

Estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence pour les systèmes OFDM

Emmanuel Jaffrot

▶ **To cite this version:**

Emmanuel Jaffrot. Estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence pour les systèmes OFDM. domain_other. Télécom ParisTech, 2000. English. NNT : . pastel-00001753

HAL Id: pastel-00001753
https://pastel.hal.science/pastel-00001753

Submitted on 19 Jun 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence pour les systèmes OFDM

Emmanuel Jaffrot

15 décembre 2000

Table des matières

Liste des notations **8**

Introduction générale **12**

1 Système et modèles **15**

Introduction 15

1.1 Principe et modèles des systèmes OFDM 16

1.1.1 Historique - principe 16

1.1.2 Modélisation des systèmes OFDM 17

Modèle analogique 18

Passage au modèle numérique 22

Interprétation temps-fréquence 23

1.2 Modélisation de la chaîne étudiée 24

1.2.1 Caractéristiques du signal transmis 24

1.2.2 Modélisation du signal reçu 26

1.2.3 Caractéristiques du canal de propagation 28

1.2.4 Représentation du canal de propagation 31

1.3 Simplification de la représentation du canal 32

1.4 Conclusion 34

2 Estimation de canal semi-aveugle au sens du Maximum *a Posteriori* **35**

2.1 Introduction 35

2.2 État de l'art 36

2.2.1 Introduction 36

2.2.2 Estimateurs de la phase du canal 38

2.2.3 Estimateurs des facteurs de gain du canal . . . 38
Estimation de canal au sens du critère des moindres carrés (MC) . . . 38
Estimation de canal par le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM) . . . 41
Estimation de canal avec retour de décision . . . 45
Estimation par filtrage dans un domaine de transformation . . . 46
2.2.4 Conclusions . . . 48
2.3 Estimation de canal itérative basée sur le critère du Maximum *a Posteriori* . . . 48
2.3.1 Formulation du problème au sens du Maximum *a Posteriori* . . . 48
2.3.2 L'algorithme "Expectation - Maximization" . . . 49
2.3.3 Expression analytique de l'estimateur . . . 51
2.3.4 Cas particuliers . . . 52
2.4 Résultats . . . 53
2.4.1 Algorithmes de comparaison . . . 53
Estimation de canal MC . . . 53
Estimation de canal par la FFT bidimensionelle EC-FFT-2D . . . 57
Combinaison des estimation sur chaque branche de diversité . . . 60
2.4.2 Contexte des simulations . . . 61
Signal émis . . . 61
Canal de propagation . . . 62
Paramètres de l'estimateur . . . 62
2.4.3 Résultats de simulation . . . 62
2.5 Conclusion . . . 68

3 Estimation semi-aveugle avec prise en compte du codage : Turbo estimation de canal 69

Introduction . . . 69
3.1 Turbo estimation de canal . . . 69
3.1.1 Contexte . . . 69
3.1.2 Principe de l'algorithme de Bahl . . . 70
3.1.3 Écriture modifiée de l'algorithme de Bahl . . . 71
3.1.4 Turbo-Estimation de canal . . . 73
3.2 Résultats . . . 74

3.3 Conclusion 81

4 Estimation de canal au sens du Maximum a Posteriori à partir de symboles connus 82

Introduction 82

4.1 Estimation de canal basée sur l'innovation : Prédiction Linéaire 83

4.2 Estimation de canal exploitant la base orthonormale étendue 84

4.3 Construction simplifiée de la base orthonormale étendue 86

4.4 Optimisation de la position des symboles pilotes 87

4.4.1 Modulation MDP-2 87

4.4.2 Modulation MDP-4 88

4.5 Résultats de simulation 91

4.6 Conclusions 95

5 Estimation semi-aveugle avec conditions initiales optimisées 96

5.1 Introduction 96

5.2 Résultats de simulation 96

5.2.1 Initialisation 96

5.2.2 Partie Itérative 97

5.2.3 Simulations 97

Non codé 97

Codé 101

Conclusion générale 105

A Propriétés de l'algorithme EM 106

A.1 Théorème 1 : Croissance des probabilités *a posteriori* 106

A.2 Théorème 2 : Point critique de la probabilité *a posteriori* 107

B Expression analytique de l'estimateur 108

C Cas particuliers 111

C.1 Modulation MDP-2 111

C.2 Modulation MDP-4 113

D Harmonisation du canal en temps et en fréquence **116**

D.1 Étalement des retards 116

D.2 Étalement Doppler 118

D.3 Expression de B_d et T_m en fonction du produit B_dT_m 119

E Expression de la variance de l'innovation **121**

F Identité de l'estimée MAP et de la prédiction linéaire EQMM **123**

G Probabilité d'erreur brute sur les symboles **124**

G.1 Modulation MDP2 124

G.2 Modulation MDP4 124

H Expression de l'estimée MAP à partir de la base étendue **126**

I Construction simplifiée de la base étendue **128**

Liste des figures **130**

Bibliographie **133**

Remerciements

Je tiens à remercier tout d'abord Monsieur Maurice Bellanger, Professeur au Centre National des Arts et Métiers, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse.

Merci à Monsieur Philippe Loubaton, Professeur à l'Université de Marne la Vallée, pour sa lecture attentive de ce document et son temps précieux consacré à des discussions constructives.

Merci à Madame Inbar Fijalkow, Professeur au laboratoire ETIS de l'ENSEA et de l'Université de Cergy Pontoise, pour sa ténacité, pour toutes les discussions passées et à venir.

Merci à Monsieur Armand Lévy, Responsable du département IIM de France Télécom Recherche et Développement où s'est déroulée cette thèse, pour m'avoir donné la chance de réaliser ce travail.

Merci à Monsieur Mohamed Siala pour son inspiration, son amitié et toutes ces heures de travail en commun.

Merci à Monsieur Robert Vallet, Maître de Conférences à l'Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications de Paris, pour sa participation à ce jury de thèse.

Merci également à Monsieur Pierre Duhamel, pour l'ensemble de ses conseils avisés et sa disponibilité.

Merci à l'ensemble de l'équipe IIM, Daniel, Mohamed, Roland, Raphael, Noura, Thierry, Patrick, Yi, Sabrina, Sylvie, Antoine, Hatem. Ainsi qu'à Gurvan, Céline, Christophe, Céline, Christine, Benoit, Stéphane ...

Merci à Chut !, Rabi, Djoule, Choa, Luka, Vincent, Karine, Chrystèle, Björk, Johanna, Fanou, Charlotte, Eli, Amélie, Growin' Hair, Anne, Pauline, Bertrand, P.J. Harvey, Robert, Marie-Agnès, Djeeps, Vera Cruise, Antoine, Stéphanie, Radiohead, Paolo, PeeWee, Roland, Zal, Sabrina, Ivan, Elsa, Mer2 et 2mer, Lulu, Stéphane, Mélanie, Nath, Alex, Gabi, Santiago, Curly, Cess ... pour ce qu'on a partagé, ce qu'on partage, ce qu'on partagera ...

Merci à ma famille, mes parents, à Simon et Etienne.

Merci à Rachel.

Résumé

L'orientation des telecommunications vers les hauts-debits fait de la technique de modulation OFDM l'un des centres d'intérêts privilégies de la recherche actuelle. Cette technique basée sur le principe d'orthogonalité des "filtres" réalisant la modulation ne nécessite pas d'égalisation a proprement parler, mais requiert une estimation de la réponse fréquentielle du canal pour chaque symbole transmis. Les contextes de propagation rencontres aujourd'hui en communications mobiles a hauts debits peuvent s'avérer extrêmement difficiles a estimer précisément.

Nous proposons dans cet mémoire de thèse deux méthodes d'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence bases sur le critère du Maximum a Posteriori traitant le signal reçu par blocs. Ces algorithmes reposent sur un modèle de canal obtenu suivant la decomposition orthogonale de la matrice d'autocorrélation du canal selon le théorème de decomposition orthogonale de Karhunen-Loève. Nous présenterons également les performances de ces nouvelles techniques comparées a celles de méthodes classiques d'estimation de canal ainsi que la robustesse de ces techniques a l'erreur d'estimation des statistiques du canal.

Abstract

High bit rates services focusing in the telecommunications domain is leading to an increasing interest for OFDM modulation in actual research. This technique is based on orthogonal modulating filters and doesn't need the use of an equalizer, but it requires the estimation of the channel frequency response for each transmitted symbol. Today's propagation contexts met in high bit rate mobile communications may be really tough to precisely estimate.

In this document, we propose two channel estimation methods for highly frequency and time selective channels, based on the Maximum a Posteriori criteria, processing block by block the received signal. These algorithms use a channel model based on the orthogonal decomposition of the autocorrelation matrix of the channel obtained by means of the Karhunen-Loève orthogonal expansion theorem. We also present these new techniques performance compared to classical channel estimators and the robustness of those methods to an error on the channel statistics.

Liste des notations

a_{mn}	Symbole de données MDP de l'alphabet Ω à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
$a_{\delta(k)}$	Symbole de données MDP de l'alphabet Ω à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$\mathbf{a}_n$	Vecteur des symboles de données du $n^{ème}$ symbole OFDM
$A_{\delta(k)}$	Symbole de données normalisé à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$\mathbf{A}$	Vecteur des symboles de données normalisés du bloc temps-fréquence
B_d	Largeur de la bande Doppler du canal
$\mathbf{B}_{lk}$	Vecteur propre numéro k de la matrice $\mathbf{F}_l$
c_{mn}	Facteur de gain du canal à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
c^l_{mn}	Facteur de gain du canal vu par la $l^{ème}$ branche de diversité à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
$c^l_{\delta(k)}$	Facteur de gain du canal vu par la $l^{ème}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$\mathbf{c}_n$	Vecteur des facteurs de gain du canal correspondant au $n^{ème}$ symbole reçu
$C^l_{\delta(k)}$	Facteur de gain normalisé du canal vu par la $l^{ème}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$\mathbf{C}^l$	Vecteur des facteurs de gain normalisés du canal vu par la $l^{ème}$ branche de diversité du bloc temps-fréquence
E_{mn}	Énergie du symbole émis à la position (m, n) du bloc temps-fréquence

F	Espacement fréquentiel entre deux symboles adjacents du bloc temps-fréquence
$\mathbf{F}_l$	Matrice d'autocorrélation du canal vu par la $l^{ème}$ branche de diversité
G_{lk}	Variable Gaussienne centrée de variance Γ_{lk} - représentation du canal de propagation
$J_0(.)$	Fonction de Bessel de première espèce et d'ordre 0
K	Nombre de porteuses du système OFDM
L	Nombre de branches de diversité en réception du système
$\tilde{n}(t)$	Bruit de canal additif complexe blanc Gaussien
$\tilde{n}_{mn}$	Échantillon du bruit de canal à la position (m,n) du bloc temps-fréquence
$\tilde{\mathbf{n}}_n$	Vecteur des échantillon du bruit de canal correspondant au $n^{ème}$ symbole reçu
N_0	Variance du bruit de canal
N_D	Nombre de symboles de données du bloc temps-fréquence
N_P	Nombre de symboles pilotes du bloc temps-fréquence
N_{mn}^l	Échantillon du bruit reçu à la $l^{ème}$ branche de diversité à la position (m,n) du bloc temps-fréquence
$N_{\delta(k)}^l$	Échantillon du bruit reçu à la $l^{ème}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps fréquence
$p(t)$	Fonction prototype du modulateur OFDM (interprétation temps-fréquence)
$r(t)$	Signal OFDM continu reçu
R_{mn}^l	Échantillon du signal reçu sur la $l^{ème}$ branche de diversité à la position (m,n) du bloc temps-fréquence
$R_{\delta(k)}^l$	Échantillon du signal reçu sur la $l^{ème}$ branche de diversité à l'index $\delta(k)$ du bloc temps-fréquence
$\mathbf{R}^l$	Vecteur des échantillons d'un bloc temps-fréquence reçus sur la $l^{ème}$ branche de diversité
$s(t)$	Signal OFDM
$s_l(t)$	Symbole OFDM

S_D	Ensemble bidimensionnel des positions des symboles de données dans le bloc temps-fréquence
S_P	Ensemble bidimensionnel des positions des symboles pilotes dans le bloc temps-fréquence
T	Longueur d'un symbole OFDM - espacement temporel entre deux symboles adjacents du bloc temps-fréquence
T_m	Étalement des retards du canal à trajets multiples
T_{pc}	Longueur du préfixe cyclique
T_s	Longueur d'un symbole MDP de l'alphabet Ω
W	Largeur de bande du système OFDM
y_{mn}	Échantillon du signal reçu à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
T	Longueur d'un symbole OFDM - espacement temporel entre deux symboles adjacents du bloc temps-fréquence
T_m	Étalement des retards du canal à trajets multiples
T_{pc}	Longueur du préfixe cyclique
T_s	Longueur d'un symbole MDP de l'alphabet Ω
W	Largeur de bande du système OFDM
y_{mn}	Échantillon du signal reçu à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
$\mathbf{y}_n$	Vecteur des échantillons du $n^{ème}$ symbole OFDM reçus
$\gamma(\tau; t)$	Réponse impulsionelle continue du canal de propagation
$\gamma_n(\tau)$	Réponse impulsionelle du canal de propagation correspondant au $n^{ème}$ symbole reçu
γ_n	Vecteur des échantillons de la réponse impulsionelle du canal correspondant au $n^{ème}$ symbole reçu
Γ_{lk}	Valeur propre numéro k de la matrice de corrélation $\mathbf{F}_l$
$\delta(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{k=N-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel $S_D \cup S_P$
$\delta_P(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{k=N_P-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel S_P
$\delta_D(k)$	Fonction d'indexation de $\{k\}_{k=0}^{k=N_D-1}$ vers l'ensemble bidimensionnel S_D
$\delta_{k,k'}$	Fonction de Kronecker

$\phi_k(t)$	Forme d'onde du modulateur OFDM continu
$\phi_{mn}(t)$	Forme d'onde du modulateur OFDM à la position (m, n) du bloc temps-fréquence
$\phi(\Delta f, \Delta t)$	Fonction d'autocorrélation temps-fréquence du canal
$\psi_m(t)$	Forme d'onde du démodulateur OFDM continu
Ω	Alphabet d'une Modulation de Phase (MDP)

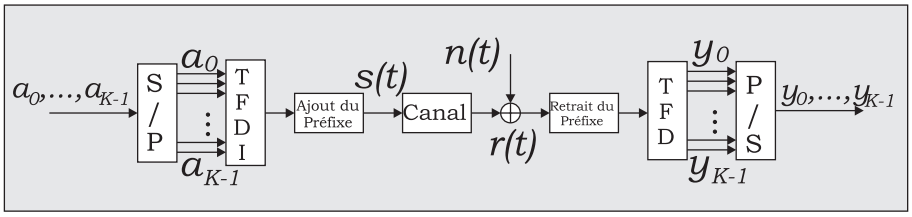
Introduction générale

L'internet, la télédiffusion ainsi que la radiodiffusion on été, au cours des dix dernières années, à l'origine de la résurgence des systèmes multiporteuses OFDM. Cette technique, apparue à la fin des années 60 [10] a peu été exploitée avant les années 90. Ses qualités intrinsèques l'ont amené à être utilisée dans les normes de diffusion numérique de programmes radio (*Digital Audio Broadcasting* : DAB) [24] et télévisés (*Digital Video Broadcasting* : DVB) [25], pour la transmission de données à hauts débits sur lignes bifilaires (*Asynchronous Digital Subscriber Line* : ADSL) ainsi que pour des systèmes hauts-débits de type HIPERLAN (HIgh PERformances Local Area Network).

Aujourd'hui, la préoccupation grandissante des télécommunications pour les hauts débits fait de la technique OFDM l'un des centres d'intérêt privilégies de la recherche actuelle. Tous les problèmes inhérents à la méthode OFDM dans les contextes de transmission mobiles et hauts débits sont étudiés : synchronisation temporelle, synchronisation fréquentielle, égalisation et estimation de canal.

Les systèmes OFDM sont fondés sur le principe d'orthogonalité des filtres réalisant la modulation. Ces méthodes fonctionnent intrinsèquement par bloc, la modulation d'un bloc de symboles étant réalisée le plus souvent par une Transformée de Fourier Discrète Inverse (TFDI). L'introduction d'un intervalle de garde de durée supérieure à l'étalement des retards du canal, comme le montre la figure suivante, permet d'éliminer l'Interférence Entre Symbole (IES) générée lors du passage dans le canal. L'égalisation en est donc simplifiée, mais nécessite toujours une estimation de la réponse fréquentielle du canal pour chaque symbole OFDM.

Cependant, aucune technique dans la littérature ne s'est réellement intéressé à l'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence. Beaucoup de méthodes considèrent la sélectivité en temps ou la sélectivité en fréquence, mais pas les deux à la fois. L'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence suppose avant tout d'avoir un modèle bidimensionnel pour le système OFDM ainsi que pour le canal de propagation considéré. C'est l'objectif du premier chapitre de



Modèle discret classique des systèmes OFDM

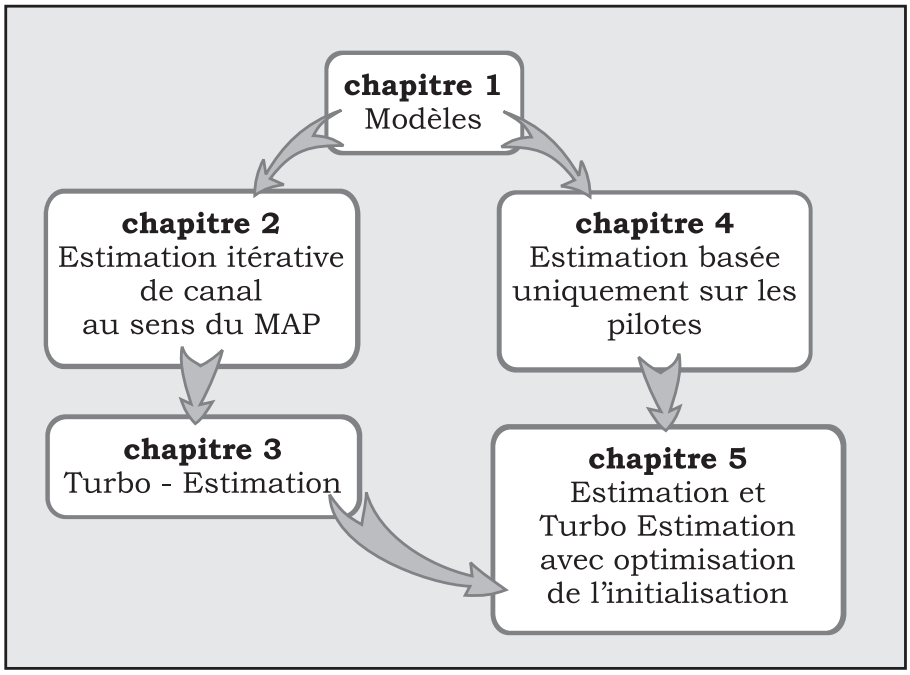
ce mémoire, où nous présenterons outre ses modèles classiques, le modèle de représentation en treillis temps-fréquence du signal OFDM, ainsi qu'une modélisation originale du canal basé sur la décomposition de Karhunen-Loève [2].

Le deuxième chapitre présente un nouvel estimateur itératif de canal très sélectif en temps et en fréquence, utilisant l'algorithme EM. Cet estimateur traite le signal reçu par bloc temps fréquence comprenant tout ou partie des porteuses de plusieurs symboles OFDM. Dans cette partie, les symboles seront supposés non codés. C'est pourquoi le troisième chapitre se consacrera au traitement de blocs temps-fréquence composés de symboles codés. Cette méthode d'estimation découlant de la première réalisera un décodage des symboles conjointement à l'estimation de canal. Nous appellerons cette technique turbo-estimation de canal.

Le quatrième chapitre présente une technique autonome d'estimation de canal basée uniquement sur l'utilisation des symboles pilotes. Cette autre méthode d'estimation de canal peut exister d'elle même et peut également être utilisée comme phase d'initialisation de l'algorithme itératif. Cette dernière combinaison sera étudiée dans le cinquième et dernier chapitre.

La figure qui suit présente l'ordre de lecture conseillé du mémoire, suivant l'intérêt du lecteur.

Cette étude a été financée par France Télécom Recherche et Développement et a donnée lieu à deux dépôts de brevet d'invention [68], [40].


chapitre 1
Modèles
chapitre 2
Estimation itérative
de canal
au sens du MAP
chapitre 4
Estimation basée
uniquement sur les
pilotes
chapitre 3
Turbo - Estimation
chapitre 5
Estimation et
Turbo Estimation
avec optimisation
de l'initialisation

Chapitre 1

Système et modèles

Introduction

Dans ce premier chapitre, nous nous attacherons à présenter les principales modélisations des systèmes utilisant la technique OFDM en tant que modulation, ainsi qu'une représentation originale du canal de propagation. Nous fixerons également les principales notations utilisées dans ce document.

Historiquement, les premières techniques multiporteuses ont vu le jour à l'ère des communications analogiques. Ces méthodes ont donc tout d'abord fait l'objet de représentations continues, caractérisées par des fonctions orthogonales continues. Le modulateur et le démodulateur étaient alors des bancs de filtres théoriquement orthogonaux, mais la réalisation de filtre analogiques parfaitement orthogonaux est rigoureusement impossible et s'en approcher est donc très coûteux.

Cette représentation a donc progressivement été remplacée par une modélisation discrète des éléments de ces systèmes. Aujourd'hui, les transformées orthogonales les plus couramment utilisées dans les systèmes OFDM sont la Transformée de Fourier discrète Inverse et sa transformée duale, la Transformée de Fourier Discrète, préférées pour leur faible complexité et leur facilité de mise en oeuvre.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à une modélisation plus globale du principe de transmission OFDM en considérant l'existence d'un treillis bidimensionnel dans le plan temps-fréquence sur lequel sont émis les symboles d'information.

Nous introduirons également, dans un souci de représenter au mieux le canal, une nouvelle modélisation du canal basée sur le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève.

1.1 Principe et modèles des systèmes OFDM

Une des solutions utilisées pour transmettre un signal à travers un canal sélectif en temps et en fréquence, sans interférence entre symboles, est de choisir la largeur de bande du signal plus grande que la largeur de la bande Doppler et plus faible que la largeur de la bande de cohérence du canal. Ces hypothèses correspondent à la définition d'un signal bande étroite à faible débit. Pour réaliser une transmission à haut débit, il est alors nécessaire de transmettre un grand nombre de ces signaux bande étroite sur des porteuses situées en fréquence aussi proches que possible les unes des autres. Tel est le principe de base des systèmes de transmissions multiporteuses dont fait partie l'OFDM.

1.1.1 Historique - principe

Les origines des modulations multiporteuses actuelles remontent aux systèmes de transmission parallèle de la fin des années 50 et 60. La technique de modulation synchronisée des porteuses bande-étroite et leur transmission sur des spectres se recouvrant a été utilisée dans des systèmes militaires hautes fréquences tels que les systèmes Kineplex, ANDEFT et KATHRYN. Puisque la synchronisation était assurée entre les porteuses, l'orthogonalité entre les différents canaux parallèles pouvait être utilisée pour restituer l'information contenue dans le signal, malgré le recouvrement des spectres. Ces ancêtres des systèmes OFDM utilisaient des ensembles de signaux orthogonaux limités dans le temps, de spectre largement étalé en fréquence (de spectre de type $\sin x / x$ par exemple).

En 1966, Chang proposa la technique correspondante pour les système de transmission à bande limitée [10]. La méthode qu'il propose à l'époque consiste à synthétiser des fonctions temporelles orthogonales à bande limitée en utilisant des filtres de Nyquist avec un roll-off doux. Les canaux de transmission étroits créés peuvent être considérés comme des canaux plats, de telle façon que le système global devient moins sensible au bruit. De plus, la limitation de la largeur de bande génère moins d'interférence entre symboles et entre canaux.

Weinstein et Ebert établissent [72] que le signal multi-fréquences est en fait la transformée de Fourier de la séquence de données originale. La technique numérique permet d'éliminer le banc d'oscillateurs à l'émetteur et de démodulateurs cohérents au récepteur habituellement nécessaires aux systèmes à multi-porteuses analogiques. Ils sont remplacés par des calculateurs réalisant la Transformée de Fourier Rapide Inverse (TFRI) à l'émetteur et le Transformée de Fourier Rapide (TFR) au récepteur [72]. Ces systèmes utilisent encore l'impulsion rectangulaire, générant une densité spectrale de puissance de type $(\sin f / f)^2$ au récepteur. Cependant, les interférences entre canaux (IEC)

causées par cette largeur de bande infinie sont minimisées par l'introduction d'un intervalle de garde.

En 1981, Hirosaki présente la première version à bande limitée d'un système numérique multiporteuses. Il étend le travail de Weinstein et Ebert [72] au filtrage en bande de base et développe la théorie numérique des modulations d'amplitude en quadrature multiplexées orthogonalement (O-QAM). Ainsi nomme-t-on aujourd'hui la technique proposée par Chang en 1966.

En 1985, Cimini propose et analyse l'application de l'OFDM à la transmission sur un canal radiomobile. Il insiste notamment sur la diversité fréquentielle intrinsèque des modulations multiporteuses permettant de décoréler l'influence du canal à évanouissement sur les symboles transmis.

Jusqu'à aujourd'hui, l'intérêt pour les modulations multiporteuses appliquées aux systèmes mobiles est resté grandissant. Dans le cadre du projet DAB (Digital Audio Broadcasting) Eureka 147, Alard et Lassale ont proposé un système de diffusion numérique dont la partie modulation est basée sur la technique OFDM. L'argument majeur de l'OFDM est qu'il transforme un canal large bande très sélectif en temps et en fréquence en une multitude de canaux à bande étroite non sélectifs en fréquence. En combinant un entrelacement entre les sous-porteuses et un codage adapté à la nature de l'évanouissement du canal, on obtient, au récepteur, les caractéristiques d'un canal Gaussien. Ce type de système est appelé COFDM.

D'autres travaux sur le sujet ont été l'objet de l'application de l'OFDM aux canaux radiomobiles à modulation de fréquence (MF) et de discussions sur de nouvelles formes d'ondes mieux adaptées aux canaux sélectifs. Les derniers travaux sur l'algorithmique s'intéressent plus particulièrement à la réduction de complexité et au gain d'efficacité spectrale dans le cas de spectres ne se recouvrant pas. L'OFDM est aujourd'hui connu sous le nom de multiporteuses discrètes (*Discrete Multi-Tone* : DMT) dans la norme mondiale ADSL. Il est également utilisé dans la norme du système de télédiffusion numérique DVB-T. L'OFDM avait même été envisagé pour la norme du système international Universal Mobile Telecommunication System (UMTS).

Depuis quelques années, un grand nombre d'études concernant la combinaison de l'OFDM avec l'AMRC apparaissent, afin d'unifier les avantages des deux systèmes et ainsi d'ouvrir de nouvelles voies dans les applications radio cellulaires.

1.1.2 Modélisation des systèmes OFDM

L'OFDM peut être modélisé de plusieurs manières. Cette méthode a une longue histoire, et la représentation de ce type de système a évolué au cours du temps avec les innovations technologiques. Nous présenterons donc en premier lieu la représentation continue du système OFDM de

laquelle nous ferons surgir la modélisation discrète en bande de base, ainsi qu'une modélisation bidimensionnelle dans le plan temps-fréquence.

Modèle analogique

Le modèle du système OFDM continu en bande de base est représenté sur la figure I.1.

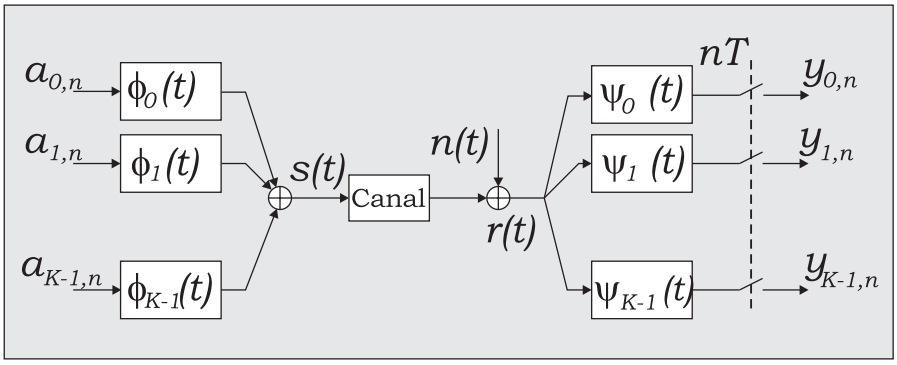


Fig. I.1 : Modèle du système OFDM continu en bande de base

Émetteur

Considérons un système OFDM comportant K sous-porteuses dans une bande de largeur W et transmettant des symboles de durée T , comprenant un préfixe cyclique de durée T_{pc} . Cet émetteur utilise les formes d'onde suivantes :

$$\phi_m(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{T-T_{pc}}} e^{j2\pi \frac{W}{K} m(t-T_{pc})} & \text{pour t} \in [0,T] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}, \tag{1.1}$$

où $T = K/W + T_{pc}$. Ces formes d'onde vérifient évidemment la relation d'orthogonalité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_m(t)\, \phi_{m'}^*(t)\, dt = \delta_{m,m'}, (.)^* \tag{1.2}$$

représentant l'opérateur de conjugaison complexe et $\delta_{m,m'}$ le symbole de Kronecker défini par

$$\delta_{m,m'} = \begin{cases} 1 & \text{pour } m = m' \\ 0 & \text{pour } m \neq m' \end{cases}. \tag{1.3}$$

Notons que $\phi_m(t) = \phi_m(t + K/W)$ lorsque t décrit le préfixe cyclique $[0, T_{pc}]$. Puisque $\phi_m(t)$ est modulée par une impulsion rectangulaire sur la fréquence mW/K, l'interprétation courante de l'OFDM est qu'il utilise K sous-porteuses, chacune transportant un faible débit. Les formes d'onde

$\phi_m(t)$ modulent les symboles d'information à émettre et le signal transmis en bande de base pour le $n^{ème}$ symbole OFDM est

$$s_n(t) = \sum_{m=0}^{K-1} a_{m,n}\phi_k(t - nT), \tag{1.4}$$

où les $a_{0,n}, a_{1,n}, , a_{K-1,n}$ sont les symboles d'information de durée $T_s = T/K$ transmis sur l'intervalle $[0,T]$. Ce sont des nombres complexes provenant d'un ensemble Ω de points d'une constellation. Lorsqu'une séquence infinie de symboles OFDM est transmise, le signal en sortie de l'émetteur est une juxtaposition de symboles OFDM :

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} s_n(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=0}^{K-1} a_{m,n}\phi_m(t - nT). \tag{1.5}$$

Canal physique

Nous supposons que le support de la réponse impulsionelle du canal physique $\gamma(\tau;t)$ - variable en temps et en fréquence - est restreint à l'intervalle $\tau \in [0, T_{pc}]$, c'est à dire au préfixe cyclique. Le signal reçu devient

$$r(t) = (\gamma \star s)(t) = \int_0^{T_{pc}} \gamma(\tau;t)\, s(t-\tau)\, d\tau + \tilde{n}(t), \tag{1.6}$$

où $\tilde{n}(t)$ représente le bruit de canal additif complexe blanc Gaussien.

Récepteur

Le récepteur OFDM consiste en un banc de filtres , adapté à la dernière partie $[T_{pc}, T]$ des formes d'onde de l'émetteur $\phi_m(t)$, c'est à dire

$$\psi_m(t) = \begin{cases} \phi_m^*(T-t) & \text{si } t \in [0, T - T_{pc}] \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.7}$$

Ceci signifie en clair que le préfixe cyclique est retiré à la réception. Puisque le préfixe cyclique contient, par définition, toute l'interférence entre symboles provenant du symbole précédent, le signal échantillonné en sortie du banc de filtres du récepteur ne contient pas d'IES. En utilisant 1.5, 1.6 et 1.7, nous obtenons pour le $n^{ème}$ symbole OFDM émis :

$$y_{mn} = (r \star \psi_m)(t)|_{t=nT} = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\,\psi_m(T-t)\,dt \tag{1.8}$$

$$= \int_{T_{pc}}^{T} \left(\int_0^{T_{pc}} \gamma(\tau;t) \left[\sum_{m'=0}^{K-1} a_{m'n} \phi'_m(t-\tau) \right] d\tau \right) \phi^*_m(t)\,dt + \int_{T_{pc}}^{T} \tilde{n}(T-t)\,\phi^*_m(t)\,dt. \tag{1.9}$$

Considérons que le canal ne varie pas sur la durée d'un symbole OFDM et notons $\gamma_n(\tau)$ le facteur d'atténuation du canal sur le $n^{ème}$ symbole. Nous obtenons :

$$y_{mn} = \sum_{m'=0}^{K-1} a_{m'n} \int_{T_{pc}}^{T} \left(\int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,\phi_{m'}(t-\tau)\,d\tau \right) \phi^*_m(t)\,dt + \int_{T_{pc}}^{T} \tilde{n}(T-t)\,\phi^*_m(t)\,dt. \tag{1.10}$$

Les intervalles d'intégration sont $T_{pc} < t < T$ et $0 < \tau < T_{pc}$ ceci implique que $0 < t-\tau < T$ et l'intégrale intérieure $\int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,\phi_{m'}(t-\tau)\,d\tau$ devient :

$$\int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,\phi_{m'}(t-\tau)\,d\tau = \int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,\frac{e^{j2\pi m'(t-\tau-T_{pc})W/K}}{\sqrt{T-T_{pc}}} d\tau$$

$$= \frac{e^{j2\pi m'(t-T_{pc})W/K}}{\sqrt{T-T_{pc}}} \int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,e^{-j2\pi m'\tau W/K}. \tag{1.11}$$

La dernière partie de cette expression est la réponse fréquentielle échantillonnée du canal à la fréquence $f = m'W/K$, c'est à dire sur la $m'^{ème}$ fréquence porteuse :

$$c_{m'n} = \int_0^{T_{pc}} \gamma_n(\tau)\,e^{-j2\pi m'\tau W/K} d\tau, \tag{1.12}$$

$c_{m'n}$ est donc l'échantillon à la fréquence $m'W/K$ de la transformée de Fourier de $\gamma_n(\tau)$. En utilisant cette notation, l'expression du signal en sortie du banc de filtres du récepteur peut être simplifiée

$$y_{mn} = \sum_{m'=0}^{K-1} a_{m'n} \int_{T_{pc}}^{T} \frac{e^{j2\pi m'(t-T_{pc})W/K}}{\sqrt{T-T_{pc}}} c_{m'n}\phi_m^*(t)\,dt + \int_{T_{pc}}^{T} \tilde{n}(T-t)\,\phi_m^*(t)\,dt \tag{1.13}$$

$$= \sum_{m'=0}^{K-1} a_{m'n}c_{m'n} \int_{T_{pc}}^{T} \phi_{m'}(t)\,\phi_m^*(t)\,dt + \tilde{n}_{mn}, \tag{1.14}$$

où $\tilde{n}_{mn} = \int_{T_{pc}}^{T} \tilde{n}(T-t)\,\phi_m^*(t)\,dt$. Puisque les filtres d'émission $\phi_m(t)$ sont orthogonaux,

$$\int_{T_{pc}}^{T} \phi_{m'}(t)\,\phi_m^*(t)\,dt = \int_{T_{pc}}^{T} \frac{e^{j2\pi m'(t-T_{pc})W/K}}{\sqrt{T-T_{pc}}} \frac{e^{j2\pi m(t-T_{pc})W/K}}{\sqrt{T-T_{pc}}} dt = \delta_{m,m'}, \tag{1.15}$$

δ représentant la fonction de Kronecker. Nous pouvons à nouveau simplifier 1.14 pour obtenir

$$\boxed{y_{mn} = c_{mn}a_{mn} + \tilde{n}_{mn},} \tag{1.16}$$

où $\tilde{n}_{mn}$ est un bruit blanc Gaussien additif. Nous voyons alors que le système OFDM peut se représenter sous la forme de K canaux Gaussiens parallèles (*cf fig.* I.2).

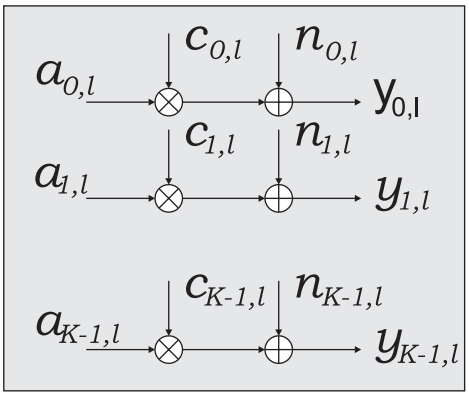


Fig. I.2 : Le système OFDM continu s'interprète comme des canaux Gaussiens parallèles

La figure I.3 représente schématiquement la réponse fréquentielle de chacune des sous-porteuses d'un symbole OFDM.

Dans cette figure, les sous-canaux composant le système sont séparés. Le fenêtrage rectangulaire des impulsions transmises donne naissance à une réponse fréquentielle en sinus cardinal. Le spectre

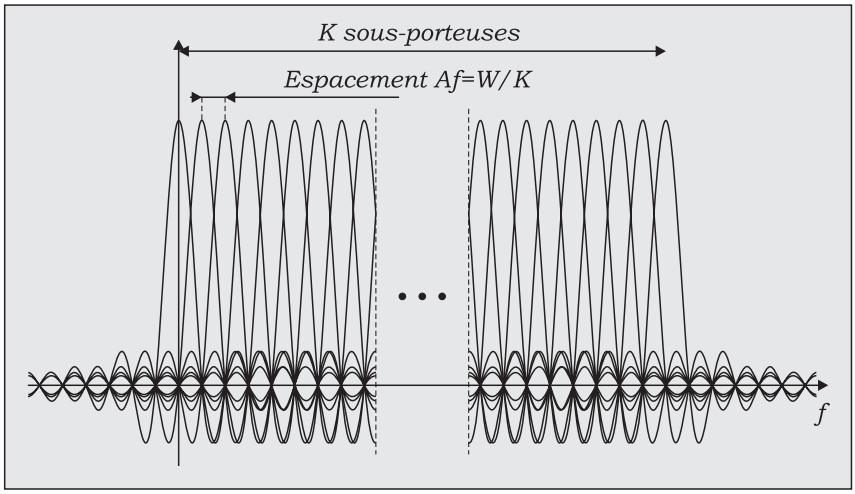


Fig. I.3 : Schéma symbolique des sous-porteuses du système OFDM à K porteuses et de largeur de bande W

du système OFDM décroît donc en f^{-2}. Dans certains cas, ce n'est pas suffisant et des méthodes [72, **?**, 32, 27] ont été proposées pour faire décroître le spectre du système plus rapidement. Dans toute notre étude, nous considérerons que la mise en forme est rectangulaire dans le domaine temporel.

Passage au modèle numérique

Mettre en oeuvre un système OFDM continu tel que nous l'avons décrit précédemment nécessite l'utilisation de K filtres analogiques en parallèle parfaitement orthogonaux. De tels filtres sont pratiquement impossibles à réaliser et leur implantation est très coûteuse. C'est pourquoi cette opération est aujourd'hui réalisée numériquement. Le message numérique ainsi créé subit une conversion numérique-analogique avant d'être émis. Dans le modèle OFDM discret, les bancs de filtres de l'émetteur et du récepteur sont en règle générale remplacés par une transformée de Fourier discrète inverse (TFDI) et par une transformée de Fourier discrète (TFD), respectivement. Le canal réalise une convolution linéaire discrète dans le domaine temporel. Le préfixe cyclique opère exactement de la même façon dans ce système que dans le modèle continu et les calculs peuvent être menés de la même façon.

Du point de vue du récepteur, l'utilisation d'un préfixe cyclique plus long que la réponse impulsionelle du canal transforme la convolution linéaire en une convolution cyclique [De Courville]. Notons la convolution cyclique par $\circledast$, nous pouvons écrire le vecteur des symboles reçus correspon-

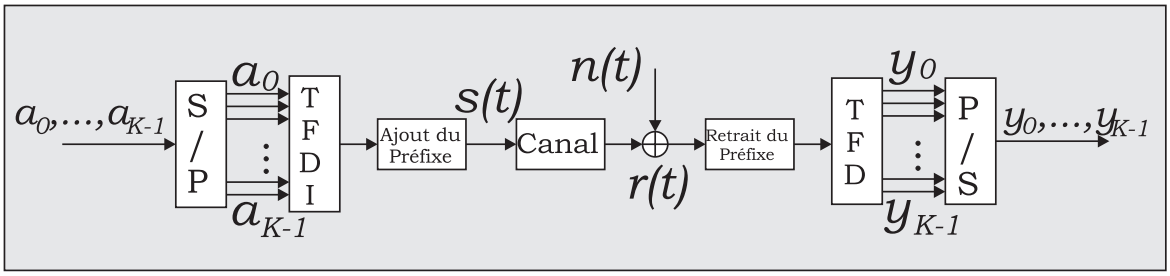


Fig. I.4 : Modèle discret du système OFDM.

dant au $n^{ème}$ symbole OFDM :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_n &= TFD\left(TFDI\left(\mathbf{a}_n\right) \circledast \gamma_n + \tilde{\mathbf{n}}_n\right) \\ &= TFD\left(TFDI\left(\mathbf{a}_n\right) \circledast \gamma_n\right) + \mathbf{n}_n \end{aligned} \tag{1.17}$$

où $\mathbf{y}_n$ contient les K échantillons reçus, $\mathbf{a}_n$ les K symboles appartenant à Ω transmis, γ_n la réponse impulsionelle du canal échantillonnée et $\tilde{\mathbf{n}}_n$ le bruit de canal. Puisque le bruit de canal est considéré blanc et Gaussien, le terme $\mathbf{n}_n = TFD\left(\tilde{\mathbf{n}}_n\right)$ représente un bruit Gaussien décorrélé. De plus, la TFD de deux signaux subissant une convolution cyclique est égale au produit de leurs transformées de Fourier. En notant '$\circ$' la multiplication élément par élément, l'expression précédente peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned}\mathbf{y}_n &= \mathbf{a}_n \circ TFD\left(\gamma_n\right) + \mathbf{n}_n \\ &\boxed{\mathbf{y}_n = \mathbf{a}_n \circ \mathbf{c}_n + \mathbf{n}_n}\end{aligned} \tag{1.18}$$

où $\mathbf{c}_n = TFD\left(\gamma_n\right)$ est la réponse fréquentielle du canal. Nous obtenons donc le même type de canaux Gaussiens parallèles que dans le modèle continu. La seule différence provient du fait que les atténuations du canal $\mathbf{c}_n$ sont données par la TFD de taille K du canal discret temporel, au lieu de la réponse fréquentielle échantillonnée vue dans (1.16).

