ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Thèse présentée pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Spécialité: physique des plasmas

par

Alexandre DUCROCQ

Rôle des instabilités électroniques de dérive dans le transport électronique du propulseur à effet Hall

soutenue le 7 novembre 2006 devant le jury composé de:

Président	M. Dominique GRESILLON
Rapporteurs	M. Fabrice DOVEIL M. Xavier GARBET
Examinateurs	M. Jean-Pierre BŒUF Mme. Anne CADIOU
Invités	M. Stéphane D'ESCRIVAN M. Stephan ZURBACH
Directeur de thèse	M. Jean-Claude ADAM

Centre de Physique Théorique (CPHT) — UMR 7644 CNRS/École Polytechnique

Remerciements

Avant que vous ne vous plongiez dans les méandres plus ou moins tortueux de ce travail de thèse, il est de tradition de commencer par remercier les personnes sans qui rien n'aurait été possible. Ce n'est pourtant pas la conformité aux usages qui me pousse à écrire ici quelques lignes sur ces personnes, mais bel et bien un sentiment de profonde reconnaissance.

Tout commença par un échange de courriel avec André Bouchoule à propos des développements récents autour de la propulsion ionique. Il me fit rapidement savoir que les activités du CPHT pouvaient correspondre à ma curiosité quant à ce domaine. Je le remercie donc pour m'avoir mis sur la piste de cette thèse en me communiquant ces précieuses informations. Trouver le sujet de thèse motivant et épanouissant n'est effectivement pas une chose aisée pour un étudiant qui n'a de fait que peu de recul sur les activités de recherche.

Je remercie de même Patrick Mora en tant que directeur du Centre de Physique Théorique de m'en avoir ouvert les portes me permettant ainsi de bénéficier d'un environnement scientifique exceptionnel.

Bien entendu j'adresse de chaleureux et sincères remerciements à Jean-Claude Adam qui m'a proposé cette thèse et a su diriger mon travail pendant ces trois années avec un subtile mélange de pédagogie et d'expertise. Tout aussi chaleureusement et sincèrement, je remercie Anne Héron qui joua le rôle de codirectrice de thèse. Son sourire et son inébranlable bonne humeur furent par ailleurs d'un soutien majeur. Jean-Claude et Anne (leur prénom me vient naturellement mis bout-à-bout tant ils forment une équipe difficilement dissociable) furent tous deux d'une disponibilité physique et intellectuelle rarement mise en défaut. La qualité de mon travail leur doit beaucoup. Leur sens de la nuance et l'acuité de leur esprit auront probablement influencé ma démarche au delà de la simple sphère scientifique. Je n'oublie pas d'associer à ses remerciements Guy Laval qui a été à l'origine de la plupart des développements théoriques de par sa considérable connaissance (et aisance) de la physique des plasmas.

Je suis reconnaissant à Fabrice Doveil et à Xavier Garbet pour avoir consacré de leur temps en tant que rapporteur de thèse, à Dominique Gresillon pour avoir présidé le jury de thèse ainsi qu'à Anne Cadiou, Jean-Pierre Bœuf, Stéphane D'Escrivan et Stephan Zurbach pour avoir été membre du mon jury de thèse.

Cette thèse fait partie d'un vaste effort de recherche dans le contexte du Groupement de Recherche n° 2759 « Propulsion Spatiale à Plasma »chargé de l'étude globale du fonctionnement du propulseur à effet Hall. SNECMA et le CNES, tous deux parties du GdR, sont d'ailleurs à l'origine de cette thèse puisqu'ils l'ont financé. Je les en remercie. Merci également aux équipes expérimentales du GdR avec lesquelles j'ai pu travailler.

Je remercie Thomas Grismayer pour les innombrables discussions de Physique que nous avons pu avoir au laboratoire, dans le RER ou simplement autour d'un verre. Elles ont bien souvent dépassé le cadre scientifique, et ce fut

un réel ravissement. Ma thèse a donc été aussi cela : l'occasion de connaître des personnes dont on découvre la proximité intellectuelle et avec lesquelles le plaisir de l'échange est toujours présent.

Enfin, j'adresse ma dernière pensée à mes proches qui constituent un soutien fondamental et à qui je témoigne toute mon affection.

Table des matières

Liste des symboles **vii**

Introduction générale **1**

Table des figures **9**

Préliminaires **13**

1 Le transport anormal dans les codes hybrides 13

2 Mise en évidence expérimentale de la turbulence dans le propulseur 16

3 Simulation particulaire 2D (Z, θ) 18

3.1 Comportement propulseur 19

3.2 Le champ électrique fluctuant 24

Partie I Instabilités électroniques de dérive **29**

Chapitre 1 Relation de dispersion **31**

1.1 Modèle 32

1.2 Établissement de la relation de dispersion 37

1.2.1 Population ionique 37

1.2.2 Population électronique 38

1.2.3 Relations de dispersion 41

1.3 Gradient de densité 43
1.4 Étude analytique 45
1.4.1 Hypothèse plasma froid 45
1.4.2 Cas $k_y V_d \approx n\Omega$ 47
1.4.3 Cas $F(k_y V_d) = 0$ 47

Chapitre 2 Étude linéaire de l'instabilité 49
2.1 Perturbation mono-dimensionnelle 50
2.1.1 Modes instables azimutaux 50
2.1.2 Influence du champ magnétique 54
2.1.3 Influence de la température 56
2.1.4 Influence du gradient de densité 58
2.2 Extension bi-dimensionnelle : modes obliques 59
2.3 Perturbation tri-dimensionnelle 63
2.4 Validation du domaine linéaire de l'instabilité 65
2.4.1 Modèle particulaire explicite 65
2.4.2 Phase linéaire de l'instabilité 66
2.4.3 Évolution de la fonction de distribution 70

Chapitre 3 Déformation de la fonction de distribution électronique et modes instables 73
3.1 Relation de dispersion intégrale 74
3.2 Déformation de la fonction de distribution 75
3.3 Évolution des solutions selon la forme de la fonction de distribution 76
3.3.1 Perturbation azimutale 77
3.3.2 Perturbation oblique 80

Chapitre 4 Comparaison avec les simulations 85
4.1 Simulation fortement discrétisée 86
4.2 Simulation multi-mode 90
4.2.1 Système 1D 90
4.2.2 Système 2D 93
4.3 Corrélation entre l'instabilité et le transport électronique . 94

Chapitre 5 Conclusion de la première partie 99

Partie II Transport électronique stochastique 101

Chapitre 6 Interaction onde-particule dans un champ magnétique 103

6.1 Dynamique électronique : cas d'une onde azimutale 104

6.1.1 Configuration et équations 104

6.1.2 Interaction onde-électron : modèle de Karney . . . 106

6.1.3 Transport électronique 111

6.2 Généralisation à une onde oblique 111

Chapitre 7 Validation numérique du modèle de transport stochastique 115

7.1 Modèle numérique 115

7.2 Cas d'une onde azimutale 117

7.2.1 Amplitude d'onde constante 118

7.2.2 Amplitude extraite du code PIC 120

7.3 Cas d'une onde oblique 124

7.3.1 Cas mono-mode 124

7.3.2 Cas multi-mode 125

Chapitre 8 Conclusion de la deuxième partie 129

Limites et perspectives 131

Annexes 135

Annexe A Calcul de la densité électronique perturbée 135

Annexe B Calcul de la vitesse de diffusion axiale 141

Annexe C Mise en évidence de l'instabilité par diffusion collective de la lumière 145

C.1 Diffusion de la lumière par un milieu turbulent 145

C.2 Détection du champ diffusé 146
C.2.1 Détection hétérodyne 147
C.2.2 Obtention du signal complexe 147

Bibliographie **151**

Publications **157**

Liste des symboles

Dans ce manuscrit de thèse, la décomposition des variables parallèlement et perpendiculairement au champ magnétique est utilisée à plusieurs reprises. Les indices $\parallel$ et $\perp$ correspondent respectivement à ces deux composantes.

Caractéristiques plasma

M ..... masse ionique

$m = 9.1\ 10^{-31}$kg ..... masse électronique

$e = 1.6022\ 10^{-19}$C ..... charge élémentaire de l'ion

q ..... charge électrique élémentaire

n_0 ..... densité du plasma

n_i, n_e ..... densités ionique et électronique

T ..... température électronique

V_{th}, V_{th_i} ..... vitesses thermiques électronique et ionique

ω_{pe}, ω_{pi} ..... pulsations plasma électronique et ionique

λ_D ..... longueur de Debye

Ω, Ω_{ci} ..... pulsations cyclotroniques électronique et ionique

r_L, r_{L_i} ..... rayons de Larmor électronique et ionique

ω_{UH} ..... fréquence hybride haute

$b = k^2 V_{th}^2/\Omega^2$ ..... paramètre mesurant les effets de rayon de Larmor fini

x, y, z ..... coordonnées spatiales axiale, azimutale et radiale.

$\eta = y - V_d t$ ... coordonnée spatiale azimutale dans le repère dérivant à V_d.

$\mathbf{r}$ ..... vecteur position

$\mathbf{v_i}, \mathbf{v_e}$ ..... vecteurs vitesse ionique et électronique

f_e ..... fonction de distribution électronique

t, τ ..... temps

L_n, V_n ..... longueur et vitesse de dérive de gradient de densité

Champs électrique et magnétique

$\mathbf{B}, B_0$ ..... champ magnétique et amplitude correspondante
$\mathbf{E}, E_0$ ..... champ électrique et amplitude correspondante
V_d ..... vitesse de dérive électrique
L_B, V_B .... longueur et vitesse de dérive de gradient de champ magnétique

Champ fluctuant, instabilité

$\mathbf{E_{fluct}}, E_f$ ..... champ électrique fluctuant et amplitude correspondante
Φ, ϕ ..... potentiel électrostatique et amplitude associée
ω, ω_d .. pulsations de l'onde dans le repère du laboratoire et dans le repère dérivant à V_d
ω_r ..... partie réelle de la pulsation de l'onde
γ ..... taux de croissance de l'onde
$\mathbf{k}$ ..... vecteur d'onde
λ ..... longueur d'onde
V_Φ ..... vitesse de phase de l'onde
Δv ..... largeur de piégeage
V_σ ..... vitesse limite d'interaction onde-électron
ω_B ..... fréquence de piégeage ou de rebondissement

Fonctions mathématiques

J_n ..... fonctions de Bessel
I_n ..... fonctions de Bessel modifiées
Z ..... fonction de Fried et Conte

Divers

$\varepsilon_0 = 8.854\ 10^{-12}\mathrm{F.m^{-1}}$ ..... permittivité du vide
$k_B = 1.38\ 10^{-23}\mathrm{J.K^{-1}}$ ..... constante de Boltzmann
$xlong, ylong$ ..... dimensions axiale et azimutale de la simulation PIC

Introduction générale

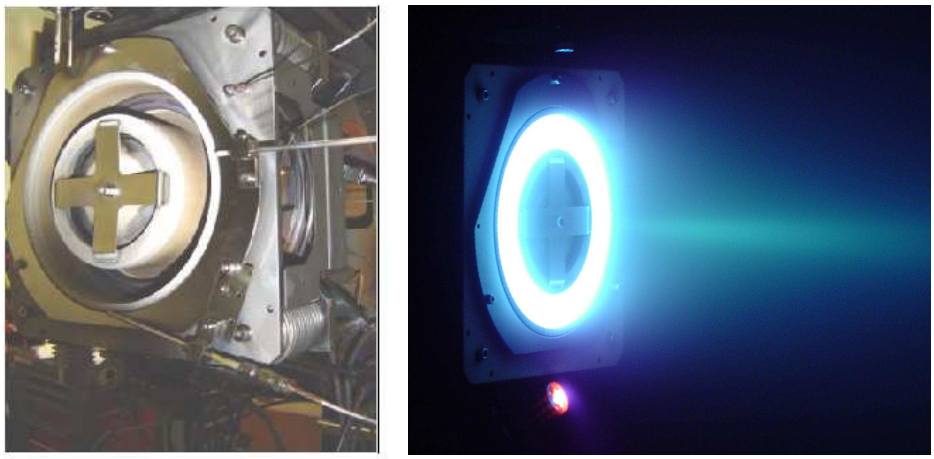
DEUX mille cinq cents, c'est environ le nombre de satellites qui sont en ce moment même en orbite autour de la Terre [CNES]. Leur nombre augmente continûment depuis le lancement en 1957 du premier d'entre eux, le satellite soviétique Spoutnik. D'abord symbole de la conquête de l'espace par l'homme, les satellites, auxquels il faut ajouter les sondes spatiales, sont maintenant présents dans de nombreux domaines économiques, scientifiques et militaires. Les enjeux associés sont considérables et sont à l'origine des efforts de recherche développés dans le cadre de la propulsion spatiale. Il s'agit en outre de maîtriser parfaitement la trajectoire de l'engin une fois celui-ci détaché de son lanceur. Dans le cas d'un satellite, il faut considérer son changement d'orbite jusqu'à l'orbite finale, l'orientation correcte de celui-ci par rapport à l'objectif et la correction des nombreuses perturbations de trajectoire tout au long de son utilisation (maintien en orbite et contrôle d'attitude). Il est donc équipé de propulseurs qui éjectent de la matière à une vitesse élevée dans la direction choisie créant une poussée conformément au principe de réaction.

Depuis le début de l'ère spatiale, l'un des défis majeurs de l'industrie aérospatiale est de faire face à l'accroissement des besoins en charge utile. Les satellites de technologie de plus en plus avancée, tout comme les sondes d'exploration, s'alourdissent et nécessitent par conséquent une puissance de plus en plus importante pour pouvoir être manœuvrés. Deux possibilités s'offrent à l'accroissement de la poussée : augmenter la vitesse d'expulsion de la matière ou augmenter le débit massique. La seconde possibilité pose problème dans la mesure où une augmentation du débit signifie une masse de propergol plus importante à emporter, ce qui alourdit d'autant la charge à propulser. Or, la part de carburant dans la charge utile est déjà très importante. A titre d'exemple, le carburant emporté par un gros satellite dont la durée de vie en orbite excède les 10 ans, ou par un module orbital type Cassini, peut représenter plus de 50 % de leur masse totale au décollage. Il faut donc se concentrer essentiellement sur la vitesse d'expulsion de la matière. La propulsion chimique, bien au point et en position de large monopole en matière de propulsion spatiale depuis des décennies, rencontre des limites inhérentes à son principe. Les valeurs théoriques de vitesse d'éjection maximale n'offrent que peu de marge pour les développements futurs. C'est dans ce cadre de nécessaire rupture en matière de mode de propulsion que la propulsion élec-

trique poursuit son développement. Encore loin de rivaliser avec les poussées produites par la propulsion chimique, elle en constitue à l'heure actuelle une alternative crédible pour maintes applications. Son atout principal réside dans les vitesses d'éjection très élevées qu'elle permet par rapport à la propulsion chimique (jusqu'à 20 fois supérieure). Les propulseurs électriques autorisent ainsi un gain de charge utile important (1 tonne sur la masse au décollage pour un satellite de 4.5 tonnes par exemple) les rendant particulièrement compétitifs.

Parmi les différents types de propulseurs électriques existants, le propulseur à effet Hall présente un intérêt certain pour le contrôle d'attitude et d'orbite. Le principe a été avancé relativement simultanément en URSS et aux USA dans les années 1960. Rapidement mis de côté par les américains, les soviétiques en améliorent largement le rendement et passent à l'exploitation pratique du principe lors du lancement en 1971 du premier satellite équipé d'un propulseur à effet Hall. Les performances remarquables de ce propulseur poussent d'autres pays tels la France, le Japon ou les Etats-Unis à s'intéresser à cette technologie dans les années 1990. Le partenariat entre l'industriel russe Fakel, détenteur des brevets sur le SPT 100 (Stationary Plasma Thruster), et l'entreprise française SEP (maintenant partie de SNECMA du groupe SAFRAN) soutenue par le CNES en 1992 en est l'illustration parfaite.

Les ambitions industrielles françaises iront au delà de la simple exploitation des brevets du SPT 100. En 1996 est créé le Groupement de Recherche GdR n°1184 « Propulsion à Plasma pour Systèmes Orbitaux »associant le CNRS, le CNES, SEP et l'ONERA afin de lever les quelques zones d'ombre subsistantes quant au fonctionnement du propulseur. Sa forme actuelle, GdR n°2759 « Propulsion Spatiale à Plasma », regroupe le CNRS, le CNES, SNECMA et plusieurs universités. L'objectif du GdR est de conduire *in fine* à un modèle auto-consistant et surtout prédictif du comportement du propulseur. Ce modèle limitera de manière importante le coût encore très élevé à l'heure actuelle des qualifications expérimentales lors du développement industriel des futurs propulseurs. Pour cela, le GdR étudie le propulseur à effet Hall tant du point de vue expérimental grâce au moyen d'essai PIVOINE ("Propulsion Ionique pour Vols Orbitaux-Interprétations et Nouvelles Expériences", Laboratoire d'Aérothermique) à Orléans que du point de vue de la modélisation théorique et numérique. Les activités expérimentales du GdR sont menées par le Laboratoire de l'Aérothermique (AERO à Orléans), le Laboratoire de Physique des Gaz et des Plasmas (LPGP à Orsay), le Groupe de Recherches sur l'Energétique des Milieux Ionisés (GREMI à Orléans), le Centre de Recherche sur les Matériaux à Hautes Températures (CRMHT à Orléans), le Laboratoire de Physique et Chimie de l'environnement (LPCE à Orléans), le Laboratoire de Magnétisme et d'Optique de Versailles (LMOV à Versailles) et l'Institute of Fundamental Technological Research (IPPT à Varsovie). Le Centre de PHysique Théorique (CPHT à Palaiseau), le Centre de physique des Plasmas et de leurs Applications (CPAT à Toulouse) et le Laboratoire de Physique des Milieux Ionisés et applications (LPMI à Nancy)



(a) Propulseur à l'arrêt (b) Propulseur en fonctionnement

FIG. 1 – *Photos du propulseur à effet Hall*

fournissent pour leur part une contribution théorico-numérique à la modélisation générale du propulseur. En particulier, les activités du CPAT sont orientées vers le développement de codes hybrides qui serviront de bases à la modélisation prédictive du propulseur. La modélisation développée au CPHT utilise quant à elle une approche particulaire en vue d'éclaircir quelques mécanismes spécifiques fondamentaux notamment celui du transport des électrons au travers des lignes de champ magnétique.

Le fonctionnement en première approche du propulseur à effet Hall peut être décrit assez simplement. La figure 2 représente le schéma d'une coupe diamétrale de celui-ci, deux photos du propulseur en marche et à l'arrêt étant exposées en figure 1. Il est constitué de deux anneaux diélectriques de céramique. L'espace entre ces deux anneaux constitue la chambre (ou le canal) dans laquelle se situe le plasma lorsque le propulseur est en fonctionnement. Un champ magnétique dans la direction radiale est crée par un jeu de 5 bobines inductives. La symétrie du champ magnétique est garantie par la carcasse métallique du propulseur qui sert de circuit magnétique. Un champ électrique dans la direction axiale est créé par deux électrodes situées aux extrémités de la chambre. L'anode, au potentiel typique de 300 V, est au fond de la chambre et constitue la paroi par laquelle est injecté le gaz propulsif. La cathode, au potentiel de -30 V typiquement, est située en sortie de moteur, à l'extérieur. Le principe de fonctionnement est le suivant : à l'allumage, les électrons émis par la cathode creuse sont attirés vers l'intérieur de la chambre du fait de la différence de potentiel appliqué entre la cathode et l'anode. Ils sont piégés dans la configuration de champs magnétique et électrique croisés, décrivant ainsi un mouvement de rotation autour de l'axe du propulseur à la vitesse de dérive électrique. L'énergie cinétique associée des électrons est telle que le seuil d'ionisation du gaz injecté par ailleurs est atteint. Les atomes sont ionisés par collisions avec les électrons. Le plasma est créé et un

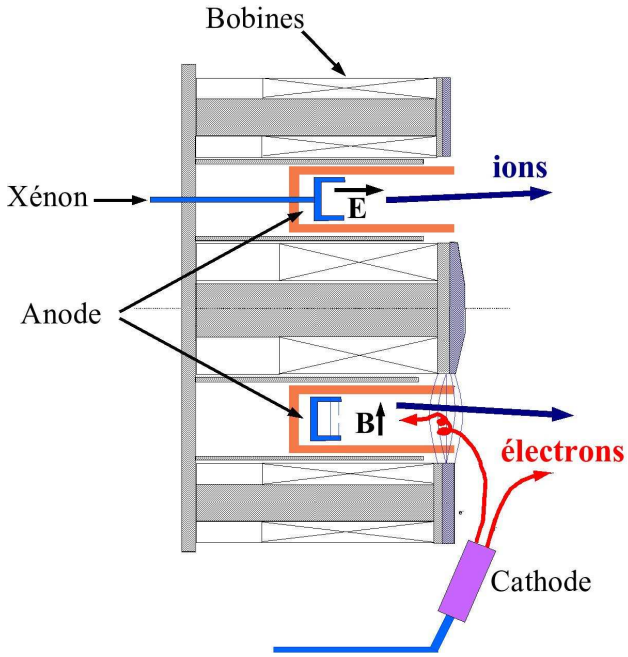


FIG. 2 – *Principe de fonctionnement d'un SPT.*

champ électrique axial auto-consistant s'établit du fait de la baisse locale de la conductivité électronique en sortie de canal due au champ magnétique. Les ions, non magnétisés du fait de leur masse importante, sont accélérés vers l'extérieur par ce champ électrique créant ainsi la poussée. Une partie des électrons émis par la cathode neutralise le flux d'ions vers l'extérieur.

Le gaz couramment utilisé est le gaz neutre Xénon. Le choix du gaz se fait selon plusieurs critères [Brugova & Ermakov 1994] : le Xénon est chimiquement neutre évitant ainsi les éventuels problèmes de corrosion ; il possède un seuil d'ionisation bas (12.13 eV) permettant une ionisation quantitative importante ; et sa masse élevée (131.29 g/mol) conduit à une quantité de mouvement éjectée élevée. Le tableau Fig.3 expose en quelques chiffres les caractéristiques principales classiques d'un propulseur à effet Hall particulier, le SPT 100.

Cette description succincte ne doit pas cacher les divers points de fonctionnement encore incompris. L'un d'entre eux concerne le transport dit anormal des électrons à travers les lignes de champ magnétique. Le qualificatif "anormal" est utilisé par opposition à la diffusion dite classique qui repose sur les collisions électron-neutre, ces dernières permettant aux électrons de progresser aux travers des lignes de champ magnétique grâce au champ électrique axial. En effet, les données théoriques [Morozov *et al.* 2000], numériques [Hagelaar *et al.* 2002, Hagelaar *et al.* 2003] et expérimentales [Smirnov *et al.* 2004, Meezan *et al.* 2001, Zhurin *et al.* 1999] montrent que la densité des atomes neutres en sortie de canal est largement insuffisante pour considérer les collisions électron-Xénon comme seule source de conductivité. Il existe

Diamètre externe	100 mm
Diamètre interne	70 mm
Longueur de canal	25 mm
Poids	4 kg
Tension de décharge	300 V
Courant de décharge	4.5 A
Puissance	1350 W
Champ magnétique maximal	250 G
Poussée	80 mN
Impulsion spécifique	1500 s
Température électronique	15 eV
Vitesse des ions	15-20 $km.s^{-1}$
Densité électronique	$10^{11} \sim 10^{12} cm^{-3}$
Densité des neutres	$10^{13} \sim 10^{14} cm^{-3}$
Durée de vie démontrée	7000 h

FIG. 3 – *Caractéristiques d'un propulseur à effet Hall (SPT 100) [Albarède 2004, Darnon 1999, Prioul 2001].*

donc un déficit théorique de courant électronique selon la théorie classique. La compréhension théorique du transport anormal est un point crucial dans l'élaboration des codes numériques prédictifs. Il est à l'heure actuelle introduit dans la modélisation numérique par un coefficient ajusté par rapport aux valeurs de conductivité mesurée lors des expériences [Bareilles *et al.* 2004] ce qui limite l'intérêt de ces codes pour la modélisation de nouveaux propulseurs. Il constitue par conséquent un axe majeur de recherche. Le travail de thèse présenté dans ce manuscrit fait partie de l'effort théorique de compréhension développé au Centre de Physique Théorique ces dernières années sur ce point.

Plusieurs hypothèses ont été avancées au cours des trente dernières années pour tenter d'apporter un cadre théorique au transport électronique anormal dans le propulseur à effet Hall. La principale introduit les collisions électron-paroi comme facteur responsable du surcroît de transport électronique. Il s'agit de la théorie néo-classique de conductivité "Near Wall Conductivity" [Morozov *et al.* 2000]. Selon cette théorie, les réflexions des électrons sur les parois de l'anneau interne ou externe du canal du propulseur font changer les électrons d'orbite et permettent un transport électronique vers l'anode suffisant pour expliquer le transport électronique total. Il est clair que le problème du transport à travers les lignes du champ magnétique se pose de manière cruciale au niveau du maximum du champ magnétique, à l'intérieur du canal. Pour autant, le gradient de champ magnétique est faible, et la valeur de ce champ reste donc proche de son maximum dans une zone s'étalant nettement en dehors du propulseur. L'hypothèse des collisions électron-paroi devient alors caduque. De manière plus globale, les paramètres physiques

principaux du propulseur ne semblent pas connaître de changements brutaux entre l'intérieur et l'extérieur du propulseur (en sortie de canal) ce qui favorise l'idée d'une certaine continuité dans le processus de transport électronique. Enfin, de récents travaux sur les codes hybrides [Boniface 2006] démontrent l'insuffisance de ces collisions dans le processus de transport électronique. L'introduction d'un coefficient *ad hoc* et empirique de turbulence (coefficient de Bohm) y est nécessaire à l'intérieur comme à l'extérieur du canal pour obtenir des résultats proches des mesures expérimentales. La piste la plus sérieuse à l'heure actuelle considère la turbulence plasma comme source potentielle du transport électronique anormal et fait l'objet de cette thèse.

Nous reviendrons plus précisément sur la manière dont est traité le transport anormal dans les travaux du CPAT de Toulouse [Boniface 2006] dans la partie préliminaire de ce manuscrit. L'existence de la turbulence au sein du propulseur à effet Hall y sera ensuite démontrée en rappelant quelques résultats [Prioul 2001, Bouchoule *et al.* 2003, Lazurenko *et al.* 2005, Kurzyna *et al.* 2005] de sessions expérimentales menées sur le moyen d'essai PIVOINE à Orléans. Nous y verrons enfin que le code particulaire de géométrie 2D (Z, θ) développé au CPHT [Adam *et al.* 2004] montre l'existence d'un champ électrique fluctuant susceptible d'être à l'origine de ce transport. La validité de ce modèle numérique repose sur sa capacité à reproduire un comportement proche de celui du propulseur observé en session expérimentale. La forte corrélation temporelle entre le développement du champ électrique fluctuant en sortie de propulseur et la valeur du courant électronique sera mise en évidence.

Il s'agit donc dans cette thèse d'une part d'étudier les propriétés de l'instabilité électronique à l'origine de ce champ, et d'autre part, de proposer un processus physique par le biais duquel ce champ électrostatique crée du transport électronique.

L'étude théorique de l'instabilité électronique de dérive fera l'objet de la première partie de cette thèse. Le but est de mettre en évidence ses propriétés en vérifiant l'accord de celles-ci avec les données apportées par les codes Particle-In-Cell (PIC).

Nous commencerons donc, dans le chapitre premier, par établir la relation de dispersion des perturbations électrostatiques en trois dimensions après avoir énoncé les hypothèses théoriques utilisées. Les approximations 1D et 2D de la relation de dispersion seront aussi explicitées.

L'étude linéaire de l'instabilité par la résolution numérique de la relation de dispersion sera effectuée dans le deuxième chapitre. L'analyse se fera pas à pas en partant des résultats obtenus pour une perturbation monodimensionnelle azimutale pour ensuite prendre en compte les extensions axiale et radiale de la perturbation.

A la vue de l'évolution de la fonction de distribution dans les simulations particulaires, nous nous intéresserons dans le chapitre trois à l'influence de la déformation de la fonction de distribution sur les propriétés de l'instabilité. Celle-ci, prise arbitrairement maxwellienne pour faciliter le calcul de la relation de dispersion, se déforme sous l'effet du développement de l'instabilité

comme nous le verrons dans la deuxième partie du manuscrit. Cette déformation introduit des effets non-linéaires sur les propriétés de l'instabilité et joue notamment le rôle de mécanisme de saturation pour un grand nombre de modes instables.

L'ensemble des résultats de l'étude de stabilité linéaire et non-linéaire sera confronté dans le chapitre quatrième aux résultats des simulations particulaires explicites développées *ad hoc*.

Nous terminerons cette première partie par un cinquième chapitre qui résume les propriétés de l'instabilité de dérive électronique étudiée.

La deuxième partie est consacrée à la mise en évidence de l'implication de l'instabilité décrite dans la première partie dans le transport électronique sous forme de transport stochastique.

Nous exposerons dans le sixième chapitre comment le modèle de C.F.F. Karney [Karney 1978, Karney 1979], appliqué aux électrons dans la géométrie du propulseur, apporte une solution au problème du transport électronique à partir du champ électrique fluctuant dont on a parlé précédemment. L'intervention de la stochasticité dans les trajectoires électroniques est abordée.

Le chapitre sept sera consacré à la résolution numérique du système dynamique électronique dans la configuration de champs électrique et magnétique croisés auxquels est ajouté le champ électrique fluctuant étudié. Nous verrons à la lumière du modèle théorique du chapitre six qu'elle produit des résultats en terme de déformation de fonction de distribution et de transport électronique en bon accord avec les résultats des simulations particulaires.

Enfin, le chapitre huit clôturera cette deuxième partie en résumant les avancées apportées par le modèle de transport stochastique.

Table des figures

1 Photos du propulseur à effet Hall 3
2 Principe de fonctionnement d'un SPT. 4
3 Caractéristiques d'un propulseur à effet Hall (SPT 100) [Albarède 2004, Darnon 1999, Prioul 2001]. 5
4 Évolution du rapport α/κ en fonction du champ magnétique [Boniface 2006], α et κ étant les coefficients ajustables des différentes mobilités dans les codes hybrides. 14
5 Comparaisons des collisions pariétales ajustées avec celles d'un modèle de gaine [Boniface 2006]. 16
6 Emplacement des antennes dans le propulseur dans l'expérience de mesure de turbulence. 17
7 Évolution temporelle du signal d'une antenne et du courant de décharge. 18
8 Géométrie utilisée dans le modèle particulaire implicite. 20
9 Profil du champ magnétique radial (en Tesla) en fonction de x (en mètre). 20
10 Oscillation (temps en μs) du courant en Ampère en sortie de propulseur. 22
11 Caractéristiques du comportement propulseur (Unité spatiale en mètre). 22
12 Évolution spatiale (en mètre) de la fonction de distribution ionique le long du canal. 23
13 Comparaison PIC-expérience de l'évolution spatiale de la vitesse et de la dispersion ionique le long du canal. 24
14 Structure dimensionnelle (en m) du champ électrique fluctuant (en $\mathrm{V.m^{-1}}$) 25
15 Corrélation entre le champ accélérateur, le champ fluctuant et le courant. Les échelles et unités ne sont pas respectées, le but étant de mettre en avant les corrélations temporelles. 26
16 Évolution de quelques grandeurs physiques en sortie de propulseur en fonction de la dimension axiale. 27

1.1 Géométrie utilisée pour le calcul de la relation de dispersion. . 32

2.1 Solutions 1D de la relation de dispersion à petits k_y. 51
2.2 Comparaison des solutions 1D avec les cas asymptotiques. . . 52
2.3 Enveloppe des solutions 1D de la relation de dispersion. 53
2.4 Forme 1D des lobes instables. 54
2.5 Comparaison en enveloppe des solutions 1D de la relation de dispersion en fonction du champ magnétique. 55
2.6 Comparaison de la structure 1D de quelques lobes en fonction du champ magnétique. 56
2.7 Évolution des lobes instables 1D en fonction de la température 57
2.8 Influence du gradient de densité : taux de croissance de l'instabilité 1D 58
2.9 Modes instables 2D en fonction de k_xV_d et de k_yV_d autour de $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.5$. 60
2.10 Forme bi-dimensionnelle des lobes instables. 61
2.11 Extension en k_x du lobe n=12. 62
2.12 Évolution des lobes instable 2D en fonction de k_zV_d/ω_{pe}. . . . 63
2.13 Modes instables 2D en fonction de k_zV_d/ω_{pe} et de k_yV_d/ω_{pe} pour $k_xV_d = 0$ autour de $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.2$. 64
2.14 Croissance du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.04$ dans la simulation particulaire explicite 1D $ylong = 12.083\ \lambda_D$. 67
2.15 Position du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.04$ dans le lobe instable 1D n=10 calculé par la relation de dispersion. 68
2.16 Croissance du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 0.55$ dans la simulation particulaire explicite 1D $ylong = 22.8479\ \lambda_D$. 69
2.17 Position du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 0.55$ dans le lobe instable 1D n=5. 69
2.18 Évolutions temporelles de la fonction de distribution dans les deux simulations PIC 1D précédentes. 71

3.1 Fonction de distribution typiquement observée dans les simulations particulaires et utilisée dans la résolution de la relation de dispersion intégrale. 76
3.2 Évolution des solutions instables 1D en fonction de la déformation de la fonction de distribution. 77
3.3 Évolution des lobes instables mono-dimensionnel en fonction de la déformation de la fonction de distribution. 79
3.4 Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=12 en fonction de la déformation de la fonction de distribution. 80
3.5 Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=6 en fonction de la déformation de la fonction de distribution. 81
3.6 Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=3 en fonction de la déformation de la fonction de distribution. 82

4.1 Croissance des modes instables et déformation de la fonction de distribution dans la simulation PIC explicite $ylong = 24.4\ \lambda_D$. 87

4.2 Saturation des modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ et $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ en fonction de la déformation de la fonction de distribution. . . . 88
4.3 Cas multi-mode 1D ($ylong = 1854\ \lambda_D$) : évolution de l'énergie électrostatique (a), fonction de distribution (b) et densité spectrale (c)-(e). 91
4.4 Évolution temporelle de la densité spectrale dans le cas $ylong = 1854\ \lambda_D$. 92
4.5 Cas multi-mode 1D ($ylong = 1854\ \lambda_D$) : évolution de l'espace des phases dans la direction azimutale 92
4.6 Cas multi-mode 2D ($xlong = 167\ \lambda_D$ et $ylong = 460\ \lambda_D$) : évolution de l'énergie électrostatique (a) et de la fonction de distribution (b). 93
4.7 Évolution de la structure de la composante azimutale du champ fluctuant dans le cas $xlong = 167\ \lambda_D$ et $ylong = 460\ \lambda_D$. . . . 95
4.8 Évolution du spectre de la composante azimutale du champ fluctuant dans le cas $xlong = 167\ \lambda_D$ et $ylong = 460\ \lambda_D$. . . . 95
4.9 Corrélation entre l'énergie électrostatique et le courant axial dans le cas $ylong = 24.4\ \lambda_D$. 96
4.10 Corrélation entre l'énergie électrostatique et le courant axial pour différents cas 1D. 97

6.1 Configuration de champs électrique et magnétique dans laquelle évoluent les électrons. 105
6.2 Schéma de l'orbite d'un électron dans l'espace des phases $(\eta, \dot{\eta})$. 108
6.3 Décalage Doppler dans le repère de l'onde. 113

7.1 Schéma saute-mouton. 116
7.2 Caractéristiques des cas mono-modes : $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.3,\ 0.6$ et 1.2. 118
7.3 Interaction modes instables-électrons : impact sur la fonction de distribution et transport. L'amplitude de chacune des ondes est telle que $E_f/E_0 = 1$. 119
7.4 Amplitude de l'onde extraite du code PIC pour $ylong = 12.083\ \lambda_D$, *i.e.* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$. 121
7.5 Apparition de la stochasticité pour le cas $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$. . . 122
7.6 Valeur de l'amplitude de l'onde, de la fréquence de piégeage et de la limite d'interaction V_σ aux différents temps pour le cas $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$. 122
7.7 Évolution temporelle du système 1D pour une onde 1D $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ avec l'amplitude extraite d'une simulation PIC. 123
7.8 Évolution temporelle du système pour une onde 2D $E_f/E_0 = 1$, $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ et $k_x V_d/\omega_{pe} = 0.6$, comparaison avec le cas d'une onde 1D. 124
7.9 Cas multi-modes grand k_y. 125
7.10 Cas multi-modes petit k_y. 126

C.1 Schéma de principe de l'expérience de diffusion collective. . . . 146

Préliminaires

DANS cette partie préliminaire sont regroupés les éléments qui ont défini le travail de thèse présenté ici. Le traitement du transport électronique anormal dans les codes hybrides du CPAT est d'une part rappelé : les conclusions récentes [Boniface 2006] montrent que la modélisation du transport anormal sous la forme de diffusion de Bohm (diffusion turbulente) se fait de manière naturelle à l'intérieur comme à l'extérieur du canal. La mise en évidence expérimentale du comportement turbulent du propulseur est d'autre part exposée. Enfin, les principaux résultats de la modélisation particulaire 2D (Z, θ) du CPHT [Adam *et al.* 2004] sont présentés. Ils montrent que le comportement global du propulseur est reproduit sans prendre en compte les collisions pariétales en sortie de propulseur, et qu'un champ électrique fluctuant susceptible d'être à l'origine du transport anormal se développe dans cette même zone.

1 Le transport anormal dans les codes hybrides

Nous nous intéressons ici uniquement au traitement du transport électronique perpendiculairement aux lignes de champ magnétique. Étant donné les incertitudes concernant le transport anormal et l'existence de diverses explications afférentes, le CPAT de Toulouse a pris le parti de décrire le transport anormal de manière phénoménologique. Les mécanismes de transport par collisions pariétales et de transport turbulent sont décrits à l'aide de coefficients empiriques ajustés selon le point de fonctionnement pour être en accord avec les expériences.
Le transport anormal à l'intérieur du canal est modélisé uniquement par la mobilité due aux collisions pariétales :

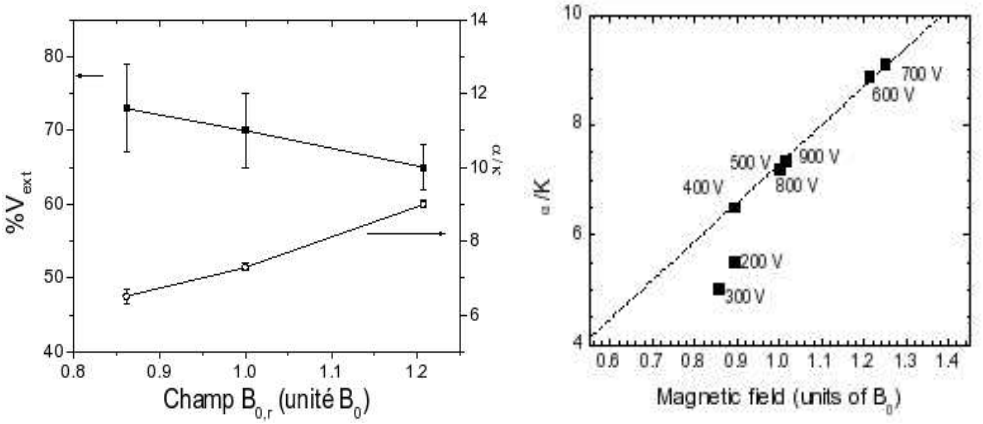
$$\mu_\alpha = \frac{m\nu_\alpha}{eB^2} \tag{1}$$

où $\nu_\alpha = \alpha.10^7\ s^{-1}$ est la fréquence de collision électron-paroi supposée indépendante de la position du canal, avec α le paramètre ajustable, e et m la charge et la masse électronique et B l'amplitude du champ magnétique. Elle a une dépendance classique en $1/B^2$ puisqu'il s'agit de collisions. L'aspect "anormal" réside dans le type même de collision, à savoir les collisions avec les parois et dans sa modélisation par un coefficient arbitraire. Ce type de

diffusion ne peut plus être invoqué à l'extérieur du canal puisqu'il n'y a plus de paroi. La conductivité électronique est alors assurée par la mobilité de Bohm :

$$\mu_k = \frac{\kappa}{16B} \tag{2}$$

où κ est le paramètre ajustable. Elle revient à considérer l'existence d'un mécanisme de transport basé sur la turbulence à l'extérieur du canal uniquement. Cette différence de mobilité à l'intérieur et à l'extérieur est arbitraire dans sa forme. Elle découle cependant de la nécessité d'introduire une mobilité plus importante à l'extérieur qu'à l'intérieur du moteur pour obtenir des résultats cohérents avec les expériences [Bareilles 2002]. Une partie du travail de thèse de Claude Boniface [Boniface 2006] a consisté à vérifier la pertinence de cette rupture dans la modélisation du transport anormal. Il s'est pour cela intéressé notamment à l'évolution du rapport α/κ en fonction du champ magnétique. La figure 4 résume cette évolution.



(a) Pour un tension fixe

(b) Pour un couple tension-champ magnétique optimisé

FIG. 4 – *Évolution du rapport α/κ en fonction du champ magnétique [Boniface 2006], α et κ étant les coefficients ajustables des différentes mobilités dans les codes hybrides.*

La figure 4(a) retrace l'évolution du rapport α/κ pour le point de fonctionnement SNECMA (tension de 550 V et débit de 8.3 mg.s^{-1} pour le PPSX000-ML) pour diverses valeurs du champ magnétique. Il faut rappeler qu'un point de fonctionnement expérimental est obtenu pour une tension de décharge donnée (différence de potentiel entre la cathode et l'anode) en minimisant le courant de décharge pour maximiser l'efficacité du propulseur. Ce minimum est atteint en faisant varier le champ magnétique. Un point de fonctionnement a donc une tension, un débit et un champ magnétique fixés de telle sorte que le courant de décharge soit minimal. En faisant varier la valeur du champ magnétique, nous sortons donc du point de fonctionnement. Pour chaque valeur de champ magnétique, les paramètres α et κ sont ajustés pour obtenir un

bon accord entre les mesures expérimentales et les résultats de la simulation. La figure 4(a) montre que le rapport α/κ augmente en fonction du champ magnétique. Cette tendance est confirmée par la figure 4(b) où l'évolution du rapport α/κ se fait en fonction des couples tension-champ magnétique optimisés (correspondant donc à des points de fonctionnement différents). Ce rapport est proportionnel au champ magnétique excepté pour les points de fonctionnement à basse tension correspondant aux limites d'utilisation du moteur. Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{\alpha}{\kappa} \approx B \tag{3}$$

Or, le rapport entre les mobilités anormales dues aux collisions pariétales μ_α et à la turbulence μ_k vaut :

$$\frac{\mu_\alpha}{\mu_\kappa} = A\left(\frac{\alpha}{\kappa}\frac{1}{B}\right) \tag{4}$$

où $A = \dfrac{16\ m\ 10^7}{e}$.
Ainsi, le rapport des mobilités anormales est quasi-constant :

$$\frac{\mu_\alpha}{\mu_\kappa} \approx A \tag{5}$$

Le rapport (4) dépend directement du choix dans la modélisation de décrire de manière discontinue les mécanismes physiques de transport électronique à l'intérieur (transport par collisions pariétales, mobilité en $1/B^2$) et à l'extérieur du canal (transport turbulent, mobilité en 1/B). L'étude montre que la dépendance arbitraire en 1/B du rapport des mobilités intérieure-extérieure est compensée par l'ajustement des paramètres α et κ pour chaque point de fonctionnement. Les mobilités à l'intérieur et à l'extérieur doivent donc être modélisées de la même manière. Compte tenu de l'absence de collisions pariétales à l'extérieur du moteur, le choix naturel a donc été d'introduire une mobilité de type turbulente dans le canal. En pratique, le changement de mobilité intérieure-extérieure nécessaire quantitativement pour retrouver les valeurs des mesures expérimentales est conservé en introduisant une mobilité de type Bohm avec un paramètre k_{in} avant la transition et k_{out} après la transition.

Une autre étude récente vient confirmer ce choix de prendre en compte le transport turbulent à l'intérieur du propulseur. Il s'agit du calcul de la contribution des collisions pariétales à la conductivité électronique. Ce calcul est basé sur la prise en compte de l'émission secondaire électronique au niveau des parois dans le modèle hybride. Un modèle de gaine faisant intervenir un coefficient d'émission secondaire calculé à partir de mesures expérimentales permet de calculer la mobilité due aux collisions pariétales. Les résultats obtenus avec ce modèle de gaine en terme de fréquence de collisions électron-paroi sont comparés avec ceux du modèle empirique (α ajusté) en figure 5. La

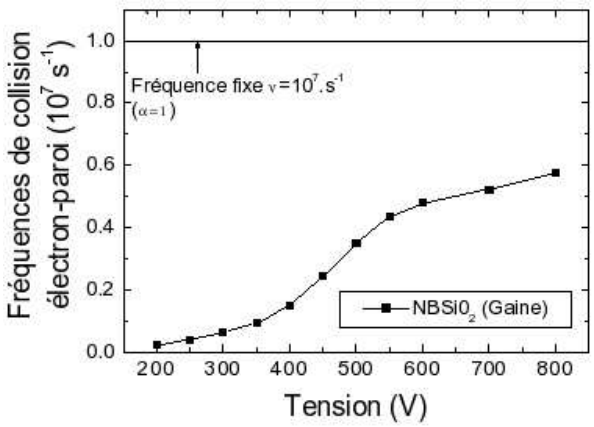


FIG. 5 – *Comparaisons des collisions pariétales ajustées avec celles d'un modèle de gaine [Boniface 2006].*

fréquence de collisions pariétales est décrite en fonction de la tension avec et sans l'introduction du modèle de gaine. L'insuffisance des collisions pariétales est flagrante : la fréquence de collision électron-paroi calculée par le modèle de gaine est toujours largement inférieure à celle nécessaire pour retrouver les résultats expérimentaux (fréquence obtenue avec l'ajustement de α).

En résumé, ces récents travaux effectués au CPAT de Toulouse montrent que la prise en compte des collisions pariétales ne semble pas suffisante pour atteindre les valeurs expérimentales du transport électronique dans le canal. Ils montrent aussi que la mobilité intérieure comme extérieure a une dépendance naturelle en 1/B caractéristique de la diffusion turbulente (ou de Bohm). Le comportement turbulent du propulseur est par ailleurs de plus en plus mis en évidence par les résultats expérimentaux que nous allons rappeler brièvement dans la section suivante.

2 Mise en évidence expérimentale de la turbulence dans le propulseur

L'historique de la création et du développement du propulseur à effet Hall a largement conditionné la manière de comprendre les phénomènes physiques intervenant dans le fonctionnement de celui-ci. L'hypothèse d'une conductivité électronique au travers des lignes de champ magnétique dirigée principalement par les collisions pariétales [Morozov *et al.* 2000] a longtemps prédominé. Les récents développements dans les simulations numériques montrent l'insuffisance de cette hypothèse. Dans la section précédente, nous avons évoqué le rôle important que la turbulence semble jouer dans le transport électronique anormal. La présence de la turbulence au sein du propulseur est confirmée par les travaux expérimentaux récemment menés sur le propulseur

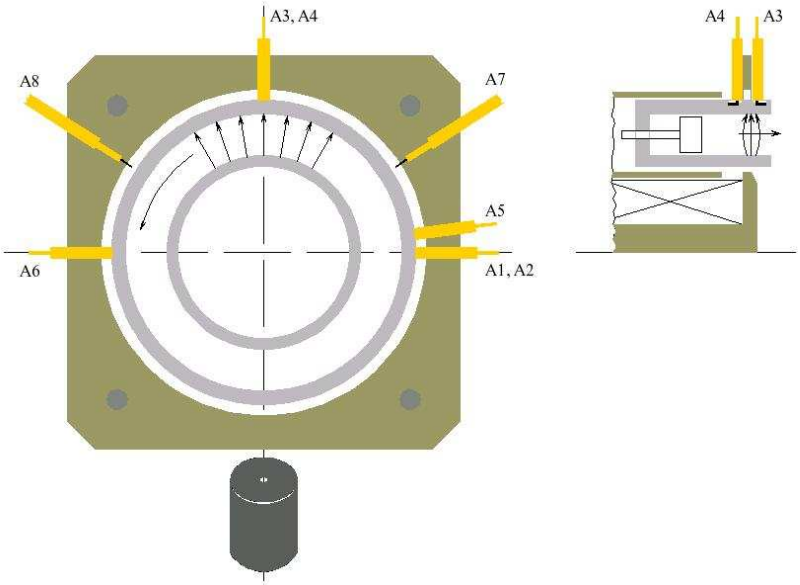


FIG. 6 – *Emplacement des antennes dans le propulseur dans l'expérience de mesure de turbulence.*

à effet Hall (SPT-100ML) sur le moyen d'essai PIVOINE à Orléans [Prioul 2001, Bouchoule *et al.* 2003, Lazurenko *et al.* 2005, Kurzyna *et al.* 2005]. Il s'agit de mesures de micro-instabilités en sortie de propulseur à l'aide de sondes de Langmuir et d'antennes. La disposition des antennes et des sondes est illustrée sur le schéma 6 représentant une vue de face du propulseur au centre ainsi qu'une vue de profil à droite sur la figure.

Les antennes peuvent transmettre des signaux jusqu'à 20 GHz et sont capable de résister à une température de 600 °C. Elles sont installées dans des saignées de quelques millimètres réalisées dans la céramique externe du canal de décharge à proximité du plan de sortie. Comme le montre le schéma, le dispositif expérimental comporte plusieurs antennes disposées à des positions axiales et azimutales différentes en vue de caractériser au mieux les propriétés des micro-instabilités (décalage en azimut de la position des antennes pour mesurer la vitesse de propagation azimutale des perturbations, position parallèle et perpendiculaire des antennes par rapport à l'axe du moteur pour mesurer les composantes axiale et radiale du champ électrique). Les résultats recueillis sont illustrés par la figure 7. Elle représente l'évolution temporelle du signal de l'une des antennes, en bleu, superposée à l'évolution du courant de décharge en vert (oscillation caractéristique autour de 20 kHz).

