Capacité de production et structure financière: utilisations stratégiques dans les jeux d'entrée.

Maximilien Laye

ÉCOLE POLYTECHNIQUE
Département d'Économie

Capacité de production et structure financière : utilisations stratégiques dans les jeux d'entrée

Thèse présentée en vue d'obtenir le grade de
Docteur en Sciences Économiques
soutenue publiquement le 3 Octobre 2006

Maximilien Laye

Membres du jury :

Gilles Chemla	Chargé de Recherche au CNRS, Université Paris Dauphine, Rapporteur
Denis Gromb	Associate Professor of Finance à la London Business School, Rapporteur
Jean-Pierre Ponssard	Directeur de Recherche au CNRS, École Polytechnique, Président du jury
Hervé Tanguy	Directeur de Recherche à l'INRA, École Polytechnique, Directeur de thèse

Remerciements

Mes remerciements vont en tout premier lieu à Hervé Tanguy, qui a accepté d'être mon directeur de thèse et m'a soutenu et guidé tout au long de ces années. Je lui suis reconnaissant pour son écoute et sa compréhension, qui allaient bien au-delà du cadre académique.

Je remercie Jean-Pierre Ponssard de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire d'Économétrie de l'École Polytechnique, et de m'avoir si souvent renouvelé sa confiance. Ma thèse doit énormément à sa bienveillance et à ses précieux commentaires lors de la relecture des versions préliminaires de ce manuscrit.

Denis Gromb et Gilles Chemla ont accepté la charge de rapporter ma thèse. Leurs commentaires m'ont encouragé et guidé dans les derniers mois de rédaction.

Je remercie Pierre Picard de m'avoir accueilli au sein du Département d'Économie de l'École Polytechnique, ce qui m'a permis d'achever ma thèse dans des conditions idéales.

Durant ces années au Laboratoire d'Économétrie, puis au Département d'Économie, ainsi qu'à l'extérieur de l'École, j'ai eu la chance de côtoyer de nombreux chercheurs et doctorants. Les commentaires de ceux qui suivent ont directement influencé l'orientation de mes travaux et l'écriture de ma thèse : Marie-Laure Allain, Michel Balinski, Jean-Marc Bourgeon, Christophe Caron, Claire Chambolle, Patricia Crifo, Anne Duchêne, Olivier Gossner, Rida Laraki, Jean-François Laslier, Jérôme Mathis et Jérôme Pouyet.

J'adresse une pensée à tous les doctorants du Laboratoire, et tout particulièrement à celles qui ont eu la patience de partager leur bureau avec moi : Pascale Bazoche, Romina Boarini, Sophie Chemarin, Maïa David, Tu Doan-Coam, Ghada Dhouib, Blandine Isambert et Marie-Anne Valfort.

Je garde un excellent souvenir de mes élèves de l'ENSAE : Jean-Renaud Adda, Noémie Boutboul, Stéphanie Kretz, Céline Latrémy. Le travail entrepris avec eux m'a permis de prendre un recul salutaire sur mes travaux.

Je remercie le personnel administratif du laboratoire, Lyza Audel, Anh-Dao Charlès, Christine Mouyeket, Éliane Nitiga-Madelaine, Chantal Poujouly et Damien Brémont, pour leur compétence, leur disponibilité et leur gentillesse.

Je remercie enfin ceux et celles qui, en dehors du monde de la recherche, m'ont soutenu directement ou indirectement, souvent sans le savoir.

Table des matières

Table des figures

Introduction

Les industries de produits de commodité regroupent les industries produisant un bien de base correspondant à un besoin élémentaire, et pour lequel il y a peu de différenciation par la marque, tels que le ciment, l'acier, ou le papier.

Ces industries ont souvent servi de source d'inspiration aux théoriciens de l'économie industrielle. Leurs caractéristiques sont en effet très simples, et elles se prêtent alors parfaitement à la modélisation : pas d'effets complexes sur la demande liés au marketing des produits et à la psychologie des consommateurs, les clients étant avant tout d'autres firmes à la recherche des meilleurs prix ; peu de produits de substitution, du moins à moyen terme : on ne change pas facilement les procédés des transformateurs de l'aval (chimie), ni les habitudes de construction d'un pays (verre, bois, acier, ciment) ; l'innovation porte sur l'amélioration des techniques de fabrication et délivre des gains de performance plus qu'elle ne permet une remise en cause radicale des positions concurrentielles. Enfin, et surtout, bénéficiant d'importantes économies d'échelle, ces industries sont concentrées ou bien en voie de le devenir, et ceci à une échelle géographique dictée par les coûts de distribution. L'interaction stratégique est alors patente.

Peu d'acteurs en concurrence effective, des choix stratégiques simples (entrer ou non sur un marché *via* l'implantation d'une unité de production, augmenter ou non une capacité de production sur un site existant, acheter ou non un concurrent...), tout ceci fait de ces industries des candidats rêvés à la formalisation par les outils de la théorie de la concurrence imparfaite. Autrement dit, si une théorie de la concurrence fondée sur les comportements stratégiques des acteurs a une chance d'avoir un domaine de pertinence, ce devrait être dans ce type d'industries.

Mais avant de chercher à dériver des recommandations en matière de politique de la concurrence pour ce type d'industries, le premier effort doit porter sur la façon de modéliser ces interactions stratégiques. Une première condition évidente pour y parvenir doit être de prendre en considération les caractéristiques technico-économiques saillantes de ces industries, même si elles s'éloignent du modèle canonique de la firme.

La capacité de production joue clairement un rôle clé. Le dimensionnement de la capacité et le timing d'installation résument la décision d'entrée sur un marché. Les rendements sont croissants tant qu'on n'atteint pas la limite de capacité, et produire au-delà est impossible. En pratique, si on souhaite continuer à servir le marché, il faudra produire à partir d'un site distant *a priori* non compétitif ou bien acheter pour revendre.

La seconde condition est de ne pas simplifier outrageusement la nature même de l'interaction concurrentielle mais au contraire de bien comprendre les effets induits par les choix faits à ce niveau. C'est l'un des principaux objectifs de cette thèse.

La possibilité de négociation entre acteurs concurrents, dès qu'ils ont conscience de leur interaction stratégique, est ainsi pour nous un élément fondamental du jeu. Plus que raffiner les modalités d'affrontement sur le marché, la question est de savoir quand et sur quoi cette négociation peut prendre place, puis en quoi elle va structurer les choix stratégiques en amont.

La troisième condition porte sur la prise en compte des problèmes de financement. Les décisions d'installation de capacité de production ou de rachat de concurrents supposent des engagements de fonds considérables. La variance des profits attendus selon l'issue des jeux concurrentiels est *a priori* telle qu'il est exclu de négliger cette dimension. Mais dans la séquence combinant choix stratégique de capacité, affrontement sur le marché, négociation, notre position consiste à faire un jouer un rôle clé à la dette, sans que les acteurs du financement ne soient eux-mêmes partie prenante des choix et des négociations.

Ainsi, capacité de production et financement ne sont pas que des contraintes, elles deviennent des instruments de la stratégie des firmes. La première a déjà été traitée comme telle dans la littérature (capacité comme barrière à l'entrée, Dixit (1980)), la seconde également (dette comme engagement à l'agressivité dans un jeu de Cournot, Brander et Lewis (1986)). Un des objectif principaux de la thèse est d'introduire de la négociation dans les jeux mobilisant dette et capacité comme instruments stratégiques. On espère par la même ouvrir une voie permettant de gagner en réalisme dans l'analyse des interactions stratégiques. Plus précisement, au chapitre 1, nous introduisons de la négociation dans l'analyse Judo-économique de Gelman et Salop (1983), cette négociation étant postérieure au choix de capacité. Au chapitre 3, cette négociation est antérieure à un jeu d'entrée dans lequel l'entrant est endetté, la dette permettant à l'entrant d'être en meilleure posture face à la firme en place lors de la négociation.

Introduction des chapitres

Chapitre 1 : Surcapacité de production, collusion et signal

Le premier chapitre se place dans un cadre de compétition à la Bertrand-Edgeworth en demande inélastique, et illustre la problématique du choix de capacité de production dans différents contextes. Nous présentons deux modèles visant à expliquer la surcapacité de production qui peut être observée dans les industries de commodité.

Nous rappelons tout d'abord le modèle de base de l'analyse Judo-économique, présenté dans Gelman et Salop (1983). Une firme entre sur un marché sur lequel est déjà présente une firme capable de servir tout le marché. L'analyse classique montre comment l'entrant peut s'assurer l'accommodation sur le marché en limitant sa capacité. On aboutit alors à une situation dans laquelle la firme en place a un excès de capacité.

Nous étudions ensuite sous quelles conditions une telle situation pourrait apparaître lorsque la firme en place anticipe l'entrée et fixe sa capacité de production avant celle-ci. Il apparaît que, à moins que la firme en place ait un avantage en coûts très important, l'anticipation de l'entrée conduit la firme en place à ne pas surinvestir, pour éviter de se retrouver à l'équilibre Judo-économique, dans lequel une capacité trop importante serait utilisée à ses dépends. Une surcapacité de production de l'industrie n'est alors expliquée que par une mauvaise anticipation de l'entrée.

Nous replaçons ensuite le modèle dans deux contextes distincts. Tout d'abord, nous supposons que les firmes investissent, non pas en anticipant une concurrence à la Bertrand sous contraintes de capacité, mais une collusion sur les quantités produites. Nous montrons comment la perspective d'une collusion future pousse les différentes parties à surinvestir, ce surinvestissement dotant les firmes d'un pouvoir de nuisance qui peut être exploité dans le cadre de la collusion, contrairement à ce qui se passe dans le cadre purement non-coopératif. Le surinvestissement est croissant avec le pouvoir de négociation. Lorsque le pouvoir de négociation est aux mains de la firme en place, seule la firme en place surinvestit, et l'on retrouve l'équilibre en capacité de Gelman et Salop (1983). Lorsque le pouvoir de négociation est partagé, les firmes tombent dans un dilemme du prisonnier : chacune surinvestit afin de ne pas être la seule à ne pas surinvestir, ce qui détruit de la valeur.

Enfin, le modèle est placé dans un contexte d'asymétrie d'information. Nous supposons que l'entrant peut être de deux types : le type *efficace* a des coûts marginaux de production faibles, et le type *inefficace*, des coûts marginaux de production élevés. Seul l'entrant a connaissance de son type. On suppose que pour financer le coût d'entrée, l'entrant doit faire appel à des bailleurs de fonds. Nous montrons comment l'entrant efficace peut signaler son type au marché financier en s'engageant à installer une capacité qui excède la capacité qui serait optimale si l'information était parfaite. Nous montrons que ce mode de signal est préféré au signal par prix limite, tel que présenté dans Milgrom et Roberts (1982). Enfin, nous déterminons la part du capital optimale que l'entrant doit céder afin de maximiser son profit tout en assurant le signal de son type et la participation de l'investisseur.

Chapitre 2 : Choix de capacité en demande croissante

Le deuxième chapitre examine le rôle stratégique de l'investissement en capacité dans une industrie de bien de commodités en croissance. Nous considérons un modèle semblable au modèle du chapitre 1, en nous plaçant dans un cadre de concurrence à la Bertrand-Edgeworth en demande inélastique, mais nous supposons d'une part que la taille du marché croît, et d'autre part que les firmes supportent des coûts fixes d'installation de capacité importants.

En demande statique, le modèle de Dixit (1980) démontre qu'en présence de coûts fixes d'entrée suffisamment élevés, l'installation d'une capacité importante peut constituer une barrière à l'entrée sur le marché. L'objectif du chapitre est d'étudier la robustesse de ce résultat dans le cadre d'une demande croissante.

Nous montrons que la capacité de la firme en place a effectivement un effet négatif sur les profits que peut obtenir l'entrant potentiel, et donc que la firme en place peut espérer barrer l'entrer en rendant ces profits inférieurs au coût d'entrée. Toutefois, il apparaît que l'effet de la surcapacité est limité du fait de la croissance du marché, si bien que pour des niveaux de croissance importants, la barrière à l'entrée a un coût prohibitif et devient même impossible au delà d'une certaine croissance. L'adoption d'une stratégie agressive en capacité pour barrer l'entrée a, dans ce contexte, toutes les chances d'échouer.

Quelle stratégie doit alors adopter la firme en place pour maximiser ses profits sachant qu'elle finira par accommoder l'entrée ?

Pour répondre à cette question, il convient de remarquer que la croissance du marché introduit une dimension temporelle dans le jeu, c'est-à-dire que la stratégie de l'entrant se définit en capacité, mais aussi dans le temps à travers la date d'entrée choisie. La date optimale d'entrée détermine de façon endogène une période de monopole, pendant laquelle la firme en place jouit de profits élevés, puis une période de duopole. La firme en place va donc chercher à fixer sa capacité pour induire une réponse de l'entrant qui lui est favorable, idéalement la construction d'une usine de faible capacité, et ce le plus tard possible.

Nous montrons que ces deux objectifs ne sont pas conciliables : la firme en place doit arbitrer entre accommoder une entrée tardive mais agressive, ou bien une entrée précoce avec une capacité limitée.

Chapitre 3 : Jeu d'entrée et structure financière, une utilisation stratégique de la dette

Le troisième chapitre propose une utilisation originale de l'endettement. Nous nous plaçons dans le cadre classique d'un jeu d'entrée en économie industrielle : un monopole fait face à un entrant sur son marché. Cette entrée fait perdre à la firme en place son profit de monopole. Il peut s'en suivre une accommodation, ou au contraire, une guerre des prix. Classiquement, la décision de guerre revient au monopole, qui par une guerre coûteuse à court terme chasse l'entrant pour recouvrer son profit de monopole : c'est la théorie de la prédation. Nous considérons ici que l'entrant peut également déclencher cette guerre des prix, ce qui lui confère un pouvoir de nuisance qui pourra être utilisé à des fins stratégiques.

Notre analyse se distingue d'un jeu d'entrée classique par deux aspects. Premièrement, nous rejoignons le cadre de la finance d'entreprise en supposant que l'entrant est endetté, c'est-à-dire que pour financer son coût d'entrée sur le marché, il a emprunté un certain montant qu'il devra rembourser à un certain terme. Nous introduisons donc une tierce partie, la banque prêteuse. Si l'entrant n'est pas en mesure de rembourser sa dette, il est en faillite et sort du marché.

Deuxièmement, nous introduisons la possibilité d'une sortie négociée du marché. Celle-ci est équivalente au rachat de l'entrant par la firme en place. On suppose donc qu'une fois le coût d'entrée acquitté par l'entrant, et avant toute compétition, la firme en place et l'entrant ont la possibilité de négocier un rachat. C'est dans cette négociation que l'entrant pourra faire valoir son pouvoir de nuisance afin d'extraire une part du surplus de la firme en place. Ainsi, dans notre modèle, la concurrence est avant tout étudiée en amont, dans la négociation de sortie, alors qu'elle est plus classiquement étudiée en aval, dans le jeu post-entrée.

Pour être à même d'obtenir une part du surplus dans le cadre de la négociation, l'entrant doit rendre crédible sa menace de guerre des prix, et c'est par l'utilisation de la dette qu'il atteint cet objectif, en utilisant la capacité d'engagement que lui confère la responsabilité limitée. Il s'agit d'une utilisation stratégique de la dette, qui est indirecte car il ne s'agit pas pour l'entrant de choisir sa dette de façon à augmenter ses profits dans le jeu concurrentiel, mais de choisir le montant de la dette qui soutiendra une issue favorable lors d'une négociation.

La résolution de ce modèle apporte plusieurs résultats. Lorsque la négociation est impossible, on retrouve un rationnement de crédit analogue à celui que l'on rencontre dans les modèle d'aléa moral dans les relations de financement. Certains projets rentables ne trouvent ainsi pas de financement. L'introduction de la négociation a un double effet : d'une part, la possibilité d'être rachetée facilite l'obtention du financement par la banque, ce qui est plutôt naturel. Mais on a d'autre part l'effet complémentaire, à savoir que l'endettement facilite le rachat de l'entrant, ce qui est plus surprenant.

Nous obtenons une discontinuité dans le type des entrants. L'entrée n'est profitable que pour une firme ayant un niveau d'endettement suffisamment faible pour être certaine d'être accommodée, ou ayant un niveau d'endettement suffisamment important associé à un pouvoir de nuisance élevé pour pouvoir négocier son rachat favorablement. Des niveaux d'endettement intermédiaires peuvent rendre une entrée non profitable.

Enfin, nous déterminons de façon endogène la structure financière et le contrat de dette optimaux. Nous montrons que les deux stratégies d'endettement (faible ou fort) peuvent être optimales, en fonction notamment du pouvoir de nuisance de l'entrant.

Chapitre 4 : Équilibre de Cournot sous contraintes de capacité

Le dernier chapitre se place dans un cadre de concurrence à la Cournot sous contraintes de capacité. Nous considérons le cas multi-firmes, multi-usines et multi-marchés, c'est-à-dire qu'un nombre quelconque de firmes possédant chacune un nombre quelconque d'usines, produisent un bien homogène et s'affrontent dans une concurrence à la Cournot sur un nombre quelconque de marchés indépendants. La demande est supposée linéaire sur chaque marché, la taille et l'élasticité pouvant être différente d'un marché à l'autre. Nous adoptons une modélisation très générale des contraintes de capacité, ce qui nous permet de prendre en compte une grande variété de situations, comme par exemple la présence d'une quantité minimale et maximale produite par usine ou transportée par un moyen de transport donné, ou bien la présence de quotas sur les marchés. De même, les fonctions de coûts de chaque firme permettent de prendre en considération de façon différenciée les coûts de production de chaque usine, les coûts de transports et les taxes.

La formulation multi-marchés prend tout son sens du fait de la présence des contraintes de capacité. En effet, celle-ci pose la question de l'affectation de la capacité de production entre les différents marchés de façon essentielle, et interdit de traiter le problème indépendamment sur chaque marché.

Nous démontrons l'existence et l'unicité de l'équilibre de Nash de ce jeu, et le caractérisons.

Chapitre 1

Surcapacité de production, collusion et signalement

1.1 Introduction

La problématique du choix stratégique de capacité de production s'est imposé comme une question centrale de l'économie industrielle telle qu'elle s'est développée ces trente dernières années. Dans ce chapitre, nous illustrons cette problématique dans différents contextes, et proposons deux modèles visant à expliquer la surcapacité de production qui peut être observée dans les industries de commodité.

Nous rappelons tout d'abord le modèle de base de l'analyse Judo-économique, présenté dans Gelman et Salop (1983). Une firme entre sur un marché sur lequel est déjà présente une firme capable de servir tout le marché. L'analyse classique montre comment l'entrant peut s'assurer l'accommodation sur le marché en limitant sa capacité. On aboutit alors à une situation dans laquelle la firme en place a un excès de capacité.

Nous étudions ensuite sous quelles conditions sur les coûts une telle situation pourrait apparaître lorsque la firme en place anticipe l'entrée et fixe sa capacité de production avant celle-ci. Il apparaît que, à moins que la firme en place ait un avantage en coûts très important, l'anticipation de l'entrée conduit la firme en place à ne pas surinvestir, pour éviter de se retrouver à l'équilibre Judo-économique, dans lequel une capacité trop importante serait utilisée à ses dépends. Une surcapacité de production de l'industrie n'est alors expliquée que par une mauvaise anticipation de l'entrée.

Nous replaçons ensuite le modèle dans deux contextes distincts : tout d'abord, un contexte de collusion, dans lequel nous montrons comment la perspective d'une collusion future pousse les différentes parties à surinvestir, tombant ainsi dans un dilemme du prisonnier ; ensuite, un contexte d'asymétrie d'information, le choix de capacité de l'entrant jouant un rôle de signal d'efficacité vis-à-vis des investisseurs.

1.2 Analyse Judo-Économique : modèle de base et mise en perspective

1.2.1 Cadre Général

Tout au long de ce chapitre nous nous placerons dans le cadre de l'analyse Judo-économique présentée dans Gelman et Salop (1983). Nous considérerons une version simplifiée de ce modèle en supposant la demande inélastique avec prix de réservation, que l'on qualifie usuellement de "box demand". Cette modélisation correspond bien aux industries de commodités.

On considère deux firmes (1 et 2) sur un marché. La demande est constante et égale à D pour un prix inférieur ou égal à $\bar{p}$, et nulle pour un prix supérieur. Les investissements en capacité sont considérées être des décisions de long terme, peu flexibles, qui conditionnent les choix des prix ultérieurs, déterminés par une concurrence à la Bertrand sous contraintes de capacité. Le jeu est donc séparé en deux phases comptant chacune deux étapes : une première phase durant laquelle les firmes fixent séquentiellement leur capacité de production k_1 et k_2, puis une deuxième phase pendant laquelle les firmes fixent séquentiellement leurs prix p_2 puis p_2.

Plus précisément, la séquence du jeu est la suivante (cf. figure 1.1) : $(t = 1)$ la firme 1 fixe sa capacité k_1, $(t = 2)$ la firme 2 fixe sa capacité k_2 puis $(t = 3)$ la firme 2 fixe son prix p_2 et enfin ($t = 4$) la firme 1 fixe son prix p_1.

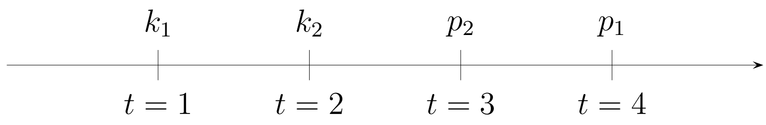

FIG. 1.1 – Séquence du jeu.

Nous qualifierons la firme 1 de firme en place et la firme 2 de firme entrante, et la séquentialité des choix de capacité traduit simplement le fait que la firme en place a un avantage structurel lui permettant de s'engager avant l'entrant. En d'autres termes, la firme en place est leader de Stackelberg. La séquentialité des décisions en prix est moins significative : lorsque le choix des prix est simultané, l'équilibre en prix est en stratégies mixtes, et on montre aisément que le paiement d'équilibre est égal au paiement d'équilibre lorsque le choix de prix est séquentiel. L'avantage de supposer le choix séquentiel est que l'équilibre est en stratégies pures, ce qui simplifie l'analyse sans en diminuer la portée.

On suppose en outre que toute discrimination en prix est impossible. La demande est prioritairement affectée à la firme pratiquant le prix le plus bas, qui sature alors sa contrainte de capacité. La demande résiduelle est affectée à l'autre firme. En cas d'égalité des prix, la demande est affectée entièrement à la firme en place, ce qui correspond à une viscosité infinitésimale de la demande.

Structure de coûts

Nous considérerons trois sortes de coûts dans la suite du chapitre (et dans le chapitre 2) : les coûts fixes d'entrée, les coûts variables de capacité (c_i^k) et les coûts variables de production (c_i^p). Les coûts fixes d'entrée sont supposés non-récupérables et par définition sont indépendants de la capacité installée. Ils n'interviennent pas dans l'analyse lorsque l'on considère que l'entrée a déjà eu lieu et que l'on pose la question de la capacité installée (équilibre en accommodation). Dans ces cas, nous les normaliserons à zéro. Au contraire, ils interviennent lorsque la question de l'entrée est posée, que ce soit à travers son financement (section 1.4), à travers l'étude de stratégies de barrière à l'entrée mises en place par la firme en place (section 2.2 du chapitre 2) ou des bénéfices tirés d'un retard de l'investissement à travers l'actualisation (chapitre 2). Les coûts fixes d'entrée jouent donc un rôle limité dans le présent chapitre et interviendront de façon fondamentale dans le chapitre 2.

Les coûts variables de production et de capacité sont supposés linéaires. Les coûts de capacité sont payés au moment de l'installation de la capacité, et sont proportionnels au niveau de capacité choisie ($c_i^k k_i$). Les coûts de production sont proportionnels à la quantité produite ($c_i^p q_i$)[1]. Comme dans Gelman et Salop (1983), on supposera que la firme en place est au moins aussi efficace que l'entrant, et on normalisera son coût de production à zéro ($c_1^p = 0, c_2^p \geqslant 0$). Cette hypothèse simplifie les calculs mais ne joue pas un rôle essentiel, elle sert surtout à souligner le fait que l'entrant parvient à forcer l'accommodation, et cela même lorsqu'il est nettement moins efficace que la firme en place.

Lorsqu'une firme produit à pleine capacité et que date d'installation et date de production coïncident, il n'y a pas lieu de distinguer entre coûts de capacité et coûts de production, puisque $q_i = k_i$. On considère alors un coût agrégé $c_i = c_i^k + c_i^p$.

[1] On remarque d'autre part que la notation adoptée permet également de traiter le cas d'un éventuel coût c_i^m de maintien de la capacité inutilisée, car $c_i^k k_i + c_i^p q_i + c_i^m (k_i - q_i) = (c_i^k + c_i^m) k_i + (c_i^p - c_i^m) q_i$, ce qui entre dans notre cadre d'analyse tant que $c_i^m < c_i^p$.

Ce sera le cas d'une part pour une firme en monopole, et d'autre part pour la firme entrante dans l'analyse Judo-économique de base (section 1.2.3).

Lorsque date d'installation et date de production ne coïncident pas, il convient de distinguer les deux types de coûts variables. Nous supposerons en outre que les coûts de capacité ne sont pas récupérables une fois encourus. Ainsi, à la section 1.3, les firmes négocient après installation de la capacité mais avant production. Les deux types de coûts jouent alors un rôle fondamentalement différent, d'une part parce que les firmes ne produiront pas à capacité du fait de la collusion, et d'autre part parce que les coûts de capacité seront irrécupérables et n'interviendront donc pas dans la négociation, contrairement aux coûts de production.

Notre démarche est la suivante : lorsque les coûts variables n'interviennent pas fondamentalement dans le phénomène que l'on veut mettre en lumière (notamment un surinvestissement en capacité), nous établissons les résultats en supposant les coûts nuls, puis nous étudions la robustesse des résultats en introduisant les coûts. D'une façon générale, on remarquera que l'introduction de coûts de capacité limite le phénomène de surinvestissement, celui-ci étant plus coûteux. Dans d'autres sections, les coûts jouent un rôle fondamental et ne sont donc pas supposés initialement nuls. C'est le cas de la section 1.4 dans laquelle le coût de production différencie un entrant efficace d'un entrant inefficace, et dans tout le chapitre 2, dans lequel la demande est supposé croissante, un coût de capacité non-nul étant nécessaire pour écarter la possibilité d'installer une capacité infinie.

1.2.2 Analyse Judo-économique : Gelman et Salop (1983)

On se place à l'instant $t = 2$ et on suppose que la firme en place est surcapacitaire ($k_1 \geqslant D$). Le jeu correspondant aux étapes ($t = 2, 3, 4$) (qui est un sous-jeu du jeu initial) est à information parfaite et se résout par induction à rebours. La proposition suivante est le résultat principal de Gelman et Salop (1983) adapté à la fonction de demande particulière retenue dans notre modèle. On a :

Proposition 1 *À k_2 fixé, la firme entrante choisit le prix :*

$$p_2 = \tilde{p} = \frac{\bar{p}(D - k_2)}{D} \tag{1.1}$$

et l'entrée est accommodée par la firme en place. La capacité optimale de l'entrant est $k_2 = D/2$.

Démonstration. ($t = 4$) Lorsque la firme en place fixe son prix, elle arbitre entre fixer son prix à $p_1 = p_2$ et servir alors tout le marché [profit $\pi_m(p_2) = p_2 D$], ou bien accommoder l'entrée en acceptant de ne servir que la demande résiduelle $D - k_2$ au prix $\bar{p}$ [profit $\pi_m(\bar{p}) = \bar{p}(D - k_2)$]. Les autres prix correspondent à des stratégies strictement dominées par l'une de ces deux stratégies. On suppose que lorsqu'elle est indifférente entre ces deux stratégies, la firme en place accommode l'entrée, ce qui est l'hypothèse habituelle dans les modèles d'entrée.

($t = 3$) Le profit de la firme entrante n'est positif que si elle est accommodée. Afin d'être accommodée, la firme entrante ne doit pas dépasser le prix $\tilde{p}$ qui rend la firme en place indifférente, et fixer son prix en dessous de $\tilde{p}$ est une stratégie strictement dominée. La résolution de $\pi_m(\tilde{p}) = \pi_m(\bar{p})$ donne l'expression 1.1.

($t = 2$) Le profit de l'entrant vaut $\pi_e = \tilde{p}k_2$. Ce profit est maximal pour $k_2 = D/2$. ■

La figure 1.2 représente cet équilibre dans un plan quantité-prix. La demande est représentée par un rectangle de largeur D et de hauteur $\bar{p}$; la capacité de la firme 1 est mesurée en partant de la gauche[2] et celle de la firme 2 en partant de la droite ; la condition d'indifférence impose à la firme 2 de tarifer sur la diagonale du rectangle (équation 1.1) ; la capacité optimale de l'entrant maximise l'aire du rectangle de largeur k_2 et de hauteur $\tilde{p}$. Il s'agit là de l'exemple le plus simple

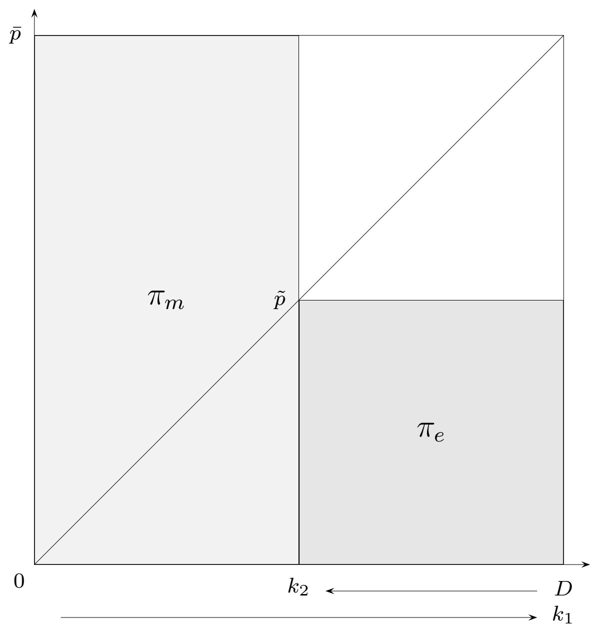

FIG. 1.2 – Stratégie optimale d'entrée en prix et en capacité de production.

pour illustrer la logique Judo-économique : en se limitant en capacité et en tari-

[2]En l'occurrence, la capacité de la firme 1 prend toute la largeur du rectangle.

fant suffisamment bas, la firme entrante parvient à rendre la guerre des prix trop coûteuse, et par suite à faire accommoder l'entrée. La taille de la firme en place, qui est surcapacitaire, est utilisée à ses dépends.

Dans ce modèle, l'industrie est globalement surcapacitaire, mais il n'y a que la firme en place qui ait une capacité non utilisée. À ce stade, cette surcapacité n'est expliquée que par une mauvaise anticipation de l'entrée, la firme en place appliquant sa stratégie optimale de monopole à une date où la possibilité d'une entrée est négligée. L'analyse de cette situation est intéressante étant donné la durée de vie des investissements, et le caractère imprévisible de certains bouleversements pouvant entraîner l'apparition d'entrants potentiels (choc technologique, changement de politique. . .).

Toutefois, ce sous-jeu n'est pas toujours atteint à l'équilibre sous-jeux parfait du jeu initial. C'est l'objet de la section suivante.

1.2.3 Équilibre avec anticipation de l'entrée

On suppose que les coûts de production sont nuls et que la capacité a un coût infinitésimal[3]

Proposition 2 *L'unique équilibre de Nash sous-jeux parfait est déterminé par :* $k_1 = k_2 = D/2$ *et* $p_2 = p_1 = \bar{p}$*.*

Démonstration. La preuve est très semblable à celle de la proposition 1. La capacité k_1 étant coûteuse, on remarque que $k_1 \leqslant D$, toute stratégie telle que

[3]Ce cas limite est celui qui nous intéresse, c'est pourquoi nous le présentons en premier. Nous montrons par la suite que les conclusions obtenues dans ce cas restent valables tant que l'avantage en coûts de la firme en place n'est pas très important.

$k_1 > D$ étant strictement dominée par la stratégie $k_1 = D$. De plus, aucun équilibre n'est tel que $k_1 + k_2 < D$, car alors choisir $k_2 = D - k_1$ (en conservant le prix constant) est une déviation unilatérale profitable de la firme 2. On raisonne ensuite par induction à rebours.

($t = 4$) La firme en place arbitre entre une stratégie d'exclusion de l'entrant [prix $p_1 = p_2$, demande k_1] et une stratégie d'accommodation [prix $p_1 = \bar{p}$, demande $D - k_2$]. Les autres stratégies sont strictement dominées par l'une de ces deux stratégies.

($t = 2$ et $t = 3$) S'agissant du même joueur, on résout ces deux étapes simultanément. Soit la firme entrante fixe $k_2 = D - k_1$ et fixe son prix à $\bar{p}$, soit elle fixe $k_2 > D - k_1$ et force l'accommodation en fixant le prix $\tilde{p}$ qui rend la firme en place indifférente [prix $\tilde{p} = \bar{p}(D - k_2)/k_1 < \bar{p}$, demande k_2]. Le profit dégagé en adoptant cette dernière stratégie vaut $\tilde{p}k_2$, qui est une fonction concave qui atteint son maximum (sans contraintes) en $D/2$. La meilleure réponse de l'entrant est donc d'installer une capacité $k_2 = \max(D - k_1, D/2)$.