Interprétation temps-fréquence

Les modèles décrits précédemment sont deux modèles classiques de l'OFDM avec préfixe cyclique. Un modèle plus général est de voir l'OFDM comme un système de transmission de données sur un treillis bidimensionnel dans le plan temps-fréquence. Considérons tout d'abord un signal OFDM $s\left(t\right)$.

$$s\left(t\right) = \sum_{n=-\infty,m=0}^{n=+\infty,m=K-1} a_{mn}\phi_{mn}\left(t\right), \tag{1.19}$$

où la fonction $\phi_{mn}(t)$ est la translatée d'une fonction prototype $p(t)$ de $n\tau_0$ en temps et de $m\nu_0$ en fréquence, soit : $\phi_{mn}(t) = p(t - n\tau_0)\, e^{j2\pi m\nu_0 t}$. Cette constatation montre l'existence d'un treillis bidimensionnel dans le plan temps-fréquence (fig. I.5) [27],[32].

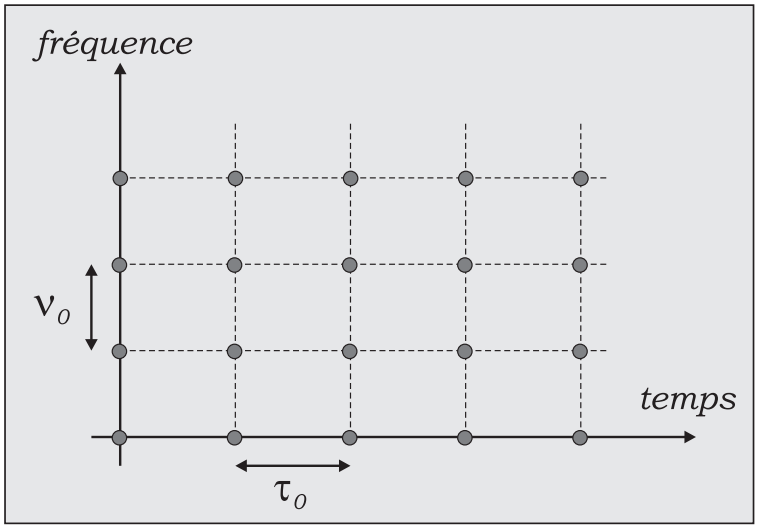


Fig. I.5 : Représentation temps-fréquence d'un système OFDM.

La fonction prototype peut être la fenêtre rectangulaire

$$p(t) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0} & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} . \tag{1.20}$$

dans le cas d'un système OFDM non filtré ou bien des filtres en racine de Nyquist dans le cas d'un système OFDM filtré. L'espacement fréquentiel entre deux symboles est alors de $\nu_0 = 1/(\tau_0 - T_{cp})$, où T_{cp} est la longueur du préfixe cyclique. Chaque symbole de donnée transmis subit un évanouissement "plat", ce qui simplifie l'égalisation et l'estimation de canal. Les atténuations du canal en chaque point de ce treillis sont évidemment corrélées.

1.2 Modélisation de la chaîne étudiée

La chaîne présentée ci-dessous est la chaîne complète considérée dans ce mémoire. Pourtant, dans certaines parties, certains blocs comme le codeur et l'entrelaceur ne seront pas pris en compte.

1.2.1 Caractéristiques du signal transmis

Les techniques d'estimation que nous proposerons plus loin traitent le signal reçu bloc temps-fréquence par bloc temps-fréquence. Nous verrons que la taille de ce bloc ne dépend pas nécessaire-

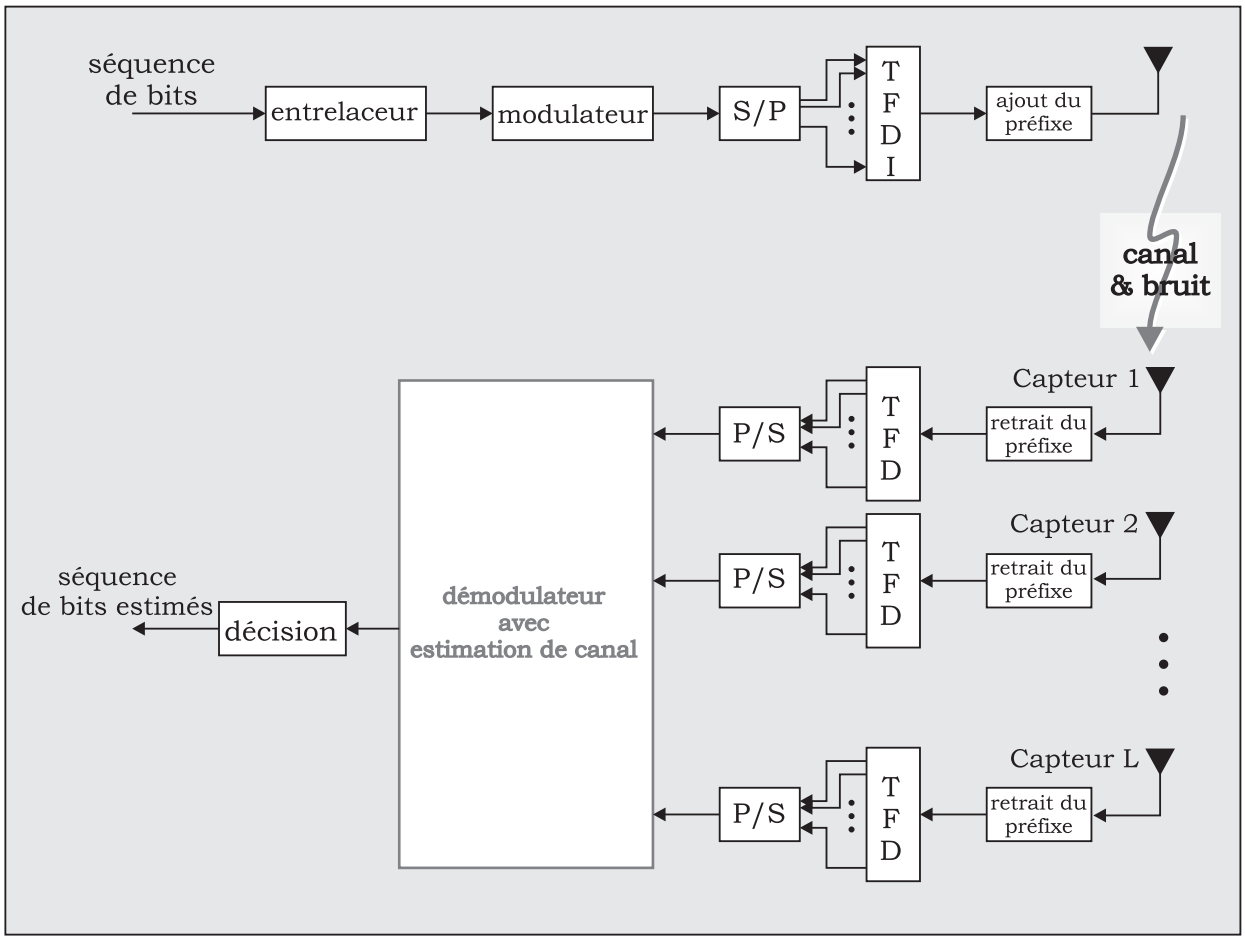


Fig. I.6 : Chaîne du système étudié.

ment du nombre de porteuses du système OFDM et peut prendre en compte tout ou partie d'un ou plusieurs symboles OFDM. Sa forme et sa taille sont donc libres, de manière à s'adapter au mieux au système.

Chacun de ces blocs, de dimensions $n_s \times n_p$, n_s étant le nombre de symboles OFDM et n_p le nombre de porteuses appartenant au bloc, est composé de $N = n_s \times n_p$ symboles $\{a_{mn}\}$ d'énergie $\{E_{mn}\}$ et de position bidimensionelle (mF, nT) où F et T sont respectivement l'espacement en fréquence et en temps entre deux symboles adjacents. Il contient N_D symboles de données indexés dans l'ensemble S_D et N_P symboles pilotes indexés dans l'ensemble S_P. On considérera dans la suite de ce mémoire que les symboles appartiennent à un alphabet Ω d'une modulation de phase (MDP). En effet, nous verrons que l'hypothèse de symboles à enveloppe constante est nécessaire pour les nouvelles méthodes d'estimation de canal présentées dans ce mémoire.

En règle générale, les récepteurs classiques utilisent des symboles pilotes de plus forte puissance que les symboles de donnée. Cette différence de puissance permet, certes, d'estimer le canal avec

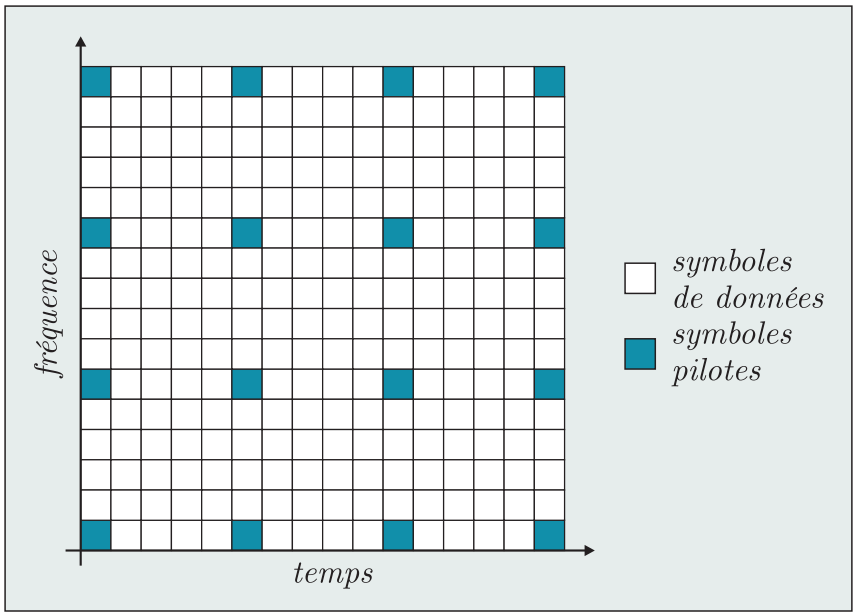


Fig. I.7 : Exemple de bloc temps-fréquence

plus de précision, mais risque d'introduire des interférences au niveau de la porteuse elle même et par conséquent de réduire la capacité du système OFDM dans un contexte de réutilisation de fréquence. L'estimation de canal selon les techniques présentées dans ce mémoire permet de réaliser une estimation de canal optimale quelle que soit la valeur de la puissance des symboles pilotes.

1.2.2 Modélisation du signal reçu

Comme nous l'avons défini, le récepteur traite le signal reçu par bloc temps-fréquence. Ce signal est reçu sur un réseau de L capteurs décorrélés spatialement, créant L branches de diversité. Sur chacune des branches de diversité, le signal reçu est en premier lieu démodulé par la transformée de Fourier discrète. On suppose que le signal en sortie de la $l^{ème}$ branche de diversité associé au symbole a_{mn} s'écrit :

$$R_{mn}^{l} = c_{mn}^{l} a_{mn} + N_{mn}^{l} \tag{1.21}$$

où c_{mn}^{l} est le facteur de gain du canal discret de la $l^{ème}$ branche vu par le symbole a_{mn} et N_{mn}^{l} est un bruit blanc Gaussien additif complexe de variance N_0. Les facteurs de gains sont indépendants d'une branche de diversité à l'autre, mais corrélés entre eux en temps et en fréquence sur une même branche.

Pour des raisons de notation, nous introduisons les fonctions d'indexation suivantes (fig. I.8) :

- $\delta(k) = [m(k), n(k)]$ entre l'ensemble monodimensionnel $\{k\}_{k=0}^{N-1}$ et l'ensemble bidimensionnel $S = S_D \cup S_P$,
- $\delta_D(k) = [m(k), n(k)]$ entre l'ensemble monodimensionnel $\{k\}_{k=0}^{N_D-1}$ et l'ensemble bidimensionnel S_D,
- $\delta_P(k) = [m(k), n(k)]$ entre l'ensemble monodimensionnel $\{k\}_{k=0}^{N_P-1}$ et l'ensemble bidimensionnel S_P.

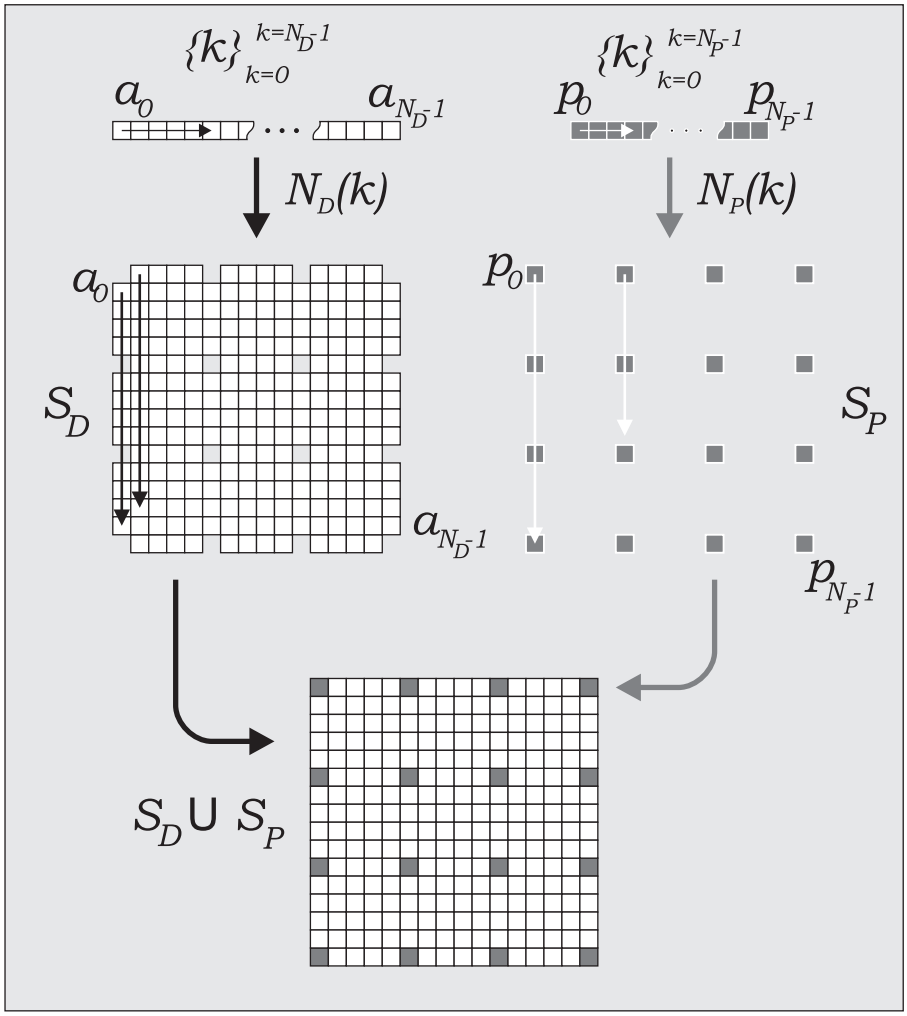


Fig. I.8 : Représentation schématique des ensembles d'indexation

Soit $(.)^T$ l'opérateur de transposition, écrivons le vecteur signal en sortie du filtre adapté de la $l^{ème}$ branche de diversité :

$$\mathbf{R}^l = \left[R^l_{\delta(0)}, \ldots, R^l_{\delta(N-1)}\right]^T. \tag{1.22}$$

Pour s'affranchir de la dépendance de l'amplitude de chaque symbole a_{mn} de Ω par rapport au

couple d'indices (m, n), nous définissons le vecteur normalisé du bloc transmis :

$$\mathbf{A} = \left[A_{\delta(0)}, \ldots, A_{\delta(N-1)}\right]^T \tag{1.23}$$

avec $A_{\delta(k)} = a_{\delta(k)} / \left|a_{\delta(k)}\right|$. Sur cette base, il est possible de réécrire les composantes du vecteur reçu sur la $l^{ème}$ branche de diversité :

$$\boxed{R^l_{\delta(k)} = C^l_{\delta(k)} A_{\delta(k)} + N^l_{\delta(k)}} \tag{1.24}$$

où $C^l_{\delta(k)}$ est la $d^{ème}$ composante du vecteur

$$\boxed{\mathbf{C}^l = \left[\left|a_{\delta(0)}\right| c^l_{\delta(0)}, \ldots, \left|a_{\delta(N-1)}\right| c^l_{\delta(N-1)}\right]^T} \tag{1.25}$$

des facteurs de gain normalisés du canal discret multiplicatif équivalent sur la $l^{ème}$ branche.

1.2.3 Caractéristiques du canal de propagation

Comme l'indique le titre de ce mémoire, les canaux auxquels nous nous intéressons sont des canaux sélectifs en temps et sélectifs en fréquence. Nous nous sommes attaché ici à travailler avec des canaux multitrajets à évanouissement. Le canal multitrajet est un environnement de propagation dans lequel le signal parvient au récepteur depuis plusieurs trajets dus à des effets de réflexion et de dispersion. Ces facteurs peuvent aisément mener à des fluctuations rapides de la phase et de l'amplitude du signal. Chaque trajet est caractérisé par sa puissance moyenne, par le retard de propagation qu'il subit et par son spectre de puissance Doppler dépendant de l'environnement, de la vitesse du mobile ainsi que de la porteuse à laquelle est émis le signal. Le canal de propagation est généralement représenté de la façon suivante :

$$g(\tau; t) = \sum_q \alpha_q(t)\, e^{-j2\pi f_c \tau_q(t)} \delta(\tau - \tau_q(t)) \tag{1.26}$$

où $\alpha_q(t)$ représente le facteur d'atténuation variant dans le temps, f_m la fréquence porteuse et $\tau_q(t)$ le retard de propagation du $q^{ème}$ trajet. Mais dans l'étude d'un système OFDM, on émet l'hypothèse que sur une porteuse et sur une période symbole le canal peut être considéré comme invariant. Sur une porteuse donnée m et pour le $n^{ème}$ symbole OFDM reçu de durée T_s, le facteur de gain du canal devient :

$$c_{mn} = \sum_q \alpha_q e^{-j2\pi f_c \tau_q} \delta(\tau - \tau_q). \tag{1.27}$$

Les évanouissements subis par chaque trajet peuvent être aussi bien de type Rayleigh que de type Rice. Le canal est donc caractérisé [60] par son étalement Doppler noté B_d et par l'étalement des retards noté T_m. Dans cette étude, nous nous sommes uniquement intéressés aux canaux de type Rayleigh, ceci ne restreint en rien le champ d'application des techniques d'estimation de canal présentées dans ce mémoire.

Au niveau d'un capteur en réception, la fonction d'autocorrélation temps-fréquence du canal à spectre de puissance Doppler classique et à profil d'intensité multitrajets exponentiel de puissance moyenne $\phi(0,0)$ est donnée par [60] :

$$\phi(\Delta f, \Delta t) = \phi(0,0)\,\frac{J_0(\pi B_d \Delta t)}{1 + j2\pi T_m \Delta f} \tag{1.28}$$

$J_0(.)$ représentant la fonction de Bessel de première espèce d'ordre 0, Δt et Δf respectivement l'espacement temporel et fréquentiel entre deux symboles adjacents.

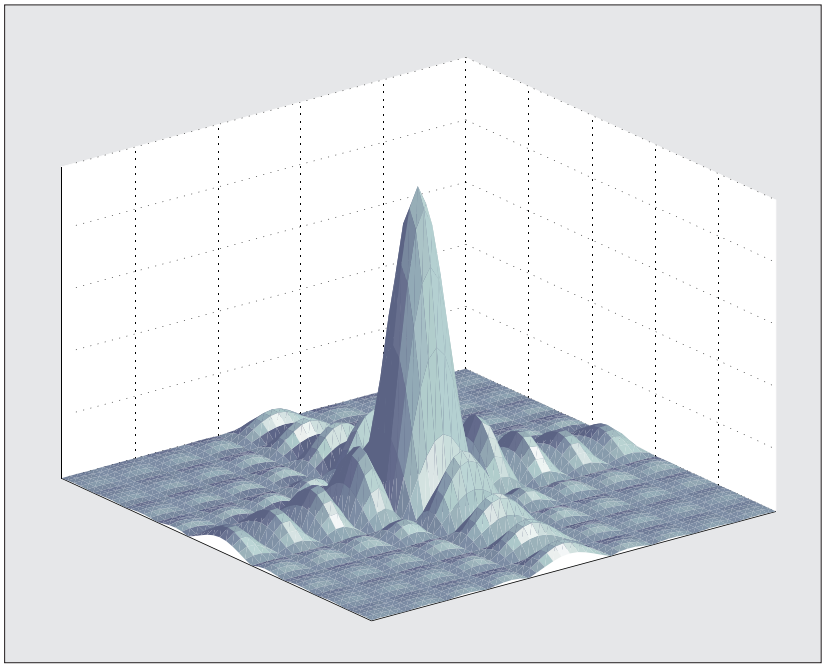


Fig. I.9 : Fonction d'autocorrélation du canal à spectre de puissance Doppler classique et à profil d'intensité multitrajets exponentiel

Un canal de propagation, comme nous l'avons déjà affirmé, peut être caractérisé par ses paramètres *étalement Doppler* B_d et *étalement des retards* T_m. Nous avons choisi de prendre comme paramètre du canal le produit $B_d T_m$. Mais à une valeur du produit $B_d T_m$ fixé correspondent une infinité de valeurs pour B_d et T_m, faisant varier la sélectivité en temps et en fréquence du canal.
Il est bien évident que dans la réalité il n'est pas possible de fixer les paramètres du canal. Cepen-

dant, dans un souci de ne pas favoriser l'une ou l'autre des dimensions sélectives du canal (en temps ou en fréquence), nous avons choisi de fixer le rapport B_d/T_m de telle façon que les variations en temps et en fréquence se déroule selon les mêmes règles statistiques. C'est à dire que la variance des retards τ et la variance de la fréquence Doppler γ soient égales.
Le détail de ces calculs est donné en annexe D et mène à la relation :

$$B_d = 2\sqrt{2}T_m$$

Ce qui devient, si l'on pose $B_dT_m = \alpha$:

$$B_d = \sqrt{2\alpha\sqrt{2}} \qquad T_m = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}}$$

La figure I.11 ci-dessous donne un exemple de réalisation de chacun des canaux utilisés dans les simulations présentées plus avant. Ces canaux vérifient la relation entre B_dT_m donnée ci-dessus. On vérifie bien que les variations temporelles et fréquentielles sont homogènes.

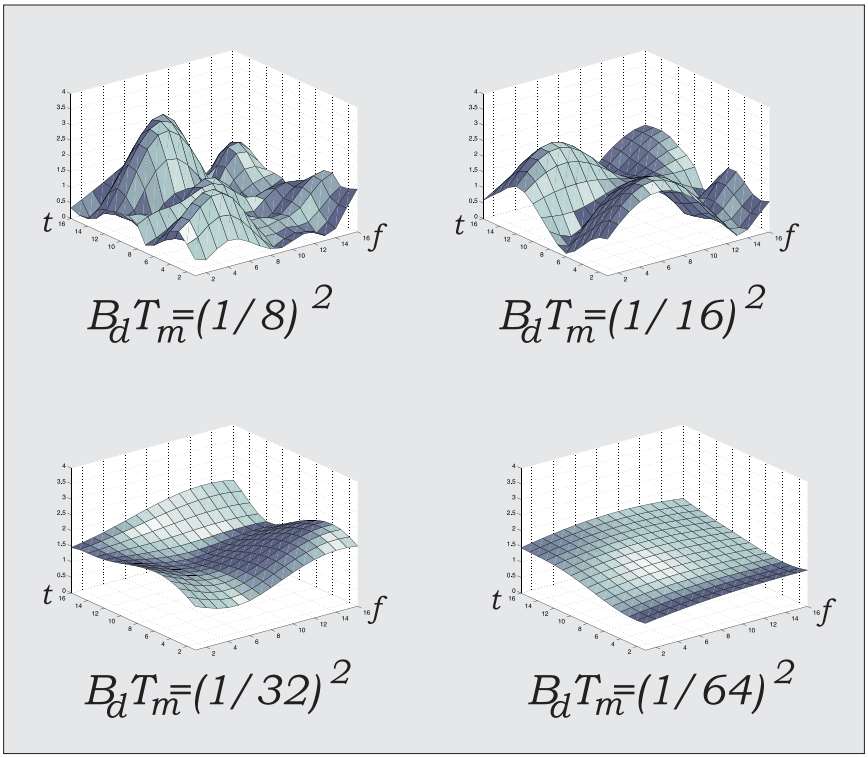


Fig. I.10 : Exemples de canaux pour diverses valeurs du produit B_dT_m

Ces différentes réalisations correspondent évidemment à la taille des blocs que nous avons prise en compte dans ce mémoire, c'est à dire des blocs de 16 symboles OFDM chacun formé par 16

porteuses. Sur de tels blocs, nous considérerons que les canaux de paramètre $B_dT_m = 1/8^2$ et $1/16^2$ sont très sélectifs, le canal $B_dT_m = 1/32^2$ est moyennement sélectif et le canal $B_dT_m = 1/64^2$ est faiblement sélectif.

1.2.4 Représentation du canal de propagation

Pour réaliser une estimation de canal semi-aveugle au sens du maximum *a posteriori*, nous avons besoin d'une représentation précise du canal. Notre représentation est basée sur une version discrète du théorème d'extension orthogonale de Karhunen-Loève [2]. Pour une question de clarté, nous considérerons que les trajets du canal obéissent tous à des atténuations de Rayleigh.

Proposition 1 *Le vecteur représentant le canal - observé au $l^{ème}$ capteur lors de la transmission d'un bloc de données temps-fréquence - peut s'exprimer sous la forme :*

$$\boxed{\mathbf{C}_l = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk}\mathbf{B}_{lk}} \tag{1.29}$$

où les $\{\mathbf{B}_{lk}\}_{l=0}^{L-1}$ sont les vecteurs propres normalisés de la matrice d'autocorrélation $\mathbf{F}_l = E\left[\mathbf{C}_l\mathbf{C}_l^{*T}\right]$ de $\mathbf{C}_l$ et les $\{G_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$ sont des coefficients Gaussiens complexes indépendants et centrés. Les variances de ces coefficients, que l'on supposera par la suite classés dans l'ordre décroissant, sont égales aux valeurs propres $\{\Gamma_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$ de la matrice hermitienne $\mathbf{F}_l$. Les systèmes $\{\mathbf{B}_{lk}\}_{k=0}^{N-1}$ - l variant de 0 à $L-1$ - forment L bases orthonormales de l'espace canonique complexe à N dimensions.

Démonstration. Cette proposition est un cas particulier du théorème d'extension orthogonale de Karhunen-Loève continu [59].
En effet, d'après le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève et puisque le canal de propagation sur chacune des branches de diversité forme un processus stochastique, il est possible d'écrire de vecteur $\mathbf{C}_l$ représentant le canal observé par une branche réceptrice lors de la transmission d'un bloc temps-fréquence de la façon suivante :

$$\mathbf{C}_l = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk}\mathbf{B}_{lk} \tag{1.30}$$

Les vecteurs $\{\mathbf{G}_l\}_{l=0}^{L-1}$, où $\mathbf{G}_l = (G_{l0}, G_{l1}, \ldots, G_{l,N-1})^T$, sont notre représentation du canal discret vu en sortie de la $l^{ème}$ antenne de réception. Nous savons que l'enveloppe du canal est de Rayleigh, c'est à dire que chaque facteur de gain $C^l_{\delta(k)}$ est Gaussien complexe et centré. Les vecteurs propres de la matrice de corrélation sont par définition également Gaussiens complexes et centrés.Donc d'après

1.30. Les $\{G_{lk}\}_{l=0;k=0}^{l=L-1;k=N-1}$ sont donc des variables complexes Gaussiennes de variance Γ_{lk}. D'où $\mathrm{Re}[G_{lk}]$ et $\mathrm{Im}[G_{lk}]$ sont des variables Gaussiennes de variance $\Gamma_{lk}/2$. On en déduit que

$$\begin{aligned} p(G_{lk}) &= p(\mathrm{Re}[G_{lk}]) \times p(\mathrm{Im}[G_{lk}]) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma_{lk}}} e^{-\frac{|\mathrm{Re}[G_{lk}]|^2}{\Gamma_{lk}}} \times \frac{1}{\sqrt{\pi\Gamma_{lk}}} e^{-\frac{|\mathrm{Im}[G_{lk}]|^2}{\Gamma_{lk}}} \\ &= \frac{1}{\pi\Gamma_{lk}} e^{-\frac{|G_{lk}|^2}{\Gamma_{lk}}}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

D'où la fonction de densité de probabilité du vecteur $\mathbf{G}_l$ est régie par l'expression :

$$p(\mathbf{G}_l) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{e^{-|G_{lk}|^2/\Gamma_{lk}}}{\pi\Gamma_{lk}}. \tag{1.32}$$

Quand le récepteur a la connaissance exacte des caractéristiques du canal évanescent à multitrajets, le $(p,q)^{ème}$ élément de la matrice hermitienne $\mathbf{F}_l$ correspondant à la $l^{ème}$ branche de diversité est explicitement donnée par :

$$F_{pq}^{l} = \sqrt{E_{\delta(p)}E_{\delta(q)}}\phi^{l}\left(\left(m(p) - m(q)\right)F, \left(n(p) - n(q)\right)T\right). \tag{1.33}$$

En pratique, les statistiques du canal de propagation ne sont pas précisément connues du récepteur, mais les paramètres B_d et T_m peuvent y être estimés par des techniques que nous n'aborderons pas dans ce mémoire. ■

1.3 Simplification de la représentation du canal

L'utilisation du modèle de canal tel que défini dans les paragraphes précédents peut amener à des traitements très complexes. En effet, le canal observé sur une branche de diversité est représenté par autant de vecteurs propres que le nombre N de symboles formant un bloc traité.

$$\mathbf{C_l} = \sum_{k=0}^{N-1} G_{lk}\mathbf{B}_{lk}$$

Cependant, nous savons que les paramètres $\{G_l k\}_{k=0}^{N-1}$ sont des variables aléatoires gaussiennes de variance $\Lambda_k/2$. Ceci signifie que lorsque la valeur propre Λ_k associée au vecteur propre $\mathbf{B}_k$ est faible, le vecteur propre $\mathbf{B}_k$ ne contribue que faiblement à la représentation du canal $\mathbf{C_l}$.

Les simulation que nous avons présenterons par la suite ont été réalisées pour des canaux dont nous avons choisi les paramètres B_d et T_m tels que leur produit valent $1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$.

La figure I.11 représente les valeurs cumulées des 40 premières valeurs propres des matrices d'auto-corrélation de chacun de ces canaux.

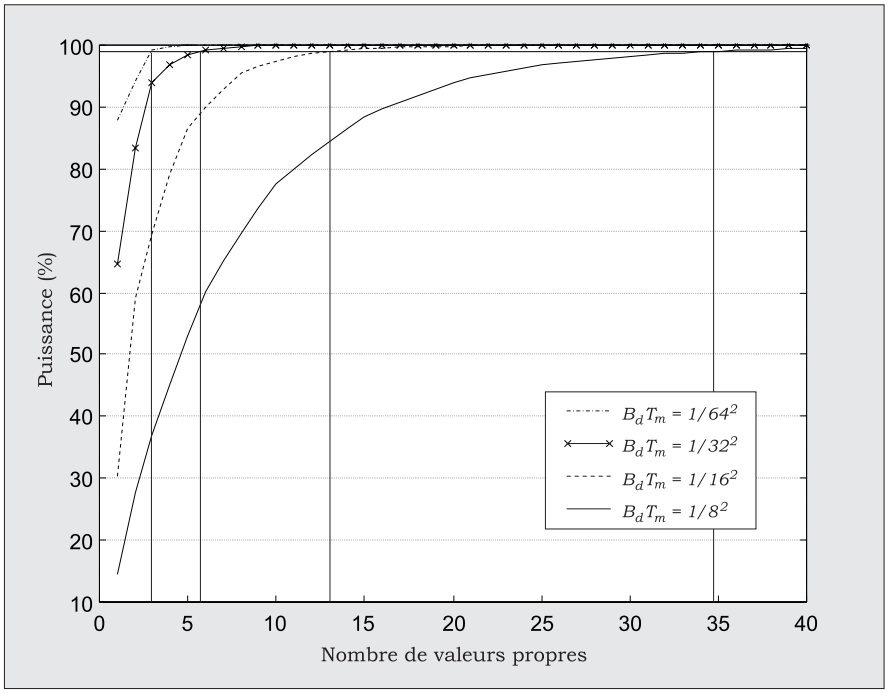


Fig. I.11 : Valeurs propres cumulées pour les canaux de propagation à $B_dT_m = 1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$

Cette figure nous montre que pour représenter le canal à 99% de sa puissance, il est suffisant de ne prendre en compte qu'un nombre limité de valeurs propres représenté dans le tableau suivant :

B_dT_m	Nombre utile de valeurs propres
$1/64^2$	2
$1/32^2$	6
$1/16^2$	13
$1/8^2$	35

Tableau 1.1 : Nombre de valeurs propres suffisantes pour représenter le canal à 99% de sa puissance

Il est donc très simple de simplifier le modèle de canal et ainsi de minimiser la complexité des techniques d'estimation de canal basées sur la représentation en vecteurs propres du canal que nous allons aborder dans la suite de ce mémoire.

1.4 Conclusion

Dans ce premier chapitre, nous avons présenté les modèles classiques d'un signal OFDM. Nous nous intéresserons particulièrement dans la suite de ce mémoire à une modélisation en "treillis" du signal OFDM, permettant de considérer le signal OFDM reçu par blocs temps-fréquence de symboles, chaque symbole étant affecté par un canal multiplicatif et par un bruit additif.
Nous avons également introduit une nouvelle modélisation du canal de propagation basée sur la décomposition orthogonale de Karhunen-Loève de la matrice d'autocorrélation du canal. Cette représentation du canal permet de représenter un canal de propagation de manière très simple et grâce à un nombre relativement peu élevé de paramètres.
Dans le chapitre suivant, nous présentons une technique d'estimation de canal semi-aveugle basée sur le modèle aux vecteurs propres du canal.

Chapitre 2

Estimation de canal semi-aveugle au sens du Maximum *a Posteriori*

Dans cette partie, nous nous sommes fixé comme objectif de réaliser une estimation du canal de propagation grâce à l'information apportée pas les symboles pilotes contenus par le bloc temps-fréquence traité. De plus, pour améliorer l'estimation, nous cherchons à utiliser le modèle de canal présenté dans le chapitre précédent.
Nous considérons que le récepteur a une connaissance *a priori* des statistiques du canal, ce qui lui confère directement la connaissance *a priori* de la base de vecteurs propres de la matrice d'autocorrélation du canal. Cet *a priori* nous permet de penser que la meilleure méthode à employer dans ce cas est celle du Maximum *a Posteriori*.

2.1 Introduction

Le canal de propagation vu par le récepteur peut non seulement varier de manière significative d'un bloc temps-fréquence à l'autre, mais également à l'intérieur d'un bloc lui-même. Cette variation est principalement due aux changements des conditions de propagation entre l'émetteur et le récepteur. D'un point de vue physique, le caractère variable du canal peut être caractérisé, comme nous l'avons déjà vu, par le produit $B_d \times T_m$. Plus ce produit est grand, plus le canal varie rapidement dans les domaines temporel et fréquentiel. De plus, d'un symbole à l'autre le canal est corrélé. Ceci proscrit l'utilisation du critère du maximum de vraisemblance, puisque sa mise en oeuvre dans un tel problème reviendrait à réaliser une estimation du canal symbole par symbole qui ne tiendrait pas compte de la corrélation du canal entre deux symboles adjacents. Le critère du maximum a

posteriori permet de tenir compte de cette corrélation, nous baserons notre estimation de canal sur ce critère.

2.2 État de l'art

2.2.1 Introduction

Dans cette section, nous allons décrire les méthodes d'estimation de canal existantes dans des contextes OFDM. Ces méthodes peuvent être simplifiées par l'utilisation de modulations différentielles. Une modulation numérique peut être qualifiée de différentielle ou de cohérente. L'utilisation d'une modulation différentielle permet de se passer d'estimer le canal puisque l'information est codée dans la différence de phase entre deux symboles consécutifs. Cette technique est couramment utilisée dans les systèmes sans fil puisqu'elle réduit considérablement la complexité du récepteur ne comportant pas d'estimateur de canal. La modulation différentielle par déplacement de phase (*Differential Phase Shift Keying* : DPSK) est utilisée dans la norme européenne *Digital Audio Broadcast* (DAB) [24]. Cette simplicité n'est évidemment pas dépourvue d'inconvénients, en effet la différence entre une modulation différentielle et une modulation cohérente en terme de performances est de l'ordre de 3 dB en canal Gaussien [60] et les modulations différentielles classiques ne permettent pas l'utilisation de constellations multi-amplitude. Bien qu'en général, ces méthodes n'en comportent pas, elles peuvent tirer parti de l'aide apportée par un estimateur de canal [28].

Il existe une alternative intéressante aux modulations cohérentes et différentielles classiques : les modulations différentielles par déplacement d'amplitude et de phase (*Differential Amplitude and Phase Shift Keying* : DAPSK) [22], [23], [61], [64]. Elles présentent une efficacité spectrale bien supérieure aux modulations de phase classiques (MDP) puisque l'amplitude des symboles subit également un codage différentiel.

Les modulations cohérentes permettent l'utilisation de constellations arbitraires et sont un choix évident pour les systèmes filaires où le canal ne varie que très peu avec le temps. Dans les systèmes sans-fil, l'efficacité spectrale des modulations cohérentes en font un choix intéressant lorsque le débit est très élevé, comme dans la norme *digital video broadcast* (DVB) [25], [15].

La conception d'un estimateur de canal repose fondamentalement sur deux problèmes :

- la quantité de symboles pilotes devant être transmise
- la complexité de l'estimateur devant poursuivre correctement le canal.

Ces deux problèmes sont bien évidemment liés puisque les performances de l'estimateur dé-

pendent de la quantité d'information pilote émise. Cependant, quelques méthodes récemment apparues n'utilisent aucune information pilote. Ces méthodes dites aveugles se basent sur l'utilisation de la cyclostationarité introduite par le préfixe cyclique [16], [34], [7], ou sur la méthode sous-espace [53] initiée dans [52]. Une dernière méthode proposée dans [12] réalise l'estimation aveugle de canal au sens du critère du Maximum de Vraisemblance sans aucune information sur les caractéristiques statistiques du canal.

La littérature contient aujourd'hui un grand nombre d'article portant sur les techniques semi-aveugle, utilisant des symboles pilotes multiplexés au signal transmis. Les symboles pilotes permettent d'obtenir par interpolation une estimation du canal sur l'ensemble des symboles transmis. Cette technique est appelée *Modulation Assistée par des Symboles Pilotes* (*Pilot-Symbol Assisted Modulation* - PSAM) et a été introduite pour des systèmes mono-porteuse par Moher et Lodge [50] puis analysée par Cavers [8]. Puisque, en OFDM, chaque sous-porteuse est soumise à un évanouissement non sélectif, la méthode PSAM peut être généralisée aux deux dimensions (temps-fréquence), où les pilotes sont placés à certaines positions du treillis OFDM temps-fréquence. L'estimation de canal est alors réalisée par une interpolation bidimensionelle. Hoëher propose d'utiliser des filtres à réponse impulsionelle finie (RIF) [35] pour cette interpolation et de séparer l'utilisation des corrélations temporelles et fréquentielles du canal. Cela représente un bon compromis entre la complexité et les performances.

L'espacement des symboles pilotes pour la méthode PSAM pour des systèmes mono-porteuse a été étudié dans [8]. L'espacement optimal est proche du rythme d'échantillonnage de Nyquist, c'est à dire l'inverse de la largeur de bande de la fonction de covariance du canal. Ce résultat se généralise aux deux dimensions pour le treillis temps-fréquence de l'OFDM. Utiliser une répartition dense des symboles pilotes signifie que le canal est sur-échantillonné, ceci implique que les méthodes d'estimation à réduction de rang [21] peuvent être efficaces. Ce type d'estimateur à faible complexité projette les échantillons observés sur un espace de plus faible dimension et réalise l'estimation dans ce sous-espace. En sur-échantillonnant le canal, en plaçant les symboles pilotes proches les uns des autres, les observations se trouvent essentiellement dans un sous-espace et les estimateurs à réduction de rang sont très efficaces.

Dans ce qui suit, nous allons présenter des estimateurs de canal utilisant une information pilote. La littérature s'est beaucoup étoffée depuis une dizaine d'années concernant l'estimation de canal pour les systèmes OFDM. L'ensemble des méthodes présentées ci-après ne constitue pas un état de l'art exhaustif mais représente l'ensemble des grandes familles d'estimateurs de canal. Toutes les

grandes techniques et critères d'estimation ont été utilisés pour l'estimation de canal OFDM. Nous verrons cependant que très peu de ces techniques se sont souciées de prendre en compte à la fois les sélectivités temporelle et fréquentielle du canal de propagation.

Les différentes techniques d'estimation de canal sont présentées ici selon le type de sélectivité qu'elles prennent en compte. Dans un premier lieu, nous verrons les méthodes n'exploitant que la sélectivité temporelle, en second lieu les méthodes considérant des canaux sélectifs en fréquence puis les méthodes prenant en compte les deux sélectivités à la fois.

2.2.2 Estimateurs de la phase du canal

Dans la littérature, un petit nombre de publications concernent les estimateurs de phase. Cette famille d'estimateur concerne plus particulièrement le problème de démodulation différentielle. Cependant, ces méthodes peuvent être également appliquées aux problèmes de démodulation cohérente [65], [66], [54] ou quasi cohérente [63].

2.2.3 Estimateurs des facteurs de gain du canal

Estimation de canal au sens du critère des moindres carrés (MC)

La méthode d'estimation de canal la plus simple, lorsque les symboles émis sont connus, est l'estimation au sens des Moindres Carrés (*Least Square* : LS). Dans ce cas, le facteur de gain du canal s'exprime simplement

$$c_{mc}(k,l) = \frac{y_{k,l}}{a_{k,l}}, \tag{2.2}$$

$y_{k,l}$ étant l'échantillon du $l^{ème}$ symbole OFDM reçu sur la $k^{ème}$ porteuse, et $a_{k,l}$ le symbole émis (pilote ou démodulé) correspondant. On rencontre deux grandes familles d'estimateurs basés sur les MC dans la littérature. La première est composée d'estimateurs avec retour de décision (ces méthodes sont présentées dans le paragraphe des estimateurs avec retour de décision), la deuxième famille d'estimateurs MC concerne des systèmes pour lesquels l'information pilote est répartie dans l'ensemble de l'espace temps-fréquence du signal OFDM. Ce type d'estimateurs réalise une interpolation soit fréquentielle [38], [51], soit bidimensionelle [9] de l'estimation MC réalisée au niveau des symboles pilotes à l'ensemble des symboles de donnée.

