THESE

présentée à

L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DES MINES DE PARIS

par

Kacem Saï

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR EN
SCIENCE ET GENIE DES MATERIAUX

Modèles à grand nombre de variables internes et méthodes numériques associées

Date de soutenance : 8 novembre 1993

JURY

Président :	O. DÉBORDES
Rapporteurs :	R. BILLARDON
	G. INGLEBERT
Examinateurs :	J.L. CHABOCHE
	J.F. CHEVALIER
	M. HOGGE
	G. CAILLETAUD

Remerciements

J'adresse, en premier lieu, mes remerciements à Monsieur Olivier Débordes qui m'a fait l'honneur de présider mon jury, à Madame Geneviève Inglebert et Monsieur René Billardon qui ont eu l'obligeance de rapporter sur mon mémoire et à Messieurs Jean-Louis Chaboche, Jean-François Chevalier et Michel Hogge qui ont accepté d'examiner ce travail.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur Georges Cailletaud qui a su guider efficacement ma recherche. Je lui dois ma reconnaissance pour sa disponibilité au cours de la réalisation de ce travail et pour les interventions constructives qu'il a apportés lors de la rédaction de cette thèse.

Je tiens tout spécialement à remercier Monsieur Philippe Pilvin. Ses conseils et ses appuis pratiques m'ont beaucoup aidé à avancer ce travail. En plus de ses conseils sur la modélisation des comportements des matériaux, il est à l'origine de la méthodologie pour résoudre les problèmes d'optimisation.

J'ai été très sensible à l'accueil et aux bonnes conditions de travail que j'ai rencontrés au centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris dirigé par Monsieur Jean-Pierre Trottier que je remercie pour m'avoir permis d'y effectuer ma thèse dans un environnement scientifique de qualité.

Je remercie également Monsieur Eric Andrieu, qui, au travers de discussions fructueuses, m'a donné de précieux conseils et explications sur les bases expérimentales exploitées au cours de cette thèse.

Je ne saurais oublier le soutien de ma femme et mon fils qui ont fait preuve de beaucoup de patience et qui ont supporté mon absence pendant de longues soirées.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION GENERALE 1

CHAPITRE I : Modèles multimécanismes 3
I.1. Introduction 4
I.2. Etude bibliographique 5
I.2.1 Les modèles qui ont inspiré cette étude 5
I.2.2 Le phénomène de rochet 6
I.2.3. Modèle de Saint Venant généralisé 10
I.2.4. Modèle multisurfaces de Mróz 15
I.2.5. Modèle de Chaboche 19
I.2.6. Modèle de Contesti et Cailletaud 22
I.2.7. Modèle d'Ohno et Wang 25
I.2.8. Modèle de Zarka 29
I.2.9. Modèle micromécanique de Cailletaud 32
I.2.10. Synthèse, comparaison 35
I.3. Approche thermodynamique, généralités 38
I.3.1. Lois d'état 38
I.3.2. Lois complémentaires 39
I.4. Exposé du modèle 2M2C 42
I.4.1. Lois d'état 42
I.4.2. Lois complémentaires 44
I.4.3. Calcul des multiplicateurs, modèle 2M2C 49
I.4.4. Surface limite, modèle 2M2C 52
I.4.5. Modèle nMnC (n mécanismes, n critères) 53
I.5. Exposé du modèle 2M1C 57
I.5.1. Lois d'état 57
I.5.2. Lois complémentaires 58
I.5.4. Calcul du multiplicateur plastique, modèle 2M1C 60
I.5.5. Surface limite, modèle 2M1C 61
I.6. Analogies avec d'autres modèles, discussions 65
I.7. Réponses typiques du modèle 2M2C 68
I.7.1. Effet de vitesse "inverse" 68
I.7.2. Interaction plasticité-fluage 70
I.7.3. Rochet, modèle 2M2C 75
I.8. Réponses typiques du modèle 2M1C 77
I.8.1. Rochet, modèle 2M1C 77
I.9. Identification sur Inconel 718 84
I.10. Identification sur l'acier 17-12 SPH 91
I.11. Conclusion 99

CHAPITRE II : Méthode sauts de cycles 100
II.1. Introduction, bibliographie 101
II.2. Méthode de sauts de cycles 104
II.3. Implantation dans le code de calcul par éléments finis Zébulon 108
II.4. Application sur un élément de volume 110
II.5. Calcul d'une structure en H 114
II.6. Application à un disque de turbomachine 119
II.7.1. Modélisation du chargement 119
II.7.2 Loi de comportement 120
II.7. Application à un disque de fatigue biaxiale 126
II.7.1 Calcul complet (méthode incrémentale) 126
II.7.2. Utilisation de la méthode de sauts de cycles 127
II.8. Conclusion 134

CHAPITRE III : Problèmes d'optimisation 135
III.1. Introduction 136
III.2. Optimisation de forme 138
III.2.1. Disque élastique en rotation 138
III.2.2. Disque viscoplastique en rotation 144
III.2.3. Optimisation d'un fond d'alvéole 149
III.2.3.1. Conditions du calcul 149
III.2.3.2. Choix des fonctions d'interpolation 150
III.2.3.3. Représentation paramétrique de la pièce 151
III.2.3.4. Conditions de l'optimisation 152
III.2.3.5. Résultats 154
III.3. Optimisation de matériau 157
III.4. Conclusion 167

CONCLUSION GENERALE 168

REFERENCES 171

ANNEXES 180

Introduction générale

Les applications industrielles nécessitent de plus en plus des technologies très sophistiquées demandeuses à la fois d'une grande sécurité et de prix de revient les moins élevés possibles. Pour remplir ce "contrat", l'ingénieur du bureau d'études doit veiller aux bonnes fonctionnalités de son projet, choisir les matériaux les mieux adaptés ainsi qu'une géométrie optimale pour ses pièces. La mise en place de technologies nouvelles amène les matériaux utilisés à travailler dans des conditions de chargement complexes, à la limite de leur capacité de résistance. Les modèles de comportement doivent donc être capables de prévoir les réponses des matériaux le plus finement possible.

Le but de cette étude est de faire progresser l'utilisation de lois de comportement réalistes en calcul de structures. On s'intéresse particulièrement à des approches du comportement dans lesquelles interviennent plusieurs échelles, ce qui conduit à utiliser des modèles avec de plus en plus de variables internes. Ces modèles doivent être utilisés dans des études de sensibilité, ou des procédures d'optimisation, qui nécessitent de réaliser en boucles des calculs par éléments finis. Il faut donc disposer d'algorithmes avancés pour déterminer l'état asymptotique de la structure. On a développé à cet effet la méthode de sauts de cycles. Le travail réalisé au cours de cette thèse est exposé en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré au développement de modèles mécaniques. Il s'agit d'une approche intermédiaire entre deux grandes classes de modèles, l'approche micromécanique et l'approche macroscopique. On essayera de situer quelques modèles "classiques" par rapport au cadre général de la thermodynamique des processus irréversibles . On portera une attention particulière aux trois phénomènes suivants : (i) chargement cyclique, et en particulier phénomène du rochet, (ii) non linéarité du comportement, (iii) notion de surface limite. Après la présentation du modèle proposé dans cette étude, on le confrontera à deux matériaux différents, un alliage base Nickel (Inconel 718), et un acier austénitique inoxydable (17-12 SPH). Pour chacun des deux matériaux, on a essayé de rassembler une base expérimentale qui contient la plupart des phénomènes classiques des matériaux.

Dans le deuxième chapitre on présentera la méthode de sauts de cycles. Cet algorithme a été implanté dans le code de calcul par éléments finis Zébulon afin de rendre plus performante l'intégration des lois de comportement dans le cas de chargements cycliques. Les méthodes classiques d'intégration numérique consistent à découper le

temps en intervalles assez petits pour pouvoir considérer des évolutions très simples des fonctions à intégrer. La méthode de sauts de cycles possède une vue plus "générale" sur les évolutions des variables à intégrer. En effet, les incréments se quantifient en nombre de cycles. Pour fixer les idées, un "pas" de calcul peut être, selon la nature du problème et ses caractéristiques, de l'ordre de quelques cycles, quelques dizaines de cycles, voire quelques centaines de cycles. D'un point de vue pratique, cette méthode peut économiser du temps à l'ingénieur du bureau d'étude en lui permettant de faire des analyses rapides sur ses structures à calculer. Dans un premier temps, on validera la méthode sur des exemples simples en confrontant les résultats avec ceux obtenus par une méthode incrémentale. Enfin, on traitera quelques exemples industriels pour vérifier la faisabilité de la méthode de sauts de cycles sur des cas plus compliqués.

Dans le troisième et dernier chapitre on traite des problèmes d'optimisation. On utilise pour cela une approche modulaire qui s'articule autour du logiciel d'identification Sidolo d'une part et du code de calcul par éléments finis Zébulon d'autre part. Pour illustrer le bon fonctionnement de cette démarche, on présente deux types d'applications.

- La première concerne un exemple d'optimisation de forme. Les méthodes classiques procèdent par perturbations des variables physiques (contraintes, déplacements, ...) par rapport aux paramètres d'optimisation (coordonnées spatiales, rayon de courbures, paramètres de fonctions d'interpolation ou d'approximation, ...) en intervenant directement au niveau du code de simulation. Avec la méthode préconisée ici, chaque logiciel est utilisé en "boîte noire" dans la mesure où aucune modification n'y est faite. Seul le développement d'un petit interface écrit par l'utilisateur est nécessaire pour chaque nouveau cas, le développement en étant très rapide. L'avantage majeur que procure cette méthodologie est la possibilité de traitement de problèmes non linéaires.

- La seconde application traite de l'optimisation de matériaux. Elle consiste à essayer d'optimiser la taille de grain d'un matériau vis-à-vis de critères de rupture en fatigue-fluage. La méthodologie est la même que celle utilisée pour l'optimisation de forme.

Chapitre I

Modèles multimécanismes

I.1. Introduction 4
I.2. Etude bibliographique 5
I.2.1 Les modèles qui ont inspiré cette étude 5
I.2.2 Le phénomène de rochet 6
I.2.3. Modèle de Saint Venant généralisé 10
I.2.4. Modèle multisurfaces de Mróz 15
I.2.5. Modèle de Chaboche 19
I.2.6. Modèle de Contesti et Cailletaud 22
I.2.7. Modèle d'Ohno et Wang 25
I.2.8. Modèle de Zarka 29
I.2.9. Modèle micromécanique de Cailletaud 32
I.2.10. Synthèse, comparaison 35
I.3. Approche thermodynamique, généralités 38
I.3.1. Lois d'état 38
I.3.2. Lois complémentaires 39
I.4. Exposé du modèle 2M2C 42
I.4.1. Lois d'état 42
I.4.2. Lois complémentaires 44
I.4.3. Calcul des multiplicateurs, modèle 2M2C 49
I.4.4. Surface limite, modèle 2M2C 52
I.4.5. Modèle nMnC (n mécanismes, n critères) 53
I.5. Exposé du modèle 2M1C 57
I.5.1. Lois d'état 57
I.5.2. Lois complémentaires 58
I.5.4. Calcul du multiplicateur plastique, modèle 2M1C 60
I.5.5. Surface limite, modèle 2M1C 61
I.6. Analogies avec d'autres modèles, discussions 65
I.7. Réponses typiques du modèle 2M2C 68
I.7.1. Effet de vitesse "inverse" 68
I.7.2. Interaction plasticité-fluage 70
I.7.3. Rochet, modèle 2M2C 75
I.8. Réponses typiques du modèle 2M1C 77
I.8.1. Rochet, modèle 2M1C 77
I.9. Identification sur Inconel 718 84
I.10. Identification sur l'acier 17-12 SPH 91
I.11. Conclusion 99

I.1. Introduction

Il y a plusieurs cadres classiques pour écrire des lois de comportement :

- l'approche macroscopique phénoménologique dans laquelle on travaille avec des grandeurs moyennées sur le volume élémentaire représentatif (par exemple Chaboche (1978)).

- l'approche cristallographique où les lois de comportement sont écrites au niveau des systèmes de glissement (par exemple Cailletaud (1987)).

- une approche située entre les deux classes précédentes, qui fait intervenir explicitement plusieurs sources de déformations inélastiques, tout en ne faisant pas référence aux systèmes de glissement.

L'introduction de sources multiples de plasticité permet une meilleure modélisation du comportement. Il s'agit de reproduire au niveau macroscopique les phénomènes qui ont lieu à des échelles plus fines. Dans ce qui suit, on appellera "multimécanismes" ce dernier type de représentation. On se contentera de décrire le comportement du matériau d'une façon phénoménologique car les sources de plasticité au niveau des mécanismes peuvent s'avérer difficiles à identifier. Chaque mécanisme pourra donner lieu à un comportement différent, soit plastique soit viscoplastique. Ces mécanismes peuvent représenter des phases différentes du matériau.

Le but visé par l'application de ce modèle est d'essayer de reproduire simultanément les phénomènes les plus "classiques" au sens du comportement des matériaux, mais aussi de faire en sorte que les éléments du comportement généralement moins bien décrits soient également pris en compte. Une attention particulière sera portée au phénomène du rochet : on souhaite que le type de réponse obtenue ne soit pas une conséquence hasardeuse des paramètres issus de l'identification sur les autres essais. On essaiera de trouver parmi les modèles de la littérature un facteur commun qui gouverne le rochet, de sorte qu'il soit pris en compte dans l'écriture de notre modèle.

Pour valider le modèle développé, on l'a identifié tout d'abord sur l'Inconel 718. La base expérimentale utilisée provient de SNECMA (rapport YKOM1 60021) et de PRATT et WHITNEY (Thakker et Cowles, 1983), de l'Ecole des Mines (Andrieu, 1991) et de l'université de Rhodes-Island (Ghonem, 1991). Le deuxième matériau sur lequel on a identifié le modèle est l'acier austénitique inoxydable type 17-12 SPH; les courbes expérimentales de cet acier sont issues de la littérature (Delobelle, Oytana, 1986) (Contesti, 1988) (Delobelle, 1993). Les identifications ont été faites à l'aide du logiciel d'identification Sidolo (Pilvin, 1988).

I.2. Etude bibliographique

I.2.1 Les modèles qui ont inspiré cette étude

Les modèles multimécanismes ont vu le jour et se sont développés dans les mêmes "écoles" que les modèles cristallographiques. Ainsi Taylor (1938) et Bishop et Hill (1951) ont contribué à l'extension de la théorie de l'élastoplasticité macroscopique pour étudier le comportement des polycristaux, Mandel (1965, 1972, 1976), Koiter (1960) et Hill (1966) se sont penchés sur les problèmes d'unicité et d'existence pour le calcul des multiplicateurs plastiques des mécanismes interdépendants. Dans le sillage de Mandel se sont développés des modèles polycristallins (Bui, 1969; Zaoui, 1970) et des modèles multimécanismes (Zarka, 1979). Ces deux approches sont étroitement liées, puisqu'elles cherchent l'une et l'autre à prendre en compte l'hétérogénéité de la microstructure du matériau, qui se solde par l'apparition de contraintes internes. Celles ci sont dues aux incompatibilités des déformations plastiques microscopiques d'un grain à l'autre dans le cas du polycristal et aux incompatibilités des déformations plastiques d'un mécanisme à l'autre pour les modèles multimécanismes. Les modèles polycristallins sont en fait des modèles multimécanismes qui se réfèrent à une interprétation physique précise, la complémentarité entre les deux approches étant bien évidente.

Le développement des modèles décrits dans ce travail s'appuie sur les résultats de précédentes études qui sont rappelées maintenant.

- Le modèle macroscopique unifié de Chaboche (1989), qui, tout en restant très simple d'utilisation, est capable de décrire la plupart des effets de comportement. Ce modèle servira de base pour construire les comportements des différents mécanismes. On gardera, par exemple, l'effet de mémoire, intégré dans ce modèle, sur les mécanismes concernés par l'écrouissage cyclique de notre approche.

- Le modèle micromécanique de Cailletaud (1987) est une approche intéressante de construction de loi de comportement "micro-macro" dans la mesure où il concilie approche phénoménologique et bases physiques. En effet, outre la bonne description des comportements macroscopiques mécaniques des matériaux, il est capable de produire des informations microstructurales en accord avec les observations expérimentales (Pilvin, 1990), (Méric, 1991). Il est également important de noter le petit nombre des coefficients matériaux qui est utilisé dans ce modèle compte tenu de ses capacités à décrire des phénomènes compliqués rencontrés dans les matériaux.

- Le modèle de Contesti et Cailletaud (1989) représente l'héritage acquis avant de commencer ce travail. L'intérêt principal du modèle réside dans le fait qu'il contient naturellement la propriété, reconnue expérimentalement, que le matériau peut

être en écoulement, au cours d'un essai de fluage, à un niveau de contrainte inférieur à la limite d'élasticité apparente mesurée par un essai de traction monotone. On préservera, également, des propriétés intéressantes de ce modèle telle que le pouvoir de description de l'effet de vitesse inverse et l'intérêt du couplage plasticité-visoplasticité.

- Le modèle de Zarka (1979) et Inglebert (1984) lie les propriétés de la matrice d'interaction entre les différentes variables de l'écrouissage cinématique aux effets de rochet. Il sera intégré dans le modèle de cette étude comme un cas particulier où l'on ne considère qu'une seule fonction de charge au lieu d'une fonction de charge par mécanisme. Cette propriété sera exploitée pour que l'accumulation de déformation dépende aussi du niveau de contrainte et non pas seulement des coefficients matériaux.

I.2.2 Le phénomène de rochet

Il est possible d'énumérer un très grand nombre de modèles issus de la littérature de ces dernières années. En plus des exemples précédents, on décrira dans la suite celui de Mróz (1967) qui fut l'un des premiers à faire intervenir un écrouissage cinématique non linéaire et celui d'Ohno et Wang (1992), qui mêle plasticité indépendante du temps et viscoplasticité. D'autres modèles (Dafalias et Popov, 1976; Tseng et Lee, 1983; Miller, 1987) ne sont pas reportés car ils ne présentent pas d'aspects fondamentalement originaux vis-à-vis des phénomènes que l'on considère dans ce travail. De même, le modèle de Delobelle et Oytana (1986) a été laissé de côté car il est d'un abord trop complexe.

Dans la mesure où l'on s'intéresse essentiellement aux chargements cycliques, c'est sous ce type de sollicitation que l'on va observer la réponse des modèles, en étudiant en particulier le rochet. Ce phénomène, appelé aussi déformation progressive, est observé quand on superpose à un chargement primaire non nul un chargement secondaire alterné. Dans le cas unidimensionnel, cela revient à effectuer des cycles en traction-compression à contrainte imposée autour d'une valeur moyenne non nulle. Dans le cas bidimensionnel, le chargement primaire peut être matérialisé par un effort axial constant, alors que le chargement secondaire, est dans ce cas, une déformation de cisaillement alternée. On peut alors avoir trois types de réponses :
(i) quand la déformation inélastique s'accroît toujours (figure I.1a), le comportement asymptotique est appelé rochet (*"ratchetting "*),
(ii) quand la réponse se stabilise sur une boucle d'hystérésis (figures I.1b et I.1c), on dit qu'il y a accommodation (*"plastic shakedown "*),
(iii) enfin quand la déformation progressive se bloque et le comportement devient élastique (figure I.1d), on parle d'adaptation (*"elastic shakedown "*). Selon Débordes et

Nayroles (1976), "l'adaptation d'une structure élastoplastique est le phénomène qui consiste en l'établissement progressif d'un champ de contraintes résiduelles tel que les variations des sollicitations ne provoquent plus que des déformations élastiques".

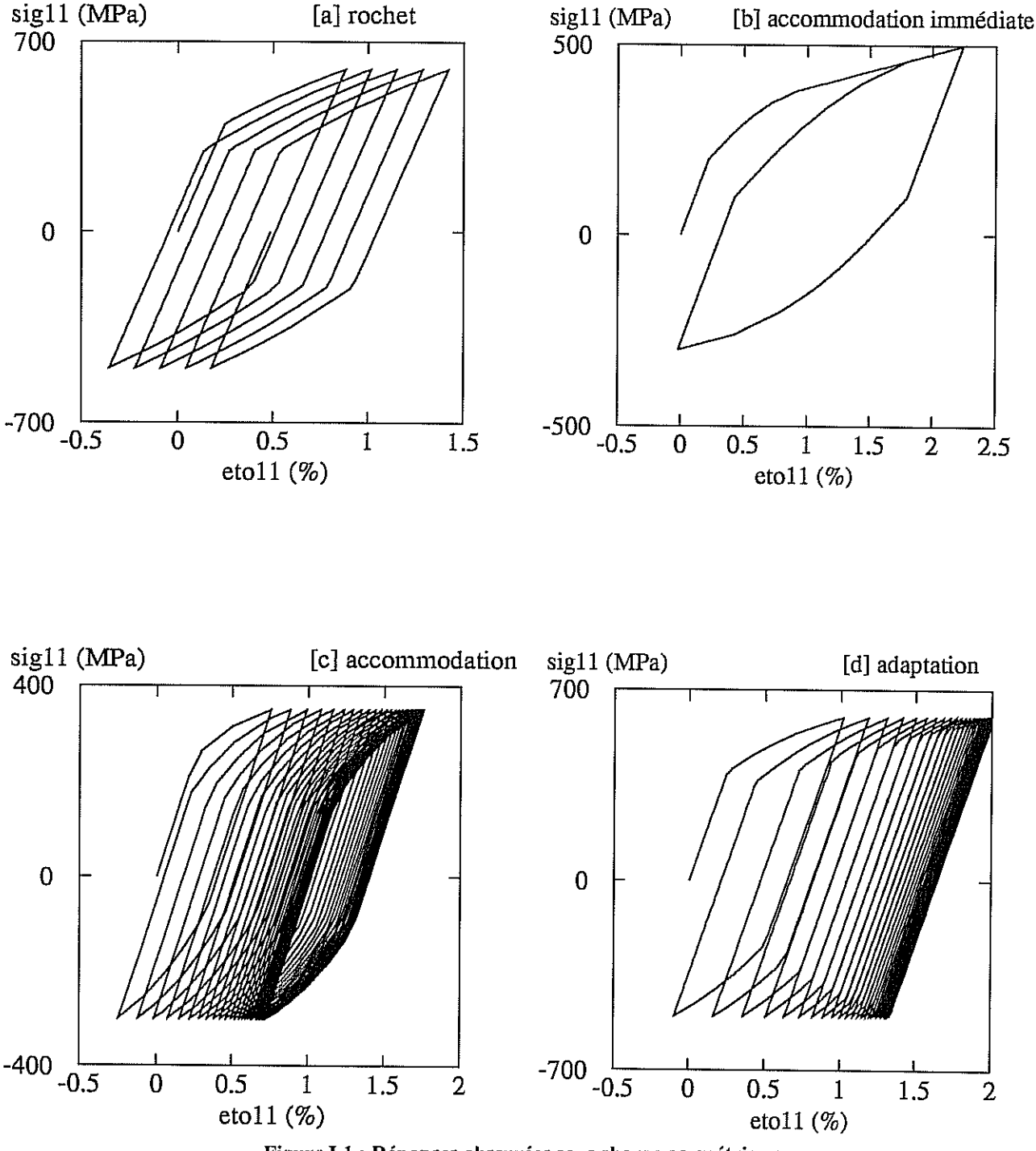


Figure I.1 : Réponses observées sous charge asymétrique.

[a] Rochet.

[b] Accommodation dès le premier cycle.

[c] Accommodation.

[d] Adaptation élastique.

Les modèles mécaniques ont fait d'énormes progrès durant les deux dernières décennies pour décrire la plasticité cyclique. Toutefois, le phénomène de rochet reste difficile à décrire correctement surtout d'une façon quantitative. La réponse est liée à la fois à la forme de l'écrouissage cinématique et à l'écrouissage isotrope. La plupart des règles d'écrouissage ont été mises en défaut par ce phénomène : si l'écrouissage cinématique linéaire conduit à un arrêt de rochet dès les premiers cycles du chargement, l'écrouissage cinématique non linéaire classique prédit une déformation trop importante par rapport à celle observée expérimentalement.

Goodman (1984) a effectué des expériences de rochet uniaxial sur un acier inoxydable de type 316 à température ambiante qui lui ont permis de montrer que, pour les contraintes moyennes faibles, on atteint un état de stabilisation (accommodation ou adaptation), alors que pour les niveaux élevés de contrainte moyenne la déformation progressive continue à s'accumuler indéfiniment. Cette relation entre la contrainte moyenne et le rochet est en fait non linéaire. Ruggles et Krempl (1989) affirment sur la base d'essais sur un acier inoxydable de type 304 à température ambiante, que la viscosité a un effet négligeable sur le rochet et que l'écrouissage cinématique gouverne entièrement ce phénomène. Il n'en est bien sûr plus de même à haute température.

Hassan et al. (1993) ont étudié les comportements de rochet uniaxial et multiaxial sur deux aciers, "CS 1020" et "CS 1026". Ils ont étudié les effets de la contrainte moyenne et ceux de l'amplitude de contrainte sur les essais de rochet de ces deux matériaux. Les courbes "nombre de cycles-déformation progressive" montrent que selon le niveau de chargement, on peut avoir accommodation ou rochet. Dans ce deuxième cas il peut se produire une accélération de la déformation progressive; l'écart entre les maxima des déformations de deux cycles successifs devenant alors strictement croissant. Dans le cas uniaxial, la confrontation de ces expériences au modèle de Drucker et Palgen (1981), à celui de Dafalias et Popov (1976) et enfin au modèle de Tseng et Lee (1983) montre que le premier modèle surestime la déformation progressive, que le deuxième modèle conduit à un arrêt prématuré du rochet et que le troisième modèle donne un rochet constant. Dans le cas des essais de rochet biaxial, effectués sur des éprouvettes tubulaires en "CS 1026", on constate que les règles d'écrouissage de Prager (1956) et de Ziegler (1959) (écrouissage cinématique linéaire) conduisent à un arrêt du rochet au bout d'un petit nombre de cycles, et que l'approche d'Armstrong et Frederick (1966) conduit à des prévisions "raisonnables".

Chaboche et al. (1991) ont étudié le comportement du rochet de l'Inconel 718 à 550°C. Ils montrent que ce matériau exhibe, pour les essais de rochet, une déformation

progressive quel que soit le niveau de contrainte (contrainte moyenne ou amplitude de contrainte). Toutefois l'accumulation de la déformation progressive reste très lente ($2x10^{-6}$ par cycle après 400 cycles). Ces auteurs confirment que le rochet uniaxial est plus important que le rochet multiaxial. Ce résultat a déjà été observé sur un acier inoxydable de type 316. La confrontation modèle-expérience donne de bons résultats pour les essais de traction simple et d'écrouissage cyclique. Par contre, même si les essais de rochet sont bien décrits qualitativement, le modèle présente des niveaux de déformation de rochet plus importants. Les auteurs concluent par le fait que cette accélération du rochet est sans doute due au comportement adoucissant de l'Inconel 718 et que le rochet serait mieux décrit en introduisant l'effet de mémoire (cf. paragraphe I.2.3).

I.2.3. Modèle de Saint Venant généralisé

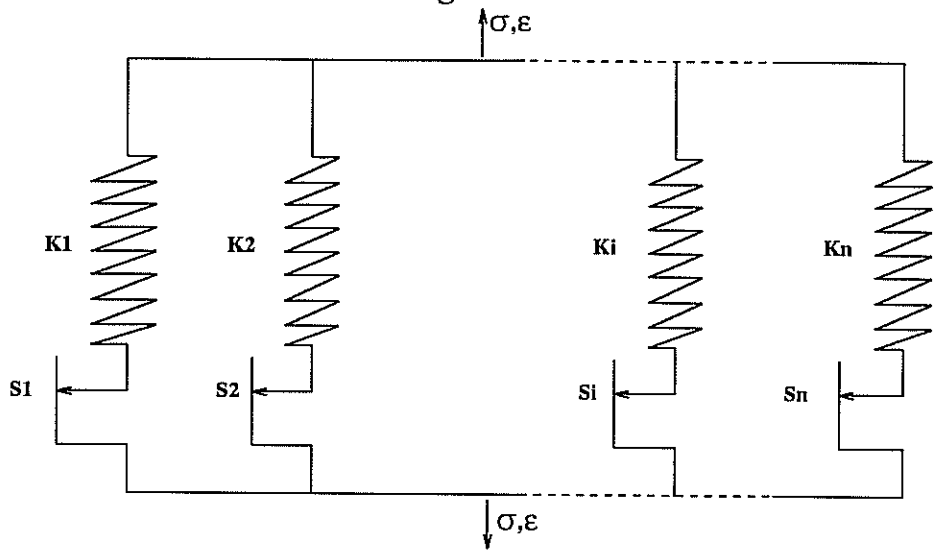


Figure I.2 : Schéma rhéologique du modèle de Saint Venant.

L'étude des groupements rhéologiques a été de façon traditionnelle à la base du développement des modèles mécaniques (Persoz, 1969). Différents assemblages ont été analysés par Lemaitre et Chaboche (1985). Zarka (1979, 1986) a étudié différentes possibilités en dégageant les propriétés résultantes lors des chargements cycliques. Dans la présente étude on se contente d'étudier l'assemblage en parallèle. C'est une approche unidimensionnelle simple dans laquelle, on considère plusieurs contraintes locales mais une seule déformation. Il s'agit d'un modèle rhéologique schématisé par un assemblage en parallèle (figure I.2) d'éléments identiques. Chacune des branches est constituée d'un ressort linéaire et d'un patin. La déformation dans chaque branche est égale à la déformation globale, alors que la contrainte locale dépend à la fois du niveau de chargement et des caractéristiques de la branche. En effet, la contrainte locale reste proportionnelle à la déformation jusqu'à atteindre le seuil de la branche puis reste égale à celui-ci. La contrainte globale est obtenue en additionnant toutes les contraintes locales. On a choisi de présenter les équations du modèle sous forme incrémentale plutôt que sous forme intégrale, pour pouvoir se placer dans le même moule que pour les autres modèles qu'on va étudier par la suite. On considère, pour chaque branche ressort-patin, une fonction de charge qui s'écrit sous la forme :

$$f^i = \left|\sigma^i\right| - S_i \qquad [I.1]$$

où σ^i représente la contrainte locale de la ième branche et S_i son seuil supposé constant. La déformation locale de chaque branche est décomposée en une partie élastique et une partie inélastique :

$$\varepsilon^i = \varepsilon = \frac{\sigma^i}{K_i} + \varepsilon_p^i \qquad [I.2]$$

dans cette expression ε^i désigne la déformation totale dans la ième branche, ε_p^i sa déformation plastique et K_i la raideur de son ressort. La contrainte globale est égale à la somme des contraintes locales des n branches de l'assemblage :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N} \sigma^i \qquad [I.3]$$

La direction d'écoulement de chaque branche est normale à sa surface de charge :

$$n^i = \frac{\partial f^i}{\partial \sigma^i} = \text{signe}\left(\sigma^i\right) \qquad [I.4]$$

alors que l'intensité de l'écoulement, $\dot{\lambda}^i$, est obtenue à l'aide de la condition de cohérence locale, $\dot{f}^i = 0$. La déformation plastique locale s'écrit alors sous la forme :

$$\dot{\varepsilon}_p^i = n^i \dot{\lambda}^i \qquad [I.5]$$

Or, en remplaçant les équations [I.1], [I.2] dans la condition de cohérence, il vient tout simplement :

$$\dot{\varepsilon}_p^i = \dot{\varepsilon} \text{ si } \quad f^i = 0 \text{ et } \quad \dot{f}^i = 0 \qquad [I.6]$$

$$\text{et } \dot{\varepsilon}_p^i = 0 \text{ sinon} \qquad [I.7]$$

D'un point de vue pratique, on s'aperçoit que si la déformation est imposée, le modèle est totalement déterminé. Par contre, si la contrainte est imposée, il faut passer par une étape de "gestion" supplémentaire. En effet, l'incrément de déformation $\dot{\varepsilon}$ ne se déduit pas immédiatement à partir de l'incrément de contrainte globale $\dot{\sigma}$. La substitution de la contrainte locale σ^i entre les équations [I.2] et [I.3] fournit la relation entre la contrainte globale et la déformation globale, soit :

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} K_i\left(\varepsilon - \varepsilon_p^i\right) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} K_i - \sum_{i=1}^{n} K_i \varepsilon_p^i \qquad [I.8]$$

En inversant cette relation, on en déduit l'expression de la déformation globale à partir de celle de la contrainte globale, soit :

$$\varepsilon = \frac{\sigma + \sum_{i=1}^{n} K_i \varepsilon_p^i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad [I.9]$$

La dérivation de cette équation donne :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma} + \sum_{i=1}^{n} K_i \dot{\varepsilon}_p^i}{\sum_{i=1}^{n} K_i} \qquad [I.10]$$

En utilisant les équations [I.6] et [I.7], on trouve :

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{(\sum_{i=1}^{n} K_i - \sum_{i=1}^{n^a} K_i)} \qquad [1.11]$$

où n est le nombre total de branches et n^a celui des branches où les seuils des patins sont dépassés. Si la contrainte est imposée, il faut alors, d'un point de vue numérique, tester toutes les branches avant de commencer à incrémenter les variables internes.

On a étudié la réponse de ce modèle sous deux types de sollicitation : un essai d'écrouissage cyclique à déformation symétrique imposée et un essai à contrainte asymétrique imposée. Pour chacun de ces deux essais, on a utilisé un assemblage à quatre branches puis un deuxième à huit branches.

K_i=5000 (i=1, 4) S_1=10, S_2=15, S_3=20, S_4=∞	K_i=6000 (i=1, 8) S_1=10, S_2=12, S_3=14, S_4=16 S_5=18, S_6=20, S_7=22, S_8=∞
cas de 4 branches	cas de 8 branches

Tableau I.1 : Paramètres du modèle de Saint Venant.

(unités : mm, s, MPa).

On remarque qu'à déformation imposée (figures I.3a et I.3b), la concavité de la boucle d'hystérésis est bien représentée. On obtient une forme non linéaire bien que le

comportement élémentaire des différentes branches soit linéaire. Toutefois, la forme n'est suffisamment lisse qu'au prix d'un nombre de branches élevé. Par contre, une accommodation immédiate est observée lors des essais de rochet (figures I.3c et I.3d), et ce, quel que soit le niveau de la contrainte moyenne. Les caractéristiques des branches qui ont servi à simuler les différents essais sont données dans le tableau I.1.

Pour simuler les figures I.3a et I.3b, on a imposé un cycle en déformation symétrique d'amplitude 2%. Les deux essais de rochet ont été obtenus en imposant à chaque fois une contrainte non symétrique : [-80MPa, 100MPa] pour la figure I.3c, et [-140MPa, 150MPa] pour la figure I.3d.

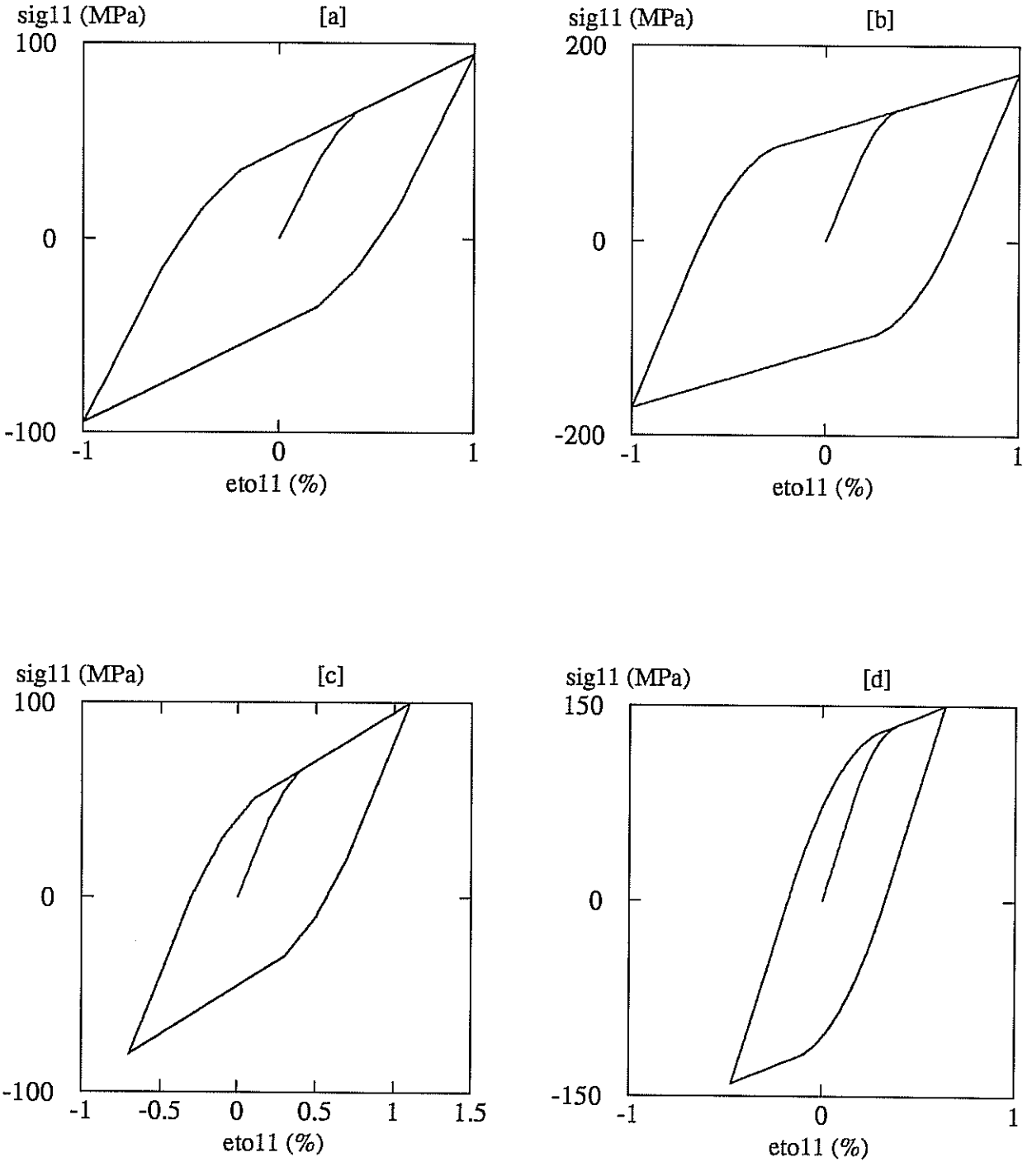


Figure I.3 : Modèle de Saint Venant.

[a] Traction-compression symétrique, 4 branches.

[b] Traction-compression symétrique, 8 branches.

[c] Rochet uniaxial, 4 branches.

[d] Rochet uniaxial, 8 branches.

I.2.4. Modèle multisurfaces de Mróz

Le modèle de Mróz (1967) est une généralisation tridimensionnelle du modèle de Saint Venant. Il est appelé aussi modèle multicouches ou multisurfaces car il introduit plusieurs surfaces de charge, ayant chacune un centre et un rayon. Par contre, il existe une seule déformation plastique qui est obtenue en appliquant la règle de normalité à la dernière surface de charge activée. Si on considère maintenant, que les différents domaines possèdent une taille constante, il reste à déterminer les évolutions des centres. C'est la dernière surface rencontrée qui sert à déterminer l'évolution des variables cinématiques. L'évolution de la variable cinématique de la dernière surface rencontrée est obtenue par la règle de normalité (Mróz, 1987). La déformation est décomposée en une partie élastique et une partie plastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \qquad [I.12]$$

On ne considère donc qu'une seule déformation plastique. Par contre, on associe à chaque mécanisme une fonction de charge, une contrainte interne et une taille du domaine d'élasticité :

$$f_i = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^i) - R^i \qquad [I.13]$$

L'évolution de la déformation plastique est donnée par :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{n}}^a \dot{\lambda}^a \qquad [I.14]$$

avec $$\underline{\underline{n}}^a = \frac{\partial f^a}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} \qquad [I.15]$$

et $$\dot{\lambda}^a = \frac{1}{C^a} \frac{\left\langle \underline{\underline{n}}^a : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \right\rangle}{\underline{\underline{n}}^a : \underline{\underline{n}}^a} \qquad [I.16]$$

Comme on l'a précisé plus haut, les mouvements de toutes les surfaces déjà activées sont identiques (figure I.4a). Par conséquent les incréments de toutes les contraintes internes "actives" sont égaux à celui de la dernière surface activée :

$$\dot{\underline{\underline{X}}}^1 = \dot{\underline{\underline{X}}}^2 = \ldots\ldots\ldots\ldots = \dot{\underline{\underline{X}}}^{a-1} = \dot{\underline{\underline{X}}}^a \qquad [I.17]$$

L'évolution de $\underline{\underline{X}}^a$ est caractérisée par une direction et une intensité :

$$\dot{\underline{\underline{X}}}^a = \underline{\underline{\Delta}}_a^{a+1}\,\dot{\mu} \qquad [I.18]$$

Pour déterminer la direction suivie par $\dot{\underline{\underline{X}}}^a$, on considère la contrainte $\underline{\underline{\sigma}}^a$ atteinte sur la surface de charge actuelle et sa projection $\underline{\underline{\sigma}}^{a+1}$ sur la "prochaine" surface de charge, a+1. On choisit $\underline{\underline{\sigma}}^{a+1}$, de telle sorte que la normale à la surface a+1 en ce point soit la même que la normale à la surface a au point $\underline{\underline{\sigma}}^a$ (figure I.4b).

$$\underline{\underline{\Delta}}_a^{a+1} = \frac{[(R^{a+1}-R^a)\underline{\underline{\sigma}} - (R^{a+1}\underline{\underline{X}}^a - R^a\underline{\underline{X}}^{a+1})]}{R^a} \qquad [I.19]$$

L'intensité de l'écoulement est donnée par un deuxième multiplicateur $\dot{\mu}$:

$$\dot{\mu} = \frac{\left\langle \underline{\underline{n}}^a : \dot{\underline{\underline{\sigma}}} \right\rangle}{\underline{\underline{n}}^a : \underline{\underline{\Delta}}_a^{a+1}} \qquad [I.20]$$

Ce modèle, tout comme le modèle de Saint Venant, présente une boucle contrainte-déformation stabilisée dès le premier cycle sous chargement asymétrique (figure I.5a, I.5b) avec néanmoins une évolution non linéaire de l'écrouissage cinématique. Ce comportement, bien que stable numériquement, ne présente pas beaucoup d'intérêt car il ne correspond pas au comportement réel des matériaux. Un deuxième inconvénient "pratique" de ce modèle est qu'il s'adapte mal à la programmation numérique. En effet, il faut, à chaque incrément de temps, faire un bilan pour compter le nombre de surfaces actives et connaître la dernière surface qui a été activée pour pouvoir incrémenter les variables internes.

E=90000, C_1=70000, C_2=40000 C_3=10000, C_4=40000 R_1=10, R_2=20, R_3=30, R_4=∞	E=90000, C_1=60000, C_2=50000 C_3=40000, C_4=30000 C_5=20000, C_6=10000 C_7=5000, C_8=4000 R_1=200, R_2=230, R_3=260, R_4=290 R_5=320, R_6=350, R_7=380, R_8=∞
cas de 4 surfaces	cas de 8 surfaces

Tableau I.2 : Paramètres du modèle de Mróz.

(unités : mm, MPa, s).

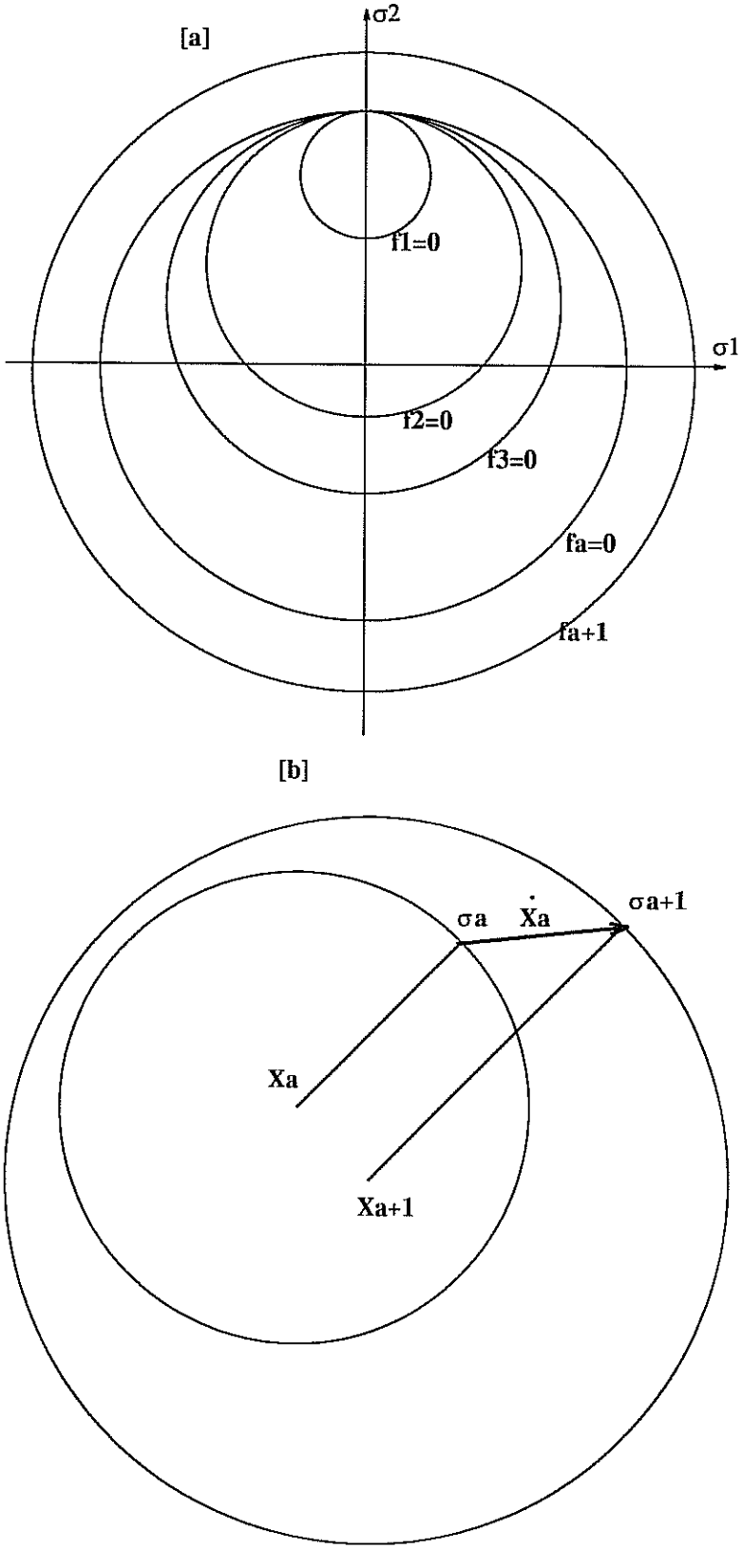


Figure I.4 : Modèle de Mróz.

[a] Surfaces de charge.

[b] Direction de l'écrouissage.

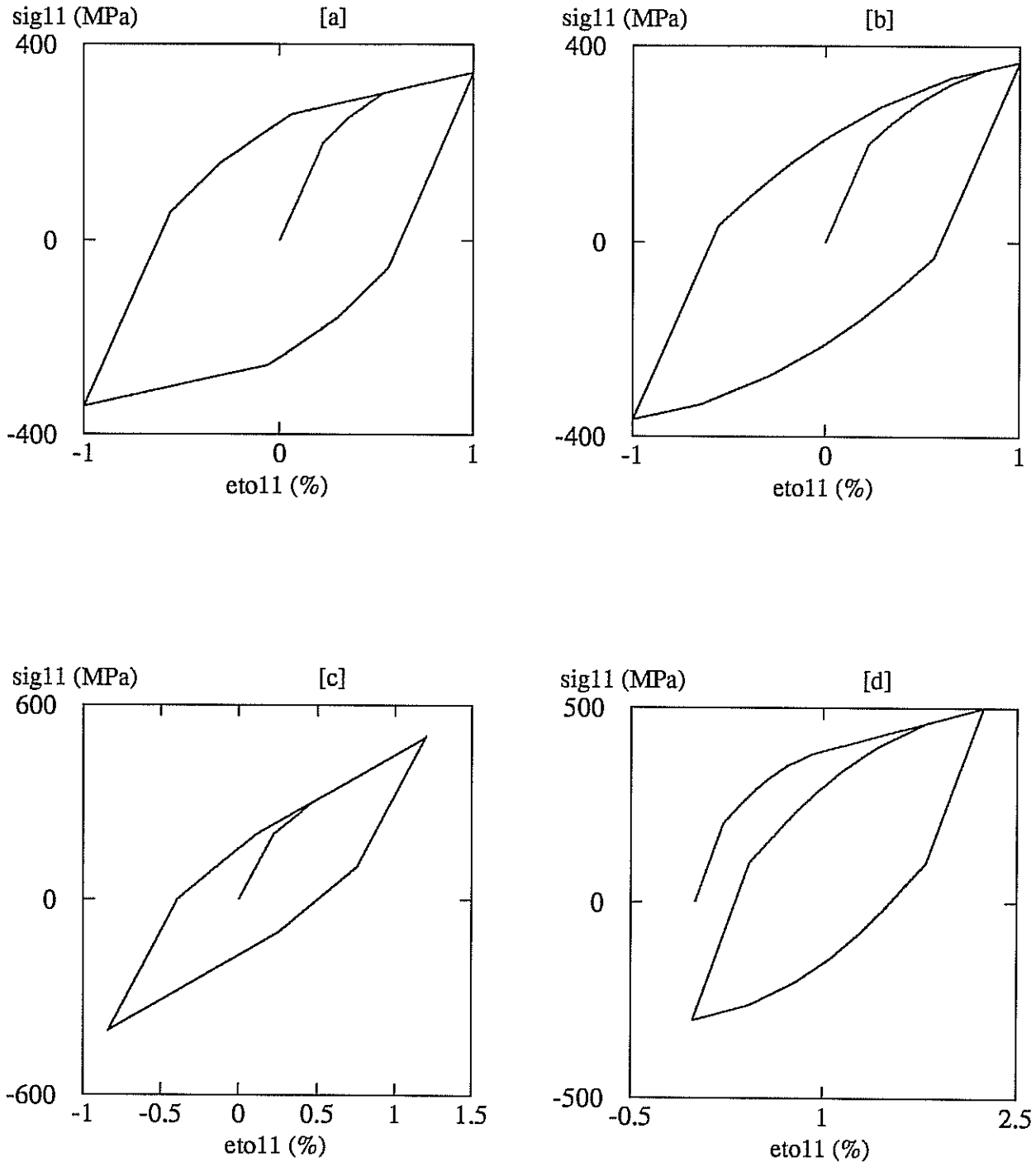


Figure I.5 : Réponses du modèle de Mróz.

[a] Traction-compression symétrique, 4 surfaces.

[b] Traction-compression symétrique, 8 surfaces.

[c] Rochet uniaxial, 4 surfaces.

[d] Rochet uniaxial, 8 surfaces.

I.2.5. Modèle de Chaboche

Ce modèle (Chaboche, 1978) fait intervenir la décomposition de la déformation totale en deux composantes élastique et inélastique. Cette dernière peut être plastique ou viscoplastique. L'évolution de la surface de charge est gouvernée par deux types de variables d'écrouissage : une variable scalaire qui décrit l'évolution de la taille du domaine élastique, c'est la variable d'écrouissage isotrope, et une variable tensorielle qui définit le centre de ce domaine, c'est la variable d'écrouissage cinématique. Cette dernière peut être décomposée en plusieurs composantes. Le tableau I.3 résume les principales équations de ce modèle, qui a, par ailleurs, connu de nombreux développements supplémentaires en viscoplasticité et en plasticité (Cailletaud, 1979; Marquis, 1979; Chaboche, Dang-Van et Cordier, 1979; Chaboche et Nouailhas, 1989; Chaboche et al. 1991).

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

$$f = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}) - R$$

$$\underline{\underline{X}} = \sum_i \underline{\underline{X}}^i = \frac{2}{3}\sum_i C_i \underline{\underline{\alpha}}^i$$

$$R = R_0 + Q(1 - \exp(-bp))$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \underline{\underline{n}}\,\dot{p} = \frac{3}{2}\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}\dot{p}$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^i = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - D_i \underline{\underline{\alpha}}^i \dot{p}$$

Tableau I.3 : Equations du modèle de Chaboche.

Ces équations sont les mêmes en plasticité et en viscoplasticité. Par contre, une différence intervient quand on veut évaluer l'intensité de l'écoulement $\dot{p}$. En plasticité, cette dernière est obtenue à l'aide de la condition de cohérence, alors qu'en viscoplasticité $\dot{p}$ est obtenue de manière explicite, par exemple à l'aide d'une fonction puissance qui caractérise la distance entre le point de fonctionnement actuel et le domaine d'élasticité. Une des propriétés de ce modèle en sollicitation cyclique asymétrique (contrainte imposée entre σ_{min} et σ_{max}) est que, quand l'évolution de l'écrouissage cinématique est linéaire, on obtient une adaptation du comportement alors qu'une évolution non linéaire conduit à un comportement de rochet. En plasticité, si on note par $\delta\varepsilon^p$ la déformation progressive par cycle (c'est à dire la différence entre les déformations maximales de deux cycles consécutifs) cette dernière s'exprime en uniaxial par :

$$\delta\varepsilon^p = \frac{1}{D}\log\left(\frac{C^2 - D^2(\sigma_{min} + R_0)^2}{C^2 - D^2(\sigma_{max} - R_0)^2}\right) \qquad [I.21]$$

La formule [I.21] est écrite dans le cadre de la plasticité indépendante du temps, en ne considérant qu'une seule variable d'écrouissage cinématique dont les paramètres sont C et D. On suppose, en plus, que la taille du domaine d'élasticité n'évolue pas ($R=R_0$). Cette relation respecte le fait que, sous chargement symétrique, la déformation progressive est nulle. Elle montre que le rochet dépend des paramètres matériaux et du niveau de chargement, mais qu'il est présent pour de très faibles contraintes moyennes.

On trouve dans la littérature un grand nombre de formes différentes pour le terme de rappel de l'équation d'évolution en $\dot{\underline{\underline{\alpha}}}$. Les recherches se sont portées sur lui car il gouverne la réponse asymptotique. Outre l'expression classique [I.22c] d'Armstrong et Frederick (1966) reprise par Chaboche, on trouve par ordre chronologique :

Prager (1956) :

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3} C \underline{\underline{n}} \dot{p} = \frac{2}{3} C \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad [I.22a]$$

Ziegler (1959) :

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = (\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}})\dot{p} \qquad [I.22b]$$

Armstrong et Frederick (1966), Chaboche (1978) :

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3}(C\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - D\underline{\underline{\alpha}}\dot{p}) = \frac{2}{3}(C\underline{\underline{n}} - D\underline{\underline{\alpha}})\dot{p} \qquad [I.22c]$$

Mróz et al. (1976) :

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3}\left(C(p)\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - D(p)\underline{\underline{\varepsilon}}^p \dot{p}\right) = \frac{2}{3}\left(C(p)\underline{\underline{n}} - D(p)\underline{\underline{\varepsilon}}^p\right)\dot{p} \qquad [I.22d]$$

Burlet et Cailletaud (1987) :

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3}\left(C - D\underline{\underline{\alpha}}:\underline{\underline{n}}\right)\underline{\underline{n}}\,\dot{p} = \frac{2}{3}\left(C\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - D(\underline{\underline{\alpha}}:\underline{\underline{n}})\underline{\underline{n}}\,\dot{p}\right) \qquad [I.22e]$$

Le premier cité (I.22a) ne conduit pas à une forme satisfaisante des boucles d'hystérésis. Aucune des autres formulations ne règle de façon satisfaisante le problème du rochet 1D, même si le modèle "à évanescence radiale" (I.22e) fournit une solution pour le rochet sous chargement multiaxial.

Chaboche (1991) propose une modification qui permet que le rochet soit stoppé à faible contrainte moyenne tout en conservant à la fois un comportement non linéaire et du rochet pour une contrainte moyenne plus élevée. L'équation [I.22f] illustre cette règle d'évolution modifiée dans laquelle on remarque que lorsque la norme de $\underline{\underline{X}}$ est faible devant X_I le terme de rappel est nul. Par contre lorsque la norme de $\underline{\underline{X}}$ atteint X_I ou la dépasse, on obtient une évolution non linéaire. Le terme de rappel est, dans ce cas, pondéré par une quantité inférieure à 1.

$$\dot{\underline{\underline{X}}} = \frac{2}{3} C \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - D\left\langle 1 - \frac{X_I}{J_2(\underline{\underline{X}})} \right\rangle \underline{\underline{X}} \dot{p} \qquad [I.22f]$$

On retiendra du comportement de ce modèle sous chargement asymétrique qu'il obéit à une règle générale et valable aussi pour d'autres modèles qui consiste à lier l'existence de surface limite au comportement du rochet. On peut donc établir les équivalences suivantes :

cinématique linéaire ⇔ pas de surface limite ⇔ adaptation ou accommodation
cinématique non linéaire ⇔ surface limite ⇔ rochet

Par ailleurs, une mémoire de l'écrouissage isotrope a été introduite (Chaboche et al., 1979) dans ce modèle car des résultats expérimentaux sur certains aciers ont montré que le cycle stabilisé n'est pas unique et dépend de l'histoire de chargement préalable. A cet effet, une variable scalaire ρ et une variable tensorielle $\underline{\underline{\xi}}$ ont été rajoutées pour "conserver" la mémoire des déformations plastiques (tableau I.4).

Un exemple d'application à laquelle on s'intéresse par la suite est le comportement cyclique de l'acier inoxydable du type 17-12 SPH, lors de la validation du modèle de la présente étude sur ce matériau. Les courbes d'écrouissage de cet acier montrent que le durcissement cyclique augmente avec l'amplitude de déformation. Ces deux variables supplémentaires seront introduites dans le "mécanisme" concerné par la plasticité cyclique dans notre modèle.

$$\dot{R} = b(R_0 + Q - R)\dot{p}$$

$$\dot{Q} = 2\mu(Q_M - Q)\dot{p}$$

$$G = \frac{2}{3}J_2(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\xi}}) - \rho$$

$$\dot{\rho} = \eta H(G)\left\langle \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}} : \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p} \right\rangle \dot{p} = \eta H(G)\left\langle \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{n}}^* \right\rangle \dot{p}$$

$$\dot{\underline{\underline{\xi}}} = \frac{3}{2}(1-\eta)\left\langle \underline{\underline{n}} : \underline{\underline{n}}^* \right\rangle \underline{\underline{n}}^* \dot{p}$$

$$\underline{\underline{n}}^* = \frac{\partial G}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^p} = \frac{\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\xi}}}{J_2(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\xi}})}$$

Tableau I.4: Effet de mémoire, écrouissage isotrope.

I.2.6. Modèle de Contesti et Cailletaud

L'objet de ce modèle (Contesti, 1988), à deux déformations inélastiques (ddi), est la distinction entre les deux comportements plastique et viscoplastique de façon à rendre compte des phénomènes de couplage entre ces deux modes de déformation. La partition entre ces deux déformations se fait naturellement en fonction des vitesses de sollicitation. Parmi les caractéristiques de ce modèle, on peut noter les possibilités de description d'un effet "inverse" de la vitesse de sollicitation (voir paragraphe I.7.1). L'interaction entre les séquences plasticité et fluage est également mieux reproduite par ce modèle, que par la plupart des modèles classiques qui ne font pas la distinction entre les deux modes de déformation. On peut souligner également que ce modèle a été développé dans un cadre thermodynamique et identifié avec succès sur l'acier inoxydable du type 17-12 SPH (Contesti et Cailletaud, 1989). Ce modèle a été également validé sur d'autres matériaux tel que l'Inconel 718 (annexe I.3), où les interactions plasticité-fluage sont bien décrites. Dans le cas des essais de rochet, le modèle possède une bonne description qualitative mais représente toutefois, quelques écarts quantitatifs par rapport aux courbes expérimentales (Contesti, 1988). Ce type de modèle est souvent comparé aux modèles unifiés (Assaker, 1990; Contesti et Cailletaud, 1989; Delobelle et Oytana, 1986). Le modèle "ddi" est donc basé sur la décomposition de la déformation en trois parties : élastique, plastique et viscoplastique.

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p + \underline{\underline{\varepsilon}}^v \qquad [I.23]$$

Le calcul de ces différentes quantités est basé sur deux fonctions de charge, ayant chacune un centre et un rayon :

$$f^p = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^p) - R^p \qquad [I.24]$$

$$f^v = J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^v) - R^v \qquad [I.25]$$

Chaque variable d'écrouissage cinématique peut à son tour être décomposée en un ou plusieurs termes.

$$\underline{\underline{X}}^p = \underline{\underline{X}}^{p1} + \underline{\underline{X}}^{p2} \qquad [I.26]$$

$$\underline{\underline{X}}^v = \underline{\underline{X}}^{v1} + \underline{\underline{X}}^{v2} \qquad [I.27]$$

L'originalité de ce modèle par rapport à d'autres formulations (Pugh, 1978) qui tiennent compte à la fois d'une déformation plastique et d'une déformation de "fluage", est le couplage introduit entre les variables cinématiques :

$$\begin{cases} \underline{\underline{X}}^{pi} = \frac{2}{3} C_{pi} a_{pi} \underline{\underline{\alpha}}^{pi} + \frac{2}{3} C_{vpi} \underline{\underline{\alpha}}^{vi} \\ \underline{\underline{X}}^{vi} = \frac{2}{3} C_{vi} a_{vi} \underline{\underline{\alpha}}^{vi} + \frac{2}{3} C_{vpi} \underline{\underline{\alpha}}^{pi} \end{cases} \qquad [I.28]$$

L'évolution de chacun des deux domaines est similaire à celle du modèle unifié :

$$\begin{cases} R^p = R_{ps} + (R_{pi} - R_{ps}) \exp(-b_p p) \\ R^v = R_{vs} + (R_{vi} - R_{vs}) \exp(-b_v v) \end{cases} \qquad [I.29a, b]$$

Les évolutions des variables internes cinématiques peuvent prendre plusieurs formes. Voici par exemple celles qui ont été retenues pour l'identification sur l'acier inoxydable 17-12 SPH. La première variable cinématique plastique, qui correspond à une cinétique lente, possède une évolution linéaire, car les essais de traction monotone de ce matériau présentent un comportement linéaire à fort niveau de déformation.

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{p1} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad [I.30]$$

La variable cinématique plastique "rapide" possède un comportement non linéaire avec un terme de rappel pondéré par la fonction de Marquis (1979) pour améliorer le comportement de l'écrouissage cyclique :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{p2} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} - \frac{3}{2a_{p2}} \underline{\underline{X}}^{p2} \Phi(p) \dot{p} \qquad [I.31]$$

Les deux variables cinématiques viscoplastiques possèdent des évolutions non linéaires avec un effet de restauration pour la première :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{v1} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{v} - \frac{3}{2a_{v1}} \underline{\underline{X}}^{v1} \dot{v} - \frac{3}{2} \left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^{v1})}{M} \right)^{m} \frac{\underline{\underline{X}}^{v1}}{J_2(\underline{\underline{X}}^{v1})} \qquad [I.32]$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{v2} = \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{v} - \frac{3}{2a_{v2}} \underline{\underline{X}}^{v2} \dot{v} \qquad [I.33]$$

Enfin, les deux vitesses de déformations inélastiques ont une direction d'écoulement normale à leurs surfaces de charge respectives. L'intensité de l'écoulement viscoplastique est obtenue à l'aide d'une fonction puissance alors que l'intensité de l'écoulement plastique est donnée par la relation de cohérence plastique. L'évolution de ces deux dernières variables est résumée dans le tableau I.5.

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{p} = \dot{\lambda}^{p} \underline{\underline{n}}^{p} = \dot{\lambda}^{p} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{D} - \underline{\underline{X}}^{p}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^{p})}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{v} = \dot{\lambda}^{v} \underline{\underline{n}}^{v} = \dot{\lambda}^{v} \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{\sigma}}^{D} - \underline{\underline{X}}^{v}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^{v})}$$

$$\dot{p} = \dot{\lambda}^{p} \text{ (Obtenu en écrivant que } \dot{f}^{p} = 0)$$

$$\dot{v} = \dot{\lambda}^{v} = \left\langle \frac{\dot{f}^{v}}{K} \right\rangle^{n}$$

Tableau I.5: Vitesses de déformations, modèle ddi.
$\underline{\underline{\sigma}}^{D}$ désigne le déviateur des contraintes

La formulation thermodynamique qui a permis d'écrire les lois d'état et les lois d'évolution précédentes est similaire à celle qu'on présentera dans le paragraphe I.7 pour le modèle 2M2C.

I.2.7. Modèle d'Ohno et Wang

Ce modèle ne comprend pas de limite d'élasticité, il y a donc écoulement dès que la contrainte effective $\underline{\underline{\sigma}}-\underline{\underline{X}}$ est non nulle (Ohno et Wang, 1993). Par contre, l'évolution des variables cinématiques dépend de critères locaux. Ce modèle est basé sur la décomposition de la déformation en une partie élastique et une partie inélastique :

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p \qquad [I.34]$$

La déformation inélastique peut être, par exemple, obtenue à l'aide d'une loi puissance :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \left(\frac{J_2(\underline{\underline{\sigma}}-\underline{\underline{X}})}{A}\right)^b \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{\sigma}}^D-\underline{\underline{X}}}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}-\underline{\underline{X}})} \qquad [I.35]$$

Ce modèle est donc unifié dans la mesure où il ne considère qu'une déformation inélastique. Toutefois, il prend en compte, comme le modèle de Chaboche, plusieurs contraintes internes.

$$\underline{\underline{X}} = \sum_i \underline{\underline{X}}^i \qquad [I.36]$$

Il considère plusieurs fonctions de charge pour déterminer l'évolution de ces contraintes internes :

$$f_i = J_2(\underline{\underline{X}}^i) - R^i \qquad [I.37]$$

Cette évolution se fait en fonction de la déformation inélastique. Dans le cas où la contrainte interne est à l'intérieur du domaine, son évolution est linéaire :

$$f_i < 0 \text{ ou } \underline{\underline{X}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{\underline{X}}}^i = \frac{2}{3} h_i \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad [I.38]$$

Par contre si cette contrainte interne se trouve sur la frontière du domaine, son évolution en fonction de la déformation inélastique est non linéaire :

$$f_i = 0 \Rightarrow \dot{\underline{\underline{X}}}^i = \frac{2}{3} h_i \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \dot{\lambda}_i \frac{\underline{\underline{X}}^i}{r_i} \qquad [I.39]$$

Le multiplicateur plastique est donné par la loi de cohérence locale :

$$\dot{f}_i = 0 \Rightarrow \dot{\lambda}_i = \frac{2}{3} h_i \left\langle \underline{\underline{n}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \right\rangle \qquad [I.40]$$

On retrouve donc ici l'idée de Chaboche (1991) de transformer un cinématique linéaire en un cinématique non linéaire pour améliorer le comportement en rochet.

La normale qui intervient dans cette équation, n'est pas celle qui donne la direction d'écoulement de la déformation inélastique :

$$\underline{\underline{n}}^i = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{X}}^i}{J_2(\underline{\underline{X}}^i)} = \frac{3}{2} \frac{\underline{\underline{X}}^i}{R^i} \qquad [I.41]$$

Ces deux auteurs proposent une variante de ce modèle dans laquelle la transition entre la variation linéaire et l'asymptote est progressive pour chacune des surfaces (Ohno et Wang, 1993). Les incréments des variables d'écrouissage sont calculés de la même façon que précédemment avec une légère modification. A l'intérieur du domaine de la contrainte interne, celle ci évolue, comme dans le premier cas, linéairement par rapport à la déformation inélastique :

$$f_i < 0 \text{ ou } \underline{\underline{X}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p < 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\underline{\underline{X}}}^i = \frac{2}{3} h_i \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \qquad [I.42]$$

Par contre dès que le critère est vérifié, le terme de rappel dans l'évolution de la contrainte interne est pondéré par un terme en puissance :

$$f_i = 0 \Rightarrow \dot{\underline{\underline{X}}}^i = \frac{2}{3} h_i \left[\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p - \left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^i)}{r_i} \right)^m \left\langle \underline{\underline{n}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p \right\rangle \frac{\underline{\underline{X}}^i}{r_i} \right] \qquad [I.43]$$

Pour mieux comprendre la différence entre ces deux variantes, on se place dans le cas unidimensionnel. Pour la première variante, la forme de l'équation [I.38] reste inchangée :

$$\dot{X}^i = h_i \dot{\varepsilon}^p \qquad [I.44]$$

Par contre la condition de cohérence implique simplement que l'incrément de la contrainte interne est nul :

$$\dot{X}^i = 0 \qquad [I.45]$$

L'évolution de la contrainte interne dans la deuxième variante, est tout d'abord non linéaire, ensuite cette variable atteint une asymptote horizontale :

$$\dot{X}^i = \frac{2}{3} h_i \left[1 - \left(\frac{X^i}{r_i} \right)^{m+1} \right] \dot{\varepsilon}^p \qquad [I.46]$$

Pour illustrer la différence entre ces deux variantes, on reporte sur la figure [I.6a] l'évolution de la contrainte interne locale en fonction de la déformation inélastique au cours d'un essai de traction monotone. La figure [I.6b] illustre le comportement du modèle lors d'un essai cyclique à contrainte symétrique imposée. Les paramètres qui ont servi à faire ces simulations sont donnés dans le tableau I.6.