Elle met en évidence l'apparition d'instabilités dans la bande de fréquence de 5 à 8 MHz sur les fronts décroissants du courant de décharge. Toutes les antennes donnent un signal similaire : la position spatiale de l'antenne introduit uniquement un léger décalage des micro-instabilités qui apparaissent néanmoins toujours en front décroissant du courant de décharge. L'étude précise de ces micro-instabilités en fonction du temps montre un comportement

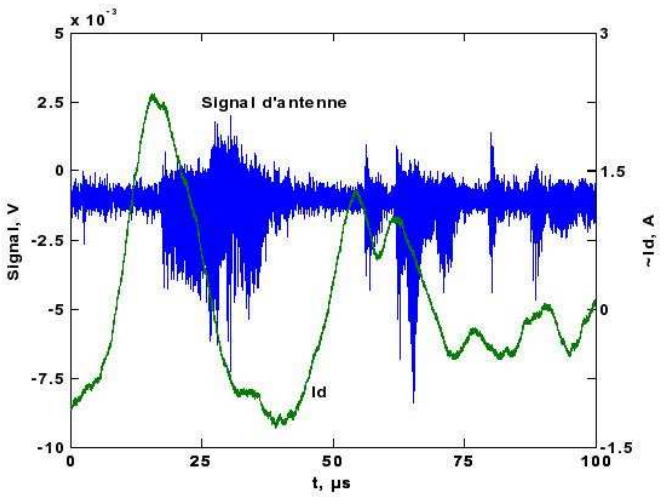


FIG. 7 – *Évolution temporelle du signal d'une antenne et du courant de décharge.*

imprévisible du signal : des phases d'organisation et de désorganisation se succèdent pendant la décroissance du courant de décharge. La phase de désorganisation s'apparente à une superposition de plusieurs signaux de fréquences différentes. L'interprétation théorique de ces phénomènes est encore sujette à débat mais ceux-ci mettent en avant le caractère turbulent du plasma au sein du propulseur. Alors que le principe de base du fonctionnement du propulseur est relativement simple, l'existence de nombreuses échelles spatiales et temporelles, le comportement non prévisible et l'apparence désordonnée du plasma démontre une activité turbulente du propulseur. L'implication directe de la turbulence dans le fonctionnement du moteur n'a pas à ce jour été explicitée mais de fortes corrélations ont été mises en évidence tant au niveau expérimental qu'au niveau numérique comme cela vient d'être exposé.

Ces conclusions sont largement corroborées par le modèle particulaire bidimensionnel (Z, θ) développé au CPHT à Palaiseau dont nous allons exposer les résultats principaux.

3 Simulation particulaire 2D (Z, θ)

A partir de 1998, les travaux du CPHT sur le propulseur à effet Hall ont été axés sur l'élaboration d'un modèle numérique particulaire. Il s'agissait dans un premier temps d'une modélisation mono-dimensionnelle axiale qui utilisait un schéma implicite.

La stabilité de ce schéma a été obtenue au prix d'un amortissement important des hautes fréquences. En effet, là où dans un schéma explicite classique de type saute-mouton cet amortissement numérique est nul, pour le schéma utilisé, considérant une fréquence ω, on a un amortissement numérique γ/ω de l'ordre de 0.5 $(\omega\Delta t)^3$ [Cohen *et al.* 1982, Langdon *et al.* 1983]. Pour les

paramètres typiques du propulseur, nous avons $\omega_{pe}/\Omega = 10$ où ω_{pe} et Ω sont respectivement la pulsation plasma et la pulsation cyclotronique électronique. Dans ces conditions, si on utilise un pas de temps adéquat pour résoudre la fréquence cyclotronique électronique, l'amortissement des ondes plasmas est, pour un pas de temps donné, 1000 fois plus important que l'amortissement du mouvement cyclotronique électronique. Dans ces simulations, le pas de temps utilisé était typiquement tel que $\Omega\Delta t \sim 0.15$, ce qui se traduit par un amortissement de l'ordre de 2 10^{-3} pour le mouvement cyclotronique et de l'ordre de 2 pour l'oscillation plasma, *i.e.* suppression effective des ondes plasmas.

Ce code PIC 1D implicite, qui permet donc de s'affranchir des contraintes de stabilité numérique liées à la fréquence plasma, comporte d'autre part une physique très riche en terme de modélisation des processus d'ionisation et de collisions [Garrigues *et al.* 2001]. Il est parvenu à reproduire les oscillations d'ionisation observées dans le moteur. L'étude de l'espace des phases obtenu dans ces simulations a suggéré cependant que ces résultats 1D devaient être instables à plusieurs dimensions : une rotation azimutale très rapide des électrons, sans dispersion thermique, y est en effet observée, ce qui est une situation caractéristique d'instabilité en l'absence d'inhomogénéité. Le modèle implicite a donc été étendu au cas 2D pour vérifier la stabilité de la solution 1D [Adam *et al.* 2004].

3.1 Comportement propulseur

Le modèle correspond maintenant à la surface d'un cylindre de plasma située à un rayon arbitraire du canal. Cette géométrie permet de prendre en compte la dérive azimutale des électrons. La description des populations ionique et électronique est particulaire. Comme le montre la figure 8, l'espace de simulation est ramené à une boîte rectangulaire équivalente à la surface du cylindre de plasma découpée selon la hauteur (donc selon l'axe du propulseur) et "aplani". La flèche dans le schéma du haut indique l'axe du propulseur. La direction azimutale est modélisée par la direction y pour laquelle les conditions de bord sont périodiques. Les bords de la direction x représentant la direction parallèle à l'axe sont ouverts et une différence de potentiel y est appliquée. Le champ magnétique, considéré comme essentiellement radial, est porté par l'axe z et est donc perpendiculaire au plan de la simulation. Il ne dépend que de la variable axiale. Plusieurs profils ont été utilisés dans les simulations. La figure 9 en expose un typique du propulseur. Comme l'une des restrictions du modèle 2D (Z, θ) est de fixer le champ magnétique à sa valeur en un rayon donné alors que dans le moteur une particule explore au cours de son mouvement radial toutes les valeurs du champ le long d'une ligne de force, le profil pris en compte ici correspond à celui obtenu en moyennant le champ sur plusieurs rayons. La population des atomes neutres de Xénon est décrite de manière fluide et les processus de collisions (collisions électron-Xénon, collisions pariétales) et d'ionisation sont pris en compte. Des

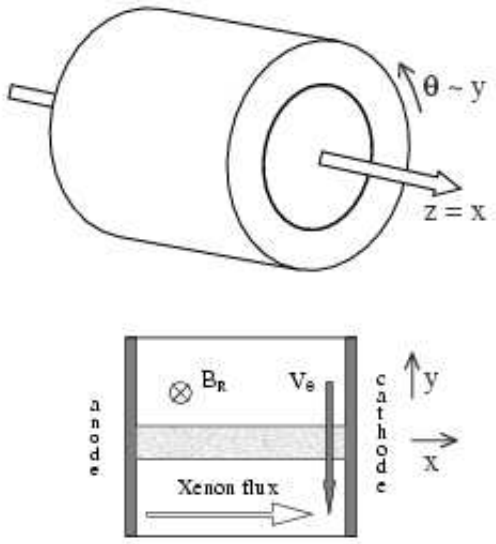


FIG. 8 – *Géométrie utilisée dans le modèle particulaire implicite.*

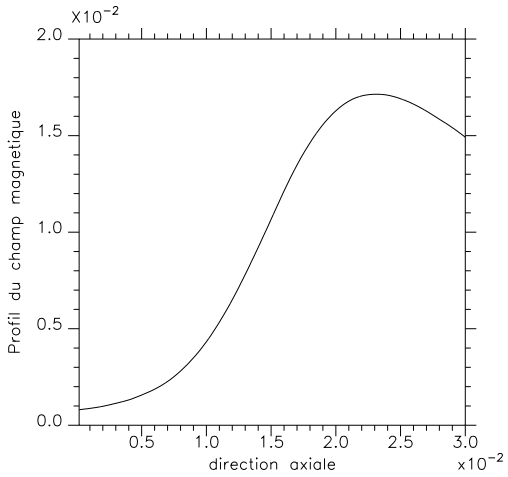


FIG. 9 – *Profil du champ magnétique radial (en Tesla) en fonction de x (en mètre).*

considérations de coûts en temps de simulation, de précision et de stabilité justifient l'utilisation d'un schéma implicite. La fréquence plasma n'est donc pas résolue. La description de la fréquence cyclotronique semble cependant suffisante pour retrouver le comportement du propulseur, une contrainte importante étant la nécessité de résoudre le rayon de Larmor électronique pour décrire correctement le transport.

Les paramètres de simulations utilisés correspondent typiquement aux grandeurs physiques du propulseur suivantes :

Longueur du canal	3 cm
Rayon intérieur	2 cm
Rayon extérieur	4 cm
Gaz	Xénon
Débit de gaz	5 mg.s^{-1} (dépend du volume considéré)
Température du gaz à l'anode	640 ^{0}K
Tension de décharge	300 V
Champ magnétique maximal	170 G

L'un des points essentiels dans ce modèle est la suppression des collisions pariétales en sortie de propulseur, entre 2.5 et 3 cm, situant ainsi l'extrémité du canal en x=2.5 cm. Le contrôle des collisions pariétales dans le reste du moteur se fait au moyen d'une barrière de potentiel modélisant la gaine qui limite les collisions aux particules les plus énergétiques. Un modèle plus sophistiqué de gaine [Barral *et al.* 2003] n'est pas nécessaire ici.

Comme dans toute expérience, la première mesure permettant de caractériser le fonctionnement du moteur est celle du courant traversant le système. Ceci est illustré Fig. 10. Elle a été obtenue pour un profil de champ magnétique légèrement différent de celui représenté en figure 9 mais rend bien compte des propriétés générales des résultats. La figure 10(a) représente le courant ionique (positif) et le courant électronique de décharge (négatif) en fonction du temps en sortie de propulseur. L'oscillation à 16 kHz identifiée expérimentalement [Darnon *et al.* 1999, Bouchoule *et al.* 2001, Morozov *et al.* 1972, Choueiri 2001] comme une oscillation d'ionisation y est nette. La figure 10(b) représente la fraction du courant ionique par rapport au courant de décharge. La valeur moyenne est de l'ordre de 75%, en accord avec les valeurs expérimentales mesurées sur le SPT100. Il est à noter que ces oscillations de courant disparaissent lorsque le nombre de particules utilisées dans les simulations est trop petit (c'est-à-dire lorsque la proportion des collisions numériques augmente par rapport aux collisions réelles) ou lorsqu'une injection de gaz neutre est effectuée en sortie de propulseur. Ces propriétés renforcent l'interprétation selon laquelle ces oscillations sont liées à une conductivité électronique insuffisante.

Ces oscillations de courant sont associées à une oscillation temporelle du profil de Xénon en figure 11(a). La densité moyenne résiduelle du Xénon extraite des simulations conduit à une fréquence de collisions $\nu_n = 5.10^5\ s^{-1}$ en supposant une température électronique de 10 eV. La mobilité transverse correspondante est de l'ordre de 9.8 10^{-3} m^2.V^{-1}.s^{-1} pour B=170 G. Cette va-

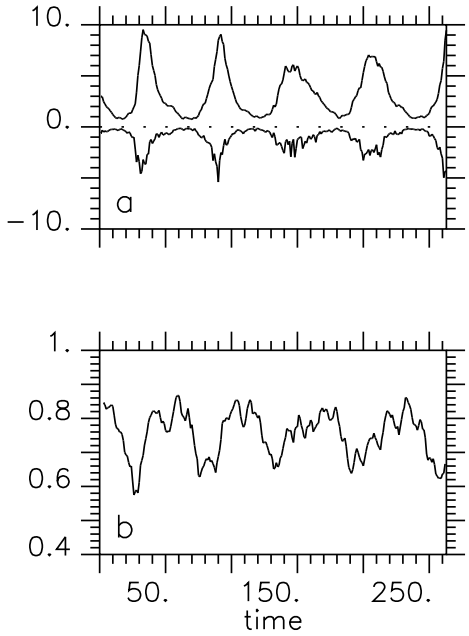
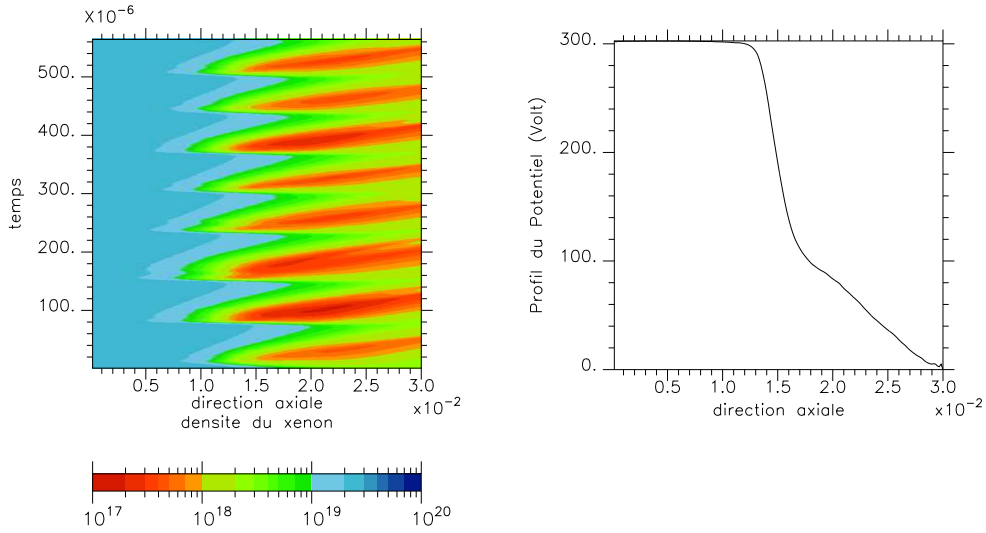


FIG. 10 – *Oscillation (temps en μs) du courant en Ampère en sortie de propulseur.*



(a) Oscillation temporelle (temps en s) du profil du Xénon. Densité en m^{-3}

(b) Chute de potentiel

FIG. 11 – *Caractéristiques du comportement propulseur (Unité spatiale en mètre).*

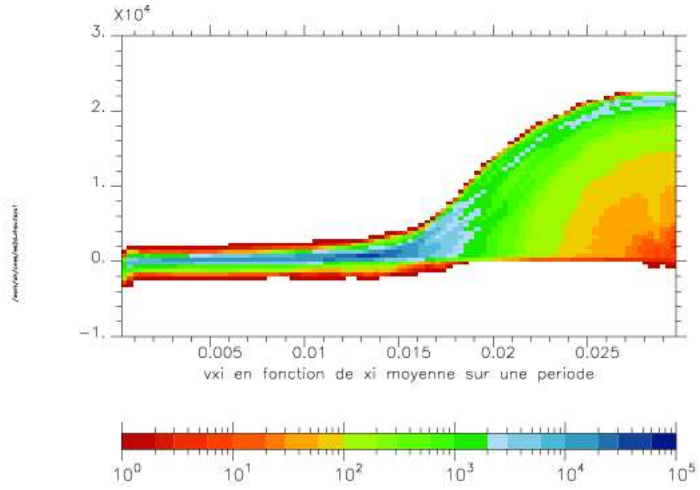


FIG. 12 – *Évolution spatiale (en mètre) de la fonction de distribution ionique le long du canal.*

leur est comme prévu beaucoup trop petite pour expliquer le courant observé dans les simulations (correspondant typiquement à une mobilité transverse de 0.394 $m^2.V^{-1}.s^{-1}$).

La chute de potentiel caractéristique de la physique du propulseur à un temps où l'ionisation est profonde dans le canal est illustrée sur la figure 11(b). Cette chute de potentiel est directement associée à l'accélération des ions vers l'extérieur du propulseur. Cette accélération est mise en évidence sur la figure 12 qui représente l'évolution axiale de la fonction de distribution ionique. Le comportement de la fonction de distribution ionique est intégré sur une oscillation basse fréquence de la décharge ($\approx 50\ \mu s$). La vitesse ionique moyenne et la dispersion en vitesse des ions extraites de la figure 12 sont comparées à des résultats expérimentaux récents obtenus à partir de mesures LIF [Gawron *et al.* 2006] sur la figure 13. Le zéro spatial sur les deux graphiques de cette figure correspond à la sortie du propulseur. Compte tenu de la géométrie choisie dans le modèle particulaire, la comparaison s'arrête 5 mm après l'extrémité du canal du propulseur. Les profils de la vitesse ionique et de la dispersion de la fonction de distribution ionique issus de la simulation particulaire sont en bon accord avec les données expérimentales.

Le modèle particulaire bi-dimensionnel (Z, θ) semble donc bien reproduire le comportement du propulseur : les propriétés basse et moyenne fréquence du moteur (oscillation du courant de 10 à 30 kHz, proportion de l'ordre de 75% du courant ionique) ainsi qu'une distribution ionique en accord avec les données expérimentales ont été trouvées et des caractéristiques courant-tension expérimentalement raisonnables sont produites [Adam *et al.* 2004] malgré la faiblesse des collisions pariétales dans le canal et leur mise à zéro en sortie de propulseur. Il semble donc clair que l'essentiel des phénomènes physiques sont décrits par ce modèle, dont notamment le mécanisme de transport anormal. La suppression des collisions pariétales en sortie de moteur et donc *de facto*

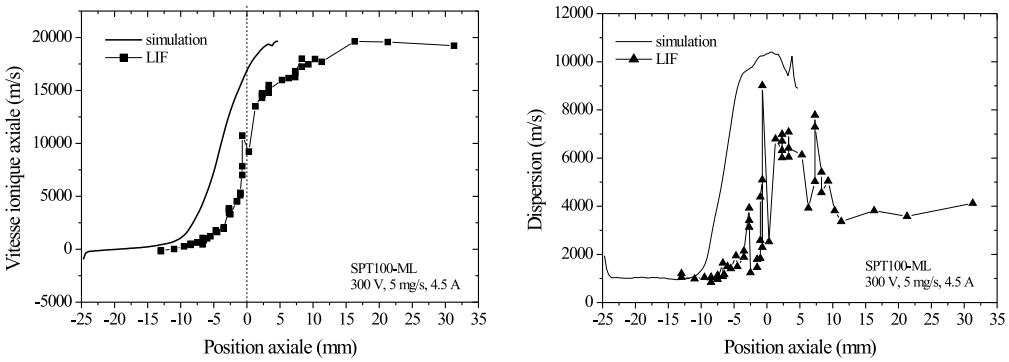


FIG. 13 – *Comparaison PIC-expérience de l'évolution spatiale de la vitesse et de la dispersion ionique le long du canal.*

l'absence de transport associé ne semble pas perturber les mécanismes fondamentaux du transport anormal nécessaire au fonctionnement du propulseur. En revanche, nous allons voir dans le paragraphe suivant que le modèle particulaire décrit la présence d'un champ électrique fluctuant se développant en sortie de propulseur, là où se situe le déficit de conductivité électronique, et que le courant électronique lui est fortement corrélé.

3.2 Le champ électrique fluctuant

La zone de sortie du propulseur concentre les problèmes de compréhension du transport électronique : le champ magnétique est maximum, la densité de neutre est faible (collisions électron-neutre faibles) et les collisions pariétales sont insuffisantes. C'est dans cette zone que se développe le champ électrique fluctuant. La figure 14 décrit la composante E_y du champ électrique en fonction de la direction axiale et de la direction azimutale. Elle montre une forte modulation transverse ($\lambda \sim 1mm$) jusqu'au centre de la simulation. Cette modulation, de fréquence temporelle de l'ordre du MHz, suggère l'existence d'une instabilité au voisinage de la sortie du propulseur. Sa localisation dans la zone de rotation maximum suggère une instabilité de dérive. Il faut noter la forte déformation géométrique de la figure due aux différentes échelles spatiales utilisées. Le rapport de l'amplitude du champ fluctuant en valeur moyenne RMS sur celle du champ accélérateur est de l'ordre de 25%. (Ceci semble largement suffisant pour induire une forte diffusion à travers le champ magnétique, d'autant que les longueurs d'onde en cause sont comparables aux rayons de Larmor des électrons). La corrélation entre ce champ électrique fluctuant et le courant est mise en évidence par la figure 15. Il s'agit d'une mise en parallèle de la représentation temporelle de l'évolution des champs électriques accélérateur (axial) et turbulent (azimutal) en une position x donnée, *i.e.* dans un plan d'abscisse fixé, perpendiculaire au canal du moteur et de celle des courants électronique et ionique. Les amplitudes de champ sont

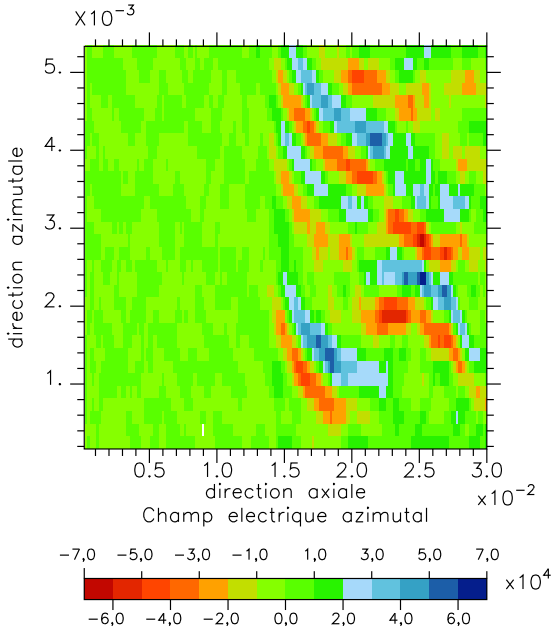
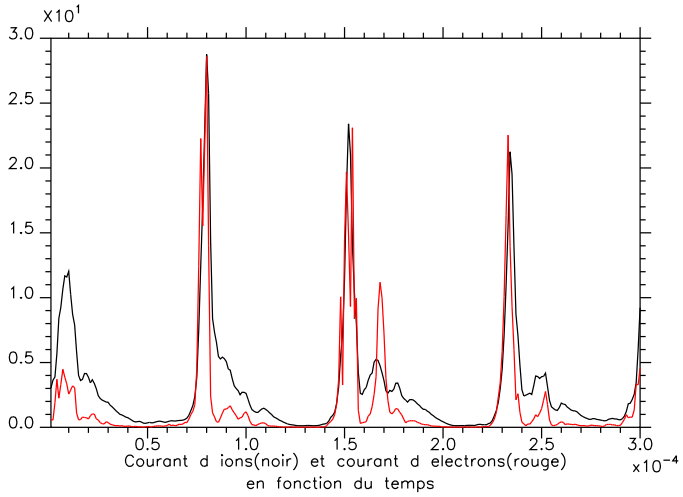


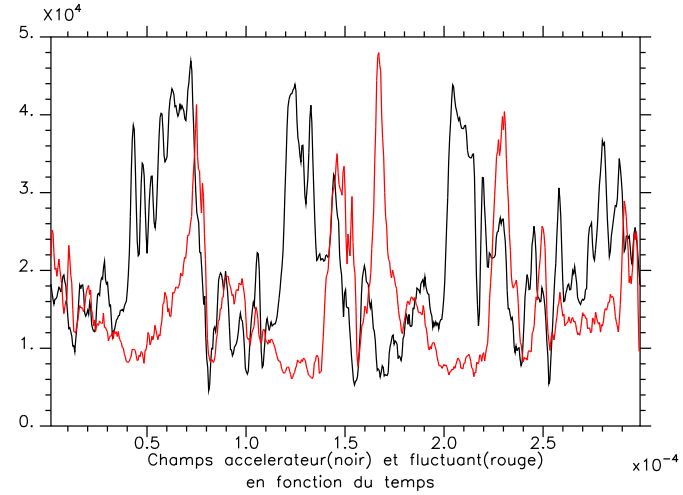
FIG. 14 – *Structure dimensionnelle (en m) du champ électrique fluctuant (en* $\mathrm{V.m^{-1}}$*)*

moyennées sur la coordonnée azimutale et les courants ont été multipliés par un coefficient arbitraire pour permettre une comparaison plus aisée. La figure 15 montre une forte corrélation entre les pics de courant et les pics de champ fluctuant. La figure 15(b) met plus particulièrement en évidence une autre corrélation : la valeur du champ accélérateur chute pratiquement systématiquement lorsque la turbulence se développe. Pour un potentiel accélérateur imposé comme c'est le cas dans la simulation, cela traduit clairement une augmentation de la conductivité. La diminution du champ accélérateur entraîne une diminution de la vitesse de dérive qui est la source même de la turbulence. Il en résulte une diminution extrêmement rapide du champ fluctuant. On observe ensuite une nouvelle augmentation du champ accélérateur.

Les résultats de ce modèle suggèrent donc l'existence d'instabilités de dérive se développant en sortie de propulseur. Il s'agit donc de les retrouver de manière théorique et d'en faire l'étude la plus exhaustive possible afin de déterminer leurs propriétés. C'est l'objet de la première partie de ce manuscrit. Le modèle montre aussi une forte corrélation entre ces instabilités et le transport électronique. Le mécanisme reliant les instabilités et le transport reste à déterminer. Un modèle théorique décrivant le rôle des instabilités dans un transport de type stochastique sera développé en seconde partie. Dans la mesure où l'objectif premier est de retrouver théoriquement les instabilités à l'origine du champ électrique fluctuant, il est intéressant de préciser les propriétés des grandeurs physiques dans la zone d'intérêt, à savoir en sortie de



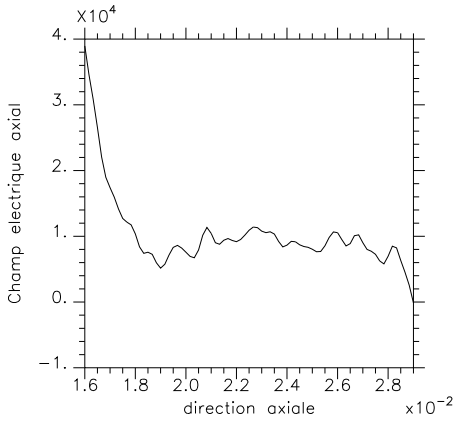
(a)



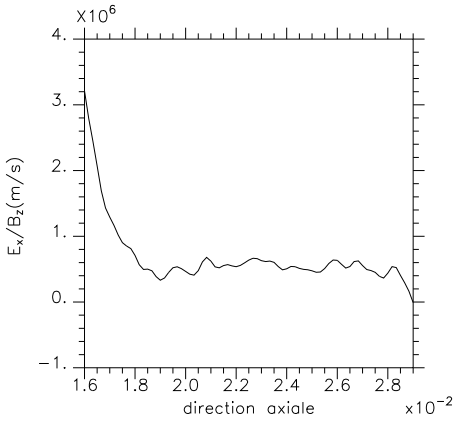
(b)

FIG. 15 – *Corrélation entre le champ accélérateur, le champ fluctuant et le courant. Les échelles et unités ne sont pas respectées, le but étant de mettre en avant les corrélations temporelles.*

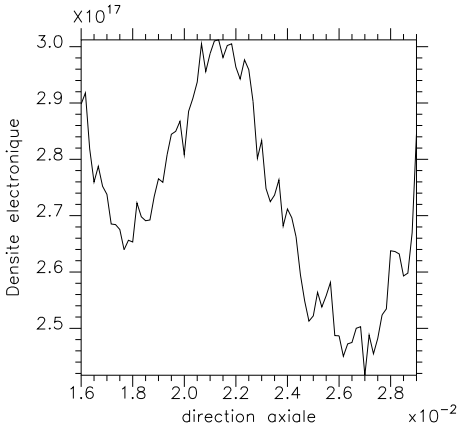
propulseur. Elles permettront d'établir le modèle théorique dans lequel sera effectuée l'étude. Les figures 16(a) et 16(b) représentent respectivement le champ électrique axial et la vitesse de dérive correspondante (avec le champ magnétique de la figure 9). Leur valeur est quasi-constante en sortie de moteur. La même remarque peut être faite pour le profil de densité électronique dans cette zone. Ceci est illustré sur la figure 16(c). L'apparente variation de la densité en fonction de la dimension axiale est due à l'échelle des ordonnées.



(a) Champ électrique axial



(b) Vitesse de dérive



(c) Densité électronique

FIG. 16 – *Évolution de quelques grandeurs physiques en sortie de propulseur en fonction de la dimension axiale.*

En fait, la modulation de densité est inférieure à 10%. En résumé, les instabilités se développent dans une zone de champ électrique quasi-constant, de vitesse de dérive quasi-constante et de densité faible quasi-constante.

En conclusion, l'hypothèse d'un transport fondé uniquement sur les collisions pariétales est remise en cause par les résultats des codes hybrides et particulaires. Le caractère naturel de la modélisation du transport anormal

par le transport turbulent dans les codes hybrides a été démontré et l'existence même de la turbulence au sein du propulseur semble être acquise à la vue des dernières mesures expérimentales. Le modèle particulaire, sans collisions pariétales en sortie de moteur, reproduit quant à lui correctement le comportement du propulseur. Il met en outre en évidence l'existence d'un champ électrique fluctuant en sortie de propulseur fortement corrélé au courant électronique. Les instabilités de dérive probablement à l'origine de ce champ seront mises en évidence et étudiées de manière théorique en première partie. Leur contribution dans le transport électronique anormal sous forme de transport stochastique sera décrite en deuxième partie.

Première partie

Instabilités électroniques de dérive

Chapitre 1

Relation de dispersion

Sommaire

1.1 Modèle 32
1.2 Établissement de la relation de dispersion . . 37
1.2.1 Population ionique 37
1.2.2 Population électronique 38
1.2.3 Relations de dispersion 41
1.3 Gradient de densité 43
1.4 Étude analytique 45
1.4.1 Hypothèse plasma froid 45
1.4.2 Cas $k_y V_d \approx n\Omega$ 47
1.4.3 Cas $F(k_y V_d) = 0$ 47

Le champ électrique fluctuant observé en sortie de moteur et évoqué en partie préliminaire est généré par la configuration de champs électrique et magnétique croisés. Cette configuration a déjà fait l'objet de nombreuses études de stabilité aussi bien dans le cadre du propulseur à effet Hall [Esipchuk *et al.* 1974, Esipchuk & Tilinin 1976, Litvak & Fisch 2001, Litvak & Fisch 2004] que dans un cadre plus général de plasma magnétisé [Wong 1970, Krall & Liewer 1971, Forslund *et al.* 1972]. Elles sont généralement restreintes à l'analyse du cas où la vitesse de dérive est largement inférieure à la vitesse thermique. Dans le propulseur, en s'appuyant sur les résultats des simulations particulaires implicites de géométrie (Z, θ) [Adam *et al.* 2004], nous considérons la vitesse de dérive de même ordre de grandeur que la vitesse thermique électronique. Ceci nous permet notamment de négliger les gradients de densité et de champ magnétique lors de la dérivation de la relation de dispersion. Cette dernière est établie en trois dimensions dans ce chapitre en ayant au préalable explicité le modèle théorique dans lequel le calcul se fait. Les approximations 1D et 2D de la relation de dispersion en sont déduites.

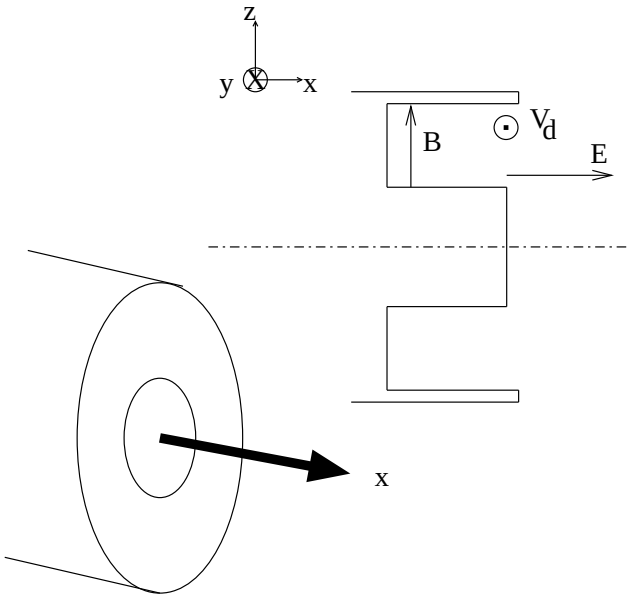


FIG. 1.1 – *Géométrie utilisée pour le calcul de la relation de dispersion.*

1.1 Modèle

La géométrie prise en compte pour établir la relation de dispersion est décrite en figure 1.1. Elle représente une coupe diamétrale du propulseur modélisé par un cylindre. Le calcul de la relation de dispersion est mené en vue de retrouver de manière théorique l'instabilité à l'origine du champ électrique fluctuant observé dans les simulations PIC. Il est donc naturel de reprendre ici la géométrie et les propriétés des grandeurs physiques macroscopiques décrites dans le modèle particulaire en partie préliminaire. Les axes x, y et z correspondent respectivement aux directions axiale, azimutale et radiale du propulseur. La direction azimutale sera considérée plane comme cela a été fait dans le modèle des simulations PIC. Cela ne semble pas poser de problème compte tenu de la dimension du propulseur dans cette direction par rapport aux longueurs caractéristiques des phénomènes étudiés ici. Le champ électrique accélérateur est porté par l'axe x et le champ magnétique par l'axe z. La vitesse de dérive électrique est par conséquent selon l'axe y.

Le modèle théorique utilisé pour décrire le propulseur dans le cadre du calcul de la relation de dispersion regroupe les hypothèses suivantes :

- Plasma non collisionnel.
- Description ionique : fluide froid et non magnétisé.
- Description cinétique des électrons magnétisés.
- Champ magnétique uniforme.
- Plasma uniforme.
- Vitesse de dérive constante (*i.e.* champ électrique constant).

- Fonction de distribution électronique maxwellienne.
- Potentiel perturbé tri-dimensionnel.

Plasma non collisionnel

Nous avons vu dans la partie préliminaire que les collisions électron-neutre sont peu nombreuses en sortie de propulseur. La zone d'apparition du champ électrique fluctuant correspond à de faibles densités électroniques et de neutres. L'idée sous-jacente de l'étude de stabilité qui suit est de décrire les propriétés des instabilités susceptibles d'être à l'origine d'un transport anormal. Les collisions ne sont donc pas prises en compte. De plus, la fréquence de collisions électron-neutre est très largement inférieure aux taux de croissance de l'instabilité comme nous le verrons au chapitre 2 ($\nu_n \approx 5.10^5 s^{-1}$ pour la fréquence de collisions en supposant une température électronique de 10 eV et $\gamma/2\pi \approx 2\ 10^7 s^{-1}$ pour le taux de croissance).

Description ionique

Nous supposons les ions du plasma non magnétisés, froids et sans vitesse moyenne. L'hypothèse de l'absence de réponse des ions au champ magnétique s'explique par la grande valeur de leur rayon de Larmor par rapport aux dimensions caractéristiques du propulseur ($r_{Li} \sim 1\ m$ et $L_{canal} \approx 3\ cm$ respectivement le rayon de Larmor ionique dans la zone de sortie du moteur et la longueur du canal) due à la masse importante des ions. Le rapport des masses entre ions et électrons s'élèvent à $M/m = 240000$ pour le Xénon, où M est la masse ionique.

Considérer les ions froids revient en fait à négliger leur vitesse thermique devant leur vitesse d'oscillation dans le champ de l'onde ce qui ne pose pas de problème compte tenu des propriétés des instabilités étudiées ici (typiquement $V_{th_i} \approx 195\ m.s^{-1}$ et $V_\phi \approx 1.4\ 10^4\ m.s^{-1}$ pour respectivement la vitesse thermique ionique et la vitesse de phase de l'onde).

En ce qui concerne la vitesse axiale des ions vers l'extérieur du canal, nous verrons que les taux de croissance des instabilités peuvent être très élevés et que celles-ci se développent sur une échelle de temps inférieure au temps de transit de l'ion dans le canal du propulseur (le développement en exponentielle des ondes se fait en $e^{\gamma \Delta t} = e^{105}$ pour un temps de transit des ions typiquement de $\Delta t = 0.75\ \mu s$ et un taux de croissance caractéristique de l'instabilité $\gamma_{max} \approx 1.4\ 10^8\ rad.s^{-1}$). De plus, le caractère instable de la configuration réside dans la vitesse de dérive relative des ions par rapport aux électrons. Cette vitesse est typiquement de l'ordre de $10^6\ m.s^{-1}$. Il est donc naturel de négliger en première approximation la vitesse axiale des ions qui est de l'ordre de $10^4\ m.s^{-1}$.

Ces hypothèses sur les ions permettent de décrire la population ionique à l'aide des équations fluides dans l'étude qui va suivre.

Description électronique

La réserve d'énergie libre à l'origine de l'instabilité est liée à la dérive relative des électrons par rapport aux ions induite par la configuration de champs électrique et magnétique croisés. La vitesse de dérive électrique sera donc prise en compte pour les électrons. Ceux-ci seront modélisés de manière cinétique par l'équation de Vlasov afin notamment de décrire correctement les effets de rayon de Larmor fini. L'unique restriction qu'impose l'équation de Vlasov sur la description de la population électronique est la prédominance des effets collectifs sur les collisions binaires. Les interactions lointaines collectives sont effectivement prépondérantes par rapport aux corrélations entre particules comme le suggère l'hypothèse de plasma non collisionnel faite plus haut.

Cette équation traduit simplement la conservation de la fonction de distribution le long des trajectoires de particules soumises aux champs moyens électriques et magnétique. La nécessité d'un transport anormal due à l'absence de collision justifie cette description.

Champ magnétique uniforme

Le plasma étant très peu dense ($n_0 \approx 5.10^{11}$particules.cm^{-3}), les courants électriques existants ne modifient pas le champ magnétique. Celui-ci est donc essentiellement créé par les bobines extérieures. Il est radial et varie en fonction de la position axiale. Son profil figure en partie préliminaire Fig.9. Il croît progressivement à partir du fond du canal pour atteindre son maximum en sortie de moteur et décroître ensuite lentement. La zone considérée pour l'étude de la stabilité s'étend autour du maximum du champ magnétique. Le gradient de champ magnétique y est faible et ne semble pas intervenir sur le développement des fluctuations dans la mesure où le gradient y est tour à tour positif, nul, puis négatif dans cette zone sans qu'il y ait de changement notable dans les caractéristiques de celles-ci (Fig.14). Nous allons par conséquent considérer le champ magnétique comme uniforme.

$$\mathbf{B} = B_0 \, \mathbf{e_z} \tag{1.1}$$

Cela revient en fait à négliger la vitesse de dérive magnétique, induite par le gradient de champ magnétique, par rapport à la vitesse de dérive électrique. Dans le cas général où le gradient est perpendiculaire au champ, la vitesse de dérive magnétique s'écrit de la manière suivante :

$$\mathbf{V_B} = \frac{(2v_\parallel^2 + v_\perp^2)}{2\Omega} \frac{\mathbf{B} \times \nabla \mathbf{B}}{B^2}$$

où $v_\parallel$ et $v_\perp$ sont respectivement les composantes parallèle et perpendiculaire au champ magnétique du vecteur vitesse de l'électron et Ω la pulsation cyclotronique.

Elle a deux composantes : une composante dépendant de $v_{\parallel}$ due à la courbure du champ magnétique et une composante dépendant de $v_{\perp}$ due au gradient. En prenant $v_{\parallel} = v_{\perp} = V_{th}$ où V_{th} est la vitesse thermique électronique, on obtient :

$$\frac{V_B}{V_{th}} = \frac{3}{2}\frac{r_L}{L_B} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{L_B} = \frac{1}{B}\frac{dB}{dx}$$

où r_L est le rayon de Larmor électronique, L_B la longueur de gradient de champ magnétique et $||\mathbf{V_B}|| = V_B$. Typiquement, $r_L/L_B = 0.05$ et $V_d/V_{th} = 2$, ce qui amène à un rapport $V_B/V_d = 0.0375 \ll 1$. Ce petit calcul numérique montre donc que nous pouvons négliger la dérive de champ magnétique par rapport à la dérive électrique.

Plasma uniforme

La symétrie cylindrique du propulseur permet de considérer sans difficulté le plasma homogène dans la direction azimutale. La dimension radiale n'est pas prise en compte dans le modèle particulaire 2D (Z, θ) du CPHT ; l'éventuelle inhomogénéité du plasma dans la direction radiale n'est donc pas retenue. En revanche, le problème se pose dans la direction axiale dans la mesure où un gradient existe entre la zone d'ionisation où la densité est maximale et l'extérieur du propulseur où le plasma est en expansion rapide. Nous avons vu en partie préliminaire Fig.16(c) que le champ électrique fluctuant se développe en sortie de propulseur, après la zone d'ionisation, dans une zone de faible densité de plasma. L'essentiel du gradient de densité se situe plus en amont vers l'intérieur du canal. On considère donc dans un premier temps que le plasma est uniforme dans la zone d'étude que l'on se fixe, à savoir la sortie de propulseur.

$$n(x, y, z) = n_0$$

La dérive due au gradient de densité est négligée par rapport à la dérive électrique. La vitesse de dérive pour un gradient de densité selon l'axe x, perpendiculaire au champ magnétique est définie par :

$$\mathbf{V_n} = -\frac{k_B T}{eB_0}\frac{\nabla n}{n}\,\mathbf{e_y}$$

En introduisant la vitesse thermique et la pulsation cyclotronique, l'expression amène :

$$\frac{V_n}{V_{th}} = \frac{r_L}{L_n} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{L_n} = \frac{1}{n}\frac{dn}{dx}$$

où L_n est la longueur de gradient de densité et $||\mathbf{V_n}|| = V_n$. Les paramètres typiques du propulseur donnent un rapport maximal $r_L/L_n \approx 0.1$ et $V_d/V_{th} = 2$. D'où $V_n/V_d = 0.05$. La vitesse de dérive électrique est donc largement supérieure à la vitesse de dérive de gradient de densité, ce qui valide l'hypothèse de plasma uniforme. Il sera cependant utile d'introduire un gradient axial de densité dans un second temps afin de vérifier la robustesse de l'instabilité notamment à l'extérieur du propulseur.

Vitesse de dérive constante

En partie préliminaire Fig.16(a), nous avons observé que le champ électrique auto-consistant accélérateur est approximativement constant en sortie de propulseur.

$$\mathbf{E} = E_0 \ \mathbf{e_x}$$

Ayant considéré le champ magnétique constant (1.1), la vitesse de dérive s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{V_d} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{B^2} &= -\frac{E_0}{B_0} \ \mathbf{e_y} \\ &= V_d \ \mathbf{e_y} \end{aligned}$$

Dans la configuration choisie, la vitesse de dérive est donc négative $V_d = -E_0/B_0 < 0$.

Les hypothèses de champs électrique et magnétique constants sont justifiées prises séparément. Cependant, elles peuvent paraître fortes dans le cadre de la vitesse de dérive électrique dans la mesure où celle-ci est une combinaison des deux champs. Il est donc utile ici de rappeler que les profils de vitesse de dérive des simulations PIC (figure 16(b)) montrent un plateau dans la zone d'étude. Les approximations liées aux champs électrique et magnétique semblent donc se compenser.

Fonction de distribution électronique maxwellienne

La fonction de distribution électronique est choisie maxwellienne. Cela revient à considérer que la population électronique est à l'équilibre et donc qu'elle a eu le temps de se relaxer par les collisions électron-neutre.

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{(v - V_d)^2}{2V_{th}^2} \right]$$

où $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$ avec v_x, v_y, v_z les composantes du vecteur vitesse et $V_{th} = \sqrt{\dfrac{k_B T}{m}}$ avec k_B la constante de Boltzmann et T la température électronique. La maxwellienne prend en compte la dérive électrique et est donc centrée en $\mathrm{V_d}$.

Cette hypothèse arbitraire sur la fonction de distribution permet de faire le calcul analytique de la perturbation de densité électronique. Elle ne repose sur aucune justification physique, puisque le plasma est non collisionnel, ou données de simulation. Des fonctions de distribution plus réalistes (mais pour lequel le calcul analytique est impossible...) seront introduites dans le chapitre 3 qui sera dédié à l'influence de la déformation de la fonction de distribution sur les propriétés de l'instabilité.

Potentiel perturbé : onde plane tri-dimensionnelle

Les perturbations de champ sont considérées uniquement d'un point de vue électrostatique. On ne prend donc en compte que la perturbation du potentiel, l'étude portant ainsi sur les instabilités purement électrostatiques. Le potentiel perturbé a la forme d'une onde plane tri-dimensionnelle : $\Phi_1 = \phi \ \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - \omega t)]$ où $\mathrm{k_x}, \mathrm{k_y}, \mathrm{k_z}$ sont les composantes du vecteur d'onde et ω la pulsation de l'onde.

1.2 Établissement de la relation de dispersion

1.2.1 Population ionique

Comme indiqué dans la section précédente, les ions, froids et non magnétisés, sont décrits par des équations fluides. L'équation du mouvement et l'équation de la conservation de la densité s'écrivent :

$$\begin{aligned} M\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v_i}.\nabla\right).\mathbf{v_i} &= -e\nabla\Phi \\ \frac{\partial n_i}{\partial t} + \nabla.n_i\mathbf{v_i} &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

avec Φ le potentiel et $\mathbf{v_i}$, n_i le vecteur vitesse et la densité ionique.

L'étude de la stabilité se fait en considérant un développement perturbatif des variables $\mathbf{v_i}$, n_i et Φ :

$$\begin{aligned} \mathbf{v_i} &= \mathbf{v_i^0} + \mathbf{v_i^1} \\ n_i &= n_0 + n_i^1 \\ \Phi &= \Phi_0 + \Phi_1 \end{aligned} \tag{1.3}$$

En conservant les termes de premier ordre une fois les expressions (1.3) introduites, le système d'équations (1.2) devient :

$$M\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v_i^0}.\nabla\right).\mathbf{v_i^1} = -e\nabla\Phi_1 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial n_i^1}{\partial t} + \nabla.n_0\mathbf{v_i^1} = 0 \tag{1.5}$$

Ce système peut être résolu classiquement par une transformation de Fourier-Laplace, *i.e.* on suppose une dépendance spatio-temporelle de l'amplitude complexe des variables f (densité, vitesses, potentiel) comme :

$$f = \sum_k f_k \exp(i\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega t) \tag{1.6}$$

Nous considérons les ions comme immobiles, $v_{ix}^0 = v_{iy}^0 = v_{iz}^0 = 0$, non magnétisés, $\Omega_{ci} \ll \omega$. Les équations dynamiques linéarisées (1.4) et (1.5) deviennent :

$$\begin{aligned} -i\omega M\mathbf{v_i^1} + ie\Phi_1\mathbf{k} &= 0 \quad (1.7) \\ -i\omega n_i^1 + in_0\mathbf{k}.\mathbf{v}_i^1 &= 0 \quad (1.8) \end{aligned}$$

L'équation (1.7) donne l'expression des perturbations des composantes du vecteur vitesse :

$$\mathbf{v_i^1} = \frac{e\Phi_1\mathbf{k}}{M\omega} \quad (1.9)$$

Une fois l'expression (1.9) injectée, l'équation (1.8) conduit à la densité ionique perturbée :

$$n_i^1 = \frac{n_0 e\Phi_1 k^2}{M\omega^2} \quad (1.10)$$

où $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ est la norme au carré du vecteur d'onde.

1.2.2 Population électronique

Il s'agit ici de décrire l'évolution de la densité électronique dans une configuration de champs croisés lorsque la population électronique est soumise à la perturbation électrostatique Φ_1. La population électronique se ramène à un faisceau de particules chaudes dérivant à la vitesse V_d à travers un champ magnétique.

La constance de la vitesse de dérive permet une simplification importante dans le calcul de la densité électronique perturbée. Nous pouvons effectivement considérer l'étude à partir du référentiel électronique puisque ce dernier est galiléen (à l'ordre zéro). Le passage du repère du laboratoire (ou repère ionique puisque ceux-ci sont immobiles) à celui dérivant à la vitesse V_d (lié aux électrons) réduit le mouvement des électrons à un mouvement cyclotronique perturbé par Φ_1. Ce changement de repère nous permet de faire abstraction de l'existence du champ électrique à l'origine de la vitesse de dérive.