($t = 1$) Si $k_1 < D/2$, l'entrant installe une capacité $D - k_1$ et les prix sont égaux au prix maximum $\bar{p}$. Les profits sont donc $\pi_m = \bar{p}k_1$ et $\pi_e = \bar{p}(D - k_1)$. Si $k_1 \geqslant D/2$, il y a accommodation et $\pi_m = \bar{p}D/2$ et $\pi_e = \tilde{p}D/2$. La capacité étant coûteuse, il est strictement dominant pour la firme en place de choisir une capacité $k_1 = D/2$. ∎

Les profits d'équilibre en fonction des différentes valeurs de k_1 se calculent aisément et sont représentés par la figure 1.3. On voit qu'au delà de $D/2$, un investissement en capacité de la part de la firme en place ne crée pas de valeur,

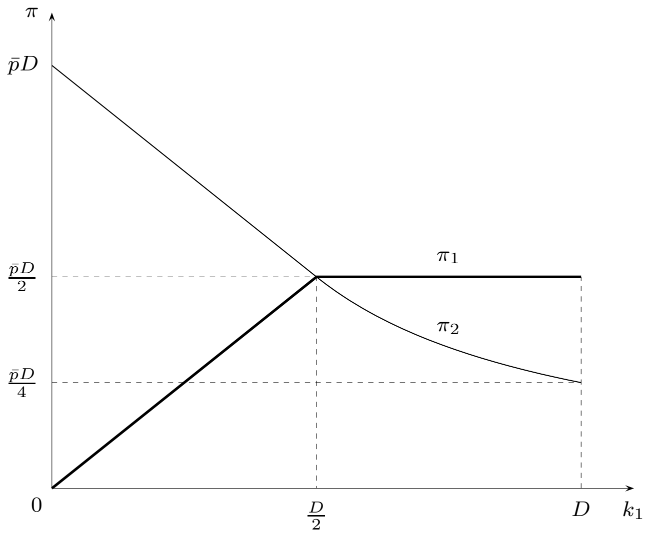

FIG. 1.3 – Profits d'équilibre en fonction de la capacité de la firme en place.

ce qui est naturel puisqu'il s'agit alors de capacité inutilisée. Si cette capacité est coûteuse, il est optimal de choisir une capacité telle qu'il n'y aura pas de surcapacité après l'entrée. Cependant, on observe qu'au delà de ce seuil, si la capacité de la firme en place est bien sans effet sur le profit de la firme en place, il n'en est pas de même sur le profit de la firme entrante, qui continue de chuter. En effet, une plus grande capacité en place force l'entrant à tarifer plus bas afin d'être accommodé, ce qui affecte négativement ses profits. Tout se passe donc comme si, au delà d'un certain seuil, la firme en place cessait d'investir dans de la capacité de production pour investir dans un autre actif qui serait son pouvoir de nuisance, celui-ci augmentant avec son investissement. Ce pouvoir ayant une valeur nulle dans les contextes retenus, il est optimal de ne pas dépasser le seuil $D/2$, mais ce ne sera plus le cas lorsque le pouvoir de nuisance pourra être exploité.

Cette analyse ne tient pas compte des coûts, que ce soient des coûts de production ou des coûts de capacité, et il convient de vérifier qu'elle est robuste à l'introduction de ceux-ci. C'est le but de la proposition 3. On note c_i^p et c_i^k les coûts de production et de capacité de la firme i, $c_i = c_i^p + c_i^k$ le coût total. Ces coûts sont supposés linéaires, tels que $c_i < \bar{p}$. On normalise c_1^p à zéro ($\bar{p}$ désigne alors la marge de la firme en place), et on suppose que $c_2^p > 0$, c'est-à-dire que la firme en place a un avantage en coûts. On a alors :

Proposition 3 *L'équilibre dépend de l'avantage en coûts de la firme en place :*

- *Si $c_1 > c_2/2$, l'équilibre est de la forme : $k_1 = \frac{D}{2}(1+\delta)$, $k_2 = \frac{D}{2}(1-\delta)$, où $\delta = \frac{c_2}{2\bar{p}-c_2} \in [0,1]$;*
- *Si $c_1 < c_2/2$, l'équilibre est de la forme : $k_1 = D$, $k_2 = \frac{D}{2}(1 - c_2/\bar{p})$.*

Démonstration. Tout d'abord, on remarque que pour tout équilibre, la firme entrante produit jusqu'à saturation de sa contrainte de production ($q_2 = k_2$) et il n'y a pas lieu de distinguer les coûts de production et les coûts de capacité ($c_2^p q_2 + c_2^k k_2 = c_2 k_2$). Ce raisonnement n'est pas valable pour la firme en place car elle peut éventuellement être surcapacitaire.

On adapte maintenant la preuve de la proposition 2 :

($t = 4$) Identique à la preuve de la proposition 2, la décision en prix de la firme en place ne dépendant pas des coûts. En particulier, $k_2 \geqslant (D - k_1)$ et l'indifférence de la firme en place est obtenue pour $\tilde{p} = \bar{p}(D - k_2)/k_1 < \bar{p}$.

($t = 2$ et $t = 3$) Pour $k_2 > D - k_1$, le profit $\pi_2 = (\tilde{p} - c_2)k_2$ est concave et maximum en $D/2 - c_2 k_1/2\bar{p}$. La meilleure réponse de l'entrant est donc $k_2^{BR} = \max[D - k_1, D/2 - c_2 k_1/2\bar{p}]$. L'équation $D - k_1 = D/2 - c_2 k_1/2\bar{p}$ donne la solution

$k_1 = D(1+\delta)/2$. On voit qu'au delà de cette valeur, une augmentation de la capacité de la firme en place fait décroître linéairement la capacité installée par l'entrant.

$(t = 1)$ Si $D - k_1 > D/2 - c_2 k_1/2\bar{p}$, $\pi_m = (\bar{p} - c_1)k_1$, et la firme en place a intérêt à augmenter sa capacité, au moins jusqu'à $k_1 = D(1+\delta)/2$. Si $D - k_1 < D/2 - c_2 k_1/2\bar{p}$, $\pi_m = \bar{p}(D - k_2^B R) - c_1 k_1$, qui est une fonction décroissante en k_1 si et seulement si $c_1 > c_2/2$. ■

Une augmentation de la capacité de la firme en place diminue donc la capacité installée par l'entrant, et cet effet est d'autant plus important que la firme en place a un avantage en coûts. Ainsi, on peut avoir affaire à deux types d'équilibres. Le premier correspond à une firme en place ayant un très fort avantage en coûts et choisissant une capacité $k_1 = D$. Cet équilibre renvoie à la proposition 1 et à l'analyse Judo-économique, mais cette fois la surcapacité de la firme en place apparaît comme la décision optimale en accommodation, et non uniquement comme la décision optimale du monopole lorsque celui-ci n'anticipe pas l'entrée. Le deuxième type d'équilibre correspond à des avantages en coûts moins importants. La firme en place choisit alors une capacité telle que l'entrant n'ait pas intérêt à venir la concurrencer sur son marché. Les marchés sont adjacents et ne se superposent pas.

Si on considère que les deux firmes ont des coûts de capacité égaux, la condition pour obtenir un équilibre du deuxième type, $c_1 > c_2/2$, devient $c^k > c_2^p - c_1^p$, c'est-à-dire que l'avantage en coûts de production de la firme en place doit être inférieur au coût de la capacité. C'est le cas que nous retiendrons comme le cas standard, le coût de capacité étant en général, dans les industries de commodités, prépondérant par rapport au coût de production. L'équilibre de la proposition 2, dans lequel les firmes se partagent le marché équitablement, correspond à la limite du cas standard lorsqu'il n'y a pas de coûts, puisque l'on a pris $c_1^p = c_2^p = 0$ et c^k infinitésimal. Ainsi, on écarte le fait que les capacités soient des compléments stratégiques comme explication d'une surcapacité de la firme en place, le coût de la capacité excédentaire étant trop important par rapport à l'effet indirect sur la capacité installée par l'entrant.

Ainsi, dans le cas standard, la firme en place ne surinvestit pas, c'est-à-dire qu'elle ne cherche pas à acquérir le pouvoir de nuisance que lui procure la surcapacité. Cela est dû au fait qu'aucun mécanisme ne permet à la firme en place d'exploiter ce pouvoir de nuisance. La section suivante modifie le modèle en introduisant un tel mécanisme.

1.3 Collusion

Dans cette section, nous montrons comment les firmes surinvestissent si elles anticipent non pas une concurrence à la Bertrand sous contraintes de capacité (comme à la section 1.2) mais une collusion sur les quantités produites.

1.3.1 Le modèle : principales hypothèses

Nous supposons que le coût d'entrée est trop faible pour pouvoir dissuader l'entrée. Ce coût étant supposé irrécupérable, il n'interviendra pas dans le modèle, et nous le normalisons à zéro. Nous supposons initialement que les coûts de production et de capacité sont également nuls. À la section 1.3.4, nous introduirons des coûts non nuls tout en restant dans un cadre dans lequel l'avantage en coûts de la firme en place reste modéré, afin de démontrer la robustesse des résultats obtenus.

Selon les propositions 2 et 3, la firme en place devrait limiter son investissement, et la firme entrante devrait investir de façon à être en mesure de servir uniquement la demande résiduelle. La capacité totale est alors exactement égale à la taille du marché, et les prix sont fixés à $\bar{p}$.

Par rapport au jeu de la section 1.2 représenté par la figure 1.1, nous ajoutons la possibilité d'une négociation au temps $t = 2.5$, c'est-à-dire après que les capacités ont été fixées, mais avant la fixation des prix. Nous écartons la possibilité d'une collusion sur les capacités. Ce choix se justifie par le fait que la capacité est peu flexible, ce qui est une hypothèse clef de l'analyse Judo-économique (en particulier, les firmes n'adaptent pas leurs capacités en fonction des prix observés). De ce fait, il paraît difficile de concevoir des stratégies de punition en capacité venant soutenir une issue collusive, contrairement à ce qui est le cas pour la variable prix. La séquence du jeu est alors la suivante :

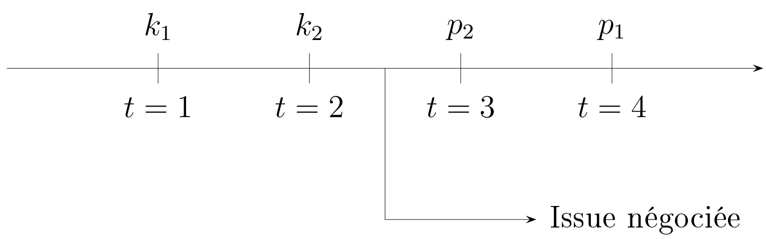

FIG. 1.4 – Séquence du jeu avec négociation.

L'objet de la section suivante est de préciser ce sur quoi porte la négociation, et comment elle est modélisée.

1.3.2 Négociation

Pour modéliser la négociation, nous retenons l'approche normative de Nash (1950). La solution retenue[4] est l'unique solution $N(n_1, n_2)$ du programme :

$$\max_{N \in S} (n_1 - m_1)^{\alpha} (n_2 - m_2)^{1-\alpha} \tag{1.2}$$

où $M(m_1, m_2)$ est le *point de menace*, qui représente le paiement obtenu par les deux parties si la négociation échoue, S est l'ensemble (convexe) des *issues possibles* de la négociation, et le paramètre $\alpha \in [0, 1]$, appelé *pouvoir de négociation*, mesure la capacité à obtenir une part plus ou moins importante du surplus, toutes choses égales par ailleurs.

Nous spécifions maintenant le point de menace et l'ensemble des issues possibles de la négociation pour notre modèle.

Point de menace. Le point de menace est le couple de paiement obtenu à l'unique équilibre en prix du jeu post-négociation. Le fait que cet équilibre soit unique nous dispense de devoir *sélectionner* un équilibre plutôt qu'un autre. Ce point de menace dépend des capacités k_1 et k_2 installées aux instants $t = 1$ et $t = 2$. De ce point de vue, le jeu que l'on considère est une négociation avec point de menace variable, selon la définition donnée dans Selten (1960) : un jeu non-

[4] Nash (1950) démontre qu'il n'y a qu'une solution satisfaisant les axiomes suivants : Pareto-optimalité forte, Rationalité individuelle, Invariance par changement de variable affine croissant, Indépendance par rapport aux alternatives non pertinentes, Dissymétrie (le partage d'une somme 1 avec point de menace $(0, 0)$ aboutit au partage $(\alpha, 1 - \alpha)$).

coopératif précède une négociation de Nash et en détermine le point de menace. Dans cette formulation, si l'on veut que des actions passées servent de base à la négociation, il est primordial qu'elles aient un caractère fortement engageant. Ici, les investissements en capacité de production vérifient bien cette condition.

Issues possibles. Dans notre modèle, la négociation modélise une collusion sur les prix et les parts de marché. Nous supposons que cette collusion est tacite, nous interdisons donc tout flux monétaire entre les deux firmes, qui la rendrait explicite. L'utilité est donc supposée non transferable. L'ensemble des issues négociées possibles (en prix et en quantité) est donné par :

$$C(k_1, k_2) = \{(q_1, q_2, p_1, p_2), q_i \in [0, k_i], p_i \in [0, \bar{p}], q_1 + q_2 \leqslant D\} \tag{1.3}$$

q_i désignant la quantité effectivement produite par la firme i après collusion. L'ensemble des couples de profit atteignables dans l'ensemble $C(k_1, k_2)$ est :

$$S(k_1, k_2) = \{(p_1 q_1, p_2 q_2), (q_1, q_2, p_1, p_2) \in C(k_1, k_2)\} \tag{1.4}$$

Résultats préliminaires. Les trois lemmes suivant sont immédiats :

Lemme 4 *Toute issue favorable de la négociation vérifie $p_1 = p_2 = \bar{p}$.*

Démonstration. Le lemme résulte de l'axiome de Pareto-optimalité de l'issue négociée. À part de marché fixée, une augmentation du prix p_i est favorable à la firme i sans diminuer le profit de l'autre firme. Les prix sont donc égaux au prix maximal $\bar{p}$. ∎

Lemme 5 *Tout équilibre du jeu avec négociation vérifie* $k_1 + k_2 \geqslant D$.

Démonstration. Par l'absurde. Supposons qu'à l'équilibre on a $k_1 + k_2 < D$. Le point de menace lors de la négociation correspond à la situation dans laquelle les deux firmes produisent à capacité et choisissent le prix $\bar{p}$ [profits $(\bar{p}k_1, \bar{p}k_2)$]. Le point de menace maximise donc le profit joint sur $S(k_1, k_2)$. Or, l'issue négociée Pareto-domine le point de menace, ce qui impose des paiements après négociation égaux à $(\bar{p}k_1, \bar{p}k_2)$. Une augmentation de k_1 constitue donc une déviation unilatérale profitable de la firme 1, ce qui est absurde. ■

Lemme 6 *À l'équilibre du jeu, toute issue favorable de la négociation est telle que* $q_1 + q_2 = D$.

Démonstration. Résulte de l'axiome de Pareto-optimalité de l'issue négociée. Supposons que la négociation aboutisse à des quantités telles que $q_1 + q_2 < D$. D'après le lemme 4, les profits après négociation sont donc égaux à $(\bar{p}q_1, \bar{p}q_2)$. D'après le lemme 5, $k_1 + k_2 \geqslant D$, donc l'une des deux firmes (au moins) ne sature pas. Augmenter sa production marginalement Pareto-domine le choix de (q_1, q_2), ce qui est absurde. Donc $q_1 + q_2 \geqslant D$ et comme $q_1 + q_2 \leqslant D$, on a l'égalité $q_1 + q_2 = D$. ■

Les lemmes 4 à 6 permettent de restreindre l'ensemble des issues possibles de la négociation à :

$$\bar{C}(k_1, k_2) = \{(q_1, q_2), q_i \in [0, k_i], q_1 + q_2 = D\} \tag{1.5}$$

$$\bar{S}(k_1, k_2) = \left\{(\bar{p}q_1, \bar{p}q_2), (q_1, q_2) \in \bar{C}(k_1, k_2)\right\} \tag{1.6}$$

On a alors une image plus précise de ce en quoi consiste la négociation. Tout d'abord, la négociation n'a de sens que si les firmes sont conjointement surcapacitaires ($k_1 + k_2 \geqslant D$), ce qui sera le cas à l'équilibre (lemme 5). Le point de menace est alors $(\bar{p}(D - k_2), \tilde{p}k_2)$. La collusion va consister, en partant de ce point de menace, à accroître le prix de l'entrant de $\tilde{p}$ à $\bar{p}$, et en contrepartie à restreindre la production de la firme entrante dans une proportion qui va dépendre du pouvoir de négociation des parties.

La figure 1.5 représente graphiquement la négociation dans le plan des couples de profits (π_1, π_2). Le point de menace est représenté par le point M. L'ensemble $\bar{S}(k_1, k_2)$ des issues possibles de la négociation est représenté par le segment [AB]. Le point A correspond au cas où la firme 2 ne restreint pas du tout sa production [profits $(\bar{p}(D - k_2), \bar{p}k_2)$] et le point B au cas où elle restreint sa production au maximum [profits $(\bar{p}k_1, \bar{p}(D - k_1))$].

La proposition suivante indique qu'en l'absence de coûts, il n'y a pas de différence fondamentale entre considérer que la négociation modélise une collusion sur les prix et les quantités produites, ou bien le rachat d'une firme par l'autre.

Proposition 7 *En l'absence de coûts, une négociation avec ou sans transferts monétaires conduit aux mêmes profits d'équilibre.*

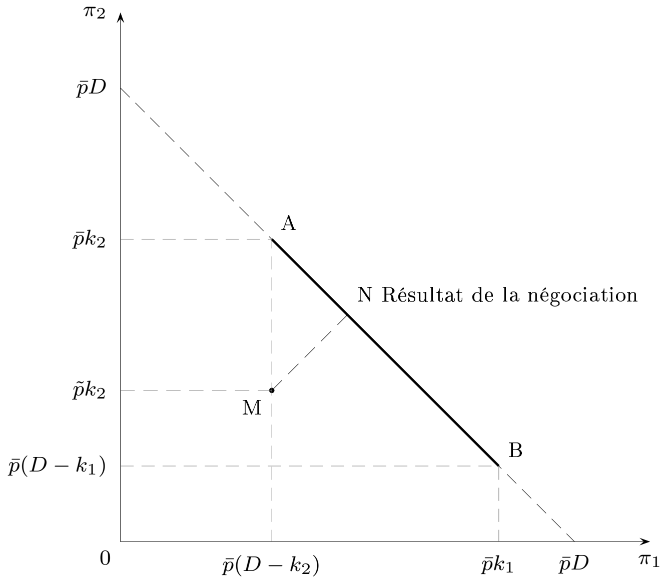

FIG. 1.5 – Négociation de Nash à capacités fixées.

Démonstration. Dans le cas d'un rachat, une firme se retire (laissant sa capacité de production à l'autre firme) en échange d'un certain montant. Le point de menace est le même que dans le cas de la collusion $M(\bar{p}(D-k_2), \tilde{p}k_2)$. Le rachat permet de récupérer une position de monopole, avec une capacité de production k_1+k_2, et donc un profit $\bar{p}\min(k_1+k_2, D)$. On démontre que $k_1+k_2 \geqslant D$ (démonstration identique à celle du lemme 5). La négociation d'achat revient donc à choisir une façon de partager la somme $\bar{p}D$, c'est-à-dire à choisir une issue dans $S_a = (n_1, \bar{p}D - n_1), n_1 \in \mathbb{R}$. On a $\bar{S}(k_1,k_2) \subset S_a$. Si la solution de la négociation d'achat N_a vérifie $N_a \in \bar{S}(k_1,k_2)$, alors les deux négociations sont équivalentes et $N = N_a$, d'après l'axiome d'indépendance vis-à-vis des alternatives non pertinentes. Si $N_a \notin \bar{S}(k_1,k_2)$, nécessairement $N = (\bar{p}k_1, \bar{p}(D-k_1))$. Toutes les fonctions considérées étant continues (en particulier la fonction de réaction de la firme 2 comme nous le verrons par la suite), il existe un voisinage de k_1 tel que l'issue de la négociation reste $N = (\bar{p}k_1, \bar{p}(D - k_1))$, et donc une augmentation marginale de k_1 est une déviation unilatérale profitable de la firme 1, ce qui est impossible à l'équilibre. ■

Par la suite, il suffira de maximiser le produit de Nash sur l'ensemble S_a et de vérifier que l'issue de la négociation est bien dans $\bar{S}(k_1, k_2)$, ce qui sera effectivement le cas. Une condition suffisante (non nécessaire) est d'avoir $\tilde{p}k_2 \geqslant \bar{p}(D - k_1)$ (*i.e.* $|k_1 - D/2| \geqslant |k_2 - D/2|$), l'ensemble des issues individuellement rationnelles étant alors identiques pour les deux types de négociation (voir figure 1.5).

1.3.3 Pouvoir de négociation et surinvestissement

Supposons que le pouvoir de négociation soit entièrement dans les mains de la firme en place ($\alpha = 1$). On a la proposition suivante :

Proposition 8 *L'équilibre du jeu est donné par : $k_1 = D$, $k_2 = D/2$, et la négociation aboutit à $q_1 = 3D/4$, $q_2 = D/4$, $p_1 = p_2 = \bar{p}$. Les profits sont $(3\bar{p}D/4, \bar{p}D/4)$.*

Démonstration. Par induction à rebours :

($t = 4$ et $t = 3$) Équilibre en prix identique à celui de la proposition 1.

($t = 2.5$) Pendant la négociation, la firme 2 est mise à son utilité de réservation, qui est son paiement de menace. q_2 est solution de $\bar{p}q_2 = \tilde{p}k_2$ et $q_1 = D - q_2$.

($t = 2$) La firme 2 va donc maximiser son paiement de menace $\tilde{p}k_2$, elle adopte donc le même comportement maximisateur du jeu sans négociation (cf. proposition 1). D'où $k_2 = D/2$.

($t = 1$) Le paiement de la firme en place vaut $\pi_1 = \bar{p}q_1 = \bar{p}D(1 - D/4k_1)$, qui est strictement croissant avec k_1. D'où $k_1 = D$. L'issue de la négociation est bien dans $\bar{S}(k_1 = D, k2 = D/2)$. ■

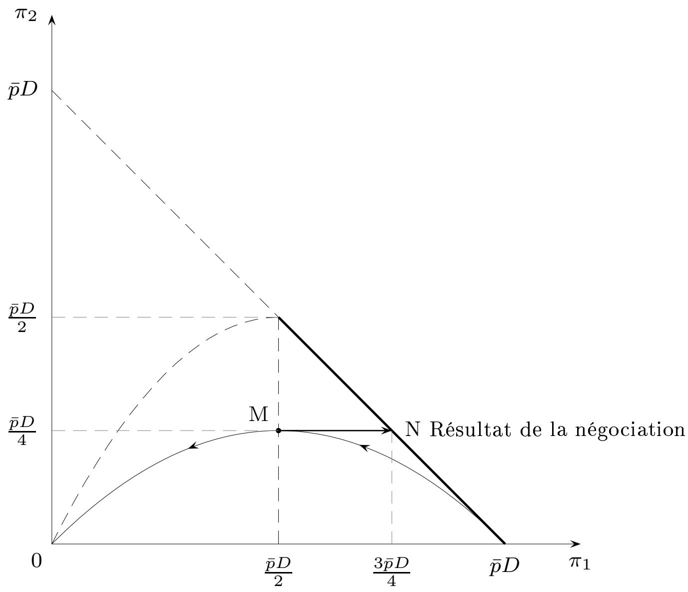

FIG. 1.6 – Équilibre pour $\alpha = 1$.

On voit que lorsque la firme en place a tout le pouvoir de négociation, elle surinvestit en capacité de façon à tirer parti de son pouvoir de nuisance : en surinvestissant, la firme en place diminue le profit de l'entrant (cf. section 1.2.3 et la figure 1.3), ce qui abaisse son point de menace, et augmente le profit de la firme en place lors de la négociation. Cette situation est représentée sur la figure 1.6.

Aux sections précédentes, nous avons vu des situations dans lesquelles soit il n'y avait pas de surcapacité de l'industrie, soit cette surcapacité ne concernait que la firme en place. Dans ce modèle, bien que seule la firme en place ait surinvesti, on remarque qu'après collusion, les deux firmes sont surcapacitaires. Dans le modèle de concurrence que l'on a choisi, cette surcapacité bilatérale associée à des prix élevés peut donc indiquer une collusion, qui est évidemment néfaste aux consommateurs.

La proposition suivante indique comment évolue l'équilibre lorsque le pouvoir de négociation de l'entrant augmente.

Proposition 9 *Soit $\alpha \in [1/2, 1]$ le pouvoir de négociation de la firme en place. L'équilibre du jeu est le suivant : $k_1 = D$, $k_2 = D/2\alpha$, et la négociation aboutit à $q_1 = D(1 - 1/4\alpha)$, $q_2 = D/4\alpha$, $p_1 = p_2 = \bar{p}$.*

Démonstration. ($t = 2.5$) Le point de menace lors de la négociation est donné par $M(m_1 = \bar{p}(D-k_2), m_2 = \tilde{p}k_2)$. L'issue négociée $N(n_1, n_2)$ est l'unique solution du programme :

$$\max_{n_1+n_2=\bar{p}D}(n_1 - m_1)^{\alpha}(n_2 - m_2)^{1-\alpha} \tag{1.7}$$

On trouve :

$$n_1 = \bar{p}(\alpha k_2(D - k_2) - Dk_1 + k_1k_2(1 - \alpha))/k_1 \tag{1.8}$$

$$n_2 = \bar{p}k_2(\alpha D - \alpha k_2 + k_1(1 - \alpha))/k_1 \tag{1.9}$$

($t = 2$) Le profit n_2 est concave en k_2 et maximal pour $k_2^{BR} = D/2 + k_1(1 - \alpha)/2\alpha$, qui vérifie bien la contrainte $k_2^{BR} \leqslant D$ puisque $k_1 \leqslant D$ et $\alpha \geqslant 1/2$.

($t = 1$) En remplaçant k_2 par k_2^{BR} dans l'équation 1.8, et en dérivant par rapport à k_1, on trouve :

$$\frac{\partial n_1}{\partial k_1} = \frac{\alpha^2 d^2 - (1 - \alpha)^2 k_1^2}{4k_1^2\alpha} \tag{1.10}$$

dérivée qui est strictement positive sur $[0, D]$. On en déduit que $k_1 = D$, puis que $k_2 = D/2\alpha$. ■

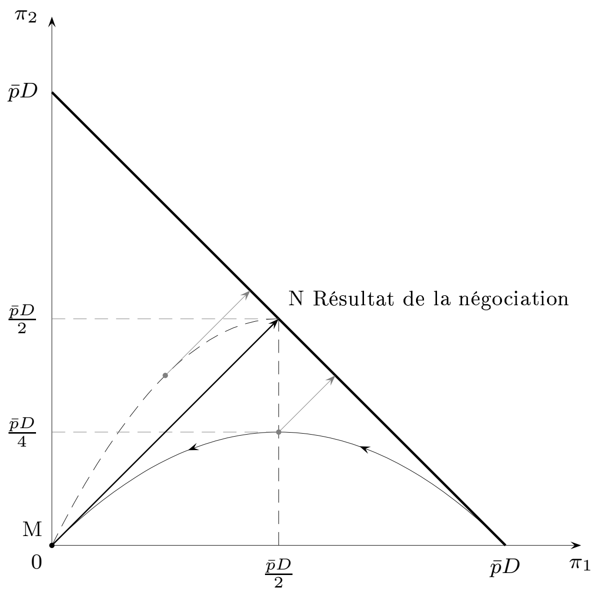

FIG. 1.7 – Équilibre pour $\alpha = 1/2$.

Plus le pouvoir de négociation de l'entrant est important, plus il surinvestit, parce qu'il est en mesure d'exploiter davantage son pouvoir de nuisance. Lorsque les pouvoirs de négociation sont égaux, les deux firmes ont une capacité maximale de D. Après négociation, les productions sont égales à $D/2$, on retrouve donc les mêmes profits que dans le cas sans négociation (et donc sans surinvestissement). Le surinvestissement n'est donc pas productif, mais il permet à la firme de s'assurer qu'elle ne sera pas la seule à ne pas surinvestir, ce qui serait moins profitable. La figure 1.7 représente le cas limite $\alpha = 1/2$. On a représenté en grisé le résultat de la négociation en cas d'investissement unilatéral d'une firme. Lorsque la capacité est coûteuse, le jeu prend alors la forme d'un dilemme du prisonnier. C'est l'objet de la section suivante.

1.3.4 Introduction des coûts de capacité et de production

Nous introduisons dans cette section des coûts de capacité et de production au modèle précédent. Cette section se situe donc dans le même cadre que la proposition 3 de la section 1.2, qui établit l'équilibre en accommodation en présence de coûts. On se place dans le cas standard dans lequel l'avantage en coûts de la firme en place n'est pas trop important. On rappelle que l'on a, avec les notations de la proposition 3, si $c_2/2 < c_1 < \bar{p}$, $k_1 = D(1+\delta)/2$, $k_2 = D(1-\delta)/2$, où $c_i = c_i^p + c_i^k$, $c_1^p = 0$ et $\delta = c_2/(2\bar{p} - c_2)$.

La distinction entre coûts de capacité et de production est dans cette section fondamentale (ce qui n'était pas le cas dans la section 1.2) pour au moins deux raisons : d'une part, les firmes ne produisent pas jusqu'à saturer leur capacité, y compris l'entrant, or le coût de production n'est payé qu'à hauteur de la quantité produite, contrairement au coût de capacité ; d'autre part, le coût de la capacité est engagé avant la négociation, et n'est donc pas recouvrable lors de celle-ci, contrairement au coût de production.

Coût de capacité

On considère que les coûts de capacité c_1^k et c_2^k sont positifs ou nuls, qu'il n'y a pas de coût de production ($c_2^p = 0$). Comme nous venons de le dire, les coûts de capacité, une fois encourus, ne sont plus recouvrables, et n'interviennent donc pas dans la négociation. Celle-ci est donc identique au cas précédent (section 1.3.3). On s'attend donc au même phénomène que précédemment, les firmes ayant tendance à surinvestir pour être en meilleure position lors de la négociation, et ce d'autant plus que leur pouvoir de négociation augmente. Cependant, ce phénomène est ici tempéré par la présence de coûts de capacité. La proposition suivante et son corollaire traduisent cette idée.

On pose :

$$\bar{c} = \frac{\bar{p}^2(2\alpha - 1) + c_2^{k2}}{4\bar{p}\alpha} \tag{1.11}$$

$$\bar{\bar{c}} = \frac{\bar{p}^2(2\alpha - 1) + (\bar{p} - c_2^k)^2 + \bar{p}c_2^k(1-\alpha)}{2\bar{p}\alpha} \tag{1.12}$$

$$u = (1-\alpha)^2 - \frac{c_2^{k2}}{\bar{p}} + \frac{4c_1^k\alpha}{\bar{p}} \tag{1.13}$$

Proposition 10 *On a $0 \leqslant \bar{c} \leqslant \bar{\bar{c}} \leqslant \bar{p}$. L'équilibre du jeu est donné par :*

si $c_1^k \in [0, \bar{c}]$: $\quad k_1 = D \qquad k_2 = \frac{D}{2\alpha}(1 - c_2^k/\bar{p})$

si $c_1^k \in [\bar{c}, \bar{\bar{c}}]$: $\quad k_1 = \frac{\alpha D}{\sqrt{u}} \qquad k_2 = \frac{D}{2\sqrt{u}}(1 - \alpha + \sqrt{u} - c_2^k/\bar{p})$

si $c_1^k \in [\bar{\bar{c}}, \bar{p}]$: $\quad k_1 = \frac{\alpha D}{1+\alpha - c_2^k/\bar{p}} \qquad k_2 = D - k_1$

Cette proposition admet le corollaire suivant, dans le cas où les coûts de capacité sont égaux pour les deux firmes. On peut par exemple imaginer que l'investissement en capacité consiste à acheter ou à faire construire une usine d'une certaine taille, et que les deux firmes payent des usines identiques au même prix. On a :

Corollaire 11 *Soit $\tilde{c} = (2\alpha - \sqrt{4\alpha^2 - 2\alpha + 1})\bar{p}$ et $\tilde{\tilde{c}} = (3\alpha/2 + 1/2 - 1/2\sqrt{(}9\alpha^2 - 2\alpha + 1))\bar{p}$. On a $0 \leqslant \tilde{c} \leqslant 1/2 \leqslant \tilde{\tilde{c}} \leqslant \bar{p}$. Si $c_1^k = c_2^k = c$, l'équilibre est donné par :*

$$
\begin{array}{lll}
\textit{si } c \in [0, \tilde{c}] : & k_1 = D & k_2 = \frac{D}{2\alpha}(1 - c/\bar{p}) \\
\textit{si } c \in [\tilde{c}, \tilde{\tilde{c}}] : & k_1 = \frac{\alpha D}{\sqrt{u}} & k_2 = \frac{D}{2\sqrt{u}}(1 - \alpha + \sqrt{u} - c/\bar{p}) \\
\textit{si } c \in [\tilde{\tilde{c}}, \bar{p}] : & k_1 = \frac{\alpha D}{1+\alpha - c/\bar{p}} & k_2 = D - k_1
\end{array}
$$

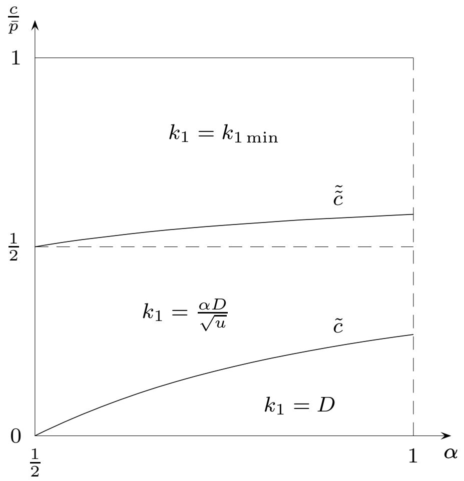

FIG. 1.8 – Équilibre en fonction de c et de α.

Démonstration. Les étapes ($t = 2.5, 3, 4$) sont identiques à celles de la preuve de la proposition 9. Les expressions de n_1 et n_2 sont données par les équations 1.8 et 1.9. Ces équations sont valables tant que $k_2 \geqslant D - k_1$, et on sait que cette inégalité sera vérifiée à l'équilibre (lemme 5).

($t = 2$) La firme 2 choisit une capacité qui égalise coût et profit marginal $\partial n_2 / \partial k_2 = c_2^k$. On trouve :

$$k_2^{BR} = D/2 + k_1(1 - \alpha - c_2^k/\bar{p})/2\alpha \tag{1.14}$$

qui vérifie bien la contrainte $k_2^{BR} \leqslant D$. L'inéquation $k_2^{BR} \geqslant D - k_1$ se résout en

$k_1 \geqslant k_{1\,\min} = D\alpha/(1+\alpha-c_2^k/\bar{p})$. Si $k_1 < k_{1\,\min}$, la meilleure réponse de l'entrant est $k_2^{BR} = D - k_1$.