E=165000, A=5.43 10^{-25}, b=8.8,
r_1=115, r_2=57, r_3=24,.3 r_4=13.3
ξ_1=1100, ξ_2=370, ξ_3=200, ξ_4=125
pour la deuxième variante, $m_1=m_2=m_3=m_4=7$

Tableau I.6 : Paramètres du modèle d'Ohno et Wang.

(unités : mm, s, MPa).

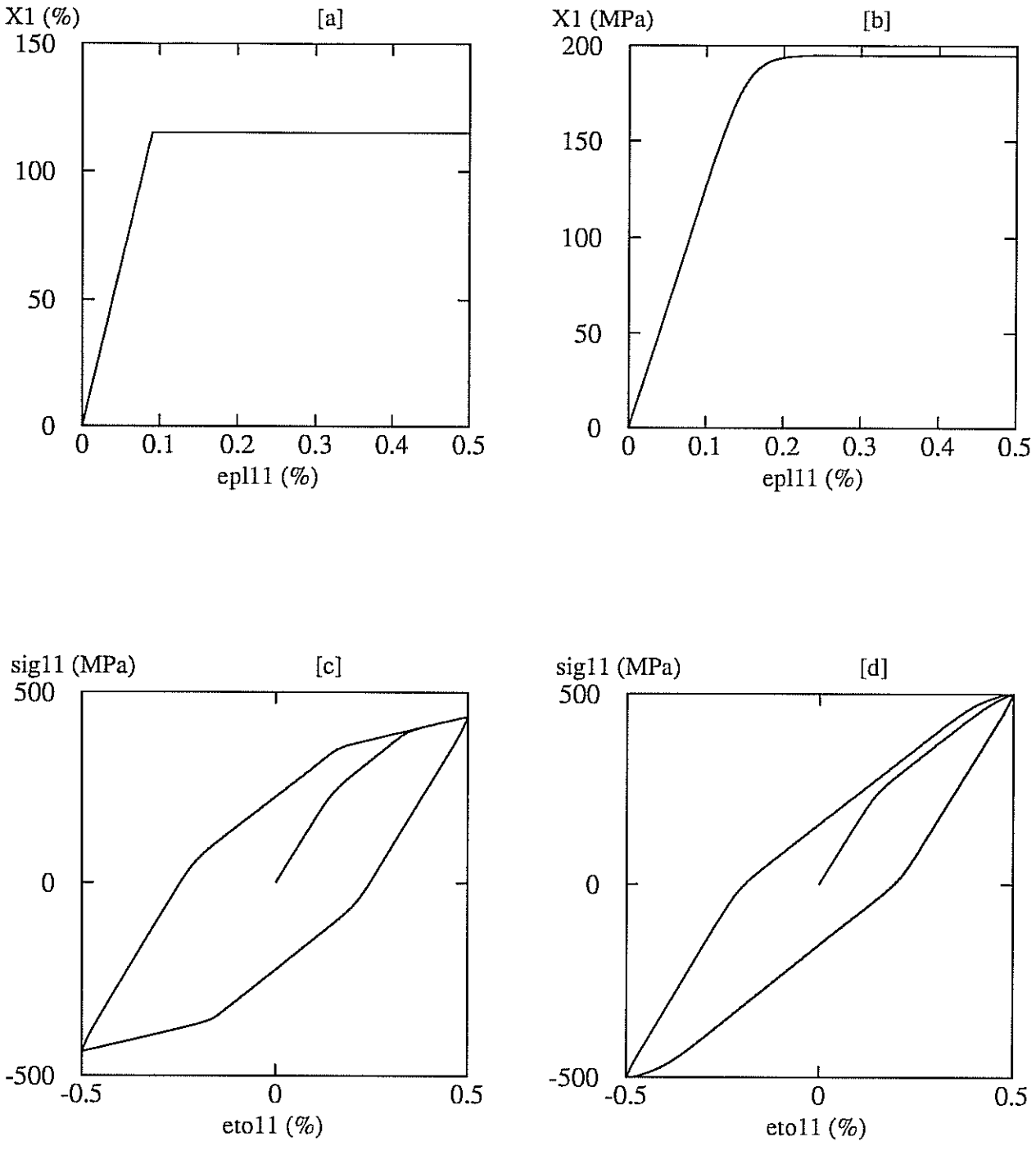


Figure I.6 : Réponses du modèle d'Ohno et Wang.

[a] Evolution des contraintes internes, modèle initial.

[b] Evolution des contraintes internes, modèle modifié.

[c] Traction-compression symétrique, modèle initial.

[d] Traction-compression symétrique, modèle modifié.

I.2.8. Modèle de Zarka

A l'origine, Zarka (1979) a travaillé sur des assemblages de modèles rhéologiques pour trouver des relations entre l'arrangement spatial de différents groupements de branches ressort-patin et leur réponse sous charge non symétrique. Ces assemblages sont constitués de groupements en parallèle, en série ou mixte.

Inglebert (1984) suppose que le matériau est un ensemble de sous-éléments fictifs. Le comportement de ces derniers peut être plastique, viscoplastique ou viscoélastique. Dans ce modèle, les surfaces macroscopiques changent de forme et de taille. Au niveau des mécanismes les surfaces sont invariantes et c'est la combinaison qui crée les variations macroscopiques. Le centre, contrairement au cas du modèle de Mróz, subit une rotation et la forme du domaine d'élasticité est définie par l'intersection de deux ellipses. On établit ainsi une relation entre la singularité de la matrice d'influence des contraintes internes et le comportement cyclique du rochet dans le cas d'un domaine d'élasticité unique. Ce travail montre que, si la matrice qui permet de calculer les contraintes internes à partir des déformations locales est régulière, alors il y a accommodation après quelques cycles, par contre, si cette matrice est singulière on est en présence d'un effet de rochet.

Dans ce modèle, on associe à chaque mécanisme une déformation inélastique. La déformation inélastique globale est obtenue à l'aide d'une combinaison linéaire des déformations inélastiques locales; par exemple dans le cas de trois mécanismes :

$$\underline{\underline{E}}^{p} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{\alpha} \\ \underline{\underline{A}}_{\beta} \\ \underline{\underline{A}}_{\gamma} \end{bmatrix}^{T} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{\beta} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{\gamma} \end{bmatrix} \qquad [I.47]$$

Les contraintes effectives locales sont données par l'équation :

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\beta} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{A}}_{\alpha} \\ \underline{\underline{A}}_{\beta} \\ \underline{\underline{A}}_{\gamma} \end{bmatrix} \underline{\underline{\Sigma}} - \begin{bmatrix} \underline{\underline{X}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{X}}^{\beta} \\ \underline{\underline{X}}^{\gamma} \end{bmatrix} \qquad [I.48]$$

Le premier terme du second membre représente le vecteur des contraintes élastiques locales. Son expression peut se démontrer facilement si on explicite l'énergie libre

élastique (cf. paragraphe I.5.1). Le second terme représente les contraintes internes dues aux incompatibilités des déformations inélastiques.

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{X}}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{\underline{X}}}^{\beta} \\ \underline{\underline{\underline{X}}}^{\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\underline{B}}}_{\alpha} & \underline{\underline{\underline{C}}}^{T} & \underline{\underline{\underline{D}}}^{T} \\ \underline{\underline{\underline{C}}} & \underline{\underline{\underline{B}}}_{\beta} & \underline{\underline{\underline{E}}}^{T} \\ \underline{\underline{\underline{D}}} & \underline{\underline{\underline{E}}} & \underline{\underline{\underline{B}}}_{\gamma} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\varepsilon}}^{\alpha} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{\beta} \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^{\gamma} \end{bmatrix} \qquad [I.49]$$

En toute généralité, les composantes du vecteur A et de la matrice B sont des tenseurs d'ordre 4. Toutefois, si les propriétés élastiques sont invariantes, ces composantes se réduisent à des scalaires.

Le seuil de plasticité est défini à l'aide d'un seuil fixe C_0 et d'un critère de von Mises pour les mécanismes plastiques et viscoplastiques. Les évolutions de toutes les déformations inélastiques sont fournies par la règle de normalité.

Inglebert (1984) présente plusieurs "associations" de couple de ces éléments fictifs. Parmi ces applications, on s'intéresse ici au modèle à deux éléments plastiques à comportement indépendant du temps. Les simulations réalisées à l'aide de ce modèle (figure I.7) montrent qu'avec une matrice B (celle qui permet de calculer les contraintes internes à partir des déformations plastiques) régulière on obtient un arrêt du rochet (figure I.7d) alors que pour une matrice B singulière la déformation progressive s'accumule indéfiniment (figure I.7c). On montrera dans le paragraphe I.5.5 que ces propriétés dépendent également de la notion de surface limite. Ce modèle rentre alors dans le même cadre que celui indiqué plus haut pour le modèle de Chaboche :

matrice régulière ⇔ pas de surface limite ⇔ adaptation ou accommodation
matrice singulière ⇔ surface limite ⇔ rochet

Les paramètres qui ont permis de simuler les courbes des figures I.7a et I.7c sont donnés dans le tableau I.7a, alors que les paramètres utilisés pour les figures I.7b et I.7d sont illustrés dans le tableau I.7b.

$E=10000,\ \underline{\underline{\underline{A}}}_{\alpha} = -\underline{\underline{\underline{I}}},\ \underline{\underline{\underline{A}}}_{\beta} = \underline{\underline{\underline{I}}}$
$\underline{\underline{\underline{B}}}_{\alpha} = 2.10^{3}\underline{\underline{\underline{I}}},\ \underline{\underline{\underline{C}}} = -2.10^{4}\underline{\underline{\underline{I}}}$
$\underline{\underline{\underline{B}}}_{\beta} = 2.10^{5}\underline{\underline{\underline{I}}},\ R_0=350$

Tableau : I.7a $(\Delta = 0)$

$E=10000,\ \underline{\underline{\underline{A}}}_{\alpha} = -\underline{\underline{\underline{I}}},\ \underline{\underline{\underline{A}}}_{\beta} = \underline{\underline{\underline{I}}}$
$\underline{\underline{\underline{B}}}_{\alpha} = 2.10^{3}\underline{\underline{\underline{I}}},\ \underline{\underline{\underline{C}}} = -2.10^{3}\underline{\underline{\underline{I}}}$
$\underline{\underline{\underline{B}}}_{\beta} = 2.10^{5}\underline{\underline{\underline{I}}},\ R_0=350$

Tableau : I.7b $(\Delta \neq 0)$

Tableau I.7 : Paramètres du modèle de Zarka, (unités : mm, s, MPa).

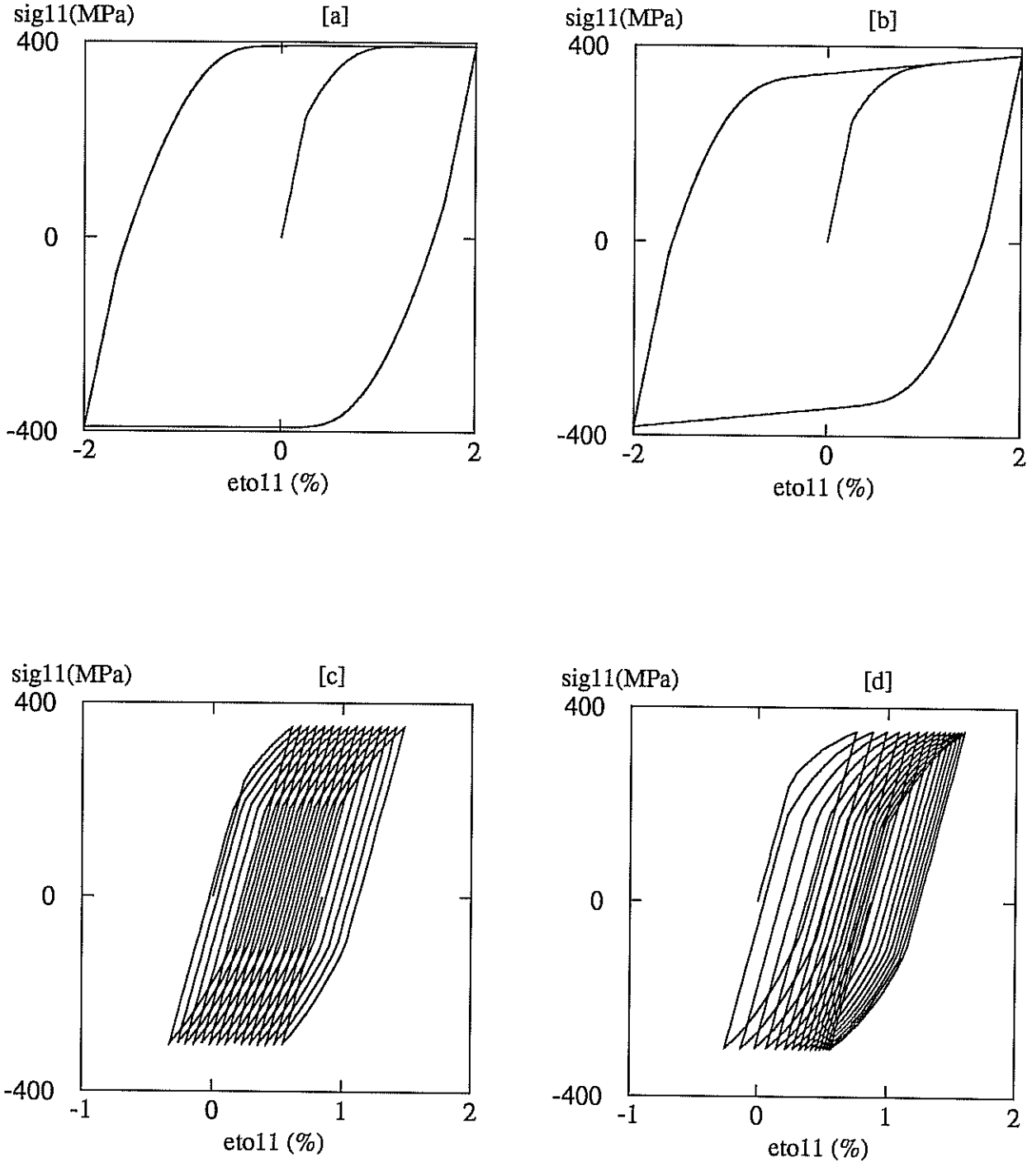


Figure I.7 : Réponses du modèle de Zarka.

[a] Traction-compression symétrique, (Δ=0).

[b] Traction-compression symétrique, ($\Delta\neq$0).

[c] Rochet, (Δ=0).

[d] Rochet, ($\Delta\neq$0).

I.2.9. Modèle micromécanique de Cailletaud

Ce modèle est basé sur une approche micro-macro avec deux échelles intermédiaires : le grain et le système de glissement dans le grain. Sans rentrer dans les détails du modèle déjà expliqué et analysé par Cailletaud (1987) et Pilvin (1990), on notera les lois de "localisation" et d'"homogénéisation" qui serviront de références pour le développement du modèle de ce travail. Ce modèle se présente sous la forme donnée dans le tableau I.8.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^t = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

$$f^r = \left|\tau^r - x^r\right| - r^r$$

$$x^r = C\alpha^r$$

$$r^r = r_0 + \sum_j h_{rj} Q(1 - e^{-bv^j})$$

$$\tau^r = \underline{\underline{\sigma}}^g : \underline{\underline{m}}^r$$

$$\underline{\underline{\sigma}}^g = \underline{\underline{\sigma}} + A(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^g)$$

$$\dot{\alpha}^r = \dot{\gamma}^r - d\alpha^r \dot{v}^r$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^p = \frac{1}{N} \sum_{h \in G} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^h$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^g = \sum_{s \in g} \underline{\underline{m}}^s \dot{\gamma}^s$$

$$\dot{\gamma}^r = \text{signe}(\tau^r - x^r)\dot{v}^r$$

Tableau I.8: Modèle de Cailletaud.

L'évolution du glissement s'écrit en viscoplasticité, comme pour le modèle macroscopique de Chaboche, sous la forme :

$$\dot{v}^r = \left[\text{Max}\left\{0, \frac{\left|\tau^r - x^r\right| - r^r}{K}\right\}\right]^n \qquad [I.50]$$

En plasticité, les multiplicateurs plastiques sont issus de la résolution du système linéaire [I.51] qui provient de l'écriture des conditions de cohérence sur les systèmes actifs, et dans laquelle la matrice H renferme les termes d'interaction entre les systèmes et entre les grains :

$$H^{ij}\dot{\lambda}^j = \underline{\underline{m}}^j : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}; \qquad (i,j) \in SGxSG \qquad [I.51]$$

où SG désigne l'ensemble des systèmes actifs de tous les grains. Le calcul de ces multiplicateurs rentre dans le cadre de la théorie de recherche des systèmes actifs dans les mécanismes interdépendants (Taylor, 1938; Bishop et Hill, 1951; Mandel, 1965; Tavard et al. 1987). Ce qui est particulièrement intéressant dans cette étude est le cas où la matrice H devient singulière (déterminant(H)=0). La résolution analytique d'un tel système aurait amené, dans ce cas, à écrire que les autres déterminants secondaires sont nuls. Chacun de ces déterminants est une combinaison du second membre avec d'autres colonnes de la matrice H. Il s'ensuit alors dans le cas d'un chargement proportionnel que l'incrément de contrainte est nul. Le comportement devient alors parfaitement plastique. Pour illustrer et justifier cette remarque, on s'appuie sur le modèle formulé en viscoplasticité en choisissant des paramètres qui donnent une faible viscosité. On a donc fait deux groupes de simulations avec deux jeux de paramètres différents (cf. tableau I.9).

E (MPa)	ν	A	K	n
200000	0.3	100000	50	25

Tableau I.9 : paramètres utilisés pour la simulation du modèle micromécanique. jeu 1 : C=0, jeu 2 : C=2500.

La figure I.8 illustre les réponses obtenues avec chacun des jeux de paramètres. Ces résultats sont à rapprocher du fait que, pour le jeu 1, on a un module d'écrouissage nul au niveau des systèmes, ce qui n'est pas le cas du jeu 2. Ils confirment la remarque indiquée plus haut dans la mesure où on lie une singularité à l'existence ou non d'une surface limite. Par ailleurs, la réponse du modèle vis-à-vis du rochet montre que ce phénomène est également lié à la notion de surface limite. Cela montre que ce modèle n'a pas de liens trop rigides entre les règles d'évolution de l'écrouissage cinématique et le phénomène de rochet. En effet Pilvin (1990) a montré qu'on peut "avoir des configurations de coefficients pour lesquelles on obtient simultanément un écrouissage cinématique non linéaire et blocage du rochet en traction compression". L'une de ces configurations est obtenue en choisissant des évolutions non linéaires pour l'écrouissage cinématique et/ou isotrope et en faisant en sorte que ces variables n'atteignent pas leurs asymptotes dans le domaine de contrainte concerné. La courbe de traction est alors non linéaire alors que le rochet se bloque. D'un autre coté, une saturation rapide de ces variables conduirait à un comportement de rochet.

En conclusion, il apparaît clairement que ce modèle est capable de décrire correctement le phénomène de rochet.

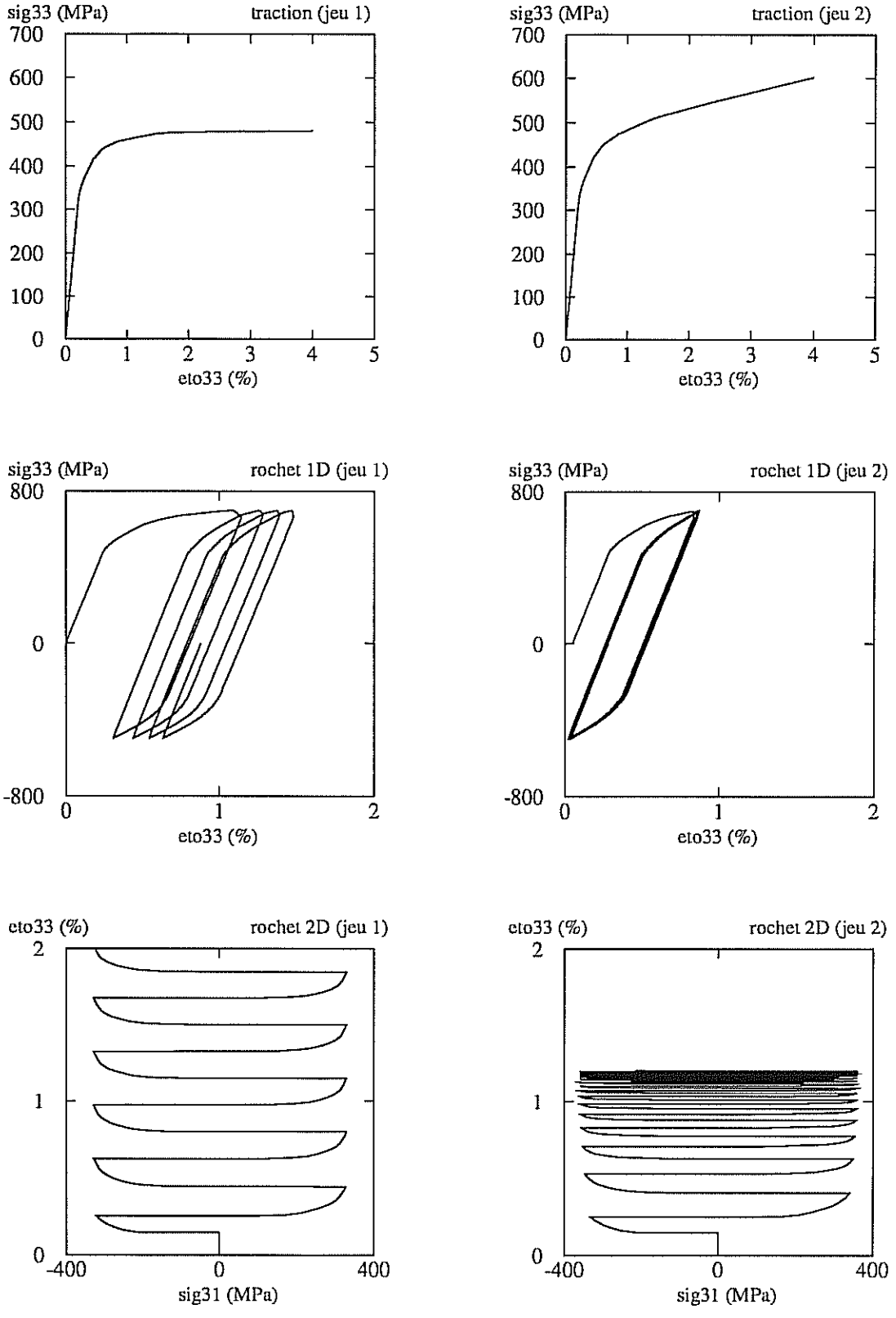


Figure I.8 : Réponses du modèle micromécanique de Cailletaud.

I.2.10. Synthèse, comparaison

Le traitement de l'écrouissage cinématique occupe une part importante dans le développement des modèles de comportement des matériaux. Pour mieux comparer ces différents modèles, on distingue trois types de variables : la déformation inélastique "ε", la variable d'écrouissage "X" et la variable interne décrivant l'écrouissage cinématique "α". Si la notion de déformation inélastique se retrouve dans tous les modèles de comportement, la variable α n'est pas toujours utilisée. De plus, dans le cas où elle est introduite, elle reste souvent simplement proportionnelle à "X". Seuls quelques modèles introduisent des dépendances plus complexes. On va donc repasser rapidement les modèles déjà discutés pour les comparer de ce point de vue. Dans chaque cas, on commencera par citer le type d'approche utilisé et énumérer le nombre de critères utilisés. Ensuite, on mettra en évidence le nombre de variables de type "ε", "α" "X", en indiquant si ces variables sont décomposées ou non, puis on discutera les lois d'évolution et les relations qui les lient entre elles.

Les approches de : Armstrong et Frederick, (1966), Chaboche, (1978), Marquis (1979), Lemaitre et Marquis (1992), Burlet et Cailletaud (1987), McDowell (1992), Guionnet (1992), Freed et Walker (1993), etc.... se basent sur :
→une approche phénoménologique,
→un seul critère de plasticité,
→une seule déformation inélastique dont l'incrément est normal à la surface de charge,
→plusieurs variables "α", qui ont souvent des évolutions non linéaires,
→plusieurs contraintes internes "X". Chaque "X" est proportionnel au "α" qui lui est associé.

Les approches de Zarka (1979), Inglebert (1984) se basent sur :
→une approche phénoménologique,
→un ou plusieurs critères de plasticité,
→plusieurs déformations inélastiques dont les incréments ne sont pas toujours normaux à leur surfaces de charge respectives,
→pas de variables "α",
→plusieurs contraintes internes "X". Chaque "X" dépend du "ε" qui lui est associée mais également des autres "ε".

La présente approche qui sera détaillée dans les prochains paragraphes (Cailletaud et Saï, 1993) comme celle de Contesti et Cailletaud (1989) se base sur :
→une approche phénoménologique,

→plusieurs critères de plasticité,
→plusieurs déformations inélastiques dont les incréments sont normaux aux surfaces de charge respectives,
→plusieurs contraintes internes "X". Chaque "X" dépend du "α" qui lui est associée mais également des autres "α".

Les approches de Mróz (1967), Klisinski et al. (1992) se basent sur :
→une approche phénoménologique,
→plusieurs critères de plasticité,
→une seule déformation inélastique dont l'incrément est normal à la dernière surface de charge activée, elle possède donc une évolution linéaire,
→pas de variable "α",
→plusieurs contraintes internes "X". Les évolutions de ces dernières sont identiques et égales à l'évolution de celle qui correspond à la dernière surface de charge activée.

L'approche de Wang et Ohno (1991) se base sur :
→une approche phénoménologique,
→pas de critère de plasticité, mais plusieurs fonctions de charge qui servent uniquement à déterminer les évolutions des "X".
→une seule déformation inélastique dont l'incrément est normal à la surface de charge,
→pas de variable "α",
→plusieurs contraintes internes "X". Les évolutions de ces dernières sont non linéaires.

Le modèle micromécanique de Cailletaud (1987) se base sur :
→une approche physique et phénoménologique,
→plusieurs critères de plasticité,
→plusieurs déformations inélastiques "ε",
→plusieurs variables "α",
→plusieurs variables "X".

On peut récapituler les propriétés de ces modèles dans le tableau I.10. Ces points de comparaison montrent que le modèle micromécanique de Cailletaud (1987, 1992) utilise, en plus de son approche physique, les trois variables "ε", "α", et "X". En effet, ce modèle offre deux types de contraintes internes :
- des contraintes internes dues aux incompatibilités des déformations plastiques "ε", (exemple : $A(\underline{\underline{\varepsilon}}^p - \underline{\underline{\varepsilon}}^g)$),
- des contraintes internes décrites par des variables "α", (exemple : α^r).

On verra au paragraphe I.6 comment cette souplesse est à l'origine de la bonne description des comportements des matériaux en général et de l'effet de rochet en particulier par ce modèle.

	type d'approche	relation $\underline{\underline{\alpha}} \leftrightarrow \underline{\underline{X}}$	relation $\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^i \leftrightarrow \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}_p^i$	nb. de ε inélast.	nb de critères
St-Venant	rhéologique	$\underline{\underline{X}}^i = \underline{\underline{\alpha}}^i$	linéaire	1	nb. de ressorts
Chaboche	phénoménologique	$\underline{\underline{X}} = \Sigma \underline{\underline{X}}^i = \Sigma C_i \underline{\underline{\alpha}}^i$	non linéaire	1	1
Mróz	phénoménologique	$\underline{\underline{X}}^i = \underline{\underline{\alpha}}^i$	linéaire	1	nb. de surfaces
Zarka	phénoménologique	$\underline{\underline{\overset{+}{X}}} = L\underline{\underline{\overset{r}{\alpha}}}$	linéaire	nb. de mécani-smes	1 ou nb. d'éléments
Ohno et Wang	phénoménologique	$\underline{\underline{X}} = \Sigma \underline{\underline{X}}^i = \Sigma \underline{\underline{\alpha}}^i$	non linéaire	1	nb. de mécanismes*
Contesti et Cailletaud	phénoménologique	$\underline{\underline{\overset{+}{X}}} = L\underline{\underline{\overset{r}{\alpha}}}$	non linéaire	2	2
Cailletaud	phénoménologique physique	$\underline{\underline{X}}_g^s = C\underline{\underline{\alpha}}_g^s$	non linéaire	nb. de grains	nb. total de systèmes

* ces critères ne déterminent pas des domaines d'élasticité mais des seuils qui servent à choisir les lois d'évolution des variables cinématiques en fonction de la déformation inélastique.

Tableau I.10 : Comparaisons des différents modèles.

Même si, pour la plupart de ces modèles, les courbes d'écrouissage cycliques sont correctement respectées, la représentation quantitative, mais surtout qualitative du rochet est plus ou moins bien décrite par ces modèles. Les modèles de Saint Venant et de Mróz prédisent une adaptation dès le premier cycle. Le modèle de Zarka est capable de prédire l'adaptation, mais pour un matériau donné, uniquement du rochet ou de l'accommodation. Seuls le modèle de Cailletaud, le modèle de Chaboche modifié et le modèle de Ohno et Wang semblent en mesure de décrire correctement le rochet. Par ailleurs, il est assez clair que ce phénomène est étroitement lié à la notion de surface limite, qu'il faut donc bien maîtriser dans les modèles.

I.3. Approche thermodynamique, généralités

I.3.1. Lois d'état

L'approche thermodynamique présente un cadre agréable pour le développement des modèles de comportement mécanique. La thermodynamique des milieux continus est basée sur la méthode de l'état local (Germain, 1973). Cette méthode consiste à décrire le comportement d'un point à un instant donné par des variables internes qui contiennent le résultat de l'histoire du chargement en ce point. Ces variables internes décrivent l'évolution du milieu comme une succession d'états d'équilibre, ce qui conduit à introduire un potentiel thermodynamique qui dépend des variables internes. On suppose dans un premier temps que la déformation totale se décompose en une partie élastique réversible et une partie inélastique irréversible (cf. équation [I.52a]). Comme l'état thermodynamique d'un milieu élastique dépend uniquement de la température et de la déformation élastique, ces deux variables observables interviennent dans l'écriture de l'énergie libre Ψ que l'on suppose donc être la somme d'une partie élastique et d'une partie inélastique (cf. équation [I.52b]).

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + \underline{\underline{\varepsilon}}^{in} \qquad [I.52a]$$

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e\left(\underline{\underline{\varepsilon}} - \underline{\underline{\varepsilon}}^{in}, T\right) + \rho\Psi_{in}\left(V^1,...,V^n,T\right) = \rho\Psi_e\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^{e}, T\right) + \rho\Psi_{in}\left(V^1,...,V^n,T\right) \qquad [I.52b]$$

On désigne par $\left(V^1,...,V^n\right)$ l'ensemble des variables internes scalaires ou tensorielles autres que la déformation inélastique. Les premier et second principes de la thermodynamique sont résumés par l'inégalité de Clausius-Duhem (cf. équation [I.53a]); dans laquelle la positivité du terme $-\frac{1}{T}\vec{q}.\vec{\text{grad}}\,T$ est assurée par la loi de conduction de Fourier (cf. équation [I.53b]).

$$\underline{\underline{\sigma}}:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho(\dot{\Psi} + S\dot{T}) - \frac{1}{T}\vec{q}\,\vec{\text{grad}}\,T \geq 0 \qquad [I.53a]$$

$$\vec{q} = -K\vec{\text{grad}}\,T \ (K>0) \qquad [I.53b]$$

Pour que le comportement soit admissible, il suffit que la dissipation intrinsèque soit positive :

$$\underline{\underline{\sigma}}:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \rho(\dot{\Psi} + S\dot{T}) = \underline{\underline{\sigma}}:(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{e} + \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in}) - \rho(\dot{\Psi} + S\dot{T}) \geq 0 \qquad [I.54]$$

Or, $$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial T}\dot{T} + \frac{\partial \Psi}{\partial V^i}\dot{V}^i \qquad [I.55]$$

Les variables V^i peuvent être de nature scalaire ou tensorielle. En remplaçant l'expression de la dérivée de l'énergie libre dans l'inégalité I.54, il vient :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in} + (\underline{\underline{\sigma}} - \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}^e}) : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e - \rho(S + \frac{\partial \Psi}{\partial T})\dot{T} - \rho\frac{\partial \Psi}{\partial V^i}\dot{V}^i \geq 0 \qquad [I.56]$$

Les petites perturbations en $\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^e$ et $\dot{T}$ étant réversibles, on a :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}_e} = \rho\frac{\partial \Psi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}, \; S = -\frac{\partial \Psi}{\partial T} \text{ et } \underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in} - \rho\frac{\partial \Psi}{\partial V^i}\dot{V}^i \geq 0 \qquad [I.57]$$

En posant par ailleurs :

$$A^i = \frac{\partial \Psi}{\partial V^i} \qquad [I.58]$$

où A^i est la force associée à la variable interne V^i, les deux principes de la thermodynamique seront respectés si :

$$\underline{\underline{\sigma}} : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in} - A^i\dot{V}^i \geq 0 \qquad [I.59]$$

Cette inégalité simple permet de définir le contrôle à effectuer pendant l'intégration des modèles où l'on ne peut pas démontrer analytiquement la positivité de la dissipation. Elle assure que les équations considérées ont un sens physique vis-à-vis des échanges d'énergie.

I.3.2. Lois complémentaires

Les lois d'état sont insuffisantes pour décrire les phénomènes irréversibles. Il faut alors déterminer l'évolution des variables internes. Ceci peut se faire de deux manières différentes :

(i) L'évolution des variables internes est donnée par l'introduction d'un pseudo-potentiel de dissipation φ. On obtient alors :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{in}}, \qquad -A^i = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}^i} \qquad [I.60]$$

Cependant, il est plus simple d'utiliser la transformation de Legendre-Fenchel φ^* de φ par laquelle la convexité, positivité et nullité à l'origine de φ sont conservées, et d'écrire :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{in} = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \underline{\underline{\sigma}}}, \qquad -\dot{V}^i = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A^i} \qquad [I.61]$$

Le choix des lois d'état (de Ψ) et des lois complémentaires (donc de φ^*) déterminent complètement le comportement du matériau. Les lois de comportement développées ainsi rentrent dans le cadre des modèles standards généralisés (Halphen et Nguyen 1975), (Halphen, 1978), (Nguyen, 1986).

(ii) L'évolution des variables internes est exprimée directement sans l'introduction d'un pseudo-potentiel de dissipation : ($\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^{in} = ..., \dot{V}^i = ...$). On se place alors dans le cas des modèles non standards pour lesquels il faut s'assurer que la dissipation intrinsèque [I.59] soit positive.

En pratique, la plupart des modèles distinguent trois fonctions différentes pour décrire complètement l'écoulement d'un matériau :
- la première fonction, notée f, sert à déterminer la limite du domaine d'élasticité. Dans le cas de la plasticité indépendante du temps le pseudo-potentiel de dissipation φ^* est la fonction indicatrice de f :

$$\begin{cases} \varphi^* = 0 & \text{si} \quad f < 0 \\ \varphi^* = +\infty & \text{si} \quad f = 0 \end{cases}$$

alors que dans le cas de la viscoplasticité le pseudo-potentiel est une fonction explicite de la fonction f :

$$\varphi^* = \Omega_p(f)$$

- la deuxième fonction, g, est utilisée pour définir la loi d'écoulement. Elle permet de déterminer la direction d'écoulement pour la déformation inélastique. L'intensité de l'écoulement est donnée par un multiplicateur plastique.

- la troisième fonction, h, sert à déterminer les lois d'évolution des variables internes d'écrouissage.

Selon que ces trois fonctions sont égales ou non entre elles, une terminologie différente est utilisée. Si f=g, on parle de loi associée. On peut alors distinguer deux sous cas : si la fonction h est différente des deux premières fonctions, on parle uniquement de modèle standard; par contre, dans le cas où f=g=h, et où les évolutions sont calculées à l'aide du même multiplicateur, dans le cas de la plasticité indépendante du temps, on parle de modèle standard généralisé. Dans le cadre de cette étude on adopte cette stratégie de modèles non standards. Toutefois, on utilisera la terminologie des fonctions f, g et h donnée ci haut pour déterminer la forme des lois d'évolution.

I.4. Exposé du modèle 2M2C

I.4.1. Lois d'état

On utilise le cadre thermodynamique décrit précédemment pour développer les deux modèles qu'on va proposer. Les fonctions de charge et les règles de normalité seront définies à l'aide des mêmes fonctions ($f^i=g^i$), alors que les évolutions des variables cinématiques seront définies à l'aide d'autres fonctions h^i. Ces dernières fonctions seront appelées fonctions d'écrouissage.

Cette approche thermodynamique nécessite de connaître les variables dont dépendent le potentiel de dissipation et l'énergie libre. Le premier modèle que l'on présente comprend deux mécanismes et deux critères. Dans la suite, on appellera ce modèle 2M2C (2 mécanismes, 2 critères). Chaque mécanisme est décrit par une déformation irréversible, une variable d'écrouissage cinématique et une variable d'écrouissage isotrope :

Variables d'état		Variables associées
Variables observables	Variables internes	
$\underline{\underline{\varepsilon}}$		$\underline{\underline{\sigma}}$
	$\underline{\underline{\varepsilon}}^1$	$-\underline{\underline{\sigma}}^1$
	$\underline{\underline{\varepsilon}}^2$	$-\underline{\underline{\sigma}}^2$
	$\underline{\underline{\alpha}}^1$	$\underline{\underline{X}}^1$
	$\underline{\underline{\alpha}}^2$	$\underline{\underline{X}}^2$
	q^1	R^1
	q^2	R^2

Tableau I.11 : Variables thermodynamiques.

Les termes élastiques et inélastiques de l'énergie libre sont découplés :

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^e, T\right) + \rho\Psi_{in}\left(\underline{\underline{\alpha}}^1, \underline{\underline{\alpha}}^2, q^1, q^2, T\right) \qquad [I.62]$$

Dans cette expression $\rho\Psi_e$ désigne l'énergie libre élastique. L'écriture de cette partie de l'énergie libre passe par une étape d'homogénéisation qui consiste à reconstruire la déformation plastique macroscopique à partir des déformations plastiques locales. Ainsi, on peut utiliser le comportement de chaque mécanisme pour reconstituer la réponse macroscopique.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^1 + A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^2 \qquad [I.63]$$

Avec cette définition de la déformation inélastique, l'énergie libre élastique s'écrit :

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^2):\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^2) = \frac{1}{2}\underline{\underline{\varepsilon}}^e:\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:\underline{\underline{\varepsilon}}^e \qquad [I.64]$$

où $\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}$ représente le tenseur de Hooke de l'élasticité. Dans tout ce qui suit on considérera que ce tenseur est isotrope. L'énergie libre permet de calculer les contraintes locales associées à chaque mécanisme à partir de la contrainte macroscopique. On définit $\underline{\underline{\sigma}}^1$ et $\underline{\underline{\sigma}}^2$ par :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^1 \\ \underline{\underline{\sigma}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^1} \\ -\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\underline{\underline{\sigma}} \\ A_2\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix} \qquad [I.65]$$

On introduit par ailleurs, comme pour les modèles macroscopiques, les notions d'écrouissages cinématique et isotrope. Ceci devrait permettre de répéter, tout en restant à l'échelle du mécanisme, l'opération de construction des lois de comportement "micro-macro" utilisée dans le modèle micromécanique de Cailletaud. La partie inélastique de l'énergie libre permet d'obtenir les autres variables associées. En effet, $\rho\Psi_{in}$ s'écrit en fonction des variables internes d'une façon analogue à celle que l'on rencontre classiquement dans les modèles macroscopiques :

$$\rho\Psi_{in} = \frac{1}{3}{}^t\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \qquad [I.66]$$

On obtient ainsi l'expression des deux contraintes internes qui sont couplées entre elles à l'aide de la matrice d'écrouissage symétrique B :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}^1 \\ \underline{\underline{X}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^1} \\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix} \qquad [I.67]$$

Par contre, les variables isotropes ne sont pas couplées entres elles, leurs expressions sont données par les équations suivantes :

$$\begin{pmatrix} R^1 \\ R^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial q^1} \\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial q^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & 0 \\ 0 & Q_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q^1 \\ q^2 \end{pmatrix} \qquad [I.68]$$

Quant à la troisième possibilité de couplage possible, elle concerne le couplage entre les variables cinématiques et les variables isotropes. On a choisit d'introduire celui-ci au niveau des lois d'évolution et non pas au niveau des lois d'état (cf. annexe I). Par ailleurs, on montrera en annexe I.2 que l'écriture de l'énergie libre, aussi bien pour le modèle 2M2C que pour le modèle 2M1C, avec une matrice B non symétrique est équivalente à celle obtenue avec une matrice B symétrique.

I.4.2. Lois complémentaires

L'existence de deux fonctions de charge (une fonction par mécanisme) constitue la différence essentielle avec le modèle 2M1C qui fera l'objet du paragraphe I.5. Les fonctions d'écrouissage sont choisies sous la forme :

$$f^1 = g^1 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{X}}^1) - R^1 - R_{01} \qquad [I.69a]$$

$$h^1 = f^1 + \frac{3D_1}{4B_{11}}\underline{\underline{X}}^1 : \underline{\underline{X}}^1 + \frac{b_1}{2Q_{11}}\left(R^1\right)^2 \qquad [I.69b]$$

$$f^2 = g^2 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{X}}^2) - R^2 - R_{02} \qquad [I.70a]$$

$$h^2 = f^2 + \frac{3D_2}{4B_{22}}\underline{\underline{X}}^2 : \underline{\underline{X}}^2 + \frac{b_2}{2Q_{22}}\left(R^2\right)^2 \qquad [I.70b]$$

Elles sont nulles à l'origine, positives et convexes. On peut déduire de leur forme les expressions des lois d'évolution. Les deux déformations inélastiques sont portées par le gradient de leurs fonctions de charge respectives. Chacune possède sa propre intensité d'écoulement :

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^1 = \dot{\lambda}^1 \frac{\partial g^1}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} = \dot{\lambda}^1 \frac{\partial h^1}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} = \dot{\lambda}^1 \underline{\underline{n}}^1 \qquad [I.71]$$

$$\underline{\underline{\dot{\varepsilon}}}^2 = \dot{\lambda}^2 \frac{\partial g^2}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} = \dot{\lambda}^2 \frac{\partial h^2}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} = \dot{\lambda}^2 \underline{\underline{n}}^2 \qquad [I.72]$$

L'évolution des deux variables cinématiques et des deux variables isotropes est non linéaire :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 = -\dot{\lambda}^1 \frac{\partial h^1}{\partial \underline{\underline{X}}^1} = \dot{\lambda}^1 (\underline{\underline{n}}^1 - \frac{3D_1}{2B_{11}} \underline{\underline{X}}^1) \qquad [I.73]$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 = -\dot{\lambda}^2 \frac{\partial h^2}{\partial \underline{\underline{X}}^2} = \dot{\lambda}^2 (\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3D_2}{2B_{22}} \underline{\underline{X}}^2) \qquad [I.74]$$

$$\dot{q}^1 = -\dot{\lambda}^1 \frac{\partial h^1}{\partial R^1} = \dot{\lambda}^1 (1 - \frac{b_1}{Q_{11}} R^1) \qquad [I.75]$$

$$\dot{q}^2 = -\dot{\lambda}^2 \frac{\partial h^2}{\partial R^2} = \dot{\lambda}^2 (1 - \frac{b_2}{Q_{22}} R^2) \qquad [I.76]$$

Les équations qu'on a développées jusqu'à maintenant sont écrites indépendamment de la nature plastique ou viscoplastique des deux mécanismes. C'est uniquement à partir de maintenant qu'on fait cette distinction. Le modèle 2M2C comporte 2 mécanismes interdépendants. Trois cas sont envisagés :
(i) les deux mécanismes ont un comportement plastique (modèle 2M2C_PP),
(ii) les deux mécanismes ont un comportement viscoplastique (modèle 2M2C_VV),
(iii) l'un des deux mécanismes a un comportement viscoplastique alors que le second est de nature plastique (modèle 2M2C_VP).

On ne tient pas compte du couplage thermomécanique dans ce modèle. Toutefois, les paramètres du matériau peuvent dépendre de la température. Sans rentrer dans les détails des équations, on précise que, dans le cas de la viscoplasticité, les équations sont inchangées par rapport à celles écrites à température constante. Par contre, en plasticité, des termes supplémentaires apparaissent dans les lois d'évolution, qui sont dûs aux dérivées partielles des paramètres du modèle par rapport à la température ($\dot{f}(A,T) = 0 = \frac{\partial f}{\partial A}\dot{A} + \frac{\partial f}{\partial T}\dot{T}$). Chacun des deux mécanismes peut être en écoulement ou non selon un critère qui lui est propre.

On peut à ce niveau choisir de travailler avec un modèle standard généralisé, en utilisant pour f^i les fonctions h^i définies ci dessus. On ne suivra pas cette voie dans l'exposé en revenant vers des fonctions plus simples f^1 et f^2, utilisées comme seuils et comme équipotentielles (ou fonctions indicatrices) pour l'écoulement (visco)plastique.

$$f^1 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{X}}^1) - R^1 - R_{01} \qquad [I.77]$$

$$f^2 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{X}}^2) - R^2 - R_{02} \qquad [I.78]$$

L'incrément de déformation inélastique cumulée sur chaque mécanisme est défini par :

$$\dot{p}^i = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i} \qquad [I.79]$$

On peut aisément montrer que l'incrément de cette déformation cumulée est égal au multiplicateur inélastique du mécanisme considéré. En effet la normale à la surface du mécanisme i est donnée par :

$$\underline{\underline{n}}^i = \frac{\partial f^i}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^i} = \frac{3}{2}\frac{\underline{\underline{S}}^i - \underline{\underline{X}}^i}{J_2(\underline{\underline{\sigma}}^i - \underline{\underline{X}}^i)} \qquad [I.80]$$

avec $$J_2(\underline{\underline{\sigma}}^i - \underline{\underline{X}}^i) = \sqrt{\frac{3}{2}\left(\underline{\underline{S}}^i - \underline{\underline{X}}^i\right) : \left(\underline{\underline{S}}^i - \underline{\underline{X}}^i\right)} \qquad [I.81]$$

dans cette expression $\underline{\underline{S}}^i$ représente la partie déviatorique de la contrainte effective $\underline{\underline{\sigma}}^i$:

$$\underline{\underline{S}}^i = \underline{\underline{\sigma}}^i - \frac{1}{3}\mathrm{tr}(\underline{\underline{\sigma}}^i)\underline{\underline{1}} \qquad [I.82]$$

Il vient finalement, en utilisant l'expression de la déformation inélastique i :

$$\dot{p}^i = \sqrt{\frac{2}{3}\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i : \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i} = \sqrt{\frac{2}{3}\underline{\underline{n}}^i\dot{\lambda}^i : \underline{\underline{n}}^i\dot{\lambda}^i} = \dot{\lambda}^i \qquad [I.83]$$

Remarques :

Avant de récapituler les équations du modèle 2M2C, on précise quelques termes complémentaires qui sont rajoutés dans l'évolution des variables cinématiques.

(i) pour pouvoir prendre en compte l'effet de restauration par le temps quand le mécanisme considéré est viscoplastique, on rajoute un terme supplémentaire dit de restauration pour chacune des lois d'évolution des variables d'écrouissages :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 = \dot{\lambda}^1(\underline{\underline{n}}^1 - \frac{3D_1}{2B_{11}}\underline{\underline{X}}^1) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^1)}{M}\right)^m \frac{\underline{\underline{X}}^1}{J_2(\underline{\underline{X}}^1)} \qquad [I.84a]$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 = \dot{\lambda}^2(\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^2) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^2)}{M}\right)^m \frac{\underline{\underline{X}}^2}{J_2(\underline{\underline{X}}^2)} \qquad [I.84b]$$

$$\dot{q}^1 = \dot{\lambda}^1(1 - \frac{b_1}{Q_{11}}R^1) - \left(\frac{|R^1|}{L}\right)^l \qquad [I.84c]$$

$$\dot{q}^2 = \dot{\lambda}^2(1 - \frac{b_2}{Q_{22}}R^2) - \left(\frac{|R^2|}{L}\right)^l \qquad [I.84d]$$

(ii) pour mieux décrire l'effet de rochet, on modifie l'une des deux fonctions d'écrouissage (la première par exemple), celle ci devient :

$$h^1 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{X}}^1) - R^1 - R_{01} + \varphi(R^2)\frac{3D_1}{4B_{11}}\underline{\underline{X}}^1 : \underline{\underline{X}}^1 + \frac{b_1}{2Q_{11}}(R^1)^2 \qquad [I.85]$$

La fonction $\varphi(R^2)$ est introduite pour reproduire, comme pour le modèle de Chaboche, un comportement linéaire à faible niveau de contrainte pour lequel R^2 évolue peu, et un comportement non linéaire à plus haut niveau. Cette fonction permet donc d'avoir un couplage entre la variable cinématique du premier mécanisme et la variable isotrope du deuxième mécanisme.

Les 21 paramètres qui interviennent dans ce modèle, outre les deux constantes élastiques E et ν, sont résumés dans le tableau I.12.

Le tableau I.13 résume les équations du modèle 2M2C dans lequel on introduit la notion de restauration par le temps dans l'évolution des variables d'écrouissage.

$A_1, B_{11}, D_1, n_1, K_1, R_{01}, b_1, Q_{11}$
$A_2, B_{22}, D_2, n_2, K_2, R_{02}, b_2, Q_{22}$
B_{12}, m, M, l, L

Tableau I.12 : Paramètres matériau du modèle 2M2C.

A_1, A_2 : coefficients de localisation,

R_{01}, b_1, Q_{11}, R_{02}, b_2, Q_{22} : coefficients d'écrouissage isotrope,

B_{11}, D_1, B_{22}, D_2, B_{12} : coefficients d'écrouissage cinématique,

m, M, l, L : coefficients de restauration,

n_1, K_1, n_2, K_2 : coefficients de viscosité,

C : coefficient de rochet.

partition de la déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^{1} + A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^{2}$$

fonctions de charge

$$f^1 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{X}}^1) - R^1 - R_{01}$$

$$f^2 = J_2(\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{X}}^2) - R^2 - R_{02}$$

variables associées

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^1 \\ \underline{\underline{\sigma}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\underline{\underline{\sigma}} \\ A_2\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}^1 \\ \underline{\underline{X}}^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix}$$

lois d'évolution

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^1 = \dot{\lambda}^1\underline{\underline{n}}^1$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^2 = \dot{\lambda}^2\underline{\underline{n}}^2$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 = \dot{\lambda}^1(\underline{\underline{n}}^1 - \varphi(R^2)\frac{3D_1}{2B_{11}}\underline{\underline{X}}^1) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^1)}{M}\right)^m \frac{\underline{\underline{X}}^1}{J_2(\underline{\underline{X}}^1)}$$

avec $\varphi(R^2) = 1 - \exp(-C\frac{R^2}{Q_{22}})$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 = \dot{\lambda}^2(\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^2) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^2)}{M}\right)^m \frac{\underline{\underline{X}}^2}{J_2(\underline{\underline{X}}^2)}$$

$$\dot{q}^1 = \dot{\lambda}^1(1 - \frac{b_1}{Q_{11}}R^1) - \left(\frac{|R^1|}{L}\right)^l$$

$$\dot{q}^2 = \dot{\lambda}^2(1 - \frac{b_2}{Q_{22}}R^2) - \left(\frac{|R^2|}{L}\right)^l$$

Tableau I.13 : Equations du modèles 2M2C.

Il convient maintenant de calculer la dissipation intrinsèque (mécanique) de l'équation [I.59]. Celle ci vaut : $\Phi = \underline{\underline{\sigma}}^1:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^1 + \underline{\underline{\sigma}}^2:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^2 - \underline{\underline{X}}^1:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 - \underline{\underline{X}}^2:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 - R^1\dot{q}^1 - R^2\dot{q}^2 = \Phi^1 + \Phi^2$

où Φ^i est la dissipation du mécanisme i, elle doit être positive :

$$\Phi^i = \dot{\lambda}^i\left(\underline{\underline{\sigma}}^i:\frac{\partial h^i}{\partial\underline{\underline{\sigma}}^i} + \underline{\underline{X}}^i:\frac{\partial h^i}{\partial\underline{\underline{X}}^i} + R^i\frac{\partial h^i}{\partial R^i}\right) + R^i\left(\frac{|R^i|}{L}\right)^l + M\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^i)}{M}\right)^{m+1} \geq 0$$

I.4.3. Calcul des multiplicateurs, modèle 2M2C

Pour calculer les multiplicateurs plastiques de chaque mécanisme, on différencie le cas viscoplastique du cas plastique. Si le mécanisme a un comportement viscoplastique, $\dot{\lambda}^i$ est en fait un "pseudo-multiplicateur" obtenu à l'aide d'une fonction puissance :

$$\dot{\lambda}^i = \left(\frac{f^i}{K_i}\right)^{n_i} \text{ si } f^i \geq 0 \qquad [I.86]$$

Par contre, si le mécanisme i est en écoulement plastique, $\dot{\lambda}^i$ est calculé à partir de la condition de cohérence sur chaque mécanisme. Il faut résoudre le système linéaire en $\dot{\lambda}^i$:

$$\dot{f}^i(\dot{\lambda}^i) = 0 \qquad [I.87]$$

On distingue les trois cas cités plus haut pour calculer les deux multiplicateurs inélastiques pour le modèle 2M2C :
(i) pour le modèle 2M2C_VV, les deux "multiplicateurs" s'écrivent explicitement, par exemple à l'aide d'une fonction puissance :

$$\dot{\lambda}^1 = \left(\frac{f^1}{K_1}\right)^{n_1} \text{ si } f^1 \geq 0 \qquad [I.88]$$

$$\dot{\lambda}^2 = \left(\frac{f^2}{K_2}\right)^{n_2} \text{ si } f^2 \geq 0 \qquad [I.89]$$

(ii) pour le modèle 2M2C_PP, les deux multiplicateurs sont la solution d'un système de deux équations à deux inconnues obtenues par les conditions de cohérence locales :

$$\begin{bmatrix} M^{11} & M^{12} \\ M^{21} & M^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^1 \\ \dot{\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^1 \\ Q^2 \end{bmatrix} \qquad [I.90]$$

dans cette expression M^{11}, M^{12}, M^{21} et M^{22} dépendent des variables internes à l'instant t et des paramètres du matériau. Q^1 et Q^2 dépendent du type d'incrément de chargement. Les expressions de ces quantités sont différentes si on est à contrainte imposée ou à déformation imposée. Dans le cas d'un incrément de contrainte, par exemple, et en l'absence d'effet de restauration (en viscoplasticité), les expressions de ces termes se déduisent des deux conditions de cohérence :

$$\frac{\partial f^1}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^1+\frac{\partial f^1}{\partial \underline{\underline{X}}^1}:\dot{\underline{\underline{X}}}^1+\frac{\partial f^1}{\partial R^1}\dot{R}^1=0 \qquad [I.91]$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2}:\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^2+\frac{\partial f^2}{\partial \underline{\underline{X}}^2}:\dot{\underline{\underline{X}}}^2+\frac{\partial f^2}{\partial R^2}\dot{R}^2=0 \qquad [I.92]$$

En remplaçant les différentes variables par leurs valeurs et en mettant ces deux dernières équations sous forme matricielle, on obtient les expressions suivantes des termes recherchés :

$$Q^1=\underline{\underline{n}}^1:\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^1 \qquad [I.93]$$

$$Q^2=\underline{\underline{n}}^2:\dot{\underline{\underline{\sigma}}}^2 \qquad [I.94]$$

$$M^{11}=\frac{2}{3}B_{11}\underline{\underline{n}}^1:\left(\underline{\underline{n}}^1-\frac{3D_1}{2B_{11}}\underline{\underline{X}}^1\right)+Q_{11}\left(1-\frac{b_1}{Q_{11}}R^1\right) \qquad [I.95]$$

$$M^{12}=\frac{2}{3}B_{12}\underline{\underline{n}}^1:(\underline{\underline{n}}^2-\frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^2) \qquad [I.96]$$

$$M^{21}=\frac{2}{3}B_{12}\underline{\underline{n}}^2:(\underline{\underline{n}}^1-\frac{3D_1}{2B_{11}}\varphi(R^2)\underline{\underline{X}}^1) \qquad [I.97]$$

$$M^{22}=\frac{2}{3}B_{22}\underline{\underline{n}}^2:\left(\underline{\underline{n}}^2-\frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^2\right)+Q_{22}\left(1-\frac{b_2}{Q_{22}}R^2\right) \qquad [I.98]$$

Les deux multiplicateurs plastiques sont donc la solution du système [I.90] :

$$\begin{cases}\dot{\lambda}^1=\left\langle\dfrac{Q_1M^{22}-Q_2M^{12}}{M^{11}M^{22}-M^{12}M^{11}}\right\rangle\\ \dot{\lambda}^2=\left\langle\dfrac{Q_2M^{11}-Q_1M^{21}}{M^{11}M^{22}-M^{12}M^{11}}\right\rangle\end{cases} \qquad [I.99]$$

Ces deux expressions sont valables si ces deux derniers multiplicateurs sont strictement positifs. Par contre, si l'un des deux multiplicateurs est nul, le deuxième est recalculé en ne considérant qu'une seule condition de cohérence. Par exemple, si le premier multiplicateur est nul, le deuxième est obtenu par :

$$\dot{\lambda}^2 = \left\langle \frac{Q^2}{M^{22}} \right\rangle \qquad [I.100]$$

(iii) Enfin, pour le modèle 2M2C_VP, on calcule tout d'abord le pseudo-multiplicateur viscoplastique à l'aide d'une fonction puissance :

$$\dot{\lambda}^1 = \left\langle \frac{f^1}{K_1} \right\rangle^{n_1} \qquad [I.101]$$

La condition de cohérence $\dot{f}^2 = 0$ devient, en utilisant les dérivées partielles par rapport aux variables associées du mécanisme 2 :

$$\frac{\partial f^2}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^2 + \frac{\partial f^2}{\partial \underline{\underline{X}}^2} : \dot{\underline{\underline{X}}}^2 + \frac{\partial f^2}{\partial R^2} \dot{R}^2 = 0 \qquad [I.102]$$

Les expressions de Q^2, M^{21} et M^{22} sont les mêmes que celles du modèle 2M2C_VP. Si le terme de couplage n'est pas nul, le multiplicateur plastique sera fonction de l'incrément de contrainte macroscopique et du multiplicateur viscoplastique.

$$\dot{\lambda}^2 = \left\langle \frac{Q^2 - M^{21}\dot{\lambda}^1}{M^{22}} \right\rangle \qquad [I.103]$$

Cette expression montre que le multiplicateur plastique dépend du pseudo-multiplicateur viscoplastique. Cette dépendance permet au mécanisme plastique de se désactiver lors d'un essai de traction à vitesse lente. En traction simple, la vitesse de déformation inélastique pour laquelle se produit la désactivation vaut :

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}^{in} = A_1 \dot{\varepsilon}^1 = A_1 \dot{\lambda}^1 = A_1 \dfrac{Q^2}{M^{21}} \\ \dot{\varepsilon}^2 = 0 \end{cases} \qquad [I.104]$$

I.4.4. Surface limite, modèle 2M2C

Pour simplifier les écritures, on se place dans le cas simple où on néglige les effets de restauration. Un problème se pose quand les deux mécanismes sont plastiques. On rappelle que les deux multiplicateurs plastiques sont obtenus après résolution du système [I.90]. Un cas particulier qui nécessite d'être étudié est celui où les deux mécanismes sont actifs simultanément et où le déterminant $\Delta s=M^{11}M^{22}-M^{12}M^{21}$ est nul. En écrivant que $f^1 = f^2 = 0$, on obtient dans le cas unidimensionnel le système suivant :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1\sigma - n^1R^1 \\ A_2\sigma - n^2R^2 \end{bmatrix} \qquad [I.105]$$

$$\text{avec} \begin{cases} n^1 = \dfrac{\partial f^1}{\partial \sigma} = \text{signe}(A_1\sigma - B_{11}\alpha^1 - B_{12}\alpha^2) \\ n^2 = \dfrac{\partial f^2}{\partial \sigma} = \text{signe}(A_2\sigma - B_{12}\alpha^1 - B_{22}\alpha^2) \end{cases} \qquad [I.106]$$

Ce système ne peut pas être résolu en α^1 et α^2 quand le déterminant $\Delta=B_{11}B_{22}-B_{12}B_{12}$ est nul. Pour lever cette indétermination, on écrit que l'un des deux autres déterminants du système est nul. Ceci conduit à une valeur constante de la contrainte et égale à celle où le deuxième mécanisme commence à s'activer. Cette valeur vaut :

$$\sigma^* = \frac{B_{12}n^1R^1 - B_{11}n^2R^2}{A_1B_{12} - A_2B_{11}} = \frac{B_{22}n^1R^1 - B_{12}n^2R^2}{A_1B_{22} - A_2B_{12}} \qquad [I.107]$$

Le modèle a donc, dans ce cas, un comportement parfaitement plastique : à contrainte imposée, le modèle ne peut admettre une contrainte supérieure à la valeur σ^* alors qu'à déformation imposée, la courbe d'écrouissage devient horizontale dès que le deuxième mécanisme s'active.

L'exploitation directe du système [I.90] aboutit à des résultats de même type. Pour simplifier les calculs, on se place dans le cas où l'écrouissage cinématique est linéaire et où la variable isotrope n'évolue pas. Dans le cas unidimensionnel, le système [I.90] s'écrit, si la contrainte est imposée :

$$\begin{bmatrix} B_{11} & n^1B_{12}n^2 \\ n^1B_{12}n^2 & B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^1 \\ \dot{\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n^1A_1\dot{\sigma} \\ n^2A_2\dot{\sigma} \end{bmatrix} \qquad [I.108]$$

Et dans le cas où la déformation totale est imposée :

$$\begin{bmatrix} 3A_1\mu A_1 + B_{11} & 3A_1\mu A_2 n^1 n^2 + n^1 B_{12} n^2 \\ 3A_1\mu A_2 n^1 n^2 + n^1 B_{12} n^2 & 3A_2\mu A_2 + B_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\lambda}^1 \\ \dot{\lambda}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\mu n^1 A_1 \dot{\varepsilon} \\ 2\mu n^2 A_2 \dot{\varepsilon} \end{bmatrix} \qquad [I.109]$$

où μ est le coefficient de cisaillement de Lame. Les déterminants des systèmes [I.108] et [I.109] sont :

$$\begin{cases} \det(I.108) = \det(I.105) = B_{11}B_{22} - B_{12}B_{12} \\ \det(I.109) = \det(I.108) + 3\mu(A_1{}^2 B_{22} + A_2{}^2 B_{11} - 2A_1A_2B_{12}) \end{cases} \qquad [I.110]$$

Comme on l'a indiqué plus haut, on retrouve, qu'à contrainte imposée, on ne peut plus dépasser σ^*. En effet le système [I.108] montre qu'il est impossible de calculer les deux multiplicateurs plastiques au delà de cette contrainte. Dans le cas où l'on impose la déformation, si la quantité $\Delta s = M^{11}M^{22} - M^{12}M^{21}$ est nulle, on obtient les valeurs suivantes pour les multiplicateurs plastiques :

$$\begin{cases} \dot{\lambda}^1 = K\dot{\varepsilon} \\ \dot{\lambda}^2 = -K\dfrac{B_{11}}{B_{12}}\dot{\varepsilon} \end{cases} \qquad [I.111]$$

avec $$K = \frac{2(A_1B_{22} - A_2B_{12})}{3\mu(A_1{}^2B_{22} + A_2{}^2B_{11} - 2A_1A_2B_{12})} n^1 \qquad [I.112]$$

A déformation imposée, l'incrément de contrainte est nul dès que le deuxième mécanisme s'active. En effet, si on remplace les expressions des deux multiplicateurs plastiques dans le système [I.108] on retrouve que l'incrément de contrainte est nul et donc un comportement parfaitement plastique dès qu'on atteint la valeur de la contrainte limite σ^*.

I.4.5. Modèle nMnC (n mécanismes, n critères)

Ce modèle est une généralisation du modèle 2M2C. Il comporte n mécanismes et n critères différents. Les figures I.9a, I.9b, I.10a et I.10b illustrent les évolutions des déformations inélastiques locales de ces mécanismes lors d'un essai de fatigue cyclique puis lors d'un essai de rochet. Comme pour le modèle 2M2C les n mécanismes peuvent être tous viscoplastiques, tous plastiques ou bien un mélange des deux. Dans cette

étude, on s'est contenté uniquement des deux premiers cas. Si les n mécanismes sont viscoplastiques, les multiplicateurs sont tous calculés à l'aide d'une fonction puissance (équation I.113).

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^e + \underline{\underline{\varepsilon}}^p$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^p = \sum_{i=1}^{N} A_i \underline{\underline{\varepsilon}}^i$$

$$f^i = J_2(A_i \underline{\underline{\sigma}} - \underline{\underline{X}}^i) - R^i - R_{0i}$$

$$\underline{\underline{X}}^i = \sum_{j=1}^{N} B_{ij} \underline{\underline{\alpha}}^j$$

$$R^i = Q_{ii} q^i$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^i = \underline{\underline{n}}^i \dot{\lambda}^i$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^i = \dot{\lambda}^i (\underline{\underline{n}}^i - \frac{3D_i}{2B_{ii}} \underline{\underline{X}}^i)$$

$$q^i = \dot{\lambda}^i (1 - \frac{b_i}{Q_{ii}} R^i)$$

Tableau I.14 : Modèle nMnC.

$$\dot{\lambda}^i = \left(\frac{f^i}{K_i} \right)^{n_i} \text{ si } f^i \geq 0 \qquad \text{[I.113]}$$

Par contre si les multiplicateurs sont plastiques, les multiplicateurs sont issus de la résolution d'un système d'équations. En pratique il s'agit, d'un processus itératif car on peut, *a posteriori*, obtenir des multiplicateurs négatifs alors que leurs critères sont vérifiés *a priori*. Il est bien évident que la taille de ce système d'équations change au cours des itérations. La "convergence" de cette résolution est obtenue quand chaque critère réputé actif produit un multiplicateur positif après résolution du système indiqué sur le tableau I.15. La règle concernant les comportements en rochet dégagée pour le modèle de Zarka est également applicable pour le modèle nMnC. En effet, le cas où la matrice M est régulière conduit à un écrouissage non nul (figure I.9c) et donc un rochet qui s'arrête. Par contre lorsque cette matrice est singulière on obtient une courbe d'écrouissage saturée (figure I.10c) et un rochet continu (figure I.10d).

$$M^{ij} \dot{\lambda}^i = Q^j$$

$$M^{ij} = \frac{2}{3} \underline{\underline{n}}^i B_{ij} : (\underline{\underline{n}}^j - \frac{3D_j}{2B_{jj}} \underline{\underline{X}}^j) + \delta_{ij} Q_{ii} (1 - R^i \frac{b_i}{Q_{ii}})$$

remarque : dans cette expression M^{ij} est une composante de la matrice, il n'y donc pas de sommation.

Tableau I.15 : Modèle nMnC.

