



HAL
open science

Vorticity preserving numerical schemes in compressible aerodynamics

Fabrice Falissard

► **To cite this version:**

Fabrice Falissard. Vorticity preserving numerical schemes in compressible aerodynamics. Engineering Sciences [physics]. Arts et Métiers ParisTech, 2006. English. NNT: 2006ENAM0005. pastel-00002056

HAL Id: pastel-00002056

<https://pastel.hal.science/pastel-00002056>

Submitted on 5 Jan 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

École Nationale Supérieure d'Arts et Métiers
Centre de Paris

THÈSE

présentée pour obtenir le titre de

DOCTEUR
de
L'ÉCOLE NATIONALE SUPÉRIEURE
D'ARTS ET MÉTIERS

Spécialité : Mécanique

par

Fabrice FALISSARD

SCHÉMAS NUMÉRIQUES PRÉSERVANT LA VORTICITÉ
EN AÉRODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

soutenue le 30 janvier 2006 devant le jury composé de

MM.	Rémi	ABGRALL	Professeur, Université de Bordeaux I	Rapporteur
	Denis	DARRACQ	Flight Physics R&T Co-ordinator, AIRBUS France	Examineur
	Serge	HUBERSON	Professeur, Université de Poitiers	Rapporteur
	Alain	LERAT	Professeur, ENSAM, Paris	Directeur
	Jean	PIQUET	Professeur, l'ECN, Nantes	Président
	Jacques	SIDÉS	Chef d'unité, ONERA, Châtillon	Examineur

Remerciements

Ce travail de thèse a été financé par l'Office National d'Études et de Recherches Aérospatiales. Je tiens à remercier M. Philippe Morice, directeur du Département de Simulation Numérique des écoulements et Aéroacoustique, DSNA, de m'avoir accueilli au sein de son département.

Je remercie MM. Alain Lerat et Jacques Sidès de m'avoir accordé leur confiance tout au long de ces quatre années. L'intérêt qu'ils ont porté sur ce travail, la direction qu'il lui ont donnée et leurs encouragements ont plus que largement contribué à sa réalisation.

Je remercie MM. Rémi Abgrall et Serge Huberson d'avoir accepté d'être les rapporteurs de ce mémoire, de l'intérêt qu'ils ont manifesté et des remarques pertinentes qu'ils m'ont formulées. Mes remerciements s'adressent également à M. Jean Piquet d'avoir présidé le jury et à M. Denis Darracq d'avoir pris part au jury.

Je n'oublie pas de remercier Mmes Ghislaine Denis et Brigitte Commelin du secrétariat du département, toujours disponibles, efficaces et d'humeur agréable. Je remercie aussi MM. Philippe Céroni et Didier Blaise, toujours prêts à vous dépanner d'une panne informatique.

J'ai été amené à demander conseils et avis à nombre d'ingénieurs des unités MNEI, MNES ou ETRI au cours de ces années, je les remercie tous du temps qu'ils m'ont accordé et de l'aide qu'ils m'ont apportée.

Je remercie aussi mes compagnons de route, même ceux qui se sont obstinés à me contredire à tout propos, Erick (*Igor l'aviateur-géologue-botaniste*), Bruno R. (*brechi*), Mathieu (*Ah, le réseau...*), Ronan (*comédien-danseur-chanteur-musicien-auteur*), Noël (*le fuzéen, y a poussette*), Frédérique (*partie voir Flipper*), Élodie (*la badiste*), Bruno A. (*Sonic, qui me sent disconvenir à cent pas*), Sébastien (*grand bavard*), Chi-Tuân (*la finesse en toute occasion*), Lutz (*vous les Français*), Guillaume N. (*le mangavore*), Élisabeth (*vadrouille toujours*), Frédéric (*mémoire du Tour et du foot*), Guillaume D. (*contradictueur en chef*), François (*enthousiaste musicien*), Olivier (*ça marche pô*), Stéphanie (*petit Soleil*), la relève, Géraldine, Emma, Méryem, Yann, et les stagiaires, Julien T., Amin, Kelly, Delphine, Olivier, Julien M., Yoann, Natie, Grégory, Cyril.

Enfin, merci à tous ceux qui m'ont accompagné, mes amis, ma famille.

Table des matières

Introduction	1
1 Schémas préservant la vortacité	5
1.1 Introduction	7
1.2 Hyperbolicité, acoustique et vortacité	7
1.2.1 Hyperbolicité	7
1.2.2 Équations d'EULER	8
1.2.3 Équations de l'acoustique avec advection	9
1.2.4 Équations de l'acoustique pure	10
1.3 Schémas préservant la vortacité en acoustique pure	11
1.3.1 Notations discrètes	11
1.3.2 Schémas considérés par MORTON & ROE	12
1.3.3 Schémas basés sur le résidu	16
1.4 Schémas préservant la vortacité en acoustique avec advection	22
1.4.1 Transport de la vortacité par le schéma RBVs	22
1.4.2 Transport de la vortacité par le schéma de LAX-WENDROFF-NI	23
1.4.3 Propositions pour améliorer le transport de la vortacité	23
1.4.4 Schéma préservant la vortacité	24
1.5 Conclusion	25
2 Analyse des propriétés du schéma RBV	27
2.1 Introduction	29
2.2 Analyse de stabilité du schéma RBV	29
2.3 Origine des propriétés dissipatives du schéma RBV	32
2.3.1 Influence de la moyenne spatiale de l'incrément temporel	33
2.3.2 Ajout de l'incrément temporel à trois niveaux de temps	36
2.3.3 Ajout du résidu complet dans la dissipation numérique	37
2.4 Résolution du schéma RBV	38
2.4.1 Formulation en pas de temps dual	38
2.4.2 Phase implicite sur le pas de temps dual	39
2.4.3 Analyse de stabilité en temps dual	40
2.4.4 Filtrage de la solution en pas de temps dual	41
2.5 Étude de l'erreur du schéma RBV par la méthode du système équivalent	48
2.5.1 Système équivalent du schéma RBV	48
2.5.2 Équation équivalente pour une advection linéaire scalaire	49
2.5.3 Système équivalent pour un système hyperbolique linéaire	57
2.5.4 Conclusion	63
2.6 Étude de l'erreur de phase du schéma RBV par analyse de FOURIER	64
2.6.1 Rappels	64
2.6.2 Erreur de phase du schéma RBV	64

2.6.3	Conclusion	65
2.7	Advection de tourbillon pour les équations d'EULER	66
2.7.1	Problème modèle	66
2.7.2	Discrétisation nécessaire pour l'advection de tourbillon	68
2.7.3	Influence du pas de temps pour l'advection de tourbillon	70
2.7.4	Influence de la direction de l'écoulement pour l'advection de tourbillon	72
2.7.5	Influence du filtrage pour l'advection d'un tourbillon	74
2.7.6	Comparaison avec d'autres schémas numériques	76
2.8	Conclusion	80
3	Schéma RBV en maillage irrégulier	81
3.1	Introduction	83
3.2	Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier	83
3.2.1	Rappels et notations	83
3.2.2	Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier	84
3.3	Filtrage en maillage irrégulier	89
3.4	Précision du schéma RBV en maillage irrégulier	90
3.4.1	Précision du schéma RBV en maillage cartésien irrégulier	90
3.4.2	Précision du schéma RBV en maillage quelconque	92
3.5	Schéma simplifié pour les problèmes stationnaires	94
3.5.1	Advection circulaire scalaire en maillages irréguliers	94
3.5.2	Influence du filtrage pour le calcul de solutions stationnaires	96
3.5.3	Application à un tourbillon stationnaire	97
3.5.4	Écoulement subsonique stationnaire autour d'un profil	98
3.5.5	Écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil	100
3.6	Advection de tourbillons en maillages irréguliers	102
3.7	Écoulement autour d'un profil oscillant en translation	105
3.7.1	Définition du mouvement de tamis	105
3.7.2	Description de l'écoulement	107
3.7.3	Influence de l'ordre du filtre	108
3.7.4	Conclusion	110
3.8	Conclusion	111
4	Interaction pale-tourbillon	113
4.1	Introduction	115
4.2	Description de l'expérience	116
4.3	Modèle de tourbillon pour le BVI	116
4.3.1	Tourbillon à enthalpie constante	117
4.3.2	Tourbillon à entropie constante	118
4.3.3	Comparaison des tourbillons isentropique et isenthalpique	118
4.4	Maillages pour le BVI	119
4.5	Initialisation et paramètres du calcul	121
4.5.1	Superposition des champs	121
4.5.2	Position du tourbillon à l'instant initial	121
4.5.3	Erreur de représentation du tourbillon	122
4.5.4	Conditions aux limites	122
4.5.5	Temps physique et temps fictif	123
4.6	Description et analyse de la solution de référence	124
4.6.1	Solution non visqueuse du BVI subsonique frontal	124
4.6.2	Comparaison de la solution avec l'expérience	130
4.6.3	Processus de formation du second tourbillon	132

4.7	Sensibilité de la solution aux paramètres numériques	135
4.7.1	Influence du filtre	135
4.7.2	Influence du modèle de tourbillon	136
4.7.3	Influence du raffinement du maillage	139
4.7.4	Influence du pas de temps	144
4.7.5	Conclusion partielle	148
4.8	Comparaison avec des schémas d'ordre 2 classiques	149
4.8.1	Schémas utilisés pour la comparaison	149
4.8.2	Comparaison des résultats	150
4.9	Conclusion	156
	Conclusion	157
	Bibliographie	159

Introduction

Les structures tourbillonnaires dont la vorticité caractérise l'intensité jouent un rôle fondamental dans de nombreux écoulements aérodynamiques. Parmi les écoulements rencontr es dans le domaine aéronautique, on peut citer par exemple le sillage des avions civils. Ce sillage est principalement constitu e de deux tourbillons parall es et contrarotatifs très intenses. Ces tourbillons qui résultent de la portance contribuent à la traînée de l'avion et sont d'autant plus intenses que la masse de l'avion est importante. Au niveau des aéroports, ce sont ces tourbillons qui conditionnent la distance, et donc l'intervalle de temps, qui séparent deux avions au d ecolage ou à l'atterrissage.

Un autre exemple est donn e par l'écoulement autour d'un hélicoptère. Le rotor principal assure en même temps les fonctions de sustentation et de propulsion. Pour certains régimes de vol, les interactions entre le rotor et son sillage tourbillonnaire influencent considérablement les performances aérodynamiques de l'hélicoptère, pouvant aller jusqu'à la perte de contrôle de l'appareil. Ces interactions participent aussi au bruit externe qui pénalise et freine l'usage de l'hélicoptère en milieu urbain.

Un exemple supplémentaire d'écoulement où les structures tourbillonnaires jouent un rôle capital est fourni par les écoulements dans les turbomachines. Pour optimiser les performances des turbo-réacteurs, leurs composants sont exploit es au voisinage du maximum de leurs capacités. Les régimes de fonctionnement sont alors proches de régimes instables comme le décollement tournant dans les compresseurs axiaux.

La maîtrise de ces écoulements passe par la compréhension des phénomènes et des lois physiques qui régissent la dynamique tourbillonnaire. La simulation numérique est alors un outil précieux et complémentaire de l'étude expérimentale. La principale déficience des méthodes numériques classiques, dont l'utilisation est largement répandue dans le milieu aéronautique, est la dissipation excessive de la vorticité pour le calcul précis de ces écoulements.

La représentation précise des sillages tourbillonnaires des voilures fixes ou tournantes a fait l'objet de recherches importantes, principalement en régime incompressible. Les approches retenues pour atteindre cet objectif sont multiples.

Des méthodes particulières fondées sur une modélisation du sillage par une distribution de tourbillons discrets ont été développées à l'ONERA (travaux de CANTALOUBE & HUBERSON [13]).   partir de la vorticité discrète, la loi de BIOT-SAVART permet de déduire la vitesse induite et donc d'advecter chaque tourbillon vers l'aval. Toutefois, la géométrie du sillage doit être connue au départ. Cette méthode peut être améliorée en utilisant comme éléments discrets des filaments tourbillonnaires non linéaires, chaque élément tenant compte de l'influence des autres éléments. Le sillage se déforme alors en cons equance. Une autre approche est celle de la surface portante proposée à l'ONERA par REHBACH & CANTALOUBE [14] pour l'écoulement autour d'un rotor

d'hélicoptère en vol d'avancement. Une pale est modélisée par une répartition surfacique de sources et de doublets et le sillage est représenté par des tourbillons ponctuels émis par la pale et advectés par le champ de vitesse induit. Cependant, ces méthodes sont limitées aux écoulements comportant des sillages simples et ne faisant pas apparaître d'ondes de choc.

Une méthode de réduction de la diffusion numérique de portée plus générale a été développée à l'ONERA par NASTASI dans sa thèse [60, 61]. Il s'agit d'une méthode de couplage entre une résolution numérique des équations d'EULER sous forme conservative (en représentation eulérienne) et un suivi lagrangien de particules dans les sillages tourbillonnaires. L'idée est de bénéficier à la fois de la simplicité et de l'efficacité des méthodes compressibles classiques capturant les ondes de choc et de la faible dissipation numérique des sillages calculés en représentation lagrangienne. Dans un sillage, la pression est calculée par la méthode eulérienne et la vitesse et l'entropie sont déterminées par la méthode lagrangienne sous une forme qui revient à apporter une correction aux résultats obtenus par la méthode eulérienne.

Une autre technique, efficace quoique totalement empirique, a été proposée par STEINHOFF *et al.* dans [84] et étendue aux écoulements compressibles dans [31]. Elle consiste à contrebalancer les effets de la diffusion numérique par une reconcentration des zones tourbillonnaires du sillage. Pour cela, un terme de confinement de la vorticité est ajouté à l'équation de quantité de mouvement avec un coefficient dépendant de la taille des cellules du maillage et s'annulant en dehors des zones tourbillonnaires. L'analyse de ce terme par COSTES & KOWANI [20] et le calibrage automatique qu'ils proposent permet de s'affranchir en partie de l'empirisme de la méthode.

Une approche différente pour réduire la diffusion numérique consiste à augmenter l'ordre de précision du schéma de discrétisation, généralement choisi d'ordre 2 en espace en maillage régulier pour simplifier la mise en œuvre dans le cadre des applications complexes. Pour les écoulements rotationnels sans discontinuités, plusieurs schémas numériques permettent d'atteindre des ordres de précision élevé, comme les schémas centrés avec filtrage dans le domaine spectral [7, 40, 86, 87]. Cela est aussi vrai pour les schémas RBC [43, 44, 18] (*Residual-Based Compact*), les schémas ENO et WENO [29, 28, 81, 37, 2] (*(Weighted) Essentially Non-Oscillatory*), et les méthodes de type GALERKIN discontinu [53, 38, 1, 6, 3, 16].

Une alternative aux approches précédentes est de ne pas modifier la méthode de résolution numérique, mais d'adapter au mieux le maillage de calcul afin de minimiser les erreurs dissipatives. Partant des idées de raffinement adaptatif de maillage (technique AMR de QUIRK [73]), BENOIT a développé une méthode d'adaptation de maillages dans le cadre de ses travaux de thèse   l'ONERA [4]. Cette méthode utilise une superposition de grilles structur es curvilignes en mouvement relatif (méthode Chimère), chacune ayant une forme et une vitesse adapt es automatiquement aux conditions locales de l'écoulement. La méthode de BENOIT a été appliqu e avec succès à l'advection d'un tourbillon et à son interaction avec un profil. Pour ce problème, une grille suit le mouvement du tourbillon, ce qui a pour effet de réduire considérablement les erreurs associ es à l'advection. Plus récemment, cette méthode a été simplifi e par BENOIT & JEANFAIVRE [5] par l'utilisation de grilles cartésiennes d'adaptation en s'inspirant des travaux de MEAKIN [55] et appliqu e avec succès à une meilleure capture du sillage tourbillonnaire des pales de rotor d'hélicoptère en vol stationnaire à partir de la résolution des équations d'EULER.

La question a récemment été abordée d'une manière plus directe par MORTON & ROE [57] en introduisant la notion de schéma préservant exactement la vorticité discrète. Ils ont établi la théorie pour le système hyperbolique de lois de conservation le plus «simple» combinant à la fois propagation d'ondes et vorticité : l'acoustique linéaire 2-D. Ils ont aussi d emontr e qu'un certain schéma de LAX-WENDROFF préserve la vorticité pour ce système d'équations. Cette approche originale a déjà motiv e deux études au sein du laboratoire SINUMEF de l'ENSAM. La première a permis de vérifier la théorie par des calculs de tourbillons stationnaires en acoustique linéaire 2-D. La seconde a montré qu'une forme de schéma bas e sur le résidu préserve aussi la vorticité pour l'acoustique linéaire 2-D et 3-D.

Objectif de la thèse

L'objectif de la thèse est d'exploiter la notion de schéma préservant exactement la vorticité en s'appuyant sur la théorie de MORTON & ROE et les résultats obtenus à l'ENSAM afin de proposer un schéma numérique d'ordre 2 préservant la vorticité pour les écoulements tourbillonnaires compressibles instationnaires. Le mémoire est organis e en quatre chapitres :

Chapitre 1 Le premier chapitre présente les différents modèles physiques (acoustique, acoustique avec advection et équations d'EULER) sur lesquels porte l'étude. La démarche et les résultats théoriques de MORTON & ROE pour l'acoustique sont rappelés, ainsi que le bilan des études antérieures. L'analyse est ensuite étendue aux équations de l'acoustique avec advection pour lesquelles un schéma préservant la vorticité, le schéma RBV, est pr esent e.

Chapitre 2 Dans le second chapitre sont analysées en détail les propriétes de stabilité et de dissipation du schéma RBV. La méthode de résolution du schéma est décrite ainsi que ses propriétes. La précision du schéma est étudiée de façon théorique et vérifiée par des essais numériques par des calculs d'advection de tourbillon en acoustique avec advection et pour les équations d'EULER.

Chapitre 3 Le troisième chapitre présente l'extension du schéma RBV pour les maillages irréguliers. La précision du schéma est étudiée théoriquement pour ce type de maillage. Une version simplifiée du schéma RBV, le schéma RBVs, est proposée pour le calcul d'écoulements stationnaires. Le schéma ainsi obtenu a la même discrétisation spatiale et est utilis e pour vérifier numériquement l'ordre de précision. Il est alors appliqu e à des calculs stationnaires autour de profils. Les capacités du schéma RBV   advecter des tourbillons sur des maillages irréguliers et à calculer des écoulements instationnaires autour de profil sont ensuite évaluées séparément.

Chapitre 4 Le schéma RBV est appliqu e à la simulation d'une interaction pale-tourbillon parallèle subsonique frontale à nombre de MACH $M_\infty = 0,5$ et incidence nulle pour laquelle existent des données expérimentales [39]. La coïncidence des trajectoires du profil et du tourbillon engendre une interaction complexe dont la simulation est délicate. Une étude paramétrique est réalisée ainsi qu'une comparaison avec les solutions de schémas classiques d'ordre 2.

Chapitre 1

Schémas préservant la vorticité

Sommaire

1.1	Introduction	7
1.2	Hyperbolicité, acoustique et vorticité	7
1.2.1	Hyperbolicité	7
1.2.2	Équations d'EULER	8
1.2.3	Équations de l'acoustique avec advection	9
1.2.4	Équations de l'acoustique pure	10
1.3	Schémas préservant la vorticité en acoustique pure	11
1.3.1	Notations discrètes	11
1.3.2	Schémas considérés par MORTON & ROE	12
1.3.3	Schémas basés sur le résidu	16
1.4	Schémas préservant la vorticité en acoustique avec advection	22
1.4.1	Transport de la vorticité par le schéma RBVS	22
1.4.2	Transport de la vorticité par le schéma de LAX-WENDROFF-NI	23
1.4.3	Propositions pour améliorer le transport de la vorticité	23
1.4.4	Schéma préservant la vorticité	24
1.5	Conclusion	25

1.1 Introduction

La voie de recherche explorée pendant la thèse s'inscrit dans la continuité des travaux de MORTON & ROE [57] sur les schémas de type LAX-WENDROFF préservant la vorticité pour les équations de l'acoustique. Les modèles physiques étudiés pendant la thèse ne se résument pas à celui de l'acoustique, nous présenterons donc dans un premier temps les différents modèles pour lesquels la préservation de la vorticité par les méthodes numériques a été  tudi e. Dans un deuxième temps, nous rappellerons la démarche suivie par MORTON & ROE, leur formalisme, ainsi que leurs résultats théoriques pour les équations de l'acoustique.

Une étude effectu e à l'ENSAM a montré qu'un autre schéma, n'appartenant pas aux schémas de type LAX-WENDROFF, préserve également la vorticité pour les équations de l'acoustique. Ce schéma appartient à la classe de schémas basés sur le résidu introduite par LERAT & CORRE [43, 44]. Il possède les mêmes propriétés envers la vorticité que les schémas étudiés par MORTON & ROE. Nous présenterons donc cette classe de schémas, ses propriétés, ainsi que le schéma basé sur le résidu préservant la vorticité pour les équations de l'acoustique.

L'objectif poursuivi est d'étendre la préservation de la vorticité des schémas aux cas des équations de l'acoustique avec advection, puis des équations d'EULER. Nous étudierons et analyserons donc le transport de la vorticité discrète par les schémas existants.   partir de résultats théoriques et des conclusions que nous formulerons, nous proposerons un schéma préservant la vorticité pour les équations de l'acoustique avec advection.

1.2 Hyperbolicité, acoustique et vorticité

1.2.1 Hyperbolicité

Les systèmes de propagation d'ondes sont décrits par des systèmes d'équations aux d riv es partielles de type hyperbolique (par rapport au temps t). Rappelons qu'un système de lois de conservation de la forme :

$$w_t + f(w)_x + g(w)_y = 0 \quad (1.1)$$

où w est le vecteur d'état, $f(w)$ et $g(w)$ sont respectivement les vecteurs flux dans les directions d'espace x et y , est dit « hyperbolique » si, pour tout état physiquement admissible w , la matrice jacobienne du flux A^ν dans la direction d'espace ν a toutes ses valeurs propres réelles et est diagonalisable pour toute direction ν . Dans le cas où toutes les valeurs propres sont réelles et distinctes, le système est dit « strictement hyperbolique ».

La matrice A^ν est définie par la combinaison linéaire :

$$A^\nu = \nu_1 A + \nu_2 B \quad (1.2)$$

où ν_1 et ν_2 sont les composantes du vecteur unitaire ν ($\nu_1^2 + \nu_2^2 = 1$), A et B sont les matrices jacobiennes du flux dans chaque direction :

$$A = \frac{df}{dw}(w) \quad B = \frac{dg}{dw}(w) \quad (1.3)$$

Le système hyperbolique (1.1) peut s'écrire sous la forme d velopp e :

$$w_t + Aw_x + Bw_y = 0 \quad (1.4)$$

1.2.2  quations d'EULER

Les équations d'EULER 2-D entrent dans le cadre (1.1) avec :

$$w = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad f(w) = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uH \end{bmatrix}, \quad g(w) = \begin{bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho vH \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

où ρ désigne la masse volumique, p la pression, u et v les composantes de la vitesse suivant les directions x et y , E l'énergie totale et H l'enthalpie totale avec, pour un gaz thermodynamiquement parfait :

$$p = (\gamma - 1)\rho \left(E - \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad \text{et} \quad \rho H = \rho E + p \quad (1.6)$$

où γ est le rapport des chaleurs spécifiques.

Comme on le sait, ce système est hyperbolique, les valeurs propres de A^ν s'écrivant :

$$\lambda^{(1)} = u^\nu - a, \quad \lambda^{(2)} = u^\nu, \quad \lambda^{(3)} = u^\nu + a \quad (1.7)$$

où a est la célérité du son et

$$u^\nu = \nu_1 u + \nu_2 v \quad (1.8)$$

Vorticité

L'équation d'évolution du champ de vorticité $\vec{\omega}$ pour les équations d'EULER peut être obtenue à partir de l'équation de conservation de la quantité de mouvement sous forme non conservative :

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \quad (1.9)$$

où d/dt désigne la d riv e particulaire. En prenant le rotationnel de cette équation et en utilisant la relation sur les opérateurs différentiels : $\vec{\nabla} \times (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} + \vec{\omega} (\vec{\nabla} \cdot \vec{u})$, on trouve :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = (\vec{\omega} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} - (\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{\omega} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \quad (1.10)$$

Dans le cas des équations d'EULER 2-D, le premier terme du membre de droite de l'équation (1.10) est nul. L'équation sur la vorticité est alors :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt} = -(\vec{\nabla} \cdot \vec{u}) \vec{\omega} - \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \quad (1.11)$$

Le membre de gauche de cette équation est la d riv e particulaire ou convective de la vorticité. La vorticité est transport e par l'écoulement à la réserve des modifications induites par les termes du membre de droite. Le premier terme du membre de droite traduit l'influence des effets de compressibilité sur la vorticité, il ne peut que modifier un champ de vorticité existant. Le second terme du membre de droite $\vec{\nabla} \times (\rho^{-1} \vec{\nabla} p) = \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p$ est appelé terme baroclinique. Il est le seul à pouvoir créer de la vorticité. Ce terme est nul dans le cas d'un écoulement barotrope (p fonction seulement de ρ) et donc notamment pour un écoulement isentropique ($(p/p_\infty) = (\rho/\rho_\infty)^\gamma$ implique $\vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p = \vec{0}$).

1.2.3  quations de l'acoustique avec advection

En linéarisant les équations d'EULER autour d'un écoulement uniforme à vitesse (U_0, V_0) , on obtient classiquement les équations de l'acoustique (linéaire) avec advection. Adimensionn es avec une célérité du son unitaire, ces équations peuvent s'écrire :

$$w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} pU_0 + u \\ uU_0 + p \\ vU_0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} pV_0 + v \\ uV_0 \\ vV_0 + p \end{bmatrix} \quad (1.12)$$

où p est la (perturbation de) pression et (u, v) les composantes de la (perturbation de) vitesse. Les matrices jacobiennes des flux sont alors constantes et s'écrivent :

$$A = \begin{bmatrix} U_0 & 1 & 0 \\ 1 & U_0 & 0 \\ 0 & 0 & U_0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} V_0 & 0 & 1 \\ 0 & V_0 & 0 \\ 1 & 0 & V_0 \end{bmatrix} \quad (1.13)$$

de sorte que $f = Aw$ et $g = Bw$. La matrice jacobienne A^ν est alors :

$$A^\nu = \begin{bmatrix} U_0\nu_1 + V_0\nu_2 & \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_1 & U_0\nu_1 + V_0\nu_2 & 0 \\ \nu_2 & 0 & U_0\nu_1 + V_0\nu_2 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

et a comme valeurs propres :

$$\lambda^{(1)} = U^\nu - 1, \quad \lambda^{(2)} = U^\nu, \quad \lambda^{(3)} = U^\nu + 1 \quad (1.15)$$

où $U^\nu = U_0\nu_1 + V_0\nu_2$. Le système de l'acoustique avec advection est strictement hyperbolique. Pour des développements ultérieurs, écrivons aussi les valeurs propres $a^{(i)}$ et $b^{(i)}$ des matrices A et B et leurs matrices de passage à la forme diagonale :

$$\begin{cases} a^{(1)} = U_0 - 1 \\ a^{(2)} = U_0 \\ a^{(3)} = U_0 + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} b^{(1)} = V_0 - 1 \\ b^{(2)} = V_0 \\ b^{(3)} = V_0 + 1 \end{cases} \quad (1.16)$$

$$A = T_A \text{Diag}[a^{(i)}] T_A^{-1}, \quad B = T_B \text{Diag}[b^{(i)}] T_B^{-1} \quad (1.17)$$

avec

$$T_A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad T_A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.18)$$

$$T_B = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 1/2 \end{bmatrix} \quad T_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

Vorticité

En prenant le rotationnel des équations de la dynamique, on peut obtenir l'équation régissant l'évolution du champ de vorticité :

$$\omega = v_x - u_y \quad (1.20)$$

L'équation de transport de la vorticité pour le modèle de l'acoustique avec advection s'écrit :

$$\omega_t + U_0\omega_x + V_0\omega_y = 0 \quad (1.21)$$

Contrairement au modèle des équations d'EULER, il ne peut pas y avoir création de vorticité. Le champ de vorticité initial est simplement advecté par l'écoulement moyen.

1.2.4  quations de l'acoustique pure

Les équations de l'acoustique pure (acoustique sans advection) s'obtiennent en linéarisant les équations d'EULER autour d'un état au repos ($U_0 = V_0 = 0$). Elles correspondent donc à

$$w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} u \\ p \\ 0 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} v \\ 0 \\ p \end{bmatrix} \quad (1.22)$$

Les matrices jacobiennes des flux s'écrivent :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.23)$$

La matrice jacobienne A^ν est :

$$A^\nu = \begin{bmatrix} 0 & \nu_1 & \nu_2 \\ \nu_1 & 0 & 0 \\ \nu_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.24)$$

Les valeurs propres des matrices A^ν , A et B sont identiques :

$$\lambda^{(1)} = -1, \quad \lambda^{(2)} = 0, \quad \lambda^{(3)} = 1 \quad (1.25)$$

$$\begin{cases} a^{(1)} = b^{(1)} = -1 \\ a^{(2)} = b^{(2)} = 0 \\ a^{(3)} = b^{(3)} = 1 \end{cases} \quad (1.26)$$

Les matrices de passage T_A et T_B sont inchang es par rapport au cas de l'acoustique avec advection.

En éliminant la vitesse, les équations de l'acoustique pure (1.1), (1.22) peuvent se mettre sous la forme classique d'une seule équation du second ordre, dite «  quation des ondes » :

$$p_{tt} = p_{xx} + p_{yy} \quad (1.27)$$

Toutefois, pour faciliter l'extension aux équations d'EULER, nous conserverons dans la suite la forme d'un système hyperbolique d'équations du premier ordre.

Vorticité

Pour l'acoustique pure, l'équation de la vorticité (1.21) se réduit à :

$$\omega_t = 0 \quad (1.28)$$

c'est-à-dire que le champ de vorticité est invariant dans le temps. Cette condition implique qu'il n'y a pas d'interaction entre les ph nom es de propagation d'onde et le champ de vorticité initial.

L'objectif du travail de MORTON & ROE [57] a consisté à formaliser les conditions que doivent satisfaire les schémas numériques en acoustique pure pour préserver exactement le champ de vorticité.

1.3 Schémas préservant la vorticité en acoustique pure

1.3.1 Notations discrètes

Le domaine de discrétisation est ici cartésien régulier dans les directions x et y . Les pas d'espace δx , δy et le pas de temps Δt sont constants. On notera $w_{j,k}^n$ une approximation discrète de w au point $(x, y, t) = (j\delta x, k\delta y, n\Delta t)$. Les opérateurs discrets aux différences standards δ_1, δ_2 et de moyenne μ_1, μ_2 sont définis par :

$$\begin{cases} (\delta_1 w)_{j,k} = w_{j+\frac{1}{2},k} - w_{j-\frac{1}{2},k} \\ (\mu_1 w)_{j,k} = \frac{1}{2}(w_{j+\frac{1}{2},k} + w_{j-\frac{1}{2},k}) \end{cases} \quad \text{pour } 2j \in \mathbb{Z}, 2k \in \mathbb{Z} \quad (1.29)$$

$$\begin{cases} (\delta_2 w)_{j,k} = w_{j,k+\frac{1}{2}} - w_{j,k-\frac{1}{2}} \\ (\mu_2 w)_{j,k} = \frac{1}{2}(w_{j,k+\frac{1}{2}} + w_{j,k-\frac{1}{2}}) \end{cases} \quad \text{pour } 2j \in \mathbb{Z}, 2k \in \mathbb{Z} \quad (1.30)$$

Les points de coordonnées d'indices entiers correspondent aux centres des cellules du maillage. Ceux dont un seul des deux indices est un demi-entier sont situés sur les faces des cellules et ceux dont les deux indices sont des demi-entiers sont situés aux nœuds du maillage. Ces notations sont visualis es sur la figure 1.1. Deux types de produits de ces opérateurs discrets interviendront fréquemment dans ce qui suit :

1. $\left(\frac{\delta_1 \mu_1 w}{\delta x}\right)_{j,k}$ et $\left(\frac{\delta_2 \mu_2 w}{\delta y}\right)_{j,k}$ qui sont des approximations à l'ordre 2 des d riv es partielles w_x et w_y estim es au centre de la cellule d'indice (j, k) .
2. $\left(\frac{\delta_1 \mu_2 w}{\delta x}\right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ et $\left(\frac{\delta_2 \mu_1 w}{\delta y}\right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ qui sont aussi des approximations à l'ordre 2 des d riv es partielles w_x et w_y mais estim es au nœud d'indice $(j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$.

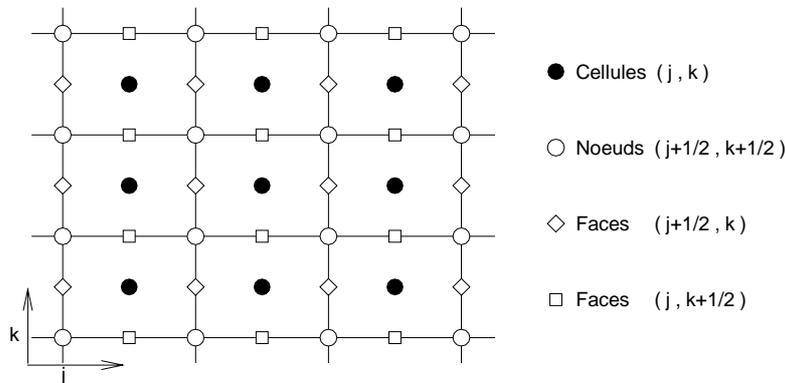


FIG. 1.1 - Conventions sur les indices

1.3.2 Schémas considérés par MORTON & ROE

Dans leur étude sur les schémas préservant la vorticité, MORTON & ROE concentrent leur attention sur les schémas de type LAX-WENDROFF parce que « les développements de TAYLOR de l'opérateur d'évolution (de ces schémas) semblent être la méthode la plus générale disponible et applicable aux équations de l'acoustique quelque soit l'ordre de précision ». Ils considèrent plus particulièrement des schémas sous forme conservative. Dans une approche volumes finis avec inconnues aux centres des cellules, un système de lois de conservation discrétisé par un *schéma conservatif* peut s'écrire sous la forme :

$$\left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^n = 0 \quad (1.31)$$

où w est le vecteur des variables conservatives, les flux numériques F et G sont des approximations consistantes des fonctions de flux f et g .

Un schéma numérique préservant la vorticité pour les équations de l'acoustique pure doit laisser invariante une forme discrète de la vorticité. MORTON & ROE ont retenu pour leur analyse deux évaluations simples de la vorticité.

Vorticité discrète « centr e »

La vorticité « centr e », not e $\omega_{j,k}^n$, est une approximation à l'ordre 2 de la vorticité au centre d'une cellule. Elle est définie par :

$$\omega_{j,k}^n = \left(\frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} v - \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} u \right)_{j,k}^n \quad (1.32)$$

Vorticité discrète « compacte »

La vorticité discrète « compacte », not e $\tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n$, est une approximation à l'ordre 2 de la vorticité aux nœuds du maillage. Elle est définie par la relation :

$$\tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n = \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} v - \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} u \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \quad (1.33)$$

Les supports spatiaux des vorticités discrètes « centr e » et « compacte » sont représentés FIG. 1.2.

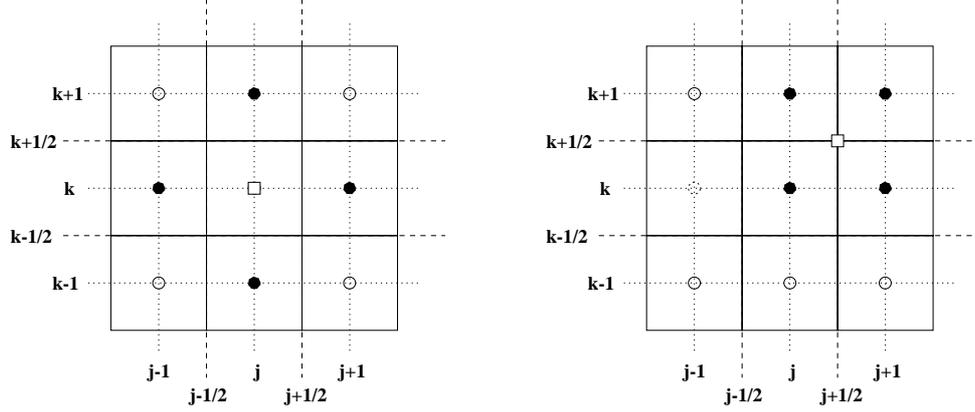


FIG. 1.2 - Supports spatiaux des vorticités discrètes « centrée » $\omega_{j,k}$ (à gauche) et « compacte » $\tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$ (à droite) en deux dimensions d'espace.

Schéma de LAX-WENDROFF préservant la vorticité « centrée »

Un schéma préservant la vorticité « centrée » en acoustique pure doit satisfaire exactement la relation $\omega_{j,k}^{n+1} = \omega_{j,k}^n$. Une autre contrainte imposée par MORTON & ROE sur le schéma numérique tient à la symétrie de sa solution, c'est-à-dire que la solution du schéma doit être invariante pour toutes translations ou rotations qui superposent le maillage à lui-même [57], ce qui veut dire que le schéma doit être centré.

MORTON & ROE montrent qu'il existe un schéma de type LAX-WENDROFF qui préserve la vorticité centrée. Il s'agit de la forme de RICHTMYER du schéma de LAX-WENDROFF [76]. Bien qu'il ne soit pas donné explicitement dans l'article de MORTON & ROE, ce schéma s'écrit sous sa forme conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^n = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2}, k}^n = \left[\mu_1 \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) f - \frac{\Delta t}{2} \mu_1 A \left(\frac{\delta_1 \mu_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 g}{\delta y} \right) \right]_{j+\frac{1}{2}, k}^n \\ G_{j, k+\frac{1}{2}}^n = \left[\mu_2 \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) g - \frac{\Delta t}{2} \mu_2 B \left(\frac{\delta_1 \mu_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 g}{\delta y} \right) \right]_{j, k+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. \quad (1.34)$$

Comme le font remarquer les auteurs, cette définition de la vorticité « centrée » et le schéma de LAX-WENDROFF-RICHTMYER souffrent d'un découplage « pair-impair ». On constate en effet FIG. 1.3 que le support spatial de ce schéma n'implique que les points d'indices $(j+k) \pmod{2}$ pairs ou impairs. Cette considération amène MORTON & ROE à délaisser la vorticité discrète « centrée » pour s'intéresser à la vorticité discrète « compacte ». Pourtant, il semble utile de pousser un peu l'analyse des auteurs si l'objectif est de comprendre les mécanismes qui font qu'un schéma numérique préserve exactement une vorticité discrète en acoustique pure. notamment, on peut remarquer que le schéma de LAX-WENDROFF-RICHTMYER peut s'écrire sous la forme

particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + (\Lambda_{lwr} r_s)_{j,k}^n = 0 \\ \Lambda_{lwr} = \left(\left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \cdot - \frac{\Delta t \delta_1 A \mu_1}{2 \delta x} \cdot - \frac{\Delta t \delta_2 B \mu_2}{2 \delta y} \cdot \right) \\ r_{s,j,k}^n = \left(\frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} g \right)_{j,k}^n \end{array} \right. \quad (1.35)$$

On montrera par la suite que la possibilité d'écrire le schéma de LAX-WENDROFF-RICHTMYER sous cette forme joue un rôle essentiel quant à ses propriétés de préservation de la vorticité « centr e » pour les équations de l'acoustique pure.

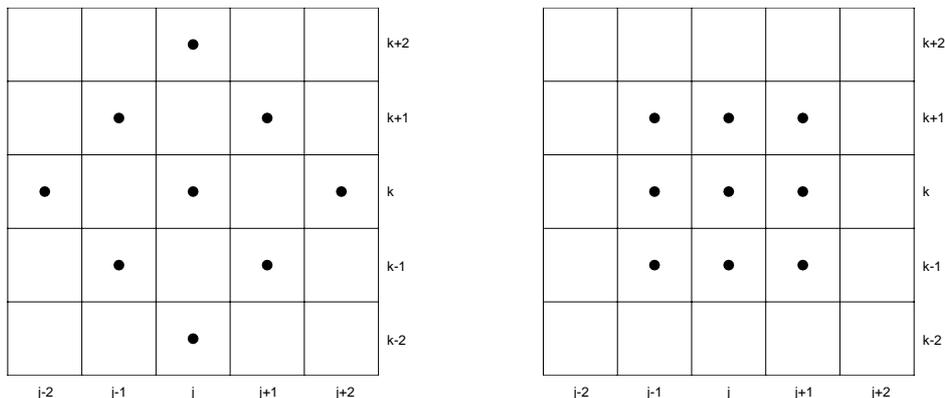


FIG. 1.3 - Supports spatiaux des versions de RICHTMYER (  gauche) et de NI (  droite) du schéma de LAX-WENDROFF en deux dimensions d'espace.

Schéma de LAX-WENDROFF préservant la vorticité « compacte »

  l'image de la méthode suivie pour la détermination du schéma préservant la vorticité « centr e », MORTON & ROE ont imposé des conditions préalables pour la détermination d'un schéma préservant la vorticité « compacte ». Ces conditions que doit satisfaire le schéma numérique sont :

- qu'il s'écrive sous la forme conservative (1.31) ;
- qu'il satisfasse exactement $\tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = \tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n$;
- que la symétrie de la solution pour les translations et rotations du maillage soit respect e ;
- que la matrice de l'adjoint de l'opérateur discret du schéma soit symétrique ;
- que la précision du schéma soit d'ordre 2.

En suivant ces considérations, le schéma préservant la vorticité « compacte » auquel ils parviennent est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^n = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2},k}^n = \left[\mu_2(\mu_1\mu_2 f) - \frac{\Delta t}{2}\mu_2 A \left(\frac{\delta_1\mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2\mu_1 g}{\delta y} \right) \right]_{j+\frac{1}{2},k}^n \\ G_{j,k+\frac{1}{2}}^n = \left[\mu_1(\mu_1\mu_2 g) - \frac{\Delta t}{2}\mu_1 B \left(\frac{\delta_1\mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2\mu_1 g}{\delta y} \right) \right]_{j,k+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. \quad (1.36)$$

Ce schéma est connu sous deux appellations suivant qu'il est utilisé en formulation « *cell-centered* » ou « *cell-vertex* ». La première est d sign e sous le nom de rotation du schéma de RICHTMYER (« *rotated RICHTMYER* ») alors que la seconde est le schéma de NI. Afin d'éviter toute confusion entre la forme de RICHTMYER du schéma de LAX-WENDROFF cit e au paragraphe précédent et le schéma (1.36), ce dernier schéma sera désigné par la suite sous l'appellation de schéma de LAX-WENDROFF-NI ou schéma LWN. Son support spatial est illustré FIG. 1.3. De la même façon que pour le schéma de LAX-WENDROFF-RICHTMYER, on peut approfondir l'étude du schéma de LAX-WENDROFF-NI et montrer que lui aussi peut s'écrire sous une forme particulière :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + (\Lambda_{lwn} \tilde{r}_s)_{j,k}^n = 0 \\ \Lambda_{lwn} = \left(\mu_1\mu_2 \cdot - \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_1 A \mu_2}{\delta x} \cdot - \frac{\Delta t}{2} \frac{\delta_2 B \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \\ \tilde{r}_s^n_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. \quad (1.37)$$

S'il est démontré dans [57] que le schéma LWN préserve par construction la vorticité « compacte » en acoustique, on se propose de vérifier cette propriété afin d'illustrer la méthode de calcul de la vorticité discrète « compacte ». En appliquant l'opérateur $\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x}$   la 3  composante de (1.37) et en soustrayant l'opérateur $\frac{\delta_2\mu_1}{\delta y}$ appliqué à la 2  composante de (1.37), on obtient :

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \left[\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} (\Lambda_{lwn} \tilde{r}_s)^{(3)} - \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} (\Lambda_{lwn} \tilde{r}_s)^{(2)} \right]_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n = 0 \quad (1.38)$$

qui peut aussi s'écrire :

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \mu_1\mu_2 \left(\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} \tilde{r}_s^{(3)} - \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \tilde{r}_s^{(2)} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n = \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\delta_1^2\mu_2^2}{\delta x^2} (A\tilde{r}_s)^{(3)} - \frac{\delta_1\mu_2\delta_2\mu_1}{\delta x\delta y} (A\tilde{r}_s)^{(2)} + \frac{\delta_1\mu_2\delta_2\mu_1}{\delta x\delta y} (B\tilde{r}_s)^{(3)} - \frac{\delta_2^2\mu_1^2}{\delta y^2} (B\tilde{r}_s)^{(2)} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \quad (1.39)$$

Or pour l'acoustique on a :

$$A\tilde{r}_s = \begin{bmatrix} \tilde{r}_s^{(2)} \\ \tilde{r}_s^{(1)} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B\tilde{r}_s = \begin{bmatrix} \tilde{r}_s^{(3)} \\ 0 \\ \tilde{r}_s^{(1)} \end{bmatrix} \quad w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad (1.40)$$

Il ne reste donc que :

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} \tilde{r}_s^{(3)} - \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} \tilde{r}_s^{(2)} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n = 0 \quad (1.41)$$

Comme :

$$\tilde{r}_s^{(2)} = \frac{\delta_1 \mu_2 p}{\delta x} \quad \tilde{r}_s^{(3)} = \frac{\delta_2 \mu_1 p}{\delta y} \quad (1.42)$$

on obtient finalement :

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = 0$$

(1.43)

Cette propriété du schéma LWN a été v  rifi  e numériquement au cours d'un projet étudiant [21, 79] dirigé par Alain LERAT. Dans le cadre de leur projet de fin d'étude, DOUAY & LEFEBVRE [21] ont montré que parmi une classe de schémas de type LAX-WENDROFF dont le support spatial est à trois points par direction d'espace, seul le schéma de LAX-WENDROFF-NI ne dissipe pas une condition initiale correspondant à un tourbillon de LAMB pour les équations de l'acoustique.

Il a également été observé que ce schéma ne dissipe pas une condition initiale correspondant à un tourbillon de LAMB stationnaire pour les équations d'EULER. Ces premiers résultats sont à l'origine d'un second projet étudiant, dirigé par LERAT & CORRE qui a montré qu'une discrétisation spatiale particulière d'un schéma basé sur le résidu proche de ceux présentés dans [43, 44] préserve également la vorticité « compacte » en acoustique.

1.3.3 Schémas basés sur le résidu

Définition

Un schéma basé sur le résidu est un schéma dont la discrétisation spatiale s'exprime en fonction seulement d'une approximation consistante du résidu. Ce résidu peut être le résidu complet ou instationnaire :

$$r = \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (1.44)$$

ou simplement le résidu à l'état stationnaire :

$$r_s = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \quad (1.45)$$

Schémas de LAX-WENDROFF-RICHTMYER et de LAX-WENDROFF-NI

 crits sous les formes (1.35) et (1.37), il est évident que les schémas de LAX-WENDROFF-RICHTMYER et de LAX-WENDROFF-NI sont des schémas basés sur le résidu stationnaire. Ils présentent tous les deux la particularité d'utiliser un opérateur Λ appliqué à la même approximation consistante du résidu à la fois dans l'estimation consistante des flux et dans la dissipation. Il semble donc que cette particularité soit un élément déterminant quant à la nature des schémas préservant la vorticité.

Si le schéma de LAX-WENDROFF-RICHTMYER présente un découplage entre les cellules d'indices $(j+k)(\text{mod}2)$ pairs ou impairs, le schéma de LAX-WENDROFF-NI ne peut lui non plus être mis en œuvre dans l'état et nécessite l'ajout d'une viscosité artificielle pour assurer la dissipation d'oscillations parasites [63, 64]. De plus, comme tous les schémas de type LAX-WENDROFF, ces schémas présentent deux inconvénients :

1. la solution d'un écoulement transsonique possède généralement une structure numérique de choc oscillante ;
2. la solution d'un problème stationnaire dépend du pas de temps utilisé pour atteindre l'état stationnaire.

D'autre part, comme beaucoup de schémas centrés, les schémas de LAX-WENDROFF-RICHTMYER et de LAX-WENDROFF-NI nécessitent l'ajout d'une viscosité artificielle pour être appliqué à des calculs d'écoulements aérodynamiques régis par les équations d'EULER. C'est à partir de ce constat et pour pallier ces inconvénients qu'a été construite par étapes successives la famille de schémas basés sur le résidu pr sent e dans la suite du mémoire.

Schéma de LAX-WENDROFF-LERAT

Les méthodes centr es, dont les schémas de type LAX-WENDROFF, nécessitent généralement l'ajout de termes dissipatifs supplémentaires pour dissiper les instabilités numériques. Une exception est la méthode implicite centr e pr sent e par LERAT & SID S dans [50].

Ce schéma de type LAX-WENDROFF permet d'effectuer des calculs d'écoulements transsoniques sans ajout de viscosité artificielle. Il est inconditionnellement stable et dissipatif au sens de KREISS. Ces propriétés dissipatives sont obtenues en utilisant deux approximations distinctes du résidu stationnaire suivant qu'elles interviennent dans l'estimation consistante des flux ou dans la dissipation, c'est-à-dire que le schéma est à deux prédicteurs. Sous forme conservative, ce schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2},k} = \left[\mu_1 f - \frac{\Delta t}{2} A p_1 \right]_{j+\frac{1}{2},k} \quad \text{avec} \quad p_{1,j+\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\delta_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 \mu_1 g}{\delta y} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \\ G_{j,k+\frac{1}{2}} = \left[\mu_2 g - \frac{\Delta t}{2} B p_2 \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad p_{2,j,k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1 \mu_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 g}{\delta y} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.46)$$

où p_1 et p_2 sont les deux prédicteurs calculés sur les faces de la cellule d'intégration. Bien qu'il ne nécessite pas de viscosité supplémentaire, la solution d'un problème stationnaire calcul e avec ce schéma, en particulier la structure numérique des chocs, dépend toujours du pas de temps utilisé.

Schéma à pas de temps caractéristique matriciel

Les évolutions et améliorations apport es à la méthode implicite centr e (1.46) ont conduit au schéma à « *pas de temps caractéristique matriciel* » proposé par HUANG & LERAT [33] dont la solution stationnaire est indépendante du pas de temps et dont les structures numériques de chocs stationnaires sont sans oscillations.

L'idée consiste à associer dans un même schéma numérique la précision spatiale du schéma (1.46) et les bonnes propriétés de capture de choc du schéma de ROE [77]. Cet objectif est atteint en conservant la phase implicite et la discrétisation spatiale du schéma (1.46) mais en modifiant les matrices de dissipation numérique des schémas de type LAX-WENDROFF. En dimension deux, les matrices $\Delta t A$ et $\Delta t B$ sont alors remplac es par les matrices $\delta x \Phi_1$ et $\delta y \Phi_2$ qui permettent de conserver une précision d'ordre deux en plusieurs dimensions d'espace pour des problèmes stationnaires tout en introduisant un décentrement du schéma en prenant en compte les caractéristiques de l'écoulement. Le schéma conservatif proposé dans [33] s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2},k} = \left[\mu_1 f - \frac{\delta x}{2} \Phi_1 p_1 \right]_{j+\frac{1}{2},k} \quad \text{avec} \quad p_{1j+\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\delta_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 \mu_1 g}{\delta y} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \\ G_{j,k+\frac{1}{2}} = \left[\mu_2 g - \frac{\delta y}{2} \Phi_2 p_2 \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad p_{2j,k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1 \mu_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 g}{\delta y} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.47)$$

où Φ_1 et Φ_2 les matrices de dissipation numérique justifi es dans [33] sont définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_1 = T_A \text{Diag}[\varphi_1^{(i)}] T_A^{-1} \\ \varphi_1^{(i)} = \text{sgn}(a^{(i)}) \varphi^{(i)} \\ \varphi^{(i)} = \min \left(1, \frac{\delta y |a^{(i)}|}{\delta x \min |b^{(i)}|} \right) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_2 = T_B \text{Diag}[\varphi_2^{(i)}] T_B^{-1} \\ \varphi_2^{(i)} = \text{sgn}(b^{(i)}) \psi^{(i)} \\ \psi^{(i)} = \min \left(1, \frac{\delta x |b^{(i)}|}{\delta y \min |a^{(i)}|} \right) \end{array} \right. \quad (1.48)$$

Ce schéma basé sur le résidu stationnaire est réellement d'ordre deux pour une solution stationnaire. En effet pour une solution régulière indépendante du temps on a :

$$f(w)_x + g(w)_y = 0 \quad (1.49)$$

et pour $O(\delta x) = O(\delta y)$, on obtient :

$$\begin{aligned} p_{1j+\frac{1}{2},k} &= \delta x (f_x + g_y)_{j+\frac{1}{2},k} + O(\delta x^3) = O(\delta x^3) \\ p_{2j,k+\frac{1}{2}} &= \delta y (f_x + g_y)_{j,k+\frac{1}{2}} + O(\delta x^3) = O(\delta x^3) \end{aligned} \quad (1.50)$$

en substituant ces termes par leurs expressions dans (1.47) on trouve :

$$\left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k} = (f_x + g_y)_{j,k} + O(\delta x^2) \quad (1.51)$$

Contrairement au schéma de LAX-WENDROFF initial, la solution stationnaire de ce schéma ne dépend pas du pas de temps.

Schémas RBC

Les schémas RBC (pour *residual-based compact*) développés par LERAT & CORRE pour les systèmes hyperboliques de lois de conservation et les équations de NAVIER-STOKES [43, 44] sont une extension des schémas à *pas de temps caractéristique matriciel*. Les schémas RBC sont dits compacts car ils permettent d'atteindre un ordre de précision élevé, ordre 3, avec le même support spatial que le schéma (1.47) d'ordre 2, c'est-à-dire à trois points dans chaque direction, soit 3^d points pour d dimensions d'espace. Ils peuvent aussi être construits à des ordres supérieurs en élargissant le support.

La précision élevée de ces schémas n'est pas obtenue en corrigeant l'erreur de troncature sur chaque dérivée d'espace suivant chaque direction mais en ajoutant des termes du second ordre afin d'exprimer l'erreur de troncature globale du schéma uniquement en fonction de dérivées du résidu [43, 44]. Par exemple le schéma RBC d'ordre 3 pour un système hyperbolique de lois de conservation s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2},k} = \left[\left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{6} \right) \mu_1 f - \frac{\delta x}{2} \Phi_1 p_1 \right]_{j+\frac{1}{2},k} \quad \text{avec} \quad p_{1j+\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\delta_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 \mu_1 g}{\delta y} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \\ G_{j,k+\frac{1}{2}} = \left[\left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{6} \right) \mu_2 g - \frac{\delta y}{2} \Phi_2 p_2 \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad p_{2j,k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1 \mu_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 g}{\delta y} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (1.52)$$

L'erreur de troncature de ce schéma sur un maillage cartésien régulier de pas d'espace h est donnée par :

$$\epsilon = w_t + r_s + \frac{\delta x^2}{6} r_{sxx} + \frac{\delta y^2}{6} r_{syy} + O(h^4) - \frac{\delta x}{2} (\Phi_1 r_s)_x - \frac{\delta y}{2} (\Phi_2 r_s)_y + O(h^3) \quad (1.53)$$

qui devient pour une solution stationnaire exacte :

$$\epsilon = O(h^3) \quad (1.54)$$

Pendant la phase de convergence vers l'état stationnaire, le schéma dissipatif est précis à l'ordre 1, mais devient d'ordre 3 une fois l'état stationnaire atteint. Comme nous le verrons par la suite, il est aussi possible d'augmenter l'ordre de précision temporelle des schémas RBC.

Schéma RBVs

L'approfondissement des travaux de MORTON & ROE, c'est-à-dire la récriture des deux schémas préservant la vorticité en acoustique pure, a mis en évidence certaines propriétés des schémas préservant la vorticité. Les propriétés essentielles semblent :

1. un schéma préservant la vorticité en acoustique pure est un schéma basé sur le résidu. Ici le résidu stationnaire suffit car la vorticité est indépendante du temps.
2. un tel schéma ne doit utiliser qu'une seule approximation du résidu de manière à pouvoir s'écrire sous la forme $\left(\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t}\right) + (\Lambda r_s) = 0$.
3. le support spatial de ce résidu discret doit coïncider avec le support de la vorticité discrète pr serv e par le schéma.

Il n'y a pas obligation qu'un schéma soit de type LAX-WENDROFF pour qu'il préserve la vorticité.   partir de ce constat, on applique au schéma de LAX-WENDROFF-NI les modifications qui ont permis de passer du schéma de LAX-WENDROFF-LERAT au schéma à *pas de temps caractéristique matriciel*. Nous appellerons par la suite schéma RBVs le schéma basé sur le résidu stationnaire préservant la vorticité « compacte » en acoustique pure. Ce schéma reprend la discrétisation spatiale du schéma LWN à laquelle sont associ es les matrices de dissipation numérique des schémas RBC. Il peut s'écrire sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{w^{n+1}-w^n}{\Delta t}\right) + (\Lambda \tilde{r}_s)_{j,k}^n = 0 \\ \Lambda = \left(\mu_1 \mu_2 \cdot -\frac{\delta x}{2} \frac{\delta_1 \Phi_1 \mu_2}{\delta x} \cdot -\frac{\delta y}{2} \frac{\delta_2 \Phi_2 \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \\ \tilde{r}_s_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n = \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g\right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n \end{array} \right. \quad (1.55)$$

Comme pour les schémas RBC, une solution stationnaire calcul e avec ce schéma est indépendante du pas de temps utilisé. Par contre, comme pour le schéma LWN, l'utilisation d'une seule approximation consistante du résidu stationnaire ne permet pas au schéma de dissiper les plus courtes longueurs d'onde pour les écoulements diagonaux.

Pour pouvoir appliquer ce schéma aux équations de l'acoustique pure et prendre en compte une valeur propre identiquement nulle, on doit modifier légèrement les fonctions $\varphi^{(i)}$ et $\psi^{(i)}$ intervenant dans les matrices de dissipation numérique définies par (1.48). En effet, le schéma à *pas de temps caractéristique matriciel* (1.47) est présenté tel qu'il a été proposé et justifié dans [33] pour les équations d'EULER. Pour les équations de l'acoustique pure, le minimum des valeurs propres est nul. Il intervient au dénominateur dans les fonctions de dissipation ce qui conduit à $\varphi^{(1)} = \varphi^{(3)} = \psi^{(1)} = \psi^{(3)} = 1$ et à une indétermination pour $\varphi^{(2)}$ et $\psi^{(2)}$. On prend alors :

$$\varphi^{(i)} = \min \left(1, \frac{\delta y |a^{(i)}|}{\delta x \rho(B)}\right) \text{ et } \psi^{(i)} = \min \left(1, \frac{\delta x |b^{(i)}|}{\delta y \rho(A)}\right) \quad (1.56)$$

En posant $h = \min(\delta x, \delta y)$, on obtient :

$$\begin{cases} \delta x \varphi^{(1)} = h \\ \delta x \varphi^{(2)} = 0 \\ \delta x \varphi^{(3)} = h \end{cases} \text{ et } \begin{cases} \delta y \psi^{(1)} = h \\ \delta y \psi^{(2)} = 0 \\ \delta y \psi^{(3)} = h \end{cases} \quad (1.57)$$

soit :

$$\begin{aligned} \delta x \Phi_1 &= h T_A \text{Diag}[\text{sgn}(a^{(i)})|a^{(i)}|] T_A^{-1} = h A \\ \delta y \Phi_2 &= h T_B \text{Diag}[\text{sgn}(b^{(i)})|b^{(i)}|] T_B^{-1} = h B \end{aligned} \quad (1.58)$$

On peut vérifier que le schéma RBVs préserve la vortacité en acoustique en appliquant l'opérateur $\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x}$ à la 3^e composante de (1.55) et en soustrayant l'opérateur $\frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y}$ appliqué à la 2^e composante de (1.55). On trouve :

$$\begin{aligned} &\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} + \mu_1 \mu_2 \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} \tilde{r}_s^{(3)} - \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} \tilde{r}_s^{(2)} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n = \\ &\frac{h}{2} \left(\frac{\delta_1^2 \mu_2^2}{\delta x^2} (A \tilde{r}_s)^{(3)} - \frac{\delta_1 \mu_2 \delta_2 \mu_1}{\delta x \delta y} (A \tilde{r}_s)^{(2)} + \frac{\delta_1 \mu_2 \delta_2 \mu_1}{\delta x \delta y} (B \tilde{r}_s)^{(3)} - \frac{\delta_2^2 \mu_1^2}{\delta y^2} (B \tilde{r}_s)^{(2)} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^n \end{aligned} \quad (1.59)$$

En utilisant les relations (1.40), (1.41) et (1.42) on obtient finalement :

$$\left(\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = 0$$

(1.60)

Ce résultat théorique a été vérifié dans [24] pour des conditions initiales correspondant à un tourbillon de LAMB stationnaire pour les équations de l'acoustique 2-D et 3-D. Il a également été observé que ce schéma ne dissipe pas une condition initiale correspondant à un tourbillon stationnaire pour les équations d'EULER. Par contre, l'étude [24] a mis en relief la perte de cette propriété lorsque le schéma est appliqué au transport d'un tourbillon par un écoulement moyen. Une comparaison avec le schéma de LAX-WENDROFF-NI montre que ce dernier ne conserve pas non plus les tourbillons pour des problèmes d'advection.

Les causes de non conservation des tourbillons pendant leur transport par le schéma RBVs n'ont pas été analysées à l'époque car l'objectif fixé était d'évaluer les propriétés de ce nouveau schéma sur des tourbillons tridimensionnels stationnaires pour l'acoustique et les équations d'EULER.

L'analyse de l'équation de transport de la vortacité discrète calculée par le schéma RBVs pour l'acoustique avec advection et sa comparaison avec celle du schéma de LAX-WENDROFF-NI constituent le point de départ du travail effectué pendant la thèse. Elle doit permettre la compréhension des phénomènes mis en jeu dans la dissipation de la vortacité par ces schémas numériques pour les problèmes d'advection de tourbillons.

1.4 Schémas préservant la vorticité en acoustique avec advection

Contrairement au cas de l'acoustique pure où le champ de vorticité ne dépend pas du temps, on ne peut espérer résoudre exactement l'équation de transport de la vorticité pour l'acoustique avec advection. On considerera donc par la suite qu'un schéma numérique « préserve » la vorticité pour l'acoustique avec advection si le champ de vorticité discrète « compacte » calculé à partir de la solution du schéma est une approximation consistante non dissipative de l'équation de transport de la vorticité (1.21).

1.4.1 Transport de la vorticité par le schéma RBVs

L'équation discrète de la vorticité « compacte » calcul e par le schéma RBVs (1.55) lorsqu'il est appliqué aux équations de l'acoustique avec advection est obtenue en appliquant l'opérateur discret $\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x}$ de dérivation suivant x   la troisième composante du schéma et en lui soustrayant l'opérateur discret $\frac{\delta_2\mu_1}{\delta y}$ de dérivation suivant y appliqué à la deuxième composante.

L'équation discrète sur la vorticité « compacte » calcul e par le schéma RBVs (1.55) est :

$$\left[\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} + \left(U_0 \frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} + V_0 \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \right) \mu_1\mu_2\tilde{\omega}^n \right]_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = E_\Phi \cdot \tilde{r}_s^{n+1}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.61)$$

où :

$$\begin{aligned} E_\Phi \cdot \tilde{r}_s &= \frac{1}{4} \left[\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \left(\delta y \left(\varphi_2^{(3)} - \varphi_2^{(1)} \right) - \delta x \left(\varphi_1^{(3)} - \varphi_1^{(1)} \right) \right) \right] \tilde{r}_s^{(1)} \\ &\quad - \frac{1}{4} \left[\frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \left(2\delta y \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \varphi_2^{(2)} + \delta x \frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} \left(\varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(3)} \right) \right) \right] \tilde{r}_s^{(2)} \\ &\quad + \frac{1}{4} \left[\frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} \left(2\delta x \frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} \varphi_1^{(2)} + \delta y \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \left(\varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(3)} \right) \right) \right] \tilde{r}_s^{(3)} \end{aligned} \quad (1.62)$$

Le membre de gauche de l'équation (1.61) est une approximation consistante de la d riv e convective de la vorticité. Le membre de droite correspond au terme d'erreur sur le transport de la vorticité calculé par le schéma basé sur le résidu stationnaire. On vérifie facilement que le membre de droite, c'est-à-dire le scalaire $E_\Phi \cdot \tilde{r}_s$ s'annule pour le cas particulier $(U_0, V_0) = (0, 0)$ correspondant à l'acoustique pure.

En présence d'un écoulement uniforme, ce produit scalaire ne s'annule plus et est directement proportionnel à la composante stationnaire (ou spatiale) du résidu instationnaire (ou complet) : plus l'écoulement est instationnaire, plus l'erreur du schéma sur le transport de la vorticité est importante.

L'utilisation de la version totalement implicite du schéma (1.55) ne modifie pas fondamentalement l'équation discrète d'advection de la vorticité « compacte » pour les équations de l'acoustique avec advection. Simplement, l'utilisation de pas de temps plus grands augmente la valeur du terme d'erreur. La relation obtenue pour le schéma implicite est :

$$\left[\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} + \left(U_0 \frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} + V_0 \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} \right) \mu_1\mu_2\tilde{\omega}^{n+1} \right]_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = E_\Phi \cdot \tilde{r}_s^{n+1}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (1.63)$$

1.4.2 Transport de la vorticité par le schéma de Lax-Wendroff-Ni

Bien qu'il soit basé sur le résidu stationnaire, le schéma de LAX-WENDROFF-NI est précis à l'ordre 2 en temps. L'équation discrète sur la vorticité « compacte » calcul e par le schéma LWN (1.37) lorsqu'il est appliqué aux équations de l'acoustique avec advection est calcul e de façon identique au paragraphe précédent. L'équation discrète de transport de la vorticité est grandement simplifi e du fait de l'utilisation des matrices jacobienne des flux dans la dissipation numérique du schéma.

L'équation discrète sur la vorticité « compacte » calcul e par le schéma LWN (1.37) est :

$$\left[\frac{\tilde{\omega}^{n+1} - \tilde{\omega}^n}{\Delta t} + \left(U_0 \frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} + V_0 \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} \right) \mu_1 \mu_2 \tilde{\omega}^n \right]_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta t}{2} \left(U_0^2 \frac{\delta_1^2 \mu_2^2}{\delta x^2} + 2U_0 V_0 \frac{\delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2}{\delta x \delta y} + V_0^2 \frac{\delta_2^2 \mu_1^2}{\delta y^2} \right) \tilde{\omega}^n_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \quad (1.64)$$

Le membre de gauche de l'équation (1.64) est une approximation consistante de la d riv e convective de la vorticité. Le membre de droite correspond au terme d'erreur sur le transport de la vorticité calculé par le schéma LWN. Comme pour le schéma RBVs on vérifie facilement que le membre de droite s'annule pour le cas particulier $(U_0, V_0) = (0, 0)$ correspondant à l'acoustique pure.

