta_0) \frac{8i\omega|q_z|}{c^2|\mathbf{q}_0|} e^{-ik_{z_0} z_0} U(m, k_h, k_{z_0}; t=0). \quad (3.64)$$

L'expression ci-dessus est l'expression d'une transformée de Radon dans l'espace de Fourier. Cette relation (annexe L) peut être exprimée dans le domaine spatial sous la forme d'un slant stack¹¹,

$$R(x, z_0, \theta_0) = \frac{8}{c^2|\mathbf{q}_0|} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dh \delta(z - z_0 - h \tan \theta_0) \frac{\partial U}{\partial z}(x, h, z, t=0), \quad (3.65)$$

ou encore,

$$R(x, z_0, \theta_0) = \frac{8}{c^2|\mathbf{q}_0|} \int_{-\infty}^{+\infty} dh \frac{\partial U}{\partial z}(x, h, z_0 - h \tan \theta_0, t=0) \quad (3.66)$$

Après l'extrapolation du champ d'onde à la profondeur que l'on veut imager, les principales contributions à l'image se font pour des positions source et récepteur proches (ou même identiques) de la position du point image. L'avantage de cette configuration est que le modèle de vitesse peut être considéré comme localement homogène. C'est ce qui nous a permis de faire cette démonstration.

Le principe d'imagerie présenté (3.66) est assez similaire à celui proposé par Sava and Fomel (2003). Les différences principales résident dans la dérivée par rapport à z et dans les poids à appliquer pour le slant stack (sommation le long de pente constante). Cela constitue la clef pour faire une imagerie par équation d'onde quantitative.

3.3.3.2 Cas analytique

Vérifions analytiquement la formule d'imagerie quantitative par équation d'onde en amplitude préservée que nous venons d'établir. Pour cela, nous allons introduire dans la formule, l'expression analytique des données réfléchies enregistrées en surface dans le domaine (k_h, k_{z_0}) pour un coefficient de réflexion $R = 1$ quel que soit l'angle de réflexion θ .

D'après l'équation (I.5) de l'annexe I, la formule analytique qui exprime les données modélisées dans le domaine de Fourier s'écrit (établie dans l'annexe I) :

$$U(k^m, k^r, z_0; \omega) = R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(k_s, k_r)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{8i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) e^{-i\omega q_z z_0} \quad (3.67)$$

Supposons maintenant que les données contiennent une réflexion unique sur un réflecteur plan en $z_0 = 0$ et que le coefficient de réflexion associé à ce réflecteur est égal 1 quel que soit le point de réflexion x et l'angle θ de réflexion. On écrit alors que :

$$R(x, z, \theta) = \delta(z_0) \quad (3.68)$$

¹¹sommation de long de droites de pentes constantes

En appliquant à (3.68) deux transformées de Fourier suivant la direction x et z , le coefficient de réflexion s'écrit dans le domaine de Fourier comme,

$$R(k_m, k_{z_0}, \theta) = 2\pi\delta(k_m). \quad (3.69)$$

D'après l'équation (I.9) de l'annexe I, la formule analytique qui exprime les données modélisées dans le domaine de Fourier s'écrit :

$$U(k_m, k_h, k_{z_0}; t = 0) = 2\pi\delta(k_m) \frac{\pi c^2 |\mathbf{q}|}{8i\omega |q_z|} \quad (3.70)$$

avec $R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(k_s, k_r)) = 2\pi\delta(k_m)$ et $U(k_s, k_r, z_0; \omega) = 2U(k_m, k_h, z_0; \omega)$. En introduisant l'expression des données (3.70) dans la formule d'imagerie (3.64), on obtient :

$$R(x, z_0, \theta_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_m \int_{-\infty}^{+\infty} dk_h \int_{-\infty}^{+\infty} dk_{z_0} \delta(k_h + k_{z_0} \tan \theta_0) 2\pi\delta(k_m) e^{-ik_m x} e^{-ik_{z_0} z_0} \quad (3.71)$$

En simplifiant par la transformée de Fourier inverse en k_m , on obtient,

$$\begin{aligned} R(x, z_0, \theta_0) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z e^{-ik_z z_0} \\ &= 1. \end{aligned} \quad (3.72)$$

3.3.3.3 Extension au principe d'imagerie de Born

En suivant la même approche, il est possible d'établir un principe d'imagerie quantitatif pour restituer la perturbation d'impédance dans le domaine des angles. En effet, dans le domaine de Fourier, il existe également une relation linéaire entre la perturbation d'impédance et les données redatumées en profondeur (Clayton and Stolt (1981), Cohen and Bleistein (1979), Lambaré (1991)).

Partons de la relation diagonalisée établie par Clayton and Stolt (1981) liant la perturbation de lenteur au carré $\delta M = \delta(\frac{1}{c^2})$ avec les données U dans le domaine de Fourier,

$$U(k_r, k_s, z_0, \omega) = \int dz \frac{\omega^2/c^2}{4p_{z_s} p_{z_r}} e^{i\omega k_{z_0}(z-z_0)} \delta M(k_m, k_h, k_{z_0}) \quad (3.73)$$

et appliquons une transformée de Fourier selon z_0 ,

$$U(k_r, k_s, k_{z_0}, \omega) = \frac{\omega^2/c^2}{4p_{z_s} p_{z_r}} \delta M(k_m, k_h, k_{z_0}) \delta(k_{z_0} - k_z). \quad (3.74)$$

L'équation (3.74) est la relation de Born équivalente à la relation de Kirchhoff (I.6). En suivant la même approche que celle adoptée dans la section (3.3.3.1) pour établir le principe d'imagerie de

Kirchhoff, on obtient l'expression de la formule d'imagerie de Born dans le domaine spatial,

$$\delta M(m, \theta_0, z_0) = 8 \int dh \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}(m, h, z_0 - h \tan \theta_0, t = 0) \quad (3.75)$$

avec,

$$\bar{U}(m, h, z_0, t = 0) = \int d\omega \frac{U(m, h, z_0, \omega)}{i\omega}. \quad (3.76)$$

L'expression ci-dessus permet de restituer la perturbation relative de lenteur au carré, c'est-à-dire que $\delta M = \delta(1/c^2)$, où $\delta(1/c^2)$ est la perturbation de lenteur au carré. Pour décrire un milieu acoustique isotrope, il suffit de connaître deux paramètres. Le plus souvent, ils sont choisis parmi les quatre paramètres suivants : vitesse, densité, impédance et module d'incompressibilité. Dans le cadre de la géophysique pétrolière, un paramètre parlant pour le géologue et qui est souvent utilisé pour l'inversions stratigraphiques est la perturbation relative d'impédance. Comme nous sommes dans le cas de la linéarisation par Born au premier ordre, nous pouvons passer d'une paramétrisation à l'autre par simple combinaison linéaire (Forgues (1996)). Exprimons maintenant le principe d'imagerie (3.75) en terme de perturbation relative d'impedance.

La formule d'imagerie (3.75) restitue la perturbation de lenteur au carré. Or, lorsque l'on suppose la densité constante, celle-ci est liée à la perturbation relative du module d'incompressibilité par la relation (Forgues (1996), p156-157),

$$\frac{\delta\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\frac{1}{\kappa_0}} = \frac{\delta\left(\frac{1}{c^2}\right)}{\frac{1}{c_0^2}} \quad (3.77)$$

où $\kappa = \rho c^2$ et δ désigne la perturbation de $1/\kappa$ par rapport au modèle lisse $1/\kappa_0$. Au premier ordre, nous avons,

$$\frac{\delta\left(\frac{1}{\kappa}\right)}{\frac{1}{\kappa_0}} = -\frac{\delta\kappa}{\kappa_0}. \quad (3.78)$$

De plus, en acoustique le module d'incompressibilité est lié à l'impédance et à la densité par la relation $I = \sqrt{\kappa\rho}$ et la perturbation relative s'écrit,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\kappa}{\kappa_0} &= 2 \frac{\delta I}{I_0} - \frac{\delta\rho}{\rho_0} \\ &= 2 \frac{\delta I}{I_0} \end{aligned} \quad (3.79)$$

avec ρ constant. On déduit la relation entre la perturbation relative d'impédance et la perturbation de vitesse,

$$\begin{aligned}\frac{\delta I}{I_0} &= -\frac{1}{2} \frac{\delta\left(\frac{1}{c^2}\right)}{\frac{1}{c_0^2}} \\ &= -\frac{c_0^2}{2} \delta\left(\frac{1}{c^2}\right)\end{aligned}\quad (3.80)$$

avec $\delta\left(\frac{1}{c^2}\right) = \delta m$, et la formule d'imagerie (3.75) en fonction de la perturbation relative d'impédance s'écrit,

$$\frac{\delta I}{I_0}(m, \theta_0, z_0) = -4c_0^2 \int dh \frac{\partial \bar{U}}{\partial z}(m, h, z_0 - h \tan \theta_0, t = 0). \quad (3.81)$$

avec

$$\bar{U}(m, h, z_0, t = 0) = \int d\omega \frac{U(m, h, z_0, \omega)}{i\omega}. \quad (3.82)$$

Le principe d'imagerie de Born (3.81) est proche du principe d'imagerie de Kirchhoff (3.66). Les différences résident dans le poids à appliquer et par la présence d'une intégrale supplémentaire en temps.

3.3.4 Mise en oeuvre pratique

3.3.4.1 Formulation par point de tir

À première vue, la migration par point de tir (Claerbout (1971)) et la migration source récepteur (survey sinking) (Claerbout (1985)) semblent être des algorithmes de migration substantiellement différents. Les principes de bases utilisés par les deux schémas sont différents. La migration par point de tir est réalisée en propageant indépendamment le champ d'onde source et le champ d'onde récepteur. L'image sismique est obtenue en évaluant en chaque point du sous-sol la coïncidence en espace et en temps des deux champs d'onde. La migration source-récepteur est quant à elle basée sur le concept d'enfouissement du dispositif d'acquisition¹², par lequel on synthétise récursivement des jeux de données équivalents à des profondeurs croissantes. À chaque profondeur, l'image est calculée en prenant le champ d'onde extrapolé à $t = 0$.

Il est couramment admis que l'extrapolation de champ d'onde complet avant sommation constitue la manière correcte pour obtenir une bonne image du milieu complexe. Malheureusement, elle n'est pas très attractive d'un point de vue pratique car elle nécessite de coûteuses réorganisations de données à chaque profondeur. De son côté, la migration par point de tir a été longtemps considérée comme une alternative avec de bonnes capacités pour repositionner les interfaces mais avec une mauvaise prise en compte des amplitudes. Même si cela est vrai lorsque l'on fait de la migration par point de tir en fonction de l'offset de surface (Duquet (1996)), il est possible de faire du re-datuming par point de tir de manière exacte (Berkhout (1980); Wapenaar and Berkhout (1987);

¹²survey sinking (en anglais)

Biondi (2003)).

Dépendant de la géométrie d'acquisition, l'efficacité de la migration par point de tir peut être substantiellement différente de l'efficacité de la migration par source-récepteur. En général, la migration source-récepteur est mieux adaptée (plus attractive) pour les données sismiques marines qui ont un intervalle limité alors que la migration par point de tir est mieux adaptée pour les géométries d'acquisitions les données terrestres ou OBC (ocean bottom cable). (Jeannot (2003)) discute de quelques aspects pratiques et des avantages relatifs de la migration source-récepteur et de la migration par point de tir des données en 2D. La plupart de ces observations sont également validées dans le cas des données en 3D.

L'expression du champ d'onde redatumé peut s'exprimer en fonction du champ source et du champ récepteur sous la forme (Sava and Fomel (2003)),

$$U(x, h, z_0, \omega) = \int ds D(x + h, z_r = z_0, \omega) S^*(x - h, z_s = z_0, \omega) \quad (3.83)$$

où D est le champ enregistré aux récepteurs et extrapolé à la profondeur z (rétropropagé) et S est le champ source et extrapolé à la profondeur z . s est la sommation des contributions pour chaque point de tir. Cette relation suppose que les champs source et récepteur associés à un point de tir s sont découplés (Biondi (2003)).

3.3.4.2 Mise en oeuvre

La mise en oeuvre pratique de ce nouveau principe d'imagerie quantitatif pour la migration par extrapolation de champ d'onde se décompose en trois étapes :

- calculer le champ redatumé U soit par extrapolation du champ d'onde complet, soit par point tir (en utilisant le formalisme de l'équation (3.83)). Pour Born, il faut intégrer en temps (division par $i\omega$ dans l'espace des fréquences) le champ total redatumé
- application du principe d'imagerie qui consiste à extraire le champ redatumé à $t = 0$. Dans le domaine fréquentiel cela consiste à sommer les contributions de toutes les fréquences du champ extrapolé afin d'obtenir une image sismique avant sommation
- restitution de la dépendance angulaire de la réflectivité en faisant le slant stack pondéré de la dérivée en z de l'image obtenue présenté dans l'équation (3.66) pour le principe d'imagerie de Kirchhoff et dans (3.81) pour le principe d'imagerie de Born.

La migration quantitative par extrapolation de champ d'onde, consiste à faire de la migration classique par extrapolation de champ d'onde en prenant soin d'extrapoler le champ d'onde avec un propagateur quantitatif et à appliquer un post-traitement quantitatif (après l'application de la condition d'imagerie) qui restitue la distribution des coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence. Au niveau du post-traitement, chaque ODCIG¹³ est traité indépendamment. En effet, pour restituer la dépendance angulaire du coefficient de réflexion, on n'a pas besoin de l'information contenue dans les ODCIGs voisins. En pratique, après l'application du principe d'imagerie, l'énergie est concentrée autour de l'offset zéro et donc sur assez peu de points. Pour que le slant stack restitue correctement l'information, une étape de ré-échantillonnage est préalablement

¹³Offset Domain Common Image Gather

nécessaire. Enfin, une distance maximale de sommation $(h_{min}; h_{max})$ peut être introduite, pour éviter de mélanger l'information de plusieurs évènements lors de cette étape.

3.3.4.3 Performances numériques

D'un point de vue numérique, comme le principe d'imagerie reste le même et que le coût additionnel du post-traitement quantitatif (ré-échantillonnage + dérivée en z + poids) est relativement petit (par rapport à l'étape d'extrapolation et d'imagerie), le coût additionnel de la migration quantitative par rapport à la migration classique est principalement lié au coût de la propagation quantitative. Or celle-ci dépend fortement de l'extrapolateur utilisé. Si on prend l'exemple d'un extrapolateur paraxial à l'ordre 9, on a vu (section 2.4.6) qu'il coûtait 10% plus cher en temps de calcul qu'un extrapolateur paraxial classique à l'ordre 9. Si on considère un extrapolateur paraxial classique (ordre 2) avec coefficient optimisé, le coût d'une migration quantitative sera 5 fois plus cher. Dans le cas d'un extrapolateur phase shift, le coût sera 2 fois supérieur. Naturellement, la qualité du résultat obtenu (cinématique et dynamique) va également dépendre de l'extrapolateur.

3.4 Applications numériques

Cette partie porte sur la validation numérique de notre principe d'imagerie quantitatif par équation d'onde. Dans un premier temps, nous allons montrer qu'il permet de restituer la distribution de réflectivité en fonction de l'angle d'incidence (au facteur près correspondant au stretch de l'ondelette migrée, Bleistein (1987)). Afin d'éviter les erreurs d'amplitude liées au propagateur utilisé, nous allons considérer un macro-modèle de vitesse constant. En effet, dans ce cas, l'opérateur de propagation "phase shift" (Gazdag (1978)) est exacte cinématiquement et quantitativement (cf. section 2.3). Deux exemples synthétiques vont être étudiés. Le premier est le cas d'un réflecteur plan, et le second est composé par trois réflecteurs courbes.

Dans un second temps, nous allons valider le principe d'imagerie en milieu hétérogène en reprenant nos deux exemples synthétiques précédents dans le cas particulier d'un macro-modèle de vitesse caractérisé par un gradient vertical constant. Dans ce cas, la propagation a été réalisée en codant l'opérateur "one way" modifié introduit par Zhang et al. (2003). Ce dernier a la propriété d'être cinématiquement et dynamiquement exact en milieu $c = c(z)$ lorsque les variations de vitesse sont lisses.

3.4.1 La source sismique

La source sismique utilisée pour les exemples numériques synthétiques est un signal analytique de type Butterworth. Nous utilisons une ondelette sismique caractérisée par un spectre plat et de phase nulle sur une bande de fréquence donnée.

L'ondelette sismique utilisée est un filtre butterworth défini dans le domaine des fréquences par son spectre,

$$|F(\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{max}}\right)^{2n_h}} \frac{\left(\frac{\omega}{\omega_{min}}\right)^{2n_b}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_{min}}\right)^{2n_b}} \quad (3.84)$$

avec $2n_h = 48$ et $2n_b = 24$ et où $[\omega_{min}; \omega_{max}]$ caractérise la bande passante avec $\omega = 2\pi f$, $f_{min} = 10Hz$ et $f_{max} = 20Hz$.

Nous avons pris un pas d'échantillonnage de 4 ms et 512 échantillons. La Figure (3.17) présente l'ondelette utilisée pour nos expériences sismiques.

3.4.2 Milieu homogène

3.4.2.1 Test canonique

Afin de valider la formule d'imagerie démontrée dans la section précédente, j'ai mis en oeuvre un test canonique 2D en milieu homogène ($c = 2000m^s^{-1}$) contenant un réflecteur horizontal avec une réflectivité unitaire ($R(\theta) = 1, \forall \theta$) à $z = 500$ m. Des données synthétiques ont été générées dans la géométrie d'acquisition présentée dans la figure (A.3) en utilisant simplement la méthode des points image et des fonctions de Green acoustiques. La source sismique est un filtre de Butterworth avec une bande passante de $(10Hz; 20Hz)$ présentée en figure (3.17). La figure (3.19) montre l'enregistrement d'un point de tir à $(x_s = 1500m; z_0 = 0)$. La figure (3.20) présente un point de tir extrapolé en profondeur à $(x_s = 1500m; z_0 = 300)$. La figure (3.21) présente les différences entre les données redatumées et les données équivalentes calculées analytiquement pour $z = 300$ m, elles sont principalement dues aux effets de bord : réflexions sur les bords et troncature du dispositif d'acquisition (les trois figures ont les mêmes clips). Lorsque les données sont extrapolées en profondeur, la largeur du dispositif d'acquisition est réduite.

La figure (3.22) montre le CIG¹⁴ dans le domaine des offsets en profondeur correspondant à $f(h, z) = \frac{\partial}{\partial z} \delta \mathcal{G}(x - h, x + h, z, t = 0)$. En appliquant la formule d'imagerie quantitative, ce OD-CIG¹⁵ est transformé en CIG dans le domaine des angles présenté Figure (3.23). Les amplitudes de la réflectivité migrée sont contrôlées dans le domaine spectral (une transformée de Fourier verticale est appliquée, $z_0 \rightarrow k_z$) pour chaque angle. Le spectre alors obtenu est présenté sur la Figure (3.25), chacune des courbes correspond à un angle d'incidence différent. On remarque que la forme du spectre est reconstitué quel que soit l'angle d'incidence. La translation observée entre chacune des courbes est causée par le stretching spatial de l'ondelette migrée. Par comparaison, le spectre obtenu à partir du principe d'imagerie classique (Claerbout (1985)) et du slant stack classique (Sava and Fomel (2003)) est présenté Figure (3.26).

3.4.2.2 Réflecteurs courbes

Une validation numérique a été réalisée sur un modèle composé par trois réflecteurs horizontaux localisés dans un milieu de vitesse homogène, comme présenté sur la Figure (3.27). Chaque réflecteur a une réflectivité unitaire et constante pour tous les angles de réflexion et la vitesse du milieu est $c = 2000$ m/s. La géométrie d'acquisition est composée par 401 sources de $x = 0$ jusqu'à $x = 10$ km et par 800 récepteurs allant de $x = -5$ à $x = 15$ km, tous espacés de 25 m. L'offset minimum est de -10 km et l'offset maximum est de 10 km. Les données synthétiques ont été calculées en utilisant le formalisme ray+Kirchhoff (Baina et al. (2002)). La structure synclinale du réflecteur

¹⁴Common Image Gather

¹⁵Offset Domain Common Image Gather

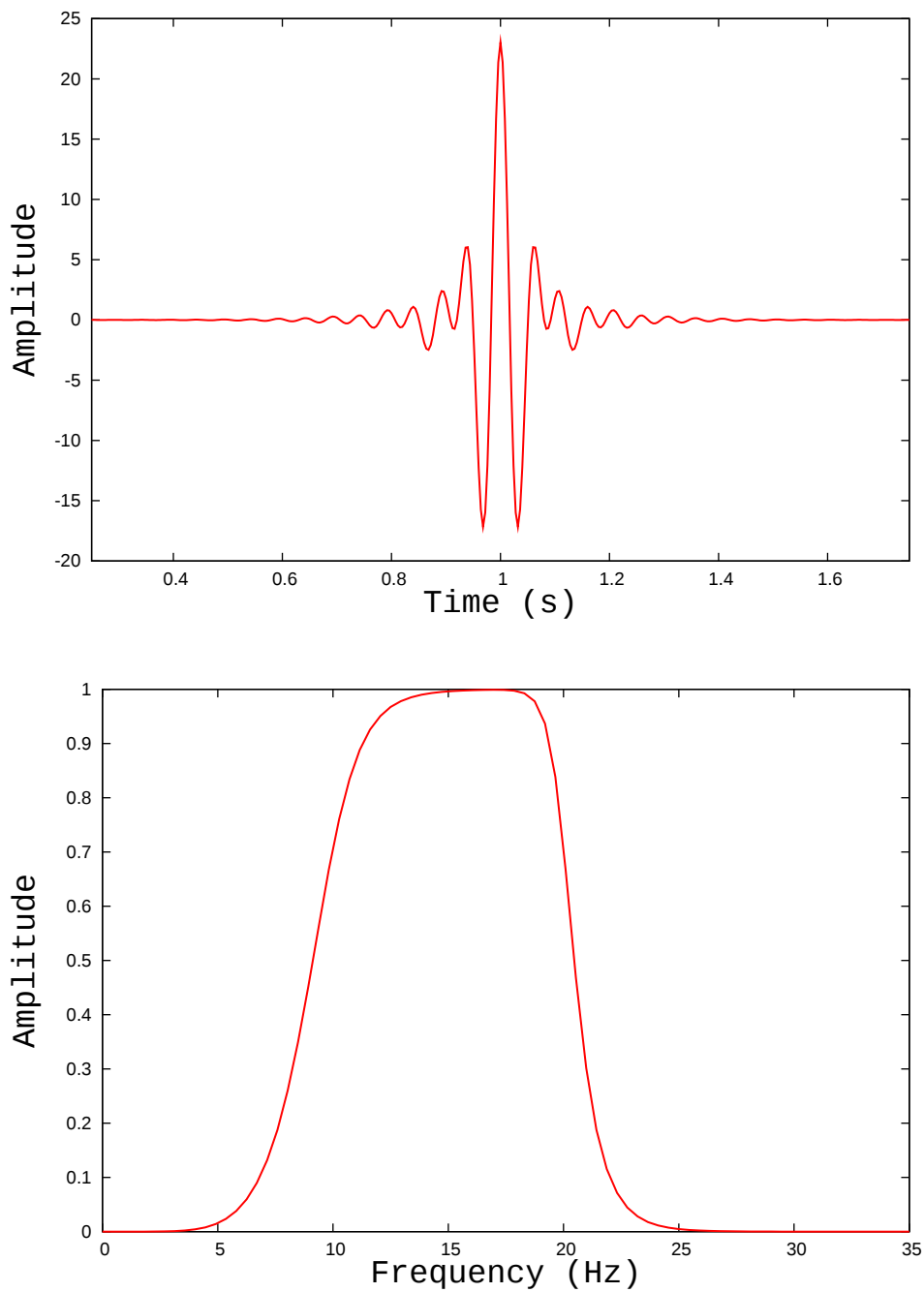


FIG. 3.17 – Présentation de la source sismique utilisée pour les applications numériques. Pour une meilleure représentation graphique, un délai temporel ($t_0 = 1s$) lui a été appliqué. Cette source est la fonction de transfert d'un filtre butterworth; Haut : Représentation de la source sismique utilisée; Bas : Spectre.

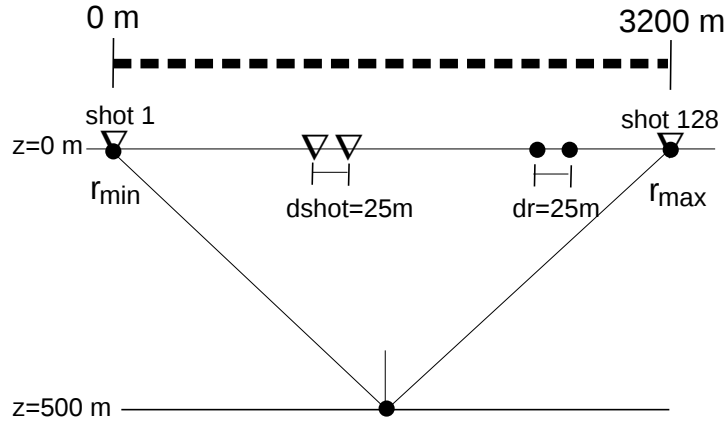
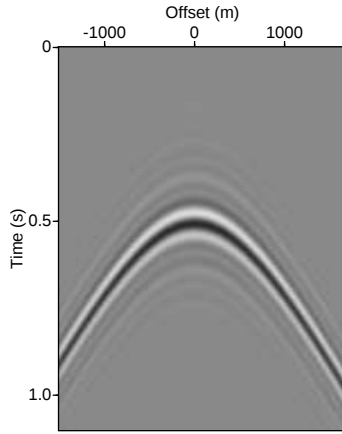
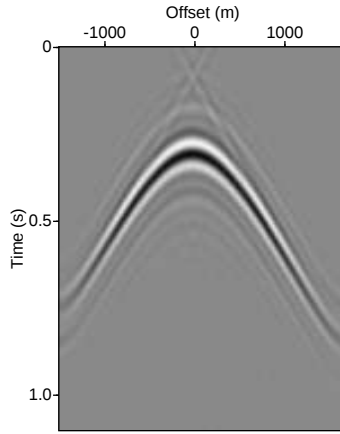
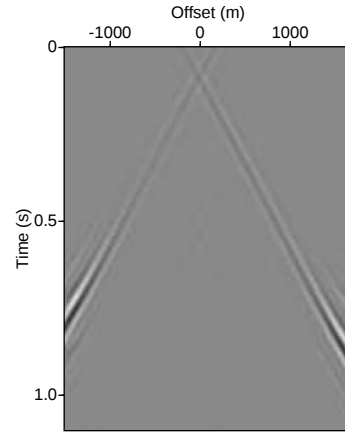


FIG. 3.18 – Géométrie d'acquisition du test canonique.

FIG. 3.19 – Point de tir utilisé pour le test canonique. La source est localisée en $x_s = z = 300$ m.FIG. 3.20 – Point de tir redatumé en $x_s = 1500$ m and $z_s = 0$ m, obtenu par extrapolation de champ d'onde.FIG. 3.21 – Différence entre données calculées analytiquement et données redatumées par extrapolation de champ d'onde en $z = 300$ m.

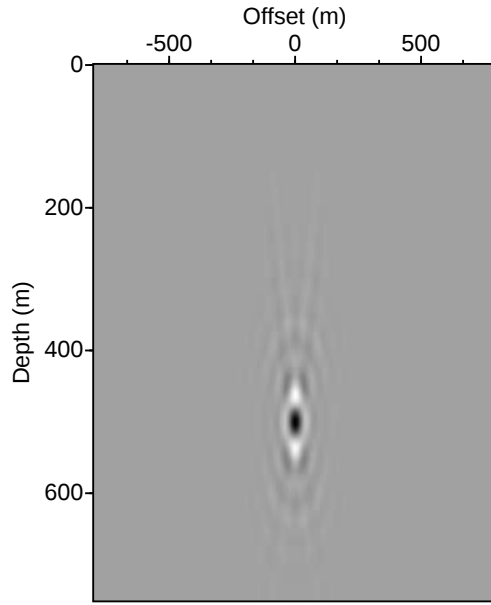


FIG. 3.22 – CIG dans le domaine des offsets obtenu en coupant le cube migré en $x_s = 1500m$.