($t = 1$) Tout d'abord, si $k_1 < k_{1\,\min}$, $k_2^{BR} = D - k_1$ et donc $n_1 = m_1 = \bar{p}k_1$. Une augmentation marginale de k_1 est alors une déviation unilatérale profitable pour la firme 1 (puisque $\bar{p} > c_1^k$). Donc $k_1 \geqslant k_{1\,\min}$. On remplace k_2 par k_2^{BR} (équation 1.14) dans n_1. On vérifie que pour $k_1 \geqslant k_{1\,\min}$ on a $n_1 \leqslant \bar{p}k_1$: cela nous assure[5] que $N \in \bar{S}(k_1, k_2^{BR})$ pour tout k_1.

On pose $P = \partial n_1/\partial k_1 - c_1^k$ et on résout $P = 0$. Il s'agit d'un polynôme d'ordre 2, et $P(0) = \bar{p} - c_1^k > 0$. Les deux racines, lorsqu'elles existent, sont données par $\pm\alpha D/\sqrt{u}$, u étant donné à l'équation 1.13. Quand $u \leqslant 0$, P est de signe constant, le profit est donc strictement croissant avec k_1, d'où $k_1 = D$. Quand $u \in]0, \alpha^2]$, l'optimum sur $[0, +\infty[$ est atteint en $\alpha D/\sqrt{u} \geqslant D$, d'où $k_1 = D$. Quand $u \in [\alpha^2, (1+\alpha-c_2^k/\bar{p})^2]$, on a $k_1 = D\alpha/\sqrt{u} \in [k_{1\,\min}, D]$. Quand $u > (1+\alpha-c_2^k/\bar{p})^2$, $\alpha D/\sqrt{u} < k_{1\,\min}$, le choix optimal est donc $k_1 = k_{1\,\min}$.

La fonction u étant une fonction linéaire croissante de c_1^k, les bornes α^2 et $(1+\alpha-c_2^k/\bar{p})^2$ en u donnent les deux bornes $\bar{c}$ et $\bar{\bar{c}}$ en c_1^k données aux équations 1.11 et 1.12. Trivialement, $0 \leqslant \bar{c} \leqslant \bar{\bar{c}}$. Enfin, $\bar{\bar{c}}$ est une fonction convexe de c_2^k, son maximum est atteint en 0 ou en $\bar{p}$: en 0, on trouve $\bar{\bar{c}} = \bar{p}$ et en $\bar{p}$, $\bar{\bar{c}} = \bar{p}/2$. Donc $\bar{\bar{c}} \leqslant \bar{p}$.

Le corollaire découle directement de la proposition en posant $c_1^k = c_2^k = c$ et en isolant c dans les expressions de $\bar{c}$ et $\bar{\bar{c}}$. ■

La proposition 10 et le corollaire 11 permettent de confirmer la robustesse des

[5] Une fois encore, il y a équivalence entre rachat et collusion, l'issue négociée dans le cadre d'un rachat étant toujours atteignable en colludant.

conclusions de la section 1.3.3 à l'introduction de coûts de capacité. Tant que les coûts de capacité ne sont pas trop élevés, on observe un surinvestissement et une surcapacité de production, et ce au niveau de l'industrie et au niveau de chaque firme. La capacité étant coûteuse, l'unique équilibre est cette fois strictement Pareto-dominé par une situation sans surinvestissement. On est donc face à un dilemme du prisonnier, qui résulte de l'incapacité des firmes à s'engager à ne pas surinvestir. Notons que les deux firmes gagneraient à s'engager à ne pas colluder sur les quantités, mais cet engagement n'est pas crédible car la collusion est profitable *ex post*.

Lorsque les coûts de capacité augmentent, l'avantage que procure un surinvestissement lors de la négociation est contrebalancé par le coût de celui-ci, et finalement, pour un coût de capacité élevé ($c \geqslant \bar{\bar{c}}$), le surinvestissement disparaît de l'industrie.

Coûts de production

Cette section adopte le point de vue complémentaire de la section précédente. On considère que les coûts de production sont positifs ou nuls ($c_2^p \geqslant 0$, c_1^p étant toujours normalisé à 0), et pas de coût de capacité ($c_2^k = 0$).

Les coûts de production étant encourus uniquement lorsque la production a lieu, c'est-à-dire après la négociation, ils interviennent dans la négociation, et ce à deux niveaux. Tout d'abord, le point de menace de la firme entrante est abaissé du fait de son désavantage en coûts ($m_2 = (\tilde{p} - c_2^p)k_2$). Cet effet indique de façon non surprenante qu'un entrant inefficace sera en moins bonne posture pour négocier qu'un entrant efficace.

Le deuxième effet est plus intéressant et affecte l'ensemble des issues possibles de la négociation. On a :

$$\bar{C}(k_1, k_2) = \{(q_1, q_2), q_i \in [0, k_i], q_1 + q_2 = D\} \tag{1.15}$$

$$\bar{S}(k_1, k_2) = \left\{(\bar{p}q_1, (\bar{p} - c_2^p)q_2), (q_1, q_2) \in \bar{C}(k_1, k_2)\right\} \tag{1.16}$$

Il y a donc un inefficacité due à une allocation de la production sous-optimale entre les deux firmes. En effet, il serait optimal de produire à capacité avec l'usine la plus efficace, avant de commencer à produire avec l'autre usine. Si $k_1 = D$, cette solution revient à obtenir de la firme inefficace de se retirer complètement. Une telle issue n'est pas atteignable dans une négociation sans transferts monétaires, car le seul moyen pour la firme d'obtenir une part du profit partagé est de produire une quantité positive, ce qui détruit de la valeur. La présence de coûts de production constitue donc un élément différenciant une collusion tacite sur les quantités et les prix, et une négociation avec transferts monétaires (par exemple un rachat), cette dernière permettant une allocation optimale de la production. Cette distinction n'était pas apparue dans les sections précédentes.

Mis à part ces deux phénomènes, le cas avec coûts de production se traite de façon identique au cas sans coûts, et les résultats obtenus relativement au surinvestissement des firmes est équivalent.

1.4 Signal par la capacité

Dans cette section, nous montrons comment, dans un contexte d'asymétrie d'information sur les coûts de production, une firme entrante peut signaler au marché financier qu'elle a des coûts de production faibles, en s'engageant à installer une capacité supérieure à la capacité qui serait optimale en information parfaite.

1.4.1 Introduction

Supposons qu'il y ait plusieurs types d'entrants potentiels se distinguant par leurs coûts de production. Pour simplifier, nous considérons qu'il n'y a que deux catégories d'entrants : les entrants *efficaces* qui ont des coûts de production faibles, et des entrants *inefficaces* qui ont des coûts de production plus élevés. Une firme entrante est la seule à connaître son type, et ni la firme en place, ni les bailleurs de fonds ne sont capables de distinguer *a priori* une firme efficace d'une firme inefficace.

Dans ce contexte d'asymétrie d'information, une firme efficace peut vouloir se distinguer d'une firme inefficace aux yeux des autres parties, en adoptant une stratégie qui révèle son type. Nous reviendrons brièvement sur la façon dont est classiquement modélisée cette situation dans les jeux de signal.

En admettant qu'une stratégie de signal soit optimale, un constat s'impose : avant l'entrée sur le marché, les moyens dont dispose une firme pour se signaler sont extrêmement restreints. Notamment, elle n'est pas en mesure de signaler ses coûts par une stratégie de prix limite (ou de façon équivalente par une production limite) comme le fait la firme en place dans le modèle de Milgrom et Roberts

(1982). Les moyens dont elle dispose se limitent aux décisions engageantes prises avant l'entrée. On retiendra parmi celles-ci le choix de la structure financière qui fait l'objet du modèle de Poitevin (1989), et le choix de la capacité de production installée, qui fait l'objet de cette section[6].

Le concept approprié à la résolution des modèles de signal (c'est-à-dire des jeux à information incomplète dans lesquels les joueurs peuvent jouer séquentiellement) est le concept d'équilibre bayésien parfait (PBE) introduit par Harsanyi (1967). Les joueurs non informés ont des croyances sur les types de tous les joueurs, ces croyances pouvant dépendre des actions observées. Comme dans les jeux bayésiens en général, les croyances sont supposées être d'ordre 1, c'est-à-dire que les croyances de tous les joueurs sont une connaissance commune. L'équilibre bayésien parfait est un ensemble de stratégies et de croyances qui doit vérifier les conditions suivantes :

Condition de rationalité sur les stratégies : la stratégie de chaque joueur doit être, selon sa croyance, une meilleure réponse aux stratégies (fixées) des autres joueurs. C'est la notion classique d'équilibre de Nash.

Condition de rationalité sur les croyances : les croyances le long de la trajectoire d'équilibre (induite par les stratégies) doivent dériver d'une croyance commune (loi de probabilité *ex ante* sur les types) selon la loi de Bayes de révision des croyances.

Cette définition est cyclique, les croyances imposant des contraintes sur les stratégies qui à leur tour imposent des conditions sur les croyances. C'est la raison pour laquelle il n'est pas possible d'appliquer une logique d'induction à rebours

[6]D'autres décisions qui précèdent l'entrée pourraient être retenues, comme un choix de localisation ou un choix de technologie de production. Il convient aussi de tenir compte du coût de la stratégie de signal pour évaluer le réalisme d'un choix particulier de mode de signal.

pour déterminer un équilibre bayésien parfait. Il n'y a d'ailleurs pas de méthode générale permettant de trouver les équilibres bayésiens parfaits de façon systématique. D'autre part, on remarque que cette définition n'impose aucune contrainte sur les croyances hors de la trajectoire d'équilibre, qui pourtant déterminent fortement la rationalité d'une stratégie (première condition). On a donc en général une infinité d'équilibres, et les raffinements permettant de sélectionner certains équilibres consistent pour la plupart à imposer des contraintes sur les croyances hors équilibre.

L'équilibre est dit *séparateur* si les joueurs non informés peuvent inférer parfaitement le type de tous les joueurs au vu des actions passées. Au contraire, l'équilibre est dit *mélangeant* si les actions ne transmettent aucune information, les joueurs conservant alors leurs croyances initiales. Entre ces deux extrêmes, il peut exister des équilibres révélant partiellement l'information. Dans notre modèle, nous limitons notre analyse à la recherche d'un équilibre séparateur, le but étant précisément que la firme efficace révèle son type.

1.4.2 Le modèle : principales hypothèses

Nous reprenons le modèle de la section 1.2 et ses notations : demande inélastique avec prix de réservation (D et $\bar{p}$). La firme en place a une capacité de production suffisante pour couvrir tout le marché ($k_1 = D$), et ses coûts marginaux de production sont normalisés à 0. L'entrant, s'il parvient à entrer sur le marché, fixe sa capacité k_2, et s'en suit le jeu séquentiel en prix de façon identique à la section 1.2 : l'entrant fixe son prix p_2 puis la firme en place son prix p_1.

L'entrant peut être de deux types : le type *efficace* L a un coût marginal de production faible, que l'on prend constant et égal à celui de la firme en place pour simplifier ($c_L = 0$) ; le type *inefficace* H a un coût marginal de production élevé ($c_H > 0$). L'entrant supporte également un coût fixe de production F_p qui est supposé être le même pour les deux types d'entrants. Le coût fixe de production de la firme en place n'intervient pas dans les résultats, on le normalise à 0.

Les profits opérationnels des deux firmes sont calculés comme à la section 1.2. Le symbole ($\bullet$) désigne le type (H ou L) de l'entrant. On a :

$$\pi_m(k_2, p_1, p_2) = \begin{cases} p_1 D & \text{si } p_2 \geqslant p_1 \\ p_1(D - k_2) & \text{si } p_2 < p_1 \end{cases} \tag{1.17}$$

$$\pi_\bullet(k_2, p_1, p_2) = \begin{cases} -F_p & \text{si } p_2 \geqslant p_1 \\ (p_2 - c_\bullet)k_2 - F_p & \text{si } p_2 < p_1 \end{cases} \tag{1.18}$$

On suppose qu'il existe un coût d'entrée noté F_e, qui représente ici essentiellement le coût d'installation de la capacité. On suppose que ce coût est indépendant de la capacité installée, d'une part parce que cette hypothèse n'affecte pas les résultats obtenus, d'autre part parce qu'il permet d'isoler l'effet de la capacité sur la production, sans que vienne s'ajouter un effet dû au coût d'installation.

On suppose que pour financer le coût d'entrée, l'entrant doit faire appel à des bailleurs de fonds. Comme dans Poitevin (1989), on suppose que seule la firme entrante connaît son type, c'est-à-dire qu'il y a une asymétrie d'information entre l'entrant et les bailleurs de fonds. Le fait que la firme en place connaisse ou non le type de l'entrant ne joue aucun rôle dans notre modèle (nous verrons que la stratégie de la firme en place ne dépend pas du coût de production de l'entrant, mais uniquement de sa capacité). Le signal se fait donc vis-à-vis du marché financier.

Pour bien distinguer le mode de signal dans notre modèle de celui mis en lumière dans Poitevin (1989), nous supposons que l'entrant se finance uniquement par actions. Dans Poitevin (1989), le type *efficace* se signale en adoptant une structure financière mêlant financement par action et par dette, l'endettement induisant une prédation de la part de la firme en place, et donc un coût que seul le type efficace est capable de supporter. En nous limitant à un financement exclusivement par actions, nous supprimons le phénomène de révélation par la structure financière. Notre modèle se place donc orthogonalement par rapport à celui de Poitevin (1989).

Nous introduisons donc un troisième joueur, que nous appellerons "investisseur", qui décide de financer ou non le coût d'entrée, et reçoit en échange N_i actions de la firme entrante, devenant de ce fait actionnaire de la firme. Pour l'instant, nous considérons la variable N_i comme exogène[7]. Si N_e désigne le nombre initial d'actions avant l'augmentation de capital, l'actionnaire-manager initial reçoit une part $a = N_e/(N_e + N_i)$ des profits réalisés par l'entrant, et le nouvel actionnaire obtient une part $(1 - a)$. Lorsque le financement n'est pas accordé, la firme en place conserve ses profits de monopole $(\bar{p}D)$ et les profits des autres joueurs sont

[7] Cette variable sera endogénéisée par la suite.

nuls. Dans le cas contraire, les profits totaux des joueurs sont donnés par :

$$\text{firme en place } m \quad : \quad \pi_m(k_2, p_1, p_2) \tag{1.19}$$

$$\text{firme entrante } e \quad : \quad a\pi_\bullet(k_2, p_1, p_2) \tag{1.20}$$

$$\text{investisseur } i \quad : \quad (1-a)\pi_\bullet(k_2, p_1, p_2) - F_e \tag{1.21}$$

La séquence du jeu est représentée à la figure 1.9 : la nature détermine le type de l'entrant, celui-ci s'engage à installer une capacité k_2 (le cas $k_2 = 0$ correspond au refus d'entrer de la part de la firme 2, et dans ce cas, le coût fixe d'entrée n'est pas encouru), le nouvel actionnaire décide de financer ou non le coût d'entrée F_e. S'il accepte de financer l'entrée, la capacité de production est installée, l'entrant fixe son prix p_2, et la firme en place décide d'aligner ou non son prix sur celui de l'entrant.

1.4.3 Équilibre bayésien parfait séparateur

Équilibre du sous-jeu en prix

On résout ici les deux dernières étapes du jeu. On a la proposition suivante :

Proposition 12 *Le profit de l'entrant selon son type ($\bullet$) obtenu à l'équilibre en prix est donné par :*

$$\tilde{\pi}_\bullet(k_2) = \max[(\tilde{p} - c_\bullet)k_2, 0] - F_p \tag{1.22}$$

Démonstration. Une fois la firme 2 entrée sur le marché avec une capacité strictement positive, il n'y a plus de problème informationnel : le paiement de la firme en place ne dépend que de la capacité installée k_2 et du prix p_2 fixé

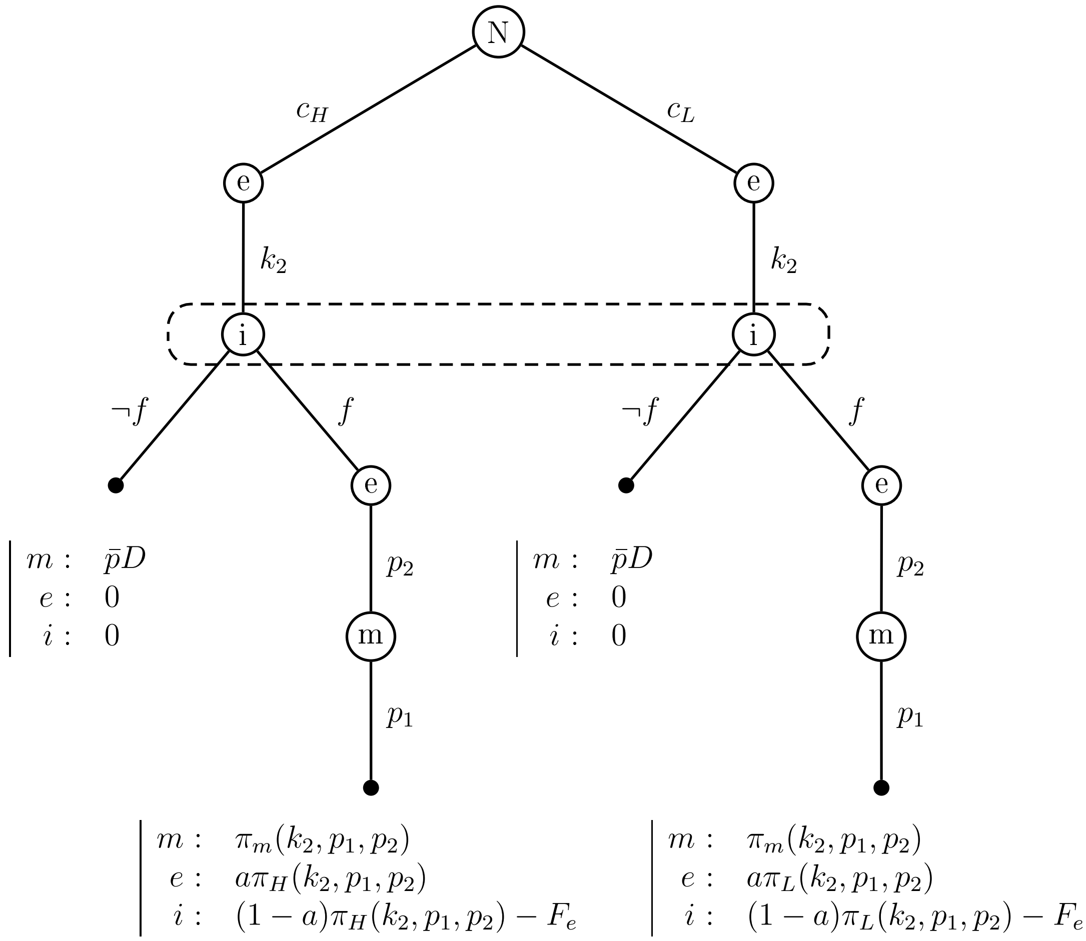

FIG. 1.9 – Séquence du jeu.

par l'entrant. Les deux dernières étapes du jeu se résolvent donc par induction à rebours, et l'équilibre en prix est quasiment le même que dans la section 1.2 : l'entrant fixe sont prix suffisamment bas pour être accommodée, en rendant la firme en place indifférente entre servir tout le marché en pratiquant le prix de l'entrant, ou ne servir que la demande résiduelle au prix $\bar{p}$. Cela est obtenu pour le prix $\tilde{p} = \bar{p}(D - k_2)/D$ que l'on a déjà obtenu à l'équation 1.1. Si $\tilde{p} \geqslant c_H$, la firme en place fixe sont prix à $\bar{p}$ et sert la demande résiduelle $D - k_2$. Si $\tilde{p} < c_H$, alors l'entrant vend à perte, et il est préférable pour lui de ne pas produire en pratiquant le prix $p_2 = \bar{p}$. D'où le paiement d'équilibre. ■

On peut alors faire l'hypothèse suivante :

Hypothèse 13 $\tilde{\pi}_H(k_2) - F_e < 0$ *pour tout* $k_2 \in [0, D]$.

On suppose donc que la firme inefficace n'est jamais rentable. En information parfaite, l'entrant inefficace n'est donc jamais financé. Au contraire, on suppose :

Hypothèse 14 $\tilde{\pi}_L(D/2) - F_e > 0$.

c'est-à-dire que l'entrant efficace est rentable pour au moins une valeur de k_2, si bien qu'il serait financé en information parfaite et installerait une capacité optimale de $D/2$. Le but des hypothèses 13 et 14 est d'accentuer la nécessité pour la firme efficace de se signaler. L'hypothèse 14 impose une borne supérieure aux coûts d'entrée, il ne doivent pas être supérieurs au profit maximum que peut réaliser la firme efficace, soit $F_e < \bar{F}_e = \bar{p}D/4$.

L'hypothèse 13 n'est pas incompatible avec le fait que l'entrant inefficace désire entrer sur le marché, celui-ci ne prenant en considération que les profits liés à la production. On fait l'hypothèse suivante :

Hypothèse 15 $\tilde{\pi}_H(D/2) > 0$.

qui suppose que l'entrée est profitable pour l'entrant inefficace pour une certaine plage de capacité, notamment la capacité optimale de l'entrant efficace.

Conditions d'existence d'un équilibre séparateur

Dans notre modèle, nous restreignons notre étude uniquement aux équilibres *séparateurs*[8]. Dans tout équilibre séparateur, l'investisseur infère parfaitement le type de l'entrant à partir de l'engagement en capacité k_2 de celui-ci. L'entrant inefficace n'est donc jamais financé et son profit est nul. On a alors la proposition suivante :

Proposition 16 *Un équilibre séparateur dans lequel l'entrant efficace est financé vérifie nécessairement les conditions suivantes :*

$$\pi_L(k_2^L, p_1^{BR}, p_2^L) > 0 \quad (1.23)$$

$$(1-a)\pi_L(k_2^L, p_1^{BR}, p_2^L) - F_e > 0 \quad (1.24)$$

$$\pi_H(k_2^L, p_1^{BR}, p_2^L) < 0 \quad (1.25)$$

Démonstration. Les conditions 1.23 et 1.24 assurent la participation respectivement de la firme efficace et de l'investisseur. Il est immédiat de constater que 1.24 est plus exigeante que 1.23. La condition 1.25 assure qu'il n'est pas profitable pour la firme inefficace d'imiter la firme efficace. Si cette condition n'est pas vérifiée, alors la firme inefficace préfère imiter la firme efficace plutôt que de ne pas être financée, et la croyance de l'investisseur ne respecte plus la loi de Bayes le long de la trajectoire d'équilibre. ∎

La figure 1.10 représente dans le plan capacité-prix les couples (k_2^L, p_2^L) qui vérifient les trois conditions de la proposition 16. La courbe Γ_L représente le lieu de

[8]On peut par exemple supposer que la proportion de firmes inefficaces est trop importante pour rendre profitable pour l'investisseur tout équilibre complètement mélangeant.

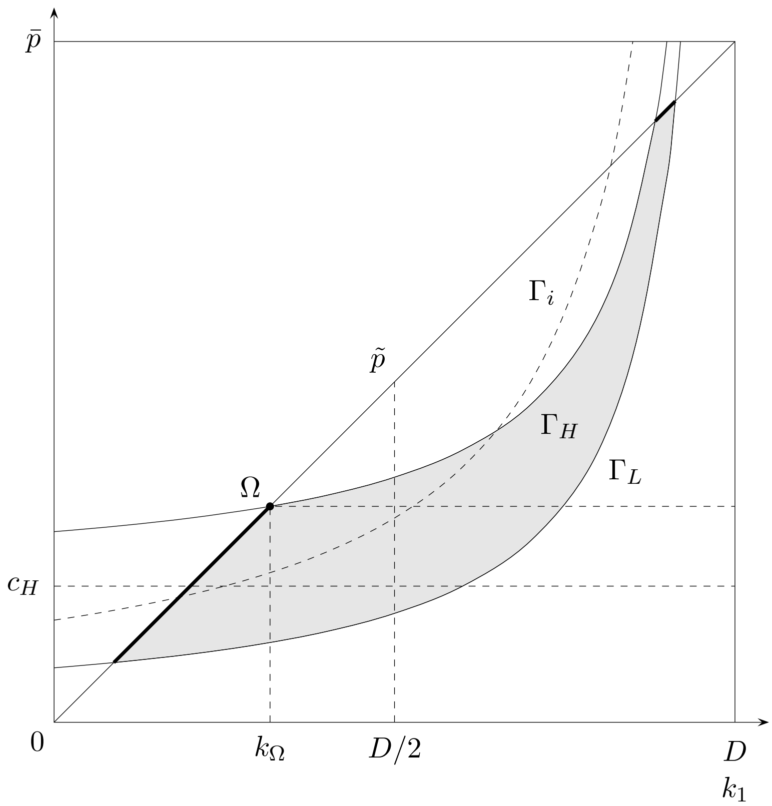

FIG. 1.10 – Signal par la capacité.

l'équation $p_2k_2 = F_p$, c'est-à-dire la courbe de zéro profit de la firme efficace si elle est accommodée. La courbe Γ_H représente le lieu de l'équation $(p_2 - c_H)k_2 = F_p$, c'est-à-dire la courbe de zéro profit de la firme inefficace si elle est accommodée. Enfin, la courbe Γ_i en pointillés représente la courbe de zéro profit de l'investisseur. On sait que l'entrant n'est accommodé que s'il fixe $p_2 \leqslant \tilde{p}$, si bien que les couples (k_2, p_2) qui vérifient la condition 1.23, sont au dessus de Γ_L et sous la diagonale (au sens large). D'autre part, l'ensemble des couples qui révèlent le type de la firme (condition 1.25), sont en dessous de Γ_H. La région grisée représente donc l'ensemble S des stratégies de la firme efficace qui sont à la fois rationnelles et révélatrices (conditions 1.23 et 1.25).

Afin de comparer le signal par la capacité à d'autres modes de signal, nous allons considérer deux variantes du jeu : dans la première variante, la firme entrante est capable de s'engager en prix *et* en capacité avant que l'investisseur décide de la financer ou non ; la deuxième variante est le jeu tel qu'il est spécifié dans la figure 1.9, et dans lequel la firme entrante ne peut s'engager qu'en capacité, le prix étant déterminé par l'équilibre du jeu en prix (cf. proposition 12). Graphiquement, sur la figure 1.10, dans le cas du double engagement en prix et en capacité, l'ensemble du carré correspond à des stratégies disponibles à l'entrant pour se signaler, alors que si l'engagement ne se fait qu'en quantité, la firme entrante ne peut jouer que sur la diagonale, et les seules stratégies à la fois rationnelles et révélatrices qui subsistent sont à l'intersection de S et de la diagonale, ensemble que l'on note $\bar{S}$, en gras sur la figure 1.10.

La proposition suivante est le pendant de la proposition 16. Elle démontre le caractère suffisant des conditions 1.23 à 1.25, et par là même, la multiplicité des équilibres bayésiens parfaits du jeu.

Proposition 17 *Si la firme entrante peut s'engager en capacité et en prix (resp. en capacité), alors pour tout couple* $(k_2^0, p_2^0) \in S$ *(resp.* $\bar{S}$*) vérifiant la condition 1.24, il existe un équilibre bayésien parfait du jeu dans lequel (i) la firme efficace annonce le couple* (k_2^0, p_2^0) *(resp. la capacité* k_2^0*) et est financé ; (ii) la firme inefficace n'est pas financée.*

Démonstration. Il suffit de considérer la croyance de l'investisseur définie par

$P(c = c_L|(k_2, p_2) = (k_2^0, p_2^0)) = 1$ et $P(c = c_L|(k_2, p_2) \neq (k_2^0, p_2^0)) = 0$. Sous cette croyance, l'investisseur ne finance que s'il reçoit le signal (k_2^0, p_2^0), si bien qu'il est optimal pour la firme efficace d'envoyer ce signal (le seul qui lui rapporte un surplus positif), et pour la firme inefficace d'envoyer un signal quelconque mais distinct (la condition 1.25 assure qu'il n'est pas optimal d'imiter la firme efficace). Ce comportement à l'équilibre est cohérent du point de vue de la règle de Bayes avec la croyance de l'investisseur. ■

On voit que pour qu'un tel équilibre existe, il faut et il suffit que l'intersection de S (ou $\bar{S}$) et de l'ensemble des points au dessus de Γ_i soit non vide, les trois conditions étant alors vérifiées. C'est le cas lorsque le coût d'entrée n'est pas trop élevé au regard des profits ultérieurs, et que la part des profits donnée à l'investisseur n'est pas trop petite.

Du point de vue de la technique de signal employée, on peut dire que certains équilibres reposent sur des stratégies qui signalent le type uniquement par la capacité, d'autres sont une combinaison de signal par la capacité et par limit-pricing (c'est le cas pour des capacités pour lesquelles Γ_H est sous la diagonale).

1.4.4 Signal de coût minimal

Dans le cas présent, le concept d'équilibre bayésien parfait utilisé seul est doublement insatisfaisant : d'une part, un grand nombre d'équilibres subsistent, et d'autre part, certains sont peu convaincants car ils supposent des prix ou une capacité inutilement bas, ce qui nuit aux profits de la firme efficace et de l'investisseur. Cela est dû essentiellement au fait que la définition de l'équilibre bayésien parfait n'impose aucune contrainte sur les croyances hors équilibre.

Nous recherchons la stratégie de signal de coût minimal. On sait que cette stratégie vérifie toujours le “critère intuitif” de Cho et Kreps (1987). Ce critère impose aux croyances hors équilibre de vérifier la contrainte suivante : il n'existe aucune déviation hors de la stratégie d'équilibre telle que (i) cette déviation est strictement dominée par la stratégie d'équilibre de la firme inefficace (*i.e.* quelque soit la réponse de l'investisseur, la firme inefficace préfère conserver sa stratégie plutôt que d'imiter la firme efficace dans sa déviation) et (ii) cette déviation est profitable à la firme efficace si l'investisseur infère correctement son type. Concrètement, la croyance doit être compatible avec le fait qu'une telle déviation ne peut provenir que d'une firme efficace.

La proposition suivante assure l'unicité de la stratégie de coût minimal, et l'identité de celle-ci pour les deux jeux considérés. Cette stratégie est représentée par le point Ω dans la figure 1.10.

Proposition 18 *La stratégie de signal de coût minimal est la stratégie de capacité maximale assurant à la fois l'accommodation de l'entrant et l'annulation du profit de la firme inefficace.*

Démonstration. Puisque $\bar{S} \subset S$, il suffit de faire la preuve pour le jeu avec engagement en capacité *et* en prix. À capacité fixée, le profit de l'entrant est une fonction strictement croissante du prix (l'accommodation est assurée puisque tout point $(k_2, p_2) \in S$ vérifie $p_2 \leqslant \tilde{p}$), si bien que l'optimum est nécessairement dans $\bar{S} \cup (S \cap \Gamma_H)$. Sur la diagonale, le paiement de la firme efficace est $\tilde{p}k_2$, qui est une fonction concave atteignant son maximum en $D/2$. Or $(D/2, \tilde{p}(D/2) \notin \bar{S}$ par l'hypothèse 15, donc sur l'ensemble $\bar{S}$ le profit est maximum au niveau de l'un des deux points de $\bar{S} \cap \Gamma_H$, ensemble qui est inclus dans $S \cap \Gamma_H$. On a en toute généralité $\pi_L = \pi_H + c_H k_2$, et comme π_H est constant le long de Γ_H par définition de Γ_H, il vient que le profit de l'entrant efficace est maximum pour le point de $S \cap \Gamma_H$ correspondant à la plus grande capacité, *i.e.* Ω. ■

Ainsi, le signal par la capacité est préféré au signal par limit-pricing, même lorsque la firme entrante a la possibilité de s'engager en prix. On note k_Ω la capacité correspondant au point Ω. On a $k_\Omega > D/2$, le signal se traduit donc par un surinvestissement en capacité par rapport à l'optimum, ce qui diminue les profits de l'entrant efficace (c'est le coût de signal), mais aussi ceux de la firme en place.

L'hypothèse 15 suppose simplement qu'au niveau d'investissement optimal de la firme efficace, la firme inefficace réalise des profits. Si l'on relâche cette hypothèse, alors l'optimum de la firme efficace est suffisant pour se signaler, et il n'y a pas de surinvestissement.

Jusqu'ici, nous avons supposé que la part du capital cédée à l'investisseur était exogène. La proposition suivante endogénéise la variable a et est vraie pour les deux variantes du jeu. On note $\Gamma_i(a)$ la courbe de zéro profit de l'investisseur (lorsqu'il y a accommodation) à a fixé.

Lemme 19 *Il existe une unique valeur des coûts fixes d'entrée $\tilde{F}_e \in]0, \bar{F}_e[$ telle que $\Gamma_i(a = 0) \cap S = \Omega$.*

Démonstration. Il suffit de noter que $\Gamma_i(a = 0)$ est le lieu de l'équation $p_2 k_2 - F_p = F_e$, c'est-à-dire que c'est une iso-profit de la firme efficace. Quand $F_e = 0$,

$\Gamma_i(a=0)=\Gamma_L$, si bien que Ω est strictement au dessus de $\Gamma_i(a=0)$ par définition de Ω. Quand $F_e=\bar{F}_e$, les coûts d'entrée sont égaux au profit optimal de la firme efficace en information parfaite, qui sont strictement supérieurs aux profits réalisés au point Ω sous l'hypothèse 15, si bien que Ω est strictement en dessous de $\Gamma_i(a=0)$. La variation continue de $\Gamma_i(a=0)$ avec F_e assure l'existence et l'unicité de $\tilde{F}_e$ tel que $\Omega\subset\Gamma_i(a=0)\cap S$. L'inclusion inverse s'obtient en remarquant que Ω est l'unique point de S réalisant l'optimum des profits de l'entrant d'après la proposition 18. ■

Proposition 20 – *Si $F_e<\tilde{F}_e$:*

(i) il existe un unique $a^*\in]0,1[$ tel que $S\cap\Gamma_i(a^*)=\Omega$;

(ii) la stratégie de signal de coût minimal consiste à s'engager sur la capacité k_Ω et à conserver une part du capital a^*.