En présence d'un écoulement uniforme, le membre de droite de l'équation (1.64) ne s'annule plus et dissipe la vorticité dans son transport. Pourtant des essais numériques [24] d'advection de tourbillons pour les équations de l'acoustique avec advection montrent que le schéma de LWN dissipe moins les tourbillons convect s que le schéma RBVs. L'explication tient à la précision temporelle des schémas, le schéma LWN est précis à l'ordre 2 en temps alors que le schéma RBVs n'est précis qu'à l'ordre 1.

1.4.3 Propositions pour améliorer le transport de la vorticité

Les équations (1.61) et (1.64) de transport de la vorticité « compacte » discrète calcul e par les schémas RBVs et LWN nous indiquent clairement la marche à suivre pour améliorer le transport de la vorticité numérique. Le schéma que nous allons proposer doit satisfaire les conditions suivantes :

1. faire tendre vers zéro le membre de droite de l'équation (1.61) afin de rendre l'équation de transport de la vorticité « compacte » discrète non dissipative. Cet objectif peut être atteint en remplaçant l'approximation consistante du résidu stationnaire qui intervient dans le produit scalaire $E_\Phi \cdot \tilde{r}_s$ par une approximation consistante du résidu instationnaire ou complet quel que soit l'ordre de précision temporelle de cette approximation ;
2. augmenter la précision temporelle globale du schéma basé sur le résidu pour avoir un schéma d'ordre 2 en temps. La méthode généralement mise en œuvre pour élever la précision temporelle des schémas RBC fait intervenir le résidu instationnaire [18, 43, 44]. Cette amélioration doit aussi participer à la réalisation de l'objectif précédent ;
3. conserver une discrétisation de type monopr dicteur, c'est-à-dire qu'une unique approximation consistante du résidu intervient dans la discrétisation des équations, afin de conserver un schéma qui puisse s'écrire avec une formulation de type $\Lambda \tilde{r} = 0$ avec \tilde{r} le résidu complet.

Remarque

Il n'a pas été envisagé de modifier l'opérateur vectoriel discret E_Φ qui intervient dans le membre de droite. Cet opérateur dépend à la fois des matrices de dissipation numérique propres aux schémas de type RBC et de la discrétisation spatiale du schéma qui permet la préservation de la vorticité en acoustique pure.

1.4.4 Schéma préservant la vorticité

Nous appellerons schéma RBV (*Residual-Based Vorticity preserving*) le schéma basé sur le résidu présenté dans ce paragraphe qui satisfait les propositions émises pour améliorer le transport de la vorticité pour les équations de l'acoustique avec advection. L'augmentation de la précision temporelle est obtenue en appliquant les matrices de dissipation numérique du schéma à l'approximation consistante du résidu complet au lieu du résidu stationnaire. Cette opération a pour conséquence de rendre le schéma implicite [18, 43, 44]. La convergence vers l'état instationnaire au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ est atteinte au moyen d'une méthode de pas de temps dual qui sera pr sent e plus loin dans l'exposé.

Le schéma RBV s'écrit en formulation $\Lambda \tilde{r} = 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n+1} = 0 \\ \Lambda = \left(\mu_1 \mu_2 \cdot -\frac{\delta x}{2} \frac{\delta_1 \Phi_1 \mu_2}{\delta x} \cdot -\frac{\delta y}{2} \frac{\delta_2 \Phi_2 \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \\ \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\mu_1 \mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} + \frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ \left(\frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j,k}^{n+1} = \left(\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j,k} \end{array} \right. \quad (1.65)$$

La discrétisation temporelle classique à trois niveaux de temps, d nomm e parfois schéma de GEAR, qui intervient dans l'évaluation du résidu complet au nœud du maillage d'indices $j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}$ offre une approximation à l'ordre 2 de la d riv e temporelle au temps t^{n+1} . Le résidu instationnaire, ou le prédicteur, qui est calculé lui aussi aux nœuds du maillage est donc précis à l'ordre 2 en temps et en espace. Le schéma RBV approche donc les équations de l'acoustique avec advection avec une précision d'ordre 2.

L'équation discrète sur la vorticité « compacte » calcul e par le schéma RBV (1.65) est :

$$\mu_1 \mu_2 \left(\mu_1 \mu_2 \frac{\nabla}{\Delta t} \cdot + U_0 \frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} \cdot + V_0 \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \tilde{\omega}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = E_\Phi \cdot \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} \quad (1.66)$$

Le membre de gauche de l'équation discrète de transport de la vorticité numérique est une approximation à l'ordre 2 en temps et en espace de la d riv e convective de la vorticité continue. Le membre de droite de l'équation (1.66) est proportionnel au résidu complet \tilde{r} et s'annule avec lui. Le schéma RBV préserve donc la vorticité compacte pour la solution $\tilde{r} = 0$ de (1.65).

1.5 Conclusion

Les systèmes d'équations hyperboliques sur lesquels porte l'étude sur les schémas préservant la vorticité sont : les équations d'EULER, les équations de l'acoustique avec advection et les équations de l'acoustique pure. Ces trois systèmes d'équations combinent des phénomènes de propagation d'onde et l'existence de vorticité.

La voie de recherche initi e par MORTON & ROE, la définition de la vorticité discrète qu'ils proposent ainsi que les résultats théoriques qu'ils obtiennent sont rappelés, en particulier la stricte préservation de la vorticité par le schéma de LAX-WENDROFF-NI pour les équations de l'acoustique pure. Une étude dirig e par LERAT a montré qu'un schéma particulier basé sur le résidu préserve aussi exactement la vorticité en acoustique pure. Une synthèse présente l'origine de cette classe de schémas et leurs similitudes avec les schémas de type LAX-WENDROFF et ROE.

Une étude théorique de l'équation de transport de la vorticité pour les équations de l'acoustique avec advection montre que les schémas proposés jusqu'ici ne préservent pas la vorticité pendant son transport. L'analyse des équations de transport de la vorticité discrète par les schémas de LAX-WENDROFF-NI et le schéma particulier basé sur le résidu permet de définir les conditions que doit satisfaire un schéma numérique pour préserver la vorticité discrète en acoustique avec advection. Le schéma RBV, pour « *Residual Based Vorticity preserving* », est proposé, le champ de vorticité discret de la solution de ce nouveau schéma est une approximation consistante non dissipative de l'équation de transport de la vorticité exacte.

Chapitre 2

Analyse des propriétés du schéma RBV

Sommaire

2.1	Introduction	29
2.2	Analyse de stabilité du schéma RBV	29
2.3	Origine des propriétés dissipatives du schéma RBV	32
2.3.1	Influence de la moyenne spatiale de l'incrément temporel	33
2.3.2	Ajout de l'incrément temporel à trois niveaux de temps	36
2.3.3	Ajout du résidu complet dans la dissipation numérique	37
2.4	Résolution du schéma RBV	38
2.4.1	Formulation en pas de temps dual	38
2.4.2	Phase implicite sur le pas de temps dual	39
2.4.3	Analyse de stabilité en temps dual	40
2.4.4	Filtrage de la solution en pas de temps dual	41
2.5	Étude de l'erreur du schéma RBV par la méthode du système équivalent	48
2.5.1	Système équivalent du schéma RBV	48
2.5.2	Équation équivalente pour une advection linéaire scalaire	49
2.5.3	Système équivalent pour un système hyperbolique linéaire	57
2.5.4	Conclusion	63
2.6	Étude de l'erreur de phase du schéma RBV par analyse de FOURIER	64
2.6.1	Rappels	64
2.6.2	Erreur de phase du schéma RBV	64
2.6.3	Conclusion	65
2.7	Advection de tourbillon pour les équations d'EULER	66
2.7.1	Problème modèle	66
2.7.2	Discrétisation nécessaire pour l'advection de tourbillon	68
2.7.3	Influence du pas de temps pour l'advection de tourbillon	70
2.7.4	Influence de la direction de l'écoulement pour l'advection de tourbillon	72
2.7.5	Influence du filtrage pour l'advection d'un tourbillon	74
2.7.6	Comparaison avec d'autres schémas numériques	76
2.8	Conclusion	80

2.1 Introduction

Le schéma RBV présenté au chapitre précédent a été déterminé à partir de considérations sur la préservation de la vorticité en acoustique avec advection. Les propriétés de ce nouveau schéma doivent être analys es avant son application. Nous étudierons en premier lieu les propriétés de stabilité et de dissipation du schéma RBV, celles-ci conditionnent fortement sa mise en œuvre. D'autre part, le schéma RBV est totalement implicite en temps, nous proposerons donc dans une deuxième partie une méthode de résolution du schéma. Nous étudierons ensuite la précision du schéma avec la méthode dite du « système équivalent », puis avec une analyse de FOURIER. Enfin, nous appliquerons le schéma à des calculs d'advection de tourbillons pour les équations d'EULER.

2.2 Analyse de stabilité du schéma RBV

L'étude de stabilité du schéma RBV fait appel à une analyse de type VON NEUMANN classique. On considère le schéma appliqué à une équation linéaire scalaire avec les fonctions de flux $f(w) = aw$ et $g(w) = bw$ et les notations $\dot{a} = \frac{a\Delta t}{\delta x}$ et $\dot{b} = \frac{b\Delta t}{\delta x}$. Pour un système d'équations linéaires, les matrices de dissipation numérique des schémas basés sur le résidu sont donn es par les relations $\Phi_1 = \text{sgn}(a) \min(1, \frac{\delta y|a|}{\delta x|b|})$ et $\Phi_2 = \text{sgn}(b) \min(1, \frac{\delta x|b|}{\delta y|a|})$. On rappelle les symboles de FOURIER de quelques opérateurs discrets :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta_1\mu_1 \rightarrow i \sin(\xi) \\ \mu_1^2 \rightarrow \frac{1}{2}(\cos(\xi) + 1) \\ \delta_1^2 \rightarrow 2(\cos(\xi) - 1) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \delta_2\mu_2 \rightarrow i \sin(\eta) \\ \mu_2^2 \rightarrow \frac{1}{2}(\cos(\eta) + 1) \\ \delta_2^2 \rightarrow 2(\cos(\eta) - 1) \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où ξ et η sont les variables de FOURIER (nombres d'onde réduits dans chaque direction). Le schéma RBV appliqué à une équation linéaire scalaire s'écrit :

$$\begin{aligned} & \left(\mu_1^2\mu_2^2 - \frac{1}{2}\delta_1\mu_1\mu_2^2\Phi_1 - \frac{1}{2}\delta_2\mu_2\mu_1^2\Phi_2 \right) \nabla w^{n+1} + \left(\delta_1\mu_1\mu_2^2\dot{a} + \delta_2\mu_2\mu_1^2\dot{b} \right) w^{n+1} \\ & - \frac{1}{2} \left(\delta_1^2\mu_2^2\Phi_1\dot{a} + \delta_2^2\mu_1^2\Phi_2\dot{b} + \delta_1\mu_1\delta_2\mu_2 \left(\Phi_1\dot{b} + \Phi_2\dot{a} \right) \right) w^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Sa transform e de FOURIER est alors :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) - i \sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 \right. \\ & \quad \left. - i \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \right] \left(\frac{3\hat{w}^{n+1} - 4\hat{w}^n + \hat{w}^{n-1}}{2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left[\sin(\xi) \sin(\eta) \left(\Phi_1\dot{b} + \Phi_2\dot{a} \right) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1\dot{a} \right. \\ & \quad \left. - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2\dot{b} + i \left(\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\dot{b} \right) \right] \hat{w}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

En multipliant par deux puis en introduisant le facteur d'amplification g défini par $\hat{w}^{n+1} = g\hat{w}^n$, on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \left[(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) - i \sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 - i \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \right] (3g^2 - 4g + 1) \\ & + \left[\sin(\xi) \sin(\eta) (\Phi_1 \dot{b} + \Phi_2 \dot{a}) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 \dot{a} - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \dot{b} \right. \\ & \quad \left. + i (\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\dot{b}) \right] g^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le facteur d'amplification g du schéma RBV est une des racines du polynôme :

$$\gamma_2 g^2 + \gamma_1 g + \gamma_0 = 0$$

(2.5)

avec :

$$\begin{cases} \gamma_2 = \frac{3}{4} \left[(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) - i \sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 - i \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \right] \\ \quad + \left[\sin(\xi) \sin(\eta) (\Phi_1 \dot{b} + \Phi_2 \dot{a}) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 \dot{a} \right. \\ \quad \quad \left. - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \dot{b} + i (\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\dot{b}) \right] \\ \gamma_1 = - \left[(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) - i \sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 - i \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \right] \\ \gamma_0 = \frac{1}{4} \left[(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) - i \sin(\xi)(\cos(\eta) + 1)\Phi_1 - i \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1)\Phi_2 \right] \end{cases}$$

(2.6)

Plus précisément, le facteur d'amplification $g(\xi, \eta)$ est la racine qui vérifie la condition de consistance, c'est à dire $g(0, 0) = 1$. Une spécificité du schéma RBV est que le facteur d'amplification g n'est pas défini pour les couples de nombres d'onde réduits $(\pm\pi, \pm\pi)$.

Le module de g pour une advection diagonale ($a = b$) pour deux nombres CFL est présenté FIG. 2.1. La première observation que l'on peut faire tient à la présence d'une zone de faible instabilité où l'on observe que $|g| > 1$. Une étude paramétrique sur le nombre $|\dot{a}| = |\dot{b}|$ montre que cette zone de faible instabilité disparaît pour $|\dot{a}| > 10$. La valeur maximale du module de g est observée pour $|\dot{a}| = 1$ avec $\max |g| \simeq 1,06$. La présence de cette région de faible instabilité n'est pas à mettre sur le compte de la discrétisation de type monoprédicteur du schéma RBV. En effet, de telles régions où $|g|$ est légèrement supérieur à 1 ont également été observées pour un schéma RBV à deux prédicteurs précis à l'ordre 3 en espace et à l'ordre 2 en temps sans que cela pose de problèmes pour la simulation des équations de NAVIER-STOKES compressibles (voir [27] p. 107-108).

Même si le facteur d'amplification g du schéma RBV n'est pas défini pour les couples de nombres d'onde réduits $(\pm\pi, \pm\pi)$, on observe clairement sur la figure (2.1) que la limite de $|g|$ tend vers zéro pour les nombres d'onde réduits $\xi = \pm\pi$ et $\eta = \pm\pi$ correspondant aux plus courtes longueurs d'onde dans les directions diagonales, à l'exception de la droite $\xi + \eta = 0$. Cependant, même si le chemin suivi pour atteindre la limite passe par la droite $\xi + \eta = 0$, on observe que la limite de $|g|$ est strictement inférieure à 1. Ce comportement du facteur d'amplification du schéma RBV est inattendu pour un schéma à un prédicteur a priori peu dissipatif. En effet, le schéma RBV à une discrétisation spatiale proche des schémas de LAX-WENDROFF-NI et RBVs. Or ces deux schémas sont stables mais non dissipatifs au sens de KREISS, en particulier, leurs facteurs d'amplification valent identiquement 1 pour $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$ dans le cas d'écoulements diagonaux (que ces schémas soient explicites ou implicites). À l'inverse, le schéma RBV est théoriquement instable puisqu'il existe des couples de nombres d'onde réduits pour lesquels $|g| > 1$, mais il dissipe les plus courtes longueurs d'onde quelque soit la direction de l'écoulement puisque le module de g tend vers une valeur strictement inférieure à 1 pour les couples de nombres d'onde réduits appartenant à $\{(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \xi = \pi, \eta \in [-\pi, \pi]\} \cup \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \xi = -\pi, \eta \in [-\pi, \pi]\} \cup \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \xi \in [-\pi, \pi], \eta = \pi\} \cup \{(\xi, \eta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} / \xi \in [-\pi, \pi], \eta = -\pi\}$. L'origine de cette propriété doit être étudiée.

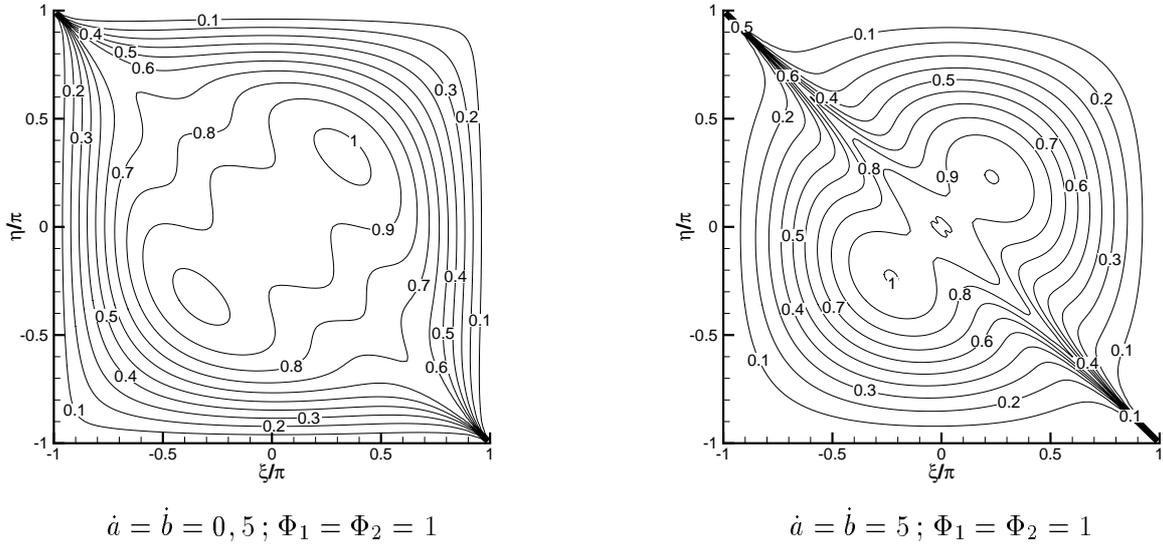


FIG. 2.1 - Isovaleurs du module du facteur d'amplification du schéma RBV.

2.3 Origine des propriétés dissipatives du schéma RBV

Le schéma RBV a le même support spatial que le schéma de LAX-WENDROFF-NI (1.37) et que le schéma RBVs (1.55). Or il est bien connu que les schémas à un prédicteur présentent un défaut de dissipation pour les plus courtes longueurs d'onde, en particulier les schémas de LAX-WENDROFF-NI et RBVs ont comme propriété $|g| = 1$ pour $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$, ce qui explique qu'il faille leur adjoindre une viscosité artificielle pour les mettre en œuvre [42, 63, 64].

Rappelons également que si un schéma explicite ne dissipe pas les plus courtes longueurs d'ondes, son implicitation ne modifie pas cette propriété. Vérifions le pour le schéma RBVs (1.55). En utilisant les notations habituelles $\Delta w^n = w^{n+1} - w^n$, $\sigma_1 = \delta x / \Delta t$, $\sigma_2 = \delta y / \Delta t$, h_1, h_2 les flux numériques dans les directions j et k , le schéma explicite (1.55) peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w_{j,k}^{expl} = -(\mathcal{K}w^n)_{j,k} \\ \mathcal{K}w = \sigma_1 \delta_1 h_1 + \sigma_2 \delta_2 h_2 \\ h_{1j+\frac{1}{2},k} = \left[\mu_1 \mu_2^2 f - \frac{\delta x}{2} \Phi_1 \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right) \right]_{j+\frac{1}{2},k} \\ h_{2j,k+\frac{1}{2}} = \left[\mu_1^2 \mu_2 g - \frac{\delta y}{2} \Phi_2 \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right) \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \end{array} \right. \quad (2.7)$$

La version totalement implicite de ce schéma s'écrit :

$$\Delta w_{j,k}^n = -(\mathcal{K}w^{n+1})_{j,k} \quad (2.8)$$

Elle est de la forme :

$$(\mathcal{H}\Delta w^n)_{j,k} = -(\mathcal{K}w^n)_{j,k} \quad (2.9)$$

avec ici :

$$\mathcal{H} = Id + \mathcal{K} \quad (2.10)$$

où Id désigne l'opérateur identité.

Appliquons maintenant le schéma à une équation linéaire scalaire. Les opérateurs \mathcal{K} et \mathcal{H} deviennent linéaires et, en notant K et H leurs symboles de FOURIER respectifs, le facteur d'amplification du schéma s'écrit :

$$g = \frac{H - K}{H} = \frac{1}{1 + K} \quad (2.11)$$

Rappelons que pour le schéma RBVs (1.55) le symbole de FOURIER K de l'opérateur explicite \mathcal{K} est donnée par :

$$\begin{aligned} K = \frac{1}{2} \left[\sin(\xi) \sin(\eta) \left(\Phi_1 \dot{b} + \Phi_2 \dot{a} \right) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1) \Phi_1 \dot{a} \right. \\ \left. - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1) \Phi_2 \dot{b} + i \left(\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1) \dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1) \dot{b} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.12)$$

et que le facteur d'amplification du schéma explicite vaut :

$$g = 1 - K \quad (2.13)$$

Nous retrouvons bien la propriété de stabilité inconditionnelle des schémas implicites (à savoir $|g| \leq 1$ pour tous $(\xi, \eta, \dot{a}, \dot{b})$). Par contre, si le schéma explicite n'est pas dissipatif au sens de KREISS alors le schéma implicite correspondant n'est pas non plus dissipatif au sens de KREISS (en effet, si K s'annule en $(\pm\pi, \pm\pi)$, on retrouve pour le schéma implicite $|g(\xi = \pm\pi, \eta = \pm\pi)| = 1$).

Trois caractéristiques essentielles distinguent le schéma RBV de la version implicite du schéma RBVs (1.55) :

1. l'opérateur de différentiation temporelle du schéma RBV est moyenné en espace par l'opérateur discret $\mu_1^2 \mu_2^2$;
2. l'opérateur de différentiation temporelle du schéma RBV utilise trois niveaux de temps $\nabla w^{n+1} = (3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1})/2$;
3. la dérivée de temps intervient dans la partie dissipative du schéma (utilisation du résidu complet), ce qui assure l'ordre 2 en temps du schéma RBV.

La question se pose alors de déterminer laquelle ou lesquelles de ces caractéristiques améliorent fondamentalement les propriétés dissipatives du schéma RBV. Pour répondre à cette question nous proposons d'étudier une suite de schémas permettant de passer du schéma RBC (1.55) au schéma RBV en passant successivement par les trois étapes que nous venons d'énumérer.

2.3.1 Influence de la moyenne spatiale de l'incrément temporel

Le premier schéma que nous considérons est la version implicite du schéma RBVs (1.55) sur lequel on effectue une moyenne spatiale des termes de discrétisation temporelle. Le schéma résultant de cette modification s'écrit :

$$\begin{cases} \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{w^{n+1} - w^n}{\Delta t} \right)_{j,k} + (\Lambda \tilde{r}_s)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ \Lambda = \left(\mu_1 \mu_2 \cdot - \frac{\delta x}{2} \frac{\delta_1 \Phi_1 \mu_2}{\delta x} \cdot - \frac{\delta y}{2} \frac{\delta_2 \Phi_2 \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \\ \tilde{r}_s^{n+1}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{cases} \quad (2.14)$$

Nous avons vu que pour un schéma classique, l'opérateur implicite s'écrit formellement $\mathcal{H} = Id + \mathcal{K}$. Si on intègre maintenant dans la phase implicite les pondérations spatiales dues à l'opérateur $\mu_1^2 \mu_2^2$ appliqué à $\Delta w_{j,k}^n$, l'opérateur implicite devient :

$$\mathcal{H} = \mu_1^2 \mu_2^2 + \mathcal{K} \quad (2.15)$$

où \mathcal{K} est l'opérateur de la phase explicite telle qu'elle a été définie au paragraphe précédent. Le symbole de FOURIER de cet opérateur implicite est :

$$H = \frac{1}{4}(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) + K \quad (2.16)$$

Le facteur d'amplification g du schéma devient :

$$g = \frac{(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1)}{(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) + 4K} \quad (2.17)$$

Pour $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$, K est toujours identiquement nul. Par contre g n'est plus défini puisque $(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1)$ s'annule également pour ces valeurs de ξ et η . Les instabilités que

l'on observe avec les schémas monoprédicteurs classiques se produisent pour les plus courtes longueurs d'onde pour des advections diagonales. Nous nous plaçons donc dans le cas d'une advection diagonale, soit $\dot{a} = \dot{b}$, $\Phi_1 = 1$ et $\Phi_2 = 1$. Sous ces hypothèses, le facteur d'amplification $g(\xi, \eta)$ se simplifie en :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 1 - \frac{K}{H} \\ H = \frac{1}{4}(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) + K \\ K = \dot{a} \sin(\xi) \sin(\eta) - \frac{\dot{a}}{2} \left[(\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1) + (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1) \right] \\ \quad + i \frac{\dot{a}}{2} \left[\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1) + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1) \right] \end{array} \right. \quad (2.18)$$

Sur la droite d'équation $\eta = -\xi$, g se simplifie pour donner :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 1 - \frac{K}{H} \\ H = \frac{1}{4}(\cos(\xi) + 1)^2 + K \\ K \equiv 0 \end{array} \right. \quad (2.19)$$

On remarque que K est identiquement nul quel que soit ξ , on en déduit que g vaut identiquement 1 en tout point de cette droite et par conséquent :

$$\lim_{\substack{\eta = -\xi \\ |\xi| \rightarrow \pi}} |g(\xi, \eta)| = 1 \quad (2.20)$$

Sur toute autre droite $\eta = \alpha\xi$ avec $\alpha \neq -1$, les changements de variables $\xi = \pi - x$ et $\eta = \pi - y$ nous permettent d'effectuer un développement limité de l'équation de g au voisinage de ($\xi = \pi, \eta = \pi$). Ce changement de variables nous donne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\xi) = -\cos(x) \\ \sin(\xi) = \sin(x) \end{array} \right. \quad \text{et} \quad \lim_{\substack{\xi \rightarrow \pi \\ \eta \rightarrow \pi}} |g(\xi, \eta)| = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} |g(x, y)| \quad (2.21)$$

g est maintenant donné par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} g(x, y) = 1 - \frac{K(x, y)}{H(x, y)} \\ H(x, y) = \frac{1}{4}(1 - \cos(x))(1 - \cos(y)) + K(x, y) \\ K(x, y) = \dot{a} \sin(x) \sin(y) + \frac{\dot{a}}{2} \left[(1 + \cos(x))(1 - \cos(y)) + (1 + \cos(y))(1 - \cos(x)) \right] \\ \quad + i \frac{\dot{a}}{2} \left[\sin(x)(1 - \cos(y)) + \sin(y)(1 - \cos(x)) \right] \end{array} \right. \quad (2.22)$$

en remplaçant H par son expression, et en se plaçant sur une droite d'équation $y = \alpha x$, $\alpha \neq -1$, la fonction donnant la valeur du module de g devient :

$$|g| = \frac{\frac{1}{4}(1 - \cos(x))(1 - \cos(\alpha x))}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}(1 - \cos(x))(1 - \cos(\alpha x)) + \operatorname{Re}(K) \right)^2 + \operatorname{Im}(K)^2}} \quad (2.23)$$

À paramètre α fixé, cette fonction admet pour développement limité en x au voisinage de zéro :

$$|g| = \frac{1}{8} \frac{\alpha^2}{|\dot{a}|(\alpha + 1)^2} x^2 + \mathcal{O}(x^4) \quad (2.24)$$

Si $\alpha \neq -1$ alors $\lim_{\substack{y=\alpha x \\ x \rightarrow 0}} |g| = 0$ quel que soit le chemin par lequel on fait tendre (ξ, η) vers (π, π) à l'exception de la droite $\eta = -\xi$. Ce comportement du module du facteur d'amplification est vérifié numériquement et illustré FIG. 2.2. On voit bien que pour $\alpha = -1$, c'est-à-dire sur la droite d'équation $\eta = -\xi$, le module de g vaut identiquement 1. Par contre, le module de g est nul au voisinage des couples de nombres d'onde $(\xi, \eta) = (\pi, \pi)$ et $(\xi, \eta) = (-\pi, -\pi)$.

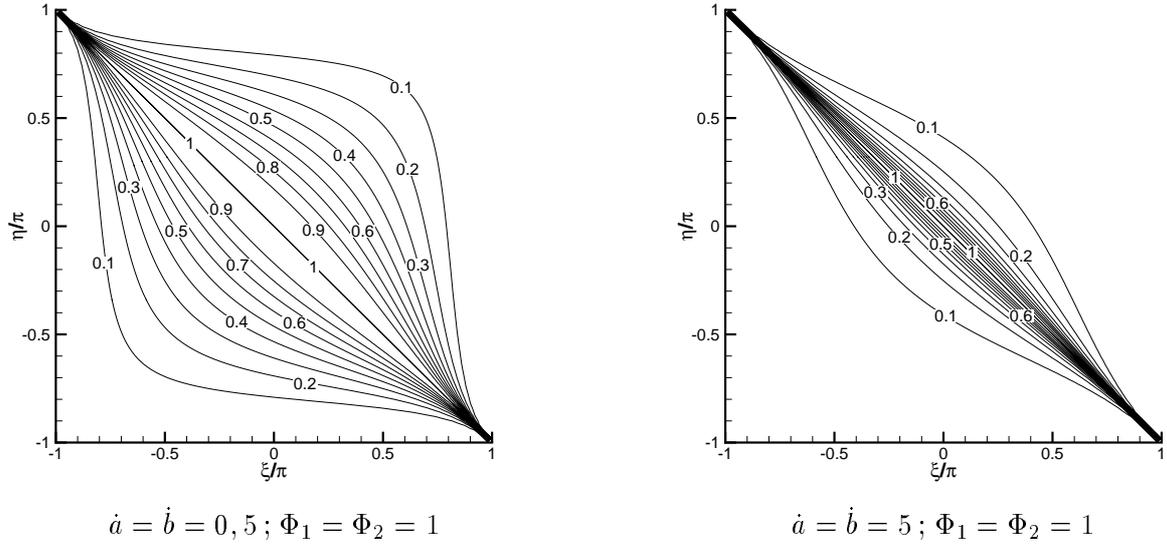


FIG. 2.2 - Isovaleurs du module du facteur d'amplification du schéma RBC préservant la vorticité pour les écoulements stationnaires modifié avec moyenne spatiale de l'opérateur de différentiation temporelle.

Conclusion sur la moyenne spatiale

L'opérateur de moyenne spatiale $\mu_1^2 \mu_2^2$ appliqué aux termes de discrétisation a une influence majeure sur le module du facteur d'amplification des schémas implicites sauf pour les ondes telles que $\eta = -\xi$.

2.3.2 Ajout de l'incrément temporel à trois niveaux de temps

Le deuxième schéma que nous considérons est une modification du schéma (2.14) dans lequel on remplace l'incrément à deux niveaux de temps par un incrément à trois niveaux de temps qui approche une dérivée temporelle à l'ordre 2 au temps t^{n+1} . Le schéma résultant de cette modification n'offre pas une précision temporelle à l'ordre 2 puisque c'est encore le résidu stationnaire et non le résidu complet qui intervient dans la dissipation numérique. Ce schéma s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j,k} + (\Lambda \tilde{r}_s)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ \Lambda = \left(\mu_1 \mu_2 \cdot -\frac{\delta x}{2} \frac{\delta_1 \Phi_1 \mu_2}{\delta x} \cdot -\frac{\delta y}{2} \frac{\delta_2 \Phi_2 \mu_1}{\delta y} \cdot \right) \\ \tilde{r}_s^{n+1}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} \end{array} \right. \quad (2.25)$$

Appliqué à un système d'équations linéaires scalaires, il devient :

$$\begin{aligned} \mu_1^2 \mu_2^2 \left(\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2} \right)_{j,k} + \left(\delta_1 \mu_1 \mu_2^2 \cdot -\frac{1}{2} \delta_1^2 \mu_2^2 \Phi_1 \cdot -\frac{1}{2} \delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2 \Phi_2 \cdot \right) \dot{a} w_{j,k}^{n+1} \\ + \left(\delta_2 \mu_2 \mu_1^2 \cdot -\frac{1}{2} \delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2 \Phi_1 \cdot -\frac{1}{2} \delta_2^2 \mu_1^2 \Phi_2 \cdot \right) \dot{b} w_{j,k}^{n+1} = 0 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Une transformation de FOURIER et les mêmes opérations que pour le schéma RBV nous donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} (\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) (3g^2 - 4g + 1) \\ + \left[\sin(\xi) \sin(\eta) (\Phi_1 \dot{b} + \Phi_2 \dot{a}) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1) \Phi_1 \dot{a} - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1) \Phi_2 \dot{b} \right. \\ \left. + i (\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1) \dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1) \dot{b}) \right] g^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Le facteur d'amplification g de ce schéma est la racine qui vérifie la condition de consistance $g(0, 0) = 1$ du polynôme $\gamma_2 g^2 + \gamma_1 g + \gamma_0 = 0$ avec :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_2 = \frac{3}{4} (\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) \\ \quad + \sin(\xi) \sin(\eta) (\Phi_1 \dot{b} + \Phi_2 \dot{a}) - (\cos(\xi) - 1)(\cos(\eta) + 1) \Phi_1 \dot{a} \\ \quad - (\cos(\eta) - 1)(\cos(\xi) + 1) \Phi_2 \dot{b} + i (\sin(\xi)(\cos(\eta) + 1) \dot{a} + \sin(\eta)(\cos(\xi) + 1) \dot{b}) \\ \gamma_1 = -(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) \\ \gamma_0 = \frac{1}{4} (\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1) \end{array} \right. \quad (2.28)$$

Dans le cas d'une advection diagonale (cf. FIG. 2.3), le calcul numérique du facteur d'amplification montre que toutes les ondes sont dissipées. Dans ce cas, le schéma apparaît dissipatif au sens de KREISS.

Conclusion sur l'incrément total

L'utilisation d'un incrément temporel à trois niveaux de temps couplé à une moyenne spatiale de cette incrément confère d'excellentes propriétés dissipatives au schéma implicite.

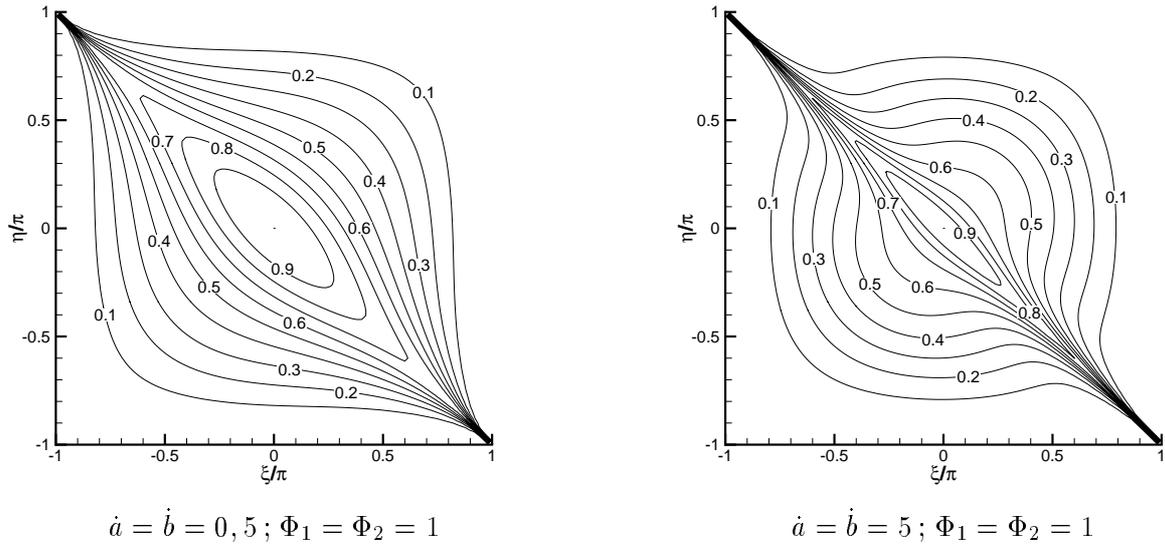


FIG. 2.3 - Isovaleurs du module du facteur d'amplification du schéma RBC préservant la vorticité pour les écoulements stationnaires modifié avec moyenne spatiale de l'opérateur de différentiation temporelle à trois niveaux de temps.

2.3.3 Ajout du résidu complet dans la dissipation numérique

Il ne reste plus qu'à introduire les termes instationnaires dans la dissipation du schéma (2.25) pour aboutir à l'expression du schéma RBV. Cette opération a pour effet de rendre le schéma moins dissipatif suivant la direction de l'advection sans modifier ses propriétés dissipatives pour les plus grands nombres d'onde réduits (cf. FIG. 2.1). Elle fait aussi apparaître une légère zone d'instabilité dans le milieu du spectre mais est indispensable pour garantir la précision d'ordre 2 en temps du schéma. Cette instabilité disparaît pour des CFL supérieurs à 10.

Conclusion

Les caractéristiques qui améliorent fondamentalement les propriétés dissipatives du schéma RBV sont la moyenne spatiale de l'incrément temporel et l'utilisation de l'incrément temporel à trois niveaux de temps. Plus précisément, c'est la moyenne spatiale de l'incrément temporel à trois niveaux de temps qui modifie en profondeur les propriétés dissipatives du schéma RBV. L'utilisation du résidu complet dans la dissipation numérique réduit un peu les effets dissipatifs et assure l'ordre deux en temps.

2.4 Résolution du schéma RBV

La méthode utilisée pour résoudre la phase implicite non linéaire du schéma RBV repose sur une technique dite de « pas de temps dual » ou DTS (pour *Dual Time Stepping*) parfois appelée méthode de pas de temps fictif. Cette technique a été proposée pour la première fois par PEYRET [69] et développée dans [25, 70, 82] pour la résolution d'écoulements incompressibles. Elle a ensuite été adaptée par JAMESON [35] pour la résolution d'écoulements compressibles. L'utilisation d'une méthode de pas de temps dual pour augmenter la précision temporelle des schémas de type RBC a initialement été proposée par LERAT & CORRE [43], étudiée dans la thèse de HANSS [27] et publiée dans [18].

2.4.1 Formulation en pas de temps dual

La formulation en pas de temps dual du schéma RBV présentée dans ce paragraphe s'inspire largement des travaux [18, 27], les notations et la présentation sont toutefois différentes de manière à prendre en compte la formulation $\Lambda(\tilde{r}) = 0$ du schéma RBV.

On cherche w solution de $w_t + f(w)_x + g(w)_y = 0$ comme solution stationnaire d'un problème d'évolution par rapport à un temps dual τ :

$$w_\tau + w_t + f(w)_x + g(w)_y = 0 \quad (2.29)$$

En pratique on cherche à calculer la solution au temps physique $t^{n+1} = (n+1)\Delta t$ comme l'état stationnaire du problème (2.29). Pour atteindre cet état stationnaire, on utilise une méthode de sous-itérations sur le temps fictif. La notation $w^{n,m}$ désigne la valeur w au temps fictif $m\Delta\tau$ dans le processus de convergence vers l'état stationnaire partant de l'état initial w^n . La valeur $w^{n,m}$ est affectée à w^{n+1} lorsque la convergence en temps fictif est atteinte, en théorie lorsque $m \rightarrow \infty$. Bien évidemment on cherche en pratique à minimiser le nombre d'itérations m pour atteindre l'état stationnaire en temps fictif, c'est-à-dire $w_\tau \simeq 0$. Une méthode efficace requiert l'utilisation d'un schéma implicite en temps fictif pour garantir une convergence rapide. En introduisant la notation $\Delta w^{n,m} = w^{n,m+1} - w^{n,m}$, le schéma implicite en temps fictif de la formulation $\Lambda\tilde{r} = 0$ du schéma RBV s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta\tau} \right)_{j,k} + (\Lambda\tilde{r})_{j,k}^{n,m+1} = 0 \\ \Lambda = \left(\mu_1\mu_2 \cdot -\frac{\delta x}{2} \frac{\delta_1\Phi_1\mu_2}{\delta x} \cdot -\frac{\delta y}{2} \frac{\delta_2\Phi_2\mu_1}{\delta y} \right) \\ \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n,m+1} = \left(\mu_1\mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} + \frac{\delta_1\mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2\mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n,m+1} \\ \left(\frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j,k}^{n,m+1} = \left(\frac{3w^{n,m+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j,k} \end{array} \right. \quad (2.30)$$

2.4.2 Phase implicite sur le pas de temps dual

Une linéarisation des flux donne la phase implicite complète à 9 points d'espace du schéma en pas de temps dual (2.30). Le solveur direct du schéma est alors :

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{I} + \left(\mu_1^2 \mu_2^2 - \frac{1}{2} \delta_1 \mu_1 \mu_2^2 \Phi_1 - \frac{1}{2} \delta_2 \mu_2 \mu_1^2 \Phi_2 \right) \frac{3}{2} \frac{\Delta \tau}{\Delta t} \\ + \left(\delta_1 \mu_1 \mu_2^2 - \frac{\delta_1^2 \mu_2^2}{2} \Phi_1 - \frac{\delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2}{2} \Phi_2 \right) \frac{\Delta \tau A}{\delta x} \\ + \left(\delta_2 \mu_2 \mu_1^2 - \frac{\delta_2^2 \mu_1^2}{2} \Phi_2 - \frac{\delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2}{2} \Phi_1 \right) \frac{\Delta \tau B}{\delta y} \end{array} \right] \Delta w_{j,k}^{n,m} = -\Delta \tau (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n,m} \quad (2.31)$$

On pose $\lambda = \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t}$, $\dot{A} = \frac{\Delta\tau A}{\delta x}$, $\dot{B} = \frac{\Delta\tau B}{\delta y}$, et on utilise les égalités $\mu_1^2 = (\mathbb{I} + \delta_1^2/4)$, $\mu_2^2 = (\mathbb{I} + \delta_2^2/4)$ pour écrire la phase implicite sous la forme :

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{I} + \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} + \frac{\delta_1^2 \delta_2^2}{16} - \frac{\delta_1 \mu_1}{2} \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \Phi_1 - \frac{\delta_2 \mu_2}{2} \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} \right) \Phi_2 \right) \lambda \\ + \left(\delta_1 \mu_1 \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) - \frac{\delta_1^2}{2} \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \Phi_1 - \frac{\delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2}{2} \Phi_2 \right) \dot{A} \\ + \left(\delta_2 \mu_2 \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} \right) - \frac{\delta_2^2}{2} \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} \right) \Phi_2 - \frac{\delta_1 \mu_1 \delta_2 \mu_2}{2} \Phi_1 \right) \dot{B} \end{array} \right] \Delta w_{j,k}^{n,m} = -\Delta \tau (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n,m} \quad (2.32)$$

De même que pour les schémas RBC mis en œuvre pour les calculs d'écoulements stationnaires, la méthode de résolution de la phase implicite est une méthode itérative de relaxation par lignes de type GAUSS-SEIDEL à balayage symétrique suivant les lignes horizontales puis verticales (HVLGS à deux balayages). Il a été montré par CORRE [17, 19] que cette méthode de relaxation offre l'efficacité optimale (rapport coût de calcul - vitesse de convergence) pour une phase implicite à 5 points. La phase implicite simplifiée à 5 points du schéma (2.30) devient :

$$\left[\begin{array}{l} \mathbb{I} + \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} - \frac{\delta_1 \mu_1}{2} \Phi_1 - \frac{\delta_2 \mu_2}{2} \Phi_2 \right) \lambda \\ + \left(\delta_1 \mu_1 - \frac{\delta_1^2}{2} \Phi_1 \right) \dot{A} + \left(\delta_2 \mu_2 - \frac{\delta_2^2}{2} \Phi_2 \right) \dot{B} \end{array} \right] \Delta w_{j,k}^{n,m} = -\Delta \tau (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n,m} \quad (2.33)$$

Rappelons que la stabilité et la convergence des algorithmes de relaxation dépendent de façon déterminante du caractère dominant diagonal de la matrice tridigonale à inverser, c'est pourquoi on reprend les choix effectués et justifiés dans [27] de ne conserver que la contribution sur la diagonale des opérateurs discrets appliqués à λ et de remplacer dans la phase implicite les matrices de dissipation des schémas RBC Φ_1 et Φ_2 par les matrices signes des moyennes de ROE des matrices jacobiennes des flux $\text{sgn}(A_R)$ et $\text{sgn}(B_R)$.

La phase implicite résolue en pratique est finalement :

$$\left[\mathbb{I} + \lambda \mathbb{I} + \dot{A} \delta_1 \mu_1 - \frac{1}{2} |\dot{A}| \delta_1^2 + \dot{B} \delta_2 \mu_2 - \frac{1}{2} |\dot{B}| \delta_2^2 \right] \Delta w_{j,k}^{n,m} = -\Delta \tau (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n,m} \quad (2.34)$$

2.4.3 Analyse de stabilité en temps dual

Seuls les termes aux niveaux temporels n, m et $n, m + 1$ interviennent dans l'analyse de stabilité du schéma implicite en pas de temps dual. Le schéma peut alors s'écrire formellement :

$$\mathcal{H}\Delta w^{n,m} = -\mathcal{K}w^{n,m} \quad (2.35)$$

Pour effectuer une analyse de VON NEUMANN du schéma en pas de temps dual, on introduit le mode $w_{j,k}^{n,m} = \hat{w}^{n,m} e^{ij\xi} e^{ik\eta}$ et on suppose les flux linéaires de la forme $f(w) = aw$, $g(w) = bw$. Soient \dot{K} et \dot{H} les transformées de FOURIER des opérateurs explicite et implicite du schéma, le facteur d'amplification g du schéma en pas de temps dual est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} g = 1 - \frac{K}{H} \\ K = \frac{\lambda}{4} (\cos(\xi) + 1) (\cos(\eta) + 1) + \frac{1}{2} \sin(\xi) \sin(\eta) \left(\text{sgn}(a)\dot{b} + \text{sgn}(b)\dot{a} \right) \\ \quad - \frac{1}{2} \text{sgn}(a) (\cos(\xi) - 1) (\cos(\eta) + 1) \dot{a} - \frac{1}{2} \text{sgn}(b) (\cos(\xi) + 1) (\cos(\eta) - 1) \dot{b} \\ \quad + \frac{i}{2} \left[\sin(\xi) (\cos(\eta) + 1) \left(\dot{a} - \frac{\lambda}{2} \text{sgn}(a) \right) + \sin(\eta) (\cos(\xi) + 1) \left(\dot{b} - \frac{\lambda}{2} \text{sgn}(b) \right) \right] \\ H = 1 + \lambda - |\dot{a}| (\cos(\xi) - 1) - |\dot{b}| (\cos(\eta) - 1) + i \left[\sin(\xi) \dot{a} + \sin(\eta) \dot{b} \right] \end{array} \right. \quad (2.36)$$

Le facteur d'amplification g du schéma en pas de temps dual dépend du paramètre $\lambda = \frac{3\Delta\tau}{2\Delta t}$ et des nombres CFL sur le temps dual $\dot{a} = \frac{a\Delta\tau}{\delta x}$ et $\dot{b} = \frac{b\Delta\tau}{\delta y}$. On voit immédiatement que pour les couples de nombres d'onde réduits critiques $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$, la transformée de FOURIER K de l'opérateur explicite s'annule alors que celle de l'opérateur implicite simplifié H utilisé sur le pas de temps dual reste strictement positive ce qui implique $|g(\pm\pi, \pm\pi)| = 1$. Nous avons vu au paragraphe 2.2 que le solveur direct du schéma RBV dissipe les courtes longueurs d'ondes. L'équation (2.36) montre que le schéma en pas de temps dual mis en œuvre pour approcher le solveur direct perd cette propriété, ce que l'on peut observer FIG. 2.4 où dans le cas d'une advection suivant une diagonale du maillage avec $a = 1$ et $b = 1$, le module de g prend pour valeur 1 pour les couples de nombres d'onde réduits critiques $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$ quelles que soient les valeurs de λ et des nombres CFL en temps dual \dot{a} et \dot{b} .

Pour espérer retrouver les propriétés de dissipation du solveur direct, il faudrait que la transformée de FOURIER de la phase implicite en pas de temps dual s'annule pour les plus courtes longueurs d'onde, que la limite de $\frac{K}{H}$ pour $\xi \rightarrow \pm\pi$ et $\eta \rightarrow \pm\pi$ soit définie et que le module de $(1 - \lim \frac{K}{H})$ soit strictement inférieur à 1. Des pistes de recherche allant dans ce sens ont été explorées pendant la thèse, sans aboutir. Une autre méthode doit donc être utilisée pour stabiliser le schéma de résolution sur le pas de temps dual quand cela s'avère nécessaire et assurer la convergence vers l'état physique à l'instant t^{m+1} .

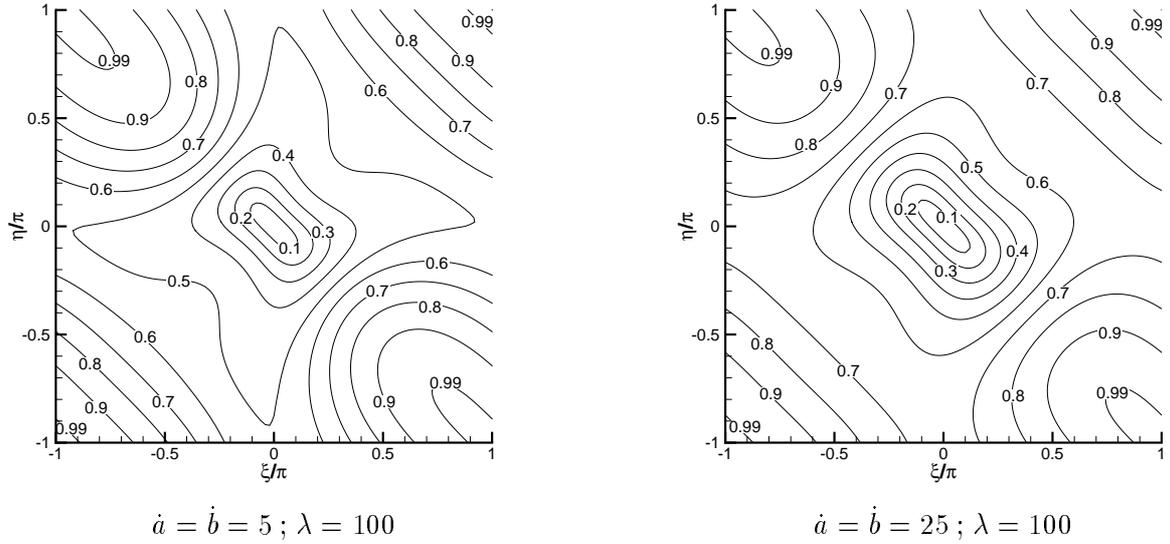


FIG. 2.4 - Isovaleurs du module du facteur d'amplification du schéma de résolution en pas de temps dual du schéma RBV pour une advection diagonale.

2.4.4 Filtrage de la solution en pas de temps dual

L'ajout d'une viscosité artificielle classique aurait pu être envisagé pour amortir les instabilités numériques pouvant déstabiliser le calcul pendant l'étape de résolution en temps fictif du schéma RBV. Cette méthode fait intervenir des coefficients dont la valeur dépend du type d'écoulement calculé et induit donc un calibrage de la méthode par l'utilisateur. De plus, elle est mal adaptée à la formulation de type $\Lambda\tilde{r} = 0$ du schéma RBV et n'a donc pas été retenue.

La méthode proposée pour rendre dissipatif le schéma de résolution en pas de temps dual repose sur l'utilisation de filtres spatiaux qui dissipent les hautes fréquences. La possibilité d'appliquer des filtres d'ordre de précision élevé doit permettre de ne pas altérer la qualité de la solution du schéma RBV tout en apportant la dissipation qui manque à la phase implicite du schéma de résolution sur le pas de temps dual.

Les filtres spatiaux utilisés en simulation numérique des écoulements et en aéroacoustique ont pour rôle de dissiper les instabilités aux hautes fréquences, ce sont donc des filtres passe-bas. Appliquer un filtre F à une variable ϕ continue suivant chaque direction d'espace revient à effectuer un produit de convolution de cette variable ϕ par une fonction \mathcal{F} à support compact telle que $F(\phi) = \mathcal{F} * \phi$. Il s'agit donc de pondérer la fonction ϕ par la fonction \mathcal{F} . Dans le cas d'une variable à valeurs discrètes sur un maillage cartésien régulier, un filtre peut être assimilé à la discrétisation d'un produit de convolution.

Dans la pratique, un filtre est un opérateur linéaire centré qui effectue une moyenne spatiale pondérée de la variable filtrée. Les coefficients de cette pondération sont déterminés grâce à des développements de Taylor pour obtenir l'ordre de précision, et une analyse de FOURIER pour assurer la dissipation des ondes aux hautes fréquences. Suivant les conclusions de la thèse de GUENANFF [26], le filtrage est appliqué au vecteur d'état en fin d'itération, ce qui assure la dissipation des plus grands nombres d'onde réduits.

Filtres discrets

Soit $\phi(x)$ une quantité discrétisée sur un domaine 1-D de dimension infinie. On note ϕ_n les valeurs des échantillons de $\phi(x)$. Sur l'intervalle d'échantillonnage, tout signal ϕ_n peut se décomposer comme une somme de Dirac translétés :

$$\phi_n = \sum_{p=-\infty}^{+\infty} \phi_n \delta_{n-p} \quad (2.37)$$

Soit F un filtre discret et $\mathcal{F}_n = F(\delta_n)$ sa réponse impulsionnelle discrète. Si F est un opérateur linéaire stationnaire, alors il se calcule par la convolution discrète :

$$F(\phi_n) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \phi_p \mathcal{F}_{n-p} = \phi * \mathcal{F}_n \quad (2.38)$$

Lorsque la quantité ϕ est discrétisée sur un domaine à deux ou trois dimensions d'espace, les filtres sont appliqués de manière successive suivant chaque direction du domaine.

Filtres explicites

Un filtre explicite d'ordre $p = 2N$ a un support spatial de $(2N + 1)$ points. Les valeurs de la quantité filtrée $\bar{\phi}$ sont obtenues directement par :

$$\bar{\phi}_i = \sum_{n=-N}^N a_n \phi_{i+n} \quad (2.39)$$

Cet opérateur est symétrique lorsqu'il est appliqué sur des maillages réguliers. Il n'y a donc que $(N + 1)$ coefficients a_n à déterminer par la résolution d'un système linéaire de $(N + 1)$ équations. N équations sont données par des développements de Taylor à l'ordre $2N$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \dots & 2 \\ 0 & 1 & 2^2 & \dots & N^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 2^{2(N-1)} & \vdots & \vdots & N^{2(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

La dernière équation vient d'une condition fréquentielle sur le module de la fonction de transfert du filtre (ici un schéma centré symétrique). Cette fonction de transfert s'écrit :

$$H_F(\mathcal{K}) = \sum_{n=-N}^N a_n e^{in\mathcal{K}} \quad (2.41)$$

Elle est strictement réelle, paire et 2π périodique du nombre d'onde exacte \mathcal{K} . La symétrie des coefficients a_n nous donne :

$$H_F(\mathcal{K}) = a_0 + \sum_{n=1}^N 2a_n \cos(n\mathcal{K}) \quad (2.42)$$

Pour amortir les instabilités numériques se produisant une maille sur deux, il faut annuler le module de H_F pour $\mathcal{K} = \pi$, ce qui donne :

$$a_0 + \sum_{n=1}^N (-1)^n a_n = 0 \quad (2.43)$$

Le système linéaire qui détermine la valeur des coefficients d'un filtre explicite d'ordre $2N$ est donc :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdot & 2 \\ 0 & 1 & 2^2 & \cdot & N^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 2^{2(N-1)} & \cdot & \cdot & N^{2(N-1)} \\ 1 & -2 & 2 & \cdot & 2(-1)^N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \cdot \\ a_{N-1} \\ a_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \cdot \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Les coefficients qui définissent les filtres explicites d'ordre 2, 4, 6, 8 et 10, que l'on peut trouver dans [40, 74], sont rappelés dans le tableau 2.1. Leur connaissance permet de calculer la réponse impulsionnelle $h_F(x)$ de chacun des filtres par transformée de FOURIER inverse de leur fonction de transfert $H_F(\mathcal{K})$:

$$h_F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_F(\mathcal{K}) e^{i\mathcal{K}x} d\mathcal{K} \quad (2.45)$$

On remplace $H(\mathcal{K})$ par son expression et on permute les opérateurs de sommations et d'intégration :

$$h_F(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-N}^N a_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\mathcal{K}(x+n\Delta x)} d\mathcal{K} \quad (2.46)$$

La réponse impulsionnelle d'un filtre explicite d'ordre N est alors :

$$h_F(x) = \sum_{n=-N}^N a_n \frac{\sin(\pi(x+n\Delta x))}{\pi(x+n\Delta x)} \quad (2.47)$$

Les fonctions de transfert et réponses impulsionnelles de filtres explicites d'ordre 2 à 10 sont représentées FIG. 2.5.

Filtre	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Ordre
F_2	1/2	1/4	0	0	0	0	2
F_4	5/8	1/4	-1/16	0	0	0	4
F_6	11/16	15/64	-3/32	1/64	0	0	6
F_8	93/128	7/32	-7/64	1/32	-1/256	0	8
F_{10}	193/256	105/512	-15/128	45/1024	-5/512	1/1024	10

TAB. 2.1 - Coefficients des filtres explicites

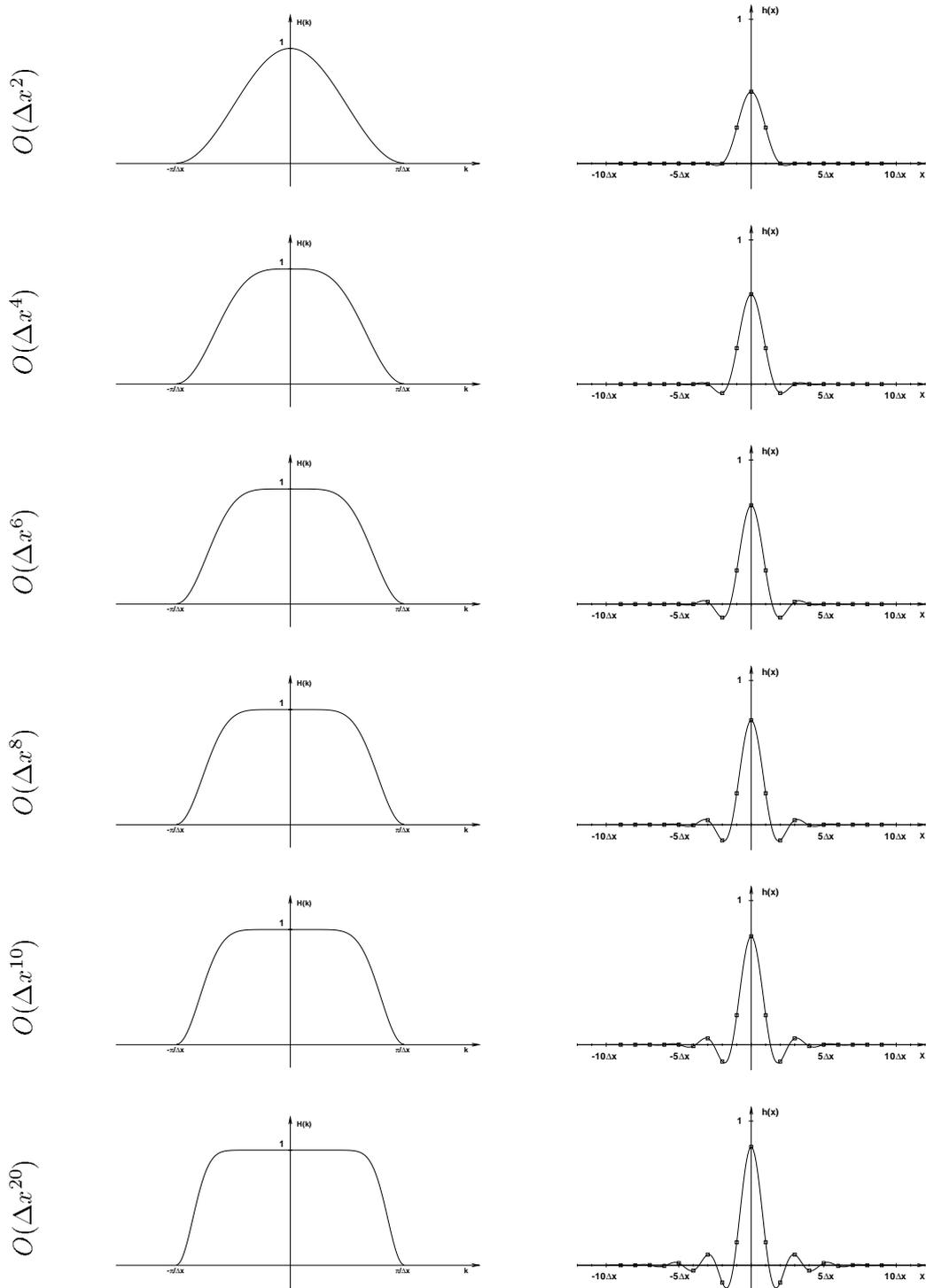


FIG. 2.5 - Fonctions de transfert et réponses impulsionnelles de filtres explicites

Filtres implicites

Pour les filtres implicites utilisés par VISBAL & GAITONDE [86, 87], les valeurs de la quantité filtrée $\bar{\phi}$ sont obtenues en résolvant :

$$\alpha_f \bar{\phi}_{i-1} + \bar{\phi}_i + \alpha_f \bar{\phi}_{i-1} = \sum_{n=0}^N \frac{a_n}{2} (\phi_{i+n} + \phi_{i-n}) \quad (2.48)$$

Le paramètre α_f permet d'ajuster la largeur de la bande passante du filtre. Pour des raisons de stabilité, sa valeur doit être comprise dans l'intervalle $] -0,5; 0,5]$. Faire tendre α_f vers 0,5 augmente la bande passante du filtre et le rend moins dissipatif. À l'inverse, lorsque α_f tend vers -0,5 la bande passante diminue et le filtre dissipe une plus grande gamme de nombres d'onde. Les coefficients de ces filtres sont donnés dans le tableau (2.2).

Filtre	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	Ordre
F_2	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	0	0	0	0	2
F_4	$\frac{5}{8} + \frac{3\alpha_f}{4}$	$\frac{1}{2} + \alpha_f$	$\frac{-1}{8} + \frac{\alpha_f}{4}$	0	0	0	4
F_6	$\frac{11}{16} + \frac{5\alpha_f}{8}$	$\frac{15}{32} + \frac{17\alpha_f}{16}$	$\frac{-3}{16} + \frac{3\alpha_f}{8}$	$\frac{1}{32} - \frac{\alpha_f}{16}$	0	0	6
F_8	$\frac{93 + 70\alpha_f}{128}$	$\frac{7 + 18\alpha_f}{16}$	$\frac{-7 + 14\alpha_f}{32}$	$\frac{1}{16} - \frac{\alpha_f}{8}$	$\frac{-1}{128} + \frac{\alpha_f}{64}$	0	8
F_{10}	$\frac{193 + 126\alpha_f}{256}$	$\frac{105 + 302\alpha_f}{256}$	$\frac{15(-1 + 2\alpha_f)}{64}$	$\frac{45(1 - 2\alpha_f)}{512}$	$\frac{5(-1 + 2\alpha_f)}{256}$	$\frac{1 - 2\alpha_f}{512}$	10

TAB. 2.2 - Coefficients des filtres implicites

Contrairement aux filtres discrets présentés au paragraphe 2.4.4, on voit que les filtres implicites peuvent s'écrire sous la forme d'une équation récurrente :

$$\sum_{k=-1}^1 \alpha_k \bar{\phi}_{i-k} = \sum_{n=-N}^N b_n \phi_{i-n} \quad (2.49)$$

avec $\alpha_{-1} = \alpha_1 = \alpha_f$, $\alpha_0 = 1$, $b_0 = a_0$ et $b_{-n} = b_n = a_n/2$. Soit \mathcal{F} la réponse impulsionnelle d'un filtre implicite, $\bar{\phi} = \mathcal{F} * \phi$, sa fonction de transfert s'obtient en calculant la transformée de FOURIER de l'équation (2.49). La transformée de FOURIER de $\phi_n[i] = \phi[i - n]$ est $\hat{\phi}_n(\mathcal{K}) = \hat{\phi}(\mathcal{K})e^{-in\mathcal{K}}$, donc

$$\hat{\mathcal{F}}(\mathcal{K}) = \frac{\hat{\bar{\phi}}(\mathcal{K})}{\hat{\phi}(\mathcal{K})} = \frac{\sum_{n=-N}^N b_n e^{-in\mathcal{K}}}{\sum_{k=-1}^1 \alpha_k e^{-ik\mathcal{K}}} \quad (2.50)$$

Le filtre est stable si sa réponse impulsionnelle (et donc sa fonction de transfert) est finie. Ceci implique que le dénominateur de (2.50) ne s'annule jamais, c'est-à-dire que les racines du polynôme $\sum_{k=-1}^1 \alpha_k e^{-ik\mathcal{K}}$ ont un module différent de 1. Cette propriété est vérifiée dès que $\alpha_f \in] -0,5; 0,5[$. Pour plus de précisions sur les filtres, les convolutions discrètes et leur application à des signaux finis (domaine spatial borné) on pourra se reporter à [54, pp. 48-58].

Choix du type de filtre

Les filtres implicites sont intéressants en aéroacoustique parce que leur réponse peut être optimisée suivant les différents nombres d'onde en faisant varier le paramètre α_f . Leur mise en œuvre implique la résolution sur chaque ligne de maillage et dans chaque direction d'un système linéaire tridiagonal dont la dimension est le nombre de cellules sur la ligne dans la direction considérée.

Dans la mesure où le schéma RBV est destiné en principe à des calculs d'aérodynamique et non d'aéroacoustique, les filtres choisis pour stabiliser l'étape de sous itération en pas de temps dual sont des filtres explicites. Pour plus de précisions sur les caractéristiques des filtres implicites et leurs fonctions de transfert, on pourra se reporter entre autre à [40, 86, 87].