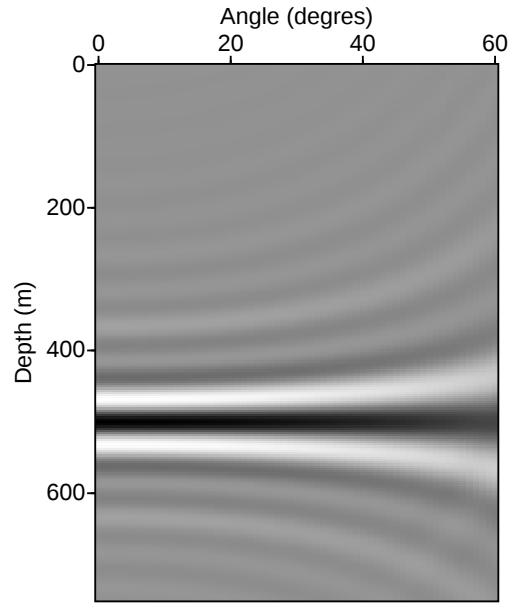


FIG. 3.23 – CIG dans le domaine des angles obtenu en coupant le cube migré en $x_s = 1500m$.

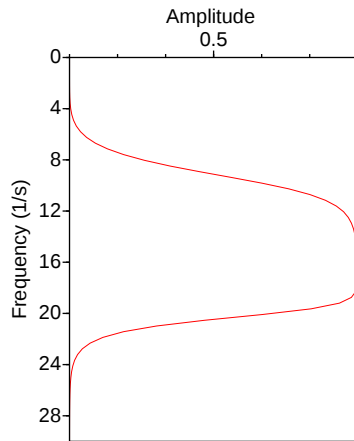


FIG. 3.24 – Spectre de l'ondelette Butterworth utilisée pour modéliser les données.

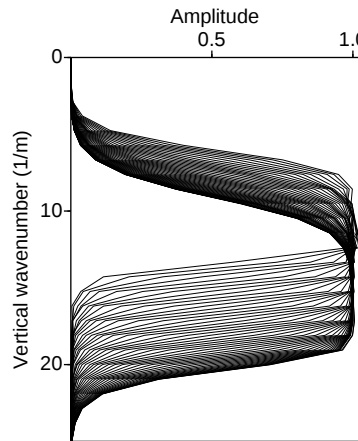


FIG. 3.25 – Spectre de l'ADCIG montré Figure (3.23). Chaque courbe correspond à un angle d'incidence.

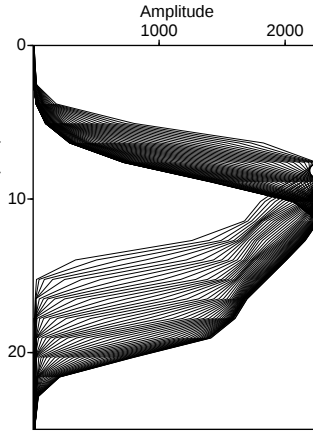


FIG. 3.26 – Spectre d'un ADCIG obtenu en utilisant la condition d'imagerie classique Claerbout (1985); Sava and Fomel (2003).

supérieur et du réflecteur inférieur génère des arrivées multiples dans les données, comme sur le point de tir de la Figure (3.28). La Figure (3.29) montre la section migrée sommée après migration.

Quand le réflecteur est horizontal, nous pouvons vérifier les amplitudes de la réflectivité migrée en appliquant une transformée de Fourier verticale du ADCIG¹⁶ pour chaque angle (cf. cas canonique). Le spectre d'un ADCIG localisé dans la partie horizontale du réflecteur supérieur (voir la boîte de la Figure (3.30)) est présenté Figure (3.32), chaque courbe représente un angle d'incidence. La forme du spectre de la source Butterworth est correctement retrouvée pour tous les angles. Comme attendu, les plateaux des amplitudes sont également constants quel que soit l'angle d'incidence. Le délai fréquentiel entre chaque courbe est dû à l'étirement spatial (stretch) de l'ondelette migrée.

Par la suite, l'analyse des amplitudes migrées est faite le long d'un profil vertical pour un point milieu $x = 4200$ m. Le noyau de l'intégrale de l'équation (3.66) est évalué comme une fonction de l'offset en profondeur h de manière à construire la collection point image en offset profondeur de la Figure (3.31) à gauche. Ensuite, le slant stack pondéré de la formule (3.66) est réalisé sur ce ODCIG¹⁷ pour construire le ADCIG de la Figure (3.31) à droite. La formule (3.66) restitue la dépendance angulaire du coefficient de réflexion stretché, c'est-à-dire le vrai coefficient de réflexion multiplié par la fonction stretch γ (Bleistein (1987)). Cette dernière prend en compte la déformation de l'ondelette en fonction de l'angle d'incidence lorsque celle-ci est réfléchi sur le réflecteur. Ainsi, lorsque nous faisons une analyse AVA¹⁸ en piquant le maximum de l'ondelette dans les CIGs, nous devons appliquer une correction d'amplitude pour prendre en compte l'atténuation par γ . Pour cela, nous multiplions l'amplitude piquée par $1/|\gamma|$ et la division ensuite par l'amplitude de la fonction ondelette. Les amplitudes résultantes sont représentées sur la Figure (3.33) en fonction de l'angle d'incidence ; chaque courbe correspond à un réflecteur. Nous pouvons alors vérifier que les coefficients de réflexion migrés sont globalement constants et unitaires quel que soit l'angle d'incidence. Pour ce point milieu, les angles maximaux accessibles par l'extension latérale de l'acquisition sont respectivement 40, 25 et 60 pour le réflecteur du haut, du milieu et du bas, voir Figure (3.34). Comme attendu, les réflectivités migrées présentées Figure (3.33) sont correctement restituées à l'intérieur de ces limites d'illuminations.

3.4.3 Milieu à gradient vertical

Afin de valider notre principe d'imagerie dans le cas de modèles plus réalistes et de déterminer l'influence de l'aspect quantitatif de la propagation dans l'imagerie quantitative par forme d'onde, nous reprenons maintenant les deux exemples précédents dans le cas d'un gradient vertical de vitesse constant ($v(z) = 1000\text{m/s} + z$). Pour modéliser la propagation des ondes lors de la migration, j'ai utilisé le propagateur "one way" modifié défini par (Zhang et al. (2003)). Celui-ci est quantitatif au sens asymptotique hautes fréquences.

3.4.3.1 Réflecteur plan

Reprenons le cas de notre réflecteur plan. Les paramètres (géométrie d'acquisition, source sismique) sont les mêmes que ceux utilisés dans l'exemple précédent. Cette fois-ci les données sismiques

¹⁶Angle Domain Common Image Gather

¹⁷Offset Domain Common Image Gather

¹⁸Amplitude Versus Angle

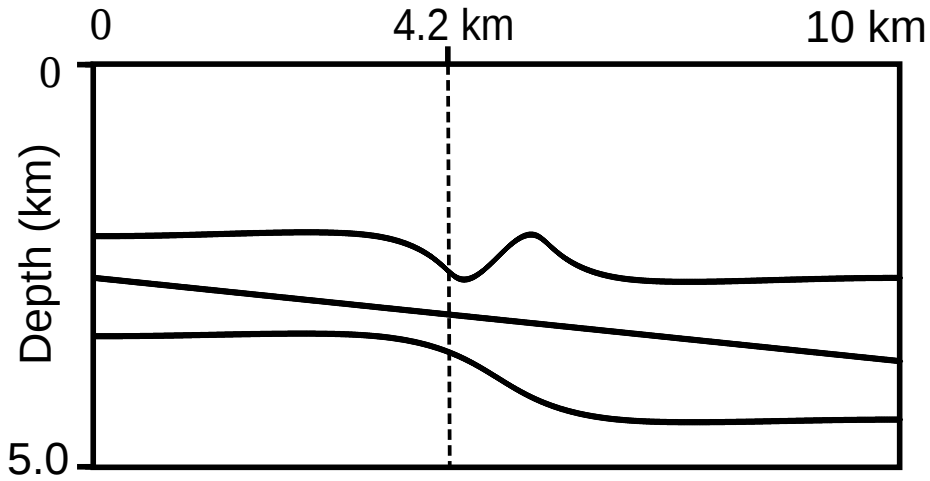


FIG. 3.27 – Distribution de réflectivité utilisée pour le modèle synthétique. Le coefficient de réflexion est unitaire pour toutes les interfaces et tous les angles d'incidence. La vitesse est prise homogène.

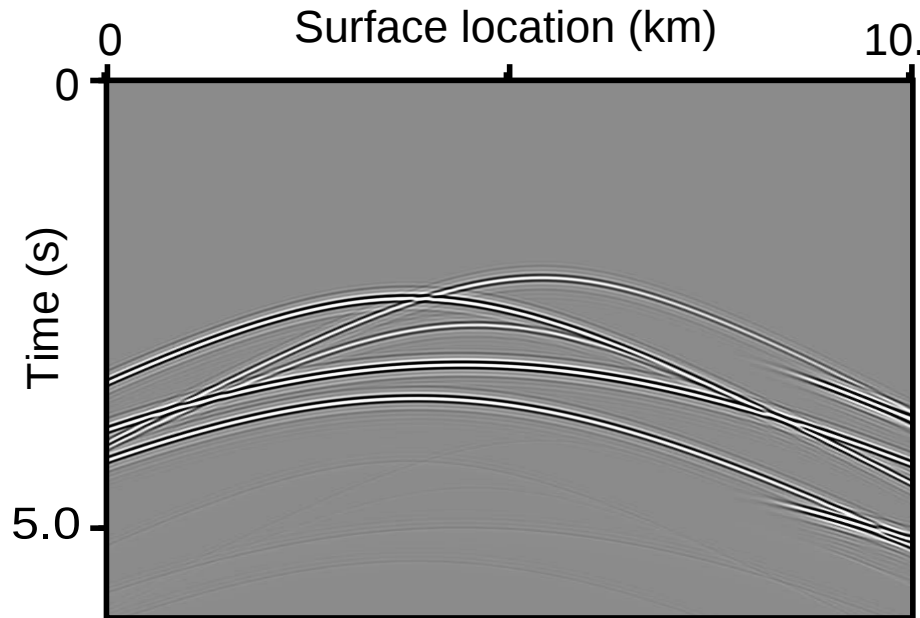


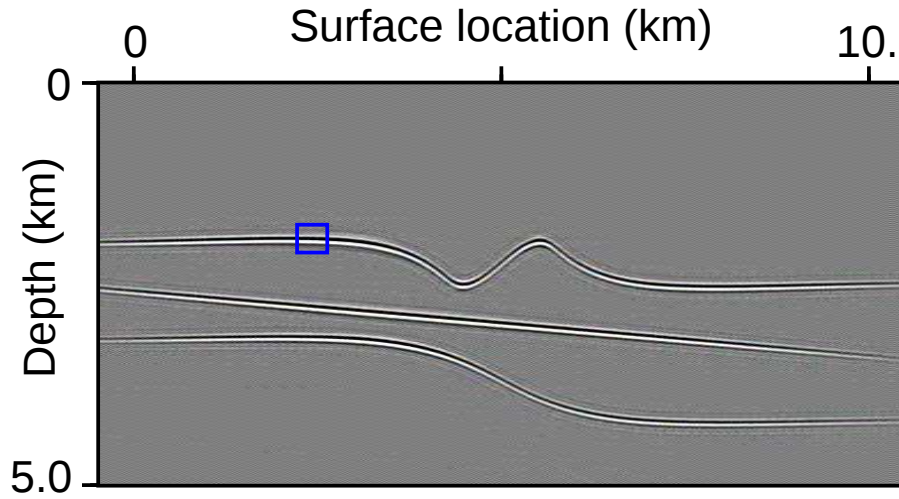
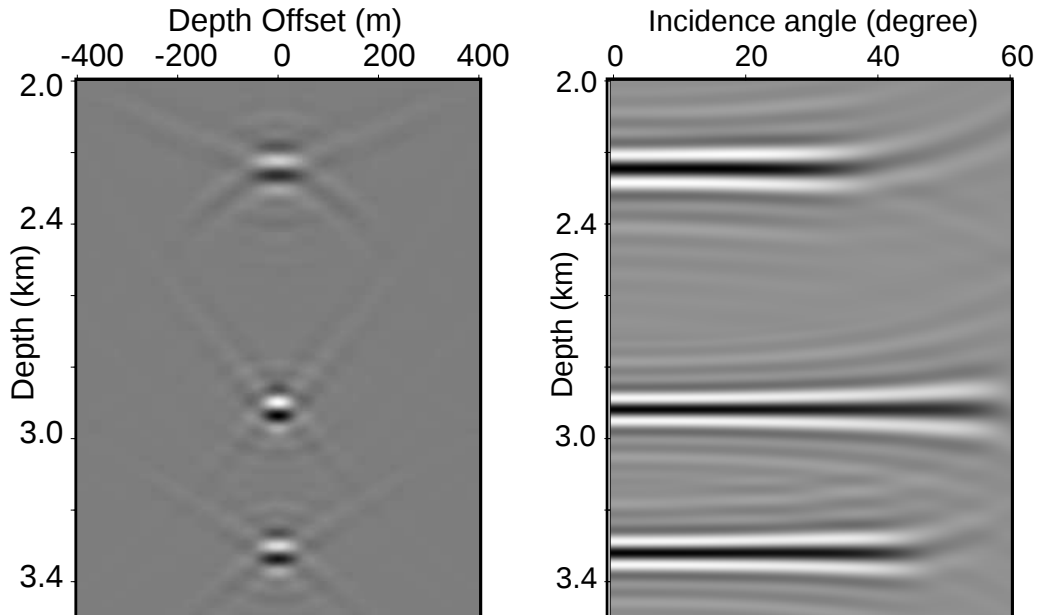
FIG. 3.28 – Un point de tir (position de la source $x_s = 5000m$ et $z_s = 0m$). On remarque que la structure synclinale du réflecteur supérieur et inférieur (Figure 3.27) génère des tripliques dans les données sismiques.

ont été modélisées en utilisant un code de modélisation linéarisé de Kirchhoff pour un gradient de vitesse tel que $v(z) = v_0 + \gamma z$ avec, $v_0 = 1500m/s$ et $\gamma = 1m/s$.

Comme attendu, nous remarquons sur la Figure (3.35) que l'ADCIG¹⁹ obtenue avec le propagateur phase shift classique (à gauche) et celui obtenu avec le propagateur phase shift modifié sont cinématiquement identiques. En effet, l'opérateur de phase shift classique est correct cinématiquement dans un milieu $v(z)$.

Étudions maintenant les aspects quantitatifs des deux ADCIG en appliquant notre slant stack

¹⁹Angle Domain Common Image Gather

FIG. 3.29 – *Section sommée après migration.*FIG. 3.30 – *Gauche : CIG dans le domaine des offsets (localisation du point milieu $m = 4200m$) ; Droite : CIG dans le domaine des angles pour le coefficient de réflexion atténué par la fonction stretch.*

pondéré de la formule (3.66). Les Figures (3.36) montrent respectivement les spectres obtenus avec un propagateur de type phase shift classique (gauche) et un propagateur phase shift modifié. On remarque que la combinaison propagateur cinématique plus imagerie quantitative ne permet de reconstruire ni la forme ni l'amplitude du spectre de la source. En revanche, la combinaison propagateur adapté et principe d'imagerie quantitatif permet d'obtenir des résultats comparables à ceux obtenus dans le cas d'un milieu homogène. Les différences qui peuvent être observées sont liées à la méthode de modélisation (elle n'est plus analytique) et aux erreurs faites lors de la propagation. Celles-ci sont faibles (moins de 1%) mais existent néanmoins (voir chapitre 2). La Figure (3.37) présente les amplitudes pointées après correction de la fonction stretch et normalisée par l'am-

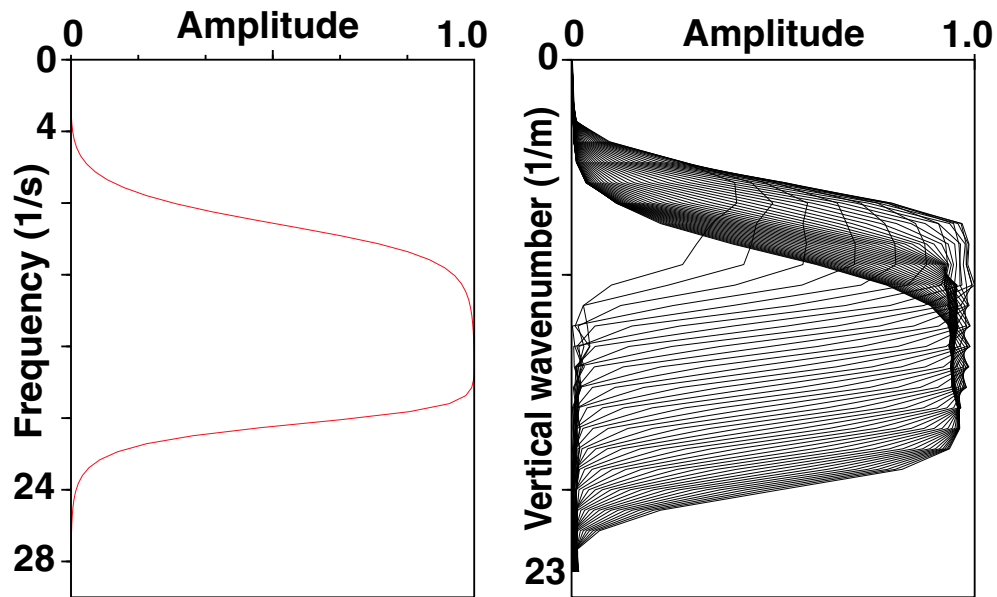


FIG. 3.31 – Gauche : Spectre de l'ondelette source buterworth utilisée pour modéliser le jeu de données synthétique; Droite : Spectre de l'ADCIG positionné par la boîte de la Figure (3.29). Chaque courbe correspond à un angle d'incidence.

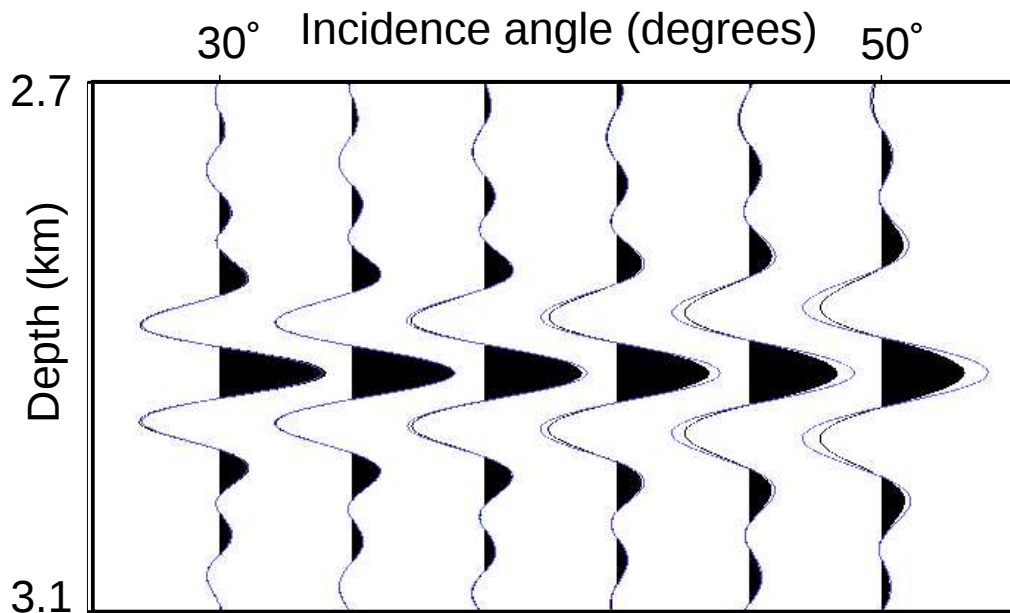


FIG. 3.32 – Influence de la fonction stretch. Coefficient de réflexion atténué (traces avec partie positive noircie) versus coefficient de réflexion restauré (traces superposées).

plitude de l'ondelette. On remarque que l'utilisation du propagateur quantitatif est indispensable pour faire appliquer le principe d'imagerie.

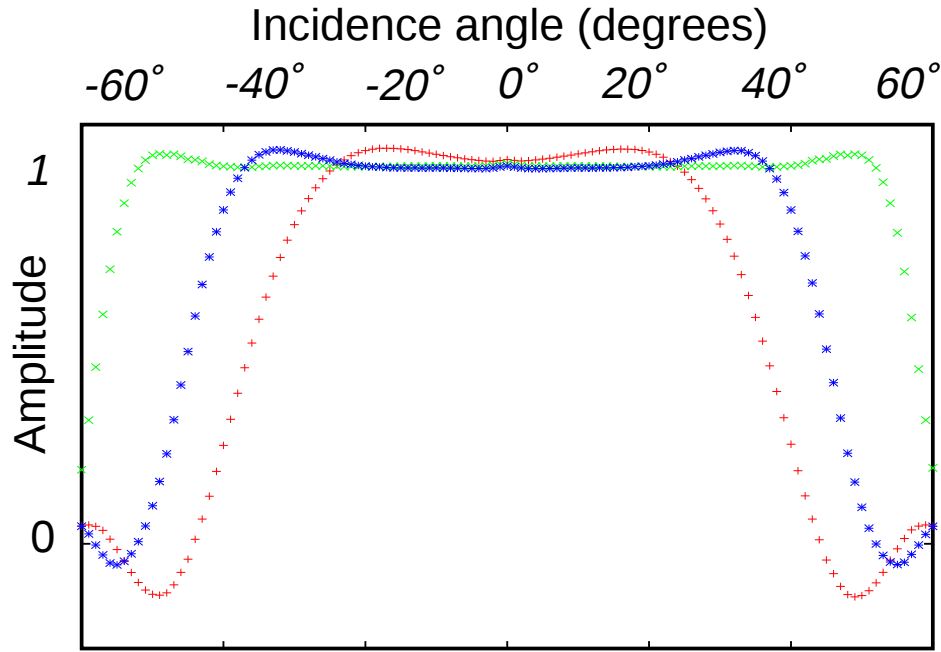


FIG. 3.33 – Amplitude du coefficient de réflexion en fonction de l'angle d'incidence après correction du stretch de l'ondelette. Les courbes matérialisées par les symboles (+), (×) et (*) représentent respectivement les amplitudes associées au réflecteur supérieur, milieu et inférieur.

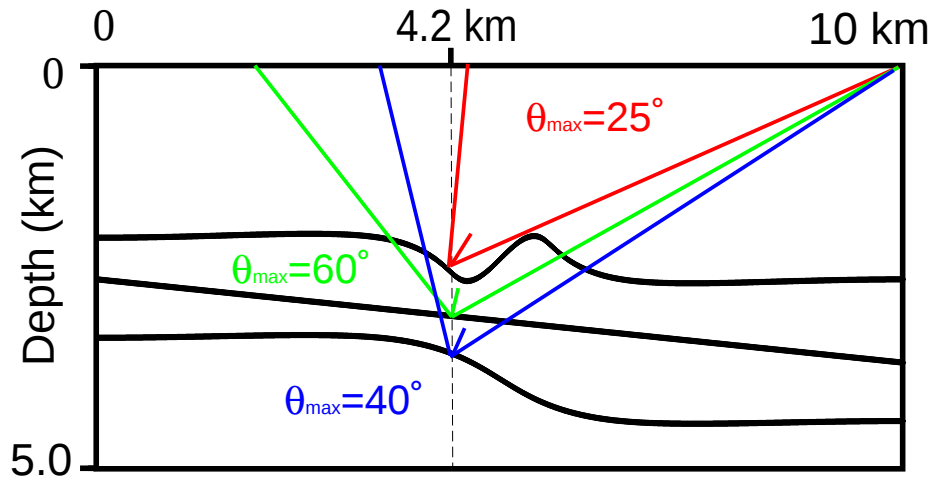


FIG. 3.34 – Limites d'illumination induites par l'acquisition.

3.4.3.2 Réflecteurs courbes

Considérons maintenant un modèle composé par trois réflecteurs courbes dans le cas d'un gradient vertical de vitesse constant $c = 2000 + z$ (m/s).

La Figure (3.38) à gauche montre la section sommée après migration. On remarque que l'image obtenue est plus basse fréquence que celle obtenue avec un macro-modèle de vitesse homogène. Cela s'explique facilement car la longueur d'onde spatiale du signal est une fonction linéaire de la vitesse ($\lambda = cT$). Lorsque l'on augmente la vitesse, la longueur d'onde augmente également. Comme les CIGs s'étalent davantage, la distance sur laquelle on opère le Slant Stack a dû être légèrement

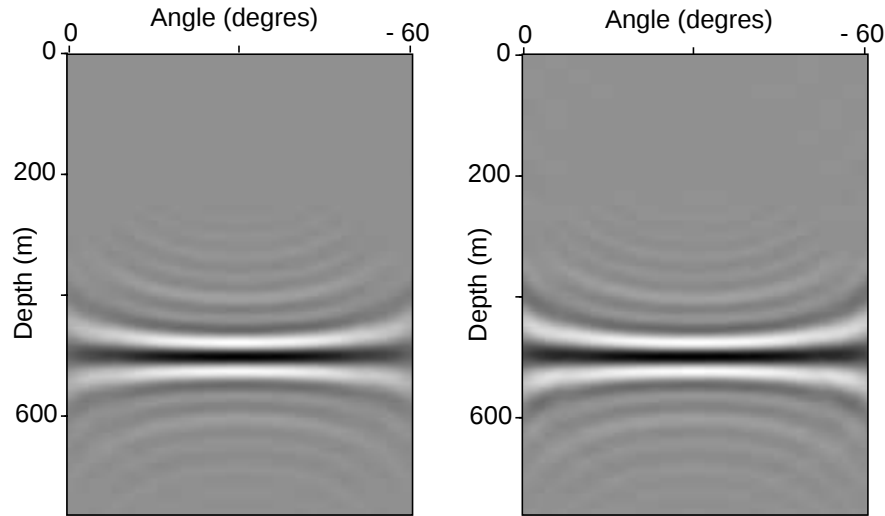


FIG. 3.35 – Migration dans un milieu à gradient de vitesse constant. Gauche : ADCIG obtenu en utilisant un propagateur phase shift classique ; Droite : ADCIG obtenu en utilisant un propagateur phase shift modifié.

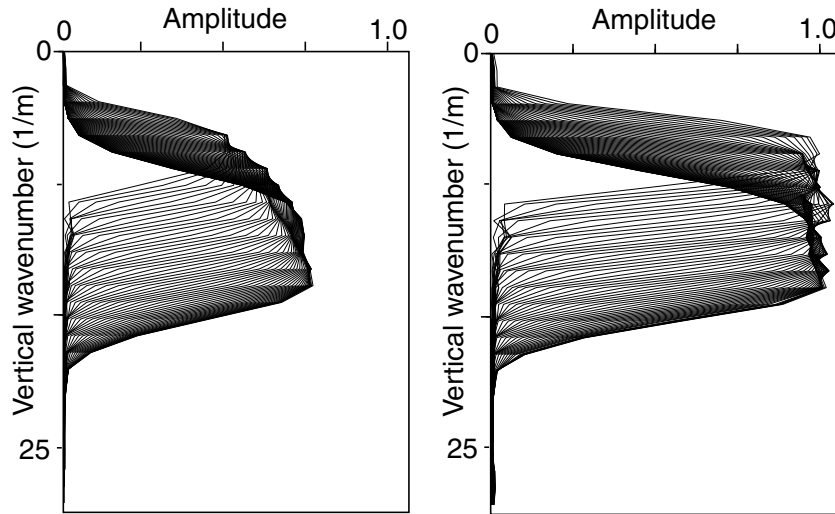


FIG. 3.36 – Migration dans un milieu à gradient de vitesse constant. Gauche : Spectre de l'ADCIG obtenu en utilisant un propagateur phase shift classique ; Droite : Spectre de l'ADCIG obtenu en utilisant un propagateur phase shift modifié. Chaque courbe correspond à un angle d'incidence.

étendue par rapport aux cas homogènes. Cependant, lorsque la fenêtre est trop large en offset, les différents événements risquent de se superposer.