Soit $\eta = \mathrm{y} - \mathrm{V_d t}$ la coordonnée azimutale dans le repère dérivant à la vitesse $\mathrm{V_d}$ lié aux électrons. La perturbation électrostatique s'écrit alors dans ce repère :

$$\begin{aligned} \Phi_1 &= \phi\ \exp[i(k_x x + k_y(\eta + V_d t) + k_z z - \omega t)] \\ &= \phi\ \exp[i(k_x x + k_y \eta + k_z z - (\omega - k_y V_d)t)] \\ &= \phi\ \exp[i(k_x x + k_y \eta + k_z z - \omega_d t)] \end{aligned}$$

où $\omega_d = \omega - k_y V_d$.
L'équation de Vlasov s'écrit :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v_e}.\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m}\left[-\nabla\Phi_1 + \mathbf{v_e} \times \mathbf{B}\right].\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v_e}} = 0 \quad (1.11)$$

La résolution de l'équation de Vlasov se fait classiquement [Krall & Book 1969] par la méthode des caractéristiques (méthode de Lagrange). Elle consiste à considérer l'espace $(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ comme paramétré par une variable τ qui varie le long de chaque orbite. La fonction de distribution devient alors

$$f_e(\mathbf{r}(\tau), \mathbf{v}(\tau), t(\tau)) = f_e(\tau)$$

Les orbites des particules dans l'espace des phases sont les courbes caractéristiques de l'équation de Vlasov. La solution générale de l'équation peut donc s'écrire sous la forme d'une fonction des invariants des orbites (invariants du mouvement). En séparant la perturbation électrostatique du reste de l'équation de Vlasov, l'équation (1.11) devient :

$$\frac{df_e}{d\tau} = \frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v_e}.\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m}\left[\mathbf{v_e} \times \mathbf{B}\right].\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v_e}} = -\frac{e}{m}\ \nabla\Phi.\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v_e}} \tag{1.12}$$

A l'équilibre, *i.e.* sans perturbation, l'équation (1.12) correspond à l'équation de Vlasov pour un plasma homogène dans un champ magnétique constant et un champ électrique nul. La fonction de distribution f_0 solution de l'équation est bien connue. Les invariants du mouvement sont la quantité de mouvement parallèle à $\mathbf{B}$, $mv_\parallel = mv_z$ et l'énergie cinétique transverse $m(v_x^2 + v_\eta^2) = mv_\perp^2$ où v_η est la composante de la vitesse selon η. f_0 est fonction des invariants du mouvement :

$$f_0 = f(v_\perp^2, v_z) \tag{1.13}$$

La linéarisation de l'équation de Vlasov se fait en introduisant :

$$\begin{gathered}\mathbf{v_e} = \mathbf{v_e^0} + \mathbf{v_e^1} \\ f_e = f_0 + f_1 \\ \Phi = \Phi_0 + \Phi_1\end{gathered}$$

Les termes d'ordre 1 au plus sont conservés. L'équation de Vlasov (1.12) se transforme alors :

$$\frac{df_1}{d\tau} = -\frac{e}{m}\ \nabla\Phi_1.\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v_e^1}} \tag{1.14}$$

L'intégration de l'équation (1.14) le long de chaque orbite électronique donne :

$$f_1 = -\frac{e}{m}\ \int_{-\infty}^{t}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial \eta}\frac{\partial f_0}{\partial v_\eta} + \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\frac{\partial f_0}{\partial v_z}\right)\ d\tau \tag{1.15}$$

Aucune hypothèse restrictive n'a été faite à ce stade sur la fonction de distribution électronique f_0. Pour poursuivre le calcul analytique, nous faisons l'hypothèse d'une fonction de distribution maxwellienne,

$$f_0 = n_0\left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{v^2}{2V_{th}^2}\right) \tag{1.16}$$

où $v^2 = v_x^2 + v_\eta^2 + v_z^2$.
Les dérivées partielles de f_0 peuvent s'exprimer facilement :

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = -\frac{v_x}{V_{th}^2}\ f_0; \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_\eta} = -\frac{v_\eta}{V_{th}^2}\ f_0; \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_z} = -\frac{v_z}{V_{th}^2}\ f_0$$

L'équation (1.15) devient :

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{1}{V_{th}^2}\int_{-\infty}^{t}\left(v_x\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_\eta\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + v_z\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}\right) f_0(v_\perp^2, v_z)\ d\tau \tag{1.17}$$

Il suffit alors de remarquer que

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + v_x.\frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_\eta.\frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} + v_z.\frac{\partial \Phi_1}{\partial z}$$

pour obtenir, à partir de l'équation (1.17) :

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{1}{V_{th}^2}\int_{-\infty}^{t}(\frac{d\Phi_1}{dt} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}) f_0(v_\perp^2, v_z)\ d\tau$$

La fonction de distribution f_0 est une fonction des invariants du mouvement (1.13). Elle ne varie pas le long des orbites et peut donc être mise en facteur de l'intégrale. La dérivée totale s'intègre aisément :

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{1}{V_{th}^2} f_0(v_\perp^2, v_z)\left(\Phi_1 - \int_{-\infty}^{t}\frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\tau)\ d\tau\right)$$

On introduit une dépendance spatio-temporelle de l'amplitude complexe des variables du type (1.6), la perturbation de la fonction de distribution devient :

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{1}{V_{th}^2} f_0\left(\Phi_1 + i\omega_d\int_{-\infty}^{t}\phi\ \exp\left(-i\omega_d\tau + i\left(k_x x(\tau) + k_\eta\eta(\tau) + k_z z(\tau)\right)\right)\ d\tau\right) \tag{1.18}$$

Le calcul des caractéristiques ainsi que l'intégration de f_1 dans l'espace des vitesses pour obtenir la perturbation de densité sont longs et fastidieux. Ils figurent par conséquent en détail en annexe A à la fin du manuscrit. Ils donnent l'expression de la perturbation de la densité électronique :

$$\begin{aligned} n_e^1 = \frac{e}{m}\frac{n_0\Phi_1}{V_{th}^2}\Big\{1 + \frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\Big\{Z\left(\frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\right) I_0(b)e^{-b} \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(Z\left(\xi_d^+\right) + Z\left(\xi_d^-\right)\right) I_n(b)e^{-b}\Big\}\Big\} \end{aligned} \tag{1.19}$$

avec

$$\xi_d^+ = \frac{\omega_d + n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}} \qquad \text{et} \qquad \xi_d^- = \frac{\omega_d - n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}$$

Z est la fonction de *Fried & Conte* [Fried & Conte 1961] :

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha - \xi} d\alpha$$

et les fonctions I_n sont les fonctions de *Bessel* modifiées :

$$I_n(b) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \exp(b \cos\theta) \cos(n\theta) d\theta$$

Le choix du repère dans lequel a été fait le calcul de la densité électronique perturbée est essentiellement une simplification du calcul. Il est plus naturel de revenir au repère du laboratoire dans lequel les ions sont quasiment immobiles et les électrons animés d'une vitesse à l'ordre zéro égale à la vitesse de dérive. Le passage du repère dérivant à la vitesse $\mathrm{V_d}$ à celui du laboratoire se fait aisément étant donnée l'indépendance de la relation de dispersion vis-à-vis des coordonnées spatiales. Il suffit d'exprimer la pulsation dans le repère d'arrivée :

$$\omega_d = \omega - k_y V_d$$

La densité électronique perturbée est alors identique à l'expression (1.19) aux paramètres ξ_d^+ et ξ_d^- près :

$$\begin{aligned} n_e^1 = \frac{e}{m} \frac{n_0 \Phi_1}{V_{th}^2} \Big\{ 1 + \frac{\xi^+ + \xi^-}{2} \Big\{ Z\left(\frac{\xi^+ + \xi^-}{2}\right) I_0(b) e^{-b} \\ + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(Z\left(\xi^+\right) + Z\left(\xi^-\right) \right) I_n(b) e^{-b} \Big\} \Big\} \end{aligned} \tag{1.20}$$

avec

$$\xi^+ = \frac{\omega - k_y V_d + n\Omega}{k_z V_{th} \sqrt{2}}, \qquad \xi^- = \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{k_z V_{th} \sqrt{2}}$$

1.2.3 Relations de dispersion

Nous avons calculé les perturbations de densité des ions et des électrons. Nous pouvons donc remonter jusqu'au champ électrique via les équations de Maxwell. Étant donné le caractère purement électrostatique des perturbations étudiées ici (la perturbation du potentiel vecteur n'est pas prise en compte), le champ électrique dérive d'un potentiel et les équations de Maxwell se ramène à l'équation de Poisson.

$$\nabla^2 \Phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Elle donne l'évolution du potentiel en fonction de la densité de charge. Dans l'espace de Fourier-Laplace, l'équation de Poisson linéarisée s'écrit :

$$k^2 \Phi_1 = \frac{e}{\varepsilon_0} (n_i^1 - n_e^1)$$

La relation de dispersion s'obtient en remplaçant les perturbations de densité ionique n_i^1 et électronique n_e^1 par leur expression respective (1.10) et (1.20) calculée précédemment :

$$k^2\lambda_D^2\Big(1-\frac{m}{M}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\Big)+1 + \frac{\xi^+ + \xi^-}{2}\Big\{Z\left(\frac{\xi^+ + \xi^-}{2}\right)I_0(b)e^{-b} + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(Z\left(\xi^+\right)+Z\left(\xi^-\right)\right)I_n(b)e^{-b}\Big\}\Big\} = 0 \tag{1.21}$$

où ω_{pe} est la pulsation plasma électronique, $\lambda_D = \sqrt{\dfrac{k_B T}{m\omega_{pe}^2}}$ la longueur de Debye, $b = \dfrac{k_\perp^2 V_{th}^2}{\Omega^2}$ et

$$\xi^+ = \frac{\omega - k_y V_d + n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}, \qquad \xi^- = \frac{\omega - k_y V_d - n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}.$$

L'expression (1.21) ne peut se résoudre analytiquement que pour quelques cas asymptotiques peu utiles dans le régime d'utilisation propulseur. L'essentiel de ses propriétés seront déduites par une résolution numérique dans le chapitre suivant. La difficulté d'exposer directement les propriétés 3D étant donné la multiplicité des paramètres nous pousse ici à faire une approximation mono-dimensionnelle, puis bi-dimensionnelle de la relation de dispersion. Ces approximations nous permettront d'avancer pas à pas dans l'énonciation des propriétés des instabilités dans le chapitre suivant.

Approximation 2D : modes obliques perpendiculaires à B

Compte tenu de la configuration du propulseur, notamment de la direction selon laquelle est appliqué le champ magnétique, il est naturel de faire l'approximation bi-dimensionnelle en négligeant l'extension suivant l'axe z de la relation de dispersion. En effet, le mouvement cyclotronique ainsi que la dérive électrique, tous deux susceptibles d'être à l'origine des instabilités, ont lieu dans le plan perpendiculaire au champ magnétique. Cette approximation permet aussi la comparaison directe avec les simulations particulaires 2D dont nous avons exposés les résultats dans la partie préliminaire.

Soit $k_z = 0$. La perturbation du potentiel devient alors $\Phi_1 = \phi\ \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)]$. Les paramètres ξ^+ et ξ^- divergent et la fonction de *Fried & Conte* s'exprime de la manière suivante :

$$Z(\xi) \longrightarrow -\xi^{-1}\left(1+\frac{1}{2\xi^2}\right)$$

La relation de dispersion des oscillations perpendiculaires au champ magné-

tique est :

$$k_\perp^2 \lambda_D^2 \left(1 - \frac{m}{M}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) + 1 - I_0(b)e^{-b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(\omega - k_y V_d)^2 I_n(b) e^{-b}}{(n\Omega)^2 - (\omega - k_y V_d)^2} = 0 \quad (1.22)$$

La marque de l'extension selon x de la relation de dispersion apparaît dans la norme du vecteur d'onde $k_\perp$ et donc dans $b = \frac{k_\perp^2 V_{th}^2}{\Omega^2}$. L'approximation mono-dimensionnelle de la relation de dispersion est donc très proche de l'expression (1.22) puisqu'elle correspond à l'hypothèse supplémentaire $k_x = 0$.

Approximation 1D : modes azimutaux

Soit $k_z = k_x = 0$. La relation de dispersion pour des perturbations azimutales pures (selon y) s'écrit :

$$k_y^2 \lambda_D^2 \left(1 - \frac{m}{M}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right) + 1 - I_0(b)e^{-b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(\omega - k_y V_d)^2 I_n(b) e^{-b}}{(n\Omega)^2 - (\omega - k_y V_d)^2} = 0 \quad (1.23)$$

où le paramètre b dépend de k_y uniquement : $b = \frac{k_y^2 V_{th}^2}{\Omega^2}$.

1.3 Gradient de densité

Le calcul de la relation de dispersion ci-dessus n'a pas pris en compte le gradient de densité pourtant inhérent au principe du propulseur. Nous avons vu lors de l'énoncé des hypothèses de départ qu'il pouvait être négligé dans la mesure où la vitesse de dérive correspondante était largement inférieure à la vitesse de dérive électrique. L'apparition des instabilités n'est effectivement pas liée au gradient de densité. Néanmoins, il semble intéressant de vérifier la robustesse de celles-ci et de voir si leurs propriétés sont modifiées selon la valeur du gradient.

Il s'agit donc d'introduire un gradient de densité dans le calcul de la relation de dispersion. Nous avons choisi de le faire dans la configuration mono-dimensionnelle (prise en compte de la direction azimutale uniquement) compte tenu de l'importance toute relative de celui-ci *a priori*. Les résultats de cette étude montre *a posteriori* qu'il n'est pas nécessaire d'aller plus loin dans le cadre du propulseur.

Soit donc la densité du plasma définie par son développement autour de la densité de référence n_0 :

$$n = n_0(1 + x/L_n) \qquad \text{avec} \qquad \frac{1}{L_n} = \frac{1}{n_0}\frac{dn}{dx}$$

L'hypothèse d'un gradient faible est faite et le calcul de la perturbation de la densité ionique est similaire à celui effectué dans le cadre général, section

1.2.1 :

$$n_i^1 = \frac{e\Phi_1 k_y^2}{M\omega^2}\ n_0(1 + x/L_n) \tag{1.24}$$

Le changement dans la description électronique pose plus de difficultés. L'essentiel du calcul section 1.2.2 peut être transposé ici mais plusieurs points nécessitent d'être précisés.

En effet, la fonction de distribution va maintenant dépendre de la variable x. Elle est définie comme suit :

$$f_0 = n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right) \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{2V_{th}^2}\right) \left[1 + \frac{(x - v_\perp/\Omega)}{L_n}\right]$$

Il faut rappeler que le calcul de la densité électronique est fait dans le repère lié aux électrons (ayant donc une vitesse selon y égale à V_d) faisant disparaître la dérive électrique dans l'exponentielle.

Le terme supplémentaire en $v_\perp/\Omega$ est introduit pour faire en sorte que l'ensemble du terme $x - \dfrac{v_\perp}{\Omega}$ soit un invariant du mouvement. La fonction de distribution pourra alors être mise en facteur de l'intégrale dans le calcul de la perturbation de la fonction de distribution électronique f_1. Ce changement de variable est permis dans la mesure où l'intégration de ce terme donne zéro puisqu'il s'agit d'une fonction impaire :

$$\int\int\int \frac{v_y}{\Omega} f_0\ dv_x dv_y dv_z = 0$$

L'intégration de la perturbation de la fonction de distribution, puis le passage à la perturbation de densité sont alors similaires au cas général et donnent :

$$\begin{aligned} n_e^1 =& \frac{e}{m}\frac{n_0\Phi_1}{V_{th}^2}\left[\left(1 + \frac{x}{L_n}\right)\left\{1 - I_0(b)e^{-b} - \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(\omega - k_y V_d)^2 I_n(b)e^{-b}}{(\omega - k_y V_d)^2 - n\Omega)^2}\right\}\right. \\ & \left. - \frac{k_y V_{th}^2}{\Omega L_n}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty} I_n(b)e^{-b}\frac{2(\omega - k_y V_d)}{(\omega - k_y V_d)^2 - (n\Omega)^2} + \frac{I_0(b)e^{-b}}{\omega - k_y V_d}\right\}\right] \end{aligned} \tag{1.25}$$

La relation de dispersion est obtenue par l'intermédiaire de l'équation de Poisson à partie de (1.24) et (1.25). Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} & k_y^2\lambda_D^2\left(1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2}\left(1 + \frac{x}{L_n}\right)\right) = \\ & \left(1 + \frac{x}{L_n}\right)\left\{I_0(b)e^{-b} - 1 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(\omega - k_y V_d)^2 I_n(b)e^{-b}}{(\omega - k_y V_d)^2 - n\Omega)^2}\right\} \\ & + \frac{k_y V_{th}^2}{\Omega L_n}\left\{\sum_{n=1}^{n=\infty} I_n(b)e^{-b}\frac{2(\omega - k_y V_d)}{(\omega - k_y V_d)^2 - (n\Omega)^2} + \frac{I_0(b)e^{-b}}{\omega - k_y V_d}\right\} \end{aligned} \tag{1.26}$$

En se plaçant en position de référence, x = 0, l'expression ci-dessus se ramène à la relation de dispersion (1.23) à laquelle s'ajoute un terme (la troisième ligne de l'équation (1.26)) pondéré par le coefficient :

$$\frac{k_y V_{th}^2}{\Omega L_n} \propto \frac{r_L}{L_n}$$

Ce coefficient est proportionnel au rapport du rayon de Larmor électronique sur la longueur de gradient. Pour que ce terme soit significatif et intervienne dans la résolution de la relation de dispersion, il faut donc que $L_n \approx r_L$. Cette condition est fausse dans le cadre du propulseur quelque soit le régime de fonctionnement. Les longueurs de gradient typiques sont de l'ordre du centimètre alors que le rayon de Larmor électronique en sortie de propulseur est autour du millimètre. Le gradient de densité devrait donc peu modifier les propriétés de l'instabilité. Nous le vérifierons dans le chapitre suivant.

1.4 Étude analytique

L'étude analytique de la relation de dispersion peut se faire dans trois cas asymptotiques : le cas plasma froid, le cas $k_y V_d \approx n\Omega$ et un dernier cas où $k_y V_d$ est compris entre deux harmoniques cyclotroniques successives $n_0\Omega$ et $(n_0+1)\Omega$. Assez loin des régimes d'utilisation du propulseur, ces cas vont néanmoins permettre de dégager quelques propriétés intéressantes à comparer avec les résultats de la résolution numérique au chapitre suivant.

1.4.1 Hypothèse plasma froid

L'hypothèse plasma froid se traduit par les conditions : $\xi \gg 1$ et $b \ll 1$. La fonction Z se transforme alors :

$$Z(\xi) \longrightarrow -\xi^{-1}\left(1 + \frac{1}{2\xi^2}\right)$$

ce qui nous amène à la relation de dispersion bi-dimensionnelle (1.22). En effectuant les développements limités liés à la condition $b \ll 1$, ($e^{-b} \to 1-b$, $I_0 \to 1$ et $I_1 \to b/2$) celle-ci devient :

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_y V_d)^2 - \Omega^2} = 0 \tag{1.27}$$

où ω_{pi} est la pulsation plasma ionique. Cette équation ne dépend que de la composante selon y du vecteur d'onde. Elle présente une racine instable, *i.e.* $\Im(\omega) = \gamma > 0$, pour $\Omega < k_y V_d < \omega_{UH}$ où $\omega_{UH} = \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega^2}$ est la pulsation hybride haute. Les ondes, se développant uniquement dans la direction azimutale, sont purement croissantes avec un taux donné par :

$$\gamma = \omega_{pi}\sqrt{\frac{k_y^2 V_d^2 - \Omega^2}{\omega_{UH}^2 - k_y^2 V_d^2}}$$

A la résonance $k_y V_d = \omega_{UH}$, le taux de croissance est maximum et vaut :

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2}\omega_{pe}\left(\frac{m}{M}\right)^{1/3}\left(\frac{\omega_{pe}}{2\omega_{UH}}\right)^{1/3}$$

Ces solutions ne sont valables que si $b \ll 1$. En particulier, à la résonance, ceci implique $\dfrac{V_d}{V_{th}} \gg \dfrac{\omega_{UH}}{\Omega}$. Or, la fréquence plasma est supérieure à la pulsation cylclotronique électronique dans le plasma du propulseur ($\omega_{pe} \gg \Omega$), ce qui entraîne $\omega_{UH}/\Omega > 1$. Par conséquent, il n'existe pas de racines instables pour $V_d/V_{th} < 1$ avec $b \ll 1$.

En résumé, dans le cas limite de plasma froid ($\xi \gg 1$ et $b \ll 1$), la configuration est instable lorsque les conditions suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} V_{th}/V_d &\ll 1 \\ \Omega < k_y V_d &< \omega_{UH} \end{aligned} \tag{1.28}$$

L'introduction du gradient de densité ne change relativement pas les propriétés énoncées ci-dessus. Un terme supplémentaire s'ajoute à la relation de dispersion (1.27) :

$$1 - \frac{\omega_{pi0}^2}{\omega^2} - \omega_{pe0}^2\left(\frac{1}{(\omega - k_y V_d)^2 - \Omega^2} + \frac{1}{\Omega k_y L_n(\omega - k_y V_d)}\right) = 0 \tag{1.29}$$

Le taux de croissance est donc modifié en conséquence :

$$\gamma = \omega_{pi0}(1-\beta)\sqrt{\frac{(kV_d)^2 - \Omega^2}{\omega_{UH}^2 - (kV_d)^2}}$$

avec $\beta = \dfrac{\omega_{pe0}^2((k_y V_d)^2 - \Omega^2)}{2\Omega k_y L_n k_y V_d((k_y V_d)^2 - \omega_{UH}^2)}$.
Les conditions d'existence des modes instables évoquées plus haut en (1.28) ne sont pas remises en cause. En revanche, la valeur du taux de croissance peut être affectée par le gradient de densité dés lors que $L_n \approx r_L$ comme indiqué en section 1.3.

Une remarque intéressante est à faire sur l'équation (1.27) : on retrouve la relation de dispersion de l'instabilité de courant (ou instabilité de Buneman [Buneman 1959]) lorsqu'on fait tendre la pulsation cyclotronique Ω vers zéro. Cela revient à ne plus prendre en compte les effets de rayon de Larmor fini :

$$1 - \frac{\omega_{pi}^2}{\omega^2} - \frac{\omega_{pe}^2}{(\omega - k_y V_d)^2} = 0$$

Cette relation de dispersion correspond à l'équation que nous aurions établie en prenant une description électronique fluide. Il est clair que celle-ci ne fait pas apparaître les résonances entre $k_y V_d$ et $n\Omega$ qui, nous allons le voir dans le paragraphe suivant, sont à l'origine de l'apparition des modes instables.

1.4.2 Cas $k_y V_d \approx n\Omega$

Un deuxième cas asymptotique peut être étudié analytiquement à partir de la relation de dispersion bi-dimensionnelle. Il s'agit du cas correspondant aux conditions $\omega \ll k_y V_d$ et $k_y V_d \approx n\Omega$.

Soit $\omega = \delta\omega \ll k_y V_d$. La relation de dispersion (1.22) devient :

$$\begin{aligned} k_\perp^2 \lambda_D^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\delta\omega^2} &= 1 - I_0(b)e^{-b} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2(k_y V_d)^2 I_n(b) e^{-b}}{(n\Omega)^2 - (k_y V_d)^2} + k_\perp^2 \lambda_D^2 \\ &= F(k_y V_d) \end{aligned}$$

Le terme $\delta\omega$ est en quadrature. Les racines de l'équation sont instables dès que $F(k_y V_d) < 0$.

Soit $k_y V_d$ proche d'une harmonique cyclotronique : $k_y V_d = n_0\Omega + \delta$ avec $\delta \ll \Omega$. Le terme n_0 de la somme diverge et devient prépondérant par rapport à tous les autres termes de l'équation. Le développement de la fonction F au voisinage de l'harmonique induit :

$$k_\perp^2 \lambda_D^2 \frac{\omega_{pi}^2}{\delta\omega^2} = -I_{n_0} e^{-b} \frac{n_0\Omega}{\delta}$$

L'équation donne des racines instables lorsque $\delta > 0$. Le taux de croissance correspondant est :

$$\gamma = k_\perp \lambda_D \omega_{pi} \sqrt{\frac{\delta}{n_0 \Omega I_{n_0} e^{-b}}} \tag{1.30}$$

La transition des régions stables vers les régions instables ont lieu quand $\delta = 0$. En résumé, autour d'une harmonique cyclotronique donnée :
Lorsque $k_y V_d < n_0\Omega$, $F(k_y V_d) > 0$: les perturbations sont stables.
Lorsque $k_y V_d > n_0\Omega$, $F(k_y V_d) < 0$: les perturbations sont instables, l'amplitude de l'onde croît.

1.4.3 Cas $F(k_y V_d) = 0$

Le paragraphe précédent montre qu'il existe une transition de région stable vers une région instable pour $k_y V_d$ croissant autour d'une harmonique cyclotronique donnée. Les perturbations sont instables dés lors que leur $k_y V_d$ atteint $n_0\Omega$. Pour être à nouveau dans une zone stable pour $k_y V_d < (n_0 + 1)\Omega$, la fonction F doit changer de signe et passer par zéro.
Soit k_0 la valeur de k tel que $F(k_0 V_d) = 0$.
En effectuant le développement limité de la fonction F au voisinage de $k = k_0$ on trouve le taux de croissance correspondant :

$$\gamma = \frac{\sqrt{3}}{2} (k_{\perp_0} \lambda_D)^{2/3} \left(\frac{k_0 \omega_{pi}^2}{\partial F / \partial V_d} \right)^{1/3} \tag{1.31}$$

avec $k_{\perp_0} = \sqrt{k_x^2 + k_0^2}$.

Maintenant que la relation de dispersion a été établie, il s'agit d'en faire l'étude pour en déduire les propriétés des ondes se développant dans le plasma. Les cas asymptotiques pour lesquels une résolution analytique était possible ont fourni quelques pistes : les instabilités se développent à chaque $k_y V_d$ proche d'une harmonique cyclotronique ($k_y V_d \approx n\Omega$) ; des régions stables et instables se succèdent en fonction de $k_y V_d$; et en approximation plasma froid, les instabilités ne se développent que pour $k_y V_d$ au dessous de la fréquence hybride haute $k_y V_d < \omega_{UH}$. L'étude analytique de l'impact du gradient de densité sur la relation de dispersion a montré que celui-ci serait faible. La complexité des relations de dispersion ne nous permet pas d'aller plus loin analytiquement. L'étude de celles-ci va se poursuivre dans le chapitre suivant par le biais de la résolution numérique. Les quelques propriétés déjà mises en évidence ici nous permettront de valider les résultats numériques.

Chapitre 2

Étude linéaire de l'instabilité

Sommaire

2.1 Perturbation mono-dimensionnelle 50
2.1.1 Modes instables azimutaux 50
2.1.2 Influence du champ magnétique 54
2.1.3 Influence de la température 56
2.1.4 Influence du gradient de densité 58
2.2 Extension bi-dimensionnelle : modes obliques 59
2.3 Perturbation tri-dimensionnelle 63
2.4 Validation du domaine linéaire de l'instabilité 65
2.4.1 Modèle particulaire explicite 65
2.4.2 Phase linéaire de l'instabilité 66
2.4.3 Évolution de la fonction de distribution 70

Les relations de dispersion établies au chapitre 1 ne dépendent pas de la position spatiale à laquelle nous nous plaçons pour la résolution (exception faite de la relation de dispersion prenant en compte le gradient de densité pour laquelle nous nous placerons à une position de référence). L'étude de stabilité peut donc être faite pour une perturbation périodique qui a une extension infinie en espace. Ceci nous permet de considérer uniquement l'aspect temporelle de l'évolution de la perturbation. Nous supposerons donc que les composantes du vecteur d'onde sont réelles ($k = k_r$) et que la pulsation de l'onde s'écrit sous forme complexe : $\omega(k) = \omega_r(k) + i\gamma(k)$. Les amplitudes complexes des variables varient dans le temps en $\exp(-i\omega t) = \exp(-i\omega_r t).\exp(\gamma t)$. Par conséquent, les perturbations se développent et sont instables temporellement pour $\gamma > 0$. Il s'agit donc dans la résolution de la relation de dispersion de déterminer les racines ω telles que $\gamma > 0$.

La résolution de la relation de dispersion est basée sur la méthode de Broyden (variante multi-dimensionnelle de la méthode de la sécante). L'approximation plasma froid de la relation de dispersion exposée en section 1.4.1 ramène la relation de dispersion à un polynôme de degrés 4 dont il est facile

d'extraire des racines. Ces racines sont ensuite utilisées comme racines de départ dans la méthode de Broyden (routine broydn [Press *et al.* "Numerical Recipes"]) qui calculent les zéros de la relation de dispersion générale. Ce processus est réitéré selon les cas pour chaque valeur de k_xV_d, k_yV_d, k_zV_d et V_{th}/V_d pour lesquelles on veut étudier la stabilité du système.

Afin de simplifier la résolution de la relation de dispersion, les paramètres sont adimensionnés. Les quantités ω, Ω et k s'exprimeront respectivement sous la forme ω/ω_{pe}, Ω/ω_{pe} et kV_d/ω_{pe}. La vitesse thermique sera normalisée par la vitesse de dérive V_{th}/V_d. Les paramètres fixes par défaut utilisés dans la résolution correspondent à des paramètres typiques du propulseur : le rapport des masses est celui du Xénon $M/m = 240000$, le champ magnétique fixé est tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$ (cela équivaut à $B_0 = 170\ G$ pour $n_0 = 2.8\ 10^{11} cm^{-3}$) et la vitesse thermique est égale à la moitié de la vitesse de dérive $V_{th}/V_d = 0.5$ (équivaut à une température $T = 5.7\ eV$ pour une vitesse de dérive de $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$). Cette valeur est faible dans le cadre du propulseur mais nous reviendrons sur ce choix plus loin.

L'étude de la stabilité se fera de manière progressive. Nous considérerons d'abord l'instabilité du système pour une perturbation azimutale pure à partir de la relation de dispersion mono-dimensionnelle. L'influence du champ magnétique, de la température et du gradient de densité seront successivement étudiées. L'extension bi-dimensionnelle perpendiculaire au champ magnétique du caractère instable sera ensuite établie par la résolution de la relation de dispersion bi-dimensionnelle. Enfin, nous verrons en analysant les solutions de la relation de dispersion tri-dimensionnelle que les ondes correspondantes, *i.e.* les perturbations qui ont une extension en k_x, k_y et k_z, ne sont pas, ou que faiblement, instables.

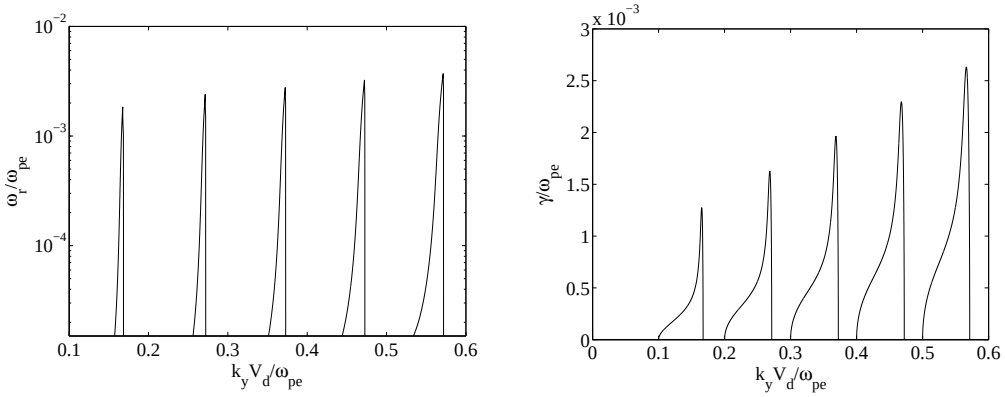
2.1 Perturbation mono-dimensionnelle

La perturbation s'écrit ici $\Phi_1 = \phi\ \exp[i(k_y y - (\omega_r + i\gamma)t)]$. La relation de dispersion azimutale Eq.(1.23) est résolue. Les modes instables sont mis en évidence et l'influence du champ magnétique et de la température sur les propriétés de l'instabilité sont exposées. Nous étudions aussi l'impact du gradient de densité sur ces propriétés en résolvant la relation de dispersion Eq.(1.26) dans laquelle celui-ci a été introduit.

2.1.1 Modes instables azimutaux

La résolution numérique de la relation de dispersion mono-dimensionnelle (1.23) est effectuée ici pour les paramètres par défaut exposés plus haut, le but étant de montrer l'existence des instabilités et de décrire leurs propriétés fondamentales. La figure 2.1 représente les solutions de la relation de dispersion en fonction de k_yV_d/ω_{pe}. La partie réelle Fig.2.1(a) et la partie imaginaire,*i.e.* le taux de croissance, Fig.2.1(b) des solutions sont exposées.

L'existence de plages instables, *i.e* $\gamma > 0$, est clairement mise en évidence.



(a) Partie réelle de la pulsation (b) Taux de croissance

FIG. 2.1 – *Solutions 1D de la relation de dispersion à petits k_y.*

L'évolution du taux de croissance Fig.2.1(b) en fonction de k_y montre très nettement la présence de modes instables selon lesquels des perturbations peuvent se développer. Les transitions de zones stables vers des zones instables ont lieu dès que $k_y V_d$ est proche d'une harmonique cyclotronique $k_y V_d \simeq n\Omega$ comme cela a été évoqué lors de l'analyse des cas asymptotiques en section 1.4. En effet, les lobes instables apparaissent pour $k_y V_d/\omega_{pe}$ égal aux multiples de 0.1 qui est la valeur de Ω/ω_{pe} (apparition des lobes instables pour $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4...$ correspondant à $n\Omega$ avec $n = 1, 2, 3, 4...$ respectivement). Entre chaque harmonique cyclotronique, le taux de croissance atteint un maximum et décroît de manière abrupte jusqu'à zéro. Une autre propriété trouvée de manière analytique en section 1.4 est donc vérifiée : des zones stables et instables se succèdent en fonction de $k_y V_d$. La partie réelle des solutions de la relation de dispersion Fig.2.1(a) est tracée en logarithme car sa valeur est très piquée. Celle-ci est effectivement de plusieurs ordres de grandeur inférieure au taux de croissance sauf au voisinage du maximum. Lorsque le taux de croissance atteint son maximum pour un lobe instable donné, la partie réelle de la pulsation croît très brutalement et devient supérieure au taux de croissance. Le taux de croissance est alors de l'ordre de 60% de la valeur de la partie réelle de la pulsation.

Les propriétés qualitatives déduites de l'étude analytique de la relation de dispersion en section 1.4 sont donc retrouvées numériquement ici dans le cas général. La figure 2.2 complète la comparaison avec l'étude analytique, quantitativement cette fois. Elle fait la comparaison entre les taux de croissance solutions de la relation de dispersion (en noir) et ceux obtenus dans les deux cas asymptotiques $F(k_y V_d) = 0$ (expression (1.30)) et $k_y V_d \approx n\Omega$ (expression (1.31)), respectivement en rouge et en bleu sur la figure. La superposition des courbes noire et bleue lorsque les lobes apparaissent, *i.e* $k_y V_d \approx n\Omega$, et des courbes noire et rouge lorsque les lobes disparaissent, *i.e* $F(k_y V d) = 0$,

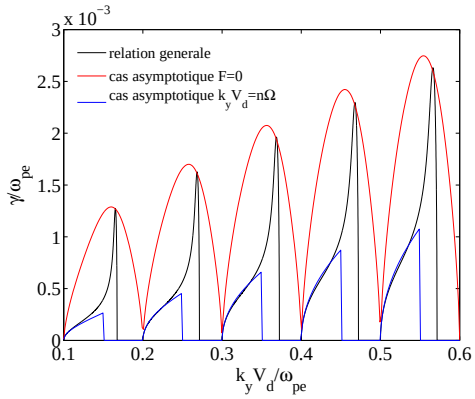
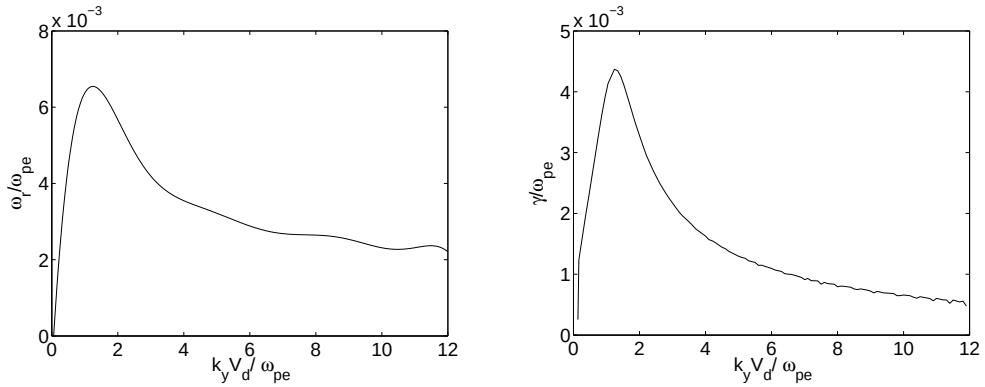


FIG. 2.2 – *Comparaison des solutions 1D avec les cas asymptotiques.*

montre l'accord des conclusions de l'étude analytique avec celles de la résolution numérique.

Aucun lobe instable n'apparaît avant l'harmonique cyclotronique fondamentale $n = 1$. Le processus de développement de l'instabilité semble donc essentiellement basé sur les résonances entre $k_y V_d$ et $n\Omega$. Les valeurs des pics de taux de croissance sont croissantes en fonction de $k_y V_d/\omega_{pe}$. La figure 2.1 ne permet pas d'extrapoler la valeur de k_y pour laquelle le taux de croissance est maximal. Elle montre l'existence de modes instables mais ne permet pas de déterminer quels modes sont susceptibles de se développer réellement. Ceci est davantage visible sur la figure 2.3.

La figure 2.1 correspond à un agrandissement autour des petits k_y de la figure 2.3 qui représente les solutions de la relation de dispersion en fonction de $k_y V_d/\omega_{pe}$ sur un large intervalle. Par souci de clareté, les parties réelle et imaginaire des solutions ne sont représentées que sous forme d'enveloppe passant par les maxima des lobes instables (à cette échelle, les lobes instables ne pourraient être discernés). On voit sur la figure 2.3(b) que le taux de croissance atteint un maximum absolu autour de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$. Ce sont donc les ondes correspondant à ces nombres d'onde qui vont se developper, leur amplitude croissant plus rapidement que celles des autres ondes à taux de croissance inférieur. Ces modes instables vont effectivement pomper l'énergie libre disponible et empêcher les autres modes k_y de se développer. En définitive, les ondes effectivement présentes dans le plasma du propulseur corresponderont aux nombres d'onde se situant autour de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$. On peut remarquer que le maximum absolu du taux de croissance n'est pas très piqué. Plusieurs modes ont des taux de croissance proches du maximum absolu. Il est donc clair que l'instabilité va générer plusieurs modes formant un paquet de modes dont les valeurs de $k_y V_d/\omega_{pe}$ se situeront autour de 1.2. En prenant une densité électronique $n_0 = 2.8\ 10^{11} cm^{-3}$, *i.e.* $\omega_{pe} = 30\ GHz$, et une vitesse de dérive $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$, les longueurs d'onde correspondantes sont de l'ordre du dixième de millimètre ($\lambda = 0.35\ mm$ exactement pour $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$) et sont de l'ordre du rayon de Larmor électronique (pour $v_\perp = V_{th}$).



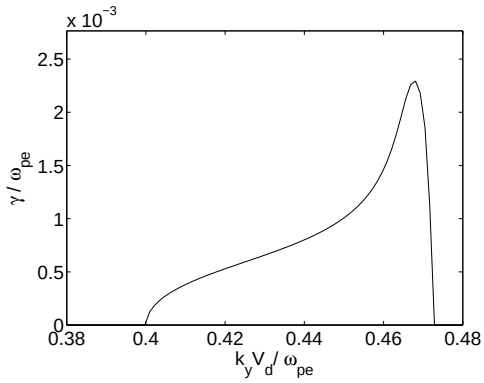
(a) Partie réelle de la pulsation (b) Taux de croissance

FIG. 2.3 – *Enveloppe des solutions 1D de la relation de dispersion.*

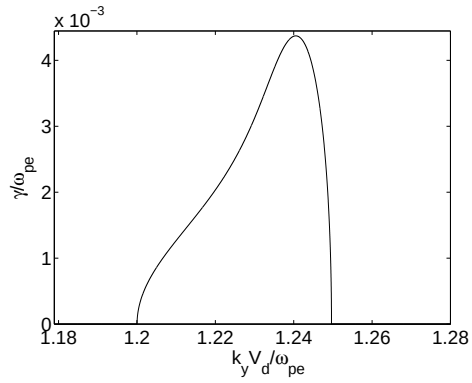
L'enveloppe de la partie réelle Fig.2.3(a) suit l'évolution de celle du taux de croissance. Les ondulations qui y apparaissent sont dues à la difficulté de déterminer avec précision le maximum de taux de croissance par suite de son aspect excessivement piqué. Les fréquences correspondantes aux taux de croissance maximaux (donc celles des ondes qui se développent) s'échelonnent autour de 40 MHz avec la valeur de la pulsation plasma électronique ci-dessus. Les taux de croissance maximaux ont des valeurs allant de 10^7 $rad.s^{-1}$ à 1.4 10^8 $rad.s^{-1}$, ce qui correspond à un nombre d'exponentiation du potentiel de $e^{\gamma \Delta t} = e^{105}$ au maximum pendant le temps de transit des ions (ex : temps de transit des ions $\Delta t \sim 0.75$ μs). Les solutions obtenues sont donc très instables.

La figure 2.3 montre par ailleurs que les modes instables sont présents jusqu'à de très grandes valeurs de k_y. Le taux de croissance décroît lentement. Pour $k_y V_d/\omega_{pe} = 10$, le taux de croissance du mode est encore largement significatif puisqu'il représente le quart du taux de croissance maximal absolu.

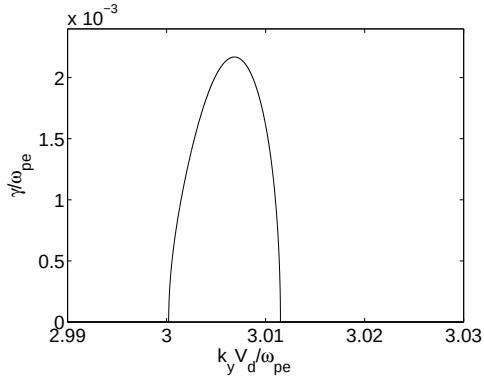
Pour ces valeurs de $k_y V_d/\omega_{pe}$ la forme des lobes est bien différente de celle obtenue à petits k_y. La figure 2.4 décrit l'évolution de la forme des lobes instables en fonction de k_y. La forme des lobes, tout comme celle de l'enveloppe, dépend directement de la somme des fonctions de Bessel dans la relation de dispersion Eq. (1.23). Les lobes ont une extension en k_y qui se réduit fortement à mesure que k_y augmente (les échelles en $k_y V_d/\omega_{pe}$ ne sont pas conservées pour la lisibilité des graphiques). Cette propriété pourrait poser des problèmes *a priori* dans la discrétisation de l'espace des k dans les simulations particulaires. En effet, les modes de très grands k_y ne sont pas décrits à moins d'un pas Δk_y très petit, *i.e.* une longueur de boîte de simulation très grande (suffisante pour qu'un mode par lobe au moins soit décrit). Le pas Δk_y minimal qu'il faudrait atteindre pour être réaliste est défini dans la réalité du propulseur par la longueur du système en azimut : $\Delta k_y V_d/\omega_{pe} = 1\ 10^{-3}$ pour un diamètre maximal du propulseur de 10 cm. Il est inutile d'atteindre une telle valeur de Δk_y puisque nous venons de montrer



(a) lobe n=4



(b) lobe n=12



(c) lobe n=30

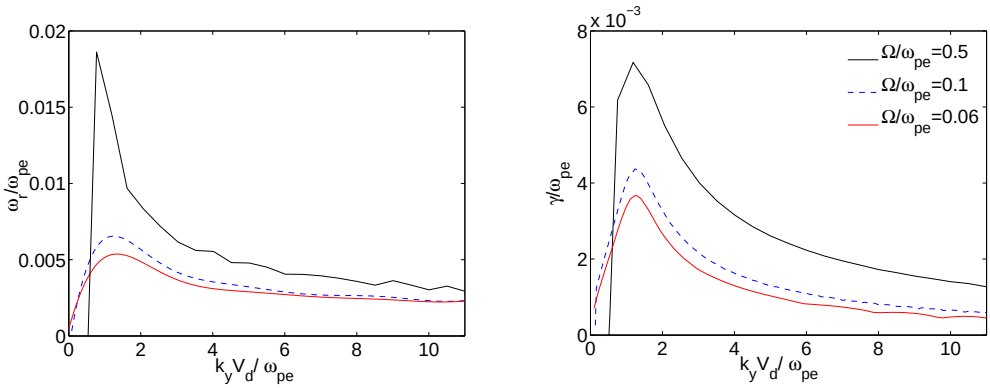
FIG. 2.4 – *Forme 1D des lobes instables.*

que les modes susceptibles de se développer effectivement se situent autour de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$. Pour ces valeurs de $k_y V_d/\omega_{pe}$ les lobes ont encore une grande extension en k_y, Fig.2.4(b), permettant une longueur de boîte raisonnable. Ce rétrécissement des plages instables en fonction de k_y est accompagné d'une symétrisation géométrique de la forme du lobe par rapport à son centre.

La section suivante est consacrée à l'évolution des propriétés mises en évidence ici en fonction de la valeur du champ magnétique.

2.1.2 Influence du champ magnétique

L'instabilité est basée sur la résonance des $k_y V_d$ avec les harmoniques cyclotroniques $n\Omega$. Il ne semble pas nécessaire de prendre en compte la composante suivant l'axe x de la perturbation pour étudier l'influence du champ magnétique sur les propriétés de l'instabilité puisque l'extension en k_x n'intervient pas dans cette résonance. L'étude de l'impact du champ magnétique se fait donc à l'aide de la résolution de la relation de dispersion monodimensionnelle azimutale (1.23) pour plusieurs valeurs de champ magnétique. Ceci est illustrée sur la figure 2.5. La partie réelle et la partie imaginaire des solutions de la relation de dispersion sont tracées pour trois valeurs de la



(a) Partie réelle de la pulsation (b) Taux de croissance

FIG. 2.5 – *Comparaison en enveloppe des solutions 1D de la relation de dispersion en fonction du champ magnétique.*

pulsation cyclotronique $\Omega/\omega_{pe} = 0.5,\ 0.1$ et 0.06 respectivement en noir, bleu et rouge. La première remarque porte sur le maximum absolu du taux de croissance : pour une vitesse de dérive donnée, plus le champ magnétique est fort et plus le taux de croissance maximal est important. Dans le cadre du propulseur, à V_d constant, un champ magnétique plus important implique un champ accélérateur plus grand ce qui est consistant avec une baisse de la conductivité classique puisque la chute de potentiel se fait sur une longueur plus courte. Cette baisse de conductivité est accompagnée d'une croissance plus rapide de l'amplitude du champ électrique fluctuant (les perturbations qui croissent avec le taux de croissance maximum) à l'origine d'un transport électronique anormal comme nous allons le voir dans la deuxième partie de ce manuscrit (nous verrons que le transport électronique est d'autant plus important que l'amplitude du champ fluctuant est grande).

La forme générale de l'enveloppe est conservée. Le maximum absolu du taux de croissance apparaît pour une valeur fixe de k_yV_d/ω_{pe} autour de 1.2 quelle que soit la valeur du champ magnétique. Cependant, une seconde remarque est à faire sur l'instabilité pour les modes à petits k_y. Étant donné la nature du processus à l'origine de l'instabilité, à savoir les résonances de k_yV_d avec les harmoniques cyclotroniques, l'apparition du premier lobe instable correspondant à l'harmonique fondamentale dépend directement de la valeur de Ω. Comme cela a été dit plus haut, aucun mode instable n'apparaît au dessous de $k_yV_d = \Omega$. Par conséquent, une augmentation de la valeur de Ω implique une augmentation de la valeur de k_yV_d pour laquelle apparaît le premier lobe instable. La figure 2.5 montre que le maximum absolu du taux de croissance est atteint pour une valeur quasiment fixe de k_yV_d/ω_{pe} autour de 1.2. Ainsi, pour une valeur de $\Omega/\omega_{pe} > 1.2$ l'apparition du premier lobe instable se fera pour une valeur de k_yV_d/ω_{pe} supérieure à 1.2, donc après le maximum du taux de croissance attendu en 1.2. Le maximum du taux de croissance sera alors obtenu pour le premier lobe $k_yV_d/\omega_{pe} = \Omega$. Ceci n'a pas

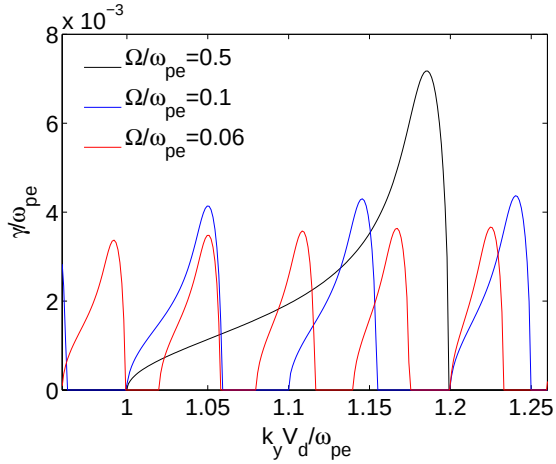


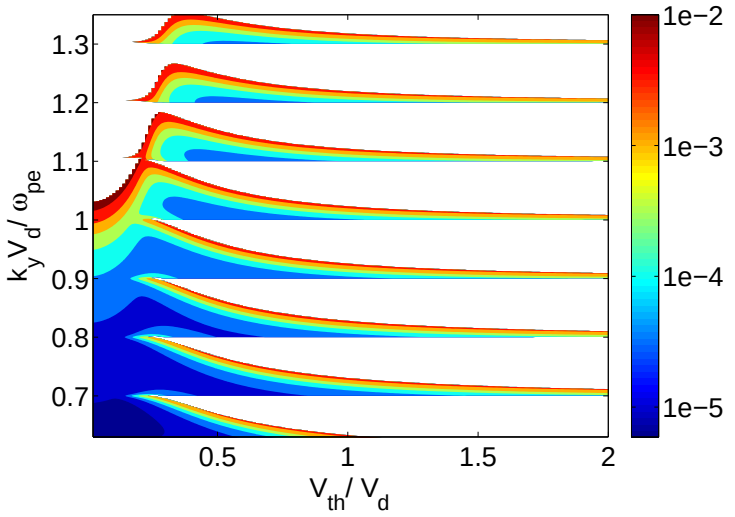
FIG. 2.6 – *Comparaison de la structure 1D de quelques lobes en fonction du champ magnétique.*

de conséquence dans le cadre du propulseur puisque le champ magnétique n'atteint jamais de telles valeurs.

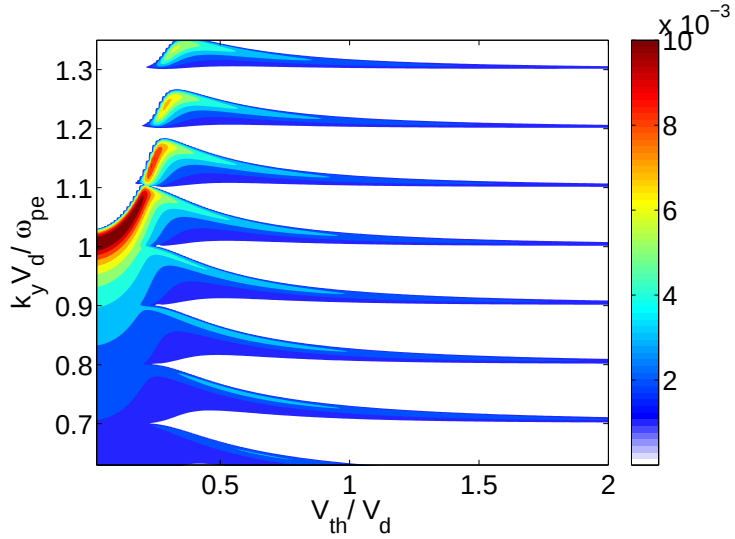
L'incidence du champ magnétique sur les lobes instables est illustrée sur la figure 2.6 qui représente un agrandissement du taux de croissance de la figure 2.5 autour de son maximum. Les conventions de couleurs sont conservées. L'apparition des lobes instables pour $k_y V_d = n\Omega$ reste de mise quelle que soit la valeur de Ω. L'extension en k_y des lobes croît nettement en fonction de Ω mais la zone d'instabilité sur un intervalle k_y donné évolue peu. Le différentiel dans l'épaisseur des lobes a pour conséquence un petit décalage du maximum absolu du taux de croissance. La propriété énoncée pendant l'analyse de l'évolution de l'enveloppe en fonction de Ω ci-dessus peut être généralisée à chaque lobe : le maximum de chaque lobe croît en fonction du champ magnétique.

2.1.3 Influence de la température

L'ensemble des propriétés déduites de l'étude de stabilité faite jusqu'à maintenant a été établi pour $V_{th}/V_d = 0.5$ (soit $T = 5.7\ eV$ pour $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$) ce qui correspond à une température électronique assez faible pour le propulseur à effet Hall. Ce choix de température de référence n'est qu'un exemple dans une étude approfondie de l'évolution de l'instabilité en fonction de la vitesse thermique. La variation du paramètre V_{th}/V_d a été introduite dans la résolution de la relation de dispersion azimutale (1.23). Le résultat est présenté en figure 2.7. La partie réelle de la pulsation et le taux de croissance sont tracés en fonction de $k_y V_d/\omega_{pe}$ en ordonnée et de V_{th}/V_d en abscisse. Les modes instables s'étendent largement pour de grandes températures puisque les taux de croissance des modes résonants $k_y V_d = n\Omega$ sont encore significatifs pour $V_{th}/V_d = 2$. Néanmoins, la largeur des plages



(a) Partie réelle de la pulsation



(b) Taux de croissance

FIG. 2.7 – *Évolution des lobes instables 1D en fonction de la température*

instables se réduit fortement en $k_y V_d$ à mesure que la température croît. La largeur des plages stables est proche de Ω pour les grandes valeurs de V_{th}/V_d.

On peut noter l'absence de racines instables pour $k_y V_d > \sqrt{\omega_{pe}^2 + \Omega^2} = \omega_{UH}$ pour de très petites températures comme cela a été évoqué lors de l'analyse du cas plasma froid en section 1.4.1.

Nous avons aussi montré dans cette section que les ondes instables sont quasiment purement croissantes pour le cas plasma froid, *i.e.* $b << 1$. La partie réelle de la pulsation (tracée en logarithme) est effectivement inférieure au taux de croissance de plusieurs ordres de grandeur pour $k_y V_d < \omega_{UH}$. La résonance $k_y V_d = \omega_{UH}$ produit le plus fort taux de croissance comme prévu. Mise à part la partie des solutions concernant les basses températures (qui ne correspond pas à la physique du propulseur), la structure générale des modes instables dépend peu du paramètre V_{th}/V_d. La structure des modes instables est conservée sur une large plage de V_{th}/V_d allant de 0.5 à 2. Le choix arbitraire de la température tel que $V_{th}/V_d = 0.5$ caractérise donc l'instabilité se développant en sortie de propulseur.