– *Si $F_e\geqslant\tilde{F}_e$, il n'existe pas d'équilibre séparateur.*

Démonstration. À a fixé, on sait que la stratégie de signal de coût minimal consiste à choisir la capacité k_Ω. Ce choix est indépendant de a, si bien que la stratégie révélatrice de coût minimal en (k_2,a) vérifiera encore $k_2=k_\Omega$. Le choix de capacité étant fixé, le profit total de la firme entrante vaut ac_Hk_Ω, si bien que la firme entrante va choisir a le plus grand possible, ce qui correspond à céder la part de capital la plus faible possible. $\Gamma_i(a)$ est le lieu de l'équation $p_2k_2-F_p=F_e/(1-a)$. C'est encore une iso-profit de la firme efficace, qui croît avec a. Si $F_e\geqslant\tilde{F}_e$, Ω est en dessous de $\Gamma_i(a=0)$ et le reste pour des valeurs supérieures de a. Il est alors impossible à la firme en place de se signaler tout en satisfaisant la contrainte de participation de l'investisseur. Si $F_e < F_e$, il est possible de faire croître a jusqu'à saturer la contrainte de participation de l'investisseur au point Ω, ce qui est obtenu pour $a = a^* \in]0, 1[$. ■

Lorsque les coût de signal sont trop importants, il n'est pas possible pour la firme efficace de se signaler, car cela suppose de diminuer sa valeur post-entrée en deçà du coût d'entrée. Sinon, la stratégie de signal optimale consiste à surinvestir en capacité en procédant à une augmentation de capital, et en émettant un nombre d'actions minimal qui sature la contrainte de participation de l'investisseur.

1.4.5 Discussion

Dans ce modèle, nous avons montré que la capacité de production pouvait être utilisée par des entrants efficaces comme signal d'efficacité vis-à-vis des investisseurs. Ce mode de signal est préféré au mode de signal par limit-pricing introduit dans Milgrom et Roberts (1982), même dans le cas où ce mode de signal serait disponible à la firme efficace.

Notre modèle renvoie également au modèle de Poitevin (1989) de signal par la structure financière. Dans ce modèle, l'entrant efficace s'endette afin de financer le coût d'entrée. Or, la question de la structure de financement de l'investissement est souvent posée de façon cruciale dans le cas d'investissements lourds. De là, les exemples d'entrées associées à de forts effets de levier correspondent le plus souvent à des situations dans lesquelles les coûts d'entrée sont élevés, et dans lesquelles le niveau d'investissement joue un rôle déterminant. On peut penser aux industries lourdes, ou aux industries de réseau. Il ne paraît pas clair que la firme qui s'endette le fasse pour signaler son type, ou bien pour être en mesure d'installer une *sur*-capacité qui, elle, signale son type.

D'autre part, afin que le signal soit opérant, la stratégie de la firme efficace est associée à un coût que l'entrant inefficace ne serait pas en mesure de supporter. Le modèle de Poitevin (1989) adopte donc une formulation dans laquelle la dette constitue un affaiblissement de la firme endettée : elle introduit un risque de faillite mais pas d'effet stratégique qui pourrait être bénéfique à la firme endettée. Or, on sait que l'effet de la dette n'est pas univoque, et faire reposer le signal sur l'effet qu'induit la dette sur la valeur de l'entreprise peut paraître délicat. Enfin, un modèle mêlant dette et capacité permettrait d'évaluer et de comparer le coût respectif du mode de signal présenté dans notre modèle et dans Poitevin (1989).

Bibliographie

Brander, J. and Lewis, T., 1986, Oligopoly and Financial Structure : The Limited Liability Effect. *American Economic Review*, 76.5 : 956-970.

Cho, I. and D.M. Kreps, 1987, Signaling Games and Stable equilibria. *The Quarterly Journal of Economics*, 102.2 : 179-221.

Eaton, B., and R. Lipsey, 1980, Exit barriers are entry barriers : The durability of capital as a barrier to entry. *Bell Journal of Economics*, 11.2 : 721-729.

Gelman, J. and S. Salop, 1983, Judo Economics : Capacity Limitation and Coupon Competition. *Bell Journal of Economics*, 14.2 : 315-325.

Harsanyi, J., 1967, Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part I : The basic model. *Management Science*, 14 : 159-82.

Harsanyi, J., 1968, Games with incomplete information played by "Bayesian" players, Part III : The basic probability distribution of the game. *Management Science*, 14 : 486-502.

Kreps, D. and J. Scheinkman, 1983, Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes. *Bell Journal of Economics*, 14 : 326-337.

Milgrom, P., and J. Roberts, 1982, Limit pricing and entry under incomplete information : An equilibrium analysis. *Econometrica*, 50 : 443-459.

Nash, J. F., 1950, The Bargaining Problem. *Econometrica*, 28 : 155-162.

Poitevin, M., 1989, Financial Signaling and the "Deep-Pocket" Argument. *RAND Journal of Economics*, 20.1 : 26-40.

Selten, R., 1960, Bewertung strategischer Spiele. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 116 : 221-281.

Chapitre 2

Choix de capacité en demande croissante

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous examinons le rôle stratégique de l'investissement en capacité dans une industrie de biens de commodités en forte croissance. Nous montrons que la stratégie optimale d'un monopole face à une menace d'entrée est plus complexe en demande croissante qu'en demande constante, et certains résultats classiques obtenus par des modèles en demande constante doivent être mis en perspective. Ainsi, une stratégie de barrière à l'entrée par la capacité, telle que mise en lumière dans Dixit (1980), appliquée dans un contexte de marché en croissance en négligeant ou en sous-estimant cette croissance, conduit à une barrière inopérante et à une inefficacité due à la surcapacité installée.

À la section 1.2.3 du chapitre 1, nous avons étudié l'équilibre d'un duopole en concurrence à la Bertrand sous contraintes de capacité, dans un marché à demande inélastique. Dans ce modèle, une des firmes est en place, et jouit d'une position de leader de Stackelberg dans le choix de la capacité de production. L'autre firme est toujours présente sur le marché, c'est-à-dire que nous avons implicitement écarté la question de la décision d'entrée en supposant que celle-ci avait déjà été prise, et que le coût d'entrée avait déjà été payé. Dans le présent chapitre, nous introduisons un coût fixe d'entrée, et supposons que celui-ci est important au regard des profits totaux que peut espérer obtenir une firme. Dans ce cadre, on ne peut plus faire l'économie de la question de l'entrée, l'entrant potentiel pouvant préférer rester en dehors du marché pour ne pas encourir le coût d'entrée. Lorsque l'entrée est avérée, nous avons montré qu'un investissement en capacité de la part de la firme en place au delà d'un certain seuil n'augmente plus ses profits (car la capacité supplémentaire devient excédentaire) mais diminue en revanche ceux de la firme entrante (qui doit baisser son prix pour être acceptée sur le marché). Schématiquement, on peut dire que la firme en place passe d'investir "pour elle" à investir "contre son adversaire". Ce comportement agressif ne se présente pas à l'équilibre. En revanche, en présence d'un coût fixe d'entrée, choisir une capacité importante peut permettre à la firme en place de barrer l'entrée et ainsi conserver sa position de monopole, si elle parvient à faire chuter suffisamment les profits que l'entrant peut espérer obtenir. Cette idée, présentée dans les modèles de Spence (1977) et Dixit (1980) dans le cadre d'une concurrence à la Cournot, prend une forme particulièrement simple dans le cadre d'une concurrence à la Bertrand-Edgeworth avec demande inélastique. Cette reformulation sera présentée à la section 2.2. La barrière est effective si les coûts d'entrée sont suffisamment élevés. L'objectif de ce chapitre est d'examiner la robustesse de ce résultat en replaçant l'analyse dans le contexte de demande croissante que nous avons choisi.

L'introduction de la croissance du marché dans un modèle du type Bertrand-Edgeworth est intéressante pour plusieurs raisons. Tout d'abord, les marchés en forte croissance sont souvent des marchés jeunes et peu structurés, ce qui rend les problématiques d'entrée déterminantes pour la future structure du marché. La perspective de croissance augmente aussi la probabilité d'entrée profitable et donc le nombre d'entrants potentiels. D'autres perturbations de marché qui favorisent les entrées, telles que les baisses des coûts de transports ou les suppressions de barrières douanières, concernent souvent les pays émergents qui modernisent leurs infrastructures ou modifient leur politique économique, qui se trouvent être aussi des marchés offrant des perspectives de croissance importantes.

D'autre part, l'introduction de la croissance du marché introduit un effet dynamique, c'est-à-dire que la stratégie se conçoit aussi dans le temps et non uniquement en quantité. Cela pose directement la question de la date de l'investissement. De plus, la croissance introduit une distorsion (une grande capacité aujourd'hui n'est pas une grande capacité demain) ainsi qu'une tension entre considérations de court terme et de long terme. Un effet dynamique est également présent dans Boyer *et al.* (2004), qui s'intéresse aussi à une compétition à la Bertrand-Edgeworth en demande inélastique. Dans leur modèle, la propension à payer des consommateurs évolue dans le temps, mais la taille du marché est fixe, ainsi que les niveaux d'investissement en capacité.

L'organisation du chapitre est la suivante : la section 2.2 présente la forme que prend le modèle de Dixit (1980) dans le cadre d'une demande inélastique avec prix de réservation. On retrouve la possibilité d'une barrière à l'entrée par la capacité. Les sections suivantes dépassent le cadre statique de la première section, en introduisant la croissance du marché. La section 2.3 étudie le cas du monopole, en demande croissante et sans menace d'entrée, ce cas servant de référence au modèle en duopole. Les sections 2.4 à 2.7 étudient l'interaction stratégique entre la firme en place et l'entrant potentiel. La section 2.4 présente les principales hypothèses du modèle en duopole ; la section 2.5 étudie l'effet de la capacité de la firme en place sur le profit de l'entrant, et analyse l'impact de la croissance du marché sur les stratégies de barrière par la capacité. On démontre que l'établissement de la barrière à l'entrée par la capacité peut s'avérer rapidement très coûteuse voire impossible lorsque la vitesse de croissance du marché augmente. La section 2.6 étudie le cas de l'accommodation, en analysant l'effet de la capacité de la firme en place sur la date d'entrée et sur la capacité installée par l'entrant. Finalement, la section 2.7 étudie la stratégie optimale de la firme en place étant donné la réaction de l'entrant potentiel.

2.2 Barrière à l'entrée par la capacité : le cas statique

Cette section est une reformulation du modèle de Dixit (1980) dans le cadre d'analyse que nous avons adopté au chapitre 1. Nous nous replaçons donc dans un cadre identique à celui de la section 1.2.3 du chapitre 1 : la demande D est inélastique et *constante*, le prix de réservation est $\bar{p}$, la firme en place fixe sa capacité en premier, puis l'entrant décide d'entrer ou non sur le marché. Nous supposons qu'il existe un coût fixe d'entrée F_e duquel la firme entrante doit s'acquitter, ce qui constitue l'hypothèse qui différencie cette section de la section 1.2.3. S'il décide d'entrer, l'entrant installe sa capacité et fixe son prix. La firme en place fixe son prix en observant le prix de l'entrant. On suppose qu'il y a non-discrimination en prix, et la demande est affectée prioritairement à la firme pratiquant le prix le plus bas. On retrouve alors l'équilibre Judo-économique de la section 1.2.3 du chapitre 1, la firme entrante pratiquant un prix suffisamment bas pour être accommodé. On a la proposition suivante :

Proposition 21 *Si $F_e \geqslant \bar{p}D/4$, la firme en place choisit une capacité $k_1 = D$ et la firme 2 n'entre pas. Si $F_e < \bar{p}D/4$, la firme en place ne peut pas barrer l'entrée, et accommode l'entrée en choisissant une capacité $D/2$. La firme 2 entre avec une* *capacité $D/2$.*

Démonstration. Le profit d'équilibre de la firme entrante est strictement décroissant avec la capacité installée par la firme en place et $\pi_2(k_1 = D, k_2 = D/2) = \bar{p}D/4$. Pour un coût d'entrée inférieur à ce seuil, on retrouve l'équilibre de la proposition 2. ■

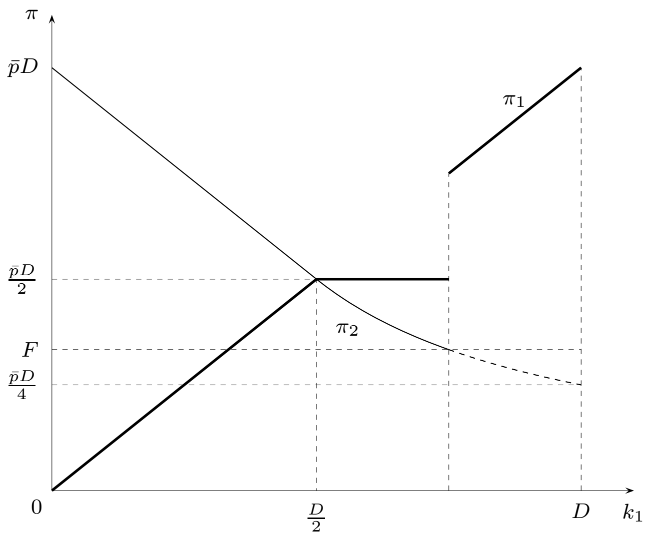

FIG. 2.1 – Capacité de la firme en place et barrière à l'entrée.

La figure 2.1 illustre l'utilisation de la capacité comme barrière à l'entrée, telle que présentée dans la proposition 21. Lorsque la demande est constante et en présence d'un coût fixe d'entrée important, l'installation d'une capacité importante est donc optimale.

Dans le modèle de Dixit (1980), la capacité de production est introduite à travers la fonction de coût, par une discontinuité dans les coûts marginaux de production (le coût marginal d'une unité produite au-delà de la capacité préinstallée devient supérieur). Un investissement en capacité apparaît alors comme une façon de diminuer ses coûts de production, ce qui est un engagement à être agressif dans le jeu en quantité, engagement qui a pour vocation de décourager l'entrée. Dans notre modèle, la capacité ne peut pas être dépassée, ce qui est un cas limite de l'approche de Dixit (1980) dans lequel le coût marginal devient infini lorsque l'on dépasse la capacité.

D'autre part, lorsque la barrière est possible dans notre modèle ($F_e \geqslant \bar{p}D/4$), on voit que la firme en place adopte sa stratégie de monopole ($k_1 = D$), ce qui est une conséquence de l'hypothèse d'inélasticité de la demande, qui implique qu'en monopole il est toujours optimal de servir tout le marché. L'entrée est donc *bloquée*, alors qu'elle est *barrée* dans le modèle de Dixit (1980), la firme en place pouvant être amenée à installer une capacité supérieure à la capacité optimale de monopole s'il n'y avait pas de menace d'entrée.

Le but des sections suivantes est de replacer la proposition 21 dans le contexte d'une demande croissante. Avant de pouvoir étudier l'interaction stratégique dans ce contexte, il est nécessaire de déterminer la stratégie optimale du monopole lorsqu'il n'y a pas de menace d'entrée.

2.3 Monopole avec demande croissante

Cette section a pour objectif de servir de référence au cas du duopole avec demande croissante. Elle permet également de poser les bases du modèle et les principales hypothèses relatives à la profitabilité du marché. On écarte donc pour l'instant la possibilité d'une entrée. Il s'agit alors d'un problème d'optimisation pour le monopole.

2.3.1 Principales hypothèses

Le marché a les caractéristiques suivantes : la demande totale à tout instant $t \geqslant 0$ est de la forme $D_t = \lambda t$, où λ mesure la croissance du marché par unité de temps ; la demande est inélastique au prix et le prix de réservation est $\bar{p}$. Le monopole fixe donc toujours un prix égal à ce prix de réservation. Les coûts de production sont supposés nuls (on peut considérer que $\bar{p}$ mesure la marge dégagée sur chaque unité de bien vendue). Le profit instantanné à l'instant t du monopole ayant une capacité k_M est donc donné par :

$$d\pi_M(t)/dt = \bar{p}\min(k_M, D_t) \tag{2.1}$$

L'installation d'une capacité $k_M > 0$ a un coût $F + ck_M$ (avec $F > 0$ et $c > 0$). Ce coût est payé au moment de l'installation. Le cas $k_M = 0$ correspond à la non-installation d'une usine, qui n'engendre aucun coût. Le monopole actualise les flux monétaires futurs au taux r. La valeur d'une usine saturée (c'est-à-dire produisant à capacité) de capacité k est notée :

$$V_{sat}(k) = \int_0^{\infty} \bar{p}k\mathrm{e}^{-rt}dt - (F + ck) = (\bar{p}/r - c)k - F \tag{2.2}$$

Le monopole détermine la date $t_0 \geqslant 0$ de l'investissement et la capacité $k_M \geqslant 0$ installée. On suppose que le monopole n'investit qu'une seule et unique fois. Nous étudions en annexe la stratégie du monopole avec investissements répétés. Nous montrons comment les deux stratégies se rejoignent lorsque les coûts fixes d'installation de capacité sont importants, la stratégie optimale avec investissements répétés étant alors de construire une suite d'usines individuellement optimales[1].

L'hypothèse suivante assure la profitabilité du marché :

Hypothèse 22 *Le prix de réservation des consommateurs vérifie* $\bar{p} > rc$.

Le lemme suivant assure que l'hypothèse 22 est nécessaire et suffisante pour que le monopole construise effectivement une usine.

Lemme 23 $k_M > 0$ *et* $t_0 < \infty \Leftrightarrow \bar{p} > rc$

Démonstration. $\Rightarrow$: $V_{sat}(k_M)$ est un majorant de la valeur de l'usine, il faut donc $V_{sat}(k_M) \geqslant 0$, ce qui impose $\bar{p} > rc$.

$\Leftarrow$: Pour tout $k_M > F/(\bar{p}/r - c) > 0$, on a $V_{sat}(k_M) > 0$. Il suffit d'attendre que $D_t > k_M$, ce qui arrive en un temps fini, pour que la construction soit rentable. ■

On note t_1 l'instant où la capacité est saturée, *i.e.* $D_{t_1} = k_M$. Le cas $t_0 > t_1$ revient à retarder la construction d'une usine saturée, ce qui détruit de la valeur puisqu'une telle usine est supposée rentable (hypothèse 22). On a donc toujours $t_0 \leqslant t_1$. Le profit du monopole à l'instant 0 s'écrit donc :

$$\pi_M = \int_{t_0}^{t_1} \bar{p} D_t \mathrm{e}^{-rt} dt + \bar{p} k_M \mathrm{e}^{-rt_1}/r - (F + ck_M)\mathrm{e}^{-rt_0} \tag{2.3}$$

[1]Lorsque les coûts fixes d'installation de capacité sont faibles, la stratégie optimale consiste à conserver une capacité qui colle le plus possible à la taille du marché, en construisant un grand nombre de petites usines qui se saturent rapidement.

Le premier terme somme les profits pendant la montée en charge. Le deuxième terme somme les profits entre l'instant de saturation t_1 et l'infini : c'est la valeur opérationnelle d'une usine saturée actualisée en t_1. Le dernier terme actualise le coût de capacité.

2.3.2 Investissement optimal en monopole

Le monopole fait face à un double arbitrage. En retardant la construction de son usine, le monopole renonce au profits dégagés pendant cette période, mais retarde aussi le paiement de la construction, ce qui est un gain pour lui étant donnée l'actualisation. D'autre part, en augmentant sa capacité, le monopole augmente ses ventes et donc ses profits sur le long terme, mais il doit payer un coût d'installation supérieur. Compte tenu de ces deux arbitrages, la capacité et la date d'installation optimales sont caractérisées par la proposition suivante :

Proposition 24 *La date optimale de construction et la capacité optimale installée sont données par :*

$$t_0^* = \frac{\lambda c \ln\left(\frac{\bar{p}}{rc}\right) + rF}{\lambda(\bar{p} - rc)} > 0 \tag{2.4}$$

$$k_1^* = \lambda t_0^* + \frac{\lambda}{r} \ln\left(\frac{\bar{p}}{cr}\right) = \frac{\lambda \bar{p} \ln\left(\frac{\bar{p}}{rc}\right) + r^2 F}{r(\bar{p} - rc)} \tag{2.5}$$

La valeur de l'usine vaut alors :

$$\pi_M^* = \frac{(\bar{p} - rc)\lambda \mathrm{e}^{-rt_0^*}}{r^2} \tag{2.6}$$

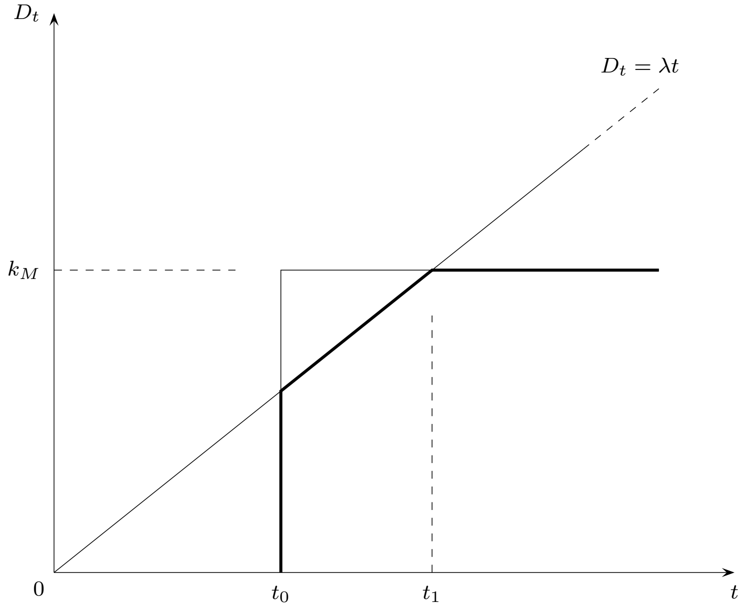

FIG. 2.2 – Evolution de la demande et de la capacité de monopole.

Démonstration. La condition du premier ordre de l'équation 2.3 en k_1 donne :

$$k_1 = \lambda t_0 + \frac{\lambda}{r} \ln\left(\frac{\bar{p}}{cr}\right) \tag{2.7}$$

En remplaçant k_1 par cette valeur dans 2.3 et en écrivant la condition du premier ordre en t_0, on obtient l'expression de t_0^*, et par suite k_M^* et π_M^*. ■

Le premier terme de l'équation 2.7 est la taille du marché au moment où l'usine est construite, et le deuxième terme représente la surcapacité que choisit le monopole. On voit que la surcapacité installée est indépendante de la date choisie pour construire. Les deux arbitrages précédents sont donc séparables, si l'on ne s'intéresse qu'à la capacité excédentaire installée par le monopole.

Le monopole attend donc que le marché ait atteint une taille suffisante pour construire l'usine. Il faut en effet que le gain marginal associé à un retard marginal de la construction soit compensé par la perte de profit sur cette même période, ce qui n'a lieu que si le taux d'utilisation de la capacité dépasse un certain seuil strictement positif.

Si on considère que le monopole dispose initialement d'une certaine capacité et que D_t désigne la demande excédentaire, on voit que le monopole laisse une partie de la demande non satisfaite avant de réinvestir pour être en mesure de servir tout le marché. Un tel abandon d'une part du marché est propice à encourager l'entrée lorsque cette entrée est possible. Ce phénomène peut expliquer une partie des entrées dans les marchés de commodités des pays en voie de développement. Sur ces marchés caractérisés par une forte croissance, un monopole protégé par une barrière douanière ne fournira pas intégralement son propre marché. Cette situation rend l'abaissement de la barrière douanière profitable non seulement pour les entrants, mais aussi pour les consommateurs.

2.4 Duopole en demande croissante

Cette section est analogue à la section précédente, mais adopte le point de vue d'un entrant potentiel. On se place à l'instant $t = 0$ et on note D_0 la taille du marché à cette date. On conserve l'hypothèse d'une croissance du marché de λ par unité de temps, *i.e.* $D_t = D_0 + \lambda t$. On suppose qu'une firme en place (firme 1) possède à l'instant $t = 0$ une capacité de production $k_1 \geqslant D_0$. L'objectif est de déterminer la date d'entrée $t_{0,2}$ et la capacité k_2 installée par l'entrant, sachant que cette capacité a un coût[2] $F + ck_2$. Nous analyserons ensuite comment la firme en place peut utiliser stratégiquement sa capacité pour influencer les décisions de l'entrant.

Les firmes investissent séquentiellement et une seule et unique fois. Cette hypothèse constitue certainement une limitation importante du modèle par rapport à un modèle avec investissements répétés des deux firmes, mais elle permet de rester le plus proche possible du modèle de base avec demande constante, dont on veut discuter les implications. Elle permet également de conserver un modèle tractable tout en maintenant une modélisation plus fine concernant la date de l'entrée et la capacité installée. Les modèles avec investissements répétés se limitent souvent à des stratégies en temps discret, ou bien considèrent le niveau d'investissement comme fixe (Eaton et Lipsey (1980), Boyer *et al.* (2004)). Au delà de ces considérations techniques, il est possible de montrer que l'hypothèse d'un investissement unique par firme constitue une modélisation satisfaisante tant que les coûts fixes d'augmentation de capacité sont élevés. En effet, dans ce cas, chaque investissement est lourd et les capacités installées sont importantes, si bien que les investissements sont très espacés dans le temps. On peut donc raisonnablement négliger l'effet stratégique des investissements futurs devant l'effet des investissements présents.

Une fois que l'entrée a eu lieu, nous supposons que celle-ci est définitive. Nous écartons donc toute sortie de la situation de duopole, que ce soit par sortie du marché de l'une des firmes, ou par rachat de l'une par l'autre. Par là même, une

[2]Par souci de clarté, on a conservé la notation de la section 2.3, mais les valeurs de F et de c peuvent être distinctes pour les deux firmes. Lorsque cela pourra prêter à confusion, nous indicerons ces variables avec l'indice de la firme correspondante.

possibilité de guerre des prix post-entrée, déclenchée par la firme en place ou par l'entrant, est exclue. Nous renvoyons au chapitre 3 pour l'analyse d'une telle problématique.

D'autre part, s'agissant d'un jeu répété, nous nous restreindrons à l'étude de l'équilibre de Nash résultant de l'application de stratégies d'équilibre du jeu instantané en prix, à tout instant $t \geqslant t_{0,2}$. C'est-à-dire que nous limitons les stratégies en prix des joueurs aux stratégies markoviennes, qui dépendent des capacités et de la taille du marché, mais non de la date t. Ce faisant, nous écartons tout phénomène de coordination et de collusion tacite. Nous renvoyons à la section 1.3 du chapitre 1 pour un modèle dans lequel les firmes fixent leurs capacités en anticipant une collusion.

2.4.1 Fonction de profit de l'entrant

Supposons que la firme 2 entre sur le marché à la date $t_{0,2}$ de telle sorte que $D(t = t_{0,2}) < k_1$. Dans ce cas, on a le lemme suivant :

Lemme 25 *Toute entrée surcapacitaire est exclue :* $k_2 \leqslant D(t = t_{0,2})$.

Démonstration. Dans le cas contraire, les profits sont initialement nuls (concurrence à la Bertrand) pendant un intervalle de temps strictement positif, et le fait de retarder marginalement le paiement du coût d'entrée est une déviation profitable pour la firme entrante. ∎

On pose alors $t_1 = (k_1 - D_0)/\lambda$ et $t_2 = (k_1 + k_2 - D_0)/\lambda$. t_1 est la date à laquelle la firme en place sature sa capacité de production $[D(t_1) = k_1]$, et t_2 la date à laquelle la somme des capacités est égale à la taille du marché $[D(t_2) = k_1 + k_2]$. On a trivialement $t_{0,2} < t_1 < t_2$.

Proposition 26 *L'équilibre en prix à l'instant t est donné par :*

- $t \in [t_{0,2}, t_1]$: $p_2 = \tilde{p}_{e1} = \bar{p}(D_t - k_2)/D_t$
- $t \in [t_1, t_2]$: $p_2 = \tilde{p}_{e2} = \bar{p}(D_t - k_2)/k_1$
- $t \in [t_2, \infty]$: $p_2 = \bar{p}$

Dans tous les cas, $p_1 = \bar{p}$.

Démonstration. *Idem* qu'à la proposition 2 du chapitre 1. ∎

Avant t_1, l'équilibre est celui décrit par Gelman et Salop (1983), la firme en place pouvant servir tout le marché (voir section 1.2.2). Au delà de t_2, l'industrie est globalement sous-capacitaire, et les firmes ne se font plus concurrence. La figure 2.3 représente l'évolution du prix d'équilibre de l'entrant lorsque le marché croît.

La fonction de profit de l'entrant est la somme actualisée des flux monétaires. On obtient :

$$\pi_2 = \int_{t_{0,2}}^{t_1} \tilde{p}_{e1} k_2 \mathrm{e}^{-rt} dt + \int_{t_1}^{t_2} \tilde{p}_{e2} k_2 \mathrm{e}^{-rt} dt + \bar{p} k_2 \mathrm{e}^{-rt_2}/r - (F + ck_2)\mathrm{e}^{-rt_{0,2}} \tag{2.8}$$

Connaissant la fonction de profit de l'entrant, il nous est possible de déterminer la réaction de l'entrant à une capacité installée par la firme en place, d'une part relativement à la décision d'entrer ou non, et en cas d'entrée, relativement à la date d'entrée et à la capacité installée. C'est l'objet de la section suivante.

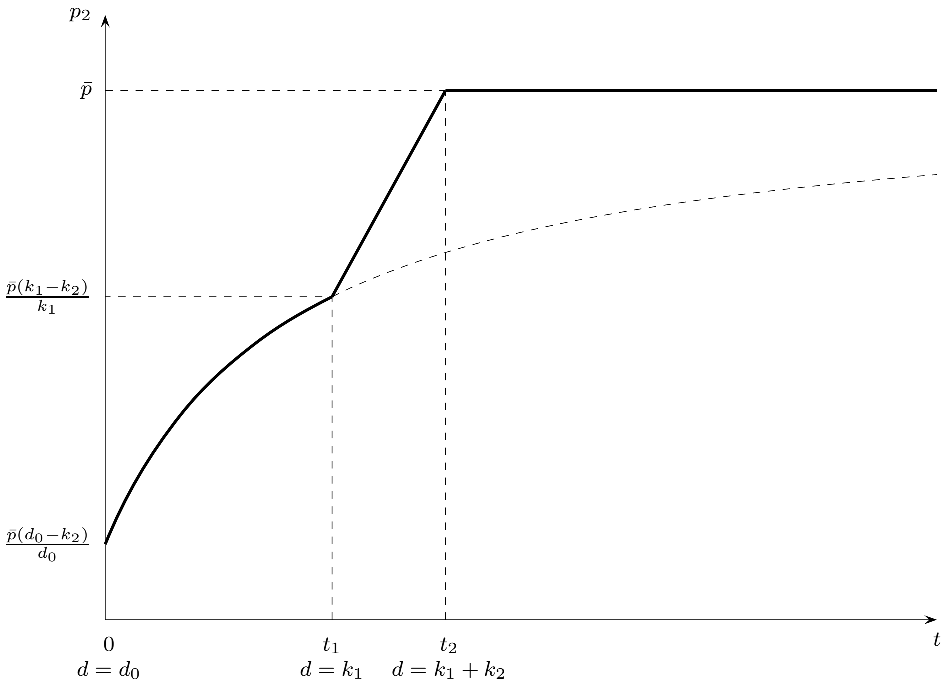

FIG. 2.3 – Evolution du prix d'équilibre de l'entrant.

2.5 Barrière à l'entrée par la capacité : analyse en demande croissante

La proposition suivante spécifie l'évolution du profit de l'entrant, à capacité k_2 fixée, en fonction des différents paramètres.

Proposition 27 *A k_2 fixé, le profit de l'entrant est une fonction strictement croissante de D_0 et de λ.*

À k_2 fixé, le profit de l'entrant est une fonction strictement décroissante, convexe et minorée de k_1. Le profit optimal de l'entrant est une fonction strictement décroissante de k_1.

Démonstration. La preuve est donnée à l'annexe 2.9.2. ∎

La proposition 27 indique qu'une stratégie de barrière à l'entrée de la part de la firme en place consiste en l'installation d'une capacité suffisante permettant de faire chuter les profits post-entrée en dessous du coût fixe d'entrée. On retrouve là-encore le résultat de Dixit (1980).

Toutefois, cette proposition démontre aussi que l'effet de l'investissement de la firme en place sur les profits de l'entrant est de plus en plus faible lorsque l'investissement augmente. En effet, la surcapacité de la firme en place nuit aux profits de l'entrant dans un futur d'autant plus éloigné que la surcapacité est importante. Cette perte de profit a une valeur présente qui diminue exponentiellement. Cela implique que l'établissement d'une barrière à l'entrée par l'investissement en capacité peut s'avérer très coûteux, voire impossible. La proposition suivante détermine la limite de faisabilité d'une barrière à l'entrée. On pose :

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-rt}}{D(t)} dt \tag{2.9}$$

Notons que la fonction intégrée est majorée par la fonction e^{-rt}/D_0 qui est intégrable. I est donc bien définie.

Proposition 28 *Il est possible de bloquer l'entrée si et seulement si les coûts fixes d'entrée dépassent une valeur seuil :*

$$F > \bar{F} = \frac{(\bar{p}/r - c)^2}{4\bar{p}I} \tag{2.10}$$

Démonstration. Il suffit de déterminer le profit maximal de l'entrant lorsque $k_1 = +\infty$. La condition du premier ordre en k_2 donne un k_2 optimal de $(\bar{p}/r - c)/2\bar{p}I$, on en déduit après calcul le profit optimal, qui doit être supérieur à F pour que l'entrée soit rentable. ■

Notons que, lorsque $F \leqslant \bar{F}$, il est impossible d'établir une barrière à l'entrée, y compris avec des stratégies à investissements répétés, puisque même une capacité infinie ne suffirait pas à barrer l'entrée. La prise en compte de stratégies avec investissements multiples permettrait en revanche de diminuer le coût de la barrière, et donc d'enrichir l'ensemble des stratégies de barrières si l'on avait intégré une contrainte budgétaire pour la firme en place.