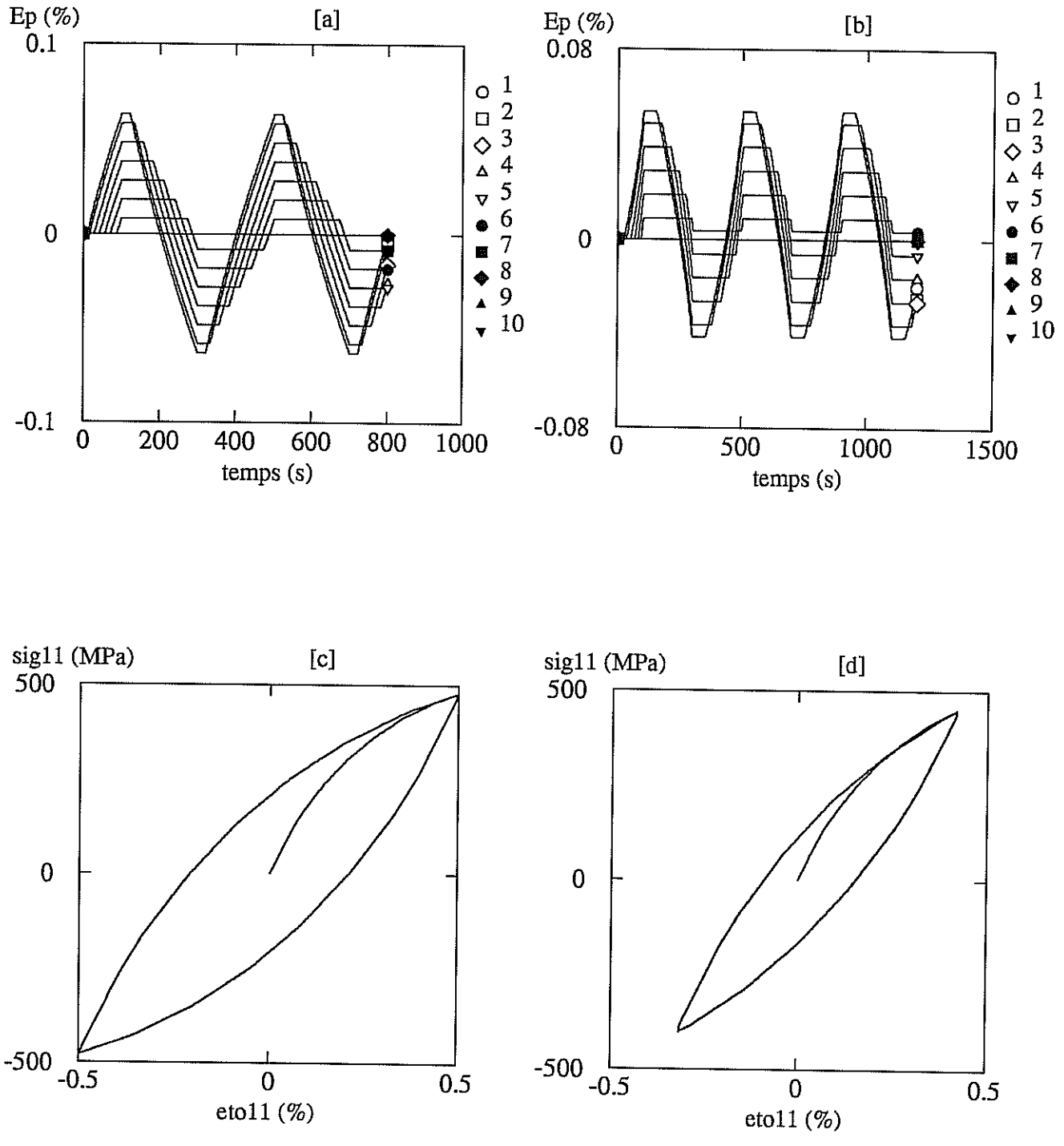


Figure I.9 : Comportement du modèle 10M10C, accommodation immédiate.

[a] Traction-compression symétrique, évolution des déformations inélastiques locales.

[b] Rochet uniaxial, évolution des déformations inélastiques locales.

[c] Traction-compression symétrique, boucle contrainte-déformation.

[d] Rochet uniaxial, boucle contrainte-déformation.

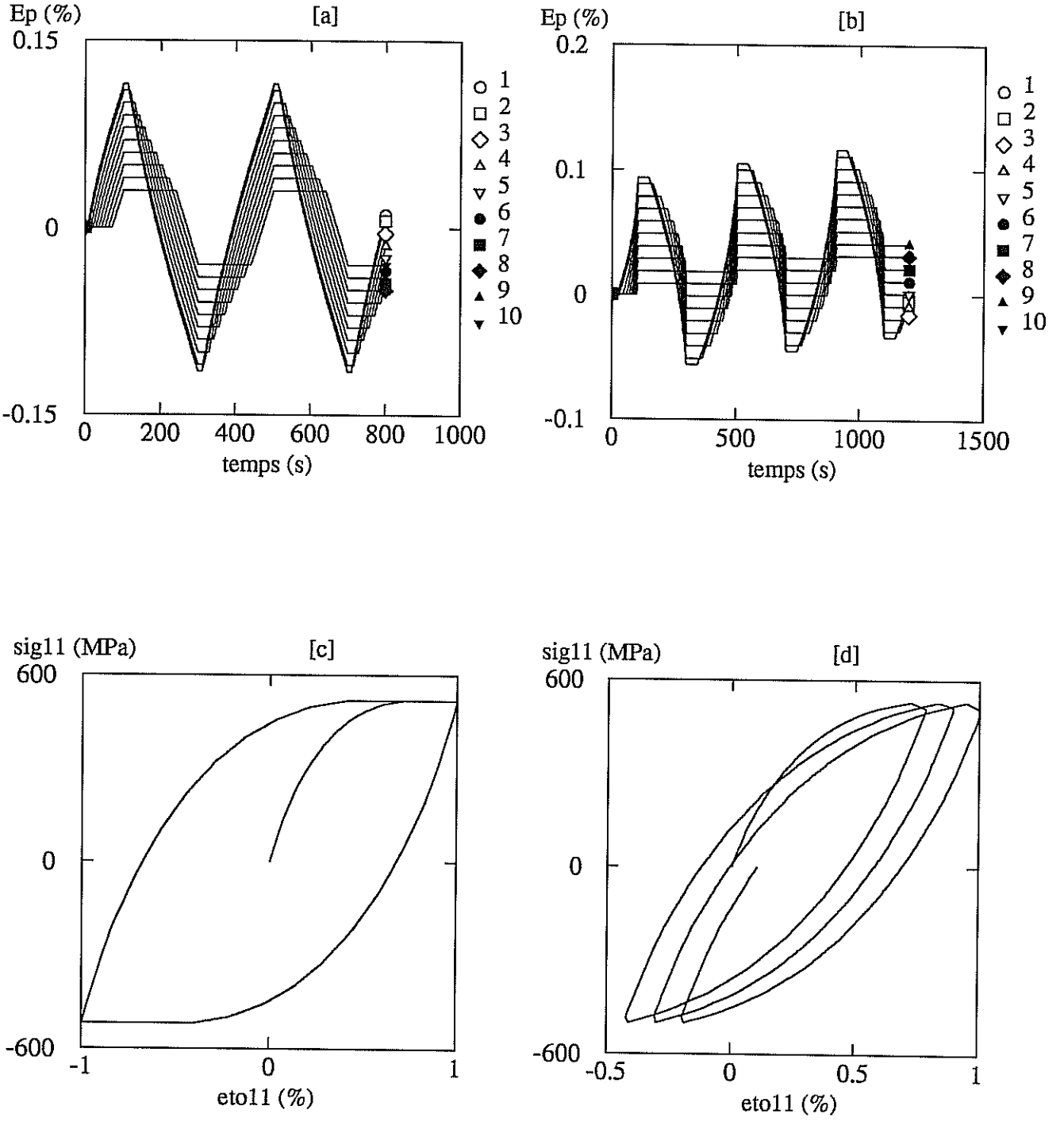


Figure I.10 : Comportement du modèle 10M10C, rochet.

[a] Traction-compression symétrique, évolution des déformations inélastiques locales.

[b] Rochet uniaxial, évolution des déformations inélastiques locales.

[c] Traction-compression symétrique, boucle contrainte-déformation.

[d] Rochet uniaxial, boucle contrainte-déformation.

I.5. Exposé du modèle 2M1C

I.5.1. Lois d'état

Dans le deuxième modèle de cette étude, on suppose qu'il y a un seul critère de plasticité pour les deux mécanismes. Cela impose évidemment que les différents mécanismes sont tous activés ou désactivés simultanément. Dans la suite, on appellera ce modèle 2M1C (2 mécanismes, 1 critère). Mis à part l'écrouissage isotrope, les variables thermodynamiques sont les mêmes que celles du modèle 2M2C.

Variables d'état		Variables associées
Variables observables	Variables internes	
$\underline{\underline{\varepsilon}}$		$\underline{\underline{\sigma}}$
	$\underline{\underline{\varepsilon}}^1$	$-\underline{\underline{\sigma}}^1$
	$\underline{\underline{\varepsilon}}^2$	$-\underline{\underline{\sigma}}^2$
	$\underline{\underline{\alpha}}^1$	$\underline{\underline{X}}^1$
	$\underline{\underline{\alpha}}^2$	$\underline{\underline{X}}^2$
	q	R

Tableau I.16 : Variables thermodynamiques, modèle 2M1C.

Les parties élastique et inélastique de l'énergie libre sont découplées comme pour le modèle 2M2C. Le terme élastique s'écrit d'une façon identique, ce qui conduit aux mêmes définitions pour $\underline{\underline{\sigma}}^1$ et $\underline{\underline{\sigma}}^2$.

$$\rho\Psi = \rho\Psi_e + \rho\Psi_{in} \qquad [I.114]$$

$$\rho\Psi_e = \frac{1}{2}(\underline{\underline{\varepsilon}} - A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^2):\underline{\underline{\underline{\underline{D}}}}:(\underline{\underline{\varepsilon}} - A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^2) \qquad [I.115]$$

Pour l'énergie libre inélastique, on considère une forme similaire à celle du modèle 2M2C, mais en ne considérant qu'une seule variable isotrope. D'autre part, on autorisera la matrice d'écrouissage cinématique à dépendre de la variable isotrope q.

$$\rho\Psi_{in} = \frac{1}{3}{}^t\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}(q) & B_{12}(q)\\ B_{12}(q) & B_{22}(q)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}Q_{11}(q)^2 \qquad [I.116]$$

avec $$B_{ij}(q) = B_{ij}^{\infty} + k(1-bq) \text{ et } B_{11}^{\infty}B_{22}^{\infty} - B_{12}^{\infty}B_{12}^{\infty} = 0 \qquad [I.117]$$

L'écriture des variables associées de l'écrouissage cinématique ainsi que celle des contraintes locales se font de la même façon que le modèle 2M2C :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}^1 \\ \underline{\underline{X}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^1} \\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^2} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) \\ B_{12}(q) & B_{22}(q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix} \qquad [I.118]$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^1 \\ \underline{\underline{\sigma}}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^1} \\ -\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\underline{\underline{\sigma}} \\ A_2\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix} \qquad [I.119]$$

Par contre, la variable associée à l'écrouissage isotrope dépend de la variable interne isotrope, mais aussi du carré de la somme des deux variables internes cinématiques. Cette dernière est composée d'une partie "purement isotrope", Qq, et d'une partie très faible devant Qq et dont le signe ne dépend que de celui du paramètre k :

$$R = Qq - \frac{1}{3}k\,b(\underline{\underline{\alpha}}^1 + \underline{\underline{\alpha}}^2):(\underline{\underline{\alpha}}^1 + \underline{\underline{\alpha}}^2) \qquad [I.120]$$

I.5.2. Lois complémentaires

Dans le cas du modèle 2M1C, on combine les contraintes sur les mécanismes pour construire la fonction d'écrouissage et la fonction de charge :

$$f = g = \sqrt{J_2(\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{X}}^1)^2 + J_2(\underline{\underline{\sigma}}^2 - \underline{\underline{X}}^2)^2} - R - R_0 \qquad [I.121a]$$

$$h = f + \frac{3D_1}{4B_{11}}\underline{\underline{X}}^1:\underline{\underline{X}}^1 + \frac{3D_2}{4B_{22}}\underline{\underline{X}}^2:\underline{\underline{X}}^2 + \frac{b}{2Q}(R)^2 \qquad [I.121b]$$

Maintenant qu'on a choisi la forme de la fonction d'écrouissage, on peut en déduire les expressions des variables associées et des lois d'évolution.

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 = -\dot{\lambda}\frac{\partial h}{\partial\underline{\underline{X}}^1} = \dot{\lambda}(\underline{\underline{n}}^1 - \frac{3D_1}{2B_{11}}\underline{\underline{X}}^1) \qquad [I.122]$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 = -\dot{\lambda}\frac{\partial h}{\partial\underline{\underline{X}}^2} = \dot{\lambda}(\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^2) \qquad [I.123]$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^1 = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} = \dot{\lambda}\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} = \dot{\lambda}\underline{\underline{n}}^1 \qquad [I.124]$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^2 = \dot{\lambda}\frac{\partial g}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} = \dot{\lambda}\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} = \dot{\lambda}\underline{\underline{n}}^2 \qquad [I.125]$$

$$\dot{q} = -\dot{\lambda}\frac{\partial h}{\partial R} = \dot{\lambda}\left(1 - \frac{b}{Q}R\right) \qquad [I.126]$$

Les 11 paramètres qui interviennent dans ce modèle, outre les deux constantes élastiques E et ν, sont résumés dans le tableau I.17.

A_1, B_{11}, D_1 A_2, B_{22}, D_2,
R_0, b, Q, B_{12}, n, K, m, M, l, L

Tableau I.17 : paramètres matériau du modèles 2M1C.

A_1, A_2 : coefficients de localisation,

R_0, b, Q : coefficients d'écrouissage isotrope,

B_{11}, D_1, B_{22}, D_2, B_{12} : coefficients d'écrouissage cinématique,

m, M, l, L : coefficients de restauration,

n, K : coefficients de viscosité.

Par ailleurs, on introduit dans les variables d'écrouissage cinématique et isotrope la notion de restauration par le temps. Le tableau I.18 illustre les équations qui sont implantées dans le module d'intégration d'équations différentielles du logiciel Sidolo (Pilvin, 1988). Ce dernier a servi à faire toutes les simulations et les identifications de ce travail. Il convient maintenant de calculer la dissipation intrinsèque (mécanique) de l'équation [I.59]. Celle ci vaut : : $\Phi = \underline{\underline{\sigma}}:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in} - \underline{\underline{X}}^1:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 - \underline{\underline{X}}^2:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 - R\dot{q}$, ou encore :

$$\Phi = \underline{\underline{\sigma}}^1:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^1 + \underline{\underline{\sigma}}^2:\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^2 - \underline{\underline{X}}^1:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 - \underline{\underline{X}}^2:\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 - R\dot{q} = \Phi\left(\dot{\lambda}\right) + \Phi(t)$$

Cette dissipation qui doit être positive se décompose en une partie qui dépend de la vitesse de déformation et d'une deuxième partie qui ne dépend que du temps :

$$\Phi\left(\dot{\lambda}\right) = \dot{\lambda}\left(\underline{\underline{\sigma}}^1:\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} + \underline{\underline{\sigma}}^2:\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} + \underline{\underline{X}}^1:\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{X}}^1} + \underline{\underline{X}}^2:\frac{\partial h}{\partial \underline{\underline{X}}^2} + R\frac{\partial h}{\partial R}\right) \geq 0$$

$$\Phi(t) = M\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^1)}{M}\right)^{m+1} + M\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^2)}{M}\right)^{m+1} + R\left(\frac{|R|}{L}\right)^l \geq 0$$

partition de la déformation

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\varepsilon}}^{e} + A_1\underline{\underline{\varepsilon}}^{1} + A_2\underline{\underline{\varepsilon}}^{2}$$

fonction de charge

$$f = \sqrt{J_2(\underline{\underline{\sigma}}^{1} - \underline{\underline{X}}^{1})^2 + J_2(\underline{\underline{\sigma}}^{2} - \underline{\underline{X}}^{2})^2} - R - R_0$$

variables associées

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\sigma}}^{1} \\ \underline{\underline{\sigma}}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^{1}} \\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\varepsilon}}^{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\underline{\underline{\sigma}} \\ A_2\underline{\underline{\sigma}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}^{1} \\ \underline{\underline{X}}^{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^{1}} \\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^{2}} \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} B_{11}(q) & B_{12}(q) \\ B_{12}(q) & B_{22}(q) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^{1} \\ \underline{\underline{\alpha}}^{2} \end{pmatrix}$$

$$B_{ij}(q) = B_{ij}^{\infty} + k(1 - bq) \qquad \text{et} \qquad B_{11}^{\infty}B_{22}^{\infty} - B_{12}^{\infty}B_{12}^{\infty} = 0$$

$$R = Qq - \frac{1}{3}kb(\underline{\underline{\alpha}}^{1} + \underline{\underline{\alpha}}^{2}):(\underline{\underline{\alpha}}^{1} + \underline{\underline{\alpha}}^{2})$$

lois d'évolution

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{1} = \dot{\lambda}\underline{\underline{n}}^{1}$$

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{2} = \dot{\lambda}\underline{\underline{n}}^{2}$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{1} = \dot{\lambda}(\underline{\underline{n}}^{1} - \frac{3D_1}{2B_{11}}\underline{\underline{X}}^{1}) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^{1})}{M}\right)^{m}\frac{\underline{\underline{X}}^{1}}{J_2(\underline{\underline{X}}^{1})}$$

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^{2} = \dot{\lambda}(\underline{\underline{n}}^{2} - \frac{3D_2}{2B_{22}}\underline{\underline{X}}^{2}) - \frac{3}{2}\left(\frac{J_2(\underline{\underline{X}}^{2})}{M}\right)^{m}\frac{\underline{\underline{X}}^{2}}{J_2(\underline{\underline{X}}^{2})}$$

$$\dot{q} = \dot{\lambda}(1 - \frac{b}{Q}R) - \left(\frac{|R|}{L}\right)^{l}$$

Tableau I.18: Equations du modèles 2M1C.

I.5.4. Calcul du multiplicateur plastique, modèle 2M1C

Les deux mécanismes du modèle 2M1C sont de même nature. Il n' y a donc qu'un seul type d'écoulement viscoplastique (modèle 2M1C_V) ou plastique (modèle 2M1C_P). Dans le premier cas, le multiplicateur viscoplastique est simplement obtenu par une loi puissance :

$$\dot{\lambda} = \left\langle\frac{f}{K}\right\rangle^{n} \qquad [I.127]$$

Pour le modèle 2M1C_P, le multiplicateur plastique est obtenu à l'aide de la condition de cohérence $\dot{f} = 0$. Le développement de cette dernière conduit à :

$$\frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^1} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{\sigma}}^2} : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^2 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}^1} : \dot{\underline{\underline{X}}}^1 + \frac{\partial f}{\partial \underline{\underline{X}}^2} : \dot{\underline{\underline{X}}}^2 + \frac{\partial f}{\partial R} : \dot{R} = 0 \qquad [I.128]$$

En remplaçant dans cette équation les variables associées par leurs valeurs données par les lois d'état et les dérivées des variables internes données par les lois d'évolution, on obtient l'expression suivante pour le multiplicateur plastique :

$$\dot{\lambda} = \left\langle \frac{\underline{\underline{n}}^1 : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^1 + \underline{\underline{n}}^2 : \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^2}{h} \right\rangle \qquad [I.129]$$

où le module plastique, h, est donné par :

$$\begin{aligned} h = &\left(1 - \frac{bR}{Q}\right)\left[Q - \frac{2}{3} kb\left(\underline{\underline{\alpha}}^1 + \underline{\underline{\alpha}}^2\right)\left(2\underline{\underline{n}}^1 + 2\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3}{2}\frac{D_1}{B_{11}}\underline{\underline{X}}^1 - \frac{3}{2}\frac{D_2}{B_{22}}\underline{\underline{X}}^2\right)\right] \\ &+ \frac{2}{3}\left(\underline{\underline{n}}^1 - \frac{3}{2}\frac{D_1}{B_{11}}\underline{\underline{X}}^1\right)\left(B_{11}\underline{\underline{n}}^1 + B_{12}\underline{\underline{n}}^2\right) + \frac{2}{3}\left(\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3}{2}\frac{D_2}{B_{22}}\underline{\underline{X}}^2\right)\left(B_{12}\underline{\underline{n}}^1 + B_{22}\underline{\underline{n}}^2\right) \end{aligned} \qquad [I.130]$$

I.5.5. Surface limite, modèle 2M1C

Comme dans le paragraphe I.4.4, on se limite au cas unidimensionnel. La fonction de charge f s'écrit, en fonction des contraintes effectives s^1 et s^2 de la façon suivante :

$$f = \sqrt{(s^1)^2 + (s^2)^2} - R = 0 \qquad [I.131]$$

avec : $$s^1 = A_1\sigma - B_{11}\alpha^1 - B_{12}\alpha^2 \qquad [I.132]$$

et : $$s^2 = A_2\sigma - B_{12}\alpha^1 - B_{22}\alpha^2 \qquad [I.133]$$

Dans l'espace des contraintes effectives (s^1, s^2) cette fonction de charge se matérialise par le cercle C d'équation : $(s^1)^2 + (s^2)^2 - R^2 = 0$ (figure I.11).

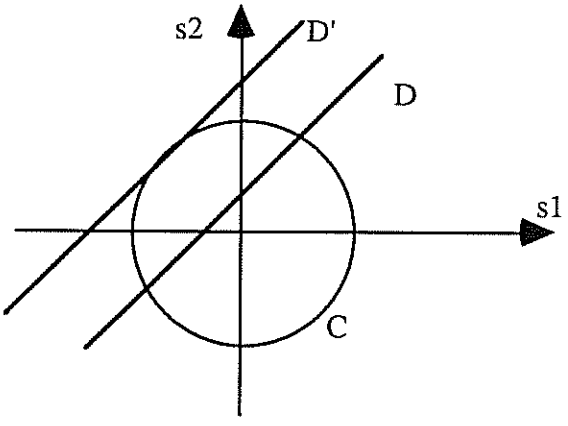


Figure I.11 : Existence de surface limite dans le modèle 2M1C.

Dans un premier temps, on va démontrer que la condition qui gouverne l'existence de surface limite pour le modèle 2M1C est strictement identique à celle qui gouverne l'existence de surface limite pour le modèle 2M2C. En effet les équations [I.131, I.132 et I.133] deviennent, si on se place dans l'espace des variables internes cinématiques, (α^1,α^2). :

$$(A_1\sigma - B_{11}\alpha^1 - B_{12}\alpha^2)^2 + (A_2\sigma - B_{12}\alpha^1 - B_{22}\alpha^2)^2 - R^2 = 0 \qquad [I.134]$$

Cette courbe est une conique. L'étude de son équation caractéristique aboutit au discriminant suivant :

$$\text{discriminant} = -(B_{11}B_{22} - B_{12}B_{12})^2 \qquad [I.135]$$

On distingue alors le cas où ce discriminant est nul et le cas où il est strictement négatif. Si ce discriminant est nul les deux contraintes effectives appartiennent à la droite D d'équation : $B_{12}(A_1\sigma - s^1) = B_{11}(A_2\sigma - s^2)$. Le couple (s^1, s^2) est alors obtenu aux points d'intersection de la droite D et du cercle C. La droite D balaye le cercle C jusqu'à un point limite où elle devient confondue avec D'. La première conclusion qu'on peut alors tirer est la suivante :

$$B_{11}B_{22} - (B_{12})^2 = 0 \quad \Rightarrow \text{le modèle admet une surface limite} \qquad [I.136]$$

Maintenant qu'on a démontré que la quantité $B_{11}B_{22}$-$B_{12}B_{12}$ gouverne la notion de surface limite, on va évaluer la valeur de cette contrainte limite dans le cas où elle

existe. On va également montrer que le cas qui correspond à un discriminant non nul ne nécessite aucune restriction, dans le sens où il n'y pas de conditions à poser sur les coefficients.

(i) $\mathbf{B_{11}B_{22}-(B_{12})^2=0}$: dans ce cas, la conique se réduit à deux droites parallèles. En effet, on peut "ramener" la conique dans ses axes en posant : $x=\alpha^1+\frac{B_{12}}{B_{11}}\alpha^2$. L'équation de la conique est alors donnée par :

$$(B_{11}{}^2+B_{12}{}^2)x^2-2\sigma(A_1B_{11}+A_2B_{12})x+(A_1{}^2+A_2{}^2)\sigma^2-R^2=0. \qquad [I.137]$$

La contrainte limite est obtenue en écrivant que cette équation de second degré en x admet au moins une solution. Cela revient à écrire que le déterminant de cette équation est positif ou nul. D'où l'expression de la contrainte limite recherchée :

$$\Delta\geq 0\Rightarrow\sigma^*=\pm\frac{\sqrt{B_{11}{}^2+B_{12}{}^2}}{|A_1B_{12}-A_2B_{11}|}=\pm\frac{\sqrt{B_{12}{}^2+B_{22}{}^2}}{|A_1B_{22}-A_2B_{12}|} \qquad [I.138]$$

(ii) $\mathbf{B_{11}B_{22}-B_{12}B_{12}\neq 0}$: dans ce cas la conique est une ellipse d'équation :

$$\left(\alpha^1+c_1\alpha^2+c_2\right)^2+\left(\alpha^2+c_3\right)^2=\frac{R^2}{(B_{11}{}^2+B_{12}{}^2)} \qquad [I.139]$$

$$\text{avec}\begin{cases} c_1=\dfrac{B_{12}(B_{11}+B_{22})}{B_{11}{}^2+B_{12}{}^2} \\ c_2=-\sigma\dfrac{A_1B_{11}+A_2B_{12}}{B_{11}{}^2+B_{12}{}^2} \\ c_3=\sigma\dfrac{A_1B_{12}-A_2B_{11}}{B_{11}B_{22}-B_{12}B_{12}} \end{cases} \qquad [I.140]$$

Toutes les quantités sont parfaitement définies; il n'y a aucune indétermination à lever. On en conclut que, dans ce cas, il n'existe pas de surface limite. Par ailleurs, il est important de noter que chaque conique décrite plut haut est obtenue pour une contrainte donnée. Il faut alors imaginer qu'au cours du chargement les variables α^1 et α^2 se déplacent sur ces coniques en suivant leurs mouvements.

$A_1=A_2=1$, $B_{11}=50000$
$B_{22}=200000$, $B_{12}=100000$
$R_0=500$, $D_1=D_2,=0$

Tableau I.19 : Discriminant nul.

$A_1=A_2=1$, $B_{11}=50000$
$B_{22}=200000$, $B_{12}=10000$
$R_0=500$, $D_1=D_2,=0$

Tableau I.20 : Discriminant non nul.

La figure I.12a montre, pour un discriminant nul, les deux droites sur lesquelles doivent se trouver α^1 et α^2 quand la contrainte vaut 600 MPa. Les paramètres qui ont permis de tracer ces courbes sont donnés dans le tableau I.19. La position exacte de α^1 et α^2 dépend, comme on l'a précisé, de l'histoire du chargement. On a également tracé la même courbe en utilisant un discriminant non nul. Les paramètres utilisés sont donnés dans le tableau I.20.

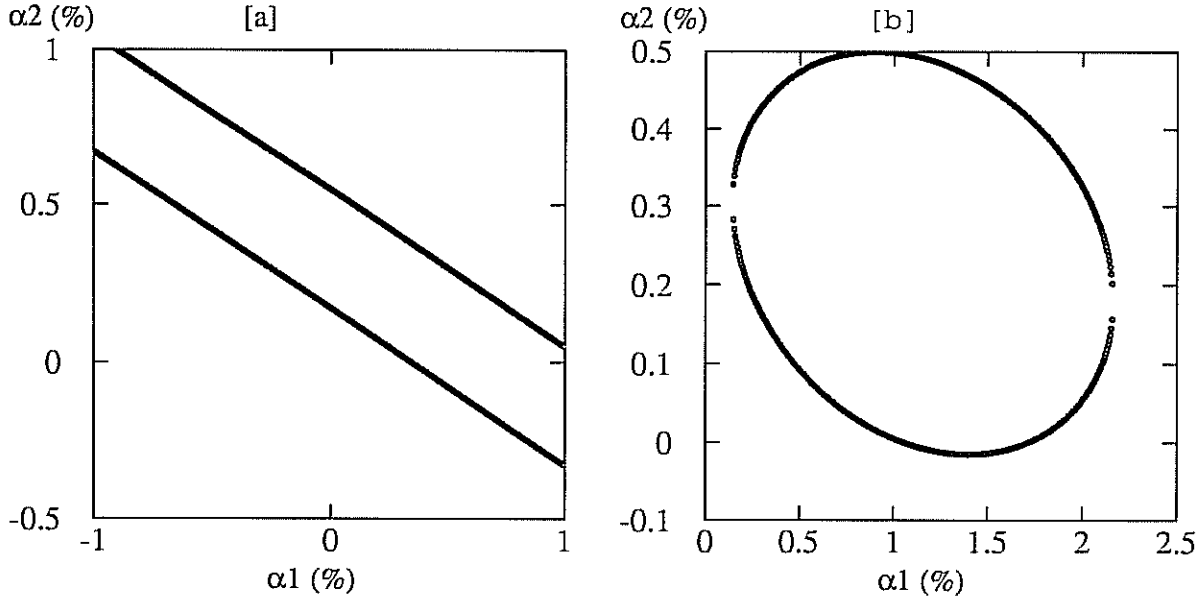


Figure I.12 : Forme de la conique dans l'espace des variables cinématiques.

[a] discriminant nul.

[b] discriminant non nul.

I.6. Analogies avec d'autres modèles, discussions

Dans le cas où les deux mécanismes sont hétérogènes, le modèle 2M2C_VP se réduit au modèle ddi si les coefficients A_1 et A_2 sont pris égaux à 1 et si on ne tient pas compte du couplage entre l'écrouissage cinématique et l'écrouissage isotrope. En effet, l'étape de localisation de la contrainte dans le modèle ci-présent n'est pas autre chose que le calcul de la contrainte effective (différence entre la contrainte appliquée et la contrainte interne). Dans le modèle ddi, la contrainte interne est explicitée. Une deuxième différence provient du fait que dans le modèle ddi d'origine les contraintes internes "locales" sont à nouveau décomposées, alors qu'on s'est contenté dans notre cas d'une seule contrainte interne par mécanisme.

Les modèles 2M2C peuvent se réduire au modèle macroscopique de Chaboche. Pour cela il suffit d'annuler un coefficient de "localisation" (A_2 par exemple) pour que le mécanisme qui reste activé (mécanisme 1) s'identifie totalement avec le modèle de Chaboche aussi bien dans le cas plastique que dans le cas viscoplastique.

Par ailleurs, si on considère le modèle 2M1C avec des règles d'écrouissage cinématique linéaires, et si la matrice d'interaction d'écrouissage cinématique est supposée constante, on retrouve un modèle de type Zarka. Cette correspondance sera exploitée lors de l'analyse du comportement du modèle vis-à-vis de l'accumulation de la déformation progressive (rochet).

Il existe également des éléments d'analogie entre le modèle nMnC et le modèle micromécanique de Cailletaud. Pour simplifier les écritures on se limitera à la comparaison entre le modèle 2M2C et le modèle micromécanique. Si on simplifie ce dernier en ne prenant qu'un seul système de glissement par grain, on peut alors identifier les mécanismes fictifs de cette approche avec les grains d'un polycristal décrit dans le modèle micromécanique décrit dans le paragraphe I.2.9 Supposons alors un polycristal avec deux grains et un seul système par grain, ce qui est bien sûr irréaliste pour le modèle micromécanique car ce nombre de systèmes ne correspond à aucune structure cristallographique réelle. On affecte le numéro 1 au système du premier grain et 2 au système du deuxième grain. Avec ces notations les expressions des deux fonctions de charge sont données par :

$$\begin{cases} f^1 = \left|\tau^1 - x^1\right| - r^1 - r_0 = \left|\underline{\underline{m}}_1 : \underline{\underline{\sigma}}^1 - C\alpha^1\right| - r^1 - r_0 \\ f^2 = \left|\tau^2 - x^2\right| - r^2 - r_0 = \left|\underline{\underline{m}}_2 : \underline{\underline{\sigma}}^2 - C\alpha^2\right| - r^2 - r_0 \end{cases} \qquad [I.141]$$

Si on utilise les expressions des deux contraintes locales en remplaçant les produits $\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_1$ et $\underline{\underline{m}}_2:\underline{\underline{m}}_2$ par leur valeur qui vaut 0.5, on obtient :

$$\begin{cases} f^1 = \left| \underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{\sigma}} - \frac{1}{4}A\gamma^1 + \frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2\gamma^2 - C\alpha^1 \right| - r^1 - r_0 \\ f^2 = \left| \underline{\underline{m}}_2:\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_2:\underline{\underline{m}}_1\gamma^1 - \frac{1}{4}A\gamma^2 - C\alpha^2 \right| - r^2 - r_0 \end{cases} \qquad [I.142]$$

Cette expression montre que le modèle micromécanique généralise deux classes de modèles. En effet, on a vu dans le paragraphe I.2 que le modèle de Zarka explicite les contraintes internes (X^i) en fonction des déformations inélastiques locales (γ^i). Par contre, les approches de Chaboche (1977), d'Ohno (1982), d'Ohno et Wang (1991, 1992), de Contesti et Cailletaud (1989) ainsi que le présent modèle expriment ces contraintes internes en fonction des variables internes cinématiques (α^i) qui sont différentes des déformations inélastiques si l'écrouissage est supposé être non linéaire. On s'intéresse donc à deux cas particuliers du modèle micromécanique. On considère dans un premier temps que l'écrouissage cinématique au niveau du système de glissement est linéaire (d=0). Dans ce cas les deux fonctions de charge deviennent.

$$\begin{aligned} f^1 &= \left| \underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{\sigma}} - \left(\frac{A}{4} - C\right)\gamma^1 + \frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2\gamma^2 \right| - r^1 - r_0 \\ f^2 &= \left| \underline{\underline{m}}_2:\underline{\underline{\sigma}} + \frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2\gamma^1 - \left(\frac{A}{4} - C\right)\gamma^2 \right| - r^2 - r_0 \end{aligned} \qquad [I.143]$$

Dans ce cas, le vecteur des contraintes internes s'écrit sous la forme :

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(\frac{A}{4} - C\right) & -\frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2 \\ -\frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2 & \left(\frac{A}{4} - C\right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\gamma}^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} \qquad [I.144]$$

La matrice d'écrouissage ainsi obtenue est, sauf cas très particulier, régulière, ce qui rejoint les discussions précédentes sur le comportement du rochet (cf. paragraphe I.2). On peut ainsi dresser le tableau d'équivalence (I.21) entre le modèle 2M2C et le modèle micromécanique, dans le cas uniaxial et dans le cas où l'écrouissage cinématique est linéaire.

Modèle micromécanique	Modèle 2M2C
$\left(\underline{\underline{m}}_1\right)_{11}$	A_1
$\left(\underline{\underline{m}}_2\right)_{11}$	A_2
$0.25A-C$	B_{11}
$0.25A-C$	B_{22}
$-0.5A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2$	B_{12}
b	$b^1=b^2$
Q	$Q^{11}=Q^{22}$
r_0	$R_{01}=R_{02}$
τ_1	$\left(\underline{\underline{\sigma}}^1\right)_{11}$
τ_2	$\left(\underline{\underline{\sigma}}^2\right)_{11}$
$X_1^{(*)}$	$\left(\underline{\underline{X}}^1\right)_{11}$
$X_2^{(*)}$	$\left(\underline{\underline{X}}^2\right)_{11}$
r^1	R^1
r^2	R^2
$\alpha^1=\gamma^1$	$\left(\underline{\underline{\alpha}}^1\right)_{11}=\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^1\right)_{11}$
$\alpha^2=\gamma^2$	$\left(\underline{\underline{\alpha}}^2\right)_{11}=\left(\underline{\underline{\varepsilon}}^2\right)_{11}$

Tableau I.21 : Equivalence entre le modèle 2M2C et le modèle micromécanique.

Le deuxième cas permettant d'établir une comparaison entre les deux modèles est celui où le module d'écrouissage intragranulaire devient nul (C=0). Même dans ce cas, le modèle micromécanique produit des contraintes internes qui sont dues aux incompatibilités des déformations plastiques :

$$\begin{pmatrix} X^1 \\ X^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A}{4} & -\frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2 \\ -\frac{1}{2}A\underline{\underline{m}}_1:\underline{\underline{m}}_2 & \frac{A}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^1 \\ \gamma^2 \end{pmatrix} \qquad [I.145]$$

La matrice est en général régulière si les grains 1 et 2 sont distincts.

I.7. Réponses typiques du modèle 2M2C

I.7.1. Effet de vitesse "inverse"

L'influence de la vitesse de chargement (déformation ou contrainte) est observée pour les matériaux de nature viscoplastique dont le comportement dépend d'une façon marquée du temps. Les essais d'écrouissage faits sur ce type de matériaux montrent que, pour la plupart d'entre eux, plus la vitesse est élevée et plus la contrainte atteinte pour une même déformation est élevée. Néanmoins, certains matériaux, comme les aciers inoxydables austénitiques, présentent dans certains domaines de température une sensibilité inverse à la vitesse généralement liée à l'effet Portevin-Le Chatelier (Blanc, Strudel, 1987). En effet, plus celle ci est élevée et plus la contrainte atteinte pour une même déformation est faible. Le modèle 2M2C_VP préserve une qualité du modèle ddi qui est de pouvoir décrire aussi bien cet "effet de vitesse inverse" que la sensibilité normale à la vitesse. Pour illustrer ce phénomène, on a simulé deux essais, à vitesse lente (10^{-6} s^{-1}) et à vitesse rapide (10^{-3} s^{-1}). Chacun de ces deux essais est simulé avec deux jeux de coefficients différents (tableau I.22). On considère deux mécanismes hétérogènes du modèle 2M2C avec deux variables isotropes constantes. L'indice 1 correspond au mécanisme viscoplastique alors que l'indice 2 concerne le mécanisme plastique.

$A_1=A_2=1$, E=200000, n=7.2, K=700,
$D_2=100$, $R_{01}=0$, $R_{02}=140$, $B_{12}=40000$, $B_{22}=10000$

Tableau I.22 : Coefficients qui distinguent les deux comportements.
jeu A : $B_{11}=20000$;$D_1=200$, jeu B : $B_{11}=100000$;$D_1=400$.
(unités : mm, s, MPa).

Le jeu A est celui qui décrit une sensibilité normale à la vitesse (figure I.13a) alors que le jeu B permet d'observer un effet inverse de la vitesse (figure I.13b). Le paramètre qui gouverne la sensibilité à la vitesse est la valeur relative du coefficient de couplage B_{12} par rapport aux deux autres coefficients de la matrice de l'écrouissage isotrope, B_{11} et B_{22}. La simulation de l'essai rapide avec les jeux A et B donne exactement la même réponse. En ce qui concerne l'essai lent, on remarque que, pour les deux jeux de coefficients, l'écoulement initial est purement plastique. Par la suite, le jeu B permet d'établir un régime plastique+viscoplastique alors que la déformation inélastique trouvée avec le jeu A reste purement plastique. Cette conséquence se répercute sur les variables d'écrouissage cinématique. En effet, comme on peut le voir sur la figure I.13c,

la contrainte interne viscoplastique est plus importante pour le jeu B et plus grande que la contrainte interne plastique.

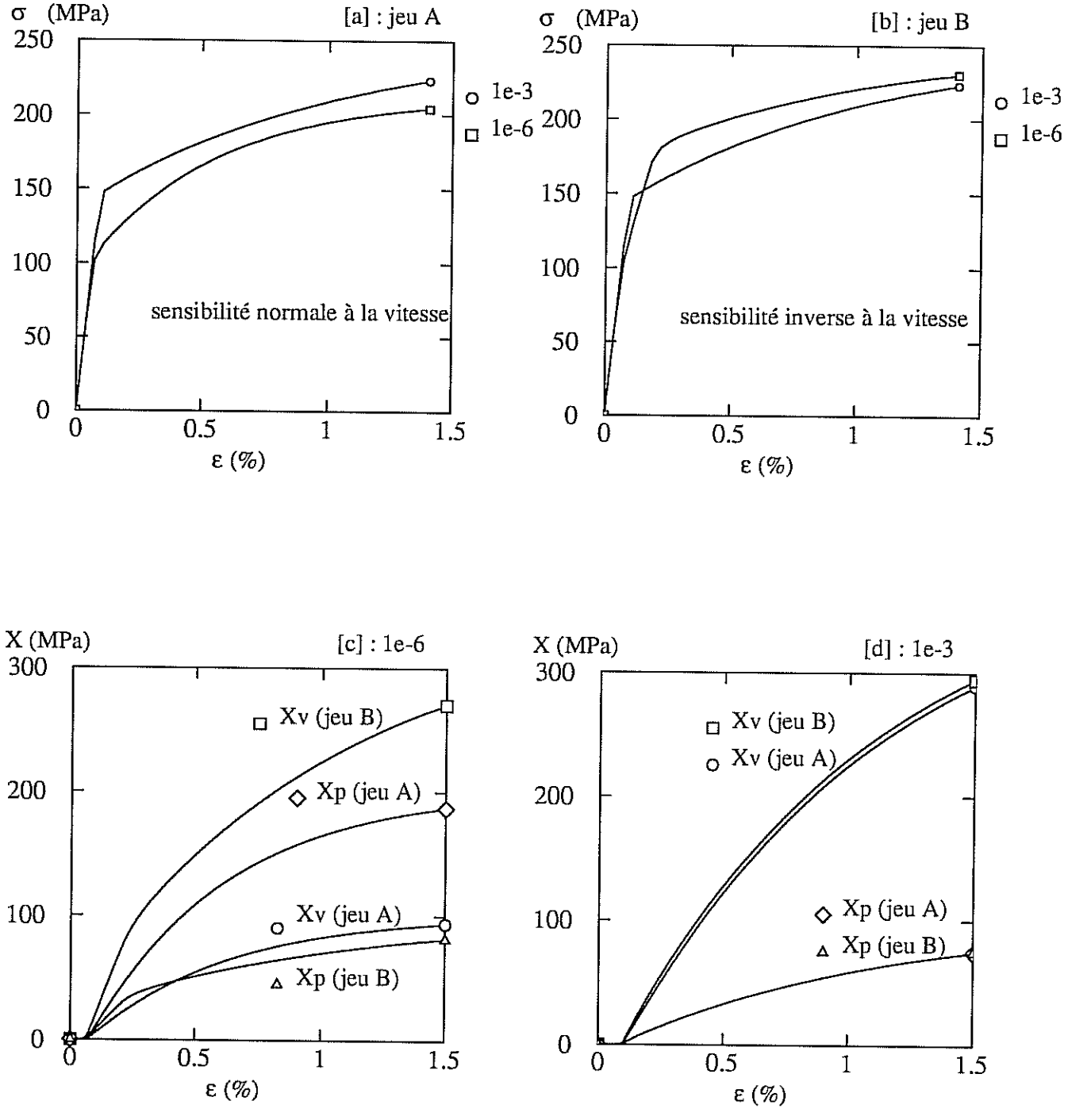


Figure I.13 : Effet de vitesse.

[a] Courbes d'écrouissage, sensibilité normale à la vitesse.

[b] Courbes d'écrouissage, sensibilité inverse à la vitesse.

[c] Variables d'écrouissage cinématique, vitesse lente.

[d] Variables d'écrouissage cinématique, vitesse rapide.

I.7.2. Interaction plasticité-fluage

Une des caractéristiques essentielles du modèle 2M2C est le couplage entre les deux variables associées de l'écrouissage cinématique. Une des conséquences sur le modèle 2M2C_VP, par exemple, est de faire dépendre les séquences de plasticité du fluage antérieur, et réciproquement. Ceci est important pour les essais de fluage (mise en charge $\rightarrow$ plasticité, puis fluage $\rightarrow$ viscoplasticité) ou les essais de relaxation après fatigue. En effet, dans ce genre d'essai, le mécanisme plastique est activé en premier. Ensuite le mécanisme viscoplastique prend la relève et devient prédominant. Les incréments des variables internes cinématiques sont données, au cours de la plasticité, par :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 \approx 0 \text{ et } \qquad \dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 = \dot{\lambda}^2(\underline{\underline{n}}^2 - \frac{3}{2}\frac{D_2}{B_{22}}\underline{\underline{X}}^2) \qquad [I.146]$$

On remarque que, bien que la variable interne $\underline{\underline{\alpha}}^1$ reste pratiquement nulle, sa variable associée $\underline{\underline{X}}^1$ évolue et garde en "mémoire" l'effet de la déformation plastique :

$$\underline{\underline{X}}^1 \approx B_{12}\underline{\underline{\alpha}}^2 \qquad [I.147]$$

Ceci se passe sans que le comportement du deuxième mécanisme ne soit altéré. En effet la deuxième variable associée est donnée par l'expression suivante :

$$\underline{\underline{X}}^2 \approx B_{22}\underline{\underline{\alpha}}^2 \qquad [I.148]$$

Par la suite, dès que la séquence de viscoplasticité est entamée, les évolutions des variables internes s'inversent. Il vient :

$$\dot{\underline{\underline{\alpha}}}^1 = \dot{\lambda}^1(\underline{\underline{n}}^1 - \frac{3}{2}\frac{D_1}{B_{11}}\underline{\underline{X}}^1) \qquad \text{et} \qquad \dot{\underline{\underline{\alpha}}}^2 \approx 0 \qquad [I.149]$$

Par contre, les variables associées sont, cette fois-ci de la forme suivante :

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{X}}^1 \\ \underline{\underline{X}}^2 \end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{12} & B_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1 \\ \underline{\underline{\alpha}}^2 \end{pmatrix} \qquad [I.150]$$

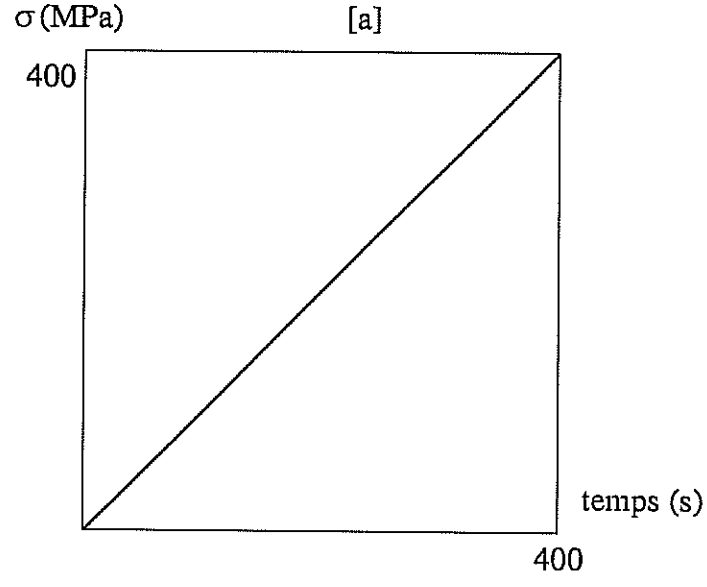
Les variables $\underline{\underline{X}}^1$ et $\underline{\underline{X}}^2$ vont maintenant évoluer proportionnellement à $\underline{\underline{\alpha}}^1$ (viscoplasticité) à partir des valeurs initiales dues au premier chargement plastique.

Ceci démontre qu'en cas de coexistence de plasticité et de viscoplasticité, le présent modèle est capable de distinguer l'écrouissage dû à la plasticité et celui dû à la viscoplasticité. Pour illustrer cette propriété, on considère d'une part un essai de traction simple qu'on appellera essai de référence (figure I.14a) et d'autre part un essai de traction simple interrompu momentanément par une période de fluage (figure I.14b). Cet essai est simulé à l'aide de deux jeux de coefficients, A, sans couplage plastique-viscoplastique, et B, avec couplage.
Les comportements obtenus pour les cas A et B sont illustrés sur le tableau I.23 :

$A_1=A_2=1$, E=144000, n=7.2, K=1200, $D_1=100$
$R_{01}=0$, $R_{02}=140$, $B_{11}=50000$, $B_{22}=30000$, $D_2=100$

Tableau I.23: Coefficients qui distinguent les deux comportements. jeu A : $B_{12}=0$, jeu B : $B_{12}=30000$. (unités : mm, s, MPa).

Comme pour le cas de l'effet de vitesse inverse, on s'aperçoit que le choix du paramètre de couplage B_{12} gouverne la quantité de durcissement après recharge. Les deux déformations inélastiques ainsi que les deux contraintes internes sont reportées sur la figure I.15. Pour le cas A, la contrainte interne viscoplastique n'évolue que dans l'intervalle de temps qui correspond au stade de fluage, par contre, la contrainte interne plastique n'évolue que si on fait varier la contrainte. La conséquence de ces comportements est que la courbe d'écrouissage se retrouve plus basse que la courbe de référence et ne la "rattrape" pas après recharge. De l'autre coté, le coefficient de couplage permet à l'essai B de rattraper la courbe de référence. On pourrait à volonté obtenir une courbe qui soit au dessus ou au dessous de la courbe de référence en fonction de la valeur choisie pour B_{12}.



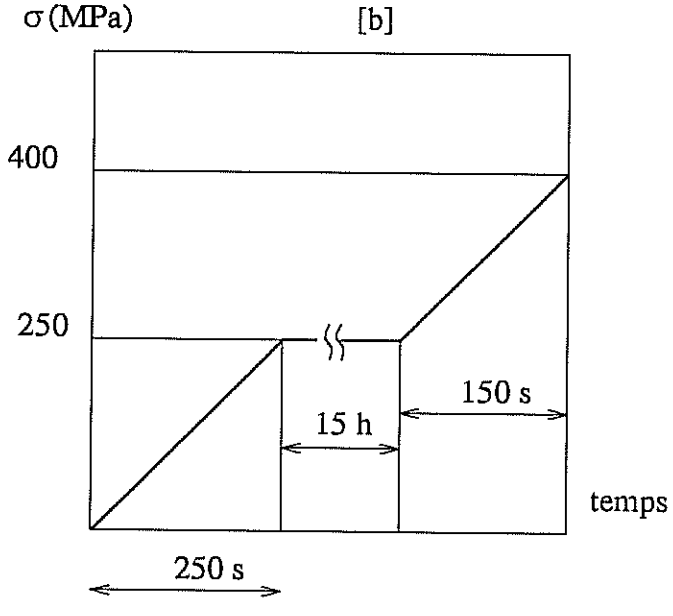


Figure I.14 : Interaction plasticité-viscoplasticité, chargements.

[a] essai de référence.

[b] essais avec palier de fluage.

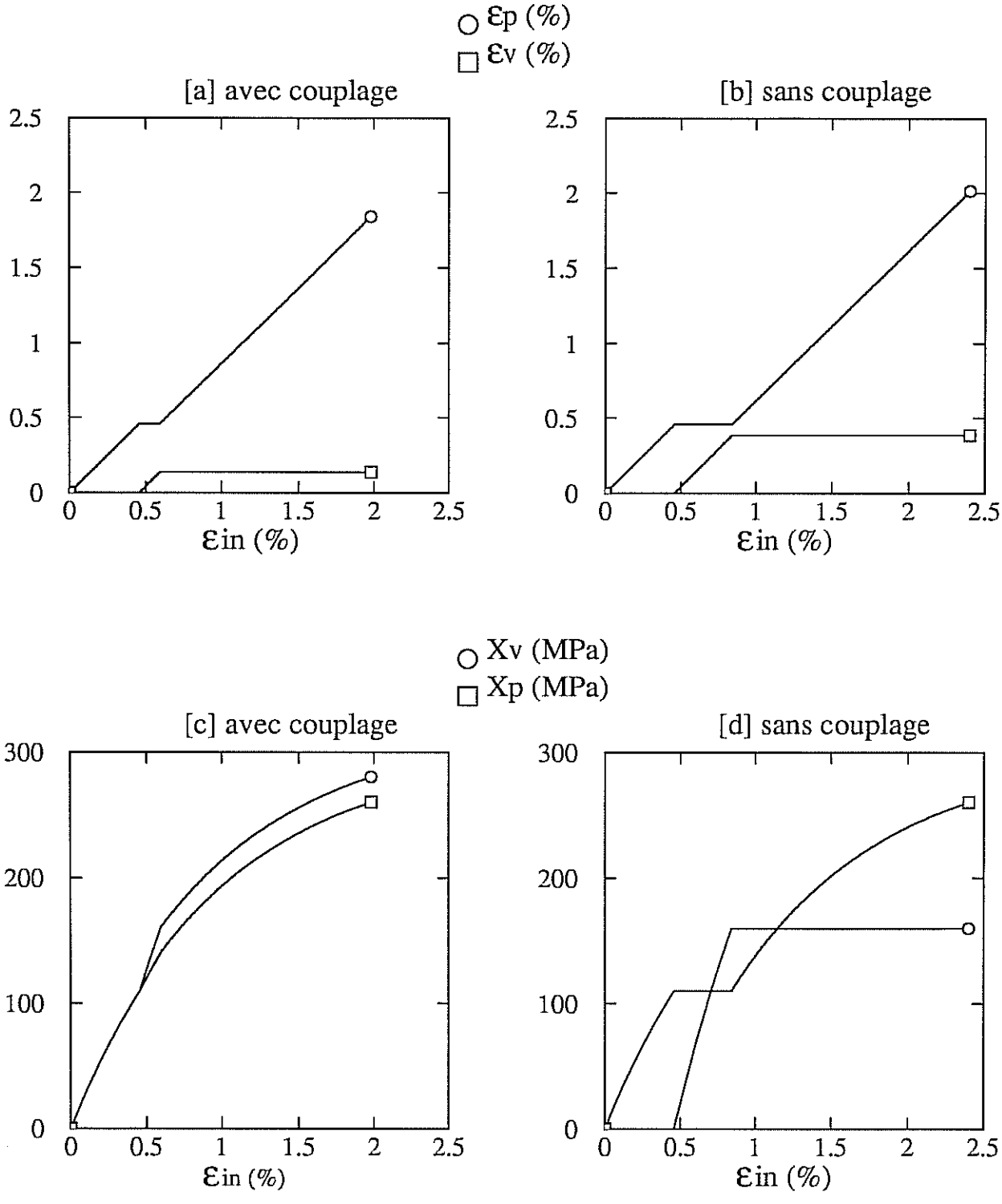


Figure I.15 : Interaction plasticité-viscoplasticité.

[a] Evolution des déformations ε_p et ε_v avec couplage.

[b] Evolution des déformations ε_p et ε_v en l'absence de couplage.

[c] Evolution des contraintes internes X_p et X_v avec couplage.

[d] Evolution des déformations X_p et X_v en l'absence de couplage.

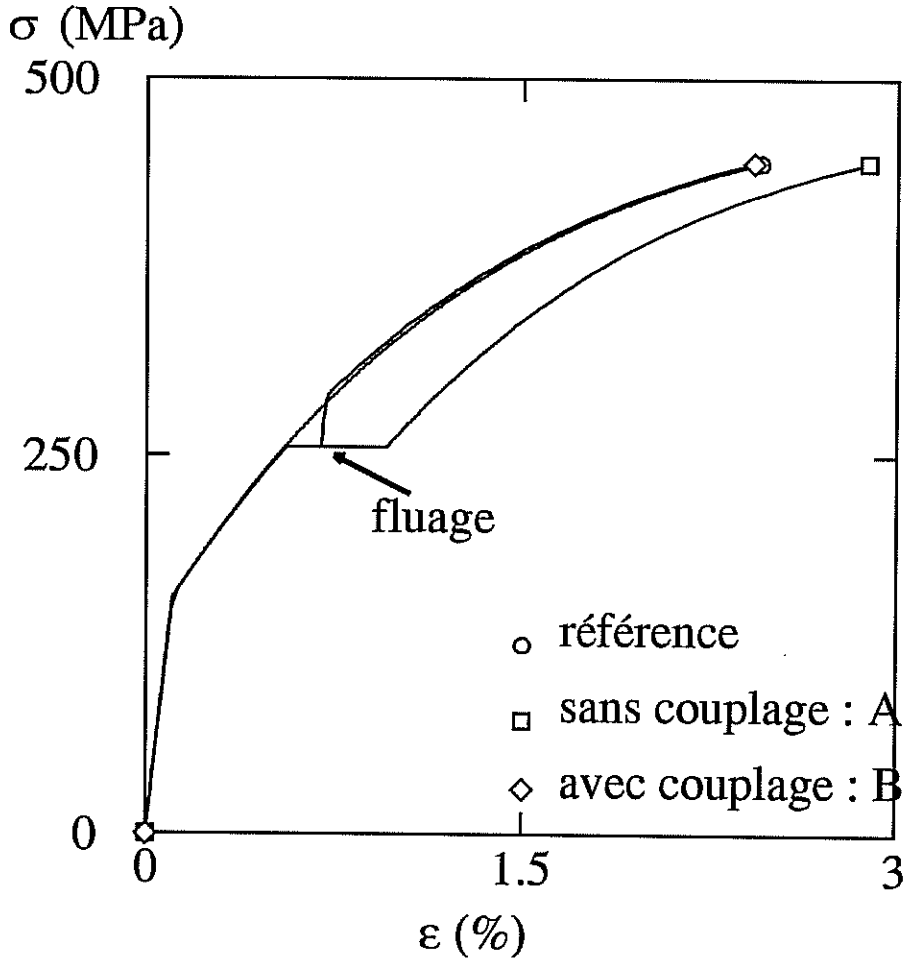


Figure I.16 : Interaction plasticité-viscoplasticité.

Courbes d'écrouissage.

I.7.3. Rochet, modèle 2M2C

Le modèle 2M1C règle de façon rigoureuse le problème de rochet uniaxial et multiaxial. Il n'en est pas de même pour le modèle 2M2C, néanmoins le terme de couplage entre cinématique et isotrope que l'on propose, au travers de la fonction $\varphi(R^2)$ (équation I.85) permet d'obtenir une bonne corrélation entre niveau de contrainte moyenne et déformation progressive. La figure I.17 illustre des simulations produites à l'aide du modèle 2M2C_VP. Les paramètres qui ont permis de simuler ces essais sont indiqués dans le tableau I.24.

$E=100000$, $A_1=-1$, $A_2=1$,
$B_{11}=120000$, $\mathbf{B_{12}=0}$, $B_{22}=80000$, $D_1=800$, $D_2=300$,
$b_1=5$, $b_2=5$, $R_{01}=200$, $R_{02}=400$, $C=600$, $Q_{11}=5000$, $Q_{22}=1500$
$K_1=400$, $n_1=4$

Tableau I.24 : Paramètres utilisés pour les simulations de la figure I.17.

(unités : MPa, mm, s).

Trois types d'essais ont été simulés avec ce jeu de paramètres :
- des boucles contrainte-déformation symétriques à déformation imposée (figure I.17a) sur laquelle on observe un comportement non linéaire,
- des boucles contrainte-déformation asymétriques à déformation imposée (figure I.17b) sur laquelle on observe une relaxation de la contrainte moyenne,
- un essai de rochet (figures I.17c, d) avec une contrainte moyenne forte 100 MPa,
- et un enfin un essai de rochet (figures I.17d) avec une faible contrainte moyenne 25 MPa. On reporte tout d'abord sur la figure I.17c les premières boucles contrainte-déformation de l'essai de rochet à plus forte contrainte moyenne. La déformation maximale par cycle en fonction du nombre de cycles est tracée pour chacun des deux niveaux de contrainte moyenne (figure I.17d). On s'aperçoit que le rochet est présent pour les deux niveaux de contrainte avec une "avancée" de rochet très faible pour l'essai à faible contrainte moyenne et une accumulation très rapide de la déformation progressive pour l'essai à plus forte contrainte moyenne. Ces comportements sont prometteurs pour décrire le phénomène de rochet.

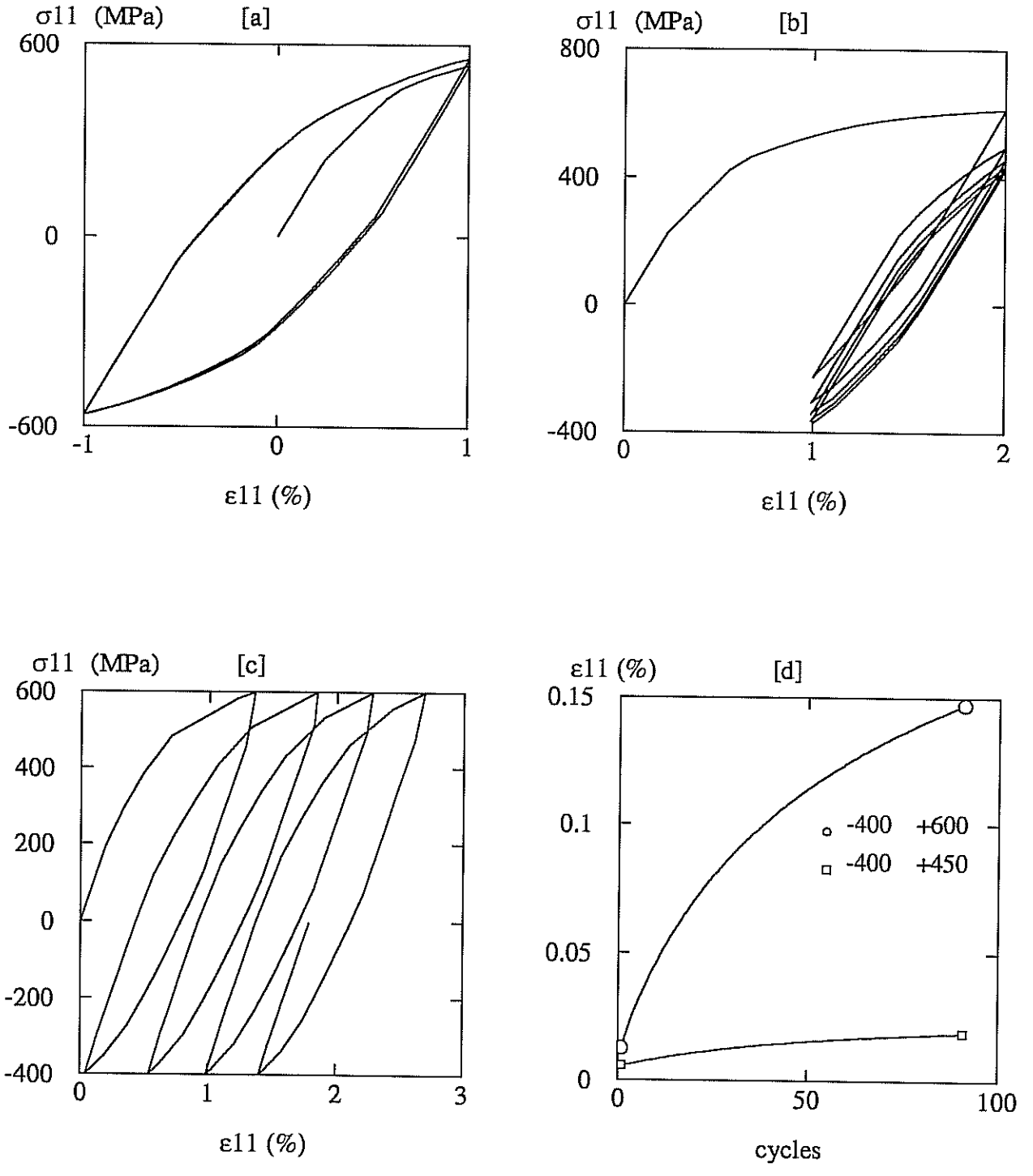


Figure I.17 : Simulation du modèle 2M2C.

[a] Traction-compression symétrique R_ε=-1.

[b] Traction compression asymétrique $R_\varepsilon \neq -1$.

[c] Rochet, premiers cycles.

[d] Rochet à σ_{moy} faible et à σ_{moy} forte.

I.8. Réponses typiques du modèle 2M1C

I.8.1. Rochet, modèle 2M1C

Comme on l'a indiqué dans le paragraphe I.2, le modèle de Zarka à deux éléments plastiques couplés est équivalent au modèle 2M1C avec écrouissage cinématique linéaire. On a donc repris les jeux de paramètres ($\Delta=0$ et $\Delta\neq0$) utilisés pour les essais de la figure I.7, en rajoutant une faible viscosité, pour simuler d'autres types de chargements. Pour chacun des deux jeux de paramètres, on simule :
- un essai de traction à déformation imposée,
- un essai de traction-compression à déformation symétrique imposée,
- un essai de traction-compression à déformation asymétrique imposée,
- un essai de rochet uniaxial à contrainte asymétrique imposée,
- un essai de rochet traction-torsion (contrainte axiale maintenue constante et déformation de torsion alternée).

Les paramètres qui ont permis de simuler les essais des figures I.18 et I.19 sont donnés dans le tableau I.25, alors que les paramètres correspondants aux figures I.20 et I.21 sont récapitulés dans le tableau I.26.

$E=10000$, $A_1=-1$, $A_2=1$, $K=50$, $n=2$
$B_{11}=2.10^3$, $B_{12}=-2.10^4$, $B_{22}=2.10^5$, $D_1=D_2=0$, $R_{01}=350$

Tableau I.25 ($\Delta=0$)

$E=10000$, $A_1=-1$, $A_2=1$, $K=50$, $n=2$
$B_{11}=2.10^3$, $B_{12}=-2.10^3$, $B_{22}=2.10^5$, $D_1=D_2=0$, $R_{01}=350$

Tableau I.26 ($\Delta\neq0$)

(unités : MPa, mm, s).

On retrouve la corrélation énoncée précédemment entre la singularité de la matrice d'écrouissage, la saturation de l'écrouissage et le rochet :

(i) la matrice B est singulière ($\Delta=0$): dans ce cas, on observe une saturation de la contrainte dans l'essai de traction à déformation imposée (figure I.18a) et bien sûr dans l'essai de traction-compression à déformation imposée (figure I.18b). Les figures I.18c et I.19c montrent que la contrainte moyenne s'annule complètement lors d'un essai à déformation asymétrique imposée. Cette singularité de la matrice d'écrouissage conduit à une accumulation continue de la déformation progressive aussi bien en uniaxial (figure I.18d et I.19d) qu'en biaxial (figure I.19a et I.19b).

(ii) la matrice B est régulière ($\Delta\neq0$) : dans ce cas, les courbes d'écrouissage monotone et cyclique ne sont pas saturées (figure I.20a et I.20b). Les figures I.20c et I.21c montrent

que la contrainte moyenne ne s'annule pas lors d'un essai à déformation asymétrique imposée. La régularité de la matrice d'écrouissage permet d'obtenir une accommodation du rochet aussi bien en uniaxial (figure I.20d et I.21d) qu'en biaxial (figure I.21a et I.21b).

Ces simulations montrent que le rochet biaxial suit également la corrélation entre singularité de la matrice d'écrouissage, saturation de l'écrouissage et rochet. D'autre part, on s'aperçoit que la contrainte moyenne lors d'un essai cyclique asymétrique à déformation imposée ne s'annule complètement que dans le cas d'une matrice singulière. Ces règles bien que simples sont un peu rigides d'utilisation car le comportement des matériaux, et plus particulièrement celui du rochet, dépend également du niveau de chargement. D'où l'idée de faire varier la matrice d'écrouissage.

Maintenant qu'on maîtrise bien l'effet des propriétés de la matrice d'écrouissage sur le comportement, on va prendre soin de la faire varier. Pour cela, on suppose que les paramètres de la matrice d'écrouissage cinématique dépendent de la variable isotrope. La forme de ces paramètres variables est choisie de telle sorte que leur déterminant ait une valeur non nulle quand le chargement est faible ($q \approx 0$) et nulle quand cette variable est saturée ($q \approx 1$). Les paramètres d'écrouissage sont obtenus par les données de a, β et k. Pour illustrer cette possibilité, on se donne les paramètres suivants pour simuler un ensemble d'essais qui comprend :

- un essai de traction-compression à déformation symétrique imposée (figure I.22a),
- un essai de traction-compression à déformation asymétrique imposée (figure I.22b),
- un essai de rochet (figure I.22c et I.22d) à forte contrainte moyenne (100 MPa),
- un essai de rochet (figure I.22d) à faible contrainte moyenne.

$B_{ij} = B_{ij}^{\infty} + k\,(1 - q^1), B_{12}^{\infty} = a\sin\beta$ $B_{11}^{\infty} = a(1+\cos\beta), B_{22}^{\infty} = a(1-\cos\beta)$	E=10000, A_1=1, A_2=1, R_{01}=350 β=0.2, C=0.1, k=5000, a=101000

Tableau I.27 : Paramètres utilisés pour les simulations de la figure I.22.

(unités : MPa, mm, s).

La figure I.22d montre qu'on obtient une accommodation très lente à une contrainte moyenne faible (25 MPa). Par contre une contrainte moyenne de 100 MPa aboutit à un rochet plus important et plus rapide. Cette possibilité de faire varier la matrice d'écrouissage sera reprise à l'occasion de l'identification du modèle 2M1C sur l'acier 17-12 SPH.