Filtrage en pas de temps dual

Lorsqu'il y a plus d'une dimension d'espace, l'opérateur de filtrage est appliqué successivement suivant chaque direction de maillage. Un filtrage suivant les deux directions du maillage est appliqué au schéma (2.30) dont la solution à l'instant fictif $\tau^{n,m+1}$ est :

$$w_{j,k}^{n,m+1} = w_{j,k}^{n,m} - \Delta\tau(\Lambda\tilde{r})_{j,k}^{n,m+1} \quad (2.51)$$

Un filtre explicite d'ordre $2N$ dans la direction j est appliqué en tout point du domaine :

$$\bar{w}_{j,k}^{n,m+1} = \sum_{l=-N}^N a_l \left(w_{j+l,k}^{n,m} - \Delta\tau(\Lambda\tilde{r})_{j+l,k}^{n,m+1} \right) \quad (2.52)$$

Un filtre explicite d'ordre $2N$ dans la direction k est appliqué en tout point à la solution précédemment filtrée suivant la direction j . La solution calculée à la fin d'une itération en temps fictif est donc :

$$\bar{\bar{w}}_{j,k}^{n,m+1} = \sum_{p=-N}^N a_p \sum_{l=-N}^N a_l \left(w_{j+l,k+p}^{n,m} - \Delta\tau(\Lambda\tilde{r})_{j+l,k+p}^{n,m+1} \right) \quad (2.53)$$

La solution filtrée $\bar{\bar{w}}_{j,k}^{n,m+1}$ suivant les deux directions j et k du maillage est une approximation à l'ordre $2N$ de $w_{j,k}^{n,m+1}$. On peut réécrire l'expression précédente sous la forme d'une approximation discrète d'un problème d'évolution en temps fictif. L'équation discrète effectivement résolue à chaque itération en temps fictif lorsqu'on applique un filtre à l'étape de convergence en pas de temps dual du schéma RBV est alors :

$$\frac{\bar{\bar{w}}_{j,k}^{n,m+1} - w_{j,k}^{n,m}}{\Delta\tau} + \sum_{p=-N}^N \sum_{l=-N}^N a_p a_l (\Lambda\tilde{r})_{j+l,k+p}^{n,m+1} = - \frac{w_{j,k}^{n,m} - \sum_p \sum_l a_p a_l w_{j+l,k+p}^{n,m}}{\Delta\tau} \quad (2.54)$$

À convergence, le terme instationnaire en temps fictif est nul et le système d'équations résolu par le schéma plus filtre est :

$$\sum_{p=-N}^N \sum_{l=-N}^N a_p a_l (\Lambda \tilde{r})_{j+l,k+p}^{n,m+1} = - \frac{w_{j,k}^{n,m} - \sum_p \sum_l a_p a_l w_{j+l,k+p}^{n,m}}{\Delta \tau}$$

(2.55)

Le membre de gauche de l'équation (2.55) est une approximation à l'ordre $2N$ de $\Lambda \tilde{r} = 0$. Le membre de droite est un terme d'ordre $2N - 1$ correspondant à une dissipation linéaire du même type que celle intervenant dans le schéma de LAX. Ce terme dépend en toute rigueur du pas de temps fictif. L'utilisation de grand pas de temps fictif et donc d'un schéma implicite pour la convergence en temps fictif permet de rendre ce terme négligeable devant les termes d'erreur du schéma RBV lorsque l'ordre du filtre est suffisamment élevé, d'ordre 6 et plus. Dans ces conditions, on peut considérer que la solution physique au temps t^{n+1} est pratiquement indépendante du pas de temps fictif utilisé.

Filtrage près des parois

Les filtres d'ordre élevé ont des supports spatiaux relativement étendus. Plutôt que d'abaisser l'ordre de précision du filtrage près des parois, on utilise des filtres décentrés du même ordre que le filtre centré utilisé dans le reste du domaine de calcul. En reprenant les notations de [23] et en les simplifiant pour des filtres explicites, la formule de filtrage perpendiculairement à une paroi est :

$$\bar{\phi}_i = \sum_{n=1}^{11} a_{n,i} \phi_n \quad i \in \{2, \dots, 5\} \quad (2.56)$$

Les coefficients correspondants, tirés de [23], sont donnés pour les filtres explicites TAB. 2.3.

Point $i = 5$	Filtre	$a_{1,5}$	$a_{2,5}$	$a_{3,5}$	$a_{4,5}$	$a_{5,5}$	$a_{6,5}$	$a_{7,5}$	$a_{8,5}$	$a_{9,5}$	$a_{10,5}$	$a_{11,5}$
	F_{10}	$-\frac{1}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$-\frac{45}{1024}$	$\frac{15}{128}$	$\frac{407}{512}$	$\frac{63}{256}$	$-\frac{105}{512}$	$\frac{15}{128}$	$-\frac{45}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$-\frac{1}{1024}$
Point $i = 4$	Filtre	$a_{1,4}$	$a_{2,4}$	$a_{3,4}$	$a_{4,4}$	$a_{5,4}$	$a_{6,4}$	$a_{7,4}$	$a_{8,4}$	$a_{9,4}$	$a_{10,4}$	$a_{11,4}$
	F_8	$\frac{1}{256}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{25}{32}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{7}{32}$	$\frac{7}{64}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{256}$	0	0
	F_{10}	$\frac{1}{1024}$	$-\frac{5}{512}$	$\frac{45}{1024}$	$\frac{113}{128}$	$\frac{105}{512}$	$-\frac{63}{256}$	$\frac{105}{512}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{45}{1024}$	$-\frac{5}{512}$	$\frac{1}{1024}$
Point $i = 3$	Filtre	$a_{1,3}$	$a_{2,3}$	$a_{3,3}$	$a_{4,3}$	$a_{5,3}$	$a_{6,3}$	$a_{7,3}$	$a_{8,3}$	$a_{9,3}$	$a_{10,3}$	$a_{11,3}$
	F_6	$-\frac{1}{64}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{49}{64}$	$\frac{5}{16}$	$-\frac{15}{64}$	$\frac{3}{32}$	$-\frac{1}{64}$	0	0	0	0
	F_8	$-\frac{1}{256}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{57}{64}$	$\frac{7}{32}$	$-\frac{35}{128}$	$\frac{7}{32}$	$-\frac{7}{64}$	$\frac{1}{32}$	$-\frac{1}{256}$	0	0
	F_{10}	$-\frac{1}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$\frac{979}{1024}$	$\frac{15}{128}$	$-\frac{105}{512}$	$\frac{63}{256}$	$-\frac{105}{512}$	$\frac{15}{128}$	$-\frac{45}{1024}$	$\frac{5}{512}$	$-\frac{1}{1024}$
Point $i = 2$	Filtre	$a_{1,2}$	$a_{2,2}$	$a_{3,2}$	$a_{4,2}$	$a_{5,2}$	$a_{6,2}$	$a_{7,2}$	$a_{8,2}$	$a_{9,2}$	$a_{10,2}$	$a_{11,2}$
	F_4	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{8}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0	0	0	0	0
	F_6	$\frac{1}{64}$	$\frac{29}{32}$	$\frac{15}{64}$	$-\frac{5}{16}$	$\frac{15}{64}$	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{64}$	0	0	0	0
	F_8	$\frac{1}{256}$	$\frac{31}{32}$	$\frac{7}{64}$	$-\frac{7}{32}$	$\frac{35}{128}$	$-\frac{7}{32}$	$\frac{7}{64}$	$-\frac{1}{32}$	$\frac{1}{256}$	0	0
	F_{10}	$\frac{1}{1024}$	$\frac{507}{512}$	$\frac{45}{1024}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{105}{512}$	$-\frac{63}{256}$	$\frac{105}{512}$	$-\frac{15}{128}$	$\frac{45}{1024}$	$-\frac{5}{512}$	$\frac{1}{1024}$

TAB. 2.3 - Coefficients des filtres explicites décentrés

2.5 Étude de l'erreur du schéma RBV par la méthode du système équivalent

Les premiers travaux introduisant le concept de système équivalent sont les travaux de HIRT [30] et de YANENKO & SHOKIN [89, 91, 90] qui parlent de « *first differential equation* » pour une équation à l'ordre de précision du schéma. WARMING & HYETT utilisent l'expression « *modified equation* » dans leurs travaux relatifs à la stabilité des schémas alors que LERAT & PEYRET ont introduit la notion d'équation équivalente à l'ordre r dans des travaux portant sur le rôle des effets non linéaires dans l'origine de certaines oscillations parasites [47, 48, 45, 49, 46]. La méthode du système équivalent consiste à définir un système d'équations aux dérivées partielles (dit système équivalent à l'ordre r) discrétisé par le schéma à un ordre entier r supérieur à l'ordre de précision du schéma. Pour une bibliographie plus complète, on pourra se reporter à l'ouvrage de LERAT [41].

2.5.1 Système équivalent du schéma RBV

Nous nous intéressons ici au premier terme d'erreur du schéma RBV. Le schéma est précis à l'ordre 2 en espace et en temps, nous allons donc étudier le système équivalent à l'ordre 3. Ce système équivalent comporte donc les termes du système exact, plus des termes d'erreur d'ordre 2. La contribution des termes dissipatifs du schéma RBV intervient à l'ordre 3 dans le système équivalent, ce qui nous permet de ne considérer que le schéma simplifié :

$$\begin{cases} (\mu_1 \mu_2 \tilde{r})_{j,k}^{n+1} = 0 \\ \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = \left(\mu_1 \mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} + \frac{\delta_1 \mu_2}{\delta x} f + \frac{\delta_2 \mu_1}{\delta y} g \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} \\ \left(\frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j,k}^{n+1} = \left(\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j,k} \end{cases} \quad (2.57)$$

On écrit les opérateurs μ_1^2 et μ_2^2 sous les formes :

$$\mu_1^2 = \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} \right) \quad \text{et} \quad \mu_2^2 = \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \quad (2.58)$$

Le produit $(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4})(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4})$ donne un terme en $\delta_1^2 \delta_2^2$ dont les premiers termes d'un développement de TAYLOR sont d'ordre $O(\delta x^2 \delta y^2)$, leur contribution dans le système équivalent est à un ordre supérieur à l'ordre 3. Le terme en $\delta_1^2 \delta_2^2$ n'est donc pas conservé. Le schéma simplifié pour l'étude du système équivalent devient :

$$\left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \frac{\nabla w_{j,k}^{n+1}}{\Delta t} + \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_2^2}{4} \right) \frac{\delta_1 \mu_1}{\delta x} f(w)_{j,k}^{n+1} + \left(\mathbb{I} + \frac{\delta_1^2}{4} \right) \frac{\delta_2 \mu_2}{\delta y} g(w)_{j,k}^{n+1} = 0 \quad (2.59)$$

Rappelons que les développements de TAYLOR des opérateurs discrets utilisés donnent :

$$\begin{aligned} \frac{\nabla w_{j,k}^{n+1}}{\Delta t} &= w_t - \frac{\Delta t^2}{3} w_{ttt} + O(\Delta t^3) & \delta_1^2 w_{j,k} &= \delta x^2 w_{xx} + O(\delta x^4) \\ \frac{\delta_1 \mu_1 w_{j,k}}{\delta x} &= w_x + \frac{\delta x^2}{6} w_{xxx} + O(\delta x^4) & \delta_2^2 w_{j,k} &= \delta y^2 w_{yy} + O(\delta y^4) \\ \frac{\delta_2 \mu_2 w_{j,k}}{\delta y} &= w_y + \frac{\delta y^2}{6} w_{yyy} + O(\delta y^4) \end{aligned} \quad (2.60)$$

On remplace dans (2.59) les opérateurs de discrétisation par leurs développements de TAYLOR pour obtenir l'équation approchée à l'ordre 3 par le schéma RBV :

$$w_t + f_x + g_y = \frac{\Delta t^2}{3} w_{ttt} - \frac{\delta x^2}{4} (w_t + g_y)_{xx} - \frac{\delta y^2}{4} (w_t + f_x)_{yy} - \frac{\delta x^2}{6} f_{xxx} - \frac{\delta y^2}{6} g_{yyy} \quad (2.61)$$

On modifie l'écriture du deuxième et du troisième terme du membre de droite de l'équation (2.61) en réutilisant cette équation et en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur à 3. Le système équivalent à l'ordre 3 du schéma RBV pour un système d'équations non linéaires devient alors :

$$w_t + f_x + g_y = \frac{\Delta t^2}{3} w_{ttt} + \frac{\delta x^2}{12} f_{xxx} + \frac{\delta y^2}{12} g_{yyy} \quad (2.62)$$

Ce système équivalent est clairement de nature dispersive. Afin d'obtenir simplement des informations quantitatives pour des problèmes d'advection scalaire ou d'acoustique avec advection, nous allons poursuivre l'étude en nous restreignant au cas linéaire. Nous considérons d'abord une équation scalaire linéaire et ensuite un système hyperbolique linéaire, en conservant toujours deux variables d'espace.

2.5.2 Équation équivalente pour une advection linéaire scalaire

Dans un cas linéaire scalaire, les fonctions de flux $f(w) = aw$ et $g(w) = bw$ nous donnent $f_{xxx} = aw_{xxx}$ et $g_{yyy} = bw_{yyy}$. D'autre part, on déduit de l'équation (2.62) la relation :

$$w_{ttt} = -a^3 w_{xxx} - 3a^2 b w_{xxy} - 3ab^2 w_{xyy} - b^3 w_{yyy} + O(\Delta t^2, \delta x^2, \delta y^2) \quad (2.63)$$

L'équation équivalente à l'ordre 3 du schéma RBV pour un problème d'advection linéaire scalaire 2-D s'écrit alors :

$$w_t + aw_x + bw_y = \frac{\delta x^2}{12} a \left(1 - 4 \left(a \frac{\Delta t}{\delta x} \right)^2 \right) w_{xxx} + \frac{\delta y^2}{12} b \left(1 - 4 \left(b \frac{\Delta t}{\delta y} \right)^2 \right) w_{yyy} - \Delta t^2 ab (aw_{xxy} + bw_{xyy})$$

(2.64)

Le cas le plus simple qui puisse se présenter est une advection suivant une direction propre du maillage cartésien ($b = 0$ ou bien $a = 0$). Par exemple, pour une advection suivant x ($b = 0$), l'équation équivalente à l'ordre 3 s'écrit :

$$w_t + aw_x = \frac{\delta x^2}{12} a \left(1 - 4 \left(a \frac{\Delta t}{\delta x} \right)^2 \right) w_{xxx} \quad (2.65)$$

Dans ces circonstances, on voit immédiatement que le premier terme d'erreur du schéma RBV, c'est-à-dire le terme d'ordre 2, s'annule pour $a \frac{\Delta t}{\delta x} = \frac{1}{2}$, soit $\text{CFL} = \frac{1}{2}$. Ainsi l'équation (2.65) devient :

$$w_t + aw_x = 0 \quad \text{pour} \quad \delta x = 2a\Delta t \quad (2.66)$$

Pour un passage à la limite $\delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ avec $\delta x = 2a\Delta t$, le schéma est donc précis à l'ordre 3. Pour l'étude de l'erreur dans les autres directions d'advection, nous allons effectuer une projection de l'équation équivalente dans le repère lié à la direction d'advection.

Projection de l'équation équivalente dans le repère lié à la direction d'advection

On considère un maillage cartésien carré de pas d'espace h pour simplifier la projection de l'équation équivalente dans le repère lié à la direction d'advection. Soit R le repère $R(o, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ orthonormé lié au maillage cartésien régulier et R' le repère $R'(o, \vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'})$ orthonormé lié à la direction d'advection FIG. 2.6. Les relations de passage d'un repère à l'autre sont données par :

$$\begin{cases} \vec{e}_{x'} = \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_{y'} = -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_{x'} - \sin \theta \vec{e}_{y'} \\ \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_{x'} + \cos \theta \vec{e}_{y'} \end{cases} \quad (2.67)$$

Soit \vec{M} le vecteur position d'un point M du plan :

$$\vec{M} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y = x'\vec{e}_{x'} + y'\vec{e}_{y'} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x' = x \cos \theta + y \sin \theta \\ y' = -x \sin \theta + y \cos \theta \end{cases} \quad (2.68)$$

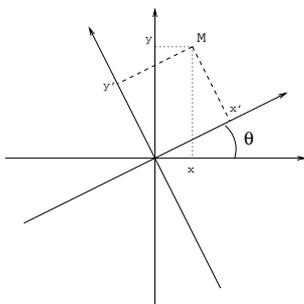


FIG. 2.6 - Repères liés au maillage cartésien régulier et à la direction d'advection

Chacun des termes de l'équation (2.64) va être projeté dans le repère lié à la direction d'advection, c'est-à-dire que l'on va opérer un changement de variables dans l'équation équivalente. Le premier terme projeté est le membre de gauche de l'équation équivalente qui est aussi celui de l'équation exacte :

$$\begin{aligned} w_t + aw_x + bw_y &= \frac{\partial w}{\partial t} + a \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial x} \right) + b \left(\frac{\partial w}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y'} \frac{\partial y'}{\partial y} \right) \\ &= w_t + (a \cos \theta + b \sin \theta) w_{x'} + (-a \sin \theta + b \cos \theta) w_{y'} \end{aligned} \quad (2.69)$$

Par construction θ est l'angle que fait le vecteur vitesse d'advection de composante (a, b) avec l'axe (o, \vec{e}_x) du repère R d'où :

$$\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (2.70)$$

La projection de l'équation exacte d'advection linéaire scalaire bidimensionnelle dans le repère lié à la direction d'advection est alors :

$$w_t + aw_x + bw_y = w_t + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w_{x'} \quad (2.71)$$

où $\sqrt{a^2 + b^2}$ est la norme de la vitesse d'advection. Le membre de droite de l'équation équivalente (2.64) est composée de quatre termes qui vont être projetés successivement.

1. La projection du terme en w_{xxx} donne :

$$\begin{aligned} w_{xxx} &= \cos^3 \theta w_{x'x'x'} - 3 \cos^2 \theta \sin \theta w_{x'x'y'} + 3 \cos \theta \sin^2 \theta w_{x'y'y'} - \sin^3 \theta w_{y'y'y'} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (a^3 w_{x'x'x'} - 3a^2 b w_{x'x'y'} + 3ab^2 w_{x'y'y'} - b^3 w_{y'y'y'}) \end{aligned} \quad (2.72)$$

2. La projection du terme en w_{xxy} donne :

$$\begin{aligned} w_{xxy} &= \cos^2 \theta \sin \theta w_{x'x'x'} + (\cos^3 \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta) w_{x'x'y'} \\ &\quad + (\sin^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta) w_{x'y'y'} + \cos \theta \sin^2 \theta w_{y'y'y'} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (a^2 b w_{x'x'x'} + (a^3 - 2ab^2) w_{x'x'y'} + (b^3 - 2a^2 b) w_{x'y'y'} + ab^2 w_{y'y'y'}) \end{aligned} \quad (2.73)$$

3. La projection du terme en w_{yyy} donne :

$$\begin{aligned} w_{yyy} &= \sin^3 \theta w_{x'x'x'} + 3 \cos \theta \sin^2 \theta w_{x'x'y'} + 3 \cos^2 \theta \sin \theta w_{x'y'y'} + \cos^3 \theta w_{y'y'y'} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (b^3 w_{x'x'x'} + 3ab^2 w_{x'x'y'} + 3a^2 b w_{x'y'y'} + a^3 w_{y'y'y'}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

4. La projection du terme en w_{xyy} donne :

$$\begin{aligned} w_{xyy} &= \cos \theta \sin^2 \theta w_{x'x'x'} - (\sin^3 \theta - 2 \cos^2 \theta \sin \theta) w_{x'x'y'} \\ &\quad + (\cos^3 \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta) w_{x'y'y'} - \cos^2 \theta \sin \theta w_{y'y'y'} \\ &= \frac{1}{(a^2 + b^2)^{3/2}} (ab^2 w_{x'x'x'} + (2a^2 b - b^3) w_{x'x'y'} + (a^3 - 2ab^2) w_{x'y'y'} - a^2 b w_{y'y'y'}) \end{aligned} \quad (2.75)$$

Finalement, après sommation et factorisation des projections des termes qui la composent, l'équation équivalente complète (2.64) projetée dans le repère R' s'écrit :

$$\begin{aligned} w_t + \sqrt{a^2 + b^2} . w_{x'} &= \frac{h^2}{12(a^2 + b^2)^{3/2}} \left(a^4 + b^4 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} (a^2 + b^2)^3 \right) w_{x'x'x'} \\ &\quad + \frac{h^2}{12(a^2 + b^2)^{3/2}} [3ab(b^2 - a^2) w_{x'x'y'} + 6a^2 b^2 w_{x'y'y'}] \\ &\quad + \frac{h^2}{12(a^2 + b^2)^{3/2}} ab(a^2 - b^2) w_{y'y'y'} + O(\Delta t^3, h^3) \end{aligned} \quad (2.76)$$

Advection scalaire suivant une direction propre du maillage

On vérifie bien que pour une advection suivant une direction propre du maillage, par exemple si $b = 0$, l'équation équivalente projetée dans le repère lié à l'advection restitue l'équation (2.65) avec $x' = x$.

Applications numériques

Trois conditions initiales, représentées FIG. 2.7, sont utilisées pour vérifier numériquement les propriétés de l'équation équivalente du schéma RBV pour une advection suivant l'axe x d'un maillage cartésien régulier :

1. une gaussienne « cylindrique » suivant l'axe y d'équation $w_{j,k}^0 = e^{1-x^2}$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 0)$ sur un domaine 10×10 discrétisé par un maillage cartésien 50×50 avec des conditions aux limites de périodicité ;
2. une discontinuité définie par la condition initiale $w_{j,k}^0 = \frac{1}{2}$ pour $x < -5$ et $w_{j,k}^0 = -\frac{1}{2}$ pour $x > -5$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 0)$ sur un domaine 20×10 discrétisé par un maillage cartésien 100×50 avec des conditions aux limites de report ;
3. une gaussienne de révolution d'équation $w_{j,k}^0 = e^{1-(x^2+y^2)}$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 0)$ sur un domaine 10×10 discrétisé par un maillage cartésien 50×50 avec des conditions aux limites de périodicité.

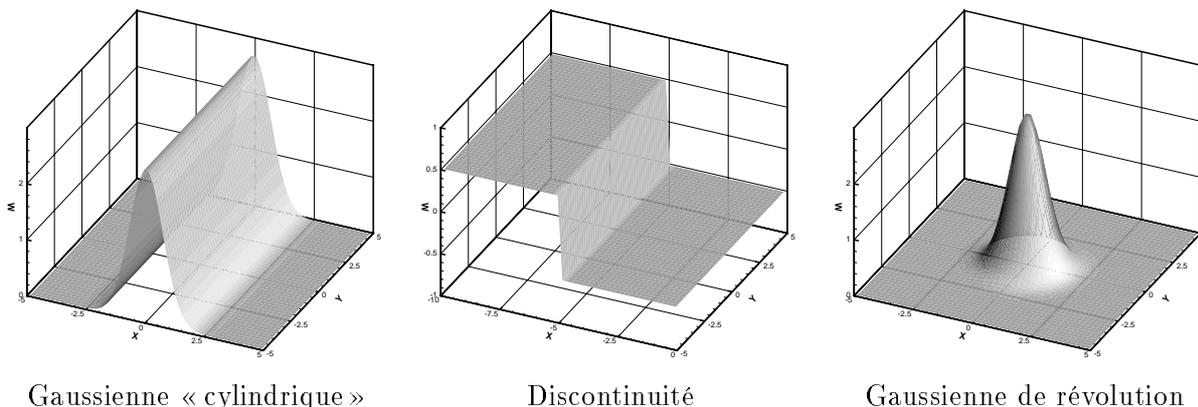


FIG. 2.7 - Conditions initiales mises en œuvre pour l'évaluation de l'erreur du schéma RBV pour une advection scalaire suivant une direction propre du maillage

Le premier cas test permet de visualiser l'influence du pas de temps sur la précision du schéma, le second doit mettre en relief l'influence du pas de temps sur le caractère plus ou moins oscillant du schéma RBV pour les discontinuités en mouvement, le troisième utilise une condition initiale dont la structure géométrique invariante azimutalement est proche des géométries de tourbillons analytiques. Le pas d'espace h vaut 0,2 et la vitesse d'advection vaut 1, le pas de temps minimisant l'erreur du schéma RBV pour ce calcul est donc $\Delta t_{opt} = \frac{\delta x}{2a} = 0,1$.

La figure 2.8 montre des coupes suivant la droite $y = 0$ des solutions du schéma à $t = 10$ pour les trois conditions initiales et pour trois pas de temps $\Delta t_{opt}/2$, Δt_{opt} et $2\Delta t_{opt}$ soit $\Delta t \in \{0,05 ; 0,1 ; 0,2\}$. Dans tous les cas, les solutions exactement positionnées en abscisse par rapport au temps de visualisation sont obtenues avec Δt_{opt} . Pour un pas de temps inférieur au pas de temps minimisant l'erreur, les solutions calculées sont légèrement en avance par rapport aux solutions exactes alors que les solutions calculées avec un pas de temps supérieur au pas de temps optimum sont en retard par rapport aux solutions exactes.

Pour le calcul d'advection de la discontinuité, la solution la mieux positionnée est aussi la moins oscillante. La déformation spatiale de la condition initiale de révolution non invariante suivant la direction y est observable sur la figure 2.9.

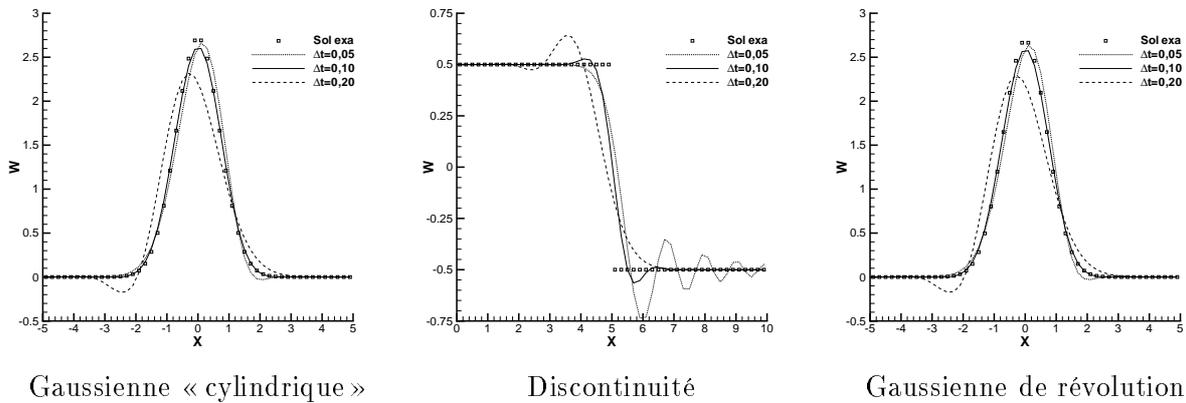


FIG. 2.8 - Coupe des solutions du schéma RBV à $t = 10$ pour l'advection de différentes conditions initiales suivant une direction propre de maillage, vitesse d'advection $(a, b) = (1, 0)$, pas d'espace du maillage $h = 0,2$

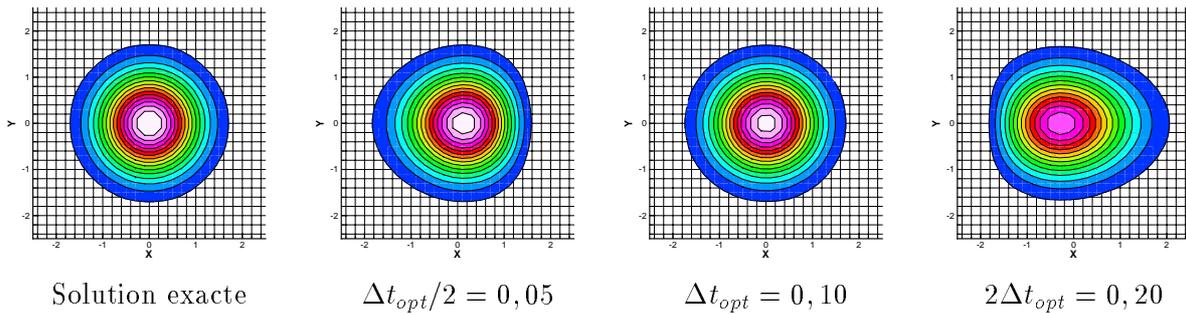


FIG. 2.9 - Isovaleurs de la solution du schéma RBV à $t = 10$ pour une advection scalaire suivant une direction propre du maillage d'une gaussienne de révolution pour différents pas de temps, vitesse d'advection $(a, b) = (1, 0)$, pas d'espace du maillage $h = 0,2$

Advection suivant une diagonale du maillage

L'advection suivant une diagonale du maillage est un autre cas particulier où l'équation (2.76) se simplifie. Cette advection satisfait la condition $|a| = |b|$. Considérons par exemple le cas $a = b$, $a > 0$, qui conduit à l'équation équivalente :

$$w_t + a\sqrt{2}.w_{x'} = \frac{h^2}{12(2a^2)^{3/2}} \left[\left(2a^4 - 4\frac{\Delta t^2}{h^2} (2a^2)^3 \right) w_{x'x'x'} + 6a^4 w_{x'y'y'} \right] \quad (2.77)$$

qui se simplifie en :

$$w_t + a\sqrt{2}.w_{x'} = \frac{ah^2}{12\sqrt{2}} \left[\left(1 - 16\frac{\Delta t^2}{h^2} a^2 \right) w_{x'x'x'} + 3w_{x'y'y'} \right]$$

(2.78)

La forme de cette équation nous invite naturellement à étudier une famille de solutions particulières, composée de solutions w invariantes suivant la direction normale à la vitesse d'advection pour laquelle l'équation équivalente s'écrit :

$$w_t + a\sqrt{2}.w_{x'} = \frac{ah^2}{12\sqrt{2}} \left(1 - 16\frac{\Delta t^2}{h^2} a^2 \right) w_{x'x'x'} \quad (2.79)$$

Il est clair que pour ce type de solutions, le terme $w_{x'y'y'}$ est identiquement nul. Le terme d'ordre 2 du membre de droite de l'équation (2.79) s'annule alors pour :

$$\frac{|a|\Delta t}{h} = \frac{1}{4}$$

(2.80)

Pour la définition usuelle du nombre CFL = $\sqrt{a^2 + b^2} \frac{\Delta t}{h} = |a|\sqrt{2} \frac{\Delta t}{h}$, le pas de temps minimisant l'erreur du schéma pour cette famille de solutions équivaut à $\text{CFL} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

Applications numériques

Comme pour les tests d'advection linéaire scalaire suivant l'axe des x , trois conditions initiales, représentées FIG. 2.10, sont utilisées pour vérifier numériquement les propriétés du schéma RBV pour une advection suivant la diagonale $y = x$ d'un maillage cartésien régulier :

1. une gaussienne « cylindrique » suivant la droite $y = -(x+10)$ d'équation $w_{j,k}^0 = e^{1-(x+y+10)^2}$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 1)$ sur un domaine 20×20 discrétisé par un maillage cartésien 100×100 avec des conditions aux limites de report suivant la diagonale normale à l'advection.
2. une discontinuité définie par la condition initiale $w_{j,k}^0 = \frac{1}{2}$ pour $y < -(x+10)$ et $w_{j,k}^0 = -\frac{1}{2}$ pour $y > -(x+10)$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 1)$ sur un domaine 20×20 discrétisé par un maillage cartésien 100×100 avec des conditions aux limites de report suivant la diagonale normale à l'advection.
3. une gaussienne de révolution d'équation $w_{j,k}^0 = e^{1-(x^2+y^2)}$ advectée à la vitesse $(a, b) = (1, 1)$ sur un domaine 10×10 discrétisé par un maillage cartésien 50×50 avec des conditions aux limites de périodicité.

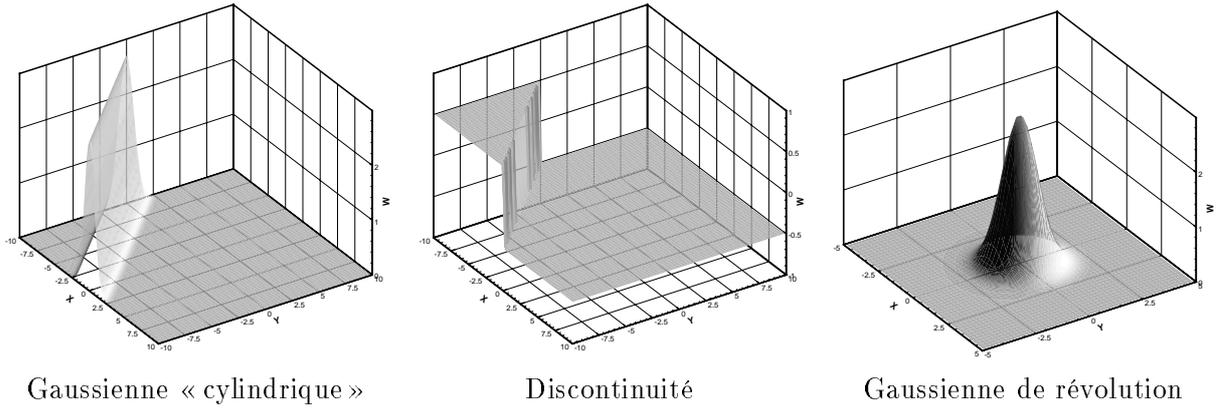


FIG. 2.10 - Conditions initiales mises en œuvre pour l'évaluation de l'erreur du schéma RBV pour une advection scalaire suivant une diagonale du maillage

Pour les deux conditions initiales invariantes perpendiculairement à la direction d'advection, on vérifie FIG. 2.11 que le pas de temps $\Delta t = 0,05$ qui satisfait la relation $a \frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{4}$ donne les solutions les mieux positionnées par rapport aux solutions exactes d'advection diagonale d'une gaussienne « cylindrique » et d'une discontinuité. Pour l'advection de la discontinuité, la solution calculée avec $\Delta t = 0,05$ est aussi la moins oscillante.

Concernant l'advection diagonale de la gaussienne de révolution, qui n'appartient pas à la famille de solution qui satisfait l'équation (2.79), on observe que le pas de temps pour lequel la solution est correctement positionnée est $\Delta t_{opt} = \frac{h}{2\|u_{ad}\|} \simeq 0,0707$ avec $h = 0,2$ et $\|u_{ad}\| = \sqrt{2}$. C'est-à-dire que le nombre CFL qui minimise l'erreur pour l'advection de ce type de solutions est le même que pour une advection suivant une direction propre du maillage : $CFL = \frac{1}{2}$. La solution calculée avec ce nombre CFL est aussi celle qui déforme le moins la solution pendant l'advection diagonale FIG. 2.12.

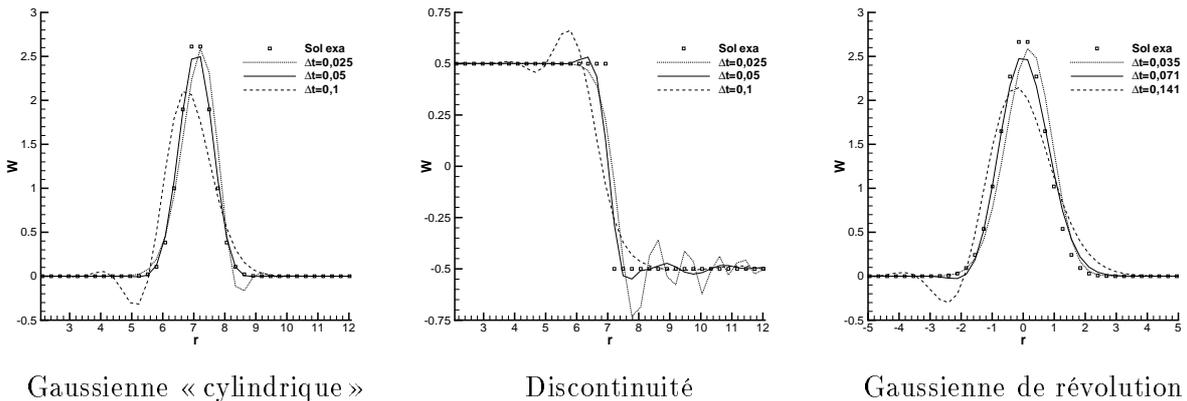


FIG. 2.11 - Coupe suivant $y = x$ des solutions du schéma RBV à $t = 10$ pour l'advection de différentes conditions initiales suivant une diagonale du maillage, vitesse d'advection $(a, b) = (1, 1)$, pas d'espace $h = 0,2$ et $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

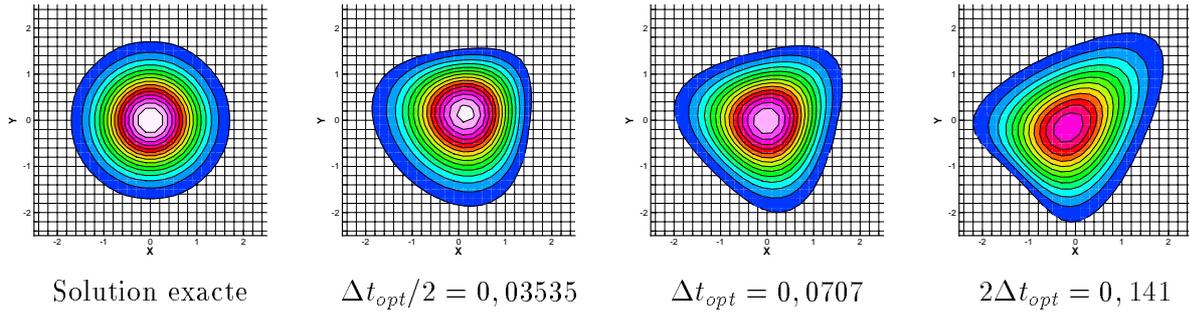


FIG. 2.12 - Isovaleurs de la solution du schéma RBV à $t = 10$ pour une advection scalaire suivant une diagonale du maillage d'une gaussienne de révolution pour différents pas de temps, vitesse d'advection $(a, b) = (1, 1)$, pas d'espace $h = 0, 2$

Advection suivant une direction quelconque

Dans le cas général d'une advection scalaire suivant une direction quelconque, on peut considérer dans un premier temps les solutions invariantes suivant la direction normale à l'advection, c'est-à-dire les solutions pour lesquelles $w_{y'} = 0$. L'équation équivalente (2.76) se simplifie pour donner :

$$w_t + \sqrt{a^2 + b^2} \cdot w_{x'} = \frac{h^2}{12(a^2 + b^2)^{3/2}} \left(a^4 + b^4 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} (a^2 + b^2)^3 \right) w_{x'x'x'} \quad (2.81)$$

Le terme du membre de droite s'annule alors pour :

$$\frac{\Delta t}{h} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a^4 + b^4}{(a^2 + b^2)^3}} \quad (2.82)$$

2.5.3 Système équivalent pour un système hyperbolique linéaire

Dans le cas d'un système hyperbolique linéaire où $f(w) = Aw$ et $g(w) = Bw$ avec des matrices A et B constantes, le système équivalent (2.61) peut-être modifié comme au paragraphe 2.5.2. On a maintenant :

$$\begin{cases} f_{xxx} = Aw_{xxx} \\ g_{yyy} = Bw_{yyy} \\ w_{ttt} = -A^3w_{xxx} - (A^2B + ABA + BA^2)w_{xxy} \\ \quad - B^3w_{yyy} - (AB^2 + BAB + B^2A)w_{xyy} \\ \quad + O(\Delta t^2, \delta x^2, \delta y^2) \end{cases} \quad (2.83)$$

Pour un maillage cartésien carré de pas $\delta x = \delta y = h$, le système équivalent devient :

$$w_t + Aw_x + Bw_y = \frac{h^2}{12}A \left(\mathbb{I} - 4\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2 \right) w_{xxx} - \frac{\Delta t^2}{3} (A^2B + ABA + BA^2) w_{xxy} - \frac{\Delta t^2}{3} (AB^2 + BAB + B^2A) w_{xyy} + \frac{h^2}{12}B \left(\mathbb{I} - 4\frac{\Delta t^2}{h^2}B^2 \right) w_{yyy}$$

(2.84)

Les matrices jacobiennes des flux A et B n'ont en général pas la propriété de commuter et ne permettent pas de simplifier l'expression (2.84).

Acoustique 1-D avec advection

Pour un problème d'acoustique 1-D avec advection suivant une direction propre du maillage, par exemple l'axe des x , le système équivalent à l'ordre 3 du schéma RBV se ramène au cas :

$$w_t + Aw_x = \frac{h^2}{12}A \left(\mathbb{I} - 4\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2 \right) w_{xxx} \quad (2.85)$$

On peut alors écrire ce système équivalent sous forme caractéristique. On forme pour cela la combinaison linéaire du système d'équations (2.85) :

$$l_A^{(k)} (w_t + Aw_x) = l_A^{(k)} \left[\frac{h^2}{12}A \left(\mathbb{I} - 4\frac{\Delta t^2}{h^2}A^2 \right) w_{xxx} \right] \quad (2.86)$$

où $l_A^{(k)}$ est le vecteur propre à gauche correspondant à la valeur propre $\lambda_A^{(k)}$ de la matrice A .

Le système équivalent écrit sous forme caractéristique est alors :

$$l_A^{(k)} (w_t + \lambda_A^{(k)} w_x) = \frac{h^2}{12} l_A^{(k)} \lambda_A^{(k)} \left(\mathbb{I} - 4\frac{\Delta t^2}{h^2} \lambda_A^{(k)2} \right) w_{xxx}$$

(2.87)

Pour annuler le premier terme d'erreur dispersive du schéma, on doit projeter le système équivalent sur une caractéristique $\frac{dx}{dt} = \lambda_A^{(k)}$ du champ d'advection. Si u_0 est la vitesse d'advection par le champ moyen et c la vitesse du son, l'acoustique avec advection possède 3 caractéristiques se propageant aux vitesses $u_0 - c$, u_0 et $u_0 + c$. Il n'existe donc plus un unique pas de temps Δt_{opt} donnant la meilleure solution du schéma RBV, mais 3 pas de temps Δt_- , Δt_0 et Δt_+ correspondant aux 3 caractéristiques. Connaissant le champ moyen d'advection, il faut effectuer un choix pour privilégier une des caractéristiques.

1. Pour la caractéristique c_- correspondant à la valeur propre $\lambda_- = u_0 - c$, le terme dispersif du système équivalent s'annule pour :

$$1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} (u_0 - c)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_- = \frac{h}{2|u_0 - c|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_- = \frac{|u_0 + c|}{2|u_0 - c|} \quad (2.88)$$

La meilleure solution du schéma pour une onde se propageant sur la caractéristique c_- est donc obtenue pour :

$$\Delta t_- = \frac{h}{2|u_0 - c|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_- = \frac{M_0 + 1}{2|M_0 - 1|} \quad (2.89)$$

où M_0 est le nombre de MACH basé sur la vitesse d'advection $M_0 = \frac{u_0}{c}$.

2. Pour la caractéristique c_0 correspondant à la valeur propre $\lambda_0 = u_0$, le terme dispersif du système équivalent s'annule pour :

$$1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} u_0^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_0 = \frac{h}{2|u_0|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_0 = \frac{|u_0 + c|}{2|u_0|} \quad (2.90)$$

La meilleure solution du schéma pour une onde advectée par le champ moyen et se propageant sur la caractéristique c_0 est donc obtenue pour :

$$\Delta t_0 = \frac{h}{2|u_0|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_0 = \frac{M_0 + 1}{2M_0} \quad (2.91)$$

3. Pour la caractéristique c_+ correspondant à la valeur propre $\lambda_+ = u_0 + c$, le terme dispersif du système équivalent s'annule pour :

$$1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} (u_0 + c)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta t_+ = \frac{h}{2|u_0 + c|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_+ = \frac{|u_0 + c|}{2|u_0 + c|} \quad (2.92)$$

La meilleure solution du schéma pour une onde se propageant sur la caractéristique c_+ est donc obtenue pour :

$$\Delta t_+ = \frac{h}{2|u_0 + c|} \quad \Leftrightarrow \quad \text{CFL}_+ = \frac{1}{2} \quad (2.93)$$

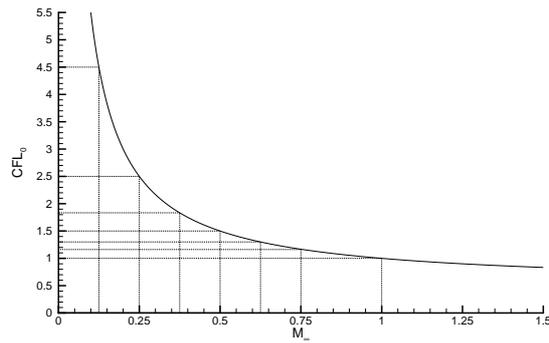


FIG. 2.13 - Variation en fonction du nombre de MACH de l'écoulement moyen du nombre CFL annulant l'erreur dispersive du schéma pour les ondes se propageant sur la caractéristique c_0 des équations de l'acoustique avec advection

Applications numériques

Le cas test mis en œuvre pour vérifier les propriétés du système équivalent du schéma RBV pour l'acoustique avec advection est une onde de discontinuité droite se propageant à vitesse constante U_0 suivant l'axe x du maillage cartésien. Le schéma calcule alors la solution du problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f(w)}{\partial x} = 0 \quad x \in \mathbb{R}, t > 0 \\ w(x, y, 0) = \begin{cases} w_g & \text{si } x < x_0 \\ w_d & \text{si } x > x_0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{pour } w = \begin{bmatrix} p \\ u \\ v \end{bmatrix} \quad \text{et } f(w) = \begin{bmatrix} pU_0 + u \\ uU_0 + p \\ vU_0 \end{bmatrix} \quad (2.94)$$

Pour avoir une onde de discontinuité qui se propage à vitesse constante, les conditions initiales doivent satisfaire les relations de saut : $\langle f(w) \rangle = s \langle w \rangle$ où s est la vitesse de propagation de l'onde. On obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_0(p_d - p_g) + u_d - u_g = s(p_d - p_g) \\ U_0(u_d - u_g) + p_d - p_g = s(u_d - u_g) \\ U_0(v_d - v_g) = s(v_d - v_g) \end{array} \right. \quad (2.95)$$

1. une discontinuité simplement advectée par l'écoulement sur la caractéristique c_0 est obtenue en imposant la condition initiale $p_d = p_g$, $u_d = u_g$ et $v_d \neq v_g$ qui donne $s = U_0$;
2. une discontinuité se propageant sur la caractéristique c_- à la vitesse $s = U_0 - 1$ est obtenue en imposant la condition initiale $u_d - u_g = -(p_d - p_g)$ et $v_d = v_g$;
3. une discontinuité se propageant sur la caractéristique c_+ à la vitesse $s = U_0 + 1$ est obtenue en imposant la condition initiale $u_d - u_g = p_d - p_g$ et $v_d = v_g$.

Le champ moyen d'advection pour les calculs est défini par $(P_0, U_0, V_0) = (1, \frac{1}{2}, 0)$. Le détail des conditions initiales, maillages, tailles de domaine utilisées pour les trois discontinuités est donné TAB. 2.4.

Onde	s	Domaine	Nb pts	x_0	(p_g, p_d)	(u_g, u_d)	(v_g, v_d)	Δt_{opt}
c_-	$U_0 - 1$	20×10	100×50	5	$(P_0 + \frac{1}{2}, P_0 - \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 0)$	0,2
c_0	U_0	20×10	100×50	-5	(P_0, P_0)	$(0, 0)$	$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$	0,2
c_+	$U_0 + 1$	40×10	200×50	-15	$(P_0 - \frac{1}{2}, P_0 + \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$	$(0, 0)$	0,066

TABLE. 2.4 - Paramètres utilisés pour la simulation de propagation d'ondes de discontinuité sur les caractéristiques en acoustique avec advection

Les solutions à $t = 20$ de propagation des trois conditions initiales sont présentées FIG. 2.14. Ces calculs permettent de valider les relations sur les pas de temps optimaux pour chaque type d'ondes obtenues en projetant le système équivalent sur les caractéristiques. Les solutions correspondant à ces pas de temps Δt_- , Δt_0 et Δt_+ sont tracées en trait continu sur la figure, ce sont à chaque fois les solutions les mieux positionnées par rapport à la solution exacte, ce sont aussi les solutions les moins oscillantes. Comme pour les équations d'advection linéaires scalaires, les solutions du schéma sont en avance sur la solution exacte quand le pas de temps est inférieur au pas de temps qui minimise l'erreur dispersive et en retard quand le pas de temps est supérieur au pas de temps optimum.

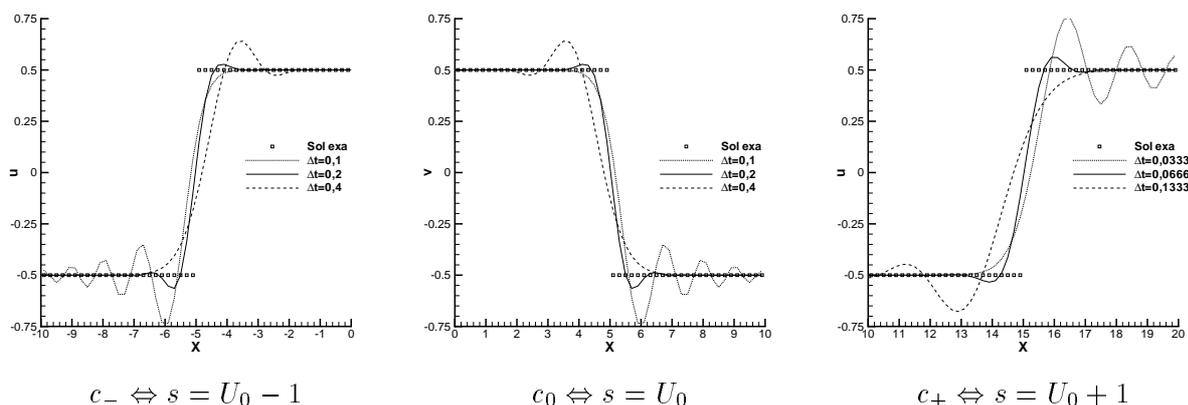


FIG. 2.14 - Coupe suivant $y = 0$ des solutions du schéma RBV à $t = 20$ d'advection de différentes conditions initiales discontinues se propageant sur les caractéristiques pour les équations de l'acoustique avec advection par un champ moyen $(P_0, U_0, V_0) = (1, \frac{1}{2}, 0)$

Remarque: des calculs de propagation de discontinuités obliques, suivant la diagonale du maillage, ont été effectués. Ils confirment l'existence de pas de temps minimisant la dispersion de la solution pour chacune des caractéristiques considérées. Ils sont donnés par :

$$\Delta t_- = \frac{h}{2|\sqrt{u_0^2 + v_0^2} - c|} \quad \Delta t_0 = \frac{h}{2\sqrt{u_0^2 + v_0^2}} \quad \Delta t_+ = \frac{h}{2|\sqrt{u_0^2 + v_0^2} + c|} \quad (2.96)$$

Acoustique 2-D avec advection suivant une direction propre du maillage

Un tourbillon est bidimensionnel ou tridimensionnel. Il nous faut donc étudier le système équivalent 2-D pour caractériser les propriétés d'advection de tourbillons du schéma RBV pour les équations de l'acoustique avec advection. Le choix d'une direction d'advection suivant un axe du maillage, par exemple l'axe x , permet de simplifier la projection du système équivalent sur les caractéristiques. On effectue alors la combinaison linéaire du système équivalent à l'ordre 3 (2.84) :

$$\begin{aligned}
 l_A^{(k)} \left(w_t + \lambda_A^{(k)} w_x + B w_y \right) &= \frac{h^2}{12} l_A^{(k)} \lambda_A^{(k)} \left(\mathbb{I} - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} \lambda_A^{(k)^2} \right) w_{xxx} \\
 &\quad - \frac{\Delta t^2}{3} l_A^{(k)} (A^2 B + A B A + B A^2) w_{xxy} \\
 &\quad - \frac{\Delta t^2}{3} l_A^{(k)} (A B^2 + B A B + B^2 A) w_{xyy} \\
 &\quad + \frac{h^2}{12} l_A^{(k)} \left(B - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} B^3 \right) w_{yyy}
 \end{aligned} \tag{2.97}$$

où $l_A^{(k)}$ est le vecteur propre à gauche correspondant à la valeur propre $\lambda_A^{(k)}$ de la matrice A . Pour une advection suivant l'axe x , la matrice B n'est pas nulle mais reprend les valeurs de l'acoustique pure. Pour les équations de l'acoustique avec advection, un tourbillon advecté se comporte comme une onde se propageant sur la caractéristique c_0 de l'écoulement. Cette caractéristique correspond au vecteur propre $l_A^{(2)} = [0 \ 0 \ 1]$. Pour les trois derniers termes du membre de droite de l'équation (2.97), un calcul algébrique donne :

$$\begin{aligned}
 l_A^{(2)} (A^2 B + A B A + B A^2) &= [3U_0^2 + 1 \ 3U_0 \ 0] \\
 l_A^{(2)} (A B^2 + B A B + B^2 A) &= [0 \ 0 \ 3U_0] \\
 l_A^{(2)} B &= l_A^{(2)} B^3 = [1 \ 0 \ 0]
 \end{aligned} \tag{2.98}$$

Le premier terme de l'erreur dispersive du schéma RBV pour l'advection de tourbillon est alors constitué du membre de droite de l'équation (2.97) pour $k = 2$:

$$\begin{aligned}
 v_t + U_0 v_x + p_y &= \frac{h^2}{12} U_0 \left(1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} U_0^2 \right) v_{xxx} - \Delta t^2 U_0 (U_0 p_x + u_x + v_y)_{xy} \\
 &\quad + \frac{h^2}{12} p_{yyy} - \frac{\Delta t^2}{3} (p_{xxy} + p_{yyy})
 \end{aligned} \tag{2.99}$$

En réutilisant la première équation du système (2.84) pour simplifier le second terme du membre de droite et en négligeant toujours les termes d'ordre supérieur à 3 on obtient :

$$\begin{aligned}
 v_t + U_0 v_x + p_y &= \frac{h^2}{12} U_0 \left(1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} U_0^2 \right) v_{xxx} \\
 &\quad + \Delta t^2 U_0 p_{txy} + \frac{h^2}{12} p_{yyy} - \frac{\Delta t^2}{3} (p_{xxy} + p_{yyy})
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

Pour une solution dont le champ de pression est invariant dans la direction normale à l'advection ($p_y = 0$), la projection du système équivalent sur la caractéristique advectée par l'écoulement se simplifie en :

$$v_t + U_0 v_x = \frac{h^2}{12} U_0 \left(1 - 4 \frac{\Delta t^2}{h^2} U_0^2 \right) v_{xxx}$$

$$\tag{2.101}$$

Cas d'un tourbillon pour les équations de l'acoustique avec advection

En acoustique avec advection, un tourbillon possède un champ de vitesse qui est une solution stationnaire des équations de l'acoustique pure. Il correspond donc à un tourbillon incompressible avec un champ de pression uniforme. L'équation du tourbillon utilisé pour les applications numériques est :

$$\begin{cases} p &= 0 \\ u &= -\frac{\Gamma}{2\pi}(y - y_0)e^{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \\ v &= \frac{\Gamma}{2\pi}(x - x_0)e^{-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} \end{cases} \quad (2.102)$$

où $\Gamma = 10$ est la circulation du tourbillon, $(x_0, y_0) = (0, 0)$ les coordonnées du cœur du tourbillon à l'instant initial. En acoustique avec advection, le tourbillon est purement et simplement transporté par le champ moyen et n'a aucune interaction avec ce dernier. Le tourbillon se déplace donc suivant la caractéristique c_0 de l'écoulement.

Pour les équations de l'acoustique avec advection, un tourbillon a un champ de pression uniforme et satisfait donc l'hypothèse $p_y = 0$. L'équation (2.101) montre que la meilleure solution du schéma pour l'advection d'un tourbillon est attendue pour $\Delta t_0 = \frac{h}{2|u_0|}$, soit :

$$\text{CFL}_0 = \frac{|M_0 + 1|}{2|M_0|}$$

(2.103)

Il est très intéressant de remarquer que **plus la vitesse d'advection est lente, plus CFL_0 est grand** (FIG. 2.13) ce qui va dans le sens de l'efficacité numérique. Pour des problèmes d'advection rapide, le nombre CFL optimal décroît mais ne tend pas vers zéro puisque sa limite est égale à $1/2$ quand la vitesse de l'écoulement tend vers l'infini.

Rappelons que contrairement à ce que l'on observe pour le modèle des équations d'EULER avec la focalisation des caractéristiques, aucun phénomène ne vient contrebalancer l'effet de la dissipation numérique des schémas pour le modèle de l'acoustique avec advection. Bien que la dissipation du schéma RBV n'intervienne pas dans l'équation de transport de la vorticité discrète, cette équation n'est résolue qu'à l'ordre de précision du schéma. Or la dispersion altère la géométrie des structures advectées. La variation de la vorticité d'un tourbillon pendant son transport dépend fortement de la capacité du schéma à préserver sa structure axisymétrique, donc de sa dispersion.

Les résultats d'advection d'un tourbillon par un écoulement moyen $(P_0, U_0, V_0) = (1, \frac{1}{2}, 0)$ pour un temps d'intégration $t = 20$ sont repr esent es FIG. 2.15 et 2.16. Les dimensions du domaine de calcul sont 10×10 , le maillage 50×50 et les conditions aux limites sont périodiques dans les deux directions. Les coupes de la vitesse tangentielle suivant les deux axes du maillage passant par le c oeur du tourbillon montrent que le pas de temps Δt_0 préserve le mieux l'axisymétrie du champ de vitesse du tourbillon et donc l'axisymétrie du champ de vorticité (FIG. 2.16). Par contre, la solution dont la norme de la vorticité est maximale est obtenue pour un pas de temps inférieur à Δt_0 . Il semble qu'une solution avec une avance de phase provoque un raidissement du champ de vitesse suivant la direction d'advection ce qui a pour effet d'augmenter la vorticité pendant le transport du tourbillon.

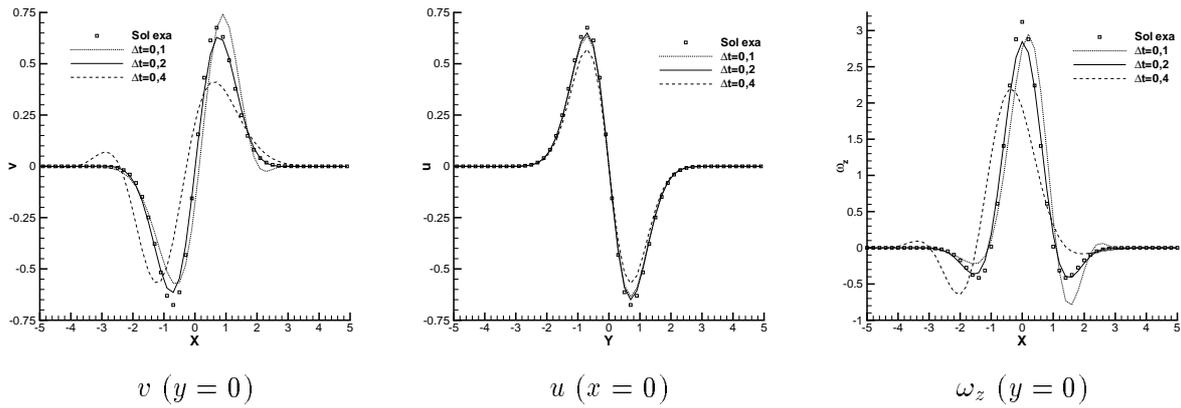


FIG. 2.15 - Coupe suivant $y = 0$ des solutions du schéma RBV à $t = 20$ d'advection de différentes conditions initiales discontinues se propageant sur les caractéristiques pour les équations de l'acoustique avec advection par un champ moyen $(P_0, U_0, V_0) = (1, \frac{1}{2}, 0)$

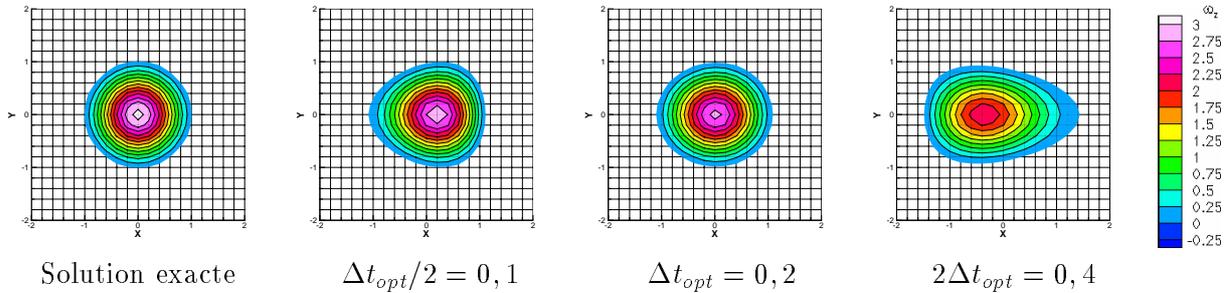


FIG. 2.16 - Isovaleurs du champ de vorticité d'un tourbillon solution stationnaire des équations de l'acoustique advecté par le champ moyen $(P_0, U_0, V_0) = (1, \frac{1}{2}, 0)$. Domaine 10×10 , maillage 50×50 , solution du schéma RBV à $t = 20$ pour différents pas de temps.

2.5.4 Conclusion

L'étude de l'équation équivalente du schéma RBV pour une advection scalaire a démontré qu'il est possible d'annuler le premier terme d'erreur du schéma pour un nombre CFL = 1/2. Pour les passages à la limite : $\delta x \rightarrow 0$, $\Delta t \rightarrow 0$ avec $\delta x = 2a\Delta t$, le schéma est donc précis à l'ordre 3. Cette propriété a été vérifiée numériquement sur des cas d'advection scalaire de discontinuités, de gaussiennes « cylindriques » et de gaussiennes de révolution.

L'étude du système équivalent du schéma RBV pour l'acoustique 1-D avec advection a démontré que pour une solution se propageant sur une caractéristique de l'écoulement, il existe un nombre CFL qui annule le premier terme d'erreur du schéma et donne une solution précise à l'ordre 3. Des calculs de propagation de discontinuités sur chacune des trois caractéristiques de l'acoustique avec advection ont validé ce résultat théorique.

Concernant l'advection de tourbillon, l'étude du système équivalent du schéma RBV pour l'acoustique 2-D avec advection suivant une direction du maillage a démontré théoriquement et confirmé du point de vue numérique que pour $\text{CFL}_0 = (M + 1)/2M$, où M est le nombre de MACH de l'écoulement moyen, la solution d'advection d'un tourbillon par le schéma RBV est précise à l'ordre 3.

2.6 Étude de l'erreur de phase du schéma RBV par analyse de FOURIER

L'analyse de FOURIER doit permettre d'affiner la compréhension du comportement de l'erreur dispersive du schéma RBV en fonction du nombre CFL, notamment pour les courtes longueurs d'onde. Cette étude a déjà en partie été réalisée au paragraphe 2.2 pour l'analyse de stabilité en temps physique du schéma.

2.6.1 Rappels

Le facteur d'amplification exact g_e pour une équation d'advection linéaire scalaire est obtenu en effectuant une transformation de FOURIER de cette équation qui donne :

$$\frac{d\hat{w}}{dt} + i(k_x a + k_y b)\hat{w} = 0 \quad (2.104)$$

où $\hat{w}(k_x, k_y, t) \in \mathbb{C}$ est l'amplitude complexe de l'harmonique du couple de nombres d'onde (k_x, k_y) . La solution de cette équation à l'instant $t^n = n\Delta t$ ou $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ est donnée par :

$$\begin{aligned} \hat{w}(k_x, k_y, t) &= \hat{w}(k_x, k_y, 0)e^{-i(k_x a + k_y b)t} \\ \hat{w}(k_x, k_y, t + \Delta t) &= \hat{w}(k_x, k_y, t)e^{-i(k_x a + k_y b)\Delta t} \end{aligned} \quad (2.105)$$

Le facteur d'amplification exact g_e est défini par : $\hat{w}^{n+1} = g_e \hat{w}^n$, avec $\hat{w}^n = \hat{w}(k_x, k_y, n\Delta t)$. Par identification : $g_e = e^{-i(\hat{a}\xi + \hat{b}\eta)}$ avec $\xi = k_x \delta x$, $\eta = k_y \delta y$ les nombres d'onde réduits suivant les directions x et y du maillage et $\hat{a} = a \frac{\Delta t}{\delta x}$, $\hat{b} = b \frac{\Delta t}{\delta y}$ les nombres CFL suivant ces mêmes directions. Comme tout nombre complexe, le facteur d'amplification peut s'écrire sous forme exponentielle : $g_e = \rho_e e^{i\varphi_e}$. Pour la solution exacte, le gain $\rho_e = 1$ et la phase $\varphi_e = -(\hat{a}\xi + \hat{b}\eta)$.

Pour une solution numérique, on a $\hat{w}^{n+1} = g \hat{w}^n$ où $g(\xi, \eta)$ le facteur d'amplification du schéma RBV, est la solution de l'équation (2.5) définie au paragraphe 2.2. Sous forme exponentielle complexe, $g = \rho e^{i\varphi}$. L'erreur de phase du schéma est alors définie par :

$$e_\varphi \equiv \varphi - \varphi_e \equiv \varphi + \hat{a}\xi + \hat{b}\eta \quad (2.106)$$

2.6.2 Erreur de phase du schéma RBV

Une représentation tridimensionnelle de l'erreur de phase du schéma dans le plan des nombres d'onde réduits pour une advection à vitesse $(a, b) = (1, 0)$ et différents nombres CFL est donnée par la figure 2.17. Bien que l'advection se fasse suivant une direction propre du maillage, on remarque que l'erreur de phase n'est pas invariante dans la direction normale à l'advection. Ce phénomène est dû à l'opérateur spatial $\mu_1^2 \mu_2^2$ appliqué à l'opérateur temporel $\nabla w_{j,k}$ dont la transformée de FOURIER introduit dans l'équation (2.5) un terme en $(\cos(\xi) + 1)(\cos(\eta) + 1)$ indépendant de la vitesse d'advection (a, b) .

On observe, FIG. 2.17, que pour le nombre CFL optimum $\text{CFL}_0 = \frac{1}{2}$ l'erreur de phase du schéma est faible sur l'ensemble du plan des couples de nombres d'onde réduits (ξ, η) . En conséquence, lorsque CFL_0 est utilisé pour le calcul, toutes les longueurs d'onde présentes dans l'écoulement sont en moyenne advectées à la même vitesse et sans déphasage. Cette observation vient conforter l'analyse effectuée sur le système équivalent du schéma qui prédit une erreur dispersive à l'ordre 3 pour ce nombre CFL.

L'étude de l'erreur de phase par analyse de FOURIER est aussi complémentaire de l'étude du système équivalent puisqu'elle montre l'évolution en fonction du CFL de l'erreur de phase pour les différentes longueurs d'onde. On voit ainsi que pour des pas de temps d'intégration numérique inférieurs à Δt_{opt} , le premier terme d'erreur du schéma provoque une avance de phase des plus grands nombres d'onde réduits, qui correspondent aux plus courtes longueurs d'onde, mais reste faible sur une plage de nombres d'onde $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$. Pour des pas de temps d'intégration numérique supérieurs à Δt_{opt} , la solution du schéma est à un retard de phase pour les plus grands nombres d'onde réduits mais l'erreur de phase reste également faible sur la plage de nombres d'onde $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$.

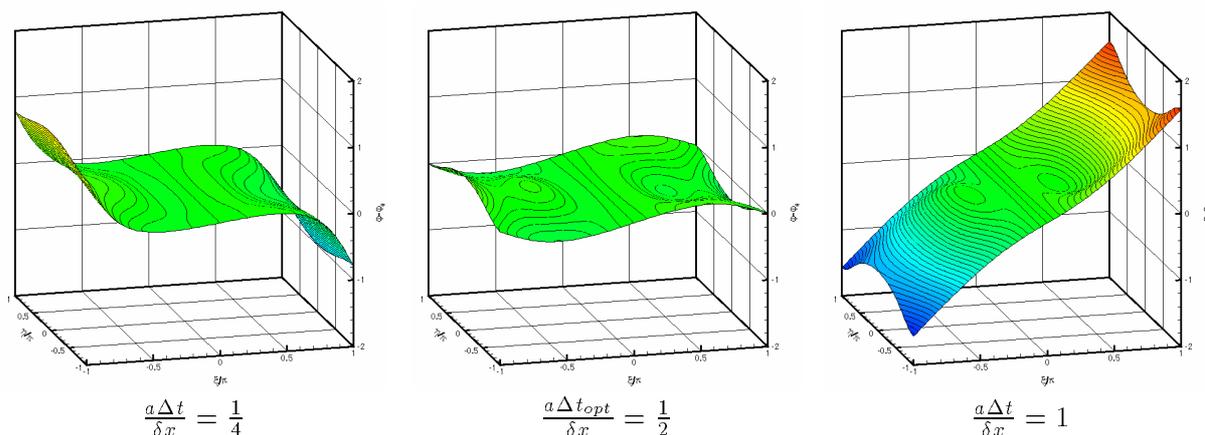


FIG. 2.17 - Erreur de phase du schéma RBV dans le plan des nombres d'onde réduits pour une advection linéaire scalaire à la vitesse $(a, b) = (1, 0)$ pour différents nombres CFL.