Pour faire une analyse AVA²⁰ des amplitudes, il est nécessaire de corriger les ADCIGs de la Figure (3.38, bas) par la fonction stretch. Figure (3.39) montre les amplitudes des coefficients de réflexion. On remarque que l'utilisation d'un propagateur modifié permet de restituer des amplitudes constantes à l'intérieur d'un certain domaine. Comme précédemment, ce domaine est lié à

²⁰ Amplitude Versus Angle

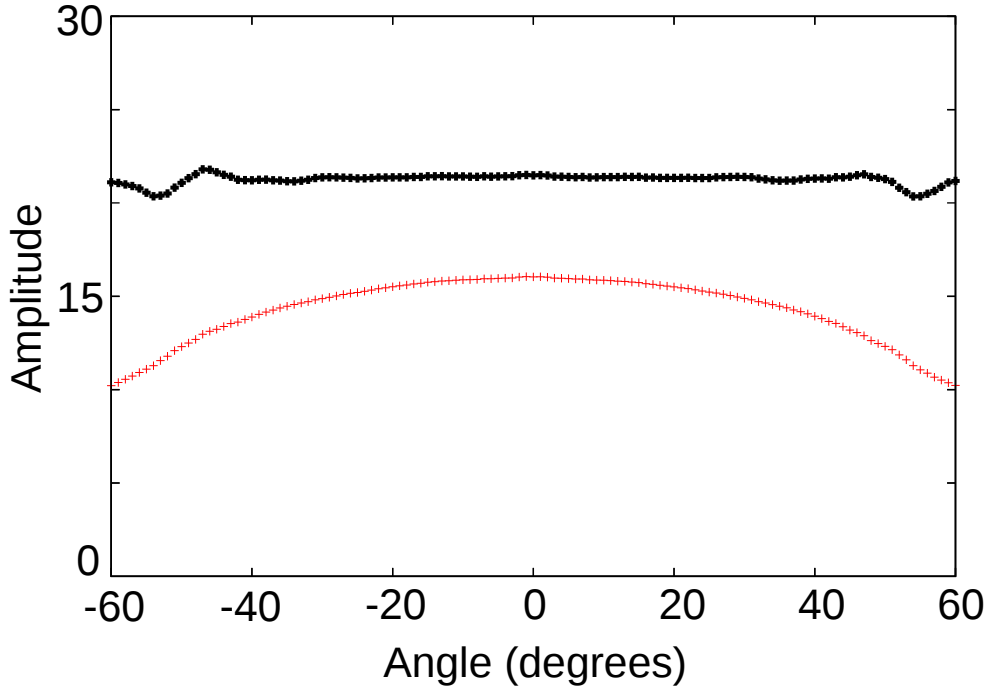


FIG. 3.37 – Réflecteur plan dans un milieu à gradient de vitesse constant. Amplitudes pointées sur l'ADCIG corrigé de la fonction stretch. Les amplitudes n'ont pas été normalisées par l'amplitude de l'ondelette (voir Figure 3.17). Rouge : les amplitudes sont obtenues en utilisant un propagateur phase shift classique pour la migration ; Noire : le propagateur utilisé est un opérateur phase shift modifié..

l'illumination du réflecteur. Notons que l'amplitude restituée n'est pas unitaire car elle n'a pas été normalisée par l'amplitude de l'ondelette source (cf. Figure 3.17). Ici aussi, les réflectivités sont bien imagées, et même pour de plus grands angles d'incidence car l'ouverture maximale est, dans le cas d'un gradient vertical, plus grande du fait de la courbure des rais.

3.4.4 Milieu à gradient oblique

Cette section a pour objectif de valider notre migration quantitative dans le cas où la vitesse varie verticalement et latéralement. Nous avons considéré le même modèle 2D que dans le gradient vertical de vitesse constant mais cette fois calculé dans un milieu de vitesse gradient oblique égale à $v(x, z) = 1500 + 0.36x + 0.36z$ (Figure (3.40)). Comme précédemment, les données synthétiques ont été calculées en utilisant un formalisme Rai+Kirchhoff 2D.

Étudions maintenant les amplitudes obtenues après notre migration quantitative pour un CIG en $x = 4.2$ km. Le propagateur utilisé pour la migration est un propagateur paraxial quantitatif à l'ordre 9. La Figure (3.41) montre que les amplitudes pointées sur l'ADCIG pour chaque réflecteur après l'application du post-traitement quantitatif (somme pondérée + correction de la fonction stretch). On remarque que celles-ci sont correctement restituées pour chacun des réflecteurs à l'intérieur des limites d'illuminations.

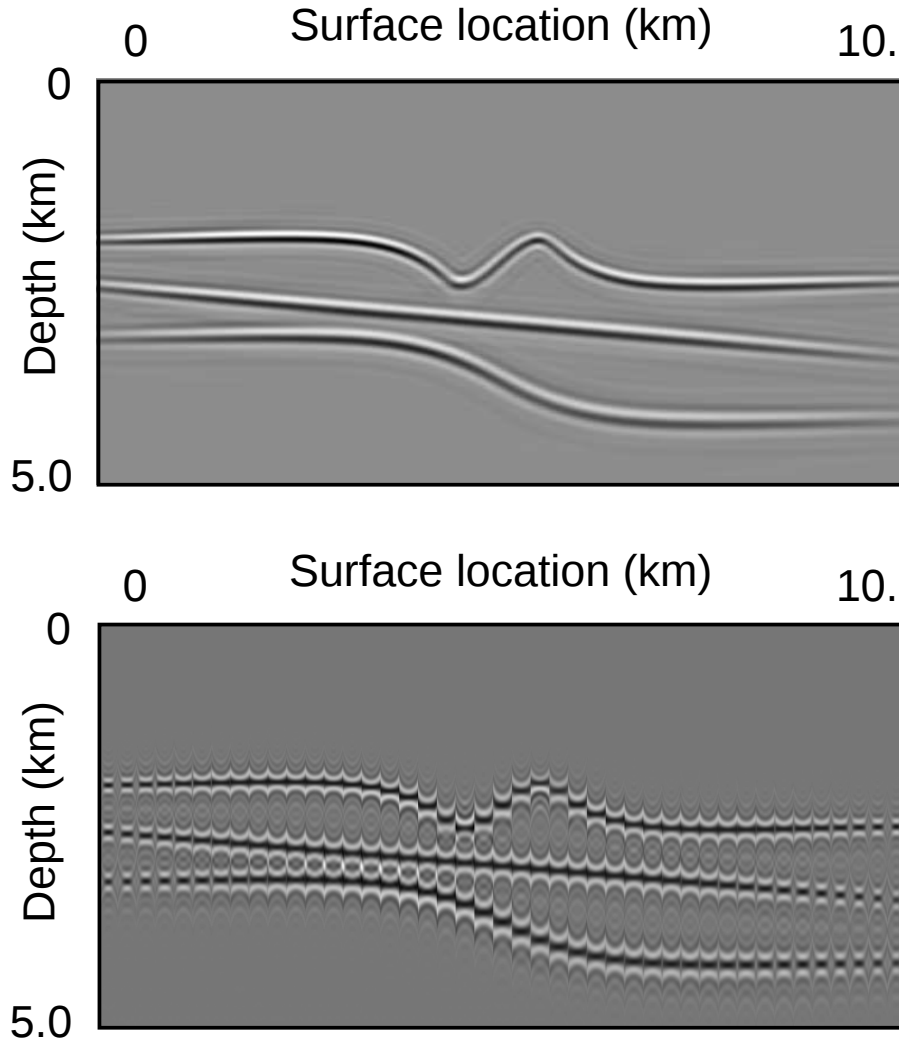


FIG. 3.38 – Migration en gradient vertical de vitesse constant. Haut : section sommée après migration obtenue en utilisant un propagateur phase shift classique ; Bas : ADCIGs obtenu en utilisant un propagateur phase shift. Chaque petite bandelette verticale est un ADCIG pour des angles d'incidence allant de -60° à 60° .

3.4.5 Données Marmousi

Pour valider le principe d'imagerie quantitatif par extrapolation de champ d'onde permettant de restituer la perturbation d'impédance acoustique en fonction de l'angle d'incidence, nous présentons les résultats obtenus dans le cas d'un jeu de données synthétiques complexes. Le jeu de données sélectionné est celui de Marmousi (Bourgeois et al. (1991)) organisé en 96 sections en offsets communs de 240 traces chacune. Cette simulation a été construite à partir d'un modèle structural et lithologique inspiré d'un cas réel et en utilisant la solution complète fournie par l'équation d'onde (calculée par différence finies). Le champ de vitesse associé (Figure 3.42 en haut) présente des structures particulièrement complexes caractérisées par de forts contrastes latéraux de vitesse. Nous comparerons nos résultats avec la perturbation relative d'impédance exacte (Figure 3.42 en

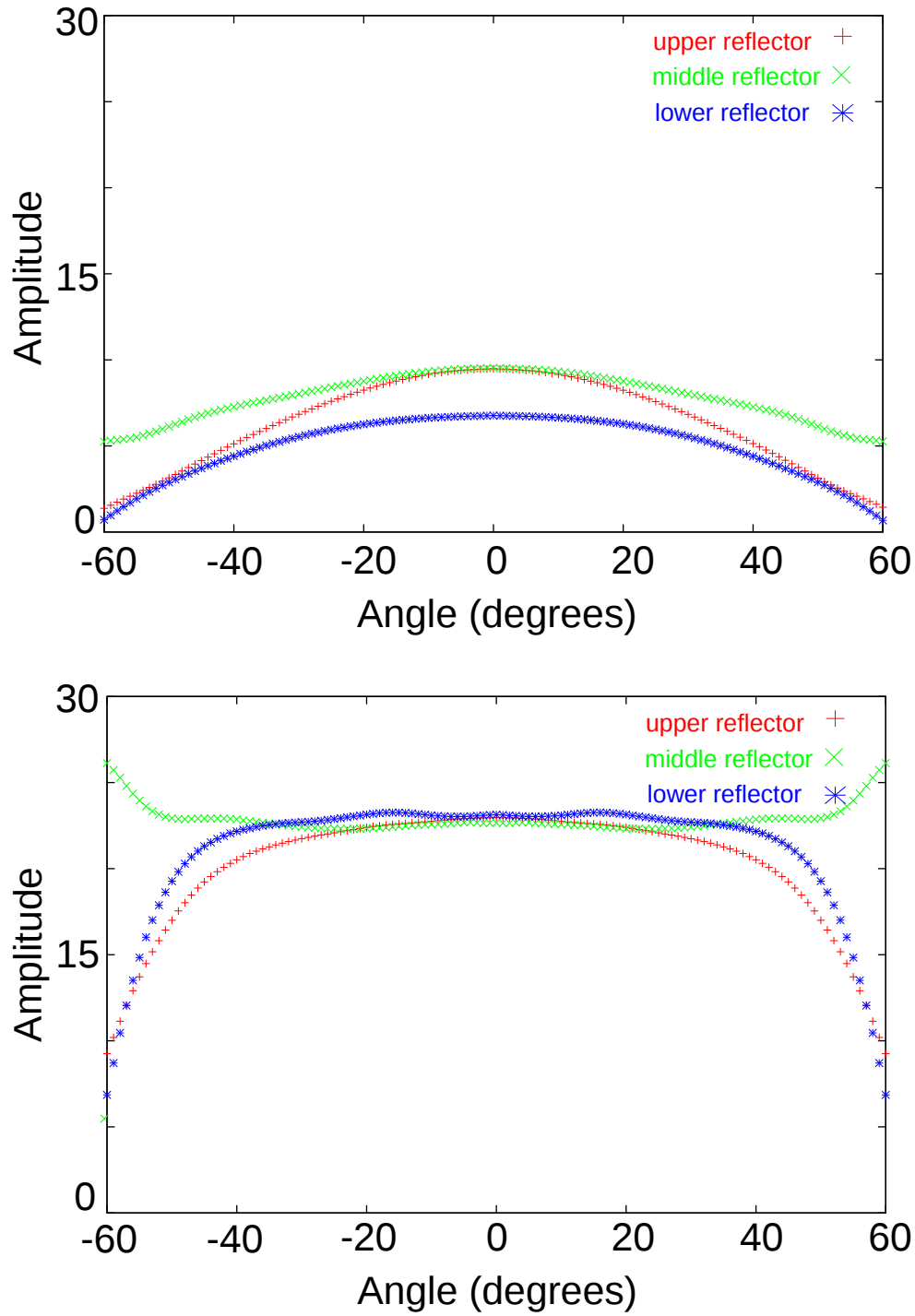


FIG. 3.39 – Amplitude du coefficient de réflexion en milieu à gradient vertical constant. Amplitudes pointées sur l'ADCIG corrigé de la fonction stretch. L'ADCIG est localisé dans la zone complexe du modèle en $x = 4.2$ km. Les amplitudes ne sont pas normalisées par l'amplitude de l'ondelette ; Haut : les amplitudes sont obtenues en utilisant un propagateur phase shift classique pour la migration ; Bas : le propagateur utilisé est un opérateur phase shift modifié.

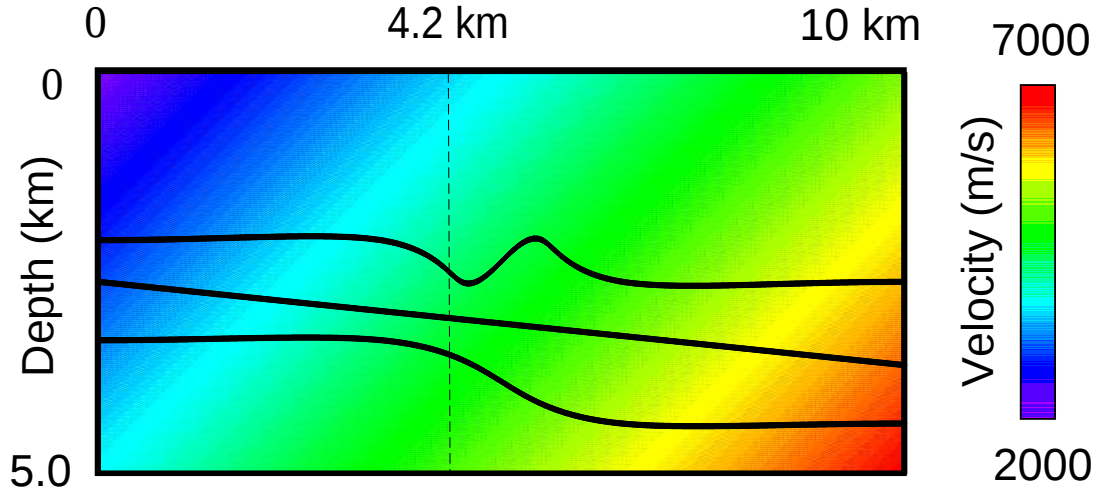


FIG. 3.40 – Le modèle est composé par 3 réflecteurs courbes et par un gradient oblique de vitesse égale à $v(x, z) = 1500 + 0.36x + 0.36z$.

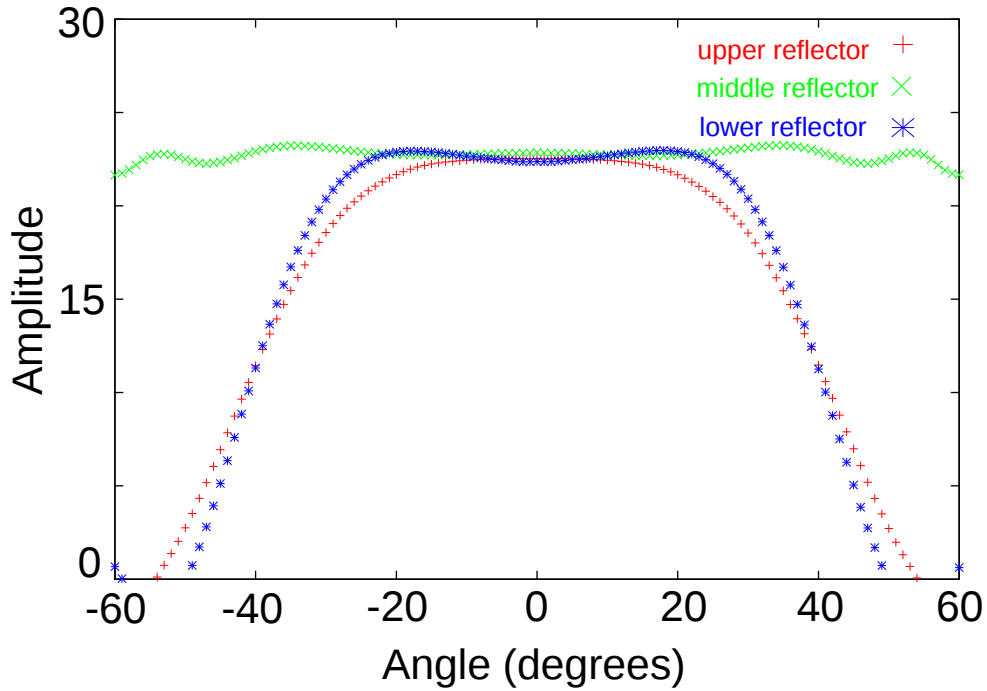


FIG. 3.41 – Amplitude du coefficient de réflexion en milieu de vitesse à gradient oblique constant. La Figure représente les amplitudes pointées sur chaque réflecteur de l'ADCIG corrigé de la fonction stretch. L'ADCIG est localisé dans la zone complexe du modèle en $x = 4.2$ km. Les amplitudes ne sont pas normalisées par l'amplitude de l'ondelette ; Le propagateur utilisée pour la migration est un propagateur paraxial (ordre 9).

bas). Celle-ci est obtenue en calculant l'erreur relative entre l'impédance du modèle exacte (ρv) et l'impédance du modèle lisse ($\rho_s v_s$), tel que :

$$\frac{\delta I}{I_0} = \frac{\rho v - \rho_s v_s}{\rho_s v_s} \quad (3.85)$$

où $\frac{\delta I}{I_0}$ est la perturbation relative d'impédance. Afin de comparer notre méthode avec les méthodes de migration quantitatives classiques, nous comparerons nos résultats avec ceux obtenus par Xu et al. (2001) en utilisant une migration multi-arrivée quantitative Rai+Born. Pour que la comparaison soit la plus complète possible, nous utiliserons le même modèle de vitesse lisse (Thierry et al. (1999)) pour faire de la propagation (Figure 3.42 au milieu).

La migration par extrapolation de champ d'onde nous donne la section sommée présentée sur la Figure (3.43 au milieu) que nous pouvons comparer avec la perturbation relative d'impédance exacte filtrée par la bande passante de la source (Figure 3.43 en haut). Ce filtrage est soumis à une hypothèse de propagation verticale. On remarque que les structures sont bien restituées sur l'ensemble du modèle. Focalisons-nous maintenant sur les aspects quantitatifs et considérons une position latérale fixée $x = 6200$ m dans une zone complexe du modèle. La section point image dans le domaine des offsets (Figure 3.44 à gauche) obtenue est ensuite convertie dans le domaine des angles par notre slant stack pondéré (Figure 3.44 à droite). Cette section dans le domaine des angles peut être ensuite comparée avec celle obtenue par Xu et al. (2001); Operto et al. (2000); Xu et al. (2001) avec une migration multi-arrivée quantitative Rai+Born (Figure 3.45). On remarque que les deux sections en angle sont similaires et présentent des événements relativement plats. Cependant, la section obtenue par extrapolation du champ d'onde est plus propre et plus claire avec des événements plus continus particulièrement dans la partie profondeur du modèle. De plus, comme attendu par Stolk and Symes (2002) (Stolk and Symes (2004)), les artéfacts cinématiques (Figure 3.45 en bas pour une profondeur d'environ 1.7 km) ont été éliminés par la migration par extrapolation de champ d'onde. En effet, le formalisme de Kirchhoff construit des images migrées en offset ou en angle à partir des données de surface et ne permet pas de prendre en compte correctement (c'est-à-dire de manière constructive) les arrivées multiples lors de l'application du principe d'imagerie dans le cas de milieux complexes. Dans ce cas, des artéfacts cinématiques apparaissent même lorsque le modèle de vitesse utilisé est exacte. En revanche, l'extrapolation du champ d'onde par survey-sinking recombine correctement l'information à chaque profondeur sur les différents offsets et permet ainsi de prendre en compte au moment de la propagation les arrivées multiples (cette fois-ci la sommation est constructive). Cependant, la migration par équation d'onde ne permet pas d'avoir accès à la couverture angulaire maximale (angle de réflexion min et max). Et la propagation par équation d'onde lisse les limites d'illumination (les bords).

Comparons maintenant, pour une position latérale donnée dans une partie complexe du modèle (en $x = 6.2$ km), la perturbation relative d'impédance exacte (Figure (3.42) en bas) avec celle obtenue par migration. On remarque que l'utilisation d'un extrapolateur quantitatif et d'un principe d'imagerie quantitatif (Figure (3.46) au milieu) permet d'améliorer considérablement les résultats par rapport à une migration par équation d'onde classique (Figure (3.46) en haut). Ceci est particulièrement vrai dans la partie profondeur du modèle. Si nous comparons ces résultats avec ceux obtenus par une migration quantitative Rai+Born multi-arrivées, on remarque qu'ils sont assez comparables. Cependant, l'utilisation de la migration par équation d'onde a permis d'éliminer les artéfacts asymptotiques hautes fréquences (Stolk and Symes (2004) qui se caractérisent par des petits pics d'amplitude (cf. courbe noire de la Figure (3.46) en bas)).

Enfin, un avantage considérable de la migration par équation d'onde par rapport à l'approche de Kirchhoff est la possibilité d'utiliser un modèle blocky, c'est-à-dire un modèle de vitesse caractérisé par de fortes discontinuités de vitesse. On peut remarquer que l'image migrée quantitative obtenue avec le modèle de vitesse bloky (Figure 3.43 en bas) améliore la localisation et la continuité des interfaces.

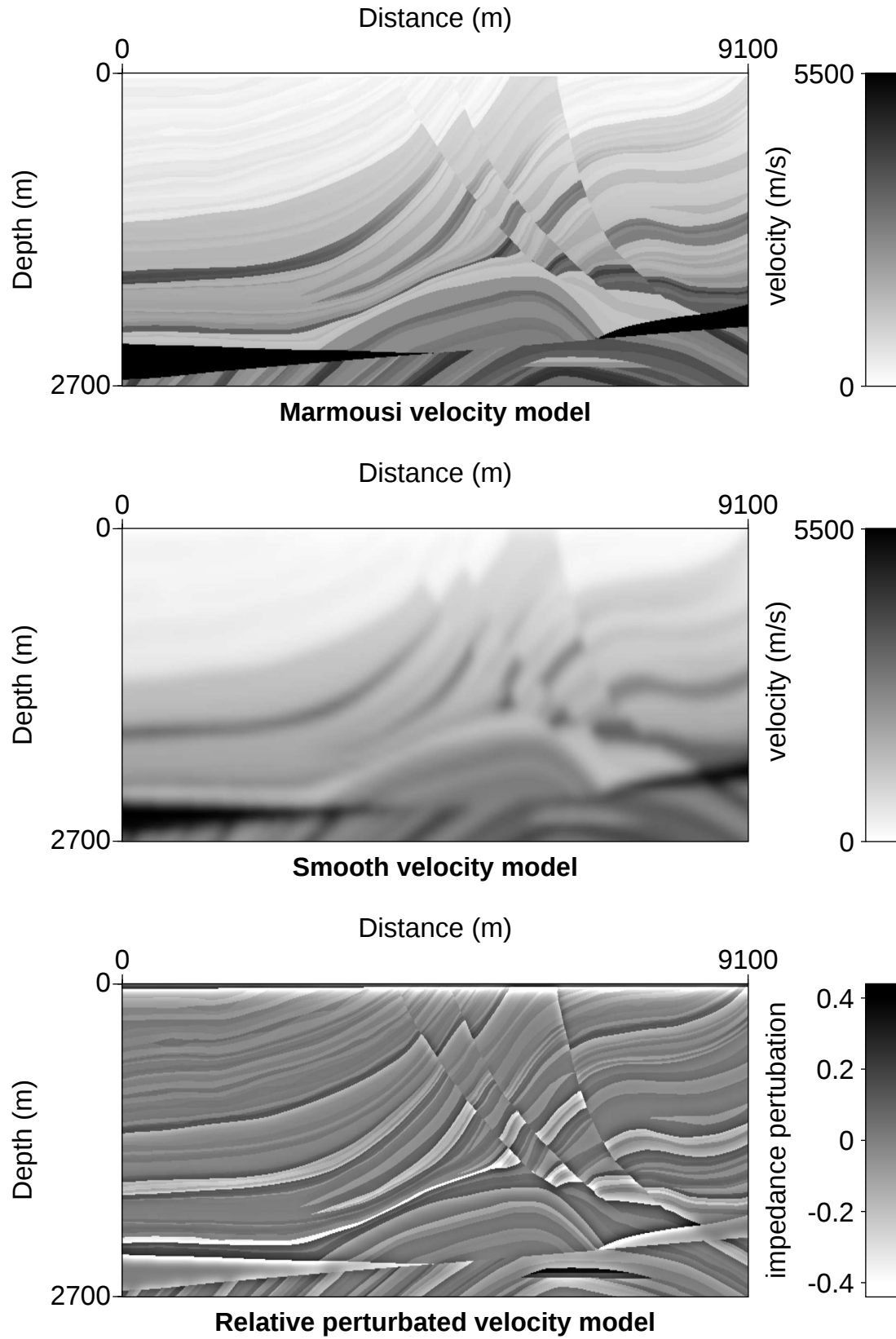


FIG. 3.42 – *Modèle Marmousi. Haut : modèle de vitesse exact; Milieu : modèle de vitesse lissé par une gaussienne de rayon 76 m; Bas : Modèle de perturbation exacte.*

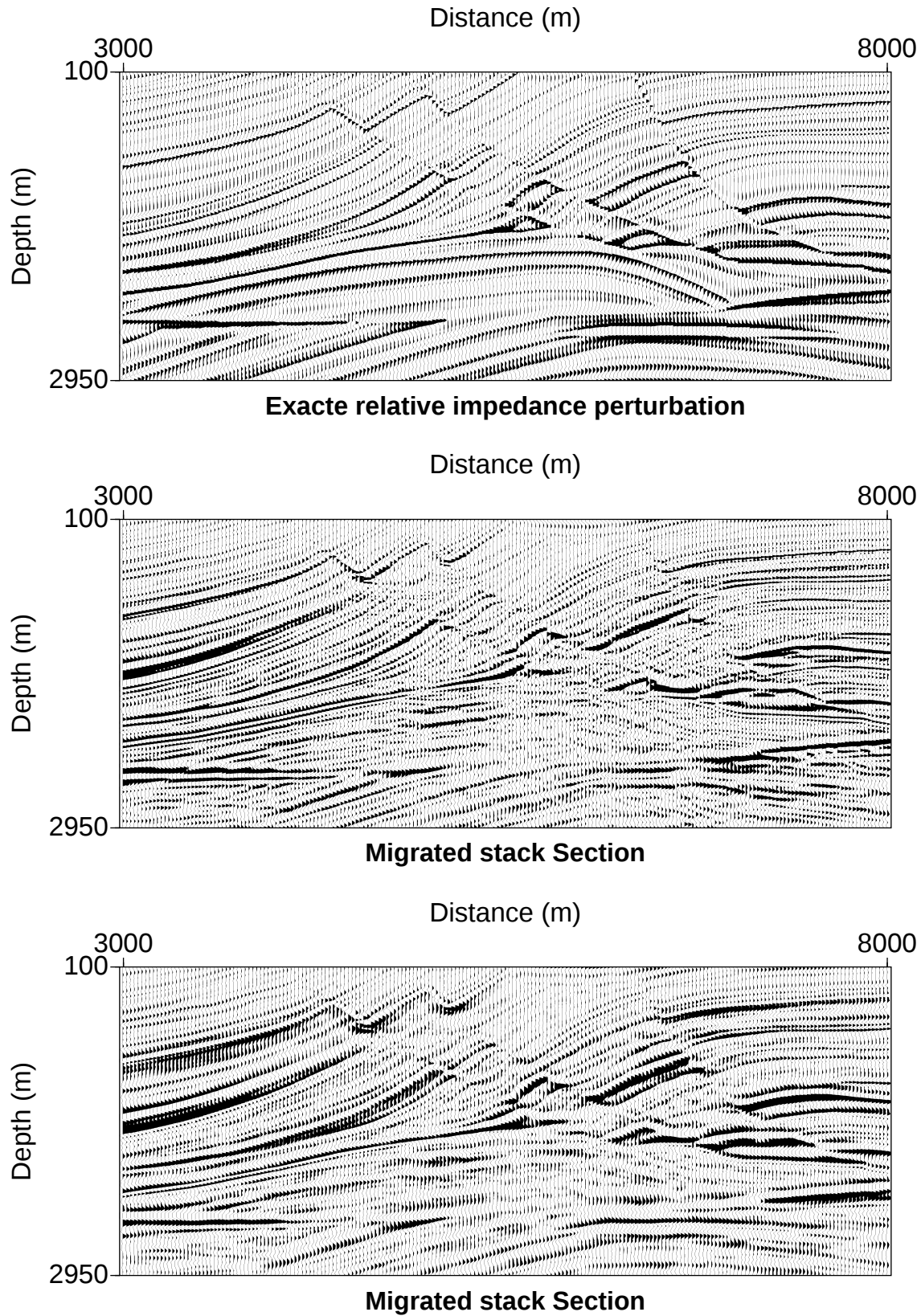


FIG. 3.43 – Haut : perturbation relative d'impédance exacte. Le modèle de perturbation a été filtré en accord avec la bande de fréquence de la signature de la source. Milieu : Perturbation relative d'impédance obtenue avec la migration équation d'onde par différences finies et avec le macro modèle de vitesse de la Figure (3.42) ; Bas : Perturbation relative d'impédance obtenue avec la migration équation d'onde par différences finies et avec le modèle de vitesse exacte (3.42).