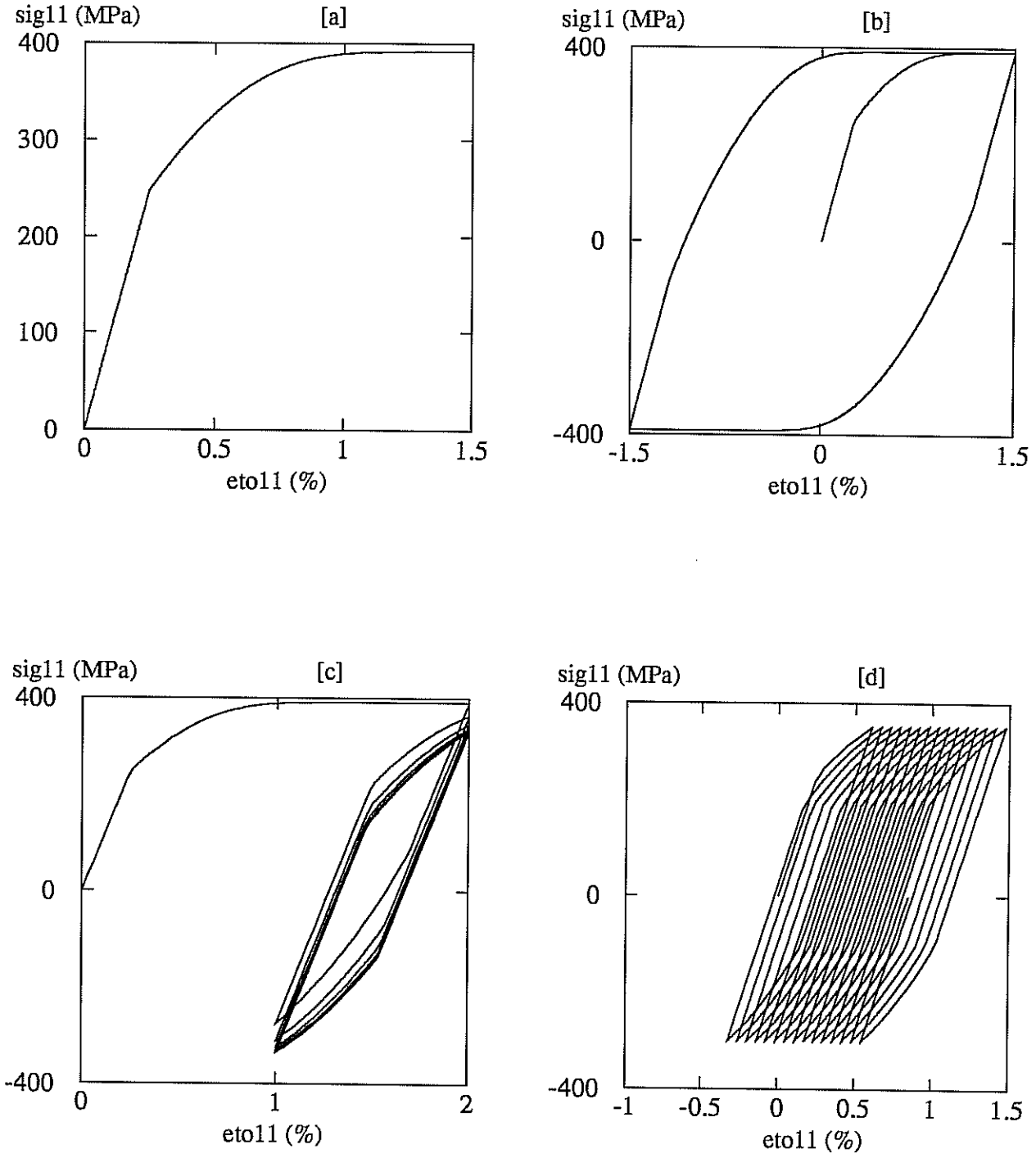


Figure I.18: Simulation du modèle 2M1C, matrice singulière.

[a] Traction simple à déformation imposée.

[b] Traction-compression symétrique à déformation imposée.

[c] Traction-compression asymétrique à déformation imposée.

[d] Rochet uniaxial (contrainte asymétrique imposée), premiers cycles.

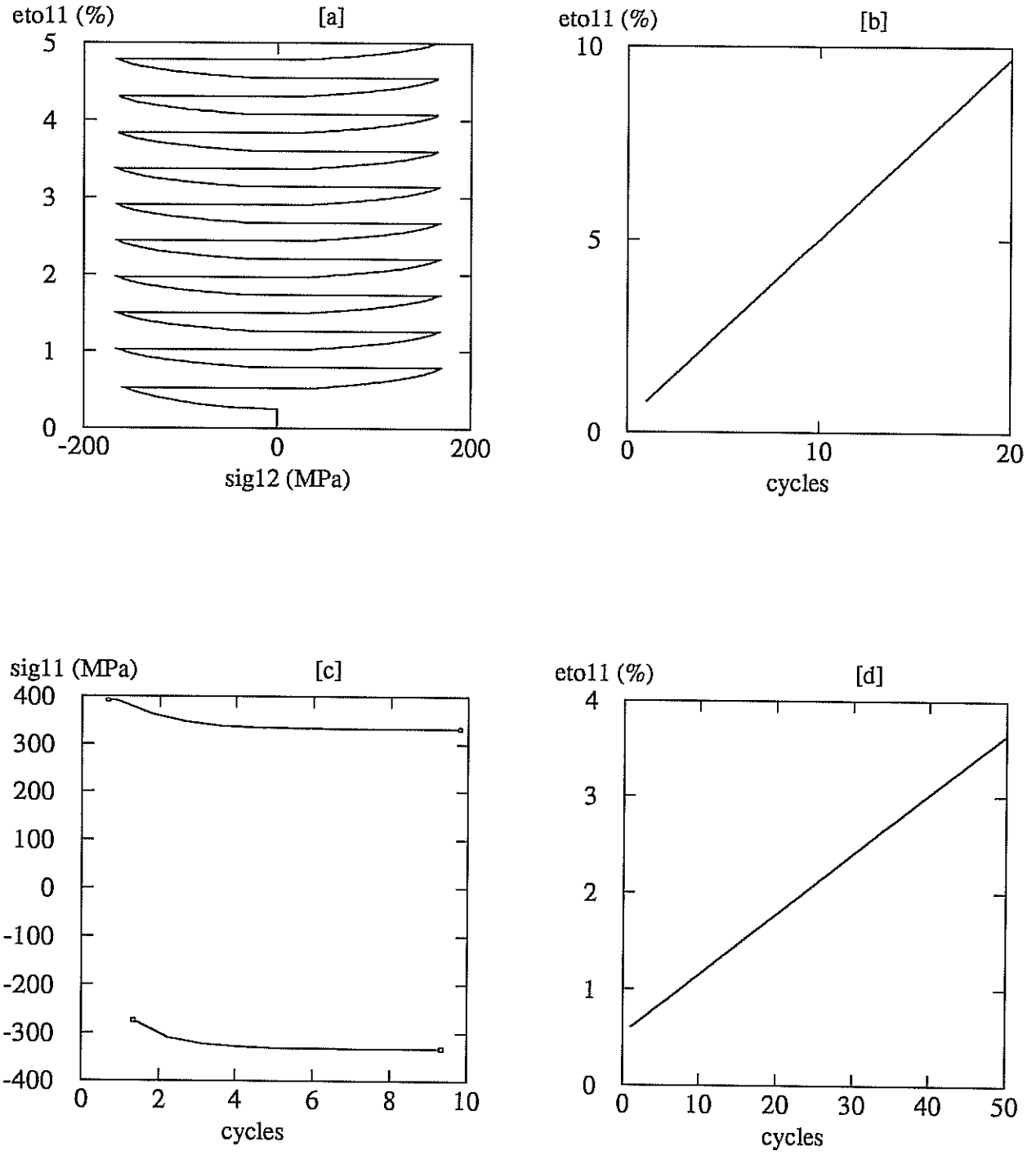


Figure I.19: Simulation du modèle 2M1C, matrice singulière.

[a] Rochet biaxial, contrainte constante, torsion alternée, premiers cycles.

[b] Rochet biaxial, contrainte constante, torsion alternée.

[c] Traction-compression asymétrique à déformation imposée.

[d] Rochet uniaxial (contrainte asymétrique imposée).

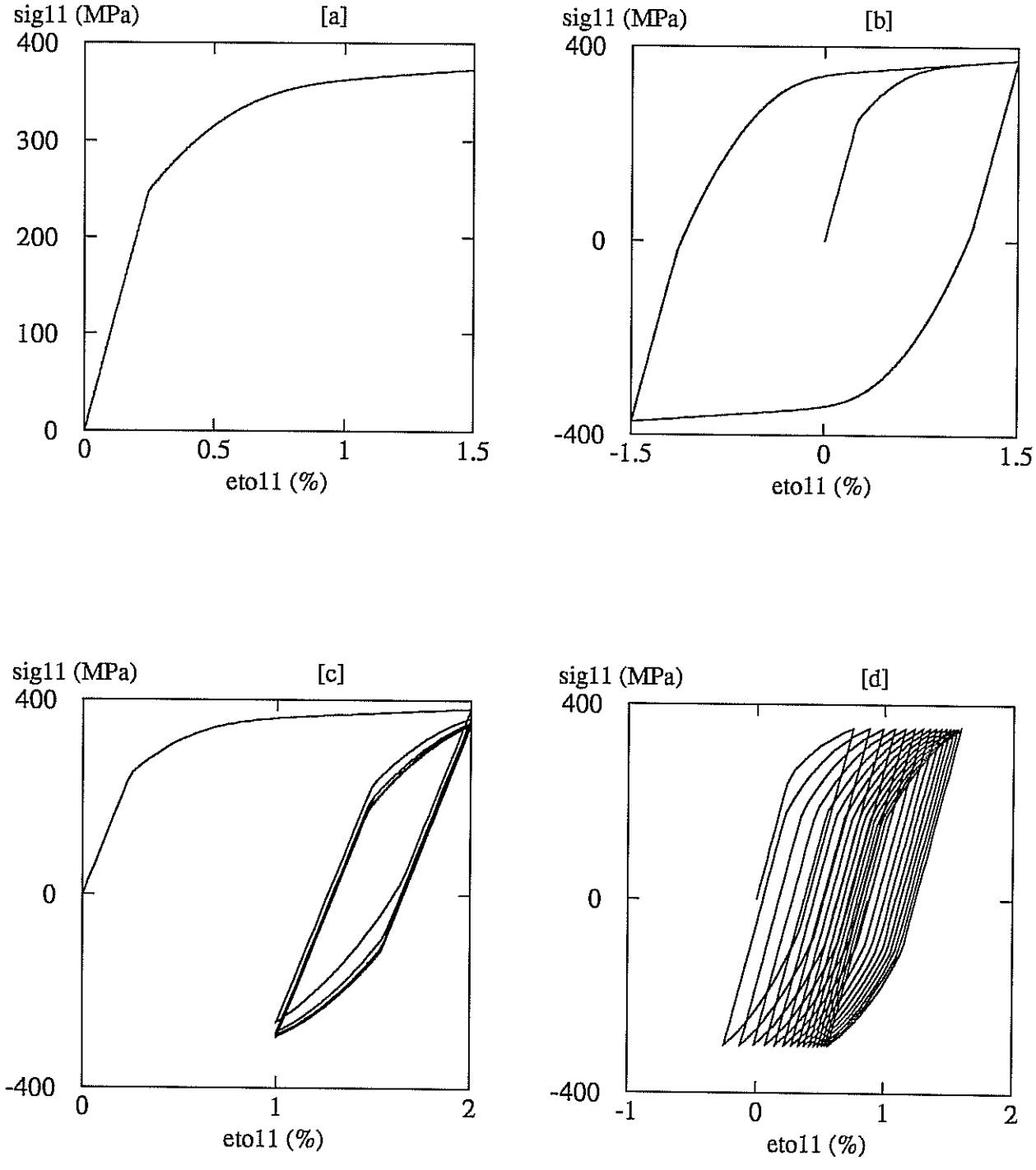


Figure I.20: Simulation du modèle 2M1C, matrice régulière.

[a] Traction simple à déformation imposée.

[b] Traction-compression symétrique à déformation imposée.

[c] Traction-compression asymétrique à déformation imposée.

[d] Rochet uniaxial (contrainte asymétrique imposée), premiers cycles.

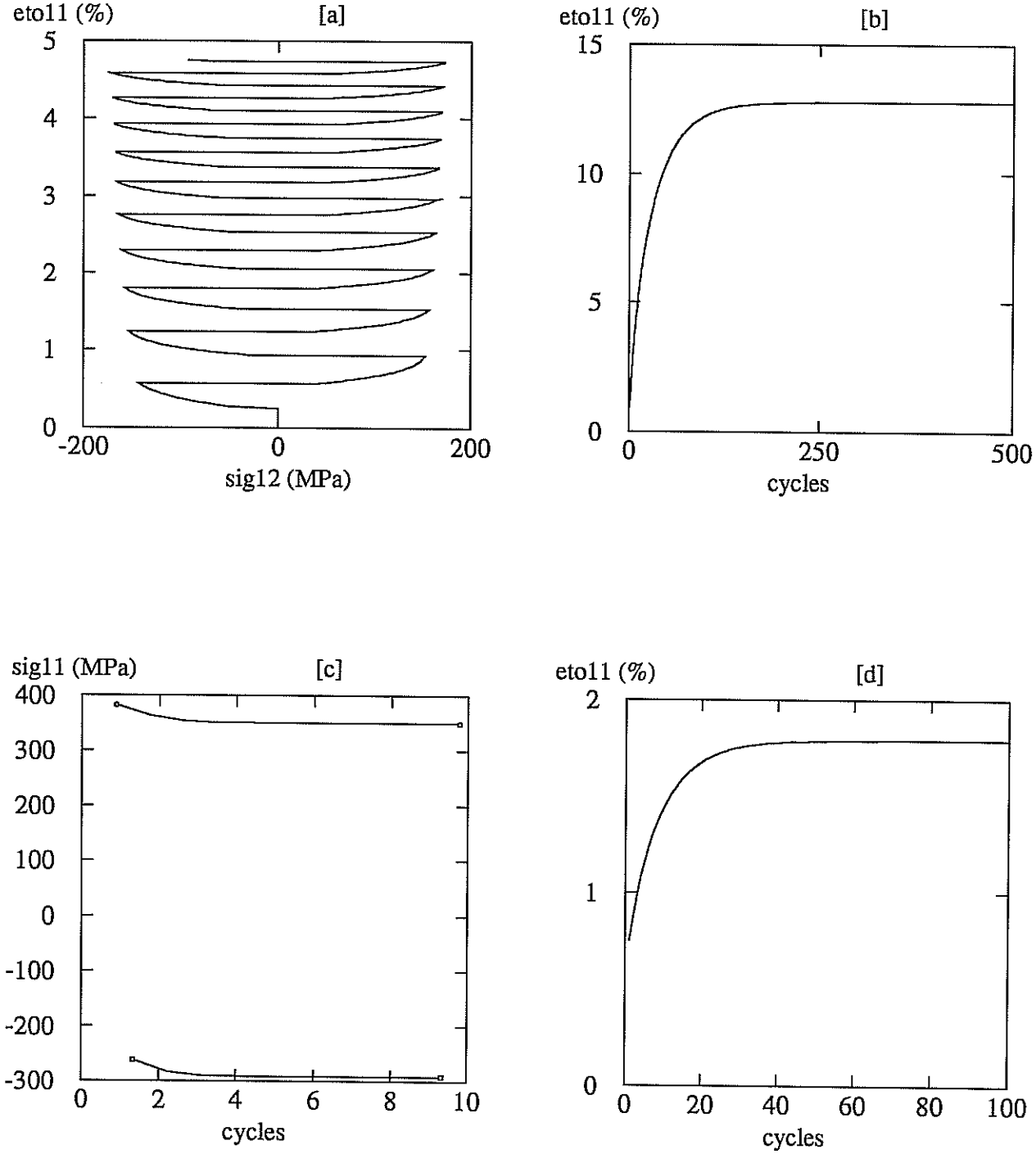


Figure I.21: Simulation du modèle 2M1C, matrice régulière.

[a] Rochet biaxial,, contrainte constante, torsion alternée premiers cycles.

[b] Rochet biaxial, contrainte constante, torsion alternée.

[c] Traction-compression asymétrique à déformation imposée.

[d] Rochet uniaxial (contrainte asymétrique imposée).

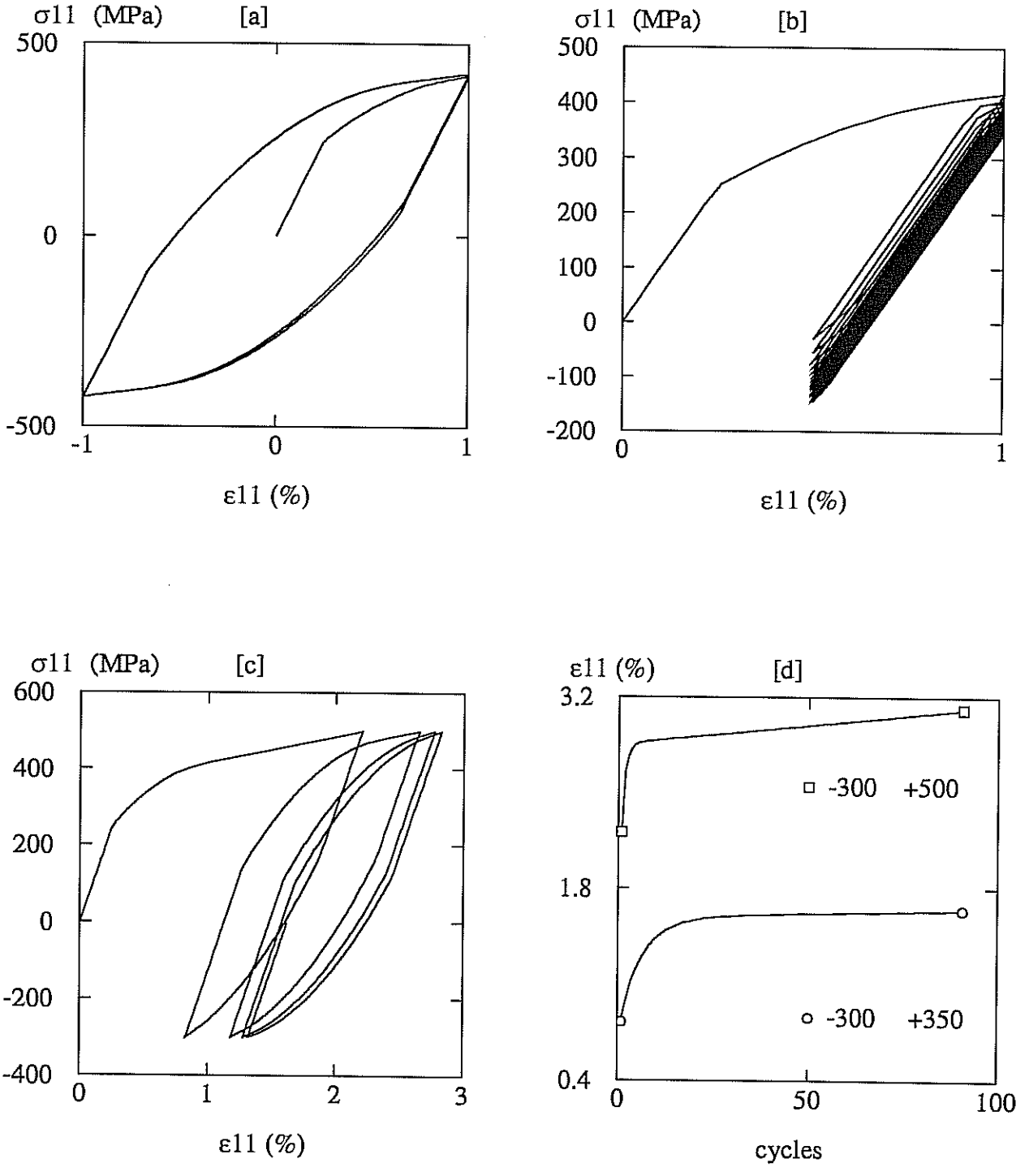


Figure I.22 : Simulation du modèle 2M1C, matrice variable.

[a] Traction-compression symétrique $R\varepsilon=-1$.

[b] Traction compression asymétrique $R\varepsilon\neq-1$.

[c] Rochet, premiers cycles.

[d] Rochet à σ_{moy} faible et à σ_{moy} forte.

I.9. Identification sur Inconel 718

Le premier matériau identifié est un alliage à base nickel utilisé dans les disques de turbomachine, l'Inconel 718. Les essais réalisés à 650 °C proviennent de SNECMA (rapport YKOM1 60021) et de PRATT et WHITNEY (Thakker et Cowles, 1983), de l'Ecole des Mines (Andrieu, 1991) et de l'Université de Rhode-Island (Ghonem, 1991). La base expérimentale ainsi constituée n'est pas parfaitement homogène (problème de lots de matière différents, de laboratoire et de conditions expérimentales). On a néanmoins accepté de travailler dans ces conditions, qui sont souvent celles de l'ingénieur confronté au travail d'identification.

Après une première évaluation "manuelle" des paramètres du matériau, l'identification a été réalisée avec le logiciel d'identification Sidolo (Pilvin, 1988). Ce logiciel utilise une méthode de Runge-Kutta pour la simulation et donc l'intégration de la loi de comportement. Pour l'identification, il s'agit de minimiser une fonctionnelle qui décrit l'écart entre les variables observables mesurées et celles simulées par le modèle. Cette fonctionnelle prend en compte les écarts sur l'ensemble des essais simultanément. On trouvera en annexe III.1 quelques informations supplémentaires sur la méthodologie d'identification.

Une identification de ce matériau a déjà été faite avec le modèle ddi (Lepautremat, 1990). Les résultats d'identification ainsi que les paramètres du modèle ddi sont reportés en annexe I.3. Pour modéliser ce matériau, chacune des contraintes internes est décomposée en deux termes. Le couplage est effectué au niveau de l'écrouissage isotrope. Cette dépendance est unilatérale. En effet, on suppose que la viscoplasticité a une influence sur la plasticité mais pas l'inverse.

Dans le cadre de cette étude, on a réalisé l'identification avec le modèle 2M2C_VV avec deux mécanismes viscoplastiques. Le paramètre de couplage activé est celui de l'écrouissage cinématique (B_{12}).

Essais de traction simple à déformation imposée (figure I.23)
La diversité des origines des essais laisse présager une difficulté pour déterminer les paramètres du modèle, en effet on note sur les résultats des essais de mise en charge des dispersions de 50 à 100 MPa. La démarche qu'on a adoptée pour remédier à cette dispersion est d'introduire simultanément tous ces essais différents dans la base expérimentale. Le jeu de paramètres ainsi trouvé sera une moyenne qui réconcilie au mieux l'ensemble des essais de traction.

Essais de fatigue à déformation imposée (figure I.24)

Pour avoir un jeu de coefficients "unique", l'identification a été effectuée sur des essais cycliques à différentes vitesses et différents niveaux de déformations.

Essais de relaxation (figures I.25, I.26)

Classiquement, pour avoir une estimation des coefficients de viscosité, on trace dans un diagramme logarithmique la contrainte effective en fonction de la vitesse de déformation inélastique. L'évaluation ainsi faite sur l'Inconel 718 montre que la pente trouvée à partir des essais de fluage est, comme souvent, supérieure à celle de la relaxation, ce qui pose le problème de la cohérence de ces deux types d'essais, interprétés au moyen d'une seule contrainte interne. La figure I.25 montre les résultats d'identification pour ces essais de relaxation; on y compare les courbes expérimentales et les courbes simulées une par une. Pour mieux analyser les écarts existants pour certaines courbes, on a groupé sur la figure I.26 d'une part toutes les courbes expérimentales et d'autre part toutes les courbes simulées à l'aide du modèle 2M2C_VV. On remarque que les défauts observés sur la figure I.25 proviennent essentiellement de la contrainte σ_0 obtenue en début de relaxation surtout pour les essais de relaxation après fatigue. Il y a donc là un problème de dispersion expérimentale, car la contrainte atteinte en fatigue à déformation imposée est bonne. Par contre, pour l'essai de relaxation qui suit une traction puis une petite décharge (figure I.25c), (figure I.26 : a2, b2), la contrainte σ_0 est sous-estimée. Par ailleurs, on remarque qu'on n'observe pas d'influence de la vitesse de déformation antérieure sur la suite de l'essai de relaxation aussi bien pour l'essai de relaxation après traction que pour l'essai de relaxation après fatigue.

Essais de fluage (figures I.27)

Une identification a déjà été faite avec un modèle viscoplastique unifié (modèle à une seule déformation inélastique). La limite d'élasticité apparente est d'environ 710 MPa (figures I.23). La simulation de ces essais avec un tel modèle donne une réponse erronée du matériau avec une telle valeur de seuil, en effet le matériau ne peut pas "fluer" en dessous de sa limite d'élasticité ($\dot{\varepsilon} = 0$). Il faut donc introduire un seuil beaucoup plus bas et une variable cinématique à évolution très rapide. Cette configuration est naturellement retrouvée par le modèle ddi ainsi que par le présent modèle, pour lesquels la limite d'élasticité sur les courbes de traction simple est gérée par le mécanisme plastique, et la limite de fluage, correspondant à un domaine d'élasticité plus petit, par le mécanisme viscoplastique. Les niveaux de déformation atteints sont très élevés (2% pour l'essai à 600 MPa, 5% à 650 MPa et 15% à 700 MPa). Dans de telles conditions, on envisage classiquement d'introduire une variable

supplémentaire pour décrire l'endommagement qui apparaît dans le matériau. (Andrieu, 1991) a montré en observant le matériau à ces niveaux de déformation qu'il n'y a pas d'endommagement visible. Comme, par ailleurs, le modèle est écrit en petites déformations, on s'est contenté de faire une correction de la section de l'éprouvette, en supposant celle ci variable en fonction de la déformation :

$$S = S_0 \exp(-\varepsilon_{11}) \qquad [I.151]$$

Le fluage obtenu sur ces essais est principalement tertiaire tandis que le fluage primaire est quasi-inexistant et le fluage secondaire ne dure que quelques heures. Le niveau de déformation important obtenu en fluage tertiaire est principalement dû au comportement adoucissant de l'Inconel 718.

B_{11}	D_1	B_{22}	D_2	Q_{11}	b_1	R_{01}	K_1	n_1	M	m
26033	234	52789	323	-2921	14	208	2790	6.9	82	2.5
B_{12}	A_1	A_2	Q_{12}	Q_{22}	b_2	R_{02}	K_2	n_2		
34807	0.65	0.32	0	-3617	34	261	57	3		

Tableau I.28: Paramètres de l'Inconel 718 pour le modèle 2M2C. (deux mécanismes viscoplastiques).

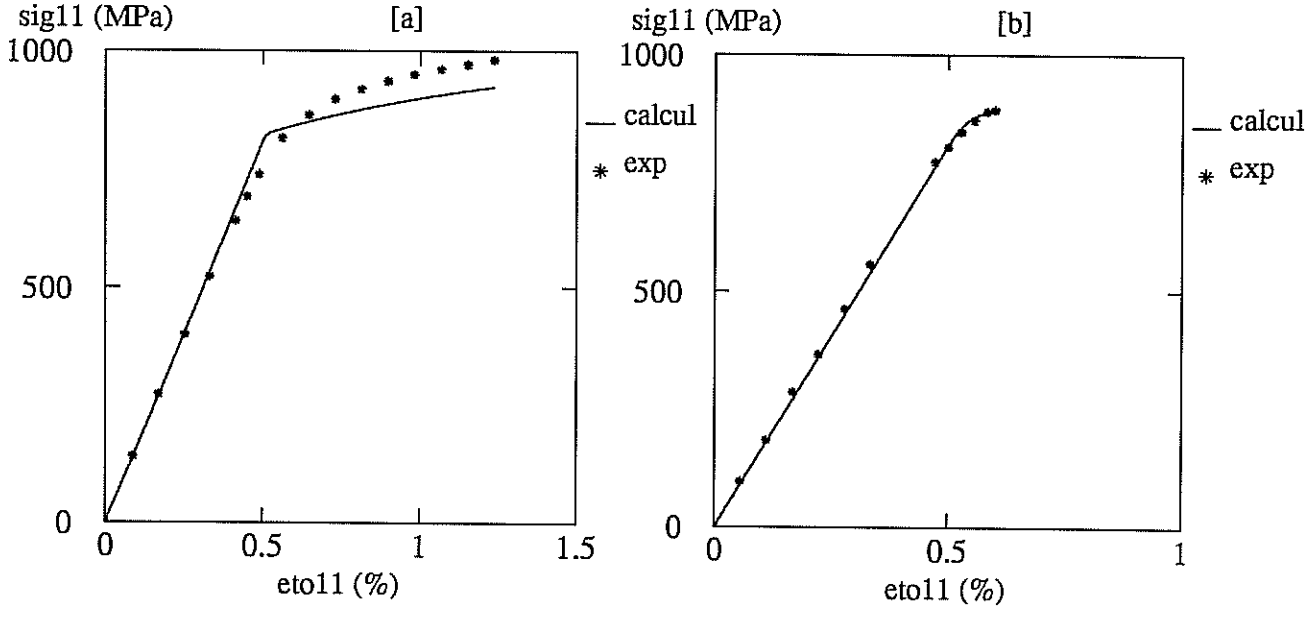


Figure I.23: Identification sur l'Inconel 718, courbes de traction simple.

[a] Vitesse = 10^{-5}, ε=1.24%., [b] Vitesse = 10^{-3}, ε=0.6%.

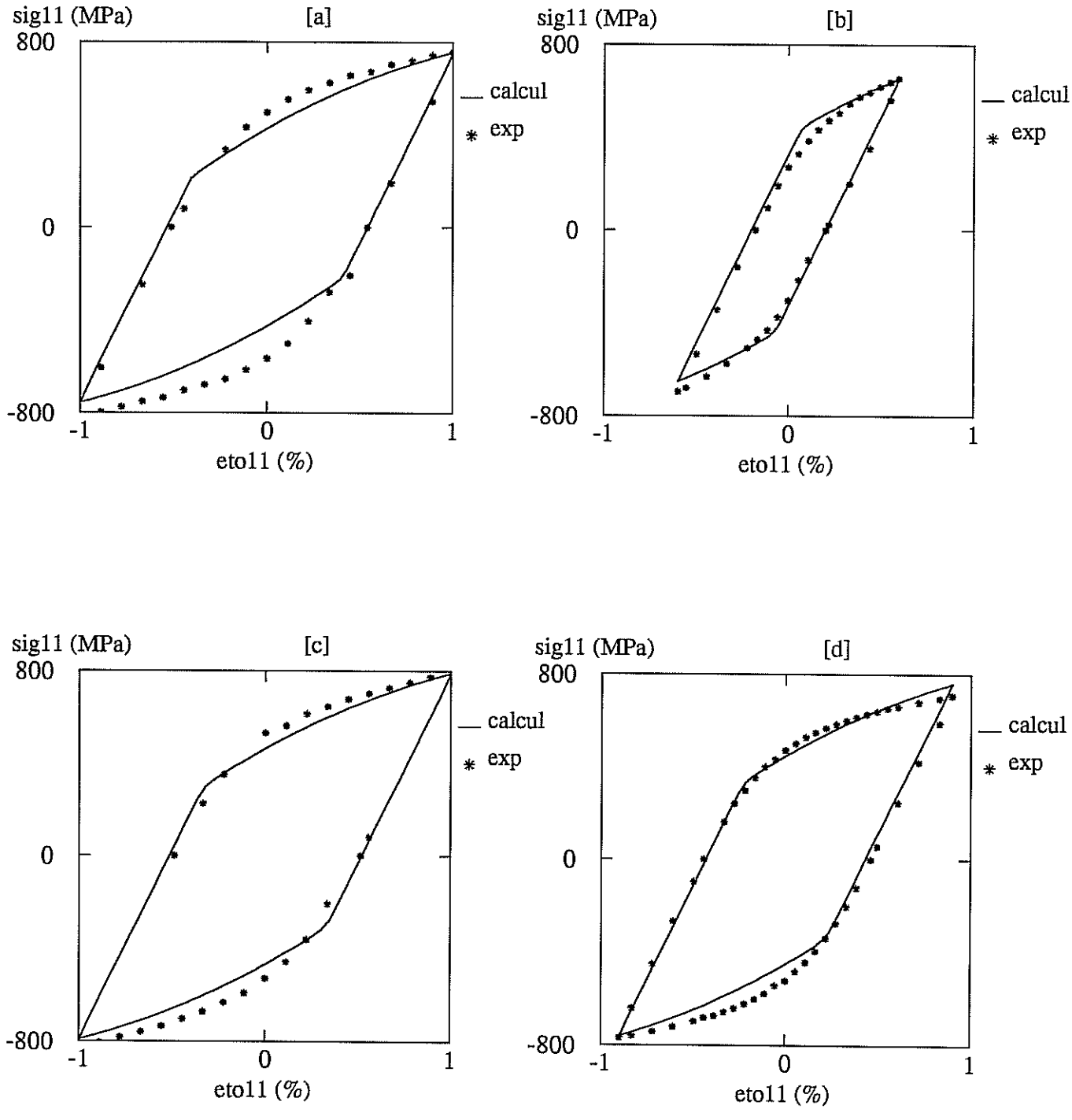


Figure I.24 : Identification sur l'Inconel 718, boucles contrainte-déformation stabilisées.

[a] Vitesse = 10^{-6}, amplitude = 2%.

[b] Vitesse = 10^{-3}, amplitude = 1.2%.

[c] Vitesse = 10^{-3}, amplitude = 2%.

[d] Vitesse = 10^{-3}, amplitude = 1.8%.

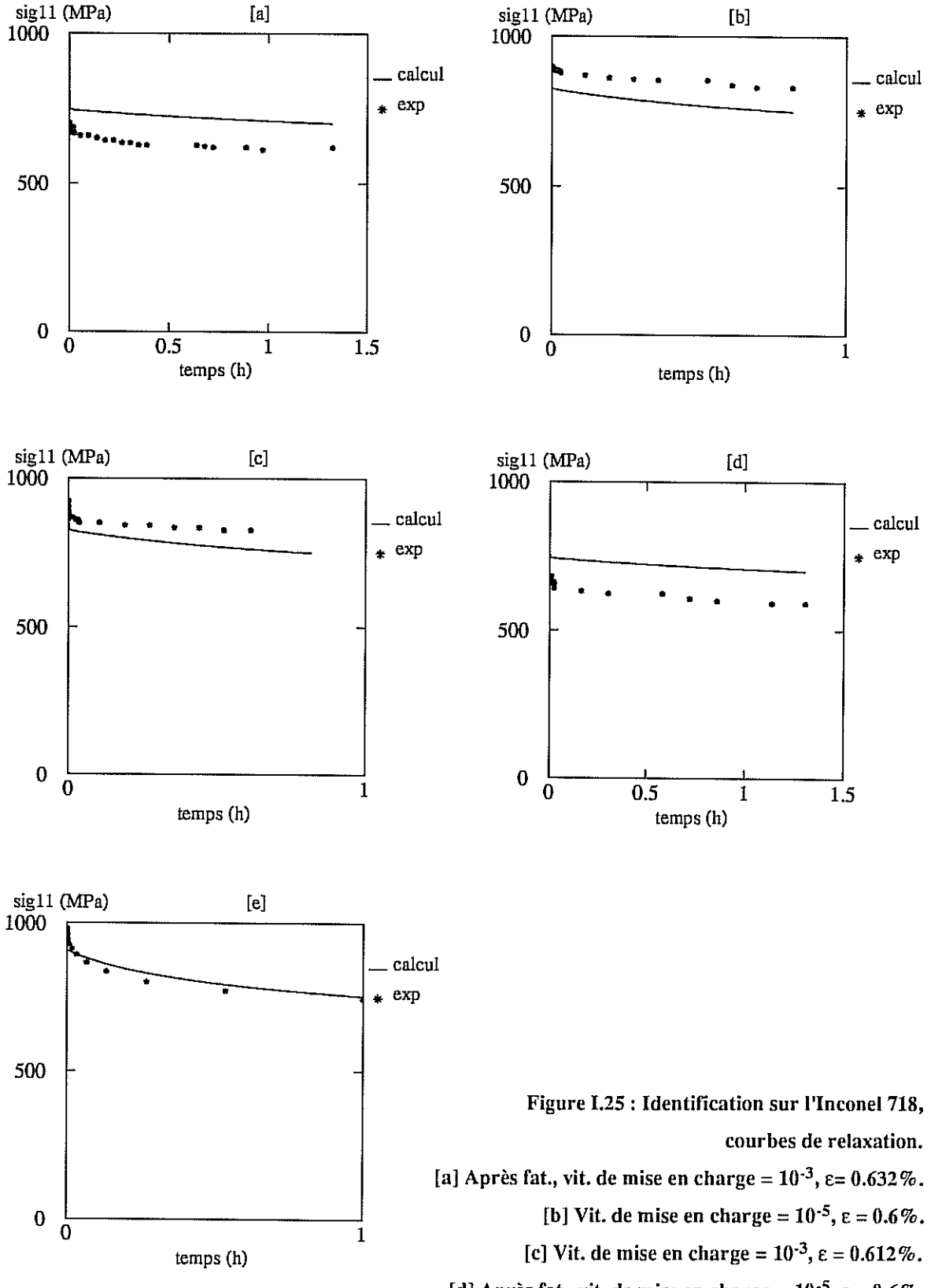


Figure I.25 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de relaxation.

[a] Après fat., vit. de mise en charge = 10^{-3}, ε= 0.632%.

[b] Vit. de mise en charge = 10^{-5}, ε = 0.6%.

[c] Vit. de mise en charge = 10^{-3}, ε = 0.612%.

[d] Après fat., vit. de mise en charge = 10^{-5}, ε = 0.6%.

[e] Vitesse de mise en charge = 10^{-5}, ε = 1.24%.

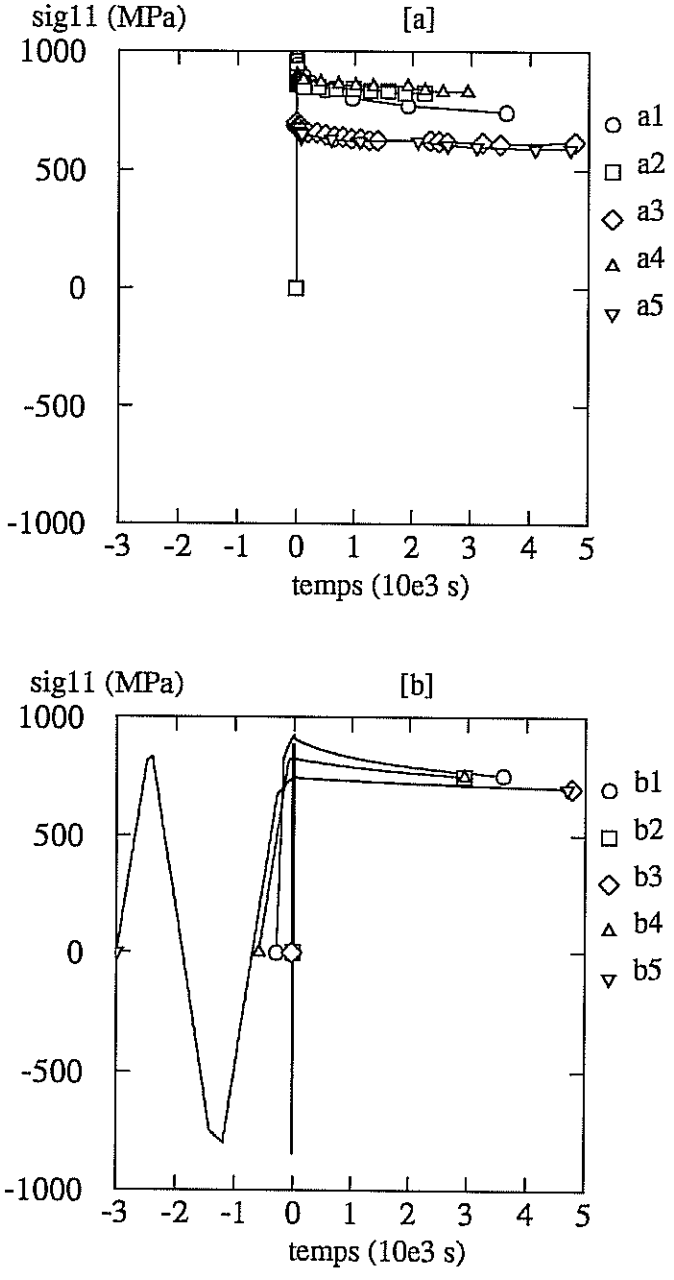


Figure I.26 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de relaxation.

[a] Expériences, [b] Simulations.

a1, b1 : Vitesse de mise en charge = 10^{-5}, $\varepsilon = 1.24\%$.

a2, b2 : Vit. de mise en charge = 10^{-3}, $\varepsilon = 0.612\%$.

a3, b3 : Après fat., vit. de mise en charge = 10^{-3}, $\varepsilon = 0.632\%$.

a4, b4 : Vit. de mise en charge = 10^{-5}, $\varepsilon = 0.6\%$.

a5, b5 : Après fat., vit. de mise en charge = 10^{-5}, $\varepsilon = 0.6\%$.

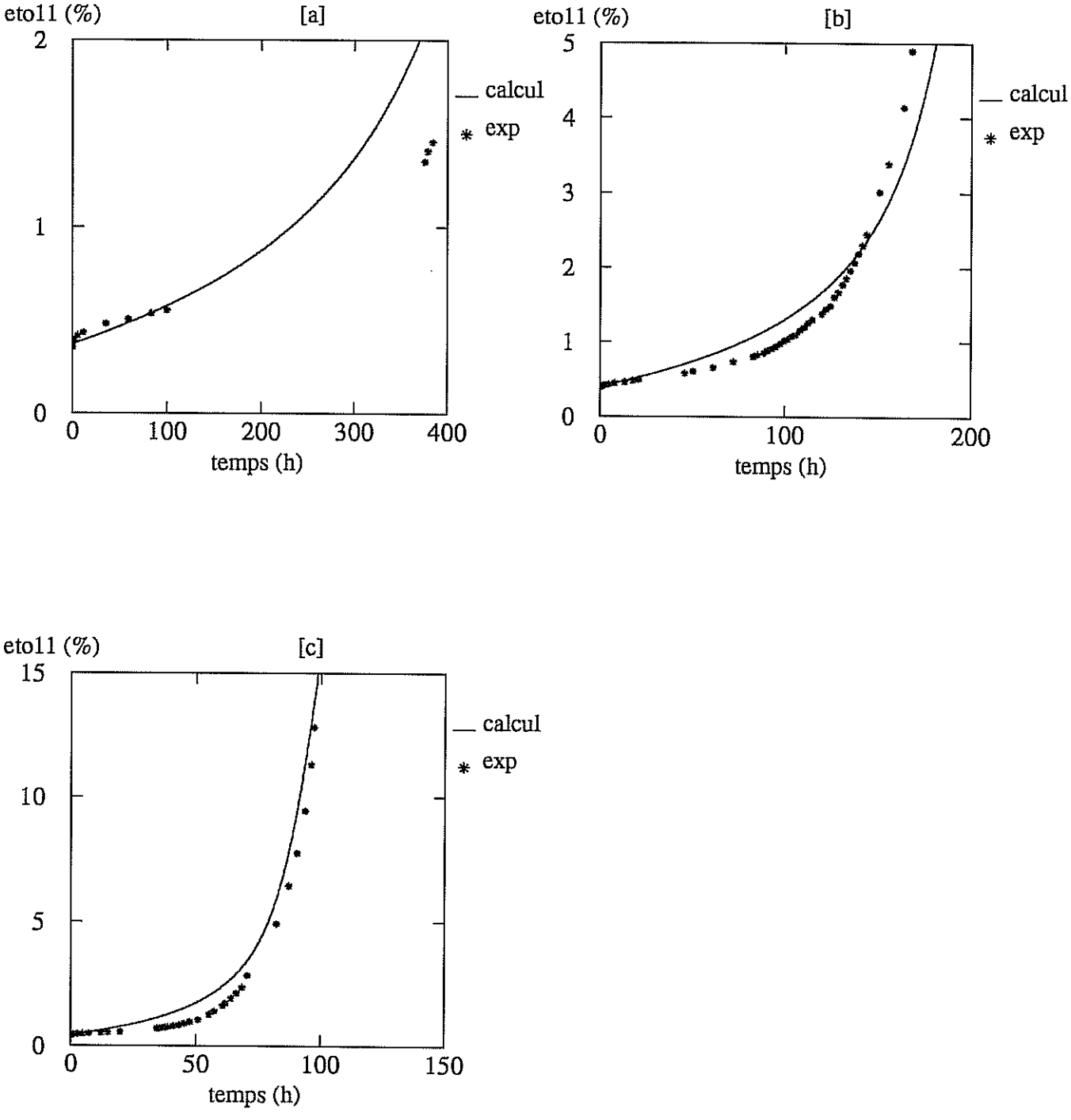


Figure I.27 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de fluage.

[a] σ = 600 MPa.

[b] σ = 650 MPa.

[c] σ = 700 MPa.

I.10. Identification sur l'acier 17-12 SPH

Après l'identification du modèle 2M2C_VV sur l'Inconel 718, on essaye dans ce paragraphe de valider le modèle 2M1C sur une base expérimentale. Il s'agit de modéliser le comportement de l'acier inoxydable austénitique du type 17-12 SPH. utilisé dans le domaine du nucléaire. Plusieurs auteurs ont étudié ce matériau (Goodman, 1984); (Delobelle, Oytana, 1986); (Chaboche et al. 1979); (Cailletaud, 1987); (Contesti et Cailletaud, 1989). Ce dernier auteur a identifié les paramètres du modèle ddi (cf. paragraphe I.2.6) et a obtenu une bonne corrélation entre l'ensemble des essais expérimentaux et les courbes simulées à l'aide du modèle ddi. On a établi par ailleurs (cf. paragraphe I.6) une équivalence entre le modèle 2M2C_VP et le modèle ddi. C'est pour cette raison, et parce que le modèle 2M1C n'a pas encore été confronté à aucune base expérimentale, qu'on a décidé de le valider sur cet acier. Il reste alors à faire le choix entre le modèle 2M1C plastique ou le viscoplastique : on a choisit de travailler avec le modèle 2M1C_V plutôt qu'avec le modèle 2M1C_P malgré la faible sensibilité à la vitesse de chargement. En effet, les expériences recueillies sont effectuées à 600°C, température à laquelle la viscosité est importante. Les informations expérimentales qui proviennent de la littérature ont déjà été regroupées à l'occasion des précédents travaux de Contesti (1989). Cette base expérimentale, choisie à 600°C, présente des dispersions importantes au niveau des résultats. Aussi, convient-il de rester conscient des écarts "normaux" qu'il peut y avoir entre le modèle et les courbes expérimentales. Toutefois, les résultats de simulation sont tous obtenus avec un même jeu de paramètres. Par ailleurs, on se limitera à des niveaux de déformation de quelques pour-cent pour rester dans le domaine des petites déformations. On commencera par rappeler la base expérimentale, ensuite on précisera les paramètres concernés par l'identification. Les essais sélectionnés pour l'identification sont les suivants :

Essais de traction monotone (figures I.28a, I.28b)

Malgré la dispersion de ces essais, les différents auteurs ont tous observé une quasi insensibilité à la vitesse de déformation, ou parfois une légère sensibilité inverse à la vitesse (cf. paragraphe I.7.1). On a donc retenu deux essais de traction à déformation imposée, le premier est rapide alors que le second est lent. Les deux vitesses de déformation sont respectivement égales à 10^{-4} s^{-1} et 10^{-6} s^{-1}.

Essais de relaxation (figures I.28c, I.28d)

Le problème qui se pose ici est celui du nombre restreint des essais de relaxation. Contesti (1988) a souligné les difficultés d'ordre expérimental qui sont à l'origine d'importantes dispersions dans ces essais. Pour essayer d'être cohérent, on a retenu

deux essais de relaxation qui sont la suite des mises en charge des deux essais de traction précédents.

Essais de fluage (figure I.29)

Ces essais, réalisés sous force constante imposée, présentent essentiellement des stades secondaires de fluage où la vitesse de déformation reste sensiblement constante et égale à sa valeur minimale. Un problème rencontré lors de la reconstitution de cette base expérimentale est le manque d'information sur les différentes valeurs de la déformation totale obtenues juste après les mises en charge. En effet les résultats sont présentés en terme de déformation viscoplastique dite de "fluage" et non pas en déformation totale. On a été obligé de faire quelques extrapolations qui viennent se rajouter aux dispersions citées plus haut. Quatre essais de fluage à différents niveaux de contrainte ont été choisis pour essayer d'atténuer ces incertitudes. Les différentes contraintes appliquées sont respectivement de 236 MPa, 246 MPa, 263 MPa et enfin 295 MPa. Par ailleurs, ces essais, effectués à des niveaux de contrainte supérieurs à la limite d'élasticité, ont généré des déformations très importantes. Il convient dans ces conditions de reconstituer la relation force-contrainte comme pour le cas de l'Inconel 718:

$$\sigma_{11} = \frac{F}{S_0 \exp(-\varepsilon_{11})} \qquad [I.152]$$

où S_0 est la section initiale de l'éprouvette, σ_{11} la contrainte de fluage, F la force appliquée et ε_{11} la déformation totale de l'éprouvette.

Essais de fatigue cyclique (figure I.30, I.31)

La littérature est également abondante d'essais cycliques effectués sur ce matériau. Parmi ces essais, on s'est intéressé plus particulièrement à un essai incrémental réalisé à plusieurs niveaux de déformation imposée. L'amplitude de ces déformations est successivement de 0.26%, 0.5%, 0.7% et enfin de 1.2%. Cet essai de fatigue cyclique par palier (figure I.30) consiste à imposer une déformation symétrique pendant quelques cycles, à augmenter l'amplitude de déformation pour à nouveau effectuer un autre paquet de cycles, et ainsi de suite.

Essais de rochet ou de déformation progressive (figure I.32)

On a introduit également dans la base expérimentale, un essai cyclique à contrainte imposée autour d'une valeur moyenne non nulle (σ_{min} = -250 MPa, σ_{max} = 300 MPa). Cet essai est précédé d'un essai d'écrouissage cyclique à déformation imposée (figures I.32a et I.32b). L'originalité de la réponse expérimentale obtenue sur cet essai de rochet est que, en dépit de l'aspect cinématique linéaire observé sur les essais de traction cités

plut haut, la déformation progressive continue à s'accumuler, et ce d'une façon non linéaire.

Le modèle retenu pour cette identification est, comme on l'a précisé plus haut, le modèle 2M1C_V avec une matrice d'écrouissage variable pour essayer de décrire au mieux l'essai de rochet.

$$\begin{aligned} B_{11} &= B_{11}^{\infty} + k(1-bq), & B_{11}^{\infty} &= a(1+\cos\beta) \\ B_{22} &= B_{22}^{\infty} + k(1-bq), & B_{22}^{\infty} &= a(1-\cos\beta) \\ B_{12} &= B_{12}^{\infty} + k(1-bq), & B_{12}^{\infty} &= a\sin\beta \end{aligned} \qquad [I.153]$$

Le tableau I.29 résume l'ensemble des 12 paramètres du modèle 2M1C_V retenus pour cet identification.

β (°)	a	k	η	Q_0	Q_M	μ	b	K	n	A_1	A_2
9.07	309386	8936	0.5	886	1000	244	1.84	633	12.4	1.62	1.75

Tableau I.29 : Paramètres de l'acier 17-12 SPH, modèle 2M1C
(deux mécanismes viscoplastiques)

Les modules d'écrouissage cinématique sont obtenus en remplaçant en remplaçant les valeurs numériques du tableau I.29 dans les équations I.131 :

$$\begin{aligned} B_{11} &= 615000 + 90000(1-1.84q) \\ B_{22} &= 3900 + 90000(1-1.84q) \\ B_{12} &= 50000 + 90000(1-1.84q) \end{aligned} \qquad [I.154]$$

Pour l'écrouissage isotrope, on a choisit de garder à zéro le rayon initial d'élasticité (R_0=0). Ceci a été compensé par les fortes valeurs des coefficients de "localisation" A_1 et A_2. Quant au paramètre réglant la mémoire, on l'a fixé à la valeur conseillée par Chaboche (1979) : η=0.1. L'identification sur cette base expérimentale a été faite, comme pour l'Inconel 718, à l'aide du logiciel d'identification Sidolo.

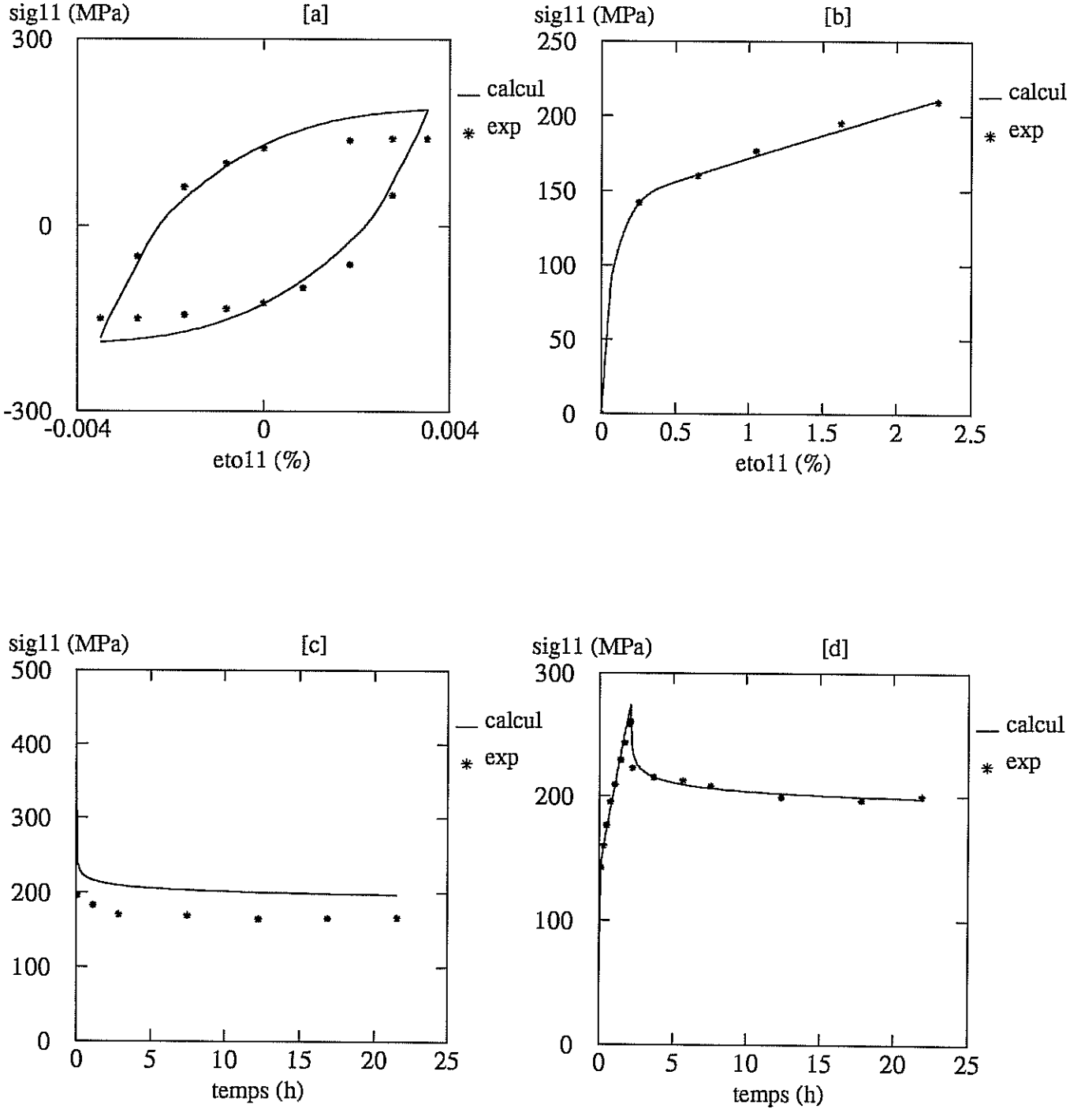


Figure I.28 : Identification sur le 17-12 SPH, modèle 2M1C.

[a] Traction-compression symétrique, vitesse rapide (10^{-4} s^{-1}).

[b] Traction simple, vitesse lente (10^{-6} s^{-1}).

[c] Relaxation, vitesse de chargement rapide (10^{-4} s^{-1}).

[d] Relaxation, vitesse de chargement lente (10^{-6} s^{-1}).

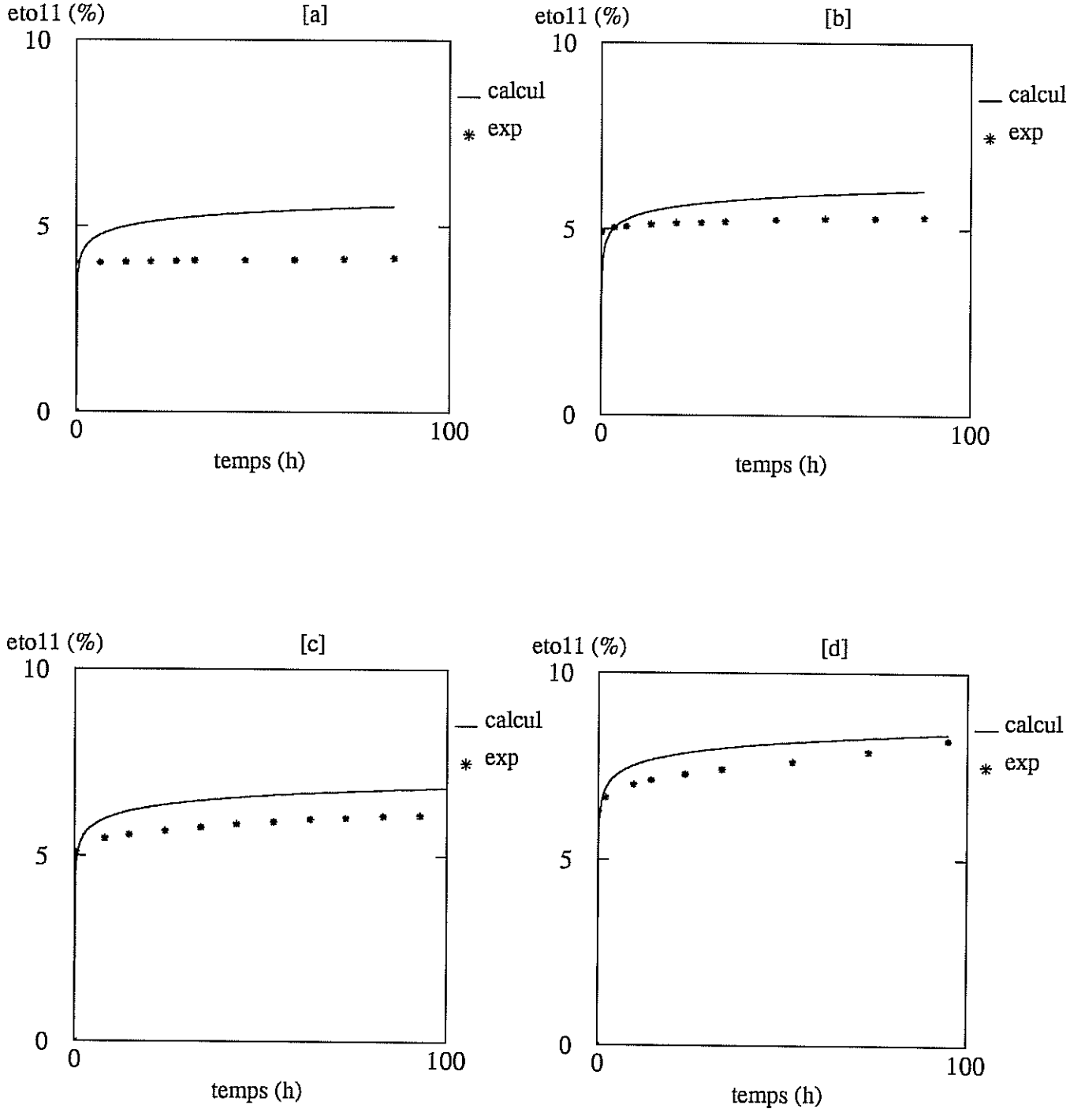


Figure I.29 : Identification sur le 17-12 SPH, modèle 2M1C, essais de fluage.

[a] 236 MPa.

[b] 246 MPa.

[c] 263 MPa.

[d] 295 MPa.

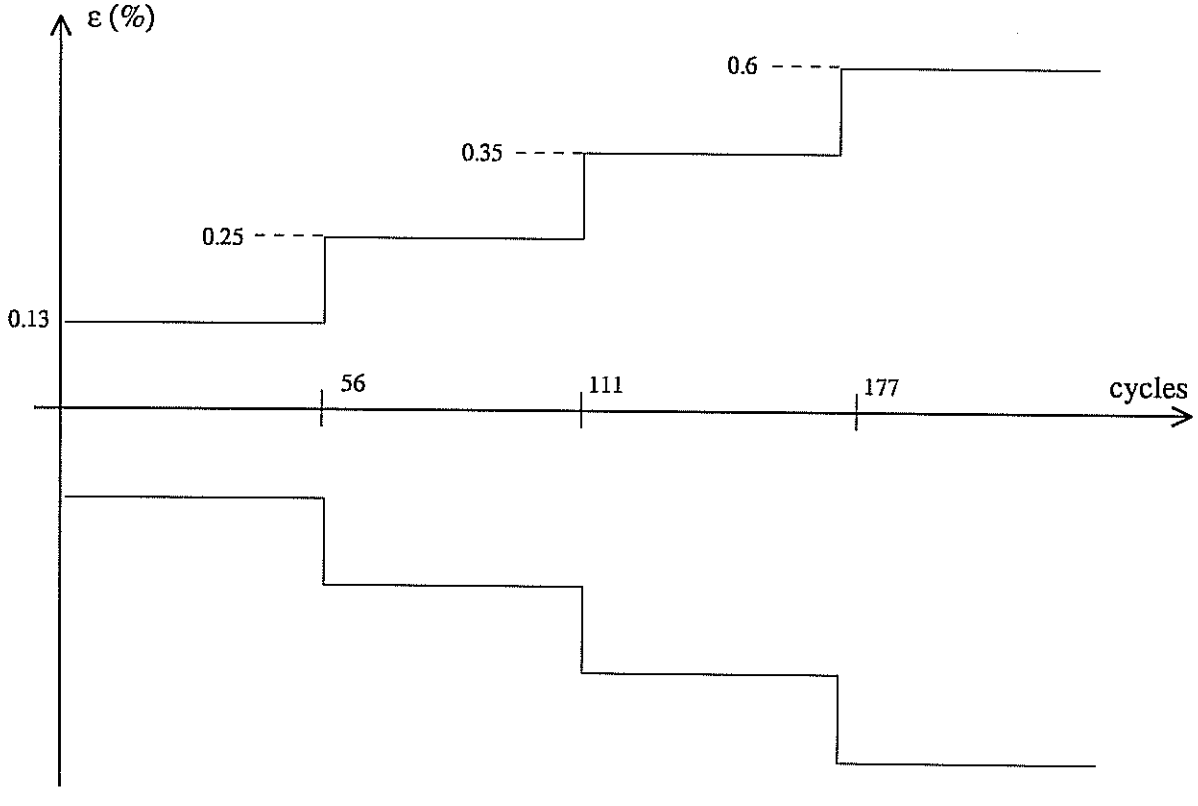


Figure I.30 : Chargement d'un essai incrémental.

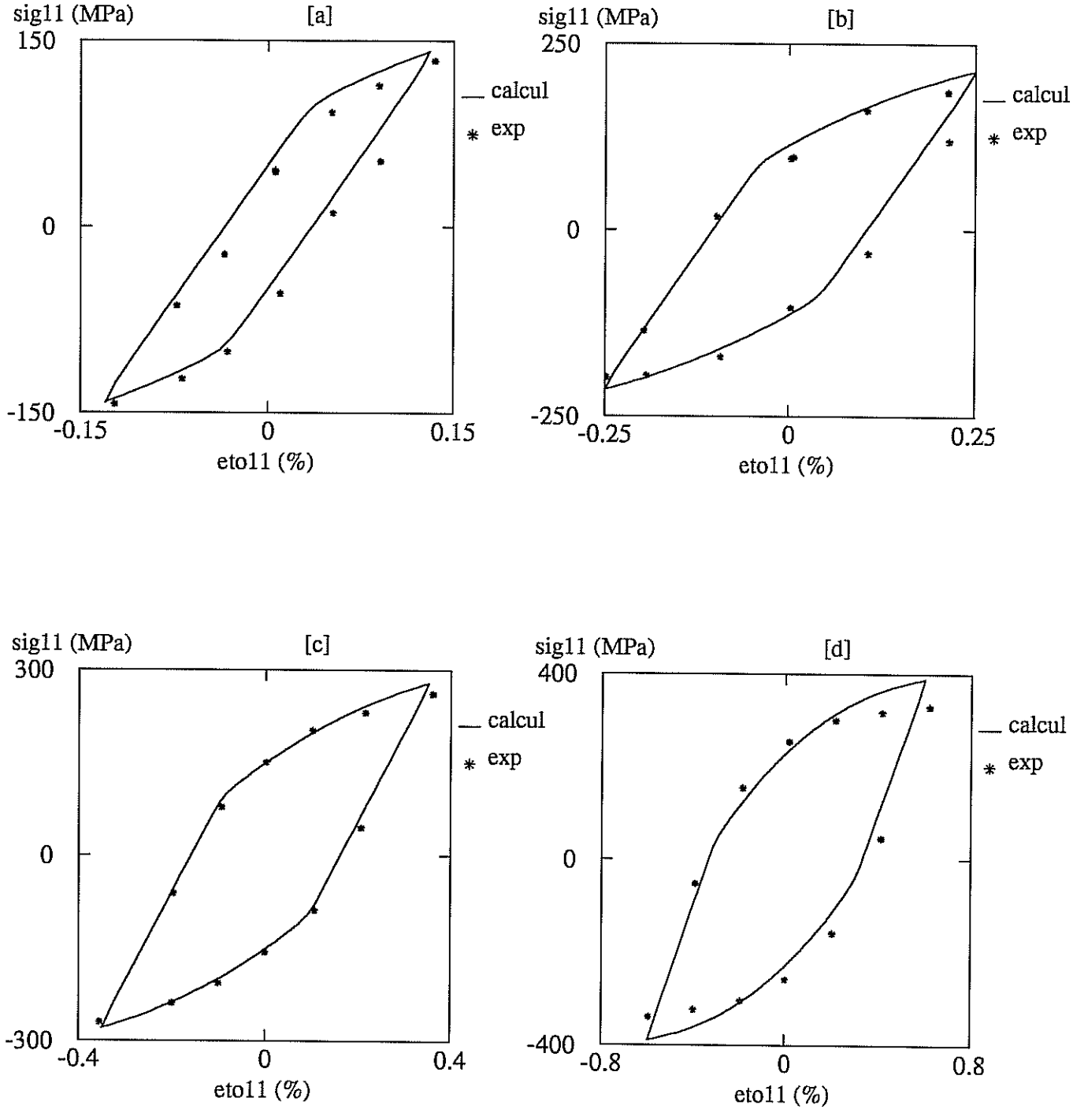


Figure I.31 : Identification sur le 17-12 SPH, modèle 2M1C, essai incrémental (cf. fig. I.28).

[a] Cycle 35.

[b] Cycle 111.

[c] Cycle 165.

[d] Cycle 227.