2.1.4 Influence du gradient de densité

Les résultats de l'étude analytique menée en section 1.3 tendent à montrer que la longueur de gradient de densité L_n doit être très petite, *i.e.* le gradient de densité très important, pour que les propriétés de l'instabilité soient affectées. La relation de dispersion (1.26) a été résolue numériquement pour en préciser le comportement quantitativement. Les résultats sont résumés par la figure 2.8 qui représente le taux de croissance de l'instabilité en fonction de $k_y V_d/\omega_{pe}$ pour trois longueurs de gradient de densité. Deux courbes seule-

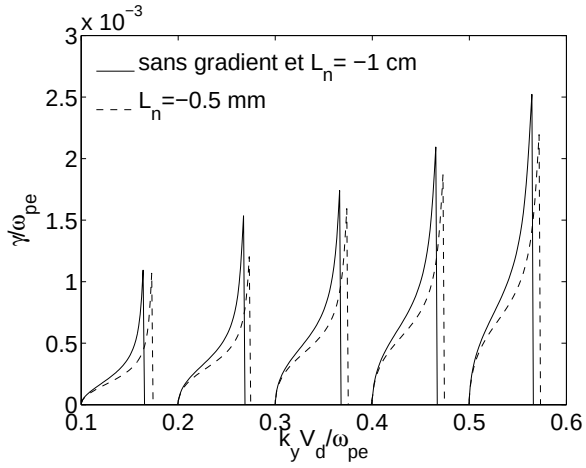


FIG. 2.8 – *Influence du gradient de densité : taux de croissance de l'instabilité 1D*

ment sont apparentes puisque les solutions de la relation de dispersion sans

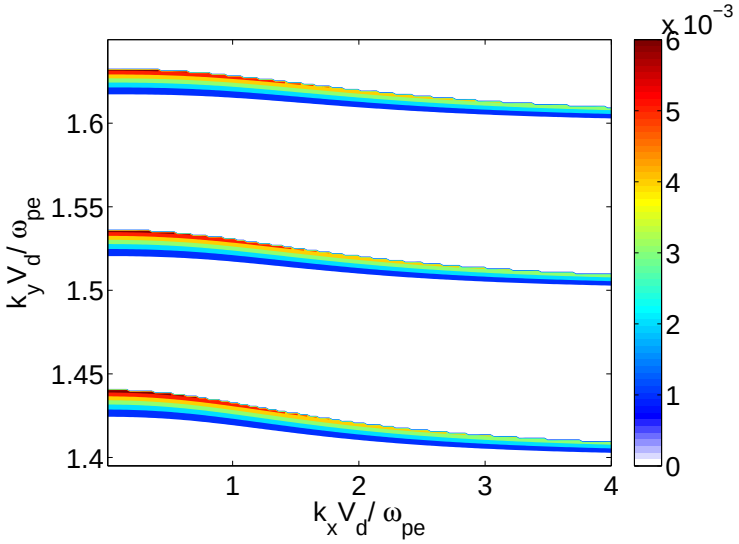
gradient et celles pour $L_n = -1\ cm$, longueur de gradient typique du propulseur, se superposent parfaitement. Il s'agit de la courbe en trait plein. La courbe en pointillé représente les solutions pour un fort gradient de densité ($L_n = -0.5\ mm$), largement supérieur à ce qui peut être observé dans la zone de sortie du propulseur. Les valeurs des pics de taux de croissance sont sensiblement identiques mais les lobes instables ont tendance à s'étaler en k_y.

Ces résultats corroborent parfaitement l'étude analytique de la relation de dispersion en section 1.3 : le terme additionnel dû au gradient de densité dans la relation de dispersion (1.26) agit sur les solutions seulement si la longueur de gradient est du même ordre de grandeur que le rayon de Larmor électronique ($L_n \sim r_L$). L'influence du gradient de densité est alors perceptible mais reste de toute façon peu significative. Dans le propulseur à effet Hall, la longueur caractéristique du gradient de densité devrait donc être de l'ordre du millimètre ce qui est largement inférieure aux valeurs de longueur de gradient présente dans celui-ci. Les instabilités étudiées ici sont donc robustes vis-à-vis du gradient de densité.

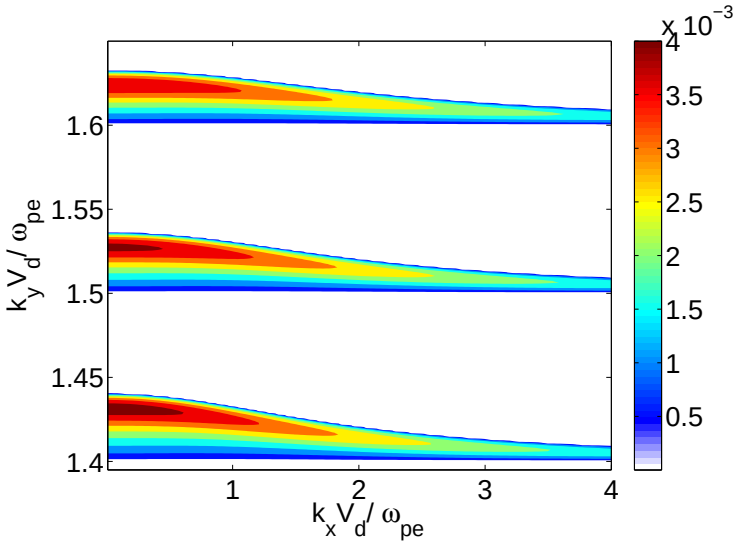
2.2 Extension bi-dimensionnelle : modes obliques

Des instabilités azimutales basées sur la résonance de $k_y V_d$ avec les harmoniques cyclotroniques ont été mises en évidence grâce à l'étude de la relation de dispersion mono-dimensionnelle. Compte tenu du mouvement de dérive relatif des électrons par rapport aux ions dans la direction azimutale, il était naturel de s'intéresser en premier lieu à cette direction pour étudier la stabilité du système. Nous avons vu que le mouvement cyclotronique joue un rôle important dans l'apparition de l'instabilité. Cette giration cyclotronique, perpendiculaire au champ magnétique, se fait dans le plan (x, y). Il semble par conséquent utile d'étudier l'extension bi-dimensionnelle d'une perturbation par la résolution de la relation de dispersion (1.22). La perturbation s'écrit ici $\Phi_1 = \phi\ \exp[i(k_x x + k_y y - (\omega_r + i\gamma)t)]$. La figure 2.9 décrit la pulsation et le taux de croissance solutions de la relation de dispersion en fonction de $k_x V_d/\omega_{pe}$ en abscisse et de $k_y V_d/\omega_{pe}$ en ordonnée. Nous savons maintenant que les modes instables sont présents jusqu'à de larges valeurs de k_y. Par souci de clarté, la figure 2.9 ne montre que les solutions au voisinage de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.5$. La largeur des lobes en k_y décroît très lentement en fonction de k_x (les échelles des abscisses et des ordonnées sont largement différentes). L'extension bi-dimensionnelle du caractère instable est donc nette dans la mesure où les taux de croissance restent importants pour des valeurs significatives de k_x jusqu'à $k_x \sim k_y$. Les résultats du cas mono-dimensionnel azimutal sont retrouvés en faisant une coupe de la figure selon le plan $k_x V_d/\omega_{pe} = 0$: alternance de zones stables et instables et transitions stabilité/instabilité pour $k_y V_d \simeq n\Omega$.

La figure 2.10 reprend les trois lobes exposés en figure 2.4 dans le cas mono-dimensionnel en y ajoutant leur extension en k_x. Le rétrécissement des plages instables en fonction de k_y accompagné d'une symétrisation géomé-



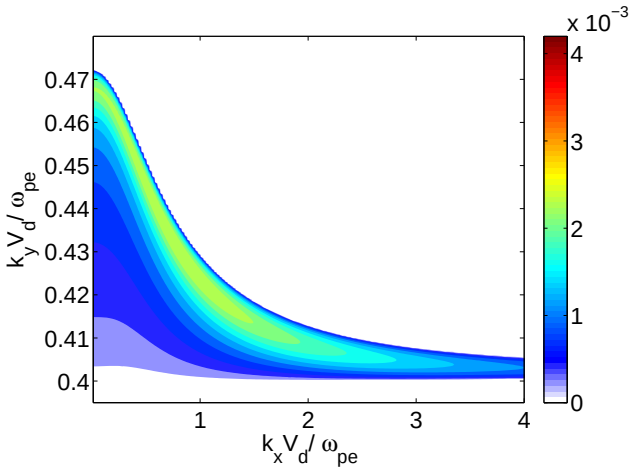
(a) Partie réelle de la pulsation



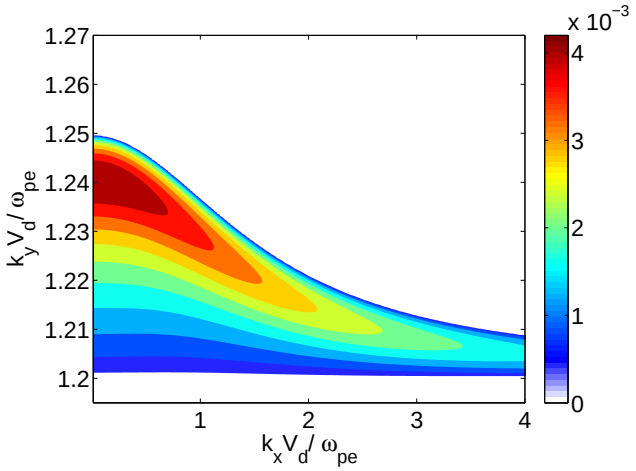
(b) Taux de croissance

FIG. 2.9 – *Modes instables 2D en fonction de k_xV_d et de k_yV_d autour de $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.5$.*

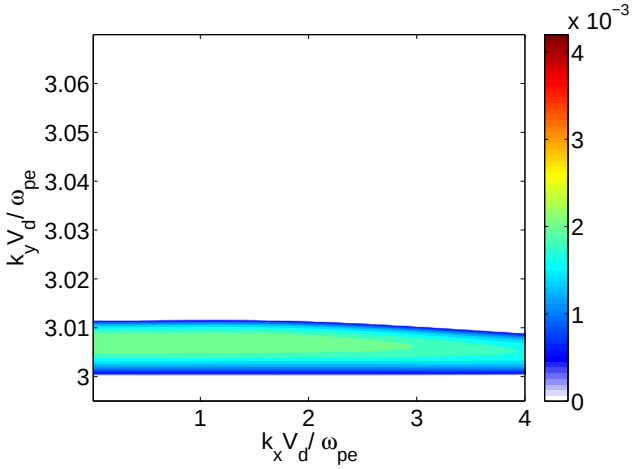
trique de la forme des lobes par rapport à leur centre est généralisé au cas bi-dimensionnel. Le rétrécissement en k_x pour un lobe instable donné peut être rapproché du celui en fonction de k_y. En effet, nous avons dit dans la section précédente 2.1.1 que la forme des lobes instables dépend de la somme des fonctions de Bessel. Pour un lobe donné, à la résonance $k_yV_d \simeq n_0\Omega$, le terme de somme des fonctions de Bessel est largement prépondérant dans l'équation (1.22). Le terme résonant en n_0 domine cette somme mais la forme des lobes dépend aussi de la contribution des autres termes de la somme et plus précisément des $I_n(b)e^{-b}$ pour $n = n_0 \pm 1$. Ces fonctions ont en argument



(a) Lobe n=4



(b) Lobe n=12



(c) Lobe n=30

FIG. 2.10 – *Forme bi-dimensionnelle des lobes instables.*

le paramètre $b = k_\perp^2 V_{th}^2/\Omega^2$ qui dépend de $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$. La forme des lobes instables dépend donc de la valeur de $k_\perp^2$, *i.e.* de celles de k_x et de k_y, ce qu'on observe sur la figure 2.10. En section 2.1.1, le paramètre b dépendait de k_y^2. Les propriétés explicitées alors en fonction de k_y pour la forme des lobes peuvent être transposées pour $k_\perp^2$. Plus $k_\perp^2$ est grand et moins l'extension du lobe instable en k_y est importante. De même, les lobes se symétrisent en k_y à mesure que $k_\perp^2$ augmente.

Les modes qui se développent effectivement dans le plasma sont ceux dont le taux de croissance est proche du maximum. La présence effective de modes obliques (c'est-à-dire avec une composante du vecteur d'onde k_x non nulle) dans le moteur n'est donc confirmée que si les taux de croissance des modes obliques sont très proches du maximum. La figure 2.11 est un agrandissement du lobe n=12, lobe pour lequel le taux de croissance atteint son maximum absolu, autour de la zone de maximum de taux de croissance. La zone

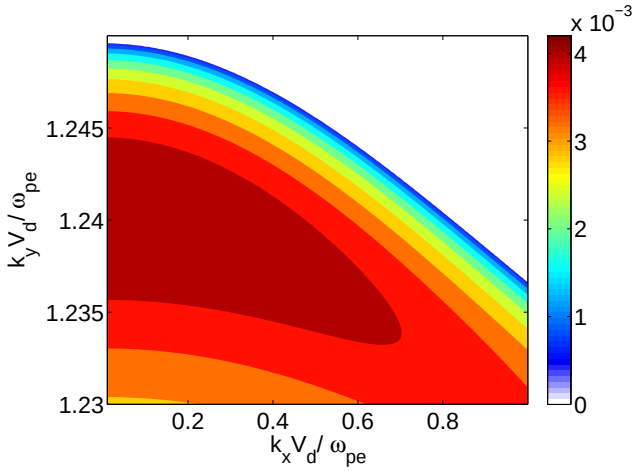


FIG. 2.11 – *Extension en k_x du lobe n=12.*

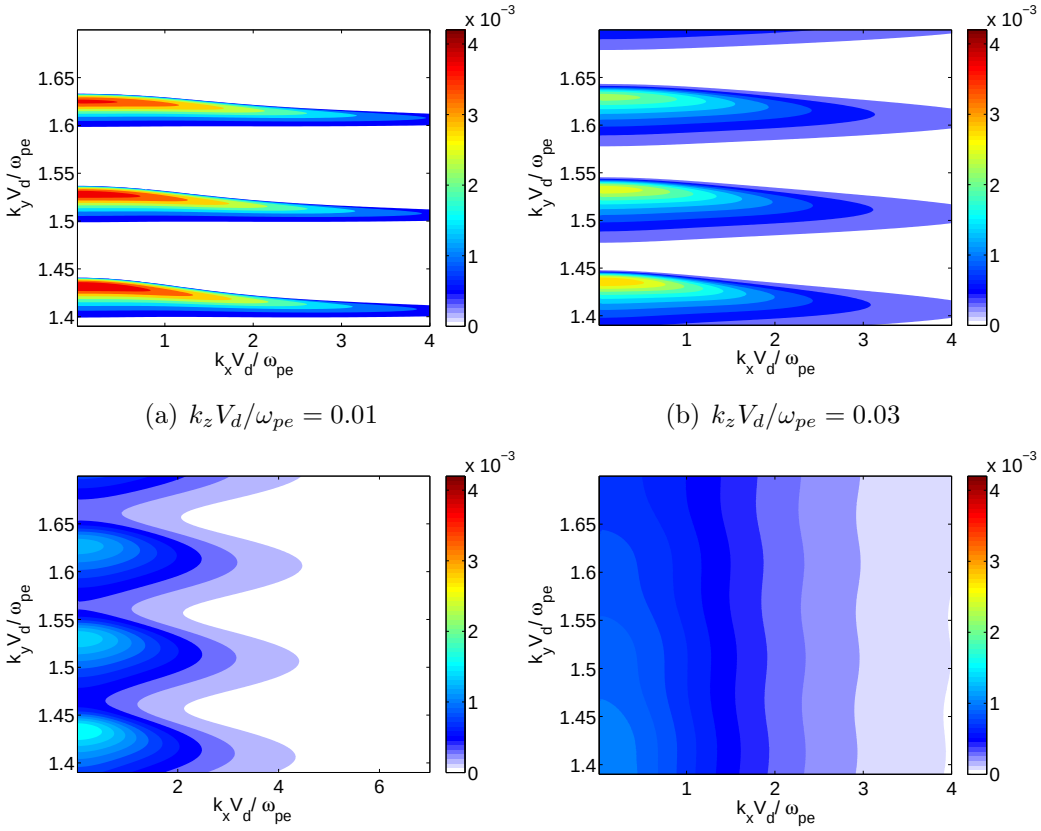
de taux de croissance maximum en rouge sombre s'étend de $k_x V_d/\omega_{pe} = 0$ (mode purement azimutal) à $k_x V_d/\omega_{pe} = 0.7$, ce qui est clairement significatif comparé à la valeur de $k_y V_d/\omega_{pe} \simeq 1.2$. Cette extension axiale du nombre d'onde correspond à une longueur d'onde $\lambda = 0.6\ mm$ pour $\omega_{pe} = 30\ GHz$ et $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$. La valeur maximale de $k_x V_d/\omega_{pe}$ pour laquelle le taux de croissance est maximum dépend du lobe considéré. Certains lobes, particulièrement ceux à petits k_y ont même un maximum de taux de croissance pour des valeurs de k_x supérieures à k_y comme on peut le voir sur la figure 2.10(a). En estimant l'étendue axiale maximale de la zone de plasma dans le propulseur à 2 cm, le nombre d'onde minimal supporté par le plasma vaut en unité normalisée $k_x V_d/\omega_{pe} = 0.02$, ce qui est largement inférieure à l'extension axiale de l'instabilité.

Ainsi, les modes instables se développant en sortie de propulseur sont des modes obliques perpendiculaires au champ magnétique. Une remarque est à faire sur la symétrie de ces modes en k_x. En effet, la composante axiale

du vecteur d'onde k_x n'intervient que sous sa forme quadratique k_x^2 dans la relation de dispersion (1.22). Le signe de k_x n'a donc pas d'importance. Les résultats exposés ci-dessus sont donc généralisables à $|k_x|$. A chaque mode oblique $(k_x,\ k_y)$ est associé son mode symétrique $(-k_x,\ k_y)$. Les ondes qui se développent en sortie de propulseur ont par conséquent une composante axiale stationnaire.

2.3 Perturbation tri-dimensionnelle

Les résultats de l'étude de la relation de dispersion ont jusqu'ici montré que des modes instables obliques perpendiculaires au champ magnétique existent en sortie de propulseur. Dans cette section, plus aucune restriction sur la relation de dispersion n'est considérée. La relation de dispersion tri-dimensionnelle (1.21) est résolue. La perturbation du potentiel s'écrit donc $\Phi_1 = \phi\ \exp[i(k_x x + k_y y + k_z z - (\omega_r + i\gamma)t)]$. La prise en compte de la direction parallèle fait apparaître dans la relation de dispersion (1.21) plusieurs termes en k_z, composante radiale du vecteur d'onde parallèle au champ magnétique et donc susceptible d'être sensible à l'effet Landau. Ainsi, le caractère instable



(a) $k_z V_d/\omega_{pe} = 0.01$ (b) $k_z V_d/\omega_{pe} = 0.03$

(c) $k_z V_d/\omega_{pe} = 0.05$ (d) $k_z V_d/\omega_{pe} = 0.1$

FIG. 2.12 – *Évolution des lobes instable 2D en fonction de* $k_z V_d/\omega_{pe}$.

du système est susceptible de disparaître dès que la composante k_z devient significative devant les autres composantes du vecteur d'onde k_x et k_y. Ce comportement est illustré par la figure 2.12.

Elle représente l'évolution des trois lobes instables $n = 14,\ 15$ et 16 en fonction de k_xV_d/ω_{pe} et k_yV_d/ω_{pe} pour quatre valeurs de $k_zV_d/\omega_{pe} = 0.01,\ 0.03,\ 0.05$ et 0.1. Pour k_z croissant, les lobes instables s'étalent rapidement dans l'espace $(k_x,\ k_y)$ jusqu'à le remplir complètement. Cet étalement est associé à une décroissance rapide des taux de croissance. Ces derniers deviennent négligeables (par rapport au taux de croissance maximum) pour des valeurs de k_z largement inférieures à celles de k_x et k_y. Une autre manière d'exposer les résultats permet d'avoir une vision complète de cette propriété : la figure 2.13 représente le taux de croissance de l'instabilité pour le lobe $n = 12$ en fonction de k_zV_d/ω_{pe} et k_yV_d/ω_{pe} pour une valeur donnée $k_xV_d/\omega_{pe} = 0$. L'étalement du lobe instable en fonction de k_z est clair. Dans la zone de fort

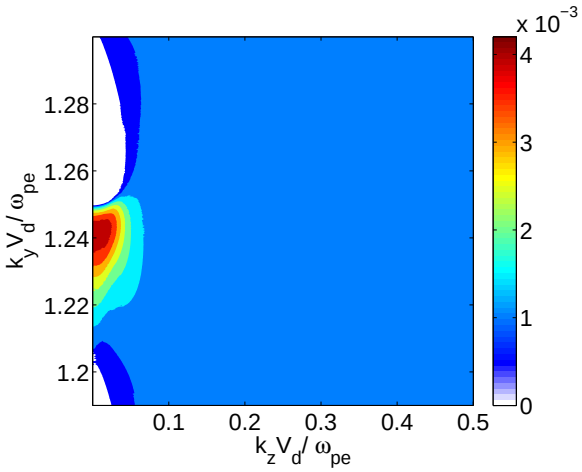


FIG. 2.13 – *Modes instables 2D en fonction de k_zV_d/ω_{pe} et de k_yV_d/ω_{pe} pour $k_xV_d = 0$ autour de $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.2$.*

taux de croissance (autour de $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.24$), les valeurs du taux de croissance sont négligeables à partir de $k_zV_d/\omega_{pe} = 0.065$. Cette valeur correspond à une valeur de k_z largement inférieure à celle de k_y.

Les modes instables sont en résumé des modes obliques $(k_x,\ k_y)$: les taux de croissance deviennent rapidement négligeables pour des k_z finis. L'analyse que l'on vient d'effectuer porte essentiellement sur les lobes à plus forts taux de croissance mais est représentative du comportement général de l'instabilité. En définitive, les ondes sont peu instables dés lors qu'on considère une extension tri-dimensionnelle. Les modes instables peuvent être considérés comme principalement obliques perpendiculaires au champ magnétique. Cette analyse est cependant à tempérer étant donnée la géométrie cartésienne simplifiée du modèle : une analyse plus précise impliquerait de se placer en géométrie cylindrique, ce qui représenterait un travail numérique considérable.

2.4 Validation du domaine linéaire de l'instabilité

L'étude de stabilité précédente, théorique par essence, a déterminé les propriétés de l'instabilité électronique de dérive. Les fréquences spatiales et temporelles impliquées sont proches de celles observées dans le code particulaire implicite dont une partie des résultats a été exposée en partie préliminaire. Pour autant, la complexité de ce modèle ne permet pas d'aller plus loin dans la comparaison théorico-numérique et donc de valider les résultats théoriques. Il a donc été utile de développer un modèle PIC explicite simplifié basé sur les hypothèses de la relation de dispersion. Développé à l'origine pour l'étude du régime non-linéaire de l'instabilité dont nous verrons les conclusions en chapitre 4, ce modèle va nous permettre ici de valider le domaine linéaire de l'instabilité.

2.4.1 Modèle particulaire explicite

Il s'agit d'un code particulaire classique [Birdsall & Langdon 1985, Tajima 1989] mono-dimensionnel en espace et bi-dimensionnel en vitesse et périodique pour éviter tout problème de développement de couche électrostatique et avoir une situation aussi claire que possible sur le plan théorique. Le système est donc infini homogène. L'axe de simulation, noté y, correspond à la direction azimutale et les vitesses axiale et azimutale sont prises en compte. Ce code modélise approximativement la physique des 5 derniers millimètres de plasma situés en sortie du moteur. La géométrie est identique à celle du code implicite à l'exception de la dimension axiale non prise en compte ici. Une vitesse de dérive constante est appliquée aux électrons modélisant la configuration de champs électrique et magnétique croisés de la relation de dispersion (champ électrique axial et champ magnétique radial constants). Le potentiel auto-consistant est calculé par l'équation de Poisson ce qui est naturel dans le contexte d'un modèle électrostatique. L'ionisation, les collisions et les gradients de densité et de champ magnétique ne sont pas pris en compte contrairement au modèle implicite.

L'initialisation des fonctions de distribution requiert une attention particulière. En effet, nous voulons vérifier la validité de l'étude de stabilité développée dans les sections précédentes et donc être capable de faire une mesure du taux de croissance linéaire de l'instabilité. Il faut donc éviter d'avoir un régime transitoire mal contrôlé. Ceci implique que les fonctions de distribution initiales des particules soient construites à partir des invariants du mouvement explicités au chapitre 1, à savoir $v_\perp$.

Nous avons vu précédemment que l'instabilité se développe en paquets de modes instables. Les lobes instables apparaissent pour chaque $k_y V_d$ proche d'une harmonique cyclotronique. Il est par conséquent nécessaire de discrétiser fortement le modèle afin de limiter le nombre de modes instables susceptibles

de se développer. La longueur de la boîte de simulation est ajustée en vue de décrire le ou les modes qui nous intéressent nous permettant de vérifier les taux de croissance théoriques.

Soit *ylong* la longueur de la boîte de simulation en unité normalisée par la longueur de Debye λ_D. Alors le mode fondamental décrit correspond à un nombre d'onde :

$$\frac{k_y V_d}{\omega_{pe}} = \frac{2\pi}{ylong}\frac{V_d}{V_{th}} \tag{2.1}$$

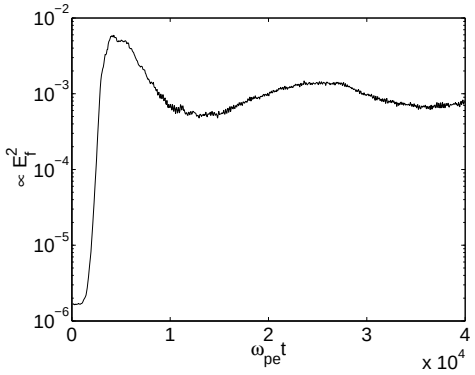
A cette longueur de boîte est donc associé un mode fondamental. Cependant, les modes dont le nombre d'onde est multiple du mode fondamental (les modes harmoniques) peuvent aussi se développer si ils sont instables. Pour étudier la croissance linéaire d'un mode particulier, il faut donc ajuster la longueur de simulation et vérifier que les harmoniques ne sont pas instables (ou instables avec un taux de croissance négligeable par rapport au taux de croissance du mode fondamental). La structure générale des solutions instables de la relation de dispersion restreint grandement les modes que l'on peut étudier de manière isolée. En effet, la plupart des harmoniques d'un mode donné sont effectivement instables. Le problème se pose de manière d'autant plus importante que le mode fondamental à étudier est de grande longueur d'onde, *i.e.* de petit nombre d'onde, comme nous le verrons dans le chapitre 4. La validation du domaine linéaire peut difficilement être systématique et se fera donc au travers de deux modes caractéristiques (le nombre prohibitif de modes instables aurait de toute façon limité la validation à quelques cas caractéristiques). Il s'agit du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ et du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$ qui sont représentatifs de l'ensemble des modes instables.

2.4.2 Phase linéaire de l'instabilité

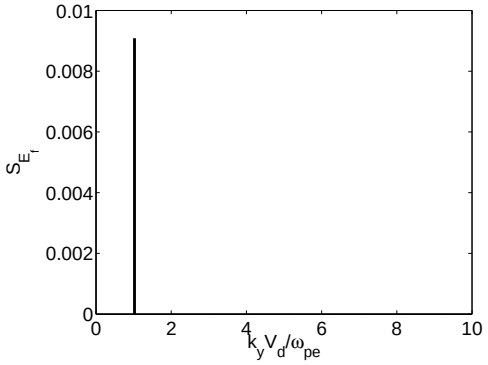
Les deux simulations présentées ici ont été effectuées avec un rapport de la vitesse thermique à la vitesse de dérive $V_{th}/V_d = 0.5$ et un champ magnétique tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$.

La première simulation a été effectuée avec une longueur de boîte correspondant au mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$. La relation de dispersion annonce que ce mode est très instable (Fig. 2.15) et que les harmoniques correspondant à ce mode ($k_y V_d/\omega_{pe} = 2.08$, $k_y V_d/\omega_{pe} = 3.12$...) ne sont pas ou peu instables. Ces assertions directement issues de l'étude théorique peuvent être aisément vérifiées à l'aide de la simulation.

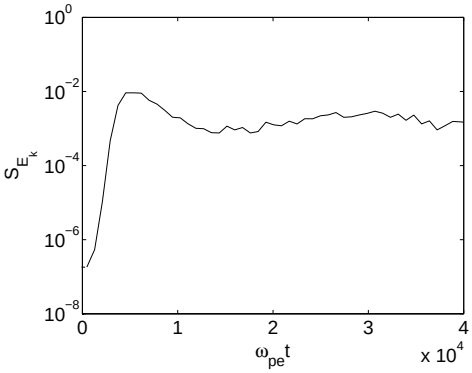
La figure 2.14(a) illustre la croissance de l'énergie électrostatique en fonction du temps. Elle montre clairement que le système est instable. L'origine de la croissance de l'énergie électrostatique est explicitée par les figures 2.14(b) et 2.14(c). Elles correspondent respectivement à la densité spectrale de puissance du champ fluctuant azimutal E_f et à l'évolution temporelle de la densité spectrale du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$. Celles-ci viennent confirmer la présence d'un mode unique instable dans la simulation et que ce mode correspond à celui prévu par la théorie. L'évolution de la densité spectrale de puissance du



(a) Évolution temporelle de l'énergie électrostatique



(b) Densité spectrale de puissance au temps $\omega_{pe}t = 3.5\ 10^3$



(c) Évolution temporelle de la densité spectrale de puissance du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.04$

FIG. 2.14 – *Croissance du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.04$ dans la simulation particulaire explicite 1D ylong = 12.083 λ_D.*

mode fondamental permis par la simulation est parfaitement corrélée à celle de l'énergie électrostatique. La croissance de l'énergie électrostatique est due uniquement à la croissance du mode fondamental. Les harmoniques du mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.04$ dont le développement est permis par la simulation en sont absentes. Ces absences confirment leur caractère pas ou peu instable prévu par la théorie.

Après une période de croissance forte de l'énergie électrostatique, on observe sur la figue 2.14(a) une saturation de celle-ci. Nous reviendrons sur cette saturation dans la suite, notamment dans le chapitre 3 qui sera consacré au mécanisme de saturation de la plupart des modes instables. Ces figures nous montrent que l'existence du caractère instable du mode considéré est vérifiée par la simulation. De même, il est possible de vérifier quantitativement la validité du taux de croissance théorique obtenue par la relation de dispersion.

Les amplitudes complexes des variables varient dans le temps en $\exp(-i\omega t) = \exp(-i\omega_r t).\exp(\gamma t)$. L'amplitude réelle du champ électrique mono-mode évolue donc en $\exp(\gamma t)$. La figure 2.14(a) représente plus exactement le carré de

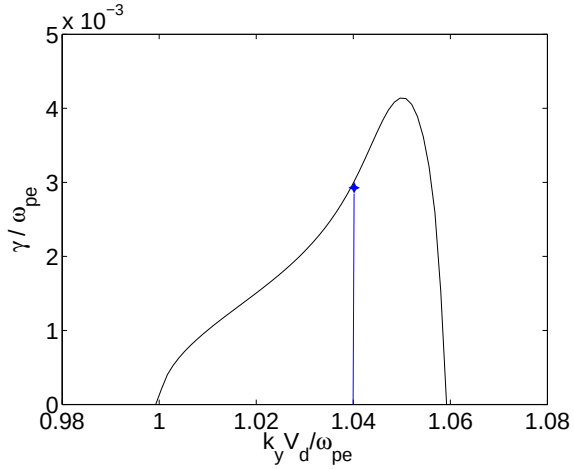


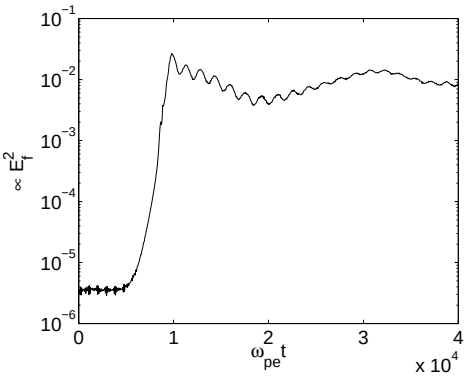
FIG. 2.15 – *Position du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ dans le lobe instable 1D n=10 calculé par la relation de dispersion.*

l'amplitude du champ électrique fluctuant E_f tracé en logarithme en fonction du temps. Nous avons vu que seul le mode fondamental se développe dans la simulation de longueur choisie *ad hoc*, d'où

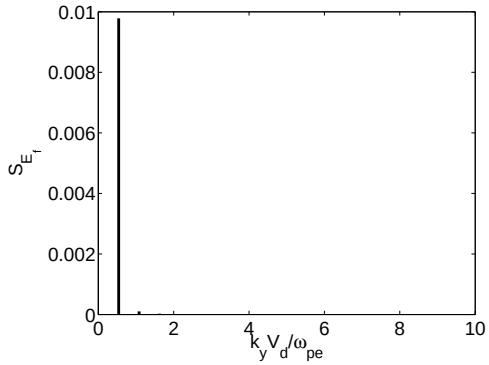
$$E_f^2 \propto e^{2\gamma t}$$

Le taux de croissance du mode considéré est donc directement déterminé graphiquement en calculant la pente de l'énergie électrostatique à un facteur 2 près (pente = 2γ). Les erreurs graphiques et les inexactitudes numériques nous obligent à rester prudent quant à la précision de la mesure. On peut néanmoins établir une pente minimale et une pente maximale définissant un intervalle dans lequel se situe le taux de croissance. Cet intervalle de taux de croissance issu de la simulation est à comparer au taux de croissance théorique de la figure 2.15 calculé par la relation de dispersion. Les pentes minimale et maximale de la courbe 2.14(a) fournissent l'intervalle de taux de croissance "PIC" suivant : $\gamma_{pic}/\omega_{pe} \in [2.\ 10^{-3}; 3.3\ 10^{-3}]$. Le taux de croissance théorique de $\gamma_{th}/\omega_{pe} \simeq 3\ 10^{-3}$ est compris dans cette intervalle. Cette validation du calcul théorique de la relation de dispersion par la simulation particulaire est confirmée par la seconde simulation, pour une longueur de simulation correspondant au mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$.

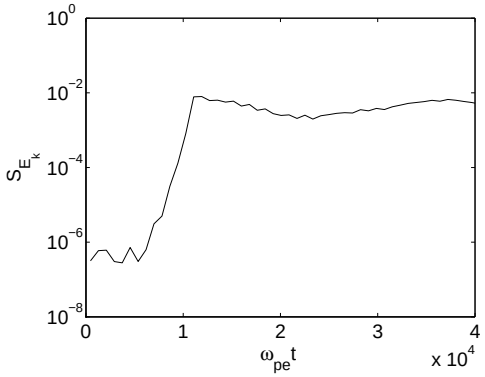
Là encore, le mode fondamental est choisi de manière à ce que ses harmoniques ne soient pas ou peu instables théoriquement. La figure 2.16 illustre la croissance effective (et la saturation) de l'énergie électrostatique par le développement (et la saturation) d'un mode instable unique, le mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$. L'intervalle de taux de croissance déterminé graphiquement par les pentes minimale et maximale de l'énergie électrostatique donne : $\gamma_{pic}/\omega_{pe} \in [0.9\ 10^{-3}; 2.5\ 10^{-3}]$. Il est à comparer avec le taux de croissance décrit par la relation de dispersion en figure 2.17. Il vaut $\gamma_{th}/\omega_{pe} \simeq 1.3\ 10^{-3}$. Les mêmes remarques que pour la simulation précédente sont à faire ici : le



(a) Évolution temporelle de l'énergie électrostatique



(b) Densité spectrale de puissance au temps $\omega_{pe}t = 8\ 10^3$



(c) Évolution temporelle de la densité spectrale du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$

FIG. 2.16 – *Croissance du mode* $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$ *dans la simulation particulaire explicite 1D ylong* $= 22.8479\ \lambda_D$.

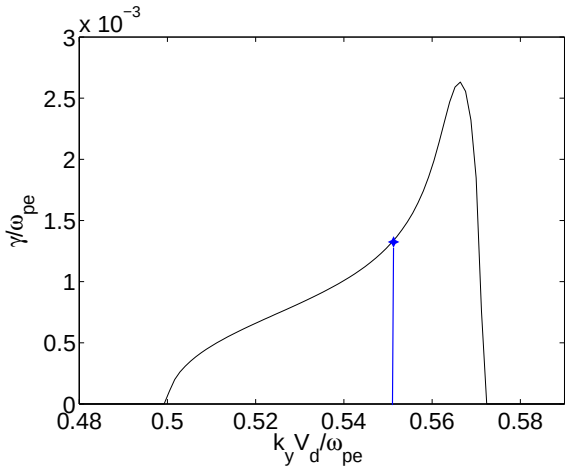


FIG. 2.17 – *Position du mode* $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$ *dans le lobe instable 1D n=5.*

caractère instable du mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$ et stable de ses harmoniques valide les propriétés de l'instabilité mises en évidence par l'étude de la relation de dispersion. Le taux de croissance théorique se situe dans l'intervalle des taux de croissance numériques mesurés.

Une observation plus précise de l'évolution temporelle de l'énergie électrostatique et de celle de la densité spectrale des modes considérés suggère un taux de croissance non constant. La pente des courbes correspondantes semble évoluer avec le temps. La difficulté de déterminer avec précision la pente pour les deux modes ci-dessus, et donc l'importance de l'intervalle des taux de croissance mesurés qu'il en résulte, n'ont pas comme seule cause les erreurs graphiques et numériques. Nous allons voir dans le paragraphe suivant qu'une hypothèse du calcul de la relation de dispersion s'avère être inexacte dans le temps à la vue des résultats du modèle numérique. Il s'agit de l'hypothèse maxwellienne de la fonction de distribution électronique. En d'autres termes, la durée de vie du régime linéaire est extrêmement courte.

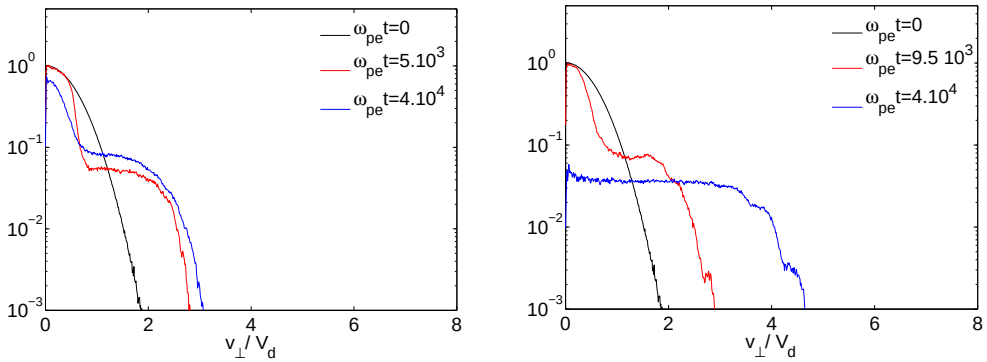
2.4.3 Évolution de la fonction de distribution

La croissance de l'énergie électrostatique dans les simulations particulaires est accompagnée d'une déformation importante de la fonction de distribution électronique. Ceci est illustré par la figure 2.18 qui représente l'évolution temporelle des fonctions de distribution électronique pour les deux modes étudiés jusqu'ici $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ et $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$.

La remarque la plus évidente concerne la nette déformation de la fonction de distribution en fonction du temps. Quel que soit le mode qui se développe, celle-ci n'est rapidement plus maxwellienne ce qui pose évidemment problème vis-à-vis de la théorie linéaire de la relation de dispersion puisque l'une des hypothèses fortes est le caractère maxwellien de la fonction de distribution électronique.

Pour le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ en figure 2.18(a), l'évolution temporelle de la fonction de distribution est caractérisée par la superposition de celle-ci à trois temps significatifs : à l'origine de la simulation avant que le mode ne se développe ($\omega_{pe}t = 0$), en phase de croissance de l'énergie électrostatique ($\omega_{pe}t = 5\ 10^3$) et en fin de simulation ($\omega_{pe}t = 4\ 10^4$). Un plateau dans la fonction de distribution se crée autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ à mesure que l'énergie du mode instable croît. Nous verrons dans la deuxième partie sur le transport électronique que cette valeur est comprise théoriquement. A cette apparition d'un plateau est associé un chauffage des électrons. L'élargissement du plateau et le chauffage corrélé ralentissent dès que le mode instable est saturé, *i.e.* l'énergie associée ne croît plus, c'est-à-dire le mode n'est plus instable (le chauffage continue sur un rythme moindre puisque l'onde associée est toujours présente dans le système avec une amplitude d'onde qui n'évolue plus).

L'évolution temporelle de la fonction de distribution pour le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$ en figure 2.18(b) est marquée par une déformation plus importante. Les trois fonctions de distribution noire, rouge et bleue correspondent aux



(a) Pour le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ (b) Pour le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$

FIG. 2.18 – *Évolutions temporelles de la fonction de distribution dans les deux simulations PIC 1D précédentes.*

points significatifs de l'énergie électrostatique déjà cité ci-dessus. Ils ne correspondent pas au même temps dans la mesure où le taux de croissance du mode considéré est différent de celui précédemment étudié. La forme de la fonction de distribution est similaire à celle du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ au niveau du début de la phase de croissance de l'énergie électrostatique : plateau et étalement de la fonction. L'évolution diverge notablement dans la suite de l'évolution de la fonction de distribution. Celle-ci tend à s'aplatir en fonction du temps jusqu'à atteindre une fonction de distribution plane largement étalée (en bleu).

L'évolution temporelle des fonctions de distribution électroniques pour ces deux modes instables est caractéristique : selon la valeur $k_y V_d$ du mode instable considéré, la fonction de distribution électronique se déforme en faisant apparaître un plateau comme pour le cas $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ et peut aller jusqu'à devenir plate comme pour le cas $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.55$. La cause de cette différence dans l'évolution de la fonction de distribution est liée à la valeur de l'énergie de saturation qui varie selon k_y et sera traitée un peu plus loin.

D'un point de vue plus général, l'analyse de l'évolution temporelle des fonction de distribution montre que l'hypothèse d'une fonction de distribution maxwellienne, raisonnable en début de simulation, devient fausse à mesure que l'instabilité se développe. La corrélation entre l'évolution de l'énergie électrostatique et la déformation de la fonction de distribution semble montrer que la fonction de distribution se déforme par des effets non linéaires de l'instabilité sur les électrons. L'impact de l'instabilité sur la distribution électronique fera l'objet de la seconde partie de ce manuscrit ; mais auparavant, il semble nécessaire de reprendre l'analyse de la stabilité du système avec une fonction de distribution électronique non maxwellienne proche de celle observée dans les simulations PIC afin d'étudier l'évolution du comportement de l'instabilité.

En conclusion de ce chapitre, l'étude multi-dimensionnelle de la relation de dispersion a mis en évidence l'existence d'instabilités excitées par la résonance entre $k_y V_d$ et les harmoniques cyclotroniques $n\Omega$ dans la configuration de champ électrique et magnétique croisés existante en sortie de moteur. Elles sont peu dépendantes du gradient de densité tandis qu'elles sont d'autant plus violentes que le champ magnétique est fort. La largeur des plages d'instabilité se réduit en fonction de la température mais reste conséquente pour les paramètres du propulseur. Ces instabilités se développent sous la forme de paquets de modes instables obliques (dans le plan (Oxy)) perpendiculaires au champ magnétique. Les ondes qui se développent ont une fréquence de l'ordre de 10 à 40 MHz, des temps de croissance γ^{-1} de 0.1 μs à 0.05 μs et des nombres d'ondes correspondant à des longueurs d'onde de l'ordre du dixième de millimètre jusqu'au millimètre pour des paramètres typiques du propulseur : $n_0 = 2.8\ 10^{11}$particules.cm^{-3}, $B = 170G$, $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$. Les simulations particulaires 1D ont validé les propriétés extraites de l'analyse. Cependant, elles ont aussi montré que la fonction de distribution électronique se déforme rapidement en fonction du développement de l'instabilité. L'hypothèse d'une fonction maxwellienne dans le calcul de la relation de dispersion n'est plus valable si tôt que les modes instables croissent. Il est donc utile de reprendre ce calcul en ne faisant pas d'hypothèse sur la fonction de distribution électronique. Le chapitre suivant sera donc consacré au calcul de la relation de dispersion intégrale. Ce calcul rendra possible l'étude de l'influence de la déformation de la fonction de distribution sur les propriétés de l'instabilité.

Chapitre 3

Déformation de la fonction de distribution électronique et modes instables

Sommaire

3.1 Relation de dispersion intégrale 74

3.2 Déformation de la fonction de distribution . . 75

3.3 Évolution des solutions selon la forme de la fonction de distribution 76

3.3.1 Perturbation azimutale 77

3.3.2 Perturbation oblique 80

Le développement des modes instables dans la configuration de champs électrique et magnétique croisés du propulseur s'accompagne d'une déformation importante de la fonction de distribution électronique. L'hypothèse d'une fonction de distribution maxwellienne, valable pour décrire le plasma à l'équilibre, n'est plus justifiée dés lors que l'amplitude des modes instables s'accroît. Le processus de déformation de la fonction de distribution par les modes instables sera explicité dans la deuxième partie du manuscrit. Dans ce chapitre, nous reprenons le calcul de la relation de dispersion sans faire l'hypothèse d'une fonction de distribution électronique maxwellienne. Ce calcul nous mènera à une expression intégrale de la relation de dispersion, soluble numériquement pour une fonction de distribution quelconque. L'étude de stabilité du système avec des fonctions de distribution réalistes suggérées par les simulations particulaires s'appuiera sur ce nouveau calcul, complétant ainsi l'étude effectuée dans les chapitres précédents.

3.1 Relation de dispersion intégrale

Nous avons vu dans le chapitre 2 que les modes plus fortement instables étaient les modes obliques perpendiculaires au champ magnétique. Nous nous limiterons donc à ce cas dans la suite. La perturbation considérée sera donc bi-dimensionnelle : $\Phi_1 = \phi \ \exp[i(k_x x + k_y y - \omega t)]$.

Le calcul de la perturbation de densité ionique est inchangé par rapport au chapitre 1 puisque nous considérons une déformation dans la fonction de distribution électronique. Les ions sont décrits de manière fluide et l'expression de la perturbation de densité ionique (1.10) est :

$$n_i^1 = \frac{n_0 e \Phi_1 k_\perp^2}{M\omega^2}$$

avec $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$.
Au contraire, le calcul de la perturbation de la densité électronique ne peut être mené à son terme comme au chapitre 1. Le passage de la fonction de distribution perturbée f_1 à la perturbation de densité n_e^1 par une intégration sur les vitesses n'est plus calculable analytiquement.

On reprend le calcul de la perturbation de la densité électronique juste avant que l'hypothèse de la fonction de distribution maxwellienne ne soit introduite. L'intégration de l'équation de Vlasov le long de chaque orbite électronique donne la fonction de distribution perturbée (1.15) qui s'écrit :

$$f_1 = -\frac{e}{m} \int_{-\infty}^{t} \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial x}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}\frac{\partial f_0}{\partial v_\eta} \right) \, d\tau$$

où f_0 est une fonction quelconque des invariants du mouvement (1.13). En introduisant la vitesse perpendiculaire au champ magnétique $v_\perp$, les dérivées partielles en x et en η se transforment de la manière suivante :

$$\frac{\partial f_0}{\partial v_x} = v_x . \frac{\partial f_0}{\partial (v_\perp^2/2)}; \quad \frac{\partial f_0}{\partial v_\eta} = v_\eta . \frac{\partial f_0}{\partial (v_\perp^2/2)}$$

$v_\perp^2$ est un invariant du mouvement. Par conséquent, étant donné que f_0 est une fonction des invariants du mouvement, le terme $\dfrac{\partial f_0}{\partial (v_\perp^2/2)}(v_\perp^2)$ peut être mis en facteur de l'intégrale :

$$f_1 = -\frac{e}{m} \, \frac{\partial f_0}{\partial (v_\perp^2/2)} \int_{-\infty}^{t} \left(v_x \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_\eta \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta} \right) \, d\tau$$

On utilise la relation

$$\frac{d\Phi_1}{dt} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + v_x . \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} + v_\eta . \frac{\partial \Phi_1}{\partial \eta}$$

ce qui nous permet d'écrire

$$f_1 = -\frac{e}{m} \, \frac{\partial f_0}{\partial (v_\perp^2/2)} \left(\Phi_1 - \int_{-\infty}^{t} \frac{\partial \Phi_1}{\partial t}(\tau) \, d\tau \right)$$

L'intégration le long des orbites électroniques est en tout point identique au calcul effectué pour une distribution maxwellienne en section 1.2.2 sans prendre en compte la composante z. Elle mène à l'expression de la perturbation de la fonction de distribution :

$$f_1 = -\frac{e}{m}\ \Phi_1\ \frac{\partial f_0}{\partial(v_\perp^2/2)}\left[1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n^2\left(k_\perp v_\perp/\Omega\right)}{(n\Omega-\omega_d)}\right]$$

La perturbation de la densité électronique s'obtient en effectuant l'intégrale de f_1 sur l'ensemble de l'espace des vitesses :

$$n_e^1 = \int\int f_1 v_\perp dv_\perp d\theta$$

La fonction de distribution non perturbée f_0 est une fonction de $v_\perp^2$ quelconque. Aucune hypothèse sur la nature de cette fonction n'a été faite à ce stade du calcul. Sans faire l'hypothèse d'une fonction maxwellienne qui permet de poursuivre le calcul, l'expression de la perturbation de densité peut s'écrire sous forme intégrale :

$$n_e^1 = -2\pi\ \frac{e}{m}\ \Phi_1 \int_0^\infty dv_\perp v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial(v_\perp^2/2)}\left[1+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{J_n^2\left(k_\perp v_\perp/\Omega\right)}{(n\Omega-\omega_d)}\right]$$

La relation de dispersion intégrale est calculée à partir de l'équation de Poisson comme cela a été fait dans la section 1.2.3.

$$\begin{aligned} &k_\perp^2\lambda_D^2\left(1-\frac{m}{M}\frac{\omega_{pe}^2}{\omega^2}\right)-2\pi\frac{v_{th}^2}{n_0}\int_0^\infty dv_\perp v_\perp\frac{\partial f_0}{\partial\left(v_\perp^2/2\right)} \\ &\times\left[1-J_0^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)+\sum_{n=1}^{n=\infty}J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\frac{2\left(\omega-k_yV_d\right)^2}{\left(n\Omega\right)^2-\left(\omega-k_yV_d\right)^2}\right]=0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

où f_0 est un fonction de distribution quelconque. Dans la relation de dispersion (3.1), la fonction de distribution f_0 n'intervient que sous la forme de sa dérivée. L'analyse de cette expression suggère qu'une variation de la pente de la fonction de distribution modifie localement en $v_\perp$ le poids des différents termes de l'intégrale. Nous pouvons donc supposer que les solutions de la relation de dispersion vont être modifiées par rapport au cas maxwellien dès que la pente locale de la fonction de distribution s'écartera de manière significative de celle d'une maxwellienne valable en début de développement des modes instables.