2.6.3 Conclusion

L'analyse de FOURIER de l'erreur de phase du schéma RBV renforce les conclusions tirées à partir de l'équation équivalente du schéma, à savoir que l'erreur dispersive du schéma RBV est minimale pour $CFL = 1/2$. Elle montre même que l'erreur de phase est faible pour toutes les longueurs d'onde.

Cette analyse montre aussi que la solution du schéma RBV est en avance de phase, principalement pour les grands nombres d'onde, si le nombre CFL utilisé est inférieur à $1/2$, alors qu'elle a un retard de phase si le nombre CFL utilisé est supérieur à $1/2$.

2.7 Advection de tourbillon pour les équations d'EULER

Les propriétés du schéma RBV ont été étudiées en détail, il s'agit maintenant de les éprouver au mieux pour le transport de tourbillon par les équations d'EULER. Le problème modèle utilisé est l'advection d'un tourbillon analytique par un écoulement constant. Le premier point à déterminer est alors la discrétisation minimale du tourbillon pour qu'il soit préservé pendant l'advection. Le deuxième point vise à observer l'influence du pas de temps sur la solution du tourbillon advecté. Le troisième test doit permettre d'évaluer l'influence de la direction d'advection par rapport aux directions propres du maillage cartésien régulier. Même si la phase de filtrage utilisée pour stabiliser la méthode d'intégration sur le pas de temps dual n'est pas indispensable pour l'advection de tourbillon sur des maillages cartésiens, nous évaluons dans un quatrième temps l'influence de l'ordre du filtrage sur la solution instationnaire du schéma RBV. Enfin, la solution du schéma RBV sera comparée avec les solutions de deux schémas d'ordre 2, LAX-WENDROFF-NI qui est la référence en matière de préservation de la vorticité, et le schéma centré avec viscosité artificielle introduit par JAMESON, SCHMIDT & TURKEL, réputé peu dissipatif et dont l'utilisation est largement répandue pour le calcul d'écoulements instationnaires.

2.7.1 Problème modèle

Le problème modèle retenu pour l'advection de tourbillon s'inspire largement d'un cas test utilisé par YEE et *al.* [92, 93]. Un tourbillon bidimensionnel non visqueux isentropique est advecté par un écoulement uniforme. Les conditions aux limites du domaine de calcul sont périodiques dans les deux directions d'espace.

La pression p_∞ et la masse volumique ρ_∞ de l'écoulement uniforme sont donn es par $p_\infty = 1$, $\rho_\infty = 1$. Le champ de vitesse \vec{U}_∞ de l'écoulement uniforme est (u_∞, v_∞) avec $\|\vec{U}_\infty\| = \frac{1}{2}$. Le nombre de MACH de l'écoulement uniforme est $M_\infty = 0,4225$, ce qui conduit à une advection subsonique. Le rapport des chaleurs spécifiques est $\gamma = 1,4$. Les valeurs des perturbations ajout es au champ moyen sont celles donn es dans [93] :

$$\begin{cases} (\delta u, \delta v) &= \frac{\Gamma}{2\pi} e^{\frac{1-r^2}{2}} (-\bar{y}, \bar{x}) \\ \delta T &= -\frac{(\gamma-1)\Gamma^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2} \end{cases} \quad (2.107)$$

où la circulation du tourbillon Γ est égale à 5, $T = p/\rho$, $\bar{x} = x - x_0$ et $\bar{y} = y - y_0$ avec (x_0, y_0) les coordonnées initiales du tourbillon et $r^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2$. Les variables conservatives de l'état initial résultent des relations $u = u_\infty + \delta u$, $v = v_\infty + \delta v$, $T = T_\infty + \delta T$ et de la relation d'isentropie $\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} = S_\infty$:

$$\begin{cases} \rho &= \left(\frac{T}{S_\infty}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{1}{S_\infty} (T_\infty + \delta T)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} = \left[\frac{1}{S_\infty} \left(T_\infty - \frac{(\gamma-1)\Gamma^2}{8\gamma\pi^2} e^{1-r^2}\right)\right]^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ \rho u &= \rho(u_\infty + \delta u) = \rho \left[u_\infty - \frac{\Gamma}{2\pi} \bar{y} e^{\frac{1-r^2}{2}}\right] \\ \rho v &= \rho(v_\infty + \delta v) = \rho \left[v_\infty + \frac{\Gamma}{2\pi} \bar{x} e^{\frac{1-r^2}{2}}\right] \\ p &= S_\infty \rho^\gamma \end{cases} \quad (2.108)$$

La solution exacte pour les équations d'EULER de ce problème aux conditions initiales est $w(t, x, y) = w_0(\bar{x}, \bar{y})$ avec $\bar{x} = x - (x_0 + u_\infty t)$, $\bar{y} = y - (y_0 + v_\infty t)$. Le tourbillon devrait donc être convecté « passivement » par l'écoulement uniforme, c'est-à-dire sans dévier de sa trajectoire ni subir de déformation au cours de son transport. On peut ainsi quantifier directement l'erreur dispersive et la dissipation du schéma numérique.

Le domaine de calcul s'étend de -5 à $+5$ suivant les directions x et y , le champ de perturbation induit par le tourbillon à décroissance exponentielle tend rapidement vers zéro ce qui permet d'utiliser des conditions aux limites périodiques et d'advecter le tourbillon sur de longues distances avec un domaine de calcul relativement restreint de dimensions 10×10 , soit $(x, y) \in [-5; 5] \times [-5; 5]$.

Remarque : Le nombre CFL_{fic} est fixé à 25 pour les sous-itérations sur le temps dual, l'algorithme implicite sur le pas de temps fictif utilise un pas de temps fictif local pour accélérer la vitesse de convergence de la méthode.

2.7.2 Discrétisation nécessaire pour l'advection de tourbillon

Des calculs d'advection de tourbillon suivant la direction x sont effectués sur trois maillages afin de déterminer le nombre de points nécessaires dans le cœur du tourbillon pour qu'il soit advecté par l'écoulement moyen sans perte de vorticité. Pour chaque simulation, on utilise le pas de temps qui minimise l'erreur du schéma sur le maillage, soit $\Delta t_{opt} = \frac{h}{2u_0}$. Les paramètres de calcul correspondant aux différents maillages sont résumés TAB. 2.5.

Maillage	δx	Nombre de points dans le cœur du tourbillon	$\Delta t_{opt} =$ $\delta x / 2U_\infty$	CFL � $t = 0$
25×25	0,4	5	0,4	1,75
50×50	0,2	10	0,2	1,95
100×100	0,1	20	0,1	1,88

TAB. 2.5 - Paramètres de calcul pour l'advection de tourbillons sur différents maillages

Les solutions du schéma RBV sur les différents maillages sont compar es à $t = 100$, ce qui correspond à une distance parcourue par le tourbillon $L = 50$   la vitesse $\|U_0\| = 1/2$. Le tourbillon a donc effectué 5 passages successifs dans le domaine de calcul.

Les représentations du champ de vorticité des solutions FIG. 2.18 montrent qu'une discrétisation sur 5 points du cœur permet de positionner correctement la solution du schéma par rapport à la solution exacte mais pas de conserver intact le champ de vorticité du tourbillon. Pour des discrétisations du cœur sur 10 et 20 points, le tourbillon est advecté sans perte de vorticité et est exactement positionné par rapport à la solution exacte. On observe que la vorticité des solutions au centre du tourbillon est légèrement supérieure à celle du tourbillon initial pour ces maillages. Bien qu'inhabituelle pour des schémas numériques d'ordre 2, on verra par la suite que cette propriété n'est pas propre au schéma RBV.

Les coupes suivant $y = 0$ des solutions à $t = 100$ pour les trois maillages FIG. 2.19 montrent que le tourbillon est très bien conservé sur le maillage 100×100 . Pour la solution dans le maillage 50×50 , l'erreur est de 5,7% sur le maximum de vitesse tangentielle, de 0,2% sur le minimum de masse volumique et de 0,6% au cœur de la dépression. Pour la solution dans le maillage 25×25 , l'erreur est de 23,7% sur la vitesse tangentielle, de 26,8% sur la masse volumique et de 35,6% sur la pression au cœur du tourbillon.

Conclusion

L'erreur à $t = 100$ est inférieure à 1% sur la pression et la masse volumique et au maximum de 5% sur la vitesse tangentielle pour 10 points dans le cœur du tourbillon, soit sur le maillage 50×50 , pour $U_\infty = 0,5$. Ce maillage sera donc utilisé pour l'évaluation de l'influence des autres paramètres de simulation : pas de temps, direction d'advection, ordre de filtrage quand un filtre est adjoint à la méthode de résolution en pas de temps dual.

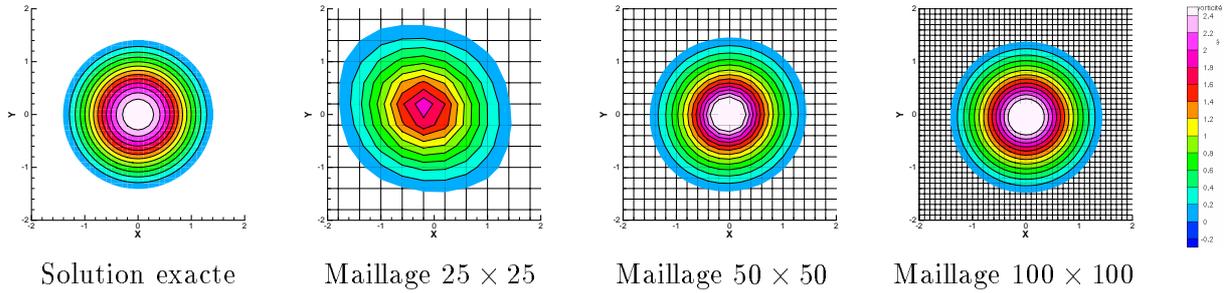


FIG. 2.18 - *Champ de vorticité exacte et solutions du schéma RBV sur différents maillages. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), $\Delta t = \delta x$.*

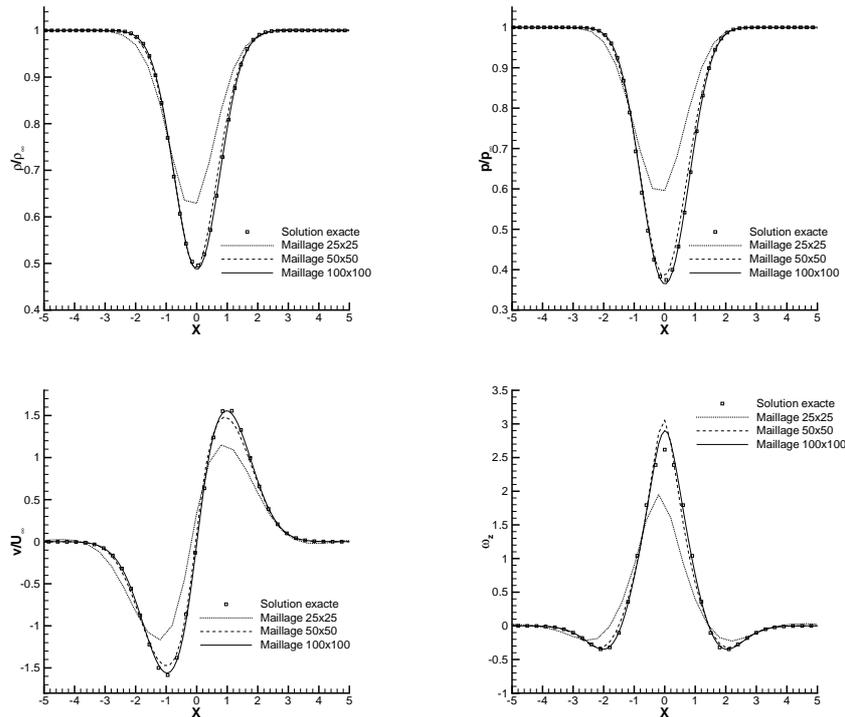


FIG. 2.19 - *Champs exacts et solutions du schéma RBV d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x pour différents maillages. Coupes suivant x des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), $\Delta t = \delta x$.*

2.7.3 Influence du pas de temps pour l'advection de tourbillon

Les calculs effectués pour évaluer l'influence du pas de temps sur la précision des solutions sont réalisés dans le maillage 50×50 qui correspond à une discrétisation du cœur du tourbillon sur dix points. L'advection est suivant l'axe x à vitesse $u_0 = \frac{1}{2}$, soit un nombre de MACH $M_\infty = 0,4225$. La solution de référence est calculée avec le pas de temps $\Delta t_{opt} = \frac{h}{2U_0}$ qui annule l'erreur dispersive du schéma pour les structures advectées par l'écoulement moyen. Cette solution est comparée aux solutions obtenues avec un pas de temps deux fois plus petit et un pas de temps deux fois plus grand.

Il a été démontré au paragraphe 2.5.3 que pour un pas de temps inférieur à Δt_{opt} , l'erreur dispersive du schéma est une avance de phase pour les ondes se propageant sur la caractéristique advectée par l'écoulement alors que pour un pas de temps supérieur à Δt_{opt} , l'erreur dispersive du schéma provoque un retard de phase.

En bon accord avec la théorie, la solution obtenue avec Δt_{opt} donne un tourbillon qui est exactement positionné à $t = 100$ et dont le champ de vorticité, représenté FIG. 2.20, est proche de la solution exacte.

La solution obtenue avec $\Delta t_{opt}/2$ est en retard et d cal e vers le haut par rapport à la solution exacte. La vorticité dans le cœur du tourbillon est légèrement supérieure à la vorticité exacte. Il est intéressant de noter que pour l'advection d'un tourbillon par les équations d'EULER, une erreur dispersive correspondant à une avance de phase à pour effet de « *retarder* » la solution numérique par rapport à la solution exacte.

La solution calcul e avec $2\Delta t_{opt}$ est en avance sur la solution exacte et d cal e vers le bas. L'erreur dispersive du schéma pour ce pas de temps provoque une perte de vorticité comparable à celle observ e avec les méthodes numériques classiques d'ordre 2. Ces méthodes classiques, schémas de type LAX-WENDROFF et centrés avec viscosité artificielle, ont généralement une erreur dispersive correspondant à un retard de phase et positionne le tourbillon en « *avance* » par rapport à la solution exacte.

Les coupes suivant $y = 0$ des solutions à $t = 100$ pour les trois pas de temps FIG. 2.21 montrent que l'utilisation d'un pas de temps inférieur à Δt_{opt} concentre le tourbillon, la dépression au cœur a augmenté de 7% entre $t = 0$ et $t = 100$. La solution obtenue avec un pas de temps 2 fois supérieur à Δt_{opt} à tendance à dissiper le tourbillon, la dépression dans le cœur du tourbillon est inférieure de 28,9% à la solution exacte.

Conclusion

L'obtention de la solution optimale du schéma RBV est fix e par $\Delta t/\delta x = 1/2U_\infty$. Ce rapport permet d'annuler le premier terme d'erreur du schéma. Ce terme intervient à l'ordre $O(\Delta t^2, \delta x^2, \delta y^2)$ dans le système équivalent du schéma.

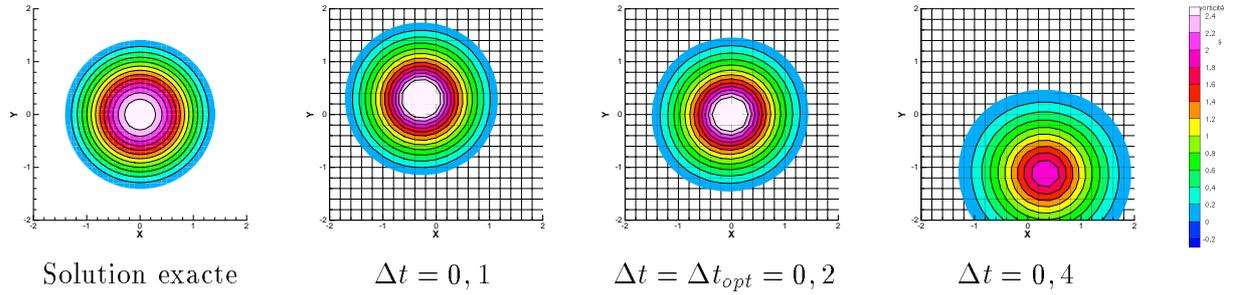


FIG. 2.20 - *Champ de vorticité exacte et solutions du schéma RBV pour différents pas de temps. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 , $h = 0,2$.*

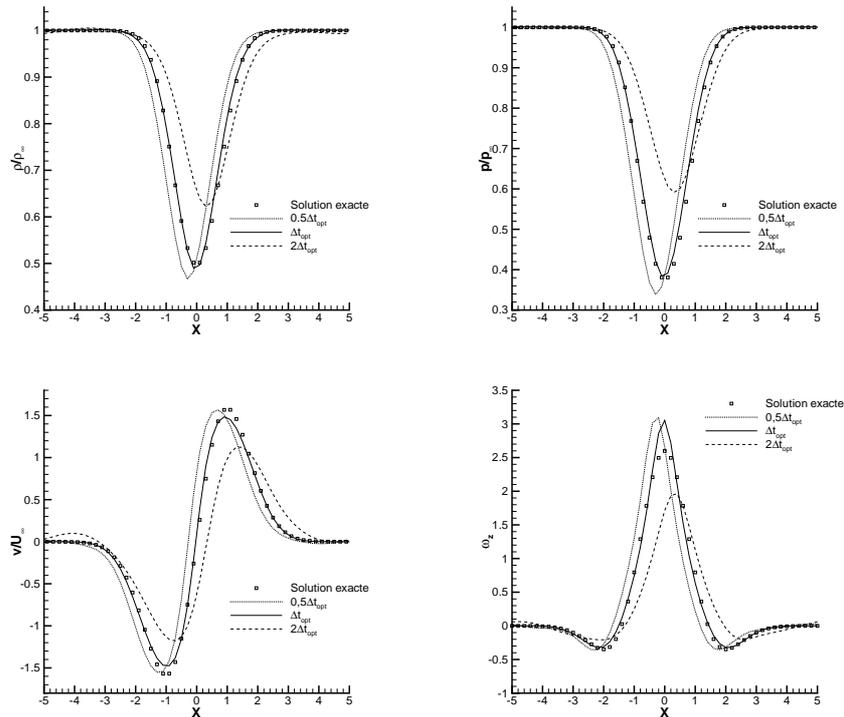


FIG. 2.21 - *Champs exacts d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x et solutions du schéma RBV pour différents pas de temps. Coupes suivant x des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 .*

2.7.4 Influence de la direction de l'écoulement pour l'advection de tourbillon

De même que les schémas de type RBC, le schéma RBV est construit pour le calcul d'écoulements multidimensionnels. On s'attend donc à ce que la solution d'advection de tourbillon suivant une direction quelconque ne dépende pas de façon sensible de l'angle α entre le champ moyen et l'axe x du maillage cartésien.

Un tourbillon est advecté suivant trois directions afin d'évaluer la sensibilité de la solution du schéma RBV en fonction de la direction d'advection. La solution de référence utilisée pour la comparaison est la solution calculée avec $\Delta t_{opt} = h/(2u_\infty)$ d'une advection suivant l'axe x d'un maillage cartésien carré de pas d'espace $h = 0,2$. Deux angles d'advection sont considérés, un angle $\alpha = \pi/4$, qui correspond à la direction a priori la moins favorable si le schéma à un caractère directionnel et un angle $\alpha = \pi/8$ qui est un cas intermédiaire a priori moins défavorable. La norme de la vitesse d'advection est $\|\vec{U}_\infty\| = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$) pour les trois calculs. Les maillages sont cartésiens carrés de pas d'espace $h = 0,2$ et le pas de temps Δt_{opt} est le même $\Delta t_{opt} = 0,2$ de façon à observer l'influence de la direction d'advection sur l'erreur du schéma.

Les résultats sont présentés FIG. 2.22 sous forme d'isovaleurs instantanées du champ de vorticité. Les cercles tracés en traits discontinus ont un rayon correspondant à la distance parcourue par la solution exacte aux temps de visualisation. Les droites tracées en traits discontinus indiquent les trajectoires théoriques des tourbillons. On observe que les solutions du schéma RBV pour le pas de temps Δt_{opt} sont correctement positionnées quelque soit la direction d'advection. Le pas de temps Δt_{opt} annule donc le premier terme d'erreur quelque soit la direction d'advection, il ne dépend pas de celle-ci. D'autre part, la variation du champ de vorticité des tourbillons est identique quelle que soit la direction d'advection.

Conclusion

La solution du schéma RBV pour l'advection de tourbillon ne dépend pas de la direction d'advection. Sur un maillage donné, la précision ne dépend que du pas de temps. Pour un maillage donné et une vitesse d'advection de norme fixée, le pas de temps qui minimise l'erreur du schéma pour l'advection ne dépend que du pas d'espace h et de la norme de la vitesse du champ moyen :

$$\Delta t_{opt} = \frac{h}{2\sqrt{u_\infty^2 + v_\infty^2}}$$

(2.109)

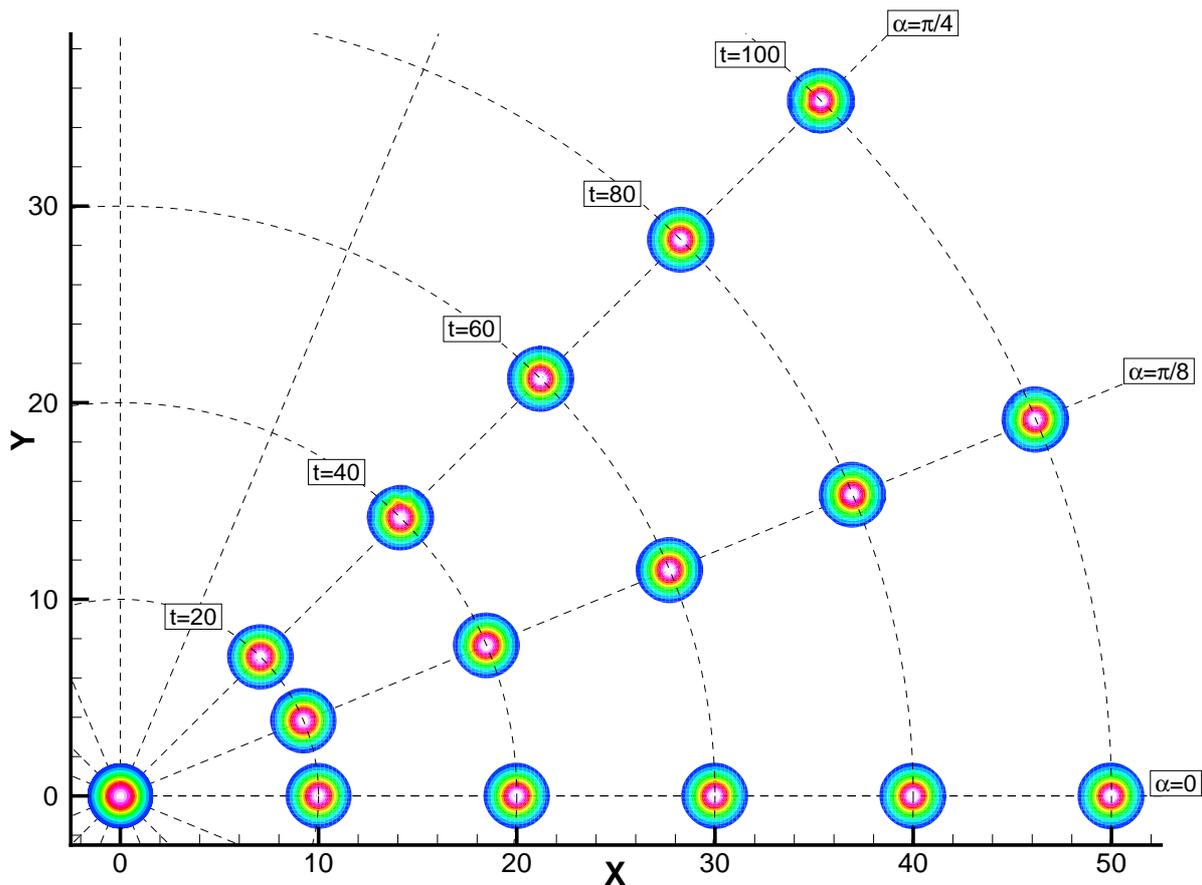


FIG. 2.22 - Champ de vorticité de tourbillons advect s ( q. d'EULER) suivant plusieurs directions à la vitesse $(u_\infty^2 + v_\infty^2)^{1/2} = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$). Solutions du schéma RBV pour $\frac{\Delta t}{\delta x} = 1$   $t = 20$, $t = 40$, $t = 60$, $t = 80$ et $t = 100$, maillage de pas d'espace $h = 0,2$.

2.7.5 Influence du filtrage pour l'advection d'un tourbillon

Bien que le schéma utilisé pour la convergence en pas de temps dual ne dissipe pas les plus courtes longueurs d'onde, l'adjonction de filtre ne s'est pas avérée nécessaire pour les calculs d'advection de tourbillon mais elle sera indispensable par la suite afin d'appliquer le schéma à des configurations d'écoulements aérodynamiques plus réalistes.

Les influences du filtrage et de l'ordre de précision du filtre sur la solution du schéma RBV sont évaluées sur l'advection d'un tourbillon suivant l'axe x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ sur un domaine de calcul périodique 10×10 discrétisé avec un maillage 50×50 .

Les visualisations du champ de vorticité à $t = 100$, FIG. 2.23, montrent que l'ajout d'une étape de filtrage sur les sous itérations en temps fictif ne modifie pas la position du tourbillon par rapport à la solution du schéma RBV sans filtre. Cela confirme que les filtres ne font qu'introduire un terme dissipatif dans l'équation discr  t  s  e.

Un filtre d'ordre 4, qui équivaut à une dissipation linéaire d'ordre 3, n'est pas suffisamment précis pour l'advection de tourbillon sur une longue distance. Bien que le schéma RBV ne soit que d'ordre 2, les filtres utilisés doivent être au moins d'ordre 6 pour ne pas modifier de façon significative la solution du schéma. Cette observation est confirm  e par les coupes suivant $y = 0$ des solutions à $t = 100$, FIG. 2.24, où on voit que le schéma RBV et un filtrage à l'ordre 4 dissipe de moitié le tourbillon pendant son advection. L'influence du filtrage sur la solution du schéma RBV pour l'advection de tourbillon devient minime dès que l'ordre du filtre est supérieur à 6. Bien que le filtrage ajoute de la dissipation, on observe que le maximum de vorticité des solutions avec filtrage est très légèrement supérieur à la solution du schéma sans filtre.

Conclusion

Il faut appliquer des filtres d'ordre supérieur ou égal à 6 pour ne pas altérer la solution du schéma RBV pour l'advection de tourbillons. Des filtrages à l'ordre 6 et 8 donnent des solutions très proches du schéma sans filtre. La solution obtenue avec un filtre d'ordre 10 se superpose à la solution du schéma RBV seul.

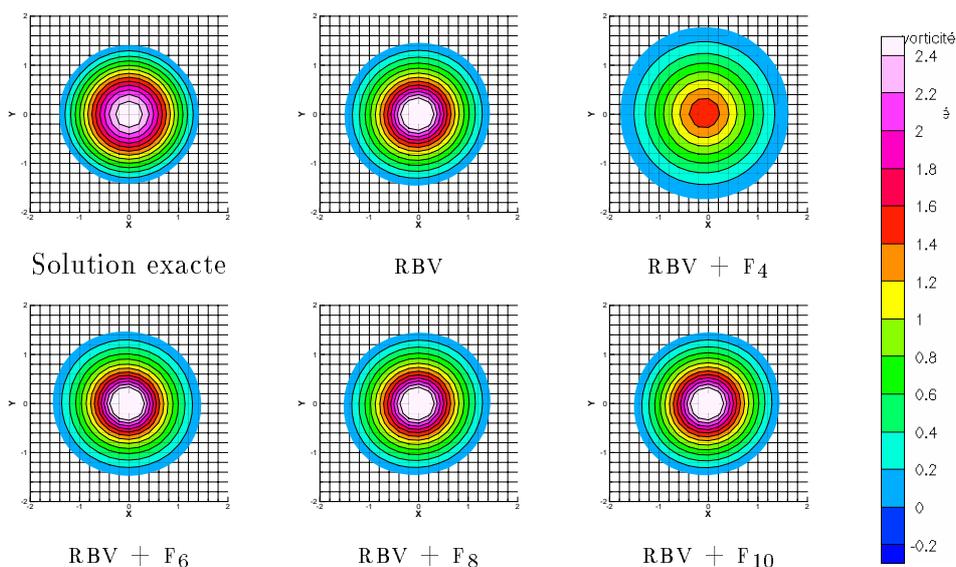


FIG. 2.23 - Champ de vorticité exacte et solutions du schéma RBV pour différents filtres. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$) sur un maillage 50×50 , $\Delta t = 0,2$.

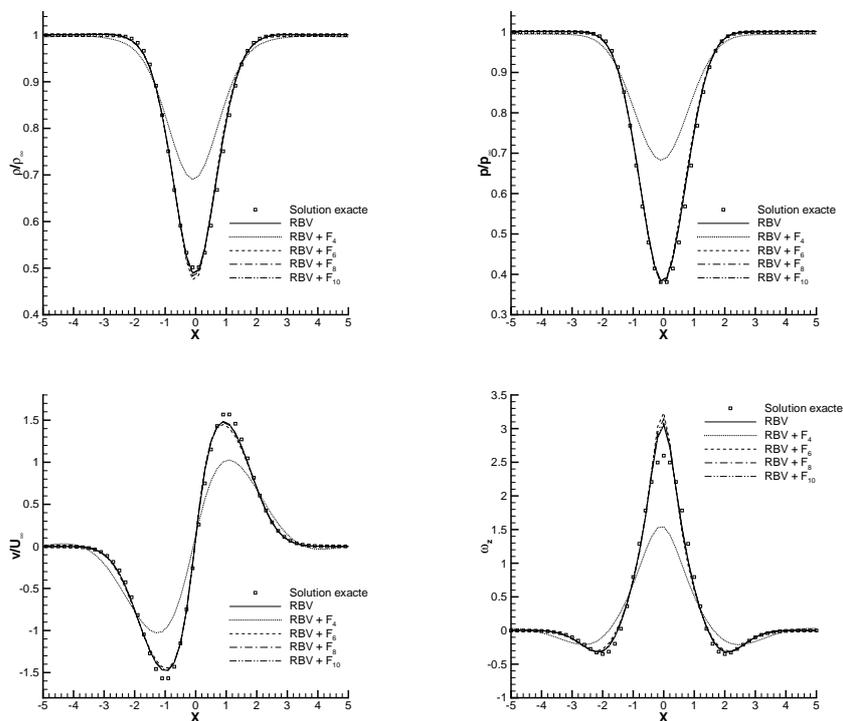


FIG. 2.24 - Champs exacts d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x et solutions du schéma RBV pour différents filtres. Coupes suivant x des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 , $\Delta t = 0,2$.

2.7.6 Comparaison avec d'autres schémas numériques

Le but est de quantifier l'apport du schéma RBV sur la préservation des tourbillons par rapport à des schémas existants du même ordre de précision. La solution du schéma RBV est comparée avec les solutions de deux schémas d'ordre 2 : le schéma de LAX-WENDROFF-NI [63, 64], qui est la référence actuelle en matière de préservation de la vorticité, et le schéma centré avec viscosité artificielle introduit par JAMESON, SCHMIDT & TURKEL[36], peu dissipatif si les valeurs des coefficients de viscosité artificielle sont bien ajustées.

Comparaison avec le schéma de LAX-WENDROFF-NI

Quelques précisions s'imposent concernant le schéma de LAX-WENDROFF-NI (LWN) mis en œuvre pour les calculs d'advection de tourbillons. La version du schéma LWN implémentée dans un code dédié est explicite. La condition de stabilité sur le nombre CFL impose donc l'utilisation de pas de temps physiques Δt plus faibles que pour le schéma RBV. D'autre part, le schéma LWN requiert l'ajout d'une dissipation artificielle pour des calculs d'aérodynamique tels que l'écoulements autour d'un profil, dans un canal avec bosse, etc... Les calculs d'advection de tourbillon avec le schéma LWN sont réalisés sans dissipation artificielle car celle-ci n'est pas nécessaire dans ce cas précis où le maillage est cartésien, les conditions aux limites périodiques et l'écoulement sans discontinuités.

La solution d'advection de tourbillon pour le schéma LWN est obtenue avec un pas de temps $\Delta t = 0,05$ qui correspond à $CFL = \frac{\Delta t}{h} \max_{j,k} (\sqrt{u^2 + v^2} + a)_{j,k} \sim 0,6$ avec $(\delta x = \delta y = h)$ pendant toute la durée du calcul. L'advection se fait suivant la direction x . Le maillage utilisé contient 50×50 cellules. La comparaison du champ de vorticité à $t = 100$ des solutions des schémas LWN et RBV, FIG. 2.25, montre que le schéma LWN sans viscosité artificielle préserve aussi bien la vorticité que le schéma RBV. Par contre, le tourbillon est mal positionné par rapport à la solution exacte. Contrairement au schéma RBV, on ne peut pas minimiser l'erreur dispersive du schéma LWN et donc garantir que le tourbillon suit la bonne trajectoire pendant son advection.

Les coupes des champs, FIG. 2.26 suivant une droite parallèle à l'axe des x et passant par le cœur des tourbillons confirment que le schéma LWN sans dissipation artificielle conserve aussi bien le tourbillon que le schéma RBV pendant son transport. On remarque que la solution du schéma LWN a un maximum de vorticité supérieur à la solution exacte, tout comme la solution du schéma RBV.

Conclusion

Le schéma LWN sans dissipation artificielle préserve aussi bien la vorticité que le schéma RBV mais commet une erreur beaucoup plus importante sur la trajectoire et la position du tourbillon. Rappelons que la version utilisée du schéma LWN n'a pas la dissipation artificielle requise pour des calculs d'aérodynamique externe par exemple. L'ajout de cette dissipation altère nécessairement les propriétés de préservation de la vorticité du schéma LWN.

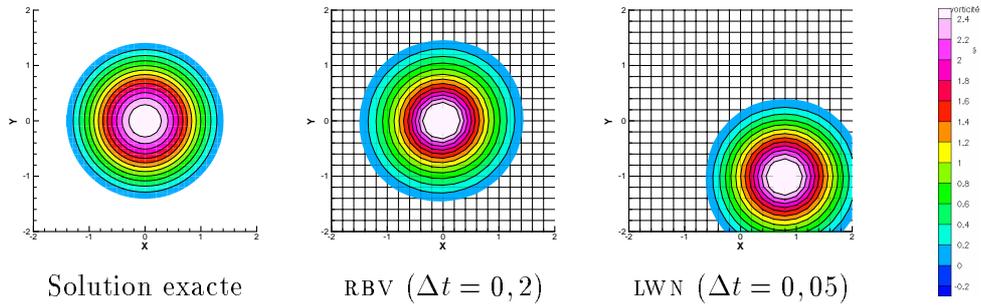


FIG. 2.25 - Champ de vorticité exacte et solutions des schémas RBV ($\Delta t = 0,2$) et LWN ($\Delta t = 0,05$). Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté (éq. d'EULER) suivant x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 .

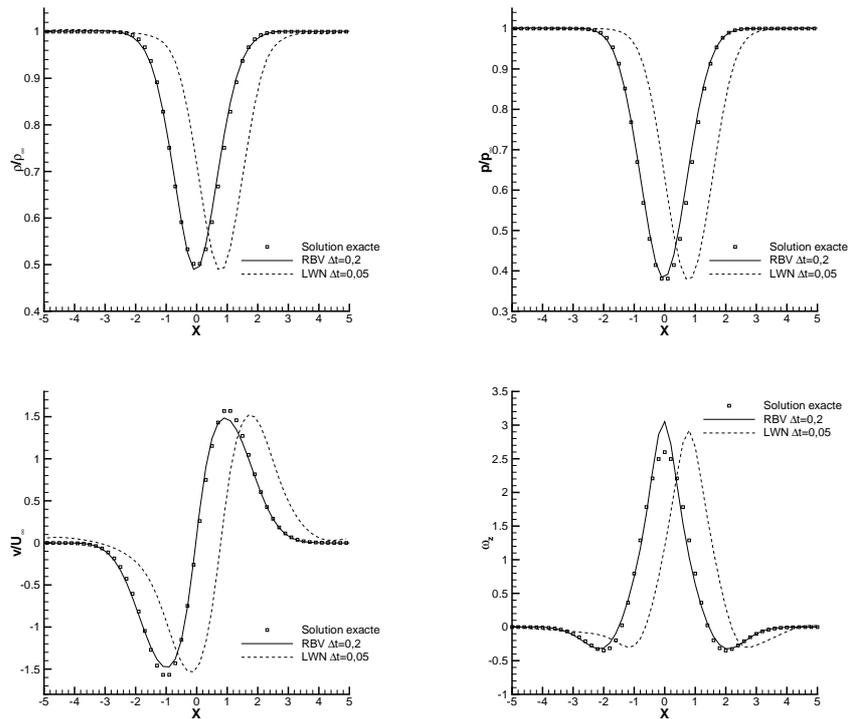


FIG. 2.26 - Champs exacts d'un tourbillon advecté (éq. d'EULER) suivant x et solutions des schémas RBV ($\Delta t = 0,2$) et LWN ($\Delta t = 0,05$). Coupes suivant x des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 .

Comparaison avec un schéma centré

Le schéma centré avec viscosité artificielle proposé initialement par JAMESON, SCHMIDT & TURKEL[36] est un schéma explicite avec intégration temporelle de type RUNGE-KUTTA. Pour des calculs d'aérodynamique instationnaire, ce schéma est généralement mis en œuvre sous une forme implicite. On retient deux de ces méthodes pour les comparaisons avec le schéma RBV:

1. une intégration implicite avec lissage des résidus développée initialement par LERAT, SIDÈS & DARU [52] pour le schéma de LAX-WENDROFF. Elle est aussi appelée IRS (pour *Implicit Residual Smoothing*) et est appliquée pour les calculs au schéma RUNGE-KUTTA pour lequel elle a été adaptée par JAMESON. Cette méthode est souvent employée car elle est assez peu coûteuse en temps de calcul. La phase implicite permet l'utilisation de pas de temps assez grands tout en conservant une précision d'ordre 2;
2. une méthode de pas de temps dual DTS (pour *Dual Time Stepping*) à trois niveaux de temps pour une précision d'ordre 2 similaire à celle employée pour la résolution du schéma RBV. L'intégration pour la convergence sur le pas de temps dual ou fictif fait appel à un schéma RUNGE-KUTTA implicite avec lissage des résidus. Cette méthode est moins dissipative que le schéma centré IRS mais le temps de restitution du calcul est plus important car il faut converger vers la solution stationnaire en temps fictif pour chaque itération en temps physique.

Le logiciel employé pour l'exécution des calculs de type JAMESON est le logiciel *elsA* [5, 8] (Ensemble Logiciel de Simulation en Aérodynamique) développé à l'ONERA depuis 1997 et validé en collaboration avec des industriels du secteur aéronautique.

Pour les deux méthodes d'intégration temporelle, il faut fixer les coefficients de dissipation artificielle $k^{(2)}$ et $k^{(4)}$. Le coefficient $k^{(2)}$ permettant d'ajuster la dissipation non linéaire d'ordre 2 est fixé à zéro car l'écoulement du tourbillon advecté ne présente aucune discontinuité. Le coefficient ajustant la dissipation linéaire d'ordre 4 est fixé à la valeur minimale généralement recommandée $k^{(4)} = 0,016$.

La comparaison du champ de vorticité à $t = 100$ des solutions des schémas RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS FIG. 2.27, montre que les schémas centrés avec viscosité artificielle dissipent plus la vorticité que le schéma RBV. Les schémas de JAMESON avec intégration temporelle IRS et DTS positionnent mal le tourbillon par rapport à la solution exacte car on ne peut minimiser leur erreur dispersive et garantir que le tourbillon suit la bonne trajectoire. On remarque que le schéma de JAMESON DTS donne une meilleure solution que le schéma de JAMESON IRS.

Les coupes des champs, FIG. 2.28, suivant une droite parallèle à l'axe des x et passant par le cœur des tourbillons confirment que les schémas centrés avec viscosité artificielle dissipent le tourbillon pendant son transport. L'implémentation en pas de temps dual du schéma de JAMESON permet d'avoir une meilleure advection du tourbillon au pris d'un c  t de calcul plus élevé que l'implémentation avec lissage des résidus.

Conclusion

Les schémas JAMESON IRS et JAMESON DTS dissipent plus la vorticité que le schéma RBV et commettent une erreur beaucoup plus importante sur la trajectoire et la position du tourbillon.

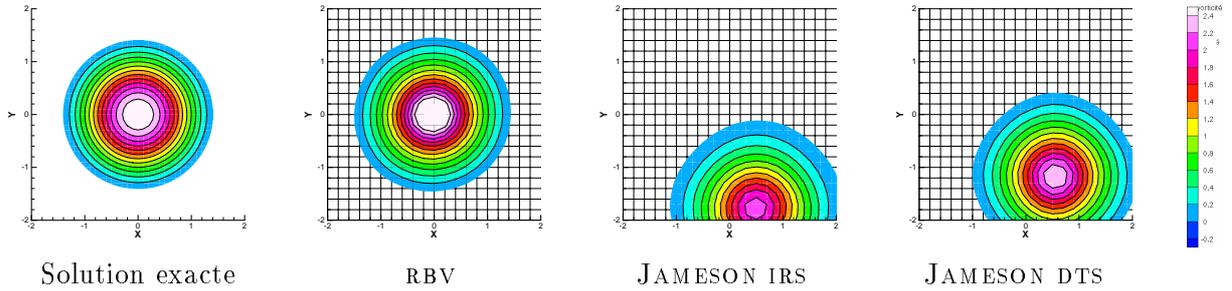


FIG. 2.27 - Champ de vorticité exacte et solutions des schémas RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 , $\Delta t = 0,2$.

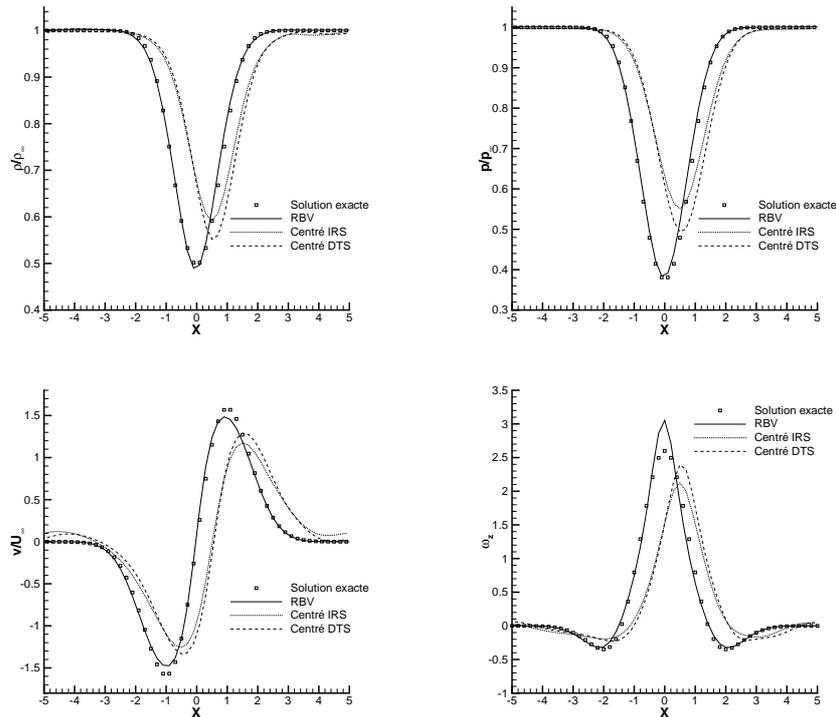


FIG. 2.28 - Champs exacts d'un tourbillon advecté (ég. d'EULER) suivant x et solutions des schémas RBV, centré IRS et centré DTS. Coupes suivant x des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage 50×50 , $\Delta t = 0,2$.

2.8 Conclusion

Malgré un support spatial identique au schéma de LAX-WENDROFF-NI, le schéma RBV dissipe les plus grands nombres d'onde pour des écoulements diagonaux. Cette propriété découle du caractère fortement implicite du schéma couplé à une pondération spatiale de l'incrément temporel à trois niveaux de temps. Toutefois, il existe une gamme de nombres CFL ($CFL < 10$ environ) pour lesquels apparaît une zone d'instabilité faible (facteur d'amplification du schéma légèrement supérieur à 1) pour une petite plage de nombres d'onde dans le milieu du spectre. Le schéma n'est donc pas stable au sens strict, mais en pratique, il ne nécessite pas l'ajout d'une dissipation artificielle.

La méthode de pas de temps dual mise en œuvre pour résoudre le schéma RBV utilise une phase implicite simplifiée. Le schéma sous-itératif est alors stable, le module de son facteur d'amplification est inférieur ou égal à 1, mais n'est pas dissipatif au sens de KREISS, en particulier les plus grands couples de nombres d'onde réduit $(\xi, \eta) = (\pm\pi, \pm\pi)$ ne sont pas amortis pour des écoulements diagonaux. Un filtrage du schéma en pas de temps dual avec des filtres explicites d'ordre élevé permet de pallier ce problème sans altérer la précision du schéma RBV.

Par construction, le schéma RBV est précis à l'ordre 2 en temps et en espace. De plus, la méthode du système équivalent a montré qu'il est possible d'annuler le premier terme d'erreur du schéma pour un certain nombre CFL. Le schéma donne alors une solution précise à l'ordre 3. Des essais numériques pour une advection scalaire bidimensionnelle et les équations de l'acoustique avec advection ont confirmé clairement ce résultat théorique.

L'étude de l'erreur de phase du schéma RBV par une analyse de FOURIER confirme (et complète pour toutes les longueurs d'onde) le comportement du premier terme d'erreur prédit par l'étude du système équivalent. Pour le nombre CFL qui annule ce terme, l'erreur de phase du schéma RBV est voisine de zéro pour l'ensemble des couples de nombres d'onde réduits. L'erreur dispersive du schéma est alors minimale.

Les essais d'advection de tourbillons pour les équations d'EULER ont permis de démontrer la capacité du schéma RBV à préserver un tourbillon sur de grandes distances d'advection. L'utilisation de $CFL_0 = (M + 1)/2M$, où M est le nombre de MACH de l'écoulement moyen, permet de garantir que le tourbillon ne dévie pas de sa trajectoire théorique, ce qui n'est pas le cas pour d'autres méthodes numériques d'ordre 2. Ce nombre CFL est d'autant plus grand que l'écoulement est lent ce qui autorise l'utilisation de grands pas de temps sans perte de précision pour le calcul d'écoulement à faible nombre de MACH. Le schéma RBV est très peu directionnel, sa solution ne dépend pas de la direction d'advection. L'utilisation de filtres pendant l'étape de sous itérations en pas de temps dual n'altère pas la solution du schéma dès lors que les filtres sont d'ordre 6 et plus. La comparaison du schéma RBV avec les schémas de LAX-WENDROFF-NI et de JAMESON a démontré la plus grande précision du schéma RBV pour les problèmes liés à l'advection de tourbillons.

Chapitre 3

Schéma RBV en maillage irrégulier

Sommaire

3.1	Introduction	83
3.2	Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier	83
3.2.1	Rappels et notations	83
3.2.2	Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier	84
3.3	Filtrage en maillage irrégulier	89
3.4	Précision du schéma RBV en maillage irrégulier	90
3.4.1	Précision du schéma RBV en maillage cartésien irrégulier	90
3.4.2	Précision du schéma RBV en maillage quelconque	92
3.5	Schéma simplifié pour les problèmes stationnaires	94
3.5.1	Advection circulaire scalaire en maillages irréguliers	94
3.5.2	Influence du filtrage pour le calcul de solutions stationnaires	96
3.5.3	Application à un tourbillon stationnaire	97
3.5.4	Écoulement subsonique stationnaire autour d'un profil	98
3.5.5	Écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil	100
3.6	Advection de tourbillons en maillages irréguliers	102
3.7	Écoulement autour d'un profil oscillant en translation	105
3.7.1	Définition du mouvement de tamis	105
3.7.2	Description de l'écoulement	107
3.7.3	Influence de l'ordre du filtre	108
3.7.4	Conclusion	110
3.8	Conclusion	111

3.1 Introduction

Les propriétés du schéma RBV en maillage cartésien ont été étudiées de manière approfondie au chapitre précédent. En vue de son application à des calculs d'aérodynamique réalistes, le schéma doit maintenant être formulé pour des maillages curvilignes. Cette extension sera réalisée dans la première partie de ce chapitre et suivie de l'étude des propriétés de ce nouveau schéma.

La plus grande partie du travail présenté dans ce mémoire traite de problèmes instationnaires. Les simulations numériques d'écoulements instationnaires sont le plus souvent initialisées à partir d'une solution stationnaire calculée « numériquement ». Afin que la solution employée pour l'initialisation soit cohérente avec le schéma RBV, nous proposerons et étudierons une version simplifiée du schéma RBV adaptée au calcul d'écoulements stationnaires.

La capacité du schéma RBV à advecter des tourbillons en maillages irréguliers sera vérifiée par des essais numériques, puis le schéma RBV sera appliqué à un problème d'aérodynamique instationnaire autour d'un profil oscillant en translation.

3.2 Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier

3.2.1 Rappels et notations

Soit Ω un domaine de contour fermé $\partial\Omega$ dont la frontière est notée Γ . Un système bidimensionnel de lois de conservation sous forme intégrale s'écrit :

$$\frac{d}{dt} \iint_{\Omega} w \, d\Omega + \oint_{\partial\Omega} \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, d\Gamma = 0 \quad (3.1)$$

où w est le vecteur d'état, $\vec{\phi} = [f(w), g(w)]$ le vecteur de densité de flux et \vec{n} le vecteur unitaire normal extérieur au domaine Ω .

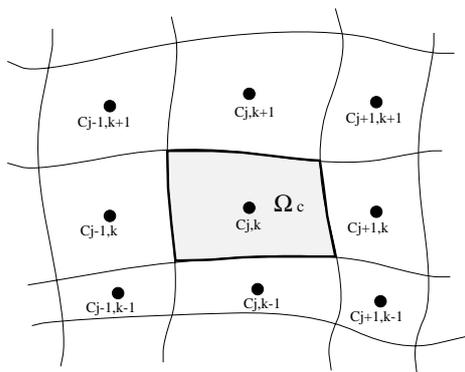


FIG. 3.1 - Maillage irrégulier, cellule $\Omega_{c,j,k}$

L'écriture des schémas de type RBC dans des maillages irréguliers est basée sur une formulation intégrale en volumes finis classique [27]. Soient $\Omega_{c_{j,k}}$ la cellule centrée sur le point C du maillage indicé (j, k) , $\partial\Omega_{c_{j,k}}$ son contour fermé, $\Gamma_{c_{j+\frac{1}{2},k}}$, $\Gamma_{c_{j-\frac{1}{2},k}}$, $\Gamma_{c_{j,k+\frac{1}{2}}}$ et $\Gamma_{c_{j,k-\frac{1}{2}}}$ ses faces (voir FIG. 3.1 pour la définition de la géométrie). On a :

$$\partial\Omega_{c_{j,k}} = \Gamma_{c_{j+\frac{1}{2},k}} \cup \Gamma_{c_{j-\frac{1}{2},k}} \cup \Gamma_{c_{j,k+\frac{1}{2}}} \cup \Gamma_{c_{j,k-\frac{1}{2}}}$$

On note $w_{j,k}^n$ la moyenne du vecteur d'état w dans la cellule $\Omega_{c_{j,k}}$ au temps $t = n\Delta t$:

$$w_{j,k} = \frac{1}{S_{\Omega_{c_{j,k}}}} \iint_{\Omega_{c_{j,k}}} w d\Omega \quad \text{où} \quad S_{\Omega_{c_{j,k}}} = \iint_{\Omega_{c_{j,k}}} d\Omega \quad (3.2)$$

La formulation intégrale d'un système de lois de conservation sur une cellule $\Omega_{c_{j,k}}$ peut alors s'écrire :

$$S_{\Omega_{c_{j,k}}} \frac{d}{dt} w_{j,k} + \int_{\Gamma_{c_{j+\frac{1}{2},k}}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{c_{j-\frac{1}{2},k}}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{c_{j,k+\frac{1}{2}}}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\Gamma + \int_{\Gamma_{c_{j,k-\frac{1}{2}}}} \vec{\phi} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0 \quad (3.3)$$

Un schéma construit dans une approche volumes finis classique approche alors le bilan exact (3.1) sous la forme (3.3) où les flux du système de lois de conservation sont remplacés par une approximation discrète.

3.2.2 Formulation du schéma RBV en maillage irrégulier

La formulation volumes finis classique n'est pas celle qui a été retenue pour la formulation du schéma RBV en maillage irrégulier. En effet, la possibilité d'écrire le schéma RBV sous la forme $\Lambda \tilde{r} = 0$ (1.65) joue un rôle essentiel pour la préservation de la vorticité, il nous semble donc indispensable que la formulation du schéma RBV en maillage irrégulier puisse aussi s'écrire sous la forme $\Lambda \tilde{r} = 0$. La formulation que nous proposons se décompose ainsi en deux étapes, une première étape d'évaluation du résidu complet suivie d'une seconde étape où est appliqué un opérateur Λ adapté pour les maillages irréguliers.

Première étape

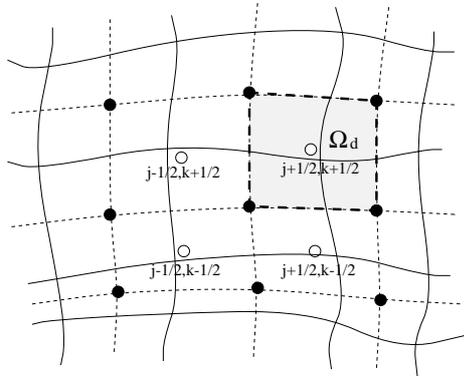


FIG. 3.2 - Maillage irrégulier, cellule $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$

Soit $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$ la cellule décalée dont le contour fermé $\partial\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$ a pour sommets les centres des cellules indicés (j, k) , $(j+1, k)$, $(j, k+1)$ et $(j+1, k+1)$ (voir FIG. 3.2). Les faces de la cellule $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$ sont notées $\Gamma_{d_{j+1,k+\frac{1}{2}}}$, $\Gamma_{d_{j,k+\frac{1}{2}}}$, $\Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k+1}}$ et $\Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k}}$. Le contour de la cellule décalée $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$ est défini par :

$$\partial\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} = \Gamma_{d_{j+1,k+\frac{1}{2}}} \cup \Gamma_{d_{j,k+\frac{1}{2}}} \cup \Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k+1}} \cup \Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k}}$$

On note $r_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^n$ la moyenne du résidu complet r dans la cellule décalée $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$ au temps $t = n\Delta t$:

$$r_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \iint_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} r \, d\Omega \quad \text{où} \quad S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} = \iint_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}} d\Omega \quad (3.4)$$

On a alors sur la cellule $\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}$:

$$r_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{S_{\Omega_d}} \frac{d}{dt} \iint_{\Omega_d} w \, d\Omega + \frac{1}{S_{\Omega_d}} \oint_{\partial\Omega_d} \vec{\phi} \cdot \vec{n} \, d\Gamma \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \quad (3.5)$$

La valeur moyenne du résidu complet est approchée par une formulation volumes finis classique :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \left[\left(S_{\Omega_d} \mu_1 \mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} \right. \\ & + |\Gamma_{d_{j+1,k+\frac{1}{2}}}| \left(\mu_2 \vec{\phi} \right)_{j+1,k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n}_{j+1,k+\frac{1}{2}} + |\Gamma_{d_{j,k+\frac{1}{2}}}| \left(\mu_2 \vec{\phi} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} \cdot \vec{n}_{j,k+\frac{1}{2}} \\ & \left. + |\Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k+1}}| \left(\mu_1 \vec{\phi} \right)_{j+\frac{1}{2},k+1} \cdot \vec{n}_{j+\frac{1}{2},k+1} + |\Gamma_{d_{j+\frac{1}{2},k}}| \left(\mu_1 \vec{\phi} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \cdot \vec{n}_{j+\frac{1}{2},k} \right] \quad (3.6) \end{aligned}$$

L'approximation \tilde{r} du résidu complet r est donc donnée par la relation :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = & \frac{1}{4\Delta t} \left[\nabla w_{j+1,k+1} + \nabla w_{j+1,k} + \nabla w_{j,k+1} + \nabla w_{j,k} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(f_{j+1,k+1} + f_{j+1,k})(y_{j+1,k+1} - y_{j+1,k}) - (f_{j,k+1} + f_{j,k})(y_{j,k+1} - y_{j,k})}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{j+1,k+1} + g_{j+1,k})(x_{j+1,k+1} - x_{j+1,k}) - (g_{j,k+1} + g_{j,k})(x_{j,k+1} - x_{j,k})}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \right] \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{(f_{j+1,k+1} + f_{j,k+1})(y_{j+1,k+1} - y_{j,k+1}) - (f_{j+1,k} + f_{j,k})(y_{j+1,k} - y_{j,k})}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \right] \\ & + \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{j+1,k+1} + g_{j,k+1})(x_{j+1,k+1} - x_{j,k+1}) - (g_{j+1,k} + g_{j,k})(x_{j+1,k} - x_{j,k})}{S_{\Omega_{d_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}}} \right] \quad (3.7) \end{aligned}$$

Deuxième étape

La deuxième étape de la formulation du schéma RBV en maillage irrégulier consiste à appliquer un opérateur Λ aux approximations du résidu complet évaluées aux centres des cellules décalées Ω_d . Les rôles de l'opérateur Λ sont d'apporter la dissipation nécessaire au schéma et de permettre le retour à une approximation du vecteur d'état aux centres des cellules Ω_c .

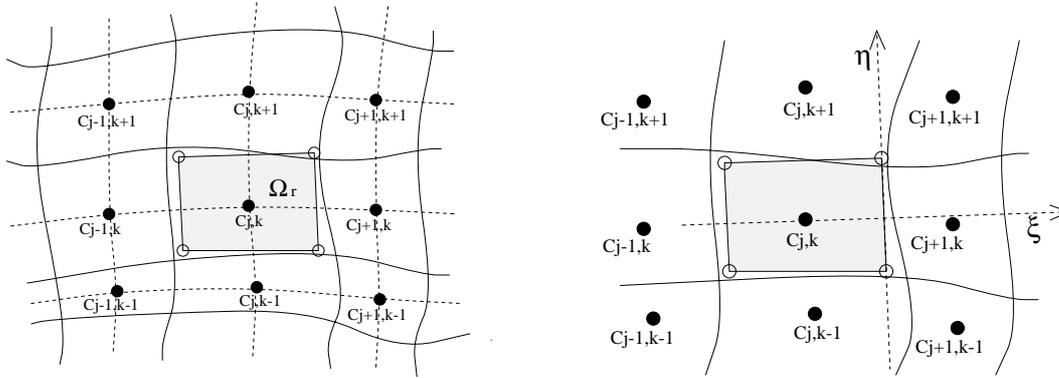


FIG. 3.3 - Maillage irrégulier, cellule $\Omega_{r,j,k}$

Suivant une analogie avec les méthodes volumes finis classiques, l'opérateur Λ a d'abord été construit en considérant une cellule du maillage Ω_c . Cet opérateur est appliqué aux résidus \tilde{r} , or on voit qu'en maillage irrégulier, FIG. 3.1, les sommets des cellules du maillage ne coïncident pas avec les centres des cellules décalées Ω_d où sont approchés les résidus \tilde{r} . Afin de préserver la précision du schéma RBV et de conserver l'équivalence $\Lambda\tilde{r} = 0 \Leftrightarrow \tilde{r} = 0$, l'opérateur Λ a été modifié en considérant une cellule Ω_r , FIG. 3.3, dont les sommets sont les centres des cellules décalées Ω_d . Des essais comparatifs ont montré la plus grande précision et la plus grande robustesse de cette deuxième approche, que nous avons donc retenue.

Soient $\Omega_{r,j,k}$ la cellule centrée sur le point C du maillage indicé (j,k) , $\partial\Omega_{r,j,k}$ son contour fermé, $\Gamma_{r,j+\frac{1}{2},k}$, $\Gamma_{r,j-\frac{1}{2},k}$, $\Gamma_{r,j,k+\frac{1}{2}}$ et $\Gamma_{r,j,k-\frac{1}{2}}$ ses faces (voir FIG. 3.3). On définit :

$$S_{\Omega_{r,j,k}} = \iint_{\Omega_{c,j,k}} d\Omega \quad (3.8)$$

Soit $\vec{\xi}$ la normale extérieure sur la frontière $\partial\Omega_{r,j,k}$, on définit une base orthonormée directe $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ pour chaque face de la cellule Ω_r (voir FIG. 3.3).

Appliqué au résidu exact, l'opérateur Λ en maillage irrégulier approche :

$$\iint_{\Omega_{r,j,k}} r d\Omega - \frac{1}{2} \oint_{\partial\Omega_r} h \Phi_{\vec{\xi}} r d\Gamma = 0 \quad (3.9)$$

Cette formule intégrale peut aussi s'écrire :

$$\iint_{\Omega_{r,j,k}} r d\Omega - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{r,j+\frac{1}{2},k}} h \Phi_{\vec{\xi}} r d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{r,j-\frac{1}{2},k}} h \Phi_{\vec{\xi}} r d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{r,j,k+\frac{1}{2}}} h \Phi_{\vec{\xi}} r d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_{r,j,k-\frac{1}{2}}} h \Phi_{\vec{\xi}} r d\Gamma = 0 \quad (3.10)$$

où h est une distance et $\Phi_{\vec{\xi}}$ une matrice de dissipation dépendant de l'orientation de la face et des caractéristiques de l'écoulement.

Appliqué au résidu approché \tilde{r} , l'opérateur Λ en maillage irrégulier est défini par :

$$\begin{aligned}
 (\Lambda \tilde{r})_{j,k} &= \left(S_{\Omega_r} \mu_1 \mu_2 \tilde{r} \right)_{j,k} \\
 &\quad - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k} C_{j+1,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\vec{\xi}} \mu_2 \tilde{r} \right)_{j+\frac{1}{2},k} - \frac{|\overrightarrow{C_{j-1,k} C_{j,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\vec{\xi}} \mu_2 \tilde{r} \right)_{j-\frac{1}{2},k} \\
 &\quad - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k} C_{j,k+1}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\vec{\xi}} \mu_1 \tilde{r} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k-1} C_{j,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\vec{\xi}} \mu_1 \tilde{r} \right)_{j,k-\frac{1}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

où les matrices de dissipation $\Phi_{\vec{\xi}}$ sont celles proposées dans la thèse de HUANG [32] pour les schémas à pas de temps caractéristique matriciel. Elles sont également utilisées pour les schémas de type RBC en maillage irrégulier. Par exemple, une matrice $\Phi_{\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}}$ est définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \Phi_{\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}} = \left(T_{\mathcal{J}\vec{\xi}} \text{Diag} \left[\varphi_{\mathcal{J}\vec{\xi}}^{(i)} \right] T_{\mathcal{J}\vec{\xi}}^{-1} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \\
 \varphi_{\mathcal{J}\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}}^{(i)} = \text{sgn} \left(a_{\mathcal{J}\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}}^{(i)} \right) \varphi_{\mathcal{J}\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}}^{(i)} \\
 \varphi_{\mathcal{J}\vec{\xi}_{j+\frac{1}{2},k}}^{(i)} = \min \left(1, \frac{|\Gamma_r|_{j+\frac{1}{2},k}}{|\overrightarrow{C_{j,k} C_{j+1,k}}|} \frac{|a_{\mathcal{J}\vec{\xi}}^{(i)}|_{j+\frac{1}{2},k}}{\rho(a_{\mathcal{J}\vec{\eta}}^{(i)})_{j+\frac{1}{2},k}} \right)
 \end{array} \right. \tag{3.12}$$

avec $T_{\mathcal{J}\vec{\xi}}$, $T_{\mathcal{J}\vec{\xi}}^{-1}$ les matrices de passage à la forme diagonale et $a_{\mathcal{J}\vec{\xi}}^{(i)}$ les valeurs propres de la matrice jacobienne du flux suivant la direction du vecteur unitaire $\vec{\xi}$. $\rho(a_{\mathcal{J}\vec{\eta}}^{(i)})$ désigne le rayon spectral¹ de la matrice jacobienne du flux suivant la direction du vecteur unitaire $\vec{\eta}$.

1. Ceci n'est pas tout à fait la dissipation des schémas à pas de temps caractéristique et de type RBC puisque nous avons minimisé la dissipation en remplaçant le minimum des valeurs propres au dénominateur de $\varphi^{(i)}$ par le rayon spectral.

Formulation en pas de temps dual du schéma RBV en maillage irrégulier

Le schéma RBV en maillage totalement irrégulier est résolu par une méthode de pas de temps dual. Le schéma entièrement discrétisé s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \left(S_{\Omega_r} \frac{\Delta w^{n,m}}{\Delta \tau} \right)_{j,k} + (\Lambda \tilde{r})_{j,k}^{n,m+1} = 0 \\
 \\
 (\Lambda \tilde{r})_{j,k} = \left(S_{\Omega_r} \mu_1 \mu_2 \tilde{r} \right)_{j,k} \\
 \quad - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k} C_{j+1,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\xi} \mu_2 \tilde{r} \right)_{j+\frac{1}{2},k} - \frac{|\overrightarrow{C_{j-1,k} C_{j,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\xi} \mu_2 \tilde{r} \right)_{j-\frac{1}{2},k} \\
 \quad - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k} C_{j,k+1}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\xi} \mu_1 \tilde{r} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} - \frac{|\overrightarrow{C_{j,k-1} C_{j,k}}|}{2} \left(|\Gamma_r| \Phi_{\xi} \mu_1 \tilde{r} \right)_{j,k-\frac{1}{2}} \\
 \\
 \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = \frac{1}{4\Delta t} \left[\nabla w_{j+1,k+1} + \nabla w_{j+1,k} + \nabla w_{j,k+1} + \nabla w_{j,k} \right] \\
 \quad + \frac{1}{2} \left[\frac{(f_{j+1,k+1} + f_{j+1,k})(y_{j+1,k+1} - y_{j+1,k}) - (f_{j,k+1} + f_{j,k})(y_{j,k+1} - y_{j,k})}{S_{\Omega_d j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \\
 \quad - \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{j+1,k+1} + g_{j+1,k})(x_{j+1,k+1} - x_{j+1,k}) - (g_{j,k+1} + g_{j,k})(x_{j,k+1} - x_{j,k})}{S_{\Omega_d j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \\
 \quad - \frac{1}{2} \left[\frac{(f_{j+1,k+1} + f_{j,k+1})(y_{j+1,k+1} - y_{j,k+1}) - (f_{j+1,k} + f_{j,k})(y_{j+1,k} - y_{j,k})}{S_{\Omega_d j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \\
 \quad + \frac{1}{2} \left[\frac{(g_{j+1,k+1} + g_{j,k+1})(x_{j+1,k+1} - x_{j,k+1}) - (g_{j+1,k} + g_{j,k})(x_{j+1,k} - x_{j,k})}{S_{\Omega_d j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}} \right] \\
 \\
 (\nabla w)_{j,k}^{n,m+1} = \left(\frac{3w^{n,m+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2} \right)_{j,k}
 \end{array} \right. \tag{3.13}$$

3.3 Filtrage en maillage irrégulier

Les opérateurs de filtrage, présentés section 2.4.4 et mis en œuvre pour stabiliser le schéma de résolution en pas de temps dual, ne conservent pas leur ordre de précision lorsqu'ils sont employés sur des maillages irréguliers. D'autre part, ces filtres sont des opérateurs 1-D appliqués successivement suivant chaque direction (j et k), ils ne peuvent donc pas prendre en compte les variations de courbure du maillage.