D'autre part, on note que la difficulté d'établissement d'une barrière à l'entrée augmente lorsque la valeur d'une usine saturée augmente (c'est-à-dire lorsque $\bar{p}$ augmente, ou que F et c diminuent). La relation 2.10 permet de séparer ces effets déjà présents dans le cas de la demande statique de l'effet spécifique de la croissance du marché. En effet, en prenant $\lambda = 0$, on obtient :

$$\bar{F}_0 = \frac{(\bar{p}/r - c)^2}{4(\bar{p}/r)D_0} \tag{2.11}$$

et l'on retrouve bien le seuil de faisabilité de la barrière à l'entrée obtenue dans la section 2.2. La condition 2.10 est alors équivalente à :

$$F > \bar{F}_0 \frac{D_0/r}{I} \tag{2.12}$$

Puisque $I \leqslant D_0/r$ et $\lim_{\lambda\to\infty} I = 0$, on voit que la valeur minimale du coût fixe d'entrée telle que la barrière à l'entrée soit possible augmente indéfiniment avec la croissance du marché. Notons que $\lim_{\lambda\to+\infty} \bar{F} = +\infty$: ce cas correspond au cas de l'usine saturée étudié précédemment, et on a montré que la construction avait lieu indépendamment des coûts fixes.

Cette section s'est intéressé à l'effet négatif de la capacité de la firme en place sur le profit de l'entrant, et aux stratégies de barrières à l'entrée que cela pouvait permettre. Lorsque cette barrière est impossible ou trop coûteuse, ce qui est le cas lorsque le marché croît rapidement, la firme en place va adopter une stratégie d'accommodation de l'entrée. Dès lors, la firme en place va chercher à influer non pas sur le profit de l'entrant, mais sur la capacité k_2 qu'il installe, car seule cette dernière intervient dans son profit. La section suivante étudie la fonction de meilleure réponse de l'entrant à une capacité donnée de la firme en place.

2.6 Fonction de meilleure réponse de l'entrant

Lorsque la barrière à l'entrée est impossible et que l'entrée a lieu, les profits de la firme en place dépendent directement de la capacité installée par l'entrant et de la date de l'entrée. La firme en place doit maximiser son profit en anticipant la réaction de l'entrant. Il convient donc d'étudier la réaction de l'entrant, en supposant la capacité de la firme en place k_1 donnée.

2.6.1 Date optimale d'entrée

Supposons que, étant donné la capacité de la firme en place k_1, la firme entrante souhaite installer une capacité k_2. La date optimale de construction d'une telle usine est déterminée par la proposition suivante :

Proposition 29 *À k_2 fixé, la date optimale d'entrée est donnée par :*

$$t_{0,2}^* = \max\left[0, \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\bar{p}k_2^2}{(\bar{p}-rc)k_2 - rF} - D_0\right)\right] \tag{2.13}$$

Démonstration. La dérivée de π_2 par rapport à $t_{0,2}$ est donnée par :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial t_{0,2}} = \mathrm{e}^{-rt_{0,2}}\left(-(\bar{p}-rc)k_2 + rF + \bar{p}k_2^2/D(t_{0,2})\right) \tag{2.14}$$

Si l'entrant a décidé d'investir, on a nécessairement $(\bar{p}/r - c)k_2 - F \geqslant 0$ puisqu'il s'agit de la valeur d'une usine saturée de taille k_2. On en déduit que la dérivée est positive puis négative, ce qui assure que la condition du deuxième ordre en $t_{0,2}$ est vérifiée. La condition du premier ordre en $t_{0,2}$ donne :

$$D(t_{0,2}) = \frac{\bar{p}k_2^2}{(\bar{p}-rc)k_2 - rF} \tag{2.15}$$

d'où le résultat, en notant que $D(t_{0,2}) = D_0 + \lambda t_{0,2}$ et $t_{0,2} \geqslant 0$. ■

La proposition 29 indique que si la firme entrante désire installer une capacité k_2, elle doit attendre que le marché ait atteint une certaine taille pour entrer. Tout comme dans le cas du monopole, il faut que l'usine construite ait dès sa construction un taux de profitabilité supérieur à un seuil strictement positif, sinon il est préférable de retarder la construction.

La proposition suivante détermine les conditions pour avoir une entrée immédiate :

Proposition 30 *La firme entrante installe son usine immédiatement (i.e. $t_{0,2} = 0$) si et seulement si :*

$$D_0 \geqslant \frac{4\bar{p}rF}{(\bar{p}-rc)^2} \tag{2.16}$$

$$\textit{et } k_2 \leqslant \frac{(\bar{p}-rc)D_0 + \sqrt{(\bar{p}-rc)^2 D_0^2 - 4\bar{p}D_0 rF}}{2\bar{p}} \tag{2.17}$$

La date d'entrée est une fonction croissante de la capacité installée, c'est-à-dire qu'une capacité supérieure est nécessairement installée plus tardivement.

Démonstration. Voir Annexe 2.9.3. ∎

Notons premièrement que la condition 2.17 est plus exigeante que la condition $k_2 \leqslant D_0$. L'entrant entre donc toujours avec une capacité strictement inférieure à la taille du marché. Il s'agit là encore du fait que la profitabilité initiale de l'usine doit être strictement positive, supérieure au gain marginal obtenu par un retard du paiement des coûts d'entrées.

On remarque que la capacité de la firme en place n'intervient pas dans la condition d'entrée, si ce n'est indirectement à travers la meilleure réponse en capacité de l'entrant $[k_2 = k_2^{MR}(k_1)]$. Par conséquent, l'unique moyen pour la firme en place de retarder l'entrée (si celle-ci doit avoir lieu) est d'induire une capacité k_2 supérieure, du fait de la croissance de la date d'entrée avec la capacité installée. Nous voyons déjà que la firme en place fait face à un arbitrage dans l'effet stratégique qu'elle peut avoir sur les décisions de l'entrant : elle doit arbitrer entre induire une entrée plus tardive mais associée à une capacité importante, ou au contraire induire une entrée précoce associée à une capacité plus restreinte. Nous reviendrons plus précisément sur cet arbitrage lorsque nous étudierons la stratégie optimale de la firme en place.

Connaissant la condition d'une entrée immédiate, nous pouvons nous limiter à maximiser π_2 en k_2 en prenant $t_{0,2} = 0$, et vérifier que la solution obtenue vérifie bien la condition 2.17. Si ce n'est pas le cas, il est préférable pour la firme entrante d'attendre. Elle sera confrontée à tout instant ultérieur au même problème d'optimisation, avec un D_0 supérieur. Dorénavant, on prendra donc $t_{0,2} = 0$ dans l'expression du profit de l'entrant (équation 2.8), et la capacité k_2 devient l'unique variable stratégique dont dépend le profit. La section suivante étudie l'effet de la capacité de la firme en place k_1 sur la capacité optimale installée par l'entrant.

2.6.2 Capacité installée par l'entrant

Jusqu'ici, nous nous sommes intéressés aux profits de l'entrant et avons déterminé sa stratégie optimale concernant sa date d'entrée. Nous avons montré que celle-ci ne dépendait de la stratégie de la firme en place qu'à travers l'effet induit sur k_2. On étudie maintenant la stratégie de l'entrant en capacité.

La proposition suivante assure l'existence et l'unicité de la meilleure réponse de l'entrant à une capacité de la firme en place, dans le cas où elle décide d'entrer.

Proposition 31 *La fonction de profit de l'entrant π_2 est une fonction de k_2 concave, strictement croissante puis décroissante sur $[0, +\infty[$. La meilleure ré-*

ponse $k_2^*(k_1)$ existe et est unique.

Démonstration. Le profit de l'entrant s'écrit :

$$\pi_2 = \int_0^\infty p_2 k_2 \mathrm{e}^{-rt} dt - (F + ck_2) \tag{2.18}$$

où p_2 est le prix d'équilibre, donné à la proposition 26 la section 2.4.1. La fonction intégrée est une fonction continue de t et de k_2, dérivable en k_2 et à dérivée continue presque partout. On peut donc dériver sous le signe somme pour obtenir la dérivée du profit par rapport à k_2 :

$$\frac{\partial \pi_2}{\partial k_2} = \int_0^\infty \frac{\partial p_2 k_2}{\partial k_2} \mathrm{e}^{-rt} dt - c \tag{2.19}$$

Il y a trois phases en t pour le terme $\partial p_2 k_2 / \partial k_2$:

- $t \in [0, t_1]$: $\partial p_2 k_2 / \partial k_2 = \bar{p}(d - 2k_2)/d$;
- $t \in [t_1, t_2]$: $\partial p_2 k_2 / \partial k_2 = \bar{p}(d - 2k_2)/k_1$;
- $t \in [t_2, \infty]$: $\partial p_2 k_2 / \partial k_2 = \bar{p}$.

Ces phases sont représentées dans la figure 2.4. L'intégrale des profits instantanés actualisés représente la dérivée du profit de l'entrant π_2 à une constante près (le coût c). À t fixé, $\partial p_2 k_2 / \partial k_2$ est une fonction strictement décroissante de k_2. On en déduit que le profit de l'entrant est une fonction strictement concave de k_2. De plus, lorsque $k_2 = 0$, $\partial p_2 k_2 / \partial k_2 \equiv \bar{p}$, et donc :

$$\left.\frac{\partial \pi_2}{\partial k_2}\right|_{k_2=0} = \frac{\bar{p}}{r} - c > 0 \tag{2.20}$$

Enfin, pour k_2 suffisamment grand, $\partial \pi_2 / \partial k_2 < 0$.

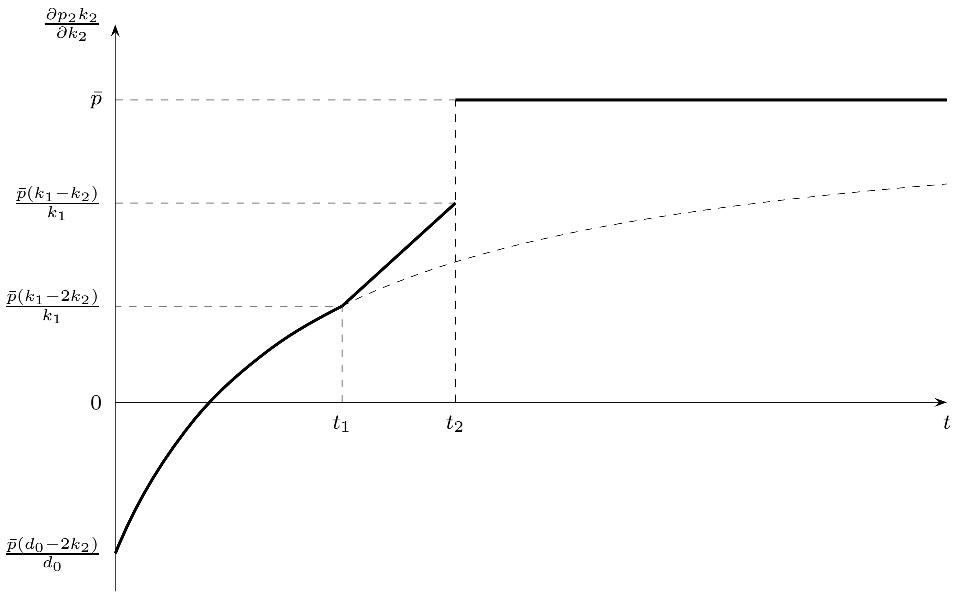

FIG. 2.4 – Evolution du profit marginal de l'entrant dans le temps.

La condition du premier ordre caractérise un unique k_2^* strictement positif, meilleure réponse de l'entrant à une capacité k_1 de la firme en place. ■

Rappelons que la capacité k_2^* qui vient d'être caractérisée par la proposition 31, est la meilleure réponse de l'entrant sous l'hypothèse d'une entrée immédiate ($t_{0,2} = 0$). L'entrée a effectivement lieu immédiatement si et seulement si la capacité k_2^* vérifie la condition 2.17 (qui détermine s'il est préférable ou non de retarder l'entrée).

Proposition 32 *La meilleure réponse k_2^*, toutes choses égales par ailleurs, est une fonction strictement croissante de D_0 et de λ, et strictement décroissante de c.*

Démonstration. Le profit marginal instantané $\partial p_2 k_2/\partial k_2 - c$ est croissant en D_0 et en λ et décroissant en c pour tout t, cette variation étant stricte sur un intervalle de temps non vide. Le profit marginal varie donc dans le même sens, au sens strict. ■

La proposition suivante démontre que les capacités installées sont des compléments stratégiques :

Proposition 33 *La meilleure réponse $k_2^*(k_1)$ est une fonction strictement décroissante de k_1, minorée par $(\bar{p}/r - c)/2\bar{p}I$.*

Démonstration. L'effet induit par une augmentation de la capacité de la firme en place est moins évident à démontrer, car à t fixé, le profit marginal instantané n'est pas nécessairement une fonction monotone de k_1. On vérifie aisément que si $k_2 \geqslant k_1/2$, le profit marginal instantané est bien décroissant en k_2 pour tout t, cette décroissance étant stricte sur un intervalle de temps non vide. Le profit marginal est donc strictement décroissant en k_1 dans ce cas. Mais si $k_2 < k_1/2$, le profit marginal instantané est croissant sur un intervalle de temps à droite de t_1, et décroissant partout ailleurs. Il est donc nécessaire de raisonner sur la fonction intégrée, et non uniquement à t fixé. La démonstration complète est donnée à l'annexe 2.9.4. ■

La figure 2.5 représente la fonction de meilleure réponse de l'entrant à une capacité k_1 de la firme en place.

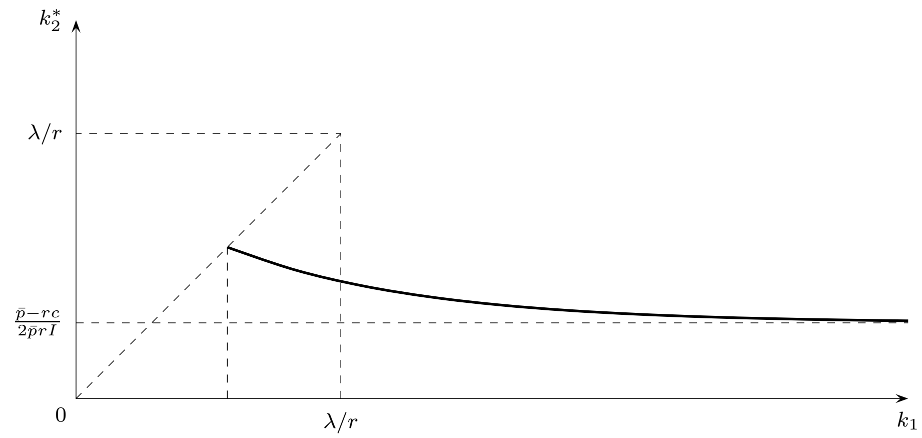

FIG. 2.5 – Capacité optimale de l'entrant en fonction de k_1.

2.7 Investissement de la firme en place

Connaissant certaines propriétés de la meilleure réponse de l'entrant, en capacité de production installée mais aussi dans le choix de la date d'entrée, nous étudions maintenant le choix de capacité installée par la firme en place, anticipant la réaction de l'entrant.

Nous reprenons les notations des sections précédentes, k_2 désignant la capacité installée par la firme 2 et $t_{0,2} \geqslant 0$ la date d'entrée choisie. Avant cet instant, la firme en place jouit d'une position de monopole. On sait qu'au moment où l'entrée a lieu, les capacités vérifient $k2 < D(t = t_{0,2}) < k_1$. Tant que $D_t < k_1 + k_2$, *i.e.* $t < t_2$, la firme en place sert la demande résiduelle non servie par l'entrant qui sature sa contrainte de capacité. Enfin, pour $t > t_2$ les deux usines sont saturées. Le coût de capacité de la firme i est noté $F_i + c_i k_i$. Le profit de la firme en place s'écrit donc :

$$\pi_1 = \bar{p} \int_0^{t_{0,2}} D_t \mathrm{e}^{-rt} dt + \bar{p} \int_{t_{0,2}}^{t_2} (D_t - k_2) \mathrm{e}^{-rt} dt + \bar{p} k_1 \mathrm{e}^{-rt_2}/r - F_1 - c_1 k_1 \tag{2.21}$$

Après intégration, on trouve :

$$\pi_1 = \bar{p} D_0/r + \bar{p}\lambda \left(1 - \mathrm{e}^{-(k_1+k_2-D_0)r/\lambda}\right)/r^2 - \bar{p} k_2 \mathrm{e}^{-rt_{0,2}}/r - F_1 - c_1 k_1 \tag{2.22}$$

Proposition 34 *Il existe une valeur seuil* $\tilde{k}_1 \in [0, +\infty]$ *telle que* $t_{0,2} > 0$ *si et seulement si* $k1 < \tilde{k}_1$.

Démonstration. Puisque k_2^{BR} est une fonction strictement décroissante de k_1, la condition 2.17 sur k_2 se traduit directement en une condition sur k_1. ■

La condition du premier ordre sur le profit de la firme en place s'écrit :

$$\frac{d\pi_1}{dk_1} = \overbrace{\frac{\partial \pi_1}{\partial k_1}}^{\text{effet direct}} + \overbrace{\left(\underbrace{\frac{\partial \pi_1}{\partial k_2}}_{\text{effet direct}} + \underbrace{\frac{\partial \pi_1}{\partial t_{0,2}} \frac{\partial t_{0,2}}{\partial k_2}}_{\text{effet indirect}} \right) \frac{\partial k_2}{\partial k_1}}^{\text{effet indirect}} \tag{2.23}$$

- Le premier terme représente de l'équation 2.23 représente l'*effet direct* de la capacité de la firme en place sur son profit. On a :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial k_1} = (\bar{p}/r)\mathrm{e}^{-(k_1+k_2-D_0)r/\lambda} - c_1 \gtrless 0 \tag{2.24}$$

  avec un arbitrage entre des ventes plus importantes à long terme et un coût d'installation supérieur ;
- Le deuxième terme représente l'*effet indirect* de k_1 sur le profit à travers une

diminution de k_2 (on a $\partial k_2/\partial k_1 < 0$ d'après la proposition 33). Cet effet se décompose lui-même en deux termes :

– un effet *direct* de la diminution de k_2, qui est positif pour les profits de la firme en place. En effet :

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial k_2} = (\bar{p}/r)\left(\mathrm{e}^{-(k_1+k_2-D_0)r/\lambda} - \mathrm{e}^{-rt_{0,2}}\right) < 0 \tag{2.25}$$

– un effet *indirect* à travers l'anticipation de l'entrée ($\partial t_{0,2}/\partial k_2 > 0$ d'après la proposition 33). Cet effet temporel est négatif, la firme en place profitant moins longtemps de sa position de monopole. En effet,

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial t_{0,2}} = \bar{p}\mathrm{e}^{-rt_{0,2}}k_2 > 0 \tag{2.26}$$

Lorsque $k_1 \geqslant \tilde{k}_1$, on a $t_{0,2} = 0$ et l'équation 2.23 devient :

$$\frac{d\pi_1}{dk_1} = \frac{\partial \pi_1}{\partial k_1} + \frac{\partial \pi_1}{\partial k_2}\frac{\partial k_2}{\partial k_1} \tag{2.27}$$

Dans l'intervalle considéré, l'effet temporel disparaît, et il ne subsiste dans l'effet indirect que l'effet positif d'une augmentation de k_1 à travers une diminution de k_2. La firme en place profite alors de sa position de leader de Stackelberg pour se comporter agressivement, en surinvestissant. Notons toutefois que l'effet indirect converge rapidement vers 0 lorsque k_1 augmente, l'entrant ne modifiant plus la quantité installée. L'effet direct du coût devient alors prédominant.

Lorsqu'au contraire l'entrant décale son investissement dans le temps ($t_{0,2} > 0$) les deux composantes de l'effet indirect subsistent. On voit que lorsque F_2 augmente, l'effet temporel l'emporte ($\partial t_{0,2}/\partial k_2$ diverge), ce qui est naturel, puisque

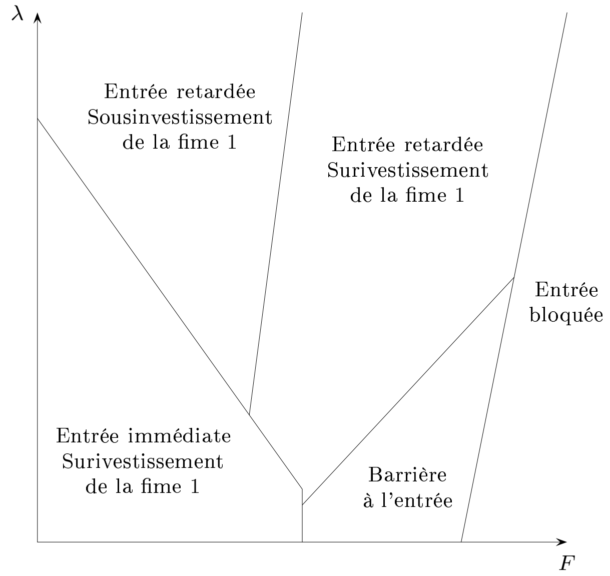

FIG. 2.6 – Typologie des situations concurrentielles.

le rôle du décalage dans le temps est de retarder le paiement des coûts fixes. Dans ce cas, il est optimal d'adopter une stratégie d'accommodation douce, pour favoriser une entrée aggressive en capacité, mais plus tardive, ce qui permet de jouir de profits de monopole sur une plus longue période. Pour des valeurs modérées de F_2, l'effet temporel devient secondaire devant l'effet sur la capacité, et la firme en place profite, comme dans le cas d'une entrée immédiate, de sa position de leader de Stackelberg pour surinvestir.

La figure 2.6 présente une typologie des situations concurrentielles que nous avons décrites. Rappelons que ces stratégies sont celles du jeu avec un investissement unique, et que pour être applicables dans un cadre avec investissements multiples, il est nécessaire d'écarter des valeurs des coûts fixes trop faibles, ou une croissance du marché trop importante, ces deux cas rendant l'effet stratégique des investissements ultérieurs non négligeables.

2.8 Conclusion

Le modèle de concurrence à la Bertrand-Edgeworth avec demande inélastique avec prix de réservation apporte une illustration simple de l'idée de barrière à l'entrée par la capacité (Dixit (1980)) lorsque l'on introduit un coût fixe d'entrée. Lorsque le coût fixe d'entrée est faible, l'entrée ne peut pas être barrée, et l'équilibre en accommodation conduit les firmes à ne pas surinvestir, et il n'y a alors pas de surcapacité de production au niveau du marché. Lorsque le coût d'entrée est plus important, la stratégie optimale de la firme en place consiste à préempter le marché en installant la capacité maximale, pour faire passer les profits de la firme entrante dans l'équilibre Judo-économique en deçà de son coût d'entrée. L'entrée est alors barrée, et on a à nouveau une absence de surcapacité au niveau du marché.

Nous avons étudié ce que devient cette analyse dans le cadre d'un marché en croissance. Cet aspect dynamique pose directement la question de la date optimale d'investissement. En choisissant sa capacité de production, la firme en place profite de sa position de leader de Strackelberg pour induire une reaction de la firme entrante qui lui est favorable, en capacité et dans le temps : une non-entrée dans le cadre d'une stratégie de barrière à l'entrée, et dans le cadre d'une stratégie d'accommodation, une entrée avec une capacité faible et la plus tardive possible.

Notre étude a montré que ces deux derniers objectifs n'étaient pas conciliables. En effet, la date optimale d'entrée ne dépend pas directement de la capacité de la firme en place, mais seulement indirectement à travers la capacité que l'entrant souhaite installer. La date optimale d'entrée étant une fonction croissante de la capacité installée par l'entrant, il est impossible d'induire à la fois une diminution de la capacité *et* un délai supplémentaire avant l'entrée. Il y a donc un arbitrage entre ces deux effets.

D'autre part, l'installation d'une capacité importante par la firme en place apparaît bien comme étant un comportement agressif, puisque cette capacité réduit les profits de la firme entrante et induit une diminution de la capacité installée par l'entrant lorsque l'entrée a lieu. Il y a donc trois types de stratégies pour la firme en place :

– une stratégie de barrière à l'entrée, qui suppose l'installation d'une surcapacité importante. Cette stratégie s'avère rapidement très coûteuse voire impossible si le coût fixe d'entrée n'est pas assez élevé, ou si la croissance du marché est importante ;
– une stratégie d'accommodation aggressive. Pour des capacités importantes, l'entrée a lieu immédiatement et le temps n'intervient plus dans les stratégies ;
– une stratégie d'accommodation douce. Une capacité limitée induit une entrée plus aggressive du point de vue capacité, mais aussi plus tardive.

Un coût de capacité faible pour la firme en place favorise plutôt les deux premières stratégies agressives, et un coût de capacité élevé favorise une accommodation douce.

Il apparaît que la stratégie optimale dans un cadre de demande croissante est plus complexe qu'en demande statique, et l'application directe d'une approche en demande constante dans des marchés où la demande croît rapidement, notamment d'une stratégie aggressive, peut conduire à des effets contraires à ceux attendus, précipitant une entrée au lieu de la barrer.

Bibliographie

Boyer, M., P. Lasserre, T. Mariotti and M.Moreaux, 2003, Preemption and rent dissipation under price competition. *International Journal of Industrial Organization*, 22 : 309-328.

Dixit, A., 1980, The Role of Investment in Entry Deterrence. *Economic Journal*, 90 : 95-106.

Eaton, B., and R. Lipsey, 1980, Exit barriers are entry barriers : The durability of capital as a barrier to entry. *Bell Journal of Economics*, 11.2 : 721-729.

Gelman, J. and S. Salop, 1983, Judo Economics : Capacity Limitation and Coupon Competition. *Bell Journal of Economics*, 14.2 : 315-325.

Kreps, D. and J. Scheinkman, 1983, Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes. *Bell Journal of Economics*, 14 : 326-337.

Spence, A.M., 1977, Entry, Capacity, Investment, and Oligopolistic Pricing. *Bell Journal of Economics*, 8.2 : 534-544.

2.9 Annexes

2.9.1 Statique comparative associée à la proposition 24

La proposition suivante caractérise l'évolution de la surcapacité installée et de la date optimale d'entrée d'une firme en monopole en fonction des différents paramètres. On pose :

$$\rho = \bar{p}/rc > 1 \tag{2.28}$$

$$\tilde{F} = \frac{\lambda\, c\, (\rho - 1 - \ln(\rho))}{r} > 0 \tag{2.29}$$

Proposition 35 *La date de construction de l'usine est une fonction :*

- *décroissante de $\bar{p}$ et λ ;*
- *croissante de c et F ;*
- *décroissante de r pour $F \leqslant \tilde{F}/\rho$ et croissante pour $F \geqslant \tilde{F}/\rho$.*

La surcapacité installée est une fonction :

- *croissante de $\bar{p}$ et λ ;*
- *décroissante de c pour r.*

Le profit total est une fonction :

- *croissante de $\bar{p}$ et λ ;*
- *décroissante de c, r et F.*

Démonstration.

Remarques : On utilise constamment la propriété $\forall x > 0, x - 1 - \ln(x) > 0$. Le symbole $\lesseqgtr$ (resp. $\gtreqless$) indique que la dérivée est négative puis positive (resp. positive puis négative) lorsque F croît.

Statique comparative de t_0^* :

$$\frac{\partial t_0^*}{\partial c} = \frac{\lambda\bar{p}(rc/\bar{p} - 1 - \ln(rc/\bar{p})) + r^2 F}{\lambda(\bar{p} - rc)^2} > 0 \tag{2.30}$$

$$\frac{\partial t_0^*}{\partial F} = \frac{r}{\lambda(\bar{p} - cr)} > 0 \tag{2.31}$$

$$\frac{\partial t_0^*}{\partial \bar{p}} = \frac{-\lambda c\bar{p}(cr/\bar{p} - 1 - \ln(rc/\bar{p})) - rF\bar{p}}{\bar{p}\lambda(\bar{p} - rc)^2} < 0 \tag{2.32}$$

$$\frac{\partial t_0^*}{\partial \lambda} = -rF/\lambda^2(\bar{p} - rc) < 0 \tag{2.33}$$

$$\frac{\partial t_0^*}{\partial r} = \frac{-\lambda c^2(\bar{p}/rc - 1 - \ln(\bar{p}/rc)) + F\bar{p}}{\lambda(\bar{p} - rc)^2} \lesseqgtr 0 \tag{2.34}$$

Statique comparative de π_M^* :

$$\frac{\partial \pi_M^*}{\partial c} = -\frac{(\bar{p}\lambda\ln(\bar{p}/rc) + r^2 F)\mathrm{e}^{-rt_0^*}}{r(\bar{p} - rc)} < 0 \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial \pi_M^*}{\partial F} = -\mathrm{e}^{-rt_0^*} < 0 \tag{2.36}$$

$$\frac{\partial \pi_M^*}{\partial \bar{p}} = \frac{(\lambda(\bar{p} - rc)^2 + \bar{p}rc\lambda\ln(\bar{p}/rc) + \bar{p}r^2 F)\mathrm{e}^{-rt_0^*}}{r^2\bar{p}(\bar{p} - rc)} > 0 \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial \pi_M^*}{\partial \lambda} = \frac{((\bar{p} - rc)\lambda + r^2 F)\mathrm{e}^{-rt_0^*}}{\lambda r^2} > 0 \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial \pi_M^*}{\partial r} = -\frac{(2\lambda(\bar{p} - rc)^2 + \lambda\bar{p}rc\ln(\bar{p}/rc) + Fr^2(2\bar{p} - rc))\mathrm{e}^{-rt_0^*}}{r^3(\bar{p} - rc)} < 0 \tag{2.39}$$

■

2.9.2 Preuve de la proposition 27

A k_2 fixé, le profit de l'entrant est une fonction strictement croissante de D_0 et de λ.

À k_2 fixé, le profit de l'entrant est une fonction strictement décroissante, convexe et minorée de k_1. Le profit optimal de l'entrant est une fonction strictement décroissante de k_1.

Démonstration.

La figure 2.7 représente l'évolution de la courbe du prix d'équilibre de l'entrant en fonction du temps lorsque D_0 augmente ou lorsque k_1 augmente.

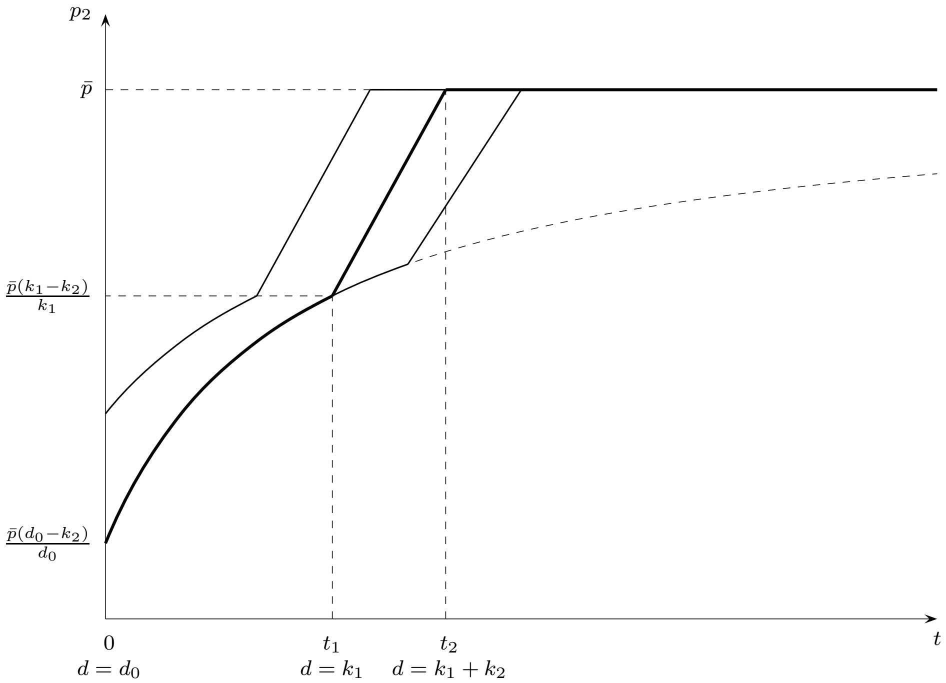

FIG. 2.7 – Evolution du prix d'équilibre de l'entrant.

Il suffit de constater qu'à k_2 fixé, on a pour tout t une augmentation [resp. une diminution[3]] au sens large du prix d'équilibre donné à la proposition 26 en fonction de D_0 et λ [resp. k_1], cette variation étant stricte sur un intervalle de

[3]Dans le cas de k_1, il convient de vérifier qu'en t_1 le saut de la dérivée de p_2 est bien positif, ce qui est vrai pour $k_2 < k_1$.

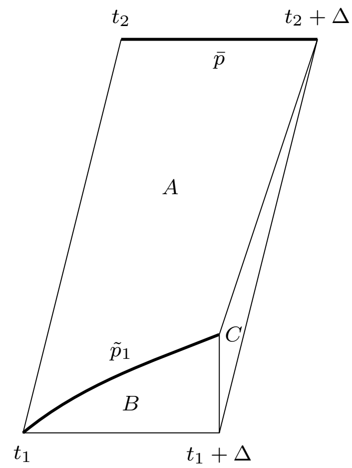

FIG. 2.8 – Perte de profit marginale quand k_1 augmente.

temps non vide.

Enfin, $\pi_2(k_1, k_2^{BR}(k_1)) \geqslant \pi_2(k_1, k_2^{BR}(k_1+\varepsilon)) > \pi_2(k_1+\varepsilon, k_2^{BR}(k_1+\varepsilon))$, par définition de k_2^{BR} puis par décroissance stricte à k_2 fixée. Le profit optimal est donc strictement décroissant.

La décroissance du profit en fonction de k_1 est acquise, et le profit est trivialement minoré par zéro. Reste à montrer la convexité. On va montrer que la perte marginale infligée par une augmentation marginale de k_1 est décroissante. Pour cela, nous nous référerons à la figure 2.8. Une augmentation de k_1 de ε entraîne une augmentation de t_1 et t_2 de $\Delta = \varepsilon/\lambda$. La diminution des profits instantanés se limite à l'intervalle de temps $[t_1, t_2+\Delta]$. On peut se limiter à étudier la perte de profit sur cet intervalle de temps borné, ce qui nous permet de supposer dans un premier temps qu'il n'y a pas d'actualisation ($r=0$). La perte de profit est égale à Ak_2, A mesurant la perte cumulée sur les prix sur l'intervalle $[t_1, t_2+\Delta]$.