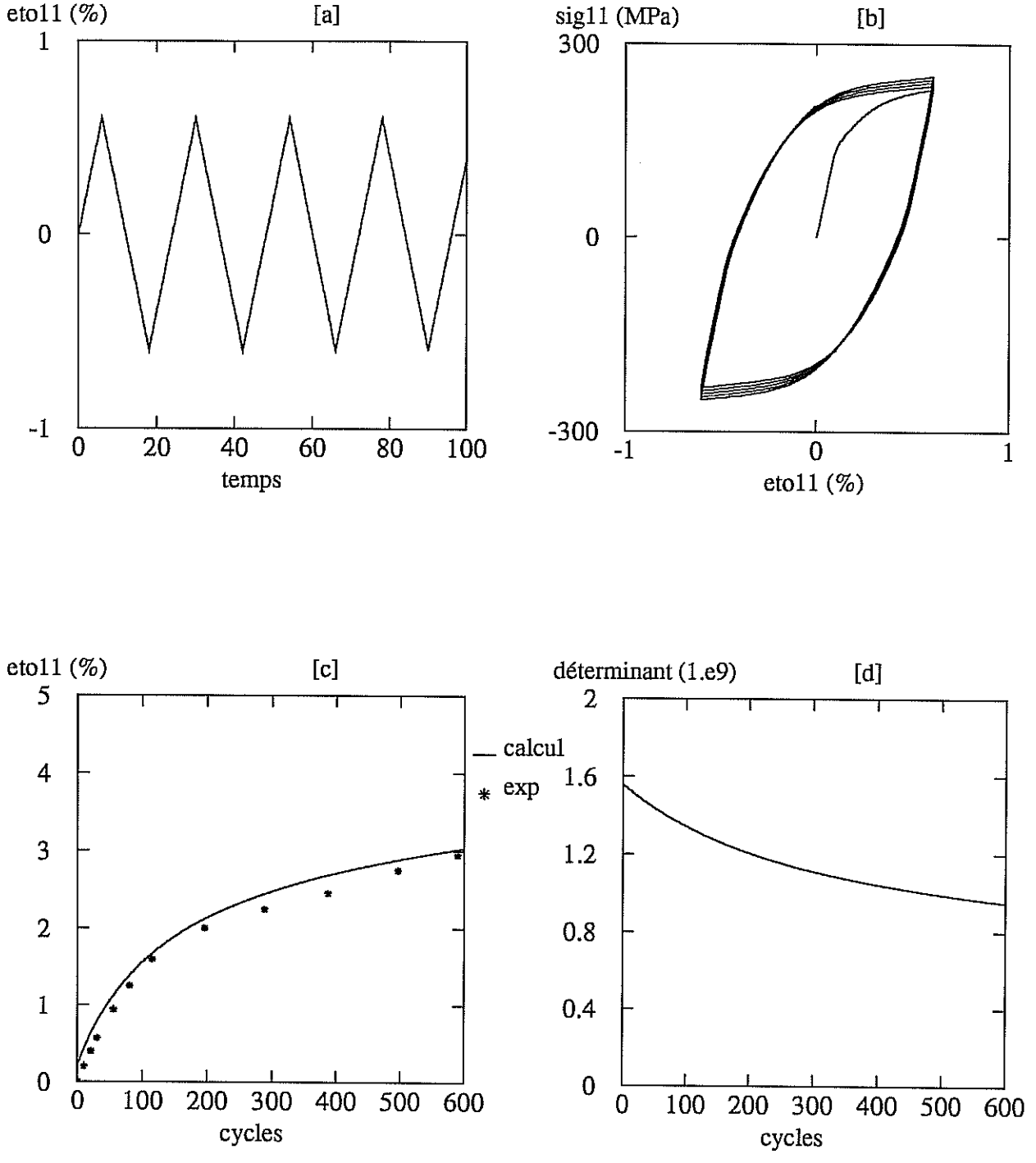


Figure I.32 : Identification sur le 17-12 SPH, modèle 2M1C, essai de rochet.

[a] Chargement de l'essai de pré-écrouissage.

[b] Réponse de l'essai de pré-écrouissage.

[c] Rochet uniaxial.

[d] Déterminant de la matrice d'écrouissage cinématique.

I.11. Conclusion

La première remarque qu'on voudrait souligner est que l'héritage acquis du modèle ddi a été bien sauvegardé. En effet, le modèle 2M2C est aussi bien capable de décrire l'effet de vitesse classique des matériaux viscoplastiques que l'effet de vitesse inverse produit par certains aciers inoxydables. Ce modèle sait également prendre en compte d'une façon correcte l'interaction entre les mécanismes inélastiques. La répartition des déformations se fait naturellement en fonction des vitesses de sollicitation.

Au travers des modèles de la littérature, on a dégagé une règle générale qui consiste à lier systématiquement les effets de rochet à la notion de surface limite.

D'autre part, les modèles 2M1C et 2M2C sont prometteurs pour simuler correctement les phénomènes de rochet.

Les identifications faites sur l'Inconel 718 et sur l'acier inoxydable 17-12 SPH ont montré la validité des modèles 2M2C et 2M1C pour décrire la plupart des effets classiques mais aussi des essais plus compliqués tels que l'effet de rochet ou le fluage en dessous de la limite d'élasticité conventionnelle.

Ils sont actuellement utilisés au Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris pour modéliser le comportement du N18 (Provendier, 1994).

Le travail réalisé ici doit être considéré comme une première approche d'une voie nouvelle qui réconcilierait les modèles à plusieurs mécanismes et les modèles unifiés. Une plus grande pratique permettra sans doute d'y voir clair pour le choix de l'une ou l'autre des formulations (2M2C-2M1C), ou peut être aller vers de nouvelles convergences entre ces modèles.

Chapitre II

Méthode de sauts de cycles

II.1. Introduction, bibliographie 101
II.2. Méthode de sauts de cycles 104
II.3. Implantation dans le code de calcul par éléments finis Zébulon 108
II.4. Application sur un élément de volume 110
II.5. Calcul d'une structure en H 114
II.6. Application à un disque de turbomachine 119
II.7.1. Modélisation du chargement 119
II.7.2 Loi de comportement 120
II.7. Application à un disque de fatigue biaxiale 126
II.7.1 Calcul complet (méthode incrémentale) 126
II.7.2. Utilisation de la méthode de sauts de cycles 127
II.8. Conclusion 134

II.1. Introduction, bibliographie

Les analyses de structures sous sollicitations cycliques nécessitent des temps de calcul considérables, en particulier, lorsque le comportement du matériau est non linéaire. Le rochet, déjà discuté au chapitre I, est un exemple typique de ces problèmes non linéaires. Pour réduire ces temps de calcul, il existe deux voies différentes. La première est de faire appel au parallélisme, qui consiste à utiliser plusieurs microprocesseurs interconnectés en réseau, appelés Transputers (Johnsson et Mathur., 1989, 1990); (Axelsson et al., 1989); (Farhat et al., 1990). Cette solution nécessite, outre l'investissement "financier" initial, un deuxième effort pour écrire ou réécrire son logiciel afin de l'adapter aux Transputers. La deuxième solution consiste à trouver des algorithmes numériques différents des méthodes incrémentales classiques.

Ainsi, Ladevèze (1989) propose une méthode dite "à grand incrément de temps". La première étape de cette méthode consiste à décrire les contraintes et les déplacements par des fonctions particulières de la forme suivante :

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_i(t) A_i(M) \qquad [II.1]$$

où t désigne le temps et M le point matériel. Les équations sont alors partagées en deux groupes : les équations de comportement locales non linéaires et les équations d'équilibre global considérées comme linéaires. Cognard et Ladevèze (1993) décrivent le fonctionnement de cette méthode. En désignant par C_1 la "courbe" qui vérifie la loi de comportement et par C_2 celle qui vérifie l'équilibre, la solution est obtenue à l'aide d'un processus itératif, où le couple contrainte-déplacement se situe tantôt sur C_1, tantôt sur C_2. La convergence est obtenue lorsqu'on se trouve à l'intersection de ces deux courbes. Cette méthode est susceptible de s'adapter aux chargements cycliques. Elle offre également l'intérêt de bien se paralléliser.

D'autres auteurs ont traité spécialement le cas des chargements cycliques :

- Débordes et Nayroles (1976) ont développé "une théorie de l'adaptation des structures élastoplastiques". Ces auteurs montrent que la majoration du travail de déformation plastique implique que les contraintes internes possèdent une limite finie. Ils se sont intéressés à la notion de coefficient de sécurité à l'adaptation. Une réduction du volume des calculs est obtenue en divisant la structure en sous-structures qui représentent des "familles d'adaptation".

- Guennouni et Aubry (1986) proposent une méthode de développement asymptotique qui consiste à étudier l'évolution moyenne d'une structure au cours d'un chargement cyclique. Ces auteurs utilisent deux échelles différentes de temps. La première est celle du "temps lent" t, alors que la seconde représente le "temps rapide" τ. Les deux variables sont liées par un changement d'échelle : $\tau=t/T$. Les termes qui dépendent à la fois de t et τ sont moyennés sur chaque période T :

$$\overline{f(x,t,\tau)} = \int_0^1 f(x,t,\tau)d\tau \qquad [II.2]$$

Par ailleurs, un développement limité est utilisé pour écrire le tenseur des contraintes ainsi que celui des déformations inélastiques :

$$\underline{\underline{\sigma}}(t) = \underline{\underline{\sigma}}_0(t,\tau) + T\underline{\underline{\sigma}}_1(t,\tau) + T^2\underline{\underline{\sigma}}_2(t,\tau)+... \qquad [II.3]$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{in}(t) = \underline{\underline{\varepsilon}}_0(t,\tau) + T\underline{\underline{\varepsilon}}_1(t,\tau) + T^2\underline{\underline{\varepsilon}}_2(t,\tau)+... \qquad [II.4]$$

Sans rentrer dans les détails de la suite des calculs, on se contente de préciser les étapes qui aboutissent à la loi d'évolution lente :
(i) On écrit la relation qui lie l'incrément de la déformation inélastique à l'incrément de la contrainte :

$$\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{in}(t) = \underline{\underline{\underline{\underline{B}}}}\ \dot{\underline{\underline{\sigma}}}(t) \qquad [II.5]$$

(ii) On remplace dans cette loi d'écoulement le tenseur des contraintes et celui des déformations inélastiques par leurs expressions (II.3 et II.4).
(iii) On identifie ensuite les puissances de T membre à membre.
(iv) On applique aux équations ainsi obtenues l'opérateur de moyennation (II.2).

Pour notre part, dans le cadre de cette étude, on propose une méthode d'intégration numérique basée sur les sauts de cycles dont l'intérêt principal est qu'elle conserve la structure générale du code de calcul, ce qui la rend très simple à implanter pour n'importe quel modèle. Elle consiste à "sauter" des cycles au moyen d'extrapolations successives, ce qui réduit le coût de calcul tout en assurant une bonne précision. Le principe de la méthode (Savalle, Culié, 1978), (Lesne, Savalle, 1989) est d'exprimer les variables du modèle mécanique en fonction du nombre de cycles. En général, dans les méthodes incrémentales classiques, on effectue des calculs pas à pas dans le temps, ce

qui conduit à des délais très longs si la redistribution des variables est lente. Une échelle liée au nombre de cycles permettra de rendre compte de l'évolution progressive des variables internes, qui se superposera à la variation "rapide" au cours du cycle.

Une partie du travail consiste à implanter cette méthode dans le code de calcul par éléments finis Zébulon (Burlet, Cailletaud, 1991) développé au Centre des Matériaux de l'Ecole des Mines de Paris. La spécificité de ce logiciel est sa richesse en lois de comportements capables de décrire précisément les réponses réelles des matériaux (Aazizou, 1990), (Aazizou et al., 1990). Cela va permettre plus tard de généraliser la méthode de saut de cycles à d'autres lois de comportements. La loi de comportement qu'on a utilisée dans un premier temps est le modèle de viscoplasticité cyclique de Chaboche (Lemaitre, Chaboche, 1988) résumé au paragraphe I.2.5. Pour valider la méthode, on a comparé, sur un exemple simple constitué par un élément de volume, les résultats obtenus d'une part en utilisant une méthode incrémentale où l'on fait l'intégration pas à pas dans le temps et d'autre part la méthode de sauts de cycles.

Dans un deuxième temps, on a utilisé la méthode de sauts de cycles pour un exemple académique : cette structure est constituée de trois matériaux différents, qui, ayant des limites d'élasticité différentes, permettent de générer des redistributions de contraintes.

Le calcul suivant est effectué sur un disque de turbomachine. Cet exemple industriel est intéressant dans la mesure où la pièce est soumise à un chargement mécanique et thermique complexe.

Enfin on a appliqué la méthode de sauts de cycles à une structure de laboratoire, les spécificités de ce dernier exemple sont d'une part la très forte non linéarité du comportement et d'autre part la très lente redistribution des variables internes.

II.2. Méthode de sauts de cycles

Le principe de la méthode est d'exprimer l'évolution des variables internes en fonction du nombre de cycles Y(N) et non plus en fonction du temps y(t).

$$Y(N) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1(N) \\ \underline{\underline{\alpha}}^2(N) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^v(N) \\ v(N) \end{bmatrix} \qquad [II.6]$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\alpha}}^1(t) \\ \underline{\underline{\alpha}}^2(t) \\ \underline{\underline{\varepsilon}}^v(t) \\ v(t) \end{bmatrix} \qquad [II.7]$$

Pour cela on choisit un instant particulier τ dans le cycle : $0 \le \tau \le T$ et on définit la valeur de Y au cycle N par :

$$Y(N) = y((N-1)T + \tau) \qquad [II.8]$$

T représente la période d'un cycle. Ensuite on fait un développement de Taylor au second ordre de Y(N) afin de pouvoir suivre l'évolution des variables internes au cours des cycles :

$$Y(N + \Delta N) \approx Y(N) + Y'(N)\Delta N + Y''(N)\frac{\Delta N^2}{2} \qquad [II.9]$$

Il faut déterminer en premier lieu les dérivées première et seconde de Y, soit Y'(N) et Y" (N), et choisir ΔN pour que le développement de Taylor soit suffisamment représentatif. On va supposer pour cela que, pour trois cycles assez proches, les variables internes ont une évolution parabolique. On montrera par la suite dans les exemples que cela est très suffisant et qu'on peut même se contenter dans certains cas d'une évolution linéaire. Considérons donc trois cycles (figure II.1) M, N et K (M < N < K) pour lesquels les vecteurs des variables internes Y (M), Y(N) et Y(K) sont connus. La dérivée première est évaluée par :

$$Y'(N) = \frac{Y(K) - Y(N)}{K - N} \qquad [II.10]$$

En posant :

$$N = M + \Delta N \qquad [II.11]$$

On tire de [II.9] l'expression de la dérivée seconde :

$$Y''(N) = \frac{2}{(N-M)^2}[Y(M) - Y(N) + (N-M)Y'(N)] \qquad [II.12]$$

La détermination de ΔN s'effectue en supposant que le terme du second ordre est négligeable devant le terme du premier ordre, et ceci pour chaque composante du vecteur Y (N).

$$\frac{1}{2}Y''(N)(N-M)^2 << Y'(N)(N-M) \qquad [II.13]$$

ou encore :

$$(N-M) = \Delta N << \frac{2Y'(N)}{Y''(N)} \qquad [II.14]$$

Pour remplir cette condition, on introduit un facteur de précision, η, qui doit être tel que :

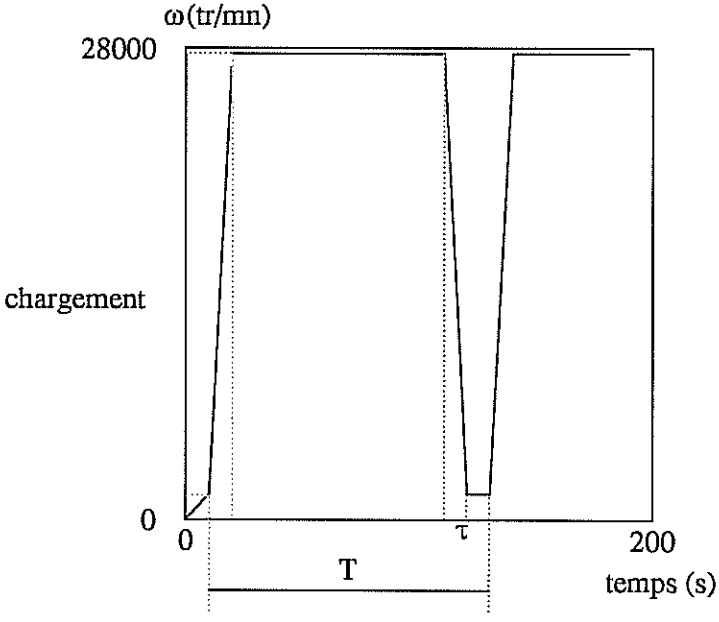
$$\Delta N_i = 2\eta \frac{Y'_i(N)}{Y''_i(N)} \qquad [II.15]$$

On verra qu'en pratique une valeur de l'ordre de 0.01 pour le facteur de précision η est suffisante pour avoir des résultats acceptables.

On obtient dix-neuf valeurs différentes de ΔN; en effet Y (N) contient trois tenseurs $\underline{\underline{\alpha}}^1$, $\underline{\underline{\alpha}}^2$ et $\underline{\underline{\varepsilon}}^v$ de six composantes chacun plus un scalaire qui est la déformation viscoplastique cumulée v. En toute rigueur, il faut prendre pour ΔN le minimum de ces valeurs. On constatera dans les exemples qu'une estimation à partir de v donne des résultats satisfaisants.

Cette méthode est implantée dans le code de calcul par éléments finis Zébulon. La technique de programmation est expliquée dans le paragraphe suivant. L'utilisation de la méthode est assez simple et nécessite très peu de paramètres. Cette méthode possède

un autre avantage qui est le calcul automatique du nombre de cycles à sauter. D'autre part, l'utilisateur peut se contenter de préciser uniquement le paramètre τ. Cet instant doit être choisi, de préférence, à un instant du cycle où le comportement est élastique.



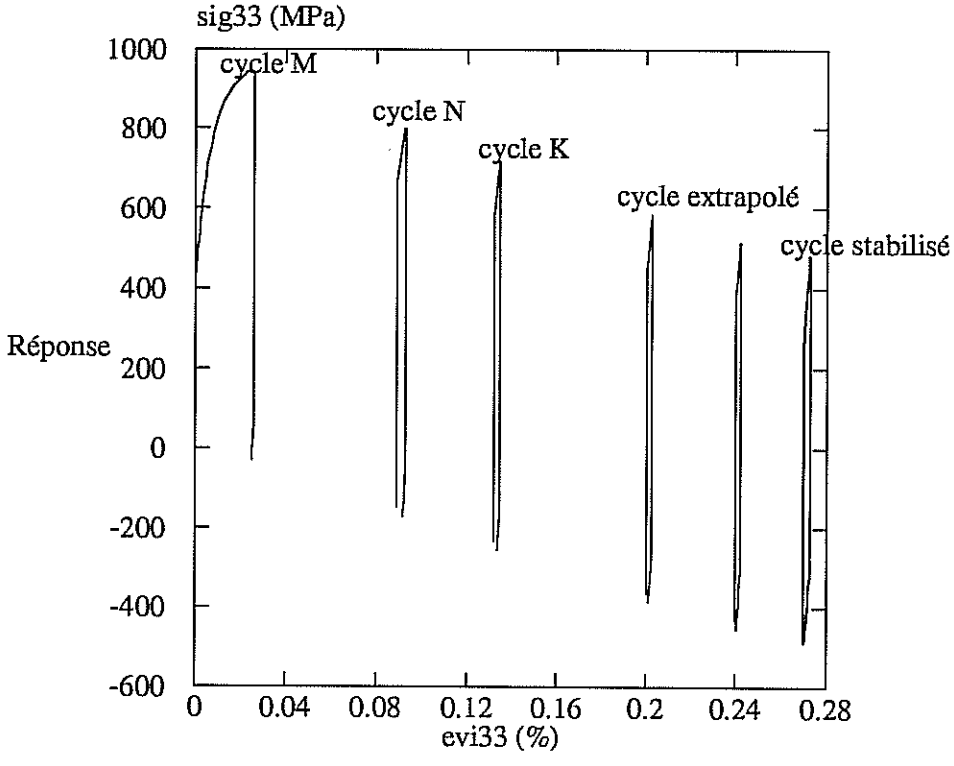


Figure II.1 : Méthode de sauts de cycles.

II.3. Implantation dans le code de calcul par éléments finis Zébulon

Zébulon dispose de plusieurs algorithmes de résolution aussi bien au niveau local qu'au niveau global. On a choisi la θ-méthode pour l'intégration de la loi de comportement viscoplastique sur les points de Gauss. Au niveau de la résolution de l'équilibre global on a utilisé l'algorithme de Newton-Raphson qui est très efficace pour les calculs de petite taille ce qui est le cas pour les exemples traités plus loin dans ce chapitre. Ces choix sont faits au niveau de la mise en donnée de Zébulon, ce qui permet de combiner la méthode de saut de cycles avec tous les algorithmes qui existent dans Zébulon.

L'implantation de la méthode de saut de cycles est expliquée par l'organigramme de la figure II.2. On fait un test à chaque fin de séquence de chargement : si cette dernière coïncide avec l'instant τ, on enregistre les valeurs des variables internes dans un fichier. Quand le nombre de cycles cumulés dans ce fichier atteint un nombre suffisant pour calculer les deux premières dérivées, on fait une tentative de saut. Ceci consiste en une évaluation du nombre de cycles à sauter et une incrémentation des variables internes. La tentative de saut correspond à une résolution d'équilibre supplémentaire, où on cherche à rééquilibrer la structure après extrapolation des variables internes. Le saut sera réputé réussi si on obtient une convergence numérique à cette étape. Le calcul incrémental reprend alors à partir du nouvel état trouvé, jusqu'à ce qu'on atteigne de nouveau le nombre de cycles nécessaires pour le saut suivant. L'opération se déroule d'une façon automatique sans intervention de l'utilisateur.

Au niveau de l'utilisation, il suffit d'indiquer par une carte dans le fichier de mise en données la séquence du cycle à laquelle s'effectue le saut de cycle et à laquelle on reprend le calcul après chaque tentative de saut. D'autres coefficients sont disponibles en option : le facteur de précision, le nombre de cycles minimum à effectuer avant chaque tentative de saut pour "restabiliser" le comportement de la structure, et enfin les numéros de trois cycles qui vont permettre l'évaluation des dérivées et par conséquent de définir le nombre de cycles à sauter.

La syntaxe des commandes à écrire dans le fichier de mise en données Zébulon pour utiliser la méthode de sauts de cycles est décrite en annexe III pour les différents exemples de ce chapitre.

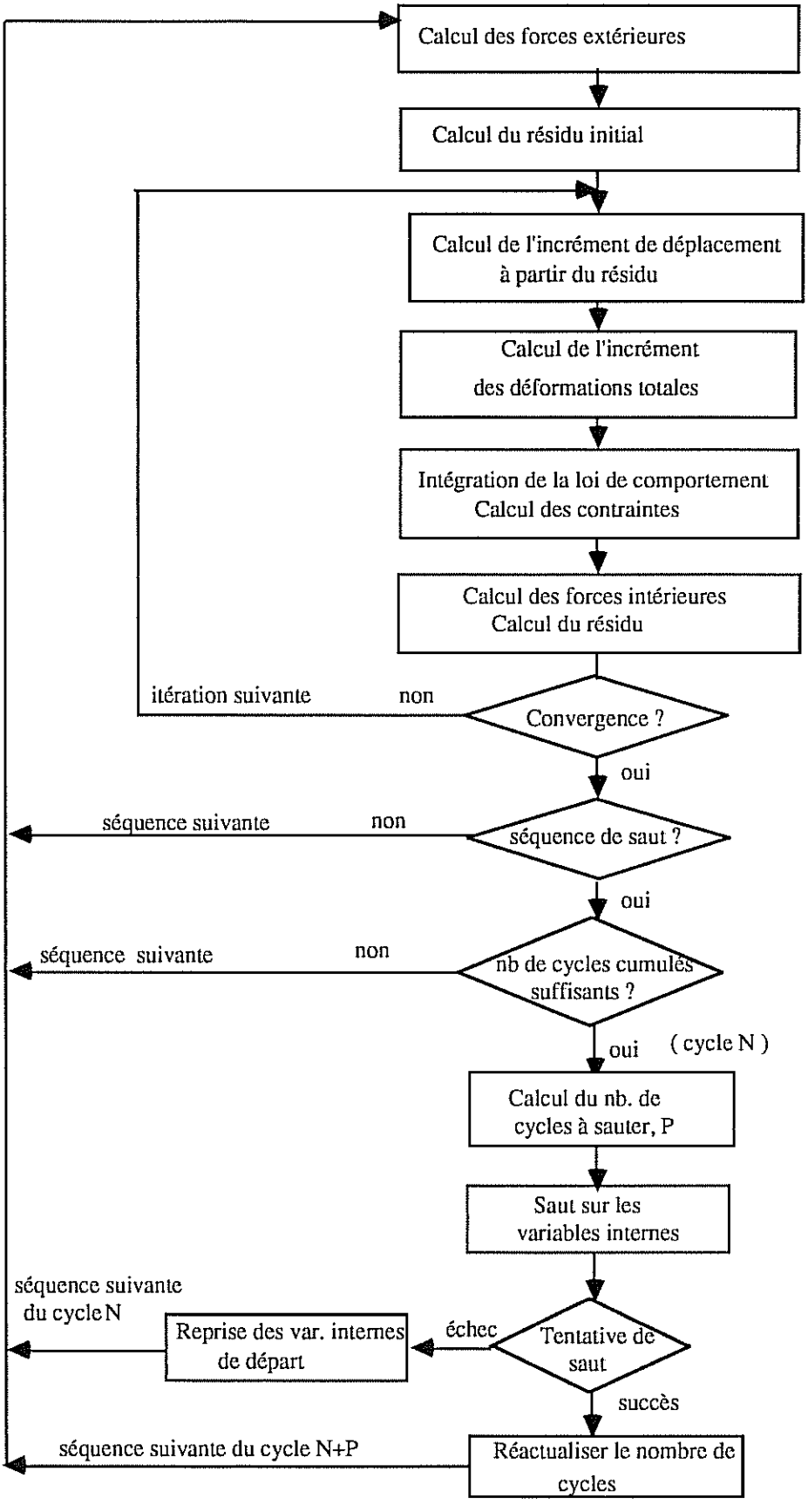


Figure II.2 : Schéma général de la méthode de saut de cycles.

II.4. Application sur un élément de volume

Ce test consiste à simuler la réponse mécanique d'un élément de volume en contraintes planes soumis au chargement indiqué par la figure II.3. Il s'agit d'appliquer une pression asymétrique alternée sur le côté supérieur de l'élément de volume. D'autre part on fixe verticalement l'arête inférieure. En plus, on impose un déplacement nul suivant l'axe 1 à un point de l'arête gauche.

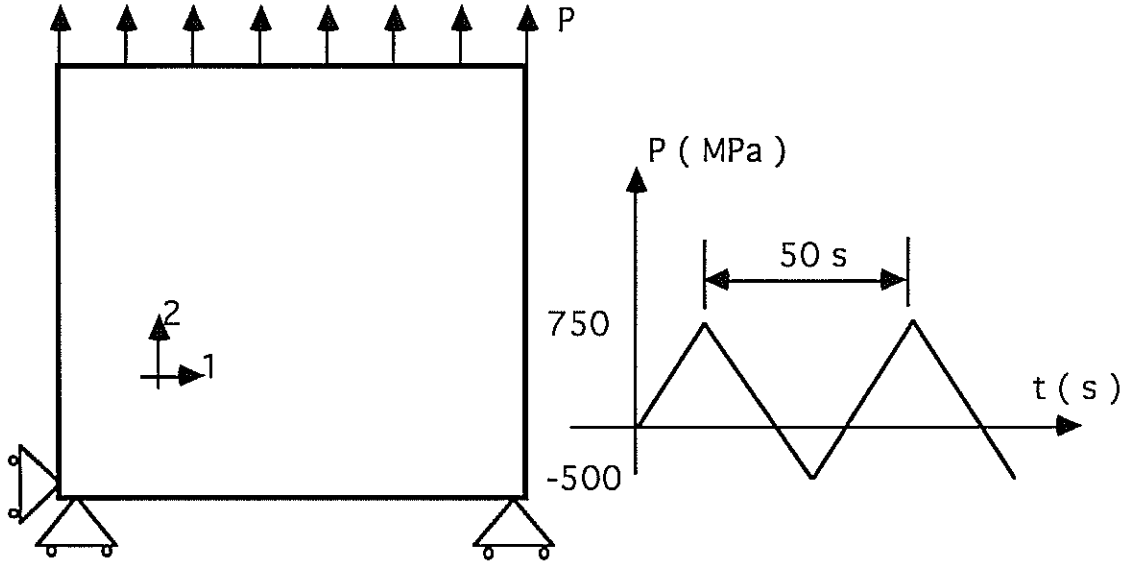


Figure II.3 : Conditions aux limites et chargement.

On utilise la loi de comportement viscoplastique de Chaboche (1978) citée au paragraphe I.2.5, les coefficients du matériau utilisé sont donnés dans le tableau II.1. Une seule composante de l'écrouissage cinématique est exploitée dans cet exemple. L'évolution de cette variable cinématique est non linéaire. Ce choix, combiné avec le chargement asymétrique appliqué, provoque un comportement de rochet dans l'élément de volume.

E(GPa)	ν	K(MPa,s)	n	Q(MPa)	b	R_0(MPa)	C_1 (GPa)	D_1
100	0.3	300	8	50	5	450	120	400

Tableau II.1 : Coefficients du matériau utilisé.

Tout d'abord, on effectue la simulation de trois cents cycles avec la méthode pas à pas dans le temps. Ensuite on fait le même calcul avec la méthode de sauts de cycles en prenant un facteur de précision de 0.08. Pour assurer une bonne stabilité du calcul, on décide d'effectuer cinq calculs successifs après chaque saut. Le déroulement du calcul est résumé dans le tableau II.2.

numéro de la tentative de saut	ΔN	numéro de la tentative de saut	ΔN
1	11	7	10
2	12	8	19
3	13	9	20
4	15	10	30
5	16	11	33
6	18	12	34

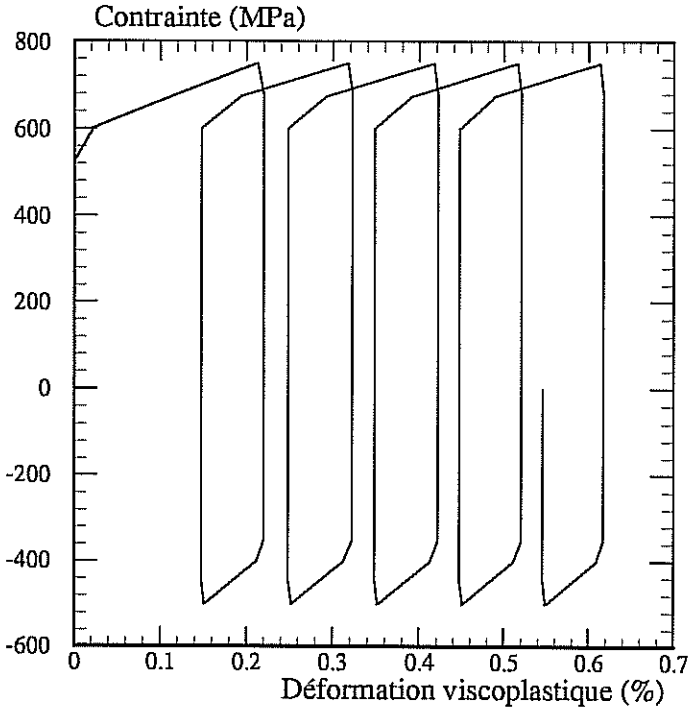
Tableau II.2 : Déroulement du calcul.

Cinquante cinq cycles (onze tentatives x cinq cycles) sont calculés au lieu de trois cents ce qui fait gagner un temps considérable tout en gardant une précision très acceptable dans les résultats obtenus.

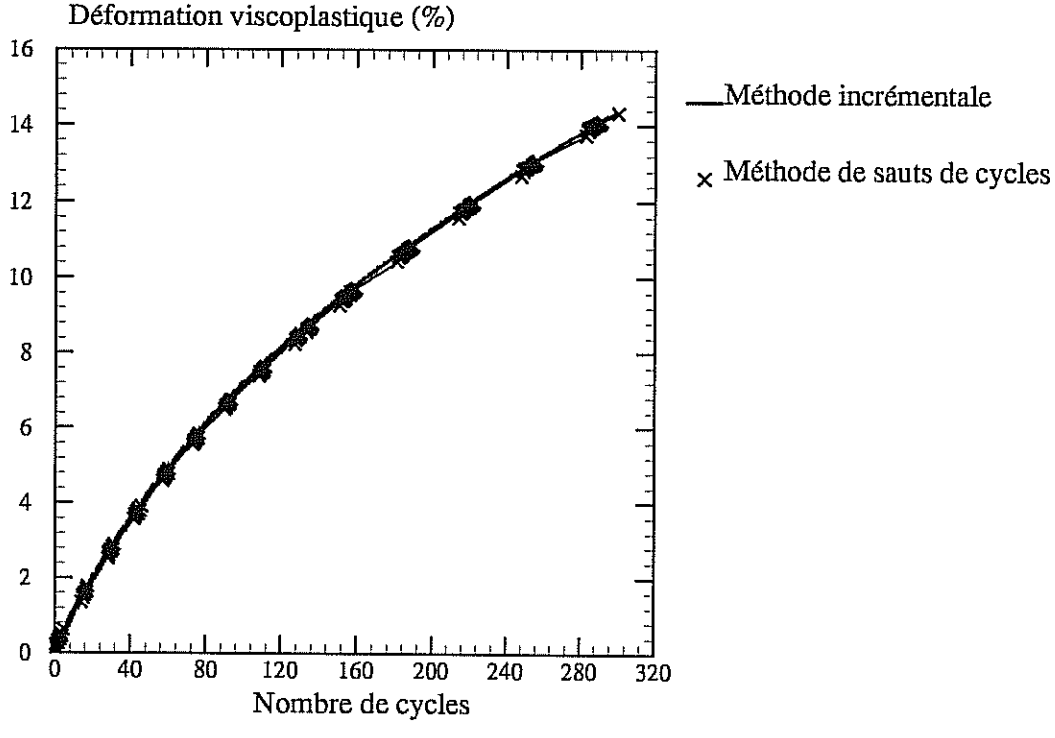
La courbe présente dans chaque cas un effet de rochet. La "stabilisation" cyclique (pas de rochet constant) n'est atteinte qu'au bout d'un grand nombre de cycles à cause de la petite valeur de b qu'on a choisie. La contrainte imposée varie entre -500 MPa et 750 MPa. Les boucles contrainte-déformation viscoplastique se déplacent alors dans le sens positif des déformations comme l'indique la figure II.4a.

Comme on travaille avec une contrainte imposée, il faut comparer la réponse des deux méthodes en traçant la variation de la déformation viscoplastique cumulée en fonction du nombre de cycles. La figure II.4b indique que l'erreur commise en appliquant la méthode de saut de cycles est très faible. Il faut noter par ailleurs que la présence de viscoplasticité "stabilise" la solution obtenue par la méthode de sauts de cycles, qui s'écarte de la solution incrémentale après le saut, mais s'en approche au cours des cycles.

La figure II.5 montre la proportion du nombre de cycles calculés effectivement par rapport au nombre de cycles sautés. L'espacement croissant entre les "colonnes" de cet histogramme est dû au fait que le comportement est moins non linéaire à la fin du calcul. Cela prouve également l'efficacité du "pas automatique" (en nombre de cycles) de la méthode qui peut être intéressant dans des calculs plus importants.



[a] : Premiers cycles.



[b] : calcul complet.

Figure II.4 : Comparaison des 2 méthodes sur un élément de volume.

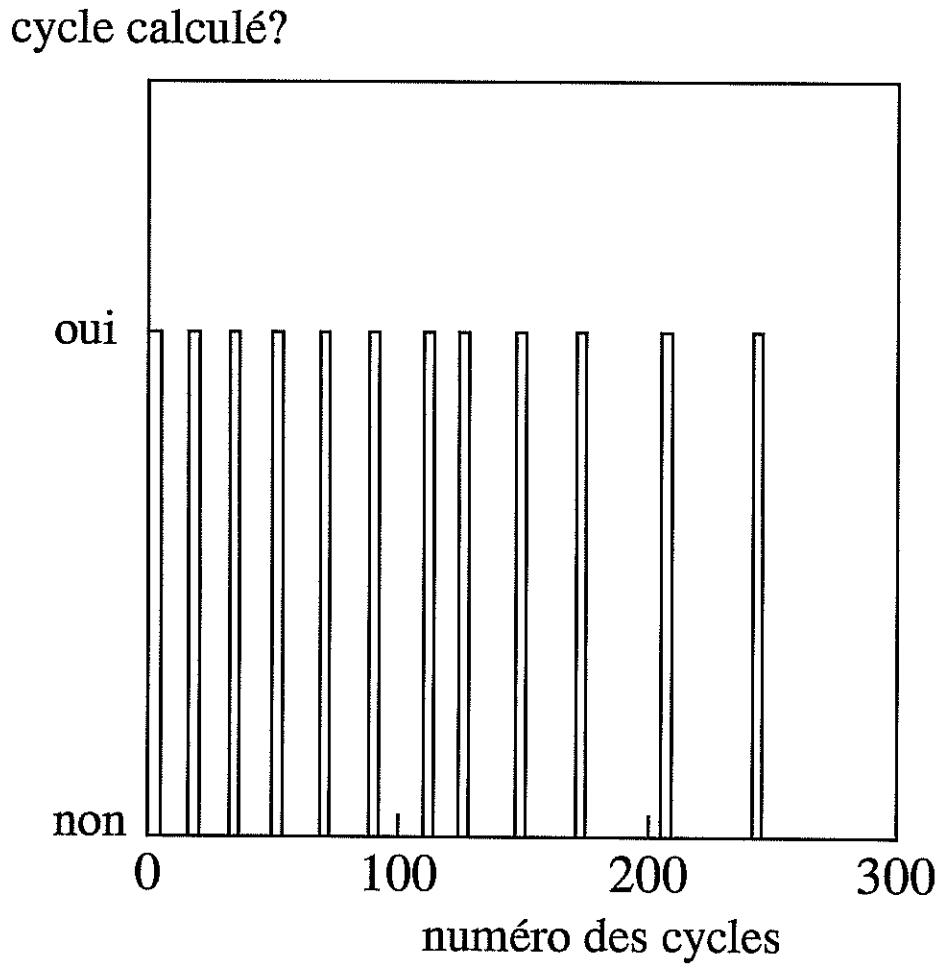


Figure II.5 : Histogramme indiquant les cycles calculés effectivement par rapport aux cycles sautés, pour l'exemple de l'élément de volume.

II.5. Calcul d'une structure en H

Dans cet exemple, on considère une structure composée de cinq éléments à huit noeuds. Le calcul est effectué en contraintes planes. La structure est constituée de trois matériaux différents. La figure II.6 montre la répartition des matériaux : les éléments 1, 4 et 5 sont supposés avoir un comportement élastique. Les éléments 2 et 3 ont des comportements viscoplastiques différents. Les coefficients de viscoplasticité sont donnés dans le tableau II.3 : il s'agit de trois jeux de coefficients différents A, B et C. Le cas A correspond à un matériau qui est cycliquement stable, le cas B présente de l'adoucissement cyclique et le cas C du durcissement cyclique.

	K(MPa,s)	n	Q(MPa)	b	R_0 (MPa)	C_1 (GPa)	D_1
El.2/A*	300	8	0	-	500	120	400
El.3/A	300	8	0	-	250	80	400
El.2/B	300	8	-150	100	650	120	400
El.3/B	300	8	-50	100	300	80	400
El.2/C	300	8	50	5	450	120	400
El.3/C	300	8	130	5	120	80	400

*El.2/A désigne les coefficients correspondant au jeu A et à l'élément numéro 2.

Tableau II.3 : Différents jeux de coefficients utilisés.

Les conditions aux limites sont les suivantes :

(i) un déplacement vertical nul des côtés (a).

(ii) une pression verticale imposée sur les côtés (b). Sa variation en fonction du temps est donnée par la figure II.7.

(iii) on impose aux noeuds des côtés (c) d'avoir le même déplacement vertical. La même condition est appliquée pour le côté (d).

Pour éviter les déplacements de solides rigides, on impose au noeud du coin bas gauche un déplacement nul dans la direction horizontale.

Le comportement de cette structure est très intéressant car la plastification de l'élément 2 permet à l'élément 3 d'être moins sollicité bien que le chargement global continue à croître. En plus, cet exemple montre l'importance du trajet de déformation (Burlet, Cailletaud, 1986). En effet, bien que dans les cas A, B et C la taille du domaine d'élasticité final soit la même (le rayon final est égal à 500 MPa pour l'élément 2 et 250 MPa pour l'élément 3), on n'aboutit pas au même état final de la structure.

Les paramètres utilisés pour la méthode de saut de cycles sont les suivants :

-facteur de précision de la méthode.....0.08,

-nombre de cycles calculés avant chaque tentative de saut.....5,

-cycles retenus pour l'évaluation des dérivées.....3, 4 et 5,

-*séquence du cycle à laquelle s'effectue le saut.....2. (cf. figure II.7)

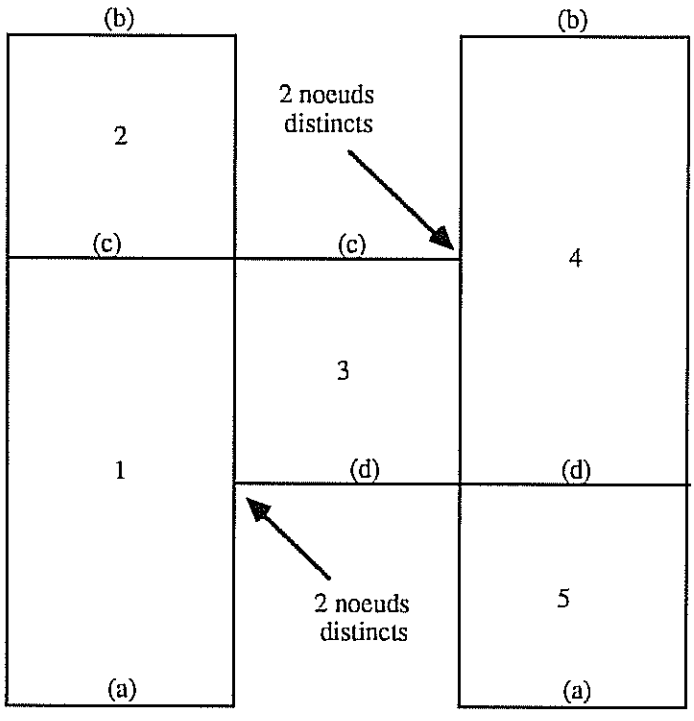


Figure II.6 : Maillage de la structure en H.

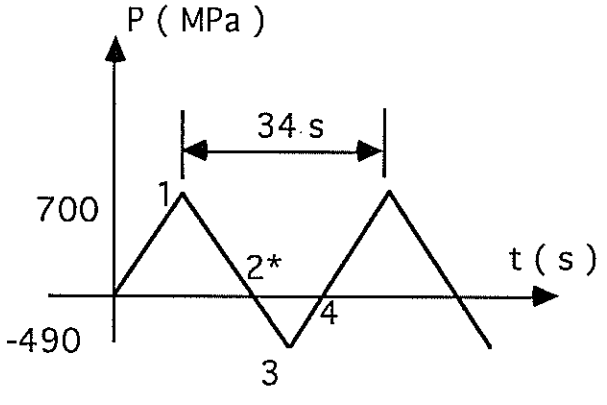


Figure II.7 : Pression imposée sur les cotés b.

La comparaison entre la méthode incrémentale et la méthode de saut de cycles est faite sur la figure II.8. On s'intéresse à l'élément 2 qui est le plus chargé. Pour illustrer l'évolution de l'amplitude de déformation on a sélectionné deux points par cycle. Ces derniers correspondent au minimum et au maximum de déformation. Les écarts obtenus entre les deux méthodes au bout de 500 cycles sont calculés de la façon suivante :

$$\text{Ecart} = \frac{(\text{vs_final} - \text{vi_final})}{\text{vi_final}} \qquad [\text{II.16}]$$

où vs_final désigne la valeur finale de la variable (contrainte ou déformation) sur laquelle on fait la comparaison en utilisant la méthode de sauts de cycles, tandis que

vi_final désigne la valeur finale de la même variable en fin de calcul utilisant la méthode incrémentale. On obtient ainsi :

Jeu de Coefficients A.....0.5%.

Jeu de Coefficients B.....0.0006%.

Jeu de Coefficients C.....2.8%.

Dans ces calculs, on s'est contenté d'un développement de Taylor du premier ordre pour calculer les variables internes après chaque saut. Les erreurs enregistrées plus haut sont cependant acceptables. Ceci prouve que la méthode est capable de traiter des cas où la non linéarité est plus prononcée. Le tableau II.4 illustre le déroulement du calcul pour les trois jeux de coefficients.

numéro de la Tentative de saut	nombre de cycles sautés (A)	nombre de cycles sautés (B)	nombre de cycles sautés (C)
1	219	0	6
2	221	0	7
3	47	1	7
4		1	9
5		2	10
6		4	11
7		8	12
8		22	14
9		219	16
10		17	11
11		39	18
12		25	20
13		12	21
14		45	22
15		9	24
16		29	25
17			27
18			29
19			31
20			33
21			35
22			23

Tableau II.4 : Déroulement du calcul pour l'exemple du H.

Comme pour l'exemple de l'élément de volume, on a reporté sur la figure II.9 l'histogramme indiquant le nombre de cycles calculés complètement comparé au nombre de cycles sautés. Pour le jeu de coefficients A, on s'aperçoit que le nombre de cycles calculés est très faible. Le jeu de coefficients C exhibe une tendance similaire à celle observée sur l'élément de volume (c.à.d. écartement des colonnes indiquant la diminution de la non-linéarité au cours des cycles). Enfin, le jeu B où l'écartement des colonnes n'est pas croissant, montre encore une fois l'efficacité du pas automatique.

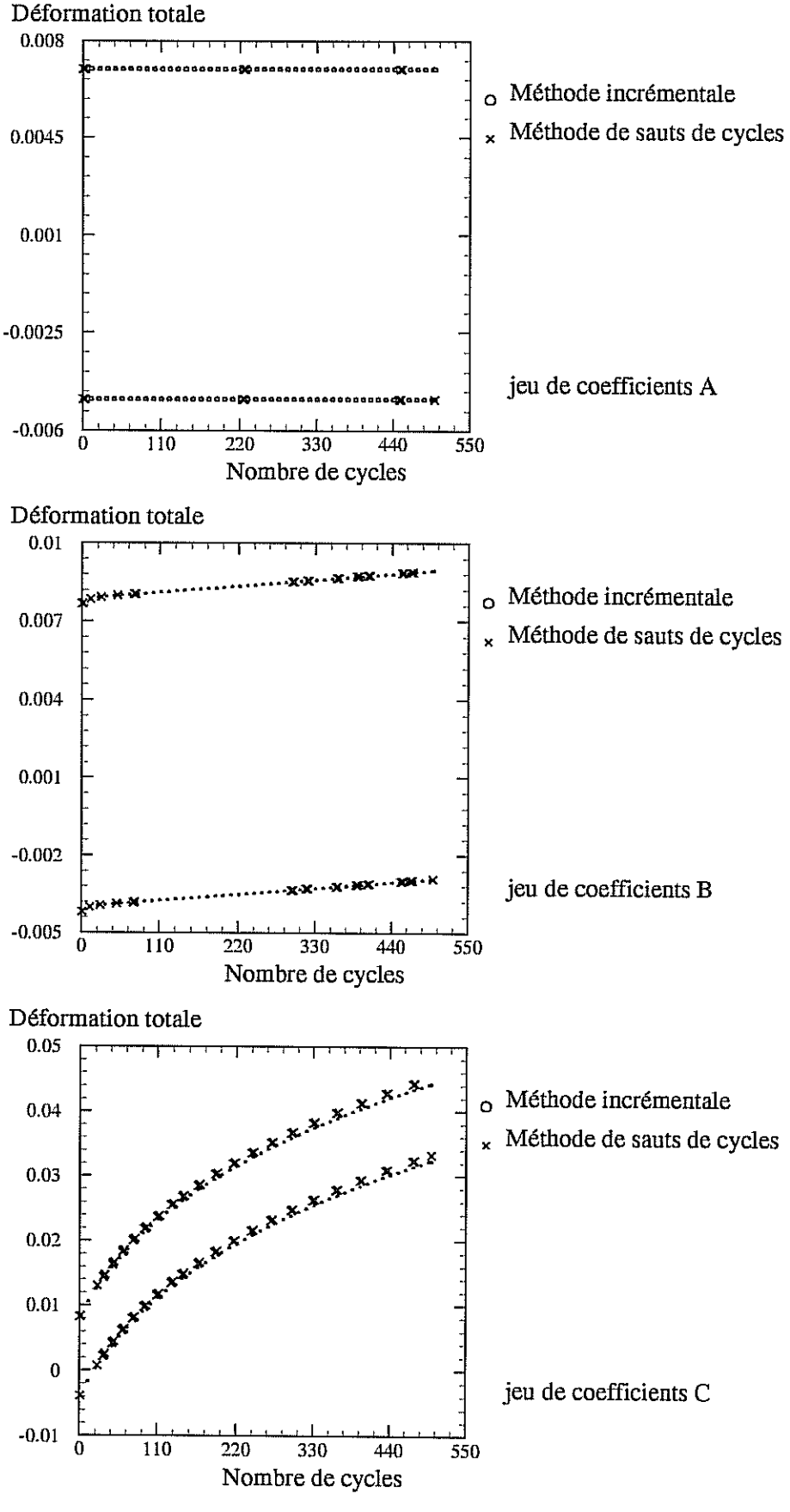


Figure II.8 : Comparaison des 2 méthodes sur l'élément 2 de la structure en H.

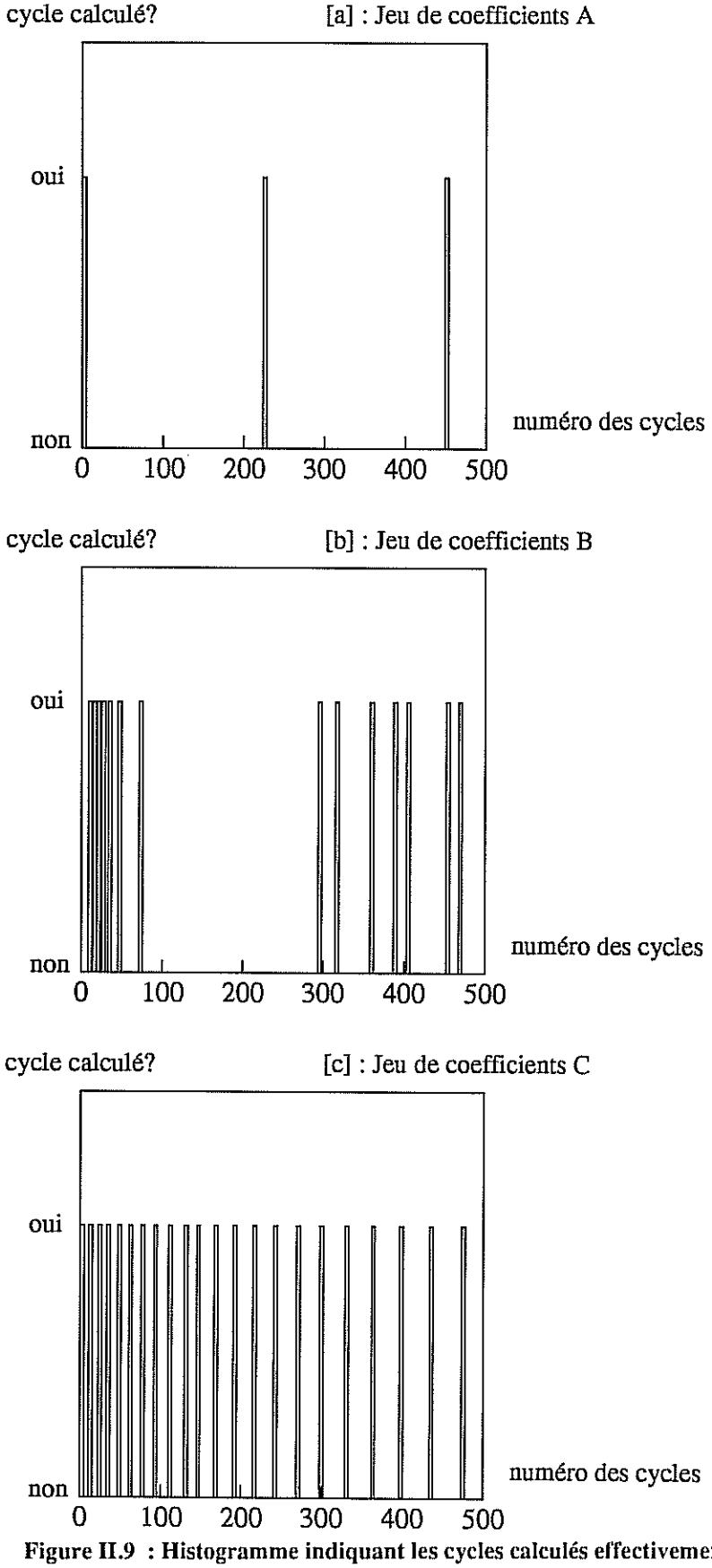


Figure II.9 : Histogramme indiquant les cycles calculés effectivement par rapport aux cycles sautés, pour toute la structure en H.

II.6. Application à un disque de turbomachine

Il s'agit de présenter une application industrielle de la méthode de sauts de cycles. La structure calculée est un disque de turbomachine. On se propose de calculer parallèlement 100 cycles avec une méthode incrémentale et avec la méthode de sauts de cycles. La structure à calculer est illustrée sur la figure II.10. Elle est représentative d'un disque situé en partie chaude du réacteur.

On a fait le choix de cette application pour deux raisons essentielles : d'une part parce que la complexité du chargement et du comportement présentent un bon test pour l'efficacité de la méthode et d'autre part parce que la loi viscoplastique utilisée décrit bien le comportement du matériau. En effet le domaine de fonctionnement du disque est celui des hautes températures où les effets de viscosité sont importants.
Dans un premier temps, on commence par décrire le maillage, le chargement et la loi de comportement du matériau. Ensuite on compare les résultats obtenus au 100 ème cycle, par la méthode de sauts de cycles et la méthode incrémentale, sur un point de contrôle de la structure.

II.7.1. Modélisation du chargement

Le maillage, les conditions aux limites et le chargement sont donnés sur la figure II.10.
Le disque est soumis aux conditions suivantes :
(i) Une vitesse de rotation qui varie en fonction du temps entre 9426 et 17300 tr/mn en une centaine de secondes (proportionnellement à la table T2).
(ii) Des forces de rappel qui modélisent d'une part la liaison avec le disque de l'étage suivant et d'autre part la force centrifuge due à l'aube. Elles varient (proportionnellement à la table T1) entre 81135 et 273920 N.
(iii) Des déplacements imposés qui varient proportionnellement à la table T1.
Par ailleurs, le disque est soumis à un champ de température variable dans l'espace et dans le temps.

La complexité de ce chargement nécessite, comme on peut le voir sur les tables T1 et T2, un passage par plusieurs incréments. Ceci a pour conséquence d'augmenter le temps d'intégration par cycle. Pour remédier à cela, on a amélioré la gestion du stockage des cycles servant à évaluer le nombre de cycles à sauter. Ainsi on peut profiter au mieux des cycles précédents et réduire le coût du calcul. En pratique, cette amélioration concerne le cas où le nombre de cycles à sauter évalué par la méthode de sauts de cycles est nul. Dans ce cas, on ne recalcule qu'un seul nouveau cycle pour faire une

nouvelle évaluation. Schématiquement, si l'évaluation de ΔN à l'aide des cycles M, N et K a donné une valeur nulle de ΔN, on refait une nouvelle estimation à l'aide des cycles M, N et K+1 au lieu de recalculer trois nouveaux cycles. Les étapes de gestion supplémentaires (décalage de tableaux) sont bien sûr moins coûteuses que des calculs de nouveaux cycles avec la méthode incrémentale.

II.7.2 Loi de comportement

Pour la modélisation de la loi de comportement, on distingue deux parties dans le disque comme l'indique la figure II.11. Les évolutions des coefficients en fonction de la température sont reportées en figure II.12. Il faut noter la faible valeur de K pour les basses températures, ce qui rend l'intégration difficile dans ce domaine. De plus, les valeurs négatives de Q provoquent un adoucissement important. Ceci a pour conséquence de diminuer la taille du domaine d'élasticité et de favoriser l'écoulement.

La figure II.13c montre l'évolution de la contrainte orthoradiale en fonction de la déformation viscoplastique orthoradiale pour les 5 premiers cycles à ce point de Gauss. Ces boucles indiquent déjà qu'il faut faire beaucoup de cycles avant d'atteindre l'état stabilisé du comportement.

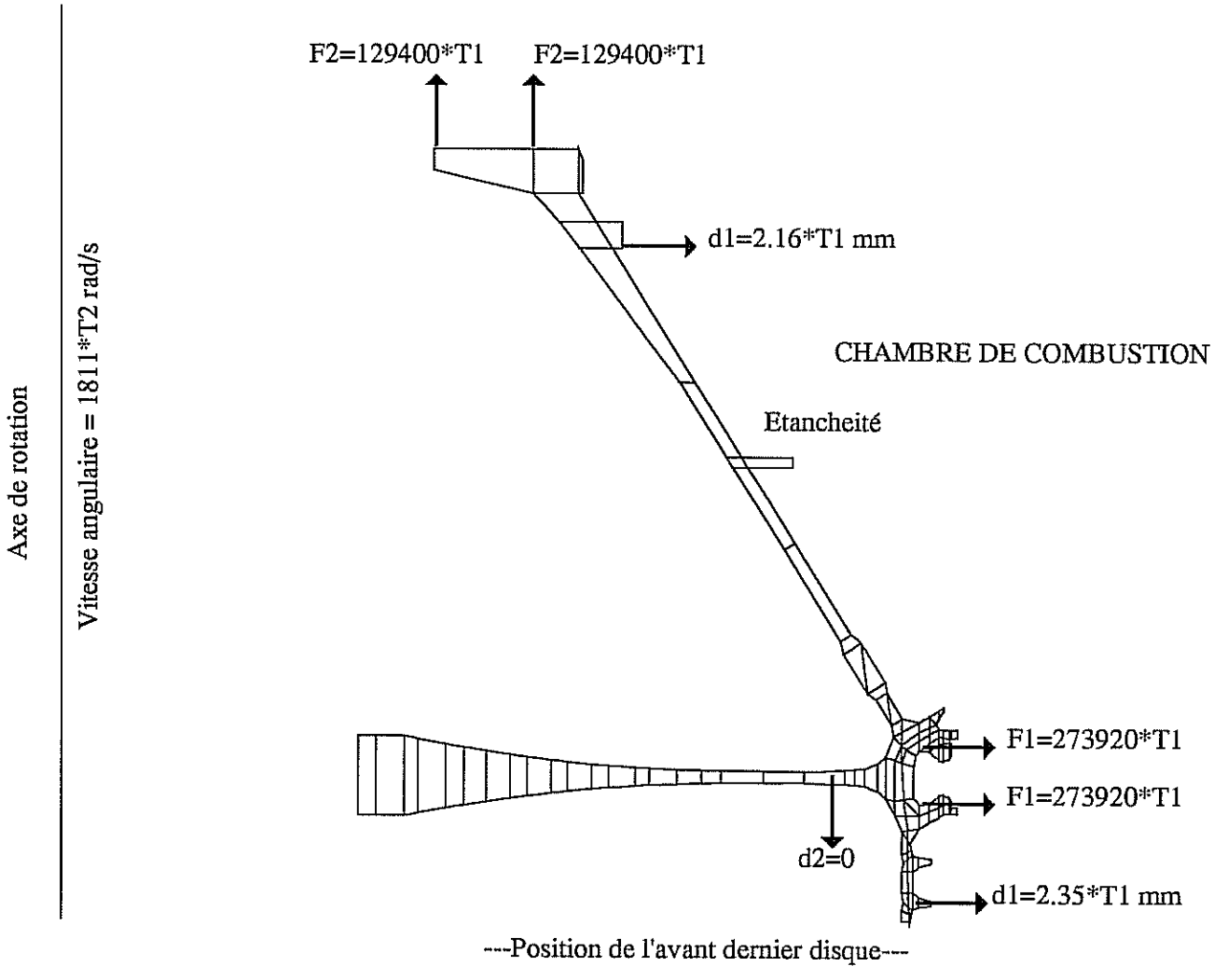
Au 100 ème cycle on compare les résultats obtenus, sur un point de Gauss situé dans la zone la plus sollicitée, par les deux méthodes incrémentale et sauts de cycles. On s'est intéressé aux valeurs des variables suivantes : d'une part, v variable interne extrapolée par la méthode de sauts de cycles (figure II.13b) et d'autre part la contrainte de von Mises (figures II.13c) qui est mise à jour à chaque saut effectué. L'erreur commise en utilisant la méthode de sauts de cycles au lieu de la méthode incrémentale est de :

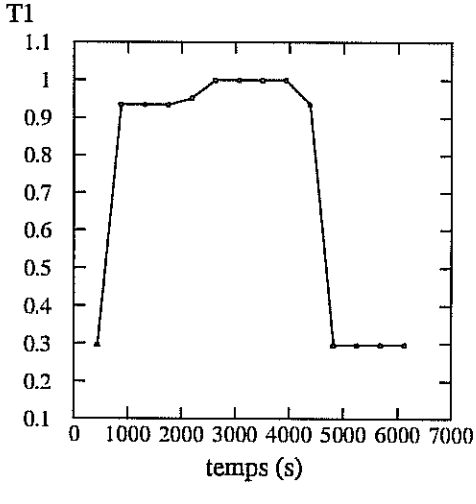
$$E_v = \frac{(vs100 - vi100)}{vi100} \qquad [II.17]$$

Dans cette expression Ev désigne l'erreur commise sur la déformation viscoplastique cumulée, vs100 la valeur de la déformation obtenue au 100 ème cycle par la méthode de sauts de cycles et vi100 la valeur de cette déformation obtenue après l'intégration de 100 cycles par la méthode incrémentale. On calcule de la même manière l'erreur commise sur la contrainte de von Mises en utilisant la méthode de sauts de cycles au lieu de la méthode incrémentale, soit :

$$E_\sigma = \frac{(\sigma s100 - \sigma i100)}{\sigma i100} \qquad [II.18]$$

Cet écart relatif est très faible (quelques millièmes seulement) aussi bien pour la déformation viscoplastique cumulée qui est une variable interne impliquée directement dans la méthode de sauts de cycles que pour la contrainte de von Mises. Le nombre de cycles effectivement calculés est de 40 cycles au lieu de 100 cycles, avec un coefficient de précision η qui vaut 0.5. L'histogramme de la figure II.13d montre qu'en dépit du faible nombre de cycles sautés, le nombre de ces derniers est croissant en fonction des cycles. Un calcul mené plus loin conduit à un pourcentage de cycles calculés beaucoup plus faible. En effet en faisant l'intégration de 500 cycles par la méthode de sauts de cycles, on ne calcule qu'une centaine de cycles sur 500. Le temps de calcul est d'environ 3 minutes CPU par cycle sur une station de travail à 2 Mflops. Le cycle stabilisé est donc atteint en 5 heures sur ce type de machine. L'utilisation de cette méthode nécessite de porter une attention particulière au coefficient de précision, pour régler le compromis à faire entre la précision du résultat final et le coût de calcul.





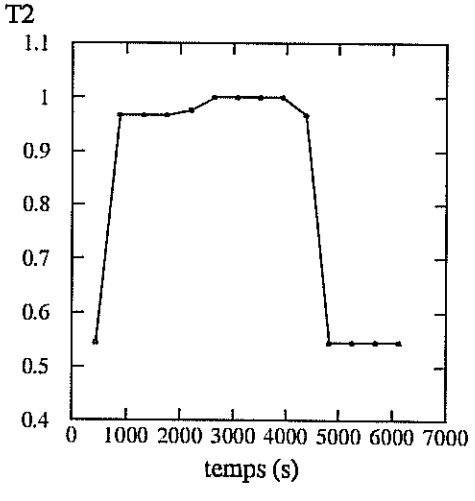


Figure II.10 : Conditions aux limites et chargement appliqués au disque de turbomachine.

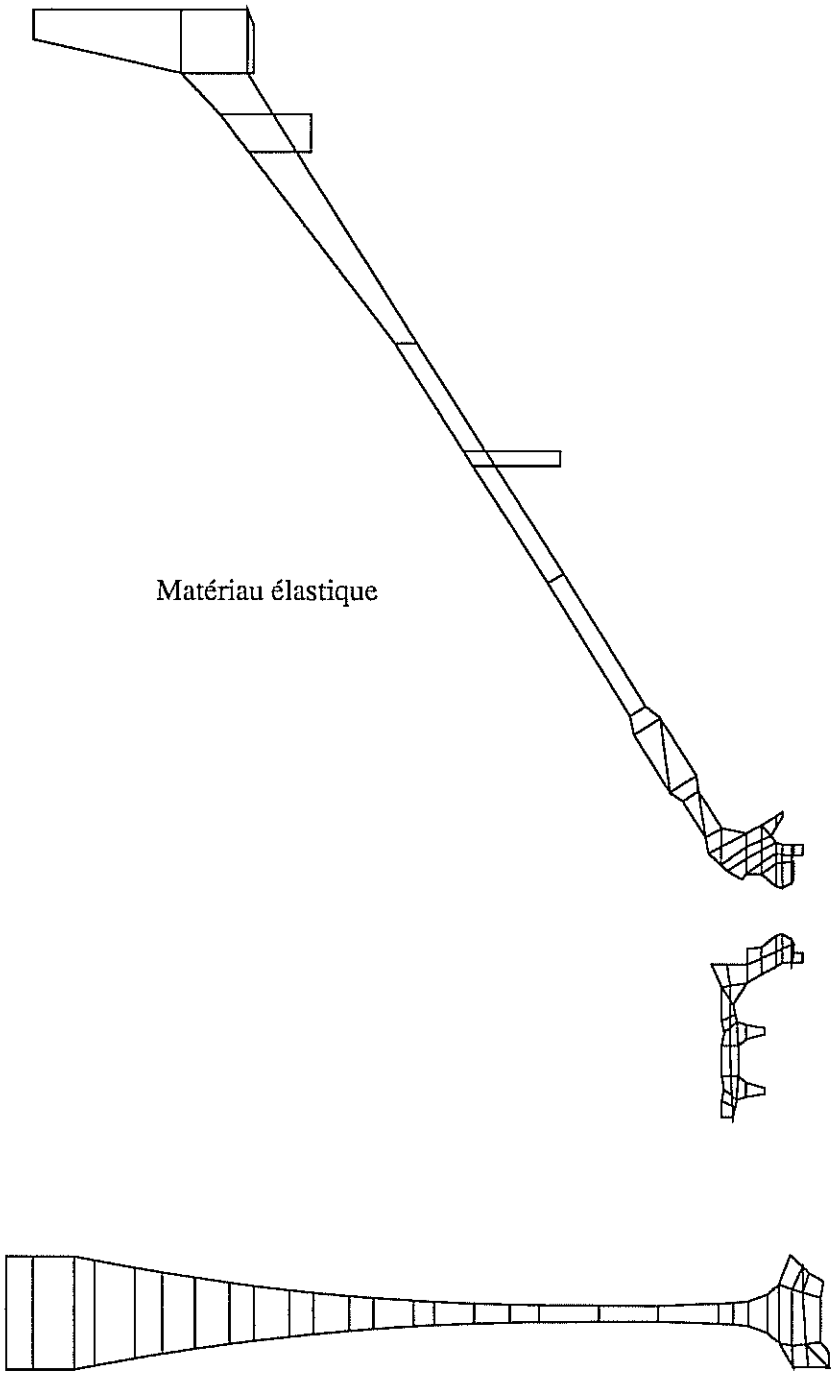
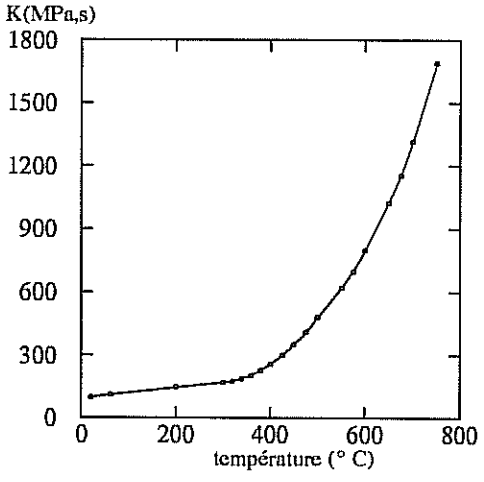
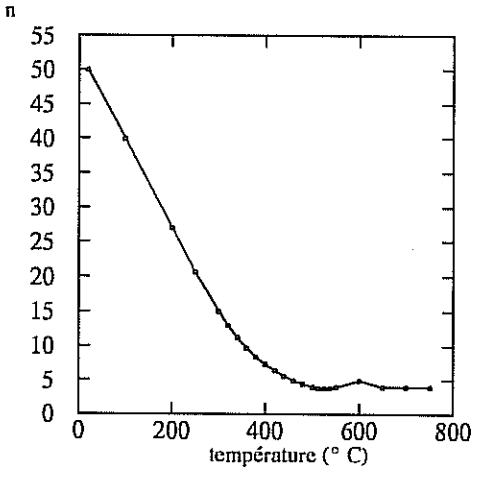
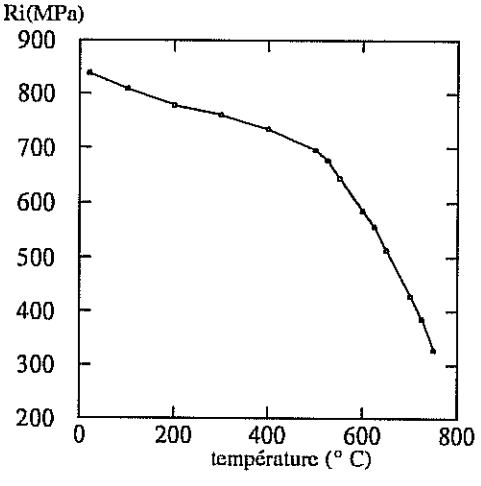
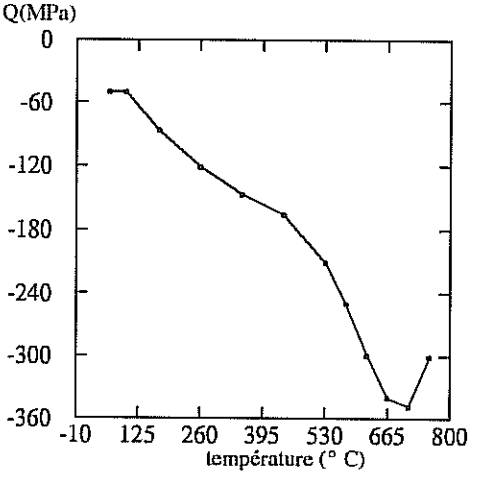


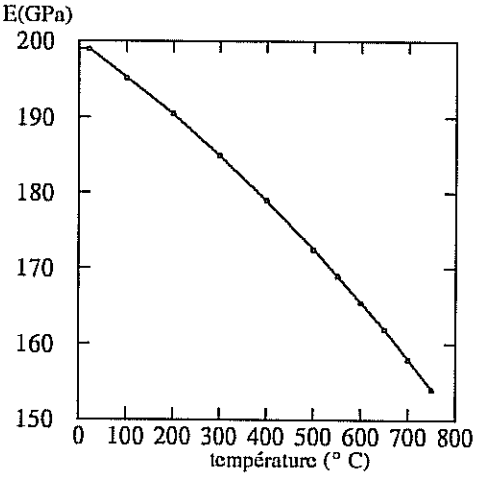
Figure II.11 : Modélisation du comportement du disque de turbomachine.