Dans le cas des filtres explicites (2.39), il est toutefois possible de prendre en compte les distances pour conserver l'ordre de précision du filtre sur un maillage cartésien irrégulier. Comme en maillage régulier, un filtre d'ordre $p = 2N$ a toujours un support spatial de $(2N + 1)$ points mais la perte de symétrie de l'opérateur due aux irrégularités du maillage impose de déterminer $(2N + 1)$ coefficients a_n contre $(N + 1)$ dans le cas régulier. Il faut alors résoudre localement un système linéaire de $(2N + 1)$ équations pour chaque dimension du maillage.

Une équation est donnée par la condition sur le module de la fonction de transfert du filtre :

$$\sum_{n=-N}^N (-1)^{|n|} a_n = 0 \quad (3.14)$$

$2N$ équations sont données par des développements de TAYLOR à l'ordre $2N$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \dots \\ 0 & h_1 & -h_{-1} & h_2 & -h_{-2} & \dots \\ 0 & h_1^2 & (-h_{-1})^2 & h_2^2 & (-h_{-2})^2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots \\ 0 & h_1^{2N-1} & h_{-1}^{2N-1} & h_2^{2N-1} & h_{-2}^{2N-1} & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_{-1} \\ a_2 \\ a_{-2} \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

où $h_i = |\overrightarrow{C_{j,k}C_{j+i,k}}|$ (respectivement $h_i = |\overrightarrow{C_{j,k}C_{j,k+i}}|$) pour un filtre appliqué suivant la direction j (respectivement suivant la direction k), FIG. 3.4.

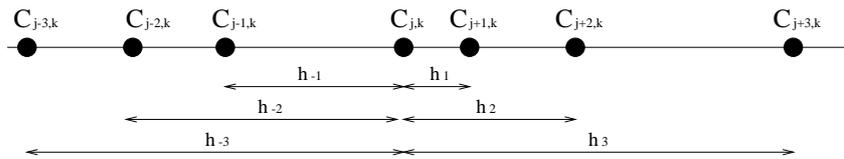


FIG. 3.4 - Support des filtres en maillage irrégulier

Ce traitement peut s'avérer coûteux en temps de calcul si le filtre est d'ordre élevé. Il ne sera donc appliqué que sur des maillages fortement irréguliers. La perte de précision est peu effective sur des maillages curvilignes assez réguliers.

3.4 Précision du schéma RBV en maillage irrégulier

3.4.1 Précision du schéma RBV en maillage cartésien irrégulier

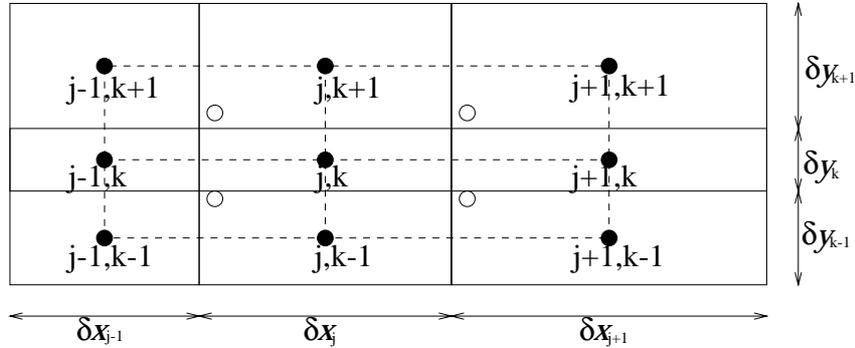


FIG. 3.5 - Maillage cartésien irrégulier

En maillage cartésien irrégulier, FIG. 3.5, l'approximation (3.7) du résidu complet sur la cellule décalée d'indice $(j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2})$ se simplifie pour devenir :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{4\Delta t} (\nabla w_{j+1, k+1} + \nabla w_{j, k+1} + \nabla w_{j, k} + \nabla w_{j+1, k}) \\ &\quad + \frac{1}{\delta x_{j+1} + \delta x_j} (f_{j+1, k+1} + f_{j+1, k} - f_{j, k+1} - f_{j, k}) \\ &\quad + \frac{1}{\delta y_{j+1} + \delta y_j} (g_{j+1, k+1} + g_{j, k+1} - g_{j+1, k} - g_{j, k}) \end{aligned} \quad (3.16)$$

En posant $h = \max(\delta x_{j-1}, \delta x_j, \delta x_{j+1}, \delta y_{k-1}, \delta y_k, \delta y_{k+1})$, les développements de TAYLOR en espace par rapport au centre d'une cellule d'indice (j, k) d'une quantité φ sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_{j, k} = \varphi \\ \varphi_{j+1, k} = \varphi + \frac{\delta x_{j+1} + \delta x_j}{2} \varphi_x + \frac{(\delta x_{j+1} + \delta x_j)^2}{8} \varphi_{xx} + O(h^3) \\ \varphi_{j, k+1} = \varphi + \frac{\delta y_{k+1} + \delta y_k}{2} \varphi_y + \frac{(\delta y_{k+1} + \delta y_k)^2}{8} \varphi_{yy} + O(h^3) \\ \varphi_{j+1, k+1} = \varphi + \frac{\delta x_{j+1} + \delta x_j}{2} \varphi_x + \frac{\delta y_{k+1} + \delta y_k}{2} \varphi_y + \frac{(\delta x_{j+1} + \delta x_j)^2}{8} \varphi_{xx} \\ \quad + \frac{(\delta y_{k+1} + \delta y_k)^2}{8} \varphi_{yy} + \frac{(\delta x_{j+1} + \delta x_j)(\delta y_{k+1} + \delta y_k)}{4} \varphi_{xy} + O(h^3) \end{array} \right. \quad (3.17)$$

Le développement à l'ordre 2 autour du point $\bullet_{j, k}$ du résidu $\tilde{r}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}$ est alors :

$$\begin{aligned} \tilde{r}_{j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}^{n+1} &= w_t + f_x + g_y + \frac{\delta x_{j+1} + \delta x_j}{4} (w_t + f_x + g_y)_x + \frac{\delta y_{k+1} + \delta y_k}{4} (w_t + f_x + g_y)_y \\ &\quad + O(\Delta t^2, h^2) \end{aligned} \quad (3.18)$$

De la même manière, on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}^{n+1} = w_t + f_x + g_y - \frac{\delta x_j + \delta x_{j-1}}{4} (w_t + f_x + g_y)_x + \frac{\delta y_{k+1} + \delta y_k}{4} (w_t + f_x + g_y)_y \\ \quad + O(\Delta t^2, h^2) \\ \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+1} = w_t + f_x + g_y + \frac{\delta x_{j+1} + \delta x_j}{4} (w_t + f_x + g_y)_x - \frac{\delta y_k + \delta y_{k-1}}{4} (w_t + f_x + g_y)_y \\ \quad + O(\Delta t^2, h^2) \\ \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}^{n+1} = w_t + f_x + g_y - \frac{\delta x_j + \delta x_{j-1}}{4} (w_t + f_x + g_y)_x - \frac{\delta y_k + \delta y_{k-1}}{4} (w_t + f_x + g_y)_y \\ \quad + O(\Delta t^2, h^2) \end{array} \right. \quad (3.19)$$

De même que \tilde{r} , l'opérateur Λ se simplifie en maillage cartésien irrégulier. L'expression développée de $\Lambda \tilde{r}$ est alors :

$$\begin{aligned} (\Lambda \tilde{r})_{j,k} &= \delta x_j \delta y_k \frac{\tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{4} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(\delta x_{j+1} + \delta x_j)}{2} \frac{(\delta y_{k+1} + 2\delta y_k + \delta y_{k-1})}{4} \Phi_{j+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(\delta x_j + \delta x_{j-1})}{2} \frac{(\delta y_{k+1} + 2\delta y_k + \delta y_{k-1})}{4} \Phi_{j-\frac{1}{2}} \frac{\tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{2} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{(\delta y_{k+1} + \delta y_k)}{2} \frac{(\delta x_{j+1} + 2\delta x_j + \delta x_{j-1})}{4} \Phi_{k+\frac{1}{2}} \frac{\tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}}{2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{(\delta y_k + \delta y_{k-1})}{2} \frac{(\delta x_{j+1} + 2\delta x_j + \delta x_{j-1})}{4} \Phi_{k-\frac{1}{2}} \frac{\tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}} + \tilde{r}_{j-\frac{1}{2},k-\frac{1}{2}}}{2} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Une multiplication des deux membres de l'expression (3.20) par l'inverse de la surface de la cellule d'indice (j, k) et des développements de TAYLOR nous donnent l'erreur de troncature, au sens des différences finies, du schéma RBV en maillage cartésien irrégulier. Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \epsilon_2 &= r + \frac{1}{8}(\delta x_{j+1} - \delta x_{j-1})r_x + \frac{1}{8}(\delta y_{k+1} - \delta y_{k-1})r_y + O(\Delta t^2, h^2) \\ &\quad - \frac{(\delta x_{j+1} + \delta x_j)(\delta y_{k+1} + 2\delta y_k + \delta y_{k-1})}{16\delta x_j \delta y_k} \Phi_{j+\frac{1}{2}} \left(r + \frac{\delta x_{j+1} + \delta x_j}{4} r_x + \frac{\delta y_{k+1} - \delta y_{k-1}}{8} r_y + O(\Delta t^2, h^2) \right) \\ &\quad + \frac{(\delta x_j + \delta x_{j-1})(\delta y_{k+1} + 2\delta y_k + \delta y_{k-1})}{16\delta x_j \delta y_k} \Phi_{j-\frac{1}{2}} \left(r + \frac{\delta x_j + \delta x_{j-1}}{4} r_x + \frac{\delta y_{k+1} - \delta y_{k-1}}{8} r_y + O(\Delta t^2, h^2) \right) \\ &\quad - \frac{(\delta y_{k+1} + \delta y_k)(\delta x_{j+1} + 2\delta x_j + \delta x_{j-1})}{16\delta x_j \delta y_k} \Phi_{k+\frac{1}{2}} \left(r + \frac{\delta x_{j+1} - \delta x_{j-1}}{8} r_x + \frac{\delta y_{k+1} + \delta y_k}{4} r_y + O(\Delta t^2, h^2) \right) \\ &\quad + \frac{(\delta y_k + \delta y_{k-1})(\delta x_{j+1} + 2\delta x_j + \delta x_{j-1})}{16\delta x_j \delta y_k} \Phi_{k-\frac{1}{2}} \left(r + \frac{\delta x_{j+1} - \delta x_{j-1}}{8} r_x + \frac{\delta y_k + \delta y_{k-1}}{4} r_y + O(\Delta t^2, h^2) \right) \end{aligned} \quad (3.21)$$

Pour une solution exacte d'un problème instationnaire, on a $r = 0$. L'erreur de troncature du schéma RBV en maillage cartésien irrégulier devient donc :

$$\epsilon_2 = O(\Delta t^2, h^2)$$

(3.22)

Le schéma RBV est strictement d'ordre 2 au sens des différences finies, en maillage cartésien irrégulier.

3.4.2 Précision du schéma RBV en maillage quelconque

La précision du schéma RBV en maillage quelconque ne dépend que de la précision avec laquelle le résidu complet est approché sur les cellules décalées. Par conséquent, les développements de TAYLOR effectués dans ce paragraphe seront calculés en considérant le centre de la cellule décalée $\Omega_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$. Le calcul de $\tilde{r}_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$ est décomposé en deux étapes. L'intégration surfacique des termes temporels et l'intégration de $\vec{\phi} \cdot \vec{n}$ sur le contour $\partial\Omega_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}}$.

1. Les développements de TAYLOR de l'intégration surfacique des termes temporels donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{\Omega_d}} \left(S_{\Omega_d} \mu_1 \mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} &= w_t + \frac{1}{4} (x_{j+1,k+1} + x_{j+1,k} + x_{j,k+1} + x_{j,k} - 4x_r) w_{tx} \\ &+ \frac{1}{4} (y_{j+1,k+1} + y_{j+1,k} + y_{j,k+1} + y_{j,k} - 4y_r) w_{ty} \\ &+ O(\Delta t^2, h^2) \end{aligned} \quad (3.23)$$

Or par construction du maillage, nous avons :

$$\begin{cases} x_r &= (x_{j+1,k+1} + x_{j+1,k} + x_{j,k+1} + x_{j,k})/4 \\ y_r &= (y_{j+1,k+1} + y_{j+1,k} + y_{j,k+1} + y_{j,k})/4 \end{cases} \quad (3.24)$$

D'où :

$$\mu_1 \mu_2 \frac{\nabla w}{\Delta t} \Big|_{j+\frac{1}{2},k+\frac{1}{2}} = w_t + O(\Delta t^2, h^2) \quad (3.25)$$

2. L'intégration de $\vec{\phi} \cdot \vec{n}$ sur le contour de la cellule décalée est décomposée pour les fonctions de flux f et g . Les développements de TAYLOR de l'intégration de $f\Delta y$ sur le contour donnent :

$$\begin{aligned} \frac{1}{S_{\Omega_d}} \sum_{\partial\Omega_d} f \Delta y &= f_x \\ &+ \frac{f_{xx}}{2S_{\Omega_d}} \left[\frac{(x_{j+1,k} + x_{j,k+1})}{2} (x_{j+1,k} - x_{j,k+1})(y_{j+1,k+1} - y_{j,k}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(x_{j+1,k+1} + x_{j,k})}{2} (x_{j+1,k+1} - x_{j,k})(y_{j,k+1} - y_{j+1,k}) - 2S_{\Omega_d} \times x_r \right] \\ &+ \frac{f_{xy}}{2S_{\Omega_d}} \left[\frac{(y_{j+1,k+1} - y_{j,k})(y_{j+1,k} - y_{j,k+1})}{2} (x_{j+1,k} - x_{j,k} - (x_{j+1,k+1} - x_{j,k+1})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y_{j+1,k} + y_{j,k+1})}{2} (y_{j+1,k+1} - y_{j,k})(x_{j+1,k} - x_{j,k+1}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{(y_{j+1,k+1} + y_{j,k})}{2} (y_{j+1,k} - y_{j,k+1})(x_{j+1,k+1} - x_{j,k}) + 2S_{\Omega_d} \times y_r \right] \\ &+ \frac{f_{yy}}{2S_{\Omega_d}} \left[\frac{(y_{j+1,k+1} - y_{j,k})}{2} (y_{j+1,k} - y_{j,k+1})(y_{j,k+1} - y_{j,k} - (y_{j+1,k+1} - y_{j+1,k})) \right. \\ &\quad \left. + O(h^2) \right] \end{aligned} \quad (3.26)$$

Pour un quadrilatère quelconque, l'intégrale de la fonction de flux f par une méthode de type « *cell-vertex* » sur le contour d'une cellule est donc approchée à l'ordre 1 au sens des différences finies sauf si les coordonnées des coins de la cellule satisfont les relations :

$$\begin{cases} x_{j+1,k} + x_{j,k+1} = x_r \\ x_{j+1,k+1} + x_{j,k} = x_r \\ x_{j+1,k} - x_{j,k} = x_{j+1,k+1} - x_{j,k+1} \\ y_{j+1,k} + y_{j,k+1} = y_r \\ y_{j+1,k+1} + y_{j,k} = y_r \\ y_{j,k+1} - y_{j,k} = y_{j+1,k+1} - y_{j+1,k} \end{cases} \quad (3.27)$$

Nous retrouvons ici un résultat démontré (et étendu aux polygones réguliers) par ROE [78], pour un quadrilatère, une méthode volumes finis de type « *cell-vertex* » n'est d'ordre 2 que si la cellule d'intégration est un parallélogramme.

Le schéma RBV est strictement d'ordre 2 au sens des différences finies si les lignes du maillage sont des droites parallèles, FIG. 3.6.

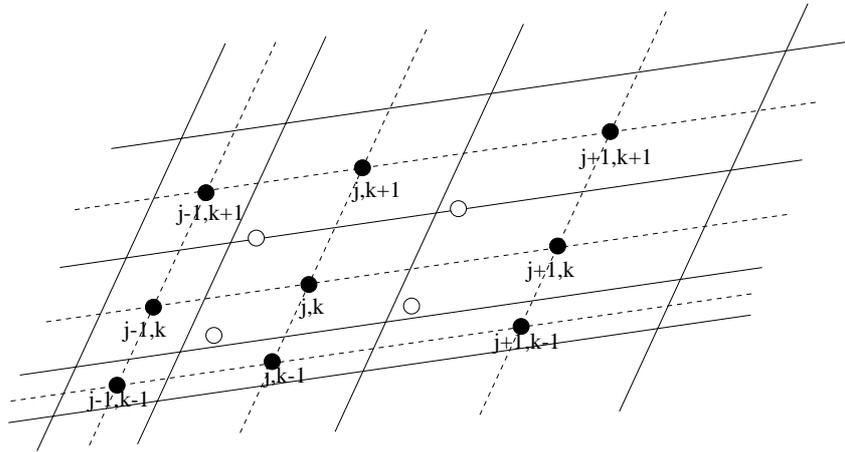


FIG. 3.6 - *Maillage parallèle irrégulier*

Cependant en s'appuyant sur des résultats sur l'ordre de convergence des méthodes de volumes finis, on peut utiliser une définition plus pertinente de la précision basée sur des travaux de GALLOUËT [22] et REZGUI [75]. Un schéma est « précis à l'ordre p au sens des volumes finis » si le flux numérique F sur une face approche le flux exact à l'ordre p , c'est-à-dire :

$$F_{j+\frac{1}{2},k} = \int_{\Gamma_{j+\frac{1}{2},k}} \vec{\Phi} \cdot \vec{n} \, d\Gamma + O(h^p) \quad (3.28)$$

Pour les choix des contours d'intégration retenus pour le schéma RBV, celui-ci est précis à l'ordre 2 au sens des volumes finis en maillage quelconque.

3.5 Schéma simplifié pour les problèmes stationnaires

Les calculs de problèmes instationnaires doivent être initialisés par une condition initiale. Celle-ci est rarement analytique et provient donc généralement du calcul numérique d'un problème stationnaire. Ceci est particulièrement vrai pour les calculs d'aérodynamique.

La solution utilisée pour initialiser les calculs d'écoulements instationnaires effectués avec le schéma RBV doit correspondre à la solution d'un problème stationnaire du schéma RBV. Le schéma numérique utilisé pour le calcul de la condition initiale doit donc avoir la même discrétisation spatiale que le schéma RBV. Un tel schéma peut être obtenu à partir de l'expression (3.13) en posant $\nabla w = 0$. Le pas de temps dual joue alors le rôle du pas de temps physique pour la convergence vers un état stationnaire et le schéma obtenu est une extension (nouvelle) du schéma RBVs (1.55) aux maillages irréguliers. Le schéma RBVs n'est pas dissipatif au sens de KREISS. Comme pour le schéma en pas de temps dual, nous ajoutons un filtrage du vecteur d'état en fin d'itération pour assurer la dissipation des plus grands nombres d'onde réduits. La précision spatiale de ce schéma en maillage irrégulier sera vérifier numériquement, ainsi que l'influence du filtrage pour le calcul d'une solution stationnaire. Le schéma sera ensuite appliqué à des calculs d'écoulements aérodynamiques stationnaires.

3.5.1 Advection circulaire scalaire en maillages irréguliers

Le cas test pour l'évaluation de la précision spatiale et de la vitesse de convergence des schémas RBV et RBVs est tiré de [68]. Il s'agit d'une advection linéaire circulaire autour du point $(x = \frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2})$ d'un profil gaussien sur un domaine carré $[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}] \times [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]$. Plus précisément, nous cherchons une solution stationnaire du problème aux conditions aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial t} + \left(y + \frac{1}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial x} + \left(x - \frac{1}{2}\right) \frac{\partial w}{\partial y} = 0, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}; \\ w(x, y, 0) = 0, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}; \\ w(x, -\frac{1}{2}, t) = \exp(-50(x - \frac{1}{2})^2), & -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}; t \geq 0; \\ w(x, \frac{1}{2}, t) = 0, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}; t \geq 0; \\ w(-\frac{1}{2}, y, t) = 0, & -\frac{1}{2} < y < \frac{1}{2}; t \geq 0. \end{array} \right. \quad (3.29)$$

Sur la frontière $(x = \frac{1}{2}; -\frac{1}{2} \leq y \leq \frac{1}{2})$, aucune condition n'est imposée, les valeurs sur la frontière sont obtenues par extrapolation des valeurs à l'intérieur du domaine de calcul. La solution stationnaire exacte est $w = \text{const}$ sur tout cercle de centre $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2})$.

Trois types de maillages sont utilisés pour les calculs :

1. une série de maillages cartésiens carrés doit permettre de confirmer la précision à l'ordre 2 du schéma en maillage régulier et servir de référence ;
2. une série de maillages cartésiens aléatoires pour comparer la précision effective du schéma à la théorie qui donne le schéma précis à l'ordre 2 ;
3. une série de maillages ondulants pour évaluer la précision du schéma sur des maillages curvilignes.

Chaque série comprend trois maillages de 40×40 , 80×80 et 160×160 cellules.

Les isovaleurs des solutions du schéma RBVs pour l'advection circulaire 2-D sur les trois types de maillages sont représentées FIG. 3.7. La solution du schéma RBVs est régulière pour les trois maillages, notamment sur le maillage cartésien irrégulier où les variations de taille des cellules sont importantes et brutales. La précision théorique du schéma en maillage irrégulier est confirmée numériquement. Les normes L_2 de l'erreur entre les solutions du schéma et la solution exacte sont représentées FIG. 3.8 (à gauche) pour les maillages des trois séries : l'ordre de précision calculé numériquement correspond à l'ordre de précision théorique, c-à-d. 2, sur les trois séries de maillages.

La phase implicite du schéma est résolue avec deux itérations d'une méthode de relaxation par lignes et colonnes de type GAUSS-SEIDEL, le CFL vaut 100. L'évolution de l'erreur, FIG. 3.8 (au centre) montre que l'état stationnaire est atteint au bout de 10 itérations sur les maillages cartésiens carrés et cartésiens irréguliers. Par contre, l'évolution de la norme L_2 de $\Delta w/\Delta t$, FIG. 3.8 (à droite), montre que la vitesse de convergence en résidu est lente quand le schéma est utilisé sans filtre.

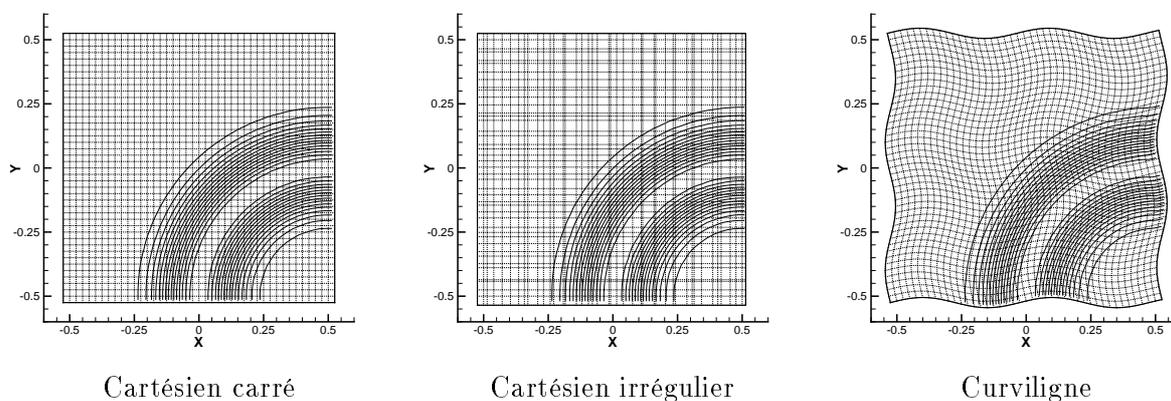


FIG. 3.7 - Advection circulaire 2-D, isovaleurs de la solution du schéma RBVs sur des différents maillages de 40×40 cellules.

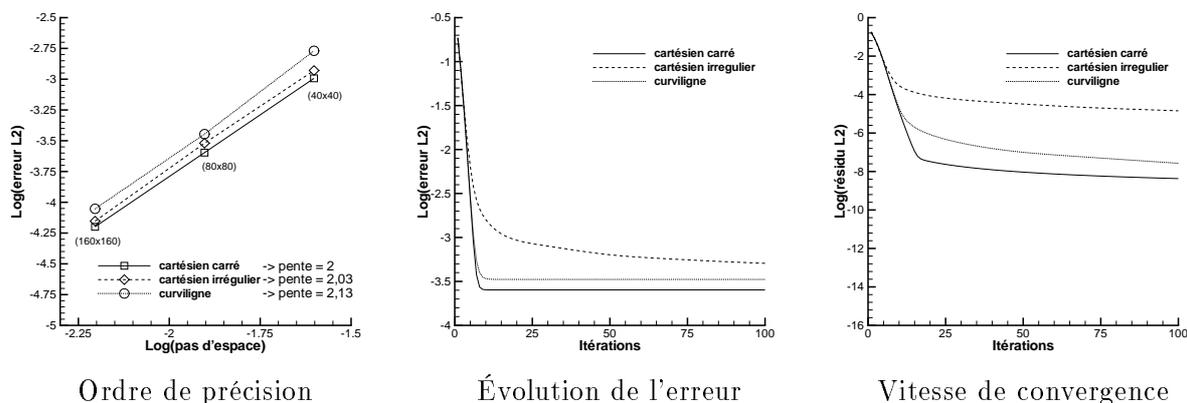


FIG. 3.8 - Ordre de précision spatiale des schémas RBVs et RBV sur différents types de maillages (à gauche). Évolution de l'erreur et vitesse de convergence sur des maillages de 80×80 cellules pour une advection circulaire 2-D (au centre et à droite).

3.5.2 Influence du filtrage pour le calcul de solutions stationnaires

La faible vitesse de convergence sur la norme L_2 de $\Delta w/\Delta t$ du schéma RBVs tient à sa non dissipation de certains nombres d'onde, en particulier pour des écoulements diagonaux. L'adjonction d'un filtre appliqué en fin d'itération doit permettre d'augmenter la vitesse de convergence du schéma en lui apportant la dissipation qui lui manque. La conservation de l'ordre de précision du schéma est garantie par l'utilisation de filtres d'ordre élevé.

On peut observer, FIG. 3.9, l'influence du filtrage sur la vitesse de convergence et la précision du schéma RBVs pour un calcul d'advection circulaire scalaire 2-D sur un maillage cartésien carré. Pour un nombre CFL égal à 100, le filtrage permet d'atteindre rapidement l'état stationnaire alors que la courbe de convergence du schéma sans filtre présente une stagnation autour de 10^{-8} . Les filtres n'altèrent pas la précision de la solution stationnaire comme le montre l'évolution de l'erreur FIG. 3.9.

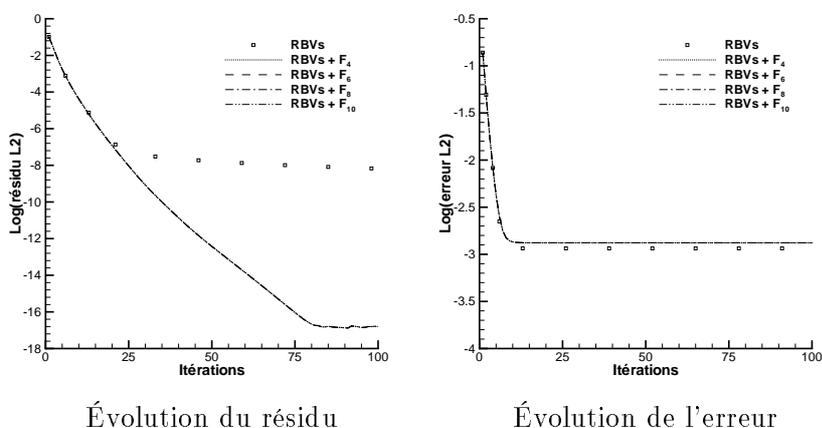


FIG. 3.9 - Évolution du résidu (vitesse de convergence) et évolution de l'erreur pour le schéma RBVs avec filtres pour une advection circulaire 2-D sur un maillage cartésien carré 40×40 .

Remarques Il convient de prendre quelques précautions lorsqu'un filtrage du vecteur d'état en fin d'itération est mis en œuvre pour le calcul de solution stationnaire :

1. le terme dissipatif apporté par le filtre, c'est-à-dire le membre de droite de l'équation (2.55) p. 47, fait intervenir le pas de temps au dénominateur. En toute rigueur, une solution stationnaire calculée avec un filtrage explicite en fin d'itération dépend donc du pas de temps utilisé pour le calcul. En pratique, l'implicitation du schéma RBVs, qui permet l'emploi de grand pas de temps, et le recours à des filtres d'ordre élevé rendent ce terme négligeable devant le terme d'erreur du schéma RBVs précis à l'ordre 2 ;
2. le système d'équations (2.55) résolu par le schéma RBVs plus filtre ne peut plus s'écrire sous la forme d'un schéma conservatif. On doit donc s'attendre à ce que les relations de saut ne soient pas correctement calculées pour les solutions stationnaires avec choc. La perte de conservation du schéma RBV basé sur le résidu complet est moins évidente, elle sera évaluée plus loin sur un calcul d'écoulement instationnaire transsonique sur un profil en mouvement de tamis.

3.5.3 Application à un tourbillon stationnaire

Comme le schéma LWN, les schémas RBVs et RBV ont la particularité de préserver exactement dans le temps une condition initiale correspondant à un tourbillon stationnaire pour les équations d'EULER. Ce type de condition initiale s'apparente à une onde « *linéairement dégénérée* » des équations d'EULER, l'absence de focalisation des caractéristiques ne permet donc pas d'équilibrer la dissipation linéaire des schémas numériques classiques. Le problème stationnaire exact est alors vu par les schémas numériques classiques comme un problème d'évolution temporelle, le tourbillon est généralement dissipé au cours du temps.

Si les schémas LWN et RBVs préservent exactement les tourbillons stationnaires, nous avons vu qu'ils ne sont pas suffisamment dissipatifs pour être appliqués tels quels à des calculs d'aérodynamique autour de profils. L'objet de ce paragraphe est d'évaluer l'influence des filtres sur les propriétés de préservation des tourbillons stationnaires du schéma RBVs. La condition initiale est donnée par les équations (2.107) et (2.108) p. 66 pour une vitesse d'advection nulle. Le maillage utilisé est cartésien carré avec 50×50 cellules. Le pas de temps est $\Delta t = 1,03$, soit $CFL = 10$. Pour un schéma implicite, la précision de la méthode de résolution de la phase implicite joue un rôle non négligeable sur la préservation d'une condition initiale non entretenue par des conditions aux limites, c'est pourquoi le nombre de balayages de la méthode HVLGS a été porté à 4.

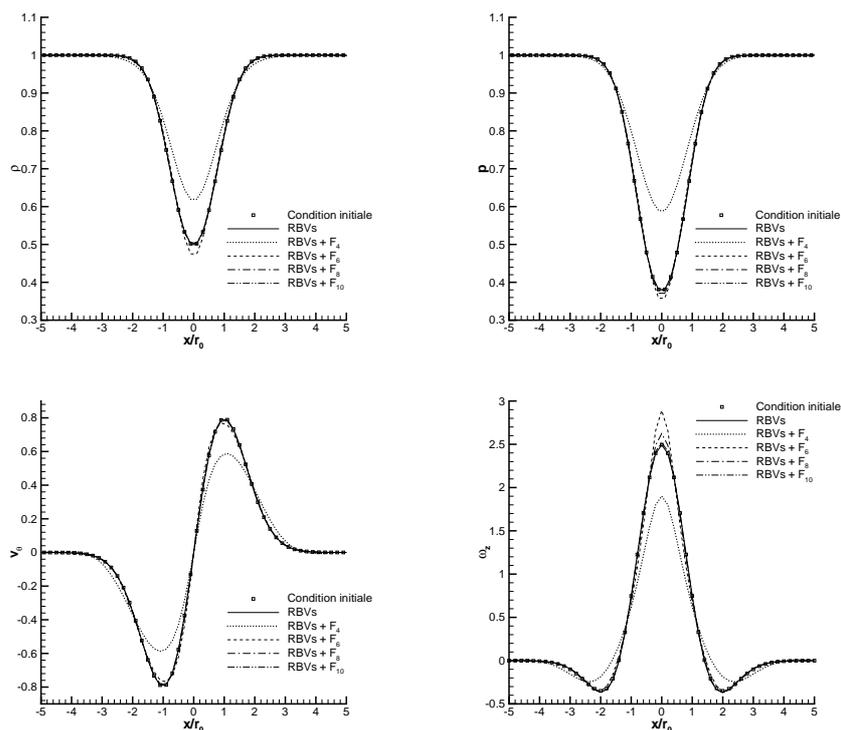


FIG. 3.10 - Champs exacts d'un tourbillon stationnaire (ég. d'EULER) et solutions du schéma RBVs pour différents filtres. Coupes suivant x des solutions après 500 itérations, maillage 50×50 , $\Delta t = 1,03$ ($CFL = 10$).

Les solutions du schéma RBVs avec et sans filtre après 500 itérations, FIG. 3.10, confirment que le schéma RBVs sans filtre préserve exactement la condition initiale. Le filtre d'ordre 4 (équivalent à une dissipation linéaire d'ordre 3) dissipe considérablement le tourbillon. Le filtre

d'ordre 6 dissipe légèrement le champ de vitesse tangentielle mais accentue la pente du profil de vitesse au cœur du tourbillon. Cette accentuation est compensée par une augmentation de la dépression dans le cœur. La vorticité de ce tourbillon après 500 itérations est alors supérieure à celle de la condition initiale. Cet effet est moins prononcé pour le filtre d'ordre 8 alors que la solution avec filtrage à l'ordre 10 est confondue avec la solution du schéma sans filtre. Pour les calculs d'écoulements aérodynamiques stationnaires, le schéma RBVs sera par la suite mis en œuvre avec un filtrage à l'ordre 10.

3.5.4  coulement subsonique stationnaire autour d'un profil

Comme pour l'évaluation des schémas RBC [44], nous considérons l'écoulement autour d'un profil NACA 0012 à une incidence $\alpha = 2^\circ$ et un nombre de MACH amont $M_\infty = 0,63$. L'adimensionnement utilisé pour les calculs est : $\rho_\infty = 1$, $|\vec{u}_\infty| = 1$, $p_\infty = 1/\gamma M_\infty^2$. Cet écoulement subcritique est calculé sur un maillage en C comprenant 272×40 cellules, avec 192 cellules sur le profil et des frontières en champ lointain situ es à vingt cordes du profil, FIG. 3.11. Les conditions aux limites en champ lointain sont bas es sur les variables p , α , H , S où H et S désignent respectivement l'enthalpie et l'entropie :

$$\begin{cases} H &= \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{|\vec{u}|^2}{2} \\ S &= \frac{p}{\rho^\gamma} \end{cases} \quad (3.30)$$

Quand l'écoulement entre dans le domaine de calcul, la direction de l'écoulement α , l'enthalpie H et l'entropie S sont impos es de façon multidimensionnelle alors que la pression p est extrapol e. Quand l'écoulement sort du domaine de calcul, p est impos e alors que α , H et S sont extrapol es de façon multidimensionnelle. En présence de paroi, la condition de glissement (vitesse normale nulle à la paroi) est impos e et la pression, la masse volumique ainsi que la composante tangentielle de la vitesse sont extrapol es.

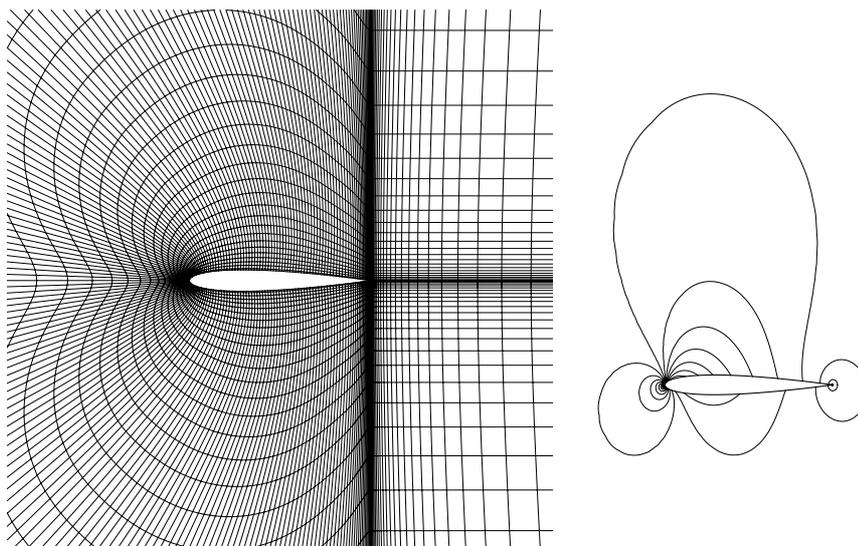


FIG. 3.11 - écoulement subsonique autour d'un profil.   gauche : vue partielle du maillage en C 272×40 ; à droite : contours du nombre de MACH ($\Delta M = 0,05$).

La solution stationnaire est obtenue avec le schéma RBVs associé au filtre d'ordre 10. Les distributions pariétales du nombre de MACH et de la déviation d'entropie sont présentées FIG. 3.12. La valeur maximale du nombre de MACH à la paroi est de 0,98. L'erreur sur l'entropie est faible. Les valeurs des coefficients aérodynamiques globaux sont : $C_L = 0,3225$ pour le coefficient de portance et $C_D = 7.10^{-4}$ pour le coefficient de traînée. Le coefficient de traînée est proche de sa valeur théorique $C_D = 0$. Ces valeurs sont en bon accord avec les résultats de [44]. La courbe de convergence vers l'état stationnaire et l'évolution du coefficient de portance sont données FIG. 3.11.

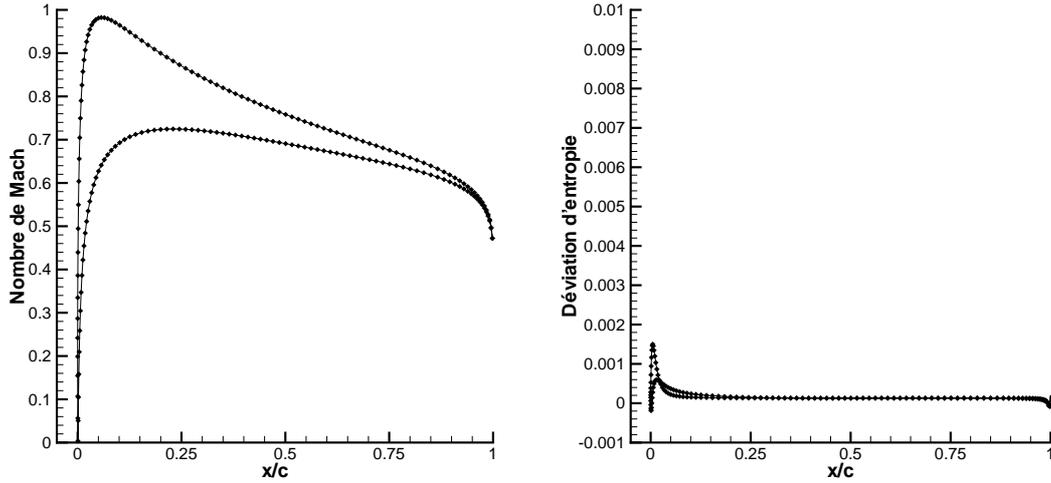


FIG. 3.12 - *Écoulement subsonique autour d'un profil, distribution pariétale du nombre de MACH (à gauche) et de la déviation d'entropie ($\Sigma = S/S_\infty - 1$, $S = p/\rho^\gamma$) (à droite).*

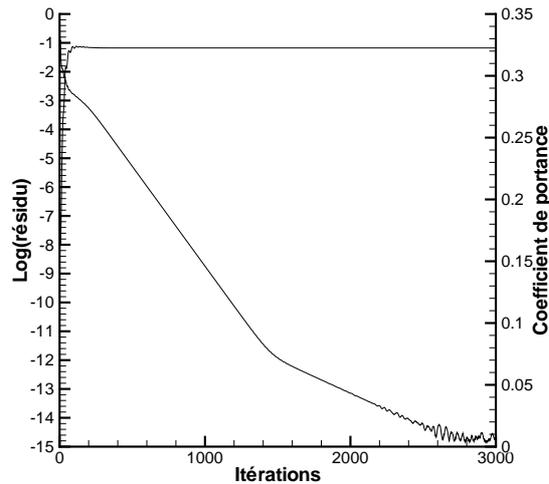


FIG. 3.13 - *Écoulement subsonique autour d'un profil, histoire de convergence (CFL= 25).*

3.5.5 Écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil

L'écoulement transsonique à $M_\infty = 0,85$ et $\alpha = 1^\circ$ est calculé sur le même maillage que le problème précédent. La gestion des conditions aux limites et l'adimensionnement utilisé pour le calcul sont identiques à ceux mis en œuvre pour les calculs d'écoulements subsoniques. La solution stationnaire est toujours obtenue avec le schéma RBVs² et filtrage à l'ordre 10, elle est représentée FIG. 3.14 et 3.15. Les structures numériques de choc présentent de faibles oscillations mais la ligne de glissement en aval du profil est bien résolue et la pression est continue à travers cette ligne de glissement.

Les positions des chocs à l'extrados et à l'intrados sont respectivement $x_u/c = 0,833$ et $x_l/c = 0,63$. Le choc à l'intrados est correctement positionné en comparaison des résultats de référence [50] (qui donne $x_l/c = 0,629$). Le choc à l'extrados est situé en amont de la solution de [50] (qui donne $x_u/c = 0,866$). Le coefficient de portance calculé vaut alors $C_L = 0,331$, inférieur de 10% à la valeur de référence $C_L = 0,3749$. Le coefficient de traînée est correctement évalué : $C_D = 0,053$, à comparer avec $C_D = 0,053$ dans [50]. L'histoire de convergence du calcul, pour CFL = 50 est présentée FIG. 3.16.

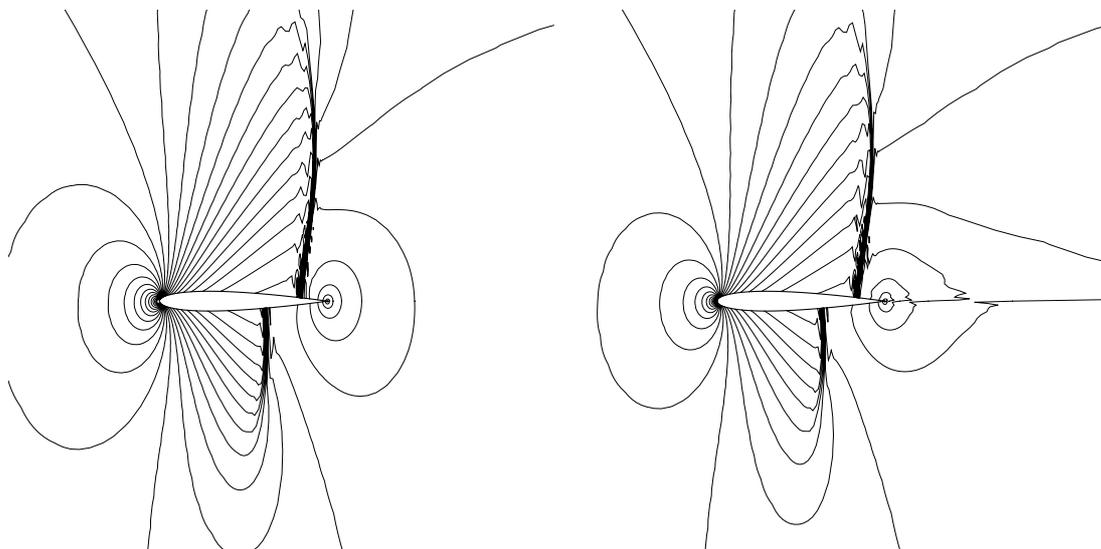


FIG. 3.14 - Écoulement transsonique autour d'un profil. À gauche : contours du coefficient de pression ($\Delta C_p = 0,075$) ; à droite : contours du nombre de MACH ($\Delta M = 0,05$).

Ce calcul montre que le schéma RBVs associé à un filtre d'ordre 10 est suffisamment dissipatif et robuste pour calculer des solutions d'écoulements stationnaires transsoniques. Toutefois, la perte de conservation due au filtre engendre une erreur sur l'évaluation des relations de saut qui a pour conséquence un positionnement imparfait des chocs. Au vue de l'étude menée au chapitre 2 sur les phases implicites couplant les termes spatiaux et temporels, il ne semble pas impossible de rendre le schéma RBVs suffisamment dissipatif pour se passer de filtres. Par manque de temps, cette voie n'a pas pu être explorée pendant la thèse. En l'état actuel, il est clair que le schéma basé sur le résidu le mieux adapté aux calculs d'écoulements transsoniques stationnaires est le schéma RBC [44], la vocation des schémas RBV étant le calcul d'écoulements subsoniques ou faiblement transsoniques mettant en jeu des tourbillons en mouvement.

2. Pour ce calcul, la dissipation utilisée est celle définie pour les schémas RBC, cf. (1.48) p. 18, et non la variante moins dissipative utilisant le rayon spectral des matrices jacobiennes des flux, cf. (1.56) p. 20.

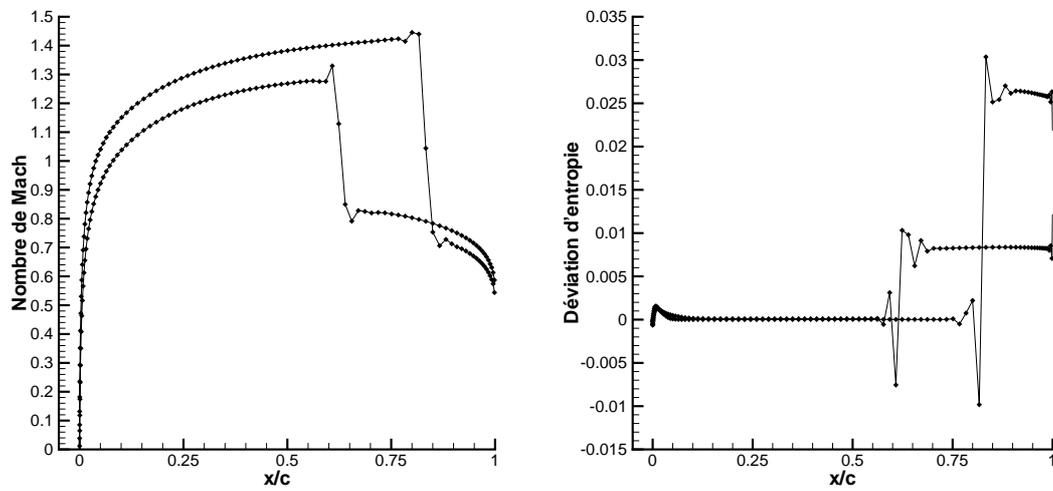


FIG. 3.15 - Écoulement transsonique autour d'un profil, distribution pariétale du nombre de MACH (à gauche) et de la déviation d'entropie (à droite).

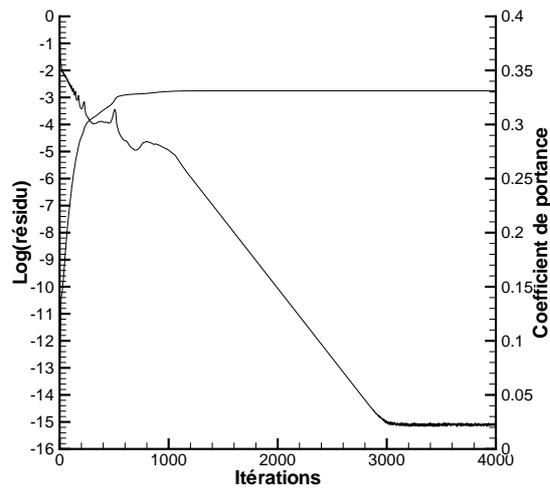


FIG. 3.16 - Écoulement transsonique autour d'un profil, histoire de convergence (CFL= 50).

3.6 Advection de tourbillons en maillages irréguliers

Il a été démontré au chapitre précédant que sur un maillage cartésien carré, la meilleure solution du schéma RBV pour l'advection de tourbillons est obtenue pour $\Delta t = h/\|\vec{u}_\infty\|$, avec h le pas d'espace et \vec{u}_∞ la vitesse d'advection. D'autre part, nous avons montré que le schéma RBV a une précision spatiale d'ordre 2 en maillage irrégulier. L'objet de ce paragraphe est donc d'évaluer la sensibilité du pas de temps optimum par rapport aux variations locales de taille des cellules du maillage.

Nous considérons le problème modèle défini au paragraphe 2.7.1. Le calcul d'advection de tourbillon est effectué sur un maillage cartésien irrégulier de 50×50 cellules généré à partir d'un maillage cartésien carré dont l'espacement des lignes et des colonnes a été perturbé aléatoirement. Soit h le pas d'espace du maillage initial, soit h^* la largeur d'une ligne ou d'une colonne du maillage perturbé, on a $h/2 \leq h^* \leq 3h/2$. La valeur du pas de temps est $\Delta t = 0,2$, il s'agit de la valeur du pas de temps optimum pour ce problème dans un maillage cartésien carré 50×50 .

Les représentations du champ de vorticité à $t = 100$, FIG. 3.17, montrent que la solution est correctement positionnée par rapport à la solution exacte. Nous en déduisons donc que l'annulation du premier terme d'erreur du schéma n'est pas sensible aux variations locales de taille de cellules mais que c'est la taille moyenne des cellules qui doit être prise en compte. On observe également que l'extension des filtres aux maillages irréguliers ne modifie pas leur comportement en comparaison des filtres pour maillages réguliers. Un filtrage à l'ordre 10 est la meilleure solution pour ne pas altérer la précision du schéma RBV pour l'advection de tourbillons en maillages irréguliers FIG. 3.18.

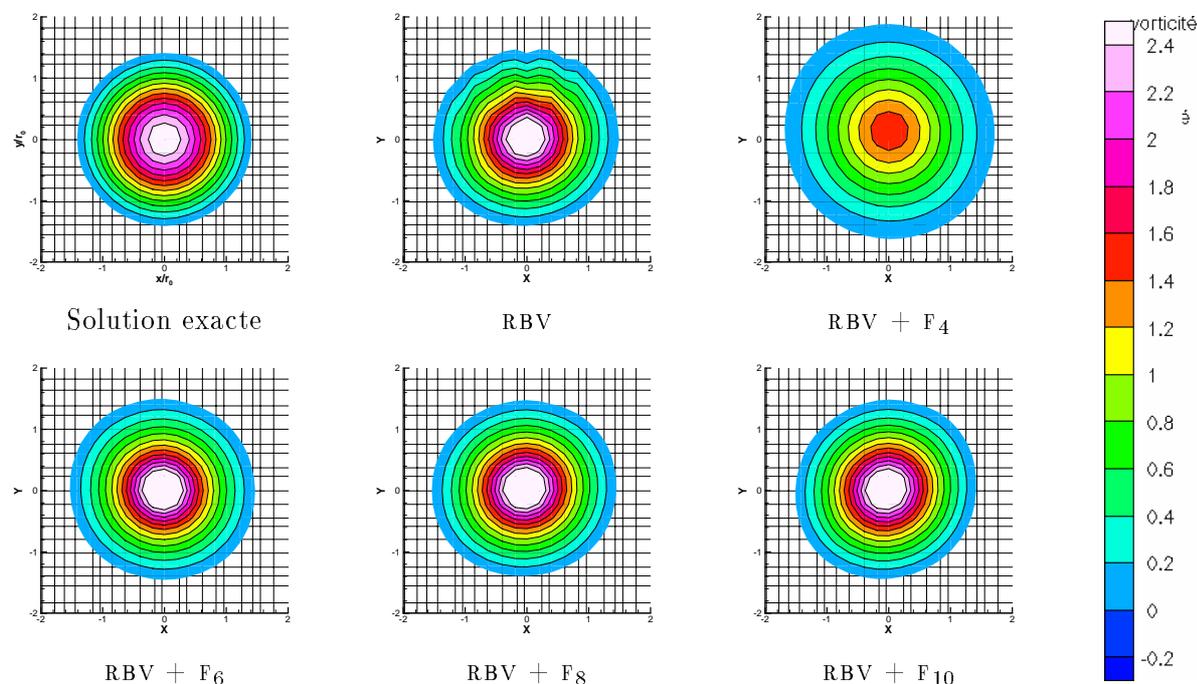


FIG. 3.17 - *Champ de vorticité exacte et solutions du schéma RBV pour différents filtres précis en maillages irréguliers. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté suivant X à la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$) sur un maillage cartésien irrégulier de 50×50 cellules, $\Delta t = 0,2$.*

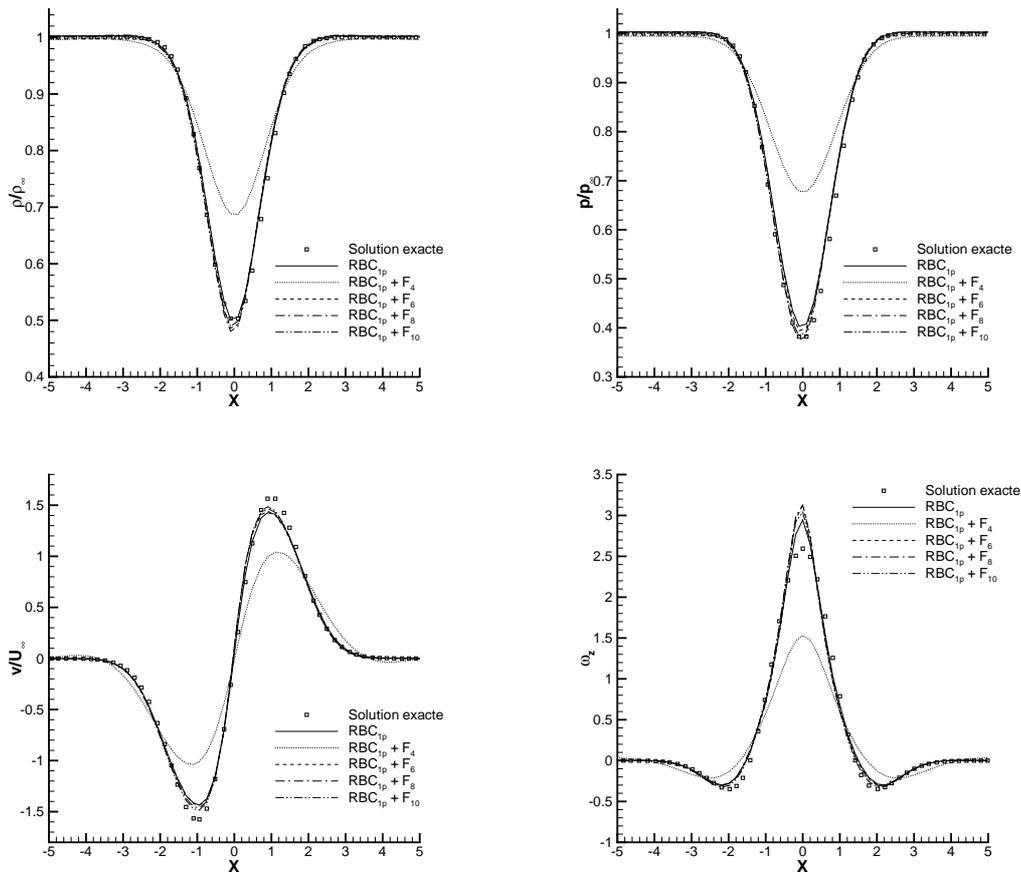


FIG. 3.18 - Comparaison des champs exacts d'un tourbillon advecté suivant X avec les solutions du schéma RBV pour différents filtres précis en maillages irréguliers. Coupes suivant X des solutions à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage cartésien irrégulier de 50×50 cellules, $\Delta t = 0,2$.

Comparaison avec un schéma centré classique

De même que pour l'advection de tourbillon en maillage cartésien uniforme, la solution du schéma RBV est comparée avec la solution du schéma de JAMESON. Ce schéma peut-être étendu aux maillages cartésiens irréguliers en pondérant les formules d'intégration des flux numériques. Cette extension a notamment été étudiée et mise en œuvre par CANONNE [12] pour des calculs de rotor d'hélicoptère. Pour la comparaison, nous utilisons la version non pondérée du schéma de JAMESON. D'une part, cette version est la plus répandue dans les logiciels de calcul CFD, d'autre part, le schéma RBV ne fait pas intervenir de pondération, il semble donc logique qu'il soit comparé à un schéma non pondéré. Les paramètres de simulation pour le schéma de JAMESON avec intégration temporelle DTS et IRS sont identiques à ceux du paragraphe 2.7.6.

La comparaison des champs de vorticités à $t = 100$ des solutions des schémas RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS, FIG. 3.19, et les coupes des champs, FIG. 3.20, suivant une droite parallèle à l'axe des x et passant par le cœur des tourbillons confirment les résultats de [12]: la perte de précision des schémas volumes finis classiques, même d'ordre 2, est importante si le maillage est irrégulier. La formulation retenue pour la généralisation du schéma RBV aux maillages quelconques lui permet de conserver son ordre de précision sans pondération particulière.

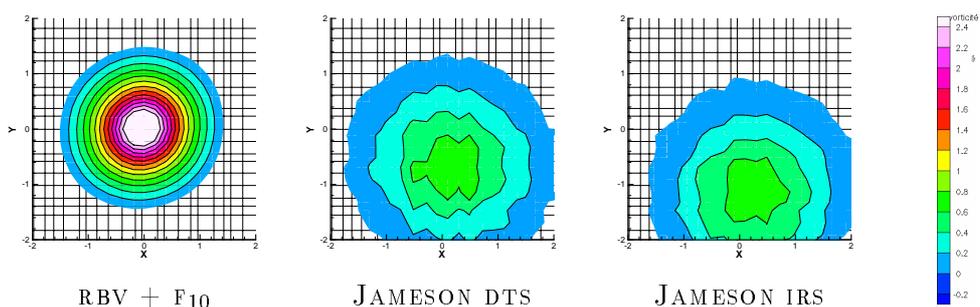


FIG. 3.19 - Champ de vorticité des solutions des schémas: RBV filtré à l'ordre 10, JAMESON avec pas de temps dual et JAMESON avec lissage des résultats. Solutions à $t = 100$ d'un tourbillon advecté suivant X   la vitesse $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$) sur un maillage cartésien irrégulier de 50×50 cellules, $\Delta t = 0,2$.

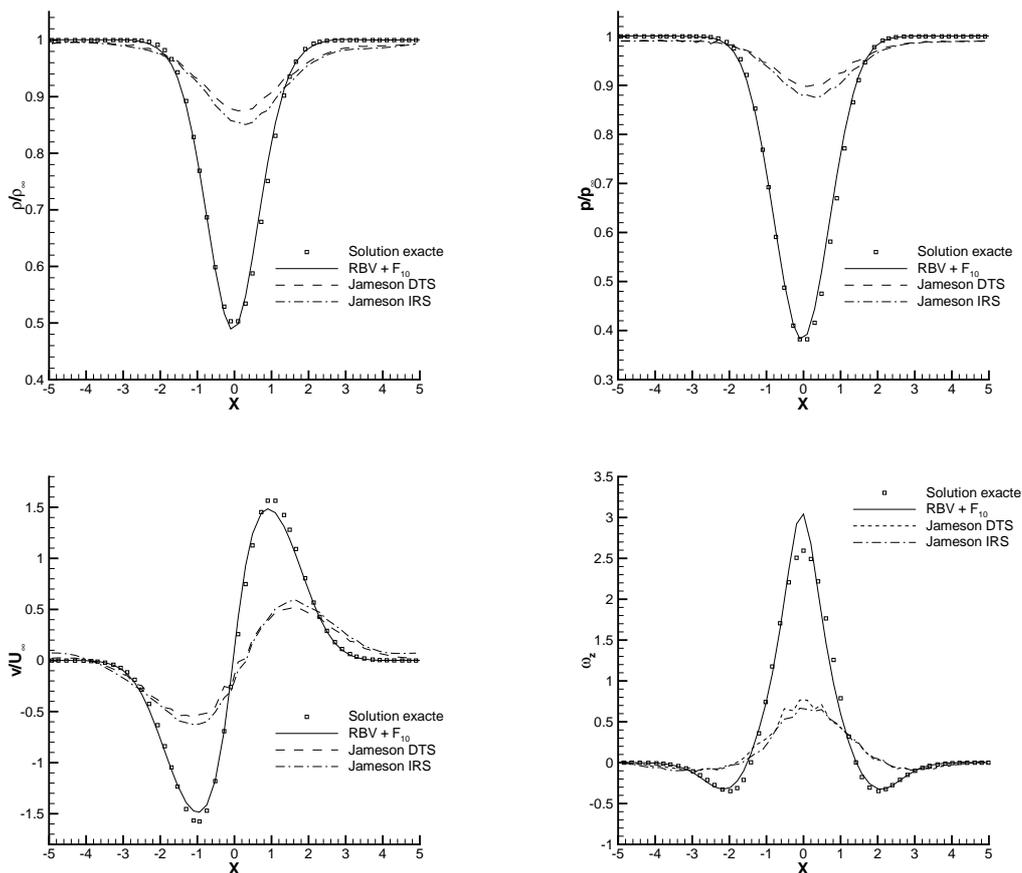


FIG. 3.20 - Comparaison des champs exacts d'un tourbillon advecté suivant X avec les solutions des schémas: RBV filtré à l'ordre 10, JAMESON avec pas de temps dual et JAMESON avec lissage des résultats. Coupes suivant X passant par le cœur des tourbillons à $t = 100$, vitesse d'advection $U_\infty = 0,5$ ($M_\infty = 0,4225$), maillage cartésien irrégulier de 50×50 cellules, $\Delta t = 0,2$.

3.7 Écoulement autour d'un profil oscillant en translation

Le calcul d'un écoulement transsonique autour d'un profil oscillant en translation (aussi appelé mouvement de tamis) doit permettre d'évaluer l'influence du filtrage appliqué aux sous-itérations sur le pas de temps dual pour le calcul de la solution du schéma RBC dans le cas d'écoulements transsoniques instationnaires. La configuration retenue est celle du rotor non portant avec pale droite en vol d'avancement pour laquelle des essais en soufflerie [15, 71, 72] et des simulations numériques bidimensionnelles [51] ont été réalisés à l'ONERA. Cette configuration « irréaliste » d'un rotor non portant présente l'intérêt de démontrer la validité de la méthode de calcul pour des écoulements relativement simples en comparaison d'un rotor portant où la section de pale est soumise à des variations simultanées d'incidence et de nombre de MACH.

3.7.1 Définition du mouvement de tamis

Un calcul instationnaire bidimensionnel correspond à une approximation de l'expérience [71, 72] pour une pale de rotor d'hélicoptère en rotation à la vitesse angulaire ω dans un écoulement à nombre de MACH M_0 à incidence nulle (voir FIG. 3.21). Le nombre de MACH $M_{r,\infty}$ dans le repère relatif à une section de pale à une distance R de l'axe de rotation est :

$$M_{r,\infty} = \frac{\omega R}{a_\infty} + M_0 \sin \varphi \quad (3.31)$$

avec a_∞ la vitesse du son et $\varphi = \omega \bar{t}$ l'angle de la pale avec la direction de l'écoulement avançant (\bar{t} est le temps non adimensionné).

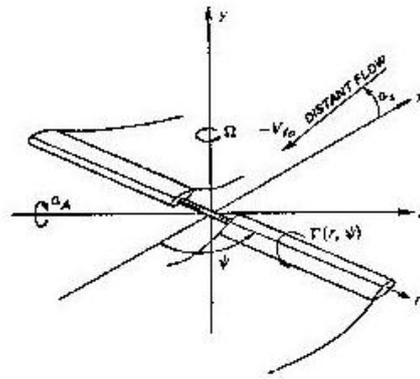


FIG. 3.21 - Rotor non portant en vol d'avancement

Une modification du système régissant les équations du mouvement [51] permet d'effectuer les calculs numériques en maillage fixe dans le repère lié à une section de pale. Considérons le cas d'un écoulement bidimensionnel compressible non visqueux autour d'un profil soumis à un mouvement de corps solide par rapport au repère absolu (O, \vec{x}, \vec{y}) . Soit $(A, \vec{\xi}, \vec{\eta})$ un repère lié au profil, on peut définir le mouvement du point A par $x_A = x_A(t)$, $y_A = y_A(t)$ et l'angle $\vartheta = \vartheta(t)$ entre l'axe x et l'axe ξ (voir FIG. 3.22). Les équations d'EULER régissant l'écoulement dans un domaine $\Omega(t)$ de frontière $\Gamma(t)$ dans l'intervalle de temps $[t_1, t_2]$ s'écrivent dans le repère lié au profil :

$$\int_{\Omega} w d\xi d\eta \Big|_{t_1}^{t_2} = - \int_{t_1}^{t_2} \int_{\Gamma} [f(w, \vartheta, s_\xi) d\eta - g(w, \vartheta, s_\eta) d\xi] dt \quad (3.32)$$

avec

$$f(w, \vartheta, s_\xi) = \begin{bmatrix} \rho u_r \\ \rho u u_r + p \cos \vartheta \\ \rho v u_r + p \sin \vartheta \\ \rho E u_r + p u' \end{bmatrix}, \quad g(w, \vartheta, s_\eta) = \begin{bmatrix} \rho v_r \\ \rho u v_r - p \sin \vartheta \\ \rho v v_r + p \cos \vartheta \\ \rho E v_r + p v' \end{bmatrix}$$

où

$$\begin{aligned} u' &= u \cos \vartheta + v \sin \vartheta & , & \quad v' = -u \sin \vartheta + v \cos \vartheta \\ u_r &= u' - s_\xi & , & \quad v_r = v' - s_\eta \\ s_\xi &= \dot{x}_A \cos \vartheta + \dot{y}_A \sin \vartheta - \eta \dot{\vartheta} & , & \quad s_\eta = -\dot{x}_A \sin \vartheta + \dot{y}_A \cos \vartheta + \xi \dot{\vartheta} \end{aligned}$$

sont respectivement les composantes dans le repère relatif de la vitesse absolue \vec{V} , de la vitesse relative \vec{V}_r et de la vitesse \vec{s} de la frontière Γ . Les points indiquent des dérivations temporelles.