On a $A+B+C = (\bar{p} - \tilde{p}_{e1}(t_1))\Delta$, $B \geqslant 0, B \leqslant (\tilde{p}_{e1}(t_1+\Delta) - \tilde{p}_{e1}(t_1))\Delta$ et

$C = (\tilde{p}_{e1}(t_1+\Delta) - \tilde{p}_{e1}(t_1))(t_2-t_1)/2$. Par continuité de $\tilde{p}_{e1}$, on a $\lim_{\Delta\to 0} B/\Delta = 0$. On en déduit l'équivalent de A quand Δ est proche de 0 : $A \sim (\bar{p} - \tilde{p}_{e1}(t_1) - \tilde{p}'_{e1}(t_1)(t_2-t_1)/2)\Delta$. Finalement, la croissance de $\tilde{p}_{e1}(t_1) + \tilde{p}'_{e1}(t_1)(t_2-t_1)/2$ assure que cette perte marginale est décroissante, et puisque $\tilde{p}_{e1}$ tend vers $\bar{p}$ et $\tilde{p}'_{e1}$ tend vers 0, la perte marginale tend vers 0.

Lorsque $r > 0$, la décroissance de la perte marginale avec k_1 est accentuée, puisque la perte n'est plus seulement plus petite lorsque k_1 augmente, elle est aussi plus tardive. ■

2.9.3 Preuve de la proposition 30

La firme entrante installe son usine immédiatement (*i.e.* $t_{0,2} = 0$) si et seulement si :

$$D_0 \geqslant \frac{4\bar{p}rF}{(\bar{p}-rc)^2} \tag{2.40}$$

$$\text{et } k_2 \leqslant \frac{(\bar{p}-rc)D_0 + \sqrt{(\bar{p}-rc)^2 D_0^2 - 4\bar{p}D_0 rF}}{2\bar{p}} \tag{2.41}$$

Démonstration. D'après la proposition 29, $t_{0,2} = 0$ si et seulement si :

$$\frac{\bar{p}k_2^2}{(\bar{p}-rc)k_2 - rF} \leqslant D_0 \tag{2.42}$$

Cette condition est un polynôme en k_2, la condition étant vérifiée entre les racines, lorsqu'elles existent. Le discriminant vaut $\Delta = (\bar{p}-rc)^2 D_0^2 - 4\bar{p}D_0 rF$, et est positif sous la condition 2.40. La moyenne des racines vaut $(\bar{p}-rc)D_0/2\bar{p}$, qui est aussi le k_2 optimal lorsque $\lambda = 0$. Nous montrerons ultérieurement que la capacité installée est une fonction strictement croissante de λ (section 2.6, proposition 32). k_2 est donc toujours supérieur à la plus petite des racines. Finalement, la condition 2.42 revient à imposer à k_2 d'être inférieure à la plus grande des racines, c'est la condition 2.41.

Si l'entrée est retardée ($t_{0,2} > 0$), c'est nécessairement que k_2 est supérieure à la plus grande des racines, et sur cette zone, la date d'entrée est une fonction strictement croissante de la capacité installée. Entre les racines, on a $t_{0,2} = 0$. On a donc croissance au sens large de la date d'entrée avec la capacité installée. ∎

2.9.4 Preuve de la proposition 33

Afin d'étudier l'effet d'une augmentation de k_1 sur la condition du premier ordre en k_2, on résout l'équation :

$$\frac{\partial^2 \pi_2}{\partial k_2 \partial k_1} = 0 \tag{2.43}$$

qui admet une unique solution en k_1 :

$$k_1 = k_1^0 = 2\mu \frac{k_2 \mathrm{e}^{k_2/\mu}}{\mu \mathrm{e}^{k_2/\mu} - \mu + k_2} - \mu \tag{2.44}$$

où $\mu = \lambda/r$. k_1^0 est une fonction de k_2 uniquement, représentée sur la figure 2.9. Si (k_1, k_2) est tel que $k_1 > k_1^0(k_2)$, alors la dérivée seconde donnée en 2.43 est négative. Cette propriété va être appliquée au point $(k_1, k_2^*(k_1))$.

Etude de la fonction k_1^0 : On montre aisément qu'il s'agit d'une fonction strictement croissante, convexe sur $[0, \mu]$, telle que $k_1^0(0) = 0$ et $k_1^0(\mu) = \mu$ (donc

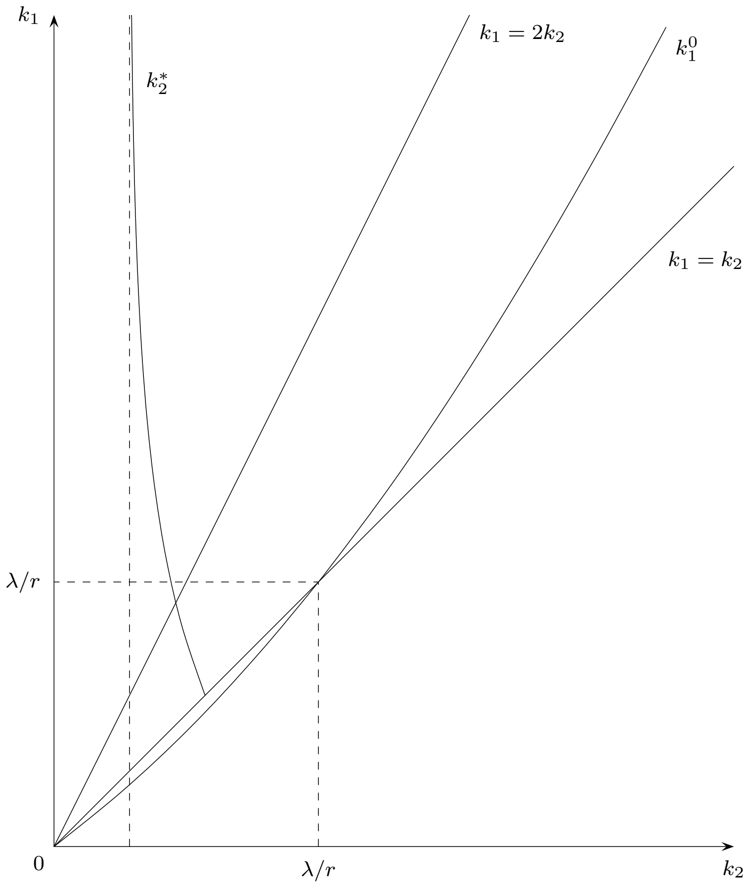

FIG. 2.9 – Capacité optimale de l'entrant en fonction de k_1.

$k_1^0(k_2) \leqslant k_2$ sur $[0, \mu]$), et équivalente à $2k_2$ en $+\infty$ (voir figure 2.9).

Cas $k_1 = \mu$ **:** Quand $k_1 = \mu$, $c = 0$ et $D_0 = k_1$, la meilleure réponse de l'entrant est calculable, on trouve $k_2^*(k_1 = \mu) = \mu$. k_2^* est croissante en D_0 et décroissante en c d'après la proposition 32, donc $k_2^*(k_1 = \mu) \leqslant \mu$ quand $D_0 \leqslant k_1$ et $c \geqslant 0$.

Cas $k_1 \geqslant \mu$ **:** Supposons que le point $(k_1, k_2^*(k_1))$ vérifie la propriété (P) $k_1 \geqslant k_1^0(k_2^*(k_1))$ (c'est en particulier le cas pour $k_1 = \mu$ d'après le point qui précède). En ce point, la dérivée croisée est négative, donc la fonction de réaction est décroissante en k_1 (une augmentation marginale de k_1 entraîne une diminution de la dérivée par rapport à k_2, et la condition du premier ordre est vérifiée pour une valeur de k_2 marginalement plus petite). k_1^0 étant une fonction croissante, on a $k_1+\varepsilon \geqslant k_1 \geqslant k_1^0(k_2^*(k_1)) \geqslant k_1^0(k_2^*(k_1+\varepsilon))$, si bien que le point $(k_1+\varepsilon, k_2^*(k_1+\varepsilon))$ vérifie encore la propriété (P). On en conclut que k_2^* est une fonction décroissante pour tout $k_1 \geqslant \mu$.

Cas $k_1 < \mu$: On a $k_1 \geqslant k_2^*(k_1) \geqslant k_1^0(k_2^*(k_1))$ car sur $[0,\mu]$, $k_1^0(k_2) \leqslant k_2$. Le point $(k_1, k_2^*(k_1))$ vérifie la propriété (P). ■

2.9.5 Investissements répétés

Dans le modèle précédent, nous avons retenu l'hypothèse d'un investissement unique pour chaque firme. Ce faisant, nous restons le plus proche possible du modèle de la section 2.2, tout en conservant un modèle tractable. Toutefois, cette hypothèse restreint fortement les stratégies des firmes, qui pourraient établir des stratégies d'investissements répétés.

Cette annexe a pour but de montrer que lorsque le coût fixe d'entrée est important par rapport au profits que peut espérer obtenir une firme, on ne restreint que faiblement la portée du modèle en supposant l'investissement unique.

On note $\tau_0 = 0$ et τ_n le n-ième instant où la capacité installée par le monopole est égale à la demande $D_t = \lambda t$.

Lemme 36 *Lorsque le monopole adopte la stratégie d'investissement optimale, la suite des (τ_n) est infinie.*

Démonstration. Si la suite des (τ_n) est finie, alors au delà d'une certaine date τ_N, le monopole est constamment sous-capacitaire ou constamment surcapacitaire par rapport à la demande. Dans le premier cas, ou bien il n'investit plus après la date τ_N, auquel cas un investissement supplémentaire constitue une déviation profitable (puisqu'une usine saturée est rentable par hypothèse). Ou bien il investit à une date ultérieure tout en ne dépassant pas la demande, auquel cas installer une capacité marginalement supérieure constitue une déviation profitable. Dans le cas d'un monopole constamment surcapacitaire, celui-ci investit nécessairement, et un décalage dans le temps de ε de l'un de ses investissements constitue une déviation profitable. Dans tous les cas, on contredit l'hypothèse d'optimalité de la stratégie, donc (τ_n) est infinie. ■

Lemme 37 *Le monopole n'investit qu'une seule fois sur l'intervalle* $[\tau_n, \tau_{n+1}[$.

Démonstration. Par définition de τ_n, le monopole doit investir au moins une fois sur cet intervalle, sinon la capacité ne pourrait pas égaler à nouveau la demande à la date τ_{n+1}. Notons $\tau_n + \delta_n$ la date de ce premier investissement et k_n la capacité installée à cette date. On a nécessairement $k_n \geqslant \lambda\delta_n$ sinon l'installation d'une capacité $k_n + \varepsilon$ est une déviation profitable. Le monopole est donc strictement surcapacitaire sur l'intervalle $[\tau_n + \delta_n, \tau_{n+1}[$. Un deuxième investissement est exclu car un décalage dans le temps de ε du deuxième investissement constitue une déviation profitable. ■

On reprend la notation introduite dans la preuve précédente, (k_n) représentant la suite des capacités installées, et $(\tau_n + \delta_n)$ la suite des dates d'investissements.

On a $\tau_{n+1} - \tau_n = k_n/\lambda$.

Lemme 38 *Les suites* (k_n) *et* (δ_n) *sont constantes.*

Démonstration. Il suffit de remarquer qu'à l'instant τ_n et à l'instant τ_{n+1}, la firme est confrontée à un problème d'optimisation identique. ■

On note k et δ les valeurs de ces suites constantes. On a $\tau_n = nk/\lambda$. Toutes les usines dégagent donc un profit identique. En notant $V(k,\delta)$ la valeur (constante) de l'usine n à l'instant τ_{n+1} et π_M^∞ le profit total de la firme. On a :

$$V(k,\delta) = \int_{\delta}^{k/\lambda} \bar{p} D_t \mathrm{e}^{-rt} dt + \bar{p} k \mathrm{e}^{-rk/\lambda}/r - (F + ck)\mathrm{e}^{-r\delta} \tag{2.45}$$

$$\pi_M^\infty = \sum_{n=0}^{\infty} V(k,\delta)\mathrm{e}^{-r\tau_n} = \frac{V(k,\delta)}{1 - \mathrm{e}^{-rk/\lambda}} \tag{2.46}$$

On remarque que la fonction $V(k,\delta)$ est exactement le profit π_M donné à l'équation 2.3, qui donne le profit du monopole lorsque celui-ci est contraint de n'investir qu'une seule et unique fois. Pour des grandes valeurs de k, π_M et π_M^∞ sont confondues.

Il n'est pas possible de maximiser π_M^∞ analytiquement, sauf dans deux cas extrêmes. Si $F = 0$, on a $k^* = 0$ et $\delta^* = 0$: ce cas correspond à la construction d'une infinité d'usines infiniment petites, de façon à coller en permanence à la taille du marché. Si F est grand, alors $\pi_M^\infty \sim \pi_M$, et la stratégie optimale avec investissements répétés consiste à construire une suite d'usines individuellement optimales.

Chapitre 3

Entry game and financial structure : a strategic use of debt.

3.1 Introduction

This paper examines the strategic role of financial structure in an entry game, in which a monopoly is confronted with the entry of leveraged firm, that may be bought out by the incumbent.

We consider the standard entry game configuration in which a monopoly is faced with a party entering the market. Before the entry, the incumbent firm earns monopoly profits. After the entry, light competition may follow, which is in fact an accommodation of the entry by the incumbent, allowing the firms to make what we will call *duopoly profits*. On the other hand, the firms may decide to engage in fierce competition (a price war) in which profits are smaller than duopoly profits. From the traditional perspective of predation theory (see Tirole (1989) pp 305-388 for a detailed analysis of predation models), the decision to engage in a price war is made by the monopoly firm, which drives the entrant out of the market by means of a costly short term price war in order to recover its monopoly profit. We will here consider the capability for the entrant of triggering a price war, hence giving it damage potential that may be used to strategic ends. We thus distance ourselves from predation models which present price wars as an abuse of the monopoly's dominant position. On the contrary, if the cost of the war is increasing with the size of the firm, the incumbent may in fact be at a disadvantage.

Several characteristics distinguish our analysis from a standard entry game. First of all, we adopt the corporate finance perspective in supposing the entrant to be in debt, which means that in order for it to finance the market entry cost, it has borrowed a given sum which will need to be reimbursed at the end of a given term T. If the entrant is unable to reimburse its loan at date T, it goes bankrupt and exits the market forever. This factor makes the meaning of predation more precise, for a clear definition of both price war length and market exit is given.

Secondly, we introduce the possibility of a negotiated market exit, the exit being equivalent to the purchase of the entrant by the incumbent firm. This is a widespread practice, particularly in oligopolistic industries. We therefore assume that once the entrant has paid the market entry cost, and before any competition takes place, the incumbent firm and the entrant have the option of negotiating a takeover. It is in this particular negotiation that the entrant can take advantage of its damage potential in order to extract a portion of the incumbent's surplus. In our model, competition is thus studied primarily from the upstream perspective in the negotiation game, while it is traditionally studied from a downstream perspective in a post-entry game. Furthermore, we do not adopt a given competition framework (as Cournot or Bertrand competition) in the post-entry game.

The phenomenon that we want to bring to the fore is the following : in order to be able to obtain a greater portion of surplus through negotiations, the entrant may have to make its price war threat credible, and it can obtain this result by using its debt. The mechanism which will be analyzed in this article is thus based on the combination of the two particularities of the model. The game we propose concerns a strategic utilisation of debt, which is indirect. Indeed, the debt level is not really chosen by the entrant so as to be able to increase its profit in the competitive game, but rather in order to make its threat credible, thereby increasing its profits in the negotiation phase.

Our article is written along the lines of the current literature that studies the influence of a decision concerning financial structure on the ensuing competition game. Brander and Lewis (1986) analyze the influence of this decision on competition in a uncertain environment. They apply the notion of risk shifting in a Cournot competition model. It should be noted that this model does not bring into play negotiations between parties. The notion of risk shifting, introduced in Jensen and Meckling (1976), is a classic example of moral hazard taken in financial relations : given a firm in debt faced with an uncertain situation, and assuming that it is unable to reimburse its debt in the case of unfavorable states of nature, its strategy will maximize its expected profits in favorable states of nature, without taking into account the influence of these decisions in unfavorable ones (since it is the debtholders which will make or lose profit). The firm thus takes more risks in the decision-making process, the extra-risk being assumed by the debtholders. In Brander and Lewis (1986), the debt enhances a firm's credible commitment to produce more aggressively in the Cournot game. A similar phenomenon can be observed in our model : whenever an entrant is sure not to be able to reimburse its debt, it engages in a price war whose cost is ultimately the debtholders's responsibility. In cases of bankruptcy, limited liability is used as a credible commitment factor.

Bolton and Scharfstein (1990) discuss a predation case which hinges on a financial contract. The importance of staggered financing is well known : in making the financing of a second period contingent upon the result of the first period (by means of a contract), the backer is able to bring about an optimal decision as to whether or not to continue the activity. However, a competitor can act strategically by modifying its decisions with a view to increase the chances of an intermediate result which is unfavorable for the firm in debt, and thus the chances of the firm being liquidated by its bank. Our model preserves the use of the parties present in the Bolton and Scharfstein model. The main difference is that their model is structured in a context of asymmetrical information, whereas we assume that information is symmetrical. Furthermore, in Bolton and Scharfstein (1990), then negotiation is made between the bank and the entrant and, in conformity with adverse selection models, it is modelled on the drafting of a revealing contract by supposing that the backer has exclusive negotiating power. In our model, the entrant negotiates directly with the incumbent firm and negotiating power is shared.

The hypothesis on informational structure is crucial, because the negotiation phase, that is based on the sharing of negotiation power (which is a necessary assumption to account for the phenomenon which we are concerned with) can be modelled in a simple way only if information is assumed to be perfect. On the contrary, there is a difficulty in obtaining, given perfect information, a sub-game perfect Nash equilibrium which correspond with the strictly positive time length of a price war. That's why models based on asymmetrical information are prevalent in predation literature (see Benoît (1984), Fudenberg and Tirole (1986), Poitevin (1989,1990)).

The article whose approach is most akin to our own is Fulghieri and Nagarajan (1996), itself based on Benoît (1983, 1984). The latter proposes a model in which the incumbent firm is faced with a financially constrained entrant. At each period, the firm has the option of waging war or not. For the entrant, the financial constraint entails the ability to survive a finite number of war periods before being forced to exit. Fulghieri and Nagarajan (1996) allow the entrant and the incumbent firm to go into debt, and they examine the entry barrier strategies which can be implemented. The two major differences between our model and Fulghieri and Nagarajan's lies in the fact that, in their model, the entrant is unable to wage war (it has no direct damage potential), and there is no possible negotiation between parties. Hence, the phenomenon that we are focusing on can not arise, even if the competition games are similar.

The indirect role played by the debt through a negotiation is a key feature of Perotti and Spier (1993) : in their model, a firm uses leverage strategically through a wage negotiation with its workers. If new investments are necessary to guarantee full payment of the union's claim, the shareholders may threaten not to undertake these valuable new investments if the union does not concede to wage reduction. Shareholders manage to make this threat credible by retiring equity through a junior debt issue.

The role of negotiations provides a link between our article and the literature on cartels and their stability (Osborne and Pitchik (1983), Donsimoni *et al.* (1986), D'Aspremont *et al.* (1983)). Indeed, in our model, the buyout would correspond to collusion in which transfers between parties are authorized, which presupposes that collusion does not have to be tacit. In the literature on cartels, the sharing of the surplus generated by collusion is classically negotiated under the threat of a price war, the price war being defined in this case as the non-cooperative equilibrium which would be effective if there were no price agreement, for example in a Bertrand competition. Given this situation, the credibility of the threat of a price war is not called into question since it is presented as a non-cooperative equilibrium. This is a difference with our model, since price war is not *a priori* an equilibrium, so that the credibility of the threat of a price war is an important issue in this chapter.

The structure of the article is as follows : Section 3.2 presents the general framework of the model, section 3.2.1 presenting the hypothesis retained in the modelling of the initial negotiation and section 3.2.2 the model of the competitive game when both firms are in the market. Section 3.3 determines the equilibria of the competitive game, and the outcome of this game serves as a basis in the initial negotiation presented in section 3.4. The optimal financial structure of the entrant is then determined. Results are discussed in section 3.5. The annex 3.6 justifies the method used to solve the model presented in the previous sections, namely by formalising a selection criteria specific to the particular game.

3.2 The model : general framework

Let firm 1 be in a monopoly position in its market. On date 0, another firm, firm 2, enters the market. At the date $t = 0$, the incumbent and the entrant meet in order to negotiate a market exit for the entrant. One way of considering this exit is in terms of a buyout of the entrant's production assets by the incumbent. We assume that this initial negotiation is zero-length and has no cost. If the negotiation fails, both firms play a competitive game. The model of both phases, negotiation and competitive game, are described respectively in the next two sections.

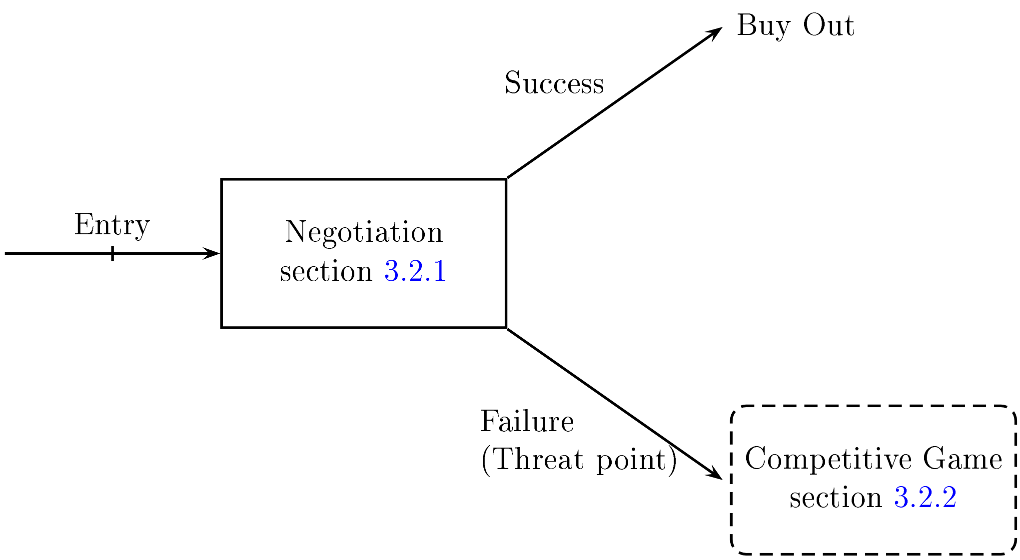

FIG. 3.1 – General framework.

3.2.1 The negociation phase

To model the initial negotiation, we retain the hypothesis of equal sharing of the surplus generated by successful negotiation, that is to say a Nash bargaining in which negotiation power is equal.

This formulation allows for an extremely simple expression of the sharing operation following the negotiation : S being the sum to be shared by the players, let (π^1, π^2) be the *threat point*, the pair of payments that the players receive in the case of disagreement. The success of the negotiation generates a surplus $S - \pi^1 - \pi^2$. If this surplus is negative, the negotiation fails. Otherwise, the players come to an agreement and final payments are given as $((S + \pi^1 - \pi^2)/2, (S - \pi^1 + \pi^2)/2)$. The general axiomatic approach of Nash is presented in Nash (1950) and Selten (1960).

It should be noted that the negotiated payment directly depends on the counterpart payoff in the case of negotiation failure : this allows one party to turn damage potential into additional surplus. The existence of this extraction mechanism is assured as long as negotiation power is not in the hands of a single player, thus the hypothesis of equal negotiating power simplifies calculations, but it is not a necessary condition in our model.

Admittedly, it may appear to be counter-intuitive to assume that an incumbent firm and an entrant are on equal footing in negotiations, since the former appears to occupy the dominant position. However, we refer to Nash (1950) for an axiomisation of the negotiation, particularly the symmetry axiom, so as to clearly distinguish negotiation power as introduced in the Nash negotiation from the "power" based on the relative positions of the threat points : negotiation power measures the ability which, all thing being equal, a player has to obtain a smaller or greater share in a sharing operation.

The threat point that is used as a basis in the negotiation is the sub-game perfect Nash equilibrium of the competitive game played if the negotiation fails. As a multiplicity of sub-game perfect equilibria may arise, we apply a selection criterion specific to the game structure. This selection criterion is formalized in the annex 3.6.

3.2.2 The competitive game

Hypothesis on profit functions

The profits earned by the firms depend on the type of competition in effect at any given time : monopoly, accommodation or price war. π_m gives monopoly profits, π_d^1 and π_d^2 the profits of firms 1 and 2 in the case of accommodation (we will call them duopoly profits), and finally π_w^1 and π_w^2, the profits in the case of a price war.

These profit variables give the net present value of the future cash-flows discounted at a common rate given as r, assuming that the competition type remains constant. For example $\pi_w^1 = \int_0^\infty p_w^1 \mathrm{e}^{-rT} dt$, where p_w^1 is the instantaneous profit[1]. With this notation, the value at date t of the profits earned during a war lasting from t to T is simply $\pi_w^1(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)})$. This notation does *not* imply or assume that a constant and indefinite price war could be an equilibrium.

Furthermore, we suppose the following :

Hypothesis 39 $\pi_m > \pi_d^1 + \pi_d^2$, $\pi_d^i > 0$ *and* $\pi_d^i > \pi_w^i$ *where* $i = 1, 2$.

in order to express, on the one hand, that competition decreases the firms' global profit, and on the other, that the war is costly for both parties. Apart from this last condition, nothing is assumed about profits in a war. They may reflect a competitive advantage for the incumbent firm, particularly an advantage in costs, or inversely, they may be selected in order for the war to be more costly for the monopoly than for the entrant. For example, one can adopt a "Judo-Economic" perspective (see Gelman and Salop (1983)), assuming that the monopoly is unable to discriminate in its prices between current consumers in the market attacked by the entrant and those who are not included in the market (the entrant has a limited capacity or only operates at a local level). It follows that a local price war becomes global from the monopoly, and as such is more costly for the monopoly than for the entrant.

[1]The instantaneous profit being constant, we have $p_w^1 = r\pi_w^1$.

At any time, one of the two firms can trigger a price war, and it suffices that only one of the parties acts for the war to take place. Profits then plummet at the war profit level. The war is concluded as soon as both firms assume light competition behavior, whereby profits return to the level of duopoly profit.

Financial structure of the entrant

The entrant is in debt, and its debt is assumed to be non-convertible and renegotiation-proof. Both hypothesis ensure the commitment effect of debt. If it were convertible, debtholders would convert the debt when stockholders indulge in a strategy that reduce the total value of the firm, such as a price war, making it unprofitable. To ensure that the debt is renegotiation-proof, we can, for example, assume that it is zero-coupon and that debtholders have absolute priority over stockholders.

We consider a debt contract of the simplest form, assuming that at date T the entrant must reimburse the total D. If the debt is zero-coupon then the entrant must carry enough cash to meet the payment schedule. We will thus consider its finances x_T at any given time t. If $x_T > D$, it is capable of reimbursing its debt and can remain in the market. Otherwise, it goes bankrupt and the company is liquidated (to simplify the expression of limit cases, we assume that if $x_T = D$, bankruptcy occurs). All of the company's holdings are transferred to the debtholders and the incumbent firm recovers its monopoly position forever[2]. We assume

[2] *Monopoly profits* appear in our model only as the profits made by the incumbent after the bankruptcy of the entrant. They may reflect the fact that the incumbent will never recover its pre-entry profits, for example because entry is associated with the installation of a plant that may continue to be productive, event after the entrant bankruptcy. This increases the damage potential of the entrant. Our generic formulation for monopoly profits allows for such a framework.

that the bankruptcy costs are constant, and we normalize them to zero as the results we obtain are independent of their value[3]. In our framework, this bankruptcy is the only mean to market exit, that is to say that we assume that the incumbent has “deep pockets” (see Telser (1966)), and so has the entrant once it has successfully reimbursed its debt. This assumption allows us to isolate the effect of the loan. It suggests that the entry costs are important respective to production costs.

We assume complete information in order to be able to apply the results of annex 3.6. We also assume that the market for lending is perfect and we adopt all the classical hypotheses concerning the limited responsibility of managers, notably the hypothesis that their personal holdings cannot be seized. We suppose that the possibility of falsifying accounts does not exist, and that the manager cannot perform temporary cash expenditures before the debt reimbursement deadline.

We assume that the available cash amount of the firm is put into an account that is rewarded at an instantaneous rate r. We assume that this rate is the same as the lending rate, itself equal to the discounting rate. This hypothesis is in fact a corollaire of the hypothesis of perfect information and perfect lending market (absence of risk-fee). The temporal effect is thus introduced in the simplest possible way.

Furthermore, we limit ourselves to strategies having a finite number of reversals, which means that we assume that each war period or non-war period has a duration greater than a strictly positive time interval τ.

Taking into account the hypotheses presented above, the equation for the available cash amount of firm 2 is $x_{t+\tau} = x_t \mathrm{e}^{r\tau} + \pi^2(\mathrm{e}^{r\tau} - 1)$, where $\pi^2 = \pi^2_d$ or π^2_w

[3]The case of variable bankruptcy costs will be discussed later

depending on whether there is a war or not during the interval $[t, t + \tau]$.

We will now calculate the sub-game perfect equilibrium of this game, which will serve as a negotiation basis.

3.3 Equilibrium of the competitive game

The state of firm 2's cash amount is determined by the pair $(t, x) \in E = [0, T] \times \mathbb{R}$ (which we will hereafter call x_T) determining the moment $t \in [0, T]$ of current game action and the cash amount $x \in \mathbb{R}$.

Lemma 40 *Only markovian strategies depending on the state x_t subsist to the refining process presented in section 3.6.*

Proof. An infinite number of sub-games correspond with a given state x_T. Indeed, there are as many sub-games corresponding to the state x_T as there are paths to reach it. In any case, these sub-games are identical, and we will see that they have a unique sub-game perfect equilibrium which subsists following the refining process presented in section 3.6. As a result, the selected action given the state under consideration does not depend on preceding play leading up to it. ■

Hence, a firm's strategy is completely described by a function from the state set E in the set $\{War, \neg War\}$, which indicates which policy the firm chooses for each game state.

Lemma 41 *If a later market exit of firm 2 is excluded in state $x_t \in E$, both firms cooperate forever.*

Proof. The game at $t + dt$ is independent of the action chosen at date t, so that it is only the payments during the time interval dt that determine the course of action decided upon by the players. They are in fact playing the following matrix game (we recall that instantaneous payments are proportional to intertemporal payments) :

$$\begin{array}{c|c|c|} & War & \neg War \\ \hline War & \pi_w^1, \pi_w^2 & \pi_w^1, \pi_w^2 \\ \hline \neg War & \pi_w^1, \pi_w^2 & \pi_d^1, \pi_d^2 \\ \hline \end{array} \tag{3.1}$$

This game is the typical example used to illustrate Selten's idea of perfectness (see Selten (1975), Myerson (1978), Kohlberg (1981), Kalai and Samet (1984)). Equilibrum $(\neg War, \neg War)$ strictly Pareto-dominates any other outcome of the game. Moreover, any miscoordination could not endure as the game is repeated. As a consequence, we *select* equilibrium $(\neg War, \neg War)$ as the only reasonable Nash equilibrium. ∎

The threat of price war is not credible if it has no aim. In economic terms, if market exit is excluded, predation and price war are not likely to occur, as there is no counterpart to the short run predation costs. It is one aspect of the so-called "deep pocket" argument (McGee (1958), Telser (1966)).

We now determine the sub-game perfect equilibrium of the game.

Proposition 42 *There are two possible forms of the sub-game perfect Nash equilibrium to be retained :*

i. if the initial wealth of the entrant exceed a certain threshold X_0, we have an equilibrium with immediate accommodation of the entry : both firms indefinitely engage in light competition ;

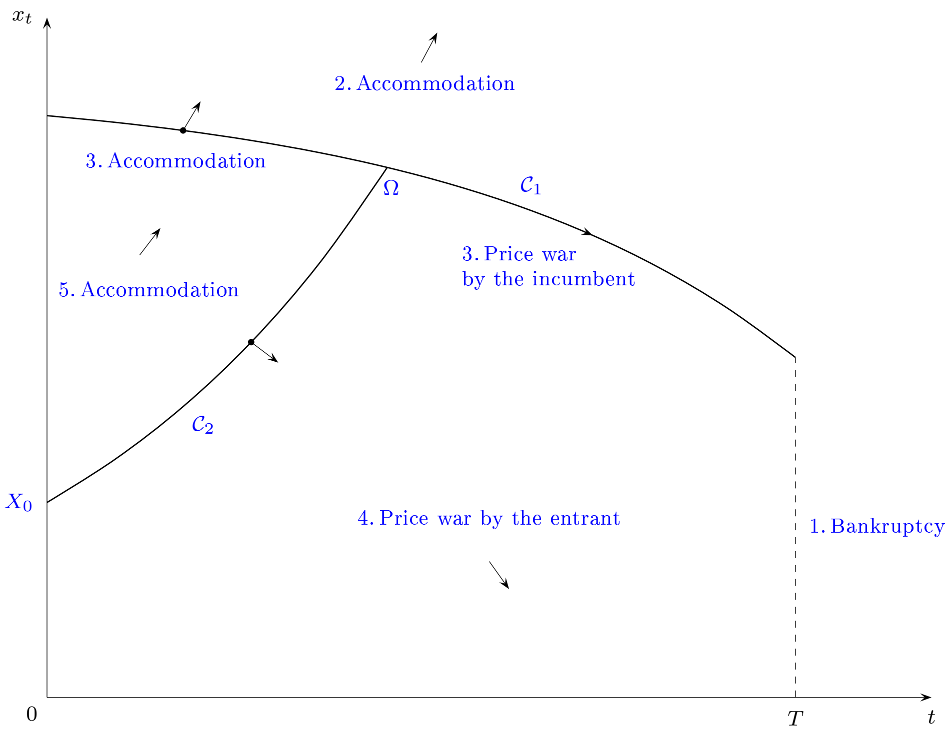

FIG. 3.2 – Sub-game perfect equilibrium.

ii. if the initial wealth is less than X_0, we have a price war equilibrium until the entrant goes bankrupt.