$\alpha(10^{-5})=0.000466T+1.25$
$T_{ref}=T_0=20°C$
$C_1=210$ GPa, $D_1=700$,
$C_2=9625$ MPa, $D_2=25$,
$b=10$, $\nu=0.3$, $\rho=8900 kg/m^3$

Figure II.12 : Paramètres matériau du disque de turbomachine.

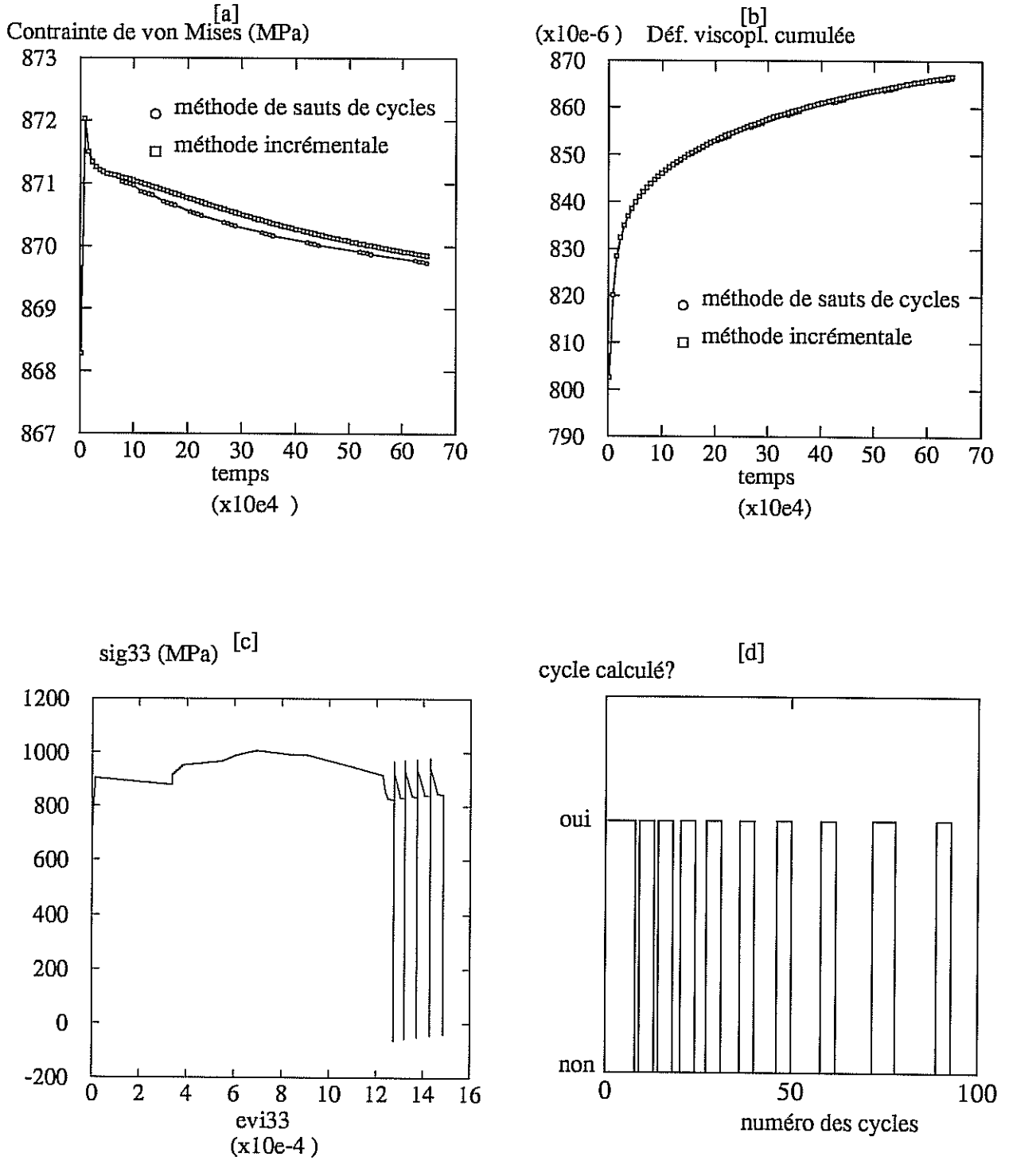


Figure II.13 : Comparaison des 2 méthodes sur le disque de turbomachine.

[a] Comparaison des 2 méthodes, contraintes.

[b] Comparaison des 2 méthodes, déformations.

[c] Courbes contrainte-déformation premiers cycles (composante orthoradiale).

[d] Histogramme des cycles effectivement calculés.

II.7. Application à un disque de fatigue biaxiale

II.7.1 Calcul complet (méthode incrémentale)

Pour conclure cette étude, on a choisi un disque de fatigue biaxiale en Inconel 718 à 550°C déjà calculé à l'ONERA (Cailletaud, Chaboche, 1984; Kruch, 1992). La structure en question est soumise à un chargement centrifuge (figure II.14). Tout le contour de la pièce est libre sauf le plan de symétrie z=0 qui est maintenu fixe suivant l'axe z. Dans un premier temps, on a réalisé le calcul cyclique en utilisant une méthode incrémentale. Cette première analyse va permettre d'avoir, comme pour les exemples précédents, une solution de référence pour la méthode de sauts de cycles. Les principaux résultats obtenus sont décrits ci-après :

- dès le premier cycle le col et surtout l'alésage se plastifient, ce qui donne lieu à un comportement adoucissant aux cycles suivants,

- au cours des cycles successifs, on constate une relaxation de la contrainte moyenne (figure II.17). En effet, le rapport $\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$ passe de 0 au premier cycle à -1 au cycle stabilisé. Le tableau II.5 résume cette évolution,

- la stabilisation complète est atteinte au cycle 500 (figure II.17),

- la relaxation de la contrainte moyenne produit une redistribution spatiale entre le col et l'alésage (figures II.15 et II.16).

numéro de cycle		1	18	40	107	196	500
$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$	au col	0	-0.25	-0.36	-0.6	-0.84	-1
$\frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}}$	à l'alésage	0	-0.6	-0.8	-0.99	-1	-1

Tableau II.5 : Evolution de la contrainte moyenne au cours des cycles.

ρ(kg/m3)	E(GPa)	ν	K(MPa,s)	n	Q(MPa)
8100	199	0.3	50	20	-200
b	R_i (MPa)	C_1 (GPa)	D_1	C_2 (GPa)	D2
4	400	13675	7500	68	400

Tableau II.6 : Coefficients de l'Inco718 à 550°.

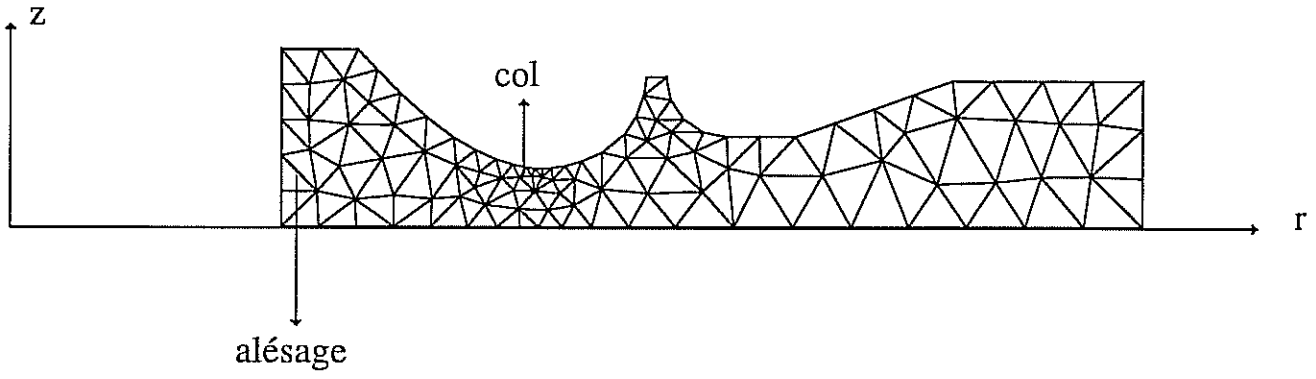
II.7.2. Utilisation de la méthode de sauts de cycles

Le coût très élevé de ce calcul (25 mn CPU pour le premier cycle sur une station de travail à 2 Mflops) montre l'intérêt de la méthode de sauts de cycles.
Seuls 270 cycles ont été réellement calculés pour obtenir la réponse stabilisée au cycle 500, le coefficient de précision η étant fixé à 0.5. Le tableau II.7 montre l'évolution du nombre de cycles à sauter lors des différentes tentatives, les sauts sont de plus en plus importants au fur et à mesure qu'on s'approche de l'état stabilisé. Les résultats en terme de contraintes circonférentielles sont fournis sur la figure II.18.

n	ΔN	n	ΔN	n	ΔN
1	0	28	1	55	4
2	0	29	4	56	4
3	0	30	1	57	4
4	0	31	5	58	4
5	0	32	1	59	4
6	0	33	4	60	4
7	0	34	1	61	5
8	0	35	6	62	4
9	0	36	1	63	5
10	0	37	3	64	4
11	0	38	3	65	5
12	0	39	3	66	5
13	0	40	3	67	5
14	0	41	3	68	5
15	0	42	3	69	5
16	0	43	3	70	5
17	1	44	3	71	5
18	1	45	4	72	5
19	1	46	3	73	5
20	2	47	4	74	6
21	2	48	3	75	5
22	3	49	4	76	6
23	1	50	3	77	5
24	5	51	4	78	6
25	0	52	4	79	6
26	1	53	4	80	2
27	5	54	4		

Tableau II.7 : Déroulement du calcul, n représente le numéro de la tentative de saut.

Bien que les écarts obtenus entre les deux méthodes soient assez faibles, on remarque qu'on n'a sauté qu'un cycle sur deux. Ces résultats sont moins satisfaisants que ceux des exemples précédents. Toutefois, on observe sur l'histogramme de la figure II.19 une tendance à augmenter légèrement le nombre de cycles à sauter. Ce calcul étant fait, comme dans les autres cas, en prenant soin de vérifier le critère de convergence sur tous les points de Gauss du maillage, une étude plus précise sur les points qui "accrochent" la méthode permettrait sans doute de sauter plus de cycles.



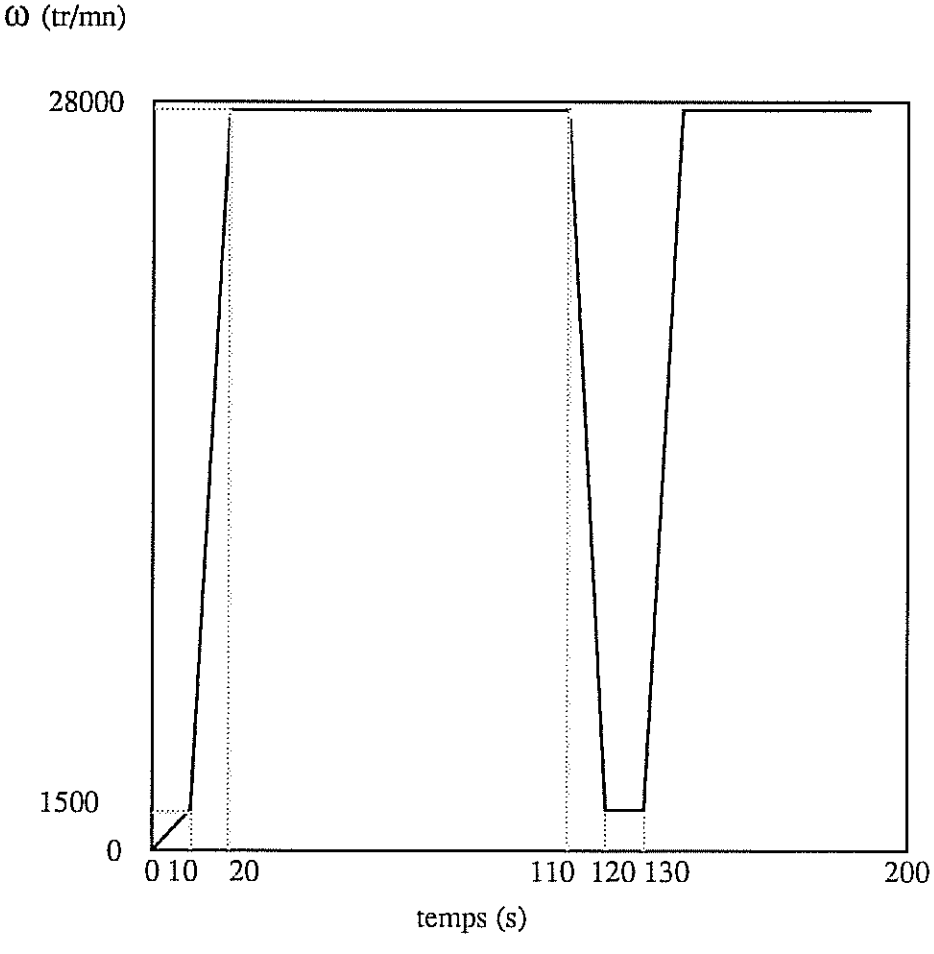


Figure II.14 : Conditions de calcul du disque de fatigue biaxiale.

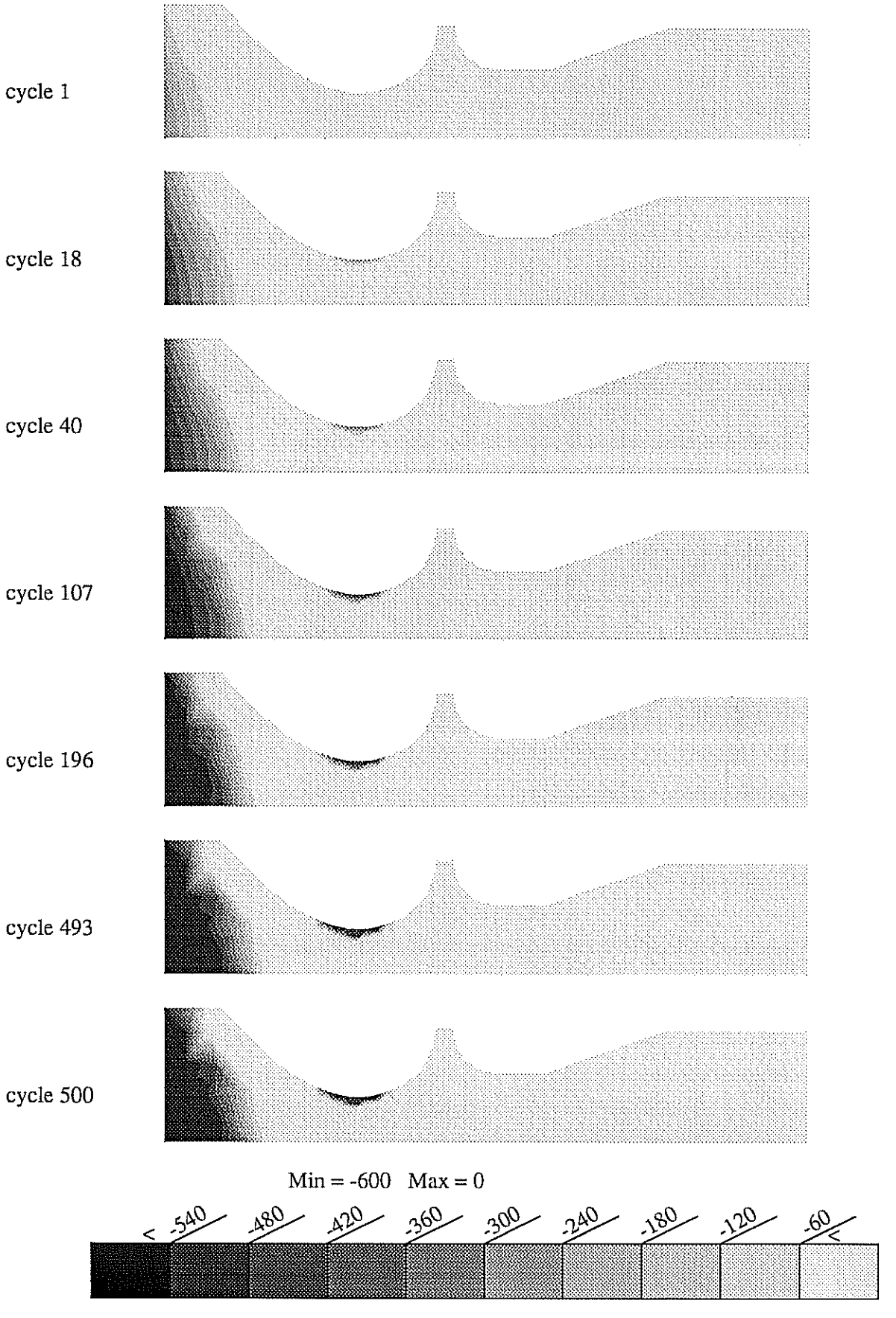


Figure II.15 : Minima des contraintes circonférentielles (MPa).

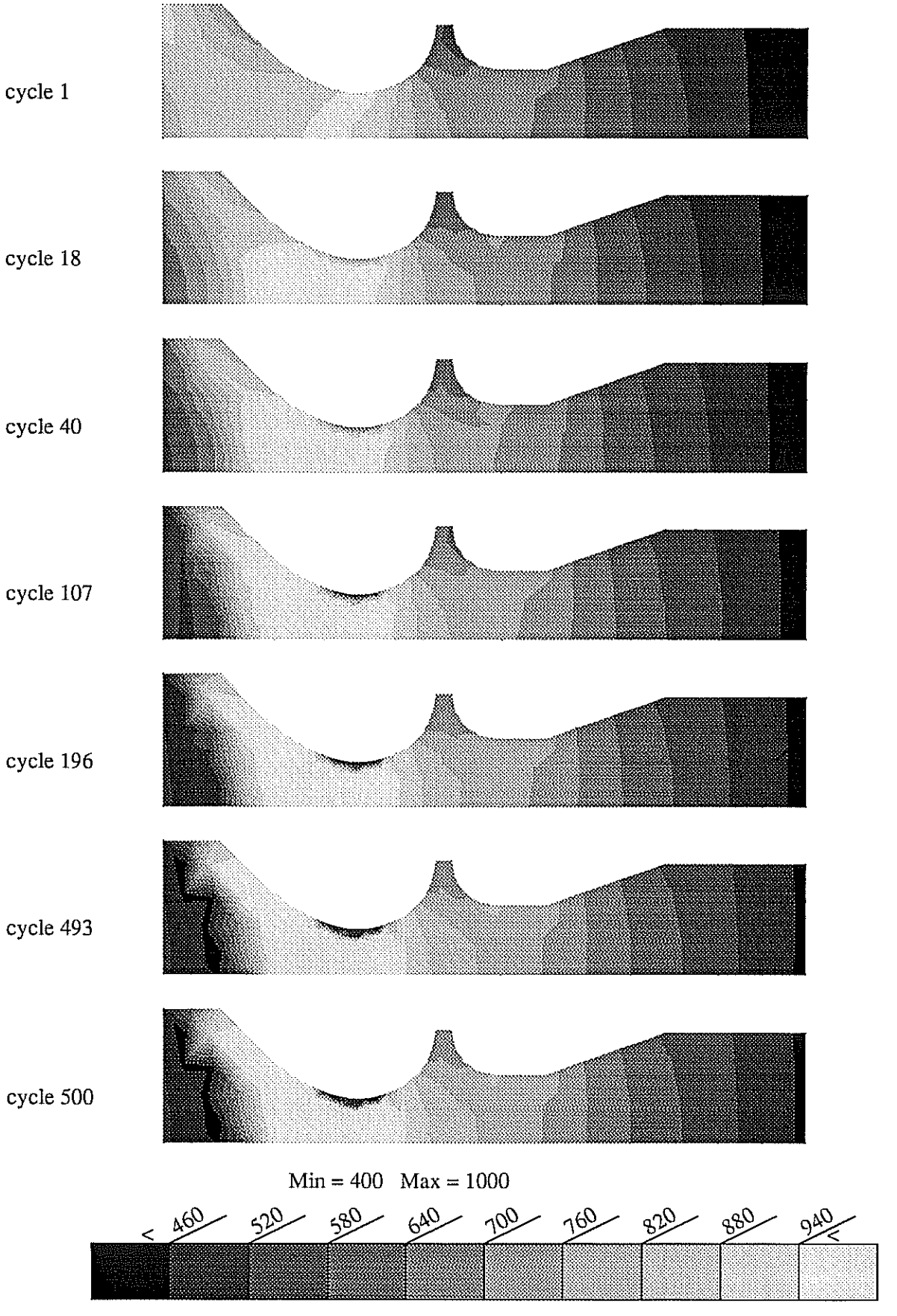


Figure II.16 : Maxima des contraintes circonférentielles (MPa).

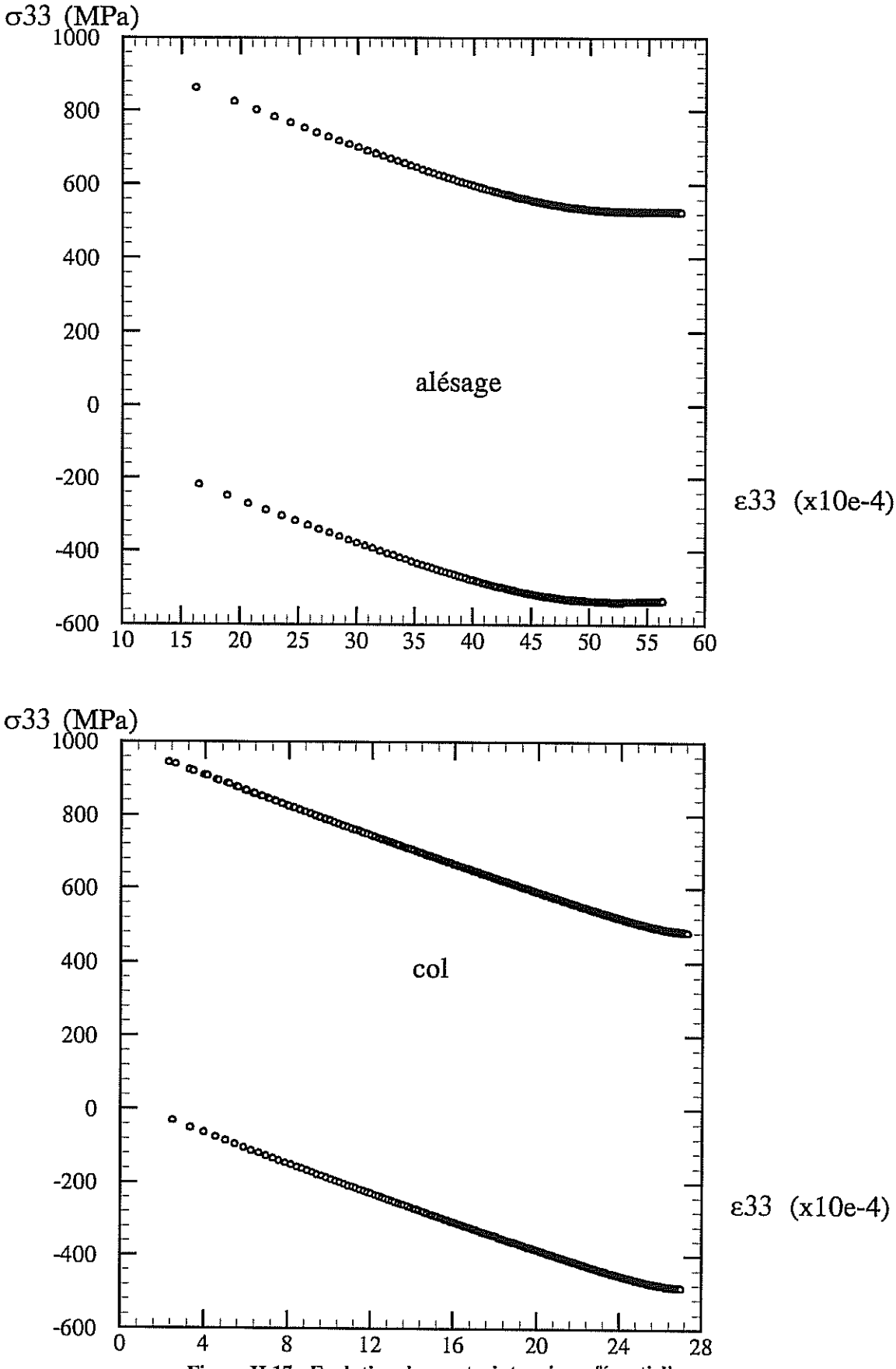
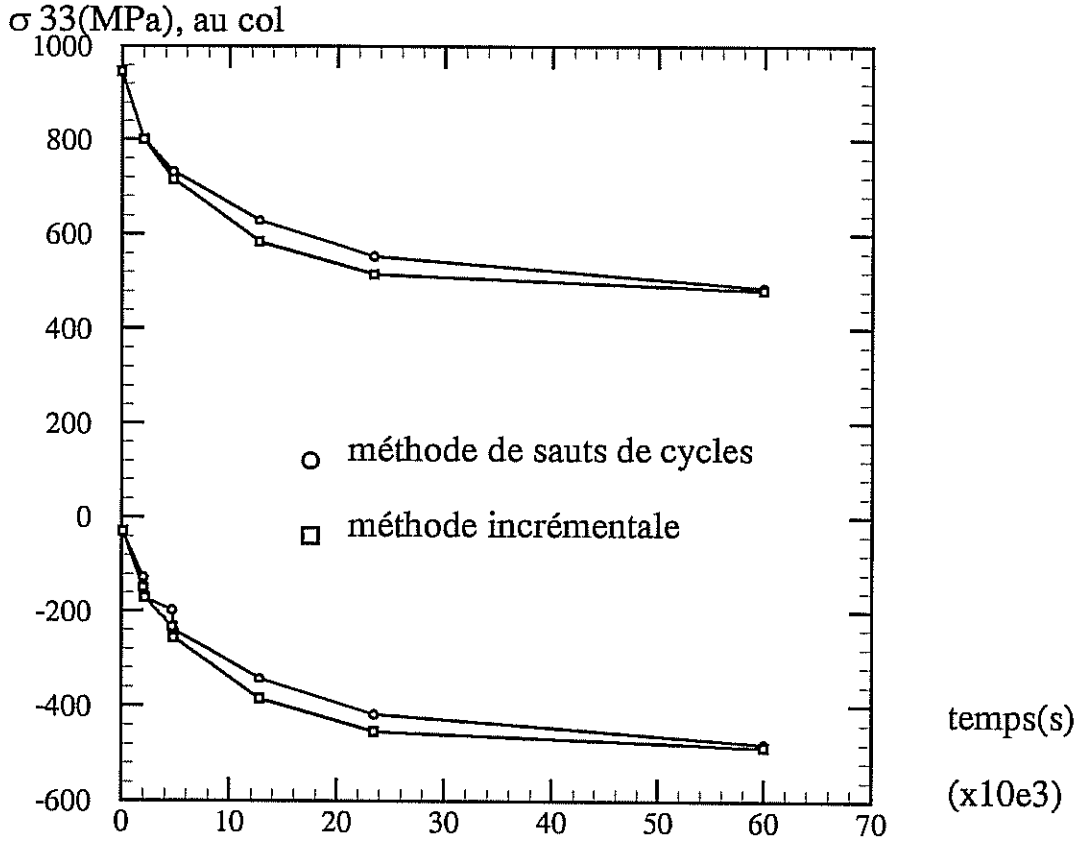


Figure II.17 : Evolution des contraintes circonférentielles (enveloppes des courbes).



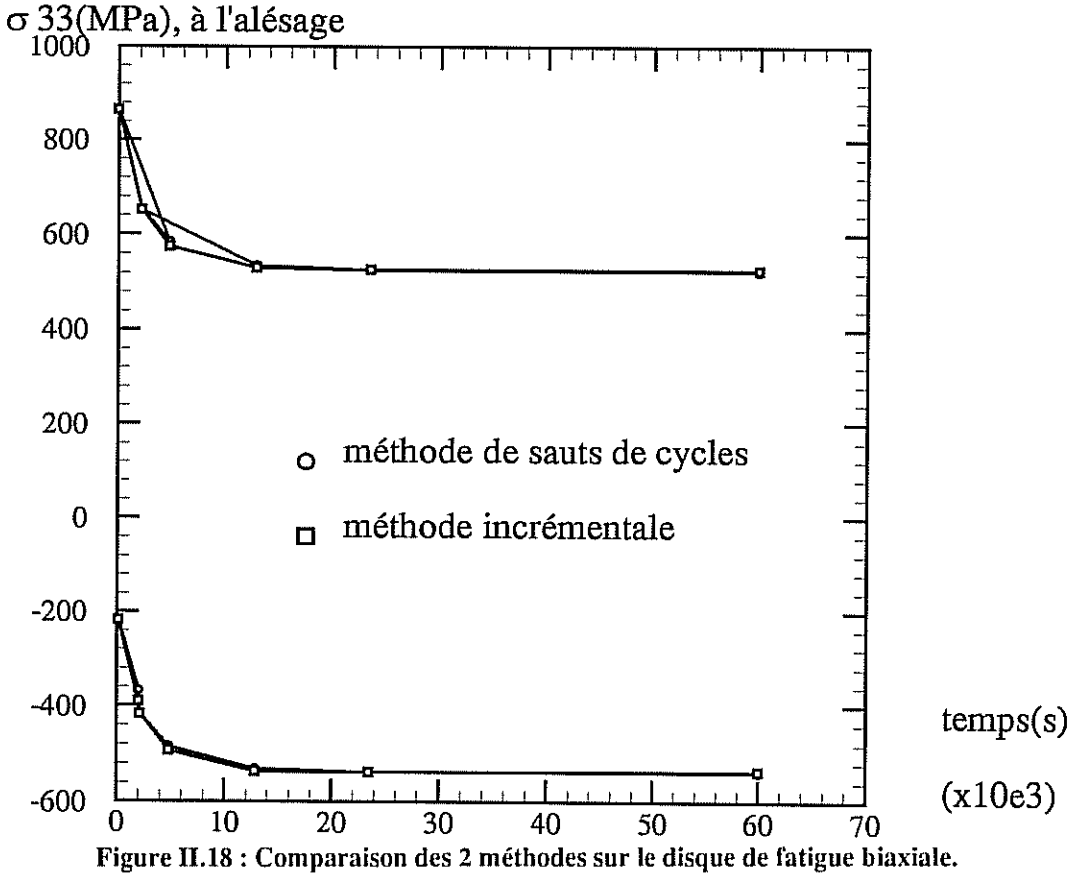


Figure II.18 : Comparaison des 2 méthodes sur le disque de fatigue biaxiale.

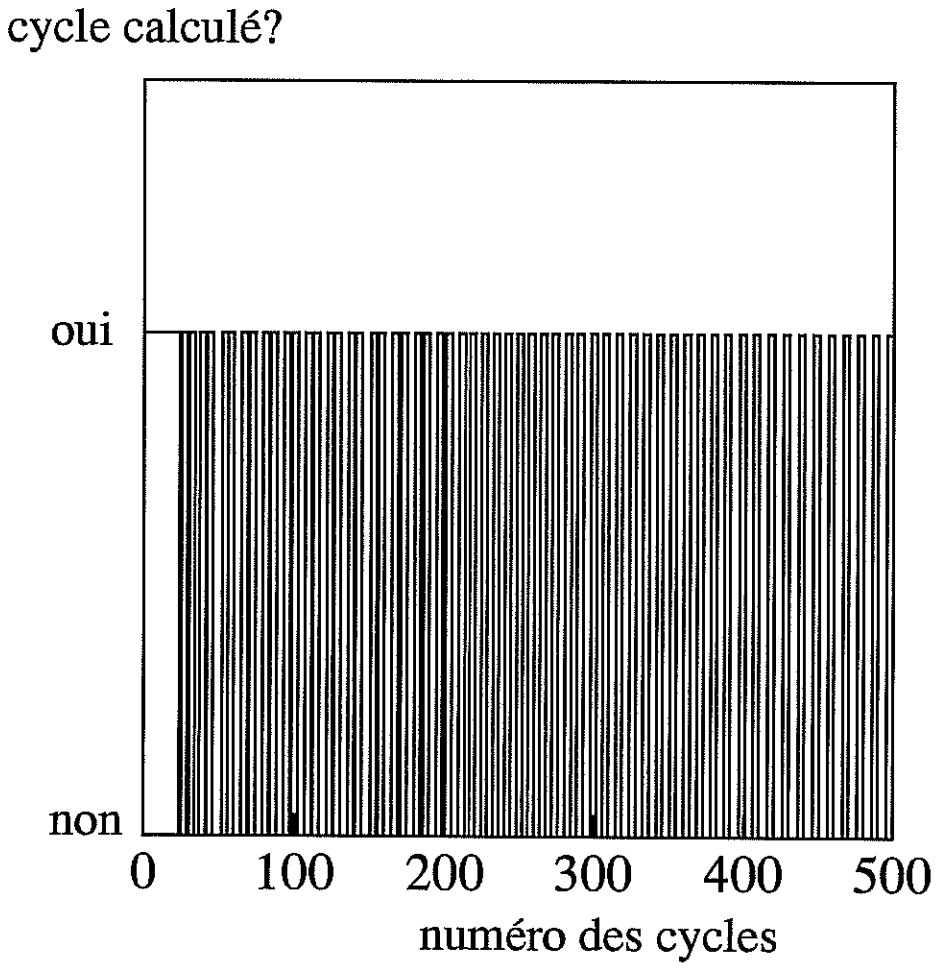


Figure II.19 : Histogramme indiquant les cycles calculés effectivement par rapport aux cycles sautés, pour le disque de fatigue biaxiale.

II.8. Conclusion

Les calculs réalisés conduisent à penser que la méthode de saut de cycles donne des résultats corrects. En effet on a pu voir dans l'exemple de l'élément de volume que les résultats obtenus sont identiques à ceux trouvés par la méthode pas à pas.

Ensuite, l'exemple de la structure en H a montré que la méthode est valable pour des cas plus compliqués que celui de l'élément de volume et pour des comportements différents.

Parmi les autres exemples traités, le disque de turbomachine a permis de vérifier que le programme fonctionne correctement avec les chargements complexes aussi bien mécaniques que thermiques.

Le dernier exemple traité est une "épreuve" importante à franchir, il montre la grande efficacité de la méthode sur les comportements les plus non linéaires.

Le développement de Taylor du second ordre s'est avéré suffisant pour traiter aussi bien les exemples simples que les cas compliqués pour ce qui concerne les chargements, le comportement et la géométrie, et apporte une diminution du temps de calcul situé d'un facteur 2 à 10 selon les exemples considérés.

Par ailleurs, l'implantation de la méthode dans le code de calcul par éléments finis Zébulon est réalisée d'une façon modulaire et laisse la possibilité d'envisager son application à des lois de comportement autres que la viscoplasticité macroscopique, dont les modèles à grand nombre de variables internes qui sont traités dans ce travail.

Chapitre III

Problèmes d'optimisation

III.1. Introduction 136
III.2. Optimisation de forme 138
III.2.1. Disque élastique en rotation 138
III.2.2. Disque viscoplastique en rotation 144
III.2.3. Optimisation d'un fond d'alvéole 149
III.2.3.1. Conditions du calcul 149
III.2.3.2. Choix des fonctions d'interpolation 150
III.2.3.3. Représentation paramétrique de la pièce 151
III.2.3.4. Conditions de l'optimisation 152
III.2.3.5. Résultats 154
III.3. Optimisation de matériau 157
III.4. Conclusion 167

III.1. Introduction

Dans le chapitre I on a présenté un modèle de comportement capable de décrire les réponses des matériaux métalliques à des sollicitations cycliques. Ces réponses sont souvent non linéaires. En plus, le nombre élevé de variables internes de ce modèle donne lieu à des temps de calcul importants. L'algorithme de sauts de cycles présenté au chapitre II permet de réduire le temps d'intégration nécessaire pour ce type de modèle. Il est donc possible de réaliser des calculs "en boucle" pour traiter les problèmes d'optimisation (Fleury C., 1979); (Braibant V., 1986). Le but de ce chapitre est de présenter une méthode d'optimisation qui vise à traiter aussi bien les problèmes linéaires que les problèmes non linéaires. Dans un premier temps, on présente quelques applications d'optimisation de forme dans le domaine du calcul de structure non linéaire. Ensuite, on présentera une application d'optimisation de matériau où l'on cherche le meilleur matériau au regard d'un critère de durée de vie.

Pour traiter ces problèmes d'optimisation, il existe deux grandes classes de méthodes :

- La première approche (Trompette, 1987), (Murray, 1972) est basée sur une analyse de sensibilité dans laquelle interviennent les dérivées des variables physiques (contraintes, déplacements, ...) par rapport aux paramètres d'optimisation (distances, coordonnées, ...), évaluées de façon analytique ou numérique et implantées au sein du code de calcul de structure. Bien qu'ayant des bases théoriques "solides", ce type d'approche dépend fortement de la formulation du problème et de ses équations (exemple : l'équation de l'équilibre global en élasticité K.U=F).

-La deuxième approche, que l'on a adoptée, se base sur une évaluation des dérivées par perturbation, en utilisant simplement deux codes indépendants : le logiciel d'identification Sidolo (Sidolo, 1992) et le code de calcul par éléments finis Zébulon. L'architecture utilisée (figure III.1) permet de gérer de façon indépendante les tâches de simulation et d'optimisation (Pilvin et al., 1991). Les deux codes sont utilisés en "boîtes noires" et ne nécessitent aucune modification interne, ce qui montre l'aspect général de l'approche. L'idée de base de cette démarche est d'utiliser le logiciel Sidolo, destiné initialement à l'identification de paramètres de lois de comportement phénoménologiques (l'objectif à atteindre est alors de nature expérimentale), pour résoudre des problèmes d'optimisation : les objectifs sont dans ce cas des contraintes de conception.

Les problèmes qui se posent classiquement dans ce type d'étude, et qui seront discutés dans la suite, sont :

- l'existence de la solution, et le traitement des minima locaux,

- l'unicité.

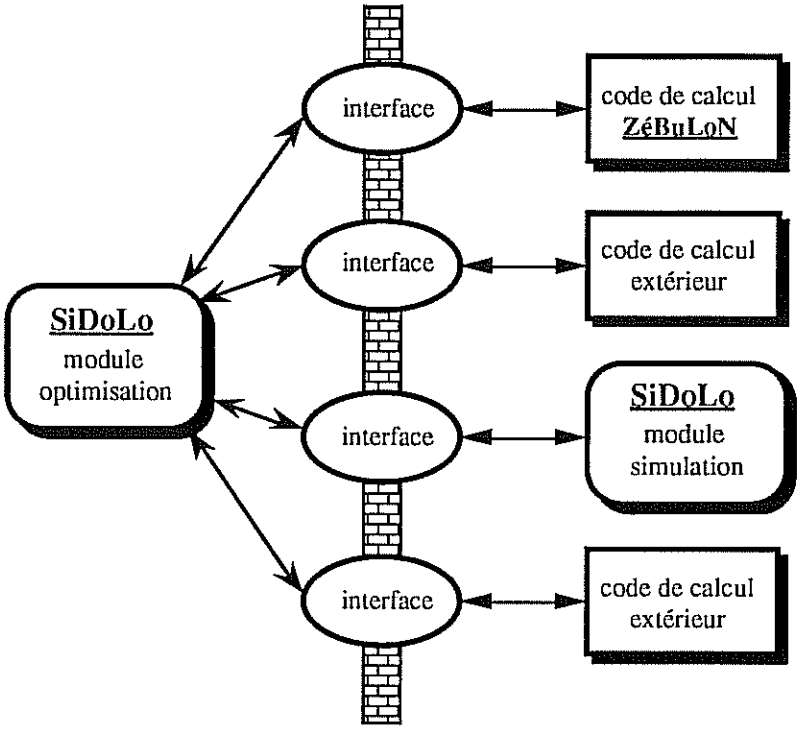


Figure III.1 : Représentation schématique de la structure logicielle.

La liaison entre le module d'optimisation et les codes extérieurs se fait à l'aide d'interfaces écrites par l'utilisateur. Cet interface qui détermine le type de problème a pour tâches :

(i) la lecture des coefficients proposés par le module d'optimisation,

(ii) la mise à jour des données pour le code extérieur qui dépendent de ces coefficients, puis lancement de la simulation,

(iii) le calcul des variables observables à partir des résultats, puis la transmission au module d'optimisation.

Afin de pouvoir utiliser cette méthode d'optimisation pour une gamme très large d'applications, de nombreux outils sont disponibles pour lire ou écrire les fichiers qui permettent les échanges entre les codes. On remarque également qu'une optimisation peut lancer des programmes de simulation hétérogènes.

III.2. Optimisation de forme

Le premier problème que l'on se pose consiste à trouver, pour une structure donnée, la forme optimale pour atteindre certains objectifs donnés (minimisation de la masse, maximisation de la durée de vie, ...). Cette optimisation est effectuée sous certaines restrictions imposées soit par des critères de mécanique des milieux continus et de résistance des matériaux, soit par des critères technologiques. La procédure d'optimisation est assurée essentiellement par trois programmes :

1) le logiciel Sidolo a pour tâche de prendre en charge la procédure d'optimisation, en gérant la coordination des 2 autres programmes;

2) le logiciel de calcul par éléments finis Zébulon a pour tâche de simuler la réponse mécanique de la structure à chaque itération de l'optimisation, sur un maillage qui est modifié d'un calcul à l'autre;

3) un programme interface dépendant du problème traité est chargé d'accomplir des tâches de communication. Ce programme doit exploiter, à chaque itération, les paramètres d'optimisation pour préparer les données utiles à la fabrication du maillage. Ainsi, si la pièce est paramétrée avec des entités géométriques différentes des coordonnées des points, le programme interface doit calculer ces coordonnées, ce qui nécessite souvent la résolution d'un système d'équations non linéaires. Enfin, il doit en retour analyser les résultats de calcul par éléments finis pour calculer la "fonction coût" qui détermine l'adéquation entre les résultats et l'objectif (cf. annexe III.1).

III.2.1. Disque élastique en rotation

On se propose dans un premier temps de traiter l'exemple d'un disque plein en rotation (figure III.2) pour lequel il existe une solution analytique. Le problème que l'on se pose est de trouver la forme de ce disque qui rend uniforme la contrainte de von Mises. Le maillage réalisé possède une symétrie par rapport au plan z=0. Les analyses par éléments finis sont effectuées à température uniforme avec un comportement élastique. Le rayon extérieur du disque est soumis à une pression radiale uniforme.

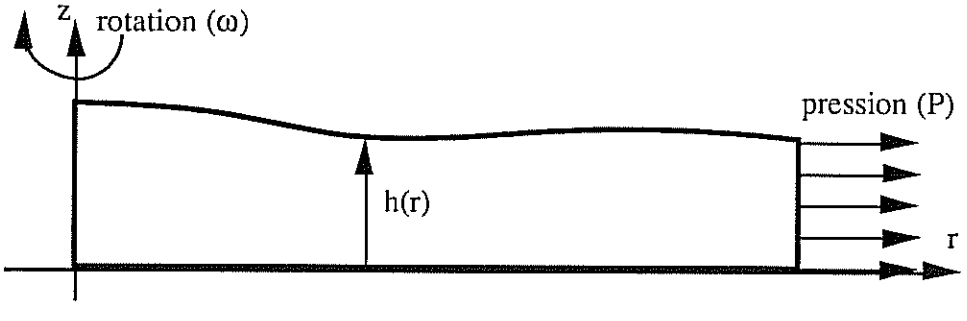


Figure III.2 : Disque en rotation.

Le disque est supposé mince, si bien qu'on peut négliger, pour obtenir la solution analytique, les composantes σ_{zz} et σ_{rz}. Le problème à résoudre consiste à trouver le profil du disque pour lequel les contraintes radiales et circonférentielles sont uniformes. Cette valeur commune doit satisfaire les conditions aux limites du problème, elle est donc égale à celle appliquée au bord. On doit donc avoir $\sigma_{rr}(r,z)=\sigma_{\theta\theta}(r,z)=P$. On peut résoudre analytiquement ce problème si on néglige la contrainte σ_{zz}. L'expression de la hauteur h en fonction du rayon r est alors donnée par :

$$h = \rho h_0 \frac{\omega^2 R^2}{2P} \exp\left(1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right) \qquad \text{[III.1]}$$

Dans ces expressions, h_0 représente l'épaisseur au niveau du rayon extérieur, ω la vitesse de rotation, P la pression extérieure appliquée, ρ la masse volumique et R le rayon du disque où la pression est appliquée. Dans notre calcul, on représentera de façon discrète cette fonction h(r), en essayant quatre stratégies différentes d'approximation ou d'interpolation qui se sont avérées équivalentes pour cet exemple simple :

(i) les paramètres sont les ordonnées de certains noeuds de la face supérieure, leurs abscisses étant fixées. On procède ensuite par interpolation linéaire entre ces points pour définir la forme du disque,

(ii) le disque est paramétré à l'aide de certains points. On effectue ensuite un lissage avec des splines cubiques (annexe III.2),

(iii) on utilise des courbes de Bézier pour représenter la forme du disque (annexe III.2),

(iv) la géométrie est approchée par des polynômes de Tchébicheff (annexe III.2).

Les résultats montrés ici sont obtenus à l'aide de la dernière solution. L'optimisation est effectuée avec 5 paramètres a_i. L'expression de la hauteur h en fonction du rayon r est donnée par :

$$h(X) = \sum_{i=0,4} a_i \cos(i \operatorname{Arc}\cos(X)) \qquad \text{[III.2]}$$

L'évolution de la géométrie au cours des itérations est illustrée sur la figure III.3. Les six premières perturbations servent à évaluer un gradient initial dans l'espace des paramètres (a_0, a_1, a_2, a_3, a_4). La fonction coût est évaluée aux points qui sont matérialisés par les noeuds du maillage du disque :

$$£(A) = \sum (\sigma_{rr}(k) - P)^2 + (\sigma_{\theta\theta}(k) - P)^2 \qquad \text{[III.3]}$$

Le jeu initial des paramètres a_i est choisi de manière à avoir un disque de hauteur uniforme. Les profils des contraintes radiales et circonférentielles obtenus ainsi sont reportés sur la figure III.4a. On remarque qu'en fin d'optimisation (figure III.4b), les deux composantes des contraintes sont égales au centre et que la contrainte radiale s'équilibre avec la pression appliquée au bord. D'autre part, l'hypothèse des contraintes planes est bien vérifiée. La figure III.5 montre l'évolution du profil de la contrainte radiale au cours des itérations, les premières analyses servent uniquement à calculer une direction initiale de recherche dans l'espace des paramètres d'optimisation. La première itération effective est celle qui suit ces premières analyses. On remarque que quelques itérations (une dizaine) seulement suffisent pour avoir une solution très satisfaisante. Le reste des itérations est fait uniquement par souci de précision par rapport à la solution analytique. Cette solution est atteinte au bout d'une vingtaine d'itérations.

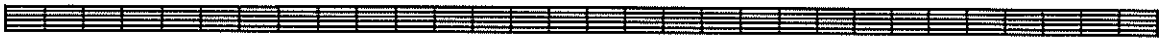
La convergence de la méthode est illustrée par l'évaluation de l'écart entre la géométrie calculée et la solution analytique pour certains points pilotes (tableau III.1). Ces points sont répartis d'une façon équidistante le long du rayon. Les résultats sont obtenus avec un rayon extérieur, R=225 mm. Les abscisses des points pilotes situés sur la face supérieure sont également indiquées dans le tableau III.1.

itération effective	point 1 r=37.5	point 2 r=75	point 3 r=112.5	point 4 r=150	point 5 r=187.5
1	68	64	56	44	33
3	64	56	46	37	40
5	29	43	38	40	64
8	9	12	14	18	25
12	2.1	1	2	5	4
20	2.5	1	0.5	3	1

Tableau III.1 : Erreur (%) pour quelques noeuds du disque.

Les rayons sont en mm.

$$\frac{\sigma^{rr} - 600}{600}.$$



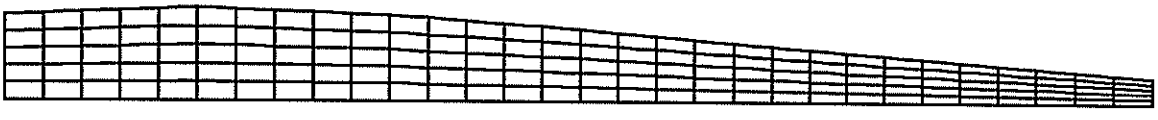
solution initiale - itération 1 - grossissement 10.



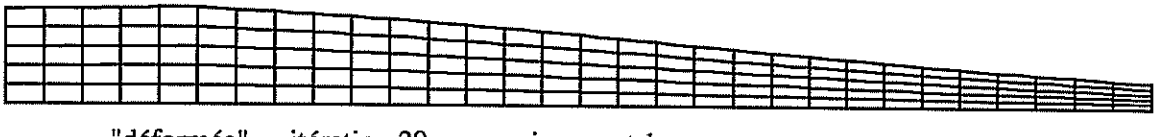
perturbation du noeud 2 - itération 3 - grossissement 400.



"déformée" - itération 8 - grossissement 1.



"déformée" - itération 15 - grossissement 1.



"déformée" - itération 20 - grossissement 1.

Figure III.3 : Evolution de la géométrie au cours des itérations.

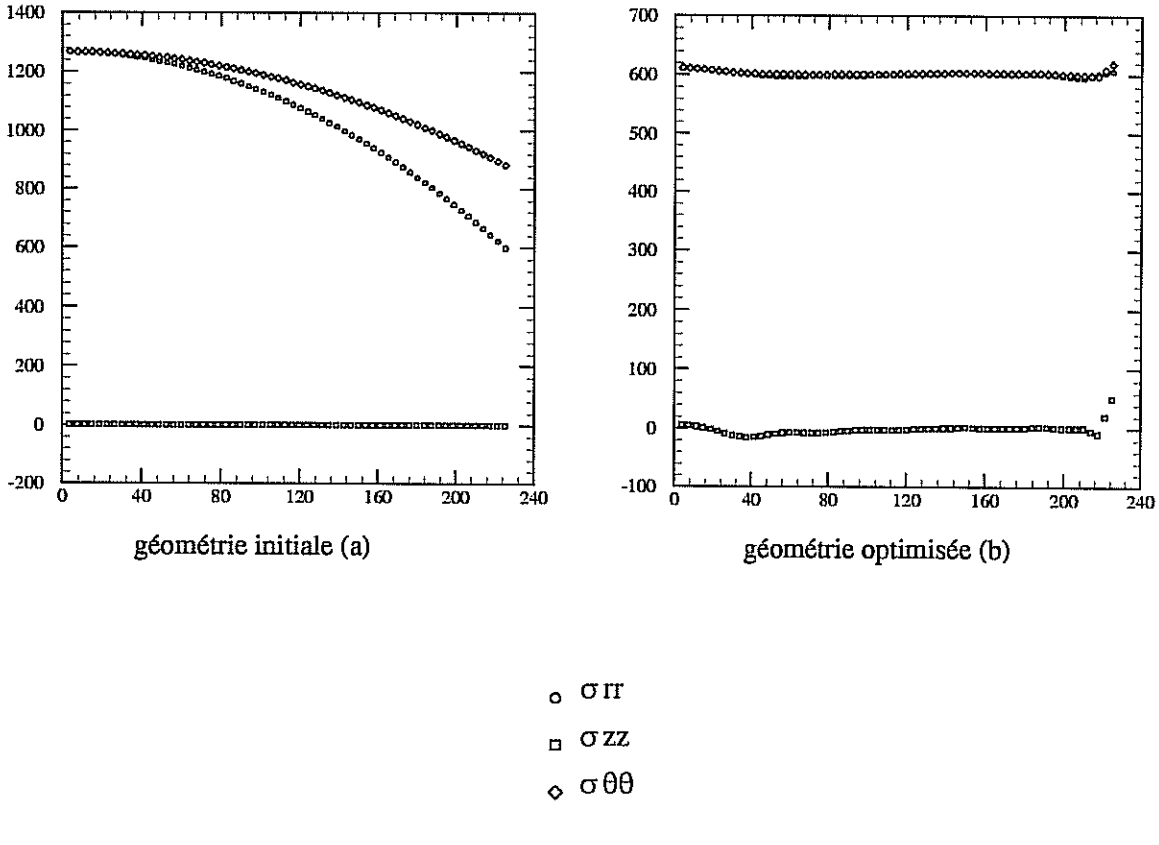


Figure III.4 : Profil des contraintes le long du rayon du disque.
[a] Disque d'épaisseur uniforme.
[b] Disque optimisé.

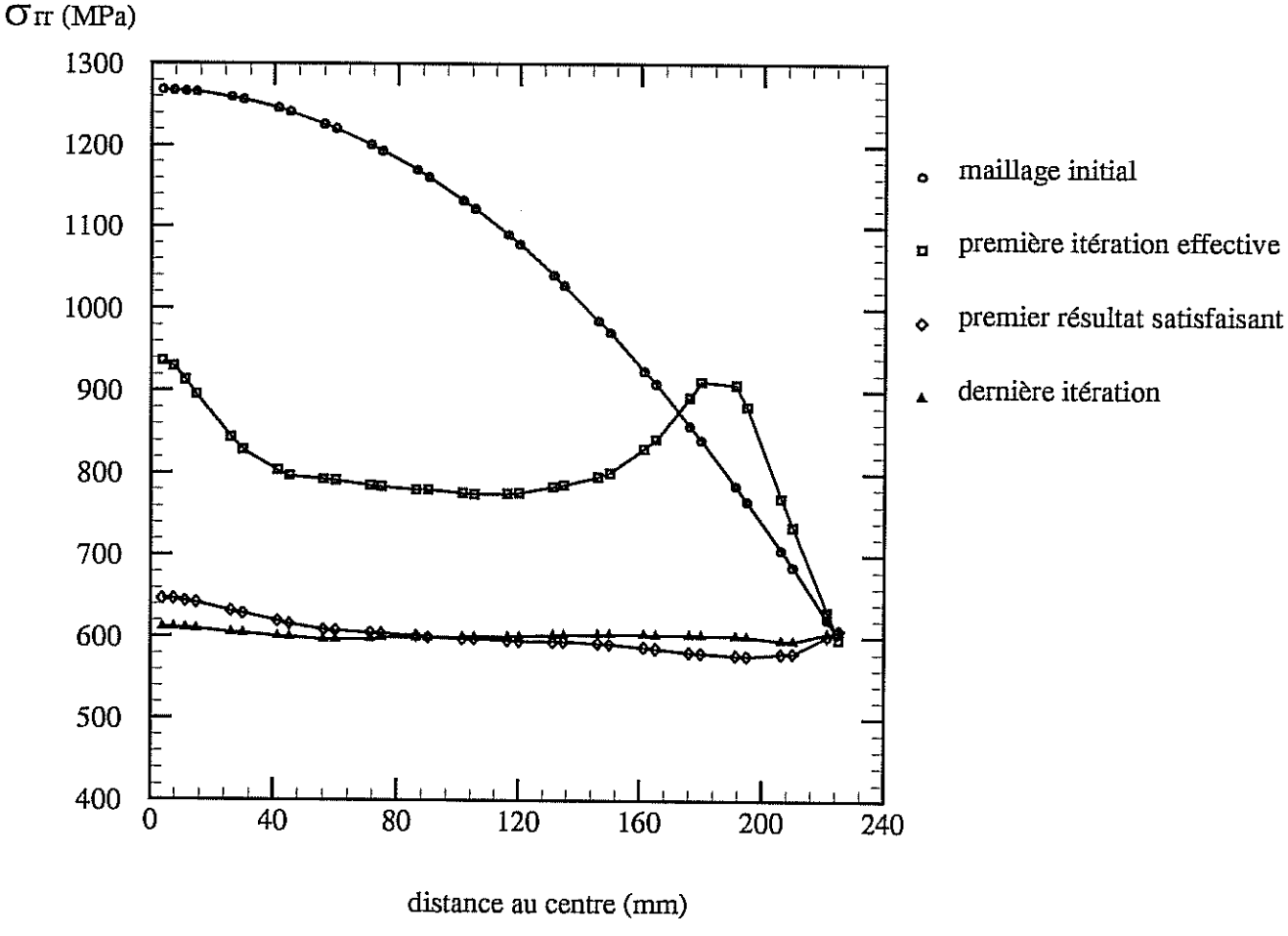


Figure III.5 : Evolution du profil de la contrainte radiale au cours des itérations.

III.2.2. Disque viscoplastique en rotation

Après avoir validé l'approche sur l'exemple précédent, on va traiter un problème où le comportement est non linéaire et le chargement complexe. Il s'agit de calculer le disque décrit plus haut, qui est maintenant soumis à un champ de température non uniforme et non homogène (figure III.6). En outre le comportement du disque est non linéaire. Les sollicitations mécaniques appliquées sont des forces centrifuges cycliques et des contraintes thermomécaniques reliées aux gradients de température. L'optimisation a été faite selon quatre critères différents définis en termes de contrainte ou de durée de vie.
(i) Dans un premier temps, on tente de résoudre un problème similaire à celui proposé pour le disque élastique. On cherche à obtenir dans tout le disque une contrainte équivalente de von Mises égale à une contrainte de référence donnée σ_0 à l'instant du cycle correspondant à t=30s :

$$£(A) = \sum_i (J_2(\underline{\underline{\sigma}}_i) - \sigma_0)^2 \qquad [III.4]$$

(ii) Le comportement du matériau choisi pour ce disque, l'IN100, est décrit à l'aide du modèle de Chaboche (1978). Les équations de cette loi de comportement sont expliquées dans le paragraphe I.2.5. On rappelle que lorsque le comportement de ce modèle est non linéaire, la norme de von Mises de la contrainte présente une borne supérieure qui vaut : $R + \frac{C}{D}$. Afin de faire jouer un rôle équivalent à chaque température, on traite un deuxième cas pour lequel la contrainte de von Mises est normée par la contrainte limite, pour chaque point de la structure calculée, à partir de la température locale, par $R(T) + \frac{C(T)}{D(T)}$. La fonctionnelle à minimiser s'écrit alors sous la forme :

$$£(A) = \sum_i \left(\frac{J_2(\underline{\underline{\sigma}}_i) - \sigma_0}{R(T) + \frac{C(T)}{D(T)}} \right)^2 \qquad [III.5]$$

(iii) Le troisième critère que l'on se donne, consiste à minimiser la différence entre le nombre de cycles de rupture en fatigue et un nombre de cycles de référence, il s'agit dans ce cas de viser une durée de vie particulière pour le composant.

$$£(A) = \sum_i (N_R(i) - N_{R0})^2 \qquad [III.6]$$

(iv) Enfin, on cherche à optimiser la forme du disque vis-à-vis d'un critère de rupture en fluage :

$$£(A) = \sum_i (t_R(i) - t_{R0})^2 \qquad [III.7]$$

Dans ces deux dernières expressions le nombre de cycle à rupture, N_R, et le temps de rupture en fluage, t_R, sont calculés à l'aide du modèle d'endommagement de fatigue-fluage (Lemaitre, Chaboche, 1985). Les formules respectives de N_R et de t_R sont données en annexe III.1.

Les formes du disque trouvées en appliquant ces différents critères sont illustrées sur la figure III.7. Les objectifs visés sont assez bien atteints pour les trois premiers critères (contrainte de von Mises, contrainte de von Mises normalisée et nombre de cycles à rupture). On note que le fait de normer la contrainte (figure III.7c) ramène vers un profil de type élasticité isotherme (figure III.7a), ce qui est naturel. La forme complexe résultant de l'application du critère de fatigue(figure III.7d) est à relier aux variations relatives du champ de contrainte appliqué et des valeurs des paramètres du modèle de fatigue en fonction de la température. On retrouve le même type de résultat avec le modèle de fluage. Dans ce dernier cas, il semble difficile de remplir le contrat (figure III.7e). Ceci peut être dû à un minimum local rencontré au cours de l'opération d'optimisation ou à l'absence de solution satisfaisante pour ce quatrième critère.

Même si ces résultats ne sont pas parfaits, ils soulignent la capacité de la méthode à traiter des problèmes non linéaires sans intervenir dans le code d'optimisation ni dans le code de simulation.

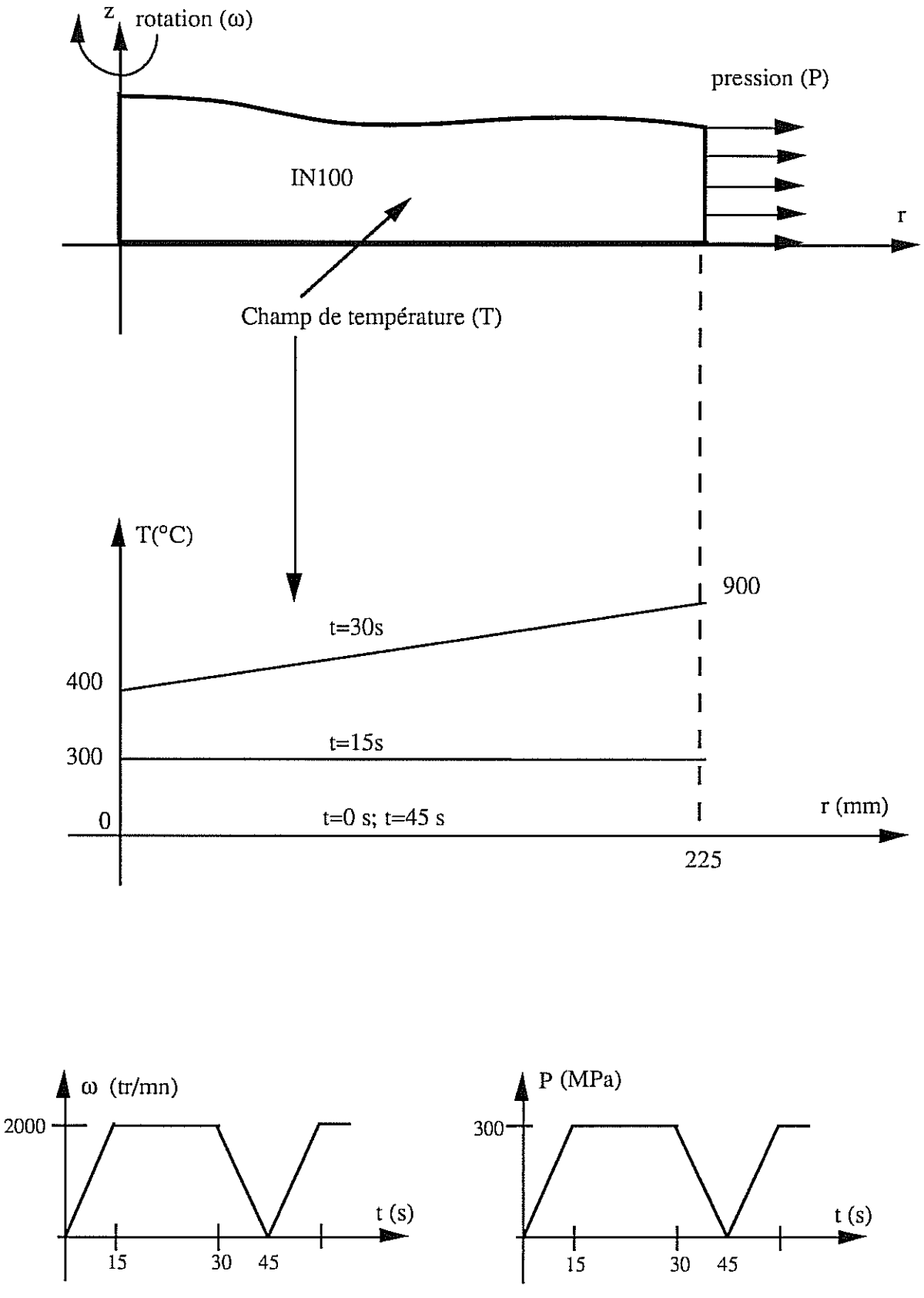
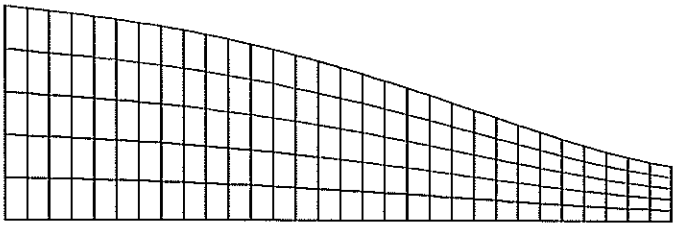
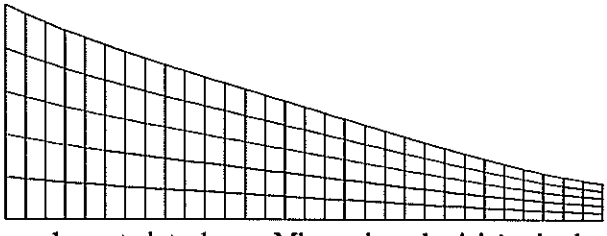


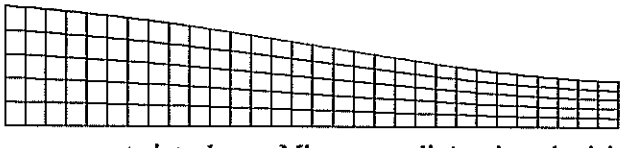
Figure III.6 : Disque viscoplastique en rotation.



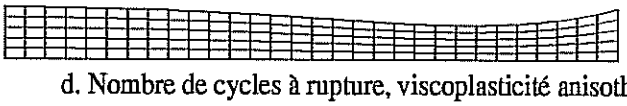
a. contrainte de von Mises, élasticité isotherme.



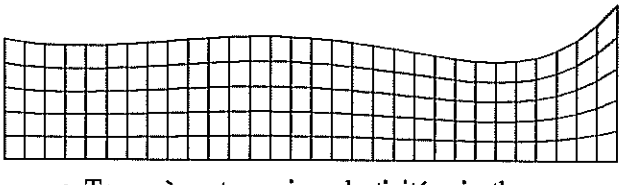
b. contrainte de von Mises, viscoplasticité anisotherme.



c. contrainte de von Mises normalisée, viscoplasticité anisotherme.



d. Nombre de cycles à rupture, viscoplasticité anisotherme.



e. Temps à rupture, viscoplasticité anisotherme.

Figure III.7 : Géométries obtenues pour différents critères d'optimisation.