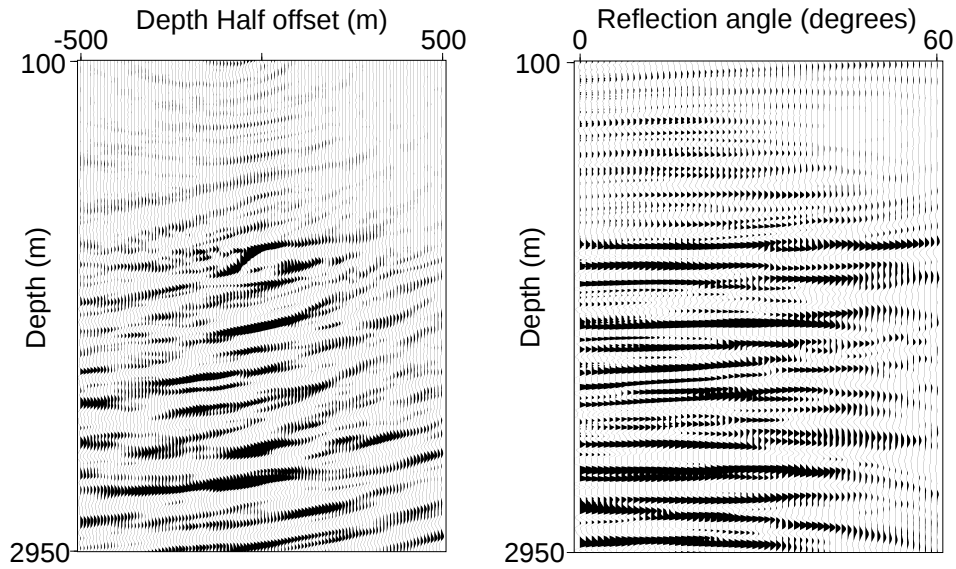


FIG. 3.44 – À gauche : CIG en offset et à droite CIG en angle dans une partie complexe du modèle Marmousi ($x=6200$ m). Le passage du ODCIG au ADCIG se fait par l'application de la conversion en angle en amplitude préservée. Le ADCIG est représenté en perturbation relative d'impédance.

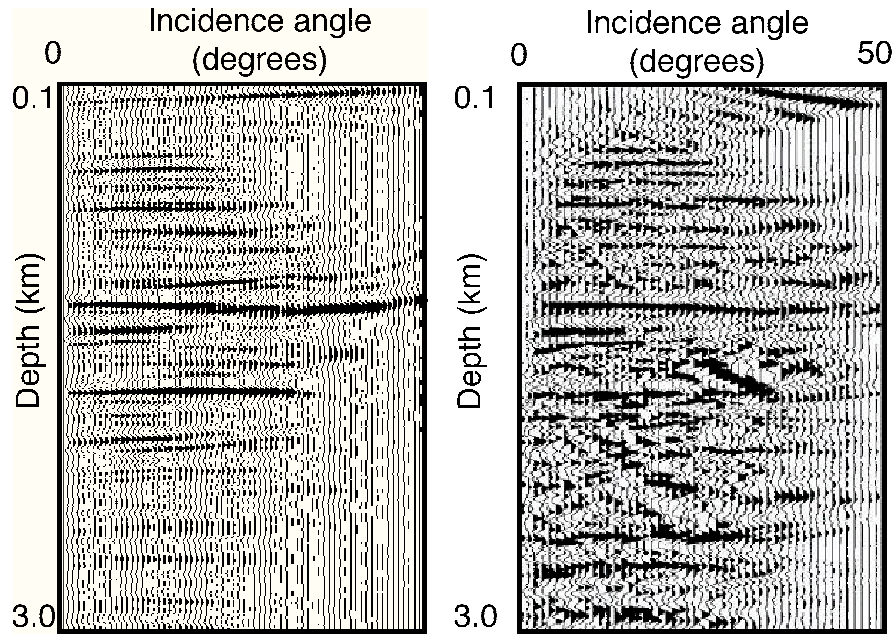


FIG. 3.45 – ADCIG obtenu dans une partie complexe du modèle ($x=6200$ m). Droite : avec une migration quantitative par équation d'onde. Gauche : avec une migration quantitative multi-arrivée Rai+Born (Xu et al, 2001).

3.4.6 Application aux données réelles

La zone d'étude est localisée dans région d'Alberta au Canada. Cette zone qui est structuralement peu complexe, est composée par un empilement successifs de 5 unités lithologiques. Les réservoirs (cibles) sont des lentilles de dolomie localisée entre 700 et 1000 m de profondeur. Une première étude, réalisée sur des données sismiques synthétiques, a analysé l'influence du gaz dans des lentilles poreuses. Celle-ci a montré que ces lentilles sont caractérisées par des zones de faibles impédances induites par une forte porosité et la présence de gaz à l'intérieur des couches de fortes impédances. La conclusion de l'étude est que les lentilles dont l'épaisseur est supérieure à 10 m peuvent être détectées. Cependant, la détection devient difficile pour des lentilles de seulement quelques mètres et ceci en raison de la bande de fréquence de la sismique (limitée à environ $70Hz$). Aujourd'hui, l'objectif de la nouvelle étude est de savoir si la migration quantitative d'obtenir des amplitudes sismiques pouvant être associées à des variations d'impédances réelles.

L'étude se décompose en deux étapes : tout d'abord un migration quantitative par extrapolation de champ d'onde des données puis une inversion stratigraphique de la section obtenue. Les données disponibles sont un jeu de données 2D et une mesure de la vitesse dans un puits à proximité de la ligne sismique. Les données sismiques sont des données composées par 48 tirs espacés irrégulièrement. Chaque tir comporte environ 177 récepteurs espacés de 16m (Figure 3.47, haut). Afin de préserver au maximum l'amplitude des données sismiques, le seul prétraitement effectué est une correction statique. Pour l'étape de migration, les données ne sont pas filtrées des ondes directes et du ground roll (Figure 3.47, haut). Le modèle de vitesse pour la migration a été réalisé à partir des mesures de puits. Supposant que les vitesses ne varient pas trop latéralement, la vitesse verticale est étendue latéralement (Figure 3.47, bas).

La migration est réalisée sur un intervalle fréquence $[0; 90Hz]$. On espère que les hautes fréquences nous permettent de mettre en évidence les petites perturbations d'impédance (lentilles). La grille d'extrapolation (x, z) est (16, 5) m et l'extrapolateur utilisé est un extrapolateur phase shift modifié (justifié par le modèle de vitesse 1D).

La figure (3.48, haut) représente le coefficient de réflexion obtenu après migration. On remarque que les données sont bruitées en raison d'un rapport signal sur bruit faible. La sommation sur l'ensemble des angles d'incidences (3.48, bas) améliore nettement les résultats. Cependant, d'un point de vue quantitatif cette sommation n'est pas pertinente car les coefficients de réflexion varient avec l'angle d'incidence. Une alternative est d'utiliser le principe d'imagerie de Born pour restituer directement la perturbation d'impédance. Dans le cas d'un milieu acoustique, celle-ci est redondante avec l'angles d'incidence et la sommation s'avère alors pertinente (Figure 3.49).

La seconde étape est l'inversion stratigraphique après sommation 2D (interwell) de la section migrée ($R(\theta = 0)$). La figure (3.50) présente une inversion stratigraphique (partie réservoir) obtenue à partir section migrée quantitativement par équation d'onde.

3.5 Conclusions et perspectives

Sur le plan théorique, deux principes d'imagerie ont été proposés pour la migration par extrapolation de champ d'onde. Le premier est sur le principe de Kirchhoff. Il permet de restituer

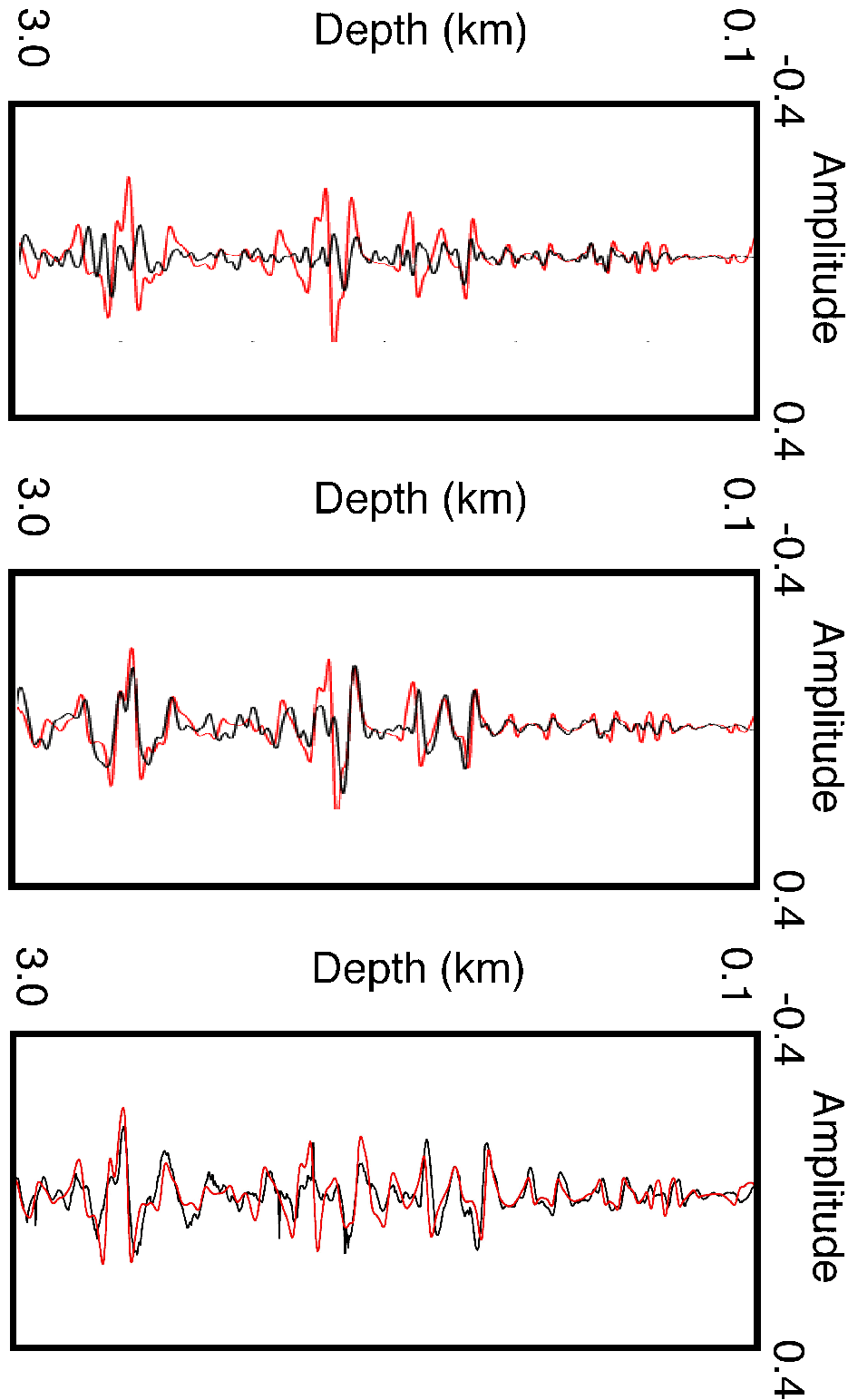


FIG. 3.46 – Comparaison des trois sections 1D de perturbation relative d'impédance $\delta I/I_0$ obtenue avec trois méthodes différentes pour une position latérale $x=6200$ m. Haut : migration par extrapolation de champ d'onde classique (propagateur "one way" + principe d'imagerie classique + conversion cinématique en classe d'angle + sommation des contributions pour les angles $[10-30^\circ]$). Milieu : migration par extrapolation de champ d'onde quantitative (propagateur "one way" modifié + principe d'imagerie "Born" + conversion en angle quantitative + sommation des contributions pour les angles $[10-30^\circ]$). Bas : migration multi-arrivée Rai + Born quantitative en angle.

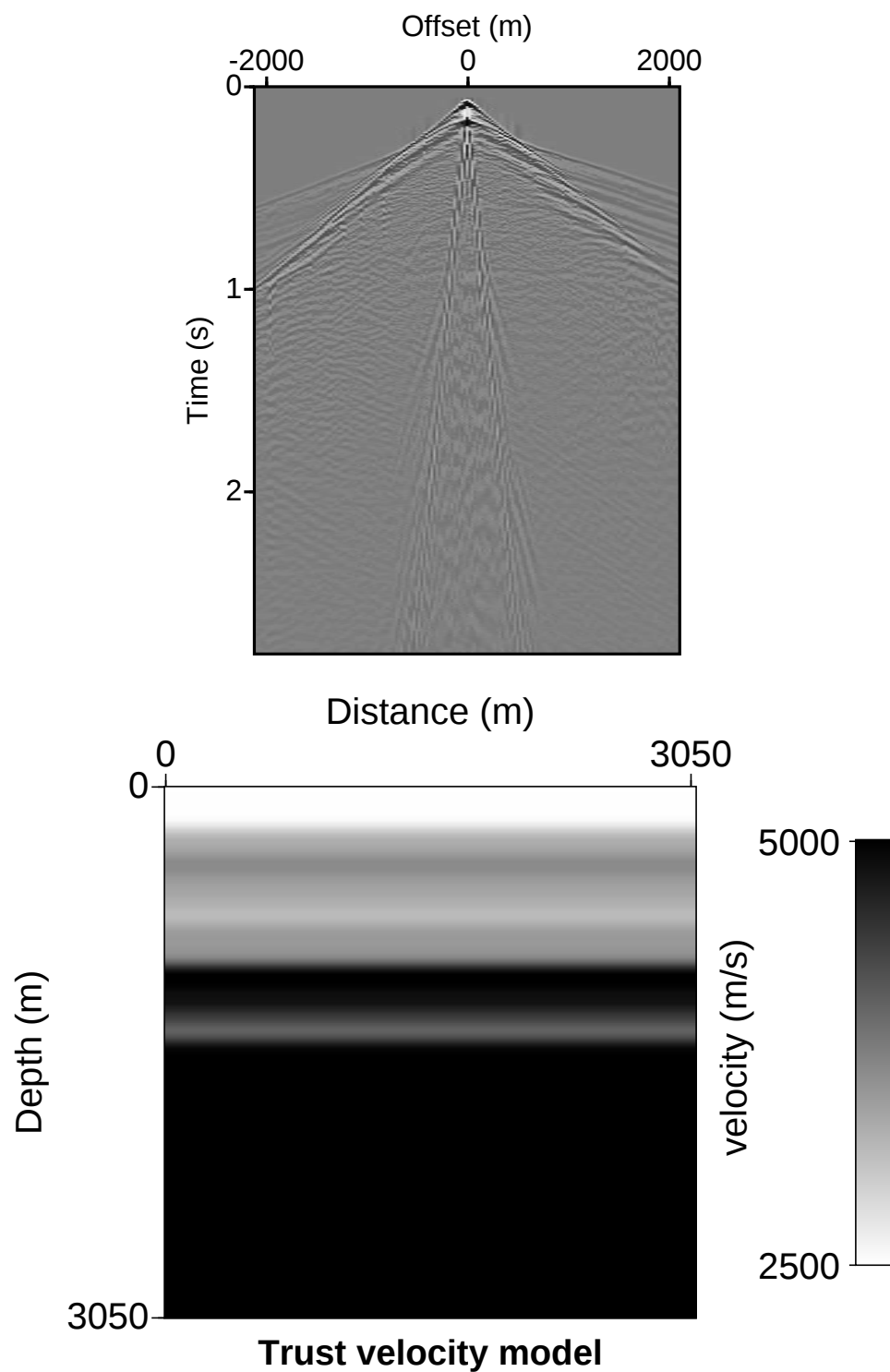


FIG. 3.47 – Données en entrée. Haut : point un point de tir. On remarque que les données sismique contiennent plusieurs types d'onde (ondes directes, réfléchies, évanescentes) ; Bas : Modèle de vitesse utilisé pour la migration.

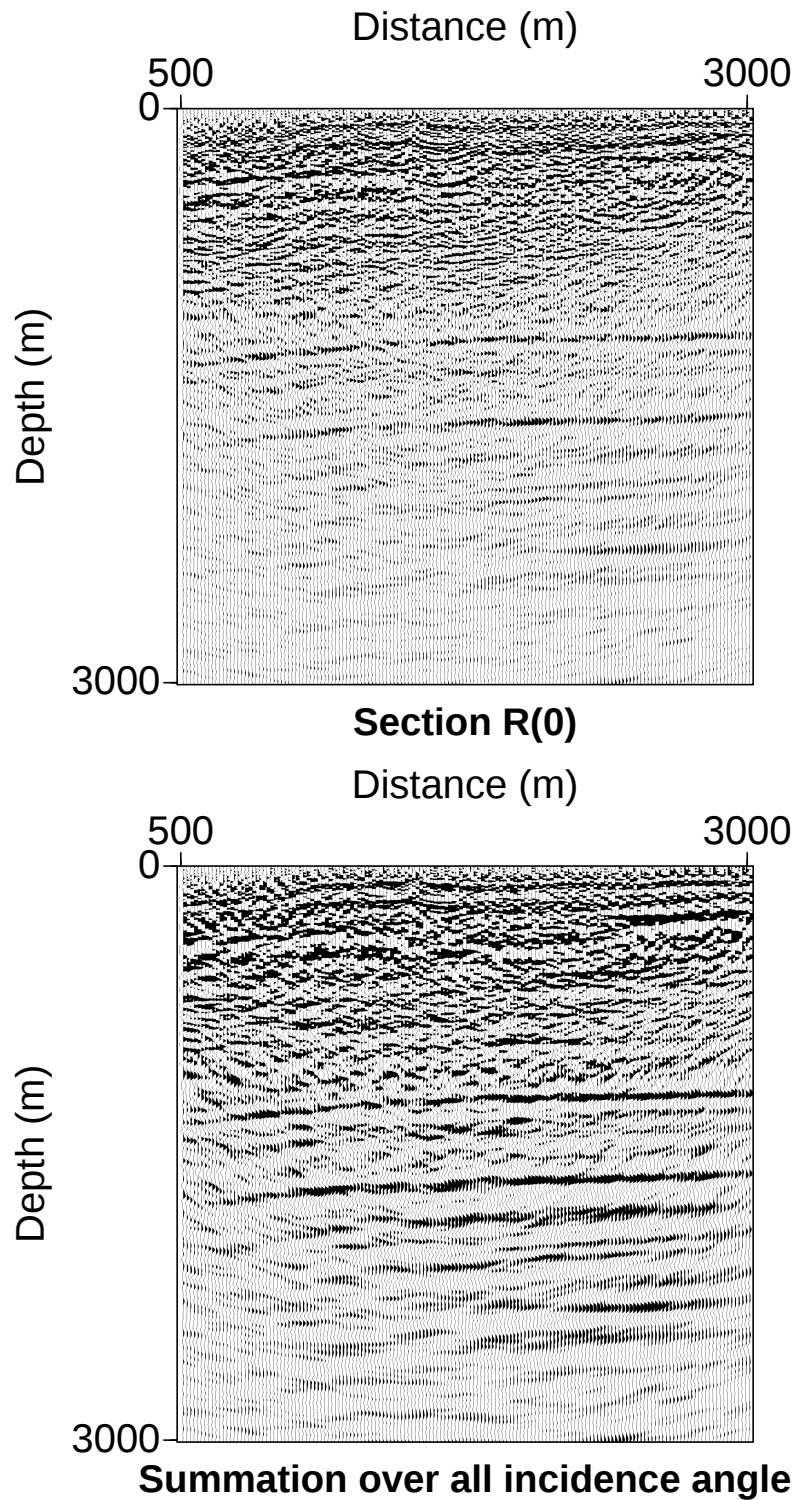


FIG. 3.48 – Données migrées quantitativement par équation d'onde. (principe d'imagerie de Kirchhoff) Haut : coefficient de réflexion migré à incidence nulle ; Bas : sommation des coefficients de réflexion migrés pour tous les angles.

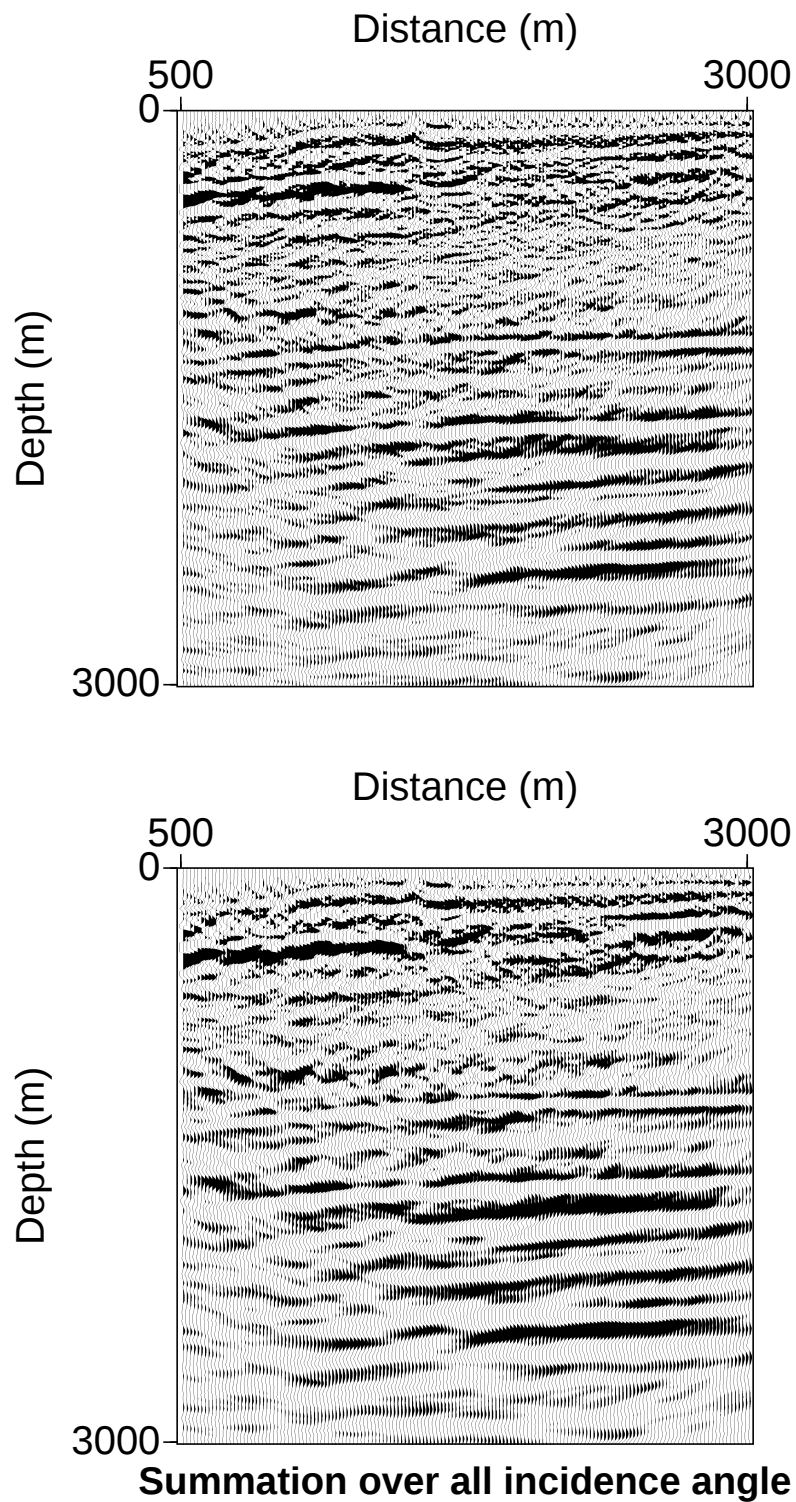


FIG. 3.49 – Données migrées quantitativement par équation d'onde (principe d'imagerie de Born).
 Haut : perturbation relative d'impédance migrée à incidence nulle ; Bas : sommation des perturbations relatives d'impédance migrées pour tous les angles.

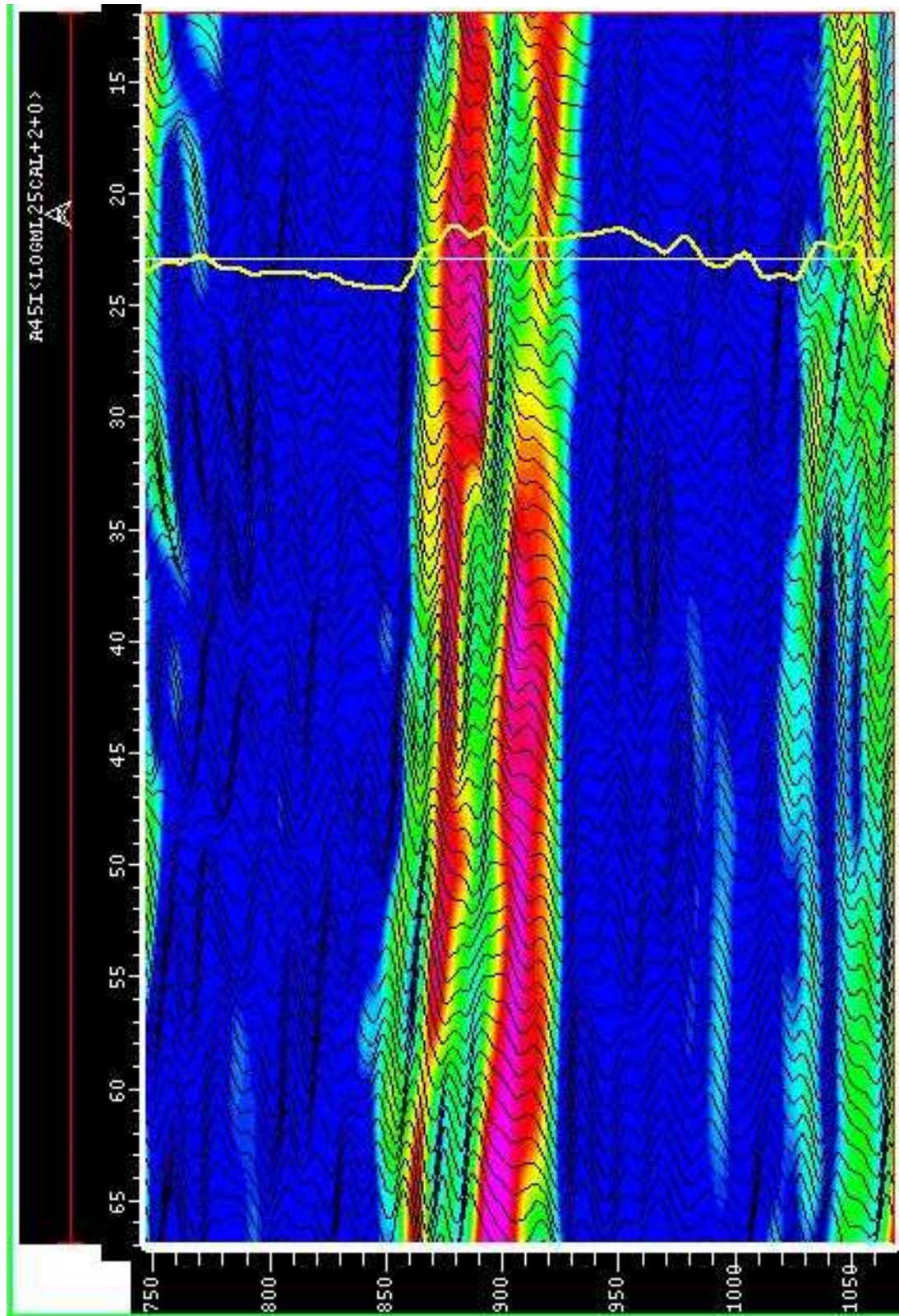


FIG. 3.50 – Inversion stratigraphique à partir des données migrées quantitativement par extrapolation de champ d'onde.

la distribution de coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence avec une migration par extrapolation de champ d'onde. Le deuxième est le principe d'imagerie de Born. C'est une extension directe du travail réalisé sur Kirchhoff. Il restitue la perturbation d'impédance dans le domaine des angles.