3.2 Déformation de la fonction de distribution

La déformation de la fonction de distribution électronique a été mise en évidence en section 2.4.3. Les déformations caractéristiques observées lors

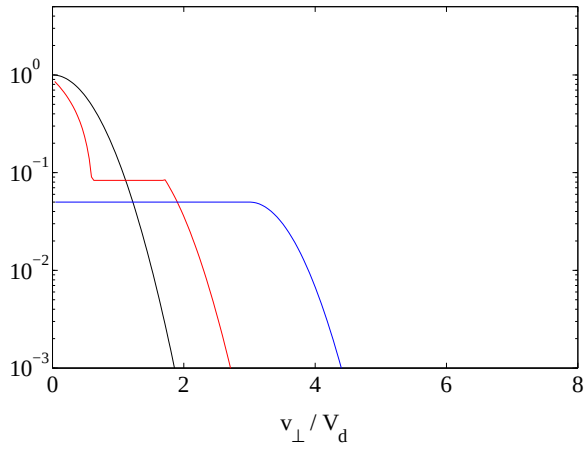


FIG. 3.1 – *Fonction de distribution typiquement observée dans les simulations particulaires et utilisée dans la résolution de la relation de dispersion intégrale.*

des simulations particulaires ont été mise en avant : apparition d'un plateau autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ et/ou aplatissement de la fonction de distribution. L'extension en $v_\perp$ de la fonction de distribution ainsi que celle du plateau dépend des modes considérés dans les simulations et du temps auquel la fonction de distribution est observée. L'étude précise de l'influence de la déformation étant prohibitive si l'on veut être exhaustif dans les formes de fonctions de distribution considérées, nous avons choisi deux fonctions caractéristiques correspondant à une fonction présentant un plateau et une fonction plate analogues à celles obtenues dans les modèles particulaires. Ces fonctions de distribution modèles qui vont donc être introduites dans l'intégrale de la relation de dispersion (3.1) sont représentées en fonction de $v_\perp$ sur la figure 3.1. La courbe noire correspond à la fonction de distribution maxwellienne. Les courbes rouge et bleue seront utilisées pour décrire la réaction de l'instabilité respectivement face à la formation d'un plateau dans la fonction de distribution et face à un aplatissement de la fonction de distribution. Les codes de couleurs seront respectés dans la suite de ce chapitre.

3.3 Évolution des solutions selon la forme de la fonction de distribution

La résolution de la relation de dispersion (3.1) pour des fonctions de distribution non-maxwelliennes se complique notablement par rapport au cas maxwellien. L'intégrale est effectuée numériquement par une méthode de Runge-Kutta d'ordre 4 (routine odeint [Press *et al.* "Numerical Recipes"]). Une fois l'intégrale calculée, la résolution de la relation de dispersion se fait de la même manière que dans le chapitre 2. L'intégration numérique sur l'ensemble des vitesses doit se faire pour chaque itération de la résolution puisque l'itération

est effectuée pour des paramètres présents dans l'intégrale ($k_x V_d$ et $k_y V_d$).

3.3.1 Perturbation azimutale

La perturbation prise en compte ici est mono-dimensionnelle azimutale (en k_y uniquement). La relation de dispersion est identique à l'équation (3.1) en posant $k_\perp = k_y$.

L'évolution des solutions de la relation de dispersion (3.1) en fonction de $k_y V_d/\omega_{pe}$ pour les trois fonctions de distribution de la figure 3.1 est illustrée en figure 3.2 en enveloppe. Ces trois courbes montrent que l'instabilité per-

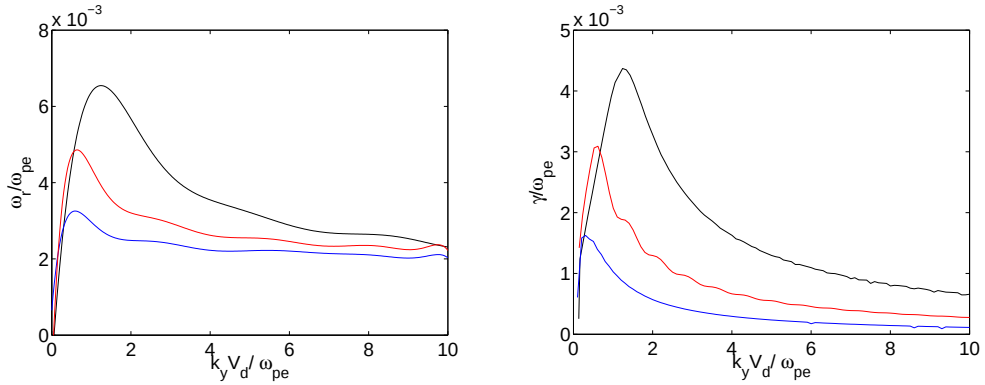


FIG. 3.2 – *Évolution des solutions instables 1D en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*

siste malgré la déformation de la fonction de distribution. Les taux de croissance sont encore significatifs quelque soit la déformation prise en compte ici. Néanmoins, une décroissance notable de la valeur des taux de croissance est à observer ; l'instabilité est moins violente à mesure que la déformation devient importante. Cette diminution peut être appréhendée analytiquement vu l'expression de la relation de dispersion (3.1). Nous avons vu dans la section 3.1 que la fonction de distribution apparaît uniquement sous sa forme dérivée dans la relation de dispersion. Voici l'intégrale sur $v_\perp$ à calculer dans la relation de dispersion :

$$\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \frac{\partial f_0}{\partial\left(v_\perp^2/2\right)}\left[1 - J_0^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\frac{2\left(\omega - k_y V_d\right)^2}{\left(n\Omega\right)^2 - \left(\omega - k_y V_d\right)^2}\right] \tag{3.2}$$

La dérivée de la fonction de distribution est en facteur notamment de la somme de fonctions de Bessel qui est à l'origine de l'instabilité à la résonance $k_y V_d \simeq n\Omega$. Pour une dérivée de la fonction de distribution tendant vers zéro localement en $v_{\perp_0}$, la contribution à l'intégrale de la zone autour de $v_{\perp_0}$ de l'intégrande est quasiment nulle. Plus la zone de $v_\perp$ dans laquelle la dérivée de la fonction est nulle est importante, *i.e* plus le plateau est étendu, plus la

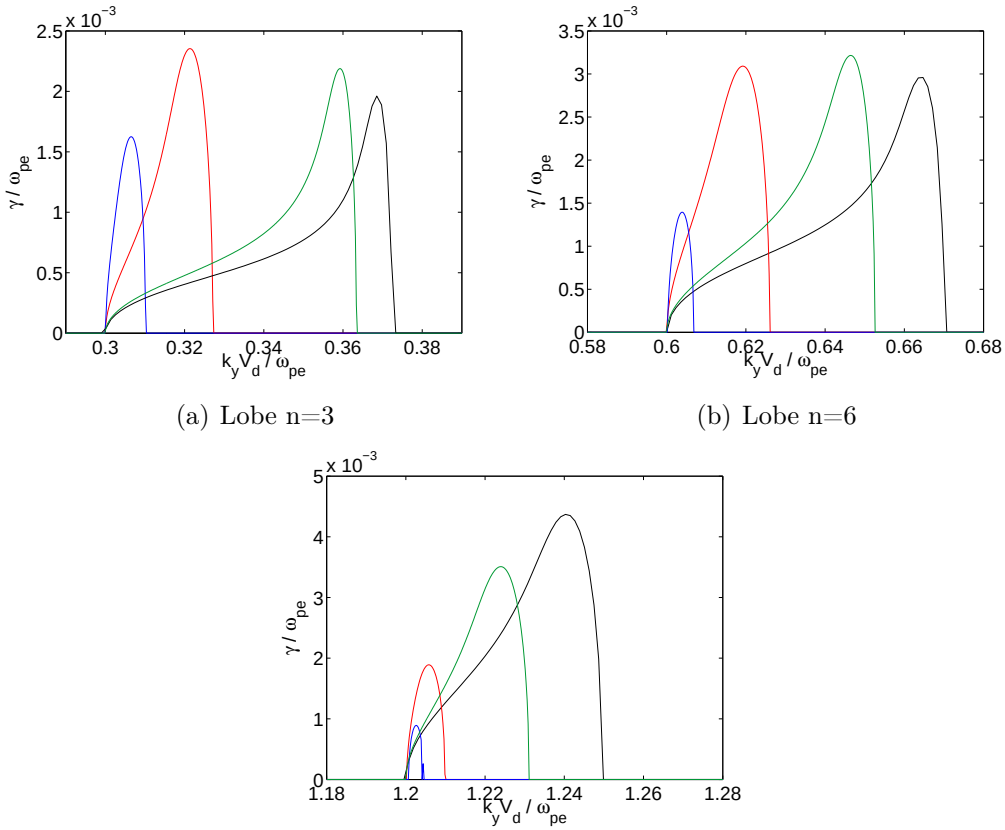
zone qui ne contribue pas à l'intégrale est grande et moins la résonance est importante dans la relation de dispersion. La diminution des taux de croissance est donc d'autant plus importante que la zone de plateau est étendue. C'est ce qu'on observe sur la figure 3.2, la fonction de distribution plate pouvant être considérée comme une fonction de distribution avec un plateau étendu jusqu'au coeur de la fonction.

Les fréquences associées aux taux de croissance maximaux décroissent de la même manière. Pour la fonction de distribution plate en bleu, la valeur de la fréquence du mode à plus fort taux de croissance (susceptible d'être le mode dominant dans le propulseur) a été divisée par deux par rapport au cas maxwellien.

Outre la relative diminution des taux de croissance, un changement essentiel intervient lors de la déformation de la fonction de distribution : le maximum absolu du taux de croissance apparaît pour une valeur de k_y en diminution. La valeur maximale du taux de croissance pour la fonction avec plateau (en rouge) est observée pour $k_y V_d/\omega_{pe} \simeq 0.6$, celle pour la fonction de distribution plate (en bleu) pour $k_y V_d/\omega_{pe} \simeq 0.3$. La valeur de k_y pour laquelle le taux de croissance est maximum absolu glisse doucement de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ à $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.3$ selon l'étendue du plateau dans la fonction de distribution.

La déformation de la fonction de distribution agit également directement sur la forme des lobes instables. La figure 3.3 représente l'évolution en fonction de la déformation de la fonction de distribution des trois lobes instables n=3, n=6 et n=12, contenant le maximum absolu du taux de croissance respectivement pour la fonction de distribution plate en bleu, pour la fonction de distribution avec plateau en rouge et pour une fonction de distribution maxwellienne en noir comme nous venons de le voir. La courbe en vert correspond à une fonction de distribution avec un petit plateau, intermédiaire entre les fonctions noire et rouge, afin de visualiser parfaitement l'évolution des lobes instables en fonction de la déformation. L'émergence d'une déformation locale de la fonction de distribution réduit la largeur de la région instable en $k_y V_d$ en la concentrant au voisinage de l'harmonique cyclotronique la plus proche. Cette réduction n'est pas homogène en k_y et peut s'accompagner d'un accroissement local du maximum du taux de croissance. Les lobes instables à grands k_y ont une largeur de lobes qui décroît plus rapidement que ceux à petits k_y. La hiérarchie dans l'épaisseur des lobes qui existait déjà pour une fonction de distribution maxwellienne s'accentue avec la déformation de cette dernière.

Cette décroissance de la largeur des lobes est accompagnée d'une évolution de la valeur des taux de croissance déjà caractérisée par la figure 3.2. Le maximum du taux de croissance du lobe n=12 ne fait que décroître en fonction de la déformation alors que ceux des lobes n=3 et n=6 connaissent un maximum avant de décroître en fonction de l'importance du plateau dans la fonction de distribution. De manière générale, tous les lobes ont leur pic de taux de croissance qui évolue en fonction de la déformation de la fonction de distribution. Pour les lobes tels que $k_y V_d/\omega_{pe} \in [0.1; 1.2[$, le pic de taux de



(a) Lobe n=3

(b) Lobe n=6

(c) Lobe n=12

FIG. 3.3 – *Évolution des lobes instables mono-dimensionnel en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*

croissance de chaque lobe connaît un maximum en fonction de la déformation. Lorsque le pic d'un lobe atteint son maximum (donc pour une fonction de distribution donnée), il constitue alors le maximum absolu du taux de croissance et correspond donc au mode qui se développe le plus rapidement. Les lobes tels que $k_y V_d/\omega_{pe} > 1.2$ ont quant à eux leur pic de taux de croissance maximum pour une fonction de distribution maxwellienne. En définitive, la valeur de k_y telle que le taux de croissance est maximum absolu évolue vers les petits k_y en fonction de la déformation de la fonction de distribution.

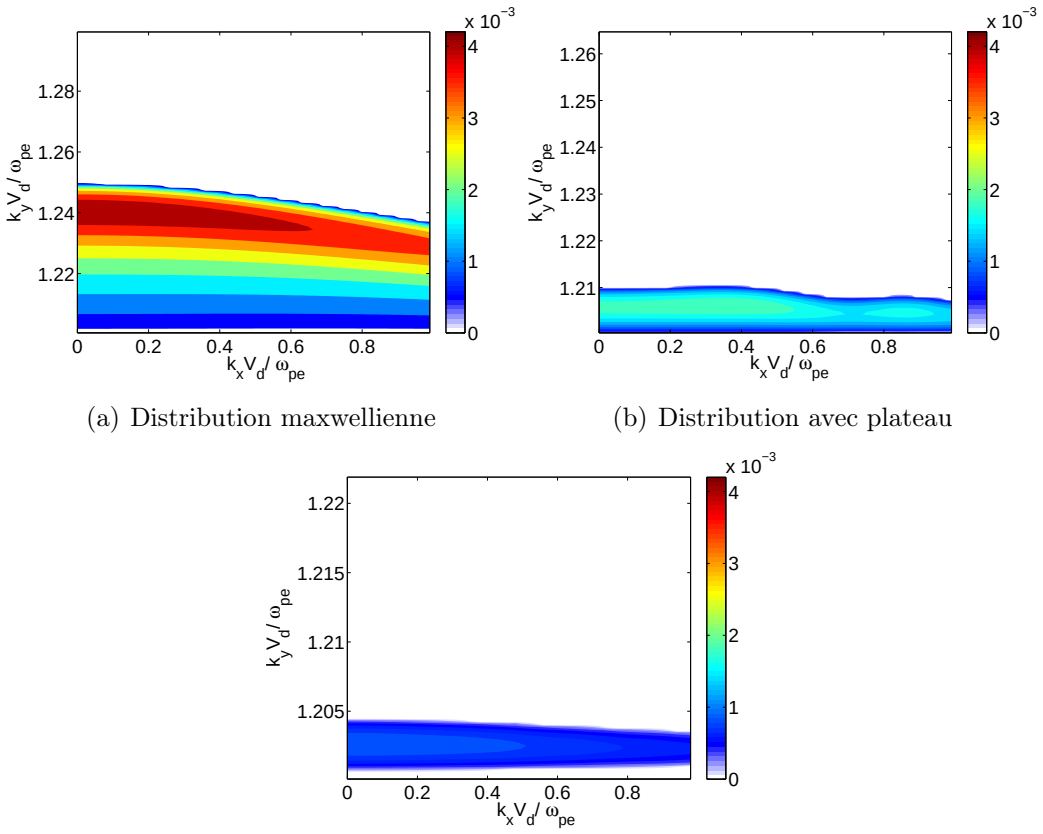
Concrètement dans le propulseur, les modes instables qui vont effectivement se développer seront donc fortement liés à la forme de la fonction de distribution. Si on suppose que la fonction de distribution électronique est réellement maxwellienne en sortie de propulseur, les modes qui vont se développer auront un nombre d'onde autour de $k_y V_d/\omega_{pe} \simeq 1.2$. Rapidement la fonction de distribution va se déformer sous l'effet même de l'instabilité et le nombre d'onde autour duquel les modes sortiront diminuera vers les petits k_y à mesure que la fonction de distribution deviendra plate.

La réduction de la largeur des lobes lorsque la fonction de distribution

se déforme implique aussi que les modes instables à fort taux de croissance ont un nombre d'onde de plus en plus proche des harmoniques cyclotroniques quel que soit le lobe concerné.

3.3.2 Perturbation oblique

L'impact de la déformation de la fonction de distribution électronique sur l'extension en k_x de l'instabilité est étudié ici. La perturbation considérée est bi-dimensionnelle (en $k_x,\ k_y$). La relation de dispersion à résoudre est donc la relation (3.1). Les fonctions de distribution déformées caractéristiques de la figure 3.1 modélisent celles observées dans le modèle particulaire explicite 1D. Dans la mesure où cette étude se veut surtout qualitative de l'évolution de l'instabilité, les interpolations des fonctions de distribution plateau et plate peuvent être utilisées comme fonctions déformées de référence dans l'étude de l'extension bi-dimensionnelle. Il faut préciser ici que les fonctions de distribution électroniques obtenues par les modèles particulaires 1D et 2D sont similaires en première approche puisqu'elles ne sont fonctions que de $v_\perp^2$. Les

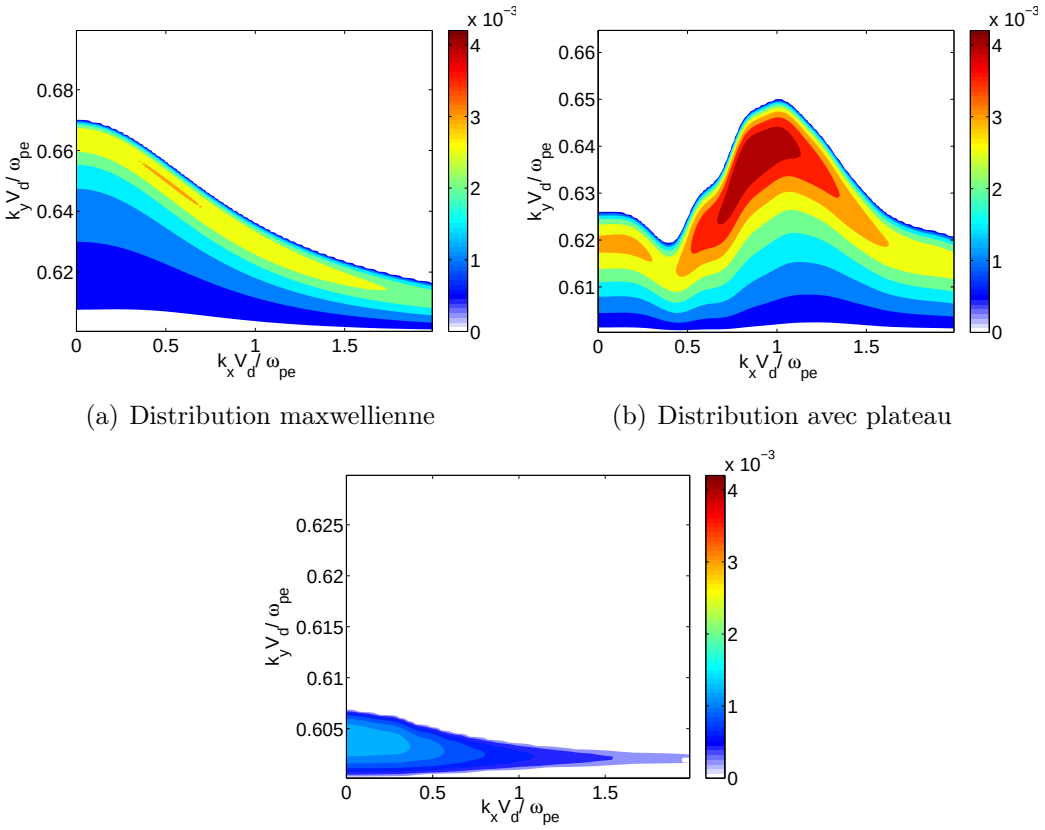


(a) Distribution maxwellienne

(b) Distribution avec plateau

(c) Distribution plate

FIG. 3.4 – *Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=12 en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*



(a) Distribution maxwellienne

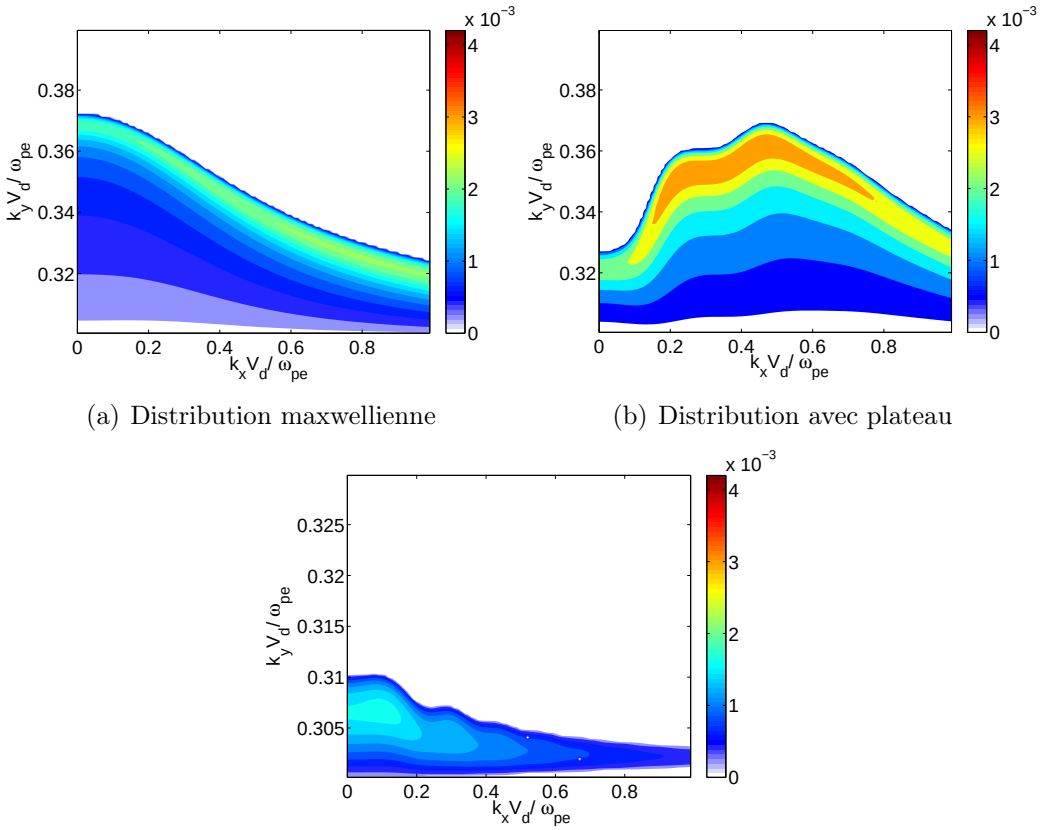
(b) Distribution avec plateau

(c) Distribution plate

FIG. 3.5 – *Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=6 en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*

temps caractéristiques de développement des modes et de la déformation de la fonction de distribution diffèrent notablement mais les comportements globaux de la fonction de distribution électronique sont proches : émergence d'un plateau autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ puis aplatissement de la fonction de distribution.

La figure 3.4 représente le taux de croissance pour le lobe n=12 en fonction de k_xV_d/ω_{pe} en abscisse et k_yV_d/ω_{pe} en ordonnée pour une fonction de distribution maxwellienne, pour une fonction avec plateau et pour une fonction de distribution plate. Ce lobe contient le taux de croissance maximum absolu pour une fonction de distribution électronique maxwellienne, *i.e.* l'un des modes principaux qui se développent effectivement en début de simulation. La remarque du cas 1D sur la réduction en k_y de la plage instable en fonction de la déformation est valable pour tous les k_x. Cette réduction de la plage instable se fait de manière moins homogène en k_x pour le lobe n=6. Ceci est illustré par la figure 3.5 qui représente le taux de croissance pour le lobe n=6 en fonction de k_xV_d/ω_{pe} en abscisse et k_yV_d/ω_{pe} en ordonnée pour les trois fonctions de distribution caractéristiques. La réduction k_y de la plage instable du cas 1D est visible pour $k_x = 0$ et se généralise pour tout k_x



(a) Distribution maxwellienne

(b) Distribution avec plateau

(c) Distribution plate

FIG. 3.6 – *Évolution du lobe instable bi-dimensionnel n=3 en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*

pour une fonction de distribution très déformée (plate). Cependant, lorsque la déformation apparaît, c'est-à-dire pour une fonction de distribution avec un plateau encore faiblement étendu, le lobe change de forme et son taux de croissance maximum se situe alors nettement pour un k_x non nul. Cette tendance disparaît lorsque la déformation de la fonction de distribution devient importante. On retrouve alors un lobe réduit en k_y quelque soit la valeur de k_x, le maximum du taux de croissance se situant autour des k_x petits.

Enfin, la figure 3.6 représente l'évolution, pour les trois fonctions de distribution caractéristiques, du lobe n=3 en fonction de $k_x V_d/\omega_{pe}$ en abscisse et $k_y V_d/\omega_{pe}$ en ordonnée. L'évolution qualitative est identique à celle du lobe n=6, les taux de croissance résiduels pour la fonction de distribution plate étant néanmoins plus élevés.

Les échelles de couleur sont conservées entre les figures 3.4, 3.5 et 3.6. La comparaison de ces trois figures permet de retrouver les conclusions du paragraphe précédent qui ne prenait en compte qu'une perturbation azimutale : les modes les plus instables se situent dans le lobe n=12 pour une fonction de distribution maxwellienne et glissent vers le lobe n=3 pour une fonction de

distribution plate en passant par les lobes intermédiaires(n=11,10...,6,...4,3) à mesure que le plateau autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ s'étend.

La déformation de la fonction de distribution électronique a donc une influence importante sur les propriétés de l'instabilité. Le calcul de la relation de dispersion intégrale nous a permis de généraliser l'étude de la stabilité du système pour des fonctions de distribution électronique déformées par rapport au cas maxwellien. Le principal résultat concerne les modes à taux de croissance maximaux : la valeur du nombre d'onde k_y associé aux modes qui se développent le plus rapidement change en fonction de la déformation. Le $k_y V_d/\omega_{pe}$ correspondant passe de 1.2 à 0.6 puis 0.3 pour une fonction de distribution maxwellienne évoluant vers une fonction de distribution plate par l'intermédiaire du fonction de distribution avec un plateau. Les fonctions de distribution à la base de l'étude ont été choisies de manière arbitraire. Par conséquent, les valeurs précisent de $k_y V_d/\omega_{pe}$ pour lesquelles le taux de croissance est maximum ne sont à appréhender qu'à titre d'exemple afin de caractériser l'évolution de l'instabilité. Il faut donc retenir que la déformation de la fonction de distribution électronique diminue la valeur k_y des modes qui vont se développer. Par ailleurs, l'étude a montré également une tendance générale à une réduction du taux de croissance des modes ayant un k_x fini quand il se construit une fonction de distribution plate. L'évolution de l'instabilité converge alors vers le cas 1D dans la mesure où le k_x minimum supporté par le système n'est pas trop petit (cas du propulseur). Cette double évolution est progressive en fonction de l'étendue du plateau de la fonction de distribution. Le maximum absolu du taux de croissance situé autour de $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ pour une maxwellienne glisse vers les petits k_y à mesure que la fonction de distribution se déforme. Ce glissement en k_y des taux de croissance maximaux est associé à un glissement en k_x pour une petite déformation (plateau peu étendu) : les taux de croissance maximaux correspondent alors à des k_x non nuls. L'instabilité se développe de manière de plus en plus mono-dimensionnelle lorsque le plateau s'étend de manière importante, jusqu'à atteindre le coeur de la fonction de distribution.
L'étude de plusieurs cas types par le biais de simulations particulaires va permettre dans le chapitre 4 de vérifier la validité de l'ensemble des propriétés mises en évidence par l'étude théorique de stabilité. L'évolution de ces propriétés en fonction de la déformation de la fonction de distribution sera comparée avec les conclusions énoncées ci-dessus.

Chapitre 4

Comparaison avec les simulations

Sommaire

4.1 Simulation fortement discrétisée 86
4.2 Simulation multi-mode 90
4.2.1 Système 1D 90
4.2.2 Système 2D 93
4.3 Corrélation entre l'instabilité et le transport électronique 94

DEUX types de simulations peuvent être différenciés selon qu'elles décrivent ou non la multiplicité des modes instables pouvant se développer dans le propulseur. Le nombre de modes (stables ou instables) décrit par une simulation donnée dépend directement de la taille de la maille de discrétisation (pour être bien décrite, nous considérons que la période spatiale d'une onde nécessite un minimum de 8 points). La longueur du système détermine la longueur d'onde maximum supporté par la simulation et définit le pas de discrétisation de l'espace des nombres d'onde par la relation $\Delta k_y = 2\pi/ylong$ (dans le cas d'une simulation 2D, on a aussi $\Delta k_x = 2\pi/xlong$ où $xlong$ est la longueur de la boîte en x). Vu les propriétés de l'instabilité, une petite longueur de système, correspondant à un mode fondamental à grand nombre d'onde et à un Δk important, restreint la part des modes instables dans les modes décrits. A l'inverse, une grande longueur de système, correspondant à un mode fondamental à petit nombre d'onde et à un petit Δk, favorise l'abondance de modes instables décrits. Ainsi, selon la longueur du système, les simulations supportent un plus ou moins grand nombre de modes instables. Les simulations fortement discrétisées, dont nous avons parlé au chapitre 2, ont pour but essentiel la validation de l'étude théorique de stabilité et la compréhension des mécanismes de saturation de certains modes instables. La longueur de la simulation est définie de manière à ce que un ou deux modes instables seulement soient décrits, permettant ainsi une analyse théorique simplifiée des phénomènes physiques présents dans le propulseur. Pour obtenir une simulation

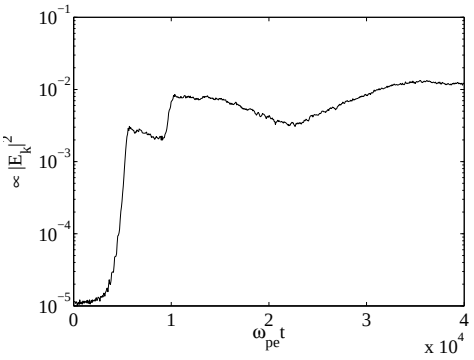
plus proche de la réalité du propulseur, les dimensions de la simulation doivent être nettement plus importantes pour s'approcher des dimensions du propulseur, et nécessitent par conséquent de plus gros moyens de calcul (en temps et en puissance). La simulation est alors clairement multi-mode. Plus la boîte est grande, plus le nombre de modes instables décrits est important et plus la simulation est proche des conditions réelles du propulseur (dans la limite des dimensions du propulseur, encore supérieures à celles des simulations les plus grandes). Dans ce chapitre, nous exposons les résultats d'une simulation fortement discrétisée décrivant deux modes instables. Ce cas simple permet de comprendre notamment la dynamique linéaire et non-linéaire des modes instables en comparant les résultats de simulation aux propriétés mises en évidence de manière théorique précédemment. Deux simulations multi-modes (un cas 1D et un cas 2D) sont présentées par la suite. Elles donnent une vision globale de la dynamique de l'instabilité se développant dans le propulseur.

4.1 Simulation fortement discrétisée

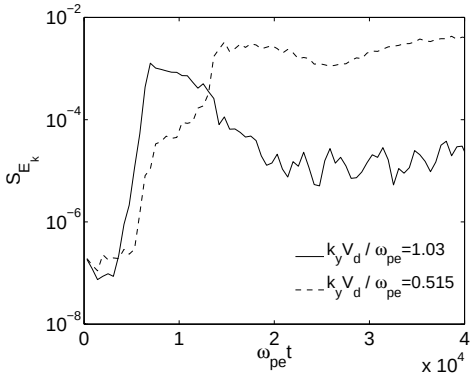
Le modèle numérique utilisé ici correspond au modèle particulaire monodimensionnel présenté en section 2.4.1. La longueur de simulation choisie est telle que le mode fondamental et son premier harmonique soient tous les deux instables. Il s'agit des modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ (mode fondamental dont la longueur d'onde correspond à la longueur de la simulation $ylong = 24.4\ \lambda_D$) et $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ (premier harmonique). Dans cette simulation, le champ magnétique extérieur est tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$ et le rapport de la vitesse thermique à la vitesse de dérive vaut $V_{th}/V_d = 0.5$.

La figure 4.1 illustre l'instabilité de ces deux modes prévue par la théorie. L'évolution temporelle de l'énergie électrostatique Fig.4.1(a) met en lumière l'effet de la croissance successive de deux modes instables dans le système. Elle croît en début de simulation principalement du fait du développement du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ comme le montre la figure 4.1(b) qui représente l'évolution temporelle de la densité spectrale des deux modes décrits par le système. Elle connaît ensuite un premier plateau puisque le mode harmonique se sature. Ce plateau est suivi d'une seconde étape de croissance liée à la poursuite du développement du mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$. La saturation du mode fondamental coïncide avec la fin de la croissance de l'énergie électrostatique.

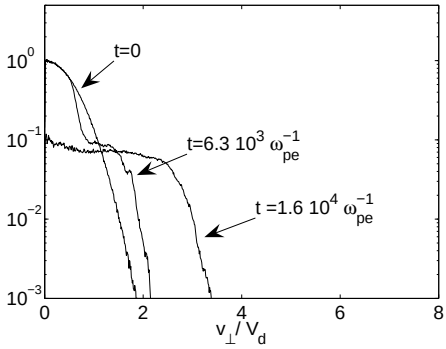
Nous avons déjà indiqué au chapitre 2 que le développement d'un mode instable dans un système donné est accompagné d'une déformation de la fonction de distribution électronique : formation d'un petit plateau pour les modes à grands k_y et aplatissement de la fonction de distribution (c'est-à-dire la formation d'un plateau qui atteint le coeur de la fonction) pour la plupart des modes à petits k_y. Les deux types de déformation sont ici combinées. Ceci est illustrée par la figure 4.1(c) qui représente la fonction de distribution électronique en fonction de $v_\perp/V_d$ aux trois temps caractéristiques : $\omega_{pe}t =$



(a) Énergie électrostatique



(b) Évolution temporelle de la densité spectrale des modes $k_yV_d/\omega_{pe} = 0.515$ et 1.03

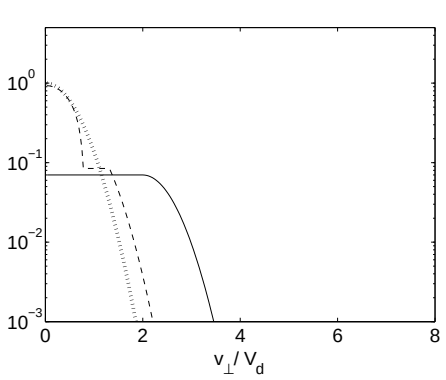


(c) Déformation de la fonction de distribution

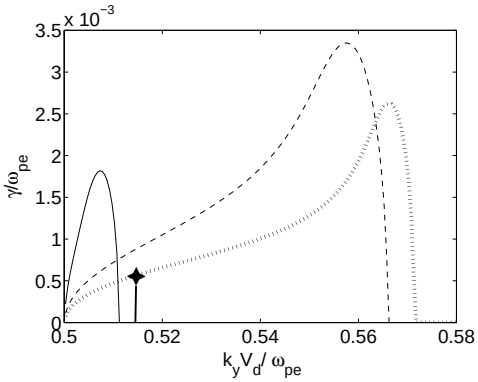
FIG. 4.1 – *Croissance des modes instables et déformation de la fonction de distribution dans la simulation PIC explicite ylong* $= 24.4\ \lambda_D$.

0, $\omega_{pe}t = 6.3\ 10^3$ et $\omega_{pe}t = 1.6\ 10^4$. La fonction de distribution initiale est maxwellienne. Le temps $\omega_{pe}t = 6.3\ 10^3$ correspond au premier niveau de saturation de l'énergie électrostatique, *i.e.* la saturation du mode harmonique. Un petit plateau autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ s'est alors formé. Le temps $\omega_{pe}t = 1.6\ 10^4$ correspond au niveau de saturation final de l'énergie électrostatique, *i.e.* la saturation du mode fondamental. La fonction de distribution est plate. Ces fonctions de distribution sont modélisées et injectées dans la relation de dispersion (3.1) que l'on résout pour obtenir la figure 4.2. Les lobes n=5 et n=10 sont représentés pour ces trois fonctions de distribution. Ils contiennent respectivement le mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 0.515$ et le mode $k_yV_d/\omega_{pe} = 1.03$. La marque en étoile sur les figures 4.2(b) et 4.2(c) situe les positions des deux modes dans leur lobe respectif.

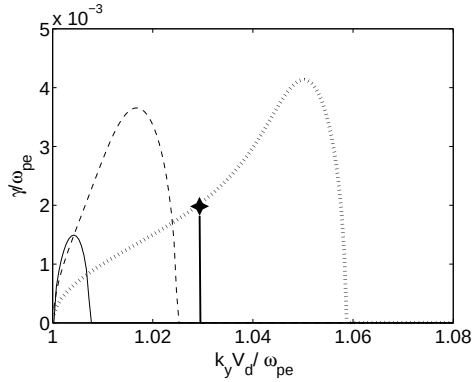
Au départ de la simulation, la fonction de distribution est maxwellienne (en petits traits sur la figure 4.2(a), les lobes correspondants sur les figures 4.2(b) et 4.2(c) sont aussi en petits traits ; le code graphique est aussi conservé pour les autres fonctions de distribution). Les deux modes sont tous deux



(a) Fonction de distribution interpolée utilisée



(b) Lobe n=5



(c) Lobe n=10

FIG. 4.2 – *Saturation des modes* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ *et* $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ *en fonction de la déformation de la fonction de distribution.*

instables mais ont une valeur de taux de croissance différente : le mode harmonique $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ a un taux de croissance quatre fois plus élevé que le mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ ($\gamma_{1.03}/\omega_{pe} \approx 2\ 10^{-3}$ et $\gamma_{0.515}/\omega_{pe} \approx 5\ 10^{-4}$). Ceci est vérifié sur la figure 4.1 puisque le mode harmonique se développe bien avant le mode fondamental. En se développant, l'onde correspondant au mode harmonique interagit avec les électrons et déforme la fonction de distribution. Un plateau autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ se construit ce qui modifie la forme des lobes instables : les lobes se rétrécissent en k_y. Le mode harmonique qui était instable devient brutalement stable lorsque celui-ci sort du lobe n=10 qui se rétrécit à mesure que le plateau s'étend. Ceci est parfaitement clair sur la figure 4.2(c) où nous voyons que le mode est situé juste à l'extérieur du lobe instable pour la fonction de distribution correspondant à la première saturation de l'énergie électrostatique. L'énergie électrostatique cesse de croître puisque le mode à l'origine de sa croissance est saturé. L'apparition du plateau et l'augmentation de sa largeur constitue donc le mécanisme de saturation du mode harmonique $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$.

La déformation de la fonction de distribution a eu aussi pour effet d'aug-

menter la valeur du taux de croissance du mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ qui est donc encore plus instable comme on le voit sur la figure 4.2(b). Ce mode continue de croître avec un taux de croissance de plus en plus grand à mesure que la déformation de la fonction de distribution est de plus en plus importante. L'énergie électrostatique se remet donc à croître une fois que l'énergie correspondant au mode fondamental est significative par rapport à l'énergie totale du système. Cette énergie croît jusqu'à ce que la déformation soit telle que ce mode se stabilise à son tour. La forme de la fonction de distribution au niveau de la saturation finale de l'énergie électrostatique est plate (Fig. 4.1(c) et Fig.4.2(a) pour sa modélisation). Le lobe n=5 lui correspondant Fig. 4.2(b) en trait plein n'inclut plus le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ qui est donc stable. Le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.03$ est quant à lui toujours situé à l'extérieur du lobe n=10 qui s'est rétréci encore un peu plus. Les deux modes décrits ne sont plus instables et du fait de la taille de la simulation, aucun autre mode ne peut se développer. L'énergie du système n'évolue donc plus comme on le voit sur la figure 4.1.

Dans une simulation donnée, la position au sein du lobe du mode décrit détermine sa saturation et la déformation maximale de la fonction de distribution. Plus il est proche de la résonance $k_y V_d = n\Omega$, plus tardive est sa saturation et plus le niveau de saturation de l'énergie électrostatique est élevé tout comme l'étendue du plateau de la fonction de distribution. C'est ce qu'on observe dans le cas présenté ici. Le mode fondamental est plus proche de la résonance $k_y V_d = n\Omega$ que le mode harmonique dans leur lobe respectif. La saturation de l'énergie électrostatique liée au mode fondamental se fait à une amplitude supérieure à celle correspondant au mode harmonique. De même, la déformation finale de la fonction de distribution due au mode fondamental est plus importante que lorsque le mode harmonique s'est saturé. Le cas limite d'un mode tel que $k_y V_d \simeq n\Omega$ aboutit à une croissance de l'énergie et à une déformation associée considérable. Ce cas sera abordé dans la section suivante.

Cette différence du niveau de saturation en énergie est notable, elle est d'environ un ordre de grandeur dans cette simulation, car un second facteur intervient dans la valeur du niveau de saturation. La dépendance de la position des modes dans leur lobe respectif est accompagnée de la dépendance de la position générale en k_y mise en avant dans la section 3.3.1. Les lobes instables à petits k_y ont une largeur en k_y qui se réduit, en fonction de la déformation, moins rapidement que celle des lobes à grands k_y. Ainsi, les modes contenus dans ces lobes sont plus longtemps instables que ceux à grands k_y indépendamment de leur position dans leur lobe respectif. Leur niveau de saturation est par conséquent plus élevé. Cette tendance à un niveau de saturation plus élevé se généralise donc à tous les modes à petits k_y par rapport aux modes à grands k_y.

4.2 Simulation multi-mode

4.2.1 Système 1D

Le modèle numérique est ici identique à celui utilisé dans les simulations fortement discrétisées. La différence réside dans la longueur de la simulation qui est maintenant beaucoup plus importante : $ylong = 1854\ \lambda_D$. Elle correspond à une longueur dans la direction azimutale de 6.2 cm pour une fréquence plasma $\omega_{pe} = 30\ GHz$. Cette grande longueur de simulation permet de décrire de nombreux modes instables ($\Delta k_y V_d/\omega_{pe} = 0.0068$) et de s'approcher d'un système réaliste. Les modes décrits sont des harmoniques du mode fondamental $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.0068$. Les lobes instables, étudiés de façon détaillée lors de la résolution de la relation de dispersion, s'étendent sur une largeur de k_y bien plus grande que Δk_y. Plusieurs modes instables peuvent donc se développer à l'intérieur d'un même lobe. Les paramètres de la simulation présentée ici sont les suivants : le champ magnétique est tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.06$ et $V_{th}/V_d = 0.5$.

La figure 4.3 illustre l'évolution de l'instabilité au cours de la simulation ainsi que celle de la fonction de distribution électronique. L'énergie électrostatique représentée sur la figure 4.3(a) croît rapidement jusqu'à des valeurs très importantes et ne semble pas connaître de saturation bien que l'évolution du système ait été suivie sur $8\ 10^4\ \omega_{pe}^{-1}$, soit 2.6 μs-temps grand devant le temps de transit des ions. Cette absence de saturation est indirectement due à la taille de la simulation. En effet, un grand nombre de modes instables sont décrits, y compris des modes très proches de la résonance $k_y V_d = n\Omega$. Pour ces modes, la saturation est atteinte pour un temps d'autant plus important que le mode est proche de l'harmonique cyclotronique. Plus la longueur de simulation est grande, plus le pas Δk_y des modes décrits est petit et donc plus proches des harmoniques cyclotroniques sont certains modes instables décrits. Nous avons vu que la déformation de la fonction de distribution rétrécit les lobes instables autour des harmoniques $k_y V_d = n\Omega$. Les modes suffisamment proches des harmoniques cyclotroniques restent donc instables même pour une fonction de distribution trés déformée. Par conséquent, l'énergie électrostatique liée à ces modes croît indéfiniment (sur des temps raisonnables par rapport à la physique du propulseur).

Sa croissance est associée à une déformation de la fonction de distribution électronique Fig.4.3(b) comme nous l'avons observé dans les simulations fortement discrétisées. Un épaulement de la distribution autour de $v_\perp/V_d \simeq 1$ se crée dans un premier temps, puis le plateau s'étend à mesure que l'énergie électrostatique croît et atteint le coeur de la fonction de distribution. Les figures 4.3(c), 4.3(d) et 4.3(e) rendent compte de l'origine de l'énergie électrostatique aux trois temps correspondant aux trois fonctions de distributions de la figure 4.3(b) : $\omega_{pe}t = 2.4\ 10^3$, $\omega_{pe}t = 5\ 10^3$ et $\omega_{pe}t = 7\ 10^3$. Elles représentent la densité spectrale du champ électrique fluctuant. Il se décompose en un peigne de modes. Au début de la simulation, la fonction de distribution électronique est maxwellienne. Les résultats de la relation de dispersion dans

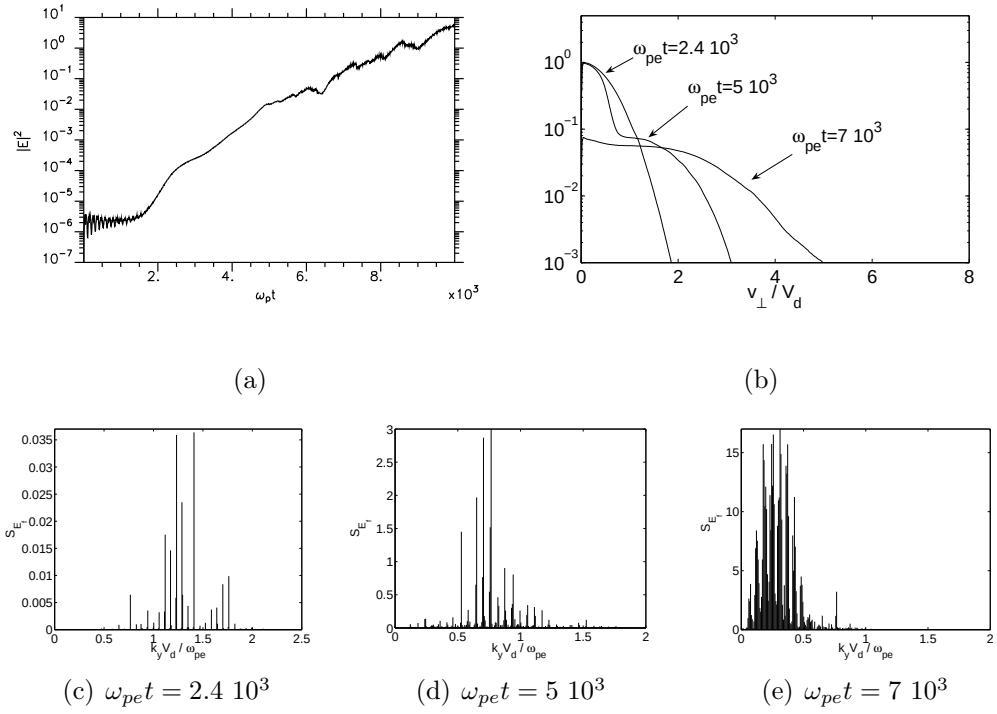


FIG. 4.3 – *Cas multi-mode 1D (ylong = 1854 λ_D) : évolution de l'énergie électrostatique (a), fonction de distribution (b) et densité spectrale (c)-(e).*

le cas maxwellien indique que les modes à plus forts taux de croissance se situent au voisinage de $k_y V_d/\omega_{pe} \simeq 1.2$ comme nous l'avons vu au chapitre 2. C'est effectivement ce que montre la figure 4.3(c).

L'évolution non-linéaire de la fonction de distribution vers une fonction épaulée est associée à l'apparition de nombreux modes présentant des longueurs d'onde plus grandes Fig.4.3(d). Le spectre est alors centré à environ la moitié du nombre d'onde initial. La poursuite de la déformation non-linéaire de la fonction de distribution vers une fonction plate se traduit par un glissement encore plus important de la valeur de k_y des modes dominants le spectre vers les petits nombres d'onde. Cette évolution corrélée de la fonction de distribution et des modes instables a été mise en évidence dans l'étude de l'influence de la déformation de la fonction de distribution sur l'instabilité au chapitre 3. Ces résultats valident donc l'étude de stabilité théorique précédemment effectuée.

La figure 4.4 apporte une vision continue de l'évolution de l'instabilité puisqu'elle représente l'évolution temporelle de la densité spectrale des modes. On y distingue clairement aux temps courts le peigne de modes instables prévu par la théorie ainsi que le glissement en k_y, vers les petits nombres d'onde, des modes dominants par suite de la déformation de la fonction de distribution. Sur des temps plus longs, on note l'apparition d'un quasi continuum dans les

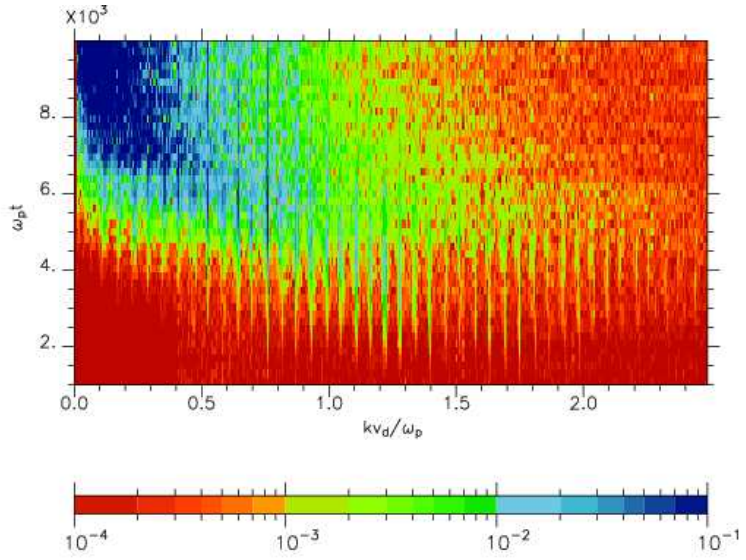
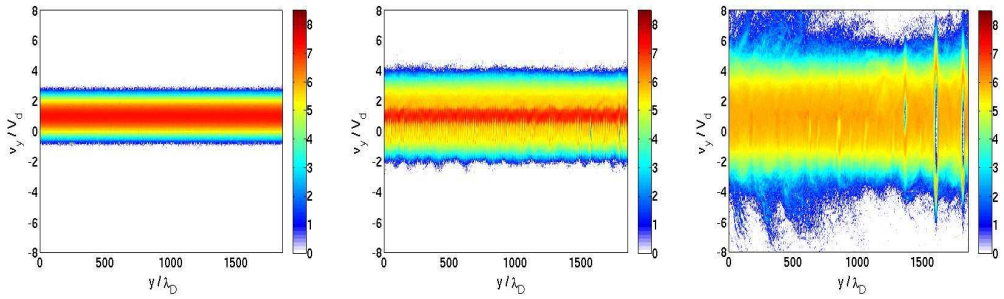


FIG. 4.4 – *Évolution temporelle de la densité spectrale dans le cas ylong* = 1854 λ_D.