Interpolation polynômiale

Dans la littérature, les estimateurs monodimensionnels traitent tous le signal OFDM symbole

par symbole. L'interpolation de l'estimée du canal au niveau des pilotes est réalisée dans le domaine fréquentiel. Rinne et Renfors [62] proposent deux estimateurs simples au sens des MC. Le premier estime tout d'abord les valeurs des facteurs de gain du canal au niveau des pilotes et considère que le canal ne varie pas dans la bande de fréquence de largeur l'espacement fréquentiel entre deux symboles pilotes autour de la fréquence d'un pilote.

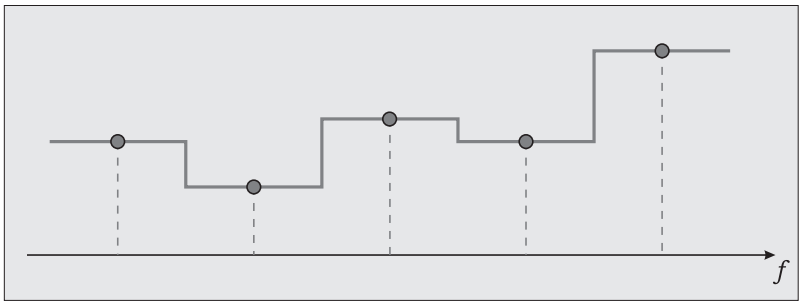


Fig. II.1 : Interpolation MC constante par morceaux

Le deuxième réalise une interpolation linéaire considérant que le canal varie linéairement entre deux pilotes.

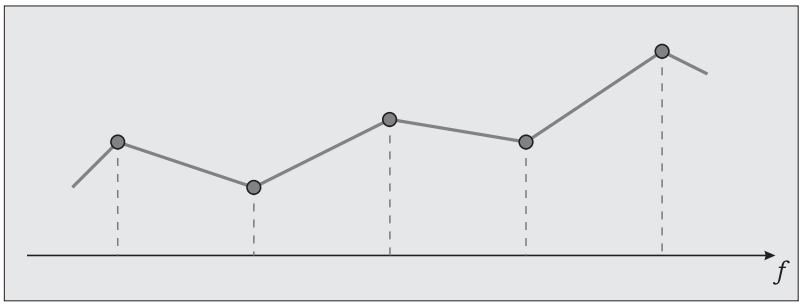


Fig. II.2 : Interpolation MC linéaire par morceaux

Huang et Zhao [38] proposent une méthode d'interpolation polynômiale par morceaux. Dans un symbole OFDM les pilotes sont régulièrement répartis par paire. L'estimation initiale au niveau des pilotes est réalisée, puis chaque symbole OFDM est découpé en segments fréquentiels et le canal sur chacun des segment est modélisé par un polynôme. L'estimation de canal complète sur un symbole OFDM est reconstruite à partir des polynômes élémentaires obtenus sur chaque segment. L'interpolation est donc simplifiée puisqu'elle n'est réalisée qu'à partir de quelques porteuses pilotes par segment.

Chang [9] propose de réaliser une interpolation bidimensionelle au sens des moindres carrés en considérant que le canal est une paraboloïde

$$f(k,l) = ak^2 + bkl + cl^2 + dk + el + f \tag{2.3}$$

et les coefficients (a, b, c, d, e, f) sont déterminés par la minimisation de

$$\sum_{(k,l)\in S_P} \left(c_{mc}\left(k,l\right) - f\left(k,l\right)\right)^2 . \tag{2.4}$$

Interpolation utilisant un filtre à réponse impulsionelle finie (RIF)

Dans [51], Moon et Choi présentent deux alternatives bidimensionelles aux techniques MC simples de Rinne et Renfors [62]. Les techniques proposées utilisent un filtrage d'interpolation Gaussien ou un à splines cubique. Les filtres utilisés sont des filtres à réponse impulsionelle finie (RIF) à 3 coefficients et utilisent par conséquent les estimations du canal au niveau de 3 symboles pilotes. Ici, l'interpolation est réalisée dans l'espace temps-fréquence et pas seulement sur un symbole OFDM. Cependant, contrairement à [9], l'interpolation bidimensionelle est réalisée par deux filtres monodimensionnels RIF, le premier réalise l'interpolation dans le domaine fréquentiel, le deuxième dans le domaine temporel. L'estimation du canal obtenue est ensuite filtrée afin de retirer la contribution du bruit tout en préservant la réponse impulsionelle du canal. L'estimée est transformée dans le domaine temporel par une TFDI. Cette estimée transformée peut être considérée comme la réponse impulsionelle du canal. Seuls sont conservés les échantillons correspondant au maximum de la puissance du canal par un filtrage passe bas rectangulaire, et ces échantillons subissent une TFD fournissant finalement les facteurs de gain fréquentiels du canal.

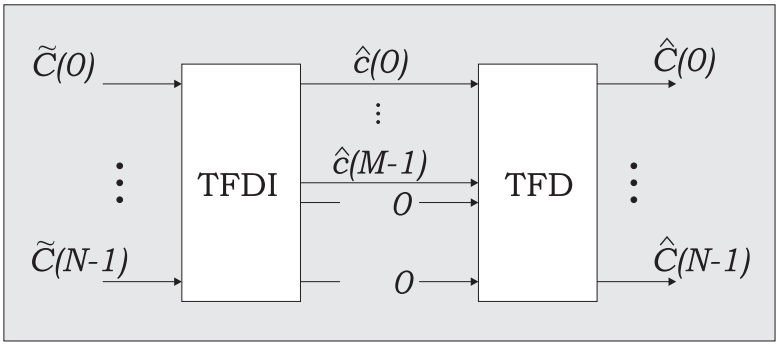


Fig. II.3 : Filtrage basé sur la transformée de Fourier

Onizawa et al. [55] proposent une méthode permettant de sélectionner un filtre RIF d'estimation de canal parmi un ensemble prédéfini. Ce choix se base sur les estimation MC réalisées au niveau des symboles pilotes. La norme du vecteur différence entre les estimées MC du canal sur deux porteuses adjacentes est utilisée comme critère de choix du filtre RIF servant d'interpolateur à l'ensemble des porteuses de la bande.

Autre interpolation

L'interpolation peut également être réalisée en adoptant un modèle de canal basé sur une base de polynômes orthogonaux. Dans [33] est présentée une méthode modélisant le canal de propagation à partir des polynômes de Schmidt

$$C = \sum_{m=0}^{M} \gamma_m P_m \tag{2.5}$$

La projection du signal reçu au niveau des symboles pilotes permet d'estimer les paramètres $\{\gamma_m\}$ et le canal est étendu à l'ensemble des symboles de donnée suivant 2.5.

Estimation de canal par le critère de l'erreur quadratique moyenne minimale (EQMM)

Le critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Minimale est très souvent rencontré dans la littérature concernant l'estimation de canal pour des systèmes OFDM. Ce critère est utilisé pour deux grandes familles d'estimateurs. La première concerne l'application la plus connue du critère EQMM, le filtrage de Wiener. Les estimateurs de la deuxième famille réalisent un filtrage passe-bas au sens de l'EQMM dans un domaine de transformation obtenu par transformée de Fourier. Dans ce paragraphe, nous ne présentons que les techniques basées sur l'EQMM "directes", les techniques utilisant le critère de l'EQMM dans un domaine de transformation sont présentées plus loin.

L'estimateur linéaire optimal pour les systèmes OFDM au sens de l'erreur quadratique moyenne (EQM) est le filtre de Wiener 2-D (temps-fréquence) [36], [43]. La complexité de cet estimateur est souvent trop grande pour une utilisation pratique. Des estimateurs sous-optimaux de plus faible complexité ont, par conséquent, été présentés dans la littérature [35], [70]. Il existe deux classes d'estimateurs, les estimateurs bidimensionnels et les estimateurs séparables. L'utilisation de filtres séparables est une méthode courante pour réduire la complexité en terme de traitement de signal multi-dimensionnel [19].

Ici, les atténuations du canal estimées au sens des moindres carrés (MC) sont notées :

$$\hat{c}_{mc} = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{y} = \left[\begin{array}{cccc} \frac{y_0}{x_0} & \frac{y_1}{x_1} & \cdots & \frac{y_{N-1}}{x_{N-1}} \end{array} \right]^T \tag{2.6}$$

Où $\mathbf{y}$ est le vecteur des données reçues et $\mathbf{X}$ le vecteur des symboles transmis. L'estimation finale des facteurs de gain du canal est réalisée par combinaison linéaire des $\hat{c}_{mc}(k,l)$, où les coefficients de la combinaison linéaire dépendent de la structure de l'estimateur. L'estimateur au sens du critère de l'erreur quadratique moyenne minimale linéaire $\hat{\mathbf{c}}_{eqmml}$ est donné par [67] :

$$\hat{\mathbf{c}}_{eqmml} = \mathbf{R}_{cc}\left(\mathbf{R}_{cc} + \sigma_n^2\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right)^{-1}\right)^{-1}\hat{\mathbf{c}}_{mc} \tag{2.7}$$

où $\mathbf{R}_{cc}$ est la matrice d'autocovariance du vecteur canal $\mathbf{c}$. Le calcul de $\left(\mathbf{X}\mathbf{X}^H\right)^{-1}$ se révélant gourmand en calcul, une simplification n'apportant que peu de dégradation [21] peut être établie en prenant la moyenne stochastique de cet estimateur. L'expression de l'estimateur simplifié est alors :

$$\hat{\mathbf{c}} = \mathbf{R}_{cc}\left(\mathbf{R}_{cc} + \frac{\beta}{SNR}\mathbf{I}\right)^{-1}\hat{c}_{mc} \tag{2.8}$$

où $\beta = E\left[|x_k|^2\right] E\left[|\,1/\,x_k|^2\right]$ et $SNR = E\left[|x_k|^2\right] \Big/ \sigma_n^2$.

Estimation fréquentielle

Dans [20], puis [21], Edfors et *al.* présentent une méthode d'estimation linéaire au sens de l'EQMM dont la complexité est réduite grâce à la réduction de rang optimale. Cette méthode est obtenue par la décomposition en valeurs singulières de la matrice d'autocorrélation fréquentielle du canal

$$\mathbf{R}_{cc} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^H \tag{2.9}$$

$\mathbf{U}$ étant une matrice unitaire contenant les vecteurs singuliers de $\mathbf{R}_{cc}$ et $\mathbf{\Lambda}$ une matrice diagonale contenant les valeurs singulières de $\mathbf{R}_{cc}$ $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_N$ sur sa diagonale. L'estimateur optimal de rang p est [20] :

$$\hat{\mathbf{c}}_p = \mathbf{U}\mathbf{\Delta}_p\mathbf{U}^H\hat{\mathbf{c}}_{mc} \tag{2.10}$$

où $\mathbf{\Delta}_p = diag\left(\delta_1, \ldots, \delta_N\right)$ est une matrice diagonale définie par :

$$\delta_k = \begin{cases} \frac{\lambda_k}{\lambda_k + \frac{\beta}{SNR}}, & k = 1, 2, \ldots, p \\ 0, & k = p+1, \ldots, N \end{cases} \tag{2.11}$$

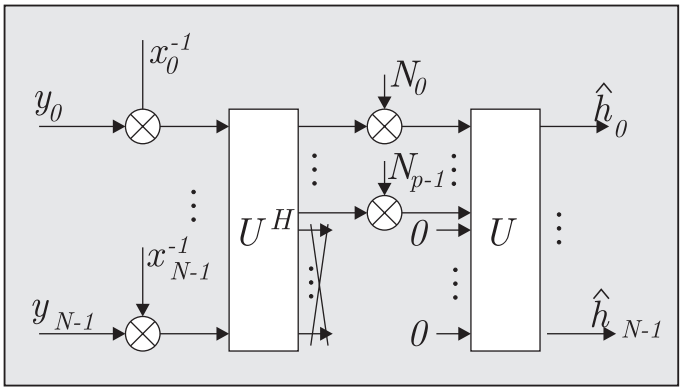


Fig. II.4 : Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières

L'interpolation est réalisée en remplaçant le deuxième vecteur U de la figure (II.4) par un vecteur V qui n'est pas explicité dans les articles [20][21].

La technique à réduction de rang a été reprise par Hsieh dans [37], de la même façon que dans [20] cette méthode n'est pas utilisée pour interpoler les estimées des facteurs de gain du canal aux symboles de donnée, elle sert à améliorer l'estimation du canal au niveau des pilotes. L'interpolation est ensuite réalisée linéairement ou par des polynômes du second degré.

Une méthode multi-entrées multi-sorties basée sur le critère EQMM avec diversité d'antenne est également présentée dans [75].

Filtres séparables

Certaines méthodes proposées s'appuient sur le fait que la fonction de corrélation temps-fréquence du canal peut s'écrire comme le produit des fonctions de corrélation en temps et en fréquence. Ce constat permet d'établir qu'un filtrage bidimensionnel peut être réalisé par la succession de deux filtres monodimensionnels.

Dans [39], l'estimation fréquentielle est réalisée suivant la technique classique du filtrage de Wiener. Hutter propose deux interpolations temporelles :

- filtrage passe-bas utilisant la transformée de Fourier,
- filtrage à phase linéaire.

Li *et al.*, dans [74], proposent une extension de [21] en utilisant à la fois les corrélations en fréquence et en temps du canal. Cette méthode utilise deux filtres basés sur la technique proposée dans [21], le premier basé sur la corrélation temporelle du canal et le second sur la corrélation fréquentielle.

Filtres bidimensionnels

Le filtre de Wiener 2-D est optimal en terme d'erreur quadratique moyenne, si on ne considère pas la complexité. Quoi qu'il en soit, pour une complexité fixée, le nombre de coefficients du filtre utilisés peut être assez faible. Il existe également une version à complexité réduite de cet estimateur utilisant la théorie de réduction de rang.

Pour l'estimation de chaque facteur de gain du canal, un set de N_P pilotes est utilisé. Les poids optimaux du filtre de Wiener sont obtenus en utilisant ce set de N_P pilotes dans la formule (2.7), [36], [43], [13].

Une version moins classique du filtre de Wiener est présentée par Frenger et Svensson dans [28]. Le filtrage de Wiener est utilisé pour prédire le canal à l'instant l sur la porteuse k grâce à une partie des symboles reçus dans les symboles OFDM précédents.

La figure II.6 décrit le fonctionnement de la méthode proposée par Frenger et Svensson.

Autre méthode d'estimation EQMM

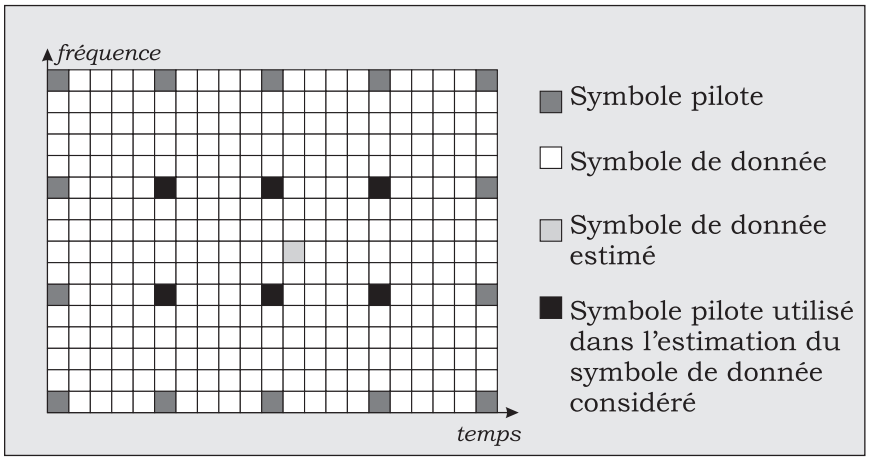


Fig. II.5 : Filtre de Wiener bidimensionnel

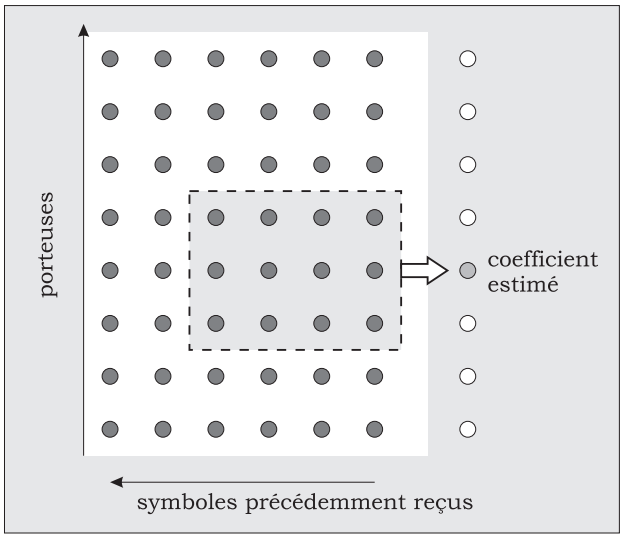


Fig. II.6 : Schéma de la technique proposée par Frenger [28]

Yang et al. [76] proposent également une méthode basée sur le critère de l'EQMM, cet estimateur réalise en premier lieu une estimation des retards de chacun des trajets du canal de propagation. Pour cela, la méthode ESPRIT est utilisée pour initialiser une boucle à verrouillage de retards (BVR) qui suivra les variations des retards. Les retards de propagation étant connus, une estimation des facteurs de gain du canal correspondants à ces retards au sens de l'EQMM est réalisée.

Estimation de canal par Filtrage de Kalmann

Quelques techniques rencontrées dans la littérature se basent sur le filtrage de Kalmann. La première d'entre elle est proposée par Tufvesson et Maseng [71]. Il s'agit d'un filtrage de Kalmann classique estimant les paramètres du canal modélisé comme un processus auto-régressif (AR). Ce processus AR est utilisé pour représenter les variations des coefficients du canal d'un instant à

l'autre. L'ensemble des fonctions de transfert à un instant donné s'écrivent :

$$C(k+1) = \phi C(k) + \nu(k) \tag{2.12}$$

$$y(k) = M(k) C(k) + e(k). \tag{2.13}$$

La matrice ϕ est une matrice diagonale $N \times N$ d'éléments

$$e^{-k_{AR} 2\pi f_d T_s} \tag{2.14}$$

définissant le processus AR. T_s est la durée symbole incluant le temps de garde ou préfixe cyclique. La matrice de covariance du bruit blanc $\nu(k)$ est R_1. Le vecteur $y(k)$ contient la fonction de transfert mesurée, $M(k)$ est un vecteur d'observation avec des 1 aux positions mesurées à l'instant k et $e(k)$ est un bruit de mesure de matrice de covariance R_2. Le paramètre k_{AR} du processus AR est choisi pour ajuster la mémoire du modèle du canal. Les équations typiques du filtrage de Kalmann deviennent :

$$\hat{C}(k|k) = \hat{C}(k|k-1) + K(k)\left(y(k) - M(k)\hat{C}(k|k-1)\right) \tag{2.15}$$

$$\hat{C}(k+1|k) = \phi\hat{C}(k|k-1) + K(k)\left[y(k) - M(k)\hat{C}(k|k-1)\right] = \phi\hat{C}(k|k) \tag{2.16}$$

$$K(k) = \phi P(k|k-1) M(k)^* \left[M(k) P(k|k-1) M(k)^* + R_2\right]^{-1} \tag{2.17}$$

$$P(k|k+1) = \phi P(k|k-1)\phi^* + R_1 - K(k)\left[M(k) P(k|k-1) M(k)^* + R_2\right] K(k)^* \tag{2.18}$$

$$P(k|k) = P(k|k-1) - P(k|k-1) M(k)^* \left[M(k) P(k|k-1) M(k)^* + R_2\right]^{-1} M(k) P(k|k-1) \tag{2.19}$$

$K(k)$ étant le vecteur filtre de Kalmann, $P(k|k-1)$ la matrice de covariance de la prédiction d'erreur et $P(k|k)$ la matrice de covariance de l'estimation de l'erreur.

Deux autres méthodes [5], [6] utilisant le filtrage de Kalmann existent et sont présentées dans le paragraphe suivant, elles sont avant tout des méthodes d'estimation à retour de décision.

Estimation de canal avec retour de décision

La plupart des techniques d'estimation avec retour de décision sont basées sur le critère MC. Le processus itératif de ces méthodes est initialisé par l'émission d'un symbole OFDM contenant uniquement de l'information pilote, fournissant au récepteur une estimation MC du canal sur l'ensemble des porteuses. Cette première estimation est utilisée comme initialisation de l'estimateur à retour de décision utilisant cette estimation initiale pour égaliser le symbole OFDM suivant. Intervient alors un décodeur correcteur d'erreur [48] - pouvant être un décodeur SOVA [41] - permettant

de décoder les données en fournissant une information sur la fiabilité des données décodées. Ceci permet d'évaluer à nouveau l'estimation du canal par la même technique des Moindres Carrés après re-codage et re-mise en forme des données décodées.

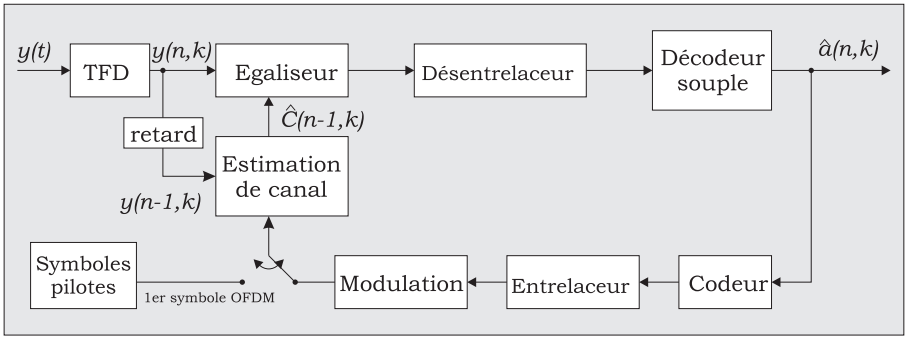


Fig. II.7 : Principe des méthodes avec retour de décision

Le même procédé est utilisé dans [56] où l'estimation de canal est réalisée au sens des critères Zero-Forcing ou EQMM ou bien par un filtrage de Kalmann [5].

Bulumulla [6] a également développé une méthode d'estimation de canal à retour de décision basée sur le critère du MAP dans laquelle les probabilités a posteriori sont calculées grâce au filtrage de Kalmann.

Estimation par filtrage dans un domaine de transformation

Ces techniques transforment le signal reçu ou bien une estimation préalable MC ou EQMM du canal vers un domaine intermédiaire dans lequel est réalisé un filtrage. La majorité des articles traitant de ce sujet utilisent la transformée de Fourier inverse pour créer leur domaine de transformation.

Domaine de transformation obtenu par la transformée de Fourier inverse

La grande majorité des méthodes appartenant à cette catégorie fonctionnent selon le modèle représenté sur la figure suivante :

Q étant un filtre dépendant du critère choisi.

Filtrage rectangulaire - "Zero padding"

Dans ce cas, le filtre Q est simplement une fenêtre rectangulaire et il s'agit des techniques simples utilisée pour éliminer la contribution du bruit dans l'estimation de canal rencontrées dans [9].

Filtrage EQMM

Les méthodes proposées dans [14] et [11] utilisent un filtre Q EQMM et leur fonctionnement est décrit dans la figure suivante :

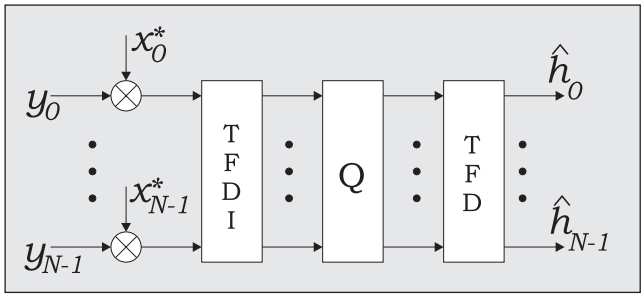


Fig. II.8 : Principe des méthodes d'interpolation par TFD

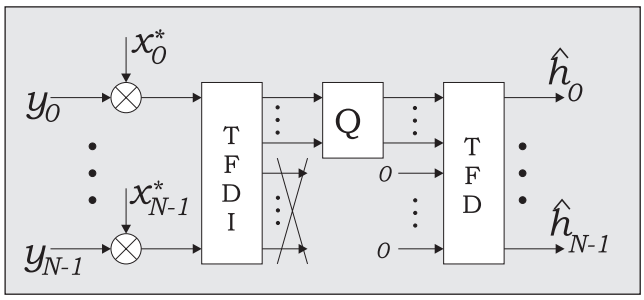


Fig. II.9 : Principe des méthodes d'interpolation par TFD avec filtrage EQMM

Jones [42] propose également un système de ce type, mais comportant plusieurs antennes à l'émission et en réception.

Autres filtrages Dans la littérature on rencontre également d'autres types de filtrage comme les fenêtres de Hamming ou de Hanning [77].

Domaine de transformation obtenu par la TFD bidimensionnelle

D'autre part, il existe une méthode basée sur la transformée de Fourier bidimensionnelle présentée dans [46]. Le principe de cette méthode est strictement le même que la technique précédente. Le filtrage est réalisé dans l'espace de transformation à 2 dimensions.

Autres domaines de transformation

Zhao et Huang proposent d'utiliser le duo TFDI/TFD pour générer un espace de transformation, mais cet espace est obtenu dans [79] en utilisant tout d'abord la transformée de Fourier directe. Ceci donne naissance à une représentation du canal dans un nouveau domaine de transformation qui est filtrée selon la "puissance" obtenue sur les pseudo-fréquences observées puis transformée à nouveau par la transformée de Fourier inverse.

Une autre méthode est basée sur le fait qu'un signal OFDM peut être généré par la transformée de Hadamard, ainsi l'estimation de canal peut être réalisée de manière similaire aux techniques basées sur la TFD, mais en utilisant la transformée de Hadamard.

2.2.4 Conclusions

Dans les techniques que nous venons de présenter, seules quelques techniques réalisent un traitement par bloc du signal OFDM reçu :

- Le filtre de Wiener 2D
- La méthode de filtrage dans le domaine de transformation généré par la Transformée de Fourier 2D
- Interpolation au sens des MC

Les méthodes qui nous intéresseront le plus sont ces méthodes, permettant de tenir compte de la sélectivité temporelle et fréquentielle du canal. Les autres techniques présentes dans la littérature de prennent en compte qu'une des deux sélectivité et ne présentent finalement que peu d'intérêt en terme de comparaison de performance avec les méthodes que nous allons développer plus loin.

2.3 Estimation de canal itérative basée sur le critère du Maximum *a Posteriori*

Dans le chapitre précédant, nous avons développé un nouveau modèle pour le canal de propagation, permettant de le représenter simplement. Nous nous baserons sur ce modèle pour l'estimation du canal et nous considérerons que les paramètres B_d et T_m sont connus du récepteur. Dans ce cas de figure, le critère semblant le plus approprié pour l'estimation des paramètres $\mathbf{G_{lk}}$ du canal est celui du Maximum *a Posteriori*.

2.3.1 Formulation du problème au sens du Maximum *a Posteriori*

Le critère du Maximum a Posteriori est le plus adapté à l'estimation semi-aveugle du canal multi-trajets à évanouissements discret vu en sortie des branches de diversité lorsque les expressions des fonctions de densité de probabilité $p\left(\mathbf{G}^l\right)$ des paramètres du canal sont connues du récepteur. Pour l'estimation des caractéristiques du canal, certains symboles transmis sont fixés (symboles pilotes).

Le vecteur $\mathbf{A}$ normalisé correspondant à l'émission d'un bloc temps-fréquence est donc caractérisé par sa probabilité d'émission *a priori* $P\left(\mathbf{A}\right)$. Étant donnés le vecteur $\mathbf{A}$ transmis et la représentation du canal discret $\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$, et en considérant que le bruit est indépendant sur chacune des L branches de diversité du récepteur, on peut décrire les vecteurs $\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ par la fonction de

densité de probabilité conditionnelle :

$$p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\,\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=\prod_{l=0}^{L-1}\prod_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{1}{N_0}\left|R_k^l-A\sum_{m=0}^{N-1}G_m^l B_{mk}\right|^2\right) \tag{2.20}$$

où B_{mk} est la $k^{ème}$ composante du $m^{ème}$ vecteur de la base orthonormale $\{\mathbf{B}_m\}_{m=0}^{N-1}$.

L'estimée au sens du Maximum *a Posteriori* $\left\{\widehat{\mathbf{G}}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ du canal multi-trajets discret $\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ correspondant au bloc temps-fréquence reçu est donnée par :

$$\left\{\widehat{\mathbf{G}}^l\right\}_{l=0}^{L-1}=\arg\max_{\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}}p\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right). \tag{2.21}$$

Cette technique d'estimation maximise la fonction de densité de probabilité conditionnelle *a posteriori* $p\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$. Résoudre directement cette équation est inextricable. La solution peut être atteinte itérativement en mettant en oeuvre l'algorithme EM (Expectation Maximization). Dans la grande majorité des méthodes basées sur l'EM dans la littérature, l'algorithme EM est combiné au critère du Maximum de Vraisemblance (Maximum Likelihood : ML). Nous l'utiliserons pour résoudre un problème posé au sens du critère du Maximum *a Posteriori*.

2.3.2 L'algorithme "Expectation - Maximization"

L'algorithme EM est connu des statisticiens depuis longtemps, il a largement été présenté et analysé dans les travaux de Dempster, Laird, Rubin [17] et Wu [73]. Hors du contexte statistique, l'algorithme EM a été mis en oeuvre par Snyder [69] pour l'estimation au sens du maximum de vraisemblance de la concentration de radioactivité dans la tomographie d'émission des positrons, ainsi que par Feder [26] pour extraire des estimées de paramètres provenant de signaux superposés. L'algorithme EM a fait l'objet de nombreuses études appliquées dans le domaine des systèmes de communication dont les principaux sont Poor [58], Kaleh [44], Georghiades *et al.* [30] [31][29], Zabin *et al.* [78] , Ansari *et al.* [**?**], Modestino [49], Lavielle [45] et Moulines.

Dans notre problème, l'algorithme EM estime itérativement les L vecteurs $\left\{\widehat{\mathbf{G}}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ de telle façon de garantir à chaque itération une croissance monotone de la fonction de densité de probabilité conditionnelle $p\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$. Cette croissance monotone est réalisée via la maximisation de la fonction auxiliaire, basée sur la mesure de Kullback-Leibler, dépendant des paramètres courants

$\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ et des nouveaux paramètres $\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}$:

$$\boxed{Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=\sum_{\mathbf{A}}\left[p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\times \log p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\right]} \tag{2.22}$$

où la somme est réalisée sur tous les vecteurs de données susceptibles d'être transmis sur le bloc temps-fréquence considéré.

Les théorèmes suivant sont fondamentaux pour expliquer le comportement général de l'algorithme EM. Le premier explique l'existence de la fonction auxiliaire.

Théorème 1 *La croissance de la fonction auxiliaire implique la croissance de la probabilité a posteriori :*

$$Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\geq Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{2.23}$$

implique que

$$p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\geq p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right). \tag{2.24}$$

L'inégalité est stricte à moins que, quels que soient les symboles composant le vecteur signal émis $\mathbf{A}$, $p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe A. ■

Etant donnés les L vecteurs reçus $\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$, l'algorithme EM est initialisé avec une première estimation $\left\{\mathbf{G}^{l(0)}\right\}_{l=0}^{L-1}$des vecteurs $\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$. L'évolution de l'estimation $\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ à la nouvelle estimation $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ est effectuée via la fonction auxiliaire Q :

⇒ Phase ***Expectation*** : Calcul de $Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$, $\left\{\mathbf{G}^l\right\}$ étant fixé et $\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}$ variable.

⇒ Phase ***Maximization*** : Recherche de la nouvelle estimation $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ qui maximise la fonction $Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ en fonction de $\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}$.

Le premier théorème garantit donc que les ré-estimées $\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ et $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ ont pour propriété :

$$p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\geq p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right). \tag{2.25}$$

De plus, il peut être montré [47] que sous certaines conditions, $Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ la fonction auxiliaire, possède un maximum global unique, dépendant de $\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}$ et que ce maximum est le seul et unique point critique, où un point critique de $Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ est caractérisé par :

$$\nabla Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=0, \tag{2.26}$$

∇ représentant le vecteur gradient. Le deuxième théorème, présenté ci-dessous, garantit que la séquence d'estimées produit une croissance monotone de $p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ jusqu'à ce que les estimées atteignent un point critique de cette probabilité.

Théorème 2 *Un paramètre* $\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}$ *est un point critique de* $p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ *si et seulement si il est un point fixe de* $Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l'}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$.

Démonstration. La démonstration de ce théorème est donnée dans l'annexe A. ■

La ré-estimation itérative continue jusqu'à ce que la probabilité $p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(D)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ obtenue à la $D^{ème}$ itération atteigne un seuil.

En général, la fonction auxiliaire présente plusieurs maxima globaux. Ceci mène à une ambiguïté dans l'estimation au Maximum *a Posteriori* des facteurs de gain du canal multi-trajet discret. Ce problème peut être évité par l'utilisation de symboles connus du récepteur. Quoi qu'il en soit, ceci est insuffisant, puisque la fonction auxiliaire présente aussi plusieurs maxima locaux pouvant être atteints par l'algorithme EM au lieu du maximum global. Pour s'affranchir de ce deuxième problème, l'estimation initiale $\left\{\mathbf{G}^{l(0)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ doit être calculée avec beaucoup de soin en utilisant des symboles connus du récepteur : les symboles pilotes.

2.3.3 Expression analytique de l'estimateur

Proposition 2 *Soit* Ω *l'alphabet dans lequel chaque symbole normalisé du bloc temps-fréquence prend sa valeur. L'expression de la* $m^{ème}$ *composante de l'estimation* $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ *correspondant à la* $l^{ème}$ *branche de diversité est explicitement donnée par*

$$\boxed{G_m^{l(d+1)}=w_m^l\sum_{k=0}^{N-1}R_k^l\left(\sum_{A\in\Omega}Ap\left(A_k=A|\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\right)^{*}B_mk^{*}} \tag{2.27}$$

où le facteur w_m^l *répond à la définition suivante :*

$$\boxed{w_m^l=\frac{1}{1+N_0/\Gamma_m^l}} \tag{2.28}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée en annexe B. ■

Les coefficients de pondération w_m^l dépendent de la $m^{ème}$ valeur propre de la matrice de covariance hermitienne $\mathbf{F}^l$ (qui prend en compte la puissance moyenne $\phi^l(0)$ du $l^{ème}$ trajet ainsi que l'étalement Doppler B_d et les énergies transmises $E_{\delta(k)}, \delta(k) \in S_P \cup S_D$ associées aux symboles de donnée et aux symboles pilotes) et de la variance du bruit I_0. On définit $D_{\delta(k)}$ la valeur prise par le symbole pilote $A_{\delta(k)}, \delta(k) \in S_P$. Puisque tous les symboles pilotes sont connus du récepteur, on a :

$$P\left(A_{\delta(k)} = D_{\delta(k)} \left| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) = 1 \tag{2.29}$$

pour $\delta(k) \in S_P$. En conséquence, l'expression de $G_m^{l(d+1)}$ précédente peut se ré-écrire :

$$\boxed{\begin{aligned} G_m^{l(d+1)} = w_m^l \Bigg(& \sum_{\delta(k)\in S_D} R_{\delta(k)}^l \left(\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)} = A \left| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)\right)^* B_{\delta(k)m}^* \\ & + \sum_{\delta(k)\in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)} B_{\delta(k)m}^* \Bigg) \end{aligned}} \tag{2.30}$$

Au démarrage de l'algorithme EM, le récepteur n'a aucune connaissance des valeurs des données transmises dans un bloc temps-fréquence. En conséquence, pour la détermination de l'initialisation $\left\{\mathbf{G}^{l(0)}\right\}_{l=0}^{L-1}$, il peut utiliser les probabilités conditionnelles uniformes $P\left(A_k \left| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$ pour chacun des symboles inconnus. C'est pourquoi, la $m^{ème}$ composante de l'initialisation $\mathbf{G}^{l(0)}$ correspondant au $l^{ème}$ capteur est explicitement donnée par :

$$\boxed{G_m^{l(0)} = w_m^l \sum_{\delta(k)\in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)}^* B_{\delta(k)m}^*} \tag{2.31}$$

Cette relation étant, au passage, vraie pour n'importe quel type de modulation et ne nécessite pas l'hypothèse *enveloppe constante* sur la modulation employée.

2.3.4 Cas particuliers

En utilisant la loi de Bayes, il est possible de transformer l'expression précédente de $G_m^{l(d+1)}$ en :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left(\sum_{\delta(k)\in S_D} R_{\delta(k)}^l \tanh\left[2\,\mathrm{Re}\left\{\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right\}\right] B_{\delta(k)m}^* + \sum_{k\in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)} B_{\delta(k)m}^* \right) \tag{2.32}$$

pour une modulation MDP-2, et

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left(\sum_{\delta(k)\in S_D} R_k^l \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right] + \frac{j}{\sqrt{2}} \tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right] \right)^* B_{\delta(k)m}^* + \sum_{k\in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)} B_{\delta(k)m}^* \right) \tag{2.33}$$

pour une modulation MDP-4, où $\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}$ est défini par :

$$\Lambda_{\delta(k)}^{(d)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)}^l \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m} \right)^* . \tag{2.34}$$

Le détail des calculs menant à ces résultats est donné en annexe C.

2.4 Résultats

Les résultats que nous présentons dans ce chapitre ont été obtenus par des simulations de la méthode proposée au chapitre précédent dans plusieurs contextes de propagations. Nous avons comparé notre algorithme à trois méthodes d'estimation de canal rencontrées dans la littérature.

2.4.1 Algorithmes de comparaison

Trois méthodes ont été choisies pour comparer les performances de notre algorithme à celles de méthodes connues et classiquement utilisées. Nous avons tenu à comparer notre algorithme d'estimation de canal à des méthodes bloc, pouvant donc fonctionner de manière bidimensionelle et ne pas utiliser de méthodes réalisant seulement une interpolation temporelle fréquentielle.
Les deux premières méthodes élues sont basées sur le critère des moindres carrés (MC) et réalisent une interpolation linéaire de l'information fournie par les symboles pilotes contenus dans le bloc temps-fréquence traité.
La troisième méthode est moins classique et repose sur le principe du filtrage dans un domaine de transformation, ici créé par la transformée de Fourier.