Sur le plan numérique, des tests numériques 2D ont été menés et ont permis de valider les deux principes d'imagerie dans le cas de milieux variant latéralement et verticalement. Un exemple synthétique réaliste (le modèle Marmousi) a permis de comparer la migration quantitative par extrapolation de champ d'onde avec la technique classique d'imagerie par tracé de rayons (Rai + Born multi-arrivées quantitative). Cet exemple a montré que l'utilisation de la migration par extrapolation de champ d'onde permet d'éviter les artefacts asymptotiques hautes fréquences inhérents à la théorie des rais. De plus, les images migrées ainsi obtenues sont moins bruitées (effet de filtrage/lissage de l'extrapolation par équation d'onde). En revanche, cet effet de lissage a probablement une influence sur les amplitudes obtenues et contrairement à la migration par tracé de rayon pour laquelle la couverture (angle minimum et maximum) des angles d'incidence est accessible, elle n'est pas accessible avec la migration par extrapolation de champ d'onde. Un avantage de la migration par extrapolation de champ d'onde quantitative par rapport à la migration Rai+Kirchhoff est qu'elle peut être mise en oeuvre dans le cas de milieux blocky caractérisés par de fortes variations latérales de vitesse. Une étude quantitative sur des données réelles 2D a également été réalisée. Le coût numérique de la migration quantitative dépend de principalement de l'extrapolateur utilisé pour modéliser la propagation des ondes (entre 1.1 et 5 fois plus qu'une migration par extrapolation d'onde classique).

De nombreux travaux restent à faire. À court terme, une étude sur la sensibilité de notre approche lorsque le modèle de vitesse n'est plus bon doit être menée. Les "limites" de la migration par extrapolation (effets de lissage par la propagation, accès à l'illumination) doivent également être analysées. À plus long terme, l'extension de la formule d'imagerie au cas 3D doit être également étudié.

Chapitre 4

Conclusion générale

4.1 Les objectifs

L'accroissement de la demande et le manque de ressources pétrolières poussent les compagnies pétrolières à explorer des zones géologiques plus profondes et plus complexes. Pour y parvenir et réduire les risques financiers associés, elles nécessitent des techniques d'imagerie quantitatives adaptées.

La migration profondeur avant sommation est un outil essentiel pour l'imagerie sismique du sous-sol. La migration par équation d'onde s'est imposée comme la meilleure approche pour imager les milieux complexes. Néanmoins, cette méthode n'est pas encore utilisée pour une imagerie dite en amplitude préservée. Mon sujet de thèse visait à examiner les possibilités d'adaptation de la migration par équation d'onde pour produire des images du sous-sol en amplitude préservée.

4.2 Le travail réalisé

Dans le domaine de la préservation d'amplitude en migration par équation d'onde, une première analyse du problème m'a conduit à le décomposer en deux principales voies d'investigation :

- la préservation de l'amplitude dans l'approximation "one-way" paraxiale ;
- la préservation de l'amplitude dans le principe d'imagerie.

Sur le plan de la propagation quantitative, j'ai modifié l'extrapolateur paraxial en accord avec les développements récents introduit par Zhang (1993); Zhang et al. (2001); Zhang et al. (2002); Zhang et al. (2003) pour le rendre quantitatif en milieux hétérogènes. Nous avons testé numériquement l'extrapolateur paraxial modifié dans le cas de milieux de complexités croissantes. Dans le cas de variations lisses du modèle de vitesse, l'extrapolateur modifié présente des erreurs sur les amplitudes satisfaisantes ($< 1\%$). Dans le cas des milieux blocky horizontaux, il permet de prendre en compte un coefficient de transmission linéarisé lorsque l'onde traverse l'interface. Cependant, le coût des opérateurs paraxiaux quantitatifs est assez élevé en raison du nombre de fractions nécessaires pour obtenir un grand angle d'ouverture. Pour envisager un passage en 3D, nous avons tenté d'améliorer le domaine quantitatif de validité en optimisant les coefficients paraxiaux. Mal-

heureusement, les améliorations obtenues ne sont pas significatives. Une amélioration possible est de s'autoriser un seuil d'erreur plus grand en amplitude ($>1\%$) pour augmenter artificiellement le domaine de validité. Une autre amélioration possible est l'utilisation des opérateurs mixtes qui fournissent une solution exacte pour de grands angles d'incidences lorsque les variations latérales de vitesse sont douces.

Sur le plan de l'imagerie quantitative, j'ai choisi l'approche directe de l'inversion linéarisée (Forgues (1996)) dont l'avantage est d'être relativement rapide par rapport aux méthodes itératives (Kiyashchenko and Plessix (2004)). La partie la plus originale de mon travail est sans doute la formulation quantitative du principe d'imagerie par extrapolation de champ d'onde. Après extrapolation du champ d'onde, une formule explicite liant le modèle aux données peut être établie dans le domaine des angles. Je propose deux principes d'imagerie quantitatifs pour la migration par extrapolation de champ d'onde. Le premier permet de restituer la distribution de coefficients de réflexion en fonction de l'angle d'incidence (Kirchhoff) (Joncour et al. (2005b); Joncour et al. (2005a)). Le deuxième restitue la perturbation d'impédance dans le domaine des angles (Born). Des tests numériques 2D ont été menés et ont permis de valider les deux principes d'imagerie dans le cas de milieux variant latéralement et verticalement. Dans l'exemple synthétique réaliste (le modèle Marmousi), j'ai comparé la migration quantitative par extrapolation de champ d'onde avec la technique classique d'imagerie par tracé de rayon (Rai + Born multi-arrivées quantitative). Cet exemple a montré que l'utilisation de la migration par extrapolation de champ d'onde permet d'éviter les artéfacts asymptotiques hautes fréquences inhérente à la théorie des rais (Stolk and Symes (2002); Stolk and Symes (2004)). De plus, les images migrées obtenues sont moins bruitées (effet de filtrage/lissage de l'extrapolation par équation d'onde). Enfin, une étude quantitative sur des données réelles 2D a permis de tester l'approche dans le cadre d'une chaîne de traitement quantitative (jusqu'à l'inversion stratigraphique).

4.3 Perspectives

L'ensemble de ces considérations laissent entrevoir de nombreuses prolongations de mes travaux tant au niveau de la propagation qu'au niveau de l'imagerie.

Au niveau de la propagation quantitative par équation d'onde "one way", un effort doit être réalisé pour améliorer le domaine de validité quantitatif de l'approximation paraxial pour de petits ordres d'approximation. L'utilisation de méthodes mixtes constitue une solution possible et partielle limitant l'extrapolateur aux milieux de vitesse variant lentement. Dans le cas 2D, l'utilisation d'un propagateur "two way" peut être envisagée.

Au niveau de l'imagerie par extrapolation de champ d'onde, la sensibilité de l'approche doit être analysée dans le cas d'acquisition incomplète, où lorsque des erreurs importantes sur le macro-modèle de vitesse sont faites. Par exemple, que deviennent les aspects quantitatifs lorsque le point image est mal focalisé et mal positionné (vitesse incorrecte)? Enfin, pour l'étude des amplitudes en fonction de l'angle d'incidence, des solutions doivent être apportées pour avoir accès à la couverture d'angle d'incidence associée à la migration par extrapolation de champ d'onde.

Tous les résultats que je présente sont issus du problème acoustique 2D. L'extension de l'approche en 3D constitue une étape supplémentaire vers une représentation réaliste du sous-sol.

L'extension à 3D par splitting des extrapolateurs paraxiaux "one way" modifiés (déjà initiée) est limitée à l'utilisation d'une seule fraction rationnelle (Collino and Joly (1995)). Cela n'est pour l'instant pas envisageable en raison de la qualité quantitative de l'extrapolateur obtenu. Enfin, l'extension en 3D du principe d'imagerie quantitatif comportent de nombreuses difficultés (Biondi and Tisserant (2004); Biondi and Symes (2004)). Les autres axes de travail sont l'introduction de l'anisotropie VTI et l'extension au cas élastique.

Annexe A

Extrapolateur paraxial stable à Coefficients variables : application aux milieux anisotropes VTI

Au cours des dix dernières années, de nombreux travaux ont montré l'importance de prendre en compte l'anisotropie. En effet, négliger l'anisotropie dans le traitement des données sismiques peut entraîner une mauvaise focalisation ou un mauvais positionnement des réflecteurs en profondeur. Plusieurs auteurs ont développé des algorithmes de migration en milieux anisotropes, principalement pour les milieux anisotropes VTI.

Ce chapitre est consacré à l'introduction de l'anisotropie VTI dans notre algorithme de migration par équations d'ondes. La première section présente les motivations à la prise en compte de l'anisotropie et le type d'anisotropie que nous allons considérer. Dans la deuxième section, nous proposons un nouvel extrapolateur stable pour des coefficients paraxiaux variables. Cette partie, rédigée en anglais, est un résumé de mon travail réalisé pour la SEG 2003. Elle a fait l'objet d'une présentation à Dallas en octobre 2003. J'ai appliqué cet opérateur dans le cas des milieux anisotropes VTI. Enfin, je l'ai testé sur un jeu de données réelles.

A.1 Isotropie transverse à axe vertical

A.1.1 Pourquoi prendre en compte l'anisotropie ?

En géophysique pétrolière, la plupart des applications classiques supposent que les milieux étudiés sont isotropes. En réalité, la plupart des milieux sédimentaires sont faiblement anisotropes (de l'ordre de 10 à 20 %), et l'utilisation de méthodes isotropes peut donc engendrer des erreurs dans le cadre d'études menées en conditions réelles. Des études montrent que le décalage des profondeurs au niveau des puits, pour un traitement isotrope, peut atteindre 10%. Par conséquent l'introduction de l'anisotropie dans le traitement sismique a une réalité économique car elle permet d'augmenter le rendement des réservoirs grâce à une meilleure connaissance de leur structure.

On peut donc se demander pourquoi l'anisotropie n'a-t-elle pas été prise en compte plus tôt ? Les raisons sont évidentes. Dans la plupart des cas, les types d'anisotropie les plus courants se comportent comme des milieux isotropes pour une propagation presque verticale : D'autre part, les équations d'ondes anisotropes sont algébriquement compliquées, et conduisent à des algorithmes plus lents qui demandent la connaissance de paramètres supplémentaires. Ces derniers étaient jusqu'à récemment très difficiles à estimer à partir des données de surface. Actuellement, grâce à de nouvelles méthodes comme la tomographie de réflexion, ces paramètres d'anisotropies deviennent accessibles. Ces nouveautés permettent aujourd'hui de prendre en compte l'anisotropie dans les chaînes de traitement classique.

D'une manière générale, l'introduction de l'anisotropie dans les algorithmes isotropes ne pose pas de problèmes majeurs. Elle fournit un paramètre de réglage physique qui permet d'assurer le calage aux puits. Ces paramètres ont des limites physiques constituées par des critères de stabilité et de vraisemblances des milieux sédimentaires (ex : $V_{vertical} > V_{horizontal}$). Dans les cas où l'anisotropie n'est pas concluante, il est toujours possible de mettre les paramètres de réglage à zéro pour faire un traitement classique.

A.1.2 Isotropy Transverse Verticale (VTI) :

Il existe plusieurs formes d'anisotropie élastique dans les roches. Elles dépendent des matériaux qui les composent et de leurs arrangements internes. Dans le cadre de ce stage, nous nous intéresserons plus particulièrement aux milieux dits à isotropie transverse verticale, qui ont des propriétés d'invariance par rotation autour de l'axe vertical. On pourrait d'ailleurs les appeler "milieux anisotropes à une direction". Un tel milieu est une bonne approximation pour l'anisotropie induite par la sédimentation (litage horizontal) ou la fracturation horizontale. En pratique, on utilise ce modèle pour modéliser les milieux finement lités comme les argiles. Dans le domaine pétrolier, la faible perméabilité des argiles limite la migration du pétrole, ils constituent donc de très bonnes couvertures pour les réservoirs pétroliers (fig A.1). Cependant, leurs propriétés anisotropes peuvent détériorer l'imagerie du réservoir.

L'anisotropie d'une roche est liée aux contraintes qui lui sont ou lui ont été appliquées. Les déformations et contraintes sont liées par la loi de Hooke (A.1) :

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (\text{A.1})$$

Dans le cas des milieux VTI, le tenseur de raideur se réduit à 5 constantes indépendantes. Dans la notation de Voigt (1910), le tenseur de raideur s'écrit pour un milieu VTI :

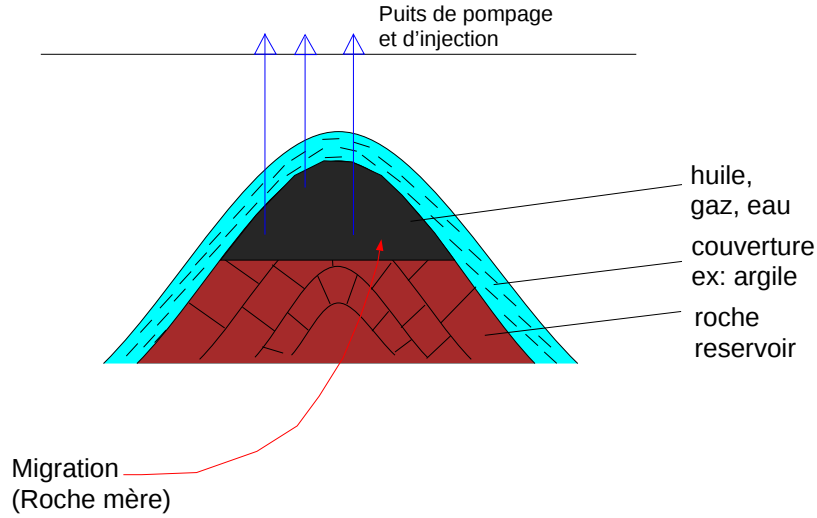


FIG. A.1 – Exemple de piège à pétrole : la migration du pétrole est bloquée par une couche imperméable appelée couverture. L'argile est une roche qui constitue une très bonne couverture et qui peut produire des erreurs sur la position en profondeur des réflecteurs sous-jacents car elle présente de l'anisotropie.

$$\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & & & \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & & & \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & & & \\ & & & C_{44} & & \\ & & & & C_{55} & \\ & & & & & C_{66} \end{pmatrix} = C_{(i,j)} \text{ où } C_{12} = C_{11} - 2C_{66} \quad (\text{A.2})$$

À partir du tenseur d'élasticité (A.2), la résolution de l'équation de Christoffel (Stopin, 2001) donne trois valeurs propres v_1, v_2, v_3 . Elles sont identifiées comme les vitesses de phases des ondes P, SV et SH (dans la suite nous nous limiterons au cas 2D et ne parlerons plus des ondes SH). Les calculs suivants se font dans le plan de symétrie. Les expressions exactes des vitesses de phases de ces ondes sont données par Daley and Hron (1977) comme :

$$\rho v_P^2(\theta) = \frac{1}{2}[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33})\sin^2(\theta) + D(\theta)] \quad (\text{A.3})$$

$$\rho v_S^2(\theta) = \frac{1}{2}[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33})\sin^2(\theta) - D(\theta)] \quad (\text{A.4})$$

avec :

$$\begin{aligned} D(\theta) = & [(C_{33} - C_{44})^2 + \\ & + 2[(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})]\sin^2(\theta) \\ & + [(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2]\sin^4(\theta)]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Ici θ est l'angle de phase c'est-à-dire l'angle entre la normale au front d'onde et l'axe de symétrie. Thomsen, 1986, a proposé une formulation alternative des équations précédentes (A.3) et (A.4) en introduisant quatres nouveaux paramètres.

$$\alpha_0 = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad (\text{A.6})$$

$$\beta_0 = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (\text{A.7})$$

$$\varepsilon = \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}} \quad (\text{A.8})$$

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{14})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \quad (\text{A.9})$$

En utilisant ces notations les équations (A.3) à (A.4) deviennent :

$$v_P^2(\theta) = \alpha_0^2[1 + \varepsilon \sin^2(\theta) + D^*(\theta)] \quad (\text{A.10})$$

$$v_S^2(\theta) = \beta_0^2[1 + \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} \varepsilon \sin^2(\theta) - \frac{\alpha_0^2}{\beta_0^2} D^*(\theta)], \quad (\text{A.11})$$

avec :

$$\begin{aligned} D^*(\theta) \equiv & \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2}\right) \left(\left[1 + 4 \frac{(2\delta - \varepsilon)}{(1 - \beta_0^2/\alpha_0^2)} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right. \right. \\ & \left. \left. + 4 \frac{(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2} + \varepsilon)\varepsilon}{(1 - \frac{\beta_0^2}{\alpha_0^2})^2} \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Ces équations sont correctes pour tous les milieux arbitraires isotropes transverses (TI) homogènes. L'interprétation des paramètres de Thomsen est la suivante :

- α_0 est la vitesse verticale des ondes P ;
- β_0 est la vitesse verticale des ondes de cisaillement S. Notons que Alkhalifah (1998) a supposé que β_0 était égal à 0 pour trouver une relation de dispersion simple pour la migration des ondes P. Cette approximation nous permet d'établir les relations sur lesquelles nous nous sommes basés ;
- 2ε représente l'anisotropie liée aux ondes P, c'est-à-dire la différence entre la vitesse des ondes P dans la direction perpendiculaire à l'axe de symétrie et la vitesse des ondes P suivant l'axe de symétrie, normalisée par cette dernière vitesse ;
- δ est le paramètre qui contrôle l'anisotropie des ondes P pour des directions proches de l'axe de symétrie (la verticale pour les milieux VTI). C'est un paramètre qui a une influence majeure sur le comportement des ondes P. δ peut avoir des valeurs positives ou négatives. Dans la plupart des cas, $\varepsilon - \delta > 0$.

Résumé

¹ A stable paraxial extrapolator for P and S waves in heterogeneous transversely isotropic media with a vertical axis of symmetry (VTI) is presented. This extrapolator handles lateral and vertical velocity variation as well as variations in the anisotropy parameters. A study of the behavior and limitations of the paraxial approximation, particularly for S waves, is also performed.

¹Cette partie, rédigée en anglais, est un résumé de mon travail présenté à la SEG 2003 (Joncour et al. (2003)). Elle a fait l'objet d'une présentation à Dallas en octobre 2003.

A.2 Introduction de l'anisotropie VTI dans les équations paraxiales

During the last decade, numerous works have shown the importance of handling anisotropy in seismic data processing. Indeed, neglecting anisotropy can lead to bad focusing or mis-positioning of reflectors (Tsvankin, 1996).

Several authors developed wave equation migration algorithms for anisotropic media, mainly in VTI media. Uzcategui and Mies, 1996, developed an explicit (f-x) extrapolation operator for VTI media with lateral and vertical variations of anisotropy. Ristow, 1999, adapted a paraxial implicit isotropic scheme to VTI media. This scheme is based on a fractional expansion (Bamberger et al., 1984) of the VTI dispersion relation, paraxial coefficients depend on the velocity and anisotropy parameters of the medium.

Following Ristow's approach, we derive the paraxial coefficients for P waves in VTI media using an optimization procedure and extend it for S waves. This method yields a poor approximation for some value of the anisotropy parameters. We therefore propose to extract the paraxial coefficients analytically from an approximated dispersion relation which explains some limitations of the paraxial approximation. In a second part, we propose a stable formulation for the paraxial extrapolators in heterogeneous VTI media which fulfills the energy conservation property. Finally, we illustrate our anisotropic propagator on the real data set of Mahogany.

A.2.1 Approximation of the VTI dispersion relation

According to Uzcategui (1995), the 2D dispersion relation for transversely isotropic media with vertical axis of symmetry (VTI) reads in the ω, k_x, k_z domain :

$$k_z = \sqrt{\frac{\omega^2}{V^2(\theta)} - k_x^2} \quad (\text{A.13})$$

where k_x and k_z are the horizontal and vertical wavenumbers, respectively, ω is the temporal frequency, θ is the phase angle measured from the z axis and given by

$$\sin \theta = \frac{V(\theta)k_x}{\omega}. \quad (\text{A.14})$$

$V(\theta)$ stands for the phase velocity (P or S), depending on vertical P-velocity V_{p0} , vertical S-velocity V_{s0} and Thomsen's anisotropy parameters ϵ and δ (Thomsen, 1986). Similarly to the isotropic case, the VTI dispersion relation can be approximated by a fractional expansion (Ristow, 1999) :

$$\begin{aligned} \frac{c_0 k_z}{\omega} &= \left(\frac{c_0}{V(\theta)} \right) \sqrt{(1 - \sin^2 \theta)} \\ &\approx 1 - \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i^N \left(\frac{c_0 \sin \theta}{V(\theta)} \right)^2}{1 - \alpha_i^N \left(\frac{c_0 \sin \theta}{V(\theta)} \right)^2}, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

where c_0 stands for the vertical P or S-velocity, and N is the number of cascaded operators. β_i and α_i are the paraxial coefficients which must satisfy :

$$\beta_i > 0; 0 \leq \alpha_i < 1. \quad (\text{A.16})$$

These paraxial coefficients are defined as functions of the phase angle θ and of the four anisotropy and velocity parameters. Nevertheless, the normalization with respect to c_0 reduces the dependence to only three parameters (ϵ , δ , and $\frac{V_s}{V_p}$ ratio).

A first approach for determining the paraxial coefficients, consists in using an optimization procedure (Ristow, 1999). Following Huang and Fehler, 2000, the paraxial coefficients α_i and β_i in equation (A.15) are optimized such that the absolute difference of the right and left sides is smaller than 1% for the widest possible range of angles $\theta = 0, \dots, \theta_{max}$ (θ_{max} is called the maximum opening angle).

For P-waves, the optimization is run for all combinations of the two parameters (ϵ , δ), since the vertical S-velocity has no significant influence on the P-wave kinematics (Tsvankin, 1996). For the S-wave, the optimization has to be done for all combinations of the three parameters ϵ , δ , and $\frac{V_s}{V_p}$. Figure (A.2) presents the P-wave optimization result at the first order ($N=1$), and shows that the

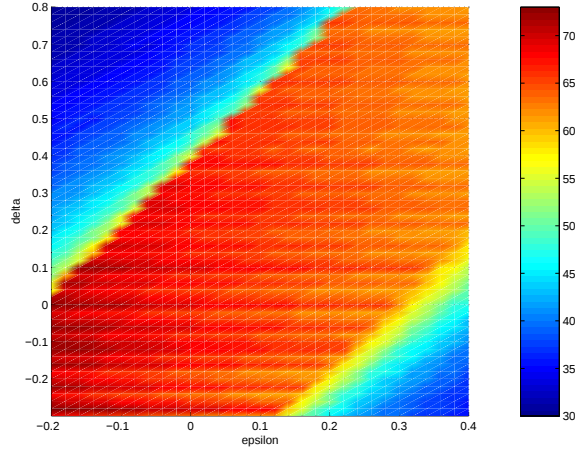


FIG. A.2 – Maximum opening phase angle θ_{max} (in degree) in function of the anisotropy parameters (ϵ , δ) which is obtained by the first order optimization method for the P-wave. This figure shows a large anisotropic domain where paraxial dispersion relation approximate the anisotropic dispersion relation with a misfit less than 1% and a phase angle as good as in the isotropic case.

maximum opening angle is as good as in the isotropic case for a large range of anisotropy values corresponding to most of the sedimentary rocks (Thomsen, 1986). Moreover, paraxial coefficients vary continuously with anisotropy parameters. However, for S-waves, the optimized paraxial coefficients α_i are extremely variable with respect to ϵ and δ . Moreover this variability is also associated to a strong sensitivity of the maximum opening angles which is not satisfactory. This successful approach for P-waves is not expendable to S-waves for a large range of anisotropy parameters.

A.2.2 Taylor expansion of the dispersion relation

An other approach consists in fitting the dispersion relation with the truncated approximation by a Taylor expansions of both sides of equations (A.15). We start by developing the left hand of equation (A.15) with a Taylor expansion in $\sin \theta$ chosen to the 8th order,

$$\frac{c_0}{V(\theta)} \sqrt{1 - \sin^2 \theta} = 1 + O_1 \sin^2 \theta + O_2 \sin^4 \theta + O_3 \sin^6 \theta + O_4 \sin^8 \theta + o(\sin^8 \theta), \quad (\text{A.17})$$

where O_1, O_2, O_3, O_4 only depend on the velocity and anisotropy parameters $(\epsilon, \delta, \frac{V_{po}}{V_{so}})$. Similarly, we develop the right hand of equation (A.15),

$$1 - \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i^N \left(\frac{c_0}{V(\theta)} \right)^2 \sin^2 \theta}{1 - \alpha_i^N \left(\frac{c_0}{V(\theta)} \right)^2 \sin^2 \theta} = 1 + P_1 \sin^2 \theta + P_2 \sin^4 \theta + P_3 \sin^6 \theta + P_4 \sin^8 \theta + o(\sin^8 \theta), \quad (\text{A.18})$$

where P_1, P_2, P_3, P_4 are functions of the paraxial coefficients (α_i^N, β_i^N) . Identifying O_k with P_k ($k = 1, 4$), provides relations between (α_i^N, β_i^N) and $(\epsilon, \delta, \frac{V_{po}}{V_{so}})$.

To evaluate these relations, we use the exact P and S-wave velocities given as functions of $\sin \theta$ (Daley and Hron, 1977, Thomsen, 1986),

$$\frac{V_P^2(\theta)}{V_{p0}} = 1 + \epsilon \sin^2(\theta) + D^*(\theta), \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{V_{SV}^2(\theta)}{\beta_0^2} = 1 + \frac{V_{po}^2}{V_{so}^2} \epsilon \sin^2(\theta) - \frac{V_{po}^2}{V_{so}^2} D^*(\theta), \quad (\text{A.20})$$

with

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{V_{so}^2}{V_{po}^2} \right) \left(\left[1 + 4 \frac{(2\delta - \epsilon)}{(1 - \frac{V_{po}^2}{V_{so}^2})} \sin^2 \theta (1 - \sin^2 \theta) + 4 \frac{(1 - \frac{V_{so}^2}{V_{po}^2} + \epsilon) \epsilon}{(1 - \frac{V_{so}^2}{V_{po}^2})^2} \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right).$$

As an example, for S-wave, $\frac{V_{so}}{V_{po}} = 0.5$, $k = 2$ and $N = 1$, these relations are

$$\begin{cases} \beta &= \frac{1+8(\epsilon-\delta)}{2} \\ \alpha &= \frac{3(1-8(\epsilon-\delta))-256\delta(\epsilon-\delta)}{12(1+8(\epsilon-\delta))}. \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Using (A.16) we obtain the following constraints on ϵ and δ ,

$$\begin{cases} 1 + 8(\epsilon - \delta) > 0 \\ \frac{3(1-8(\epsilon-\delta))-256\delta(\epsilon-\delta)}{12(1+8(\epsilon-\delta))} \in]0; 1[. \end{cases} \quad (\text{A.22})$$

The second equation of (A.21) shows a discontinuity of α at $1 + 8(\epsilon - \delta) = 0$ which has also been numerically observed when using the optimization method. Computing the wave equation impulse responses, we see that this discontinuity separates regions where the S-wavefront does or does not develop z-cusps in the wave surface. This discontinuity constitutes a limitation of the paraxial approximation since no paraxial coefficients can be found neither along nor beyond this discontinuity. Notice that this kind of discontinuity does not occur for P-waves. However, other limitations exist for P-waves.

To conclude, the optimization procedure produces better maximum opening angles in a larger range of anisotropy parameters. However, the Taylor expansion method has the advantage to provide a physical interpretation of the behavior and limitations of the paraxial coefficients and to give analytical relations for finding coefficients as a function of anisotropy parameters.

In 3D, the paraxial propagator can be formulated as a serie of 2D problems using an operator splitting approximation (Brown (1983); Mamoun et al. (1993)). We have straightforwardly extended the anisotropic paraxial propagator for P-wave, for 2, 3 and 4 direction schemes using the optimization procedure. As for the isotropic case, the four direction scheme yields the accuracy reached in the 2D case.

A.2.3 Stable VTI paraxial extrapolator

Paraxial approximation of the dispersion relation (A.15) leads to the system in the ω , x , z domain (Bamberger et al., 1984; Collino, 1987) :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i\omega}{c^2} U - i\omega \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c} \phi_n = 0 \\ \frac{\omega^2}{c} \phi_n + \alpha_n^N \frac{\partial}{\partial x} (c \frac{\partial \phi_n}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (c \frac{\partial U}{\partial x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.23})$$

This system preserves exactly the flux during propagation and provides an unconditionally stable numerical scheme for constant paraxial coefficients (Collino, 1987). This numerical scheme is derived from a finite-element formulation, which handles variable lateral and vertical discretizations.

A straightfoward application to anisotropic media simply consists in to introducing variable coefficients in equation (A.23). Unfortunately, the numerical scheme becomes unstable. Indeed, figure (A.3) shows that the energy explodes with depth for small lateral sampling interval (ratio to 10^{10} in fig. A.3b). The velocity used for this experiment is constant and the paraxial coefficients are randomly chosen between 0.1 and 0.9. This instability associated with variable paraxial coefficients has been shown and solved by Biondi, 2002a, for FFD propagator. Numerical analysis showed that with constant α coefficient and variable β coefficients the norm is conserved, whereas variable α coefficients introduced instabilities with constant β .