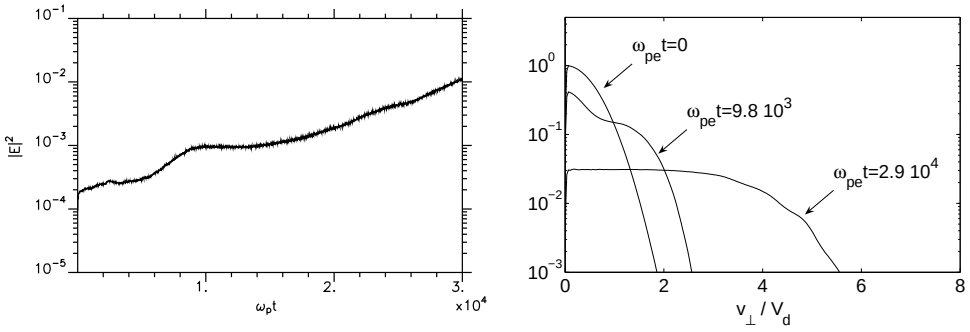
(a) $\omega_{pe}t = 2.4\ 10^3$ (b) $\omega_{pe}t = 5\ 10^3$ (c) $\omega_{pe}t = 7\ 10^3$

FIG. 4.5 – *Cas multi-mode 1D (ylong* = 1854 λ_D*) : évolution de l'espace des phases dans la direction azimutale*

$k_y V_d/\omega_{pe}$ petits. L'ensemble des modes à petits k_y décrits par la simulation sont alors présents dans le système. Ce phénomène non linéaire n'est pas décrit par la théorie et semble étranger à l'instabilité électronique de dérive. Il est associé à l'apparition de structures localisées dans l'espace des phases (y, v_y) nettement visible en figure 4.5. Ce comportement de fin de simulation, à savoir l'apparition de la queue chaude de la fonction de distribution, la croissance indéfinie de l'énergie électrostatique et l'émergence de structures dans l'espace des phases, est en contradiction avec les résultats des simulations implicites exposées en partie préliminaire [Adam *et al.* 2004]. L'origine de ces divergences est sans doute d'une part liée aux pertes en énergie (ionisation, collisions pariétales) et aux effets de longueurs finies (non périodicité, inhomogénéités...) pris en compte dans les simulations implicites et, d'autre part, liée aux effets bi-dimensionnels qui vont être pris en compte dans le paragraphe suivant.

4.2.2 Système 2D

Le modèle particulaire sur lequel est basé la simulation présentée ici est une généralisation bi-dimensionnelle du modèle 1D explicite présenté en section 2.4.1 permettant à un mode oblique de se développer. Par souci de simplicité, la direction axiale du propulseur est prise périodique comme la direction azimutale. La boîte de simulation a pour longueur dans la direction azimutale $ylong = 460\ \lambda_D$ (environ 1.7 cm pour $\omega_{pe} = 30\ GHz$) et $xlong = 167\ \lambda_D$ (environ 0.6 cm) et les paramètres de simulation sont : $\Omega/\omega_{pe} = 0.06$ et $V_{th}/V_d = 0.5$. Ce cas 2D est plus proche de la réalité du propulseur dans la mesure où il prend en compte l'extension bi-dimensionnelle des modes instables d'une part et la multiplicité du nombre de ces modes d'autre part. La longueur de simulation dans la direction azimutale est plus faible que dans le cas 1D traité précédemment afin de raccourcir le temps de calcul. Les divergences introduites de ce fait ne sont pas significatives et perturbent peu la comparaison entre le cas 2D présenté ici et le cas 1D du paragraphe précédent (une simulation 1D longue de 460 λ_D a été effectuée, les résultats qualitatifs du paragraphe précédent sont identiques).



(a) Énergie électrostatique (b) Fonction de distribution électronique

FIG. 4.6 – *Cas multi-mode 2D ($xlong = 167\ \lambda_D$ et $ylong = 460\ \lambda_D$) : évolution de l'énergie électrostatique (a) et de la fonction de distribution (b).*

La figure 4.6 montre comme les figures 4.3(a) et 4.3(b) l'évolution de l'énergie électrostatique et celle de la fonction de distribution électronique. L'évolution du système est beaucoup plus lente que dans le cas 1D. La croissance de l'énergie électrostatique ainsi que la déformation de la fonction de distribution associée se fait de manière très douce en comparaison du cas 1D. D'autres simulations avec moins de modes obliques instables ont été effectuées en conservant la longueur en azimut. L'adoucissement de la croissance de l'énergie électrostatique est directement lié au caractère bi-dimensionnel de l'instabilité. L'augmentation du nombres de modes dans la direction axiale en réduit effectivement la croissance. Le problème de la convergence est donc

posé, mais l'augmentation de la taille du système dans la direction x est problématique du fait du temps de calcul (un mois sur 8 processeurs pour $10^4\ \omega_{pe}^{-1}$ pour la taille de simulation ci-dessus).

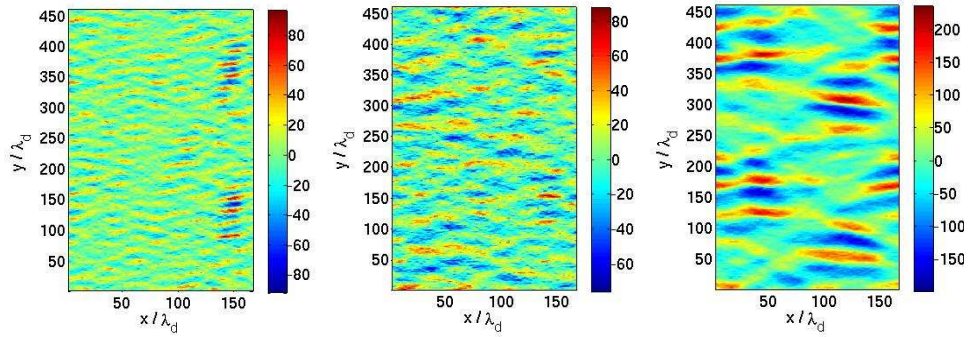
L'évolution de la fonction de distribution, plus lente, reste la même, passant d'une maxwellienne à une fonction plate malgré une énergie électrostatique inférieure au cas 1D (de plusieurs ordres de grandeur). La diffusion du coeur de la fonction de distribution se fait pour une énergie nettement plus faible que dans le cas 1D et la queue d'électrons rapides du cas 1D n'apparaît plus tout comme les structures de l'espace des phases (trous de densité) et le continuum de modes à petits k_y, ce qui coïncide avec les résultats du code implicite.

L'évolution temporelle de la structure du champ électrique azimutal est présentée en figure 4.7. Le champ électrique (en Volt) dans la direction azimutale y est tracé dans l'espace $(x/\lambda_D,\ y/\lambda_D)$. Aux temps longs, il est très proche de celui obtenu dans le code implicite (Fig.14). L'échelle de temps correspondante ($\approx 1.2\mu s$) est de l'ordre de grandeur du temps de transit des ions en sortie de moteur. L'évolution globale de la structure du champ suggère que le système relaxe lentement vers un système mono-dimensionnel quand la fonction de distribution se déforme. Ceci est confirmé par la figure 4.8 qui retrace l'évolution du spectre du champ électrique azimutal. Au début de la simulation ($\omega_{pe}t = 9.8\ 10^3$), le système est nettement 2D. Les modes présents, *i.e* les modes les plus instables, se situent autour de $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.7$ et $k_x V_d/\omega_{pe} = \pm 0.3$. Comme prévu par la théorie, les spectres sont quasiment symétriques en k_x si l'on tient compte des incertitudes statistiques liées au principe des codes particulaires. La déformation de la fonction de distribution s'accompagne d'un glissement des valeurs de k_x et de k_y vers les petits nombre d'onde. En fin de simulation ($\omega_{pe}t = 2.9\ 10^4$), la situation 1D, à savoir un système avec des modes instables à $k_x = 0$ uniquement, n'est pas complètement atteinte mais la tendance du système à devenir mono-dimensionnel est claire. Elle l'est d'autant plus dans des simulations où le nombre de modes obliques instables est réduit. On observe alors une relaxation rapide vers un modèle mono-dimensionnel quand la fonction de distribution se déforme.

L'ensemble de ces résultats est conforme à la théorie présentée dans les chapitres précédents : l'instabilité se développe en paquets de modes instables obliques et tend à devenir 1D avec la déformation de la fonction de distribution. La section suivante met en évidence l'existence d'un transport électronique axial corrélé au développement des modes instables.

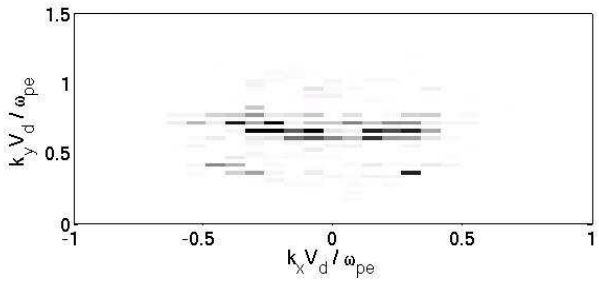
4.3 Corrélation entre l'instabilité et le transport électronique

Nous avons vu que la croissance de l'énergie électrostatique est toujours accompagnée d'une déformation de la fonction de distribution électronique.

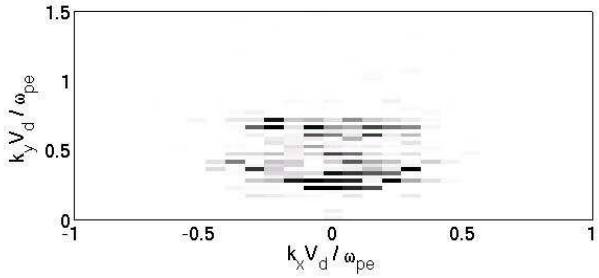


(a) $\omega_{pe}t = 9.8\ 10^3$ (b) $\omega_{pe}t = 1.7\ 10^4$ (c) $\omega_{pe}t = 2.9\ 10^4$

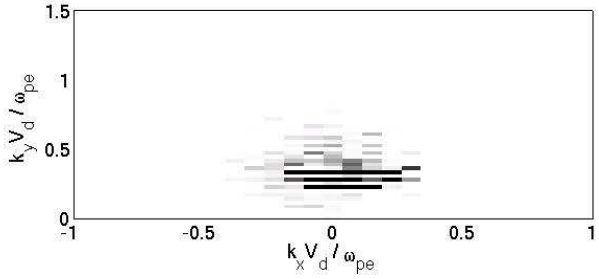
FIG. 4.7 – *Évolution de la structure de la composante azimutale du champ fluctuant dans le cas xlong* $= 167\ \lambda_D$ *et ylong* $= 460\ \lambda_D$.



(a) $\omega_{pe}t = 9.8\ 10^3$

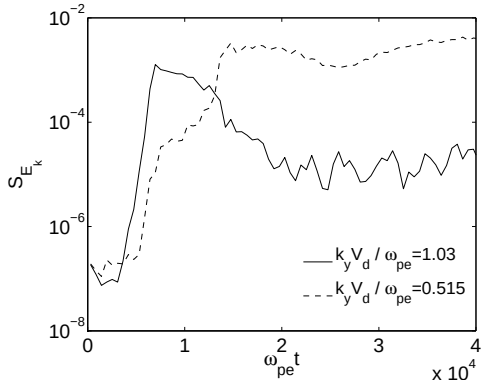


(b) $\omega_{pe}t = 1.7\ 10^4$

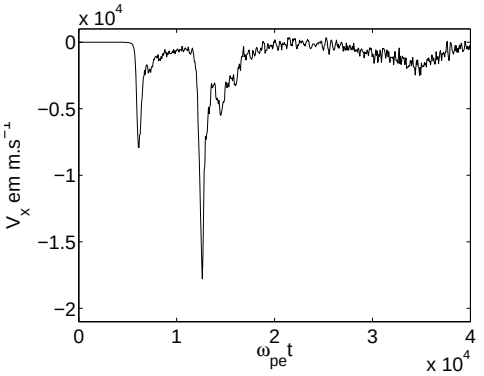


(c) $\omega_{pe}t = 2.9\ 10^4$

FIG. 4.8 – *Évolution du spectre de la composante azimutale du champ fluctuant dans le cas xlong* $= 167\ \lambda_D$ *et ylong* $= 460\ \lambda_D$.



(a) Évolution temporelle de la densité spectrale des modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.515$ et 1.03



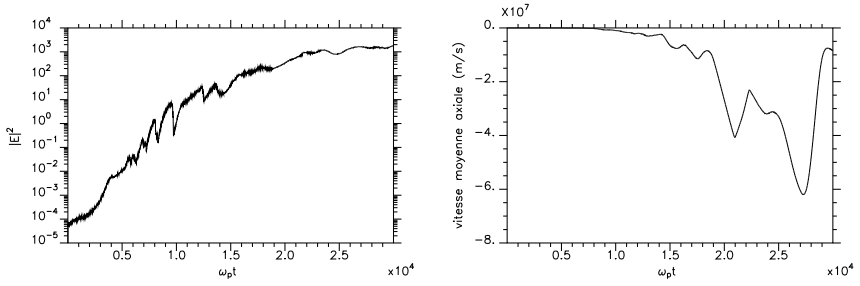
(b) Évolution temporelle de la valeur moyenne de la vitesse axiale

FIG. 4.9 – *Corrélation entre l'énergie électrostatique et le courant axial dans le cas ylong* $= 24.4\ \lambda_D$.

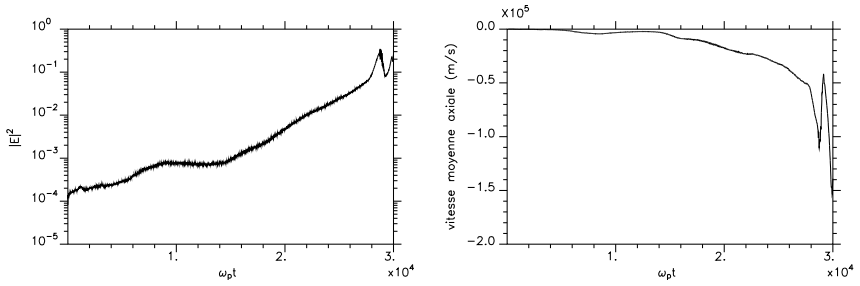
Ceci suggère l'existence d'une interaction importante entre les modes instables et les électrons. Cette interaction onde-électron est confirmée par la corrélation entre le développement des modes instables et l'apparition d'un courant électronique selon l'axe du propulseur. La figure 4.9 la met particulièrement en évidence en juxtaposant l'évolution temporelle de la densité spectrale des modes instables et celle de la vitesse axiale moyenne des électrons du système 1D bimode présenté dans la section 4.1.

Cette simulation décrit l'évolution de deux modes azimutaux instables uniquement. Les pics de courant apparaissent à chaque fois qu'un mode se développe. Tant que l'énergie liée à ce mode croît, la vitesse axiale des électrons croît. Une fois que le mode est saturé à cause de la déformation de la fonction de distribution, le courant électronique cesse de croître et commence à se réduire. Le système se stabilise et retrouve un équilibre dans la mesure où les modes décrits par le modèle ne sont plus instables.

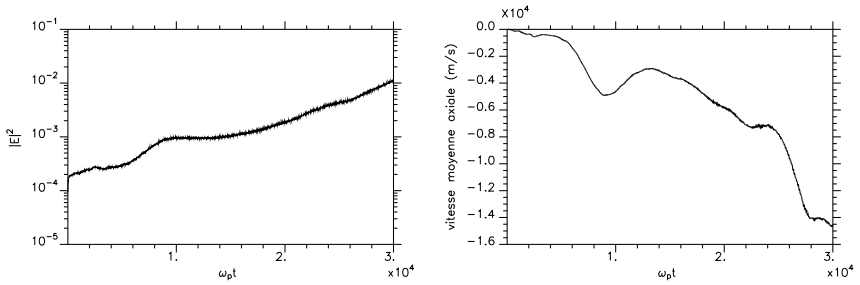
La valeur de la vitesse axiale instantanée est liée à la valeur de l'énergie électrostatique. En phase croissante, elle est d'autant plus importante



(a) Cas multi-mode 1D



(b) Cas multi-mode 2D avec peu de modes obliques



(c) Cas multi-mode 2D avec beaucoup de modes obliques

FIG. 4.10 – *Corrélation entre l'énergie électrostatique et le courant axial pour différents cas 1D.*

que l'énergie électrostatique est grande. Nous avons vu que cette dernière dépend du nombre de modes instables pris en compte ainsi que de leur extension axiale. De même, le transport électronique dans la direction x est largement tributaire du modèle utilisé. Ceci est illustré par la figure 4.10 qui généralise la figure précédente à différents cas. La croissance de l'énergie électrostatique, *i.e.* le développement de divers modes instables, est toujours associée au passage d'un courant axial. Dans le cadre du propulseur, un courant électronique égal au courant ionique correspond à une vitesse axiale égale

à quelques 10^4 $m.s^{-1}$. Ce courant est bien trop important dans le cas multi-mode 1D mais atteint des valeurs raisonnables lorsqu'on s'approche d'un cas réaliste proche des conditions existantes dans le propulseur. L'énergie électrostatique est beaucoup plus lente à croître dans les cas 2D et ce d'autant plus que le nombre de modes instables obliques possibles est important. Le courant qui y est associé suit la même évolution. Dans le cas multi-mode 2D avec une longueur de boîte dans la direction axiale proche de celle du propulseur (la largeur du système 0.6 cm n'est pas très éloignée de la dimension de la zone d'accélération des ions en sortie du moteur) correspondant à la figure 4.10(c), la valeur de la vitesse électronique moyenne est compatible avec les résultats des simulations implicites présentées en partie préliminaire. En effet, la vitesse axiale des électrons est environ de 6 10^3 $m.s^{-1}$ pour $\omega_{pe}t = 2\ 10^4$ (ordre de grandeur du temps de transit ionique), ce qui représente un courant électronique de l'ordre de 30% du courant ionique proportion proche de celle mesurée en sessions expérimentales.

Les simulations numériques présentées confirment l'analyse théorique et montrent en particulier que les déformations de la fonction de distribution ne conduisent pas directement à une saturation de l'instabilité. Elles montrent aussi l'importance des effets 2D sur ces déformations. Pour retrouver les résultats des simulations implicites, il semble important de travailler avec des systèmes bi-dimensionnels permettant de décrire un nombre suffisant de modes dans la direction axiale du moteur, c'est-à-dire dans la direction perpendiculaire à la vitesse de dérive. Cette condition étant remplie, on observe une vitesse axiale compatible avec le fonctionnement du moteur. C'est un indice important en faveur de l'instabilité de dérive cyclotronique pour expliquer la conductivité anormale.

Chapitre 5

Conclusion de la première partie

Le propulseur à effet Hall a fait l'objet de nombreuses études de stabilité depuis la création de son principe, tant au niveau théorique qu'au niveau expérimental. Les instabilités étudiées et répertoriées [Choueiri 2001] couvrent un large spectre en fréquence spatiale et en fréquence temporelle. Pour autant, aucune d'entre elles n'a les propriétés requises, notamment les nombres d'onde, pour expliquer la présence du champ électrique fluctuant mis en évidence par les simulations particulaires implicites de géométrie (Z, θ) évoquée en partie préliminaire. La première partie de ce manuscrit a donc été consacrée aux instabilités électroniques de dérive à l'origine de ce champ. En prenant une vitesse de dérive de l'ordre de la vitesse thermique électronique, nous avons établi la relation de dispersion en trois dimensions à partir d'un modèle simplifié du propulseur. La configuration de champs électrique et magnétique croisés est à elle seule instable, sans prendre en compte les gradients de champ magnétique et de densité comme c'est généralement le cas [Esipchuk & Tilinin 1976, Prioul 2001, Litvak & Fisch 2004]. Cette instabilité à fort taux de croissance est excitée par le couplage entre le mouvement de dérive et le mouvement cyclotronique électronique lorsque $k_y V_d \simeq n\Omega$. Elle se développe en paquets de modes obliques perpendiculaires au champ magnétique dans la gamme de fréquence 10-40 MHz pour des paramètres typiques du propulseur ($n_0 = 2.8\ 10^{11}$particules.cm^{-3}, $B = 170\ G$, $V_d = 2\ 10^6\ m.s^{-1}$). Les nombres d'onde correspondants sont de l'ordre du rayon de Larmor (inférieur ou égal au millimètre pour ces mêmes paramètres et $V_{th} = 10^6\ m.s^{-1}$).

Le développement de l'instabilité est accompagné d'une déformation importante de la fonction de distribution électronique. Un plateau se crée autour de la vitesse de dérive ($v_\perp \simeq V_d$) et gagne progressivement le coeur de la fonction de distribution à mesure que l'instabilité se développe. Cette déformation introduit des changements notables dans les propriétés de l'instabilité. Ils ont été étudiées par l'intermédiaire de la relation de dispersion intégrale dans laquelle des fonctions de distribution déformées ont été introduites. Pour la composante k_y du vecteur d'onde, ces effets non-linéaires consistent en une réduction des plages instables autour des harmoniques cyclotroniques conjuguée à une diminution progressive de la valeur de k_y pour laquelle le taux de

croissance est maximum. Dans la direction azimutale, les longueurs d'onde des modes susceptibles de se développer augmentent donc en fonction du développement de l'instabilité. L'extension axiale de ces modes (composante k_x) suit quant à elle une évolution plus complexe mais tend à s'amoindrir pour une forte déformation.

L'échelle caractéristique de l'instabilité ($\lambda \sim mm$) ainsi que la configuration matérielle du propulseur sont des obstacles de poids pour la vérification expérimentale de ces propriétés. Les diagnostics classiquement utilisés pour des mesures de champ comme les antennes ou les sondes de Langmuir ne possèdent pas les caractéristiques nécessaires à la détection de ce genre d'instabilité (les sondes résistent mal à la température du plasma du propulseur et les antennes ne peuvent détecter des nombres d'onde si grands $k \sim 10^4\ m.s^{-1}$). Une méthode de détection basée sur la diffusion collective de la lumière semble dans le cas présent être capable de vérifier les propriétés énoncées dans cette partie. Il s'agit d'une technique empruntée à la mesure de la turbulence dans les plasmas magnétisés [Lemoine 2005, Lemoine & Gresillon 2005-2]. Elle est exposée en annexe C. Elle ne peut malheureusement être appliquée qu'en sortie de moteur dans une région où la configuration du champ magnétique change rapidement, ce qui nécessite d'importants moyens tant au niveau du laser utilisé que du montage expérimental. Après une tentative infructueuse, elle sera prochainement mise en place sur PIVOINE à Orléans avec les moyens adéquats grâce à l'obtention récente d'un financement ANR.

Pour autant, malgré l'absence d'études expérimentales de l'instabilité, ses propriétés ont été largement validées par des simulations particulaires explicites développées *ad hoc*. Les résultats de ces simulations, reprenant la géométrie utilisée dans le calcul de la relation de dispersion, sont en bon accord avec l'ensemble des conclusions de l'étude de stabilité (linéaire et non-linéaire) : le peigne de modes instables prévu par la théorie est présent dans les simulations de grandes dimensions ; les taux de croissance observés dans les simulations sont quantitativement proches des taux de croissance théoriques et l'évolution non-linéaire des simulations est bien décrite par la prise en compte de la déformation de la fonction de distribution électronique dans la relation de dispersion.

Enfin, les simulations particulaires mettent en évidence une nette corrélation entre le développement de l'instabilité et l'apparition d'un courant électronique axial. Cette corrélation est manifeste quel que soit le cas considéré bien que la valeur quantitative du courant dépende très largement du nombre de modes décrits par la simulation ainsi que de leurs propriétés (valeur de k_y et de k_x). La déformation de la fonction de distribution ainsi que le transport électronique semblent directement liés au développement de l'instabilité. Le processus d'interaction de l'onde instable avec la fonction de distribution électronique est esquissé dans la deuxième partie de ce manuscrit. Sous certaines conditions qui seront détaillées dans cette partie, l'interaction onde-électron est à l'origine d'un transport électronique axial qualifié de stochastique au regard de la stochasticité des trajectoires des électrons.

Deuxième partie

Transport électronique stochastique

Chapitre 6

Interaction onde-particule dans un champ magnétique

Sommaire

6.1 Dynamique électronique : cas d'une onde azimutale 104
6.1.1 Configuration et équations 104
6.1.2 Interaction onde-électron : modèle de Karney . 106
6.1.3 Transport électronique 111
6.2 Généralisation à une onde oblique 111

La corrélation mise en évidence dans la section 4.3 entre la croissance de l'amplitude du champ électrique fluctuant, générée par l'instabilité électronique de dérive, et le transport électronique suggère un rôle important de l'instabilité dans le transport électronique anormal. L'un des effets les plus remarquables mis en évidence par les simulations est notamment l'apparition du phénomène de diffusion même pour une onde monochromatique. Il s'agit dans ce chapitre de mettre en lumière le mécanisme fondamental par lequel l'instabilité crée du transport électronique.

En prenant en compte le champ électrique fluctuant dans la configuration de champs du propulseur, l'étude de la dynamique des électrons peut être traitée en s'appuyant sur le travail de C.F.F. Karney [Karney 1978, Karney 1979] effectué à l'origine pour l'étude du chauffage ionique par une onde hybride monochromatique dans les Tokamaks. Celui-ci décrit l'apparition de la stochasticité dans les trajectoires des particules dès lors que certaines conditions, notamment sur l'amplitude de l'onde et le nombre d'onde, sont vérifiées. L'existence du seuil de stochasticité et, par extension, la validité du modèle ont été détaillées par Karney et ne constitue pas l'objet de ce chapitre. Appliqué à la géométrie du propulseur, ce modèle théorique montre qu'une onde monochromatique peut induire une stochasticité des trajectoires électroniques, qui elle-même conduit à une conductivité électronique axiale.

6.1 Dynamique électronique : cas d'une onde azimutale

6.1.1 Configuration et équations

La première partie de ce manuscrit a montré l'existence d'une instabilité ayant des nombres d'onde perpendiculaires au champ magnétique se développant dans la configuration de champs magnétique et électrique croisés. Cette instabilité génère un champ électrique fluctuant perpendiculaire au champ magnétique. Nous considérons dans un premier temps uniquement l'extension azimutale de l'instabilité. Seule la composante azimutale du champ fluctuant est prise en compte. L'existence de la composante axiale du champ électrique fluctuant sera introduite dans la section suivante.

Le champ électrique fluctuant dérive directement du potentiel perturbé introduit pour établir la relation de dispersion (1.23) : $\Phi_1 = \phi \, \exp[i(k_y y - \omega t)]$. Il s'écrit donc :

$$\mathbf{E_{fluct}} = \Re[-\nabla \Phi_1] = E_f \, \cos(k_y.y - \omega t) \, \mathbf{e_y}$$

avec $E_f = -\phi k_y$.

Dans ce chapitre, nous allons considérer ce champ électrique fluctuant comme imposé. Il possède les propriétés qui ont été déduites de l'étude de la relation de dispersion mono-dimensionnelle. Il s'ajoute à la configuration de champs prise en compte depuis le début de ce manuscrit à l'origine de l'apparition de l'instabilité, à savoir une configuration de champs électrique et magnétique croisés. Cette configuration est celle que l'on retrouve en sortie de propulseur et qui a été décrite dans la section 1.1. Ainsi, en prenant en compte le champ électrique fluctuant dû à l'instabilité, nous avons les champs :

$$\begin{aligned}
&\mathbf{B} = B_0 \, \mathbf{e_z} \\
&\mathbf{E_{axial}} = E_0 \, \mathbf{e_x} \\
&\mathbf{E_{fluct}} = E_f \, \cos(k_y.y - \omega t) \, \mathbf{e_y}
\end{aligned}$$

Le champ magnétique est radial et uniforme. Le champ électrique accélérateur est considéré en première approximation comme uniforme à l'échelle de temps de l'interaction onde-particule. Son amplitude est définie par l'amplitude du champ magnétique et par la vitesse de dérive électronique : $E_0 = -B_0 V_d$ ($V_d < 0$).
La configuration des champs dont il faut tenir compte pour l'étude de la dynamique des électrons dans le propulseur correspond donc à la figure 6.1.

Le champ électrique accélérateur, le champ magnétique et le champ électrique fluctuant forme un trièdre direct. Dans cette configuration de champs, les équations du mouvement s'écrivent :

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{q}{m} (\mathbf{E_{axial}} + \mathbf{E_{fluct}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \tag{6.1}$$

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v} \tag{6.2}$$

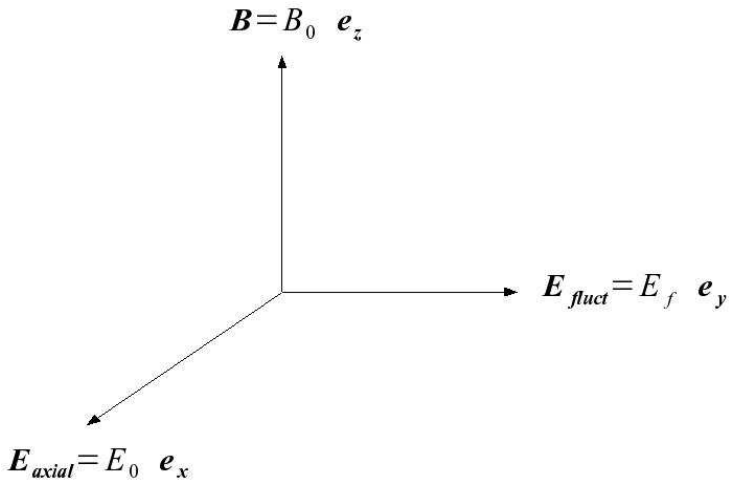


FIG. 6.1 – *Configuration de champs électrique et magnétique dans laquelle évoluent les électrons.*

Le passage du repère du laboratoire au repère électronique dérivant à la vitesse V_d permet à ce stade d'avoir une vision plus naturelle du mouvement des électrons. Ce changement de repère s'effectue en posant :

$$\begin{aligned} \eta &= y - V_d t - Y \\ v_\eta &= v_y - V_d \\ \frac{dv_\eta}{dt} &= \frac{dv_y}{dt} \end{aligned} \tag{6.3}$$

où Y est la position sur l'axe y du centre guide de l'électron. L'intégration de la composante $\mathbf{e}_x$ de l'équation (6.1) dans le repère (x, η) donne la projection du vecteur vitesse selon l'axe x :

$$v_x = \Omega\ \eta$$

Après avoir remplacé v_x par son expression, l'équation du mouvement (6.1) dans le repère électronique dérivant à la vitesse V_d est en définitive :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \Omega v_\eta \\ \frac{dv_\eta}{dt} &= -\Omega^2 \eta + \frac{qE_f}{m} \cos(k_y \eta - \omega_d t) \end{aligned} \tag{6.4}$$

où $\omega_d = \omega - k_y V_d$ est la pulsation de l'onde dans le repère électronique dérivant.

Ces équations correspondent à un mouvement circulaire uniforme dans le plan (x,η) perturbé par le champ électrique fluctuant $\mathbf{E_{fluct}}$. C.F.F Karney a traité un problème similaire [Karney 1978, Karney 1979] dans le cadre de la fusion nucléaire par confinement magnétique et plus particulièrement pour le chauffage des ions dans les Tokamaks. Son modèle apporte une interprétation théorique convaincante de la dynamique des électrons dans cette configuration de champs.

6.1.2 Interaction onde-électron : modèle de Karney

Modèle de Karney

Dans ce modèle, C.F.F Karney met en évidence la possibilité d'utiliser des ondes hybrides basses, *i.e.* des ondes à fréquence proche de la fréquence hybride basse, pour chauffer les ions par l'intermédiaire d'un mécanisme de chauffage stochastique.

La configuration considérée est simple : la population ionique est soumise à un champ magnétique uniforme et à une onde électrostatique hybride se propageant perpendiculairement au champ magnétique. L'échange d'énergie entre un ion et l'onde est maximum lorsque la vitesse de l'ion dans la direction de propagation de l'onde est égale à la vitesse de phase de l'onde $v = \omega/k$, *i.e.* à la résonance. L'interaction onde-particule est ramenée à ces résonances en première approximation.

L'hypothèse fondamentale de l'étude concerne la fréquence de l'onde qui est prise largement supérieure à la fréquence cyclotronique ionique $\omega \gg \Omega_{ci}$. Cette condition permet de considérer que l'interaction onde-particule a lieu sur un temps caractéristique très inférieur à la période de rotation des ions autour des lignes de champ magnétique. En d'autres termes, lors des résonances onde-particule, les ions se comportent comme s'ils n'étaient pas soumis au champ magnétique. C.F.F. Karney peut ainsi établir un seuil de stochasticité qui fixe la valeur minimum du rapport E/B pour l'apparition de la stochasticité dans le comportement des ions (où E est l'amplitude du champ électrostatique et B l'amplitude du champ magnétique). Au dessous de ce seuil, l'échange d'énergie entre l'ion et l'onde est faible et les trajectoires ioniques sont linéairement perturbées autour de l'orbite cyclotronique. Le système, notamment l'énergie cinétique des ions, n'évolue pas. Au delà de ce seuil, l'échange d'énergie peut être important et les trajectoires ioniques sont stochastiques. La température ionique augmente.

Nous allons dans la suite de ce chapitre voir comment ce modèle peut être transposé au propulseur et notamment comment il répond en partie à la question du transport électronique anormal.

Application à la géométrie du propulseur

La configuration de champs du propulseur est modélisée par la superposition de trois champs : un champ magnétique radial, un champ électrique statique axial et un champ électrique fluctuant azimutal comme le montre la figure 6.1. Le champ électrique statique combiné au champ magnétique crée une vitesse de dérive électrique V_d des électrons dans la direction azimutale du propulseur. Cette dérive des électrons est fondamentale dans l'application du modèle de Karney au propulseur comme nous allons le voir.

La pulsation de l'onde qui doit être prise en compte dans l'analyse de l'impact de l'instabilité sur la dynamique des électrons est, par définition, celle que les électrons "voient". La vitesse de dérive des électrons modifie

la fréquence de l'onde effectivement perçue et doit donc être introduite. Le changement de repère effectué dans la section 6.1.1 est en ce sens plus qu'une simple astuce en vue de simplifier les équations du mouvement des électrons. Il permet une vision plus naturelle du problème en considérant l'évolution dynamique du système du point de vue de l'électron, et met en évidence le décalage Doppler en fréquence dû à la vitesse de dérive. La pulsation de l'onde dans le repère électronique dérivant à la vitesse V_d s'écrit $\omega_d = \omega - k_y V_d$ et dépend donc directement du nombre d'onde pour lequel elle se développe.

Nous avons vu dans la première partie que l'instabilité apparaît pour des valeurs de $k_y V_d$ proches des harmonique cyclotroniques et qu'elle s'étend bien au-delà des premières harmoniques. Le maximum absolu du taux de croissance est atteint pour $k_y V_d/\Omega \simeq 12$. La pulsation de l'onde dans le repère électronique dérivant vérifie donc la condition :

$$\omega_d \gg \Omega \tag{6.5}$$

Cette condition est l'une des hypothèses essentielles du modèle de Karney. Elle autorise à considérer séparément l'interaction onde-particule et le mouvement cyclotronique, le temps caractéristique des résonances auxquelles l'interaction est ramenée comme nous allons le voir étant largement inférieur à la période cyclotronique. L'importance de la vitesse de dérive est ici toute démontrée : d'une part elle est à l'origine de l'instabilité et d'autre part elle introduit le décalage Doppler sur la fréquence de l'onde permettant à la condition (6.5) d'être vérifiée, et ce, bien que les modes étudiés aient une fréquence très petite devant Ω.

Il faut cependant d'ores et déjà noter que cette condition n'est pas pleinement vérifiée pour tous les modes instables décrits en première partie. Notamment, les modes qui se développent autour des premières harmoniques cyclotroniques ont des valeurs de $k_y V_d$ proches de Ω.

Lorsque la condition (6.5) est vérifiée, l'électron subit de nombreuses oscillations sous l'influence du champ électrique fluctuant pendant une giration cyclotronique. La vitesse de phase de l'onde revêt alors une importance toute particulière dans l'interaction de l'onde avec l'électron : elle différencie le comportement de l'électron en deux types. Elle s'écrit dans le repère dérivant :

$$V_\Phi = \frac{\omega - k_y V_d}{k_y} \approx -V_d \tag{6.6}$$

Lorsque la vitesse de l'électron dans la direction de propagation est supérieure ou inférieure à celle-ci, sa trajectoire est faiblement perturbée par l'onde. L'onde contribue peu à la dynamique électronique. La contribution principale de l'onde au mouvement de l'électron a lieu quand celui-ci à la même vitesse que l'onde, *i.e.* lorsque la vitesse de l'électron dans la direction de propagation de l'onde est égale à la vitesse de phase de l'onde.

$$V_\Phi = v_\eta \tag{6.7}$$

La perturbation du mouvement cyclotronique par l'onde, c'est-à-dire l'échange d'énergie entre l'électron et l'onde, est maximum quand l'électron vérifie l'équation (6.7). Il est alors en résonance avec l'onde. Selon la valeur de la phase de l'onde lors de cette résonance, l'électron est accéléré ou ralenti par l'onde dans la direction η.

Pour un électron ayant une énergie suffisante pour que v_η atteigne V_Φ, l'orbite dans l'espace des phases $(\eta, \dot{\eta})$ est illustré par la figure 6.2. L'échange

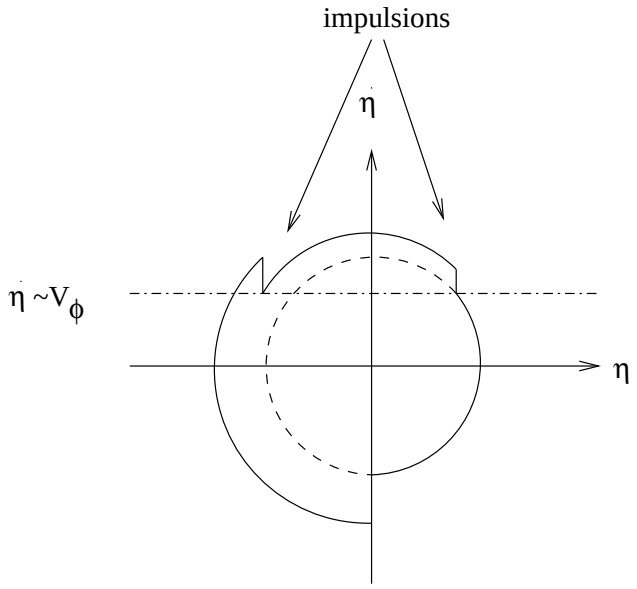


FIG. 6.2 – *Schéma de l'orbite d'un électron dans l'espace des phases* $(\eta, \dot{\eta})$.

d'énergie entre l'électron et l'onde se résume aux impulsions que subit l'électron à chaque fois qu'il est en résonance avec l'onde. Bien qu'elles aient une durée finie, elles peuvent être schématiquement remplacées par des impulsions de durée infiniment courtes pendant lesquelles l'interaction onde-électron est considérée comme ayant lieu sans champ magnétique. Étant donné la trajectoire circulaire de l'électron dans l'espace des phases, ces résonances ont lieu deux fois par giration cyclotronique comme le montre la figure 6.2.

Cette vision schématique de l'orbite de l'électron de la figure 6.2 n'est valable que si l'électron a suffisamment d'énergie pour que sa vitesse v_η atteigne V_Φ au cours d'une giration cyclotronique. Soit $v_\perp = \sqrt{v_x^2 + v_\eta^2}$. Alors l'évolution de la vitesse v_η pendant un tour cyclotronique est une sinusoïde qui varie entre $\pm v_\perp$. Le maximum de la vitesse v_η se situe lorsque $v_x = 0$ et $v_\eta = v_\perp$. L'électron connaît donc une résonance avec l'onde lors d'une giration cyclotronique si $v_\perp \geq V_\Phi$ (une résonance si $v_\perp = V_\Phi$ et deux résonances si $v_\perp > V_\Phi$).

Nous avons jusqu'ici considéré que l'interaction onde-électron se limitait uniquement aux résonances, c'est à dire lorsque (6.7) est vérifiée. C'est effectivement lors de ces résonances que l'échange d'énergie est maximum. Pour être complet, il faut tenir compte de l'énergie potentielle liée à l'onde. Dans

le cadre de l'interaction onde-particule sans champ magnétique, considérant l'interaction à partir du repère de l'onde, un électron dont l'énergie cinétique est inférieure à l'énergie potentielle maximum sera piégé par l'onde. Il oscillera dans le puits de potentiel autour d'un minimum du potentiel de l'onde. L'énergie potentielle maximum dans le repère de l'onde définit donc la vitesse maximal au dessous de laquelle l'électron est piégé par l'onde en posant $\frac{1}{2}m(\Delta v)^2 = 2e\Phi$. Elle s'écrit :

$$\Delta v = 2\sqrt{\frac{eE_f}{k_y m}} \tag{6.8}$$

Étant donné la présence du champ magnétique dans le système, il est difficile de parler d'un véritable piégeage de l'électron. Il s'agit plutôt d'une modulation de la trajectoire ou encore d'un piégeage temporaire jusqu'à ce que le temps sur lequel on considère l'interaction ne soit plus négligeable par rapport à la période cyclotronique. Pour avoir une idée de l'importance du piégeage dans les trajectoires des électrons, il suffit de comparer la fréquence cyclotronique à la fréquence de piégeage (ou fréquence de rebondissement) qui est la fréquence à laquelle l'électron oscille dans le puits de potentiel de l'onde :

$$\omega_B = \sqrt{\frac{k_y e E_f}{m}}$$

Pour un champ magnétique tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$ et une onde mono-mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ avec une amplitude telle que $E_f/E_0 = 0.2$ (valeur arbitraire mais typique comme on le verra dans l'étude numérique approfondie de ce cas dans le chapitre suivant), la fréquence de piégeage $\omega_B/\omega_{pe} = 0.1442$ est supérieure à la fréquence cyclotronique. Ce phénomène de piégeage temporaire introduit donc une correction sur la condition (6.7). En remplaçant la vitesse de phase par son expression (6.6), la condition sur la vitesse de l'électron pour qu'il y ait interaction onde-électron en tenant compte de (6.8) est en définitive :

$$v_\perp \geq -V_d - \Delta v \tag{6.9}$$

Les résonances parfaites (6.7) n'ont lieu au cours d'une période cyclotronique que pour les particules qui vérifient $v_\perp \geq -V_d$. Les particules telles que $-V_d - \Delta v \leq v_\perp < -V_d$ ne connaissent pas de véritables résonances mais interagissent suffisamment avec l'onde dans un premier temps pour en connaître ensuite. En effet, celles-ci sont plus lentes que l'onde et gagnent de l'énergie (peu mais suffisamment) de sorte que leur $v_\perp$ puisse satisfaire la condition (6.7).

Seuil de stochasticité

Pour les électrons qui vérifient la condition (6.9), on peut distinguer deux types de trajectoire. Selon la valeur de l'amplitude de l'onde E_f et du paramètre $k_y V_d$, la trajectoire de l'électron peut être linéairement perturbée

autour de son mouvement de giration cyclotronique ou stochastique. L'existence d'un seuil de stochasticité dans les trajectoires des particules pour une configuration de champ proche de celle du propulseur a été mise en évidence par C.F.F. Karney [Karney 1978, Karney 1979]. En tenant compte de la présence du champ électrique axial et donc du décalage Doppler de la pulsation de l'onde dû à la vitesse de dérive, ce seuil de stochasticité fixe la valeur minimale du rapport E_f/E_0 pour l'apparition de la stochasticité :

$$\Big(\frac{E_f}{E_0}\Big)_{seuil} \approx \frac{1}{4}\Big(\frac{\Omega}{k_y V_d}\Big)^{1/3} \tag{6.10}$$

Pour un champ magnétique et un champ électrique donnés, la condition de stochasticité, *i.e.* le caractère stochastique des trajectoires électroniques, dépend uniquement de l'amplitude de l'onde E_f et du nombre d'onde k_y. Cette dépendance a une interprétation physique assez claire. Nous avons vu que la vitesse de phase de l'onde est égale à la vitesse de dérive des électrons. Cette vitesse est constante tout comme la période cyclotronique Ω^{-1}. L'intervalle de temps entre deux résonances n'évolue donc pas. Soit τ cet intervalle de temps. Il ne dépend ni de l'amplitude de l'onde ni du vecteur d'onde. Plus l'amplitude de l'onde est grande, plus la valeur du champ fluctuant varie vite pendant τ et, par conséquent, plus l'échange d'énergie varie d'une résonance à l'autre. Le caractère stochastique des trajectoires tend donc à devenir d'autant plus important que l'amplitude de l'onde est grande. C'est ce qui est illustré par le seuil de stochasticité (6.10).

Le même constat est à faire concernant le nombre d'onde. Il faut rappeler que la présence du nombre d'onde dans le seuil de stochasticité est directement lié au décalage Doppler de la fréquence de l'onde dû à la vitesse de dérive électronique. Plus la valeur de k_y est grande et plus la fréquence de l'onde vue par l'électron est grande. Ainsi, une augmentation de k_y correspond à une fréquence effective de l'onde dans le repère électronique plus élevée et donc à une valeur du champ fluctuant qui varie plus rapidement pendant τ. L'énergie échangée varie donc d'une résonance à l'autre d'autant plus que k_y est grand. C'est ce qu'on retrouve dans l'expression 6.10 qui montre que le seuil de stochasicité diminue avec la croissance de k_y.

Dans le cadre du propulseur, le champ magnétique et le champ électrique accélérateur sont des grandeurs qui restent constantes sur les échelles de temps où les instabilités se développent. L'expression du seuil de stochasticité donne donc la valeur de l'amplitude de l'onde pour un nombre d'onde donné telle que le régime stochastique est atteint. Par exemple, pour le cas mono-mode où le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ se développe avec $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$, les trajectoires des électrons vérifiant la condition (6.9) sont stochastiques pour une amplitude d'onde supérieure à $E_f/E_0 = 0.1145$. Cette valeur est largement dépassée dans la simulation particulaire correspondante. Les résonances peuvent alors être assimilées à des collisions virtuelles (elles ont le même effet que des collisions) et sont à l'origine d'un transport électronique axial dont nous allons parler maintenant.

6.1.3 Transport électronique

Lors de chaque résonance, la composante v_η du vecteur vitesse de l'électron est modifiée, ce qui se traduit par un changement de la direction du vecteur vitesse d'un angle quelconque qui dépend directement de la phase de l'onde, *i.e.* de l'énergie échangée. Ceci a pour conséquence que l'électron continue sa giration cyclotronique autour d'une autre ligne de champ. La rupture de symétrie causée par la présence du champ électrique statique pendant l'échange d'énergie entre l'onde et l'électron implique l'anisotropie du transport lors de cette "collision virtuelle". Ce mécanisme est à l'origine d'un transport électronique vers les x négatifs. Une expression de la vitesse de diffusion V_x peut être calculée analytiquement au prix d'un certain nombre d'hypothèses quelque peu arbitraires, notamment l'hypothèse d'un régime stationnaire associé à une fonction de distribution électronique maxwellienne. Ce calcul ne prétend donc pas apporter une expression absolue de la vitesse de diffusion axiale mais il met en valeur quelques tendances quant à la dépendance en fonction de certains paramètres du transport électronique. Il est basé sur le calcul du premier moment de l'équation de Vlasov moyennée régissant l'évolution de la fonction de distribution à l'équilibre. Le calcul est détaillé dans l'annexe B et aboutit à l'expression de la vitesse de diffusion axiale suivante :

$$V_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{V_d}{V_{th}}\right)^3 \left(\frac{E_f}{E_0}\right)^2 V_{th} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{b}}} \tag{6.11}$$

avec $b = k_y^2 V_{th}^2 / \Omega^2$.

Cette expression est valable pour une fonction de distribution électronique maxwellienne en régime stochastique. Nous verrons dans le chapitre suivant que ces deux conditions sont contradictoires : le régime stochastique, atteint lorsque les amplitudes des ondes instables sont suffisamment grandes, est à l'origine de la déformation de la fonction de distribution. Ce calcul n'est donc valable qu'au tout début de l'apparition du régime stochastique. Il indique malgré tout clairement l'existence d'un transport électronique axial du même signe que la vitesse de dérive, c'est-à-dire négatif, *i.e.* de signe opposé au champ accélérateur dans le propulseur, et montre les grandes tendances de ce transport. Il suggère notamment que la diffusion électronique axiale dépend de l'amplitude de l'onde instable.

L'étude de la dynamique des électrons a été faite jusqu'à maintenant pour une onde mono-dimensionnelle azimutale. La section suivante généralise les résultats du modèle théorique à un champ électrique fluctuant oblique.

6.2 Généralisation à une onde oblique

La généralisation des conclusions du cas d'une onde azimutale à une onde bi-dimensionnelle ne pose pas de problème théorique supplémentaire dans la mesure où il est toujours possible de se placer dans un repère où l'axe y est

la direction de propagation de l'onde. Le problème est alors identique au cas mono-dimensionnel.

Dans le repère cartésien du propulseur, $\mathbf{e}_x$ correspondant à l'axe du propulseur et $\mathbf{e}_y$ à son azimut, il faut juste prendre garde à ne pas confondre le module du vecteur d'onde k et sa composante k_y qui intervient dans le décalage Doppler de la fréquence de l'onde dû à la dérive des électrons suivant y.

Le champ électrique dérive du potentiel $\Phi_1 = \phi \ \exp[i(k_x x + k_y \eta - \omega_d t)]$ où $\omega_d = \omega - k_y V_d t$ dans le repère dérivant à la vitesse V_d :

$$\mathbf{E_{fluct}} = \Re[-\nabla \Phi_1] = \left(\begin{array}{l} E_f \ \dfrac{k_x}{k_y} \ \cos\left(\mathbf{k}.\mathbf{r}_\eta - \omega_d t\right) \ \mathbf{e}_x \\ E_f \ \cos\left(\mathbf{k}.\mathbf{r}_\eta - \omega_d t\right) \ \mathbf{e}_y \end{array} \right)$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde et $\mathbf{r}_\eta = x \ \mathbf{e}_x + \eta \ \mathbf{e}_y$ le vecteur position.

Dans le repère dérivant à la vitesse V_d, le mouvement est décrit par le système dynamique :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{v}}{dt} &= \frac{q}{m}\left(\mathbf{E_{fluct}} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned} \tag{6.12}$$

L'intégration de la composante $\mathbf{e}_x$ aboutit au système :

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= \Omega v_\eta + \frac{qE_f}{m}\frac{k_x}{k_y}\cos\left(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega_d t\right) \\ \frac{dv_\eta}{dt} &= -\Omega^2 \eta + \frac{qE_f}{m}\left[\cos(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega_d t) + \frac{\Omega}{\omega}\frac{k_x}{k_y}\sin\left(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \omega_d t\right)\right] \\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \mathbf{v} \end{aligned}$$

Dans ce repère, il consiste en un mouvement cyclotronique perturbé par une onde se propageant dans le plan (x, η) perpendiculaire au champ magnétique. L'étude de la dynamique des électrons dans un tel système peut s'appuyer sur le modèle de Karney. En fait, l'ensemble des résultats du modèle 1D sont généralisables pour une onde oblique. Pour s'en persuader, il suffit de se placer dans un repère dont l'un des axes est la direction de propagation de l'onde. Dans ce repère, illustré en figure 6.3, la vitesse de dérive se projette sur les axes comme suit :

$$\mathbf{V}_d = V_d \ \sin\theta \ \mathbf{e}_j + V_d \ \cos\theta \ \mathbf{e}_k = \frac{k_x V_d}{k} \ \mathbf{e}_j + \frac{k_y V_d}{k} \ \mathbf{e}_k$$

où θ est l'angle que font les axes $\mathbf{e}_y$ et $\mathbf{e}_k$ comme indiqué sur la figure. Quelle que soit la direction de propagation de l'onde, la projection de la vitesse de dérive sur l'axe de propagation est égale à $V_{d_k} = k_y V_d / k$. C'est la vitesse avec laquelle les électrons dérivent dans cette direction.