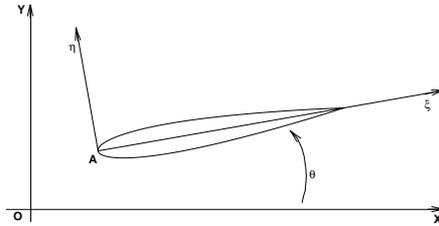


FIG. 3.22 - Profil en mouvement de corps solide

Ces équations sont appliquées à un mouvement de tamis autour d'une section de pale à incidence nulle. Le nombre de MACH à l'infini est $M_\infty = 0,536$, l'angle d'attaque $\alpha = 0$ et le nombre de MACH relatif au profil $M_{r,\infty}$ suit la loi d'évolution temporelle :

$$M_{r,\infty} = M_\infty + M_0 \sin kt \quad (3.33)$$

où $M_0 = 0,327$ et la pulsation réduite $k = 0,185$ (avec $k = (\omega c)/V_\infty = c/R$). Le mouvement suivi par le profil est un mouvement de translation horizontale à la vitesse $\dot{x}_A = -M_0 a_\infty \sin kt$, le déplacement du repère lié au profil est donc défini par :

$$\begin{cases} \vartheta &= 0 \\ s_\xi &= -(M_0/M_\infty) \sin kt \\ s_\eta &= 0 \end{cases}$$

La condition de glissement du fluide sur les parois solides en mouvement est traduite par $\vec{V} \cdot \vec{n} = \vec{s} \cdot \vec{n}$. Le calcul est initialisé par la solution de l'écoulement stationnaire autour d'un profil NACA 0012 à incidence nulle avec comme conditions génératrices : $M_\infty = 0,536$, $\rho_\infty = 1$, $u_\infty = 1$ et $p_\infty = 1/\gamma M_\infty^2$.

3.7.2 Description de l'écoulement

La solution utilisée pour la description de l'écoulement transsonique autour d'un profil oscillant en translation a été calculée avec le schéma RBV avec filtrage à l'ordre 6 sur les sous-itérations de la méthode de pas de temps dual pour un maillage en C de 554×80 cellules avec un pas de temps adimensionné $\Delta t = 4,717 \cdot 10^{-3}$ correspondant à une variation azimutale de $0,1$ degré. Le critère de convergence en norme L^2 du résidu fictif est de 10^{-4} , le nombre maximum de sous-itérations de 20 et le nombre moyen de sous-itérations au cours du calcul de 8.

La figure 3.23 montre l'évolution instationnaire du coefficient de pression relatif Cp_r sur le profil. Le coefficient de pression relatif est défini en fonction de la vitesse relative à l'infini V_∞ par :

$$Cp_r = \frac{p - p_\infty}{\frac{1}{2} \gamma p_\infty M_{r,\infty}^2}$$

Seule la première moitié du cycle de l'évolution périodique est présentée FIG. 3.23. Pendant ce demi-cycle, le nombre de MACH relatif $M_{r,\infty}$ croît de $0,536$ à $0,836$ puis redescend à $0,536$. Durant le second demi-cycle, $M_{r,\infty}$ varie en dessous de $0,536$ et l'écoulement reste subsonique. À $kt = 0^\circ$, l'écoulement initial est subsonique, $M_{r,\infty} = 0,536$. Une zone supersonique apparaît progressivement au fur et à mesure que $M_{r,\infty}$ augmente, un choc se forme aux alentours de $kt = 75^\circ$ et se déplace vers le bord de fuite du profil pour atteindre sa position la plus en aval aux environs de $kt = 120^\circ$ ($M_{r,\infty} = 0,822$). Le choc revient ensuite vers le bord d'attaque où il finit par s'évanouir vers $kt = 165^\circ$ ($M_{r,\infty} = 0,626$).

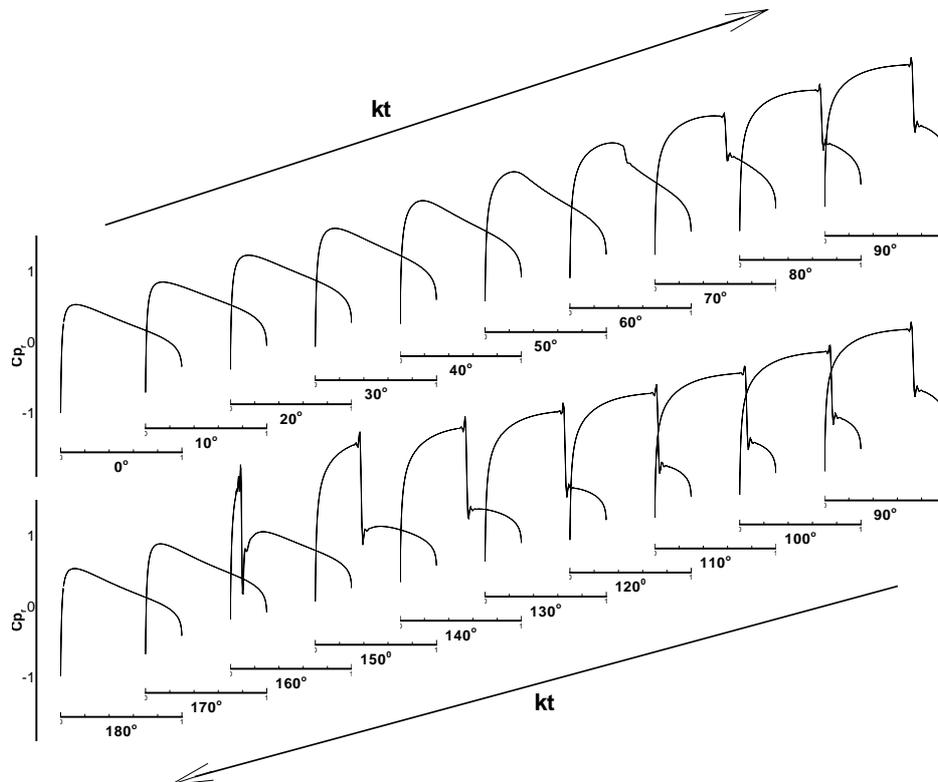


FIG. 3.23 - Évolution du coefficient de pression relatif pariétal calculé avec le schéma RBV et filtre d'ordre 6

Les effets instationnaires jouent un rôle majeur puisque l'évolution du C_{P_r} est complètement dissymétrique par rapport à l'azimut 90° . Les répartitions pariétales du C_{P_r} à $kt = 30^\circ$ et $kt = 150^\circ$ correspondent au même nombre du MACH relatif ($M_r = 0,6995$), on obtient d'une part une solution sans choc et d'autre part une solution transsonique comme on peut le vérifier sur les représentations des champs instantanés du nombre de MACH relatif FIG. 3.24 (la ligne correspondant à $M_r = 1$ est tracée en trait discontinu sur les figures).

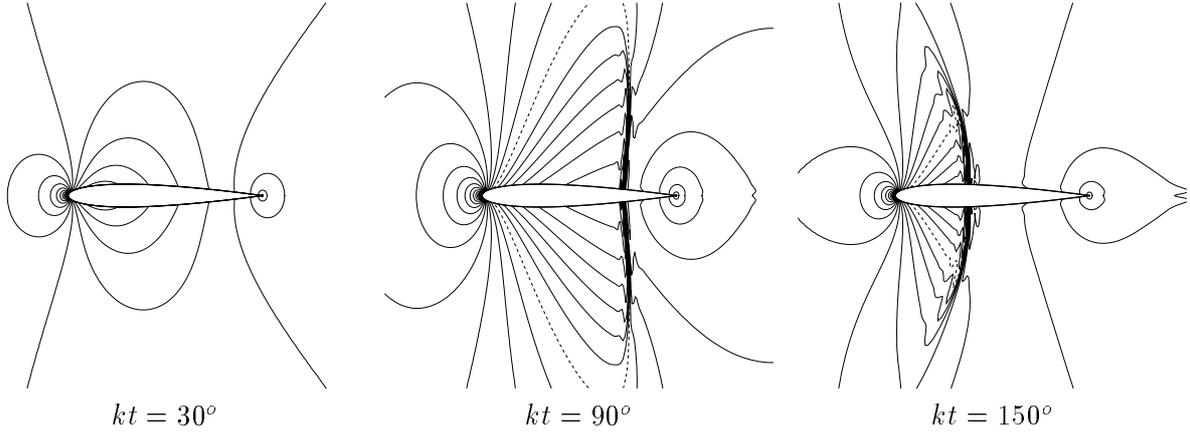


FIG. 3.24 - Lignes iso-nombre de MACH relatif instationnaire calculées avec le schéma RBV et filtre d'ordre 6

3.7.3 Influence de l'ordre du filtre

En principe, le filtrage occasionne une perte de conservation. L'objectif poursuivi dans ce paragraphe est d'évaluer l'influence du filtrage sur la précision et les propriétés de conservation du schéma RBV en maillage curviligne pour des écoulements instationnaires avec chocs. Ce qui nous intéresse particulièrement est de savoir si le filtrage en pas de temps dual a une influence sur la position du choc. Les solutions du schéma RBV vont donc être comparées avec la solution d'un schéma RBC d'ordre 2, noté RBC₂, qui ne nécessite pas l'emploi de filtre mais ne préserve pas la vorticité. En maillage cartésien ce schéma s'écrit sous forme conservative :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j,k}^{n+1} + \left(\frac{\delta_1 F}{\delta x} + \frac{\delta_2 G}{\delta y} \right)_{j,k}^{n+1} = 0 \\ F_{j+\frac{1}{2},k} = \left[\mu_1 f - \frac{\delta x}{2} \Phi_1 p_1 \right]_{j+\frac{1}{2},k} \quad \text{avec} \quad p_{1j+\frac{1}{2},k} = \left(\frac{\mu_1 \nabla w^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\delta_1 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 \mu_2 \mu_1 g}{\delta y} \right)_{j+\frac{1}{2},k} \\ G_{j,k+\frac{1}{2}} = \left[\mu_2 g - \frac{\delta y}{2} \Phi_2 p_2 \right]_{j,k+\frac{1}{2}} \quad \text{avec} \quad p_{2j,k+\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mu_2 \nabla w^{n+1}}{\Delta t} + \frac{\delta_1 \mu_1 \mu_2 f}{\delta x} + \frac{\delta_2 g}{\delta y} \right)_{j,k+\frac{1}{2}} \\ \left(\frac{\nabla w}{\Delta t} \right)_{j,k}^{n+1} = \left(\frac{3w^{n+1} - 4w^n + w^{n-1}}{2\Delta t} \right)_{j,k} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

Les calculs de mouvement de tamis avec le schéma RBV adjoint à des filtres linéaires d'ordre 2, 4, 6 et 8 ont été réalisés dans un maillage en C de 272×40 cellules. Le pas de temps adimensionné Δt est fixé pendant la simulation à $4,717.10^{-3}$ (soit une itération en temps pour $0,1^\circ$ de variation azimutale de la section de pale). La convergence vers l'état instationnaire à chaque pas de temps fait appel à une méthode de pas de temps fictif local avec un nombre CFL_{fic} égal à 25. Les résultats sont comparés à une solution de référence obtenue sans filtrage avec le schéma volumes finis strictement conservatif RBC_2 d'ordre 2 en temps et en espace.

La distribution du nombre de MACH relatif pariétal à $kt = 90^\circ$ et $kt = 150^\circ$ FIG. 3.25 permet de vérifier que le schéma RBV avec filtrage positionne le choc à la même abscisse que le schéma RBC_2 quel que soit l'ordre de précision du filtre utilisé. L'ordre de précision du filtre, et par conséquent son support spatial, a une influence sur la structure numérique du choc. Plus l'ordre du filtre augmente et plus il y a d'oscillations de part et d'autre du choc.

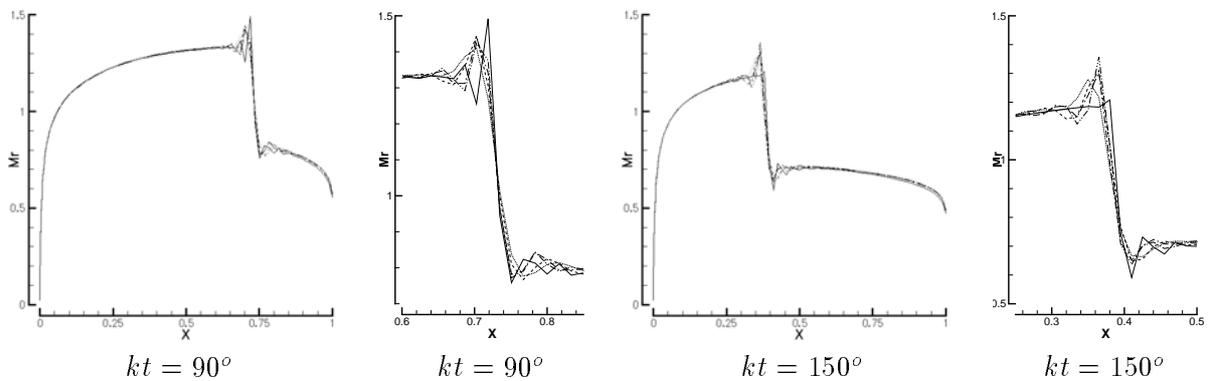


FIG. 3.25 - Comparaison du nombre de MACH sur le profil NACA 0012 à $kt = 90^\circ$ et $kt = 150^\circ$ des solutions des schémas RBC_2 sans filtre et RBV avec différents filtres pour le mouvement de tamis. (— RBC_2 , $RBVF_4$, - - - - $RBVF_6$, - . - . - $RBVF_8$, - - - - - $RBVF_{10}$)

L'ordre du filtre ne modifie pas la position du choc sur le profil mais il influe un peu sur la précision de la solution instationnaire du schéma RBV. En effet, sur la représentation des champs du nombre de MACH relatif et du coefficient de pression relatif (voir FIG. 3.26) à $kt = 90^\circ$, les solutions dans les régions où le maillage est déraffiné ne se superposent rigoureusement que pour les filtrages à l'ordre 8 ou plus.

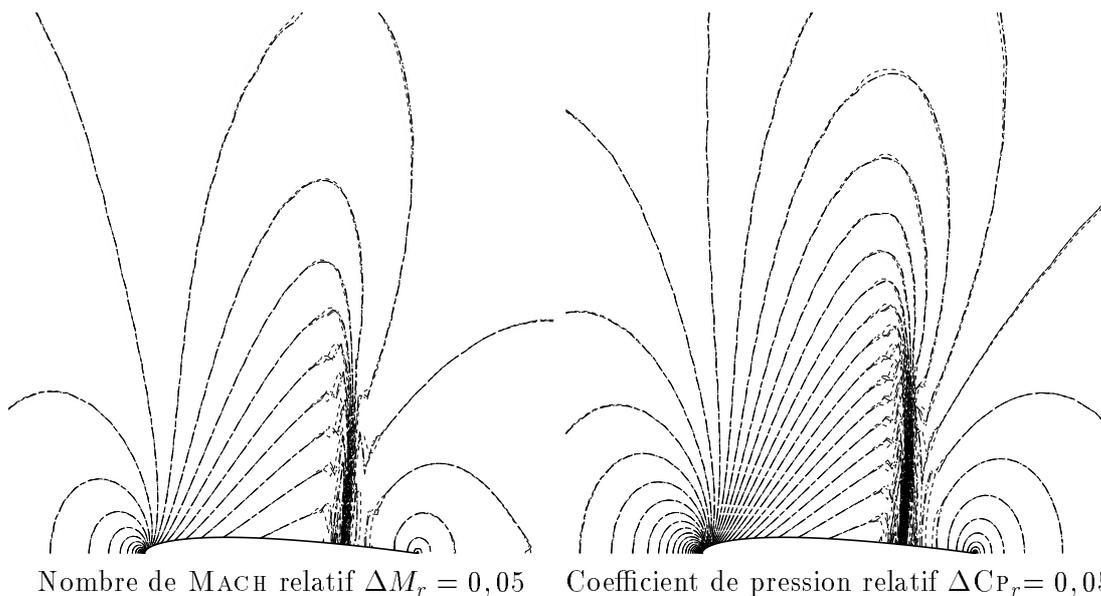


FIG. 3.26 - *Solution du mouvement de tamis à $kt = 90^0$ pour le schéma RBV avec différents filtres, lignes iso-nombre de MACH et iso-coefficient de pression relatif C_{P_r} (..... RBVF₄, - - - - - RBVF₆, - - - - - RBVF₈, - - - - - RBVF₁₀)*

3.7.4 Conclusion

L'emploi d'une étape de filtrage pendant la phase de convergence en temps fictif du schéma RBV n'altère pas la forme conservative du schéma. Les positions des chocs et les relations de saut à travers ces derniers sont identiques à celles des solutions calculées avec le schéma RBC₂ strictement conservatif. Moins l'ordre du filtre est élevé et moins il y a d'oscillations de part et d'autre du choc. Le filtre doit être d'ordre 8 et plus pour qu'à grande distance du profil les lignes iso-valeurs des champs aérodynamiques se superposent. Au voisinage du profil, les solutions du schéma RBV se superposent, à l'échelle du tracé, pour tous les filtres.

3.8 Conclusion

La méthode utilisée pour étendre le schéma RBV aux maillages irréguliers ne s'appuie pas sur une extension volumes finis « classique », mais sur une adaptation de la formulation $\Lambda\tilde{r}$ en maillage irrégulier. Le schéma ainsi obtenu peut être décomposé en deux étapes : une première étape d'évaluation du résidu complet \tilde{r} sur les cellules décalées du maillage par une intégration de type volumes finis « cell-vertex » puis une deuxième étape d'application d'un opérateur Λ (adapté aux géométries curvilignes) au résidu \tilde{r} . Les filtres spatiaux sont eux aussi adaptés aux maillages irréguliers.

L'étude théorique de la précision spatiale du schéma RBV étendu aux maillages curvilignes montre que ce schéma est naturellement précis à l'ordre 2 en maillages irréguliers alors qu'il ne fait appel à aucune pondération particulière.

Une version simplifiée (RBVs) du schéma RBV est proposée pour le calcul d'écoulements stationnaires. Une étude numérique confirme la précision spatiale d'ordre 2 des schémas RBV et RBVs en maillages irréguliers. Des calculs d'écoulements stationnaires subsonique et transsonique autour de profil montrent qu'un filtrage à l'ordre 10, correspondant à une dissipation linéaire d'ordre 9, apporte suffisamment de dissipation au schéma RBVs pour l'appliquer à ce type de calcul. Le filtrage en fin d'itération engendre cependant une perte de conservation qui restreint le champ d'application du schéma RBVs au calcul d'écoulements subsoniques ou faiblement transsoniques.

Les essais d'advection de tourbillons sur un maillage cartésien fortement irrégulier ont permis de démontrer la capacité du schéma RBV à préserver un tourbillon sur de grandes distances d'advection malgré les irrégularités du maillage.

Contrairement au calcul d'écoulement transsonique stationnaire autour d'un profil réalisé avec le schéma RBVs avec filtre, la simulation de l'écoulement instationnaire transsonique autour d'un profil en translation avec le schéma RBV filtré a montré que le filtrage n'engendre pas d'erreur sur la position des chocs lorsqu'il est appliqué au schéma en pas de temps dual. L'ordre du filtre influence par contre la structure numérique du choc.

Chapitre 4

Interaction pale-tourbillon

Sommaire

4.1	Introduction	115
4.2	Description de l'expérience	116
4.3	Modèle de tourbillon pour le BVI	116
4.3.1	Tourbillon à enthalpie constante	117
4.3.2	Tourbillon à entropie constante	118
4.3.3	Comparaison des tourbillons isentropique et isenthalpique	118
4.4	Maillages pour le BVI	119
4.5	Initialisation et paramètres du calcul	121
4.5.1	Superposition des champs	121
4.5.2	Position du tourbillon à l'instant initial	121
4.5.3	Erreur de représentation du tourbillon	122
4.5.4	Conditions aux limites	122
4.5.5	Temps physique et temps fictif	123
4.6	Description et analyse de la solution de référence	124
4.6.1	Solution non visqueuse du BVI subsonique frontal	124
4.6.2	Comparaison de la solution avec l'expérience	130
4.6.3	Processus de formation du second tourbillon	132
4.7	Sensibilité de la solution aux paramètres numériques	135
4.7.1	Influence du filtre	135
4.7.2	Influence du modèle de tourbillon	136
4.7.3	Influence du raffinement du maillage	139
4.7.4	Influence du pas de temps	144
4.7.5	Conclusion partielle	148
4.8	Comparaison avec des schémas d'ordre 2 classiques	149
4.8.1	Schémas utilisés pour la comparaison	149
4.8.2	Comparaison des résultats	150
4.9	Conclusion	156

4.1 Introduction

L'interaction pale-tourbillon ou BVI (pour *Blade Vortex Interaction*) est un phénomène fortement instationnaire qui peut se produire dans les écoulements autour des rotors d'hélicoptère. Le rotor principal d'un hélicoptère assure à la fois la propulsion et la sustentation de l'appareil. Cette particularité autorise une large gamme de régimes de vol : le vol stationnaire, le vol vertical, le vol d'avancement. Contrairement au sillage des ailes d'avion qui est rapidement évacué vers l'aval, la rotation des pales donne une forme hélicoïdale au sillage d'un rotor d'hélicoptère. Dans certaines conditions de vol, comme le vol de descente ou le vol d'avancement à faible vitesse, l'interaction du rotor avec son sillage peut perturber fortement l'écoulement au niveau des pales et dégrader les performances aérodynamiques. Elle est également une source importante du bruit d'un rotor d'hélicoptère. On distingue deux phénomènes prépondérants au cours de l'interaction rotor-sillage [9], le BVI et l'interaction pale-sillage BWI (pour *Blade Wake Interaction*). Ils sont schématisés FIG. 4.1 (extraite de [10]).

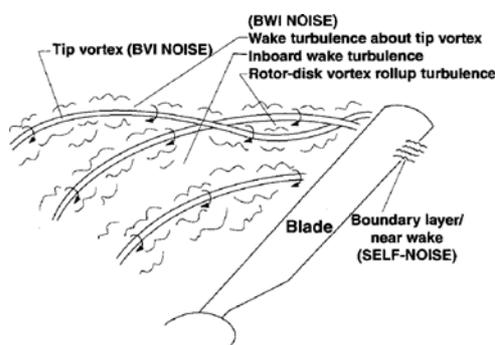


FIG. 4.1 - Écoulement autour d'une pale en interaction avec le sillage d'un rotor

Le BVI résulte de l'interaction entre une pale du rotor et un tourbillon d'extrémité (aussi appelé tourbillon marginal) engendré par une pale précédente. Le bruit de BVI est la source dominante du bruit de rotor en vol de descente [11]. Sa nature impulsionnelle et basse fréquence le rend particulièrement pénalisant d'un point de vue acoustique, ce qui explique qu'il constitue un champ de recherche important. L'interaction la plus intense intervient lorsque l'axe du tourbillon est perpendiculaire au déplacement de la pale. Dans cette configuration, la section de pale et le tourbillon se trouvent dans un même plan, ce qui permet de restreindre la simulation du phénomène à un calcul d'écoulement 2D instationnaire.

Le BWI résulte de l'interaction entre une pale du rotor avec la turbulence de sillage du rotor, avec les nappes tourbillonnaires. Il constitue avec le bruit propre du rotor ou « *Self Noise* » une composante principale du bruit large bande du rotor. Contrairement au BVI le BWI est fondamentalement aléatoire et tridimensionnel.

L'interaction pale-tourbillon, retenue pour évaluer le schéma préservant la vorticité reprend la configuration   tudi  e expérimentalement par LEE & BERSHADER [39]. Il s'agit d'une BVI parallèle subsonique frontale d'un tourbillon avec un profil NACA 0012 à incidence nulle. La complexité des phénomènes mis en jeu pendant cette interaction ainsi que les donn  es expérimentales disponibles font de cette expérience une référence pour l'évaluation de méthodes numériques appliqu  es au calcul d'écoulements tourbillonnaires instationnaires. Parmi ces méthodes, nous pouvons citer les schémas numériques d'ordre élevé [39], les méthodes de raffinement local de maillage structuré [62], l'adaptation de maillage non structuré [65, 66, 67], et plus récemment la méthode de confinement de la vorticité pour les écoulements compressibles [59].

4.2 Description de l'expérience

Dans l'expérience de LEE & BERSHADER, le tourbillon est engendré par la rencontre d'un choc avec un profil NACA 0018 en incidence (FIG. 4.2). Le choc est produit au moyen d'un tube à choc de section carrée 5×5 cm. Le profil NACA 0018 de corde 3,8 cm et d'envergure 5 cm est mis en incidence et placé à 20 cm de la section de sortie du tube à choc. À la sortie du tube, le choc diffracte et perd sa planéité, les auteurs considèrent toutefois que la section centrale du choc qui interagit avec le générateur de tourbillon (le profil NACA 0018) est pratiquement plane. Le profil NACA 0012 utilisé pour l'interaction a une corde de 5 cm, une envergure de 5 cm et est situé environ 10 cm en aval du profil NACA 0018. Le tourbillon expérimental est donc introduit dans l'écoulement à environ deux longueurs de corde en amont du profil cible pour l'interaction. Le nombre de REYNOLDS basé sur la vitesse à l'infini et la corde du profil cible varie de $0,9 \cdot 10^6$ à $1,3 \cdot 10^6$.

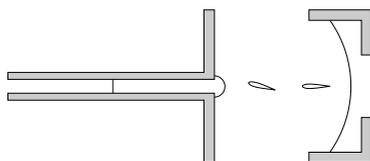


FIG. 4.2 - Schéma de la configuration expérimentale de LEE et BERSHADER

Les données expérimentales sont de deux types : tout d'abord des clichés obtenus par interférométrie holographique à différents instants pendant la collision du tourbillon avec le profil NACA 0012, ensuite des mesures instationnaires du coefficient de pression (C_p) à l'extrados et à l'intrados du profil au voisinage du bord d'attaque. Concernant le tourbillon, des mesures des profils de masse volumique, pression et vitesse sont données.

4.3 Modèle de tourbillon pour le BVI

La topologie du tourbillon qui impacte le profil joue un rôle fondamental dans la phénoménologie de l'interaction pale-tourbillon. Elle a donc été étudiée par LEE & BERSHADER afin d'obtenir un tourbillon analytique le plus proche possible du tourbillon réel utilisé dans l'expérience. Le modèle retenu est le tourbillon du SCULLY [80] dont le champ de vitesse tangentielle s'exprime :

$$\frac{v_\theta}{U_\infty} = \frac{\hat{\Gamma}}{2\pi r} \left(\frac{r^2}{r^2 + r_0^2} \right) \quad (4.1)$$

où r_0 est le rayon du cœur du tourbillon, r la distance à partir de son centre et $\hat{\Gamma}$ la circulation maximale adimensionnée par la vitesse de l'écoulement à l'infini U_∞ et la corde du profil c ($\hat{\Gamma} = \Gamma/U_\infty c$). La vitesse d'advection du tourbillon étant proche de 180 m.s^{-1} ($M_\infty = 0,5$), le modèle donne un profil de vitesse tangentielle correspondant au tourbillon expérimental pour $\hat{\Gamma} = -0,283$ et $r_0 = 0,018$ (FIG. 4.3).

Pour un tourbillon stationnaire, les équations de la quantité de mouvement exprimées dans un repère cylindrique lié au cœur du tourbillon se réduisent à l'équilibre radial :

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v_\theta^2}{r} \quad (4.2)$$

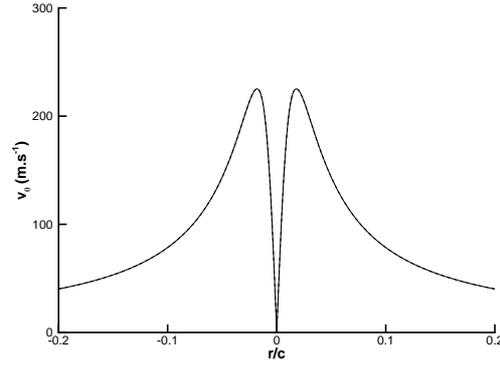


FIG. 4.3 - Profil de vitesse tangentielle du tourbillon de SCULLY

Une hypothèse supplémentaire est nécessaire pour pouvoir intégrer cette équation et définir complètement un tourbillon qui satisfasse les équations d'Euler stationnaires. Les hypothèses les plus couramment retenues sont : soit un tourbillon stationnaire à enthalpie constante [39, 66, 67], soit un tourbillon stationnaire à entropie constante [59], voire un tourbillon stationnaire à température constante dans le cœur et entropie constante en dehors du cœur [62].

4.3.1 Tourbillon à enthalpie constante

L'égalité de l'enthalpie à l'infini, où la vitesse tangentielle du tourbillon est nulle, avec l'enthalpie dans le tourbillon nous donne :

$$\frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} + \frac{v_\theta^2}{2} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_\infty}{\rho_\infty} \quad (4.3)$$

Dans [39], l'équation différentielle (4.2) est intégrée en conjonction avec la relation (4.3) au moyen d'un schéma Runge-Kutta. La relation qui lie la pression au champ de vitesse du tourbillon peut cependant être obtenue en remplaçant ρ par son expression dans l'équation (4.2) :

$$\frac{dp}{p} = \frac{2\gamma\rho_\infty}{2\gamma p_\infty - (\gamma - 1)\rho_\infty v_\theta(r)^2} \frac{v_\theta(r)^2}{r} dr \quad (4.4)$$

L'intégration entre l'infini et zéro de l'équation différentielle ordinaire (4.4) donne alors comme expression analytique sur le champ de pression :

$$\begin{cases} p(r) = p_\infty \exp \left[\frac{1}{A} \left(\frac{\hat{\Gamma}U_\infty}{2\pi} \right)^2 \left(\arctan \left(\frac{2\rho_\infty(r^2 + r_0^2) - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\hat{\Gamma}U_\infty}{2\pi} \right)^2}{A} \right) - \frac{\pi}{2} \right) \right] \\ A = \left(\frac{\hat{\Gamma}U_\infty}{2\pi} \right) \sqrt{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} \sqrt{4r_0^2 \frac{p_\infty}{\rho_\infty} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \left(\frac{\hat{\Gamma}U_\infty}{2\pi} \right)^2} \end{cases} \quad (4.5)$$

4.3.2 Tourbillon à entropie constante

Dans le cas d'un tourbillon isentropique, la relation qui relie la pression à la masse volumique est :

$$\frac{p}{\rho^\gamma} = \frac{p_\infty}{\rho_\infty^\gamma} \quad (4.6)$$

L'équation de l'équilibre radial (4.2) peut alors être remplacée par l'équation différentielle ordinaire :

$$\rho^{\gamma-2} d\rho = \frac{\rho_\infty^\gamma}{\gamma p_\infty} \frac{v_\theta(r)^2}{r} dr \quad (4.7)$$

Le champ de masse volumique du tourbillon est donc donné par l'expression analytique :

$$\rho(r) = \left(\rho_\infty^{\gamma-1} - \frac{\gamma-1}{2\gamma} \frac{\rho_\infty^\gamma}{p_\infty} \left(\frac{\hat{\Gamma} U_\infty}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r^2 + r_0^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \quad (4.8)$$

4.3.3 Comparaison des tourbillons isentropique et isenthalpique

Les deux types de tourbillons ont des champs de vitesse strictement identiques. Les écarts observés (FIG. 4.4) sur les champs de pression et de masse volumique sont situés au voisinage proche du cœur du tourbillon. Ainsi le tourbillon isenthalpique a une valeur plus faible de la masse volumique que le tourbillon isentropique au niveau du cœur du tourbillon. Pour la pression, on observe l'inverse, la dépression au cœur du tourbillon isentropique est plus importante que celle du tourbillon isenthalpique. Dès que la distance par rapport au cœur du tourbillon est supérieure à $0,05 r/c$ les deux tourbillons se superposent parfaitement.

Les mesures de masse volumique et de pression effectuées par LEE & BERSHADER [39] sur le tourbillon expérimental advecté à 180 m.s^{-1} montrent que le modèle de tourbillon isenthalpique est en très bon accord avec le tourbillon physique.

On peut expliquer le manque d'adéquation du modèle de tourbillon isentropique par le processus mis en œuvre pour engendrer le tourbillon expérimental, l'interaction d'un choc avec un profil en incidence, ce qui va à l'encontre d'une entropie constante dans l'écoulement.

La question de l'influence du modèle retenu sur le déroulement du BVI mérite toutefois d'être examinée. En effet, des études [58, 83] ont montré la sensibilité du BVI vis-à-vis du modèle de tourbillon utilisé, mais les comparaisons concernaient principalement des tourbillons avec différents profils de vitesse tels que les modèles de SCULLY, de VASISTAS, de POVITSKY ou de LAMB, et non les choix d'intégration qui conditionnent leurs champs de pression et de masse volumique. Nous comparerons donc par la suite des simulations du BVI avec les deux types de tourbillons dans un même maillage, tous les autres paramètres restant égaux par ailleurs.

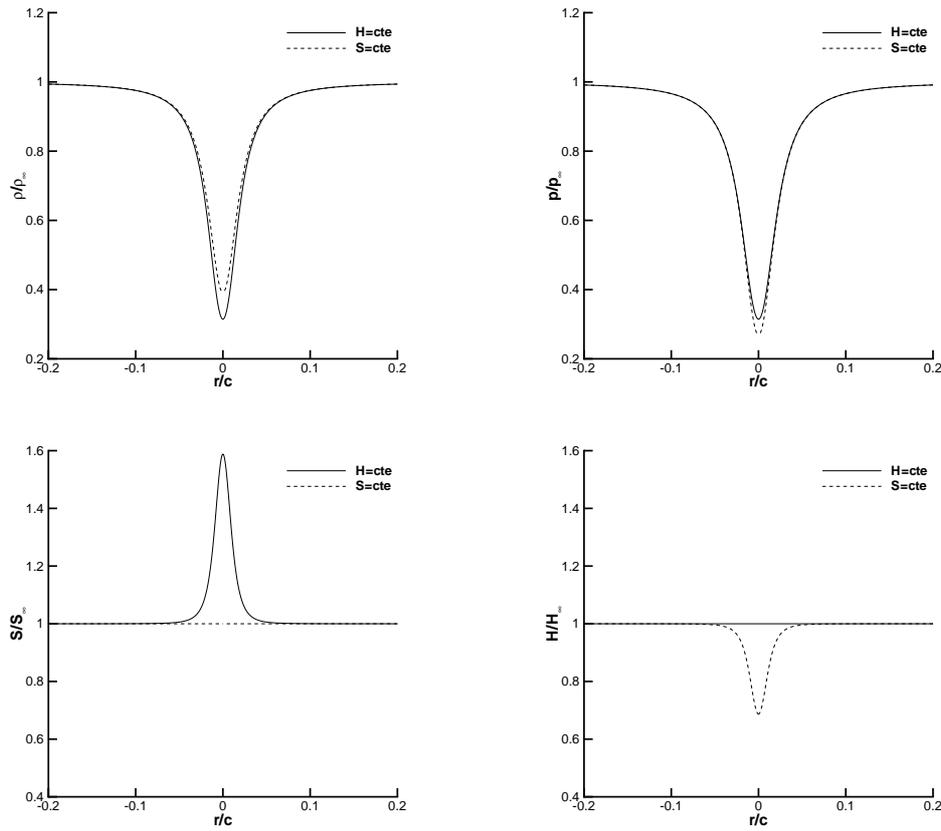


FIG. 4.4 - Comparaison des champs de masse volumique, de pression, d'entropie et d'enthalpie entre des tourbillons de SCULLY isentropique et isenthalpique ($\hat{\Gamma} = -0,283$; $M_\infty = 0,5$; $r_0 = 0,018$).

4.4 Maillages pour le BVI

Les maillages utilisés pour les calculs d'interaction pale-tourbillon ont été engendrés avec le mailleur algébrique MESH3D [34, 56] puis régularisés avec une méthode d'interpolation spatiale d'ordre 2. Ils sont de type maillage en \mathbb{H} , composés d'un domaine supérieur et d'un domaine inférieur (symétrique au domaine supérieur), avec demi-cellules à la paroi. Les dimensions extérieures sont $[-20; 20] \times [-20; 20]$, le bord d'attaque du profil NACA 0012 de corde $c = 1$ est positionné en $x = 0$. Une série de quatre maillages a été construite :

1. un maillage « grossier » de $2 \times 386 \times 62$ cellules ($\sim 48\,000$ points);
2. un maillage « moyen » de $2 \times 732 \times 98$ cellules ($\sim 144\,000$ points);
3. un maillage « fin » de $2 \times 1\,342 \times 148$ cellules ($\sim 397\,000$ points);
4. un maillage « très fin » de $2 \times 2\,600 \times 260$ cellules ($\sim 1\,350\,000$ points).

Tous ces maillages sont construits de manière à être cartésiens réguliers dans la zone d'advection du tourbillon et au voisinage du profil, à l'exception des régions proches des bords d'attaque et de fuite dont les variations de courbure imposent de forts resserrements. La région où la grille est globalement cartésienne uniforme est $[-4; 2] \times [-0,5; 0,5]$. Les pas d'espace dans la région

cartésienne sont respectivement, du maillage le plus grossier au maillage le plus fin : $h = 2.10^{-2}$, $h = 10^{-2}$, $h = 5.10^{-3}$ et $h = 2,5.10^{-3}$. Des vues partielles du maillage « moyen » autour du profil et autour du bord d'attaque sont représentées FIG. 4.5. Une vue partielle plus élargie est donnée FIG. 4.6 pour le maillage « grossier ».

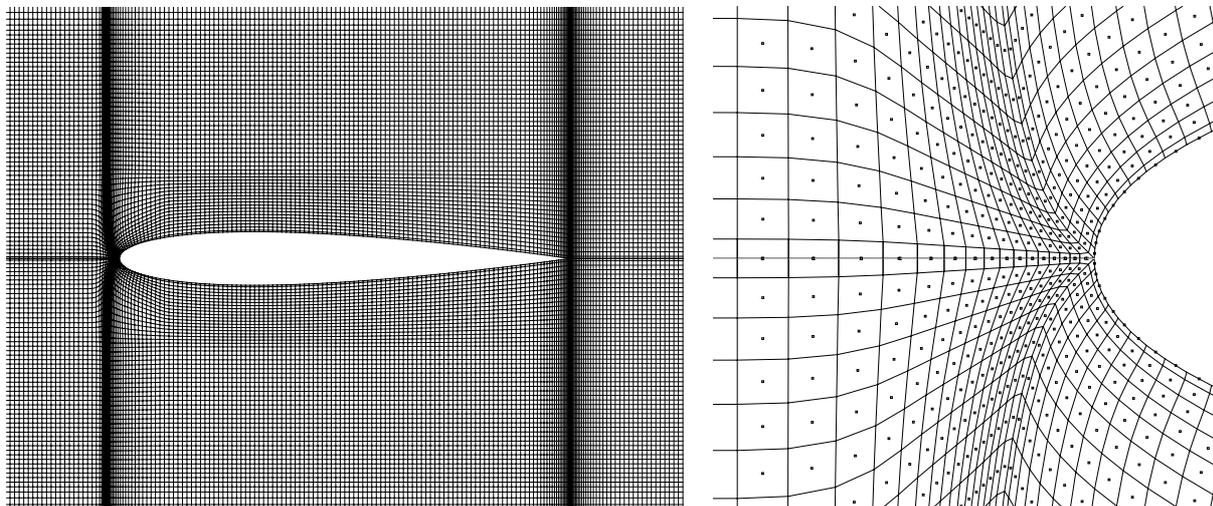


FIG. 4.5 - Vues partielles du maillage « moyen » : profil et bord d'attaque

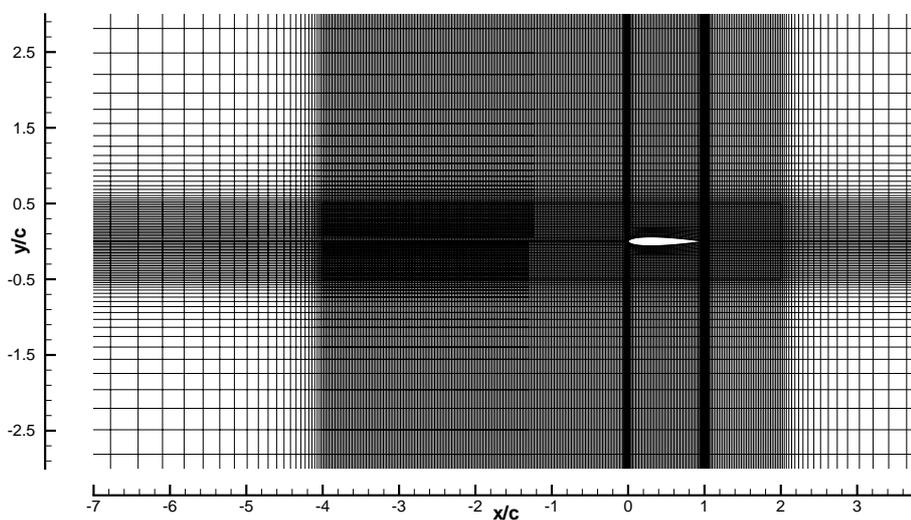


FIG. 4.6 - Vue partielle du maillage « grossier » pour le BVI

4.5 Initialisation et paramètres du calcul

4.5.1 Superposition des champs

La condition initiale pour la simulation du BVI est obtenue en superposant le tourbillon à une solution stationnaire d'un écoulement autour d'un profil. La superposition des champs est effectuée sur les variables primitives (ρ, u, v, p) . L'écoulement stationnaire autour du profil est obtenu avec le schéma préservant la vorticité pour les écoulements stationnaires et filtrage à l'ordre 10. Les conditions à l'infini sont $M_\infty = 0,5$ et incidence nulle. L'adimensionnement utilisé est : $U_\infty = 1$; $V_\infty = 0$; $\rho_\infty = 1$; $p_\infty = 1/\gamma M_\infty^2$. Le champ initial est donc donné par :

$$\begin{cases} \rho_{ini}(x, y) &= \rho_{profil}(x, y) + \rho_{tourb}(x, y) - \rho_\infty \\ u_{ini}(x, y) &= u_{profil}(x, y) + u_{tourb}(x, y) \\ v_{ini}(x, y) &= v_{profil}(x, y) + v_{tourb}(x, y) \\ p_{ini}(x, y) &= p_{profil}(x, y) + p_{tourb}(x, y) - p_\infty \end{cases} \quad (4.9)$$

4.5.2 Position du tourbillon à l'instant initial

L'étendue de la région cartésienne des maillages permet de positionner le tourbillon en $x/c = -3,5$, $y/c = 0$ (FIG. 4.7). La méthode de superposition des champs classiquement mise en œuvre pour calculer la condition initiale donne un état initial qui n'est pas solution des équations d'Euler. Cette inexactitude est due d'une part à la non linéarité des équations d'Euler et d'autre part au modèle de tourbillon de SCULLY. En effet, la vitesse tangentielle d'un tel tourbillon a un taux de décroissance en $1/r$ et modifie de façon significative le champ de vitesse autour du profil avec pour principale conséquence une condition de porositi  à la paroi pour la condition initiale puisque le vecteur de vitesse n'y est plus tangent. La brutale imposition de la condition de glissement pendant la première itération du calcul engendre une onde qui doit être  vacu e avant que le tourbillon n'atteigne le profil. Les simulations montrent que cette condition est largement v rifi e pour un tourbillon positionné à $-3,5$ cordes en amont du profil.

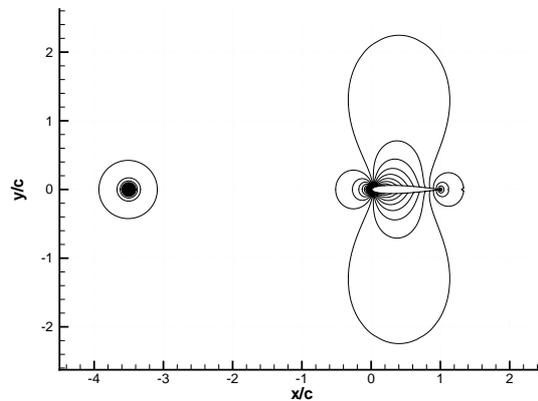


FIG. 4.7 - Iso-valeurs du champ de masse volumique de la condition initiale pour la simulation de l'interaction pale-tourbillon subsonique frontale

4.5.3 Erreur de représentation du tourbillon

La plus ou moins bonne représentation du tourbillon à l'instant initial sur les différents maillages utilisés pour la simulation du BVI dépend de la taille du pas d'espace dans la région cartésienne régulière. Le cœur du tourbillon a un diamètre de 0,036 corde, ce qui nous alloue 2 points de discrétisation dans le cœur pour le maillage « grossier », 4 points pour le maillage « moyen », 8 points pour le maillage « fin » et 16 points pour le maillage « très fin » (FIG. 4.8).

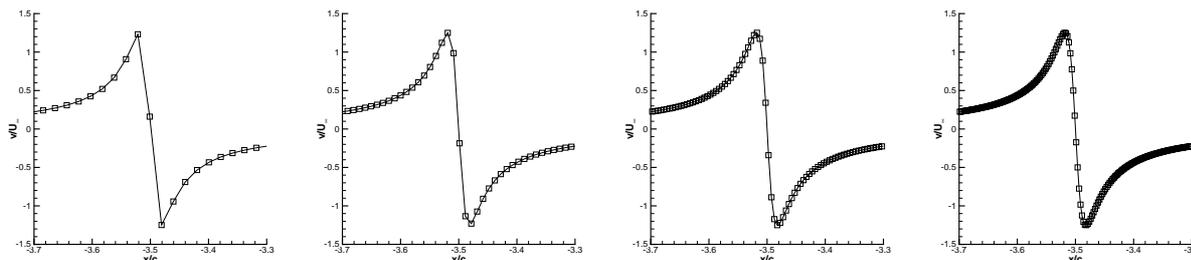


FIG. 4.8 - Représentation du tourbillon à l'instant initial sur les différents maillages : « grossier », « moyen », « fin » et « très fin ».

4.5.4 Conditions aux limites

Les conditions aux limites utilisées pour l'interaction pale-tourbillon sont les mêmes que celles mises en œuvre pour les calculs d'écoulements stationnaires sans incidence autour de profil, c'est-à-dire :

- imposition de l'entropie, de l'enthalpie, de la direction de l'écoulement et extrapolation multidimensionnelle de la pression en entrée (frontières inférieure et supérieure sont assimilées à des conditions d'entrée) ;
- imposition de la pression et extrapolation multidimensionnelle de l'entropie, de l'enthalpie, de la direction de l'écoulement en sortie ;
- imposition de la condition de glissement et extrapolation multidimensionnelle de la masse volumique, de la pression et de la vitesse tangentielle sur les parois solides.

Les valeurs des cellules fictives et des points à la paroi sont actualisées après chaque sous-itération sur le pas de temps fictif. Une fois obtenue la convergence sur le temps fictif, les états de ces cellules correspondent bien au temps $t^{n+1} = t^n + \Delta t$.

4.5.5 Temps physique et temps fictif

Le pas de temps physique Δt est constant pour toute la durée du calcul numérique. Il est choisi pour chaque maillage de façon à minimiser le premier terme d'erreur du schéma RBV pour l'advection du tourbillon dans la région où les maillages sont cartésiens. La relation qui définit ce pas de temps optimum est :

$$\Delta t_{opt} = \left(\frac{1 + M_\infty}{2M_\infty} \right) \frac{h_{cart}}{U_\infty + c_\infty} \quad (4.10)$$

cette relation se simplifie en :

$$\Delta t_{opt} = \frac{h_{cart}}{2U_\infty} \quad (4.11)$$

Les pas de temps physiques et les maxima des nombres CFL locaux correspondant pour les 3 maillages ainsi que les autres paramètres de calcul sont résumés dans le tableau (4.1). La définition du CFL est :

$$\text{CFL} = \Delta t \max_{j,k} \left(\frac{\|\vec{u}\| + \sqrt{\gamma p / \rho}}{h} \right)_{j,k} \quad (4.12)$$

La méthode de sous-itérations employée pour converger vers la solution instationnaire du schéma à $t + \Delta t$ est implicite et met en œuvre un pas de temps (fictif) local. Le pas de temps fictif pour chaque cellule est calculé pour un nombre $\text{CFL}_{fictif} = 25$. La solution est estimée convergée lorsque la norme L^2 du résidu sur le temps fictif est inférieure à 10^{-6} , le nombre maximum de sous-itérations est fixé à 10.

Maillage	nombre de points	h_{cart}/c	nombre de points dans le cœur du tourbillon	Δt	CFL_{max} initial
« grossier »	48 000	$2 \cdot 10^{-2}$	2	10^{-2}	2,73
« moyen »	144 000	10^{-2}	4	$5 \cdot 10^{-3}$	3,97
« fin »	397 000	$5 \cdot 10^{-3}$	8	$2,5 \cdot 10^{-3}$	4,73
« très fin »	1 350 000	$2,5 \cdot 10^{-3}$	16	$1,25 \cdot 10^{-3}$	5,23

TAB. 4.1 - Récapitulatif des paramètres de simulation du BVI subsonique

4.6 Description et analyse de la solution de référence

La solution de référence utilisée pour la description de l'interaction pale-tourbillon subsonique frontale en fluide parfait a été obtenue avec le schéma RBV dans le maillage de 1 350 000 points avec un tourbillon de SCULLY à enthalpie constante positionné à $t/(c/U_\infty) = 0$ en $x/c = -3,5$. Le pas de temps adimensionné est $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$, un filtre d'ordre 10 est utilisé dans la phase de convergence en temps fictif¹. L'exploitation des résultats de cette simulation pour l'étude du déroulement de l'interaction est justifiée par une étude de convergence en maillage (présentée au paragraphe 4.7.3) qui nous permet d'estimer raisonnablement que la solution de ce calcul est proche de la solution convergée du schéma RBV pour ce problème.

4.6.1 Solution non visqueuse du BVI subsonique frontal

Description macroscopique

Pendant la phase d'advection qui précède l'interaction, le tourbillon négatif (son sens de rotation est celui des aiguilles d'une montre) reste positionné sur une trajectoire passant par la ligne de symétrie du profil. Au fur et à mesure de l'approche, le champ de vitesse induit par le tourbillon provoque une incidence négative au niveau du bord d'attaque ce qui entraîne un déplacement progressif du point d'arrêt vers l'extrados (FIG. 4.9, visualisations au temps $t/(c/U_\infty) = 3$ à 3,3).

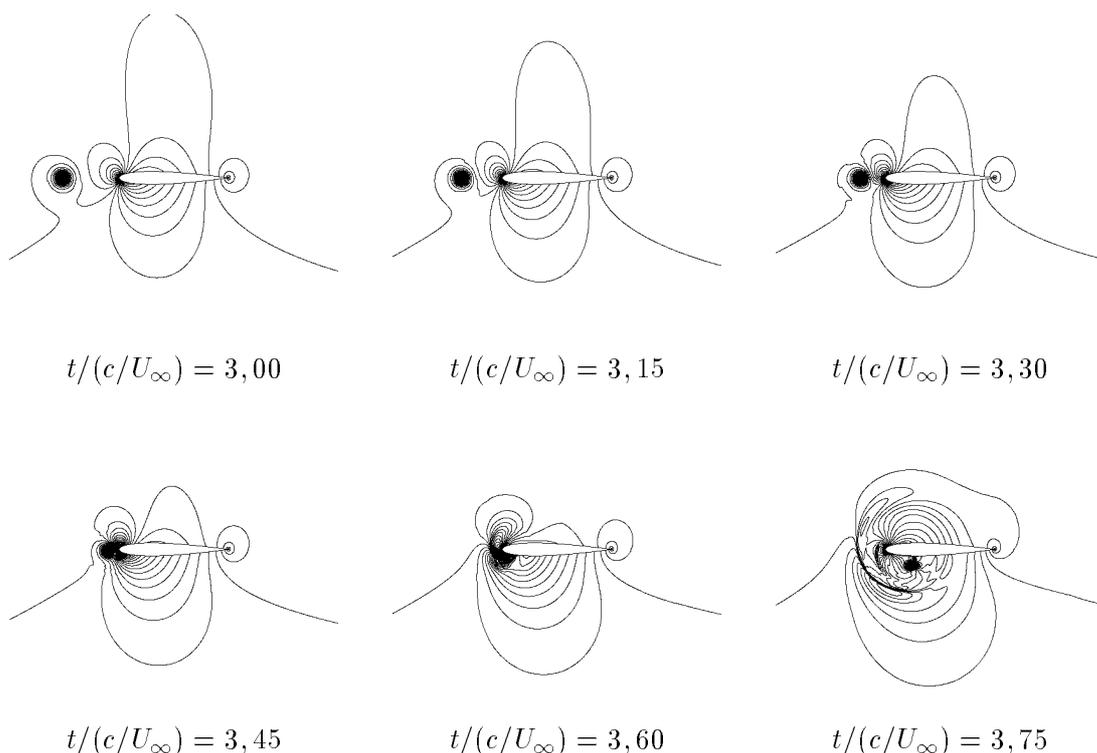


FIG. 4.9 - Iso-valeurs du champ de masse volumique au cours du BVI, $\Delta\rho = 0,01$.

1. La durée de la simulation est de 5,5 unités de temps adimensionné, soit 4400 itérations en temps physique. Le filtre d'ordre 10 a été mis en œuvre pour 4320 d'entre elles, pendant 80 itérations (itération 2800 à 2880) un filtrage à l'ordre 4 a dû être utilisé pour des raisons de robustesse pendant la formation d'un choc de grande intensité (nombre de MACH supérieur à 3,8 et pression adimensionnée inférieure à 0,035).

Lorsque le tourbillon arrive au voisinage du profil, on observe la formation d'un choc à l'intrados près du bord d'attaque et l'apparition d'une zone de recirculation à la paroi en aval de ce choc. Cette recirculation donne naissance à un deuxième tourbillon, positif, qui se détache de la paroi pour être convecté vers l'aval avec le tourbillon initial. Le point d'arrêt reprend rapidement sa position initiale en $(y/c) = 0$ après le passage du tourbillon. On observe simultanément la propagation d'une onde acoustique (FIG. 4.9, visualisations au temps $t/(c/U_\infty) = 3,45$ à $3,75$).

Après s'être détachés de la paroi, les deux tourbillons entament une corotation dans le sens indirect et s'éloignent de la paroi jusqu'à avoir atteint une abscisse correspondant à la mi-corde du profil (FIG. 4.10, visualisations au temps $t/(c/U_\infty) = 3,9$ à $4,05$).

Une fois passée la mi-corde, la paire de tourbillons contrarotatifs continue son mouvement giratoire et se rapproche du profil jusqu'à ce que le tourbillon direct, créé par l'interaction, l'impacte puis se déforme suite à cette collision et perde de son intensité. Le tourbillon présent en aval du profil après l'interaction est donc celui qui a été introduit initialement pour la simulation numérique (FIG. 4.10, visualisations au temps $t/(c/U_\infty) = 4,2$ à $4,65$).

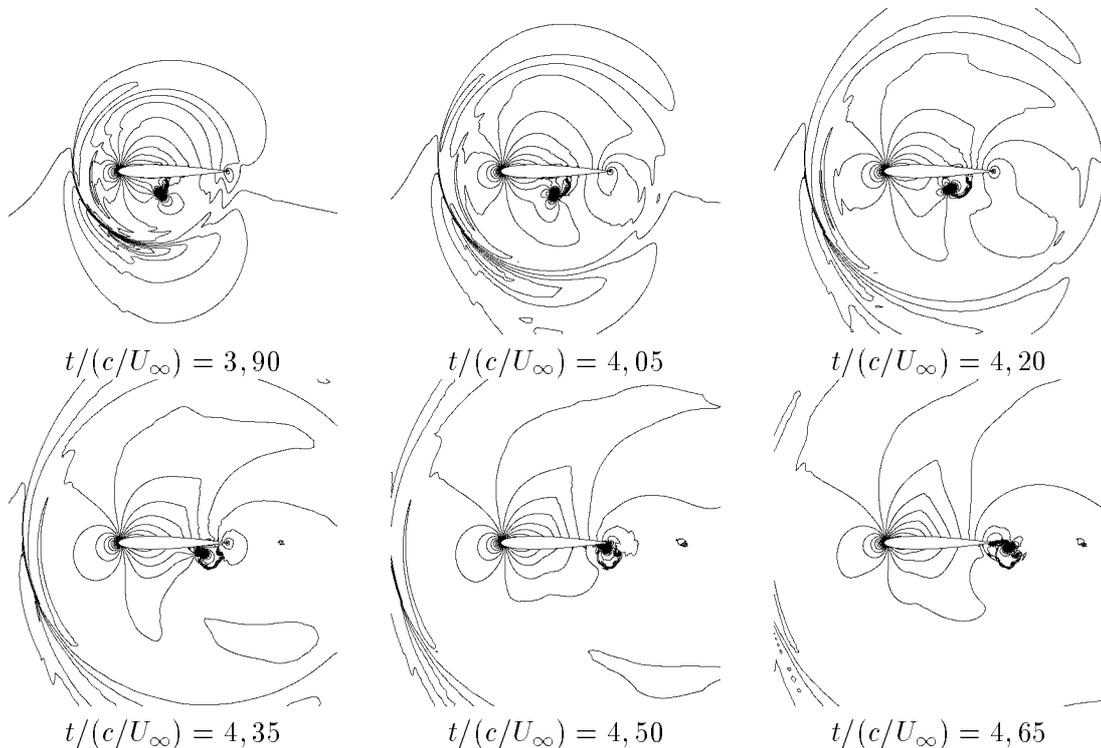


FIG. 4.10 - Iso-valeurs du champ de masse volumique au cours du BV1, $\Delta\rho = 0,01$.

Trajectoire et déformation des tourbillons

Une représentation à différents instants du champ de vorticité pendant l'interaction pale-tourbillon, comme présentée FIG. 4.11, permet de bien identifier les trajectoires des deux tourbillons et leur déformation au cours du temps. Sur la figure, la plage de couleurs allant du bleu au vert indique un tourbillon tournant dans le sens indirect alors que la plage de couleur variant du orange au blanc en passant par le rouge indique un tourbillon tournant dans le sens direct.

Le tourbillon moteur de l'interaction ne subit pratiquement pas de perte d'intensité pendant le BVI. Le second tourbillon, positif, se détache de la paroi après sa formation et est entraîné vers l'aval avec le tourbillon initial. Pendant ce transport, la paire de tourbillons contrarotatifs pivote dans le sens positif, la vitesse de ce pivotement dépend de l'intensité relative des deux tourbillons. Au cours de ce pivotement, la paire de tourbillons suit une trajectoire non rectiligne qui l'éloigne puis la rapproche du profil jusqu'à entrer en contact avec la paroi à proximité du bord de fuite. Le tourbillon positif est alors fortement déformé, le tourbillon initial retrouve une structure circulaire et poursuit son advection en aval du profil.

La trajectoire remontante suivie par la paire de tourbillons, l'impact à l'intrados du profil et l'advection du tourbillon initial en aval du profil correspondent à la solution non visqueuse du BVI frontal subsonique. Dans le cadre des équations de NAVIER-STOKES avec un nombre de REYNOLDS de l'ordre de 10^6 , la couche limite influence assurément la trajectoire de la paire de tourbillons et leur déformation si il y a collision avec l'intrados du profil près du bord de fuite.

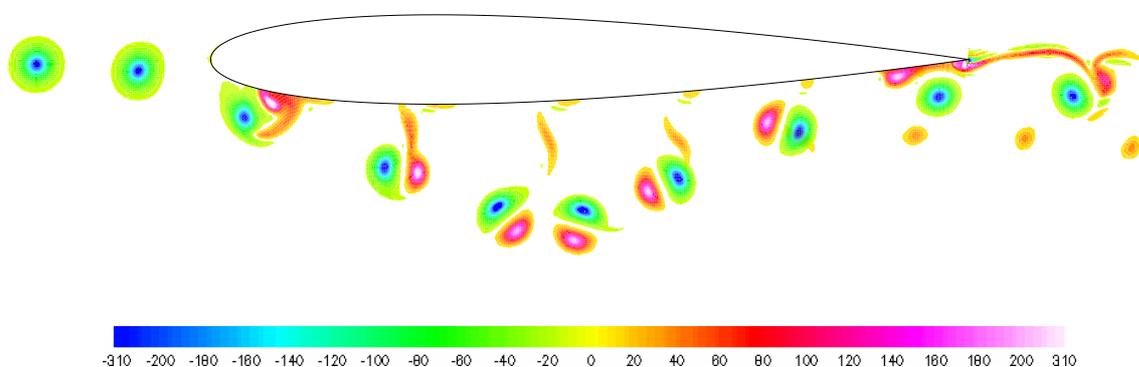


FIG. 4.11 - *Trajectoire et déformation du tourbillon au cours du BVI, iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.*

Acoustique du champ proche

L'acoustique du BVI obtenue à partir de la résolution des équations d'EULER est comparable à celle issue d'une simulation des équations de NAVIER-STOKES avec modèle de turbulence [59]. De plus, le maillage utilisé pour le calcul de la solution non visqueuse du BVI subsonique frontal avec le schéma RBV est suffisamment fin pour capturer les ondes acoustiques en champ proche.

Les ondes de compressibilité sont visualisables sur les champs de divergence de la vitesse et de pression acoustique (FIG. 4.12 et FIG. 4.13). La pression acoustique correspond à la différence entre le champ de pression instantané $p(\vec{x}, t)$ pendant le BVI et le champ de pression d'un profil en écoulement non perturbé (écoulement stationnaire sans incidence). Elle est adimensionnée par la pression à l'infini.

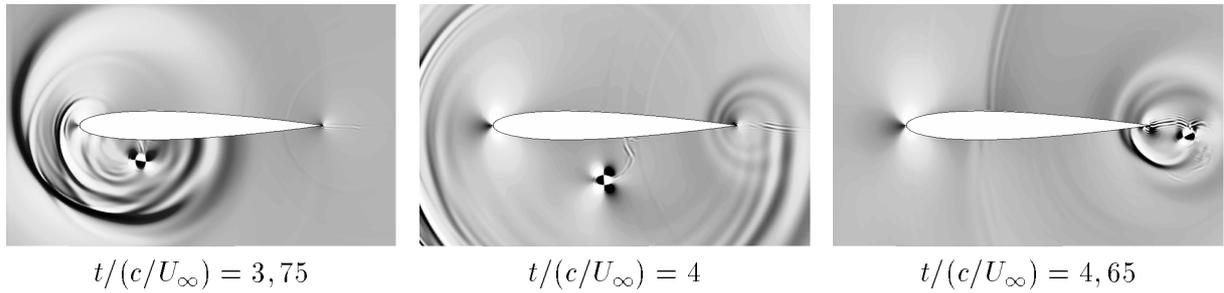


FIG. 4.12 - *Champs instantanés de la divergence de la vitesse*

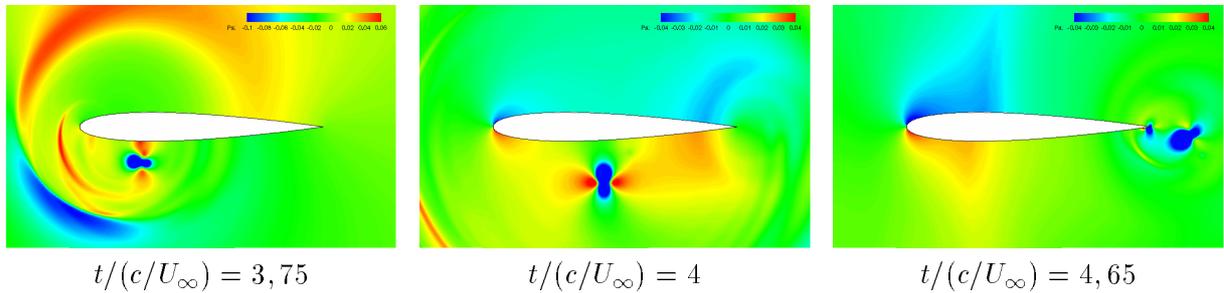


FIG. 4.13 - *Champs instantanés de la pression acoustique adimensionnée*

La forte directivité du bruit de BVI est illustrée par le champ de pression acoustique à $t/(c/U_\infty) = 3,75$. À cet instant, on distingue nettement trois lobes de pression.

Le lobe de dépression (en bleu) côté intrados provient du détachement de la poche supersonique engendrée par le passage du tourbillon près du bord d'attaque à l'intrados.

Le lobe de surpression (en rouge) côté extrados provient de la zone de surpression qui caractérise le point d'arrêt. Pendant l'approche du tourbillon vers le profil, le champ de vitesse induit par le tourbillon provoque un déplacement du point d'arrêt vers l'extrados, ce changement de position s'accompagne d'une augmentation de la pression en ce point. Une fois le tourbillon passé sous le profil, le point d'arrêt reprend sa position au bord d'attaque. Ce déplacement rapide du point d'arrêt vers l'amont provoque alors le détachement d'une zone de surpression.

Le troisième lobe de pression acoustique visible sur la figure correspond également à une surpression. Une étude aéroacoustique [59] à partir d'une solution visqueuse avec modèle de turbulence du BVI subsonique frontal confirme la réalité de cette onde acoustique. Dans cette étude, l'origine de cette troisième onde tiendrait à la présence du second tourbillon créé au cours du BVI qui provoquerait une affectation de la zone de surpression qui caractérise le point d'arrêt, affectation dont résulterait le détachement d'une région de surpression au bord d'attaque.

Dans le cas de la solution obtenue avec le schéma RBV, le second tourbillon joue un rôle quant à l'origine de cette onde mais n'interagit pas directement avec la région de surpression près du point d'arrêt. Des représentations des champs instantanés de pression adimensionnée avant le détachement de cette troisième onde sont données FIG. 4.14. Sur cette figure, les isocontours de vorticité (traits pleins noirs) permettent de positionner les deux tourbillons. À $t/(c/U_\infty) = 3,6$ une zone de surpression est comprise entre les deux tourbillons et attachée à l'intrados du profil. Une fois la paire de tourbillons éloignée de la paroi, cette région de surpression se déplace vers l'amont en suivant l'intrados, jusqu'à interagir avec la zone de surpression du point d'arrêt et former la troisième onde acoustique.