We propose a new paraxial equation that fulfills, in the continuous case, the energy conservation

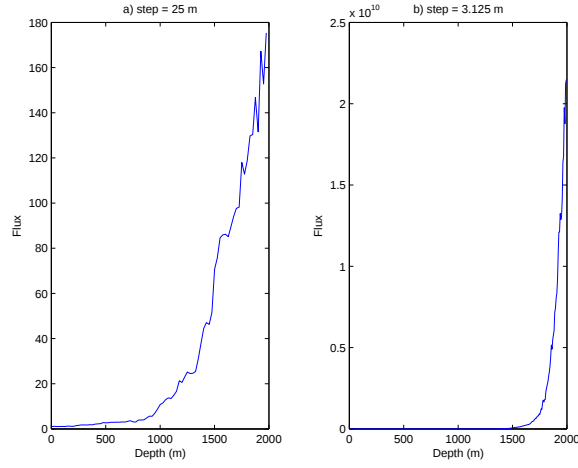


FIG. A.3 – Depth-flux of the isotropic scheme showing strong instabilities which are produced by introducing variable paraxial coefficients α and β . These coefficients are randomly chosen between $[1,0]$. The flux is defined as the normalized sum of the squared Green function for each lateral step and for each frequency component.

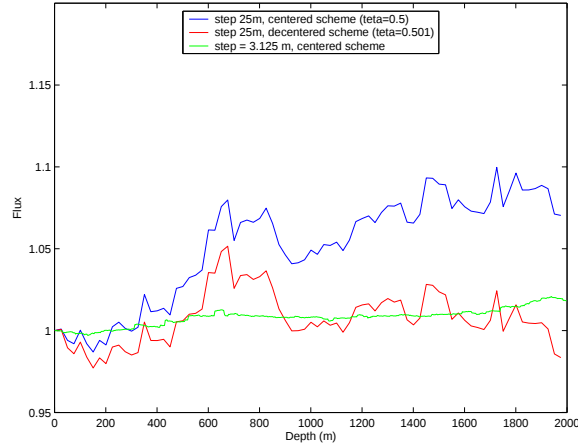


FIG. A.4 – Depth-flux showing the stability of the adapted scheme for variable paraxial coefficients. These coefficients, as in the previous experiment, are random between $[1,0]$. Note that for the centred and decentered case, the lateral step is 25m. The results obtained by the formulation are satisfactory.

property for variable coefficients :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i\omega}{c^2} U - i\omega \sum_{n=1}^N \frac{\beta_n^N}{c\alpha_n^N} \phi_n = 0 \\ \omega^2 \frac{\beta_n^N}{c\alpha_n^N} \phi_n + \frac{\partial}{\partial x} (c\beta_n^N \frac{\partial \phi_n}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial x} (c\beta_n^N \frac{\partial U}{\partial x}) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.24})$$

The corresponding numerical scheme has been applied to the previous example. Compared to the first scheme, figure (A.4) shows that the new formulation well preserves the norm for small sampling interval (variation of 2%). For a more realistic sampling interval (25m), the discrete norm slightly increases. A slight decentring (0.2%) of the derivative in the numerical scheme (Collino, 1987) can easily control this increase. Note that the adapted scheme cannot be anymore equal to the parabolic equation of Claerbout, 1985, since α_i cannot be equal to zero in equation (A.24).

A.2.4 Application on a real data set

We use our anisotropic paraxial extrapolator to prestack depth migrate the 2D OBC PP data from the Mahogany field in the gulf of Mexico. The common offset migration (Ehinger et al., 1996) is performed between 5 and 35Hz, using a velocity model obtained by anisotropic reflection tomography (Stopin, 2001). PP migrated section (fig. A.5) shows that the base of salt is pretty well focused, except for the center part, where migration frowns can be observed.

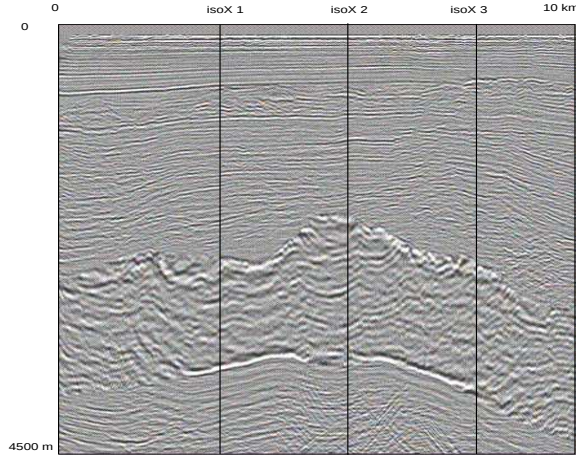


FIG. A.5 – PSDM stack section from Mahogany field. PP data from 2D 4C OBC data are used

A.2.5 Conclusions

A method for providing a paraxial extrapolator in heterogeneous VTI media was presented. We also analyzed the behavior and limitations of the derived paraxial coefficients. An adapted paraxial equation in heterogeneous VTI media, which preserves the energy during propagation has been presented. For P-wave, extension to 3D can be straightforwardly obtained using an operator splitting method. The stable paraxial equation can also be used in the isotropic case for mixed (phase shift and paraxial) propagators.

A.2.6 Acknowledgements

The authors want to thank Patrick Lailly, Andreas Ehinger and Gilles Lambare for their valuable remarks and suggestions.

A.3 Conclusions

En terme d'optimisation des coefficients paraxiaux, les angles d'ouvertures obtenus par optimisation sont meilleurs dans une grande majorité des cas. Cependant on observe toujours des variations importantes dans les coefficients paraxiaux. D'un autre côté ceux-ci sont relativement proches de ceux obtenus par le calcul explicite, la solution adoptée dans Topomig est donc d'utiliser des coefficients optimisés mais dont le calcul a été effectué avec un pas plus large de façon à

ne plus avoir de variations trop importantes, les coefficients manquants seront alors calculés par interpolation. Cette méthode permet finalement de construire des approximations possédant un grand angle d'ouverture avec des coefficients paraxiaux les plus continus possible.

Remarquons que cette méthode possède l'avantage de réduire la taille de la table des coefficients paraxiaux en fonction de ϵ , δ et r à stocker.

Les résultats obtenus en 2D ont été utilisés pour étendre l'approximation paraxiale en milieu anisotrope au cas 3D. Enfin l'utilisation du schéma numérique stable pour être utilisé pour mettre en place un extrapolateur pour milieux isotropes (extrapolateur Fourier Finite Difference) utilisant un terme paraxial dont les coefficients varient latéralement. Ces deux derniers points ne seront pas détaillé dans ce rapport mais sont présentés dans un rapport interne.

Annexe B

Théorème de représentation

Le théorème de représentation (Aki and Richards (1980)) exprime le champ acoustique en un point récepteur ξ en fonction du champ de pression et de ses dérivées à l'interface.

Soit V , un volume limité par la surface fermée S . Considérons $\xi = (x, y, z) \in V$ un point décrit par ses coordonnées cartésiennes (Figure B.1). Soit $u = u(\xi, \omega)$, un champ acoustique, créé par les forces volumiques f , les conditions aux limites sur la surface S et une condition initiale à $t = 0$. Considérons maintenant un autre champ $v = v(\xi, \omega)$ créé par les forces q , des conditions aux limites et des conditions initiales (en $t = 0$) qui peuvent être différentes des conditions sur u . Ces deux champs vérifient dans le domaine fréquentiel les équations,

$$\begin{cases} \Delta u(\xi, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\xi)} u(\xi, \omega) = f(\xi, \omega) \\ \Delta v(\xi, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\xi)} v(\xi, \omega) = q(\xi, \omega) \end{cases}$$

où $c = c(\xi)$ est la vitesse.

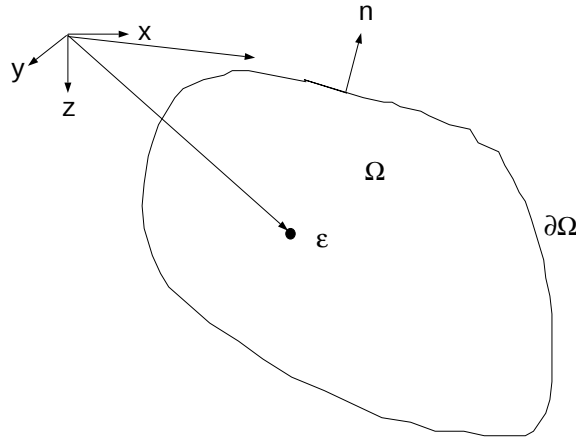


FIG. B.1 – *Théorème de représentation est défini pour le volume V limité par une surface fermée S . n est la normale extérieure au volume. ξ est un point $\in V$.*

En multipliant, la première équation par $v(\xi, \omega)$, la deuxième équation par $u(\xi, \omega)$ et en calculant

la différence, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
& \left(\Delta u(\xi, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\xi)} u(\xi, \omega) \right) v(\xi, \omega) - \left(\Delta v(\xi, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\xi)} v(\xi, \omega) \right) u(\xi, \omega) \\
&= \Delta u(\xi, \omega) v(\xi, \omega) - \Delta v(\xi, \omega) u(\xi, \omega) \\
&= f(\xi, \omega) v(\xi, \omega) - q(\xi, \omega) u(\xi, \omega).
\end{aligned} \tag{B.1}$$

Intégrons maintenant sur le volume V pour obtenir,

$$\begin{aligned}
& \int_{\xi \in V} \left(v(\xi, \omega) \Delta u(\xi, \omega) - u(\xi, \omega) \Delta v(\xi, \omega) \right) d\xi = \\
& \int_{\xi \in V} f(\xi, \omega) v(\xi, \omega) - q(\xi, \omega) u(\xi, \omega) d\xi.
\end{aligned} \tag{B.2}$$

et appliquons la formule de Green,

$$\int_{\xi \in V} \left(v \Delta u - u \Delta v \right) d\xi = \oint_{\xi \in S} \left(v \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v}{\partial n} \right) d\xi, \tag{B.3}$$

où S est la surface de V et n est le vecteur normal à S pointant vers l'extérieur. Cette équation est appelée *l'intégrale de Betti*. Pour simplifier l'expression ci-dessus, les dépendances sur les fonctions u et v ont été omises.

$$\begin{aligned}
& \oint_{\xi \in S} \left(\frac{\partial u(\xi, \omega)}{\partial n} v(\xi, \omega) - u(\xi, \omega) \frac{\partial v(\xi, \omega)}{\partial n} \right) d\xi = \\
& \int_{\xi \in V} \left(f(\xi, \omega) v(\xi, \omega) - q(\xi, \omega) u(\xi, \omega) \right) d\xi.
\end{aligned} \tag{B.4}$$

On peut considérer des champs particuliers. Introduisons la fonction de Green $g(\mathbf{r}, \xi, \omega)$ comme solution de

$$\Delta g(\mathbf{r}, \xi, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(\xi)} g(\mathbf{r}, \xi, \omega) = \delta(\xi - \mathbf{r}), \tag{B.5}$$

où ξ , et $\mathbf{r} \in VUS$. $g(\mathbf{r}, \xi, \omega)$ est la fonction de Green du milieu qui décrit la réponse impulsionnelle du milieu au point ξ causée par une source en $\mathbf{r}$, à $t = 0$. g est choisie causale tel que $g(\mathbf{r}, \xi, t) = 0$ quand $t < 0$. En posant $v = g$ dans l'équation (B.4), on obtient,

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \oint_{\xi \in S} \left(u(\xi, \omega) \frac{\partial g(\mathbf{r}, \xi, \omega)}{\partial n} - \frac{\partial u(\xi, \omega)}{\partial n} g(\mathbf{r}, \xi, \omega) \right) d\xi + \int_{\xi \in V} f(\xi, \omega) g(\mathbf{r}, \xi, \omega) d\xi. \tag{B.6}$$

Cette intégrale est communément appelée *théorème de représentation*. Cette équation établit que le champ acoustique u est fait de contributions issues des forces volumiques f contenues dans V , de contributions du champ $u(\xi, \omega)$ et de sa dérivée normale $\partial u(\xi, \omega)/\partial n$ sur la surface S . Cependant, la manière avec laquelle ces contributions sont pondérées n'est pas satisfaisante, car elle fait intervenir une fonction de Green avec une source en $\mathbf{r}$ et un point d'observation en ξ . Nous voulons que $\mathbf{r}$ soit le point d'observation de telle manière que la pression totale en $\mathbf{r}$ puisse être vue comme la somme (intégrale) des déplacements contribuant causés par chaque élément de volume et de surface. Pour cela, nous utilisons la propriété de réciprocité temporelle et spatiale des fonctions de Green,

$$g(\mathbf{r}, \xi, \omega) = g(\xi, \mathbf{r}, \omega) \quad (\text{B.7})$$

Cette propriété de réciprocité n'est correcte que si g satisfait des conditions limites homogènes sur S (Aki and Richards (1980)).

$$u(\mathbf{r}, \omega) = \oint_{\xi \in S} \left(u(\xi, \omega) \frac{\partial g(\xi, \mathbf{r}, \omega)}{\partial n} - \frac{\partial u(\xi, \omega)}{\partial n} g(\xi, \mathbf{r}, \omega) \right) d\xi + \int_{\xi \in V} f(\xi, \omega) g(\xi, \mathbf{r}, \omega) d\xi. \quad (\text{B.8})$$

Le champ total $u(\mathbf{r}, \omega)$ peut être décomposé comme la somme d'un champ incident $u^I(\mathbf{r}, \omega)$ et d'un champ réfléchi $u^R(\mathbf{r}, \omega)$. $u^I(\mathbf{r}, \omega)$ est défini par

$$u^I(\mathbf{r}, \omega) = \int_{\xi \in V} f(\xi, \omega) g(\xi, \mathbf{r}, \omega) d\xi, \quad (\text{B.9})$$

et donc

$$\oint_{\xi \in S} \left(u^I(\xi, \omega) \frac{\partial g(\xi, \mathbf{r}, \omega)}{\partial n} - \frac{\partial u^I(\xi, \omega)}{\partial n} g(\xi, \mathbf{r}, \omega) \right) d\xi = 0 \quad (\text{B.10})$$

La relation (B.9) représente la composante directe du champ d'onde total enregistré au point $\mathbf{r} \in S$. L'intégrale peut être interprétée comme la contribution des sources $f(\xi, \omega)$ volumiques, contenues dans le volume V , au champ mesuré. On déduit des relations (B.8) et (B.9), l'expression du champ réfléchi $u^R(\xi, \omega)$,

$$u^R(\mathbf{r}, \omega) = \oint_{\xi \in S} \left(u^R(\xi, \omega) \frac{\partial g(\xi, \mathbf{r}, \omega)}{\partial n} - \frac{\partial u^R(\xi, \omega)}{\partial n} g(\xi, \mathbf{r}, \omega) \right) d\xi \quad (\text{B.11})$$

Lorsque le volume V est ne contient pas de forces volumiques (libre de source), l'intégrale volumique dans (B.8) disparaît et le champ enregistré sur la surface S est égale au champ réfléchi ($u^R = u$).

Annexe C

Convention de Fourier

On rappelle les relations liant la pulsation (ω) à la fréquence (ν), à la longueur d'onde (λ), au nombre d'onde (k) et au vecteur lenteur (p) :

$$\omega = 2\pi\nu \quad k = \frac{\omega}{c} = \omega p \quad \lambda = \frac{2\pi c}{\omega} = \frac{2\pi}{k} \quad (\text{C.1})$$

où c est la vitesse. Nous avons choisi les conventions de Fourier suivantes,

temps/fréquence

$$f(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) e^{+i\omega t} d\omega$$

espace/nombre d'onde

$$f(k_x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{+ik_x x} dx$$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(k_x) e^{-ik_x x} dk$$

avec $k_x = \omega p_x$. Notons l'opposition des signes entre les transformées de Fourier en fréquence et en nombre d'onde (cela permet de respecter les conventions classiques d'ondes planes progrades et rétrogrades).

Une propriété importante des transformées de Fourier concerne la dérivation. La transformée de Fourier de la dérivée n^{ieme} s'exprime de la façon suivante :

temps/fréquence

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}\right] = (i\omega)^n f(\omega)$$

espace/nombre d'onde

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n}\right] = (-ik)^n f(k)$$

Une autre propriété importante est la transformée de Fourier de l'unité. La fonction 1 doit être vue comme la distribution identique à 1. Ainsi, on peut calculer sa transformée de Fourier au sens des distributions tel que,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{+ikx} dx = 2\pi\delta(k) \quad (\text{C.2})$$

car $\delta(k) = \delta(\frac{u}{2\pi}) = |2\pi|\delta(u)$ où u est la fréquence spatiale. δ est la mesure de Dirac.

Introduisons maintenant la notion d'onde montante et d'onde descendante. Considérons une onde plane de la forme :

$$p(x, z, t) = e^{i(\omega t - k_x x - k_z z)}. \quad (\text{C.3})$$

Une telle onde est solution de l'équation des ondes :

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p(x, z, t)}{\partial t^2} - \Delta p(x, z, t) = 0, \quad (\text{C.4})$$

si et seulement si, ω , k_x et k_z sont liés par la relation de dispersion,

$$k_x^2 + k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2} = 0. \quad (\text{C.5})$$

Lorsque l'on se place sur le front d'onde, la phase $(\omega t - k_x x - k_z z)$ de l'onde plane $p(x, z, t)$ est constante. Si l'on considère pour une position x fixée deux temps de propagation t_1 et t_2 tel que $t_1 < t_2$, on a,

$$i\omega t_1 - k_z z_1 = i\omega t_2 - k_z z_2 \quad (\text{C.6})$$

Pour un k_z positif, l'onde descendante prograde est définie par $\Delta t > 0$ et $\Delta z > 0$ (car l'axe $z > 0$ est orienté vers le bas). Elle est associée à $\omega > 0$, noté ω^+ . De la même manière, l'onde montante, définie par un $\Delta t > 0$ et $\Delta z < 0$ est associée à $\omega < 0$, noté ω^- .

Dans le domaine de Fourier, nous adoptons la même convention :

$$\begin{cases} \text{montante} & = & p_z > 0 \\ \text{descendante} & = & p_z < 0 \end{cases} \quad (\text{C.7})$$

avec $p_z = k_z/\omega$.

Annexe D

Formules analytiques pour le tracé de rayon en milieux simples

Introduisons la fonction $g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega)$ comme la solution de

$$\nabla g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2(r)} g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{s}), \quad (\text{D.1})$$

$\mathbf{x}, \mathbf{s} \in R^2$. $g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega)$ est la fonction de Green du milieu qui décrit la réponse impulsionnelle (champ de pression) du milieu au point $\mathbf{x}$ causée par une source en $\mathbf{s}$ à $t = 0$. La solution asymptotique haute fréquence de cette équation s'écrit dans le domaine fréquentiel sous la forme (Forgues (1996)) :

$$g(\mathbf{s}, \mathbf{x}, \omega) = C(\omega) A(\mathbf{s}, \mathbf{x}) e^{i\omega T(\mathbf{s}, \mathbf{x})} \quad (\text{D.2})$$

où A , T et C sont respectivement l'amplitude, le temps de trajet et la signature de la source (dépendant de la dimension du problème).

Le champ d'onde propagé en $\mathbf{x}$ par une distribution de source en surface s'écrit :

$$d(\mathbf{x}, \omega) = \int g(\mathbf{x}, \omega; \mathbf{s}) S(\mathbf{s}, \omega) d\mathbf{s}. \quad (\text{D.3})$$

où S est la distribution de source en surface.

D.1 Construction du modèle de référence en milieu homogène

Dans le cas d'un milieu homogène, l'expression asymptotique de la fonction de Green acoustique (Virieux (1990)) dans le domaine fréquentiel s'écrit,

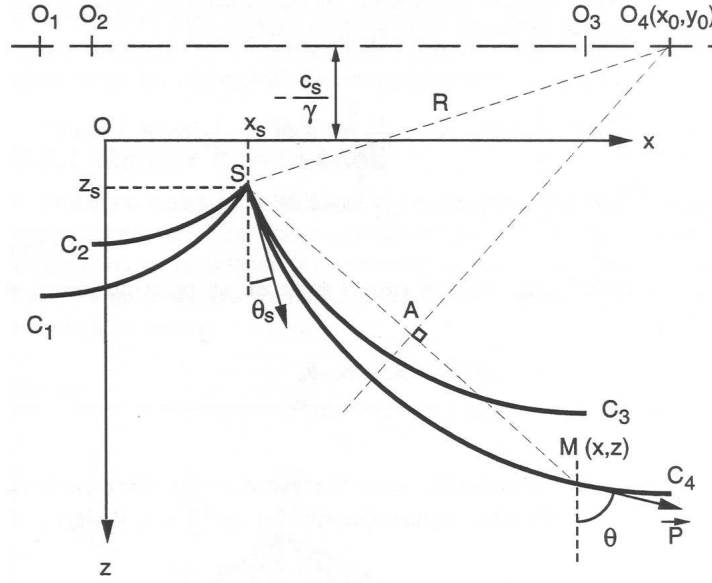


FIG. D.1 – Schéma représentant des rais dans un milieu à gradient de vitesse constant. Les rais décrivent des droites paramétrisées par l'angle θ à la source (Forgues, 1996).

$$g(\mathbf{x}, \mathbf{s}, \omega) = \sqrt{\frac{c}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}} \frac{1}{\sqrt{i\omega}} e^{-i\omega \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}{c}} \quad (\text{D.4})$$

où $|\mathbf{x} - \mathbf{s}|$ est la distance entre le source $\mathbf{s}$ et le récepteur $\mathbf{x}$, $\sqrt{\frac{c}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}}$ est le terme d'amplitude. $\frac{1}{\sqrt{i\omega}}$ est la signature de la source en 2D.

On obtient la formule de modélisation directe,

$$d(\mathbf{x}, \omega) = \int \sqrt{\frac{c}{8\pi|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}} \frac{1}{\sqrt{i\omega}} e^{-i\omega \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{s}|}{c}} S(s, \omega) ds \quad (\text{D.5})$$

où S est la source utilisée. La solution temporelle $d(\mathbf{x}, t)$ est obtenue en calculant numériquement la transformée de Fourier inverse de $d(\mathbf{x}, \omega)$.

D.2 Construction du modèle de référence dans un milieu à gradient vertical de vitesse constant

Considérons maintenant un milieu dont la vitesse est une fonction affine de z telle que :

$$c(z) = c_0 + \gamma z \quad (\text{D.6})$$

où γ est une constante désignant le gradient de vitesse. L'équation (D.6) définit la vitesse dans un milieu à gradient vertical constant.

Trajectoire des rais

Dans le cas d'un milieu à gradient vertical de vitesse, les rais décrivent des cercles (Forgues (1996)). L'expression de la courbure du rai est égale à,

$$\kappa = \frac{\sin \theta(z)}{c(z)} \frac{dc(z)}{dz} = \frac{\sin \theta(z)}{c(z)} \gamma = \frac{\sin \theta_s}{c(z_s)} \gamma \quad (\text{D.7})$$

où $\kappa = \frac{1}{R}$ est la courbure du rai. Dans un milieu à gradient de vitesse constant la courbure des rais est constante. Les rais décrivent donc des cercles dont le rayon $R = 1/\kappa$ ne dépend que de l'angle à la source pour une source donnée.

On reconnaît, dans l'équation de la courbure, l'expression de la lenteur horizontale p_x . Comme pour un rai donné, le gradient et la courbure sont constants. On en déduit que la lenteur horizontale l'est aussi.

On écrit :

$$\kappa = \gamma p_x \quad (\text{D.8})$$

L'abscisse curviligne le long du rai est liée à l'angle θ que fait le vecteur p avec la verticale :

$$ds = R d\theta \quad (\text{D.9})$$

Par intégration et en utilisant l'équation précédente, on peut obtenir les équations des trajectoires des rais passant par les points $S(x_s, z_s; \theta_s)$ et $M(x, z; \theta)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x - x_s = \int_{x_s}^x dx' = \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{dx}{ds} \frac{ds}{d\theta'} d\theta' = \int_{\theta_s}^{\theta} \sin \theta' \frac{1}{\kappa} d\theta' = \frac{1}{\gamma p_x} \int_{\theta_s}^{\theta} \sin \theta' d\theta' = \frac{1}{\gamma p_x} (\cos \theta - \cos \theta_s) \\ z - z_s = \int_{z_s}^z dz' = \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{dz}{ds} \frac{ds}{d\theta'} d\theta' = \int_{\theta_s}^{\theta} \cos \theta' \frac{1}{\kappa} d\theta' = \frac{1}{\gamma p_x} \int_{\theta_s}^{\theta} \cos \theta' d\theta' = \frac{1}{\gamma p_x} (\sin \theta - \sin \theta_s) \end{array} \right. \quad (\text{D.10})$$

À l'inverse on peut en déduire une relation entre l'angle en un point du milieu et l'angle à la source :

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \gamma p_x (x_s - x) + \cos \theta_s \\ \sin \theta &= -\gamma p_x (z_s - z) + \sin \theta_s \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

On peut retrouver l'équation du cercle de rayon $R = \frac{1}{\gamma p_x}$, décrit par le rai passant par la source $S(x_s, z_s)$. En effet, sachant que $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, il vient :

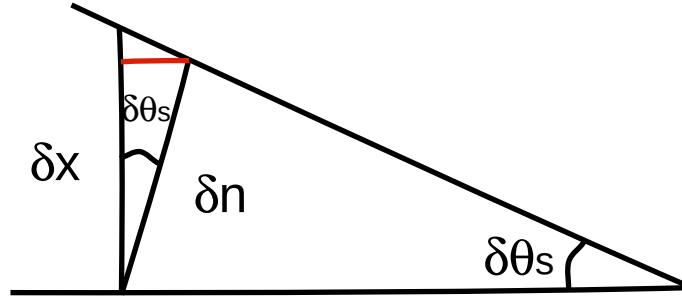


FIG. D.2 – Schéma représentant une rai en milieu homogène. θ_s est l'angle du rai par rapport à la verticale, ∂n est la normale au tube de rai, ∂x est la projection de la normale sur l'axe horizontale.

$$\left(x - x_s - \frac{\cos\theta_s}{\gamma p_x}\right)^2 + \left(z - z_s + \frac{c(z_s)}{\gamma}\right)^2 = \left(\frac{1}{\gamma p_x}\right)^2 \quad (\text{D.12})$$

Vecteur lenteur

La composante horizontale du vecteur lenteur est constante le long du rai :

$$p_x = \frac{\sin\theta}{c(z)} = \frac{\sin\theta_s}{c(z_s)} \quad (\text{D.13})$$

Temps de trajet

Le temps de trajet est l'intégrale de la lenteur suivant l'abscisse curvigne "s" le long du rai :

$$T - T_s = \int_{s_s}^s \frac{ds'}{c(s')} = \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{1}{c} \frac{ds}{d\theta'} d\theta' = \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{1}{c} \frac{1}{\gamma p_x} d\theta' = \frac{1}{\gamma} \int_{\theta_s}^{\theta} \frac{d\theta}{\sin\theta} = \frac{1}{\gamma} \left[\log\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| \right] \quad (\text{D.14})$$

$$T = T_s + \frac{1}{\gamma} \left[\log\left|\tan\frac{\theta}{2}\right| - \log\left|\tan\frac{\theta_s}{2}\right| \right] \quad (\text{D.15})$$

Notons que le cas vertical ($\theta = 0^\circ$) doit être traité séparément. Dans ce cas, on considère l'intégrale suivant l'axe z .