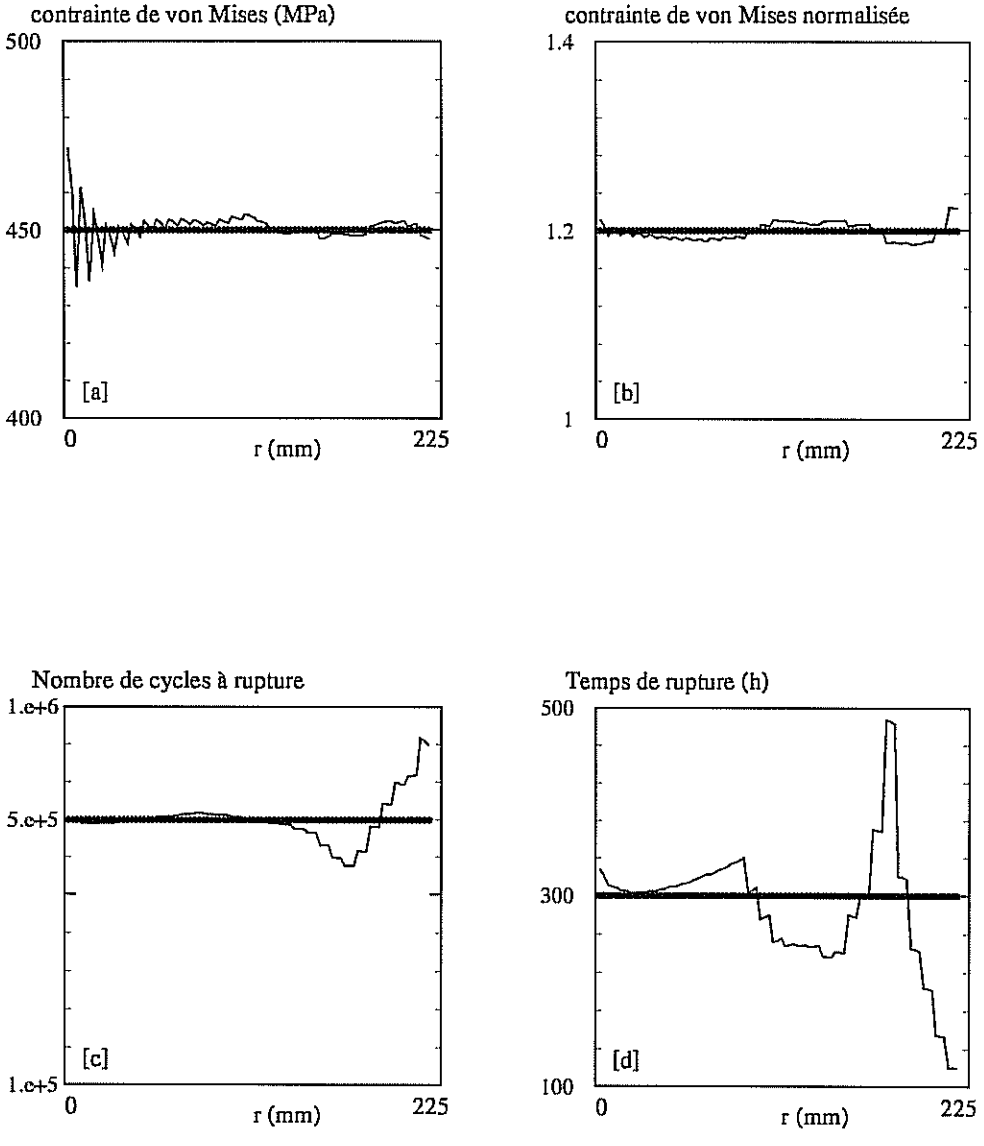


Figure III.8 : Ecarts finaux entre les objectifs à atteindre et les solutions obtenues par l'optimisation, axe x : distance au centre du disque.
[a]Contrainte de von Mises, viscoplasticité anisotherme.
[b] Contrainte de von Mises normalisée, viscoplasticité anisotherme.
[c] Nombre de cycles à rupture en fatigue.
[d] Temps de rupture en fluage.

III.2.3. Optimisation d'un fond d'alvéole

Le dernier exemple que l'on présente concerne l'optimisation d'un fond d'alvéole (figure III.9). La particularité de cette structure est sa géométrie complexe. Dans la suite de ce paragraphe, la partie gauche de la structure sera appelée disque et la partie droite le pied d'aube. Les données relatives à ce calcul ont été fournies par SNECMA (Mascarel, 1991).

III.2.3.1. Conditions du calcul

Le disque est assujetti aux conditions aux limites et au chargement indiqués sur la figure III.10a. La condition **mpc** indique que tous les noeuds de l'arête ont le même déplacement selon une orientation donnée. Ainsi, tous les noeuds de l'arête droite ont le même déplacement horizontal et tous ceux de l'arête du bas ont le même déplacement vertical. La vitesse de rotation est de 10825 tr/min.
Le comportement mécanique est supposé élastique isotrope, les coefficients du matériau sont résumés dans le tableau III.2.

disque			pied d'aube		
ρ (kg / m^3)	ν	E (GPa)	ρ (kg / m^3)	ν	E (GPa)
8200	0,3	220	4200	0,3	220

Tableau III.2 : Coefficients matériaux.

Le maillage utilisé est indiqué sur la figure III.10b. Durant le processus d'optimisation, les connections noeuds-éléments restent inchangées. Seules les positions des noeuds peuvent être modifiées.
La structure comporte 257 éléments axisymétriques quadratiques (8 noeuds par élément). L'intégration s'effectue sur 9 points de Gauss. On suppose que les deux matériaux restent en contact, sans glissement à l'interface aube-disque. Les noeuds critiques retenus pour l'optimisation sont sélectionnés d'une façon très modulaire. En effet, il suffit d'indiquer dans le fichier de mise en données de Zébulon les mailles élémentaires sur lesquelles s'appuient ces noeuds. Le programme interface reconnaît automatiquement leur numéro et leur affecte un nom pour pouvoir les visualiser. La figure III.10c montre la zone critique retenue pour l'optimisation.

III.2.3.2. Choix des fonctions d'interpolation

Pour définir les formes de la structure autres que les segments de droites, plusieurs méthodes d'interpolation sont possibles. Dans ce paragraphe, on va détailler les avantages et les inconvénients de chaque méthode et choisir celle qui s'adapte le mieux à l'optimisation de l'alvéole. On trouvera en annexe III.2 les définitions mathématiques de quelques fonctions d'interpolation.

La méthode la plus banale consiste à choisir les coordonnées de certains points, qui deviennent des noeuds pilotes, pour décrire le profil de la pièce. Cette approche a l'inconvénient d'augmenter considérablement le nombre de paramètres d'optimisation si on veut décrire d'une façon régulière la forme de la pièce.

L'utilisation des splines cubiques remédie à ce problème puisque ces dernières diminuent considérablement le nombre de points de contrôle. Mais comme elles assurent la continuité des dérivées secondes et premières à ces points, elles introduisent également des modifications de forme trop locales. Cette liberté peut être très intéressante dans certaines applications, mais paraît irréaliste dans notre cas. Les splines cubiques présentent aussi l'inconvénient de nécessiter la résolution d'un système d'équations non linéaires à chaque itération.

On a également tenté d'effectuer l'interpolation à l'aide de polynômes orthogonaux, mais il est difficile, dans certains cas, de pouvoir imposer des conditions de tangence aux extrémités de la courbe. L'outil qui a semblé le mieux adapté est finalement constitué par les courbes de Bézier. Ces dernières sont assez régulières puisqu'elles ne passent pas par leurs pôles, mais sont seulement attirées par eux. Par ailleurs, il est aussi assez facile d'imposer des conditions de pente aux extrémités de la courbe. La formulation simple de ce type d'interpolation permet d'avoir explicitement le rayon de courbure et la normale en tout point de la courbe.

III.2.3.3. Représentation paramétrique de la pièce

Outre les dimensions et les coordonnées cartésiennes de certains points, trois courbes de Bézier sont utilisées pour définir le contour de la pièce. Pour chacune de ces courbes, on se donne comme paramètres d'optimisation la distance du premier pôle à l'extrémité voisine et celle du second pôle à l'autre extrémité, soit 7 paramètres donnés dans le tableau III.3.

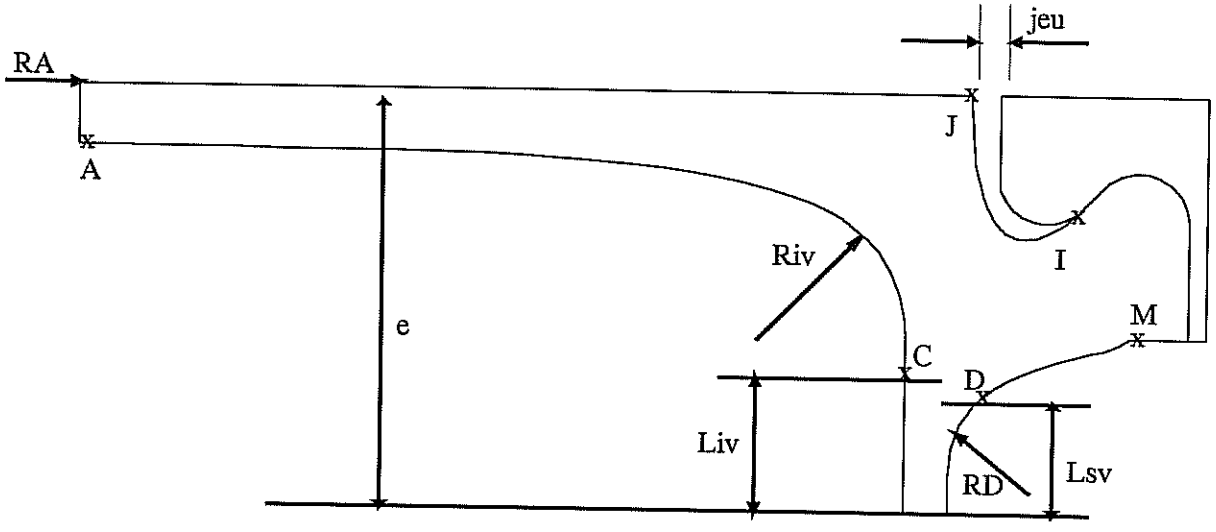


Figure III.9 : Signification des différents paramètres.

Les pentes aux extrémités sont maintenues constantes sauf au point M (figure III.9). En plus de ces sept paramètres, les points de tangeance A, C, D et M sont supposés être mobiles. Le tableau III.3 résume les différents paramètres d'optimisation ainsi que leurs valeurs initiales extraites des documents fournis par SNECMA.

RA	e	jeu	Riv	Lsv	RD	d1g	d2g	d1h	d2h	d1b	d2b	p2b
285	27.82	1,94	340	2,7	355	41,12	12,02	14,65	0,52	8,03	2,125	1,194

Tableau III.3 : Valeurs initiales des paramètres d'optimisation (mm).

p2b = tan(α) .

d1g désigne la distance du premier pôle de la courbe de Bézier (A-C) au point A,
d2g désigne la distance du second pôle de la courbe de Bézier (A-C) au point C,
d1h désigne la distance du premier pôle de la courbe de Bézier (J-I) au point J,
d2h désigne la distance du premier pôle de la courbe de Bézier (J-I) au point I,
d1g désigne la distance du premier pôle de la courbe de Bézier (D-M) au point D,

d2g désigne la distance du premier pôle de la courbe de Bézier (D-M) au point M, et p2b désigne la pente du point M.

Comme la représentation paramétrique choisie ne permet pas de décrire exactement la géométrie initiale de la pièce fournie par SNECMA (courbes A-C, D-M, et I-J définies à l'aide d'arcs de cercles), certains paramètres ont été ajustés pour s'en approcher le plus possible.

III.2.3.4. Conditions de l'optimisation

Le problème que l'on se propose de résoudre est la recherche de la forme de la structure afin que le maximum de la contrainte de von Mises dans la zone critique soit le plus bas possible. Pour atteindre cet objectif, on a sélectionné un certain nombre de noeuds dans les zones les plus critiques qui sont repérées sur la figure III.10c. La procédure d'optimisation doit avoir lieu sous certaines contraintes :

- la masse de la structure ne doit pas être trop modifiée durant l'optimisation. En pratique, on exprime cette contrainte en imposant à la masse de rester comprise entre une borne supérieure et une borne inférieure,
- l'épaisseur du col doit rester constante. Là aussi, on exprime de la même façon, que l'épaisseur reste comprise entre une borne inférieure et une borne supérieure,
- la contrainte de matage entre le disque et l'alvéole doit rester inférieure à 250 MPa,
- la contrainte de cisaillement entre le disque et l'alvéole doit rester inférieure à 470 MPa,
- enfin la contrainte au col doit rester inférieure à 65 MPa.

La complexité de la géométrie a conduit à traiter deux problèmes d'optimisation :

- Problème 1 : optimiser tous les paramètres du tableau III.3 en maintenant la masse comprise entre 10 kg et 11 kg.

-Problème 2 : essayer de conserver les dimensions qui définissent l'enveloppe de la pièce. Pour cela, on a fixé les paramètres e et RA. L'intervalle dans lequel peut varier la masse est réduit de 10 kg à 10,5 kg.

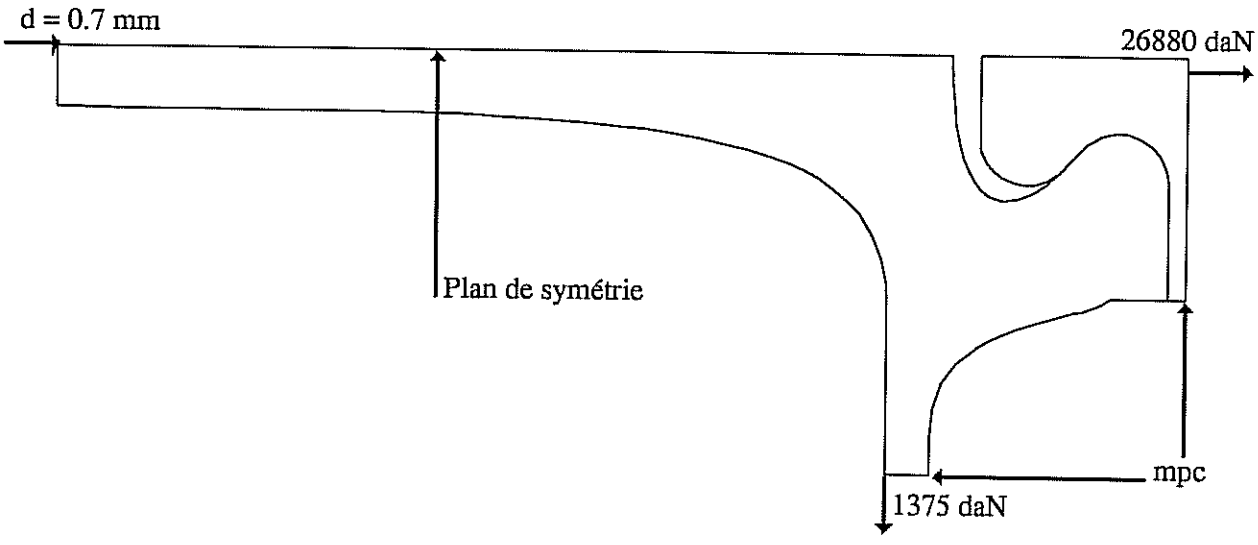


Figure III.10a : Conditions aux limites et chargement.

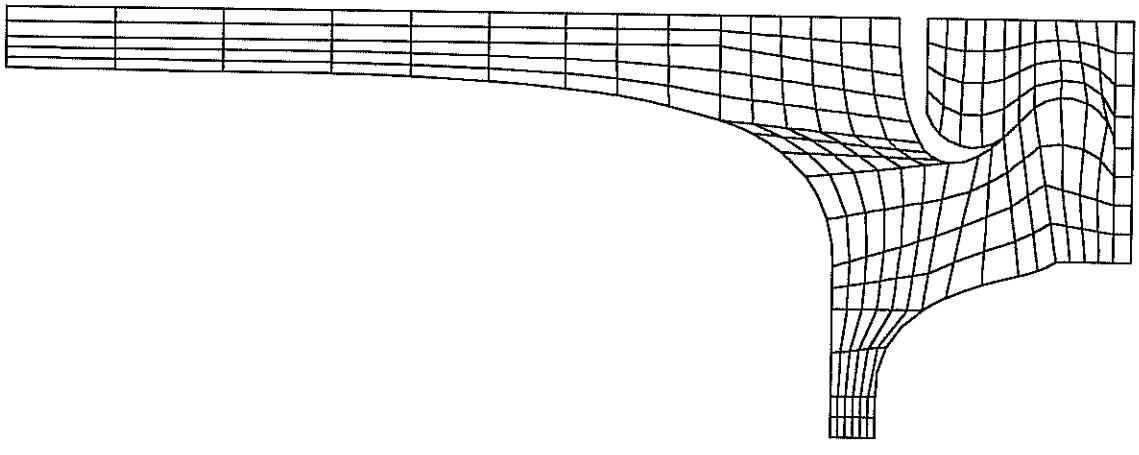


Figure III.10b : Maillage de la géométrie initiale.

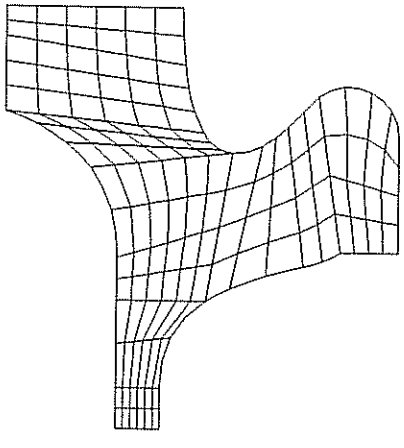


Figure III.10c : Zone critique retenue pour l'optimisation.

III.2.3.5. Résultats

La contrainte de von Mises maximale relevée sur les noeuds de la zone critique avec le jeu de coefficients initial est de 513 MPa. Le tableau III.4 résume les résultats obtenus pour les deux problèmes traités. Les nouveaux jeux de paramètres des deux problèmes ainsi que leurs variations par rapport aux paramètres initiaux sont données dans les tableaux III.5 et III.6. Les géométries générées à l'aide de ces coefficients sont comparées à la géométrie initiale sur les figures III.11a et III.12a. Les figures III.11b et III.12b comparent les résultats en terme de contraintes de von Mises;
- sur la forme initiale approchée à l'aide des courbes de Bézier,
- sur la forme finale proposée par l'optimisation.

	Mises max (MPa)	masse (kg)	variation de Mises (%)	variation de la masse (%)
géométrie initiale	513	10,5	-	-
problème 1	476	11	-7	+4
problème 2	502	10,5	-2	0

Tableau III.4 : Comparaison des résultats par rapport à la géométrie initiale.

Les formes obtenues avec ces paramètres sont comparées sur les figures III.11a et III.12a à la forme initiale. Ces nouvelles géométries respectent les contraintes citées au paragraphe III.2.3.3 Toutefois, les maillages finaux générés présentent quelques défauts. En effet, certains éléments sont mal proportionnés et la densité du maillage ne respecte plus les gradients de contraintes dans la pièce. C'est pour ces raisons qu'il faut envisager d'utiliser un mailleur automatique libre, surtout pour les structures qui risquent de voir leur géométrie évoluer considérablement.

	RA	e	jeu	Riv	Lsv	RD	d1g	d2g	d1h	d2h	d1b	d2b	p2b
	290	30	2	346	2,4	357,5	29,9	7,25	10,81	1,42	6,24	3	0
%	+2	+8	+3	+2	-12	+1	-25	-40	-26	+170	-22	+40	fixé

Tableau III.5 : Valeurs finales des paramètres d'optimisation.

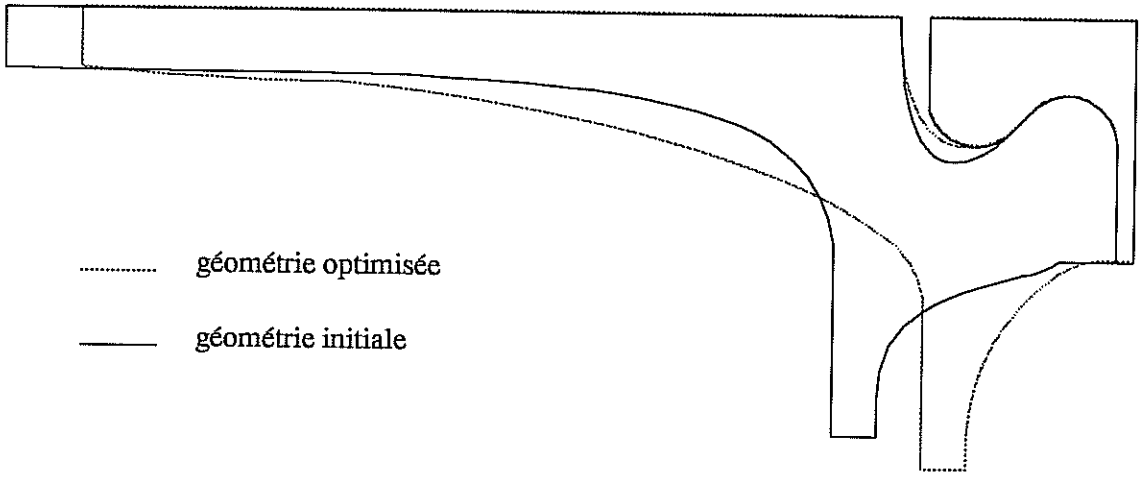


Figure III.11a : Forme optimisée pour le problème 1.

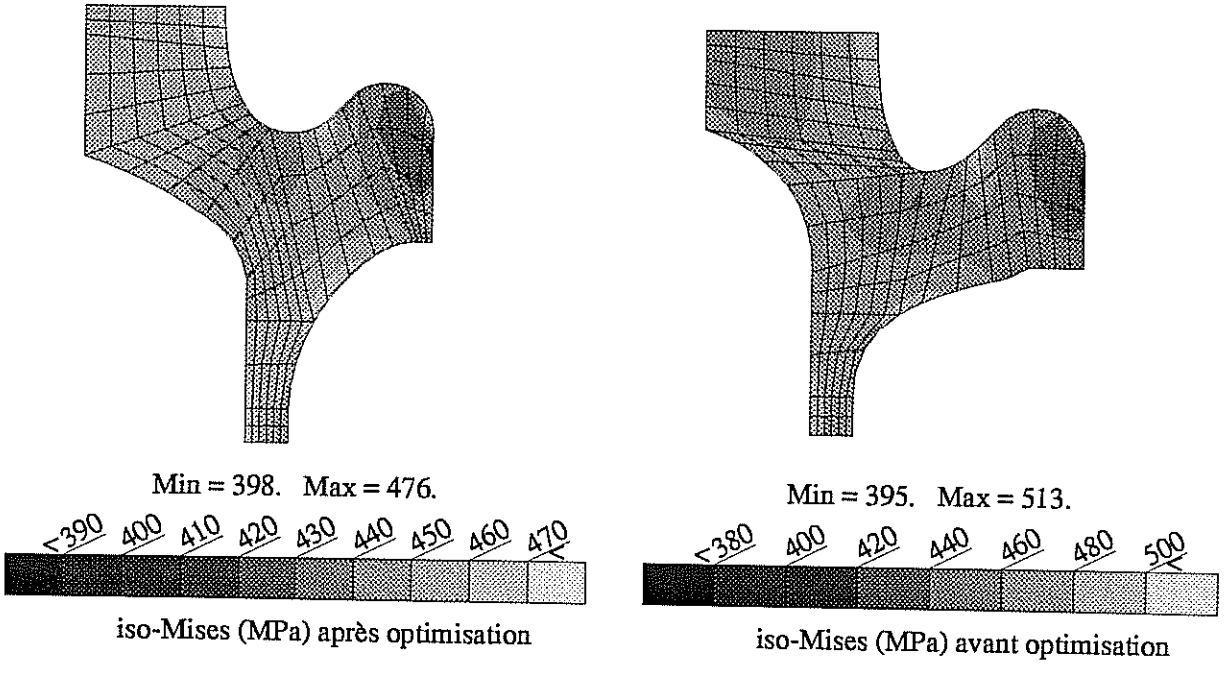


Figure III.11b : Comparaison des niveaux de contrainte pour le problème 1.

	RA	e	jeu	Riv	Lsv	RD	d1g	d2g	d1h	d2h	d1b	d2b	p2b
	285	27.82	1,94	340	2,69	358	41	12,02	14,63	0,52	8,03	2,125	1,194
%	fixé	fixé	+1	+0,3	-0,3	+1	-0,3	+0,08	-0,13	0	0	+0,08	fixé

Tableau III.6 : Valeurs finales des paramètres d'optimisation.

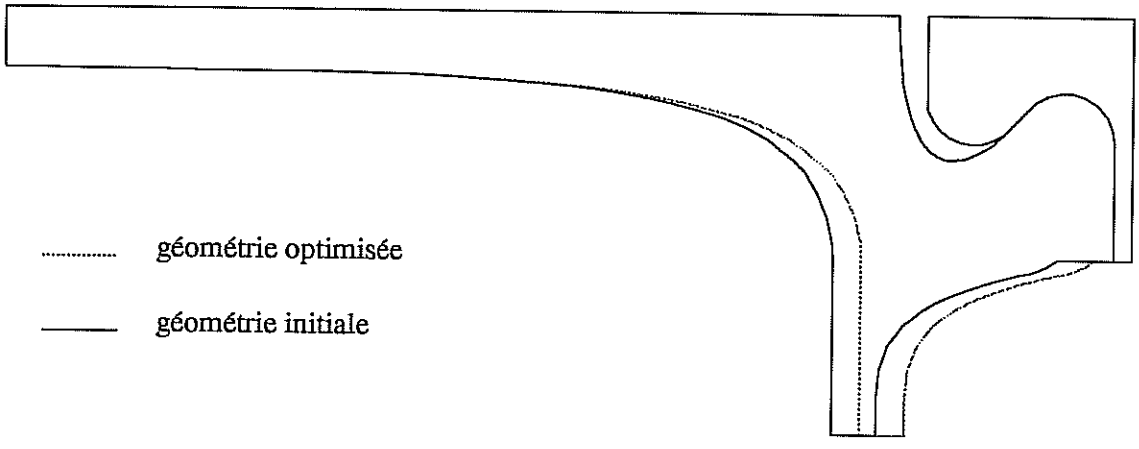


Figure III.12a : Forme optimisée pour le problème 2.

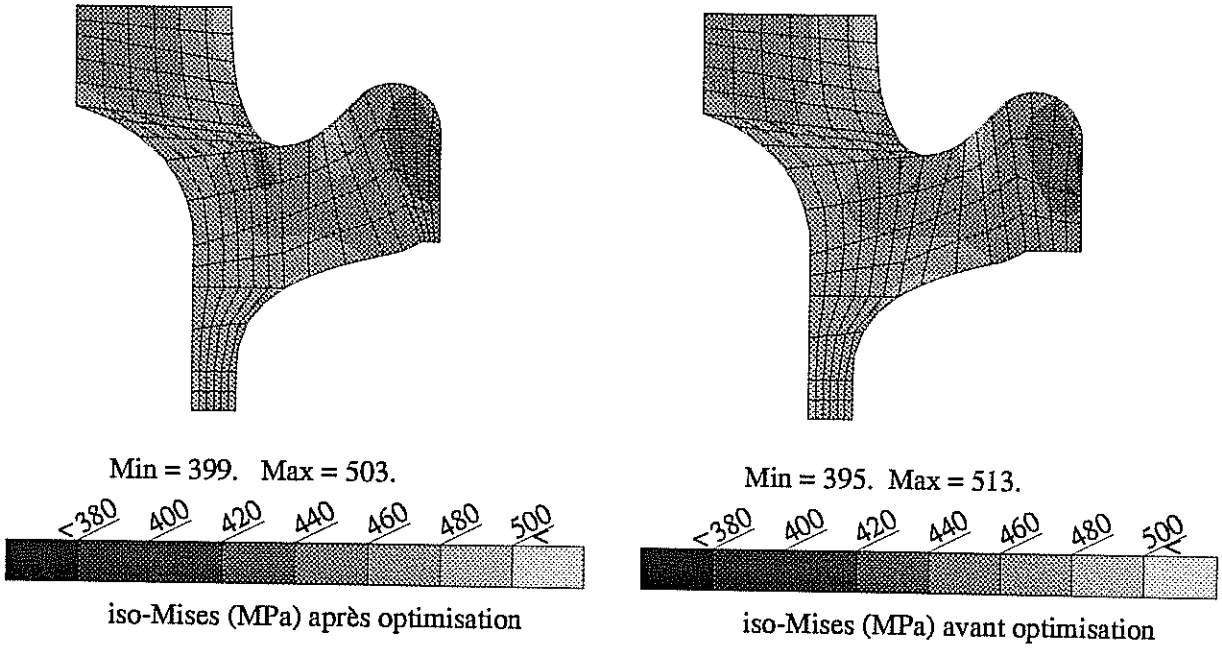


Figure III.12b : Comparaison des niveaux de contrainte pour le problème 2.

III.3. Optimisation de matériau

On a vu dans le paragraphe III.2 que notre approche basée sur l'utilisation "standard" du logiciel d'identification Sidolo et d'un code de calcul externe permet de résoudre les problèmes d'optimisation même dans le cas non linéaire. On se propose dans ce paragraphe de traiter avec la même méthodologie un problème non linéaire d'un autre type. Il s'agit d'un exemple d'optimisation métallurgique consistant à trouver la taille de grain optimale dans une structure pour que sa durée de vie en fatigue-fluage soit maximale. Ce type d'application peut intéresser l'ingénieur dans la mise au point des traitements thermiques à effectuer sur son matériau. La structure sur laquelle on effectue l'optimisation est un disque de fatigue biaxiale. La durée de vie est estimée à partir du cycle stabilisé obtenu par la méthode de sauts de cycles présentée dans le chapitre II. La figure III.13 illustre la répartition des contraintes obtenue au cycle stabilisé. Par ailleurs, on découple le comportement mécanique et l'endommagement. La durée de vie est donc évaluée sur un résultat de calcul par éléments finis déjà terminé. Le tableau III.7 résume le modèle d'endommagement utilisé (Lemaitre et Chaboche, 1985).

$$dD_c = \left[\frac{\sigma_{eq}}{A}\right]^r (1 - D_c - D_f)^k dt$$

$$dD_f = \left[\frac{\Delta\sigma_{eq}}{M(\sigma)}\right]^\beta [1 - (1 - D_c - D_f)^{\beta+1}]^{\alpha(\sigma)+1} dN$$

avec :

$$\sigma_{eq} = \gamma J_2(\sigma) + \delta\sigma_I + (1 - \gamma - \delta)Tr(\sigma)$$

$$\Delta\sigma_{eq} = \underset{t1}{Max}[\underset{t2}{Max}[J_2\{\sigma(t1) - \sigma(t2)\}]]$$

$$M(\sigma) = M_0(1 - b\,\sigma_{moy})$$

$$\alpha(\sigma) = 1 - a\,Max[0; \frac{J_{max} - \sigma_L(\sigma)}{\sigma_u - J_{max}}]$$

$$\sigma_L(\sigma) = \sigma_{L0} + (1 - b\,\sigma_{moy})\sigma_{moy}$$

σ_I : contrainte principale maximale.

$Tr(\sigma)$: trace de σ.

$J_2(\sigma)$: invariant de von Mises.

$J_{max}(\sigma)$: valeur maximale de $J_2(\sigma)$ sur un cycle.

σ_{moy} : valeur moyenne de $Tr(\sigma)$ sur un cycle.

Tableau III.7 : Equations du modèle d'endommagement de fatigue-fluage.

Sans rentrer dans les détails de ce modèle déjà analysé dans (Chaboche, 1978), on se contente de préciser qu'il s'agit là d'une approche découplée dans la mesure où les analyses d'endommagement se font une fois que les calculs mécaniques sont finis. On distingue trois types d'approches pour résoudre les problèmes d'endommagement :

- l'approche découplée qui est utilisée dans cette étude : elle possède l'avantage d'être indépendante de la loi de comportement mécanique (Benallal et al., 1985). Elle peut être applicable dans le cas où la redistribution de la contrainte due à l'endommagement est négligeable,

- l'approche semi-couplée qui consiste, numériquement, à relâcher des noeuds aux bords d'une fissure selon un critère d'endommagement,

- l'approche complètement couplée entre les équations du comportement contrainte-déformation et celle de l'endommagement (Billardon, Moret-Bailly, 1986). Elle n'est généralement applicable que pour les matériaux ductiles ou les matériaux à endommagement réparti (béton).

Dans le modèle qui intéresse la présente étude, D_c désigne la variable d'endommagement en fluage et D_f la variable d'endommagement en fatigue. L'algorithme utilisé (Cailletaud, Chaboche, 1982) pour estimer la durée de vie suppose une interaction non linéaire entre la fatigue et le fluage. Durant le cycle N, l'incrément d'endommagement total est dû à une partie de fatigue et une partie de fluage. On suppose qu'à chaque "incrément" la variable d'endommagement globale passe de D_0 à D_1 à cause du fluage et de D_1 à D_2 à cause de la fatigue. Une intégration du modèle d'endommagement en fatigue-fluage est explicitée en annexe III.3 dans un cas uniaxial simple.

Les paramètres physiques qui déterminent les mécanismes de rupture sont nombreux (Dieter, 1961); (Jaoul, 1965); (François, Pineau, Zaoui, 1992). Parmi ces facteurs on peut citer la structure cristalline, les impuretés, les états de contraintes et de déformations et la taille de grain. C'est ce dernier paramètre qu'on a décidé d'identifier. Il est bien connu que, lorsque la taille de grain augmente, le nombre de cycles à rupture en fatigue diminue alors que le nombre de cycles à rupture en fluage augmente. Pour rendre compte de ces deux effets, on fait dépendre les coefficients M_0 et A de la taille de grain d :

$$M_0 = \left(\frac{k_1 d + k_2}{C_4}\right)^{-C5} + C_6 \qquad [III.8]$$

et

$$A = C_1 (k_1 d + k_2)^{C2} + C_3 \qquad [III.9]$$

On se donne des relations entre la taille de grain et la durée de vie en fluage sous 600 MPa (tableau III.8), ainsi que la durée de vie en fatigue sous une amplitude de

taille de grain	90 µm	100 µm	122 µm
durée de vie	400 heures	650 heures	2000 heures

Tableau III.8 : Correspondance taille de grain-durée de vie en fluage à 600 MPa.

taille de grain	90 µm	100 µm	122 µm
durée de vie	20000 cycles	5000 cycles	2000 cycles

Tableau III.9 : Correspondance supposée entre la taille de grain et la durée de vie en fatigue d'amplitude 700 MPa.

k_1	k_2	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
0.28	94.5	1500	0.1	615	2200	3	1896

Tableau III.10 : Paramètres liant les coefficients du modèle d'endommagement à la taille de grain. (unités : mm, s, MPa).

k	r	β	a	σ_u(MPa)	σ_{L0}(MPa)	b	γ	δ
15	13.28	9	0.09	1150	480	43e-5	1	0

Tableau III. 11 : Coefficients du modèle d'endommagement. (unités : mm, s, MPa).

700 MPa (tableau III.9), ce qui permet de déterminer les coefficients k_1, k_2, C_1, C_2, ,C_3, C_4, C_5 et C_6. Dans ces cas particuliers, les équations du modèle d'endommagement s'intègrent facilement (cf. annexe III.3). On obtient ainsi les valeurs indiquées dans le tableau III.10 pour ces paramètres.Les autres coefficients sont choisis comme indiqué dans le tableau III.11.

Dans la suite il ne faudra pas accorder d'importance aux valeurs de taille de grain trouvées, les relations (III.8) et (III.9) n'étant pas fondées sur une étude métallurgique précise du matériau. Il faudra plus juger de façon comparative.

Il existe donc, pour chaque historique de contraintes, une taille de grain optimale pour laquelle la durée de vie totale est maximale. Afin d'illustrer cette dépendance, on cherche à traiter le cas d'un élément de volume soumis au chargement indiqué sur la figure III.14a. La taille de grain optimale est celle qui donne le nombre de cycles à rupture cumulé le plus élevé. Elle peut être obtenue par une résolution implicite en d (figure III.14b). Pour le disque de fatigue biaxiale, trois cas ont été envisagés :
(i) La résolution implicite sur l'élément de volume peut être répétée, dans le cas d'une structure, pour chaque point de Gauss (figure III.15a). On obtient ainsi de façon directe, et sans optimisation, une répartition de la taille de grain (figure III.16a) qui

donne lieu à une distribution qui maximise le nombre de cycles à rupture point par point (figure III.15b). On obtient ainsi un minimum de 466767 cycles.

(ii) Mais il est plus réaliste de se limiter à une seule taille de grain optimale pour toute la structure. Dans ce cas, la procédure d'optimisation fait appel au post-processeur de calcul d'endommagement de Zébulon. La taille de grain obtenue ainsi est de 168 µm et donne un nombre de cycles à rupture de 3330 cycles. Ce résultat est bien entendu moins bon que celui de la première stratégie. La figure III.17 illustre la répartition du nombre de cycles à rupture en fluage, en fatigue et enfin le nombre de cycles à rupture résultant du cumul fatigue-fluage

(iii) Un compromis entre les deux stratégies, qui pourrait être à la fois bénéfique pour la durée de vie et réaliste, consiste à distinguer plusieurs zones dans la structure (figure III.15c). En effet il est possible de contrôler par la fabrication une telle distribution de taille de grain. La répartition de taille de grain obtenue en utilisant cette stratégie est résumée dans le tableau III.12. La figure III.18 illustre la répartition du nombre de cycles à rupture en fluage, en fatigue et enfin le nombre de cycles à rupture cumulé.

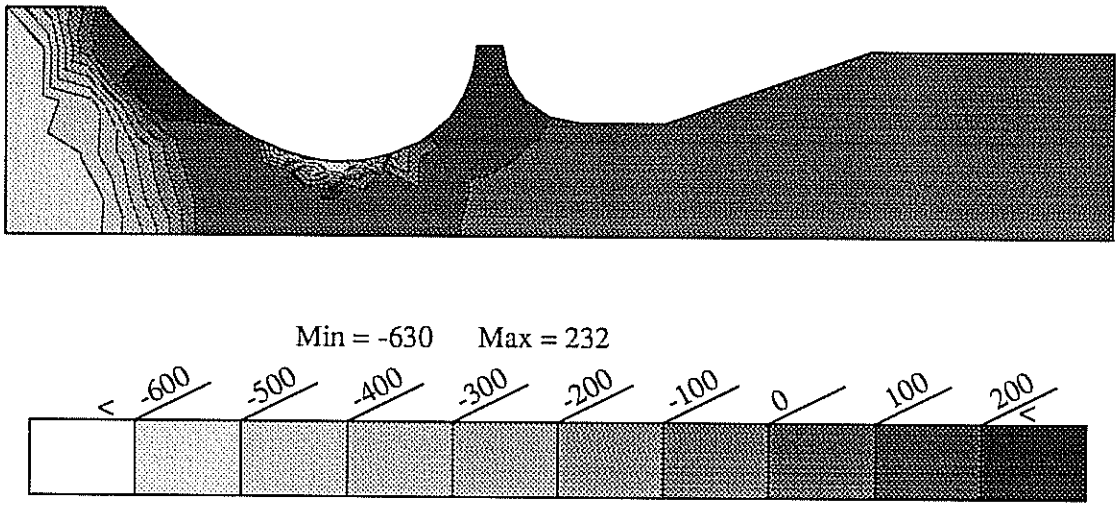
zone	alésage	col	extérieur
taille de grain	211	26	24
rupture à (cycles)	3827	6725	98914

Tableau III.12 : Diamètres des grains pour les différentes zones.

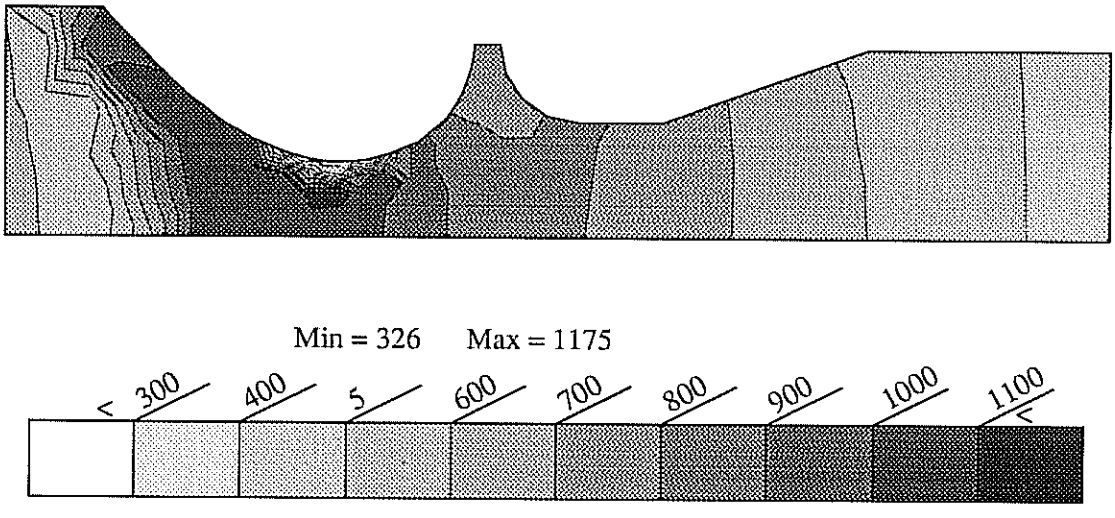
On s'aperçoit qu'effectivement la durée de vie est améliorée par rapport à la deuxième stratégie. Toutefois le nombre de cycles à rupture reste assez faible, ceci est dû au fait que les zones d'optimisation sont choisies de façon arbitraire. Pour augmenter donc la durée de vie d'une façon significative il faudrait faire une étude raffinée sur le choix des différentes zones tout en gardant à l'esprit l'aspect faisabilité. L'analyse mécanique précédemment faite sur la répartition spatiale des contraintes et des déformations viscoplastiques au cycles stabilisé, laisse à penser que l'amorçage doit avoir lieu au col légèrement à l'intérieur du disque ou à l'alésage. L'application de la loi d'endommagement confirme que l'amorçage a plutôt lieu au col à quelques mm de la surface. Toutefois, une zone à mi-distance entre le col et l'alésage présente un nombre de cycles à rupture aussi faible que celui du col. Les zones d'amorçage possibles sont donc :

- stratégie 1 : une première zone se situe près de la surface du col légèrement à gauche alors qu'on observe également une deuxième zone à mi-distance entre le col et l'alésage,
- stratégie 2 : les zones d'amorçage se situe à la surface du col, près du col légèrement à l'intérieur de la matière et dans une zone plus étendue entre le col et l'alésage,

- stratégie 3 : l'amorçage se situe entre le col et l'alésage, mais plus près de la surface supérieure du disque.

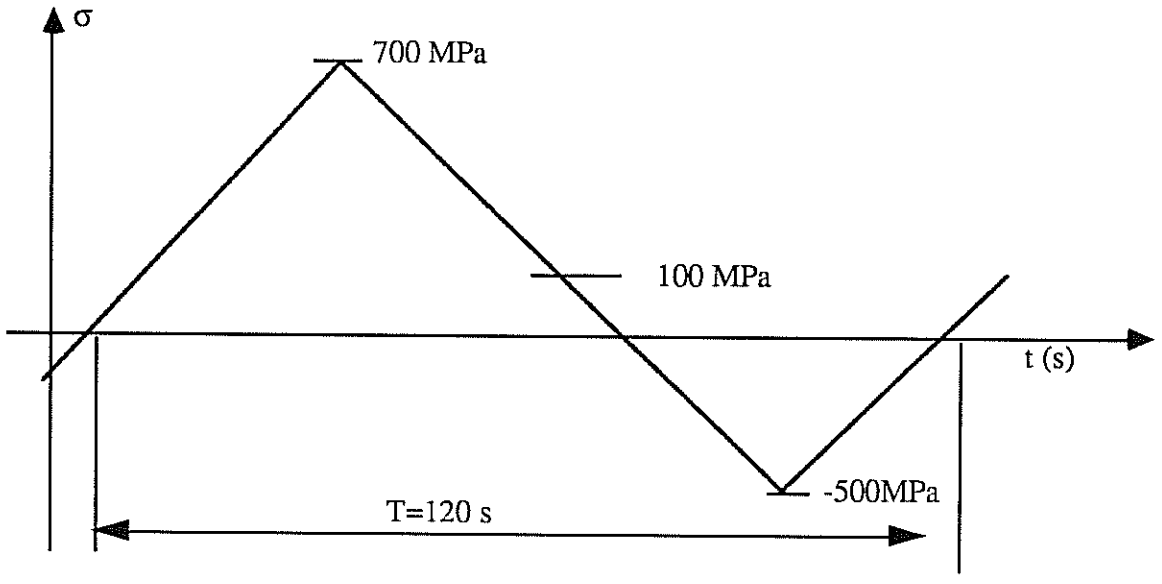


sig33 (MPa), cycle stabilisé, minima



sig33 (MPa), cycle stabilisé, maxima

Figure III.13 : Distribution des contraintes circonférentielles (MPa) au cycle stabilisé.



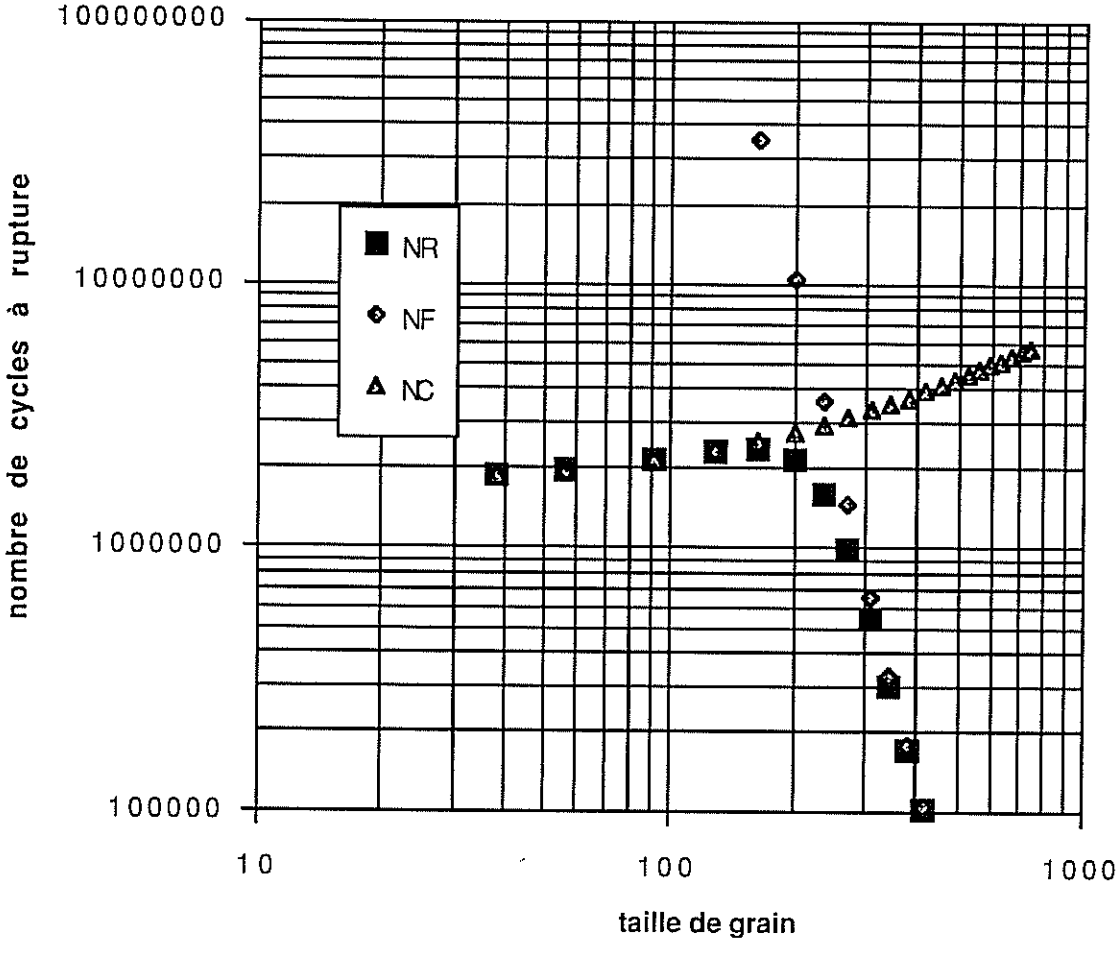
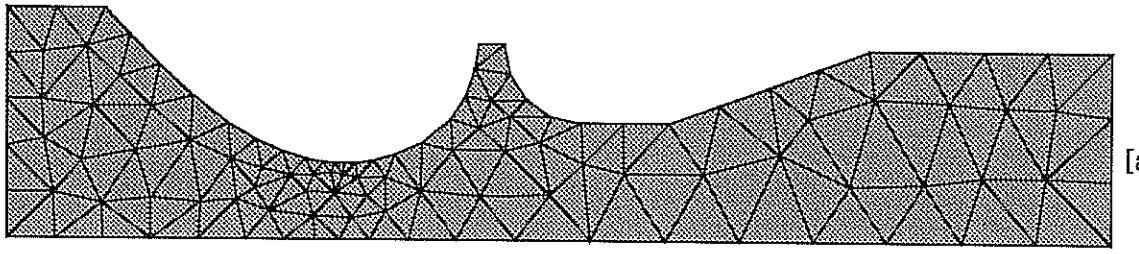


Figure III.14 : Taille de grain (μm)optimale pour un élément de volume.

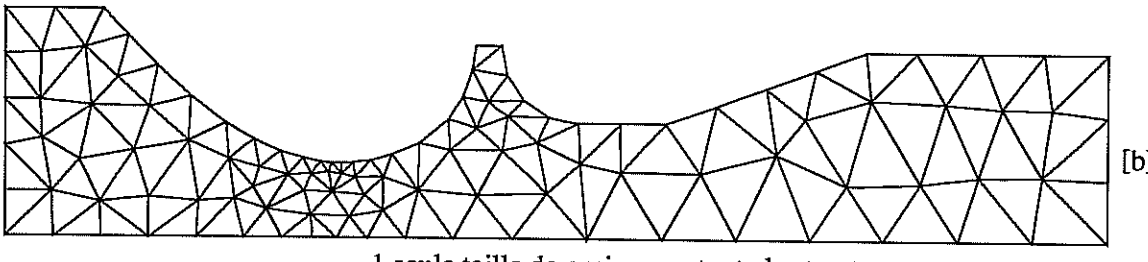
NF : Nombre de cycles à rupture en fatigue. NC : nombre de cycles à rupture en fluage.

NR : Nombre de cycles à rupture cumulé.



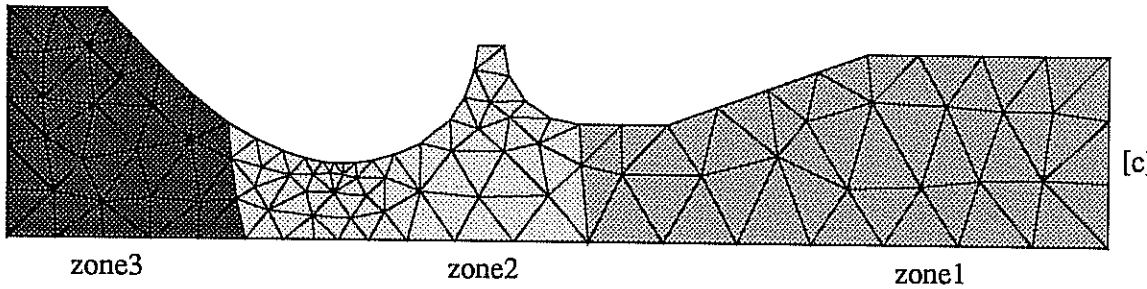
[a]

1 taille de grain par point de gauss



[b]

1 seule taille de grain pour toute la structure



[c]

zone3 zone2 zone1

Figure III.15 : Différentes stratégies possibles pour l'optimisation.
[a] Stratégie 1 : taille de grain par point de Gauss.
[b] Stratégie 2 : taille de grain uniforme.
[c] Stratégie 3 : taille de grain par zone.

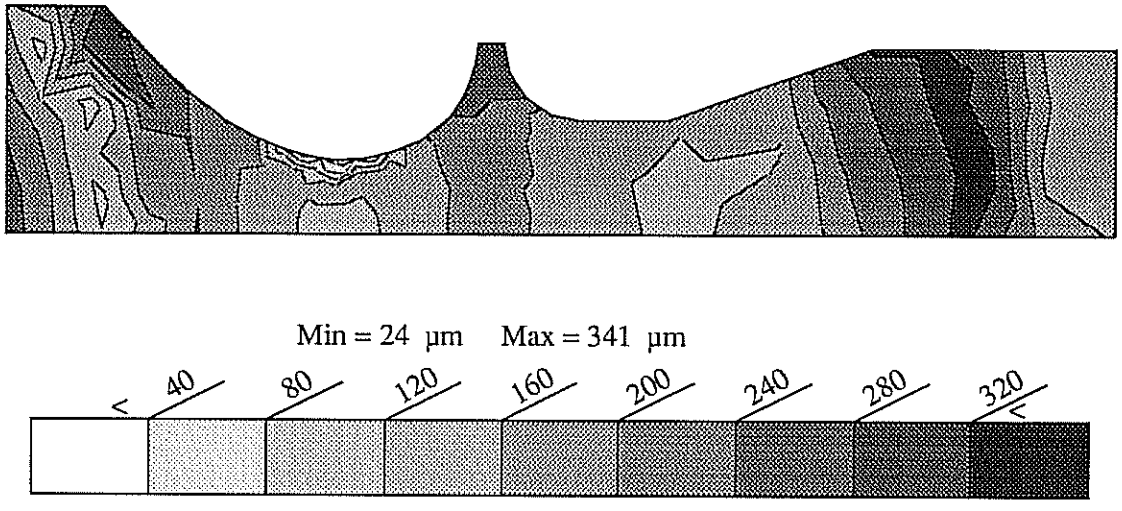
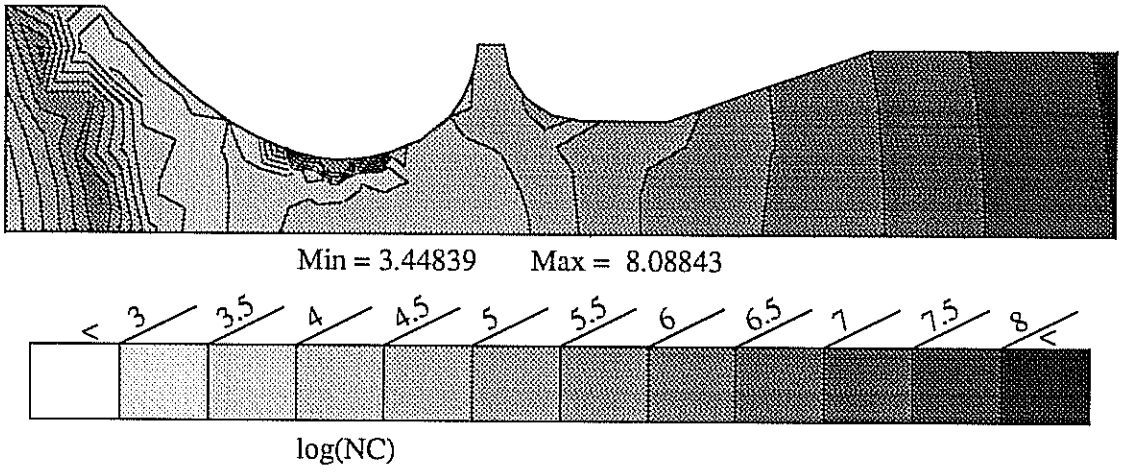
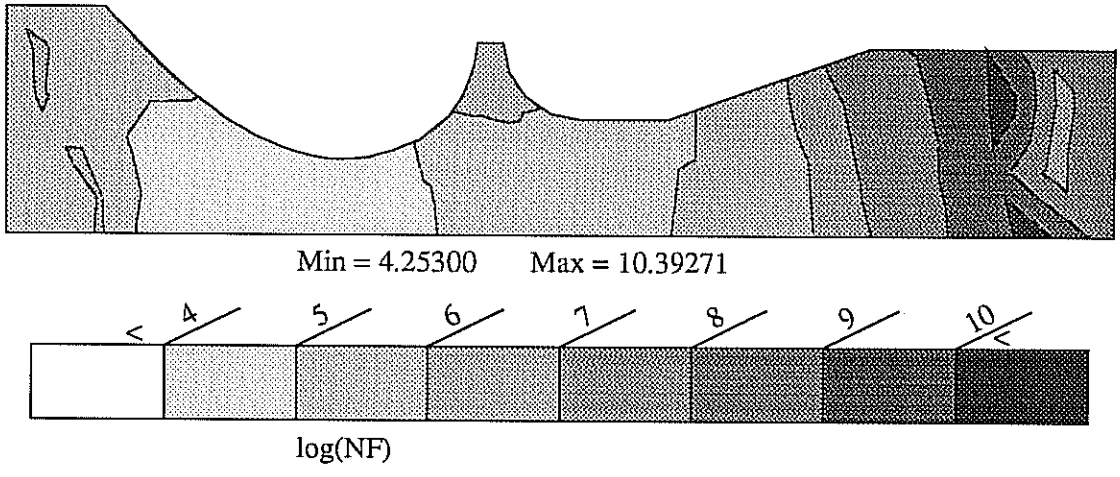


Figure III.16 : Répartition de la taille de grain et du nombre de cycles à rupture pour la stratégie 1.





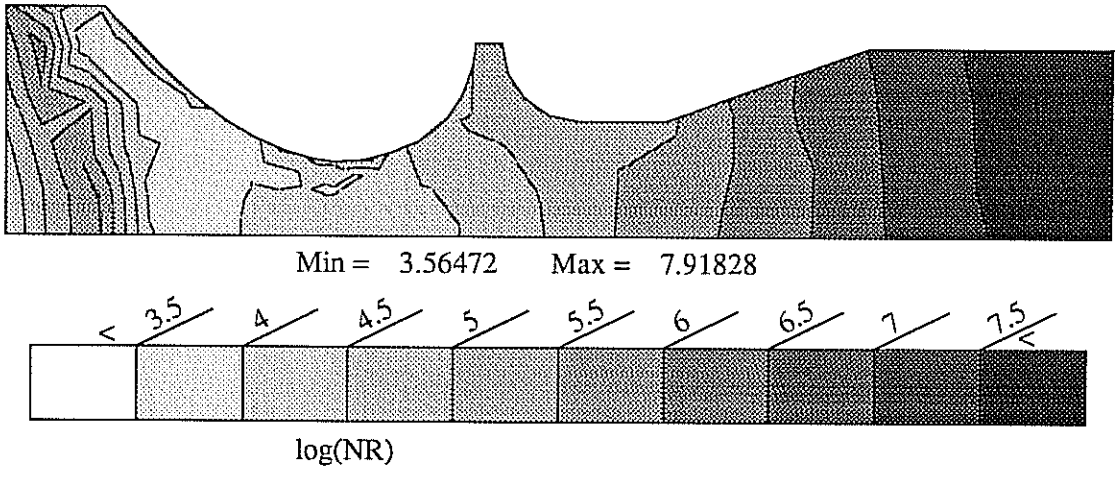
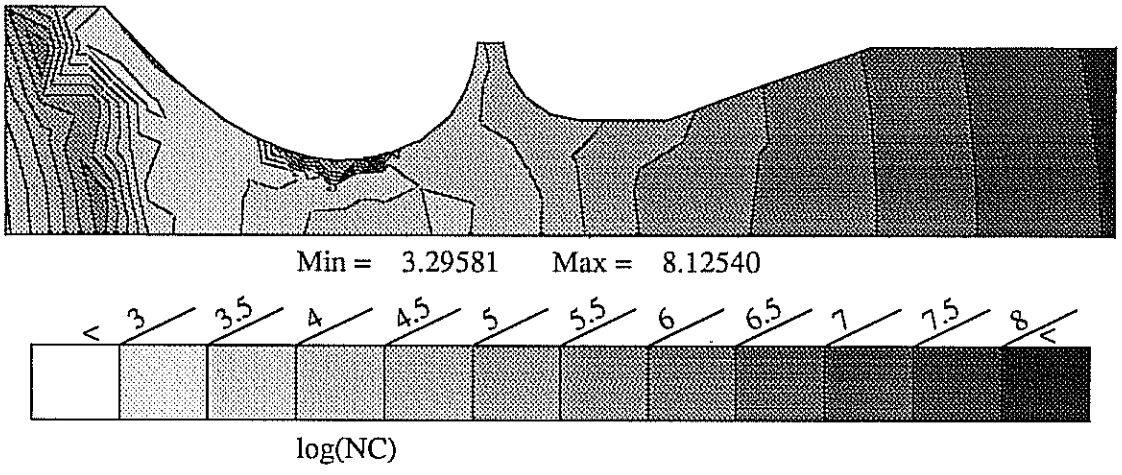
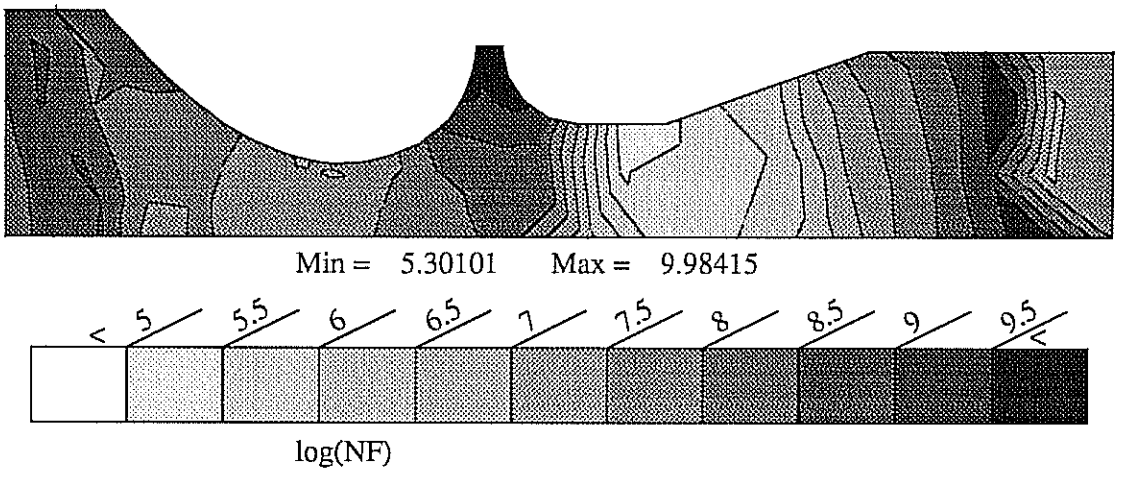


Figure III.17 : Répartition du nombre de cycles à rupture pour la stratégie 2, (1 taille de grain unique pour tout le disque, 168 μm)





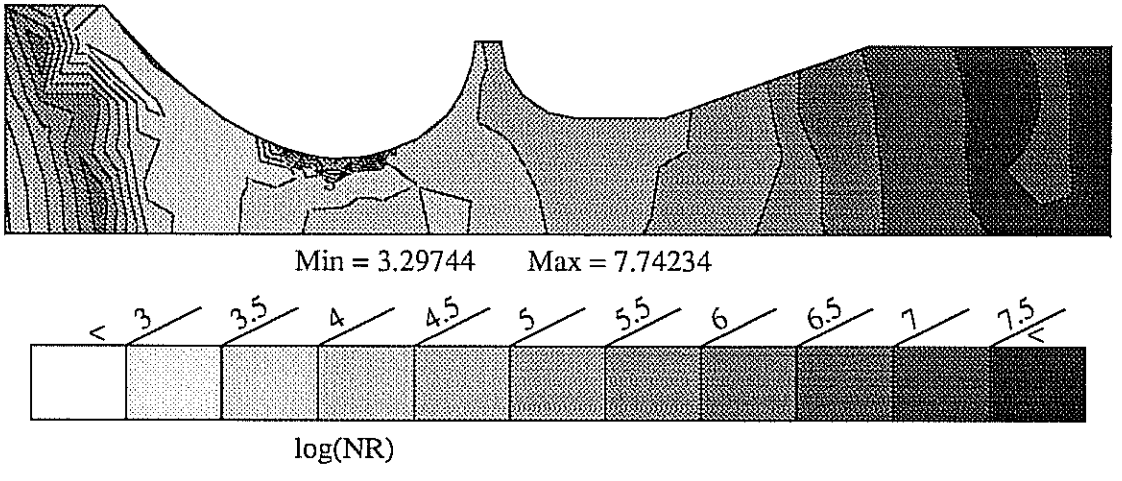


Figure III.18 : Répartition du nombre de cycles à rupture pour la stratégie 3, (1 taille de grain unique par zone).

III.4. Conclusion

L'approche préconisée et qui consiste à utiliser un code, destiné initialement aux problèmes d'identification, pour résoudre des problèmes d'optimisation a donc fait ses preuves à la fois sur des cas académiques et industriels :
- l'optimisation de forme sur le disque élastique en rotation converge sans problème vers la solution analytique,
- l'exemple du disque viscoplastique en rotation montre que l'on peut traiter de la même manière les problèmes linéaires et les problèmes non linéaires,
- la méthode s'est avérée également applicable aux géométries compliquées (fond d'alvéole). Pour ce dernier exemple, il serait nécessaire de tenir compte de conditions aux limites plus élaborées (glissement par exemple) et des particularités de l'état de contrainte sur les pièces réelles, notamment le fait que la contrainte circonférentielle dans le pied d'aube est très faible. Ce dernier point peut être simulé par des contraintes planes, ou en passant au calcul 3D.

La généralité de cette méthodologie permet de traiter sans plus de complication le cas où le comportement du matériau est non linéaire, ou encore modifier la fonction objectif, en la faisant porter sur des critères de rupture, ou en mélangeant les résultats de plusieurs missions. On peut donc envisager son application à des cas de géométrie plus complexes 2D ou 3D. Les développements qui restent à réaliser concernent une prise en compte plus facile de la géométrie, du paramétrage de la pièce, ainsi qu'une évaluation de l'erreur réalisée. Cela passe par une spécialisation du logiciel en fonction de la pièce considérée ("logiciel métier"), et par l'adoption d'un mailleur libre avec contrôle d'erreur.

L'approche utilisée présente par rapport aux méthodes classiques l'avantage d'être parfaitement modulaire, ce qui permet d'utiliser des codes extérieurs standards. En effet le code de calcul par éléments finis, dans le cas de l'optimisation de forme, et le post-processeur d'endommagement, dans le cas de l'optimisation de taille de grain ont tous les deux été utilisés sans aucune modification. Ces deux exemples assez différents montrent la généralité de la méthodologie qui peut donc s'appliquer à d'autres cas (annexe III.1).

Conclusion générale

On a traité dans cette étude trois thèmes indépendants mais qui sont néanmoins complémentaires pour les ingénieurs du bureau d'études et du bureau de méthodes. Ces trois thèmes portent successivement sur l'étude de comportement mécanique des matériaux, sur une méthode d'intégration numérique permettant de calculer les structures par éléments finis avec un coût minimum, et en troisième lieu sur des problèmes d'optimisation.

Le premier chapitre est consacré à l'étude du comportement des matériaux métalliques. Une étude bibliographique effectuée sur quelques modèles classiques nous a permis de trouver un point commun pour le comportement de ces modèles vis-à-vis du rochet. Il est important de maîtriser ce phénomène car il peut être responsable de la ruine des structures. On a montré que l'existence ou non d'une surface limite gouverne l'évolution de la déformation progressive. Le modèle proposé utilise plusieurs déformations inélastiques (plastiques ou viscoplastiques) et a été développé dans le cadre thermodynamique des processus irréversibles. Deux cas de figure ont été étudiés pour ce type de modélisation :

→une approche qui suppose l'existence de plusieurs déformations inélastiques et autant de fonctions de charges. Les modèles 2M2C, nMnC ainsi que le modèle à deux déformations inélastiques (ddi) déjà développé par Contesti et Cailletaud (1989) font partie de cette approche. Le modèle 2M2C préserve le pouvoir de décrire l'effet de vitesse inverse déjà acquis par le modèle ddi. Il permet également une bonne description de l'interaction entre la plasticité et la viscoplasticité.

→Dans la deuxième approche, on considère également plusieurs déformations inélastiques mais les contraintes locales sont regroupées en une seule fonction de charge (modèle 2M1C). Dans ce cas, une similitude peut être faite avec le modèle de Zarka (1979) et Inglebert (1984). Ces derniers auteurs avaient déjà dégagé des relations entre le comportement du rochet et la matrice d'écrouissage (celle qui lie les déformations inélastiques aux contraintes internes). Cette propriété a été exploitée pour faire dépendre le comportement en rochet du niveau de chargement (contrainte moyenne, amplitude de contrainte).