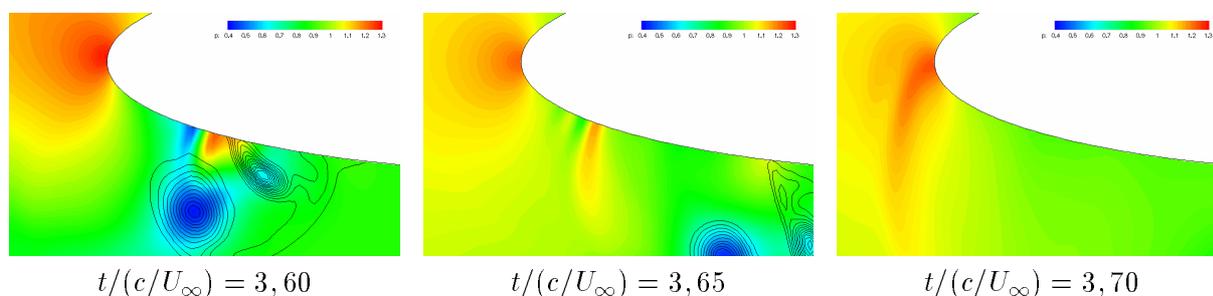


FIG. 4.14 - Champs instantanés de pression adimensionnée et lignes iso vorticité

La visualisation du champ de la divergence de la vitesse à $t/(c/U_\infty) = 4$ (FIG. 4.12) montre que les deux principales ondes de compressibilité subissent une diffraction lorsqu'elles atteignent le bord de fuite du profil. La visualisation du champ de pression acoustique au même instant (FIG. 4.13) montre que cette diffraction produit deux nouvelles ondes acoustiques se propageant vers l'amont, l'une à l'intrados, l'autre à l'extrados.

Dans la solution du BVI calculée avec le schéma RBV, la paire de tourbillons contrarotatifs entre en contact avec l'intrados du profil puis longe la paroi. Le champ de divergence de la vitesse à $t/(c/U_\infty) = 4,65$ (FIG. 4.12) avec des niveaux adéquats met en relief l'émission d'ondes acoustiques lorsque le tourbillon négatif et ce qu'il reste du tourbillon positif dépassent le bord de fuite. Toutefois, les niveaux de pression acoustique au même instant (FIG. 4.13) indiquent que ces ondes sont de faible intensité en comparaison des cinq ondes identifiées auparavant.

Évolution des coefficients aérodynamiques

L'évolution temporelle des valeurs des coefficients de portance C_L et de traînée C_D (FIG. 4.15) confirme que l'imposition de la condition initiale modifie l'écoulement au voisinage de profil. En effet, la valeur du coefficient de portance passe brutalement de 0 à $-0,1$ après le commencement de la simulation numérique. On constate également que le BVI frontal affecte considérablement les efforts aérodynamiques subis par le profil. Au fur et à mesure que le tourbillon s'approche, le coefficient de portance diminue pour atteindre une valeur minimale de $-0,7$ à $t/(c/U_\infty) = 3,54$. Le coefficient de traînée diminue lui aussi pour atteindre sa valeur minimale de $-0,07$ un peu plus tôt, à $t/(c/U_\infty) = 3,5$. Les deux coefficients réaugmentent ensuite fortement pour retrouver des valeurs positives maximales pendant le BVI, $0,24$ pour C_L et $0,018$ pour C_D avant de tendre vers les valeurs correspondant à un écoulement stationnaire sans incidence quand t tend vers l'infini.

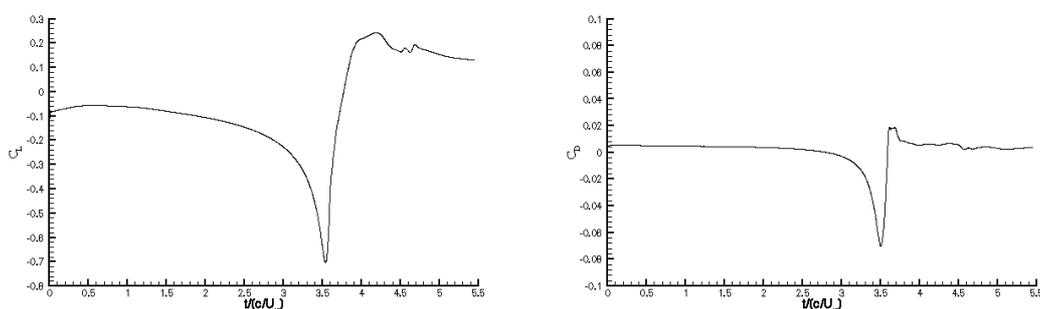


FIG. 4.15 - Évolution des coefficients aérodynamiques pendant le BVI

4.6.2 Comparaison de la solution avec l'expérience

La comparaison des interférogrammes holographiques expérimentaux avec les champs de masse volumique instantanés issus de la simulation (FIG. 4.16, pour les résultats issus de la simulation, les franges correspondent à une variation de masse volumique adimensionnée $\Delta\rho$ de 10^{-2}) montre que la solution non visqueuse du BVI calculée avec le schéma RBV et filtre d'ordre 10 est qualitativement en bon accord avec les résultats expérimentaux.

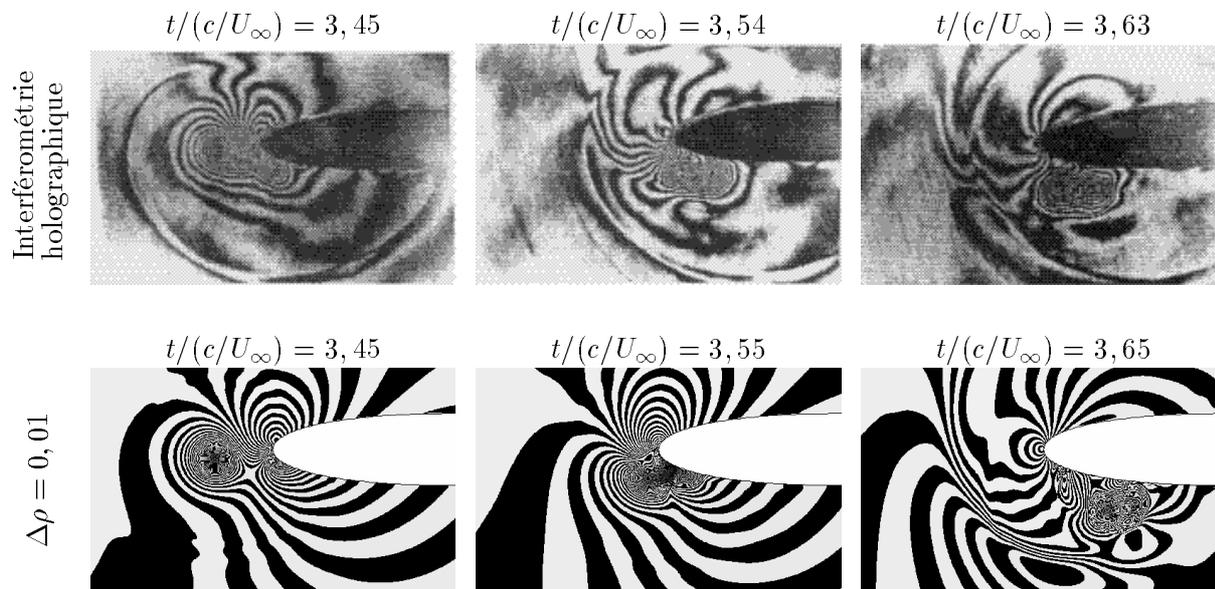


FIG. 4.16 - Comparaison des interférogrammes holographiques expérimentaux [39] avec les champs instantanés de masse volumique issus de la simulation numérique.

La comparaison des coefficients de pression (CP) instationnaires sur la paroi avec les mesures expérimentales est présentée FIG. 4.17. Les variations des CP calculés à l'extrados sont très proches de l'expérience que ce soit au niveau des maxima atteints que des pentes des courbes. À l'intrados, les CP calculés sont qualitativement en bon accord avec l'expérience, bien que la variation maximale du CP en $x/c = 0,02$ soit surestimée. Cet écart avec l'expérience est caractéristique d'une simulation non visqueuse et a déjà été observé avec des simulations faisant appel à d'autres méthodes numériques [59, 66]. Parmi les études publiées [39, 59, 67] utilisant des simulations de type NAVIER-STOKES avec modèle de turbulence, les études [39, 59] ne montrent pas d'oscillations du CP au cours du BVI alors que [67], qui fait appel à une méthode d'adaptation de maillage, fait aussi état d'oscillations mais d'amplitude inférieure à celles observées FIG. 4.17.

On remarque que les valeurs des CP calculés sont différentes avant l'interaction ($t/(c/U_\infty) < 3,3$) de celles obtenues expérimentalement. Suivant l'hypothèse que le tourbillon physique fait décroître localement l'angle d'attaque apparent pendant son passage sous le profil [88], MORVANT et al. [59] ont réalisé des simulations de BVI subsonique frontal avec de faibles angles d'incidence (0,5 et 0,75 degrés). Les résultats qu'ils obtiennent montrent une meilleure concordance entre les CP calculés et les valeurs expérimentales avant et pendant l'interaction, l'amélioration est particulièrement sensible pour les valeurs à l'intrados du profil. La trajectoire suivie par le tourbillon pour les simulations avec angle d'attaque est légèrement modifiée et conduit à une interaction moins intense que dans le cas d'une interaction à incidence nulle. Les auteurs ne préconisent toutefois pas de valeur particulière pour l'angle d'attaque. On peut penser que celle-ci dépend de la distance entre le tourbillon et le profil à l'instant initial.

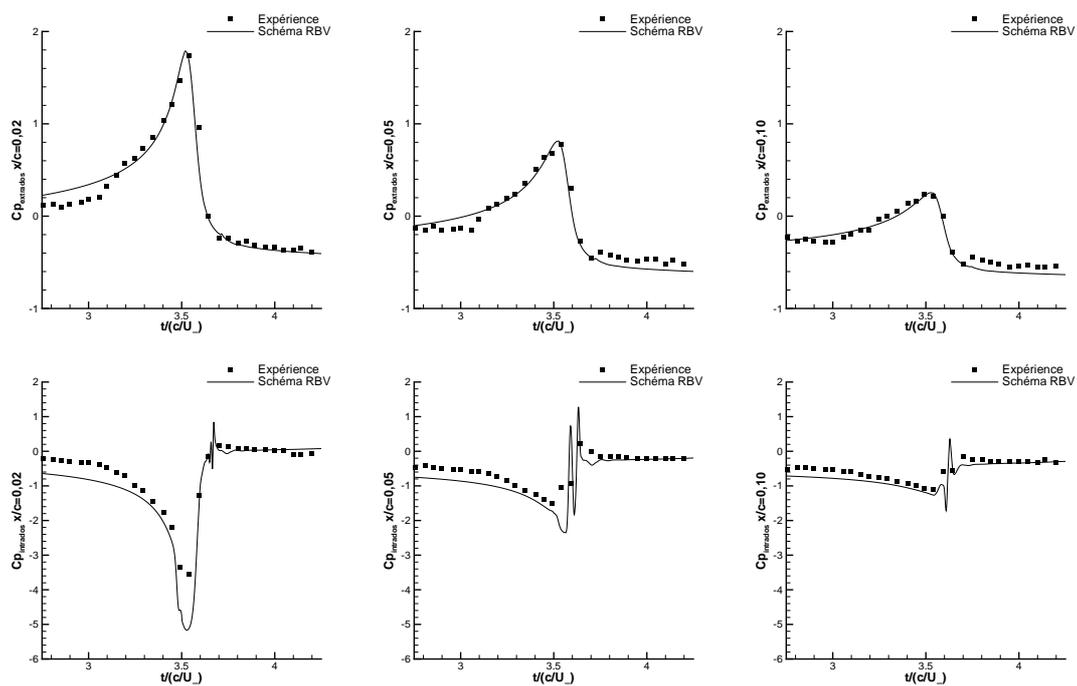


FIG. 4.17 - Évolution des Cp instationnaires en différents points du profil au cours du BV1.

4.6.3 Processus de formation du second tourbillon

À notre connaissance, le processus de formation du second tourbillon positif au moment de l'interaction entre le tourbillon négatif et le bord d'attaque du profil ne semble pas avoir été étudié de façon précise. Dans [39], il est admis que le champ de vitesse induit par le tourbillon négatif pourrait avoir comme effet de déplacer le point d'arrêt vers l'extrados et d'engendrer une zone de recirculation à l'intrados qui va ensuite se détacher de la paroi. Cette explication fait jouer aux effets visqueux un rôle prépondérant dans la phénoménologie du BVI frontal. Elle n'est pas confirmée par notre résolution numérique des équations d'EULER, ni par celles de [59, 66] qui reproduisent assez fidèlement le phénomène.

Les visualisations de la FIG. 4.18 des champs de masse volumique et des lignes de courant instantanées au voisinage du bord d'attaque pendant l'interaction permettent de constater à $t/(c/U_\infty) = 3,45$ le déplacement du point d'arrêt vers l'extrados, à $t/(c/U_\infty) = 3,55$ la présence d'un choc à l'intrados en aval duquel on observe le recirculation, à $t/(c/U_\infty) = 3,65$ l'éloignement de la paroi des deux tourbillons contrarotatifs. Sur la même figure, les représentations des isovaleurs du nombre de MACH attestent du caractère transitoire et de l'extrême intensité du choc puisque la valeur maximale du nombre de MACH sur le profil est supérieur à 3,85 à $t/(c/U_\infty) = 3,55$. Les conditions initiales utilisées pour la simulation, en particulier un tourbillon à enthalpie constante, font du champ de déviation d'entropie $((S - S_\infty)/S_\infty$ avec $S = p/\rho^\gamma$) un bon « marqueur » des tourbillons pour cet écoulement. La déviation d'entropie permet de situer précisément la position du tourbillon qui interagit avec le profil. On vérifie qu'à $t/(c/U_\infty) = 3,45$ le choc et le tourbillon contrarotatif ne sont pas encore formés puisque la déviation d'entropie est nulle dans tout l'écoulement à l'exception de la région occupée par le tourbillon advecté en amont du profil. À $t/(c/U_\infty) = 3,55$, la déviation d'entropie montre que le tourbillon négatif n'impacte pas le profil mais se déforme et le contourne en passant côté intrados. Elle met aussi en évidence la position du choc caractérisée par une variation brutale de l'entropie et la formation du deuxième tourbillon juxtaposé en aval du choc. Enfin, elle rend compte sur la dernière vue des positions et des géométries respectives des deux tourbillons à $t/(c/U_\infty) = 3,55$.

Les résultats présentés FIG. 4.18 soulignent que les effets de compressibilité jouent un rôle majeur dans le processus de formation du deuxième tourbillon. Rappelons que l'équation qui régit la dynamique du vecteur tourbillon par unité de masse, ou vorticité spécifique $\vec{\omega}/\rho = (\vec{\nabla} \times \vec{u})/\rho$, dans un écoulement compressible instationnaire tridimensionnel pour un fluide newtonien est :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\vec{\omega}}{\rho} \right) = \overline{\overline{\vec{u}}} \cdot \frac{\vec{\omega}}{\rho} + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \cdot \overline{\overline{\vec{\tau}}} \right) - \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \times \left(\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} p \right) \quad (4.13)$$

Les termes appartenant au membre de gauche de l'équation constituent la dérivée particulière de la vorticité spécifique. Ils montrent que celle-ci est transportée par l'écoulement à la réserve des modifications induites par les termes du membre de droite.

Le premier terme du membre de droite, $\overline{\overline{\vec{u}}} \cdot (\vec{\omega}/\rho)$, est appelé terme d'étirement ou de déformation (*stretching* en anglais). Il s'annule dans le cas d'écoulements bidimensionnels où le vecteur rotationnel est par définition orthogonal au vecteur vitesse. Dans le cas d'écoulements tridimensionnels, il décrit les effets de déformation, étirement et basculement des tourbillons produits par les variations de vitesse (cisaillement) dans la direction des lignes tourbillonnaires.

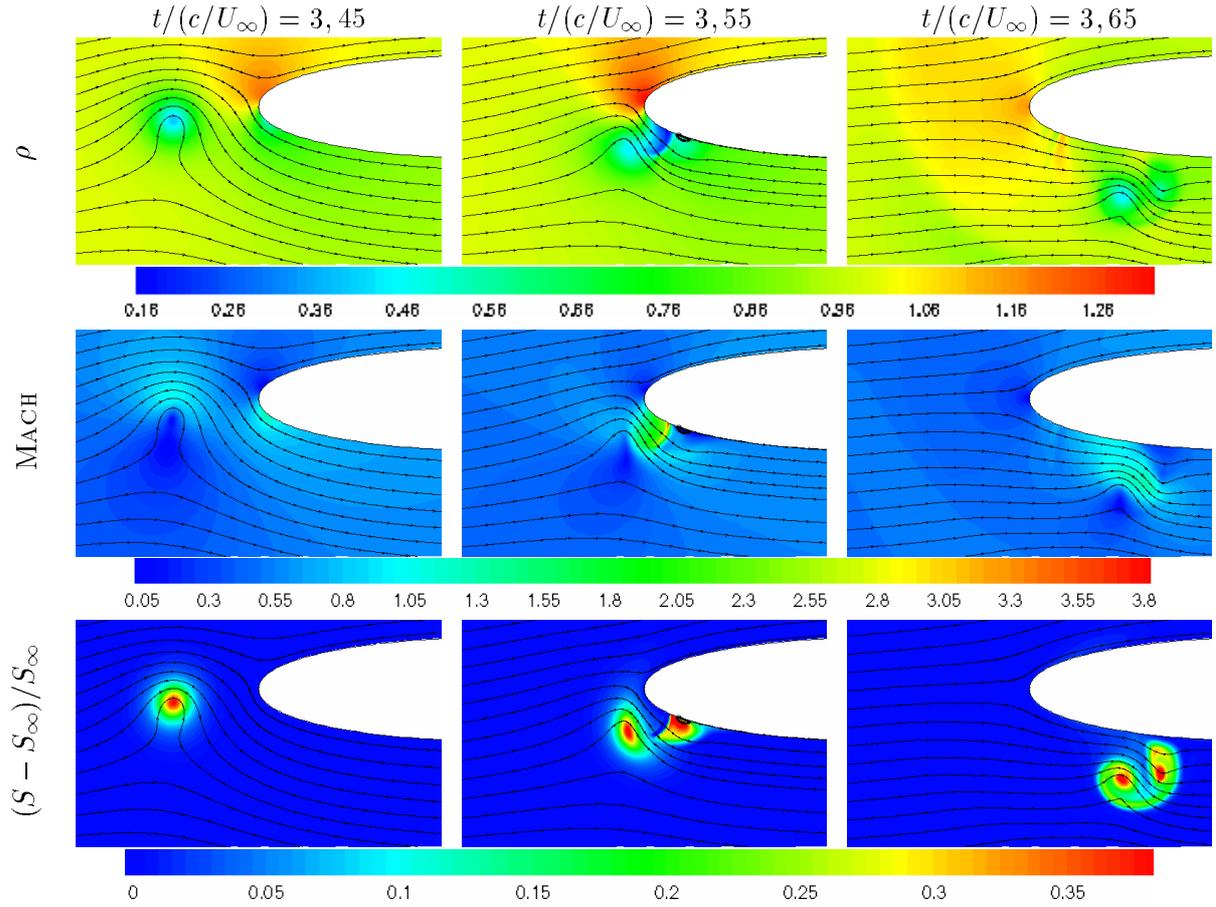


FIG. 4.18 - Lignes de courant et valeurs des champs de masse volumique, nombre de MACH et déviation d'entropie pendant le BVI

Le deuxième terme du membre de droite est la diffusion de la vorticité par la viscosité du fluide. La viscosité a principalement pour effet de dissiper les structures tourbillonnaires, à l'exception des régions proches des parois où elle peut créer de la vorticité. Dans le cas d'une simulation des équations de NAVIER-STOKES et de l'expérience elle-même ce terme apporte indéniablement une contribution à la formation du deuxième tourbillon, notamment en diminuant l'intensité du choc du fait de l'interaction avec la couche limite. Il doit aussi intervenir dans la dynamique du couple de tourbillons contrarotatifs par la suite. Par contre, il n'est certainement pas le terme qui amorce la création du second tourbillon, ni ne lui donne son intensité puisque les simulations des équations d'EULER le permettent. D'autre part, la contribution de la viscosité numérique du schéma RBV est quasiment nulle sur l'équation de la vorticité discrète, celle-ci ne peut donc pas être mise en avant pour expliquer la formation du deuxième tourbillon.

C'est donc le troisième terme du membre de droite, $\vec{\nabla} \times (\rho^{-1} \vec{\nabla} p) = \frac{1}{\rho^2} \vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p$ appelé terme baroclinique, qui va produire de la vorticité et donner naissance au tourbillon qui se développe en aval du choc à l'intrados. Ce terme est nul dans le cas d'un écoulement isentropique puisque $(p/p_\infty) = (\rho/\rho_\infty)^\gamma$ implique que $\vec{\nabla} \rho \times \vec{\nabla} p = \vec{0}$, sinon il traduit la perte de la relation de dépendance de la pression en fonction de la masse volumique $p = p(\rho)$, ceci à cause de la création d'entropie à travers un choc par exemple. Ce phénomène est particulièrement visible sur la FIG. 4.19, à $t/(c/U_\infty) = 3,55$, on observe que les deux lignes de courant les plus proches du profil repr sent es sur la figure ont une géométrie de type convergent-divergent, l'écoulement

entre ces deux lignes de courant devient sonique à l'endroit qui correspondrait au col dans le cas d'une tuyère, puis se réadapte avec un choc fort qui engendre une forte déviation d'entropie et permet la formation du deuxième tourbillon.

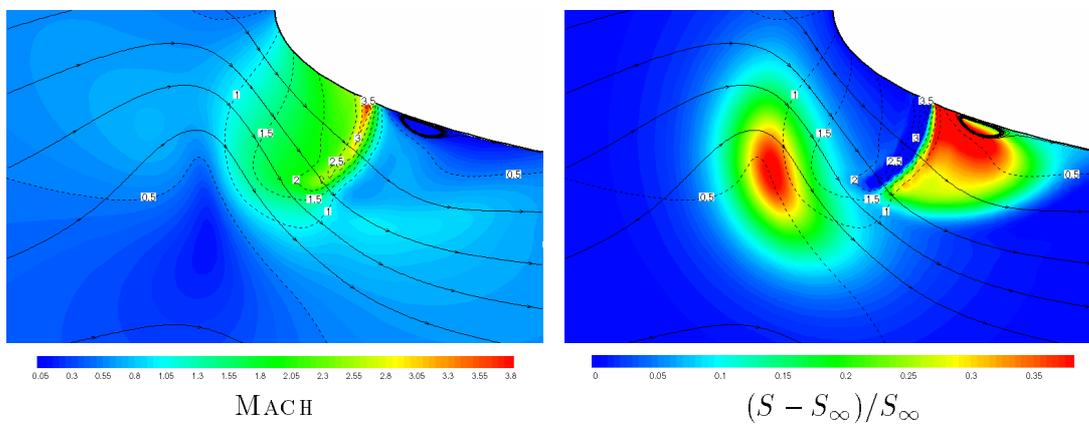


FIG. 4.19 - Lignes de courant, champs du nombre de MACH et déviation d'entropie au voisinage du bord d'attaque à $t/(c/U_\infty) = 3,55$.

4.7 Sensibilité de la solution aux paramètres numériques

4.7.1 Influence du filtre

L'objet de ce paragraphe est de quantifier les modifications induites par l'adjonction du filtre sur la solution du BVI calculée avec le schéma RBV. En effet, un filtre d'ordre 10 est appliqué après chaque sous-itération en temps fictif pour amortir les instabilités numériques non dissipées par le schéma. D'autre part, pour éviter toute réflexion d'ondes parasites au niveau des frontières du domaine de calcul, on fait décroître l'ordre du filtre progressivement suivant les deux directions (\vec{x} et \vec{y}) pour les frontières d'entrée et de sortie et suivant la direction \vec{x} pour les frontières supérieure et inférieure. Ces régions du domaine de calcul font alors office de zone « éponge » à l'instar de ce qui se fait couramment pour des calculs numériques d'aéroacoustique.

Le schéma RBV est suffisamment dissipatif en maillage cartésien régulier, il est donc tout à fait envisageable de ne pas appliquer le filtre dans la région cartésienne en amont du profil NACA 0012. La comparaison à $t/(c/U_\infty) = 2,5$ entre les solutions de calculs effectués² avec et sans filtre dans cette région montre (FIG. 4.20) que les champs de vitesse, masse volumique et pression du tourbillon se superposent parfaitement.

Ces résultats montrent que l'altération de la solution du schéma RBV par le filtre d'ordre 10 est négligeable dans les zones cartésiennes du maillage. La mise en œuvre du filtre s'en trouve facilitée, le filtre est appliqué à l'ensemble du domaine de calcul.

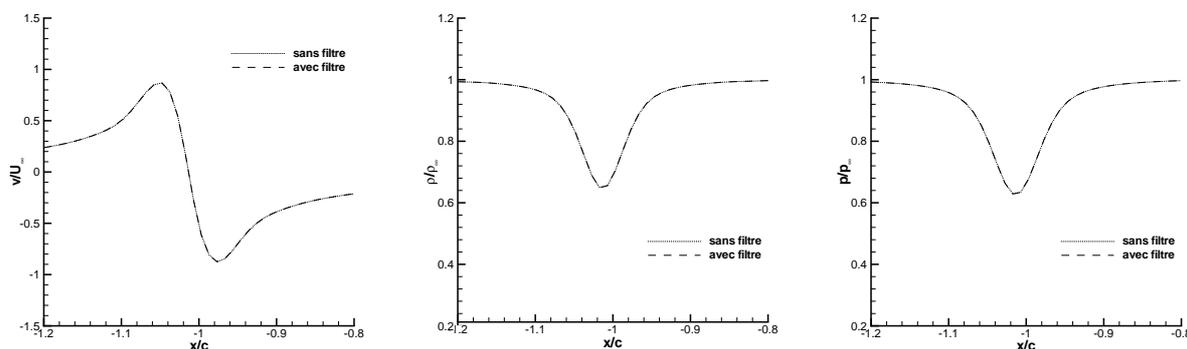


FIG. 4.20 - Coupe à $t/(c/U_\infty) = 2,5$ suivant l'axe des X d'un tourbillon advecté sans et avec filtre d'ordre 10, à gauche : $\vec{u} \cdot \vec{y}/U_\infty$, au centre : ρ/ρ_∞ , à droite : p/p_∞ .

2. Paramètres des calculs : maillage « moyen », tourbillon isentropique initialisé en $x/c = -3,5$ et $\Delta t = 0,005$. Le temps de visualisation $t/(c/U_\infty) = 2,5$ correspond à 500 itérations en temps physique, le tourbillon advecté par un écoulement uniforme (sans profil) aurait théoriquement parcouru 2,5 longueurs de corde

4.7.2 Influence du modèle de tourbillon

Nous évaluons maintenant l'influence sur le déroulement du BVI des deux modèles de tourbillons présentés au paragraphe 4.3, à savoir un profil de vitesse de type SCULLY [80] associé à des champs de pression et de masse volumique initiaux calculés à partir d'hypothèses de constance de l'entropie ou bien de l'enthalpie. L'analyse qui suit s'appuie sur des simulations numériques réalisées sur le maillage « moyen » avec des tourbillons positionnés en $x/c = -3,5$ à $t = 0$, un pas de temps adimensionné $\Delta t = 0,01$ et filtrage de la solution à l'ordre 10.

Une coupe suivant l'axe des X à $t/(c/U_\infty) = 2,5$ (FIG. 4.21) des solutions du BVI pour les deux modèles de tourbillons montre que les hypothèses d'isentropie et d'isenthalpie n'ont pas d'influence sur l'évolution du profil de vitesse du tourbillon pendant la phase d'advection. Les profils de vitesse tangentielle des deux solutions ont une amplitude inférieure aux tourbillons initiaux mais elles se superposent parfaitement. Concernant les champs de masse volumique, le tourbillon isenthalpique conserve une valeur inférieure dans le cœur par rapport au tourbillon isentropique. Les champs de masse volumique à $t/(c/U_\infty) = 2,5$ permettent donc toujours de distinguer les deux modèles de tourbillons. Bien qu'à l'instant initial le tourbillon isentropique possède une dépression plus forte que le tourbillon isenthalpique, les deux tourbillons présentent singulièrement le même champ de pression à $t/(c/U_\infty) = 2,5$. La question est alors de savoir si cette perte de pression vient de la méthode numérique, du modèle ou du maillage.

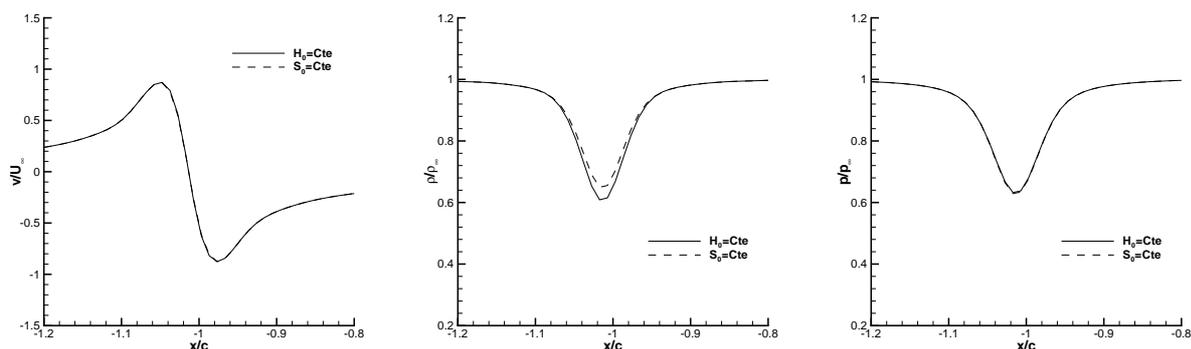


FIG. 4.21 - Coupe à $t/(c/U_\infty) = 2,5$ suivant l'axe des X de solutions de calcul de BVI subsonique pour des tourbillons initiaux isenthalpique et isentropique, à gauche : $\vec{u} \cdot \vec{y}/U_\infty$, au centre : ρ/ρ_∞ , à droite : p/p_∞ .

Un élément de réponse à cette question peut être proposé à l'aide de la figure (4.22) qui représente des coupes des champs aérodynamiques des deux tourbillons à $t/(c/U_\infty) = 0$ et $t/(c/U_\infty) = 0,25$. Pour les deux modèles de tourbillon, la perte de vitesse tangentielle est de 12% au bout de 50 itérations dans le maillage « moyen » par rapport à la condition initiale. L'amplitude de la perte de masse volumique au cœur du tourbillon est de 16% pour le modèle isenthalpique et de 15% pour le modèle isentropique ce qui montre que l'écart relatif des minima de masse volumique entre les deux modèles est relativement bien conservé puisqu'il passe de 11% à l'instant initial à 10,7% à $t/(c/U_\infty) = 0,25$. L'amplitude de la perte de pression au cœur du tourbillon après 50 itérations est de 17,4% pour le modèle isenthalpique et de 20,8% pour le modèle isentropique. L'écart relatif des minima de pression entre les deux modèles passe alors de 6,6% à l'instant initial à 2,2% à $t/(c/U_\infty) = 0,25$.

Les deux modèles de tourbillon perdent de leur intensité au cours de leur advection du fait du maillage (qui n'est pas assez fin pour les représenter avec suffisamment de précision) et des termes d'erreur du schéma. On peut raisonnablement estimer cette diffusion entre 12 et 16% au bout de 50 itérations, celle-ci s'applique indistinctement aux deux modèles de tourbillons. On sait grâce aux expériences de LEE & BERSHADER [39] que le tourbillon isenthalpique superposé à un écoulement uniforme (voir § 4.5.1) est très proche de l'écoulement réel et par conséquent en bonne adéquation avec les équations d'Euler instationnaires. Il semble donc que la plus forte dissipation du champ de pression du modèle de tourbillon isentropique résulte d'une inadéquation entre le champ aérodynamique initial imposé et les équations d'Euler. Cette atténuation de la dépression au cœur du tourbillon permettrait alors à l'écoulement initial de s'adapter jusqu'à ce qu'il corresponde à une solution compatible avec les équations d'Euler instationnaires.

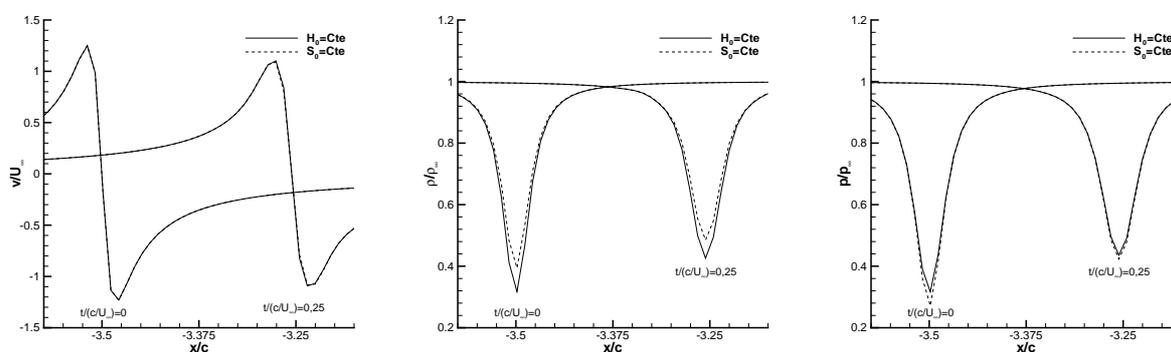


FIG. 4.22 - Coupe à $t/(c/U_\infty) = 0$ et $t/(c/U_\infty) = 0,25$ suivant l'axe des X de solutions de calcul de BVI subsonique pour des tourbillons initiaux isenthalpique et isentropique, à gauche : $\vec{u} \cdot \vec{y}/U_\infty$, au centre : ρ/ρ_∞ , à droite : p/p_∞ .

Puisque les deux tourbillons arrivent au voisinage du profil avec des champs de vitesse et de pression analogues, seul un léger écart sur leurs champs de masse volumique permet encore de les distinguer, on peut légitimement attendre qu'ils donnent des simulations du BVI très semblables. Ceci est confirmé par les résultats obtenus. L'étude de l'histoire des coefficients aérodynamiques globaux (FIG. 4.23) et des C_p instationnaires en différents points du profil (FIG. 4.24) atteste que les deux modèles de tourbillon donnent des solutions de BVI très proches, presque identiques. À profil de vitesse tangentielle égal, le modèle de tourbillon a donc finalement peu d'influence sur le déroulement du BVI. Notre analyse montre cependant que la solution obtenue est plus rigoureuse lorsqu'un tourbillon à enthalpie constante est utilisé pour l'initialisation de la simulation numérique.

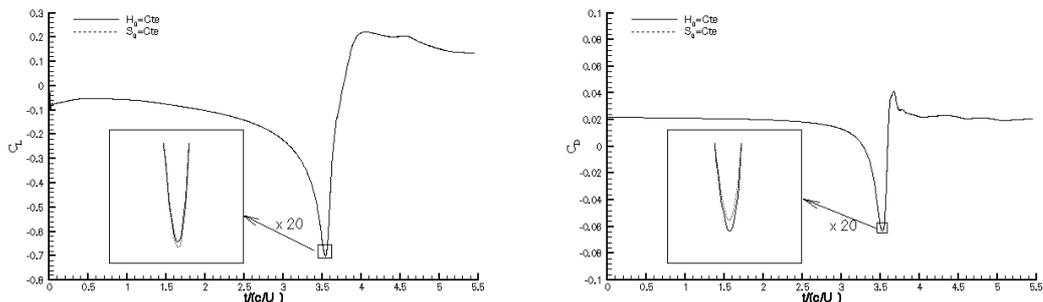


FIG. 4.23 - Influence du modèle de tourbillon sur les coefficients de portance (à gauche) et de traînée (à droite) au cours du BVI

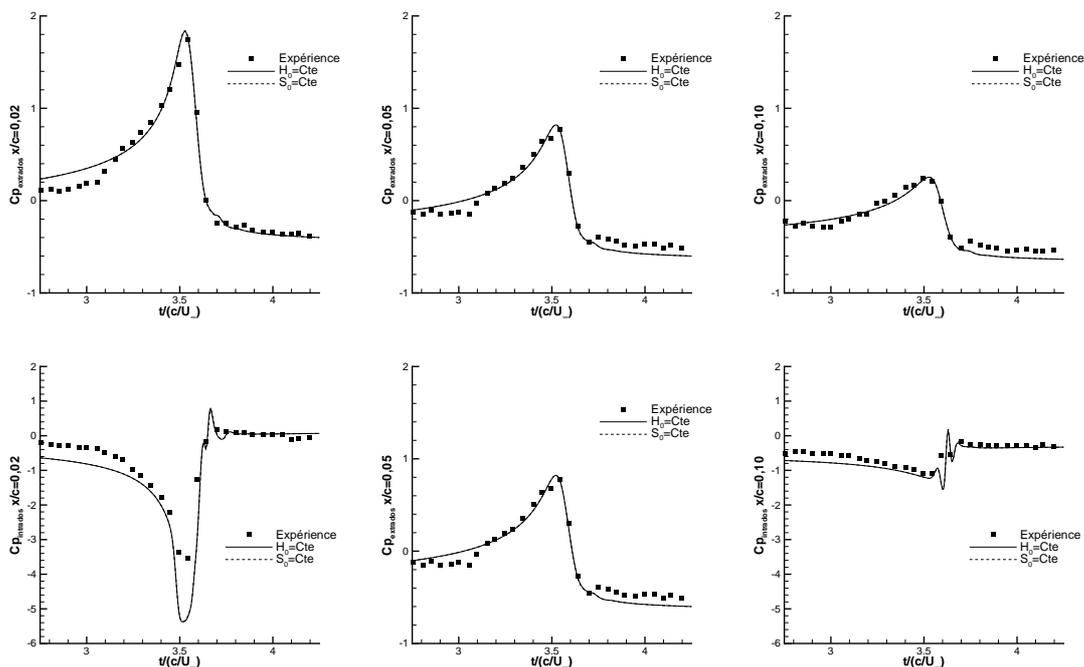


FIG. 4.24 - Évolution des C_p instationnaires en différents points du profil pour des calculs de BVI sur le maillage « moyen » avec des tourbillons initiaux isenthalpique et isentropique positionnés à $t = 0$ en $x/c = -3, 5$.

4.7.3 Influence du raffinement du maillage

Le pas de temps annulant le premier terme d'erreur du schéma RBV a été utilisé pour l'étude de convergence en maillage. La solution non visqueuse du BVI subsonique frontal est donc la meilleure solution atteignable avec le schéma RBV sur chaque maillage utilisé. Rappelons que ces maillages, du plus grossier au plus fin, contiennent en moyenne 2, 4, 8 et 16 points de discrétisation dans le diamètre du cœur du tourbillon.

L'utilisation du pas de temps optimum nous assure que le tourbillon conserve la droite ($y/c = 0$) comme trajectoire pendant toute la phase d'advection ce qui permet d'étudier l'évolution de ses champs au cours du temps sur les différents maillages au moyen de coupes suivant cet axe (FIG. 4.25).

Ces coupes nous apprennent que pour les maillages « grossier » et « moyen », la perte d'intensité du tourbillon est principalement due à l'erreur de représentation sur le maillage. En effet, pour ces deux simulations, la perte d'amplitude de la dépression et de la masse volumique au cœur du tourbillon est brutale entre $t/(c/U_\infty) = 0$ et $t/(c/U_\infty) = 0,5$ alors qu'elle est ensuite beaucoup plus faible et linéaire jusqu'à $t/(c/U_\infty) = 3$.

La solution calculée dans le maillage « fin » présente une faible diminution de l'intensité du tourbillon, assez linéaire en fonction du temps et de la distance d'advection.

Enfin la solution de référence obtenue avec le maillage le plus fin donne une variation d'amplitude inférieure à 10% sur les valeurs maximales des champs du tourbillon. Les pertes d'amplitude de pression, masse volumique, vitesse tangentielle et vorticité du tourbillon pour les solutions sur les 4 maillages pendant la phase d'advection sont résumées TAB. 4.2.

Variable	Maillage 48 000 points	Maillage 144 000 points	Maillage 397 000 points	Maillage 1 350 000 points
ρ/ρ_∞	-70%	-45%	-19%	-9%
p/p_∞	-74%	-49%	-20%	-6%
v_θ/U_∞	-53%	-33%	-14%	-6%
ω/ω_0	-88%	-70%	-36%	-10%

TAB. 4.2 - Pertes de masse volumique, de pression, de vitesse tangentielle et de vorticité au cœur du tourbillon pour $t/(c/U_\infty) \in [0; 3]$ pour les 4 maillages.

L'intensité du tourbillon qui arrive sur le profil dépend donc fortement du raffinement du maillage utilisé pour la simulation. De ce fait, on pourrait s'attendre à observer de fortes disparités sur l'évolution des CP instationnaires relevés au voisinage du bord d'attaque. Or, on voit FIG. 4.26, que les solutions donnent des résultats très voisins pour les quatre maillages. Les courbes retraçant les variations des CP se superposent pour les valeurs mesurées à l'extrados et sont très semblables en $x/c = 0,02$ à l'intrados pour les solutions des quatre maillages. Les principaux écarts entre les solutions se retrouvent en $x/c = 0,05$ et $x/c = 0,10$, à l'exception des solutions sur maillages « fin » et « très fin » qui sont très proches quel que soit le point de mesure. On peut expliquer la forte similitude de l'évolution des CP près du bord d'attaque pour les quatre solutions en revenant sur la trajectoire suivie par le tourbillon au début de l'interaction. Nous avons vu en effet que celui-ci n'impacte pas le profil mais le contourne par l'intrados.

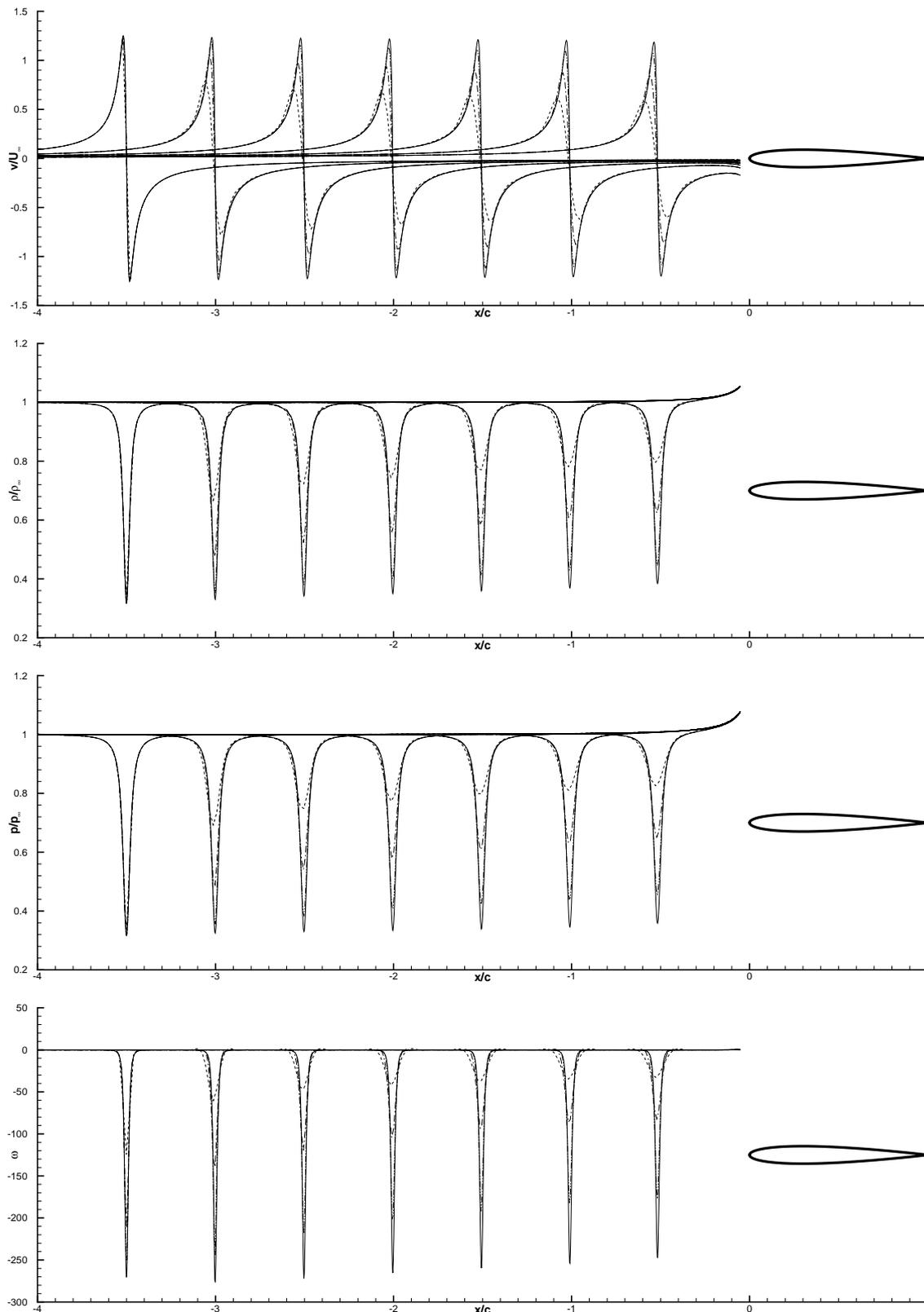


FIG. 4.25 - Coupes suivant l'axe X des champs de vitesse tangentielle, masse volumique, pression adimensionnée et vorticité du tourbillon pendant la phase d'advection du BVI pour la série de 4 maillages. (----- « grossier », -.-.-.- « moyen », « fin », — « très fin »)

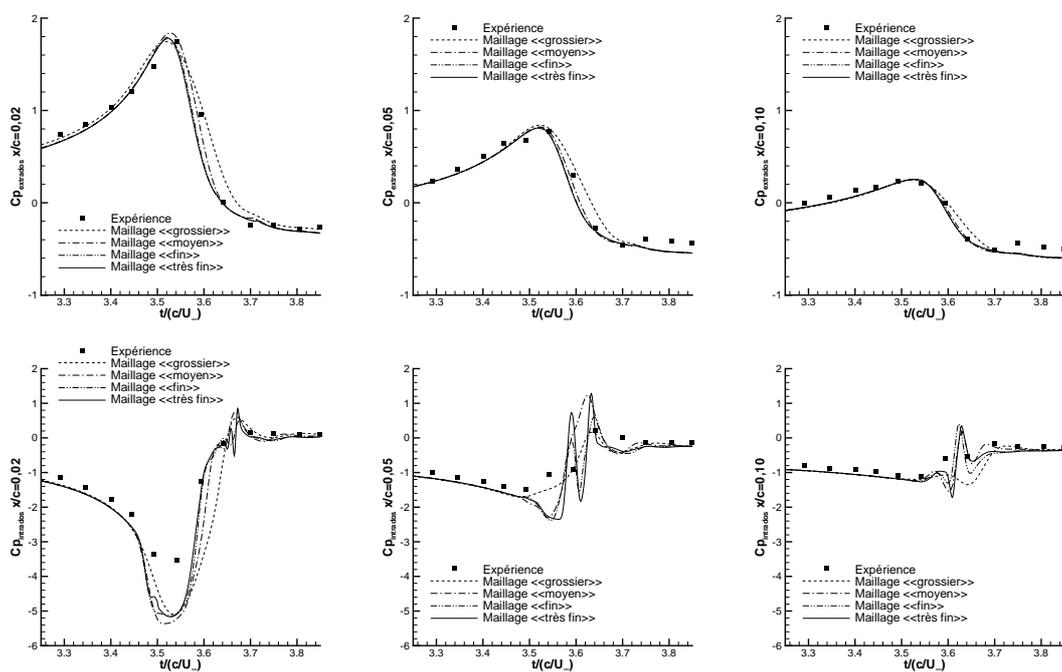


FIG. 4.26 - Évolution des C_p instationnaires en différents points du profil pour des calculs de BVI sur les maillages « grossier », « moyen », « fin » et « très fin » avec un tourbillon isenthalpique positionné à $t = 0$ en $x/c = -3,5$.

De la même façon, l'intensité du tourbillon au moment de l'interaction (qui dépend du maillage utilisé) n'a pas une grande influence sur les variations des coefficients aérodynamiques globaux pendant le BVI. L'interaction a lieu à $t/(c/U_\infty) = 3,5$ et les courbes de variations du coefficient de portance (C_L) sont similaires jusqu'à $t/(c/U_\infty) = 3,9$ pour les trois solutions dans les maillages les plus fins, FIG. 4.27, et très proche pour la solution obtenue avec le maillage « grossier » même si le minimum du coefficient de portance atteint pendant le BVI à $t/(c/U_\infty) = 3,54$ n'est que de $-0,655$ avec le maillage « grossier » contre $-0,70$ pour les autres solutions. La valeur du C_L remonte ensuite à $0,2$ à $t/(c/U_\infty) = 3,9$ pour les quatre simulations. Les légères différences que l'on observe ensuite sur l'évolution du C_L jusqu'à $t/(c/U_\infty) = 4,7$ sont la conséquence de trajectoires et de dynamiques du couple de tourbillons contrarotatifs différentes suivant le maillage avec lequel les simulations ont été réalisées.

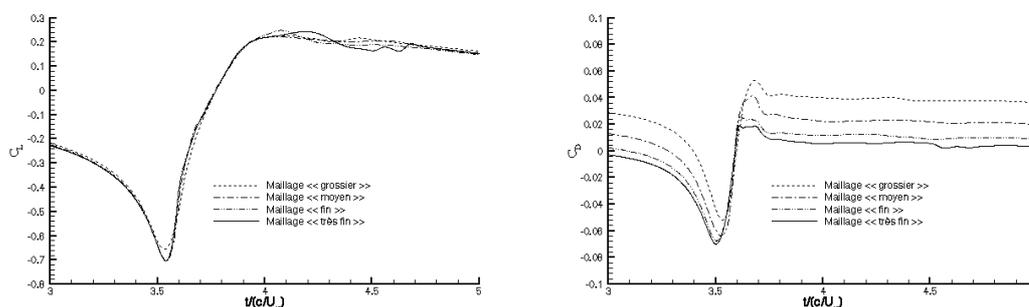


FIG. 4.27 - Influence du maillage sur les coefficients de portance (à gauche) et de traînée (à droite) au cours du BVI

Ces différences de trajectoires et de dynamiques de la paire de tourbillons contrarotatifs en fonction du maillage utilisé pour le calcul sont observables sur le champ de vorticité instantané FIG. 4.28. Sur la figure, les couleurs bleu et vert indiquent un tourbillon négatif, les couleurs rouge et blanc, un tourbillon positif, le jaune indique une faible valeur du rotationnel de la vitesse et est masqué. Les couleurs utilis es pour les extrema sont le bleu et le blanc. Ces visualisations montrent que l'intensité du second tourbillon dépend de façon significative de celle du tourbillon qui déclenche le BVI. Il s'ensuit que la déformation et la trajectoire du couple de tourbillons contrarotatifs varient sensiblement d'une solution à l'autre. Le tourbillon secondaire est pratiquement inexistant dans la solution calcul e sur le maillage « grossier », le tourbillon initial longe l'intrados du profil. Pour la solution obtenue avec le maillage « moyen », les deux tourbillons s'éloignent de la paroi et pivotent lentement l'un autour de l'autre dans le sens négatif jusqu'à avoir atteint trois quarts de corde puis se rapprochent de la paroi, sans la rejoindre en continuant leur pivot. Les solutions obtenues dans les maillages « fin » et « très fin » sont qualitativement très comparables, les deux tourbillons s'éloignent de la paroi en pivotant jusqu'à une abscisse proche de la demi-corde, puis s'approchent de la paroi, toujours en pivotant. Le tourbillon positif s'écrase alors sur l'intrados, le tourbillon initial reprend une géométrie circulaire et est advecté vers l'aval avec ce qu'il reste du deuxième tourbillon. L'écart entre ces deux solutions concerne les amplitudes des champs de vorticité. Plus que les valeurs des coefficients aérodynamiques (C_L , C_D) ou les valeurs des C_P instationnaires près du bord d'attaque, c'est la similarité pour les solutions obtenues dans les deux maillages les plus fins des trajectoires des tourbillons et de leur dynamique qui illustre la convergence en maillage du schéma RBV pour ce problème instationnaire.

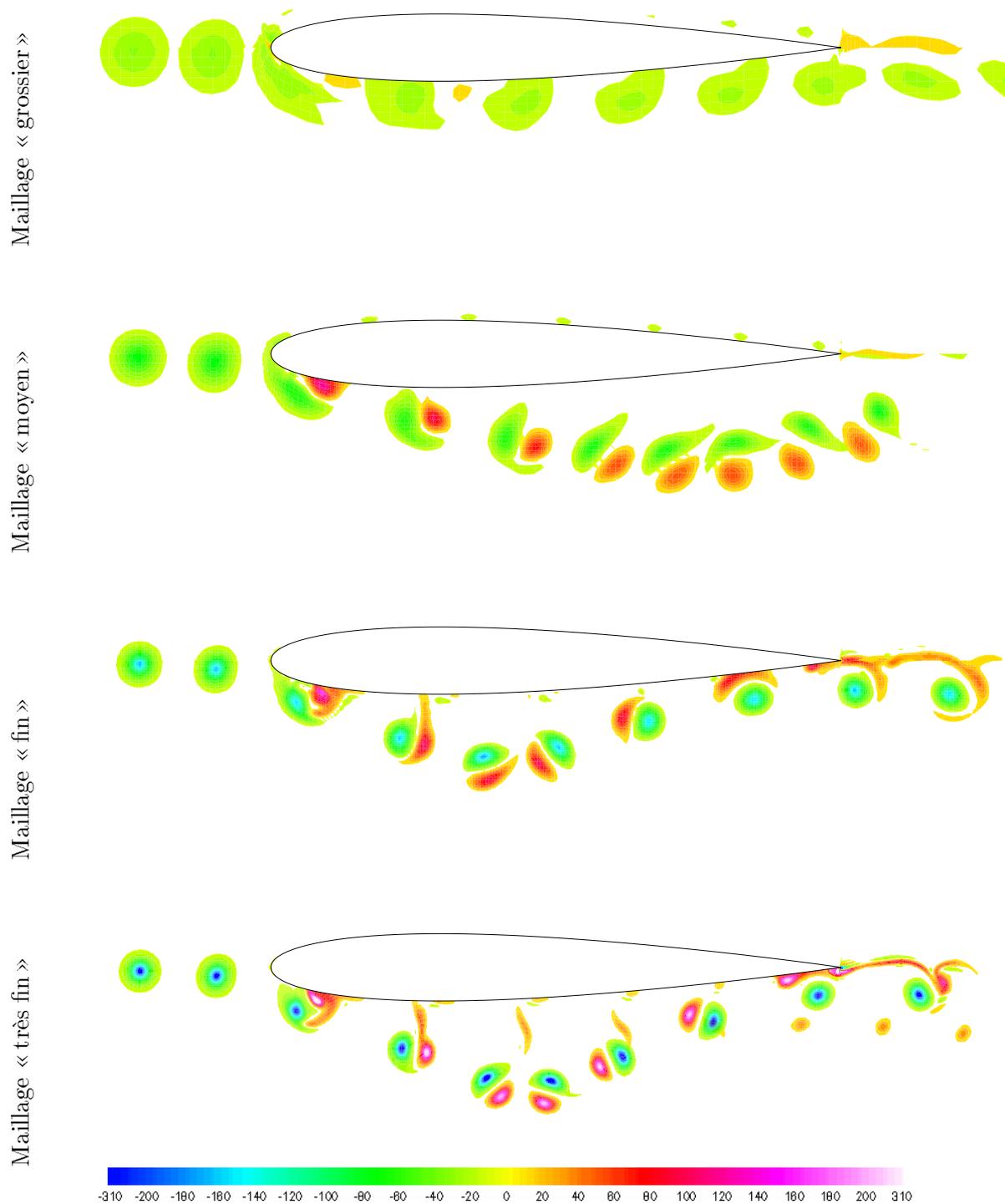


FIG. 4.28 - Influence du maillage sur la trajectoire et la déformation du tourbillon au cours du BVI, iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.

4.7.4 Influence du pas de temps

L'étude de convergence en maillage atteste que la solution obtenue sur le maillage « fin » (8 points de discrétisation dans le cœur du tourbillon, 397 000 points) et avec le pas de temps annulant le premier terme d'erreur du schéma RBV approche la solution non visqueuse convergée en maillage pour le BVI subsonique frontal. Les calculs mis en œuvre pour examiner l'influence du pas de temps, quand on s'éloigne du pas de temps optimum, ont donc été réalisés dans ce maillage, avec un tourbillon à enthalpie constante, toujours positionné en $x/c = -3,5$ à $t/(c/U_\infty) = 0$. Trois pas de temps ont été utilisés, $1/2 \Delta t_{opt} = 1,25 \cdot 10^{-3}$, $\Delta t_{opt} = 2,5 \cdot 10^{-3}$ et $2 \cdot \Delta t_{opt} = 5 \cdot 10^{-3}$. Les valeurs maximales prises par les nombres CFL à l'instant initial pour ces 3 pas de temps sont respectivement : 2,55; 4,73 et 9,46.

Des coupes suivant la droite $y/c = 0$ des champs instantanés du tourbillon pendant la phase d'advection sont présentées FIG. 4.29. La solution obtenue dans le maillage « fin » avec un pas de temps $\Delta t = 2 \cdot \Delta t_{opt}$ dissipe autant le tourbillon pendant la phase d'advection que la solution obtenue dans le maillage « moyen » avec le même pas de temps ($\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ est le pas de temps optimum du schéma RBV dans le maillage « moyen »).

La solution obtenue dans le maillage « fin » avec un pas de temps $\Delta t = 1/2 \cdot \Delta t_{opt}$ conserve aussi bien le tourbillon pendant la phase d'advection que la solution obtenue dans le maillage « très fin » avec le même pas de temps ($\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$ est le pas de temps optimum du schéma RBV dans le maillage « très fin »). Ceci confirme que l'utilisation d'un pas de temps inférieur au pas de temps optimum, qui correspond dans le cas d'équations d'advection linéaire à une avance de phase de la solution, permet de concentrer un tourbillon pendant son advection. Ce comportement du schéma peut-être comparé à celui obtenu avec la méthode de confinement artificiel de la vorticité [31] où les termes sources sont introduits dans les équations dans le but de compenser les erreurs des méthodes numériques sur le transport de la vorticité. Il peut paraître intéressant d'exploiter cette propriété pendant la phase d'advection du tourbillon. Durant cette période, on sait que le tourbillon doit rester inchangé pendant son transport tant qu'il n'interagit pas avec le champ aérodynamique autour du profil et on peut vérifier que la concentration du tourbillon par la méthode numérique reste physiquement acceptable.

Comme dans le cas de l'étude de convergence en maillage, la comparaison des CP instationnaires au voisinage du bord d'attaque du profil (FIG. 4.30) ne montre de différences sensibles entre les solutions qu'à l'intrados, particulièrement pour le capteur positionné en $x/c = 0,02$. Les courbes d'évolution temporelle des CP sont très similaires pour les trois capteurs placés à l'extrados, et assez proches pour les deux autres capteurs placés à l'intrados.

La même observation peut être faite sur les coefficients aérodynamiques globaux C_L et C_D (FIG. 4.31). Les variations d'intensité des tourbillons pour les solutions obtenues avec les différents pas de temps n'ont pas d'influence significative sur la portance et la traînée au cour du BVI subsonique frontal. Les trois solutions donnent des évolutions temporelles très semblables sur les coefficients de portance et de traînée.

L'influence du pas de temps sur la solution du BVI calcul  e avec le schéma RBV est mise en évidence (FIG. 4.32). Considérons dans un premier temps la déformation et la trajectoire de la paire de tourbillons contrarotatifs pour le pas de temps $\Delta t = 5 \cdot 10^{-3}$ soit $2 \cdot \Delta t_{opt}$. La dynamique des tourbillons est comparable aussi bien qualitativement que quantitativement avec celle de la solution calcul  e avec le même pas de temps dans le maillage « moyen » (FIG. 4.28), ce qui est en bon accord avec les observations faites précédemment puisque dans les deux cas, le tourbillon approche le profil avec des champs de pression, masse volumique et vitesse équivalents.

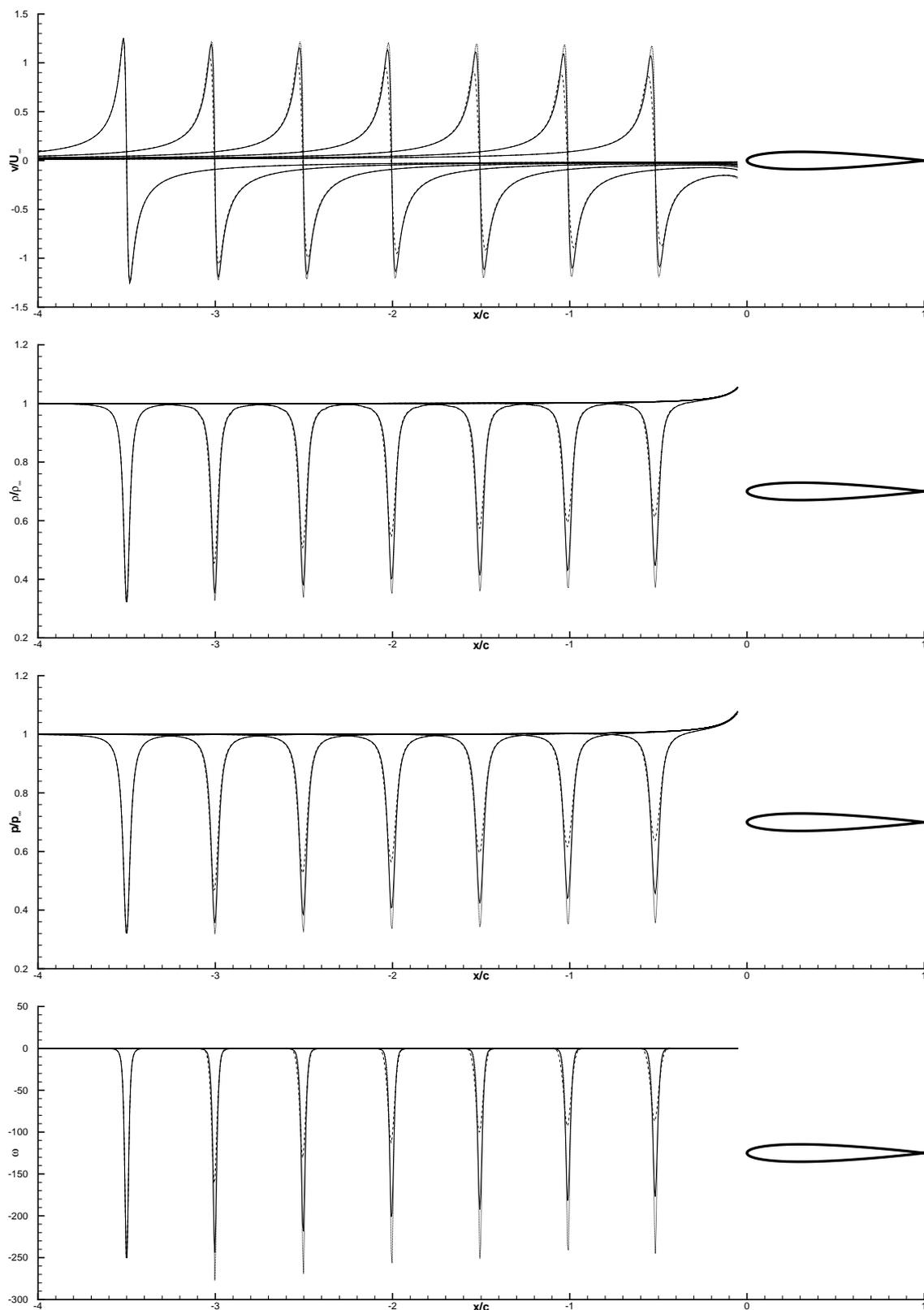


FIG. 4.29 - Coupes suivant l'axe X des champs de vitesse tangentielle, masse volumique, pression adimensionnée et vorticité du tourbillon pendant la phase d'advection du BVI pour 3 pas de temps sur le maillage « fin ». (\cdots $1/2 \cdot \Delta t_{opt}$, — Δt_{opt} , --- $2 \cdot \Delta t_{opt}$)

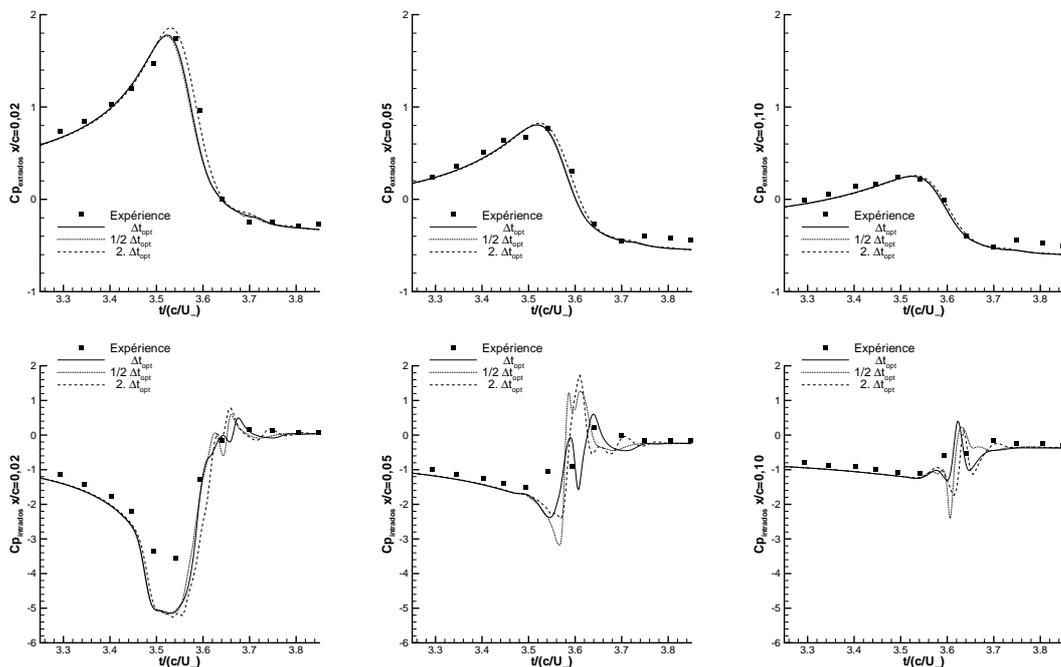


FIG. 4.30 - Évolution des C_p instationnaires en différents points du profil pour des calculs de BVI avec les pas de temps $1/2.\Delta t_{opt}$, Δt_{opt} et $2.\Delta t_{opt}$ sur le maillage « fin » avec un tourbillon isenthalpique positionné à $t = 0$ en $x/c = -3,5$.

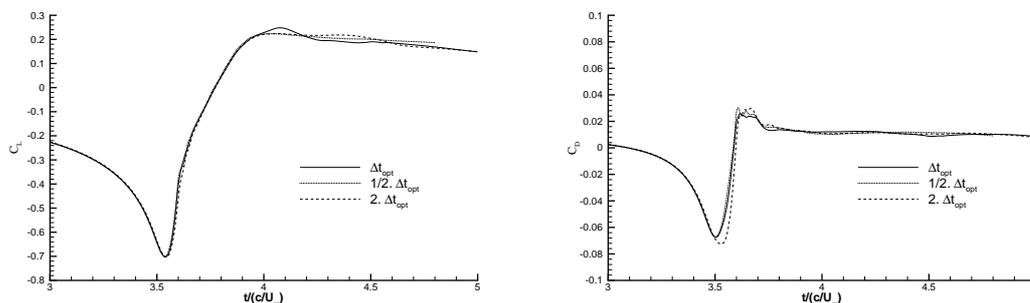


FIG. 4.31 - Influence du pas de temps sur les coefficients de portance (à gauche) et de traînée (à droite) au cours du BVI calculé sur le maillage « fin ».