Amplitude et divergence géométrique

L'expression générale de l'amplitude des fonctions de Green asymptotiques s'écrit,

$$A_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \sqrt{\frac{\rho(\mathbf{s})\rho(\mathbf{x})c(\mathbf{x})}{8\pi J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s})}} \quad (\text{D.16})$$

où $J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s})$ est la divergence géométrique du tube de rais dans un milieu. La divergence géométrique est par définition égale au rapport de la section normale au rai du tube de rai élémentaire ∂n sur l'ouverture angulaire élémentaire à la source $\partial\theta_s$, tel que

$$J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \left| \frac{\partial n}{\partial \theta_s} \right| \quad (\text{D.17})$$

Si on projette ∂n sur l'axe horizontale, la divergence vient (cf. Figure (D.2)) :

$$J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \left| \frac{\partial x \cos \theta_s}{\partial \theta_s} \right| \quad (\text{D.18})$$

À partir de (D.11) et (D.12), on exprime l'abscisse x du rai en fonction de l'angle à la source :

$$x = x_s + \frac{c_s}{\gamma} \left(\frac{\cos \theta_s}{\sin \theta_s} - \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \theta_s} - \frac{c^2}{c_s^2}} \right) \quad (\text{D.19})$$

On peut maintenant, à z constant, calculer la différentielle de x par rapport à l'angle initial θ_s . On obtient finalement :

$$J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{dn}{d\theta_s} = \frac{x}{d\theta_s} \Big|_z \cos \theta = \frac{1}{\gamma \sin^2 \theta_s} \left[\frac{c_s \cos \theta_s}{\sqrt{c_s^2 - c^2 \sin^2 \theta_s} - 1} \right] \sqrt{c_s^2 - c^2 \sin^2 \theta_s} \quad (\text{D.20})$$

Notons que lorsque $\theta_s = 0^\circ$, la divergence géométrique prend une forme indéterminée. L'équation ci-dessus peut se réécrire sous la forme :

$$J_{2D}(\mathbf{x}, \mathbf{s}) = \frac{c_s^2 - c^2}{\gamma(c_s \cos \theta_s + \sqrt{c_s^2 - c^2 \sin^2 \theta_s})} \quad (\text{D.21})$$

Annexe E

Approximation de la phase stationnaire

Théorème de la phase stationnaire

(Aki and Richards (1980); Bleistein et al. (2001))

Le but est d'obtenir une approximation asymptotique d'un certain type d'intégrales qui apparaissent fréquemment dans les théories asymptotiques, comme en optique ou en sismologie avec la théorie des rais.

Considérons l'intégrale suivante

$$f(\omega) = \int_a^b g(u) e^{i\omega h(u)} du \quad (\text{E.1})$$

où $h(u)$ et $g(u)$ sont des fonctions réelles de la variable d'intégration u et indéfiniment dérivables dans un intervalle fermé borné $[a, b]$. De plus, h' ne s'annule qu'en un seul point t_0 de cet intervalle et que $g(t_0) \neq 0$ tel que $h''(t_0) \neq 0$.

Lorsque $\omega \rightarrow +\infty$, le long du chemin d'intégration, l'exponentielle varie beaucoup plus vite que le terme d'amplitude.

On peut dans ce cas établir que la contribution significative provient de la portion du segment d'intégration au voisinage du point-selle (col de la courbe $h(u)$). D'après (Aki and Richards (1980)), on a :

Soit un point $t_0 \in [a, b]$ tel que $h'(t_0) = 0$ (condition du point de selle) et $h''(t_0) \neq 0$.

Pour $\omega \rightarrow +\infty$, on a :

$$f(\omega) \approx \sqrt{\pm i} \sqrt{\frac{2\pi}{\omega |h''(t_0)|}} g(t_0) e^{i\omega h(t_0)} \quad (\text{E.2})$$

Le signe positif ou négatif correspond au signe de $h''(t_0)$. On rappelle que l'on a $\sqrt{i} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

La racine carrée d'une fonction sur le corps des complexes correspond à la détermination principale de cette fonction, c'est-à-dire le nombre complexe dont la partie réelle est positive. Plus précisément, si $z=a+ib$, la racine carrée de z est donnée par :

$$z^{\frac{1}{2}} = [\frac{1}{2}(r+a)]^{\frac{1}{2}} \pm i[\frac{1}{2}(r-a)]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{E.3})$$

où $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ et le signe $\pm$ est celui de la partie imaginaire b .

Annexe F

Amplitude de la fonction de Green dans le domaine $(p_s, z_s, \mathbf{x}, \omega)$

F.1 Cas général

L'expression de l'amplitude dans le domaine $(p_s, z_s, \mathbf{x}, \omega)$, s'écrit,

$$\tilde{A}(p^s, z_s; \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\left|\frac{\partial^2 T}{\partial x_s^2}(\mathbf{x}, x_{spec})\right|_{z_s, \mathbf{x}}}} \sqrt{\frac{1}{8\pi \left|\frac{\partial(x_s, z_s)}{\partial(\beta_s, \sigma)}\right|_{\mathbf{x}}}} \quad (\text{F.1})$$

avec,

$$\sqrt{\frac{1}{8\pi \left|\frac{\partial(x_s, z_s)}{\partial(\beta_s, \sigma)}\right|_{\mathbf{x}}}} = \sqrt{\frac{c(x_s, z_s)}{8\pi J_{2D}(x_s, z_s, \mathbf{x})}} \quad (\text{F.2})$$

où J_{2D} est la divergence géométrique $2D$ (Forgues (1996)) et σ est une variable d'intégration le long du rai proportionnelle au temps de trajet. β_s exprime ici, l'angle du rai vers la source par rapport à la verticale au point $\mathbf{x}$ en profondeur.

Or on peut écrire,

$$\left|\frac{\partial(x_s, z_s)}{\partial(\beta_s, \sigma)}\right|_{\mathbf{x}} \left|\frac{\partial p^s}{\partial x_s}\right|_{z_s, \mathbf{x}} = \frac{1}{\left|\frac{\partial(\beta_s, \sigma)}{\partial(x_s, z_s)}\right|_{\mathbf{x}} \left|\frac{\partial x_s}{\partial p^s}\right|_{z_s, \mathbf{x}}} \quad (\text{F.3})$$

et,

$$\left|\frac{\partial \sigma}{\partial x_s}\right|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s}\bigg|_{x_s} - \frac{\partial \sigma}{\partial z_s}\bigg|_{x_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial x_s}\bigg|_{z_s} \left|\frac{\partial x_s}{\partial p^s}\right|_{z_s} = \left|\frac{\partial \sigma}{\partial p^s}\right|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s}\bigg|_{x_s} - \frac{\partial \sigma}{\partial z_s}\bigg|_{x_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s}\bigg|_{z_s} \quad (\text{F.4})$$

σ et β_s dépendent de x_s et z_s mais aussi de (p^s, z_s) ,

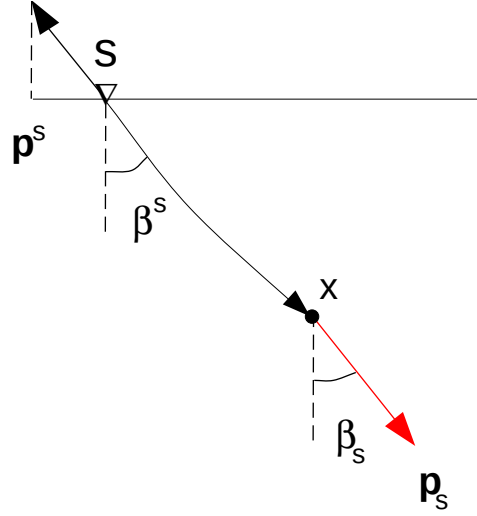


FIG. F.1 – $\mathbf{x}$ est le point d'observation du rai incident issu de $\mathbf{s}$. $\mathbf{p}^s = (p^s; p^{z_s})$ est le vecteur lenteur en surface associé à l'onde incidente. On définit β^s , l'angle d'incidence du rai mesuré par rapport à la verticale et associée à la source $\mathbf{s}$. De même, $\mathbf{p}_s = (p_s; p_{z_s})$ est le vecteur lenteur associé à l'onde incidente et β_s l'angle d'incidence du rai mesuré par rapport à la verticale au point $\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\beta_s, \sigma)}{\partial z_s} \Big|_{x_s} &= \frac{\partial(\beta_s, \sigma)}{\partial(p^s, z_s)} \frac{\partial(p^s, z_s)}{\partial z_s} \Big|_{x_s} \\ &= \frac{\partial(\beta_s, \sigma)}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial p^s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} + \frac{\partial(\beta_s, \sigma)}{\partial z_s} \Big|_{p^s} \end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

avec,

$$\begin{cases} \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} &= \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial p^s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} + \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s} \Big|_{p^s} \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z_s} \Big|_{x_s} &= \frac{\partial \sigma}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial p^s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} + \frac{\partial \sigma}{\partial z_s} \Big|_{p^s} \end{cases} \quad (\text{F.6})$$

et donc,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} - \frac{\partial \sigma}{\partial z_s} \Big|_{x_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s} \Big|_{z_s} &= \left[\frac{\partial \sigma}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s} \Big|_{z_s} - \frac{\partial \sigma}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \right] \frac{\partial p^s}{\partial z_s} \Big|_{x_s} \\ &\quad + \frac{\partial \sigma}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \frac{\partial \beta_s}{\partial z_s} \Big|_{p^s} - \frac{\partial \sigma}{\partial z_s} \Big|_{p^s} \frac{\partial \beta_s}{\partial p^s} \Big|_{z_s} \\ &= \left| \frac{\partial(p^s, z_s)}{\partial(\sigma, \beta_s)} \right| \end{aligned} \quad (\text{F.7})$$

L'expression de A devient,

$$A(p^s, z_s, \mathbf{x}) = \frac{1}{\sqrt{4 \left| \frac{\partial(p^s, z_s)}{\partial(\sigma, \beta_s)} \right|}}. \quad (\text{F.8})$$

F.2 Cas homogène

Reprenons l'expression de l'amplitude dans le domaine $(p_s, z_s, \mathbf{x}, \omega)$ mais considérons maintenant le cas homogène :

$$\tilde{A}(p^s, z_s; \mathbf{x}) = \sqrt{\frac{2\pi}{\left| \frac{\partial^2 T}{\partial s^2}(\mathbf{x}, x_{spec}, z_s) \right|}} \sqrt{\frac{c_0(x_s, z_s)}{8\pi \left| \mathcal{J}(\mathbf{x}, x_{spec}, z_s) \right|}} \quad (\text{F.9})$$

avec $\mathcal{J}(\mathbf{x}, x_{spec}, z_s)$, la divergence géométrique associée à la fonction de Green asymptotique 2D.

Dans le cas d'un milieu homogène, les rais sont droits, $\beta_s = \beta^s$ et $p^s = p_s$. Calculons la dérivée seconde du temps de trajet T par rapport aux coordonnées de surface s de l'équation (F.9).

Posons $X = x_s - x$ et $Z = z_s - z$, le temps de trajet T s'écrit,

$$T(s, z_s, \mathbf{x}) = \frac{\sqrt{X^2 + Z^2}}{c_0}. \quad (\text{F.10})$$

La dérivée s'exprime alors comme,

$$\frac{\partial T}{\partial X} = \frac{X}{c_0 \sqrt{X^2 + Z^2}} = \frac{\sin \beta^r}{c_0}, \quad (\text{F.11})$$

et la dérivée seconde comme,

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} = \frac{Z^2}{c_0 (X^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{F.12})$$

Notons que la dérivée seconde de T n'est jamais nulle (strictement positive), par conséquent l'utilisation du théorème de la phase stationnaire lors du passage en ondes planes est justifié.

La divergence géométrique en milieu homogène s'écrit,

$$\mathcal{J}(X) = \sqrt{X^2 + Z^2} \quad (\text{F.13})$$

on déduit ainsi les expressions analytiques pour le terme d'amplitude,

$$\tilde{A}(p^s, z; \mathbf{x}) = \frac{c_0}{2 \cos \beta^s} = \frac{1}{2} \frac{1}{p^{z_s}} \quad (\text{F.14})$$

Annexe G

Évaluation du terme de phase dans l'approximation de Kirchhoff en onde plane et en milieu de référence homogène

G.1 Montrons que

$$\tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) = -q_x x - p_{z_s}(z_s - z_0) - p_{z_r}(z_r - z_0)$$

Considérons un milieu homogène dans lequel se trouve une source $\mathbf{s} = (s, z_s)$, un récepteur $\mathbf{r} = (r, z_r)$ et un point diffractant $\mathbf{x} = (x, z)$. Commençons par exprimer r et s en fonction des profondeurs z_s, z_r, z , des vecteurs lenteur p^r et p^s et de la vitesse du milieu c :

$$\begin{cases} r &= x + \frac{(z_r - z_0)cp^r}{\sqrt{1 - c^2(p^r)^2}} \\ s &= x + \frac{(z_s - z_0)cp^s}{\sqrt{1 - c^2(p^s)^2}} \end{cases} \quad (\text{G.1})$$

Établissons maintenant l'expression du temps de parcours $T(s, z_s, r, z_r, \mathbf{x})$,

$$T(s, z_s, r, z_r; \mathbf{x}) = \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{p_{z_r}} \right) (z_r - z_0) + \frac{1}{c^2} \left(\frac{1}{p_{z_s}} \right) (z_s - z_0) \quad (\text{G.2})$$

car

$$T = \frac{r_1 + r_2}{c} \quad (\text{G.3})$$

avec,

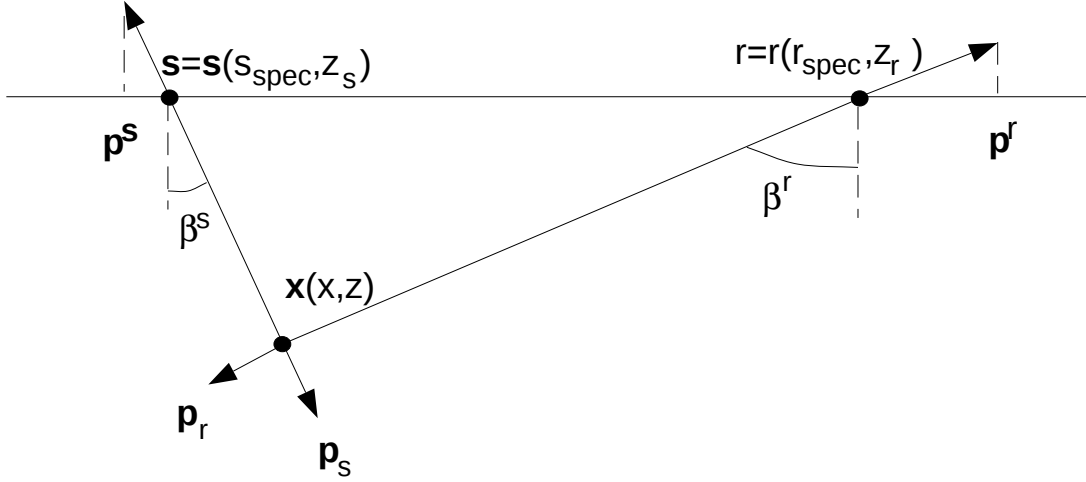


FIG. G.1 – La figure présente le trajet des rais de l'opérateur de Kirchhoff en milieu homogène. Les rais suivent des trajectoires rectilignes en milieu homogène. $\mathbf{s}$ et $\mathbf{r}$ sont respectivement la source et le récepteur spéculaire associés au point diffractant $\mathbf{x}$. β^s et β^r sont les angles d'incidence et d'émergence du rai mesuré par rapport à la verticale (vers le bas). $\mathbf{p}^s$ et $\mathbf{p}^r$ sont les vecteurs lenteur en surface. Ils définissent la trajectoire suivie par le rai. Les vecteurs lenteur sont constants tout le long de la trajectoire du rai.

$$\begin{aligned} r_1 &= (z - z_s) / \cos \beta^s \\ r_2 &= (z - z_r) / \cos \beta^r \end{aligned} \quad (\text{G.4})$$

et $p_{z_r} = \cos \beta^r / c$ et $p_{z_s} = \cos \beta^s / c$.

De plus, à partir de (G.1), on calcule

$$\begin{aligned} p^r r &= p^r x + \frac{(p^r)^2 (z - z_r)}{p_{z_r}} \\ p^s s &= p^s x + \frac{(p^s)^2 (z - z_s)}{p_{z_s}} \end{aligned} \quad (\text{G.5})$$

Le signe + dans l'équation (G.5) signifie que l'on a considéré des vecteurs lents p^s et p^r en surface orientés vers le haut.

À partir de (G.1) et de (G.5), on obtient la relation générale de $\tau(p^s, z_s, p^r, z_r; \mathbf{x})$:

$$\begin{aligned} \tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) &= T(s_{spec}, r_{spec}, z_0; \mathbf{x}) - p^s s_{spec} - p^r r_{spec} \\ &= -q_x x - p_{z_r} (z - z_r) - p_{z_s} (z - z_s) \end{aligned} \quad (\text{G.6})$$

avec $q_x = p^r + p^s$.

G.2 Montrons que $\tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) = -q_x x - q_z(z - z_0)$

Évaluons maintenant (G.6) lorsque les sources et les récepteurs sont à la même profondeur $z_r = z_s = z_0$, on obtient :

$$\begin{aligned} \tau(p^s, p^r, z_0; \mathbf{x}) &= T(s_{spec}, r_{spec}, z_0; \mathbf{x}) - p^s s_{spec} - p^r r_{spec} \\ &= -q_x x - q_z(z - z_0) \end{aligned} \quad (\text{G.7})$$

avec $q_z = p_{z_s} + p_{z_r}$.

G.3 Montrons que $\tau(p^s, p^r, z_0; x, z_0) = -(p^s + p^r) \cdot x$

Montrons tout d'abord que le temps de trajet $T(s, z_s, r, z_r; \mathbf{x}) = 0$ est nul lorsque l'on image des points à la même profondeur $z_s = z_r = z_0$ que les données (acquises ou redatumées). Posons $z_s = z_r = z_0$ dans (G.1), on déduit que

$$\begin{aligned} s_{spec} &= x \\ r_{spec} &= x \end{aligned} \quad (\text{G.8})$$

et exprimons l'expression du temps de parcours $T(s, r, z_0, x)$ sous la forme,

$$\begin{aligned} T(s, r, z_0; \mathbf{x}) &= T(s, z_0; \mathbf{x}) + T(r, z_0; \mathbf{x}) \\ &= \frac{|r - x|}{c^2 |p^r|} + \frac{|x - s|}{c^2 |p^s|}. \end{aligned} \quad (\text{G.9})$$

D'après (G.9) et (G.8), on déduit que

$$T(s_{spec}, r_{spec}, z_0; x, z_0) = 0. \quad (\text{G.10})$$

Les équations (G.8) et (G.10) indiquent lorsque le point de réflexion x , la source et le récepteur spéculaires (s_{spec}, r_{spec}) sont à la même profondeur z_0 , ils sont tous les trois confondus et que le temps de parcours associé est nul. Cela est cohérent avec le principe d'imagerie classique par équation d'onde qui consiste à prendre le champ redatumé à z_0 à $t = 0$ et avec l'hypothèse qu'après l'extrapolation du champ d'onde, la source, le récepteur et le point image sont suffisamment proches pour considérer la vitesse localement homogène.

Enfin, l'évaluation de (G.6) lorsque $z_s = z_r = z_0$, nous donne

$$\tau(p^s, p^r, z_0; x, z_0) = -(p^s + p^r) \cdot x. \quad (\text{G.11})$$

Annexe H

Calcul du jacobien

Calculons l'expression du jacobien,

$$\left| \frac{\partial(\omega, p^s, p^r)}{\partial(k_z, k_m, k_h)} \right| = \left| \frac{\partial(\omega, p^s, p^r)}{\partial(\omega, p_m, p_h)} \right| \left| \frac{\partial(\omega, p_m, p_h)}{\partial(\omega, k_m, k_h)} \right| \left| \frac{\partial(\omega, k_m, k_h)}{\partial(k_z, k_m, k_h)} \right| \quad (\text{H.1})$$

avec,

$$\left| \frac{\partial(\omega, p^s, p^r)}{\partial(\omega, p_m, p_h)} \right| = \frac{1}{2} \quad (\text{H.2})$$

et,

$$\left| \frac{\partial(\omega, p_m, p_h)}{\partial(\omega, k_m, k_h)} \right| = \frac{1}{\omega^2} \quad (\text{H.3})$$

et enfin,

$$\left| \frac{\partial(\omega, k_m, k_h)}{\partial(k_z, k_m, k_h)} \right| = \frac{c^2 p_{z_s} p_{z_r}}{p_{z_s} + p_{z_r}} \quad (\text{H.4})$$

d'où l'expression finale du jacobien :

$$\left| \frac{\partial(\omega, p^s, p^r)}{\partial(k_z, k_m, k_h)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial\omega}{\partial k_z} & \frac{\partial\omega}{\partial k_m} & \frac{\partial\omega}{\partial k_h} \\ \frac{\partial k_m}{\partial k_z} & \frac{\partial k_m}{\partial k_m} & \frac{\partial k_m}{\partial k_h} \\ \frac{\partial k_h}{\partial k_z} & \frac{\partial k_h}{\partial k_m} & \frac{\partial k_h}{\partial k_h} \end{vmatrix}. \quad (\text{H.5})$$

$$= \left| \frac{1}{2\omega^2} \frac{c^2 p_{z_s} p_{z_r}}{p_{z_s} + p_{z_r}} \right| \quad (\text{H.6})$$

L'évaluation des termes nous donne,

$$\left| \frac{\partial k_z}{\partial \omega} \right| = \frac{1}{c^2} \frac{p_{z_r} + p_{z_s}}{p_{z_r} p_{z_s}} \quad (\text{H.7})$$

car,

$$k_z = \omega \left[\sqrt{\frac{1}{c^2} - p_s^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - p_r^2} \right] \quad (\text{H.8})$$

$$= \omega \left[\sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{p_m + p_h}{2} \right)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - \left(\frac{p_m - p_h}{2} \right)^2} \right] \quad (\text{H.9})$$

$$= \left[\sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{k_m + k_h}{2} \right)^2} + \sqrt{\frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{k_m - k_h}{2} \right)^2} \right] \quad (\text{H.10})$$

à k_m et k_h constant.

Annexe I

Relation entre les champs en milieu homogène

Dans cette annexe, on détermine la relation qui existe en milieu homogène entre le champ D à $z = z_0$ et le champ D pour un temps de parcours nul $t = 0$. Nous calculerons ensuite les relations entre ces deux champs dans le cas de la dérivée par rapport à la profondeur de la source puis du récepteur. Cette relation est utilisée pour aboutir à notre principe d'imagerie. Nous allons montrer que :

$$D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0) = \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| e^{ik_{z_0} z_0} D(k_s, k_r, z_0; \omega), \text{ avec } \omega = \frac{k_{z_0}}{p_{z_s} + p_{z_r}} \quad (\text{I.1})$$

et la formule réciproque,

$$D(k_s, k_r, z_0; \omega) = \left| \frac{\omega}{c^2} \frac{k_{z_s} + k_{z_r}}{k_{z_s} k_{z_r}} \right| e^{-ik_{z_0} z_0} D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0), \text{ avec } k_{z_0} = \omega(p_{z_s} + p_{z_r}) \quad (\text{I.2})$$

Ces relations signifient qu'à partir de la transformée de Fourier suivant z du champ redatumé à $t = 0$, il est possible de calculer le champ à toutes les fréquences en $z = z_0$ et inversement.

Démonstration

Pour cela, considérons un milieu homogène et partons de la formule de modélisation en milieu homogène et dans le domaine (p, ω) et en $z = z_0$,

$$D(p^s, p^r, z_0; \omega) = \int dx \int dz R(x, z, \theta(p^s, p^r)) \frac{i \cdot \text{sign}(\omega)}{|\omega|} \mathcal{L}(p^s, p^r, z_0; x, z) e^{-i\omega \tau(p^s, p^r, z_0; x, z)} \quad (\text{I.3})$$

En milieu homogène (cf. annexe G), on a

$$\mathcal{L}(p^s, p^r, z_0; x, z) = \frac{2 \cos \theta}{c} \mathcal{A}(p^s, p^r, z_0; x, z) = \frac{|\mathbf{q}|}{4p_{z_s} p_{z_r}} \quad (\text{I.4})$$

Le champ $D(p^s, p^r, z_0; \omega)$ est le champ exprimé dans le domaine des ondes planes et que nous pouvons écrire $D(k_s, k_r, z_0; \omega)$. Dans le domaine des ondes planes θ ne dépend que de k_h et k_z (cf. annexe J).

En introduisant la propriété $\tau(p^s, p^r, z_0; x, z_0) = -q_x x - q_z(z - z_0)$ montrée en annexe (G), on exprime le champ sous la forme d'une transformée de Fourier du coefficient de réflexion tel que :

$$\begin{aligned} D(k_s, k_r, z_0; \omega) &= \int dx \int dz R(x, z, \theta(p^s, p^r)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) e^{i\omega(q_x x + q_z(z - z_0))} \\ &= R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(p^s, p^r)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) e^{-i\omega q_z z_0} \end{aligned} \quad (\text{I.5})$$

avec

$$\begin{aligned} q_x &= p^s + p^r \\ q_z &= \sqrt{\frac{1}{c^2} - (p^s)^2} + \sqrt{\frac{1}{c^2} - (p^r)^2}. \end{aligned}$$

Appliquons maintenant une transformée de Fourier par rapport à $z = z_0$,

$$D(k_s, k_r, k_{z_0}; \omega) = R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(p^s, p^r)) \left(\frac{-2\pi|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \delta(k_{z_0} - \omega q_z) \quad (\text{I.6})$$

c'est-à-dire que l'on prend une transformée de Fourier des données redatumées à toutes les profondeurs z_0 . Prenons maintenant l'intégrale sur ω pour faire apparaître $t = 0$,

$$D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega R(\omega q_x, \omega q_z, \theta(p^s, p^r)) \left(\frac{-2\pi|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \delta(k_{z_0} - \omega q_z) \quad (\text{I.7})$$

Cette intégrale est non nulle uniquement lorsque $k_{z_0} - \omega q_z = 0$ c'est-à-dire pour $\omega = \frac{k_{z_0}}{q_z}$. C'est une expression de la spécularité. En effet, les seuls nombre d'onde k_{z_0} non nuls dans Fourier sont ceux qui correspondent aux q_z spéculaires des rais (associé à un rai source descendant et un rai montant récepteur). On peut alors écrire (cf. annexe K) que :

$$\delta(k_{z_0} - \omega q_z) = \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| \delta(\omega - \omega_0) \quad (\text{I.8})$$

d'où,

$$D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0) = R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(p^s, p^r)) \left(\frac{-|\mathbf{q}|}{4i\omega p_{z_s} p_{z_r}} \right) \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| \quad (\text{I.9})$$

$$= R(\omega q_x, k_{z_0}, \theta(p^s, p^r)) \frac{c^2 |\mathbf{q}|}{4i\omega |q_z|} \quad (\text{I.10})$$

En comparant la relation (I.5) et (I.9) on déduit la relation liant $D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0)$ et $D(k_s, k_r, z_0; \frac{k_{z_0}}{q_z})$

$$D(k_s, k_r, k_{z_0}; t = 0) = D(k_s, k_r, z_0; \frac{k_{z_0}}{q_z}) \left| \frac{c^2}{\omega} \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| e^{+i\omega k_{z_0} z_0} \quad (\text{I.11})$$

Annexe J

Angle de réflexion dans le domaine des ondes planes

Dans cette annexe, nous montrons que dans le cas d'un milieu homogène, l'angle de réflexion ne dépend que du rapport p_h/q_z . Cette démonstration est complémentaire à la démonstration cinématique de Sava and Fomel (2003).

Dans un milieu homogène, l'équation des ondes est égale dans le domaine de Fourier à la relation de dispersion. En 2D, elle s'écrit :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_z^2 \quad (\text{J.1})$$

avec $\frac{ck_x}{\omega} = \sin\theta$. θ est l'angle de propagation de l'onde plane associé au nombre d'onde k_x , à la fréquence ω et à la vitesse c du milieu. L'angle de propagation est indépendant de la position d'observation.

De la même manière, on peut considérer la relation de dispersion de l'équation des ondes côté source et côté récepteur, et ainsi définir des angles de propagation β_s et β_r mesurés par rapport à la direction verticale et associés respectivement au champ d'onde source et récepteur.

On peut écrire que :

$$\beta_s = \frac{\beta_s + \beta_r}{2} + \frac{\beta_s - \beta_r}{2} \quad (\text{J.2})$$

$$\beta_r = \frac{\beta_s + \beta_r}{2} - \frac{\beta_s - \beta_r}{2} \quad (\text{J.3})$$

et exprimer les sinus tel que :

$$\sin \beta_s = \sin\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) + \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) \quad (\text{J.4})$$

$$\sin \beta_r = \sin\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) - \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right), \quad (\text{J.5})$$

avec,

$$p_s = \frac{\sin \beta_s}{v} = \frac{k_{x_s}}{\omega} \quad (\text{J.6})$$

$$p_r = \frac{\sin \beta_r}{v} = \frac{k_{x_r}}{\omega} \quad (\text{J.7})$$

d'où

$$\sin \beta_s - \sin \beta_r = 2 \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right). \quad (\text{J.8})$$

De même, on peut écrire les relations en cosinus,

$$\cos \beta_s = \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) - \sin\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) \quad (\text{J.9})$$

$$\cos \beta_r = \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) + \sin\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \sin\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right), \quad (\text{J.10})$$

avec,

$$p_{z_s} = \frac{\cos \beta_s}{v} = \frac{k_{z_s}}{\omega} \quad (\text{J.11})$$

$$p_{z_r} = \frac{\cos \beta_r}{v} = \frac{k_{z_r}}{\omega} \quad (\text{J.12})$$

d'où

$$\cos \beta_s + \cos \beta_r = 2 \cos\left(\frac{\beta_s + \beta_r}{2}\right) \cos\left(\frac{\beta_s - \beta_r}{2}\right) \quad (\text{J.13})$$

Enfin, on déduit des relations (J.8) et (J.9),

$$\tan \theta = \frac{\sin \beta_s - \sin \beta_r}{\cos \beta_s + \cos \beta_r} \quad (\text{J.14})$$

$$= \frac{p_s - p_r}{p_{z_s} + p_{z_r}} \quad (\text{J.15})$$

avec θ égale à la définition classique de l'angle de réflexion tel que $\theta = (\beta_s - \beta_r)/2$. En exprimant

la relation (J.14) en fonction de (p_s, p_r) et (p_{z_s}, p_{z_r}) , on obtient,

$$\tan \theta = \frac{-p_h}{q_z} = \frac{-k_h}{k_z} \quad (\text{J.16})$$

avec $q_z = p_{z_s} + p_{z_r}$ et $p_r - p_s = p_h$. La relation (J.16) montrée ci-dessus dans le domaine des ondes planes est la même que celle montrée par Sava and Fomel (2003) cinématiquement en utilisant la théorie asymptotique haute fréquence. La relation (J.14) établit que dans le domaine des ondes planes, l'angle θ ne dépend que de β_s et β_r . La relation (J.16) montre que l'on peut calculer θ à partir de p_h et q_z .