Estimation de canal MC

Algorithme de comparaison MC-1

L'algorithme MC-1 utilise l'estimation MC du canal au niveau des symboles pilotes pour réaliser une interpolation bidimensionelle sur l'ensemble des symboles de donnée en considérant que le canal

peut être assimilé à un plan constant sur chacun des blocs temps-fréquence considérés. Le canal est modélisé par le polynôme de degré 0 suivant :

$$f_{MC-1}(m,n) = \alpha. \tag{2.35}$$

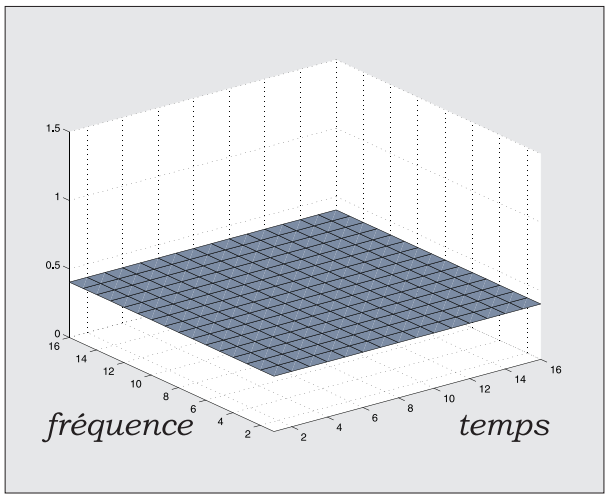


Fig. II.10 : Norme du canal fourni par la méthode MC-1

Dans un premier temps, le canal est estimé au sens des MC au niveau des symboles pilotes et on note $\hat{c}_{MC}(m_p, n_p)$ l'estimation du canal correspondant au $p^{ème}$ symbole pilote et

$$\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) = \frac{y_{m_p n_p}}{a_{m_p n_p}}. \tag{2.36}$$

Le critère des moindres carrés est utilisé une seconde fois pour réaliser une interpolation aux symboles de donnée. Le critère s'écrit

$$\min[MC1] = \min\left[\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - f_{MC-1}(m_p, n_p)\right)^2\right] \tag{2.37}$$

On obtient :

$$\min[MC1] = \min\left[\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(\hat{c}_{MC}(m_p, n_p) - \alpha\right)^2\right]. \tag{2.38}$$

L'expression est dérivée par rapport au paramètre du canal α et égalée à zéro

$$\frac{\partial}{\partial\alpha} MC1 = 0$$

Nous obtenons le paramètre α par les calculs suivants :

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}MC1 = \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\alpha^2 + \hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)^2 - 2\alpha\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)\right)$$
$$= \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(2\alpha - 2\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)\right) \tag{2.39}$$

alors

$$\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(2\alpha - 2\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)\right) = 0 \tag{2.40}$$

d'où

$$\boxed{\alpha = \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right).} \tag{2.41}$$

Le canal est alors égal à α sur tout le bloc temps-fréquence

Algorithme de comparaison MC-2

Le deuxième estimateur consiste en une extension de la méthode MC-1 à un polynôme du premier degré :

$$f_{MC-2}\left(m,n\right) = \alpha m + \beta n + \gamma \tag{2.42}$$

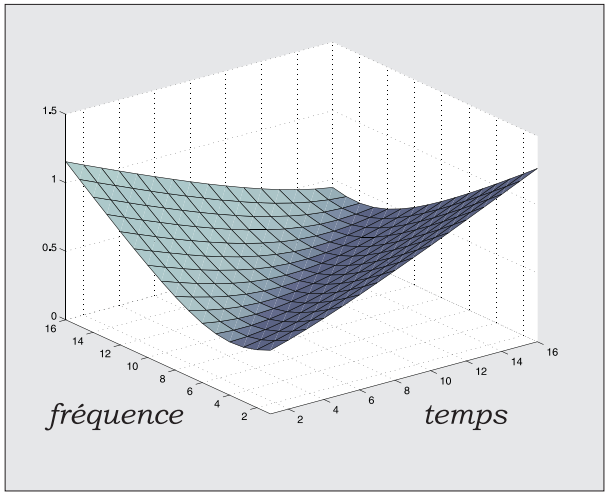


Fig. II.11 : Norme du canal fourni par la méthode MC-2

Le critère des MC devient

$$\begin{aligned}\min\left[MC2\right] &= \min\left[\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-f_{MC-2}\left(m_p,n_p\right)\right)^2\right]\\ &= \min\left[\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-\alpha m_p-\beta n_p-\gamma\right)^2\right]\end{aligned} \tag{2.43}$$

$$\begin{aligned}&\min\left[\frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\Big(\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)^2+\alpha^2m_p^2+\beta^2n_p^2+\gamma^2-2\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\alpha m_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)\right.\\ &\left.-2\beta n_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\gamma\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\alpha\beta m_pn_p-2\alpha\gamma m_p-2\beta\gamma n_p)\right]\end{aligned} \tag{2.44}$$

Les paramètres α,β et γ sont obtenus grâce aux dérivées partielles par rapport à eux-même :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}MC2 &= \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(2\alpha m_p^2-2m_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\beta m_pn_p-2\gamma m_p\right)\\ &= \frac{2\alpha}{N_p}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p^2-\frac{2}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-\frac{2\beta}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_pn_p-\frac{2\gamma}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p\end{aligned} \tag{2.45}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\beta}MC2 &= \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(2\beta n_p^2-2n_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\alpha m_pn_p-2\gamma n_p\right)\\ &= \frac{2\beta}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p^2-\frac{2}{N_p}\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-\frac{2\alpha}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_pn_p-\frac{2\gamma}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p\end{aligned} \tag{2.46}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\gamma}MC2 &= \frac{1}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}\left(2\gamma-2\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-2\alpha m_p-2\beta n_p\right)\\ &= 2\gamma-\frac{2}{N_p}\sum_{p=0}^{N_P-1}\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)-\frac{2\alpha}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p-\frac{2\beta}{N_P}\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p\end{aligned} \tag{2.47}$$

Pour simplifier la lecture de la suite, notons

$$\begin{array}{lll}\Sigma_c=\sum_{p=0}^{N_P-1}\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right) & \Sigma_m=\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p & \Sigma_n=\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p\\ \Sigma_{m^2}=\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p^2 & \Sigma_{n^2}=\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p^2 & \Sigma_{mc}=\sum_{p=0}^{N_P-1}m_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right)\\ \Sigma_{nc}=\sum_{p=0}^{N_P-1}n_p\hat{c}_{MC}\left(m_p,n_p\right) & \Sigma_{mn}=\sum_{p=0}^{N_P-1}m_pn_p & \end{array}$$

Les équations

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}MC2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\beta}MC2 = 0$$
$$\frac{\partial}{\partial\gamma}MC2 = 0$$

deviennent

$$\alpha\Sigma_{m^2} - \Sigma_{mc} - \beta\Sigma_{mn} - \gamma\Sigma_m = 0$$
$$\beta\Sigma_{n^2} - \Sigma_{nc} - \alpha\Sigma_{mn} - \gamma\Sigma_n = 0$$
$$\gamma N_P - \Sigma_c - \alpha\Sigma_m - \beta\Sigma_n = 0$$

posons encore

$$\kappa_\alpha = N_P\Sigma_{m^2} - (\Sigma_m)^2$$
$$\kappa_\beta = N_P\Sigma_{n^2} - (\Sigma_n)^2$$
$$\kappa_\gamma = N_P\Sigma_{mn} - \Sigma_m\Sigma_n$$
$$\kappa_\mu = N_P\Sigma_{mc} - \Sigma_m\Sigma_c$$
$$\kappa_\nu = N_P\Sigma_{nc} - \Sigma_n\Sigma_c$$

et les valeurs des paramètres (α, β, γ) du polynôme $f_{MC-2}(m, n) = \alpha m + \beta n + \gamma$ se calculent grâce aux équations :

$$\boxed{\alpha = \frac{\kappa_\beta\kappa_\mu - \kappa_\gamma\kappa_\nu}{\kappa_\alpha\kappa_\beta - \kappa_\gamma^2}} \quad (2.48)$$

$$\boxed{\beta = \frac{\kappa_\alpha\kappa_\nu - \kappa_\gamma\kappa_\mu}{\kappa_\alpha\kappa_\beta - \kappa_\gamma^2}} \quad (2.49)$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\Sigma_c - \alpha\Sigma_m - \beta\Sigma_n}{N_P}} \quad (2.50)$$

Estimation de canal par la FFT bidimensionelle EC-FFT-2D

La troisième technique d'estimation de canal nous servant de comparatif fait partie de la famille des estimateurs utilisant un domaine de transformation créé par la TFDI. Le canal est tout d'abord

estimé au niveau des N_P symboles pilotes. Cette estimation subit une TFDI bidimensionelle de dimension N. Un filtrage est ensuite réalisé dans ce domaine de transformation, puis une TFD, fournissant finalement l'interpolation de l'estimation MC au niveau des pilotes à tous les symboles de donnée (*fig.* II.12).

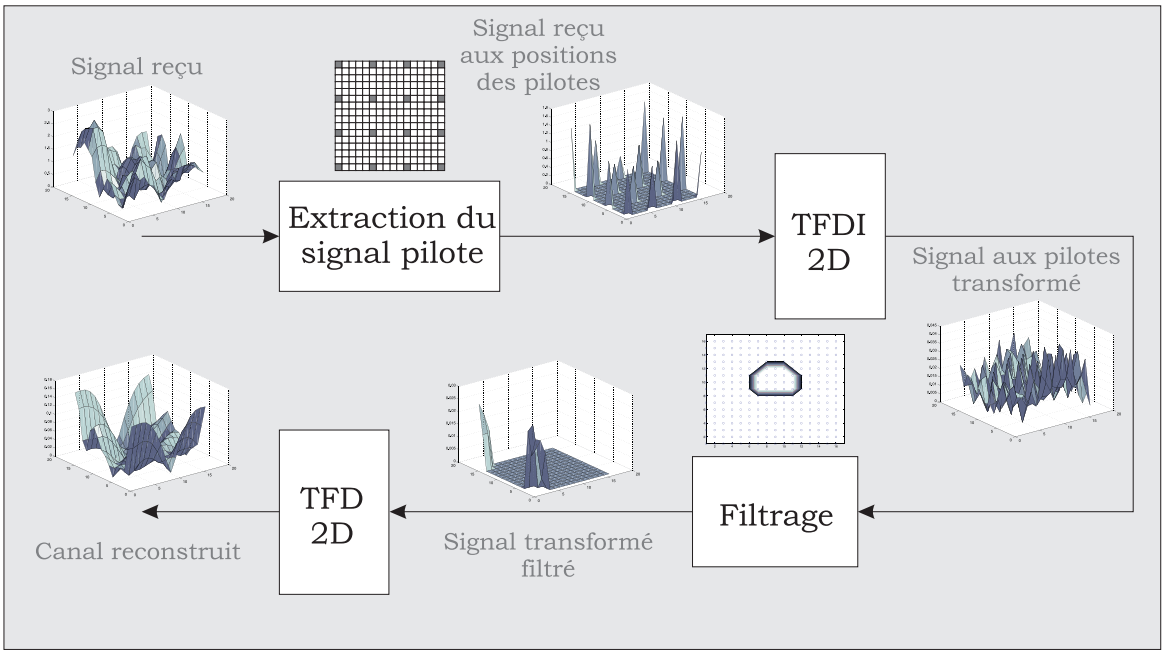


Fig. II.12 : Schéma de l'algorithme d'estimation de canal par la FFT bidimensionelle

Le filtrage est le point crucial de cette méthode. En effet, il est nécessaire de définir précisément le filtre, sans quoi les performances de l'algorithme s'effondrent rapidement. Le choix du filtre est réalisé en fonction des statistiques du canal. En moyenne sur toutes les réalisations possibles du canal, le carré du module de la TFDI du canal reçu sur un bloc représente la fonction de diffusion (*scattering function*) du canal (*fig.* II.13.*a*).

Le filtrage serait simple si c'était effectivement ce que nous obtenions dans le domaine de transformation. Mais au lieu d'avoir une information en moyenne sur tout le bloc, nous possédons, lors du traitement d'un bloc, une information échantillonnée aux positions des symboles pilotes. La forme de ce signal dans le domaine de transformation (*cf. fig.* II.13.*b*) correspond en fait à la fonction de diffusion superposée à ses propres décalages, c'est à dire la convolution de la transformée du canal par la transformée du masque des pilotes.

Considérons les canaux correspondant à $B_d T_m = 1/16^2$ et $B_d T_m = 1/64^2$.

La taille du filtre est choisie en fonction des fonctions de diffusion du canal (*fig.* II.14) et du canal échantillonné aux positions des symboles pilotes (*fig.* II.15).

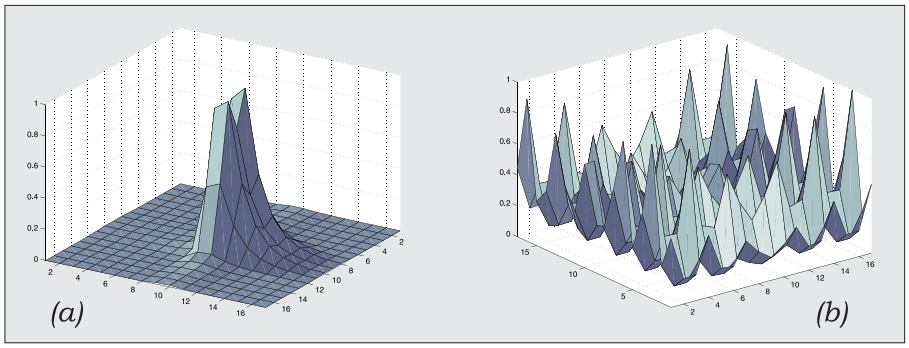


Fig. II.13 : Fonctions de diffusion du canal (a),
du canal échantillonné aux symboles pilotes (b)

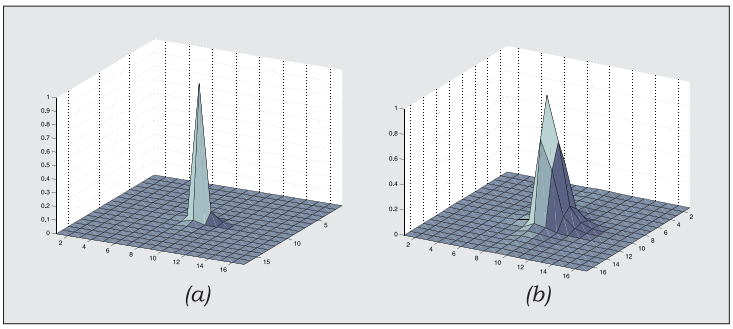


Fig. II.14 : Fonctions de diffusion des canaux pour $B_d T_m = 1/64^2$ (a)
et $B_d T_m = 1/16^2$ (b)

En observant la fonction de diffusion du canal échantillonné, nous voyons que pour $B_d T_m = 1/64^2$, il n'y a pas de superposition de la fonction de diffusion principale (centrale) avec les autres, le filtrage est donc simplement réalisé en isolant la fonction de diffusion centrale comme le montre la figure (II.16.c).

Mais dans le cas où $B_d T_m = 1/16^2$, il existe un net recouvrement des différentes contributions des fonctions de diffusion décalées avec la fonction centrale. Dans ce cas, le filtrage est plus difficile et il faut régler le filtre de telle façon qu'il minimise ce recouvrement. Pour cela, nous vérifions à partir de quel niveau de puissance dans le domaine de transformation il n'y a pas de recouvrement entre les différentes fonctions de diffusion.

Nous voyons que sur la figure (II.17.a et b), le recouvrement existe à un niveau de puissance égal à 0.15 alors que pour un niveau égal à 0.25, il n'existe plus. Nous choisirons donc le filtre défini sur la figure (II.17.d) plutôt que celui de la figure (II.17.c).

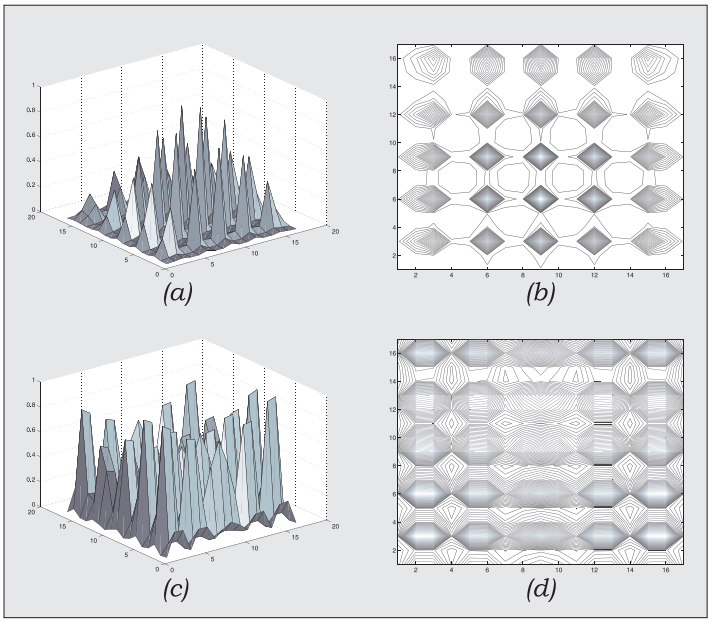


Fig. II.15 : Fonctions de diffusion des canaux échantillonnés pour $B_dT_m = 1/64^2$ (a) et $B_dT_m = 1/16^2$ (b)

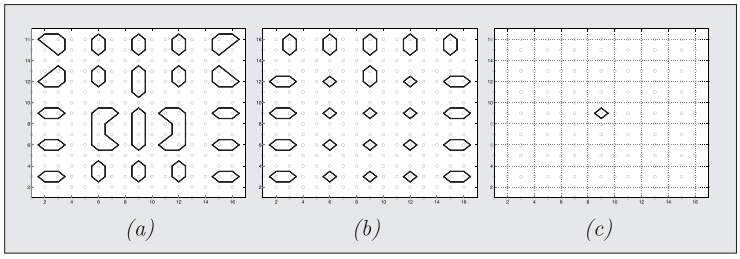


Fig. II.16 : Contours du canal échantillonné (a),(b) et du canal complet (c) avec $B_dT_m = 1/64^2$ dans le domaine de transformation pour des seuils de puissance de 0.05 et 0.1

Combinaison des estimation sur chaque branche de diversité

Dans toutes les méthodes de comparaison, l'estimation de canal est réalisée séparément sur chacune des branches de diversité. La diversité est exploitée par combinaison optimale des branches de diversité.. Les sorties souples sont donc estimées par :

$$\lambda_{\delta(k)} = \frac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R_{\delta(k)} \hat{C}^{l*}_{\delta(k)} \tag{2.51}$$

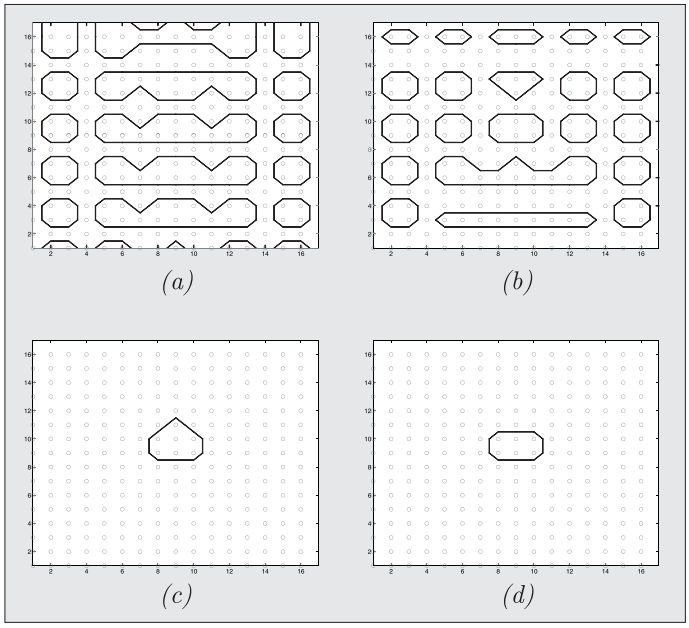


Fig. II.17 : Contours du canal échantillonné (a),(b) et du canal complet (c),(d) avec $B_d T_m = 1/16^2$ dans le domaine de transformation pour des seuils de puissance de 0.15 et 0.25

2.4.2 Contexte des simulations

Signal émis

Nous avons arbitrairement choisi de réaliser nos simulations à partir de blocs de dimension 16×16. Ainsi, les blocs temps-fréquence considérés possèdent 16 porteuses et 16 symboles OFDM. La répartition des symboles pilotes dans ce bloc ainsi que leur quantité est également arbitraire.

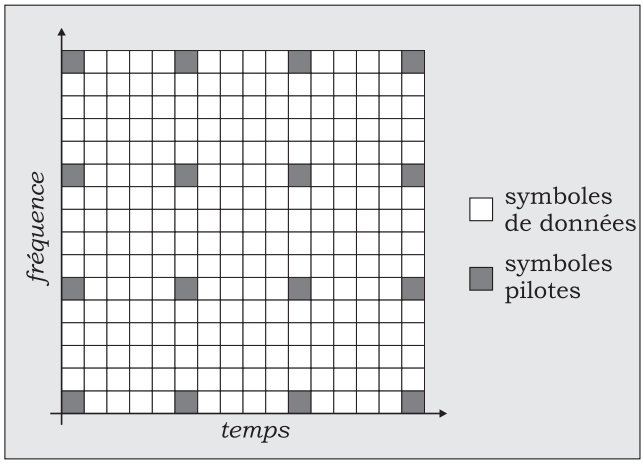


Fig. II.18 : Bloc temps-fréquence considéré dans les simulations

Les symboles remplissant chaque bloc temps-fréquence appartiennent à l'alphabet d'une MDP-2

$\Omega = \{-1, 1\}$. Le récepteur possèdera $1, 2$ ou 4 branches de diversité.

Canal de propagation

Quatre contextes de propagation sont considérés dans les simulations présentées. Nous avons choisi des canaux de propagation dont les $B_d T_m$ valent $1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$. Le tableau suivant donne les variations de phase maximales d'une extrémité du bloc à l'autre pour chacune des valeurs de $B_d T_m$.

$B_d T_m$	variation de la phase du canal
$1/64^2$	$\frac{-\pi}{4\sqrt{2\sqrt{2}}} < \Delta\phi < \frac{\pi}{4\sqrt{2\sqrt{2}}}$
$1/32^2$	$\frac{-\pi}{2\sqrt{2\sqrt{2}}} < \Delta\phi < \frac{\pi}{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$
$1/16^2$	$\frac{-\pi}{\sqrt{2\sqrt{2}}} < \Delta\phi < \frac{\pi}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$
$1/8^2$	$\frac{-2\pi}{\sqrt{2\sqrt{2}}} < \Delta\phi < \frac{2\pi}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Paramètres de l'estimateur

Dans les simulations que nous présentons ici, nous avons fixé le nombre d'itérations de l'algorithme à $D = 5$ pour les canaux à $B_d T_m = 1/64^2$, $1/32^2$ et $1/16^2$. En effet, ce nombre d'itération est suffisant dans ces contextes de propagation pour que l'algorithme converge. Cependant, cette valeur n'est plus suffisante lorsque nous nous plaçons dans le contexte de propagation défini par le canal très sélectif en temps et en fréquence à $B_d T_m = 1/8^2$. Nous avons déterminé que dans ce cas de figure, l'algorithme nécessite $D = 15$ itérations.

De plus, nous avons choisi de réaliser nos simulations dans le cas où les modèles utilisés pour la génération et l'estimation du canal sont identiques. C'est à dire que les bases de vecteurs propres utilisées pour la génération et l'estimation du canal de propagation sont les mêmes.

2.4.3 Résultats de simulation

Nous avons comparé les performances obtenues par notre algorithme à celles fournies par les trois méthodes de comparaison ainsi qu'à un estimateur de canal hypothétique ayant une connaissance parfaite du canal.

La figure II.19 montre cette comparaison dans le cas d'un canal de $B_d T_m = 1/64^2$, c'est à dire un canal pouvant être assimilé à un plan complexe (*cf.* Fig. II.10). Pour $L = 1$ notre méthode présente des performances moins bonnes que la technique CE-MC-2. Mais nous voyons que dès que

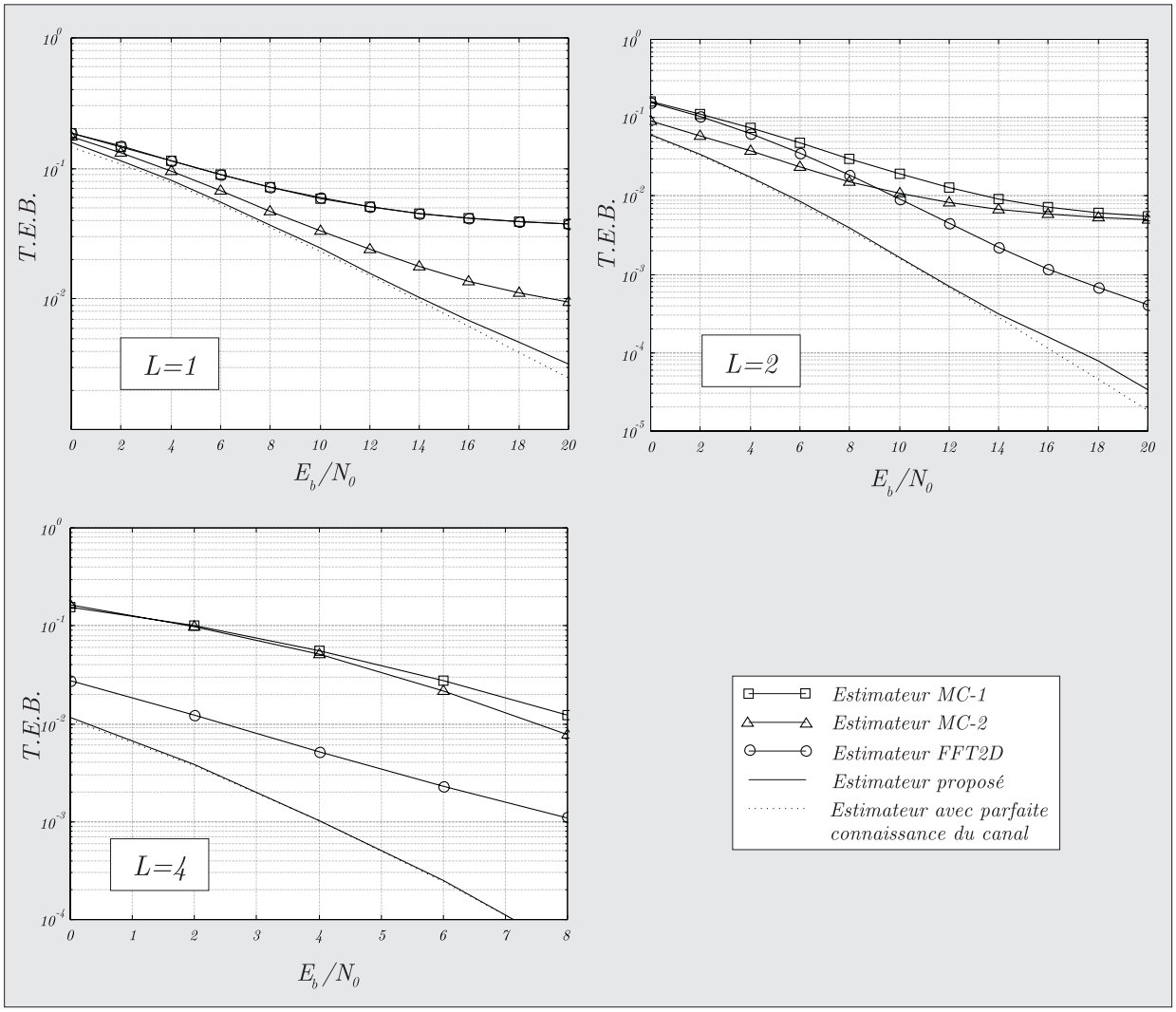


Fig. II.19 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0
pour $B_dT_m = 1/64^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

le nombre de branche de diversité est supérieur, notre méthode montre des performances supérieures et s'approche, pour $L = 4$, des performances de l'estimateur parfait.

les figures II.20 et II.21 représentent les performances de notre méthode utilisée dans les contextes de propagation définis par les canaux de $B_dT_m = 1/32^2$ et $1/16^2$. Au vu de ces figures, nous pouvons apprécier l'importance du paramètre L de diversité. Mais ces figures prouvent également que cette méthode présente un défaut majeur : son initialisation. Celle-ci ne semble pas suffisamment précise pour permettre à l'algorithme EM de converger correctement pour des valeurs de RSB élevées.

Lorsque le canal est très variable en temps et en fréquence, pour $B_dT_m = 1/8^2$, notre méthode

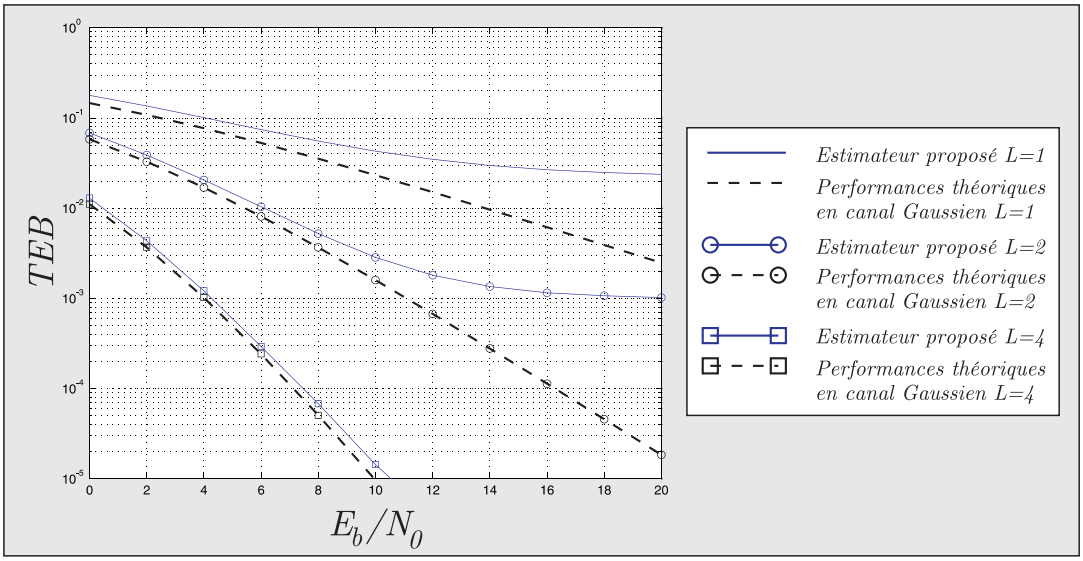


Fig. II.20 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0
pour $B_d T_m = 1/32^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

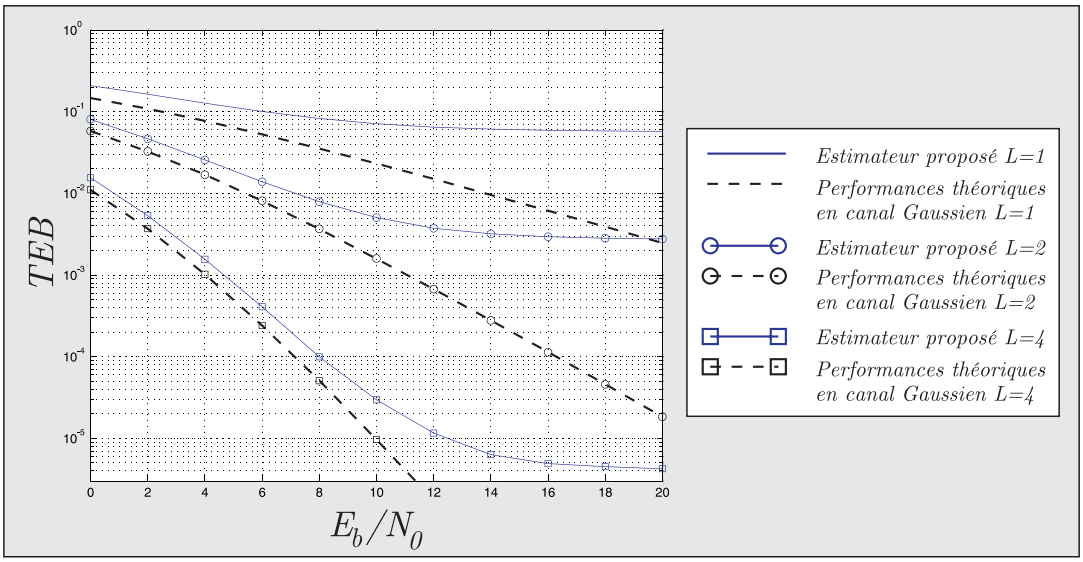


Fig. II.21 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0
pour $B_d T_m = 1/16^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

présente une saturation dans tous les cas de diversité aux alentours de $8 - 10$ dB. Cette saturation, n'apparaissant que pour les fortes valeurs de RSB montre que lorsque le signal devient peu bruité, et que l'initialisation n'est pas optimisée, comme c'est le cas dans les simulations que nous proposons dans cette partie, l'algorithme EM converge vers un maximum local et l'absence de bruit ne lui permet plus de sortir de ce maximum local pour converger vers le maximum global. Cependant,

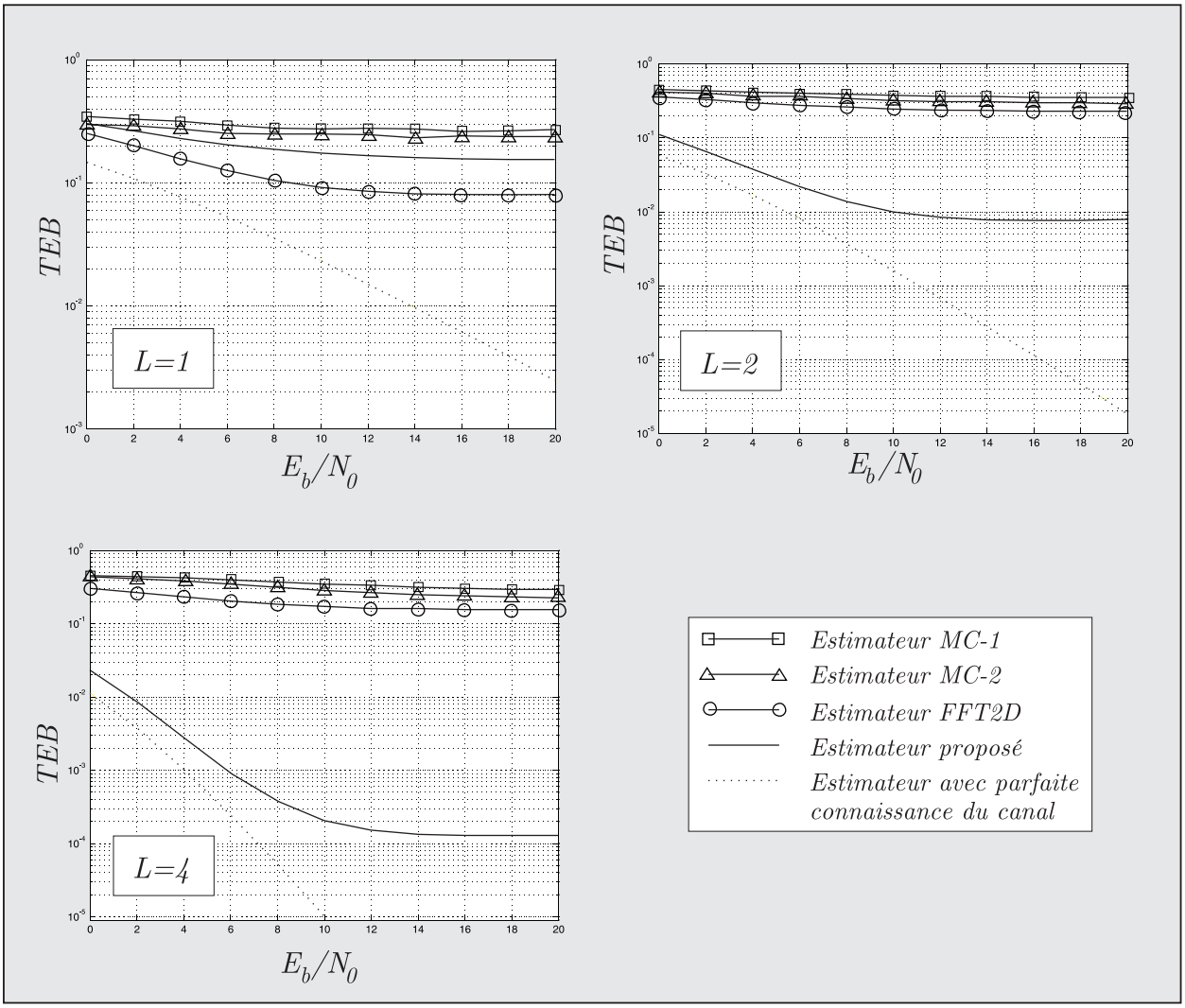


Fig. II.22 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0
pour $B_d T_m = 1/8^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

malgré cette constatation, nous notons que les performances restent largement meilleures que les techniques de comparaison.

Les méthodes basées sur le critère MC donnent nécessairement de mauvais résultats car, par définition, elles recherchent un canal dont le modèle ne correspond pas à sa réalité. La méthode basée sur la TFD-2D, dont le modèle de canal dépend du filtrage dans l'espace de transformation, diverge également. Le canal est trop variable en temps et en fréquence et le filtrage réalisé n'arrive pas à contenir la contribution de la fonction de diffusion centrale. Le filtrage récupère les interventions de plusieurs fonctions de diffusion décalées et ne peut donc représenter correctement le canal. On pourrait imaginer de réaliser un filtrage moins "large" mais on ne représenterait alors qu'une partie

du canal et les performances n'en seraient pas meilleures.

L'analyse des figures II.23, II.24, II.25 et II.26, représentant l'erreur quadratique moyenne que commet l'estimateur sur les blocs temps-fréquence nous permet de constater que l'erreur est plus forte aux bords du bloc qu'au centre. Il est évident qu'un symbole situé au centre du bloc possède beaucoup plus de voisins qu'un symbole à la périphérie. L'interpolation du canal est moins bien réalisée à la périphérie du bloc au moment de l'initialisation. De plus, lors des itérations successives, les sorties souples, correspondant aux symboles de donnée, utilisées pour améliorer l'estimation de canal, sont beaucoup plus nombreuses autour d'un symbole du centre du bloc.

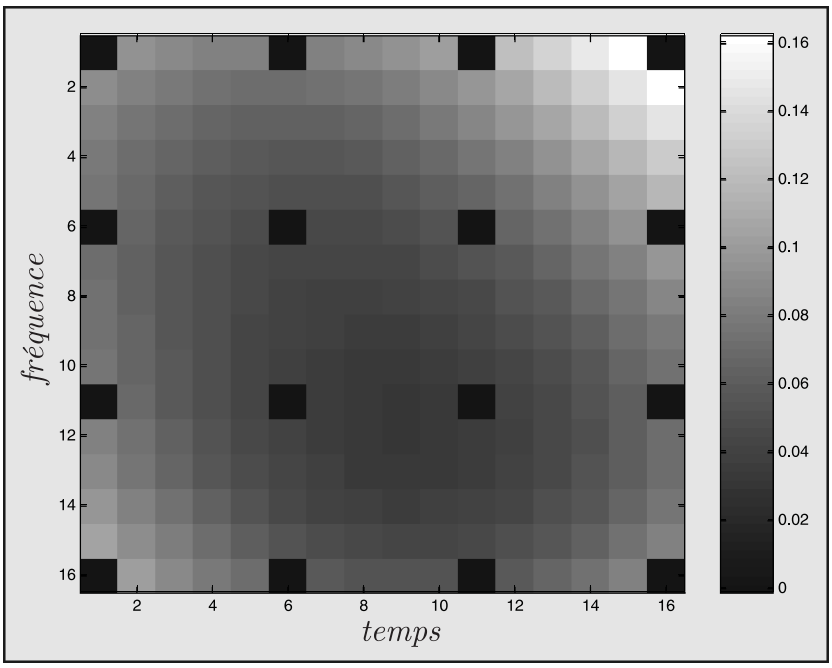


Fig. II.23 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_d T_m = 1/64^2$, à $0dB$ et pour $L = 1$

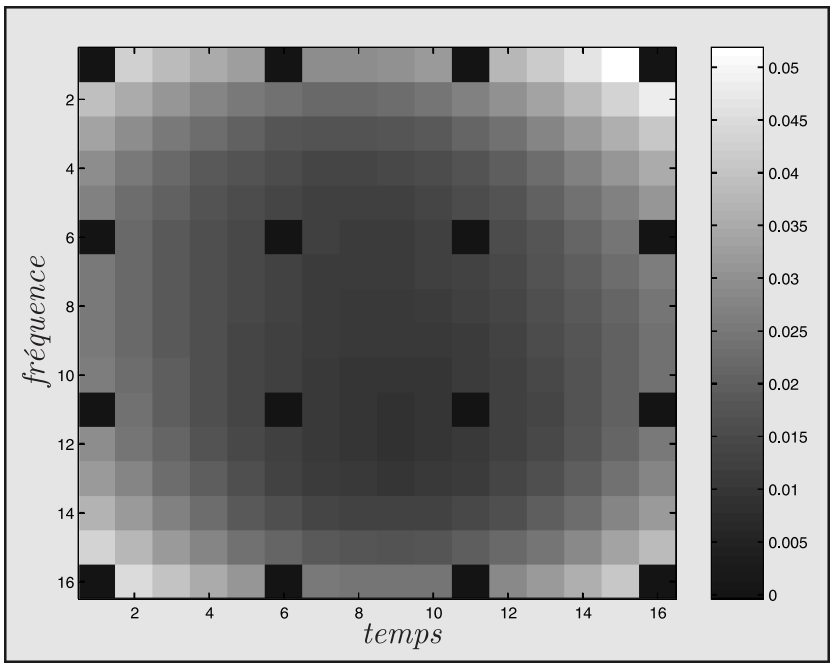


Fig. II.24 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_d T_m = 1/64^2$ à $0dB$ et pour $L = 4$

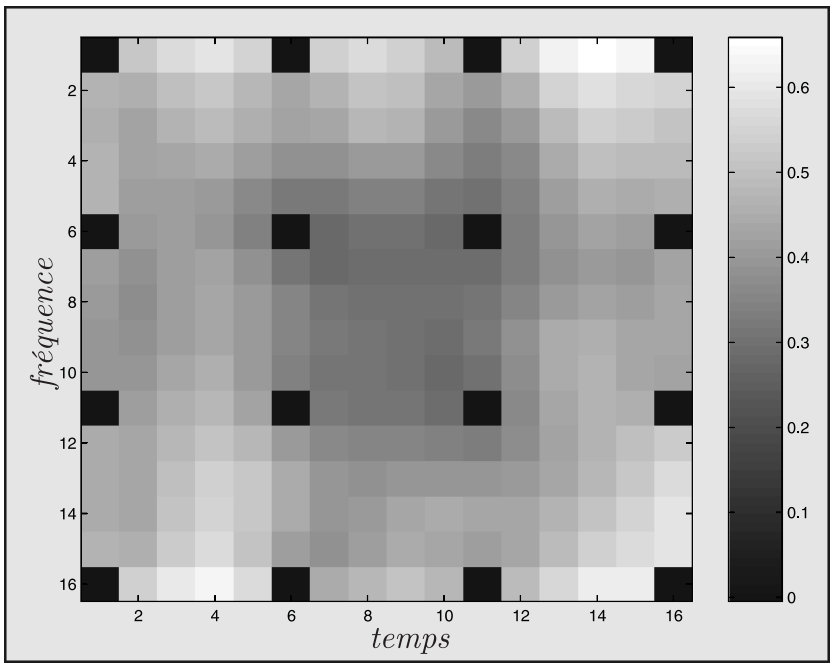


Fig. II.25 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_d T_m = 1/8^2$, à $0dB$ et pour $L = 1$

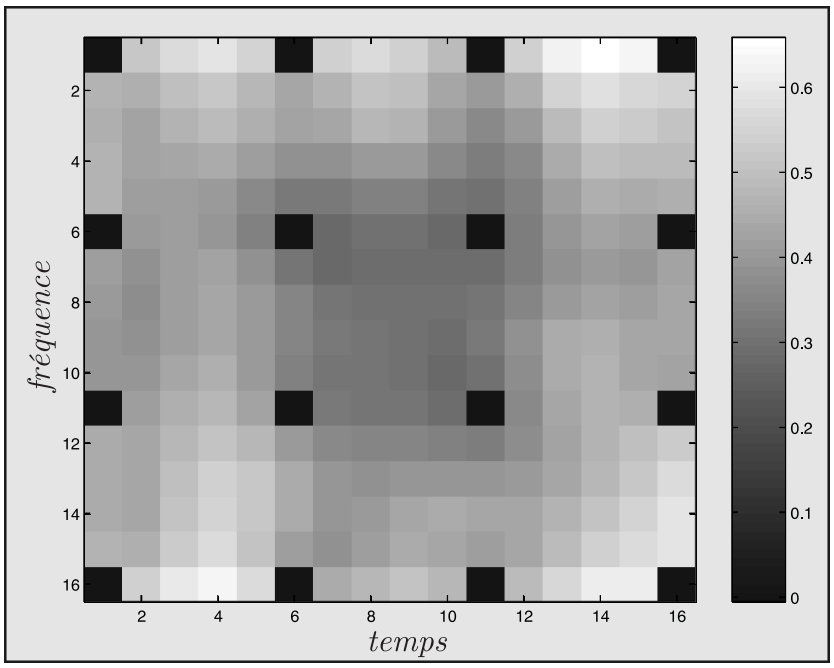


Fig. II.26 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_d T_m = 1/8^2$, à $0dB$ et pour $L = 4$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé une méthode d'estimation de canal présentant une forte sélectivité en temps et en fréquence pour les systèmes de type OFDM, pour des données non codées. Cette méthode présente de très bonnes performances par rapport aux techniques classiques de la littérature.

Cependant, pour lutter plus efficacement contre les sélectivité du canal, il est d'usage d'utiliser un codeur canal. Dans le chapitre suivant, le signal OFDM sera obtenu à partir d'une modulation numérique codée en treillis. Pour pouvoir comparer les nouvelles performances aux résultats obtenus au chapitre précédent, nous utiliserons une modulation MDP-4 codée en treillis de rendement 1/2. La méthode proposée dans le chapitre suivant réalise le décodage conjointement à l'estimation de canal.

Chapitre 3

Estimation semi-aveugle avec prise en compte du codage : Turbo estimation de canal

Introduction

Récemment, il a été montré que la mise en oeuvre d'algorithmes itératifs tels que le turbo-décodage [4], [3] permet une amélioration conséquente de la structure du codage canal. Le principe de décodage des turbo-codes a été étendu à une forme itérative de l'égalisation et décodage conjoint [18], [57]. Cette méthode a été nommé turbo-égalisation et fournit déjà des résultats prometteurs.