Pour la solution calculée avec $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$ dans le maillage « fin », l'intensité du tourbillon à l'approche du profil est comparable à la solution en maillage « très fin » pour le même pas de temps. Le cliché correspondant à $t/(c/U_\infty) = 3,6$ montre des similitudes quant à la géométrie du couple de tourbillons peu après la formation du tourbillon positif en aval du choc. Par contre, on observe que ce tourbillon créé est bien plus intense pour le calcul avec $\Delta t = 1,25 \cdot 10^{-3}$ dans le maillage « fin » que celui produit pour le calcul en maillage « très fin » avec Δt_{opt} . Les deux tourbillons s'éloignent bien de la paroi mais la dynamique qui s'ensuit et la trajectoire suivie par la paire de tourbillons, qui dépendent fortement de leurs intensités relatives, sont assez différentes de la solution de référence. Si l'utilisation d'un pas de temps inférieur à Δt_{opt} permet de contrebalancer la perte d'intensité du tourbillon pendant la phase d'advection, exploiter cette propriété devient plus difficile quand il y a création de structures tourbillonnaires au sein de l'écoulement puisqu'elle semble engendrer une vorticité excessive.

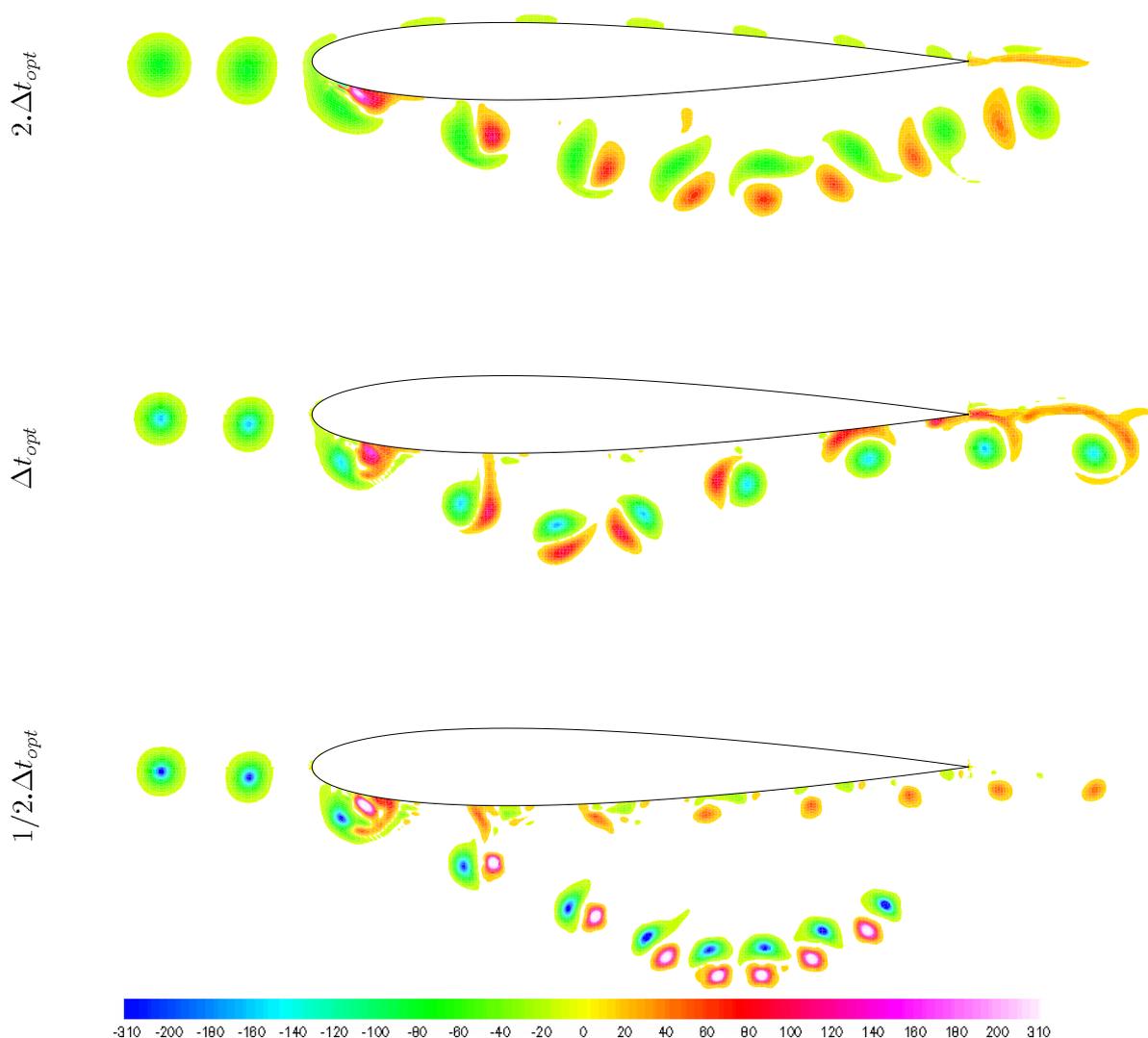


FIG. 4.32 - Influence du pas de temps sur la trajectoire et la déformation du tourbillon au cours du BVI calculé dans le maillage « fin », iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.

4.7.5 Conclusion partielle

Cette section a pour but de résumer les observations principales sur la sensibilité aux paramètres numériques de la solution non visqueuse du BVI subsonique frontal calculée par le schéma RBV avec filtrage d'ordre 10.

Influence du filtre

Nous avons montré que le filtre d'ordre 10 n'a pas d'influence sur la solution dans les régions cartésiennes du maillage où il serait envisageable de s'en passer.

Influence du modèle de tourbillon

Le modèle de tourbillon avec profil de vitesse de type SCULLY et enthalpie constante est en bon accord avec le tourbillon expérimental et donc le plus approprié pour cette simulation. Les résultats ne montrent cependant pas d'écart significatif si un tourbillon isentropique est utilisé.

Influence du maillage

La pertinence du raffinement de maillage dépend de la finalité de la simulation :

1. si l'objectif est l'évolution temporelle de la portance et de la traînée alors le maillage « moyen » qui comprend 2 points dans le rayon du cœur du tourbillon initial est suffisant. Il en va de même si le critère d'évaluation porte sur l'évolution temporelle de la pression mesurée par les capteurs positionnés près du bord d'attaque du profil ;
2. si l'objectif est une étude phénoménologique de la solution non visqueuse du BVI subsonique frontal, il faut au minimum un maillage avec 4 points et plus dans le rayon du cœur du tourbillon initial (maillage « fin » ou « très fin »).

Influence du pas de temps

Pour des problèmes fortement instationnaires tel que le BVI, l'utilisation du pas de temps optimum établi théoriquement (formule (4.11)) permet d'obtenir la solution la plus neutre du schéma vis-à-vis du pas de temps. Un pas de temps supérieur va engendrer un retard de phase qui va faire perdre de son intensité au tourbillon pendant son transport. Un pas de temps inférieur provoque une avance de phase qui a pour effet de préserver l'intensité du tourbillon pendant son transport mais créer trop de vorticité là où il y a formation de nouvelles structures tourbillonnaires.

4.8 Comparaison avec des schémas d'ordre 2 classiques

Le choix d'une méthode numérique précise à l'ordre 2 pour la comparaison avec le schéma RBV doit pouvoir mettre en relief, à ordre de précision égal, l'apport du schéma RBV par rapport à une méthode dite classique. Afin de faciliter la comparaison et de la rendre concluante, le schéma numérique retenu doit être peu dissipatif et son usage largement répandu en aérodynamique compressible. Le logiciel employé pour l'exécution des calculs est le logiciel *elsA* [5, 8] (Ensemble Logiciel de Simulation en Aérodynamique) développé à l'ONERA depuis 1997 et validé en collaboration avec des industriels du secteur aéronautique.

4.8.1 Schémas utilisés pour la comparaison

Discrétisation spatiale

Le schéma de discrétisation spatial est un schéma volumes finis centré avec dissipation artificielle. Deux types de dissipations artificielles sont utilisées pour le calcul des flux convectifs en fonction de la méthode d'intégration temporelle mise en œuvre : la viscosité numérique scalaire introduite initialement par JAMESON, SCHMIDT & TURKEL [36] en 1981 et la variante matricielle moins dissipative proposée par SWANSON & TURKEL [85] en 1992. Les coefficients $k^{(2)}$ (pour la dissipation non-linéaire d'ordre 2) et $k^{(4)}$ (pour la dissipation linéaire d'ordre 4) intervenant dans les flux de dissipation artificielle prennent des valeurs usuelles de 0,25 à 1 pour $k^{(2)}$ et de 0,016 à 0,064 pour $k^{(4)}$. Le senseur utilisé pour la détection des chocs est le senseur basé sur la pression.

Discrétisation temporelle

Pour les problèmes fortement instationnaires tel que le BVI, le schéma utilisé pour l'intégration temporelle est aussi important que le schéma de discrétisation spatiale. En effet les solutions varient sensiblement en fonction du type d'intégration temporelle mis en œuvre. Nous avons utilisé deux schémas différents afin d'évaluer l'apport du schéma RBV par rapport aux méthodes d'ordre 2 utilisées généralement pour ce type de calcul :

1. une intégration implicite avec lissage des résidus développée par LERAT, SIDÈS & DARU [52] pour le schéma de LAX-WENDROFF. Elle est aussi appelée IRS (pour *Implicit Residual Smoothing*) et est appliquée pour les calculs au schéma RUNGE-KUTTA pour lequel elle a été adaptée par JAMESON;
2. une méthode de pas de temps dual DTS (pour *Dual Time Stepping*) à trois niveaux de temps pour une précision d'ordre 2 similaire à celle employée pour la résolution du schéma RBV. L'intégration pour la convergence sur le pas de temps dual ou fictif fait appel à un schéma RUNGE-KUTTA implicite avec lissage des résidus.

Paramètres numériques

Pour un calcul instationnaire, la méthode d'intégration temporelle et le pas de temps utilisés modifient les propriétés dissipatives du schéma. Le type de viscosité artificielle (matricielle ou scalaire) et les valeurs des coefficients associés (k^2 et k^4) ont donc été ajustés de façon à garantir une dissipation juste nécessaire pour amortir les ondes parasites sans trop dégrader les structures tourbillonnaires pendant la simulation. Les types de viscosité numérique et les valeurs des coefficients sont données TAB. 4.3.

Les méthodes d'intégration implicite en temps permettent l'emploi du même pas de temps que celui des simulations réalisées avec le schéma RBV. Les pas de temps correspondant aux différentes méthodes d'intégration temporelle pour les différents maillages sont donnés TAB. 4.4.

Schéma temporel	type dissipation	k^2	k^4
IRS	matricielle	0,25	0,032
DTS	scalaire	0,25	0,032

TAB. 4.3 - Paramètres de viscosité artificielle pour les schémas centrés

Schéma temporel	Δt mail. « grossier »	Δt mail. « moyen »	Δt mail. « fin »
IRS	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$
DTS	10^{-2}	$5 \cdot 10^{-3}$	$2,5 \cdot 10^{-3}$

TAB. 4.4 - Valeur du pas de temps pour les calculs de BVI avec les schémas centrés

4.8.2 Comparaison des résultats

Le premier élément utilisé pour comparer les trois schémas numériques est l'évolution temporelle des coefficients de pression en $x/c = 0,02$. Les résultats sont présentés FIG. 4.33 pour l'intrados et FIG. 4.34 pour l'extrados. Alors que le schéma RBV donne des évolutions des CP similaires pour les trois maillages (« grossier », « moyen » et « fin »), les solutions des schémas de JAMESON IRS et JAMESON DTS varient sensiblement d'un maillage à l'autre. Ces variations des solutions des schémas de type JAMESON semblent montrer que ceux-ci ont une convergence en maillage moins rapide que le schéma RBV pour le problème du BVI subsonique frontale. Cette assertion est confirmée par les courbes d'évolution temporelle du coefficient de portance au cours du BVI, représentées FIG. 4.35. Les courbes obtenues avec le schéma RBV se superposent (à l'échelle du tracé) pour les maillages « moyen » et « fin » alors que celles-ci sont distinctes pour tous les maillages quand le BVI est calculé avec des schémas de type JAMESON.

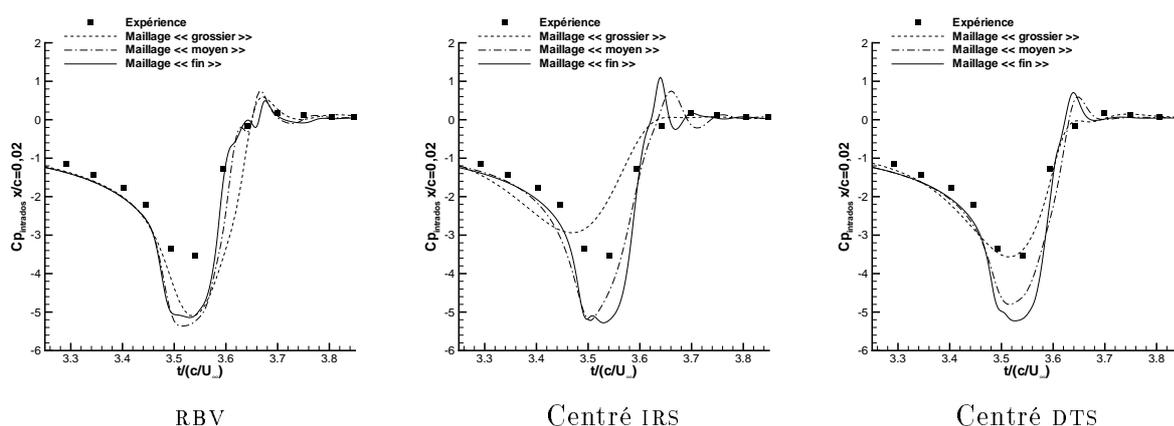


FIG. 4.33 - Évolution du coefficient de pression à l'intrados en $x/c = 0,02$ au cours du BVI pour les différents schémas numériques sur trois maillages

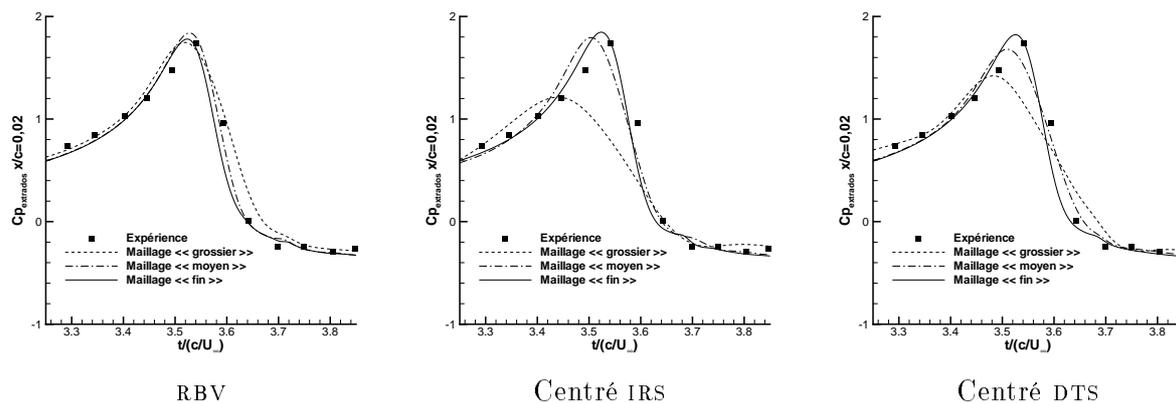


FIG. 4.34 - Évolution du coefficient de pression à l'extrados en $x/c = 0,02$ au cours du BVI pour les différents schémas numériques sur trois maillages

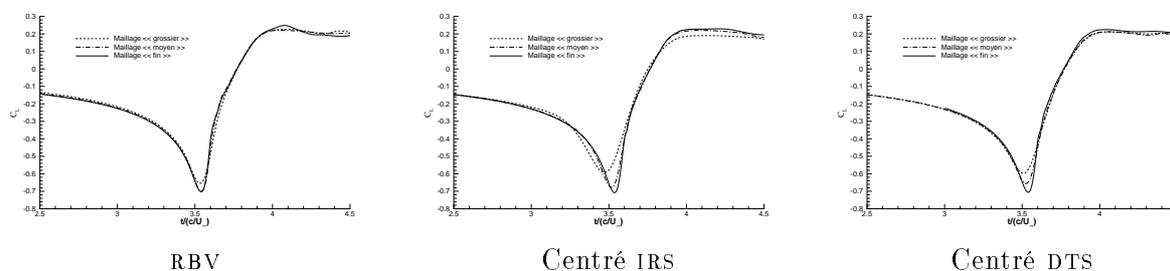


FIG. 4.35 - Évolution du coefficient de portance au cours du BVI pour les différents schémas numériques sur trois maillages

Si les critères pour évaluer l'aptitude d'une méthode numérique à simuler le BVI sont les coefficients de pression pariétaux au voisinage du bord d'attaque et le coefficient de portance, alors les schémas de type JAMESON semblent donner une solution suffisamment précise si la simulation est réalisée sur le maillage « fin ». Par conséquent, les trajectoires des tourbillons devraient être semblables pour les trois méthodes numériques dès lors que le maillage « fin » est utilisé pour le calcul. Les trajectoires des tourbillons au cours du BVI sont représentées FIG. 4.36 pour le maillage « grossier », FIG. 4.37 pour le maillage « moyen » et FIG. 4.38 pour le maillage « fin ».

Paradoxalement, c'est sur le maillage « grossier » que les trajectoires des tourbillons sont les plus proches pour les trois schémas, le second tourbillon est d'intensité très faible et le tourbillon initial suit une trajectoire qui longe l'intrados du profil. On vérifie cependant que le tourbillon arrive moins dissipé au voisinage du profil pour la solution calculée avec le schéma RBV.

Dans le maillage « moyen », les trois méthodes numériques produisent un second tourbillon au cours du BVI. Le couple de tourbillons se détache de la paroi pour la solution du schéma RBV alors qu'il la suit pour les schémas de type JAMESON.

Contrairement à ce que pouvait laisser penser l'étude des CP instationnaires au voisinage du bord d'attaque et l'étude des courbes d'évolution temporelle du coefficient de portance, les trajectoires suivies par les tourbillons sur le maillage « fin » sont significativement distinctes pour les trois schémas utilisés. Pour le schéma RBV, nous avons vu que les tourbillons s'éloignent de la

paroi puis s'en rapprochent à nouveau pour l'impacter. Pour le schéma JAMESON IRS, le couple de tourbillons s'éloigne plus lentement de la paroi mais la tendance ne s'inverse pas au cours du temps. La trajectoire des tourbillons de la solution du schéma JAMESON DTS est qualitativement proche de la solution du schéma RBV obtenue dans le maillage « moyen », c'est-à-dire contenant approximativement quatre fois moins de cellules. Si l'étude de convergence en maillage réalisée pour le schéma RBV a permis de montrer que la solution qu'il donne ne maillage « fin » est proche de la solution convergée du BVI subsonique frontal (non visqueux), les fortes disparités entre les solutions des trois schémas sur ce même maillage conduisent à la réalisation d'un calcul supplémentaire dans le maillage « très fin » avec un schéma de type JAMESON afin de trancher définitivement en faveur de la solution du schéma RBV.

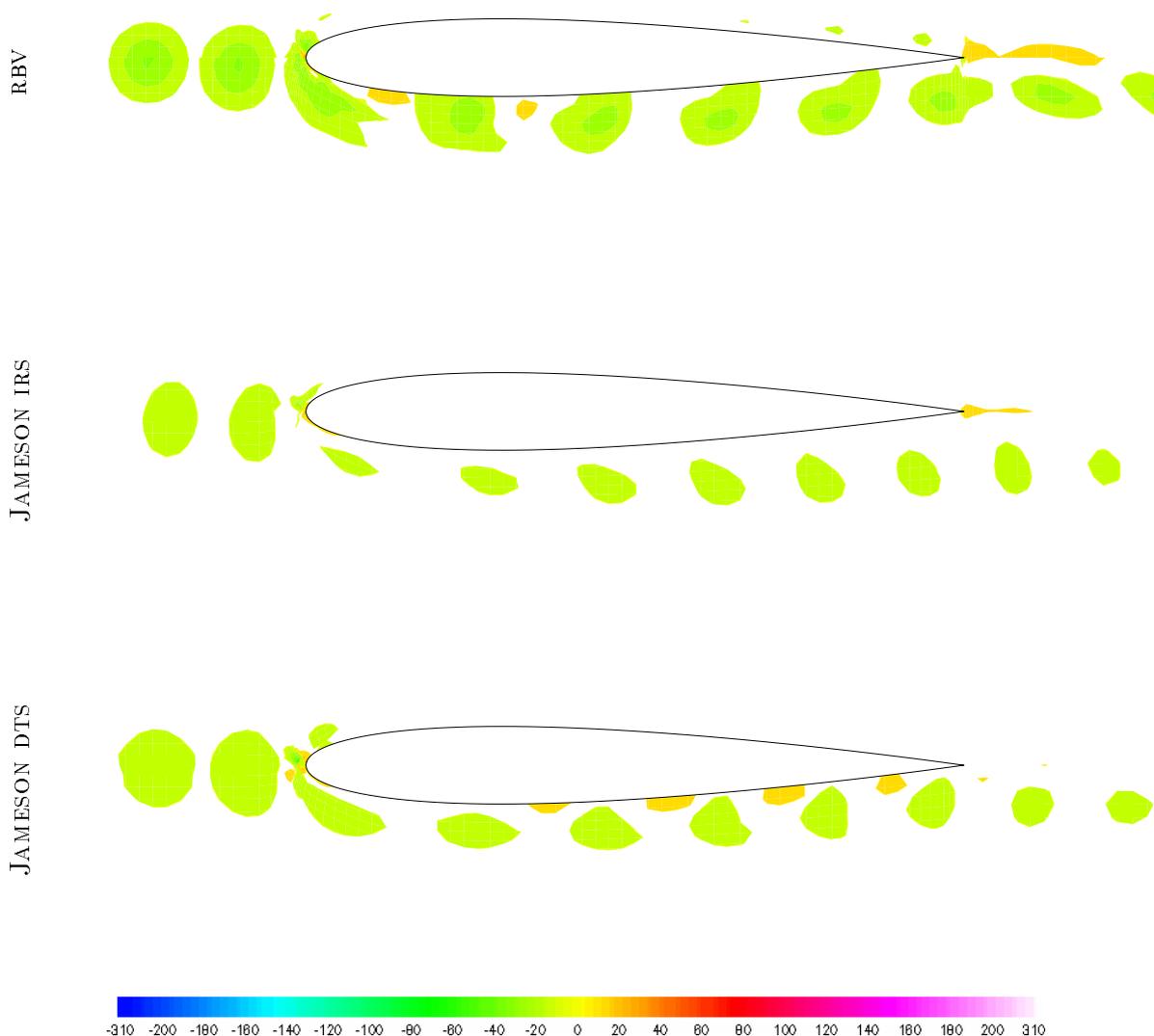


FIG. 4.36 - Comparaison des trajectoires des tourbillons au cours du BVI des solutions de schéma RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS sur le maillage « grossier ». Iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.

Puisque les trois méthodes donnent des évolutions de pression à la paroi similaires et la même évolution du coefficient de portance, on pourrait être tenté de se satisfaire des résultats obtenus dans le maillage « fin » et déclarer les trois méthodes aptes à la simulation du BVI. Ce raisonnement est valable dans le cas d'un profil isolé car la trajectoire du tourbillon après l'interaction n'a aucune incidence sur l'interaction elle-même. Cependant, les simulations de BVI 2-D sont fréquemment utilisées pour valider les méthodes de calcul en vue de leur application à des calculs de rotor complet, auquel cas, **la détermination de la trajectoire du tourbillon pendant et après le BVI est primordiale pour prévoir l'interaction du rotor complet avec son sillage tourbillonnaire.**

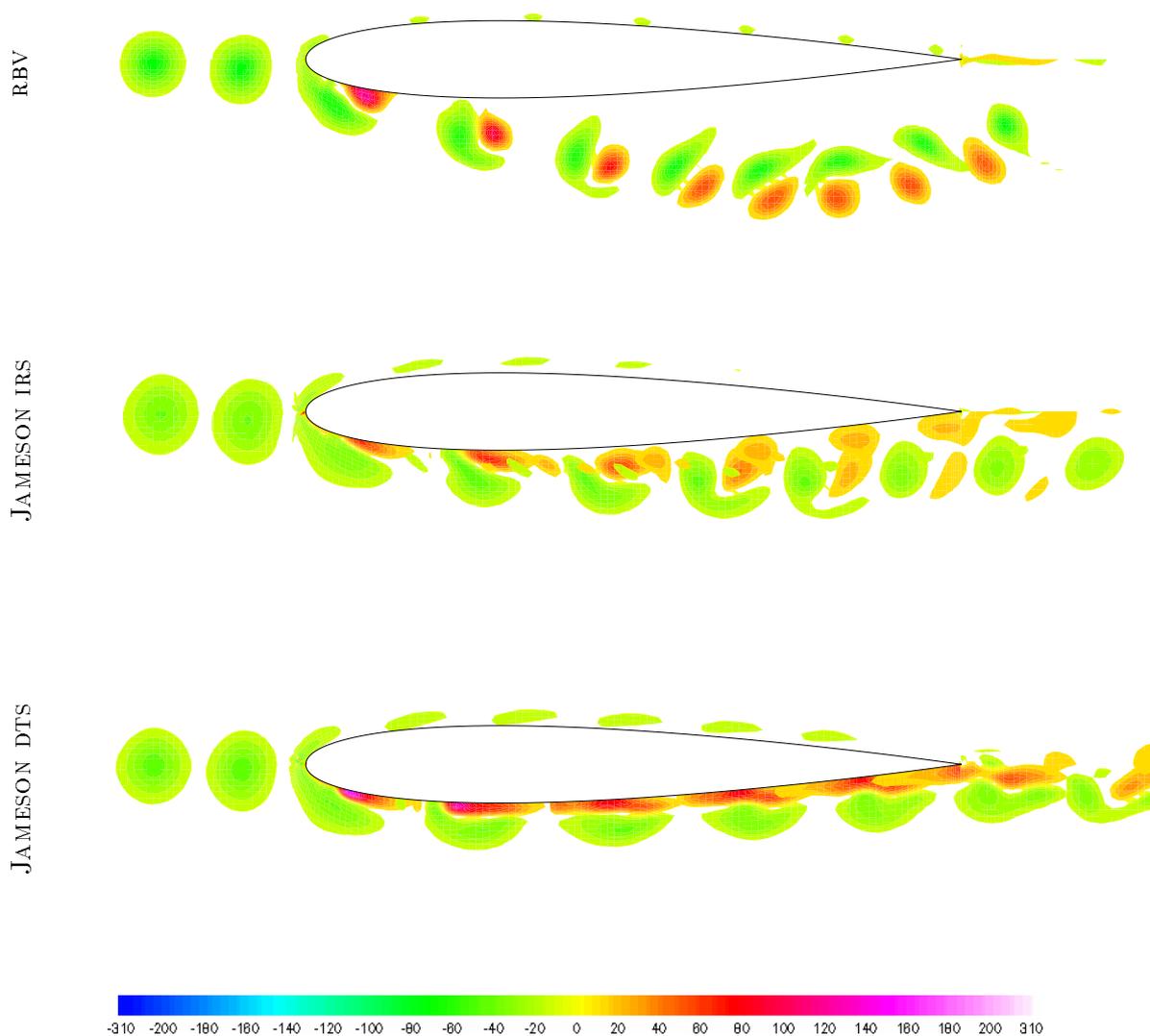


FIG. 4.37 - *Comparaison des trajectoires des tourbillons au cours du BVI des solutions de schéma RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS sur le maillage « moyen ». Iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.*

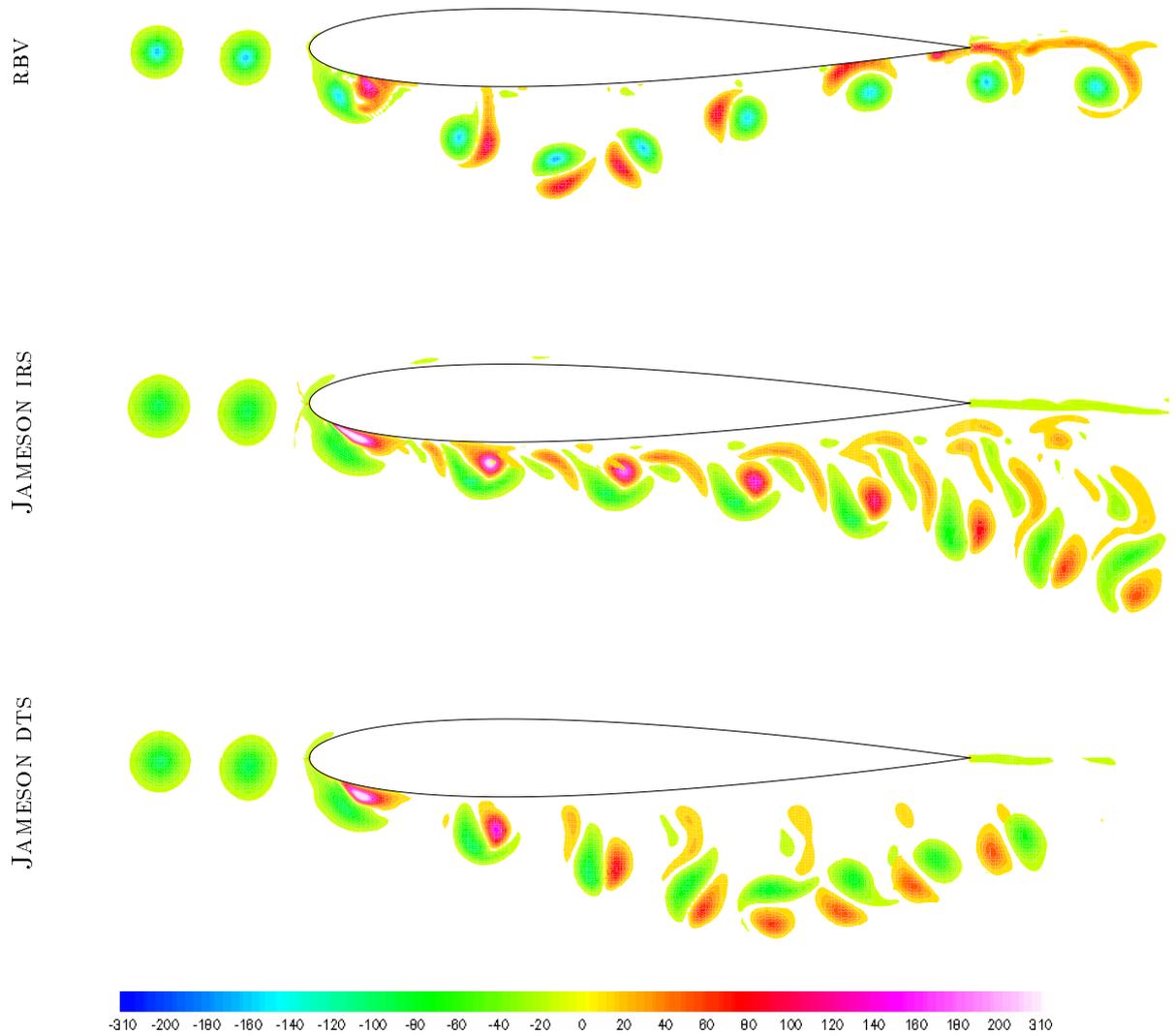


FIG. 4.38 - Comparaison des trajectoires des tourbillons au cours du BVI des solutions de schéma RBV, JAMESON IRS et JAMESON DTS sur le maillage « fin ». Iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.

Lorsque le BVI est simulé dans le maillage le plus fin avec le schéma RBV, nous avons vu que le tourbillon conserve 90% de son intensité initiale lorsqu'il arrive à une demi-corde en amont du profil. Afin de s'affranchir de la dissipation du tourbillon par les schémas de type JAMESON pendant la phase d'advection pure, **le calcul du BVI par le schéma de JAMESON IRS dans le maillage « très fin » est initialisé par la solution du schéma RBV à $t/(c/U_\infty) = 3$** , c'est-à-dire quand le tourbillon est positionné en $x/c = -0,5$. Le tourbillon a déjà parcouru 85% du chemin qui le séparait du profil à l'instant initial et doit être advecté sans trop de perte sur les 15% restants.

Les trajectoires des tourbillons pendant l'interaction pour les deux schémas sont représentées FIG. 4.39. Cette figure montre que dans un maillage suffisamment fin et lorsque le tourbillon arrive près du profil sans avoir été dissipé, la solution du schéma de JAMESON IRS du BVI subsonique frontale est très proche de la solution du schéma RBV. En effet, les couples de tourbillons contrarotatifs suivent des trajectoires similaires pour les deux méthodes. On remarque cependant que malgré la finesse du maillage, le schéma de type JAMESON dissipe toujours plus la vorticité que le schéma RBV puisque les deux tourbillons perdent de leur intensité pendant l'interaction alors que la solution du schéma RBV conserve leur intensité au cours du BVI. La réalisation de ce calcul avec le schéma de JAMESON confirme que le schéma RBV approche beaucoup plus précisément la solution des équations d'EULER pour ce problème que le schéma de JAMESON.

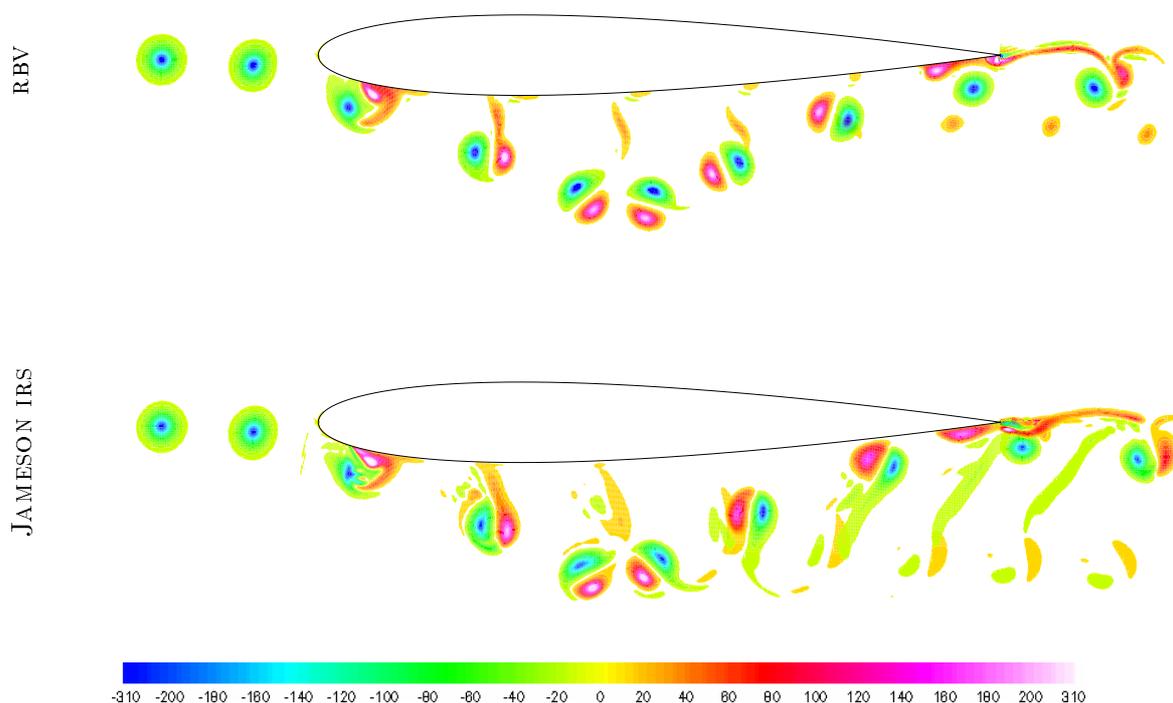


FIG. 4.39 - Trajectoire et la déformation du tourbillon au cours du BVI. Solution du schéma RBV calcul  e dans le maillage « très fin », et solution du schéma de JAMESON IRS initialis  e à $t/(c/U_\infty) = 3$. par la solution du schéma RBV. Iso-valeur du rotationnel de la vitesse à $t/(c/U_\infty) \in [3, 3; 3, 45; 3, 6; 3, 75; 3, 9; 4, 05; 4, 2; 4, 35; 4, 5; 4, 65]$.

4.9 Conclusion

L'interaction pale-tourbillon retenue pour évaluer le schéma RBV est un problème dont la simulation numérique est difficile. La trajectoire coïncidente du tourbillon avec le profil est responsable d'une phénoménologie complexe de l'écoulement avec apparition d'une onde de choc de forte intensité et création d'un second tourbillon au cours de l'interaction. La complexité des phénomènes mis en jeu pendant cette interaction et l'existence de mesures expérimentales font de ce problème un des cas de référence employé pour la validation des méthodes numériques dédiées aux calculs d'écoulements tourbillonnaires.

Une solution de référence est acquise au moyen d'une simulation effectuée avec le schéma RBV sur un maillage possédant 16 points de discrétisation dans le diamètre du cœur du tourbillon. Cette solution permet une description des phénomènes aérodynamiques qui se produisent pendant l'interaction pale-tourbillon : évolutions temporelles des coefficients de portance et de traînée, trajectoire des tourbillons au cours de l'interaction. La finesse du maillage permet également d'étudier les phénomènes acoustiques en champ proche et leurs interactions avec l'écoulement. Les résultats de cette simulation sont comparés avec les résultats expérimentaux. La solution du schéma RBV est en bon accord qualitatif avec les mesures expérimentales. Les écarts observés entre le calcul numérique et l'expérience sont, comme le confirme les résultats obtenus par d'autres auteurs, caractéristiques d'une simulation avec un modèle d'écoulement de fluide parfait. Alors que la création de vorticité dans un écoulement est souvent associ e à la viscosité du fluide, la simulation du BVI subsonique frontale par les équations d'EULER prévoit aussi l'apparition d'un second tourbillon au moment de l'interaction. L'étude conjointe de l'équation de transport de la vorticité spécifique et de l'écoulement simulé montre que la création du second tourbillon n'est pas due aux effets visqueux mais aux effets liés au terme baroclinique, c'est-à-dire à la perte de colinéarité entre les vecteurs gradient de pression et gradient de masse volumique au moment de la création du choc courbe à l'intrados au profil au voisinage du bord d'attaque.

Les simulations r alis es avec une série de quatre maillages confirme que la solution de référence utilis e pour la description de l'interaction est bien la solution converg e du problème. Quand le pas de temps théorique optimum est employé, les trajectoires des tourbillons sont correctement prévues par le schéma RBV dans le maillage possédant 8 points de discrétisation dans le cœur du tourbillon, soit pratiquement quatre fois moins de cellules que le maillage à 16 points dans le cœur du tourbillon. Si le critère d'évaluation de la méthode numérique est la convergence sur l'évolution instationnaire du coefficient de portance, alors le schéma RBV donne une solution converg e pour ce critère dans le maillage possédant 4 points dans le cœur du tourbillon à l'instant initial. Des simulations effectu es en faisant varier le pas de temps confirme qu'il est important d'utiliser le pas de temps optimum pour converger rapidement en maillage vers la solution du problème. Ce pas de temps optimum est connu a priori par une formule théorique. Dans la mesure où le schéma RBV est implicite et sans limitation sur la valeur du pas de temps, rien n'empêche l'emploi systématique du pas de temps optimum.

Les comparaisons des solutions du schéma RBV avec des schémas centrés d'ordre 2 à viscosité artificielle de type JAMESON montre l'apport de la méthode RBV par rapport aux méthodes classiques pour le calcul d'écoulements où les tourbillons sont advect s sur de grandes distances. Les propriétés de préservation des tourbillons du schéma RBV aboutissent en pratique à une convergence en maillage bien plus rapide que les schémas classiques d'ordre 2.

Conclusion & perspectives

Ce travail de thèse a consisté dans un premier temps à étendre aux équations de l'acoustique avec advection la notion de schéma préservant la vorticité initialement introduite par MORTON & ROE pour l'acoustique pure. L'étude de l'équation de transport de la vorticité discrète par différents schémas préservant la vorticité en acoustique pure a montré qu'ils perdent cette propriété lorsqu'ils sont appliqués aux équations de l'acoustique avec advection. L'analyse du terme d'erreur qui intervient dans l'équation de transport de la vorticité pour ces schémas a permis de dégager les conditions que doit remplir un schéma numérique pour préserver la vorticité en acoustique avec advection.    partir de cette analyse théorique, un schéma basé sur le résidu préservant la vorticité a été proposé. Ce schéma RBV (*Residual-Based Vorticity preserving*) d'ordre 2 satisfait l'ensemble des conditions requises pour préserver la vorticité en acoustique avec advection.

Les considérations retenues pour l'élaboration du schéma RBV portent uniquement sur la préservation de la vorticité. Dans un deuxième temps, l'étude des propriétés dissipatives du schéma a montré que celui-ci dissipe les plus courtes longueurs d'onde. Cette propriété est inattendue quand on sait que la discrétisation spatiale du schéma RBV est du même type que celle du schéma de LAX-WENDROFF-NI, dont la non dissipation des plus courtes longueurs d'onde est bien connue. Une analyse théorique d  taill  e a démontré que cette propriété du schéma RBV vient du caractère implicite du schéma et du couplage particulier des termes temporels et spatiaux utilisés pour améliorer la préservation de la vorticité. Toutefois, la méthode sous-iterative en pas de temps dual, mise en œuvre pour résoudre le schéma, présente un défaut de dissipation de ces mêmes nombres d'onde réduits. La méthode retenue pour stabiliser le schéma en pas de temps dual passe alors par le filtrage du vecteur d'état en fin d'itération au moyen de filtres explicites d'ordre élevé. Ce choix permet de ne pas altérer la solution du schéma RBV.

Une analyse approfondie du système équivalent du schéma RBV pour l'acoustique avec advection a démontré qu'il est possible d'obtenir une solution précise à l'ordre 3 pour l'advection de tourbillon si le nombre CFL est correctement choisi. Ce résultat a été confirmé par une analyse de FOURIER de l'erreur de phase du schéma RBV. La formule théorique permettant de calculer ce nombre CFL est simple et ne dépend que du nombre de MACH de l'écoulement moyen. Les essais d'advection de tourbillon ont prou  v   que la formule est applicable pour les équations d'EULER. Le schéma RBV permet alors de transporter des tourbillons sur de grandes distances, sans dissipation du champ de vorticité et ce quelle que soit la direction de l'écoulement moyen par rapport aux axes du maillage. Des comparaisons avec les schémas de LAX-WENDROFF-NI et de JAMESON ont mis en évidence l'intérêt du schéma RBV pour le transport de tourbillons.

Dans un troisième temps, le schéma RBV a été étendu aux maillages curvilignes quelconques. L'extension a été effectu  e de manière à conserver la formulation du schéma sous la forme d'un opérateur Λ appliqué au résidu instationnaire \tilde{r} . Cette formulation particulière a permis d'étendre aux maillages irréguliers les propriétés de préservation de la vorticité du schéma RBV. Ainsi formulé, le schéma RBV est d'ordre 2 en maillage quelconque. Une version simplifi  e du

schéma, RBVs, a alors été proposée pour le calcul d'écoulements stationnaires et appliquée à des écoulements autour de profil. La capacité du schéma RBV à calculer des écoulements aérodynamiques instationnaires a ensuite été démontrée sur un cas d'écoulement transsonique instationnaire autour d'un profil oscillant en translation.

Le schéma RBV a finalement été appliqué à la simulation d'une interaction pale-tourbillon parallèle subsonique frontale. Une simulation effectuée dans un maillage suffisamment raffiné a servi de solution de référence pour l'analyse phénoménologique de l'écoulement. En particulier ont été étudiés les phénomènes liés à l'apparition d'un second tourbillon et l'acoustique résultant de l'interaction. Des calculs réalisés sur une série de maillages pour les schémas RBV et de JAMESON ont montré la plus rapide convergence en maillage du schéma RBV. Pour le schéma RBV, la convergence est atteinte non seulement sur les coefficients aérodynamiques ou les capteurs de pression instationnaires, mais aussi sur la trajectoire du tourbillon pendant l'interaction.

Les résultats obtenus avec le schéma RBV sont très encourageants et confirment l'apport de la méthode comparée à des schémas classiques d'ordre 2. La première suite à donner à ce travail doit être l'extension du schéma à la troisième dimension d'espace en s'inspirant des travaux déjà effectués pour les schémas RBC [43, 44, 27, 18]. Le fait que le schéma RBV n'utilise qu'une seule approximation du résidu devrait simplifier cette extension au domaine 3-D. Des calculs d'ailes 3-D ou de rotors pourraient alors permettre d'évaluer l'apport de ce schéma pour le calcul des sillages tourbillonnaires. Sa précision en maillage irrégulier devrait également permettre de diminuer les conditions de régularité imposées aux maillages pour les calculs avec des méthodes classiques.

La deuxième évolution à apporter à la méthode est bien entendu son extension aux équations de NAVIER-STOKES pour le calcul d'écoulements visqueux. Toujours en s'inspirant des résultats antérieurs sur les schémas RBC, l'extension du schéma RBV aux équations de NAVIER-STOKES ne devrait pas poser de difficultés. Il s'agit alors d'intégrer les termes visqueux dans l'évaluation du résidu.

Enfin, l'analyse de stabilité du schéma RBV a mis au jour l'influence bénéfique sur les propriétés de dissipation du schéma que peut apporter l'application d'un opérateur spatial à la dérivée temporelle. Cette étude montre que la mise en œuvre des schémas RBV et RBVs sans filtrage est peut-être réalisable.

Bibliographie

- [1] S. Allmaras and M. B. Giles. A second-order flux split scheme for the unsteady 2-D Euler equations on arbitrary meshes. *AIAA Paper 87-119*, 1987.
- [2] D. S. Balsara and C. W. Shu. Monotonicity preserving weighted essentially non-oscillatory schemes with increasingly high-order of accuracy. *J. Comput. Phys.*, vol. 160, 2000, pages 405–452.
- [3] F. Bassi and S. Rebay. A high-order accurate discontinuous finite element method for the numerical solution of the compressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, vol. 131, 1997, pages 267–279.
- [4] C. Benoit. *Méthode d'adaptation de maillages au moyen d'algorithmes génétiques pour le calcul d'écoulements compressibles*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Paris, 1999.
- [5] C. Benoit and G. Jeanfaivre. Three-Dimensional Inviscid Isolated Rotor Calculations Using Chimera and Automatic Cartesian Partitioning Methods. *Journal of the American Helicopter Society*, vol. April, 2003, pages 128–138.
- [6] B. Berde and M. Borrel. Comparison of high-order Godunov-type schemes for the Euler equations on irregular meshes. *2nd ECCOMAS Conf.*, Stuttgart (Germany), September 1994. *Comput. Fluid Dyn. '94*, Wiley & Sons Ltd, pages 288-295, 1994.
- [7] C. Bogey and C. Bailly. A family of low dispersive and low dissipative explicit schemes for flow and noise computations. *J. Comput. Phys.*, vol. 194, 2004, pages 194–214.
- [8] J. C. Boniface, B. Cantaloube and A. Jollès. Rotorcraft Simulations Using an Object Oriented Approach. *27th European Rotorcraft Forum*, September 2000.
- [9] E. Bouchet. *Étude du bruit d'interaction pale-sillage d'un rotor principal d'hélicoptère*. Thèse de Doctorat, Université du Havre, 2002.
- [10] T. F. Brooks and C. L. Burley. Rotor Broadband Noise Prediction with Comparison to Model Data. *AIAA Paper 2001-2210*, 2001.
- [11] T. F. Brooks, J. R. Jolly and M. A. Marcolini. Helicopter Main-rotor Noise. Technical Report 2825, NASA, 1988.
- [12] E. Canonne. *Méthode d'adaptation de maillage pour le calcul d'écoulements compressibles autour d'un rotor d'hélicoptère*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Paris, 2004.
- [13] B. Cantaloube et S. Huberson. Calcul d'écoulements de fluide incompressible non visqueux autour de voilures tournantes par une méthode particulière. *La Recherche Aérospatiale*, vol. 1984-6, 1984, pages 403–415.
- [14] B. Cantaloube and C. Rehbach. Numerical simulation of rotor-fuselage interaction. *20th European Rotorcraft Forum*, 1994.

- [15] F. X. Caradonna and J. J. Philippe. The flow over a helicopter blade tip in the transonic regime. *Vertica*, vol. 2, 1978, pages 43–60.
- [16] B. Cockburn and C. W. Shu. The Runge-Kutta discontinuous Galerkin method for conservation laws V. *J. Comput. Phys.*, vol. 141, 1998, pages 199–224.
- [17] C. Corre. *Méthodes de relaxation par lignes pour des schémas implicites de type Lax-Wendroff en aérodynamique stationnaire*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Paris, 1995.
- [18] C. Corre, G. Hanss and A. Lerat. A residual-based compact scheme for the unsteady compressible Navier-Stokes equations. *Computers and Fluids*, vol. 34, 2005, pages 561–580.
- [19] C. Corre, K. Khalfallah and A. Lerat. Line-relaxation methods for a class of centered schemes. *Comput. Fluid Dyn. Journal*, vol. 5, 1996, pages 213–246.
- [20] M. Costes and G. Kowani. An automatic anti-diffusion method for vortical flows based on Vorticity Confinement. *Aerospace Science and Technology*, 2003.
- [21] E. Douay et T. Lefebvre. Schéma de calcul numérique préservant la vorticité. Rapport de P.F.E., ENSAM, Paris, 2000.
- [22] R. Eymard, T. Gallouët and R. Herbin. Convergence of finite volume schemes for semilinear convection diffusion equations. *Numer. Math.*, vol. 82, 1999, pages 91–116.
- [23] D. V. Gaitonde and M. R. Visbal. Further Development of a Navier-Sokes Solution Procedure Based on High-Order Formulas. *AIAA Paper 99-0557*, 1999.
- [24] S. Galichet et T. Saint Martin. Développement d’un schéma de calcul préservant la vorticité. Rapport de P.F.E., ENSAM, Paris, 2001.
- [25] P. M. Gresho, S. T. Chan, R. L. Lee and C. D. Upson. A modified finite element method for solving the time-dependent incompressible Navier-Stokes equations. Part 1: Theory. *Int. J. Num. Meth. Fluids*, vol. 4, 1984, pages 557–598.
- [26] R. Guenanff. *Couplage instationnaire Navier-Stokes/Euler pour la génération et le rayonnement des sources de bruit aérodynamique*. Thèse de Doctorat, Université de Rennes 1, 2004.
- [27] G. Hanss. *Schémas numériques compacts basés sur le résidu en maillage irrégulier pour les équations de Navier-Stokes en compressible*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Paris, 2002.
- [28] A. Harten, B. Engquist, S. Osher and S. Chakravarthy. Uniformly high order essentially non-oscillatory schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 71, 1987, pages 231–303.
- [29] A. Harten and S. Osher. Uniformly high-order accurate nonoscillatory schemes. *I. SIAM J. Num. Anal.*, vol. 24, 1987, pages 279–309.
- [30] C. W. Hirt. Heuristic Stability Theory for Finite Difference Equations. *J. Comput. Phys.*, vol. 2, 1968, pages 339–355.
- [31] G. Hu, B. Grossman and J. Steinhoff. Numerical Method for Vorticity Confinement in Compressible Flow. *AIAA Journal*, vol. 40, 2002, pages 1945–1953.
- [32] Y. Huang. *Décentrement par matrice de pas de temps caractéristique pour le calcul d’écoulements compressibles instationnaires dans les turbomachines*. Thèse de Doctorat, ENSAM, Paris, 1995.

-
- [33] Y. Huang and A. Lerat. Second-Order Upwinding through a Characteristic Time-Step Matrix for Compressible Flow Calculations. *J. Comput. Phys.*, vol. 142, 1998, pages 445–472.
- [34] O. P. Jacquotte, F. Montigny and G. Coussement. Generation, optimisation, and adaptation of multiblock structured grids for complex configurations. *Surveys on Mathematics for Industry*, vol. 4, 1995, pages 267–277.
- [35] A. Jameson. Time Dependent Calculations Using Multigrid, with Applications to Unsteady Flows Past Airfoils and Wings. *AIAA Paper 91-1596*, 1991.
- [36] A. Jameson, W. Schmidt and E. Turkel. Solutions of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time-Stepping Schemes. *AIAA Paper 81-1259*, 1981.
- [37] G. S. Jiang and C. W. Shu. Efficient implementation of weighted ENO schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 126, 1996, pages 202–228.
- [38] C. Johnson and J. Pitkäranta. An analysis of the discontinuous Galerkin method for a scalar hyperbolic equation. *Math. Comp.*, vol. 46, 1986, pages 1–26.
- [39] S. Lee and D. Bershader. Head-On Parallel Blade-Vortex Interaction. *AIAA Journal*, vol. 32, 1994, pages 16–22.
- [40] S. K. Lele. Compact finite difference schemes with spectral-like resolution. *J. Comput. Phys.*, vol. 103, 1992, pages 16–42.
- [41] A. Lerat. *Sur le calcul des solutions faibles des systèmes hyperboliques de lois de conservation à l'aide de schémas aux différences*. Thèse de Doctorat d'État, Université Paris 6, 1981.
- [42] A. Lerat. Sur l'analyse de schémas implicites de type lax-wendroff pour un nombre quelconque de dimensions d'espace. *La Recherche Aérospatiale*, vol. 1995-6, 1995, pages 373–387.
- [43] A. Lerat and C. Corre. A Residual-Based Compact Scheme for the Compressible Navier-Stokes Equations. *J. Comput. Phys.*, vol. 170, 2001, pages 642–675.
- [44] A. Lerat and C. Corre. Residual-Based Compact Schemes for Multidimensional Hyperbolic Systems of Conservation Laws. *Computers and Fluids*, vol. 31, 2002, pages 639–661.
- [45] A. Lerat et R. Peyret. Sur le choix de schémas aux différences du second ordre fournissant des profils de choc sans oscillation. *Comptes Rendus Acad. Sc.*, vol. 277 A, 1973, pages 363–366.
- [46] A. Lerat et R. Peyret. Sur l'origine des oscillations apparaissant dans les profils de choc calculés par des méthodes aux différences. *Comptes Rendus Acad. Sc.*, vol. 276 A, 1973, pages 759–762.
- [47] A. Lerat and R. Peyret. Noncentered Schemes and Shock Propagation Problems. *Computers and Fluids*, vol. 2, 1974, pages 25–52.
- [48] A. Lerat et R. Peyret. Propriétés dispersives et dissipatives d'une classe de schémas aux différences pour les systèmes hyperboliques non linéaires. *La Recherche Aérospatiale*, vol. 1975-2, 1975, pages 61–79.
- [49] A. Lerat and R. Peyret. The Problem of Spurious Oscillations in the Numerical Solution of the Equations of Gas Dynamics. *Lectures Notes in Physics*, vol. 35, 1975, pages 251–256.
-

- [50] A. Lerat and J. Sidès. Efficient solution of the steady Euler equations with centered implicit method. in *Numerical Methods for Fluid Dynamics 3*. edited by K. W. Morton and M. J. Baines (Clarendon, Oxford, 1988), p. 65.
- [51] A. Lerat and J. Sidès. Numerical Simulation of Unsteady Transonic Flows Using the Euler Equations in Integral Form. In *21^e Conférence Annuelle sur l'Aviation et l'Astronautique*, Tel Aviv et Haïfa (Israël), Mars 1979.
- [52] A. Lerat, J. Sidès and V. Daru. An Implicit Finit-Volume Method for Solving the Euler Equations. *Lecture Notes in Physics*, vol. 170, 1982, pages 343–349.
- [53] P. Lesaint and P. A. Raviart. On a finite element method for solving the neutron transport equation. In *Math. Aspects of Finite Elements in PDE*, pages 89–123. Academic Press, New York, 1974.
- [54] S. Mallat. *Une exploration des signaux en ondelettes*. Les éditions de l'École Polytechnique, Ellipse, 2000.
- [55] R. Meakin. An efficient means of adaptive refinement within systems of overset grids. *AIAA Paper 95-1722*, 1995.
- [56] F. Montigny-Rannou et O. P. Jacquotte. MESH3D : un outil pour la construction de maillages tridimensionnels. In *AAAF : 29^e Colloque d'Aérodynamique Appliquée*, C.E.L. Biscarosse (France), septembre 1992.
- [57] K. W. Morton and P. L. Roe. Vorticity-Preserving Lax-Wendroff-Type Scheme for the System Wave Equation. *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 23, 2001, pages 170–192.
- [58] R. Morvant. *The Investigation of Blade-Vortex Interaction Noise Using Computational Fluid Dynamics*. PhD thesis, University of Glasgow, UK, 2004.
- [59] R. Morvant, K. J. Badcock, G. N. Barakos and B. E. Richards. Airfoil-Vortex Interaction Using the Compressible Vorticity Confinement Method. *AIAA Journal*, vol. 43, 2005, pages 63–75.
- [60] V. Nastasi. *Étude numérique du tourbillon d'extrémité de pale de rotor d'hélicoptère en régime compressible*. Thèse de Doctorat, Université Paris 6, 1997.
- [61] V. Nastasi, A. Lerat, et J. Sidès. Couplage de représentation eulérienne et lagrangienne pour le calcul d'un écoulement avec choc et nappe tourbillonnaire autour d'une aile. In *13^e Congrès Français de Mécanique*, vol. 1, pages 99–102, Poitiers, septembre 1997.
- [62] N. Ng and R. Hillier. Numerical Investigation of the Transonic Blade-Vortex Interaction. *AIAA Paper 97-1846*, 1997.
- [63] R. H. Ni. A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations. *AIAA Paper 81-1025*, 1981.
- [64] R. H. Ni. A Multiple-Grid Scheme for Solving the Euler Equations. *AIAA Journal*, vol. 20, 1982, pages 1565–1571.
- [65] W. S. Oh, J. S. Kim and O. J. Kwon. An Unstructured Dynamic Mesh Procedure for 2-D Unsteady Viscous Flow Simulations. *AIAA Paper 2002-0121*, 2002.
- [66] W. S. Oh, J. S. Kim and O. J. Kwon. Numerical Simulation of Two-Dimensional Blade-Vortex Interactions Using Unstructured Adaptive Meshes. *AIAA Journal*, vol. 40, 2002, pages 474–480.

-
- [67] W. S. Oh, J. S. Kim and O. J. Kwon. Time-Accurate Navier-Stokes Simulation of Vortex Convection Using an Unstructured Dynamic Mesh Procedure. *Computers and Fluids*, vol. 32, 2003, pages 727–749.
- [68] H. Paillère, E. van der Weide and H. Deconinck. *Multidimensional upwind methods for inviscid and viscous compressible flows*. VKI Lecture Series 1995-2, 1995.
- [69] R. Peyret. Unsteady evolution of a horizontal jet in a stratified fluid. *J. Fluid Mech.*, vol. 78, 1976, pages 49–63.
- [70] R. Peyret and T. D. Taylor. *Computational Methods for Fluid Flow*. Springer Verlag, New York, 1983.
- [71] J. J. Philippe and C. Armand. ONERA Aerodynamic Research Work on Helicopters. In *AGARD Symposium on Rotorcraft Design*, NASA Ames Research Center, May 1977.
- [72] J. J. Philippe et C. Armand. Recherche de l'ONERA sur l'aérodynamique des hélicoptères. *La Recherche Aérospatiale*, vol. 1978-6, 1978, pages 287–304.
- [73] J. J. Quirk. An alternative to unstructured grids for computing gas dynamic flows around arbitrarily complex two-dimensional bodies. *Computers and Fluids*, vol. 23, 1994, pages 125–142.
- [74] S. Redonnet. *Simulation de la propagation acoustique en présence d'écoulements quelconques et de structures solides par résolution numérique des équations d'Euler*. Thèse de Doctorat, Université Bordeaux 1, 2001.
- [75] A. Rezgui. An analysis of accuracy and convergence of finite volume schemes for euler computations on curvilinear meshes. *CFD Journal*, vol. 8, 1999, pages 369–377.
- [76] R. D. Richtmyer. A Survey of Difference Methods for Non-Steady Fluid Dynamics. NCAR 63-2, National Center for Atmospheric Research, Boulder, CO, 1962.
- [77] P. L. Roe. Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors and Difference Schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 43, 1981, pages 357–372.
- [78] P. L. Roe. Error estimates for cell-vertex solutions of the compressible euler equations. ICASE report 87-6, Nasa Langley Research Center, Hampton, Virginia, 1987.
- [79] P. L. Roe. Vorticity Capturing. *AIAA paper 01-2523*, 2001.
- [80] M. P. Scully. Computation of Helicopter Rotor Wake Geometry and Its Influence on Rotor Harmonic Loads. Technical Report ASRL TR-178-1, Massachusetts Inst. of Technology, Boston, MA, 1975.
- [81] C. W. Shu and S. Osher. Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 77, 1988, pages 439–471.
- [82] W. Y. Soh and J. W. Goodrich. Unsteady solution of incompressible Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, vol. 79, 1988, pages 113–134.
- [83] G. R. Srinivasan, W. J. McCroskey and J. D. Baeder. Aerodynamics of Two-Dimensional Blade-Vortex Interaction. *AIAA Journal*, vol. 24, 1986, pages 1569–1576.
- [84] J. Steinhoff, J. Wenren, T. Mersch and H. Senge. Computational vorticity capturing: application to helicopter flow. *AIAA Paper 92-0056*, 1992.
-

- [85] R.C. Swanson and E. Turkel. On Central Difference and Upwind Schemes. *J. Comput. Phys.*, vol. 101, 1992, pages 292–306.
- [86] M. R. Visbal and D. V. Gaitonde. High-Order-Accurate Methods for Complex Unsteady Subsonic Flows. *AIAA Journal*, vol. 37, 1999, pages 1231–1239.
- [87] M. R. Visbal and D. V. Gaitonde. On the Use of High-Order Finite-Difference Schemes on Curvilinear and Deforming Meshes. *J. Comput. Phys.*, vol. 181, 2002, pages 155–185.
- [88] M. C. Wilder and D. P. Telionis. Parallel Blade-Vortex Interaction. *Journal of Fluids and Structures*, vol. 12, 1998, pages 801–838.
- [89] N. N. Yanenko and Y. I. Shokin. Correctness of First Differential Approximations of Difference Schemes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 182, 1968. Traduction anglaise : Soviet. Math. Dokl., Vol.9, pages 1215-1217.
- [90] N. N. Yanenko and Y. I. Shokin. On the Approximation Viscosity of Difference Schemes. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, vol. 182, 1968. Traduction anglaise : Soviet. Math. Dokl., Vol.9, pages 1153-1155.
- [91] N. N. Yanenko and Y. I. Shokin. First Differential Approximation Method and Approximate Viscosity of Difference Schemes. *Phys. of Fluids*, vol. 12, suppl. II, 1969, pages 28–33.
- [92] H. C. Yee, N. D. Sandham and M. J. Djomehri. Low-Dissipative High-Order Shock-Capturing Methods Using Characteristic-Based Filters. *J. Comput. Phys.*, vol. 150, 1999, pages 199–238.
- [93] H. C. Yee, M. Vinokur and M. J. Djomehri. Entropy Splitting and Numerical Dissipation. *J. Comput. Phys.*, vol. 162, 2000, pages 33–81.

SCHÉMAS NUMÉRIQUES PRÉSERVANT LA VORTICITÉ EN AÉRODYNAMIQUE COMPRESSIBLE

RÉSUMÉ: La réduction de la diffusion numérique des structures tourbillonnaires est un point clé de la simulation de nombreux problèmes de Mécanique des fluides. S'appuyant d'une part sur la notion définie par Morton et Roe de schéma numérique préservant exactement la vorticité pour les équations de l'acoustique et d'autre part sur une forme de schémas basés sur le résidu introduits par Lerat et Corre, cette thèse présente un schéma RBV (Residual-Based Vorticity preserving), d'ordre 2 implicite basé sur le résidu qui préserve la vorticité pour les équations de l'acoustique, de l'acoustique avec advection et les équations d'Euler. Le schéma RBV permet d'advecter un tourbillon sur de longues distances avec très peu de diffusion numérique. Il a été formulé en maillage curviligne dans l'approche des volumes finis et, par construction, conserve son ordre de précision et ses propriétés de préservation de la vorticité en maillage irrégulier sans nécessiter de termes correctifs. Le schéma RBV a été appliqué à des calculs d'écoulements stationnaires et instationnaires autour de profil pour les équations d'Euler, puis au cas de l'interaction frontale, subsonique instationnaire, entre un tourbillon de Scully et un profil NACA0012 à incidence nulle pour lequel existent des données expérimentales. Ce problème modèle est représentatif de l'interaction parallèle entre une pale de rotor d'hélicoptère et le tourbillon émis en extrémité d'une pale précédente, qui est à l'origine du bruit BVI (« Blade Vortex Interaction noise ») dominant dans le cas du vol de descente basse vitesse de l'hélicoptère. Les résultats obtenus avec le schéma RBV sur ce cas d'interaction pale tourbillon 2D démontrent la capacité de la méthode à simuler des écoulements aérodynamiques réalistes. Des comparaisons avec les solutions de schémas classiques d'ordre 2 montrent l'apport de la méthode proposée.

Mots-clés: schéma basé sur le résidu, volumes finis, tourbillon, vorticité, aérodynamique, écoulement compressible, écoulement stationnaire, écoulement instationnaire, interaction pale-tourbillon.

VORTICITY PRESERVING NUMERICAL SCHEMES IN COMPRESSIBLE AERODYNAMICS

ABSTRACT: The reduction of numerical diffusion of vortex structures is a key point in many computational fluid dynamics problems. According to the notion of vorticity preserving numerical schemes for the system wave equation, introduced by Morton and Roe, and on the residual-based schemes family, introduced by Lerat and Corre, this thesis presents a RBV scheme (Residual-Based Vorticity preserving). The RBV scheme is implicit and second order accurate. It preserves the vorticity for the system wave equation with and without advection and for the Euler equations. The RBV scheme has the capability of advecting vortex on large distances with very few numerical dissipation. It has been formulated on irregular grids in the finite volume approach and it retains naturally its accuracy and vorticity preserving properties without correction terms. The RBV scheme has been used first for the calculation of steady and unsteady Euler flow around airfoils and then for the simulation of subsonic head-on blade vortex interaction (BVI) between a Scully vortex and a NACA0012 airfoil at zero angle of attack. Results are compared to experimental data. This case is representative of the parallel interaction between a helicopter rotor blade and the preceding blade tip vortex. The blade vortex interaction is the main noise source for helicopter in low speed descent flight. The results obtained with the RBV scheme on this two-dimensional BVI case show the capability of the method to simulate realistic aerodynamic flows. Comparisons made with solutions of classical second order accurate schemes demonstrate the benefit of the proposed RBV scheme.

Keywords: residual-based scheme, finite-volume method, vortex capturing, aerodynamics, compressible flow, steady flow, unsteady flow, BVI.