Proof. The extensive proof is given in annex 3.7. We give here a simplified proof given the main intuitions and comments. The figure 3.2 depicts the dynamics of the available cash amount of the entrant firm in the sub-game perfect equilibrium. We compute the sub-game perfect Nash-equilibrium by backward induction. Each step in the reasoning is numbered, matching the corresponding zone in figure 3.2.

1. $(t = T)$ If $x_T \leqslant D$, the entrant does not reimburse its debt and exits the market. The incumbent firm regains its monopoly position. In this case, payments are $(\pi_m, 0)$. If $x_T > D$, the entrant reimburse its debt and later exit is excluded,

resulting in cooperation forever according to lemma 41 : the payments are $(\pi_d^1, \pi_d^2 - De^{-r(T-t)})$.

2. $\mathcal{C}_1$ is the set of states from which a continuous price war leads to the state $x_T = D$. Above $\mathcal{C}_1$, a later exit of firm 2 is excluded, and the payments are $(\pi_d^1, \pi_d^2 - De^{-r(T-t)})$.

3. On the curve $\mathcal{C}_1$, a cooperation means cooperation forever, and a continuous war means firm 2 exit. The entrant is willing to cooperate, and the incumbent faces the classical trade-off between a definitive accommodation and a costly short-run price war driving the entrant out of the market. Its decision depends on the length of price war the entrant is able to endure. We call Ω the point of $\mathcal{C}_1$ that represents the state at which the incumbent breaks even. Its abscissa is $T - \Delta$, where Δ is the longest price war the incumbent is willing to endure to drive the entrant out of the market.

4. Let $\mathcal{C}_2$ be the set of points that, if a price war does not occur, lead to the point Ω. Underneath the curves $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$, all paths lead to the non-reimbursement of the entrant's debt. Therefore, for every state of this set, the payment for the entrant is 0, and the entrant is indifferent as to whether or not a war takes place. We now apply Proposition 50 to select the equilibrium in which the entrant triggers a continuous price war, for this is the equilibrium that hurts the incumbent the most among the set of sub-game perfect equilibria.

It can be noted that the entrant makes the debtholders pay the cost of the price war. This transfer is to be compared with risk shifting : the firm in debt acts without taking into account the payment received by the debtholders in the case of non-reimbursement. The main difference is that in the present case, the state of the game depends entirely on the player as the outcome is deterministic.

We see that a price war longer than Δ can arise, Δ being the length of the longest price war the incumbent is willing to endure to drive the entrant out of the market. This war is triggered by the entrant because the incumbent cannot credibly commit to not trigger a war later, when it is profitable to do so.

5. For the set beneath the curve $\mathcal{C}_1$ and strictly above the curve $\mathcal{C}_2$, definitive accommodation occurs. Indeed, the incumbent is not willing to engage in a price war of length greater than Δ. The entrant is willing to be accommodated, and knows that a short-run cooperation leads to a definitive accommodation.

The threshold X_0 is the ordinate at the origin of the curve $\mathcal{C}_2$. ■

3.4 Initial negotiation

We assume that the entrant has to pay an entry cost F and that its initial wealth is given as A. We assume that $A < F$, so it is necessary for the entrant to borrow in order to pay the entry cost. It borrows $D\mathrm{e}^{-rT} \geqslant F - A$, which it must reimburse in T. Its initial cash amount is $x_0 = D\mathrm{e}^{-rT} - F + A$. The information being complete, the entrant succeeds in getting a loan if the debtholders anticipate that the entrant will be able to reimburse its debt.

We assume that once the entrant has paid the market entry cost, and before any competition takes place, the incumbent firm and the entrant have the option of negotiating a takeover. We assume that in the case of an agreement, the debt is always reimbursed (the buyer could be said to take charge of the entrant's debt). Also, the cash amount of the entrant firm stays within the firm. Thus, the total to be shared by both parties is $\pi_m - De^{-rT} + x_0$, being the update value of future cash flows if the negotiation ends in agreement.

To model the initial negotiation, we retain the hypothesis of equal sharing of the surplus generated by successful negotiation, that is to say a Nash bargaining in which negotiation power is equal. Each firm will receive half of the surplus generated by successful negotiations.

For a matter of simplicity, we assume that there is only one negotiation, so that, if negotiation fails, it is not possible to negotiate later. This hypothesis allows us to use the sub-game perfect equilibrium of the previous section as threat point in the negotiation. If we allow further negotiations, the threat point is slightly modified, but the results are quite similar[4].

3.4.1 Threat point and negotiation output

Let

$$\underline{A} = F - (\pi_m - \pi_w^1)(1 - \mathrm{e}^{-rT}) \tag{3.2}$$

$$\bar{A} = F - \pi_d^2 + (\pi_d^2(\pi_m - \pi_w^1) - \pi_w^2(\pi_m - \pi_d^1))\mathrm{e}^{-rT}/(\pi_d^1 - \pi_w^1) \tag{3.3}$$

We have :

Lemma 43 $\underline{A} < \bar{A} \leqslant F$.

Proof. The inequality $\bar{A} \leqslant F$ is evident. The inequality $\underline{A} < \bar{A}$ is equivalent to

[4]It is easy to prove that if a negotiation succeeds at some date, then the initial negotiation also succeeds. The entrant cannot credibly commit to trigger a price war in the meanwhile. The threat of price war is credible only once future successful negotiation are ruled out. The release of the hypothesis thus lower the damage potential of the entrant.

$\pi_M - \pi_w^1 - \pi_d^2 > \mathrm{e}^{-rT}(\pi_M - \pi_w^1 + \pi_w^2(\pi_M - \pi_d^1)/(\pi_d^1 - \pi_w^1) - \pi_d^2(\pi_M - \pi_w^1)/(\pi_d^1 - \pi_w^1))$. The left side of this inequality is positive. If the right side is negative, the result is acquired. If it is positive, it is decreasing for T, so that it is sufficient to check that the inequality is verified for $T = 0$. Setting $T = 0$, we obtain $(\pi_d^2 - \pi_w^2)(\pi_M - \pi_d^1)/(\pi_d^1 - \pi_w^1) > 0$, which is true. ■

The following proposition states that $\underline{A}$ and $\bar{A}$ are two threshold in the initial wealth of the entrant that determine the result of the negotiation.

Proposition 44 *The success and the outcome of the negotiation depends on the initial wealth of the entrant :*

- *if $A \in [\bar{A}, F]$, the entrant obtains the loan and enters. The negotiation is made on the basis of an endless cooperation, and the entrant is immediately bought out buy the incumbent. The total profits are :*

$$\Pi^1 = \frac{\pi_m + \pi_d^1 - \pi_d^2}{2} \tag{3.4}$$
$$\Pi^2 = \frac{\pi_m - \pi_d^1 + \pi_d^2}{2} - F \tag{3.5}$$

- *if $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$, the entrant obtains the loan and enters. The negotiation is made under the threat of a credible price war, and the entrant is immediately bought out buy the incumbent. The profits are :*

$$\Pi^1 = \pi_m \mathrm{e}^{-rT} - \frac{F - A}{2} - \frac{(\pi_m - \pi_w^1)(1 - \mathrm{e}^{-rT})}{2} \tag{3.6}$$
$$\Pi^2 = -F + \frac{F - A}{2} + \frac{(\pi_m - \pi_w^1)(1 - \mathrm{e}^{-rT})}{2} \tag{3.7}$$

- *if $A \in [0, \underline{A}]$, the entrant fails in obtaining the loan.*

Proof. The condition $A > \bar{A}$ is equivalent to $X_0 < x_0$. If $X_0 < x_0$, the threat point retained in the sharing operation is the accommodation equilibrium point $(\pi_d^1, \pi_d^2 - De^{-rT} + x_0)$. It can be seen that the surplus $\pi_m - \pi_d^1 - \pi_d^2$ is strictly positive, thereby always leading to successful negotiation and the debt is reimbursed. The total profit of the entrant is its share obtained in the negotiation, menus A (its personal contribution to the payment of the entry cost).

If $X_0 \geqslant x_0$, the threat point that is retained is the price war $(\pi_m e^{-rT} + \pi_w^1(1 - e^{-rT}), 0)$. The negotiation only fails if the surplus resulting from successful negotiations is negative, which is to say if $De^{-rT} - x_0 < (\pi_m - \pi_w^1)(1 - e^{-rT})$. Consequently, there exists a debt level that that cannot be exceeded to meet financing. In terms of the entrant's assets, this condition is $A > \underline{A}$. If the condition is met, the entrant is financed, and the negotiation successes. $\blacksquare$

It can be noted that in all cases, given fixed initial wealth, it is useless for the entrant to borrow more than is necessary. This is to say that by borrowing $De^{-rT} = F - A$, and by having no initial finances, the same threat points and payments will result in negotiations.

If no initial negotiations could take place, the debt would only be reimbursed in the case of an accommodation, and only an entrant possessing an initial wealth greater than $\bar{A}$ would be financed. This credit rationing is a classical result when introducing moral hazard into financial relationship : financing is only granted if the party supplies a sufficient amount of capital.

In the presence of a negotiation, the entrant obtains financing for initial wealth over $\underline{A}$. As $\underline{A} < \bar{A}$, the condition on the initial wealth required to obtain financing is less strict. Financing is thus facilitated given the possibility of negotiating the buyout. Moreover, the threshold $\underline{A}$ is an increasing function of π_w^1 and a decreasing of T, that is to say that damage potential facilitates financing.

When $A > \bar{A}$, the game proceeds as if the entrant had initially been able to completely pay the entry cost, since the loan entails no cost. When $A \in [\underline{A}, \bar{A}]$, the situation can be described as one in which the incumbent firm pays half of the entrant's minimal debt, all in paying it half of what it is capable of losing. It can be observed that the payment obtained using the threat of war increases along with the entrant's damage potential, otherwise stated, whenever π_w^1 decreases and T increases.

3.4.2 Entry decision and optimal financial structure

Let $\tilde{A} = -\underline{A}$. The following proposition determines, for a given T, the entry policy of firm 2 depending on its initial wealth.

Proposition 45 *Entry is profitable if* $A \leqslant \tilde{A}$ *and if* $A \geqslant \bar{A}$.

Proof. The payment obtained under the threat of accommodation is always positive. For a given T, the payment obtained under threat of a price war is linear and strictly decreasing for A, and at $\tilde{A}$ profits fall to zero. ■

It follows that, if $\underline{A} \geqslant 0$, profits are only positive whenever $A > \bar{A}$. Given an initial wealth of between $\underline{A}$ and $\bar{A}$, the entrant is able to obtain the loan and will be bought out by the incumbent firm, but this is not profitable for the entrant since, in this case, its damage potential is too small. There is no entry.

If $\underline{A} < 0$ and $\bar{A} > 0$, the entry is profitable for two types of entrants : those who have significant initial wealth and would be accommodated for $(A > \bar{A})$,

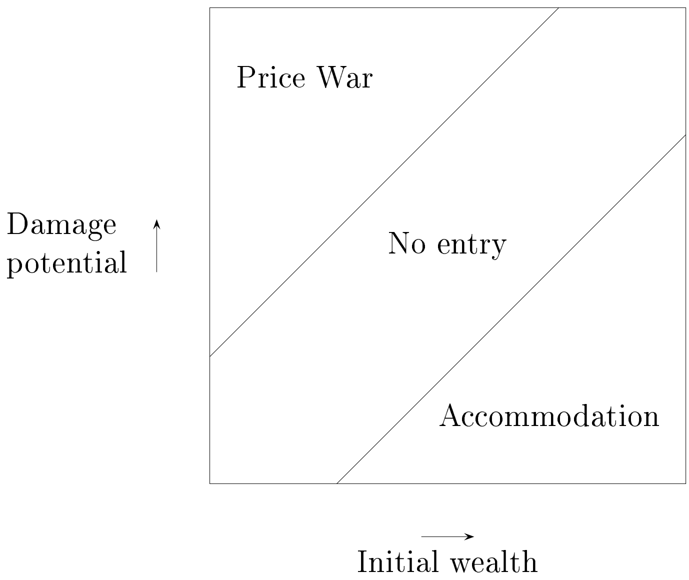

FIG. 3.3 – Entrants typology and threat points.

and on the other hand, those who have limited resources and go heavily into debt, being able to credibly go through with a war imposing a sufficient cost on the incumbent($A < \tilde{A}$). Adopting Fudenberg and Tirole's behavior taxonomy, we could say that the former are "fat cats", and the latter have a "lean and hungry look" (see Fudenberg and Tirole (1984)). Figure 3.3 represents the typology of the potential entrants regarding their financial structure and their damage potential. If $\tilde{A} < \bar{A}$, there is a discontinuity in the types of entrants, since firms that do not have sufficient initial wealth to be accommodated neither sufficient damage potential cannot enter the market. To our knowledge, this type of phenomenon is only to be found in Fulghieri and Nagarajan (1996).

Lastly, if $\bar{A} \leqslant 0$, entry is profitable to all potential entrants, but only the accommodation equilibrium subsists.

Note that $\tilde{A}$ is increasing and $\bar{A}$ is decreasing for T, so that the set of profitable entry is increasing in T. Proposition 45 can thus be written for a bounded set of T, the maturities of debt contracts available in the lending market.

We have previously considered A and T to be exogenous variables. If we set these variables as fixed by the entrant, we can determine the optimal financial structure and loan contract to be chosen by the entrant.

Proposition 46 *There exist an optimal financial structure that is one of the following :*

- *An initial wealth A and a debt contract $(D = (F-A)\mathrm{e}^{rT}, T)$ such that $A > \bar{A}$.*
- *Zero initial wealth and full debt financing $(D = (F-A)\mathrm{e}^{rT^*}, T^*)$, where T^* satisfies $\bar{A}(T^*) = 0$.*

Proof. Negotiations held under the threat of accommodation $(A > \bar{A})$ lead to profits for firm 2 that are independent of T and A. The profit made by the entrant under the threat of a price war is a decreasing function of A, thus setting $A = 0$ is a strictly dominating strategy. Profits should be compared where $A = 0$ and where $A > \bar{A}$. Negotiations held under threat of war are preferable whenever $F+(\pi_m-\pi_w^1)(1-\mathrm{e}^{-rT}) > \pi_m-\pi_d^1+\pi_d^2$. In order for this negotiation to actually take place, it is also necessary that $\bar{A} > 0$. We show that both of these inequalities are compatible, which is to say that parameter values exist for which the negotiation held under threat of war is strictly preferred over the negotiation held under the threat of an accommodation. The profit made by the entrant under the threat of a price war is an increasing function of T, so that the entrant prefers to obtain a loan with the greatest maturity possible, keeping $\bar{A} \geqslant 0$. $\bar{A}$ being a continuous and strictly decreasing function of T and $\lim_{T\to\infty} \bar{A} = F - \pi_d^2 < 0$, we deduce that there exists an optimal value T^* for T such that $\bar{A}(T^*) = 0$. ∎

It appears that the maturity of the debt contract is endogenously determined. Another possibility would be to assume that A is set by the entrant, and that the maturity of the debt contract $T(A)$ is an increasing (possibly concave) function for A. This hypothesis would lead for some values of the parameters to a financial structure combining debt and equity, even for the equilibrium corresponding to the price war threat.

3.5 Conclusion

Many economic models dealing with negotiation assume that one party has all the bargaining power and maximizes its surplus subject to a participation constraint of the counterpart. In such framework, some phenomena may not arise. The damage potential exploitation discussed in this paper is one of them. The Nash bargaining solution is the simplest tool to model a negotiation, in particular when the negotiation process is not the focus of the model. Its axiomatic approach allows it to be used as a "black box", contrary to more complex bargaining models.

The use of the Nash bargaining model implies the hypothesis of complete information. Potentially, the case may be generalized with asymmetrical information by combining Bayesian games with the Harsanyi and Selten generalization of the Nash negotiation (Harsanyi and Selten (1972)). However a major hurdle resides in the fact that the resolution of the Beyesian game implies a significant increase in the number of players (there will be as many players as there are types), and Nash negotiations with more than two players are problematic as far as their justification is concerned (how is one to define a threat point ?). In our model, in spite of this hypothesis, we have obtained a credible price war. This is made possible by the introduction of the third party (the debtholders), and the subsequent separation between the party that triggers the war and the one that bears the costs of it.

In order to exploit its damage potential through negotiation, the entrant makes its price war threat credible by using its debt. The entrant thus strategically employs its debt to increase its payment, but this technique is indirect. Indeed, the debt is primarily employed to influence a particular outcome situation during negotiations, not to directly influence payments in the game. This indirect role of debt is to be linked to the indirect use of debt in Perotti and Spier (1993), in which leverage affects a negotiation between shareholders and employees of firm.

The credibility of the price war threat lays in our model on the limited liability effect. However, there is a slight difference between the use of the limited liability in Brander and Lewis (1986) and in our paper : the results in Brander and Lewis (1986) rely on the convexity of the payoff function of the party in debt (the party takes more risks), whereas our results rely on the flat part of this payoff function (the party is indifferent between several outcomes of the game). Fulghieri and Nagarajan (1996) also exploits the flat part of the payoff function, not to make a threat credible (the entrant has no damage potential) but in order to make the entrant insensitive to predation, allowing it to stay in the market long enough to make predation unprofitable to the incumbent.

Several results are consistent with the known results concerning risk shifting. In particular, there is the result that whenever negotiations are impossible, there occurs a credit rationing analogous to the one encountered in the moral hazard models in financing relations : the backer anticipates the transfer of risk on behalf of the firm which borrows and requires a contribution of assets before it agrees to give a loan. Due to this, some profitable projects do not obtain financing. Strictly speaking, in our model it is neither a question of moral hazard nor of risk, since there is no uncertainty. Notwithstanding, given that the entrant is unable to commit itself not to cause more losses whenever it is no longer able to reimburse its debt, the same effect is produced.

Regarding the possibility of a buyout and the debt, a double effect can be observed : the possibility of a buyout makes it easier for the entrant to obtain financing. This effect is rather natural, for the debt is more often reimbursed. But a complementary effect can also be noted whereby going into debt facilitates the buyout of the entrant, which is more surprising.

Finally, we have obtained a discontinuity in the types of entrants. Entry is only profitable either to firms with significant initial wealth, or to those with limited resources and high damage potential. Intermediary debt levels with moderate damage potential make an entry unprofitable. When the entrant firm chooses its financial structure and its debt contract strategically, both borrowing strategies (high debt or low debt) can be optimal, depending on its damage potential - a high damage potential encouraging high levels of leverage. An optimal maturity for the debt contract is also determined endogenously.

Bibliographie

Benoît, J. P., 1983, Entry with Exit : An extensive Form Treatment of Predation with Financial Constraints. *IMSSS Technical Report*, No. 405.

Benoît, J. P., 1984, Financially constrained entry in a game with incomplete information. *Rand Journal of Economics*, 15.4 : 490-499.

Bolton, P. and D. Scharfstein, 1990, A Theory of Predation Based on Agency Problems in Financial Contracting. *American Economic Review*, 80.1 : 93-106.

Brandenburger, A. and H. Stuart, 2004, Biform Games. *Harvard NOM Research Paper No. 00-06.*

Brander, J. and T. Lewis, 1986, Oligopoly and Financial Structure : The Limited Liability Effect. *American Economic Review*, 76.5 : 956-970.

D'Aspremont, C., A. Jacquemin, J. Gabszewicz, and J.A. Weymark, 1983, On the stability of collusive price leadership. *Canadian journal of Economics*, 16 : 17-25.

Donsimoni, M.-P., N.S. Economides and H. Polemarchakis, 1986, Stable Cartels. *International Economic Review*, 27.2 : 317-27.

Fulghieri, P. and S. Nagarajan, 1996, On the strategic role of high leverage in entry deterrence. *Journal of Banking and Finance*, 20 : 1-23.

Fudenberg, D. and J. Tirole, 1984, The Fat-Cat Effect, the Puppy-Dog Ploy, and the Lean and Hungry Look. *The American Economic Review*, 74.2 : 361-366.

Fudenberg, D. and J. Tirole, 1986, A “Signal-Jamming” Theory of Predation. *RAND Journal of Economics*, 17.3 : 366-376.

Gelman, J. and S. Salop, 1983, Judo Economics : Capacity Limitation and Coupon Competition. *Bell Journal of Economics RAND*, 14.2 : 315-325.

Grossman, S., and O. Hart, 1986, The Costs and Benefits of Ownership : A Theory of Vertical and Lateral Integration. *Journal of Political Economy*, 94 : 691-719.

Harris, M. and A. Raviv, 1991, The theory of capital structure. *Journal of Finance*, 46 : 297-356.

Harsanyi, J. and R. Selten, 1972, A Generalized Nash Solution for Two-Person Bargaining Games with Incomplete Information. *Management Science*, 18.5 : 80-106.

Hart, O., and J. Moore, 1990, Property Rights and the Nature of the Firm. *Journal of Political Economy*, 98 : 1119-1158.

Jensen, M., and W. Meckling, 1976, Theory of the Firm : Managerial Behavior, Agency Costs and Ownership Structure. *Journal Of Financial Economics*, 3.4 : 305-360.

Kalai, E. and D. Samet, 1984, Persistent Equilibria in Strategic Games. *International Journal of Game Theory*, 13.3 : 129-144.

Kohlberg, E., 1981, Some problems with the concept of perfect equilibrium. Conference on the Theory of General Economic Equilibrium, University of California, Berkeley.

Kraus, A. and Litzenberger, R.H., 1973, A State Preference Model of Optimal Financial Leverage. *Journal of Finance*, 28 : 911-922.

McGee, J., 1958, Predatory Price Cutting : The Standard Oil (N.J.) Case. *Journal of Law and Economics*, 1 : 137-169.

Modigliani, F. and Miller, M., 1958, The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment. *American Economic Review*, 48.3 : 261-297.

Myerson, R., 1978, Refinements of the Nash equilibrium concept. *International Journal of Game Theory*, 7 : 73-80.

Nash, J. F., 1950, The Bargaining Problem. *Econometrica*, 28 : 155-162.

Osborne, M.J. and Pitchik, C., 1983, Profit-Sharing in a Collusive Industry. *European Economic Review*, 22 : 59-74.

Perotti, E., and K. Spier, 1993, Capital Structure as a Bargaining Tool : The Role of Leverage in Contract Renegotiation. *American Economic Review*, 83.5 : 1131-1141.

Poitevin, M., 1989, Financial Signalling and the "Deep-Pocket" Argument. *RAND Journal of Economics*, 20.1 : 26-40.

Poitevin, M., 1990, Strategic financial signalling. *International Journal of Industrial Organization*, 8.4 : 499-518.

Selten, R., 1960, Bewertung strategischer Spiele. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft*, 116 : 221-281.

Selten, R., 1975, Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games. *International Journal of Game Theory*, 4 : 25-55.

Telser, L., 1966, Cutthroat Competition and the Long Purse. *Journal of Law and Economics*, 9 : 259-277.

Tirole, J., 1989, Theory of Industrial Organisation. Cambridge, MA, MIT Press.

3.6 Annex : Strategic threat point

Two rational and risk-neutral players have the option of sharing a sum of money S, and if they fail to come to an agreement as to the way the sum is to be divided, they play a given game G. It should be observed that the payment S is not *a priori* a payment in game G.

To model the initial negotiation, we retain the hypothesis of equal sharing of the surplus generated by successful negotiation, that is to say a Nash bargaining in which negotiation power is equal.

We denote the game structure $\Gamma = (S, G)$.

From the game theory perspective, our model combines two approaches : the first being that of non-cooperative games in the post entry game, the second that of cooperative games in the negotiation phase. Γ is not a cooperative game, nor a non-cooperative game. As such, our model might be aptly compared with the "Biform Games" formalized by Brandenburger and Stuart (2004). As the authors show, both approaches are complementary, and both are useful to the economist in understanding and creating models for business strategies. They propose a two-phase game structure, the first phase being a non-cooperative phase which determines the characteristics of a a second cooperative phase. In concrete terms, it is an extensive game whose terminal nodes are not payments but cooperative games, and in order to resolve each game, Brandenburger and Stuart opt for the core concept. In a less generic manner, Grossman and Hart (1986) resolve the second cooperative phase by using the Shapley value. An other formalisation of hybrid games, the variable threat point Nash game, is presented in Selten (1960) : in the first non-cooperative phase, the players choose their respective threat points, and in the second phase a Nash bargaining takes place based on the chosen pair. Selten demonstrates the existence of the value of this game. It should be noted that in the Selten-Nash *variable* threat point bargaining, the credibility of the threat is not explicitly called into question : the non-cooperative phase leads up to a threat point which is automatically taken as a basis for negotiation. This means that the moves made in the non-cooperative game entail commitment. The Selten variable threat point Nash game is used in Osborne and Pitchik (1983) and in Hart and Moore (1990).

What all these approaches have in common is that they put the non-cooperative phase *before* the cooperative phase. In our approach, we put the cooperative phase (a Nash bargaining) *before* a non-cooperative phase, which follows the negotiation in case of failure.

The question we should answer is the following : over which threat point do the players agree to undertake the sharing operation ? Section 3.6.1 and 3.6.2 justify the answer we give in order to solve our model.

3.6.1 Rationality of the threat point

Hypothesis 47 *A player has a right to reject an outcome based on a non-credible threat as a potential sharing basis.*

Otherwise stated, an irrationality argument is assumed to be valid to the counterpart within the negotiation, which seems perfectly natural since players are assumed to be rational. It should be noted that this possibility is in no way an obligation.

Given hypothesis 47, a first step in answering the question that is raised is given by the following proposition :

Proposition 48 *The threat point agreed upon by the players is a sub-game perfect Nash equilibrium of game G.*

Proof. To prove that Hypothesis 47 implies Proposition 48, it is sufficient to note that the bargaining game is a constant-sum game, and thus that the interests of both players are diametrically opposed. It follows that if one irrational outcome scenario is profitable for one of the players, it is not profitable for the other. It is therefore always rejected by one of the parties. ∎

This proposition seems very natural. We have merely considered game G as a sub-game at the time of the negotiation. However, since the model is not strictly a pure non-cooperative game, some remarks should be made to ensure that proposition 48 makes sense.

The logic of sub-game perfect equilibria is the following : in retaining only those Nash equilibria which are Nash equilibria in all the sub-games, we reject those which are based on threats that are not credible. Proposition 48 only states that the logic is the same during the negotiation, the only difference with the pure non-cooperative case being that the threats are explicit.

The point to check is why the two players may apply this logic. Indeed, one could imagine that both players could agree on one outcome of game G which would not be rational, because it would be rational to do so within the sharing game. This situation is discarded by hypothesis 47.

3.6.2 Case of multiple sub-game perfect equilibria

If several sub-game perfect Nash equilibria exist in game G, a selection problem arises. Note that the players have to agree on a particular couple of payments to take as the threat point, and not really on a particular equilibrium that will induce these payments. Hence, if all the sub-game perfect Nash equilibria induce the same payments, the selection problem vanishes. If the payments are different, the selection problem becomes essential.

Any existing refinement or selection method might be used to discard an equilibrium that does not seem reasonable as an outcome of the game, as long as it is ensured that this selection makes sense. That depends on the nature of game G, but also on the nature of the whole game Γ. It is important to keep in mind that the players have interests that are diametrically opposed and that they are supposed to reach an agreement. For example, Selten's "trembling hand" argument might be relevant to discard an equilibrium in a particular context, but it is not always so. Proposition 48 simply states that retaining perfect equilibria is a refinement that is always relevant given the structure of the game.

We now present an original argument to discard some equilibrium. That argument is specific to the existence of the negotiation phase, and is meaningless in a strictly non-cooperative game. We show that it can induce the selection of an equilibrium that cannot be selected using previously known criteria.

To understand the basic idea presented below in proposition 50, we consider a particular case of game G. In what follows, the role of player 1 and player 2 can be commuted. Assume that the set of strategies of player 1 is $\{U, D\}$ and that the set of player 2 is reduced to a single strategy $\{L\}$. Assume also that the payment of player 1 is the same for both strategies. The game G strategic form is :

$$\begin{array}{c|c|} & L \\ \cline{2-2} U & x_1, y_1 \\ \cline{2-2} D & x_1, y_2 \\ \cline{2-2} \end{array} \tag{3.8}$$

Without loss of generality, we assume that $y_2 < y_1$.

Hypothesis 49 *In the game described by the matrix 3.8, we* **select** *the equilibrium (D, L) and the payment (x_1, y_2) as the threat point in the negotiation.*

The intuition is simple : it is clear that any strategy profile is a Nash equilibrium, so that player 1 can credibly threat to adopt any strategy. Player 1 is indifferent between all these equilibria when playing game G. However, during the negotiation phase, he prefers the equilibrium corresponding to strategy D to be taken as a basis when sharing the sum S, as it brings him the surplus $S+x_1-y_2 > S+x_1-y_1$. That is to say, player 1 prefers the strategy that hurts his opponent the most. In the extreme case we have considered in 3.8, player 2 cannot reply to a threat of player 1 because he has only one strategy, and any threat is credible, so that player 1 chooses the optimal threat.

It is worth noting that the optimal threat is also the one that makes the negotiation the most profitable : since the threat point is lowered, the case of a negotiation that fails because of a too severe threat cannot arise.

The following proposition generalizes this approach to the case when player 2 has several strategies. We denote by Σ_i the set of strategies of player i for $i = 1, 2$ and by N the set of sub-game perfect equilibria of game G. The payments of the players in a particular outcome determined by a couple of strategies are denoted by $x(\cdot)$ for player 1 and $y(\cdot)$ for player 2.

Proposition 50 *If* $s_1 \in \Sigma_1$, $s_2 \in \Sigma_1$ *and* $\sigma \in \Sigma_2$ *such that :*

i. $(s_1, \sigma) \in N$ *and* $(s_2, \sigma) \in N$

ii. $y(s_1, \sigma) > y(s_2, \sigma)$

iii. $\forall \sigma'$ *such that* $(s_2, \sigma') \in N$, $x(s_2, \sigma') \geqslant x(s_1, \sigma)$

then we discard (s_1, σ) *as a potential threat point in the negotiation.*

The symmetric proposition can obviously be written by commuting the role of player 1 and player 2.

Condition (i) ensures that player 1 can threat to adopt strategy s_2 if game G is played. Indeed, condition (i) implies that $x(s_1, \sigma) = x(s_2, \sigma)$, thus the threat is credible. Condition (ii) ensures that player 1 is willing to do so, as (s_2, σ) hurts player 2 the most.

Condition (iii) ensures that player 2 cannot reply to player 1 threat by another threat. Indeed, any credible threat of player 2 would lead to an equilibrium (s_2, σ') in which player 1 is better off, both in game G (as $x(s_2, \sigma') \geqslant x(s_1, \sigma) = x(s_2, \sigma)$)

and in the negotiation (as $x(s_2, \sigma') - y(s_2, \sigma') \geqslant x(s_2, \sigma) - y(s_2, \sigma)$). Player 1 cannot fear such a threat. If conditions (i), (ii) and (iii) hold, given the presence of equilibrium (s_2, σ), equilibrium (s_1, σ) is not likely to be retained as the basis of the sharing game. Note that the discarded equilibrium (s_1, σ) is Pareto-dominated by (s_2, σ), but this Pareto-domination is *not* strict (both players are not strictly better off).

In some cases, eliminating of some equilibria thanks to proposition 50 can result in one single equilibrium eligible as the threat point. That is the case in our model.

3.7 Annex : Proof of proposition 42

Proof. We compute the sub-game perfect Nash-equilibrium by backward induction. Each step in the reasoning is numbered, matching the corresponding zone in figure 3.2.

1. Firstly, we know that if $x_T \leqslant D$, the entrant does not reimburse its debt and exits the market. The incumbent firm regains its monopoly position. In this case, payments are $(\pi_m, 0)$[5].

2. Secondly, by assumption, a later market exit of firm 2 is excluded in states x_t, $t > D$, such that the entrant is still present in the market (it was able to reimburse its debt), or in states x_t, $t \leqslant T$, such that any path passing by x_t satisfies $x_T > D$. From this and lemma 41, it is deduced that the equilibrium payment of states x_t,

[5] More precisely, the entrant has its initial wealth x_0 taken away, so that payments are $(\pi_m, -x_0)$. Moreover, constant bankruptcy costs can be added. The result holds as long as the entrant's bankruptcy payment is constant respective to the level of bankruptcy.

$t \leqslant T$, such that $x_T > D$ is given by :

$$(\pi_d^1, \pi_d^2 - D\mathrm{e}^{-r(T-t)}) \tag{3.9}$$

since an infinitely long accommodation period follows : each player receives the duopoly payment and firm 2 reimburses its debt.

Particularly, the set of states x_t, $t \leqslant T$, which verify the inequality $x_t\mathrm{e}^{r(T-t)} + \pi_w^2(\mathrm{e}^{r(T-t)} - 1) > D$ are states from which firm 2 exit is excluded : indeed, even a war lasting from t to T would not be sufficient to make firm 2 exit the market. The solutions are the points above the curve $\mathcal{C}_1$ of the equation :

$$\mathcal{C}_1 \ : x_t = D\mathrm{e}^{-r(T-t)} - \pi_w^2(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)}) \tag{3.10}$$

3. The curve $\mathcal{C}_1$ is an important borderline case : starting from a point of $\mathcal{C}_1$, if there is a war, a position within the curve $\mathcal{C}_1$ is maintained, and if the war continues, the point $x_T = D$ is ultimately reached, along with the exit of firm 2. On the contrary, if both firms decide not to wage war, the accommodation zone is definitively entered. From this it can be deduced that the situation which the players are facing at the point $x_T \in \mathcal{C}_1$ is the following matrix game :

$$\begin{array}{c|c|c|} & War & \neg War \\ \hline War & \alpha, 0 & \alpha, 0 \\ \hline \neg War & \alpha, 0 & \beta, \gamma \\ \hline \end{array} \tag{3.11}$$

where $\alpha = \pi_m\mathrm{e}^{-r(T-t)} + \pi_w^1(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)})$, $\beta = \pi_d^1$ and $\gamma = \pi_d^2 - D\mathrm{e}^{-r(T-t)} > 0$.