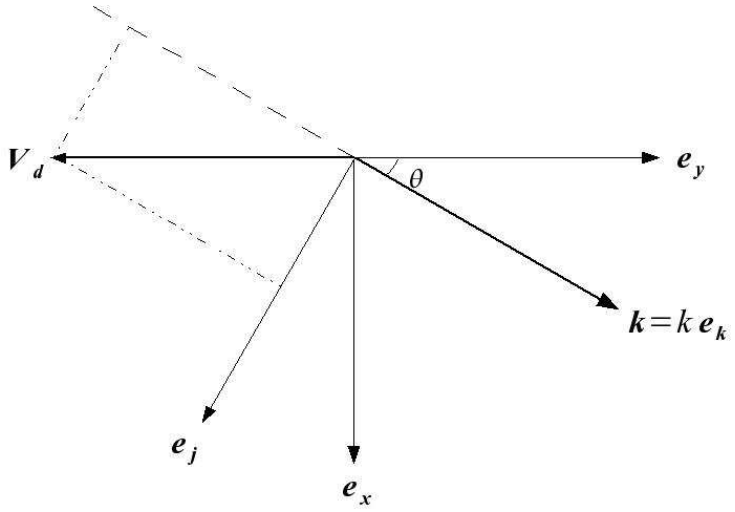


FIG. 6.3 – *Décalage Doppler dans le repère de l'onde.*

Revenons au repère dérivant à la vitesse V_d, lié aux électrons, (x, η). Le décalage Doppler en fréquence est défini à partir de la vitesse du référentiel "récepteur" (ici les électrons) et de la vitesse de l'onde comme :

$$\begin{aligned} \omega_d &= \frac{V_{onde} - V_{electron}}{V_{onde}}\omega \\ &= \frac{\omega/k - k_y V_d/k}{\omega/k}\omega \\ &= (1 - k_y V_d/\omega)\,\omega \end{aligned}$$

Par conséquent, quelle que soit la direction de propagation de l'onde, perpendiculairement au champ magnétique, le décalage Doppler en fréquence introduit par la vitesse de dérive électronique induit $\omega_d = \omega - k_y V_d$ pour la pulsation vue par l'électron. La condition fondamentale (6.5) $\omega_d \gg \Omega$ n'est donc pas modifiée.

La condition de résonance onde-électron pour une onde oblique reste identique au cas azimutal puisque la vitesse de l'onde selon η demeure $V_\Phi = \omega_d/k_y$:

$$V_\Phi = \frac{\omega - k_y V_d}{k_y} \approx -V_d = \dot{\eta} \tag{6.13}$$

Ce qui conserve formellement la condition sur $v_\perp$ d'interaction onde-électron (6.9) :

$$v_\perp \geq -V_d - \Delta v = V_\sigma \tag{6.14}$$

avec cependant un changement dans la largeur de piégeage qui s'écrit maintenant $\Delta v = 2\sqrt{eE_f/k_\perp m}$. Une réserve est à émettre sur cette dernière considérant la difficile prise en compte théorique du piégeage 2D. Les simulations particulaires comme la résolution du système dynamique montrent d'ailleurs que V_σ a plutôt tendance à diminuer avec k_x croissant.

Le seuil de stochasticité, qui ne dépend pas du référentiel, est quant à lui modifié par rapport au cas 1D :

$$\Big(\frac{E_f}{E_0}\Big)_{seuil} \approx \frac{1}{4}\frac{k_y}{k}\Big(\frac{\Omega}{k_y V_d}\Big)^{1/3} \tag{6.15}$$

Dans le cas d'une onde azimutale, le quotient k_y/k est égal à un. Dès lors que l'onde a une extension axiale, ce quotient diminue $k_y/k < 1$. Ainsi, plus l'onde est oblique, *i.e.* plus k_x est grand, moins le seuil de stochasticité est élevé, et donc plus le régime stochastique est rapidement atteint à mesure que l'amplitude de l'onde instable croît.

En définitive, le passage d'une onde azimutale à une onde oblique renforce le phénomène décrit dans le modèle de Karney. On s'attend donc à ce que le transport électronique stochastique mis théoriquement en évidence par le calcul de la vitesse de diffusion axiale dans le paragraphe 6.1.3 soit d'autant plus important que l'extension axiale de l'onde est importante.

La dynamique des électrons dans la configuration de champs du propulseur peut donc être étudiée par un modèle qui fait intervenir l'existence d'un régime stochastique sous certaines conditions. Pour une onde azimutale ou oblique, les trajectoires des électrons peuvent être effectivement classés dans deux catégories. Elles sont linéairement perturbées autour du mouvement cyclotronique pour une faible amplitude d'onde. Elles sont stochastiques lorsque cette amplitude d'onde est suffisamment grande, toute chose étant égale par ailleurs, telle que son rapport sur l'amplitude du champ statique est supérieur au seuil (6.15). D'autre part, le modèle a mis en évidence l'existence d'une condition sur la vitesse perpendiculaire au champ magnétique que doit avoir un électron pour interagir significativement avec l'onde. Le régime stochastique n'est atteint que par une partie de la population électronique qui vérifie la condition (6.14). Pour ces électrons, la stochasticité des trajectoires est associée à un transport électronique comme le montre le calcul de la vitesse de diffusion qui aboutit à l'expression (6.11). Il semble donc que ce modèle apporte une explication théorique au transport électronique anormal. Cependant, le calcul de la vitesse de diffusion axiale n'est valable que pour une fonction de distribution maxwellienne. L'étude de la dynamique de la population électronique au delà de cette hypothèse arbitraire est impossible analytiquement et nécessite par conséquent une résolution numérique du système dynamique. C'est l'objet du chapitre suivant. Nous résoudrons les équations du mouvement pour une onde aux propriétés variables (monochromatique 1D et 2D, multimode...). Les résultats seront analysés à l'aide du modèle présenté ci-dessus .

Chapitre 7

Validation numérique du modèle de transport stochastique

Sommaire

7.1 Modèle numérique 115
7.2 Cas d'une onde azimutale 117
7.2.1 Amplitude d'onde constante 118
7.2.2 Amplitude extraite du code PIC 120
7.3 Cas d'une onde oblique 124
7.3.1 Cas mono-mode 124
7.3.2 Cas multi-mode 125

Le système d'équation (6.12) valable quelles que soient les propriétés de l'onde considérée décrit la trajectoire d'un électron soumis à une onde monochromatique dans une configuration de champs croisés. L'étude numérique de ce système pour une population électronique va nous permettre de vérifier l'impact de l'instabilité de dérive sur le fonctionnement du propulseur et notamment sur le transport électronique axial à la lumière du modèle théorique de Karney. Ce système sera ensuite étendu à des cas plus réalistes du point de vue du propulseur, à savoir la prise en compte de paquets d'ondes azimutales ou obliques.

7.1 Modèle numérique

La population électronique est décrite par une fonction de distribution maxwellienne. Il s'agit plus précisément d'une distribution uniforme des électrons dans l'espace des phases que l'on pondère de manière à obtenir une fonction de distribution maxwellienne en début de simulation.

L'intégration des deux équations différentielles du 1^{er} ordre du système (6.12) est réalisée par l'intermédiaire d'un schéma saute-mouton [Birdsall &

Langdon 1985]. Le système s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} - \mathbf{v}^{t-\Delta t/2}}{\Delta t} &= \frac{q}{m}\left(\mathbf{E}^t + \frac{\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} + \mathbf{v}^{t-\Delta t/2}}{2} \times \mathbf{B}\right) \\ \frac{\mathbf{r}^{t+\Delta t} - \mathbf{r}^t}{\Delta t} &= \mathbf{v}^{t+\Delta t/2} \end{aligned} \tag{7.1}$$

Cette méthode permet d'avoir des résultats précis tout en ayant un coût en temps de calcul limité. Seule la connaissance de la valeur des variables au pas de temps précédent est nécessaire contrairement à d'autres méthodes d'ordre supérieure (ex : Runge-Kutta). La figure 7.1 illustre le caractère centré en temps du schéma saute-mouton. L'évolution temporelle des vecteurs position

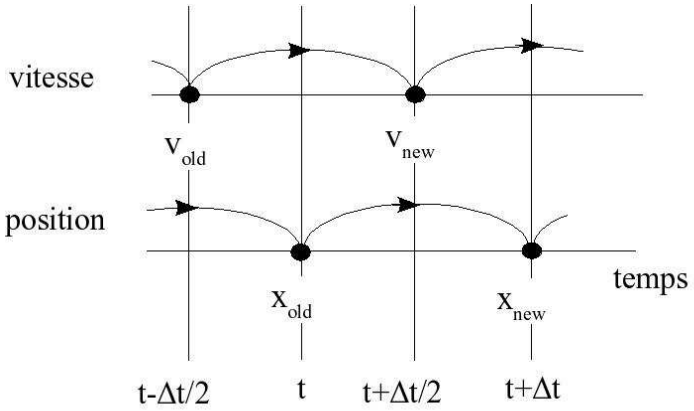


FIG. 7.1 – *Schéma saute-mouton.*

et vitesse est décalée de $\Delta t/2$ ce qui permet de les calculer au pas de temps suivant à partir respectivement de la vitesse centrée en temps et de la force de Lorentz, fonction du vecteur position, centrée en temps. Une attention particulière est à porter sur l'ajustement des vecteurs $\mathbf{v}$ et $\mathbf{r}$ en sortie de programme étant donné leur décalage temporel de $\Delta t/2$.

Une méthode particulièrement efficace pour traiter l'incidence de la force de Lorentz sur les trajectoires électroniques est de considérer séparément la force électrique et la force magnétique [Boris 1970]. Cela revient à prendre en compte d'une part la rotation pure due au champ magnétique et d'autre part l'accélération due au champ électrique. Le module du vecteur vitesse n'est modifié que par la partie correspondante au champ électrique de la force de Lorentz. L'application de l'accélération est effectuée en deux fois afin d'obtenir un schéma numérique physiquement raisonnable : une demi-accélération avant et après la rotation cyclotronique. Ceci garantit notamment la réversibilité du schéma. Le mouvement des électrons est décrit en définitive par le schéma :

Demi-accélération

$$\mathbf{v}^- = \mathbf{v}^{t-\Delta t/2} + \frac{q\mathbf{E}^t}{m}\frac{\Delta t}{2}$$

Rotation

$$\frac{\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-}{\Delta t} = \frac{q}{2m}\left(\mathbf{v}^+ + \mathbf{v}^-\right) \times \mathbf{B}$$

Demi-accélération

$$\mathbf{v}^{t+\Delta t/2} = \mathbf{v}^+ + \frac{q\mathbf{E}^t}{m}\frac{\Delta t}{2}$$

L'évolution du système sur un pas de temps se fait de la manière suivante : la première demi-accélération est appliquée aux électrons et fait passer leur vitesse de $\mathbf{v}^{t-\Delta t/2}$ à $\mathbf{v}^-$; $\mathbf{v}^-$ évolue en $\mathbf{v}^+$ par la rotation d'un angle égal à $\theta = \Omega\Delta t$ et la vitesse au pas de temps suivant $\mathbf{v}^{t+\Delta t/2}$ s'obtient en y ajoutant la deuxième demi-accélération. Le calcul du vecteur position au temps $t + \Delta t$ est effectué à partir du vecteur vitesse au temps $t + \Delta t/2$ comme indiqué dans le système (7.1).

Une précision sur les conditions initiales est à apporter pour la mise en œuvre de ce schéma. Les conditions initiales en position et en vitesse sont données au temps $t = 0$ alors qu'il est nécessaire de connaître la vitesse au temps $t = -\Delta t/2$ pour amorcer le schéma. Cette dernière est déterminée en appliquant aux électrons une rotation d'un angle $\theta = -\Omega\Delta t/2$ suivie d'une "demi-décélération" (une accélération en utilisant $-\Delta t/2$) basée sur le champ pris à sa valeur en $t = 0$.

L'expression du champ électrique $\mathbf{E}$ qui intervient dans le schéma est quelconque. Nous définissons ce dernier comme une somme d'onde plane en $\cos(\mathbf{k}.\mathbf{r}_\eta - \omega_d t)$. Il correspondra tour à tour à une onde mono-mode azimutale puis oblique, et à une onde multi-mode, plus réaliste dans le cadre du propulseur puisque l'instabilité se développe en paquets de modes. Le modèle théorique et les équations de la dynamique électronique ont été établis dans le chapitre précédent dans le repère dérivant à la vitesse V_d. Par conséquent, l'ensemble de l'étude qui va suivre sera faite dans ce repère. L'une des conséquences de ce positionnement est la faible importance du choix de la valeur de la pulsation de l'onde par rapport à la composante k_y du nombre d'onde considérée. En effet, ω n'intervient dans le système d'équation de la dynamique (6.12) que décalé de $k_y V_d$ par effet Doppler. Or, ce décalage en fréquence est largement supérieur à la fréquence de l'onde elle-même. La pulsation de l'onde dans le repère dérivant s'écrit donc $\omega_d = \omega - k_y V_d \simeq k_y V_d$ puisque ω est négligeable. Nous prendrons donc une pulsation arbitraire constante en accord avec les résultats de l'étude de la relation de dispersion dans toute l'étude qui va suivre $\omega/\omega_{pe} = 5.10^{-3}$. Le champ magnétique sera fixé tel que $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$.

7.2 Cas d'une onde azimutale

Le système d'équation résolu par le modèle numérique correspond au système (6.4). La pulsation ω et le nombre d'onde k_y qui définissent l'onde azi-

mutale sont issus des propriétés de l'instabilité mises en évidence dans la première partie du manuscrit. L'amplitude de l'onde liée à la saturation du mode correspondant en régime non-linéaire sera choisie à la lumière des résultats des simulations PIC.

7.2.1 Amplitude d'onde constante

L'amplitude de l'onde est prise constante dans un premier temps. Afin de visualiser clairement l'effet de l'onde sur la dynamique électronique, elle est choisie arbitrairement égale à l'amplitude du champ statique : $E_f/E_0 = 1$. Le choix d'introduire une telle amplitude d'onde, qui plus est constante, est une contrainte importante mais difficile à éviter si nous voulons étudier le principe de base du rôle de l'instabilité dans le transport électronique.

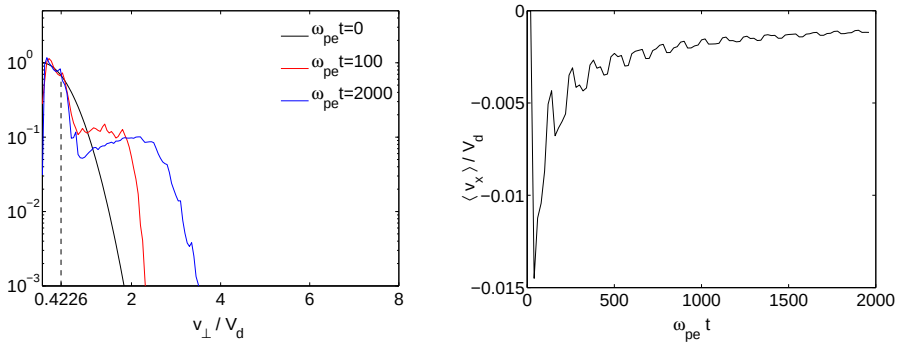
Trois cas sont mis en avant pour révéler l'impact de l'instabilité sur la dynamique électronique. Le tableau 7.2 résume leurs caractéristiques.

	$k_y V_d/\omega_{pe}$	ω_d/ω_{pe}	$(E_f/E_0)_{\text{seuil}}$	$\Delta v/V_d$	V_σ/V_d	ω_B/ω_{pe}
Cas (a)	1.2	$\simeq 1.2$	0.1092	0.5774	0.4226	0.3464
Cas (b)	0.6	$\simeq 0.6$	0.1376	0.8165	0.1835	0.2449
Cas (c)	0.3	$\simeq 0.3$	0.1733	1.1547	"-0.1547"	0.1732

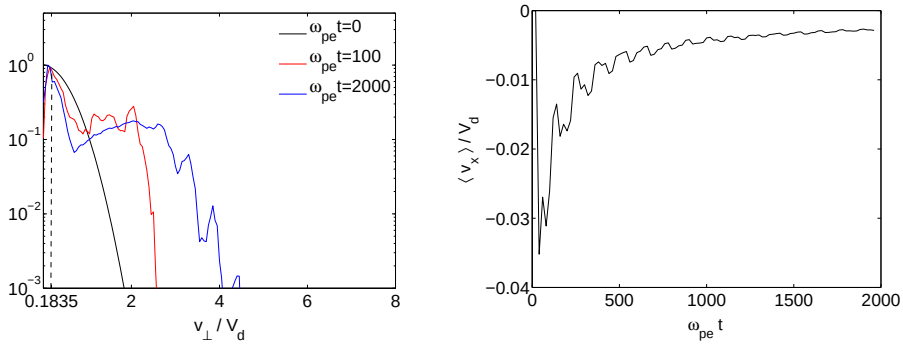
FIG. 7.2 – *Caractéristiques des cas mono-modes : $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.3,\ 0.6$ et 1.2.*

Chaque cas vérifie la condition principale de validité du modèle de Karney sur la pulsation de l'onde vue par les électrons, à savoir $\omega_d/\omega_{pe} \gg \Omega/\omega_{pe} = 0.1$. Ils sont donc parfaitement décrits par la théorie de Karney. L'amplitude $E_f/E_0 = 1$ a été choisie telle que le seuil de stochasticité défini par l'expression (6.10) soit dépassé pour chaque cas.

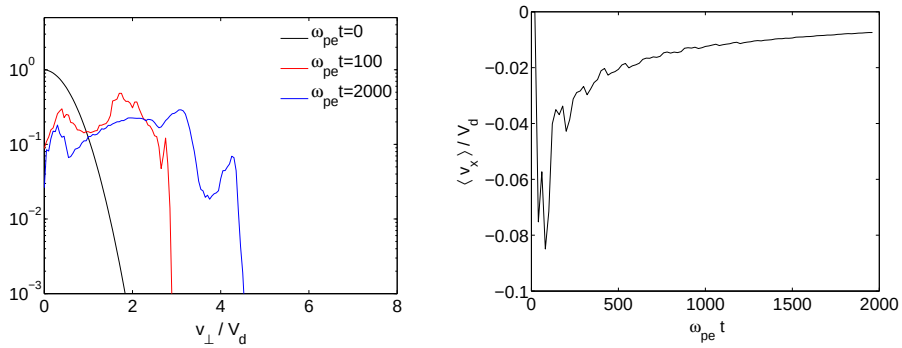
La figure 7.3 représente l'évolution temporelle de la fonction de distribution en fonction de $v_\perp/V_d$ et celle de la vitesse axiale moyenne pour chacun de ces trois cas. La fonction de distribution à l'origine est maxwellienne (en noir). Les courbes rouge puis bleue correspondent à la fonction de distribution respectivement aux temps $\omega_{pe}t = 100$ et 2000. La déformation de la fonction de distribution pour chacun des trois cas est semblable à celle observée dans les simulations PIC dans le chapitre 2 et est en accord avec la théorie développée dans le chapitre 6. Les électrons qui ont une énergie telle que $v_\perp \geq V_\sigma = -V_d - \Delta v$ (condition d'interaction onde-particule (6.9) présentée dans la section 6.1.2) interagissent avec l'onde et subissent des résonances. Un échange d'énergie entre ces électrons et l'onde se produit, ce qui est nettement visible sur les figures représentant l'évolution de la fonction de distribution. Une droite en pointillée noir matérialise la limite d'interaction V_σ. Les valeurs pour les différents cas sont regroupées dans le tableau 7.2. Dans les cas (a) et (b), cette limite coïncide parfaitement avec le point à partir duquel la fonction de distribution change au cours du temps. Dans le cas (c), V_σ est négatif, l'ensemble de la fonction de distribution interagit



(a) $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$



(b) $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.6$



(c) $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.3$

FIG. 7.3 – *Interaction modes instables-électrons : impact sur la fonction de distribution et transport. L'amplitude de chacune des ondes est telle que* $E_f/E_0 = 1$.

avec l'onde. Cette interaction concerne tous les électrons de la fonction de distribution quelle que soit leur énergie. Outre l'accord des valeurs théoriques de V_σ avec les résultats de la figure 7.3, la prise en compte du piégeage se justifie par ailleurs par la valeur de la fréquence de piégeage ω_B/ω_{pe}, reportée dans le tableau, toujours supérieure à la pulsation cyclotronique $\Omega/\omega_{pe} = 0.1$ quel que soit le cas considéré ici.

Les électrons au-dessous de la limite V_σ n'interagissent quasiment pas

avec l'onde, la fonction de distribution reste inchangée. Au delà, les électrons échangent de l'énergie avec l'onde. Ils peuvent gagner ou perdre de l'énergie. Étant donné l'existence du seuil en $v_\perp$ en dessous duquel il n'y a plus d'échange, la tendance statistique de l'échange moyen est au gain d'énergie. Les électrons sont donc globalement chauffés et la fonction de distribution s'étale. Cependant, plus la fonction de distribution s'étend en $v_\perp$, *i.e.* plus les électrons sont énergétiques en moyenne, moins l'échange d'énergie à la résonance est important (dans l'espace des phases, les électrons passent plus rapidement dans la zone de résonance et "voient" moins longtemps le potentiel de l'onde autour de la résonance). La diffusion électronique tend donc à se ralentir avec l'étalement de la fonction de distribution pour une amplitude d'onde constante.

Comme le modèle théorique du chapitre précédent le suggère, la déformation de la fonction de distribution est accompagnée d'un transport électronique axial important. Il est maximum au début de la déformation de la fonction de distribution, lorsque les électrons gagnent beaucoup d'énergie de l'onde. La figure 7.3 montre ensuite une stabilisation de la vitesse axiale corrélée à un ralentissement du chauffage de la fonction de distribution décrit par Karney [Karney 1978, Karney 1979]. Les valeurs atteintes ne sont pas physiquement pertinentes puisque ces cas, d'une utilité manifeste pour comprendre les processus fondamentaux de transport, sont assez éloignés de la réalité du propulseur.

L'introduction d'une amplitude constante ne tient en aucun cas compte des effets non linéaires dus à la déformation de la fonction de distribution. Or, nous avons vu au chapitre 3 que celle-ci modifie considérablement l'instabilité, jusqu'à saturer la plupart des modes instables. La prise en compte de ces effets non linéaires peut être faite dans quelques cas simples par l'introduction d'une amplitude d'onde extraite des simulations PIC.

7.2.2 Amplitude extraite du code PIC

Le système étudié ici décrit l'interaction des électrons avec le mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ dans la configuration de champ du propulseur. La simulation particulaire 1D présentée dans le paragraphe 2.4.2 dont la longueur de simulation est $ylong = 12.083\ \lambda_D$ nous donne l'évolution de l'amplitude du champ électrique associé ce mode. En effet, l'absence d'autres modes instables dans la simulation permet d'identifier l'amplitude du champ électrique du système à celui associé au mode décrit. Celle-ci contient *de facto* les effets non-linéaires dus à la déformation de la fonction de distribution sur ce mode particulier. Cette amplitude représentée sur la figure 7.4 va être introduite dans le modèle numérique décrit dans la section 7.1 avec une phase en $\cos(k_y\eta - \omega_d t)$. Il faut noter que l'amplitude d'onde extraite de la simulation particulaire est moyennée sur plusieurs oscillations plasma ω_{pe}^{-1} afin de négliger l'incidence de celles-ci sur le transport électronique. La valeur maximale de l'amplitude de l'onde atteint environ $E_f/E_0 = 0.5$ ce qui rend moins arbitraire le choix de

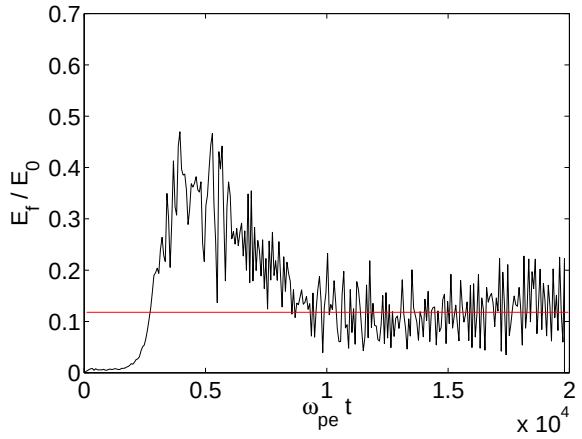


FIG. 7.4 – *Amplitude de l'onde extraite du code PIC pour ylong* $= 12.083\ \lambda_D$, *i.e.* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$.

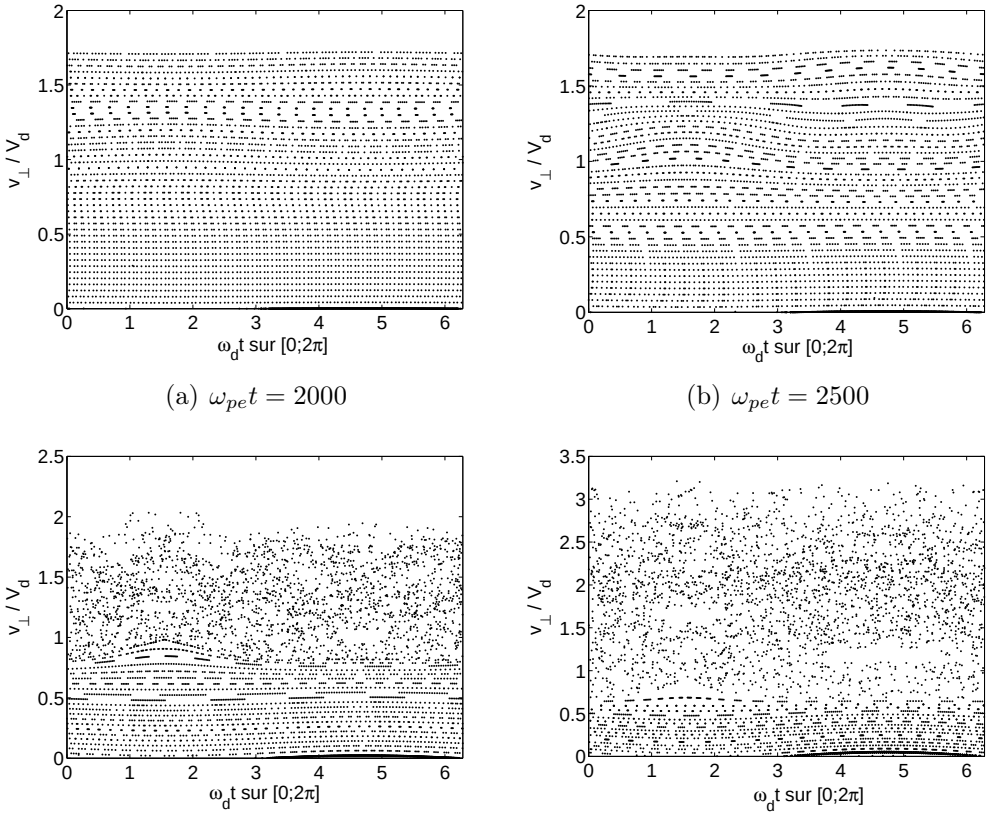
l'amplitude fait dans le paragraphe précédent pour les trois cas exposés.

Le seuil stochastique est matérialisé sur la figure 7.4 par une ligne rouge. Il vaut $(E_f/E_0)_s = 0.25 * (0.1/1.04)^{1/3} = 0.1145$ et est donc largement dépassé.

Apparition de la stochasticité

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'apparition de la stochasticité dans la dynamique électronique. Une étude de trajectoire d'une population restreinte d'électrons types a pour cela été menée pour diverses valeurs d'amplitude d'onde. Celle-ci est illustrée par la figure 7.5. Il s'agit de sections de Poincaré [Arnold & Avez 1968, Poincaré 1899] effectuées pour une amplitude d'onde correspondant respectivement aux quatre temps distincts de la simulation $\omega_{pe}t = 2\ 10^3,\ 2.5\ 10^3,\ 3\ 10^3$ et $5.6\ 10^3$. A chacun de ces temps correspond donc une valeur de l'amplitude du champ électrique pour laquelle la section de Poincaré est tracée. Elle regroupe les trajectoires de 43 électrons répartis de manière homogène en énergie. Les trajectoires électroniques sont décrites par le schéma numérique du paragraphe 7.1. Ces électrons sont suivis pendant 100 tours cyclotroniques et la valeur de $v_\perp/V_d$, qui caractérise leur trajectoire, est mesurée à chaque fois qu'ils ont effectué exactement une giration cyclotronique. Cette mesure apparaît sous la forme d'un point sur les graphiques. L'évolution temporelle des valeurs mesurées est ensuite ramenée sur un intervalle de temps $[0, 2\pi]$.

L'ensemble des points de la figure 7.5(a) forment des droites parallèles : la valeur de $v_\perp/V_d$ pour un électron donné n'évolue donc pas au cours du temps. Les trajectoires électroniques sont quasiment purement cyclotroniques puisque cette figure correspond à un temps ($\omega_{pe}t = 2000$) où l'amplitude de l'onde est très faible et inférieure au seuil stochastique comme le montre le tableau 7.6. Ce tableau associe aux différents cas de la figure 7.5 les valeurs



(a) $\omega_{pe}t = 2000$ (b) $\omega_{pe}t = 2500$

(c) $\omega_{pe}t = 3000$ (d) $\omega_{pe}t = 5600$

FIG. 7.5 – *Apparition de la stochasticité pour le cas* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$.

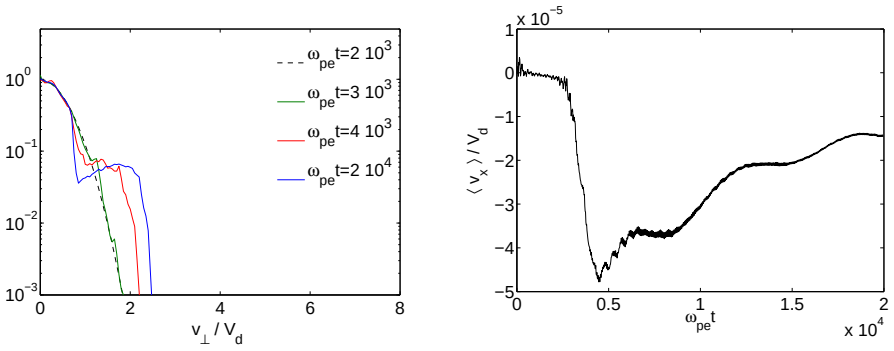
	$\omega_{pe}t$	E_f/E_0	ω_B/ω_{pe}	V_σ/V_d
Cas (a)	2000	0.018	0.043	-
Cas (b)	2500	0.064	0.082	-
Cas (c)	3000	0.228	0.154	0.7039
Cas (d)	5600	0.5	0.228	0.5615

FIG. 7.6 – *Valeur de l'amplitude de l'onde, de la fréquence de piégeage et de la limite d'interaction* V_σ *aux différents temps pour le cas* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$.

du champ électrique, de la fréquence de piégeage et de la vitesse V_σ à partir de laquelle les électrons subissent des résonances en régime stochastique (condition (6.14)).

L'amplitude de l'onde augmente avec le temps du fait de l'instabilité du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ et perturbe linéairement les trajectoires électroniques : l'ensemble des points sur la figure 7.5(b) forment des courbes qui ne sont plus horizontales mais qui peuvent encore être nettement distinguées. Le seuil de stochasticité n'a pas encore été atteint.

La figure 7.5(c) correspond à une amplitude d'onde légèrement supérieure au seuil stochastique. La stochasticité y est explicite : les trajectoires des élec-



(a) Fonction de distribution (b) Vitesse moyenne axiale

FIG. 7.7 – *Évolution temporelle du système 1D pour une onde 1D* $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$ *avec l'amplitude extraite d'une simulation PIC.*

trons tels que $v_\perp > V_\sigma$ ne peuvent pas être distinguées les unes des autres, les valeurs successives de $v_\perp$ sont stochastiques. V_σ vaut 0.7039 d'après l'expression (6.14), ce qui est en bon accord avec la figure 7.5(c).

Cette vitesse limite d'interaction tend à diminuer avec l'augmentation de l'amplitude de l'onde puisque la largeur de piégeage Δv définie par l'expression (6.8) dans le chapitre précédent est en $\sqrt{E_f}$. La figure 7.5(d) le montre clairement : les trajectoires électroniques linéairement perturbées mais pas stochastiques sont localisées dans une petite zone inférieure à celle de la figure 7.5(c). On retrouve cette propriété dans le tableau 7.6 dont les valeurs coïncident avec ce qui est visible sur la figure 7.5.

Par ailleurs, la fréquence de piégeage est toujours supérieure à la pulsation cyclotronique en régime stochastique. Ceci justifie d'une part la séparation de l'interaction onde-électron du mouvement cyclotronique, lors des résonances, utilisée dans le modèle de Karney pour calculer le seuil de stochasticité ; et confirme, d'autre part, la nécessité d'introduire la largeur de piégeage dans l'expression de V_σ.

Incidence de la stochasticité sur la fonction de distribution et le transport électronique axial

Maintenant que l'apparition du régime stochastique a été mis en évidence avec l'évolution de l'amplitude du champ électrique fluctuant pour quelques électrons, nous pouvons étendre le système à une population électronique maxwellienne comme c'est le cas dans la simulation particulaire. Cette étude de la stochasticité éclaircit l'évolution du système illustrée en figure 7.7. La fonction de distribution commence à se déformer à partir du moment où l'amplitude du champ fluctuant est supérieure au seuil de stochasticité, *i.e.* au temps $\omega_{pe}t = 3000$ environ : courbe verte. Les résonances onde-électron font changer les électrons d'orbites. La présence du champ électrique accélérateur axial lors de ces interactions introduit une anisotropie dans le transport

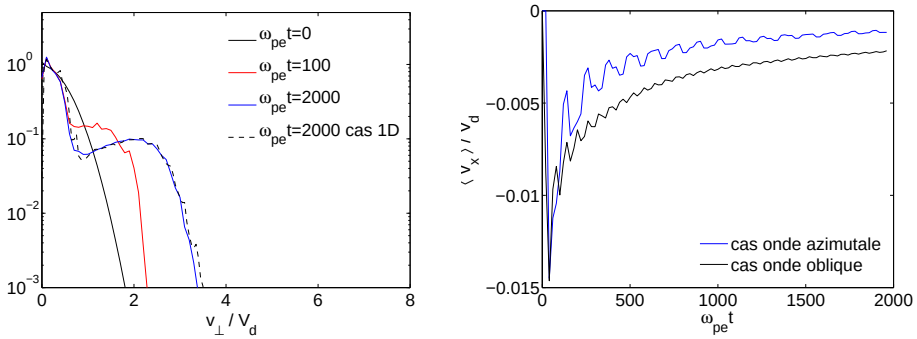
électronique. La vitesse axiale moyenne devient non nulle à partir de l'entrée dans le régime stochastique comme on le remarque sur la figure 7.7(b). L'augmentation de l'amplitude de l'onde, du fait de l'instabilité du mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.04$, a deux conséquences : d'une part les trajectoires sont de plus en plus stochastiques, les électrons gagnent de plus en plus d'énergie ; et d'autre part, le nombre d'électrons subissant les impulsions de l'onde est de plus en plus important puisque la largeur de piégeage grandit. Le plateau de la fonction de distribution s'étend donc à partir de la valeur $v_\perp/V_d = 1$ (puisque $V_\Phi \simeq -V_d$) vers le coeur de la fonction de distribution (atteint lorsque $\Delta v = V_d$), la fonction de distribution s'étale et le transport électronique s'accroît. Cette évolution continue jusqu'à ce que l'amplitude du champ fluctuant soit saturée du fait des effets non linéaires dus à la déformation de la fonction de distribution étudiés dans le chapitre 3. Le plateau ne progresse plus vers le coeur de la distribution, le chauffage se réduit et le transport électronique axial diminue.

7.3 Cas d'une onde oblique

7.3.1 Cas mono-mode

L'extension de l'instabilité dans la direction axiale ne change pas qualitativement les résultats obtenus pour une onde azimutale mono-mode : comme cela a été dit dans la section 6.2, celle-ci modifie essentiellement le seuil de stochasticité (6.15).

Le système d'équation (6.12) est résolu en utilisant le modèle numérique présenté plus haut pour les propriétés de l'onde suivante : $E_f/E_0 = 1$, $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ et $k_x V_d/\omega_{pe} = 0.6$. L'évolution du système est caractérisé par la figure 7.8. Pour une telle valeur de l'amplitude d'onde, le seuil



(a) Fonction de distribution (b) Vitesse moyenne axiale

FIG. 7.8 – *Évolution temporelle du système pour une onde 2D* $E_f/E_0 = 1$, $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ *et* $k_x V_d/\omega_{pe} = 0.6$, *comparaison avec le cas d'une onde 1D.*

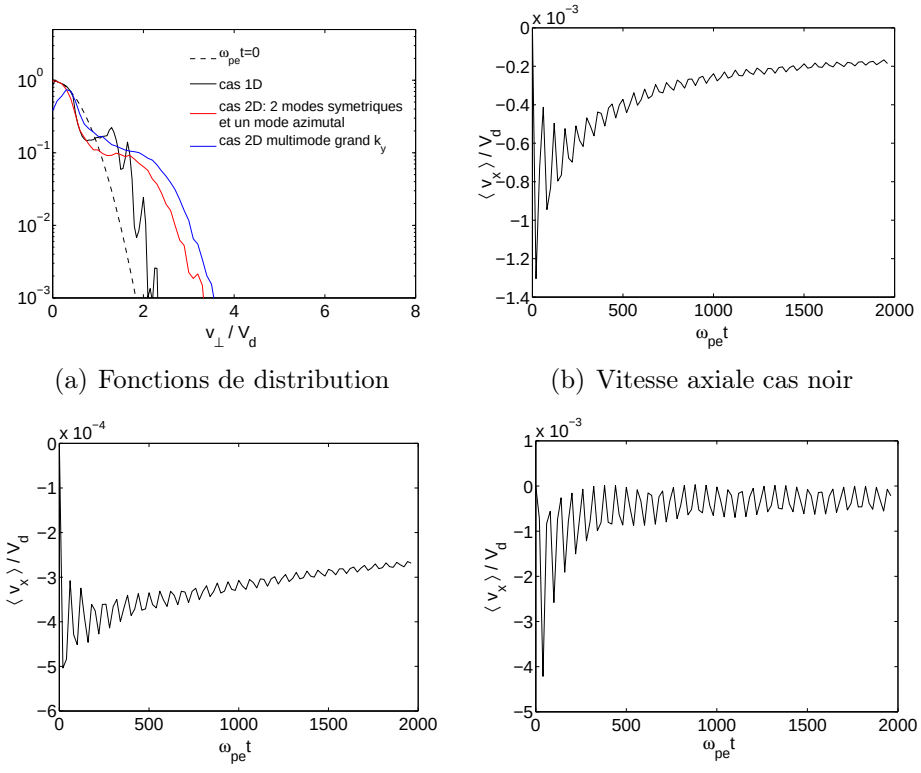
de stochasticité est dépassé puisqu'il vaut $(E_f/E_0)_s = 0.25 * (0.1/1.2)^{1/3} *$

$1.2/\sqrt{1.2^2 + 0.6^2} = 0.0977$. Les électrons de la fonction de distribution sont en régime stochastique : la fonction de distribution se déforme et une vitesse axiale moyenne négative se dégage. Cette dernière est plus importante que dans le cas de l'onde azimutale, représentée en bleu sur la figure 7.8(b). Le fait que le seuil de stochasticité soit plus faible dans le cas 2D est probablement à l'origine de la différence de valeur de la vitesse axiale. Pour une amplitude d'onde donnée, la stochasticité des trajectoires électroniques est plus grande pour une onde oblique, permettant un transport axial plus important. L'évolution de la fonction de distribution est identique au cas 1D.

7.3.2 Cas multi-mode

La première partie du manuscrit a montré que l'instabilité se développe en paquets de modes instables. En régime linéaire comme en régime non-linéaire, les modes présents dans le propulseur sont nombreux. Il paraît donc utile de généraliser l'étude théorique et numérique faite sur la dynamique électronique à des cas multi-modes.

Certains cas multi-modes ont été étudiés afin de déterminer quelles sont les tendances liées notamment au nombre de modes décrits. Les résultats



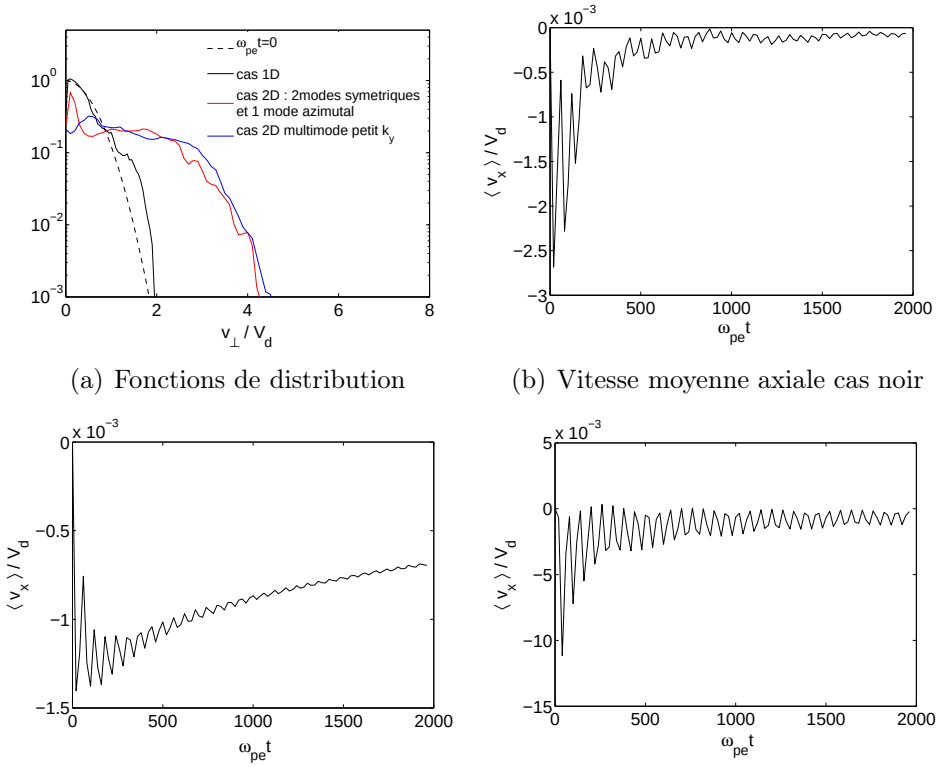
(a) Fonctions de distribution

(b) Vitesse axiale cas noir

(c) Vitesse axiale cas rouge

(d) Vitesse axiale cas bleu

FIG. 7.9 – *Cas multi-modes grand k_y.*



(a) Fonctions de distribution

(b) Vitesse moyenne axiale cas noir

(c) Vitesse moyenne axiale cas rouge

(d) Vitesse moyenne axiale cas bleu

FIG. 7.10 – *Cas multi-modes petit k_y.*

qualitatifs sont proches de ceux des simulations particulaires : plus le nombre de modes obliques décrits est important moins il est nécessaire d'introduire une amplitude d'onde importante pour obtenir un courant réaliste. La déformation de la fonction de distribution dépend du nombre de modes obliques présents dans la simulation ainsi que de la valeur de k_x choisie. Par ailleurs, la prise en compte ou non de la symétrie en k_x de la configuration du propulseur dans les simulations a une influence importante sur ces résultats.

Les figures 7.9 et 7.10 résument ces tendances en représentant la fonction de distribution à un temps fixe $\omega_{pe}t = 2000$ ainsi que la vitesse axiale moyenne pour plusieurs cas. La figure 7.9 fait la comparaison entre un cas 1D $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ en noir, un cas 2D où se superposent les modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ avec $k_x = 0$ et $k_y V_d/\omega_{pe} = 1.2$ avec $k_x V_d/\omega_{pe} = \pm 0.6$ (donc 3 modes en tout) en rouge et un cas 2D multi-mode $k_y V_d/\omega_{pe} = 1, 1.1, 1.2, 1.3$ avec pour chaque mode une extension en $k_x V_d/\omega_{pe} = 0,\ \pm 0.6$ (donc 12 modes en tout) en bleu. La comparaison entre ces différents cas est effectuée à énergie constante. L'amplitude d'onde dans le cas 1D vaut $E_f/E_0 = 0.25$ ($E_f/E_0 = 0.25/\sqrt{3} = 0.14$ pour le cas 2D 3modes et $E_f/E_0 = 0.25/\sqrt{12} = 0.07$ pour le cas 2D 12modes). La déformation de la fonction de distribution est plus importante dans le cas multi-mode (bleu) et la valeur de la vitesse moyenne axiale devient réaliste, ce qui est en accord avec les simulations particulaires du chapitre 4.

La figure 7.10 reproduit la comparaison faite ci-dessus pour des modes à plus petits k_y. Le cas 1D correspond à $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.62$. Il est comparé au cas 2D 3modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.62$ avec $k_x = 0$ et $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.62$ avec $k_x V_d/\omega_{pe} = \pm 0.6$ en rouge et au cas 2D 12modes $k_y V_d/\omega_{pe} = 0.52, 0.62, 0.72, 0.82$ avec pour chaque mode une extension en $k_x V_d/\omega_{pe} = 0,\ \pm 0.6$ (donc 12 modes en tout) en bleu. Le coeur de la fonction de distribution est atteint dans les cas multi-modes 2D contrairement au cas mono-mode comme nous l'avions déjà remarqué dans les simulations particulaires.

La projection de la vitesse de phase de chaque mode sur l'axe η étant indépendante des propriétés du mode ($V_\phi \simeq -V_d$, voir la relation (6.13)), les résonances ont toutes lieu pour $v_\eta \simeq -V_d$ quel que soit le mode. Les processus stochastiques liés à chaque mode, dont nous avons exposé le principe dans le chapitre précédent, se superposent et aboutissent aux résultats exposés ci-dessus.

Une étude plus précise de cas multi-modes est difficile et dépend beaucoup trop de paramètres arbitraires pour être pertinente quantitativement, ce qui serait pourtant le principal intérêt d'une telle étude. En effet, pour s'approcher de cas réalistes par rapport au propulseur, il est nécessaire de décrire au moins une dizaine de modes dans l'axe et au moins autant dans la direction azimutale. Étant donné la symétrie de la relation de dispersion en k_x, les modes en $-k_x$ doivent aussi être pris en compte. Au final, le nombre de modes obliques à introduire dans le modèle numérique est considérable. Par ailleurs, l'amplitude de chacun de ces modes est, dans ce modèle, arbitraire. Il faudrait donc déterminer la prédominance de tel mode par rapport aux autres, celle-ci évoluant en fonction de la déformation de la fonction de distribution, à l'aide de l'étude de stabilité effectuée en partie I. Pour une étude quantitative, les simulations particulaires semblent donc plus adaptées.

Le modèle de Karney appliqué au propulseur apporte donc une grille de lecture de l'interaction de l'instabilité avec les électrons. Il montre nettement que cette interaction conduit à la déformation de la fonction de distribution et à l'existence d'un transport électronique. Cependant, ce modèle ne fait intervenir qu'une onde monochromatique alors que l'instabilité se développe en paquets de modes instables. Les couplages entre les différents modes notamment ne sont pas décrits par la théorie. Pour autant, l'évolution de la fonction de distribution ainsi que celle du transport électronique axial observées dans les simulations particulaires est approximativement reproduite par les équations de la dynamique faisant intervenir une onde aux propriétés proches de celle de l'instabilité. On peut donc conclure de l'étude précédente que l'instabilité de dérive est à l'origine de la déformation de la fonction de

distribution électronique et du transport électronique des simulations particulaires du chapitre 4.

Chapitre 8

Conclusion de la deuxième partie

La diffusion des particules en présence d'un champ magnétique a beaucoup été étudiée dans le cadre de la fusion magnétique. Sa compréhension est particulièrement importante pour l'amélioration du confinement magnétique ou pour celle du chauffage des particules. Par ailleurs, elle fait partie à l'heure actuelle des thèmes majeurs de recherche au sein du GdR « Propulsion Spatiale à Plasma »pour améliorer la modélisation globale du fonctionnement du propulseur à effet Hall. Il s'agit de trouver une explication théorique au transport anormal des électrons au travers des lignes de champ magnétique. Nous avons montré dans la première partie de ce manuscrit l'existence d'une instabilité électronique de dérive se développant en sortie de propulseur, précisément là où le problème du transport anormal se pose.

Afin de déterminer si les fluctuations électrostatiques associées à cette instabilité étaient susceptibles d'induire un transport anormal, nous avons étudié, dans cette deuxième partie, la dynamique des électrons dans la configuration de champs électrique et magnétique croisés à laquelle a été ajouté un champ électrique fluctuant vérifiant les propriétés de l'instabilité électronique de dérive. La simplicité des équations de la dynamique associées à cette configuration cache la complexité des trajectoires électroniques. La résolution numérique du système dynamique des électrons est accompagnée d'une analyse basée sur le travail de C.F.F. Karney.

Appliqué au propulseur, son modèle décrit les trajectoires des électrons soumis à une onde monochromatique en présence d'un champ magnétique. L'ensemble de l'étude est faite dans le repère dérivant à la vitesse V_d ce qui simplifie les équations de la dynamique d'une part et introduit un décalage Doppler au niveau de la fréquence de l'onde perçue par les électrons d'autre part. Dans ce repère, la fréquence de l'onde $\omega_d = \omega - k_y V_d$ est largement supérieure à la fréquence cyclotronique ($k_y V_d \gg \Omega \gg \omega$). L'interaction onde-électron se résume alors aux résonances onde-électron que l'on peut considérer sans champ magnétique. Selon la valeur de l'amplitude de l'onde toutes choses étant égales par ailleurs, les trajectoires électroniques sont linéairement perturbées autour du mouvement cyclotronique ou stochastiques. Un seuil de stochasticité dépendant du champ magnétique, de la vitesse de dérive, du

nombre d'onde et de l'amplitude de l'onde détermine le changement de régime pour les électrons ayant suffisamment d'énergie pour atteindre la vitesse de l'onde (vitesse de phase).

L'apparition de la stochasticité dans les trajectoires électroniques se manifeste de deux manières clairement identifiées : les électrons ayant une vitesse $v_\perp$ supérieure à la vitesse de phase de l'onde, *i.e.* suffisamment d'énergie pour atteindre lors d'un giration cyclotronique la vitesse de phase de l'onde, gagnent en moyenne de l'énergie créant ainsi un plateau plus ou moins étendu dans la fonction de distribution autour de cette valeur ; ce chauffage des électrons est associé à un transport dans la direction axiale du propulseur.