Dans ce chapitre, nous étudierons une extension de l'algorithme proposé dans la partie précédente en considérant que l'ensemble de symboles émis dans un bloc est codé. Nous appelons cette technique *turbo estimation de canal.* Le récepteur ainsi obtenu réalisera donc un décodage conjointement à l'estimation de canal itérative. Les codes utilisés pourront être des codes convolutifs, des codes en bloc, des modulations codées en treillis ainsi que des modulations codées en bloc.

3.1 Turbo estimation de canal

3.1.1 Contexte

Le signal reçu sera exprimé de la même façon que dans le chapitre précédent :

$$R^l_{\delta(k)} = C^l_{\delta(k)} A_{\delta(k)} + N^l_{\delta(k)},$$

où $R^l_{\delta(k)}$ est le signal reçu, $C^l_{\delta(k)}$ le canal normalisé equivalent, $A_{\delta(k)}$ le symbole émis et $N^l_{\delta(k)}$ le bruit reçu à la position $\delta(k)$ et sur la branche de diversité l. La différence avec la partie précédente est que les symboles $A_{\delta_D(k)}, k \in [0, N_D - 1]$ sont, dans ce cas, issus soit d'un codage en treillis soit d'un codage convolutif. Les symboles de donnée, indexés dans l'ensemble S_D peuvent être également entrelacés au sein du bloc temps-fréquence.

Nous avons établi dans la partie précédente que l'estimée au sens du MAP du canal s'écrit :

$$G_m^{l(d+1)} = w_m^l \sum_{k=0}^{N-1} R_k^l \left(\sum_{A \in \Omega} AP \left(A \left| \left\{ \mathbf{R}^l \right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{ \mathbf{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1} \right. \right)^* \right) B_{mk}^*.$$

Puisqu'à présent, les données sont codées, il n'est plus possible de déterminer une expression analytique des probabilités *a posteriori* $P\left(A \left| \left\{ \mathbf{R}^l \right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{ \mathbf{G}^{l(d)} \right\}_{l=0}^{L-1} \right.\right)$. Le calcul de ces probabilités peut être réalisé de manière optimale par l'algorithme de Bahl.

3.1.2 Principe de l'algorithme de Bahl

L'algorithme de Bahl est fondé sur le caractère Markovien des séquences codées émises. D'après [1], on peut modéliser un codeur de type convolutif ou en treillis par une source de Markov, dont les états représentent le contenu des registres du codeur et les transitions entre états (ou branches) les symboles en sortie du codeur. Appelons S_k l'état du codeur à l'instant k, la transition entre l'état $k-1$ et l'état k est gouvernée par la probabilité de transition :

$$p_k\left(m \left| m' \right.\right) = P\left(S_k = m \left| S_{k-1} = m' \right.\right) \tag{3.2}$$

et les sorties du codeur sont définies par les probabilités :

$$q\left(A \left| m', m \right.\right) = P\left(A_k = A \left| S_{k-1} = m', S_k = m \right.\right). \tag{3.3}$$

L'algorithme de Bahl permet de calculer les probabilités de transition entre les états m' et m, $\sigma_k(m', m)$

$$\sigma_k\left(m', m\right) = P\left(S_{k-1} = m', S_k = m, R_{1,k}\right)$$

(S_k représentant l'état du codeur à l'instant k et $R_{1,k}$ les échantillons du signal reçu entre les instants 1 et k), ainsi que les probabilités de se trouver dans un état m à un instant k, $\lambda_k(m)$

$$\lambda_k(m) = P\left(S_k = m, R_{1,k}\right).$$

Connaissant le signal reçu, ces calculs se font récursivement dans les sens forward et backward. Il est donc nécessaire que chaque séquence émise par le codeur soit contrainte par des conditions initiales et finales connues. Par convention, le codeur doit commencer et terminer une séquence émise dans l'état 0.

Les probabilités $P\left(A_k = A \left| \left\{R^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$ dont notre algorithme a besoin sont des probabilités conditionnelles. Nous dérivons de [1] une écriture adaptée à notre problème.

3.1.3 Écriture modifiée de l'algorithme de Bahl

Notre estimateur de canal a besoin de la connaissance de la probabilité conditionnelle

$$P\left(A_k = A \left| \left\{R^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right). \tag{3.4}$$

Cette probabilité peut être obtenue à partir d'une version modifiée de $\sigma_k\left(m', m\right)$. On définit :

$$\sigma_k\left(m', m\right) = P\left(S_{k-1} = m', S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.5}$$

ou encore :

$$\sigma_k\left(m', m\right) = P\left(S_{k-1} = m', S_k = m \left| \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \tag{3.6}$$

$$\times P\left(\left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.7}$$

$P\left(\left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ étant constant sur un bloc donné. L'utilisation de l'algorithme de Bahl ne nécessite pas le calcul de cette constante, puisque nous savons que la somme des probabilités $\sigma_k\left(m', m\right)$ sur toutes les transitions possibles d'une section du treillis est égale à 1. Il suffit donc de normaliser $\sigma_k\left(m', m\right)$.

Soit Φ_A l'ensemble des transitions (m', m) étiquetées par le symbole A. On peut alors écrire :

$$P\left(A_k = A \left| \left\{R^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) = \sum_{(m',m)\in\Phi_A} \sigma_k\left(m', m\right) \tag{3.8}$$

Le calcul des $\lambda_k\left(m\right)$ et des $\sigma_k\left(m', m\right)$ est réalisé en définissant les probabilités suivantes [1] :

$$\alpha_k\left(m\right) = P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.9}$$

$$\beta_k(m) = P\left(\left\{R^l_{\delta_D(k+1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k = m, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.10}$$

$$\gamma_k(m', m) = P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_{k-1} = m', \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.11}$$

Nous redéfinissions la probabilité $\lambda_k(m)$ par :

$$\lambda_k(m) = P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k)}\right\} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$$

$$\lambda_k(m) = P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.12}$$

$$\times P\left(\left\{R^l_{\delta_D(k+1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k = m, \left\{R^l_{1,k}\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$$

$$= \alpha_k(m).P\left(\left\{R^l_{\delta_D(k+1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k = m, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.13}$$

et donc,

$$\boxed{\lambda_k(m) = \alpha_k(m).\beta_k(m).} \tag{3.14}$$

Nous re-écrivons la probabilité $\sigma_k(m', m)$ en fonction des probabilités conditionnelles $\alpha_k(m)$, $\beta_k(m)$ et $\gamma_k(m', m)$:

$$\sigma_k(m', m) = P\left(S_{k-1} = m', \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k-1)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.15}$$

$$\times P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_{k-1} = m', \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$$

$$\times P\left(\left\{R^l_{\delta_D(k+1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k = m, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.16}$$

c'est à dire

$$\boxed{\sigma_k(m', m) = \alpha_{k-1}(m')\,\gamma_k(m', m)\,\beta_k(m).} \tag{3.17}$$

De plus, on peut définir des relations de récurrence pour les $\alpha_k(m)$, les $\beta_k(m)$, et les $\gamma_k(m)$, M représentant le nombre d'états du treillis :

$$\alpha_k(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} P\left(S_{k-1} = m', S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$$

$$= \sum_{m'=0}^{M-1} P\left(S_{k-1} = m', \left\{R^l_{\delta_D(1),\delta_D(k-1)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.18}$$

$$\times P\left(S_k = m, \left\{R^l_{\delta_D(k)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_{k-1} = m', \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{3.19}$$

qui donne

$$\boxed{\alpha_k(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} \alpha_{k-1}(m').\gamma_k(m',m)} \tag{3.20}$$

$$\begin{aligned}\beta_k(m) &= \sum_{m'=0}^{M-1} P\left(S_{k+1}=m', \left\{R^l_{\delta_D(k+1),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k=m, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \\ &= \sum_{m'=0}^{M-1} P\left(S_{k+1}=m', \left\{R^l_{\delta_D(k+1)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_k=m, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \qquad (3.21) \\ &\times P\left(\left\{R^l_{\delta_D(k+2),\delta_D(N_D)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| S_{k+1}=m', \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \qquad (3.22)\end{aligned}$$

et pour finir :

$$\boxed{\beta_k(m) = \sum_{m'=0}^{M-1} \beta_{k+1}(m')\,\gamma_{k+1}(m,m')} \tag{3.23}$$

Enfin, les probabilités $\gamma_k(m',m)$ s'écrivent

$$\begin{aligned}\gamma_k(m',m) &= \sum_{A\in\Omega} P\left(S_k=m|\, S_{k-1}=m'\right).P\left(A_k=A|\, S_{k-1}=m', S_k=m\right) \qquad (3.24) \\ &\times P\left(\left\{R^l_k\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| A, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \qquad (3.25)\end{aligned}$$

c'est à dire

$$\boxed{\gamma_k(m',m) = \sum_{A\in\Omega} p_k(m\,|m')\,q_k(A|\,m',m)\,P\left(\left\{R^l_k\right\}_{l=0}^{L-1}, A_k=A, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)} \tag{3.26}$$

Les éléments $P\left(\left\{R^l_k\right\}_{l=0}^{L-1}, A, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ sont calculées directement à partir du signal reçu $\left\{R^l_k\right\}_{l=0}^{L-1}$ et des paramètres $\left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}$, à savoir

$$\boxed{P\left(\left\{R^l_k\right\}_{l=0}^{L-1}, A, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) = \exp\left(-\tfrac{2}{N_0}\sum_{l=0}^{L-1} R^l_k\left(A\sum_{n=0}^{N-1} G^{(d)}_n B_{nk}\right)^*\right).} \tag{3.27}$$

3.1.4 Turbo-Estimation de canal

Le principe de l'estimation dans ce cas est strictement le même que dans le chapitre précédent, à la différence près que les probabilités conditionnelles $P\left(A_k=A\left|\left\{R^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{G^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$ sont obtenues par la mise en oeuvre de l'algorithme de Bahl et que les données sont entrelacées.

Dans un premier temps, l'estimateur réalise une première estimation du canal uniquement à partir des symboles pilotes. Cette première estimation de canal est désentrelacée pour correspondre à l'ordre de la séquence binaire émise, il en est de même pour le signal reçu. L'algorithme de Bahl calcule les probabilités conditionnelles, qui permettent de réaliser une nouvelle estimation du canal. Cette estimation est ensuite réutilisée comme initialisation de la partie itérative (fig. III.1).

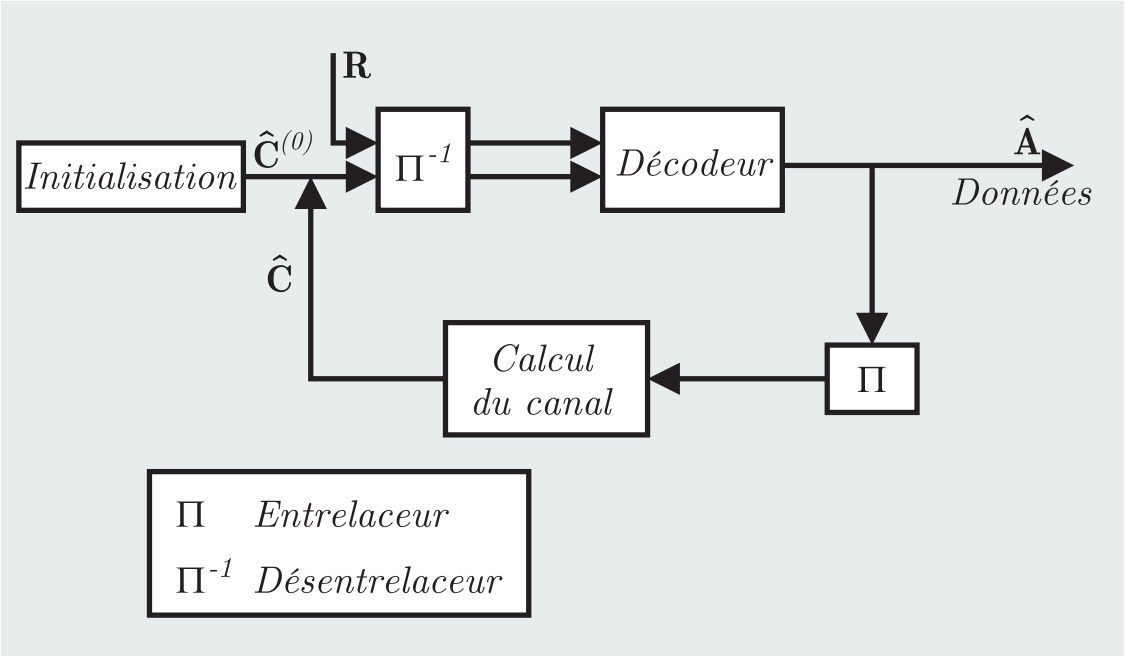


Fig. III.1 : Schéma-bloc du turbo-estimateur

3.2 Résultats

Les simulations présentées ici sont, comme dans le chapitre précédent, basées sur un système OFDM à 16 porteuses. Chaque bloc temps-fréquence est composé de 16 symboles OFDM dans leur intégralité. Les données sont ici obtenues par une modulation codée en treillis fournissant des symboles MDP-4 (Fig. III.2). Il est bien évident que ces simulations n'ont pas de caractère réaliste en ce qui concerne l'utilisation d'une telle modulation codée en treillis, mais il s'agit ici d'exposer dans un cas simple les avantages de cette version turbo de l'algorithme d'estimation de canal proposé.

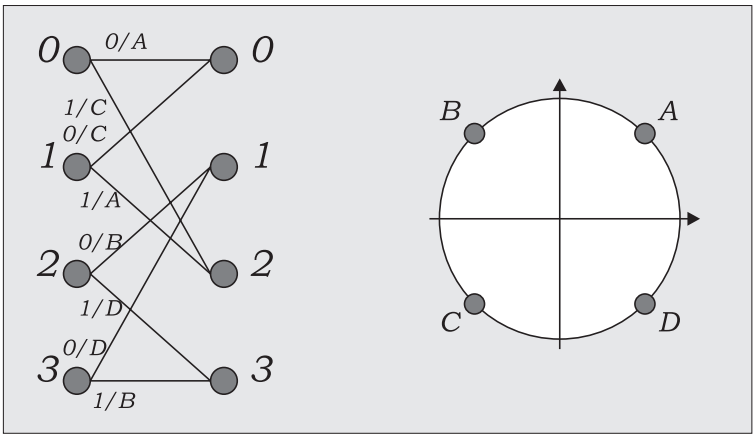


Fig. III.2 : Modulation MDP-4 codé en treillis

Nous définissons un entrelaceur temps-fréquence basé sur le principe du "bit reversing". Ce type d'entrelaceur ne fonctionne que pour des blocs dont les dimensions sont des puissance de 2, c'est le cas des blocs que nous utilisons dans nos simulations. Etant donné que les systèmes OFDM actuels utilisent généralement des transformées de Fourier discrètes de taille égale à une puissance de 2, ce type d'entrelaceur peut facilement être utilisé dans des systèmes réels, même sur des blocs correspondant à des sous-ensemble de porteuses du système OFDM global.

Considérons un bloc de taille $n_p \times n_s$ (n_p porteuses et n_s symboles OFDM) n_p et n_s étant des puissances de 2. L'entrelacement se déroule en plusieurs phases. La première phase consiste en un "remplissage" du bloc temps-fréquence par ses diagonales. Les n_p éléments correspondant à un symbole OFDM sont placés dans le bloc, non plus par colonne, comme nous le faisions dans la partie précédente, mais suivant les diagonales du bloc temps-fréquence (Fig. III.3).

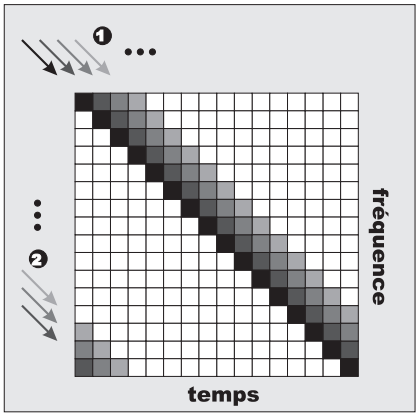


Fig. III.3 : Première phase de l'entrelacement : remplissage du bloc

La deuxième phase consiste en un entrelacement utilisant l'inversion binaire des indices "abscisses" de chaque élément du bloc, et enfin la troisième phase réalise l'entrelacement sur les indices "ordonnées" des éléments du bloc. Pour le symbole transmis à la position (m, n) du bloc temps fréquence sans entrelacement, sa position après entrelacement sera déterminée à partir des écritures binaires de n et m. Prenons un exemple pour illustrer ce mécanisme.

Exemple 1 *Considérons le bloc temps-fréquence de dimension* 16×16 *utilisé dans nos simulations. Soit le symbole correspondant à la position* $(4, 5)$ *, ces coordonnées s'écrivent* $(0100, 0101)$ *en binaire. L'entrelaceur inverse simplement cette écriture binaire pour venir placer le symbole à la position* $(0010, 1010)$ *, c'est à dire* $(2, 10)$ *. La figure suivante montre l'éloignement temps-fréquence apporté par cet entrelaceur à 4 symboles adjacents.*

Les simulations ont été réalisées dans les mêmes contextes de propagation que dans la partie

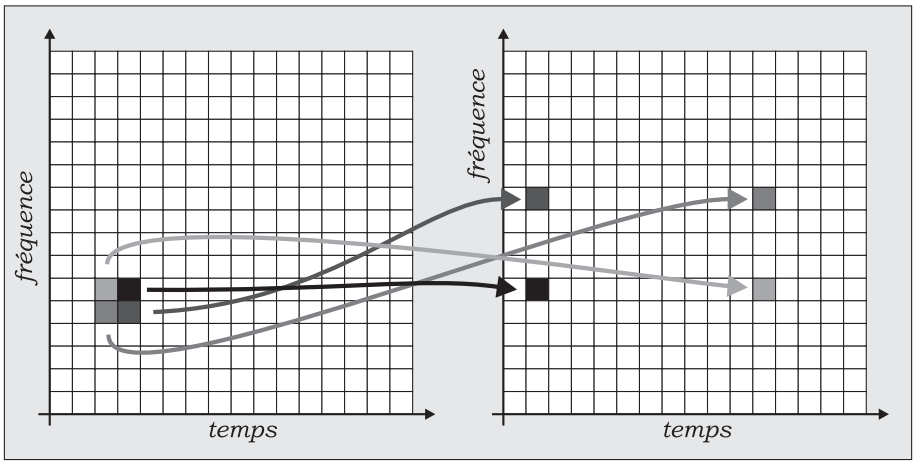


Fig. III.4 : Exemple de fonctionnement de l'entrelaceur

précédente. Nous comparerons les résultats obtenus avec la version turbo de l'estimateur avec ceux obtenus par la version non codée. Nous présentons les performances de l'algorithme de turbo-estimation de canal obtenues pour les canaux à $B_dT_m = 1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$ en comparaison avec les performances de l'estimateur hypothétique ayant une parfaite connaissance du canal.

Les figure III.5 à III.8 présentent les performances du turbo-estimateur pour chaque contexte de propagation. Nous voyons que pour les trois premières figures, l'écart relatif entre les performances du turbo-estimateur et celles de l'estimateur PCC n'augmente que très faiblement. De plus, plus le canal est sélectif en fréquence, plus il fournit théoriquement une diversité en temps et en fréquence importante. Il en découle que plus le canal est mauvais plus les performances de notre turbo-estimateur s'améliorent à un taux d'erreur donné, par exemple, pour un rapport signal à bruit de 10 dB, nous obtenons les taux d'erreur binaires suivant :

B_dT_m	E_b/N_0	TEB
$1/64^2$	10	$2,7.10^{-4}$
$1/32^2$	10	$4,7.10^{-5}$
$1/16^2$	10	1.10^{-5}

La figure III.9 donne une comparaison des performances du turbo-estimateur avec celles des algorithmes de référence pour une diversité d'ordre $L = 1$ et pour $B_dT_m = 1/64^2$. Bien que ce canal soit presque "plat", les performances du turbo estimateur restent largement meilleures.

Un autre intérêt du turbo estimateur est sa rapidité de convergence. La figure III.10 nous montre les performances obtenues pour le canal de $B_dT_m = 1/32^2$ pour les cinq premières itérations (la

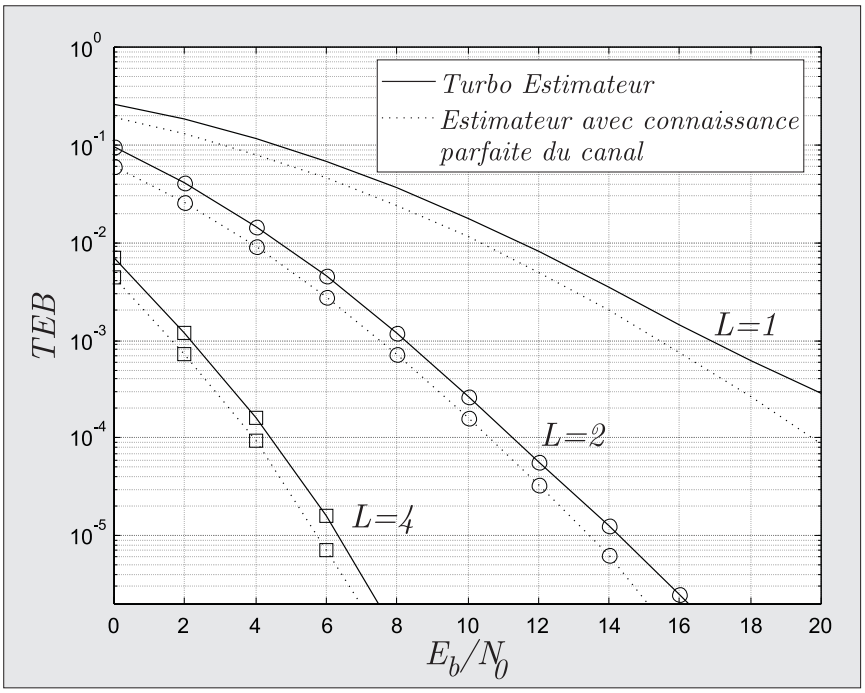


Fig. III.5 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/64^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

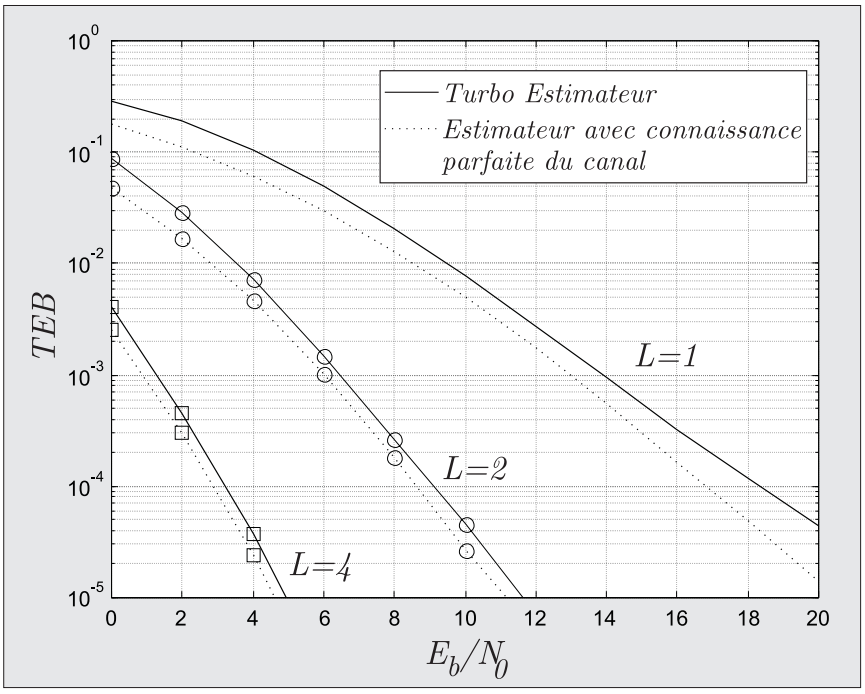


Fig. III.6 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/32^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

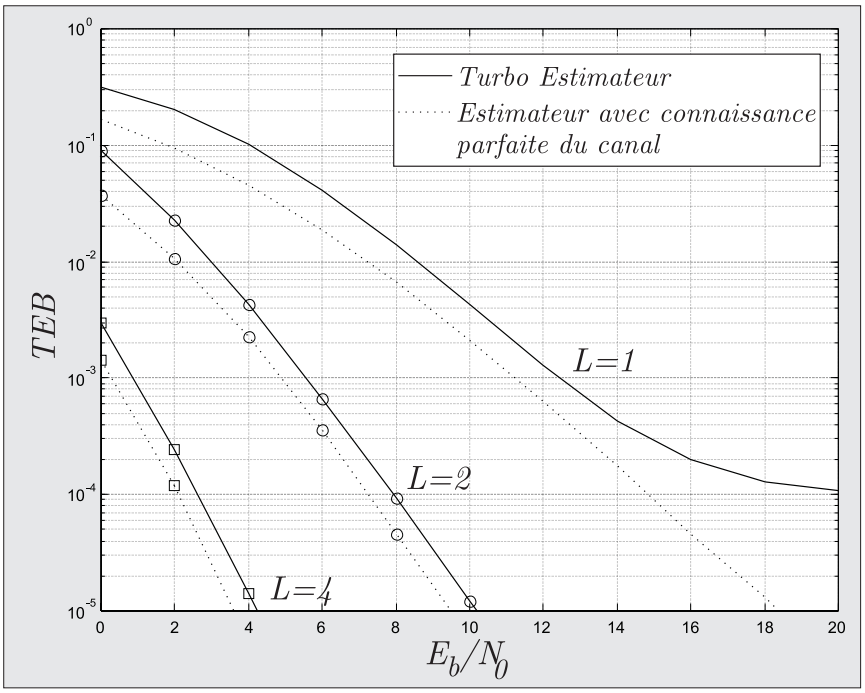


Fig. III.7 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/16^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

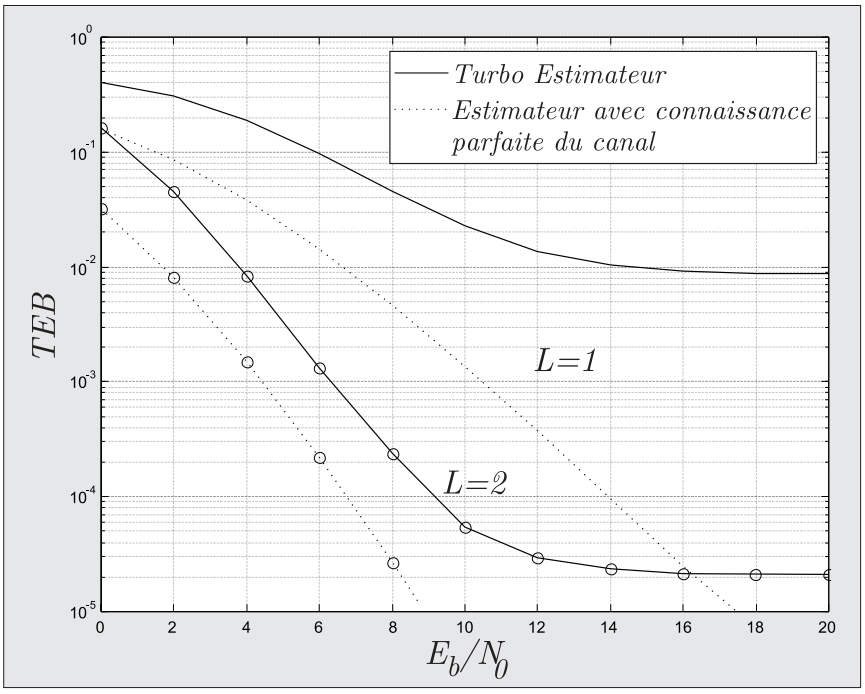


Fig. III.8 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_d T_m = 1/8^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4

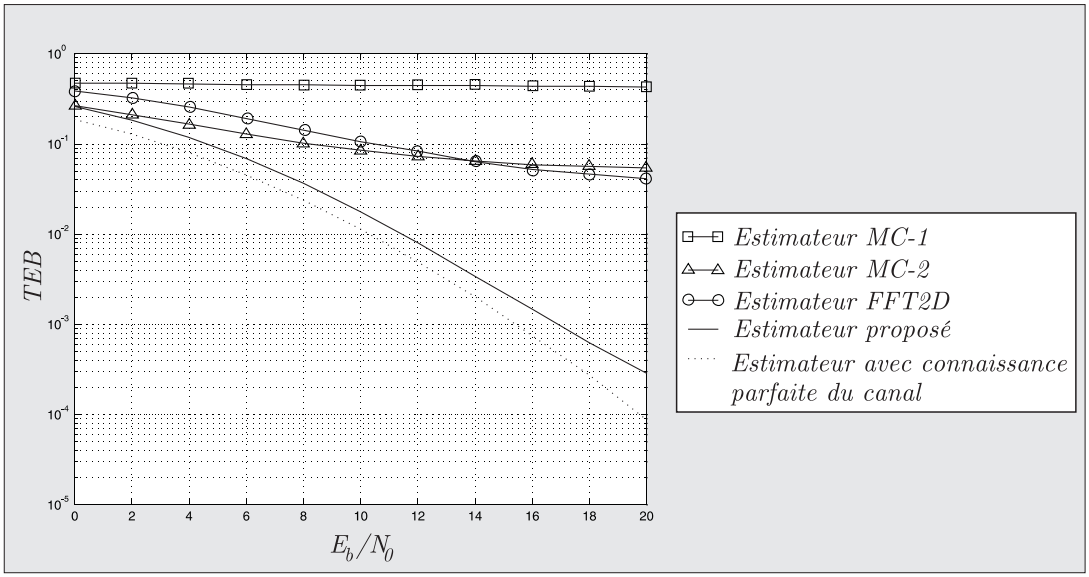


Fig. III.9 : Comparaison des performances du turbo-estimateur et des algorithmes de référence pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1$

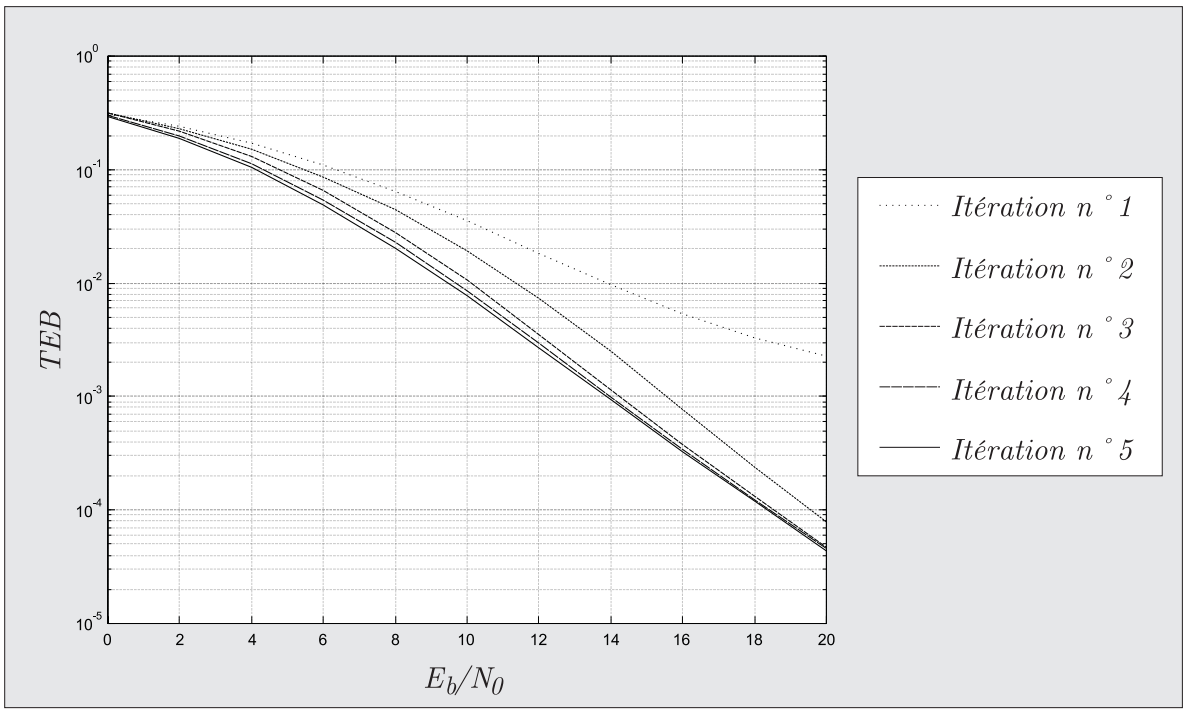


Fig. III.10 : Convergence du turbo-estimateur

première correspondant à l'initialisation). Nous voyons que le turbo-estimateur a pratiquement convergé après 3 itérations.

Le turbo estimateur est également robuste à l'erreur que le récepteur peut faire sur le modèle

de propagation choisi. Nous avons considéré que le récepteur avait choisi le modèle de propagation avec $(B_dT_m)_{hypothèse} = 1/32^2$ et que le canal réel de propagation défini par $(B_dT_m)_{réel}$ variait de telle façon que :

$$-8dB \leq \frac{(B_dT_m)_{hypothèse}}{(B_dT_m)_{réel}} \leq 10dB$$

La figure III.11 présente les performances obtenues à 15 dB. Nous voyons que les performances varient assez faiblement pour des valeurs de $\frac{(B_dT_m)_{hypothèse}}{(B_dT_m)_{réel}}$ comprises entre -2 dB et 5 dB.

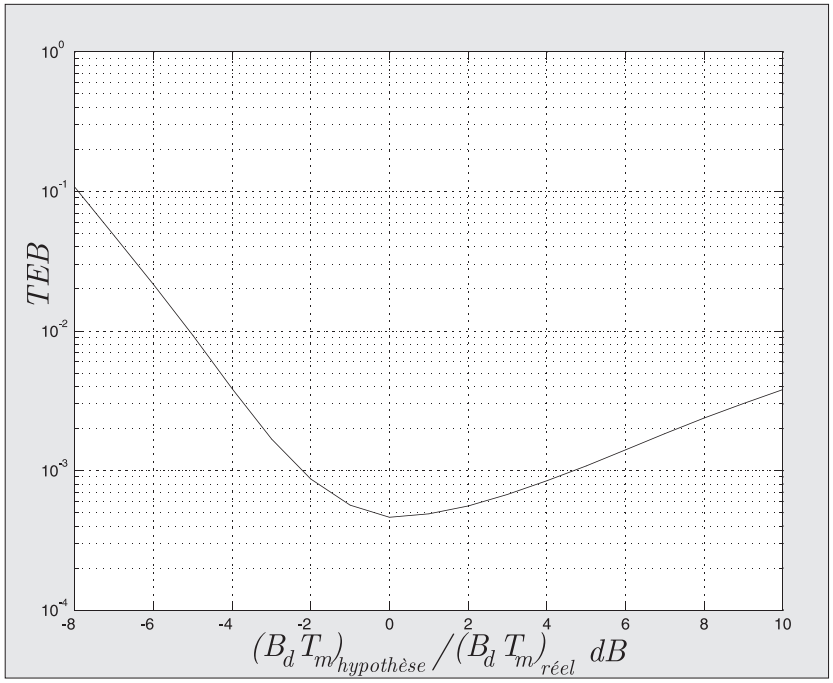


Fig. III.11 : Robustesse à l'erreur sur le B_dT_m du turbo-estimateur

La figure III.12 nous montre de plus que les erreurs sont équiréparties au sein de la séquence binaire codée, ce qui n'est évidemment pas le cas lorsque les données ne sont pas codées, où l'erreur quadratique moyenne commise sur l'estimation du canal à une position du bloc temps-fréquence est directement transmise au symbole démodulé.

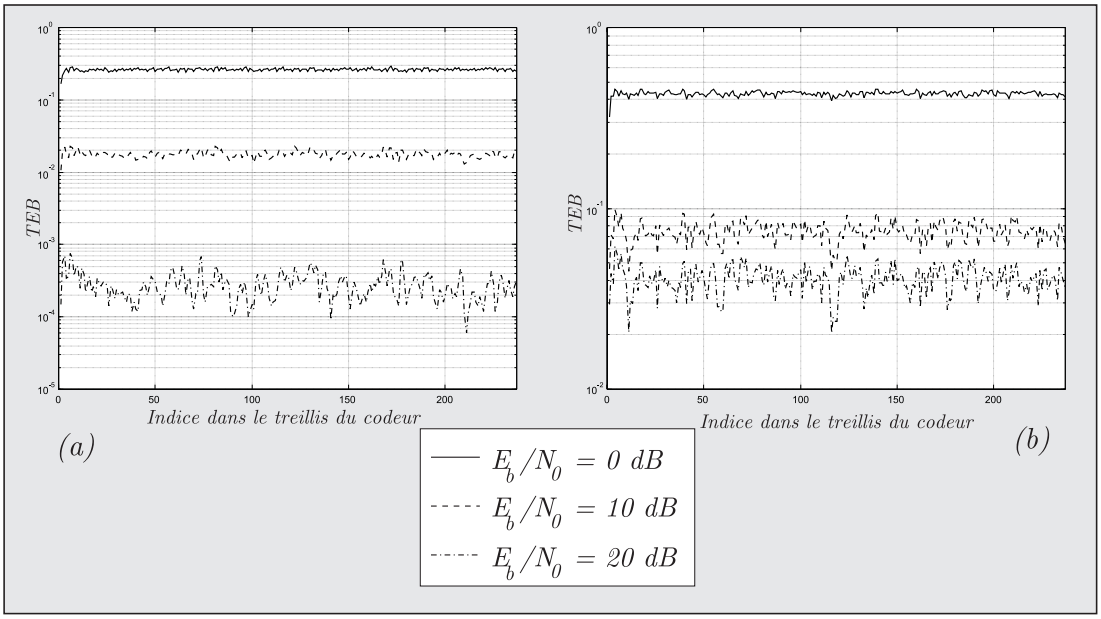


Fig. III.12 : Taux d'erreur binaire par position dans la séquence binaire émise

3.3 Conclusion

Réaliser une estimation de canal avec décodage conjoint mène à l'obtention de performances encore meilleures que dans le chapitre précédent et permet avant tout d'améliorer la robustesse de l'estimateur par rapport à une erreur sur le modèle de canal. De plus, l'utilisation d'un entrelacement permet de répartir l'erreur quadratique sur le canal à l'ensemble des symboles du bloc plutôt que sur les symboles situés à la périphérie du bloc.

Cependant, comme toutes les techniques basées sur l'algorithme EM, la partie initialisation est fondamentale pour la convergence et les performances obtenues.

La technique proposée dans les deux chapitres précédents est basée sur la matrice de corrélation du canal obtenu à partir de toutes les positions du bloc temps fréquence traité. Les vecteurs propres définis par la décomposition de Karhunen-Loève ont pour propriété d'être orthogonaux entre eux. Mais, la restriction de la base des vecteurs propres aux positions des symboles pilotes ne forme en aucun cas une base orthogonale. La projection réalisée à l'initialisation jusqu'alors n'est donc pas une projection orthogonale et ne constitue pas un traitement optimal de l'information apportée par les symboles pilotes.

Le chapitre suivant propose de résoudre ce problème en définissant une nouvelle de base de vecteurs propres uniquement consacrée à l'estimation de canal au sens du Maximum *a Posteriori* à partir de symboles connus.

Chapitre 4

Estimation de canal au sens du Maximum a Posteriori à partir de symboles connus

Introduction

Nous avons vu, que comme toute technique basée sur l'algorithme E.M., la technique d'estimation de canal proposée dans les deux chapitres précédents est relativement sensible à l'initialisation. En effet, dans les cas où le canal reste moyennement sélectif, l'initialisation reste suffisamment "bonne" pour que l'algorithme E.M. ne tombe pas dans des maximum locaux de la fonction auxiliaire. Cependant, dès que la sélectivité devient plus forte, il est nécessaire de fournir à la partie itérative de l'algorithme une meilleure initialisation.

Remarquons que la base de vecteurs propres telle qu'elle est définie dans le deuxième chapitre ne permet pas de réaliser une initialisation optimale, dans le sens où la restriction de cette base aux positions des symboles pilotes ne forme pas une base orthogonale.

Il s'agit donc de construire une nouvelle base de vecteurs construite à partir des corrélations du canal aux positions des symboles pilotes, étendue à l'ensemble des positions d'un bloc temps-fréquence grâce à la théorie de l'innovation.

Ce chapitre présente donc un algorithme d'estimation de canal sélectif en temps et en fréquence par bloc basé sur la prédiction linéaire et ne prenant en compte que les échantillons reçus correspondants aux symboles pilotes. On montrera que cette méthode est optimale au sens du critère du Maximum

a Posteriori et qu'elle permet de plus l'optimisation théorique de la position des symboles pilotes en utilisant le critère du taux d'erreur binaire.

4.1 Estimation de canal basée sur l'innovation : Prédiction Linéaire

Pour simplifier les notations, nous introduisons en plus de la fonction d'indexation bidimensionelle δ, les fonctions d'indexation $\delta_P(k) = (m(k), n(k))$, agissant entre l'ensemble monodimensionnel $\{k\}_{k=0}^{k=N_P-1}$ et l'ensemble bidimensionnel S_P et $\delta_D(k) = (m(k), n(k))$ entre l'ensemble monodimensionnel $\{k\}_{k=0}^{k=N_D-1}$ et l'ensemble bidimensionnel S_D.

De plus, sans perte de généralité, on suppose que les valeurs prises par les symboles pilotes normalisés $\left\{A_{\delta_P(k)}\right\}_{k=0}^{N_P-1}$ sont toutes égales à l'unité en module. Soit $F_{\delta(k)}$ l'innovation d'un facteur de gain équivalent du canal $C_{\delta_P(k)}$ conditionellement à la connaissance de la restriction $\mathbf{R}_P = \left(R_{\delta_P(0)}, R_{\delta_P(1)}, \ldots, R_{\delta_P(N_P-1)}\right)^t$ du vecteur signal reçu $\mathbf{R}$ aux échantillons correspondants aux symboles pilotes. Puisque le canal est à évanouissements de Rayleigh et que le bruit est Gaussien, l'innovation $F_{\delta(k)}$ comme le vecteur $\mathbf{R}_P$ sont Gaussiens. L'innovation $F_{\delta(k)}$ est de ce fait indépendante du vecteur reçu $\mathbf{R}_P$.