The entrant will not go to war if the incumbent firm does not, because the entrant strictly prefers to be accommodated rather than to be driven out from the market. As in the previous case, we discard any equilibrium based on a miscoordination : if the incumbent is willing to definitely accommodate the entrant, the later will cooperate. Thus, the decision to accommodate is ultimately made only by the incumbent. In this case, the game takes on the standard form of incumbent firm predation in which the incumbent firm faces a trade off between, on the one hand, a war of a given length allowing it to expulse the entrant, and on the other, a definitive accommodation. The incumbent firm accepts the entrant whenever $\alpha < \beta$, *i.e.* when :

$$T - t > \Delta = \ln[(\pi_m - \pi_w^1)/(\pi_d^1 - \pi_w^1)]/r \tag{3.12}$$

We see that $\Delta > 0$ and that it decreases with the cost of the war for the incumbent. If $T - t > \Delta$, at the point $x_T \in \mathcal{C}_1$, firm 1 accommodates the entry of firm 2 and the equilibrium payment remains $(\pi_d^1, \pi_d^2 - D\mathrm{e}^{-r(T-t)})$. If $T - t \leqslant \Delta$, the incumbent engages in a price war until T, thereby preventing the entrant from reimbursing its debt : equilibrium payments are $(\pi_m \mathrm{e}^{-r(T-t)} + \pi_w^1(1 - \mathrm{e}^{-r(T-t)}), 0)$. We call Ω the point of $\mathcal{C}_1$ of the abscissa $T - \Delta$, that represents the state at which the incumbent breaks even. We assume that $\Delta < T$.

4. Let $\mathcal{C}_2$ be the set of points that, if a price war does not occur, lead to the point Ω. The equation for this curve is :

$$x(t) = D\mathrm{e}^{-r(T-t)} - \pi_d^2 - (\pi_w^2(\pi_m - \pi_d^1) - \pi_d^2(\pi_m - \pi_w^1))\mathrm{e}^{-r(T-t)}/(\pi_d^1 - \pi_w^1) \tag{3.13}$$

Underneath the curves $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ (the curves themselves are included), all paths lead to the non-reimbursement of the entrant's debt. Therefore, for every state of this set, the payment for the entrant will be 0. The entrant is thus indifferent as to whether or not a war takes place. We now apply Proposition 50 to select the equilibrium in which the entrant triggers a continuous price war. At each state x_t of the considered set, there is an infinity of sub-game perfect Nash equilibria, the only condition on the strategies being to have the incumbent cooperating when the entrant cooperates. The continuous price war strategy for the entrant, faced to any strategy for the incumbent, is also a sub-game perfect Nash equilibrium. The entrant is indifferent between these two equilibria[6] (condition (i)), and the continuous price war equilibrium hurts the incumbent the most (condition (ii)). The entrant can threaten to wage this war, and the threat is credible. Faced with this threat, the incumbent firm can do nothing, because deviation has no incidence on the final payment (condition (iii)). All equilibria in which the entrant does not engage in constant price war can thus be rejected in our analysis according to Proposition 50. For all other equilibria (the incumbent might cooperate or not), equilibria payments are the same : $(\pi_m \mathrm{e}^{-r(T-t)} + \pi_w^1(1-\mathrm{e}^{-r(T-t)}), 0)$.

5. The last set for which we are to determine equilibrium payments is the set consisting in the points strictly beneath the curve $\mathcal{C}_1$ and strictly above the curve $\mathcal{C}_2$. For this set, immediate accommodation occurs. Indeed, since each war period or non-war period has a duration greater than τ, there exists a neighborhood of Ω in the considered set such that, in any state x_t of this neighborhood, a war over the period τ triggers a war continuing until bankruptcy occurs, and on the contrary,

[6] With variable bankruptcy costs, this condition is not verified anymore : the entrant will try to minimize its bankruptcy costs, and will thus cooperate.

a non-war results in an definitive accommodation. As $T - t > \Delta$, the incumbent is willing to definitively accommodate the entrant, so that, as along the curve $\mathcal{C}_1$ (step 3), we select the accommodation equilibrium, the entrant cooperating if this action leads it to definitive accommodation. The reasoning is spread by backward induction all along the neighborhood of the curve $\mathcal{C}_2$. Finally, in any state of the considered set, the ensuing exit of the entrant is excluded. Both firms thus cooperate without going to war, as in step 2, and equilibrium payments are $(\pi_d^1, \pi_d^2 - D\mathrm{e}^{-r(T-t)})$.

Let X_0 be the ordinate at the origin of the curve $\mathcal{C}_2$. We have :

$$X_0 = D\mathrm{e}^{-rT} - \pi_d^2 - (\pi_w^2(\pi_m - \pi_d^1) - \pi_d^2(\pi_m - \pi_w^1))\mathrm{e}^{-rT}/(\pi_d^1 - \pi_w^1) \tag{3.14}$$

We conclude that the equilibrium payment of the game depends on the entrant's initial amount of cash. For an initial cash amount level exceeding X_0, immediate accommodation occurs and the entrant reimburses its debt at date T : the payments are $(\pi_d^1, \pi_d^2 - D\mathrm{e}^{-rT})$. For an initial cash amount lower than X_0, a price war triggered by the entrant continues until entrant's bankruptcy at date T : the payments are $(\pi_m \mathrm{e}^{-rT} + \pi_w^1(1 - \mathrm{e}^{-rT}), 0)$. ∎

Chapitre 4

Uniqueness and Characterization of Capacity Constrained Cournot-Nash Equilibrium

4.1 Introduction

In this paper we demonstrate the existence and the uniqueness of the Nash equilibrium when capacity constraints are added to a multi-market Cournot model. Understanding the role of capacity constraints (that may appear exogenous when competition in quantities takes place) is critical in many industrial sectors, such as the cement industry, in which the importance and the irreversibility of investments on production capacity impose long-term decisions. In the proposed extension of the Cournot model, we consider an asymmetric oligopoly (non-identical production costs and capacities) selling a homogeneous good in a multi-market context. We assume linear demand functions that may be different on each market. Furthermore, we assume positive and convex production costs. We show that this setting allows for taking into account the case of multiple production plants per firm, each firm facing a transportation problem when delivering the different markets.

Despite the simplicity of this setting, this problem is not solved analytically in the literature. Nevertheless, since producers incur different costs and supply two or more markets, the way quantities should be allocated given the existence of a capacity constraint is not *a priori* obvious. Indeed, when considering capacity constraints in Cournot settings, most Industrial Organization models are restricted to the analysis of a single-market duopoly, thereby putting aside the difficulty that arises in a multi-market context.

The fundamental impact of the introduction of capacity constraints in a price competition model has been studied by Kreps and Scheinkman (1983). The authors show that in a two-stage game with choice of capacity followed by price competition, and under some rationing rules, the equilibrium is identical to the one obtained from competition in quantity without capacity constraints. Nevertheless, other economic analysis show that it can be interesting to introduce capacity constraints when firms compete in quantity depending on the timing of the game and on the way information is considered. For example, Dixit (1980), in a two-period Cournot model, focuses on the role of the strategic choice of production capacity on entry deterrence. Gabszewicz and Poddar (1997) define a two-stage game where two symmetric firms choose their capacity based on priors on the demand characteristics. This choice is followed by a capacity constrained Cournot competition, once the information is acquired. All these contributions are carried out considering a single-market duopoly.

Another stream of the literature focuses on computing equilibria in more complex settings than those presented in the simple theoretical models of imperfect competition. Following Gabay and Moulin (1980) that shows that Nash equilibria satisfy variational inequalities, algorithmic methods of convergence have been used in order to deal with oligopolistic models. Concerning the introduction of capacity constraints in a Cournot model, Kemfert and Tol (2000) examine the case of the electricity market and compute the constrained equilibrium using fixed point algorithms based on Murphy, Sherali and Soyster (1982). Although these kinds of approaches, which rely on convergence algorithms, are able to solve numerically the problem that we consider in this article, they have the disadvantage of being a "black box", thus suffering from a lack of interpretability.

In this note, we show that the problem can be reduced to that of finding the maximum of a concave objective function over a convex region. This allows us to demonstrate the existence of a unique capacity constrained Cournot-Nash equilibrium.

4.2 The model

We consider N producers competing in M differentiated and independent markets (there are no exchanges among the different markets). We denote by q_{ij} the quantity of a homogeneous good supplied by producer $i \in \{1 \dots N\}$ to market $j \in \{1 \dots M\}$. The vector of the productions of producer i is denoted $q_i = (q_{ij})_{j=1 \dots M}$. Each producer i is able to supply the M markets under a different constraint, $q_i \in S_i$, that is determined by the exogenous data of a closed convex set $S_i \subset \mathbb{R}^m$. The condition $q_i \in S_i$ will be referred to as "capacity" constraint.

The sum of the costs incurred by producer i when supplying the markets is denoted $c_i(q_i)$. For clarity reasons, this cost will be referred to as "production" cost, but this cost allows us to take into account the fact that transportation costs and tax policy, among other factors, may vary for each producer in each market. Therefore, the asymmetry of the oligopoly not only lies in the different capacity constraints, but also in differentiated production costs. Furthermore, we assume that the production cost is a positive convex function of q_i.

We assume linear Cournot competition in each market : the price for each market is a decreasing linear function of the total quantity $Q_j = \sum_{i=1}^{N} q_{ij}$ offered in this market, and is given by $p_j = a_j - b_j Q_j$, where $a_j \in \mathbb{R}_+^*$ and $b_j \in \mathbb{R}_+^*$. The profit of producer i is given by $\Pi_i(q_i, q^{-i}) = \sum_{j=1}^{M} p_j q_{ij} - c_i(q_i)$. Each producer

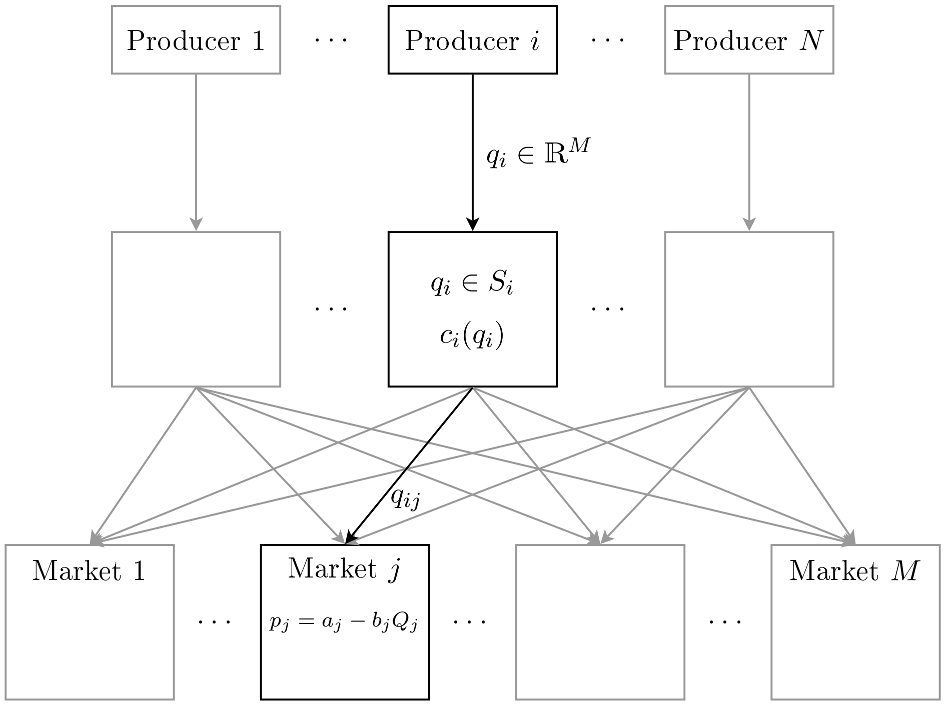

FIG. 4.1 – Multi-market, constrained Cournot model.

maximizes their profit under capacity constraint $q_i \in S_i$, taking into consideration the quantities q^{-i} supplied in each market by their competitors. Producer i best reply strategy is thus determined by the optimization program :

$$\max_{q_i \in S_i} \Pi_i(q_i, q^{-i}) \tag{4.1}$$

Figure 4.1 depicts the main hypothesis of the model. A Constrained Cournot-Nash equilibrium (CCNE) results from the strategic interaction among producers under capacity constraints.

4.2.1 Capacity constraints and production costs

Let $i \in \{1 \dots N\}$. The conditions imposed on the capacity constraint and production costs of producer i are rather general, and may reflect a large variety of situations. A first typical example is the case of separable capacity constraints on each market $S_i = \prod_{j=1 \dots M} [0, K_{ij}]$, where $K_{ij} \in \mathbb{R}_+$ stands for the capacity constraint of producer i on market j. This case would correspond to a producer possessing a production unit in each market, cross-market exchanges being impossible, or to a producer having a single production unit with a large capacity, but facing quotas on each market. Note that the case of a minimal offer on a specific market can also be treated. Another interesting example is the case of a single production unit with a given production capacity $K_i \in \mathbb{R}_+$ that supplies all the markets, so that $S_i = \{q_i \in \mathbb{R}^m / q_{ij} \geqslant 0; \sum_{j=1}^m q_{ij} \leqslant K_i\}$. Here, the problem is the allocation of the production among the different markets. This case is more puzzling than the first example, as the problem cannot be treated separately in each market, and the multi-market formulation becomes essential.

All these examples can be derived from a transportation problem formulation, that can match a specific and complex situation. Consider a directed network Γ composed of a finite set of nodes $\mathcal{N}$ and a finite set of directed arcs $\mathcal{A}$ which is a subset of $\mathcal{N} \times \mathcal{N}$. There are k supply nodes, that correspond to the production units of producer i, and M demand nodes, that correspond to the M markets. All other nodes are conservative. A flow f is a vector of $\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$ that assigns to each arc the quantity being transported along the arc, and satisfies a conservation condition at every node (Kirchoff's law). Each arc $\alpha \in \mathcal{A}$ has a capacity constraint :

every admissible flow f on Γ satisfies $\underline{f}(\alpha) \leqslant f(\alpha) \leqslant \bar{f}(\alpha)$, where $\underline{f}(\alpha)$ and $\bar{f}(\alpha)$ can be finite or infinite. The set of admissible flows is denoted $\mathcal{F}$. Each arc is associated to a cost c_α, that is a linear[1] and positive function of the quantity being transported along the arc, and the cost of a flow f is the sum of the costs on each arc $c(f) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}} c_\alpha(f(\alpha))$. We assume that costs and capacities are rational (this condition ensures that the algorithms used in the proofs always terminate).

In order to simplify notation, we consider that there is only one arc departing from each supply node (we denote these arcs α_1^s to α_k^s) and only one arc arriving to each demand node (we denote these arcs α_1^d to α_M^d) : every graph can be transformed in such a graph by simply adding an arc after each supply node and before each demand node. With this notation, the production of a particular production unit is the flow in the corresponding arc α^s and the quantity delivered on a market is the flow in the corresponding arc α^d.

We complete the graph Γ so as to have only conservative nodes : we add a virtual supply node s, a virtual demand node d, and we add zero-cost and unconstrained arcs from s to the k supply nodes, from the M demand nodes to d, and finally the "return arc" from d to s. This last arc is denoted r. Given an admissible flow $f \in \mathcal{F}$, the flow $f(r)$ in the return arc is called the *value* of the flow f.

Let $S_i = \{(f(\alpha_j^d))_{j=1\dots M}; f \in \mathcal{F}\}$. For every $q_i \in S_i$, we denote $\bar{\mathcal{F}}_{q_i} = \{f \in \mathcal{F} / \forall j \in \{1 \dots M\}, q_{ij} = f(\alpha_j^d)\}$: $\mathcal{F}_{q_i}$ is the set of admissible flows that correspond to the delivery q_i. By definition of S_i, the set $\bar{\mathcal{F}}_{q_i}$ is non-empty. Finally, we assume that, given then vector q_i of quantities to be supplied on the M markets, firm i

[1]The case of convex, linear by pieces costs can be treated in the same way.

chooses the flow optimally. Thus we denote :

$$c_i(q_i) = \min_{f \in \bar{\mathcal{F}}_{q_i}} c(f) \tag{4.2}$$

the cost associated to the strategy q_i.

Proposition 51 *S_i and c_i satisfy the conditions described in section 4.2 for the capacity constraints and the production cost respectively, that is to say :*

- *S_i is a closed convex set of $\mathbb{R}^m$;*
- *c_i is a convex function of q_i.*

Proof. The set of admissible flows $\mathcal{F}$ is a closed convex set of $\mathbb{R}^{|\mathcal{A}|}$, and S_i is the projection of $\mathcal{F}$ on the sub-space generated by the $(\alpha_j^d)_{j=1\ldots M}$. Thus S_i is a closed convex set of $\mathbb{R}^M$.

The continuity of c_i trivially derives from the continuity of both $c(f)$ and the min function.

Computation of $c_i(q_i)$: Let $q_i \in S_i$. Consider the graph Γ_{q_i} that is equal to Γ except that we set $\bar{f}(\alpha_j^d) = q_{ij}$ for $j = 1 \ldots M$. Since $q_i \in S_i$, the set of admissible flows in Γ_{q_i} is non-empty, and it is trivially included in $\mathcal{F}$. A maximal flow f in Γ_{q_i} necessarily satisfies $f(\alpha_j^d) = q_{ij}$ for $j = 1 \ldots M$, and the reverse is true (consider the cut that separates the demand nodes from the other nodes). Thus, $\bar{\mathcal{F}}_{q_i}$ is exactly the set of the maximal flows in the graph Γ_{q_i}, and the cost $c_i(q_i)$ defined by equation 4.2 is the minimal cost of a maximum flow in the graph Γ_{q_i}. We thus apply Roy's algorithm to find a maximal flow of minimal cost.

Roy's algorithm : Departing from a minimal cost flow f (its existence is ensured by the fact that $q_i \in S_i$), we construct the residual graph[2] associated

[2]The residual graph associated to f contains the residual capacity on each arc α. Each arc α

to f in Γ_{q_i}. We denote it $\tilde{\Gamma}_{q_i}(f)$. We look for a path from the supply nodes to the demand nodes in the residual graph. The flow f can be increased in Γ if and only if such a path exists in $\tilde{\Gamma}_{q_i}(f)$. When an increase of the flow is possible, the path μ of minimal reduced cost is selected, and the flow is increased along this path until one of the arcs in μ is saturated. The algorithm is then started again, departing from the new flow. The algorithm terminates when the flow is maximal. The algorithm produces a series of flows with increasing value, each one being of minimal cost given its value. The last flow is maximal and has minimal value.

Marginal cost : Let $f_{q_i} \in \bar{\mathcal{F}}_{q_i}$ be a maximal flow of minimal cost in Γ_{q_i}, as the one obtained by Roy's algorithm. We have $c_i(q_i) = c(f_{q_i})$. Define q_i' by $q_{ij}' = q_{ij}$ for $j \neq j_0$ and $q_{ij_0}' = q_{ij_0} + \varepsilon_0$, where $\varepsilon_0 > 0$. Assume that $q_i' \in S_i$. f_{q_i} is not a maximal flow in $\Gamma_{q_i'}$, as $f_{q_i}(\alpha_{j_0}^d) = q_{ij_0} < q_{ij_0}'$. Thus the residual graph of f_{q_i} in $\Gamma_{q_i'}$, denoted $\tilde{\Gamma}_{q_i'}(f_{q_i})$, contains at least one path from the supply nodes to the demand nodes. Let μ be a path of minimal reduced cost c_μ. μ necessarily connects a supply nodes to the demand node corresponding to market j_0, as the arcs α_j^d, $j \neq j_0$, are saturated by f_{q_i}. The last arc in μ is thus the arc of $\tilde{\Gamma}_{q_i'}(f_{q_i})$ corresponding to the residual capacity of $\alpha_{j_0}^d$. We denote it $\tilde{\alpha}_{j_0}^d$, this arc has a capacity ε_0. All the other arcs in μ have a strictly positive capacity [otherwise they would not be in $\tilde{\Gamma}_{q_i'}(f_{q_i})$], and we can take ε_0 sufficiently small to ensure that $\tilde{\alpha}_{j_0}^d$ is the arc of μ with the smallest capacity. Applying Roy's algorithm to the graph $\Gamma_{q_i'}$ departing from the the flow f_{q_i} leads us to select the path μ and to increase the flow along this path until one arc is saturated, and the first saturated arc is $\tilde{\alpha}_{j_0}^d$ given our choice of ε_0.

is doubled to take into account the lower and upper bound of the flow. The arc corresponding to the lower bound of the flow is directed backwards and is assigned a cost $-c_\alpha$.

The value of the flow has been increased by ε_0, at a cost $c_\mu \varepsilon_0$. The resulting flow is maximal in $\Gamma_{q'_i}$, and of minimal cost. We thus can write :

$$c_i(q'_i) = c_i(q_i) + c_\mu \varepsilon_0 \tag{4.3}$$

As a conclusion, the marginal cost of increasing the offer on market j_0 is equal to c_μ, the minimal cost of a path from the sources to the demand node j_0, when adding the arc $\alpha^d_{j_0}$ to the residual graph $\tilde{\Gamma}_{q_i}(f_{q_i})$.

Convexity : We now prove that the marginal cost of increasing the offer on market j_0 is increasing in every component q_{ij}. Let $j_1 \in \{1 \dots M\}$, and define q''_i by $q''_{ij} = q_{ij}$ for $j \neq j_1$ and $q''_{ij_1} = q_{ij_1} + \varepsilon_1$, where $\varepsilon_1 > 0$. Assume that $q''_i \in S_i$. Let μ_1 be a path of minimal reduced cost c_{μ_1} from the sources to the demand node j_1 in the residual graph. The flow is increased along the path μ_1. We first take ε_1 sufficiently small to reach a maximal flow in $\Gamma_{q''_i}$ in just one step, which is, as previously demonstrated, always possible. Let $f_{q''_i}$ be the new flow.

To simplify the notation, we denote the two residual graphs (before and after the increase of the flow) $\tilde{\Gamma}$ and $\tilde{\Gamma}'$, *i.e.* $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}_{q_i}(f_{q_i})$ and $\tilde{\Gamma}' = \tilde{\Gamma}_{q''_i}(f_{q''_i})$. When adding the arc $\alpha^d_{j_0}$ [resp. $\alpha^d_{j_1}$] to one of these graphs, we will add a subscript 0 [resp. 1] to this notation.

During the increase of the flow, no arc of $\tilde{\Gamma}$ has been dropped, but some arcs may have been added. By definition, μ is the minimal-cost path from sources to demand node j_0 in $\tilde{\Gamma}_0$. Let μ' be a path in $\tilde{\Gamma}'_0$. If μ' contains only arcs that are in $\tilde{\Gamma}_0$, then $c(\mu') \geqslant c(\mu)$. If μ' contains an arc that is not $\tilde{\Gamma}_0$, then its opposite is necessarily an arc of μ_1, which is a path in $\tilde{\Gamma}_1$. Thus, the flow f_ε defined as the superposition of a flow of value ε along μ_1 and a flow of value ε along μ', is a positive flow in $\tilde{\Gamma}_{0,1}$. Using the decomposition theorem, this flow can be written as a combination of cycles : at least one cycle C_0 contains the arc α^d_{j0} [its cost is at least $c(\mu)$], and at least one cycle C_1 contains the arc $\alpha^d_{j_1}$ [its cost is at least $c(\mu_1)$]. The other cycles are in $\tilde{\Gamma}$ and this graph contains no negative cost cycles (f_{q_i} is optimal). Finally, $c(\mu_1) + c(\mu') \geqslant c(C_0) + c(C_1) \geqslant c(\mu) + c(\mu_1)$, thus $c(\mu') \geqslant c(\mu)$. In all cases we have $c(\mu') \geqslant c(\mu)$, so μ is also the minimal cost path from sources to demand node j_0 in $\tilde{\Gamma}'_0$

As long as ε_1 is sufficiently small to reach a maximal flow in $\Gamma_{q''_i}$ in just one step, the marginal cost is unaffected by the shift from q_i to q''_i. Consider now the case of a larger value of ε_1. By definition of the algorithm, one arc of μ_1 is saturated before $\alpha^d_{j_1}$. The corresponding arc is dropped in the residual graph, so that the cost of the minimum cost path in the residual graph $\tilde{\Gamma}'_0$ can only raise (in fact, it will raise only if the dropped arc is actually an arc of μ). ■

Proposition 51 shows that capacity constraint sets and cost functions satisfying the hypothesis of the model can be obtained generically from any transportation problem, that may reflect a large variety of situations. We now analyze the strategic interaction between the producers, given the capacity constraints, the cost functions, and the characteristics of each market.

4.2.2 Equivalent problem

Let $q = (q_i)_{i=1\ldots N}$ be the vector of the productions of all the producers[3], where q_i is the vector of productions of producer i. Let $S = \prod_{i=1}^{N} S_i$. Finding a Nash equilibrium of the capacity-constrained Cournot game can be reduced to finding the maximum of a concave objective function over a convex region.

Proposition 52 *q^* is a Nash equilibrium of the game if and only if q^* is solution of :*

$$\max_{q\in S} \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M}[(a_j - b_j Q_j^{-i}/2)q_{ij} - b_j q_{ij}^2] - \sum_{i=1}^{N} c_i(q_i) \tag{4.4}$$

where $Q_j^{-i} \equiv \sum_{k\neq i} q_{kj}$.

The Constrained Cournot-Nash Equilibrium exists and is unique.

Proof. Let $\tilde{\Phi} = \sum_i \sum_j [(a_j - b_j Q_j^{-i}/2)q_{ij} - b_j q_{ij}^2]$ and $\Phi = \tilde{\Phi} - \sum_i c_i(q_i)$. Let $\tilde{\Pi}(q_i, q^{-i}) = \sum_j (a_j - b_j Q_j)q_{ij}$. We have $\Pi(q_i, q^{-i}) = \tilde{\Pi}(q_i, q^{-i}) - c_i(q_i)$.

1. $\tilde{\Phi}$ is differentiable and the Hessian matrix of $\tilde{\Phi}$ is negative. Furthermore, the costs are convex. Thus Φ is a concave function. The set S is a closed convex set, as a product of closed convex sets. Thus, q is a solution of the program 4.4 if and only if :

$$0 \in \partial\Phi(q) + N_S(q) \tag{4.5}$$

where $\partial\Phi$ is the subdifferential of Φ and N_S is the normal cone to S, both taken at point q. All elements are of dimension $N \times M$.

[3] $q \in (\mathbb{R}^M)^N$ is bijectively associated to a vector of $\mathbb{R}^{N\times M}$, where the productions of each producer are listed, from producer 1 to producer N. The production q_{ij} correspond to row $(i-1)M + j$. To keep the notations simple, we make this association implicitly, when treating q as a vector of $\mathbb{R}^{N\times M}$.

2. The optimization problem for each producer is to maximize in q_i a concave objective $\Pi_i(q_i, q^{-i})$ over a closed convex region S_i. Therefore, q_i is a solution of the best-reply program of player i if and only if :

$$0 \in \partial\Pi_i(q_i, q^{-i}) + N_{S_i}(q_i) \tag{4.6}$$

where $\partial\Pi_i$ is the subdifferential of Π_i in the variable q_i (the production of the competitors q^{-i} are given) and N_{S_i} is the normal cone to S_i, both taken at point q_i. All elements are of dimension M.

3. q^* is a Nash equilibrium if and only if it satisfies the N optimality conditions 4.6 for every $i \in \{1 \ldots N\}$ simultaneously.

4. We now prove that $N_S(q) = \prod_i N_{S_i}(q_i)$:

– $\supset$: Let $y \in \prod_i N_{S_i}(q_i)$ and $q' \in S$. We have $q'_i \in S_i$ and $y_i \in N_{S_i}(q_i)$, so that $y_i \cdot q_i \geqslant y_i \cdot q'_i$. Thus, $y \cdot q = \sum_i y_i \cdot q_i \geqslant \sum_i y_i \cdot q'_i = y \cdot q'$, so that $y \in N_S(q)$.

– $\subset$: Let $y \in N_S(q)$ and $i_0 \in \{1 \ldots N\}$. Let $q'_{i_0} \in S_{i_0}$. We construct the vector q' that is equal to q except on its i_0-th component : $q' = (q_1, \ldots, q'_{i_0}, \ldots, q_N)$. We have $q' \in S$, so that $y \cdot q \geqslant y \cdot q'$. Thus $\sum_i y_i \cdot q_i \geqslant \sum_{i \neq i_0} y_i \cdot q_i + y_{i_0} \cdot q'_{i_0}$, implying $y_{i_0} \cdot q_{i_0} \geqslant y_{i_0} \cdot q'_{i_0}$ and $y_{i_0} \in N_{S_i}(q_i)$.

5. We now prove that $\partial\Phi(q) = \prod_i \partial\Pi_i(q_i, q^{-i})$: Keeping in $\tilde{\Phi}$ only the terms in q_i, we obtain :

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi} &\approx \sum_j ((a_j - b_j Q_j^{-i}/2) q_{ij} - b_j q_{ij}^2) + \sum_{i' \neq i} \sum_j ((-b_j q_{ij}/2) q_{i'j}) && (4.7)\\
&\approx \sum_j ((a_j - b_j Q_j^{-i}/2) q_{ij} - b_j q_{ij}^2) - \frac{1}{2} q_{ij} Q_j^{-i} && (4.8)\\
&= \sum_j [(a_j - b_j Q_j^{-i}) q_{ij} - b_j q_{ij}^2] && (4.9)\\
&= \sum_j (a_j - b_j Q_j) q_{ij} = \tilde{\Pi}_i(q_i, q^{-i}) && (4.10)
\end{aligned}$$

that is to say that $\tilde{\Phi}$ can be written as $\tilde{\Pi}_i(q_i, q^{-i}) + R(q^{-i})$ where $R(q^{-i})$ is a function that is independent on the variable q_i. $\tilde{\Phi}$ [resp. $\tilde{\Pi}_i$] being differentiable, the only element in the subdifferential at point q [resp. q_i] is the gradient at this point. As $\partial\tilde{\Phi}/\partial q_{ij} = \partial\tilde{\Pi}_i/\partial q_{ij}$, we have $\partial\tilde{\Phi}(q) = \prod_i \partial\tilde{\Pi}_i(q_i, q^{-i})$.

By hypothesis, the production cost beard by producer i depends only on its production q_i and is independent of the decisions of the other producers q^{-i}. The costs being continuous and finite at point q, we obtain $\partial(\sum_i c_i)(q) = \prod_i \partial c_i(q_i)$.

Finally, all function being continuous and finite at point q, we obtain by addition $\partial\Phi(q) = \prod_i \partial\Pi_i(q_i, q^{-i})$.

6. Point 4 and point 5 prove that the set of the N optimality conditions 4.6 is equivalent to condition 4.5. Hence there is a one to one correspondence between the optimal solutions of program 4.4 and Nash Equilibria.

7. Φ is strictly concave, and $\lim_{\|q_i\| \to \infty} \Phi(q_i) = -\infty$. Thus the optimal solution of program 4.4 exists and is unique. Finally, Nash equilibrium exists and is unique.

■

4.3 Concluding remarks

Starting from a very simple Cournot model, we focus on the strategic impact of the existence of capacity constraints, when competitors are differentiated in costs in order to supply several markets. Beyond numerical solutions that could also be found by powerful algorithmic methods, our approach present several aspects that make it original.

First, we demonstrate analytically the existence and the uniqueness of the capacity constraint equilibrium, as well as provide a method that leads to an exact solution. Our formulation of capacity constraints and costs is rather general, an may reflect a large variety of situations, so that our approach could be the base of a decision-making tool in a real-world complex setting.

Moreover, powerful numerical convergence algorithms, that effectively lead to approximate solutions, also inevitably complicate their interpretation, even for problems of small dimension. On the contrary, our method comes as an original and enlightening alternative to those approaches in the case of formal models dealing with Cournot competition, in which the introduction of a multi-market formulation and/or a capacity constraint may induce new economic interpretations. A good example is the Salant-Switzer-Reynolds paradox (Salant et al. (1983)), that states that in a Cournot industry, only a merger involving 80% of the firms would be profitable. In our formulation, a merger is interpreted as a union of the transportation graphs, and that trivially creates an endogenous size-effect on the cost curve, as does exogenously the "capital" in Perry and Porter (1985), solving the paradox.

Bibliographie

Caron, C., J. Laye et M. Laye, 2004. Capacity Constrained Cournot-Nash Equilibrium : A Simple Formula. PHD thesis, École Polytechnique.

Dixit, A., 1980, The Role of Investment in Entry Deterrence. *Economic Journal*, 90 : 95-106.

Gabay, D. and H. Moulin, 1980. On the uniqueness and stability of Nash equilibria in non cooperative games. In : A. Benssoussan, P. Kleindorfer and C. S. Tapiero, eds, *Applied stochastic control in econometrics and management science*, Amsterdam : North-Holland, 271-294.

Gabszewicz, J.J. and S. Poddar. 1997. Demand fluctuations and capacity utilization under duopoly. *Economic Theory*, 10, 131-146.

Kemfert, C. and R. Tol. 2000. Modelling an Oligopolistic Structure by a Computational Game Theoretic Modelling Tool. *Oldenburg working paper.*

Kreps, D. and J. Scheinkman, 1983, Quantity Precommitment and Bertrand Competition Yield Cournot Outcomes. *Bell Journal of Economics*, 14 : 326-337.

Murphy, F.H., H.D. Sherali and A.L. Soyster. 1982. A mathematical programming approach for determining oligopolistic market equilibrium. *Mathematical Programming* 24, 92-106.

Perry, M., and R. Porter, 1985, Oligopoly and the Incentive for Horizontal Merger.*The American Economic Review* 75.1 : 219-227.

Salant, S., S. Switzer and R. Reynolds, 1983, Losses from Horizontal Merger : The Effects of an Exogenous Change in Industry Structure on Cournot-Nash Equilibrium. *The Quarterly Journal of Economics*, 98.2 : 185-199.