Annexe K

Mesure du Dirac composé par la fonction $\tan$

K.1 Composition de la mesure d'une distribution par une fonction

Nous cherchons ici, l'expression du Dirac d'une fonction $f(x)$, $\delta(f(x))$ tel que $f(x_0) = 0$ et $\dot{f}(x_0) \neq 0$. Posons $\Phi(x)$ une fonction test à support compact indéfiniment dérivable dans R et intégrons par rapport à x . Dans ce cas, l'une des propriétés du Dirac s'écrit,

$$\int dx \delta(f(x)) \Phi(x) = \int df \frac{\delta(f(x))}{\dot{f}(x)} \Phi(x) \quad (\text{K.1})$$

$$= \frac{\Phi(x_0)}{|\dot{f}(x_0)|} \quad (\text{K.2})$$

où $\dot{f}(x)$ est la dérivée de f . $f(x)$ ne doit avoir qu'un unique zéro. On déduit alors que :

$$\delta(f(x)) = \frac{\delta(x - x_0)}{|\dot{f}(x_0)|} \quad (\text{K.3})$$

avec $f(x_0) = 0$ et $\dot{f}(x_0) \neq 0$.

K.2 Application à $f(\theta) = \tan \theta - \tan \theta_0$

Posons $f(\theta) = \tan \theta - \tan \theta_0$, et utilisons la relation (K.3),

$$\delta(\tan \theta - \tan \theta_0) = \frac{\delta(\theta - \theta_0)}{|\dot{f}(\theta)|} \quad (\text{K.4})$$

or $\dot{f}(\theta) = \frac{1}{\cos^2 \theta} \neq 0$ et $f(\theta_0) = 0$ d'où,

$$\delta(\theta - \theta_0) = \frac{\delta(\tan \theta - \tan \theta_0)}{\cos^2 \theta_0} \quad (\text{K.5})$$

Introduisons maintenant la relation entre θ , k_z et k_h montrée dans l'annexe J dans le domaine des ondes planes,

$$\tan \theta = \frac{-k_h}{k_z}. \quad (\text{K.6})$$

Cela nous permet dans la relation précédente d'introduire l'expression du dirac $f(k_h) = \delta(\theta(k_z, k_h) - \theta_0)$ en fonction de $\tan \theta_0$, on obtient,

$$\delta(\theta(k_h, k_z) - \theta_0) = \frac{\delta(\frac{-k_h}{k_z} - \tan \theta_0)}{\cos^2 \theta_0} \quad (\text{K.7})$$

$$= |k_z| \frac{\delta(k_h + k_z \tan \theta_0)}{\cos^2 \theta_0} \quad (\text{K.8})$$

K.3 Application à $f(\omega) = k_{z_0} - (k_{z_s} + k_{z_r})$

Posons $f(\omega) = k_{z_0} - (k_{z_s} + k_{z_r})$,

avec,

$$k_{z_s} = \omega \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{k_{x_s}^2}{\omega^2}}$$

$$k_{z_r} = \omega \sqrt{\frac{1}{c^2} - \frac{k_{x_r}^2}{\omega^2}}$$

Il n'y a de solution $f(\omega) = 0$ que si $k_{z_0} > \sqrt{|k_{x_s}^2 - k_{x_r}^2|}$. Enfin, on a

$$\begin{aligned} \dot{f}(\omega) &= -\frac{\omega}{c^2} \left(\frac{1}{k_{z_s}} + \frac{1}{k_{z_r}} \right) \\ &= -\frac{\omega}{c^2} \left(\frac{k_{z_s} + k_{z_r}}{k_{z_s} k_{z_r}} \right) \end{aligned} \quad (\text{K.9})$$

et $f(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = \omega_0$ tel que : $k_{z_s} + k_{z_r} = k_{z_0}$. On obtient alors

$$\delta(f(\omega)) = \delta(\omega - \omega_0) \frac{c^2}{|\omega|} \left| \frac{k_{z_s} k_{z_r}}{k_{z_s} + k_{z_r}} \right| \quad (\text{K.10})$$

Annexe L

Expression la transformée de radon

Définissons ici les transformations de type sommation de pente (slant stack) dans le domaine spatial et dans le domaine de Fourier. Une telle transformation dans le domaine spatial est définie par :

$$f(x, z) \rightarrow F(a, b)$$

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz f(x, z) \delta(z - a - bx) \quad (\text{L.1})$$

Cela correspond à sommer les contributions de la fonction $f(x, z)$ le long de droite de pente b .

En introduisant dans l'équation (L.1), l'expression de la transformée de Fourier de $f(x, z)$ bidimensionnelle, on peut écrire aussi cette transformée de Radon dans le domaine de Fourier, elle est alors appelée transformation radiale (Radial Trace Transform) :

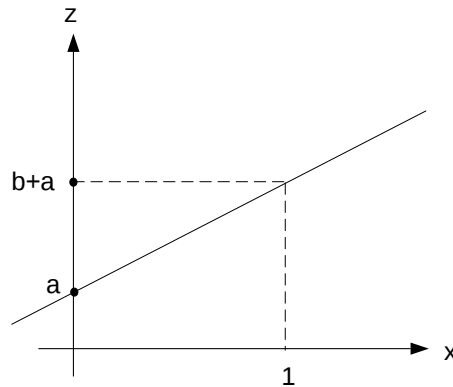


FIG. L.1 – Représentation schématique d'une sommation de pente. Appliquée à la fonction $f(x, z) \in \mathbb{R}^2$, elle consiste à sommer les valeurs de $f(x, z)$ le long de droites d'équation $z = bx + a$.

$$F(a, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dz \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z f(k_x, k_z) \delta(z - a - bx) e^{-ik_z z - ik_x x} \quad (\text{L.2})$$

$$= \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z f(k_x, k_z) \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{i(-k_x - bk_z)x} e^{-ik_z a} \quad (\text{L.3})$$

$$= \frac{1}{(2\pi)} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z f(k_x, k_z) \delta(k_x + k_z b) e^{-ik_z a} \quad (\text{L.4})$$

Ces transformations permettent dans l'imagerie par équation d'onde de construire des collections de point image dans le domaine des angles depuis des CIG dans le domaine des offsets profondeurs (Ottolini (1982)).

Bibliographie

- Aki, K., and Richards, P. G., 1980, Quantitative seismology : Theory and methods : W.H. Freeman and company.
- Albertin, U., Kappert, J., Randall, R., and M., S., 2002, The time for depth imaging : Oilfield Review, spring, Schlumberger.
- Audebert, F., Nichols, D., Rekdal, T., Biondi, B., Lumley, D. E., and Urdaneta, H., 1997, Imaging complex geologic structure with single-arrival kirchhoff prestack depth migration : Geophysics, , no. 62, 1533.
- Bagaini, C., Bonomi, E., and Pieroni, E., 1995, Data parallel implementation of 3-D PSPI : 65th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 188–191.
- Baina, R., Thierry, P., Calendra, H., and Devaux, V., 2002, 3D preserve amplitude PSDM and AVA relevance : The leading Edge, pages 1237–1241.
- Bamberger, A., Engquist, B., Halpern, L., and Joly, P., 1984, Construction et analyse d'approximation paraxiale en milieu heterogene : Rapport de recherche Centre de Mathématiques Appliquées numéro 114, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- Bamberger, A., Engquist, B., Halpern, L., and Joly, P., 1985, Construction et analyse d'approximation paraxiale en milieu heterogene ; 2. approximation d'ordre supérieur : Rapport de recherche Centre de Mathématiques Appliquées numéro 115, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France.
- Bamberger, A., Enquist, B., Halpern, L., and Joly, P., 1988, Paraxial approximations in heterogeneous media : SIAM J. on Appl. Math., **48**, 99–128.
- Barucq, H., Duquet, B., and Prat, F., 2006a, True amplitude one-way propagation in blocky media : Submitted to 76rd, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys.
- 2006b, True amplitude one-way propagation in heterogeneous media : Submitted to Journal of scientific computing.
- Berkhout, and Wapenaar, 1989, Elastic wave field extrapolation : Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- Berkhout, A. J., 1980, Seismic migration-imaging of acoustic energy by wave field extrapolation : Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- Berkhout, A. J., 1985, Seismic migration - a. Theoretical aspects : Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- Berkhout, 1987, Applied seismic wave theory : Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- Berryhill, J. R., 1979, Wave equation datuming : Geophysics, **44**, 1329–1344.
- Berryhill, J. R., 1984, Wave equation datuming before stack : Geophysics, **49**, 2064–2066.
- Beylkin, G., 1984, The inversion problem and applications of the generalized Radon transform : Comm. Pure. Math., **37**, 579–599.

- Beylkin, G., 1985, Imaging of discontinuities in the inverse scattering problem by inversion of a causal generalized Radon transform : *J. Math. Phys.*, **26**, 99–108.
- Billette, F., and Lambaré, G., 1998, velocity macro model estimation by stereotomography :, **135**, no. 2, 671–680.
- Biondi, B., and Symes, W., 2004, Angle-domain common-image gather for migration velocity analysis by wavefield-continuation imaging : in press *Geophysics*.
- Biondi, B., and Tisserant, T., 2004, 3D angle-domain common-image gather for migration velocity analysis : in press in *Geophysical Prospecting*.
- Biondi, B., 2002a, Stable wide-angle Fourier finite-difference downward extrapolation of 3-D wavefields : *Geophysics*, **67**, no. 3, 872–882.
- 2002b, 3-d seismic imaging : Stanford University.
- Biondi, B., 2003, Equivalence of source-receiver migration and shot profile migration : *Geophysics*, **68**, no. 4, 1340–1347.
- Bishop, T. N., Bube, K. P., Cutler, R. T., Langan, R. T., Love, P. L., Resnick, J. R., Shuey, R. T., Spindler, D. A., and Wyld, H. W., 1985, Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media : *Geophysics*, **50**, no. 6, 903–923.
- Blacquiere, G., 1989, 3d wave field extrapolation in seismic depth migration : Ph.D. thesis, Delft University of Technology.
- Bleistein, N., Coher, J. K., and Stockwell, J., 2001, Mathematics of multidimensional seismic inversion : Springer Publishing Co.
- Bleistein, N., 1984, Mathematical methods for wave phenomena : Academic Press.
- Bleistein, N., 1987, On the imaging of reflectors in the earth : *Geophysics*, **52**, 931–942.
- Borgne, H., 2003, Migration quantitative 3d multi-ondes en milieu élastique anisotrope : Rapport d'avancement.
- Borgne, H., 2004, Migration quantitative 3d multi-ondes en milieu élastique anisotrope : Ph.D. thesis, Université Paris XI.
- Bourgeois, A., Bourget, M., Lailly, P., Poulet, M., Ricarte, P., and Versteeg, R., 1991, Marmousi, model and data : The Marmousi Experience, Proc . of the 52nd EAGE workshop on practical aspects of seismic data inversion : EAGE, Zeist, The Netherlands.
- Brandsberg-Dahl, S., De Hoop, M. V., and Ursin, B., 1999, Sensitivity transform in the common scattering-angle/azimuth domain : 61th Ann. Conf. Eur. Assn. Geosci. Eng, **Expanded abstract**, no. 9, 1715–1718.
- Brown, D. L., 1983, Applications of operator separation in reflection seismology : *Geophysics*, **48**, 288–294.
- Červený, V., 1985, The application of ray tracing to the numerical modeling of seismic wavefields in complex structures :, in Dohr, G., Ed., *Handbook of geophysical exploration* : Geophys. Press, 15A, 1–124.
- Claerbout, J. F., 1971, Towards a unified theory of reflector mapping : *Geophysics*, **36**, no. 3, 467–481.
- Claerbout, J. F., 1983, Imaging the earth's interior : Blackwell Scientific Publication Co.

- Claerbout, J. F., 1985, Imaging the earth's interior : Blackwell Scientific Publication Co.
- Clayton, R. W., and Stolt, R., 1981, A Born-WKBJ inversion method for acoustic reflection data : *Geophysics*, **46**, no. 11, 1559–1567.
- Cohen, J., and Bleistein, N., 1979, Velocity inversion procedure for acoustic waves : *Geophysics*, **50**, 1077–1087.
- Collino, F., and Joly, P., 1995, Splitting of operators, alternate directions and paraxial approximations for the 3-D equation : *Siam J. on Scientific and Stat. Comp.*, **16**, no. 5.
- Collino, F., and Lavaud, B., 1996, Peut-on obtenir des amplitudes correctes avec les équations paraxiales : Rapport INRIA, N°3004, France.
- Collino, F., 1987, Analyse numérique de modèles de propagation d'ondes, application à la migration et à l'inversion des données sismiques : Ph.D. thesis, Université Paris IX.
- Collino, F., 1993, Numerical method for 2-D migration : PSI Consortium, Annual Report, IFP, Rueil Malmaison, France.
- Collino, F., 1995, Perfectly Matched Absorbing Layers for the Paraxial Equations : PSI Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil Malmaison, France.
- Daley, P. F., and Hron, F., 1977, Reflection and transmission coefficients for transversely isotropic media : *Bull., Seis. Soc. Am.*, **67**, 661–675.
- De Bruin, C. G. M., Wapenaar, C. P. A., and Berkhout, A. J., 1990, Angle-dependent reflectivity by means of prestack migration : *Geophysics*, **55**, no. 9, 1223–1234.
- De Hoop, M. V., and Bleistein, N., 1997, Generalized Radon transform for reflectivity in an isotropic elastic media : *Inverse Problems*, **13**, 669–690.
- De Hoop, M., 1996, Generalization of the Bremmer coupling series : *J. Math. Phys.*, **37**, 3246–3282.
- Delprat-Jannaud, F., and Lailly, P., 1993, Ill-posed and well-posed formulations of the reflection travel time tomography problem : *J. Geophys. Res.*, **98**, 6589–6605.
- Duquet, B., Marfurt, K. J., and Dellinger, J., 2000, Kirchhoff modeling, inversion for reflectivity and subsurface illumination : *Geophysics*, **65**, 1185–1209.
- Duquet, B., Xu, S., and G., L., 2002, 3d multi-arrival kirchhoff versus wave equation migration : Application to the 3d seg/eage salt model : 73rd Ann. Mtg. Soc. Exp. Geophys.
- Duquet, B., 1996, Amélioration de l'imagerie sismique de structures géologiques complexes : Ph.D. thesis, Université Paris XIII.
- Ehinger, A., and Lailly, P., 1995, Velocity model determination by the SMART method, Part 1 : Theory : 65th Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, pages 739–742.
- Ehinger, A., Lailly, P., and Marfurt, K., 1996, Green's function implementation of common offset wave equation migration : *Geophysics*, **61**, no. 6, 1813–1821.
- Etgen, J. T., 1994, Stability of explicit depth extrapolation through laterally-varying media : Stability of explicit depth extrapolation through laterally-varying media :, 1266–1269.
- Farra, V., and Madariaga, R., 1988, Non-linear reflection tomography : *Geophys. J. Roy. Ast. Soc.*, **95**, 135–147.
- Forgues, E., 1996, Inversion linéarisée multiparamètres via la théorie des rais : Ph.D. thesis, Université Paris VII.

- French, W. S., 1975, Computer migration of oblique seismic reflection profiles : *Geophysics*, **40**, 961–980.
- Gazdag, J., and Sguazzero, P., 1984, Migration of seismic data by phase shift plus interpolation : *Geophysics*, **49**, no. 2, 124–131.
- Gazdag, J., 1978, Wave equation with the phase-shift method : *Geophysics*, **43**, 1343–1351.
- Geoltrain, S., and Brac, J., 1993, Can we image complex structures with first-arrival traveltimes ? : *Geophysics*, **58**, 564–575.
- Huang, L. J., and Fehler, M., 2000, Globally optimized fourier finite-difference migration method : 70th Ann. Internat. Mtg. Soc. of Expl. Geophys., pages 802–805.
- Hörmander, L., 1985, The analysis of linear partial differential operators, volume 3 & 4 : Springer-Verlag, Berlin.
- Jeannot, B., 2003, Full prestack versus shot record migration : Practical aspects : 58th Ann. Mtg. Soc. Exp. Geophys., **Expanded abstract**, 52–74.
- Jin, S., Madariaga, R., Virieux, J., and Lambaré, G., 1992, 2D asymptotic iterative elastic inversion : *Geophys.J.Int.*, **108**, 575–588.
- Joncour, F., Déroutat, J., Duquet, D., and Svay-Lucas, J., 2003, Stable wavefield paraxial extrapolator for P and S waves in VTI media : 73th Ann. Internat. SEG Mtg., Expanded Abstracts, **73**.
- Joncour, F., Lambaré, G., Svay-Lucas, J., and Duquet, B., 2005a, True amplitude migration by wavefield continuation : 75nd, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Expanded Abstract**.
- 2005b, True amplitude wave equation migration : 67th International Meeting of the EAGE, **Expanded abstract**.
- Keho, T., and Beydoun, W. B., 1988, Paraxial ray kirchhoff migration : *Geophysics*, **53**, no. 12, 1540–1546.
- Kern, M., 1992, Numerical solution of one-way wave equation using a qmr type method : Proceedings of the Second Copper Mountain Conference on Iterative Methods.
- Kinneging, N., 1989, Three-dimensional redatuming of seismic shot records. : Ph.D. thesis, Delft University.
- Kiyashchenko, D., and Plessix, R., 2004, Improved amplitude multi-one-way modeling method : EAGE, **Expanded abstract**.
- Kiyashchenko, D., Plessix, R., Kashtan, B., and V., T., 2005, Improved amplitude multi-one-way modeling method : Wave motion, **submitted**.
- Kohn, J., and Nirenberg, L., 1965, An algebra of pseudodifferential operators : *Comm. Pure Appl. Math.*, , no. 18, 269–305.
- Lailly, P., 1983, A study of wave dispersion in finite-difference schemes for 2D and 3D migration : Paper presented at the 45th EAEG Ann. Internat. Mtg.
- Lailly, P., 1984, Migrations methods : partial but efficient solutions to the seismic inverse problem : Proc. of the SIAM International Conference on 'Inverse problems of acoustic and elastic waves' (Cornell university, 1984), 182–214.
- Lambaré, G., Lucio, P. S., and Hanyga, A., 1994, 2-D asymptotic Green's functions : S. E. G. 64th annual meeting, expanded abstracts, pages 1386–1389.

- Lambaré, G., 1991, Inversion linearisée de données de sismique réflexion par une méthode quasi-newtonienne. : Ph.D. thesis, Paris VII.
- Le Rousseau, J. H., and De Hoop, M. V., 1998, Modeling and imaging with the generalized screen algorithm : 68th Ann. Internat. Mtg. Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts, 1937–1940.
- Le Rousseau, J., and De Hoop, M. V., 2003, Generalized-screen approximation and algorithms for the scattering of elastic waves : Q.J. Mech. Appl. Math., **56**, 1–33.
- Le Rousseau, J., 2001, Microlocal analysis of wave-equation imaging and generalized-screen propagators : Ph.D. thesis, Colorado School of Mines.
- Li, Z., 1991, Compensating finite-difference errors in 3D migration and modelling : Geophysics, **56**, 1650–1660.
- Lucio, P. S., Lambaré, G., and Hanyga, A., 1995, 3–D multivalued traveltimes and amplitude maps : 63rd Conference and Technical Exhibition.
- Mamoun, A. B., Collino, F., and Joly, P., 1993, Splitting of operators, alternate directions and paraxial approximations for the 3–D wave equation : PSI Annual Report, Institut Français du Pétrole, Rueil Malmaison, France.
- Mosher, C., and Foster, D., 2000, Common angle imaging conditions for prestack depth migration : 70th Ann. Internat. Mtg. Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**, 830–833.
- Mulder, W., and Plessix, M., 2003, One-way and two-way wave-equation migration : 73rd Ann. Mtg. Soc. Exp. Geophys., page 881.
- Mulder, W., and Plessix, M., 2004, A comparison between one-way and two-way wave-equation migration : Geophysics, **69**, 1491.
- Nédélec, J. C., 2001, Acoustic and electromagnetic equations, integral representations for harmonic problems : Applied mathematical sciences, **springer**, no. 144.
- Operto, M., Xu, S., and Lambaré, G., 2000, Can we quantitatively image complex structures with rays ? : Geophysics, **65**.
- Ostrander, W., 1984, Plane-wave reflection coefficients for gas sands at non normal angles of incidence : Ph.D. thesis.
- Ottolini, R., 1982, Migration of reflection seismic data in angle-midpoint coordinates : Ph.D. thesis, University of Stanford.
- Peels, G., 1988, True amplitude wavefield extrapolation with applications in seismic shot record redatuming : Ph.D. thesis, Delft University.
- Pica, A., Diet, J. P., and Tarantola, A., 1990, Nonlinear inversion of seismic reflection data in a laterally invariant medium : Geophysics, **55**, 284–292.
- Plessix, R.-E., and Mulder, W., 2002, Amplitude-preserving finite-difference migration based on a least-squares formulation in the frequency domain : 72nd, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Extended Abstract**.
- Prat, F., 2005, Analyse du generalised screen propagator : Ph.D. thesis, Université de Pau et des Pays de l’Adour, France.
- Pratt, R., 1990, Frequency domain elastic wave modeling by finite differences : A tool for cross-hole seismic imaging : Geophysics, **55**, 626–632.

- Prucha, M. L., and Biondi, B. L., 1999, Angle-domain common gathers by wave-equation migration : 69th Ann. Internat. Mtg, Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**.
- Rickett, J., and Sava, P., 2001, Offset and angle-domain common image-point gathers for shot profile migration : 71th Ann. Internat. Mtg, Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**.
- Rickett, J., and Sava, P., 2002, Offset and angle-domain common image-point gathers for shot profile migration : Geophysics, **67**, no. 3, 883–889.
- Ristow, D., and Rühl, T., 1994, Fourier finite-difference migration : Geophysics, **59**, no. 12, 1882–1893.
- Ristow, D., and Rühl, T., 1997, 3-D implicit finite-difference migration by multiway splitting : Geophysics, **62**, no. 2, 554–567.
- Ristow, D., 1980, 3d downward extrapolation of seismic data in particular by finite-difference methods : Ph.D. thesis : Ph.D. thesis, University of Utrecht.
- Ristow, D., 1999, Migration in transversely isotropic media using implicit finite-difference operator : Journal of seismic Explor., **8**, 39–45.
- Sava, P., and Fomel, S., 2003, Angle-domain common gathers by wavefield continuation methods : Geophysics, **68**, no. 3, 1065–1074.
- Sava, P., Biondi, B., and Fomel, S., 2001, Amplitude-preserved common image gathers by wave-equation migration : 71th Ann. Internat. Mtg, Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**.
- Scale, J., 1995, Theory of seismic imaging : Springer-Verlag, New york.
- Schneider, W. A., 1978, Integral formulation for migration in two and three dimensions : Geophysics, **43**, 49–76.
- Shtivelman, V., and Canning, A., 1988, Datum correction by wave equation correction : Geophysics, **53**, 1311–1322.
- Soubaras, R., 1996, Explicit 3-d migration using equiripple polynomial expansion and laplacian synthesis : Explicit 3-d migration using equiripple polynomial expansion and laplacian synthesis ;, Soc. of Expl. Geophys., Geophysics, 1386–1393.
- Soubaras, R., 2003, Angle gathers for shot-record migration by local harmonic decomposition : 73th Ann. Internat. Mtg, Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**, 889–896.
- Stoffa, P. L., Fokemma, J. T., de Luna Freire, R. M., and Kessinger, W. P., 1990, Split step Fourier migration : Geophysics, **55**, 410–421.
- Stolk, C., and Symes, W., 2002, Artifacts in kirchhoff common image gather : 72th Ann. Internat. Mtg, Soc. of Expl. Geophys., **Expanded abstract**, 1129–1541.
- Stolk, C., and Symes, W., 2004, Kinematic artifacts in prestack depth migration : Geophysics, **69**, 562–575.
- Stolt, R., 1978, Migration by fourier transform. : Geophysics, **43**, 23–48.
- Stopin, A., 2001, Détermination de modèle de vitesses anisotropes par tomographie de réflexion des modes de compression et de cisaillement (in English) : Ph.D. thesis, Université de Strasbourg I, France.
- Tarantola, A., 1984a, Inversion of seismic reflection data in the acoustic approximation : Geophysics, **49**, 1259–1266.

- 1984b, Linearized inversion of seismic reflection data : Geophysical Prospecting, **32**, 998–1015.
- Thierry, P., Lambaré, G., Podvin, P., and Noble, M., 1999, Three dimensional preserved amplitude prestack depth migration on a workstation : Geophysics, **64**, 222–229.
- Thomsen, L., 1986, Weak elastic anisotropy : Geophysics, **51**, 1954–1966.
- Tsvankin, I., 1996, P-wave signatures and notation for transversely isotropic media : an overview : Geophysics, **61**, 467–483.
- Uzcategui, O., and Mieses, L., 1996, w-x migration in transversely isotropic media. : 66th Ann. Internat. SEG Mtg., Expanded Abstracts, **8**, 467–470.
- Vinje, V., Iverson, E., and Gjoystdal, H., 1993, Traveltime and amplitude estimation using wavefront construction : Geophysics, **58**, no. 8, 1157–1166.
- Vinje, V., Iverson, E., Astebol, K., and Gjoystdal, H., 1996, Estimation of multivalued arrivals in 3D models using wavefront construction – part 1 : Geophys. Prosp., **44**, 819–842.
- Virieux, J., 1990, Propagation in inhomogeneous media : Ray theory workshop, Institut de Géodynamique, Université de Nice.
- Wapenaar, C., and Berkhout, A., 1987, Full prestack versus shot record migration : 69nd, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Extended Abstract**.
- Wapenaar, C. P. A., and Berkhout, A. J., 1989, Elastic wave field extrapolation-redatuming of single and multi-component seismic data : Elsevier Science Publ. Co., Inc.
- Xu, S., and Lambaré, G., 2000, 3D migration/inversion in complex media : application to SEG/EAGE salt model : 70th SEG Ann. Internat. Mtg., Soc. Expl. Geophys., Expanded Abstracts.
- Xu, S., Chauris, H., Lambaré, G., and Noble, M. S., 2001, Common-angle migration : A strategy for imaging complex media : **66**, no. 6, 1877–1894.
- Zhang, Y., Sun, J., Gray, S., Notfors, C., and Bleistein, N., 2001, Toward accurate amplitudes for one-way wavefield extrapolation of 3d common-shot records : 71st, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Expanded abstracts**.
- Zhang, Y., Sun, J., Gray, S., Notfors, C., Bleistein, N., and Zhang, G., 2002, Toward accurate amplitudes for one-way wavefield extrapolation of 3d common-shot : 64th International Meeting of the EAGE, **Expanded abstracts**.
- Zhang, Y., Zhang, G., and Bleistein, N., 2003, True amplitude migration using common-shot one-way wavefield extrapolation : 73rd, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Expanded abstracts**.
- Zhang, Y., Xu, S., Zhang, G., and Bleistein, N., 2004, How to obtain true amplitude common-angle gathers from one-way wave equation migration ? : 74th, Ann. Mtg., Soc. Expl. Geophys., **Expanded abstracts**.
- Zhang, Y., Zhang, G., and Bleistein, N., 2005, Theory of true amplitude one-way wave equations and true amplitude common-shot migration : Geophysics, **70**, no. 4.
- Zhang, G., 1993, System of coupled equations for upgoing and downgoing waves : Acta Math. Appl. Sinica (in chinese), **16**, no. 2, 251–263.