Proposition 3 *L'innovation $F_{\delta(k)}$ et le facteur de gain du canal $C_{\delta(k)}$ sont reliés par l'expression linéaire suivante :*

$$\boxed{C_{\delta(k)} = F_{\delta(k)} + \sum_{\nu=0}^{N_P-1} W^*_{\delta_P(k)\nu} R_{\delta(\nu)} = F_{\delta(k)} + \mathbf{W}^{*t}_{\delta_P(k)} \mathbf{R}_P, \quad \delta(k) \in S} \tag{4.2}$$

où le vecteur $\mathbf{W}_{\delta_P(k)} = \left(W_{\delta_P(k),0}, W_{\delta_P(k),1}, \ldots, W_{\delta_P(k),N_P-1}\right)^t$ est donné par la relation matricielle suivante :

$$W^{*t}_{\delta(k)} \left(\mathbf{H} + N_0 \mathbf{I}\right) = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \tag{4.3}$$

où $\mathbf{H} = E\left[\mathbf{C}_P \mathbf{C}^{*t}_P\right]$ est la matrice de covariance hermitienne $N_P \times N_P$ du canal équivalent, restreinte aux positions des symboles pilotes, dont le $(\mu,\nu)^{ème}$ élément est donné par :

$$H_{\mu\nu} = \sqrt{E_{\delta(\mu)} E_{\delta(\nu)}}\, \phi\left(p_{\delta(\mu)} - p_{\delta(\nu)}\right) \tag{4.4}$$

et $\mathbf{I}$ est la matrice identité $N_P \times N_P$ et,

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_{\delta(k)} = \Big(& \sqrt{E_{\delta(0)} E_{\delta(k)}}\, \phi\left(p_{\delta(0)} - p_{\delta(k)}\right), \sqrt{E_{\delta(1)} E_{\delta(k)}}\, \phi\left(p_{\delta(1)} - p_{\delta(k)}\right), \\ & \ldots, \sqrt{E_{\delta(0)} E_{\delta(k)}}\, \phi\left(p_{\delta(N_P-1)} - p_{\delta(k)}\right) \Big)^t \end{aligned} \tag{4.5}$$

La variance Θ *de l'innovation* F *est donnée par :*

$$\Theta_{\delta(k)} = \phi(0) E_{\delta(k)} - \mathbf{V}_{\delta(k)}^{*t} \mathbf{W}_{\delta(k)} \tag{4.6}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe E. ■

Proposition 4 *Soit* $\hat{\mathbf{C}} = \left(\hat{C}_0, \hat{C}_1, \ldots, \hat{C}_{N-1}\right)^t$ *l'estimée au sens du Maximum a Posteriori du vecteur canal équivalent* $\mathbf{C}$*, conditionellement au vecteur reçu* $\mathbf{R}_P$*. Ce vecteur est égal au vecteur de prédiction linéaire au sens du critère de l'Erreur Quadratique Moyenne Minimum* $\mathbf{L} = \left(L_{\delta(0)}, L_{\delta(1)}, \ldots, L_{\delta(N-1)}\right)^t$ *de* $\delta(k)^{ème}$ *composante :*

$$\boxed{L_{\delta(k)} = \sum_{\nu=0}^{N_P-1} W_{\delta(k)\nu}^* R_{\delta(k)} = \mathbf{W}_{\delta(k)}^{*t} \mathbf{R}_P} \tag{4.7}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe F. ■

4.2 Estimation de canal exploitant la base orthonormale étendue

Une nouvelle base de vecteur a été définie aux positions des symboles pilotes. Pour réaliser l'interpolation de l'estimation du canal au niveau des pilotes à l'ensemble des symboles d'un bloc temps-fréquence, il est nécessaire d'étendre la base de vecteur obtenue précédemment à l'ensemble du bloc.

L'estimée au sens du MAP $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{L}$ du vecteur canal équivalent $\mathbf{C}$ est une combinaison linéaire des composantes du vecteur reçu $\mathbf{R}_P$ qui dépend non seulement des caractéristiques statistiques du canal à évanouissements équivalent, mais aussi de la variance N_0 du bruit blanc Gaussien additif. Afin de se débarrasser de cette dépendance du bruit blanc Gaussien dans le calcul de $\hat{\mathbf{C}}$, nous introduisons alors une nouvelle formulation de l'algorithme d'estimation de canal. Cette reformulation utilise une base orthonormale étendue, $\{\mathbf{B}_l\}_{l=0}^{N_P-1}$, provenant exclusivement des propriétés statistiques du canal à évanouissement équivalent. Cette base orthonormale étendue est obtenue par extension de la décomposition orthogonale de Karhunen-Loève de la restriction $\mathbf{C}_P = \left(C_{\delta_P(0)}, C_{\delta_P(1)}, \ldots, C_{\delta_P(N_P-1)}\right)^t$ du vecteur canal équivalent aux symboles pilotes.

Soit $\tilde{\mathbf{L}} = \left(\tilde{L}_{\delta(0)}, \tilde{L}_{\delta(1)}, , \tilde{L}_{\delta(N-1)}\right)^t$ la prédiction linéaire au sens de l'erreur quadratique moyenne minimum du vecteur $\mathbf{C}$, conditionellement à sa restriction $\mathbf{C}_P$. La $\delta(k)^{ème}$ composante de $\tilde{\mathbf{L}}$ est donnée par

$$\tilde{L}_{\delta(k)} = \sum_{\nu=0}^{N_P-1} \tilde{W}_{\delta(k),\nu}^* C_{\delta(\nu)} = \tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t} \mathbf{C}_P, \tag{4.8}$$

où

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}\mathbf{H} = \mathbf{V}_{\delta(k)}^{*t}. \tag{4.9}$$

D'évidence, $\tilde{L}_{\delta(\nu)} = C_{\delta(\nu)}$, $\nu = 0, 1, \ldots, N_P - 1$ et par conséquent $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(\nu)}$ est le vecteur possédant un "1" à la $\nu^{ème}$ position et des "0" partout ailleurs.

De plus, soit $\{\mathbf{B}_{Pl}\}_{l=0}^{N_P-1}$ la base orthonormale utilisée dans la décomposition de Karhunen-Loève de chacun des vecteurs $\mathbf{C}_P$ et $\mathbf{R}_P$. Les vecteurs $\{\mathbf{B}_{Pl}\}_{l=0}^{N_P-1}$ sont les vecteurs propres de la matrice de covariance hermitienne $\mathbf{H}$ de valeurs propres $\{\Gamma_l\}_{l=0}^{N_P-1}$ que l'on suppose classées dans leur ordre décroissant. Ces vecteurs propres sont déterminés à une phase arbitraire près, par

$$\mathbf{H}\mathbf{B}_{Pl} = \Gamma_l \mathbf{B}_{Pl}. \tag{4.10}$$

Définition 1 *La $k^{ème}$ composante du $l^{ème}$ vecteur*

$$\mathbf{B}_l = \left(B_{l,\delta(0)}, B_{l,\delta(1)}, \ldots, B_{l,\delta(N-1)}\right)^t \tag{4.11}$$

de la base orthonormale étendue $\{\mathbf{B}_l\}_{l=0}^{N_P-1}$ est définie par

$$B_{l\delta(k)} = \tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}\mathbf{B}_l. \tag{4.12}$$

Etant données les propriétés des vecteurs $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(\nu)}$, nous concluons que le vecteur de la base orthonormale $\mathbf{B}_{Pl}$ est la restriction du vecteur de la base orthonormale étendue $\mathbf{B}_l$ aux symboles pilotes. Plus précisément, nous avons

$$B_{Pl} = \left(B_{l,\delta_P(0)}, B_{l,\delta_P(1)}, \ldots, B_{l,\delta_P(N_P-1)}\right)^t. \tag{4.13}$$

Soit $\mathbf{G} = (G_0, G_1, \ldots, G_{N_P-1})^t$ la décomposition de Karhunen-Loève du vecteur $\mathbf{R}_P$ sur la base orthonormale $\{\mathbf{B}_{Pl}\}_{l=0}^{N_P-1}$. Nous avons

$$\mathbf{R}_P = \sum_{l=0}^{N_P-1} G_l \mathbf{B}_{Pl} \tag{4.14}$$

où

$$G_l = \mathbf{B}_{Pl}^{*t}\mathbf{R}_P. \tag{4.15}$$

Proposition 5 *L'estimée au sens du MAP, $\hat{\mathbf{C}}$, du vecteur canal équivalent $\mathbf{C}$, conditionellement au vecteur reçu $\mathbf{R}_P$ est donnée sous forme matricielle par*

$$\boxed{\hat{\mathbf{C}} = \sum_{l=0}^{N_P-1} w_l G_l \mathbf{B}_l} \tag{4.16}$$

où $G_l = \mathbf{B}_{Pl}^{*t}\mathbf{R}_P$, $l = 0, 1, \ldots, N_P - 1$ *représente la décomposition de la restriction* $\mathbf{R}_P$ *du vecteur reçu* $\mathbf{R}$ *aux échantillons correspondant aux symboles pilotes, et les facteurs de pondération* w_l, $l = 0, 1, \ldots, N - 1$ *sont donnés par*

$$\boxed{w_l = \frac{1}{1+ N_0/\Gamma_l}.} \tag{4.17}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est données dans l'annexe H. ■

Cette reformulation de l'estimation de canal au sens du MAP nous permet de voir que la dépendance de $\mathbf{C}$ de la variance du bruit blanc Gaussien additif est transférée aux coefficients de pondération $\{w_l\}_{l=0}^{N_P-1}$ qui peuvent être mis à jour facilement.

4.3 Construction simplifiée de la base orthonormale étendue

Le calcul précédent de l'extension de la base de vecteurs nécessite le calcul des $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}, \delta(k) \in S_D,$. Il est possible de s'affranchir du calcul de ces vecteurs comme le montre le paragraphe suivant.

Une façon de construire la base orthonormale étendue $\{\mathbf{B}_m\}_{m=0}^{N_P-1}$ et de déterminer la base orthonormale $\{\mathbf{B}_{Pm}\}_{m=0}^{N_P-1}$ grâce au système

$$\mathbf{H}\mathbf{B}_{Pm} = \Gamma_m \mathbf{B}_{Pm}, \quad m = 0, 1, \ldots, N_P - 1, \tag{4.18}$$

puis d'étendre chacun des vecteurs de la base $\{\mathbf{B}_{Pm}\}_{m=0}^{N_P-1}$ par les relations

$$B_{m\delta(k)} = \tilde{\mathbf{W}}_{\delta_D(k)}^{*t}\mathbf{B}_{Pm}, \quad \delta_D(k) \in S_D. \tag{4.19}$$

Cette construction requiert, pour chaque $\delta_D(k) \in S_D$, le calcul du vecteur $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}$ en utilisant la relation

$$\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}\mathbf{H} = \mathbf{V}_{\delta(k)}^{*t}. \tag{4.20}$$

Une autre façon de construire la base orthonormale étendue, sans avoir recours au calcul des vecteurs $\tilde{\mathbf{W}}_{\delta(k)}^{*t}, \delta(k) \in S_D$, est d'utiliser la proposition suivante.

Proposition 6 *Chaque vecteur* $\mathbf{B}_m$ *de la base orthonormale étendue* $\{\mathbf{B}_m\}_{m=0}^{N_P-1}$ *est complètement défini par les relations*

$$B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m}\mathbf{V}_{\delta(k)}^{*t}\mathbf{B}_{Pm}, \quad k = 0, 1, \ldots, N - 1, \tag{4.21}$$

ou, de la même façon par

$$B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m} \sum_{\nu=0}^{N_P-1} \sqrt{E_{\delta(k)} E_{\delta(\nu)}} \phi \left(p_{\delta(k)} - p_{\delta(\nu)} \right) B_{m\delta(\nu)}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{4.22}$$

Les relations correspondant à $\delta(k) \in S_P$ sont équivalentes à la relation matricielle

$$\boxed{\mathbf{H}\mathbf{B}_{Pl} = \Gamma_l \mathbf{B}_{Pl}.} \tag{4.23}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe I. ■

4.4 Optimisation de la position des symboles pilotes

Comme nous l'avons souligné en tête de ce chapitre, il est possible et intéressant de pouvoir définir de manière optimale la position des symboles pilotes. Cette position optimale des symboles pilotes, nous l'obtenons grâce au calcul du taux d'erreur binaire que nous exprimerons pour des modulations de type MDP-2 et MDP-4.

4.4.1 Modulation MDP-2

Considérons un système MDP-2, d'alphabet $\Omega_{\delta(k)} = \left\{ -\sqrt{E_{\delta(k)}}, +\sqrt{E_{\delta(k)}} \right\}$, $\delta(k) \in S_D$ et un récepteur présentant L branches de diversité. Considérons l'échantillon reçu

$$R^l_{\delta(k)} = C^l_{\delta(k)} A_{\delta(k)} + N^l_{\delta(k)} \tag{4.24}$$

associé au $\delta(k)^{ème}$ symbole de données transmis $A_{\delta(k)} \in \{-1, +1\}, \delta(k) \in S_D$ et à la $l^{ème}$ branche de diversité du récepteur. Le récepteur calcule sa décision en utilisant la sortie souple

$$\Lambda_{\delta(k)} = \frac{1}{N_0} \mathrm{Re} \left\{ \sum_{l=0}^{L-1} R^l_{\delta(k)} \hat{C}^{l*}_{\delta(k)} \right\}, \tag{4.25}$$

où l'estimée au sens du Maximum *a Posteriori* $\hat{C}^l_{\delta(k)}$ est reliée à $C^l_{\delta(k)}$ par

$$\hat{C}^l_{\delta(k)} = C^l_{\delta(k)} - F^l_{\delta(k)}, \tag{4.26}$$

et l'innovation $F^l_{\delta(k)}$ est indépendante de $\hat{C}^l_{\delta(k)}$, de variance $\Theta_{\delta(k)} = \phi(0) E_{\delta(k)} - \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{W}_{\delta(k)}$. La variance de $\hat{C}^l_{\delta(k)}$ notée $\Phi_{\delta(k)}$ est alors donnée par :

$$\Phi_{\delta(k)} = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{W}_{\delta(k)}. \tag{4.27}$$

Une erreur se produit au récepteur à chaque fois que le produit $A_{\delta(k)}\Lambda_{\delta(k)}$ est négatif. Ce produit est donné par :

$$\begin{aligned} A_{\delta_D(k)}\Lambda_{\delta_D(k)} &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{l=0}^{L-1}\left(\left(\hat{C}^l_{\delta_D(k)}+F^l_{\delta_D(k)}\right)+A_{\delta_D(k)}N^l_{\delta_D(k)}\right)\hat{C}^{l*}_{\delta_D(k)}\right\} \\ &= \mathrm{Re}\left\{\sum_{l=0}^{L-1}\left(\left|\hat{C}^l_{\delta_D(k)}\right|^2+M^l_{\delta_D(k)}\hat{C}^{l*}_{\delta_D(k)}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{4.28}$$

où

$$M^l_{\delta(k)} = F^l_{\delta(k)} + A_{\delta(k)}N^l_{\delta(k)} \tag{4.29}$$

est indépendant de $\hat{C}^l_{\delta(k)}$, de variance notée $\Pi_{\delta(k)}$ donnée par

$$\Pi_{\delta(k)} = \Theta_{\delta(k)} + N_0 \tag{4.30}$$

Proposition 7 *La probabilité d'erreur brute sur les bits correspondant au symbole de donnée $a_{\delta_D(k)}, \delta_D(k) \in S_D$, est donné par*

$$\boxed{P_{e\delta_D(k)} = \frac{1}{2^L}\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\mu_{yy}/\mu_{xx}}}\right)^L \sum_{l=0}^{L-1}\binom{2L-1}{l}\left(\sqrt{1+\mu_{xx}/\mu_{yy}}-\sqrt{\mu_{xx}/\mu_{yy}}\right)^l,} \tag{4.31}$$

où

$$\boxed{\frac{\mu_{yy}}{\mu_{xx}} = \frac{\phi(0)E_{\delta_D(k)}+N_0}{\mathbf{V}^{*t}_{\delta_D(k)}\mathbf{W}_{\delta_D(k)}} - 1} \tag{4.32}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe G. ■

4.4.2 Modulation MDP-4

A présent, nous évaluons le taux d'erreur théorique sur les bits pour un système doté d'une modulation MDP-4 avec $\Omega_{\delta(k)} = \left\{\sqrt{E_{\delta_D(k)}/2}\,(\pm 1 \pm j)\right\}$, $\delta_D(k) \in S_D$ avec $j = \sqrt{-1}$. Considérons l'échantillon reçu

$$R^l_{\delta_D(k)} = C^l_{\delta_D(k)}A_{\delta_D(k)} + N^l_{\delta_D(k)} \tag{4.33}$$

associé au symbole de donnée normalisé $A_{\delta_D(k)} = A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} + jA^{\mathcal{J}}_{\delta_D(k)} \in \left\{(\pm 1 \pm j)/\sqrt{2}\right\}, \delta_D(k) \in S_D$. Le récepteur prend sa décision à partir des sorties souples

$$\Lambda^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} = \frac{1}{N_0}\,\mathrm{Re}\left\{\sum_{l=0}^{L-1} R^l_{\delta_D(k)}C^{l*}_{\delta_D(k)}\right\}, \tag{4.34}$$

et

$$\Lambda^{\mathcal{I}}_{\delta_D(k)} = \frac{1}{N_0} \operatorname{Im}\left\{ \sum_{l=0}^{L-1} R^l_{\delta_D(k)} C^{l*}_{\delta_D(k)} \right\}, \tag{4.35}$$

où l'estimée au sens du MAP $\hat{C}^l_{\delta_D(k)}$ est reliée à $C^l_{\delta_D(k)}$ par

$$\hat{C}^l_{\delta_D(k)} = C^l_{\delta_D(k)} - F^l_{\delta_D(k)} \tag{4.36}$$

et l'innovation $F^l_{\delta_D(k)}$ est indépendante de $\hat{C}^l_{\delta_D(k)}$, de variance $\Theta_{\delta_D(k)} = \phi(0) E_{\delta_D(k)} - \mathbf{V}^{*t}_{\delta_D(k)} \mathbf{W}_{\delta_D(k)}$. La variance de $\hat{C}^l_{\delta_D(k)}$, notée $\Phi_{\delta_D(k)}$ est donc donnée par

$$\Phi_{\delta_D(k)} = \mathbf{V}^{*t}_{\delta_D(k)} \mathbf{W}_{\delta_D(k)}. \tag{4.37}$$

Les parties réelles et imaginaires $A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)}$ et $A^{\mathcal{I}}_{\delta_D(k)}$ du symbole MDP-4 normalisé $A_{\delta_D(k)}$ jouent des rôles symétriques. De ce fait, nous évaluons le taux d'erreur binaire associé à la partie réelle $A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} \in \left\{-1/\sqrt{2}, +1/\sqrt{2}\right\}$. Une erreur binaire sur la partie réelle se produit au récepteur chaque fois que le produit $2A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} \Lambda^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)}$ est négatif. Ce produit est donné par

$$\begin{aligned} 2A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} \Lambda^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} &= \operatorname{Re}\left\{ \sum_{l=0}^{L-1} \left(\left(\hat{C}^l_{\delta_D(k)} + F^l_{\delta_D(k)} \right) \left(1 + 2jA^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} A^{\mathcal{I}}_{\delta_D(k)} \right) + 2A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} N^l_{\delta_D(k)} \right) \hat{C}^{l*}_{\delta_D(k)} \right\} \\ &= \operatorname{Re}\left\{ \sum_{l=0}^{L-1} \left(\left| \hat{C}^l_{\delta_D(k)} \right|^2 + M^l_{\delta_D(k)} \hat{C}^{l*}_{\delta_D(k)} \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4.38}$$

où

$$M^l_{\delta_D(k)} = F^l_{\delta_D(k)} \left(1 + 2jA^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} A^{\mathcal{I}}_{\delta_D(k)} \right) + 2A^{\mathcal{R}}_{\delta_D(k)} N^l_{\delta_D(k)} \tag{4.39}$$

est indépendant de $\hat{C}_{\delta_D(k)}$, de variance notée $\Pi_{\delta_D(k)}$ donnée par :

$$\Pi_{\delta_D(k)} = 2\left(\Theta_{\delta_D(k)} + N_0 \right) \tag{4.40}$$

Proposition 8 *La probabilité d'erreur brute sur le symbole $a_{\delta(k)}, \delta(k) \in S_D$ est donnée par*

$$\boxed{P_{e\delta_D(k)} = \frac{1}{2^L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu_{yy}/\mu_{xx}}} \right)^L \sum_{l=0}^{L-1} \binom{2L-1}{l} \left(\sqrt{1 + \mu_{xx}/\mu_{yy}} - \sqrt{\mu_{xx}/\mu_{yy}} \right)^l,} \tag{4.41}$$

où

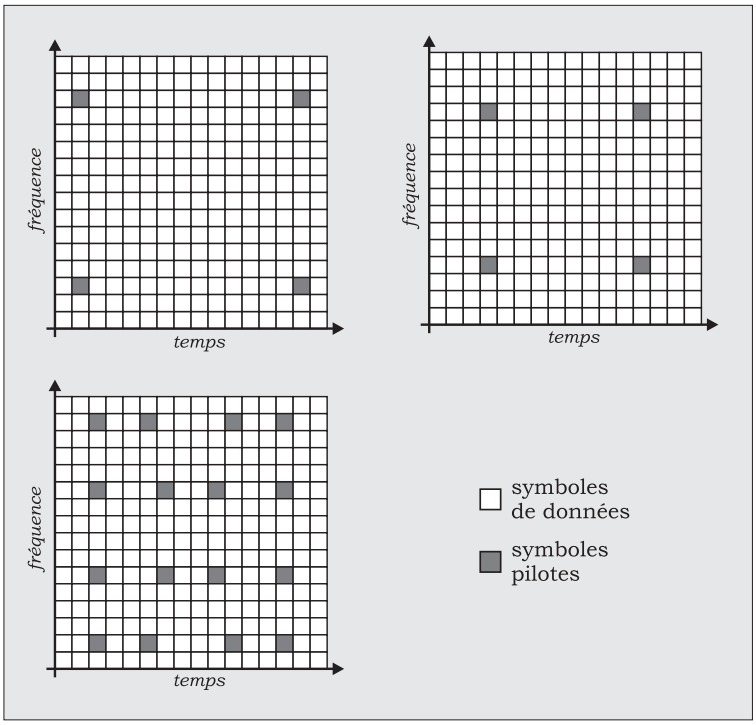
$$\boxed{\frac{\mu_{yy}}{\mu_{xx}} = 2\left(\frac{\phi(0) E_{\delta_D(k)} + N_0}{\mathbf{V}^{*t}_{\delta_D(k)} \mathbf{W}_{\delta_D(k)}} - 1 \right)} \tag{4.42}$$

Démonstration. La démonstration de cette proposition est donnée dans l'annexe G. ■

Nous avons alors l'expression analytique de la probabilité d'erreur brute sur les symboles du bloc en fonction de la position des symboles pilotes dans le bloc temps-fréquence. Pour obtenir la répartition des symboles pilotes réalisant la probabilité d'erreur la plus faible, il suffit de calculer par simulation l'ensemble des probabilités d'erreur correspondant à toutes les positions possibles des symboles pilotes dans un bloc.

4.5 Résultats de simulation

Nous présentons ici les simulation de l'algorithme d'estimation de canal basé uniquement sur les pilotes pour les canaux à $B_dT_m = 1/64^2$, $1/32^2$ et $1/8^2$. Nous avons voulu comparer les performances de ce nouvel algorithme aux performances de l'initialisation de l'algorithme précédent. Pour cela, nous avons choisi de simuler les performances de cette nouvel estimateur avec la répartition des pilotes habituelle (Fig. II.18) ainsi que pour des répartition de pilotes optimisées pour un $E_b/N_0 =$ 15 dB avec 4 pilotes pour les canaux à $B_dT_m = 1/64^2$ et $1/32^2$ et 16 pilotes pour le canal à $B_dT_m = 1/8^2$. Les positions optimisées sont indiquées dans la figure IV.1. Ces performances sont également comparées à celles de l'estimateur hypothétique avec parfaite connaissance du canal ainsi qu'aux algorithmes de référence habituels.



IV.1 : Positions optimisées de 4 pilotes pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $B_dT_m = 1/32^2$ et de 16 pilotes pour $B_dT_m = 1/8^2$ avec $RSB = 15dB$

Les figures IV.2 à IV.4 montrent que le nouvel estimateur fourni dans tous les cas considérés de meilleures performances que l'estimateur non-amélioré qui est l'initialisation de la méthode présentée dans les parties II et III. De plus, lorsque l'on utilise des pilotes dont les positions sont optimisée, les performances s'améliorent encore, même dans les cas présentés par les figures IV.2 et IV.3 où les pilotes optimisés sont au nombre de 4.

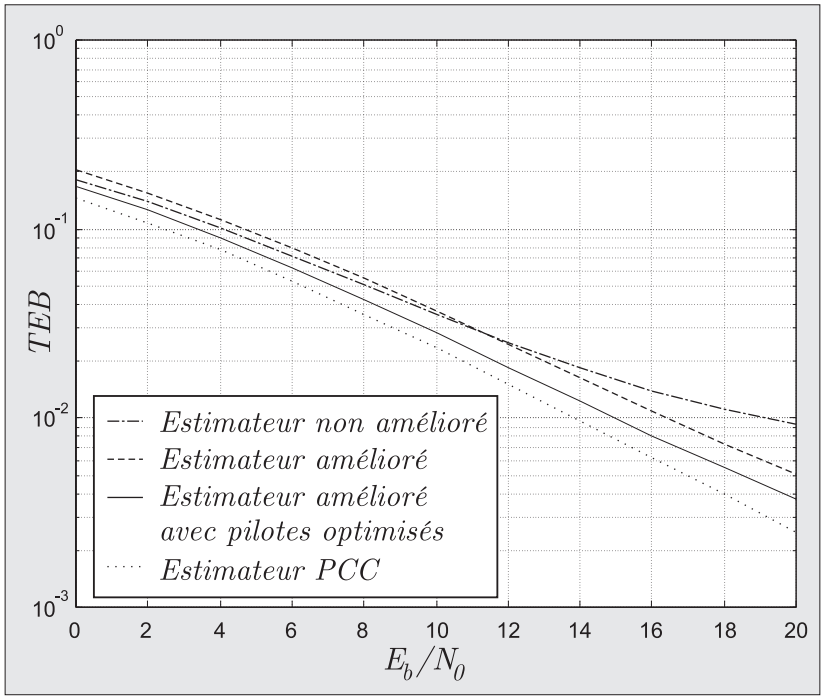


Fig. IV.2 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_d T_m = 1/64^2$

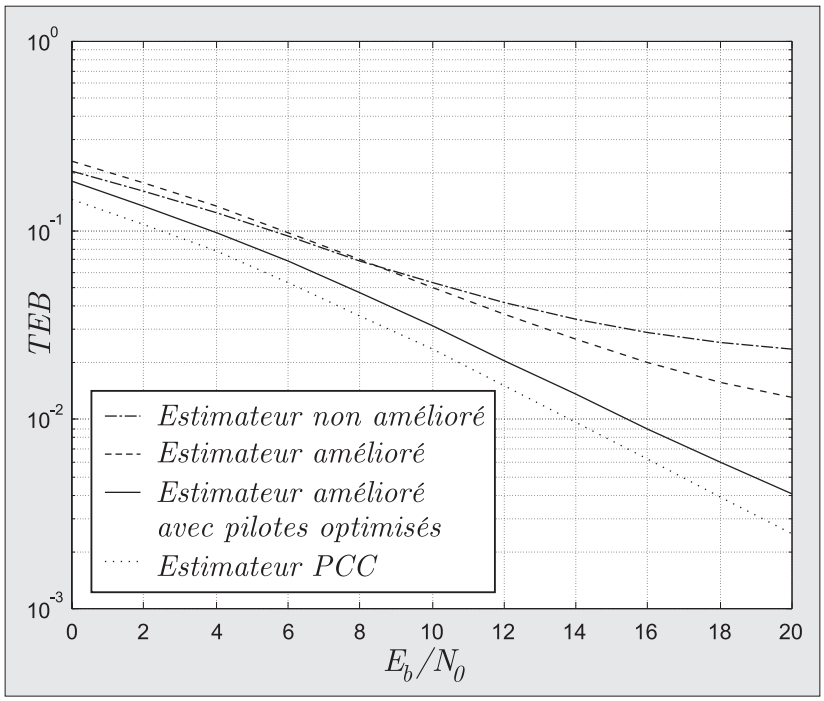


Fig. IV.3 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_d T_m = 1/32^2$

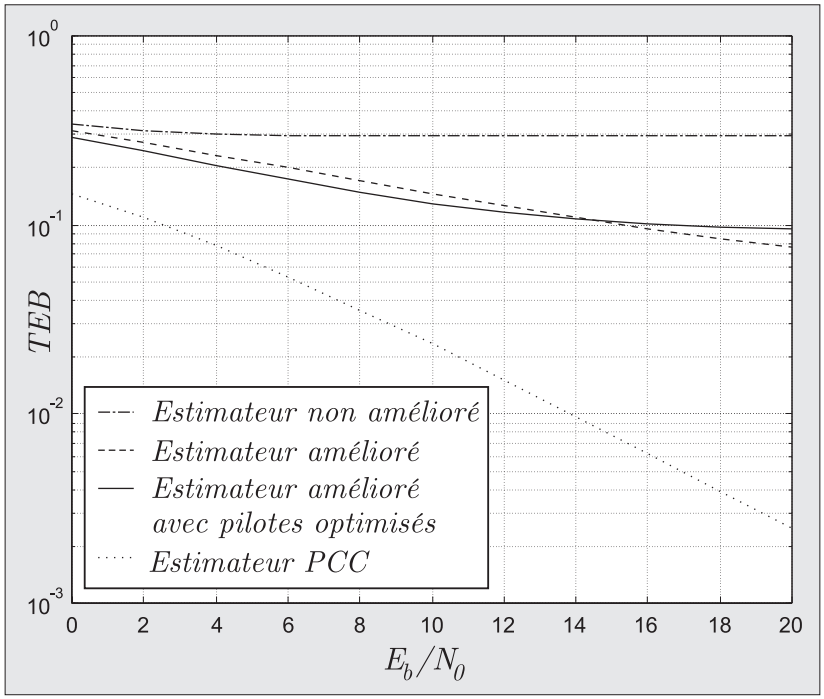


Fig. IV.4 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_d T_m = 1/8^2$

Nous comparons ensuite les performances de ce nouvel estimateur aux algorithmes de référence (Fig. IV.5 et IV.6) et nous voyons que cet estimateur présente toujours de meilleures performances que les algorithmes de référence et fourni un gain substantiel. Par exemple, dans le cas le plus favorable aux méthodes de référence, avec $B_d T_m = 1/64^2$ (Fig. IV.5) nous voyons que pour un taux d'erreur binaire de 10^{-2}, notre estimateur présente un gain de 4dB par rapport à la meilleure des méthodes de référence.

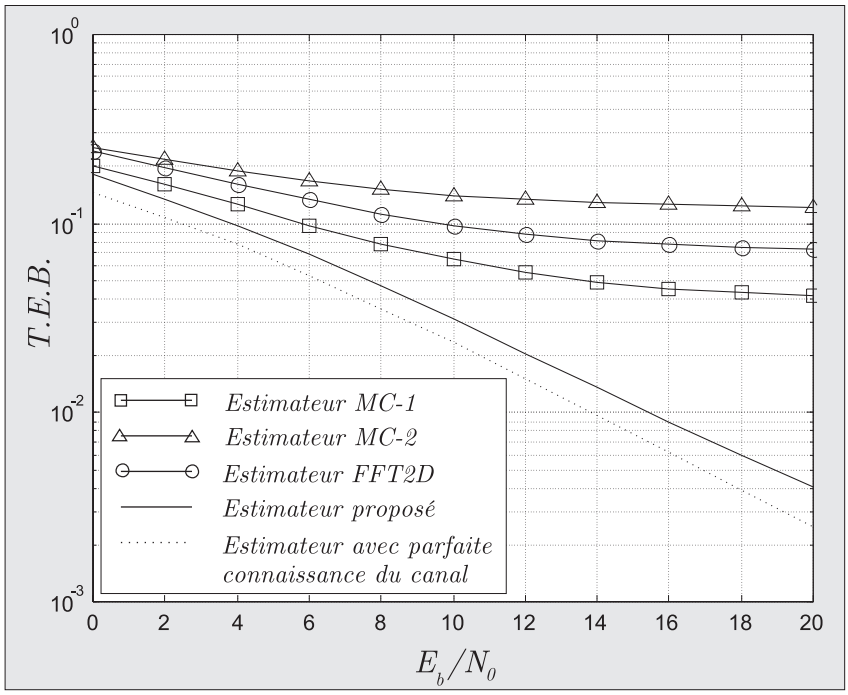


Fig. IV.5 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement aux performances des méthodes de référence pour $B_d T_m = 1/32^2$

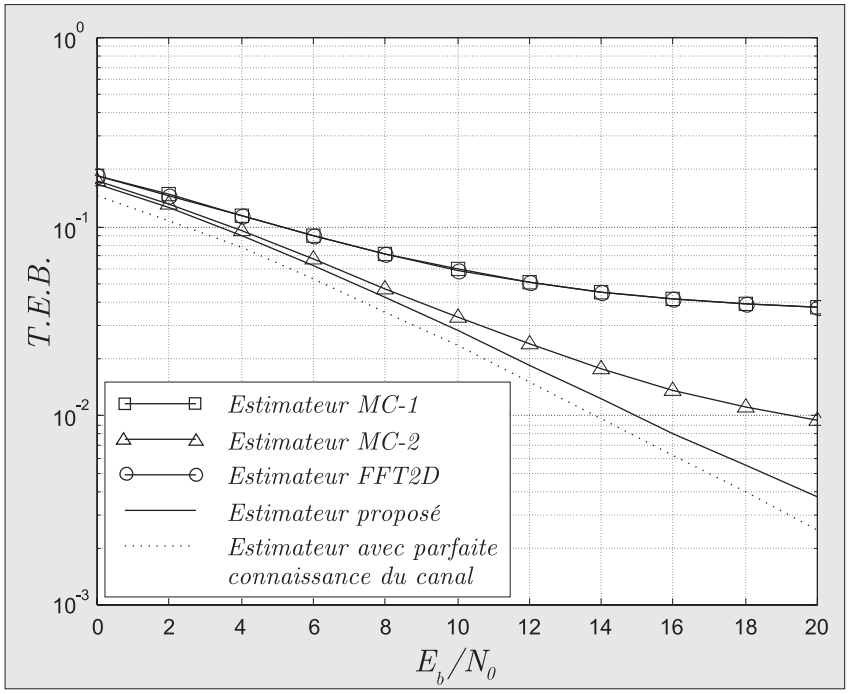


Fig. IV.6 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement aux performances des méthodes de référence pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1$

4.6 Conclusions

Nous avons donc défini un nouvel algorithme d'estimation de canal optimal au sens du Maximum *a Posteriori*, pouvant être mis en oeuvre de manière autonome, mais pouvant également servir à l'initialisation de l'algorithme itératif présenté dans les chapitres 2 et 3.
Cette technique basée uniquement sur l'utilisation de l'information apportée par les symboles pilotes présente de bonnes performances par rapport aux méthodes classiques rencontrées dans la littérature et permet ainsi de fonder de certains espoirs quant à son utilisation comme initialisation de l'algorithme itératif.

Chapitre 5

Estimation semi-aveugle avec conditions initiales optimisées

5.1 Introduction

Ce chapitre a pour but de mettre en commun toutes les techniques développées plus haut dans ce mémoire. Nous avons vu dans la partie II que nous pouvons estimer de manière optimale le canal de propagation. Pourtant, la méthode proposée dans cette partie présente une certaine sensibilité par rapport aux imperfections de l'initialisation. Nous avons également vu qu'il est possible d'utiliser les propriétés codées du signal émis pour améliorer l'estimation de canal dans la partie 3. La partie 4 nous a apporté une technique d'estimation de canal basée uniquement sur les pilotes. Cette dernière technique, nous l'utiliserons pour résoudre le problème de l'initialisation de la technique exposée dans les parties 2 et 3.

5.2 Résultats de simulation

5.2.1 Initialisation

Comme nous l'avons précédemment vu, l'algorithme itératif présenté dans la deuxième partie nécessite une initialisation précise. Le problème de la méthode proposée dans la partie 2 est que la restriction des vecteurs propres servant de base de projection ne forme pas une base orthogonale au niveau des symboles pilotes. La base optimisée étendue est, par construction orthogonale au niveau des symboles pilotes. Elle donne, par conséquent, une estimation de canal plus précise et fournissant de meilleures performances.

5.2.2 Partie Itérative

La partie itérative reste inchangée, elle utilise toujours la même base de vecteurs. En effet, celle-ci est orthogonale au niveau de tous les symboles du bloc temps-fréquence, ce qui n'est pas le cas de la base optimisée étendue.

5.2.3 Simulations

Nous avons décidé de réaliser les simulations des techniques turbo ou non-codées améliorées en comparaison aux performances obtenues précédemment. Ainsi, nous avons simulé l'estimateur amélioré dans les mêmes contextes de propagation que les simulations précédentes. Nous avons optimisé les positions des pilotes pour un RSB (après codage par branche de diversité) de 15 dB. Pour les canaux avec $B_dT_m = 1/16^2$ et $1/8^2$ nous avons considéré que les blocs temps fréquence contenaient toujours 16 pilotes, répartis ainsi que le montre la figure II.18 , alors que pour les canaux avec $B_dT_m = 1/64^2$ et $1/32^2$, nous avons testé l'algorithme sur des blocs ne contenant que 4 symboles pilotes.

Non codé

Premièrement, nous avons considéré des données non-codées. La figure V.1 compare les performances de l'estimateur avec conditions initiales améliorées aux algorithmes de référence pour $B_dT_m = 1/64^2$. Les performances de l'algorithme proposé pour des données non codées présente des performances très proches de celles de l'algorithme hypothétique avec parfait connaissance du canal (PCC) et bien meilleures que celles que présentent les algorithmes de référence.

Les figures V.2 à V.5 présentent les performances de l'algorithme avec initialisation améliorée comparées aux performances de l'algorithme hypothétique ayant une parfaite connaissance du canal pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 pour les canaux à $B_dT_m = 1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$.

Nous voyons une fois de plus que les diversités temporelle et fréquentielle sont bien exploitées et que les performances de l'algorithme avec initialisation améliorée restent très proches des performances de l'estimateur PCC. De plus, en comparant ces performances avec celles obtenues dans la partie II et présentées aux figures II.19 à II.22, nous voyons que les performances sont améliorées et que l'apparition d'une saturation autour de 8-10 dB dans les résultats de la partie II est ici repoussée autour de 14 dB.