Le développement de l'instabilité s'effectuant par paquets de modes, le processus de diffusion électronique dans le propulseur implique l'interaction des électrons avec chacun de ces modes simultanément. L'étude numérique de cas multi-modes montre des tendances identiques à celles observées dans les simulations particulaires de la première partie. L'intérêt physique de ce modèle pour apporter une explication à la conductivité anormale du propulseur à effet Hall est évident. Il n'est cependant pas capable, en l'état, de déterminer cette conductivité quantitativement. Les limites et les perspectives liées au travail effectué dans cette thèse sont exposées dans la partie *ad hoc* suivante.

Limites et perspectives

Les propriétés de l'instabilité de dérive cyclotronique électronique ont été étudiées de manière exhaustive. Celle-ci est excitée par le couplage entre le mouvement de rotation induit par la configuration de champs électrique et magnétique croisés et le mouvement cyclotronique électronique. Elle se développe en paquets de modes instables perpendiculaires au champ magnétique dans la gamme de fréquence 10-40 MHz pour les paramètres typiques du propulseur. Les nombres d'ondes correspondants sont de l'ordre du rayon de Larmor électronique.

L'interaction du champ électrique généré par l'instabilité avec la population électronique est bien comprise dans le cas mono-mode ainsi que les effets non linéaires de cette interaction sur l'instabilité. L'apparition de la stochasticité dans les trajectoires électroniques est définie par l'expression d'un seuil de stochasticité dépendant notamment de l'amplitude de l'onde. L'entrée dans le régime stochastique lorsque l'amplitude de l'onde instable croît suffisamment provoque la déformation de la fonction de distribution électronique et induit un transport électronique axial. Cette déformation prise en compte dans le calcul de stabilité de la configuration modifie les propriétés de l'instabilité sans pour autant la saturer.

La généralisation au cas d'une perturbation multi-mode, comme celle effectivement présente dans le propulseur, fait intervenir une superposition des processus de diffusion stochastique liés à chaque mode, mais introduit un couplage entre modes difficilement identifiable théoriquement. Pour autant, le transport stochastique déterminé numériquement qui en découle possède les caractéristiques générales du transport électronique anormal mis en évidence par les simulations particulaires dans le propulseur à effet Hall.

Une étape supplémentaire aurait été de déterminer une expression du coefficient de transport électronique associé à l'apparition de la stochasticité dans les trajectoires des électrons. Plusieurs obstacles majeurs s'y opposent malheureusement pour l'instant. Une expression de la vitesse de diffusion axiale a effectivement été calculée dans la deuxième partie de ce manuscrit de thèse (section 6.1.3 et annexe B) mais au prix d'hypothèses non justifiables qu'il faudrait lever pour en obtenir une version exploitable quantitativement.

Une première restriction à lever porte sur l'approximation stationnaire qui est faite pour pouvoir calculer cette vitesse. Les simulations montrent que cette approximation n'est pas réaliste et qu'il est impossible de séparer

plusieurs échelles de temps caractéristiques. Nous l'avons vu, la fonction de distribution évolue rapidement, et de manière importante, dès l'entrée dans le régime stochastique.

La seconde difficulté concerne l'hypothèse d'une fonction de distribution maxwellienne. L'apparition de la déformation de la fonction de distribution du fait du développement de l'instabilité contredit clairement cette hypothèse. Une intégration numérique comme celle utilisée lors de la résolution de la relation de dispersion intégrale est peut-être possible mais sa faisabilité reste à étudier.

Il faut rappeler aussi que ce calcul a été fait pour une onde monochromatique. Il s'agit donc pour une onde multi-mode de prendre en compte l'apport de chacun des modes au transport global d'une part, mais aussi à la déformation de la fonction de distribution d'autre part, ce qui introduit une difficulté supplémentaire.

Enfin, la valeur du coefficient de transport dépend de la valeur de l'amplitude du champ électrique fluctuant. Or, nous avons montré que la déformation de la fonction de distribution n'est pas un mécanisme de saturation de l'instabilité. Les résonances entre $k_y V_d$ et $n\Omega$ persistent même pour une fonction plate très étendue. La valeur saturée de l'amplitude du champ électrique fluctuant n'est donc pas déterminée. Le modèle ne permet pas de dépasser l'aspect qualitatif de la compréhension du processus de diffusion électronique puisque la saturation de l'instabilité n'est pas intrinsèque au modèle théorique exposé. Dans ces conditions, malgré la levée éventuelle des trois difficultés précédentes, notamment celles de l'hypothèse stationnaire et celle de l'intégration pour une fonction non maxwellienne, il est impossible de définir un coefficient de transport basé sur l'étude stricte de l'interaction onde-électron. Il semble nécessaire, pour aller plus loin dans la compréhension du transport anormal, d'introduire dans les simulations particulaires les éléments qui sont à la source de la saturation dans le propulseur comme l'ionisation ou encore comme les effets de longueurs finies. Les électrons ayant gagnés suffisamment d'énergie par l'interaction avec l'onde sont en effet susceptibles d'ioniser les atomes neutres présents dans la zone de sortie du moteur. Ces ionisations définissent une barrière d'énergie maximale au delà de laquelle le nombre d'électrons décroît rapidement. La fonction de distribution électronique ne peut donc pas s'étendre très au delà de cette barrière contrairement à ce qui est observé dans certaines simulations. De même, le temps de transit des ions et des électrons dans la zone d'accélération constituent une source de pertes de particules énergétiques à considérer puisque celles-ci diffusent rapidement vers l'extérieur de cette zone.

Malheureusement, la prise en compte de ces effets de longueurs finies, ainsi que la nécessité de décrire une densité suffisante de modes dans les directions azimutale et axiale conduit à des simulations coûteuses. Les simulations explicites semblant confirmer la validité des simulations implicites sans apporter d'effets significatifs, la construction d'un code implicite modélisant seulement la sortie du moteur, *a priori* beaucoup plus économique qu'un code explicite

puisqu'il amortit la fréquence plasma et permet donc d'utiliser des pas de temps grands, paraît constituer la voie à suivre pour continuer à progresser dans la compréhension et la modélisation du transport anormal. Le calcul d'une expression théorique du transport électronique stochastique utilisable dans un modèle fluide semblant très difficile, une solution alternative pourrait alors consister en un couplage de code hybride et particulaire pour la modélisation du transport.

Annexe A

Calcul de la densité électronique perturbée

Soit

$$\mathcal{I} = \int_{-\infty}^{t} \phi \ \exp\left(-i\omega_d\tau + i\left(k_x x(\tau) + k_\eta \eta(\tau) + k_z z(\tau)\right)\right) \ d\tau \tag{A.1}$$

tel que la perturbation de la fonction de distribution électronique (1.18) s'écrit :

$$f_1 = \frac{e}{m}\frac{1}{V_{th}^2} f_0 \left(\Phi_1 + i\omega_d \mathcal{I}\right) \tag{A.2}$$

La difficulté dans le calcul de l'intégrale (A.1) réside dans l'évaluation de l'évolution des variables x, y, z le long des trajectoires électroniques perturbées. Pour les déterminer, nous allons définir le mouvement des électrons dans l'espace des phases. Il faut rappeler ici que ce mouvement se résume à une giration cyclotronique perturbée.
La trajectoire électronique non perturbée dans l'espace des phases se décrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} v_x &= -v_\perp \ \sin\theta \\ v_\eta &= \ \ v_\perp \ \cos\theta \\ v_z &= \ \ v_z \end{aligned}$$

où θ est la phase de Larmor. La perturbation par rapport à l'orbite non perturbée est introduite par le paramètre Υ. Les composantes du vecteur vitesse du mouvement perturbé s'écrivent :

$$\begin{aligned} v_x(\tau) &= -v_\perp \ \sin(\Omega\tau + \Upsilon) \\ v_\eta(\tau) &= \ \ v_\perp \ \cos(\Omega\tau + \Upsilon) \\ v_z(\tau) &= \ \ v_z \end{aligned} \tag{A.3}$$

Les conditions aux limites pour un électron sont définies comme suit : les caractéristiques, au sens lagrangien, des orbites perturbées sont égales aux caractéristiques des orbites non perturbées lorsque $\tau = t$: $\mathbf{r}(\tau = t) = \mathbf{r}$ et $\mathbf{v}(\tau = t) = \mathbf{v}$.
Pour les composantes du vecteur vitesse, cela se traduit par : :

$$\begin{aligned} v_x(\tau = t) &= -v_\perp \sin(\Omega\tau + \Upsilon) = -v_\perp \sin\theta \\ v_\eta(\tau = t) &= v_\perp \cos(\Omega\tau + \Upsilon) = v_\perp \cos\theta \\ v_z(\tau = t) &= v_z = v_z \end{aligned}$$

En identifiant la colonne du milieu à celle de droite, on trouve $\Upsilon = \theta - \Omega t$. Le système (A.3) devient :

$$\begin{aligned} v_x(\tau) &= -v_\perp \sin\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] \\ v_\eta(\tau) &= v_\perp \cos\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] \\ v_z(\tau) &= v_z \end{aligned}$$

L'intégration permet de trouver les caractéristiques $x(\tau)$, $\eta(\tau)$ et $z(\tau)$:

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{v_\perp}{\Omega} \cos\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] + c1 \\ \eta(\tau) &= \frac{v_\perp}{\Omega} \sin\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] + c2 \\ z(\tau) &= v_z(\tau - t) + c3 \end{aligned}$$

où c1, c2, c3 sont les constantes d'intégration. Elles sont déterminées grâce aux conditions limites exposées plus haut, à savoir : $x(\tau = t) = x(t)$, $y(\tau = t) = y(t)$ et $z(\tau = t) = z(t)$.
En définitive, les trajectoires perturbées sont décrites par le système :

$$\begin{aligned} x(\tau) &= \frac{v_\perp}{\Omega} \left[\cos\left(\Omega(\tau - t) + \theta\right) - \cos\theta\right] + x(t) \\ \eta(\tau) &= \frac{v_\perp}{\Omega} \left[\sin\left(\Omega(\tau - t) + \theta\right) - \sin\theta\right] + y(t) \\ z(\tau) &= v_z(\tau - t) + z(t) \end{aligned}$$

Injectées dans l'intégrale $\mathcal{I}$ (A.1), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{I} = \int_{-\infty}^{0} \phi \; & \exp -i(k_x x + k_\eta \eta + k_z z - \omega_d t) \exp(-i\omega_d(\tau - t)) \\ & \times \exp i \left(\frac{k_x v_\perp}{\Omega} \cos\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] - \cos\theta \right) \\ & \times \exp i \left(\frac{k_y v_\perp}{\Omega} \sin\left[\Omega(\tau - t) + \theta\right] - \sin\theta \right) \\ & \times \exp i \left(k_z v_z(\tau - t)\right) \; d\tau \end{aligned}$$

En posant $\tau' = \tau - t$, l'expression devient :

$$\mathcal{I} = \Phi_1 \int_{-\infty}^{0} \exp(-i\omega_d\tau') \times \exp i\left(\frac{k_x v_\perp}{\Omega}\cos\left[\Omega\tau' + \theta\right] - \cos\theta\right) \times \exp i\left(\frac{k_y v_\perp}{\Omega}\sin\left[\Omega\tau' + \theta\right] - \sin\theta\right) \times \exp i\left(k_z v_z \tau'\right)\ d\tau'$$

On introduit $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$ et $\Psi = \arctan\left(\frac{k_y}{k_x}\right)$. L'intégrale se transforme alors :

$$\mathcal{I} = \Phi_1 \int_{-\infty}^{0} d\tau' \exp(-i\omega_d\tau') \times \exp i\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\left(\cos\left[\Omega\tau' + \theta - \Psi\right] - \cos(\theta - \Psi)\right)\right) \times \exp i\left(k_z v_z \tau'\right) \tag{A.4}$$

Nous pouvons écrire $\cos\left[\Omega\tau' + \theta - \Psi\right] = \sin\left[\pi/2 + \Omega\tau' + \theta - \Psi\right]$ et $\cos(\theta - \Psi) = \sin(\pi/2 + \theta - \Psi)$ et utiliser la relation :

$$\exp(i\gamma\sin\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\gamma)\exp(in\theta)$$

où les J_n sont les fonctions de *Bessel* :

$$J_n(\gamma) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(n\theta - \gamma\sin\theta)d\theta$$

La relation (A.4) donne alors :

$$\mathcal{I} = \Phi_1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\exp\left(-im\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \Psi\right)\right) \times \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\int_{-\infty}^{0} d\tau' \exp\left(-in\left(\frac{\pi}{2} + \theta - \Psi\right)\right)\exp i\left(k_z v_z\tau' - \omega_d\tau'\right) \tag{A.5}$$

Soit

$$\mathcal{K} = \int_{-\infty}^{0} d\tau' \exp(-in(\pi/2 + \theta - \Psi))\exp(i\tau'\left(k_z v_z - \omega_d\right))$$

Cette intégrale se calcule par une intégration par partie :

$$\mathcal{K} = \frac{\exp\left(in(\frac{\pi}{2} + \theta - \Psi)\right)}{i(k_z v_z - \omega_d)} - \frac{n\Omega}{k_z v_z - \omega_d}\mathcal{K}$$

Ainsi,

$$\mathcal{K} = \frac{\exp\left(in(\pi/2 + \theta - \Psi)\right)}{i(k_z v_z - \omega_d + n\Omega)} \tag{A.6}$$

Les fonctions de *Bessel* J_n sont orthogonales, on peut donc prendre $n = m$, ce qui simplifie grandement l'expression de l'intégrale (A.5) lorsque est injecté $\mathcal{K}$ (A.6) :

$$\mathcal{I} = \Phi_1 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n^2\left(k_\perp v_\perp/\Omega\right)}{i(k_z v_z - \omega_d + n\Omega)} \tag{A.7}$$

La perturbation de la fonction de distribution f_1 (A.2) est en définitive :

$$f_1 = \frac{e}{m} f_0 \frac{\Phi_1}{V_{th}^2}\left[1 + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_d J_n^2\left(k_\perp v_\perp/\Omega\right)}{(k_z v_z - \omega_d + n\Omega)}\right] \tag{A.8}$$

Elle permet de remonter à la grandeur macroscopique qu'est la densité électronique par la relation en coordonnées cylindriques :

$$n_e^1 = \int\int\int f_1 v_\perp dv_\perp d\theta dv_z \tag{A.9}$$

L'intégration sur θ est triviale et ajoute un coefficient 2π. La fonction de distribution f_0 est remplacée par son expression (1.16). Nous avons de plus :

$$\int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2 + v_z^2}{2V_{th}^2}\right) = V_{th}^3\sqrt{2\pi} \tag{A.10}$$

La perturbation de densité électronique s'écrit donc :

$$n_e^1 = \frac{2\pi\Phi_1 e}{mV_{th}^2} n_0 \left(\frac{m}{2\pi k_B T}\right)^{3/2}\left[V_{th}^3\sqrt{2\pi} + \mathcal{L}\right] \tag{A.11}$$

avec

$$\mathcal{L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_0^\infty \int_{-\infty}^{\infty} dv_\perp dv_z v_\perp J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) \exp\left(-\frac{v_\perp^2 + v_z^2}{2V_{th}^2}\right) \frac{\omega_d}{(k_z v_z - \omega_d + n\Omega)} \tag{A.12}$$

L'intégration sur $v_\perp$ et sur v_z se fait indépendemment. Soit $\mathcal{P}$ l'intégrale sur v_z :

$$\mathcal{P} = \int_{-\infty}^{\infty} dv_z \frac{\omega_d}{(k_z v_z + n\Omega - \omega_d)} \exp\left(-\frac{v_z^2}{2V_{th}^2}\right)$$

En posant $\alpha = \dfrac{v_z}{\sqrt{2}V_{th}}$ et $\xi_d^- = \dfrac{\omega_d - n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}$, $\mathcal{P}$ se transforme en :

$$\mathcal{P} = \frac{\omega_d}{k_z} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha - \xi_d^-}\, d\alpha$$

On reconnaît la fonction de *Fried & Conte* [Fried & Conte 1961] :

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-\alpha^2}}{\alpha - \xi} d\alpha$$

D'où,

$$\mathcal{P} = \frac{\omega_d}{k_z}\sqrt{\pi}Z(\xi_d^-) \tag{A.13}$$

On remplace l'expression de $\mathcal{P}$(A.13) dans l'expression $\mathcal{L}$(A.12) :

$$\mathcal{L} = \frac{\omega_d\sqrt{\pi}}{k_z}\sum_{n=-\infty}^{\infty} Z(\xi_d^-)\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{2V_{th}^2}\right) J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) \tag{A.14}$$

Cette expression est intégrable pour $n > -1$ [Gradshteyn & Ryzhik 1980]. On se sert alors de la propriété des fonctions de *Bessel* [Abramowitz & Stegun 1972] $J_{-n} = (-1)^n J_n$ pour obtenir $\mathcal{L}$ tel que $n \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{\omega_d\sqrt{\pi}}{k_z}\Big\{ & Z\left(\frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\right)\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{2V_{th}^2}\right) J_0^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right) \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left(Z(\xi_d^+) + Z(\xi_d^-)\right)\int_0^\infty dv_\perp v_\perp \exp\left(-\frac{v_\perp^2}{2V_{th}^2}\right) J_n^2\left(\frac{k_\perp v_\perp}{\Omega}\right)\Big\}\end{aligned} \tag{A.15}$$

avec $\xi_d^+ = \dfrac{\omega_d + n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}$.
On utilise la relation valable pour $n \geq 0$ [Gradshteyn & Ryzhik 1980] :

$$\int_0^\infty \exp\left(-Q^2 z^2\right) J_p(\alpha z) J_p(\beta z) z dz = \frac{1}{2Q^2}\exp\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{4Q^2}\right) I_p\left(\frac{\alpha\beta}{2Q^2}\right) \tag{A.16}$$

où les fonctions I_n sont les fonctions de *Bessel* modifiées.
En introduisant le paramètre $b = k_\perp^2 V_{th}^2/\Omega^2$ proportionnel au carré du rayon de Larmor, le résultat de l'intégrale (A.15) s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{\omega_d\sqrt{\pi}}{k_z}V_{th}^2\Big\{ & Z\left(\frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\right) I_0(b)e^{-b} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty}\left(Z(\xi_d^+) + Z(\xi_d^-)\right) I_n(b)e^{-b}\Big\}\end{aligned} \tag{A.17}$$

La perturbation de la densité électronique dans le repère dérivant s'écrit en définitive à partir de (A.11) et (A.17) :

$$\begin{aligned}n_e^1 = \frac{e}{m}\frac{n_0\Phi_1}{V_{th}^2}\Big\{1 + \frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\Big\{ & Z\left(\frac{\xi_d^+ + \xi_d^-}{2}\right) I_0(b)e^{-b} \\ & + \sum_{n=1}^{n=\infty}\left(Z\left(\xi_d^+\right) + Z\left(\xi_d^-\right)\right) I_n(b)e^{-b}\Big\}\Big\}\end{aligned} \tag{A.18}$$

avec

$$\xi_d^+ = \frac{\omega_d + n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}} \quad \text{et} \quad \xi_d^- = \frac{\omega_d - n\Omega}{k_z V_{th}\sqrt{2}}$$

Annexe B

Calcul de la vitesse de diffusion axiale

La configuration utilisée correspond à celle représentée sur la figure 6.1. Dans cette configuration, l'équation de Vlasov s'écrit :

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v_e}.\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{r}} - \frac{e}{m}\left[\mathbf{E_{axial}} + \mathbf{E_{fluct}} + \mathbf{v_e} \times \mathbf{B}\right].\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v_e}} = 0$$

Le calcul est fait dans le repère dérivant à la vitesse V_d comme dans la section 1.2.2 ce qui permet d'éliminer le champ statique dans l'équation de Vlasov. On sépare les évolutions des parties rapides et lentes au cours du temps de la fonction de distribution $f_e =< f_e > + f_1 = f_0 + f_1$ et on effectue la moyenne de l'équation de Vlasov sur toutes les phases de l'onde, *i.e.* sur y, on obtient alors les équations d'évolution de f_0 et f_1 :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} + \frac{q}{m}B_0\dot{\eta}\frac{\partial f_0}{\partial v_x} - \frac{q}{m}B_0 v_x\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\eta}} = -\frac{q}{m} < E_y(t)\frac{\partial f_1}{\partial \dot{\eta}}(t) > \qquad \text{(B.1)}$$

$$\frac{df_1}{dt} = -\frac{e}{m}\ \nabla\Phi_1.\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v_e^1}}$$

Le calcul de la perturbation de la fonction de distribution f_1 a été effectué pour la calcul de la relation de dispersion dans la section 1.2.2. On trouve :

$$f_1 = -2\frac{q}{m}\int_{-\infty}^{t} E_y(t')\dot{\eta}(t')\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2}dt'$$

avec $f_0(v_\perp^2, v_z)$.
En injectant f_1 dans l'équation d'évolution de la fonction d'équilibre (B.1), celle-ci s'écrit :

$$\frac{\partial f_0}{\partial t}+\frac{q}{m}B_0\dot{\eta}\frac{\partial f_0}{\partial v_x}-\frac{q}{m}B_0 v_x\frac{\partial f_0}{\partial \dot{\eta}} = -2\left(\frac{q}{m}\right)^2\frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} < \int_{-\infty}^{t} dt' E_y(t)E_y(t')\dot{\eta}(t')\frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} >$$

On multiplie l'équation par $\dot{\eta}$ et pour aller plus loin, nous allons chercher un régime stationnaire $\dfrac{\partial f_0}{\partial t} = 0$ (c'est la première hypothèse non justifiable). En

intégrant sur $dv_x d\dot{\eta}$, on obtient :

$$B_0 \int\int \dot{\eta}^2 \frac{\partial f_0}{\partial v_x} dv_x d\dot{\eta} - B_0 \int\int v_x \dot{\eta} \frac{\partial f_0}{\partial \dot{\eta}} dv_x d\dot{\eta} = \\ - 2\frac{q}{m} \int\int \dot{\eta} \frac{\partial}{\partial \dot{\eta}} < \int_\infty^t dt' E_y(t) E_y(t') \dot{\eta}(t') \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} > dv_x d\dot{\eta} \tag{B.2}$$

Le premier terme de l'équation du membre de gauche s'annule puisque l'intégrande $\dot{\eta}^2 \dfrac{\partial f_0}{\partial v_x}$ est antisymétrique en v_x.
Le deuxième terme du membre de gauche s'intègre par parties en fonction de $\dot{\eta}$ et donne

$$B_0 \int\int v_x f_0 dv_x d\dot{\eta} = B_0 V_x$$

De même, le membre de droite de l'équation (B.2) se calcule aussi par intégration par parties et aboutit à :

$$\int\int < \int_\infty^t dt' E_y(t) E_y(t') \dot{\eta}(t') \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} > dv_x d\dot{\eta}$$

Le champ électrique fluctuant s'écrit dans le repère dérivant à V_d : $E_y = E_f \cos(k_y(\eta + Y) - (\omega - k_y V_d)t)$. Nous savons que l'instabilité électronique de dérive est telle que $k_y V_d \gg \omega$, par conséquent, le champ fluctuant peut être approximé par $E_y(t) = E_f \cos(k_y y(t))$ en utilisant (6.3). La relation (B.2) conduit donc à l'équation définissant la vitesse moyenne de diffusion dans la direction axiale :

$$V_x = 2\frac{qE_f^2}{mB_0} \int\int \mathfrak{M} \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} dv_x d\dot{\eta} \tag{B.3}$$

avec $\mathfrak{M} = < \cos(k_y y(t)) \displaystyle\int_{-\infty}^t dt' \cos(k_y y(t')) \dot{\eta}(t') >$.
L'interaction onde-électron se ramène au calcul des résonances entre l'onde et l'électron. On effectue donc l'intégrale sur le temps en supposant que seules les portions au voisinage des résonances contribuent. Soit η_c et t_c les valeurs de η et de t lors d'une impulsion résonante. Le développement de η au voisinage de η_c est

$$\eta = \eta_c - V_d(t - t_c) - \frac{\Omega^2 \eta_c}{2}(t - t_c)^2$$

en ayant remplacé les dérivées première et seconde par leur expression à la résonance : $\dot{\eta}(t_c) = -V_d$ par définition de la résonance et $\ddot{\eta}(t_c) = -\Omega^2 \eta_c$ puisqu'on intègre sur les orbites non perturbés.
La phase des cosinus s'écrit en définitive : $k_y y = \Phi_c - \dfrac{k\eta_c \Omega^2}{2}(t - t_c)^2$ avec $\Phi_c = k_y(\eta_c + V_d t_c + Y)$.

En posant $u = \sqrt{\frac{|k_y \eta_c \Omega^2|}{2}}(t' - t_c)$, l'intégrale $\mathfrak{M}$ se transforme en l'expression :

$$\mathfrak{M} =< \mathcal{R} \int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\Phi_c - sgn(k\eta_c)\ u^2\right) du >$$

où $\mathcal{R} = \frac{V_d}{\sqrt{|k_y \eta_c \Omega^2/2|}}\ \cos\left(\Phi_c - \frac{k_y \Omega^2 \eta_c}{2}(t - t_c)^2\right)$. L'extension jusqu'à l'infini de la borne supérieure de l'intégrale est une hypothèse simplificatrice qui suppose une contribution nulle des résonances à l'infini ce qui semble être le cas compte tenu de l'étude numérique effectuée par Karney [Karney 1979]. L'intégrale se calcule aisément, en décomposant le cosinus, grâce aux relations $\int_{-\infty}^{\infty} \cos u^2 du = \int_{-\infty}^{\infty} \sin u^2 du = \sqrt{\pi/2}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos\left(\Phi_c - sgn(k\eta_c)\ u^2\right) du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\Phi_c + sgn(k\eta_c)\sin\Phi_c\right)$$

La somme du cosinus et du sinus donne la nouvelle expression de $\mathfrak{M}$:

$$\mathfrak{M} =< \mathcal{R}\sqrt{\pi}\cos\left(\Phi_c + sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4}\right) >$$

L'expression de $\mathfrak{M}$ est un produit de cosinus puisque le paramètre $\mathcal{R}$ est un cosinus. Ce produit se transforme en la somme :

$$\begin{aligned}\mathcal{S} = \frac{1}{2} <& \cos\left(2\Phi_c + sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4} - \frac{k_y \Omega^2 \eta_c}{2}(t - t_c)^2\right) \\ &+ \cos\left(-\frac{k_y \Omega^2 \eta_c}{2}(t - t_c)^2 - sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4}\right) >\end{aligned}$$

Rappelons que la moyenne est faite sur l'ensemble des phases, c'est-à-dire sur η. Dans l'expression de $\mathcal{S}$, le cosinus qui dépend de Φ_c s'annule si Φ_c est distribué de manière homogène en η, hypothèse que nous ferons pour caractériser le régime stochastique. Par conséquent, lorsque le seuil de stochasticité (6.10) est dépassé, $\mathcal{S}$ devient :

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{k_y \Omega^2 \eta_c}{2}(t - t_c)^2 + sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4}\right)$$

L'expression de $(t - t_c)^2$ est donnée par le développement de $\dot{\eta}$ autour de la résonance :

$$\dot{\eta} = -V_d - \Omega^2 \eta_c (t - t_c) \Rightarrow (t - t_c)^2 = \frac{(\dot{\eta} + V_d)^2}{\Omega^4 \eta_c^2}$$

Elle nous conduit à

$$\mathcal{S} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{k_y}{2\Omega^2 \eta_c}(\dot{\eta} + V_d)^2 + sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4}\right)$$

Ce qui donne en définitive pour la vitesse de diffusion axiale à partir de (B.3) :

$$V_x = \frac{qE_f^2}{mB_0} \frac{V_d\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_y < \eta_c > \Omega^2/2}} \int\int \cos\left(\frac{k_y}{2\Omega^2\eta_c}(\dot{\eta}+V_d)^2 + sgn(k\eta_c)\frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} dv_x d\dot{\eta}$$

L'hypothèse d'une fonction de distribution à l'équilibre maxwellienne est ici nécessaire pour pouvoir poursuivre le calcul de l'intégrale. Les portions de l'intégrale qui contribuent à rendre cette intégrale non nulle sont ceux correspondant aux résonances $\dot{\eta} = -V_d$:

$$V_x = \frac{qE_f^2}{mB_0} \frac{V_d\sqrt{\pi}}{\sqrt{k_y < \eta_c > \Omega^2}} \int\int \frac{\partial f_0}{\partial v_\perp^2} dv_x d\dot{\eta}$$

En prenant arbitrairement $< \eta_c >= r_L$, r_L étant le rayon de Larmor électronique, la vitesse de diffusion axiale est, en définitive, donnée par l'expression :

$$V_x = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{V_d}{V_{th}}\right)^3 \left(\frac{E_f}{E_0}\right)^2 V_{th} \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{b}}} \tag{B.4}$$

avec $b = k_y^2 V_{th}^2/\Omega^2$.

Annexe C

Mise en évidence de l'instabilité par diffusion collective de la lumière

Cette annexe est consacrée au principe du diagnostic et de la détection de l'instabilité électronique de dérive dans le propulseur à effet Hall. La mise en œuvre expérimentale de ce principe est intégrée à l'ANR TELIOPEH « Transport Électronique et Ionique dans les Propulseurs à Effet Hall »sur la période 2007-2010 organisée autour du moyen d'essai PIVOINE à Orléans dans le cadre du GdR « Propulsion Spatiale à Plasma ». C'est une méthode généralement utilisée pour mesurer le spectre spatial de la turbulence ou encore la vitesse moyenne d'écoulement, aussi bien en mécanique des fluides qu'en physique des plasmas dans les tokamaks, les stellerators ou les plasmas atmosphériques. Elle est clairement exposée dans la thèse de N. Lemoine [Lemoine 2005, Lemoine & Gresillon 2005-2] dont nous rappelons un extrait ici.

C.1 Diffusion de la lumière par un milieu turbulent

Soit un ensemble de particules diffusantes, chacune repérée par sa position $\mathbf{r}_j(t)$. On éclaire ce milieu par une onde électromagnétique plane de pulsation ω_0 et de vecteur d'onde $\mathbf{k}_i$ comme illustré sur la figure C.1 : $\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \exp\left(i(-\omega_0 t + \mathbf{k}_i.\mathbf{r})\right)$. La période temporelle de l'onde est prise très petite devant les temps caractéristiques de la dynamique du milieu. Chaque particule est donc soumise à un champ oscillant $\mathbf{E}_i(\mathbf{r}_j(t)) \approx \mathbf{E}_i(\mathbf{0}) \exp\left(i\mathbf{k}_i.\mathbf{r}_j(t)\right)$ et diffuse un champ s'écrivant :

$$E_1(\mathbf{r}', t|\mathbf{r}_j(t)) = \mathcal{E}_1 \exp\left((\mathbf{k}_i - \mathbf{k}_d).\mathbf{r}_j(t)\right) \exp\left(i(\mathbf{k}_d.\mathbf{r}' - \omega_0 t)\right)$$

Tant que la vitesse des particules est faible devant celle la lumière, la fréquence de l'onde diffusée est très proche de ω_0 : la diffusion est élastique,

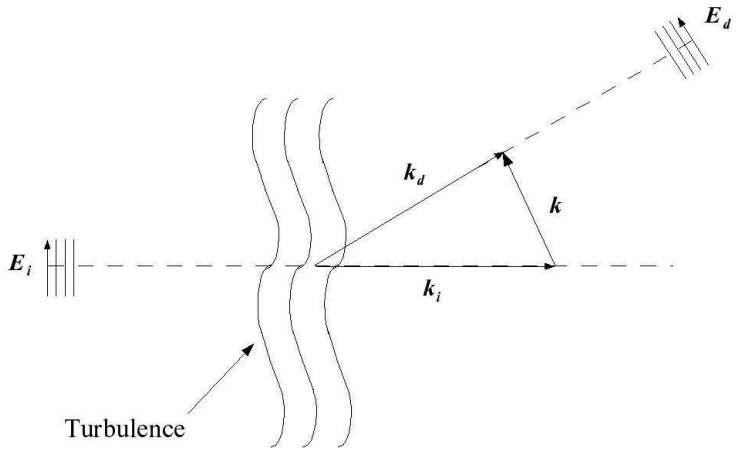


FIG. C.1 – *Schéma de principe de l'expérience de diffusion collective.*

c'est-à-dire que $||\mathbf{k}_d|| = ||\mathbf{k}_i||$. On pose $\mathbf{k} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i$. Le champ total diffusé s'écrit alors :

$$E_d(\mathbf{r}', t) = \mathcal{E}_1 \exp\left(i(\mathbf{k}_d.\mathbf{r}' - \omega_0 t)\right) \sum_j \exp\left(-i\mathbf{k}.\mathbf{r}_j(t)\right) \tag{C.1}$$

A la limite des milieux continus, *i.e.* lorsque la longueur d'onde sondée est grande devant la distance interparticulaire, la somme discrète se transforme en intégrale :

$$E_d(\mathbf{r}', t) = \mathcal{E}_1 \exp\left(i(\mathbf{k}_d.\mathbf{r}' - \omega_0 t)\right) \int n(\mathbf{r}, t) \exp\left(-i\mathbf{k}.\mathbf{r}(t)\right) d^3\mathbf{r} \tag{C.2}$$

où $n(\mathbf{r}, t)$ est la densité de particules au point $\mathbf{r}$ et à l'instant t.
On voit alors que le champ diffusé est proportionnel à la transformée de Fourier spatiale de la densité évaluée au vecteur de l'espace réciproque $\mathbf{k}$.

C.2 Détection du champ diffusé

Nous venons de voir que le champ diffusé est proportionnel à la transformée de Fourier spatiale de la densité :

$$E_d(\mathbf{r}', t) = \mathcal{E}_1 \exp\left(i(\mathbf{k}_d.\mathbf{r}' - \omega_0 t)\right) \tilde{n}(\mathbf{k}, t) \tag{C.3}$$

L'objectif pour l'expérimentateur est de construire un signal proportionnel au champ ou plutôt à sa modulation $\tilde{n}(\mathbf{k}, t)$. Plusieurs problèmes se posent :

- Les détecteurs optiques sont quadratiques : $s \propto E^2$.
- Ils ont un temps de réponse beaucoup plus long (plusieurs ordres de grandeur) que la période optique. Pour mémoire, la fréquence d'un signal optique est de l'ordre de $10^{13} - 10^{14}$ Hz.
- Enfin $\tilde{n}(\mathbf{k}, t)$ est une fonction complexe proportionnelle au champ complexe. Pour l'obtenir, la mesure doit conserver les informations d'amplitude et de phase.

C.2.1 Détection hétérodyne

Ces différents points sont résolus en utilisant le principe de détection hétérodyne. Cette méthode permet de translater le spectre temporel du signal, initialement centré autour de la fréquence du laser (source optique), vers des fréquences beaucoup plus basses, inférieures à la fréquence de coupure du détecteur mais toujours plus grandes que la largeur du spectre temporel des fluctuations de densité, de façon à éviter les phénomènes de repliement.

L'idée consiste à faire battre le faisceau diffusé avec un faisceau de référence, appelé aussi oscillateur local ou OL, décalé en fréquence de quelques MHz.

On fait suivre des chemins semblables aux deux faisceaux, primaires et OL, pour des raisons à la fois pratiques et physiques. L'OL sert de ligne de visée : le primaire viendra le croiser au niveau de la zone de mesure avec un angle variable θ ; arrivent sur le détecteur l'OL, fixe, et la lumière diffusée du primaire avec l'angle θ. Par ailleurs, de cette façon, la différence de chemin optique entre les deux faisceaux est bien plus faible que la longueur de cohérence du faisceau laser, ce qui permet d'éviter un élargissement spectral dû au laser qui serait fatal à l'étude du spectre temporel du signal.

Ce faisceau de référence est obtenu en faisant passer le faisceau primaire du laser dans un réseau acousto-optique , *i.e.* un réseau formé par une onde sonore de fréquence f_{acc} dans un matériau. L'ordre zéro du réseau est une onde à la même fréquence que l'onde incidente, en revanche l'ordre 1 (ou -1) est une onde décalée en fréquence de f_{acc}.

C.2.2 Obtention du signal complexe

Pour obtenir un signal proportionnel à $\tilde{n}(\mathbf{k}, t)$, le signal hétérodyne, *i.e.* le signal du détecteur débarrassé de sa composante continue et amplifiée (nous verrons plus loin pourquoi), est séparé en deux voies. Chacune est multipliée ensuite par un signal à la fréquence de modulation du réseau acousto-optique, l'un étant en quadrature de l'autre (à une phase près, un cosinus et un sinus). Les deux signaux ainsi obtenus, appelés cos et sin, correspondent respectivement à la partie réelle et à la partie imaginaire de la transformée de Fourier spatiale de la densité.

Soit l'expression du champ réel, ω_0 désignant la pulsation du laser :

$$E_d(\mathbf{r}', t) = \mathcal{E}_1 \int n(\mathbf{r}, t) \cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \mathbf{k}.\mathbf{r} + \phi) d^3\mathbf{r}$$

Le champ électrique total arrivant sur le détecteur s'écrit :

$$E_t = E_d + E_{OL} = E_d + \mathcal{E}_{OL} \cos((\omega_0 + \omega_{acc})t + \phi')$$

Le signal électrique (le courant) est proportionnel à $< E_t^2 >_{\tau_d}$, c'est-à-dire à la moyenne quadratique du champ électrique sur le temps de réponse du

détecteur.

$$E_t^2 = E_d^2 + \mathcal{E}_{OL}^2 \cos^2((\omega_0 + \omega_{acc})t + \phi') + 2\mathcal{E}_{OL} E_d \cos((\omega_0 + \omega_{acc})t + \phi')$$

Les deux premiers termes présentent une composante continue (l'intensité lumineuse des deux faisceaux) et une composante variable dont la fréquence est dans le domaine optique. La composante variable est éliminée par le détecteur lui-même et la composante continue avec un filtre passe-haut. Les deux premiers termes ne participent donc pas au signal hétérodyne.
Le troisième terme donne plus en détail :

$$\begin{aligned} 2E_d E_{OL} &= 2\mathcal{E}_1\mathcal{E}_{OL}\cos((\omega_0+\omega_{acc})t+\phi') \\ &\qquad \int n(\mathbf{r},t)\cos(\omega_0 t - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \mathbf{k}.\mathbf{r} + \phi) d^3\mathbf{r} \\ &= \mathcal{E}_1\mathcal{E}_{OL}\int n(\mathbf{r},t)\Big(\cos((2\omega_0+\omega_{acc})t - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \mathbf{k}.\mathbf{r} + \phi + \phi') \\ &\qquad + \cos(-\omega_{acc}t - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \mathbf{k}.\mathbf{r} + \phi - \phi')\Big) d^3\mathbf{r} \end{aligned}$$

De la même manière, le terme en $2\omega_0$ disparaît et le signal hétérodyne, s_h s'écrit donc :

$$s_h = \alpha\mathcal{E}_1\mathcal{E}_{OL}\int n(\mathbf{r},t)\cos(-\omega_{acc}t - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \mathbf{k}.\mathbf{r} + \phi - \phi')\Big) d^3\mathbf{r}$$

Le signal hétérodyne est donc bien centré sur ω_{acc} et modulé par $\tilde{n}(\mathbf{r},t)$.

Le signal complexe s'obtient comme nous l'avons déjà évoqué en séparant le signal hétérodyne sur deux voies et en multipliant chacune d'elles par un signal de pulsation ω_{acc}, l'un en cosinus et l'autre en sinus. On obtient sur chaque voie deux signaux, l'un centré sur 0, l'autre centré sur $2\omega_{acc}$. Un filtre passe-bas permet d'éliminer la seconde composante sans endommager le signal pertinent. Les signaux obtenus sur les sorties cos et sin sont alors :

$$\begin{aligned} s_c &= \alpha\mathcal{E}_1\mathcal{E}_{OL}\int n(\mathbf{r},t)\cos(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \phi - \phi' + \phi'')d^3\mathbf{r} \\ s_s &= \alpha\mathcal{E}_1\mathcal{E}_{OL}\int n(\mathbf{r},t)\sin(\mathbf{k}.\mathbf{r} - \mathbf{k}_d.\mathbf{r}' + \phi - \phi' + \phi'')d^3\mathbf{r} \end{aligned}$$

La quantité $Z = s_c + is_s$ est bien proportionnelle à $\tilde{n}(\mathbf{k},t)$. Il faut toutefois noter que cela est vrai à une phase arbitraire prés.

L'étude de l'intensité du signal, c'est-à-dire sa moyenne quadratique temporelle, permet d'étudier la structure de la turbulence via le facteur de forme statique :

$$S(\mathbf{k}) = < \frac{1}{n_0 VT}\int_{-T/2}^{T/2} |\tilde{n}(\mathbf{k},t)|^2 dt >$$

où n_0 est la densité moyenne de particules, V le volume de mesure et T la durée du signal temporel traité. L'étude du spectre temporel du signal via

son facteur de forme dynamique $S(\mathbf{k}, \omega)$ équivaut à l'étude de la dynamique de la turbulence aux différentes échelles spatiales. Il s'écrit :

$$S(\mathbf{k}, \omega) = \frac{< |\tilde{n}(\mathbf{k}, \omega)|^2 >}{n_0 V T}$$

Cette mesure à différents vecteurs d'onde donne accès au spectre spatial de la turbulence et permet ainsi de vérifier l'existence et les propriétés des instabilités électroniques de dérive dans le propulseur à effet Hall.

Bibliographie

ABRAMOWITZ M. & STEGUN I.A. (1972), *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, New York.

ADAM J.C, HERON A. & LAVAL G. (2004), *Study of stationary plasma thruster using two-dimensional fully kinetic simulations*, Phys. Plasmas 11, 295.

ALBAREDE L. (2004), *Etudes expérimentales d'un propulseur à effet Hall-Comportement stationnaire et dynamique du flux d'électrons*, Thèse de doctorat de l'université d'Orléans.

ARNOLD V.I. & AVEZ A. (1968), *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York.

BAREILLES J., HAGELAAR G.J.M., GARRIGUES L., BONIFACE C., BOEUF J.P. & GASCON N. (2004), *Critical assessment of a two-dimensional hybrid Hall thruster model : Comparisons with experiments*, Phys. Plasmas 11, 3035.

BAREILLES J. (2002), *Modélisation 2D hybride d'un propulseur à effet Hall pour satellites*, Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, Toulouse.

BARRAL S., MAKOWSKI K., PERADZYNSKI Z., GASCON N., & DUDECK M. (2004), *Wall material effects in stationary plasma thrusters. II. Near-wall and in-wall conductivity*, Phys. Plasmas 10, 4137.

BIRDSALL C.K. & LANGDON A.B. (1985), *Plasma Physics via computer simulation*, McGraw-Hill, New York.

BONIFACE C. (2006), *Modélisation et diagnostics d'un propulseur à effet Hall pour satellites : configuration magnétique et nouveaux concepts*, Thèse de doctorat de l'université Paul Sabatier, Toulouse.

BORIS J.P. (1970), *Relativistic plasma simulation-optimization of a hybrid code*, Procceedings of the 4th Conference of Numerical Simulation of Plasmas, Naval Res. Lab., Wachington D.C., 3-67.

BOUCHOULE A., PRIOUL M., LAZURENKO A., VIAL V., ADAM J.C., HERON A. & LAVAL G. (2003), *Characterization of microinstabilities in Hall thruster plasma : experimental and PIC code simulation results, physical interpretation and impact on transverse electron transport*, Paper 218, Proceedings of the 28^{th} International Electric Propulsion Conference (IEPC), Toulouse.

BOUCHOULE A., PHILIPPE-KALDEC C., PRIOUL M. *et al.* (2001), *Transient phenomena in closed electron drift plasma thrusters : insights obtained in a French cooperative program*, Plasma Sources Sci. Technol. 10, 364.

BRUGOVA A.I. & ERMAKOV Yu.A. (1994), *Pulse gas feeding operating mode of SPT on several inert gas*, 3rd Russian-German Conf. On Elec. Prop. Engines and App. Stuttgart.

BUNEMAN O. (1959), *Dissipation of Currents in Ionized Media*, Phys. Rev. 115, 503.

CHOUEIRI E.Y. (2001), *Plasma oscillations in Hall thrusters*, Phys. Plasmas 8, 1411.

CNES, site internet du Centre National d'Etudes Spatiales http ://www.cnes.fr

COHEN B.I., LANGDON A.B. & FRIEDMAN A. (1982), *Implicit Time Integration for Plasma Simulation*, Jour. of Comp. Phys., 46, 15-38.

DARNON F. (1999), *Comportements transitoires d'un propulseur à plasma type SPT100 : caractéristiques dynamiques de la décharge, du plasma et du jet ionique*, Thèse de doctorat de l'université d'Orléans.

DARNON F., GARRIGUES L., BOEUF J.P., BOUCHOULE A. & LYSZYK M. (1999), *Spontaneous oscillations in a Hall thruster*, IEEE Trans. Plasma Sci. 27, 98.

ESIPCHUK Yu., MOROZOV A.I., TILININ G.N. & TROFIMOV A.V. (1974), *Plasma oscillations in closed-drift accelerators with an extended acceleration zone*, Sov. Phys. Tech. Phys. 18, 928.

ESIPCHUK Yu. & TILININ G.N. (1976), *Drift instability in a Hall-current plasma accelerator*, Sov. Phys. Tech. Phys. 21, 417.

FORSLUND D., MORSE R., NIELSON C. & FU J. (1972) *Electron cyclotron drift instability and turbulence*, Phys. Fluids 15, 1303.

FRIED B.D. & CONTE S.D. (1961), *The plasma dispersion functions*, Academic Press Inc., New York.

GAWRON D., MAZOUFFRE S., ALBAREDE L. & SADEGHI N. (2006), *Examination of Hall effect thruster acceleration layer characteristics by laser spectroscopy and retarding potential analyzer*, AIAA paper 06-4473, Proceedings of the 42th Joint Propulsion Conference and Exhibit, 9-12 july 2006, Sacramento, California.

GRADSHTEYN I.S & RYZHIK I.M. (1980), *Table of integrals, series, and products*, Academic Press, New York.

GARRIGUES L., HERON A., ADAM J.C. & BOEUF J.P. (2001), *Hybrid and particle-in-cell models of a stationary plasma thruster*, Plasma Sources Sci. Technol. 9,2.

HAGELAAR G.J.M., BAREILLES J., GARRIGUES L. & BOEUF J.P. (2002), *Two-dimensional model of a stationary plasma thruster*, J. Appl. Phys. 91, 5592.

HAGELAAR G.J.M., BAREILLES J., GARRIGUES L. & BOEUF J.P. (2003), *Role of anomalous electron transport in a stationary plasma thruster simulation*, J. Appl. Phys. 93, 67.

KARNEY C.F.F. (1978), *Stochastic ion heating by lower hybrid wave*, Phys. Fluids 21, 1584 ;

KARNEY C.F.F. (1979), *Stochastic ion heating by lower hybrid wave II*, Phys. Fluids 22, 2188.

KRALL N.A. & BOOK D.L. (1969), *Ion Sound Instability in a collisionless shock wave*, Phys. Fluids 12, 347.

KRALL N.A. & LIEWER P.C. (1971), *Low-frequency instabilities in Magnetic Pulses*, Phys. Rev. A 4, 2094.

KURZYNA J., MAZOUFFRE S., LAZURENKO A., ALBAREDE L., BONHOMME G., MAKOWSKI M., DUDECK M. & PERADZYNSKI Z. (2005), *Spectral analysis of Hall-effect thruster plasma oscillations based on the empirical mode decomposition*, Phys. Plasmas 12, 123506.

LANGDON A.B., COHEN B.I. & FRIEDMAN A., *Direct Implicit Large Time-Step Particle Simulation of Plasmas*, Jour. of Comp. Phys., 51, 107-138.

LAZURENKO A., VIAL V., PRIOUL M. & BOUCHOULE A. (2005), *Experimental investigation of high-frequency drifting perturbations in Hall thrusters*, Phys. Plasmas 12(1), 013501.

LEMOINE N. (2005), *Transport turbulent d'un plasma à travers un champ magnétique : observation par diffusion collective de la lumière*, Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique.

LEMOINE N. & D. GRESILLON (2005), *Plasma Diffusion across a Magnetic Field Observed by Collective Light Scattering : Experimental Evidence for Lévy Stable Distributions"*, Physics of Plasmas 12, 092301.

LITVAK A. A. & FISCH N. J. (2001), *Resistive instabilities in Hall current plasma discharge*, Physics of Plasmas 8, 648.

LITVAK A. A. & FISCH N. J. (2004), *Rayleigh instability in Hall thrusters*, Physics of Plasmas 11, 1379.

MEEZAN N.B., HARGUS W.A., CAPELLI M.A. (2001), *Anomalous electron mobility in a coaxial Hall discharge plasma*, Phys. Rev. E 63, 026410.

MOROZOV A.I., ESIPCHUK Yu., KAPULKIN A.M., NEVROVSKII.A. & SMIRNOV V.A. (1972), *Effect of the magnetic field on a closed-electron-drift accelerator*, Sov. Phys. Tech. Phys. 17, 482.

MOROZOV A.I. & SAVELYEV V.V. (2000), *Fundamentals of Stationary Plasma Thruster theory, p277-299*, Review of Plasma Physics $n^0$21 edited by Kadomstev B.B. and Shafranov V.D., Kluwer Academic/Plenum Publisher, New York.

PRESS W.H., TEUKOLSKY S.A., VETTERLING W.T. & FLANNERY B.P. (1992), *Numerical recipes in Fortran*, Cambridge University Press,

Cambridge.

POINCARÉ H. (1899), *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 3. Gauthier-Villars,Paris.

PRIOUL M. (2001), *Etudes expérimentales des propulseurs de type Hall : Processus collisionnels, comportement dynamique, micro-instabilités et phénomènes de transport*, Thèse de doctorat de l'université d'Orléans.

SMIRNOV A., RAITSES Y. & FISCH J. (2004), *Electron cross-field transport in a lower power cylindrical Hall thruster*, Phys. Plasmas 11, 4922.

SNECMA, photos.

TAJIMA T.(1989), *Computational Plasma Physics : With Applications to Fusion and Astrophysics*, Frontiers in physics, Addison-Wesley Publishing Compagny Inc.

WONG H.V. (1970), *Electrostatic electron-ion streaming instability*, Phys. Fluids 13, 757.

ZHURIN V.V., KAUFMANN H.R. & ROBINSON R.S (1999), *Physics of closed drift thrusters*, Plasma Sources Sci. Technol. 8, R1.

Publications

Articles

DUCROCQ A., ADAM J.C., HERON A. & LAVAL G., *High-Frequency electron drift instability in the cross-field configuration of Hall Thrusters*, Physics of Plasma 13, 102111.

DUCROCQ A., ADAM J.C., HERON A. & LAVAL G., *Stochastic electron transport in Hall effect thrusters*, (en préparation pour Physics of Plasma au moment du tirage).

Conférence

DUCROCQ A., ADAM J.C., HERON A. & LAVAL G., *Theoretical analysis of anomalous conductivity in Hall thrusters* (2005), Paper 21, Proceedings of the 29^{th} International Electric Propulsion Conference (IEPC), Princeton University, USA.