On a reconstruit deux bases expérimentales à partir d'expériences publiées dans la littérature pour tester la validité des modèles 2M2C et 2M1C et leur pouvoir de décrire correctement, outre le rochet, les phénomènes classiques rencontrés dans les comportements des matériaux (traction, fluage, relaxation, écrouissage cyclique). La validation du modèle 2M2C a été effectuée sur l'Inconel 718 qui, outre son comportement adoucissant, peut être en écoulement en dessous de la limite d'élasticité

conventionnelle. Cette base expérimentale contient une vingtaine d'essais différents qui ont été bien décrits dans l'ensemble. On a choisi ensuite un acier austénitique inoxydable du type 17-12 SPH pour valider le modèle 2M1C. Cette base expérimentale contient, outre des essais classiques tels que ceux cités plus haut, un essai incrémental (essai d'écrouissage cyclique à déformation imposée dont l'amplitude évolue par palier croissant). Les résultats de cette confrontation ont été également encourageants pour ce deuxième modèle.

Dans le deuxième chapitre, on s'est intéressé à une méthode d'intégration numérique qui a pour but de minimiser les temps de calcul dans l'analyse de structures par la méthode des éléments finis avec des modèles de comportement non linéaire. Cette méthode dite de sauts de cycles, est basée sur des pas de calcul qui se "chiffrent" en nombre de cycles (quelques dizaines en général). Cet algorithme a été implanté dans le logiciel par éléments finis Zébulon, testé sur des exemples simples et enfin appliqué à des exemples industriels plus complexes. Le modèle de comportement qui a été retenu pour les applications est le modèle viscoplastique unifié (1 seule déformation viscoplastique) de Chaboche. Toutefois, la méthode de sauts de cycles, qui ne dépend pas de la loi de comportement considérée, peut être appliquée à n'importe quel modèle construit à partir de variables internes.

Le troisième chapitre a été consacré à l'étude des problèmes d'optimisation. Deux exemples ont été traités : l'optimisation de forme et l'optimisation de matériau. La méthodologie qu'on a adoptée consiste à utiliser deux logiciels différents dans leurs versions "standard". Le premier logiciel est le code de calcul par éléments finis Zébulon et la deuxième est le code d'identification de paramètres Sidolo. Ce dernier est destiné initialement à identifier des paramètres de modèles physiques sur des expériences réelles. Les expériences, dans la procédure d'identification, sont remplacées, dans le cas de l'optimisation, par des objectifs à atteindre selon des critères donnés.

Les points essentiels qui se dégagent de l'optimisation de forme sont les suivants :
- validité de la méthode (comparaison avec une solution analytique),
- pouvoir de traiter les problèmes non linéaires (optimisation en viscoplasticité anisotherme),
- difficulté à fabriquer le maillage en fonction du paramétrage et de la géométrie.

Pour l'optimisation de matériau, on retient que :

- cet exemple est prospectif, mais en même temps parfaitement réaliste car les informations métallurgiques expérimentales se résument à des corrélations relativement classiques entre taille de grains et durée de vie,

- la méthode possède une aisance à tester plusieurs stratégies possibles : taille de grain uniforme, taille de grain par zone, ...

Cette approche, utilisée au départ avec précaution, a montré sa fiabilité et sa capacité à traiter des problèmes très divers. Par ailleurs, les outils généraux qui ont été mis en place permettent maintenant de traiter de nouvelles applications d'optimisation d'une façon très simple et rapide.

Références

Références du chapitre I :

ANDRIEU, 1991, Communication privée

ARMSTRONG P.J., FREDERICK C.O., 1966, "A mathematical representation of the multiaxial Bauschinger effect", CEBG Report R.D/B/N/N731.

ASSAKER D., 1990, "Analyse thermomécanique non linéaire par éléments finis des traitements thermiques des métaux", Thèse de doctorat, Université de Liège.

BISHOP J. F. W., HILL R., 1951, "A theory of the plastic distortion of a polycrystalline aggregate under combined stresses", Philosophical Magazine, vol. 42, pp. 414-427.

BLANC D., STRUDEL J.L., 1987, "The Portevin-Le Chatelier instability : on a heterogeneous flow with a microscopic origin", , Proc. 8ème RISO, Int. Symp. on Metallurgy and Material Sciences, "Constitutive relations and their physical basis", 7-11 septembre, pp. 227-238.

BUI H.D., 1969, "Etude de l'évolution de la frontière du domaine élastique avec l'écrouissage et relation de comportement élastoplastique des métaux cubiques", Thèse Université de Paris 6, et Mémorial sciences et techniques de l'armement, Fasc. 1, pp. 141-165.

BURLET H., CAILLETAUD G., 1987, "Modeling of cyclic plasticity in finite element codes", 2 ème Int. Conf. on Constitutive Laws for Engineering Materials - Theory and Applications, Ed. C.S. Desai, E. Krempl, P.D. Kiousis, Tucson, Arizona., 5-8 janvier, pp. 1157-1164.

CAILLETAUD G., 1979, "Modélisation mécanique d'instabilité microstructurale en viscoplasticité cyclique à température variable", Thèse Docteur Ingénieur, Université Paris 6, N.T. ONERA n° 1979-6.

CAILLETAUD G., 1987, "Une approche micromécanique phénoménologique du comportement inélastique des métaux", Thèse d'état, Université Paris 6, 16 décembre.

CAILLETAUD G., 1992, "A Micromechanical approach to inelastic behaviour of metals", Int. Journal of Plasticity, vol. 8, pp. 55-73.

CAILLETAUD G., SAI K., 1993, "Study of plastic/viscoplastic models with various inelastic mechanisms", Proc. Plasticity ' 93, Baltimore, 19-23 juillet.

CHABOCHE J.L., 1978, "Description thermodynamique et phénoménologique de la viscoplasticité cyclique avec endommagement ", Thèse d'état, Université Paris 6.

CHABOCHE J.L., DANG-VAN K. et CORDIER G., 1979, "Modelization of the strain memory effect on the cyclic hardening of 316 stainless steel", SMIRT-5, Division L. Berlin.

CHABOCHE J.L., 1989, "Constitutive equations for cyclic plasticity and cyclic viscoplasticity", Int. Journal of Plasticity, vol. 5, pp. 247-302.

CHABOCHE J.L., 1991, "On some modifications of kinematic hardening to improve the description of ratchetting effects", Int. Journal of Plasticity, vol. 7, pp. 661-678.

CHABOCHE J.L., NOUAILHAS D., 1989, "Constitutive modeling of ratchetting effects. Part I : Experimental facts and properties of the classical models.", Journal of Eng. Mat. and Tech., vol. 111, pp. 384-392.

CHABOCHE J.L., NOUAILHAS D., 1989, "Constitutive modeling of ratchetting effects. Part II : Possibilities of some additional kinematic rules", Journal of Eng. Mat. and Tech., vol. 111, pp. 409-416.

CHABOCHE J.L., NOUAILHAS D., PACOU D., PAULMIER P., 1991, "Modeling of the cyclic response and ratchetting effects on inconel-718 alloy", Eur. J. Mech., A/Solids, vol. 10, n° 1, pp. 101-121.

CONTESTI E., 1988, "Description de l'interaction plasticité-viscoplasticité par un modèle phénoménologique à deux déformations inélastiques. Application à l'acier inoxydable du type 17-12 SPH.", Thèse de doctorat, ENSMP, 10 mai.

CONTESTI E., CAILLETAUD G., 1989, "Description of creep plasticity interaction with non unified constitutive equations, application to an austenitic stainless steel", Nuclear Eng. and Design, vol. 116, pp. 265-280.

DAFALIAS Y.F. et POPOV E.P., 1976, "Plastic internal variables formalism of cyclic plasticity", ASME, J. of Appl. Mech., vol. 98, pp.645-651.

DELOBELLE P., OYTANA C., 1986, "Etude des Lois de Comportement à Haute Température en Plasticité-Fluage d'un Acier Inoxydable Austénitique (17-12 SPH)", Nucl. Mat, vol. 139, pp. 204-227.

DELOBELLE P., 1993, "Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loadings, Part I : Behavior", Int. Journal of Plasticity, vol. 9, pp. 65-86.

DELOBELLE P., 1993, "Synthesis of the elastoviscoplastic behavior and modelization of an austenitic stainless steel over a large temperature range, under uniaxial and biaxial loadings, Part II : phenomenological modelization", Int. Journal of Plasticity, vol. 9, pp. 87-118.

DEBORDES O., NAYROLES B., 1976, "Sur la théorie et le calcul à l'adaptation des structures élastoplastiques", J. de Mécanique, vol. 15, pp. 1-53.

DEBORDES O., 1977, "Contribution à la théorie et au calcul de l'élastoplasticité asymptotique", Thèse d'état, Université d'Aix Marseille 1.

DRUCKER D.C., PALGEN L., 1981, "On stress-strain relations suitable for cyclic and other loading", Journal of Applied Mechanics, vol. 49, p. 479.

FREED A.D., WALKER K.P.., 1993, "Viscoplasticity with creep and plasticity bounds", Int. Journal of Plasticity, vol. 9, pp. 213-242.

GERMAIN P., 1973, "Cours de mécanique des milieux continus", Tome 1, Théorie générale, Masson (Paris).

GHONEM H., ZHENG D., 1991, "Depth of intergranular oxygen diffusion during environment-dependent fatigue crack growth in alloy 718", Materials Sciences and Engineering, vol. A150, pp. 151-160.

GOODMAN A.M., 1984, "Development of constitutive equations for computer analysis of stainless steel components", Nucl. Eng. Des., vol. 83, pp. 349-354.

GUIONNET C., 1992, "Modeling of ratchetting in biaxial experiments", JEMT, vol. 114, pp. 56-62.

HALPHEN B., NGUYEN Q.S., 1975, "Sur les matériaux standards généralisés", J. Méca., vol. 14, n°1, pp. 39-63.

HALPHEN B., 1978, "Problèmes quasi-statiques en viscoplasticité", Thèse d'état, Paris 6.

HANRIOT F., 1993, "Etude du comportement du superalliage monocristallin AM1 sous sollicitations cycliques", Thèse de doctorat, ENSMP, 25 mai.

HASSAN T., KYRIAKIDES S., 1992, "Ratchetting in cyclic plasticity, part I : uniaxial behavior", Int. Journal of Plasticity, vol. 8, pp. 91-116.

HASSAN T., CORONA E., KYRIAKIDES S., 1992, "Ratchetting in cyclic plasticity, part II : multiaxial behavior", Int. Journal of Plasticity, vol. 8, pp. 117-146.

HILL R., 1966, "Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip", J. Mech. Pys. Solids, vol. 14, pp. 95-102.

INGLEBERT G., 1984, "Analyse simplifiée des structures elasto-visco-plastiques sous chargements cycliques", Thèse d'état, Université Paris 6, 17 janvier.

KLISINSKI M., MRÓZ Z., RUNESSON K., 1992, "Structure of constitutive equations in plasticity for different choices of state and control variables", Int. Journal of Plasticity, vol. 8, pp. 221-243.

KOITER W.T., 1960, "Progress in solids mechanics", North Holland (Amsterdam), vol. 1, p. 165.

LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1985, "Mécanique des matériaux solides", Dunod, 1985.

LEMAITRE J., MARQUIS D., 1992, "Modeling complex behaviour of metals by the state-kinetic coupling theory", Journal of Eng. Mat. and Tech, vol. 114, pp. 250-254.

LEPAUTREMAT E., 1990, "Prévision du comportement mécanique de l'INCO 718", Rapport de fin d'étude, Ecole des Mines de Paris / SNECMA YKOM1.

MANDEL, 1965, "Généralisation de la théorie de plasticité de W. T. Koiter", International Journal of Solids and Structures, vol. 1, pp. 273-295.

MANDEL, 1972, "Unicité et principes variationnels en viscoplasticité", dans "Plasticité et viscoplasticité", Radenkovic et Salençon J., Ediscience/Mc Graw-Hill.

MANDEL, 1976, "Adaptation d'une structure plastique écrouissable", Mech. Res. Comm., vol. 3, pp. 251-256.

MANDEL, 1976, "Adaptation d'une structure élastoplastique écrouissable et approximations", Mech. Res. Comm., vol. 3, pp. 483-488.

MARQUIS D., 1979, "Etude théorique et vérification expérimentale d'un modèle de plasticité cyclique", Thèse de doctorat, Université Paris 6, 10 juillet.

McDOWELL, D.L., 1992, "A Bounding Surface Theory for Cyclic Thermoplasticity", Journal of Eng. Mat. and Tech., vol. 114, pp. 297-303.

MERIC L., 1991, "Une modélisation mécanique du comportement des monocristaux", Thèse de doctorat ENSMP, 18 décembre.

MILLER A.K., 1987, "Unified constitutive equations for creep and plasticity", eds, Elsevier.

MRÓZ Z., 1967, "On the description of Anisotropic Work-Hardening", J. Mech. Phys. Solids, vol. 15, p. 163.

MRÓZ Z., SHRIVASTAVA H.P., DUBEY R.N., 1976, "A non linear hardening model and its application to cyclic loading", Acta Mechanica, vol. 25, pp. 51-61.

MRÓZ Z., 1987 "Phenomenological constitutive models for metals", in "Modelling small deformation of polycristals", J. Gittus, J. Zarka, eds, Elsevier, pp. 293-344.

NGUYEN Q.S., 1986, "Basic theorems of elastoplasticity", in "Modelling small deformations of polycristals", J. Gittus, J. Zarka, eds, Elsevier, pp. 65-87.

OHNO N., WANG, J.D., 1992, "Transformation of a nonlinear kinematic hardening rule to a multisurface form under isothermal and nonisothermal conditions", Int. Journal of Plasticity, vol. 7, pp. 879-891.

OHNO N., WANG, J.D., 1993, "Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part I : formulation and basic features for ratchetting behavior", Int. Journal of Plasticity, vol. 9, pp. 375-390.

OHNO N., WANG, J.D., 1993, "Kinematic hardening rules with critical state of dynamic recovery, Part II : application to experiments of ratchetting behavior", Int. Journal of Plasticity, vol. 9, pp. 391-403.

PERSOZ B., 1969, "Modèles non linéaires", in "La rhéologie", eds, Persoz, pp. 45-72.

PILVIN P., 1988, "Identification des paramètres de modèles de comportement", Proc. MECAMAT, Besançon, 30 août-1 septembre, pp. 155-164.

PILVIN P., 1990, "Approche multiéchelles pour la prévision du comportement anélastique des métaux", Thèse de doctorat, Université Paris 6.

PRAGER W., 1956, "A new method of analyzing stresses and strains in work hardening plastic solids", Journal of Applied Mechanics, vol. 23, p. 493.

PROVENDIER V., 1994, "Bases physiques d'un modèle de comportement viscoplastique pour un superalliage base Nickel", Thèse de doctorat ENSMP.

PUGH C.E., 1978, "On establishing constitutive equations for use in design of high temperature fast-reactor structure", Nucl. Eng. Des, vol. 51, pp. 23-27.

RUGGLES M.B., KREMPL E., 1989, "The influence of test temperature on the ratchetting behavior of type 304 stainless steel", Journal of Eng. Mat. and Tech, vol. 111, pp. 378-383.

TAYLOR G.I., 1938, "Plastic strain in metals", J. Inst. Metals, vol. 62, pp. 307-324.

TAVARD C., ROYER F. et PIERRE, L., 1987, "Recherche des systèmes de glissement actifs dans la déformation plastique d'un polycristal, glissement cristallographique et modèles de Sachs -Taylor intermédiaires", Mémoires et études scientifiques revue de métallurgie, pp. 93-105.

THAKKER A.B. et COWLES B.A., 1983, "Low strain, long life creep fatigue of AF2-1DA and INCO 718", N.A.S.A., Report FR.15652.

TSENG N.T. et LEE G.C., 1983, "Simple plasticity model of two-surface type", ASCE Journal of Eng. Mechanics, vol. 109, p. 795.

ZAOUI A., 1970, "Etude de l'influence propre de la désorientation des grains sur le comportement viscoplastique des métaux polycristallins (système CFC)", Thèse d'état, Fac. Sciences de Paris.

ZARKA J., 1979, "Sur l'étude du comportement global des matériaux soumis à un chargement cyclique", Journal de Mécanique appliquée, vol. 3, N° 3, pp.291-326.

ZARKA J., 1986, "Systematic Structural Modeling of Metals", in "Modelling small deformations of polycristals", J. Gittus, J. Zarka, eds, Elsevier, pp. 374-410.

ZIEGLER H., 1959, "A modification of Prager's hardening rule", Quartertly of Applied Mathematics, vol. 17, p. 55.

Références du chapitre II :

AAZIZOU K., BURLET H., CAILLETAUD G., 1990, "Comparison of various plasticity/viscoplasticity models", Proc. of 3rd Int. Conf. on Constitutive Laws, Ed. C.S. Desai, E. Krempl et al, Tucson, Arizona., 7-11 janvier, pp. 651-654.

AAZIZOU K., 1990, "Calculs par éléments finis en plasticité et en viscoplasticité", Thèse de doctorat, ENSMP, 26 juin.

AXELSSON O., CAREY G. et LINDSKOG G., 1989, "On a class of preconditioned iterative methods on parallel computers", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 27, pp. 637-654.

BURLET, H., CAILLETAUD, G., 1991, "Zebulon, a finite element code for nonlinear material behaviour, Proc. Int. Conf. "New advances in structural computations", Giens, France, 2-5 avril, pp. 673-680.

CAILLETAUD G., CHABOCHE J.L., 1984, "Prévision de durée de vie à haute température sous chargement complexe", Proc. of Agard meeting N°368, "Engine Cyclic Durability by Analysis and testing", Lisse (Pays Bas), 30 mai-1 juin, pp. 13-1/13-8.

COGNARD J.Y., LADEVEZE P., 1993, "A large time increment approach for cyclic viscoplasticity", Int. Journal of Plasticity., vol. 9, n°2, pp. 141-157.

CHABOCHE J.L., 1978, (cf. références du chapitre I).

DEBORDES O., NAYROLES B., 1976, (cf. références du chapitre I).

FARHAT C., SOBH N. et PARK K.C., 1990, "Transient finite element computations on 65536 processors : the connection machine", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 30, pp. 27-55.

GUENNOUNI T., AUBRY D., 1986, "Réponse homogénéisée en temps de structures sous chargements cycliques", C. R. A. S. , tome 303, série II, pp. 1765-1768.

KRUCH S., 1992, "Numerical analysis of an engine turbine disk loaded with a large number of thermomechanical cycles", Proc. of 3th Int. Conf. "Computational Plasticity", Barcelone, Espagne, 6-10 avril, 1992, pp. 1733-1744.

JOHNSSON S. L., MATHUR K.K., 1989, "Experience with the conjugate gradient method for stress analysis on a data parallel supercomputer", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 27, pp. 523-546.

JOHNSSON S. L., MATHUR K.K., 1990, "Data structures and algorithms for finite element method on a data parallel supercomputer", Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 29, pp. 881-908.

LADEVEZE P., 1989, "La méthode à grand incrément de temps pour l'analyse des structures à comportement non linéaire décrit par variables internes", CRAS, 309, serie II, p. 1095.

LEMAITRE, J. et CHABOCHE, J.L., 1985, (cf. références du chapitre I).

LESNE P.M., SAVALLE S., 1989, "An efficient cycles jump technique for viscoplastic structure calculations involving large number of cycles", Proc. of 2nd Int. Conf. "Computational Plasticity : Models, Software and Applications", Barcelone, Espagne, 18-22 septembre, pp. 591-602.

SAVALLE S. et CULIE J.P., 1978, "Méthodes de calcul associées aux lois de comportement cyclique et d'endommagement", La recherche aérospatiale, n° 1978-5, pp. 263-278.

ZEBULON, 1991, Manuel utilisateurs version 5.0. Centre Des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

Références du chapitre III :

BRAIBANT V., 1986, "Optimisation de forme des structures en vue de la conception assistée par ordinateur", Thèse de l'université de Liège.

BECK J.V., 1970, "Non linear estimation applied to the non linear inverse heat conduction problem", Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 13, pp. 703-716.

BERDIN C., 1993, "Etude expérimentale et numérique de la rupture des matériaux fragiles", Thèse de doctorat ENSMP.

BILLARDON R., MORET-BAILLY L., 1986, "Fully coupled strain and damage finite element analysis of ductile fracture", Proc. MECAMAT, Moret-sur-Loing, 3-5 juin, pp. 105-116.

BENALLAL A., BILLARDON R., LEMAITRE J., 1985, "Continuum damage mechanics and local approach of fracture. Numerical procedures", Computer methods in applied mechanics and engineering, North-Holland, vol. 92, pp. 141-155.

BENALLAL A., BILLARDON R., LEMAITRE J., 1991, "Continuum damage mechanics and local approach of fracture. Numerical procedures", Proc. EUROMECH 198 on "Physical-numerical modelling in non linear fracture mechanics", Stuttgart, Allemagne.

CAILLETAUD G., PILVIN P., 1993, "Identification, problèmes inverses : un concept modulaire", Colloque National en calcul des structures, Giens (France), 11-14 mai, pp. 770-787.

CAILLETAUD G., CHABOCHE J.L., 1982, "Lifetime prediction in 304 stainless steel by damage approach", "Pressure vessel and piping" de l4ASME. Orlondo (USA), 27 juin - 1 er juillet 1982.

CAILLETAUD G., CHABOCHE J.L., 1984, (cf. références du chapitre II).

CHABOCHE J.L., 1978, (cf. références du chapitre I).

CROIZET D., 1992, "Etude expérimentale et numérique du comportement à haute température du syalon 201", Thèse de doctorat ENSMP, 30 septembre.

DIETER G.E., 1961, "Mechanical metallurgy", McGraw-Hill.

FLEURY C., 1979, "Structure weight optimization by dual methods of convex programming", Int. J. numerical methods in engineering, vol. 14, pp. 1761-1783.

JAOUL B., 1965, "Etude de la plasticité et application aux métaux", Dunod.

LEMAITRE J., CHABOCHE J.L., 1985, (cf. références du chapitre I).

MASCAREL J.P., 1991, Communication privée.

MURRAY M., 1972, "Numerical methods for unconstrained optimization", Academic press.

PILVIN P., 1983, "Modélisation du comportement des assemblages de structures à barres", Thèse 3ème cycle, Université Paris 6, 7 décembre.

PILVIN P., SAI K., CAILLETAUD G., 1991, "Optimal design against creep and fatigue", Proc. of 4th Int. Conf. on Nonlinear Engineering Computations, Swansea (Pays de Galles), 16-20 septembre, pp. 731-740.

SIDOLO, 1992, Manuel utilisateurs version 2.3. Centre des Matériaux de l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris.

TROMPETTE P., FLEURY C., KNOPF-LENOIR C., 1987, "Optimisation des structures", Institut pour la promotion des sciences de l'ingénieur, Paris 9-11 septembre.

Annexes

annexe I.1 : différents types de couplage entre les variables d'écrouissage

Le couplage entre les deux écrouissages cinématique et isotrope peut être fait de plusieurs façons différentes. On va essayer de présenter quelques possibilités de couplage et de les analyser afin de dégager celles qui sont réalistes et correspondent aux comportements des matériaux. L'idée la plus simple consiste à choisir le premier invariant pour l'écrouissage cinématique :

$$\rho\Psi_{in} = \frac{1}{3}{}^t\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix}tr(\underline{\underline{\alpha}}^1)\\ tr(\underline{\underline{\alpha}}^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix} \quad [I.155]$$

Cette formulation est très avantageuse car elle permet d'écrire l'énergie libre sous forme matricielle. Les conditions à poser sur les coefficients pour que la thermodynamique soit respectée sont donc très simples. Malheureusement, cette modélisation présente l'inconvénient de générer une contrainte moyenne sous un chargement parfaitement symétrique. En effet, les variables associées correspondant à l'écrouissage cinématique s'écrivent ainsi :

$$\begin{pmatrix}\underline{\underline{X}}^1\\ \underline{\underline{X}}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^1}\\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^2}\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\underline{\underline{1}}\\ q^2\underline{\underline{1}}\end{pmatrix} \quad [I.156]$$

Ces deux expressions montrent que le centre de chaque mécanisme est donné par la somme d'une partie alternée et d'une partie strictement croissante. Vient ensuite l'idée d'utiliser le deuxième invariant :

$$\rho\Psi_{in} = \frac{1}{3}{}^t\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} + \frac{1}{2}{}^t\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Q_{11} & Q_{12}\\ Q_{12} & Q_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix} + {}^t\begin{pmatrix}J_2(\underline{\underline{\alpha}}^1)\\ J_2(\underline{\underline{\alpha}}^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\\ q^2\end{pmatrix} \quad [I.157]$$

On obtient donc pour les deux variables de l'écrouissage cinématique :

$$\begin{pmatrix}\underline{\underline{X}}^1\\ \underline{\underline{X}}^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^1}\\ \rho\dfrac{\partial\Psi}{\partial\underline{\underline{\alpha}}^2}\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}H_{11} & H_{12}\\ H_{12} & H_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}q^1\dfrac{\underline{\underline{\alpha}}^1}{J_2(\underline{\underline{\alpha}}^1)}\\ q^2\dfrac{\underline{\underline{\alpha}}^2}{J_2(\underline{\underline{\alpha}}^2)}\end{pmatrix} \quad [I.158]$$

Ces deux variables sont discontinues à cause du second membre dans lequel figure le deuxième invariant au dénominateur. Ceci a pour cause de poser un problème à chaque fois que la variable $\underline{\underline{\alpha}}^i$ passe par zéro.

annexe I.2 : symétrie de la matrice d'écrouissage

La partie de l'énergie libre qui décrit l'écrouissage cinématique pur peut s'écrire avec une matrice B symétrique :

$$\rho\Psi_{in}^{i} = \frac{1}{3}{}^{t}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} \qquad [I.159]$$

ou une matrice B non symétrique :

$$\rho\Psi_{in}^{i} = \frac{1}{3}{}^{t}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{21} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} \qquad [I.160]$$

Dans le cas [I.159] les variables associées à l'écrouissage cinématique pur s'écrivent :

$$\begin{pmatrix}\underline{\underline{X}}^1\\ \underline{\underline{X}}^2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}B_{11} & B_{12}\\ B_{12} & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} \qquad [I.161]$$

alors que dans le cas [I.160], on obtient pour ces mêmes variables :

$$\begin{pmatrix}\underline{\underline{X}}^1\\ \underline{\underline{X}}^2\end{pmatrix} = \frac{2}{3}\begin{pmatrix}B_{11} & \frac{1}{2}(B_{12}+B_{21})\\ \frac{1}{2}(B_{12}+B_{21}) & B_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\underline{\underline{\alpha}}^1\\ \underline{\underline{\alpha}}^2\end{pmatrix} \qquad [I.162]$$

Ces deux dernières expressions montrent que les coefficients hors diagonale n'interviennent que par leur demi-somme. Le cas [I.159] se ramène donc au cas [I.160] si on pose un changement de variable qui consiste à remplacer les deux coefficients hors diagonale par leur demi-somme.

annexe I.3 : identification de l'Inconel 718 avec le modèle ddi

On montre dans cette annexe l'identification qui a été faite avec le modèle ddi sur l'Inconel 718. La formulation de ce modèle est expliquée au paragraphe I.2.6. Chacune des deux contraintes internes se décompose en deux termes. Le paramètre de couplage activé est celui de l'écrouissage isotrope. On remarque que la matrice du couplage de l'écrouissage isotrope est non symétrique (l'un des deux termes hors diagonale est nul). Ceci a pour conséquence de supposer que la viscoplasticité a une influence sur la plasticité mais pas l'inverse. On rappelle brièvement les essais qui composent la base expérimentale :

Essais de traction à déformation imposée (figure I.33)
La diversité des origines des essais laisse présager une difficulté pour déterminer les paramètres du modèle, en effet on note sur les résultats des essais de mise en charge des dispersions de 50 à 100 MPa.

Essais de fluage (figure I.36)
(cf. paragraphe I.9).

Essais de fatigue à déformation imposée (figure I.34)
Pour avoir un jeu de coefficients "unique", l'identification à été effectuée sur des essais cycliques à différentes vitesses et différents niveaux de déformations.

Essais de relaxation (figure I.35)
Classiquement, pour avoir une estimation des coefficients de viscosité, on trace dans un diagramme logarithmique la contrainte effective en fonction de la vitesse de déformation inélastique. L'évaluation ainsi faite sur l'Inconel 718 montre que la pente trouvée à partir des essais de fluage est supérieure à celle de la relaxation. D'où l'intérêt d'utiliser un logiciel d'identification automatique.

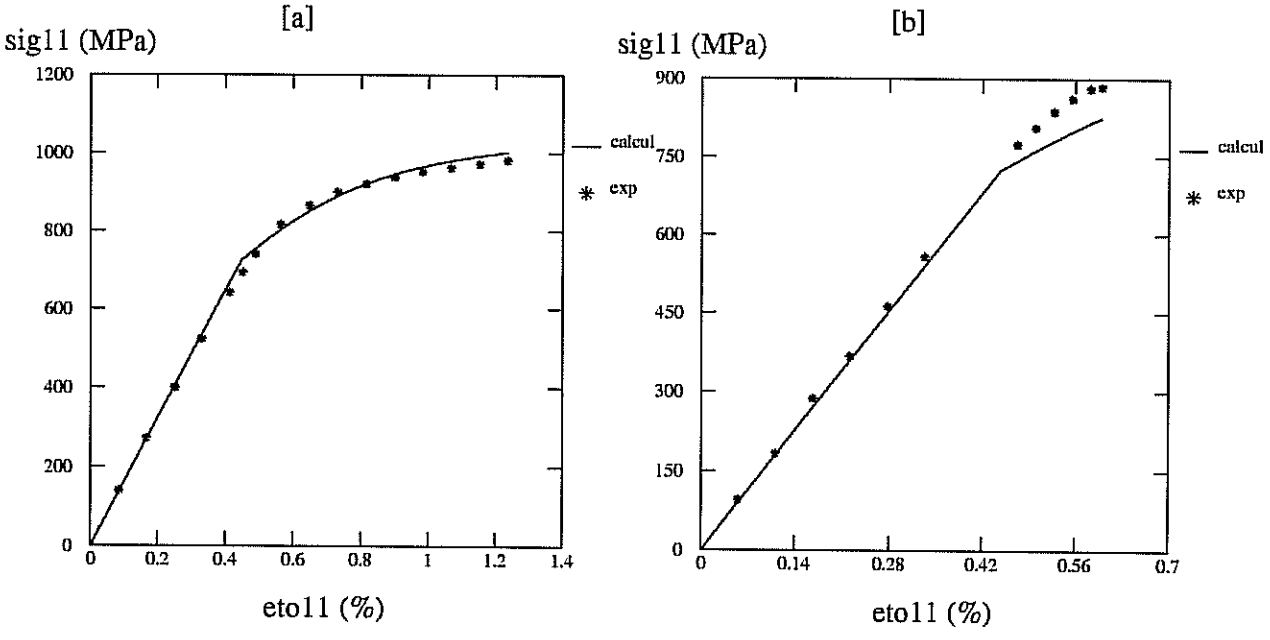


Figure I.33 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de traction simple.

[a] vitesse = 10^{-5}, ε=1.24%.

[b] vitesse = 10^{-3}, ε=0.6%.

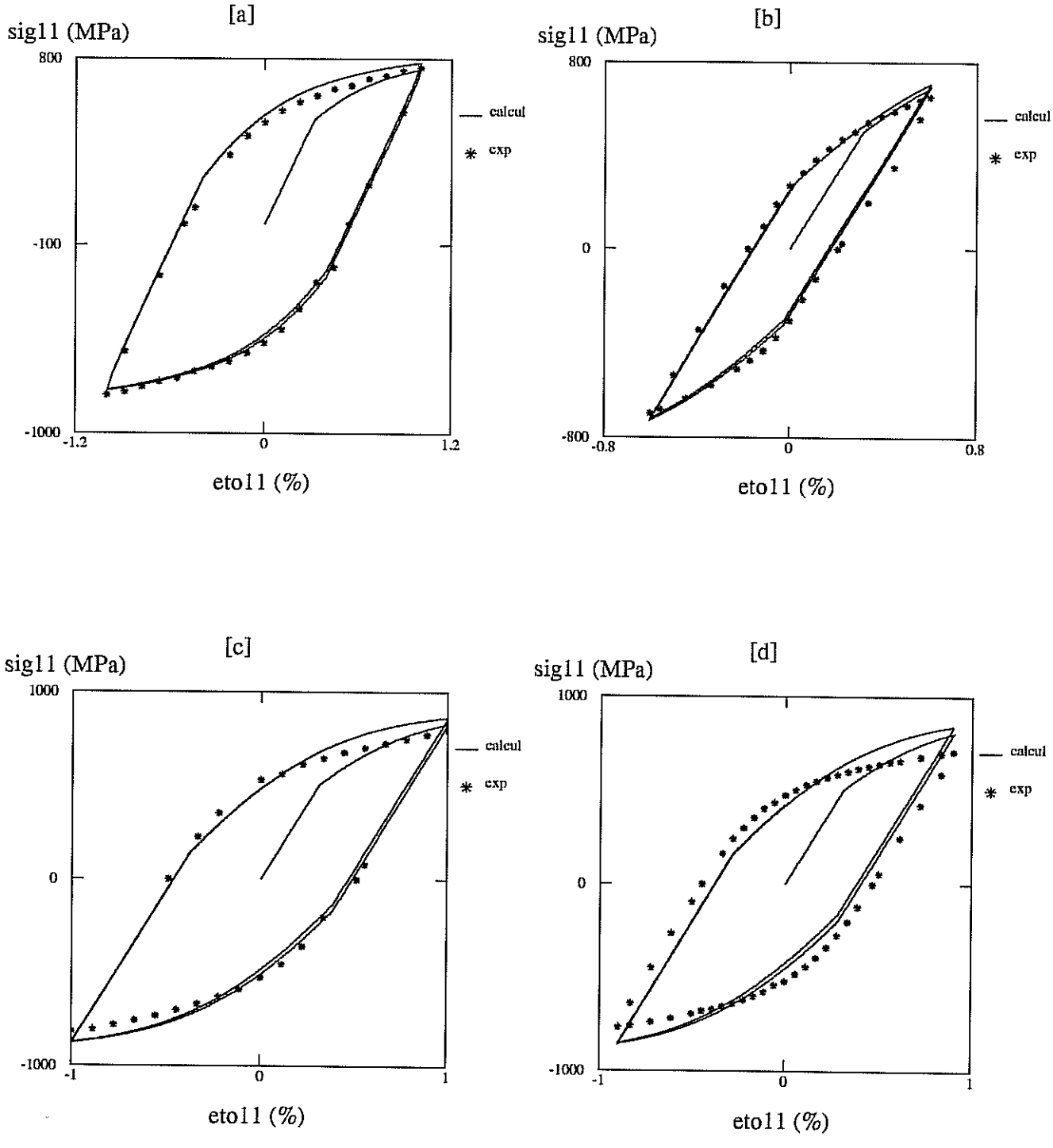


Figure I.34 : Identification sur l'Inconel 718, courbes d'écrouissage cyclique.

[a] vitesse = 10^{-6}, amplitude = 2%.

[b] vitesse = 10^{-3}, amplitude = 1.2%.

[c] vitesse = 10^{-3}, amplitude = 2%.

[d] vitesse = 10^{-3}, amplitude = 1.8%.

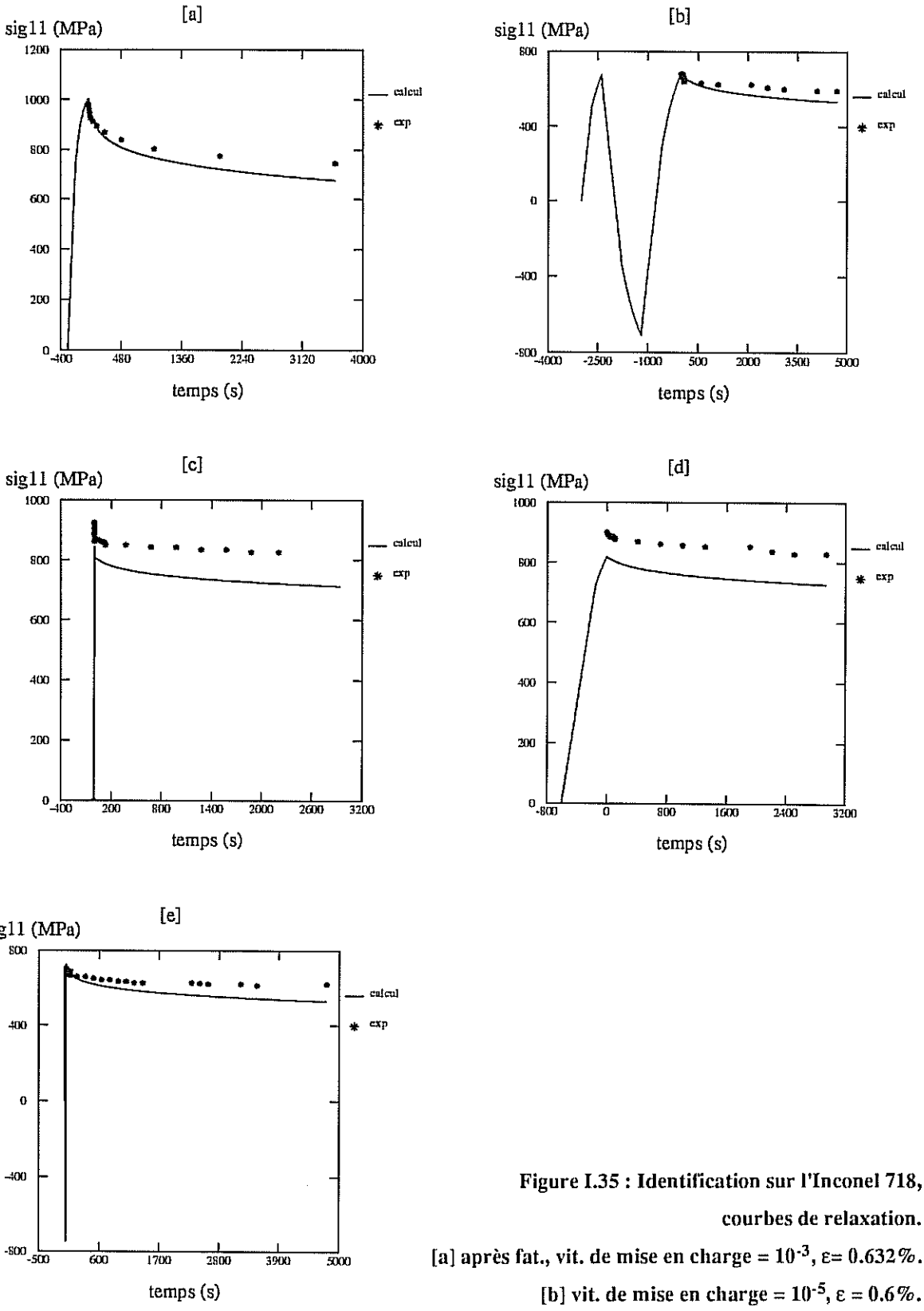


Figure I.35 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de relaxation.

[a] après fat., vit. de mise en charge = 10^{-3}, ε= 0.632%.

[b] vit. de mise en charge = 10^{-5}, ε = 0.6%.

[c] vit. de mise en charge = 10^{-3}, ε = 0.612%.

[d] après fat., vit. de mise en charge = 10^{-5}, ε = 0.6%.

[e] vitesse de mise en charge = 10^{-5}, ε = 1.24%.

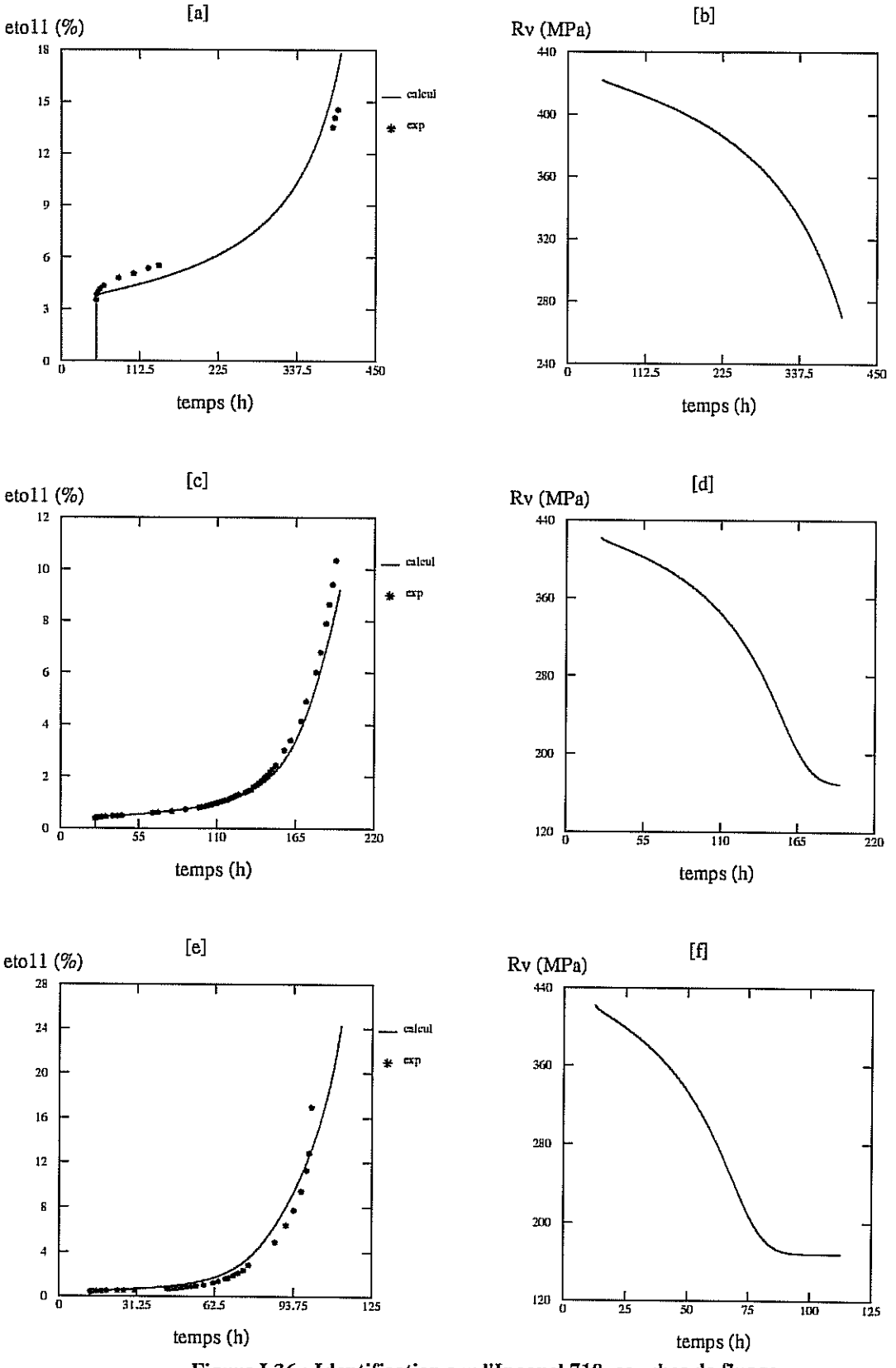


Figure I.36 : Identification sur l'Inconel 718, courbes de fluage.

[a], [b] σ = 600 MPa.

[c], [d] σ = 650 MPa.

[e], [f] σ = 700 MPa.

annexe I.4 : Tests analytiques du modèle 2M2C

Pour vérifier le programme implanté, on a calculé analytiquement la réponse du modèle dans les cas suivant :

- **test1** : un seul mécanisme plastique est activé en deçà de la limite d'élasticité :
Comme on l'a vu dans le paragraphe I.6, le modèle se réduit à celui de Chaboche. La solution analytique s'obtient de la même façon. On se place par exemple dans le cas de la déformation imposée : $\varepsilon = \frac{t}{\beta}$

$\sigma = E(\varepsilon - A_1 p^1)$ (loi de Hooke)

$\alpha^1 = \frac{1-\exp(-D_1 p^1)}{D_1}$ (écrouissage cinématique)

$q^1 = \frac{1-\exp(-b_1 p^1)}{b_1}$ (écrouissage isotrope)

$f^1 = 0 \Rightarrow A_1\sigma = B_{11}\alpha^1 + Q_{11}q^1 + R_{01}$

$\Rightarrow A_1 E(\varepsilon - A_1 p^1) = B_{11}\frac{1-\exp(-D_1 p^1)}{D_1} + Q_{11}\frac{1-\exp(-b_1 p^1)}{b_1} + R_{01}$

$\Rightarrow -\frac{B_{11}}{D_1}\exp(-D_1 p^1) - \frac{Q_{11}}{b_1}\exp(-b_1 p^1) + A_1{}^2 E p^1 - A_1 E\frac{t}{\beta} + \frac{B_{11}}{D_1} + \frac{Q_{11}}{b_1} + R_{01} = 0$

A.N. : B_{11}=210000, D_1=700, R_{01}=916, Q_{11}=-505, b_1=10, β=1000, A_1=1, E=100000
les unités sont en MPa, mm, s.
$10000\, p_1 - 30\exp(-700\, p_1) + 5.05\exp(-10\, p_1) + 116.555 - 4\, t = 0$

pour t = 40 $\Rightarrow$ p_1 = 0.0040372
pour t = 50 $\Rightarrow$ p_1 = 0.0078898

Ce test a été fait également dans le cas où on active uniquement le mécanisme 2 (**test2**).

- **test3** : un seul mécanisme viscoplastique est activé en deçà de la limite d'élasticité :
Ce test se réduit également au cas particulier du modèle viscoplastique de Chaboche. Pour le résoudre dans le cas où l'exposant de fluage est différent de 1 on a utilisé le logiciel Mathematica. Voici le programme de résolution de ce problème :

```
ga1=1; young=200000; k1=50; n1=4;
b11=200000; d1=1000;
r01=500; q11=-500; b1=10;
beta=1000;
sigma=ga1 young(t/beta-p1);
alfa1=(1-Exp[-d1 p1])/d1;
q1=(1-Exp[-b1 p1])/b1;
f1=sigma -b11 alfa1-q11 q1 -r01
RungeKutta[(f1/k1)^n1,{t,p1},{2.5, 0},0.01,750]
```

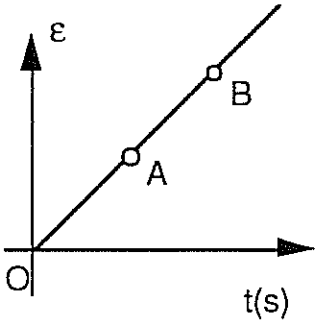
On trouve:

pour t=5 ⇒ p1=0.00165301
pour t=10 ⇒ p1=0.00647275

Ce test a été fait également dans le cas où on active uniquement le mécanisme 2 (**test4**).

- **test5** : les deux mécanismes viscoplastiques sont activés simultanément :

On considère le chargement en déformation de la figure I.37. On utilise les valeurs suivantes pour les paramètres matériaux indiqués dans le tableau I.30



figureI.37 : chargement du test5

$K_1=K_2=K=20, n_1=n_2=n=1$, $R_{01}=500$, $B_{11}=20000$, $B_{22}=200000$, $B_{12}=5000$

Tableau I.30 : Paramètres du test5 (MPa, mm, s).

On considère que les deux mécanismes présentent un écrouissage cinématique linéaire.
Du point O au point A $\Rightarrow$ comportement élastique,
du point A au point B $\Rightarrow$ seul le mécanisme 1 est actif,
au delà de B $\Rightarrow$ les deux mécanismes sont actifs simultanément.

<u>au point B</u>:

calculons R_{02} pour qu'on atteigne le point B à t=10s. c.à.d. pour que le deuxième mécanisme commence à plastifier à t=10s. Pour çela il faut déterminer la valeur de p^1 à cet instant précis :

$$K\dot{p}^1 = E(\frac{t}{\beta} - p^1) - B_{11}p^1 - R_{01}$$

$$\Rightarrow \dot{p}^1 + 20000p^1 = 10t - 25$$

$$\Rightarrow p^1 = C\exp(-20000t) + 0.0005t - 0.00125$$

or à t = 0, on a : $p^1 = 0$ ce qui nous donne : $C = 0.00125$

à t=10, $p^1 = 0.0005 \times 10 - 0.001250025$

$$\boxed{p^1 = 0.00375}$$

pour déterminer R_{02} on exprime que la fonction de charge du deuxième mécanisme est nulle en B, d'où :

$$R_{02} = -B_{12}p^1 + E(\frac{t}{\beta} - p^1)$$

ce qui donne :

$$\boxed{R_{02} = 1231.25 \text{ MPa}}$$

<u>au delà de B</u>:

$$K\dot{p}^1 = E(\frac{t}{\beta} - p^1 - p^2) - B_{11}p^1 - B_{12}p^2 - R_{01}$$

$$K\dot{p}^2 = E(\frac{t}{\beta} - p^1 - p^2) - B_{12}p^1 - B_{22}p^2 - R_{02}$$

on peut résoudre ce système d'équations différentielles en posant $u = p^1 - p^2$ et $v = p^1 + p^2$
avec les valeurs numériques données plus haut on obtient
$p^2 = 0.000330575\ (t-10)$ et $p^1 = 0.000330575\ (t-10) + 0.00375$
Voici, pour quelques instants t, les valeurs de p^1 et p^2 :

t	p^1	p^2
10	0.00375	0
15	0.005402875	0.001652875
20	0.00705575	0.00330575
25	0.008708625	0.004958625
30	0.0103615	0.0066115

Tableau I.31: Résultat semi analytique pour le modèle 2M2C_VV.

annexe II.1 : Fichiers de mise en données

Pour que les analyses par éléments finis de Zébulon utilisent l'algorithme de sauts de cycles, on doit introduire dans le fichier de mise en données une nouvelle instruction : **saut. Cette instruction doit être suivie d'une autre ligne d'informations supplémentaire :

- Le facteur de précision de la méthode η. Ce paramètre est optionnel et il vaut 0.01 par défaut. Il intervient dans l'équation [II.17].

- La séquence du cycle à partir de laquelle s'effectue le saut. C'est le seul paramètre à rentrer impérativement car il dépend fortement de la manière dont on décrit le chargement.

- Les trois premiers numéros de cycles à partir desquels sont évaluées les dérivées. Ces numéros sont mis à jour par le programme au fur et à mesure que les calculs avancent. Cette information est optionnelle. Par défaut on choisit les cycles 1, 2 et 3. En résumé, les deux lignes à écrire peuvent se réduire à la forme suivante :

```
**saut
3
```

dans le cas où c'est la troisième séquence qui est concerné par les tentatives de sauts de cycles. Voici, pour chacun des quatre exemples traités dans ce chapitre les deux lignes du fichier de mise en données :

- élément de volume

```
**saut
0.08 2 3,4,5
```

- structure en H

```
**saut
0.08 2 3,4,5
```

- disque de turbomachine

```
**saut
0.5 11 3,4,5
```

- disque de fatigue biaxial

```
**saut
0.5 2 3,4,5
```

Le coefficient η est beaucoup plus faible pour les deux premiers exemples car les temps de calcul par cycle sont assez faibles pour qu'on puisse viser une erreur quasi négligeable (inférieure à 0.01%). La séquence de saut est choisie, pour chacun des quatre exemples, à un instant où la structure est déchargée afin de repartir en élasticité après chaque tentative de saut. Enfin, on commence, pour chaque exemple par calculer 5 cycles.

annexes II.2 : Extrait du Manuel utilisateurs de Zébulon

**saut

Description :

Cette procédure permet de faire des sauts de cycle. Elle est introduite pour effectuer un grand nombre de cycles pendant un temps très réduit.

Le principe de cette méthode est de calculer quelques cycles au départ et de déduire l'état de la structure après un grand nombre de cycles sans faire l'intégration de la loi de comportement sur ces derniers. Ce processus continue à partir de l'état trouvé précédemment. On calcule de nouveau quelques cycles et on tente un nouveau saut.

Remarque : Cette procédure n'est valable que pour la viscoplasticité macroscopique.

Syntaxe :

**saut

iseqsaut, [*eta*], [*icyc1*, *icyc2*, *icyc3*]

Arguments :

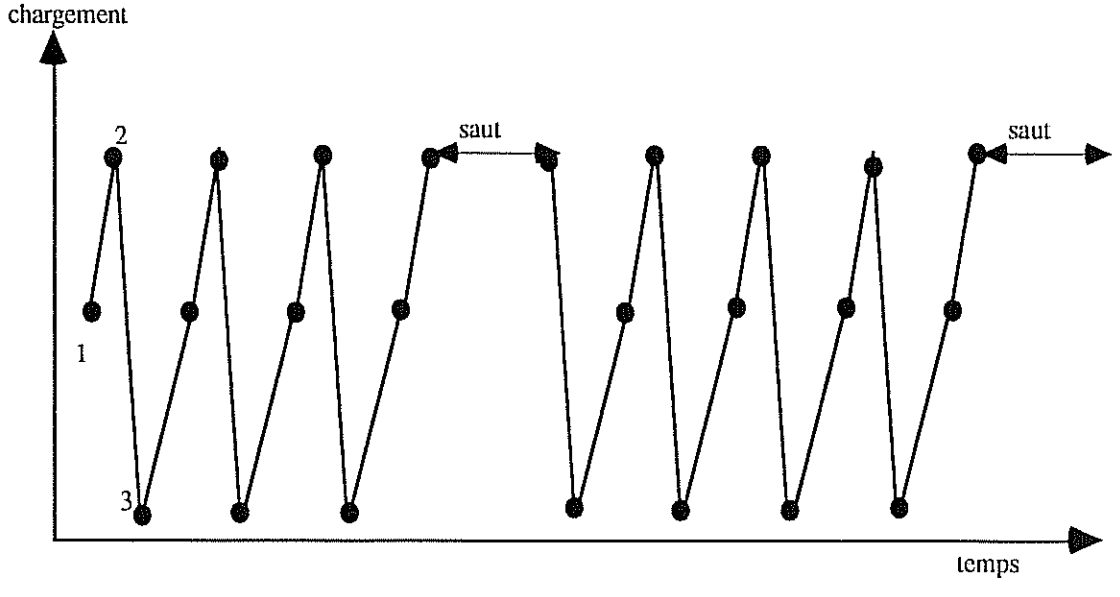
iseqsaut (entier) = numéro de la séquence à laquelle on effectue le saut.

eta (réel) = coefficient de précision. Plus il est petit, plus la méthode est précise (valeur par défaut 0.01).

icyc1, *icyc2*, *icyc3* (entiers) = cycles sélectionnés pour évaluer le nombre de cycles à sauter (valeurs par défaut 1, 2 3).

Exemples :

Dans le cas suivant, *iseqsaut* =2, les autres valeurs sont prises par défaut. Le calcul se fait donc sur trois cycles complets, puis un saut est tenté à partir de la séquence 2 du 4ème cycle. La fin du saut aboutit à une séquence 2 d'un nième cycle. Trois cycles complets sont de nouveau calculés, avant qu'un nouveau saut soit tenté à partir de la seconde séquence du cycle suivant.



annexes III.1 : Méthodologie de l'identification

La méthodologie de l'optimisation que l'on adopte est celle qui est intégrée dans le logiciel Sidolo. On rappelle ici brièvement les principales idées de la méthodologie (Pilvin, 1990). La résolution manuelle d'un problème d'optimisation non linéaire devient très difficile voire impossible dès que le nombre de paramètres à identifier dépasse la dizaine. Il est alors indispensable d'avoir un outil numérique général qui permette de résoudre ces problèmes. Un tel outil a besoin avant tout d'informations expérimentales. On note par Z l'ensemble des variables observables mesurées lors de la réalisation de ces expériences. Selon la nature de l'expérience certaines de ces variables sont imposées et forment donc l'entrée du système. Notons par Z_e l'ensemble de ces variables imposées et par Z_s^* le reste des variables observables non contrôlées. Par ailleurs, pour la modélisation mathématique du problème on introduit un ensemble de paramètres A qui permet de fournir à chaque fois la réponse du modèle, Z_s. Le problème d'optimisation consiste alors à déterminer le jeu de paramètres A pour lequel l'écart entre l'ensemble des valeurs expérimentales Z_s^* et l'ensemble des valeurs simulées est le plus faible possible. Ce problème est résolu classiquement en introduisant une fonctionnelle £(A) (Åström, Eykhoff, 1971) qui s'écrit sous la forme :

$$£(A) = \underset{k \in B}{\text{Som}}\, £_k(A) \qquad \text{[III.10]}$$

avec

$$£_k(A) = \frac{1}{\Delta T_k} \int_{T_k} \left\| Z_s^*(t) - Z_s(A,t) \right\| dt \qquad \text{[III.11]}$$

où ||.|| représente une norme sur l'espace des variables observables et T_k l'intervalle d'observation de la $k^{ième}$ expérience de la base expérimentale B considérée. Une difficulté majeure de cette formulation est le choix de la norme à utiliser, de la base expérimentale et des variables observables à mesurer. De plus, la complexité des problèmes traités peut soulever des difficultés d'ordre numérique et théorique dues à la non unicité des solutions trouvées. L'existence de minima locaux de la fonctionnelle à minimiser fait que la solution trouvée peut dépendre du jeu de paramètres initial. Pour remédier à ce problème, il faut choisir une base expérimentale adéquate et conséquente. La fonctionnelle adoptée par le logiciel d'identification Sidolo utilise une norme euclidienne pour estimer les distances et une matrice de pondération D diagonale :

$$£_k(A) = \frac{1}{\Delta T_k} \int_{T_k}^{T} \{Z_s^*(t) - Z_s(A,t)\} D \{Z_s^*(t) - Z_s(A,t)\} dt \qquad \text{[III.12]}$$

Celle ci permet de rendre adimensionnels les écarts mesurés et de choisir d'une façon objective les coefficients de pondération (Pilvin, 1988).

La même architecture a été adoptée pour identifier des paramètres dans d'autres problèmes non linéaires :

- identification d'une loi de rupture fragile pour matériau céramique, (Berdin, 1993); cette identification s'est effectuée à la fois sur des essais mécaniques (échelle macroscopique) et sur des résultats d'observations micrographiques (échelle microscopique),
- identification d'une loi de comportement viscoplastique à la fois sur un élément de volume (éprouvette de traction) et sur structure (éprouvette de flexion) (Croizet (1992),
- l'identification de paramètres caractérisant des conditions aux frontières d'un problème thermique (Beck, 1970) : (Cailletaud et Pilvin, 1993) ont traité le problème d'identification des coefficients d'échange en thermique au cours d'un traitement thermique de trempe.

annexe III.2 : Approximation - Interpolation

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle réel [a, b]. La valeur de f peut être connue en tous les points de l'intervalle ou bien seulement en un nombre fini d'entre eux. Pour définir une telle fonction, on peut utiliser deux méthodes différentes :
(i) on utilise la notion d'interpolation, dans ce cas la fonction doit passer exactement par les points de "mesure" (x_i, y_i),
(ii) la fonction passe au plus près de l'ensemble des points (x_i, y_i), il s'agit alors d'approximation.
Dans le cas de l'optimisation de forme, on s'intéresse au cas de l'approximation. La fonction f sera recherchée comme une combinaison linéaire de fonctions élémentaires simples (monômes, fonctions trigonométriques,...).
Les fonctions splines, les courbes de Bézier et les polynômes de Tchébicheff sont des exemples de ces fonctions. On va essayer d'expliquer brièvement leurs principes de fonctionnement.

Fonctions splines

Une spline peut être définie comme la position prise par une latte souple de bois que l'on fait passer par un certain nombre de points. Selon les conditions qu'on impose aux extrémités de la latte de bois, on distingue plusieurs types de splines : si on impose des dérivées premières nulles aux extrémités de la latte de bois, on parle de spline encastrée. La spline appuyée est celle pour laquelle les dérivées secondes sont nulles aux deux extrémités. Cette spline coïncide avec la spline naturelle. Cette dernière est celle qui minimise l'énergie de flexion. Ces conditions sont illustrées sur le tableau III.9 :

spline encastrée	$S'(t_1) = S'(t_n) = 0$
spline appuyée	$S''(t_1) = S''(t_n) = 0$
spline naturelle	$S / \int_{t1}^{tn} (S''(t))^2 dt$ est minimale

Tableau III.9 : Différents types de splines

Définition d'une spline cubique d'ordre q

soit $T=(t_1,\ldots\ldots\ldots\ldots, t_n)$ une subdivision de [a, b]. On appelle spline d'ordre q toute fonction S qui vérifie les trois conditions suivantes :
(i) $\forall i \in [1,\ldots\ldots\ldots n-1]$, la restriction de S à chaque intervalle $]t_i, t_{i+1}[$ est un polynôme de degré inférieure à 2q-1,
(ii) sur $[a, t_1[$ et sur $]t_n\ b]$ S est un polynôme de degré inférieur à q-1,
(iii) les dérivées d'ordre 2q-2 de S, $S^{(2q-2)}$, sont continues sur [a, b].

Exemple de calcul d'une spline d'ordre 2 (spline cubique)

D'après la définition précédente, la spline cubique doit vérifier les trois conditions citées ci-dessus :

(i) sur $]t_i, t_{i+1}[$ S est un polynôme de degré inférieur ou égal à 3,

(ii) la représentation graphique de S sur $[a, t_1[$ et sur $]t_n\ b]$ est une droite,

(iii) enfin la fonction S ainsi que ses dérivées seconde et première doivent être continues sur [a, b].

Pour la simplicité d'écriture des équations, on pose les changements de variables suivants :

$$\begin{cases} \alpha_i = S''(t_i) \\ r_i = S(t_i) \end{cases}$$

avec ces notations, on obtient sur l'intervalle $]t_i, t_{i+1}[$:

$$\begin{cases} S''(t) = \dfrac{\alpha_{i+1}(t-t_i) + \alpha_i(t_{i+1}-t)}{(t_{i+1}-t_i)} \\ S(t) = \dfrac{\alpha_{i+1}(t-t_i)^3 + \alpha_i(t_{i+1}-t)^3}{6(t_{i+1}-t_i)} + C_1 t + C_2 \end{cases}$$

or en utilisant les notations $\begin{cases} S(t_i) = r_i \\ S(t_{i+1}) = r_{i+1} \end{cases}$ et en posant $h_i = t_{i+1} - t_i$ il vient :

$$S(t) = \frac{\alpha_{i+1}(t-t_i)^3 + \alpha_i(t_{i+1}-t)^3}{6h_i} + \left(\frac{r_{i+1}}{h_i} - \frac{\alpha_{i+1}h_i}{6}\right)(t-t_i) + \left(\frac{r_i}{h_i} - \frac{\alpha_i h_i}{6}\right)(t_{i+1}-t).$$

Par ailleurs, les continuités de S et S'' sont assurées par construction. Il reste à exprimer la continuité de S' en t_2....., t_{n-1}, soit : $S'(t_i^+) = S'(t_i^-)$. Ces conditions aboutissent à un système de n-2 équations :

$$h_{i-1}\alpha_{i-1} + 2(h_{i-1} + h_i)\alpha_i + h_i\alpha_{i+1} = 6\left[\frac{r_{i+1} - r_i}{h_i} - \frac{r_i - r_{i-1}}{h_{i-1}}\right]$$

Les 2 inconnues qui restent sont déterminées par le type de spline voulu.

Courbes de Bézier

Etant donné un polygone (A_0,....., A_n), on appelle courbe de Bézier celle qui admet pour représentation paramétrique :

$$\vec{M}_{0,n}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\vec{A}_i$$

où $t \in [0, 1]$

Les fonctions $B_{i,n}(t)$ forment une base de Bernstein de degré n où $0 \leq i \leq n$:

$$B_{i,n}(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-1} = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-1}$$

Polynômes de Tchebicheff

Pour tout entier naturel n, on pose, x appartenant à [-1, 1] :

$$T_i(x)=\cos(i \text{ Arc } \cos(x))$$

On appelle polynôme de Tchebicheff d'ordre n, une combinaison linéaire des fonctions T_i :

$$f(x) = \sum_{i=0,n} a_i T_i(x)$$

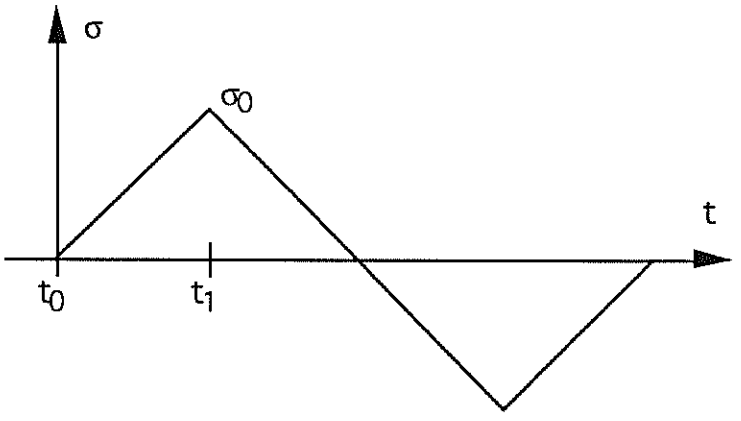
Pour tout n supérieur ou égal à 1, on peut écrire la relation de récurrence :

$$T_{n+1}(x)-2 \text{ x } T_n(x)+T_{n-1}(x)=0$$

Les premiers polynômes s'écrivent comme suit :

$T_0(x)=1$, $T_1(x)=x$, $T_3(x)=2\ x^2 - 1$,
$T_3(x)=4\ x^3 - 3\ x$, $T_4(x)=8\ x^4-8\ x^2 + 1$,
$T_5(x)=16\ x^5 - 20\ x^3 + 5\ x$.

annexe III.3 : intégration de la loi d'endommagement



Fluage :

L'endommagement dû au fluage qui se produit entre t_0 et t_1 est obtenu en intégrant la loi suivante :

$$\int_{D_0}^{D_1}(1-D)^k dD = \int_{t_0}^{t_1}\left(\frac{\sigma}{A}\right)^r dt$$

si $t_0 = 0$ alors, de t_0 à t_1 on a : $\sigma = \sigma_0 \frac{t}{t_1}$, T=4 t_1. Avec ce chargement particulier on aboutit à l'égalité suivante :

$$\int_{D_0}^{D_1}(1-D)^k dD = \left(\frac{\sigma_0}{At_1}\right)^r \int_{t_0}^{t_1} t^r dt :$$

En intégrant ces deux membres, on obtient :

$$\left[\frac{(1-D)^{k+1}}{k+1}\right]_{D_0}^{D_1} = \frac{t_1^{r+1}}{r+1}\left(\frac{\sigma_0}{At_1}\right)^r$$

$$(1-D_0)^{k+1} - (1-D_1)^{k+1} = \frac{k+1}{r+1}\left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^r t_1$$

Sur le cycle courant on obtient :

$$(1-D_N)^{k+1} - (1-D_{N+1})^{k+1} = \frac{k+1}{r+1}\left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^r T = G$$

avec : $D_1=0$ et $D_{Nc}=1$. Le nombre de cycles à rupture, Nc, est obtenu par la résolution en cascade du système suivant :

$$\begin{aligned}
1 \qquad & -(1-D_1)^{k+1} && = G \\
(1-D_1)^{k+1} & -(1-D_2)^{k+1} && = G \\
& \vdots && \vdots \\
& \vdots && \vdots \\
(1-D_{Nc-2})^{k+1} & -(1-D_{Nc-1})^{k+1} && = G \\
(1-D_{Nc-1})^{k+1} & - \quad 0 && = G \\
\hline
& \qquad 1 && = N_c \,.\, G
\end{aligned}$$

On obtient enfin l'expression suivante du nombre de cycles en fluage :

$$N_c = \frac{r+1}{k+1}\left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^{-r}\frac{1}{T}$$

Le temps de cycle à rupture est alors donné par :

$$t_c = \frac{r+1}{k+1}\left(\frac{\sigma_0}{A}\right)^{-r}$$

Fatigue :

L'endommagement dû à la fatigue au cours d'un cycle est obtenu en intégrant l'équation suivante :

$$\int_{D_0}^{D_1}[1-(1-D)^{\beta+1}]^{-\alpha}(1-D)^{\beta}\,dD = \int_{cycle}\left(\frac{\sigma_M-\bar{\sigma}}{M}\right)^{\beta}dN$$

d'où : $$[1-(1-D_1)^{\beta+1}]^{1-\alpha}-[1-(1-D_0)^{\beta+1}]^{1-\alpha} = (1-\alpha)(1+\beta)\left(\frac{\sigma_0}{M}\right)^{\beta}$$

enfin : $$Nf = \frac{1}{(1-\alpha)(1+\beta)}\left(\frac{\sigma_0}{M}\right)^{-\beta}$$

Les paramètres α et M peuvent dépendre de la contrainte appliquée. Dans ce cas leurs expressions sont les mêmes que celles qui figurent sur le tableau III.7.