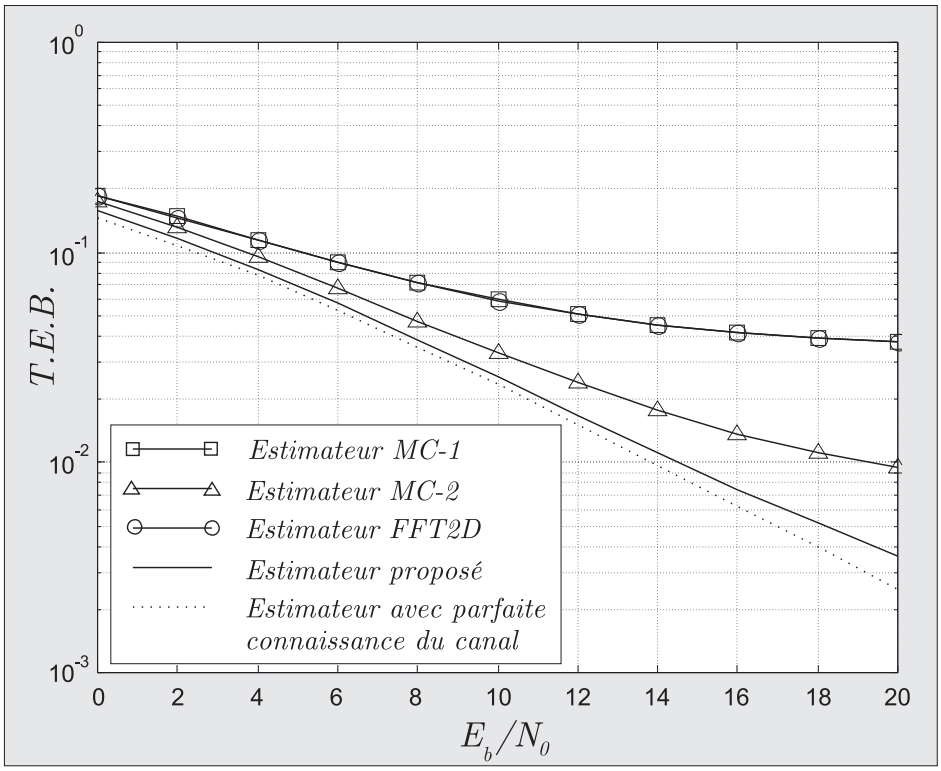


Fig. V.1 : Comparaison des performances de l'estimateur avec initialisation améliorée aux performances des méthodes de référence pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1$

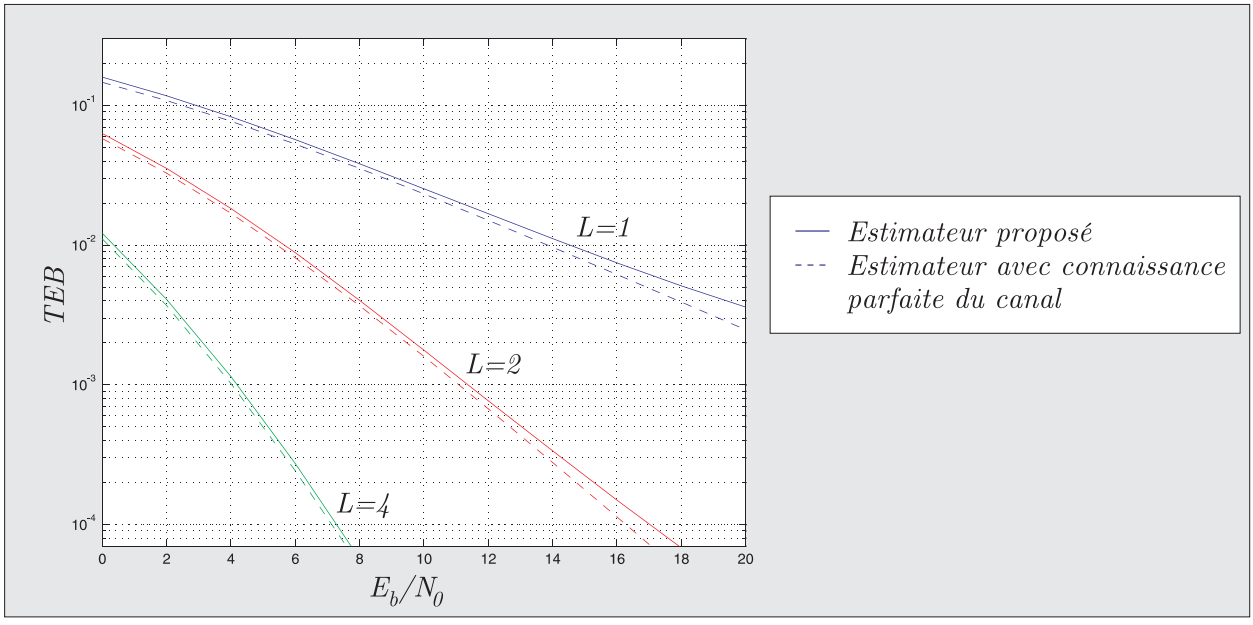


Fig. V.2 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4

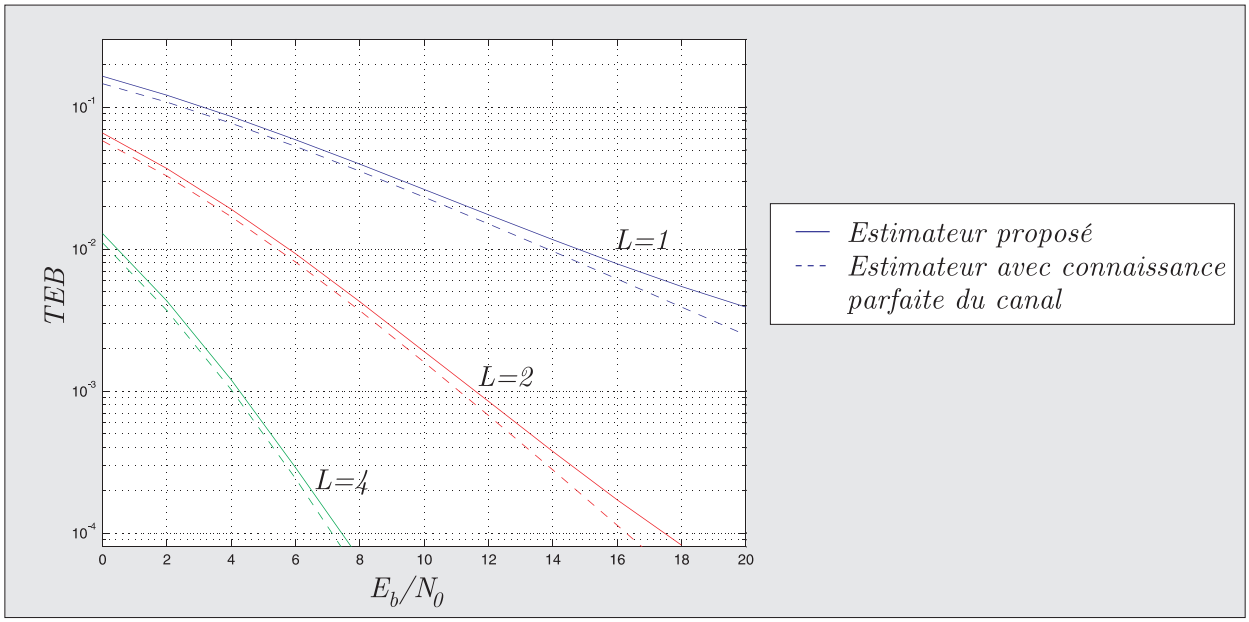


Fig. V.3 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/32^2$ et $L = 1, 2$ et 4

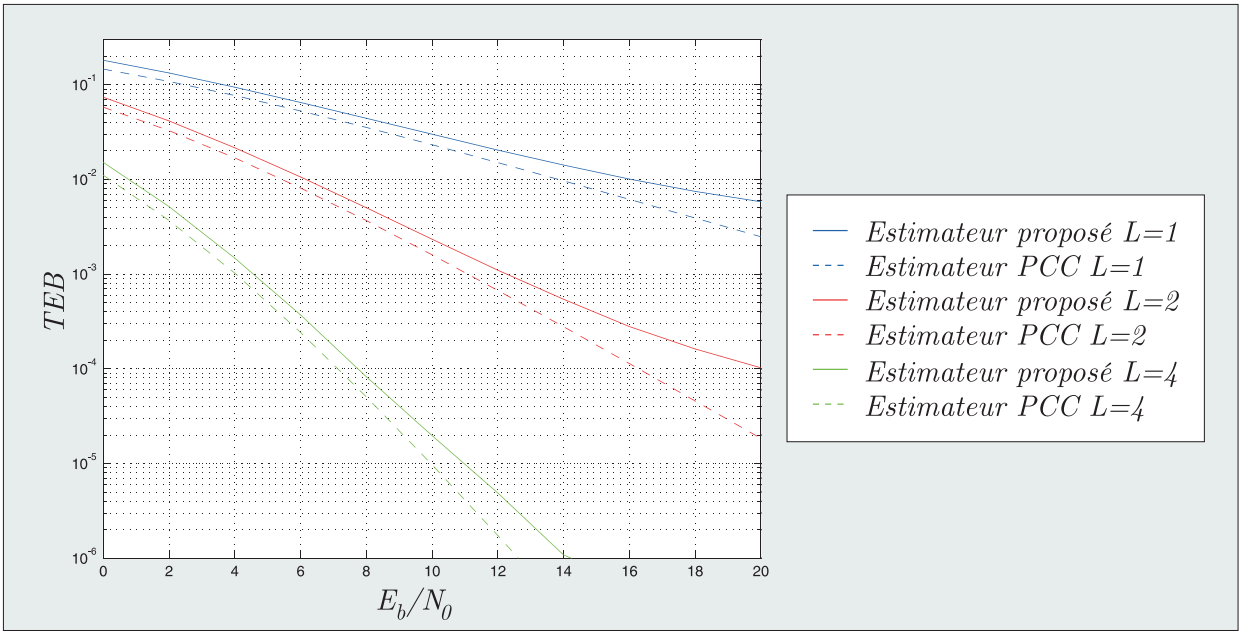


Fig. V.4 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/16^2$ et $L = 1, 2$ et 4

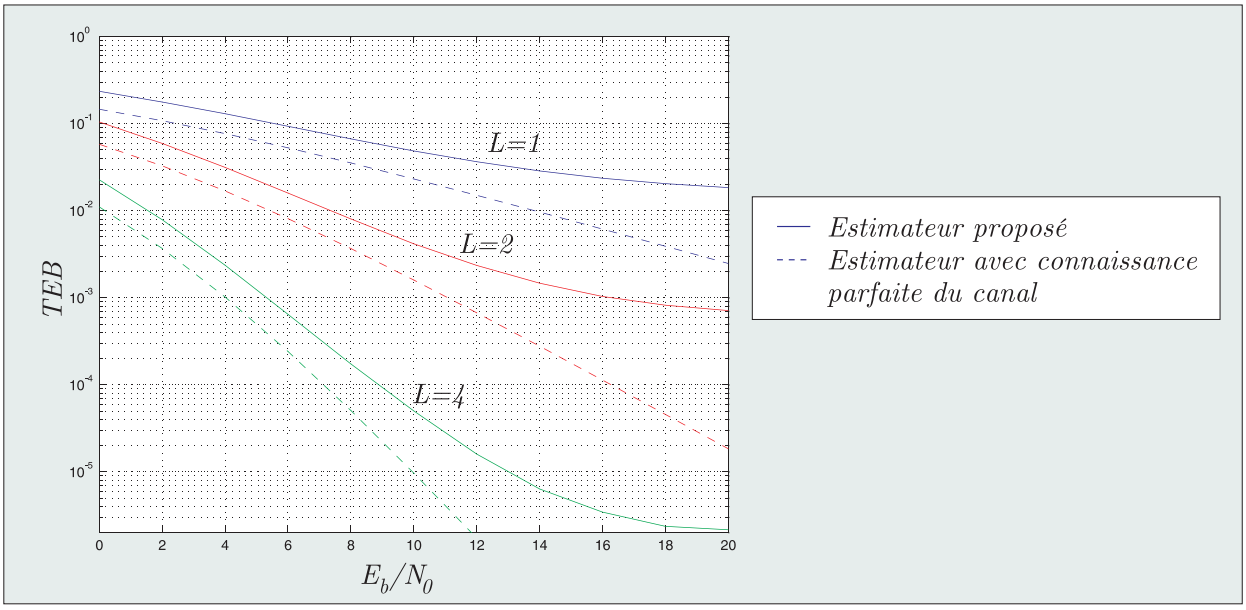


Fig. V.5 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée

pour $B_d T_m = 1/8^2$ et $L = 1, 2$ et 4

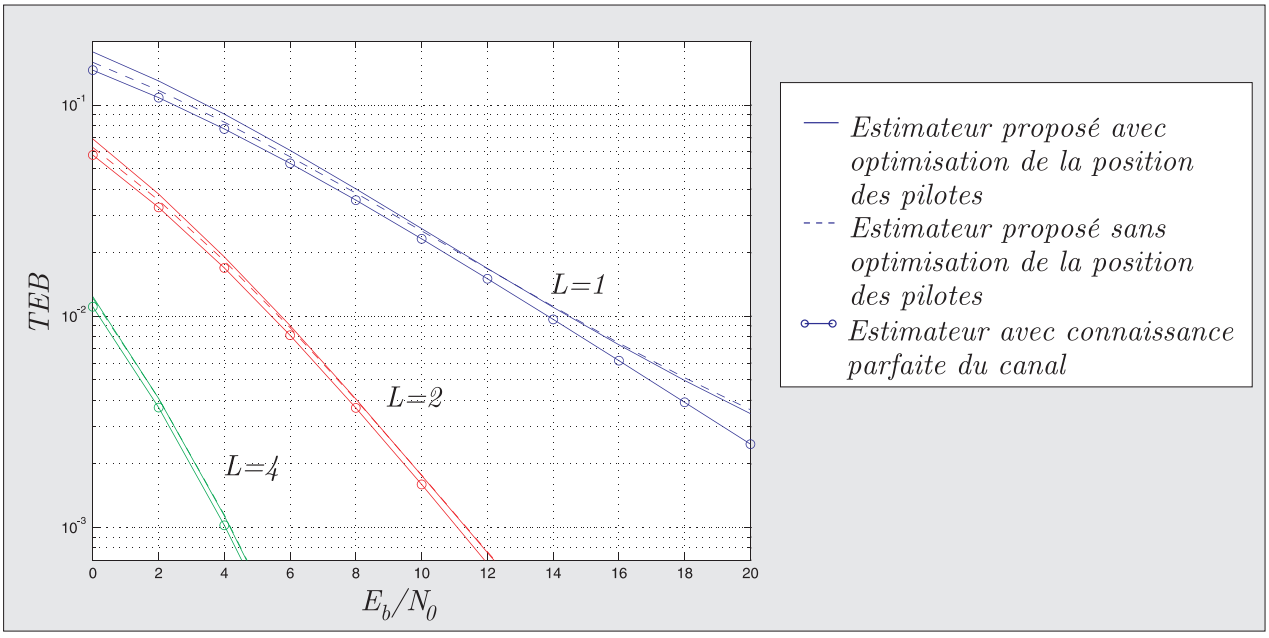


Fig. V.6 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée

avec ou sans optimisation de la position des pilotes

pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4

La figure V.6 présente, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 et $B_dT_m = 1/64^2$ les comparaisons des performances de l'estimateur avec des positions des pilotes optimisées (4 pilotes, fig. IV.1) avec celles de l'estimateur avec les positions des pilotes non-optimisées (16 pilotes) ainsi que les performances de l'estimateur hypothétique ayant une parfaite connaissance du canal. Nous voyons alors que les performances obtenues pour 4 pilotes optimisés sont équivalentes à celles obtenues pour 16 pilotes non-optimisés.

La figure V.7 montre enfin la robustesse de l'algorithme avec conditions initiales améliorées, pour des données non-codées, par rapport à une erreur de modèle de canal au niveau du récepteur pour $B_dT_m = 1/32^2$ et à $E_b/N_0 = 15$ dB. Nous voyons que dans ces conditions, l'estimateur présente une bonne robustesse. Les performances ne sont que peu dégradées pour $(B_dT_m)_{hypothèse} > (B_dT_m)_{réel}$ et dans le cas contraire, la variation des performances se fait un peu plus rapidement, mais restent convenable autour de $(B_dT_m)_{hypothèse} / (B_dT_m)_{réel} = -4$ dB.

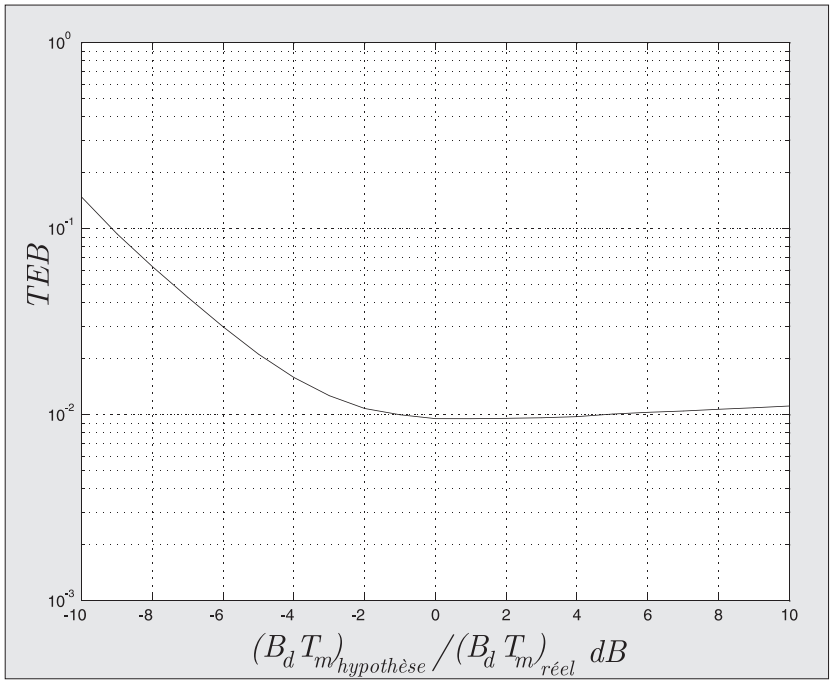


Fig. V.7 : Robustesse de l'estimateur avec conditions initiales améliorées pour des données non codées, $B_dT_m = 1/32^2$ et à $15dB$ et $L = 1$

Codé

Dans le cas où les données sont codées, nous présentons les simulations dans les mêmes contextes que précédemment. Les figure V.8 à V.11 présentent les performances du turbo-estimateur avec

conditions initiales améliorées pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4. Comme précédemment, les diversités temporelles et fréquentielles sont bien exploitées, puisque, plus $B_d T_m$ est grand, plus le canal est sélectif, et plus les performances s'améliorent. Ceci se vérifie sur les figures V.8, V.9 et V.10. Dans le cas où $B_d T_m = 1/8^2$, le canal est tellement sélectif que l'on a l'apparition d'une forte saturation vers 8-10 dB.

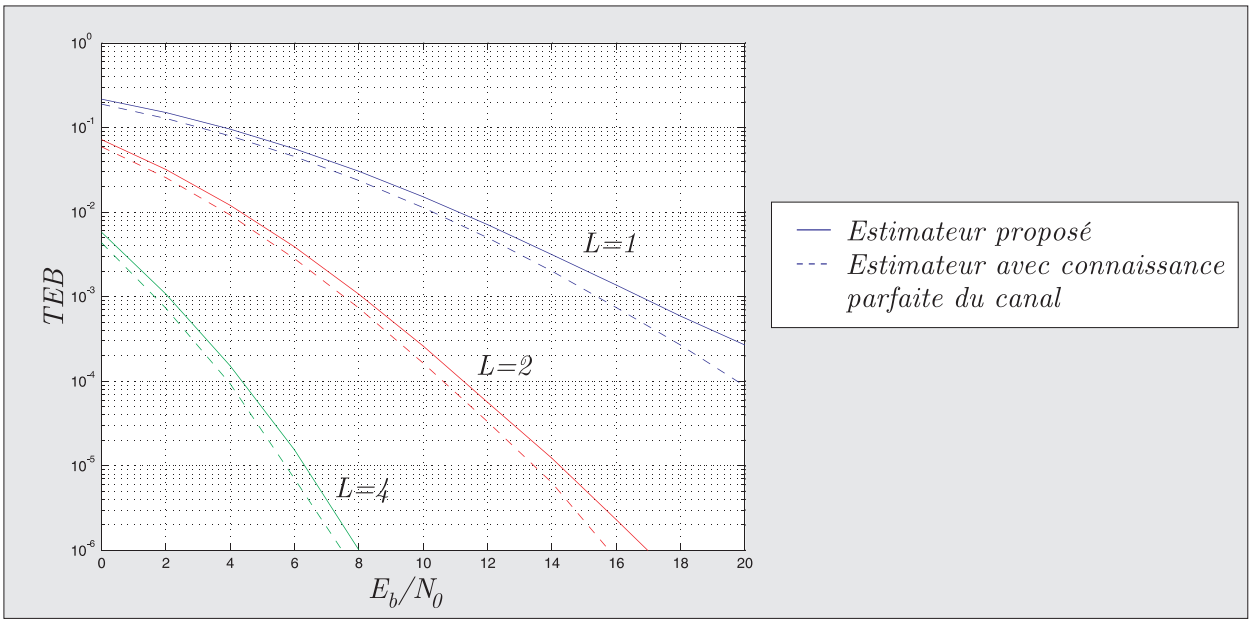


Fig. V.8 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4

La figure V.12 présente la robustesse du turbo-estimateur pour $B_d T_m = 1/32^2$ et $E_b/N_0 = 15$ dB.

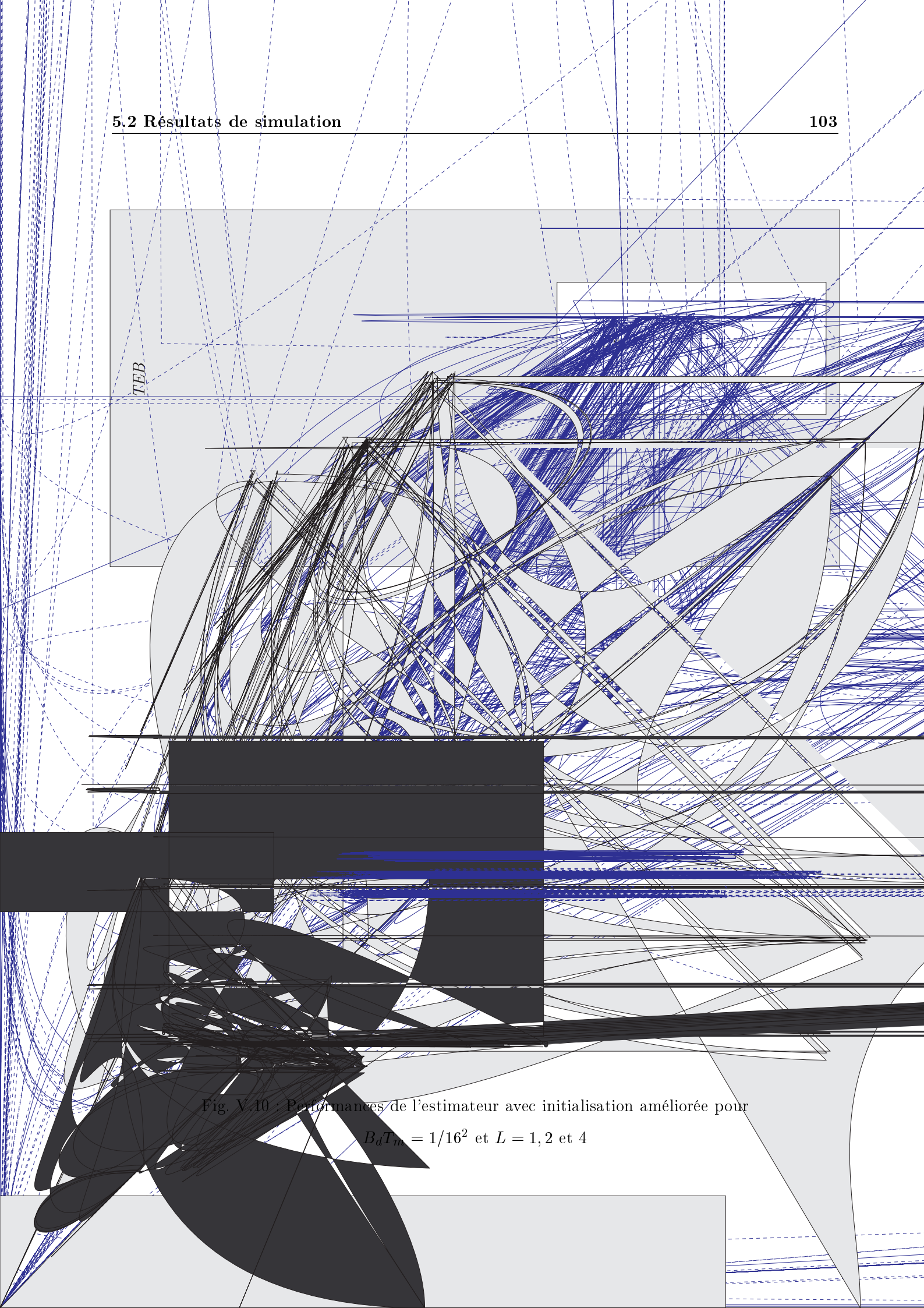


Fig. V.10 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_d T_m = 1/16^2$ et $L = 1, 2$ et 4

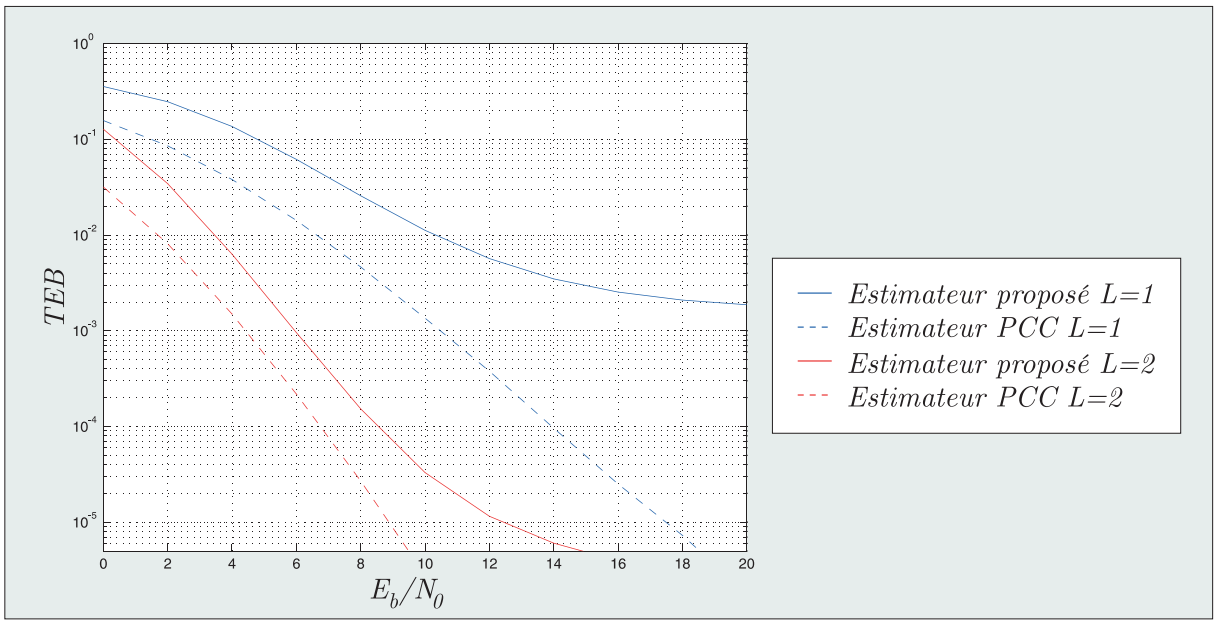


Fig. V.11 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/8^2$ et $L = 1, 2$ et 4

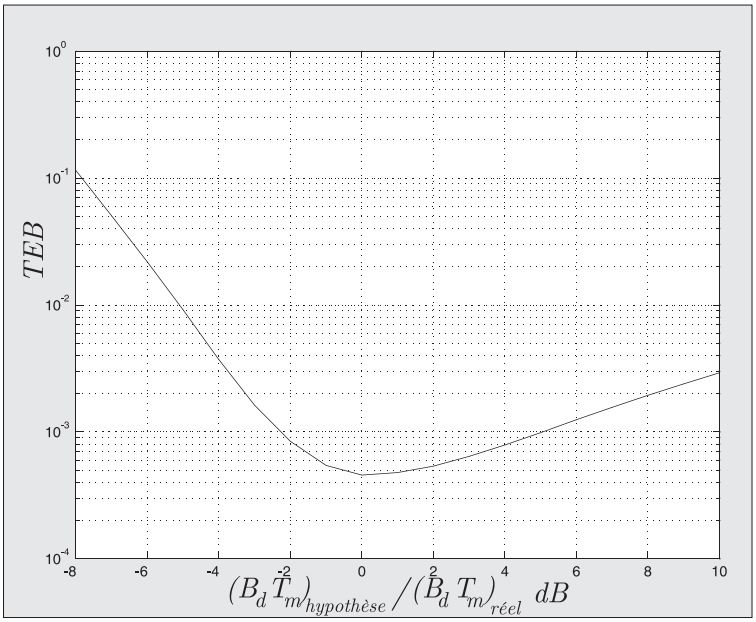


Fig. V.12 : Robustesse de l'estimateur avec conditions initiales améliorées pour des données non codées, $B_dT_m = 1/32^2$ et à $15dB$ et $L = 1$

Conclusion générale et perspectives

Dans ce mémoire, nous avons présenté deux méthodes d'estimation de canal très sélectif en temps et en fréquence pour des systèmes OFDM. Ces techniques sont basées sur une modélisation originale du canal de propagation utilisant le théorème de décomposition orthogonale de Karhunen-Loève.

La première méthode est un estimateur itératif de canal très sélectif en temps et en fréquence basé sur l'algorithme EM. Nous avons montré que cette méthode fournit de bonne performances par rapport à des algorithmes de référence basés sur le critère des moindre carrés et sur la transformée de Fourier bidimensionelle. Mais l'initialisation de cette méthode doit être très précise et la robustesse de cet estimateur par rapport au $B_d T_m$ peut être améliorée.

Nous avons donc étudié une nouvelle méthode d'estimation de canal n'utilisant que les symboles pilotes. Cette technique peut être utilisée seule et présente de bonnes performances par rapport aux algorithmes de comparaison. Elle peut être également utilisée comme l'initialisation de l'algorithme itératif qui obtient alors une initialisation de meilleure qualité et lui permet d'améliorer sa robustesse par rapport au $B_d T_m$.

Cette étude présente de nombreuses possibilités de poursuite. Nous avons vu que l'estimateur présente des effets de bord pour chaque bloc traité. Ceci vient du fait que seuls les pilotes à l'intérieur du bloc sont utilisés pour estimer le canal. Il sera intéressant de prendre en compte des pilotes appartenant à d'autres blocs adjacents au bloc traité pour contrer ces effets de bords.

De plus, nous avons considéré que les capteurs en réception sont décorrélés les uns des autres. Il sera intéressant d'étudier une technique de traitement d'antenne basée sur la méthode d'estimation de canal présentée dans ce mémoire en considérant les différentes branches corrélées entre elles.

Les différents estimateurs de canal proposés dans ce mémoire seront étudiés dans le cadre du projet RNRT FESTIVAL en vue d'une application à la norme HIPERLAN 2.

Annexe A

Propriétés de l'algorithme EM

A.1 Théorème 1 : Croissance des probabilités *a posteriori*

L'estimation au sens du MAP $\left\{\hat{G}_l\right\}_{l=0}^{L-1}$ est donnée par l'expression suivante :

$$\left\{\hat{G}_l\right\}_{l=0}^{L-1} = \arg \max_{\{G_l\}_{l=0}^{L-1}} p\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1} \middle| \{R_l\}_{l=0}^{L-1}\right). \tag{A.1}$$

Pour résoudre ce problème, l'algorithme EM utilise la fonction auxiliaire :

$$Q\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1}\right) = \sum_{\mathbf{A}} p\left(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, \mathbf{A}, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}\right) \log p\left(\{R_l\}_{l=0}^{L-1}, \mathbf{A}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1}\right). \tag{A.2}$$

Démontrons que la fonction auxiliaire induit une croissance monotone de $p\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1} \middle| \{R_l\}_{l=0}^{L-1}\right)$. Pour cela, nous montrerons que $Q\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1}\right) > Q\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}\right)$.

Pour simplifier l'écriture, notons $Q(G, G')$ la fonction $Q\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G'_l\}_{l=0}^{L-1}\right)$ et $Q(G, G)$ la fonction $Q\left(\{G_l\}_{l=0}^{L-1}, \{G_l\}_{l=0}^{L-1}\right)$.

$$Q(G, G') - Q(G, G) = \sum_{\mathbf{A}} p(\{R_l\}, \mathbf{A}, \{G_l\}) \log \frac{p(\{R_l\}, \mathbf{A}, \{G'_l\})}{p(\{R_l\}, \mathbf{A}, \{G_l\})}. \tag{A.3}$$

L'inégalité

$$\log x \leq x - 1, \quad \text{avec égalité si et seulement si } x = 1$$

nous permet d'aboutir à l'expression suivante

$$Q\left(G,G'\right)-Q\left(G,G\right)\leq\sum_{\mathbf{A}}p\left(\left\{R_l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{G_l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\left(\frac{p\left(\left\{R_l\right\},\mathbf{A},\left\{G'_l\right\}\right)}{p\left(\left\{R_l\right\},\mathbf{A},\left\{G_l\right\}\right)}-1\right)$$

$$Q\left(G,G'\right)-Q\left(G,G\right)\leq\sum_{\mathbf{A}}\left(p\left(\left\{R_l\right\},\mathbf{A},\left\{G'_l\right\}\right)-p\left(\left\{R_l\right\},\mathbf{A},\left\{G_l\right\}\right)\right). \tag{A.4}$$

Ce qui signifie que lorsque $Q\left(G,G'\right)-Q\left(G,G\right)>0$ alors

$$\sum_{\mathbf{A}}\left(p\left(\left\{R_l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{G'_l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)-p\left(\left\{R_l\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{G_l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\right)>0 \tag{A.5}$$

et la fonction auxiliaire induit une croissance monotone de $p\left(\left\{G_l\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\left\{R_l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$.

A.2 Théorème 2 : Point critique de la probabilité *a posteriori*

Calculons le gradient le la probabilité conjointe de $\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ et $\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$:

$$\begin{aligned}\nabla_G p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)&=\nabla_G\sum_{\mathbf{A}}p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}\right)\\&=\sum_{\mathbf{A}}\nabla_G p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}\right)\\&=\sum_{\mathbf{A}}p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\nabla_G\log\left(p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}\right)\right)\\&=\nabla_{G'}Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\},\left\{\mathbf{G}'^l\right\}\right)\Big|_{\left\{\mathbf{G}'^l\right\}=\left\{\mathbf{G}^l\right\}}\end{aligned} \tag{A.6}$$

C'est à dire

$$\nabla_G p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=0\Longleftrightarrow\nabla_{G'}Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\},\left\{\mathbf{G}'^l\right\}\right)\Big|_{\left\{\mathbf{G}'^l\right\}=\left\{\mathbf{G}^l\right\}}=0 \tag{A.7}$$

$\left\{\mathbf{G}^l\right\}_{l=0}^{L-1}$ est un point critique de $p\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^l\right\}\right)$ si et seulement si il est un point fixe de $Q\left(\left\{\mathbf{G}^l\right\},\left\{\mathbf{G}'^l\right\}\right)$.

Annexe B

Expression analytique de l'estimateur

La relation de récurrence entre $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ et $\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ est recherchée. On calcule la nouvelle estimation $\left\{\mathbf{G}^{l(d+1)}\right\}_{l=0}^{L-1}$ qui maximise $Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$ en fonction de $\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}$. Tout d'abord, on remarque que le terme logarithmique de $Q\left(G,G^{\prime}\right)$ peut être exprimé par :

$$\log p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=\log P\left(\mathbf{A}\right)+\log p\left(\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)+\log p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\,\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \tag{B.1}$$

Le premier terme de cette expression n'intervient pas dans la maximisation de $Q\left(G,G^{\prime}\right)$ par rapport à $\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}$. Le second terme peut être exprimé explicitement :

$$\begin{aligned}\log p\left(\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)&=\log\left(\prod_{l=0}^{L-1}\prod_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\pi\Gamma_{k}^{l}}\exp\left(-\frac{G_{k}^{l}}{\Gamma_{k}^{l}}\right)\right)\\&=\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\log\left(\pi\Gamma_{k}^{l}\right)-\frac{G_{k}^{l}}{\Gamma_{k}^{l}}\right)\end{aligned} \tag{B.2}$$

Finalement, le dernier terme peut être ré-écrit :

$$\begin{aligned}\log p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\,\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}^{\prime l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)&=\log\left(\prod_{l=0}^{L-1}\prod_{k=0}^{N-1}\frac{1}{\pi I_{0}}\exp\left(-\frac{1}{I_{0}}\left|R_{k}^{l}-A\sum_{m=0}^{N-1}G_{m}^{\prime l}B_{mk}\right|^{2}\right)\right)\\&=-LN\log\left(\pi I_{0}\right)-\frac{1}{I_{0}}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\left|R_{k}^{l}-A\sum_{m=0}^{N-1}G_{m}^{\prime l}B_{mk}\right|^{2}\right)\end{aligned} \tag{B.3}$$

En remplaçant ces expressions dans celle de $Q\left(G,G'\right)$, on obtient :

$$Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=\sum_{A}\left(p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\mathbf{A},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\log P\left(\mathbf{A}\right)\right.$$
$$+\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left(-\log\left(\pi\Gamma_{k}^{l}\right)-\frac{G_{k}^{l}}{\Gamma_{k}^{l}}\right)-LN\log\left(\pi I_{0}\right)$$
$$\left.-\frac{1}{N_{0}}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\left|R_{k}^{l}-A\sum_{m=0}^{N-1}G_{m}'^{l}B_{mk}\right|^{2}\right) \tag{B.4}$$

$$Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=C-p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{G_{k}'^{l}}{\Gamma_{k}^{l}}$$
$$-\frac{1}{N_{0}}\sum_{l=0}^{L-1}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{A\in\Omega}p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},A_{k}=A,\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\left|R_{k}^{l}-A\sum_{m=0}^{N-1}G_{m}'^{l}B_{mk}\right|^{2} \tag{B.5}$$

où C est un terme additif indépendant de $\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}$. Pour maximiser $Q\left(G,G'\right)$ par rapport à $\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}$, on dérive l'expression de $Q\left(G,G'\right)$ par rapport à $\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}$. Pour cela, on représente les coefficients complexes $\left\{G_{k}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}$ sous forme polaire. On écrit les coefficients $G_{k}'^{l}$ sous la forme suivante :

$$G_{k}'^{l}=\rho_{k}^{l'}\exp\left(j\theta_{k}^{l'}\right) \tag{B.6}$$

où $\rho_{k}^{l'}$ et $\theta_{k}^{l'}$ sont respectivement l'amplitude et la phase de $G_{k}'^{l}$ et $j=\sqrt{-1}$. Pour $l=0,\ldots,L-1$ et $k=0,\ldots,N-1$, les dérivées de $Q\left(G,G'\right)$ par rapport à $\rho_{k}^{l'}$ et $\theta_{k}^{l'}$ sont données par :

$$\frac{\partial Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)}{\partial\rho_{k}^{l'}}=-\frac{2}{N_{0}}p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\left(\left(1+\frac{I_{0}}{\Gamma_{m}^{l}}\right)\rho_{m}^{l'}-\right.$$
$$\left.\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{A\in S_{k}}p\left(A|\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\mathrm{Re}\left\{R_{k}^{l}A^{*}e^{-j\theta_{m}^{l'}}B_{mk}^{*}\right\}\right) \tag{B.7}$$

et

$$\frac{\partial Q\left(\left\{\mathbf{G}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}'^{l}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)}{\partial\theta_{k}^{l'}}=-\frac{2\rho_{m}^{l'}}{N_{0}}p\left(\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)$$
$$\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{A\in\Omega}P\left(A|\left\{\mathbf{R}^{l}\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)\mathrm{Re}\left\{R_{k}^{l}A^{*}e^{-j\theta_{m}^{l'}}B_{mk}^{*}\right\} \tag{B.8}$$

Pour obtenir ces expressions, on a utilisé le fait que les symboles normalisés sont constants (égaux à 1) et que les L bases $\left\{\mathbf{B}_k^l\right\}_{k=0}^{N-1}$, $l = 0, \ldots, L-1$ sont orthonormales. En égalant ces deux équations à zéro, on obtient :

$$\left(1 + \frac{N_0}{\Gamma_m^l}\right) G_m^{l(d+1)} = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{A \in \Omega} P\left(A \left| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) \left(R_k^l A^* B_{mk}^*\right) \tag{B.9}$$

on pose alors

$$w_m^l = \frac{1}{1 + N_0 / \Gamma_m^l} \tag{B.10}$$

et en réordonnant l'expression précédente, on obtient finalement :

$$\boxed{G_m^{l(d+1)} = w_m^l \sum_{k=0}^{N-1} R_k^l \left(\sum_{A \in \Omega} AP\left(A \left| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)^* \right) B_{mk}^*} \tag{B.11}$$

Annexe C

Cas particuliers

En utilisant la relation de Bayes, nous obtenons

$$\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)}=A\left|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) = \sum_{A\in\Omega} A\frac{P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle| A_{\delta(k)}=A\right)P\left(A_{\delta(k)}=A\right)}{P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)} \tag{C.1}$$

or,

$$P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) = \sum_{A\in\Omega} P\left(A_{\delta(k)}=A\right)P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle| A_{\delta(k)}=A\right) \tag{C.2}$$

d'où

$$\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)}=A\left|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right) = \sum_{A\in\Omega} \frac{AP\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle| A_{\delta(k)}=A\right)P\left(A_{\delta(k)}=A\right)}{\sum_{A\in\Omega}\left(P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle| A_{\delta(k)}=A\right)P\left(A_{\delta(k)}=A\right)\right)} \tag{C.3}$$

C.1 Modulation MDP-2

Dans le cas d'une modulation MDP-2, les A prennent leurs valeurs dans $\Omega=\{-1,1\}$ et

$$P\left(A_{\delta(k)}=A\right)=\frac{1}{2}.$$

L'équation C.3 devient alors

$$\begin{aligned}
&\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)}=A\left|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)\\
&=\frac{P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, A_{\delta(k)}=1\right)-P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, A_{\delta(k)}=-1\right)}{P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, A_{\delta(k)}=1\right)+P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, A_{\delta(k)}=-1\right)}.
\end{aligned}\tag{C.4}$$

De plus, le signal reçu s'écrit

$$R^l_{\delta(k)}=C^l_{\delta(k)}A_{\delta(k)}+N^l_{\delta(k)}\tag{C.5}$$

et $N^l_{\delta(k)}$ est un bruit Gaussien de variance N_0. La probabilité $P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, 1\right)$ devient, d'après C.5 :

$$\begin{aligned}
&P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\middle|\, A_{\delta(k)}=1\right)\\
&=\prod_{l=0}^{L-1}\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(-\frac{1}{N_0}\left(R^l_{\delta(k)}-\sum_{m=0}^{N-1}G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^2\right)\\
&=\frac{1}{\pi N_0}\exp\left(\sum_{l=0}^{N-1}-\frac{1}{N_0}\left(\left(R^l_{\delta(k)}\right)^2+\left(\sum_{m=0}^{N-1}G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^2\right.\right.\\
&\left.\left.-2\,\mathrm{Re}\left[R^l_{\delta(k)}\left(\sum_{m=0}^{N-1}G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^*\right]\right)\right).
\end{aligned}\tag{C.6}$$

Finalement, dans l'expression de $\sum_{A\in\Omega}AP\left(A_{\delta(k)}=A\left|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)$, seul le terme en $-2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{l=0}^{L-1}R^l_{\delta(k)}\sum_{m=0}^{N-1}G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right]$ intervient dans le calcul. Pour simplifier la lecture des expression suivantes, nous posons

$$\boxed{\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}=\tfrac{1}{N_0}\sum_{l=0}^{L-1}R^l_{\delta(k)}\left(\sum_{m=0}^{N-1}G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^*}\tag{C.7}$$

et

$$\begin{aligned}
\sum_{A\in\Omega}AP\left(A_{\delta(k)}=A\left|\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right.\right)&=\frac{\exp\left(2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)-\exp\left(-2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)}{\exp\left(2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)+\exp\left(-2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)}\\
&=\tanh\left(2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right).
\end{aligned}\tag{C.8}$$

En remplaçant ces probabilités dans l'expression du chapitre, nous obtenons

$$\boxed{G_m^{l(d+1)} = w_m^l \left(\sum_{\delta(k)\in S_D} R_{\delta(k)}^{l*} \tanh\left(2\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right) B_{\delta(k)m}^* + \sum_{\delta(k)\in S_P} R_{\delta(k)}^l D_{\delta(k)} B_{\delta(k)m}^* \right)} \tag{C.9}$$

C.2 Modulation MDP-4

Dans le cas d'une modulation MDP-4, les A prennent leurs valeurs dans

$$\Omega = \left\{ e^{-3j\pi/4}, e^{-j\pi/4}, e^{j\pi/4}, e^{3j\pi/4} \right\}$$

et les probabilités *a priori* sont

$$P\left(A_{\delta(k)} = A\right) = \frac{1}{4}.$$

L'équation C.3 devient alors

$$\begin{aligned} &\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)} = A \,\middle|\, \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) \\ &= \frac{\sum_{A\in\Omega} AP\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1} \,\middle|\, A_{\delta(k)} = e^{-3j\pi/4}\right)}{\sum_{A\in\Omega} P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1} \,\middle|\, A_{\delta(k)} = A\right)} \end{aligned} \tag{C.10}$$

De plus, le signal reçu s'écrit

$$R_{\delta(k)}^l = C_{\delta(k)}^l A_{\delta(k)} + N_{\delta(k)}^l \tag{C.11}$$

et $N_{\delta(k)}^l$ est un bruit Gaussien de variance N_0. La probabilité $P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1} \,\middle|\, 1\right)$ devient, d'après C.5 :

$$\begin{aligned} &P\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1} \,\middle|\, A_{\delta(k)} = e^{\,j\pi/4}\right) \\ &= \prod_{l=0}^{L-1} \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(-\frac{1}{N_0}\left(R_{\delta(k)}^l - e^{\,j\pi/4}\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2\right) \\ &= \frac{1}{\pi N_0} \exp\left(\sum_{l=0}^{N-1} -\frac{1}{N_0}\left(\left(R_{\delta(k)}^l\right)^2 + \left(\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^2\right.\right. \\ &\left.\left. -2\,\mathrm{Re}\left[R_{\delta(k)}^l \left(e^{\,j\pi/4}\sum_{m=0}^{N-1} G_m^{l(d)} B_{\delta(k)m}\right)^*\right]\right)\right). \end{aligned} \tag{C.12}$$

Finalement, dans l'expression de $\sum_{A\in\Omega} AP\left(\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1} \middle| A_{\delta(k)} = A\right)$, seul le terme en $-2\,\mathrm{Re}\left[\sum_{l=0}^{L-1} R^l_{\delta(k)} \left(e^{j\pi/4} \sum_{m=0}^{N-1} G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^*\right]$ intervient dans le calcul. De la même façon que dans la démonstration précédente, pour faciliter la lecture des expressions suivantes, nous posons

$$\boxed{\Lambda^{(d)}_{\delta(k)} = \tfrac{1}{N_0} \sum_{l=0}^{L-1} R^l_{\delta(k)} \left(\sum_{m=0}^{N-1} G^{l(d)}_m B_{\delta(k)m}\right)^*} \tag{C.13}$$

$$\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)} = A \middle| \left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1}, \left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right) = \frac{\sum_{A\in\Omega} A \exp\left(\frac{2}{N_0}\,\mathrm{Re}\left[A^* \Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)}{\sum_{A\in\Omega} \exp\left(\frac{2}{N_0}\,\mathrm{Re}\left[A^* \Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)}. \tag{C.14}$$

Le numérateur se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sqrt{2}}\left((1+j)\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + (1-j)\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1+j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right.\\
&\left.+(-1+j)\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + (-1-j)\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1+j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right.\\
&\left.-\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right.\\
&\left.+j\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right.\\
&\left.-j\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1+j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) - \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right.\\
&\left.\times\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right)\\
&+\frac{j}{\sqrt{2}}\left(\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) - \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right.\\
&\left.\times\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

Le dénominateur se développe, pour sa part comme suit

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(1+j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\\
&+\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[(-1-j)\,\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\\
&= \left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)\\
&\times\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right) + \exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\Lambda^{(d)}_{\delta(k)}\right]\right)\right)
\end{aligned}$$

On en déduit donc l'expression du quotient

$$\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)}=A\,\middle|\,\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=$$
$$\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)-\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)\right)}{\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)+\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)}$$
$$+\frac{j}{\sqrt{2}}\frac{\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[j\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)-\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)\right)}{\left(\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[j\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)+\exp\left(\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[-j\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right)\right)},$$

ou, puisque $\mathrm{Re}\left[j\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]=-\,\mathrm{Im}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]$ et en écrivant cette expression sous une forme plus réduite

$$\sum_{A\in\Omega} AP\left(A_{\delta(k)}=A\,\middle|\,\left\{\mathbf{R}^l\right\}_{l=0}^{L-1},\left\{\mathbf{G}^{l(d)}\right\}_{l=0}^{L-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right]+j\tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right]\right). \tag{C.15}$$

Remplaçons à présent l'expression obtenue dans celle de $G_m^{l(d+1)}$ et obtenons l'expression vue dans le chapitre

$$\boxed{G_m^{l(d+1)}=w_m^l\left(\sum_{\delta(k)\in S_D}R_{\delta(k)}^{l*}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Re}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right]+\tfrac{j}{\sqrt{2}}\tanh\left[\sqrt{2}\,\mathrm{Im}\left[\Lambda_{\delta(k)}^{(d)}\right]\right]\right)B_{\delta(k)m}^{*}+\sum_{\delta(k)\in S_P}R_{\delta(k)}^{l}D_{\delta(k)}B_{\delta(k)m}^{*}\right)} \tag{C.16}$$

Annexe D

Harmonisation du canal en temps et en fréquence

L'objectif recherché dans cette annexe est de trouver la relation entre les paramètres B_d et T_m du canal tels que le canal varie "de la même façon" en temps et en fréquence , c'est à dire que les variances des fonctions de probabilité des retards et de la fréquence Doppler soient égales.

D.1 Étalement des retards

Considérons $h(\tau)$ la fonction de probabilité de l'étalement des retards. Notons $H(f)$ sa transformée de Fourier

$$H(f) = \int h(\tau) e^{j2\pi f\tau} d\tau. \tag{D.1}$$

Nous recherchons donc la valeur de la variance de τ : $\left(\overline{\tau^2} - (\bar{\tau})^2\right)$. Pour cela, nous calculons les moments d'ordre 1 et 2 de τ.

$$\bar{\tau} = \frac{\int h(\tau)\tau d\tau}{\int h(\tau) d\tau} \tag{D.2}$$

et

$$\overline{\tau^2} = \frac{\int h(\tau)\tau^2 d\tau}{\int h(\tau) d\tau}. \tag{D.3}$$

Calcul de la moyenne

$$\left.\frac{\partial H(f)}{\partial f}\right|_{f=0} = \left.\int h(\tau)(-j2\pi\tau)e^{-j2\pi f\tau}d\tau\right|_{f=0}$$
$$= -j2\pi\int h(\tau)\tau d\tau \tag{D.4}$$

c'est à dire

$$\int h(\tau)d\tau = -\frac{1}{j2\pi}\left.\frac{\partial H(f)}{\partial f}\right|_{f=0}. \tag{D.5}$$

Nous connaissons $H(f)$

$$H(f) = -j2\pi T_m \tag{D.6}$$

D'où

$$\int h(\tau)\tau d\tau = T_m \tag{D.7}$$

et puisque

$$\int h(\tau)d\tau = H(0) = 1, \tag{D.8}$$

la moyenne de τ

$$\boxed{\bar{\tau} = T_m.} \tag{D.9}$$

Calcul du moment d'ordre 2

De la même façon, nous avons

$$\left.\frac{\partial^2 H(f)}{\partial f^2}\right|_{f=0} = \int h(\tau)(-j2\pi\tau)^2 d\tau \tag{D.10}$$

on en déduit

$$\int h(\tau)\tau^2 d\tau = -\frac{1}{(2\pi)^2}\left.\frac{\partial^2 H(f)}{\partial f^2}\right|_{f=0}. \tag{D.11}$$

Or,

$$\frac{\partial^2 H(f)}{\partial f^2} = \frac{2(2\pi T_m)^2}{(1+j2\pi T_m f)^3} \tag{D.12}$$

d'où

$$\int h(\tau)\,\tau^2 d\tau = 2(T_m)^2. \tag{D.13}$$

Variance

$$\sqrt{Var(\tau)} = \sqrt{\bar{\tau} - \overline{\tau^2}} = \sqrt{2(T_m)^2 - (T_m)^2} = T_m \tag{D.14}$$

$$\boxed{\sqrt{Var(\tau)} = T_m} \tag{D.15}$$

D.2 Étalement Doppler

De la même façon que dans le cas précédent, on définit $g(\gamma)$ la fonction de densité de probabilité "en cornes" de l'étalement des fréquences Doppler. On définit sa transformée de Fourier $G(t)$

$$G(t) = \int_{-B_d/2}^{B_d/2} g(\gamma)\, e^{j2\pi\gamma t} d\gamma \tag{D.16}$$

La fonction $g(\gamma)$ a pour propriété d'être normalisée

$$\int_{-B_d/2}^{B_d/2} g(\gamma)\, d\gamma = 1 \tag{D.17}$$

Calcul de la moyenne de γ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} G(t)\Big|_{t=0} &= j2\pi \int_{-B_d/2}^{B_d/2} \gamma g(\gamma)\, d\gamma \\ &= j2\pi\bar{\gamma} \end{aligned} \tag{D.18}$$

de plus,

$$\frac{\partial}{\partial t} G(t)\Big|_{t=0} = \pi B_d \frac{\partial}{\partial t} J_0(t)\Big|_{t=0} = 0. \tag{D.19}$$

γ est donc centré

$$\boxed{\bar{\gamma} = 0.} \tag{D.20}$$

Calcul du moment d'ordre 2 de γ

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t)\Big|_{t=0} &= -(2\pi)^2 \int_{-B_d/2}^{B_d/2} \gamma^2 g(\gamma)\, d\gamma \\ &= -(2\pi)^2 \overline{\gamma^2} \end{aligned} \tag{D.21}$$

de plus,

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} G(t)\Big|_{t=0} = (\pi B_d)^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0(t)\Big|_{t=0} \tag{D.22}$$

or

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} J_0(t)\Big|_{t=0} = -\frac{1}{2} \tag{D.23}$$

d'où

$$\overline{\gamma^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{B_d}{2}\right)^2 \tag{D.24}$$

Variance

$$\sqrt{Var(\gamma)} = \sqrt{\bar{\gamma} - \overline{\gamma^2}} \tag{D.25}$$

$$\boxed{\sqrt{Var(\gamma)} = \frac{B_d}{2\sqrt{2}}}$$

D.3 Expression de B_d et T_m en fonction du produit B_dT_m

Dans nos simulations, le canal est caractérisé par le produit B_dT_m fixé pour chacune de ces simulations. Posons alors

$$B_dT_m = \alpha \tag{D.26}$$

pour une meilleure lecture des relations qui suivent.

Nous voulons que la variance de τ et la variance de γ soient égales et nous savons que $B_d \times T_m = \alpha$. Nous avons donc :

$$\frac{B_d}{2\sqrt{2}} = T_m \tag{D.27}$$

D'après D.26 et D.27, nous obtenons

$$\frac{(B_d)^2}{2\sqrt{2}} = \alpha \tag{D.28}$$

d'où

$$\boxed{B_d = \sqrt{2\alpha\sqrt{2}}} \tag{D.29}$$

et

$$\boxed{T_m = \sqrt{\frac{\alpha}{2\sqrt{2}}}} \tag{D.30}$$

ainsi sont choisies les valeurs de B_d et de T_m utilisées dans nos simulations.

Annexe E

Expression de la variance de l'innovation

Puisque l'innovation F est indépendante des composantes de $\mathbf{R}_P = \left(R_{\delta_P(0)}, \ldots, R_{\delta_P(N_P-1)}\right)^t$, nous avons

$$E\left[F_{\delta_P(k)} R^*_{\delta_P(\mu)}\right] = 0, \qquad \mu = 0, 1, \ldots, N_P - 1, \tag{E.1}$$

ce qui est également vérifié pour les données.

De plus, puisque $R_{\delta_P(k)} = C_{\delta_P(k)} A_{\delta_P(k)} + N_{\delta_P(k)}$, nous avons

$$E\left[R_{\delta_P(\nu)} R^*_{\delta_P(\mu)}\right] = \sqrt{E_{\delta_P(\nu)} E_{\delta_P(\mu)}}\phi\left(p_{\delta_P(\nu)} - p_{\delta_P(\mu)}\right) = H_{\nu\mu} \tag{E.2}$$

pour $\mu \neq \nu$,

$$E\left[R_{\delta_P(\nu)} R^*_{\delta_P(\mu)}\right] = \sqrt{E_{\delta_P(\nu)} E_{\delta_P(\mu)}}\phi\left(p_{\delta_P(\nu)} - p_{\delta_P(\mu)}\right) + N_0 = H_{\nu\mu} + N_0 \tag{E.3}$$

pour $\mu = \nu$ et

$$E\left[C_{\delta(k)} R^*_{\delta_P(\mu)}\right] = \sqrt{E_{\delta_P(\mu)} E_{\delta(k)}}\phi^*\left(p_{\delta_P(\mu)} - p_{\delta(k)}\right) \tag{E.4}$$

pour des valeurs arbitraires de μ et k. A présent, multiplions les deux côtés de l'expression

$$C_{\delta(k)} = F_{\delta(k)} + \sum_{\nu=0}^{N_P-1} W^*_{\delta(k)\nu} R_{\delta(k)} \tag{E.5}$$

par $R^*_{\delta(\nu)}$ et en en prenant l'espérance mathématique, nous obtenons

$$\sqrt{E_{\delta(\mu)} E_{\delta(k)}}\phi^*\left(p_{\delta(\mu)} - p_{\delta(k)}\right) = \sum_{\nu=0}^{N_P-1} W^*_{\delta(k)\nu} H_{\nu\mu} + W^*_{\delta(k)\nu} N_0 \tag{E.6}$$

ce qui est équivalent sous forme matricielle à :

$$\boxed{\mathbf{W}^{*t}_{\delta(k)}\left(\mathbf{H} + N_0\mathbf{I}\right) = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)}.} \tag{E.7}$$

En utilisant la relation matricielle

$$F_{\delta(k)} = C_{\delta(k)} - \mathbf{W}_{\delta(k)}^{*t}\mathbf{R}_P \tag{E.8}$$

et sa conjuguée, et en calculant l'espérance mathématique du produit $F_{\delta_P(k)}F_{\delta_P(k)}^{*} = \left|F_{\delta_P(k)}\right|^2$, nous obtenons l'expression recherchée de la variance de l'innovation

$$\Theta_{\delta(k)} = \phi\left(0\right)E_{\delta(k)} - \mathbf{W}_{\delta(k)}^{*t}\left(\mathbf{H} + N_0\mathbf{I}\right)\mathbf{W}_{\delta(k)}. \tag{E.9}$$

Annexe F

Identité de l'estimée MAP et de la prédiction linéaire EQMM

Le vecteur innovation $\mathbf{F} = \left(F_{\delta(0)}, F_{\delta(1)}, \ldots, F_{\delta(N-1)}\right)^t$ est un vecteur de distribution Gaussienne, centré, et indépendant du vecteur reçu $\mathbf{R}_P$, de densité de probabilité $\pi(.)$. L'estimée au sens du MAP du vecteur canal équivalent $\mathbf{C}$ est définie par

$$\hat{\mathbf{C}} = \arg\max_{\mathbf{C}} p\left(\mathbf{C}\,|\mathbf{R}_P\right). \tag{F.1}$$

Puisque $\mathbf{C} = \mathbf{F} + \mathbf{L}$ et puisque L dépend uniquement du vecteur reçu $\mathbf{R}_P$, nous avons

$$p\left(\mathbf{C}\,|\mathbf{R}_P\right) = p\left(\mathbf{C} - \mathbf{L}\,|\mathbf{R}_P\right) = p\left(\mathbf{F}\,|\mathbf{R}_P\right) = \pi\left(\mathbf{F}\right) = \pi\left(\mathbf{C} - \mathbf{L}\right) \tag{F.2}$$

qui atteint son maximum pour $\hat{\mathbf{C}} = \mathbf{L}$.

Annexe G

Probabilité d'erreur brute sur les symboles

G.1 Modulation MDP2

Le taux d'erreur brut binaire pour une modulation MDP-2 est égal à la probabilité de l'événement

$$A_{\delta(k)}\Lambda_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{L-1}\left(\left|\hat{C}^l_{\delta(k)}\right|^2 + \left(M^l_{\delta(k)}\hat{C}^{l*}_{\delta(k)} + M^{l*}_{\delta(k)}\hat{C}^l_{\delta(k)}\right)\Big/2\right) < 0 \tag{G.1}$$

En utilisant les notations de [59], il est possible d'écrire $A_{\delta(k)}\Lambda_{\delta(k)}$ sous la forme

$$D = \sum_{l=0}^{L-1}\left(A\left|X^l\right|^2 + B\left|Y^l\right|^2 + CX^lY^{l*} + C^*X^{l*}Y^l\right), \tag{G.2}$$

avec $A = 1$, $B = 0$, $C = 1/2$, $\mu_{xx} = \Phi_{\delta(k)}$, $\mu_{yy} = \Pi_{\delta(k)}$ et $\mu_{xy} = 0$. L'expression de la probabilité d'erreur $\Pr(D < 0)$ dans [59] nous permet d'obtenir l'expression explicite de la probabilité d'erreur sur les symboles

$$\boxed{P_{e\delta(k)} = \frac{1}{2^L}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu_{yy}/\mu_{xx}}}\right)^L \sum_{l=0}^{L-1}\binom{2L-1}{l}\left(\sqrt{1+\mu_{xx}/\mu_{yy}} - \sqrt{\mu_{xx}/\mu_{yy}}\right)^l} \tag{G.3}$$

avec

$$\boxed{\frac{\mu_{yy}}{\mu_{xx}} = \frac{\Pi_{\delta(k)}}{\Phi_{\delta(k)}} = \frac{\phi(0)E_{\delta(k)}+N_0}{\mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)}\mathbf{W}_{\delta(k)}} - 1} \tag{G.4}$$

G.2 Modulation MDP4

La probabilité d'erreur brute MDP-4 est égale à la probabilité de l'événement

$$2A^{\mathcal{R}}_{\delta(k)}\Lambda^{\mathcal{R}}_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{L-1}\left(\left(\left|\hat{C}^l_{\delta(k)}\right|^2 + \left(M^l_{\delta(k)}\hat{C}^{l*}_{\delta(k)} + M^{l*}_{\delta(k)}\hat{C}^l_{\delta(k)}\right)\Big/2\right)\right) < 0 \tag{G.5}$$

De la même façon que précédemment, en utilisant les notations de [59], nous pouvons écrire $2A^{\mathcal{R}}_{\delta(k)}\Lambda^{\mathcal{R}}_{\delta(k)}$ sous la forme

$$D = \sum_{l=0}^{L-1} \left(A \left| X^l \right|^2 + B \left| Y^l \right|^2 + C X^l Y^{l*} + C^* X^{l*} Y^l \right), \tag{G.6}$$

où $A = 1$, $B = 0$, $C = 1/2$, $\mu_{xx} = \Phi_{\delta(k)}$, $\mu_{yy} = \Pi_{\delta(k)}$ et $\mu_{xy} = 0$. En utilisant l'expression générale de [59], de la probabilité d'erreur $\Pr(D < 0)$, nous obtenons l'expression explicite de la probabilité d'erreur brute sur les symboles

$$\boxed{P_{e\delta(k)} = \frac{1}{2^L} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1+\mu_{yy}/\mu_{xx}}} \right)^L \sum_{l=0}^{L-1} \binom{2L-1}{l} \left(\sqrt{1 + \mu_{xx}/\mu_{yy}} - \sqrt{\mu_{xx}/\mu_{yy}} \right)^l,} \tag{G.7}$$

avec

$$\boxed{\frac{\mu_{yy}}{\mu_{xx}} = \frac{\Pi_k}{\Phi_k} = 2 \left(\frac{\phi(0) E_{\delta(k)} + N_0}{\mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{W}_{\delta(k)}} - 1 \right).} \tag{G.8}$$

Annexe H

Expression de l'estimée MAP à partir de la base étendue

Rappelons que la $k^{ème}$ composante de l'estimée au sens du MAP, $\hat{\mathbf{C}}$, du vecteur canal équivalent $\mathbf{C}$ est donnée par

$$\hat{C}_{\delta(k)} = \mathbf{W}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{R}_P. \tag{H.1}$$

En utilisant la décomposition

$$\mathbf{R}_P = \sum_{l=0}^{N_P-1} G_l \mathbf{B}_{Pl} \tag{H.2}$$

de $\mathbf{R}_P$ sur la base orthonormale $\{\mathbf{B}_{Pl}\}_{l=0}^{N_P-1}$, nous obtenons

$$\hat{C}_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{N_P-1} G_l \left(\mathbf{W}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{B}_{Pl} \right). \tag{H.3}$$

D'un autre côté , en utilisant

$$\mathbf{H}\mathbf{B}_{Pl} = \Gamma_l \mathbf{B}_{Pl}, \tag{H.4}$$

et en multipliant à droite les égalités

$$\mathbf{W}^{*t}_{\delta(k)} \left(\mathbf{H} + N_0 \mathbf{I} \right) = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \tag{H.5}$$

et

$$\tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{H} = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \tag{H.6}$$

par $\mathbf{B}_{Pl}$ et en égalant les deux termes de gauche

$$\left(\Gamma_l + N_0 \right) \mathbf{W}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{B}_{Pl} = \Gamma_l \tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{B}_{Pl}. \tag{H.7}$$

En rappelant la définition

$$B_{l\delta(k)} = \tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{B}_{Pl} \tag{H.8}$$

de la base orthonormale étendue $\{\mathbf{B}_l\}_{l=0}^{N_P-1}$, nous obtenons finalement

$$\boxed{\hat{C}_{\delta(k)} = \sum_{l=0}^{N_P-1} w_l G_l B_{l\delta(k)},} \tag{H.9}$$

où le facteur de pondération w_l est donné par

$$w_l = \frac{1}{1 + N_0 / \Gamma_l}. \tag{H.10}$$

Cette relation peut être exprimée sous forme matricielle

$$\boxed{\hat{\mathbf{C}} = \sum_{l=0}^{N_P-1} w_l G_l \mathbf{B}_l.} \tag{H.11}$$

Annexe I

Construction simplifiée de la base étendue

En rappelant l'expression

$$H_{\mu\nu} = \sqrt{E_{\delta(\mu)} E_{\delta(\nu)}}\phi\left(p_{\delta(\mu)} - p_{\delta(\nu)}\right) \tag{I.1}$$

de la $(\mu,\nu)^{ème}$ composante de la matrice de covariance Hermitienne, il est possible de ré-écrire la relation matricielle

$$\mathbf{HB}_{Pm} = \Gamma_m \mathbf{B}_{Pm} \tag{I.2}$$

comme

$$B_{m\delta(\mu)} = \frac{1}{\Gamma_l} \sum_{\nu=0}^{N_P-1} \sqrt{E_{\delta_P(\mu)} - E_{\delta_P(\nu)}}\phi\left(p_{\delta_P(\mu)} - p_{\delta_P(\nu)}\right) B_{m\delta_P(\nu)}, \quad \mu = 0, 1, \ldots, N_P - 1, \tag{I.3}$$

ou, de manière équivalente

$$B_{m\delta_P(k)} = \frac{1}{\Gamma_l} \sum_{\nu=0}^{N_P-1} \sqrt{E_{\delta_P(k)} E_{\delta_P(\nu)}}\phi\left(p_{\delta_P(k)} - p_{\delta_P(\nu)}\right) B_{m\delta_P(\nu)}, \quad \delta_P(k) \in S_P. \tag{I.4}$$

Pour étendre cette relation aux $\delta_D(k) \in S_D$, nous multiplions tout d'abord à gauche l'égalité

$$\mathbf{HB} = \Gamma\mathbf{B} \tag{I.5}$$

par $\tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)}$, et en utilisant la définition

$$B_{m\delta(k)} = \tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{B}_{Pm} \tag{I.6}$$

de $B_{l\delta(k)}$, nous obtenons

$$\tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)} \mathbf{HB}_{Pm} = \Gamma_m B_{m\delta(k)}. \tag{I.7}$$

Puis, la relation

$$\tilde{\mathbf{W}}^{*t}_{\delta(k)}\mathbf{H} = \mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)} \tag{I.8}$$

nous permet de terminer avec la relation matricielle

$$\mathbf{V}^{*t}_{\delta(k)}\mathbf{B}_{Pm} = \Gamma_m B_{m\delta(k)} \tag{I.9}$$

ou, de manière équivalente

$$\boxed{B_{m\delta(k)} = \frac{1}{\Gamma_m}\sum_{\nu=0}^{N_P-1}\sqrt{E_{\delta_D(k)}E_{\delta_P(\nu)}}\phi\left(p_{\delta_D(k)} - p_{\delta_P(\nu)}\right)B_{m\delta_P(\nu)}, \quad k \in S_D} \tag{I.10}$$

Table des figures

Premier chapitre 15
I.1 : Modèle du système OFDM continu en bande de base 18
I .2 : Le système OFDM continu s'interprète comme des canaux Gaussiens parallèles . . . 21
I.3 : Schéma symbolique des sous-porteuses du système OFDM à K porteuses et de largeur de bande W 22
I.4 : Modèle discret du système OFDM 23
I.5 : Représentation temps-fréquence d'un système OFDM 24
I.6 : Chaîne du système étudié 25
I.7 : Exemple de bloc temps-fréquence 26
I.8 : Représentation schématique des ensembles d'indexation 27
I.9 : Fonction d'autocorrélation du canal à spectre de puissance Doppler classique et à profil d'intensité multitrajets exponentiel 29
I.10 : Exemples de canaux pour diverses valeurs du produit B_dT_m 30
I.11 : Valeurs propres cumulées pour les canaux de propagation à $B_dT_m = 1/64^2$, $1/32^2$, $1/16^2$ et $1/8^2$ 33

Deuxième chapitre 35
II.1 : Interpolation MC constante par morceaux 39
II.2 : Interpolation MC linéaire par morceaux 39
II.3 : Filtrage basé sur la transformée de Fourier 40
II.4 : Réduction de rang basée sur la décomposition en valeurs singulières 42
II.5 : Filtre de Wiener bidimensionnel 44
II.6 : Schéma de la technique proposée par Frenger [28] 44
II.7 : Principe des méthodes avec retour de décision 46
II.8 : Principe des méthodes d'interpolation par TFD 47

II.9 : Principe des méthodes d'interpolation par TFD avec filtrage EQMM 47
II.10 : Norme du canal fourni par la méthode MC-1 54
II.11 : Norme du canal fourni par la méthode MC-2 55
II.12 : Schéma de l'algorithme d'estimation de canal par la FFT bidimensionelle 58
II.13 : Fonctions de diffusion du canal (a), du canal échantillonné aux symboles pilotes (b) 59
II.14 : Fonctions de diffusion des canaux pour $B_dT_m = 1/64^2$ (a) et $B_dT_m = 1/16^2$ (b) . . 59
II.15 : Fonctions de diffusion des canaux échantillonnés pour $B_dT_m = 1/64^2$ (a) et $B_dT_m = 1/16^2$ (b) 60
II.16 : Contours du canal échantillonné (a),(b) et du canal (c) avec $B_dT_m = 1/64^2$ dans le domaine de transformation pour des seuils de puissance de 0.05 et 0.1 60
II.17 : Contours du canal échantillonné (a),(b) et du canal (c),(d) avec $B_dT_m = 1/16^2$ dans le domaine de transformation pour des seuils de puissance de 0.15 et 0.25 61
II.18 : Bloc temps-fréquence considéré dans les simulations 61
II.19 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0 pour $B_dT_m = 1/64^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 63
II.20 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0 pour $B_dT_m = 1/32^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 64
II.21 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0 pour $B_dT_m = 1/16^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 64
II.22 : Taux d'erreur binaire en fonction du E_b/N_0 pour $B_dT_m = 1/8^2$ pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 65
II.23 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_dT_m = 1/64^2$, à $0dB$ et pour $L = 1$ 66
II.24 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_dT_m = 1/64^2$, à $0dB$ et pour $L = 4$ 67
II.25 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_dT_m = 1/8^2$, à $0dB$ et pour $L = 1$ 67
II.26 : Erreur quadratique moyenne sur le bloc temps fréquence pour $B_dT_m = 1/8^2$, à $0dB$ et pour $L = 4$ 68

Troisième chapitre 69
III .1 : Schéma-bloc du turbo-estimateur 74
III .2 : Modulation MDP-4 codé en treillis 74

III.3 : Première phase de l'entrelacement : remplissage du bloc 75
III.4 : Exemple de fonctionnement de l'entrelaceur 76
III.5 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/64^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 77
III.6 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/32^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 77
III.7 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/16^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 78
III.8 : Taux d'erreur binaire du turbo-estimateur pour un canal de $B_dT_m = 1/8^2$, pour des ordres de diversité $L = 1, 2$ et 4 78
III.9 : Comparaison des performances du turbo-estimateur et des algorithmes de référence pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1$ 79
III.10 : Convergence du turbo-estimateur 79
III.11 : Robustesse à l'erreur sur le B_dT_m du turbo-estimateur 80
III.12 : Taux d'erreur binaire par position dans la séquence binaire émise 81

Quatrième chapitre 82
IV.1 : Positions optimisées de 4 pilotes pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $B_dT_m = 1/32^2$ et de 16 pilotes pour $B_dT_m = 1/8^2$ avec $RSB = 15dB$ 91
IV.2 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_dT_m = 1/64^2$ 92
IV.3 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_dT_m = 1/32^2$ 92
IV.4 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement avec positions des pilotes optimisées ou non pour $B_dT_m = 1/8^2$ 93
IV.5 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement aux performances des méthodes de référence pour $B_dT_m = 1/32^2$ 94
IV.6 : Comparaison des performances de l'estimateur basé sur les pilotes uniquement aux performances des méthodes de référence pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1$ 94

Cinquième chapitre 96
V.1 : Comparaison des performances de l'estimateur avec initialisation améliorée aux performances des méthodes de référence pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1$ 98

V.2 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4 98
V.3 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/32^2$ et $L = 1, 2$ et 4 99
V.4 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/16^2$ et $L = 1, 2$ et 4 99
V.5 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/8^2$ et $L = 1, 2$ et 4 100
V.6 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée avec ou sans optimisation de la position des pilotes pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4 100
V.7 : Robustesse de l'estimateur avec conditions initiales améliorées - données non codées, $B_dT_m = 1/32^2$ et à $15dB$ et $L = 1$ 101
V.8 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/64^2$ et $L = 1, 2$ et 4 102
V.9 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/32^2$ et $L = 1, 2$ et 4 103
V.10 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/16^2$ et $L = 1, 2$ et 4 103
V.11 : Performances de l'estimateur avec initialisation améliorée pour $B_dT_m = 1/8^2$ et $L = 1, 2$ et 4 104
V.12 : Robustesse de l'estimateur avec conditions initiales améliorées - données non codées, $B_dT_m = 1/32^2$ et à $15dB$ et $L = 1$ 104

Bibliographie

[1] L.R. Bahl, J. Cocke, F. Jelinek, and J. Raviv. Optimal decoding of linear codes for minimizing symbol error rate. *IEEE Trans. on Information Theory*, pages 284–287, Mar. 1974.

[2] M. Bellanger. *Analyse des signaux et filtrage numérique adaptatif.* Masson, Paris, 1989.

[3] C. Berrou and A. Glavieux. Near optimum error correcting coding and decoding : Turbo-codes. *IEEE Trans. on Commun.*, 44(10) :1261–1271, Oct. 1996.

[4] C. Berrou, A. Glavieux, and P. Thitimajshima. Near shannon limit error-correcting coding and decoding : Turbo-codes. In *ICC'93*, pages 1064–1070, Geneva, Switzerland, May 1993. IEEE.

[5] S. B. Bulumulla. An adaptive diversity receiver for ofdm in fading channels. *IEEE*, 1998.

[6] S. B. Bulumulla, S. A. Kassam, and S. S. Venkatesh. A systematic approach to detecting ofdm signals in a fading channel. *IEEE Trans. on Commun.*, 48(5), May. 2000.

[7] X. Cai and A. N. Akansu. A subspace method for blind channel identification in ofdm systems. *IEEE*, 2000.

[8] J. K. Cavers. An analysis of pilot symbol assisted modulation for rayleigh fading channels. *IEEE Trans. on Vehic. Tech.*, 40(4), Nov. 1991.

[9] M. X. Chang and Y. T. Su. 2d regression channel estimation for equalizing ofdm signals. In *VTC'2000.* IEEE, 2000.

[10] R. W. Chang. Synthesis of band-limited orthogonal signals for multichannel data transmission. *The Bell System Tech. Journ.*, pages 1775–1796, Dec. 1966.

[11] A. Chini, Y. Wu, M. El-Tanany, and S. Mahmoud. Filtered decision feedback channel estimation for ofdm-based dtv terrestrial broadcasting system. *IEEE Trans. on Broadcast.*, 44(1), Mar. 1998.

[12] N. Chotikakamthorn and H. Suzuki. On identifiability of ofdm blind channel estimation. In *VTC'99.* IEEE, 1999.

[13] J. J. Van de Beek, O. Edfors, and P. O. Borjesson. Channel estimation in the uplink of an ofdm system.

[14] J. J. Van de Beek and *et al.* On channel estimation in ofdm systems. In *Vehicul. Tech. Conf. VTC' 95*, volume 2, pages 815–819, Chicago, IL, July 1995. IEEE.

[15] T. de Couasnon, R. Monnier, and J. B. Rault. Ofdm for digital tv broadcasting. *Signal Proc.*, 39(1-2) :1–32, Sep. 1994.

[16] M. de Courville. *Utilisation de bases orthogonales pour l'algorithmique adaptative et l'égalisation des systèmes multiporteuses.* PhD thesis, Telecom Paris, Paris, France, Oct. 1996.

[17] A. P. Dempster, N. M. Laird, and D. B. Rubin. Maximum-likelihood from incomplete data via the em algorithm. *J. Roy. Statist. Soc.*, 39 :1–17, 1977.

[18] C. Douillard, M. Jézéquel, C. Berrou, A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux. Iterative correction of intersymbol interference : Turbo-equalization. *ETT*, 6(5) :507–511, Sep.-Oct. 1995.

[19] D. E. Dudgeon and R. M. Mersereau. *Multidimensional digital signal processing.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1984.

[20] O. Edfors and *et al.* An application of the singular value decomposition to ofdm channel estimation.

[21] O. Edfors and *et al.* Ofdm channel estimation by singular value decomposition. *IEEE Trans. on Commun.*, 46(7), Jul. 1998.

[22] V. Engels and H. Rohling. Differential modulation techniques for a 34 mbit/s radio channel using orthogonal frequency-division multiplexing. *Wireless Pers. Commun.*, 2(1-2) :29–44, 1995.

[23] V. Engels and H. Rohling. Multilevel differential modulation techniques (64-dapsk) for multicarrier transmission systems. *Eur. Trans. Telecommun. Rel. Technol.*, 6(6) :633–640, Nov. 1995.

[24] European Telecomunications Standards Institute ETSI. Radio broadcasting systems, digital audio broadcasting (dab) to mobile, portable and fixed receivers. In *ETS 300 401*, Valbonne, France, Feb. 1995.

[25] European Telecomunications Standards Institute ETSI. Digital broadcasting for television, sound and data services. In *prETS 300 744(draft version 0.0.3)*, Avr. 1996.

[26] M. Feder and E. Weinstein. Parameter estimation of superimposed signals using the em algorithm. *Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*, 36 :477–489, Apr. 1988.

[27] B. Le Floch, M. Alard, and C. Berrou. Coded orthogonal frequency division multiplex. *Proceedings of the IEEE*, 83(6) :982–996, June 1995.

[28] P. Frenger and A. Svensson. A decision directed coherent detector for ofdm. In *Vehic. Tech. Conf. VTC'96*, pages 1584–1588, Atlanta, GA, Apr. 1996. IEEE.

[29] C. N. Georghiades. *Algorithms for joint synchronization an decoding.* Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, 1992.

[30] C. N. Georghiades and J. C. Han. Optimum decoding of trellis-coded modulation in the presence of phase-errors. In *Int. Symp. on Information Theory and Its Applications (ISITA'90)*, Hawai, Nov. 1990.

[31] C. N. Georghiades and D. L. Snyder. The expectation-maximization for symbol unsynchronized sequence detection. *IEEE Trans. Commun.*, 39 :54–61, Jan. 1991.

[32] R. Haas. *Application des transmissions porteuses multiples aux communications radiomobiles.* Phd thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications, Paris, France, Jan. 1996.

[33] A. A. Hassan and J. C. Belfiore. Rayleigh fading channel estimation using shmidt polynomials. In *Vehic. Techn. Conf. VT'2000*, pages 2098–2102. IEEE, 2000.

[34] R. W. Heath and G. B. Giannakis. Blind channel identification for multirate precoding and ofdm systems. In *DSP'97*, 1997.

[35] P. Hoëher. Tcm on frequency-selective land-mobile fading channels. In *Tirrenia Int. Workshop Digit. Commun.*, Tirrenia, Italy, Sep. 1991.

[36] P. Hoëher, S. Kaiser, and P. Robertson. Two-dimensional pilot-symbol-aided channel estimation by wiener filtering. *IEEE*, pages 1845–1848, 1997.

[37] M.H. Hsieh and C.H. Wei. Channel estimation for ofdm systems based on comb-type pilot arrangement in frequency selective fading channels. *IEEE Trans. on Consumer Electr.*, 44(1), Feb. 1998.

[38] A. Huang and Y. Zhao. Estimating channel response from pilot subcarriers pairs for ofdm systems. *IEEE*, 1997.

[39] A. A. Hutter, R. Hasholzner, and J. S. Hammerschmidt. Channel estimation for mobile ofdm systems. *IEEE*, 1999.

[40] E. Jaffrot and M. Siala. Turbo-channel estimation for ofdm systems on highly time and frequency selective channels. In *ICASSP 2000*, Istanbul, Turkey, Jun. 2000.

[41] L. Jarbot. Combined decoding and channel estimation of ofdm systems in mobile radio networks. *IEEE*, 1997.

[42] V.K. Jones and G. G. Raleigh. Channel estimation for wireless ofdm systems. *IEEE*, 1998.

[43] V. P. Kaasila. Performance analysis of an ofdm system using data-aided channel estimation. *IEEE*, 1999.

[44] G. K. Kaleh. Joint decoding and phase estimation via the expectation-maximization algorithm. In *Int. Symp. on Information Theory*, San Diego, CA, Jan. 1990.

[45] Lavielle. Discussion of meng and van dik's paper : The em algorithm - an old folk song to a fast new tune. *J.R. Stat. Soc. B*, 59(3) :556–557, 1997.

[46] Y. Li. Pilot-symbol-aided channel estimation for ofdm in wireless systems. *IEEE*, 1999.

[47] L. R. Liporace. Maximum likelihood for multivariate observations of markov sources. *IEEE Trans. on Inform. Theory*, IT-28 :729–734, Sep. 1982.

[48] V. Mignone, A. Morello, and M. Visintin. Cd3-ofdm : A new channel estimation method to improve the spectrum efficiency in digital terrestrial television systems. In *International Broadcasting Convention*. IEE, 14-18 Sep. 1995.

[49] J. W. Modestino. Reduced-complexity iterative maximum-likelihood sequence estimation on channels with memory. In *Int. Symp. on Inform. Theory*, San Antonio, TX, Jan. 1993. IEEE.

[50] M. L. Moher and J. H. Lodge. Tcmp - a modulation and coding strategy for rician-fading channels. *IEEE Journal on Select. Areas in Commun.*, 7(9) :1347–1355, Dec. 1989.

[51] J. K. Moon and S. I. Choi. Performance of channel estimation methods for ofdm systems in a multipath fading channels. *IEEE Trans. on Consum. Electr.*, 46(1) :161–170, Feb. 2000.

[52] E. Moulines, P. Duhamel, J.-F. Cardoso, and S. Mayrargue. Subspace methods for the blind identification of multichannel fir filters. *IEEE Trans. on Sig. Proc.*, 43(2) :516–525, Feb. 1995.

[53] B. Muquet and *et al.* A subspaced based blind and semi-blind channel indentification method for ofdm systems. *IEEE*, 1999.

[54] F. D. Nunes and J. M. N. Leitao. Nonlinear channel estimation in fading ofdm systems. In *Global Telecom. Conf. GLOBECOM'99*. IEEE, 1999.

[55] T. Onizawa and *et al.* A simple adaptive channel estimation scheme for ofdm systems. In *VTC'99*. IEEE, 1999.

[56] R. F. Ormondroyd and E. A. Al-Susa. A high efficiency channel estimation and equalisation strategy for a broadband cofdm system.

[57] A. Picart, P. Didier, and A. Glavieux. Turbo-detection : a new approach to combat channel frequency selectivity. In *ICC'97*, Montreal, Canada, 8-12 June 1997.

[58] H. V. Poor. On parameter estimation in ds/ssma formats. In *Advances in Communications and Control Systems*, pages 59–70, Baton Rouge, LA, Oct. 1988.

[59] J. G. Proakis. *Digital Communications.* McGraw-Hill, second edition, 1989.

[60] J. G. Proakis. *Digital Communications.* McGraw-Hill, third edition, 1995.

[61] C. Reiners and H. Rohling. Multicarrier transmission technique in cellular mobile communications systems. In *IEEE Vehic. Technol. Conf. (VTC'94)*, pages 1645–1649, Stockholm, Sweden, Jun. 1994.

[62] J. Rinne and M. Renfors. Pilot spacing in orthogonal frequency division multiplexing systems on practical channels. *IEEE Trans. on Consum. Electr.*, 42(4) :959–962, Nov. 1996.

[63] H. Rohling and K. Bruninghaus. High rate ofdm-modem with quasi-coherent dapsk. 1997.

[64] H. Rohling and R. Grünheid. Multicarrier transmission technique in mobile communication systems. In *RACE Mobile Commun. Summit*, pages 270–276, Cascais, Nov. 1995.

[65] F. Said and A. H. Aghvami. Linear two dimensional pilot assisted channel estimation for ofdm systems. In *Telecomm. 98.* IEE, 29^{th} Mar. - 1^{st} Apr. 1998.

[66] F. Said and A. H. Aghvami. Two dimensional pilot assisted channel estimation for turbo-coded ofdm systems. 1999.

[67] L. L. Scharf. *Statistical signal processing : detection, estimation, and time series analysis.* Addison-Wesley, 1991.

[68] M. Siala and E. Jaffrot. Semi-blind maximum a posteriori fast fading channel estimation for multicarrier systems. In *GRETSI'99*, Vannes, France, Sep. 1999.

[69] D. L. Snyder and M. I. Miller. *Random processes in time and space.* Springer-Verlag, New York, 1991.

[70] G. L. Stüber and M. Russel. Terrestrial digital video broadcasting for mobile reception using ofdm. In *Globecom'95*, pages 2049–2053, Singapore, Nov. 1995.

[71] F. Tufvesson and T. Maseng. Pilot assisted channel estimation for ofdm in mobile cellular systems. *IEEE*, 1997.

[72] S. B. Weinstein and P. M. Ebert. Data transmission by frequency-division multiplexing using the discrete fourier transform. *IEEE Trans. on Commun. Tech.*, COM-19(5) :628–634, Oct. 1971.

[73] C. F. Wu. On the convergence properties of the em algorithm. *Ann. Stat.*, 11(1) :95–103, 1983.

[74] L. J. Cimini Y. Li and N. R. Sollenberger. Robust channel estimation for ofdm systems with rapid dispersive fading channels. *IEEE*, 1998.

[75] N. Seshadri Y. Li and S. Ariyavisitakul. Channel estimation for ofdm systems with transmitter diversity in mobile wireless channels. *IEEE Journ. on Select. Areas in Commun.*, 17(3), Mar. 1999.

[76] B. Yang, K. B. Letaief, R. S. Cheng, and Z. Cao. Robust and improved channel estimation for ofdm systems in frequency selective fading channels. In *Global Telecom. Conf. GLOBECOM'99*, pages 2499–2503. IEEE, 1999.

[77] B. Yang, K. B. Letaief, R. S. Cheng, and Z. Cao. Windowed dft based pilot-symbol-aided channel estimation for ofdm systems in multipath fading channels. In *Vehicular Tech. Conf.* IEEE, 2000.

[78] S. M. Zabin and H. V. Poor. Efficient estimation of class a noise parameters via the em algorithm. *IEEE Trans. Inform. Theory*, 37 :60–72, Jan. 1991.

[79] Y. Zhao and A. Huang. A novel channel estimation method for ofdm mobile communication systems based on pilot signals and transform-domain processing. *IEEE*, 1997.